Titre: Title:	Financement de l'innovation des PME, cycles économiques et intervention de l'état : un modèle multi-agents
Auteur: Author:	Jean-François Champigny
Date:	2004
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Champigny, J.-F. (2004). Financement de l'innovation des PME, cycles économiques et intervention de l'état : un modèle multi-agents [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/7469/

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/7469/
Directeurs de recherche: Advisors:	Catherine Beaudry
Programme: Program:	Non spécifié

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FINANCEMENT DE L'INNOVATION DES PME, CYCLES ÉCONOMIQUES ET INTERVENTION DE L'ÉTAT : UN MODÈLE MULTI-AGENTS

JEAN-FRANÇOIS CHAMPIGNY
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE INDUSTRIEL)
JUILLET 2004

Your file Votre référence
ISBN: 0-612-97934-2
Our file Notre référence
ISBN: 0-612-97934-2

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

FINANCEMENT DE L'INNOVATION DES PME,
CYCLES ÉCONOMIQUES
ET INTERVENTION DE L'ÉTAT :
UN MODÈLE MULTI-AGENTS

présenté par : CHAMPIGNY Jean-François

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. LEBLANC Daniel, Ph.D., président

Mme. BEAUDRY Catherine, Ph.D., membre et directeur de recherche

Mme. MANDRON, Alix, Ph.D., membre

A Emmanuelle, mon épouse, pour sa patience....

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Madame Catherine Beaudry pour l'ensemble de son soutien lors de ce travail ainsi que pour la grande liberté de choix qu'elle m'a laissé. J'ai dû réaliser ce mémoire en moins de 8 mois, et ceci n'aurait pas été possible sans elle.

Je remercie ensuite Monsieur Daniel Leblanc pour les nombreux éclaircissements qu'il a pris le temps de m'apporter à la fin de ses cours de stratégie, et qui ont motivé une bonne part de ce mémoire.

Merci également à Monsieur Marc Hiller pour ses conseils et ses travaux de recherche de données toujours dans des temps records, à Messieurs Allan Doyle et Guy Belletête de l'Institut de Développement de Produits pour leur aide dans mes premières recherches sur le système canadien d'aide aux PME

Merci enfin à mon épouse Emmanuelle pour son indéfectible soutien et ses relectures attentives, ainsi qu'à toutes les personnes qui m'ont aidé directement ou indirectement dans la rédaction de ce travail, en particulier à l'INSEE, Statistique Canada et à la bibliothèque d'HEC Montréal.

RÉSUMÉ

Les «Perspectives de l'OCDE sur les PME» notaient en 2002 que les Petites et Moyennes Entreprises canadiennes représentaient près de 60% de l'emploi du secteur privé et plus de 43% de son PIB. L'importance du rôle joué par ces entreprises dans nos économies développées est maintenant bien établi et il n'est plus de scrutin important qui n'évoque les «petits entrepreneurs».

Notre objectif est la compréhension de l'effet sur les petites sociétés des politiques publiques de financement de l'innovation. Nous avons pour cela mis au point un simulateur multi-agents de comportement d'entreprises sous contraintes financières, à partir d'équations d'Euler utilisées classiquement en économie. Les équations fondamentales sont dérivées suivant un programme de maximisation de la valeur financière de long terme de la firme. Un simulateur simple est ensuite construit à partir de travaux de recherche existants. Nous sommes alors en mesure de tester dans leurs grandes lignes différentes politiques d'intervention financière de l'État envers les PME : les politiques d'action sur les taux directeurs, les politiques de soutien au crédit bancaire et les politiques d'intervention directe ou d'investissement public.

D'après nos résultats, les premières semblent avoir des effets particulièrement marqués en ce qui concerne la valeur ajoutée des entreprises. Elles peuvent notamment empêcher ces dernières de profiter des opportunités de croissance si elles sont fortement restrictives. Les risques associés à leur utilisation, en particulier inflationnistes en cas d'approche trop expansionniste, doivent toutefois être considérés.

Les deuxièmes ne sont intéressantes que si la politique monétaire mentionnée ci-dessus n'est pas trop contraignante. Dans ce cas, elles s'avèrent très efficaces sur les secteurs en récession, permettant aux entreprises de mieux maîtriser leur baisse d'activité et de se préparer à une éventuelle relance. Dans les secteurs en croissance,

elles sont un excellent instrument pour stimuler l'activité de R&D.

Les dernières ne sont elles aussi performantes que dans des conditions monétaires favorables. Elles présentent les mêmes atouts que les précédentes en période de récession, mais semblent moins efficaces sur le long terme pour la mise en avant de la R&D dans les secteurs en croissance.

ABSTRACT

In 2002, the OECD stated in their report «OECD small and medium enterprise outlook» that about 60% of Canadian private employment and more than 43% of GDP was generated by small and medium enterprises. These firms therefore play a key role in our society.

The main objective of this research is to understand the effect on small firms of government support to the financing of innovation. For this purpose, we have built a multi-agents simulator of the behaviour of firms under financial constraints based on classical Euler equations. These equations are obtained from optimisation of the long term value of the firm. The simulation allows us to test three public policies : monetary policy, support for borrowing policy and public investment policy.

Our results show that monetary policy has a very strong effect on the value added of the firm : i.e. it can prevent the growth of enterprises if they are subjected to a very restrictive policy. The risks involved by the use of such policies must be considered carefully especially in regards to inflation.

The second policy studied, support for borrowing, may be of use if and only if monetary conditions are satisfactory. In that case, it can provide a great help to sectors in decline, hence allowing firms to improve their capacity to manage the downturn and prepare for an eventual upturn. In healthy industrial sectors, this type of policy can stimulate firms' research and development (R&D) activities.

Public investment policy also performs better under good monetary conditions. The same potential as the second policy regarding sectors in decline is displayed by public investment policy. Unfortunately, in the long run, this policy seems of lesser use for the promotion of R&D activity in healthy sectors.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES ANNEXES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET VARIABLES UTILISÉES

Abréviations

R&D : Recherche et Développement

PME : Petites et Moyennes Entreprises

OMC : Organisation Mondiale du Commerce

OCDE : Organisation du Commerce et du Développement Économique

TMST : Taux Marginaux de Substitution Technique

MMG : Méthode des Moments Généralisés

PIB : Produit Intérieur Brut

VA : Valeur Ajoutée

Variables

V : Valeur boursière de l'entreprise, définie comme la valeur actualisée de ses profits futurs

R : Revenus des actionnaires, ou dividendes

Π : Profit de l'entreprise

K : Capital Physique de l'enteprise

q : Coût d'une unité de capital physique

$\boldsymbol{\delta}$: Taux d'obsolescence du stock de capital physique

L : Travail

$\boldsymbol{\omega}$: Coût du travail

Y : Stock de R&D

H : Coût d'une unité de R&D rapporté à une unité de capital physique

$\boldsymbol{\delta}'$: Taux d'obsolescence du stock de R&D

B : Stock de dette

F : Fonction de production

$\boldsymbol{\gamma}$: Élasticité en capital de la fonction de production

$\boldsymbol{\xi}$: Élasticité en R&D de la fonction de production

$\mathbf{G}_0$: Facteur constant de la fonction de production

I : Investissement exprimé en unités de capital physique

$\boldsymbol{\alpha}$: Coefficient de répartition de l'investissement entre capital physique et R&D

M : Demande sur le marché des biens

$\mathbf{b}_0$: Échelle de la demande

$\mathbf{b}_1$: Élasticité de la demande

$\boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{b_1}}{\mathbf{1-b_1}}$: Coefficient de mark-up de la demande

r : Taux d'intérêt bancaires

$\mathbf{i}_0$: Taux d'intérêt sans risque

$\mathbf{i}_1$: Taux de prime de risque

$\boldsymbol{\rho}$: Taux d'intérêt demandés pas les actionnaires

p : Prix de vente sur le marché des biens

$\boldsymbol{\Lambda}$: Lagrangien

$\boldsymbol{\lambda}$: Multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'accumulation du capital

$\boldsymbol{\eta}$: Variable duale associée à la contrainte de positivité sur les revenus

m : Part de marché

$\mathbf{c}_{K,t}$: Coût d'usage du capital

Variables et paramètres normalisés

$\mathbf{fk}_t = \frac{p_t F_t - \omega_t L_t}{q_t K_t}$

$\mathbf{yk}_t = \frac{Y_t}{K_t} = \frac{q_t Y_t}{q_t K_t}$

$\mathbf{yb}_t = \frac{B_t}{q_t K_t} * \frac{Y_t}{K_t} = \frac{B_t}{q_t K_t} * \frac{q_t Y_t}{q_t K_t}$

$\mathbf{bk}_{1,t} = \frac{B_t}{q_t K_t}$:

$\mathbf{bk}_{2,t} = \left(\frac{B_t}{q_t K_t}\right)^2$

$\mathbf{bk}_{3,t} = \left(\frac{B_t}{q_t K_t}\right)^3$

$\boldsymbol{\alpha}_1 = \frac{1-\delta'}{q_t H_t}\left(\mathbf{1} - \frac{1}{1+i_0} * \frac{q_{t+1}}{q_t}\right)$

$\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{2}\frac{q_{t+1}}{q_t}\frac{1-\delta'}{q_t H_t}\frac{1}{1+i_0}\frac{i_1}{1+i_0}$

$\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{2} * (\mathbf{1} - \boldsymbol{\delta}) * \frac{q_{t+1}}{q_t} * \frac{i_1}{(1+i_0)^2}$

$\boldsymbol{\alpha}_4 = \frac{1}{(1-\sigma)} * \frac{i_1}{1+i_0}$

$\boldsymbol{\alpha}_5 = \mathbf{2} * \frac{1}{(1-\sigma)} * \frac{i_1^2}{(1+i_0)^2}$

$\mathbf{C}_t = -\frac{\tilde{\beta}_{t+1}}{q_t(1-\delta)(1-\sigma)} * \mathbf{i}_1 * \frac{B_t^2}{K_t^2}$

$\mathbf{D}_t = [\mathbf{1} - \frac{q_{t+1}}{q_t} * \tilde{\boldsymbol{\beta}}_{t+1}(\mathbf{1} - \boldsymbol{\delta}) + \frac{(1-\delta)}{q_t} * \mathbf{C}_t]$

$\mathbb{C}_t = \frac{q_t H_t * \frac{\xi}{\gamma} * D_t}{(1-\delta') * (1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}\tilde{\beta}_{t+1})}$

$\mathbb{N}_t = \frac{(1-\gamma-\xi) * q_t D_t}{\gamma \omega_t}$

$\mathbb{Q}_t = \frac{(1-\gamma-\xi) * (1-\delta') * (1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}\tilde{\beta}_{t+1})}{H_t \xi \omega_t}$

INTRODUCTION

Les «Perspectives de l'OCDE sur les PME» notaient en 2002 que les PME canadiennes représentaient près de 60% de l'emploi du secteur privé et plus de 43% de son PIB. L'importance du rôle joué par ces entreprises dans nos économies développées est maintenant bien établi et il n'est plus de scrutin important qui n'évoque les «petits entrepreneurs». Les grandes structures ayant beaucoup perdu de leur efficacité en matière de développement économique dans leurs pays d'origine (en terme d'emplois en particulier), les PME de la plupart des nations industrialisées se trouvent *de facto* investies de cette mission. Enjeu économique secondaire au début des années 1970, le développement durable des PME - et par voie de conséquence leur capacité d'innovation - est devenu un enjeu politique majeur.

Les facteurs sont nombreux qui conditionnent la réussite d'une petite entreprise dans un environnement de concurrence forte, à la fois techniques, managériaux, légaux mais aussi et surtout financiers. Ce dernier aspect fait l'objet d'une littérature jeune mais déjà abondante, dont l'objet est la compréhension des mécanismes fondamentaux sous-tendant la structure financière et l'investissement des firmes. Les données nécessaires à ces analyses étant délicates à collecter et souvent peu fiables, peu d'études obtiennent des résultats parfaitement cohérents et stables au cours du temps.

Il est en particulier pratiquement impossible d'examiner avec précision l'impact sur les entreprises de décisions économiques d'ensemble, au premier rang desquelles se trouvent les actions de la puissance publique. Force est alors de constater avec Jean Lachmann (1996) que «la littérature économique est restée étonnamment discrète sur les modalités concrètes de l'action [publique] en faveur de l'innovation [des PME]».

L'objet de ce travail est de construire un modèle de simulation multi-agents de comportement d'entreprise dans son environnement, tant concurrentiel que financier. La première partie sera consacrée à la rescension des littératures pertinentes, fondations du modèle. Lui succédera le détail de la construction mathématique du simulateur, de son paramétrage à partir de données canadiennes ainsi que quelques considérations relatives à l'aspect informatique du problème. La troisième partie sera quant à elle consacrée à la simulation de différentes politiques publiques d'intervention financière vis à vis des PME. La quatrième partie s'intéressera finalement aux nombreuses perspectives de recherche avant de conclure.

Chapitre 1

BREF SURVOL DE LA LITTÉRATURE

La mise au point d'un modèle multi-agents de compétition inter-entreprises sous contraintes financières puis la généralisation économique des résultats obtenus suppose la recension de plusieurs littératures différentes.

Il s'agit tout d'abord de comprendre de façon précise la théorie moderne de l'investissement et de la structure du capital. Celle-ci sera examinée de façon détaillée dans la section 1 en insistant sur le cas particulier des PME, puis vue sous un angle plus mathématique dans la section 2.

Nous examinerons ensuite dans la section 3 un formalisme permettant de prendre en compte la Recherche et Développement (R&D) dans le programme de l'entreprise, principe qui est au centre de l'originalité du modèle développé.

Finalement, la section 4 nous donnera quelques considérations fondamentales quant aux modèles multi-agents en insistant sur deux d'entre eux qui s'avèreront particulièrement utiles dans la suite.

1.1 Investissement et structure du capital : considérations générales

La structure du capital d'une entreprise est un fait très complexe, qui traduit aussi bien les décisions passées et les circonstances présentes que les anticipations de l'évolution des marchés et de la concurrence. Les modélisations en sont nombreuses et nous ne retiendrons ici que les plus significatives et étayées empiriquement d'entre elles. La plus connue d'entre elles est celle de Modigliani et Miller (1958) qui fera l'objet d'un traitement spécifique plus loin dans ce même chapitre.

Leland et Pyle (1977) proposent une approche centrée sur la théorie du signal : la firme prend ses décisions d'investissement avec l'objectif de donner aux parties prenantes une image de la volonté de la haute direction. Centrée sur des problématiques de type asymétrie d'information, cette vision des choses lie la prise de décision à un certain nombre de paramètres subjectifs comme les opinions ou les réactions stratégiques. Le problème se complique encore lorsque l'on considère que chaque agent intervient dans l'entreprise par son objectif propre. Chaque objectif peut être quantifiable [1] ou non quantifiable [2]. L'entreprise, lieu de la confrontation de ces objectifs est alors très complexe à modéliser.

Une approche plus quantitative du problème a été développée par Myers et Majluf (1984) dans leur contribution à la théorie de la hiérarchie des financements. L'entreprise est capable de se donner une stricte priorité quant au choix de ses sources de financement. Cette hiérarchie est totalement exclusive et une source de rang n n'est utilisée que si toutes les possibilités de rang $n-1$ ont été épuisées. Il faut toutefois être très prudent quant aux critères qui président à l'établissement de cette hiérarchie de préférences. Ceux-ci peuvent en effet être parfaitement subjectifs [3] ou objectifs : il s'agit de la théorie des coûts d'accès qui classe les sources de capitaux en fonction de leur coût mesurable. Elle peut en particulier considérer la question du terme des emprunts (court ou moyen pour les banques, moyen ou long pour les investisseurs en capital de risque) en considérant comme paramètre de mise en priorité le coût

[1] Les actionnaires peuvent souhaiter la maximisation de la valeur

[2] Le dirigeant peut avoir pour objectif sa renommée dans le milieu des affaires

[3] L'entrepreneur peut préférer faire appel aux emprunts bancaires car il conserve l'entière maîtrise de sa société, alors que les émissions d'actions provoquent l'apparition dans la sphère de la haute direction d'un nouvel intervenant : l'actionnaire

moyen sur la durée totale du prêt.

Cette vision hiérarchisée du problème a été étendue par Myers (1984) aux coûts d'accès aux ressources financières sous la forme de la théorie de la hiérarchie des préférences. Cette approche prend une fois encore pour fait central la présence d'asymétries d'information. Si tous les agents disposaient au même instant de l'ensemble du savoir de tous les autres, alors les allocations économiques seraient *grosso modo* optimales. En contraposée, l'existence d'asymétries est à l'origine d'erreurs d'évaluation et de non optimalité des stratégies (d'investissement, d'endettement) [4]. Jensen et Meckling (1976) ont à leur tour proposé une extension en introduisant les coûts d'agence : l'asymétrie d'information entre emprunteur et fournisseur de capitaux est d'autant plus faible que la participation de ce dernier à la gestion de l'entreprise est plus importante. En contraposée, la non participation de la banque à la direction se traduit par des coûts supplémentaires pour l'emprunteur.

Pour finir notons la théorie des coûts de faillite développée par Stiglitz (1969) : la probabilité de faillite est d'autant plus importante que les profits de l'entreprise sont plus volatils et que sa date de rentabilité projetée est plus lointaine. La difficulté se concentre alors sur les conséquences de cette probabilité de faillite. Si la réaction des banques est assez claire (ajout au prêt d'une prime de risque d'autant plus importante que cette probabilité est plus élevée), celle des actionnaires est plus complexe (un actionnariat familial investira coûte que coûte dans l'entreprise pour éviter la faillite, alors qu'un gestionnaire de portefeuille pourra préférer se désengager rapidement pour se reporter sur des investissements moins risqués).

Remarque : Une justification informationelle de la hiérarchie des financements

Comme nous l'avons vu plus haut, il n'est pas évident de définir une hiérarchie unique des différentes sources de financement et même l'approche par les coûts d'accès, la plus naturelle a priori, n'est pas entièrement satisfaisante. En voici une autre

[4]Là encore, ceci peut être pris en compte par l'entreprise de façon subjective (l'entrepreneur peur faire intervenir les banques dans son capital pour réduire le manque d'information de ses dernières et profiter de plus de latitude en matière d'endettement. Dans le même ordre d'idée, une petite entreprise peut souhaiter publier ses résultats même si elle n'y est pas obligée) ou objective (les coûts d'accès à une ressource financière sont d'autant plus élevés que l'asymétrie d'information entre créditeur et débiteur est plus importante).

justification, informationnelle celle-ci, centrée sur les notions de sélection adverse - l'asymétrie d'information entre prêteur et emprunteur conduit à la sélection des projets "moyens" et écarte les projets les plus rentables car ils sont souvent les plus risqués - et d'aléa moral : l'emprunteur peut ne pas respecter son contrat de prêt sans que le prêteur puisse le vérifier.

Les auteurs sont nombreux qui ont analysé le problème, en particulier dans la perspective des asymétries d'information. Arrow (1983) a beaucoup insisté sur le caractère très particulier des investissements en R&D, dont la rentabilité n'est que difficilement prédictible. L'asymétrie d'information entre l'emprunteur et l'établissement financier est en fait renforcée par le fait qu'une partie de l'information pertinente n'est accessible à aucun agent. Les banques ont ainsi intérêt à augmenter leurs taux d'intérêt (prime de risque en quelque sorte) en fonction de critères totalement subjectifs et non mesurables. L'emprunteur, pour se soustraire à ces augmentations de taux, peut alors avoir la tentation de financer des projets risqués avec des fonds obtenus pour d'autres moins risqués. L'effet de ceci est double : d'une part surévaluation des besoins en liquidité des opérations les moins risquées ; D'autre part la diminution (pour les banques) de la rémunération moyenne du risque des projets, et donc une nouvelle augmentation de la prime de risque. Ce phénomène est d'autant plus prononcé que l'entreprise est plus petite et que son succès est plus hypothétique.

Pour éviter ce type de cercle vicieux, une solution consiste à internaliser le risque en intéressant le débiteur non à la rentabilité de l'investissement comme fait isolé, mais au succès global de l'entreprise. Cette approche vient ainsi renforcer l'idée que la source «naturelle» de financement pour les jeunes entreprises innovantes est bien le capital de risque ou ses équivalents et non le prêt bancaire.

Les différentes approches ci-dessus se complètent parfois mais peuvent également conduire à des résultats au sens économiques fondamentalement différents. Kremp et Stoss (2001) effectuent une très intéressante synthèse sous forme du tableau 1.1 (adaptation libre) :

Avant de concevoir un modèle de simulation du financement de l'innovation des entreprises, il faut choisir une des théories ci-dessus, en gardant toujours à l'esprit

TAB. 1.1 – Théories de la structure du capital

Théorie	Auteurs majeurs	Croissance	Garantie - Collatéral
Modigliani Miller	Modigliani et Miller (1958)	Pas d'incidence	Pas d'incidence
Coûts de faillite	Stiglitz (1969)		Positivement corrélé
Coûts d'accès	Myers (1984)		
Coûts d'agence	Jensen et Meckling (1976)	Négativement corrélé	Positivement corrélé
Signal	Ross (1977), Leland et al (1977)	Positivement corrélé	Positivement corrélé

que le simple fait d'avoir fait ce choix va d'office éliminer toute une partie des interprétations possibles. En cas d'impasse (signes des variables contraires aux hypothèses dans l'analyse empirique, valeurs très éloignées ou même hypersensibilité des résultats à certaines grandeurs), il sera très délicat de sortir de l'impasse sans remettre la totalité du modèle en cause.

Notons enfin que ces théories ne sont pas généralement mutuellement exclusives et qu'il est toujours possible de créer des hybrides cohérents (en utilisant des modèles ayant des variables explicatives de même signe). Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point à de nombreuses reprises lors de la construction de la simulation, mais intéressons nous d'abord aux principaux modèles existants découlant de ces théories.

1.2 Les PME

Les différentes théories que nous venons de présenter peuvent s'appliquer à toutes les entreprises, sans hypothèse particulière quant à leur secteur d'activité ou à leur taille. Il n'est pas a priori évident que les PME soient à considérer comme des cas particuliers.

Pourquoi les PME seraient-elles des cas particuliers ?

Presque tous les auteurs ayant confronté leurs théories financières aux données réelles ont été amenés à traiter les PME séparément des autres entreprises. Les raisons les plus souvent avancées sont les suivantes :

- Collatéral et risque : les petites entreprises ne peuvent apporter que peu de garanties physiques à leurs différents financements, à la différence des entreprises plus importantes, comme le constatent de nombreux auteurs dont Lachmann (1993,1996) et Crépon et Rosenwald (2001). Le risque pris par le financier externe est donc plus important, et par voie de conséquence le coût de ce financement l'est également ;

- Autofinancement : les petites entreprises, en particulier lorsqu'elles sont jeunes et en développement, disposent généralement d'une marge d'autofinancement plus faible que les grandes entreprises (voir graphe 1). La hiérarchie des financements conduit alors à penser qu'elles feront proportionnellement plus usage du financement externe, en particulier pour les investissements immatériels (Duhautois, 2001) ;
- Perspectives de croissance : en période de relance économique, les petites entreprises contribuent proportionnellement plus que les grandes à la reprise de l'investissement. Leur sensibilité aux variations de marché est donc plus importante que celle des grandes entreprises d'après Lachmann (1993).

Cette sensibilité particulière des PME à leurs environnements micro et macroéconomiques en fait un terrain d'étude très intéressant pour les économistes : il est plus facile de détecter les chocs (sur le marché des biens ou des capitaux) car leur impact sur les entreprises est immédiat et important. Le revers de la médaille est la nécessité de disposer de données en quantité importante pour éviter les effets individuels causés par des cas «pathologiques» beaucoup plus sensibles que la moyenne.

Le cycle de vie de l'entreprise innovante

Nous allons considérer le cas d'une nouvelle entreprise cherchant à proposer un nouveau produit utilisant une nouvelle technologie. Nous utiliserons ensuite la répartition en phase obtenue pour déterminer les besoins en financement de la PME. Le principe général est une interprétation libre de Lachmann (1993, 1996) et une analyse globale de Tushman et Anderson (1997), Mohr (2001) et Harisson (2003).

- **L'entreprise émergente (Seed stage) :** Cette étape est traditionnellement associée à l'action de la recherche et développement. Mais elle fait intervenir dans sa conception moderne bien d'autres compétences et est composée de plusieurs sous-phases plus ou moins simultanées :
  - L'idée et la détection d'opportunité : l'approche moderne distingue deux

façons d'aborder ce qui est la vision de départ de l'entrepreneur. 1) Une approche *orientée marché* reposant sur l'idée suivante : l'entrepreneur détecte un besoin de marché, plus ou moins exprimé, et cherche un moyen de répondre à ce besoin. 2) Une approche *orientée technologie* ou scientifique : l'entrepreneur - inventeur découvre une nouvelle technologie et cherche à la commercialiser. Il va de soi que le cas général est en fait un mélange de ces deux approches : l'entrepreneur détecte l'opportunité de répondre à un besoin par la maîtrise qu'il a d'une technologie nouvelle.

- L'étude de faisabilité : il s'agit de façon plus générale de l'ébauche d'un plan d'affaires. L'entrepreneur doit analyser le marché potentiel, les concurrents et alliés et exprimer ses besoins. Sans entrer dans le détail de cette étape (qui fait l'objet de nombreux ouvrages de finance d'entreprise) nous retiendrons qu'elle constitue souvent la première confrontation avec la réalité du monde industriel ;

- Le premier prototype : celui-ci est généralement la première preuve tangible de la faisabilité industrielle de l'idée technologique. Il est un support essentiel à la crédibilité du plan d'affaires.

- **L'entreprise en démarrage (Start'up) :** Cette phase est souvent la plus délicate pour le nouvel entrepreneur. Sans même considérer les effets financiers, celui-ci doit créer son entreprise de façon officielle (et réaliser l'ensemble des démarches administratives en particulier), mettre en place les facteurs de production nécessaires à la production des premières séries, trouver les premiers clients, recruter ses équipes. Compte-tenu de sa complexité, cette phase est généralement divisée en deux : la création et le lancement.
- **La première croissance :** L'entreprise réalise ses premières ventes mais pas toujours ses premiers profits. C'est dans cette phase que se révèle la validité du modèle d'affaire préparé lors des étapes précédentes. Deux issues apparaissent d'elles-mêmes : 1) un véritable décollage des ventes qui peut laisser espérer la réalisation rapide de profits. 2) un décollage plus lent voire une absence de décollage remettant en cause la validité du modèle d'affaire.
- **Le développement :** Si l'entreprise a survécu à l'étape précédente, elle réalise maintenant des profits. Elle envisage alors la conquête de nouveaux marchés, la commercialisation des premières évolutions de son produit de départ. Plus attentive à ses coûts de production elle réalise souvent ses premières améliorations

de processus (modifications des facteurs de production proprement dits ou évolution organisationnelle). Étant plus expérimentée et commençant à avoir une meilleure connaissance de ses marchés, la probabilité que l'entreprise échoue lors de cette étape est beaucoup plus faible que lors des étapes précédentes.

- **La sortie ou transmission :** Cette phase est multiforme. Il peut tout d'abord s'agir d'une entrée en bourse ou d'un rachat par une autre entreprise (cas les plus courants). Le principe général est que l'entreprise quitte la «famille» des petites structures pour assurer son développement à des échelles industrielles supérieures (développement international par exemple, de façon autonome ou au sein d'un groupe). Mais il peut également s'agir d'une succession, d'une reprise par les cadres ou les employés de l'entreprise (cas concernant des entreprises encore petites en général).

Les besoins financiers de la PME innovante

Nous avons vu dans la partie précédente que les objectifs d'une entreprise innovante évoluent avec le temps et sa maturité. Le financement dont a besoin cette entreprise évolue lui-aussi, tout comme les partenaires susceptibles d'y apporter réponse. Notons bien que les besoins en eux-mêmes sont intrinsèques au fait innovateur et par là indépendants de la structure locale de l'économie (la nature des besoins financiers d'une PME québécoise sont les mêmes que ceux d'une PME états-unienne ou française. La vraie différence portera sur la réponse qui est apportée à ces besoins).

- **Entreprise émergente :** Les besoins financiers lors des premières sous-étapes (idée et détection d'opportunité) de cette phase sont généralement assez faibles, et ce d'autant plus que de nombreuses idées industrielles sont le résultat de recherches finalement déjà financées (milieu universitaire, recherche en entreprise existante). Mais ces besoins croissent très vite dès que l'idée devient un peu plus concrète : si la réalisation d'une étude de faisabilité peut se faire à temps partiel, la production des premiers prototypes et l'ébauche d'un plan d'affaires nécessitent souvent que l'entrepreneur quitte son emploi (Lachmann, 1996). Si ceci fait intrinsèquement partie de la démarche innovante et doit être un stimulant de *l'aventure entrepreneuriale*, il faut néanmoins avoir conscience qu'il s'agit parfois d'un repoussoir à l'innovation. Le risque est en effet grand que l'entrepreneur ne puisse pas jouir du fameux *droit à l'erreur* s'il doit mettre en jeu son emploi mais aussi l'ensemble de son patrimoine.

- **Entreprise en démarrage :** Les besoins financiers de l'entreprise augmentent considérablement lors de cette première phase industrielle. L'entreprise doit s'équiper pour assurer ses premières productions et absorbe en peu de temps d'importants coûts fixes. Les profits restent généralement négatifs comme nous l'avons vu et la capacité d'auto-financement est pratiquement nulle. Notons enfin que les besoins en financement dépassent la plupart du temps les capacités d'apport personnel de l'entrepreneur.
- **Première croissance :** Cette phase verra l'entreprise réaliser ses premiers profits. Mais l'indépendance financière n'est encore pas acquise et ce d'autant plus que la stratégie de pénétration de marché a été choisie agressive (une politique de prix bas pour assurer une conquête de marché augmente le délai de rendement de l'investissement). Notons enfin que l'attractivité de l'entreprise pour les investisseurs augmente considérablement car le modèle stratégique est maintenant validé.
- **Développement :** L'existence de cette phase est en quelque sorte la *raison d'être* de l'entreprise (Lachmann, 1993). Les capacités d'autofinancement vont croissant avec les performances. Le risque d'échec ayant alors considérablement diminué, les apports externes sont beaucoup plus aisés à obtenir qu'auparavant. Mais c'est aussi - et assez paradoxalement - lors de cette phase que se développent les plus importantes erreurs de stratégie financière. Sans entrer en détail dans cet aspect de la finance qui a fait l'objet de nombreuses études, notons qu'il est généralement préférable que le développement de l'entreprise reste proportionnel à ses capacités financières propres, ce qui n'est pas toujours le cas.
- **Les sorties :** Si l'entreprise envisage une sortie par un développement autonome (à l'international par exemple), ses besoins deviennent extrêmement importants et dépassent souvent ses capacités financières propres. La seule solution possible pour obtenir de tels montants est généralement une entrée en bourse. Si la sortie se fait par le rachat par une autre entreprise, les besoins financiers restent généralement limités (bien que dans certains cas l'entreprise doive faire des investissements importants pour pouvoir être achetée ensuite dans de bonnes conditions). Dans le cas d'un rachat par les employés ou les cadres, ou encore lorsqu'il s'agit d'une succession, le problème est le plus sou-

vent administratif (droits de succession, tutelle de l'Etat) et les besoins financiers à court terme de l'entreprise restent limités.

Les financements accessibles à la PME

Il s'agit de la liste classique donnée dans tout bon livre de finance d'entreprise et nous ne nous y attarderons pas trop :

- **Les particuliers :** Il peut s'agir de connaissances qui apportent des financements limités, généralement au début de la vie de l'entreprise, mais aussi d'*anges financiers* (Business Angels). Ces derniers sont des particuliers disposant d'un patrimoine important et prêts à en risquer une partie dans une aventure industrielle. Si l'aspect réussite financière est important, ce n'est sans doute pas toujours leur première motivation : il est ainsi assez courant que ces investisseurs demandent à participer directement à la vie de l'entreprise (Harisson, 2003). Ceci peut être très avantageux pour l'entrepreneur qui bénéficie par là d'un conseil externe «gratuit» mais peut être dangereux pour l'entreprise en cas de divergence de vues trop importante. Notons pour finir que les *anges financiers* sont beaucoup moins nombreux en Europe qu'en Amérique du Nord : s'ils sont une source de capital essentielle aux Etats-Unis ou au Canada, ils sont pratiquement inexistants en France d'après le travail du groupe Chabbal (1995) ;
- **Les banques traditionnelles (généralistes ou de dépôt) :** Il s'agit d'une des sources facilement accessibles à l'entrepreneur «débutant». À la différence des banques d'investissement ou de capital-risque que nous allons étudier plus loin, les banques de ce type ne font pas d'étude de projet. Elles se contentent la plupart du temps d'évaluer la capacité de remboursement de l'emprunteur. Et ceci fait apparaître le principal problème associé à cette source de financement si elle est utilisée au début de la vie de l'entreprise : les emprunts obtenus sont nécessairement à court terme (quelques mois souvent, et ce d'autant plus que l'entrepreneur a dû quitter son emploi) alors que l'entreprise a besoin de temps pour réaliser ses premiers profits comme le constatent Crépon et Rosenwald (2000). Les autres handicaps dont souffre cette source de financement sont les suivants : uniformisation du traitement des cas (le «dossier à remplir»), demande de caution financière importante (par une compagnie d'assurance,

une autre banque ce qui augmente encore l'endettement de l'entrepreneur) ;

- **Les banques d'affaires :** Celles-ci gèrent des portefeuilles de participations importantes dans des sociétés industrielles. De façon générale elles interviennent vers la fin du cycle de vie de la PME innovante et servent d'intermédiaire lors des introductions en bourse ou des fusions-acquisitions. Compte tenu de leurs montants nominaux d'investissement, elles ne financent que rarement de petites entreprises ;
- **Les sociétés de capital-risque (venture-capital) :** Il s'agit sans doute de la forme de financement de l'innovation des PME la plus connue historiquement en Amérique du Nord et qui se développe en Europe depuis 15 ans environ. Ce financement est tout d'abord un financement «risquophile» qui peut apporter à de très petites entreprises des moyens importants en échange d'espoirs de rendement de l'investissement de 30 à 40% d'après Harisson (2003). Mais son aspect le plus essentiel est sans doute que cet apport financier s'accompagne d'une prise de participation managériale dans la jeune entreprise. Mohr (2001) ajoute qu'une structure très *orientée technique* peut ainsi bénéficier de l'aide de véritables professionnels de la gestion d'entreprise au moment où elle en a le plus besoin.
- **L'État :** acteur essentiel du financement des jeunes entreprises, l'État est très régulièrement oublié dans les analyses. Nous ne détaillons pas ici ses possiblités d'intervention sur lesquelles nous reviendrons dans la dernière partie de ce mémoire, lors de l'analyse critique des résultats de simulation obtenus.

Importance de la conjoncture économique

Notons pour conclure que l'influence de la taille des entreprises sur le niveau d'investissement n'est sans doute pas la même suivant la conjoncture économique. Dans des modèles simples comme ceux que nous allons voir plus loin, une entreprise est ou bien contrainte quant à sa demande (périodes de morosité économique pendant lesquelles les entreprises n'investissent pas car elles n'y ont pas intérêt) ou bien quant à ses sources de financement (périodes de reprise économique pendant lesquelles les entreprises investiraient plus si elles n'étaient pas limitées dans leur accès aux capitaux). En considérant que le marché des capitaux est plus directement sensible à la taille de l'entreprise (les actifs servant de collatéraux) que le marché des biens (en supposant des économies d'échelle ou de gamme limitées) on arrive aux conclusions suivantes :

- Une entreprise contrainte sur sa demande obéit à une logique forte sur le marché des biens, relativement indépendamment de ce qui advient du marché des capitaux. D'après ce que nous venons de dire, et à condition que les économies d'échelle et de gamme restent limitées, sa taille n'est pas le facteur le plus déterminant dans l'analyse de l'investissement : En France, entre 1990 et 1996, 50% de la diminution des taux d'investissements est dû aux entreprises de moins de 500 salariés, et 50% aux entreprises plus importantes comme le note Duhautois (2001). La taille de l'entreprise semble jouer peu d'importance.

- Une entreprise contrainte sur son accès au financement obéit à une logique forte sur le marché des capitaux. Toujours d'après notre hypothèse, on peut supposer que la taille de l'entreprise est alors un déterminant clé de son investissement : Duhautois (2001) à nouveau remarque qu'en France, entre 1985 et 1990, les entreprises de moins de 500 salariés ont contribué à 65% de la croissance de l'investissement pour seulement 35% pour les plus importantes.

Mais un certain nombre de points restent encore dans l'ombre. Notons en particulier les différences fondamentales de comportement d'investissement entre les entreprises de services et les entreprises industrielles : en période de croissance par exemple, Duhautois (2001) observe sur données françaises que l'endettement ne joue pratiquement pas pour les premières alors qu'il est un critère fondamental de l'investissement pour les secondes. Nous essayerons à la fin de ce travail de proposer une méthode permettant d'expliquer ce phénomène.

Il ne faudra pas non plus lors des analyses oublier de tenir compte des modifications structurelles de l'économie. Dans un contexte de montée en puissance des activités de service, une part non négligeable de la diminution des montants investis dans l'industrie s'explique par sa moindre contribution à la richesse nationale : la baisse du financement traduit alors un phénomène macro-économique, qu'il ne faut pas amalgamer avec les phénomènes individuels qui nous intéressent.

1.3 Modèles mathématiques fondamentaux d'investissement et de structure du capital

La littérature économique en matière d'analyse de l'investissement des entreprises est extrêmement vaste et complète. Les premières analyses (dans les années 1950) avaient pour objectif la compréhension du rapport entre la politique monétaire des États et le succès de leur économie. Et ceci demandait naturellement une modélisation des comportements individuels des entreprises en matière financière.

Sans explorer toutes les possibilités, nous allons considérer quatre approches plus ou moins distinctes de ce problème en insistant tout particulièrement sur la dernière d'entre elles.

1.3.1 Théorèmes de Modigliani et Miller (1958)

Ces deux théorèmes démontrés en 1958 sont absolument fondamentaux et servent aujourd'hui encore souvent de cadre (ou de cas limites) aux modèles d'investissement de la firme et de la structure de capital.

Le premier théorème pose que dans le cadre de marchés financiers parfaits (absence d'impôts, de coûts de transaction, de coûts de faillite, de contrainte réglementaire, taux d'intérêt identiques pour toutes les firmes et absences d'asymétries d'information) ni le volume, ni la structure de la dette n'affectent la valeur de la firme.

Dans le même cadre, le second pose que le fait de verser ou non des dividendes sera sans influence sur la valeur de la firme. Une augmentation des dividendes, par exemple, augmentera le revenu des actionnaires mais sera compensée par une baisse correspondante de la valeur de l'action.

