

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

RECONSTRUCTION PARAMÉTRIQUE BASÉE SUR UN MODÈLE
ANALYTIQUE POUR LA RÉOLUTION D'UN PROBLÈME INVERSE EN
ÉLASTOGRAPHIE

EVA MACIEJKO
INSTITUT DE GÉNIE BIOMÉDICAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE BIOMÉDICAL)

AVRIL 2005



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-494-01362-1

Our file Notre référence

ISBN: 0-494-01362-1

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

RECONSTRUCTION PARAMÉTRIQUE BASÉE SUR UN MODÈLE
ANALYTIQUE POUR LA RÉOLUTION D'UN PROBLÈME INVERSE EN
ÉLASTOGRAPHIE

présenté par : MACIEJKO Eva

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. SAUCIER Antoine, Ph.D., président

M. BERTRAND Michel, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. SQUALMI Lahbib, Ph.D., membre

À mon père, qui m'a inculqué le goût de la science.

REMERCIEMENTS

En tout premier lieu, je désire remercier Michel Bertrand, mon directeur de recherche, de m'avoir proposé un sujet si passionnant pour ma maîtrise et de m'avoir laissé beaucoup d'autonomie pour l'explorer. Je le remercie aussi pour son souci de nourrir en moi la curiosité et l'intérêt scientifique, sa disponibilité exceptionnelle, sa rigueur intellectuelle, sa sollicitude envers les étudiants et sa bonne humeur constante.

Ma reconnaissance se porte également vers Guy Charron, dont la précieuse collaboration en traitement de signal et en correction de travaux m'a été indispensable. Je remercie vivement Johanne Raymond pour sa personnalité agréable, son aide au niveau de la recherche d'articles et de livres, ainsi que pour la correction de ce présent mémoire.

Je désire remercier mes parents et mon frère, pour leur soutien qui n'a jamais manqué.

Un grand merci à Diane Giroux et Ginette Desparois pour leur hautes compétences et leur diligence dans les affaires administratives.

Un sincère remerciement à tous les professeurs de l'IGB et de l'École Polytechnique que j'ai eu le privilège de rencontrer.

Merci à tous les étudiants avec qui j'ai partagé les crêtes comme les creux de vague, notamment Maria, Warsama, Dominic, Élisabeth et plusieurs autres.

Je remercie le Conseil de recherche en sciences naturelles et génie (CRSNG) ainsi que la Fondation J.A. Bombardier pour leur soutien financier.

RÉSUMÉ

Les modalités d'imagerie médicale permettent de visualiser de manière non invasive certaines propriétés physiques des tissus. La rigidité est une propriété des corps élastiques, qui caractérise la grandeur de la déformation que subit un corps pour un accroissement de contrainte donné. Cette propriété n'est pas, à ce jour, mesurée de façon quantitative par les modalités d'imagerie courantes. Pourtant, il existe des contrastes de rigidité appréciable entre les différents types de tissus sains, ainsi qu'entre ces tissus et les tissus pathologiques. Par exemple, les tumeurs du carcinome canalaire invasif, le plus répandu des cancers du sein, sont des nodules beaucoup plus durs que les tissus sains environnants. Dès la Grèce antique, la palpation manuelle a été utilisée pour diagnostiquer des tumeurs dans le sein; cependant, cette technique traditionnelle est limitée quant à la taille et à la profondeur des lésions détectables. Une méthode non invasive d'évaluation « en profondeur » de la rigidité, basée sur le principe de la palpation et suffisamment précise, peut grandement aider à la détection d'anomalies élastiques dans les tissus mous. L'*élastographie* est une méthode qui utilise les images ultrasonores ou de résonance magnétique pour obtenir des images de la déformation du tissu. Puisque, sous l'application d'une force, une région molle se déformera davantage qu'une région dure, la déformation est un bon indicateur de la propriété de rigidité, dans les cas où l'hypothèse d'un champ de contrainte uniforme est respectée. En pratique cependant, cette hypothèse est souvent violée et l'image de déformation ne réussit pas à quantifier correctement le contraste élastique entre les différentes régions. C'est pourquoi une branche de l'élastographie s'intéresse à la reconstruction de propriétés élastiques intrinsèques, tel que le module de Young, afin de caractériser plus précisément la rigidité des tissus.

Dans ce mémoire, nous présentons une méthode de reconstruction paramétrique basée sur un modèle analytique classique : une inclusion circulaire dans un milieu

infini soumis à une contrainte normale uniaxiale. Cette géométrie a été choisie pour modéliser le comportement mécanique de tumeurs dans les tissus mous comme le sein ou la prostate. La solution de ce problème d'élasticité dépend de plusieurs paramètres dont la rigidité relative, le coefficient de Poisson, le rayon ainsi que la position de l'inclusion. Notre méthode vise à estimer ces paramètres grâce à une optimisation par moindres carrés non linéaires qui minimise l'écart entre des déplacements observés et les déplacements prédits par le modèle. L'utilisation d'un modèle d'inclusion avec anneau permet aussi de caractériser la condition frontière d'interface inclusion-matrice, ce qui est une contribution originale au domaine des problèmes inverses en élastographie. En effet, cette condition frontière renseigne sur le degré d'attachement de la lésion au tissu, ce qui peut notamment aider à identifier le type de lésion (bénigne ou maligne). L'optimisation est réalisée par la fonction *lsqnonlin* du *Optimization Toolbox* de Matlab.

Les objectifs de notre étude sont d'investiguer si la méthode de reconstruction que nous proposons permet de reconstruire les paramètres de l'inclusion, si elle est robuste dans des conditions d'élastographie pratique et si elle permet de détecter et de caractériser la condition à l'interface inclusion-matrice. Nous cernons aussi les principaux avantages et inconvénients de notre méthode.

Des simulations ont été réalisées pour trois cas de données d'observation : des déplacements analytiques, des déplacements obtenus par un modèle à éléments finis et des déplacements estimés par intercorrélation, comme cela est courant en élastographie. Les résultats avec des déplacements analytiques sont assez satisfaisants et l'erreur d'estimation est de moins de 2.5%, sauf lorsque le rayon de l'inclusion est inférieur à 4 pixels ou lorsque l'on estime avec une seule composante de déplacement. Lorsque l'on ajoute un bruit blanc gaussien aux données de déplacement, l'erreur sur certains paramètres peut monter jusqu'à 4%, avec un bruit d'écart-type 10 microns, ce qui représente un bruit pouvant aller jusqu'à 20% de l'intensité du déplacement. En utilisant des modèles à éléments finis, la reconstruction des

paramètres est améliorée lorsque la condition frontière appliquée à l'objet est un déplacement et lorsqu'on écarte les données situées en périphérie de la géométrie. Enfin, lorsque les déplacements observés sont estimés par intercorrélation, le mauvais rapport signal à bruit du déplacement latéral nous oblige à n'utiliser que le déplacement axial; par contre, il nous faut alors fixer les coefficients de Poisson à des valeurs plausibles, mais arbitraires. Dans ces conditions, les paramètres géométriques (position et rayon) de l'inclusion sont estimés très précisément, alors que l'erreur sur l'estimé du module élastique relatif de l'inclusion comporte une erreur de 8.7% en moyenne. Il est montré que la méthode de reconstruction avec le modèle à anneau est capable de caractériser la condition frontière à l'interface pour des déplacements idéaux : en examinant les caractéristiques de l'anneau estimé, on peut distinguer une inclusion attachée d'une inclusion glissante.

Notre méthode d'estimation paramétrique présente les avantages suivants : simplicité, rapidité de reconstruction, indépendance par rapport à la connaissance a priori de la condition frontière appliquée et robustesse en présence du bruit. Des tests avec des données provenant de fantômes et de cas cliniques sont cependant à faire pour mieux évaluer la performance de la méthode.

ABSTRACT

Medical imaging modalities can image many physical properties of living tissues, for example the attenuation with X-ray or the acoustic impedance variations with ultrasound. However, these modalities fail to give quantitative information about elastic properties of tissues such as stiffness, whose change in an organ can potentially be related to a pathological condition. *Elastography* is a medical imaging technique introduced in the early nineties that is based on the principle that in response to an applied force, a compliant region will deform more than a rigid one. This, in essence, is what is achieved with palpation, but here not restricted to the observation of tissues that are close to the surface where the force is applied. Of great interest in elastography research is the ability to reconstruct the elasticity distribution from the tissue displacement/strain observations, thus providing quantitative information on the tissue mechanical properties, such as Young's modulus. In this thesis, we present two classical analytical models: a circular inclusion and a circular inclusion surrounded by a rim, both in an infinite matrix, and use them to reconstruct the relative elastic modulus of inclusions in tissue as well as the mechanical boundary condition at the tissue/inclusion interface. A nonlinear least-squares iterative scheme is used to estimate the model's parameters such that the displacements predicted by the model match the observed displacements. The models' parameters include the elastic relative modulus of the inclusion (ratio of inclusion to background moduli), the Poisson's ratio, radius and position of the inclusion.

Simulations were conducted using three different sets of observed displacements: displacements from an analytical model, displacement from a finite element model and estimated displacements from intercorrelation, such as those usually provided by ultrasound quasistatic elastography. When displacements were analytic and noise-free, the errors on the estimated parameters remained under 2.5%. When

a random gaussian noise of 10 microns standard-deviation (noise level of up to 20% of the displacement value) was added to the analytical displacements, the errors could go up to 4%. When using a finite element model with a displacement boundary condition, the best results were obtained by discarding the displacement data close to the outer boundaries of the model. Finally, when using intercorrelation displacement estimates, the bad signal-to-noise ratio of the lateral displacement forced us to try to reconstruct with only the axial component of the displacement. This, in turn, forced us to fix the Poisson's ratios to plausible yet arbitrary values. The relative elastic modulus of the inclusion was estimated with an average error of 8.7%. Our parametric method is able to characterize the mechanical condition at the inclusion /matrix interface: by looking at the estimated elastic modulus and thickness of the rim, one can differentiate a bound inclusion from a sliding one, thus providing means to help identify tumors' type (malignant vs benign) in soft tissues such as the breast.

The parametric reconstruction method we propose is simple, fast, independent from the global boundary condition value and robust in the presence of a certain level of noise. Further tests using phantom and clinical data must be done to better assess the method's performance.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	ix
TABLE DES MATIÈRES	xi
LISTE DES TABLEAUX	xiv
LISTE DES FIGURES	xvi
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xix
LISTE DES ANNEXES	xxi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	6
2.1 Modélisation mécanique des tissus mous	6
2.1.1 Composition et structure tissulaire	6
2.1.2 Observations expérimentales	7
2.2 Imagerie de l'élasticité des tissus biologiques mous	9
2.2.1 Motivation	9
2.2.2 Types de techniques	10
2.3 Élastographie quasi statique ultrasonore	11
2.3.1 Nature	12
2.3.2 Applications	13

2.3.3	Élastogramme de déformation ou de module	15
2.4	Le problème inverse : reconstruction de l'élasticité	17
2.4.1	Méthodes par inversion directe	17
2.4.2	Méthodes itératives	20
CHAPITRE 3 THÉORIE DE LA RECONSTRUCTION PARAMÉTRIQUE		25
3.1	Objectifs de l'étude	25
3.2	Présentation des modèles analytiques	27
3.2.1	Inclusion simple avec compression uniaxiale	27
3.2.2	Inclusion avec anneau et compression uniaxiale	28
3.2.3	Limites de la validité du modèle analytique	29
3.2.4	Comportement du modèle analytique avec anneau	31
3.2.4.1	Le profil parabolique de la déformation	31
3.2.4.2	La zone d'influence de l'inclusion et de l'anneau	33
3.2.4.3	Le transfert de contraste élastique	35
3.3	Méthode de reconstruction paramétrique	37
3.3.1	Expression du problème inverse	37
3.4	Résolution du problème inverse paramétrique	40
3.4.1	Méthodes classiques	41
3.4.2	Méthode de Levenberg-Marquardt	42
CHAPITRE 4 RÉSULTATS DES TESTS DE LA RECONSTRUCTION ET DISCUSSION		45
4.1	Déplacements observés générés par un modèle analytique	45
4.1.1	Variation du module élastique	46
4.1.2	Variation des valeurs initiales	48
4.1.3	Variation de l'échantillonnage	52
4.1.4	Pondération des composantes de déplacement	54
4.1.5	Estimation avec déplacements bruités	57

4.1.6	Estimation du type d'attachement de l'inclusion	61
4.2	Déplacements observés générés par un modèle éléments finis	63
4.2.1	Comparaison du déplacement EF/analytique	64
4.2.2	Estimation paramétrique avec modèles EF	68
4.3	Déplacements estimés par intercorrélation à partir d'images RF simulées	71
4.3.1	Estimation paramétrique avec déplacements estimés par intercorrélation	71
CHAPITRE 5	CONCLUSION	77
5.1	Discussion sur l'atteinte des objectifs	77
5.2	Recherche future	81
5.3	Le mot de la fin	82
RÉFÉRENCES		84
ANNEXES		92

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1	Module élastique de différents tissus de la prostate (mesures à 1Hz et 2% de pré-compression).	2
Tableau 4.1	Détails du test <i>Variation du module élastique</i>	46
Tableau 4.2	Détails du test <i>Variation des valeurs initiales</i>	48
Tableau 4.3	Valeurs réelles et initiales des paramètres utilisées dans le test.	49
Tableau 4.4	Détails du test <i>Variation de l'échantillonnage</i>	52
Tableau 4.5	Détails du test <i>Pondération des composantes de déplacement</i> .	55
Tableau 4.6	Détails du test <i>Estimation avec déplacements bruités</i>	57
Tableau 4.7	Valeurs des paramètres pour les cas testés avec déplacements bruités.	58
Tableau 4.8	Détails du test <i>Estimation du type d'attachement de l'inclusion</i> .	61
Tableau 4.9	Résultats de l'estimation pour l'inclusion attachée (cas 1) et l'inclusion glissante (cas 2).	62
Tableau 4.10	Valeurs réelles des paramètres des modèles EF de la Figure 4.10.	65
Tableau 4.11	Détails du test <i>Estimation paramétrique avec modèles EF</i> . .	69
Tableau 4.12	Erreur relative (%) des paramètres estimés pour les modèles 1/5, dans les cas : A) région complète de 10cm×10cm, 100 ² pixels et B) sous-région de 6cm×6cm, 60 ² pixels, autour de l'inclusion.	69
Tableau 4.13	Erreur relative (%) des paramètres estimés pour les modèles 1/10, dans les cas : A) région complète de 10cm×10cm, 100 ² pixels et C) sous-région de 4cm×4cm, 40 ² pixels, autour de l'inclusion.	70
Tableau 4.14	Valeurs réelles des paramètres des modèles de la Figure 4.13.	73
Tableau 4.15	Erreur sur les paramètres estimés pour le modèle CFD 1/5.	75

Tableau 4.16	Erreur sur les paramètres estimés pour le modèle CFD 1/10.	76
Tableau 4.17	Erreur sur les paramètres estimés pour le modèle CFD 1/10 avec sous-région.	76

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Branches impliquées dans l'imagerie de l'élasticité des tissus.	3
Figure 3.1	Modèle analytique de l'inclusion circulaire dans un milieu infini.	27
Figure 3.2	Modèle analytique de l'inclusion circulaire avec anneau dans un milieu infini.	29
Figure 3.3	Profil de déformation axiale pour une inclusion attachée et une inclusion entourée d'un anneau mince et mou ($\delta R = 0.001$, $\widetilde{\mu}_l = 0.001$).	34
Figure 3.4	Courbe de transfert de contraste élastographique pour différentes conditions frontières à l'interface inclusion-matrice. La courbe idéale en pointillé rouge est l'objectif désiré. . . .	36
Figure 3.5	Courbe d'efficacité de transfert de contraste pour différentes conditions frontières à l'interface inclusion-matrice.	37
Figure 4.1	Norme de l'erreur d'estimation selon le module élastique relatif $\widetilde{\mu}_0$	47
Figure 4.2	Erreur relative maximale sur l'estimation des paramètres. .	47
Figure 4.3	Erreur relative sur l'estimation de cinq paramètres, en fonction de la variation des valeurs initiales de a) $\widetilde{\mu}_0$, b) $\widetilde{p}$, c) ν , d) ν_0 , e) R	50
Figure 4.4	Valeur absolue de l'erreur relative (%) sur l'estimation du paramètre $\widetilde{\mu}_0$ selon le nombre de pixels et le rayon de l'inclusion.	53
Figure 4.5	Valeur absolue de l'erreur relative (%) sur l'estimation du paramètre R selon le nombre de pixels et le rayon de l'inclusion.	53
Figure 4.6	Valeur absolue de l'erreur relative sur l'estimation des paramètres $\widetilde{\mu}_0$ et R en fonction du rayon de l'inclusion en pixels.	54

Figure 4.7	Erreur relative (en valeur absolue) sur l'estimation des paramètres $\widetilde{\mu}_0, \widetilde{p}, \nu, \nu_0$, selon différentes pondérations des composantes du déplacement. a) Erreur sur $\widetilde{\mu}_0$, b) Erreur sur $\widetilde{p}$, c) Erreur sur ν , d) Erreur sur ν_0	56
Figure 4.8	Moyenne et écart-type de l'erreur relative sur l'estimation des paramètres en fonction de l'écart-type du bruit σ_b , pour les cas d'une inclusion dure : a) D1, b) D2, c) D3, d) D4). Les barres d'erreur sont d'une distance d'un écart-type au-dessus et d'un écart-type au-dessous des courbes.	59
Figure 4.9	Moyenne et écart-type de l'erreur relative sur l'estimation des paramètres en fonction de l'écart-type du bruit σ_b , pour les cas d'une inclusion molle : a) M1, b) M2, c) M3, d) M4. Les barres d'erreur sont d'une distance d'un écart-type au-dessus et d'un écart-type au-dessous des courbes.	60
Figure 4.10	Modèles à éléments finis : a) CFF 1/5, b) CFD 1/5, c) CFF 1/10, d) CFD 1/10 (CFF = condition frontière de force, CFD = condition frontière de déplacement). p est une contrainte compressive et δ , un déplacement absolu.	65
Figure 4.11	Histogramme normalisé de l'écart ($v_{EF} - v$) entre déplacements axiaux EF et analytiques, pour : a) CFF 1/5, b) CFD 1/5, c) CFF 1/10, d) CFD 1/10.	66
Figure 4.12	Représentation spatiale de l'écart relatif $ v_{EF} - v /v$ (%) aux points de la grille pour : a) CFF 1/5, b) CFD 1/5, c) CFF 1/10, d) CFD 1/10.	67
Figure 4.13	Modèles mécaniques du tissu : a) CFD 1/5, b) CFD 1/10, c) CFD 1/10 avec sous-région (CFD = condition frontière de déplacement). $\delta = 0.02 \times \text{côté (cm)}$	72

Figure 4.14	Déplacements estimés par intercorrélation : a) u et b) v du modèle CFD 1/5; c) u et d) v du modèle CFD 1/10; e) u et f) v du modèle CFD 1/10 avec sous-région. Les déplacements sont en mm.	74
Figure I.1	Élément en cisaillement dans le plan ik	93
Figure II.1	Modèle analytique de l'inclusion circulaire avec anneau dans un milieu infini.	98

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

LETTRES GRECQUES

α	pas d'avancement de l'algorithme de minimisation
γ	angle de distorsion en cisaillement
δ_{ij}	delta de Kronecker
δR	épaisseur de l'anneau
ϵ_{ij}	tenseur de déformation
η	efficacité de transfert de contraste (CTE)
κ	constante de Kolosov
λ	premier module de Lamé
μ	module de cisaillement de la matrice
$\widetilde{\mu}_0$	module élastique relatif de l'inclusion (μ_0/μ)
$\widetilde{\mu}_l$	module élastique relatif de l'anneau (μ_l/μ)
ν	coefficient de Poisson de la matrice
ν_0	coefficient de Poisson de l'inclusion
ν_l	coefficient de Poisson de l'anneau
Ξ	dilatation volumique
ρ_l	coordonnée radiale normalisée par le rayon de l'anneau (r/R_l)
σ_{ij}	tenseur de contrainte
τ	contrainte de cisaillement
χ	vecteur des paramètres à optimiser

LETTRES LATINES

C_r	contraste élastique réel
C_o	contraste élastique observé

C_{ijkl}	tenseur de constantes élastiques
d	direction de descente pour l'algorithme de minimisation
E	module de Young
$F(\chi)$	vecteur des écarts de déplacement
$f(\chi)$	fonction objective scalaire à minimiser
H	matrice hessienne
J	matrice jacobienne
M	nombre total de points où le déplacement est observé
N	nombre de paramètres à estimer
p	contrainte uniaxiale à l'infini
$\tilde{p}$	contrainte uniaxiale à l'infini, normalisée (p/μ)
R	rayon de l'inclusion
R_l	rayon extérieur de l'anneau
$\tilde{R}$	rapport du rayon de l'anneau sur celui de l'inclusion (R_l/R)
r, θ	coordonnées polaires
u, v, w	déplacement selon l'axe x, y ou z, respectivement
u_m, v_m	déplacement mesuré, selon l'axe x ou y, respectivement
x, y, z	coordonnées cartésiennes
x_0, y_0	coordonnées du centre de l'inclusion

ABBREVIATIONS

CFF	Condition frontière de force
CFD	Condition frontière de déplacement
CTE	Efficacité de transfert de contraste

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	BRÈVE RÉVISION DE CONCEPTS EN ÉLASTICITÉ .	92
I.1	Définition des contraintes et déformations	92
I.2	Relation constitutive et modules élastiques	93
I.3	Équations d'équilibre statique en élasticité	95
I.4	Approximations bidimensionnelles des problèmes d'élasticité	96
ANNEXE II	SOLUTION DU MODÈLE ANALYTIQUE DE L'INCLUSION	
	AVEC ANNEAU	98
II.1	Les potentiels complexes d'élasticité	99
II.2	Détermination des coefficients	100
II.2.1	Coefficients principaux	103
II.2.2	Coefficients intermédiaires	104
II.3	Solution en termes de déplacements polaires	105
ANNEXE III	COEFFICIENTS DES EXPRESSIONS DE DÉFORMATION	
	ET DE DÉPLACEMENT DU MODÈLE À ANNEAU . . .	107
III.1	Coefficients des profils de déformation	107
III.2	Coefficients des déplacements polaires	108

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

L'imagerie médicale est un outil puissant pour investiguer de manière non invasive le corps humain et en visualiser les composantes internes. Plusieurs technologies permettent la formation d'une image médicale : la tomographie à rayons X, la médecine nucléaire, l'échographie et la résonance magnétique en sont quelques exemples. Chacune de ces modalités dépend de l'interaction entre le tissu et l'énergie utilisée pour imager telle ou telle propriété physique. Ainsi, en radiologie, on utilise l'interaction entre le rayonnement électromagnétique associé aux photons X et le tissu pour obtenir un signal qui est lié à leur coefficient d'atténuation; en échographie, il s'agira d'une onde de pression acoustique qui est réfléchiée par les fluctuations locales de densité et de compressibilité tissulaires. Dans ce travail, la propriété physique qui nous intéresse est la rigidité, qui caractérise la grandeur de la déformation que subit un corps pour un accroissement de contrainte donné. Plus cette déformation est faible, plus le corps est rigide.

La rigidité est une propriété des organes que certaines pathologies modifient de façon si diffuse que seule une palpation peut révéler l'anomalie. Dans la cirrhose du foie, par exemple, la fibrose hépatique augmente la rigidité globale de l'organe, quoique l'apparence de ce dernier demeure normale lors d'un examen échographique conventionnel [Ophir, 1996]. Les tumeurs du carcinome canalaire invasif, le plus répandu des cancers du sein, sont des nodules beaucoup plus durs que les fibroadénomes, ces tumeurs bénignes qui sont à leur tour plus fermes que le tissu normal du sein. Il est donc utile d'obtenir de l'information sur l'élasticité des tissus, puisqu'un changement dans leur fermeté est potentiellement relié à une af-

fection. De plus, la mesure de la rigidité sur un intervalle de temps permet de suivre l'évolution de certains traitements, par exemple l'ablation thermique de tumeurs à la prostate, puisque le tissu chauffé subit une coagulation irréversible qui modifie ses propriétés élastiques [Souchon, 2003].

Depuis la Grèce antique, la palpation manuelle est la méthode traditionnelle de détection des tumeurs dans le sein [Insana, 2000]. Cette technique est toutefois limitée quant à la taille et à la profondeur des lésions détectables. Ainsi, une première motivation pour une imagerie de l'élasticité des tissus est une détection plus sensible que la palpation manuelle. Une seconde motivation provient du fait que la rigidité d'un matériau est quantifiable, grâce à des paramètres physiques nommés modules d'élasticité¹. Comme l'élasticité des tissus dépend de l'organisation micro et macroscopique des structures moléculaires [Fung, 1981], des contrastes appréciables de module élastique peuvent exister entre les différents types de tissus. Le tableau suivant montre en exemple les mesures du module élastique d'échantillons de la prostate [Krouskop, 1998] :

Type de tissu	Module élastique (kPa)
Tissu normal (antérieur)	62
Hyperplasie bénigne	36
Cancer	100

Tableau 1.1 Module élastique de différents tissus de la prostate (mesures à 1Hz et 2% de pré-compression).

Pour cet organe, l'imagerie de l'élasticité devrait permettre de faire la différenciation entre un état normal ou anormal, voire entre un état bénin ou malin, et ceci à cause du grand contraste de fermeté entre ces différents tissus. Cependant, à ce jour, aucune modalité d'imagerie ne donne directement de mesure quantitative des

¹pour une révision des concepts de base en élasticité, le lecteur est prié de consulter l'annexe I

propriétés élastiques qui soient reliées au module d'élasticité. Par exemple, il n'y a généralement pas de corrélation entre la rigidité d'un matériau et son impédance acoustique, une propriété imagée par l'échographie. Un traitement supplémentaire des images usuelles est alors nécessaire afin de révéler les caractéristiques élastiques.

Ce qu'on nomme aujourd'hui l'imagerie de l'élasticité des tissus biologiques mous regroupe plusieurs techniques dont le but commun est d'obtenir de façon non invasive des mesures quantitatives des propriétés élastiques. Le schéma présenté à la Figure 1.1 montre les différentes branches impliquées dans la cartographie de l'élasticité.

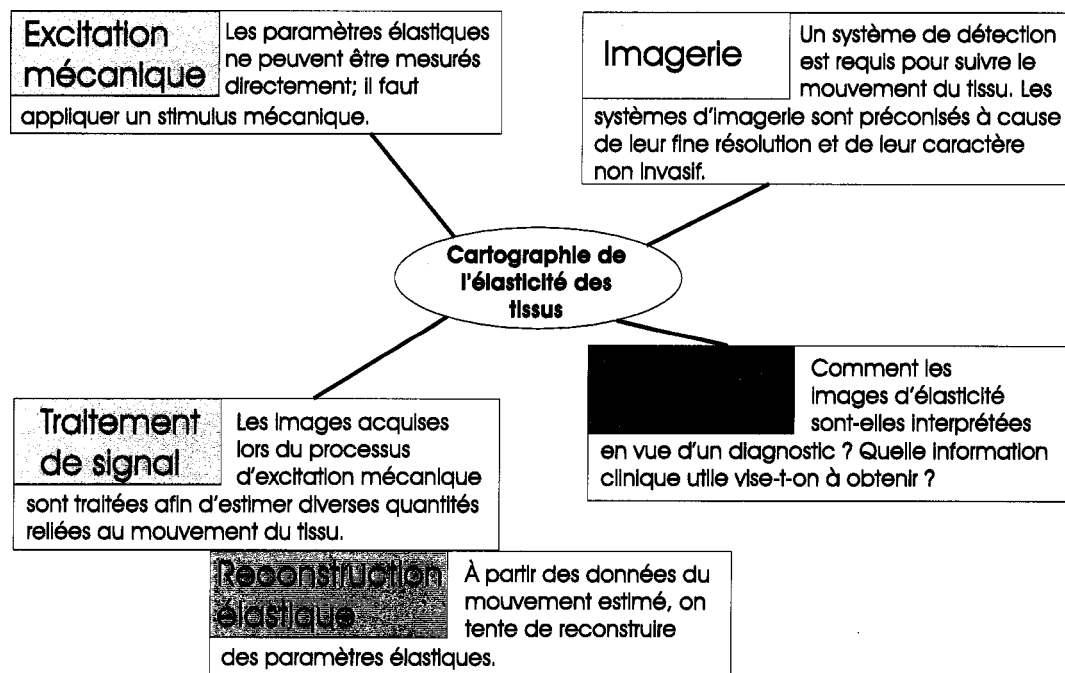


Figure 1.1 Branches impliquées dans l'imagerie de l'élasticité des tissus.

Ces techniques utilisent toutes une modalité d'imagerie afin de suivre le mouvement des tissus soumis à une excitation mécanique. La résonance magnétique nucléaire et l'ultrasonographie sont des modalités privilégiées en raison de leur grande sensibilité

à de petits mouvements du tissu. La technique à laquelle nous nous intéressons particulièrement est l'élastographie statique avec ultrasons. Brièvement, elle consiste en ceci : après avoir appliqué une légère pré-compression, une faible compression (moins de 5%) est appliquée très lentement sur la surface d'un tissu par un compresseur assez large couplé à une sonde ultrasonore qui acquiert une image avant et une après la compression. À partir des images pré- et post-compression, un traitement de signal est effectué afin d'estimer le champ de déplacement bidimensionnel duquel les propriétés élastiques peuvent être ensuite reconstruites. La chaîne de modélisation qui va du tissu déformé aux déplacements estimés constitue le *problème direct*. Cette chaîne comprend les modèles mécanique et acoustique du tissu, le modèle du système d'imagerie et les algorithmes d'estimation du déplacement. La reconstruction du module d'élasticité à partir des déplacements constitue un *problème inverse* en élastographie au sens où l'on tente de remonter des solutions de l'équation différentielle aux propriétés intrinsèques du tissu.

