POLYPUBLIE

Applications des filtres linéaires périodiques en télécommunications

David Legault

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

Date	2005
Type	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis Mémoire de maîtrise/Master's thesis
URL de PolyPublie PolyPublie URL	https://publications.polymtl.ca/7410/
Conditions d'utilisation Terms of use	© Tous droits réservés / All rights reserved
Référence Citation	Legault, D. (2005). Applications des filtres linéaires périodiques en télécommunications [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/7410/

Détails de la thèse
Thesis details

Directeurs de recherche Advisors	Jean Conan
Programme Program	Génie électrique

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal
https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

APPLICATIONS DES FILTRES LINÉAIRES PÉRIODIQUES EN TÉLÉCOMMUNICATIONS

DAVID LEGAULT
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRE EN INGÉNIERIE (M.Ing.)
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
MARS 2005

© David Legault, 2005.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

APPLICATIONS DES FILTRES LINÉAIRES PÉRIODIQUES EN TÉLÉCOMMUNICATIONS

présenté par: LEGAULT David

en vue de l'obtention du diplôme de: Maître en ingénierie

a été présenté au jury d'examen constitué de:

M. CARDINAL Christian, Ph.D., président

M. CONAN Jean, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. MALHAMÉ Roland, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Au moment d'achever la rédaction de ce mémoire, mes premières pensées vont à ma famille qui n'a cessé de m'encourager tout au long de mes études. Je tiens également à remercier mon directeur de recherche, Dr Jean Conan, pour m'avoir conseillé durant toutes les étapes de mon travail. Je lui suis également reconnaissant de l'aide financière qu'il m'a accordée pour ce travail. Je remercie également mon meilleur ami Jean-Charles Daoust qui a toujours cru en mes capacités à relever des défis et en m'accordant son soutien incessant.

Je n'oublierai pas non plus l'ambiance chaleureuse du laboratoire de télécommunications à laquelle ont particulièrement contribué Christian, Aniss, Oualid, Zouheir, Eric et Yagnish.

RÉSUMÉ

Parmi les filtres linéaires qui sont utilisés dans plusieurs domaines, on retrouve une classe de filtres linéaires variant dans le temps. L'objectif de ce mémoire est d'explorer un cas particulier de ces filtres, soit les filtres linéaires périodiques variant dans le temps.

Le travail a été divisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre introduit les notions élémentaires des systèmes variables dans le temps. Il propose une réécriture de la théorie décrivant ces systèmes en utilisant le concept de dualité temps-fréquence.

Quant au second chapitre définit ce qu'est un filtre linéaire périodique variant dans le temps et aborde la théorie et l'étude des caractéristiques de ces filtres. Il permets également de voir que ces filtres peuvent servir à brouiller un signal ou à produire un nouveau type d'étalement spectral à partir d'un signal à bande étroite.

Le troisième chapitre présente la procédure de reconstruction d'un signal soumis à un filtre linéaire périodique. On y montre quelques exemples concrets en plus d'un regard sur les effets du bruit lors de la reconstruction du signal.

Dans le dernier chapitre, on traite d'une nouvelle technique de transmission multi-usagers. Cette méthode est une extension des connaissances acquises dans les chapitres précédents et permets de montrer qu'elle est en fait une généralisation des méthodes à accès multiple par division utilisant un code (CDMA).

ABSTRACT

Amongst linear filtres, which are use in a wide variety of domains, we find a class of time variant filters. The purpose of this thesis is to explore a particular case of these filters which are linear periodical time variant filters.

Our work is presented in four chapters.

The first chapter introduces the elementary notions related to time variant systems (LTV). It presents a re-writing of the relations describing those systems using the notion of time-frequency duality.

The second chapter defines what a linear periodic time varying filter is and presents a study of the characteristics of these filters. It also demonstrates how these filters can be used in two types of applications. The first one being information scrambling and the later, a new type of spectral spreading using a band limited signal.

The third chapter deals with the reconstruction process of a signal submitted to a linear periodic filter. We display some examples including an examination of the effects of noise in the reconstruction process of the signal.

In the last chapter, we present a new multi-user transmission method. This method is an extension of the previously explored topics and enables us to show that it is in fact a generalization of the code division multiple access techniques (CDMA).

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS . . . . . **iv**

RÉSUMÉ . . . . . **v**

ABSTRACT . . . . . **vi**

TABLE DES MATIÈRES . . . . . **vii**

LISTE DES FIGURES . . . . . **x**

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . . **xii**

LISTE DES ANNEXES . . . . . **xiii**

INTRODUCTION **1**

CHAPITRE 1: SYSTÈMES LTV **5**

1.1 Introduction 5

1.2 Dualité temps-fréquence 5

1.3 Fonctions noyaux 7

1.4 Description des systèmes LTV 11

1.5 Synthèse 16

1.6 Conclusion 18

CHAPITRE 2: LES FILTRES LINÉAIRES PÉRIODIQUES . . **19**

2.1 Introduction 19

2.2 Définitions 19

2.2.1 Filtre linéaire 19

2.2.2 Filtre linéaire périodique 21

2.2.3 Filtrage linéaire d'un signal quelconque 23

2.2.4 Densité spectrale à la sortie du filtre 24

2.3 Une classe de filtres linéaires périodiques particuliers 25

2.3.1 Exemple no. 1 26

2.3.2 Exemple no. 2 28
2.3.3 Exemple no. 3 30
2.4 Applications 32
2.4.1 Brouillage de signaux 32
2.4.2 Étalement spectral 33
2.5 Conclusion 36

CHAPITRE 3: RECONSTRUCTION D'UN SIGNAL SOUMIS À UN FILTRE LPTV 37
3.1 Introduction 37
3.2 Signal à bande limitée $[\frac{-f_0}{2}, \frac{f_0}{2}[$ 37
3.2.1 Théorie 37
3.2.2 Exemple d'application 39
3.3 Signal à bande limitée $[-f_0, f_0[$ 40
3.3.1 Théorie 40
3.3.2 Exemple d'application 41
3.4 Signal à bande supérieure à $[-f_0, f_0[$ 42
3.5 Reconstruction en présence de bruit 42
3.5.1 Théorie 42
3.5.2 Exemple 44
3.6 Conclusion 46

CHAPITRE 4: SYSTÈMES MULTI-USAGERS UTILISANT LES FILTRES LPTV 47
4.1 Introduction 47
4.2 Théorie 47
4.3 Transmission multi-usagers de signaux à bande limitée 49
4.3.1 Reconstruction 49
4.3.2 Transmission de deux signaux 50
4.3.3 Filtres LPTV particuliers 52
4.3.4 Exemple 54
4.4 Systèmes multi-usagers classiques et filtres LPTV 56
4.4.1 Les systèmes classiques 56

4.4.2 Les systèmes utilisant les filtres LPTV 57
4.5 Conclusion 57

CONCLUSION **59**

RÉFÉRENCES **62**

LISTE DES FIGURES

1.1 Diagramme montrant les correspondances entre les différentes fonctions noyaux 11
1.2 Modèle physique représentant l'équation (1.21) 12
1.3 Relations entre les deux groupes duaux de descripteurs 17

2.1 Mise en parallèle de deux filtres $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ 20
2.2 Mise en série de deux filtres $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ 20
2.3 Processus de filtrage d'un signal d'entrée z(t) 23
2.4 Schéma du filtrage par un filtre linéaire périodique 24
2.5 Fonction $m(t)$ sinusoïdale avec $\alpha = 1$ et $f_0 = 1Hz$ 27
2.6 Fonctions $\psi_k(f)$ pour *m(t)* sinusoïdale 28
2.7 Fonction $m(t)$ en dent de scie avec $\alpha = 1$ et $f_0 = 1Hz$ 29
2.8 Fonctions $\psi_k(f)$ pour *m(t)* en dents de scie 30
2.9 Fonction $m(t)$ quadratique avec $\alpha = 4$ et $f_0 = 1Hz$ 30
2.10 Fonctions $\psi_k(f)$ pour *m(t)* quadratique 32
2.11 a) Signal NRZ aléatoire initial - b) Signal NRZ brouillé $\alpha = 1$ - c) Signal NRZ brouillé $\alpha = 4$ 33
2.12 Spectre étalé à la sortie 34
2.13 Spectre du signal d'entrée $z(t)$ 35
2.14 Spectre du signal de sortie $x(t)$ 36

3.1 Spectre de $x(t)$ 37
3.2 Reconstruction du signal par filtrage inverse 38
3.3 Reconstruction de $z(t)$ utilisant la bande k=0 39
3.4 Spectre du signal de sortie 40
3.5 Reconstruction de $z(t)$ utilisant les bandes k=0 et k=-1 42
3.6 Émission-Réception à travers un canal à BBG 43
3.7 Reconstruction de $z^{'}(t)$ pour un SNR de 0dB pour $k = -3..3$ 44
3.8 Variance en fonction de SNR pour une reconstruction avec $k = 0$ et $k = -3..3$ 45

4.1 Réalisation d'un signal multi-usager utilisant les filtres LPTV . . . 47
4.2 Représentation fréquentielle de $x(t)$ 49
4.3 Signal somme $x(t)$ 54
4.4 Reconstruction de $z_1(t)$ utilisant les bandes k=0 et k=1 55
4.5 Reconstruction de $z_2(t)$ utilisant les bandes k=0 et k=1 55
4.6 Accès multiple par division temporelle (TDMA) 56
4.7 Accès multiple par division de fréquence (FDMA) 56
4.8 Accès multiple par utilisation de code (CDMA) 57

I.1 Modèle physique représentant l'équation (I.1) 64

II.1 Convolution pour $t < T_1$ 69
II.2 Convolution pour $T_1 \leq t \leq T_1 + T_s$ 69
II.3 Convolution pour $t \geq T_1 + T_s$ 70

III.1 Convolution pour $t < T_1$ ou $t > T + T_s + T_1$ (même cas z(t) à l'opposé) 72
III.2 Convolution pour $T_1 \leq t \leq T_1 + T_s$ 72
III.3 Convolution pour $T_1 + T_s \leq t \leq T_1 + T$ 73
III.4 Convolution pour $T_1 + T_s \leq t \leq T_1 + T$ 74
III.5 Convolution pour $t < T_1$ ou $t > T + T_s + T_1$ (même cas z(t) à l'opposé) 74
III.6 Convolution pour $T_1 \leq t \leq T_1 + T$ 75
III.7 Convolution pour $T_1 + T \leq t \leq T_1 + T_s$ 76
III.8 Convolution pour $T_1 + T \leq t \leq T_1 + T + T_s$ 76

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

LTV	Linear Time Variant
LPTV	Linear Periodic Time Variant
BBG	Bruit Blanc Gaussien
SNR	Signal to Noise Ratio
TDMA	Time-Division Multiplexe Access
FDMA	Frequency-Division Multiplexe Access
CDMA	Code-Division Multiplexe Access
MCCDMA	Multi-Carrier Code-Division Multiplexe Access
GSM	Global System for Mobile Communication
WSS	Wide Sense Stationary
US	Uncorrelated Scattering
WSSUS	Wide Sense Stationary Uncorrelated Scattering
PLL	Phase-Lock Loop

LISTE DES ANNEXES

Annexe I: Démonstration du 2ième groupe dual 64

Annexe II: Exemple no. 1 de convolution variante dans le temps 68

Annexe III: Exemple no. 2 de convolution variante dans le temps 71

III.1 Cas $T \geq T_s$ 71

III.2 Cas $T < T_s$ 74

Annexe IV: Démonstration du filtre en $m(t) = \alpha t^2$ 77

Annexe V: Description du simulateur de filtre LPTV . . . 79

V.1 Description globale du simulateur 79

V.2 Description des fichiers 80

INTRODUCTION

De façon très générale, les équipements de transmission et réception utilisés dans les systèmes de communications peuvent être décomposés en chaînes de blocs de base incluant des éléments tels que filtres, mélangeurs, modulateurs, etc. De plus, la plupart des milieux de transmission peuvent être représentés avec une bonne approximation par un ensemble de filtres d'interconnexion dont le gain varie dans le temps [3]. Dans ce contexte, un rôle important sera dévolu aux éléments linéaires à variation temporelle. L'objectif de ce mémoire est l'étude systématique de tels systèmes et plus particulièrement de ceux qui sont restreints à des variations temporelles périodiques de leurs caractéristiques.

L'étude des systèmes linéaires variant dans le temps (aussi appelés systèmes LTV) peut être considérée comme une branche importante des mathématiques appliquées au domaine des communications et de la commande. Ils font partie de l'une des classes les plus générales de systèmes permettant de modéliser le comportement de processus avec des applications dans les domaines du traitement de signal, de la commande et des communications. Ils sont utilisés, par exemple, dans le domaine acoustique et audio dans le but de créer des effets sonores ou encore pour brouiller le signal de la parole. En traitement de signal, on les utilise comme modèles pour des éléments tels que des modulateurs, multiplexeurs, échantillonneurs, etc.

En télécommunications, on modélise souvent un canal de transmission par un filtre linéaire invariant dans le temps et du bruit additif au canal. Pourtant, il a été noté dans de nombreuses applications que le signal transmis subissait des perturbations laissant croire que le canal agissait plutôt comme un canal variant aléatoirement dans le temps. La première caractérisation d'un canal radiomobile multi-trajets à évanouissements a été proposée au début des années 60 par Turin [1] et par Bello [2] qui en a développé les outils mathématiques de représentation et d'analyse. Ceux-ci regroupent notamment trois modèles, soit les canaux WSS (Wide Sense Stationary), US (Uncorrelated Scattering), et WSSUS qui est une combinaison des deux précédents. Ces modèles ont été par la suite la base de

mesures des canaux multi-trajets à large bande dans les années qui ont suivi leur description [4],[5]. Par exemple, on retrouve ces mêmes caractérisations dans l'étude de la propagation de signaux dans des canaux multi-trajets acoustiques sous-marins [6].

Outre leur intérêt dans la représentation et l'étude de canaux à évanouissements, les filtres à variation temporelle servent dans un nombre grandissant d'applications comme les boucles à verrouillage de phase (PLL) qui incluent un filtre à variation périodique comme le montrent Mosquera, Scalise et Taricco [11]. Ce mémoire tentera de montrer qu'une classe particulière de ces systèmes, les filtres linéaires variant dans le temps de façon périodique (aussi appelés filtres LPTV), peuvent servir de modèles à quelques éléments de base utilisés dans le domaine des télécommunications tels que modulateurs, brouilleurs à large bande, multiplexeurs et autres.

Dans leurs travaux de thèse, Duverdier [9] et Hayar [10] montrent que les filtres LPTV peuvent être utilisés dans deux types d'applications principalement. D'une part, on peut s'en servir pour **brouiller** un signal de communication. D'autre part, il est possible de faire de l'**étalement spectral** à partir de signaux à bande étroite, résultat qui découle directement des caractéristiques intrinsèques des filtres LPTV. Inversement, comme le mentionne Duverdier, il serait aussi possible de faire de la compression de bande en utilisant une méthode d'approximation d'un signal à large bande par un signal à bande étroite soumis à un filtre LPTV.

Organisation du mémoire

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres. Le premier chapitre expose le concept de dualité temps-fréquence introduit par Bello dans les années soixante qui constitue la base de la représentation d'un système linéaire variant dans le temps. Nous montrerons que l'on peut caractériser les filtres linéaires variant dans le temps sous une forme symétrique dans le temps et la fréquence en les associant à des paires duales temps-fréquence d'opérateurs. Ceci nous mènera à la représentation canonique des filtres LTV sous la forme de deux paires de quatre opérateurs distincts

liés par des relations de dualité dont on peut extraire une interprétation physique du processus de filtrage. Les fonctions noyaux associées à ces opérateurs sont reliées par des transformées de Fourier ce qui permet à partir d'un élément de chaque paire d'obtenir tous les autres.

Suivra dans le deuxième chapitre, l'introduction aux filtres linéaires variant dans le temps incluant le cas que nous étudierons plus en profondeur, les filtres linéaires variant dans le temps de façon périodique. Nous considérerons plus spécifiquement la caractérisation de tels filtres par le biais de la fonction de transfert variable dans le temps. Il en résultera que ces filtres peuvent être vus comme étant une somme infinie de filtres invariants dans le temps dont le gain est modulé par un facteur dépendant de la période du filtre. Cette description nous amènera à écrire la fonction de transfert comme une série de Fourier d'où nous déduirons les propriétés spectrales des signaux issus du filtrage par un filtre LPTV. Nous considérerons ensuite quelques exemples de filtres pour démontrer leur potentiel d'application comme brouilleur ou système d'étalement spectral.

Le troisième chapitre s'attaquera au problème de la reconstruction d'un signal filtré à l'aide d'un filtre LPTV. Nous discuterons des façons de restituer le signal original ainsi que de la sensibilité d'une telle reconstruction soumise à un bruit gaussien blanc additif. Nous verrons également comment nous pouvons utiliser les caractéristiques spectrales de ces filtres pour réduire l'influence du bruit sur les signaux et permettre une protection accrue contre les erreurs grâce à l'utilisation de copies multiples du signal lors de la reconstruction. L'application de cette technique de "moyennage" de copies reconstruites du signal conduit à une diminution appréciable de l'influence du bruit dans la reconstruction sans toutefois l'éliminer.

Finalement, en combinant les deux applications vues au chapitre deux, nous verrons qu'il est possible de construire un système multi-usagers utilisant des filtres linéaires périodiques comme clés d'identification de chacun des usagers. Cette méthode permet l'accès multiple à large bande en plus de brouiller chacun des signaux usagers. D'autre part, une certaine diversité existe. Exploitant le fait que la

composition même du signal résultant contient plusieurs “copies” des signaux de chaque utilisateur multiplié par les gains respectifs du filtre, on peut donc extraire indépendamment des autres chacun des signaux originaux du signal reçu. Pour illustrer le principe, un exemple de système à deux usagers est fourni qui montre le fonctionnement d'un tel système de communication. Nous présentons aussi une méthode permettant de simplifier ces systèmes lorsqu'un grand nombre d'usagers est en jeu qui fait appel aux matrices d'Hadamard. Ce dernier modèle général de système peut se voir comme une généralisation des méthodes à accès multiple par multiporteuses utilisant un code d'accès (MCCDMA).

Pour terminer, nous mentionnerons que toutes les simulations de ce projet ont été réalisées avec le logiciel Matlab© au laboratoire de télécommunications avancées de l'École Polytechnique.

CHAPITRE 1

SYSTÈMES LTV

1.1 Introduction

La caractérisation des filtres linéaires variant dans le temps comme[1] systèmes linéaires a d'abord été considéré au début des années cinquante par Zadeh [7]. Kailath [8] a par la suite repris ce concept pour y ajouter quelques développements supplémentaires. Il a fallu attendre le début des années soixante pour que Bello [2],[3] y apporte une contribution finale en utilisant le concept de dualité temps-fréquence. Cet outil lui a permis d'écrire toutes les relations entrée-sortie qui caractérisent les filtres LTV d'une façon symétrique et très synthétique.

Le présent chapitre débute par une présentation du concept de dualité temps-fréquence. Ensuite, la description des systèmes LTV mènera à une représentation des relations entrée-sortie au moyen de quatre relations de base faisant intervenir des "fonctions noyaux". À partir de ces relations, nous effectuerons une analyse utilisant à la fois la dualité et la transformation de Fourier et qui nous conduira à représenter les systèmes LTV au moyen de huit relations équivalentes dont l'interprétation physique mène à des concepts pratiques intéressants.

1.2 Dualité temps-fréquence

Le concept de dualité permet d'identifier le fait que des relations apparemment distinctes sont en fait une même représentation d'un certain phénomène physique lorsque l'on interchange les variables qui les relient. Dans le jargon des ingénieurs de génie électrique, il est clair que le "temps" et la "fréquence" sont des variables complémentaires. Toutes deux sont étroitement reliées par la transformation de Fourier. Le concept de dualité "Temps-Fréquence" est connu depuis longtemps, cependant il reste souvent nébuleux dans sa définition exacte. Nous al-

[1] désignés dans la suite de ce travail sous le vocable LTV

lons expliciter ce concept pour lever toute ambiguïté et l'utiliser comme outil dans la représentation des systèmes que nous voulons étudier.

Avant de débuter, il est important d'introduire les notions qui vont servir dans la définition du concept de dualité. Tout d'abord, le système complet sera assimilé à une boîte noire avec des entrées-sorties analogiques comme un "réseau". Le temps et la fréquence joueront le rôle de variables descriptives de la variation dynamique du réseau. Finalement, la boîte noire qui transforme les entrées en sorties décrivant le réseau sera décrite par un "opérateur"[2] que nous supposerons linéaire.