Les implications de ces deux théorèmes sont nombreuses et nous n'en retiendrons que trois :

- les décisions d'investissement sont complètement décorrélées des décisions financières relatives à la structure du capital dans le cadre de marchés parfaits ;

- la firme n'est contrainte que si la totalité de ses sources est limitée. L'existence d'une source non contrainte suffit à placer l'entreprise dans une situation non contrainte ;

- la politique d'investissement optimale d'une firme dans ce cadre correspond à un programme de maximisation de sa valeur boursière.

Ces conclusions n'ont pas la même portée conceptuelle. Si les deux premières sont totalement remises en cause par l'existence de contraintes sur les marchés financiers, la dernière est souvent utilisée comme programme de l'entreprise, même en présence de ces contraintes.

1.3.2 Modélisation néoclassique de l'investissement

Il s'agit de la détermination d'un état d'équilibre à partir de la confrontation des programmes des agents isolés sur les marchés des biens et financiers supposés parfaits.

Modèle de base

Celui-ci est parfois attribué à Klein (1950). Sans entrer dans les détails (voir ANNEXE 1 pour des calculs complets), on peut montrer que pour une fonction de production de type Cobb-Douglas, l'évolution du capital K de l'entreprise au cours du temps est donnée par :

$$\ln(K) = \frac{\gamma}{1-(\alpha+\beta)} * t - \frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)} * \ln(\frac{w}{p}) - \frac{(1-\beta)}{1-(\alpha+\beta)} \ln(\frac{c}{p}) + cste$$

γ est le paramètre de la loi de progression technologique exogène, α et β sont les coefficients du capital K et du travail L, c est le coût du capital, w celui du travail et p le prix de vente de l'unique bien produit supposé homogène.

Le niveau de capital optimal n'est une fonction que des paramètres internes de l'entreprise (γ, c et w) et du prix de vente.

L'effet accélérateur

Le niveau de capital de l'entreprise est une fonction de la demande exprimée sur le marché des biens. Notons bien que cette approche n'est pas du tout spécifique à la modélisation néoclassique et a été utilisée dans bien d'autres cadres comme nous le verrons plus loin.

Dans sa forme la plus simple on peut considérer que l'entreprise suit le programme mathématique suivant :

$$\begin{aligned} \underset{K,L}{Max}\Pi &= p * F(L,K) - c * K - w * L \\ \text{Sous la contrainte} &: \quad F(L,K) < F_{\max} \text{ fixé.} \end{aligned}$$

avec les mêmes notations que ci-dessus.

Les calculs (voir ANNEXE 1 pour les détails) montrent que l'évolution du capital K de l'entreprise est donnée par :

$$\ln(K) = -\frac{\gamma}{\alpha+\beta} * t + \frac{\beta}{\alpha+\beta} * \ln(\frac{w}{c}) + \frac{1}{\alpha+\beta} \ln(F_{\max}) + cste$$

La dépendance en coût du capital est remplacée par une dépendance en la demande exprimée : c'est le fondement de tous les modèles accélérateurs. Comme le constate Muet (1979), l'anticipation que l'entreprise fait de ses profits futurs influence de façon profonde ses décisions d'investissement.

Dans une perspective plus moderne, comme celle proposée par Artus et Morin (1991), le modèle de l'accélérateur financier désigne un mouvement conjoint de la valeur ajoutée et de l'investissement des entreprises. En conjoncture favorable, les anticipations positives des entrepreneurs quant à l'augmentation de la demande les conduisent à investir pour augmenter leur capacité productive. A l'inverse, une conjoncture morose et une perspective de fermeture de débouchés les pousse à adopter une stratégie prudente d'investissement minimal de maintien de capacités. Le niveau de capital est ainsi contraint par la demande.

De nombreuses études tant empiriques que théoriques dont celle de Brenanke, Gertler et Gilchrist (1996) introduisant un plafond d'endettement, sont venues enrichir ce modèle depuis les années 80, et ont conduit à l'ajout (sortant du cadre de marchés financiers parfaits défini par Modigliani et Miller en 1958) des contraintes financières au modèle accélérateur simple. L'entreprise peut avoir la volonté d'investir pour profiter d'une augmentation de la demande, mais néanmoins être limitée dans cette démarche par les marchés financiers et les capitaux accessibles. Le capital de l'entreprise ne dépend alors plus uniquement de la demande mais aussi du rendement anticipé du capital et des taux d'intérêt en vigueur sur les marchés financiers. Ce modèle est appelé *accélérateur profit.*

1.3.3 Q de Tobin

L'idée fondamentale de cette approche est parfois attribuée à Keynes : «*For there is no sense in building up a new enterprise at a cost greater than that at which a similar existing enterprise can be purchased*». Un prolongement direct de cette assertion consiste à dire qu'un investissement n'est rentable pour une entreprise que s'il est valorisé par le marché au-delà de sa valeur de remplacement. La contribution de Tobin (1969) à cette vision des choses consiste principalement en l'introduction d'un ratio Q défini comme le rapport entre la productivité marginale du capital investi et celle des actions de l'entreprise. Dans le cadre de marchés boursiers parfaits, la valeur d'une entreprise est égale à la somme de ses profits futurs actualisés, et le Q traduit directement la valorisation de l'investissement par le marché relativement à son coût. Le projet n'est rentable que si son Q est plus grand que l'unité.

Notons pour finir que de nombreuses évolutions ont été apportées à la version originelle du modèle, en particulier pour lui ajouter des effets de retard comme ceux de Epaular (1993) ou d'accélérateur financier. L'objectif est de «condenser» la totalité de l'information pertinente à la prise de décision dans ce seul indicateur. Nous allons voir dans la sous-section suivante que cette démarche, a priori séduisante, rencontre cependant de nombreuses difficultés pratiques.

1.3.4 Équations d'Euler

L'initiative de cette approche est généralement attribuée à Abel (1980). Nous allons la traiter de façon assez détaillée car elle sera en partie reprise lors de la conception du modèle de simulation.

Il s'agit de considérer une entreprise détenue par des actionnaires neutres au risque produisant un bien unique et homogène. Son objectif à long terme est la maximisation de sa valeur boursière. Notons V_t cette valeur à l'instant t et R_t les dividendes que l'entreprise verse à ses actionnaires pour la période $[t, t+1]$. Ces derniers exigeant un rendement ρ_t pour détenir une unité de capital de l'entreprise entre t et $t+1$ on a :

$$E_t[V_{t+1}] = (V_t - R_t) * (1 + \rho_t)$$

où E_t désigne l'espérance conditionnelle à l'information disponible en t.

Ceci définit une relation de récurrence qui peut s'écrire en supposant une durée de vie infinie pour l'entreprise :

$$V_t = E_t \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \beta_{t+i} R_{t+i} \right]$$

où la suite des (β_i) est définie par : $\beta_{t+i} = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{1+\rho_{t+i}}$ pour $i > 1$ et $\beta_t = 1$.

Les dividendes versés par l'entreprise entre t et $t+1$ sont dus aux profits réalisés Π_{t+1} ainsi qu'à la variation du stock de dette $B_{t+1} - B_t$ et aux intérêts payés sur la dette existante en t : $i_t B_t$ où i_t désigne le taux d'intérêt demandé par la banque.

$$\begin{aligned} R_{t+1} &= \Pi_{t+1} + B_{t+1} - B_t - i_t B_t \\ &= \Pi_{t+1} + B_{t+1} - (1 + i_t) * B_t \end{aligned}$$

Le capital K détenu par l'entreprise est soumis à la condition d'accumulation classique : $K_{t+1} = K_t * (1 - \delta) + I_{t+1}$ où δ est le taux d'obsolescence du capital et I_{t+1} l'investissement effectué par l'entreprise entre t et $t+1$.

Absence de contraintes financières et de coûts d'ajustement

D'après le travail de Modigliani et Miller vu plus haut, l'absence de contraintes financières correspond en fait à l'existence d'au moins une source de financement non contrainte. On peut montrer (voir ANNEXE 2) que les équations déterminant son chemin d'investissement optimal sont alors :

$$\begin{aligned} E_t\left[\beta_{t+1} * (1-\delta) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} - \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} - \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right] &= 0 \qquad (1) \\ E_t\left[\beta_{t+1}\right] &= \frac{1}{1+i_t} \\ \frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} &= 0 \end{aligned}$$

La première de ces trois équations est dite équation d'Euler de l'investissement et traduit l'arbitrage de la firme entre investir aujourd'hui (instant t) et investir demain (instant $t+1$).

La deuxième est la condition d'équilibre sur les marchés financiers et correspond aux théorèmes de Modigliani et Miller : en l'absence de contraintes financières, le rendement demandé par les actionnaires (ρ) est égal au taux des emprunts bancaires (r). L'entreprise est alors neutre quant à la source de ses fonds.

La troisième correspond au résultat classique de micro-économie égalisant la productivité marginale du travail à son coût marginal. En effet, si l'on explicite le profit sous la forme : $\Pi = pF - qI - wL$ avec p prix de vente, q coût de l'investissement (coût d'opportunité) et w coût du travail, il vient :

$$E_t\left[p_t \frac{\partial F_t}{\partial L_t} - w_t\right] = 0$$

En notant $\mu = \frac{b}{1-b}$ avec b élasticité de la fonction de demande, on montre sans difficulté (voir ANNEXE 2) que le chemin d'investissement optimal de la firme correspond aux équilibres successifs :

$$E_t\left[\frac{p_t}{\mu} F_{K,t} - p_t * c_{K,t}\right] = 0 \qquad (2)$$

en notant $F_X = \frac{\partial F}{\partial X}$ et

$$c_{K,t} = \frac{q_t}{p_t}(1 - \beta_{t+1} * (1-\delta) * \frac{q_{t+1}}{q_t}) \tag{2'}$$

coût d'usage du capital sur une période, différence entre le coût d'achat d'une unité de capital à l'instant t et le prix de revente de cette unité à l'instant $t+1$.

De nombreux auteurs dont Crépon (2001), Crépon et Rosenwald (2001) ou Himmelberg (2000) ont testé des expressions de ce type sur données réelles pour constater une adéquation plus que médiocre, en particulier dans le cas des petites entreprises. Les hypothèses de marchés financiers parfaits et d'absence de contraintes financières ne sont généralement pas satisfaites. Une première amélioration peut être apportée au modèle en considérant l'existance d'importants coûts d'ajustement du capital.

Absence de contraintes financières avec coûts d'ajustement

La prise en compte de coûts d'ajustement, traduisant le fait qu'une augmentation de capital (conséquence d'un investissement) impose une moins bonne utilisation immédiate des facteurs de production, permet d'éliminer une partie importante des biais constatés. Ceci conduit assez naturellement Himmelberg (2000) à postuler l'existence de deux types de flux monétaires au sein de l'entreprise : des flux monétaires permanents qui correspondent à ceux identifiés dans le modèle «parfait» ci-dessus et des flux monétaires transitoires identifiant l'adaptation progressive de l'entreprise à ses nouveaux moyens de production.

Mathématiquement, ceci ne modifie pas l'expression des trois équations (1) mais seulement la forme exacte du profit. On a maintenant :

$$\Pi = p(F - G) - qI - wL$$

avec $G(I_t, K_t)$ fonction de coûts d'ajustement.

G n'intervient que sur la production de l'entreprise et ne modifie donc pas l'équilibre $E_t\left[\beta_{t+1}\right] = \frac{1}{1+i_t}$ sur les marchés financiers. G ne dépendant pas de L_t, l'équilibre du travail demeure lui aussi inchangé : $\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0$.

Seule (2) est modifiée et a maintenant la forme (voir ANNEXE 2) :

$$E_t[\underbrace{\frac{p_t}{\mu} * F_{K,t} - p_t * c_{K,t}}_{\text{absence de coûts d'ajustement}} \underbrace{- \frac{p_t}{\mu} * G_{K,t} - \frac{p_t}{\mu} * c_{I,t}}_{\text{termes d'ajustement}}] = 0$$

où $c_{I,t} = G_{I,t} - \beta_{t+1} * (1-\delta) * \frac{p_{t+1}}{p_t} * G_{I,t+1}$ est une deuxième composante du coût d'usage du capital, traduisant l'ajustement progressif des facteurs de production à la suite d'un investissement.

Contraintes financières avec coûts d'ajustement

En invoquant toujours les théorèmes de Modigliani et Miller, on sait que l'existence de contrainte financière correspond à l'existence de limitations sur l'ensemble des sources de liquidités de l'entreprise. En reprenant le modèle précédent avec coûts d'ajustement, ceci correspond à limiter l'entreprise à la fois quant aux dividendes qu'elle verse à ses actionnaires R et quant à sa dette B.

- Vis-à-vis des actionnaires : on impose à l'entreprise de verser des dividendes positifs (les dividendes négatifs correspondent en fait à des emprunts au taux ρ) : $R_t \geqslant 0$;
- Vis à vis des banques : deux approches distinctes sont à retenir. 1) Indexation du taux d'emprunt sur la dette : $i = i(B_t, K_t)$ fonction croissante du niveau de dette et décroissante du niveau de capital (qui sert de collatéral à l'emprunt), comme ceci est proposé dans les travaux de Bond et Meghir (1994) et Johansen (1994). C'est un des fondements de ce qui est appelé le «canal large du crédit» ou «accélérateur financier», équivalent de l'accélérateur simple, mais sur le marché des produits financiers cette fois. 2) Existence d'un plafond d'endettement $B_{\max}$ ou d'un ratio dette/capital maximal $\left(\frac{B}{K}\right)_{\max}$ comme le propose Whited (1992) ou Brenanke, Gertler et Gilchrist (1996). Ceci correspond à la possibilité de banqueroute. D'autres combinaisons de contraintes sont possibles comme nous le verrons plus loin. Nous examinerons ici le cas d'une contrainte linéaire (nous en verrons une justification plus loin) : $i_t = i_0 + i_1 * \frac{B_t}{q_t K_t}$.

On peut montrer (ANNEXE 2) que ces contraintes modifient les équations d'Euler (1) de deux façons :

- Taux d'actualisation : le taux d'actualisation β_{t+1} doit être remplacé par $\widetilde{\beta}_{t+1} =$

$\beta_{t+1} * \frac{1+\eta_{+1}}{1+\eta_t}$ où η est la variable duale associée à la contrainte de positivité sur les dividendes $R_t \geqslant 0$. Nous reviendrons en détail sur le sens économique de η dans les sections suivantes. L'espérance de $\widetilde{\beta}_{t+1}$ est alors donnée par :

$$E_t\left[\widetilde{\beta}_{t+1}\right] = \frac{1}{1 + i_t + B_t \frac{\partial i_t}{\partial B_t}} \tag{3}$$

– Nouveau terme dans l'équation principale : on peut montrer (ANNEXE 2) que le chemin d'investissement optimal est désormais donné par :

$$E_t\left[\widetilde{\beta}_{t+1} * (1-\delta) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} + \widetilde{\beta}_{t+1} * B_t * \frac{\partial i_t}{\partial K_t} - \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} - \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right] = 0$$

Il est possible, comme lors des cas précédents, d'expliciter cette relation pour la rendre testable sur données réelles. Ceci a été fait par de nombreux auteurs dont Crépon et Rosenwald (2001) en France, Bond et Meghir (1994) en Grande-Bretagne, France, Belgique et Allemagne ou Whited (1992) aux Etats-Unis, mais pas à notre connaissance au Canada. Les résultats ne sont généralement que moyennement satisfaisants, mais néanmoins nettement supérieurs à ceux obtenus par l'équation d'Euler sans contraintes financières. Il faut toutefois rester prudent car certains phénomènes restent totalement inexpliqués : plusieurs auteurs ont en effet constaté la faiblesse de cette théorie dans le cas des petites entreprises et son manque de stabilité entre les secteurs économiques (la valeur des différents paramètres varie considérablement d'une industrie à l'autre, et plus encore d'une industrie à un service).

Modèle de Bond et Meghir (1994)

Ce modèle est différent de ceux évoqués précédemment non pas dans sa forme (c'est un modèle à équation d'Euler), mais sur le fond, car il fait explicitement la distinction entre deux sources de liquidités qui ont été amalgamées jusqu'ici : les bénéfices non répartis et les émissions de titres. Dans les trois premiers modèles, ces deux financements ne pouvaient pas être distingués dans la mesure où une unité monétaire obtenue par l'émission d'une action est strictement équivalente à une unité de dividende.

Bond et Meghir introduisent dans le modèle «de base» les considérations suivantes :

- Une double discrimination entre les bénéfices non répartis et l'émission de nouveaux titres : d'une part les gains en capital des actionnaires et les dividendes qu'ils reçoivent sont soumis à des régimes fiscaux différents, d'autre part l'émission de nouveaux titres a un coût (coûts de transaction).
- Une probabilité de banqueroute, qui comme les taux d'intérêt est une fonction croissante du niveau d'endettement de la firme. La propriété des actifs de l'entreprise étant en cas de banqueroute transférée des actionnaires vers les créanciers, l'existence de cette probabilité (et de coûts de faillite) modifie les taux auxquels l'entreprise peut obtenir un emprunt bancaire.

Ces considérations permettent de classer les différentes sources de financement en fonction de leur intérêt pour l'entreprise. Mais à la différence du modèle des coûts d'accès ou d'autres approches de hiérarchie absolue des financements, ce classement est susceptible d'évoluer au cours du temps en fonction de la situation interne de la firme et de celle des marchés financiers. C'est ce que nous appellerons dans la suite une hiérarchie dynamique.

Sans entrer dans le détail des calculs (qui sont très voisins de ceux effectués pour les autres modélisations), retenons que Bond et Meghir distinguent quatre régimes distincts pour l'entreprise :

- régime 1 : l'entreprise verse des dividendes et n'émet pas de titres. Il s'agit en fait d'une situation analogue à celle sans contraintes financière. L'entreprise génère assez de liquidités pour financer ses projets sur ses seuls fonds propres ;
- régime 2 : l'entreprise ne verse pas de dividendes et n'émet pas d'actions. L'entreprise ne génère pas assez de flux monétaires pour financer ses projets et préfère (au sens de la hiérarchie dynamique explicitée plus haut) faire appel aux banques plutôt qu'à ses actionnaires ;
- régime 3 : l'entreprise ne verse pas de dividendes mais émet de nouvelles actions. L'entreprise ne génère là encore pas assez de cash-flow pour financer ses projets et mais préfère cette fois faire appel à ses actionnaires plutôt qu'aux banques.
- régime 4 : l'entreprise vers des dividendes et émet de nouvelles actions.

Les modèles précédents ne permettaient pas de faire la distinction nette entre les régimes 1 et 3 (le passage de l'un à l'autre était parfaitement continu) et ne considéraient même pas l'existence de régime 4 (il n'est pas permis par la hiérarchie financière pure).

Simplification du modèle de Bond et Meghir

Comme nous venons de le voir, la hiérarchie des financements proposée par les auteurs est parfaitement dynamique et évolue au cours du temps. Il est possible de capter une partie de cette idée sans pour autant faire intervenir directement les questions de fiscalité : Himmelberg (2000) propose par exemple de modéliser la sensibilité au risque des banques et les asymétries d'information entre les acteurs par un paramètre ϖ tel que le taux auquel l'entreprise peut emprunter auprès des banques est donné par : $i = (1+\rho) * (1+\varpi)$. ϖ dépend à priori de l'ensemble des variables décrivant «l'état de nature» (au sens des sciences physiques : ensemble des paramètres et variables décrivant l'entreprise à un instant donné) de l'entreprise (en fait de toute information accessible à la banque et lui permettant d'évaluer le risque de son prêt, y compris des paramètres parfaitement subjectifs). Himmelberg propose comme cas particulier l'expression : $\varpi = \chi_0 + \chi_1 * \frac{B}{K}$, avec $\chi_0 < 0$ et $\chi_1 > 0$. Ceci peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} i &= (1+\rho) * (1 + \chi_0 + \chi_1 * \frac{B}{K}) \\ &= (1+\rho) * (1+\chi_0) + (1+\rho) * \chi_1 * \frac{B}{K} \\ &= i_0 + i_1 * \frac{B}{q * K} \end{aligned}$$

avec $i_0 = (1+\rho) * (1+\chi_0) < 1+\rho$ et $i_1 = q * (1+\rho) * \chi_1 > 0$.

Dans le cas d'une entreprise contrainte quant à son financement par fonds propres (coût trop élevé d'une émission d'actions par exemple, où impossibilité d'accéder au capital de risque), cette expression traduit deux points essentiels :

- tant que les besoins de l'entreprise en liquidité restent faibles, celle-ci a intérêt à faire appel au financement bancaire plutôt qu'au financement par actions : ceci correspond à l'avantage fiscal en faveur de l'endettement introduit par Bond et Meghir. Ceci peut également prendre en compte l'existence de coûts d'agence causés par l'émission de nouveaux titres ;

- quand les besoins en liquidité deviennent importants, l'entreprise préfèrerait si elle le pouvait faire appel aux fonds propres plutôt qu'à la dette. Son capital lui servant de collatéral lors des emprunts, l'entreprise doit maintenir un niveau de capital suffisant pour cautionner ses emprunts.

Cette expression permet ainsi dans sa forme simple de tenir compte d'une partie de la complexité introduite dans le cadre plus général de Bond et Meghir. C'est elle que nous retiendrons dans le modèle multi agents développé plus loin.

L'approche par le Q de Tobin

Revenons pour conclure cette revue de modèles classiques sur l'utilisation pratique de la méthode de Tobin. Il s'agit en fait d'utiliser l'équation (voir ANNEXE 2) :

$$\left(\frac{I}{K}\right)_t = \phi * Q + \varphi + \epsilon$$

L'évaluation de cette équation est en fait rendue assez délicate car il faut construire le Q à partir des données de bilan. Ceci ne se fait pas sans biais et est souvent à l'origine de la mauvaise qualité des adéquations obtenues comme le constate Herbet (2001).

Limites de ces approches

Si elles sont théoriquement très séduisantes, les approches par équations d'Euler n'ont pas porté tous les fruits que l'on attendait d'elles. Oliner, Rudebusch et Sichel (1995) ont même montré que dans certaines circonstances leurs capacités prédictives étaient plus faibles que celles des modèles néoclassiques.

Une bonne part de leur limitation ne vient pas d'une faiblesse théorique mais plutôt d'une difficulté pratique : pour tester une équation d'Euler, l'analyste doit en effet déterminer le capital K, le stock de dette B, ainsi que l'investissement I et les autres paramètres tels que i, ρ, δ...Ces données n'apparaissent pas explicitement dans le bilan des entreprises et doivent être construites à partir des informations classiques comme les immobilisations ou les amortissements. Ceci ne se fait pas sans biais et est sujet à une marge d'erreur importante et non quantifiable.

1.3.5 Stratégie d'entreprise et équations d'Euler

Tous ces modèles fournissent a priori seulement un test de comportement mais pas un outil de programmation de l'investissement. Ils permettent sous certaines hypothèses (que nous verrons plus loin) de déterminer le niveau optimal d'endettement de l'entreprise mais ne constituent pas des programmes complets. Pour les utiliser dans un modèle multi agents, il faut déterminer de façon autonome une stratégie (d'investissement et d'endettement).

Reprenons l'équation (3) du modèle avec contraintes financières et coût d'ajustement. On peut montrer (ANNEXE 2) que le niveau d'endettement optimal de la firme est donné par :

$$B_t = \frac{E_t[\frac{1+\eta_t}{1+\eta_{t+1}}] * \frac{1}{\beta_{t+1}} - 1 + i_t}{\frac{\partial i_t}{\partial B_t}}$$

Cette expression fait intervenir la variable duale η définie par la contrainte de positivité sur les dividendes versés aux actionnaires. Cette variable, qui s'interprète économiquement comme l'augmentation de valeur de l'entreprise si elle pouvait disposer d'une unité de capital supplémentaire de la part de ses actionnaires au taux ρ, n'est pas observable (les anglo-saxons utilisent le terme de «shadow cost of internally generated funds»). Elle est nulle en l'absence de contraintes de financement et strictement positive dès que l'entreprise est amenée à user du financement bancaire.

Cette variable traduit à elle seule plusieurs problématiques très complexes :

- les perspectives de l'entreprise quant à ses débouchés ;
- les anticipations stratégiques quant aux mouvements des concurrents ;
- tous les phénomènes non quantifiables intérieurs ou extérieurs à l'entreprise, et qui font l'objet d'une abondante littérature centrée sur la finance d'entreprise.

Elle est donc inconnue et le restera, quelle que soit la finesse des mesures effectuées sur l'entreprise.

Si ces caractéristiques ne sont pas gênantes pour tester les modèles d'Euler ou les Q-modèles d'investissement (la variable η peut être éliminée des équations pour ne laisser plus que les variables observables K, L, B, I. Voir ANNEXE 2), elles sont capitales lorsqu'il s'agit de construire une simulation car elle contient à elle seule toute la stratégie de l'entreprise. Pour se sortir de cette impasse, il est possible de considérer les cas suivants :

Le cas stationnaire

Dans le cas stationnaire (au sens stratégique du terme), la variable η vérifie l'égalité : $\eta_{t+1} = \eta_t$. On montre alors sans difficulté que le stock de dette optimal pour l'entreprise est :

$$B_t = \frac{\rho_t - i_t}{\frac{\partial i_t}{\partial B_t}}$$

Il s'agit du montant qui égalise le taux d'intérêt bancaire à celui demandé par les actionnaires : les avantages fiscaux associés à l'emprunt bancaire sont alors exactement compensés par la prime de risque demandé par la banque.

Il s'agira du cas limite en $t \longrightarrow +\infty$ dans notre simulation. C'est le seul qui puisse être déterminé explicitement.

Le cas de parfaite information

Quand l'entreprise est capable de déterminer avec exactitude ses perspectives tant commerciales, stratégiques que concurrentielles, elle peut définir sa stratégie de façon exacte et éliminer les incertitudes pesant sur η. La littérature mathématique est assez limitée sur ce sujet et nous ne mentionnerons ici que le travail de Stenbacka et Tombak (2002).

Les deux auteurs considèrent le cas d'une entreprise isolée disposant d'une information complète quant à la répartition en termes de rentabilité des projets qu'elle peut réaliser et quant aux contraintes financières (dette et titres). Dans le cadre d'une stratégie globale de maximisation du profit, l'entreprise est en mesure de déterminer avec exactitude son niveau de capital optimal : celui dont le coût marginal est égal à la productivité marginale. Et mieux encore, cette analyse à la marge permet de définir la structure de ce capital, en termes de dette et de fonds propres.

Mais les hypothèses utilisées sont extrêmement restrictives, et ne font en particulier pas intervenir ni la concurrence ni de processus réellement aléatoires (la distribution des projets en termes de rentabilité est stochastique, mais la fonction de répartition de la loi de probabilité est supposée connue). Dans le cas général, la résolution simultanée des programmes de maximisation (de profit ou de valeur pour les actionnaires) et d'investissement n'est pas possible.

Utilisation d'hypothèses stratégiques fortes

Comme nous allons le voir plus loin lors de la construction du modèle à proprement parler, l'entreprise est supposée avoir une parfaite connaissance de la demande qui lui est adressée, de la rentabilité de la recherche qu'elle va entreprendre ainsi que des contraintes financières auxquelles elle est soumise. Sous une hypothèse de rationalité parfaite, les dernières inconnues empêchant le calcul explicite de η_{t+1} sont liées à la concurrence. En ajoutant une hypothèse de type Cournot spécifiant l'absence de réaction stratégique des autres agents, il devient alors possible de déterminer le niveau de dette optimal pour l'entreprise en $t+1$ connaissant les conditions en t.

Utilisation des valeurs réalisées

Plutôt que de faire de nombreuses hypothèses, il est possible de projeter une valeur de η_{t+1} en fonction des valeurs déjà réalisées des différentes variables du modèle. En représentant la série des η_i pour $i < t$, une méthode de type régression ou moindres carrés permet d'obtenir un estimé de η_{t+1}. Ceci a été très peu étudié dans la littérature et nous n'avons identifié qu'un seul article utilisant ce type de principe dans le cadre des équations d'Euler (et seulement dans un cadre de marchés parfait et sans contraintes financières) : celui de Oliner, Rudebusch et Sichel (1995).

De façon encore plus simple, il est possible d'utiliser comme approximation de la valeur en $t+1$ la valeur en t (hypothèse de stationnarité des contraintes). Ceci revient à utiliser comme valeur de B_t dans les différentes équations la dernière valeur certaine : B_{t-1}. C'est cette approche que nous utiliserons lors de la simulation.

1.4 Recherche et fonction de production

La question de la prise en compte de la recherche dans la croissance de l'entreprise anime la communauté économique depuis des décennies. Il s'agit sans aucun doute d'un des points clefs de la compréhension du système économique dans son ensemble. Le but de ce travail n'est pas de faire une revue des modélisations existantes, et nous nous contenterons d'analyser une seule de ces approches : celle de Griliches (1984, 1998). Celle-ci consiste à faire intervenir la R&D par l'intermédiaire de la fonction de production. Elle est assez ancienne (Griliches 1958) et bénéficie d'un large support tant théorique qu'empirique.

Le principe en est très simple : on définit un capital technique, que John, Weiss et Dutta (1999) appelent *savoir-faire*, qui participe à la fonction de production sous une forme fonctionnelle voisine de celle du capital conventionnel :

$$F_t = F_t(K_t, L_t, Y_t)$$

où K, L et Y désignent respectivement le capital physique, le travail et le savoir faire.

Une forme explicite classique correspond à une fonctionnelle de type Cobb-Douglas pour l'ensemble des facteurs :

$$F_t = G_0 * K_t^{\gamma} * L_t^{1-\gamma} * Y_t^{\xi}$$

Toute la difficulté du problème économétrique se reporte alors sur la détermination du coefficient ξ et du stock Y_t. Ce dernier point est à lui seul extrêmement complexe : il suppose en effet que l'on sache déterminer ce qui compose le savoir-faire d'une entreprise. On peut l'envisager comme le nombre d'ingénieurs ou de chercheurs, comme une fonction du nombre de brevets déposés, ou encore comme le nombre de nouveaux produits commercialisés : ce point a fait l'objet d'une étude très complète par Crépon, Duguet et Mairesse (2000) et une recension très complète a effectuée par Mairesse et Sassenou (1991). Dans notre étude, nous n'évaluerons pas directement Y, mais son rapport au stock de capital physique K : ceci sera fait par le rapport $\frac{\text{travail en RD}}{\text{travail en capital}}$.

L'accumulation du savoir-faire au cours du temps peut elle aussi prendre plusieurs formes suivant l'industrie où l'on se place (obsolescence des connaissances dans les industries à évolution très rapide). De façon générale, le stock au temps t est une fonction croissante de l'ensemble des investissements en R&D effectués aux périodes précédentes. Griliches (1984) propose la relation linéaire :

$$Y_t = \sum_{i=0}^{t} \vartheta_i(t) * I_i^R$$

où la suite des $\left(I_i^R\right)$ désigne la suite des investissements en recherche. Les coefficients $(\vartheta_i(t))$ prennent en compte d'éventuels effets de décalage temporel (la recherche effectuée entre i et $i+1$ ne prend «effet» qu'à l'instant $j > i+1$).

Nous adopterons dans notre modèle une relation d'accumulation, également linéaire, voisine de celle utilisée pour le capital :

$$Y_t = Y_{t-1} + H_t * I_i^R$$

Nous supposons dans cette expression l'absence d'obsolescence du savoir-faire ainsi que de décalage temporel. Ce dernier point est en fait partiellement pris en compte par les coûts d'ajustement, et une modélisation plus précise ne serait pas réellement testable comme le constate Griliches (1984).

Remarque : une telle modélisation est tout à fait cohérente avec celle adoptée par certains auteurs dont Malerba *et al.* (2001) consistant à faire intervenir la R&D par des mécanismes de marché. Celle-ci correspond en effet à l'expression mathématique suivante :

$$\Delta X_t = a_0 * (I^R)^{a_1} * (t - t_0)^{a_2} * (1 - \frac{X_t}{X\lim})^{a_3}$$

où ΔX_t correspond à la variation d'une des variables (par exemple l'inverse du prix), fonction du montant investi I^R, de la durée d'exercice de l'entreprise $t - t_0$ (phénomène d'amélioration des performances de l'entreprise avec le temps) et de l'écart à une limite technologique X_{lim}. On peut montrer (voir ANNEXE 3) que la recherche ainsi considérée permet de réduire le prix du produit proposé pour un coût de production identique. En reprenant les notations du début de l'étude on a :

$$Y_{t+1} = Y_t + H_{t+1} * (I^R)^{a_1}$$

avec $H_t = b_0 b_1 * \frac{a_0 (t-t_0)^{a_2} (X_{\max} - X_{t-1})^{a_3}}{X_{t-1}}$, b_0 et b_1 étant paramètres de la demande $M_t = b_0 * p_t^{-b_1}$. Pour des coefficients $a_2 = 0$ et $a_3 = 0$ (pas d'amélioration des performances et pas de limite technologique) on retrouve une expression analogue à celle postulée plus haut.

Remarque : Une telle approche, qu'elle soit envisagée par des mécanismes de productivité ou de marché, correspond à ce qui est appelé les «évolutions incrémentales». Il est possible d'introduire dans le modèle des aspects aléatoires importants, mais les problématiques de substitution technologique ou de destruction créatrice introduites par Schumpeter (1961, 1964, 1975) ainsi que d'inertie au changement, seront, quoi qu'il arrive, passées sous silence. Il s'agit sans le moindre doute d'une des pistes à suivre pour un développement futur du modèle.

1.5 Modèles multi-agents

Les ouvrages traitant des modèles «multi-agents» ou plus généralement des «sociétés artificielles» sont extrêmement nombreux et ce domaine de recherche est en pleine évolution. Leur origine peut être attribuée à Nelson et Winter (1983). Cette section ne fera qu'effleurer la complexité des problématiques traitées.

1.5.1 Pourquoi un modèle multi-agents ?

Comme nous l'avons dit en introduction, la construction d'une simulation permet de pallier (en partie) l'impossibilité de réaliser des expériences pour valider notre approche. Ce constat, qui peut être généralisé à l'ensemble des sciences sociales, a présidé historiquement à la réalisation de nombreux modèles. L'utilisation de modèles multi-agents ou de «comportement individuel» n'est cependant qu'une des possibilités techniques offertes à l'analyste, et il faut la justifier.

Nous reprendrons pour ce faire un des arguments développés par Axtell (2000) : «*[⋯]there are important classes of problems for which writing down equations is not a useful activity. In such circumstances, resort to agent-based computational models may be the only way available to explore such processes systematically [⋯]*». Remarquons en effet que l'ensemble des modélisations envisagées jusqu'ici (équations d'Euler en particulier) considèrent des comportement individuels d'entreprises. La concurrence entre les firmes en particulier n'a jamais été évoquée, ou bien sous la forme d'un coefficient η, à la fois non prédictible et non mesurable.

Comme nous l'avons dit plus haut, les paramètres à prendre en compte pour décrire de façon satisfaisante le comportement de l'entreprise sont en nombre trop important pour pouvoir envisager un traitement analytique. La véritable difficulté à laquelle est confronté l'économiste n'est donc pas tant la non-solvabilité d'un système d'équations mais plutôt sa propre rationalité (ainsi que sa capacité d'accès à l'information) : il n'est pas possible d'appréhender toutes les données du problème.

Il s'agit donc d'exploiter au maximum l'information disponible quant au comportement individuel des firmes, et de reporter autant que faire se peut les incertitudes globales sur la confrontation des agents avec le monde extérieur (marché, concurrence...). La mesure économétrique se porte alors sur les transactions (au sens très large du terme : il peut s'agir d'un échange financier suite à une vente, mais aussi d'un investissement en R&D ou même d'une interaction stratégique). En termes informatiques, cela consiste à construire des instances d'objets déterministes (les entreprises) se confrontant à leur environnement (autres agents de même type ou de types différents ou variables publiques) par des méthodes plus ou moins stochastiques. C'est l'essence même des modèles multi-agents tels qu'ils seront utilisés dans ce travail.

1.5.2 Modèles de Yildizoglù et associés (2001)

Ces quelques lignes sont une interprétation libre tirée des travaux des auteurs.

Chaque entreprise est caractérisées par son capital K et la productivité de ce capital notée A. Le coût d'usage du capital est noté c et l'entreprise est supposée produire un seul bien homogène en quantité Q. Par définition, $Q = AK$ et le profit réalisé par la firme est $\Pi = p * Q - c * K$ où p est le prix de vente du bien, exogène. La fonction de demande agrégée est supposée de la forme classique : $D = a * p^{-b}$ avec

a et b facteurs constants. On considère N_t entreprises de ce type, nombre variable au cours du temps.

Le progrès technique de l'entreprise (augmentation de A) se fait par l'intermédiaire d'investissements en R&D notés RD. La recherche est un procédé en deux étapes :

- **Etape 1 :** La probabilité que l'invetissement RD conduise à une découverte effective est :

$$P[d_{int} = 1] = \varsigma * RD$$

où ς est un coefficient de normalisation projettant le segment des $[RD_i]_{i\in[0\cdots N]}$ sur $[0, 1[$. Si c'est un échec (probabilité $1 - \varsigma * RD$) le niveau de productivité reste à sa valeur A_t ;

- **Etape 2 :** Le résultat de l'innovation correspond à un tirage aléatoire dans une distribution normale centrée sur la valeur précédente de A :

$$\widetilde{A_{t+1}} \rightsquigarrow N(A_t, \sigma_2^2)$$

Si la valeur tirée est en dessous de A_t on conserve A_t sinon on prend la valeur obtenue.

Les auteurs ajoutent à ce progrès technique «pur» un progrès technique par imitation de la concurrence sur un réseau que nous ne développerons pas ici.

Nous utiliserons le même type de modélisation du progrès technique dans notre modèle de simulation. L'ANNEXE 3 en présente une analyse en terme d'espérance mathématique qui sera utilisée dans la suite.

1.5.3 Modèles de Malerba et associés (2001)

Ici encore, ces quelques lignes sont une interprétation libre tirée des travaux des auteurs.

Ces modèles sont très complexes et traitent de problématiques spécifiques qui dépassent le cadre de notre étude (plusieurs types de produits avec transitions technologiques, effets d'interface, investissements en marketing....). Nous n'en retiendrons que deux points essentiels :

- **R&D et effets de marché :** À la différence des modèles de Yildizoglù qui font intervenir la R&D de façon purement interne à l'entreprise (l'effet de la R&D est une progression des capacités productives de l'entreprise), ces modèles introduisent des effets de valorisation par le marché. La recherche sur le prix permet de vendre moins cher un même produit pour une même utilisation des facteurs de production (capital K en l'occurence). Le principe consiste à supposer que l'objet de la recherche (inverse du prix ou qualité du produit par exemple) suivent une loi du type :

$$X_{t+1} = X_t + a_0(t) * (RD)^{a_1} * (X_{\max} - X_t)^{a_3}$$

sachant que la demande exprimée est donnée par $M_t = b_0 * X^{b_1}$.

