

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

RESTAURATION DE SIGNAUX MAGNÉTOTELLURIQUES
CONTAMINÉS PAR UN BRUIT HARMONIQUE

MATTHEW MARCHANT
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)
DÉCEMBRE 2004



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-494-01364-8

Our file Notre référence

ISBN: 0-494-01364-8

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

RESTAURATION DE SIGNAUX MAGNÉTOTELLURIQUES
CONTAMINÉS PAR UN BRUIT HARMONIQUE

présenté par : MARCHANT Matthew

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. BOYER François-Raymond, Ph.D., président

M. SAUCIER Antoine, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. CHOUTEAU Michel, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. YVES Goussard, Ph.D., membre

Aux membres du montreal guitar circle

REMERCIEMENTS

L'auteur aimerait remercier très cordialement le professeur Antoine Saucier. Sa motivation et sa disponibilité ont été indispensables pour la réalisation de ce projet. De plus, le temps considérable qu'il a investi dans la correction et la révision de ce mémoire a été grandement apprécié.

L'auteur aimerait aussi remercier ses parents pour leur support pendant tout le déroulement de ce projet.

RÉSUMÉ

On analyse et on compare différentes approches d'estimation utilisées pour la restauration de signaux magnétotelluriques (MT) contaminés par un bruit harmonique.

On développe la première méthode à partir de l'approche classique de l'estimation en supposant que le signal mesuré est stationnaire et que la composante MT de ce signal suit un processus de bruit blanc Gaussien. L'estimateur obtenu est celui des *moindres carrés* et fonctionne en deux étapes. Dans la première étape, la fréquence fondamentale du bruit harmonique est estimée en utilisant une routine d'optimisation. Dans la deuxième étape, les amplitudes et les phases du bruit harmoniques sont estimées par une régression linéaire.

La deuxième méthode est la réjection adaptative du bruit harmonique. Cette méthode est basée en partie sur la décomposition en série de Fourier et exploite le fait que la fréquence fondamentale du bruit harmonique est généralement très proche d'une valeur nominale connue. De plus, cette méthode est conçue pour un signal mesuré stationnaire dont la composante MT suit un processus de bruit blanc et dont la durée est égale à un multiple de la période fondamentale du bruit harmonique. On propose quelques tentatives d'améliorations à la méthode de réjection adaptative. La première cherche à augmenter la précision de l'estimateur de la fréquence fondamentale. La deuxième et la troisième cherchent à augmenter la précision des estimateurs des amplitudes et des phases. La quatrième et la cinquième tentent d'augmenter la précision de l'estimateur de la fréquence fondamentale lorsque la durée du signal n'est pas exactement égale à un multiple de la période fondamentale.

On évalue la précision des différentes méthodes d'estimation par la technique de Monte Carlo. Pour les estimateurs de la fréquence fondamentale on utilise cette technique pour approximer l'erreur quadratique moyenne. Pour les estimateurs des amplitudes et des

phases on utilise cette technique pour approximer l'amélioration du rapport signal à bruit (ASNR).

À partir des résultats de la technique de Monte Carlo on définit trois combinaisons d'estimateurs de la fréquence fondamentale, des amplitudes et des phases. La première combinaison utilise l'estimateur des *moindres carrés* pour estimer tous les paramètres du bruit harmonique. La deuxième utilise l'estimateur de réjection adaptative de base pour estimer tous les paramètres du bruit harmonique. La troisième utilise l'estimateur de réjection adaptative amélioré pour estimer la fréquence fondamentale et l'estimateur des *moindres carrés* pour estimer les amplitudes et les phases. Les ASNR des trois combinaisons sont estimés avec la technique de Monte Carlo et sont utilisés pour comparer les trois combinaisons. On compare aussi la complexité de ces trois combinaisons.

Les trois méthodes d'estimation du bruit harmonique sont utilisées pour la restauration d'un signal MT réel. Dans un premier temps, les méthodes sont utilisées pour estimer les paramètres du bruit harmonique d'un segment du signal. Par la suite, le bruit harmonique est soustrait du segment de signal. Les signaux temporels ainsi que les spectres de densité de puissance avant et après la restauration sont utilisés pour analyser la performance des trois méthodes.

Les résultats indiquent que la méthode de réjection adaptative de base (combinaison 2) a une performance nettement inférieure à celle de la méthode des *moindres carrés* (combinaison 1). De plus, les résultats montrent que la méthode de réjection adaptative améliorée (combinaison 3) peut représenter une alternative intéressante à la méthode des *moindres carrés*.

ABSTRACT

We analyze and compare estimation techniques for the extraction of harmonic noise from magnetotelluric (MT) time series.

We develop the first method with classic estimation using the hypothesis that the measured signal is stationary and the MT component of the signal follows a Gaussian white noise process. A two step least squares estimator is found. In the first step the fundamental frequency of the harmonic noise is estimated using an optimization routine. In the second step, the amplitudes and phases of the harmonic noise are estimated using a linear regression.

The adaptive rejection method is presented. This method is partly based on the Fourier series decomposition and uses the fact that the value of the fundamental frequency is generally close to a known nominal value. This method is designed for a stationary measured signal, with a MT component that follows a white noise process and a signal length that is equal to a multiple of the fundamental period of the harmonic noise. We propose a few modifications to the method. The first attempts to improve the precision of the fundamental frequency estimator. The second and third attempt to improve the precision of the amplitude and phase estimators. The fifth and sixth attempt to improve the precision of the fundamental frequency estimator for a signal length that is not exactly equal to an integer multiple of the fundamental period.

We evaluate the precision of the estimators using the Monte Carlo technique. For the fundamental frequency estimators we use the technique to approximate the mean square error. For the amplitude and phase estimators we use the technique to approximate the signal to noise ratio improvement (SNRI).

Using the results from the Monte Carlo technique we define three combinations of estimators of the fundamental frequency and of the amplitudes and phases. The first combination uses *least squares* estimation to estimate all parameters of the harmonic noise. The second combination uses the basic adaptive rejection technique to estimate all parameters of the harmonic noise. The third combination uses the improved adaptive rejection estimator to estimate the fundamental frequency and the *least squares* estimator to estimate the amplitudes and phases. The SNRI's of the three methods are approximated with the Monte Carlo technique and used to compare the methods. The complexities of the methods are also compared.

The three estimation methods are used to extract harmonic noise from a real MT time series. The extraction procedure works in two steps. In the first step the parameters of the harmonic noise are estimated. In the second step the harmonic noise is subtracted from the MT time series. The time series and power density spectrums of the signals before and after subtraction of the harmonic noise are used to analyze the performance of the three methods.

Results show that the adaptive rejection technique (2nd combination) performs considerably worse than the *least squares* method (1st combination). Results also show that the improved adaptive rejection technique (3rd combination) can be a good alternative to the *least squares* method.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ.....	vi
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES TABLEAUX.....	xiii
LISTE DES FIGURES	xiv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xvi
NOTE AU LECTEUR	xvii
LISTE DES ANNEXES	xviii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	1
1.1 Contexte de la recherche	1
1.2 Problématique générale de la recherche.....	3
1.3 Revue bibliographique	5
1.4 Buts et présentation de la recherche.....	8
CHAPITRE 2 RESTAURATION DE SIGNAUX MAGNÉTOTELLURIQUES PAR L'APPROCHE CLASSIQUE DE L'ESTIMATION	9
2.1 Revue de la théorie de l'estimation.....	9
2.1.1 Estimation par moindres carrés.....	13
2.2 Estimation du signal de bruit harmonique	14
2.2.1 Modélisation du signal magnétotellurique mesuré	14
2.2.2 Choix de l'estimateur du bruit harmonique	17
2.2.3 Développement de l'estimateur du bruit harmonique.....	17
2.2.4 Choix d'une méthode numérique pour l'estimation de la fréquence fondamentale	22

2.2.5	Analyse de la complexité de l'estimateur du bruit harmonique.....	24
-------	---	----

CHAPITRE 3 RESTAURATION DE SIGNAUX MT PAR LA RÉJECTION ADAPTATIVE DU BRUIT HARMONIQUE 31

3.1	Développement théorique de la méthode de réjection adaptative.....	31
3.2	Mise en oeuvre de la méthode de réjection adaptative	39
3.3	Analyse de la complexité de la méthode de réjection adaptative.....	41
3.4	Améliorations de l'approche de réjection adaptative.....	41
3.4.1	Première amélioration : réduction de la variance de l'estimateur de la fréquence fondamentale.....	42
3.4.2	Deuxième amélioration : réduction de la variance des estimateurs des amplitudes.....	44
3.4.3	Troisième amélioration : correction relative à l'échantillonnage	47
3.4.4	Quatrième amélioration : nettoyage itératif du signal.....	49
3.4.5	Cinquième amélioration : ajustement de la durée	51
3.5	Résumé des complexités des différentes méthodes	52

CHAPITRE 4 COMPARAISON DES DIFFÉRENTES MÉTHODES D'ESTIMATION DU BRUIT HARMONIQUE 54

4.1	Évaluation des performances des estimateurs.....	54
4.1.1	Évaluation de la performance par l'approche de Monte Carlo	55
4.1.2	Mesure des performances des estimateurs	58
4.2	Présentation et comparaison des résultats des performances des estimateurs .	61
4.3	Comparaison de la complexité des estimateurs	69

CHAPITRE 5 COMPARAISON DES DIFFÉRENTES MÉTHODES D'ESTIMATION PAR LA RESTAURATION DE SIGNAUX MAGNÉTOTELLURIQUES RÉELS.....72

5.1	Les données magnétotelluriques	72
5.2	Restauration des données magnétotelluriques	76

CHAPITRE 6	CONCLUSION.....	82
BIBLIOGRAPHIE.....		84
ANNEXES.....		86

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 : Résumé des complexités des estimateurs de la fréquence fondamentale ω_0 .	52
Tableau 3.2 : Résumé des complexités des estimateurs des amplitudes et phases A_k, ϕ_k .	53
Tableau 4.1 : Paramètres du signal synthétique	62
Tableau 4.2 : EQM des estimateurs de la fréquence fondamentale (SNR=10 dB)	62
Tableau 4.3 : EQM des estimateurs de la fréquence fondamentale (SNR=30 dB)	63
Tableau 4.4 : EQM des estimateurs de la fréquence fondamentale (SNR=50 dB)	63
Tableau 4.5 : E(ASNR) des estimateurs des amplitudes et phases (SNR=10 dB)	64
Tableau 4.6 : E(ASNR) des estimateurs des amplitudes et phases (SNR=30 dB)	65
Tableau 4.7 : E(ASNR) des estimateurs des amplitudes et phases (SNR=50 dB)	65
Tableau 4.8 : Combinaisons des estimateurs de la fréquence fondamentale et des amplitudes et phases.	66
Tableau 4.9 : E(ASNR) des estimateurs du bruit harmonique (SNR=10 dB).	67
Tableau 4.10 : E(ASNR) des estimateurs du bruit harmonique (SNR=30 dB).	67
Tableau 4.11 : E(ASNR) des estimateurs du bruit harmonique (SNR=50 dB).	67
Tableau 4.12 : Les nombres d'itérations moyens pour l'estimation de la fréquence fondamentale correspondants aux estimateurs MCf-MCamp, RAf-RAamp et RAf2-MCamp.	70
Tableau 4.13 : Complexités des méthodes d'estimation du bruit harmonique pour les paramètres du tableau 4.1.	71

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Spectre de densité de puissance d'un signal magnétotellurique dominé par un bruit harmonique (signal enregistré par Geosystems Canada inc. à West Morgan lake, Morgan Township, Ontario (Canada) pour Falcon Bridge Limited). Le spectre est estimé avec le périodogramme.	4
Figure 1.2 : Schéma d'un système de filtrage adaptatif utilisant un signal de référence (Kay 1993).	6
Figure 2.1 : Graphique de la distance quadratique $J(\alpha, \hat{\beta}(\alpha))$ en fonction de la fréquence fondamentale α pour un signal MT réel (signal enregistré par Geosystems Canada inc. à West Morgan lake, Morgan Township, Ontario (Canada) pour Falcon Bridge Limited).	23
Figure 4.1 : Système illustrant l'estimation du bruit harmonique.	60
Figure 4.2 : Évolution de $E(\text{ASNR})$ en fonction de la durée du signal exprimé en multiples de périodes fondamentales. (Étoiles : MCf-MCamp, Cercles : RAf2-MCamp, Carrés : RAf-RAamp).	68
Figure 5.1 : Évolution de l'amplitude du premier harmonique dans le temps.	73
Figure 5.2 : Évolution de la fréquence fondamentale dans le temps.	74
Figure 5.3 : Le signal MT restauré.	75
Figure 5.4 : Signaux temporels : i) le signal mesuré ii) le signal MT obtenu avec MCf-MCamp iii) le signal MT obtenu avec RAf2-MCamp iv) le signal MT obtenu avec RAf-RAamp.	78
Figure 5.5 : Spectres de densité de puissance : i) spectre du signal mesuré ii) spectre du signal MT obtenu avec MCf-MCamp iii) spectre du signal MT obtenu avec RAf2-MCamp iv) spectre du signal MT obtenu avec RAf-RAamp.	80

LISTE DES ALGORITHMES

Algorithme 3.1 : Algorithme de la méthode RAf.	40
Algorithme 3.2 : Algorithme de la méthode RAf2.	43
Algorithme 3.3 : Algorithme de la méthode RAf3	50
Algorithme 3.4 : Algorithme de la méthode RAf4.	51

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

MT	Magnétotellurique
BH	Bruit harmonique
EQM	Erreur quadratique moyenne
MAP	Maximum a posteriori
VM	Vraisemblance maximale
MC	Moindres carrés
RA	Réjection adaptative
var	Variance
ET	Écart-type
SSS	Stationnaire au sens strict
SSL	Stationnaire au sens large

NOTE AU LECTEUR

Dans les formules mathématiques, la notation $x(t)$ représente une fonction continue et la notation $x[n]$ représente une fonction discrète. De plus, le contexte indique si une variable est aléatoire ou déterministe.

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE 1 : EXPLICATION DE LA PRÉDOMINANCE DES HARMONIQUES IMPAIRS DANS LE BRUIT HARMONIQUE.....	86
ANNEXE 2 : DÉFINITION ET EXISTENCE DE L'INTÉGRALE STOCHASTIQUE DANS (3.6)	88
ANNEXE 3 : A FAST AND ACCURATE FREQUENCY ESTIMATION METHOD FOR THE CANCELLATION OF HARMONIC NOISE IN GEOPHYSICAL RECORDS.....	90

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Contexte de la recherche

Le traitement statistique des signaux est un domaine qui s'intéresse à «l'extraction et la représentation d'informations présentes dans des signaux» (Goussard 2002). Un problème important dans ce domaine est l'extraction d'ondes sinusoïdales de signaux aléatoires. Quelques applications pour lesquelles ce problème se pose sont :

- La caractérisation de données sismiques (Hardy, Beier, et Gaston 2003).
- L'estimation de la fréquence porteuse dans un signal de communication (Kay 1993).
- L'analyse spectrale (Kay et Nagesha 1994).
- Le traitement de signaux sonar (Kay 1993).
- L'analyse de données économiques (Kay 1993).

L'application qui nous intéresse est l'extraction d'une contamination électrique, modélisée par une somme de sinusoïdes, de signaux magnétotelluriques (MT). Commençons par une brève explication de la méthode MT pour situer cette application dans son contexte.

La méthode MT, proposé par L. Cagniard et A. N. Tikhonov dans les années 50, est une technique d'exploration géophysique qui utilise les ondes électromagnétiques naturelles pour générer des cartes de résistivité des sous-sols (Unsworth 2000). Puisque les valeurs de résistivité associées aux différents minéraux et roches varient sur plusieurs ordres de grandeur, ces cartes permettent de déduire de l'information sur la composition et la structure des sous-sols.

Étant donné le contenu basses fréquences des ondes électromagnétiques naturelles, la méthode MT est la seule qui permet de générer des images à des profondeurs supérieures à 10 km. C'est l'avantage de cette méthode par rapport aux autres techniques de sondage géophysique.

La méthode MT est basée sur l'effet de pénétration, qui prédit l'atténuation d'une onde électromagnétique dans un milieu résistif. L'effet de pénétration est décrit par l'expression :

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu \omega \sigma}}, \quad (1.1)$$

où d est la profondeur de pénétration (m), $\sigma \equiv \frac{1}{\rho}$ est la conductivité du milieu homogène $\left(\frac{\text{Siemens}}{\text{m}}\right)$, $\mu = \mu_0$ est la constante de perméabilité magnétique du vide $\left(= 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}}\right)$ et $\omega = 2\pi f$ où f est la fréquence (Hz). L'expression (1.1) montre que plus la fréquence f de l'onde est élevée, moins sa profondeur de pénétration est grande. Pour la méthode MT, cela implique que les hautes fréquences des ondes électromagnétiques permettent de sonder près de la surface, tandis que les basses fréquences de ces ondes permettent de sonder à des profondeurs élevées.

Les cartes de résistivité sont générées en utilisant l'effet de pénétration ainsi que la relation entre la résistivité et l'impédance électrique (E/H), décrite par l'équation :

$$\rho = \frac{1}{2\pi f \mu_0} \left(\frac{|E|}{|H|} \right)^2, \quad (1.2)$$

où ρ est la résistivité apparente du sol $\left(\frac{\text{m}}{\text{Siemens}}\right)$, E est le champ électrique $\left(\frac{\text{V}}{\text{m}}\right)$, H est le champ magnétique $\left(\frac{\text{A}}{\text{m}}\right)$ et E et H sont des champs mesurés au niveau de la surface du sol.

Des exemples d'applications de la méthode MT sont l'exploration minérale, la recherche de sources géothermiques, de réserves d'aquifères et d'hydrocarbures, et l'étude de volcans (Unsworth 2000).

1.2 Problématique générale de la recherche

Un problème bien connu en géophysique est la contamination des signaux géophysiques par un bruit harmonique (Butler et Russell 2003). Cette contamination provient principalement des champs électromagnétiques des lignes de transport électrique, mais peut parvenir d'autres sources, telles que les chemins de fer électriques.

Le bruit harmonique contient une fréquence fondamentale et plusieurs harmoniques de cette fréquence. La figure suivante est le spectre de densité de puissances de données magnétotelluriques dominées par un bruit harmonique. On voit clairement la présence des harmoniques impairs à 60, 180, 300, 420, 540, 660, 780, 900 Hz ainsi que quelques harmoniques pairs à 120, 360 et 480 Hz :

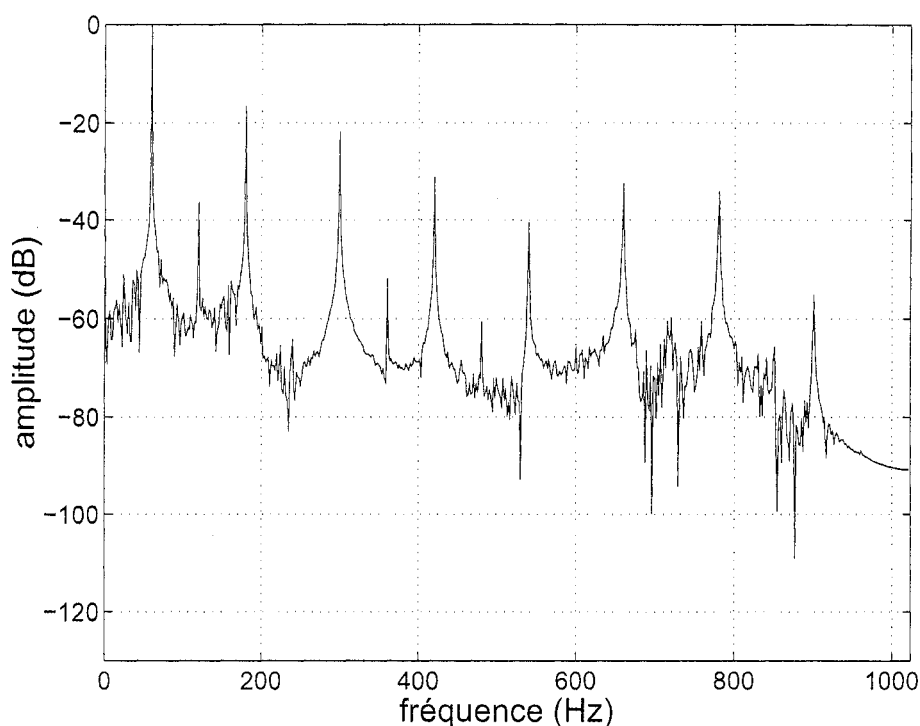


Figure 1.1 : Spectre de densité de puissance d'un signal magnétotellurique dominé par un bruit harmonique (signal enregistré par Geosystems Canada inc. à West Morgan lake, Morgan Township, Ontario (Canada) pour Falcon Bridge Limited). Le spectre est estimé avec le périodogramme.

La prédominance des harmoniques impairs par rapport aux harmoniques pairs s'explique par la symétrie des cycles positifs et négatifs du bruit harmonique. Une preuve de cette affirmation est donnée dans l'annexe 1.

Il est possible que la contamination contienne plus qu'une fréquence fondamentale. En Europe, le réseau électrique fournit un courant alternatif d'une fréquence de 50 Hz et le réseau électrique des chemins de fer est alimenté avec du courant alternatif de 16 2/3 Hz. Au Canada, le réseau électrique fournit un courant alternatif de 60 Hz et certaines mines utilisent des équipements anciens alimentés au 25 Hz (Butler et Russell 2003).

Plusieurs approches existent pour la restauration de signaux géophysiques contaminés par un bruit harmonique. Dans la prochaine section, une brève revue de la littérature portant sur les différentes approches est présentée.

1.3 Revue bibliographique

Une approche est l'utilisation de filtres coupe fréquences pour la suppression du bruit harmonique. Ces filtres sont souvent utilisés en amont des circuits de conversion numérique et d'enregistrement dans les systèmes qui captent les signaux géophysiques (Vozoff 1972). L'utilisation de ces filtres est parfois nécessaire lorsque le bruit harmonique domine le signal géophysique et la plage dynamique des systèmes qui captent les signaux n'est pas assez grande (Butler et Russell 2003). Par contre, cette méthode présente quelques inconvénients. En plus des harmoniques, l'information du signal géophysique aux fréquences des harmoniques est rejetée. De plus, les filtres coupe fréquences introduisent de la distorsion dans les spectres d'amplitude et de phase à proximité des harmoniques (Butler et Russell 2003).

Une autre méthode est le filtrage adaptatif utilisant un signal de référence. Le schéma suivant illustre le fonctionnement de cette méthode :

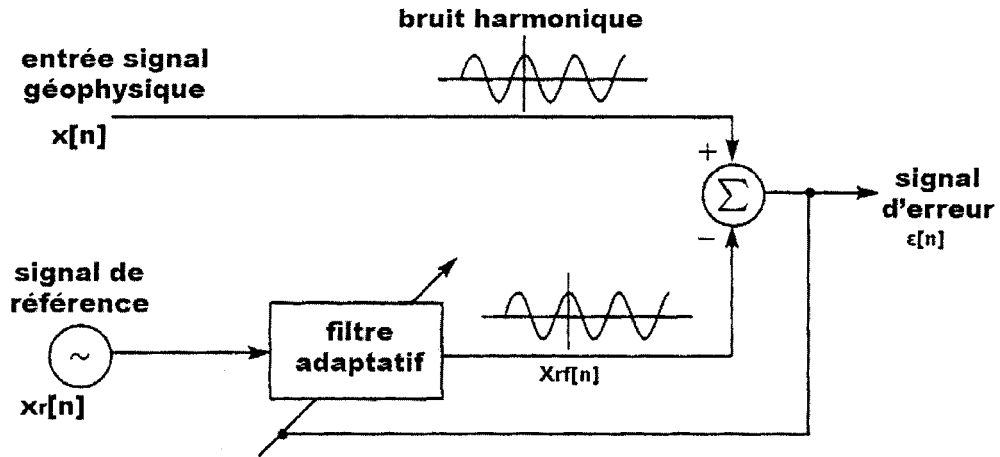


Figure 1.2 : Schéma d'un système de filtrage adaptatif utilisant un signal de référence (Kay 1993).

La méthode suppose la présence d'un signal de référence, $x_r[n]$, qui peut être filtré et soustrait du signal géophysique pour réduire le bruit harmonique. À l'arrivée des $x_r[n]$, le filtre adaptatif est modifié pour minimiser la distance quadratique entre le signal géophysique $x[n]$ et le signal $x_r[n]$ filtré. Cette distance est représentée par $d_q = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varepsilon^2[n]$. La minimisation de d_q permet de rapprocher le signal $x_r[n]$ du bruit harmonique. Ainsi, la soustraction de $x_{rf}[n]$ du signal $x[n]$ réduit le bruit harmonique contenu dans $x[n]$.

Comme le système s'adapte continuellement à l'arrivée de nouvelles données, des signaux non-stationnaires ou des signaux dont les propriétés changent dans le temps peuvent être traités. La méthode de filtrage adaptatif permet aussi le traitement de signaux en temps-réels. Cependant, la méthode a quelques lacunes. Premièrement, la présence d'un signal référence est nécessaire. Deuxièmement, la méthode nécessite un

signal de référence peu corrélé à l'information pertinente dans $x[n]$, pour éviter la soustraction de cette information.

Une autre approche qui permet de traiter les signaux non-stationnaires et qui ne nécessite aucun signal de référence est le filtrage de Kalman. Le filtrage de Kalman est une méthode séquentielle qui permet d'estimer un signal mesuré en présence de bruit, où le signal est caractérisé par un modèle d'état. Un exemple simple d'un modèle d'état est le processus Gauss-Markov du premier ordre :

$$s[n] = as[n-1] + u[n] \quad n \geq 1 \quad (1.3)$$

où $n \in \mathbb{N}$ et où $u[n]$ suit un processus de bruit blanc Gaussien (Kay 1993).

L'application du filtrage de Kalman à l'extraction d'une onde sinusoïdale de mesures contenant un bruit blanc additif est documenté dans l'article «Robust Estimation of a Single Complex Sinusoid in White Noise» par Kiyoshi Nishiyama publié en 1999 (Nishiyama 1999). L'auteur mentionne qu'il est possible d'appliquer la méthode à l'extraction de plusieurs sinusoïdes.

Une approche très populaire est la soustraction d'un estimé du bruit harmonique du signal géophysique déjà enregistré. Pour estimer le bruit harmonique il s'agit d'estimer ses paramètres, soit la fréquence fondamentale, les amplitudes et les phases des harmoniques. Dans le deuxième chapitre, la théorie de l'estimation est présentée et appliquée au problème de la restauration de signaux magnétotelluriques après l'enregistrement de ces signaux.

Une méthode d'estimation du bruit harmonique qui a paru dans la littérature géophysique est la réjection adaptative (Nyman et Gaiser 1983). Cette méthode est en partie basée sur la décomposition en série de Fourier et exploite le fait que la fréquence fondamentale du bruit harmonique est généralement très proche d'une valeur nominale

connue. De plus, cette méthode suppose que le signal mesuré est stationnaire et que la composante géophysique de ce signal suit un processus de bruit blanc. Il a été démontré que cette méthode permet de rejeter un bruit harmonique dont la puissance est supérieure de 40 dB à celle du signal géophysique (Nyman et Gaiser 1983). De plus, en général la méthode nécessite moins de calculs que d'autres approches d'estimation. Cependant, une faiblesse de la méthode est que la durée du signal doit être suffisamment grande et elle doit aussi être un multiple de la période nominale du bruit estimé. Le chapitre trois est consacrée à l'étude et à l'amélioration de cette méthode.

1.4 Buts et présentation de la recherche

Les buts de ce projet sont de développer un estimateur du bruit harmonique selon la théorie de l'estimation, de présenter et d'étudier la méthode de réjection adaptative et de proposer des améliorations de cette méthode. De plus, nous comparons les méthodes considérées par des simulations Monte Carlo, des analyses de complexité et par la restauration de signaux MT réels.

