

Analyse des signaux

David Legault

INTRODUCTION

Ce document se veut une introduction aux concepts théoriques reliés à l'échantillonnage des signaux. L'échantillonnage permet de représenter un signal analogique en une série de valeurs prises à des intervalles réguliers. Le but de ce présent document est de vous exposer la théorie reliée au théorème d'échantillonnage et quelques exemples concrets de son utilisation. Ensuite, il sera question d'analyse de Fourier en traitement de signal. Certains sujets comme l'effet de la largeur de la fenêtre d'échantillonnage, la FFT¹ et la DFT² stationnaire et temporelle seront abordés.

THÉORIE DE L'ÉCHANTILLONNAGE

L'échantillonnage peut se voir comme une opération mathématique consistant à multiplier le signal par un peigne d'impulsions de Dirac³. L'opération consiste à prendre des valeurs du signal à des intervalles constants (échantillonnage) qui sont des multiples de la période d'échantillonnage T_e .

Sur la Fig. 1 nous pouvons observer un signal aléatoire $f(t)$ sur lequel nous appliquons un échantillonnage à tous les instants T_e représenté par la Fig. 3.

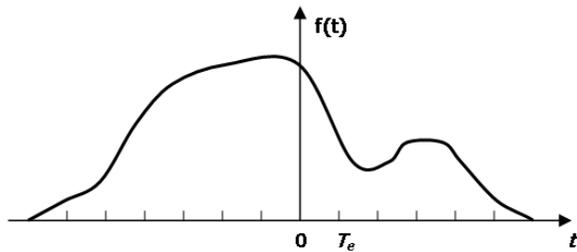


Fig. 1. Fonction quelconque $f(t)$

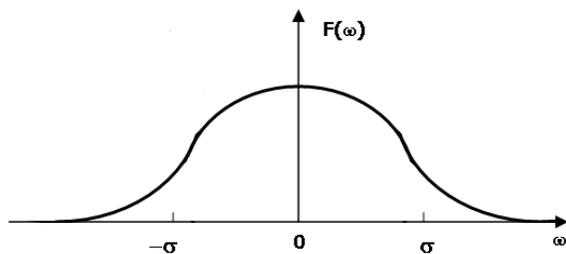


Fig. 2. Spectre fréquentiel de $f(t)$

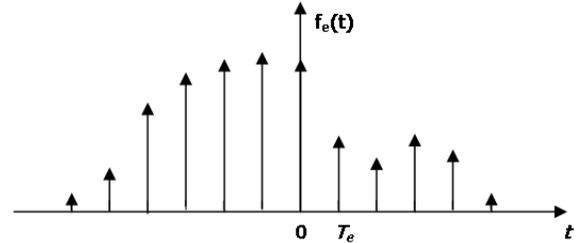


Fig. 3. Valeurs échantillonnées de $f(t)$

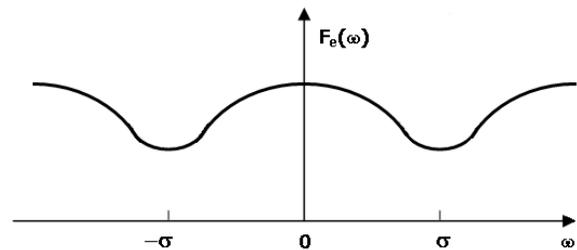


Fig. 4. Spectre fréquentiel de $f_e(t)$

Nous voulons représenter la fonction $f(t)$ par ses échantillons $f(nT_e)$ qui sont des points équidistants. Nous pouvons définir la fonction échantillonnée $f_e(t)$ comme suit:

$$f_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_e f(nT_e) \delta(t - nT_e) \quad (1)$$

L'échantillonnage d'un signal provoque une répétition de sa transformée de Fourier à des intervalles de σ comme illustré à la Fig. 4. D'après la propriété de la transformée de Fourier de la fonction delta de Dirac:

$$\delta(t - a) \leftrightarrow e^{-ja\omega} \quad e^{jat} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - a) \quad (2)$$

Nous avons une représentation de la transformée de Fourier de $f_e(t)$ qui est la suivante:

$$F_e(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_e f(nT_e) e^{-jnT_e\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - 2n\sigma) \quad (3)$$

$$\text{où } \sigma = \frac{\pi}{T_e}.$$

Donc la fonction $F_e(\omega)$ n'est autre que la répétition du spectre de $F(\omega)$ à tous les intervalles $\pm 2\sigma$.

