

**Titre:** Modèles de flot de passagers en transport aérien  
Title:

**Auteur:** Nabile Hifi  
Author:

**Date:** 2004

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Hifi, N. (2004). Modèles de flot de passagers en transport aérien [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/7394/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7394/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Guy Desaulniers, & François Soumis  
Advisors:

**Programme:** Unspecified  
Program:

# **NOTE TO USERS**

This reproduction is the best copy available.





UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÈLES DE FLOT DE PASSAGERS EN TRANSPORT AÉRIEN

NABILE HIFI

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE EN SCIENCES APPLIQUÉES  
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)  
NOVEMBRE 2004

©Nabile HIFI, 2004.



Library and  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*

*ISBN: 0-494-01338-9*

*Our file Notre référence*

*ISBN: 0-494-01338-9*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MODÈLES DE FLOT DE PASSAGERS EN TRANSPORT AÉRIEN

présenté par : HIFI Nabilé

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. LANGEVIN André, Ph.D., président

M. DESAULNIERS Guy, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. SOUMIS François, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. BÉLANGER Nicolas, Ph.D., membre

*Aux joyaux de mon cœur,  
à mes parents, à Yasmine,  
à Mekyne-Amine & Iliane-Mhena,*

...

## REMERCIEMENTS

Je remercie celui qui m'a nourri de patience et de courage...

Je remercie mon directeur de recherche monsieur Guy Desaulniers pour son aide précieuse et pour son travail rigoureux.

Je remercie également mon codirecteur de recherche monsieur François Soumis pour son aide financière et ses conseils.

Je remercie monsieur André Langevin d'avoir accepté d'être le président de jury et d'évaluer mon travail.

Je remercie monsieur Nicolas Bélanger d'avoir accepté d'être membre de jury et d'évaluer mon travail.

...

## RÉSUMÉ

Le travail effectué dans le cadre de ce mémoire s'inscrit à la suite des travaux de Soumis (1979) pour la prédiction des flots de passagers pour les compagnies aériennes. Ce problème n'est pas toujours facile. En effet, il revient à étudier la circulation des passagers sur un réseau de vols, constitué de différentes routes reliant plusieurs origines à plusieurs destinations de façon à estimer, pour une demande prédéterminée, l'achalandage des routes et le refus des passagers sur chacune des routes.

Notre travail se divise en deux grandes parties. Une première partie est consacrée à l'étude du système utilisé par la compagnie aérienne Air Canada pour déterminer le flot de passagers attendus sur les vols offerts dans un réseau pour une saison donnée. Cette étude est basée sur des données d'une semaine typique de l'hiver 2001-2002, dans le but d'évaluer les performances de ce système en termes de qualité de solution.

Dans la deuxième partie, deux modèles d'équilibre de flots de passagers avec plusieurs variantes sont développés pour reproduire le comportement des passagers en utilisant des méthodes stochastiques et déterminer le nombre de passagers à bord des avions et ceux refusés. Une procédure itérative qui fait appel à la méthode du point fixe est utilisée pour déterminer le point d'équilibre des taux d'appels à chaque évaluation, ainsi que des méthodes d'approche pour le calcul des intégrales. Les modèles proposés sont testés sur deux types de réseau : un fictif et un réel. Pour valider les résultats de nos modèles, nous les comparons avec les résultats obtenus par un algorithme de simulation du processus de réservation. Les variantes du premier modèle donnent une sous-estimation du nombre de passagers attendus pour de fortes demandes. Pour contrer ce phénomène de sous-estimation, nous introduisons une nouvelle façon de calculer les taux d'appels qui constitue la particularité du deuxième modèle et de

ses variantes. Les résultats obtenus avec ce dernier modèle donnent une meilleure estimation du nombre de passagers attendus.

Les résultats obtenues sont très encourageants, tant au point de vue de qualité des solutions produites qu'au point de vue des temps de calcul.

## ABSTRACT

The work carried out in this master's thesis follows the work of Soumis (1979) to predict the passenger flow in the network of an airline. This problem is not always easy. Indeed, it studies the movement of the passengers in a network of flights, made up of various routes connecting several origins to several destinations in order to estimate, for a predetermined demand, the number of customers using the routes and those refused on these routes.

Our work is divided into two main parts. A first part is devoted to the study of the system used by company Air Canada to determine the passenger flow on the flights offered for a given season. This study is based on a data set for a typical week of the winter 2001-2002. It evaluates the performance of this system in terms of solution quality.

In the second part, two equilibrium models for passenger flow with several variants are developed to reproduce the behavior of the passengers by using stochastic methods. The models can be used to determine the number of passengers on board of each flight and those refused. An iterative procedure which uses the fixed point method is used to determine the equilibrium point of the rates of call-ups at each iteration, as well as a numerical method to approximate the value of some integrals. The proposed models are tested on two types of networks: a fictive and a real-world one. To validate the results of our models, we compare them with the results derived from a simulation algorithm that reproduces the booking process. The variants of the first model give an under-estimation of the expected number of passengers when the demand is high. To counter this phenomenon of under-estimation, we introduce a new way of calculating the rates of call-ups which constitute the characteristic of

the second model and its variants. The results obtained with this last model give a better estimate of the number of expected passengers.

The results obtained are very encouraging, with regards to solution quality and the computational effort.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iv
REMERCIEMENTS . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	x
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiv
LISTE DES FIGURES . . . . .	xvi
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 : Modèle de flot de passagers . . . . .	4
1.2 : Problématique . . . . .	5
1.3 : Revue de littérature . . . . .	6
1.4 : Contributions . . . . .	10

1.5 : Organisation du mémoire . . . . .	10
---	----

## **CHAPITRE 2 : ÉTUDE DU SYSTÈME UTILISÉ PAR AIR CANADA 11**

2.1 : Description du réseau d'Air Canada . . . . .	12
2.2 : Répartition de la demande en passagers dans le réseau . . . . .	13
2.3 : Refus des passagers . . . . .	18
2.3.1 : Variation du pourcentage de refus . . . . .	19
2.3.2 : Répartition du pourcentage de refus sur une route . . . . .	21
2.3.3 : Estimation du nombre de passagers refusés sur les routes . .	24
2.3.4 : Étude du pourcentage de refus suivant l'ordre des routes dans le fichier de données . . . . .	28
2.3.5 : Remarques . . . . .	31
2.4 : Résultats et conclusions . . . . .	32

## **CHAPITRE 3 : MODÈLES D'ÉQUILIBRE DE FLOTS DE PASSA- GERS AVEC COMPOSANTE TEMPORELLE ET DÉBORDEMENT INDÉPENDANT . . . . . 34**

3.1 : Introduction . . . . .	34
3.1.1 : Approches utilisées pour la prédition du nombre de passagers excédentaires . . . . .	35

3.1.2 : Approche probabiliste pour estimer le nombre de passagers ex-cédentaires . . . . .	37
3.1.3 : Méthode de simulation . . . . .	38
3.2 : Définitions des modèles d'équilibre de flots de passagers . . . . .	39
3.2.1 : Hypothèses . . . . .	39
3.2.2 : Notations . . . . .	41
3.2.3 : Modèle développé . . . . .	42
3.3 : Résolution du modèle . . . . .	45
3.4 : Approximation numérique des intégrales . . . . .	48
3.4.1 : Première méthode . . . . .	48
3.4.2 : Deuxième méthode . . . . .	49
3.5 : Variantes du modèle . . . . .	50
3.6 : Tests et résultats . . . . .	51
3.6.1 : Discussion des résultats . . . . .	61
3.7 : Modèle ajusté . . . . .	62
3.8 : Tests et résultats . . . . .	64
3.8.1 : Discussion des résultats . . . . .	70

CONCLUSION . . . . .	72
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	73

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 : Nombre de routes par type suivant le nombre de passagers à bord par intervalle. . . . .	15
Tableau 2.2 : Nombre de routes par type suivant le nombre de passagers à bord par intervalle. . . . .	16
Tableau 2.3 : Répartition des routes par type suivant le nombre de passagers à bord par intervalle. . . . .	17
Tableau 2.4 : Variation du PRf pour un même PRm. . . . .	20
Tableau 2.5 : Comparaison du $PRf_r$ sur route avec $\sum PRf$ et $\max PRf$ sur ses segments de vol. . . . .	23
Tableau 2.6 : Comparaison de $Rf_r$ avec <i>Nombre.Max</i> et <i>Nombre.Probable</i> . . . . .	27
Tableau 2.7 : Variation de PRf suivant Dem et Rf. . . . .	32
Tableau 3.1 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $ML_d$ pour le <i>Réseau<sub>1</sub></i> . . . . .	55
Tableau 3.2 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $ML_u$ pour le <i>Réseau<sub>1</sub></i> . . . . .	55
Tableau 3.3 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $MQ_d$ pour le <i>Réseau<sub>1</sub></i> . . . . .	56
Tableau 3.4 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $MQ_u$ pour le <i>Réseau<sub>1</sub></i> . . . . .	56

Tableau 3.5 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $ML_d$ pour le Réseau <sub>2</sub> . . . . .	57
Tableau 3.6 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $ML_u$ pour le Réseau <sub>2</sub> . . . . .	58
Tableau 3.7 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $MQ_d$ pour le Réseau <sub>2</sub> . . . . .	59
Tableau 3.8 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $MQ_u$ pour le Réseau <sub>2</sub> . . . . .	59
Tableau 3.9 : Temps moyen d'exécution en secondes pour les familles $ML_d$ , $ML_u, MQ_d$ et $MQ_u$ . . . . .	60
Tableau 3.10 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $AL_d$ pour le Réseau <sub>1</sub> . . . . .	65
Tableau 3.11 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $AL_u$ pour le Réseau <sub>1</sub> . . . . .	65
Tableau 3.12 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $AQ_d$ pour le Réseau <sub>1</sub> . . . . .	66
Tableau 3.13 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $AQ_u$ pour le Réseau <sub>1</sub> . . . . .	66
Tableau 3.14 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $AL_d$ pour le Réseau <sub>2</sub> . . . . .	67
Tableau 3.15 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $AL_u$ pour le Réseau <sub>2</sub> . . . . .	67
Tableau 3.16 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $AQ_d$ pour le Réseau <sub>2</sub> . . . . .	68
Tableau 3.17 : $D_{sig}$ et $D_{abs}$ des variantes $AQ_u$ pour le Réseau <sub>2</sub> . . . . .	68
Tableau 3.18 : Temps moyen d'exécution en secondes pour les familles $AL_d$ , $AL_u, AQ_d$ et $AQ_u$ . . . . .	69

## TABLE DES FIGURES

Figure 1.1 : Processus de planification en transport aérien. . . . .	3
Figure 2.1 : Répartition des routes en fonction du nombre de segments de vol qui leurs sont associés. . . . .	12
Figure 2.2 : Répartition de la demande selon le type de route. . . . .	13
Figure 2.3 : Répartition des passagers à bord selon le type de route. . . .	14
Figure 2.4 : Variation du PRf par rapport au PRm sur les vols d'Air Canada.	19
Figure 2.5 : PRfL versus PDc. . . . .	30
Figure 2.6 : PRfL versus PDt. . . . .	31
Figure 3.1 : Passagers excédentaires en fonction du nombre de passagers assignés pour les différentes approches. . . . .	36
Figure 3.2 : Approche quadratique du calcul d'intégrale. . . . .	49
Figure 3.3 : Courbes des taux d'appels sur les arcs pour le modèle avec débordement indépendant. . . . .	62
Figure 3.4 : Courbes des taux d'appels sur les arcs pour le modèle ajusté	70

## CHAPITRE 1 : INTRODUCTION

Les compagnies aériennes autour du monde font face de nos jours à une diminution du nombre de passagers qui voyagent, provoquant ainsi une baisse sensible et continue de leur recette, ce qui rend l'équilibre financier de ces compagnies de plus en plus difficile. La forte concurrence et les différents événements qui se produisent au quotidien et qui touchent spécialement le domaine du transport aérien peuvent être quelques-unes des premières raisons du phénomène de la baisse de la clientèle. Afin de contrer ce phénomène, les compagnies aériennes ont tendance à changer d'objectif : plutôt que de chercher à maximiser leurs profits, souvent elles se forcent à réduire les coûts afin d'équilibrer leur budget.