Le contenu de ce mémoire est organisé de la façon suivante. Dans le deuxième chapitre, on présente une revue de la théorie de l'estimation et on développe l'estimateur du bruit harmonique selon cette théorie. De plus, on détermine la complexité de l'estimateur trouvé. Dans le troisième chapitre, on présente la méthode de réjection adaptative et on définit des méthodes de réjection adaptative améliorées. On détermine aussi la complexité de ces méthodes. Dans le quatrième chapitre, on compare les différentes méthodes d'estimation du bruit harmonique en utilisant l'approche Monte Carlo et les résultats des analyses de complexité. Dans le cinquième chapitre, on compare les méthodes par la restauration de signaux réels. Dans la conclusion, on résume les résultats trouvés, on aborde les contributions, limites et contraintes du projet et on propose des nouvelles voies de recherche.

CHAPITRE 2 RESTAURATION DE SIGNAUX MAGNÉTOTELLURIQUES PAR L'APPROCHE CLASSIQUE DE L'ESTIMATION

Dans ce chapitre, une revue de la théorie de l'estimation est présentée et utilisée pour l'estimation d'un bruit harmonique additionné à un signal MT.

2.1 Revue de la théorie de l'estimation

Le problème d'estimation est de trouver des valeurs raisonnables pour les paramètres $\theta = [\theta[1], \theta[2], \dots, \theta[p]]$ à partir des données $X = [x[0], x[1], \dots, x[N-1]]$ qui dépendent de θ . En d'autres termes, on cherche à définir l'estimateur $\hat{\theta} = g[X]$ de θ , où g est une fonction des données X .

Il y a trois étapes dans la démarche permettant de définir un estimateur. D'abord, on modélise les données mesurées ainsi que les paramètres à estimer. Ensuite, on définit une relation entre les données mesurées et les paramètres à estimer à partir du modèle trouvé. Finalement, on choisit une règle qui utilise cette relation et selon laquelle des valeurs sont attribuées aux quantités inconnues (Goussard 2002).

Analysons la première étape, soit celle de la modélisation mathématique. Dans cette étape on pose généralement deux types d'hypothèses; des hypothèses structurelles et des hypothèses probabilistes. Le modèle :

$$z[n] = x + b[n] . \quad (2.1)$$

où $n \in [1, N]$, x est une variable aléatoire et $b[n]$ est une série de données aléatoires, illustre bien ces hypothèses. Dans ce modèle, l'hypothèse structurelle spécifie que les données $z[n]$ proviennent de l'addition de chaque élément de la série $b[n]$ avec la quantité inconnue x . L'hypothèse probabiliste porte sur le comportement statistique des quantités x et $b[n]$. Par exemple, les éléments de $b[n]$ peuvent être distribués selon une loi Gaussienne et x peut être distribué selon une loi uniforme.

La prochaine étape dans la démarche est de définir une relation entre les incertitudes dans les mesures et la quantité à estimer. Dans la définition de cette relation, notre but est de représenter toute l'information disponible sur la quantité à estimer. Dans le cas du modèle (2.1), où l'on cherche à estimer une quantité x à partir de données Z , cette représentation correspond exactement à la loi de probabilité de x une fois que Z est connue (Goussard 2002). Cette loi est décrite entièrement par la fonction de densité de probabilité conditionnelle $f_{x|Z}(x)$. Pour déterminer $f_{x|Z}(x)$ on utilise les hypothèses de structure et de probabilité ainsi que la règle de Bayes qui est :

$$\begin{aligned} f_{x|Z}(x) &= \frac{f_{XZ}(x, z)}{f_Z(z)} \\ &= \frac{f_{Z|X}(z) f_X(x)}{f_Z(z)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

On remarque que les deux termes au numérateur de (2.2) proviennent directement des hypothèses. L'utilisation de $f_{x|Z}(z)$ pour définir un estimateur est nommé l'approche Bayésienne.

On cherche maintenant un critère qui nous permet d'utiliser au mieux $f_{x|Z}(x)$ pour déterminer une valeur plausible pour la quantité à estimer. Un critère naturel est l'erreur quadratique moyenne (EQM) qui est calculé par :

$$\text{eqm}(\hat{\theta}) = E \left[(\hat{\theta} - \theta)^2 \right]. \quad (2.3)$$

Malheureusement, il est en général impossible de trouver cet estimateur, à cause de la difficulté de lui associer une expression qui n'est pas fonction des paramètres inconnus (Kay 1993).

Un autre critère possible exige que l'estimateur minimise la variance qui est calculé par :

$$\text{var}(\hat{\theta}) = E \left[\left(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}] \right)^2 \right]. \quad (2.4)$$

On remarque que ce critère est obtenu à partir de l'EQM avec la contrainte que le biais de l'estimateur soit nul. En effet, l'EQM peut être simplifiée comme suit :

$$\begin{aligned} \text{eqm}(\hat{\theta}) &= \text{var}(\hat{\theta}) + \left[E(\hat{\theta}) - \theta \right]^2 \\ &= \text{var}(\hat{\theta}) + \left[b(\hat{\theta}) \right]^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

où $b(\hat{\theta})$ représente le biais de l'estimateur $\hat{\theta}$. Déterminer l'estimateur à partir de la variance est encore une fois très difficile. En effet, il n'existe aucune approche systématique pour déterminer cet estimateur (Kay 1993).

Dans des situations où l'estimateur qui minimise l'EQM ou la variance n'existe pas ou ne peut être trouvé, une approche systématique qui est souvent utilisée est l'estimation au sens du *maximum a posteriori* (MAP). Dans cette approche, on trouve l'estimateur qui maximise la fonction de densité de probabilité $f_{x|Z}(x)$. Mathématiquement, cet estimateur est défini comme suit :

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{MAP} &\triangleq \arg \max_x f_{x|Z}(x) \\
&= \arg \max_x \left\{ \frac{f_{Z|x}(z) f_x(x)}{f_Z(z)} \right\} .
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Le résultat de (2.6) devient :

$$\hat{x}_{MAP} = \arg \max_x \left\{ f_{Z|x}(z) f_x(x) \right\} . \tag{2.7}$$

parce que $f_Z(z)$ n'est pas fonction de la variable x .

Pour cette approche, la complexité des hypothèses structurelles et probabilistes a un impact direct sur la complexité de la maximisation nécessaire (Goussard 2002). Il arrive souvent que la complexité soit telle que l'estimateur MAP nécessite des calculs longs ou difficiles à réaliser. Pour cette raison, il est souvent préférable de faire un compromis entre la précision du modèle et la complexité de la maximisation.

Lorsque la quantité d'information contenue dans les données est riche par rapport à l'information *a priori* sur la quantité à estimer, décrite par $f_x(x)$, ou lorsqu'il n'y a aucune information *a priori* sur la quantité à estimer, $f_x(x)$ peut être remplacé par une constante. Le fait de remplacer $f_x(x)$ par une constante est équivalent à dire que les valeurs de x sont équiprobables. Par conséquent, l'estimateur MAP devient l'estimateur de *maximum de vraisemblance* et peut être calculé par :

$$\hat{x}_{MV} = \arg \max_x \left\{ f_{Z|x}(z) \right\} . \tag{2.8}$$

Cette approche, nommée *vraisemblance maximale* (VM), est sans doute la plus populaire pour trouver des estimateurs pratiques. De plus, l'estimateur VM a très

souvent la propriété de rejoindre l'estimateur de variance minimale de façon asymptotique (Kay 1993).

2.1.1 Estimation par moindres carrés

Très souvent, le choix d'hypothèses probabilistes dans la démarche pour trouver un estimateur est difficile ou impossible. Lorsque c'est le cas, l'approche d'estimation des *moindres carrés* (MC) est souvent utilisée car elle ne nécessite aucune hypothèse probabiliste (Kay 1993). De plus, cette approche permet de trouver des estimateurs de façon systématique. Par contre, il n'y a aucune garantie que l'approche produise des estimateurs de variance minimale ou non biaisé et il n'est pas possible de prédire la performance des estimateurs des MC sans faire d'hypothèses probabilistes sur les données.

Le critère d'optimalité de l'estimateur des MC exige que la distance quadratique entre le signal mesuré Z et le signal à estimer X soit minimale. Pour le modèle, $S = X + B$, où X est un signal à estimer qui dépend d'un paramètre θ et B est un bruit (S, X et B sont tous de dimension $(N \times 1)$), l'estimateur des MC de θ est :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{MC} &= \arg \min_{\theta} \left\{ (X - S)^T (X - S) \right\} \\ &= \arg \min_{\theta} \left\{ \sum_{n=1}^N (x[n] - s[n])^2 \right\} .\end{aligned}\tag{2.9}$$

Dans le cas du modèle $S = X + B$, il est important de noter que si $B \sim N(0, I\sigma^2)$ (les valeurs de B sont mutuellement indépendantes et identiquement distribuées selon une loi Gaussienne de moyenne nulle), l'estimateur des MC est identique à l'estimateur VM (Kay 1993).

2.2 Estimation du signal de bruit harmonique

Analysons maintenant la démarche pour l'estimation du BH. Dans la première étape, nous modélisons le signal mesuré avec des hypothèses structurelles et probabilistes. Ensuite, nous posons une relation entre les données mesurées et les paramètres à estimer. Finalement, nous choisissons un critère d'optimalité et nous définissons l'estimateur.

2.2.1 Modélisation du signal magnétotellurique mesuré

Le BH et le signal MT proviennent de sources différentes et indépendantes. Pour cette raison, ces signaux sont additifs et l'hypothèse structurelle est :

$$S = X_{BH} + W_{MT} , \quad (2.10)$$

où S est le signal mesuré, X_{BH} est le bruit harmonique et W_{MT} est le signal MT. Une deuxième hypothèse structurelle est que X_{BH} est un signal périodique et donc qu'il peut être représenté par la série de Fourier tronquée :

$$x_{BH} [n] = \sum_{i=1}^p A_i \cos(2 \pi i f_0 n T_e + \phi_i) , \quad (2.11)$$

où $n \in [1, N]$, $i = 1, 2, \dots, p$, p représente le nombre total d'harmoniques, A_i est l'amplitude de l'harmonique i , ϕ_i est la phase de l'harmonique i , T_e est la période d'échantillonnage, f_0 est la fréquence fondamentale du BH.

Il est à noter que le nombre total d'harmoniques p n'est pas connu *a priori*. Une analyse spectrale du signal avant la restauration est un moyen de déterminer ce nombre.

Examinons les caractéristiques de X_{BH} et W_{MT} pour arriver à des hypothèses probabilistes pour ces quantités. Le signal X_{BH} peut démontrer un comportement non-stationnaire. Les systèmes de transport et de distribution d'énergie, qui sont très souvent la source de X_{BH} , réagissent à des changements dans le temps (p.ex. addition ou soustraction de charges ou de sources). Cela a comme effet de faire varier les paramètres du BH dans le temps. Par exemple, la fréquence fondamentale de distribution d'énergie en Amérique du Nord varie très légèrement avec des périodes de minutes ou d'heures; cette variation excède rarement 0,03 Hz (Adams, McIntyre, et Symonds 1982).

Idéalement un modèle qui varie dans le temps est nécessaire pour décrire les paramètres de X_{BH} , soit A_i , ϕ_i et f_0 . Pour simplifier le problème d'estimation, on suppose que ces paramètres sont constants dans le temps lorsque la durée du signal est suffisamment courte. Cela représente l'hypothèse probabiliste pour A_i , ϕ_i et f_0 . Cette hypothèse est posée dans la majorité des méthodes d'estimation du bruit harmonique (Voir : (Nyman et Gaiser 1983), (Butler et Russell 2003) et (Linville et Meek 1992)).

Examinons maintenant les caractéristiques statistiques de W_{MT} . Dans la méthode MT on utilise les champs électriques selon les directions X et Y ainsi que les champs magnétiques selon les directions X, Y et Z et on échantillonne ces champs dans le temps pour produire les signaux E_x, E_y, H_x, H_y et H_z . Ainsi, W_{MT} représente soit E_x, E_y, H_x, H_y ou H_z et il se peut qu'une hypothèse probabiliste soit nécessaire pour chacun de ces signaux.

Les signaux E_x, E_y, H_x, H_y ou H_z affichent tous une très large bande fréquentielle. Le flux de courant dans la couche ionique entourant la terre génère des champs

électromagnétiques qui contribuent aux basses fréquences (< 1 Hz) de ces signaux. Ces courants sont alimentés par l'activité solaire et les mouvements relatifs de la terre, de la lune et du soleil. Les orages électriques au niveau planétaire génèrent des champs électromagnétiques qui contribuent à la bande fréquentielle supérieure à 1 Hz de ces signaux (Vozoff 1972). De plus, étant donné la nature aléatoire des phénomènes décrits ci-haut, les mesures des champs pour différentes valeurs du temps ressemblent à un bruit blanc Gaussien.

Lorsque les champs électromagnétiques atteignent la terre, la réflexion et la réfraction de ces ondes se produisent. Puisque les ondes réfractées varient dans le temps, des courants «telluriques» sont induits dans la terre. Ces courants contribuent aux champs électriques mesurés (Vozoff 1972). À cause du principe de pénétration des ondes (1.1), le contenu fréquentiel des champs électromagnétiques dépend de la structure résistive du sous-sol.

Les signaux MT ont aussi des caractéristiques non-stationnaires. Des orages magnétiques peuvent augmenter la puissance des signaux très rapidement de 30 dB. De plus, il est reconnu que le spectre des signaux peut varier dans le temps (Vozoff 1972).

Comme le contenu fréquentiel des signaux E_x, E_y, H_x, H_y et H_z peut varier selon l'endroit sondé et dans le temps, les caractéristiques statistiques des signaux MT peuvent varier aussi. Ainsi, le problème de modélisation est très complexe et on se contente d'un modèle qui peut bien représenter les signaux en moyenne. Premièrement, on suppose que les signaux MT sont stationnaires pour une durée suffisamment courte. Deuxièmement, on suppose que les signaux MT suivent un processus de bruit blanc Gaussien.

2.2.2 Choix de l'estimateur du bruit harmonique

On choisit maintenant l'estimateur du bruit harmonique. La relation entre les données mesurées et les paramètres à estimer θ est entièrement décrite par la loi de probabilité conditionnelle $f_{\theta|S}(\theta)$. On choisit l'estimateur qui maximise $f_{\theta|S}(\theta)$ car il peut être trouvé de façon systématique. Puisque les paramètres A_i , ϕ_i et f_0 sont supposés constants, l'estimateur qui maximise $f_{\theta|S}(\theta)$ est celui de *vraisemblance maximale*. De plus, étant donné qu'on suppose W_{MT} suit un processus de bruit blanc Gaussien, l'estimateur VM est identique à l'estimateur des *moindres carrés*.

2.2.3 Développement de l'estimateur du bruit harmonique

Dans ce qui suit, nous développons l'estimateur des *moindres carrés* pour le bruit harmonique additionné à un signal MT. On considère le signal $x_{BH}[n]$ décrit par (2.11) et on cherche à estimer les paramètres A_i , ϕ_i et f_0 . On remarque que X_{BH} est une fonction non linéaire des paramètres ϕ_i et f_0 . L'identité $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ permet de transformer X_{BH} en une fonction linéaire par rapport à $\cos(\phi_i)$ et $\sin(\phi_i)$. En effet, $x_{BH}[n]$ devient :

$$\begin{aligned} x_{BH}[n] &= \sum_{i=1}^p A_i \cos(\phi_i) \cos(2\pi f_i n T_e) - A_i \sin(\phi_i) \sin(2\pi f_i n T_e) \\ &= \sum_{i=1}^p a_i \cos(2\pi f_i n T_e) + b_i \sin(2\pi f_i n T_e), \end{aligned} \quad (2.12)$$

où :

$$\begin{cases} a_i = A_i \cos(\phi_i) \\ b_i = -A_i \sin(\phi_i) \end{cases}, \quad \begin{cases} A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \\ \phi_i = \arctg(-b_i, a_i) \end{cases} \quad \text{et } f_i = i f_0. \quad (2.13)$$

On exprime (2.12) avec la notation matricielle :

$$X_{BH} = H(\alpha) \beta, \quad (2.14)$$

où :

$$\alpha = f_0, \quad \beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

et

$$H(\alpha) = H(f_0) = \begin{bmatrix} C(f_1) & \cdots & C(f_p) & S(f_1) & \cdots & S(f_p) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

où :

$$\begin{aligned} C(f_i) &= \begin{bmatrix} \cos(2\pi f_i [1] T_e) & \cos(2\pi f_i [2] T_e) & \cdots & \cos(2\pi f_i [N] T_e) \end{bmatrix}^T \\ S(f_i) &= \begin{bmatrix} \sin(2\pi f_i [1] T_e) & \sin(2\pi f_i [2] T_e) & \cdots & \sin(2\pi f_i [N] T_e) \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (2.17)$$

La distance quadratique entre S et X_{BH} est :

$$J(\alpha, \beta) = (S - H(\alpha) \beta)^T (S - H(\alpha) \beta). \quad (2.18)$$

L'estimateur des *moindres carrés* est :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{MC} &= \arg \min_{\theta} \{J(\alpha, \beta)\} \\ &= \arg \min_{\theta} \left\{ (S - H(\alpha)\beta)^T (S - H(\alpha)\beta) \right\},\end{aligned}\quad (2.19)$$

où $\theta = [\alpha, \beta]$.

Ce problème est simplifié en le traitant en deux étapes. Tout d'abord, on considère α connu et on trouve l'expression de β qui minimise $J(\alpha, \beta)$. Une expression analytique peut être trouvée car $J(\alpha, \beta)$ est linéaire en β :

$$\hat{\beta}_{MC}(\alpha) = \arg \min_{\beta} \{J(\alpha, \beta)\} . \quad (2.20)$$

On trouve ensuite $\hat{\alpha}_{MC}$ en minimisant (2.18) avec β remplacé par $\hat{\beta}_{MC}(\alpha)$:

$$\hat{\alpha}_{MC} = \arg \min_{\alpha} \left\{ (S - H(\alpha)\hat{\beta}_{MC}(\alpha))^T (S - H(\alpha)\hat{\beta}_{MC}(\alpha)) \right\} . \quad (2.21)$$

Une fois que $\hat{\alpha}_{MC}$ est trouvée, cette quantité est substituée dans (2.20) pour trouver $\hat{\beta}_{MC}$.

Trouvons maintenant l'expression analytique de $\hat{\beta}_{MC}(\alpha)$. On commence par simplifier $J(\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned}
J(\alpha, \beta) &= (S - H(\alpha)\beta)^T (S - H(\alpha)\beta) \\
&= (S^T - \beta^T H(\alpha)^T) (S - H(\alpha)\beta) \\
&= S^T S - S^T H(\alpha)\beta - \beta^T H(\alpha)^T S + \beta^T H(\alpha)^T H(\alpha)\beta \\
&= S^T S - 2S^T H(\alpha)\beta + \beta^T H(\alpha)^T H(\alpha)\beta \quad (\text{parce que } S^T H(\alpha)\beta \text{ est un scalaire}).
\end{aligned}$$

$\hat{\beta}_{MC}(\alpha)$ est l'expression β qui annule le gradient de $J(\alpha, \beta)$ pour un α connu :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\beta} J(\alpha, \beta) &= -2H(\alpha)^T S + 2H(\alpha)^T H(\alpha)\hat{\beta}_{MC} = 0 \\
\Rightarrow H(\alpha)^T H(\alpha)\hat{\beta}_{MC} &= H(\alpha)^T S \\
\Rightarrow \hat{\beta}_{MC}(\alpha) &= (H(\alpha)^T H(\alpha))^{-1} H(\alpha)^T S.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Pour trouver $\hat{\alpha}_{MC}$ on substitue l'expression de $\hat{\beta}_{MC}(\alpha)$ à la place de β dans (2.18) :

$$\begin{aligned}
&J(\alpha, \hat{\beta}_{MC}(\alpha)) \\
&= (S - H(\alpha)\hat{\beta}_{MC}(\alpha))^T (S - H(\alpha)\hat{\beta}_{MC}(\alpha)) \\
&= \left(S - H(\alpha) \left(H(\alpha)^T H(\alpha) \right)^{-1} H(\alpha)^T S \right)^T \left(S - H(\alpha) \left(H(\alpha)^T H(\alpha) \right)^{-1} H(\alpha)^T S \right) \\
&= S^T \left(I - H(\alpha) \left(H(\alpha)^T H(\alpha) \right)^{-1} H(\alpha)^T \right) \left(I - H(\alpha) \left(H(\alpha)^T H(\alpha) \right)^{-1} H(\alpha)^T \right) S \\
&= S^T \left(I - H(\alpha) \left(H(\alpha)^T H(\alpha) \right)^{-1} H(\alpha)^T \right) S.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

La dernière ligne dans (2.23) est obtenue en utilisant le fait que la matrice

$A = I - H(\alpha) \left(H(\alpha)^T H(\alpha) \right)^{-1} H(\alpha)^T$ a la propriété $A^2 = A$ (Kay 1993).

Pour trouver $\hat{\alpha}_{MC}$, il suffit maintenant de résoudre :

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{MC} &= \arg \min_{\alpha} \left\{ J(\alpha, \hat{\beta}(\alpha)) \right\} \\ &= \arg \min_{\alpha} \left\{ S^T \left[I - H(\alpha) (H^T(\alpha) H(\alpha))^{-1} H^T(\alpha) \right] S \right\} .\end{aligned}\quad (2.24)$$

On remarque que la fonction $J(\alpha, \hat{\beta}_{MC}(\alpha))$ dans (2.24) est non linéaire en α . Pour cette raison, il est très difficile, voire impossible de trouver une expression analytique pour $\hat{\alpha}_{MC}$. Pour résoudre ce problème on a donc recours à une méthode numérique.

L'approche numérique la plus simple et la plus sûre pour maximiser une fonction non linéaire $f(\theta)$ est d'échantillonner $f(\theta)$ avec un très petit pas d'échantillonnage et de déterminer la valeur θ qui correspond à la valeur minimale, θ^* , de $f(\theta)$. Si le pas est assez fin on est assuré de trouver une valeur θ très proche de la valeur qui minimise la fonction $f(\theta)$. Par contre, lorsque les valeurs de θ ne sont pas contenues dans un intervalle borné, ou si cet intervalle est large, le temps de calculs nécessaire pour cette approche peut être très élevé. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser une méthode d'optimisation pour trouver θ^* . En général, les méthodes d'optimisation convergent vers le minimum véritable si une valeur initiale proche de cette valeur est disponible. Par contre, il se peut que ces méthodes convergent vers un minimum local ou qu'elles ne convergent pas du tout (Kay 1993). C'est le cas lorsque les caractéristiques de la fonction à maximiser ne sont pas favorables à l'optimisation. Par exemple, lorsque la fonction présente des maximums locaux ou lorsqu'elle est non-différentiable ou non-convexe.

2.2.4 Choix d'une méthode numérique pour l'estimation de la fréquence fondamentale

Pour faire un choix d'une méthode numérique pour la résolution de (2.24), considérons en premier la quantité α . On se rappelle que α représente la fréquence fondamentale du bruit harmonique et sa valeur est généralement contenue dans un intervalle très étroit. Par contre, on ne peut être assuré que α est restreinte à un intervalle borné. De plus, étant donné la lourdeur du calcul de la fonction $J(\alpha, \hat{\beta}(\alpha))$ dans (2.24), il est préférable d'utiliser une méthode d'optimisation pour déterminer $\hat{\alpha}_{MC}$.

Pour déterminer si la fonction $J(\alpha, \hat{\beta}(\alpha))$ présente les caractéristiques favorables à l'optimisation, on affiche $J(\alpha, \hat{\beta}(\alpha))$ en fonction de α (la fréquence fondamentale) pour un signal MT réel :

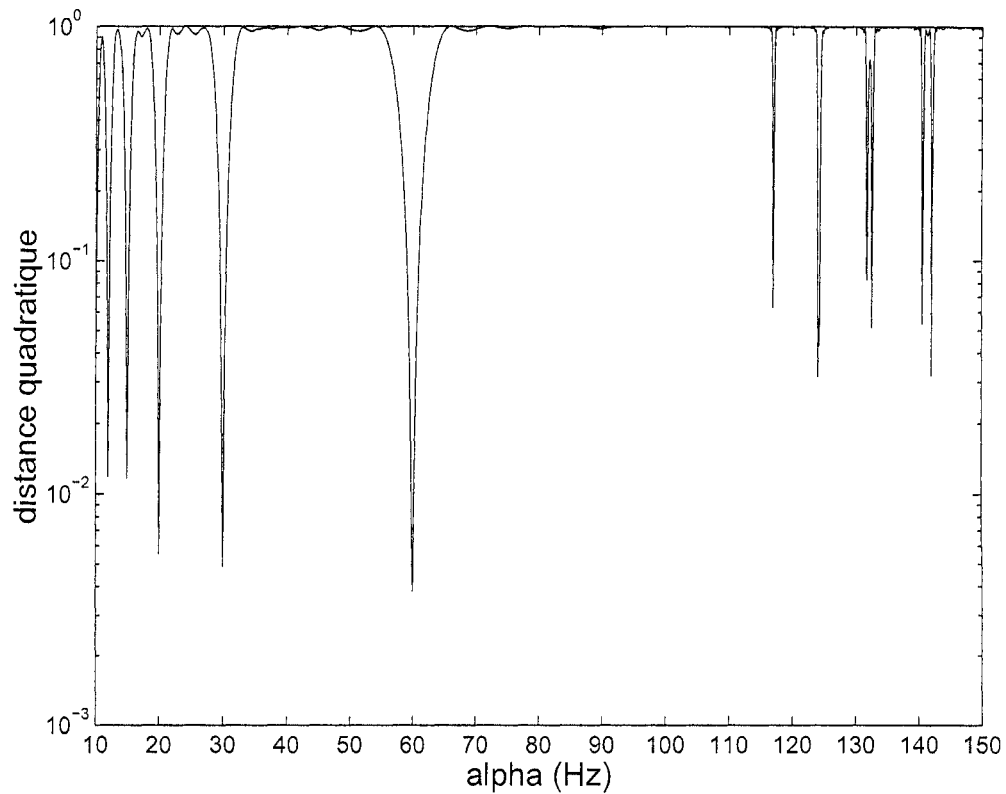


Figure 2.1 : Graphique de la distance quadratique $J(\alpha, \hat{\beta}(\alpha))$ en fonction de la fréquence fondamentale α pour un signal MT réel (signal enregistré par Geosystems Canada inc. à West Morgan lake, Morgan Township, Ontario (Canada) pour Falcon Bridge Limited).

On remarque en premier que la fonction est continue pour toutes valeurs de α . On remarque aussi la présence de plusieurs minimums locaux et que le minimum global est situé très proche de 60 Hz et est contenue dans l'intervalle 54 à 66 (Hz). Ainsi, dans cet intervalle toutes les conditions pour l'efficacité d'une méthode d'optimisation sont présentes.

On choisit d'utiliser la méthode d'optimisation «large-scale trust-region reflective Newton method» qui est documentée dans : (Coleman et Li 1996). Cette méthode est conçue pour la recherche d'estimateurs des *moindres carrés* et permet d'introduire une

information *a priori* sur la quantité à estimer. Cela nous convient puisque α est généralement très proche d'une valeur connue (p. ex. 60 Hz).

2.2.5 Analyse de la complexité de l'estimateur du bruit harmonique

Une caractéristique importante d'un estimateur est sa complexité, c'est à dire le nombre de calculs qu'il nécessite pour générer des estimés. En effet, le nombre de calculs détermine le temps de calcul.

Analysons maintenant la complexité de l'estimateur des *moindres carrés*. Pour cette analyse, on considère seulement le nombre de produits nécessaire. Effectivement, une multiplication est une opération plus coûteuse qu'une addition et donc c'est principalement les multiplications qui déterminent le temps de calcul (Fortin 1995).

En premier, on considère la complexité de l'évaluation de $H(\alpha)$, une matrice de dimension $N \times m$ où $m = 2 * p$ et p est le nombre d'harmoniques. Pour évaluer $H(\alpha)$ il est nécessaire d'évaluer chaque élément de $H(\alpha)$, qui sont des fonctions trigonométriques de la forme $\cos(2\pi f_i n T_e)$.