Notre description de la dualité se fera à partir des trois premiers postulats émis par Bello qui définissent des descriptions duales des variables et opérateurs.

Premier postulat: les variables duales sont les variables descriptives temps-fréquence $t - \nu$ et $\tau - f$ respectivement.

Deuxième postulat: la fonction temporelle et la fonction fréquentielle associée à une entrée (sortie) d'un opérateur dans un réseau constituent des fonctions duales.

Du point de vue de la dualité, les fonctions temporelles et fréquentielles utilisées en communications jouent un rôle analogue aux tensions et courants dans les circuits électriques. Les signaux à l'entrée et à la sortie peuvent être exprimés dans le temps ou la fréquence, c'est-à-dire, par des fonctions duales exprimées en fonction des variables duales. Comme on peut représenter les entrées et sorties de deux façons distinctes, un système contenant M entrées et N sorties pourra être décrit à l'aide de 2^{M+N} opérateurs distincts (quatre opérateurs dans le cas d'un réseau possédant une entrée et une sortie). Ces opérateurs peuvent être regroupés en paires duales en utilisant le postulat suivant.

Troisième postulat: deux opérateurs associés au traitement d'un système sont

[2] le case multi-varié n'est qu'une généralisation immédiate où les opérateurs descriptifs sont des matrices

duaux s'ils expriment une relation entre des fonctions duales de représentation des entrée-sortie.

Soient, $z(t)$ et $Z(f)$, les fonctions temporelle et fréquentielle d'entrée et le couple $x(t)$, $X(f)$ les fonctions temporelle et fréquentielle de sortie. De façon générale, les quatre opérateurs d'un système à une entrée et une sortie sont décrits par les équations [3] :

$$\begin{array}{ll} x(t) = O_{t,t}[z(t)] & X(f) = O_{f,f}[Z(f)] \\ x(t) = O_{t,f}[Z(f)] & X(f) = O_{f,t}[z(t)] \end{array} \tag{1.1}$$

où on identifie $O_{t,t}$, $O_{f,f}$ et $O_{t,f}$, $O_{f,t}$ comme étant des paires duales d'opérateurs à partir du troisième postulat.

1.3 Fonctions noyaux

La définition de dualité énoncée ci-dessus nous permet donc de représenter des systèmes équivalents dans le temps ou la fréquence. Nous allons maintenant expliciter les relations de (1.1) en équations qui nous permettront de définir ce que sont les quatre opérateurs linéaires $O_{x,x}[\,\cdot\,]$ pour un système à une entrée et une sortie. Nous utiliserons la convention voulant que la transformée de Fourier et son inverse sont exprimées comme par $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}[\,\cdot\,]$ et $F^{-1}_{\beta,\alpha}[\,\cdot\,]$[3]. Les couples de fonctions, $z(t)$, $Z(f)$ et $x(t)$, $X(f)$ dénotant l'entrée et la sortie en temps et fréquence respectivement seront donc telles que :

$$\begin{aligned} z(t) &= \int Z(f) e^{j2\pi ft} df \\ x(t) &= \int X(f) e^{j2\pi ft} df \end{aligned} \tag{1.2}$$

Le point de départ de notre analyse est la propriété de linéarité qui spécifie que si :

---

[3] $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}[\,f(\alpha)\,] \triangleq \int f(\alpha) e^{-j2\pi\alpha\beta} d\alpha$ et $F^{-1}_{\beta,\alpha}[\,F(\beta)\,] \triangleq \int F(\beta) e^{j2\pi\alpha\beta} d\beta$

$$z(t) = \alpha_1 z_1(t) + \alpha_2 z_2(t) \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \Re \tag{1.3}$$

alors :

$$x(t) = F\big[z(t)\big] = \alpha_1 F\big[z_1(t)\big] + \alpha_2 F\big[z_2(t)\big] \qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \Re \tag{1.4}$$

On peut représenter l'entrée comme l'intégrale de convolution :

$$z(t) = \int z(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{1.5}$$

Ce qui implique que :

$$x(t) = F\Big[\int z(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\Big] = \int z(\tau)F\big[\delta(t-\tau)\big]d\tau \tag{1.6}$$

que l'on peut écrire par :

$$x(t) = \int z(\tau)R_{1,1}(t,\tau)d\tau \tag{1.7}$$

en définissant $R_{1,1}(t,\tau) = F\big[\delta(t-\tau)\big]$ comme la réponse à l'instant t d'une impulsion se produisant à l'instant τ. En effectuant une transformée de Fourier des deux membres de (1.7) nous obtenons que :

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \iint z(\tau)R_{1,1}(t,\tau)e^{-j2\pi\nu t}dtd\tau \\ &= \int z(\tau)\left[\int R_{1,1}(t,\tau)e^{-j2\pi\nu t}dt\right]d\tau \end{aligned} \tag{1.8}$$

On voit donc que si nous définissons la fonction $R_{2,1}(\nu,\tau)$ par la relation :

$$R_{2,1}(\nu,\tau) = \mathcal{F}_{t,\nu}[R_{1,1}(t,\tau)] \tag{1.9}$$

cette fonction est telle que :

$$X(\nu) = \int z(\tau)R_{2,1}(\nu,\tau)d\tau \tag{1.10}$$

et est donc la représentation sous forme intégrale de l'opérateur $O_{t,f}[\,\cdot\,]$. En remplaçant la valeur de $x(\tau)$ par (1.2) dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \iint Z(f) e^{j2\pi f\tau} R_{2,1}(\nu,\tau) df\, d\tau \\ &= \int Z(f) \left[\int R_{2,1}(\nu,\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau \right] df \end{aligned} \tag{1.11}$$

En définissant la fonction $R_{2,2}(\nu, f)$:

$$R_{2,2}(\nu, f) = F^{-1}_{\tau,f}[R_{2,1}(\nu,\tau)] \tag{1.12}$$

La relation (1.11) peut donc s'écrire comme :

$$X(\nu) = \int Z(f) R_{2,2}(\nu, f) df \tag{1.13}$$

et donc on identifie $R_{2,2}(\nu, f)$ avec le noyau de l'opérateur $O_{f,f}[\,\cdot\,]$. Si maintenant nous effectuons une transformée inverse de Fourier sur les deux membres de (1.13), on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= \iint Z(f) R_{2,2}(\nu, f) e^{j2\pi\nu t} d\nu df \\ &= \int Z(f) \left[\int R_{2,2}(\nu, f) e^{j2\pi\nu t} d\nu \right] df \end{aligned} \tag{1.14}$$

La fonction $R_{1,2}(t, f)$ définie par :

$$R_{1,2}(t, f) = F^{-1}_{\nu,t}[R_{2,2}(\nu, t)] \tag{1.15}$$

permets d'écrire (1.14) sous la forme :

$$x(t) = \int Z(f) R_{1,2}(t, f) df \tag{1.16}$$

c'est-à-dire que $R_{1,2}(t, f)$ est le noyau de l'opérateur $O_{t,f}[\,\cdot\,]$. Finalement, on

peut compléter la chaîne des noyaux en remplaçant dans l'équation ci-dessus la valeur de $X(f)$ par l'inverse de la relation (1.2) :

$$\begin{aligned} x(t) &= \iint z(t)e^{-j2\pi f\tau}R_{1,2}(t,f)d\tau df \\ &= \int z(t)\left[\int R_{1,2}(t,f)e^{-j2\pi f\tau}df\right]d\tau \end{aligned} \tag{1.17}$$

Évidemment, la fonction $R_{1,2}(t,f)$ est telle qu'en comparant (1.17) et (1.7) :

$$R_{1,1}(t,\tau) = \mathcal{F}_{f,\tau}[R_{1,2}(t,f)] \tag{1.18}$$

On retrouve la relation (1.7) qui est notre équation de départ. En conclusion, on peut donc représenter les opérateurs de (1.1) par le groupe d'équations intégrales suivant :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int z(\tau)R_{1,1}(t,\tau)d\tau, \quad X(\nu) = \int Z(f)R_{2,2}(\nu,f)df \\ X(\nu) &= \int z(\tau)R_{2,1}(\nu,\tau)d\tau, \quad x(t) = \int Z(f)R_{1,2}(t,f)df \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ces équations intégrales définissent les "fonctions noyaux" associées aux opérateurs de représentation du système. Ces fonctions ne sont pas indépendantes puisqu'elles sont reliées par le diagramme de correspondance commutatif illustré par la figure 1.1.

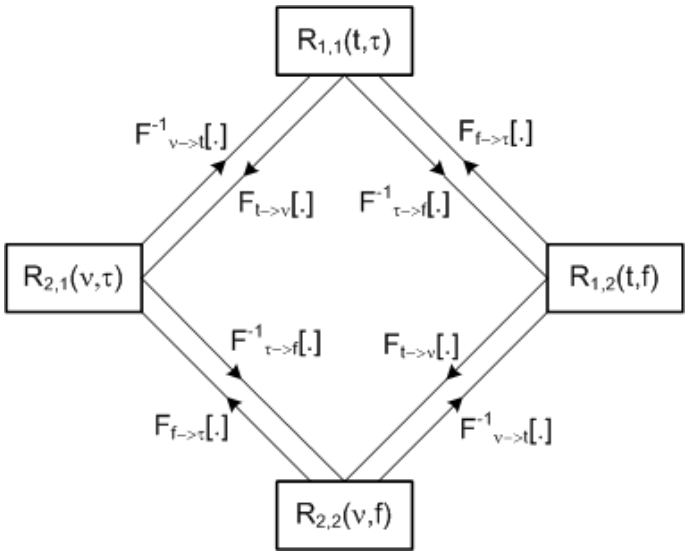


Figure 1.1: Diagramme montrant les correspondances entre les différentes fonctions noyaux

Les transformations qui relient les fonctions noyaux sont des transformées de Fourier qui ne respectent pas la dualité temps-fréquence (puisque (1.18) et (1.12) ne devraient pas être des transformées inverses de Fourier). La section qui suit considère deux ensembles de nouvelles équations permettant d'éliminer cette difficulté.

1.4 Description des systèmes LTV

Considérons la relation contenant la fonction noyaux $R_{1,1}(t,\tau)$ de (1.19) et effectuons la transformation suivante :

$$h(t,\tau) \triangleq R_{1,1}(t,t-\tau) \tag{1.20}$$

Ce qui résulte en l'expression :

$$x(t) = \int z(t-\tau)h(t,\tau)d\tau \tag{1.21}$$

La relation (1.20) implique que $h(t,\tau)$[4] est la réponse du système à l'instant t lorsqu'on lui applique une impulsion à l'instant $t-\tau$. C'est l'équation classique de la convolution temporelle généralisée aux systèmes variant dans le temps. L'opération représentée par (1.21) peut être réalisée physiquement par le registre à décalage différentiel de la figure 1.2 où l'entrée est retardée par une ligne de retard infinitésimale puis multipliée par un gain $h(t,\tau)d\tau$ avant d'être sommé à la sortie. On désigne usuellement $h(t,\tau)$ sous le vocable de noyau temps-temps à entrée retardée.

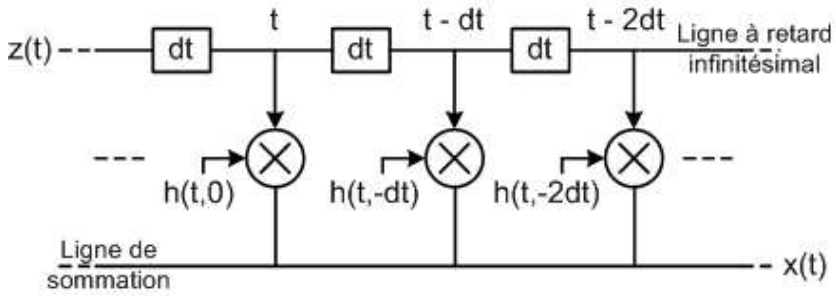


Figure 1.2: Modèle physique représentant l'équation (1.21)

En substituant la valeur (1.2) de $z(t)$ dans (1.21) nous obtenons :

$$\begin{aligned} x(t) &= \iint Z(f)e^{j2\pi f(t-\tau)}h(t,\tau)d\tau df \\ &= \int Z(f)e^{j2\pi ft}\left[\int h(t,\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\right]df \\ &= \int Z(f)T(t,f)e^{j2\pi ft}df \end{aligned} \tag{1.22}$$

Nous voyons apparaître une nouvelle fonction *T(t,f)* qui est la fonction de transfert à variation temporelle définie par :

[4]Dans le cas où le système est invariant dans le temps, $h(t,\tau)$ est indépendant de t. On définit alors la réponse impulsionnelle (percussionnelle) du système comme sa réponse à l'instant τ lorsqu'on lui applique une impulsion à l'instant 0. (c'est-à-dire $h(\tau) \triangleq h(\tau,\tau)$).

$$T(t,f) \triangleq \mathcal{F}_{\tau,f}\big[h(t,\tau)\big] \tag{1.23}$$

L'équation (1.22) généralise au cas variant dans le temps l'opération de filtrage classique liée à la fonction de transfert. Cette équation de base sera utilisée extensivement dans les chapitres qui suivent. En appliquant une transformée de Fourier aux deux membres de (1.22), nous obtenons :

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \iint Z(f)T(t,f)e^{j2\pi ft}df e^{-j2\pi\nu t}dt \\ &= \int Z(f)\left[\int T(t,f)e^{-j2\pi(\nu-f)t}dt\right]df \\ &= \int Z(f)H(\nu-f,f)df \end{aligned} \tag{1.24}$$

ce qui définit une nouvelle fonction $H(\nu,f)$ par la relation :

$$H(\nu,f) \triangleq \mathcal{F}_{t,\nu}\big[T(t,f)\big] \tag{1.25}$$

On peut résumer les résultats précédents en écrivant que la fonction $H(\nu,f)$ est la double transformée de Fourier suivante :

$$H(\nu,f) \triangleq \mathcal{F}_{t,\nu}\big[\mathcal{F}_{\tau,f}\big[h(t,\tau)\big]\big] \tag{1.26}$$

Échangeant l'ordre des transformées de Fourier de la relation précédente, nous pouvons introduire la fonction $t(\nu,\tau)$ définie comme :

$$t(\nu,\tau) \triangleq \mathcal{F}_{t,\nu}\big[h(t,\tau)\big] \tag{1.27}$$

Partant de (1.21) en remplaçant la valeur (1.27) de $h(t,\tau)$ nous obtenons l'expression suivante reliant $x(t)$ et $z(t)$:

$$x(t) = \iint z(t-\tau)t(\nu,\tau)e^{j2\pi\nu t}d\nu d\tau \tag{1.28}$$

Cette dernière relation suggère que $t(\nu,\tau)$ peut s'interpréter comme une fonction de dispersion temps-fréquence où ν représente un décalage Doppler. Pour terminer la boucle suggérée par les équations (1.26) et (1.27), considérons la transformée de Fourier de (1.28) :

$$\begin{aligned} X(f) &= \iiint z(t-\tau)t(\nu,\tau)e^{j2\pi\nu t}e^{-j2\pi ft}dtd\nu d\tau \\ &= \iiint z(t-\tau)t(\nu,\tau)e^{-j2\pi(f-\nu)t}dtd\nu d\tau \end{aligned} \tag{1.29}$$

On effectue le changement de variable $t \rightarrow u$ défini par l'équation $t-\tau = u$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} X(f) &= \iiint z(u)t(\nu,\tau)e^{-j2\pi(f-\nu)(u+\tau)}dud\nu d\tau \\ &= \int \Big[\int z(u)e^{j2\pi(f-\nu)u}du\Big]\Big[\int t(\nu,\tau)e^{-j2\pi(f-\nu)\tau}d\tau\Big]d\nu \\ &= \int Z(f-\nu)\Big[\int t(\nu,\tau)e^{-j2\pi(f-\nu)\tau}d\tau\Big]d\nu \end{aligned} \tag{1.30}$$

Introduisant la transformée de Fourier de $t(\nu,\tau)$ par rapport à τ :

$$\mathcal{F}_{\tau,f}\big[t(\nu,\tau)\big] \triangleq H^{'}(\nu,f) \tag{1.31}$$

cette dernière relation peut s'écrire :

$$X(f) = \int Z(f-\nu)H^{'}(\nu,f-\nu)d\nu \tag{1.32}$$

où en échangeant les rôles de f et ν :

$$X(\nu) = \int Z(\nu-f)H^{'}(f,\nu-f)df \tag{1.33}$$

Finalement, en posant $\nu - f = f^{'}$, cette dernière équation s'écrit :

$$X(\nu) = \int Z(f^{'})H^{'}(\nu - f^{'}, f^{'})df^{'} \tag{1.34}$$

ce qui implique en comparant (1.24) et (1.34) l'identité entre $H^{'}(\nu, f)$ et $H(\nu, f)$ et donc que :

$$H(\nu, f) \triangleq \mathcal{F}_{\tau,f}\big[t(\nu, \tau)\big] \tag{1.35}$$

À partir de la propriété de dualité temps-fréquence, nous pouvons établir immédiatement un ensemble de relations duales de (1.21), (1.22), (1.24) et (1.28) en exploitant le résultat suivant.

Lemme: Soient $O[\cdot]$ et $O^{'}[\cdot]$ deux opérateurs duaux associés à un certain système LTV. Toute relation entrée-sortie se rapportant à l'opérateur $O[\cdot]$ donne lieu à une relation duale par rapport à $O^{'}[\cdot]$ qui s'obtient simplement en échangeant les fonctions et les variables duales et en changeant j en $-j$.

Preuve: De façon générale, nous pouvons exprimer l'un des deux opérateurs, disons $O^{'}[\cdot]$:

$$O^{'}[\cdot] = \mathcal{F}_1\big[\mathcal{F}_2\big[O[\cdot]\big]\big] \tag{1.36}$$

où $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ désignent des transformées de Fourier directes ou inverses. Il s'ensuit que l'on peut aussi écrire :

$$O[\cdot] = \mathcal{F}_2^{-1}\big[\mathcal{F}_1^{-1}\big[O^{'}[\cdot]\big]\big] \tag{1.37}$$

et donc le dual s'exprime au moyen de transformées "inverses" des transformées $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ (c'est-à-dire échange de j en $-j$ et échange de variables duales). Il résulte de ceci que toute relation impliquant l'opérateur $O[\cdot]$ donne lieu à une relations duale où j est changé en $-j$.

L'application de ce résultat permet d'écrire instantanément :

$$X(\nu) = \int Z(\nu - f)G(\nu, f)df \tag{1.38}$$

$$X(\nu) = \int z(\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}M(\nu, \tau)d\tau \tag{1.39}$$

$$x(t) = \int z(\tau)g(t - \tau, \tau)d\tau \tag{1.40}$$

$$X(\nu) = \iint Z(\nu - f)m(t, f)e^{-j2\pi\nu t}dtdf \tag{1.41}$$

Ceci nous permet de définir un jeu de quatre nouveaux descripteurs duaux des précédents. Les relations de dualité permettent de vérifier que $g(t, \tau)$, $M(\nu, \tau)$, $m(t, f)$ et $G(\nu, f)$ sont aussi reliées entres elles par des transformées de Fourier. Ce fait est illustré par le diagramme de droite de la figure 1.3. Une preuve directe calquée sur celle qui a été utilisée dans le cadre des quatre fonctions $h(t, \tau)$, $t(\nu, \tau)$, $T(t, f)$ et $H(\nu, f)$ est rapportée en annexe I.

1.5 Synthèse

D'une part, l'ensemble de toutes les relations décrivant un filtre LTV général sont regroupées ci-dessous par paires duales.

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int z(t - \tau)h(t, \tau)d\tau & X(\nu) &= \int Z(\nu - f)G(\nu, f)df \\
x(t) &= \int Z(f)T(t, f)e^{j2\pi ft}df & X(\nu) &= \int z(\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}M(\nu, \tau)d\tau \\
X(\nu) &= \int Z(f)H(\nu - f, f)df & x(t) &= \int z(\tau)g(t - \tau, \tau)d\tau \\
x(t) &= \iint z(t - \tau)t(\nu, \tau)e^{j2\pi\nu t}d\nu d\tau & X(\nu) &= \iint Z(\nu - f)m(t, f)e^{-j2\pi\nu t}dtdf
\end{aligned}$$

D'autre part, toutes les relations entre les deux groupes de descripteurs s'obtiennent à partir des deux paires de diagrammes commutatifs représentés sur la figure 1.3. Les descripteurs duaux s'obtiennent par symétrie miroir.