L'activité du transport aérien est un processus complexe qui fait intervenir des investissements lourds (les avions et les infrastructures de maintenance), du personnel hautement qualifié (le personnel navigant, en particulier) et une informatique de haute technologie (les systèmes de réservation et de gestion). C'est aussi une activité d'un secteur où la concurrence est très forte, et où les prix affichés ne reflètent pas toujours les coûts de production instantanés. Ceci dit, les compagnies aériennes font face à un problème de grande taille et de forte complexité, ce qui fait que de nombreuses compagnies aériennes naissent et meurent continuellement dans le monde, et les compagnies les plus importantes s'allient, se restructurent, absorbent de plus petites compagnies qui n'arrivent pas à être rentables seules et luttent âprement pour conserver leurs parts de marché ou en gagner d'autres.

La stratégie d'une compagnie aérienne doit être très réactive en fonction de l'évolution du marché. Dans ces conditions, il est difficile d'imaginer une grande compagnie aérienne sans système d'optimisation qui contribue à améliorer l'efficacité de la com-

pagnie et lui permettre de décider mieux, plus vite et de façon coordonnée, lui donnant ainsi le prestige d'être la plus performante dans l'utilisation de ses ressources.

Ce système aura à confectionner un horaire de vols et à planifier l'utilisation de la flotte d'avions et des équipages. Il est à noter qu'un vol peut être composé de plusieurs segments de vol, chaque segment portant le même numéro de vol. En général, les segments d'un même vol sont effectués par le même avion, mais pas nécessairement par le même équipage. La planification de la flotte consiste à affecter un type d'avion à chaque vol selon ses caractéristiques et la disponibilité de la flotte. Le vol est défini comme étant une liaison entre une origine et une destination, pour laquelle on précise les jours et les heures d'opération. Il s'agit ensuite d'enchaîner pour chaque avion les vols et les opérations de maintenance de manière à satisfaire l'ensemble des contraintes opérationnelles (règles de maintenance, ...), ce qui définit la rotation de l'avion.

Une fois la planification des avions achevée, c'est au tour de la planification des équipages qui se déroule en deux phases : construction des rotations d'équipage et construction des horaires mensuels.

La rotation d'équipage est une suite de segments de vol, de connexions et de repos qui débute et se termine à la même base. L'objectif dans ce cas est de construire des rotations qui permettent une couverture de tous les segments de vols à coût minimum, tout en tenant compte des nombreuses règles de la convention collective et les normes de sécurité.

Quant aux horaires mensuels, ce sont des enchaînements de rotations, de périodes de repos, de formation, etc. La construction des horaires mensuels a pour objectif de maximiser la couverture des rotations déjà mises en place et la satisfaction du personnel, tout en respectant les règles des conventions collectives et les normes de sécurité.

Ce processus de planification aura à évaluer et restructurer régulièrement les principaux points à améliorer, en prenant en compte la circulation des avions, des membres d'équipage et des passagers, pour pouvoir conserver la plus grande part du marché et assurer la rentabilité de la compagnie. En résumé, ce processus s'effectue suivant l'ordre décrit dans la figure 1.1.

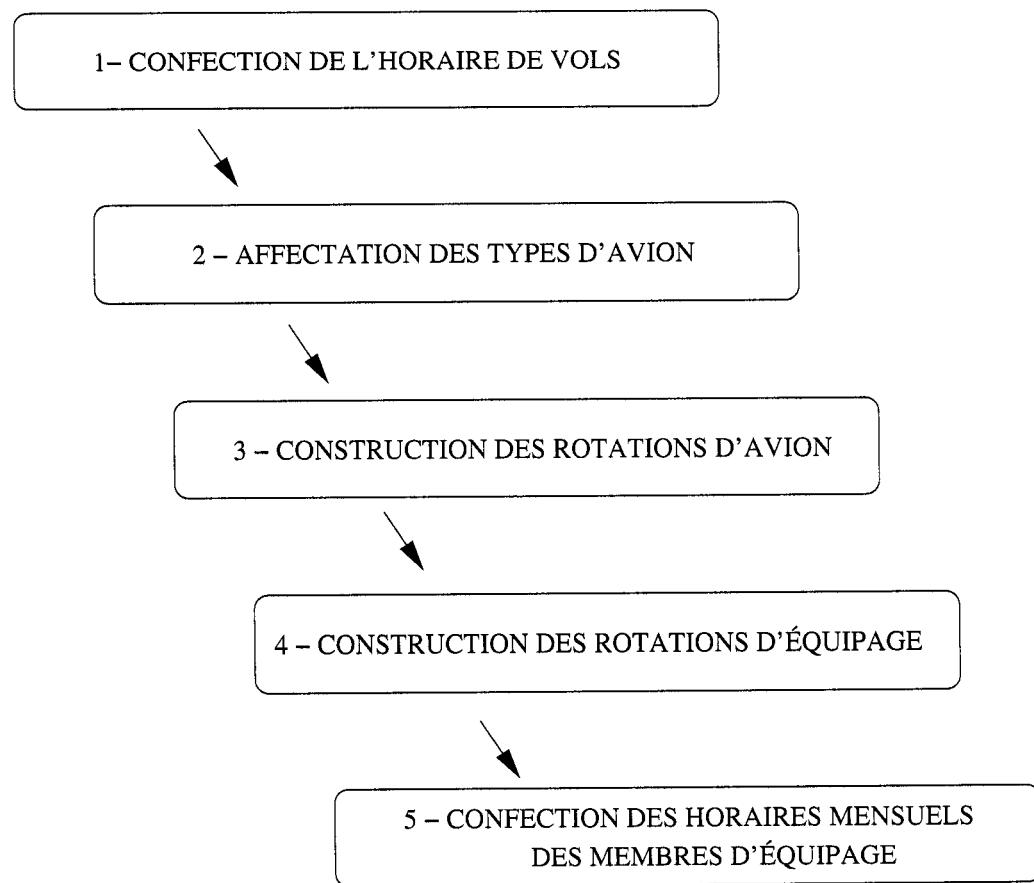


Figure 1.1 – Processus de planification en transport aérien.

## 1.1 Modèle de flot de passagers

Un des facteurs principaux à considérer lors de l'affectation des types d'avion est la demande des passagers sur les différents vols et le nombre de refus en fonction de la capacité de l'avion affecté. Les modèles de flot de passagers fournissent ces informations, critiques pour les décisions concernant la sélection de la taille des avions pour chaque vol. Ces modèles prédisent les ventes anticipées ainsi que les passagers refusés faute de place. C'est une technique qui est utilisée par l'industrie aérienne depuis le milieu des années 70.

Les modèles de flot de passagers font partie intégrante des systèmes modernes de *gestion du revenu*. L'idée de base derrière un modèle de flot de passagers est que la demande pour un marché peut être représentée par une distribution de probabilité. Un marché est un groupe de vols qui est défini en fonction des besoins de l'analyste ou de la compagnie aérienne. Ce pourrait être une paire origine-destination (O-D) ou un petit groupe d'O-D desservies par un ou plusieurs types d'avion ou encore toutes les O-D desservies par un seul type d'avion.

L'évaluation de la demande et du refus est très compliquée vu la nature stochastique de la demande en passagers. Elle revient à déterminer la circulation des passagers dans chaque marché, suivant les préférences des voyageurs pour chacune des routes existantes, ce que fait un modèle de flot de passagers.

En général, parmi plusieurs routes relient une même paire d'O-D, l'usager sera plus attiré vers une seule de ces routes. Cette attraction sera particulière pour un usager qui pourrait être influencé par un ou plusieurs facteurs intervenant dans le choix d'une route, comme le jour et l'heure de départ, le tarif, le type d'appareil, la durée du voyage, la qualité du service, etc.

L'attraction correspondant à une route peut être définie comme une proportion représentant la part des usagers attirés par cette route, ou d'une autre manière, comme un coefficient représentant la probabilité qu'un usager pris au hasard, choisisse cette route. Elle est l'un des facteurs agissant sur le remplissage des appareils et le refus des passagers (passagers excédentaires). Par ailleurs, il existe d'autres facteurs qui influent sur le remplissage des avions et le refus des passagers, entre autres la capacité de l'appareil utilisé. En effet, faute de place, des passagers peuvent être refusés sur un vol et peuvent se diriger vers d'autres routes du marché pour tenter de nouveau leur chance, ou tenter leur chance chez un concurrent, ce qui pourrait entraîner une perte de part de marché.

## 1.2 Problématique

Il n'est pas toujours facile de prédire, pour un ensemble de vols offerts par un transporteur aérien, quel sera le nombre de passagers attendus sur chaque paire d'O-D ainsi que sa répartition sur les vols proposés. C'est pourquoi dans ce mémoire on se propose d'étudier la circulation des passagers sur un réseau de vols constitué de différentes routes reliant plusieurs origines à plusieurs destinations, de façon à estimer, pour une demande pré-déterminée, l'achalandage des routes, la demande et le refus des passagers pour chaque vol. Une formulation pour un problème d'estimation du nombre de passagers doit prendre en compte deux facteurs déterminants dans le déplacement de ces derniers : l'attraction des routes et la capacité des avions utilisés sur celles-ci. En effet, un passager fait d'abord un choix de route en fonction de son attraction par rapport aux autres routes offertes. Toutefois, la disponibilité des sièges sur les segments qui composent la route n'est pas assurée. La capacité des avions peut donc l'obliger à modifier son choix.