¹Fast Fourier Transform

²Discrete Fourier Transform

³On se rappelle que l'impulsion de Dirac est un artefact mathématique permettant de représenter une impulsion de durée zéro

Théorème d'échantillonnage

Supposons que la fonction $f(t)$ soit d'énergie finie et limitée en fréquence (signal Bande Limitée):

$$F(\omega) = 0 \quad \text{pour } |\omega| > \sigma \quad (4)$$

Alors on peut écrire la fonction $F(\omega)$ comme étant:

$$F(\omega) = F_e(\omega)p_\sigma(\omega) \quad (5)$$

où la fonction $p_\sigma(\omega)$ est illustrée à la Fig. 5 ci-dessous. Cette fonction est un filtre unitaire pour ne conserver que la bande d'intérêt du signal $F_e(\omega)$, soit l'intervalle $[-\sigma, \sigma]$.

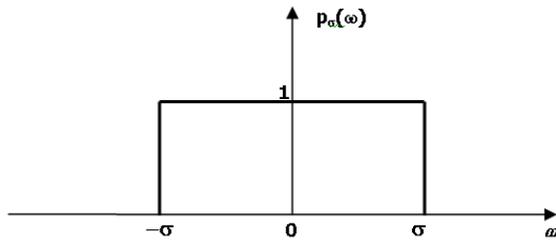


Fig. 5. Fonction de filtre unitaire $p_\sigma(\omega)$

En appliquant la transformée de Fourier inverse à l'équation (5), nous obtenons:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_e) \frac{\sin \sigma(t - nT_e)}{\sigma(t - nT_e)} \quad (6)$$

Sachant que la transformée de Fourier inverse de $p_\sigma(\omega)$ est:

$$F^{-1}[p_\sigma(\omega)] = \frac{\sin \sigma t}{\sigma t} \quad (7)$$

Ce résultat est appelé le théorème d'échantillonnage, affirmant que l'on peut représenter un signal $f(t)$ en termes d'une séquence d'échantillons $f(nT_e)$ équidistants. La fréquence d'échantillonnage étant donné par le **taux de Nyquist**:

$$\frac{1}{T_e} = \frac{\pi}{\sigma} \quad (8)$$

Ce théorème indique donc qu'il faut échantillonner un signal dont la fréquence maximale est f_{max} avec une fréquence $f_e > 2f_{max}$ pour conserver l'information du signal pour sa reconstruction.

EFFETS DE LA FRÉQUENCE D'ÉCHANTILLONNAGE

Mais qu'arrive-t-il si l'on échantillonne à des fréquences inférieures ou supérieures à la fréquence maximal de notre signal?

A. Le sous-échantillonnage

Le sous-échantillonnage consiste à échantillonner un signal avec une fréquence sous le taux de Nyquist ($f_e < 2f_{max}$). Le spectre du signal n'étant plus compris entre $[-\sigma, \sigma]$ comme illustré à la Fig. 2, lors de la reconstruction il y aura perte de l'information contenue dans les fréquences plus grandes

que la bande 2σ . Un autre phénomène qui pourra se produire est l'ajout de composantes en fréquence qui n'étaient pas présentes initialement dans le signal. Ces composantes peuvent provenir du repliement spectral de certaines fréquences du spectre $F_e(\omega)$ comme à la Fig. 4. Donc, il aura une déformation qui est connue sous le nom de **aliasing**.