Ce mémoire présente une nouvelle méthode de résolution du problème inverse en élastographie dans le cas simple où la région étudiée du tissu est homogène et comporte une inclusion de forme quasi circulaire. Cette géométrie a été considérée en ayant à l'esprit la modélisation de tumeurs dans le sein. La méthode vise à estimer le module de cisaillement relatif et le coefficient de Poisson (deux propriétés élastiques) de l'inclusion et du milieu environnant, ainsi que la position et le rayon de l'inclusion. Elle vise aussi à caractériser la condition frontière à l'interface inclusion-matrice, ce qui est une contribution originale au domaine des problèmes inverses en élastographie. En effet, cette condition frontière renseigne sur le degré d'attachement de la lésion au tissu, ce qui peut parfois aider à identifier le type de lésion (bénigne ou maligne). La reconstruction est basée sur la recherche d'une concordance entre les déplacements mesurés par élastographie et ceux prédits par un modèle analytique. Une optimisation numérique est mise en oeuvre afin de

trouver les valeurs les plus adéquates des paramètres de ce modèle, qui sont reliés aux quantités élastiques et géométriques citées plus haut.

Le Chapitre 2 présente une revue de littérature sur l'imagerie de l'élasticité des tissus et plus particulièrement sur les méthodes de reconstruction des propriétés élastiques des tissus mous. Le Chapitre 3 est consacré aux aspects théoriques : les modèles analytiques utilisés, l'expression du problème d'optimisation et les algorithmes pour le résoudre y sont détaillés. La méthodologie suivie pour tester la performance de la méthode ainsi que les résultats discutés sont présentés au Chapitre 4. La conclusion rassemble les principaux apports du présent travail et propose de nouvelles avenues de recherche.

CHAPITRE 2

REVUE DE LITTÉRATURE

Afin de bien situer le problème inverse en élastographie, ce chapitre couvrira plusieurs aspects. Tout problème inverse se base sur un modèle mathématique du tissu, aussi nous débuterons par examiner la modélisation du comportement mécanique des tissus mous. Ensuite, nous verrons la motivation à l'origine de l'imagerie de l'élasticité et les techniques qui en font partie. Suivra une brève description de la nature et des applications de l'élastographie quasi statique ultrasonore, ainsi que des différences entre l'image de déformation et l'image de module élastique. Enfin, nous ferons un survol des principales méthodes de résolution du problème inverse en élastographie.

2.1 Modélisation mécanique des tissus mous

L'imagerie de l'élasticité requiert un traitement des images médicales pour inférer certaines propriétés mécaniques des tissus. Ce traitement de signal repose sur un modèle mathématique du comportement mécanique des tissus. Bien que les matériaux vivants soient complexes, nous verrons dans cette section qu'il n'est pas exclu de simplifier leur description pour les besoins du calcul scientifique.

2.1.1 Composition et structure tissulaire

Les tissus biologiques sont des matériaux microscopiquement hétérogènes. On peut distinguer deux composants principaux : la matrice extra-cellulaire et les cellules

qui y baignent. La matrice est formée d'eau à 70% [Smith, 2001]; le reste peut contenir en solution des ions ainsi que diverses substances de structure moléculaire complexe : protéines, glucides, lipides. Deux protéines particulières sont responsables de l'élasticité des tissus mous chez l'humain : l'élastine et le collagène. L'élastine est une protéine présente en filaments dans le tissu conjonctif, surtout dans les parois artérielles. Elle est un matériau caoutchouteux et amorphe, et sert à donner de l'élasticité aux tissus. Le collagène est une protéine fibreuse formée de molécules de tropocollagène hélicoïdales agencées en fibrilles. Élément structurel de base pour les tissus animaux, le collagène donne du tonus et de la force au corps. Il peut se présenter sous la forme de filaments parallèles qui transmettent la tension, comme dans les tendons, ou bien en réseau tridimensionnel de fibrilles, comme dans la peau ou les vaisseaux sanguins [Fung, 1981].

À l'échelle macroscopique, l'hétérogénéité demeure dans plusieurs cas. Par exemple, dans le sein, les glandes mammaires sont entourées de graisse qui les protège et de tissu fibreux qui soutient l'organe. Comme la composition et la structure moléculaire sont différentes pour les tissus glandulaire, lipidique et fibreux, les propriétés mécaniques de ces tissus diffèrent également.

2.1.2 Observations expérimentales

Il n'y a que très peu d'information quantitative disponible sur les propriétés élastiques des tissus mous d'organes tels le sein, la prostate, la thyroïde [Ophir, 1997]. Cependant, l'intérêt suscité par l'élastographie a fait en sorte que plusieurs chercheurs ont procédé à des observations expérimentales du comportement d'échantillons de ces tissus soumis à des compressions mécaniques [Krouskop, 1998, Erkamp, 1998, Samani, 2003, Krouskop, 2003]. Van Houten et al. (2003) présentent un tableau récapitulatif des modules d'élasticité mesurés par différents groupes

de recherche pour les tissus du sein : la plupart des mesures du module de Young sont de 15-25 kPa pour le gras et de 26-50 kPa pour le tissu glandulaire. La variabilité des valeurs obtenues provient du fait que la mesure des propriétés mécaniques des tissus mous est affectée par divers paramètres : les conditions aux frontières, la température, la taille et l'âge des échantillons [Krouskop, 1998].

Lorsqu'il sont soumis à une force mécanique, la plupart des tissus mous manifestent un comportement viscoélastique, poroélastique, anisotrope et non linéaire, jusqu'à un certain degré [Fung, 1981]. De plus, ces tissus sont généralement considérés comme incompressibles [Williams, 2000]. La poroélasticité est une conséquence de la grande proportion d'eau dans les tissus; le mouvement de cette eau dans la matrice extra-cellulaire conditionne en grande partie les propriétés visco- et poroélastiques. À basse fréquence de chargement (0.1-1 Hz), la composante visqueuse peut être considérée négligeable pour les tissus du sein et ceux-ci peuvent donc être modélisés comme des matériaux élastiques [Krouskop, 1998]. L'anisotropie est plus marquée dans les tissus comme les muscles, formés de fibres orientées dans une direction donnée. Le comportement non linéaire fait référence à l'allure de la courbe contrainte-déformation, obtenue en mesurant la déformation le long d'une direction donnée d'un corps soumis à une force uniaxiale dans cette même direction. Presque tous les matériaux solides réels ont un comportement plus complexe que celui décrit par la loi de Hooke, mais selon la gamme utile des contraintes et déformations, cette relation peut être un modèle suffisant. Il a été observé que le module des tissus glandulaire et fibreux est non constant pour une plage de déformation de 0-30%. Par contre, le gras présente une relation contrainte-déformation linéaire sur toute cette plage, donc un module de Young constant [Krouskop, 1998]. La non-linéarité de la relation constitutive implique que la tangente à la courbe (le module) prendra une valeur différente selon le point d'opération, lequel représente en pratique la pré-compression appliquée au tissu. Plus la pré-compression est élevée, plus la

dureté des tissus glandulaire et fibreux, ainsi que celle du carcinome canalaire infiltrant, augmentera [Krouskop, 1998]. En élastographie statique ultrasonore, la pré-compression est faible, typiquement de 1% et la déformation appliquée, de 0.1 à 5%. Sur cette plage d'intérêt de déformation appliquée, on peut donc s'attendre à obtenir une relation quasi linéaire.

2.2 Imagerie de l'élasticité des tissus biologiques mous

Une vaste littérature a été produite sur le sujet de l'imagerie de l'élasticité des tissus mous. Le terme élasticité est ici un abus de langage; il s'agit plus précisément d'imager les paramètres élastiques qui décrivent le comportement mécanique du tissu : la déformation, le module de Young ou de cisaillement, le coefficient de Poisson, etc.

2.2.1 Motivation

Tel que brièvement énoncé dans l'introduction, certaines pathologies peuvent entraîner une modification de la fermeté des tissus. Les caractéristiques mécaniques d'un tissu mou comme le sein découlent des fibres de collagène et d'élastine [Williams, 2000]. Lorsque des tumeurs se forment et croissent, le tissu sain réagit à l'invasion des cellules malignes par la production de fibres de collagène entrecroisées, un phénomène connu sous le nom de desmoplasie [Chen, 1995, Cotran, 1999]. C'est justement cette augmentation de tissu fibreux qui cause l'augmentation de la rigidité du carcinome canalaire invasif. Il est connu que ce carcinome, qui représente environ 80% des cancers du sein, se présente sous la forme de masses remarquablement dures. Le carcinome lobulaire invasif, qui survient dans 8% des cas de cancer, ressemble au carcinome canalaire. Avec ce type de cancer, un morceau excisé de

tissu peut ne présenter aucune lésion visible, mais contenir une région de dureté inhabituelle [McDivitt, 1968]. Ainsi de telles lésions, si elles ont une échogénéité indétectable, peuvent passer inaperçues lors d'un examen échographique, quoique leur dureté les différencie du tissu sain [Ophir, 1996]. La palpation manuelle, technique traditionnelle pour évaluer la fermeté des tissus, est impuissante à révéler les lésions trop petites ou trop profondes. La visualisation des paramètres élastiques permettrait d'évaluer la position et la taille de la lésion et, dans certains cas, de caractériser le caractère (bénin ou malin) de la lésion. Dans une quête pour imiter la palpation manuelle tout en améliorant la sensibilité, divers groupes de recherche ont mis au point des systèmes permettant de produire une cartographie de l'élasticité des tissus.

2.2.2 Types de techniques

Dès les années 1980, plusieurs méthodes de mesure de la compliance et du mouvement des tissus avaient déjà été développées [Wilson, 1982], mais ce n'est que quelques années plus tard qu'a émergé une méthode, nommée *élastographie*, pour générer des images de déformation [Ophir, 1991]. L'apport significatif des auteurs a été de montrer la possibilité d'obtenir une description quantitative de la rigidité des tissus *in vivo* au moyen d'une image de module d'élasticité, ce qui a ouvert la voie à un nouveau domaine de recherche. Le terme élastographie est maintenant utilisé dans la littérature de façon générale pour désigner l'imagerie de paramètres élastiques.

Les paramètres élastiques ne peuvent être mesurés directement; il faut appliquer au tissu un stimulus mécanique [Ophir, 1999] et mesurer la réponse du tissu à cette excitation, puisque les modules élastiques expriment la relation locale entre la force que subit le tissu et la déformation qui en découle. Les méthodes de

cartographie de l'élasticité combinent donc une forme d'excitation mécanique du tissu avec une technique de détection de sa réponse. Gao et al. (1996) présentent ces méthodes en plus de faire un retour sur les domaines qui en sont à l'origine. Greenleaf et al. (2003) font une bonne revue de plusieurs de ces méthodes, qu'ils classent d'une part selon leurs caractéristiques temporelles, soit statiques ou dynamiques, et d'autre part, selon la provenance interne ou externe de l'excitation. Les méthodes statiques utilisent une compression lente et suivent les déplacements locaux du tissu grâce à une modalité d'imagerie, le plus souvent les échos ultrasonores par impulsions [Ophir, 1991] ou bien la résonance magnétique nucléaire (RMN) [Plewes, 2000]. Les méthodes dynamiques appliquent une compression vibratoire de basse fréquence et mesurent l'amplitude ainsi que la phase des vibrations internes à l'aide d'ultrasons [Lerner, 1990, Fu, 2000] ou de la RMN [Muthupillai, 1995, Sinkus, 2000]. L'excitation mécanique externe peut provenir soit d'une compression avec une plaque ou un transducteur, dans le cas statique; soit d'un vibreur, dans le cas dynamique. L'excitation interne peut être causée par la force de radiation d'ultrasons envoyés dans le tissu, ou encore par le mouvement respiratoire ou cardiaque. Le but de ces méthodes est de produire soit une image quantitative des paramètres physiques tel le module de Young, soit une image qualitativement reliée à la distribution de la rigidité [Greenleaf, 2003]. Souvent il s'agit d'estimer le module relatif, c'est-à-dire le rapport entre les modules élastiques de différentes paires de régions dans l'image.

2.3 Élastographie quasi statique ultrasonore

Ce projet de maîtrise s'inscrit dans la ligne de développement de la technique d'Ophir et al. (1991), soit l'imagerie ultrasonore de paramètres élastiques par compression quasi statique. Dans les prochaines sous-sections, nous examinons la

nature, les applications ainsi que les types d'images produites par cette technique.

2.3.1 Nature

L'élastographie est une technique d'imagerie capable de produire des images de la déformation interne ou, sous certaines hypothèses, des images de la distribution du module de Young du tissu [Ophir, 1991]. Les principales caractéristiques de cette technique sont [Ophir, 1996] :

- une contrainte quasi statique appliquée au tissu;
- une relation constitutive simple, la loi de Hooke $Kx = F$, entre la force F appliquée et le déplacement x ;
- de faibles déformations du tissu (≤ 0.01), au sens où la relation constitutive demeure linéaire;
- des images d'une résolution axiale de 1mm.

Les ultrasons sont utilisés pour suivre les déplacements en raison de leur bonne résolution, leur rapidité d'acquisition, leur faible coût et le risque minime encouru par le patient [Ophir, 1996]. Les images sont acquises sous la forme de signaux radiofréquence (RF). Chaque transducteur envoie des impulsions acoustiques et reçoit la somme des échos rétrodiffusés par le tissu, nommée « ligne RF ». Ainsi, pour une barrette linéaire de transducteurs, les images sont formées par une juxtaposition de lignes RF. En ultrasonographie, les qualificatifs axial, latéral et azimuthal désignent, respectivement, les directions parallèle, perpendiculaire dans le plan et perpendiculaire hors-plan par rapport à la direction de propagation de l'onde acoustique. Le plan d'imagerie est formé par la tranche de tissu insonifiée par les transducteurs.

L'élastographie de base consiste à :

1. acquérir une image ultrasonore du tissu pré-comprimé (dans le but d'assurer un contact stable entre tissu et compresseur);
2. appliquer une compression externe lente ($\approx 0.5\text{mm/s}$) sur le tissu, en vue de le déformer;
3. imager à nouveau le tissu déformé;
4. extraire de la paire d'images pré- et post-compression un estimé du déplacement en un nombre fini de points du tissu;
5. produire une nouvelle image qui montre la déformation du tissu ou l'une de ses propriétés élastiques intrinsèques (par ex., le module de Young).

Le déplacement entre une paire d'images pré- et post-compression peut être estimé de plusieurs façons [Ophir, 1999]. Dans l'approche que nous utilisons, chaque ligne RF est divisée en segments (ou fenêtres); la fonction d'intercorrélation entre deux segments pré et post correspondants est calculée et la position du maximum donne l'estimé du déplacement de ce segment [Ophir, 1991]. L'élastographie repose sur l'hypothèse fondamentale que le mouvement de la texture granulaire échographique (*speckle*) représente le mouvement du tissu sous-jacent, pour une faible compression uniaxiale [Ophir, 1996].

2.3.2 Applications

Depuis ses débuts, l'élastographie a montré un grand potentiel d'application clinique. Plusieurs essais *in vivo* [Ophir, 1996, Garra, 1997] ont corroboré l'utilité de

cette technique dans la détection de tumeurs du sein et de la prostate. La discrimination entre tumeurs bénignes et malignes du sein [Chen, 1995, Konofagou, 2000] est également une possibilité intéressante, puisque chaque année, 8 sur 10 des biopsies aux États-Unis révèlent une lésion bénigne [WINABC]. Un dépistage de la bénignité par imagerie permettrait d'éviter de nombreuses biopsies négatives, ce qui réduirait les coûts hospitaliers ainsi que le stress et l'inconfort des patientes.

Outre la détection de tumeurs, l'élastographie peut servir à [Souchon, 2003, Insana, 2000, Greenleaf, 2003] :

- la surveillance et le contrôle de la formation de lésions lors de l'ablation thermique par ultrasons focalisés à haute intensité (HIFU);
- la visualisation de la dynamique du myocarde pour s'assurer de la viabilité du tissu après une ischémie;
- la détection de plaques par imagerie intravasculaire;
- la caractérisation des propriétés biomécaniques des parois artérielles;
- l'étude de la contractilité des muscles squelettiques;
- l'évaluation de la maturité des poumons du fœtus.

Enfin, l'élastographie des tissus sains permet d'en évaluer la tendreté, notamment dans le cas de la viande de boeuf [Ophir, 1996]; ou encore, d'en visualiser les composantes rigides, tel le cortex rénal [Ophir, 1999].

2.3.3 Élastogramme de déformation ou de module

L'élastographie peut produire plusieurs types d'images : la déformation axiale ou latérale, la distribution de module de Young ou du coefficient de Poisson [Ophir, 1999]. Cette pluralité a créé deux clans : les partisans de l'imagerie de déformation (*strain imaging*) et les partisans de l'imagerie de module (*modulus imaging*). Nous verrons brièvement les avantages et les inconvénients de chaque méthode. L'élastogramme¹ de déformation est obtenu assez aisément à partir du gradient du déplacement. La performance d'un élastogramme peut s'évaluer en termes de l'efficacité de transfert de contraste (*contrast-transfer efficiency*) ou CTE. Le CTE est défini comme le rapport entre le contraste d'élasticité tel que mesuré sur l'élastogramme et le contraste réel dans le tissu correspondant [Ponnekanti, 1995] :

$$\eta = \frac{C_0}{C_r} \quad (2.1)$$

où C_0 est le contraste observé, C_r est le contraste réel et η est l'efficacité de transfert de contraste (CTE). $\eta = 1$ indique une efficacité idéale de 100%; $\eta = 0$ indique 0% d'efficacité. Le CTE est souvent utilisé sur l'échelle logarithmique des décibels (dB) :

$$\eta(dB) = |C_0(dB)| - |C_r(dB)| \quad (2.2)$$

Dans le cas d'une lésion entourée de tissu sain, C_0 peut être défini comme l'inverse du rapport entre la déformation moyenne dans la lésion et la déformation moyenne dans le milieu environnant. L'inversion provient du fait que le module élastique, qui

¹Le terme *élastogramme* est un nom générique pour tout type d'image qui montre un paramètre relié au comportement ou à la nature élastique du tissu.

sert à définir le contraste réel C_r , est inversement proportionnel à la déformation, sous l'hypothèse d'une contrainte uniforme. Le CTE indique donc la capacité de l'élastogramme à révéler le véritable contraste élastique. En d'autres termes, un CTE de 100% (0dB) signifie qu'une région deux fois plus rigide que le tissu qui l'entoure apparaîtrait deux fois plus brillante sur l'élastogramme, alors qu'avec un CTE de 10%, elle apparaîtrait seulement 0.2 fois plus brillante. L'efficacité de transfert de l'élastogramme de déformation est bonne pour un faible contraste élastique (différence de moins de 6 dB entre la fermeté de la lésion et celle du milieu environnant), mais décroît pour des contrastes élevés [Kallel, 1996b]. De plus, cette décroissance est plus importante lorsque les lésions sont plus molles que le reste du tissu, ce qui fait qu'il est plus difficile d'évaluer quantitativement la rigidité d'inclusions molles et plus facile de le faire pour les inclusions dures. Les artéfacts de l'image de déformation sont décrits dans Ophir et al. (1996). La non-linéarité de la relation contrainte-déformation dans certains tissus peut aussi entraîner des effets inattendus dans l'élastogramme de déformation [Varghese, 2000].

L'élastogramme de module est obtenu comme la solution d'un problème inverse d'élasticité. En général, ce problème est mal posé : l'unicité ainsi que la stabilité de la solution sont incertaines [Ophir, 1999]. Pour pallier cela, diverses hypothèses sur le modèle du tissu doivent être introduites et souvent la connaissance *a priori* des conditions aux frontières globales est requise [Ophir, 1999]. Ces exigences sont sévères dans un contexte pratique, où les déplacements sont bruités et les conditions frontières, partiellement ou totalement inconnues. Par contre, l'élastogramme de module permet de réduire le niveau d'artéfacts mécaniques de l'image de déformation [Ophir, 1997]. Bien que les techniques du problème inverse demandent souvent plus de temps de calcul et/ou de mémoire informatique que l'imagerie de déformation, elles améliorent la performance de détection pour une large gamme de contrastes élastiques, que la lésion soit dure ou molle [Ophir, 1999].

2.4 Le problème inverse : reconstruction de l'élasticité

En élastographie, le champ de déplacement est connu, c'est-à-dire estimé à partir des images pré- et post-compression, alors que le module d'élasticité est inconnu. Comme nous venons de le souligner, la reconstruction du module à partir des mesures de déplacement peut être envisagée comme un problème inverse, en ce sens que l'on cherche à inverser les équations du problème direct afin de résoudre pour le module. Les techniques d'inversion directe remanient les équations du problème direct en vue d'isoler le terme du module d'élasticité; en pratique, elles sont très sensibles au bruit. Les techniques d'inversion itératives, quant à elles, peuvent être vues comme un problème d'optimisation. Elles ajustent graduellement une distribution initiale de module jusqu'à ce que celle-ci produise un déplacement ou une déformation suffisamment proche des mesures, selon un certain critère de distance.

2.4.1 Méthodes par inversion directe

Les méthodes directes peuvent être divisées en trois classes principales :

- l'approche analytique;
- l'approche matricielle;
- l'approche variationnelle.

Dans l'approche analytique, les équations d'élasticité de Navier sont réécrites afin de faire apparaître les constantes élastiques comme les inconnues du problème. Skovoroda, Emelianov et O'Donnell (1995) ont proposé une méthode de reconstruction hybride qui produit une image du module relatif. Tout d'abord, une détection

de frontières est effectuée dans l'image de déformation, pour délimiter les régions de modules de Young différents et estimer le rapport des modules entre chaque inclusion et le tissu environnant. Ensuite, des contours fermés de module de Young approximativement constant sont définis, puis le module est reconstruit à l'intérieur de ces contours en utilisant la valeur précédemment estimée du module relatif à la frontière. La reconstruction du module dans une inclusion demeure relative à la valeur du module le long de la frontière de l'inclusion, mais est en revanche indépendante des conditions aux frontières globales. La méthode traite les problèmes où l'inclusion élastique est spatialement continue différemment du cas où elle est discontinue; de plus, les cas compressible et incompressible doivent être traités différemment. La méthode manque ainsi de généralité. Pour fournir une solution complète, elle nécessite la connaissance du vecteur de déplacement et du tenseur de déformation en trois dimensions, ainsi que de la valeur du module élastique sur la frontière de la région observée, des conditions difficiles à obtenir en pratique. Des expériences avec des fantômes² ont été réalisées. Sumi et al. (1995) ont manipulé les équations d'un matériau élastique linéaire, isotrope et incompressible pour les transformer en équations linéaires avec les dérivées spatiales du module de cisaillement relatif comme inconnues et les déformations ainsi que leurs dérivées comme coefficients. À partir de mesures de déformation, la distribution du module est obtenue par intégration spatiale. La méthode a été testée en simulation seulement. Le fait d'utiliser les dérivées des déformations n'est pas souhaitable en pratique, étant donné que les déformations estimées sont souvent assez bruyantes.

L'approche matricielle se base sur une discrétisation des équations différentielles qui décrivent le système mécanique du corps soumis à l'action de forces. Le système est ainsi posé sous forme matricielle $Ax = b$ (modèle du problème direct), puis

²Un *fantôme* est un objet-test, souvent fait en gel ou en polymère, qui possède approximativement les mêmes propriétés mécaniques et acoustiques qu'un tissu mou.

réarrangé sous une forme $A'x' = b'$ (modèle du problème inverse), avec x' le vecteur d'inconnues parmi lesquelles figure le module d'élasticité recherché. Une inversion matricielle fournit la solution qui dépend à la fois des conditions frontières et du déplacement ou de son gradient. O'Donnell et al. (1993) ont utilisé une telle discrétisation pour reconstruire le module de Young d'inclusions en n'utilisant que la composante axiale de la déformation. La méthode fonctionne bien avec des déformation idéales, c'est-à-dire générées par simulation numérique. Raghavan et Yagle (1994) ont discrétisé par différences finies les équations d'un solide élastique linéaire, isotrope et incompressible afin de les exprimer sous la forme d'une équation matricielle linéaire. Ils ont ensuite réarrangé le système pour isoler les fonctions inconnues du module de Young et de la pression. Afin de résoudre le problème, la connaissance des valeurs du module et de la pression à la frontière sont requises. Plewes et al. (2000) ont testé une méthode de reconstruction directe du module relatif dans le cadre de l'élastographie du sein par résonance magnétique. Les équations de Navier sont discrétisées pour exprimer le module de cisaillement et la pression comme inconnues, et les déplacements ainsi que leurs dérivées spatiales comme coefficients. Une hypothèse de module constant sur la frontière est posée. Des simulations montrent que le rapport signal à bruit des déplacements doit être substantiellement plus élevé pour cette méthode directe que pour une méthode itérative proposée par les mêmes auteurs. Zhu, Hall et Jiang (2003) ont quant à eux discrétisé les équations d'élasticité de Navier à l'aide de la méthode des éléments finis pour obtenir un système linéaire qu'ils ont par la suite inversé en cherchant la solution des moindres carrés. Leur méthode reconstruit le module absolu sans besoin d'itérer, mais l'erreur d'estimation du module est très sensible aux erreurs de mesure du déplacement.

L'approche variationnelle exprime les équations différentielles d'équilibre sous forme variationnelle équivalente, laquelle est ensuite inversée. Romano et al. (1998) ont

posé leur formulation variationnelle sous forme matricielle, avec comme inconnues les coefficients de Lamé normalisés par la densité, et comme coefficients des intégrales impliquant les déplacements mesurés. Dans une autre méthode variationnelle [Barbone, 2003], la mesure de deux champs de déplacement distincts est requise, ainsi que la connaissance *a priori* du module d'élasticité dans une petite région de calibration. La connaissance d'aucune autre condition frontière n'est nécessaire. La méthode donne de bons résultats quand l'hypothèse d'une distribution continue de module est vérifiée, mais de piètres résultats quand cette hypothèse est violée.

2.4.2 Méthodes itératives

Il est possible de séparer les méthodes itératives en trois classes principales :

- l'approche de discrétisation et minimisation par gradient;
- l'approche de mise à jour sans gradient;
- l'approche d'estimation paramétrique basée sur un modèle analytique.

Dans l'approche de discrétisation et minimisation par gradient, la région dont on veut reconstruire le module est divisée en un grand nombre d'éléments et le module élastique peut prendre une valeur constante différente dans chaque élément. À partir d'une distribution initiale de module, le problème direct est résolu numériquement par éléments finis ou différences finies, puis le module est mis à jour selon une relation entre les déplacements observés et ceux prédits par le modèle numérique. Cette relation implique le gradient, soit le vecteur des dérivées du déplacement par rapport à chacun des modules élémentaires. Dans cette optique, Kallel, Bertrand et al. (1995) ont proposé une méthode par perturbation linéaire

où ils font l'hypothèse d'une faible inhomogénéité élastique superposée à une distribution élastique homogène, ce qui permet de faire une approximation linéaire de la relation entre la variation du déplacement et celle du module d'élasticité. La variation cherchée du module à chaque itération est celle qui minimise, au sens des moindres carrés, la distance entre les perturbations de déplacement estimée et théorique. Cette méthode a d'abord été présentée pour une seule itération, puis Kallel et Bertrand (1996a) l'ont incorporée dans un schéma itératif plus élaboré où l'algorithme de Newton-Raphson est utilisé pour minimiser l'écart entre les déplacements observés et ceux prédits par un modèle éléments finis 2D. Des résultats sont présentés pour un exemple de simulation ainsi que pour des données cliniques. La méthode converge en moins d'une dizaine d'itérations, mais comporte des erreurs de 20 à 30% sur l'estimation du module de Young avec des déplacements observés et nécessite une connaissance *a priori* des conditions frontières, ce qui est difficile en pratique. Cette même méthode par perturbation a été utilisée par Soualmi (1998) afin de résoudre le problème inverse en élastographie endovasculaire, mais cette fois l'optimisation non linéaire itérative a été résolue par la méthode de Levenberg-Marquardt. Sumi et Nakayama (1998) ont repris leur méthode directe d'inversion par intégration spatiale [Sumi, 1995], où les déformations et leurs dérivées spatiales sont les coefficients et les gradients du logarithme du module de cisaillement sont les inconnues. Cette fois ils ont discrétisé leur équation linéaire par des différences finies et ont utilisé une méthode des moindres carrés régularisés pour inverser le système. Doyley et al. (2000), dans une approche similaire à celle de Kallel et Bertrand (1996a), ont utilisé les équations discrétisées par la méthode des éléments finis. Le problème de minimisation des moindres carrés est résolu par un algorithme itératif incorporant la méthode de Levenberg-Marquardt. Un filtre spatial est utilisé pour lisser la distribution du module et augmenter la robustesse de la reconstruction face au bruit. Leur méthode a été testée avec des simulations et des expériences sur deux fantômes. Dans le cas d'un fantôme à in-

clusion circulaire, le contraste d'élasticité est surestimé et l'inclusion reconstruite est de plus grande taille que l'inclusion réelle. Oberai et al. (2003) ont cherché à minimiser une fonctionnelle des déplacements afin de déterminer le module de cisaillement d'un matériau linéaire élastique et incompressible, tout en connaissant les conditions frontières et la seule composante axiale du déplacement dans tout le domaine. La minimisation est effectuée par l'algorithme BFGS (*Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno*) qui se base sur le gradient. L'apport original des auteurs est un algorithme basé sur l'opérateur adjoint d'élasticité afin de calculer le gradient plus efficacement, ce qui réduit le nombre d'opérations par itération et accélère la reconstruction. Ainsi, la reconstruction pour un maillage de 30×30 éléments prend 30 secondes, alors qu'elle prend 7 minutes pour un maillage de 100×100 éléments. Plus le niveau de bruit introduit dans les observations est élevé, plus le contraste d'élasticité reconstruit s'écarte du véritable contraste. Des tests de cette méthode [Oberai, 2004] ont montré qu'elle est performante pour reconstruire des lésions de géométrie complexe ou tridimensionnelle avec un niveau de bruit expérimental.