Les fonctions trigonométriques sont généralement évaluées par des séries de puissances avec un nombre fini de termes. Si ces fonctions doivent être évaluées avec beaucoup de précision, les séries de puissances correspondantes peuvent comporter plusieurs termes et leurs évaluations demander un temps de calcul relativement long. Dans notre cas, les formules de récurrences (Press et Flannery 1986) :

$$\sin(n\theta) = 2 \cos(\theta) \sin([n-1]\theta) - \sin([n-2]\theta) \quad (2.25)$$

$$\cos(n\theta) = 2 \cos(\theta) \cos([n-1]\theta) - \cos([n-2]\theta) \quad (2.26)$$

permettent de réduire considérablement le nombre de calculs. Par exemple, l'évaluation de $\cos(2\pi f_i n T_e)$ se fait avec (2.26) où $\theta = (2\pi f_i T_e)$ et après une évaluation initiale de $\cos(\theta)$, cette expression nécessite seulement une multiplication. Ainsi, on considère que le nombre de calculs pour l'évaluation d'une fonction trigonométrique est équivalent à une multiplication (la multiplication du cos avec le sinus dans (2.25) ou du cos avec le cos dans (2.26)).

L'évaluation des arguments $2\pi f_i n T_e$ nécessite approximativement pN produits. Ainsi, la complexité du calcul de $H(\alpha)$ est à peu près :

$$\begin{aligned} pN + 2pN &= 3pN \\ &= \frac{3}{2}mN \end{aligned} \quad (2.27)$$

L'estimateur développé précédemment fonctionne en deux étapes. Dans la première étape, le paramètre α (la fréquence fondamentale) est estimé et par la suite, le paramètre β (les amplitudes et phases) est estimé. On considère maintenant le nombre de produits nécessaire pour estimer α . Dans cette analyse on détermine le nombre de produits pour estimer β , parce que l'estimation de β est une étape dans l'estimation de α .

Le paramètre α est estimé utilisant (2.21) au lieu de (2.24) parce que la méthode d'optimisation utilisée trouve la valeur de α qui minimise la distance quadratique. Ainsi, la fonction objective à minimiser pour trouver α est :

$$J(\alpha, \hat{\beta}_{MC}(\alpha)) = (S - H(\alpha)\hat{\beta}_{MC}(\alpha))^T (S - H(\alpha)\hat{\beta}_{MC}(\alpha)), \quad (2.28)$$

où :

$$\hat{\beta}_{MC}(\alpha) = \left(H(\alpha)^T H(\alpha) \right)^{-1} H(\alpha)^T S. \quad (2.29)$$

On peut réécrire (2.29) sous la forme d'un système d'équations linéaires :

$$\left(H(\alpha)^T H(\alpha) \right) \hat{\beta}_{MC}(\alpha) = H(\alpha)^T S. \quad (2.30)$$

Il est plus efficace de déterminer $\hat{\beta}_{MC}(\alpha)$ par la résolution de (2.30) que par l'équation (2.29) parce que l'inverse d'une matrice est plus coûteuse que la résolution d'un système linéaire (Fortin 1995). Déterminons maintenant la complexité de la résolution de (2.30).

Le nombre de produits pour évaluer la matrice $H(\alpha)$ est $\frac{3}{2} m N$ (voir (2.27)).

On détermine maintenant la complexité du calcul de $H(\alpha)^T H(\alpha)$. Nous utilisons le fait que chaque élément de $H(\alpha)^T H(\alpha)$ peut être calculé analytiquement à partir d'une série géométrique. De plus, deux types d'expressions représentent les éléments de $H(\alpha)^T H(\alpha)$. Le premier représente les éléments de la diagonale de $H(\alpha)^T H(\alpha)$. Par exemple, le premier élément de $H(\alpha)^T H(\alpha)$ est :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \cos^2(\omega_1 n T_e) &= \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega_1 n T_e)}{2} \right] \\
&= \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \cos(2\omega_1 n T_e) \\
&= \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^N e^{(i2\omega_1 T_e)n} \right) \\
&= \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i2\omega_1 T_e} (e^{i2\omega_1 T_e N} - 1)}{e^{i2\omega_1 T_e} - 1} \right) \\
&= \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i2\omega_1 T_e} e^{i\omega_1 T_e N} (e^{i\omega_1 T_e N} - e^{-i\omega_1 T_e N})}{e^{i\omega_1 T_e} (e^{i\omega_1 T_e} - e^{-i\omega_1 T_e})} \right) \\
&= \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\omega_1 T_e (N+1)} 2i \sin(\omega_1 N T_e)}{2i \sin(\omega_1 T_e)} \right) \\
&= \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(\omega_1 T_e (N+1)) \sin(\omega_1 N T_e)}{\sin(\omega_1 T_e)} \right) \tag{2.31}
\end{aligned}$$

où $\omega_1 = 2\pi f_1$. La complexité de l'expression (2.31) est environ 8 (2 produits pour évaluer les arguments des fonctions trigonométriques, 3 produits pour évaluer les fonctions trigonométriques, le produit des fonctions $\cos(\omega_1 T_e (N+1))$ et $\sin(\omega_1 N T_e)$, la division des fonctions $\cos(\omega_1 T_e (N+1)) \sin(\omega_1 N T_e)$ et $\sin(\omega_1 T_e)$ et la multiplication par $\frac{1}{2}$).

Le deuxième représente les autres éléments de $H(\alpha)^T H(\alpha)$. Par exemple, l'élément $[2,1]$ de $H(\alpha)^T H(\alpha)$ est :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \cos(\omega_2 n T_e) \cos(\omega_1 n T_e) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \left[\cos((\omega_2 + \omega_1) n T_e) + \cos((\omega_2 - \omega_1) n T_e) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos\left(\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) T_e (N+1)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) T_e N\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) T_e\right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos\left(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) T_e (N+1)\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) T_e N\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) T_e\right)} \right]. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

La complexité de l'expression (2.32) est environ 19 (8 produits pour évaluer les arguments des fonctions trigonométriques, 6 produits pour évaluer les fonctions trigonométriques et 5 autres multiplications et divisions).

Pour déterminer la complexité du calcul de $H(\alpha)^T H(\alpha)$, nous utilisons aussi le fait que la matrice $H(\alpha)^T H(\alpha)$ est une matrice symétrique et que l'évaluation d'une fonction trigonométrique nécessite environ le même temps de calculs qu'un produit. Ainsi, la complexité du calcul de $H(\alpha)^T H(\alpha)$ est :

$$\begin{aligned}
m(8) + \left(\sum_{i=1}^{m-1} i \right) (19) &= 8m + 19 \frac{m(m-1)}{2} \\
&= \frac{19}{2} m^2 - \frac{3}{2} m. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Il est important de noter qu'en général l'utilisation de séries géométriques pour évaluer $H(\alpha)^T H(\alpha)$ diminue considérablement la complexité de la méthode des *moindres carrés*. En effet, sans l'utilisation de séries géométriques le produit matriciel $H(\alpha)^T H(\alpha)$ nécessite :

$$\left(\frac{m^2 + m}{2}\right)N = \frac{N}{2}m^2 + \frac{N}{2}m \quad (2.34)$$

produits et (2.34) est généralement plus élevé que (2.33) parce que très souvent $N \gg 19$.

Le nombre de produits à effectuer pour évaluer $H(\alpha)^T S$ est :

$$m N . \quad (2.35)$$

On résout le système linéaire (2.30) par la méthode de Choleski. On choisit cette méthode parce qu'elle tire avantage du fait que $H(\alpha)^T H(\alpha)$ est une matrice définie positive. En effet, une matrice A définie positive vérifie la condition $x^T A x \geq 0$ pour tout x et c'est le cas pour la matrice $H(\alpha)^T H(\alpha)$ parce que :

$$\begin{aligned} x^T \left(H(\alpha)^T H(\alpha) \right) x &= \left(H(\alpha) x \right)^T H(\alpha) x \\ &= \|H(\alpha) x\|^2 \geq 0 . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Le nombre de produits à effectuer pour la résolution du système (2.30) par la méthode de Choleski est (Burden et Faires 1993) :

$$\frac{1}{6}m^3 + \frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{3}m . \quad (2.37)$$

La complexité de l'évaluation de $\hat{\beta}_{MC}(\alpha)$ pour une valeur α donnée est la somme de (2.27), (2.33), (2.35) et (2.37) :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3}{2}m N\right) + \left(\frac{19}{2}m^2 - \frac{3}{2}m\right) + (m N) + \left(\frac{1}{6}m^3 + \frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{3}m\right) \\ &= \frac{1}{6}m^3 + 11m^2 - \frac{7}{6}m + \frac{5}{2}mN . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Maintenant, on détermine la complexité d'une évaluation de la fonction objective (2.28).

Le nombre de produits pour déterminer $H(\alpha)\hat{\beta}_{MC}(\alpha)$ est :

$$m N . \quad (2.39)$$

Le nombre de produits pour déterminer $(S - H(\alpha)\hat{\beta}_{MC}(\alpha))^T (S - H(\alpha)\hat{\beta}_{MC}(\alpha))$ est :

$$N . \quad (2.40)$$

Ainsi, la complexité de l'évaluation de la fonction objective $J(\alpha, \hat{\beta}_{MC}(\alpha))$ est la somme de (2.38), (2.39) et (2.40).

La complexité de l'évaluation de $\hat{\alpha}_{MC}$ est le nombre d'évaluations de $J(\alpha, \hat{\beta}_{MC}(\alpha))$ multiplié par la complexité de $J(\alpha, \hat{\beta}_{MC}(\alpha))$:

$$N_{fo} \left\{ \left(\frac{1}{6} m^3 + 11m^2 - \frac{7}{6} m + \frac{5}{2} mN \right) + mN + N \right\} \quad (2.41)$$

où N_{fo} représente le nombre d'évaluations de $J(\alpha, \hat{\beta}_{MC}(\alpha))$.

On exprime (2.41) en fonction de p :

$$N_{fo} \left[\left(\frac{4}{3} p^3 + 44p^2 - \frac{7}{3} p \right) + (7p + 1) N \right] . \quad (2.42)$$

L'analyse et l'évaluation de la complexité de la méthode des *moindres carrés* sont traitées au chapitre 4.

CHAPITRE 3 RESTAURATION DE SIGNAUX MT PAR LA RÉJECTION ADAPTATIVE DU BRUIT HARMONIQUE

Dans le chapitre précédent, on a utilisé l'approche classique de l'estimation pour trouver l'estimateur du bruit harmonique. Les étapes de l'approche nous ont amené à définir l'estimateur des *moindres carrés* du bruit harmonique.

Une autre approche pour l'estimation du bruit harmonique est la réjection adaptative, publiée par Douglas C. Nyman et James E. Gaiser en 1983 (Nyman et Gaiser 1983). Dans ce chapitre, on présente cette méthode et on y propose quelques améliorations.

3.1 Développement théorique de la méthode de réjection adaptative

La méthode est basée sur le modèle à temps continu suivant :

$$s(t) = \sum_{i=1}^p A_i \cos(i \omega_0 t + \phi_i) + w(t) \quad (3.1)$$

où $t \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, 2, \dots, p$, p représente le nombre total d'harmoniques, A_i est l'amplitude de l'harmonique i , ϕ_i est la phase de l'harmonique i , ω_0 est la fréquence fondamentale du BH et $w(t)$ représente le signal géophysique qui est modélisé par un processus stochastique de bruit blanc centré et de puissance moyenne σ^2 . En d'autres mots, la moyenne de $w(t)$ est égale à zéro pour tout t et l'autocorrélation de $w(t)$ est :

$$\begin{aligned} R(\tau) &= E\{w(t+\tau)w(t)\} \\ &= \sigma^2 \delta(\tau) \end{aligned} \quad (3.2)$$

où δ est une distribution delta de Dirac. Voici les étapes dans le développement de la méthode :

$s(t)$ est projeté sur l'ensemble de fonctions :

$$\left\{ \cos(k\omega t), \sin(k\omega t), \cos(k\omega t)\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \sin(k\omega t)\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right\} \quad (3.3)$$

où $k \in [1, p]$ (un ensemble d'entiers qui représente les indices des harmoniques à estimer), ω est l'estimé de la fréquence fondamentale ω_0 , T est la durée du signal S .

Le résultat est l'ensemble de variables aléatoires :

$$\begin{cases} U_k = \langle \cos(k\omega t) \cdot S \rangle \\ V_k = \langle \sin(k\omega t) \cdot S \rangle \\ X_k = \left\langle \cos(k\omega t) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cdot S \right\rangle \\ Y_k = \left\langle \sin(k\omega t) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cdot S \right\rangle \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\text{où } \langle f \cdot g \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt .$$

On considère la variable aléatoire U_k :

$$\begin{aligned}
U_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) s(t) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \left(\sum_{i=1}^p A_i \cos(i\omega_0 t + \phi_i) + w(t) \right) dt \\
&= \sum_{i=1}^p A_i \left(\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(i\omega_0 t + \phi_i) dt \right) + \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) w(t) dt .
\end{aligned} \tag{3.5}$$

1

Le terme $\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) w(t) dt$ dans (3.5) peut être négligée si $T \gg \frac{2\sigma^2}{A_k^2}$. En effet, ce terme est de moyenne nulle parce que $w(t)$ est un processus de moyenne nulle :

$$\begin{aligned}
E \left[\int_0^T \cos(k\omega t) w(t) dt \right] &= \int_0^T \cos(k\omega t) E[w(t)] dt \\
&= 0 .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

De plus, si $T \gg \frac{2\sigma^2}{A_k^2}$ la variance de $\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) w(t) dt$ est beaucoup plus petite que le

terme déterministe $\sum_{i=1}^p A_i \left(\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(i\omega_0 t + \phi_i) dt \right)$ élevé au carré.

Effectivement, la variance de $\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) w(t) dt$ est :

¹ L'intégrale $\int_0^T \cos(k\omega t) w(t) dt$ dans (3.5) est une intégrale stochastique qui existe dans le sens de la moyenne quadratique (voir l'annexe 2).

$$\begin{aligned}
\text{var} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) w(t) dt \right\} &= E \left\{ \left[\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) w(t) dt \right]^2 \right\} - E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) w(t) dt \right\}^2 \\
&= E \left\{ \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \cos(k\omega t_1) \cos(k\omega t_2) E \{ w(t_1) w(t_2) \} dt_1 dt_2 \right\} - 0 \\
&= \frac{\sigma^2}{T} \left[\frac{4k\pi + 1}{8k\pi} \right] \\
&\approx \frac{\sigma^2}{2T}
\end{aligned}
\tag{3.7}$$

où on a utilisé le fait que l'espérance E est un opérateur linéaire (voir (7.5) pour le développement de (3.7)).

Ensuite, le terme déterministe $\sum_{i=1}^p A_i \left(\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(i\omega_0 t + \phi_i) dt \right)$ dans (3.5) élevé au carré est :

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \sum_{i=1}^p A_i \cos(i\omega_0 t + \phi_i) dt \right]^2 \\
&\approx \left[\frac{A_k \cos(\phi_k)}{T} \int_0^T \cos^2(k\omega t) dt \right]^2 \\
&= \left[\frac{A_k \cos(\phi_k)}{2} \right]^2 \\
&\leq \frac{A_k^2}{4} .
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

Donc, si :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2}{2T} &\ll \frac{A_k^2}{4} \\
\Leftrightarrow T &\gg \frac{2\sigma^2}{A_k^2} ,
\end{aligned}
\tag{3.9}$$

l'expression (3.7) est beaucoup plus petite que l'expression (3.8) et le terme $\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) w(t) dt$ dans (3.5) peut être négligé.

Dans ce cas, U_k devient approximativement :

$$U_k = \sum_{i=1}^p A_i I_{i,k} \quad (3.10)$$

où :

$$I_{i,k} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(i\omega_0 t + \phi_i) dt . \quad (3.11)$$

On remplace la fréquence fondamentale ω_0 par :

$$\omega_0 = \omega + \varepsilon \quad (3.12)$$

où ω représente l'estimé de ω_0 et ε représente l'erreur sur l'estimé multipliée par -1.

L'équation (3.11) devient :

$$I_{i,k} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(i(\omega + \varepsilon)t + \phi_i) dt . \quad (3.13)$$

On fait le changement de variable $x = t/T$ dans (3.13) :

$$I_{i,k} = \int_0^1 \cos(k\omega T x) \cos(i(\omega T + \varepsilon T)x + \phi_i) dx . \quad (3.14)$$

On définit la variable $u = \varepsilon T$ dans (3.14) :

$$I_{i,k} = \int_0^1 \cos(k\omega T x) \cos(i(\omega T + u)x + \phi_i) dx . \quad (3.15)$$

Si T est un multiple entier de la période fondamentale $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ (3.15) se simplifie et prend la forme :

$$I_{i,k} = \begin{cases} \frac{(2p\pi + u)(\sin(ku + \phi_i) - \sin(\phi_i))}{ku(4p\pi + u)} & \text{si } k = i \\ \frac{2i(2p\pi + u) \cos\left(\frac{i}{2}u + \phi_i\right) \sin\left(\frac{i}{2}u\right)}{-4k^2 p^2 \pi^2 + i^2 (2p\pi + u)^2} & \text{si } k \neq i . \end{cases} \quad (3.16)$$

On fait le développement de Taylor de (3.16) à l'ordre 1 autour de $u = 0$:

$$I_{i,k} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(\phi_k) + \left(\frac{\cos(\phi_k)}{8p\pi} - \frac{k \sin(\phi_k)}{4} \right) u & \text{si } k = i \\ \frac{i^2 \cos(\phi_k)}{2p\pi(i^2 - k^2)} u & \text{si } k \neq i . \end{cases} \quad (3.17)$$

Si $p \rightarrow \infty$ dans (3.17), on obtient :

$$I_{i,k} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(\phi_k) - \frac{k \sin(\phi_k)}{4} u & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i . \end{cases} \quad (3.18)$$

Ainsi, $I_{i,k}$ peut être exprimé par :

$$I_{i,k} = \left(\frac{1}{2} \cos(\phi_k) - \frac{k \sin(\phi_k)}{4} u \right) \delta_{i,k} . \quad (3.19)$$

Pour cette raison, U_k dans (3.10) devient (lorsque $p \rightarrow \infty$ et $u \approx 0$) :

$$U_k = \frac{1}{2} A_k \cos(\phi_k) - \frac{1}{4} A_k k \sin(\phi_k) u . \quad (3.20)$$

Étant donné que $u = \varepsilon T = \varepsilon p \frac{2\pi}{\omega}$, ε doit tendre vers zéro plus vite que $\frac{1}{p}$, car p tend vers l'infini.

En utilisant la même démarche et les mêmes hypothèses, on obtient pour V_k, X_k, Y_k :

$$\begin{cases} V_k = -\frac{1}{2} A_k \sin(\phi_k) - \frac{1}{4} k A_k \cos(\phi_k) u \\ X_k = \frac{1}{4\pi} k A_k \sin(\phi_k) u \\ Y_k = \frac{1}{4\pi} k A_k \cos(\phi_k) u . \end{cases} \quad (3.21)$$

Il est important de noter que l'erreur dans l'approximation de Taylor de la fonction $\sin(k u + \phi_i)$, utilisé dans (3.17), devient grande si $k u > \frac{\pi}{2}$. Comme $u = \varepsilon T$, une condition nécessaire pour la validité des équations (3.20) et (3.21) est :

$$k \varepsilon T < \frac{\pi}{2} , \quad (3.22)$$

où $\varepsilon = 2\pi \Delta f$, et Δf représente l'erreur de l'estimé de la fréquence. La condition (3.22) peut être exprimée par :

$$T < \frac{1}{2k\Delta f} \quad \text{ou} \quad k < \frac{1}{2T\Delta f} . \quad (3.23)$$

Les expressions (3.23) représentent des bornes supérieures pour la durée du signal et le nombre d'harmoniques qui peuvent être estimés. Étant donné que p doit être grand, et $T = p T_0$, (3.23) confirme que ε doit être petit, car $\varepsilon = 2\pi \Delta f$.

Les formules (3.20) et (3.21) peuvent être utilisées pour estimer ε . En effet, on vérifie que les expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k = 2\sqrt{U_k^2 + V_k^2} \\ \cos(\phi_k) = \frac{2(U_k + \pi X_k)}{A_k} \\ \sin(\phi_k) = \frac{-2(V_k + \pi Y_k)}{A_k} \\ u = \frac{4\pi}{k A_k} (X_k \sin(\phi_k) + Y_k \cos(\phi_k)) \end{array} \right. \quad (3.24)$$

sont valides à l'ordre 1 en u .

À partir de ces équations on obtient l'expression suivante pour u :

$$u = \frac{2\pi}{k} \frac{U_k Y_k - V_k X_k}{U_k^2 + V_k^2} \quad (3.25)$$

Utilisant, $\varepsilon = \frac{u}{T}$ on obtient l'estimateur suivant pour $\hat{\varepsilon}$:

$$\hat{\varepsilon}_k = \frac{2\pi}{kT} \frac{U_k Y_k - V_k X_k}{U_k^2 + V_k^2} \quad (3.26)$$

Puisque $k \in [1, p]$, (3.26) permet d'obtenir un ensemble de p estimateurs du scalaire ε . Une combinaison linéaire des ε_k , avec $k = 1, 2, \dots, p$, est utilisée dans la section 3.4.1 pour obtenir un meilleur estimateur de ε .

L'utilisation des expressions développées dans cette section pour l'estimation du bruit harmonique est expliquée dans la prochaine section.

3.2 Mise en oeuvre de la méthode de réjection adaptative

Dans cette section nous considérons la mise en oeuvre de la méthode de réjection adaptative. Tout d'abord, on note que les signaux captés sont discrets et donc les intégrales qui définissent les variables aléatoires U_k, X_k, V_k, Y_k doivent être approximées par des sommations. Par exemple, U_k est :

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) s(t) dt \\ &\approx \frac{T_e}{T} \sum_{n=1}^N \cos(k\omega nT_e) s(nT_e) \end{aligned} \tag{3.27}$$

où N est le nombre de points dans le signal S et T_e est la période d'échantillonnage.

Nous utilisons un algorithme pour réduire l'erreur introduite par les approximations menant aux estimateurs des paramètres du bruit harmonique. Pour chaque harmonique, l'algorithme part d'un estimé initial de la fréquence fondamentale ω_0 et utilise $\hat{\varepsilon}_k$ pour corriger cet estimé. Ainsi, l'algorithme produit un ensemble d'estimé de la fréquence fondamentale nommé $\omega_{0,k}$. La figure suivante illustre cette mise en oeuvre :

Pour les harmoniques $k = 1$ à $k = p$

-Initialiser $\hat{\varepsilon}_k$ à une valeur élevée.

-Faire un premier estimé de la fréquence fondamentale : $\hat{\omega}_0 = 2\pi 60$.

Tant que $|\hat{\varepsilon}_k|$ est supérieur à un certain seuil, répéter :

-Calculer les variables : U_k, V_k, X_k, Y_k (avec (3.4) et (3.27)).

-Estimer les paramètres de l'harmonique : $\hat{A}_k$ et $\hat{\phi}_k$ (avec (3.24)).

-Estimer l'erreur de la fréquence estimée : $\hat{\varepsilon}_k$ (avec (3.26)).

-Corriger l'estimé de la fréquence fondamentale :

$$\hat{\omega}_{0,k} = \hat{\varepsilon}_k + \hat{\omega}'_{0,k}$$

où $\hat{\omega}'_{0,k}$ est l'estimé de l'itération précédente.

Algorithme 3.1 : Algorithme de la méthode RAf.

Afin de comparer cette méthode aux autres méthodes d'estimation, on nomme l'estimateur des $\omega_{0,k}$, décrit par l'algorithme précédent, **RAf**.

La méthode peut aussi être utilisée pour estimer uniquement les amplitudes et les phases. En effet, sachant $\omega_{0,k}$, les amplitudes et phases sont estimées par les étapes :

-Calculer les variables : U_k, V_k, X_k, Y_k (avec (3.5) et (3.28))

-Estimer les paramètres de l'harmonique : $\hat{A}_k$ et $\hat{\phi}_k$ (avec (3.25))

On nomme l'estimateur des amplitudes et phases (A_k et ϕ_k) obtenu, **RAamp**.

3.3 Analyse de la complexité de la méthode de réjection adaptative

On détermine d'abord le nombre de produits pour la méthode **RAf**. La complexité du calcul de U_k est égal au nombre de points N plus la complexité du calcul des cosinus qui est $2N$. La complexité du calcul de U_k, V_k, X_k, Y_k est donc $4 \times 3 N = 12N$. Le nombre de produits à effectuer pour calculer $\hat{A}_k, \hat{\phi}_k$ et $\hat{\varepsilon}_k$ est négligeable comparé à la complexité du calcul de U_k, V_k, X_k, Y_k . L'évaluation de U_k, V_k, X_k, Y_k se trouvent à l'intérieur de deux boucles. Le nombre d'itérations de la boucle *pour* est égal au nombre d'harmoniques p . Le nombre d'itérations de la boucle *tant que* est le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence, nommé N_{tq} . Ce nombre dépend des caractéristiques du signal mesuré. Alors, la complexité de la méthode **RAf** est :

$$12p N_{tq} N \quad (3.28)$$

On détermine maintenant le nombre de produits pour **RAamp**. La complexité du calcul de U_k, V_k, X_k, Y_k , pour $k = 1, 2, \dots, p$, est $12 p N$. Le nombre de produits à effectuer pour calculer $\hat{A}_k, \hat{\phi}_k$ et $\hat{\varepsilon}_k$ est négligeable comparé à la complexité du calcul de U_k, V_k, X_k, Y_k . Donc, la complexité de **RAamp** est :

$$12 p N \quad (3.29)$$

3.4 Améliorations de l'approche de réjection adaptative

Dans cette section, on propose quelques améliorations à l'approche de réjection adaptative. La première cherche à augmenter la précision de l'estimateur de la fréquence fondamentale ω_0 . La deuxième et la troisième cherchent à augmenter la

précision des estimateurs des amplitudes et des phases A_k, ϕ_k . Les autres tentent de résoudre le problème du manque d'orthogonalité des sinus et cosinus pour augmenter la précision de l'estimateur de ω_0 .

3.4.1 Première amélioration : réduction de la variance de l'estimateur de la fréquence fondamentale

Cette amélioration utilise le fait que les estimateurs $\hat{\varepsilon}_k$ (avec $k = 1, 2, \dots, p$) définis par (3.26), sont tous des estimateurs de la même quantité, soit l'erreur sur l'estimé de la fréquence fondamentale ω_0 . L'amélioration consiste à faire une combinaison linéaire des $\hat{\varepsilon}_k$, décrite par $\hat{\varepsilon} = \sum_{k=1}^p a_k \hat{\varepsilon}_k$ pour produire un estimateur $\hat{\varepsilon}$ non biaisé de variance minimale.

On démontre dans l'annexe 3 (section B) que les $\hat{\varepsilon}_k$ forment un ensemble d'estimateurs non biaisés et mutuellement non corrélés. Dans ce cas, l'estimateur $\hat{\varepsilon}$ prend la forme (Kay 1993) :

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\sum_{k=1}^p \sigma_k^{-2} \hat{\varepsilon}_k}{\sum_{k=1}^p \sigma_k^{-2}} \quad (3.30)$$

où σ_k^2 est la variance de $\hat{\varepsilon}_k$. On démontre aussi dans l'annexe 3 (section 4) que :

$$\sigma_k^2 \approx \frac{4 \pi^2 \sigma^2}{A_k^2 k^2 T^3} \quad (3.31)$$

où σ^2 représente la puissance moyenne de $w(t)$ et T est la durée du signal.