Si ces deux approches sont conceptuellement assez différentes (les modèles de la sous section précédente décrivent plutôt des évolutions de procédés alors que ceux de Malerba s'intéressent à des évolutions de produits), elles sont néanmoins mathématiquement équivalentes comme le montre l'ANNEXE 3 ;

- **Le capital de risque initial :** chaque entreprise dispose initialement d'un montant VC de capital de risque, tiré aléatoirement. Elle dépense ce montant en R&D pendant un nombre T de périodes. À l'issue de ce stade préliminaire, l'entreprise entre sur le marché : si elle est compétitive et se montre capable de générer des profits elle poursuit ses activités, sinon elle est éliminée. C'est pratiquement cette modélisation que nous reprendrons lors des simulations.

1.6 Conclusion

Ce rapide survol des littératures pertinentes à notre étude nous a en premier lieu permis de mieux comprendre les mécanismes sous-tendant l'investissement des entreprises. S'il n'est pas possible de définir un consensus absolu sur ce sujet, nous retiendrons néanmoins l'importance clé de plusieurs facteurs.

L'*incertitude associée à l'investissement* tout d'abord, qui trouve son origine dans les asymétries d'information entre les acteurs du monde financier et les industriels, pousse les débiteurs à exiger des garanties de la part des créditeurs. Elle est renforcée dans le cas de l'investissement en innovation par le caractère totalement inaccessible d'une partie des données. Guinet (1995) résume ceci en notant que «le système financier sait gérer des risques, mais est allergique aux incertitudes». Comme nous le verrons dans le dernier chapitre, ces défaillances de marché sont à la base de la légitimité de l'intervention publique dans le domaine.

Le niveau de garanties exigé varie au cours du temps et dépend du niveau de développement de l'entreprise. Les actifs de l'établissement peuvent servir de caution (collatéral) à ses emprunts bancaires, ce qui a pour conséquence une corrélation positive entre son niveau de capital et le montant de ses investissements. Cet effet d'accélérateur financier a été observé à de nombreuses reprises et est généralement bien admis dans le cadre de la théorie du «canal large du crédit». Il peut être pris en compte de multiples façons : taux d'emprunt croissant du ratio dette sur capital ou plafond d'endettement.

Les *perspectives économiques* de l'entreprise ensuite, historiquement à l'origine de l'effet d'accélérateur simple puis d'accélérateur-profit. L'investissement de l'entreprise est en partie indexé sur ses prévisions en matière de demande sur le marché des biens. Les établissements bancaires anticipent eux aussi ces mouvements de la demande, et ont tendance à durcir les conditions de financement des établissements subissant une diminution de leur marché. Là encore, les asymétries d'information peuvent conduire à des évaluations très différentes et renforcent l'incertitude évoquée dans le premier point. Il est assez délicat de modéliser simplement ces comportements plus ou moins subjectifs, et leur traitement analytique n'a pu être effectué que dans un nombre très limité de cas simplistes (marchés parfaits, répartition probabiliste des perspectives connue par exemple).

La *taille de l'entreprise* enfin, qui rend les PME proportionnellement plus sensibles que les autres entreprises aux conditions générales de financement. Contraintes à la fois dans l'utilisation de leurs fonds propres ainsi que dans leurs capacité d'emprunt, ces entreprises sont un terrain d'étude particulier qui n'est pas encore tout à fait compris.

Dans un deuxième temps, cette étude a fait ressortir l'intérêt analytique des modèles à équations d'Euler. Ces approches de comportement individuel d'entreprise, si elles ne sont pas toujours d'une très grande précision, peuvent néanmoins tenir compte assez simplement des facteurs clé listés ci-dessus. Elles limitent d'autre part les difficultés de mesure rencontrées par d'autres procédés comme le Q de Tobin.

Cette revue a été enfin l'occasion de parcourir rapidement les perspectives offertes par les modèles multi-agents. Dans l'impossibilité, quasi générale aux sciences sociales, de réaliser des expériences pour valider des stratégies d'entreprise ou des politiques publiques, l'analyste a tout intérêt à utiliser des modèles de simulation calibrés à partir de données réelles. Ceux-ci permettent en effet de tester différentes solutions pour déterminer la plus productive de toutes. Nous savons d'ores et déjà, compte tenu de l'imprécision des modèles utilisés, que ces résultats ne seront pas absolus. Ils permettront néanmoins de déterminer un «Nord» sur la carte des possibilités.

L'objectif des chapitres qui vont suivre est de créer un modèle multi-agents de comportement d'entreprise sous contraintes financières, de façon à simuler l'effet de différentes politiques publiques sur les niveaux d'investissement en R&D. Les résultats seront ensuite comparés aux observations macroéconomiques disponibles. Le dernier chapitre envisagera quelques développements possibles du modèle, et tentera de proposer une interprétation des phénomènes observés sous forme de cycles temporels.

Chapitre 2

MODÈLE DE SIMULATION

La section 1 de ce chapitre a pour objet le déroulement de l'ensemble du modèle. La résolution du programme de l'entreprise sera l'objet de la section 2 alors que la section 3 construira la statistique de test utilisée pour calibrer le simulateur. Finalement, la section 4 rentrera dans le détail de la formulation informatique de l'ensemble.

2.1 Déroulement du modèle

2.1.1 Données générales

Dans la droite ligne de la proposition faite par Nelson et Winter (1983), chaque entreprise est représentée par son stock de capital K, son travail L et son stock de savoir-faire Y. Elle produit un seul et unique bien homogène avec la fonction de production $F = F(K, L, Y)$. À chaque période, l'entreprise a la possibilité d'investir soit en capital (investissement I^K), soit en productivité (RD, investissement I^R). Nous écrirons classiquement le montant total investi sous la forme : $I^K + I^R = q * I$ où q est le prix d'une unité de capital et I le nombre d'unités de capital équivalentes investies. Cet investissement global est réparti avec un coefficient α en savoir-faire et capital de telle sorte que : $I^K = \alpha * I$ et $I^R = H * (1 - \alpha) * qI$ où $\frac{1}{H}$est la valeur d'une unité de savoir-faire.

Le capital s'accumule suivant la règle classique : $K_{t+1} = (1 - \delta) * K_t + I^K =$

$(1-\delta)*K_t+\alpha*I_t$ où δ traduit l'obsolescence du capital.

La productivité quant à elle suivra la loi : $Y_{t+1}=(1-\delta^{'})*Y_t+I^R=(1-\delta^{'})*Y_t+H_t*(1-\alpha)*q_t*I_t$ où $\delta^{'}$ est l'obsolescence du capital de savoir-faire.

L'entreprise prend ses décisions d'investissement en fonction d'un objectif de long terme qui est la maximisation des dividendes qu'elle verse à ses actionnaires (hypothèse classique de Modigliani et Miller (1958) et cohérente avec une participation des investisseurs en capital de risque à la gestion de l'entreprise). Possédant une rationalité limitée, elle prend une décision en t en fonction de l'information qui lui est accessible et en supposant que la stratégie de ses concurrents restera inchangée. Le profit de l'entreprise sera noté Π et les dividendes R (revenu pour les actionnaires).

2.1.2 Capital de risque initial

Chaque entreprise se voit affecter un montant initial de capital de risque VC tiré aléatoirement, ainsi qu'un coefficient de répartition ϑ correspondant à la stratégie d'investissement de la firme. Pendant les T_i premières périodes, l'entreprise investit $\vartheta\frac{VC}{T_i}$ en capital et $(1-\vartheta)\frac{VC}{T_i}$ en recherche par intervalle de temps. Les ressources de l'entreprise progressent pendant cette phase en suivant le programme suivant :

- **Capital :**

$$K_t=K_{t-1}+\vartheta\frac{VC}{T_i}$$

la mise en place des équipements est parfaitement déterministe et ceux-ci ne subissent pas d'obsolescence pendant cette phase préliminaire.

- **Productivité :**

la recherche quant à elle est le fruit du processus aléatoire en deux étapes (hérité du modèle de Yildizoglu (2001)) :

Etape 1 : La probabilité que l'investissement $(1-\vartheta)\frac{VC}{T_i}$ conduise à un progrès effectif est :

$$P=\xi*(1-\vartheta)\frac{VC}{T_i}$$

où ξ est un coefficient qui projette $(1-\vartheta)\frac{VC}{T_i}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

Etape 2 : Le résultat effectif de l'investissement est donné par un tirage dans une loi normale $N(Y_{t-1}, \sigma^2)$ centrée sur le niveau précédent Y_{t-1}. Si la valeur tirée est inférieure à Y_{t-1} on conserve Y_{t-1}, sinon Y_t prend la valeur obtenue.

À l'issue de cette phase préliminaire, les entreprises disposent d'un capital initial et d'une productivité initiale notés K_I et Y_I. Toutes les entreprises adressent au départ la même part de marché égale à 1/(nombre d'entreprises).

2.1.3 Processus de recherche

Celui-ci sera modélisé par le même processus à deux étapes que celui utilisé lors des T_i premières périodes.

Lorsque l'entreprise fait ses prévisions, elle évalue l'espérance de succès de son investissement. Celle-ci vaut, dans l'hypothèse où les deux tirages sont indépendants (démonstration en ANNEXE 3) :

$$E_t[Y_t] = (1-\delta') * Y_{t-1} + H_t * (1-\alpha_t) * q_t I_t$$

avec $H_t = \frac{\xi\sigma_2}{\sqrt{2\Pi}}$.

Remarque : nous aurions pu comme Malerba (2001) postuler l'existence d'une limite technologique $Y_{\max}$ à la productivité, à l'origine d'une diminution de l'efficacité marginale de l'investissement. Ce cas a été examiné en détail dans l'ANNEXE 4 mais n'apporte rien d'essentiel à notre modèle et ne sera pas retenu.

2.1.4 Emprunt bancaire

Entre les instants $t-1$ et t l'entreprise peut contracter un emprunt bancaire si nécessaire. On notera B le stock de dette de l'entreprise et i le taux d'intérêt à payer sur ce stock. Par définition, le flux de revenu est lié aux profits réalisés et à l'endettement contracté. Entre les instants $t-1$ et t on a :

$$R_t = \Pi_t + \underbrace{B_t - B_{t-1}}_{\text{variation du stock de dette}} - \underbrace{i_{t-1}B_{t-1}}_{\text{intérêts à payer sur la dette existante}}$$

Le taux i auquel l'entreprise peut emprunter dépend comme nous l'avons dit en introduction de paramètres objectifs. Nous supposerons ici qu'il est croissant du ratio B/K de façon à traduire le fait que les actifs de l'entreprise servent de caution à la dette, comme évoqué lors de la recension de textes .

Pour les applications numériques, on supposera une dépendance linéaire de la forme :

$$i = i_0 + i_1 * \frac{B}{qK}$$

à tout instant t.

2.1.5 Actionnaires

Ceux-ci exigent un certain rendement r pour détenir une certaine partie de l'entreprise entre les instants $t-1$ et t. En notant V_t la valeur de l'entreprise à l'instant t, on a la relation :

$$V_t = (\underbrace{V_{t-1} - R_{t-1}}_{\text{Valeur en } t-1 \text{ diminuée des dividendes versés}}) * (\underbrace{1+r}_{\text{Actualisation}})$$

Dans l'hypothèse classique où les dividendes sont versés en début de période, on a :

$$V_{t=} E_t(\sum_{j=t}^{+\infty} \beta_j R_j)$$

où E_t désigne l'espérance conditionnelle à l'information disponible en t avec

$$\beta_{t+j} = \prod_{i=0}^{j-1} \frac{1}{1+\rho_{t+i}}$$

Quand R est positif, l'entreprise verse des dividendes à ses actionnaires. Quand R est négatif en revanche, tout se passe comme si elle leur empruntait $-R$ (au taux ρ) et ne versait aucun dividende[1].

2.1.6 Marché des biens

Nous nous placerons dans un cadre de concurrence monopolistique où les entreprises produisent des substitus proches. Chaque firme se comporte ainsi comme un monopole sur sa part du marché global, libre de fixer un prix sans pour autant perdre la totalité de la demande qui lui est exprimée.

La demande agrégée est classiquement une fonction décroissante du prix p_t pratiqué : $M_t = b_0 * p_t^{-b_1}$ où les coefficients b_0 et b_1 sont susceptibles de varier au cours du temps. Nous considérerons que chaque entreprise i «voit» une demande $M_i(t) = m_i(t) * M_t = m_i(t) * b_0 * p_t^{-b_1}$.

Chaque entreprise produit la quantité $F_i(t)$ entre les instants t et $t+1$ et la part de marché est donnée par :

$$m_i(t+1) = \frac{F_i(t)}{\sum\limits_i^{N_t} F_i(t)}$$

Où N_t est le nombre d'entreprises à l'instant t. Les entreprises dont la part de marché est inférieure à $\frac{1}{100*N_t}$ seront éliminées à l'issue de cette routine.

[1]Ceci n'est valable que dans l'hypothèse où l'entreprise peut émettre de nouveaux titres sans coût.

Considérons en effet que l'entreprise émette des obligations pour un montant global $-R_{émis}$ (avec $R_{émis} < 0$) ayant un taux garanti ρ. En terme de dividendes versés aux actionnaires (y compris ceux venant d'entrer dans le capital de l'entreprise), on a alors : $R = -R_{émis}$. Un revenu négatif généré par l'entreprise est alors strictement équivalent à une nouvelle émission d'obligations.

Ceci exclu cependant un cas qui est loin d'être anecdotique : certaines entreprises versent des dividendes tout en émettant de nouveaux titres. Bond et Meghir (1994) prennent en compte cet aspect des choses en introduisant dans leur modélisation à la fois un coût d'émission pour l'entreprise et un rabais d'impôts pour le nouvel actionnaire.

2.1.7 Programme de l'entreprise

Au moment où elle effectue ses prévisions, l'entreprise ne dispose pas de toutes les informations pertinentes relatives au comportement du marché des biens, de celui des produits financiers ni même de la concurrence. Elle est donc contrainte de faire un certain nombre d'hypothèses que nous allons regrouper sous le terme de «continuité des contraintes». Sur le marché des biens, ceci correspond à supposer que le prix auquel l'entreprise pourra vendre son produit sera le même que celui de la période précédente : $p_{t+1} = p_t$. Sur les marchés financiers, et comme démontré en ANNEXE 4, ces contraintes interviennent par deux termes : β et C. L'entreprise utilisera pour évaluer ces termes leur dernière valeur connue : $\beta_{t+1} = \beta_t$ et $C_{t+1} = C_t$.

Son programme est donc le suivant :

$$\begin{cases} \underset{I_t,\alpha_t,L_t,K_t}{Max} (V_t) \\ V_t = E_t[\sum\limits_{j=t}^{+\infty} \beta_j R_j] \\ R_t = (1-\sigma) * \Pi_t + B_t - B_{t-1} - i_{t-1}B_{t-1} \text{ avec } i_t = i_t(\frac{B_t}{q_t^K K_t}) \text{ fonction croissante} \\ \Pi_t(K_t, L_t, I_t, \alpha_t, Y_t) = RB_0 * F_t^{\frac{1}{\mu}} - \omega_t L_t - [\alpha_t q_t^K + (1-\alpha_t) q_t^R] * I_t \\ \text{sous les contraines : } K_t = (1-\delta) * K_{t-1} + \alpha_t I_t \\ \text{et } Y_t = (1-\delta') * Y_{t-1} + H_t * (1-\alpha_t) * q_t I_t \end{cases}$$

Comme nous allons le voir plus loin, ce programme donne à l'entreprise un ensemble d'échelles de production optimales (isoquantes). Le niveau de production est donné par la confrontation monopolistique avec la demande . Le résultat effectif de la R&D est donné par le processus vu plus haut. On connaît alors les valeurs K_t, L_t et Y_t et donc la production de l'entreprise F_t.

Elle est alors confrontée à ses concurrentes sur le marché des biens et on note R_{eff} le revenu effectif résultant de cette confrontation. Deux cas peuvent alors se présenter :

- $R_{eff} \leqslant 0$: l'entreprise est contrainte de s'endetter de $-R_{eff}$ pour atteindre ses objectifs. On aura ainsi : $B_t = B_{t-1} - R_{eff} > B_{t-1}$.
- $R_{eff} > 0$: l'entreprise pourrait verser des dividendes à ses actionnaires. La priorité est toutefois donnée à la diminution du stock de dette (ce procédé est rela-

tivement conforme à la réalité de l'endettement des PME comme nous aurons l'occasion de le voir dans la partie consacrée à l'analyse macro-économique : lorsque l'entreprise bénéficie d'une diminution des taux d'intérêt, elle préfère utiliser l'augmentation de sa solvabilité pour rétablir sa situation financière que pour financer de nouveaux investissements). On aura ainsi : $B_t = B_{t-1} - R_{eff} < B_{t-1}$ jusqu'à annulation complète de la dette. Les surplus seront versés aux actionnaires.

2.2 Résolution du programme de l'entreprise

2.2.1 Equations de base

Reprenons le programme ci–dessus. D'après le théorème de Modigliani et Miller, l'entreprise sera contrainte financièrement si elle l'est sur l'ensemble de ses sources de liquidités. Il faut donc ajouter aux contraintes précédentes la relation : $R_t \geqslant 0$. L'entreprise ne peut émettre de titres pour se financer, et est contrainte à faire appel aux banques. Nous noterons η_t la variable duale associée. Nous supposerons de plus que les actionnaires exigent de l'entreprise un rendement ρ_t pour détenir leurs parts entre les instants t et $t+1$, et que ρ_t dépend de facteurs non corrélés avec les autres variables du modèle. Le taux d'actualisation β_{t+1} utilisé par l'entreprise pour actualiser ses profits futurs en l'absence de contraintes financières est alors donné par $\beta_{t+1} = \frac{1}{1+\rho_t}$ et est ainsi fixé de manière exogène .

Le lagrangien Λ_t est alors défini par :

$$
\begin{aligned}
\Lambda_t \quad = \quad & V_t + \lambda_t * [K_t - (1-\delta) * K_{t-1} - \alpha_t I_t] \\
& + \mu_t * [Y_t - (1-\delta^{'}) * Y_{t-1} - H_t * (1-\alpha_t) * q_t] * I_t \\
& + \sum_{i=0}^{+\infty} \eta_{t+i} * \beta_{t+i} * R_{t+i}
\end{aligned}
$$

expression dans laquelle λ_t est le multiplicateur associé à la contrainte d'accumulation du capital, μ_t celui associé à l'accumulation de productivité, variables toutes deux non corrélées avec les autres données du problème.

Ceci peut se réécrire :

$$\begin{aligned}\Lambda_t &= E_t[\sum_{i=0}^{+\infty}\beta_{t+i} * (1+\eta_{t+i}) * R_{t+i}] \\ &\quad +\lambda_t * [K_t - (1-\delta) * K_{t-1} - \alpha_t I_t] + \mu_t * [Y_t - (1-\delta') * Y_{t-1} \\ &\quad -H_t * (1-\alpha_t) * q_t] * I_t\end{aligned}$$

sous cette forme, le sens économique de η_t apparait clairement : $1+\eta_t$ est la valeur que l'entreprise aurait si elle pouvait disposer d'une unité de liquiditésupplémentaire de la part de ses actionnaires à l'instant t. Dit autrement, η traduit l'intensité de la contrainte financière à laquelle l'entreprise en soumise : plus η est grand, plus l'entreprise subit de manque à gagner à ne pas pouvoir émettre de nouveaux titres.

Le programme de la firme correspond à l'annulation des dérivées premières de cette fonction :

$$\frac{\partial \Lambda_t}{\partial K_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial L_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial I_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial \alpha_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial B_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial Y_t} = 0$$

On montre alors les résultats suivants (voir ANNEXE 4) :

$$\frac{\partial V_t}{\partial K_t} = (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} + E_t[\beta_{t+1}\frac{\partial V_{t+1}}{\partial K_t}] = -\lambda_t$$

$$\lambda_t = -\frac{1}{1-\delta}\frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} - \frac{B_{t-1}}{1-\delta} * (1+\eta_t) * \frac{\partial i_{t-1}}{\partial K_{t-1}}$$

$$(1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = \lambda_t \alpha_t + \mu_t H_t (1-\alpha_t) * q_t$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial Y_t} = (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} + E_t[\beta_{t+1}\frac{\partial V_{t+1}}{\partial Y_t}] = -\mu_t$$

$$\mu_t = -\frac{1}{1-\delta'}\frac{\partial V_t}{\partial Y_{t-1}}$$

$$(1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t} = \lambda_t I_t - \mu_t H_t q_t I_t$$

il vient alors quand I_t est non nul :

$$\begin{aligned}(1-\sigma) * (1+\eta_{t+1}) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} &= -[\frac{1}{1-\delta}\frac{\partial V_{t+1}}{\partial K_t} + \frac{B_t}{1-\delta} * (1+\eta_{t+1}) * \frac{\partial i_t}{\partial K_t}] * \alpha_{t+1} \\ &\quad -\frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \frac{1}{1-\delta'}\frac{\partial V_{t+1}}{\partial Y_t} * (1-\alpha_{t+1})\end{aligned}$$

Or on peut montrer que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{t+1}}{\partial K_t} &= -\frac{\lambda_t + (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}}{\beta_{t+1}} \\ \frac{\partial V_{t+1}}{\partial Y_t} &= -\frac{\mu_t + (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}}{\beta_{t+1}}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}& (1-\sigma) * (1+\eta_{t+1}) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} \\ = \; & -\frac{B_t}{1-\delta} * (1+\eta_{t+1}) * \frac{\partial i_t}{\partial K_t} * \alpha_{t+1} + \cdots \\ & \frac{1}{\beta_{t+1}(1-\delta)}\left[\lambda_t + (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right] * \alpha_{t+1} \\ & + \frac{q_t H_t}{\beta_{t+1} * (1-\delta')} * \left[\mu_t + (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}\right] * (1-\alpha_{t+1})\end{aligned}$$

relation qui traduit l'arbitrage de l'entreprise entre investir aujourd'hui (t) et investir demain ($t+1$).

Notons de plus que le système (en λ_t et μ_t) :

$(1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = \lambda_t \alpha_t + \mu_t q_t H_t (1-\alpha_t)$

$(1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t} = \lambda_t I_t - \mu_t q_t H_t I_t$

nous donne :

$$\begin{aligned}
\mu_t &= \frac{1-\sigma}{q_t H_t I_t}[I_t * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} - \alpha_t * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}] \\
\lambda_t &= \frac{1-\sigma}{I_t}[I_t * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + (1-\alpha_t) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}]
\end{aligned}$$

qui donne finalement :

$$\begin{aligned}
& \tilde{\beta}_{t+1} * (1-\sigma) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} \qquad (1) \\
= \; & -\tilde{\beta}_{t+1} * \frac{B_t}{1-\delta} * \frac{\partial i_t}{\partial K_t} * \alpha_{t+1} + \frac{1}{(1-\delta)}[\frac{1-\sigma}{I_t}[I_t * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \cdots \\
& +(1-\alpha_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t} + (1-\sigma) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}] * \alpha_{t+1} + \cdots \\
& + \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \left[\frac{1-\sigma}{q_t H_t I_t}[I_t * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} - \alpha_t * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}] + (1-\sigma) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} \right] * (1-\alpha_{t+1})
\end{aligned}$$

avec :

$$\tilde{\beta}_{t+1} = \beta_{t+1} * \frac{(1+\eta_{t+1})}{(1+\eta_t)}$$

ensemble qui constitue l'équation d'Euler de notre problème.

Remarque : dans le cas sans optimisation par rapport à α ($\alpha = 1$) ni par rapport à Y, on retrouve bien l'équation d'Euler classique

$$\tilde{\beta}_{t+1} * \left[(1-\delta) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} + \frac{B_t}{1-\sigma} * \frac{\partial i_t}{\partial K_t} \right] = \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}$$

On aurait également pu écrire :

$(1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t} = -[\frac{1}{1-\delta} \frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} + \frac{B_{t-1}}{1-\delta} * (1+\eta_t) * \frac{\partial i_{t-1}}{\partial K_{t-1}}] * I_t + \frac{q_t H_t}{1-\delta'}[\frac{\partial V_t}{\partial Y_{t-1}}] * I_t$

et avec le même principe que précédemment :

$$
\begin{aligned}
& \tilde{\beta}_{t+1} * (1-\sigma) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial \alpha_{t+1}} \\
= \quad & -\tilde{\beta}_{t+1} * \frac{B_t}{1-\delta} * \frac{\partial i_t}{\partial K_t} * I_{t+1} + \frac{1}{\beta_{t+1}(1-\delta)}[\frac{1-\sigma}{I_t}[I_t * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \cdots \\
& +(1-\alpha_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}] + (1-\sigma) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}] * I_{t+1} - \frac{q_t H_t}{\beta_{t+1} * (1-\delta')}[\frac{1-\sigma}{q_t H_t I_t}[I_t * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} - \cdots \\
& -\alpha_t * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}] + (1-\sigma) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}] * I_{t+1}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Relation à laquelle il faut ajouter :

$$
\Longleftrightarrow \frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0 \tag{3}
$$

Ainsi que :

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & \frac{\partial R_t}{\partial B_t} + \tilde{\beta}_{t+1} * \frac{\partial R_{t+1}}{\partial B_t} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & E_t[\tilde{\beta}_{t+1}] = \frac{1}{1 + i_t + B_t \frac{\partial i_t}{\partial B_t}}
\end{aligned} \tag{4}
$$

L'effet de la contrainte financière est donc double : elle introduit d'une part un nouveau terme $\tilde{\beta}_{t+1} * B_t * \frac{\partial i_t}{\partial K_t}$ dans l'équation d'équilibre de l'entreprise traduisant l'augmentation des frais de dettes, et d'autre part modifie le taux auquel l'entreprise actualise ses profits futurs.

Endettement optimal

Le niveau d'endettement optimal de la firme est alors donné par :

$$\begin{aligned} B_t &= \frac{\frac{1}{E_t[\tilde{\beta}_{t+1}]} - 1 + i_t}{\frac{\partial i_t}{\partial B_t}} \\ &= \frac{E_t[\frac{1+\eta_t}{1+\eta_{t+1}} * \frac{1}{\beta_{t+1}}] - 1 + i_t}{\frac{\partial i_t}{\partial B_t}} \end{aligned}$$

Si l'on suppose β_{t+1} fixé de manière exogène :

$$B_t = \frac{E_t[\frac{1+\eta_t}{1+\eta_{t+1}}] * (1+\rho_t) - 1 + i_t}{\frac{\partial i_t}{\partial B_t}}$$

Dans l'hypothèse où $\frac{\partial i_t}{\partial B_t}$ ne dépend pas de B_t (ce qui sera notre cas comme nous le verrons dans la section suivante), on sait alors que l'endettement optimal est d'autant plus faible que le rapport $\frac{1+\eta_t}{1+\eta_{t+1}}$ est plus élevé. Quand la contrainte à laquelle est soumise l'entreprise est croissante au cours du temps, elle doit limiter au maximum son endettement. Ceci correspond en fait à l'arbitrage temporel de l'entreprise : d'après la signification économique de η vue plus haut, une contrainte plus forte signifie des opportunités plus fortes. L'entreprise a alors intérêt à attendre avant d'investir et de s'endetter. C'est le cas par exemple en période de récession économique, ce qui explique en partie la baisse de l'endettement des entreprises dans ces circonstances.

En l'absence de contraintes financières, $\eta = 0$ et on a :

$$B_t = \frac{\rho_t - i_t}{\frac{\partial i_t}{\partial B_t}}$$

On retrouve un des résultats découlant de Modigliani et Miller (1958) : l'entreprise ne s'endettera que si le taux d'intérêt demandé par les banques est plus faible que celui demandé par les actionnaires. Si $i_t > \rho_t$, l'entreprise non contrainte quant à son financement par actions ne s'endettera jamais, ou encore : pour être effective, la contrainte financière doit porter sur l'ensemble des canaux de liquidités.

2.2.2 Résolution explicite et mise en place du modèle

Pour résoudre explicitement le système d'équations $(1 \cdots 4)$, nous allons faire un certain nombre d'hypothèses quant à la forme des différentes fonctions résumées dans le tableau 2.1.

TAB. 2.1 – Justification des hypothèses fondamentales du modèle

Hypothèse	**Justification**
$i_t = i_0 + i_1 * \frac{B_t}{q_t K_t}$	les deux premiers termes du développement limité de i_t pour $\frac{B_t}{q_t K_t} << 1 : i_t = \sum_{j=0}^{+\infty} i_{j,t} * \left(\frac{B_t}{q_t K_t}\right)^j$ sont une bonne approximation de la valeur exacte
$F(K_t, L_t, Y_t)$	une fonction de type Cobb-Douglas avec rendements
$= G_0 * Y_t^{\xi} K_t^{\gamma} L_t^{1-\gamma-\xi}$	d'échelle constants pour l'ensemble des trois
	variables évite l'introduction d'effets de taille non
	significatifs quand on se limite à l'étude des PME
	Évoqué par KWON et INUI (2003)

On a alors : $\Pi_t(K_t, L_t, I_t, \alpha_t, Y_t) = RB_0 * F_t^{\frac{1}{\mu}} - \omega_t L_t - q_t * I_t = \Pi_t(K_t, L_t, I_t, Y_t)$ pour tout t et en particulier :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t} = 0 \text{ pour tout } t$$

et les équations centrales (1) et (2) de la partie précédente sont alors considérablement plus simples :

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{t+1} * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} + C_t * \alpha_{t+1} &= \frac{1}{(1-\delta)} \left[\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right] * \alpha_{t+1} \\ &\quad + \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \left[\frac{1}{H_t}\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}\right] * (1-\alpha_{t+1}) \end{aligned}$$

$$C_t = \frac{1}{(1-\delta)} \left[\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right] - \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \left[\frac{1}{H_t}\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}\right]$$

avec :

$$\widetilde{\beta}_{t+1} = \frac{1}{1 + i_0 + 2i_1 \frac{B_t}{q_t K_t}}$$

et :

$$C_t = -\frac{\widetilde{\beta}_{t+1}}{q_t(1-\delta)(1-\sigma)} * i_1 * \frac{B_t^2}{K_t^2}$$

Comme dit plus haut, l'entreprise, pour effectuer ses prévisions, fait l'hypothèse de «continuité des conditions de financement» ce qui correspond à $\widetilde{\beta}_{t+1} = \widetilde{\beta}_t$ et $C_t = C_{t-1}$. Les différents termes sont alors déterminés.

Nous pouvons également expliciter les dérivées du profit :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = \frac{\gamma * RB_0}{\mu} * \frac{F_t^{\frac{1}{\mu}}}{K_t} = \frac{\gamma * p_t}{\mu} * \frac{F_t}{K_t}$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} = \frac{\xi * RB_0}{\mu} * \frac{F_t^{\frac{1}{\mu}}}{Y_t} = \frac{\xi * p_t}{\mu} * \frac{F_t}{Y_t}$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = \frac{(1-\gamma-\xi) * RB_0}{\mu} * \frac{F_t^{\frac{1}{\mu}}}{L_t} - \omega_t = \frac{(1-\gamma-\xi) * p_t}{\mu} * \frac{F_t}{L_t} - \omega_t$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = -q$$

où p_t est le prix de vente du bien.

Il vient alors le système (en $\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}$ et $\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}$) :

$$\begin{aligned}
C_t - \frac{\widetilde{\beta}_{t+1} q_{t+1}}{\alpha_{t+1}} &= \frac{1}{(1-\delta)}\left[-q_t + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right] + \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \left[-\frac{q_t}{H_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}\right] * \left(\frac{1-\alpha_{t+1}}{\alpha_{t+1}}\right) \quad (5) \\
C_t &= \frac{1}{(1-\delta)}\left[-q_t + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right] - \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \left[-\frac{q_t}{H_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}\right]
\end{aligned}$$

En soustrayant les deux lignes il vient :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} = \frac{(1-\delta^{'})}{H_t}(1 - \frac{q_{t+1}}{q_t} * \widetilde{\beta}_{t+1})$$

et aussi :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = q_t * [1 - \frac{q_{t+1}}{q_t} * \widetilde{\beta}_{t+1}(1-\delta) + \frac{(1-\delta)}{q_t} * C_t] = q_t D_t$$

avec $D_t = 1 - \frac{q_{t+1}}{q_t} * \widetilde{\beta}_{t+1}(1-\delta) + \frac{(1-\delta)}{q_t} * C_t$.

Nous savons de plus que :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = \frac{\gamma * p_t}{\mu} * \frac{F_t}{K_t}$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} = \frac{\xi * p_t}{\mu} * \frac{F_t}{Y_t}$$

et :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = \frac{(1-\gamma-\xi) * p_t}{\mu} * \frac{F_t}{L_t} - \omega_t$$

où p est le prix de vente du produit.

On a alors les relations :

$$\begin{aligned}
\frac{p_t}{\mu} * F_t &= \frac{K_t}{\gamma} * q_t D_t \\
\frac{p_t}{\mu} * F_t &= \frac{Y_t}{\xi} * \frac{(1-\delta^{'})}{H_t}(1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}\widetilde{\beta}_{t+1}) \\
\frac{p_t}{\mu} * F_t &= \frac{\omega_t}{1-\gamma-\xi} * L_t
\end{aligned}$$

qui conduit à l'équation des courbes isoquantes de l'entreprise :

$$\begin{aligned}
\frac{Y_t}{K_t} &= \frac{q_t H_t * \frac{\xi}{\gamma} * D_t}{(1-\delta^{'}) * (1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}\widetilde{\beta}_{t+1})} = \mathbb{C}_t \\
\frac{L_t}{K_t} &= \frac{(1-\gamma-\xi) * q_t D_t}{\gamma \omega_t} = \mathbb{N}_t \\
\frac{L_t}{Y_t} &= \frac{(1-\gamma-\xi) * (1-\delta^{'}) * (1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}\widetilde{\beta}_{t+1})}{H_t \xi \omega_t} = \mathbb{Q}_t
\end{aligned} \tag{6}$$

On constate que l'endettement intervient dans les Taux Marginaux de Substitution Technique (TMST) entre les facteurs. Ceci est une conséquence directe du canal large du crédit : le capital sert de caution aux emprunts de l'entreprise. Un niveau de capital élevé (et donc une valeur des autres facteurs plus faible) diminue le coût de la dette. Réciproquement, quand les intérêts demandés par les banques augmentent, l'entreprise doit hausser son niveau de capital pour éviter une trop grande servitude. Un des effets d'une hausse des taux d'intérêt bancaires est ainsi de favoriser l'investissement en capital au détriment des autres types d'investissements.

Dans un cadre de concurrence monopolistique, on sait alors que la valeur des ventes de l'entreprise est donnée par $p_t * F_t = RB_0 * F_t^{\frac{1}{\mu}}$ avec $\mu = \frac{b_1}{b_1 - 1}$ et $RB_0 = b_0^{1-\frac{1}{\mu}}$.

On a ainsi : $p_t * F_t = RB_0 * F_t^{\frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{\gamma} * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} * K_t = \frac{\mu * q_t D_t}{\gamma} * K_t$ et on a la valeur optimale de K pour l'entreprise :

$$K_t = \left(\frac{\gamma * RB_0}{\mu * q_t D_t} * G_0^{\frac{1}{\mu}} * \mathbb{C}_t^{\frac{\xi}{\mu}} * \mathbb{N}_t^{\frac{1-\gamma-\xi}{\mu}} \right)^{b_1}$$

qui détermine le niveau de capital optimal de la firme' Y_t et L_t se déduisent par l'expression des courbes isoquantes :

$$\begin{aligned}
Y_t &= \mathbb{C}_t * \left(\frac{\gamma * RB_0}{\mu * q_t D_t} * G_0^{\frac{1}{\mu}} * \mathbb{C}_t^{\frac{\xi}{\mu}} * \mathbb{N}_t^{\frac{1-\gamma-\xi}{\mu}} \right)^{b_1} \\
L_t &= \mathbb{N}_t * \left(\frac{\gamma * RB_0}{\mu * q_t D_t} * G_0^{\frac{1}{\mu}} * \mathbb{C}_t^{\frac{\xi}{\mu}} * \mathbb{N}_t^{\frac{1-\gamma-\xi}{\mu}} \right)^{b_1}
\end{aligned}$$

On montre enfin que :

$$\alpha_t = \frac{(1-\delta') * Y_{t-1} + q_t H_t * I_t - \mathbb{C}_t * (1-\delta) * K_{t-1}}{(\mathbb{C}_t I_t + q_t H_t I_t)}$$

Remarques importantes :

1. remarquons dans ces équations la présence du terme q_{t+1}, que l'entreprise est dans l'obligation d'estimer en fonction de l'information disponible en t. Elle pourrait le faire simplement à partir de la valeur q_t connue et du taux d'inflation $r_{ifl,t}$: $q_{t+1} = (1 + r_{ifl,t}) * q_t$, mais nous ne l'utiliserons pas dans cette première version du simulateur ;
2. il est possible que $K_t < K_{t-1}$ et de mêne pour Y. Dans ce cas l'entreprise est obligée de désinvestir et de vendre une partie de ses actifs. Nous supposerons qu'elle le fait au prix d'achat, sans coût supplémentaire.

2.2.3 Coûts d'ajustement

Nous aurions pu introduire dans le modèle des coûts d'ajustement similaires à ceux vus dans l'ANNEXE 2. Pour tenir compte des caractéristiques différentes des investissement en capital et en R&D, nous aurions été amenés à considérer une fonction de coûts d'ajustement du type :

$$G_t(I_t, K_t) = \frac{1}{2} * b_K * K_t * (\frac{\alpha_t * I_t}{K_t})^2 + \frac{1}{2} * b_R * Y_t * (\frac{(1-\alpha_t) * I_t}{Y_t})^2$$

Nous n'avons pas introduit ces coûts car Crépon (2001) a montré sur données françaises que leurs signes étaient contraires à ceux attendus et que leurs valeurs restaient non significatives. Leur prise en compte n'améliorerait pas forcément la qualité du modèle, en rendrait la compréhension plus délicate et compliquerait considérablement les calculs (il n'est alors plus possible d'obtenir une définition analytique des différentes variables).

Au global, leur prise en compte, si elle est intéressante sur le plan conceptuel, aurait compliqué inutilement le simulateur.

2.3 Programmation du simulateur

2.3.1 Considérations générales sur la structure du modèle

Comme nous l'avons dit plus haut, le modèle doit prendre en compte à la fois des valeurs passées (réalisées et parfaitement connues), des valeurs présentes (l'étendue de leur connaissance est limitée par la rationalité affectée à l'entreprise ou ses capacités de collecte d'information) et enfin des valeurs futures (anticipées en fonction de l'information disponible).