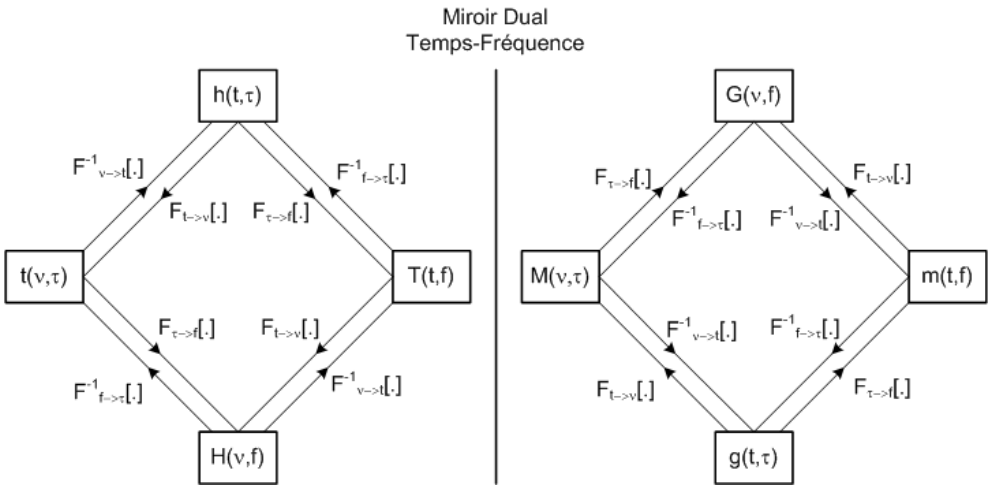


Figure 1.3: Relations entre les deux groupes duaux de descripteurs

Finalement, le lien qui existe entre les fonctions noyaux $R_{1,1}$, $R_{1,2}$, $R_{2,1}$ et $R_{2,2}$ et les différents descripteurs introduits précédemment est illustré par l'ensemble des équivalences rapporté ci-dessous.

$$
\begin{aligned}
R_{1,1}(t,\tau) &= h(\tau, t-\tau) = g(t-\tau,\tau) \\
R_{1,2}(t,f) &= T(t,f)e^{j2\pi ft} \\
R_{2,1}(\nu,\tau) &= M(\nu,\tau)e^{-j2\pi\nu\tau} \\
R_{2,2}(\nu,f) &= H(\nu-f,\nu) = G(\nu,\nu-f)
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

1.6 Conclusion

Le concept de dualité temps-fréquence constitue un moyen d'exprimer le comportement d'un système en échangeant les variables temporelles et fréquentielles qui le décrivent. Cette approche nous a permis de définir deux groupes distincts formés de quatre descripteurs associés à tout système linéaire variant dans le temps. D'une part, à l'intérieur de chaque groupe le passage des variables temporelles aux variables fréquentielles se fait par des transformées de Fourier ordinaires. D'autre part, des relations de dualité s'appliquent entre les deux groupes.

Les chapitres qui suivent considèrent des applications de ces concepts dans le cadre de filtres dont les caractéristiques temporelles varient de façon périodique.

CHAPITRE 2

LES FILTRES LINÉAIRES PÉRIODIQUES

2.1 Introduction

Après avoir décrit les filtres LTV, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas des filtres linéaires variant dans le temps de façon périodique. Nous analyserons ensuite l'opération de filtrage à l'aide de ce genre de filtre et nous en déduirons la composition finale du spectre de sortie. Finalement, quelques exemples de filtres seront présentés.

2.2 Définitions

2.2.1 Filtre linéaire

Les filtres linéaires sont souvent utilisés pour moduler ou modéliser un signal. Conformément au développement du chapitre précédent, un filtre linéaire $\tilde{h}$ variant par rapport au temps peut être défini par sa fonction de transfert $H(t, f)$, où f est la fréquence et t le temps. Si $H(t, f)$ admet une transformée de Fourier inverse $h(t, \tau)$ par rapport à f, elle est définie par :

$$h(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t, f) e^{j2\pi f \tau} df \tag{2.1}$$

Inversement, on a aussi la relation :

$$H(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \tag{2.2}$$

On dit alors que $h(t, \tau)$ est la réponse impulsionnelle du filtre $\tilde{h}$.

2.2.1.1 Mise en parallèle de filtres linéaires

Soient deux filtres linéaires $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ définis respectivement par leurs fonctions de transfert $G(t, f)$ et $H(t, f)$. Soit le filtre linéaire $\tilde{q}$ de fonction de transfert $Q(t, f)$

qui représente la mise en parallèle de $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ comme illustré à la figure 2.1 et ayant comme définition :

$$Q(t,f) = G(t,f) + H(t,f) \tag{2.3}$$

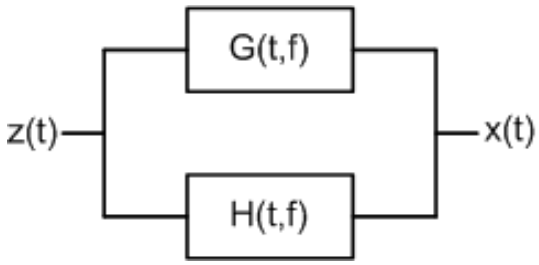


Figure 2.1: Mise en parallèle de deux filtres $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$

On notera que cette somme est commutative. De plus, si $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ admettent tous deux une réponse impulsionnelle, notées $g(t,\tau)$ et $h(t,\tau)$, alors $\tilde{q}$ aura comme réponse impulsionnelle $q(t,\tau)$ donnée d'après (2.1) et (2.3) :

$$q(t,\tau) = g(t,\tau) + h(t,\tau) \tag{2.4}$$

2.2.1.2 Mise en série de filtres linéaires

Soient deux filtres linéaires $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ définis respectivement par leurs fonctions de transfert $G(t,f)$ et $H(t,f)$. Soit le filtre linéaire $\tilde{q}$ de fonction de transfert $Q(t,f)$ qui représente la mise en série de $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ comme illustré à la figure 2.2 et ayant comme définition :

$$Q(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(t,f')H(t',f)e^{j2\pi(f'-f)(t-t')}dt'df' \tag{2.5}$$

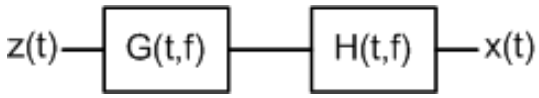


Figure 2.2: Mise en série de deux filtres $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$

En général, cette mise en cascade n'est pas commutative. Dans le cas où nous avons invariance dans le temps, $Q(f)$ s'écrira :

$$Q(f) = G(f)H(f) \tag{2.6}$$

Si $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ admettent tous deux une réponse impulsionnelle, notées $g(t,\tau)$ et $h(t,\tau)$, alors $\tilde{q}$ aura comme réponse impulsionnelle $q(t,\tau)$ donnée d'après (2.1) et (2.5) :

$$\begin{aligned} q(t,\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(t,f')H(u,f)e^{j2\pi(f'-f)(t-u)} du df' \Big] e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} g(t,t-u)H(u,f)e^{j2\pi f(\tau-(t-u))} df \Big] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t,t-u)h(u,\tau-(t-u))du \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2.2 Filtre linéaire périodique

Le filtre linéaire variant dans le temps [1] $\tilde{h}$ est dit périodique lorsque sa réponse fréquentielle $H(t,f)$ est périodique en t de période $T_0 = 1/f_0$. On a alors :

$$H(t+T_0,f) = H(t,f) \tag{2.8}$$

De l'équation (2.1), on en déduit que si le filtre $\tilde{h}$ possède une réponse impulsionnelle $h(t,\tau)$, celle-ci est également périodique :

[1] Dans la suite nous utiliserons le sigle LPTV (Linear Periodic Time Varying) pour décrire les filtres à variation pédiodique

$$\begin{aligned} h(t+T_0,\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t+T_0,f)e^{j2\pi f\tau}df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t,f)e^{j2\pi f\tau}df \\ &= h(t,\tau) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Comme la réponse fréquentielle de $\tilde{h}$ est périodique, nous pouvons donc exprimer celle-ci à l'aide d'une série de Fourier :

$$H(t,f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_k(f)e^{jk2\pi f_0 t} \tag{2.10}$$

où les valeurs $\{\psi_k(f)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont les coefficients du développement en série de Fourier de $H(t,f)$ par rapport à t dont l'expression est :

$$\psi_k(f) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} H(t,f)e^{-jk2\pi f_0 t}dt \tag{2.11}$$

Si la réponse impulsionnelle du filtre existe, alors on peut la représenter comme un développement en série de Fourier comme suit :

$$h(t,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k(\tau)e^{jk2\pi f_0 t} \tag{2.12}$$

où les valeurs $p_k(\tau)$ sont obtenus à partir de la transformée de Fourier inverse des coefficients $\psi_k(f)$:

$$p_k(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(f)e^{j2\pi f\tau}df \tag{2.13}$$

2.2.3 Filtrage linéaire d'un signal quelconque

La Figure 2.3 nous montre comment l'opération de filtrage sur un signal d'entrée $z(t)$ du filtre linéaire $\tilde{h}$ est réalisée.

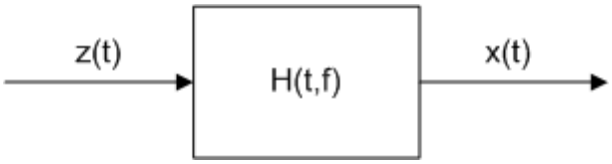


Figure 2.3: Processus de filtrage d'un signal d'entrée z(t)

De (1.22) on déduit que le signal de sortie $x(t)$ résultant de l'opération peut s'écrire comme :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t,f)Z(f)e^{j2\pi ft}df \tag{2.14}$$

Si $\tilde{h}$ admet également une réponse impulsionnelle, on a aussi :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\tau)z(t-\tau)d\tau \tag{2.15}$$

Lorsque le filtre linéaire $\tilde{h}$ est périodique et que sa réponse fréquentielle $H(t,f)$ admet un développement en série de Fourier donné par l'équation (2.10), l'équation (2.14) devient :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk2\pi f_0 t}A_k(t) \tag{2.16}$$

où les $\{A_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont définis par :

$$A_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft}\psi_k(f)Z(f)df \tag{2.17}$$

Si la réponse impulsionnelle du filtre $\tilde{h}$ existe et qu'elle admet un développement en série de Fourier donné en (2.12), on peut donc écrire (2.15) comme :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} p_k(\tau) z(t-\tau) d\tau \tag{2.18}$$

Il s'ensuit que les coefficients $\{A_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ définis par (2.17) peuvent aussi s'écrire :

$$A_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_k(\tau) z(t-\tau) d\tau \tag{2.19}$$

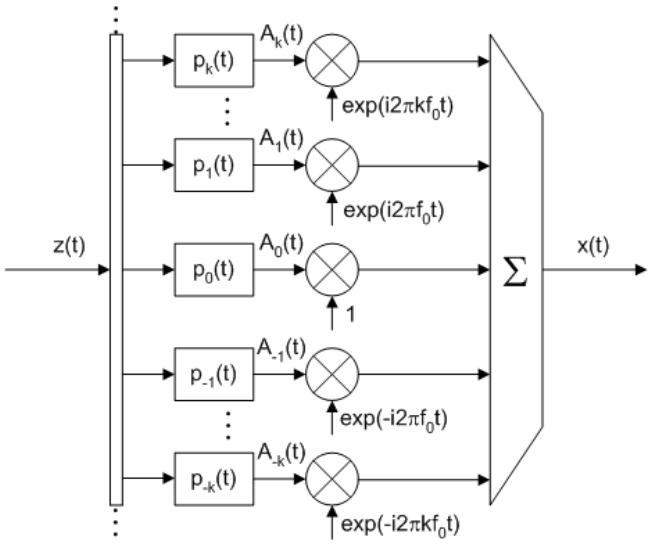


Figure 2.4: Schéma du filtrage par un filtre linéaire périodique

La figure 2.4 illustre le fait que l'opération de filtrage peut être décomposée en un nombre infini dénombrable de filtres invariant dans le temps, modulés par un multiple de la fréquence fondamentale f_0 du filtre et opérant en parallèle.

2.2.4 Densité spectrale à la sortie du filtre

Pour pouvoir analyser les effets du filtre, il est essentiel de connaître le spectre du signal qui en sort. D'après (2.16) nous avons que le signal à la sortie du filtre peut être exprimé comme :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk2\pi f_0 t} A_k(t) \tag{2.20}$$

En effectuant une transformée de Fourier en t de chacun des côtés de (2.20), nous obtenons que :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k(f - kf_0) \tag{2.21}$$

De (2.17) nous savons que les coefficients $A_k(f)$ s'écrivent comme :

$$A_k(f) = \psi_k(f)Z(f) \tag{2.22}$$

La relation (2.21) devient donc :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_k(f - kf_0)Z(f - kf_0) \tag{2.23}$$

En utilisant la formule de Parseval [13] qui stipule que la densité spectrale d'énergie peut être obtenue comme :

$$S_X(f) = \left|X(f)\right|^2 \tag{2.24}$$

Nous obtenons l'expression finale du spectre observé à la sortie d'un système LPTV qui s'écrit :

$$S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\psi_k(f - kf_0)\right|^2 S_Z(f - kf_0) \tag{2.25}$$

2.3 Une classe de filtres linéaires périodiques particuliers

Considérons l'ensemble des filtres linéaires dont la réponse fréquentielle $H(t, f)$ est telle que :

$$H(t, f) = e^{j2\pi f m(t)} g(t) \tag{2.26}$$

Pour respecter les conditions de périodicité de l'équation (2.8), ceci implique

nécessairement que les fonctions $m(t)$ et $g(t)$ doivent être périodiques de période T_0.

Si on applique une entrée $z(t)$ à ce filtre, le signal $x(t)$ observé à la sortie est donné par l'équation (1.22) de sorte que :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(f) e^{j2\pi f(t+m(t))} g(t) df \tag{2.27}$$

Cette dernière équation peut s'interpréter plus simplement sous la forme :

$$x(t) = z[t + m(t)]\, g(t) \tag{2.28}$$

et montre que le signal de sortie $x(t)$ est une copie décalée dans le temps de la fonction d'entrée $z(t)$ dont l'amplitude est de plus modulée par la fonction $g(t)$. Dans la suite de ce paragraphe, nous considérons trois exemples de filtres LPTV illustratifs.

2.3.1 Exemple no. 1

Soient les fonctions $m(t)$ et $g(t)$ périodiques sur T_0 définies comme :

$$\begin{aligned} m(t) &= \alpha sin(2\pi f_0 t) \\ g(t) &= 1 \end{aligned} \tag{2.29}$$

où la fonction $m(t)$ est présentée à la figure 2.5.

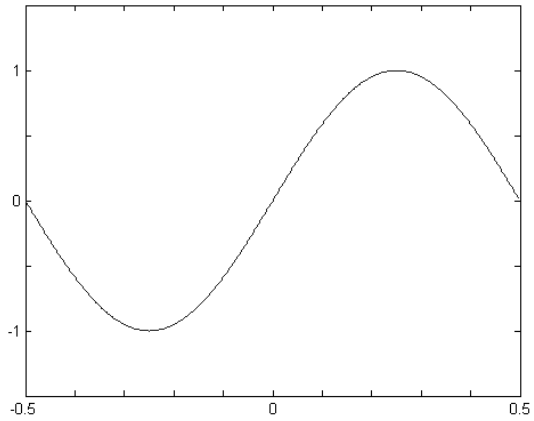


Figure 2.5: Fonction $m(t)$ sinusoïdale avec $\alpha = 1$ et $f_0 = 1Hz$

Les fonctions $\psi_k(f)$ définies par (2.11), correspondant au développement en série de Fourier de $H(t, f)$, sont alors :

$$\psi_k(f) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi f m(t) - jk2\pi f_0 t} dt \tag{2.30}$$

$m(t)$ étant une fonction impaire, les coefficients $\psi_k(f)$ sont donc réels et deviennent :

$$\psi_k(f) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} cos(-2\pi f \alpha sin(2\pi f_0 t) + k2\pi f_0 t) dt \tag{2.31}$$

La fonction cosinus étant paire, l'équation (2.31) s'écrit alors comme :

$$\psi_k(f) = \frac{2}{T_0} \int_{0}^{T_0/2} cos(-2\pi f \alpha sin(2\pi f_0 t) + k2\pi f_0 t) dt \tag{2.32}$$

D'après [15] [16] les fonctions de Bessel du premier ordre peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$J_k(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} cos(-\omega sin(z) + kz) dz \tag{2.33}$$

Nous avons donc que les fonctions $\psi_k(f)$ sont données par :

$$\psi_k(f) = J_k(2\pi f\alpha) \tag{2.34}$$

Elles sont représentées sur la figure 2.6 pour $\alpha = 1$.

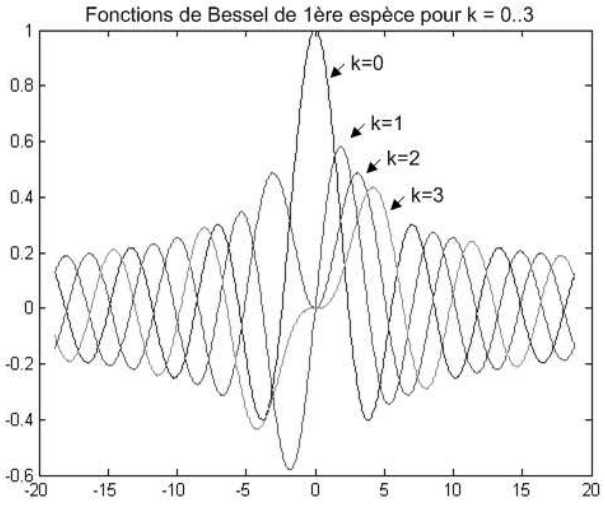


Figure 2.6: Fonctions $\psi_k(f)$ pour *m(t)* sinusoïdale

2.3.2 Exemple no. 2

Soient les fonctions $m(t)$ et $g(t)$ périodiques sur T_0 définies comme suit:

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\tfrac{2\alpha t}{T_0} - nT_0) \qquad t \in \left[\tfrac{-T_0}{2}, \tfrac{T_0}{2}\right] \\ g(t) &= 1 \end{aligned} \tag{2.35}$$

où $m(t)$, fonction en dents de scie définie sur l'intervalle $[\frac{-T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$, est présentée à la figure 2.7.

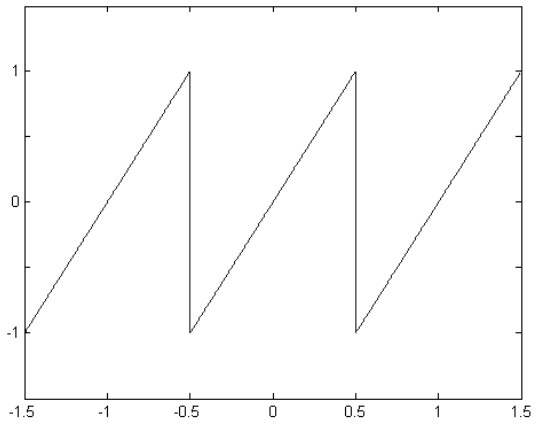


Figure 2.7: Fonction $m(t)$ en dent de scie avec $\alpha = 1$ et $f_0 = 1Hz$

Remplaçant la valeur de $m(t)$ et $g(t)$ dans (2.26), les coefficients $\psi_k(f)$ sont tels que :

$$\begin{aligned} \psi_k(f) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi ft\frac{2\alpha}{T_0} - jk2\pi f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{\frac{2jt}{T_0}(2\pi f\alpha - k\pi)} dt \end{aligned} \tag{2.36}$$

En ne conservant que la partie réelle de l'équation, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \psi_k(f) &= \frac{sin(2\pi f\alpha - k\pi)}{(2\pi f\alpha - k\pi)} \\ &= sinc(2\pi f\alpha - k\pi) \end{aligned} \tag{2.37}$$

Ces fonctions ne sont autres que des sinus cardinaux décalées comme illustré à la figure 2.8.