### 1.3 Revue de littérature

Nous présentons dans cette section une revue de littérature pertinente à notre sujet qui résume quelques modèles de flot de passagers et études effectuées pour mesurer l'attraction relative à différentes routes, et estimer l'achalandage des vols offerts. Quatre catégories d'approches sont utilisées dans ces travaux. La première catégorie contient les approches basées sur la notion d'attraction des routes, la seconde est la catégorie qui contient les approches basées sur la notion d'inattraction des routes, la troisième catégorie contient les approches cherchant un équilibre dans un réseau stochastique. Nous débuterons cette revue de littérature par les travaux utilisant la notion d'attraction des routes.

Dans l'étude menée par Gagnon (1967), l'auteur définit pour chaque route un intervalle de temps où elle est la plus attrayante, et donne le temps où l'attraction de la route se termine. Dans un deuxième rapport publié subséquemment, une toute nouvelle approche a été utilisée. Deux autres formulations ont été proposées pour évaluer l'attraction d'une route pour un usager. L'une des formulations s'appuie sur une fonction exponentielle et l'autre sur une fonction hyperbolique. Elles sont en fonction de la durée de vol de la route, son heure de départ, l'heure de départ désirée par l'usager, un facteur relatif à l'avion ainsi que le nombre d'escales ou de connexions.

L'étude de Shaw (1968) sur l'interaction entre l'horaire et la demande des passagers sur chaque route est un peu spéciale. Il présente une procédure de simulation pour prédire le nombre de passagers sur chaque route, dans laquelle il définit deux étapes de décision pour une personne désirant voyager qui choisit une route parmi deux routes qui sont considérées attrayantes, l'une ayant son heure de départ juste avant l'heure de départ désirée et l'autre juste après. Dans la première étape, le voyageur fait un choix parmi les deux routes. Ce choix est simulé à partir des probabilités qui

représentent l'attraction relative des deux routes par rapport aux facteurs *heure de départ* et *durée de vol* pour chacune des deux routes. Dans la deuxième étape, le voyageur décide s'il accepte le désavantage en temps noté  $t$ , pour prendre la route choisie dans la première étape, et qui se traduit par la probabilité qu'il accepte d'avancer ou de retarder son voyage du temps  $t$  pour utiliser sa route préférée. Cette probabilité peut être considérée comme un coefficient d'attraction mais qui est mesuré par rapport au facteur *heure de départ* seulement.

Detzel (1971) propose un modèle fort simple pour calculer la probabilité qu'un usager choisisse une route et qui suppose que l'usager n'est attiré que par deux routes. La première ayant une heure de départ juste avant l'heure de départ souhaitée par l'usager et la seconde ayant une heure de départ juste après. La formule de calcul de la probabilité de choisir une route ne considère que trois facteurs qui sont l'heure de départ souhaitée par l'usager et les heures de départ de ces deux routes. Si  $t$  est l'heure de départ souhaitée par l'usager,  $t_1$  est l'heure de départ juste avant correspondant à la route 1, et  $t_2$  l'heure de départ juste après correspondant à la route 2, alors la probabilité que l'usager choisisse la route 1, notée  $P_1$ , est

$$P_1 = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}$$

tandis que la probabilité que la route 2 soit choisie est  $P_2 = 1 - P_1$ .

Le modèle de Wong et Birch (1978) développé chez Boeing considère deux types d'usagers et pose deux hypothèses de comportement. Le premier type d'usager tient compte uniquement de l'horaire du vol pour choisir sa route de voyage. Le deuxième type est influencé, en plus de l'horaire, par plusieurs autres facteurs dont le nombre et la durée des connexions et l'environnement du vol (service, confort). Une brève analyse a été faite par Boeing pour montrer l'importance de séparer les usagers en deux classes et de considérer l'attraction différemment pour chacune de ces classes. Il

a été remarqué que la proportion des voyageurs sensibles seulement à l'horaire décroît avec la durée du vol et la distance entre l'origine et la destination.

Aurignac et Benattar (1981) ont proposé un modèle pour déterminer la répartition théorique de la demande de voyageurs pour un horaire donné, dans le domaine du transport ferroviaire. Les auteurs ont défini pour chaque train une fonction d'utilité et des coefficients donnant la probabilité qu'un usager choisisse de voyager sur un train donné. Les auteurs divisent la journée en  $k$  intervalles de temps disjoints et posent l'hypothèse que les usagers souhaitant partir au cours d'un des intervalles de temps  $j$  veulent plutôt partir à l'instant  $t_j$  correspondant au milieu de cet intervalle. La probabilité de choisir un train  $i$  par l'usager de l'intervalle  $j$  est alors calculée par le rapport de l'utilité du train  $i$  à la somme des utilités de tous les trains. L'utilité d'un train  $i$  dépend du paramètre  $t_j$ , heure de départ pour l'intervalle  $j$ . La probabilité telle que définie correspond au coefficient d'attraction relative au train  $i$ .

Les modèles présentés ci-dessous font partie de l'approche qui est basée sur la notion d'inattraction des routes. Dans le modèle de Soumis (1978), l'auteur définit une mesure d'inattraction d'une route pour un usager qui est en fonction de l'heure de départ désirée. Ici les clients sont regroupés par intervalle de temps qu'on désigne par marché, où chaque intervalle de temps est divisé en sous-intervalles d'une demi-heure. Une O-D est divisée en autant de marchés qu'il y a de routes qui la desservent. À chaque marché  $q$  correspond une route  $q$  et un intervalle de temps pour lequel l'inattraction de la route  $q$  est minimum par rapport à l'ensemble des routes possibles. L'auteur suppose que les usagers de chaque marché ne peuvent choisir qu'entre trois routes : celle correspondant au marché, la route du marché précédent et la route du marché suivant dans le temps. Le coefficient d'inattraction d'une route parmi ces trois est alors défini en prenant la moyenne, sur l'ensemble des demi-heures, des inattractions pondérées par le nombre de passagers souhaitant partir durant la demi-heure.

Le modèle de Erikson et Tanedja (1980), développé dans le cadre d'une étude pour l'évaluation de la qualité des horaires offerts sur les vols, utilise une mesure des inconvénients qui correspond à la notion d'inattraction d'une route pour un usager, mais dans un intervalle de temps, la journée étant divisée en intervalles d'une demi-heure. Leur formule de calcul du coefficient d'inattraction pénalise plus les inconvénients dus au nombre de connexions et d'escales, et tient compte des décalages horaires.

Dans la troisième catégorie d'approches, on retrouve l'étude de Soumis et Nagurney (1993) dans laquelle les auteurs proposent un modèle d'équilibre dans un réseau multi-classes stochastique pour une journée typique dans une saison particulière où l'horaire des vols est considéré fixe et la demande en passagers connue. Ce modèle prend explicitement le comportement des clients face au choix des routes à travers un réseau avec des règles de décision aux noeuds et des flots de passagers sur les arcs. Les auteurs montrent que l'équilibre entre la demande réalisée sur les routes et les sièges disponibles, lequel détermine le nombre attendu de passagers par vol, satisfait un système d'équations non linéaires. L'algorithme de Gauss-Seidel est alors proposé pour résoudre ce système.

## 1.4 Contributions

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au problème de la circulation des passagers sur les vols, qui est un des facteurs essentiels de la planification aérienne. Dans un premier temps, nous proposons une étude du système utilisé par Air Canada pour prédire la circulation des usagers sur les vols proposés, afin de tenter d'identifier ses forces et ses faiblesses. Dans un deuxième temps, nous proposons deux modèles stochastiques pour reproduire le comportement des passagers dans un réseau. Ces modèles se rapprochent du processus de réservation mais sur un intervalle de temps plus court. Les résultats numériques des expériences réalisées confirment la capacité de notre approche à prédire le nombre de passagers acceptés et celui refusé sur les vols, pour une estimation des revenus. Les résultats obtenus sont de très bonne qualité et calculés dans des temps acceptables, comparativement à ceux obtenus par la simulation. Finalement, notre approche de modélisation est flexible et pourra être appliquée dans d'autres domaines du transport de passagers, à titre d'exemples, le transport ferroviaire et le transport en commun.

## 1.5 Organisation du mémoire

La suite du mémoire se présente sous la forme suivante. Dans le chapitre 2, on aborde l'étude du système utilisé par la compagnie aérienne Air Canada pour prédire la demande, le remplissage de ses appareils et le refus des passagers sur les routes. Dans le chapitre 3, on présente deux modèles d'équilibre pour estimer le nombre de passagers sur chaque route dans un réseau du transport aérien. Une mise en oeuvre de ces deux modèles et leurs variantes sont décrites dans ce chapitre. De plus, nous comparons les résultats numériques obtenus des différentes variantes avec ceux obtenus par l'algorithme de simulation du processus de réservation, pour les mêmes réseaux dont nous donnerons un petit aperçu dans le même chapitre.

## CHAPITRE 2 : ÉTUDE DU SYSTÈME UTILISÉ PAR AIR CANADA

Cette partie du mémoire est un projet qui a été réalisé en collaboration avec Air Canada. Le personnel du département de marketing utilise actuellement un système appelé PEM, pour *Passenger Evaluation Model*, qui leur permet de déterminer le flot des passagers sur les vols offerts par Air Canada pour une saison donnée. Nous avons obtenu comme mandat d'évaluer les performances de ce système en terme de qualité de solutions. Pour des raisons de confidentialité, le système utilisé est considéré comme une boîte noire qui, à partir d'un jeu de données, donne une solution qui représente le flot des passagers sur chacune des routes. L'évaluation de la performance de ce système est donc basée sur ces solutions. Dans ce chapitre, nous présentons l'étude que nous avons réalisée en nous basant sur des données d'une semaine typique de l'hiver 2001-2002 chez Air Canada, et exposons les résultats qui en découlent. Les données contiennent des informations sur chacune des routes du réseau d'Air Canada, à savoir les aéroports d'origine et de destination, les aéroports d'escale et de connexion s'il y a lieu, les vols associés, leur heure de départ et leur durée, la demande moyenne en passagers, le nombre moyen de passagers refusés sur la route, le nombre moyen de passagers récupérés à partir d'autres routes, ainsi que le nombre moyen de passagers acceptés sur la route. Ces données indiquent aussi pour chaque segment de vol le numéro de vol, le type et la capacité de l'avion qui lui est affecté. Ce chapitre comprend deux parties : la première partie étudie la répartition des passagers (section 2.2) et la deuxième traite du refus des passagers (sections 2.3 et 2.4). La section 2.1 donne une description du réseau d'Air Canada.