En substituant (3.31) dans (3.30) on obtient :

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\sum_{k=1}^p k^2 A_k^2 \hat{\varepsilon}_k}{\sum_{k=1}^p k^2 A_k^2} \quad (3.32)$$

L'algorithme suivant illustre la mise en œuvre utilisant (3.32) :

- Initialiser $\hat{\varepsilon}$ à une valeur élevée.
- Faire un premier estimé de la fréquence fondamentale : $\hat{\omega}_0 = 2\pi 60$.
- Tant que** $|\hat{\varepsilon}|$ est supérieur à un certain seuil, répéter :
 - Calculer U_k, V_k, X_k, Y_k où $k = 1, 2, \dots, p$ (avec (3.4) et (3.27)).
 - Estimer les paramètres des harmoniques $\hat{A}_k$ et $\hat{\phi}_k$ où $k = 1, 2, \dots, p$ (avec (3.24)).
 - Calculer $\hat{\varepsilon}_k$ où $k = 1, 2, \dots, p$ (avec (3.26))
 - Estimer l'erreur de la fréquence estimé : $\hat{\varepsilon}$ (avec (3.32)).
 - Corriger l'estimé de la fréquence fondamentale :

$$\hat{\omega}_0 \approx \hat{\varepsilon} + \hat{\omega}_0'$$

où $\hat{\omega}_0'$ est l'estimé de l'itération précédente.

Algorithme 3.2 : Algorithme de la méthode RAf2.

Après convergence de cette boucle, $\hat{\omega}_0$ représente l'estimé amélioré de la fréquence fondamentale. On nomme l'estimateur de ω_0 obtenu, **RAf2**.

Déterminons la complexité de l'estimateur **RAf2**. La complexité du calcul de U_k, V_k, X_k, Y_k , où $k = 1, 2, \dots, p$, est $12 N p$. Le nombre de produits pour calculer $\hat{A}_k, \hat{\phi}_k, \hat{\varepsilon}_k, \hat{\varepsilon}$ est négligeable comparé à la complexité du calcul de U_k, V_k, X_k, Y_k . L'évaluation de U_k, V_k, X_k, Y_k se trouve à l'intérieur d'une boucle *tant que*. Le nombre d'itérations pour la convergence de cette boucle est nommé N_{iq2} . Ce nombre dépend des caractéristiques du signal mesuré. Alors, le nombre total de produits est approximativement :

$$12 p N_{iq2} N . \quad (3.33)$$

3.4.2 Deuxième amélioration : réduction de la variance des estimateurs des amplitudes

Une fois la fréquence estimée on suppose que $\hat{\omega}_0 = \omega_0$, et on démontre qu'il est possible d'estimer les amplitude et phases A_k, ϕ_k à partir de U_k, V_k seulement, qui sont les coefficients d'Euler de la série de Fourier. On verra que l'estimateur obtenu est identique à l'estimateur des *moindres carrés* lorsque la durée T est égale à un multiple entier de la période fondamentale. Pour cette raison, on s'attend que cet estimateur soit plus précis que **RAamp** lorsque $T = cT_0$ où $c \in \mathbb{N}$.

Tout d'abord, réécrivons (3.1) en utilisant l'identité trigonométrique $\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$:

$$\begin{aligned}
s(t) &= \sum_{i=1}^p A_i \cos(i\omega_0 t + \phi_i) + w(t) \\
&= \sum_{i=1}^p A_i [\cos(i\omega_0 t) \cos(\phi_i) - \sin(i\omega_0 t) \sin(\phi_i)] + w(t) \quad (3.34) \\
&= \sum_{i=1}^p a_i \cos(i\omega_0 t) + b_i \sin(i\omega_0 t) + w(t)
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{cases} a_i = A_i \cos(\phi_i) \\ b_i = -A_i \sin(\phi_i) \end{cases} \quad (3.35)$$

Nous estimons d'abord a_i et b_i et par la suite, nous estimons A_i et ϕ_i avec :

$$\begin{cases} A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \\ \phi_i = \arctan(-b_i, a_i) \end{cases} \quad (3.36)$$

L'expression de U_k avec $\omega = \omega_0$ devient :

$$\begin{aligned}
U_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega_0 t) s(t) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega_0 t) \left\{ \sum_{i=1}^p a_i \cos(i\omega_0 t) + b_i \sin(i\omega_0 t) + w(t) \right\} dt \quad (3.37) \\
&\approx \frac{1}{T} \sum_{i=1}^p a_i \int_0^T \cos(k\omega_0 t) \cos(i\omega_0 t) dt + b_i \int_0^T \cos(k\omega_0 t) \sin(i\omega_0 t) dt
\end{aligned}$$

où on suppose que $T \gg \frac{2\sigma^2}{A_k^2}$ et donc le terme $\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega_0 t) w(t) dt$ peut être négligé

pour les mêmes raisons que données précédemment (voir l'explication après (3.8)).

Si la durée T est un multiple entier de la période fondamentale $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, l'orthogonalité entre les fonctions cosinus de fréquences différentes et les fonctions cosinus et sinus permet de simplifier (3.37) à :

$$U_k = \frac{a_k}{2 T} . \quad (3.38)$$

En suivant les mêmes étapes, on obtient pour V_k :

$$V_k = \frac{b_k}{2 T} . \quad (3.39)$$

Ainsi, les estimateurs de a_k et b_k sont :

$$\begin{cases} \hat{a}_k = 2 T U_k \\ \hat{b}_k = 2 T V_k \end{cases} . \quad (3.40)$$

Les estimateurs des amplitudes et des phases sont obtenus en substituant (3.40) dans (3.36). Ces estimateurs sont identiques à ceux des *moindres carrés* lorsque la durée du signal est un multiple de la période fondamentale. En effet, la matrice $H(\alpha)^T H(\alpha)$ dans (2.29) devient diagonale et (2.29) se simplifie à (3.40). L'estimation des amplitudes et des phases par cette approche est nommé **RAamp2**.

La complexité de **RAamp2** est approximativement égale à la complexité du calcul de U_k et V_k , où $k = 1, 2, \dots, p$, qui est :

$$6 N p . \quad (3.41)$$

3.4.3 Troisième amélioration : correction relative à l'échantillonnage

La méthode **RAamp2** est optimale seulement si la durée T est égale à un multiple de la période fondamentale $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Puisque la fréquence d'échantillonnage ne peut être

modifiée, il est rare que T soit un multiple entier exacte de $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. De plus, la

méthode est développée pour un signal continu, alors que les données sont échantillonnées. Pour ces raisons, les formules (3.40) ne sont généralement pas exactes. Développons maintenant des estimateurs des amplitudes et des phases pour un signal discret dont la durée n'est pas un multiple exact de la période fondamentale.

Partant de (3.37) et en supposant l'orthogonalité entre les fonctions de fréquences différentes et les fonctions cosinus et sinus, on a :

$$\begin{aligned}
 U_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega_0 t) s(t) dt \\
 &\approx \frac{T_e}{T} \sum_{n=1}^N \cos(k\omega_0 nT_e) s(nT_e) \\
 &= \frac{T_e}{T} \sum_{n=1}^N \cos(k\omega_0 nT_e) \left\{ \sum_{i=1}^p a_i \cos(i\omega_0 nT_e) + b_i \sin(i\omega_0 nT_e) + w(nT_e) \right\} \\
 &\approx \frac{T_e}{T} a_k \sum_{n=1}^N \cos^2(k\omega_0 nT_e)
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

où on suppose que $T \gg \frac{2\sigma^2}{A_k^2}$ et donc le terme $\sum_{n=1}^N \cos(k\omega_0 nT_e) w(nT_e)$ peut être négligé pour les mêmes raisons que données précédemment (voir l'explication après (3.8)).

De façon similaire pour V_k , on a :

$$V_k \approx \frac{T_e}{T} b_k \sum_{n=1}^N \sin^2(k\omega_0 n T_e). \quad (3.43)$$

On simplifie l'expression $\sum_{n=1}^N \cos^2(k\omega_0 n T_e)$ utilisant (2.31) :

$$C \equiv \sum_{n=1}^N \cos^2(k\omega_0 n T_e) = \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(k\omega_0 T_e (N+1)) \sin(k\omega_0 N T_e)}{\sin(k\omega_0 T_e)} \right). \quad (3.44)$$

En suivant les étapes utilisées pour obtenir (2.31), l'expression $\sum_{n=1}^N \sin^2(k\omega_0 n T_e)$ devient :

$$S \equiv \sum_{n=1}^N \sin^2(k\omega_0 n T_e) = \frac{N}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(k\omega_0 T_e (N+1)) \sin(k\omega_0 N T_e)}{\sin(k\omega_0 T_e)} \right). \quad (3.45)$$

En utilisant les expressions (3.42) et (3.43), on obtient pour a_k et b_k :

$$\begin{cases} a_k = \frac{U_k T}{C T_e} \\ b_k = \frac{V_k T}{S T_e} \end{cases} \quad (3.46)$$

où C et S sont définis par (3.44) et (3.45) respectivement.

Les estimateurs des amplitudes et phases peuvent maintenant être obtenus en utilisant (3.36). L'estimation des amplitudes et des phases avec cette approche est nommée **RAamp3**.

Le nombre de produits à calculer pour obtenir C et S est négligeable comparé à la complexité du calcul de U_k et V_k . Pour cette raison, la complexité de **RAamp3** est approximativement égale à la complexité de **RAamp2**.

3.4.4 Quatrième amélioration : nettoyage itératif du signal

Dans le développement des estimateurs de réjection adaptative on doit supposer que la durée T du signal tend vers l'infini (voir (3.20)). Lorsque c'est le cas, $I_{k,n}$ est nul pour $k \neq i$ et U_k dépend uniquement de l'harmonique k . En pratique, T est finie et U_k dépend des amplitudes A_k des harmoniques $k \neq i$, selon (3.10). La contribution de ces amplitudes diminue la précision de la méthode. Une amélioration possible est de soustraire du signal des estimés des harmoniques 1 à $k-1$, ainsi que l'harmonique $k+1$, avant de calculer U_k, V_k, X_k, Y_k . On choisit de soustraire ces harmoniques parce que la majorité de la puissance se trouve généralement dans les premiers harmoniques. L'algorithme suivant illustre la mise en œuvre de cette approche :

-Initialiser $\hat{\varepsilon}$ à une valeur élevée.
 -Faire une première estimation de la fréquence fondamentale : $\hat{\omega}_0 = 2\pi 60$.
Tant que $|\hat{\varepsilon}|$ est supérieur à un certain seuil, répéter :

- Stemp = S (où S représente le signal mesuré)
- Pour** les harmoniques : $j = 1$ à $j = p-1$
 - Calculer les scalaires : $U_{j+1}, V_{j+1}, X_{j+1}, Y_{j+1}$ (en utilisant le signal Stemp et (3.4), (3.27)).
 - Estimer les paramètres de l'harmonique $j+1$: $(\hat{A}_{j+1} \text{ et } \hat{\phi}_{j+1})$ (en utilisant (3.24)).
 - Stemp2 = Stemp - l'harmonique $j+1$
 - Calculer et conserver les scalaires : U_j, V_j, X_j, Y_j (en utilisant le signal Stemp2).
 - Estimer les paramètres de l'harmonique j : $(\hat{A}_j \text{ et } \hat{\phi}_j)$.
 - Stemp = Stemp - l'harmonique j
- Calculer et conserver : $(U_p, V_p, X_p, Y_p, A_p)$ (utilisant le signal Stemp).
- Estimer $\hat{A}_k$ et $\hat{\phi}_k$ où $k = 1, \dots, p$ (avec les U_k, V_k, X_k, Y_k conservés).
- Calculer $\hat{\varepsilon}_k$ où $k = 1, \dots, p$ (avec les U_k, V_k, X_k, Y_k conservés et (3.26)).
- Estimer l'erreur de la fréquence fondamentale estimée : $\hat{\varepsilon}$ (avec (3.32)).
- Corriger l'estimé de la fréquence fondamentale :

$$\hat{\omega}_0 \approx \hat{\varepsilon} + \hat{\omega}_0'$$
 où $\hat{\omega}_0'$ est l'estimé de l'itération précédente

Algorithme 3.3 : Algorithme de la méthode RAf3

L'estimation de la fréquence fondamentale utilisant cette approche est nommé **RAf3**.

La complexité de **RAf3** est similaire à la complexité de **RAf2**. La différence est que les variables aléatoires U_k, V_k, X_k, Y_k sont calculées une fois supplémentaire à l'intérieur de la boucle *Pour*. La complexité de **RAf3** est donc :

$$24p N_{iq3} N . \quad (3.47)$$

3.4.5 Cinquième amélioration : ajustement de la durée

Dans tous les algorithmes basés sur la réjection adaptative, un nouvel estimé de la fréquence fondamentale ω_0 est obtenu à chaque itération et cet estimé devient la fréquence fondamentale nominale (ω dans (3.4)) pour l'itération suivante. Par contre, dans ces algorithmes, la durée T du signal demeure constante et à partir de la deuxième itération, T n'est plus un multiple entier de la durée nominale $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Ainsi, une amélioration possible est de modifier la durée chaque fois qu'un estimé de ω_0 est obtenu, pour que la durée demeure un multiple entier de $T = \frac{2\pi}{\omega}$. L'algorithme suivant illustre la mise en œuvre de cette approche :

-Initialiser $\hat{\varepsilon}$ à une valeur élevée.

-Faire une première estimation de la fréquence fondamentale : $\hat{\omega}_0 = 2\pi 60$.

Tant que $|\hat{\varepsilon}|$ est supérieur à un certain seuil, répéter :

-Calculer U_k, V_k, X_k, Y_k où $k = 1, \dots, p$ (avec (3.4) et (3.27)).

-Estimer $\hat{A}_k$ et $\hat{\phi}_k$ où $k = 1, \dots, p$ (avec (3.24)).

-Calculer $\hat{\varepsilon}_k$ où $k = 1, \dots, p$ (avec (3.26)).

-Estimer l'erreur de la fréquence fondamentale estimée : $\hat{\varepsilon}$ (avec (3.32)).

-Corriger l'estimé de la fréquence fondamentale :

$$\hat{\omega}_0 \approx \hat{\varepsilon} + \hat{\omega}_0'$$

où $\hat{\omega}_0'$ est l'estimé de l'itération précédente

-Modifier la durée du signal pour que la durée soit un multiple entier de $\hat{T}_0 = \frac{2\pi}{\hat{\omega}_0}$.

Algorithme 3.4 : Algorithme de la méthode RAf4.

L'estimation de la fréquence fondamentale utilisant cette approche est appelée **RAf4**.

L'expression de la complexité de **RAf4** a la même forme que celle de **RAf2**. La seule différence est le nombre d'itérations pour la convergence de la boucle *Pour* dans **RAf2**.

La complexité de **RAf4** est donc approximativement :

$$12p N_{iq4} N . \quad (3.48)$$

3.5 Résumé des complexités des différentes méthodes

Dans cette section on présente deux tableaux qui résument les complexités des différentes méthodes d'estimation de la fréquence fondamentale, des amplitudes et des phases :

Tableau 3.1 : Résumé des complexités des estimateurs de la fréquence fondamentale ω_0 .

Nom de la méthode	Expression	Complexité
RAf	(3.28)	$12p N_{iq} N$
RAf2	(3.33)	$12p N_{iq2} N$
RAf3	(3.47)	$24p N_{iq3} N$
RAf4	(3.48)	$12p N_{iq4} N$
MCf²	(2.42)	$N_{f0} \left[\left(\frac{4}{3} p^3 + 44p^2 - \frac{7}{3} p \right) + (7p + 1) N \right]$

² *,** : **MCf** et **MCamp** représentent les estimateurs des *moindres carrés* de la fréquence fondamentale et des amplitudes et phases respectivement.

Tableau 3.2 : Résumé des complexités des estimateurs des amplitudes et phases A_k, ϕ_k .

Nom de la méthode	Expression	Complexité
RAamp	(3.29)	$12 N p$
RAamp2	(3.41)	$6 N p$
RAamp3	(3.41)	$6 N p$
MCamp	(2.38) avec $m = 2p$	$\frac{4}{3}p^3 + 44p^2 - \frac{7}{3}p + 5pN$

Dans le prochain chapitre, on évalue et on compare les complexités de quelques unes de ces méthodes.

CHAPITRE 4 COMPARAISON DES DIFFÉRENTES MÉTHODES D'ESTIMATION DU BRUIT HARMONIQUE

Dans les chapitres deux et trois nous avons développé des estimateurs des paramètres du bruit harmonique et nous avons déterminé la complexité de ces estimateurs. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'évaluation et la comparaison de la performance et de la complexité de ces estimateurs.

4.1 Évaluation des performances des estimateurs

La performance d'un estimateur est la précision avec laquelle il associe des valeurs à des paramètres inconnus d'un modèle aléatoire. Étant donné que les estimateurs sont fonctions de variables aléatoires, ils sont des variables aléatoires aussi. Pour cette raison, des moyens statistiques sont nécessaires pour évaluer leurs performances (Kay 1993). Sachant que les lois de probabilités décrivent entièrement les caractéristiques de variables aléatoires, c'est à partir des lois qu'on évalue la performance d'estimateurs. Un exemple de mesure de la performance est l'erreur quadratique moyenne (EQM).

Une difficulté importante dans l'analyse de la performance d'un estimateur est la détermination des expressions analytiques des statistiques qui décrivent la performance. Lorsque ce n'est pas possible, on a recours à des simulations numériques pour estimer ces statistiques. Il est important de noter que ces moyens ne permettent pas d'arriver à des conclusions sur la performance des estimateurs. En effet, ils permettent seulement d'obtenir des estimés de la performance avec un certain degré de précision (Kay 1993).

Dans notre cas, l'utilisation d'un moyen numérique approximatif est nécessaire. En effet, les estimateurs de la fréquence fondamentale basés sur la réjection adaptative ont recours à des méthodes itératives, et pour cette raison il est très difficile de déterminer

leurs lois de densité de probabilité. Pour l'analyse des performances des estimateurs, nous utilisons l'approche numérique de Monte Carlo.

4.1.1 Évaluation de la performance par l'approche de Monte Carlo

L'approche de Monte Carlo pour évaluer la performance d'estimateurs fonctionne comme suit. Plusieurs réalisations du signal aléatoire sont générées à l'ordinateur et pour chaque réalisation des estimés sont obtenus. Par la suite, des statistiques de la performance des estimateurs sont obtenues à partir de ces estimés.

Voici une énumération des étapes dans la méthode de Monte Carlo pour l'évaluation de la performance des estimateurs du bruit harmonique :

- 1) Générer le signal aléatoire $S = X_{BH} + W_{MT}$ à l'ordinateur.
- 2) Estimer les paramètres de X_{BH} avec les différents estimateurs.
- 3) Sauvegarder les estimés obtenus à l'étape 2.
- 4) Répéter les étapes 1 à 3 N_r fois pour obtenir des ensembles d'estimés sauvegardés.
- 5) Approximer les statistiques de la performance des estimateurs à partir des ensembles d'estimés sauvegardés.

Expliquons plus en détail la première étape. Le signal synthétique S est généré à partir

du modèle $s[n] = \sum_{i=1}^p A_i \cos(i \omega_0 n T_e + \phi_i) + w_{MT}[n]$ où $n = 1, \dots, N$, les ϕ_i suivent une loi uniforme ($\phi_i \sim U(0, 2\pi)$), $w_{MT}[n]$ suit un processus de bruit blanc Gaussien ($w_{MT}[n] \sim N(0, I\sigma_w^2)$) et on suppose que les A_i suivent la relation :

$$A_i = \alpha e^{-\frac{i}{q}} \quad (4.1)$$

où α et q sont des constantes. On utilise la relation (4.1) parce que généralement les amplitudes des harmoniques diminuent lorsque l'indice i des harmoniques augmente.

Pour déterminer les valeurs des paramètres du signal S , on commence par initialiser les variables suivantes :

$P_{X_{BH}}$: La puissance du bruit harmonique.

SNR : Le rapport signal à bruit où X_{BH} est considéré comme le signal et W_{MT} comme le bruit.

q : La constante d'amortissement des amplitudes.

f_N : La fréquence fondamentale nominale.

Δf_0 : L'erreur sur la fréquence fondamentale.

f_0 : La fréquence fondamentale ($f_0 = f_N + \Delta f_0$).

p : Le nombre d'harmoniques.

ϕ_i : Les phases du bruit harmonique.

T_e : La période d'échantillonnage.

T : La durée du signal.

Pour déterminer les valeurs de A_i , on doit déterminer le paramètre α dans (4.1). Tout d'abord, on trouve l'expression de $P_{X_{BH}}$ en fonction de α :

$$\begin{aligned}
P_{X_{BH}} &= \sum_{i=1}^p \frac{A_i^2}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \left(\alpha e^{-\frac{i}{q}} \right)^2 \\
&= \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=1}^p e^{-\frac{2i}{q}} \\
&= \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{e^{-\frac{2}{q}} - \left(e^{-\frac{2}{q}} \right)^{p+1}}{1 - e^{-\frac{2}{q}}} \right].
\end{aligned}$$

Ensuite, on isole α dans l'équation précédente :

$$\alpha = \sqrt{2P_{X_{BH}} \left[\frac{1 - e^{-\frac{2}{q}}}{e^{-\frac{2}{q}} - \left(e^{-\frac{2}{q}} \right)^{p+1}} \right]}. \quad (4.2)$$

En utilisant (4.2), les A_i peuvent être déterminés avec (4.1) ainsi que les valeurs de $P_{X_{BH}}$ et de q .

Pour générer le signal W_{MT} , on doit déterminer le paramètre σ_w^2 . Ce paramètre est égal à la puissance de $P_{W_{MT}}$:

$$P_{W_{MT}} = \|W_{MT}\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N w_{MT}^2(n) \approx \sigma_w^2. \quad (4.3)$$

La puissance du signal MT ($P_{W_{MT}}$) est déterminée à partir du SNR. En effet, l'expression du SNR est :

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{X_{BH}}}{P_{W_{MT}}} \right) \quad (4.4)$$

d'où on obtient :

$$P_{W_{MT}} = \frac{P_{X_{BH}}}{10^{\frac{\text{SNR}}{10}}} \quad (4.5)$$

Finalement, le signal MT synthétique est généré à partir de la somme de X_{BH} et W_{MT} .

Dans les étapes 1 à 4 on obtient des ensembles d'estimés de dimension N_r .

4.1.2 Mesure des performances des estimateurs

À l'étape 5 (section 4.1.1), on mesure la performance des estimateurs à partir des ensembles d'estimés sauvegardés. Pour les estimés de la fréquence fondamentale, on mesure l'EQM, qui est définie par :

$$\begin{aligned} \text{EQM} &= E \left[\left(f_0 - \hat{f}_0 \right)^2 \right] \\ &\approx \frac{1}{N_r} \sum_{k=1}^{N_r} \left(f_0 - \hat{f}_0[k] \right)^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

où $\hat{f}_0[k]$ représente le $k^{\text{ième}}$ estimé de la fréquence fondamentale.

Pour juger la précision des EQM obtenus, on calcule l'écart-type (ET) de l'EQM qui est la racine carré de la variance (var) de l'EQM :

$$\begin{aligned}
 \text{var}(\text{EQM}) &= \text{var} \left[\frac{1}{N_r} \sum_{k=1}^{N_r} (f_0 - \hat{f}_0[k])^2 \right] \\
 &= \frac{1}{N_r^2} \sum_{k=1}^{N_r} \text{var} \left[(f_0 - \hat{f}_0[k])^2 \right] \\
 &= \frac{1}{N_r} \text{var} \left[(f_0 - \hat{f}_0)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

d'où :

$$\text{ET}[\text{EQM}] = \sqrt{\frac{1}{N_r} \text{var} \left[(f_0 - \hat{f}_0)^2 \right]} \tag{4.8}$$

où la variance est estimée de la façon suivante pour un ensemble de M réalisations indépendantes d'une variable aléatoire y :

$$\text{var}[y] \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (y_i - \bar{y})^2 \tag{4.9}$$

et où $\bar{y}$ représente la moyenne de y qui est estimée avec $\bar{y} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_i$.

Pour évaluer la performance des estimés des amplitudes et des phases (A_i, ϕ_i) , on commence par générer ces estimés en utilisant la valeur véritable de la fréquence fondamentale. Par la suite, on mesure l'amélioration du rapport signal à bruit (ASNR). Le ASNR est le rapport entre le SNR à la sortie et le SNR à l'entrée du système suivant :

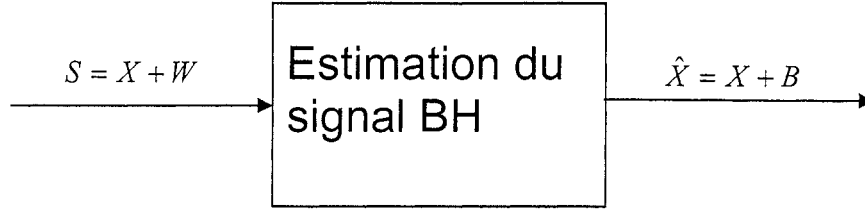


Figure 4.1 : Système illustrant l'estimation du bruit harmonique.

où $\hat{X}$ représente l'estimé du BH et $B = \hat{X} - X$ représente l'erreur sur $\hat{X}$. Le ASNR exprimée en dB est définie de la façon suivante :

$$\text{ASNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\text{SNR}_{\text{out}}}{\text{SNR}_{\text{IN}}} \right) \text{ (dB)} \quad (4.10)$$

où $\text{SNR}_{\text{IN}} = \frac{P_X}{P_W}$ et $\text{SNR}_{\text{OUT}} = \frac{P_X}{P_B}$. Dans ces expressions, P représente la puissance qui est calculée utilisant (4.3).

Comme les puissances sont fonctions de quantités aléatoires, le ASNR est aussi aléatoire. Pour cette raison, on calcule la moyenne de l'ASNR pour évaluer la précision des estimateurs de A_i et ϕ_i :

$$E[\text{ASNR}] \approx \frac{1}{N_r} \sum_{k=1}^{N_r} \text{ASNR}[k] \quad (4.11)$$

où $\text{ASNR}[k]$ est le ASNR de la $k^{\text{ième}}$ réalisation.

Pour déterminer la précision de $E[\text{ASNR}]$, on calcule son écart-type :

$$\text{ET}[E[\text{ASNR}]] = \sqrt{\frac{1}{N_r} \text{var}[\text{ASNR}]} \quad (4.12)$$

Pour calculer les statistiques (4.6), (4.8), (4.11) et (4.12), il est nécessaire de connaître le nombre de réalisations N_r . Une approche possible est d'augmenter N_r jusqu'à ce que ces statistiques convergent (Kay 1993). L'approche que nous utilisons consiste à choisir une valeur de N_r suffisamment grande et de s'assurer que toutes les statistiques convergent pour cette valeur.

Le signal BH est estimé à partir de combinaisons d'estimateurs de la fréquence fondamentale, des amplitudes et des phases. Pour évaluer la performance de ces combinaisons, on utilise encore $E[\text{ASNR}]$. Cette fois ci, $E[\text{ASNR}]$ représente la performance de l'ensemble des estimateurs du BH, parce que la fréquence fondamentale n'est pas connue mais estimée. Les combinaisons permettant d'estimer le BH sont définies dans la prochaine section.

4.2 Présentation et comparaison des résultats des performances des estimateurs

Dans cette section, on présente et on compare les résultats des estimateurs des paramètres du BH. De plus, à partir des résultats obtenus on définit trois combinaisons d'estimateurs permettant d'estimer le BH. Les paramètres des simulations Monte Carlo qui ont généré les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau 4.1 : Paramètres du signal synthétique

Paramètre	Symbole	Valeur
Puissance du BH	$P_{X_{BH}}$	1
Rapport signal à bruit	SNR	10, 30 ou 50 dB
Constante d'amortissement des amplitudes	q	6
La fréquence fondamentale nominale	f_N	60 Hz
L'erreur sur la fréquence fondamentale	Δf_0	-0,05 Hz
La fréquence fondamentale	$f_0 = f_N + \Delta f_0$	59,95 Hz
Le nombre d'harmoniques	p	5
Les phases du bruit harmonique	ϕ_i	$\phi_i \sim U(0, 2\pi)$
La période d'échantillonnage	T_e	1/2048 sec
La durée du signal	T	10/60 sec

Les résultats pour la fréquence fondamentale sont présentés dans les trois prochains tableaux, qui donnent les résultats pour des SNR de 10, 30 et 50 dB. Dans ces tableaux, les EQM sont en ordre croissant et l'EQM relatif est le rapport entre l'EQM de la méthode considérée et l'EQM le moins élevé.