Pour éliminer cet effet, il suffit de filtrer, avec un filtre passe-bas, le signal que l'on veut échantillonner pour éliminer les fréquences supérieures à $\frac{f_e}{2}$. Un exemple de ceci est le téléphone que nous utilisons à la maison. La voix est filtrée pour ramener le contenu en fréquences entre 300 Hz et 3.8 KHz (l'humain moyen entend les fréquences entre 200 Hz et 20 KHz). Le signal de la voix est ensuite échantillonné avec une fréquence de 8 KHz. C'est une des raisons pourquoi, il nous semble que, la voix de l'interlocuteur est différente au téléphone que lorsqu'il est devant nous. Il manque en effet une partie des hautes fréquences de la voix.

B. Le sur-échantillonnage

Le sur-échantillonnage n'apporte en soit rien de plus sur l'information du signal, mais peut parfois être utile lors de la reconstruction pour apporter plus de précision sur le signal reconstruit. Il y a donc moins de trous vides entre deux échantillons pris à exactement $f_e = 2f_{max}$. La théorie nous indique qu'échantillonner au taux de Nyquist suffit pour représenter le signal, mais il n'est pas mentionné que la phase du signal peut jouer dans l'allure du signal reconstruit.

Une façon de réduire ces effets (surtout si on ignore la phase du signal à échantillonner) est de sur-échantillonner légèrement le signal pour éviter de tomber dans ce piège. Mais n'oublions pas qu'un taux d'échantillonnage supérieur implique une largeur de bande supérieure.

RECONSTRUCTION DU SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ

En pratique, on ne peut prendre une infinité d'échantillons pour représenter le signal. Nous nous retrouvons donc limités à N échantillons pour reconstituer le signal. L'équation (6) devient alors:

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^N f(nT_e) \frac{\sin \sigma(t - nT_e)}{\sigma(t - nT_e)} \quad (9)$$

La reconstruction du signal subit alors une légère déformation aux extrémités dû au manque d'échantillons hors de la fenêtre temporelle sur lequel le signal est échantillonné.

Voici un exemple d'échantillonnage d'un signal composé de sinusoïdes de 50, 150 et 250 Hz. Le signal sur la Fig. 6 a été échantillonné à $f_e = 600\text{Hz}$ ($2f_{max} = 500\text{Hz}$).