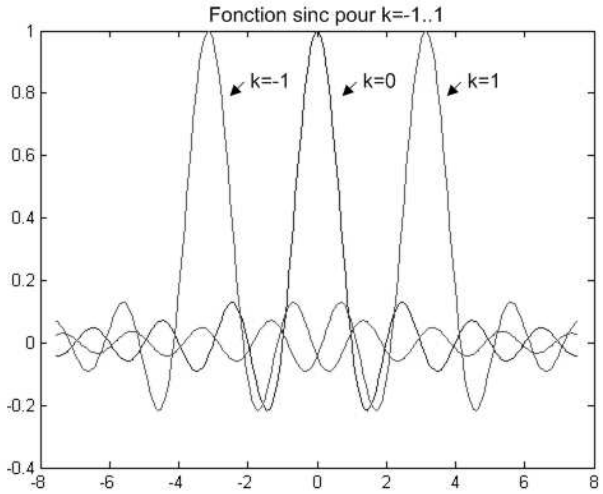


Figure 2.8: Fonctions $\psi_k(f)$ pour *m(t)* en dents de scie

2.3.3 Exemple no. 3

Soient les fonctions $m(t)$ et $g(t)$ périodiques sur T_0 définies comme suit:

$$\begin{aligned} m(t) &= \alpha t^2 \qquad t \in \left[\tfrac{-T_0}{2}, \tfrac{T_0}{2}\right] \\ g(t) &= 1 \end{aligned} \tag{2.38}$$

où $m(t)$, fonction de type quadratique dans l'intervalle $[\frac{-T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$, est présentée à la figure 2.10.

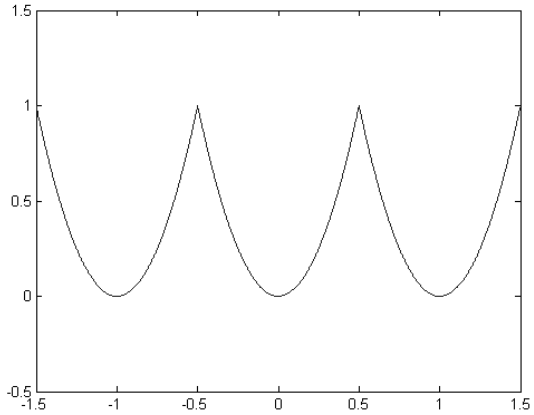


Figure 2.9: Fonction $m(t)$ quadratique avec $\alpha = 4$ et $f_0 = 1Hz$

Remplaçant la valeur de $m(t)$ et $g(t)$ dans (2.26), les coefficients $\psi_k(f)$ sont tels que :

$$\psi_k(f) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi f\alpha t^2 - jk2\pi f_0 t} dt \tag{2.39}$$

En ne conservant que la partie réelle de l'équation, nous obtenons:

$$\psi_k(f) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} cos(2\pi f\alpha t^2 - k2\pi f_0 t) dt \tag{2.40}$$

Comme cette fonction est paire, nous pouvons donc écrire que :

$$\psi_k(f) = \frac{2}{T_0} \int_{0}^{T_0/2} cos(2\pi f\alpha t^2 - k2\pi f_0 t) dt \tag{2.41}$$

Après un long développement nous trouvons que ces fonctions peuvent s'écrire comme suit :

$$\psi_k(f) = \frac{f_0}{\sqrt{\alpha f}} \left[cos(\frac{\pi k^2 f_0^2}{2\alpha f}) C(\frac{\alpha f - k f_0^2}{\sqrt{\alpha f} f_0}) + sin(\frac{\pi k^2 f_0^2}{2\alpha f}) S(\frac{\alpha f - k f_0^2}{\sqrt{\alpha f} f_0}) \right] \tag{2.42}$$

où les fonctions $C(u)$ et $S(u)$ sont les intégrales de Fresnel. Le développement long de ce résultat se retrouve en annexe IV. Ces fonctions sont illustrées à la figure 2.10.

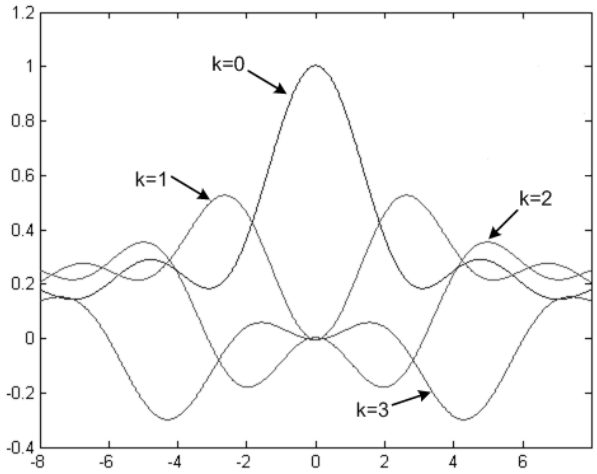


Figure 2.10: Fonctions $\psi_k(f)$ pour *m(t)* quadratique

2.4 Applications

Maintenant que nous avons décrit quelques exemples de filtres LPTV, voyons en quoi les caractéristiques peuvent servir dans le domaine des télécommunications. Nous nous intéresserons plus spécialement à deux applications en particulier, le brouillage de signaux et l'étalement spectral. Duverdier [9] en évoque d'ailleurs une autre sur la compression de signaux à l'aide des filtres LPTV d'un intérêt moindre pour nos préoccupations.

2.4.1 Brouillage de signaux

Soit le signal NRZ aléatoire visible au haut (a) de la figure 2.11. Ce signal est filtré à l'aide du filtre LPTV défini par (2.26) utilisant des fonctions $m(t)$ et $g(t)$ définies telles que :

$$\begin{aligned} m(t) &= \alpha sin(2\pi f_0 t) \\ g(t) &= 1 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Ce signal a été passé au travers de deux filtres ayant comme valeurs respectives $\alpha = 1$ (b) et $\alpha = 4$ (c). On peut observer que plus l'amplitude α augmente plus le brouillage est apparent au niveau du signal de sortie. En observant le signal $x(t)$ donné par (2.28), on aperçoit bien la copie déplacée latéralement dans le temps de

$z(t)$ où ce déplacement est défini par l'amplitude de $m(t)$.

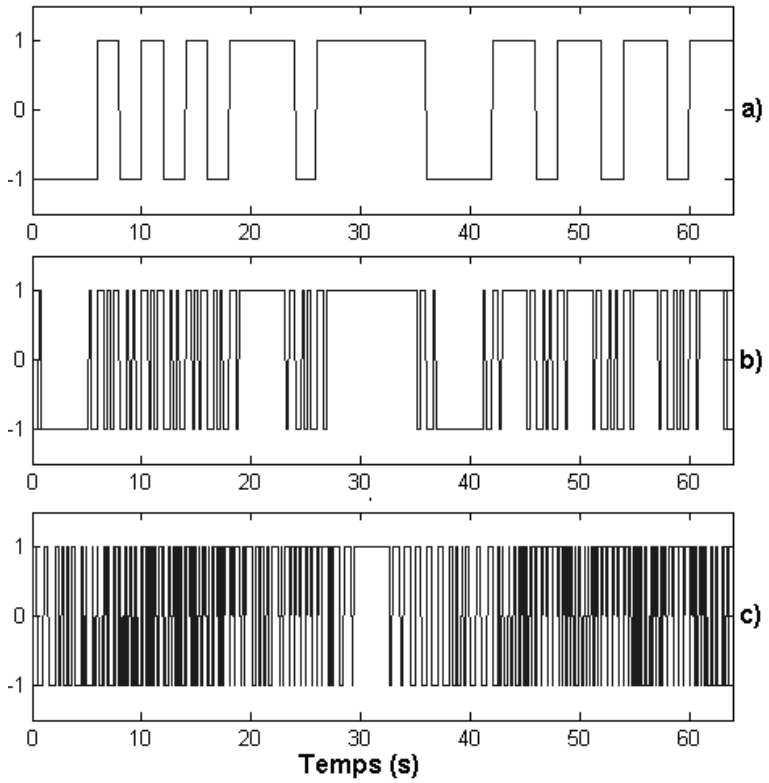


Figure 2.11: a) Signal NRZ aléatoire initial - b) Signal NRZ brouillé $\alpha = 1$ - c) Signal NRZ brouillé $\alpha = 4$

Cette technique pourrait être une autre alternative aux méthodes classiques de brouillage analogique de l'information. On pourrait, après avoir modélisé un système particulier, proposer de mélanger les coefficients $\psi_k(f)$ du filtre LPTV sur une ou plusieurs séquences d'information. Cette technique de brouillage reste sans erreur et son décryptage devient rapidement impossible sans connaître les fonctions qui ont conduit au brouillage de l'information.

2.4.2 Étalement spectral

2.4.2.1 Théorie

Soit le signal $z(t)$ dont la représentation spectrale $Z(f)$ est non-nulle dans l'intervalle $\Delta = [\frac{-f_0}{2}, \frac{f_0}{2}]$. On filtre $z(t)$ par le filtre linéaire périodique $\tilde{h}$ ayant

comme réponse fréquentielle $H(t,f)$ de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Soit $x(t)$ le signal observé à la sortie du filtre. D'après l'équation (2.25), la représentation spectrale $S_X(f)$ du signal à la sortie s'écrit :

$$S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\psi_k(f - kf_0)|^2 S_Z(f - kf_0) \tag{2.44}$$

où les fonctions $\{\psi_k(f)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont les coefficients du développement en série de Fourier de $H(t,f)$ définis en (2.10) par :

$$H(t,f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_k(f) e^{ik2\pi f_0 t} \tag{2.45}$$

incluant (2.11) :

$$\psi_k(f) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} H(t,f) e^{-ik2\pi f_0 t} dt \tag{2.46}$$

Le spectre sortant $S_X(f)$ est donc une somme infinie de versions pondérées et décalées en fréquence, autour des multiples de la fréquence du filtre f_0, du spectre du signal d'entrée $S_Z(f)$. Comme le spectre de $z(t)$ est supposé limité à la bande Δ, il n'y a pas de recouvrement entre les versions décalées de $S_Z(f)$. Le spectre $S_X(f)$ de l'équation (2.44) correspond alors de façon graphique à :

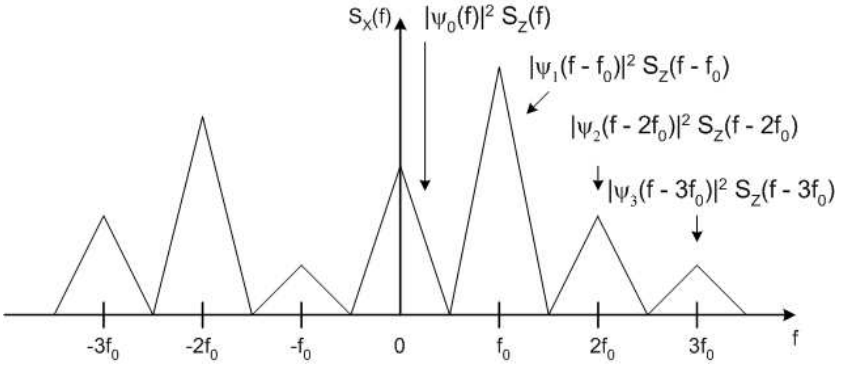


Figure 2.12: Spectre étalé à la sortie

Les valeurs de $S_X(f)$ sont fixées par le poids des coefficients $\psi_k(f)$ intervenant

dans la somme. Chaque ensemble de coefficients $\psi_k(f)$ définit un filtre $\tilde{h}$ et ne sont pas obligatoirement symétriques comme l'on pourrait le croire d'après les exemples précédents. Étant donné le choix de $\tilde{h}$, nous connaissons donc toutes les possibilités de spectres qui sont données par $S_X(f)$. Il en résulte que tout signal à bande large peut être écrit comme un signal à bande étroite filtré par un filtre linéaire périodique. Cette propriété est à la base de l'idée de compression de signaux suggérée en [9].

2.4.2.2 Exemple

Soit $z(t)$ un signal NRZ aléatoire, de mêmes caractéristiques que celui illustré en haut *(a)* de la figure 2.11, filtré à l'aide d'un passe-bas dans le but de réduire sa largeur de bande à des valeurs de fréquences comprises dans l'intervalle $\Delta = [\frac{-f_0}{2}, \frac{f_0}{2}]$. Une réalisation du spectre de z(t) est donnée à la figure 2.13.

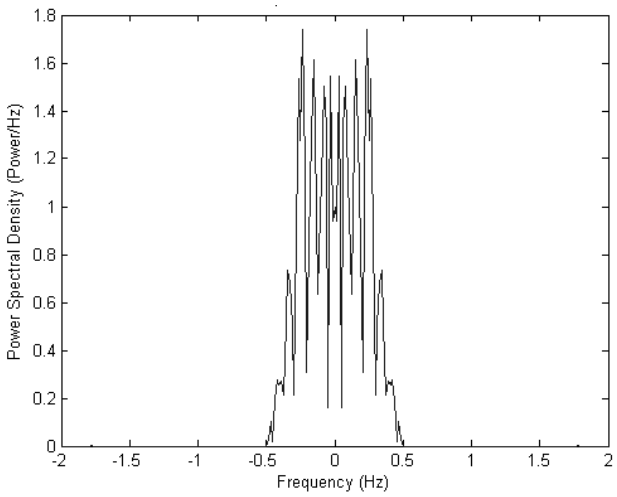


Figure 2.13: Spectre du signal d'entrée $z(t)$

On applique à $z(t)$ un filtre linéaire périodique défini par l'équation (2.26) où les fonctions $m(t)$ et $g(t)$ sont telles que :

$$m(t) = \alpha sin(2\pi f_0 t)$$
$$g(t) = 1$$

Le spectre résultant est présenté sur la figure 2.14 pour $\alpha = 4T_0$ et $f_0 = 1$Hz.

En observant la figure, on aperçoit bien la répétition du spectre initial, autour des multiples de la fréquence périodique du filtre, pondérée par les coefficients $\psi_k(f)$ qui sont d'après (2.34) les fonctions de Bessel $J_k(2\pi f\alpha)$.

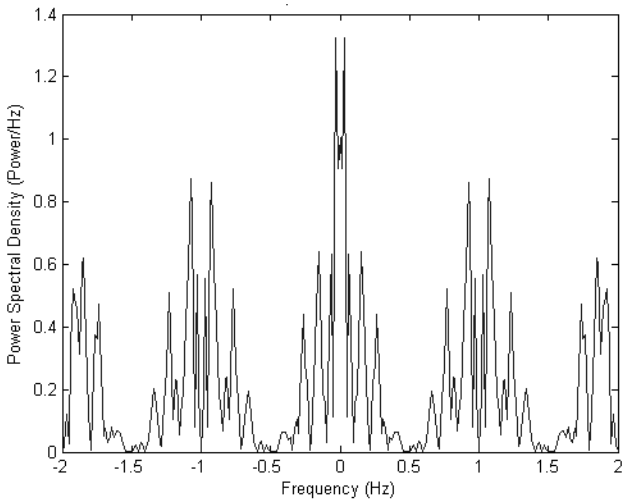


Figure 2.14: Spectre du signal de sortie $x(t)$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les concepts des filtres linéaires variant dans le temps ainsi que le cas particulier des filtres dits périodiques. Nous avons constaté que nous pouvons écrire la réponse fréquentielle d'un filtre LPTV comme une série de Fourier dont les coefficients interviennent dans l'étalement spectral résultant du filtrage. Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons à la reconstruction du signal initial à partir des caractéristiques du signal filtré et du filtre qui l'a composé et nous étudierons les effets du bruit sur la reconstruction.

CHAPITRE 3

RECONSTRUCTION D'UN SIGNAL SOUMIS À UN FILTRE LPTV

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que nous pouvions exploiter les propriétés d'un filtre LPTV dans des applications de brouillage de signaux et d'étalement spectral. Nous allons maintenant voir l'inverse de cette procédure soit la reconstruction des signaux issus de ce filtrage. Nous exploiterons le fait que nous connaissons les caractéristiques du filtre qui a servi à l'opération et la composition du spectre du signal de sortie pour effectuer cette reconstruction. Nous verrons que nous pouvons reconstruire le signal sans erreur lorsqu'il y a absence de bruit même si nous sommes en présence de chevauchement spectral. Par la suite, nous étudierons l'effet du bruit sur la reconstruction du signal et nous verrons que la reconstruction par moyenne de plusieurs bandes permets de diminuer son effet sur ladite reconstruction.

3.2 Signal à bande limitée $[\frac{-f_0}{2}, \frac{f_0}{2}[$

3.2.1 Théorie

Soit le signal $z(t)$ limité en fréquence au support $\Delta = [\frac{-f_0}{2}, \frac{f_0}{2}[$ dont la représentation spectrale après filtrage est donnée à la figure 3.1.

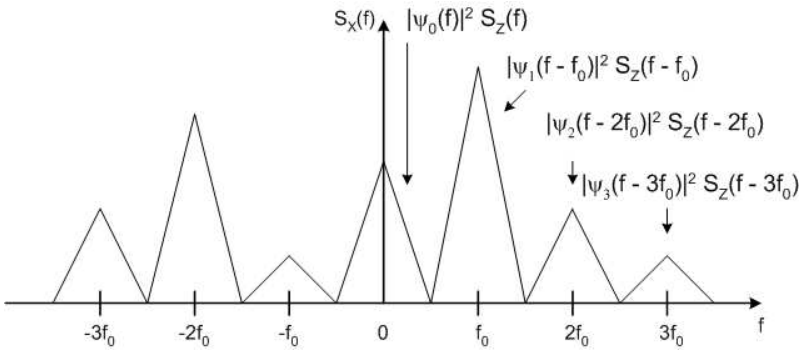


Figure 3.1: Spectre de $x(t)$

De (2.23), chaque bande de fréquence k de largeur Δ peut être écrite en bande de base comme étant :

$$X(f + kf_0) = \psi_k(f)Z(f) \tag{3.1}$$

Le filtre $H(t, f)$ étant connu, il est donc possible de calculer les fonctions $\psi_k(f)$ qui représentent les coefficients du développement en série de Fourier de celui-ci. La reconstruction du signal $z(t)$ peut être obtenue en inversant l'équation (3.1). Le schéma montré à la figure 3.2 illustre comment on peut extraire la bande k du signal reçu pour pouvoir effectuer la reconstruction par inversion.

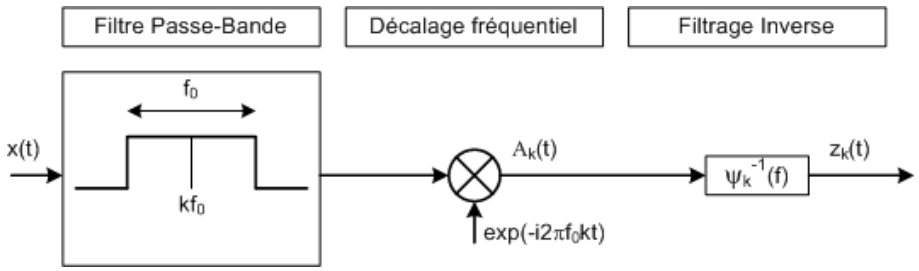


Figure 3.2: Reconstruction du signal par filtrage inverse

D'après cette figure, on constate que la reconstruction passe par un filtrage passe-bande centré autour de la bande k suivi d'une démodulation pour ramener le signal en bande de base. Par la suite, celui-ci est passé dans le filtre inverse $\frac{1}{\psi_k(f)}$ pour obtenir le signal initial. Une condition supplémentaire sur les fonctions $\psi_k(f)$ est donnée par :

$$\psi_k(f) \neq 0 \qquad f \in [\tfrac{-f_0}{2}, \tfrac{f_0}{2}] \tag{3.2}$$

Nous obtenons alors une des k copies possibles du signal original identifié comme $z_k(t)$. Cette technique permet de reconstruire le signal original $z(t)$ à partir de différentes bandes du signal $x(t)$. Globalement, il est alors envisageable de diminuer la déformation du signal soumis à du bruit.

3.2.2 Exemple d'application

Soit le filtre $\tilde{h}$ avec comme réponse fréquentielle l'équation (2.26) où les fonctions $m(t)$ et $g(t)$ sont telles que :

$$\begin{aligned} m(t) &= \alpha sin(2\pi f_0 t) \\ g(t) &= 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nous appliquons à l'entrée un signal NRZ aléatoire filtré par un passe-bas dans le but de limiter la fréquence dans l'intervalle Δ. Nous pouvons voir sur la figure 3.3 la reconstruction du signal en utilisant la bande de base $k = 0$ où les paramètres du filtre sont $\alpha = 8T_0$ et $f_0 = 1$Hz. Comme la reconstruction sans bruit est sans erreur, on voit que le signal reconstruit est exactement le même que le signal original. Une simple remise en forme permettrait de le ramener à la forme NRZ. Il est à noter que nous avons laissé le signal original sous sa forme NRZ dans un soucis de clarté pour bien montrer que le signal reconstruit pouvait être ramené à la forme NRZ initiale.