## 2.1 Description du réseau d'Air Canada

Le réseau associé aux données sur lesquelles notre étude repose est composé de 188 villes réparties sur le territoire canadien et international. Ces villes sont reliées entre elles au moyen de différents types de liaison : des liaisons à vol direct, des liaisons avec connexions (plus d'un segment de vol avec changement d'avion) et des liaisons avec escales (plus d'un segment de vol sans changement d'avion). L'ensemble de ces liaisons donne un total de 81943 routes potentielles, sur lesquelles un usager peut voyager pour se déplacer du lieu de sa provenance vers sa destination. Dans ce réseau, on peut distinguer sept types de routes suivant le nombre de segments de vol qui les composent. Un premier type est celui des routes à un segment de vol, ou routes à vol direct. Les autres types sont les routes à deux segments de vol et plus, qui sont des routes avec connexions ou des routes avec escales. La figure 2.1 présente la répartition des routes en nombre et en proportion sur le réseau selon le nombre de segments de vol qui leurs sont associés. Cette répartition montre que le réseau d'Air Canada est en majorité (98.3%) formé de routes à un, deux et trois segments de vols.

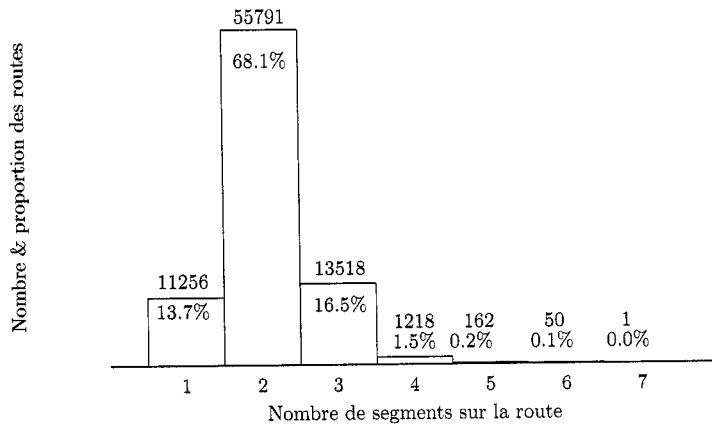


Figure 2.1 – Répartition des routes en fonction du nombre de segments de vol qui leurs sont associés.

## 2.2 Répartition de la demande en passagers dans le réseau

Dans cette section, nous abordons l'étude de la répartition de la demande en passagers sur les vols offerts par la compagnie, et la répartition des passagers acceptés à bord des vols. La demande des clients se répartit sur les vols suivant l'attraction de chacun d'entre eux. Les clients choisissent une route suivant leurs préférences, certains de ces clients peuvent être refusés faute de place et considèrent alors une autre route, alors que d'autres décident de ne pas voyager avec la compagnie.

L'étude nous a permis de constater que la demande en nombre de passagers est variable d'un type de route à un autre. En effet, elle est très grande sur les routes à un segment de vol (vols directs), moins grande sur les routes à deux segments de vol, et petite ou bien négligeable sur les autres routes. La figure 2.2 présente la quantification en nombre et en proportion de la demande selon chaque type de route.

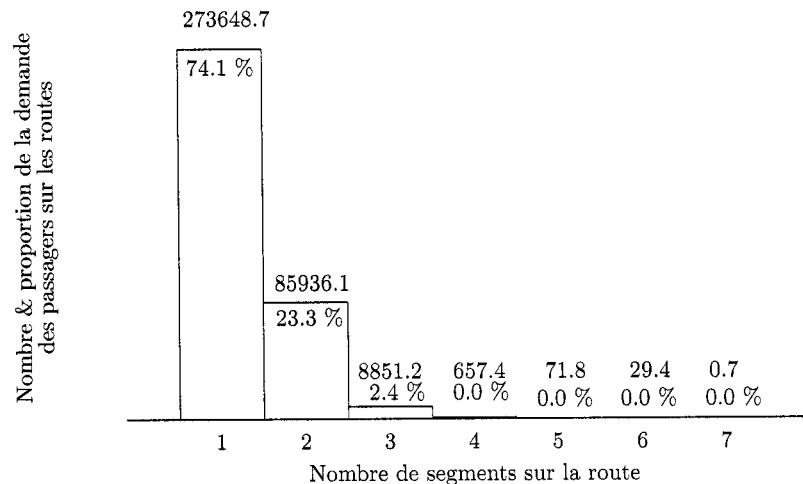


Figure 2.2 – Répartition de la demande selon le type de route.

La répartition du nombre de passagers à bord suit le même comportement que celui de la demande. En effet, ce nombre est considérable sur les routes à un segment de vol,

moins important sur les routes à deux segments de vol, et petit ou bien négligeable sur les autres routes. La quantification en nombre et en proportion de cette répartition est présentée dans la figure 2.3.

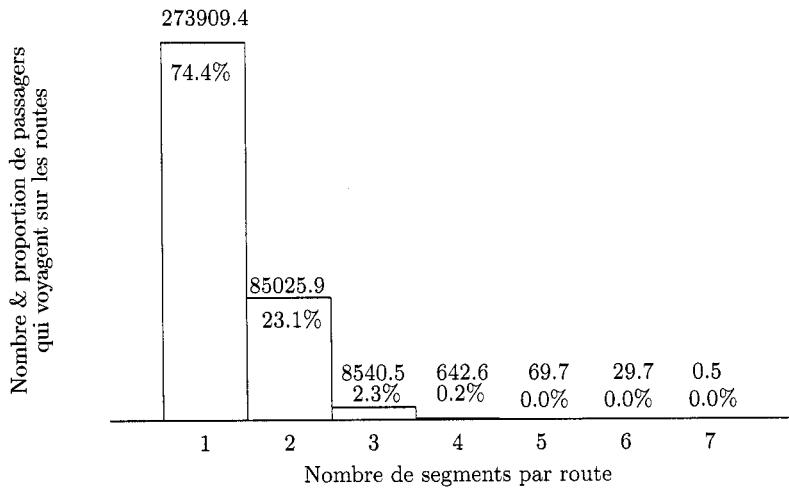


Figure 2.3 – Répartition des passagers à bord selon le type de route.

La répartition des routes selon le nombre de segments en fonction du nombre de passagers à bord est donnée dans les tableaux 2.1, 2.2 et 2.3. Le tableau 2.1 présente la répartition des routes selon le nombre de segments et par intervalle du nombre de passagers à bord. Comme la majorité des routes ont moins de 10 passagers à bord, le tableau 2.2 raffine la répartition pour l'intervalle [0,10]. Il présente la répartition de ces routes par intervalle, pour un nombre de moins de dix passagers à bord. Finalement, pour donner une vue plus précise, le tableau 2.3 présente la répartition des routes sur un intervalle de moins d'un passager à bord et sur un intervalle de plus d'un passager, et la répartition des routes sur un intervalle à moins de deux passagers à bord et sur un intervalle à plus de deux passagers à bord. De ce tableau, on constate qu'un fort pourcentage de routes (70.4 %) ont moins de deux passagers à bord. La répartition des routes selon le type pour le nombre de 20 passagers à bord et plus (2.1) montre que les routes à un et deux segments de vol sont les plus achalandées dans le réseau.

Tableau 2.1 – Nombre de routes par type suivant le nombre de passagers à bord par intervalle.

Route à	Intervalle du nombre de passagers à bord							$\geq 100$
	[0, 10[	[10, 20[	[20, 30[	[30, 40[	[40, 50[	[50, 60[	[60, 70[	
<b>1 segment</b>	4951	1927	796	1128	650	416	507	310
<b>2 segments</b>	55003	630	91	25	9	16	8	4
<b>3 segments</b>	13509	9	–	–	–	–	–	–
<b>4 segments</b>	1218	–	–	–	–	–	–	–
<b>5 segments</b>	162	–	–	–	–	–	–	–
<b>6 segments</b>	50	–	–	–	–	–	–	–
<b>7 segments</b>	1	–	–	–	–	–	–	–

Tableau 2.2 – Nombre de routes par type suivant le nombre de passagers à bord par intervalle.

Route à	Intervalle du nombre de passagers à bord						
	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, 4]	[4, 5]	[5, 6]	[6, 7]
<b>1 segment</b>	424	301	591	786	799	543	412
<b>2 segments</b>	31616	11624	5359	2704	1524	898	540
<b>3 segments</b>	10809	1596	644	260	101	57	23
<b>4 segments</b>	1045	94	40	31	7	1	—
<b>5 segments</b>	146	9	1	6	—	—	—
<b>6 segments</b>	44	6	—	—	—	—	—
<b>7 segments</b>	1	—	—	—	—	—	—

Tableau 2.3 – Répartition des routes par type suivant le nombre de passagers à bord par intervalle.

Route à	Moins d'un passager à bord		Un passager et plus à bord	
	Nombre	Proportion %	Nombre	Proportion %
<b>1 segment</b>	424	0.5	10779	13.2
<b>2 segments</b>	31316	38.6	24175	29.5
<b>3 segments</b>	10809	13.2	2709	3.3
<b>4 segments</b>	1045	1.3	173	0.2
<b>5 segments</b>	146	0.2	16	0.0
<b>6 segments</b>	44	0.1	6	0.0
<b>7 segments</b>	1	0.0	0	0.0
<b>Total</b>	44085	53.8	37858	46.2

Route à	Moins de deux passagers à bord		Deux passagers et plus à bord	
	Nombre	Proportion %	Nombre	Proportion %
<b>1 segment</b>	725	0.9	10478	12.8
<b>2 segments</b>	43240	52.8	12551	15.3
<b>3 segments</b>	12405	15.1	1113	1.4
<b>4 segments</b>	1139	1.4	79	0.1
<b>5 segments</b>	155	0.2	7	0.0
<b>6 segments</b>	50	0.1	0	0.0
<b>7 segments</b>	11	0.0	0	0.0
<b>Total</b>	57715	70.4	24228	29.6

## 2.3 Refus des passagers

L'étude sur la répartition des passagers à bord des vols montre que les routes à un et deux segments de vol couvrent la plus grande part du marché de la compagnie en terme de passagers à bord, puisque 97.5 % des voyageurs empruntent sur ces deux types de route. Comme la majeure partie des revenus de la compagnie en dépend, nous avons davantage orienté notre étude vers les deux types de route dominants, soit les routes à un et à deux segments de vol.