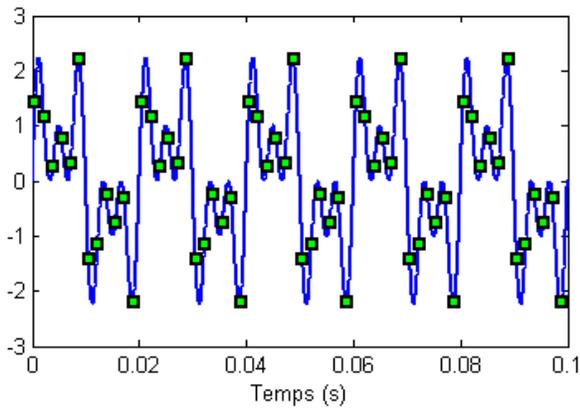


Fig. 6. Signal composé de 3 sinusoïdes de 50, 150 et 250 Hz

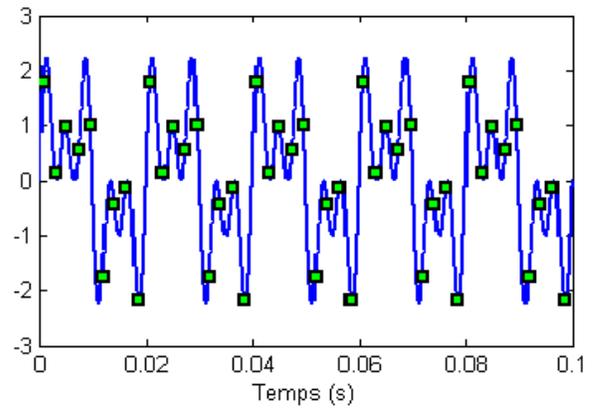


Fig. 9. Signal composé de 3 sinusoïdes de 50, 150 et 250 Hz

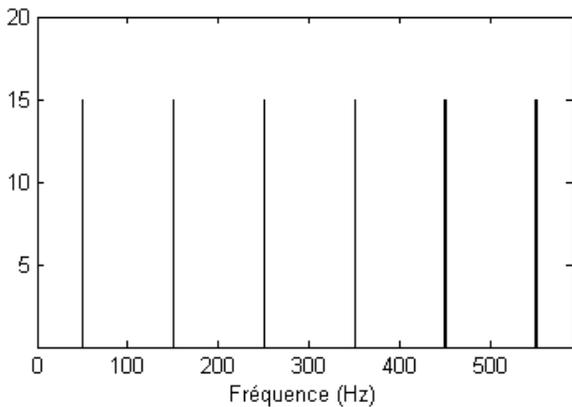


Fig. 7. Spectre échantillonné à $f_e = 600$ Hz

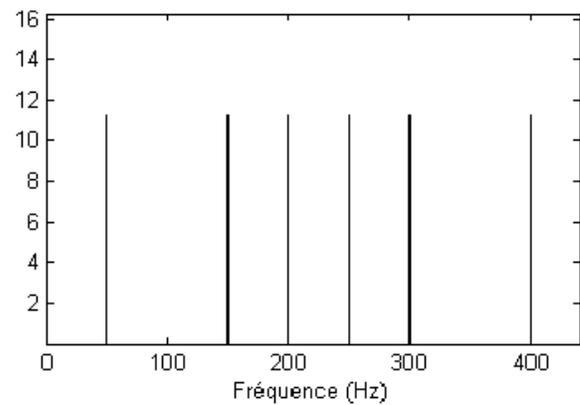


Fig. 10. Spectre échantillonné à $f_e = 450$ Hz

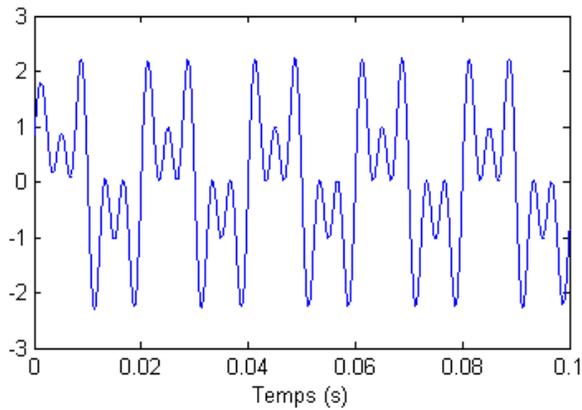


Fig. 8. Signal reconstruit

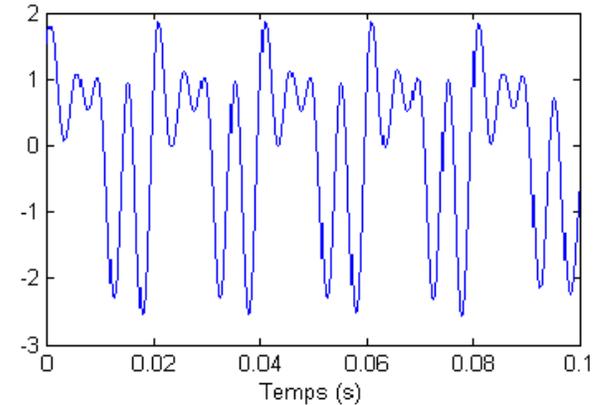


Fig. 11. Signal reconstruit

On peut voir la déformation du signal sur les bords de la reconstitution sur la Fig. 8. Sur la Fig. 7, la représentation du spectre nous montre bien le contenu en fréquences du signal, soit 50, 150 et 250 Hz.

