

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

UTILISATION DU KRIGEAGE DUAL DANS LE POST-TRAITEMENT DES
RÉSULTATS ÉLÉMENTS FINIS POUR L'ANALYSE STRUCTURALE DES
BARRAGES EN BÉTON

PATRICE McLEAN

DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL, GÉOLOGIQUE ET DES MINES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE CIVIL)

OCTOBRE 2004



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-494-01368-0

Our file Notre référence

ISBN: 0-494-01368-0

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

UTILISATION DU KRIGEAGE DUAL DANS LE POST-TRAITEMENT DES
RÉSULTATS ÉLÉMENTS FINIS POUR L'ANALYSE STRUCTURALE DES
BARRAGES EN BÉTON

Présenté par : McLEAN Patrice

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. BOUAANANI Najib, Ph. D., président

M. LÉGER Pierre, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. TINAWI René, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. MASSICOTTE Bruno, Ph. D., membre

DÉDICACE

Deviens ce que tu es.

- Nietzsche

À mon père, ma mère et ma petite sœur

REMERCIEMENTS

Peu nombreux sont les gens qui ont contribué autant à ma formation que MM. Pierre Léger, Ph. D., ing. et René Tinawi, Ph. D., ing. Respectivement directeur et codirecteur de mes activités de recherche, ils ont été une source d'inspiration et de motivation sans égale. Je désire aussi exprimer ma gratitude envers les autres professeurs de la section Structures du Département de génie civil pour la formation exceptionnelle offerte. Il est également indispensable de mentionner l'aide de M. Martin Leclerc, M. Ing., une source de compétence et de compréhension pour tout ce qui concerne l'informatique.

De plus, je tiens à saluer tous les étudiants que j'ai côtoyés pendant ma maîtrise, notamment Mathieu Rochon-Cyr et Dominic Vachon, sans qui je n'aurais autant apprécié mes études supérieures.

Finalement, je désire remercier le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie (CRSNG) du Canada ainsi que le Fonds Québécois de la Recherche sur la Nature et les Technologies (FQRNT) pour le support financier qui m'a été accordé tout au long de ma maîtrise.

RÉSUMÉ

Une méthode automatisant le calcul des forces et moments résultants, dans l'analyse par éléments finis (EF) des barrages en béton, est proposée. Généralement, l'intégration des contraintes est réalisée avec des algorithmes qui utilisent les fonctions de forme des éléments. Le problème global de la détermination des forces et des moments résultants sur une surface plane est ainsi traité localement au niveau de chaque élément coupé. Des difficultés se présentent inévitablement quand la surface est orientée arbitrairement et quand les éléments sont définis par des arêtes courbes. Une approche globale qui implémente le krigeage dual comme outil d'interpolation est donc proposée pour contourner ces complications. Cette technique d'interpolation est utilisée (i) pour définir des courbes et surfaces paramétriques et (ii) pour estimer les valeurs du tenseur de contraintes dans le modèle. Les contraintes interpolées sont ensuite intégrées pour obtenir les forces et les moments résultants. Le calcul des efforts résultants sur des surfaces planes est démontré en 2D et 3D sur divers modèles structuraux pour évaluer le potentiel de cette approche. Un logiciel, Post-Dam 2D/3D, incorporant les concepts développés est présenté en annexe. Les principales fonctionnalités incluses dans ce dernier sont illustrées à l'aide d'un exemple d'application sur un modèle 2D d'un barrage-poids.

ABSTRACT

A post-processing scheme for force and moment resultant determination in finite element (FE) analysis of concrete dams is proposed. Generally, stress integration is performed with algorithms based on the use of the FE shape functions. The global problem of determining the resultant forces and moments, on a planar surface, results from the local treatment of each element cut by the surface. Difficulties arise when the surface is arbitrarily-oriented and when the elements include curved edges. A global approach involving the dual kriging interpolation method is proposed to handle these complications. This interpolation technique is used (i) to define parametric curves and surfaces, and (ii) to estimate stress tensor field values within the model. The interpolated stresses are subsequently integrated to yield the resultant forces and moments. Computation of resultant forces and moments on arbitrarily oriented planar surfaces is performed with 2D and 3D structural models to assess the performance of this approach. A computer program that implements the proposed method, Post-Dam 2D/3D, is presented in the appendix. The principal functionalities included in this software are shown through an application on a 2D model of a concrete gravity dam.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ.....	vi
ABSTRACT.....	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES TABLEAUX.....	x
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES SYMBOLES.....	xiii
LISTE DES ANNEXES	xvii
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION	1
1.1 Généralités.....	1
1.2 Problématique	2
1.3 Objectifs de la recherche	4
1.4 Organisation du mémoire.....	5
CHAPITRE 2 : CONDENSÉ ET REVUE DE LA LITTÉRATURE	6
2.1 Introduction	6
2.2 Utilisation du krigeage dual pour l'interpolation de contraintes.....	8
2.3 Utilisation du krigeage dual pour définir des surfaces paramétriques	10
2.4 Intégration des contraintes sur une surface planeaire	13
2.5 Présentation de l'article.....	16

CHAPITRE 3 : POST-PROCESSING OF FINITE ELEMENT STRESS FIELDS USING DUAL KRIGING BASED METHODS FOR STRUCTURAL ANALYSIS OF CONCRETE DAMS.....	17
3.1 Introduction	17
3.2 Post-processing of FE stresses for force resultant retrieval	20
3.3 Dual kriging for stress tensor interpolation.....	25
3.3.1 Dual kriging interpolation	26
3.3.2 Dual kriging for parametric surface definition.....	29
3.4 Stress integration and computation of force and moment resultants	33
3.5 Application 1 : Validation with tip-loaded cantilever beam	37
3.6 Application 2 : Constant thickness and radius arch structure	42
3.7 Application 3 : Talvacchia arch dam	49
3.8 Conclusions.....	53
CHAPITRE 4 : DISCUSSION ET CONCLUSION	57
RÉFÉRENCES.....	61
ANNEXE.....	65

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.6.1 Results for 3D arch model.....	44
Tableau 3.6.2 Force resultants obtained with variable number of observations.....	47
Tableau 3.7.1 Force resultants computed on concrete lift joint	51

LISTE DES FIGURES

Figure 1.2.1 Méthode classique pour l'intégration des contraintes	3
Figure 2.4.1 Intégration des contraintes sur une surface paramétrique.....	14
Figure 2.4.2 Formules pour l'intégration des contraintes	15
Figure 3.2.1 Integration of FE stresses in a 2D model.....	22
Figure 3.2.2 Classical method for stress integration in 3D models	24
Figure 3.3.1 Parametric surface defined by kriging profiles A and B	31
Figure 3.4.1 Proposed method of stress integration in 3D FE models.....	35
Figure 3.4.2 Force and moment resultant determination on planar surface.....	36
Figure 3.5.1 Problem definition for cantilever beam example	37
Figure 3.5.2 Mesh selection for beam example	38
Figure 3.5.3 Shear force and flexural moment calculations for beam example.....	39
Figure 3.5.4 Shear and normal stress distribution for beam example.....	41
Figure 3.6.1 Problem definition for arch example	42
Figure 3.6.2 Mesh selection for arch example	43
Figure 3.6.3 Influence zones for calculations at crown and abutment sections.....	48
Figure 3.7.1 Dam-foundation system for Talvacchia Dam.....	49
Figure 3.7.2 Concrete lift joint analyzed.....	50
Figure 3.7.3 Structural blocks definition for analysis of lift joint.....	51
Figure 3.7.4 Driving shear resultants for lift joint analysis	52
Figure 3.7.5 Overturning moments for lift joint analysis	52

Figure A.1.1 Logiciel de post-traitement de la MEF : Post-Dam 2D/3D	66
Figure A.1.2 Interface Post-Dam 2D/3D (barrage Koyna 103 m de hauteur)	66
Figure A.1.3 Organigramme pour le Post-traitement de la MEF.....	67
Figure A.1.4 Organigramme Post-Dam 2D/3D	67
Figure A.2.1 Géométrie du barrage Koyna.....	68
Figure A.2.2 Progression de la fissuration à l'interface béton-rocher	70
Figure A.2.3 Cercles d'intensité pour contraintes principales	71
Figure A.2.4 Vecteurs pour contraintes principales.....	72
Figure A.2.5 Directions de glissement préférentielles.....	73
Figure A.2.6 Profils de rupture considérés	74
Figure A.2.7 Distribution des contraintes sur la surface A.....	75
Figure A.2.8 Force résultante sur la surface A.....	75
Figure A.2.9 Distribution des contraintes sur la surface B	76
Figure A.2.10 Force résultante sur la surface B.....	76
Figure A.2.11 Distribution des contraintes sur la surface C	77
Figure A.2.12 Force résultante sur la surface C.....	77

LISTE DES SYMBOLES

$a(X)$	:	comportement moyen d'un phénomène physique / average behavior of a physical phenomenon
a_i	:	paramètres de la dérive / drift parameters
b_i	:	paramètres des fonctions de covariance généralisée / generalized covariance function parameters
b_j	:	largeur du segment linéaire / width of linear segment
$b(X)$	:	fonction de fluctuation probabiliste / probabilistic fluctuation function
C	:	cohésion du béton / concrete cohesion
E_j^{KR}	:	élément linéaire d'un plan de rupture / linear element on rupture plane
$F_{r,j}^{KR}$	:	force tangentielle agissant sur l'élément linéaire j / tangential force acting on linear element j
$F_{t,j}^{KR}$	:	force normale agissant sur l'élément linéaire j / normal force acting on linear element j
$g_j(X)$	:	fonctions de pondération / weighing functions
h	:	distance euclidienne entre deux positions dans l'espace / euclidian distance between two positions in space
H	:	niveau du réservoir / reservoir level
L_j	:	longueur de l'élément linéaire j / length of linear element j
K_a	:	fonction de covariance généralisée pour profil A (krigeage paramétrique)

	/ generalized covariance function for profile A (parametric kriging)
K_b	: fonction de covariance généralisée pour profil B (krigeage paramétrique) / generalized covariance function for profile B (parametric kriging)
$K(h)$	: fonction de covariance généralisée (krigeage géométrique) / generalized covariance function (geometric kriging)
M	: nombre de fonctions de base dans la dérive / number of basis functions in the drift
M_{11}	: moment autour de l'axe 1 / moment about axis 1
M_{22}	: moment autour de l'axe 2 / moment about axis 2
M_{33}	: moment autour de l'axe 3 / moment about axis 3
N	: nombre de points d'observation de contraintes / number of stress observation points
N_j^{KR}	: nœud j sur le plan de rupture / node j on rupture plane
$P(s,t)$	: vecteur contenant les 3 fonctions krigées représentant les coordonnées Cartésiennes d'un couple s-t sur une surface / vector containing three parametric functions representing the Cartesian coordinates of a s-t couple on a surface
R	: force résultante / resultant force
s	: coordonnée paramétrique / parametric coordinate
S	: sous-espace linéaire dans lequel est défini la dérive / linear subspace in which the drift function is defined

SSF_N^j	: facteur de sécurité au glissement local au nœud j / local sliding safety factor at node j
SSF_E^j	: facteur de sécurité au glissement global pour l'élément linéaire j / global sliding safety factor for linear element j
t	: coordonnée paramétrique / parametric coordinate
u_i	: observation du phénomène u à la position i / observation of phenomenon u at sample point i
$u(X_i)$	: fonction d'interpolation évaluée en X_i / interpolation function evaluated at X_i
V_{11}	: force résultante dans la direction 1 / resultant force in direction 1
V_{22}	: force résultante dans la direction 2 / resultant force in direction 2
V_{33}	: force résultante dans la direction 3 / resultant force in direction 3
X	: coordonnées dans l'espace Cartésien 1D, 2D ou 3D / coordinates in 1D, 2D or 3D Cartesian space
$[K]$	: matrice de krigeage géométrique / geometric kriging matrix
$[K_A]$	: matrice de krigeage paramétrique pour profil A / parametric kriging matrix for profile A
$[K_B]$	: matrice de krigeage paramétrique pour profil B / parametric kriging matrix for profile B
$[\alpha]$	: vecteur de coefficients des fonctions krigées / coefficients vector for kriging functions

$[\sigma]$	:	tenseur de contraintes observé / observed stress tensor
ϕ	:	angle de friction du béton / concrete friction angle
σ_r	:	contrainte tangentielle au plan de rupture / tangential stress component acting on rupture plane
σ_t	:	contrainte normale au plan de rupture / normal stress component acting on rupture plane
τ_{rt}	:	contrainte de cisaillement agissant sur le plan de rupture / shear stress component acting on rupture plane

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A.....	65
---------------	----

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION

1.1 Généralités

Le post-traitement des résultats éléments finis est souvent indispensable dans un processus d'analyse structurale de barrages en béton. Lorsque la géométrie d'un ouvrage est complexe et que la théorie de poutre, sous-jacente à la méthode de gravité, est inapplicable, les ingénieurs utilisent la méthode des éléments finis (MEF). Cependant, les modèles deviennent souvent lourds et les résultats ponctuels difficiles à interpréter. Il est alors essentiel de formuler des algorithmes qui peuvent automatiser le calcul des indicateurs de performance reconnus, permettant ainsi poser un jugement sur le niveau de sécurité d'un ouvrage. Ces quantités sont généralement obtenues à l'aide des forces et des moments résultants agissant sur des surfaces planaires. Outre l'évaluation de l'intégrité structurale, les forces et moments résultants peuvent être utilisés à plus d'un escient : déterminer la quantité d'acier requise dans une section en béton armé, vérifier l'équilibre avec le chargement appliqué, etc.

1.2 Problématique

L'intégration des contraintes dans un modèle EF est souvent réalisée en utilisant les fonctions de formes locales, définies sur le volume de chaque élément. Si les sections planaires choisies ne concordent pas avec les frontières du maillage, il peut devenir très laborieux de calculer les force résultantes parce qu'il faut d'abord évaluer la surface d'intersection du plan sur chaque élément coupé, ensuite la mailler avec une triangulation et finalement interpoler les contraintes aux coordonnées des points d'intégration des éléments triangulaires générés sur la surface d'intersection. La contribution de chaque élément est obtenue par quadrature de Gauss et sommée pour obtenir les efforts résultants. Cette approche est représentée à la Fig. 1 et constitue la seule alternative proposée dans la littérature pour l'intégration des contraintes EF sur des surfaces planaires arbitrairement orientées en utilisant les fonctions de forme locales. Il importe d'ailleurs de noter que cette approche est déficiente quand les éléments ont des arêtes courbes puisque la surface d'intersection entre les éléments et le plan de coupe ne peut être qu'approximée.

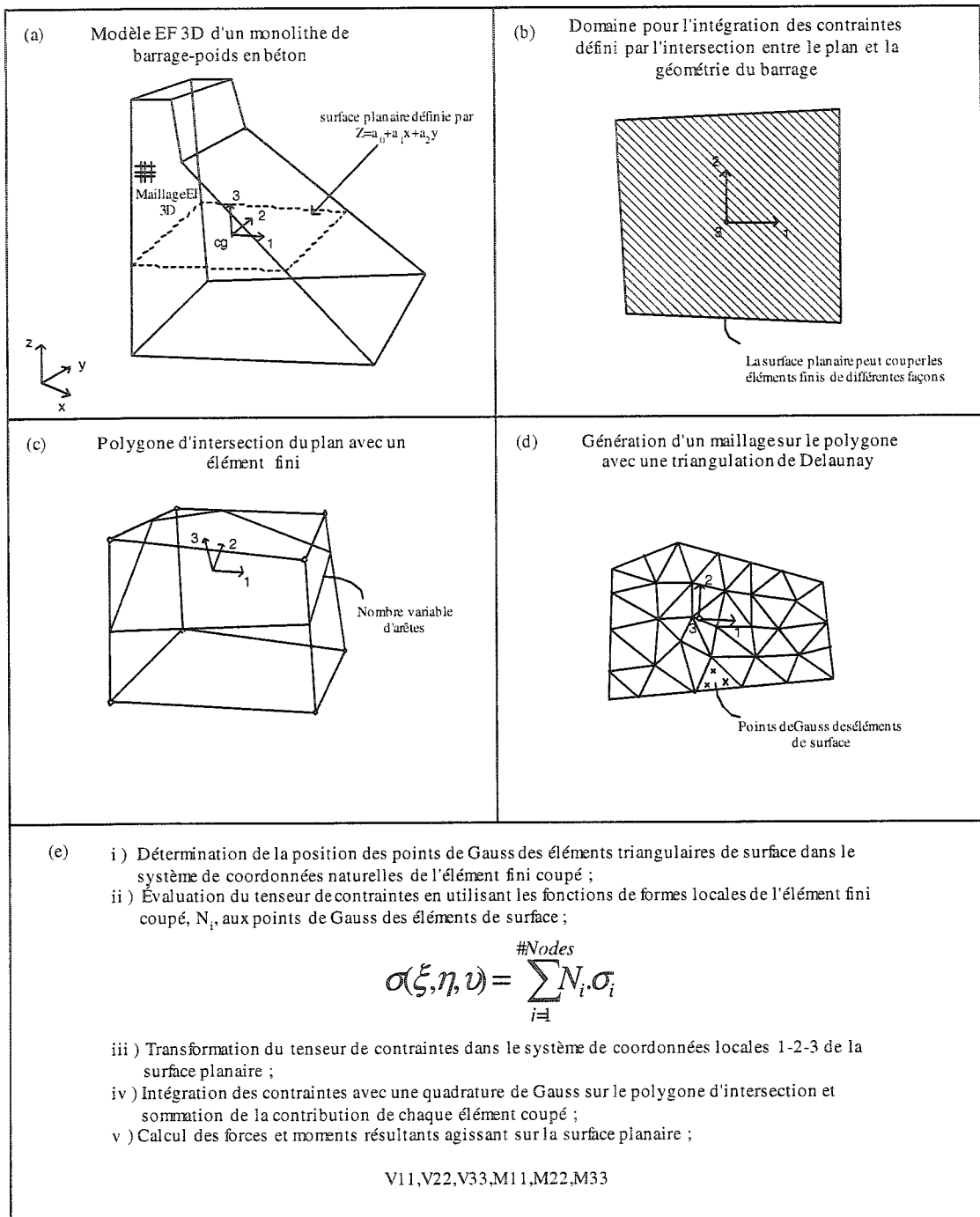


Figure 1.2.1 Méthode classique pour l'intégration des contraintes

1.3 Objectifs de la recherche

Cette recherche a pour objectif de développer une méthode qui ne requiert pas l'utilisation des fonctions de forme locales pour l'intégration des contraintes issues de la MEF sur des surfaces planaires orientées arbitrairement. En utilisant une approche globale, fondée sur l'implémentation d'un système d'interpolation des contraintes par krigeage dual, plusieurs problèmes sont évités. Le krigeage dual est une méthode statistique qui permet de construire un modèle mathématique à partir d'une série d'observations. La solution de ce système appliqué à l'interpolation de contraintes en 3D donne des fonctions explicites continues qui décrivent la variation du tenseur de contraintes partout à l'intérieur du domaine des contraintes observées tout en passant par les points de mesure. D'autre part, une variante du krigeage est aussi utilisée pour la définition d'entités géométriques telles que des courbes et surfaces paramétriques à partir d'une série de points de contrôle. La combinaison de ces deux fonctions pour le calcul des efforts résultants agissant sur des surfaces planaires orientées arbitrairement à partir des résultats de la MEF est développée dans ce projet et l'application sur des structures de complexité variable est démontrée.

Pour les besoins de ce mémoire par article, trois exemples sont traités. Premièrement, la validité du concept est vérifiée à l'aide d'un exemple de poutre en porte-à-faux chargée à son extrémité. Ensuite, une structure en arc à rayon et profondeur constants est analysée pour démontrer l'applicabilité et la convergence de la méthode proposée à

des problèmes où les distributions de contraintes sont plus difficiles à obtenir de façon analytique. Finalement, un modèle grossier de barrage-voûte est utilisé pour apprécier la puissance de la méthode proposée. En effet, il est démontré que les forces et moments résultants sur des surfaces complexes composées de plusieurs plots de barrages peuvent être obtenus avec un minimum d'effort.

Ce document comporte de plus une annexe dans laquelle un modèle de barrage-poids 2D représentant l'ouvrage de Koyna (Inde) est analysé à l'aide du logiciel Post-Dam 2D/3D. Ce dernier a été développé pour les besoins de cette recherche et ses principales fonctionnalités sont présentées dans cette annexe.