Avant d'entamer cette partie de l'étude, nous allons définir la notion du pourcentage de remplissage et celle du pourcentage de refus que nous allons souvent utiliser. Le pourcentage de remplissage ( $PRm$ ) et le pourcentage de refus ( $PRf$ ) pour un segment de vol  $i$  sont calculés à partir des formules qui suivent :

$$PRm_i = \frac{Bord_i}{Cap_i} \times 100$$

$$PRf_i = \frac{Rf_i}{Dem_i + Rec_i} \times 100$$

où

- $Dem_i$  est la demande en nombre de passagers pour le segment de vol  $i$ ;
- $Rf_i$  est le nombre de passagers dont la demande a été rejetée sur le segment  $i$ ;
- $Bord_i$  est le nombre de passagers dont la demande a été acceptée sur le segment  $i$ ;
- $Rec_i$  est le nombre de passagers dont la demande a été rejetée ailleurs et qui veulent utiliser le segment de vol  $i$  pour voyager ;
- $Cap_i$  est la capacité de l'appareil utilisé sur le segment de vol  $i$ ;

Cette partie de l'étude comprend quatre sous-sections dans lesquelles nous allons présenter la variation et la répartition du pourcentage de refus, ensuite le nombre de passagers refusés sur les routes et, finalement, l'étude du pourcentage de refus suivant l'ordre des routes dans le fichier. Nous la terminons par une série de remarques dans une cinquième sous-section.

### 2.3.1 Variation du pourcentage de refus

L'étude que nous avons effectuée sur le refus des passagers calculé par le modèle, lequel consistait à déterminer le remplissage des appareils et le refus des passagers sur les vols proposés, nous a permis de constater l'existence d'une borne maximale de remplissage. Cette borne est de 90% de la capacité de chaque appareil utilisé. Le remplissage observé est généralement au-dessus des 30% de la capacité de l'appareil. Par ailleurs, pour un même pourcentage de remplissage, le pourcentage de refus observé est assez variable. La figure 2.4 présente la borne maximale de remplissage et la variation du pourcentage de refus en fonction du pourcentage de remplissage sur les vols observés chez Air Canada. Dans cette figure, chaque point représente un segment de vol.

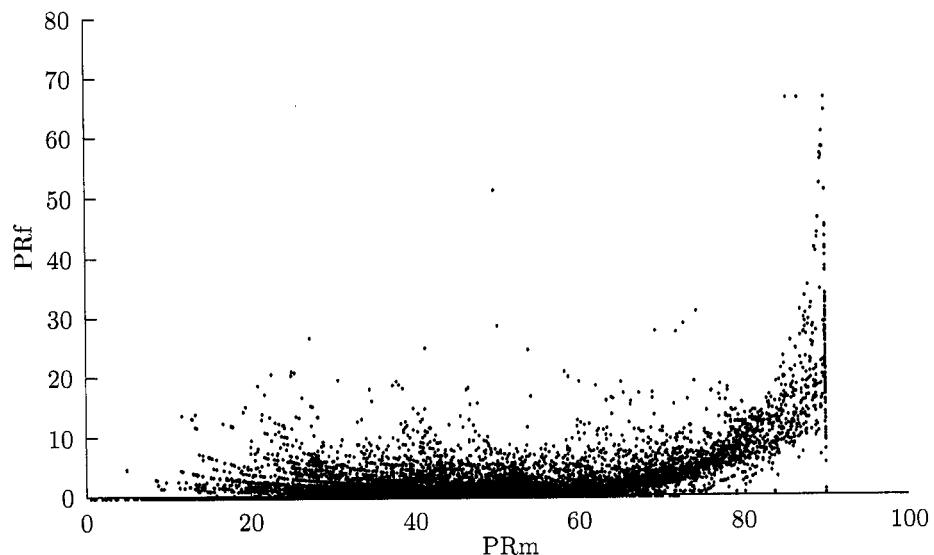


Figure 2.4 – Variation du PRf par rapport au PRm sur les vols d'Air Canada.

Le tableau 2.4, extrait des données de la figure 2.4, rapporte quelques cas numériques de variation du pourcentage de refus pour un même pourcentage de remplissage. Dans la première partie du tableau, on présente cinq segments de vol ayant un pourcentage de remplissage égal à 50 et pour lesquels le pourcentage de refus varie entre 0 et 5.2. Dans la deuxième partie, on observe une plus forte variation du pourcentage de refus (de 6.4 à 13.3) pour trois segments de vol ayant un pourcentage de remplissage égal à 80.

Tableau 2.4 – Variation du PRf pour un même PRm.

SEGMENT	VOL	jour	PRm	PRf
YOW YYZ	AC 1017	2	50.0	0.0
YYZ MTH	AC 1992	4	50.0	1.1
YYZ YGK	AC 1383	6	50.0	3.7
YUL YQB	AC 8708	6	50.0	4.2
YSB YYZ	AC 1300	7	50.0	5.2
YQX YYT	AC 8238	6	80.0	6.4
YYC YQR	AC 8516	4	80.0	8.9
YZR YYZ	AC 1890	4	80.0	13.3

Il est à noter que la variation du pourcentage de refus peut s'expliquer pour les segments avec un taux de remplissage de 90%, qui est la borne maximale de remplissage observé. En effet, la demande excédant les 90% est refusée quel qu'en soit le pourcentage. Cette variation est probablement due à la capacité de l'appareil utilisé sur le segment qui ne couvre pas la demande. Un exemple de cette situation est le vol AC 3970 du jour 1 sur le segment YYZ-YHZ. Le pourcentage de remplissage est de 90% et le pourcentage de refus est de 41.7%. L'appareil utilisé a une capacité de 100 passagers, ce qui fait qu'on parle d'un nombre de plus de 41 passagers refusés sur ce segment. Pour les remplissages inférieurs à 90%, la variation du pourcentage de refus est difficilement explicable.

### 2.3.2 Répartition du pourcentage de refus sur une route

Avant d'entamer cette partie de l'étude, nous allons définir la notion du pourcentage de refus sur une route  $r$  qui est donné par la formule

$$PRf_r = \frac{Rf_r}{Dem_r + Rec_r} \times 100$$

où

- $Dem_r$  est la demande en nombre de passagers pour la route  $r$  ;
- $Rf_r$  est le nombre de passagers dont la demande a été rejetée sur la route  $r$  ;
- $Rec_r$  est le nombre de passagers dont la demande a été rejetée ailleurs et qui veulent utiliser la route  $r$  pour voyager ;

Lorsqu'un passager est refusé sur une route à deux segments et plus, cela veut dire qu'il a été refusé sur au moins un des segments qui forment cette route. Le pourcentage de refus sur la route  $r$  ( $PRf_r$ ) sera au plus égal à la somme des pourcentages de refus sur les segments ( $\sum_{i \in r} PRf_i$ ). Par contre, si un passager est refusé sur un segment, il est refusé sur la route. Donc le refus se produit en même temps sur tous les segments, le pourcentage de refus sur la route sera au moins égal au plus grand des pourcentages de refus sur un segment ( $\max_{i \in r} PRf_i$ ), celui-ci dominant les autres.

En résumé :

$$\max_{i \in r} PRf_i \leq PRf_r \leq \sum_{i \in r} PRf_i.$$

Pour faire cette étude, nous avons considéré un échantillon de routes à deux segments de vol où chaque route contient au moins un nombre de 20 passagers à bord. En général, le pourcentage de refus sur les routes observées dans notre étude ne vérifie pas la relation ci-dessus. Le tableau 2.5 présente quelques cas de cette observation. Dans ce tableau, pour chaque route et jour, les colonnes indiquent la demande en

passagers  $Dem$ , le nombre de passagers à bord  $Bord$ , le nombre de passagers refusés  $Rf$ , le nombre de passagers récuprés par la route  $Rec$ , le pourcentage de refus  $PRf$ , le maximum des pourcentages de refus des segments de la route max  $PRf$  et la somme des pourcentages de refus des segments de la route  $\sum PRf$ .

Le pourcentage de refus sur les routes observées dans notre étude est beaucoup plus petit que la borne supérieure, soit la somme des pourcentages de refus qui se trouve être une surestimation de ce pourcentage. Les résultats sont donc satisfaisants sur ce point. Par contre, il est généralement plus petit que la borne inférieure, à savoir le maximum des pourcentages de refus sur les segments de la route. Les résultats du modèle sont donc suspects sur ce point.

Certaines erreurs ne sont peut-être pas significatives quand les nombres de passagers sont petits et que les pourcentages de refus ont été arrondis à une décimale. Nous allons poursuivre l'étude sur ce point dans la prochaine section en travaillant avec le nombre de passagers refusés plutôt que le pourcentage de passagers refusés. De plus, nous allons introduire une nouvelle borne supérieure sur les résultats attendus du modèle.

Tableau 2.5 – Comparaison du  $PRf_r$  sur route avec  $\sum PRf$  et  $\max PRf$  sur ses segments de vol.

Route	jour	Dem	Bord	Rf	Rec	PRf	max PRf	$\sum PRf$
PEK YVR	1	48.1	46.8	3.8	2.5	7.5		
YVR YYZ	1	95.6	80.0	18.9	3.3	19.1		
PEK YVR YYZ	1	27.4	26.6	5.4	4.5	16.9	19.1	26.6
PEK YVR	3	47.8	46.7	3.6	2.6	7.1		
YVR YYZ	3	94.9	80.0	18.1	3.2	18.5		
PEK YVR YYZ	3	27.2	26.3	5.2	4.3	16.5	18.5	25.6
HKG YVR	1	105.6	104.4	4.9	3.7	4.5		
YVR YUL	1	102.2	102.1	6.5	6.4	6.0		
HKG YVR YUL	1	20.6	22.0	1.3	2.7	5.6	6.0	14.9
PVG YVR	4	60.0	54.3	9.6	3.9	15.0		
YVR YYZ	4	95.5	78.1	19.5	2.1	20.0		
PVG YVR YYZ	4	32.9	31.2	6.7	5.0	17.7	20.0	35.0
PVG YVR	5	61.6	59.4	7.9	5.6	11.8		
YVR YYZ	5	95.2	68.9	27.6	1.2	28.6		
PVG YVR YYZ	5	28.6	22.9	8.3	2.6	26.6	28.6	40.4
YYZ YVR	5	108.1	78.7	30.2	0.9	27.7		
YVR HKG	5	42.7	55.8	1.4	14.5	2.4		
YYZ YVR HKG	5	74.7	59.3	20.9	5.5	26.1	27.7	30.2
YYZ YVR	6	102.0	97.2	9.5	4.8	8.9		
YVR HKG	6	36.8	38.9	4.5	6.7	10.3		
YYZ YVR HKG	6	46.8	62.5	4.4	20.1	6.6	10.3	19.2
YYZ YVR	4	96.4	81.3	16.9	1.8	17.2		
YVR HKG	4	39.5	38.1	6.9	5.5	15.3		
YYZ YVR HKG	4	73.8	73.6	12.9	12.7	14.9	17.2	32.5

### 2.3.3 Estimation du nombre de passagers refusés sur les routes

Afin de calculer le nombre de passagers refusés sur les routes et mesurer l'erreur sur ce nombre, nous avons utilisé quelques notions de probabilité dont l'hypothèse d'indépendance où on suppose que, pour chacune des routes, le refus sur chacun de ces segments ne dépend pas du refus sur les autres segments. Pour ce faire, nous avons considéré un échantillon de routes à deux segments de vol où chaque route a un nombre de passagers à bord compris entre 20 et 50. On dénote par

$Dem_r$  : la demande en nombre de passagers pour la route  $r$ .