Mais qu'arrive-t-il lorsque nous échantillons à une fréquence plus basse que le taux de Nyquist? Les Figs. 9, 10 et 11 nous montrent l'effet sur le spectre ainsi que sur la reconstruction du même signal qu'auparavant avec une fréquence d'échantillonnage f_e de 450 Hz ($2f_{max} = 500$ Hz).

Nous voyons dans cet exemple qu'il y a repliement spectral comme illustré à la Fig. 4. Il y a maintenant une composante à 200 Hz qui n'était pas présente auparavant. Nous pouvons observer sur la Fig. 11 une déformation marquée du signal reconstruit.

Maintenant voyons l'effet de la phase sur l'échantillonnage d'un signal inconnu. Comme illustré à la Fig. 12, il se pourrait que nous tombions sur cette situation lorsque nous échantillons un signal périodique. Le spectre de ce signal

échantillonné est nul ainsi que sa reconstruction car nous n'avons pas obtenu d'informations de l'échantillonnage.

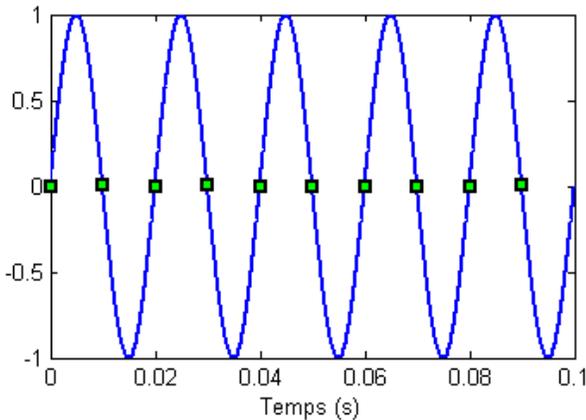


Fig. 12. Mauvais échantillonnage dû à la phase inconnue du signal

Une façon de se prémunir contre ce phénomène lorsque nous ignorons tout du signal à échantillonner est de sur-échantillonner légèrement le signal pour ne pas que tous les échantillons tombent sur des valeurs nulles ainsi que d'appliquer un filtre passe-bas pour limiter le contenu en fréquences de celui-ci.

ANALYSE DE FOURIER

Dans cette partie nous verrons les effets de la largeur de la fenêtre d'échantillonnage sur la transformée discrète de Fourier (DFT), un outil développé pour faire l'analyse discrète des signaux continus échantillonnés. Il existe plusieurs versions d'algorithmes de calcul de DFT que l'on nomme par FFT (la fonction fft de Matlab par exemple).

C. Séries Discrètes de Fourier

Il est bien connu que nous pouvons exprimer une fonction périodique de période T comme une somme d'exponentielles complexes

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (10)$$

Où les coefficients a_n sont définis comme suit

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (11)$$

La formule de la Somme de Poisson Cette identité très importante est à la base de la DFT et de ses dérivées. Elle démontre que nous pouvons illustrer une fonction périodique en fonction de la somme des coefficients de sa transformée de Fourier.

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (12)$$

Preuve Soit la fonction $f(t)$ qui est une répétition périodique de $f_0(t)$ comme illustré aux Fig. 13 et 14. On peut écrire la fonction $f(t)$ comme étant

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT) = \bar{\delta}(t) * f_0(t) \quad (13)$$

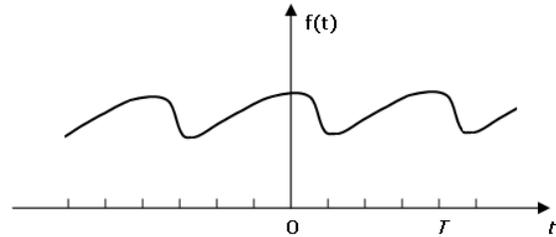


Fig. 13. Fonction périodique $f(t)$

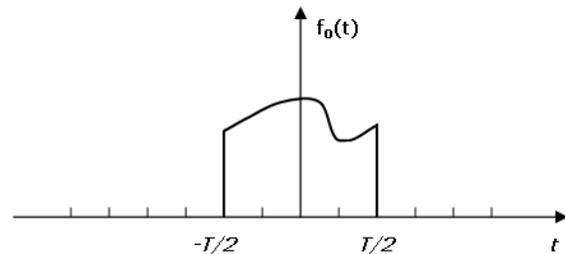


Fig. 14. Fonction $f_0(t)$

Si on veut écrire $f(t)$ en fonction des coefficients a_n selon l'équation (10), on a donc que les coefficients a_n sont donnés par