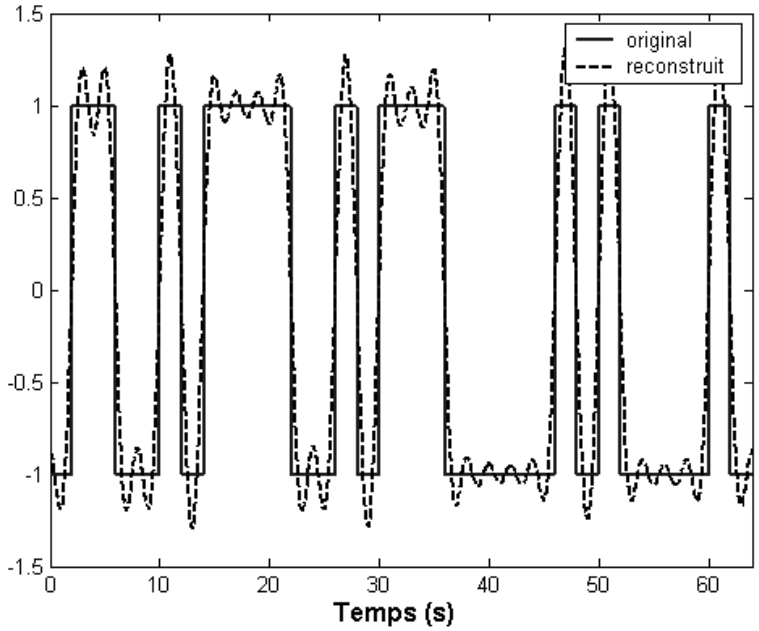


Figure 3.3: Reconstruction de $z(t)$ utilisant la bande k=0

3.3 Signal à bande limitée $[-f_0, f_0[$

3.3.1 Théorie

Soit le signal $z(t)$ limité en fréquence à la bande $\Delta = [-f_0, f_0[$ dont la représentation spectrale après filtrage est donnée à la figure 3.1.

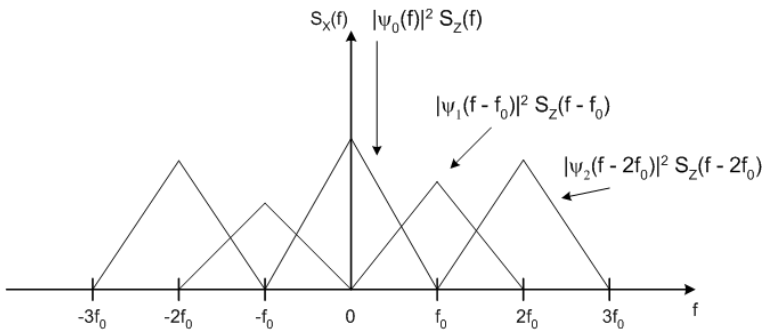


Figure 3.4: Spectre du signal de sortie

Nous obtenons ainsi des chevauchements de spectres et la reconstruction par un filtre inverse multiplicatif n'est plus possible. Après le filtrage nous avons donc des versions de $S_Z(f)$ de largeur Δ décalées autour de kf_0 ($k \in \mathbb{Z}$). L'équation (2.25) est toujours valide, mais pour extraire le signal original $z(t)$ à partir d'une bande k, il faut tenir compte des superpositions provenant des bandes voisines.

Considérons la bande k bornée par l'intervalle $[(k-1)f_0, (k+1)f_0]$. Les transformées de Fourier du signal $x(t)$, ramenées dans la bande de base $[-f_0, f_0[$ s'écrivent en deux parties.

Pour la bande $f \in [0, f_0[$, nous avons les transformées $X(f + kf_0)$ et $X(f + (k-1)f_0)$ qui s'écrivent comme :

$$\begin{cases} X(f + kf_0) = \psi_k(f)Z(f) + \psi_{k+1}(f - f_0)Z(f - f_0) \\ \\ X(f + (k-1)f_0) = \psi_{k-1}(f)Z(f) + \psi_k(f - f_0)Z(f - f_0) \end{cases} \tag{3.4}$$

Et pour la bande $f \in [-f_0, 0[$, nous avons les transformées $X(f + kf_0)$ et $X(f + (k+1)f_0)$ qui s'écrivent comme :

$$\begin{cases} X(f+kf_0) = \psi_k(f)Z(f) + \psi_{k-1}(f+f_0)Z(f+f_0) \\ \\ X(f+(k+1)f_0) = \psi_{k+1}(f)Z(f) + \psi_k(f+f_0)Z(f+f_0) \end{cases} \tag{3.5}$$

Après simplifications nous obtenons :

$$\begin{cases} Z(f) = \dfrac{\psi_k(f+f_0)X(f+kf_0) - \psi_{k-1}(f+f_0)X(f+(k+1)f_0)}{\psi_k(f)\psi_k(f+f_0) - \psi_{k+1}(f)\psi_{k-1}(f+f_0)} & f \in [-f_0, 0[\\ \\ Z(f) = \dfrac{\psi_k(f-f_0)X(f+kf_0) - \psi_{k+1}(f-f_0)X(f+(k-1)f_0)}{\psi_k(f)\psi_k(f-f_0) - \psi_{k-1}(f)\psi_{k+1}(f-f_0)} & f \in [0, f_0[\end{cases} \tag{3.6}$$

sachant que les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} \psi_k(f)\psi_k(f+f_0) - \psi_{k+1}(f)\psi_{k-1}(f+f_0) \neq 0 \\ \\ \psi_k(f)\psi_k(f-f_0) - \psi_{k-1}(f)\psi_{k+1}(f-f_0) \neq 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

3.3.2 Exemple d'application

Soit le filtre $\tilde{h}$ avec comme réponse fréquentielle l'équation (2.26) où les fonctions $m(t)$ et $g(t)$ sont telles que :

$$\begin{aligned} m(t) &= \alpha sin(2\pi f_0 t) \\ g(t) &= 1 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nous appliquons à l'entrée un signal NRZ aléatoire filtré par un passe-bas dans le but de limiter la fréquence dans l'intervalle Δ. Nous pouvons voir sur la figure 3.5 la reconstruction du signal en utilisant les bandes $k = 0$ et $k = -1$ où les paramètres du filtre sont $\alpha = 4T_0$ et $f_0 = 1$Hz. Comme la reconstruction sans bruit est sans erreur, on constate que le signal reconstruit est exactement le même que le signal original. Une simple remise en forme permettrait de le ramener à la forme NRZ.

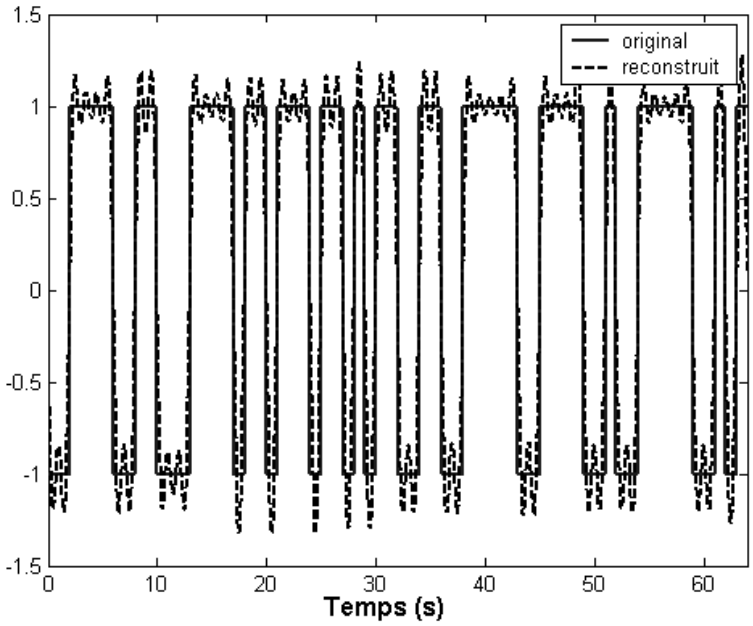


Figure 3.5: Reconstruction de $z(t)$ utilisant les bandes k=0 et k=-1

Comme les spectres se chevauchent, ce cas devient encore plus difficile à reconstruire lorsque l'on ignore les paramètres qui ont conduit au signal sortant $x(t)$. En effet, on peut facilement imaginer un cas où la superposition des spectres conduirait à une difficulté accrue de la détermination empirique de la largeur de bande initiale du signal $z(t)$.

3.4 Signal à bande supérieure à $[-f_0, f_0[$

Dans le cas où la bande spectrale du signal est supérieure à $B = lf_0$ pour $l > 2$, il suffit de considérer les $2(l-1)$ bandes voisines dont les spectres se chevauchent pour extraire la bande originale du signal. Le nombre d'équations et les calculs deviendront plus complexes, mais la reconstruction reste possible.

3.5 Reconstruction en présence de bruit

3.5.1 Théorie

Dans le domaine des télécommunications il est souvent requis de modéliser le canal de transmission. En général, on utilise un bruit blanc gaussien additif qui

est une représentation simplifiée du canal. Dans ce modèle, le signal transmis $x(t)$ est affecté d'un signal aléatoire additif représenté par $n(t)$. Ce bruit est caractérisé statistiquement par une loi gaussienne. La nouvelle représentation du système peut être observée à la figure 3.6.

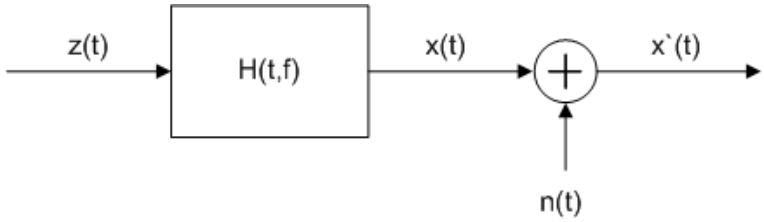


Figure 3.6: Émission-Réception à travers un canal à BBG

Comme vu précédemment, le signal sortant est constitué d'une infinité de copies du signal original filtré. Cette redondance d'information peut donc être exploitée lors de la reconstruction du signal. On peut donc exploiter ce fait pour effectuer une reconstruction par moyenne de plusieurs bandes du signal sortant. Cette moyenne aurait pour but de réduire les effets du bruit dans plusieurs bandes du signal à la sortie du canal.

Pour voir les effets du bruit sur la reconstruction, nous utilisons la variance entre le signal restitué $z^{'}(t)$ et le signal original $z(t)$ telle que :

$$\sigma^2 = \int_{t_0}^{t_{max}} (z^{'}(t) - z(t))^2 dt \tag{3.9}$$

Cette mesure nous permettra de déterminer un seuil au-delà duquel le bruit est trop grand pour une restitution adéquate du signal original. Il est à noter que comme notre signal est limité dans le temps, les bornes de cette intégrale ne seront pas infinies donc celle-ci sera bornée. Dans le but de réduire l'effet aléatoire du bruit sur la dégradation du signal, les résultats de la variance en fonction du rapport signal à bruit sont une moyenne sur un très grand nombre de simulations (N $\sim$ 10 000) pour tout le spectre de SNR donné. Le SNR étant le rapport des énergies du signal dans la bande considérée et du bruit dans cette même bande.

3.5.2 Exemple

Soit le filtre $\tilde{h}$ avec comme réponse fréquentielle l'équation (2.26) où les fonctions $m(t)$ et $g(t)$ sont telles que :

$$\begin{aligned} m(t) &= \alpha sin(2\pi f_0 t) \\ g(t) &= 1 \end{aligned} \tag{3.10}$$

où les paramètres du filtre sont $\alpha = 4T_0$ et $f_0 = 1$Hz. Nous appliquons à l'entrée un signal NRZ aléatoire filtré par un passe-bas dans le but de limiter la fréquence dans l'intervalle $\Delta = [\frac{-f_0}{2}, \frac{f_0}{2}[$. Nous pouvons observer sur la figure 3.7 l'effet du bruit lors de la reconstruction par moyenne des bandes $k = -3..3$. En effet, le signal subit une déformation dû au bruit présent dans tout le spectre du signal. La reconstruction par moyenne permet comme mentionné précédemment, de faire une correction basée sur le fait que les déformations ne sont pas présentes dans chacune des bandes utilisées pour la reconstruction. La moyenne adoucit alors les imperfections du signal reconstruit soumis au bruit de type BBG.

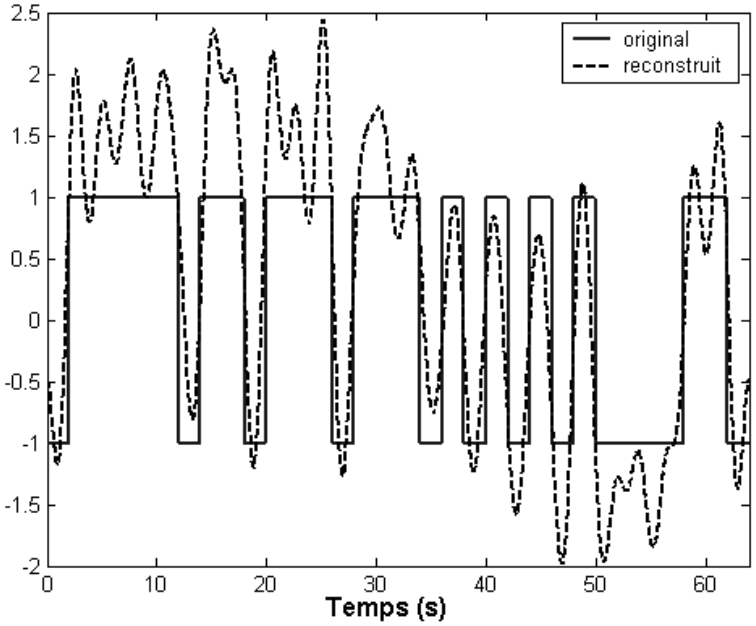


Figure 3.7: Reconstruction de $z^{'}(t)$ pour un SNR de 0dB pour $k = -3..3$

Sur la figure 3.8, on remarque cet effet d'adoucissement lorsque l'on utilise sept

bandes pour la reconstruction plutôt qu'une seule. Le gain est appréciable surtout dans la région où le bruit est fort par rapport au signal. Malgré l'amélioration assez notable de la technique de moyenne de plusieurs bandes, il reste que les signaux soumis à des filtres LPTV sont sensibles aux effets du bruit, surtout lorsqu'il est grand.

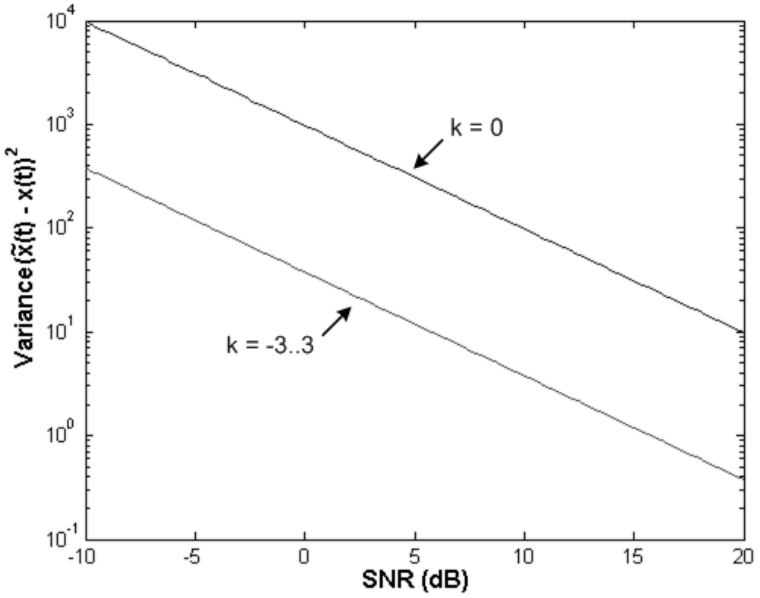


Figure 3.8: Variance en fonction de SNR pour une reconstruction avec $k = 0$ et $k = -3..3$

Une façon d'améliorer encore le signal serait d'utiliser une technique d'accentuation et désaccentuation du spectre. Le principe consiste à faire subir au spectre, après avoir été filtré, une opération d'accentuation avant de le transmettre. Lors de la réception, le spectre du signal est désaccentué ce qui par le fait même réduit par un facteur proportionnel le bruit dans le signal. Cette opération permettrait en bout de ligne une reconstruction améliorée du signal. Hayar [10] introduit également deux autres techniques de reconstruction, soit par filtrage optimal sachant que l'on connaît un peu plus d'informations sur le signal et le bruit et une méthode exploitant le critère du maximum de vraisemblance adapté aux filtres LPTV. Il aurait également de faire une étude plus approfondie sur les effets du bruit et de comparer cette technique avec celle d'un filtre adapté par exemple.

3.6 Conclusion

Nous venons de voir comment reconstruire le signal original en tirant partie du fait que celui-ci se retrouve en plusieurs copies dans le signal reçu. Il est donc possible de réduire l'influence du bruit en prenant plusieurs versions du signal dans le but de reproduire une reconstruction la plus fidèle possible. Dans le cas où il n'y a pas de bruit, la reconstruction est sans erreur. Par contre, lorsque nous appliquons du bruit blanc gaussien au système la situation se dégrade. La reconstruction par moyenne de plusieurs bandes nous a permis d'observer que le bruit était réduit d'une façon significative, mais que la reconstruction de signaux soumis à des filtres LPTV sont très sensibles au bruit. Nous verrons dans le prochain chapitre comment nous pouvons appliquer ces techniques dans le but de faire un système multi-usagers de transmission utilisant les filtres LPTV comme clés identifiant chacun des usagers.

CHAPITRE 4

SYSTÈMES MULTI-USAGERS UTILISANT LES FILTRES LPTV

4.1 Introduction

Jusqu'à présent, nous avons vu la théorie des filtres linéaires périodiques ainsi que la théorie de la reconstruction des signaux en présence ou non de bruit. Cette partie de l'étude était consacré à un seul signal réel donc à un seul utilisateur. Dans ce chapitre, nous allons explorer le cas multi-usagers. Nous allons présenter en première partie la théorie qui mène à la génération d'un signal contenant plusieurs usagers distincts sur la même bande de fréquence. Par la suite, nous montrerons un cas particulier de base de filtres LPTV pouvant être utilisé dans un système multi-usagers. Finalement, nous regarderons un exemple réel de transmission de deux signaux à l'aide de ce système.

4.2 Théorie

Soit N signaux identifiés comme Z_d, $d = 1 \ldots N$ provenant de N utilisateurs différents. Le signal multiplexé résultant $x(t)$ est généré comme le montre la figure 4.1. Les N filtres du système sont représentés par les symboles $\tilde{h}_d$.

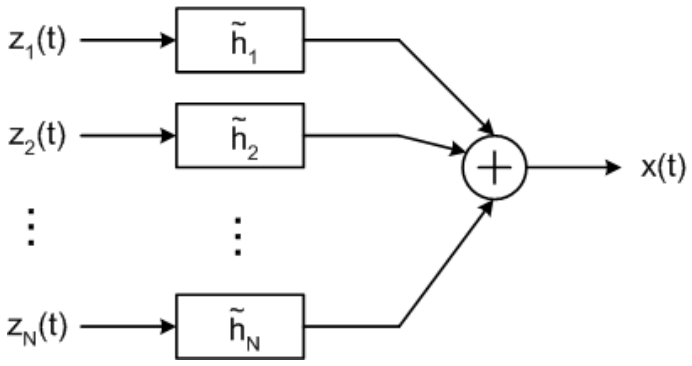


Figure 4.1: Réalisation d'un signal multi-usager utilisant les filtres LPTV

Chaque filtre représente donc la signature de l'usager d. Ces filtres étant périodiques, nous pouvons supposer qu'ils admettent un développement en série

de Fourier comme défini en (2.10) par :

$$H_d(t,f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_{d,k}(f) e^{ik2\pi f_0 t} \tag{4.1}$$

où les fonctions $\{\psi_{d,k}(f)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont les coefficients du développement en série de Fourier du filtre de réponse fréquentielle $H_d(t,f)$ comme en (2.11) :

$$\psi_{d,k}(f) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} H_d(t,f) e^{-ik2\pi f_0 t} dt \tag{4.2}$$

La réponse du signal $z_d(t)$ au filtre linéaire périodique $\tilde{h}_d$ étant donné par (2.16), $x(t)$ admets alors une décomposition en série continue telle que :

$$x(t) = \sum_{d=1}^{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik2\pi f_0 t} A_{d,k}(t) \tag{4.3}$$

où, d'après (2.17), les fonctions $A_{d,k}(t)$ sont données par :

$$A_{d,k}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi ft} \psi_{d,k}(f) Z_d(f) df \tag{4.4}$$

De plus, selon (2.21), la représentation en fréquence de $x(t)$ est donnée par :

$$X(f) = \sum_{d=1}^{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{d,k}(f - kf_0) \tag{4.5}$$

qui après substitution de la valeur de $A_{d,k}(t)$ donnée en (4.4) nous donne :

$$X(f) = \sum_{d=1}^{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_{d,k}(f - kf_0) Z_d(f - kf_0) \tag{4.6}$$

Cette dernière équation est une généralisation de l'équation (2.23). La représentation spectrale d'une transmission multi-usagers de $x(t)$ est donc une somme de N spectres étalés infinis superposés comme le montre la figure 4.2 dans le cas où les supports de chacune des entrées $z_d(t)$ est inclus dans $\left[-f_0, f_0\right]$.