1.4 Organisation du mémoire

Le mémoire est présenté sous une forme spéciale où un article soumis pour publication y est incorporé. Comme l'article est rédigé en anglais, le chapitre 2 se veut un condensé français qui met en valeur les points importants discutés dans le manuscrit soumis à la revue *Finite Elements in Analysis and Design*. Le chapitre 3 présente l'article complet incluant les figures et tableaux de résultats. Finalement, les conclusions relatives aux activités de recherche, la liste des références utilisées et l'annexe contenant les applications et informations supplémentaires relatives au logiciel Post-Dam 2D/3D viennent clore ce mémoire.

CHAPITRE 2 : CONDENSÉ ET REVUE DE LA LITTÉRATURE

2.1 Introduction

Lorsque les éléments finis sont utilisés pour modéliser le comportement structural d'un barrage en béton prévu, en construction ou existant, il est d'importance primordiale d'être en mesure de traiter les nombreux résultats adéquatement. Il existe plus d'une façon de représenter le niveau de sollicitation d'un ouvrage et sa réserve de sécurité face à un mécanisme de défaillance donné. Une possibilité consiste à rapporter les contraintes agissant à l'extrémité amont et à l'extrémité aval d'un plan de rupture coupant le modèle. Lofti et Espandar (2004) ont présenté de cette façon les résultats de leurs analyses sismiques de barrages-voûtes en béton. Ils ont utilisé pour leurs calculs les joints de base (interface béton-rocher) de la section centrale et d'une section en culée. Le niveau de sollicitation est aussi représenté dans ce document à l'aide d'enveloppes de contraintes principales (couramment utilisées comme indicateur de performance). D'ailleurs, celles-ci sont utilisées par Azmi et Paultre (2002) pour présenter les résultats de leurs analyses 3D de barrages en béton avec un modèle incluant la nonlinéarité des joints de contraction.

Les contraintes, représentées par des enveloppes ou calculées à une position précise, constituent un résultat intéressant. Cependant, elles ne permettent pas de quantifier la réserve de sécurité face à un mécanisme de défaillance. En effet, tel que rapporté par

Lund (2004), les forces et moments résultants sont d'une valeur beaucoup plus significative pour l'ingénieur que les contraintes locales souvent sujettes aux phénomènes de concentration près des discontinuités. Or, il est bien connu que la récupération des forces et moments résultants agissant sur une surface coupant arbitrairement un modèle EF n'est pas une formalité.

Peu de chercheurs se sont penchés jusqu'à date sur les algorithmes permettant d'intégrer les champs de contraintes. Généralement, les modèles EF sont élaborés de façon à faciliter le calcul des résultantes sur des surfaces présélectionnées. Les fonctions de forme locales EF sont utilisées et les calculs sont de préférence faits aux frontières des éléments. Le maillage est alors construit de façon complaisante aux fins des analystes. Lorsque ces derniers désirent calculer les efforts résultants sur des surfaces orientées arbitrairement par rapport au modèle sans procéder à un remaillage, le problème devient plus compliqué. Farias et Naylor (1998) ont proposé des algorithmes utilisant les fonctions de forme locales pour évaluer la stabilité de pentes dans des talus en terre. Ils n'ont cependant pas généralisé ceux-ci pour les cas tridimensionnels. Lorsque l'ingénieur désire obtenir les forces et moments résultants agissant sur une surface coupant un modèle 3D, il peut avoir recours à la méthode *classique*, adaptée de Salvodi (2002), présentée à la figure 1.2.1.

La méthode classique est plutôt laborieuse et sa principale lacune vient du fait que l'on traite le problème global de la détermination des forces et moments résultants agissant sur une surface avec des fonctions de contraintes locales, définies sur le volume de chaque élément coupé. Une alternative à cette approche consiste à construire un modèle d'interpolation global. En effet, Hinton et Campbell (1974) ont démontré qu'il est possible d'utiliser une approche globale pour l'interpolation des contraintes. En utilisant l'approximation par moindres carrés locale (élément par élément) et globale (pour tout le modèle), ils ont lissé les champs de contraintes EF discontinus et ont effectué diverses démonstrations qui prouvent que l'ingénieur n'est pas totalement dépendant des fonctions de forme locales pour le post-traitement des résultats EF.

Dans cette recherche, une approche globale fondée sur l'utilisation de la méthode d'interpolation par krigeage dual est proposée et fait l'objet des sections suivantes.

2.2 Utilisation du krigeage dual pour l'interpolation de contraintes

À partir des contraintes ponctuelles récupérées du logiciel EF, il est possible de créer un modèle mathématique permettant de calculer les contraintes n'importe où dans le domaine géométrique du modèle. Le krigeage est une méthode statistique qui permet de construire le *meilleur estimateur linéaire sans biais* d'une fonction aléatoire définie dans l'espace. C'est un outil complet qui englobe plusieurs méthodes d'interpolation

bien connues. En effet, le krigeage est équivalent à l'interpolation de type spline et à l'interpolation linéaire par morceaux comme cas particuliers et à l'approximation par moindres carrés comme cas limite. Tel que démontré par Poirier et Tinawi (1991), cette méthode est applicable à la manipulation des champs tensoriels de contraintes en mécanique du solide.

Pour une dérivation complète des équations du krigeage et les détails concernant le passage au krigeage dual, il est proposé de consulter Trochu (1993) ou Phan et Trochu (1998). Afin d'obtenir les fonctions explicites (fonctions krigées) décrivant la variation des contraintes, il suffit de solutionner un système linéaire exprimant les équations du krigeage dual. Ce dernier est défini ici à titre d'exemple dans l'espace cartésien 3D par une dérive linéaire et une fonction de covariance généralisée linéaire $K(h) = h$. Le vecteur à droite de l'équation contient les contraintes observées aux N points d'observations et possède autant de colonnes qu'il y a de paramètres dans le tenseur.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N} & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2N} & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NN} & 1 & x_N & y_N & z_N \\ - & - & - & - & + & - & - & - \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_N & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(N+4) \times (N+4)} \left\{ \begin{array}{l} b_1^{\sigma_x} \ b_1^{\sigma_y} \\ b_2^{\sigma_x} \ b_2^{\sigma_y} \\ \vdots \\ b_N^{\sigma_x} \ b_N^{\sigma_y} \\ a_0^{\sigma_x} \ a_0^{\sigma_y} \\ a_1^{\sigma_x} \ a_1^{\sigma_y} \\ a_2^{\sigma_x} \ a_2^{\sigma_y} \\ a_3^{\sigma_x} \ a_3^{\sigma_y} \end{array} \right\}_{(N+4) \times 6} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{x1} \ \sigma_{y1} \\ \sigma_{x2} \ \sigma_{y2} \\ \vdots \\ \sigma_{xN} \ \sigma_{yN} \dots \\ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{array} \right\}_{(N+4) \times 6} \quad (1)$$

La solution de ce système en considérant comme fonction de covariance généralisée la distance euclidienne entre les observations (2) permet de construire les fonctions krigées pour les paramètres σ_x et σ_y , présentées à l'équation (3). Il y a autant de fonctions krigées que de paramètres dans le tenseur des contraintes.

$$h_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z) &= a_0^{\sigma_x} + a_1^{\sigma_x} x + a_2^{\sigma_x} y + a_3^{\sigma_x} z + \sum_{j=1}^N b_j^{\sigma_x} h_j \\ \sigma_y(x, y, z) &= a_0^{\sigma_y} + a_1^{\sigma_y} x + a_2^{\sigma_y} y + a_3^{\sigma_y} z + \sum_{j=1}^N b_j^{\sigma_y} h_j \end{aligned} \quad (3)$$

Ces fonctions sont ensuite évaluées aux coordonnées cartésiennes désirées. Le domaine de validité des fonctions est le domaine géométrique défini par les coordonnées des points d'observation.

2.3 Utilisation du krigeage dual pour définir des surfaces paramétriques

Une variante du krigeage dual, le krigeage paramétrique, est utilisée pour définir les courbes et surfaces paramétriques sur lesquelles sont intégrées les contraintes. Dans cette section, seule l'équation générale du krigeage paramétrique des surfaces est présentée. Pour un exposé complet sur les fondements du krigeage paramétrique des

courbes et des surfaces, l'article de Trochu (1995) est proposé. L'expression (4) constitue l'équation de la surface paramétrique définie par L points de contrôle suivant le profil de krigeage A et K points de contrôle suivant le profil de krigeage B.

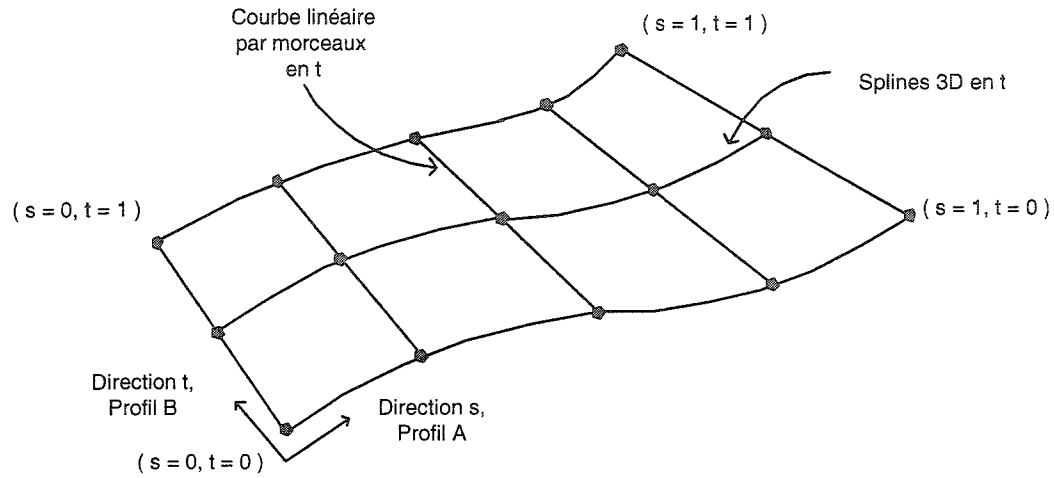


Figure 2.3.1 Profils de krigeage et surface paramétrique

Pour chaque profil, une paramétrisation est faite pour associer à chaque point de contrôle x - y - z une variable paramétrique décrivant sa position sur la surface. Le profil A est défini par une covariance généralisée K_A , une dérive linéaire et les coordonnées paramétriques s_l , $1 \leq l \leq L$. Le profil B est quant à lui défini par la covariance généralisée K_B , une dérive constante et les coordonnées t_k , $1 \leq k \leq K$. Les matrices de krigeage pour chaque profil sont présentées en (5).

$$P(s, t) = \begin{bmatrix} \cdots & K_a(|s - s_l|) & \cdots & 1 & s \end{bmatrix} [K_A]^{-1} \begin{bmatrix} P_{ij} & | & 0 \\ - & - & - & + & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} [K_B]^{-1} \begin{bmatrix} \vdots \\ K_b(|t - t_k|) \\ \vdots \\ - \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$1 \leq i, l \leq I$$

$$1 \leq j, k \leq L$$
(4)

$$K_A = \begin{bmatrix} \ddots & & \ddots & | & 1 & s_1 \\ & K_a(|s_i - s_l|) & & | & 1 & \vdots \\ \ddots & & \ddots & | & 1 & s_I \\ - & - & - & + & - & - \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 \\ s_1 & \cdots & s_I & | & 0 & 0 \end{bmatrix}; K_B = \begin{bmatrix} \ddots & & \ddots & | & 1 \\ & K_b(|t_k - t_j|) & & | & 1 \\ \ddots & & \ddots & | & 1 \\ - & - & - & + & - \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$
(5)

La matrice P_{ij} (4) contient les coordonnées des points d'observation et son nombre de lignes et colonnes est ajusté pour assurer la compatibilité matricielle des systèmes d'équations décrivant chaque profil de krigeage. La solution du système de krigeage paramétrique en 3D donne 3 équations dans lesquelles on substitue un couple (s,t) pour obtenir les coordonnées cartésiennes associées (x,y,z).

2.4 Intégration des contraintes sur une surface plane

Les contraintes sont intégrées sur les surfaces planes en appliquant une quadrature de Gauss. Ainsi, avec les équations paramétriques de la surface, il suffit de décider d'une discrétisation selon chaque profil de krigeage pour obtenir les coordonnées cartésiennes d'un maillage régulier composé de triangles. Avec les coordonnées des sommets des triangles, il est possible de calculer les coordonnées des points de Gauss. Ces dernières sont ensuite utilisées dans les équations krigées pour estimer les contraintes Cartésiennes (x,y,z) . Finalement, les contraintes sont transformées selon le système d'axe local 1-2-3 défini pour un plot particulier ou la surface entière. Cette approche est illustrée à la figure 2.4.1.

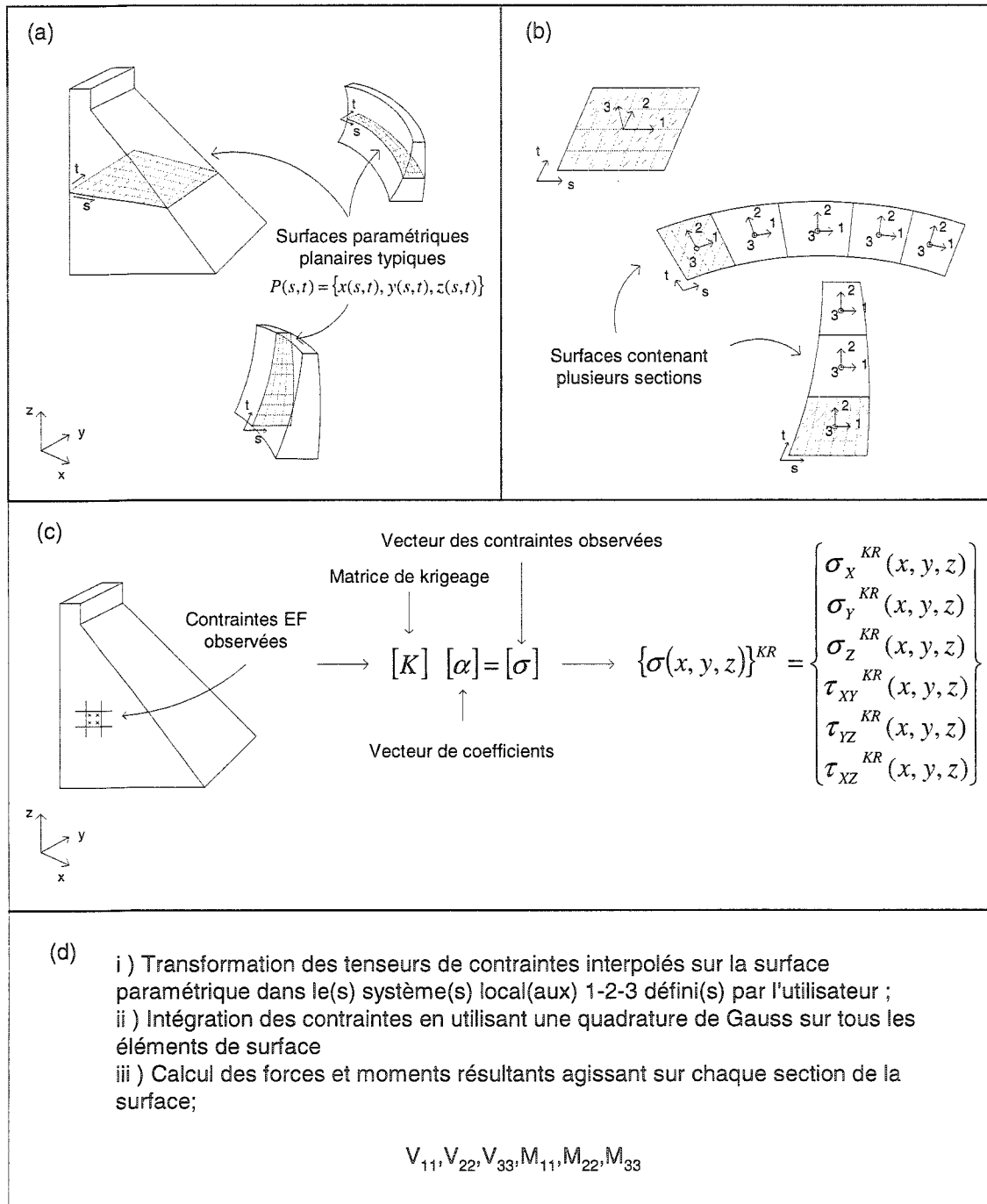


Figure 2.4.1 Intégration des contraintes sur une surface paramétrique

Le calcul des forces et moments résultants est réalisé en appliquant la quadrature de Gauss sur les éléments triangulaires de la surface et en sommant la contribution de chaque élément. Les formules permettant d'obtenir les forces et moments résultants par rapport au système d'axe local sont présentées à la figure 2.4.2.

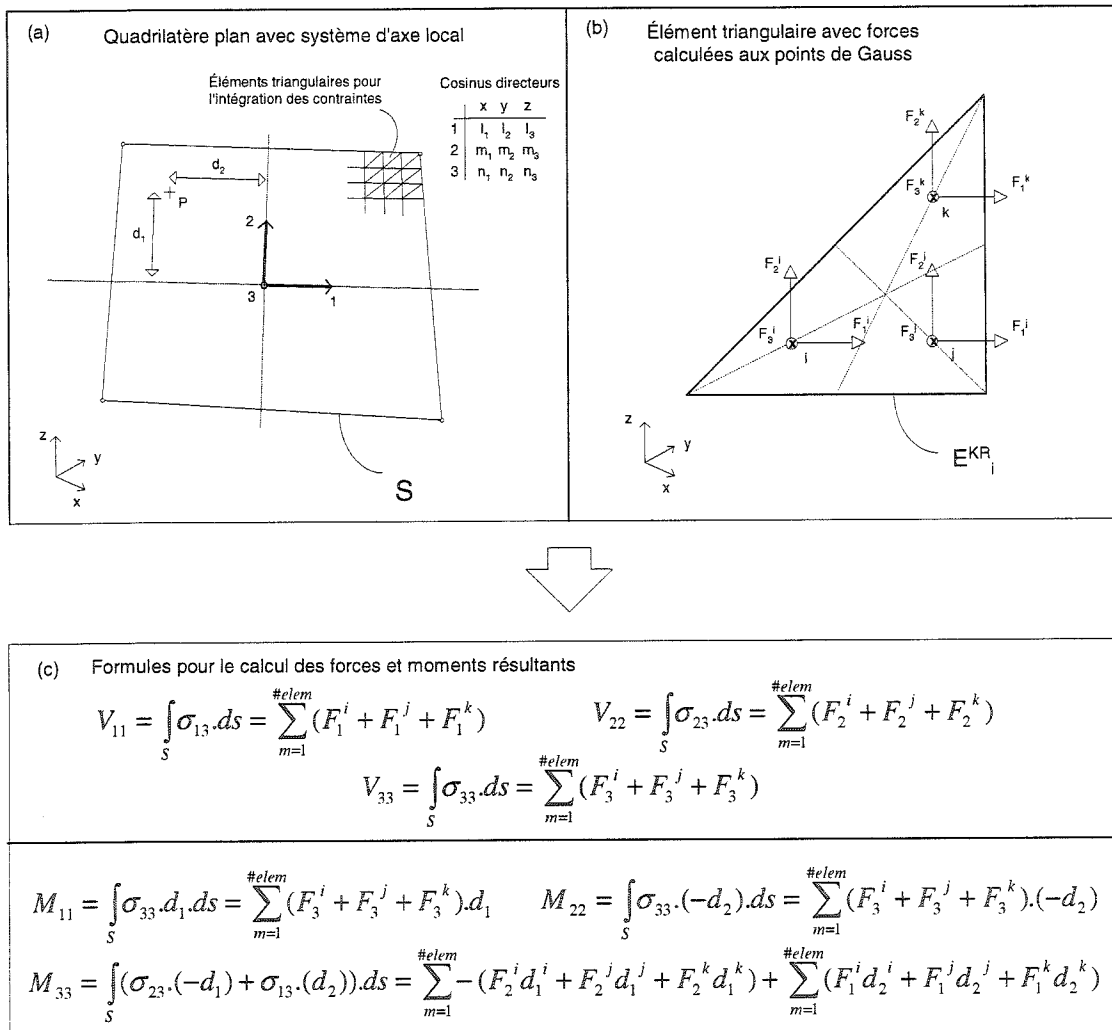


Figure 2.4.2 Formules pour l'intégration des contraintes

2.5 Présentation de l'article

L'article suivant soumis à la revue *Finite Elements in Analysis and Design* contient une présentation détaillée des concepts relatifs à l'utilisation du krigeage dual dans l'approche proposée. Plusieurs applications sur des structures à complexité variable y sont incluses. Après la validation de la méthode proposée à l'aide d'un modèle d'une poutre en porte-à-faux chargée en son extrémité, une structure en arc sollicitée par une pression radiale est traitée. Finalement, un modèle grossier d'un barrage voûte est utilisé pour démontrer la puissance de l'approche proposée pour le calcul de forces et moments résultants sur des sections planaires plus complexes possiblement composées de plusieurs plots.