TAB. 2.2 – Nature temporelle des variables et modélisation associée

Aspect temporel	Nature de la variable	Modélisation
Passée	Déterminée et diffusée à tous les agents	Valeur réalisée
Présente	Déterminée mais non nécessairement diffusée à tous les agents	Routine
Future	Inconnue (évaluée)	Programme

- **Routine :** Il s'agit de fonctions collectant des informations relatives aux entreprises pour les confronter entre-elles. La confrontation des offres des entreprises avec la demande des clients sur le marché des biens en est un exemple. Ces fonctions peuvent être déterministes, stochastiques ou même «hybrides» sans que cela change fondamentalement la structure du modèle. La limitation de la rationalité des agents quant aux informations présentes peut alors être très simplement mise en place : une routine tournant avant le programme de prévision des agents fera des variables qu'elle traite des variables déterminées au même titre que les variables passées. Aucune hypothèse particulière ne devra être faite pour prendre en compte ces variables dans les prévisions des agents. En revanche, une routine exécutée après le programme des agents aura pour conséquence une utilisation de variables imparfaites dans leur évaluation : les agents seront alors contraints à faire un certain nombre d'hypothèses (continuité des valeurs, continuité des tendances, ou même limitation à la dernière valeur réalisée) pour pouvoir lancer leur programme.
- **Programme :** il s'agit d'une fonction collectant l'ensemble des données relatives aux environnements externes et internes de l'entreprise, après passage des éventuelles routines. Elle réalise les prévisions de l'entreprise en fonction d'un

objectif fixé et conditionnellement à l'information disponible (pondération en cas d'incertitude quantifiée). Cette fonction est presque obligatoirement déterministe (l'entreprise prend une et une seule décision, même si celle-ci peut être a posteriori modifiée).

2.3.2 Simulateur

Structure générale

Le simulateur a été programmé en Visual Basic sous Microsoft Excel, pratiquement en mode *orienté objet* (de nombreuses limites sont imposées en la matière par le langage de programmation, en particulier l'absence de pointeurs).

– Deux types principaux sont instanciés pour contenir l'ensemble des variables du modèle :

- Un type `ENTERPRISE` contenant toutes les informations relatives à une entreprise (les variables K, L, etc... mais aussi les paramètres associés δ, w, etc...) ;

- Un type `MARKET` contenant toutes les informations relatives au marché des biens ainsi qu'à celui des capitaux.

– 2 routines de démarrage (avant la mise en compétition des entreprises) :

- Une routine d'initialisation aléatoire des paramètres et variables en fonction des espérances et variances évaluées lors des tests, `Enterprise_generator` ;

- Une routine générant les évolutions des paramètres lors de la phase initiale de recherche, `First_phase` ;

– 2 routines préalables (au sens précisé dans la sous-section précédente) :

- Une recopie des résultats de l'instant t dans l'instance en $t+1$ des objets ;

- Une routine d'évolution des marchés des biens et des marchés financiers, `Vari` ;

– Le programme de prévision de l'entreprise : il s'agit du code associé au programme évoqué plus haut.

– 3 routines postérieures principales, programmées suivant le processus précisé plus haut :

- Une routine de recherche aléatoire, `Research` ;

- Une routine de confrontation sur le marché des biens, `Market_result` ;

- Une routine de calcul du revenu effectif et de la dette, `Effect_result` ;

auxquelles s'ajoutent les routines d'affichage, de prise en compte des erreurs et exceptions, d'évaluation des conditions de sortie etc...

Conditions de sortie

Une entreprise peut être contrainte d'arrêter son activité. Dans le simulateur, une entreprise sera éliminée si :

- sa part de marché devient inférieure à 1% de la part «de partage équitable du marché» égale à $\frac{1}{N}$ où N est le nombre d'entreprises : elle est absorbée par la concurrence ;
- son profit est négatif pendant plus de 3 périodes successives : les actionnaires préfèrent se désengager ;
- le taux d'intérêt sur sa dette est d'au moins 5% supérieur au taux sans risque : l'entreprise est en cessation de paiement.

Notons bien que les coûts de faillite ne sont pas explicitement pris en compte dans le programme de l'entreprise. Il est possible de les introduire suivant un schéma voisin de celui utilisé par Bond et Meghir (1994), ou en introduisant une nouvelle condition de solvabilité : $\frac{B}{K} < \left(\frac{B}{K}\right)_{\max}$. Le lecteur trouvera un exemple de l'utilisation de ce type de contrainte dans Rosenwald (2001) (encadré 2).

Grandeurs calculées

En plus des variables directes du modèle (K, L, I, etc...), nous allons calculer les ratios suivants :

- $\frac{q_t I_t}{\Pi_t}$: ce ratio de taux d'investissement relativement à la richesse générée par l'exploitation de l'entreprise traduit l'importance accordée par l'entreprise à ses perspectives comparativement à ses performances immédiates. Comme nous le verrons plus loin, un des objectifs de l'État est d'augmenter ce ratio ;
- $\frac{B_t}{q_t K_t}$: rapport dette/capital classique, ce ratio intervient aussi dans les intérêts payables sur la dette, le capital servant de collatéral dans le cadre du canal large du crédit ;

- $\frac{Y_t}{q_t H_t K_t}$: ce ratio traduit l'importance accordée à la recherche relativement au capital physique de l'entreprise.
- $\sum_{i=1}^{N_t} m_i^2$, somme des carrés des parts de marché, appelé indice de Herfindhal, traduisant la diversité en terme d'offre du marché.

2.4 Calibration du simulateur

2.4.1 Statistique de test

Il faut maintenant estimer la valeur des différents coefficients des équations ci-dessus à partir des données réelles fournies par Statistique Canada. On peut montrer (calculs détaillés fournis dans l'ANNEXE 5) que l'équation à évaluer économétriquement est :

$$fk_t - \alpha_1 * yk_t - \alpha_2 * yb_t - \alpha_3 * bk_{1,t} + \alpha_4 * bk_{2,t} - \alpha_5 * bk_{3,t} = a_{i,t}$$

où les variables du modèle sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
fk_t &= \frac{p_t F_t - \omega_t L_t}{q_t K_t} \\
yk_t &= \frac{Y_t}{K_t} = \frac{q_t Y_t}{q_t K_t} \\
yb_t &= \frac{B_t}{q_t K_t} * \frac{Y_t}{K_t} = \frac{B_t}{q_t K_t} * \frac{q_t Y_t}{q_t K_t} \\
bk_{1,t} &= \frac{B_t}{q_t K_t} \\
bk_{2,t} &= (\frac{B_t}{q_t K_t})^2 \\
bk_{3,t} &= (\frac{B_t}{q_t K_t})^3
\end{aligned}$$

les paramètres à estimer, supposés constant au cours du temps, étant :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1-\delta'}{q_t H_t}\left(1 - \frac{1}{1+i_0} * \frac{q_{t+1}}{q_t}\right) \\
\alpha_2 &= 2\frac{q_{t+1}}{q_t}\frac{1-\delta'}{q_t H_t}\frac{1}{1+i_0}\frac{i_1}{1+i_0} \\
\alpha_3 &= 2 * (1-\delta) * \frac{q_{t+1}}{q_t} * \frac{i_1}{(1+i_0)^2} \\
\alpha_4 &= \frac{1}{(1-\sigma)} * \frac{i_1}{1+i_0} \\
\alpha_5 &= 2 * \frac{1}{(1-\sigma)} * \frac{i_1^2}{(1+i_0)^2}
\end{aligned}$$

Les termes $a_{i,t}$ et $b_{i,t}$ sont des paramètres inobservables d'espérance nulle en t, fonction d'effets individuels et temporels. Nous ferons dans cette évaluation l'hypothèse de marchés parfaits $\mu = 1$ en raison de l'indisponibilité de données suffisantes (ceci permet d'identifier $\frac{p_t F_t - \mu\omega_t L_t}{q_t K_t} = \frac{p_t F_t - \omega_t L_t}{q_t K_t}$ comme la marge bénéficiaire brute sur les ventes fournie par Statistique Canada).

Les calculs numériques à partir des séries statistiques sont effectués par la Méthode des Moments Généralisés (MMG) dont le principe est détaillé dans l'ANNEXE 6. La base de donnée utilisée est construite à partir de sources différentes fournies par Statistique Canada. Les détails de ces opérations sont donnés en ANNEXE 7.

2.4.2 Valeurs numériques

Comme le fait Crépon (2001), nous prendrons $\delta = 0,06$ et $\delta' = 0,15$ comme Mairesse et Sassenou (1993).

En suivant Malerba (2001) nous prendrons également $\sigma = 0,1$.

Les calculs sont effectués avec le logiciel STATA sur l'équation suivante :

$$fk_t = \beta * fk_{t-1} + \alpha_1 * yk_t + \alpha_2 * yb_t + \alpha_3 * bk_{1,t} - \alpha_4 * bk_{2,t} + \alpha_5 * bk_{3,t} + a_{i,t}$$

Les résultats obtenus pour l'estimateur de premier niveau des moments généralisés sont donnés dans le tableau 2.3 :

TAB. 2.3 – Calibration du simulateur par GMM

Paramètre	**Estimé**	**Erreur standard**[2]
β	0,0000615	0,0001742
α_1	0,0018939	0,016441
α_2	0,0370368	0,0219977
α_3	0,0340584	0,029585
α_4	-0,019057	0,0139833
α_5	0,001827	0,0014429
$a_{i,t}$	0,0057388	0,002671

Notons tout d'abord que les signes des différents coefficients sont bons et que le terme β est effectivement non significatif comme on s'y attendait. Les erreurs sont très importantes, parfois beaucoup plus que la valeur du paramètre en lui-même (pour α_1 en particulier). Crépon (2001) a lui aussi constaté ce phénomène sur ses résultats et est parvenu à limiter les erreurs en laissant varier les coefficients au cours du temps. Les résultats finaux obtenus avec ces modèles à coefficients variables restent toutefois du même ordre de grandeur que ceux obtenus avec coefficients constants. On peut donc raisonnablement admettre que nos résultats, bien que présentant des erreurs importantes, sont de bonnes évaluations.

2.4.3 Calibration

Il s'agit maintenant de calculer les valeurs des différents paramètres à partir de ces observations. Les définitions des différents coefficients nous permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1-\delta'}{q_t H_t}(1 - \frac{1}{1+i_0} * \frac{q_{t+1}}{q_t}) = 0,0018939 \ (1) \\ \alpha_2 = 2\frac{q_{t+1}}{q_t}\frac{1-\delta'}{q_t H_t}\frac{1}{1+i_0}\frac{i_1}{1+i_0} = 0,0370368 \ (2) \\ \alpha_3 = 2 * (1-\delta) * \frac{q_{t+1}}{q_t} * \frac{i_1}{(1+i_0)^2} = 0,0340584 \ (3) \\ \alpha_4 = \frac{1}{(1-\sigma)} * \frac{i_1}{1+i_0} = 0,019057 \ (4) \\ \alpha_5 = 2 * \frac{1}{(1-\sigma)} * \frac{i_1^2}{(1+i_0)^2} = 0,001827 \ (5) \end{cases}$$

– De (4) et (5) on déduit deux évaluation distinctes de $\frac{i_1}{1+i_0}$:

$$(4) \quad \Longrightarrow \quad \frac{i_1}{1+i_0} \approx 0,017$$
$$(5) \quad \Longrightarrow \quad \frac{i_1}{1+i_0} \approx 0,028$$

Les ordres de grandeur sont bien comparables et nous prendrons :

$$\frac{i_1}{1+i_0} \approx 0,02$$

où nous pourrons supposer que la totalité des erreurs de mesure porte sur i_1[3].

– (2) permet d'écrire :

$$\frac{q_{t+1}}{q_t}\frac{1}{q_t H_t}\frac{1}{1+i_0}\frac{i_1}{1+i_0} \approx 0,022$$

soit :

$$\frac{q_{t+1}}{q_t}\frac{1}{q_t H_t}\frac{1}{1+i_0} \approx 1.1$$

– De plus (1) donne :

$$\frac{1}{q_t H_t}(1 - \frac{1}{1+i_0} * \frac{q_{t+1}}{q_t}) \approx 0,0022$$

Or

$$\frac{1}{q_t H_t}(1 - \frac{1}{1+i_0} * \frac{q_{t+1}}{q_t}) = \frac{1}{q_t H_t} - \frac{1}{q_t H_t}\frac{1}{1+i_0} * \frac{q_{t+1}}{q_t} \approx \frac{1}{q_t H_t} - 1,1 \approx 0,0022$$

Il vient enfin l'évaluation :

$$q_t H_t \approx 0,89$$

[3]J'ai contacté Monsieur Crépon pour avoir plus d'informations sur ses recherches. Parmi ses explications se trouvait une remarque notant que le principal obstacle à l'utilisation des équations d'Euler comme instrument de prévision tenait en la mesure de i_1, propre à chaque entreprise et pratiquement impossible à déterminer.

Ce résultat peut être vérifié à partir de l'équation (3). On a en effet :

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= 2\frac{q_{t+1}}{q_t}\frac{1-\delta'}{q_t H_t}\frac{1}{1+i_0}\frac{i_1}{1+i_0} = 0,0370368 \ (2)\\ \alpha_3 &= 2*(1-\delta)*\frac{q_{t+1}}{q_t}*\frac{i_1}{(1+i_0)^2} = 0,0340584 \ (3)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{1-\delta}{1-\delta'} * q_t H_t \approx 0,92 \Longrightarrow \frac{1-\delta}{1-\delta'} \approx 1.03$$

– Or, par choix de δ et de δ' :

$$\frac{1-\delta}{1-\delta'} = \frac{0,94}{0,85} \approx 1,1$$

Ces premiers résultats obtenus sont donc bien cohérent et conformes à ce qui était attendu. Il faut maintenant déterminer les valeurs de ω, ξ et γ.

La valeur de ωL n'étant pas disponible de façon correcte et fiable pour les PME au niveau de finesse désiré, nous avons dû faire l'hypothèse de marché parfait permettant d'utiliser la marge brute sur les ventes. Ce faisant nous avons perdu toute information qui lui était relative ainsi qu'au rapport $\frac{\xi}{\gamma}$. Nous ne pouvons donc pas en faire d'évaluation mathématique directe, et devons nous contenter d'ordres de grandeurs déterminés à partir d'observations macro-économiques moyennes sur la période 1990-2001. Ayant fait l'hypothèse de paramètres constants au cours du temps, nous conserverons cette évaluation dans la suite des simulations.

Nous allons devoir pour cela utiliser les valeurs macroéconomiques du graphe 2-4 qui donnent les ordres de grandeurs :

$$\begin{aligned}\frac{Y}{qHK} &\approx 0,15\\ \frac{\omega L}{qK} &\approx 0,25\end{aligned}$$

On sait de plus que :

$$\frac{Y_t}{q_t H_t K_t} = \frac{\frac{\xi}{\gamma} * D_t}{(1-\delta') * (1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}\widetilde{\beta}_{t+1})}$$
$$\approx \frac{\frac{\xi}{\gamma}}{(1-\delta')} * \frac{1 - \beta_{t+1}(1-\delta) - \frac{\beta_{t+1}}{(1-\sigma)} * i_1 * \frac{B_t^2}{q_t^2 K_t^2}}{1-\beta_{t+1}}$$

Nous verrons lors de l'analyse des données macroéconomiques que les ordres de grandeur observés sont :

$$i_1 * \frac{B_t}{q_t K_t} \approx 0,03$$
$$\frac{B_t}{q_t K_t} \approx 0,8$$

On en déduit :

$$\frac{Y_t}{q_t H_t K_t} \approx \frac{\frac{\xi}{\gamma}}{0,85} * \frac{1 - \frac{1}{1+0,05} * 0,94 - \frac{1}{(1+0,05)(1-0,1)} * 0,03 * 0,8}{1 - \frac{1}{1+0,05}} \approx 2 * \frac{\xi}{\gamma}$$

soit finalement :

$$\frac{\xi}{\gamma} \approx 0,07$$

La littérature (Griliches, 1998 notamment) évalue souvent ce rapport aux alentours de 0,1.

On a aussi :

$$\frac{\omega_t L_t}{q_t K_t} = \frac{(1-\gamma-\xi) * D_t}{\gamma} \approx \frac{(1-\gamma-\xi)}{\gamma} * (1 - \frac{1}{1+i_0} * (1-\delta))$$

ce qui s'écrit numériquement :

$$\frac{\omega_t L_t}{q_t K_t} \approx \frac{(1-\gamma-\xi)}{\gamma} * (1 - \frac{1}{1+0,05} * 0,95) \approx 0,1 * \frac{(1-\gamma-\xi)}{\gamma}$$

et :

$$\frac{(1-\gamma-\xi)}{\gamma} \approx 2,5$$

Le système en γ et ξ conduit alors aux valeurs :

$$\begin{aligned} \gamma &\approx 0,28 \\ \xi &\approx 0,02 \end{aligned}$$

La valeur de ω (relativement à q) est alors estimée à partir de l'ordre de grandeur du rapport $\frac{\omega L}{qK} \approx 0,25$ et des observations macroéconomiques. Il vient sans difficulté :

$$\frac{\omega}{q} \approx 0,3$$

Bilan :

L'ensemble de cette sous-section peut être résumé dans le tableau suivant :

TAB. 2.4 – Estimation et ordres de grandeurs des différents paramètres du modèle

Paramètre	**Estimé**	**Origine**
$\frac{i_1}{1+i_0}$	0,02	Mathématique à partir des statistiques
qH	0,89	Mathématique à partir des statistiques
γ	0,28	Ordre de grandeur
ξ	0,02	Ordre de grandeur
$\frac{\omega}{q}$	0,3	Ordre de grandeur
δ	0,06	Littérature
δ'	0,15	Littérature
σ	0,1	Littérature

2.5 Validation sur données macroéconomiques

Le simulateur étant désormais paramétré, il convient d'en vérifier les prédictions. Ceci sera effectué en lançant plusieurs séries de simulations reprenant les observations macroéconomiques des différents paramètres (demande sur le marché des biens et taux d'intérêt sur les marchés financiers) puis en comparant les résultats avec les valeurs effectivement réalisées. Nous pourrons ensuite examiner différentes politiques publiques de soutien à l'innovation des PME, en comparant leurs efficacités suivant la conjoncture économique.

2.5.1 Données macro-économiques 1990-2001

Demande sur le marché des biens

Comme on le constate sur la figure 2-1, la période 1991-2000 a vu une croissance générale de l'industrie manufacturière canadienne (catégories SCIAN 31-33), malgré un léger ralentissement sur la période 1995-1998. Le rythme moyen de progression de la valeur ajoutée sur cette période est pratiquement de 9% par an (hors inflation). Cette croissance s'inscrit entre deux périodes de ralentissement économique au début des années 90 et en 2000-2001 (suite à l'éclatement de la bulle spéculative des industries de haute technologie). Les livraisons manufacturières fournissent une description satisfaisante de la demande exprimée sur le marché des biens manufacturiers. Elles suivent une progression semblable à celle de la valeur ajoutée.

Taux d'intérêt sur les marchés financiers

L'évolution des marchés financiers sur la même période est quant à elle déterminée par la donnée de i_0 et de i_1. La valeur de i_0 sera évaluée par celle du taux de rendement moyen des obligations du Canada à 10 ans donné sur la figure 2-2 :

Celle de i_1 est beaucoup plus délicate à estimer dans la mesure où il s'agit d'un facteur propre à chaque entreprise. Sur des données agrégées, on peut au mieux évaluer la sensibilité des banques à la «condition générale» des entreprises. Ceci

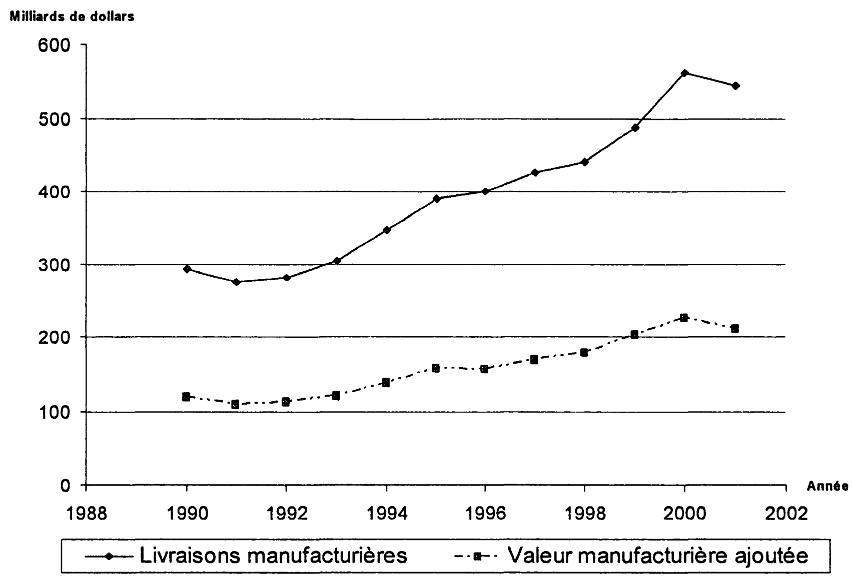

FIG. 2-1 – Production manufacturière et valeur manufacturière ajoutée, 1990-2001. *Source : Statistique Canada, base CANSIM.*

sera fait en considérant l'écart entre le taux moyen des emprunts bancaires obtenus par les entreprises et celui du taux d'escompte de la banque du Canada, tous deux pris en base 100 en 1990. La valeur absolue de i_1 est alors obtenue en observant les études effectuées sur le sujet dans d'autres pays qui placent la prime de financement $i_1 * \frac{B_t}{q_t K_t}$ aux alentours de 3% sur cette période (voir Crépon (2001) par exemple, sur données françaises). Connaissant la variation de $\frac{B_t}{q_t K_t}$ sur la période (voir figure 2-4) on en déduit une évaluation des variations de i_1 (voir figure 2-3) pour une valeur repère $i_1 * \frac{B_t}{q_t K_t} = 3\%$ en 1990.

Variables observées

Sur la même période, les variations observées des différentes grandeurs du modèle sont données sur la figure 2-4. On constate une forte baisse du taux d'endettement des industries ainsi qu'une augmentation de près de 100% du rapport $\frac{Y}{qHK}$. Notons enfin que la productivité moyenne du capital $\frac{pF}{qK}$ présente un profil beaucoup plus complexe.

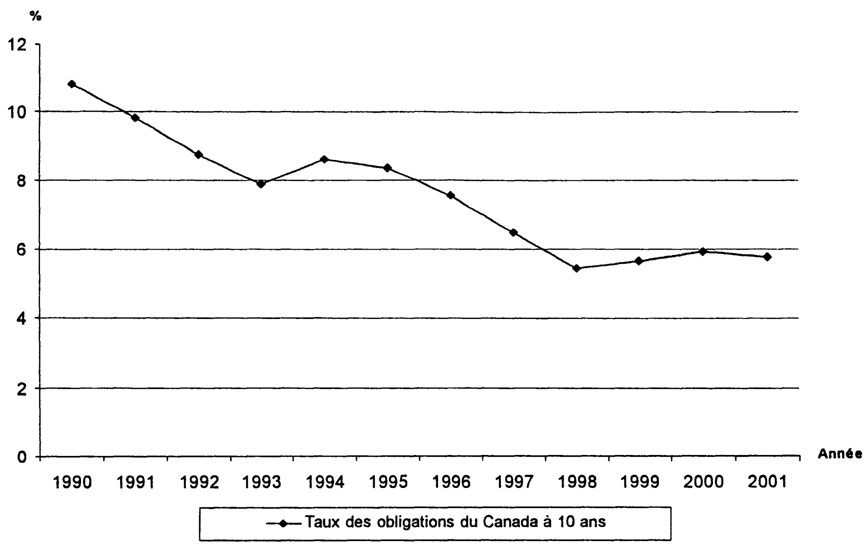

FIG. 2-2 – Evolution du taux de rendement annuel moyen des obligations du Canada à 10 ans. *Source : Statistique Canada, base CANSIM.*

2.5.2 Simulation de validation du modèle

Nous sommes maintenant en mesure de lancer une première simulation reprenant les tendances observées sur les données macroéconomiques ci-dessus.

- Croissance de la demande de 9% par an (on supposera l'élasticité constante) ;

- Décroissance de 0,4% par an du taux i_0 ;

- Croissance de i_1 de 2% par an.

Les valeurs de i_0 et i_1 seront définies de telle sorte que $\frac{i_1}{1+i_0} = 0,02$ et celles de q_t et H_t de telle sorte que $q_t H_t = 0,89$. Comme calculé plus haut on aura $\gamma = 0,28$ et $\xi = 0,02$. Les niveaux en $t = 0$ des différentes grandeurs du modèle (B, K, Y) seront choisies de telle sorte que leurs rapports soient en accord avec les grandeurs macroéconomiques :

$$\begin{aligned} \left(\frac{Y}{qHK}\right)_{t=0} &= 0,1 \\ \left(\frac{B}{qK}\right)_{t=0} &= 0,8 \end{aligned}$$

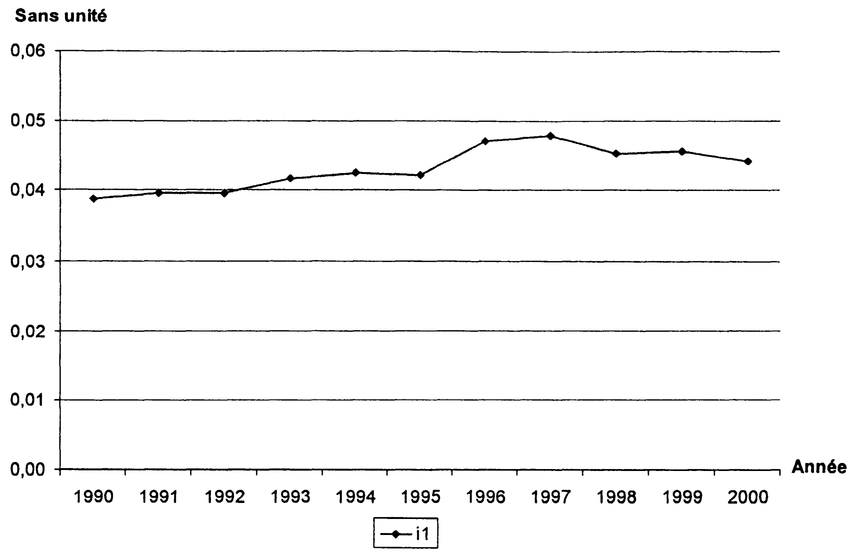

FIG. 2-3 – Variations du paramètre de taux d'intérêts i_1, normalisé avec $i_1 * \frac{B_t}{q_t K_t} = 3\%$ en 1990. *Source : Statistique Canada, base CANSIM, et calculs de l'auteur.*

N'ayant pas eu accès aux valeurs du travail L, nous avons dû faire l'hypothèse des marchés parfait, ce qui nous prive *de facto* de la valeur de μ. Nous utiliserons les résultats obtenus par Crépon (2001), à savoir une élasticité de la demande de 5, soit un coefficient de «mark-up» $\mu = \frac{b_1}{1-b_1} = \frac{5}{4} = 1,25$. Nous ne tiendrons pas compte de l'inflation dans cette première version du simulateur. Les résultats sont donnés sur la figure 2-5.

On constate que le sens d'évolution des variables est bien cohérent avec celui observé sur les données macroéconomiques. Deux différences importantes sont toutefois à noter :

1. La dette décroît beaucoup plus rapidement dans la simulation que dans la réalité. Ceci est dû au fait que dans la simulation, le niveau optimal de dette est nul (l'entreprise ne s'endette que si elle y est contrainte, et essaye de diminuer B au maximum, avant même de verser des dividendes à ses actionnaires). Or dans la réalité ce niveau optimal n'est pas nul comme nous l'avons vu au chapitre 1, pour des raisons économiques (le recours à la dette peut limiter les prélèvements fiscaux sur les dividendes par exemple) mais aussi stratégiques (l'entrepreneur préfère maintenir un certain niveau de dette plutôt que de voir

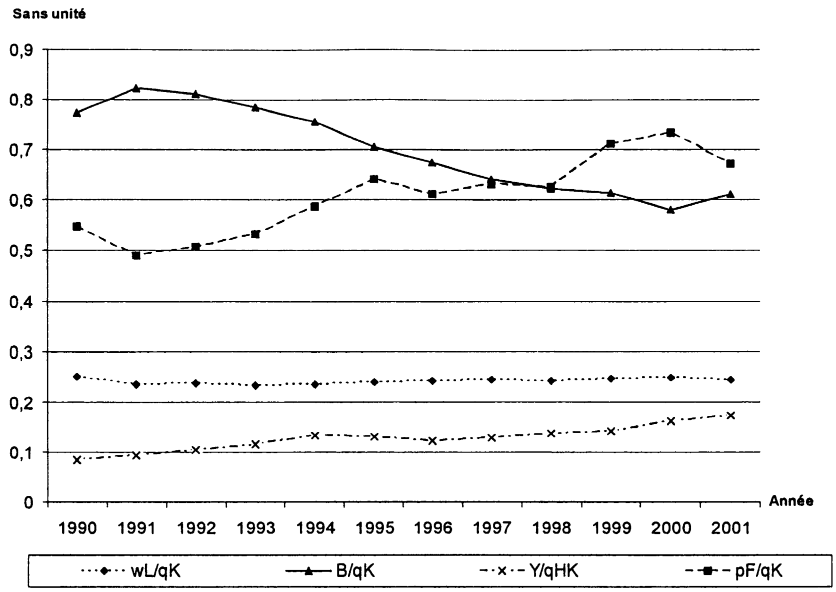

FIG. 2-4 – Evolution des variables du modèle, 1990-2001. *Sources : Statistique Canada, base CANSIM, enquête «Recherche et Développement Industriels», et calculs de l'auteur.*

entrer de nouveaux partenaires dans la gestion de l'entreprise). Il est possible de prendre artificiellement en compte ces questions dans le simulateur en modifiant le programme d'endettement de l'entreprise précisé dans la sous-section 2.1.7. Par exemple, pour un niveau d'endettement optimal égal à $0,3 * qK$ on aurait :

- $R_{eff} \leqslant 0$: l'entreprise est contrainte de s'endetter de $-R_{eff}$ pour atteindre ses objectifs. On aura ainsi : $B_t = B_{t-1} - R_{eff} > B_{t-1}$.

- $R_{eff} > 0$: l'entreprise se désendette sans jamais passer en dessous du niveau optimal $B_t = B_{t-1} - R_{eff}$ si $B_{t-1} - R_{eff} > 0,3 * qK$ et $B_t = 0,3 * qK$ sinon. Les surplus seront versés aux actionnaires.

Mais cette façon de faire, si elle permet de mieux approcher les valeurs réelles, n'apporte rien sur le plan de la compréhension économique. L'information $\left(\frac{B}{qK}\right)_{\text{optimal}}$ étant par ailleurs inaccessible, ce procédé ne sera pas implémenté dans le simulateur.

2. Les variations du rapport VA/Capital sont beaucoup plus simples dans la simulation que dans les analyses macroéconomiques. Cela s'explique par le fait

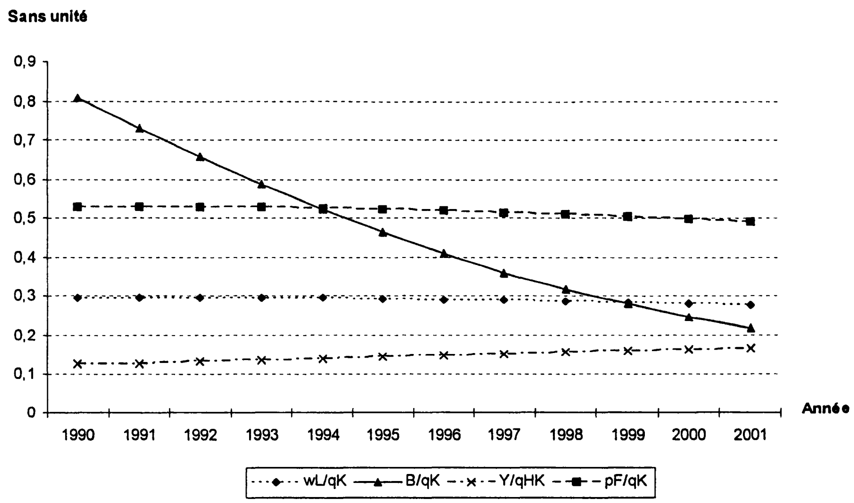

FIG. 2-5 – Évolution simulée des variables. *Source : Calculs de l'auteur.*

que dans la réalité la valeur ajoutée tient compte d'un taux de marge variable et de l'inflation non prise en compte dans cette version du simulateur.

2.6 Conclusion

Nous avons construit dans ce chapitre un modèle simple de simulation de comportment d'entreprise sous contraintes financières. Son paramétrage, effectué sur des observations canadiennes, conduit à des estimations de variables en accord avec les résultats disponibles dans la littérature. Les niveaux d'erreurs obtenus, bien que très importants, ont été constatés par d'autres analystes et n'en obèrent pas la validité. La simulation de validation, dont le but est l'adéquation aux valeurs macroéconomiques observées est très satisfaisante et confirme la cohérence du modèle.

Celui-ci n'a cependant pas la prétention d'être un outil de prévision (forecasting) exact, mais seulement un instrument d'analyse des grandeurs (sens de variation, tendances fondamentales...). Les fluctuations rapides, de même que celles issues de considérations strarégiques de court terme lui échappent presque totalement.

L'objet du prochain chapitre est de tester quelques politiques publiques en fonction de la conjoncture économique. Notons d'ores er déjà que la comparaison de ces politiques entre elles ne peut pas être effectuée dans le même temps et devra faire l'objet d'un travail complémentaire.

Chapitre 3

ANALYSE DE POLITIQUES PUBLIQUES DE SOUTIEN AU FINANCEMENT DE L'INNOVATION DES PME

3.1 Tour d'horizon des politiques publiques de soutien à l'investissement et à l'innovation - prise en compte dans la simulation

L'objet de cette section n'est pas de réaliser une étude extensive des moyens à la disposition des décideurs publics mais seulement d'en lister les grands traits fondamentaux nécessaires à la simulation. Elle est fondée sur des considérations canadiennes mais aussi françaises. Les simulations elles-mêmes seront réalisées dans la section suivante.

3.1.1 Politiques monétaires

En reprenant l'équation (2') du chapitre I, on constate que le coût d'usage du capital peut être réécrit :

$$\begin{aligned}
c_{K,t} &= \frac{q_t}{p_t}(1-\beta_{t+1}*(1-\delta)*\frac{q_{t+1}}{q_t}) \\
&= \frac{q_t}{p_t}(1-\frac{1}{1+i_t}*(1-\delta)*(1+\frac{q_{t+1}-q_t}{q_t})) \\
&\simeq \frac{q_t}{p_t}(1-(1-i_t)*(1-\delta)*(1+\frac{q_{t+1}-q_t}{q_t})) \\
&\simeq \frac{q_t}{p_t}(i_t+\delta-\frac{q_{t+1}-q_t}{q_t})
\end{aligned}$$

au premier ordre en i_t, δ, et $\frac{q_{t+1}-q_t}{q_t}$. Le coût du capital est ainsi une fonction croissante des taux d'intérêt i. Cette propriété observée sur notre modèle est admise dans un cadre beaucoup plus général et même renforcée dans celui du canal large du crédit : à l'effet direct d'une hausse des taux s'ajoute en effet celui de la baisse de la valeur des actifs de l'entreprise, et ainsi la hausse du terme $i_1\frac{B_t}{q_tK_t}$ de prime de financement. Le bas niveau des taux d'intérêt favorise ainsi doublement les entreprises souhaitant investir.

Mais l'impact de la politique monétaire sur la vie économique dans son ensemble ne se limite pas à la question de l'investissement des entreprises. Comme le note la Banque du Canada dans son document d'information sur la politique monétaire (2004), «l'objectif ultime [de la politique monétaire est] le maintien d'un taux d'inflation bas et stable $[\cdots]$ nécessaire pour garder l'économie dans la meilleure trajectoire possible menant à une expansion soutenue et à la création d'emplois». Les interventions de la Banque du Canada, fortement expansionnistes comme le note le secrétariat de l'OMC (2003), se font par l'intermédiaire du taux cible de financement à un jour guidant les taux des prêts à très court terme entre les banques, et visent avant tout le soutien de la consommation. L'instrument des taux d'intérêt ne peut donc pas être directement utilisé pour aider les entreprises.

Nous testerons l'effet des politiques monétaires avec le simulateur en faisant varier le terme i_0 des taux d'intérêt.

3.1.2 Politiques de soutien au crédit bancaire

Le concept fondamental de ces politiques est l'absorption par l'État d'une part du risque normalement assumé par la banque prêteuse. L'effet est une diminution de la prime de taux d'intérêt $i_1 * \frac{B_t}{q_t K_t}$. Ceci peut se faire selon des modalités variées parmi lesquelles la caution des emprunts (en cas de défaillance de l'entreprise, l'État rembourse tout ou partie de l'emprunt qu'elle avait souscrit) ou le cofinancement de projet (l'État accorde un emprunt à l'entreprise, à un taux souvent préférentiel).

Nous testerons l'effet des politiques de soutien au crédit bancaire en faisant varier la valeur de i_1, considéré comme indice traduisant la sensibilité au risque des banques.

3.1.3 Politiques d'investissement public

On peut considérer schématiquement qu'il existe deux finalités aux investissements publics : la première est une utilité directe d'injection de liquidités dans l'économie, historiquement du type «relance par les grands projets» ou «État entrepreneur». Ceci correspond par exemple à l'heure actuelle au financement sur deniers publics de grandes infrastructures de réseau soutiens à la *nouvelle économie.* Comme le note le rapport Kergueris (2002) reprenant une étude menée par l'OCDE : «[il existe] économétriquement, une relation positive entre l'investissement public infrastructurel et l'investissement autre qu'infrastructurel». Cette corrélation est renforcée par la deuxième finalité des investissements publics qui est le soutien «logistique» aux activités productives. La qualité des infrastructures favorise l'économie dans son ensemble, et à l'opposé leur déficit peut être un frein au développement.

Du point de vue de la recherche, l'État joue également un rôle financier important, que ce soit directement (CNRS en France, INRS et CNRC au Canada) ou indirectement par l'intermédiaire de laboratoires universitaires subventionnés. La recherche possèdant les caractéristiques d'un bien public doit pour partie bénéficier de l'aide publique. La principale limitation à ces politiques est d'ordre budgétaire : des investissements publics trop importants creusent les déficits et forcent l'État à augmenter les niveaux d'imposition, provoquant une baisse de l'investissement des entreprises selon le mécanisme vu plus haut.

Le graphe 3-1 présente la comparaison de l'investissement public en R&D entre cinq grands pays industrialisés. On y constate un désengagement généralisé de la puissance publique vis à vis de la recherche, ce qui suppose en corollaire que les besoins financiers de nombreux laboratoires sont en augmentation sur la période.