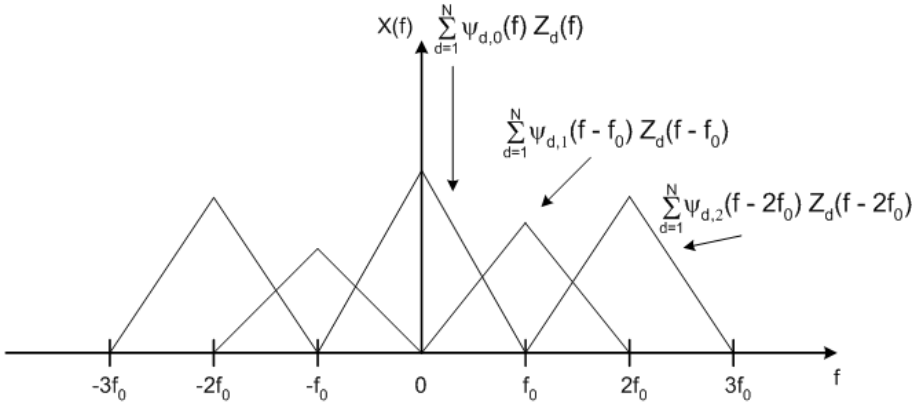


Figure 4.2: Représentation fréquentielle de $x(t)$

4.3 Transmission multi-usagers de signaux à bande limitée

4.3.1 Reconstruction

Soit un système de transmission de 2^N ($N \geq 1$) signaux $z_d(t)$ ayant un support spectral inclus dans l'intervalle $\Delta = \left[\frac{-f_0}{2}, \frac{f_0}{2}\right[$. Le signal transmis $x(t)$ est la somme des filtrages des $z_d(t)$ par les filtres LPTV $\tilde{h}_d$ périodiques en $T_0 = \frac{1}{f_0}$. On peut donc exprimer $X(f)$ de (4.6) comme :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f + kf_0) \tag{4.7}$$

où les fonctions $X(f + kf_0)$ sont données par :

$$X(f + kf_0) = \sum_{d=1}^{2^N} \psi_{d,k}(f) Z_d(f) \tag{4.8}$$

où $\forall d \in 1..2^N$ les fonctions $\{\psi_{d,k}(f)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont les coefficients du développement en série de Fourier de $H_d(t, f)$. Reconstruire les signaux originaux $z_d(t)$ revient donc à isoler chacune des bandes $Z_d(f)$ dans une bande de largeur Δ de $X(f)$. Il est possible d'isoler chacune des bandes si il existe 2^N équations linéairement indépendantes en f sur l'intervalle Δ. Il faut donc une base de 2^N entiers $\{k_j\}_{1\leq j\leq 2^N}$ tels que, $\forall f \in \Delta$, les vecteurs $\{\psi_{1,k_j}(f) \dots \psi_{2^N,k_j}(f)\}$ ne soient pas corrélés. Il suffit alors de travailler sur le système formé des 2^N équations de (4.8) qui s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} X(f+k_1 f_0) \\ \dots \\ X(f+k_{2^N} f_0) \end{bmatrix} = M(f) \begin{bmatrix} Z_1(f) \\ \dots \\ Z_{2^N}(f) \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

avec :

$$M(f) = \begin{bmatrix} \psi_{1,k_1}(f) & \dots & \psi_{1,k_{2^N}}(f) \\ \dots & & \dots \\ \psi_{1,k_{2^N}}(f) & \dots & \psi_{2^N,k_{2^N}}(f) \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Par hypothèse, M(f) est inversible pour tout f appartenant à Δ. On obtient donc un système d'équations générales de reconstruction pour un système multi-usagers telles que :

$$\begin{bmatrix} Z_1(f) \\ \dots \\ Z_{2^N}(f) \end{bmatrix} = M^{-1}(f) \begin{bmatrix} X(f+k_1 f_0) \\ \dots \\ X(f+k_{2^N} f_0) \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

De cette façon nous pouvons décomposer les spectres $Z_d(f)$ du spectre total du signal transmis $X(f)$.

4.3.2 Transmission de deux signaux

Soit deux signaux $z_1(t)$ et $z_2(t)$, à bande limitée sur le support $\Delta = \left[\frac{-f_0}{2}, \frac{f_0}{2}\right[$. Le signal $x(t)$ transmis est la somme des filtrages de $z_1(t)$ par $\tilde{h}_1$ et de $z_2(t)$ par $\tilde{h}_2$, où $\tilde{h}_1$ et $\tilde{h}_2$ sont des filtres LPTV de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Nous cherchons à reconstruire les signaux $z_1(t)$ et $z_2(t)$, sachant que l'on connaît les filtres $\tilde{h}_1$ et $\tilde{h}_2$, du signal transmis $x(t)$. D'après les équations données en (4.8), on a que :

$$\begin{gathered} \forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \forall f \in \left[\tfrac{-f_0}{2}, \tfrac{f_0}{2}\right[\\ X(f+kf_0) = \psi_{1,k}(f) Z_1(f) + \psi_{2,k}(f) Z_2(f) \end{gathered} \tag{4.12}$$

où les fonctions $\{\psi_{1,k}(f)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\{\psi_{2,k}(f)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont les coefficients du développement en série de Fourier des filtres $\tilde{h}_1$ et $\tilde{h}_2$ de réponse fréquentielle $H_1(t,f)$ et $H_2(t,f)$. Les équations données en (4.12) permettent de retrouver les

signaux $Z_1(f)$ et $Z_2(f)$ sur Δ si $\forall f \in \Delta$, il existe deux valeurs de k pour lesquelles on peut obtenir deux équations linéairement indépendantes. Admettant qu'il existe deux entiers k_1 et k_2 qui satisfont ces conditions, nous obtenons donc le système suivant :

$$\begin{bmatrix} X(f+k_1 f_0) \\ X(f+k_2 f_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{1,k_1}(f) & \psi_{2,k_1}(f) \\ \psi_{1,k_2}(f) & \psi_{2,k_2}(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1(f) \\ Z_2(f) \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

La résolution de ce système d'équations donne que la matrice $M^{-1}(f)$ s'écrit :

$$M^{-1}(f) = \frac{1}{\psi_{1,k_1}(f)\psi_{2,k_2}(f) - \psi_{1,k_2}(f)\psi_{2,k_1}(f)} \begin{bmatrix} \psi_{2,k_2}(f) & -\psi_{2,k_1}(f) \\ -\psi_{1,k_2}(f) & \psi_{1,k_1}(f) \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

avec comme condition que :

$$\psi_{1,k_1}(f)\psi_{2,k_2}(f) - \psi_{1,k_2}(f)\psi_{2,k_1}(f) \neq 0 \qquad f \in \Delta \tag{4.15}$$

ce qui donne comme solution pour $Z_1(f)$ et $Z_2(f)$ les équations suivantes :

$$\begin{cases} Z_1(f) = \dfrac{\psi_{2,k_2}(f)X(f+k_1 f_0) - \psi_{2,k_1}(f)X(f+k_2 f_0)}{\psi_{1,k_1}(f)\psi_{2,k_2}(f) - \psi_{1,k_2}(f)\psi_{2,k_1}(f)} \\ \\ Z_2(f) = \dfrac{\psi_{1,k_1}(f)X(f+k_2 f_0) - \psi_{1,k_2}(f)X(f+k_1 f_0)}{\psi_{1,k_1}(f)\psi_{2,k_2}(f) - \psi_{1,k_2}(f)\psi_{2,k_1}(f)} \end{cases} \tag{4.16}$$

Il est donc possible de reconstruire $z_1(t)$ et $z_2(t)$ par un filtrage linéaire périodique inverse du signal transmis $x(t)$. En général, le couple de valeurs k (k_1, k_2) n'est pas unique, ce qui permet de faire une reconstruction basée sur plusieurs bandes différentes et ainsi renforcer la correction d'erreurs comme vu précédemment pour le cas d'un signal unique.

4.3.3 Filtres LPTV particuliers

En pratique dès que le système dépasse $N > 1$, l'inversion de la matrice $M(f)$ peut prendre beaucoup de temps de calcul. Il faut donc penser à construire cette

matrice de façon à faciliter son inversion.

Soit $\tilde{h}_1$ et $\tilde{h}_2$, deux filtres LPTV particuliers. Ils sont définis par leurs réponses fréquentielles respectives $H_1(t,f)$ et $H_2(t,f)$ telles que :

$$\begin{aligned} H_1(t,f) &= e^{-i2\pi f m(t)} \\ H_2(t,f) &= e^{i2\pi f m(t)} \end{aligned} \tag{4.17}$$

où $m(t)$ est une fonction réelle périodique en $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Admettant que $H_1(t,f)$ et $H_2(t,f)$ sont décomposables en série de Fourier, on peut donc les écrire comme :

$$\begin{aligned} H_1(t,f) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_k(f) e^{i2\pi k f_0 t} \\ H_2(t,f) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_k(-f) e^{i2\pi k f_0 t} \end{aligned} \tag{4.18}$$

avec les fonctions $\psi_k(f)$ définies comme :

$$\psi_k(f) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-i2\pi f m(t) - ik2\pi f_0 t} dt \tag{4.19}$$

Selon [9], si $m(t)$ est impaire et une fonction périodique au signe près en $\frac{T_0}{2}$, c'est-à-dire telle que :

$$m(t + T_0/2) = -m(t) \tag{4.20}$$

on a alors :

$$\psi_k(-f) = (-1)^k \psi_k(f) \tag{4.21}$$

Prenons deux filtres $\tilde{h}_1$ et $\tilde{h}_2$ qui satisfont aux exigences énoncées plus haut. On filtre deux signaux $z_1(t)$ et $z_2(t)$ et on cherche à les reconstruire. Comme vu précédemment, il est possible de reconstruire les signaux s'il existe deux entiers k_1 et k_2 de différence impaire. Nous obtenons donc le système suivant:

$$\begin{bmatrix} X(f+k_1f_0) \\ X(f+k_2f_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{k_1}(f) & (-1)^{k_1}\psi_{k_1}(f) \\ \psi_{k_2}(f) & (-1)^{k_2}\psi_{k_2}(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1(f) \\ Z_2(f) \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

En choisissant k_1 pair et k_2 impair on obtient :

$$\begin{bmatrix} X(f+k_1f_0) \\ X(f+k_2f_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{k_1}(f) & \psi_{k_1}(f) \\ \psi_{k_2}(f) & -\psi_{k_2}(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1(f) \\ Z_2(f) \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

qui peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{bmatrix} X(f+k_1f_0) \\ X(f+k_2f_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{k_1}(f) & 0 \\ 0 & \psi_{k_2}(f) \end{bmatrix} H_2 \begin{bmatrix} Z_1(f) \\ Z_2(f) \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

où la matrice H_2 est une matrice d'Hadamard de rang 2 définie comme :

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

En inversant $M(f)$, on retrouve donc le système inverse suivant :

$$\begin{bmatrix} Z_1(f) \\ Z_2(f) \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} H_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\psi_{k_1}(f)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\psi_{k_2}(f)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(f+k_1f_0) \\ X(f+k_2f_0) \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Découlant de ce système on retrouve les signaux $z_1(t)$ et $z_2(t)$ tels que :

$$\begin{cases} Z_1(f) = \dfrac{X(f+k_1f_0)}{2\psi_{k_1}(f)} + \dfrac{X(f+k_2f_0)}{2\psi_{k_2}(f)} \\ \\ Z_2(f) = \dfrac{X(f+k_1f_0)}{2\psi_{k_1}(f)} - \dfrac{X(f+k_2f_0)}{2\psi_{k_2}(f)} \end{cases} \tag{4.27}$$

Il est possible de généraliser cette démarche pour trouver des filtres dont les fonctions $\psi_{d,k}(f)$ conduisent à des bases supérieures utilisant les matrices d'Hadamard. Il est également possible de trouver d'autres bases permettant de faciliter l'inversion de la matrice $M(f)$.

4.3.4 Exemple

Soit les filtres $\tilde{h_1}$ et $\tilde{h_2}$ avec comme réponses fréquentielles l'équation (4.17) où les fonctions $m(t)$ et $g(t)$ sont telles que :

$$\begin{aligned} m(t) &= \alpha sin(2\pi f_0 t) \\ g(t) &= 1 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Nous appliquons à l'entrée deux signaux NRZ aléatoires filtrés par un passe-bas dans le but de limiter la fréquence dans l'intervalle $\Delta = \left[\frac{-f_0}{2}, \frac{f_0}{2}\right[$. La figure 4.3 nous montre le signal somme du filtrage respectif de $z_1(t)$ par $\tilde{h_1}$ et $z_2(t)$ par $\tilde{h_2}$. Il est clair que les deux signaux sont indiscernables l'un de l'autre dans $x(t)$.

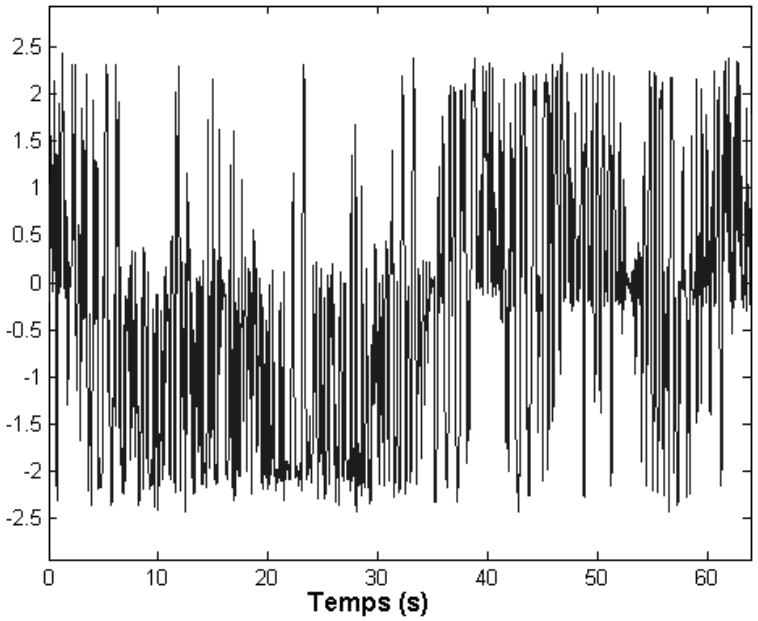


Figure 4.3: Signal somme $x(t)$

Nous appliquons donc la reconstruction sur $x(t)$ selon la relation (4.27) en utilisant les bandes spectrales $k = 0$ et $k = 1$. Les figures 4.4 et 4.5 montrent les signaux $z_1(t)$ et $z_2(t)$ ainsi que leurs reconstructions respectives.

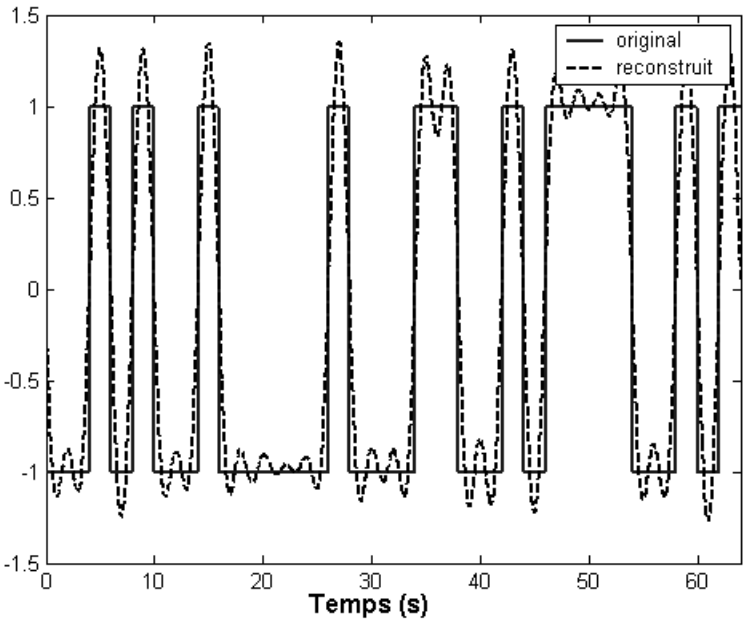


Figure 4.4: Reconstruction de $z_1(t)$ utilisant les bandes k=0 et k=1

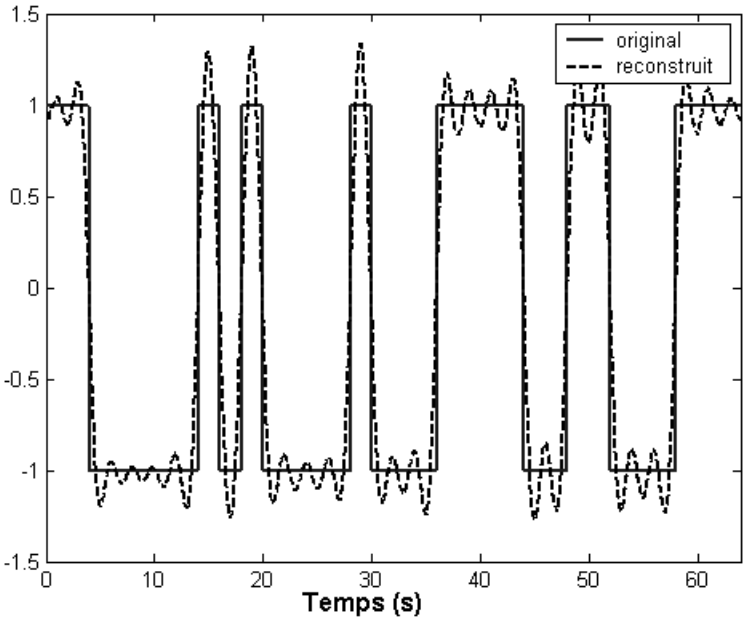


Figure 4.5: Reconstruction de $z_2(t)$ utilisant les bandes k=0 et k=1

On peut remarquer que les signaux sont reconstruits sans erreur. Une simple remise en forme permettrait de retrouver les signaux initiaux transmis.

4.4 Systèmes multi-usagers classiques et filtres LPTV

4.4.1 Les systèmes classiques

Les systèmes multi-usagers classiques sont classés dans trois catégories qui utilisent au mieux la bande spectrale disponible [17] [14]. Ils sont le TDMA: Accès multiple par division temporelle, le FDMA: Accès multiple par division de fréquence et le CDMA: Accès multiple par division utilisant un code. Le TDMA consiste en une division du temps alloué à chaque utilisateur pour transmettre ses informations comme l'exemple de la figure 4.6. Il est souvent utilisé dans les transmissions de voix numérique et de données, par exemple le protocole GSM en téléphonie cellulaire.

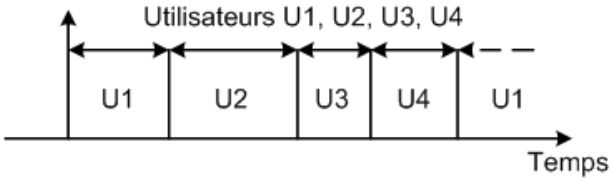


Figure 4.6: Accès multiple par division temporelle (TDMA)

Le FDMA, quant à lui, possède un multiplexage fréquentiel qui permets au final de diviser la bande spectrale disponible entre les différents usagers comme illustré à la figure 4.7. Il est surtout utilisé dans les systèmes de transmission de voix et données par câble, par exemple les fournisseurs d'accès Internet par câble résidentiel.