CHAPITRE 3 : POST-PROCESSING OF FINITE ELEMENT STRESS FIELDS USING DUAL KRIGING BASED METHODS FOR STRUCTURAL ANALYSIS OF CONCRETE DAMS

Par Patrice McLean, Pierre Léger et René Tinawi

Article soumis à la revue Finite Elements In Analysis and Design

3.1 Introduction

In dam engineering, it is often required to perform a finite element (FE) analysis to model the physical behaviour of an existing or a new concrete dam under design. When the analysis is completed and results are obtained, large stress tensor fields must be manipulated to recuperate essential engineering quantities: the force and moment resultants acting on various user-defined surfaces. The importance of stress integration for retrieval of resulting forces and moments is reported by Lund [1]. These quantities can be used for different applications such as an equilibrium check with the applied water pressure and other forces, the assessment of sliding safety factor on a given failure surface or the estimation of the amount of steel required in a reinforced concrete section. There are many ways to obtain the force and moment resultants. Most of them include the use of local element shape functions and adaptation of the FE mesh to facilitate stress integration (i.e. meshing with element boundaries matching the cutting plane or definition of contact elements). Farias and Naylor [2] used a local stress integration scheme for evaluation of force resultants in 2D safety evaluation of slopes in geotechnical engineering. Their approach did not require remeshing for the analyses

of arbitrarily-oriented slopes. However, generalisation of this technique for 3D safety analysis was not presented.

When local stress interpolation is used for post-processing of 3D FE results, it can be laborious to obtain force resultants without remeshing if the cutting planes have arbitrary orientations. A possible approach is to (i) evaluate the intersecting surface between the defined plane and the individual elements geometry, (ii) mesh the obtained polygonal surface with Delaunay triangulation [3,4], (iii) evaluate, transform (according to a defined local axis system) and integrate the stress tensors on the intersecting surface at the generated Gauss integration points with local FE shape functions, and (iv) sum the force and moment contributions of each element intersected. However, if the elements are of higher integration order and include curved edges, the problem becomes more complicated because the intersecting surfaces can only be approximated. It is the objective of this paper to develop an efficient alternative to using FE shape functions for stress integration in 2D and 3D post-processing of FE results.

Local and global smoothing of discontinuous FE functions with least squares approximation was investigated by Hinton and Campbell [5]. They showed that the stress field can effectively be manipulated without using the FE shape functions. A global interpolation method, dual kriging, as formulated by Matheron [6], is proposed herein for manipulation of the stress tensor field. This general method is equivalent to

spline and linear piecewise interpolation as particular cases and to least square approximation as a limit case. Using the stresses obtained at the element Gauss integration points, nodes or element centroids, as data observed at x-y-z control points, a system of linear equations called the dual kriging system can be defined. Its solution yields an explicit function for each parameter included in the system. In 3D FE analysis, the stress tensor, $\{\sigma(x,y,z)\}^{KR}$, is defined by 6 parameters and the interpolated stress field is given by substitution of coordinates in the kriging functions:

$$\{\sigma(x, y, z)\}^{KR} = \left\{ \sigma_X^{KR}(x, y, z), \sigma_Y^{KR}(x, y, z), \sigma_Z^{KR}(x, y, z), \tau_{XY}^{KR}(x, y, z), \tau_{YZ}^{KR}(x, y, z), \tau_{XZ}^{KR}(x, y, z) \right\} \quad (6)$$

A *geometric* (based on Cartesian coordinates) dual kriging interpolation method can therefore transform the local stress integration problem into a global interpolation problem. The dual kriging method is simple and can be used with reasonable computational costs for the interpolation of space-dependent variables. It has been used in various applications ranging from resin injection problems in viscous flow analysis to ore quantity evaluation in mining fields. Poirier and Tinawi [7] used dual kriging for FE post-processing and force resultant calculations in solid mechanics but the problem of surface definition was not addressed. When formulated in *parametric* space, dual kriging can also be a very effective tool for definition of geometric entities like 2D and 3D parametric surfaces as demonstrated by Trochu [8]. Using the x-y-z coordinates as data observed along s (for a curve) or along s-t (for a surface) control points,

parametric kriging is performed and yields functions describing the defined curve or surface:

$$P(s) = \{x(s), y(s)\}$$

$$P(s, t) = \{x(s, t), y(s, t), z(s, t)\} \quad (7)$$

In this paper, the geometric dual kriging method is used for stress interpolation together with the parametric dual kriging method for curve and surface definition. Validation and application of this global approach for stress integration on planar surfaces is the objective pursued. To implement this technique, a post-processor is developed and is compatible with the commercial FE program ANSYS [9] and the 2D non-linear FE program FRAC-DAM [10,11] which includes a concrete smeared crack model. Applications in 2D and 3D are presented to highlight the advantages, setbacks and convergence properties of this post-processing scheme for recovery of stress resultants. The method is first validated with a 3D cantilever beam and rectangular surfaces. Its efficiency is further tested for the analysis of a thick 3D arch structure. Curved planar surfaces such as an arch dam concrete lift joint have also been modelled and analyzed using a coarse mesh of the Talvacchia dam [12].

3.2 Post-processing of FE stresses for force resultant retrieval

Stress integration for computation of resultant forces and moments is an important function of a post-processor; it yields global parameters far more significant than local stresses to assess the stability of structural components. For 2D FE analysis, linear

segments are defined on which stresses are often interpolated with element shape functions. In this approach, the intersection points between segments and elements must be located before performing the interpolation. As an alternative, it is possible to use a 2D global interpolation scheme based on the dual kriging technique as demonstrated by Poirier and Tinawi [7]. Stress integration is performed using a common numerical method like Simpson's rule or Gauss quadrature. Fig. 3.2.1 illustrates the problem of stress integration in 2D FE analysis.

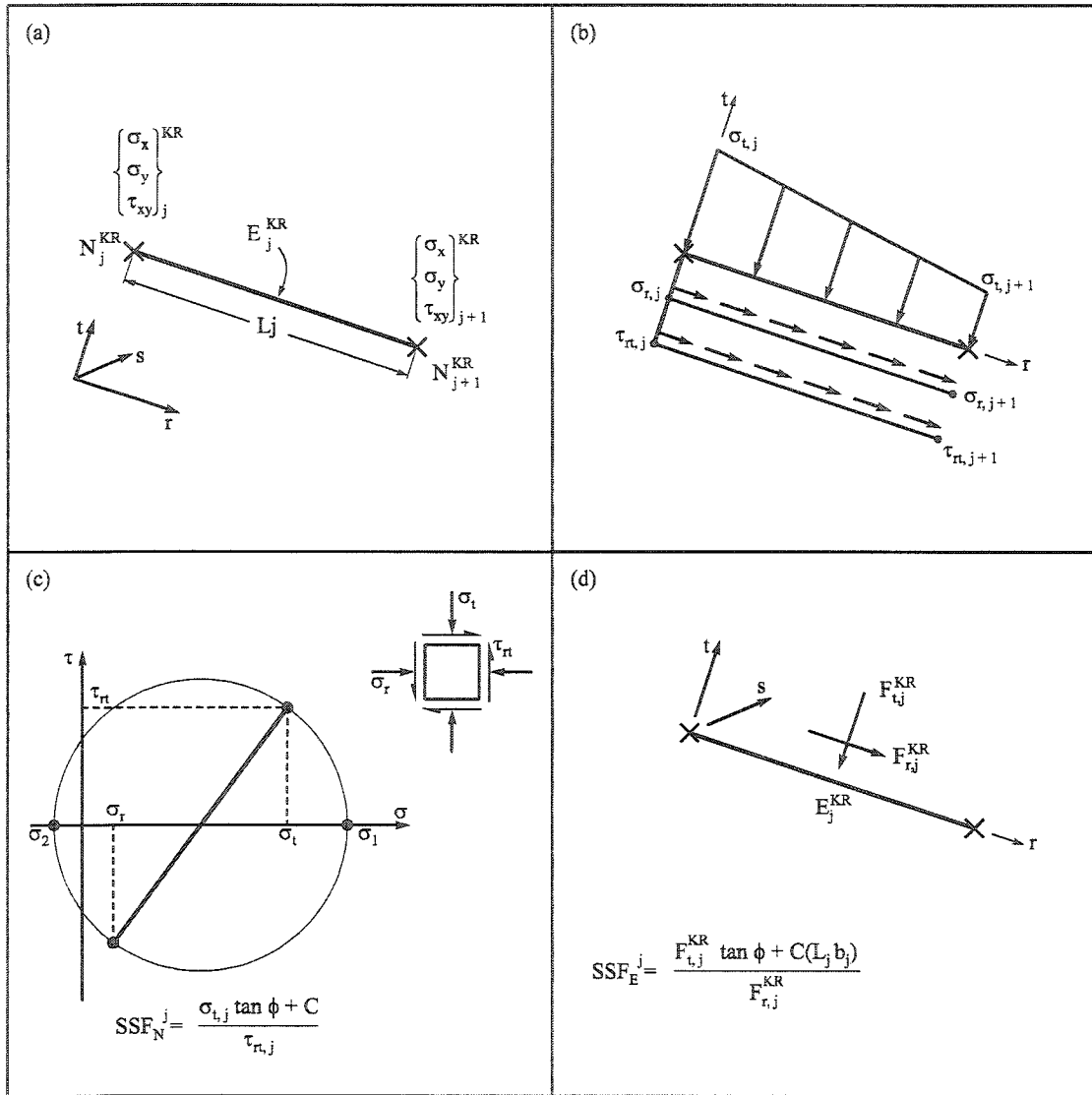


Figure 3.2.1 Integration of FE stresses in a 2D model

Once the stress tensor has been determined by interpolation at nodes N_j^{KR} and N_{j+1}^{KR} (Fig. 3.2.1 (a)), it is transformed in the local system defined by the tangential and normal directions of linear segment E_j^{KR} (Fig. 3.2.1 (b)). A linear distribution of tangential and normal stresses is assumed and stress integration is easily performed

using a Newton-Cotes formula. A local stress-based Mohr-Coulomb definition of the sliding safety factor (SSF) can be used to assess potential damage (Fig. 3.2.1 (c)) at a given point or alternatively one can use a global force-based definition that defines the SSF on the defined linear segment (Fig. 3.2.1 (d)) where ϕ is the concrete friction angle, C is the cohesion and L and b are respectively the length and width of the compressed ligament. For 3D FE analysis, a common method consists of defining the plane of interest by an algebraic equation and verifying the intersection with each element's volume. If there is intersection, the intersecting polygon is determined and Delaunay triangulation (decomposition of a polygon into triangles) is used to mesh the plane. The finite element shape functions are then used to interpolate stresses on the triangular elements after which Gauss quadrature is performed to compute the element's contribution to the force resultant. Summation is performed to obtain resultant forces and moments. This method is however inefficient when higher order elements that include curved edges are used. The intersecting surface is difficult to determine and the triangulation will only approximately cover its surface. Figure 3.2.2 illustrates this classical stress integration scheme for the analysis of a planar surface cutting a concrete dam monolith.

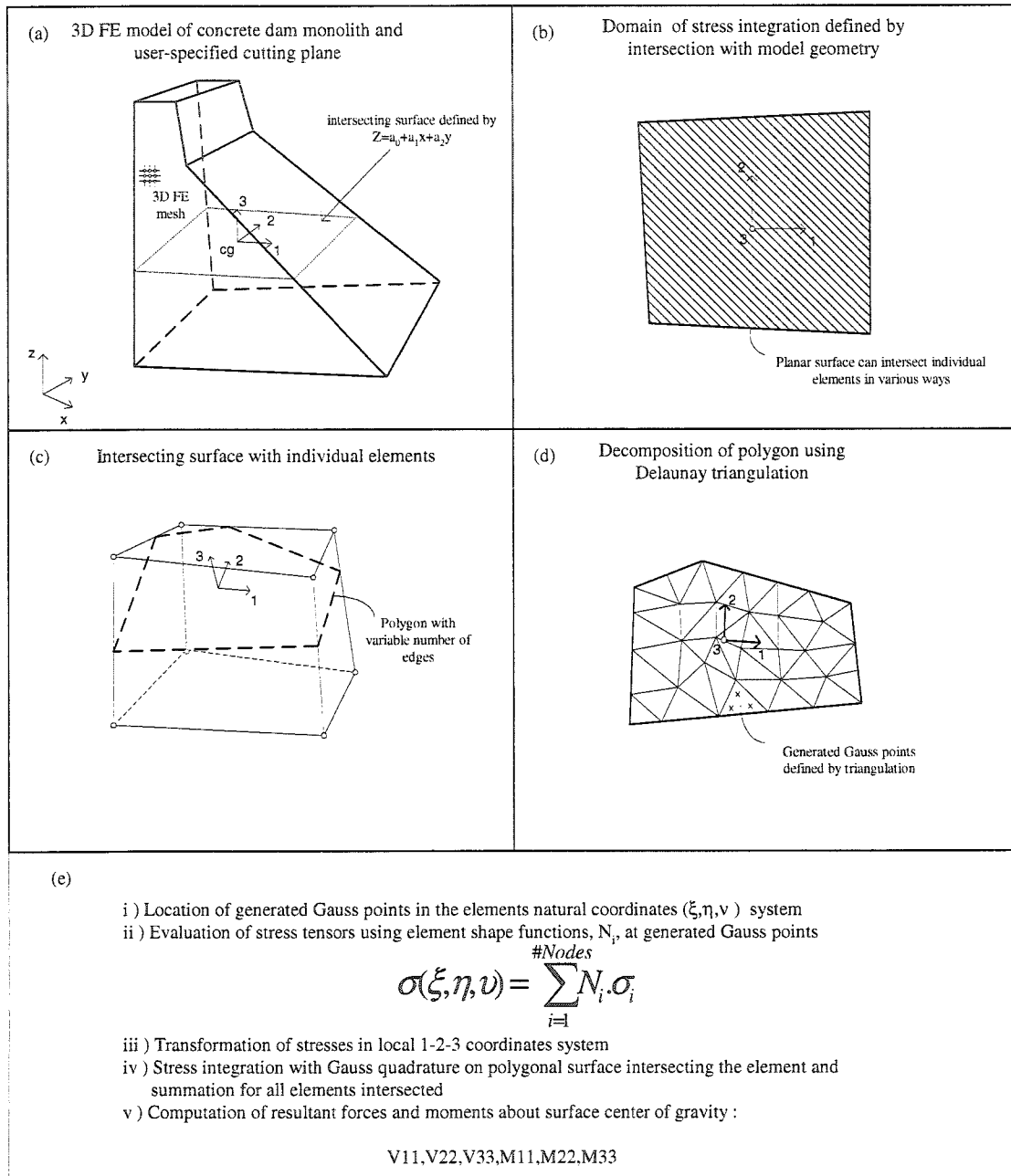


Figure 3.2.2 Classical method for stress integration in 3D models

3.3 Dual kriging for stress tensor interpolation

The original kriging technique was developed in the 1950's by D.G. Krige [13] for evaluation of underground mineral resources in mining projects in South Africa. Its mathematical foundation was later described by Matheron [6]. In the mathematical framework of geostatistics, it is known as the *best linear unbiased estimator* of a random function. Based on a set of localized observations or samples, the kriging interpolation method can be used to estimate the value of any space-dependent variable within the geometrical domain of the data points. This statistical method is well-suited for most physical problems because it includes a spatial correlation function that describes the influence of each observation to the interpolated value. Hence, the closer an observed value is to the interpolation location, the more influence it has on the interpolated value. The kriging system is described by a set of linear equations that can be solved to obtain explicit interpolation formulae. Furthermore, the method yields results equivalent to linear and spline interpolation as particular cases and to the least square fitting as a limit case.

With the usual kriging method, the linear system is dependent on the desired interpolation location and must be solved for each interpolated value. In its dual form, solution of the set of equations is required only once and yields explicit *general* formulae for the interpolated variables. As demonstrated in [7], FE stress field manipulations can be performed without the use of the individual shape functions by

using the dual kriging method. The resulting interpolated stress field is continuous and passes through the observed data points (e.g. stress values at element integration points, nodal coordinates or element centroid). The interpolation of stresses anywhere within the model is obtained simply by evaluation of the *kriging* functions reported in (6) at the desired Cartesian coordinates.

3.3.1 Dual kriging interpolation

The following is a brief presentation of the dual kriging interpolation method. A thorough derivation of the usual kriging equations and the connection to dual kriging can be found in reference [14]. Let u be any variable for which sample values are known and X the associated position in 1D, 2D or 3D Cartesian space:

$$((X_i), u_i) \text{ for } 1 \leq i \leq N \quad (8)$$

It is required to determine an interpolation function that yields the observed values at the sample point coordinates:

$$u(X_i) = u_i \quad (9)$$

The philosophy of kriging is based on the assumption that most phenomena can be represented by the sum of an average behavior and an error term that forces the function into respecting the observed values at the sample points. The average behaviour $a(X)$ is a classical deterministic function based on polynomials and is called

the drift. The correction term $b(X)$, or *fluctuation*, is probabilistic in nature and is adjusted to match the observed values at all sample points.

$$u(X_i) = a(X_i) + b(X_i) \quad (10)$$

The drift is represented here as a summation of polynomials and belongs to a linear subspace S defined by M basis functions $p_l(X)$, $1 \leq l \leq M$:

$$a(X) = \sum_{l=1}^M a_l p_l(X) \quad (11)$$

For example, a linear drift in a 2D Cartesian system $a(x,y)$ is defined by 3 basis functions whereas a quadratic drift in a 3D Cartesian system $a(x,y,z)$ requires a total of 10 basis functions :

$$a(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (12)$$

$$a(x, y, z) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 xy + a_5 yz + a_6 xz + a_7 x^2 + a_8 y^2 + a_9 z^2$$

The fluctuation depends on the N observed data points and is defined by an equal number of free parameters b_j , $1 \leq j \leq N$ and weighting functions $g_j(X)$, $1 \leq j \leq N$. These functions are based on the Euclidian distance h (defined here in 3D Cartesian space) between the interpolation location and all sample points, $1 \leq j \leq N$:

$$g_j(X) = K(h_j) \quad (13)$$

$$h_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2}$$

Where $K(h)$ is the generalized covariance function. Three models for the generalized covariance are used in this paper:

$$K(h) = h \quad K(h) = h^3 \quad K(h) = h^2 \cdot \ln(h) \quad (14)$$

The linear system of equations presented in (15) is defined in 3D *geometric space* by a linear drift and a linear generalized covariance. The left hand side consists of the product of the kriging matrix and the unknown coefficient vector that defines the kriged functions. The right hand side of the equation is the observation vector. Any number of parameters can be included in this vector and thereby define the *observation space*. For 3D solid mechanics applications, a total of 6 parameters are used for stress state representation. A LU decomposition algorithm can be used to solve this system.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N} & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2N} & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NN} & 1 & x_N & y_N & z_N \\ - & - & - & - & + & - & - & - \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_N & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(N+4) \times (N+4)} \left\{ \begin{array}{l} b_1^{\sigma_x} \quad b_1^{\sigma_y} \\ b_2^{\sigma_x} \quad b_2^{\sigma_y} \\ \vdots \quad \vdots \\ b_N^{\sigma_x} \quad b_N^{\sigma_y} \\ a_0^{\sigma_x} \quad a_0^{\sigma_y} \quad \cdots \\ a_1^{\sigma_x} \quad a_1^{\sigma_y} \\ a_2^{\sigma_x} \quad a_2^{\sigma_y} \\ a_3^{\sigma_x} \quad a_3^{\sigma_y} \end{array} \right\}_{(N+4) \times 6} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{x1} \quad \sigma_{y1} \\ \sigma_{x2} \quad \sigma_{y2} \\ \vdots \quad \vdots \\ \sigma_{xN} \quad \sigma_{yN} \quad \cdots \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\}_{(N+4) \times 6} \quad (15)$$

In (15), h_{ij} is the Euclidian distance between sample point i and j :

$$h_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (16)$$

The upper-left quadrant of the kriging matrix is composed of the generalized covariance functions (measure of correlation between each sample point) while the upper-right and lower-left quadrants represent the chosen drift. The equations of the two lower quadrants insure satisfaction of the no-bias conditions. The explicit kriging functions (in this case functions σ_x and σ_y are shown) representing the interpolated values of each parameter are shown in (17) and are defined within the geometrical domain of the observed stress data points.