$Rf_r$  : le nombre de passagers refusés sur la route  $r$  ;

$P_i$  : la probabilité d'être refusé sur le segment  $i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , où

$$P_i = \frac{Rf_i}{Dem_i + Rec_i};$$

$(1 - P_i)$  : la probabilité d'être accepté sur le segment  $i$  ;

$P$  : la probabilité d'être refusé sur la route suivant l'hypothèse d'indépendance.

$Max_P$  : le maximum entre  $P_1$  et  $P_2$ .

La probabilité d'être refusé sur la route suivant l'hypothèse d'indépendance est donnée par la formule suivante :

$$P = 1 - (1 - P_1) \times (1 - P_2).$$

Pour analyser les données, nous utiliserons les deux mesures suivantes :

Le nombre de passagers refusés sur la route  $r$  suivant l'hypothèse d'indépendance est donné par  $Nombre.Probable = P \times Dem_r$  ;

Le nombre maximum de passagers de la route  $r$  refusés sur un segment est donné par  $Nombre.Max = Max_P \times Dem_r$ .

Suivant l'hypothèse d'indépendance, lorsqu'un refus se produit sur une route, il peut se produire sur l'un ou l'autre de ses segments, ou les deux en même temps. Ceci dit, le nombre de passagers refusés sur la route sera au moins égal à *NOMBRE.MAX*.

$$\begin{aligned}
 P &= 1 - (1 - P_1) \times (1 - P_2), \\
 &= P_1 + P_2 - P_1 P_2, \\
 &= P_1(1 - P_2) + P_2 \geq P_2, \\
 \text{et } P &= P_2(1 - P_1) + P_1 \geq P_1.
 \end{aligned}$$

Ce qui donne que  $P \geq \max\{P_1, P_2\}$ .

Par ailleurs, et pour un jour de pointe, il se trouve que la demande peut être synchronisée, c'est-à-dire qu'elle augmente sur plusieurs vols en même temps, ce qui donne en pratique une certaine corrélation positive entre les demandes sur les vols plutôt que d'être indépendantes.

On définit par  $v_i$  l'événement d'être refusé sur le segment  $i$ .

La probabilité d'être refusé sur le segment  $i$  est donnée par  $P(v_i = 1) = P_i$ .

La probabilité d'être refusé sur la route  $r$  suivant l'hypothèse d'indépendance est

$$\begin{aligned}
 P_{ind} &= P_1 + P((v_2 = 1)/(v_1 = 0)) \times P(v_1 = 0), \\
 &= P_1 + \frac{P((v_2 = 1) \cap (v_1 = 0))}{P(v_1 = 0)} \times P(v_1 = 0), \\
 &= P_1 + \frac{P_2 \times (1 - P_1)}{(1 - P_1)} \times (1 - P_1), \\
 P_{ind} &= P_1 + P_2 \times (1 - P_1).
 \end{aligned}$$

En présence d'une corrélation positive entre les demandes, on a

$$P(v_2 = 1/v_1 = 0) \leq P(v_2 = 1).$$

Ce qui donne que la probabilité d'être refusé sur la route  $r$  en présence de corrélation positive entre les demandes

$$P_{cor} = P_1 + P((v_2 = 1)/(v_1 = 0)) \times P(v_1 = 0) \leq P_1 + P_2 \times (1 - P_1) = P_{ind}$$

Par conséquent le nombre de passagers refusés sur une route en présence de corrélation positive entre la demande sur ses segments de vol est au plus égal au *Nombre.Probable* qui correspond à l'hypothèse d'indépendance. Le *Nombre.Probable* sera égal au *Nombre.Max* si l'un des deux segments de vol n'admet pas de refus. En résumé :

$$\text{Nombre.Max} \leq Rf_r \leq \text{Nombre.Probable}.$$

Les deux dernières colonnes du tableau 2.6 rapportent les valeurs de *Nombre.Max* et *Nombre.Probable* calculées pour chacune des routes considérées.

À partir des résultats du tableau 2.6, nous constatons que le nombre de passagers refusés sur les routes est plus petit que les deux bornes utilisées. Ce fait peut être dû à une dépendance entre le refus sur les deux segments de la route considérée, ou bien encore à un calcul biaisé dans l'algorithme qu'utilise le logiciel *PEM*. Toutefois, l'écart entre le nombre de passagers refusés sur la route et le *Nombre.Max* estimé est en général de moins d'un passager.

Tableau 2.6 – Comparaison de  $Rf_r$  avec *Nombre.Max* et *Nombre.Probable*.

Routes	Jour	Dem	Bord	$Rf_i$	$Rf_r$	Rec	$PRf_i$	$PRf_r$	<i>Nombre.Max</i>	<i>Nombre.Probable</i>
PEK YVR	1	48.1	46.8	3.8		2.5	7.5			
YVR YYZ	1	94.7	94.1	8.1		7.5	7.9			
PEK YVR YYZ	1	32.5	42.0		2.8	12.2		6.3	3.54	6.63
PEK YVR	1	48.1	46.8	3.8		2.5	7.5			
YVR YYZ	1	95.6	80.0	18.9		3.3	19.1			
PEK YVR YYZ	1	27.4	26.6		5.4	4.5		16.9	6.10	8.03
PEK YVR	2	38.9	39.6	1.9		2.6	4.6			
YVR YYZ	2	94.9	95.4	7.4		7.9	7.2			
PEK YVR YYZ	2	31.5	41.5		2.4	12.5		5.5	3.17	5.04
PEK YVR	2	38.9	39.6	1.9		2.6	4.6			
YVR YYZ	2	95.5	79.5	19.3		3.3	19.5			
PEK YVR YYZ	2	26.6	25.6		5.4	4.4		17.4	6.06	7.20
PEK YVR	3	47.8	46.7	3.6		2.6	7.1			
YVR YYZ	3	95.1	77.8	19.4		2.1	20.0			
PEK YVR YYZ	3	32.6	29.4		6.6	3.4		18.3	7.19	9.24
PEK YVR	3	47.8	46.7	3.6		2.6	7.1			
YVR YYZ	3	94.9	80.0	18.1		3.2	18.5			
PEK YVR YYZ	3	27.2	26.3		5.2	4.3		16.5	5.81	7.65
PEK YVR	4	44.7	44.0	3.2		2.5	6.8			
YVR YYZ	4	95.5	78.1	19.5		2.1	20.0			
PEK YVR YYZ	4	31.9	28.7		6.5	3.4		18.4	7.05	8.97
PEK YVR	4	44.7	44.0	3.2		2.5	6.8			
YVR YYZ	4	95.8	74.1	23.7		2.0	24.2			
PEK YVR YYZ	4	27.3	23.2		6.8	2.7		22.7	7.27	8.81
PEK YVR	5	45.9	44.4	3.9		2.3	8.1			
YVR YYZ	5	94.3	79.1	17.5		2.4	18.1			
PEK YVR YYZ	5	33.9	31.6		6.3	4.0		16.6	6.86	9.37
PEK YVR	5	45.9	44.4	3.9		2.3	8.1			
YVR YYZ	5	95.2	68.9	27.6		1.2	28.6			
PEK YVR YYZ	5	28.1	21.7		8.1	1.8		27.1	8.56	10.29
PEK YVR	6	44.9	48.1	0.7		3.9	1.4			
YVR YYZ	6	96.4	78.0	20.5		2.0	20.8			
PEK YVR YYZ	6	31.5	28.0		6.7	3.2		19.3	7.23	7.62
PEK YVR	7	43.4	44.1	2.1		2.8	4.5			
YVR YYZ	7	96.0	80.1	18.4		2.5	18.7			
PEK YVR YYZ	7	29.6	27.7		5.7	3.7		17.1	6.22	7.45

### 2.3.4 Étude du pourcentage de refus suivant l'ordre des routes dans le fichier de données

L'une des questions qui se sont posées suite aux premières études était de savoir si l'ordre des routes dans le fichier de données avait une influence sur le pourcentage de refus. En effet, certaines techniques (heuristiques) utilisées pour déterminer le flot des passagers dans un réseau traitent séquentiellement les demandes sur les routes selon l'ordre des routes dans le fichier.

Pour tenter de répondre à cette question, nous avons essayé de voir s'il existe une relation entre le pourcentage de refus et l'ordre des routes donné dans le fichier. Pour ce faire, nous avons utilisé un échantillon de 320 segments de vol ayant un taux de remplissage compris entre 85% et 90% de la capacité de l'appareil utilisé sur le segment.

Suivant l'ordre des routes donné dans le fichier, on définit par :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le segment } j \text{ est emprunté par la route } i \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où le segment  $j$  correspond à la  $j^{\text{ième}}$  route dans le fichier.

$D_i$  : la demande sur la route  $i$ .

$C_j$  : la capacité de l'appareil utilisé sur le segment de vol  $j$ .

$Dc_j$  : la demande connue sur un segment  $j$  au moment du traitement de la route contenant ce segment, donnée par la somme de la demande locale (i.e., sur le segment même) et de toute la demande sur les routes à plus d'un segment qui utilisent ce segment et qui la précèdent dans le fichier :

$$Dc_j = \sum_{i=0}^j (D_i \times x_{ij}).$$

$PDc_j$  : le pourcentage de la demande connue par rapport à la capacité du segment  $j$  donné par

$$PDc_j = \frac{Dc_j}{C_j} \times 100.$$

$Dt_j$  : la demande totale sur un segment  $j$  donnée par la somme de la demande locale et toute la demande sur les routes qui l'empruntent

$$Dt_j = \sum_{i=0}^{81942} (D_i \times x_{ij}).$$

(Rappelons que le jeu de données d'Air Canada compte 81943 routes.)

$PDt_j$  : le pourcentage de la demande totale par rapport à la capacité du segment  $j$  donné par

$$PDt_j = \frac{Dt_j}{C_j} \times 100$$

Dans un premier temps, nous avons commencé par comparer le pourcentage de refus local des passagers ( $PRfL$ ) avec le pourcentage de la demande connue sur le segment de vol ( $PDc$ ), ce qui est présenté à la figure 2.5, où chaque point représente un segment de vol. Dans le cas où le traitement des routes se ferait selon l'ordre qui est donné dans le fichier, le pourcentage de refus local des passagers devrait être pratiquement nul pour un segment de vol qui n'atteint pas sa limite de remplissage (90%) lorsqu'il est traité. Cette analyse nous a permis de constater le contraire. En effet, pour des demandes connues inférieures à 75%, le pourcentage de refus varie entre 0% et 30%.