$$a_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0) \quad (14)$$

Nous savons que la transformée de Fourier de $f(t)$ est donné par

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (15)$$

Avec les propriétés de la transformée de Fourier en remplaçant dans l'équation précédente la valeur de $f(t)$ avec celle de l'équation (13) nous obtenons

$$F_0(n\omega_0) = \int_{-T/2}^{T/2} f_0(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (16)$$

La fonction $f_0(t)$ étant non-nulle seulement dans l'intervalle $[-T/2, T/2]$.

En appliquant le même raisonnement pour une fonction périodique en fréquence, nous arrivons à une formule similaire pour $F(\omega)$

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_1)e^{-jnT_1\omega} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (17)$$

En discrétisant ces deux formules pour des séquences de durée finies, nous en arrivons à une représentation en série discrètes de Fourier que nous verrons dans la prochaine section.

D. DFT - Transformée Discrète de Fourier

La transformée discrète de Fourier est une représentation de Fourier pour les séquences de durées finies. Elle est elle-même une séquence plutôt qu'une fonction continue. On s'en sert dans beaucoup d'algorithmes de calcul (algorithmes FFT) pour le traitement numérique des signaux.

Les séries discrètes de Fourier sont une représentation discrète d'une séquence périodique de longueur infinie. Comme les coefficients de cette séquence sont aussi périodiques en N , la DFT est alors la représentation de ces coefficients sur une seule période de longueur N .

Les équations de la DFT sont écrites comme suit:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \quad (18)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn} \quad (19)$$

où $W_N = e^{-j2\pi/N}$

En discrétisant l'équation 17 avec T_1 devenant un facteur unitaire, nous obtenons la représentation discrète suivante

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} \quad (20)$$

De l'équation précédente on constate que les coefficients $X[k]$ sont

$$X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} \quad (21)$$

La DFT n'étant rien d'autre que l'échantillonnage du spectre continu à des intervalles réguliers dépendant de la valeur de N .

E. Calcul de la DFT: Considérations pratiques

Comme vu précédemment, les coefficients de la DFT ne sont nul autre qu'un échantillonnage du spectre de la fonction échantillonnée. Et la DFT est une représentation sur une période d'un signal périodique. Maintenant voyons les influences de quelques facteurs entrant en ligne de compte dans le calcul de la DFT.

1) *La fenêtre d'échantillonnage:* Lorsque l'on échantillonne, il est bien entendu impossible de prendre une infinité d'échantillons en série. Quel est l'effet de cette fenêtre d'échantillonnage sur la DFT?

La transformée de Fourier étant une opération dual, la transformée inverse de Fourier d'une fonction rectangulaire donne une fonction *sinc* (voir l'équation (7)) et inversement la transformée d'une fenêtre rectangulaire donnera également un *sinc* également. Sur la Fig. 15, nous illustrons la transformée de Fourier d'une fenêtre d'une longueur de 20 échantillons.

Supposons un signal continu constitué de la somme de deux composantes sinusoïdales:

$$x(t) = \cos(\omega_1 t + \theta_1) + \cos(\omega_0 t + \theta_0) \quad (22)$$

$$-\infty < t < \infty$$

On peut représenter ce signal limité dans le temps comme suit:

$$x_c(t) = w(t)\cos(\omega_1 t + \theta_1) + w(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0) \quad (23)$$

$$-t_1 < t < t_2$$

Où $w(t)$ est la fonction de fenêtre qui n'est rien d'autre qu'une fonction rectangulaire d'amplitude unitaire (comme la Fig. 5 mais dans le temps). Ci-dessous nous pouvons apercevoir un exemple de transformée de Fourier d'une fenêtre rectangulaire.