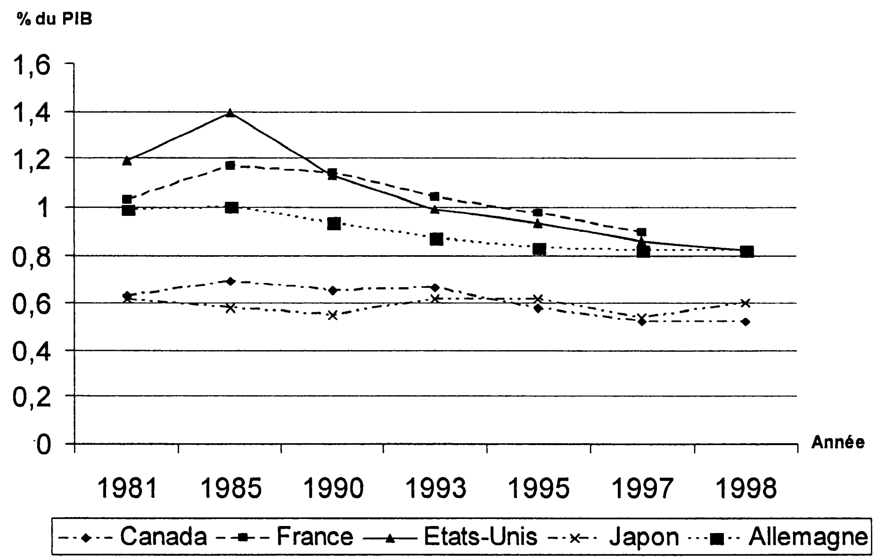

FIG. 3-1 – Part du PIB investie par l'État en RD. *Source : OCDE (2000)*

Nous testerons l'effet de ces politiques en faisant varier le montant dont l'entreprise doit s'endetter pour soutenir son expansion : celui-ci vaut $-R_t$ (quand R_t est négatif) sans aide publique et $-(1-\Upsilon)R_t$ lorsque l'entreprise en bénéficie.

3.1.4 Limites des politiques conjoncturelles

La stabilité de l'environnement macroéconomique est généralement considérée comme un des déterminants les plus importants d'un investissement soutenu. Comme le note la Direction des Affaires Économiques et Financières de la Commission Européenne citée dans Kergueris (2002) : «Des politiques macroéconomiques axées sur la stabilité sont indispensables à la création d'un environnement porteur pour l'investissement et la croissance économique». Ce simple constat a en fait une portée très large, car il remet d'emblée en cause une bonne partie des politiques dites *conjoncturelles* (fiscales, monétaires ou autres).

Quelle que soit la politique de soutien à l'investissement choisie par un gouvernement, elle n'aura de portée réelle que dans la mesure où les investisseurs peuvent en anticiper les conséquences à long terme (au sens du terme des projets financés). Des politiques plus «opportunistes» risquent de faire apparaître des effets d'anticipation des investissements *en eux-mêmes* : une mesure temporaire accordant une réduction d'impôts aux entreprises réalisant un projet de type défini va effectivement «doper» les investissements, mais ceci de façon totalement artificielle et au détriment des investissements futurs postérieurs à la mesure. Ces effets de type aléa moral peuvent être tellement importants que des décisions *a priori* intéressantes sont finalement sans effet.

Le modèle ne nous permettra pas de vérifier la validité de telles considérations.

3.1.5 Politiques ne pouvant être testées

Nous ne pourrons tester certaines politiques dans le cadre de notre modèle. L'ensemble des politiques réglementaires en particulier, qui peuvent favoriser l'investissement par une stimulation de la concurrence et une sélection des meilleurs projets ne peut être testé correctement.

Les politiques fiscales, pourtant très souvent utilisées par les différentes puissances publiques ne peuvent également être étudiées correctement dans la mesure où l'effet de l'impôt n'est pas explicitement pris en compte dans le programme de l'entreprise.

3.2 Simulation de politiques publiques

Testons maintenant les politiques que nous venons de définir. Notons avant toutes choses que le simulateur peut être utilisé de deux façons distinctes :

1. Pour simuler des entreprises à partir d'une situation existante ($K \neq 0$, $Y \neq 0$, $B \neq 0$). Il faut alors s'assurer que les rapports entre ces grandeurs vérifient les conditions définies au 2.2.2. Tout se passe alors comme si l'état de départ avait été atteint par une simulation du type précédent. C'est cette approche que nous avons utilisée dans le test de validation du simulateur ;
2. Pour simuler des entreprises en démarrage, à partir d'une situation où celles-ci

ne disposent d'aucune ressource ($K = 0$, $Y = 0$, $B = 0$). On attribue alors un montant de capital de risque initial et la simulation se déroule comme défini plus haut. C'est cette façon de faire que nous allons utiliser dans cette section. Le montant VC et le niveau absolu de demande b_0 seront choisis de telle sorte que le niveau de ressources atteint par les entreprises après la période de recherche initiale soit sous-optimal : les firmes sont ainsi obligées d'investir massivement pour assurer leur entrée sur le marché (achat des machines par exemple), ce qui correspond dans les grandes lignes à la réalité économique.

Remarque : Toutes les simulations ont été effectuées sur un panel de 50 entreprises sur 30 périodes (10 périodes préliminaires et 20 de compétition). Les valeurs présentées sur les figures correspondent aux moyennes arithmétiques des simulations. Elles auraient également pu être obtenues par simulation d'une seule entreprise «moyenne» correspondant à l'individu représentatif tel que défini par Statistique Canada.

3.2.1 Politiques monétaires

Dans l'hypothèse où l'objectif de la politique monétaire est le soutien à la consommation des ménages et le maintien d'une inflation faible, une croissance de la demande est accompagnée d'une hausse des taux d'intérêt (qui semble d'ailleurs se dessiner actuellement aux Etats-Unis avec la reprise généralisée des marchés). Une baisse de la consommation est en revanche généralement contrée par une baisse des taux (période 2001-2003 en Europe et en Amérique du Nord par exemple).

Nous allons ainsi effectuer les séries de simulation suivantes, à partir d'une situation $i_0 = 5\%$:

Croissance de la demande

Le tableau 3.1 présente les tests effectués.

Nous supposerons la sensibilité au risque des banques i_1 constante et égale à 0,021, valeur estimée plus haut à partir des grandeurs macroéconomiques.

TAB. 3.1 – Séries de simulation de politiques monétaires : croissance de la demande et de io

Série	Variable	Variation par période
1	b_0	+9%
	i_0	+1%
2	b_0	+9%
	i_0	+5%
3	b_0	+9%
	i_0	+10%

On constate tout d'abord sur la figure ?? que la hausse des taux d'intérêt limite les capacités productives de l'entreprise, et peut même si elle est trop importante, empêcher celle-ci de profiter des opportunités de croissance de la demande. Une politique monétaire trop restrictive est donc nuisible à la croissance. La baisse quasi systématique des cours boursiers lors des hausses de taux directeurs est une des illustrations de ce phénomène.

Cette hausse de i_0 augmente le coût de la dette de l'entreprise qui a intérêt à la limiter le plus rapidement possible comme on le constate sur le graphe 3-3.

Toujours dans cet esprit de réduction du coût de la dette, priorité est donnée par l'entreprise au capital, caution des emprunts bancaires. L'effort de R&D est donc d'autant plus limité que la hausse des taux d'intérêt est plus importante comme le montre le graphe 3-4.

Ce mouvement de hausse du capital relativement aux autres ressources de l'entreprise conduit à une augmentation de la productivité de ce dernier comme en témoigne le graphe 3-5.

Décroissance de la demande

Une analyse similaire peut être effectuée dans le cas d'une conjoncture défavorable. Considérons les séries de simulation présentées dans le tableau 3.2 :

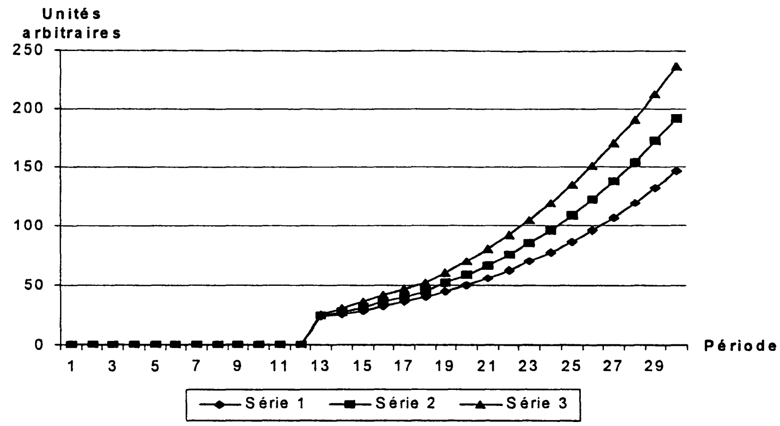

FIG. 3-2 – Evolution de la valeur ajoutée pF en fonction de i_0 en cas de croissance de la demande. *Source : calculs de l'auteur.*

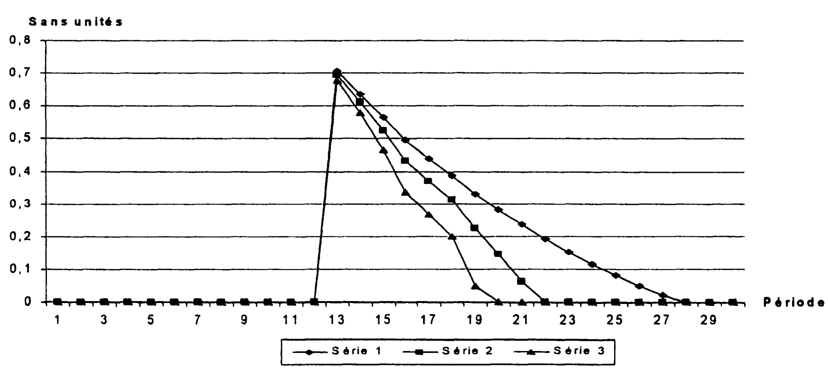

FIG. 3-3 – Évolution du rapport B/qK en fonction de i_0 en cas de croissance de la demande. *Source : calculs de l'auteur.*

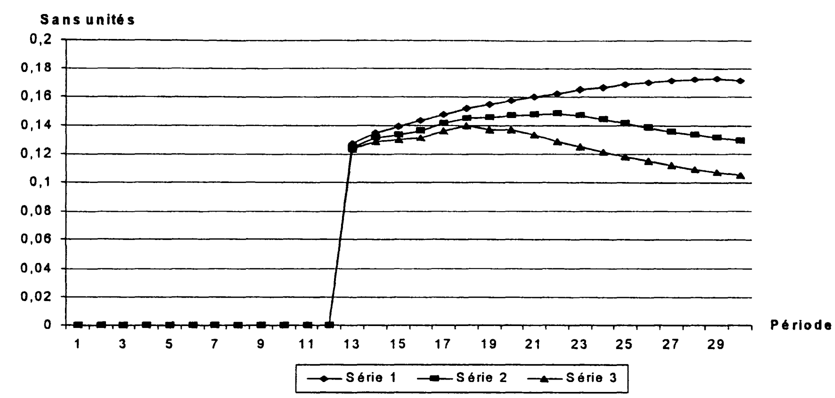

FIG. 3-4 – Evolution du rapport Y/qHK en fonction de i_0 en cas de croissance de la demande. *Source : Calculs de l'auteur*

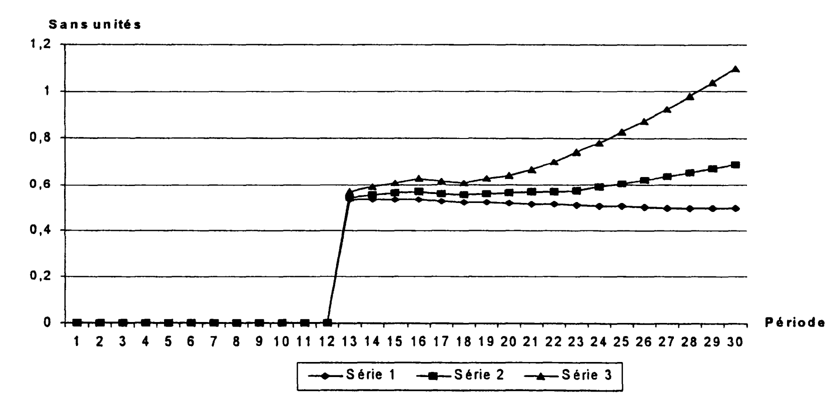

FIG. 3-5 – Evolution de la productivité du capital pF/qK en fonction de i_0 en cas de croissance de la demande. *Source : Calculs de l'auteur*

TAB. 3.2 – Séries de simulation de politiques monétaires : décroissance de la demande et de io

Série	Variable	Variation
1	b_0	-9%
	i_0	-1%
2	b_0	-9%
	i_0	-5%
3	b_0	-9%
	i_0	-10%

Sans reprendre l'ensemble des résultats (qui se justifient de la même façon que les précédents), il est intéressant de considérer les variations du rapport Y/qHK données par la figure 3-6. L'effet de la hausse des taux d'intérêt est identique à celui observé dans le premier cas : plus ils sont élevés et moins l'effort de R&D est important. La progression du rapport Y/qHK est plus rapide que dans le cas précédent car l'entreprise - comme nous l'avons vu au chapitre I - est plus contrainte sur ses débouchés (demande décroissante) que sur ses capacités de financement. Le capital physique est ainsi moins important en tant que capacité de caution des emprunts et sa part dans la production de l'enteprise diminue.

Conjonction des facteurs

Dans le cas où l'inflation n'est pas le facteur cible de la politique monétaire, une augmentation de la demande peut coexister avec une baisse des taux. Ce type de politique est généralement reconnu pour son efficacité de court terme car elle «dope» l'activité des entreprises. À long terme elle peut être à l'origine d'une inflation immodérée voire de bulles spéculatives. Nous avons effectué les séries de simulations décrites dans le tableau 3.3.

On constate sur la figure 3-7 l'effet stimulant de la baisse des taux d'intérêt sur la production.

Il est fondamental de noter que cette forte hausse est financée par la dette comme on le remarque sur la figure 3-8. Plus les taux d'intérêt sont bas, et plus la servitude

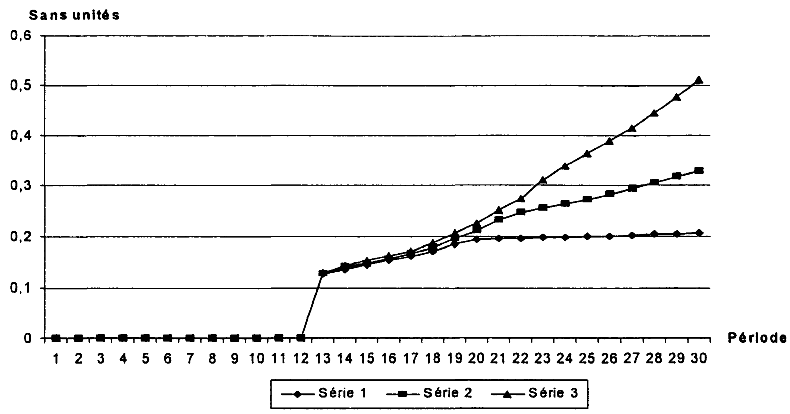

FIG. 3-6 – Evolution du rapport Y/qHK en fonction de i_0 en cas de décroissance de la demande. *Source : calculs de l'auteur.*

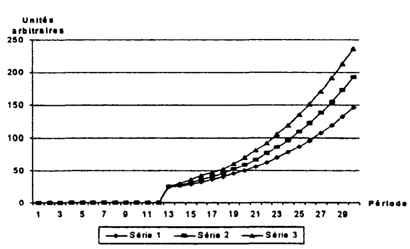

FIG. 3-7 – Evolution de la production pF des entreprises en fonction de i_0 en cas de conjonction des facteurs i_0 et demande. *Source : Calculs de l'auteur.*

TAB. 3.3 – Séries de simulation de politiques monétaires : croissance de la demande et décroissance de io

Série	Variable	Variation
1	b_0	+9%
	i_0	-1%
2	b_0	+9%
	i_0	-5%
3	b_0	+9%
	i_0	-10%

de la dette est faible. L'entreprise peut donc facilement s'endetter. Mais ce développement n'est pas sain à long terme, car rend la firme très vulnérable lors d'un retournement de tendance.

La figure 3-9 nous permet également de confirmer l'analyse que nous avions faite dans le cas «baisse de la demande - baisse des taux» : des taux d'intérêt faibles favorisent l'effort de R&D en diminuant la servitude de la dette, mais cette stimulation est plus importante en période de baisse de la demande qu'en période de hausse. Ceci s'explique à nouveau par le double rôle du capital physique, à la fois facteur de production et caution des emprunts bancaires : si ce rôle de caution n'était pas central en période de récession, il est au coeur des précautions de l'entreprise en phase de croissance où la dette finance le développement.

Conclusion de l'étude des politiques monétaires

Dans tous les cas conjoncturels, une baisse des taux d'intérêt stimule l'activité de R&D des entreprises. Cette stimulation est cependant plus importante en période de récession qu'en période de croissance économique car le capital est alors beaucoup moins important en tant que caution des emprunts. En particulier en période de croissance, un soutien éxagéré aux entreprises par une baisse des taux peut les conduire à adopter une structure financière instable et faisant trop appel à la dette,

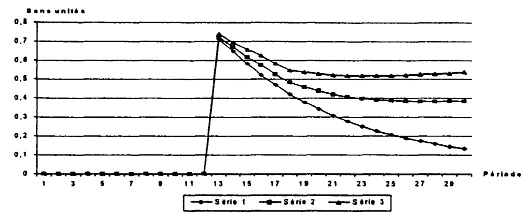

FIG. 3-8 – Évolution du rapport B/qK en fonction de i_0 en cas de conjonction des facteurs i_0 et demande. *Source : Calculs de l'auteur.*

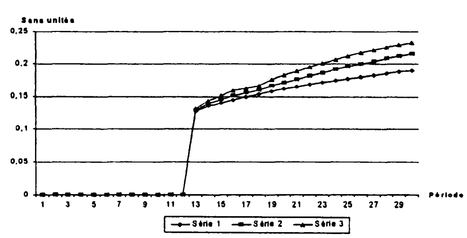

FIG. 3-9 – Évolution du rapport Y/qHK en fonction de i_0 en cas de conjonction des facteurs i_0 et demande. *Source : Calculs de l'auteur.*

sans pour autant relancer significativement l'investissement en R&D. Les risques inflationnistes pris par la puissance monétaire sont alors sans doute trop importants au regard de l'efficacité atteinte.

3.2.2 Politiques de soutien au crédit bancaire

Nous avons constaté dans la sous-section précédente que la dette ne jouait pas un rôle d'égale importance suivant la conjoncture de marché et suivant le niveau des taux d'intérêt sans risque. Si ceux-ci sont élevés, l'entreprise doit se désendetter rapidement pour limiter la servitude de la dette. A l'opposé, quand i_0 est assez faible, la dette peut servir de soutien efficace à la croissance de l'entreprise. Il en va évidemment de même pour i_1 : si l'entreprise a intérêt à éliminer sa dette rapidement, l'effet d'une mesure visant à modifier i_1 sera limité. En revanche si la dette est activement utilisée par l'entreprise, la participation de l'État au risque de l'entreprise peut être très intéressante.

Ces diverses considérations sont confirmées par les séries de tests suivantes :

Croissance économique et i_0 élevé

Comme nous l'avons vu plus haut, l'entreprise cherche à se désendetter rapidement. Nous avons réalisé les séries de tests présentées dans le tableau 3.4 pour $i_0 = 8\%$ constant à partir de la valeur référence $i_1 = 0,021$.

TAB. 3.4 – Séries de simulation de politiques de soutien au crédit bancaire : croissance de la demande pour io=0,08

Série	Variable	Variation
1	b_0	+9%
	i_1	+5%
2	b_0	+9%
	i_1	constant
3	b_0	+9%
	i_1	-5%
4	b_0	+9%
	i_1	-10%

On constate alors sur la figure 3-10 que l'effet des actions sur i_1 sur la production de l'entreprise est pratiquement nul. Le même constat serait fait sur les autres grandeurs (Y, B, K...).

Un constat identique est fait pour une décroissance économique avec i_0 élevé.

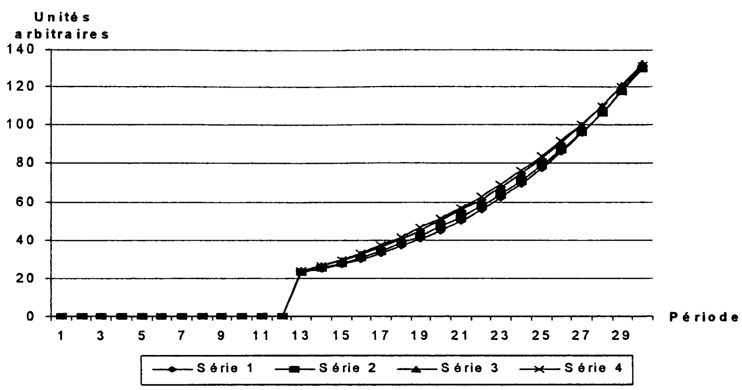

FIG. 3-10 – Evolution de la production pF des entreprises en fonction de $i_1$pour $i_0 = 8\%$. *Source : Calculs de l'auteur.*

Décroissance économique et i_0 bas

En période de récession économique, les entreprises se désendettent rapidement. i_1, n'intervenant que par la dette, a un effet de courte durée, jusqu'à annulation de la dette comme on le voit sur la figure 3-11.

Croissance économique et i_0 bas

Comme nous l'avons vu plus haut, la dette joue cette fois un rôle central dans la croissance de l'entreprise. Nous avons réalisé les séries de tests du tableau 3.5 pour $i_0 = 2\%$ constant à partir de la valeur référence $i_1 = 0,021$.

TAB. 3.5 – Séries de simulation de politiques de soutien au crédit bancaire : croissance de la demande pour io=0,02

Série	Variable	Variation
1	b_0	+9%
	i_1	+5%
2	b_0	+9%
	i_1	constant
3	b_0	+9%
	i_1	-5%
4	b_0	+9%
	i_1	-10%

On constate sur la figure 3-12 que cette fois la diminution du risque pris par les entreprises leur permet de profiter pleinement de la croissance. Comme dans le cas des politiques monétaires, un i_1 trop faible peut conduire à une inflation non maîtrisée, cette fois a priori cantonnée au marché ciblé car on peut supposer que ce taux ne touche pas directement les autres marchés de consommation.

On voit sur la figure 3-13 que les conséquences de la baisse de i_1 sur la R&D sont en revanche bien différentes de celles observées lors de l'action sur i_0 : la part de la R&D croît très rapidement avec la diminution de i_1. À coût égal et en période de croissance économique, une politique de partage de risque État-entreprise semble ainsi beaucoup plus efficace qu'une politique monétaire «brute».

Conclusion de l'étude des politiques de soutien au crédit bancaire

Comme nous pouvions nous y attendre, ces politiques, qui interviennent sur le coefficient i_1 traduisant le risque associé au prêt tel qu'évalué par la banque, n'ont un effet que lorsque la dette a une importance stratégique pour l'entreprise. En période de récession économique, la prise en compte par la puissance publique d'une part du risque normalement assumé par les banques n'a qu'un effet «retardateur», allégeant de façon temporaire la charge pesant sur l'entreprise.

En période de croissance, une telle approche ne peut porter ses fruits que si les taux d'intérêt sans risque restent limités. En effet, si ceux-ci sont trop élevés, l'accès à la dette sera dans tous les cas trop coûteux pour les firmes, et l'effet d'une action sur i_1, annulé. La puissance publique doit ainsi mener une politique de soutien au crédit bancaire couplée à une politique monétaire volontariste : un niveau i_0 bas permet de «faire jouer» au partage du risque un rôle très efficace, à la fois en termes de croissance générale des entreprises, mais aussi en termes d'incitation à la R&D. Du point de vue de la consommation ensuite, cette façon de faire permet de limiter les risques inflationnistes que nous avions détectés lors de l'étude des politiques monétaires «pures» : une action sur i_1 a en effet le même type d'effet qu'une action similaire sur i_0, mais peut être limitée à un secteur particulier (en restreignant le champ d'application de la mesure, par exemple).

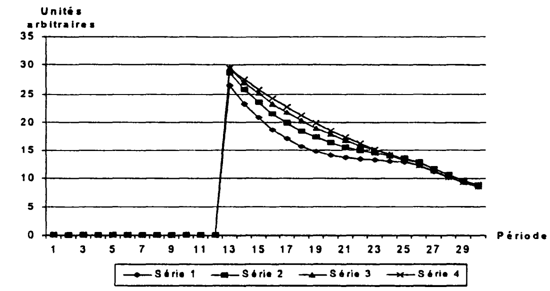

FIG. 3-11 – Evolution de la production pF des entreprises en fonction de $i_1$pour $i_0 = 2\%$, pour une demande décroissante de 9% par période. *Source : Calculs de l'auteur.*

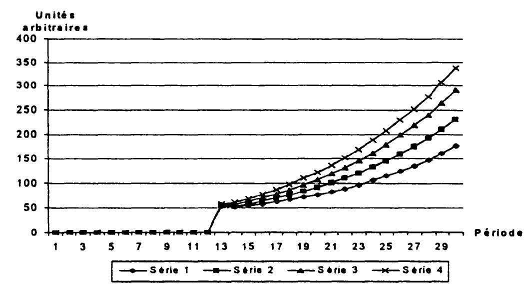

FIG. 3-12 – Evolution de la production pF des entreprises en fonction de $i_1$pour $i_0 = 2\%$ pour une demande croissante de 9% par période. *Source : Calculs de l'auteur.*

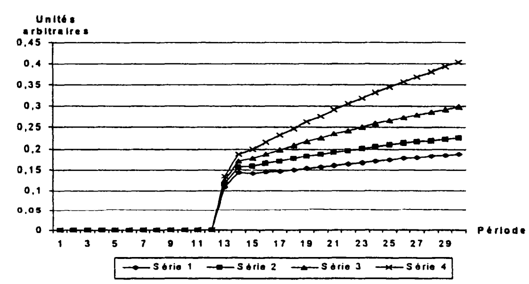

FIG. 3-13 – Évolution du rapport Y/qHK en fonction de i_1 pour $i_0 = 2\%$ pour une demande croissante de 9% par période. *Source : Calculs de l'auteur.*

3.2.3 Politiques d'investissement public

Rappelons brièvement la prise en compte des aides publiques dans le simulateur : lorsqu'un investissement nécessite un recours à la dette (fonds propres insuffisants), l'État contribue pour une part Υ à cet endettement. Notons que dans la réalité, l'assiette de référence de «l'aide d'État» (terminologie de la commission européenne) n'est pas le montant de dette contracté, mais la valeur globale de l'investissement (assiettes différentes). Ainsi, si l'entreprise désire investir le montant qI et réalise un revenu $R < qI$, elle s'endettera de $qI - R$. Dans notre modèle, la collectivité prendra en charge le montant $\Upsilon * (qI - R)$, ce qui représente $\frac{\Upsilon*(qI-R)}{qI} = \Upsilon - \frac{\Upsilon*R}{qI}$ de l'assiette telle que définie par la commission européenne.

Comme pour les autres politiques, nous devons distinguer les conjonctures positives et négatives ainsi que le niveau de i_0.

Croissance économique et i_0 élevé

Nous avons réalisé les séries de tests présentées dans le tableau 3.6 pour $i_0 = 8\%$.

TAB. 3.6 – Séries de simulation de politiques d'investissement public : croissance de la demande pour io=0,08

Série	Variable	Valeur
1	b_0	+9%
	Υ	0
2	b_0	+9%
	Υ	0,2
3	b_0	+9%
	Υ	0,5
4	b_0	+9%
	Υ	0,8

Comme on pouvait s'y attendre, l'impact d'une politique visant la dette n'est guère efficace lorsque celle-ci n'est en aucun cas intéressante pour l'entreprise. La figure 3-14 tend à faire penser que le principe est le même que pour les politiques de soutien au crédit bancaire : une politique d'investossement public n'a qu'un effet limité si elle ne s'accompagne pas d'une véritable volonté sur le plan monétaire.

De telles mesures sont cependant très efficaces sur le niveau d'endettement des entreprises comme on le remarque sur la figure 3-15. Elles favorisent donc une structure plus saine des firmes, même si leur impact sur les performances absolues reste faible. Il est à noter par ailleurs que dans le cas de la France, les aides publiques aux jeunes entreprises innovantes prennent souvent la forme d'apport en fonds propres, dans le but d'établir un équilibre financier de long terme.

Un constat semblable à celui que nous avions fait dans la sous-section précédente s'applique au cas de décroissance économique avec i_0 élevé : une efficacité presque nulle des mesures.

Croissance économique et i_0 bas

Nous avons réalisé les séries de tests du tableau 3.7 pour $i_0 = 2\%$.

TAB. 3.7 – Séries de simulation de politiques d'investissement public : croissance de la demande pour io=0,02

Série	Variable	Valeur
1	b_0	+9%
	Υ	0
2	b_0	+9%
	Υ	0,2
3	b_0	+9%
	Υ	0,5
4	b_0	+9%
	Υ	0,8

De façon analogue à ce que nous avons vu plus haut, la hausse de la participation de l'État favorise la croissance de l'entreprise. Mais cet effet reste très limité, même pour des interventions massives comme on le constate sur la figure 3-16.

L'effet est en revanche beaucoup plus important sur le niveau de dette. Cette dernière peut cette fois véritablement aider l'entreprise dans son développement, sans atteindre des niveaux trop inquiétants comme le montre la figure 3-17.

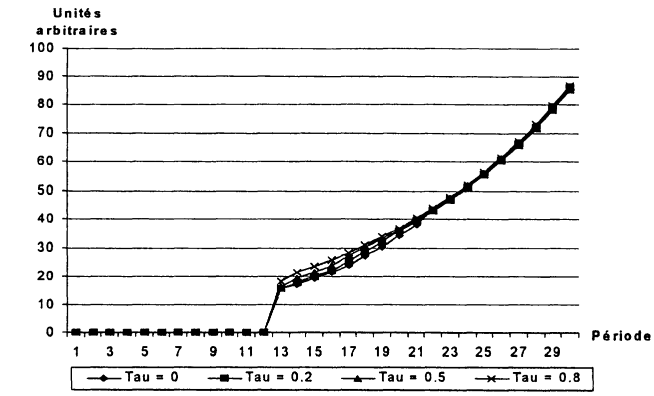

FIG. 3-14 – Evolution de la production pF des entreprises en fonction deΥ pour $i_0 = 8\%$ pour une demande croissante de 9% par période. *Source : Calculs de l'auteur.*

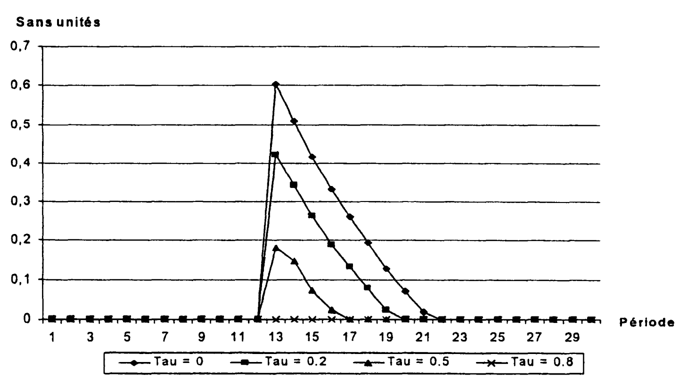

FIG. 3-15 – Evolution du rapport B/qK en fonction deΥ pour $i_0 = 8\%$ pour une demande croissante de 9% par période. *Source : calculs de l'auteur.*

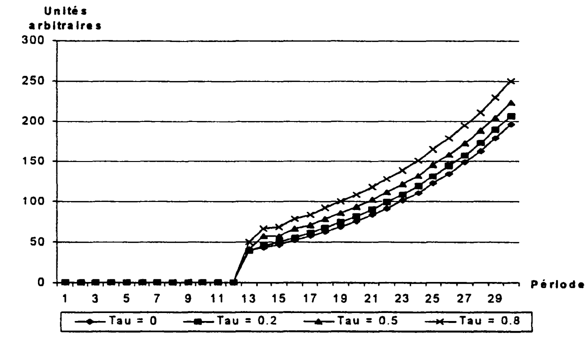

FIG. 3-16 – Evolution de la production pF des entreprises en fonction de Υ pour $i_0 = 2\%$ pour une demande croissante de 9% par période. *Source : Calculs de l'auteur.*

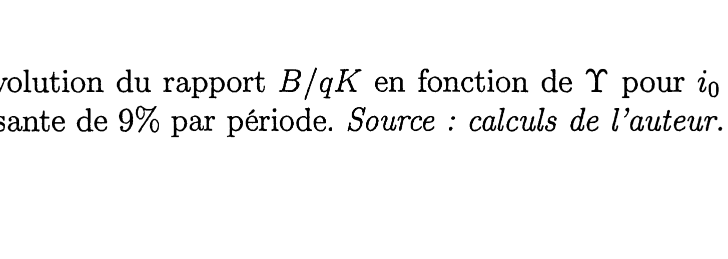

FIG. 3-17 – Evolution du rapport B/qK en fonction de Υ pour $i_0 = 2\%$ pour une demande croissante de 9% par période. *Source : calculs de l'auteur.*

Il en va de même pour la part de la R&D dans l'entreprise comme en témoigne la figure 3-18. Une nouvelle fois, l'allègement de la servitude de la dette dégage des liquidités pour le stock de R&D ne servant pas de caution.

Déroissance économique et i_0 bas

Sans les relancer en totalité, reprenons les séries précédentes pour une demande décroissante de 9% par période. Comme on le constate sur la figure 3-19, les aides publiques ont un effet retardateur important, permettant aux entreprises qui en bénéficient de mieux gérer la baisse d'activité. Leur efficacité «plafonne» toutefois rapidement et des mesures très importantes n'ont pas un impact significativement plus important ques des interventions plus modérées.

Conclusion de l'étude des politiques d'investissement public

Comme dans le cas des autres politiques d'intervention de l'État, celles-ci n'ont d'effet que dans la mesure où elles sont complétées par une politique monétaire volontariste. Les politiques d'investissement public sont particulièrement intéressantes en ce qui concerne la R&D en période de croissance car leur effet stimulant sur Y ne s'accompagne pas d'une progression équivalente des capacités de l'entreprise, éloignant d'autant les risques de croissance centrée sur l'endettement associés. Elles sont également très efficaces pour accompagner des entreprises en perte d'activité. C'est la raison pour laquelle elles ont été (et sont encore) très massivement utilisées dans les bassins industriels français sinistrés comme le Nord ou la Lorraine.

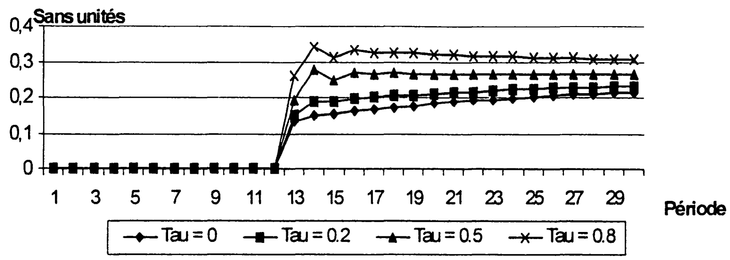

FIG. 3-18 – Évolution du rapport Y/qHK en fonction de Υ pour $i_0 = 2\%$ pour une demande croissante de 9% par période. *Source : Calculs de l'auteur.*

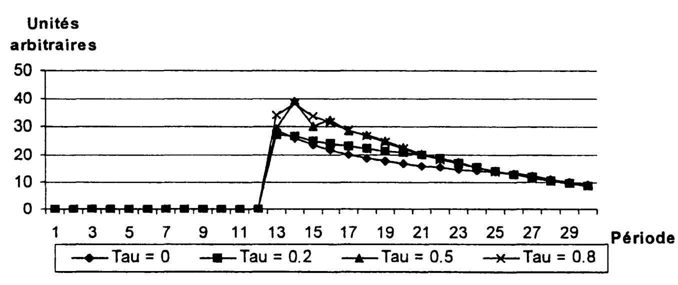

FIG. 3-19 – Evolution du rapport B/qK en fonction de Υ pour $i_0 = 2\%$ pour une demande décroissante de 9% par période. *Source : calculs de l'auteur.*

Chapitre 4

CONCLUSION ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

4.1 Conclusion

Nous avons dans ce rapport construit un simulateur multi-agents très simple de comportement d'entreprise sous contraintes financières. Calibré puis validé sur données canadiennes, il nous a permis de tester certaines politiques publiques de financement des PME et d'en voir l'impact sur la R&D effectuée. En voici les principales conclusions.

Les politiques de type monétaire, permettant de jouer sur les taux de références des transactions entre agents, ont un effet très important sur la valeur ajoutée des entreprises en période de croissance. Une politique monétaire trop restrictive peut empêcher les entreprises de profiter des opportunités, alors qu'une politique permissive ou trop fortement expansionniste peut provoquer une croissance «malsaine» des entreprises, faisant fortement appel à l'endettement. A ce dernier point viennent s'ajouter les risques inflationnistes, non pris en compte dans le simulateur. Toujours en conjoncture positive, l'effet de ces politiques sur le niveau de R&D des entreprises semble peu important au regard des risques engendrés. A l'inverse, un soutien par des taux décroissants aux entreprises œuvrant sur des marchés récessifs paraît très efficace en termes de recherche effectuée dans l'entreprise.

Les politiques de soutien bancaire, tout comme les politiques d'investissement public, ne sont efficaces que si la politique monétaire concomitante n'est pas trop restrictive. Les premières, permettant de faire porter à la puissance publique une partie du risque normalement assumé par les banques, sont intéressantes sur les marchés en récession, car elles retardent les difficultés des entreprises. Mais ce sont sur les secteurs en croissance qu'elles sont particulièrement efficaces. Elles permettent en effet - de la même façon que les politiques monétaires - une dynamisation de la production des firmes, sans toutefois être aussi dangereuses en termes de risques inflationnistes car beaucoup plus ciblées que les précédentes. Elles semblent également plus performantes en termes de R&D, renforçant fortement le poids de la recherche dans la production des firmes.

Les politiques d'investissement public permettent aux entreprises de ne pas assumer seules le poids d'un investissement important. Elles semblent avoir des effets voisins de ceux des politiques de soutien bancaire, en particulier sur les marchés en récession. Sur les marchés en croissance, elles permettent elles aussi d'assainir la situation des entreprises en la soutenant par des capitaux non bancaires. Elles semblent toutefois moins efficaces en termes de R&D, leur effet s'atténuant au cours du temps.

Ces quelques observations souffrent toutefois d'un manque majeur : elles n'ont pas de prix. Il serait en effet plus qu'intéressant de quantifier les poids financiers des politiques comparées : combien coûte un pour cent de variation des taux directeurs ? Quel est le prix d'une mesure octroyant vingt pour cent de subvention à tout investissement réalisé dans le textile canadien ? Ces questions sont loin de trouver des réponses simples et font toutes l'objet d'études d'autant plus complexes qu'elles sont souvent liées à des régimes locaux. Viennent s'y ajouter les effets «de second ordre», difficilement quantifiables : une mesure de soutien au crédit bancaire dans le domaine de la production forestière en Gaspésie ne risque-t'il pas de créer des investissements *ex nihilo* ? Ces effets d'aubaine ne sont en règle générale véritablement compris que lorsqu'ils sont constatés.