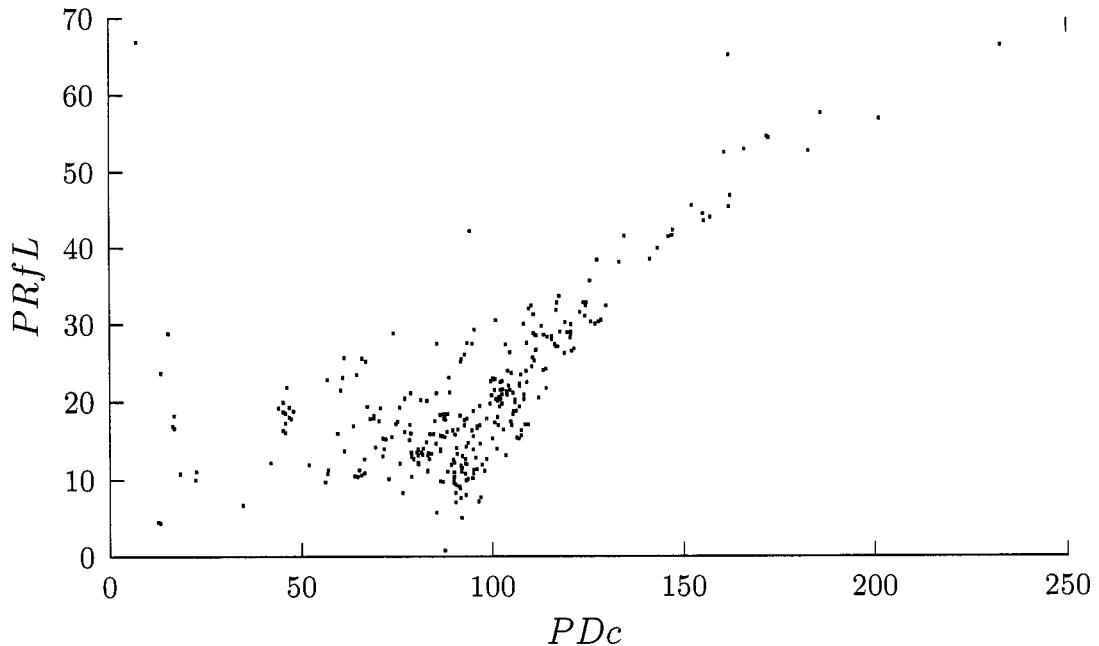


Figure 2.5 –  $PRfL$  versus  $PDc$ .

Nous avons ensuite comparé le pourcentage de refus local des passagers ( $PRfL$ ) et le pourcentage de la demande totale sur le segment de vol ( $PDt$ ), ce qui est présenté à la figure 2.6. Cette deuxième analyse nous a encore permis de conclure que l'ordre du fichier n'a pas d'influence sur le pourcentage de refus local. Il dépend plutôt de la demande totale sur le segment.

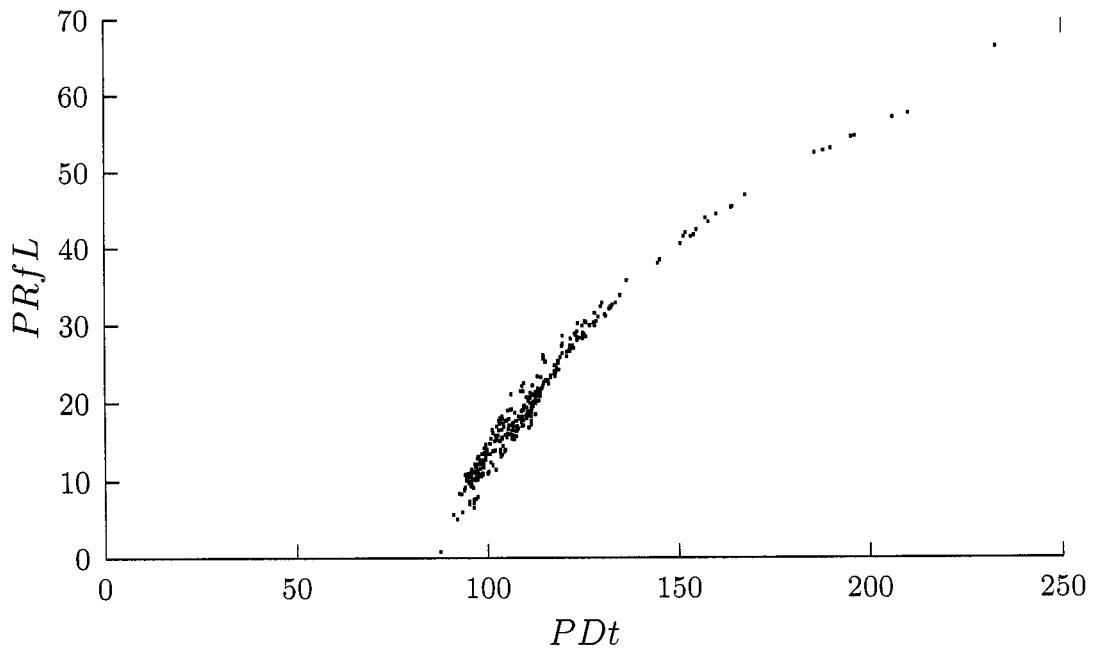


Figure 2.6 – PRfL versus PDt.

### 2.3.5 Remarques

L'étude sur le refus des passagers pour les deux types de route nous a permis de constater que pour certaines routes où la demande est petite, le pourcentage de refus est grand. Cependant le nombre de passagers refusés peut être petit. Ce fait peut être dû aux arrondis utilisés dans l'écriture des données du fichier. Le tableau 2.7 rapporte deux exemples.

Pour la première route, le nombre de passagers refusés est de 0.2 et la somme entre la demande et la récupération de passagers est de 2, ce qui fait 10 % de refus. Si en

Tableau 2.7 – Variation de PRf suivant Dem et Rf.

Vols	Routes	jour	Dem	Bord	Rf	Rec	PRf
AC871 AC155	CDG YUL YYC	2	1.9	1.8	0.2	0.1	10.00
AC967 AC173	BGI YYZ YEG	2	3.4	3.5	0.6	0.7	14.63

réalité le nombre de refus était plus petit que 0.2, par exemple 0.16 et la demande de 1.95 au lieu de 2 alors le pourcentage de refus serait de 7.8 % qui est différent de 10 %. Dans le cas où le nombre réel de refus était plus grand que 0.2, par exemple 0.24, et la demande 1.85 alors le pourcentage de refus serait de 12.31 % ce qui est différent de 10 %.

Ceci peut être une des explications possibles pour certains des segments de vol qui possèdent un même taux de remplissage mais pas le même taux de refus. Par ailleurs, pour les autres segments qui n'atteignent pas le 90 % de remplissage, le phénomène du refus qui varie reste inexplicable.

## 2.4 Résultats et conclusions

Les résultats qui découlent de notre étude concernant la relation entre le refus sur les routes et le refus sur les segments qui les constituent sont les suivants :

1. Le remplissage maximal est de 90% de la capacité de chaque appareil utilisé ;
2. Pour un même pourcentage de remplissage des appareils, le pourcentage de refus des passagers est variable ;
3. Le refus sur la route en pourcentage n'est pas cohérent avec celui des segments qui la forment. Les erreurs en pourcentage sont souvent assez grandes. Ce fait

n'a pas pu être expliqué. Il faudrait une étude plus approfondie du système lui-même ;

4. Parfois, pour une route avec une petite demande qui partage un segment de vol avec d'autres ayant une grande demande, le pourcentage de refus par rapport à la demande est très grand ;
5. Le pourcentage de refus sur les routes est rarement compris entre le maximum des pourcentages sur les segments et la somme des pourcentages sur les segments.
6. L'erreur en nombre de passagers est toutefois assez petite entre le nombre de passagers refusés selon le modèle utilisé et le *Nombre.Max* calculé selon les règles de probabilité ;
7. L'ordre des routes données dans le fichier n'a pas d'influence sur le refus des passagers. Par contre, l'ordre de traitement des routes, s'il existe, pourrait être un des facteurs influençant le refus de passagers ;
8. Pour un segment donné, le refus local des passagers est influencé par la demande sur toutes les routes qui l'utilisent ;
9. Dans le cas où la capacité de l'appareil ne répond pas à la demande, le refus de passagers peut être très important et peut atteindre 50% du nombre de passagers à bord ;
10. Le nombre de passagers refusés calculé suivant le modèle se rapproche de celui des passagers récupérés. Par conséquent, le nombre de passagers transportés est assez proche de celui de la demande ;

Le modèle donne une légère sous-estimation du nombre de passagers refusés sur chacune des routes du réseau considéré. Cette sous-estimation peut atteindre parfois deux passagers et devient importante du fait que l'addition de ces erreurs en nombre de passagers qui devraient être considérés comme étant refusés plutôt qu'acceptés, pourrait donner un mauvais calcul du nombre de passagers transportés, d'où une mauvaise estimation du revenu.

# **CHAPITRE 3 : MODÈLES D'ÉQUILIBRE DE FLOTS DE PASSAGERS AVEC COMPOSANTE TEMPORELLE ET DÉBORDEMENT INDÉPENDANT**

## **3.1 Introduction**

Dans ce chapitre, nous présentons deux modèles de flots de passagers avec composante temporelle et débordement indépendant. Nous débuterons par une introduction de quelques approches utilisées dans le domaine du transport aérien de passagers, suivra un aperçu d'un l'algorithme de simulation du processus de réservation qui servira à valider les résultats de nos modèles. Nous poursuivrons avec la présentation de notre premier modèle en précisant les hypothèses considérées. Nous développerons par la suite les méthodes de résolution utilisées pour déterminer la solution du modèle et de ses variantes. Nous présenterons une série de tests et une interprétation des résultats obtenus comparativement à ceux obtenus par l'algorithme de simulation. Dans une dernière partie, nous présenterons notre deuxième modèle et ses variantes et nous finirons par la série de tests et l'interprétation des résultats obtenus comme pour le premier modèle.

### 3.1.1 Approches utilisées pour la prédition du nombre de passagers excédentaires

L'importance de connaître l'achalandage des passagers sur l'ensemble des vols offerts par une compagnie aérienne n'est plus à démontrer. En effet, cette information permet de prédire les ventes et facilite les prises de décisions lors de la sélection et de l'assignation d'appareils aux différents vols. Cette information permet aussi de prédire le manque à gagner lorsque la demande dépasse la capacité des avions. En effet, lorsqu'un vol offert attire plus de passagers que ce que sa capacité lui permet de transporter, le surplus doit être détourné vers d'autres vols ou tout simplement refusé et perdu. Il devient donc important de bien prédire le nombre de passagers attendus même s'il n'est pas toujours facile de le faire.