Dans l'approche de mise à jour sans gradient, les modules élémentaires sont mis à jour par une relation qui ne fait pas intervenir les dérivées des déplacements par rapport aux modules. Cette approche a l'avantage d'être moins imposante en termes de calculs et moins sensible au bruit, puisque ce dernier n'affecte chaque élément que localement et ne se propage pas dans tout l'objet à reconstruire [Plewes, 2000]. Plewes et al. (2000) ont emprunté une telle approche dans le cas d'une lésion mammaire. Plusieurs connaissances *a priori* sont requises, notamment les propriétés biomécaniques des tissus gras et fibroglandulaire qui entourent la lésion, ainsi que la position et la géométrie de la lésion. De plus, on fait l'hypothèse d'une lésion homogène, c'est-à-dire d'un module d'élasticité constant. Le problème direct est résolu par éléments finis en utilisant l'estimé courant de la distribution du module et les conditions frontières. Avec la distribution de contraintes simulée

et la déformation mesurée, on trouve une nouvelle distribution de module grâce à la relation constitutive contrainte-déformation. Grâce aux hypothèses sur la configuration du sein observé, des estimations robustes du module de la lésion sont possibles à condition que le rapport du signal de déplacement au bruit soit d'au moins 60 dB. Dans un contexte de sonoélastographie vibratoire, Fu, Levinson et al. (2000) ont reconstruit le module de Young à partir de mesures d'amplitude et de phase des vibrations d'un tissu. Le module de Young, le coefficient de Poisson et le coefficient d'amortissement sont considérés comme constants à l'intérieur de certaines sous-régions. Les équations gouvernant la réponse dynamique du matériau avec une distribution élastique donnée sont résolues par éléments finis, puis les différences entre les amplitudes estimées et mesurées sont utilisées pour mettre à jour l'estimé du module avec un critère de type bisection. Les résultats de reconstruction obtenus par simulation et au moyen de fantômes montrent la capacité de la méthode à reconstituer le module de façon quantitative à partir d'un mouvement vibratoire bidimensionnel, sans recours à des mesures indépendantes de contrainte ni à une connaissance *a priori* de l'élasticité à la frontière. Les erreurs d'estimation du module dans les fantômes sont de l'ordre de 10%. Samani et al. (2001) ont utilisé la segmentation d'images de résonance magnétique afin de construire la géométrie volumique de chaque type de tissu du sein (lipidique, fibroglandulaire ou tuméfie). Ils ont fait l'hypothèse que le module d'élasticité pour chaque type de tissu est constant partout à l'intérieur du sein. Un maillage éléments finis 3D est construit à partir des images segmentées, puis à partir de la géométrie, des conditions frontières connues et de valeurs initiales du module de Young, on effectue le calcul du problème direct afin de déterminer les contraintes dans le matériau. Le module est ensuite mis à jour à chaque itération avec une relation similaire à celle de Plewes (2000). Leur méthode testée sur un fantôme reconstruit un module relatif après 11 itérations de cent minutes chacune et une erreur d'au plus 12% sur le module final.

L'approche par estimation paramétrique se base sur un modèle mathématique du tissu pour lequel la solution analytique est connue. Les paramètres du modèle sont ajustés itérativement afin de minimiser une certaine distance entre la solution prédite par le modèle et les données observées. L'une de ces méthodes utilise un modèle semi-circulaire pour représenter le sein, à l'intérieur duquel se trouve une inclusion circulaire de module élastique différent [Liu, 2003]. La solution analytique est donnée pour un demi-cercle sur la frontière duquel est appliquée une force concentrée en un point. Les déformations mesurées en différents points de cette frontière sont comparées aux déformations analytiques qui dépendent de divers paramètres : la position de l'inclusion, son rayon ainsi que le module élastique relatif (rapport entre le module de l'inclusion et le module du milieu environnant). Huit mesures de déformations servent à estimer les quatre paramètres, au moyen d'une technique des moindres carrés qui minimise la différence entre les déformations analytiques et mesurées. Comme les mesures proviennent seulement de la frontière de l'objet, la reconstruction pour des lésions profondes est difficile. Une autre méthode se base sur un modèle analytique de plusieurs anneaux élastiques concentriques et attachés les uns aux autres afin de représenter les parois d'une veine sous compression [Aglyamov, 2004]. La composante axiale de déformation est utilisée pour reconstruire le module de Young de chaque anneau, au moyen d'une minimisation de la différence entre l'image de déformation théorique et celle mesurée par élastographie. Des tests en simulation, sur des fantômes ainsi que sur des animaux, ont montré l'utilité de la méthode pour aider à la détection, au diagnostic et à la caractérisation de la thrombose veineuse profonde chez l'humain.

CHAPITRE 3

THÉORIE DE LA RECONSTRUCTION PARAMÉTRIQUE

Nous proposons une méthode paramétrique qui permet de résoudre un problème inverse en élastographie. Cette méthode s'appuie sur un problème d'élasticité classique qui possède une solution analytique : une inclusion circulaire dans un milieu infini soumis à une contrainte normale uniaxiale. Les paramètres de ce modèle analytique sont ajustés itérativement jusqu'à ce qu'ils produisent des déplacements qui concordent, au sens des moindres carrés, avec les déplacements expérimentaux.

3.1 Objectifs de l'étude

Les questions auxquelles nous cherchons à répondre sont les suivantes :

1. La méthode proposée permet-elle de reconstruire les paramètres importants de l'inclusion (rayon, coefficient de Poisson et module élastique relatif)?
2. La méthode proposée est-elle robuste dans des conditions d'élastographie pratique?
3. La méthode proposée permet-elle de détecter et de caractériser la condition frontière à l'interface inclusion-matrice?
4. Quels sont les avantages et les inconvénients de la méthode proposée?

Tel que vu au chapitre (2), plusieurs méthodes d'inversion directe nécessitent à la fois les déplacements, les déformations et leurs dérivées spatiales, lesquelles sont

souvent bruitées [Sumi, 1995]. Les cas compressible et incompressible doivent parfois être traités séparément [Skovoroda, 1995]. Les méthodes itératives requièrent souvent la représentation du module par un très grand nombre de paramètres quand, par exemple, un module d'élasticité distinct est assigné à chaque élément d'un maillage [Kallel, 1996a, Doyley, 2000]. Les calculs pour arriver à l'image reconstruite sont souvent trop longs [Oberai, 2003, Samani, 2001] pour pouvoir obtenir, lors de l'examen, des paramètres quantitatifs reliés à la rigidité. De plus, la connaissance des conditions frontières de déplacement, d'élasticité et/ou de pression [Raghavan, 1994] est souvent nécessaire pour une juste reconstruction, quoique ces données soient difficiles, voire impossibles à obtenir en pratique. Nous avons privilégié la méthode de reconstruction paramétrique parce qu'elle :

- utilise les déplacements qui sont les données brutes en élastographie et sont moins bruitées que les déformations;
- se base sur un modèle (inclusion simple) non utilisé auparavant pour la reconstruction;
- utilise un modèle (inclusion avec anneau) qui permet d'obtenir de l'information sur le degré d'attachement de l'inclusion au milieu environnant;
- reconstruit peu de paramètres en un temps relativement rapide;
- ne demande pas de connaître *a priori* la condition frontière globale.

3.2 Présentation des modèles analytiques

3.2.1 Inclusion simple avec compression uniaxiale

La Figure 3.1 illustre le modèle de l'inclusion circulaire dans un milieu infini nommé matrice. L'inclusion et la matrice sont toutes deux élastiques, linéaires et homogènes. On considère un état plan de déformation et une contrainte p appliquée à l'infini. Alors la résolution des équations d'équilibre mène à une solution analytique détaillée dans Muskhelishvili (1963).

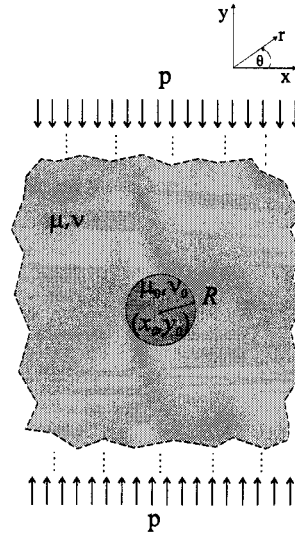


Figure 3.1 Modèle analytique de l'inclusion circulaire dans un milieu infini.

La solution du problème dépend des paramètres suivants :

- la contrainte à l'infini normalisée par le module de la matrice $\tilde{p} = p/\mu$ (négative en compression) ;
- le rayon R de l'inclusion;
- le module élastique relatif de l'inclusion $\tilde{\mu}_0 = \mu_0/\mu$;

- les coefficients de Poisson, ν, ν_0 de la matrice et de l'inclusion;
- les coordonnées (x_0, y_0) du centre de l'inclusion;
- les conditions frontières à l'interface inclusion/matrice.

Bien que la solution de Muskhelishvili (1963) donnait les déplacements en fonction des paramètres p, μ et μ_0 séparés, nous nous sommes aperçus que ces paramètres apparaissaient toujours sous la forme des rapports $\tilde{p}$ et $\tilde{\mu}_0$. Ceci implique que l'algorithme d'estimation va optimiser les rapports plutôt que les paramètres séparés, donc il n'est pas pertinent d'estimer ceux-ci car plusieurs combinaisons de p, μ, μ_0 sont possibles pour des valeurs données de $\tilde{p}, \tilde{\mu}_0$. On obtient deux solutions distinctes selon que l'inclusion est attachée ou glissante. La condition attachée implique la continuité de toutes les contraintes et de tous les déplacements à l'interface. La condition glissante implique une interface sans friction aucune, où la contrainte radiale (normale) et le déplacement radial sont continus, et où la contrainte de cisaillement est nulle.

3.2.2 Inclusion avec anneau et compression uniaxiale

La Figure 3.2 présente un deuxième modèle analytique, plus général que le précédent. L'inclusion est ici entourée d'un anneau d'épaisseur $\delta R = R_l - R$ de propriétés élastiques $\tilde{\mu}_l, \nu_l$ différentes. À la limite, lorsque $\mu_l = \mu$, on revient au modèle de l'inclusion simple ($\delta R = 0$). La solution analytique de ce modèle particulier n'était pas disponible dans la littérature ; nous l'avons donc dérivée nous-mêmes, tel que cela est présenté à l'annexe II. Le nombre de paramètres est augmenté de trois, mais le modèle permet de décrire une plus grande variété de comportements mécaniques à l'interface. Un faible module relatif μ_l de l'anneau modélise une interface

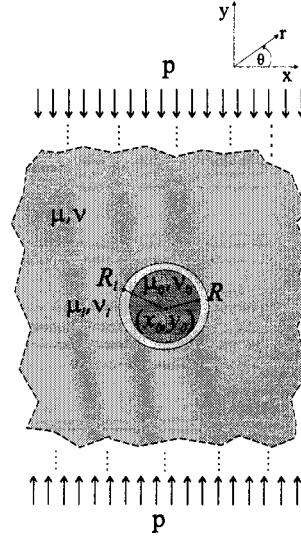


Figure 3.2 Modèle analytique de l'inclusion circulaire avec anneau dans un milieu infini.

glissante, ce qui permet de représenter certaines tumeurs bénignes entourées d'une capsule qui les rend mobiles [Chen, 1995, Konofagou, 2000].

3.2.3 Limites de la validité du modèle analytique

Le modèle analytique repose sur plusieurs hypothèses. Dans cette sous-section, nous examinons leur plage de validité, et nous évaluons si ce modèle est adapté au contexte clinique. Dans le sein, la plupart des tumeurs apparaissent comme des masses de rigidité plus grande que celle des tissus environnants. On peut donc considérer en première approximation une masse homogène, de forme sphérique ou cylindrique, qui apparaît circulaire dans un plan d'imagerie. Plusieurs masses peuvent être présentes en même temps; toutefois, en utilisant l'image de déformation, on pourrait délimiter des régions où une seule inclusion est présente et faire la reconstruction par sous-régions. L'hypothèse d'élasticité linéaire est valide pour de petites déformations, ce qui est le cas en élastographie statique. Au plan des calculs, il est préférable, lorsque cela est possible, de ramener un problème tridimensionnel

à un problème en deux dimensions. Ceci est pertinent en élastographie puisque les déplacements ne sont en général mesurés que dans le plan d'imagerie de la sonde ultrasonore. L'état plan de déformation se rapproche davantage d'une situation réelle dans les tissus que l'état plan de contrainte. La compression uniaxiale est une hypothèse raisonnable, puisque c'est l'intention délibérée en élastographie statique avec compression externe. On doit cependant s'assurer de ne pas transmettre du cisaillement lors de l'application. Comme la compression s'effectue souvent avec une sonde enduite de gel, il est permis de parler d'une condition de glissement qui interdit le cisaillement et ne transmet que la contrainte normale à la peau. L'hypothèse d'un milieu infini est généralement valide pour une inclusion de diamètre inférieur à un cinquième de la plus petite dimension du plan d'intérêt [Savin, 1961]. En ce qui concerne les conditions aux frontières internes, les tumeurs malignes sont généralement attachées au tissu environnant à cause d'une infiltration sous la forme de filaments de cellules et de collagène. L'hypothèse de continuité de toutes les contraintes et déplacements à l'interface inclusion/matrice est alors valable. Quant aux tumeurs plus « mobiles », telles que les fibroadénomes (tumeurs bénignes), qui sont souvent entourées d'une capsule de collagène et peuvent rouler lors d'une palpation, la condition à l'interface inclusion/matrice pourrait possiblement être décrite à l'aide du deuxième modèle analytique où un mince anneau mou entoure l'inclusion.

La question 2 au début de ce chapitre signifie qu'il nous faudra évaluer la robustesse de notre méthode vis-à-vis d'une modélisation imparfaite du problème direct, c'est-à-dire le niveau d'erreur sur l'estimation des paramètres lorsqu'une ou plusieurs hypothèses du modèle sont violées.

3.2.4 Comportement du modèle analytique avec anneau

Afin de mieux comprendre l'apport du modèle avec anneau, nous en examinons brièvement les aspects suivants :

1. le profil parabolique de la déformation;
2. la zone d'influence de l'inclusion et de l'anneau;
3. le transfert de contraste élastique.

Le profil parabolique de la déformation que nous présenterons ci-dessous montrera l'utilité du modèle avec anneau en élastographie classique, où c'est la déformation qui est généralement imagée. Nous verrons en quoi la déformation axiale du modèle avec anneau diffère de celle du modèle de l'inclusion simple. Nous étudierons la zone d'influence des paramètres sur les déplacements, car elle constitue la région géométrique la plus utile pour notre méthode de reconstruction. Le transfert de contraste élastique permettra quant à lui d'analyser la capacité de la déformation dans l'inclusion à représenter la compliance de celle-ci, dans le cas où un anneau est présent.

3.2.4.1 Le profil parabolique de la déformation

Le développement analytique du modèle, résumé en annexe II, permet de démontrer que lorsque l'inclusion est entourée d'un anneau, sa déformation axiale présente un profil parabolique, à la différence d'une inclusion sans anneau. Nous regardons l'expression analytique de la déformation axiale centrale, soit la déformation parallèle à la direction de compression et le long de l'axe passant par le centre de

l'inclusion, un axe nommé ici " r ". La forme générale de cette déformation est donnée par :

$$\epsilon_{rr} = \left\{ \begin{array}{ll} A + Br^2 & r < R \\ \frac{A'}{r^4} + \frac{B'}{r^2} + C' + D'r^2 & R < r < R_l \\ \frac{A''}{r^4} + \frac{B''}{r^2} + C'' & r > R_l \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

Nous présentons la déformation en coordonnées polaires parce que les solutions du modèle, présentées à l'annexe II, sont dérivées en coordonnées polaires. Il suffit de savoir que ϵ_{rr} dans le référentiel polaire du modèle de la Figure 3.2 (à $\theta = 90$ deg) correspond à ϵ_{yy} dans son référentiel cartésien. Les coefficients $A, B, A', \dots, A'', \dots, C''$, explicités dans l'annexe III sont tous des fonctions rationnelles qui dépendent d'un ou plusieurs des paramètres suivants :

- R, R_l : les rayons de l'inclusion et de l'anneau, respectivement;
- $\tilde{R} = R_l/R$: le rapport du rayon de l'anneau sur celui de l'inclusion;
- $\tilde{\mu}_l = \mu_l/\mu$: le module élastique relatif de l'anneau, soit le rapport du module de l'anneau sur celui de la matrice;
- $\tilde{\mu}_0 = \mu_0/\mu$: le module élastique relatif de l'inclusion, soit le rapport du module de l'inclusion sur celui de la matrice;
- $\tilde{p}$: la contrainte à l'infini normalisée par le module de la matrice (positive en tension, négative en compression).

Selon que r appartient à l'inclusion ($r < R$), à l'anneau ($R < r < R_l$) ou à la matrice ($r > R_l$), la déformation analytique prend une forme différente. La déformation dans l'anneau incorpore tant le terme en r^2 , présent dans l'inclusion,

que les termes en r^{-2}, r^{-4} , présents dans la matrice, ce qui permet une transition lisse entre les régions.

Comme il a été dit, lorsqu'un anneau entoure l'inclusion, celle-ci présente une déformation axiale parabolique. Il est facile de vérifier en annexe III que le coefficient B dans l'équation (3.1) est nul dès que l'une des conditions de disparition de l'anneau est satisfaite ($\tilde{R} = 1, \tilde{\mu}_0 = \tilde{\mu}_l, \tilde{\mu}_l = 1$). Lorsqu'il n'y a pas d'anneau, la déformation à l'intérieur de l'inclusion est donc uniforme.

La Figure 3.3 illustre les deux profils de déformation. Cette dernière est négative car on applique une force de compression ($\tilde{p} < 0$). L'inclusion attachée a un profil uniforme dans l'inclusion ($r < R$), tandis que l'inclusion entourée d'un anneau très mince et très mou présente une déformation discontinue à l'interface et parabolique à l'intérieur de l'inclusion. Tous les paramètres sauf ceux de l'anneau sont identiques dans les deux cas; les milieux sont quasi incompressibles ($\nu = \nu_0 = \nu_l = 0.495$) et le module relatif de rigidité $\tilde{\mu}_0$ est de 3. Ainsi, par le seul examen de la déformation axiale dans l'inclusion, il est possible de détecter si celle-ci est entourée d'un anneau mou; si c'est le cas, la déformation a une allure parabolique, sinon, la déformation est uniforme.

3.2.4.2 La zone d'influence de l'inclusion et de l'anneau

Les déplacements sont les données brutes à partir desquelles notre méthode reconstruit les paramètres élastiques et géométriques du tissu. Dans cette sous-section, nous voyons que les expressions analytiques du déplacement radial u_r et tangentiel u_θ dans la matrice nous révèlent l'étendue d'une zone d'influence de l'inclusion sur les déplacements, soit une région géométrique particulièrement utile pour la reconstruction paramétrique. Les déplacements suivants sont donnés dans le référentiel

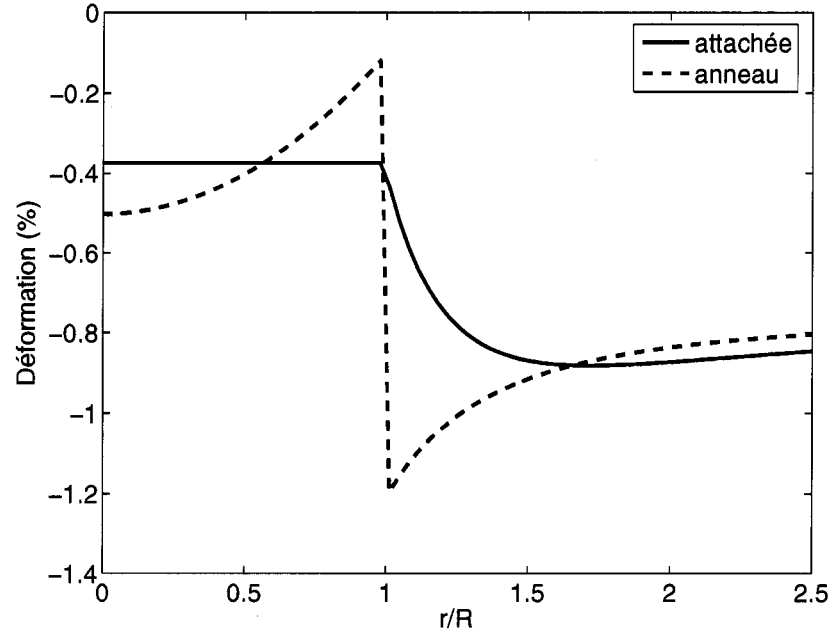


Figure 3.3 Profil de déformation axiale pour une inclusion attachée et une inclusion entourée d'un anneau mince et mou ($\delta R = 0.001$, $\widetilde{\mu}_l = 0.001$).

polaire (r, θ) et pour les angles $\theta = \{45, 90\}$ deg :

$$u_r|_{\theta=45} = 0 \quad (3.2a)$$

$$u_\theta|_{\theta=45} = \frac{\tilde{p}R_l}{4} \left(\rho_l + \frac{\Gamma_1}{\rho_l^3} \right) \quad (3.2b)$$

$$u_r|_{\theta=90} = \frac{\tilde{p}R_l}{4} \left(\rho_l + \frac{\Gamma_2}{\rho_l} - \frac{\Gamma_1}{\rho_l^3} \right) \quad (3.2c)$$

$$u_\theta|_{\theta=90} = 0 \quad (3.2d)$$

où $\rho_l = r/R_l$ est la variable polaire radiale normalisée par le rayon de l'anneau, et où les coefficients Γ_i ($i = 1..3$), détaillés à l'annexe III, dépendent du rapport des rayons $\tilde{R}$ et des modules relatifs $\widetilde{\mu}_0$ et $\widetilde{\mu}_l$. La compression p est appliquée parallèlement à l'axe $\theta = 90$ deg où le déplacement radial $u_r|_{\theta=90}$ coïncide avec le déplacement axial v . Loin de l'anneau (empiriquement quand $\rho_l \geq 3$), les termes avec ρ_l au dénominateur deviennent négligeables, et le déplacement axial se réduit

à la forme linéaire suivante :

$$u_r|_{\theta=90} = \frac{\tilde{p}r}{4} \left(= \frac{\tilde{p}}{4}y \text{ dans le référentiel cartésien} \right)$$

Seul le paramètre $\tilde{p}$ est présent dans l'expression ci-dessus; les autres paramètres n'influencent pas le déplacement, ce qui compromet leur reconstruction. Le même phénomène se produit pour le déplacement $u_\theta|_{\theta=45}$, indiquant qu'il s'agit d'un comportement général du modèle. Les déplacements lointains sont donc moins utiles à l'estimation que ceux qui se retrouvent dans une région qui englobe et déborde l'inclusion, que nous appellerons *zone d'influence*. Cette zone où $\rho_l < 3$ correspond à un voisinage s'étendant à 3 fois le rayon extérieur de l'anneau. C'est dans cette zone que se répercute l'effet d'un anneau mou, même lorsque celui-ci est extrêmement mince.

3.2.4.3 Le transfert de contraste élastique

Pour un modèle avec une inclusion simple attachée, le *contraste élastique observé* C_0 en élastographie est défini par l'inverse du rapport entre la déformation axiale au centre de l'inclusion et la déformation axiale à l'infini [Kallel, 1996b] :

$$\frac{1}{C_0} = \frac{\epsilon_{xx}^0|_{r=0}}{\epsilon_{xx}|_{r \rightarrow \infty}} = \left[\frac{(1-2\nu)}{C_r + (1-2\nu)} + \frac{2}{1 + C_r(3-4\nu)} \right] \quad (3.3)$$

Dans le cas de l'inclusion simple glissante, nous avons évalué le contraste observé à l'aide d'une définition similaire :

$$\frac{1}{C_0} = \frac{\overline{\epsilon_{xx}^0}}{\epsilon_{xx}|_{r \rightarrow \infty}} = \left[\frac{(1-2\nu)}{C_r + (1-2\nu)} + \frac{3}{3-2\nu + C_r(5-6\nu)} \right] \quad (3.4)$$

où $\overline{\epsilon_{xx}^0}$ est la **déformation moyenne** dans l'inclusion, car dans le cas d'une inclusion glissante, la déformation n'est plus uniforme dans l'inclusion. Le contraste C_0

pour l'inclusion avec anneau est évalué de la même manière, mais son expression complète est trop lourde pour être explicitée ici. Cependant, la courbe de la Figure 3.4 illustre le contraste observé C_0 pour différentes valeurs de contraste réel C_r , pour les trois cas de condition frontière : inclusion attachée, glissante et entourée d'un très mince anneau mou. Idéalement, on voudrait avoir une droite $C_0 = C_r$,

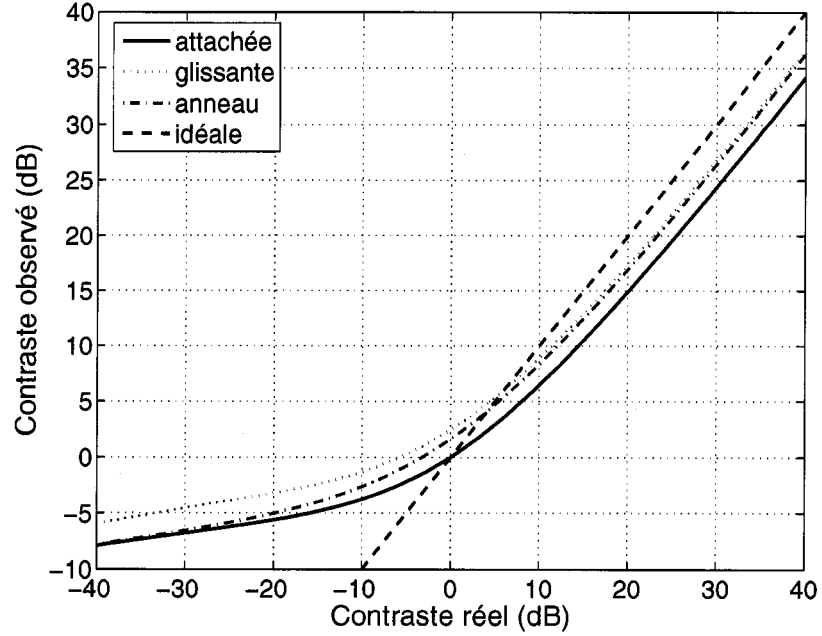


Figure 3.4 Courbe de transfert de contraste élastographique pour différentes conditions frontières à l'interface inclusion-matrice. La courbe idéale en pointillé rouge est l'objectif désiré.

mais les expressions théoriques de C_0 ci-dessus sont des fonctions non linéaires de C_r . Il est à remarquer que l'inclusion glissante ou avec anneau s'approche davantage du transfert de contraste idéal que l'inclusion attachée, lorsque le contraste est ≥ 5 dB. La Figure 3.5 montre l'efficacité de transfert de contraste (CTE), dont nous avons parlé à la section 2.3.3, pour les trois cas de condition frontière à l'interface. Tout comme pour l'inclusion attachée, l'inclusion glissante ou entourée d'un anneau a un très mauvais transfert de contraste lorsqu'elle est molle (contraste réel ≤ 0 dB). Quand l'inclusion est de même module que la matrice (contraste réel de 0

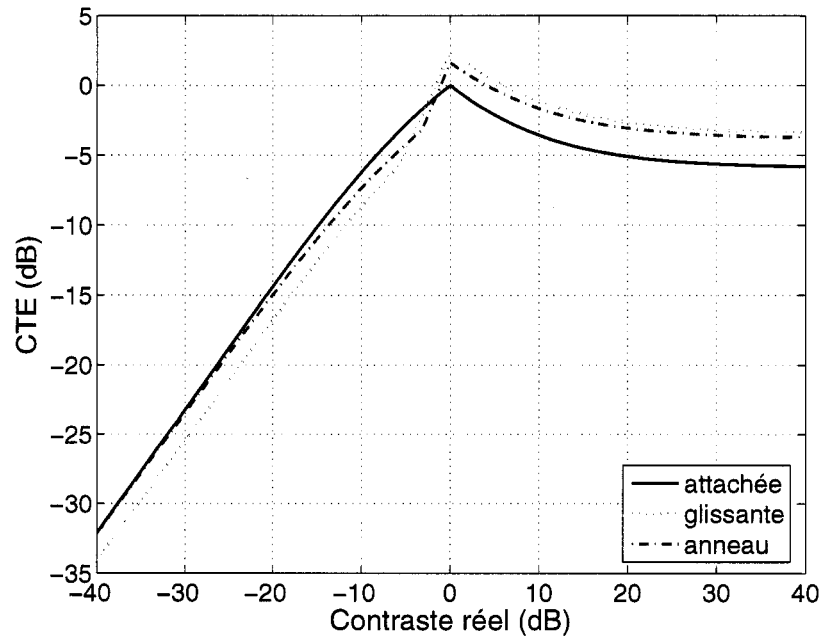


Figure 3.5 Courbe d'efficacité de transfert de contraste pour différentes conditions frontières à l'interface inclusion-matrice.

dB), la condition glissante fait que le CTE est légèrement supérieur à 0 dB. Ce gain d'environ 2 dB demeure pour les inclusions dures (contraste réel ≥ 0 dB), ce qui améliore quelque peu le transfert de contraste dans cette gamme. Ces courbes de CTE rappellent la faiblesse de l'élastogramme de déformation : dès que l'inclusion a un contraste qui s'éloigne significativement de 0 dB, la déformation ne révèle pas correctement la rigidité ou la compliance du tissu. La reconstruction des propriétés élastiques peut pallier ce défaut.