Tableau 4.2 : EQM des estimateurs de la fréquence fondamentale (SNR=10 dB).

Méthode	EQM	ET(EQM)	EQM relatif
MCf	4.0677310E-04	1.7735396E-05	1.0000000E+00
RAf4	6.7893094E-04	3.1998031E-05	1.6690655E+00
RAf2	6.7898403E-04	3.2032100E-05	1.6691960E+00
RAf3	6.7945285E-04	3.2039037E-05	1.6703485E+00
RAf	1.5299730E-02	6.6550310E-04	3.7612443E+01

Tableau 4.3 : EQM des estimateurs de la fréquence fondamentale (SNR=30 dB).

Méthode	EQM	ET(EQM)	EQM relatif
MCf	4.4271151E-06	2.0025707E-07	1.0000000E+00
RAf3	6.8498037E-06	3.1932144E-07	1.5472387E+00
RAf2	6.8573589E-06	3.1977537E-07	1.5489453E+00
RAf4	6.8573589E-06	3.1977537E-07	1.5489453E+00
RAf	1.4499578E-04	6.2220907E-06	3.2751753E+01

Tableau 4.4 : EQM des estimateurs de la fréquence fondamentale (SNR=50 dB).

Méthode	EQM	ET(EQM)	EQM relatif
MCf	4.7777023E-08	2.2633971E-09	1.0000000E+00
RAf3	7.3870846E-08	3.4019213E-09	1.5461584E+00
RAf2	7.5741170E-08	3.4713912E-09	1.5853054E+00
RAf4	7.5741170E-08	3.4713912E-09	1.5853054E+00
RAf	1.6705719E-06	7.5362871E-08	3.4966012E+01

Dans les tableaux 4.2, 4.3 et 4.4, **MCf** est toujours la meilleure méthode; cette méthode a une EQM qui est toujours environ 1,6 fois inférieure aux EQM des autres méthodes. Les méthodes **RAf2**, **RAf3** et **RAf4** ont des EQM presque identiques; la différence des EQM de ces méthodes est inférieure ou de même ordre de grandeur que l'écart-type des EQM. Cela nous indique que les méthodes **RAf3** et **RAf4** n'ont pas réussi à améliorer significativement la méthode **RAf2**.

Pour la méthode **RAf3**, ces résultats suggèrent que les harmoniques voisins ne contribuent pas significativement à l'EQM. Pour la méthode **RAf4**, une justification possible de ces résultats est que f_N est très proche de f_0 et la période d'échantillonnage est fine, donc la durée du signal est déjà très proche d'un multiple de la période fondamentale.

La performance de **RAf** est toujours nettement inférieure à celles des autres méthodes; cette méthode a une EQM qui est de 33 à 38 fois supérieure à celle de **MCf**.

Pour la combinaison des méthodes, on conserve **MCf**, **RAf** et **RAf2**. On rejette les méthodes **RAf3** et **RAf4** parce qu'elles ne réussissent pas à améliorer **RAf2** de façon significative et parce qu'elles ont des complexités au moins aussi élevées que celle de **RAf2**. On conserve **RAf** pour pouvoir évaluer la méthode de réjection adaptative de base.

Les résultats pour les estimateurs des amplitudes et des phases sont présentés dans les trois prochains tableaux pour des SNR de 10, 30 et 50 dB. Dans ces tableaux, $E(\text{ASNR})$ est en ordre décroissant. $E(\text{ASNR})$ relatif est le rapport entre le $E(\text{ASNR})$ le plus élevé et le $E(\text{ASNR})$ de la méthode considérée. De plus, pour générer les résultats du tableau suivant, les amplitudes et phases sont estimées sachant la valeur véritable de la fréquence fondamentale.

Tableau 4.5 : $E(\text{ASNR})$ des estimateurs des amplitudes et phases (SNR=10 dB).

Méthode	$E(\text{ASNR})$	$ET(E(\text{ASNR}))$	$E(\text{ASNR})$ relatif
MCamp	1.5738129E+01	6.4383260E-02	1.0000000E+00
RAamp3	1.5726575E+01	6.5145098E-02	1.0007347E+00
RAamp2	1.5723748E+01	6.5152760E-02	1.0009146E+00
RAamp	1.0374012E+01	7.3288619E-02	1.5170726E+00

Tableau 4.6 : E(ASNR) des estimateurs des amplitudes et phases (SNR=30 dB).

Méthode	E(ASNR)	ET(E(ASNR))	E(ASNR) relatif
MCamp	1.5836586E+01	6.6636972E-02	1.0000000E+00
RAamp3	1.3316228E+01	9.1674297E-02	1.1892697E+00
RAamp2	1.3219696E+01	9.4774034E-02	1.1979539E+00
RAamp	9.1562870E+00	7.6881450E-02	1.7295860E+00

Tableau 4.7 : E(ASNR) des estimateurs des amplitudes et phases (SNR=50 dB).

Méthode	E(ASNR)	ET(E(ASNR))	E(ASNR) relatif
MCamp	1.5776644E+01	6.3776759E-02	1.0000000E+00
RAamp2	-1.2385392E+00	1.9535464E-01	-
RAamp3	-1.2755314E+00	1.8010961E-01	-
RAamp	-2.1249312E+00	1.8208387E-01	-

Dans les tableaux 4.5, 4.6 et 4.7 les méthodes **RAamp**, **RAamp2** et **RAamp3** ont des E(ASNR) négatifs lorsque le SNR est égale à 50 dB. Cela signifie que l'erreur d'estimation a une puissance plus grande que la puissance du signal MT (W_{MT}). Dans ce cas, l'importance de l'erreur d'estimation vient du fait que la durée n'est pas un multiple exact de la période fondamentale, ce qui est un critère des méthodes basées sur la réjection adaptative (voir la simplification qui précède l'équation (3.16)). La durée n'est pas un multiple exact de la période fondamentale, parce que la période fondamentale est seulement connue approximativement et la fréquence d'échantillonnage (2048 Hz) n'est pas un multiple de la fréquence fondamentale.

La méthode **RAamp** est la pire méthode; son E(ASNR) est toujours au moins 1,5 fois inférieure à celui de **MCamp** pour les SNR de 10 et de 30 dB.

Lorsque le SNR augmente, le $E(\text{ASNR})$ de **MCamp** devient de plus en plus supérieur aux $E(\text{ASNR})$ des autres méthodes.

Pour la combinaison des estimateurs, on conserve **MCamp** et **RAamp**. On rejette les méthodes **RAamp2** et **RAamp3** parce qu'elles admettent parfois des ASNR négatifs. On conserve la méthode **RAamp** pour évaluer la méthode de réjection adaptative de base.

On définit maintenant les combinaisons des estimateurs de la fréquence fondamentale et des amplitudes et phases :

Tableau 4.8 : Combinaisons des estimateurs de la fréquence fondamentale et des amplitudes et phases.

Numéro de la combinaison	Combinaison d'estimateurs
1	MCf-MCamp
2	RAf-RAamp
3	RAf2-MCamp

La combinaison 1 utilise l'estimation des *moindres carrés* pour estimer tous les paramètres du BH. La combinaison 2 représente la méthode de réjection adaptative de base. La combinaison 3 représente la méthode de réjection adaptative améliorée pour l'estimation de la fréquence fondamentale et l'estimateur des *moindres carrés* pour l'estimation des amplitudes et des phases.

Les résultats des combinaisons d'estimateurs sont présentés dans les trois prochains tableaux pour des SNR de 10, 30 et 50 dB. Dans ces tableaux, les $E(\text{ASNR})$ sont en ordre décroissant et le $E(\text{ASNR})$ relatif est le rapport entre le $E(\text{ASNR})$ le plus élevé et le $E(\text{ASNR})$ de la méthode considérée.

Tableau 4.9 : E(ASNR) des estimateurs du bruit harmonique (SNR=10 dB).

Méthode	E(ASNR)	ET(E(ASNR))	E(ASNR) relatif
MCf-MCamp	1.5413034E+01	6.0690522E-02	1.0000000E+00
RAf2-MCamp	1.5192576E+01	6.1349543E-02	1.0145109E+00
RAf-RAamp	1.2785051E+01	4.9812641E-02	1.2055512E+00

Tableau 4.10 : E(ASNR) des estimateurs du bruit harmonique (SNR=30 dB).

Méthode	E(ASNR)	ET(E(ASNR))	E(ASNR) relatif
MCf-MCamp	1.5293178E+01	6.3880072E-02	1.0000000E+00
RAf2-MCamp	1.5068174E+01	6.2676503E-02	1.0149324E+00
RAf-RAamp	1.0928828E+01	7.3180541E-02	1.3993430E+00

Tableau 4.11 : E(ASNR) des estimateurs du bruit harmonique (SNR=50 dB).

Méthode	E(ASNR)	ET(E(ASNR))	E(ASNR) relatif
MCf-MCamp	1.5166855E+01	5.7916073E-02	1.0000000E+00
RAf2-MCamp	1.4890504E+01	5.8495136E-02	1.0185589E+00
RAf-RAamp	-2.0759676E+00	1.9476527E-01	-

Dans les tableaux 4.9, 4.10 et 4.11, les performances des méthodes **MCf-MCamp** et **RAf2-MCamp** sont très proches. Par contre, la méthode **MCf-MCamp** demeure légèrement supérieure à **RAf2-MCamp** parce que la différence dans les E(ASNR) de ces méthodes demeure supérieure à l'écart-type des E(ASNR). La performance de la méthode **RAf-RAamp** est toujours la moins bonne. De plus, lorsque le SNR est de 50dB cette méthode donne un E(ASNR) négatif, ce qui indique qu'elle détériore le signal.

Le graphique suivant montre l'évolution du $E(\text{ASNR})$ des trois méthodes pour une durée de signal qui augmente et pour un SNR égale à 30 dB :

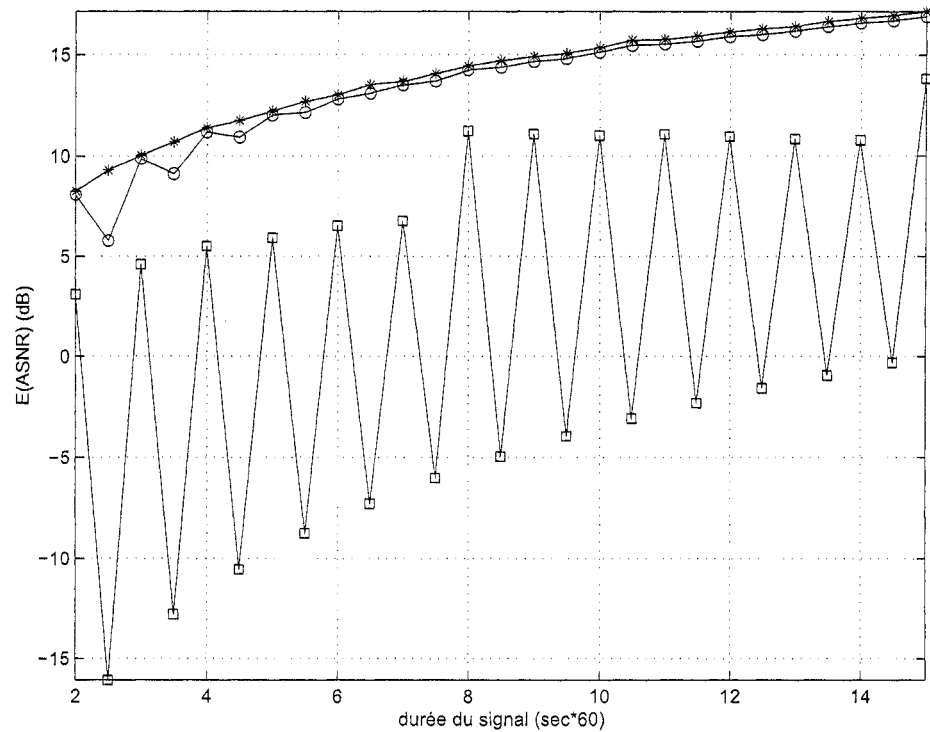


Figure 4.2 : Évolution de $E(\text{ASNR})$ en fonction de la durée du signal exprimé en multiples de périodes fondamentales. (Étoiles : MCf-MCamp, Cercles : RAf2-MCamp, Carrés : RAf-RAamp).

La figure 4.2 confirme que les performances des méthodes **MCf-MCamp** et **RAf2-MCamp** sont très proches. Cette figure montre aussi que la performance de **RAf-RAamp** diminue beaucoup quand la durée n'est pas un multiple de la période fondamentale. C'est parce que cette méthode fait l'hypothèse que la durée du signal est égale à un multiple de la période fondamentale.

4.3 Comparaison de la complexité des estimateurs

Dans cette section, on compare les complexités des trois combinaisons d'estimateurs. La complexité d'une combinaison est la somme de la complexité de son estimateur de la fréquence fondamentale et de son estimateur des amplitudes et des phases. Les expressions de ces complexités se trouvent dans les tableaux 3.1 et 3.2.

La complexité de **MCf-MCamp** est :

$$N\left(p(7N_{f0} + 5) + N_{f0}\right) + p^3\left(\frac{4}{3}(N_{f0} + 1)\right) + p^2(44(N_{f0} + 1)) - p\left(\frac{7}{3}(N_{f0} + 1)\right). \quad (4.13)$$

Si $N \gg p$, cette complexité devient approximativement égale à :

$$N\left(p(7N_{f0} + 5) + N_{f0}\right) = N((7p + 1)N_{f0} + 5p). \quad (4.14)$$

La complexité de **RAf-RAamp** est :

$$N\left(p(12N_{tq} + 12)\right) = N(12pN_{tq} + 12p). \quad (4.15)$$

La complexité de **RAf2-MCamp** est :

$$N\left(p(12N_{tq2} + 5)\right) + p^3\left(\frac{4}{3}\right) + p^2(44) - p\left(\frac{7}{3}\right). \quad (4.16)$$

Si $N \gg p$, cette complexité devient approximativement égale à :

$$N\left(p(12N_{tq2} + 5)\right) = N(12pN_{tq2} + 5p). \quad (4.17)$$

Étant donné qu'en général $N \gg p$, les expressions (4.14), (4.15) et (4.17) sont représentatives de la complexité des trois combinaisons d'estimateurs. On remarque que

ces termes sont tous d'ordre 1 en N et qu'ils dépendent tous des nombres d'itérations N_{f0} , N_{tq} et N_{tq2} , qui sont propres à chacune des trois méthodes. Ainsi, pour comparer la complexités des méthodes il est nécessaire de déterminer N_{f0} , N_{tq} et N_{tq2} .

On détermine les nombres d'itérations par une simulation numérique utilisant les paramètres du tableau 4.1. Les valeurs moyennes de 30 réalisations des nombres d'itérations, pour des SNR égales à 10, 30 et 50 dB, sont présentées dans le tableau suivant :

Tableau 4.12 : Les nombres d'itérations moyens pour l'estimation de la fréquence fondamentale correspondants aux estimateurs MCf-MCamp, RAf-RAamp et RAf2-MCamp.

		SNR=10 dB	SNR=30 dB	SNR=50 dB
MCf-MCamp	N_{f0}	12	12,7333	13
RAf-RAamp	N_{tq}	10,2533	6,0667	5,2133
RAf2-MCamp	N_{tq2}	6,3667	5,6333	5,3333

Pour comparer les trois méthodes, on évalue les expressions (4.13), (4.15) et (4.16) avec les paramètres du tableau 4.1 et les nombres du tableau 4.12 pour un SNR égale à 50 dB. On choisit 50 dB pour le SNR, parce que c'est une valeur qui représente bien des données MT réelles. On présente les valeurs obtenues dans le tableau suivant où le nombre de produits relatifs représente le rapport entre le nombre le plus élevé et le nombre de la méthode considérée :

Tableau 4.13 : Complexités des méthodes d'estimation du bruit harmonique pour les paramètres du tableau 4.1.

Méthode	Nombre de produits	Nombre de produits relatifs
MCf-MCamp	$1,8585 \times 10^5$	1
RAf-RAamp	$1,2725 \times 10^5$	1,4605
RAf2-MCamp	$1,1901 \times 10^5$	1,5616

La méthode **RAf2-MCamp** a une complexité environ 1,56 fois moins élevée que celle de la méthode **MCf-MCamp** pour les paramètres utilisés. **RAf2-MCamp** nécessite moins de calculs que **MCf-MCamp** parce que son nombre d'itérations N_{itq2} est environ 2,44 fois moins élevé que le nombre d'itérations de la méthode **MCf-MCamp** (N_{it0}) (voir le tableau 4.12). Ainsi, pour ce cas particulier la méthode **RAf2-MCamp** représente une alternative intéressante à **MCf-MCamp**, parce que sa précision est en général très proche de celle de **MCf-MCamp**.

La méthode **RAf-RAamp** a une complexité environ 1,46 fois moins élevée que celle de la méthode **MCf-MCamp**. Par contre, c'est la méthode la moins précise des trois combinaisons.

CHAPITRE 5 COMPARAISON DES DIFFÉRENTES MÉTHODES D'ESTIMATION PAR LA RESTAURATION DE SIGNAUX MAGNÉTOTELLURIQUES RÉELS

Dans le chapitre précédent, on a comparé la performance des estimateurs de la fréquence fondamentale, des amplitudes et des phases. À partir de ces comparaisons, on a défini trois méthodes d'estimation du bruit harmonique. On s'intéresse maintenant à l'application de ces méthodes à la restauration de signaux MT réels. Dans un premier temps, on analyse un signal MT détérioré par un bruit harmonique. Par la suite, on présente les résultats de la restauration de ce signal par les trois méthodes de restauration.

5.1 Les données magnétotelluriques

Les données magnétotelluriques proviennent de West Morgan Lake, Morgan Township en Ontario et ont été enregistrées par Geosystems Canada inc. pour FalconBridge Limited. Les signaux E_x, E_y, H_x, H_y et H_z ont été mesurés à quinze stations différentes. Pour nos analyses, on utilise une mesure du signal E_y échantillonné à 2048 Hz.

La figure 5.4 i) montre le signal mesuré. On voit que le bruit harmonique domine le signal MT. La figure 5.5 i) montre le spectre de densité de puissance du signal. On voit clairement la présence des harmoniques impairs à 60, 180, 300, 420, 540, 660, 780, 900 Hz ainsi que quelques harmoniques pairs à 120, 360 et 480 Hz.

On analyse maintenant la stationnarité du signal mesuré. C'est une propriété importante pour la précision des méthodes de restauration, car toutes les méthodes supposent que les composantes BH et MT du signal mesuré sont stationnaires.

Les deux figures suivantes permettent d'évaluer la stationnarité de la composante BH. Ces figures sont obtenues utilisant l'approche de la fenêtre glissante. Dans cette approche plusieurs segments du signal de même taille sont traités indépendamment. Les indices du début et de la fin des segments sont : $(n d, T_f + n d)$ où n désigne l'indice du segment, T_f la taille du segment en secondes et d le déplacement du segment en secondes. Pour les figures 5.1 et 5.2, on utilise $T_f = 10/60$ s, $d = 2/60$ s et la méthode **MCf-MCamp** pour estimer les paramètres du BH de chaque segment. La figure 5.1 représente l'évolution de l'amplitude en fonction du temps :

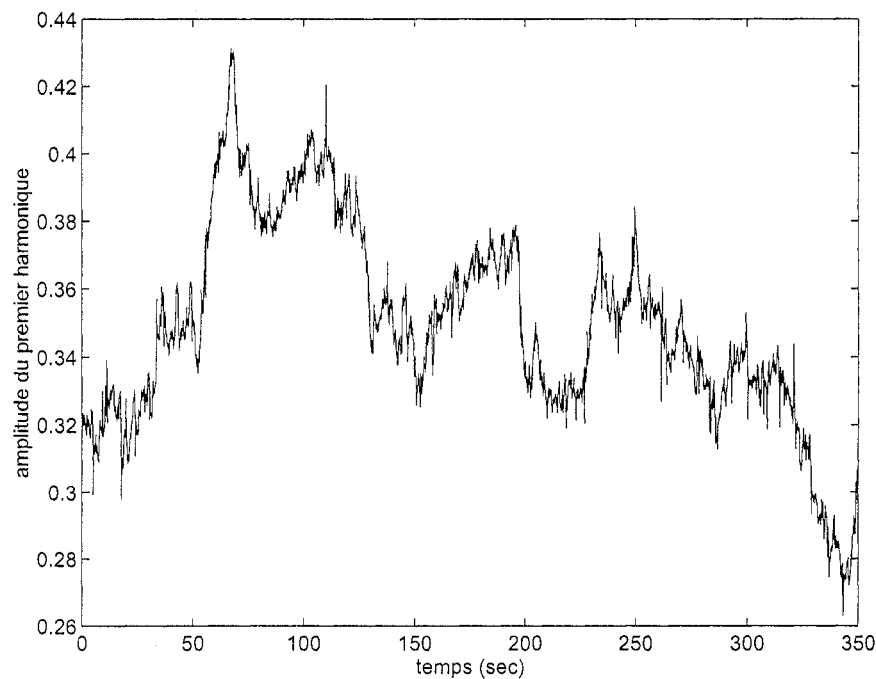


Figure 5.1 : Évolution de l'amplitude du premier harmonique dans le temps.

On constate que l'amplitude du premier harmonique varie dans le temps. Ce comportement non-stationnaire entraîne nécessairement une perte de précision dans les méthodes d'estimation des amplitudes. Pour cette raison, la durée du segment à traiter

pour la restauration du signal MT doit être limitée. Par contre, il a été observé (figure 4.2) que la performance des méthodes s'améliore lorsque la durée augmente. Ainsi, on choisit un signal de durée la plus longue possible pour assurer la meilleure précision d'estimation, mais suffisamment courte pour éviter les imprécisions causées par le comportement non-stationnaire des amplitudes.

La prochaine figure représente l'évolution de la fréquence fondamentale en fonction du temps :

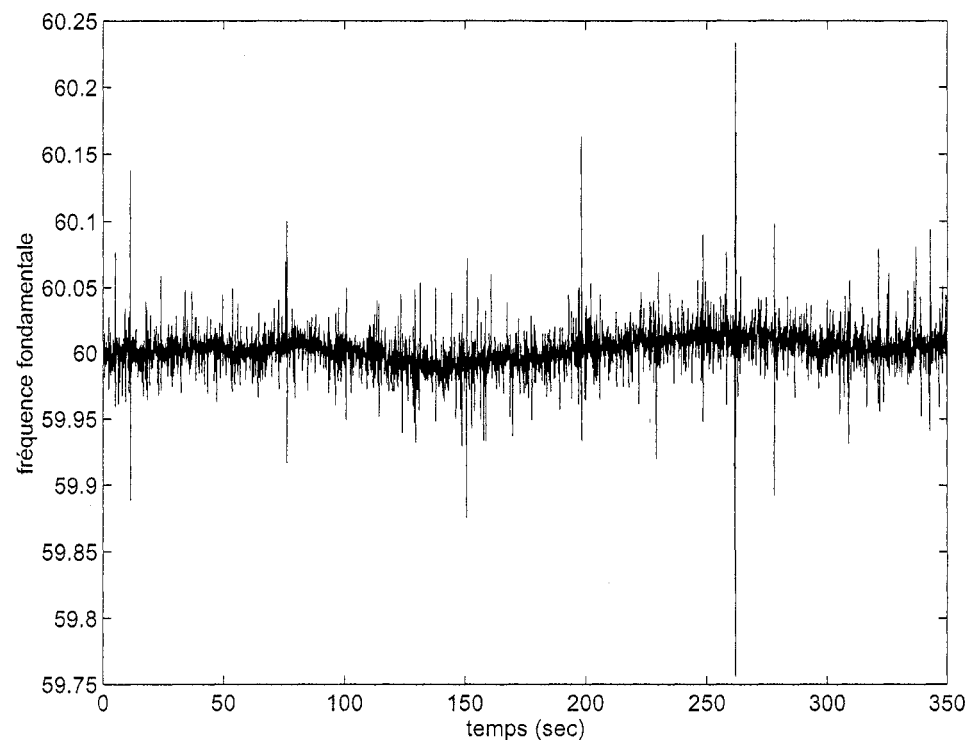


Figure 5.2 : Évolution de la fréquence fondamentale dans le temps.

On remarque que la moyenne de la fréquence fondamentale estimée varie dans le temps. Par le même raisonnement que précédemment, cela nous oblige de choisir une durée de

signal suffisamment courte. On observe aussi l'apparition de plusieurs changements brusque ou «pics» dans les valeurs de la fréquence fondamentale. Ces «pics» coïncident avec les changements brusques dans le signal mesuré.

On analyse la stationnarité du signal MT avec la figure 5.3. Cette figure représente le signal MT restauré avec **MCf-MCamp**. L'approche de la fenêtre glissante avec 10/60 s pour T_f et 10/60 s pour d est utilisée pour générer cette figure.

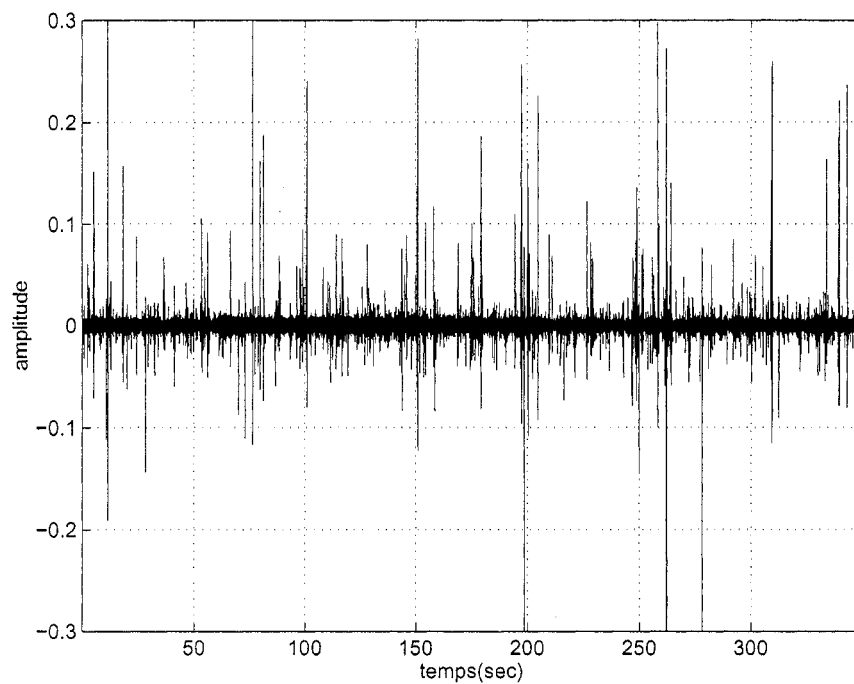


Figure 5.3 : Le signal MT restauré.

Par définition, un signal aléatoire est stationnaire au sens strict (SSS) si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps et est stationnaire au sens large (SSL) si :

$$\begin{aligned}
E\{s[n]\} &= \text{constante} \\
R[n+m, n] &= E[s[n+m]s[n]] = R[m]
\end{aligned} \tag{5.1}$$

(Papoulis et Pillai 2002). Étant donné la difficulté de vérifier si un processus est SSS, on se contente souvent de vérifier la SSL.

Lorsqu'on a seulement une réalisation d'un processus stochastique, on ne peut obtenir des expressions analytiques pour la moyenne $E\{s[n]\}$ et l'autocorrélation $R[n+m, n]$. Ainsi, on doit faire recours à certaines techniques approximatives pour déterminer la SSL. Une technique courante est d'utiliser un estimé de $R[n+m, n]$ pour générer un indicateur de la SSL (p. ex. le test des valeurs p (Voir : (Pankratz 1976)). Un autre moyen, est d'utiliser une inspection visuelle du signal pour vérifier si la variance et la moyenne du signal demeurent constantes dans le temps (Pankratz 1976). Si c'est le cas on dira que le signal est approximativement SSL. Dans la figure 5.3 ces deux statistiques paraissent constantes, alors on peut dire que le signal MT est approximativement SSL.

On remarque dans la figure 5.3 l'apparition de plusieurs «pics». Encore une fois, ces «pics» coïncident avec les changements brusques dans le signal mesuré.