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y, z) &= a_0^{\sigma_x} + a_1^{\sigma_x} x + a_2^{\sigma_x} y + a_3^{\sigma_x} z + \sum_{j=1}^N b_j^{\sigma_x} K(h_j) \\ \sigma_y(x, y, z) &= a_0^{\sigma_y} + a_1^{\sigma_y} x + a_2^{\sigma_y} y + a_3^{\sigma_y} z + \sum_{j=1}^N b_j^{\sigma_y} K(h_j)\end{aligned}\tag{17}$$

3.3.2 Dual kriging for parametric surface definition

The *parametric* kriging method used for curve definition is very similar to the geometric dual kriging method described earlier. Smooth parametric curves can be generated from a discrete number of user-provided points. The observation vector is now composed of Cartesian coordinates and solution of the kriging system formulated in parametric space yields explicit global formulae for the X, Y and Z coordinates of the interpolated curve.

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \ddots & | & 1 & t_1 \\ & K(h_{ij}) & & | & 1 & \vdots \\ \ddots & & \ddots & | & 1 & t_N \\ - & - & - & + & - & - \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 \\ t_1 & \cdots & t_N & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1^x & b_1^y & b_1^z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_N^x & b_N^y & b_N^z \\ - & - & - \\ a_0^x & a_0^y & a_0^z \\ a_1^x & a_1^y & a_1^z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \\ - & - & - \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

The generalized covariance is expressed in terms of an approximation of the curve length between two sample coordinates :

$$h_{ij} = |t_i - t_j| \quad (19)$$

For a set of N points located in 3D Cartesian space, the parameters t_i , $1 \leq i \leq N$ describing the parametric position of the control points are defined by :

$$t_0 = 0; \quad t_N = 1 \quad (20)$$

$$t_{i+1} = t_i + \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}$$

Solution of the linear system yields the following functions relating any parameter t to its x-y-z coordinates :

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0^x + a_1^x t + \sum_{j=1}^N b_j^x K(|t - t_j|) \\ y(t) &= a_0^y + a_1^y t + \sum_{j=1}^N b_j^y K(|t - t_j|) \\ z(t) &= a_0^z + a_1^z t + \sum_{j=1}^N b_j^z K(|t - t_j|) \end{aligned} \quad (21)$$

For definition of parametric surfaces in 3D Cartesian space, the system is modified to generate a number of parametric curves following two directions referred to as *profiles*. For each profile, a drift and a generalized covariance is specified along with a number of control points. Fig. 3.3.1 shows a typical parametric surface.

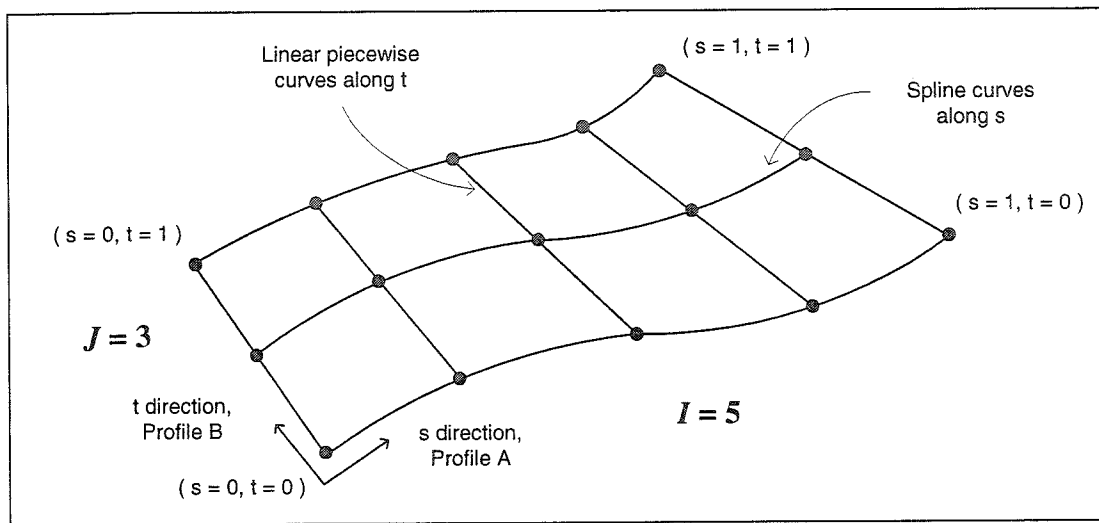


Figure 3.3.1 Parametric surface defined by kriging profiles A and B

The selected drift and generalized covariance will determine the shape of the surface along each profile. For example profile A could be defined by a linear drift and a linear generalized covariance, thus generating curves along the s direction equivalent to splines [6]. Profile B could be defined by a constant drift and a linear generalized covariance, yielding a linear piecewise shape along the t direction. Let us now describe the 3 parametric equations of a surface $x(s,t)$, $y(s,t)$, $z(s,t)$ by a single function $P(s,t)$. The parametric equation of a curve in the s direction for a linear drift and generalized covariance K_a is :

$$P(s) = a_0 + a_1 s + \sum_{l=1}^I b_l K_a(|s - s_l|) \quad (22)$$

If J sections are defined along parametric direction t with I control points at each section, the following linear system defines all curves along profile A :

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \ddots & | & 1 & s_1 \\ & K_a(|s_i - s_l|) & & & | & 1 & s_i \\ \ddots & & & \ddots & | & 1 & s_l \\ - & - & - & + & - & - \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 \\ s_1 & s_i & s_l & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^j & b_1^J \\ b_i^1 & b_i^j & b_i^J \\ b_l^1 & b_l^j & b_l^J \\ - & - & - \\ a_0^1 & a_0^j & a_0^J \\ a_1^1 & a_1^j & a_1^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{1j} & P_{1J} \\ P_{i1} & P_{ij} & P_{iJ} \\ P_{l1} & P_{lj} & P_{lJ} \\ - & - & - \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Now let the parametric curves along profile B be defined by a constant drift. The kriging function is given by (24) as solution of the linear system in (25). In this case, I sections are defined along parametric direction s with J control points at each section :

$$P(t) = A_0 + \sum_{k=1}^J B_k K_b(|t - t_k|) \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \ddots & | & 1 \\ & K_b(|t_j - t_k|) & & & | & 1 \\ \ddots & & & \ddots & | & 1 \\ - & - & - & + & - \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^1 & B_1^i & B_1^J \\ B_j^1 & B_j^i & B_j^J \\ B_l^1 & B_l^i & B_l^J \\ - & - & - \\ A_0^1 & A_0^i & A_0^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{i1} & P_{J1} \\ P_{1j} & P_{ij} & P_{Jj} \\ P_{1l} & P_{il} & P_{Jl} \\ - & - & - \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

As demonstrated in [8], equations (22), (24) and linear systems (23) and (25) can be combined in a single expression that yields X,Y and Z coordinates for any point defined by a s-t couple on the parametric surface.

$$P(s,t) = \begin{bmatrix} \cdots & K_a(|s-s_l|) & \cdots & 1 & s \end{bmatrix} [K_A]^{-1} \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & P_{ij} & & 0 \\ & & & 0 \\ - & - & - & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] [K_B]^{-1} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ K_b(|t-t_k|) \\ \vdots \\ - \\ 1 \end{array} \right]$$

$1 \leq i, l \leq I$
 $1 \leq j, k \leq L$

(26)

Equation (26) incorporates within a unique formulation the I and J sections for the s and t directions. The number of supplementary lines and columns in the P_{ij} matrix is adjusted so that drifts containing a different number of basis functions can be used along the two profiles.

3.4 Stress integration and computation of force and moment resultants

Retrieval of resultant forces and moments is performed by integration of the interpolated stresses on the user-defined surfaces. In both 2D and 3D analyses, the dual kriging method is used to evaluate the Cartesian stresses at any location within the geometrical domain of the observed data. For a 2D analysis, the stress integration scheme is illustrated in Fig. 3.2.1. In this case, Newton-Cotes formulae are used for stress integration by assuming a linear distribution of stresses on each linear segment as seen in Fig. 3.2.1 (b). Fig. 3.4.1 shows the proposed stress integration scheme for a 3D

analysis. Three examples of parametric surfaces are presented with one or many structural blocks. Each structural block is composed of a local axis located at the center of gravity and a number of triangular Gauss elements defined over its surface. The Cartesian stresses are evaluated on the planar surfaces and are subsequently transformed in the user-defined local coordinate system. Direction cosines matrices are automatically determined for each block and are used for transformation of stresses from the Cartesian x - y - z system to local 1-2-3 system. The surface is defined by parametric kriging and meshed with triangular elements for stress integration with Gauss quadrature.

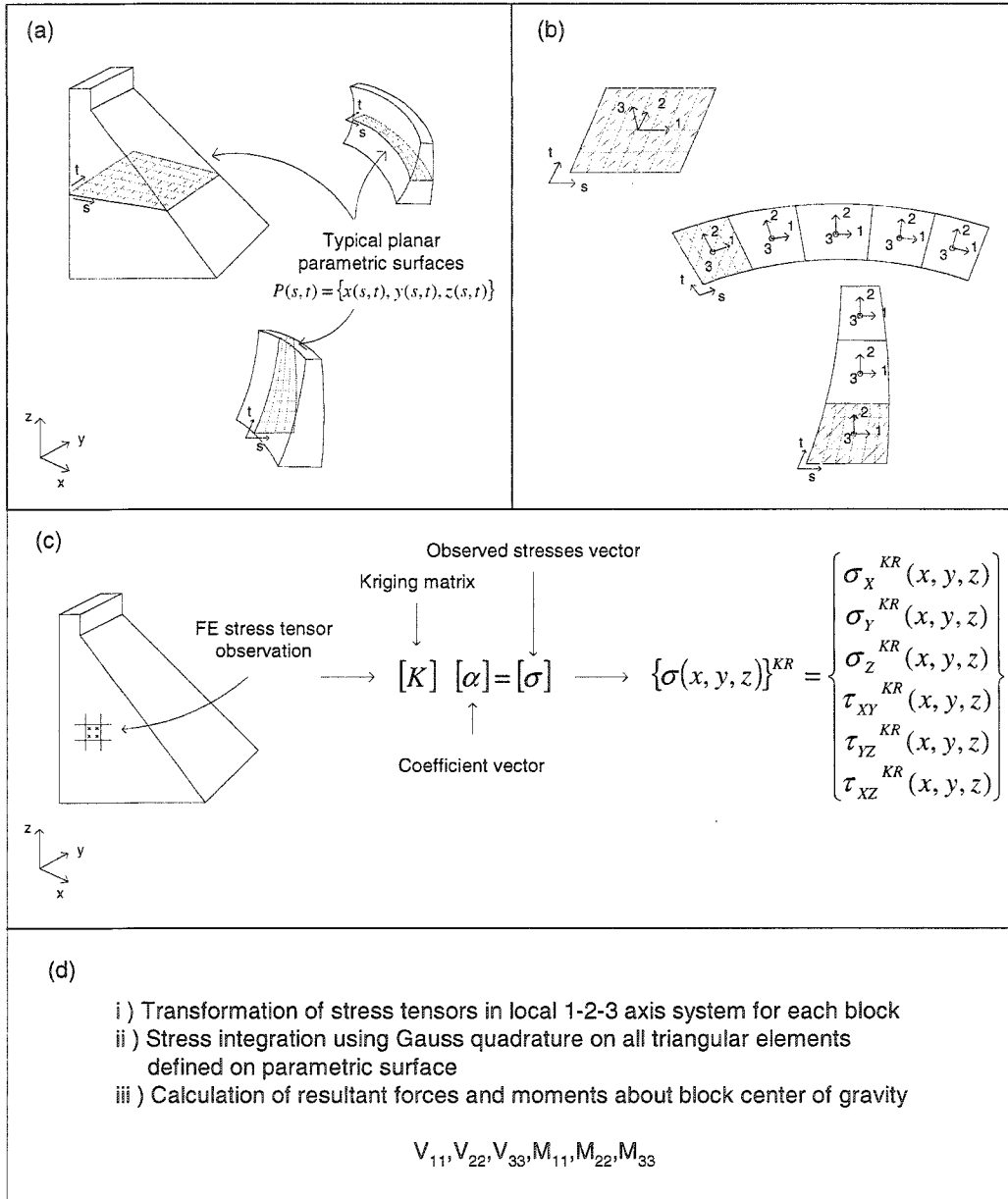


Figure 3.4.1 Proposed method of stress integration in 3D FE models

To illustrate the stress integration scheme, Fig. 3.4.2 (a) shows a typical surface block with an arbitrarily-oriented local axis system. Fig. 3.4.2 (b) focuses on the individual

triangular elements and the local forces obtained at Gauss point coordinates. Formulae for retrieval of global force and moment resultants are presented in Fig. 3.4.2 (c). This simple stress integration scheme for 2D and 3D FE models is tested in the following sections.

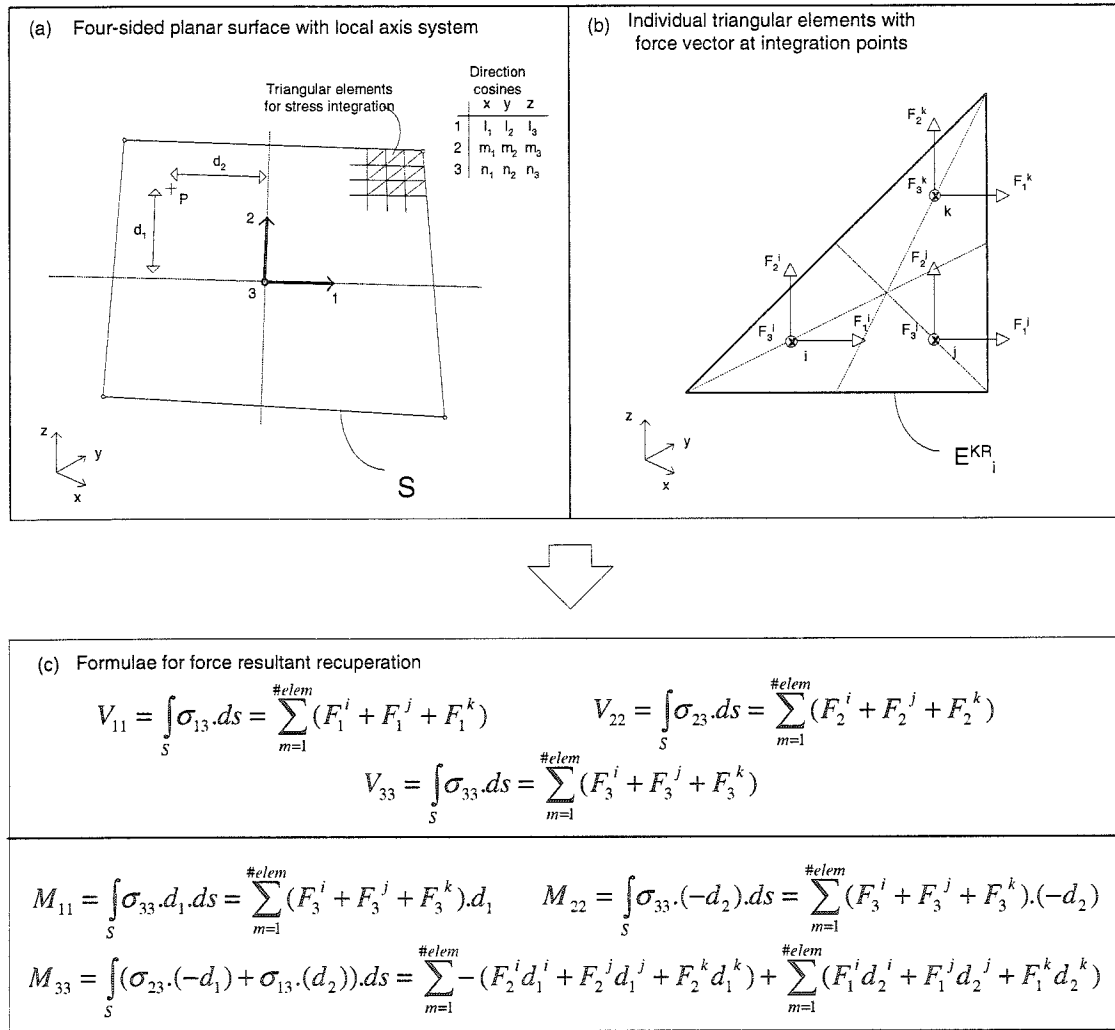


Figure 3.4.2 Force and moment resultant determination on planar surface

3.5 Application 1 : Validation with tip-loaded cantilever beam

A simple application involving a tip-loaded 3D cantilever beam is presented to validate the proposed method and is schematically represented in Fig. 3.5.1. Special care is taken to specify boundary conditions that do not restrain the lateral displacements caused by Poisson's effect, thus insuring better correlation with beam theory.

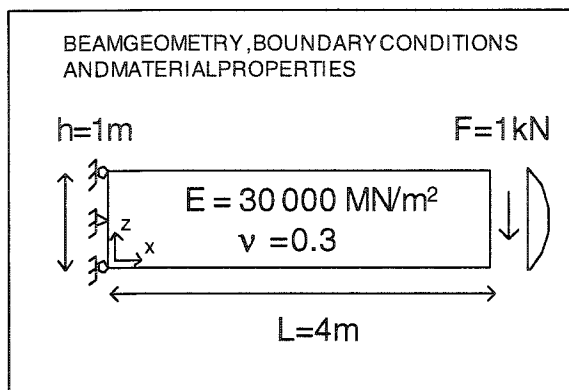


Figure 3.5.1 Problem definition for cantilever beam example

As illustrated in Fig. 3.5.2, the beam is analyzed with three different FE models. Fig. 3.5.2 (a) shows a coarse model composed of four 20-node solid brick elements. Fig. 3.5.2 (b) shows a medium model using 32 elements, and Fig. 3.5.2 (c) reports the fine model composed of 256 elements.

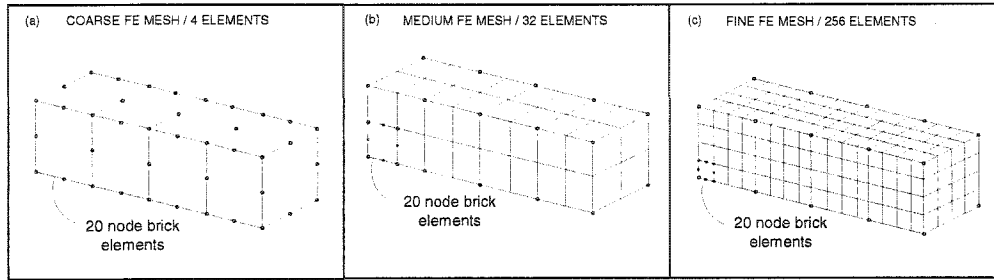


Figure 3.5.2 Mesh selection for beam example

The objective pursued is to compare the total shear force and flexural moment computed at vertical cutting sections using the proposed kriging method with beam theory. All three generalized covariance models presented in section 3 are tested. The kriging calculations are performed using Gauss integration point stresses. The sections are defined as parametric surfaces and discretization in each parametric direction is chosen for the surface to contain a total number of 200 triangular elements. The force resultants are calculated at every 0.25 m and are plotted along with the theoretical values.