3.3 Méthode de reconstruction paramétrique

3.3.1 Expression du problème inverse

Le problème inverse paramétrique se pose comme suit : étant donné un champ de déplacement (u_m, v_m) comme solution du problème direct, trouver la valeur

des paramètres du modèle qui minimise l'écart entre cette solution mesurée et la solution prédite par le modèle analytique. Puisque les propriétés élastiques de l'inclusion et de la matrice figurent parmi les paramètres, on peut donc parler de reconstruction du module d'élasticité. En élastographie, les déplacements expérimentaux sont estimés aux points d'une grille discrète, sur le plan d'imagerie. La minimisation de l'écart entre les déplacements en tous points de cette grille conduit à l'optimisation par moindres carrés non linéaires.

Optimisation par moindres carrés non linéaires

On pose le vecteur des écarts de déplacement :

$$F(\chi) = \begin{bmatrix} u(\chi, x_1, y_1) - u_m(x_1, y_1) \\ \vdots \\ u(\chi, x_M, y_M) - u_m(x_M, y_M) \\ v(\chi, x_1, y_1) - v_m(x_1, y_1) \\ \vdots \\ v(\chi, x_M, y_M) - v_m(x_M, y_M) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

où χ est le vecteur des paramètres à estimer, (x_k, y_k) ($k = 1, \dots, M$) sont les coordonnées des points de la grille, u et v sont les composantes du déplacement analytique, u_m et v_m sont les composantes du déplacement mesuré (ou observé). Notre convention désigne u comme le déplacement latéral, selon l'axe des x , et v comme le déplacement axial, selon l'axe des y .

Avec $F(\chi)$, nous pouvons définir le problème d'optimisation qui nous permettra de trouver la combinaison des N paramètres qui minimise la distance au sens des moindres carrés entre les déplacements observés et prédits par le modèle :

$$\min_{\chi \in \mathbb{R}^N} f(\chi) = \min_{\chi \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \|F(\chi)\|_2^2 = \min_{\chi \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \sum_i (F_i(\chi))^2 \quad (3.6)$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme dans L_2 . En somme, il s'agit de trouver le vecteur χ qui minimise la fonction objective $f(\chi)$. Comme les (u, v) sont des fonctions non linéaires des paramètres, il s'agit d'une optimisation non linéaire.

Le problème inverse d'élasticité d'un corps incompressible rectangulaire avec des côtés libres de toute contrainte et une condition frontière de force uniaxiale est bien posé [Barbone, 2002]. Ceci implique que la reconstruction de la distribution de rigidité d'un tel corps a théoriquement une solution unique et stable. La capacité

de notre méthode a reconstruire exactement cette solution unique dépend essentiellement de deux choses : de la justesse du modèle pour représenter la situation physique (présence d'une inclusion, homogénéité des régions, linéarité élastique, matrice suffisamment grande pour justifier l'hypothèse d'infinitude) et de la capacité de l'algorithme d'optimisation à converger vers le minimum global.

3.4 Résolution du problème inverse paramétrique

La résolution du problème de minimisation non linéaire (3.6) est un processus itératif dont les étapes générales sont les suivantes :

- poser une approximation initiale χ_0 du vecteur de paramètres;
- calculer une direction de descente d_k et un pas d'avance α_k du vecteur de paramètres qui feront diminuer la valeur de la fonction objective à l'itération k , c'est-à-dire que :

$$f(\chi_k + \alpha_k d_k) < f(\chi_{k-1}); \quad (3.7)$$

- vérifier une règle d'arrêt qui, si elle n'est pas vérifiée, relance l'étape précédente au nouveau point :

$$\chi_{k+1} = \chi_k + \alpha_k d_k,$$

dans une nouvelle itération $k = k + 1$.

Différents algorithmes d'optimisation se distinguent par leur méthode de recherche d'une direction de descente adéquate. Dans la prochaine sous-section, nous en présentons trois parmi les plus classiques, puis, dans la sous-section suivante, nous présenterons l'algorithme choisi pour résoudre notre problème d'optimisation.

3.4.1 Méthodes classiques

La méthode du gradient, basée sur l'approximation linéaire de f , utilise une direction de descente à l'opposé du gradient :

$$d_k = -\nabla f(\chi_k)$$

Tant que le gradient n'est pas nul, cette méthode garantit en théorie une certaine convergence, au sens où la condition $f(\chi_k + \alpha d_k) < f(\chi_k)$ est toujours satisfaite. En pratique toutefois, la progression vers le minimum est lente et la méthode est considérée inefficace pour les fonctions non linéaires générales.

La méthode de Newton, basée sur l'approximation quadratique de f , utilise une direction de descente qui est solution du système linéaire

$$H_k d_k = -\nabla f(\chi_k)$$

où H est la matrice hessienne, dont l'élément $H(i, j) = \frac{\partial^2 f(\chi)}{\partial x_i \partial x_j}$. Pour une fonction quadratique où H_k est définie positive, cette méthode converge en une itération. Elle offre une bonne convergence lorsque le modèle quadratique est adéquat, mais des difficultés surviennent lorsque ce modèle est une mauvaise approximation de f à l'extérieur d'un voisinage restreint du point courant χ_k . Pour une fonction f générale non linéaire, la méthode de Newton a un taux de convergence quadratique seulement si χ_0 est suffisamment près de la solution χ^* , $H(\chi^*)$ est définie positive et les $\{\alpha_k\}$ convergent à l'unité [Gill, 1981].

Dans le cas particulier des moindres carrés, la forme particulière de la fonction objective permet de calculer une approximation de la direction de Newton, nommée

direction de Gauss-Newton, soit la solution d_k du système

$$J_k^T J_k d_k = -J_k^T F_k, \quad (3.8)$$

où J est la matrice jacobienne de $F(\chi)$. Cette approximation est exacte si les F_i dépendent linéairement des paramètres. L'avantage de la méthode de Gauss-Newton est que seules les dérivées d'ordre un de $F(\chi)$ sont nécessaires. La méthode converge à un taux quadratique lorsque le résidu $\|F(\chi)\|$ tend vers zéro quand χ_k s'approche de la solution, ce qui est le cas si le modèle prédit bien les observations [Gill, 1981].

La méthode du gradient donne une bonne direction de descente loin du minimum, mais devient lente et imprécise à proximité du minimum. D'autre part, la méthode de Newton estime mal la direction de descente quand le point courant est loin du minimum, mais devient très rapide au voisinage du minimum, à condition que le modèle quadratique y représente bien la fonction objective. Il existe plusieurs méthodes, connues sous le nom générique de méthodes quasi-Newton, qui réalisent un compromis entre la méthode du gradient et celle de Newton. Dans la prochaine section, nous présentons l'une de ces méthodes que nous avons choisie pour résoudre notre problème d'optimisation : la méthode de Levenberg-Marquardt.

3.4.2 Méthode de Levenberg-Marquardt

La méthode de Levenberg-Marquardt est une alternative à la méthode de Gauss-Newton pour les moindres carrés. La direction de descente est solution du système d'équations

$$(J_k^T J_k + \lambda_k I) d_k = -J_k^T F_k$$

où $\lambda_k > 0$ est un scalaire. La direction d_k est en fait la solution d'un sous-problème de minimisation sous contrainte :

$$\min_{d \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \|J_k d + F_k\|_2^2 \quad (3.9)$$

avec $\|d\|_2 \leq \Delta$

où Δ est un scalaire relié à λ_k . La solution d de cette minimisation sans la contrainte n'est rien d'autre que la direction de Gauss-Newton, la solution du système (3.8). L'ajout de la contrainte signifie que l'on n'accepte le minimum du modèle quadratique que si ce modèle reflète adéquatement le comportement de $f(\chi)$, ce qui se produit dans un sous-espace limité par Δ . Une bonne valeur de λ_k doit être choisie, à chaque itération, pour assurer la descente. Lorsque $\lambda_k = 0$, d_k est la direction de Gauss-Newton; lorsque $\lambda_k \rightarrow \infty$, d_k devient parallèle à la direction de plus forte pente. Dans l'algorithme commercial que nous avons utilisé (*lsqnonlin* du *Optimization Toolbox* du logiciel Matlab^(R)), λ_k est ajusté selon un estimé de la non-linéarité relative de $f(\chi)$ qui détermine s'il vaut mieux choisir une direction de Gauss-Newton ou de plus forte pente. Ensuite, le système (3.9) est résolu pour trouver d , puis une recherche par interpolation cubique de $f(\chi)$ le long de la direction de descente est effectuée afin de déterminer le point sur cette ligne qui produit la valeur minimale de $f(\chi_k + \alpha_k d_k)$. Cette recherche n'est rien d'autre qu'un ajustement optimal du pas α_k dans le but de vérifier la condition de descente (3.7). La technique d'optimisation choisie n'impose pas de contraintes sur les valeurs des paramètres. Ce choix a été fait pour permettre une recherche plus naturelle du minimum de la fonction objective et il a été maintenu en raison des résultats satisfaisants obtenus.

Puisque nous disposons des expressions analytiques des déplacements (u, v) , nous avons pu calculer la forme analytique de la matrice jacobienne que l'algorithme

utilise. Cela permet d'éviter le calcul imposant du jacobien numérique et accélère la convergence. Cette matrice est donnée par :

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \chi_j} = \frac{\partial u_i}{\partial \chi_j}$$

où $\frac{\partial u_i}{\partial \chi_j}$ doit être comprise comme la dérivée partielle analytique de u ou v (selon la position i dans le vecteur F) par rapport au paramètre χ_j , évaluée au point (x_i, y_i) . À cause de la lourdeur des expressions, le calcul a été fait en utilisant la notation symbolique et la fonction *jacobian* du *Symbolic Toolbox* de Matlab^(R).

CHAPITRE 4

RÉSULTATS DES TESTS DE LA RECONSTRUCTION ET DISCUSSION

Les tests pour évaluer la méthode de reconstruction paramétrique seront regroupés en trois catégories, selon la provenance des données d'observation :

- Déplacements observés générés par un modèle analytique;
- Déplacements observés générés par un modèle éléments finis;
- Déplacements estimés par intercorrélation à partir d'images RF simulées.

Dans les trois cas, les déplacements proviennent de simulations et, du premier au dernier type d'observations, on s'approche de plus en plus des conditions expérimentales véritables. Des tests sont d'abord effectués avec le modèle de l'inclusion circulaire simple, puis avec le modèle à anneau. Les calculs de simulation ont été exécutés avec le logiciel Matlab^(R) sous Windows XP avec un Pentium IV (3.2GHz, 2GB RAM).

4.1 Déplacements observés générés par un modèle analytique

Dans ce cas, on parle de données idéales. Le champ de déplacement observé (u_m, v_m) est obtenu en évaluant les expressions analytiques du modèle. Par la suite, l'optimisation cherche les paramètres qui reproduisent ce déplacement. Autrement dit, on tente de retrouver les valeurs des paramètres que l'on a introduites au début. Les objectifs de ces tests sont de valider la capacité de l'algorithme à minimiser

la fonction objective et d'étudier le comportement de l'optimisation sous plusieurs aspects : résolution, valeurs initiales, pondération des déplacements, impact d'un bruit blanc additif, etc.

4.1.1 Variation du module élastique

Dans ce test, l'estimation des paramètres est répétée en variant seulement $\widetilde{\mu}_0$, le module élastique relatif de l'inclusion. Le Tableau 4.1 précise les détails du test. On estime tous les paramètres du modèle et on utilise, sans les pondérer, les

Nom du test	Variation du module élastique
Modèle utilisé	Inclusion circulaire simple
Type d'observations	analytiques
Pondération du déplacement	(u, v)
Paramètres estimés	$\widetilde{\mu}_0, \widetilde{p}, R, \nu, \nu_0, x_0, y_0$
Paramètres connus	-
Paramètre varié	$\widetilde{\mu}_0$

Tableau 4.1 Détails du test *Variation du module élastique*.

deux composantes du champ de déplacement observé. La norme de l'erreur sur tous les paramètres augmente en fonction du module élastique, tel qu'illustré à la Figure 4.1. Ceci est dû à la sensibilité $\partial u / \partial \widetilde{\mu}_0$ qui diminue lorsque $\widetilde{\mu}_0$ augmente. Cette norme est définie comme le rapport entre la norme L_2 de l'erreur absolue du vecteur paramétrique estimé et la norme L_2 du vecteur paramétrique réel, lequel est connu puisque les observations sont analytiques. Cette norme sans unité donne une mesure de l'écart qui sépare l'estimation de la vraie valeur, mais elle véhicule surtout l'erreur sur les paramètres dont l'ordre de grandeur est le plus important, soit $\widetilde{\mu}_0$, ν et ν_0 , dont les valeurs se situent entre 0.5 et 5 environ. On voit ici que la norme est très faible, de l'ordre de 1/100. L'erreur relative maximale, présentée à la Figure 4.2, confirme ceci : elle est inférieure à 1.3%, tous cas confondus. L'erreur

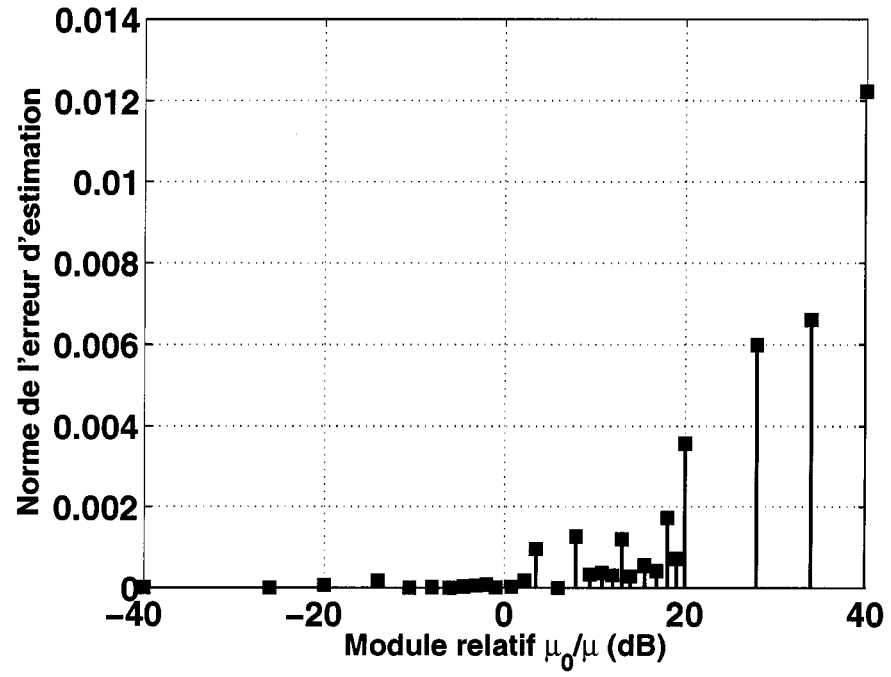


Figure 4.1 Norme de l'erreur d'estimation selon le module élastique relatif $\widetilde{\mu}_0$.

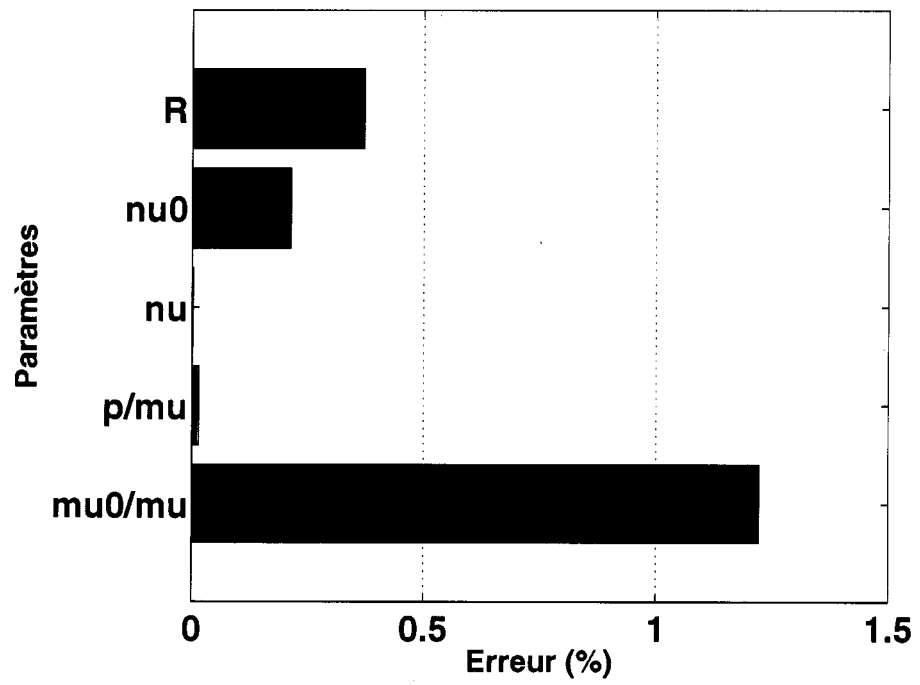


Figure 4.2 Erreur relative maximale sur l'estimation des paramètres.

est non nulle car la sensibilité des (u, v) à $\widetilde{\mu}_0$ est faible lorsque $\widetilde{\mu}_0$ est grand et cette erreur sur $\widetilde{\mu}_0$ entraîne une compensation via les paramètres R, ν_0 et $\widetilde{p}$ qui sont, eux-aussi, erronés. La convergence est atteinte sans difficulté en 6s et 22 itérations en moyenne. Les valeurs de $\widetilde{\mu}_0$ dans les cas de contraste mou (≤ 0 dB à la Figure 4.1) sont estimées avec une valeur initiale de 0.5, alors que les valeurs de contraste dur (> 0 dB) sont estimées avec une valeur initiale de 2.

4.1.2 Variation des valeurs initiales

La méthode itérative d'optimisation que nous avons utilisée requiert une valeur initiale pour chaque paramètre. La convergence à la solution dépend dans une certaine mesure de cette valeur initiale, puisqu'une mauvaise valeur peut conduire à un minimum local autre que le minimum global recherché, d'où l'algorithme ne peut plus sortir.

Nom du test	Variation des valeurs initiales
Modèle utilisé	Inclusion circulaire simple
Type d'observations	analytiques
Pondération du déplacement	(u, v)
Paramètres estimés	$\widetilde{\mu}_0, \widetilde{p}, R, \nu, \nu_0, x_0, y_0$
Paramètres connus	-
Paramètres variés	Valeurs initiales de tous

Tableau 4.2 Détails du test *Variation des valeurs initiales*.

Dans ce test, décrit au Tableau 4.2, on modifie la valeur initiale de chaque paramètre, un à la fois, tandis que les autres paramètres ont des valeurs initiales très près des vraies valeurs. Le Tableau 4.3 présente en chiffres les valeurs initiales utilisées dans le test. Il y a cinq valeurs initiales par paramètre : deux valeurs inférieures, une valeur proche et deux valeurs supérieures à la valeur réelle.

Paramètre	Valeur réelle (unités)	Valeurs initiales
$\widetilde{\mu}_0$	3	0.5 1.5 2.5 3.5 5
$\widetilde{p}$	-0.03	-0.01 -0.02 -0.028 -0.04 -0.09
ν, ν_0	0.49	0.40 0.45 0.485 0.495 0.4999
R	0.01 (m)	0.001 0.005 0.0085 0.015 0.02
x_0, y_0	0 (m)	-0.01 -0.005 10^{-6} 0.008 0.012

Tableau 4.3 Valeurs réelles et initiales des paramètres utilisées dans le test.

On remarque que les valeurs initiales choisies ne sont pas si éloignées, en fin de compte, des vraies valeurs. C'est qu'en élastographie, il n'est pas si difficile d'obtenir de bons estimés pour les différents paramètres, puisque l'on a à sa disposition l'élastogramme de déformation, qui donne une bonne idée de la position et du rayon de l'inclusion. L'estimé initial du module élastique relatif $\widetilde{\mu}_0$ peut être pris comme le rapport de la déformation moyenne dans la matrice sur celle de l'inclusion. Il a été remarqué en outre que la valeur initiale de $\widetilde{p}$ influence peu la convergence; ce paramètre, qui représente la condition frontière, a l'heureuse propriété d'être estimé sans difficulté. Ceci est dû au fait que la sensibilité $\partial u / \partial \widetilde{p}$ est indépendante de $\widetilde{p}$; donc, pourvu que les autres paramètres convergent, $\widetilde{p}$ sera bien estimée aussi. Les résultats du test sont illustrés à la Figure 4.3. Les erreurs sur x_0, y_0 ne sont pas illustrées car négligeables ($\approx 2\text{E-}10$ microns) Dans tous les cas illustrés, l'erreur d'estimation est faible ($<1\%$). Le point optimal est trouvé en 2 à 7s, après 7 itérations en moyenne. Cependant, ce test est assez favorable puisqu'il n'y a jamais plus d'un paramètre à la fois dont la valeur initiale est loin de sa valeur réelle. L'impact du choix de la valeur initiale dépend de la forme de la fonction objective; évidemment, plus le point initial est loin du point recherché, plus les chances de tomber dans un minimum local sont grandes, lorsque la fonction est non linéaire. Dans ce test, l'inclusion est dure et pourtant, il est possible de lui mettre une valeur initiale de module relatif mou ($\widetilde{\mu}_{0_{init}} = 0.5$ dans le Tableau 4.3) et de converger tout de même à la solution. Toutefois, il n'en est pas toujours

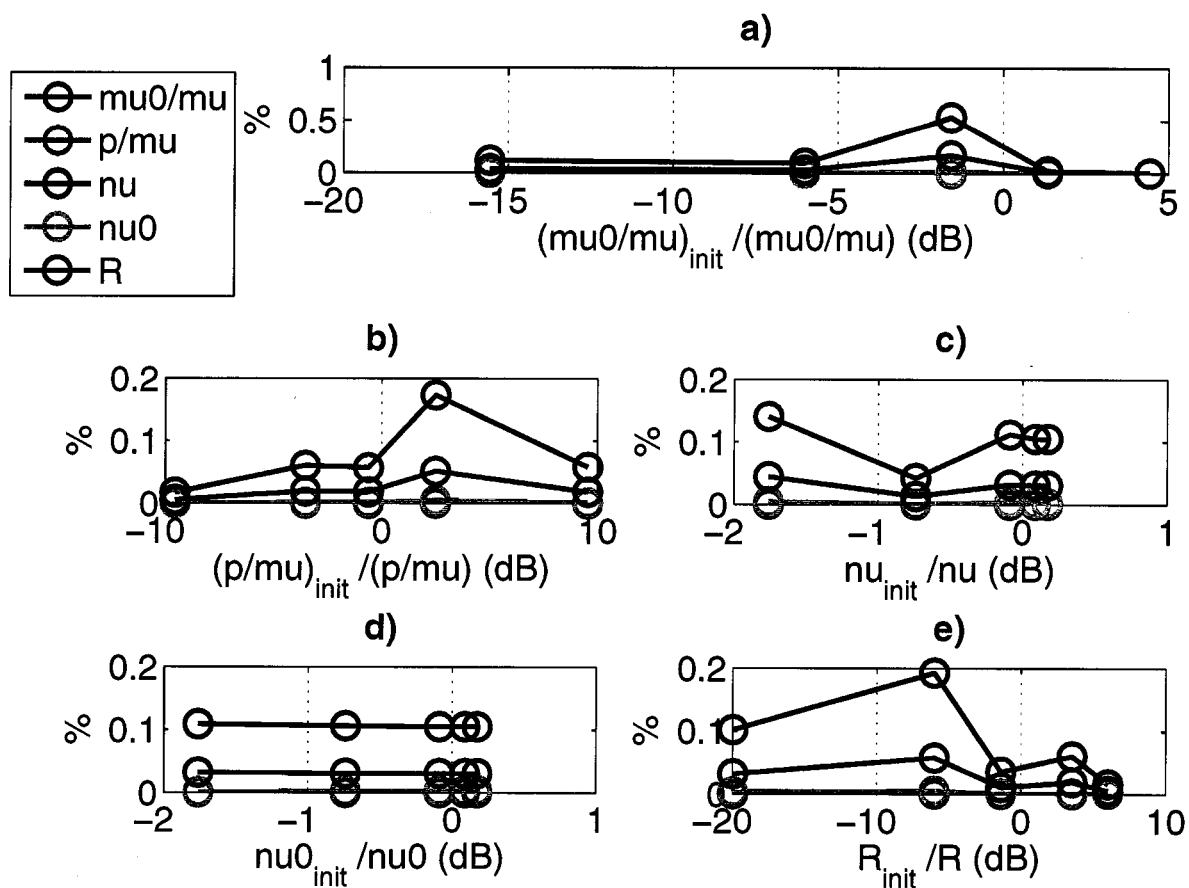


Figure 4.3 Erreur relative sur l'estimation de cinq paramètres, en fonction de la variation des valeurs initiales de a) μ_0 , b) p , c) ν , d) ν_0 , e) R .

ainsi. Nous avons en effet observé d'autres cas où une fausse condition initiale sur la rigidité (hypothèse d'une inclusion dure alors qu'elle est molle ou vice-versa), faisait converger l'algorithme vers une solution erronée, voire même physiquement impossible. C'est pourquoi les valeurs initiales de rigidité $\widetilde{\mu}_0$ dans le test 4.1.1 ont été choisies pour situer correctement le contraste dès le départ. Dans un contexte d'élastographie pratique, l'élastogramme de déformation peut déjà indiquer si l'on a affaire à une inclusion plutôt dure ou plutôt molle.

4.1.3 Variation de l'échantillonnage

Dans un contexte pratique, le nombre de points où le déplacement est observé est limité. Ce test vise à étudier la relation entre le rayon de l'inclusion et le nombre de points nécessaires pour estimer correctement les paramètres. Le Tableau 4.4 décrit le test. Les observations sont pour une région de $5\text{cm} \times 5\text{cm}$, l'inclusion est centrée

Nom du test	Variation de l'échantillonnage
Modèle utilisé	Inclusion circulaire simple
Type d'observations	analytiques
Pondération du déplacement	(u, v)
Paramètres estimés	$\widetilde{\mu}_0, \widetilde{p}, R, \nu, \nu_0, x_0, y_0$
Paramètres connus	-
Paramètres variés	R , nombre de points d'échantillonnage

Tableau 4.4 Détails du test *Variation de l'échantillonnage*

à l'origine $(0, 0)$. R prend 17 valeurs entre 2 et 10mm, alors que l'échantillonnage est de $\{10, 20, \dots, 100\}$ pixels pour chacune des deux dimensions, ce qui nous semble réaliste dans un contexte d'élastographie clinique. Après une convergence en 10 à 90s et 23 itérations en moyenne, les seuls paramètres qui présentent des erreurs significatives ($> 2\%$) sont $\widetilde{\mu}_0$ et R . Les Figures 4.4 et 4.5 illustrent l'évolution de l'erreur relative sur $\widetilde{\mu}_0$ et R , respectivement. L'estimation échoue lorsque le rayon et le nombre de pixels sont petits, c'est-à-dire quand la résolution de l'inclusion est faible. Plus l'inclusion est petite, plus la perturbation qu'elle génère dans le champ de déplacement est faible, tant par sa valeur numérique que par son étendue géométrique. Il faut donc un échantillonnage plus fin afin d'obtenir un plus grand nombre de points dans la zone d'influence de l'inclusion qui pourront affecter la fonction objective, celle-ci étant évaluée aux points de la grille d'échantillonnage. La Figure 4.6 montre que lorsque le rayon est représenté avec moins de 3 pixels, l'erreur d'estimation sur $\widetilde{\mu}_0$ et R risque d'être grande ($> 10\%$).

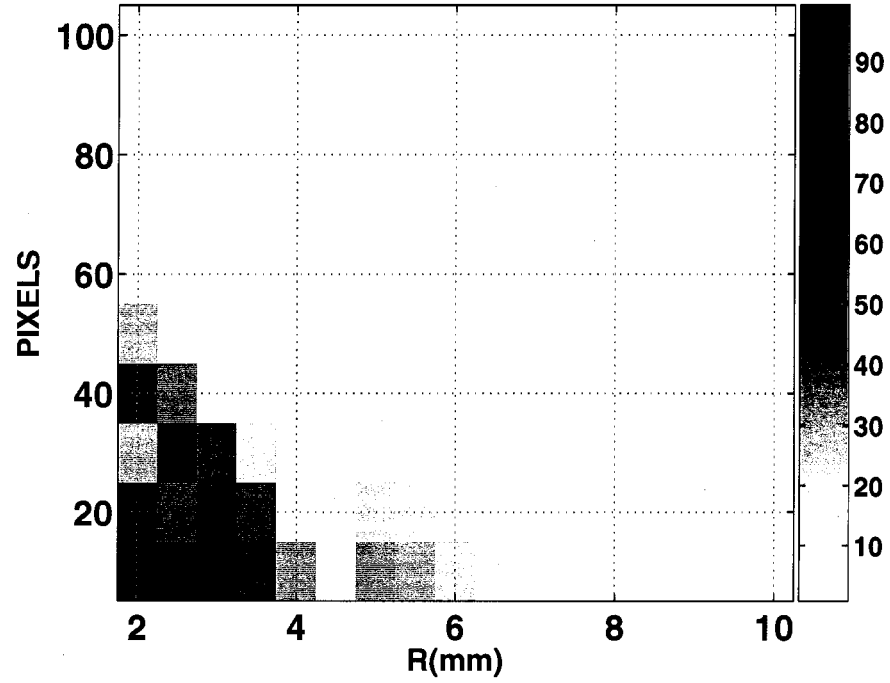


Figure 4.4 Valeur absolue de l'erreur relative (%) sur l'estimation du paramètre $\widetilde{\mu}_0$ selon le nombre de pixels et le rayon de l'inclusion.