Les perspectives de recherche sont ainsi encore très importantes sur un sujet particulièrement d'actualité en France. Le premier ministre Raffarin a en effet lancé il y a deux ans la deuxième vague de décentralisation par l'intermédiaire de la «loi sur les responsabilités locales». Devant théoriquement prendre effet au premier janvier 2005, celle-ci doit transférer la totalité des aides directes aux entreprises - actuellement gérées par les services de l'État - aux régions. Dans un contexte européen limitant fortement les aides [1], les administrations de l'État sont en pleine réflexion pour déterminer les moyens les plus efficaces pour aider des secteurs entiers de l'économie dans une situation délicate depuis plusieurs années (textile, chaussure, sidérurgie, automobile et sous-traitance automobile...).

Les courtes sections de ce dernier chapitre présentent les principales pistes de recherche envisagées.

4.2 Première perspective de recherche : validation du modèle sur données individuelles d'entreprises

Une des faiblesses du modèle dans sa forme actuelle est qu'il ne bénéficie que d'une validation qualitative sur données agrégées. Une des priorités est donc une validation précise et minutieuse, utilisant des valeurs individuelles. Le point le plus délicat sera sans aucun doute la construction de la base de données, d'une part car la plupart des informations sont totalement confidentielles, et d'autre part car l'évaluation du stock de R&D Y est un exercice périlleux.

Une fois la base construite il s'agira de réaliser plusieurs estimations des moments généralisés, en particulier celle utilisant des coefficients variables dans le temps. Bien que beaucoup plus complexe du point de vue statistique, cette opération donnera une assise forte au modèle et au simulateur associé.

[1] Elles sont en fait explicitement interdites aux termes de l'article 92 du Traité instituant la Communauté européenne, car faussant la libre concurrence. Toute aide directe à une entreprise ou un secteur particulier est une dérogation qui doit obtenir l'aval de la Commission européenne.

4.3 Deuxième perspective de recherche : étude des effets de second ordre des politiques publiques

Il s'agira d'étudier de façon spécifique les effets non financiers des mesures publiques de soutien à l'innovation des PME. Outre un volet national, une telle étude devra effectuer la comparaison des effets constatés dans différents pays ou provinces. Elle pourra également envisager de mesurer les effets sur la R&D des entreprises elle même, peut-être par l'intermédiaire d'études de cas, pour rendre compte de phénomènes internes à la firme et inaccessibles à l'observateur extérieur.

4.4 Troisième perspective de recherche : prise en compte des effets de grappe et de réseau

Dans sa forme actuelle, le simulateur ne propose pas de possiblité de coopération entre entreprises (la seule interaction est la concurrence sur le marché des biens). Il s'agirait de déterminer quelques processus simples de ce type, en retenant que le point délicat est la prise en compte des ajouts dans le programme de maximisation à long terme de la valeur de l'entreprise. Ce travail serait également l'occasion de prendre en compte des effets financiers croisés du type «disponibilité de la ressource financière» : un capital - risqueur proposant un financement à une entreprise aura moins de liquidités pour la suivante. Un algorithme «de la secrétaire», centré sur des considération de théorie des jeux semble *a priori* une possibilité intéressante. L'objectif «ultime » serait de proposer une simulation fiable du phénomène de fuite vers la qualité des investisseurs observée ces dernières années un peu partout dans le monde.

4.5 Quatrième perspective de recherche : utilisation plus «forte» du savoir-faire Y_t

Revenons un instant sur l'équation d'Euler obtenue dans le cas «général» (voir ANNEXE 2) :

$$E_t[\widetilde{\beta}_{t+1} * (1-\delta) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} + \widetilde{\beta}_{t+1} * B_t * \frac{\partial i_t}{\partial K_t}] = \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} \qquad \text{(EULER)}$$

Le capital K intervient à la fois dans $\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}$ et dans $B_t * \frac{\partial i_t}{\partial K_t}$. Il est en même temps facteur de production et caution des emprunts futurs, ce qui est la base même de la plupart des modèles à contraintes financières.

Mais l'utilisation de la même lettre K pour les deux expressions cache un point fondamental : dans la fonction de production (et donc dans $\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}$), K correspond à une série d'actifs matériels ou non, mais dont la valeur est intrinsèque et correspond à leur capacité productive. C'est-à-dire que ces actifs possèdent leur valeur dès lors qu'ils existent, et par là même qu'ils ne peuvent la perdre tant qu'ils sont présents dans l'entreprise (exception faite des effets d'obsolescence). Il sera noté K_F.

À l'inverse, le K utilisé dans les variables d'endettement ($B_t * \frac{\partial i_t}{\partial K_t}$) correspond à la valeur des actifs (matériels ou immatériels) telle qu'elle est perçue par l'établissement bancaire. Sa valeur est pour partie intrinsèque et objective (liée à sa valeur de revente) et pour partie subjective et fonction des perspectives évaluées de l'entreprises : elle sera notée K_B.

Dans un contexte de marchés financiers parfaits, ces deux valeurs doivent être proportionnelles, avec un coefficient constant au cours du temps. Mais ce n'est plus le cas dès lors que des effets d'asymétrie d'information (sélection adverse, aléa moral ou autres) apparaissent. Les banques ne valorisent pas seulement les actifs en tant que tels, mais également les perspectives de l'entreprise dans son ensemble. La plupart des auteurs (Crépon, 2001 ou Crépon et Rosenwald, 2001) concluent que l'hypothèse de stabilité des coefficients i_0 et i_1 du taux d'intérêt est systématiquement rejetée.

La limite de ces approches apparaît clairement lors des études sur données réelles faisant intervenir des entreprises évoluant dans des domaines d'activité très distincts (entreprises de service et entreprises industrielles la plupart du temps) : les comportements observés sont différents, en particulier lors du début des périodes de récession. Le retournement de tendance (positive $\rightarrow$ négative) est en effet beaucoup plus brutal pour les entreprises tertiaires que pour leurs consoeurs industrielles. Il est possible d'ajouter des paramètres *ad hoc* pour expliquer ce phénomène : on parle alors de *sensibilité* plus importante des entreprises de service aux variables conjoncturelle. Mais ce ne sont pratiquement jamais des explications fortement conceptuelles.

Nous proposons l'approche suivante, centrée sur l'existence de deux types distincts de capital. L'entreprise dispose d'un stock de capital physique K_1, correspondant à la définition classique. Vient s'y ajouter un capital immatériel K_2 correspondant à son savoir-faire (la force de travail est quant à elle prise en compte dans L). Son capital total intervenant dans la fonction de production est $K_F = K_1 + K_2$.

Les banques, lorsqu'elles évaluent la caution que l'entreprise est en mesure d'apporter, considèrent les deux capitaux de façon distincte :

- le capital K_1 est évalué en fonction de sa valeur de remplacement. En période de croissance, sa capacité de caution est $a_{1,c} * K_1$ avec $a_{1,c} > 1$ alors que lorsque les perspectives sont mauvaises celle-ci est $a_{1,d} * K_1$ avec $a_{1,d} < 1$. Ceci n'est en fait qu'une reformulation des résultats du modèle classique et n'apporte pas d'interprétation nouvelle ;
- le capital K_2 a une faible valeur intrinsèque (il n'est valorisé que s'il est utilisé) et est essentiellement évalué en fonction des anticipations des banques quant à l'avenir de l'entreprise. Le comportement est analogue à celui de K_1 mais avec des coefficients différents. On a comme précédemment : $a_{2,c} > 1$ et $a_{2,d} < 1$ mais également : $a_{2,c} > a_{1,c}$ et $a_{2,d} < a_{1,d}$ qui traduit la plus grande sensibilité des actifs immatériels aux conditions conjoncturelles.

Rappelons que l'écart entre ces coefficients est dû à un problème d'asymétrie d'information. C'est à dire que dans un régime établi (croissance ou décroissance économique présente «depuis longtemps» et «pour longtemps») on a nécessairement $a_{1,c} = a_{2,c} = a_c$ et $a_{1,d} = a_{2,d} = a_d$. Les variables explicatives sont alors de même signe et l'évolution des valeurs de caution est correctement prise en compte par celle des taux d'intérêt. La valeur de caution des actifs est alors donnée par (cas de la croissance) :

$$K_B = a_{1,c} * K_1 + a_{2,c} * K_2 = a_c * [K_1 + K_2] = a_c * K_F$$

A un coefficient près, le capital de production et celui de caution sont les mêmes. C'est ce cas qui est utilisé dans la plupart des modèles.

Dans le cas général : $K_B = a_{1,c} * K_1 + a_{2,c} * K_2 = a_{1,c} * [K_1 + K_2] + (a_{2,c} - a_{1,c}) * K_2$ soit :

$$K_B = a_{1,c} * K_F + (a_{2,c} - a_{1,c}) * K_2$$

qui ajoute un terme à l'équation classique. L'effet s'inverse lors d'une décroissance.

On peut penser que ceci est particulièrement observable lors d'une transition de régime économique. Prenons l'exemple d'un renversement de tendance croissance $\rightarrow$ décroissance (le cas symétrique est moins visible sur les données réelles car l'entreprise est initialement non contrainte financièrement) :

- L'entreprise valorise ses actifs à hauteur de $K_F = K_1 + K_2$;
- La banque, anticipant une décroissance généralisée diminue la valeur de caution apportée par le capital de l'entreprise (ce qui se traduit par une augmentation des taux d'intérêt à même niveau de capital). K_1 est évalué à sa valeur de remplacement $a_{1,d} * K_1 < a_{1,c} * K_1$. L'écart $a_{1,c} - a_{1,d} > 0$ mais reste toutefois modéré. Dans le même temps, supposons que K_2 perde beaucoup de sa valeur de caution (contrairement au capital physique il n'y a pas le «plancher» que représente la valeur de revente) et vaut : $a_{2,d} * K_2 < a_{2,c} * K_2$ avec $a_{2,c} - a_{2,d} \gg 0$. On a alors : $K_B \simeq a_{1,d} * K_1$ de façon transitoire, cette valeur augmentant au fur et à mesure que l'information s'échange et que les anticipations de décroissance se stabilisent, pour atteindre $a_d * K_F$ à long terme.

Ceci permet d'expliquer certains effets constatés par des analystes sur données réelles : en période de croissance, une segmentation par activité suffit (les petites entreprises industrielles et de service se comportent de façon similaire), de même qu'en période de récession. Mais lors d'un retournement de tendance, l'effet des conditions financières est beaucoup plus brutal sur les entreprises de service comme le note Duhautois (2001). La distinction des deux types de capital permet alors de faire le lien entre les secteurs et de traiter l'ensemble des entreprises de façon cohérente.

Mathématiquement, ceci revient à considérer le même programme de maximisation sous contrainte pour l'entreprise :

$$\underset{K_t,L_t,I_t,B_t}{\text{Max}} V_t = E_t\left[\sum_{i=0}^{+\infty}\beta_{t+i}R_{t+i}\right]$$

$$\text{sous la contrainte } R_t \geqslant 0,\ \forall t$$

avec :

$$\begin{aligned} R_{t+1} &= \Pi_{t+1} + B_{t+1} - (1+i_t) * B_t \\ \text{et } K &= K_1 + K_2 \end{aligned}$$

On y ajoute la relation de définition de $i_t = \mathcal{F}(B_t, K_{1,t}, K_{2,t})$. Par exemple on peut prendre :

$$i_t = i_0 + i_1 * [\frac{K_{1,t} + (1 - \frac{1}{T+1})^{\kappa} * K_{2,t}}{B_t}]$$

où T est la durée écoulée depuis le dernier renversement de tendance et $\kappa > 0$ une élasticité supposée constante et identique pour toutes les firmes. Les relations d'accumulation de capital sont *a piori* distinctes :

$$\begin{aligned} K_{1,t} &= (1-\delta_1) * K_{1,t-1} + I_{1,t}^K \\ K_{2,t} &= (1-\delta_2) * K_{2,t-1} + I_{2,t}^K \end{aligned}$$

4.6 Cinquième perspective de recherche : prise en compte des coûts d'ajustement

Il s'agirait de reprendre l'ensemble du travail mathématique en remplaçant la fonction de production F_t par $F_t - G_t$ avec :

$$G_t(I_t, K_t) = \frac{1}{2} * b_K * K_t * (\frac{\alpha_t * I_t}{K_t})^2 + \frac{1}{2} * b_R * Y_t * (\frac{(1-\alpha_t) * I_t}{Y_t})^2$$

C'est un travail très lourd ne pouvant sans doute pas se résoudre analytiquement. Il devra faire appel à un solveur numérique rapide pour éviter que les séries de simulations deviennent trop longues.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABEL, A.B. (1980), Investment and the value of Capital, Garland, New York.

[2] ATTA-MENSAH, J. (2003), Collateral and Credit Supply, *Bank of Canada Working Paper 2003-11.*

[3] ARROW, J.K., (1983), General equilibrium, Oxford, Blackwell.

[4] AXTELL, R.(2000), Why Agents ?, On the Varied Motivations for Agent Computing in the Social Sciences, *CSED Working Paper N° 17.*

[5] BANQUE DU CANADA (2004), Document d'information sur la politique monétaire du Canada, *site internet de la banque du Canada.*

[6] BARANES, E. (1998), Réglementation et ouverture à la concurrence des activités en réseau : le cas des télécommunications, *Revue française d'économie*, Volume 13, N°4.

[7] BELLETANTE, B., LEVRATTO, N. et PARANQUE, B. (2001), Diversité économique et modes de financement des PME, *Humanisme et Entreprise*, N°249.

[8] BERNANKE, B., GERTLER, M. et GILCHRIST, S. (1996), The Financial ASccelerator and the Flight to Quality, *The Review of Economics and Statistics*, LXXVIII.

[9] BOND, S. et MEGHIR, C. (1994), Dynamic Investment Models and the Firm's Financial Policy, *Review of Economic Studies.*

[10] BURGELMAN, R.A. et ROSENBLOOM, R.S. (1989), Technology Strategy : An Evolutionary Process Perspective, *Research on Technological Innovation, Management and Policy.*

[11] CARSALADE,Y. (1996), Histoire Economique, cours de l'École Polytechnique, Paris.

[12] CASTELFRANCHI et C., CONTE, R. (1998), Limits of economic and strategic rationality for agents and MA systems, *Robotics and Autonomous System*, N°24, pp127-139.

[13] CHABBAL, R. (1995), Un plan d'action pour les PME innovantes, Rapport présenté au Secrétariat d'Etat à la Recherche.

[14] COHENDET, P., LLERENA, H.S. et UMBHAUER, G. (1996), The Economics of Networks.

[15] CREPON, B. et GIANELLA, C. (2001), Fiscalité et coût d'usage du capital : incidences sur l'investissement, l'activité et l'emploi, *Economie et Statistique*, N°341-342.

[16] CREPON, B. et ROSENWALD, F.)2001), Des contraintes plus lourdes pour les petites entreprises, *Economie et Statistique*, N°341-342.

[17] CREPON, B. et ROSENWALD, F. (2000), Investissement et contraintes de financement : le poids du cycle, *Document de Travail de la Direction Des Etudes et Synthèses Economiques*, Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques.

[18] CREPON, B., DUGUET, E. et MAIRESSE, J. (2000), Mesurer le rendement de l'innovation, *Economie et Statistique*, N°334.

[19] DANIEL, L. (2002), Rapport sur l'Activité du Capital Investissement en France.

[20] DE BRABANDERE, L. (2002), Le Management des Idées - De la Créativité à l'Innovation.

[21] DEWARTIPONT, M. et PRAET, P. (1999), Théorie de la Régulation Economique à Vol d'Oiseau, *Reflets et Perspectives de la Vie Economique*, Volume 38, N°2.

[22] DUHAUTOIS, R. (2001), Le ralentissement de l'investissement est plutôt le fait des petites entreprises tertiaires, *Economie et Statistique*, N°341-342.

[23] EPAULAR, A. (2001), A la recherche des déterminants de l'investissement des entreprises, *Economie et Statistique*, N°341-342.

[24] EPSTEIN, J.M. (1999), Agent-Based Computational Models And Generative Social Science.

[25] GRILICHES, Z. (1998), R&D and Productivity.

[26] GUELLEC, D. (2001), COMPLETER, Économie et prévision, N°150-151.

[27] GUELLEC, D. et IOANNIDIS, E. (1997), Causes des fluctuations des dépenses de R-D - une analyse quantitative, Revue économique de l'OCDE, N°29.

[28] GUELLEC, D. et VAN POTTELSBERGHE DE LA POTTERIE (1997), Le soutien des pouvoirs publics stimule-t-il la R-D privée ?, Revue économique de l'OCDE, N°29.

[29] GUINET, J. (1995), Les Systèmes Nationaux de Financement de l'Innovation, *rapport de l'OCDE.*

[30] HARRISON, J.S. (2003), Strategic Management of Resources And Relationships.

[31] HERBET J-B. (2001), Peut-on expliquer l'investissement à partir des déterminants traditionnels au cours de la décennie 90 ?, *Economie et Statistique*, N°341-342.

[32] HIMMELBERG, C.P. et PETERSEN, B.C. (1994), R&D and Internal Finance : a Panel Study of Small Firms in High-Tech Industries, *The review of Economics and Statistics.*

[33] HIMMELBERG, C.P. (2000), The Stock Market and Corporate Investment : Evidence of the Magnitude of Net Worth Effects, *document de travail publié sur Internet.*

[34] JENSEN, M. et MECKLING, W. (1999), Theory of the Firm : Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure, *Journal of Financial Economics*, N°3.

[35] JOHN, G., WEISS, A.M. et DUTTA, S. (1999), Marketing in Technology-Intensive Markets : Toward a Conceptual Framework, *Journal of Marketing*, Special Issue.

[36] JOHANSEN, F. (1994), Investment and Financial Constraints, *Discussion Paper, Statistics Norway.*

[37] JONARD, N. and YILDIZOGLU, M. (1999), Interaction of Local Interactions : Localised Learning and Network Externalities.

[38] JULIEN, P-A., ST-PIERRE, J. et BEAUDOUIN, R. (1995), Innovation, nouvelles technologies et financement des PME, *Cahier de recherche du groupe de*

recherche en économie et gestion des PME de l'université du Québec à Trois-Rivières.

[39] KAMIEN, M.I. et SCHWARZ N.L. (1982), Market structure and innovation.

[40] KERGUERIS, J. (2002), L'investissement des entreprises, clé d'une croissance durable, *rapport d'information du Sénat*, N°35.

[41] KOEVA, P. (2001), Time-to-Buld and Convex Adjustment Costs, *International Monetary Fund Working Paper.*

[42] KREMP, E. et SEVESTRE, P. (2000), L'appartenance à un groupe facilite le financement des entreprises, *Economie et Statistique*, N°336.

[43] KREMP, E. et STOSS, E. (2001), L'endettement des entreprises industrielles françaises et allemandes : des évolutions distinctes malgré des déterminants proches, *Economie et Statistique*, N°341-342.

[44] KWON, H.U. et INUI, T. (2003), R&D and Productivity Growth in Japanese Manugacturing Firm, *ESRI Discussion Paper Series*, N°44.

[45] LACHMANN, J. (1996), Financer l'Innovation des PME.

[46] LACHMANN, J. 91993), Le Financement des Stratégies de l'Innovation.

[47] LELAND, H. et PYLE, D. (1977), Informational Asymmetries, Financial Structure and Financial Intermediation, Journal of Finance, N°32.

[48] MAIRESSE, J. et SASSENOU, M. (1993), R&D and Productivity : a Survey of Econometric Studies at the Firm Level, *NBER working Paper*, N° 3666.

[49] MAIRESSE, J., HALL, B. et MULKAY, B. (1985), «Firm-level investment in France and in the United States : an exploration of what we have learned in twenty years», *Annales d'Économie et de Statistique*, N°55-56.

[50] MALERBA, F. et ORSENIGO, L. (2001), Towards a History Friendly Model of Innovation, Market Structure and Regulation in the Dynamics of the Pharmaceutical Industry : the age of Random Screening, *Document de travail du C.E.S.P.R.I.*

[51] MALERBA, F., NELSON, R., ORSENIGO, L. and WINTER, S. (2001), Competition and industrial policy in a 'history friendly' model of the evolution of the computer industry», *International Journal of Industrial Organization*, Vol 19, N°5.

[52] MITCHELL, G.R. et HAMILTON, W.F. (1988), Managing R&D as a Strategic Option, *Research/Technology Management.*

[53] MODIGLIANI, F. et MILLER, M. (1958), The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theorie of Investment, *American Economic Review*, N°48.

[54] MORIARTY, R.T. et KOSNIK, T.J. (1989), High-Tech Marketing : Concepts, Continuity, and Change, *Sloan Management Review*, Vol 30, N°4.

[55] MOHR, J. (2001), Marketing of High-Technology Products and Innovation, Prentice Hall.

[56] MUET, P.-A. (1979), Les modèles «néoclassiques» et l'impact du taux d'intérêt sur l'investissement, *Revue Économique*, N°2.

[57] MYERS, S. et MAJLUF, M. (1984), Financing and Investment Decisions when Firms have Information that Investors do not have, *Journal of Financial Economics*, N°13.

[58] MYERS, S. (1984), The Capital Structure Puzzle, *Journal of Finance*, N°39.

[59] NELSON, R.R. et WINTER, S.G. (1982), An Evolutionary Theory of Economic Change.

[60] OCDE (2000), Perspectives de la science de la technologie et de l'industrie, *Perspectives de l'OCDE.*

[61] OCDE (2002), Perspectives de l'OCDE sur les PME, *Perspectives de l'OCDE.*

[62] OLINER, S., RUDEBUSCH and G., SICHEL, D. (1995), New and Old Models of Business Investment : A Comparison of Forecasting Performance, *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol 27, N°3.

[63] ROSENWALD, F. (2001), L'impact des conditions financières sur la décision d'investissement, *Economie et Statistique*, N°341-342.

[64] ROSS, S. (1977), The Determination of Financial Structure : the Incentive Signalling Approach, *Bell Journal of Economics*, N°8.

[65] SCOTLAND, F. (1982), Investment : A Survey of Models with some Implications for the Effects of Monetary Policy, *Bank of Canada Technical Report.*

[66] SECRETARIAT DE L'OMC (2003), Examen des politiques commerciales, Canada, *Rapport de l'Organe d'examen des politiques commerciales de l'Organisation Mondiale du Commerce.*

[67] STENBACKA, R. et TOMBACK, M. (2002), Investment, Capital Structure and Complementarities Between Debt and New Equity, *Journal of Management Science*, Vol 48, N°2.

[68] STIGLITZ, J. (1969), A Re-Examination of the Modigliani-Miller Theorem, *American Economic Review*, N°59.

[69] SULEIMAN,R., TROITZSCH, K.G. et GILBERT,N. (2000), Tools ans Techniques for Social Science Simulation.

[70] THOENIG, M. et VERDIER, T.(2003), Innovation défensive et concurrence internationale, *Economie et Statistique*, N°363-364-365.

[71] TOBIN, J. (1969), A General Equilibrium Approach to Monetary Theory, *Journal of Money, Credit and Banking*, N°1.

[72] TUSHMAN, M.L. et ANDERSON, P. (1997), Managing Strategic Innovation and Change.

[73] WHITED, T. (1992), Debt, Liquidity Constraints and the Corporate Investment : Evidence from Panel Data, *The Journal of Finance*, XLVII.

[74] YILDIZOGLU, M. (2000), Competing R&D Strategies in an Evolutionary Industry Model, *Journal of Computational Economics.*

ANNEXE 1 - MODÈLES LIÉS À L'APPROCHE NÉOCLASSIQUE

Le modèle néoclassique

Il s'agit de considérer une firme en situation de concurrence parfaite sur un marché parfait de taille infinie. La fonction de production de l'entreprise est donnée par :

$$F(L, K) = G_0 * K^{\alpha} * L^{\beta} * e^{\gamma t}$$

avec $\alpha + \beta < 1$ et $\gamma > 0$. Le terme $e^{\gamma t}$ correspond à un progrès technique exogène.

Le programme de l'entreprise correspond à la maximisation du profit :

$$\underset{K,L}{Max}\Pi = p * G_0 * K^{\alpha} * L^{\beta} * e^{\gamma t} - c * K - w * L$$

où p est le prix de vente de l'unique production (homogène) de l'entreprise, c le coût du capital et w le coût du travail, tous deux supposés également exogènes.

L'annulation des deux dérivées premières du profit $\frac{\partial\Pi}{\partial K}$ et $\frac{\partial\Pi}{\partial L}$ s'écrit :

$\frac{\partial\Pi}{\partial K} = 0$

$\Longleftrightarrow p * G_0 * \alpha * K^{\alpha-1} * L^{\beta} * e^{\gamma t} = c$

$\Longleftrightarrow cste + (\alpha - 1) * \ln(K) + \beta * \ln(L) + \gamma t = \ln(\frac{c}{p})$

$$\Longleftrightarrow \ln(L) = \frac{1-\alpha}{\beta} * \ln(K) - \frac{\gamma}{\beta} * t + \frac{1}{\beta}\ln(\frac{c}{p}) + cste'$$

$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = 0$

$\Longleftrightarrow p * G_0 * K^\alpha * \beta * L^{\beta-1} * e^{\gamma t} = w$

$\Longleftrightarrow cste + \alpha * \ln(K) + (\beta - 1) * \ln(L) + \gamma t = \ln(\frac{w}{p})$

$$\Longleftrightarrow \ln(L) = \frac{\alpha}{1-\beta} * \ln(K) + \frac{\gamma}{1-\beta} t - \frac{1}{1-\beta} * \ln(\frac{w}{p}) + cste'$$

et par différence :

$0 = [\frac{\alpha}{1-\beta} - \frac{1-\alpha}{\beta}] * \ln(K) + [\frac{\gamma}{1-\beta} + \frac{\gamma}{\beta}] * t - \frac{1}{1-\beta} * \ln(\frac{w}{p}) - \frac{1}{\beta} \ln(\frac{c}{p}) + cste''$

$\Longleftrightarrow 0 = [\frac{-1+\alpha+\beta}{\beta*(1-\beta)}] * \ln(K) + \frac{\gamma}{\beta*(1-\beta)} * t - \frac{1}{1-\beta} * \ln(\frac{w}{p}) - \frac{1}{\beta} \ln(\frac{c}{p}) + cste''$

et enfin :

$$\ln(K) = \frac{\gamma}{1-(\alpha+\beta)} * t - \frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)} * \ln(\frac{w}{p}) - \frac{(1-\beta)}{1-(\alpha+\beta)} \ln(\frac{c}{p}) + cste'''$$

Le chemin idéal du capital est fonction du coût du travail et du coût du capital rapportés à celui de la valeur ajoutée p.

L'accélérateur simple

On considère les mêmes hypothèses mais cette fois l'entreprise est contrainte sur ses débouchés. Son programme devient :

$$\begin{array}{rcl} \underset{K,L}{Max}\Pi & = & p * G_0 * K^\alpha * L^\beta * e^{\gamma t} - c * K - w * L \\ \text{Sous la contrainte} & : & F(L,K) < F_{\max} \text{ fixé.} \end{array}$$

on introduit le lagrangien :

$$\begin{aligned}\Lambda &= \Pi + \zeta * (F_{\max} - F(L,K)) \\ &= (p-\zeta) * G_0 * K^{\alpha} * L^{\beta} * e^{\gamma t} - c * K - w * L + \zeta * F_{\max}\end{aligned}$$

où ζ est la variable duale associée à la contrainte sur les débouchés.

Les dérivées premières de ce lagrangien sont :

$\frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0$

$\Longleftrightarrow (p-\zeta) * G_0 * \alpha * K^{\alpha-1} * L^{\beta} * e^{\gamma t} = c$

$\Longleftrightarrow cste + (\alpha - 1) * \ln(K) + \beta * \ln(L) + \gamma t = \ln(\frac{c}{p-\zeta})$

$$\Longleftrightarrow \ln(L) = \frac{1-\alpha}{\beta} * \ln(K) - \frac{\gamma}{\beta} * t + \frac{1}{\beta} \ln(\frac{c}{p-\zeta}) + cste'$$

de plus, on a : $(p-\zeta) * G_0 * \alpha * K^{\alpha} * L^{\beta} * e^{\gamma t} = c * K$

ce qui équivaut, sous la contrainte $F = F_{\max}$, à : $(p-\zeta) * \alpha * F_{\max} = c * K$

$$\Longleftrightarrow \ln(p-\zeta) = \ln(c) + \ln(K) - \ln(F_{\max}) + cste \qquad \text{(R)}$$

$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = 0$

$\Longleftrightarrow (p-\zeta) * G_0 * K^{\alpha} * \beta * L^{\beta-1} * e^{\gamma t} = w$

$\Longleftrightarrow cste + \alpha * \ln(K) + (\beta - 1) * \ln(L) + \gamma t = \ln(\frac{w}{p-\zeta})$

$$\Longleftrightarrow \ln(L) = \frac{\alpha}{1-\beta} * \ln(K) + \frac{\gamma}{1-\beta} t - \frac{1}{1-\beta} * \ln(\frac{w}{p-\zeta}) + cste'$$

et par différence :

$0 = [\frac{\alpha}{1-\beta} - \frac{1-\alpha}{\beta}] * \ln(K) + [\frac{\gamma}{1-\beta} + \frac{\gamma}{\beta}] * t - \frac{1}{1-\beta} * \ln(\frac{w}{p-\zeta}) - \frac{1}{\beta} \ln(\frac{c}{p-\zeta}) + cste''$

$\Longleftrightarrow 0 = (-1 + \alpha + \beta) * \ln(K) + \gamma * t - \beta * \ln(\frac{w}{c}) + \ln(p-\zeta) - \ln(c) + cste''$

et il vient par (R) :

$0 = (\alpha + \beta) * \ln(K) + \gamma * t - \beta * \ln(\frac{w}{c}) - \ln(F_{\max}) + cste''$

et enfin :

$$\ln(K) = -\frac{\gamma}{\alpha+\beta} * t + \frac{\beta}{\alpha+\beta} * \ln(\frac{w}{c}) + \frac{1}{\alpha+\beta} \ln(F_{\max}) + cste'''$$

Le chemin idéal du capital est fonction du rapport coût du travail/coût du capital mais aussi de la valeur ajoutée maximale $F_{\max}$: le niveau de capital est une fonction de l'output de l'entreprise. C'est l'effet accélérateur.

ANNEXE 2 - MODÈLES A ÉQUATIONS D'EULER

Considérons une entreprise détenue par des actionnaires neutres au risque produisant un bien unique et homogène. Son objectif de long terme est la maximisation de sa valeur boursière. Notons V_t cette valeur à l'instant t et R_t les dividendes que l'entreprise verse à ses actionnaires pour la période $[t, t+1]$. Ces derniers exigeant un rendement ρ_t pour détenir une unité de capital de l'entreprise entre t et $t+1$ on a :

$$E_t[V_{t+1}] = (V_t - R_t) * (\rho_t + 1)$$

où E_t désigne l'espérance conditionnelle à l'information disponible en t.

Ceci définit une relation de récurrence qui peut s'écrire en supposant une durée de vie infinie pour l'entreprise :

$$V_t = E_t \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \beta_{t+i} R_{t+i} \right]$$

où la suite des (β_i) est définie par : $\beta_{t+i} = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{1+\rho_{t+i}}$ pour $i > 1$ et $\beta_t = 1$.

Les dividendes versés par l'entreprise entre t et $t+1$ sont dus aux profits réalisés Π_{t+1} ainsi qu'à la variation du stock de dette $B_{t+1} - B_t$ et aux intérêts payés sur la dette existante en t : $i_t B_t$ où i_t désigne le taux d'intérêt demandé par la banque.

$$
\begin{aligned}
R_{t+1} &= \Pi_{t+1} + B_{t+1} - B_t - i_t B_t \\
&= \Pi_{t+1} + B_{t+1} - (1 + i_t) * B_t
\end{aligned}
$$

Le capital K détenu par l'entreprise est soumis à la condition d'accumulation classique : $K_{t+1} = K_t * (1 - \delta) + I_{t+1}$ où δ est le taux d'obsolescence du capital et I_{t+1} l'investissement effectué par l'entreprise entre t et $t+1$.

Le profit Π est classiquement donné par :

$$\Pi_t(K_t, L_t, I_t) = p_t * F_t - \omega_t L_t - q_t * I_t$$

Notons M_t la demande exprimée par le marché et vue par l'entreprise. On prendra l'expression :

$$M_t = b_0 * p^{-b_1}$$

avec $b_0 > 0$ et $b_1 > 1$.

Dans un cadre de confrontation monopolistique, la confrontation offre/demande sur le marché des biens conduit à l'égalisation : $F_t = M_t = b_0 * p^{-b_1}$. En notant le revenu brut des ventes $RB_t = p_t * F_t$ il vient alors :

$$
\begin{aligned}
RB_t &= b_0 * p_t^{1-b_1} \\
\text{or} &: \quad p_t = \left(\frac{F_t}{b_0}\right)^{-\frac{1}{b_1}} \\
\text{d'où} &: \quad RB_t = RB_0 * F_t^{\frac{1}{\mu}}
\end{aligned}
$$

$$\Pi_t(K_t, L_t, I_t) = RB_0 * F_t^{\frac{1}{\mu}} - \omega_t L_t - q_t * I_t \tag{1}$$

En notant $\mu = \frac{b}{1-b}$ avec b élasticité de la fonction de demande. L'entreprise a pour objectif la maximisation de sa valeur pour ses actionnaires à long terme :

$$\underset{K_t,L_t,I_t,B_t}{\text{Max}} V_t$$

Absence de contraintes financières et de coûts d'ajustement

Aucune contrainte n'est imposée à l'entreprise quant à la valeur de R.

Définissons le Lagrangien Λ_t par la relation :

$$\Lambda_t = V_t + \lambda_t * (K_t - K_{t-1} * (1-\delta) - I_t)$$

où λ_t est le multiplicateur associé à la contrainte d'accumulation du capital.

Le programme de maximisation correspond à l'annulation des dérivées premières de ce lagrangien :

$$\frac{\partial \Lambda_t}{\partial K_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial L_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial I_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial B_t} = 0$$

Ce qui équivaut à :

$\frac{\partial \Lambda_t}{\partial K_t} = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial K_t} + \lambda_t = 0 \qquad (2)$$

or $V_t = E_t[\sum_{j=t}^{+\infty} \beta_j R_j]$ donc $\frac{\partial V_t}{\partial K_t} = \frac{\partial R_t}{\partial K_t} + \frac{\partial}{\partial K_t} E_t[\sum_{j=t+1}^{+\infty} \beta_j R_j] = \frac{\partial R_t}{\partial K_t} + \frac{\partial}{\partial K_t} E_t[\sum_{j=t+1}^{+\infty} \beta_j R_j]$.

Or on sait que $V_{t+1} = E_{t+1}[\sum_{j=t+1}^{+\infty} \beta_j R_j]$. D'où (valeur actualisée) : $E_t[\sum_{j=t+1}^{+\infty} \beta_j R_j] = E_t[\beta_{t+1} V_{t+1}]$.

Ainsi : $\frac{\partial V_t}{\partial K_t} = \frac{\partial R_t}{\partial K_t} + \frac{\partial}{\partial K_t} E_t[\beta_{t+1} V_{t+1}]$ et enfin :

$$\frac{\partial V_t}{\partial K_t} = \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} + E_t[\beta_{t+1} \frac{\partial V_{t+1}}{\partial K_t}] = -\lambda_t \qquad (3)$$

Notons de plus que : $\frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} = \frac{\partial V_t}{\partial K_t}\frac{\partial K_t}{\partial K_{t-1}} = (1-\delta)\frac{\partial V_t}{\partial K_t}$ ce qui conduit à :

$$\lambda_t = -\frac{1}{1-\delta}\frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} \tag{4}$$

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial I_t} = 0$

$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial I_t} = \lambda_t$

et donc :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = \lambda_t \tag{5}$$

De (4) et (5) on déduit : $\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = \lambda_t = -\frac{1}{1-\delta}\frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} \Longleftrightarrow E_t[\frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}}] = E_t[-\frac{1}{1-\delta}\frac{\partial V_{t+1}}{\partial K_t}]$ et donc :

$$E_t[(1-\delta) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}}] = E_t[\frac{1}{\beta_{t+1}} * (\lambda_t + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t})]$$

ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$E_t[\beta_{t+1} * (1-\delta) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}}] = \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} \tag{EULER}$$

qui constitue la première des équations d'Euler du modèle.

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial L_t} = 0$

$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial L_t} = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0 \tag{6}$$

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial B_t} = 0$

$$\Longleftrightarrow E_t[\beta_{t+1}] = \frac{1}{1+i_t} \tag{7}$$

On a alors : $\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = -q_t$

$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = \frac{p_t}{\mu}F_{K,t}$

$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = \frac{p_t}{\mu} F_{L,t} - w_t$

En introduisant dans (EULER) et (6) l'expression du profit $\Pi_t(K_t, L_t, I_t) = RB_0 * F_t^{\frac{1}{\mu}} - \omega_t L_t - q_t * I_t$ il vient :

$$\begin{aligned} E_t\left[\frac{p_t}{\mu} F_{K,t} - p_t * c_{K,t}\right] &= 0 \\ \text{et } E_t\left[p_t F_{L,t} - w_t\right] &= 0 \end{aligned}$$

où $F_X = \frac{\partial F}{\partial X}$. et $c_{K,t} = \frac{q_t}{p_t}(1 - \beta_{t+1} * (1-\delta) * \frac{q_{t+1}}{q_t})$ est le coût d'usage du capital sur un période, différence entre le coût d'achat d'une unité de capital à l'instant t et le prix de revente de cette unité à l'instant $t+1$.

Absence de contraintes financières avec coûts d'ajustement

La fonction de production tient maintenant compte de coûts d'ajustement tels que :

$$\Pi_t(K_t, L_t, I_t) = RB_0 * (F_t - G_t)^{\frac{1}{\mu}} - \omega_t L_t - q_t * I_t$$

avec $G_t = G_t(I_t, K_t)$.

On a alors : $\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = -q_t - \frac{p_t}{\mu} G_I$

$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = \frac{p_t}{\mu} F_K - \frac{p_t}{\mu} G_K$

$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = \frac{p_t}{\mu} F_L - w_t$

Les équations (EULER), (6) et (7) restent inchangées. En y introduisant cette nouvelle expression du profit on a :

$$E_t[\frac{p_t}{\mu} * F_{K,t} - \frac{p_t}{\mu} * G_{K,t} - (p_t * c_{K,t} + \frac{p_t}{\mu} * c_{I,t})] = 0$$

où $c_{I,t} = G_{I,t} - \beta_{t+1} * (1-\delta) * \frac{p_{t+1}}{p_t} * G_{I,t+1}$ nouvelle composante du soût d'usage du capital traduisant l'existance des coûts d'ajustement.

$$\text{et } E_t\left[p_t F_{L,t} - w_t\right] = 0$$

la forme analytique de la fonction G la plus souvent retenue est :

$$G_t(I_t, K_t) = \frac{1}{2} * b * K_t * (\frac{I_t}{K_t})^2$$

fonction convexe, avec b constante.