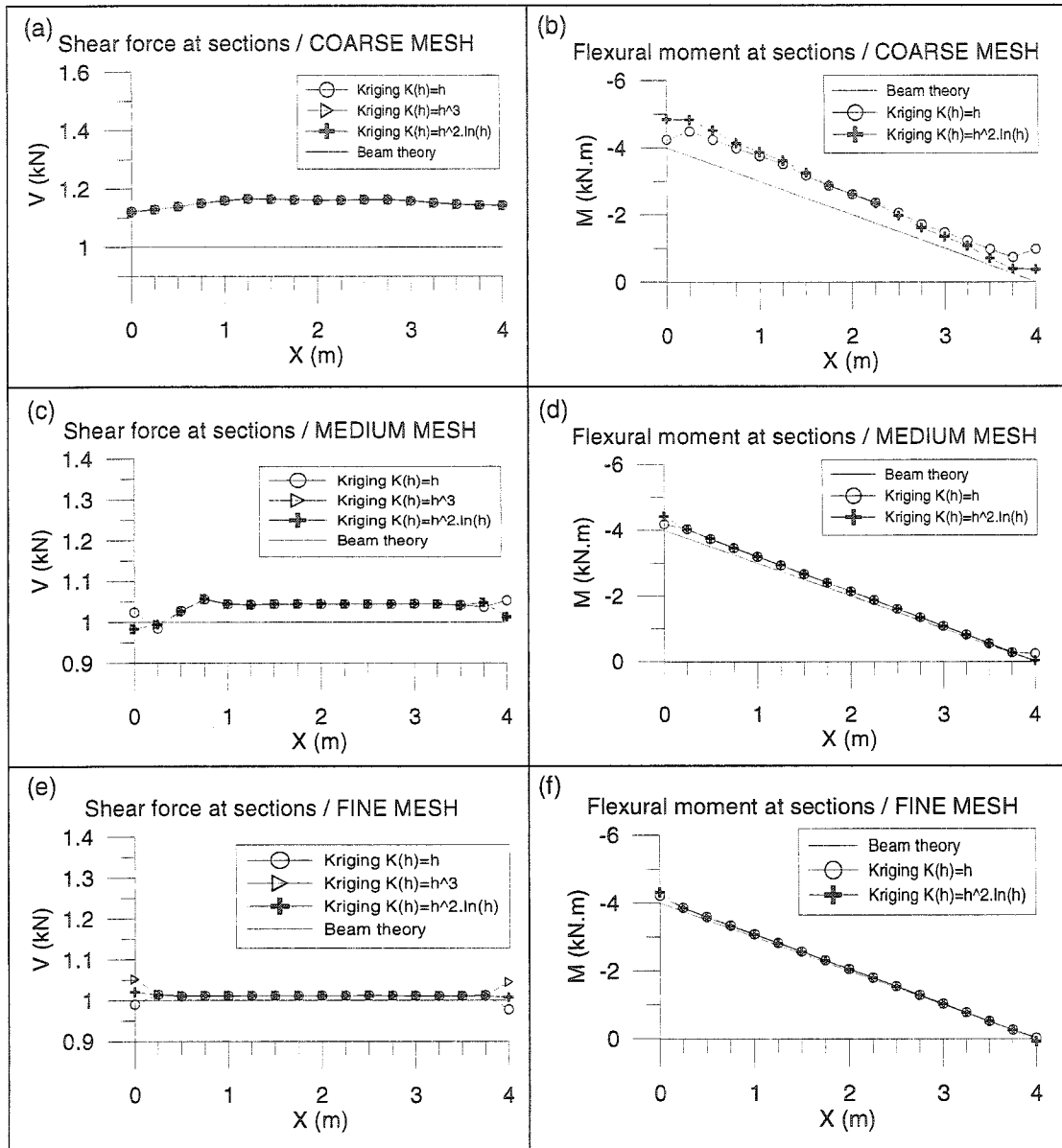


Figure 3.5.3 Shear force and flexural moment calculations for beam example

Figs. 3.5.3 (a), (c) and (e) indicate that there is no significant difference between the shear forces computed with the three generalized covariance models. As reported in reference [7], the cubic generalized covariance is the least reliable model, therefore the moment resultants for this example are calculated with the linear and logarithmic

models. As illustrated in Figs. 3.5.3 (a), (b), the resultants obtained for the coarse mesh are in relatively good agreement with beam theory. At both ends of the beam, small fluctuations in the computed shear force and flexural moment are observed. This is caused by the use of the dual kriging method to evaluate stress tensors outside of the geometrical domain defined by the Gauss points. The errors observed for calculations made at sections within the beam can be caused by a combination of the following effects : (i) unprecise observed stresses, (ii) insufficient number of observations to correctly capture the stress variations, and (iii) evaluation of the kriging functions outside the domain of the observations. With the finer meshes, the proposed method yields excellent results (see Figs. 3.5.3 (c),(d),(e) and (f)) because the stresses are more precise due to the larger number of elements. Even at the ends of the beam, the solution improves as the mesh is refined because the stress values are closer to the actual Cartesian coordinates of the parametric surface defined. For calculation of the shear and moment resultants with the fine mesh, the maximum error is 5% at the fixed end whereas the use of a coarse mesh can generate values in error of 20 %.

Fig. 3.5.4 shows the shear and normal stress distributions calculated on the section located at the middle span for a linear drift and a linear generalized covariance model (equivalent to a 3D spline interpolation).

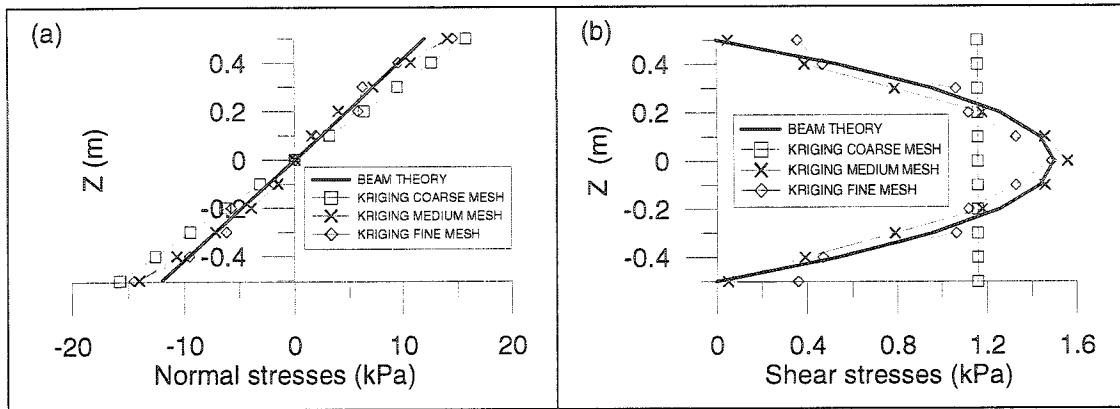


Figure 3.5.4 Shear and normal stress distributions for beam example

Fig. 3.5.4 (a) shows that the kriging calculations done with all three meshes can reasonably represent the linear flexural stress distribution of the cantilever beam. On the other hand, the parabolic shear stress distribution represented in Fig. 3.5.4 (b) is not well represented with the proposed interpolation scheme defined by the sparse data points of the coarse mesh (only two observation points over the height of the beam). Despite variations caused by the oscillatory nature of the kriging interpolation functions, the shear stress distribution is better captured when more observations are available over the height of the beam.

3.6 Application 2 : Constant thickness and radius arch structure

To further validate the proposed method and demonstrate its applicability in the safety analysis of concrete arch dams, a constant thickness and radius arch structure is analyzed. The objective is to compare the normal forces N and flexural moments M at the abutments and the crown section with the elastic arch theory values given in [15]. As illustrated in Fig. 3.6.1, the arch rests on symmetrical abutments with respect to the crown section. The centerline radial distance is 110 m, the section is square with sides measuring 20 m and the angular opening is 80 degrees. Elastic modulus is 36 300 MPa and Poisson's ratio is set to zero to favour maximal correlation with the hypotheses of elastic arch theory.

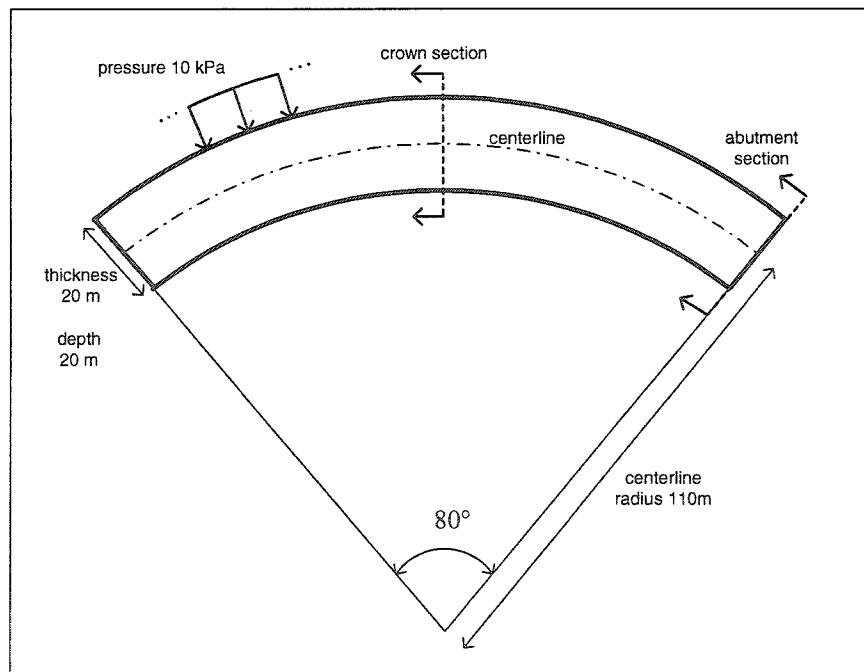


Figure 3.6.1 Problem definition for arch example

Three mesh sizes with increasing refinement are considered to evaluate the required density of observations and convergence behavior for this problem. The proposed kriging method described in Fig. 3.4.1 is tested with stresses taken at (i) Gauss point coordinates, and (ii) averaged at nodal coordinates. Linear and logarithmic generalized covariance models are compared to determine which has the best convergence behavior. Considering that a defined influence zone can reduce considerably the size of the kriging matrix and the computational time required to invert it, the required number of data points for the interpolation is also investigated to determine if the proposed stress integration scheme can be valid when the stress state is known only in the vicinity of the surface analyzed. Table 3.6.1 reports the force and moment resultants obtained at the abutment and crown sections. Results calculated with the stress output of three different meshes are shown. Solid 20-nodes brick elements are used for the FE calculations with ANSYS. Fig. 3.6.2 shows that the coarse mesh is defined with 9 elements (1 element for the cross-section), the medium mesh with 64 elements (2x2 elements for the cross-section), and the fine mesh with 544 elements (4x4 elements for the cross-section).

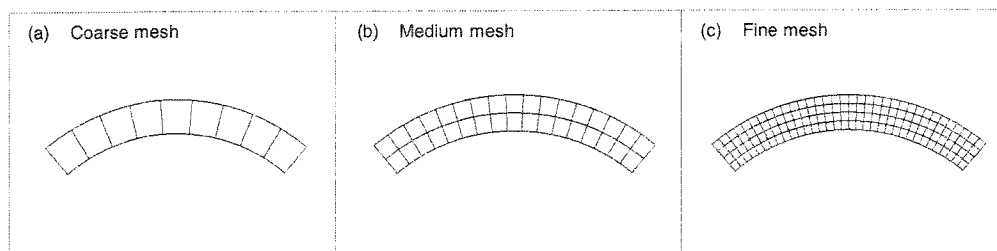


Figure 3.6.2 Mesh selection for arch example

Tableau 3.6.1 Results for 3D arch model

(a) STRESSES TAKEN AT GAUSS POINTS				
	ABUTMENT SECTION		CROWN SECTION	
	N (kN)	M (kN.m)	N (kN)	M (kN.m)
Elastic arch theory	-18 508	-122 000	-16 830	62 528
Coarse mesh (9 el.)				
Kriging $K(h) = h$	-18 991 (3 %)	-110 133 (-11%)	-16 445 (-2%)	68 947 (9%)
Kriging $K(h) = h^2 \cdot \ln(h)$	-19 346 (4%)	-150 052 (19%)	-16 442 (-2%)	76 395 (18%)
Medium mesh (64 el.)				
Kriging $K(h) = h$	-18 643 (1 %)	-129 347 (6%)	-16 584 (-1%)	63 555 (2%)
Kriging $K(h) = h^2 \cdot \ln(h)$	-18 610 (-1%)	-144 219 (15%)	-16 579 (-2%)	64 098 (2%)
Fine mesh (544 el.)				
Kriging $K(h) = h$	-18 377 (-1%)	-133 368 (9%)	-16 600 (-1%)	61 013 (-2%)
Kriging $K(h) = h^2 \cdot \ln(h)$	-18 286 (-1%)	-138 792 (12%)	-16 603 (-1%)	60 975 (-3%)
(b) STRESSES TAKEN AT NODES				
	ABUTMENT SECTION		CROWN SECTION	
	N (kN)	M (kN.m)	N (kN)	M (kN.m)
Coarse mesh (9 el.)				
Kriging $K(h) = h$	-19 175 (3%)	-123 319 (1%)	-16 315 (-3%)	61 329 (-2%)
Kriging $K(h) = h^2 \cdot \ln(h)$	-19 980 (7%)	-135 107 (10%)	-15 315 (-10%)	67 087 (7%)
Medium mesh (64 el.)				
Kriging $K(h) = h$	-18 540 (0%)	-138 089 (12%)	-16 354 (-3%)	64 879 (4%)
Kriging $K(h) = h^2 \cdot \ln(h)$	-18 457 (0%)	-139 698 (13%)	-16 477 (-2%)	64 209 (3%)
Fine mesh (544 el.)				
Kriging $K(h) = h$	-18 384 (-1%)	-133 174 (8%)	-16 323 (-3%)	63 141 (1%)
Kriging $K(h) = h^2 \cdot \ln(h)$	-18 396 (-1%)	-130 505 (7%)	-16 492 (-2%)	61 227 (-2%)

To correctly interpret the results obtained in Table 3.6.1, acknowledging the possible error sources is very important. The first source of error is related to the stresses retrieved from the FE solver. Indeed, the FE discretization may not be sufficiently refined to yield accurate stresses. A second source of error is related to the kriging interpolation. Even though the interpolation model provides continuous stresses that passes through the seed point values, its behavior between data points is directly dependent on the chosen drift and generalized covariance. Selection of a drift model that is not well-suited for the given problem can be the cause of a less accurate interpolation (e.g. selecting a constant drift and a linear generalized covariance when

modeling the parabolic shear distribution in the beam analyzed previously). Another source of error is identified by inspecting the triangular meshing of the defined parametric surface. If the discretization is too coarse, the stress distribution may not be captured correctly. These sources of error are additive and must be considered to make valid conclusions regarding the performance of the proposed method.

The proposed kriging method can generate plausible results even if the considered FE mesh is coarse. For the normal force calculation, N , at the crown section and the abutment section with the coarse mesh, the difference between elastic arch theory and the computed values can reach 10 % if logarithmic generalized covariance is used along with stresses taken at the nodes (averaged by the FE solver). If the stresses are taken at the FE Gauss integration points, all meshing schemes yield good results with errors not exceeding 4 %. For the moment resultants, M , values calculated with stresses taken at FE Gauss integration points with the coarse model are off by up to 19 % for the abutment section and 18 % for the crown section. Moment values slightly improve if the stresses are taken at nodal coordinates. The maximal error in that case is confined under 10%. With the medium and fine FE meshes, moments and normal forces at the crown section are in very good accordance with the elastic arch theory with a maximum error of 4 %. For the abutment section, the moment resultants obtained with these two meshing schemes are less precise but still generate errors confined under 15 %.

From Table 3.6.1, it is obvious that excellent results can be obtained with the proposed kriging method if the FE model is capable of providing accurate stresses in sufficient quantity. Moreover, the location of the observed stresses must also be taken into consideration because the dual kriging interpolation is valid only if the interpolated values are located within the geometrical domain defined by the data points. In the case where stresses are taken at FE Gauss integration points, the calculation of the normal and moment resultants at the abutment section suffer from being outside the domain of the observed stresses. This explains the difference in precision between moments calculated at the abutment section and the crown section (where observed stresses are located on each side of the central plane). To manage this error, moments at the abutment section can be calculated with the averaged nodal stresses, thus yielding slightly more accurate results. Finally, considering all results presented in Table 3.6.1, it would seem that the generalized covariance models used are equivalent. When both models approximately converge to the same values, it can be stated that the meshing scheme is sufficiently refined to yield good resultant forces with the proposed kriging method.

Table 3.6.2 shows that satisfying results can be obtained even if only a fraction of the total stress field is used for the kriging interpolation. Force and moment resultants are once again computed at the abutment and crown sections with the proposed method. The FE Gauss integration point stresses are used as the kriging data points. Because the integration point stresses are calculated by the FE solver and reported for each

element, the influence zone is defined by a fraction of the total number of elements in the FE model.

Tableau 3.6.2 Force resultants obtained with variable number of observations

(a) ALL ELEMENTS USED				
	ABUTMENT SECTION		CROWN SECTION	
	N (kN)	M (kN.m)	N (kN)	M (kN.m)
Coarse mesh (9 el.)				
Kriging K(h) = h	-18 991	-110 133	-16 445	68 947
Medium mesh (64 el.)				
Kriging K(h) = h	-18 643	-129 347	-16 584	63 555
Fine mesh (544 el.)				
Kriging K(h) = h	-18 377	-133 368	-16 600	61 013
(b) 1/2 OF TOTAL ELEMENTS USED				
	ABUTMENT SECTION		CROWN SECTION	
	N (kN)	M (kN.m)	N (kN)	M (kN.m)
Coarse mesh (9 el.)				
Kriging K(h) = h	-19 227 (1%)	-110 587 (0%)	-16 726 (2%)	70 378 (2%)
Medium mesh (64 el.)				
Kriging K(h) = h	-18 718 (0%)	-130 619 (1%)	-16 607 (0%)	63 897 (1%)
Fine mesh (544 el.)				
Kriging K(h) = h	-19 112 (4%)	-130 622 (-2%)	-16 980 (2%)	58 060 (-5%)
(c) 1/4 OF TOTAL ELEMENTS USED				
	ABUTMENT SECTION		CROWN SECTION	
	N (kN)	M (kN.m)	N (kN)	M (kN.m)
Coarse mesh (9 el.)				
Kriging K(h) = h	-19 562 (3%)	-118 908 (7%)	-16 754 (2%)	73 262 (6%)
Medium mesh (64 el.)				
Kriging K(h) = h	-18 799 (1%)	-134 785 (4%)	-16 609 (0%)	64 103 (1%)
Fine mesh (544 el.)				
Kriging K(h) = h	-19 148 (4%)	-131 417 (-1%)	-16 980 (2%)	58 072 (-5%)

The shaded zones in Fig. 3.6.3 represent the different influence zones. Three cases are considered in which : (i) all elements are used, (ii) half of the total number of elements are used, and (iii) a quarter of the total number of elements are used. Calculations

involving all elements cover areas 1, 2 and 3 whereas calculations involving half the total number of elements cover areas 2 and 3. When a quarter of the total number of elements is used, only area 3 is considered for the interpolation.

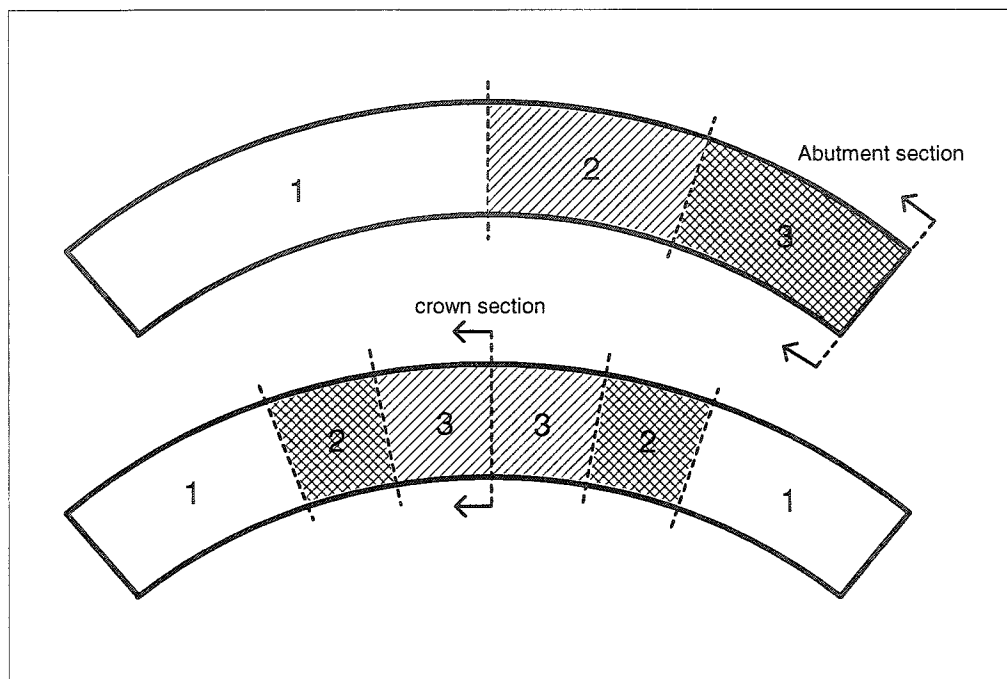


Figure 3.6.3 Influence zones for calculations at crown and abutment sections

The error is defined by the difference between the solution obtained with all elements and the solution obtained with a fraction of all elements and is reported in brackets. In all considered cases, the difference is small and it is reasonable to believe that the proposed method yields good results if a sufficiently large influence zone is used for the interpolation model.