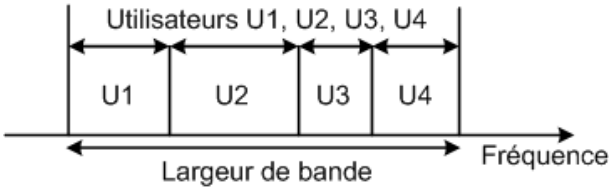


Figure 4.7: Accès multiple par division de fréquence (FDMA)

Finalement, le CDMA transmet un signal somme des informations des usagers multipliés par des codes qui sont orthogonaux entre eux comme à la figure 4.8. Cette technique permet de transmettre tous les usagers à la fois sur toute la bande

spectrale disponible. La capacité du système à départager les usagers vient des codes orthogonaux qui garantissent une corrélation très faible entre les différents usagers facilitant leur extraction du signal transmis. De plus, le codage permet de protéger l'information, tandis que l'étalement spectral dissimule l'information tout en la rendant moins sensible aux interférences.

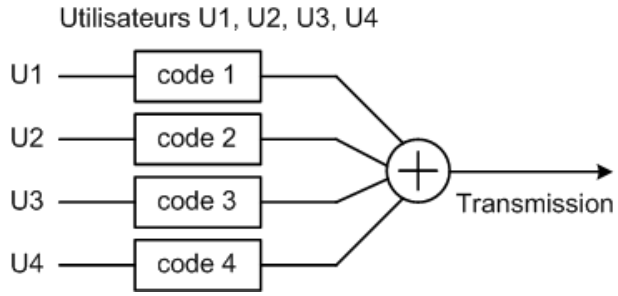


Figure 4.8: Accès multiple par utilisation de code (CDMA)

4.4.2 Les systèmes utilisant les filtres LPTV

Comme expliqué ci-dessus la technique classique de CDMA correspond à la multiplication par des fonctions périodiques orthogonales des signaux des utilisateurs. Nous pouvons donc interpréter ce système comme étant un cas particulier de filtres linéaires périodiques. Notre système multi-usager se veut donc une généralisation des techniques d'accès multiple utilisant un code. Il possède les mêmes spécifications que le système CDMA classique, soit un étalement spectral utilisant des fonctions de cryptage complexes. Il est difficile de détecter et pratiquement impossible de reconstruire le signal sans connaître les paramètres liés au brouillage et à la transmission.

4.5 Conclusion

Ce chapitre a introduit un nouveau type de transmission multi-usagers. Nous avons donc réalisé un système de transmission permettant de transmettre plusieurs signaux simultanés soumis à des filtres linéaires périodiques variant par rapport au temps. Nous nous sommes ensuite intéressés à une façon de réduire la complexité des systèmes en jeu pour faciliter le filtrage inverse lors de la réception.

Nous avons ainsi pu vérifier qu'une base de signaux utilisant la base d'Hadamard était possible. Nous avons également pu vérifier la validité des équations avec un exemple de transmission de deux utilisateurs en constatant que les signaux étaient effectivement restitués sans erreur. Finalement, en comparant ce type de transmission multi-usagers avec les méthodes classiques, nous avons constaté que ce type de transmission peut être considéré comme une généralisation des accès multiples par division utilisant des codes orthogonaux dont le CDMA est un cas particulier.

CONCLUSION

Tout au long de ce mémoire nous avons exploré les possibilités d'applications de filtres LPTV qui sont un cas particulier des systèmes LTV. Ils sont principalement utilisés pour décrire le comportement d'un canal de communication soumis à des perturbations comme la caractérisation d'un canal radiomobile multi-trajets à évanouissements. Nous avons plutôt utilisé ces filtres dans le but de perturber volontairement un signal pour en étudier les effets sur ses caractéristiques.

Notre étude a débuté par une analyse complète des systèmes LTV partant du concept de dualité temps-fréquence émis par Bello [2][3] presque 45 ans auparavant. Ce concept est à la base de la représentation d'un système linéaire variant dans le temps. Nous avons montré que l'on pouvait caractériser les filtres linéaires variant dans le temps d'un façon élégante et symétrique dans le temps et la fréquence en les associant à des paires duales temps-fréquence d'opérateurs. Ceci nous a mené à une représentation canonique sous deux paires de quatre opérateurs distincts liés par la dualité. Les fonctions noyaux associées à ces opérateurs sont quant à elles reliées par des transformées de Fourier qui permet d'obtenir tous les autres à partir d'un élément de chaque paire.

Par la suite, nous avons introduit les filtres linéaires variant dans le temps incluant le cas qui nous intéresses, les filtres variant dans le temps de façon périodique. Nous l'avons décrit plus spécifiquement en utilisant la fonction de transfert variable dans le temps. Cette description nous a amené à écrire cette fonction de transfert comme une série de Fourier d'où nous avons déduit les propriétés spectrales du signal sortant. Nous avons pu en déduire que ces filtres peuvent être vus comme une somme infinie de filtres invariants dans le temps modulés par un gain dépendant de la période du filtre. Nous avons ensuite montré quelques exemples de filtres à l'aide de leur représentation en séries de Fourier.

En ce qui concerne les applications possibles de ces filtres, nous avons exploré deux possibilités. La première étant le brouillage de l'information. L'on peut voir

clairement que le signal dans le temps est déformé d'une façon rendant très difficile voire même impossible sa reconstruction sans connaître la fonction de transfert qui a conduit au signal filtré. La deuxième application est celle d'une nouvelle façon de faire de l'étalement spectral en utilisant ces filtres. Comme nous l'avons démontré, le spectre à la sortie est composé de versions décalées et pondérées du spectre du signal à l'entrée. Utilisant cette propriété avec un signal à faible largeur de bande à l'entrée, le signal à la sortie possède un spectre infini théoriquement. Cette façon d'étaler le spectre est particulièrement originale et nous nous servons de ces caractéristiques dans la suite du travail.

Ensuite, nous nous sommes attaqués à l'opération inverse soit la reconstruction d'un signal soumis à un filtre LPTV. Nous avons d'abord montré comment reconstruire un signal sans recoupement spectral à la sortie. Cette technique consiste simplement en une isolation des bandes d'intérêt du signal à la sortie et de leur appliquer une transformation par filtre inverse pour obtenir le signal original. Il en résulte que nous pouvons obtenir le signal original à partir d'une multitude de bandes spectrales différents chacune contenant une version originale du signal multiplié par un facteur dépendant du filtre. Le second cas étudié est lorsqu'il y a chevauchement spectral entre les bandes originales du signal dans le signal à la sortie. Mais comme chacune de ces bandes peuvent être exprimés comme des équations mathématiques, il revient à résoudre un système de deux équations à deux inconnus pour isoler une bande originale du signal parmi la superposition. Ensuite, le même traitement que le cas précédent s'applique pour restituer le signal original. Suivant cette reconstruction, nous nous sommes intéressés à l'influence du bruit dans la reconstruction du signal. Nous avons pu constater que la reconstruction par "moyennage" de plusieurs bandes diminuait de façon appréciable l'effet du bruit sans toutefois l'éliminer complètement.

Finalement en combinant les deux applications et la technique de reconstruction de signal précédentes nous avons montré comment construire un système multi-usagers utilisant les filtres linéaires périodiques comme clés d'identification de chacun des usagers. Cette méthode permet l'accès multiple à large bande en plus de

brouiller chacun de signaux usagers. Exploitant le fait que la composition du signal résultant contient plusieurs “copies” des signaux de chacun des usagers multiplié par les gains de leurs filtres respectifs on peut donc utiliser une méthode matricielle basée sur la technique vu précédemment pour extraire chacun des signaux usager du spectre global. Ensuite, nous présentons une méthode permettant de simplifier grandement le système d'équations qui fait appel aux matrices d'Hadamard. Nous avons finalement comparé ce modèle général avec les autres méthodes d'accès multiple. Il en ressort qu'il peut se voir comme une généralisation des méthodes à accès multiple par multiporteuses utilisant un code d'accès (MCCDMA).

Comme travaux futurs à explorer dans le même domaine, citons par exemple, la possibilité de produire une compression de signaux [9] en représentant un signal à large bande par un signal à bande étroite soumis à un filtre linéaire périodique. Il serait intéressant de voir jusqu'à quel degré un signal pourrait être compressé et pourrait ouvrir la voie à de nouvelles possibilités dans le domaine. L'on pourrait même comparer cette technique avec la théorie des ondelettes qui est vogue en ce moment. Une autre avenue à explorer serait de trouver d'autres bases orthogonales permettant de simplifier la reconstruction des signaux dans le cas de transmission multi-usagers. Ce domaine des mathématiques étant très bien connu, il serait envisageable que certains des systèmes de base orthogonales déjà développés puissent servir dans ce but.

RÉFÉRENCES

[1] Turin, G.L., "Error Probabilities for Binary Ideal Reception Through Nonselective Slow Fading and Noise", *Proceedings of the IRE*, Sept 1958.

[2] Bello, P.A., "Characterization of Randomly Time-Variant Linear Channels", *IEEE Transactions on Communications Systems*, vol. COM-11, pp. 360-393, Déc 1963.

[3] Bello, P.A., "Time-Frequency Duality", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-10, pp. 18-33, Jan 1964.

[4] Turin, G., Clapp, F., Johnston, T., Fine, S., Lavry, D., "A statistical model of urban multipath propagation", *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 21, pp. 1-9, Feb. 1972.

[5] Suzuki, H., "A statistical model for urban radio propagation", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 25, pp. 673-680, July 1977.

[6] Zakharov, Y., Kodanev, V., "Coherent reception of noise-like signals in underwater acoustic channel with continual and discrete multipath", *Telecommunications and Radio Engineering*, vol. 11, pp.13-17, 1995.

[7] Zadeh, L.A., "Frequency analysis of variable networks", Proc. IRE, vol. 38, pp. 291-299, Mars 1950.

[8] Kailath, T., "Sampling Models for Linear Time-Variant Filters", M. I. T. Res. Lab. of Electronics, Cambridge, Rept. No. 352, 25 Mai, 1959.

[9] Duverdier, A., "Cyclostationnarité et Changements D'Horloge Périodiques", Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, Jan 1997.

[10] Hayar, A.M., "Applications des Changements D'Horloge Périodiques en Télécommunications", Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, Nov 2001.

[11] Mosquera, C., Scalise, S., Taricco, G., "Spectral Characterization of Feedback Linear Periodically Time-Varying Systems", *IEEE Transactions on Communications Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Volume: 2, 2002.

[12] Papoulis, A., "Signal Analysis", McGraw-Hill, 1977.

[13] Oppenheim, A.V., Schafer, R.W., "Discrete-Time Signal Processing", Prentice-Hall, 1999.

[14] Proakis, John G., "Digital Communications", McGraw-Hill, Fourth Edition, 1999.

[15] Abramowitz, M., Stegun, I.A., "Handbook of Mathematical Functions", Dover, 1972.

[16] Korn, G. A., Korn, T. M.,"Mathematical Handbook for Scientists and Engineers", McGraw-Hill, Second Edition, 1968.

[17] Meyers, R. A., "Encyclopedia of Telecommunications", Academic Press, 1989.

[18] Spiegel, M. R., "Analyse de Fourier", McGraw-Hill, Seventh Edition, 1980.

[19] Spiegel, M. R., "Formules et Tables de Mathématiques", McGraw-Hill, 20th Edition, 1974.

Annexe I

Démonstration du 2ième groupe dual

En utilisant la dualité nous pouvons définir que la duale de la relation (1.24) s'écrit comme :

$$x(t) = \int z(\tau) g(t-\tau, \tau) d\tau \tag{I.1}$$

La relation précédente implique que $g(t, \tau)$ est la réponse du système à l'instant $t - \tau$ lorsqu'on lui applique une impulsion à l'instant τ. La réalisation entrée-sortie de cette relation est basée sur une fonction à poids à sortie retardée par opposition à celle de la figure 1.2 où c'est l'entrée qui est retardée comme le montre la figure I.1.

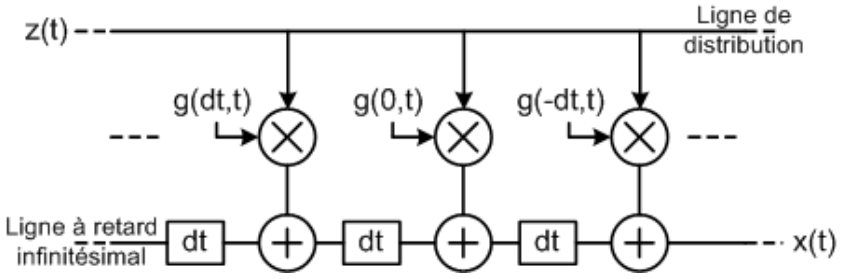


Figure I.1: Modèle physique représentant l'équation (I.1)

En appliquant une transformée de Fourier aux deux membres de (I.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \iint z(\tau) g(t-\tau, \tau) e^{-j2\pi\nu t} d\tau dt \\ &= \int z(\tau) \left[\int g(t-\tau, \tau) e^{-j2\pi\nu t} dt \right] d\tau \end{aligned} \tag{I.2}$$

On effectue le changement de variable $t \rightarrow u$ défini par l'équation $t - \tau = u$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \int z(\tau)\Big[\int g(u,\tau)e^{-j2\pi\nu(u+\tau)}du\Big]d\tau \\ &= \int z(\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}\int g(u,\tau)e^{-j2\pi\nu u}dud\tau \\ &= \int z(\tau)e^{-j2\pi\nu\tau}M(\nu,\tau)d\tau \end{aligned} \tag{I.3}$$

Nous voyons apparaître une nouvelle fonction $M(\nu,\tau)$ qui est définie par :

$$M(\nu,\tau) \triangleq \mathcal{F}_{t,\nu}\big[g(t,\tau)\big] \tag{I.4}$$

La relation (I.3) suggère que $M(\nu,\tau)$ peut s'interpréter comme une fonction de modulation dépendante de la fréquence où ν représente un décalage Doppler. Dans le cas invariant dans le temps, cette fonction deviendrait $M(\tau)$ d'où l'appellation de fonction de modulation. En substituant la valeur (1.2) de $z(\tau)$ dans (I.4) nous obtenons :

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \iint Z(f)M(\nu,\tau)e^{j2\pi(f-\nu)\tau}d\tau df \\ &= \int Z(f)\Big[\int M(\nu,\tau)e^{-j2\pi(\nu-f)\tau}d\tau\Big]df \\ &= \int Z(f)G(\nu,\nu-f)df \\ &= \int Z(\nu-f)G(\nu,f)df \end{aligned} \tag{I.5}$$

ce qui définit une nouvelle fonction $G(\nu,f)$ par la relation :

$$G(\nu,f) \triangleq \mathcal{F}_{\tau,f}\big[M(\nu,\tau)\big] \tag{I.6}$$

On peut résumer les résultats précédents en écrivant que la fonction $H(\nu,f)$ est

la double transformée de Fourier suivante :

$$G(\nu, f) \triangleq \mathcal{F}_{t,\nu}\big[\mathcal{F}_{\tau,f}\big[g(t,\tau)\big]\big] \tag{I.7}$$

Échangeant l'ordre des transformées de Fourier de la relation précédente, nous pouvons introduire la fonction $m(t, f)$ définie comme :

$$m(t, f) \triangleq \mathcal{F}^{-1}_{\nu,t}\big[G(\nu, f)\big] \tag{I.8}$$

Partant de (I.5) en remplaçant la valeur (I.8) de $G(\nu, f)$ nous obtenons l'expression suivante reliant $X(\nu)$ et $Z(\nu)$:

$$X(\nu) = \iint Z(\nu - f)m(t, f)e^{-j2\pi\nu t}dtdf \tag{I.9}$$

Cette dernière relation suggère que $m(t, f)$ peut s'interpréter comme une fonction de modulation temps-fréquence variant dans le temps. Pour terminer la boucle suggérée par les équations (I.7) et (I.8), considérons la transformée inverse de Fourier de (I.9) :

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \iiint Z(\nu - f)m(t, f)e^{-j2\pi\nu t}e^{j2\pi\nu\tau}df\,d\nu dt \\ &= \iiint Z(\nu - f)m(t, f)e^{j2\pi\nu(\tau-t)}df\,d\nu dt \end{aligned} \tag{I.10}$$

On effectue le changement de variable $\nu \rightarrow u$ défini par l'équation $\nu - f = u$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \iiint Z(u)m(t, f)e^{j2\pi(u+f)(\tau-t)}df\,du dt \\ &= \int \Big[\int Z(u)e^{j2\pi(\tau-t)u}du\Big]\Big[\int m(t, f)e^{j2\pi(\tau-t)f}df\Big]dt \\ &= \int z(\tau - t)\Big[\int m(t, f)e^{j2\pi(\tau-t)f}df\Big]dt \end{aligned} \tag{I.11}$$

Introduisant la transformée inverse de Fourier de $m(t,f)$ par rapport à f :

$$\mathcal{F}_{f,\tau}^{-1}\big[m(t,f)\big] \triangleq g^{'}(t,\tau) \tag{I.12}$$

cette dernière relation peut s'écrire :

$$x(\tau) = \int z(\tau - t) g^{'}(t, \tau - t) dt \tag{I.13}$$

où en échangeant les rôles de t et τ :

$$x(t) = \int z(t - \tau) g^{'}(\tau, t - \tau) d\tau \tag{I.14}$$

Finalement, en posant $t - \tau = \tau^{'}$, cette dernière équation s'écrit :

$$x(t) = \int z(\tau^{'}) g^{'}(t - \tau^{'}, \tau^{'}) d\tau^{'} \tag{I.15}$$

ce qui implique en comparant (I.1) et (I.15) l'identité entre $g^{'}(t,\tau)$ et $g(t,\tau)$ et donc que :

$$g(t,\tau) \triangleq \mathcal{F}_{f,\tau}^{-1}\big[m(t,f)\big] \tag{I.16}$$

Ce qui complète la démonstration des liens qui existent entre les différents descripteurs de la partie droite de la figure 1.3.