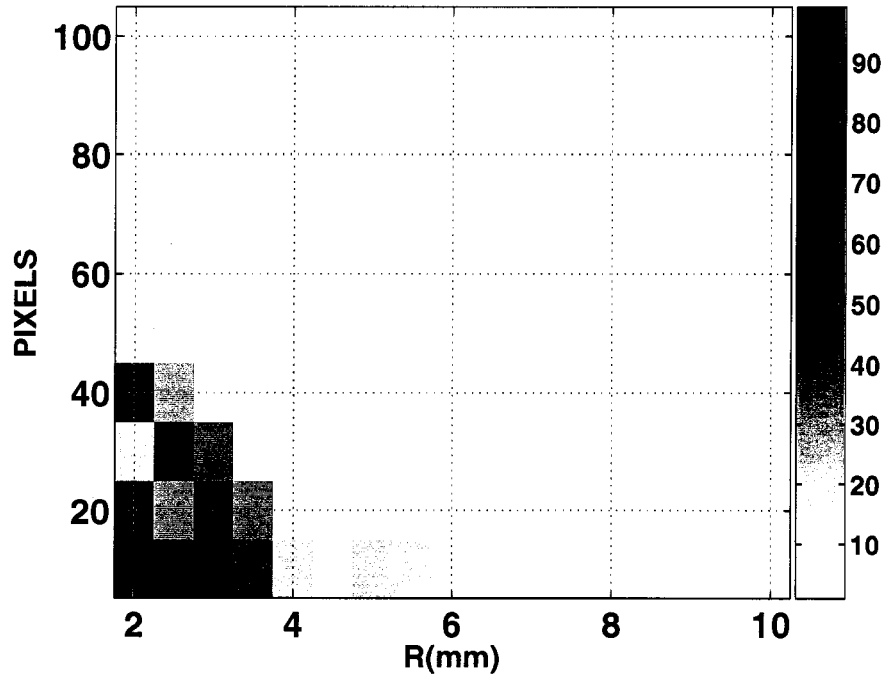


Figure 4.5 Valeur absolue de l'erreur relative (%) sur l'estimation du paramètre R selon le nombre de pixels et le rayon de l'inclusion.

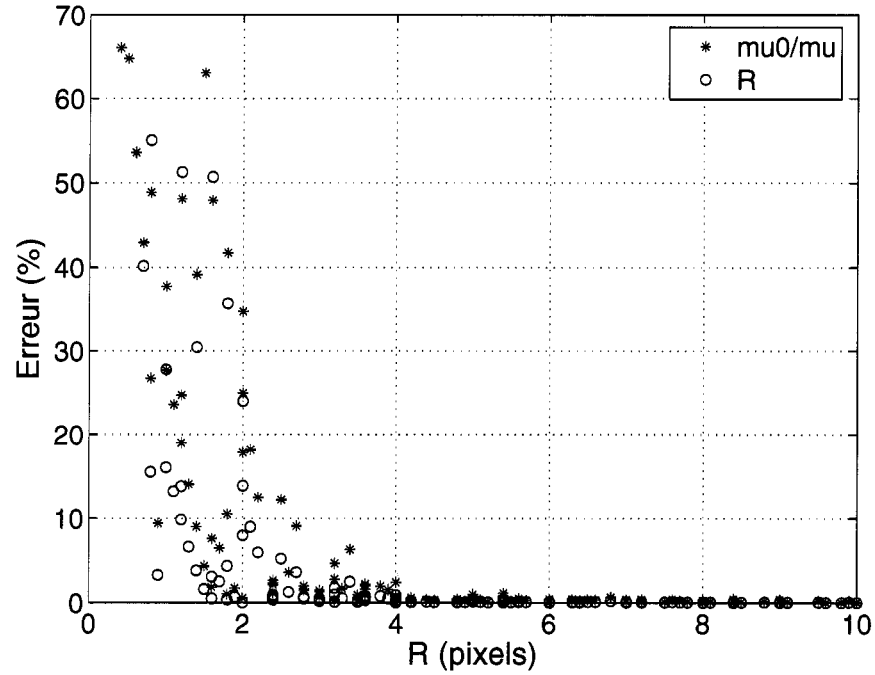


Figure 4.6 Valeur absolue de l'erreur relative sur l'estimation des paramètres $\widetilde{\mu}_0$ et R en fonction du rayon de l'inclusion en pixels.

4.1.4 Pondération des composantes de déplacement

En élastographie par ultrasons, les estimés de déplacement latéral sont souvent mauvais, en raison de la basse résolution latérale des sondes et de la décorrélation latérale qui se produit lorsque des diffuseurs se déplacent latéralement lors de la compression et changent ainsi de ligne RF. Plusieurs méthodes de résolution du problème inverse n'utilisent que le déplacement axial pour la reconstruction. Dans ce test, détaillé au Tableau 4.5, nous évaluons la capacité de notre méthode à estimer correctement les paramètres avec différentes pondérations des composantes du déplacement. L'inclusion de rigidité trois fois plus grande que la matrice et de rayon 8mm est centrée dans une région de 5cm×5cm échantillonnée par 50² pixels.

Les sept types de pondérations énumérées ci-haut sont : les deux composantes

Nom du test	Pondération des composantes de déplacement
Modèle utilisé	Inclusion circulaire simple
Type d'observations	analytiques
Pondération du déplacement	$(u, v); u; v; (2u, v); (4u, v); (u, 2v); (u, 4v)$
Paramètres estimés	$\widetilde{\mu}_0, \widetilde{p}, R, \nu, \nu_0, x_0, y_0$
Paramètres connus	-
Paramètre varié	-

Tableau 4.5 Détails du test *Pondération des composantes de déplacement*.

(u, v) , la composante u seule, la composante v seule, la composante u pondérée par un facteur 2 avec la composante v , la composante u pondérée par un facteur 4 avec la composante v , la composante u avec la composante v pondérée par un facteur 2, la composante u avec la composante v pondérée par un facteur 4. Les résultats de la Figure 4.7 montrent l'erreur relative sur quatre paramètres. Chaque estimation prend moins de 8s et 8 itérations en moyenne. L'erreur est négligeable dans tous les cas, sauf quand l'on ne prend en compte qu'une seule composante de déplacement (u seul ou v seul). Il est à noter que les erreurs d'estimation de R, x_0 et y_0 ne sont pas illustrées, car elles sont négligeables ($<0.1\%$) dans tous les cas. Autrement dit, on peut très bien estimer la géométrie de l'inclusion avec v seul, mais pour estimer les caractéristiques élastiques de l'inclusion, la contribution des deux composantes, pondérées ou non, est nécessaire. Le coefficient de Poisson ν_0 est plus sensible à la présence des deux composantes, puisqu'il relie la déformation latérale à la déformation axiale. En retirant l'une des deux composantes, l'optimisation est privée de la relation entre déplacements axial et latéral, ce qui empêche la juste estimation de ν, ν_0 . L'erreur sur ces paramètres peut à son tour affecter l'estimation de $\widetilde{\mu}_0$ et $\widetilde{p}$. On a fait le choix de ces pondérations arbitrairement, pour voir comment l'algorithme se comporte lorsque l'une des composantes est amplifiée deux ou quatre fois par rapport à l'autre. En pratique, puisque le bruit est

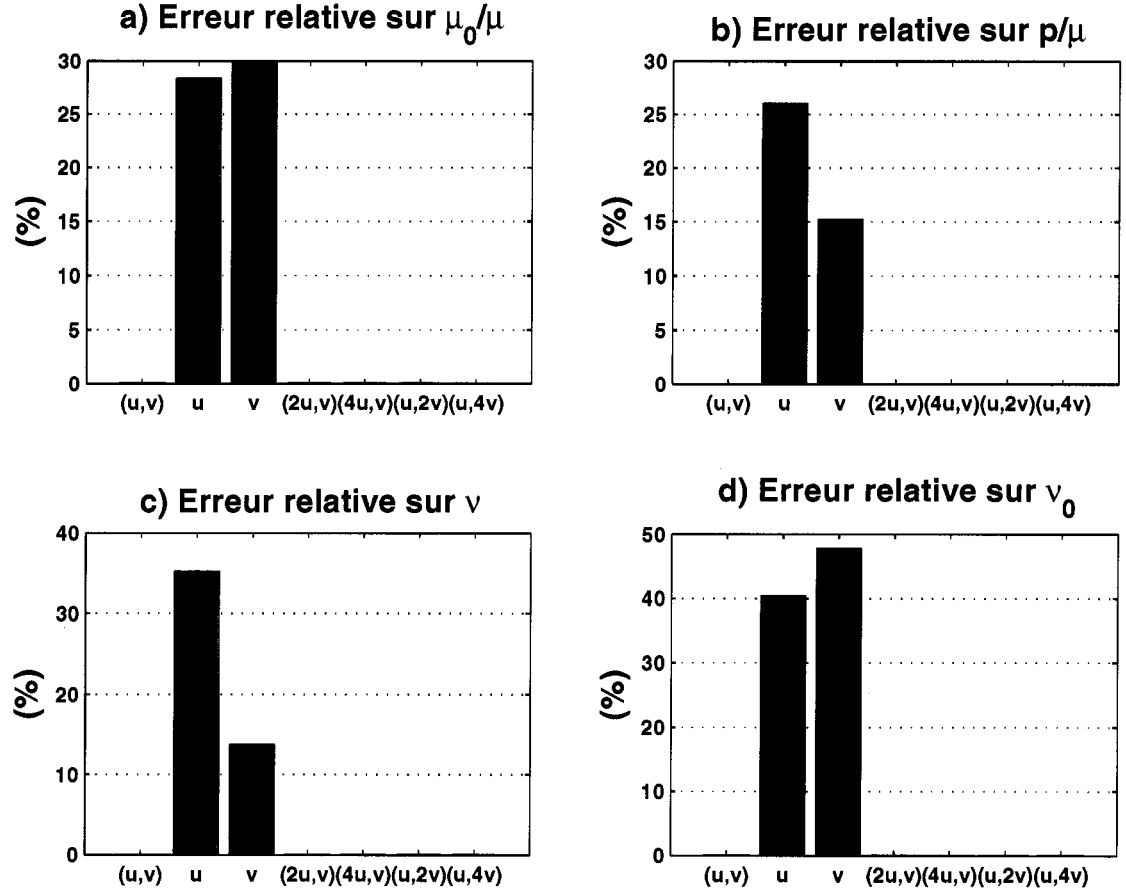


Figure 4.7 Erreur relative (en valeur absolue) sur l'estimation des paramètres $\tilde{\mu}_0, \tilde{p}, \nu, \nu_0$, selon différentes pondérations des composantes du déplacement.

a) Erreur sur $\tilde{\mu}_0$, b) Erreur sur $\tilde{p}$, c) Erreur sur ν , d) Erreur sur ν_0

corrélé en élastographie, il serait intéressant de modéliser la matrice de covariance du bruit et d'utiliser un estimateur linéaire (tel que l'estimateur à maximum de vraisemblance) pour la dernière itération, lorsque l'on est suffisamment près du minimum pour que l'approximation linéaire soit valide. La matrice de covariance pondère les mesures de manière à rehausser les contributions précises et tempérer les contributions imprécises.

4.1.5 Estimation avec déplacements bruités

Le bruit en élastographie est de deux natures principales : le bruit d'acquisition (électronique et de quantification) et le bruit de décorrélation. Le bruit de quantification est introduit au moment où le signal analogique de la sonde est converti en représentation numérique sur un nombre fini de bits; le bruit de décorrélation apparaît lorsque les diffuseurs sont déplacés sur une trop grande distance de sorte qu'il est difficile d'estimer leur déplacement par intercorrélation des signaux pré- et post-compression. Ce test vise à examiner la robustesse de la méthode lorsque les déplacements sont entachés d'un bruit blanc gaussien additif qui est un bon modèle de bruit d'acquisition et est une première approximation du bruit réel total. Le Tableau 4.6 donne un aperçu du test.

Nom du test	Estimation avec déplacements bruités
Modèle utilisé	Inclusion circulaire simple
Type d'observations	analytiques
Pondération du déplacement	(u, v)
Paramètres estimés	$\widetilde{\mu}_0, \widetilde{p}, R, \nu, \nu_0, x_0, y_0$
Paramètres connus	-
Paramètres variés	tous

Tableau 4.6 Détails du test *Estimation avec déplacements bruités*.

Huit cas différents permettent de faire varier les paramètres, tel que détaillé au Tableau 4.7. La deuxième ligne du tableau donne les valeurs initiales pour

Paramètre	$\widetilde{\mu}_0$	$\widetilde{p}$	ν, ν_0	R (m)	x_0, y_0 (m)
Valeur initiale	2 ou 0.1	-0.04	0.4	0.01	1×10^{-6}
cas D1	2	-0.03	0.49	0.8×10^{-2}	1×10^{-6}
cas D2	3	-0.08	0.45	1.0×10^{-2}	0
cas D3	4	-0.03	0.45	1.2×10^{-2}	0
cas D4	5	-0.08	0.49	1.0×10^{-2}	0
cas M1	0.5	-0.03	0.49	1.2×10^{-2}	0
cas M2	0.33	-0.08	0.495	1.0×10^{-2}	0
cas M3	0.25	-0.03	0.45	1.2×10^{-2}	0
cas M4	0.2	-0.08	0.49	1.2×10^{-2}	0

Tableau 4.7 Valeurs des paramètres pour les cas testés avec déplacements bruités.

l'estimation de chaque paramètre. Les autres lignes donnent les valeurs réelles des paramètres pour les huit cas. Les cas D1-D4 ont une inclusion dure et les cas M1-M4, une inclusion molle. Pour $\widetilde{\mu}_0$, on utilise une valeur initiale de 2 dans les cas D1-D4 et de 0.1 dans les cas M1-M4. Nous avons procédé en additionnant aux déplacements un bruit blanc aléatoire de loi normale, de moyenne nulle et dont l'écart-type σ_b , décrivant le niveau d'intensité, prend les valeurs suivantes : $\sigma_b = [0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10]$ microns, pour des déplacements mesurés allant jusqu'à 400 microns. Pour chacun de ces 6 niveaux, 100 réalisations du bruit sont produites et ajoutées au déplacement analytique. Ensuite, on fait l'estimation pour chaque réalisation, puis on calcule la moyenne et l'écart-type de l'erreur relative sur les paramètres estimés. Ces résultats sont présentés aux Figures 4.8 et 4.9. Dans tous les cas, la moyenne et la variance de l'erreur relative augmentent avec le niveau de bruit. Chaque estimation converge en 6 à 7s environ et prend de 5 à 25 itérations en moyenne. Les erreurs les plus importantes se produisent pour le cas D1 (Figure 4.8a), mais demeurent $< 5\%$, ce qui nous permet d'affirmer que l'optimisation est robuste en présence de bruit, grâce à la régularisation inhérente à la méthode de

Levenberg-Marquart.

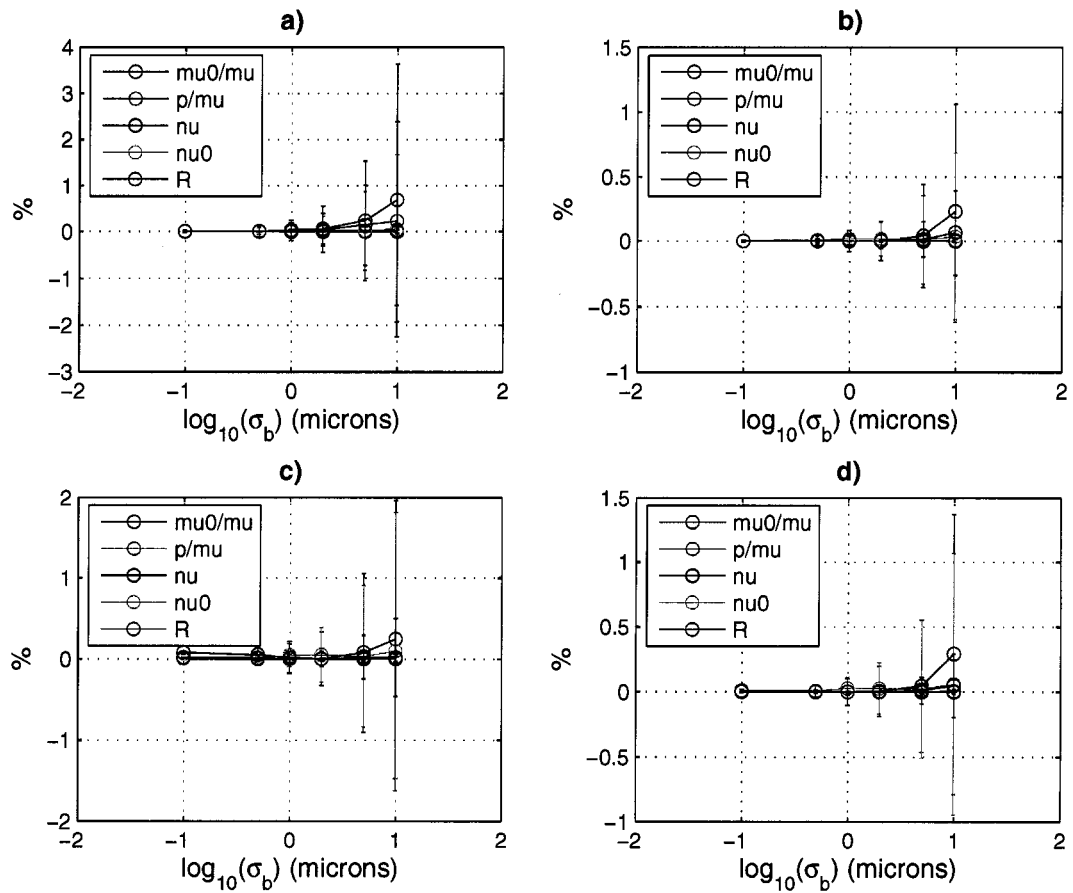


Figure 4.8 Moyenne et écart-type de l'erreur relative sur l'estimation des paramètres en fonction de l'écart-type du bruit σ_b , pour les cas d'une inclusion dure : a) D1, b) D2, c) D3, d) D4). Les barres d'erreur sont d'une distance d'un écart-type au-dessus et d'un écart-type au-dessous des courbes.

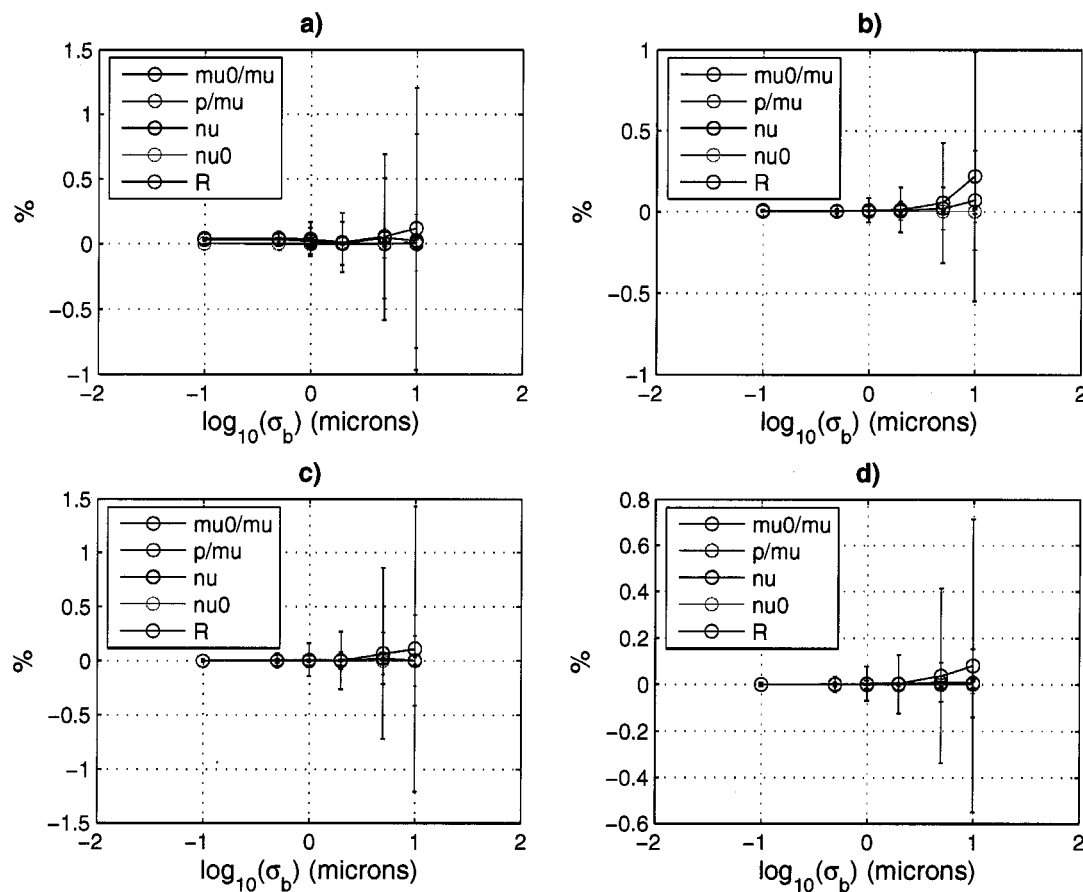


Figure 4.9 Moyenne et écart-type de l'erreur relative sur l'estimation des paramètres en fonction de l'écart-type du bruit σ_b , pour les cas d'une inclusion molle : a) M1, b) M2, c) M3, d) M4. Les barres d'erreur sont d'une distance d'un écart-type au-dessus et d'un écart-type au-dessous des courbes.

4.1.6 Estimation du type d'attachement de l'inclusion

Il a été mentionné à la section (3.2.3) que l'une des différences majeures entre une tumeur maligne et une tumeur bénigne est son type d'attachement au tissu environnant. La tumeur maligne est infiltrante, elle s'attache au tissu et, par ce fait, est souvent de forme étoilée. La tumeur bénigne en revanche s'accroît généralement lentement, en repoussant les tissus environnants sans les envahir et a, de ce fait, des contours lisses. Il est connu que de telles tumeurs peuvent être glissantes lors de la palpation. Le présent test vise à investiguer la capacité de l'algorithme à différencier la condition frontière entre l'inclusion et la matrice. Pour ce faire, le modèle à anneau sera utilisé pour l'estimation. L'anneau agit ici comme une zone de transition pour détecter le type d'attachement. Le Tableau 4.8 détaille le test. Il y a deux cas de déplacements observés, générés par le modèle analytique de

Nom du test	Estimation du type d'attachement de l'inclusion
Modèle utilisé	Inclusion circulaire avec anneau
Type d'observations	analytiques, avec condition 1) attachée; 2) glissante
Pondération du déplacement	(u, v)
Paramètres estimés	$\widetilde{\mu}_0, \widetilde{\mu}_l, \widetilde{p}, R, dR, \nu, \nu_0, \nu_l, x_0, y_0$
Paramètres connus	-
Paramètre varié	-

Tableau 4.8 Détails du test *Estimation du type d'attachement de l'inclusion*.

l'inclusion circulaire simple : dans le cas 1), l'inclusion est attachée; dans le cas 2), l'inclusion est glissante. Dans les deux cas, l'inclusion de rayon $R = 1\text{cm}$ et de module relatif $\widetilde{\mu}_0 = 3$ est centrée dans une région de $8\text{cm} \times 8\text{cm}$, laquelle est échantillonnée avec 50^2 pixels. Le Tableau 4.9 montre les résultats de l'estimation. La première colonne énumère les paramètres des modèles analytiques; la deuxième colonne donne les valeurs utilisées pour générer les déplacements observés des cas

Paramètres (unités)	Valeurs réelles	Valeurs initiales (cas 1)	Valeurs estimées (cas 1)	Valeurs initiales (cas 2)	Valeurs estimées (cas 2)
$\tilde{p}$	-3.96E-2	-4.00E-2	-3.96E-2	-4.00E-2	-3.96E-2
$\tilde{\mu}_0$	3	4	2.86	4	2.98
$\tilde{\mu}_l$	-	3.5	3.00	0.1	6.92E-4
R (m)	0.01	5E-3	2.21E-4	5E-3	0.01
dR (m)	-	5E-3	9.78E-3	5E-3	9.37E-5
ν	0.495	0.49	0.495	0.49	0.495
ν_0	0.495	0.49	0.495	0.49	0.501
ν_l	-	0.49	0.495	0.49	0.500
x_0 (m)	0	1E-6	-1.24E-18	1E-6	-3.36E-19
y_0 (m)	0	1E-6	-5.90E-19	1E-6	-4.38E-19

Tableau 4.9 Résultats de l'estimation pour l'inclusion attachée (cas 1) et l'inclusion glissante (cas 2).

1) et 2). La troisième colonne montre les valeurs initiales utilisées pour estimer les paramètres du modèle à anneau dans le cas 1). Il est à noter que les valeurs initiales choisies pour $\tilde{\mu}_0$ et $\tilde{\mu}_l$ sont >1 car on a affaire ici à une inclusion plus dure que la matrice. La quatrième colonne donne les valeurs estimées pour le cas 1) (inclusion attachée) : les paramètres $\tilde{p}$, ν , ν_0 , ν_l , x_0 et y_0 sont estimés avec une grande précision. De plus, on remarque que $\tilde{\mu}_0$ et $\tilde{\mu}_l$ ont presque la même valeur (≈ 3), qui est celle du module relatif réel. Si l'on examine la somme des estimés de R et dR , l'on s'aperçoit qu'elle vaut ≈ 0.01 , la valeur réelle de R . Puisque l'anneau et l'inclusion ont des modules presque identiques, on peut les considérer comme étant fusionnés. L'épaisseur de l'anneau dR estimée est aussi beaucoup plus grande que le rayon R estimé. Ceci est dû au fait que la zone d'influence se situe dans la matrice, autour de l'inclusion. Comme c'est l'anneau qui touche à cette zone, c'est lui qui est perçu comme l'inclusion par l'algorithme.

Les deux dernières colonnes du tableau indiquent les valeurs initiales et estimées

des paramètres dans le cas 2) (inclusion glissante). On obtient des résultats intéressants. Les paramètres $\tilde{p}, \tilde{\mu}_0, R, \nu, x_0$ et y_0 sont estimés assez précisément. L'inclusion a été bien détectée. ν_0 est estimé à $0.501 > 0.5$, c'est une erreur qui peut survenir car l'optimisation est sans contraintes. Les paramètres estimés $\tilde{\mu}_l, dR$ et ν_l décrivent un anneau très mou, très mince et incompressible. Ces caractéristiques soutiennent l'hypothèse d'une condition frontière glissante à l'interface inclusion-matrice. En effet, par simulation nous avons observé que le champ de déformation d'un milieu avec inclusion entourée d'un mince anneau mou ressemble beaucoup à celui du milieu avec inclusion glissante. Il est intéressant de noter que l'épaisseur estimée de l'anneau (9.37×10^{-2} mm) est bien inférieure à la taille d'un pixel (1.6 mm), ce qui corrobore le fait que la condition frontière d'interface a un effet qui se répercute dans les déplacements de la zone d'influence. Par cet exemple, il est montré que le modèle de l'inclusion avec anneau est capable de différencier le type d'attachement de l'inclusion. Ceci pourrait éventuellement aider à distinguer une lésion bénigne d'un cancer dans le sein, par exemple.

À titre informatif, le cas 1) a convergé en 5 itérations et le cas 2), en 20 itérations. Comme le modèle avec anneau comporte des coefficients assez longs, l'estimation avec ce modèle prend plus de temps (environ 20s par itération) qu'avec le modèle à inclusion simple.

4.2 Déplacements observés générés par un modèle éléments finis

Dans cette section, les déplacements observés sont issus d'une simulation par éléments finis (EF). Le modèle EF est plus représentatif des conditions expérimentales que le modèle analytique pour générer les données de déplacement. Deux différences principales existent entre le modèle analytique et le modèle EF : d'abord, la géométrie de ce dernier est finie; ensuite, la condition frontière peut être de dé-

placement plutôt que de force, et elle ne s'applique pas à l'infini, mais à la frontière du corps modélisé. Le but de cette section est, dans un premier temps, de comparer les déplacements EF et analytiques et, dans un deuxième temps, d'étudier l'impact de ces différences sur l'estimation des paramètres. En particulier, on cherche à connaître les conditions du modèle fini sous lesquelles la meilleure estimation puisse être obtenue.

4.2.1 Comparaison du déplacement EF/analytique

Les quatre modèles de la Figure 4.10 sont utilisés dans l'étude; ce sont les combinaisons possibles pour deux conditions frontières (de force ou de déplacement) et deux grandeurs de rayon. Tous ces modèles représentent une région de dimension 10cm×10cm. Les deux modèles du haut (Figure 4.10 a et b) ont un rayon égal à 1/5 du demi-côté, soit $R = 1\text{cm}$, tandis que les deux modèles du bas (Figure 4.10 c et d) ont un rayon égal à 1/10 du demi-côté, soit $R = 0.5\text{cm}$. Les deux modèles de gauche (Figure 4.10 a et c) ont une condition frontière de force (CFF) et les deux modèles de droite (Figure 4.10 b et d), une condition frontière de déplacement (CFD) avec glissement, c'est-à-dire aucune contrainte de cisaillement. Le Tableau 4.10 précise les valeurs réelles des paramètres utilisés pour les modèles de la Figure 4.10. Il est à noter que les variables p et δ sont reliées par l'équation $\delta = (1 - \nu)p/(2\mu) \times 10\text{cm}$ et que la valeur de p utilisée pour les modèles CFF a été injectée dans cette équation pour fournir la valeur de déplacement δ équivalente des modèles CFD.