3.7 Application 3 : Talvacchia arch dam

A coarse mesh of the 77 meters high Talvacchia arch Dam (Italy) provided by the 1st ICOLD benchmark workshop on numerical analysis of large dams [12] is used to demonstrate the applicability of the proposed kriging method on complex concrete structures. Fig. 3.7.1 shows the dam-foundation system analyzed.

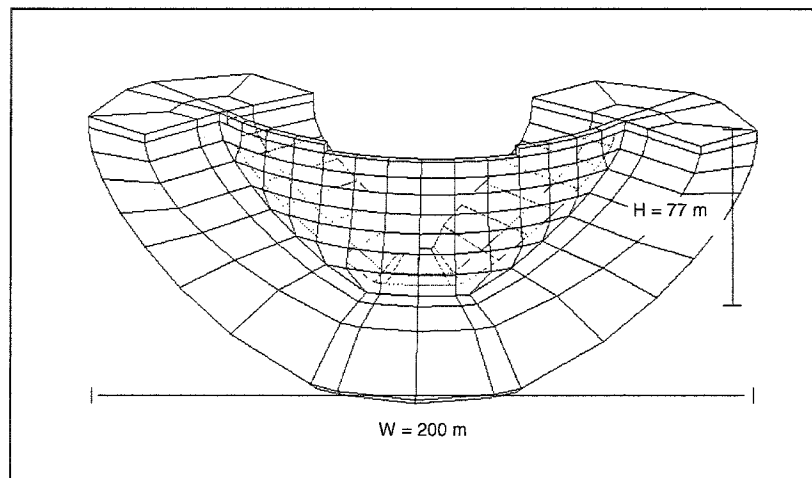


Figure 3.7.1 Dam-foundation system for Talvacchia Dam

Hydrostatic pressure on the dam is considered along with the concrete dead weight. The construction phases are not considered in the calculation of the dead weight because it is not of primary importance herein. The proposed method is based on user-provided stress fields, thus insuring full liberty for the user to specify the FE geometry, loading scheme and analysis assumptions for a given problem. Realistic results are therefore only dependent on the quality and quantity of observed stress data points. Moreover, the dam body being modeled with only one 20 node brick element over the

arch thickness (two stress tensor observations available in the radial direction), approximate results are expected.

The force and moment resultants are calculated for a curved planar parametric surface representing a concrete lift joint. Fig. 3.7.2 shows the parametric surface considered within the dam mesh. Composed of four structural blocks and an equal number of user-defined local axis systems, the lift joint at the elevation shown is analyzed with the proposed kriging method.

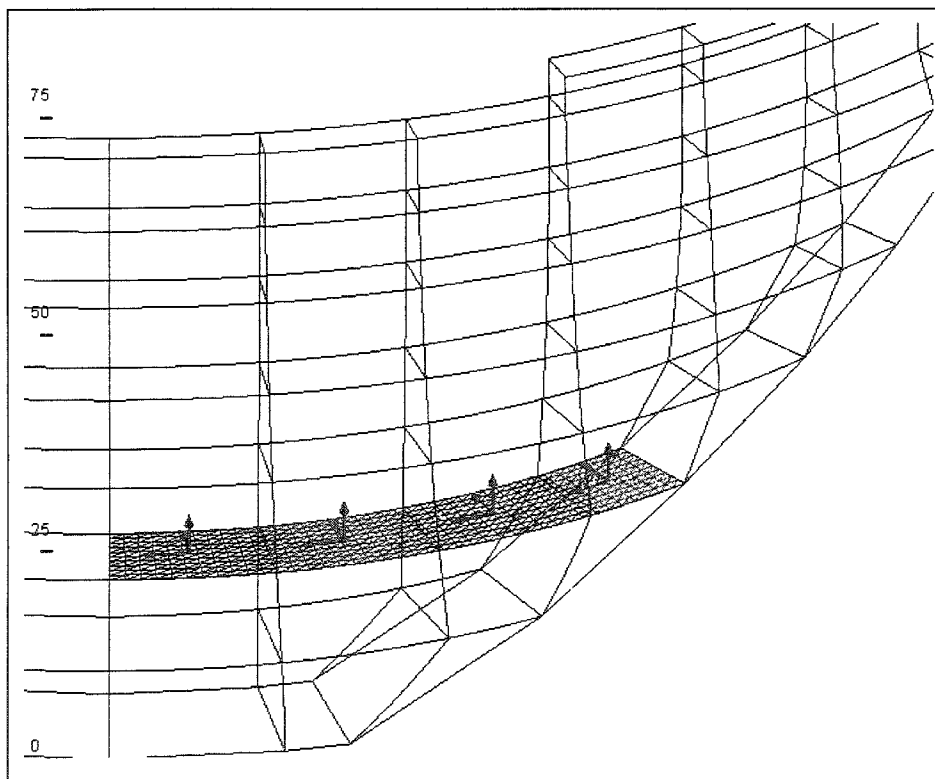


Figure 3.7.2 Concrete lift joint analyzed

Schematic representation of the structural blocks and local axis systems is presented in Fig. 3.7.3. Because of the dam's curved upstream and downstream faces, the parametric surface has to be defined in the arch direction (arch direction is perpendicular to radial direction) with a linear drift and a cubic generalized covariance in order to precisely match the curved lift joint geometry.

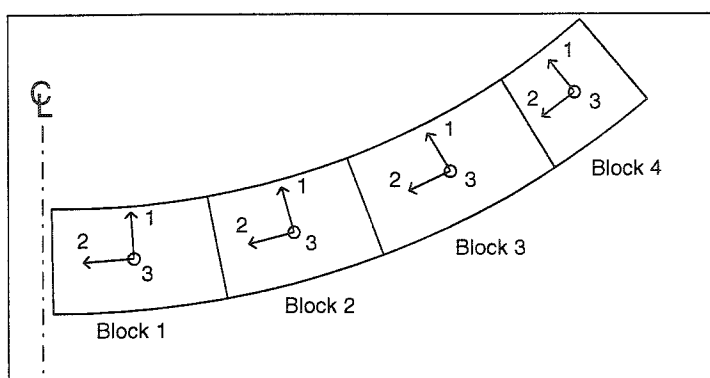


Figure 3.7.3 Structural blocks definition for analysis of lift joint

Table 3.7.1 reports for each structural block the normal compressive forces, the arch direction and radial direction driving shear forces, the total driving shear forces and the overturning moments about the arch direction. Driving shear resultants and overturning moments are reported in Figs. 3.7.4 and 3.7.5.

Tableau 3.7.1 Force resultants computed on concrete lift joint

BLOCK #	N (kN)	V11 (kN)	V22 (kN)	Vtot (kN)	M22 (kN-m)
1	-148 568	8 425	6 568	10 683	-149 547
2	-141 888	11 704	20 879	23 936	-145 635
3	-131 723	23 825	39 593	46 209	-80 037
4	-102 759	23 249	43 950	49 720	9 458

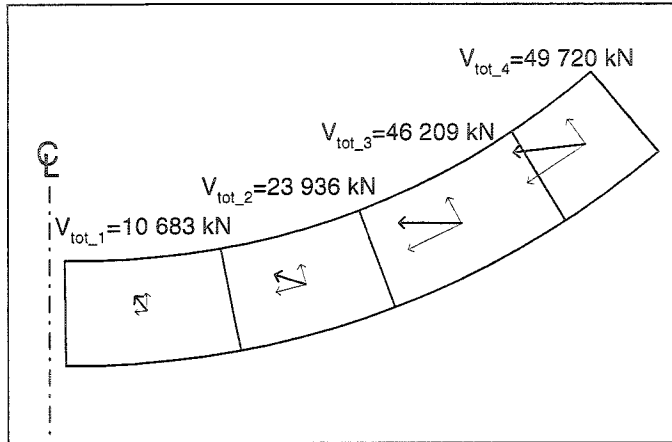


Figure 3.7.4 Driving shear resultants for lift joint analysis

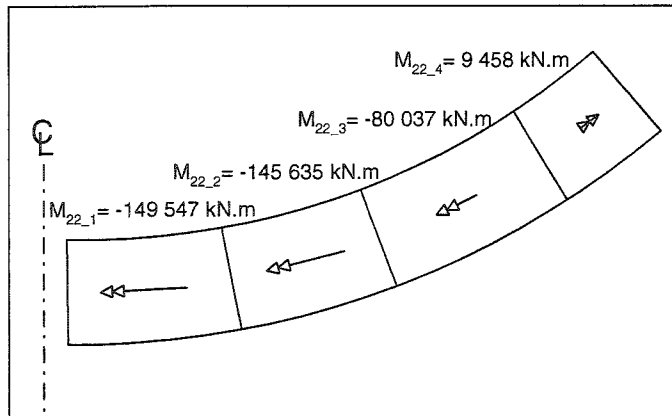


Figure 3.7.5 Overturning moments for lift joint analysis

The force resultants are easily obtained for this complex problem and can be readily used to assess structural stability index, determine the ratio of arch action to cantilever action, etc.

3.8 Conclusions

A new approach for stress integration has been developed and tested for simple and complex FE models. Complications related to the use of the individual FE shape functions are avoided by using a global approach based on the dual kriging interpolation method. As demonstrated previously by [7] and herein, this technique is well-suited for stress tensor manipulation in 3D FE analysis. Its efficiency has been further enhanced for stress integration when combined with an automatic parametric surface definition scheme called parametric kriging. Based on the input of a small number of control points, this method is used to define the planar surfaces on which interpolated stresses are integrated. Because solution of the parametric kriging system yields explicit functions describing the geometry of the surface, generating a triangulated mesh for the Gauss quadrature is trivial. Planar surfaces composed of multiple structural blocks like a concrete lift joint of an arch dam can be manipulated easily for determination of force and moment resultants, leading to structural stability assessment.

The proposed method was firstly validated with a tip-loaded cantilever beam structure. Location and quantity of stress data points, generalized covariance models and interpolation location were investigated. Comparison of the computed resultant forces and moments with beam theory showed that excellent correlation can be obtained with a sufficiently refined mesh. The different generalized covariance models proved to be

approximately equivalent, especially when the mesh is refined and density of stress data points increased.

An arch of constant radius and depth was then used to further validate the approach. The resultant forces and moments computed at the crown and abutment sections were compared to elastic arch theory values. Mesh refinement, location of stress data points and quantity of stress data points were investigated. It was shown that the proposed method can generate good results when the user-provided stress field is of acceptable density. For problems involving bending or non-linear distribution of stresses, calculation of force and moment resultants with the proposed method requires more than one element over the depth of the structure. Extrapolation of stresses to coordinates located outside the geometrical domain of the stress data points proved to be an important source of error. Possible solutions to this problem include the use of nodal stresses or, more effectively, mesh refinement. The amount of data points needed for a correct estimation of force resultants was also investigated. It has been shown that a small influence zone including a few elements on each side of the surface considered is often sufficient. Thus, the matrix system used for interpolation could be fairly small. For large FE models of concrete dams, stresses can be taken at selected locations and imported to the post-processor. Using a LU decomposition scheme for matrix inversion, solution of the dual kriging system is very fast (under 5 minutes) on a 1GHz microcomputer for a number of stress data points inferior to 2000.

The approach proposed here is simple and straightforward. It constitutes a valid alternative to the strenuous stress integration scheme based on local FE shape functions and Delaunay triangulation on intersecting surfaces.

3.9 References

- [1] G. S. Lund, Using computer modeling to evaluate the safety of concrete dams, Hydro Review, 2004, Vol. XXIII, No. 6, pp.42-49
- [2] M.M. Farias, D.J. Naylor, Safety analysis using finite elements, Computers and Geotechnics, 1998, Vol. 22, No. 2, pp. 165-181
- [3] K. Ho-Le, Finite element mesh generation methods: a review and classification, Comput.-Aided Des. 1988, Vol. 20, pp. 27-38
- [4] F. Aurenhammer, Voronoi diagrams – a survey of a fundamental geometric data structure. ACM Comput. Surv., 1991, Vol. 23, pp. 345-405
- [5] E. Hinton, J.S. Campbell, Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1974, Vol. 8, pp. 461-480
- [6] G. Matheron, The intrinsic random functions and their applications, Adv. Appl. Prob. 5, 1973, pp. 439-468
- [7] C. Poirier, R. Tinawi, Finite element stress tensor fields interpolation and manipulation using 3D dual kriging, Computers & Structures, 1991, Vol. 40, No. 2, pp. 211-222

- [8] F. Trochu, Geometric algorithms for the intersection of curves and surfaces, Computers & Graphics, 1995, Vol. 19, No. 3, pp. 391-403
- [9] J. Swanson, ANSYS – Engineering analysis system, PA, U.S.A., 1989
- [10] S. S. Bhattacharjee, FRAC_DAM – A finite element computer program to predict the FRACture and DAMage response of concrete structures, Report No. EPM/GCS-1996-03, Department of Civil Engineering, École Polytechnique de Montréal, Canada, 1996
- [11] S. S. Bhattacharjee, P. Léger, Fracture response of gravity dams due to rise of reservoir elevation, ASCE Journal of Structural Engineering, 1995, Vol. 121, No. 9, pp. 1298-1305
- [12] International Commission on Large Dams (ICOLD), Proceedings of the First Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams, Bergamo, Italy, May 28-29, 1991
- [13] D.G. Krige, A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand, J. Chem. Metall. Min. Soc. S. Afr., 52, 1951, pp. 119-139
- [14] F. Trochu, A contouring program based on dual kriging interpolation, Engineering with Computers, 1993, No. 9, pp. 160-177
- [15] R.P. Wengler, C.H. Yeh, Arch Dams, in: V.J. Zipparo and H. Hansen, ed., Handbook of Applied Hydraulics, McGraw-Hill, Fourth Edition, 1992, Section 10, pp. 10.1-10.45

CHAPITRE 4 : DISCUSSION ET CONCLUSION

4.1 Sommaire

Une nouvelle approche pour l'intégration des contraintes EF a été développée, validée avec des exemples simples et testée avec des structures plus complexes. Tel que rapporté par Poirier et Tinawi (1991) et dans ce texte, la méthode d'interpolation par krigeage dual est applicable à la manipulation des champs de contraintes 2D/3D issus de la MEF. Il a aussi été démontré que le krigeage dual est un outil efficace pour la définition de surfaces paramétriques planaires. Avec un nombre restreint de points de contrôle définis par l'utilisateur, il est possible d'obtenir des fonctions explicites qui décrivent la relation entre les coordonnées Cartésiennes d'un point quelconque sur la surface et ses coordonnées paramétriques. La génération d'un maillage régulier composé d'éléments triangulaires est alors triviale. Ainsi, la combinaison du krigeage *géométrique* et du krigeage *paramétrique* des surfaces permet de calculer les forces et moments résultants avec une approche globale, sans utiliser les fonctions de forme EF. Des surfaces de rupture complexes composées de plusieurs plots avec systèmes d'axes locaux peuvent être définies et analysées avec la méthode proposée. Les forces et moments résultants récupérés peuvent alors être utilisés pour l'évaluation de la stabilité structurale de l'ouvrage.

Il a de plus été démontré qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser toutes les observations de contraintes tirées du modèle EF. En effet, en utilisant une quantité raisonnable

d'observations, les résultats obtenus sont quasi équivalents. La solution du système matriciel est donc rapide et permet d'obtenir les fonctions krigées dans les meilleurs délais.

L'approche proposée a été à priori validée avec un modèle de poutre en porte-à-faux chargée en son extrémité. La comparaison entre les forces et moments résultants calculés et les valeurs issues de la théorie de poutre a montré une excellente corrélation lorsque le maillage était suffisamment fin. Il a aussi été constaté que les différents modèles de covariance généralisée sont approximativement équivalents, particulièrement lorsque le maillage est raffiné et génère un nombre plus grand d'observations de contraintes.

La puissance de la méthode proposée est cependant appréciée davantage pour les structures qui génèrent des distributions de contraintes non-linéaires sur les sections de contrôle. Ainsi, les forces et moments résultants agissant aux culées et à la clé d'un arc épais encastré ont été calculés et comparés à la théorie des arcs élastiques. Des résultats concluants ont été obtenus pour les modèles contenant un nombre raisonnable d'éléments (modèles à raffinement moyen et fin).

Quand l'analyste est confronté à un problème particulier comme un barrage-voûte à courbure complexe, l'analyse de convergence devient nécessaire pour obtenir un

niveau minimal de confiance dans les calculs effectués. À titre de démonstration, un maillage très grossier du barrage-voûte de Talvacchia (ICOLD (1991)) a été utilisé pour l'analyse d'une levée de bétonnage composée de plusieurs plots avec systèmes d'axes locaux. Avec un raffinement progressif du maillage, il serait évidemment possible de déterminer les valeurs précises des forces et moments résultants agissant sur ces plots.

La méthode présentée dans ce mémoire pour le calcul des efforts résultants sur des surfaces planaires coupant un modèle EF est simple et facile à implémenter. Elle constitue une alternative valable au laborieux processus d'intégration des contraintes fondé sur l'utilisation des fonctions de forme locales EF.

Un logiciel incorporant l'approche proposée a été développé pour les besoins de ce mémoire. Plusieurs fonctionnalités typiques des post-processeurs modernes y ont été programmées. Le logiciel est en mesure de traiter les problèmes 2D aussi bien que les problèmes 3D. Une base de données est construite à partir d'un fichier contenant la géométrie du modèle et d'un fichier contenant les contraintes exprimées pour chaque élément. Le système de krigeage dual est ensuite posé et solutionné. Les fonctions krigées sont alors stockées et utilisées pour l'évaluation des contraintes sur des surfaces définies par l'utilisateur.

4.2 Discussion et perspectives d'application

La méthode proposée peut être utilisée pour le calcul des forces et moments résultants pour n'importe quel modèle EF. Dans la mesure où un champ de contraintes assez précis et contenant assez de points d'observations est disponible, la méthode proposée peut être appliquée avec confiance. Pour obtenir des résultats réalistes dans l'analyse de barrages en béton, il importe de considérer les phases de construction et de traiter avec soin l'application du poids propre de l'ouvrage. De plus, la prise en compte des sous-pressions qui peuvent agir dans les fissures est souhaitable.

Il serait aussi intéressant de calculer les résultantes de forces à l'interface béton-rocher pour un modèle de barrage-voûte avec fondation sollicité par une pression hydrostatique et de comparer ces résultantes à la somme des réactions tirées d'un deuxième maillage EF sollicité par le même chargement et ne contenant que la voûte encastrée. Ce calcul donnerait en effet une indication sur la précision du maillage et sa capacité à représenter fidèlement les contraintes internes et le transfert des forces de la voûte à la fondation.