Contraintes financières avec coûts d'ajustement

On rajoute au programme de l'entreprise :

$$\underset{K_t, L_t, I_t, B_t}{\text{Max}} V_t$$

$$\text{sous la contrainte } K_{t+1} = K_t * (1-\delta) + I_{t+1}$$

la contrainte de positivité sur les dividendes :

$$R_t \geqslant 0, \forall t$$

à laquelle est associée la variable duale η_t, nulle quand l'entreprise est non contrainte et positive dès que la contrainte apparaît.

Le lagrangien à considérer est maintenant :

$$\Lambda_t = V_t + \lambda_t * (K_t - K_{t-1} * (1-\delta) - I_t) + \sum_{i=0}^{+\infty} \eta_{t+i} * \beta_{t+i} * R_{t+i}$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\Lambda_t = E_t[\sum_{i=0}^{+\infty} \beta_{t+i} * (1+\eta_{t+i}) * R_{t+i}] + \lambda_t * (K_t - K_{t-1} * (1-\delta) - I_t)$$

dont la forme est tout à fait analogue à celle utilisée dans les cas sans contraintes financières avec $V_t = E_t[\sum_{j=t}^{+\infty} \beta_j * (1+\eta_j) * R_j]$

Le programme de maximisation correspond à l'annulation des dérivées premières de ce lagrangien :

$$\frac{\partial \Lambda_t}{\partial K_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial L_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial I_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial B_t} = 0$$

Ce qui équivaut à :

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial K_t} = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial K_t} + \lambda_t = 0 \tag{2}$$

or $V_t = E_t[\sum_{j=t}^{+\infty} \beta_j * (1+\eta_j) * R_j]$ donc $\frac{\partial V_t}{\partial K_t} = (1+\eta_t) * \frac{\partial R_t}{\partial K_t} + \frac{\partial}{\partial K_t} E_t[\sum_{j=t+1}^{+\infty} \beta_j * (1+\eta_j) * R_j] = (1+\eta_t) * \frac{\partial R_t}{\partial K_t} + \frac{\partial}{\partial K_t} E_t[\sum_{j=t+1}^{+\infty} \beta_j * (1+\eta_j) * R_j]$.

Or on sait que $V_{t+1} = E_{t+1}[\sum_{j=t+1}^{+\infty} \beta_j * (1+\eta_j) * R_j]$. D'où (valeur actualisée) : $E_t[\sum_{j=t+1}^{+\infty} \beta_j * (1+\eta_j) * R_j] = E_t[\beta_{t+1} V_{t+1}]$.

Ainsi : $\frac{\partial V_t}{\partial K_t} = (1+\eta_t) * \frac{\partial R_t}{\partial K_t} + \frac{\partial}{\partial K_t} E_t[\beta_{t+1} V_{t+1}]$ et enfin :

$$\frac{\partial V_t}{\partial K_t} = (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} + E_t[\beta_{t+1} \frac{\partial V_{t+1}}{\partial K_t}] = -\lambda_t \tag{3}$$

Notons de plus que : $\frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} = \frac{\partial V_t}{\partial K_t} \frac{\partial K_t}{\partial K_{t-1}} + (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_{t-1}} = (1-\delta) \frac{\partial V_t}{\partial K_t} - B_{t-1} * (1+\eta_t) * \frac{\partial i_{t-1}}{\partial K_{t-1}}$ ce qui conduit à :

$$\lambda_t = -\frac{1}{1-\delta} \frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} - \frac{B_{t-1}}{1-\delta} * (1+\eta_t) * \frac{\partial i_{t-1}}{\partial K_{t-1}} \tag{4}$$

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial I_t} = 0$

$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial I_t} = \lambda_t$

et donc :

$$(1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = \lambda_t \tag{5}$$

De (4) et (5) on déduit : $(1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = \lambda_t = -\frac{1}{1-\delta}\frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} - \frac{B_{t-1}}{1-\delta} * (1+\eta_t) * \frac{\partial i_{t-1}}{\partial K_{t-1}} \Longleftrightarrow$ $E_t[(1+\eta_{t+1}) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}}] = E_t[-\frac{1}{1-\delta}\frac{\partial V_{t+1}}{\partial K_t} - \frac{B_t}{1-\delta} * (1+\eta_{t+1}) * \frac{\partial i_t}{\partial K_t}]$ et donc :

$$E_t[(1-\delta) * (1+\eta_{t+1}) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} + (1+\eta_{t+1}) * B_t * \frac{\partial i_t}{\partial K_t}] = E_t[\frac{1}{\beta_{t+1}} * (\lambda_t + (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t})]$$

ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$E_t[\widetilde{\beta}_{t+1} * (1-\delta) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} + \widetilde{\beta}_{t+1} * B_t * \frac{\partial i_t}{\partial K_t}] = \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} \tag{EULER}$$

avec $\widetilde{\beta}_{t+1} = \beta_{t+1} * \frac{(1+\eta_{t+1})}{(1+\eta_t)}$. Ceci constitue la première des équations d'Euler du modèle.

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial L_t} = 0$

$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial L_t} = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0 \tag{6}$$

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial B_t} = 0$

$\Longleftrightarrow (1+\eta_t) * \frac{\partial R_t}{\partial B_t} + (1+\eta_{t+1}) * \beta_{t+1} * \frac{\partial R_{t+1}}{\partial B_t} = 0$

$\Longleftrightarrow (1+\eta_t) = (1+\eta_{t+1}) * \beta_{t+1} * \frac{\partial}{\partial B_t}[(1+i_t) * B_t]$

$\Longleftrightarrow (1+\eta_t) = (1+\eta_{t+1}) * \beta_{t+1} * [(1+i_t) + B_t * \frac{\partial i_t}{\partial B_t}]$

et finalement :

$$E_t[\widetilde{\beta}_{t+1}] = \frac{1}{1+i_t+B_t * \frac{\partial i_t}{\partial B_t}} \tag{7}$$

L'effet de la contrainte financière est donc double : elle introduit d'une part un nouveau terme $\tilde{\beta}_{t+1} * B_t * \frac{\partial i_t}{\partial K_t}$ dans l'équation d'équilibre de l'entreprise traduisant l'augmentation des frais de dettes et d'autre part modifie le taux auquel l'entreprise actualise ses profits futurs.

Endettement optimal :

Le niveau d'endettement optimal de la firme est alors donné par :

$$
\begin{aligned}
B_t &= \frac{\frac{1}{E_t[\tilde{\beta}_{t+1}]} - 1 + i_t}{\frac{\partial i_t}{\partial B_t}} \\
&= \frac{E_t[\frac{1+\eta_t}{1+\eta_{t+1}}] * \frac{1}{\beta_{t+1}} - 1 + i_t}{\frac{\partial i_t}{\partial B_t}}
\end{aligned}
$$

Si l'on suppose β_{t+1} fixé de manière exogène (le rendement fixé ρ par les actionnaires dépend de paramètres non corrélés avec ceux pris en compte dans le modèle), on a alors :

$$B_t = \frac{E_t[\frac{1+\eta_t}{1+\eta_{t+1}}] * (1 + \rho_t) - 1 + i_t}{\frac{\partial i_t}{\partial B_t}}$$

En l'absence de contraintes financières $\eta = 0$ et :

$$B_t = \frac{\rho_t - i_t}{\frac{\partial i_t}{\partial B_t}}$$

On retrouve un des résultats découlant de Modigliani et Miller : l'entreprise ne s'endettera que si le taux d'intérêt demandé par les banques est plus faible que celui demandé par les actionnaires. Si $i_t > \rho_t$, l'entreprise non contrainte quant à son financement par actions ne s'endettera jamais, ou encore : pour être effective, la contrainte financière doit porter sur l'ensemble des canaux de liquidités.

Approche par le Q de TOBIN

A partir des équations :

$$\lambda_t = -\frac{1}{1-\delta}\frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} - \frac{B_{t-1}}{1-\delta} * (1+\eta_t) * \frac{\partial i_{t-1}}{\partial K_{t-1}}$$

et :

$$(1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = \lambda_t$$

on déduit :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = -\frac{1}{(1+\eta_t)*(1-\delta)}\frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} - \frac{B_{t-1}}{1-\delta} * \frac{\partial i_{t-1}}{\partial K_{t-1}}$$

en spécifiant une fonction de coûts d'ajustement convexe du type : $G_t(I_t, K_t) = \frac{b}{2}K * (\frac{I}{K})^2$ on a : $\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = -q_t + b * \left(\frac{I}{K}\right)_t$ et une relation du type :

$$\left(\frac{I}{K}\right)_t = \phi * \frac{\frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}}}{q_t * (1-\delta)} + \varphi$$

Or le terme $\frac{\frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}}}{q_t}$ correspond à la variation de valeur de l'entreprise suite à une variation du capital rapportée au coût de l'investissement. C'est à dire précisément le Q de Tobin.

L'expression à évaluer économétriquement est donc :

$$\left(\frac{I}{K}\right)_t = \phi * Q + \varphi + \epsilon$$

où ϵ contient les termes d'erreur.

ANNEXE 3 - RECHERCHE ET DÉVELOPPEMENT

De façon générale, nous allons supposer que la fonction de production est de la forme :

$$F_t = Y_t(I_t^R)^\xi * G(K_t, L_t)$$

où I_t^R est l'investissement en recherche, $Y_t(I_t^R)$ la productivité découlant de cet investissement en recherche et $G(K_t, L_t)$ la fonction de production au sens «conventionnel» du terme.

Nous supposerons de plus que la fonction G est de type Cobb-Douglas : $G(K_t, L_t) = G_0 * K_t^\gamma L_t^{1-\gamma}$.

Pour déterminer $Y_t(I_t^R)$ il faut déterminer la variation du niveau des ventes pour un investissement I_t^R en recherche (évaluer la rémunération de l'investissement).

Modèle de Franco MALERBA et associés (2001)

Le principe consiste à supposer que les paramètres de recherche (inverse du prix, ou qualité du produit par exemple) suivent une loi du type :

$$X_{t+1} = X_t + a_0 * (I_{t+1}^R)^{a_1} * (t - t_0)^{a_2} * (X_{\max} - X_t)^{a_3}$$

ceci provoque une variation du niveau des ventes telle que :

$$M_{t+1} - M_t = b_0 * (X_t^{b_1} - X_t^{b_1})$$

en supposant la fonction de demande donnée par $M_t = b_0 * X^{b_1}$.

soit :

$$M_{t+1} - M_t = b_0 * ([X_t + a_0 * (I_{t+1}^R)^{a_1} * (t - t_0)^{a_2} * (X_{\max} - X_t)^{a_3}]^{b_1} - X_t^{b_1})$$

au premier ordre, en supposant la variation de prix faible par rapport à la valeur elle-même :

$$\begin{aligned}
&[X_t + a_0 * (I_{t+1}^R)^{a_1} * (t - t_0)^{a_2} \\
*(X_{\max} - X_t)^{a_3}]^{b_1} &= X_t^{b_1} * \left[1 + \frac{a_0 * (I_{t+1}^R)^{a_1} * (t - t_0)^{a_2} * (X_{\max} - X_t)^{a_3}}{X_t}\right]^{b_1} \\
&\simeq X_t^{b_1} * [1 + b_1 * \frac{a_0 * (I_{t+1}^R)^{a_1} * (t - t_0)^{a_2} * (X_{\max} - X_t)^{a_3}}{X_t}]
\end{aligned}$$

et donc :

$$M_{t+1} - M_t \simeq b_0 b_1 * \frac{a_0 * (I_{t+1}^R)^{a_1} * (t - t_0)^{a_2} * (X_{\max} - X_t)^{a_3}}{X_t}$$

Nous avons vu que l'équilibre sur le marché des biens correspondait à : $Y_t = M_t$ ce qui nous conduit à adopter la définition suivante de $Y_t(I_t)$:

$$Y_{t+1} = Y_t + b_0 b_1 * \frac{a_0 * (I_{t+1}^R)^{a_1} * (t - t_0)^{a_2} * (X_{\max} - X_t)^{a_3}}{X_t}$$

que l'on notera :

$$Y_{t+1} = Y_t + H_{t+1} * (I_{t+1}^R)^{a_1}$$

avec H_t définie par :

$$H_t = b_0 b_1 * \frac{a_0(t-t_0)^{a_2}(X_{\max} - X_{t-1})^{a_3}}{X_{t-1}}$$

Modèle de Murat YILDIZOGLU et associés (2001)

La recherche intervient par la fonction de productivité Y_t qui vaut Y_0 initialement et s'accroît par la recherche suivant un processus en deux étapes :

Etape 1 : La probabilité que l'invetissement I^R conduise à une découverte effective est :

$$P[d_{int} = 1] = \varsigma * I^R$$

Si c'est un échec (probabilité $1 - \varsigma * I^R$) le niveau de productivité reste à sa valeur Y_t.

Etape 2 : Le résultat de l'innovation correspond à un tirage aléatoire dans une distribution normale :

$$\widetilde{Y_{t+1}} \rightsquigarrow N(Y_t, \sigma_2^2)$$

Si la valeur tirée est en dessous de Y_t on conserve Y_t sinon on prend la valeur obtenue.

Lorsque l'entreprise fait ses prévisions, elle calcule l'espérance de succès de son investissement. Celle-ci vaut, dans l'hypothèse où les deux tirages sont indépendants :

$$E(Y_{t+1}) = (1 - \varsigma * I^R) * Y_t + \varsigma * I^R * (\text{Espérance lors du deuxième tirage})$$

Lors du deuxième tirage :

$$\text{Espérance lors du deuxième tirage} = \frac{Y_t}{2} + \int_{Y_t}^{+\infty} \frac{X}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-Y_t)^2}{2\sigma_2^2}} dX$$

l'intégrale se calcule facilement par changement de variable : $X \longrightarrow X - Y_t$. Il vient alors :

$$\int_{Y_t}^{+\infty} \frac{X}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-Y_t)^2}{2\sigma_2^2}} dX = \frac{Y_t}{2} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}$$

et donc au total :

$$\text{Espérance lors du deuxième tirage} = Y_t + \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned} E(Y_{t+1}) &= (1 - \varsigma * I^R) * Y_t + \varsigma * I^R * (Y_t + \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}) \\ &= Y_t + \frac{\varsigma * \sigma_2}{\sqrt{2\pi}} * I^R \end{aligned}$$

Ceci n'est rien de plus qu'un cas particulier du modèle de recherche développé par MALERBA avec $a_1 = 1$. On notera dans la suite :

$$Y_{t+1} = Y_t + H * I_{t+1}^R$$

où H est un facteur constant au cours du temps.

ANNEXE 4 - MODÈLE DE SIMULATION

Modèle à taux variable en B/K sans limite technologique

Equations de base

Ceci correspond au programme suivant pour l'entreprise :

$\underset{I_t,\alpha_t,L_t,K_t}{Max}(V_t)$

avec : $V_t = E_t[\sum_{j=t}^{+\infty}\beta_j R_j]$

et : $R_t = (1-\sigma)*\Pi_t + B_t - B_{t-1} - i_{t-1}B_{t-1}$ avec $i_t = i_t(\frac{B_t}{q_t^K K_t})$ fonction croissante de son argument.

et : $\Pi_t(K_t, L_t, I_t, \alpha_t, Y_t) = RB_0 * F_t^{\frac{1}{\mu}} - \omega_t L_t - q_t I_t$

sous les contraines : $K_t = (1-\delta)*K_{t-1}+\alpha_t I_t$ et $Y_t = (1-\delta')*Y_{t-1}+q_t H_t*(1-\alpha_t)*I$.

D'après le théorème de Modigliani et Miller, l'entreprise sera contrainte financièrement si elle l'est sur l'ensemble de ses sources de liquidités. Il faut donc ajouter aux contraintes précédentes la relation : $R_t \geqslant 0$. L'entreprise ne peut émettre de titres pour se financer, et est contrainte à faire appel aux banques. Nous noterons η_t la variable duale associée.

Le lagrangien Λ_t est alors défini par :

$$\begin{aligned}\Lambda_t &= V_t + \lambda_t * [K_t - (1-\delta) * K_{t-1} - \alpha_t I_t] + \mu_t * [Y_t - (1-\delta') * Y_{t-1} \\ &\quad -q_t H_t * (1-\alpha_t)] * I_t + \sum_{i=0}^{+\infty} \eta_{t+i} * \beta_{t+i} * R_{t+i}\end{aligned}$$

expression dans laquelle λ_t est le multiplicateur associé à la contrainte d'accumulation du capital, μ_t celui associé à l'accumulation de productivité, variables toutes deux non corrélées avec les autres données du problème.

Ceci peut se réécrire :

$$\begin{aligned}\Lambda_t &= E_t[\sum_{i=0}^{+\infty} \beta_{t+i} * (1+\eta_{t+i}) * R_{t+i}] + \lambda_t * [K_t - (1-\delta) * K_{t-1} - \alpha_t I_t] \\ &\quad +\mu_t * [Y_t - (1-\delta') * Y_{t-1} - q_t H_t * (1-\alpha_t)] * I_t\end{aligned}$$

Le programme de la firme correspond à l'annulation des dérivées premières de cette fonction :

$$\frac{\partial \Lambda_t}{\partial K_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial L_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial I_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial \alpha_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial B_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial Y_t} = 0$$

On a alors :

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial K_t} = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial K_t} + \lambda_t = 0 \qquad (1)$$

or $V_t = E_t[\sum_{j=t}^{+\infty} \beta_j * (1+\eta_{t+i}) * R_j]$ donc $\frac{\partial V_t}{\partial K_t} = (1+\eta_t) * \frac{\partial R_t}{\partial K_t} + \frac{\partial}{\partial K_t} E_t[\sum_{j=t+1}^{+\infty} \beta_j * (1+\eta_j) * R_j] = (1+\eta_t) * \frac{\partial R_t}{\partial K_t} + \frac{\partial}{\partial K_t} E_t[\sum_{j=t+1}^{+\infty} \beta_j * (1+\eta_j) * R_j]$.

Or on sait que $V_{t+1} = E_{t+1}[\sum_{j=t+1}^{+\infty} \beta_j * (1+\eta_j) * R_j]$. D'où (valeur actualisée) : $E_t[\sum_{j=t+1}^{+\infty} \beta_j * (1+\eta_j) * R_j] = E_t[\beta_{t+1} V_{t+1}]$.

Ainsi : $\frac{\partial V_t}{\partial K_t} = (1+\eta_t) * \frac{\partial R_t}{\partial K_t} + \frac{\partial}{\partial K_t} E_t[\beta_{t+1} V_{t+1}]$ et enfin :

$$\frac{\partial V_t}{\partial K_t} = (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} + E_t[\beta_{t+1} \frac{\partial V_{t+1}}{\partial K_t}] = -\lambda_t \tag{2}$$

Notons de plus que : $\frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} = \frac{\partial V_t}{\partial K_t}\frac{\partial K_t}{\partial K_{t-1}} + (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_{t-1}} = (1-\delta)\frac{\partial V_t}{\partial K_t} - B_{t-1} * (1+\eta_t) * \frac{\partial i_{t-1}}{\partial K_{t-1}}$ ce qui conduit par (5) à :

$$\lambda_t = -\frac{1}{1-\delta}\frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} - \frac{B_{t-1}}{1-\delta} * (1+\eta_t) * \frac{\partial i_{t-1}}{\partial K_{t-1}} \tag{3}$$

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial I_t} = 0$

$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial I_t} = \lambda_t \alpha_t + \mu_t H_t (1-\alpha_t)$

et donc :

$$(1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = \lambda_t \alpha_t + \mu_t q_t H_t (1-\alpha_t) \tag{4}$$

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial Y_t} = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial Y_t} + \mu_t = 0 \tag{5}$$

Le comportement des équations est pratiquement le même que dans le cas de K_t et on a sans difficulté :

$$\frac{\partial V_t}{\partial Y_t} = (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} + E_t[\beta_{t+1} \frac{\partial V_{t+1}}{\partial Y_t}] = -\mu_t \tag{6}$$

et :

$$\mu_t = -\frac{1}{1-\delta'}\frac{\partial V_t}{\partial Y_{t-1}} \tag{7}$$

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial \alpha_t} = 0$

$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial \alpha_t} = \lambda_t I_t - \mu_t q_t H_t I_t$ et enfin :

$$(1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t} = \lambda_t I_t - \mu_t q_t H_t I_t \tag{8}$$

Il vient alors quand I_t est non nul : $\lambda_t = \frac{(1-\sigma)}{I_t} * (1+\eta_i) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t} + \mu_t q_t H_t$.

En intégrant dans (4) les résultats de (3) et (7) il vient :

$(1-\sigma)*(1+\eta_t)*\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = -[\frac{1}{1-\delta}\frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} + \frac{B_{t-1}}{1-\delta}*(1+\eta_t)*\frac{\partial i_{t-1}}{\partial K_{t-1}}]*\alpha_t - q_t H_t * \frac{1}{1-\delta'}\frac{\partial V_t}{\partial Y_{t-1}} *$ $(1-\alpha_t)$ et donc :

$$\begin{aligned}
& (1-\sigma)*(1+\eta_{t+1})*\frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} \\
= \quad & -[\frac{1}{1-\delta}\frac{\partial V_{t+1}}{\partial K_t} + \frac{B_t}{1-\delta}*(1+\eta_{t+1})*\frac{\partial i_t}{\partial K_t}]*\alpha_{t+1} \\
& -q_t H_t * \frac{1}{1-\delta'}\frac{\partial V_{t+1}}{\partial Y_t}*(1-\alpha_{t+1})
\end{aligned} \tag{9}$$

Or on sait avec (2) et (6) (en notant $E_t[\frac{\partial V_{t+1}}{\partial X_t}] = \frac{\partial V_{t+1}}{\partial X_t}$) que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{t+1}}{\partial K_t} &= -\frac{\lambda_t + (1-\sigma)*(1+\eta_t)*\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}}{\beta_{t+1}} \\
\frac{\partial V_{t+1}}{\partial Y_t} &= -\frac{\mu_t + (1-\sigma)*(1+\eta_t)*\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}}{\beta_{t+1}}
\end{aligned} \tag{10}$$

D'où en remplaçant dans (9) :

$$\begin{aligned}
(1-\sigma)*(1+\eta_{t+1})*\frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} &= -\frac{B_t}{1-\delta}*(1+\eta_{t+1})*\frac{\partial i_t}{\partial K_t}*\alpha_{t+1} + \\
& \frac{1}{\beta_{t+1}(1-\delta)}\left[\lambda_t + (1-\sigma)*(1+\eta_t)*\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right]*\alpha_{t+1} \\
& + \frac{q_t H_t}{\beta_{t+1}(1-\delta')}*[\mu_t + (1-\sigma) \\
& *(1+\eta_t)*\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}]*(1-\alpha_{t+1})
\end{aligned}$$

Notons de plus que le système (en λ_t et μ_t) :

$(1-\sigma)*(1+\eta_t)*\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = \lambda_t \alpha_t + \mu_t q_t H_t (1-\alpha_t)$

$(1-\sigma)*(1+\eta_t)*\frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t} = \lambda_t I_t - \mu_t q_t H_t I_t$

nous donne :

$$\begin{aligned}
\mu_t &= \frac{1-\sigma}{q_t H_t I_t}[I_t*(1+\eta_t)*\frac{\partial\Pi_t}{\partial I_t} - \alpha_t*(1+\eta_t)*\frac{\partial\Pi_t}{\partial\alpha_t}] \\
\lambda_t &= \frac{1-\sigma}{I_t}[I_t*(1+\eta_t)*\frac{\partial\Pi_t}{\partial I_t} + (1-\alpha_t)*(1+\eta_t)*\frac{\partial\Pi_t}{\partial\alpha_t}]
\end{aligned}$$

qui donne alors en remplaçant dans (11) :

$$\begin{aligned}
& (1-\sigma)*(1+\eta_{t+1})*\frac{\partial\Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} \\
= & -\frac{B_t}{1-\delta}*(1+\eta_{t+1})*\frac{\partial i_t}{\partial K_t}*\alpha_{t+1} + \frac{1}{\beta_{t+1}(1-\delta)}[\frac{1-\sigma}{I_t}[I_t*(1+\eta_t)*\frac{\partial\Pi_t}{\partial I_t} + \cdots \\
& +(1-\alpha_t)*(1+\eta_t)*\frac{\partial\Pi_t}{\partial\alpha_t} + (1-\sigma)*(1+\eta_t)*\frac{\partial\Pi_t}{\partial K_t}]*\alpha_{t+1} + \cdots \\
& +\frac{q_t H_t}{\beta_{t+1}(1-\delta')}*[\frac{1-\sigma}{q_t H_t I_t}[I_t*(1+\eta_t)*\frac{\partial\Pi_t}{\partial I_t} - \alpha_t*(1+\eta_t)*\frac{\partial\Pi_t}{\partial\alpha_t}] + \cdots \\
& +(1-\sigma)*(1+\eta_t)*\frac{\partial\Pi_t}{\partial Y_t}]*(1-\alpha_{t+1})
\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
& (1-\sigma)*\frac{(1+\eta_{t+1})}{(1+\eta_t)}*\beta_{t+1}*\frac{\partial\Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} \\
= & -\frac{B_t}{1-\delta}*\frac{(1+\eta_{t+1})}{(1+\eta_t)}*\beta_{t+1}*\frac{\partial i_t}{\partial K_t}*\alpha_{t+1} + \frac{1}{(1-\delta)}[\frac{1-\sigma}{I_t}[I_t*\frac{\partial\Pi_t}{\partial I_t} + \cdots \\
& +(1-\alpha_t)*\frac{\partial\Pi_t}{\partial\alpha_t} + (1-\sigma)*\frac{\partial\Pi_t}{\partial K_t}]*\alpha_{t+1} + \cdots \\
& +\frac{q_t H_t}{1-\delta'}*\left[\frac{1-\sigma}{q_t H_t I_t}[I_t*\frac{\partial\Pi_t}{\partial I_t} - \alpha_t*\frac{\partial\Pi_t}{\partial\alpha_t}] + (1-\sigma)*\frac{\partial\Pi_t}{\partial Y_t}\right]*(1-\alpha_{t+1})
\end{aligned}$$

que nous écrirons finalement sous la forme :

$$
\begin{aligned}
& \widetilde{\beta}_{t+1} * (1-\sigma) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} \\
= \ & -\widetilde{\beta}_{t+1} * \frac{B_t}{1-\delta} * \frac{\partial i_t}{\partial K_t} * \alpha_{t+1} + \frac{1}{(1-\delta)}[\frac{1-\sigma}{I_t}[I_t * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} \\
& +(1-\alpha_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t} + (1-\sigma) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}] * \alpha_{t+1} \\
& + \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \left[\frac{1-\sigma}{q_t H_t I_t}[I_t * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} - \alpha_t * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}] + (1-\sigma) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} \right] * (1-\alpha_{t+1})
\end{aligned}
$$

avec :

$$
\widetilde{\beta}_{t+1} = \beta_{t+1} * \frac{(1+\eta_{t+1})}{(1+\eta_t)}
$$

qui constitue l'équation d'Euler de notre problème.

Remarque : dans le cas sans optimisation par rapport à α ($\alpha = 1$) ni par rapport à Y, on retrouve bien l'équation d'Euler classique

$$
\widetilde{\beta}_{t+1} * \left[(1-\delta) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} + \frac{B_t}{1-\sigma} * \frac{\partial i_t}{\partial K_t} \right] = \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}
$$

On aurait également pu écrire :

$(1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t} = -[\frac{1}{1-\delta} \frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} + \frac{B_{t-1}}{1-\delta} * (1+\eta_t) * \frac{\partial i_{t-1}}{\partial K_{t-1}}] * I_t + H_t[\frac{1}{1-\delta'} \frac{\partial V_t}{\partial Y_{t-1}}] * I_t$

et avec le même principe que précédemment :

$$
\begin{aligned}
& (1-\sigma) * (1+\eta_{t+1}) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial \alpha_{t+1}} \\
= \ & -\frac{B_t}{1-\delta} * (1+\eta_{t+1}) * \frac{\partial i_t}{\partial K_t} * I_{t+1} + \frac{1}{\beta_{t+1}(1-\delta)}[\frac{1-\sigma}{I_t}[I_t * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \cdots \\
& +(1-\alpha_t) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}] + (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}] * I_{t+1} \\
& -\frac{q_t H_t}{\beta_{t+1}(1-\delta')}[\frac{1-\sigma}{q_t H_t I_t}[I_t * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} - \cdots \\
& -\alpha_t * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}] + (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}] * I_{t+1}
\end{aligned}
$$

qui se réécrit aussi :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\beta}_{t+1} * (1-\sigma) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial \alpha_{t+1}} \\
= \quad & -\tilde{\beta}_{t+1} * \frac{B_t}{1-\delta} * \frac{\partial i_t}{\partial K_t} * I_{t+1} + \frac{1}{\beta_{t+1}(1-\delta)}[\frac{1-\sigma}{I_t}[I_t * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \cdots \\
& +(1-\alpha_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}] + (1-\sigma) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}] * I_{t+1} - \frac{q_t H_t}{\beta_{t+1}(1-\delta')}[\frac{1-\sigma}{q_t H_t I_t}[I_t * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} - \cdots \\
& -\alpha_t * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}] + (1-\sigma) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}] * I_{t+1}
\end{aligned}$$

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial L_t} = 0$

$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial L_t} = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0 \tag{14}$$

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial B_t} = 0$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & \frac{\partial R_t}{\partial B_t} + \tilde{\beta}_{t+1} * \frac{\partial R_{t+1}}{\partial B_t} = 0 \qquad (15) \\
\Longleftrightarrow \quad & E_t[\tilde{\beta}_{t+1}] = \frac{1}{1 + i_t + B_t \frac{\partial i_t}{\partial B_t}}
\end{aligned}$$

L'effet de la contrainte financière est donc double : elle introduit d'une part un nouveau terme $\tilde{\beta}_{t+1} * B_t * \frac{\partial i_t}{\partial K_t}$ dans l'équation d'équilibre de l'entreprise traduisant l'augmentation des frais de dettes et d'autre part modifie le taux auquel l'entreprise actualise ses profits futurs.

Endettement optimal :

Le niveau d'endettement optimal de la firme est alors donné par :

$$
\begin{aligned}
B_t &= \frac{\frac{1}{E_t[\widetilde{\beta}_{t+1}]} - 1 + i_t}{\frac{\partial i_t}{\partial B_t}} \\
&= \frac{E_t[\frac{1+\eta_t}{1+\eta_{t+1}}] * \frac{1}{\beta_{t+1}} - 1 + i_t}{\frac{\partial i_t}{\partial B_t}}
\end{aligned}
$$

Si l'on suppose β_{t+1} fixé de manière exogène (en supposant que le rendement fixé ρ par les actionnaires dépend de paramètres non corrélés avec ceux pris en compte dans le modèle), alors on a :

$$
B_t = \frac{E_t[\frac{1+\eta_t}{1+\eta_{t+1}}] * (1 + \rho_t) - 1 + i_t}{\frac{\partial i_t}{\partial B_t}}
$$

En l'absence de contraintes financières $\eta = 0$ et :

$$
B_t = \frac{\rho_t - i_t}{\frac{\partial i_t}{\partial B_t}}
$$

On retrouve un des résultats découlant de Modigliani et Miller : l'entreprise ne s'endettera que si le taux d'intérêt demandé par les banques est plus faible que celui demandé par les actionnaires. Si $i_t > \rho_t$, l'entreprise non contrainte quant à son financement par actions ne s'endettera jamais, ou encore : pour être effective, la contrainte financière doit porter sur l'ensemble des canaux de liquidités.

Résolution explicite

Nous allons maintenant considérer le cas suivant qui constitue notre modèle de simulation à proprement parler :

$i_t = i_0 + i_1 * \frac{B_t}{q_t K_t}$ pour tout t.

$F(K_t, L_t, Y_t) = G_0 * Y_t^{\xi} K_t^{\gamma} L_t^{1-\gamma-\xi}$ pour tout t.

On a alors : $\Pi_t(K_t, L_t, I_t, \alpha_t, Y_t) = RB_0 * F_t^{\frac{1}{\mu}} - \omega_t L_t - q_t * I_t = \Pi_t(K_t, L_t, I_t, Y_t)$ pour tout t et en particulier :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t} = 0 \text{ pour tout } t$$

et les équations (12) et (13) sont alors considérablement plus simples :

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}_{t+1} * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} + C_t * \alpha_{t+1} &= \frac{1}{(1-\delta)} \left[\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} \right] * \alpha_{t+1} \\ &+ \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \left[\frac{1}{H_t} \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} \right] * (1 - \alpha_{t+1}) \end{aligned} \tag{12bis}$$

$$C_t = \frac{1}{(1-\delta)} \left[\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} \right] - \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \left[\frac{1}{H_t} \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} \right] \tag{13bis}$$

avec :

$$\widetilde{\beta}_{t+1} = \frac{1}{1 + i_0 + 2 i_1 \frac{B_t}{q_t K_t}}$$

et :

$$C_t = -\frac{\widetilde{\beta}_{t+1}}{q_t (1-\delta)(1-\sigma)} * i_1 * \frac{B_t^2}{K_t^2}$$

Pour effectuer ses prévisions, l'entreprise fait l'hypothèse de «continuité des conditions de financement» ce qui correspond à $\widetilde{\beta}_{t+1} = \widetilde{\beta}_t$ et $C_t = C_{t-1}$. Ces termes sont alors déterminés.

Nous pouvons également écrire :

$\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = -q_t$

$\frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} = -q_{t+1}$

Et les équations (12bis) et (13bis) s'écrivent :

$-\widetilde{\beta}_{t+1} q_{t+1} + C_t * \alpha_{t+1} = \frac{1}{(1-\delta)} \left[-q_t + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} \right] * \alpha_{t+1} + \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \left[-\frac{q_t}{q_t H_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} \right] * (1 - \alpha_{t+1})$

$C_t = \frac{1}{(1-\delta)} \left[-q_t + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} \right] - \frac{q_t H_t}{1-\delta'} \left[-\frac{q_t}{q_t H_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} \right]$

soit le système (en $\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}$ et $\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}$) :

$$
\begin{aligned}
C_t - \frac{\tilde{\beta}_{t+1} q_{t+1}}{\alpha_{t+1}} &= \frac{1}{(1-\delta)}\left[-q_t + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right] + \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \left[-\frac{q_t}{q_t H_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}\right] * (\frac{1-\alpha_{t+1}}{\alpha_{t+1}}) \\
C_t &= \frac{1}{(1-\delta)}\left[-q_t + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right] - \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \left[-\frac{q_t}{q_t H_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}\right]
\end{aligned}
$$

En soustrayant les deux lignes il vient :

$-\frac{\tilde{\beta}_{t+1} q_{t+1}}{\alpha_{t+1}} = \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \left[-\frac{q_t}{q_t H_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}\right] * (\frac{1-\alpha_{t+1}}{\alpha_{t+1}} + 1) = \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \left[-\frac{q_t}{q_t H_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}\right] * \frac{1}{\alpha_{t+1}}$ soit :

$$
\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} = \frac{(1-\delta')}{H_t}(1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}\tilde{\beta}_{t+1}) \tag{16}
$$

on a aussi :

$C_t * (\frac{1-\alpha_{t+1}}{\alpha_{t+1}}) + C_t - \frac{\tilde{\beta}_{t+1} q_{t+1}}{\alpha_{t+1}} = \frac{1}{(1-\delta)}\left[-q_t + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right] * (\frac{1-\alpha_{t+1}}{\alpha_{t+1}}) + \frac{1}{(1-\delta)}\left[-q_t + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right]$

$\Longleftrightarrow (C_t - \tilde{\beta}_{t+1} q_{t+1}) * \frac{1}{\alpha_{t+1}} = -\frac{q_t}{(1-\delta)} * \frac{1}{\alpha_{t+1}} + \frac{1}{(1-\delta)} * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} * \frac{1}{\alpha_{t+1}}$ et enfin :

$$
\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = q_t * [1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}(1-\delta)\tilde{\beta}_{t+1} + \frac{(1-\delta)}{q_t} * C_t] = q_t D_t \tag{17}
$$

avec $D_t = 1 - \beta_{t+1}(1-\delta)\frac{q_{t+1}}{q_t} + \frac{(1-\delta)}{q_t} * C_t$.

Nous savons de plus que :

$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = \frac{\gamma * p_t}{\mu} * \frac{F_t}{K_t}$

$\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} = \frac{\xi * p_t}{\mu} * \frac{F_t}{Y_t}$

et : $\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = \frac{(1-\gamma-\xi) * p_t}{\mu} * \frac{F_t}{L_t} - \omega_t$

où p est le prix de vente du produit.

On a alors les relations :

$$
\begin{aligned}
\frac{p_t}{\mu} * F_t &= \frac{K_t}{\gamma} * q_t D_t \\
\frac{p_t}{\mu} * F_t &= \frac{Y_t}{\xi} * \frac{(1-\delta')}{H_t}(1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}\tilde{\beta}_{t+1}) \\
\frac{p_t}{\mu} * F_t &= \frac{\omega_t}{1-\gamma-\xi} * L_t
\end{aligned}
$$

ce qui conduit à l'équation des courbes isoquantes de l'entreprise :

$$
\begin{aligned}
\frac{Y_t}{K_t} &= \frac{q_t H_t * \frac{\xi}{\gamma} * D_t}{(1-\delta^{'}) * (1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}\widetilde{\beta}_{t+1})} = \mathbb{C}_t \\
\frac{L_t}{K_t} &= \frac{(1-\gamma-\xi) * q_t D_t}{\gamma\omega_t} = \mathbb{N}_t \\
\frac{L_t}{Y_t} &= \frac{(1-\gamma-\xi) * (1-\delta^{'}) * (1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}\widetilde{\beta}_{t+1})}{H_t \xi \omega_t} = \mathbb{Q}_t
\end{aligned}
$$

On constate que l'endettement intervient dans les Taux Marginaux de Substitution Technique (TMST) entre les facteurs. Ceci est une conséquence directe du canal large du crédit : le capital sert de caution aux emprunts de l'entreprise. Un niveau de capital élevé (et donc une valeur des autres facteurs plus faible) diminue le coût de la dette. Réciproquement, quand les intérêts demandés par les banques augmentent, l'entreprise doit hausser son niveau de capital pour éviter une trop grande servitude. Un des effets d'une hausse des taux d'intérêt bancaires est ainsi de favoriser l'investissement en capital au détriment des autres types d'investissements.

Dans un cadre de concurrence monopolistique, on sait alors que la valeur des ventes de l'entreprise est donnée par $p_t * F_t = RB_0 * F_t^{\frac{1}{\mu}}$ avec $\mu = \frac{b_1}{b_1 - 1}$ et $RB_0 = b_0^{1-\frac{1}{\mu}}$.