Pour ces quatre modèles, les déplacements EF et analytique ont été calculés aux points d'une grille régulière de 100×100 pixels. Pour fixer l'ordre de grandeur, signalons que l'histogramme des déplacements est une distribution uniforme, de support [-400,400] microns. Les écarts entre déplacements EF et analytique ont

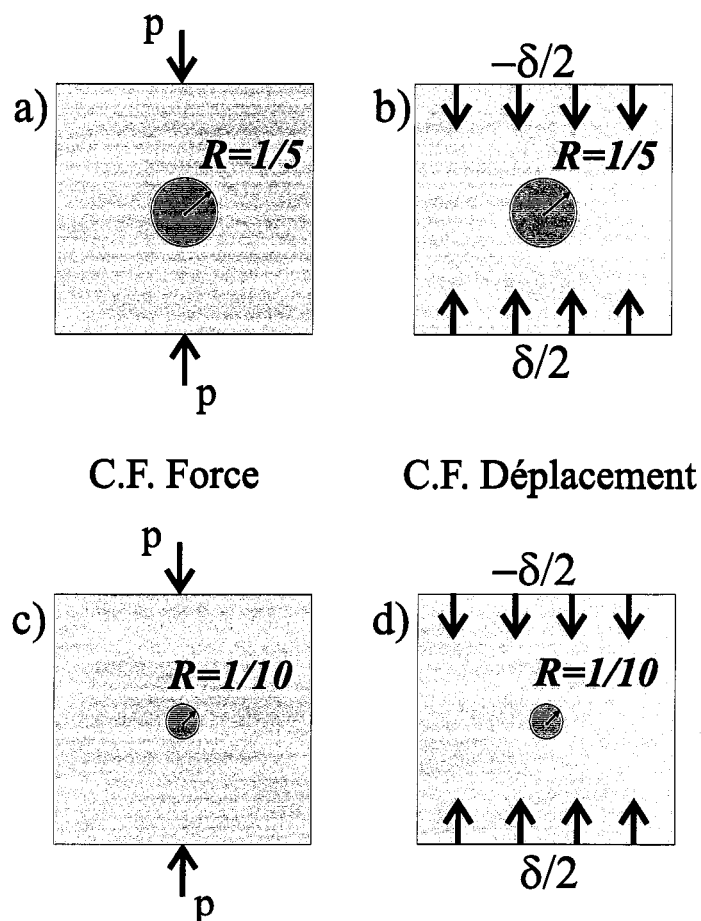


Figure 4.10 Modèles à éléments finis : a) CFF 1/5, b) CFD 1/5, c) CFF 1/10, d) CFD 1/10 (CFF = condition frontière de force, CFD = condition frontière de déplacement). p est une contrainte compressive et δ , un déplacement absolu.

Paramètre	CFF 1/5	CFD 1/5	CFF 1/10	CFD 1/10
μ (kPa)	6.7	6.7	6.7	6.7
$\widetilde{\mu}_0$	3	3	3	3
$\nu = \nu_0$	0.49	0.49	0.49	0.49
R (cm)	1	1	0.5	0.5
p (Pa)	-200	-	-200	-
δ (cm)	-	0.076	-	0.076

Tableau 4.10 Valeurs réelles des paramètres des modèles EF de la Figure 4.10.

ensuite été calculés. L'histogramme des écarts pour le déplacement axial v est illustré à la Figure 4.11. Comparant les modèles CFF 1/5 et CFD 1/5 (Figure 4.11 a) et b)), on note que l'écart-type de la différence ($v_{EF} - v$) est de 6 microns pour la CFF, alors qu'il est sensiblement plus faible à 4 microns pour la CFD. L'écart-type des différences de déplacement latéral ($u_{EF} - u$), non illustré, est semblable dans les deux cas (6 microns). De même, en comparant les modèles CFF 1/10 et CFD 1/10 (figure 4.11 c) et d)), l'écart-type de ($v_{EF} - v$) est inférieur dans le cas CFD (1 vs 1.8 microns); pour ($u_{EF} - u$), non illustré, la CFD est aussi inférieure, mais la différence est moindre (1.6 vs 1.8 microns). Il est intéressant de

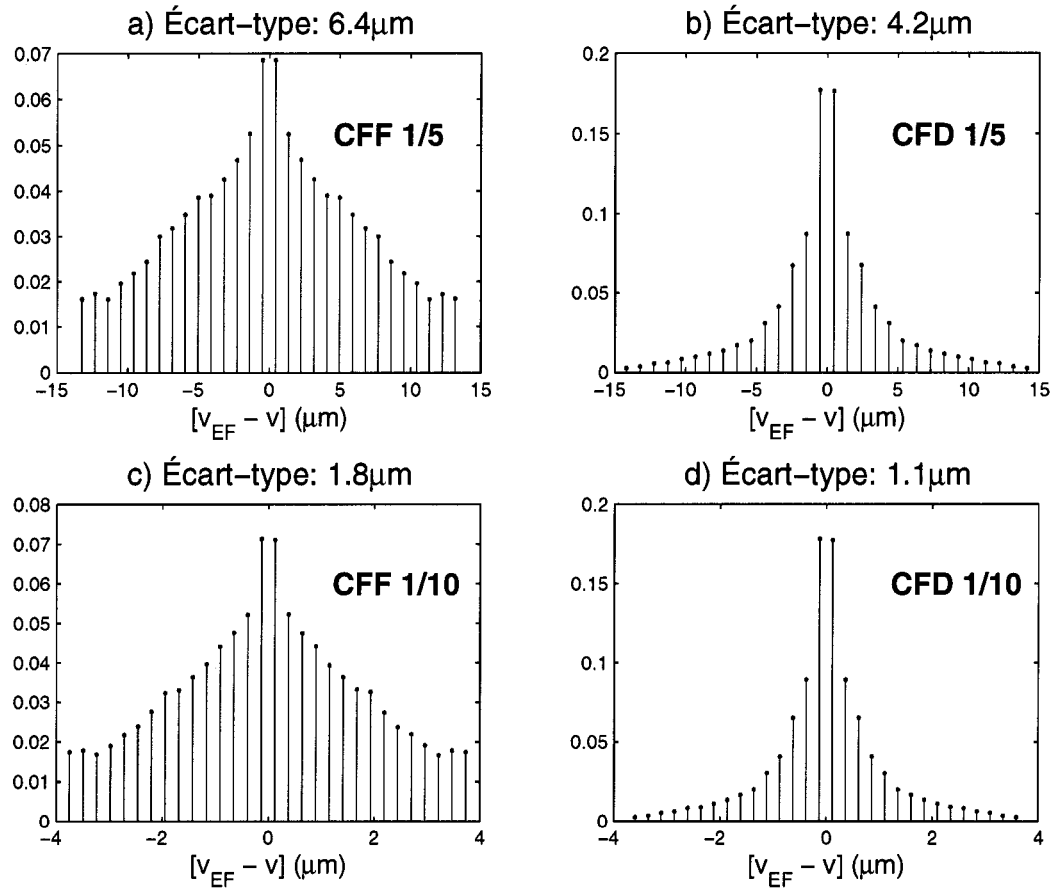


Figure 4.11 Histogramme normalisé de l'écart ($v_{EF} - v$) entre déplacements axiaux EF et analytiques, pour : a) CFF 1/5, b) CFD 1/5, c) CFF 1/10, d) CFD 1/10.

voir que, pour une même taille d'inclusion, avoir une CFD plutôt qu'une CFF fait que les déplacements du modèle fini se rapprochent davantage de ceux prédits par le modèle analytique infini, même si ce dernier comporte une CFF (voir section 3.2.1). Ceci est avantageux pour notre méthode, car en élastographie pratique, on applique le plus souvent une CFD. De plus, ce rapprochement est plus évident pour v que pour u , ce qui est encore une situation favorable puisqu'en élastographie, v est souvent bien mieux estimé que u . D'autre part, le support de l'histogramme de l'écart ($v_{EF} - v$) est réduit en passant des modèles 1/5 à 1/10. Dans le modèle 1/10 (Figure 4.11 c) et d)), l'écart varie entre $[-4,4]$ microns, alors que dans le modèle 1/5 (Figure 4.11 a) et b)), l'écart varie entre $[-15, 15]$ microns. Parce que son inclusion est plus distancée des bords, le modèle 1/10 correspond davantage au modèle analytique d'une matrice infinie. La Figure 4.12 montre l'image de l'écart

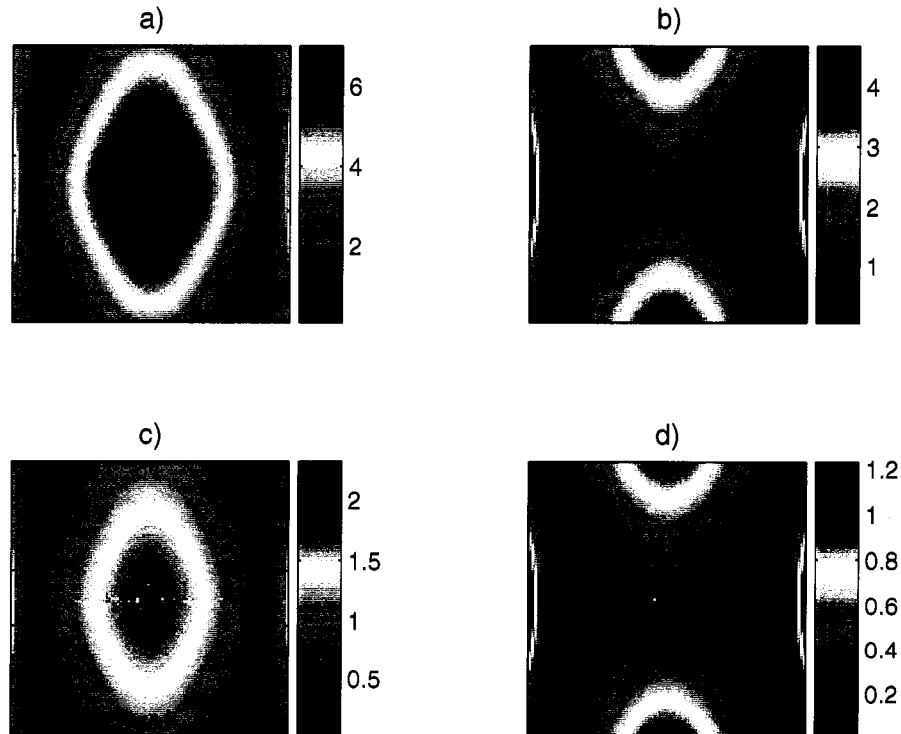


Figure 4.12 Représentation spatiale de l'écart relatif $|v_{EF} - v|/v$ (%) aux points de la grille pour : a) CFF 1/5, b) CFD 1/5, c) CFF 1/10, d) CFD 1/10.

relatif des déplacements $|v_{EF} - v|/v$ des quatre modèles. Tel que prévu, l'écart est plus élevé pour les modèles 1/5 (Figure 4.12 a) et b)). Pour une même grandeur de rayon, les erreurs sont globalement moins élevées pour la CFD que pour la CFF. Ceci vient du fait que, pour les modèles à CFD, le profil du déplacement est uniforme à la frontière, comme c'est le cas aussi dans le modèle analytique, alors que pour les modèles à CFF, ce profil est courbe (car c'est la force qui est uniforme). La CFF du modèle analytique est appliquée à l'infini; plus près de l'inclusion, le champ de contrainte n'est plus uniforme. La différence entre CFF et CFD du motif géométrique de l'écart est frappante. Pour les modèles CFF (Figure 4.12 a) et c)), c'est surtout au centre, dans la zone d'influence de l'inclusion, que l'erreur est la plus élevée. Pour les modèles CFD (Figure 4.12 b) et d)), c'est surtout en périphérie de la matrice que l'erreur est importante. Cette observation est utile pour la reconstruction paramétrique. En effet, la zone d'influence est déterminante pour une estimation correcte des paramètres de l'inclusion; on peut donc s'attendre à ce qu'un modèle avec CFF produise une reconstruction moins bonne qu'un modèle CFD, toutes choses étant par ailleurs égales.

4.2.2 Estimation paramétrique avec modèles EF

Les modèles de la Figure 4.10 sont repris pour générer des déplacements EF qui servent de données d'observations à la méthode de reconstruction paramétrique. Le Tableau 4.11 énonce les détails de ce test.

Le Tableau (4.12) fournit les résultats de l'estimation pour les deux modèles 1/5. On y retrouve l'erreur relative de tous les paramètres estimés, sauf x_0, y_0 , car ceux-ci sont estimés avec une précision suffisante (0.01 micron). Les erreurs négligeables ($<1\%$) sont indiquées par un trait. En comparant les deux colonnes du cas A), on voit que les paramètres $\widetilde{\mu}_0$ et R du modèle CFD sont mieux estimés que ceux

Nom du test	Estimation paramétrique avec modèles EF
Modèle utilisé	Inclusion circulaire simple
Type d'observations	éléments finis
Pondération du déplacement	(u, v)
Paramètres estimés	$\widetilde{\mu}_0, \widetilde{p}, R, \nu, \nu_0, x_0, y_0$
Paramètres connus	-
Paramètres variés	Condition frontière (CFF ou CFD), R

Tableau 4.11 Détails du test *Estimation paramétrique avec modèles EF*.

1/5	CFF		CFD	
Paramètres	A	B	A	B
$\widetilde{p}$	-	-4.0	2.2	1.8
$\widetilde{\mu}_0$	-14	2.2	-	-
R	31	3.9	2.9	-
ν	-	-	-	-
ν_0	-	-	-8.9	-3.2

Tableau 4.12 Erreur relative (%) des paramètres estimés pour les modèles 1/5, dans les cas : A) région complète de $10\text{cm} \times 10\text{cm}$, 100^2 pixels et B) sous-région de $6\text{cm} \times 6\text{cm}$, 60^2 pixels, autour de l'inclusion.

du modèle CFF; par contre, avec la CFD, une erreur apparaît sur $\tilde{p}$ et ν_0 , erreur qui n'était pas présente avec la CFF. Il est à remarquer aussi qu'en passant du cas A) au cas B), c'est-à-dire en restreignant le domaine des observations à une sous-région du modèle, on obtient une meilleure estimation des paramètres $\tilde{\mu}_0$, R et ν_0 de l'inclusion.

1/10	CFF		CFD	
Paramètres	A	C	A	C
$\tilde{p}$	-	-1.5	-	-
$\tilde{\mu}_0$	-13	-25	-	-1.5
R	23	15	2.1	-
ν	-	-	-	-
ν_0	-	-	-6.6	-

Tableau 4.13 Erreur relative (%) des paramètres estimés pour les modèles 1/10, dans les cas : A) région complète de 10cm×10cm, 100² pixels et C) sous-région de 4cm×4cm, 40² pixels, autour de l'inclusion.

Le Tableau 4.13 donne les résultats de l'estimation pour les deux modèles 1/10. De même qu'avec les modèles 1/5, le fait de passer d'une CFF à une CFD améliore en général l'estimation, surtout pour les paramètres $\tilde{\mu}_0$ et R . Le fait de restreindre la région d'observation ne produit pas l'amélioration escomptée dans le cas CFF, probablement parce que les divergences de déplacement entre les modèles EF et analytique sont maximales à proximité de l'inclusion et non en bordure, tel qu'illustré à la section (4.2.1). Par contre, pour le modèle CFD, le fait de ne pas comptabiliser les données de déplacement près des frontières physiques est avantageux, puisque l'erreur sur R et ν_0 est réduite.

À la suite de ces tests, il est possible de faire la recommandation suivante : avec notre méthode de reconstruction paramétrique, il est préférable d'appliquer une condition frontière de déplacement sur le tissu et de restreindre le domaine spatial des déplacements observés à une sous-région éliminant les bords. Il faut tout

de même veiller à conserver suffisamment d'échantillons de déplacements dans la zone d'influence de l'inclusion, puisque c'est cette zone qui contient l'information importante pour la reconstruction. Plus l'inclusion sera petite par rapport à la distance qui la sépare de la frontière du corps, meilleurs aussi seront les résultats de l'estimation, tant que la résolution des ultrasons le permet.

4.3 Déplacements estimés par intercorrélation à partir d'images RF simulées

Il s'agit d'évaluer la performance de la méthode de reconstruction dans un contexte plus près de l'élastographie pratique où les déplacements sont estimés par intercorrélation. Un modèle de formation d'image [Kallel, 1996a, Maciejko, 2002] est utilisé afin de générer deux images RF correspondant à l'état de pré- et de post-compression. Pour ce faire, une distribution spatiale d'impédance acoustique (modèle acoustique du tissu) est convoluée par la réponse impulsionnelle du transducteur ultrasonore (modèle du système ultrasonore) afin d'obtenir l'image pré-compression. L'image post-compression est obtenue en appliquant un champ de déplacement EF (modèle mécanique du tissu) sur la distribution d'impédance, laquelle est ensuite convoluée de nouveau. Les deux images RF sont traitées par un algorithme, basé sur [Ophir, 1991], qui procède par division des images en fenêtres et intercorrélation de celles-ci afin d'estimer les déplacements locaux.

4.3.1 Estimation paramétrique avec déplacements estimés par intercorrélation

La Figure 4.13 illustre les modèles mécaniques du tissu utilisés dans ce test. Les modèles CFD 1/5 et CFD 1/10 couvrent une région de $5\text{cm} \times 5\text{cm}$, alors que le

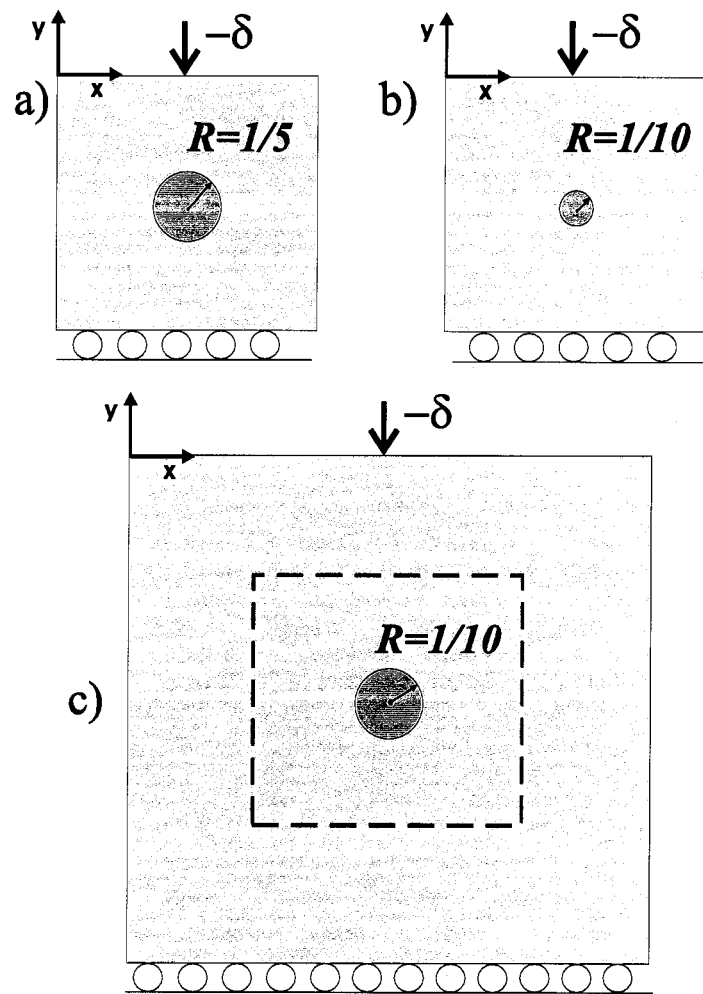


Figure 4.13 Modèles mécaniques du tissu : a) CFD 1/5, b) CFD 1/10, c) CFD 1/10 avec sous-région (CFD = condition frontière de déplacement). $\delta = 0.02 \times$ côté (cm).

modèle CFD 1/10 avec sous-région s'étend sur une région de 10cm×10cm, mais seule la sous-région centrale de 5cm×5cm (en pointillé) est conservée pour simuler les images RF; ceci est fait dans le but d'assurer une résolution suffisante pour l'inclusion, tout en ayant une distance 10R qui sépare l'inclusion de la frontière. L'immobilisation en y de la base des modèles et la CFD ont été choisies car ce sont les conditions expérimentales les plus courantes. On applique aussi une condition de glissement en x sur la base, en plus de fixer complètement l'un de ses points pour stabiliser la solution par EF. Enfin, on applique une compression de 2% de la dimension de la matrice. Le Tableau 4.14 donne les valeurs des paramètres utilisés dans les modèles de la Figure 4.13.

Paramètre	CFD 1/5	CFD 1/10	CFD 1/10 ss-rég.
μ (kPa)	6.7	6.7	6.7
$\widetilde{\mu}_0$	4	4	4
$\nu = \nu_0$	0.495	0.495	0.495
R (cm)	0.5	0.25	0.5
δ (cm)	0.1	0.1	0.2

Tableau 4.14 Valeurs réelles des paramètres des modèles de la Figure 4.13.

La Figure 4.14 illustre les déplacements (u, v) estimés par intercorrélation pour les trois modèles. On voit que les estimés de déplacement axial v (Figure 4.14b, d, f) ont un bien meilleur rapport signal à bruit que les estimés de déplacement latéral u (Figure 4.14a, c, e). La reconstruction a été testée de six façons : dans les trois premiers tests, tous les paramètres sont estimés et la pondération des déplacements est respectivement de (u, v) , $(u, 2v)$ et (v) ; dans les trois derniers tests, tous les paramètres sauf ν, ν_0 sont estimés, en n'utilisant que la composante v du déplacement. Puisque les tissus mous sont considérés comme étant incompressibles, les coefficients de Poisson sont fixés aux valeurs plausibles de 0.5, 0.45 et 0.4, respectivement. Ainsi que montré à la section (4.1.4), le fait de retirer (u) de l'estimation

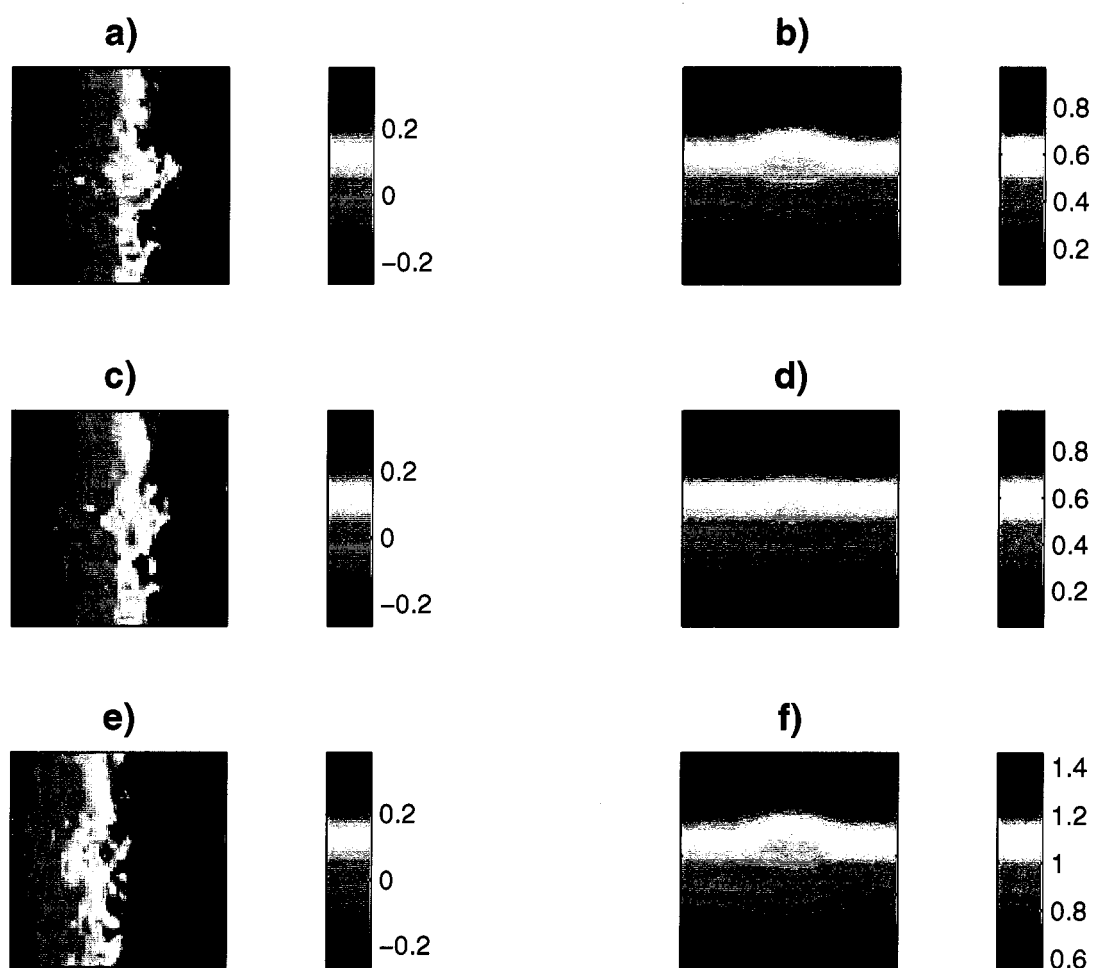


Figure 4.14 Déplacements estimés par intercorrélation : a) u et b) v du modèle CFD 1/5; c) u et d) v du modèle CFD 1/10; e) u et f) v du modèle CFD 1/10 avec sous-région. Les déplacements sont en mm.

améliore l'estimation du rayon de l'inclusion, mais détériore l'estimation de ses paramètres élastiques, en particulier les coefficients de Poisson, d'où la nécessité de les fixer à une valeur plausible afin d'estimer correctement le module élastique relatif. Les Tableaux 4.15, 4.16 et 4.17 contiennent les résultats des six tests décrits ci-haut pour les trois modèles de tissu.

Paramètres estimés	tous			ν, ν_0 fixés à 0.5	ν, ν_0 fixés à 0.45	ν, ν_0 fixés à 0.4
Pondération des déplacements	(u, v)	$(u, 2v)$	v seul	v seul	v seul	v seul
Erreur sur $\tilde{p}$ (%)	9.7	8.9	-9.0	1.9	-7.0	-15
Erreur sur $\tilde{\mu}_0$ (%)	-28	-42	24	-10	1.2	8.6
Erreur sur $\tilde{R}$ (%)	16	16	-1.8	-1.7	-1.9	-2.3
Erreur sur ν (%)	7.4	7.4	-11	n.a.	n.a.	n.a.
Erreur sur ν_0 (%)	19	20	-54	n.a.	n.a.	n.a.
Erreur sur x_0 (mm)	-2.8	-2.7	-0.13	-0.13	-0.13	-0.13
Erreur sur y_0 (mm)	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02

Tableau 4.15 Erreur sur les paramètres estimés pour le modèle CFD 1/5.

La convergence est atteinte en 20 à 60s et 20 à 27 itérations en moyenne, dans tous les cas. Pour chacun des trois tableaux, on remarque que l'erreur sur les paramètres géométriques R et x_0 est beaucoup plus élevée lorsque u est utilisée pour l'estimation. La mauvaise résolution de u empêche une estimation précise de la coordonnée horizontale et de la taille de l'inclusion. La coordonnée verticale y_0 dépend davantage de v et est donc estimée correctement. Lorsque v seul est utilisé, les paramètres géométriques sont bien estimés, mais les coefficients de Poisson demeurent erronés. En fixant ceux-ci à une valeur plausible de 0.45 par exemple, différente de leur vraie valeur de 0.495, on réussit tout de même à obtenir des erreurs acceptables ($\leq 10\%$) sur les paramètres importants de l'inclusion, $\tilde{\mu}_0$ et $\tilde{R}$.

Paramètres estimés	tous			ν, ν_0 fixés à 0.5	ν, ν_0 fixés à 0.45	ν, ν_0 fixés à 0.4
Pondération des déplacements	(u,v)	(u,2v)	v seul	v seul	v seul	v seul
Erreur sur $\tilde{p}$ (%)	8.3	7.9	-7.9	1.1	-8.0	-16
Erreur sur $\tilde{\mu}_0$ (%)	-55	-63	27	-15	-2.5	-7.9
Erreur sur $\tilde{R}$ (%)	76	84	0.86	0.90	-0.17	1.7
Erreur sur ν (%)	6.9	7.2	-8.9	n.a.	n.a.	n.a.
Erreur sur ν_0 (%)	18	10	-89	n.a.	n.a.	n.a.
Erreur sur x_0 (mm)	-2.9	-2.9	-0.17	-0.17	-0.17	-0.18
Erreur sur y_0 (mm)	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03

Tableau 4.16 Erreur sur les paramètres estimés pour le modèle CFD 1/10.

Paramètres estimés	tous			ν, ν_0 fixés à 0.5	ν, ν_0 fixés à 0.45	ν, ν_0 fixés à 0.4
Pondération des déplacements	(u,v)	(u,2v)	v seul	v seul	v seul	v seul
Erreur sur $\tilde{p}$ (%)	-7.3	-7.3	-7.5	-1.6	-10	-17
Erreur sur $\tilde{\mu}_0$ (%)	24	24	24	-5.7	8.5	19
Erreur sur $\tilde{R}$ (%)	-83	-100	0.87	1.1	-0.11	-1.2
Erreur sur ν (%)	0.27	0.32	-5.7	n.a.	n.a.	n.a.
Erreur sur ν_0 (%)	12	-10	-54	n.a.	n.a.	n.a.
Erreur sur x_0 (mm)	-9.4	-9.4	-0.03	-0.03	-0.04	-0.03
Erreur sur y_0 (mm)	0.34	0.34	0.33	0.33	0.33	0.33

Tableau 4.17 Erreur sur les paramètres estimés pour le modèle CFD 1/10 avec sous-région.