RÉFÉRENCES

AURENHAMMER, F., Voronoi diagrams – a survey of a fundamental geometric data structure. ACM Comput. Surv., 1991, Vol. 23, pp. 345-405

AZMI, M. et PAULTRE, P., Three-dimensional analysis of concrete dams including contraction joint non-linearity, Engineering Structures, 2002, No. 24, pp. 757-771

BHATTACHARJEE, S.S., FRAC_DAM – A finite element computer program to predict the FRACture and DAMage response of concrete structures, Report No. EPM/GCS-1996-03, Department of Civil Engineering, École Polytechnique de Montréal, Canada, 1996

BHATTACHARJEE, S.S. et LÉGER, P., Fracture response of gravity dams due to rise of reservoir elevation, Journal of Structural Engineering, 1995, Vol. 121, No. 9, pp. 1298-1305

FARIAS, M.M. et NAYLOR, D.J., Safety analysis using finite elements, Computers and Geotechnics, 1998, Vol. 22, No. 2, pp. 165-181

HINTON, E. et CAMPBELL, J.S., Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1974, Vol. 8, pp. 461-480

HO-LE, K., Finite element mesh generation methods: a review and classification, Comput.-Aided Des. 1988, Vol. 20, pp. 27-38

International Commission on Large Dams (ICOLD), Proceedings of the First Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams, Bergamo, Italy, May 28-29, 1991

KRIGE, D.G., A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand, J. Chem. Metall. Min. Soc. S. Afr., 52, 1951, pp. 119-139

LOFTI, V. et ESPANDAR, R., Seismic analysis of concrete arch dams by combined discrete crack and non-orthogonal smeared crack technique, Engineering Structures, 2004, No. 26, pp. 27-37

LUND, G.S., Using computer modeling to evaluate the safety of concrete dams, Hydro Review, 2004, Vol. XXIII, No. 6, pp.42-49

MATHERON, G., The intrinsic random functions and their applications, Adv. Appl. Prob. 5, 1973, pp. 439-468

NIELSEN, M.P., Limit analysis and concrete plasticity, 2nd Edition, CRC Press, 1999, USA

PHAN, A.V. et TROCHU, F., Application of dual kriging to structural shape optimization based on the boundary contour method, Archive of Applied Mechanics, 1998, N0. 68, pp. 539-551

POIRIER, C. et TINAWI, R., Finite element stress tensor fields interpolation and manipulation using 3D dual kriging, Computers & Structures, 1991, Vol. 40, No. 2, pp. 211-222

SALVODI, M., Rapport interne, 2002, Coyne et Béllier, Lyon, France, disponible sur <http://librapport.org/fichiers/documents/104/document.pdf> (téléchargé le 15/11/04)

SWANSON, J., ANSYS – Engineering Analysis System, PA, U.S.A., 1989

TROCHU, F., A contouring program based on dual kriging interpolation, Engineering with Computers, 1993, No. 9, pp. 160-177

TROCHU, F., Geometric algorithms for the intersection of curves and surfaces,
Computers & Graphics, 1995, Vol. 19, No. 3, pp. 391-403

WENGLER, R.P. et YEH, C.H., Arch Dams, in: V.J. Zipparo and H. Hansen, ed.,
Handbook of Applied Hydraulics, McGraw-Hill, Fourth Edition, 1992, Section 10,
pp.10.1-10.45

ANNEXE

A.1 Logiciel Post-Dam 2D/3D

La méthode proposée dans l'article a été automatisée dans un logiciel de post-traitement de la MEF : Post-Dam 2D/3D. La fenêtre de présentation du logiciel est rapportée à la figure A.1.1. Les principales fonctionnalités implémentées sont les suivantes :

- Représentation de la géométrie 2D ou 3D du modèle EF ;
- Compatibilité avec le solveur EF commercial ANSYS (Swanson (1989)) et le logiciel universitaire FRAC_DAM (Bhattacharjee (1996));
- Représentation des données scalaires, vectorielles et tensorielles importées du logiciel EF (déplacement et contraintes) ;
- Définition de surfaces paramétriques planaires 2D et 3D ;
- Représentation des données scalaires, vectorielles et tensorielles interpolées sur la surface paramétrique définie par l'utilisateur ;
- Représentation des forces et moments résultants sur la surface paramétrique définie par l'utilisateur ;
- Stockage de l'information (géométrie du modèle et des surfaces, quantités brutes importées, quantités interpolées, quantités intégrées) dans une base de données ;

- Représentation graphique locale du critère de rupture de Mohr-Coulomb (diamètre d'un cercle proportionnel à la contrainte normale, vecteur suivant le rayon proportionnel à la contrainte de cisaillement) ;
- Représentation des directions préférentielles de glissement ;

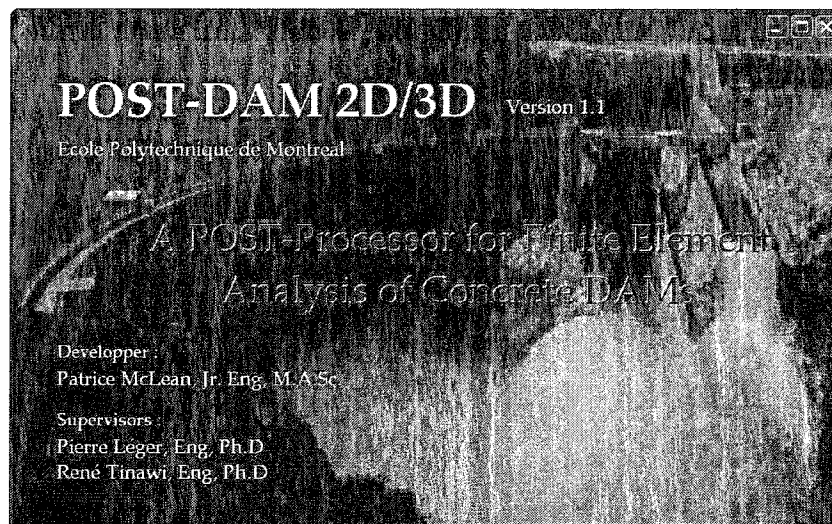


Figure A. 1.1 Logiciel de post-traitement de la MEF : Post-Dam 2D/3D

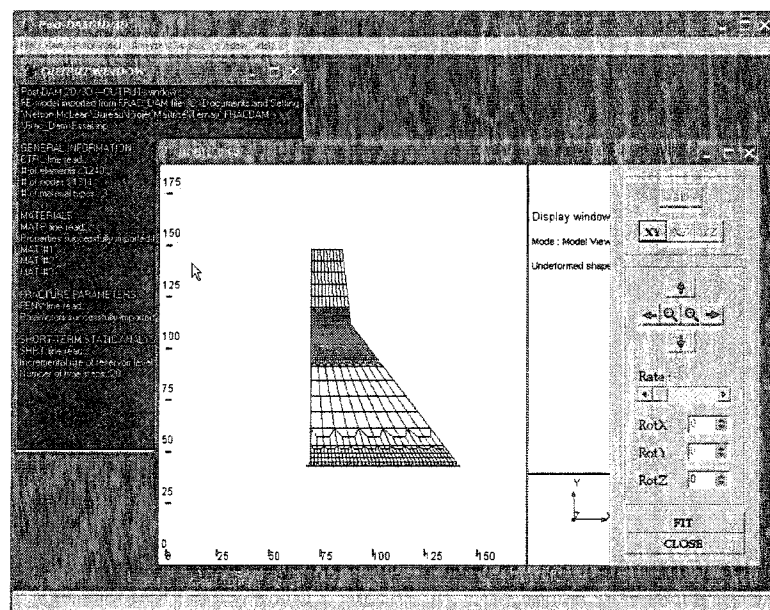


Figure A.1.2 Interface Post-Dam 2D/3D (barrage Koyna 103 m de hauteur)

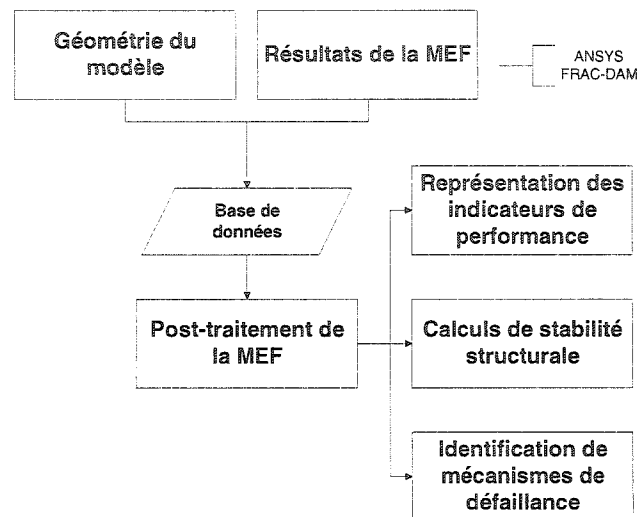


Figure A.1.3 Organigramme pour le Post-traitement de la MEF

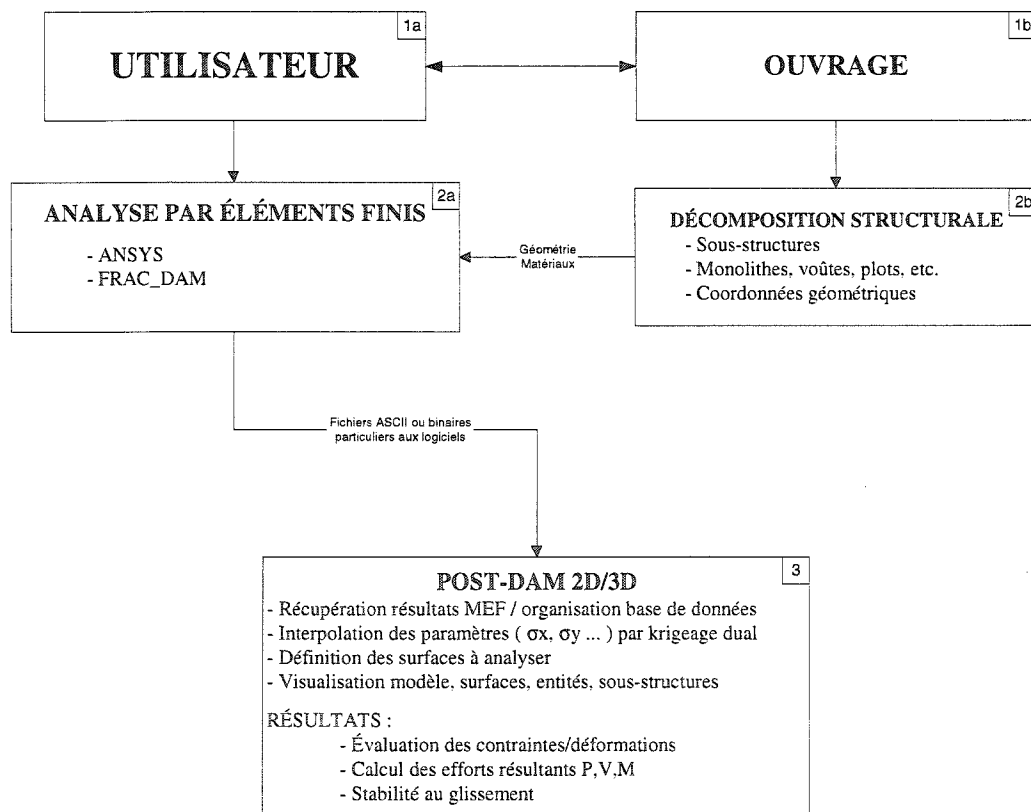


Figure A.1.4 Organigramme Post-Dam 2D/3D

A.2 Application sur le barrage de Koyna

Le comportement sous sollicitation hydrostatique du barrage-poids de Koyna (103 m, Inde) est représenté à l'aide d'une analyse EF en 2D. Le logiciel universitaire FRAC-DAM est utilisé pour les calculs et permet de représenter l'endommagement des éléments avec un modèle constitutif de fissuration diffuse pour le béton. Une analyse incrémentale où le niveau du réservoir est progressivement augmenté et la réponse statique enregistrée à chaque palier de chargement est réalisée. Il sera démontré ici que les résultats d'une telle analyse peuvent être utilisés et interprétés intelligemment avec la méthode proposée. La géométrie du modèle EF utilisé est présentée à la figure A.2.1.

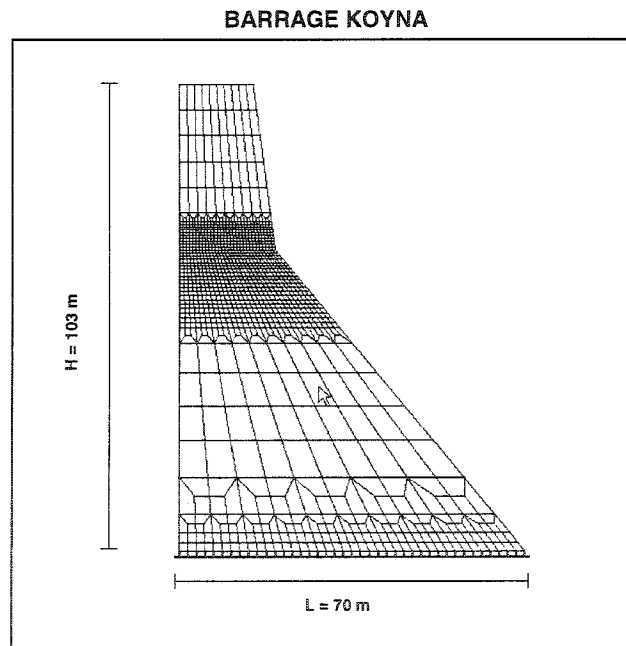


Figure A.2.5 Géométrie du barrage Koyna

L'analyse incrémentale est initialisée avec un niveau du réservoir de 91.75 m et l'incrément est de 1 m. Le logiciel FRAC_DAM effectue alors un calcul statique itératif dans lequel les contraintes principales sont évaluées pour chaque élément. Si des contraintes de traction supérieures à la résistance à la traction du béton (ici égale à 1 MPa) sont identifiées, le logiciel change les propriétés des éléments pour modéliser une condition de fissuration locale et procède à l'itération suivante jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de zones de traction excessives dans le modèle. L'infiltration de l'eau (développement de sous-pression) dans les éléments fissurés n'est pas considérée dans les calculs.

Les résultats de l'analyse incrémentale réalisée avec FRAC_DAM montrent que la fissuration est concentrée à l'interface béton-rocher. La figure A.2.2 illustre la progression de la fissure entre le palier de chargement 1, correspondant à un niveau du réservoir de $H = 91.75$ m, et le palier dix, à $H = 101.75$ m.

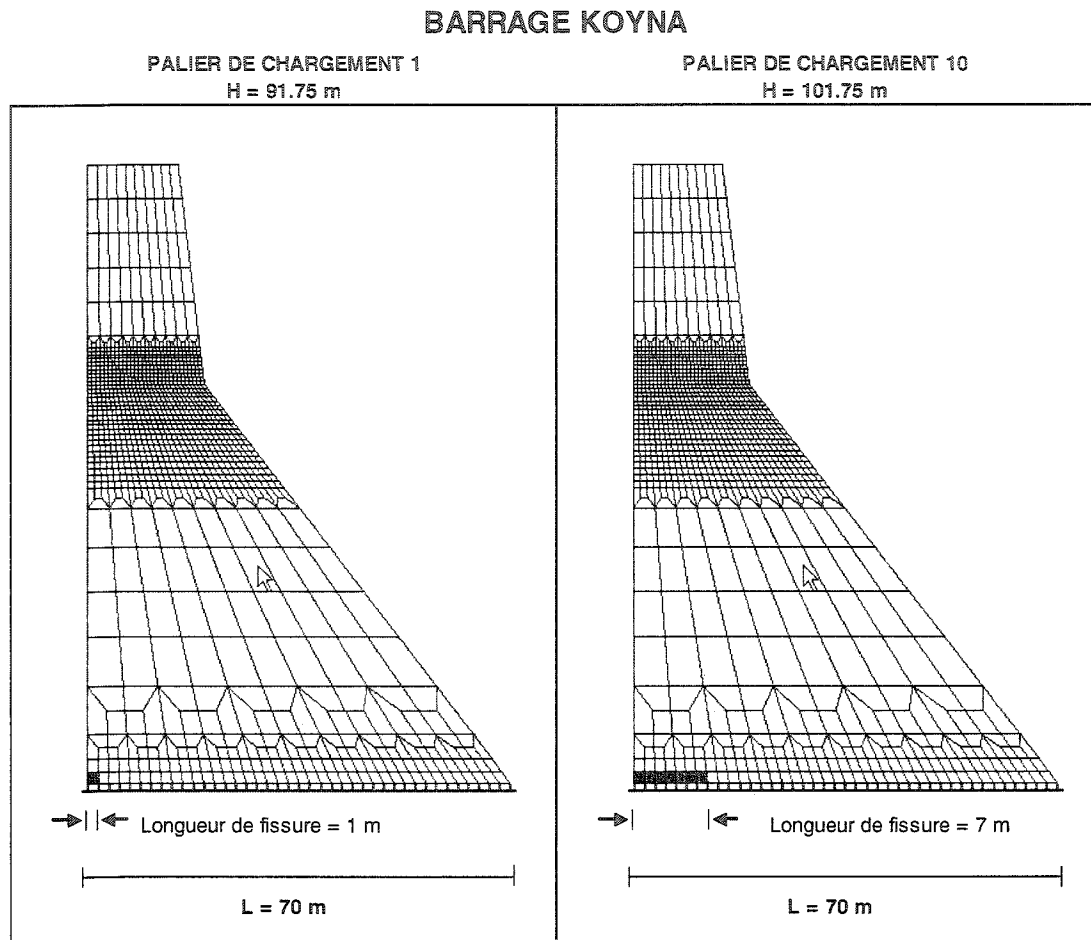


Figure A.2.6 Progression de la fissuration à l'interface béton-rocher

Les contraintes exprimées au centre de gravité des éléments sont exportées vers le logiciel Post-Dam 2D/3D. À priori, quelques représentations graphiques des données brutes importées du solveur EF sont présentées. Les contraintes principales, exprimées de façon scalaire à l'aide de cercles d'intensité et de façon vectorielle, sont illustrées aux figures A.2.3 et A.2.4 pour les deux conditions de chargement mentionnées précédemment.