5.2 Restauration des données magnétotelluriques

On présente maintenant les résultats de la restauration de données réelles. Pour extraire la composante MT de ces données nous soustrayons l'estimé du BH des données en utilisant l'approche de la fenêtre glissante. La taille de fenêtre que nous choisissons est 35 périodes fondamentales ou 0,583 sec. Nous avons déterminé cette durée en observant les spectres avant et après la restauration de signaux de différentes longueurs et en déterminant le spectre qui admet la meilleure réduction des raies des harmoniques.

Pour l'estimation du BH nous choisissons d'estimer tous les harmoniques d'indices 1 à 15. Ainsi, la constante p , qui représente le nombre total d'harmoniques à estimer, est égale à 15. Ce nombre est déterminé par la fréquence de coupure du filtre passe-bas utilisé pour éviter le repliement spectral.

Nous décidons d'estimer tous les harmoniques entre 1 et 15. Dans le cas où certains harmoniques entre 1 et 15 ne sont pas présents, l'analyse spectrale indique que l'erreur introduite par l'estimation d'harmoniques à ces fréquences n'est pas importante.

Pour l'analyse de la performance, nous observons en premier un segment de 35 périodes fondamentales avant et après la restauration par les différentes méthodes de restauration. La figure suivante représente ces segments en fonction du temps :

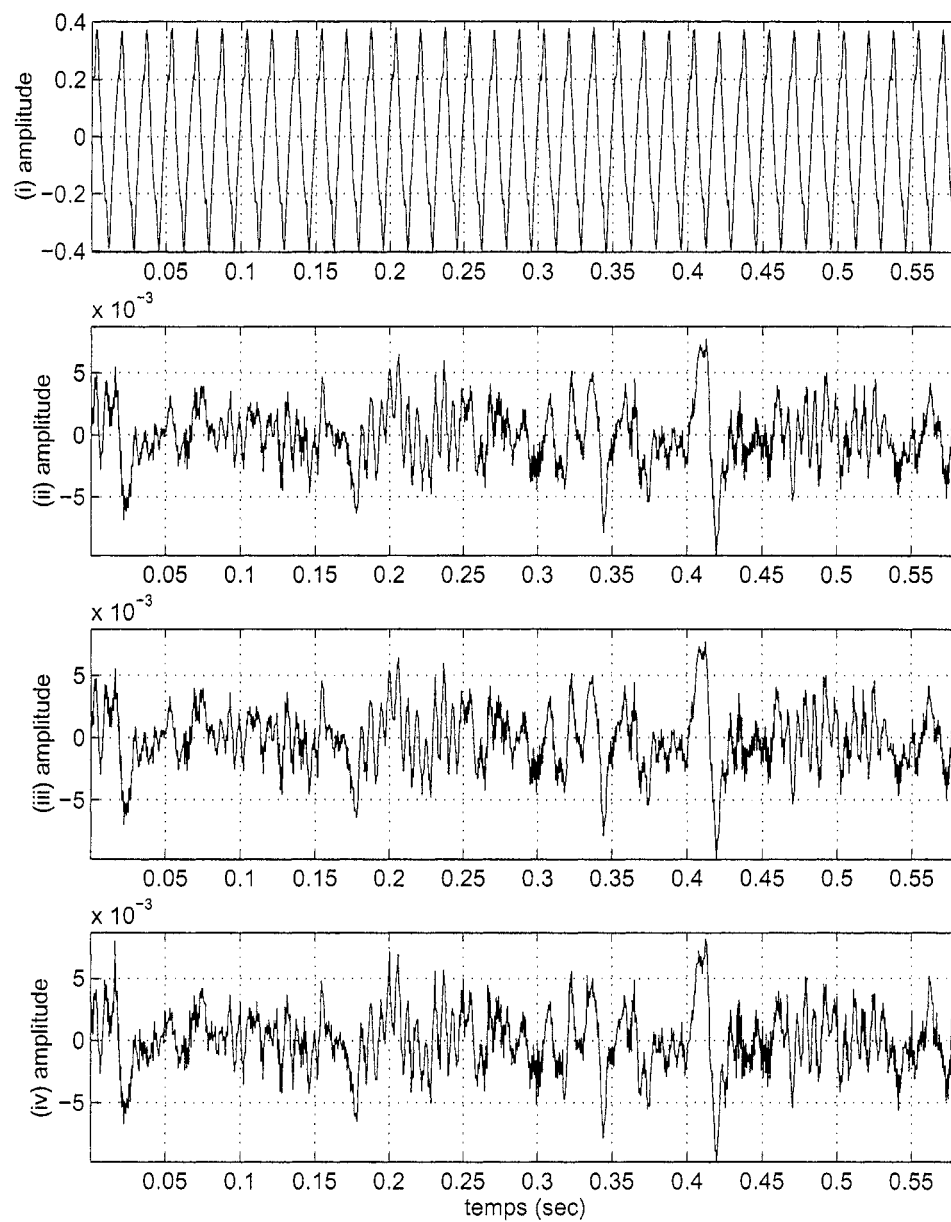


Figure 5.4 : Signaux temporels : i) le signal mesuré ii) le signal MT obtenu avec MCf-MCamp iii) le signal MT obtenu avec RAf2-MCamp iv) le signal MT obtenu avec RAf-RAamp.

La figure 5.4 i) représente le signal mesuré. Dans cette figure le signal MT est complètement caché par le BH. Les figures 5.4 ii) et iii) montrent les signaux restaurés par **MCf-MCamp** et **RAf2-MCamp** respectivement. On remarque que ces signaux sont presque identiques. La figure 5.4 iv) montre le signal restauré par **RAf-RAamp**. On voit que ce signal est différent des signaux dans les figures 5.4 ii) et iii) pour plusieurs valeurs du temps (p. ex. 0,02 s, 0,2 s et 0,6 s).

Nous observons maintenant les spectres de densité de puissance pour le segment de 35 périodes fondamentales, avant et après la restauration par les différentes méthodes. Les spectres sont des spectres estimés, obtenus par la méthode du périodogramme qui suppose un signal stationnaire au sens large (SSL). Étant donné que la moyenne et la variance des signaux dans la figure 5.4 demeurent assez constantes dans le temps, on peut dire que cette hypothèse est assez bien satisfaite pour justifier l'utilisation du périodogramme.

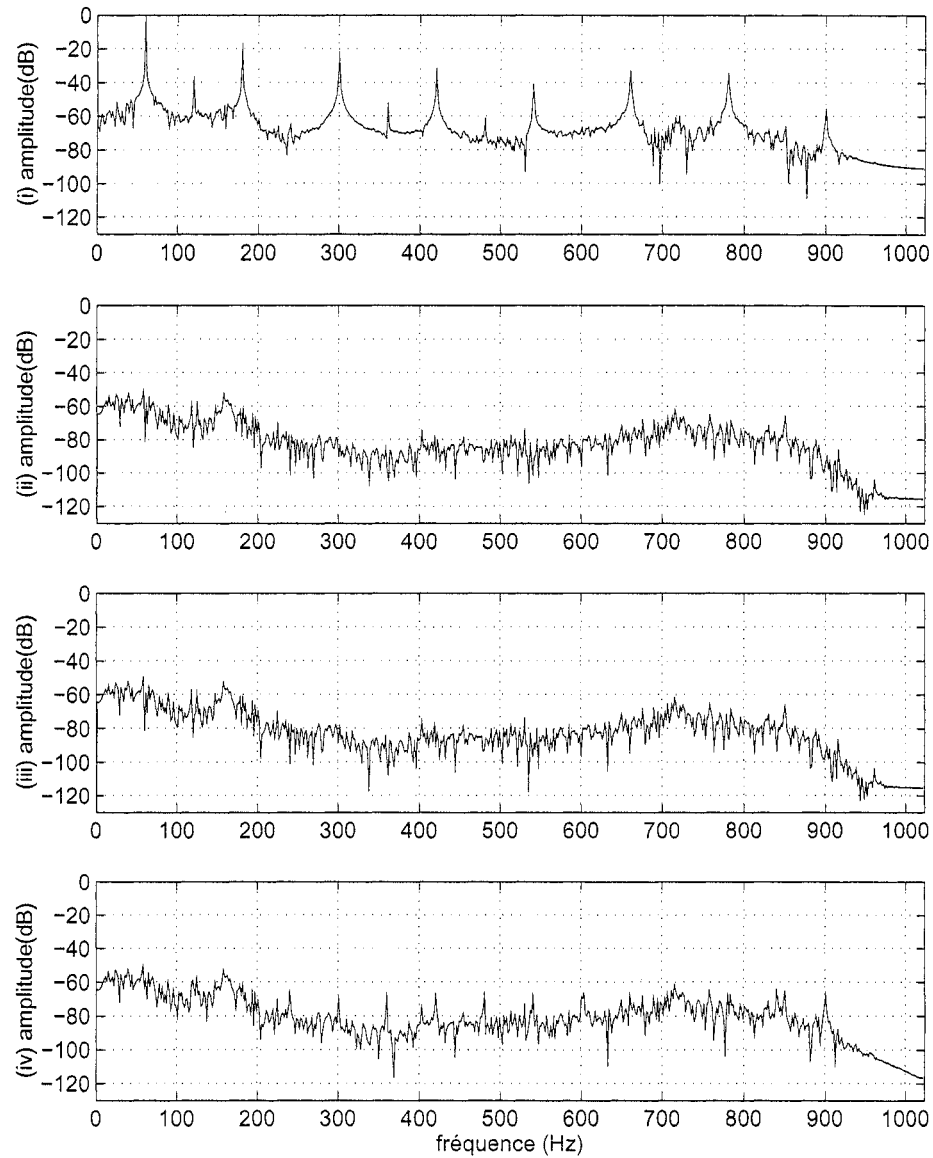


Figure 5.5 : Spectres de densité de puissance : i) spectre du signal mesuré ii) spectre du signal MT obtenu avec MCf-MCamp iii) spectre du signal MT obtenu avec RAf2-MCamp iv) spectre du signal MT obtenu avec RAf-RAamp.

La figure 5.5 i) montre le spectre du signal mesuré. Les figures 5.5 ii) et iii) montre les spectres du signal restauré par **MCf-MCamp** et **RAf2-MCamp** respectivement. Dans

ces spectres on voit que les harmoniques du BH disparaissent complètement. De plus, ces spectres sont presque identiques. La figure 5.5 iv) montre le spectre du signal restauré par **RAf-RAamp**. Dans ce spectre on observe la présence de plusieurs harmoniques.

Les résultats des figures 5.4 et 5.5 confirment que la méthode **RAf2-MCamp** a une performance semblable à la méthode **MCf-MCamp**. Ces figures confirment aussi que la méthode **RAf2-MCamp** représente une amélioration considérable de la méthode **RAf-RAamp**.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

Ce projet traitait le problème de restauration de signaux magnétotelluriques contaminés par un bruit harmonique. Dans un premier temps, nous avons utilisé la démarche classique de l'estimation pour développer un estimateur du bruit harmonique. Cette démarche nous a amené à définir l'estimateur des *moindres carrés* pour les paramètres du bruit harmonique. Par la suite, nous avons présenté l'approche de réjection adaptative pour l'estimation du bruit harmonique et nous avons présenté des tentatives d'améliorations de cette approche.

Nous avons utilisé la technique de Monte Carlo pour analyser la précision des méthodes d'estimation du bruit harmonique. Les résultats approximatifs obtenus indiquent que la méthode de réjection adaptative est considérablement moins précise que la méthode des *moindres carrés*. Les résultats indiquent aussi que la méthode améliorée **RAf2-MCamp** a une précision très semblable à celle de la méthode des *moindres carrés*.

Nous avons comparé la complexité des trois méthodes avec une simulation numérique utilisant un SNR égale à 50 dB et les paramètres du tableau 4.1. Pour ces paramètres, la méthode **RAf2-MCamp** nécessite environ 1,56 fois moins de calculs que la méthode des *moindres carrés*. Ainsi, **RAf2-MCamp** peut représenter une alternative intéressante à **MCf-MCamp** parce que sa précision est en général très proche de celle de **MCf-MCamp**. De plus, étant donné que les signaux MT sont très souvent composé d'une quantité importante de mesures, la méthode **RAf2-MCamp** peut avoir un temps de calcul significativement moins élevé que celui de la méthode des *moindres carrés*.

En dernier lieu, nous avons utilisé les méthodes pour la restauration de signaux magnétotelluriques réels. L'analyse des résultats obtenus nous a confirmé que la méthode de réjection adaptative est considérablement moins précise que celle des

moindres carrés. De plus, l'analyse a montré que la méthode **RAf2-MCamp** a un comportement très semblable à celui de la méthode des *moindres carrés*.

Une limite des méthodes d'estimation analysées est qu'elles supposent que le signal BH est stationnaire. Pour le signal que nous traitons, cette hypothèse n'est pas satisfaite en général. En effet, pour ce signal on observe que les paramètres du bruit harmonique varient significativement dans le temps (figures 5.1 et 5.2). Ainsi, pour une durée de signal arbitraire, on ne peut s'attendre en général à un comportement optimal des estimateurs analysés pour la restauration de signaux magnétotelluriques réels.

Il existe des méthodes conçues pour le traitement de signaux non-stationnaires. Un exemple de ces méthodes est le filtrage de Kalman. Une continuation possible de ce projet serait de comparer ces méthodes aux méthodes que nous avons analysées, par des simulations de Monte Carlo et par la restauration de signaux magnétotelluriques réels.

Une deuxième limite des méthodes que nous utilisons est qu'elles supposent que le signal MT suit un processus de bruit blanc. Le fait que la densité de puissance du signal MT réel n'est pas plat (figure 5.5) indique le manque de réalisme de cette hypothèse. Pour remédier à cela, un modèle autorégressif pourrait être utilisé pour décrire le signal MT. L'approche serait d'estimer non seulement les paramètres du BH mais aussi les paramètres du modèle autorégressif. Cette approche est documenté dans l'article «Extraction of Periodic Signals in Colored Noise» par Steven Kay et Venkatesh Nagesha (Kay et Nagesh 1992).

BIBLIOGRAPHIE

1. ADAMS, R.K., MCINTYRE, J.M. et SYMONDS, F.W. (1982). «Characteristics of the eastern interconnection line frequency.» *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems* PAS-101, 4542-4547.
2. BURDEN, R.L. et FAIRES, J.D. (1993). *Numerical analysis*, Boston: PWS Publishing Co.
3. BUTLER, K.E. et RUSSELL, R.D. (2003). «Cancellation of multiple harmonic noise series in geophysical records.» *Geophysics* vol. 68, no. 3, 1083-1090.
4. COLEMAN, T.F. et LI, Y. (1996). «An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds.» *SIAM Journal on Optimization* Vol. 6, pp. 418-445.
5. FORTIN, A. (1995). *Analyse numérique pour ingénieurs*, Montreal: Éditions de l'École Polytechnique de Montréal.
6. GOUSSARD, Y. (2002). *Traitement de signaux biomédicaux : applications médicales de l'informatique : cours GBM 6103*, Montréal: École polytechnique de Montréal. Institut de génie biomédical.
7. HARDY, H.H., BEIER, R.A. et GASTON, J.D. (2003). «Frequency estimates of seismic traces.» *Geophysics* 68, No. 1, 370-380.
8. KAY, S. et NAGESH, V. (1992). «Extraction of Periodic Signals in Colored Noise : Acoustics, Speech, and Signal Processing.» 1992 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Volume: 5, 23-26 Pages : 281 – 284.

9. KAY, S. et NAGESHA, V. (1994). «Maximum Likelihood Estimation of Signals in Autoregressive Noise.» *IEEE Transactions On Signal Processing* Vol. 42, No. 1.
10. KAY, S.M. (1993). *Fundamentals Of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall PTR.
11. LINVILLE, A.F. and MEEK, R.A. (1992). «Canceling stationary sinusoidal noise.» *Geophysics* Vol. 57, No. 11.
12. NISHIYAMA, K. (1999). «Robust Estimation of a Single Complex Sinusoid in White Noise-Hinfinity Filtering Approach.» *IEEE Transactions on Signal Processing* Vol. 47, No. 10, October 1999.
13. NYMAN, D.C. et GAISER, J.E. (1983). «Adaptive rejection of high-line contamination.» *53rd. Ann. Internat. Mtg. Soc. of Expl. Geophys., Session:S6.4.*
14. PANKRATZ, A. (1976). *Forecasting with univariate Box-Jenkins Models*, Canada: Wiley series in probability and mathematical statistics.
15. PAPOULIS, A. et PILLAI, S.U. (2002). *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. 4th ed. Montreal: McGraw-Hill.
16. PRESS, W.H. et FLANNERY, B.P. (1986). *Numerical Recipes*, Cambridge: Cambridge University Press.
17. UNSWORTH, MARTYN. (2000). «Magnetotellurics», AccessScience@McGraw-Hill [En ligne]. http://www.accessscience.com/server-java/Arknoide/science/AS/ResUpdates/2000/YB_000892_frameset.html (Page consultée le 23 janvier 2005)
18. VOZOFF, K. (1972). « The magnetotelluric method in the exploration of sedimentary basins.» *Geophysics* 37, 98-141.

ANNEXE 1 : EXPLICATION DE LA PRÉDOMINANCE DES HARMONIQUES IMPAIRS DANS LE BRUIT HARMONIQUE

La prédominance des harmoniques impairs s'explique par la symétrie des cycles positif et négatif par rapport à l'axe t , qui s'exprime par :

$$f\left(t - \frac{T}{2}\right) = -f(t) \quad (6.1)$$

où T est la période. Comme f est périodique, elle admet une série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n \frac{t}{T}} \quad (6.2)$$

Alors (6.1) implique :

$$\begin{aligned} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n \frac{t}{T}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n \left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)} \\ \Leftrightarrow - \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi n \frac{t}{T}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n e^{-i\pi n}) e^{i2\pi n \frac{t}{T}} \end{aligned} \quad (6.3)$$

(6.3) est satisfaite pour tout t et les fonctions $e^{i2\pi n \frac{t}{T}}$ sont linéairement indépendantes, donc :

$$\begin{aligned} -C_n &= C_n e^{-i\pi n} \\ \Leftrightarrow C_n &= (-1)^{n+1} C_n \end{aligned} \quad (6.4)$$

Si $n = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$, alors (6.4) implique :

$$C_{2m} = -C_{2m} \Rightarrow C_{2m} = 0 \quad (6.5)$$

et donc il n'y a pas d'harmoniques pairs.

ANNEXE 2 : DÉFINITION ET EXISTENCE DE L'INTÉGRALE STOCHASTIQUE DANS (3.5)

L'intégrale dans (3.5) est définie de façon analogue à l'intégrale de Riemann :

$$\int_a^b x(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i x(t_i) \Delta t_i \quad (7.1)$$

où $x(t)$ est un processus stochastique.

On vérifie que cette intégrale existe dans le sens de la moyenne quadratique. En d'autres mots, on vérifie que :

$$E \left\{ \left| \sum_i x(t_i) \Delta t_i - \sum_k x(t_k) \Delta t_k \right|^2 \right\}_{\Delta t_i, \Delta t_k \rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad (7.2)$$

Il a été démontré (voir (Papoulis and Pillai 2002)) que (7.2) est vérifié si :

$$\int_a^b \int_a^b |R(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 < \infty \quad (7.3)$$

Pour vérifier (7.3) on commence par trouver l'expression $R(t_1, t_2)$ pour le processus stochastique $x(t) = \cos(k\omega t) w(t)$:

$$\begin{aligned}
R(t_1, t_2) &= E\{x(t_1)x(t_2)\} \\
&= E\{\cos(k\omega t_1)\cos(k\omega t_2)w(t_1)w(t_2)\} \\
&= \cos(k\omega t_1)\cos(k\omega t_2)E\{w(t_1)w(t_2)\} \\
&= \cos(k\omega t_1)\cos(k\omega t_2)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}w_1w_2f_w(w_1, w_2; t_1, t_2)dw_1dw_2 \\
&= \cos(k\omega t_1)\cos(k\omega t_2)R_w(t_1, t_2) \\
&= \cos(k\omega t_1)\cos(k\omega t_2)\sigma^2\delta(t_1 - t_2)
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Avec, $a = 0$ et $b = T$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_a^b |R(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 &= \int_0^T \int_0^T \cos(k\omega t_1)\cos(k\omega t_2)\sigma^2\delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \\
&= \sigma^2 \int_0^T \cos(k\omega t_2) \left[\int_0^T \cos(k\omega t_1)\delta(t_1 - t_2) dt_1 \right] dt_2 \\
&= \sigma^2 \int_0^T \cos^2(k\omega t_2) dt_2 \\
&= \sigma^2 \left[\frac{T}{2} + \frac{1}{4k\omega} \sin(2k\omega T) \right] \\
&= \sigma^2 T \left[\frac{4k\pi + 1}{8k\pi} \right] \\
&< \infty \text{ pour tout } T
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Ainsi, l'intégrale (7.1) existe dans le sens de la moyenne quadratique et le processus

$x(t) = \cos(k\omega t)w(t)$ est : «intégrable dans le sens de la moyenne quadratique (Papoulis and Pillai 2002).»

**ANNEXE 3 : A FAST AND ACCURATE FREQUENCY
ESTIMATION METHOD FOR THE CANCELLATION OF
HARMONIC NOISE IN GEOPHYSICAL RECORDS**

A fast and accurate frequency estimation method for the cancellation of harmonic noise in geophysical records

Antoine Saucier, Matthew Marchant and Michel Chouteau

January 24, 2005

Abstract

Harmonic noise generated by power lines is a well known problem for geophysicists. The cancellation of harmonic noise from geophysical records can be achieved by the subtraction of a noise estimate. In this context, the fundamental frequency must be determined very accurately. We propose a new frequency estimation method that builds upon the estimator originally proposed by Nyman and Gaiser. Their method, denoted by NGE in the following, exploits the fact that the noise fundamental frequency is known to be close to 60 Hz. NGE is based on the solution of a system of four equations that determine the amplitude, phase and frequency of each harmonic of the powerline noise. NGE can be used to produce frequency estimates for all the harmonics. Our improved estimator uses a suitable linear combination of these NGE frequency estimates to produce a more accurate fundamental frequency estimate. We study the performance of our method on synthetic data that mimic the properties of magnetotelluric (MT) data contaminated by powerline noise. We show that our method is more accurate than NGE and that its denoising performance is comparable to least squares estimation (LSE). We apply our method to the restoration of real MT data and we show that the harmonic noise amplitude is reduced by at least 60 dB to a level below that of MT data. Applied to the same data, NGE fails to attenuate sufficiently many of the harmonic noise spectral lines. Our method is simple to implement and is more efficient computationally than LSE.

1 Introduction

1.0.1 Harmonic noise in geophysics

Harmonic noise generated by power lines and electric railways is a well known problem for geophysicists. The noise takes the form of electric and magnetic fields which oscillate at the fundamental frequency of power transmission (about 60 Hz in North America). Powerline noise is strongest at the fundamental frequency of transmission, but is also important at harmonics of the fundamental, especially the first few odd harmonics [4]. The problem of removing this noise from geophysical records has been approached with several different strategies which have recently been reviewed by Butler and Don Russel [5]. One of the digital postprocessing approach is the cancellation of harmonic noise by the subtraction of a noise estimate. In this approach, the fundamental frequency must be determined very accurately. Indeed, an error of just 0.01 Hz in the estimate of the 60 Hz fundamental can lead to significant degradation of the result. In this paper, we propose a new frequency estimation method that builds upon the iterative estimator originally proposed by Nyman and Gaiser [8].

1.0.2 Nyman and Gaiser's method

Nyman and Gaiser [8] introduced an adaptive rejection method for the removal of powerline noise from seismic data. Their method, denoted by NGE in the following, introduces much less distortion in the power spectrum than notch filtering [4], and has virtually no impact away from the high-line frequency f_0 . NGE is also effective at harmonics of f_0 . Nyman and Gaiser showed that the high-line contamination could be reduced by at least 40 dB to a level below that of the seismic data. Finally, NGE is fast and simple to implement.

NGE has been recognized for achieving excellent cancellation of powerline noise [5] [1]. NGE was recently incorporated in the vertical seismic profiling data processing package DSIssoft [3].

NGE is based on the signal model

$$S(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + W(t) \quad (1)$$

where $W(t)$ is a function representing the seismic data and $\omega_0 = 2\pi f_0$. NGE takes advantage of the fact that the frequency f_0 is known to be approximately equal to $f_n = 60$ Hz (the nominal frequency) to estimate the parameters A , ω_0 and ϕ . Starting with a first guess $\omega = 2\pi f_n$ of ω_0 , NGE produces an estimate $\hat{\epsilon}$ of the angular frequency shift ϵ , defined by

$$\omega_0 = \omega + \epsilon \quad (2)$$

Once $\hat{\epsilon}$ is obtained, the frequency estimate is revised with $\omega_{\text{new}} = \omega + \hat{\epsilon}$, and the estimation process is repeated with ω_{new} used as an improved guess of ω_0 . The process is repeated until convergence of $\omega = 2\pi \hat{f}$ is achieved. NGE also provides estimates $\hat{A}$, $\hat{\phi}$ of A and ϕ respectively. Once $\hat{f}$, $\hat{A}$ and $\hat{\phi}$ are obtained, the estimated harmonic noise $\hat{A} \cos(2\pi \hat{f} t + \hat{\phi})$ is subtracted from $S(t)$. This procedure can be repeated on the remaining signal to remove higher order harmonics of f_0 .

1.0.3 Least squares frequency estimation

The classical approach to parameter estimation with model (1) is maximum likelihood estimation (MLE). If $W(t)$ is a white Gaussian noise, then MLE leads to least squares estimation (LSE), which is known to be asymptotically optimal and has been shown to exhibit the best performance for finite data records [7](a). Moreover, the estimators obtained by least squares often have desirable properties even if the model hypotheses are not entirely satisfied, e.g. even if the noise happens to be colored and non Gaussian [10]. Hence it is not surprising that LSE is often the basis of the harmonic noise subtraction methods used in geophysics [4], [5].

Difficulties arise in the implementation of LSE for the estimation of harmonic noise. Estimating the fundamental frequency with LSE requires finding the global minimizer $\hat{f}$ of a function $J_0(f)$ that has several local minima. If $\hat{f}$ is entirely unknown, i.e. if we do not have any prior information on f , then the search for $\hat{f}$ cannot be approached directly with a descent method. In fact, the latter is most likely to lead to a local minimum of $J_0(f)$. It follows that one must first perform a grid search with a high enough resolution on the whole frequency range to locate the global minimizer approximately, which requires numerous and computationally costly evaluations of $J_0(f)$. In a second step, we can use a descent method to locate the global minimizer more accurately. The computational complexity of this minimization increases linearly with the number of harmonics to be estimated. Hence the motivations for developing an alternative to LSE are to avoid the problematic minimization of $J_0(f)$.

In this perspective, alternative frequency estimation methods have been proposed in the signal processing and geophysics literature, e.g. Kay [6] and Nyman and Gaiser [8]. These methods have the advantage of being simpler to implement and faster than LSE, at the cost of a lower accuracy. The method of Nyman and Gaiser belongs to this category, i.e. it provides a fast and accurate sub-optimal frequency estimator.

1.0.4 Improving NGE

Nyman and Gaiser used the model (1), which contains only the fundamental frequency f_0 of the powerline noise, but they applied it to a signal that actually contained the harmonics of f_0 . The method of Nyman and Gaiser can be used to estimate each harmonic separately, which yields a collection $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots)$ of harmonic frequency estimates. Since these frequencies f_n are related to each other by $f_n = n f_0$ ($n = 1, 2, \dots$), then it is possible to use a linear combination of the estimates $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots$ to construct a single lower variance estimator of the fundamental frequency f_0 . This idea is the basis of the improved estimator that we propose in this paper. Once f_0 has been estimated, estimating the amplitudes and phases with LSE is a simple linear regression.