CHAPITRE 5

CONCLUSION

Dans ce projet, nous avons proposé et mis en oeuvre une méthode de reconstruction paramétrique pour résoudre un problème inverse en élastographie. Notre méthode se base sur deux modèles analytiques à inclusion et peut reconstruire la position, le rayon, le module relatif de l'inclusion, les coefficients de Poisson de la matrice et de l'inclusion ainsi que la contrainte appliquée normalisée. Une optimisation numérique par moindres carrés non linéaires trouve les paramètres pour lesquels l'écart entre les déplacements observés et prédits est minimal. Afin de caractériser la condition d'attachement de l'inclusion à la matrice, nous avons utilisé un modèle où l'inclusion est entourée d'un anneau possédant des propriétés élastiques propres. La solution de ce problème a dû être dérivée (voir annexe II), puisqu'à notre connaissance elle n'existait pas telle quelle dans la littérature. Suite aux résultats présentés dans le chapitre 4, nous faisons un retour sur les questions posées au chapitre 3 qui concernent la performance de notre reconstruction paramétrique. Ensuite, nous donnons des pistes et des recommandations pour la recherche future reliée au projet.

5.1 Discussion sur l'atteinte des objectifs

Nous rappelons ici les principaux objectifs énoncés au début du chapitre 3 :

1. La méthode proposée permet-elle de reconstruire les paramètres importants de l'inclusion (rayon, coefficient de Poisson et module élastique relatif)?

2. La méthode proposée est-elle robuste dans des conditions d'élastographie pratique?
3. La méthode proposée permet-elle de détecter et de caractériser la condition frontière à l'interface inclusion-matrice?
4. Quels sont les avantages et les inconvénients de la méthode proposée?

En réponse directe à ces questions, nous pouvons affirmer que :

1. Globalement, la méthode proposée est efficace pour reconstruire les paramètres élastiques et géométriques d'une inclusion simple. Quand les déplacements observés sont idéaux (sans bruit), la méthode produit une erreur d'estimation inférieure à 2.5% sur tous les paramètres, sauf si la résolution de l'image est trop faible (moins que 4 pixels par rayon de l'inclusion) ou si l'on estime avec une seule composante de déplacement. Quand les déplacements sont générés par éléments finis, l'estimation la plus précise (erreur <5%) est obtenue lorsque l'objet est sous condition frontière de déplacement et que l'on écarte les observations de déplacement près des frontières. Finalement, avec des déplacements estimés par intercorrélation, le mauvais estimé de la composante latérale du déplacement oblige la méthode à n'utiliser que la composante axiale. Les meilleurs résultats sont obtenus lorsque les coefficients de Poisson sont fixés à des valeurs plausibles, entre [0.4,0.5]. Dans cette situation, les paramètres géométriques (position et rayon) de l'inclusion sont estimés très précisément; l'estimé du module relatif $\widetilde{\mu}_0$ comporte une erreur de 8.7% en moyenne (sur 9 cas, allant de 1.2% à 19%), et l'estimé de la force appliquée $\widetilde{p}$ montre une erreur similaire au module relatif.
2. Les principales conditions pratiques d'élastographie pour lesquelles nous avons évalué la robustesse de la méthode proposée sont : des déplacements bruités,

un objet fini, une condition frontière de déplacement et un mauvais estimé du déplacement latéral.

Tel que présenté à la section (4.1.5) avec des déplacements analytiques bruités, l'erreur sur les paramètres estimés demeure $<4\%$ pour un écart-type du bruit inférieur à 10 microns. Comment caractériser ce bruit ? Dans les modèles EF de la section 4.2.1 comportant une inclusion simple et dure, l'histogramme des déplacements observés est uniforme et de support $[-400,400]$ microns. L'ajout d'un bruit d'intensité 10 microns représente donc une erreur de 3% sur un déplacement de 400 microns et de 20% sur un déplacement de 50 microns. L'impact du bruit dépend de l'intensité du déplacement, laquelle dépend de la position géométrique; dans une inclusion dure, les déplacements sont petits et le bruit est plus nuisible que près des frontières d'une matrice molle, où les déplacements sont plus grands. Un bruit blanc gaussien d'écart-type 10 microns peut donc représenter un niveau de bruit substantiel dans les régions du modèle où le déplacement est petit.

La finitude de l'objet réel n'empêche pas sa modélisation par un modèle analytique infini, puisque l'effet de la perturbation est local, tel qu'illustré à la section (4.2). L'application d'une condition frontière de déplacement (CFD) sur l'objet fini donne de meilleurs résultats d'estimation, malgré le fait que le modèle analytique soit à condition frontière de force (CFF). Ceci est dû au fait que le modèle analytique fait intervenir une force uniforme appliquée à l'infini; ce champ de contrainte uniforme devient courbe en approchant de l'inclusion, ce qui se produit également dans un modèle fini avec condition frontière de déplacement. La similitude de la forme du champ de contrainte (et donc du champ de déplacement) entre le modèle analytique infini à CFF et le modèle fini à CFD fait que ce dernier modèle est le plus adéquat.

L'estimé de déplacement latéral obtenu par notre algorithme d'intercorrélation

est trop mauvais pour être utilisable dans la reconstruction. Le problème d'une estimation avec le déplacement axial seul est que le coefficient de Poisson doit être fixé à une certaine valeur. L'estimation de $\widetilde{\mu}_0$ n'est toutefois pas très robuste vis-à-vis de l'erreur sur le coefficient de Poisson imposé. Il nous faudrait utiliser un meilleur algorithme d'estimation du déplacement latéral; il en existe plusieurs dans la littérature (par exemple [Konofagou, 1998]). Grâce à des algorithmes d'estimation du déplacement latéral plus raffinés que celui que nous avons utilisé, il serait possible de faire une estimation plus précise en utilisant les deux composantes du déplacement.

3. La méthode proposée est capable de caractériser la condition frontière à l'interface inclusion-matrice pour des déplacements idéaux, tel que présenté à la section (4.1.6). En effet, la condition frontière se répercute dans la zone d'influence de l'inclusion, ce qui permet à l'estimation de la détecter. En examinant les caractéristiques de l'anneau estimé, on peut distinguer une inclusion attachée d'une inclusion glissante : l'inclusion attachée générera un anneau qui se fond dans l'inclusion par un module semblable; l'inclusion glissante, au contraire, générera un anneau beaucoup plus mou et mince que l'inclusion. Ainsi, notre méthode de reconstruction avec le modèle à anneau pourrait contribuer à distinguer une tumeur bénigne d'une tumeur maligne, puisque la première est souvent glissante et la deuxième, attachée.
4. Les principaux avantages d'utiliser notre méthode paramétrique pour la reconstruction sont : que les modèles sont simples, avec peu de paramètres; que la reconstruction est rapide (moins de 2min pour le modèle à inclusion simple); que la force ou le déplacement appliqué à la frontière n'a pas besoin d'être connu; que la méthode est robuste à un niveau de bruit moyen sur les déplacements. Les principaux inconvénients sont : que le module élastique reconstruit est relatif; que la méthode est limitée à des inclusions circulaires

sous compression uniaxiale; que la justesse de l'estimation du module élastique relatif $\widetilde{\mu}_0$ dépend de sa valeur initiale (le module et sa valeur initiale doivent au moins avoir le même contraste, mou ou dur); qu'un mauvais estimé du déplacement latéral pose problème, puisqu'alors les coefficients de Poisson doivent être fixés à une certaine valeur qui influence de façon plutôt imprévisible la convergence du module relatif et de la contrainte normalisée.

5.2 Recherche future

Afin d'améliorer la méthode proposée de reconstruction paramétrique, plusieurs travaux pourraient être entrepris. Il est d'usage en élastographie de tester les méthodes de reconstruction avec des données expérimentales provenant de fantômes, notamment pour évaluer la robustesse du modèle bidimensionnel lorsque les déplacements réels sont tridimensionnels. Dans notre cas, de tels tests seraient faciles à réaliser et il serait utile de se procurer des fantômes avec des anneaux ou des inclusions glissantes pour reconstruire avec le modèle à anneau. Des tests avec des données cliniques de lésions mammaires pourraient suivre, afin d'établir la validité de la méthode en élastographie clinique. L'utilisation d'un algorithme plus raffiné pour l'estimation du déplacement latéral apporterait sans doute une amélioration à la reconstruction des paramètres dans un tel contexte, puisqu'on aurait un rapport signal sur bruit optimal sur les deux composantes du déplacement. La reconstruction en utilisant deux champs de déplacements pourrait être mise en oeuvre et testée car, selon Barbone (2004), l'utilisation de deux champs réduit le nombre de solutions possibles au problème inverse et permet donc de le résoudre plus facilement. Nous pourrions aussi tenter d'améliorer l'optimisation en ajoutant des contraintes limitant le domaine de valeurs possibles des paramètres, par exemple en ajoutant une contrainte de positivité sur les modules élastiques relatifs et sur

le rayon, ou bien en confinant les coefficients de Poisson à l'intervalle $[0, 0.5]$. Nous pourrions lancer la simulation d'un milieu avec plusieurs inclusions, pour voir dans quelle mesure la méthode peut les isoler et les reconstruire une à une; ou encore, faire des tests avec des données par éléments finis obtenues à partir d'un objet où la perturbation élastique n'est pas circulaire, mais ellipsoïdale, étoilée ou gaussienne, afin de simuler différentes lésions. D'ailleurs, l'extension de modèles analytiques à des géométries d'inclusion plus complexes (elliptique ou étoilée) par les transformations conformes est à notre portée et permettrait de reconstruire des lésions de forme plus générale. Enfin, l'exploration d'autres modèles analytiques, avec par exemple une condition frontière de cisaillement [Schmid, 2003], pourrait ouvrir la porte à une méthode multi-modèle où un algorithme ajusterait itérativement le choix du modèle qui convient le mieux aux données observées de déplacement.

5.3 Le mot de la fin

L'utilisation d'un modèle analytique tel que celui présenté dans ce mémoire permet d'étudier le comportement mécanique d'inclusions dans un milieu élastique afin d'établir une stratégie pour l'optimisation des paramètres du modèle. Comme nous l'avons vu à la section 3.2.4, l'étude des déformations analytiques nous a permis de constater que le profil à l'intérieur d'une inclusion entourée d'un anneau est parabolique, alors qu'il est uniforme sans anneau; de plus, l'étude des déplacements analytiques nous a permis de voir que la zone d'influence, dans le voisinage de l'inclusion, est une région cruciale pour l'estimation des paramètres de l'inclusion. Le modèle analytique nous a également fourni le jacobien symbolique, à partir duquel une analyse de sensibilité (au premier ordre) des déplacements par rapport aux paramètres est envisageable. Ainsi, la modélisation de lésions tissulaires par un modèle mathématique analytique rend possible plusieurs analyses plus difficiles

à réaliser avec des modèles numériques et permet une bonne compréhension ou prédiction des comportements mécaniques en jeu. La simplicité de ces modèles a pour avantage de concentrer l'attention sur les paramètres importants; par la suite, ces modèles peuvent être complexifiés graduellement pour tenir compte des conditions physiques réelles. Nous croyons que l'utilisation de modèles analytiques pour la résolution du problème inverse en élastographie est une voie intéressante avec de nombreuses possibilités à explorer.

RÉFÉRENCES

- [Aglyamov, 2004] AGLYAMOV, S., SKOVORODA, A.R., RUBIN, J.M., O'DONNELL, M., EMELIANOV, S.Y. 2004. « Model-based reconstructive elasticity imaging of deep venous thrombosis ». *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*. 51:5. 521-531.
- [Barbone, 2002] BARBONE, P.E., BAMBER, J.C. 2002. « Quantitative elasticity imaging: what can and cannot be inferred from strain images ». *Physics in Medicine & Biology*. 47. 2147-2164.
- [Barbone, 2003] BARBONE, P.E. 2003. « A variational formulation leading to direct elastic modulus reconstruction ». *Proceedings of the 2nd International Conference on the Ultrasonic Measurement and Imaging of Tissue Elasticity. October 12-15, 2003, Corpus Christi, Texas*. p.67.
- [Barbone, 2004] BARBONE, P.E., GOKHALE, N.H. 2004. « Elastic modulus imaging: on the uniqueness and nonuniqueness of the elastography inverse problem in two dimensions ». *Inverse Problems*. 20. 283-296.
- [Chen, 1995] CHEN, E.C.J. 1995. *Ultrasound Tissue Displacement and Tissue Elasticity Imaging*. 114p. Thèse de doctorat en génie électrique, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [Chou, 1967] CHOU, P.C., PAGANO, N.J. 1967. *Elasticity: tensor, dyadic and engineering approaches*. Princeton:D.Van Nostrand. 290p.
- [Cotran, 1999] COTRAN, R.S., KUMAR, V., COLLINS, T., ROBBINS, S.L. 1999. *Pathologic Basis of Disease*. 6th ed. W.B. Saunders Company. 1425p.

- [Doyley, 2000] DOYLEY, M.M., MEANEY, P.M., BAMBER, J.C. 2000. « Evaluation of an iterative reconstruction method for quantitative elastography ». *Phys. Med. Biol.* 45. 1521-1540.
- [Erkamp, 1998] ERKAMP, R.Q., WIGGINS, P., SKOVORODA, A.R., EMELIANOV, S.Y., O'DONNELL, M. 1998. « Measuring the elastic modulus of small tissue samples ». *Ultrasonic Imaging*. 20. 17-28.
- [Fu, 2000] FU, D., LEVINSON, S.F., GRACEWSKI, S.M., PARKER, K.J. 2000. « Non-invasive quantitative reconstruction of tissue elasticity using an iterative forward approach ». *Phys. Med. Biol.* 45. 1495-1509.
- [Fung, 1981] FUNG, Y.C. 1981. *Biomechanical properties of living tissues*. New York: Springer Verlag. 433p.
- [Gao, 1996] GAO, L., PARKER, K.J., LERNER, R.M., LEVINSON, S.F. 1996. « Imaging of the elastic properties of tissue - a review ». *Ultrasound in Med. & Biol.* 22:8. 959-977.
- [Garra, 1997] GARRA, B.S., CESPEDES, E.I., OPHIR, J., SPRATT, S.R., ZURBIER, R.A., MAGNANT C.M., PENNANEN, M.F. 1997. « Elastography of breast lesions: initial clinical results ». *Radiology*. 202. 79-86.
- [Gill, 1981] GILL, P.E., MURRAY, W., WRIGHT, M.H. 1981. *Practical Optimization*. London: Academic Press. 401p.
- [Greenleaf, 2003] GREENLEAF, J.F., FATEMI, M., INSANA, M. 2003. « Selected methods for imaging elastic properties of biological tissues ». *Annu. Rev. Biomed. Eng.* 5. 57-78.
- [Insana, 2000] INSANA, M.F., BAMBER, J.C. 2000. « Tissue motion and elasticity imaging ». *Phys.Med.Biol.* [En ligne]. 45:6. Editorial.

<http://www.iop.org/EJ/abstract/0031-9155/45/6/001/> (Page consultée le 10 octobre 2002)

- [Kallel, 1995] KALLEL, F., BERTRAND, M., OPHIR, J., CÉSPÉDES, I. 1995. « Determination of elasticity distribution in tissue from spatio-temporal changes in ultrasound signals ». *Acoustical Imaging*. 21. 433-443.
- [Kallel, 1996a] KALLEL, F., BERTRAND, M. 1996a. « Tissue elasticity reconstruction using linear perturbation method ». *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 15:3. 299-313.
- [Kallel, 1996b] KALLEL, F., BERTRAND, M., OPHIR, J. 1996b. « Fundamental limitations on the contrast-transfer efficiency in elastography: an analytical study ». *Ultrasound in Med. & Biol.* 22:4. 463-470.
- [Konofagou, 1998] KONOFAGOU, E.E., OPHIR, J. 1998. « A new elastographic method for estimation and imaging of lateral displacements, lateral strains, corrected axial strains and Poisson's ratios in tissues ». *Ultrasound in Medicine & Biology*. 24:8. 1183-1199.
- [Konofagou, 2000] KONOFAGOU, E.E., HARRIGAN, T., OPHIR, J. 2000. « Shear strain estimation and lesion mobility assessment in elastography ». *Ultrasonics*. 38. 400-404.
- [Krouskop, 1998] KROUSKOP, T.A., WHEELER, T.M., KALLEL, F., GARRA, B.S., HALL, T. 1998. « Elastic moduli of breast and prostate tissues under compression ». *Ultrasonic Imaging*. 20. 260-274.
- [Krouskop, 2003] KROUSKOP, T.A., YOUNES, P.S., SRINIVASAN, S., WHEELER, T., OPHIR, J. 2003. « Differences in the compressive stress-strain response of infiltrating ductal carcinomas with and without lobular features

- implications for mammography and elastography ». *Ultrasonic Imaging*. 25. 162-170.
- [Lerner, 1990] LERNER, R.M., HUANG, S.R., PARKER, K.J. 1990. « Sonoelasticity images derived from ultrasound signals in mechanically vibrated tissue ». *Ultrasound in Medicine & Biology*. 16. 231-239.
- [Liu, 2003] LIU, H.T., SUN, L.Z., WANG, G., VANNIER, M.W. 2003. « Analytic modeling of breast elastography ». *Medical Physics*. 30:9. 2340-2349.
- [Maciejko, 2002] MACIEJKO, E. 2002. *Simulation du modèle de formation d'image en élastographie. Rapport de projet de fin d'études*. École Polytechnique de Montréal. Département de génie électrique. 78p.
- [McDivitt, 1968] MCDIVITT, R.W., BERG, J.W., STEWART, F.W. 1968. « Tumors of the Breast ». *Atlas of Tumor Pathology*. Washington: The Armed Forces Institute of Pathology.
- [Muskhelishvili, 1963] MUSKHELISHVILI, N.I. 1963. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. 2nd English Edition. Noordhoff (The Netherlands) : Groningen. 718p.
- [Muthupillai, 1995] MUTHUPILLAI, R., LOMAS, D.J., ROSSMAN, P.J., GREENLEAF, J.F., MANDUCA, A., EHMAN, L. 1995. « Magnetic resonance elastography by direct visualization of propagating acoustic strain waves ». *Science*. 290. 1854-1857.
- [Oberai, 2003] OBERAI, A.A., GOKHALE, N.H., FEIJOO, G.R. 2003. « Solution of inverse problems in elasticity imaging using the adjoint method ». *Inverse Problems*. 19. 297-313.

- [Oberai, 2004] OBERAI, A.A., GOKHALE, N.H., DOYLEY, M.M., BAMBER, J.C. 2004. « Evaluation of the adjoint equation based algorithm for elasticity imaging ». *Phys. Med. Biol.* 49. 2955-2974.
- [O'Donnell, 1993] O'DONNELL, M., EMELIANOV, S.Y., SKOVORODA, A.R., LUBINSKI, M.A., WEITZEL, W.F., WIGGINS, R.C. 1993. « Quantitative elasticity imaging ». *Ultrasonics Symposium, 1993.* 893-903.
- [Ophir, 1991] OPHIR, J., CÉSPEDES, I., PONNEKANTI, H., YAZDI, Y., LI, X. 1991. « Elastography: a quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues ». *Ultrasonic Imaging.* 13. 111-134.
- [Ophir, 1996] OPHIR, J., CÉSPEDES, I., GARRA, B., PONNEKANTI, H., HUANG, Y., MAKLAD, N. 1996. « Elastography: ultrasonic imaging of tissue strain and elastic modulus in vivo ». *European Journal of Ultrasound.* 3. 49-70.
- [Ophir, 1997] OPHIR, J., KALLEL, F., VARGHESE, T., BERTRAND, M., CÉSPEDES, I., PONNEKANTI, H. 1997. « Elastography: a systems approach ». *Int. J. Imaging Syst. Technol.* 8. 89-103.
- [Ophir, 1999] OPHIR, J., ALAM, S.K., GARRA, B., KALLEL, F., KONOFAGOU, E., KROUSKOP, T., VARGHESE, T. 1999. « Elastography: ultrasonic estimation and imaging of the elastic properties of tissues ». *Proc. Instn. Mech. Engrs.* 213:H. 203-233.
- [Plewes, 2000] PLEWES, D.B., BISHOP, J., SAMANI, A., SCJARRETTA, J. 2000. « Visualization and quantification of breast cancer biomechanical properties with magnetic resonance elastography ». *Phys. Med. Biol.* 45. 1591-1610.

- [Ponnekanti, 1995] PONNEKANTI, H., OPHIR, J., HUANG, Y., CÉSPEDES, I. 1995. « Fundamental mechanical limitations on the visualization of elasticity contrast in elastography ». *Ultrasound in Med. & Biol.* 21:4. 533-543.
- [Raghavan, 1994] RAGHAVAN, K.R., YAGLE, A.E. 1994. « Forward and inverse problems in elasticity imaging of soft tissues ». *IEEE Transactions on Nuclear Science.* 41:4. 1639-1648.
- [Romano, 1998] ROMANO, A.J., SHIRRON, J.J., BUCARO, J.A. 1998. « On the noninvasive determination of material parameters from a knowledge of elastic displacements: theory and numerical simulation ». *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control.* 45:3. 751-759.
- [Saada, 1993] SAADA, A.S. 1993. *Elasticity: theory and applications*. Second Edition. Malabar : Krieger. 775p.
- [Samani, 2001] SAMANI, A., BISHOP, J., PLEWES, D.B. 2001. « A constrained modulus reconstruction technique for breast cancer assessment ». *IEEE Transactions on Medical Imaging.* 20:9. 877-885.
- [Samani, 2003] SAMANI, A., BISHOP, J., LUGINBUHL, C., PLEWES, D.B. 2003. « Measuring the elastic modulus of ex-vivo small tissue samples ». *Phys. Med. Biol.* 48. 2183-2198.
- [Savin, 1961] SAVIN, G.N. 1961. *Stress concentration around holes*. (trad. du russe par E. Gros) London : Pergamon Press. 430p.
- [Schmid, 2003] SCHMID, D.W., PODLADCHIKOV, Y.Y. 2003. « Analytical solutions for deformable elliptical inclusions in general shear ». *Geophysics Journal International.* 155. 269-288.

- [Sinkus, 2000] SINKUS, R., LORENZEN, J., SCHRADER, D., LORENZEN, M., DARGATZ, M., HOLZ, D. 2000. « High-resolution tensor MR elastography for breast tumor detection ». *Physics in Medicine & Biology*. 45. 1649-1664.
- [Skovoroda, 1995] SKOVORODA, A.R., EMELIANOV, S.Y., O'DONNELL, M. 1995. « Tissue elasticity reconstruction based on ultrasonic displacement and strain images ». *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*. 42:4. 747-765.
- [Smith, 2001] SMITH, C.W., WINLOVE, C.P. 2001. « Elastic Behavior of Biological Materials ». *Encyclopedia of Materials: Science and Technology*. Amsterdam : Elsevier. p. 2384-2387.
- [Sommerfeld, 1950] SOMMERFELD, A. 1950. *Mechanics of deformable bodies - Lectures on Theoretical Physics, Vol. II*. (Traduit de la deuxième édition allemande par G. Kuerti). New York : Academic Press. 396p.
- [Soualmi, 1998] SOUALMI, L. 1998. *Caractérisation des propriétés élastiques de la paroi artérielle par ultrasonographie endovasculaire*. 126p. Thèse de doctorat en génie biomédical, École Polytechnique de Montréal.
- [Souchon, 2003] SOUCHON, R., ROUVIÈRE, O., GELET, A., DETTI, V., SRINIVASAN, S., OPHIR, J., CHAPELON, J.-Y. 2003. « Visualisation of HIFU lesions using elastography of the human prostate in vivo: preliminary results ». *Ultrasound in Med. & Biol.* 29:7. 1007-1015.
- [Sumi, 1995] SUMI, C., SUZUKI, A., NAKAYAMA, K. 1995. « Estimation of shear modulus distribution in soft tissue from strain distribution ». *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 42:2. 193-202.

- [Sumi, 1998] SUMI, C., NAKAYAMA, K. 1998. « A robust numerical solution to reconstruct a globally relative shear modulus distribution from strain measurements ». *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 17:3. 419-428.
- [Van Houten, 2003] VAN HOUTEN, E.E.W., DOYLEY, M.M., KENNEDY, F.E., WEAVER, J.B., PAULSEN, K.D. 2003. « Initial in vivo experience with steady-state subzone-based MR elastography of the human breast ». *Journal of Magnetic Resonance Imaging*. 17. 72-85.
- [Varghese, 2000] VARGHESE, T., OPHIR, J., KROUSKOP, T.A. 2000. « Nonlinear stress-strain relationships in tissue and their effect on the contrast-to-noise ratio in elastograms ». *Ultrasound in Med. & Biol.* 26:5. 839-851.
- [Williams, 2000] WILLIAMS, C. B. 2000. *The Biomechanics of Normal Breast Tissue*. 188p. Thèse de doctorat en génie biomédical, Ohio State University.
- [Wilson, 1982] WILSON, L.S., ROBINSON, D.E. 1982. « Ultrasonic measurement of small displacements and deformations of tissue ». *Ultrasonic Imaging*. 4. 71-82.
- [WINABC] WINABC. 2003. *Women's Information Network Against Breast Cancer*. [En ligne]. <http://www.winabc.org/> (Page consultée le 12 octobre 2003)
- [Zhu, 2003] ZHU, Y., HALL, T.J., JIANG, J. 2003. « A finite element approach for Young's modulus reconstruction ». *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 22:7. 890-901.

ANNEXE I

BRÈVE RÉVISION DE CONCEPTS EN ÉLASTICITÉ

La théorie de l'élasticité fait une étude systématique des contraintes, des déplacements et des déformations d'un corps élastique soumis à des forces externes [Chou, 1967]. Par corps élastique, on entend un corps dont les contraintes et déformations induites disparaissent lorsque les forces externes sont retirées.

I.1 Définition des contraintes et déformations

Les contraintes dans un solide sont les forces de réaction internes, mesurées par unité d'aire [Sommerfeld, 1950]. Pour un élément de volume du solide, les forces de réaction par unité d'aire qui s'exercent perpendiculairement aux faces du volume s'appellent contraintes normales, tandis que celles qui s'exercent tangentielllement à une face se nomment contraintes de cisaillement. Le tenseur de contraintes est noté σ_{ij} , où le premier indice (i) désigne l'axe normal à la face où s'exerce la force et le deuxième indice (j), l'axe de direction de la force. Les contraintes sont exprimées en newtons par mètre carré ou pascals ($1Pa = 1N/m^2$). Le tenseur de déformation est noté ϵ_{ij} . Lorsque $j=i$, la déformation est l'incrément de longueur dans la direction i par unité de la longueur initiale :

$$\epsilon_i = \frac{\Delta l}{l} \quad (I.1)$$

où l est la longueur initiale dans la direction i et Δl , l'incrément de cette longueur. La déformation est adimensionnelle. Lorsque $j = k \neq i$, la déformation de cisaille-

ment, notée ϵ_{ik} , peut être interprétée géométriquement comme la variation angulaire, dans un plan de projection ik , d'un élément volumique initialement orthogonal (Figure I.1). La déformation de cisaillement est la moyenne des variations

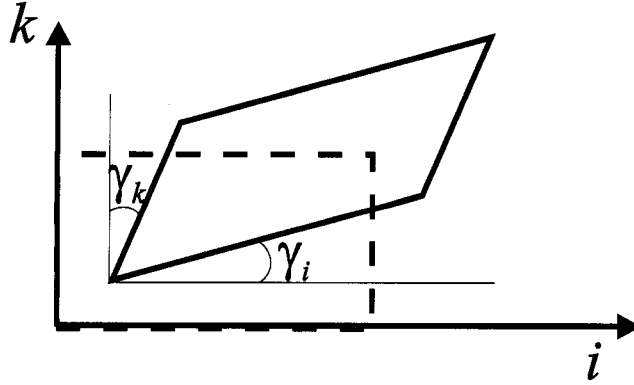


Figure I.1 Élément en cisaillement dans le plan ik .

angulaires γ_i, γ_k par rapport à chacun des axes i et k :

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_k) \quad (\text{I.2})$$

I.2 Relation constitutive et modules élastiques

Les propriétés des matériaux sont spécifiées par des équations (ou relations) *constitutives* qui relient les contraintes aux déformations. Un modèle idéalisé pour un solide élastique se base sur la loi de Hooke et stipule que le tenseur de contrainte est linéairement proportionnel au tenseur de déformation¹ [Fung, 1981] :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (\text{I.3})$$

¹La convention d'Einstein s'applique dans tout ce chapitre : deux indices répétés dans un terme impliquent une sommation sur cet indice.

L'équation (I.3) est la loi de Hooke généralisée, valide pour de faibles déformations. C_{ijkl} est le tenseur de constantes élastiques. Il contient 81 constantes, mais ce nombre peut être réduit à 2 si le matériau est isotrope [Saada, 1993]. Un matériau isotrope possède l'uniformité de ses propriétés physiques quelle que soit la direction de mesure. Dans le cas d'un solide élastique isotrope, la loi de Hooke se réduit à :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\Xi \quad (I.4)$$

où $\Xi = \epsilon_{jj}$ est la dilatation volumique et δ_{ij} , le delta de Kronecker. Les deux constantes élastiques, μ et λ , aussi connues sous le nom de *modules de Lamé*, sont des caractéristiques physiques du matériau qui dépendent de la température. Ils sont reliés au module de Young E et au coefficient de Poisson ν par les relations suivantes :

$$2\mu = \frac{E}{1 + \nu} \quad (I.5a)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (I.5b)$$

Le module de Young est le module d'élasticité en traction, soit le rapport entre la contrainte principale et l'élongation principale d'une barre en traction; c'est une constante du matériau tant que la force appliquée n'est pas excessive. Plus E est élevé, plus le matériau est dur. Le coefficient de Poisson ν est le rapport de la contraction transverse sur l'élongation longitudinale; c'est aussi une constante pour le matériau. Sa valeur est bornée: $0 < \nu \leq 0.5$. Lorsque $\nu = 0.5$, le matériau est dit incompressible, c'est-à-dire qu'il respecte la condition de dilatation volumique nulle: $\Xi = 0$. Le module d'élasticité en cisaillement est donné par le rapport entre la contrainte de cisaillement appliquée τ et l'angle de distorsion γ :

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \mu \quad (I.6)$$

μ est appelé le module de cisaillement, par analogie avec le module de Young, car il exprime le rapport entre la force et la déformation dans un cas de cisaillement. Dans l'équation (I.6), la déformation n'apparaît pas directement, car γ est un angle ; mais si cet angle survient dans un plan ik , avec $\gamma_i = \gamma_k = \gamma/2$, alors la déformation de cisaillement apparaît par la relation (I.2) : $\gamma = 2\epsilon_{ik}$.