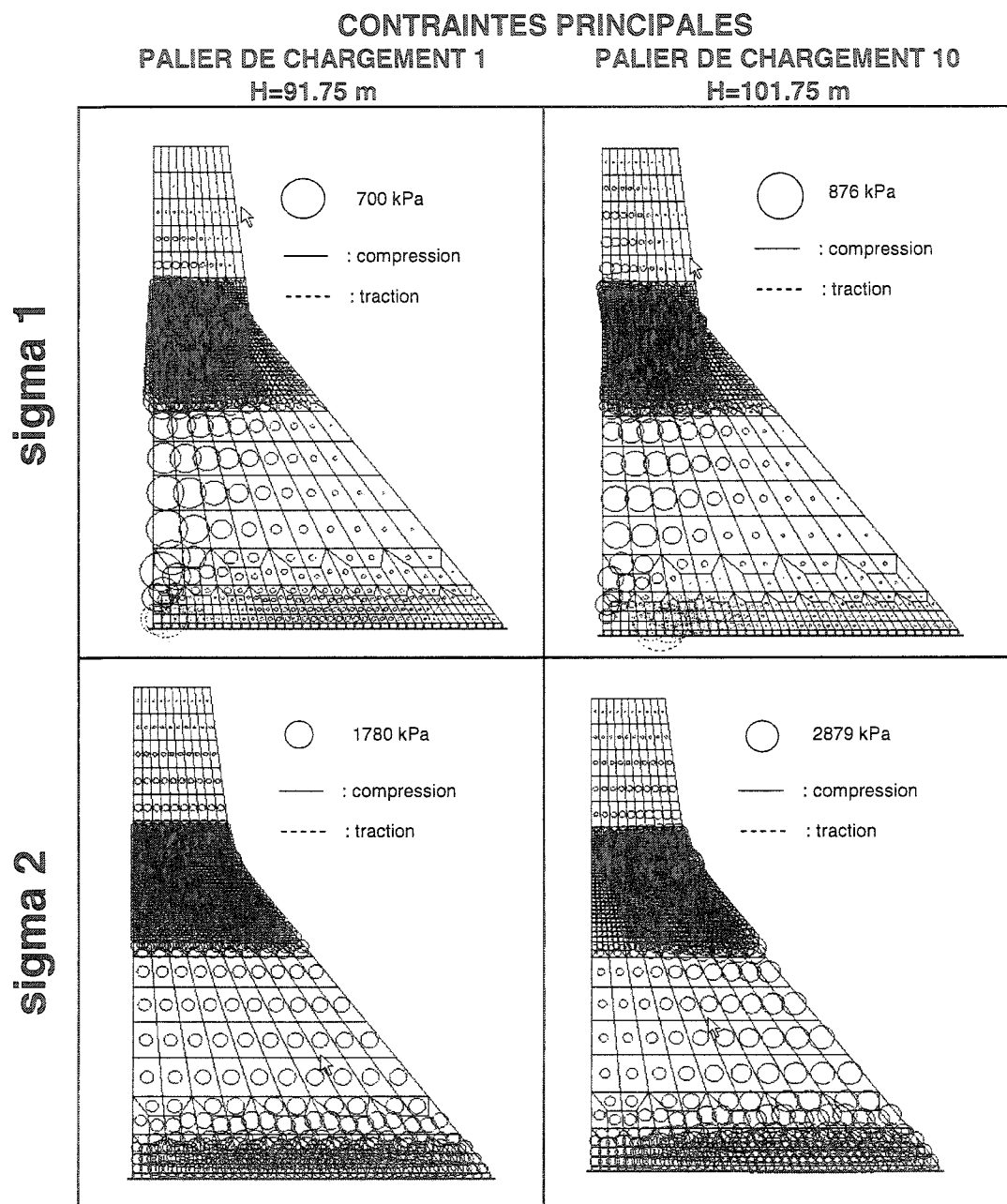


Figure A.2.7 Cercles d'intensité pour contraintes principales

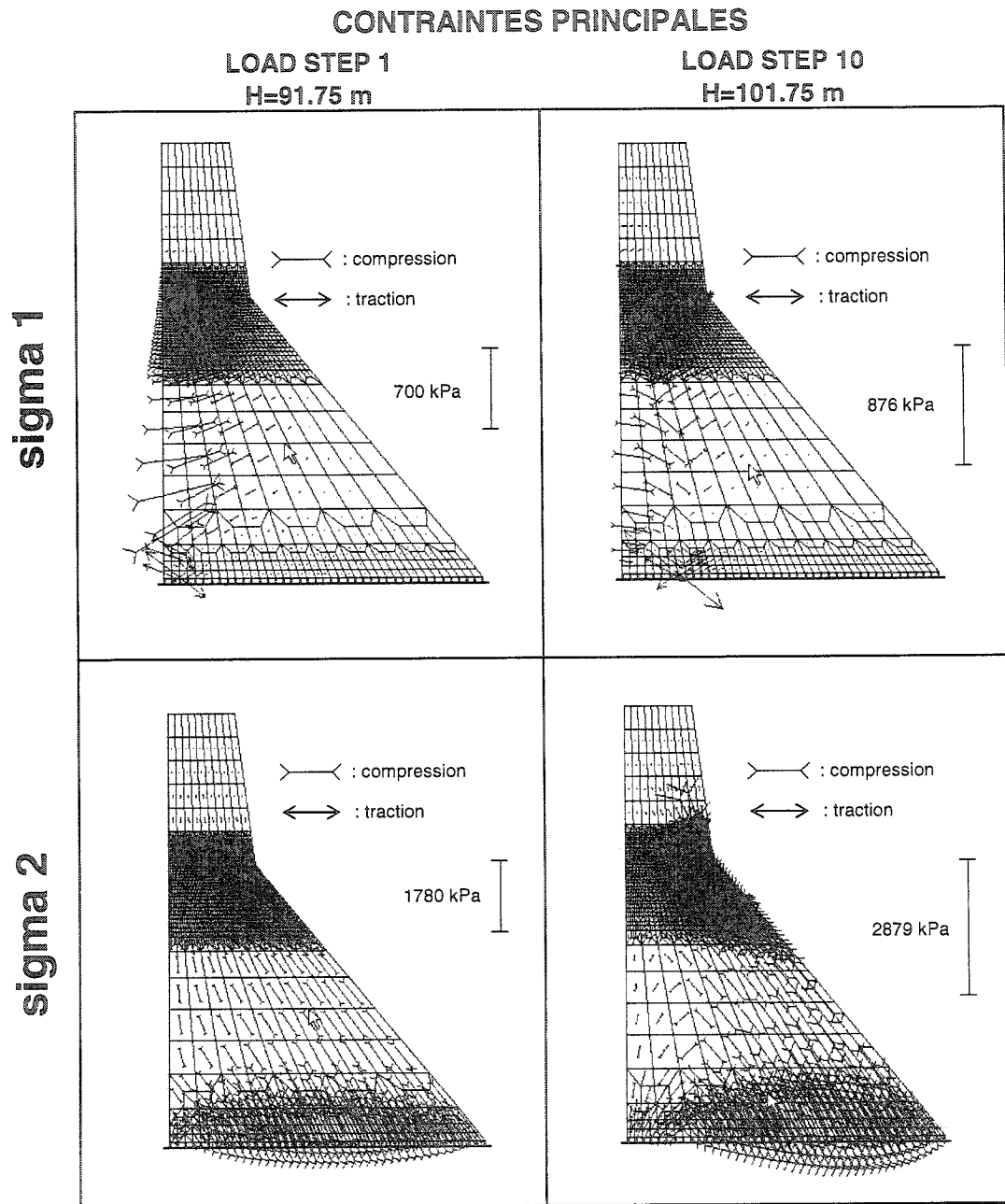


Figure A.2.8 Vecteurs pour contraintes principales

À partir de l'état de contrainte exprimé pour chaque élément du modèle à un palier de chargement donné, il est possible, en supposant un angle de friction pour le béton, de déterminer les directions préférentielles de glissement en utilisant les équations retrouvées dans l'ouvrage de Nielsen. Cette fonctionnalité peut être d'une utilité considérable pour identifier les surfaces de rupture possibles. Pour les besoins de la démonstration, un angle de friction de 45 degrés pour le béton de masse est utilisé et permet d'obtenir les profils illustrés à la figure A.2.5.

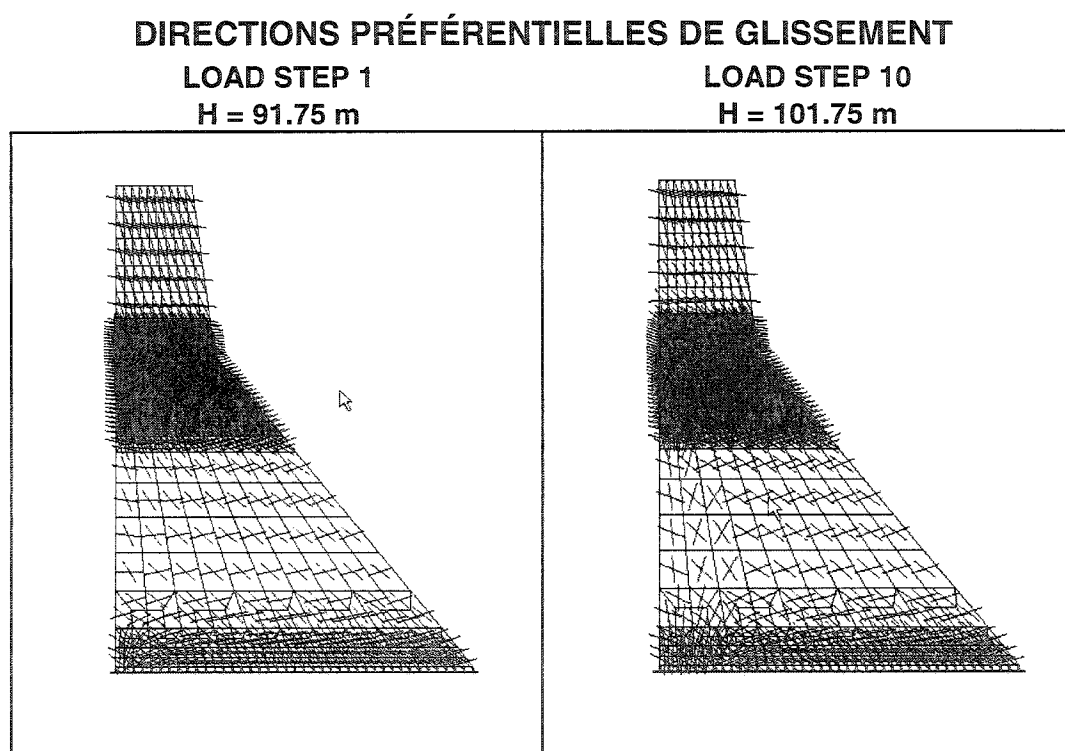


Figure A.2.9 Directions de glissement préférentielles

Une série de surfaces planaires incluant l'interface béton-rocher sont définies à l'aide du krigeage paramétrique. Celles-ci sont représentées de façon schématique à la figure A.2.6.

BARRAGE KOYNA PROFILS DE RUPTURE

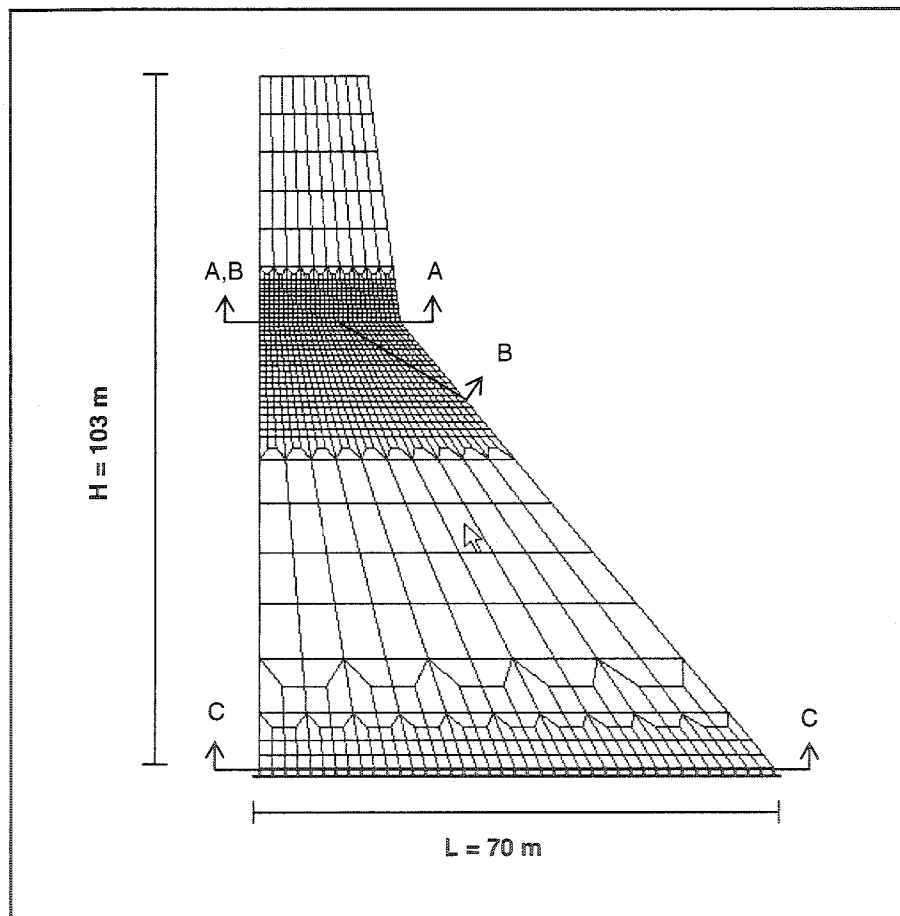


Figure A.2.10 Profils de rupture considérés

Les contraintes normales et de cisaillement agissant sur ces surfaces, ainsi que les efforts résultants correspondants obtenus avec la méthode proposée sont représentés aux figures A.2.7 à A.2.12.

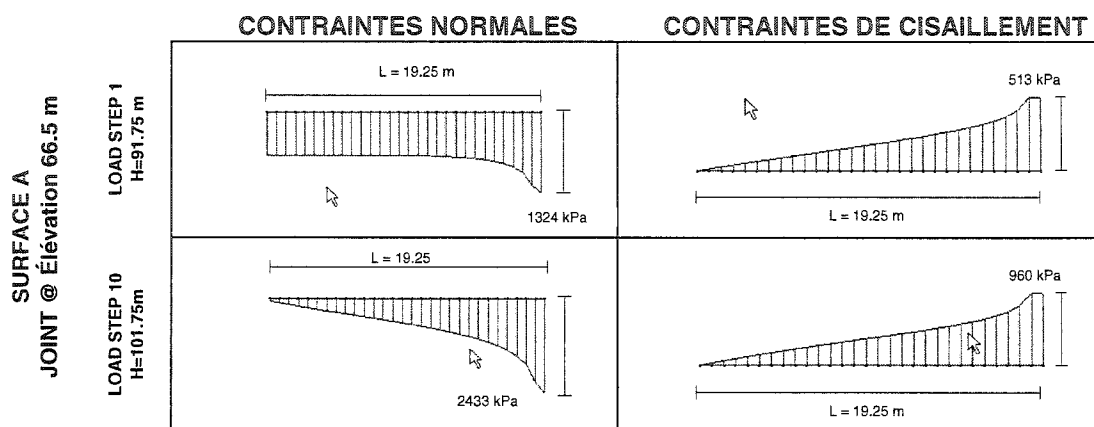


Figure A.2.11 Distribution des contraintes sur la surface A

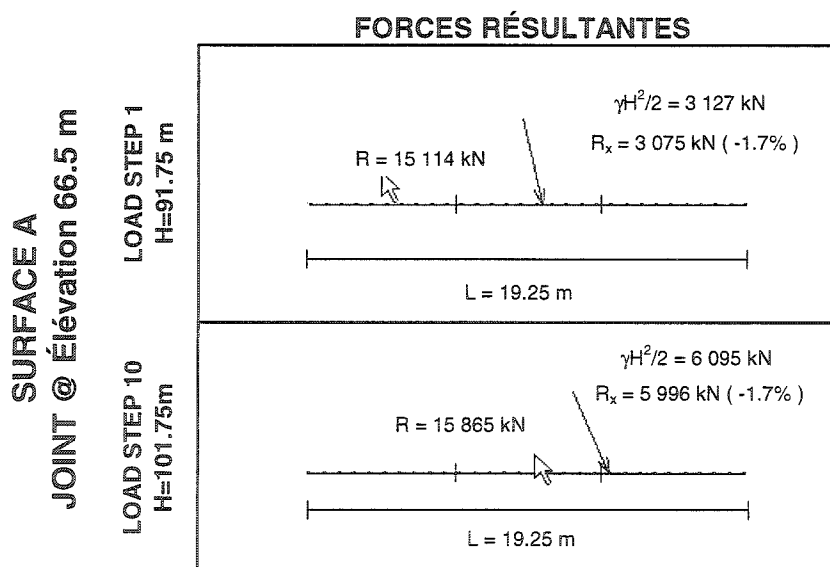


Figure A.2.12 Force résultante sur la surface A

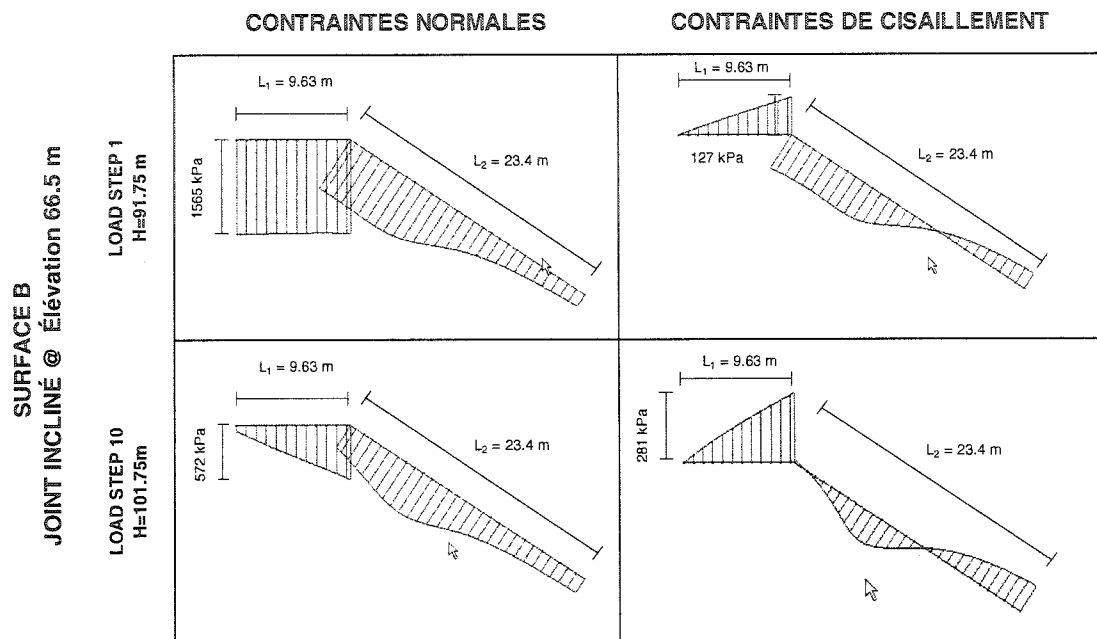


Figure A.2.13 Distribution des contraintes sur la surface B

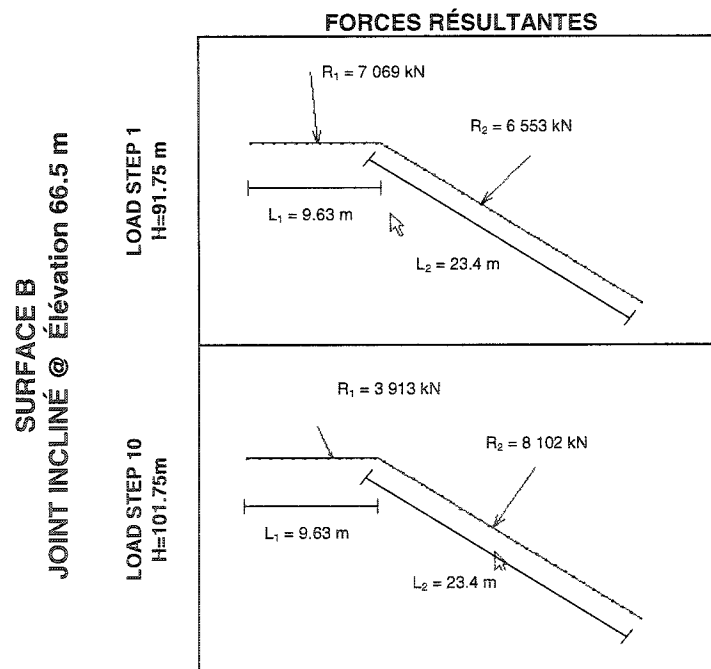


Figure A.2.14 Force résultante sur la surface B

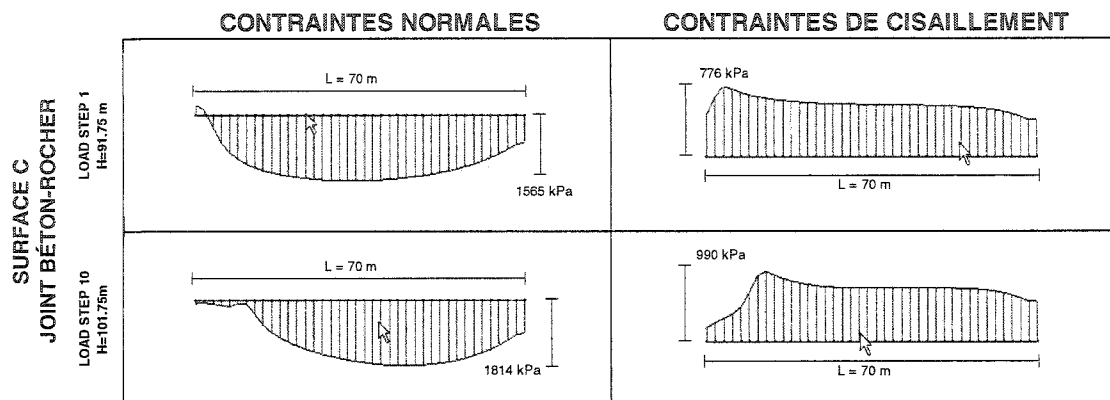


Figure A.2.15 Distribution des contraintes sur la surface C

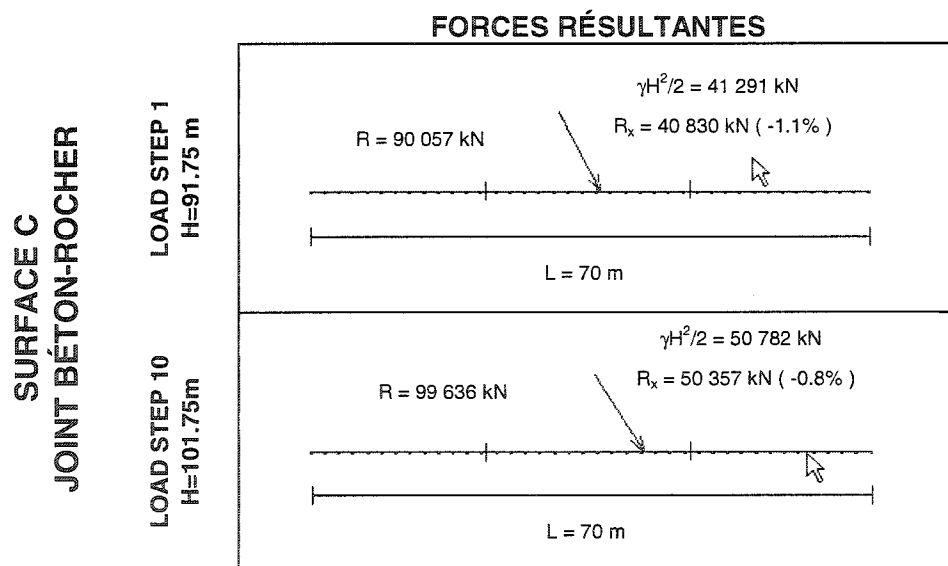


Figure A.2.16 Force résultante sur la surface C

Les distributions de contraintes obtenues avec la méthode proposée constituent un résultat intéressant, mais c'est suite à l'intégration de ces dernières que l'ingénieur peut réellement évaluer la stabilité au glissement et au renversement des plans de rupture

définis selon les indicateurs de performance retrouvés dans les guides de sécurité des barrages. La position de la force résultante est souvent utilisée comme indice de stabilité structurale dans les calculs de barrage. Il s'agit alors de situer cette force par rapport au tiers médian des plans horizontaux. Dans la mesure où les distributions de contraintes normales interpolées sont approximativement linéaires (tel le cas de la surface A), cette règle du pouce mène à anticiper un début de fissuration et un facteur de sécurité plus faible pour la surface A au palier de chargement 10 ($H = 101.75$ m).