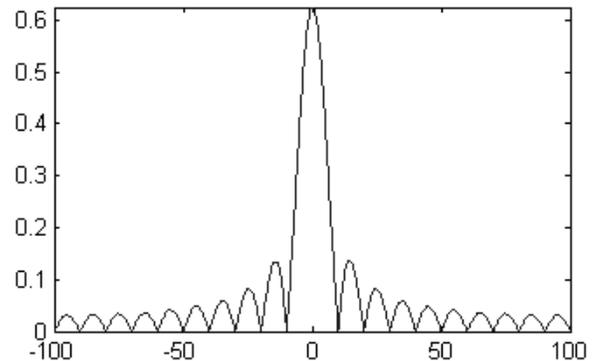


Fig. 15. Transformée de Fourier d'une fenêtre $L=20$ où $f_e = 200$ Hz

La transformée de Fourier de $x_c(t)$ en exploitant les propriétés de la transformée de Fourier:

$$X_c(\omega) = W(\omega) * (\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)) \quad (24)$$

$$+ W(\omega) * (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

Ce qui donne finalement le résultat suivant:

$$X_c(\omega) = W(\omega - \omega_1) + W(\omega + \omega_1) \quad (25)$$

$$+ W(\omega - \omega_0) + W(\omega + \omega_0)$$

Pour des signaux périodiques, le spectre de la fenêtre est tout simplement répété aux fréquences du signal.

Ceci peut poser des problèmes si les fréquences des composantes sinusoidales sont trop rapprochées. Il sera en effet difficile de départager les fréquences présentes dans le spectre si elles sont trop près avec une fenêtre de type rectangulaire car les composantes de chacune des fréquences influenceront sur celle des autres. Il existe d'autres types de fenêtres qui peuvent réduire cet effet et augmenter la résolution du spectre comme les fenêtres Kaiser [1] qui arrondissent les coins de la fenêtre carrée ce qui réduit le phénomène de Gibbs⁴.

2) *Effet de l'échantillonnage spectral*: Lorsque l'on calcule la DFT d'une séquence, il faut être prudent dans son analyse car il y a quelques situations qui pourraient mener à de fausses interprétations. Supposons que nous avons le signal suivant

$$v[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right) + 0.75 \cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right) \quad 0 \leq n \leq 63 \quad (26)$$

Une fenêtre rectangulaire $L = N = 64$ est utilisée pour calculer la DFT. Ici, les fréquences $\omega_1 = 2\pi/8 = 2\pi \cdot 8/64$ correspondent à l'échantillon $k = 8$ et $\omega_2 = 2\pi/16 = 2\pi \cdot 4/64$ correspond à l'échantillon $k = 4$. Comme on peut observer sur la Fig. 16, la DFT n'est pas très représentative du contenu en fréquence du signal initial parce que le choix du pas d'échantillonnage ($N = 64$) coïncide avec les fréquences contenues dans le signal initial.

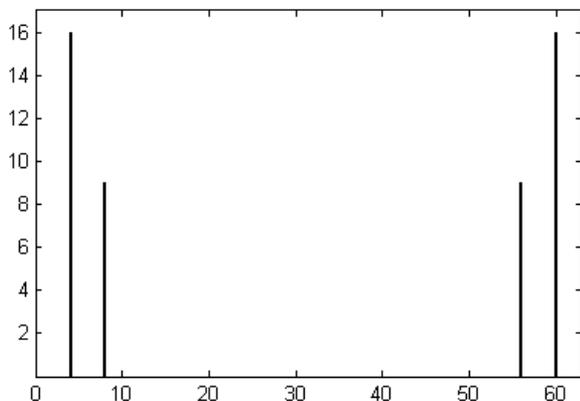


Fig. 16. DFT de $v[n]$ pour $L = N = 64$

Cette représentation est bien différente du spectre continu de la Fig. 17 ci-dessous. Le mauvais choix de longueur de fenêtre a masqué beaucoup d'information que nous aurions obtenu avec un autre choix.