1.0.5 Contents

This paper is structured as follows. In section 2, we present the model used to describe the harmonic noise and the MT data. In section 3, we propose a derivation of the NGE estimator equations, that were originally given without proof, and we show that the NGE estimator is accurate as long as some conditions are satisfied. In section 4, we show how the NGE frequency estimates can be combined to obtain a better estimate of the fundamental frequency, and we derive an analytical expression for the variance of the resulting improved estimator. In section 5, we show how the methods compared in this paper (LSE, our method and NGE) can be implemented. In section 6, we study the performance of our method on synthetic data that mimic the properties of magnetotelluric (MT) data contaminated by powerline noise. In section 7, we apply our method to the restoration of real MT data.

2 The model

We consider a signal $s(t)$ of the form

$$s(t) = \sum_{k=1}^M A_k \cos(k \omega_0 t + \phi_k) + w(t) \quad (3)$$

where $w(t)$ is a zero mean white Gaussian noise with variance σ^2 . The harmonic noise is defined by $h(t) \equiv \sum_{k=1}^M A_k \cos(k \omega_0 t + \phi_k)$. The angular frequency $\omega_0 = 2\pi f_0$, the amplitudes A_k and the phases ϕ_k are unknown for all k s. However, we know that $\omega_0 \approx \omega_n = 2\pi f_n$, where $f_n \approx 60$ Hz is the nominal frequency. Powerline frequencies and amplitudes can shift or drift with time in response to power system loads [5]. The expected deviations in the fundamental frequency generated by major North American facilities are on the order of 0.03 Hz or less [2]. It is therefore safe to assume that $|f_0 - f_n| < \Delta f$ where $\Delta f = 0.05$ Hz. In contrast with Nyman and Gaiser's model (1), our model (3) includes explicitly the harmonics of the powerline noise.

The discrete form of the model (3), which is needed to describe sampled data, is

$$s(n) = \sum_{k=1}^M a_k \cos(k \omega_0 n \Delta t) + b_k \sin(k \omega_0 n \Delta t) + W(n) \quad (4)$$

where $a_k = A_k \cos(\phi_k)$, $b_k = -A_k \sin(\phi_k)$, Δt is the sampling period and $n = 0, 1, \dots, N-1$. Using matrix notations, (4) becomes

$$\mathbf{s} = \mathbf{H} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{w} \quad (5)$$

where $\mathbf{s} = (s(0), s(1), \dots, s(N-1))^T$, $\boldsymbol{\theta} = (a_1, b_1, \dots, a_M, b_M)^T$, $\mathbf{w} = (W(0), W(1), \dots, W((N-1)))^T$ and $\mathbf{H}$ is a $N \times 2M$ matrix given by

$$\mathbf{H}_{n,i} = \cos(i\omega_0 n \Delta t), \quad \mathbf{H}_{n,i+1} = \sin(i\omega_0 n \Delta t) \quad (6)$$

for $i = 1, 3, 5, \dots, 2M-1$ and $n = 0, 1, \dots, N-1$.

3 Estimator development

3.1 Estimation variables

Nyman and Gaiser [8] proposed an estimator for model (1) without providing any derivation. In this section, we derive this estimator for the more general model (3), which allows to understand the nature of the approximations involved.

Following Nyman and Gaiser, our frequency estimator is calculated from a collection of $4M$ variables denoted by (U_k, V_k, X_k, Y_k) , where $k = 1, 2, \dots, M$. We use each quadruplet of variables to construct an estimator of the k^{th} harmonic frequency. These variables, that we call estimation variables, are defined by the scalar products

$$\begin{cases} U_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) s(t) dt \\ V_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) s(t) dt \\ X_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \sin(2\pi t/T) s(t) dt \\ Y_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) \sin(2\pi t/T) s(t) dt \end{cases} \quad (7)$$

where ω is an adjustable parameter and T is the signal duration. Apart from the factor $1/T$ that we introduce, the variables (7) are identical to the variables defined by Nyman and Gaiser. U_k and V_k , which are similar to Fourier coefficients, are used to estimate the amplitude A_k and phase ϕ_k of the k^{th} harmonic. X_k and Y_k are used to estimate the frequency shift $\epsilon = \omega_0 - \omega$. In (7-c-d), the functions $f_1(t) \equiv \cos(k\omega t) \sin(2\pi t/T)$ and $f_2(t) \equiv \sin(k\omega t) \sin(2\pi t/T)$ are suitable because $\int_0^T f_1(t) \cos(k\omega t) dt = 0$ and $\int_0^T f_1(t) \sin(k\omega t) dt = 0^1$ for each k if $\omega = \omega_0$, which implies that $X_k = Y_k = 0$ if $\omega = \omega_0$. It follows that X_k and Y_k are primarily sensitive to the frequency shift ϵ , i.e. they are non zero if and only if $\epsilon \neq 0$. Alternative choices for f_1 and f_2 may exist.

NGE is based on an approximation of the estimation variables (7) which is valid for small ϵ and large T . Each estimation variable, say U_k , can always be split into its expectation value $\bar{U}_k$ and its zero-mean fluctuation $U'_k \equiv U_k - \bar{U}_k$, so that $U_k = \bar{U}_k + U'_k$. Replacing $s(t)$ given by (3) into (7-1) and using $\omega_0 = \omega + \epsilon$, we get the decomposition

$$\bar{U}_k = \sum_{n=1}^N I_{k,n} A_n, \quad U'_k = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) w(t) dt \quad (8)$$

where

$$I_{k,n} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(n(\omega + \epsilon)t + \phi_n) dt \quad (9)$$

The change of variable $x = t/T$ in (9) leads to

$$I_{k,n} = \int_0^1 \cos(k\omega T x) \cos(n(\omega T + \epsilon T)x + \phi_n) dx \quad (10)$$

¹These integrals vanish exactly if $T = p \cdot 2\pi/\omega$, where p is an integer. They also vanish in the limit $T \rightarrow \infty$.

(10) shows that $I_{k,n}$ is a function of ϵT . Because the product ϵT occurs naturally in this problem, we introduce the notation

$$u \equiv \epsilon T \quad (11)$$

and we regard $I_{k,n}$ as a function of u and T .

The integral (10) takes a simpler form if we make the assumption that T is a multiple of the fundamental period $T_0(\omega) = 2\pi/\omega$, i.e. if $T = pT_0(\omega)$ where p is an integer. In this case, (10) becomes

$$I_{k,n}(u) = \begin{cases} \frac{(2p\pi+u)(\sin(ku+\phi_n)-\sin(\phi_n))}{k u (4p\pi+u)}, & \text{if } k = n \\ \frac{2n(2p\pi+u) \cos(nu/2+\phi_n) \sin(nu/2)}{-4k^2 p^2 \pi^2 + n^2 (2p\pi+u)^2}, & \text{if } k \neq n \end{cases} \quad (12)$$

If $u = \epsilon T$ is fixed and $p \rightarrow \infty$, then (12) becomes

$$\lim_{p \rightarrow \infty} I_{k,n}(u) = \begin{cases} \frac{\sin(ku+\phi)-\sin(\phi)}{2ku} & \text{if } k = n \\ 0 & \text{if } k \neq n \end{cases} \quad (13)$$

A first order Taylor expansion of (13) at $u = 0$ yields

$$\lim_{p \rightarrow \infty} I_{k,n}(u) = \left(\frac{1}{2} \cos(\phi_k) - \frac{1}{4} k u \sin(\phi_k) \right) \delta_{k,n} \quad (14)$$

to first order in u . We emphasize that the limit $\epsilon T \rightarrow 0$ is not sufficient to justify the approximation (14). Indeed, if we expand (12) to first order in u before taking the limit $p \rightarrow \infty$, then we get

$$I_{k,n}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(\phi_k) + \left(\frac{\cos(\phi_k)}{8p\pi} - \frac{k \sin(\phi_k)}{4} \right) u & \text{if } k = n \\ \frac{n^2 \cos(\phi)}{2p\pi(n^2-k^2)} u & \text{if } k \neq n \end{cases} \quad (15)$$

and we see that (15) reduces to (14) only if $p \rightarrow \infty$. This condition for validity, i.e. $T \rightarrow \infty$, was not mentioned in Nyman and Gaiser [8]. In summary, we are deriving approximations of the detection variables (7) which are valid in the limit

$$\epsilon T \rightarrow 0 \text{ and } T \rightarrow \infty \quad (16)$$

(16) implies that ϵ must tend to 0 faster than $1/T$.

Combined with (8-1), (14) implies that $\bar{U}_k$ is entirely determined by the k^{th} harmonic if $u \rightarrow 0$ and $T \rightarrow \infty$, i.e. $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{U}_k = A_k I_{k,k}$, which leads to

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{U}_k(u) = \frac{1}{2} A_k \cos(\phi_k) - \frac{1}{4} A_k k \sin(\phi_k) u \quad (17)$$

to first order in u . Using the same procedure for the other estimation variables, we get

$$\begin{cases} \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{U}_k(u) = \frac{1}{2} A_k \cos(\phi_k) - \frac{1}{4} k A_k \sin(\phi_k) u \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{V}_k(u) = -\frac{1}{2} A_k \sin(\phi_k) - \frac{1}{4} k A_k \cos(\phi_k) u \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{X}_k(u) = \frac{1}{4\pi} k A_k \sin(\phi_k) u \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{Y}_k(u) = \frac{1}{4\pi} k A_k \cos(\phi_k) u \end{cases} \quad (18)$$

to first order in u , with $k = 1, 2, \dots, M$. For small values of T , we expect (18) to be most accurate if T is an integer multiple of the fundamental period $T_0(\omega)$. However, for large T the approximations (18) are satisfied even if T is not a multiple of $T_0(\omega)$. To simplify notations in the following, the

expression $\bar{U}_k$ will refer implicitly to $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{U}_k(u)$. The same assumption is made for all estimation variables.

The linear approximation (14) of the sinusoidal function (13-1) is not accurate if ku exceeds a quarter of a period, and therefore a condition for validity is $ku < \pi/2$, i.e. $k\epsilon T < \pi/2$. Moreover, the same condition applies to all the approximations in (18). Using $\epsilon = 2\pi\Delta f$, where Δf is the uncertainty of the frequency f , this condition can be written in the equivalent forms

$$T < \frac{1}{2k\Delta f} \iff k < \frac{1}{2T\Delta f} \quad (19)$$

If k and Δf are given, then (19-left) gives an upper bound on T . If Δf and T are given, then (19-right) gives an upper bound on the order k of the harmonic. If these upper bounds are not respected for $k = 1, 2, \dots, M$, then the approximations (18) are not reliable and the resulting estimators are no longer justified. Moreover, failure to respect (19) can lead to divergence of the iteration process that we use for frequency estimation.

3.2 A collection of frequency shift estimators

(18) can be used to derive the angular frequency shift ϵ . We can verify that

$$\begin{cases} A_k &= 2\sqrt{\bar{U}_k^2 + \bar{V}_k^2} \\ \cos(\phi_k) &= 2(\bar{U}_k + \pi\bar{X}_k)/A_k \\ \sin(\phi_k) &= -2(\bar{V}_k + \pi\bar{Y}_k)/A_k \\ u &= \frac{4\pi}{kA_k}(\bar{X}_k \sin(\phi_k) + \bar{Y}_k \cos(\phi_k)) \end{cases} \quad (20)$$

holds to first order in u . Replacing (20-1), (20-2) and (20-3) into (20-4) yields

$$u = \frac{2\pi}{k} \frac{\bar{U}_k \bar{Y}_k - \bar{V}_k \bar{X}_k}{\bar{U}_k^2 + \bar{V}_k^2} \quad (21)$$

In practice, the measured estimation variables are not the mean variables, but rather the variables themselves, i.e. (U_k, V_k, X_k, Y_k) , which include a random fluctuation caused by the white noise. Using $u = \epsilon T$, (21) leads us to define a collection of M estimators $\hat{\epsilon}_k$ of ϵ by

$$\hat{\epsilon}_k = F_k(U_k, V_k, X_k, Y_k) \equiv \frac{2\pi}{kT} \frac{U_k Y_k - V_k X_k}{U_k^2 + V_k^2} \quad (22)$$

where $k = 1, 2, \dots, M$. (22) defines one estimator of ϵ for each harmonic of the fundamental frequency. The special case $k = 1$ corresponds to NGE. If ϵT is small and T is large, then it can be shown that the $\hat{\epsilon}_k$ s are unbiased estimators of ϵ , i.e. $\bar{\hat{\epsilon}}_k = \epsilon$ for all ks (appendix A).

Similarly, we can use (20) to define estimators of $\hat{A}_k$ and $\hat{\phi}_k$ of A_k and ϕ_k by replacing average estimation variables by the variables themselves, which leads to

$$\begin{cases} \hat{A}_k &= 2\sqrt{U_k^2 + V_k^2} \\ \cos(\hat{\phi}_k) &= 2(U_k + \pi X_k)/\hat{A}_k \\ \sin(\hat{\phi}_k) &= -2(V_k + \pi Y_k)/\hat{A}_k \end{cases} \quad (23)$$

4 Construction of a single lower variance estimator $\hat{\epsilon}$

Our method consists in combining the estimators $\hat{\epsilon}_k$ given by (22) into a single unbiased lower variance estimator. A simple approach is to use the best linear unbiased estimator (BLUE) [7](b). We show in the appendix B that the $\hat{\epsilon}_k$ s are uncorrelated, which is a consequence of the orthogonality of the functions involved in the definition of the estimation variables (7). For mutually uncorrelated variables, the BLUE takes the form $\hat{\epsilon} = (\sum_{n=1}^M \sigma_n^{-2} \hat{\epsilon}_n) / (\sum_{k=1}^M \sigma_k^{-2})$, where $\sigma_n^2 = \text{Var}(\hat{\epsilon}_n)$ and $\text{Var}(\hat{\epsilon}) = 1 / (\sum_{n=1}^M \sigma_n^{-2})$. We show in appendix D that

$$\sigma_n^2 \approx \frac{4 \pi^2 \sigma^2}{A_n^2 n^2 T^3} \quad (24)$$

where σ^2 is the white noise variance. Using (24), it follows that the BLUE estimator takes the form

$$\hat{\epsilon} = \frac{\sum_{n=1}^M n^2 A_n^2 \hat{\epsilon}_n}{\sum_{n=1}^M n^2 A_n^2} \quad (25)$$

with

$$\text{Var}(\hat{\epsilon}) = \text{Var}(\hat{\omega}) = \frac{4 \pi^2 \sigma^2}{T^3 \sum_{n=1}^M A_n^2 n^2} \quad (26)$$

The identity $\text{Var}(\hat{\omega}) = \text{Var}(\hat{\epsilon})$ in (26) follows directly from the relationship $\hat{\omega} = \omega + \hat{\epsilon}$. The variance of the NGE frequency estimator is obtained from (26) with $M = 1$. If $M > 1$ and if some of the A_n s with $n > 1$ do not vanish, then $\text{Var}(\hat{\omega})|_{M>1} < \text{Var}(\hat{\omega})|_{M=1}$, which shows that our method improves the NGE frequency estimator. Moreover, this improvement is significant if the A_n s in (26) are large enough.

For a single sinusoid, i.e. with $M = 1$, the Cramer-Rao lower bound for the angular frequency estimator $\hat{\omega}$ is [7](c) [10](b)

$$\text{Var}(\hat{\omega}) \geq \frac{24 \sigma^2}{A^2 T(T^2 + 1)} \approx 24 \frac{\sigma^2}{A^2} \frac{1}{T^3} \equiv \text{CRLB} \quad (27)$$

for large T . It follows from (26) and (27) that $\text{Var}(\hat{\omega})/\text{CRLB} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.6$ and therefore the NGE frequency estimator has a variance which is close to the Cramer-Rao lower bound. For $M > 1$, our method can produce a variance which is much lower than the single frequency lower bound (27). We emphasize that (26) has the same scaling factor T^{-3} than the Cramer Rao lower bound.

5 Implementation

In this section, we describe the implementation of the three frequency estimation methods used in this paper: LSE, our method and NGE. We start with LSE because it is the method of reference and also because we use it to estimate the amplitudes in our method.

5.1 Estimation with LSE

The least squares error is defined by $J(\theta, f) \equiv \|s - H \theta\|^2$. For a fixed value of f , the minimization of $J(\theta, f)$ with respect to the amplitudes θ leads to the estimator [7](a)

$$H^T H \hat{\theta} = H^T s \quad (28)$$

where the matrix $\mathbf{H}$ of dimensions $N \times M$ is given by (6) and depends on f . (28) are called the normal equations of the linear least squares problem. The matrix $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ is symmetric and positive definite. An accurate approach to solve the linear system of equations (28) for $\hat{\theta}$ is to use a solver that exploits a QR decomposition of the system (28) [9].

The frequency estimator $\hat{f}$ is the frequency that minimizes the function [7](a)

$$J_0(f) \equiv J(\hat{\theta}, f) = \mathbf{s}^T \left(\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \right) \mathbf{s} \quad (29)$$

in the range $R = [60 - 0.1, 60 + 0.1]$, where $\mathbf{I}$ is the $N \times N$ identity matrix (there is no need to consider a broader range because f is generally contained in the range $[60 - 0.03 \text{ Hz}, 60 + 0.03 \text{ Hz}]$ for powerlines in North America). Equivalently, $\hat{f}$ can be obtained by finding the maximizer of $I_0(f) \equiv \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{s}$ in R . $J_0(f)$ is typically smooth in R and we found that the minimum is unique in the context of our simulations and data analyses. The narrowness of the range R in which we search for $\hat{f}$ greatly simplifies the minimization problem by eliminating the difficulty posed by the multiple minima of $J_0(f)$. To locate the global minimizer $\hat{f}$ of $J_0(f)$ in R , we used the routine *lsqnonlin* from the Matlab optimization toolbox. This routine, which allows to restrict the search to the interval R , is designed to solve nonlinear least squares problems and uses a trust region method. Once $\hat{f}$ is obtained as the minimizer of $J_0(f)$ in the range R , we use (28) with $f = \hat{f}$ to compute the amplitudes.

5.2 Estimation with our method

We first compute the estimation variables for $k = 1, 2, \dots, k_{\max}$ with

$$\begin{cases} U_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(k \omega n \Delta t) s(n) \\ V_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(k \omega n \Delta t) s(n) \\ X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(k \omega n \Delta t) \sin(2 \pi n \Delta t / T) s(n) \\ Y_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(k \omega n \Delta t) \sin(2 \pi n \Delta t / T) s(n) \end{cases} \quad (30)$$

where the initial estimate of ω is based on the nominal frequency, i.e. $\omega = 2 \pi f_n$. The number of points N for a sampled signal is $N = T / \Delta t$, where Δt is the sampling period. In general, we use $k_{\max} = M$. For the simulated data analyzed in the next section, the value of M is known. For real data, M can be estimated with $M = \text{IntegerPart}[\frac{1}{2} f_s / 60]$ where f_s is the sampling frequency in Herz and $\frac{1}{2} f_s$ is the Nyquist frequency. We emphasize that $k_{\max}$ does not need to be equal to M . Indeed, we can use any integer $k_{\max}$ in the range $[1, M]$. Using $k_{\max} < M$ leads to a faster estimator, e.g. $M = 1$ reduces to NGE, but the most accurate estimator is obtained for $k_{\max} = M$.

The frequency shifts $\hat{\epsilon}_n$ are computed with (22), the amplitudes are computed with (23-1) and used in (25-1) to obtain the angular frequency shift estimate $\hat{\epsilon}$. Next, we use $\hat{\epsilon}$ to revise the initial angular frequency estimate with $\omega = \omega + \hat{\epsilon}$. The whole process is repeated with this new ω until ω converges. Convergence can be achieved as long as the condition (19-2) is satisfied for $k = k_{\max}$. Convergence is usually obtained with less than five iterations.

Once ω is obtained, the amplitude estimation problem becomes linear and consequently the most accurate method is LSE. Hence we estimate the amplitudes with (28). We emphasize that we do not use (23) for the final amplitude and phase estimates, which is another departure from NGE. Indeed, these estimates are not optimal if the frequency is known. In fact, we found that using Nyman and Gaiser's amplitude estimator (23) leads to a significant degradation of the result.

5.3 Estimation with NGE

To estimate the k^{th} harmonic ($k = 1, 2, \dots, k_{\text{max}}$), we use the estimation variables (30) with the initial angular frequency estimate $\omega_k = k \cdot 2\pi f_n$. The angular frequency shift ϵ_k is estimated with (22). The angular frequency ω_k is then revised according to $\omega_k = \omega_k + k \hat{\epsilon}_k$. This estimation process is repeated with the revised value of ω_k until convergence of ω_k is obtained. Convergence can be achieved if (19-2) is satisfied for the k^{th} harmonic. We estimate the amplitude A_k and the phase ϕ_k with (23).

6 Comparison of our method with NGE and LSE

6.1 Methodology

In this section, we use Monte Carlo simulations to compare our method with NGE and LSE. We use LSE as a reference because it provides the best possible estimates for frequency, amplitudes and phases with the model (4). In the signal to noise ratios (SNR) defined below, "signal" stands for the harmonic noise h . We made this choice because h is the signal that we estimate.

Our simulations are done in four steps:

- 1) We generate a synthetic signal of the form (3) with five harmonics ($M = 5$) and a fixed value of the SNR, size (i.e. total duration) and sampling frequency.
- 2) For each method, we estimate the harmonic noise parameters and we compute the estimated harmonic signal $\hat{h} = \sum_{k=1}^M \hat{A}_k \cos(k \hat{\omega}_0 t + \hat{\phi}_k)$, where $\hat{A}_k$, $\hat{\omega}_0$ and $\hat{\phi}_k$ are the estimated amplitudes, frequency and phases respectively.
- 3) For each method, we compute the SNR improvement (SNRI), which is defined by [11]

$$\begin{cases} \text{SNRI (dB)} &= 10 \log_{10} (\text{SNR}_{\text{after}} / \text{SNR}_{\text{before}}) \\ &= 10 \log_{10} (\| \mathbf{w} \|^2 / \| \mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}} \|^2) \\ \text{SNR}_{\text{before}} &= \| \mathbf{h} \|^2 / \| \mathbf{w} \|^2 \\ \text{SNR}_{\text{after}} &= \| \mathbf{h} \|^2 / \| \mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}} \|^2 \end{cases} \quad (31)$$

where $\mathbf{h} = (h(0), h(\Delta t), \dots, h((N-1)\Delta t))^T$ and $\hat{\mathbf{h}} = (\hat{h}(0), \hat{h}(\Delta t), \dots, \hat{h}((N-1)\Delta t))^T$.

- 4) For each method, we compute the square error of the frequency estimate $\hat{f}$, which is defined by $(\hat{f} - f_0)^2$, where f_0 is the actual fundamental frequency.
- 5) We repeat these steps N_r times and we compute the average values of SNRI and $(\hat{f} - f_0)^2$. The latter is called the mean square error (MSE) of the frequency estimate.

These simulations were repeated with different values of the SNR, sample size and sampling frequency. In the following, we present the procedure used to generate the synthetic signals.

6.2 Generation of synthetic random data

We produce synthetic random data with model (4), where $W(n)$ is a zero mean Gaussian white noise with variance σ^2 , and the $\phi(k)$ s are mutually independent random variables uniformly distributed on $[0, 2\pi]$. The fundamental frequency of the synthetic signal is chosen to be $f_0 = 60.05$ Hz for all

simulations. We chose $M = 5$ harmonics of the fundamental frequency. The amplitudes A_k are chosen to decrease exponentially with increasing values of k , i.e.

$$A_k = \alpha \exp(-k/\tau) \quad (32)$$

with $\tau = 6$. The parameter α allows to control the variance of the synthetic signal. Using $\|s\|^2 \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M A_k^2$ with (32), we can use geometric series to get $\|s\|^2 = (\alpha^2/2) (e^{-2/\tau} - e^{-2(M+1)/\tau}) (1 - e^{-2/\tau})^{-1}$, which allows to calculate the value of α that produces a given value of the SNR.

6.3 Accuracy of frequency estimators

The MSE of the frequency obtained with the three methods are plotted in figure 1 as a function of the signal duration. The MSE was obtained from 1000 realizations of synthetic signals sampled at 2048 Hz and having a SNR of 30 dB.

Firstly, we observe that the MSE obtained with NGE is about 20 times larger than with our method. Using the MSE square root as the error estimate on frequency, this corresponds to a ratio of 4.5 for the errors on frequency.

Secondly, the MSE obtained with our method is about 1.5 times larger than with LSE, which corresponds to a ration of 1.2 for the errors on frequency. We conclude that our method leads to a significant improvement of the frequency accuracy with respect to NGE. More importantly, our frequency estimate is very close to the best possible frequency estimate. Qualitatively similar results were obtained with different SNRs (from 10 to 50 dB).

6.4 Denoising performance

The average SNRI obtained with the three methods are plotted in figure 2 as a function of the signal duration. The average SNRI was obtained from 1000 realizations of synthetic signals sampled at 2048 Hz and having an SNR of 30 dB.

Firstly, we observe that LSE and our method have a virtually identical SNRI if the signal size exceeds 6 periods. We conclude that our method has a denoising performance which cannot be improved significantly. Secondly, our method gives an SNRI which is about 2.5 times larger than NGE (using the integer signal durations for which NGE performs best), which is a significant improvement. The oscillations of the SNRI for NGE indicate clearly that NGE performs well only if the signal duration is a multiple of the fundamental period. Our method is less sensitive to the signal duration because the final amplitudes are estimated with LSE instead of (23). Qualitatively similar results were obtained with different SNRs (from 10 to 50 dB).

7 Application to MT data

7.1 Data description

The MT data was recorded by Geosystems Canada inc. at West Morgan lake, Morgan Township, Ontario (Canada) for FalconBridge Limited. Fifteen AMT soundings were recorded on a 200 m by 200 m grid which covered the ice surface of West Morgan Lake. The data was recorded without any 60 Hz rejection filters (i.e. notch filters) to test a concept of subtracting the local noise source (a local noise remote) from the recorded data. This data is therefore well suited for the study of harmonic noise removal.

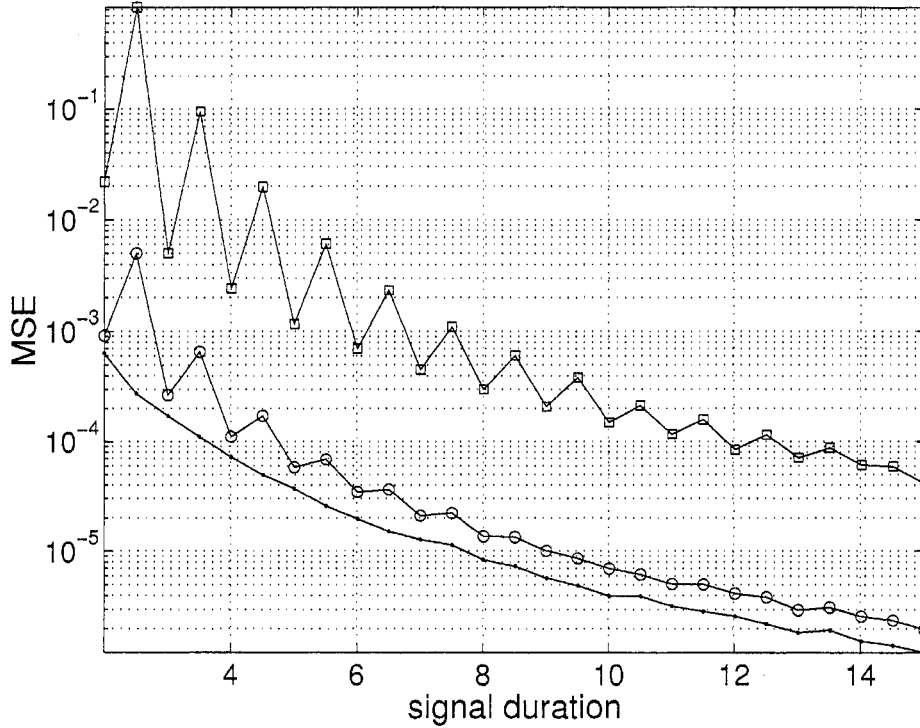


Figure 1: Mean square error (MSE) on the fundamental frequency versus signal duration, for the three methods. **Small dots** : LSE. **Squares**: NGE. **Circles** : our method. The signal duration unit is one nominal period.