I.3 Équations d'équilibre statique en élasticité

Soit un corps élastique soumis à des forces externes, dans un système de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) . Les forces de réaction internes vont compenser les forces externes, et l'équilibre est atteint lorsque la somme des forces égale zéro [Saada, 1993] :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad (\text{I.7})$$

avec F_i la composante en i des forces par unité de volume qui s'exercent dans le matériau, dues à la gravité par exemple. Ce système d'équations définit l'équilibre statique. En se restreignant à une décomposition linéaire de la déformation, celle-ci peut être exprimée en fonction des déplacements par :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I.8})$$

En substituant σ_{ij} dans (I.7) par son expression (I.4), puis en remplaçant la déformation par son expression (I.8), on obtient les conditions d'équilibre en termes des déplacements, nommées équations d'élasticité de Navier [Saada, 1993], ici sous forme tensorielle :

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + F_i = 0 \quad (\text{I.9})$$

où $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ est l'opérateur de Laplace. Ces équations peuvent aussi

s'écrire sous forme vectorielle :

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (\text{I.10})$$

Combinées à des conditions frontières de force ou de déplacement, elles déterminent le vecteur de déplacement partout à l'intérieur du corps. Certains problèmes d'élasticité possèdent des solutions analytiques, mais pour la plupart des cas pratiques où les corps ont une géométrie complexe, une méthode de résolution numérique est utilisée, telle la méthode des éléments finis.

I.4 Approximations bidimensionnelles des problèmes d'élasticité

Les relations présentées dans la section précédente concernent le cas général tridimensionnel. Toutefois, certaines situations peuvent être ramenées à des problèmes d'élasticité bidimensionnels qui sont plus faciles à résoudre. L'*état plan de contrainte* et l'*état plan de déformation* sont deux situations où il est possible de décrire le comportement du solide entier en ne résolvant les équations d'élasticité que dans un plan.

L'état plan de contrainte existe dans un corps où la contrainte selon z , σ_{zz} , est nulle, quoique la déformation correspondante, ϵ_{zz} , ne le soit pas. Ceci se produit lorsque le corps est une plaque mince étalée dans le plan xy , avec ses deux surfaces normales à z libres de tout chargement. Les forces externes sont indépendantes de z . L'état plan de déformation existe dans un corps où la déformation selon z , ϵ_{zz} , est nulle, quoique la contrainte correspondante, σ_{zz} , ne le soit pas. Un état plan de déformation se produit lorsque le corps est cylindrique (ou prismatique) et que son axe longitudinal est dans la direction z . La longueur du corps peut être soit

infinie, soit finie alors que les extrémités sont contraintes à un déplacement nul² dans la direction z . Les forces volumiques et les forces appliquées en surface sont indépendantes de z et n'ont aucune composante en z . Les seules composantes de déplacement, u et v , ne dépendent pas de l'axe longitudinal.

²Cette condition aux extrémités correspond à une condition frontière de glissement.

ANNEXE II

SOLUTION DU MODÈLE ANALYTIQUE DE L'INCLUSION AVEC ANNEAU

Nous présentons ici les principales étapes de la dérivation de la solution du modèle analytique d'un milieu infini avec une inclusion entourée d'un anneau élastique, soumis à une contrainte uniaxiale, tel qu'illustré dans la Figure II.1. La notation en coordonnées polaires est utilisée, car plus convenable à des problèmes à symétrie circulaire.

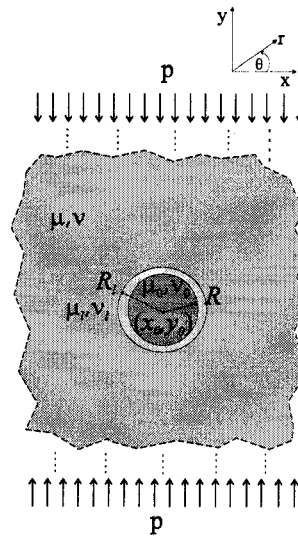


Figure II.1 Modèle analytique de l'inclusion circulaire avec anneau dans un milieu infini.

II.1 Les potentiels complexes d'élasticité

Le mathématicien géorgien N.I. Muskhelishvili a publié une méthode de résolution de plusieurs problèmes d'élasticité bidimensionnels, qui s'appuie sur les variables complexes [Muskhelishvili, 1963, Saada, 1993]. Les contraintes polaires σ_r, σ_θ et $\tau_{r\theta}$ dérivent toutes d'une même fonction générale U , nommée la fonction de contrainte (*stress function*). Certaines conditions que doivent vérifier les contraintes impliquent que la fonction U soit biharmonique; or, toute fonction biharmonique $U(r, \theta)$ peut être représentée à l'aide de deux fonctions nommées les potentiels complexes d'élasticité : $\phi(z)$ et $\psi(z)$, où $z = re^{i\theta}$.

La résolution du problème d'élasticité se réduit alors à trouver les fonctions $\phi(z)$ et $\psi(z)$, à partir desquelles on obtient les contraintes et déplacements grâce aux relations suivantes :

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4\Re\{\phi'(z)\} \quad (II.1a)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)]e^{2i\theta} \quad (II.1b)$$

$$2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} [\kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \quad (II.1c)$$

où l'opérateur $\Re\{.\}$ représente la partie réelle de $\{.\}$. La solution explicite du milieu infini avec l'inclusion entourée d'un anneau sous compression uniaxiale n'a pas été trouvée telle quelle dans la littérature. Savin(1961) donne une solution pour un milieu infini avec un trou entouré de N anneaux, sous contrainte uniaxiale, mais la mauvaise qualité d'impression du document rend les coefficients de la solution difficiles à déchiffrer. Aglyamov et al (2004) fournissent aussi cette solution, mais pour un milieu strictement incompressible. En général, on pose pour les fonctions complexes une série de Laurent dont les coefficients sont déterminés par les conditions frontières. Pour un milieu infini, la série est finie et comporte un très petit

nombre de termes. L'examen des solutions de deux modèles semblables au nôtre, le milieu avec anneau sous contrainte de cisaillement [Schmid, 2003] et le milieu avec inclusion simple sous contrainte uniaxiale [Muskhelishvili, 1963], donne une idée de la forme des fonctions potentiels complexes pour notre modèle. En effet, si l'on pose les fonctions dans la matrice,

$$\phi(z) = a_0 z - a_2 z^{-1}, \quad (II.2a)$$

$$\psi(z) = b_0 z - b_2 z^{-1} - \frac{b_4}{3} z^{-3}, \quad (II.2b)$$

puis dans l'inclusion,

$$\phi_0(z) = c_1 z + c_3 z^3, \quad (II.3a)$$

$$\psi_0(z) = d_1 z, \quad (II.3b)$$

on constate que pour assurer la continuité des contraintes et déplacements, les potentiels complexes dans l'anneau doivent avoir à la fois les puissances de z de l'inclusion et de la matrice. Les fonctions dans l'anneau s'écrivent donc :

$$\phi_l(z) = g_0 z^{-1} + g_1 z + g_2 z^3, \quad (II.4a)$$

$$\psi_l(z) = h_0 z + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-3}. \quad (II.4b)$$

II.2 Détermination des coefficients

Une fois que la forme générale des potentiels complexes est connue, le travail consiste à déterminer les coefficients de ces fonctions. Les coefficients a_0 et b_0 sont reliés aux contraintes à l'infini normalisées par les relations suivantes :

$$\sigma_x(\infty)/\mu = 2a_0 - b_0 \quad (II.5a)$$

$$\sigma_y(\infty)/\mu = 2a_0 + b_0 \quad (II.5b)$$

Dans le cas de notre modèle, la contrainte à l'infini p est appliquée selon y , avec la convention que p est positive en tension et négative en compression. Nous avons alors $\sigma_x(\infty) = 0$, $\sigma_y(\infty)/\mu = p/\mu = \tilde{p}$ et

$$a_0 = \tilde{p}/4, \quad b_0 = \tilde{p}/2$$

Il est à noter que la seule différence entre un modèle où la contrainte est appliquée selon x (comme dans Muskhelishvili, 1963) et un modèle où la contrainte est appliquée selon y (comme dans notre cas) est dans le signe de b_0 . Toutes les expressions des coefficients et des déplacements données dans les pages suivantes demeurent identiques.

Les coefficients a_0 et b_0 étant connus, il ne reste que 12 inconnues à déterminer. Les conditions frontières aux interfaces inclusion-anneau et anneau-matrice établissent 12 équations avec lesquelles les coefficients peuvent être déterminés. Ces conditions décrivent la continuité des contraintes et des déplacements et s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} 1) \sigma_r^0 &= \sigma_r^l, \quad 2) \tau_{r\theta}^0 = \tau_{r\theta}^l, \quad 3) u_r^0 = u_r^l, \quad 4) u_\theta^0 = u_\theta^l, \quad \text{en } r = R \\ 5) \sigma_r^l &= \sigma_r, \quad 6) \tau_{r\theta}^l = \tau_{r\theta}, \quad 7) u_r^l = u_r, \quad 8) u_\theta^l = u_\theta, \quad \text{en } r = R_l \end{aligned}$$

Bien que seules 8 équations soient énoncées ci-dessus, les équations 1), 3), 5) et 7) génèrent deux égalités chacune, à cause de la séparation de termes avec ou sans facteur trigonométrique tel $\cos(2\theta)$, puisque ces conditions de continuité doivent être vérifiées pour tout angle θ . En substituant les expressions des fonctions complexes (II.2, II.3, II.4) dans les relations (II.1) pour trouver les contraintes et les déplacements, puis en posant les conditions frontières de continuité ci-dessus, on

obtient les 12 équations suivantes :

$$\begin{aligned}
2c_1 &= 2g_1 + h_1/R^2 \\
d_1 &= h_0 + 4g_0/R^2 - 3h_2/R^4 \\
6c_3R^2 + d_1 &= 6g_2R^2 + h_0 - 2g_0/R^2 + 3h_2/R^4 \\
(\kappa_0 - 1)Rc_1/(2\widetilde{\mu}_0) &= 1/(2\widetilde{\mu}_l)[(\kappa_l - 1)g_1R - h_1/R] \\
R/(2\widetilde{\mu}_0)[(\kappa_0 - 3)c_3R^2 - d_1] &= 1/(2\widetilde{\mu}_l)[(\kappa_l - 3)g_2R^3 + (\kappa_l + 1)g_0/R - h_2/R^3 - h_0R] \\
R/(2\widetilde{\mu}_0)[(\kappa_0 + 3)c_3R^2 + d_1] &= 1/(2\widetilde{\mu}_l)[(\kappa_l + 3)g_2R^3 + (1 - \kappa_l)g_0/R - h_2/R^3 + h_0R] \\
2g_1 + h_1/R_l^2 &= 2a_0 - b_2/R_l^2 \\
h_0 + 4g_0/R_l^2 - 3h_2/R_l^4 &= b_4/R_l^4 - 4a_2/R_l^2 + b_0 \\
6g_2R_l^2 + h_0 - 2g_0/R_l^2 + 3h_2/R_l^4 &= b_0 + 2a_2/R_l^2 - b_4/R_l^4 \\
1/(2\widetilde{\mu}_l)[(\kappa_l - 1)g_1R_l - h_1/R_l] &= 1/(2R_l)[(\kappa - 1)a_0R_l^2 + b_2] \\
1/(2\widetilde{\mu}_l)[(\kappa_l - 3)g_2R_l^3 + (\kappa_l + 1)g_0/R_l - h_2/R_l^3 - h_0R_l] &= (1/2)[b_4/(3R_l^3) - (\kappa + 1)a_2/R_l - b_0R_l] \\
1/(2\widetilde{\mu}_l)[(\kappa_l + 3)g_2R_l^3 + (1 - \kappa_l)g_0/R_l - h_2/R_l^3 + h_0R_l] &= (1/2)[b_4/(3R_l^3) + (\kappa - 1)a_2/R_l + b_0R_l]
\end{aligned}$$

Nous avons résolu ce système d'équations avec le calculateur Maple (*Maplesoft*, Waterloo, ON) contenu dans Matlab (*The MathWorks Inc.*, Natick, MA). Comme les coefficients sont assez lourds et dépendent de plusieurs paramètres, il a fallu les factoriser d'abord à l'ordinateur, puis à la main afin de pouvoir les écrire ici de façon compacte.

II.2.1 Coefficients principaux

Nous donnons ici les expressions des coefficients des potentiels complexes, solutions du système d'équations de la page précédente. Ces coefficients principaux sont fonction de coefficients intermédiaires qui sont présentés à la sous-section suivante.

Coefficients dans la matrice

$$a_2 = \frac{-b_0 R_l^2}{D_1} \left[-q_1 q_2 q_3 q_5 + q_2^2 \alpha_{a_2} \tilde{R}^2 - 6q_2^2 q_1 q_4 \tilde{R}^4 + q_{12} q_1 q_4 \tilde{R}^6 - q_2 q_3 q_6 q_4 \tilde{R}^8 \right] \quad (II.6a)$$

$$b_2 = \frac{2a_0 R_l^2}{D_2} \left[-q_{11} (\tilde{\mu}_l (\kappa - 1) + 2) + (q_3 - q_7) (\tilde{\mu}_l (\kappa_0 - 1) + 2\tilde{\mu}_0) \tilde{R}^2 \right] \quad (II.6b)$$

$$b_4 = \frac{-3b_0 R_l^4}{D_1} \left[-q_1 q_2 q_3 q_5 + q_2^2 \alpha_{a_2} \tilde{R}^2 + q_1 q_4 q_{13} \tilde{R}^4 + q_1 q_4 q_{14} \tilde{R}^6 - q_2 q_3 q_6 q_4 \tilde{R}^8 \right] \quad (II.6c)$$

Coefficients dans l'inclusion

$$c_1 = \frac{a_0 \tilde{\mu}_l}{D_2} \tilde{R}^2 (\kappa + 1) (\kappa_l + 1) \quad (II.7a)$$

$$c_3 = \frac{-b_0 \tilde{\mu}_l}{R^2 D_1} \tilde{R}^2 (\tilde{R}^2 - 1) (\kappa + 1) (\kappa_l + 1) q_1 q_2 \quad (II.7b)$$

$$d_1 = \frac{b_0 \tilde{\mu}_l}{D_1} \tilde{R}^2 (\kappa + 1) (\kappa_l + 1) \left[-q_2 q_{10} + 3q_1 q_2 \tilde{R}^2 + q_4 q_8 \tilde{R}^6 \right] \quad (II.7c)$$

Coefficients dans l'anneau

$$g_0 = \frac{-b_0}{D_1} R_l^2 (\kappa + 1) q_1 \left[q_2 q_5 - q_4 q_3 \tilde{R}^6 \right] \quad (II.8a)$$

$$g_1 = \frac{a_0}{D_2} \tilde{R}^2 (\kappa + 1) \left[2\tilde{\mu}_0 + \tilde{\mu}_l (\kappa_0 - 1) \right] \quad (II.8b)$$

$$g_2 = \frac{-b_0}{R^2 D_1} \tilde{R}^2 (\tilde{R}^2 - 1) (\kappa + 1) q_1 q_2 q_4 \quad (II.8c)$$

$$h_0 = \frac{-b_0}{D_1} \tilde{R}^2 (\kappa + 1) [\alpha_{a2} q_2 - 3q_1 q_4 q_2 \tilde{R}^2 - q_4 q_6 q_3 \tilde{R}^6] \quad (II.8d)$$

$$h_1 = \frac{2a_0}{D_2} R_l^2 (\kappa + 1) (q_5 - q_1) \quad (II.8e)$$

$$h_2 = \frac{b_0}{D_1} \tilde{R}^4 (\kappa + 1) (q_1 q_2 q_5 + q_1 q_4 q_3 \tilde{R}^4) \quad (II.8f)$$

II.2.2 Coefficients intermédiaires

Les coefficients q_i ne dépendent que des paramètres élastiques, c'est-à-dire des rapports de modules élastiques ($\widetilde{\mu}_0$, $\widetilde{\mu}_l$) et des constantes de Kolosov ($\kappa = 3 - 4\nu$ en état plan de déformation, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ en état plan de contrainte).

$$q_1 = (\widetilde{\mu}_0 - \widetilde{\mu}_l)$$

$$q_2 = (1 - \widetilde{\mu}_l)$$

$$q_3 = (\kappa_l + \widetilde{\mu}_l)$$

$$q_4 = (\widetilde{\mu}_0 + \widetilde{\mu}_l \kappa_0)$$

$$q_5 = (\widetilde{\mu}_0 \kappa_l - \widetilde{\mu}_l \kappa_0)$$

$$q_6 = (\widetilde{\mu}_0 \kappa_l + \widetilde{\mu}_l)$$

$$q_7 = (1 + \widetilde{\mu}_l \kappa)$$

$$q_8 = \widetilde{\mu}_l \kappa (1 + \kappa_l)$$

$$q_9 = (\kappa_l - \widetilde{\mu}_l \kappa)$$

$$q_{10} = [\widetilde{\mu}_0 (3 + \kappa_l) - \widetilde{\mu}_l (3 + \kappa_0)]$$

$$q_{11} = [\widetilde{\mu}_0 (\kappa_l - 1) - \widetilde{\mu}_l (\kappa_0 - 1)]$$

$$q_{12} = [\kappa_l (\kappa_l + 2\widetilde{\mu}_l) + 2\widetilde{\mu}_l (2\widetilde{\mu}_l - 3) + 3]$$

$$q_{13} = [q_8 + \widetilde{\mu}_l (13 + \kappa_l) - 6(1 + \widetilde{\mu}_l^2)]$$

$$\begin{aligned}
q_{14} &= [-q_8 + \widetilde{\mu}_l(4\widetilde{\mu}_l - 7) + \kappa_l q_3 + 3] \\
\alpha_{a2} &= 3\widetilde{\mu}_0 q_4 + \widetilde{\mu}_0 \kappa_l q_5 + \widetilde{\mu}_0 \widetilde{\mu}_l (\kappa_l - 3) - 4\widetilde{\mu}_l^2 \kappa_0 \\
\beta_{a2} &= \widetilde{\mu}_l \kappa (3 - 4\widetilde{\mu}_l - \kappa_l) + 3q_2 + \kappa_l q_3 \\
D_1 &= q_1 q_2 q_5 q_9 - \alpha_{a2} q_2 q_7 \widetilde{R}^2 + 6q_1 q_4 q_2 q_7 \widetilde{R}^4 - q_1 q_4 \beta_{a2} \widetilde{R}^6 + q_4 q_6 q_3 q_7 \widetilde{R}^8 \\
D_2 &= -2q_2 q_{11} + \widetilde{R}^2 [\widetilde{\mu}_l (\kappa_0 - 1) + 2\widetilde{\mu}_0] [(\kappa_l - 1) + 2\widetilde{\mu}_l]
\end{aligned}$$

II.3 Solution en termes de déplacements polaires

Nous donnons maintenant les expressions pour les déplacements en coordonnées polaires. Ceux-ci sont issus de l'équation (II.1c), avec les potentiels complexes (II.2), (II.3) et (II.4). Il faut ensuite faire la substitution $z = re^{i\theta}$, puis séparer les parties réelle et imaginaire pour obtenir le déplacement radial u_r et tangentiel u_θ , respectivement.

Dans la matrice :

$$u_r = \frac{1}{2} \left\{ (\kappa - 1) a_0 r + \frac{b_2}{r} + \left[\frac{b_4}{3r^3} - (\kappa + 1) \frac{a_2}{r} - b_0 r \right] \cos(2\theta) \right\} \quad (II.9a)$$

$$u_\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{b_4}{3r^3} + (\kappa - 1) \frac{a_2}{r} + b_0 r \right] \sin(2\theta) \quad (II.9b)$$

Dans l'inclusion :

$$u_r^0 = \frac{1}{2} r \left\{ c_1 (\kappa_0 - 1) + [c_3 (\kappa_0 - 3) r^2 - d_1] \cos(2\theta) \right\} \quad (II.10a)$$

$$u_\theta^0 = \frac{1}{2} r [c_3 (\kappa_0 + 3) r^2 + d_1] \sin(2\theta) \quad (II.10b)$$

Dans l'anneau :

$$u_r^l = \frac{1}{2} \left\{ (\kappa_l - 1) g_1 r - \frac{h_1}{r} + \left[(\kappa_l - 3) g_2 r^3 + (\kappa_l + 1) \frac{g_0}{r} - \frac{h_2}{r^3} - h_0 r \right] \cos(2\theta) \right\} \quad (II.11a)$$

$$u_\theta^l = \frac{1}{2} \left[(\kappa_l + 3) g_2 r^3 + (1 - \kappa_l) \frac{g_0}{r} - \frac{h_2}{r^3} + h_0 r \right] \sin(2\theta) \quad (II.11b)$$

Les déplacements (u, v) en coordonnées cartésiennes peuvent être obtenus par la transformation de rotation suivante :

$$u = u_r \cos(\theta) - u_\theta \sin(\theta), \quad (II.12a)$$

$$v = u_r \sin(\theta) + u_\theta \cos(\theta), \quad (II.12b)$$

On transforme ensuite les coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes par les relations classiques :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ \sin(\theta) &= \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ \cos(2\theta) &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\ \sin(2\theta) &= \frac{2xy}{x^2 + y^2} \\ r &= (x^2 + y^2)^{1/2} \end{aligned}$$

ANNEXE III

COEFFICIENTS DES EXPRESSIONS DE DÉFORMATION ET DE DÉPLACEMENT DU MODÈLE À ANNEAU

III.1 Coefficients des profils de déformation

Nous regardons l'expression analytique de la déformation axiale centrale, soit la déformation parallèle à la direction de compression et le long de l'axe passant par le centre de l'inclusion, un axe nommé ici " r ". Cette déformation peut être obtenue en prenant les dérivées par rapport à r des expressions du déplacement radial :

$$\epsilon_{rr} = \left\{ \begin{array}{ll} \partial u_r^0 / \partial r & r < R \\ \partial u_r^l / \partial r & R < r < R_l \\ \partial u_r / \partial r & r > R_l \end{array} \right\} \quad (\text{III.1})$$

La forme générale de cette déformation est donnée par :

$$\epsilon_{rr} = \left\{ \begin{array}{ll} A + Br^2 & r < R \\ \frac{A'}{r^4} + \frac{B'}{r^2} + C' + D'r^2 & R < r < R_l \\ \frac{A''}{r^4} + \frac{B''}{r^2} + C'' & r > R_l \end{array} \right\} \quad (\text{III.2})$$

Comme le modèle avec anneau comporte des coefficients assez longs, pour simplifier l'analyse et clarifier l'interprétation, nous supposons tous les milieux strictement incompressibles, c'est-à-dire de coefficient de Poisson égal à 0.5 ($\kappa = \kappa_l = \kappa_0 = 1$). Les coefficients sont alors donnés par :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{4b_0 \widetilde{\mu}_l \widetilde{R}^2}{D_1} \left[(\widetilde{\mu}_0 - \widetilde{\mu}_l)(1 - \widetilde{\mu}_l)(3\widetilde{R}^2 - 4) + 2\widetilde{\mu}_l(\widetilde{\mu}_0 + \widetilde{\mu}_l)\widetilde{R}^6 \right] \\
B &= \frac{12b_0 \widetilde{\mu}_l \widetilde{R}^2}{R^2 D_1} (\widetilde{\mu}_0 - \widetilde{\mu}_l)(1 - \widetilde{\mu}_l)(\widetilde{R}^2 - 1) \\
A' &= \frac{3b_0 \widetilde{R}^4}{D_1} \left[(\widetilde{\mu}_0 - \widetilde{\mu}_l)^2(1 - \widetilde{\mu}_l) + (\widetilde{\mu}_0^2 - \widetilde{\mu}_l^2)(1 + \widetilde{\mu}_l)\widetilde{R}^4 \right] \\
B' &= \frac{2b_0 R_l^2}{D_1} (\widetilde{\mu}_0 - \widetilde{\mu}_l) \left[(\widetilde{\mu}_0 - \widetilde{\mu}_l)(1 - \widetilde{\mu}_l) - (\widetilde{\mu}_0 + \widetilde{\mu}_l)(1 + \widetilde{\mu}_l)\widetilde{R}^6 \right] \\
C' &= \frac{b_0 \widetilde{R}^2}{D_1} \left[(\widetilde{\mu}_0^2 - \widetilde{\mu}_l^2)(1 - \widetilde{\mu}_l)(4 - 3\widetilde{R}^2) - (\widetilde{\mu}_0 + \widetilde{\mu}_l)^2(1 + \widetilde{\mu}_l)\widetilde{R}^6 \right] \\
D' &= \frac{6b_0 \widetilde{R}^2}{R^2 D_1} (\widetilde{R}^2 - 1)(\widetilde{\mu}_0^2 - \widetilde{\mu}_l^2)(1 - \widetilde{\mu}_l) \\
A'' &= \frac{3b_0 R_l^4}{2D_1} \left[-(\widetilde{\mu}_0 - \widetilde{\mu}_l)^2(1 - \widetilde{\mu}_l^2) + 4(1 - \widetilde{\mu}_l^2)(\widetilde{\mu}_0^2 - \widetilde{\mu}_l^2)(\widetilde{R}^2 + \widetilde{R}^6) + \dots \right. \\
&\quad \left. + (\widetilde{\mu}_0^2 - \widetilde{\mu}_l^2)(16\widetilde{\mu}_l - 6(1 + \widetilde{\mu}_l^2))\widetilde{R}^4 - (1 - \widetilde{\mu}_l^2)(\widetilde{\mu}_0 + \widetilde{\mu}_l)^2\widetilde{R}^8 \right] \\
B'' &= \frac{-b_0 R_l^2}{D_1} \left[-(\widetilde{\mu}_0 - \widetilde{\mu}_l)^2(1 - \widetilde{\mu}_l^2) + (1 - \widetilde{\mu}_l^2)(\widetilde{\mu}_0^2 - \widetilde{\mu}_l^2)(4\widetilde{R}^2 - 6\widetilde{R}^4) + \dots \right. \\
&\quad \left. + 4(1 - \widetilde{\mu}_l + \widetilde{\mu}_l^2)(\widetilde{\mu}_0^2 - \widetilde{\mu}_l^2)\widetilde{R}^6 - (1 - \widetilde{\mu}_l^2)(\widetilde{\mu}_0 + \widetilde{\mu}_l)^2\widetilde{R}^8 \right] \\
C'' &= -b_0/2 \\
D_1 &= (\widetilde{\mu}_0 - \widetilde{\mu}_l)^2(1 - \widetilde{\mu}_l)^2 - (\widetilde{\mu}_0^2 - \widetilde{\mu}_l^2)(1 - \widetilde{\mu}_l^2)(4\widetilde{R}^2 - 6\widetilde{R}^4 + 4\widetilde{R}^6) + \dots \\
&\quad \dots + (\widetilde{\mu}_0 + \widetilde{\mu}_l)^2(1 + \widetilde{\mu}_l)^2\widetilde{R}^8
\end{aligned}$$

III.2 Coefficients des déplacements polaires

Dans le cas où tous les milieux sont incompressibles ($\kappa = \kappa_l = \kappa_0 = 1$), les expressions analytiques des déplacements radial u_r et tangentiel u_θ aux angles $\theta = \{45, 90\}$ deg sont données par :

$$u_r|_{\theta=45} = 0$$

$$\begin{aligned}
u_\theta|_{\theta=45} &= \frac{\tilde{p}R_l}{4} \left(\rho_l + \frac{\Gamma_1}{\rho_l^3} \right) \\
u_r|_{\theta=90} &= \frac{\tilde{p}R_l}{4} \left(\rho_l + \frac{\Gamma_2}{\rho_l} - \frac{\Gamma_1}{\rho_l^3} \right) \\
u_\theta|_{\theta=90} &= 0
\end{aligned}$$

où $\rho_l = r/R_l$ est la variable polaire radiale normalisée par le rayon de l'anneau.

Les coefficients Γ_i ($i = 1..3$) sont donnés par

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= -\frac{1}{D_1} [-(\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_l)^2(1 - \tilde{\mu}_l^2) + 4(1 - \tilde{\mu}_l^2)(\tilde{\mu}_0^2 - \tilde{\mu}_l^2)(\tilde{R}^2 + \tilde{R}^6) + \dots \\
&\dots + (\tilde{\mu}_0^2 - \tilde{\mu}_l^2)(16\tilde{\mu}_l - 6(1 + \tilde{\mu}_l^2))\tilde{R}^4 - (1 - \tilde{\mu}_l^2)(\tilde{\mu}_0 + \tilde{\mu}_l)^2\tilde{R}^8] \quad (III.3a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 &= -\frac{2}{D_1} [-(\tilde{\mu}_0 - \tilde{\mu}_l)^2(1 - \tilde{\mu}_l^2) + (1 - \tilde{\mu}_l^2)(\tilde{\mu}_0^2 - \tilde{\mu}_l^2)(4\tilde{R}^2 - 6\tilde{R}^4) + \dots \\
&\dots + 4(1 - \tilde{\mu}_l + \tilde{\mu}_l^2)(\tilde{\mu}_0^2 - \tilde{\mu}_l^2)\tilde{R}^6 - (1 - \tilde{\mu}_l^2)(\tilde{\mu}_0 + \tilde{\mu}_l)^2\tilde{R}^8] \quad (III.3b)
\end{aligned}$$

$$(III.3c)$$

avec D_1 donné dans la section précédente.