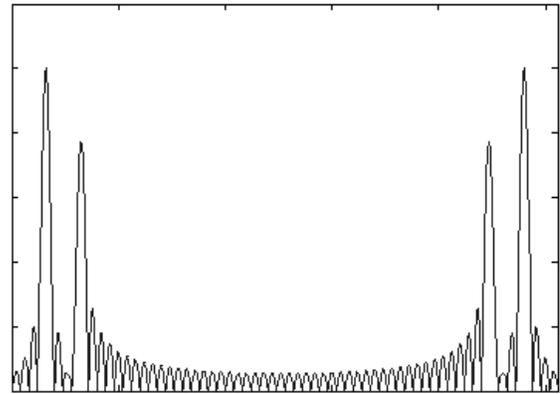


Fig. 17. Amplitude de la DFT ($|V(e^j\omega)|$)

3) *Le Zero-padding*: Cette technique consiste à rajouter une série de zéros à la fin de la série d'échantillons pour augmenter le nombre de points dans le calcul de la DFT, ce qui a pour effet de diminuer l'intervalle d'échantillonnage en fréquence. Mais cette technique n'augmente pas la résolution spectrale des échantillons et deux fréquences très rapprochées ne seront pas plus décelables. Reprenons le cas de la Fig. 16 où $N = 64$, et comparons avec les Figs. 18 et 19 où $N = 128$ et $N = 512$ respectivement.

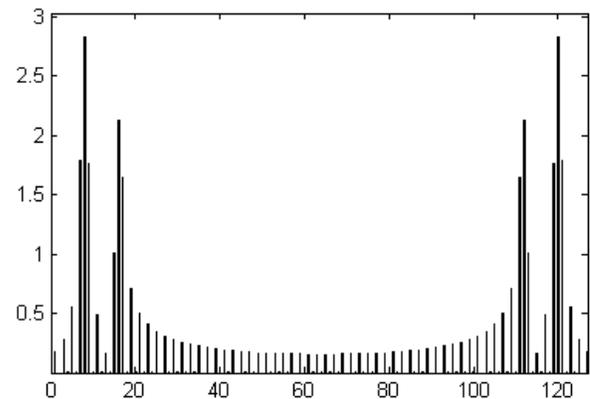


Fig. 18. DFT de $v[n]$ pour $L = 64$ et $N = 128$

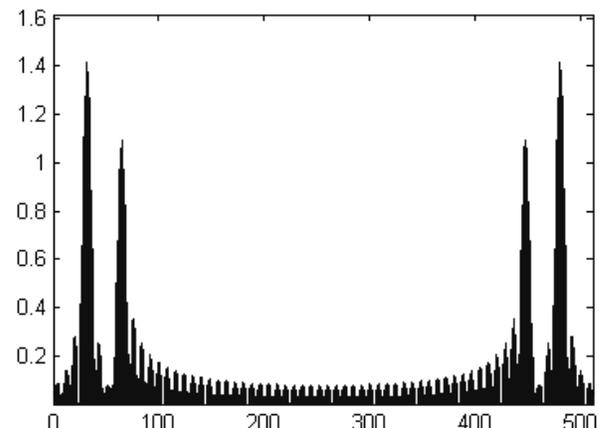


Fig. 19. DFT de $v[n]$ pour $L = 64$ et $N = 512$

⁴Une coupure de pente infinie entraîne un effet d'oscillation

RÉFÉRENCES

- [1] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discret-Time Signal Processing*. Prentice-Hall, 1999.
- [2] A. Papoulis, *Signal Analysis*. McGraw-Hill, 1977.