On a ainsi : $p_t * F_t = RB_0 * F_t^{\frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{\gamma} * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} * K_t = \frac{\mu * q_t D_t}{\gamma} * K_t$ et :

$RB_0 * G_0^{\frac{1}{\mu}} * K_t^{\frac{\gamma}{\mu}} * Y_t^{\frac{\xi}{\mu}} * L_t^{\frac{1-\gamma-\xi}{\mu}} = \frac{\mu * q_t D_t}{\gamma} * K_t$

$\Longleftrightarrow RB_0 * G_0^{\frac{1}{\mu}} * K_t^{\frac{\gamma}{\mu}} * \mathbb{C}_t^{\frac{\xi}{\mu}} * K_t^{\frac{\xi}{\mu}} * \mathbb{N}_t^{\frac{1-\gamma-\xi}{\mu}} * K_t^{\frac{1-\gamma-\xi}{\mu}} = \frac{\mu * q_t D_t}{\gamma} * K_t$

$\Longleftrightarrow RB_0 * G_0^{\frac{1}{\mu}} * K_t^{\frac{1}{\mu}} * \mathbb{C}_t^{\frac{\xi}{\mu}} * \mathbb{N}_t^{\frac{1-\gamma-\xi}{\mu}} = \frac{\mu * q_t D_t}{\gamma} * K_t$

et enfin :

$$
K_t = \left(\frac{\gamma * RB_0}{\mu * q_t D_t} * G_0^{\frac{1}{\mu}} * \mathbb{C}_t^{\frac{\xi}{\mu}} * \mathbb{N}_t^{\frac{1-\gamma-\xi}{\mu}} \right)^{b_1}
$$

qui détermine le niveau de capital optimal de la firme' Y_t et L_t se déduisent par l'expression des courbes isoquantes :

$$Y_t = \mathbb{C}_t * \left(\frac{\gamma * RB_0}{\mu * q_t D_t} * G_0^{\frac{1}{\mu}} * \mathbb{C}_t^{\frac{\xi}{\mu}} * \mathbb{N}_t^{\frac{1-\gamma-\xi}{\mu}} \right)^{b_1}$$
$$L_t = \mathbb{N}_t * \left(\frac{\gamma * RB_0}{\mu * q_t D_t} * G_0^{\frac{1}{\mu}} * \mathbb{C}_t^{\frac{\xi}{\mu}} * \mathbb{N}_t^{\frac{1-\gamma-\xi}{\mu}} \right)^{b_1}$$

Remarque : il est possible que $K_t < K_{t-1}$ et de mêne pour Y. Dans ce cas l'entreprise est obligée de désinvestir et de vendre une partie de ses actifs. Nous supposerons qu'elle le fait au prix d'achat, sans coût supplémentaire.

Modèle à taux variable en B/K avec limite technologique

Equations de base

Ceci correspond à un nouveau programme explicite pour l'entreprise :

$\underset{I_t,\alpha_t,L_t,K_t}{Max}(V_t)$

avec : $V_t = E_t[\sum\limits_{j=t}^{+\infty}\beta_j R_j]$

et : $R_t = (1-\sigma) * \Pi_t + B_t - B_{t-1} - i_{t-1}B_{t-1}$avec $i_t = i_t(\frac{B_t}{q_t^K K_t})$ fonction croissante de son argument.

et : $\Pi_t(K_t, L_t, I_t, \alpha_t, Y_t) = RB_0 * F_t^{\frac{1}{\mu}} - \omega_t L_t - [\alpha_t q_t^K + (1-\alpha_t)q_t^R] * I_t$

sous les contraintes : $K_t = (1-\delta) * K_{t-1} + \alpha_t I_t$, $Y_t = (1-\delta') * Y_{t-1} + q_t H_t * (1 - \frac{Y_{t-1}}{Y_{\max}})^a * (1-\alpha_t) * I_t$ et $R_t \geqslant 0$.

Le nouveau lagrangien Λ_t est alors défini par :

$$\begin{aligned}\Lambda_t &= V_t + \lambda_t * [K_t - (1-\delta)K_{t-1} - \alpha_t I_t] + \mu_t * [Y_t - (1-\delta') * Y_{t-1} \\ &\quad -q_t H_t * (1 - \frac{Y_{t-1}}{Y_{\max}})^a * (1-\alpha_t) * I_t \\ &\quad +\sum_{i=0}^{+\infty} \eta_{t+i} * \beta_{t+i} * R_{t+i}\end{aligned}$$

expression dans laquelle λ_t est le multiplicateur associé à la contrainte d'accumulation du capital, μ_t celui associé à l'accumulation de productivité, variables toutes deux non corrélées avec les autres données du problème. On notera $\theta_t = 1 - \frac{(1-\delta')Y_{t-1}}{Y\max}$ dans toute la suite. Comme précédemment on écrira :

$$\begin{aligned}\Lambda_t &= E_t[\sum_{i=0}^{+\infty} \beta_{t+i} * (1+\eta_{t+i}) * R_{t+i}] + \lambda_t * [K_t - (1-\delta)K_{t-1} - \alpha_t I_t] \\ &\quad +\mu_t * [Y_t - (1-\delta') * Y_{t-1} - q_t H_t * (1-\alpha_t)] * I_t\end{aligned}$$

Le programme de la firme correspond à l'annulation des dérivées premières de cette fonction :

$$\frac{\partial \Lambda_t}{\partial K_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial L_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial I_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial \alpha_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial B_t} = \frac{\partial \Lambda_t}{\partial Y_t} = 0$$

Les équations sont de la même forme que précédemment :

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial K_t} = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial K_t} + \lambda_t = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial K_t} = (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} + E_t[\beta_{t+1} \frac{\partial V_{t+1}}{\partial K_t}] = -\lambda_t \tag{2}$$

$$\lambda_t = -\frac{1}{1-\delta} \frac{\partial V_t}{\partial K_{t-1}} - \frac{B_{t-1}}{1-\delta} * (1+\eta_t) * \frac{\partial i_{t-1}}{\partial K_{t-1}} \tag{3}$$

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial I_t} = 0$

$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial I_t} = \lambda_t \alpha_t + \mu_t q_t H_t \theta_t (1-\alpha_t)$

et donc :

$$(1-\sigma)*(1+\eta_t)*\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = \lambda_t \alpha_t + \mu_t q_t H_t \theta_t^a (1-\alpha_t) \tag{4}$$

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial Y_t} = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial Y_t} + \mu_t = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial Y_t} = (1-\sigma)*(1+\eta_t)*\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} + E_t[\beta_{t+1}\frac{\partial V_{t+1}}{\partial Y_t}] = -\mu_t \tag{6}$$

et :

$$\begin{aligned} \mu_t &= -\frac{1}{1-\frac{a\theta_t^{a-1}}{Y_{\max}} q_t H_t * (1-\alpha_t) * I_t} * \frac{1}{1-\delta'}\frac{\partial V_t}{\partial Y_{t-1}} \\ &= -\frac{1}{\Phi_t} * \frac{1}{1-\delta'}\frac{\partial V_t}{\partial Y_{t-1}} \end{aligned} \tag{7}$$

avec $\Phi_t = 1 - \frac{a\theta_t^{a-1}}{Y_{\max}} q_t H_t * (1-\alpha_t) * I_t$.

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial \alpha_t} = 0$

$$(1-\sigma)*(1+\eta_t)*\frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t} = \lambda_t I_t - \mu_t q_t H_t \theta_t^a * I_t \tag{8}$$

il vient alors suivant le même raisonnement que précédemment :

$$\begin{aligned} &(1-\sigma)*(1+\eta_{t+1})*\frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} \\ = \quad & -[\frac{1}{1-\delta}\frac{\partial V_{t+1}}{\partial K_t} + \frac{B_t}{1-\delta}*(1+\eta_{t+1})*\frac{\partial i_t}{\partial K_t}]*\alpha_{t+1} \\ & -\frac{q_t H_t}{1-\delta'}*\frac{\partial V_{t+1}}{\partial Y_t}*(1-\alpha_{t+1})*\frac{\theta_{t+1}^a}{\Phi_{t+1}} \end{aligned} \tag{9}$$

Or (même notation que plus haut) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{t+1}}{\partial K_t} &= -\frac{\lambda_t + (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}}{\beta_{t+1}} \\
\frac{\partial V_{t+1}}{\partial Y_t} &= -\frac{\mu_t + (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}}{\beta_{t+1}}
\end{aligned} \tag{10}$$

Les égalités :

$$\begin{aligned}
\mu_t &= \frac{1-\sigma}{q_t H_t I_t}[I_t * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} - \alpha_t * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}] \\
\lambda_t &= \frac{1-\sigma}{I_t}[I_t * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + (1-\alpha_t) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}]
\end{aligned} \tag{11}$$

restent valables et il vient :

qui donne alors en remplaçant dans (11) :

$$\begin{aligned}
& (1-\sigma) * (1+\eta_{t+1}) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} \\
= & -\frac{B_t}{1-\delta} * (1+\eta_{t+1}) * \frac{\partial i_t}{\partial K_t} * \alpha_{t+1} + \frac{1}{\beta_{t+1}(1-\delta)}[\frac{1-\sigma}{I_t}[I_t * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \cdots \\
& +(1-\alpha_t) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}] + (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}] * \alpha_{t+1} + \cdots \\
& + \frac{q_t H_t}{\beta_{t+1} * (1-\delta')} * \frac{\theta^a_{t+1}}{\Phi_{t+1}} * [\frac{1-\sigma}{q_t H_t I_t}[I_t * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} - \cdots \\
& -\alpha_t * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}] + (1-\sigma) * (1+\eta_t) * \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}] * (1-\alpha_{t+1})
\end{aligned}$$

qui constitue l'équation d'Euler de notre problème.

Et avec le même principe que précédemment :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\beta}_{t+1} * (1-\sigma) * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial \alpha_{t+1}} \qquad (13)\\
= \ & -\tilde{\beta}_{t+1} * \frac{B_t}{1-\delta} * \frac{\partial i_t}{\partial K_t} * I_{t+1} \\
&+\frac{1}{(1-\delta)}[\frac{1-\sigma}{I_t}[I_t\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + (1-\alpha_t)\frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}] + (1-\sigma)\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}] * I_{t+1} \\
&-\frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \frac{\theta^a_{t+1}}{\Phi_{t+1}} * \left[\frac{1-\sigma}{q_t H_t I_t}[I_t\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} - \alpha_t\frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t}] + (1-\sigma)\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}\right] * I_{t+1}
\end{aligned}$$

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial L_t} = 0$

$\Longleftrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial L_t} = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0 \qquad (14)$$

- $\frac{\partial \Lambda_t}{\partial B_t} = 0$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial R_t}{\partial B_t} + \tilde{\beta}_{t+1} * \frac{\partial R_{t+1}}{\partial B_t} = 0 \qquad (15)\\
&\Longleftrightarrow \quad E_t[\tilde{\beta}_{t+1}] = \frac{1}{1 + i_t + B_t\frac{\partial i_t}{\partial B_t}}
\end{aligned}$$

Résolution explicite

Nous allons considérer le même cas particulier qu'auparavant :

$i_t = i_0 + i_1 * \frac{B_t}{q_t K_t}$ pour tout t.

$F(K_t, L_t, Y_t) = G_0 * Y_t^{\xi} K_t^{\gamma} L_t^{1-\gamma-\xi}$ pour tout t.

On a alors : $\Pi_t(K_t, L_t, I_t, \alpha_t, Y_t) = RB_0 * F_t^{\frac{1}{\mu}} - \omega_t L_t - q_t * I_t = \Pi_t(K_t, L_t, I_t, Y_t)$ pour tout t et en particulier :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial \alpha_t} = 0 \text{ pour tout } t$$

et les équations (12) et (13) sont alors considérablement plus simples :

$$\tilde{\beta}_{t+1} * \frac{\partial \Pi_{t+1}}{\partial I_{t+1}} + C_t * \alpha_{t+1} = \frac{1}{(1-\delta)}\left[\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right] * \alpha_{t+1} + \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \frac{\theta^a_{t+1}}{\Phi_{t+1}} * \left[\frac{1}{q_t H_t}\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}\right] * (1-\alpha_{t+1}) \tag{12bis}$$

$$C_t = \frac{1}{(1-\delta)}\left[\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right] - \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \frac{\theta^a_{t+1}}{\Phi_{t+1}} * \left[\frac{1}{q_t H_t}\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}\right] \tag{13bis}$$

avec comme avant :

$$\tilde{\beta}_{t+1} = \frac{1}{1 + i_0 + 2i_1\frac{B_t}{q_t K_t}}$$

et :

$$C_t = -\frac{\tilde{\beta}_{t+1}}{q_t(1-\delta)(1-\sigma)} * i_1 * \frac{B_t^2}{K_t^2}$$

déterminés là encore par hypothèse de continuité des conditions de financement.

Nous pouvons également expliciter les dérivées du profit :

$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = \frac{\gamma * RB_0}{\mu} * \frac{F_t^{\frac{1}{\mu}}}{K_t} = \frac{\gamma * p_t}{\mu} * \frac{F_t}{K_t}$

$\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} = \frac{\xi * RB_0}{\mu} * \frac{F_t^{\frac{1}{\mu}}}{Y_t} = \frac{\xi * p_t}{\mu} * \frac{F_t}{Y_t}$

$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = \frac{(1-\gamma-\xi) * RB_0}{\mu} * \frac{F_t^{\frac{1}{\mu}}}{L_t} - \omega_t = \frac{(1-\gamma-\xi) * p_t}{\mu} * \frac{F_t}{L_t} - \omega_t$

$\frac{\partial \Pi_t}{\partial I_t} = -q_t$

Soit le système (en $\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}$ et $\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}$) :

$$\begin{aligned} C_t - \frac{\tilde{\beta}_{t+1} q_{t+1}}{\alpha_{t+1}} &= \frac{1}{(1-\delta)}\left[-q_t + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right] + \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \frac{\theta^a_{t+1}}{\Phi_{t+1}} * \left[-\frac{q_t}{q_t H_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}\right] * \left(\frac{1-\alpha_{t+1}}{\alpha_{t+1}}\right) \\ C_t &= \frac{1}{(1-\delta)}\left[-q_t + \frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t}\right] - \frac{q_t H_t}{1-\delta'} * \frac{\theta^a_{t+1}}{\Phi_{t+1}} * \left[-\frac{q_t}{q_t H_t} + \frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t}\right] \end{aligned}$$

Et il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} &= \frac{q_t*(1-\delta^{'})}{\theta_t^a q_t H_t}(1-\frac{q_{t+1}}{q_t}*\widetilde{\beta}_{t+1}*\frac{\theta_t^a}{\theta_{t+1}^a}\Phi_{t+1}) \\ &= q_t E_t\end{aligned} \tag{16}$$

avec $E_t = \frac{1-\delta^{'}}{\theta_t^a q_t H_t}(1-\frac{q_{t+1}}{q_t}*\widetilde{\beta}_{t+1}*\frac{\theta_t^a}{\theta_{t+1}^a}\Phi_{t+1})$.

L'expression de la dérivée en K du profit reste inchangée :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = q_t*[1-\frac{q_{t+1}}{q_t}*\widetilde{\beta}_{t+1}*(1-\delta)+\frac{(1-\delta)}{q_t}*C_t] = qD_t \tag{17}$$

avec $D_t = 1-\frac{q_{t+1}}{q_t}*\widetilde{\beta}_{t+1}*(1-\delta)+\frac{(1-\delta)}{q_t}*C_t$.

On déduit alors :

$$\frac{K_t}{Y_t} = \frac{\gamma}{D_t}E_t$$

L'état optimal pour l'entreprise (au sens de la maximisation de sa valeur à long terme) correspond donc à une proportionalité entre K_t et Y_t, dépendant comme précédemment des caractéristiques de l'entreprise (γ...), des marchés financiers (C_t contenu dans D_t) mais en plus de la "distance" séparant entreprise de la limite technologique (terme E_t). Comme auparavant, le marché des biens (μ et RB_0) n'intervient pas dans ce rapport mais apparaît évidemment dans l'expression des valeurs proprement dites de K_t et Y_t.

Nous allons approcher les termes correctifs du problème (par rapport au cas sans limite technologique) à l'ordre 1 en $\frac{\alpha I}{K}$ et $\frac{q_t H_t(1-\alpha)I}{Y}$.

On a $\theta_{t+1} = 1-\frac{Y_t}{Y_{\max}} = 1-\frac{(1-\delta^{'})*Y_{t-1}}{Y_{\max}}-\frac{q_t H_t*\theta_t^a*(1-\alpha_t)*I_t}{Y_{\max}} = \theta_t*[1-\frac{q_t H_t*\theta_t^{a-1}*(1-\alpha_t)*I_t}{Y_{\max}}]$. On a ainsi à l'ordre 1 :

$$\theta_{t+1}^a \approx \theta_t^a*[1-a*\frac{q_t H_t*\theta_t^{a-1}*(1-\alpha_t)*I_t}{Y_{\max}}]$$

Ainsi :

$$\frac{\theta_{t+1}^a}{\theta_t^a} \approx \Phi_t$$

$$E_t = \frac{1-\delta'}{\theta_t^a q_t H_t}(1 - \beta_{t+1}\frac{\Phi_{t+1}}{\Phi_t})$$

On a $\Phi_{t+1} = 1 - a * \frac{q_t H_t * \theta_{t+1}^{a-1} * (1-\alpha_{t+1}) * I_{t+1}}{Y_{\max}}$. Nous allons supposer que l'entreprise définit une stratégie à moyen terme : $\alpha_{t+1} = \alpha_t$ et $I_{t+1} = I_t$. Alors : $\Phi_{t+1} = 1 - a * \frac{q_t H_t * \theta_{t+1}^{a-1} * (1-\alpha_t) * I_t}{Y_{\max}}$.

Alors, à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi_{t+1}}{\Phi_t} &\approx \left(1 - a * \frac{q_t H_t * \theta_{t+1}^{a-1} * (1-\alpha_t) * I_t}{Y_{\max}}\right) * \left(1 + a * \frac{q_t H_t * \theta_t^{a-1} * (1-\alpha_t) * I_t}{Y_{\max}}\right) \\
&\approx 1 - a * \frac{q_t H_t * (1-\alpha_t) * I_t}{Y_{\max}} * [\theta_{t+1}^{a-1} - \theta_t^{a-1}]
\end{aligned}$$

Or : $\theta_{t+1}^{a-1} - \theta_t^{a-1} = -\frac{(1-a) * q_t H_t * (1-\alpha_t) * I_t}{Y_{\max}} * \theta_t^{2*(a-1)}$ et donc : $\frac{\Phi_{t+1}}{\Phi_t} = 0$ à l'ordre 1.

Tout se passe donc comme si H_t était remplacé par

$$H_1 = H_t * \theta_t^a$$

ANNEXE 5 - STATISTIQUE DE TEST

Statistique de test

Il s'agit de déterminer les équations analytiques que nous allons utiliser pour déterminer les différents paramètres à partir des données statistiques.

Reprenons tout d'abord les équations (16) et (17) de l'ANNEXE 4 :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} = \frac{(1-\delta')}{H_t}(1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}\tilde{\beta}_{t+1}) \tag{16}$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = q_t * [1 - \frac{q_{t+1}}{q_t} * \tilde{\beta}_{t+1}(1-\delta) + \frac{(1-\delta)}{q} * C_t] \tag{17}$$

auxquelles s'ajoute la relation d'équilibre sur le marché du travail :

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = 0$$

Nous savons de plus que :

$\frac{\partial \Pi_t}{\partial Y_t} = \frac{\xi * RB_0}{\mu} * \frac{F_t^{\frac{1}{\mu}}}{Y_t} = \frac{p_t}{\mu} * \frac{\partial F_t}{\partial Y_t}$

$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = \frac{\gamma * p_t}{\mu} * \frac{F_t}{K_t} = \frac{p_t}{\mu} * \frac{\partial F_t}{\partial K_t}$

$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = \frac{(1-\gamma-\xi) * p_t}{\mu} * \frac{F_t}{L_t} - \omega_t = \frac{p_t}{\mu} * \frac{\partial F_t}{\partial L_t} - \omega_t$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_t}{\partial Y_t} &= \mu * \frac{1}{p_t} * \frac{1-\delta'}{H_t}(1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}\tilde{\beta}_{t+1}) \\
\frac{\partial F_t}{\partial K_t} &= \mu * \frac{q_t}{p_t} * [1 - \frac{q_{t+1}}{q_t} * \tilde{\beta}_{t+1}(1-\delta) + \frac{(1-\delta)}{q_t} * C_t] \\
\frac{\partial F_t}{\partial L_t} &= \mu * \frac{\omega_t}{p_t}
\end{aligned}$$

Nous avons par ailleurs supposé les rendements d'échelle constants :

$$F = Y\frac{\partial F}{\partial Y} + K\frac{\partial F}{\partial K} + L\frac{\partial F}{\partial L}$$

soit :

$$\frac{p_t F_t}{q_t K_t} = \mu * \frac{1-\delta'}{q_t H_t}(1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}\tilde{\beta}_{t+1}) * \frac{Y_t}{K_t} + \mu * [1 - \frac{q_{t+1}}{q_t} * \tilde{\beta}_{t+1}(1-\delta) + \frac{(1-\delta)}{q_t} * C_t] + \mu * \frac{\omega_t}{q_t} * \frac{L_t}{K_t} \qquad \text{(E)}$$

qui constitue notre équation de base.

Explicitons maintenant les différents termes :

On a :

$$\tilde{\beta}_{t+1} = \frac{1}{1 + i_0 + 2i_1\frac{B_t}{qK_t}}$$

et :

$$C_t = -\frac{\tilde{\beta}_{t+1}}{q_t(1-\delta)(1-\sigma)} * i_1 * \frac{B_t^2}{K_t^2}$$

Dans l'hypothèse $\frac{B_t}{q_t K_t} << 1$ on a :

$$
\begin{aligned}
\tilde{\beta}_{t+1} &= \frac{1}{1+i_0+2i_1\frac{B_t}{q_tK_t}} \\
&= \frac{1}{1+i_0} * \frac{1}{1+2\frac{i_1}{1+i_0}\frac{B_t}{q_tK_t}} \\
&\simeq \frac{1}{1+i_0} * (1-2\frac{i_1}{1+i_0}\frac{B_t}{q_tK_t})
\end{aligned}
$$

Et donc :

$$
\begin{aligned}
C_t &\simeq -\frac{1}{q_t(1-\delta)(1-\sigma)} * \frac{1}{1+i_0} * (1-2\frac{i_1}{1+i_0}\frac{B_t}{qK_t}) * i_1 * \frac{B_t^2}{K_t^2} \\
&= \frac{1}{(1-\delta)(1-\sigma)} * \frac{1}{1+i_0} * i_1 * [-\frac{B_t^2}{qK_t^2} + 2\frac{i_1}{q^2(1+i_0)} * \frac{B_t^3}{K_t^3}]
\end{aligned}
$$

L'équation (E) devient :

$$
\begin{aligned}
\frac{p_tF_t}{q_tK_t} &= \mu * \frac{1-\delta'}{q_tH_t}(1-\frac{q_{t+1}}{q_t} * \frac{1}{1+i_0} * (1-2\frac{i_1}{1+i_0}\frac{B_t}{q_tK_t})) * \frac{Y_t}{K_t} \\
&+\mu * [1-\frac{(1-\delta)}{1+i_0} * \frac{q_{t+1}}{q_t} * (1-2\frac{i_1}{1+i_0}\frac{B_t}{q_tK_t}) \\
&+\frac{1}{(1-\sigma)} * \frac{1}{1+i_0} * i_1 * [-\frac{B_t^2}{q_t^2K_t^2} + 2\frac{i_1}{q_t^3(1+i_0)} * \frac{B_t^3}{K_t^3}]] + \mu * \frac{\omega_t}{q_t} * \frac{L_t}{K_t}
\end{aligned}
$$

dqui peut se réécrire :

$$
\begin{aligned}
\frac{p_tF_t}{q_tK_t} &= \mu * \frac{1-\delta'}{q_tH_t}(1-\frac{1}{1+i_0} * \frac{q_{t+1}}{q_t}) * \frac{Y_t}{K_t} + 2\mu * \frac{q_{t+1}}{q_t}\frac{1-\delta'}{q_tH_t}\frac{1}{1+i_0}\frac{i_1}{1+i_0}\frac{B_t}{q_tK_t} * \frac{Y_t}{K_t} \\
&+\mu * (1-\frac{(1-\delta)}{1+i_0} * \frac{q_{t+1}}{q_t}) + 2 * \mu(1-\delta) * \frac{q_{t+1}}{q_t} * \frac{i_1}{(1+i_0)^2}\frac{B_t}{q_tK_t} \\
&-\frac{\mu}{(1-\sigma)} * \frac{i_1}{1+i_0} * \left(\frac{B_t}{q_tK_t}\right)^2 + \frac{2\mu}{(1-\sigma)}\frac{i_1^2}{(1+i_0)^2} * \left(\frac{B_t}{q_tK_t}\right)^3 + \mu * \frac{\omega_t}{q_t} * \frac{L_t}{K_t}
\end{aligned}
$$

et on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{p_tF_t}{q_tK_t} - \mu * \frac{1}{q_tH_t}(1 - \frac{1}{1+i_0} * \frac{q_{t+1}}{q_t}) * \frac{Y_t}{K_t} - 2\mu * \frac{q_{t+1}}{q_t}\frac{1}{q_tH_t}\frac{1}{1+i_0}\frac{i_1}{1+i_0}\frac{B_t}{q_tK_t} * \frac{Y_t}{K_t} \\
& -2\mu * (1-\delta) * \frac{q_{t+1}}{q_t} * \frac{i_1}{(1+i_0)^2}\frac{B_t}{q_tK_t} + \mu * \frac{1}{(1-\sigma)} * \frac{i_1}{1+i_0} * \left(\frac{B_t}{q_tK_t}\right)^2 \\
& -2\mu * \frac{1}{(1-\sigma)}\frac{i_1^2}{(1+i_0)^2} * \left(\frac{B_t}{q_tK_t}\right)^3 - \mu * \frac{\omega_t}{q_t} * \frac{L_t}{K_t} \\
= \ & \mu * [1 - \frac{(1-\delta)}{1+i_0} * \frac{q_{t+1}}{q_t}]
\end{aligned}$$

Compte-tenu de la disponibilité des données, nous allons supposer que le mark-up est unitaire : $\mu = 1$, ce qui correspond à un cas de concurrence parfaite. Ceci nous permet d'identifier $\frac{p_t}{q_t} * \frac{F_t}{K_t} - \mu * \frac{\omega_t}{q_t} * \frac{L_t}{K_t} = \frac{p_tF_t - \omega_tL_t}{q_tK_t}$ comme la marge bénéficiaire brute sur les ventes fournie par Statistique Canada.

Il faut ainsi évaluer :

$$fk_t - \alpha_1 * yk_t - \alpha_2 * yb_t - \alpha_3 * bk_{1,t} + \alpha_4 * bk_{2,t} - \alpha_5 * bk_{3,t} = a_{i,t}$$

avec :

$$\begin{aligned}
fk_t &= \frac{p_t}{q_t} * \frac{F_t}{K_t} - \frac{\omega_t}{q_t} * \frac{L_t}{K_t} \\
yk_t &= \frac{Y_t}{H_tK_t} = \frac{q_tY_t}{q_tH_tK_t} \\
yb_t &= \frac{B_t}{q_tK_t} * \frac{Y_t}{H_tK_t} = \frac{B_t}{q_tK_t} * \frac{q_tY_t}{q_tH_tK_t} \\
bk_{1,t} &= \frac{B_t}{q_tK_t} \\
bk_{2,t} &= (\frac{B_t}{q_tK_t})^2 \\
bk_{3,t} &= (\frac{B_t}{q_tK_t})^3
\end{aligned}$$

variables du modèle.

Et :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1-\delta'}{q_t}(1-\frac{1}{1+i_0}*\frac{q_{t+1}}{q_t}) \\
\alpha_2 &= 2\frac{q_{t+1}}{q_t}\frac{1-\delta'}{q_t}\frac{1}{1+i_0}\frac{i_1}{1+i_0} \\
\alpha_3 &= 2(1-\delta)*\frac{q_{t+1}}{q_t}*\frac{i_1}{(1+i_0)^2} \\
\alpha_4 &= \frac{1}{(1-\sigma)}*\frac{i_1}{1+i_0} \\
\alpha_5 &= 2\frac{1}{(1-\sigma)}*\frac{i_1^2}{(1+i_0)^2}
\end{aligned}$$

paramètres du modèle.

le terme $a_{i,t}$ est un paramètre inobservable d'espérance nulle en t, fonction d'effets individuels et temporels (n'oublions pas que pour simplifier les notations, nous n'avons pas représenté les espérances conditionnelles à l'information disponible en $t : E_t$).

L'objectif est d'estimer les différents paramètres $(\alpha_i)_{i\in\{1,6\}}$ à partir des observations des variables fk_t, yk_t, yb_t, $bk_{1,t}$, $bk_{2,t}$ et $bk_{3,t}$.

ANNEXE 6 - MÉTHODE DES MOMENTS GÉNÉRALISÉS (MMG)

Principe

Considérons un modèle mathématique faisant intervenir des variables endogènes Y_t (vecteur de dimension n), des variables exogènes X_t (vecteur de dimension n) et des paramètres A (vecteur de dimension m). On désire estimer la valeur des paramètres A à partir des observations.

On suppose que l'on dispose de n conditions du type :

$$E[\mathcal{F}(Y_t, X_t, A)] = 0, \ t \in [1; T] \tag{S}$$

où E désigne l'espérance mathématique et $\mathcal{F}$ est une fonction de dimension n. On suppose de plus $n > m$: le nombre de restrictions disponibles est supérieur à la dimension du vecteur à estimer.

Dans la mesure où le nombre de restrictions n est supérieur au nombre de valeurs à estimer m, il n'est en général pas possible de trouver une valeur de A satisfaisant l'ensemble des conditions de moments du système (S). Nous sommes donc contraints de chercher la valeur de A qui rend la valeur moyenne

$$V_{moy}(T) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathcal{F}(Y_t, X_t, A)$$

la plus petite possible.

On peut alors montrer que l'estimateur optimal de A est obtenu par l'estimateur des moments généralisés défini par :

$$\underset{A}{Min}\left[{}^{t}V_{moy}(T) * S_T^{-1} * V_{moy}(T)\right]$$

où S_T est une matrice $n \times n$ donnée par

$$S_T = \frac{1}{T} * \sum_{t=1}^{T} \mathcal{F}(Y_t, X_t, A) *^{t} \mathcal{F}(Y_t, X_t, A)$$

Application à notre cas

De façon générale, notre modèle est un modèle pseudo-statique du type :

$$Y_{i,t} = X_{i,t} * A + u_i + v_{i,t} \tag{E}$$

où les termes u_i sont des effets individuels non mesurés, et les $v_{i,t}$ sont des effets non mesurés à la fois individuels et temporels. Il y a *a priori* une corrélation entre les régresseurs X et les «erreurs» u_i et $v_{i,t}$:

$$\begin{aligned} E[X_{i,t} * u_i] &\neq 0 \\ E[X_{i,t} * v_{i,t}] &\neq 0 \end{aligned}$$

Nous allons de plus supposer que les termes non mesurés n'affectent que les variables qui leur sont postérieures. C'est à dire que :

$$\begin{aligned} E[X_{i,t} * v_{i,s}] &\neq 0, \text{ si } s < t \\ \text{et } E[X_{i,t} * v_{i,s}] &= 0, \text{ si } s \geqslant t \end{aligned}$$

Il suffit alors de mettre le modèle en différences premières, en soustrayant les égalités (E) aux instants t et $t-1$:

$$Y_{i,t} - Y_{i,t-1} = (X_{i,t} - X_{i,t-1}) * A + v_{i,t} - v_{i,t-1}$$

que nous noterons :

$$\Delta Y_{i,t} = \Delta X_{i,t} * A + \Delta v_{i,t}$$

On sait alors, d'après l'hypothèse faite sur les corrélations entre X et v que :

$$\begin{aligned} E[(\Delta Y_{i,t} - \Delta X_{i,t} * A) * X_{i,s}] &= 0 \text{ si } s \leqslant t-1 \\ \text{et } E[(\Delta Y_{i,t} - \Delta X_{i,t} * A) * Y_{i,s}] &= 0 \text{ si } s \leqslant t-2 \end{aligned}$$

qui fournit un ensemble de restrictions d'autant plus important que le nombre de périodes disponibles est plus grand. Les $X_{i,s} = 0$ si $s \leqslant t-1$ et $Y_{i,s} = 0$ si $s \leqslant t-2$ sont appelées variables instrumentales de la statistique.

Test de suridentification

Pour estimer la valeur de A, une seule restriction suffit (par exemple en utilisant la variable instrumentale $Y_{i,t-2}$). Les autres restrictions permettent de tester la validité du modèle en évaluant la distance des valeurs trouvées à 0. Ceci constitue d'ailleurs le véritable intérêt des modèles à équations d'Euler «habituels» (qui ne font pas intervenir de simulateur) : tester l'adéquation avec le modèle théorique.

Nous ne ferons pas ces tests car notre objectif est simplement de paramétrer le simulateur. Il serait néanmoins intéressant dans des recherches futures de les réaliser sur un nombre important de données.

ANNEXE 7 - CONSTRUCTION DE LA BASE DE DONNÉES

La base de données est très délicate à construire de façon correcte, dans la mesure où les données individuelles sur les PME sont inaccessibles, et où les données agrégées sont parfois incohérentes entre les différentes sources. Elle est construite pour les industries manufacturières (codes SCIAN 31-33) à partir de trois documents de Statistique Canada :

«Indicateurs de performance financières des entreprises canadiennes» : obtenus dans le cadre de l'Initiative de Démocratisation de Données (IDD). Ces ouvrage contiennent trois volumes : le volume 1 est dédié aux moyennes et grandes entreprises. Nous utiliserons dans cette étude la partie du volume 2-3 consacré aux petites entreprises (CA annuel compris entre 30,000$ et 5,000,000$) . Ce volume présente les données de bilan des entreprises canadiennes classées par province ou territoire (13 zones géographiques) et par branche d'activité (812 groupes industriels tirés de la classifiction SCIAN au niveau 6). Il est réalisé sur 4 années (1998, 1999, 2000 et 2001) à partir des données administratives sur l'impôt des sociétés fournies à Statistique Canada par l'Agence des Douanes et du Revenu du Canada. Au total ce sont en moyenne 45,000 entreprises du secteur manufacturier qui sont étudiées chaque année. Les données individuelles des entreprises sont agrégées par Statistique Canada au niveau 6 du SCIAN et par zone géographique. Après cette agrégation et nettoyage des lignes incomplètes, nous disposons de 3205 observations. Statistique Canada fournit des données de bilan (valeurs et ratios) nettoyées (cas pathologiques exclus) sous forme «d'individus représentatifs». Ce document nous permet de construires le capital des entreprises à partir de la valeur `CAPITAL ASSETS` (code A18), la dette (somme des dettes bancaires, des gages, des obligations et autres effets d'escompte) comme la somme des valeurs `BANKS` (code A25100), `SHORT TERM PAPER` (code A25200), `MORTGAGE` (code A25500), `BONDS` (code A25400) et `OTHER LOANS` (code A25180) ainsi que la marhe brute bénéficiaire mesurée comme le `GROSS PROFIT MARGIN` (code GPM1,2 et 3). Pour cette donnée, Statistique Canada ne fournit pas directement un individu représentatif mais trois quartiles (25%, 50% et 75%) de la distribution observée. Classiquement nous retiendrons la valeur moyenne définie par :

$$fk_{t,moy} = \frac{GPMQ1 + 4 * GPMQ2 + GPMQ3}{6}$$

Remarque : Dans le bilan des entreprises auditées par Statistique Canada, le capital et les dettes sont enregistrées à leur coût d'achat (valeur comptable) et non pas à leur valeur réelle. Comme le note Crépon (2001), il faudrait en toute rigueur tenir compte de l'âge et de la composition du capital et de la dette pour en définir proprement la valeur. Il faudrait également y inclure les effets de l'inflation et d'évolution de la valeur de l'argent dans le temps. Ceci n'est cependant possible qu'à condition de disposer de données individuelles d'entreprises, ce qui n'est pas notre cas.

1. **«Profil des petites entreprises canadiennes»** : acheté auprès de Statistique Canada, ce document est réalisé pour la même catégorie d'entreprises que le précédent : celles dont les revenus ne dépassent pas 5,000,000 \$ par an. Il n'est disponible que pour l'année 2000 et nous permet d'obtenir le rapport entre travail et valeur ajoutée $\frac{\omega L}{pF}$ pour les catégories SCIAN définies ci-dessus. Nous considérerons que ce rapport est constant sur la période 1998-2001 et égal à sa valeur en 2000, ce qui est en accord avec les données macroéconomiques ;
2. **«Recherche et développement industriels»** : réalisé par Statistique Canada et obtenu auprès d'Industrie Canada, ce document nous permet d'évaluer le rapport entre le travail effectué en R&D et la valeur ajoutée $\frac{\omega_Y L_Y}{pF}$ dans l'ensemble des entreprises pour 27 catégories SCIAN incluses dans 31-33 (voir tableau 4.1) par la mesure des dépenses «courantes» de R&D. La restriction au cas des petites entreprises est obtenue par croisement des ces données avec celles donnant le rapport entre le travail effectué en R&D et la valeur ajoutée $\frac{\omega_Y L_Y}{pF}$ en fonction des revenus de l'entreprise. Nous évaluons finalement le rapport $\frac{Y}{K}$ par le rapport $\frac{\omega_Y L_Y}{\omega L - \omega_Y L_Y}$ entre le travail effectué en RD et celui effectué dans les activités «traditionnelles» de l'entreprise. Cette évaluation, qui mériterait une validation approfondie, n'est valable que pour des industries de

structures relativement proches : elle traduit l'idée que l'emploi en RD de l'entreprise est proportionnel à son stock de savoir-faire et de même pour le capital physique.

Nous disposons finalement d'une liste pondérée de 222 entreprises représentatives sur 4 ans (les valeurs en 1998, non disponibles pour cette étude sont obtenues par extrapolation sur la tendance 1999-2000, semblable en termes macroéconomiques).

TAB. 4.1 – Liste des catégories disponibles pour l'effort de RD

Description	SCIAN
Aliments	311
Boissons et tabac	312
Textiles	313 et 314
Produits en bois	321
Papier	322
Impression	323
Produits du pétrole et du charbon	324
Produits pharmaceutiques et médicaments	3254
Autres produits chimiques	3251
Produits en plastique	3261
Produits en caoutchouc	3262
Produits minéraux non métalliques	327
Première transformation des métaux (ferreux)	3311 et 3312 et 33151
Première transformation des métaux (non ferreux)	3313 et 3314 et 33152
Fabrication de produits métalliques	332
Machines	333
Matériel informatique et périphérique	3341
Matériel de communication	3342
Semi-conducteurs et autres composants électroniques	3344
Instruments de navigation, de mesure et de commande et d'instruments médicaux	3345
Autres produits informatiques et électroniques	3343 et 3346
Matériel, appareils et composants électriques	335
Véhicules automobiles et pièces	3361 et 3362 et 3363
Produits aérospatiaux et pièces	3364
Tous autres types de matériel de transport	3365 et 3366 et 3369
Meubles et produits connexes	337
Autres industries de la fabrication	315 et 316 et 339