The survey was carried out using 24-bit ADU-06 systems manufactured by Metronix GmbH of Braunschweig, Germany. Magnetic sensors were the BF-10 induction coils produced by Electro-Magnetic Instruments Inc. (EMI) of El Cerrito, California.

Five signals were recorded for each of the fifteen stations: two orthogonal electric field components (E_x, E_y), and three orthogonal magnetic field components (H_x, H_y, H_z). As an example of application of our method, we present our results for the E_y component signal. At small time scales, e.g. 0.5 s, the signal looks like a triangular wave, as shown in figure 5 (top). The SNR is so large (about 45 dB) that the MT signal is invisible. We plotted the same signal for a much longer duration (350 s) in figure 3 (top). We see that the signal is contaminated by intermittent spikes, and it is visually obvious that the signal amplitude changes with time. To examine this non-stationarity more closely, we performed a gliding window estimation of the frequency f and amplitude A of the first harmonic, using a window size of 10 fundamental periods and a translation increment of 2 periods. For the estimation, we used LSE with 15 harmonics. The number of harmonics was determined by examining the power spectrum of the original signal (figure 4, top), where the highest powerline harmonic is seen to be 900 Hz, which is the 15th harmonic. The results, shown in figure 3, show that both f and A vary in time. The frequency varies smoothly with time (apart from the random

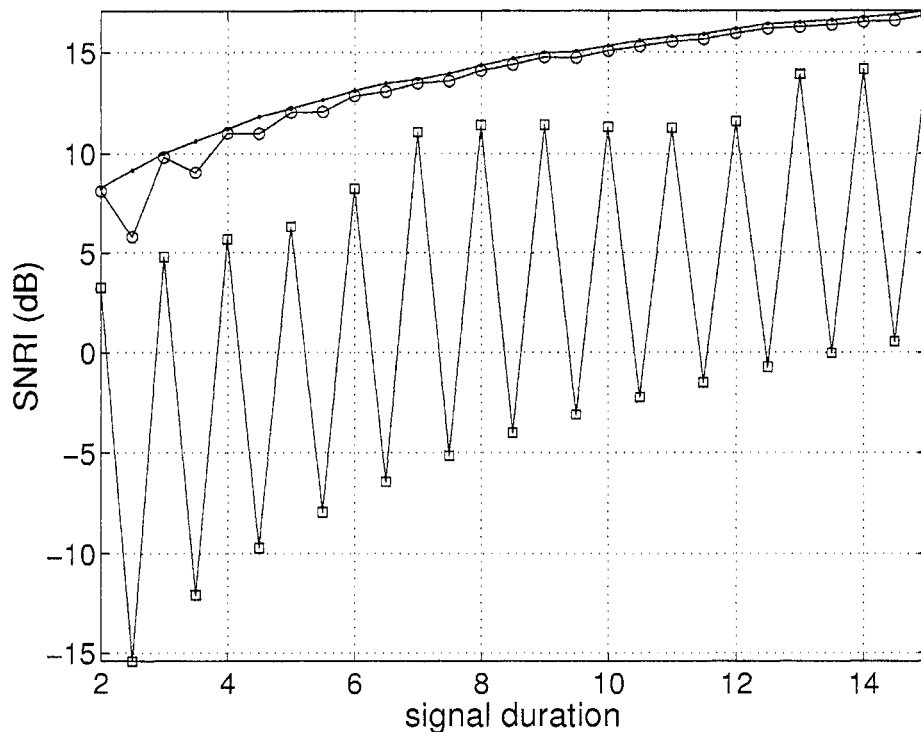


Figure 2: Average SNR improvement versus signal duration, for the three methods. **Small dots** : LSE. **Squares**: NGE. **Circles** : our method. The signal duration unit is one nominal period.

fluctuations caused by estimation errors), whereas the amplitude appears to vary more abruptly. It is stressed that the spikes in the frequency estimates are caused directly by the spikes in the original signal (the frequency range was not restricted to $[60 - 0.1, 60 + 0.1]$ for these estimations).

7.2 Power spectra before and after denoising

In general, the estimation methods give better results for larger samples as long as the signal is stationary. However, this is no longer true if the signal is non-stationary. Short enough samples are approximately stationary, but choosing short samples leads to low accuracy frequency estimates. This situation led us to search for a compromise between accuracy and stationarity. More precisely, we determined the largest sample duration for which LSE performs well, as judged from the power spectrum of the denoised signal (which is the estimated MT signal). If this spectrum does not exhibit any peaks at the 60 Hz harmonics, then we regard the denoising as satisfactory. From this standpoint, we found that the sample duration must be shorter than 0.5 s to get excellent denoising performance.

The power spectrum of the original signal (i.e. the square modulus of the discrete Fourier transform) and the power spectrum obtained after removal of the harmonic noise are shown in

figure 4, for a sample duration of 0.5 s. The spectra obtained with LSE and our method are virtually identical. We see that all the 60 Hz harmonics have been attenuated to a level which is below the level of the MT signal, i.e. the powerline noise was effectively removed. In particular, the 60 Hz fundamental frequency was attenuated by more than 60 dB. The spectrum obtained with NGE has been trimmed properly of the first three highline harmonics, but it exhibits clear peaks for the harmonics of order 4 and above. This shows that NGE fails to attenuate sufficiently the powerline noise for very large SNRs. If one increases the sample duration much beyond 0.5 s, then all methods typically fail to remove all the peaks of the 60 Hz harmonics on the denoised signal power spectrum.

7.3 MT signal obtained after denoising

The MT signals (corresponding to w in (5)) estimated with the three methods are shown in figure 5. The signals obtained with our method and LSE are seen to be virtually identical, whereas noticeable differences can be observed on the signal obtained with NGE, e.g. around time = 0.025 s, 0.05 s, 0.2 s, 0.6 s. The amplitudes of the harmonic signal and the MT signal are approximately 0.4 and 2.5×10^{-3} respectively, and therefore the corresponding SNR is $20 \log(0.4/2.5 \times 10^{-3}) \approx 44$ dB.

8 Conclusions

We developed a new frequency estimation method that builds upon the iterative estimator originally proposed by Nyman and Gaiser. We have shown that our method is much more accurate than NGE if there is enough energy in the harmonics of the fundamental frequency. More importantly, our method produces a frequency estimate which is very close to the LSE frequency estimate, and the denoising performance is almost optimal, as judged from the SNR improvement. Finally, our method is simple to implement and is more efficient computationally than LSE.

We also found that our method always converges when iterated. In contrast, we observed that NGE can fail to converge if the harmonic spectral line is not much larger than the power spectrum in the vicinity of the spectral line. For instance, the 4th and 10th harmonic in figure 4 (top), around 240 Hz and 600 Hz respectively, are typical cases for which NGE has a tendency to diverge (in which case we base the harmonic frequency estimate on the fundamental frequency estimate). We showed that our method can remove satisfactorily the powerline noise from MT data, in a case for which the SNR is 45 dB. Applied to the same data, the method of Nyman and Gaiser fails to attenuate sufficiently many of the harmonic noise spectral lines.

Acknowledgements A. Saucier and M. Chouteau acknowledge financial support from the NSERC grants RGPIN250241 and RGPIN848 respectively.

References

- [1] Erick Adam and Pierre Langlois. Elimination of monofrequency noise from seismic records. *Lithoprobe Seismic Processing Facility Newsletter*, 8(1):59–65, 1995.
- [2] R. K. Adams, J. M. McIntyre, and F. W. Symonds. Characteristics of the eastern interconnection line frequency. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, PAS-101:4542–4547, 1982.

- [3] K. S. Beaty, G. Perron, I. Kay, and E. Adam. Dsisoft- a matlab vsp data processing package. *Computers & Geosciences*, 28:501–511, 2002.
- [4] K. E. Butler and R. Don Russel. Subtraction of powerline harmonics from geophysics records. *Geophysics*, 58(6):898–903, 1993. Short note.
- [5] K. E. Butler and R. Don Russel. Cancellation of multiple harmonic noise series in geophysical records. *Geophysics*, 68(3):1083–1090, 2003.
- [6] Steven M. Kay. A fast and accurate single frequency estimator. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, 37:1987–1990, December 1989.
- [7] Steven M. Kay. *Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey 07458. a) chapter 7. b) chapter 6. c) chapter 3, p. 57. d) chapter 9, 1993. a) chapter 7. b) chapter 6. c) chapter 3, p. 57. d) chapter 9.
- [8] D. C. Nyman and J. E. Gaiser. Adaptive rejection of high-line contamination. In *53rd Ann. Internat. Mtg.*, pages 321–323. Soc. Expl. Geophys., 1983. Expanded Abstracts.
- [9] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Section 14.3, General Linear Least Squares.
- [10] B. G. Quinn and E. J. Hannan. *The estimation and tracking of frequency*. Cambridge University Press, Cambridge CB2 2RU, UK. a) page 19. b) page 63. c) page 9., 2001. a) page 19.
- [11] K. C. Smith and A. S. Sedra. *Microelectronic Circuits*. Oxford University Press, Oxford, 1998. Fourth edition, p. 672-673.

A $\hat{\epsilon}_n$ is an unbiased estimator of ϵ for large T

Using $(U_n, V_n, X_n, Y_n) \equiv (p_{1,n}, p_{2,n}, p_{3,n}, p_{4,n})$ as a simplifying notation, $\hat{\epsilon}_n$ takes the form

$$\hat{\epsilon}_n = F_n(p_{1,n}, p_{2,n}, p_{3,n}, p_{4,n}) \quad (33)$$

where F_n is given by (22). For large T , the random variables $p_{i,n}$ are centered around their mean $\bar{p}_{i,n}$, i.e. their variance is small. It follows that we can use a first order Taylor expansion [7](d) on (33) to get the approximation

$$\hat{\epsilon}_n \approx F_n(\bar{\mathbf{p}}_n) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial F_n}{\partial p_{i,n}}(\bar{\mathbf{p}}_n)(p_{i,n} - \bar{p}_{i,n}) \quad (34)$$

where $\bar{\mathbf{p}}_n \equiv (\bar{p}_{n,1}, \dots, \bar{p}_{n,4})$. According to (21), $F_n(\bar{\mathbf{p}}_n) = \epsilon$ and therefore (34) becomes

$$\hat{\epsilon}'_n = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial F_n}{\partial p_{i,n}}(\bar{\mathbf{p}}_n) p'_{i,n} \quad (35)$$

where $\hat{\epsilon}'_n \equiv \hat{\epsilon}_n - \epsilon$, $p'_{i,n} \equiv p_{i,n} - \bar{p}_{i,n}$. Since $\overline{p'_{i,n}} = 0$ for all i s, then (35) implies $\overline{\hat{\epsilon}'_n} = 0 \Rightarrow \overline{\hat{\epsilon}_n} = \epsilon$ and therefore $\hat{\epsilon}_n$ is unbiased.

B The $\hat{\epsilon}_n$ s are uncorrelated for large T

It follows from (35) that

$$\overline{\hat{\epsilon}'_n \hat{\epsilon}'_m} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial F_n}{\partial p_{i,n}}(\bar{p}_n) \frac{\partial F_m}{\partial p_{j,m}}(\bar{p}_n) \overline{p'_{i,n} p'_{j,m}} \quad (36)$$

for large T . If $T = p \frac{2\pi}{\omega}$, where p is an integer, then it can be shown that the $p'_{n,i}$ are uncorrelated if $p \geq 3$ (appendix C), i.e.

$$\overline{p'_{i,n} p'_{j,m}} = \overline{(p'_{i,n})^2} \delta_{n,m} \delta_{i,j} \quad (37)$$

Using (37), (36) becomes $\overline{\hat{\epsilon}'_n \hat{\epsilon}'_m} = \overline{(\hat{\epsilon}'_n)^2} \delta_{n,m}$, i.e. the $\hat{\epsilon}_n$ are mutually uncorrelated, and

$$\text{Var}(\hat{\epsilon}_n) = \overline{(\hat{\epsilon}'_n)^2} = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial F_n}{\partial p_{i,n}}(\bar{p}_n) \right)^2 \overline{(p'_{i,n})^2} \quad (38)$$

C The estimation variables are uncorrelated

Let us first consider $\overline{p'_{i,n} p'_{j,m}}$ in the special case where $i = j = 1$. We have $\overline{p'_{1,n} p'_{1,m}} = \overline{U'_n U'_m}$. As previously, we assume that $T = p T_0$, where $T_0 = 2\pi/\omega$ and p is an integer. Using (8-2) and denoting the expectation value by $E(\dots)$, we get

$$\begin{aligned} \overline{U'_n U'_m} &= E \left(\left[\frac{1}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) w(t) dt \right] \left[\frac{1}{T} \int_0^T \cos(m\omega t) w(t) dt \right] \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = \frac{\sigma^2}{2T} \delta_{n,m} \end{aligned} \quad (39)$$

which follows from the orthogonality of the cosine functions. Hence U_n and U_m are uncorrelated if $n \neq m$. In general, the fluctuation $p'_{i,n}$ takes the form

$$p'_{i,n} = \frac{1}{T} \int_0^T g_{i,n}(t) w(t) dt \quad (40)$$

where the functions $g_{i,n}(t)$, that appear in the definition (7) of the estimation variables, are given by

$$\begin{cases} g_{1,n}(t) &= \cos(n\omega t) \\ g_{2,n}(t) &= \sin(n\omega t) \\ g_{3,n}(t) &= \cos(n\omega t) \sin(2\pi t/T) \\ g_{4,n}(t) &= \sin(n\omega t) \sin(2\pi t/T) \end{cases} \quad (41)$$

Using (40), the generalization of (39) is

$$\overline{p'_{i,n} p'_{j,m}} = \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T g_{i,n}(t) g_{j,m}(t) dt \quad (42)$$

According to (42), the variables $p_{i,n}$ and $p_{j,m}$ are uncorrelated if the functions $g_{i,n}(t)$ and $g_{j,m}(t)$ are orthogonal, i.e. if their scalar product $\int_0^T g_{i,n}(t) g_{j,m}(t) dt$ vanishes. Using the notation $F \equiv 1/T = 1/(pT_0)$ and trigonometric identities, (41) can be rewritten in the equivalent form

$$\begin{cases} g_{1,n}(t) &= \cos(2\pi n p F t) \\ g_{2,n}(t) &= \sin(2\pi n p F t) \\ g_{3,n}(t) &= \frac{1}{2} [\sin(2\pi(np+1)F t) - \sin(2\pi(np-1)F t)] \\ g_{4,n}(t) &= \frac{1}{2} [\cos(2\pi(np-1)F t) - \cos(2\pi(np+1)F t)] \end{cases} \quad (43)$$

It is well known that the sine and cosine functions $g_{1,n}(t)$ and $g_{2,m}(t)$ are orthogonal to each other. Moreover, for $i = 1, 2$ the functions $g_{i,n}(t)$ and $g_{i,m}(t)$ are known to be orthogonal if $n \neq m$.

The pairs $(g_{1,n}(t), g_{3,m}(t))$, $(g_{2,n}(t), g_{4,m}(t))$ and $(g_{3,n}(t), g_{4,m}(t))$ are orthogonal because sine and cosine functions are orthogonal when integrated over an integer number of periods.

The scalar product of $g_{1,n}(t)$ and $g_{4,m}(t)$ is nonzero if $np = mp \pm 1$, which implies that $\pm(n - m)p = 1$. However, for $n \geq 1$ and $m \geq 1$, we get $\pm(n - m)p = 0, \pm p, \pm 2p, \dots$ and therefore the equality $\pm(n - m)p = 1$ never occurs if we assume that $p \geq 2$. Hence $g_{1,n}(t)$ and $g_{4,m}(t)$ are orthogonal if $p \geq 2$. Similarly, $g_{2,n}(t)$ and $g_{3,m}(t)$ are orthogonal if $p \geq 2$.

The scalar product of $g_{3,n}(t)$ and $g_{3,m}(t)$ is nonzero if $np \pm 1 = mp \pm 1$. Firstly, both $np + 1 = mp + 1$ and $np - 1 = mp - 1$ imply that $n = m$ for $p \geq 1$. Secondly, $np + 1 = mp - 1$ and $np - 1 = mp + 1$ imply that $\pm(n - m)p = 2$. However, $\pm(n - m)p = 0, \pm p, \pm 2p, \dots$ and therefore the equality $\pm(n - m)p = 2$ never occurs if we assume that $p \geq 3$. Hence $g_{3,n}(t)$ and $g_{3,m}(t)$ are orthogonal if $n \neq m$ and $p \geq 3$. Similarly, $g_{4,n}(t)$ and $g_{4,m}(t)$ are orthogonal if $n \neq m$ and $p \geq 3$.

In conclusion, if $p \geq 3$, then the estimation variables $p_{n,i}$ are uncorrelated according to

$$\overline{p'_{n,i} p'_{m,j}} = \overline{(p'_{n,i})^2} \delta_{n,m} \delta_{i,j} \quad (44)$$

D Variance of estimation variables

The variance σ_n^2 of $\hat{\epsilon}_n$ is given by (38), and therefore we need to compute $\overline{(p'_{i,n})^2}$ and the derivative $\frac{\partial F_n}{\partial p_{i,n}}(\bar{p}_n)$ for all i s. Using (42) with $n = m$ and assuming that $T = pT_0$ where $T_0 = 2\pi/\omega$ and p is integer, we get

$$\begin{cases} \overline{(p'_{1,n})^2} = \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T (\cos(n\omega t))^2 dt & = \frac{\sigma^2}{2T} \\ \overline{(p'_{2,n})^2} = \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T (\sin(n\omega t))^2 dt & = \frac{\sigma^2}{2T} \\ \overline{(p'_{3,n})^2} = \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T (\cos(n\omega t))^2 (\sin(2\pi t/T))^2 dt & = \frac{\sigma^2}{4T} \\ \overline{(p'_{4,n})^2} = \frac{\sigma^2}{T^2} \int_0^T (\sin(n\omega t))^2 (\sin(2\pi t/T))^2 dt & = \frac{\sigma^2}{4T} \end{cases} \quad (45)$$

Using (22), we calculate the derivatives $\frac{\partial F_n}{\partial p_{i,n}}$ and evaluate them at $\bar{p}_n$, i.e. replace (U_n, V_n, X_n, Y_n) by their averages (18). After simplification with the symbolic calculator Mathematica, (38) leads to

$$\sigma_n^2 \approx \frac{4\pi^2\sigma^2}{A_n^2 n^2 T^3} + O(u) \quad (46)$$

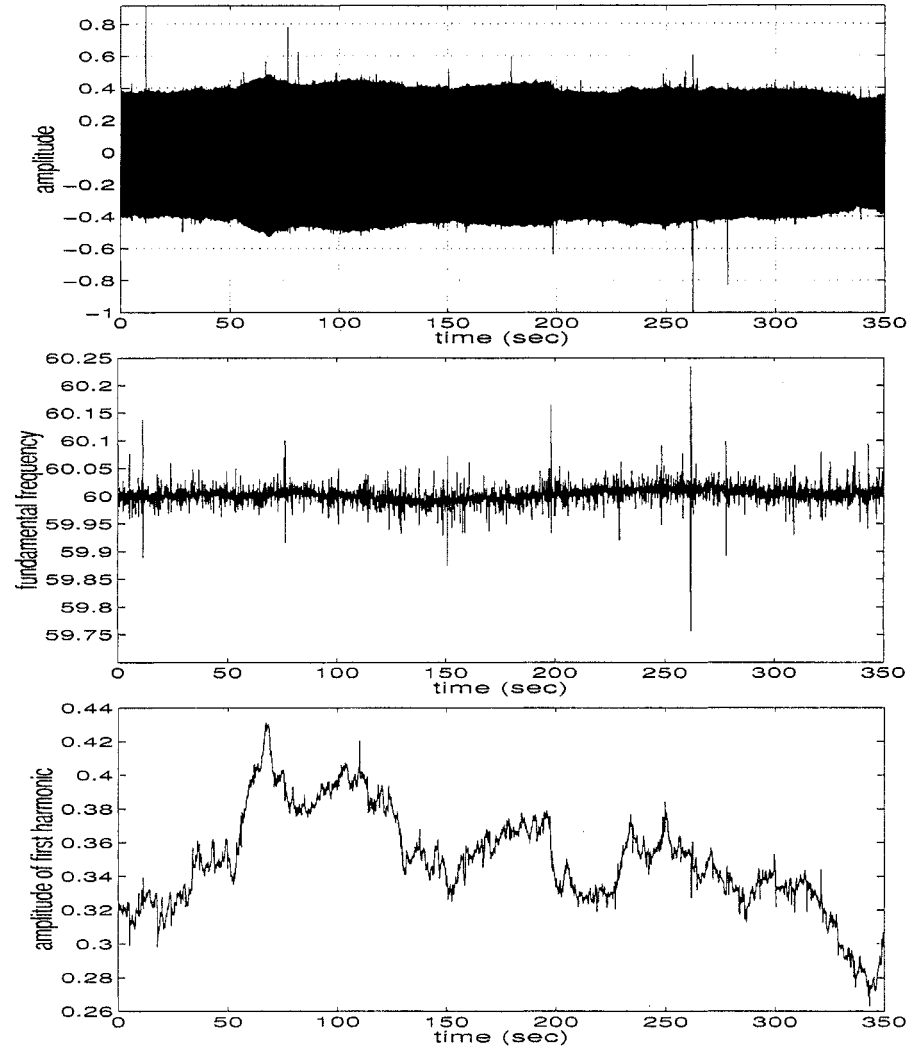


Figure 3: Gliding window analysis of the MT data. We used a window size of 10 fundamental periods and a translation increment of 2 periods. **Top:** Ey component of the MT signal. **Middle:** Frequency of the first harmonic. **Bottom:** Amplitude of the first harmonic.

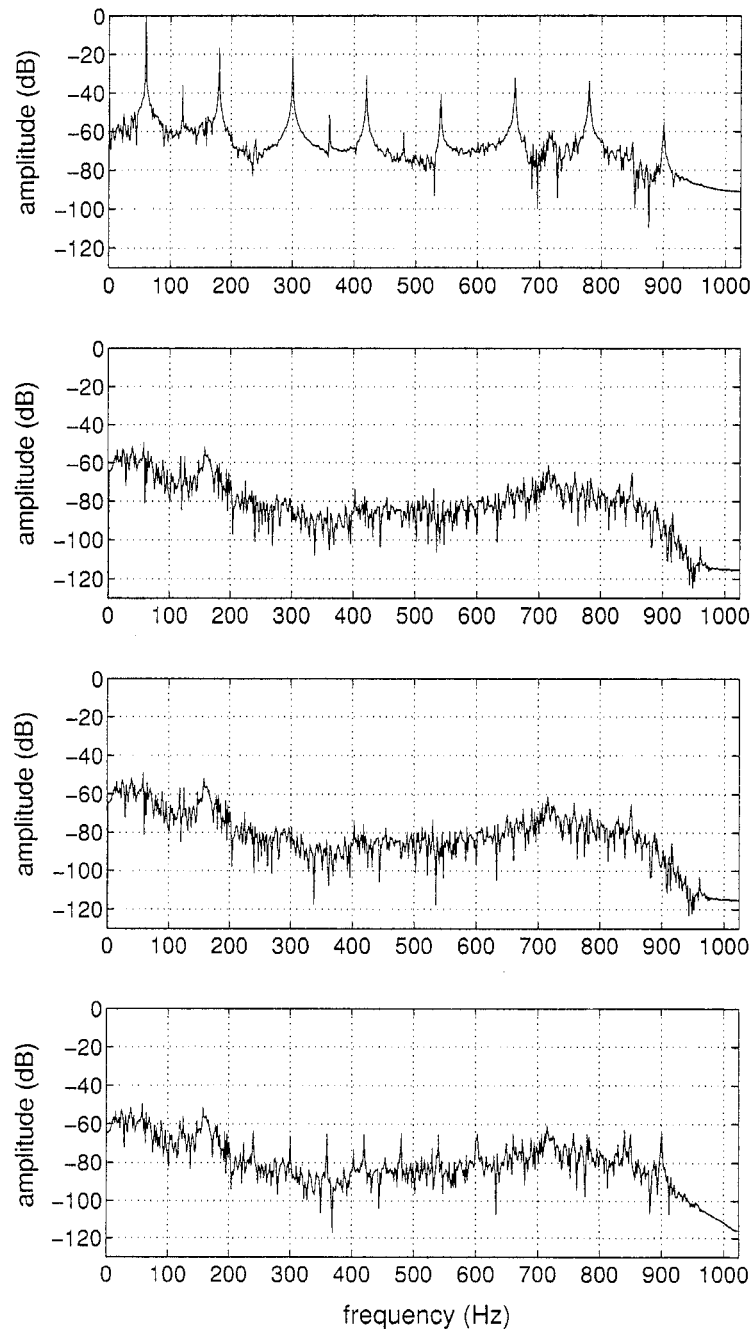


Figure 4: **Top** : spectrum of original data. **Upper middle**: spectrum of denoised signal using LSE. **Lower middle**: spectrum of denoised signal using our method. **Bottom** : spectrum of denoised signal using NGE.

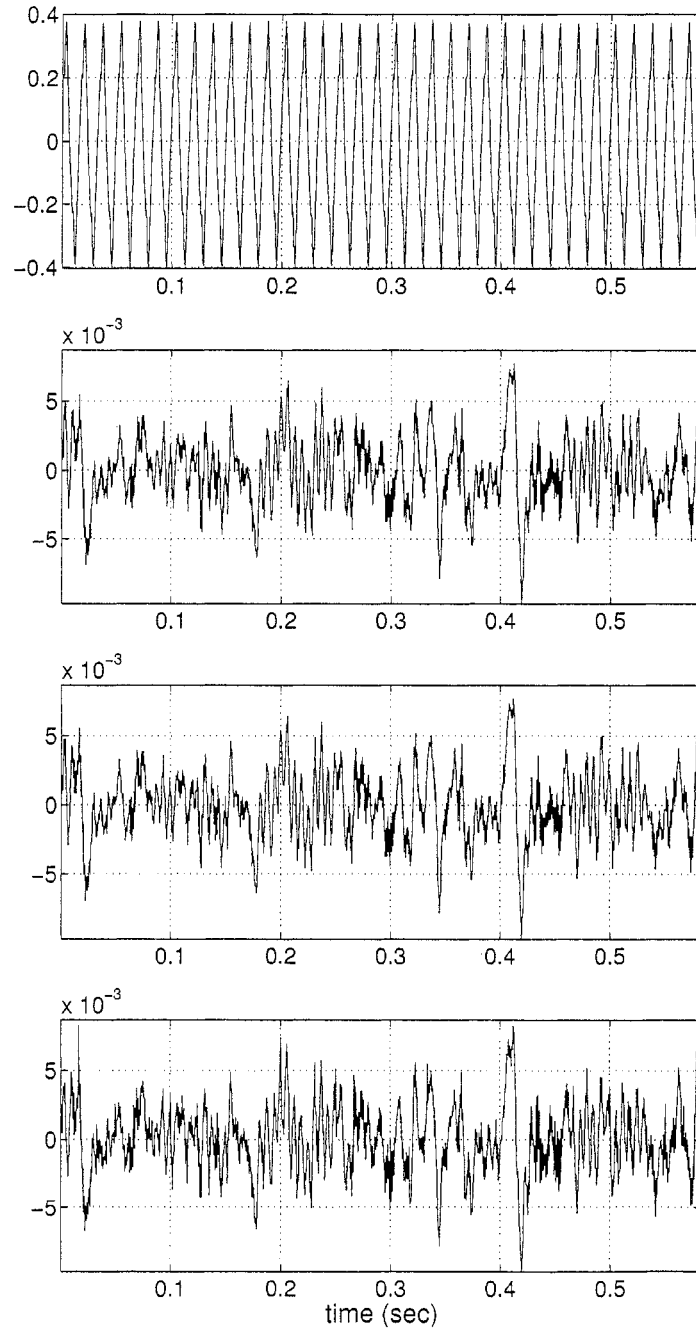


Figure 5: **Top** : original MT data. **Upper middle**: MT signal obtained with LSE. **Lower middle** : MT signal obtained with our method. **Bottom** : MT signal obtained with NGE.