Annexe II

Exemple no. 1 de convolution variante dans le temps

L'exemple suivant est un exemple, à l'aide d'un problème, de la convolution variante dans le temps. Nous avons intégré des diagrammes afin de mieux expliciter chacun des domaine d'intégration des fonctions.

$$h(t,\tau) = \begin{cases} cos(2\pi f t + \theta_0)\, e^{-\frac{\tau}{T}} & \tau \geq 0 \\ 0 \qquad autrement \end{cases} \tag{II.1}$$

La fonction d'entrée est un symbole de période T_s définit comme :

$$z(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & autrement \end{cases} \tag{II.2}$$

L'opération de filtrage consiste à évaluer l'expression suivante où l'entrée est retardée de T_1 :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t - T_1 - \tau) h(t,\tau) d\tau \tag{II.3}$$

La valeur des bornes d'intégration de la variable τ dépendent de la valeur de t selon cette expression :

$$t - T_1 - T_s \leq \tau \leq t - T_1 \tag{II.4}$$

Il y a 3 situations à considérer dans cet exemple et chacun sont accompagnés d'une figure illustrant la convolution à cet instant ainsi que les bornes d'intégration déduites :

- $t < T_1$

$$x(t) = 0 \tag{II.5}$$

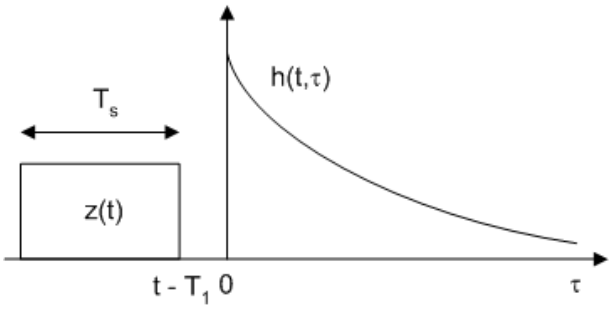


Figure II.1: Convolution pour $t < T_1$

- $T_1 \leq t \leq T_1 + T_s$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^{t-T_1} h(t,\tau)d\tau \\ &= cos(2\pi ft + \theta_0)\left[-Te^{-\frac{\tau}{T}}\right]_0^{t-T_1} \\ &= Tcos(2\pi ft + \theta_0)\left[1 - e^{-\frac{t-T_1}{T}}\right] \end{aligned}$$

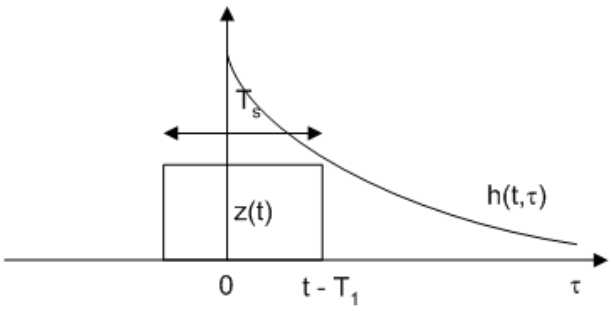


Figure II.2: Convolution pour $T_1 \leq t \leq T_1 + T_s$

- $t \geq T_1 + T_s$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_{t-T_1-T_s}^{t-T_1} h(t,\tau)d\tau \\
&= cos(2\pi ft+\theta_0)\left[-Te^{-\frac{\tau}{T}}\right]_{t-T_1-T_s}^{t-T_1} \\
&= Tcos(2\pi ft+\theta_0)\, e^{-\frac{t-T_1}{T}}\left[e^{\frac{T_s}{T}}-1\right]
\end{aligned}
$$

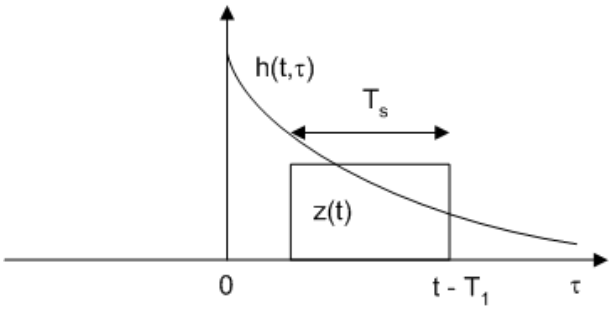


Figure II.3: Convolution pour $t \geq T_1 + T_s$

Annexe III

Exemple no. 2 de convolution variante dans le temps

L'exemple suivant est une deuxième exemple d'utilisation de la convolution variante dans le temps définie par l'équation (1.21). Nous avons intégré des diagrammes afin de mieux expliciter chacun des domaine d'intégration des fonctions.

$$h(t,\tau) = \begin{cases} cos(2\pi f t + \theta_0)\left(1 - \dfrac{\tau}{T}\right) & 0 \leq \tau \leq T \\ 0 \qquad autrement \end{cases} \tag{III.1}$$

La fonction d'entrée est un symbole de période T_s définit comme :

$$z(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & autrement \end{cases} \tag{III.2}$$

L'opération de filtrage consiste à évaluer l'expression suivante où l'entrée est retardée de T_1:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t - T_1 - \tau) h(t,\tau) d\tau \tag{III.3}$$

Dans cet exemple il y a deux cas à considérer qui comportent chacun 5 situations possibles. Chacune des situations est accompagnée d'une figure illustrant la convolution à cet instant ainsi que les bornes d'intégrations déduites :

III.1 Cas $T \geq T_s$

- $t < T_1$ ou $t > T + T_s + T_1$

$$x(t) = 0 \tag{III.4}$$

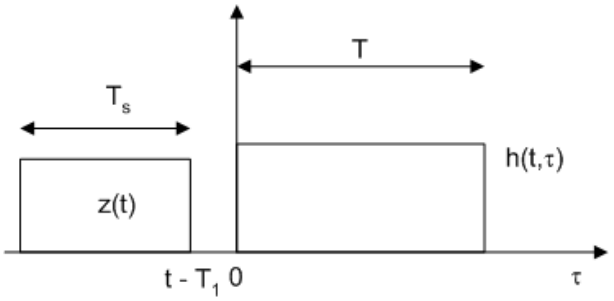


Figure III.1: Convolution pour $t < T_1$ ou $t > T + T_s + T_1$ (même cas z(t) à l'opposé)

- $T_1 \leq t \leq T_1 + T_s$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^{t-T_1} h(t,\tau)d\tau \\ &= cos(2\pi ft + \theta_0)\left[\tau - \frac{\tau^2}{2T}\right]_0^{t-T_1} \\ &= cos(2\pi ft + \theta_0)\,(t - T_1)\left[1 - \frac{t - T_1}{2T}\right] \end{aligned} \tag{III.5}$$

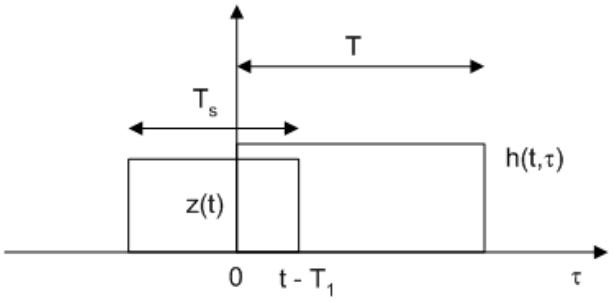


Figure III.2: Convolution pour $T_1 \leq t \leq T_1 + T_s$

- $T_1 + T_s \leq t \leq T_1 + T$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t-T_s}^{T} h(t,\tau)d\tau \\ &= cos(2\pi ft + \theta_0)\left[\tau - \frac{\tau^2}{2T}\right]_{t-T_s}^{T} \\ &= cos(2\pi ft + \theta_0)\, T_s\left[1 + \frac{T_s}{2T} - \frac{t - T_1}{T}\right] \end{aligned} \tag{III.6}$$

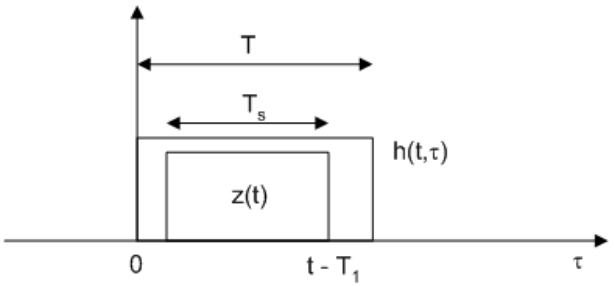


Figure III.3: Convolution pour $T_1 + T_s \leq t \leq T_1 + T$

- $T_1 + T \leq t \leq T_1 + T + T_s$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t-T_1-T_s}^{T} h(t,\tau)d\tau \\ &= cos(2\pi ft + \theta_0)\left[\tau - \frac{\tau^2}{2T}\right]_{t-T_1-T_s}^{T} \\ &= cos(2\pi ft + \theta_0)\left[\frac{T}{2} - (t - T_1 - T_s) + \frac{(t - T_1 - T_s)^2}{2T}\right] \end{aligned} \tag{III.7}$$

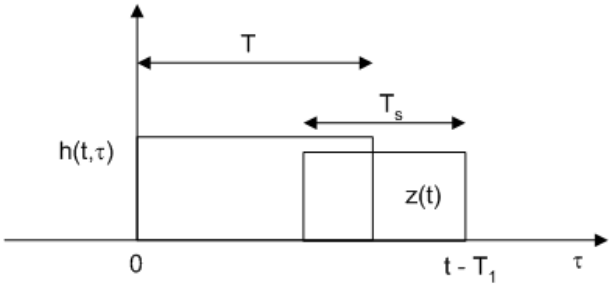


Figure III.4: Convolution pour $T_1 + T_s \leq t \leq T_1 + T$

III.2 Cas $T < T_s$

- $t < T_1$ ou $t > T + T_s + T_1$

$$x(t) = 0 \tag{III.8}$$

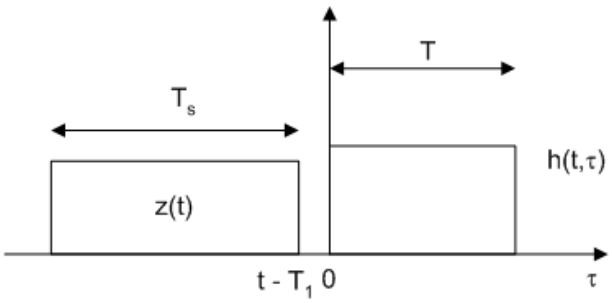


Figure III.5: Convolution pour $t < T_1$ ou $t > T + T_s + T_1$ (même cas z(t) à l'opposé)

- $T_1 \leq t \leq T_1 + T$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^{t-T_1} h(t,\tau)d\tau \\ &= cos(2\pi ft+\theta_0)\left[\tau - \frac{\tau^2}{2T}\right]_0^{t-T_1} \\ &= cos(2\pi ft+\theta_0)\,(t-T_1)\left[1-\frac{t-T_1}{2T}\right] \end{aligned} \tag{III.9}$$

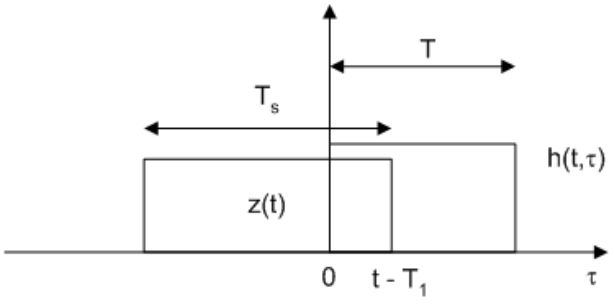


Figure III.6: Convolution pour $T_1 \leq t \leq T_1 + T$

- $T_1 + T \leq t \leq T_1 + T_s$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^{T} h(t,\tau)d\tau \\ &= cos(2\pi ft+\theta_0)\left[\tau - \frac{\tau^2}{2T}\right]_0^{T} \\ &= cos(2\pi ft+\theta_0)\,\frac{T}{2} \end{aligned} \tag{III.10}$$

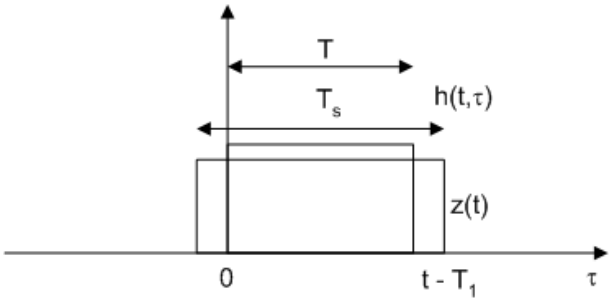


Figure III.7: Convolution pour $T_1 + T \leq t \leq T_1 + T_s$

- $T_1 + T \leq t \leq T_1 + T + T_s$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t-T_1-T_s}^{T} h(t,\tau)d\tau \\ &= cos(2\pi ft + \theta_0)\left[\tau - \frac{\tau^2}{2T}\right]_{t-T_s}^{T} \\ &= cos(2\pi ft + \theta_0)\left[\frac{T}{2} - (t - T_1 - T_s) + \frac{(t - T_1 - T_s)^2}{2T}\right] \end{aligned} \quad \text{(III.11)}$$

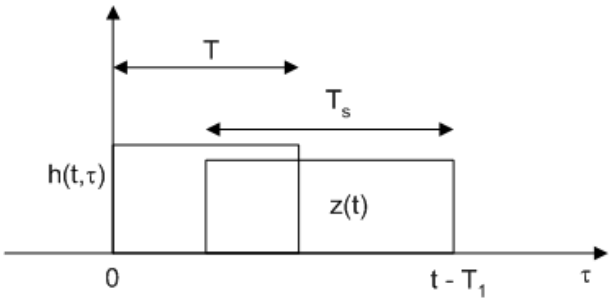


Figure III.8: Convolution pour $T_1 + T \leq t \leq T_1 + T + T_s$

Annexe IV

Démonstration du filtre en $m(t) = \alpha t^2$

Soient les fonctions $m(t)$ et $g(t)$ périodiques sur T_0 définies comme suit:

$$\begin{aligned} m(t) &= \alpha t^2 \qquad t \in \left[\tfrac{-T_0}{2}, \tfrac{T_0}{2}\right] \\ g(t) &= 1 \end{aligned} \tag{IV.1}$$

où $m(t)$, fonction de type quadratique dans l'intervalle $[\frac{-T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$, est présentée à la figure 2.10.

En substituant la valeur de $m(t)$ et $g(t)$ dans (2.26), les coefficients $\psi_k(f)$ sont tels que :

$$\psi_k(f) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{i2\pi f\alpha t^2 - ik2\pi f_0 t} dt \tag{IV.2}$$

En ne conservant que la partie réelle de l'équation, nous obtenons:

$$\psi_k(f) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} cos(2\pi f\alpha t^2 - k2\pi f_0 t) dt \tag{IV.3}$$

Comme cette fonction est paire, nous pouvons donc écrire que :

$$\psi_k(f) = \frac{2}{T_0} \int_{0}^{T_0/2} cos(2\pi f\alpha t^2 - k2\pi f_0 t) dt \tag{IV.4}$$

Cette dernière relation avec les changements suivants, où $a = 2\pi\alpha f$, $b = 2\pi k f_0$ et $D = \frac{T_0}{2}$ peut s'écrire sous la forme de :

$$\psi_k(f) = \frac{1}{D} \int_{0}^{D} cos(at^2 - bt) dt \tag{IV.5}$$

En complétant le carré dans la fonction $cos()$ on obtient :

$$\psi_k(f) = \frac{1}{D}\int_0^D cos(a(t-\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a})dt \tag{IV.6}$$

Qui peut à son tour se ré-écrire comme :

$$\psi_k(f) = \frac{1}{D}\left[cos(\frac{b^2}{4a})\int_0^D cos(a(t-\frac{b}{2a})^2)dt + sin(\frac{b^2}{4a})\int_0^D sin(a(t-\frac{b}{2a})^2)dt\right] \tag{IV.7}$$

Nous avons que les intégrales de Fresnel s'écrivent comme :

$$\begin{aligned} C(u) &= \int_0^u cos(\tfrac{1}{2}\pi x^2)dx \\ S(u) &= \int_0^u sin(\tfrac{1}{2}\pi x^2)dx \end{aligned} \tag{IV.8}$$

En substituant ces valeurs et en effectuant un changement de variables, on obtient donc que :

$$\psi_k(f) = \frac{1}{D}\sqrt{\tfrac{\pi}{2a}}\left[cos(\tfrac{b^2}{4a})C(\sqrt{\tfrac{2a}{\pi}}(D-\tfrac{b}{2a})) + sin(\tfrac{b^2}{4a})S(\sqrt{\tfrac{2a}{\pi}}(D-\tfrac{b}{2a}))\right] \tag{IV.9}$$

Finalement après simplification et substitution des variables nous avons que :

$$\psi_k(f) = \tfrac{f_0}{\sqrt{\alpha f}}\left[cos(\tfrac{\pi k^2 f_0^2}{2\alpha f})C(\tfrac{\alpha f - k f_0^2}{\sqrt{\alpha f} f_0}) + sin(\tfrac{\pi k^2 f_0^2}{2\alpha f})S(\tfrac{\alpha f - k f_0^2}{\sqrt{\alpha f} f_0})\right] \tag{IV.10}$$

Annexe V

Description du simulateur de filtre LPTV

Cette section est une description du programme qui a été conçu pour simuler les filtres LPTV dans le cadre de ce mémoire. Vous retrouverez chacun des fichiers Matlab ainsi qu'une description de ce que contient le fichier. Chacun de ces fichiers sont commentés dans le but d'en expliquer le fonctionnement.

V.1 Description globale du simulateur

Le simulateur permets d'effectuer la simulation de n'importe quel filtre LPTV sachant que l'on connaît sa réponse fréquentielle variant dans le temps (qui est en général une fonction mathématique). Il permets, dans un deuxième temps, de reconstruire le signal selon deux méthodes analysées dans le document, soit sans chevauchement spectral et avec chevauchement spectral limité à une bande spectrale bien précise. De plus, une autre partie du simulateur permets de simuler un environnement multi-usagers de deux signaux et la reconstruction de ceux-ci suivant la théorie et l'exemple décrit dans ce mémoire.

Il serait possible de modifier le simulateur pour permettre de tester d'autres filtres où dans ce cas il suffit d'incorporer vos propres fichier Matlab et de rajouter la fonction qui définit ce filtre dans le calcul des coefficients qui identifient un filtre particulier.

Il est à noter que certaines simulations sont parfois longues car il y a beaucoup de transformées de Fourier et inverses dans le simulateur. Il serait probablement possible d'optimiser l'ensemble du code pour accélérer le processus, mais cela n'étant pas le but de ce travail, cette possibilité n'a pas été étudiée.

V.2 Description des fichiers

- **filtre.m**: Fichier principal de simulation qui effectue le lien entre chacun des autres fichiers pour effectuer une simulation d'un filtre LPTV particulier.
- **filtre_multi.m**: Fichier principal de simulation multi-usagers de filtres LPTV. Identique à filtre.m, excepté le fait qu'il simule de multiples filtres.
- **nrz.m**: Fonction permettant de produire un signal NRZ constant de période donnée et de longueur donnée.
- **rand_nrz.m**: Fonction permettant de produire un signal NRZ aléatoire de période donnée et de longueur donnée.
- **t_nrz.m**: Fonction permettant de remettre en format numérique un signal analogue.
- **fpassb.m**: Fonction permettant d'extraire une bande particulière d'un spectre sans chevauchement. Il retourne la bande sélectionné centrée autour de $f = 0$ et bourre de zéro autour de cette bande pour avoir un spectre de largeur N.
- **fpassb2.m**: Fonction permettant d'extraire une demi-bande spectrale d'un signal qui contient du chevauchement spectral quart de bande (c.f reconstruction au chapitre 3 sur support spectral $[-f_0, f_0]$)
- **fpassb3.m**: Fonction permettant d'extraire une bande spectrale d'un signal multi-usagers sans zero-padding.
- **Htf_sinus.m**: Fonction qui retourne la réponse fréquentielle d'un filtre LPTV utilisant m(t) fonction sinusoïdale.
- **Htf_dent.m**: Fonction qui retourne la réponse fréquentielle d'un filtre LPTV utilisant m(t) fonction en dent de scie.
- **Htf_t_carre.m**: Fonction qui retourne la réponse fréquentielle d'un filtre LPTV utilisant m(t) fonction en at^2.

- **xt.m**: Fonction qui calcul le signal résultant $x(t)$ à partir des signaux $A_k(t)$ et retourne le signal x(t) final filtré.

- **cal_Ak.m**: Fonction qui calcul les signaux $A_k(t)$ en calculant d'abord le produit $Z(f)\psi_k(f)$, puis en effectuant une transformée inverse de Fourier pour trouver les $A_k(t)$ qui donne la matrice suivante :

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{-k}(0) & ... & A_{-k}((N-1)dt) \\ \vdots & & \vdots \\ A_0(0) & ... & A_0((N-1)dt) \\ \vdots & & \vdots \\ A_k(0) & ... & A_k((N-1)dt) \end{bmatrix} \tag{V.1}$$

- **psik.m**: Fonction qui calcul globalement tous les coefficients $\psi_k(f)$ dans une matrice définie comme suit :

$$\psi_k = \begin{bmatrix} \psi_{-k}(\frac{-f_e}{2}) & ... & \psi_{-k}(0) & ... & \psi_{-k}(\frac{+f_e}{2} - dfe) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \psi_0(\frac{-f_e}{2}) & ... & \psi_0(0) & ... & \psi_0(\frac{+f_e}{2} - dfe) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \psi_k(\frac{-f_e}{2}) & ... & \psi_k(0) & ... & \psi_k(\frac{+f_e}{2} - dfe) \end{bmatrix} \tag{V.2}$$

- **psi_k.m**: Fonction effectuant l'intégrale numérique pour trouver la valeur du coefficient $\psi_k(f)$ selon le filtre utilisé pour une valeur de f et k précise.

- **recons.m**: Fichier servant à simuler la reconstruction d'un signal soumis à un filtre LPTV dans lequel aucun chevauchement n'est présent 9c.f reconstruction au chapitre 3 sur support spectral $[-\frac{f_0}{2}, \frac{f_0}{2}]$).

- **recons2.m**: Fichier servant à simuler la reconstruction d'un signal soumis à un filtre LPTV dans lequel il y a chevauchement des bandes (c.f reconstruction au chapitre 3 sur support spectral $[-f_0, f_0]$).

- **reconsm.m**: Fichier servant à simuler la reconstruction d'un signal multi-usagers sans chevauchement des bandes.

- **noise_check.m**: Fonction qui calcul la variance entre un signal reconstruit en présence de bruit et le signal original dans le but de produire une courbe de *variance vs SNR*.

- **noise_check_mean.m**: Fonction qui répète l'expérience du fichier précédent N fois dans le but de produire des résultats écartant l'aléa du bruit blanc gaussien pour avoir une courbe représentative de la reconstruction en présence de bruit.

- **t_graph.m**: Fonction permettant d'afficher un graphique dans le temps d'un signal.

- **w_spectre.m**: Fonction permettant d'afficher le spectre d'un signal.