Une des approches utilisées par les compagnies aériennes pour prédire l'achalandage des vols offerts est l'approche classique développée par Price et al. (1974). Cette approche consiste à définir un coefficient de remplissage des avions (par exemple 75% ou 80% de la capacité) et, dans ce cas, le problème est considéré déterministe du fait que tous les passagers peuvent être transportés tant que le remplissage moyen est inférieur à la limite définie par le coefficient de remplissage souhaité. Ainsi pour un vol sur une route donnée, dès que le coefficient de remplissage souhaité est atteint, les passagers supplémentaires doivent être dirigés vers d'autres routes. Par ailleurs, cette approche est très sensible au choix des coefficients. En effet, s'ils sont plus bas que la valeur idéale, ceci se répercute directement sur les coûts d'opération en nécessitant plus d'avions, ce qui peut entraîner la perte d'une bonne partie du bénéfice possible. Par contre, si les coefficients sont trop élevés, la compagnie aura tendance à espérer des bénéfices non réalisables, ce qui n'est pas toujours bon, spécialement de nos jours, où une erreur de prévision peut provoquer un déficit et même parfois la fermeture de la compagnie.

Une autre approche plus réaliste est l'approche utilisant les notions de probabilité (Soumis, 1979), qui revient à déterminer la distribution du nombre journalier de passagers sur un vol. Avec cette distribution du nombre de passagers, on peut calculer la probabilité d'occupation des sièges des appareils utilisés et estimer le nombre de passagers excédentaires. Du point de vue de la planification, la valeur du nombre de passagers excédentaires est une fonction croissante du nombre de passagers souhaitant voyager à bord de l'avion. Ainsi la valeur est nulle quand le taux de remplissage est faible, devient positive pour le taux de remplissage courant et poursuit sa croissance de façon continue pour atteindre une fraction importante du nombre de passagers assignés quand ce nombre dépasse la capacité de l'avion. La figure 3.1 illustre la différence en nombre de passagers excédentaires entre l'approche classique et l'approche probabiliste (stochastique) quand la demande augmente pour un avion de capacité de 100 passagers.

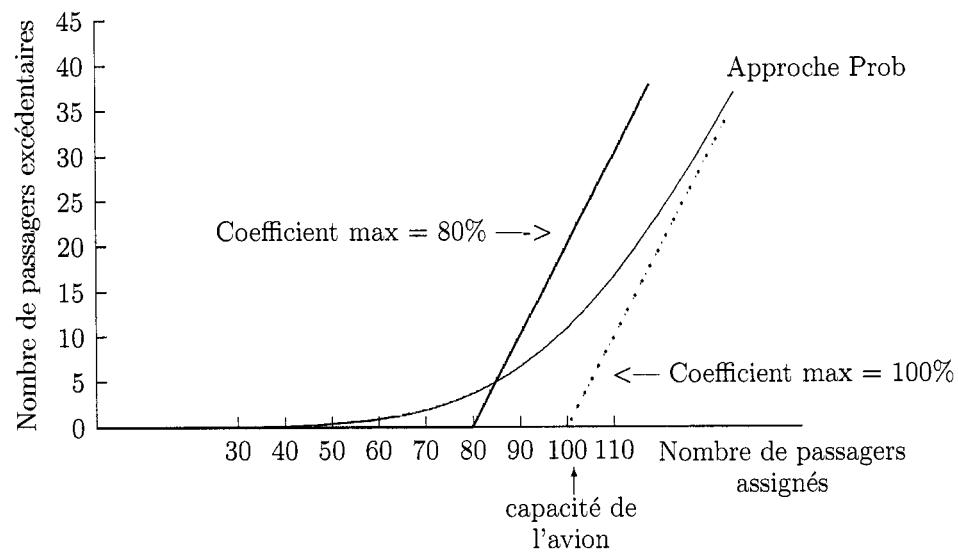


Figure 3.1 – Passagers excédentaires en fonction du nombre de passagers assignés pour les différentes approches.

L'approche probabiliste donne une meilleure estimation du nombre de passagers excédentaires, du fait que les passagers se répartissent de manière équilibrée sur les vols. En effet, selon l'approche déterministe, on peut avoir des cas extrêmes où certains avions sont utilisés à pleine capacité et d'autres sont vides (du fait que le refus est nul tant que le coefficient de remplissage n'est pas atteint).

### **3.1.2 Approche probabiliste pour estimer le nombre de passagers excédentaires**

Une étude récente a été faite par Dumas et Soumis (2004) pour estimer le nombre de passagers excédentaires en utilisant l'approche probabiliste. Les auteurs proposent différents modèles de flots de passagers qu'ils comparent à un algorithme de simulation qui détermine le nombre de passagers attendus dans un réseau. Cette simulation sera expliquée brièvement plus loin.

Les modèles proposés dans cette étude sont tous inspirés du modèle de Soumis (1979). Ces modèles diffèrent les uns des autres par l'expression de la fonction de refus. Le modèle de base que les auteurs décrivent est un modèle additif du fait que la fonction de refus sur une route s'exprime en fonction de la somme des proportions des passagers refusés sur les segments de vol utilisés par cette route.

Par la suite, on retrouve trois modèles multiplicatifs, où la fonction de refus sur une route s'exprime en fonction du produit des proportions des passagers refusés sur les segments de vol utilisés par cette route. Les auteurs comparent les modèles multiplicatifs et additif et montrent que les modèles multiplicatifs sont meilleurs.

Finalement, viennent les modèles «*orientés passagers*» pour contrer l'effet de sur-estimation des modèles précédents. Dans la réalité, si le nombre de passagers estimé

sur une route est élevé, le refus sur cette route peut être causé uniquement par un de ces segments de vol qui arrive à saturation. Par contre, pour les modèles cités plus haut, les essais sur la route contribuent à ceux de tous ces segments de vol même si en réalité, certains de ces essais sont refusés à cause de la congestion du segment de vol qui arrive à saturation. Pour ces nouveaux modèles, le nombre d'essais sur les segments de vol est défini différemment et la fonction de refus reste la même que celle des modèles multiplicatifs. Les auteurs comparent les modèles «*orientés passagers*» aux modèles multiplicatifs et montrent que les modèles «*orientés passagers*» sont plus réels et plus précis.

### 3.1.3 Méthode de simulation

La méthode de simulation est un algorithme pour mesurer la performance des modèles de flots de passagers. Cet algorithme permet de déterminer le nombre attendu de passagers sur les routes d'un réseau, étant donné des demandes initiales pour chacune de ses routes, en traitant une demande à la fois sous les hypothèses que chaque demande suit une loi normale et que les demandes sont indépendantes les unes des autres. Cet algorithme est similaire à celui développé par Grossman et al. (1991) pour le calcul du nombre de passagers attendus sur les segments de vol dans un réseau, composé des vols proposés. Il se distingue dans la mise à jour du nombre de passagers en demande sur les routes du fait qu'il prend en compte le nombre de passagers récupérés provenant d'autres routes.

Les résultats de la simulation appliquée aux mêmes réseaux que ceux utilisés pour tester nos modèles serviront à mesurer la performance de ces derniers.

## 3.2 Définitions des modèles d'équilibre de flots de passagers

Dans le cadre de cette étude, nous faisons suite aux travaux de Dumas et Soumis (2004) cités plus haut, en proposant deux modèles d'équilibre de flots de passagers dans le but de reproduire le travail de la simulation, utilisée par les deux auteurs et que nous avons citée dans la section précédente, en un temps de calcul moindre. Une comparaison des résultats obtenus des deux modèles avec ceux de la simulation sera exposée dans les sections suivantes.

### 3.2.1 Hypothèses

Les hypothèses que nous considérons pour nos modèles sont les mêmes que celles retenues par Dumas et Soumis (2004). Elles sont :

- H1 : La demande  $d_r$  d'une route  $r$  suit une loi normale de moyenne  $\mu_r = u_r$  et de variance  $\sigma_r^2 = (0.3u_r)^2$ , où  $u_r$  représente le nombre d'essais (tentatives de réservation) sur une route  $r$ .
- H2 : Les demandes sont indépendantes.
- H3 : Les distributions des essais sur les différentes routes tout au long de l'horizon sont similaires.
- H4 : Les réessaïs sont instantanés.
- H5 : Les coefficients de débordement sont connus.
- H6 : Les clients font au plus un essai par route.
- H7 : Après quatre essais sans succès de réservation, les clients abandonnent.
- H8 : Une réservation sur une route est dite avec succès si et seulement si aucun segment de vol de cette route n'est saturé. On considère que le nombre de réservations sur chaque segment de vol n'excède pas sa capacité.
- H9 : Chaque réservation avec succès correspond à un passager. Il n'y a pas d'annulation et tous les passagers se présentent à l'embarquement.

Pour plus de détails, le lecteur peut se rapporter à Dumas et Soumis (2004).

Afin de reproduire le comportement de la plus grande partie des voyageurs, nous considérerons dans nos modèles que le nombre total de passagers est la somme des nombres des passagers des différentes classes d'un même vol et le prix d'un billet d'avion est le prix moyen sur les classes de cet avion. Cette simplification permet d'éliminer les contraintes de capacité des classes.

Pour certaines routes, la demande peut être fortement corrélée, spécialement pour les destinations où se tiennent des événements majeurs (festival, événement sportif, etc.), ce qui provoque une augmentation de la demande pour cette destination. Une deuxième possibilité est celle d'avoir une corrélation négative entre les demandes, où une forte demande pour une destination de loisirs peut réduire la demande pour des destinations concurrentes. Ces deux possibilités n'arrivent que durant de courtes périodes, du fait que les événements spéciaux ne se produisent pas chaque jour et que lorsqu'une très forte demande arrive pour une destination donnée, les compagnies aériennes ont tendance à baisser les prix pour les destinations concurrentes, ce qui permet un retour vers l'équilibre dans le réseau. Ainsi, pour une période d'une saison, nous considérerons que les corrélations sont moins fortes entre les demandes. De plus, comme nous ne disposons pas des données concernant la corrélation des routes du réseau utilisé, on supposera en première approximation l'indépendance entre les demandes.

La réservation des places sur le réseau débute à partir d'un certain temps avant le départ et se termine à ce moment là, et chaque client tente de réserver sa place sur la route qui l'attire le plus dans le réseau. Nous supposerons que les demandes sont distribuées dans le temps de la même façon sur toutes les routes.

Les passagers assignés à un vol ont une même probabilité de ne pas pouvoir voyager, indépendamment de leur origine-destination. Le nombre de passagers acceptés sur une route d'un vol est le nombre de clients ayant eu un essai fructueux. Un essai fructueux, ou avec succès, est un essai pour lequel le client est accepté. Un essai non fructueux, ou sans succès, est un essai pour lequel le client est refusé. Dans le cas d'un essai fructueux, on supposera que le client accepté ne fera pas un autre essai.

### 3.2.2 Notations

À partir de maintenant et partout où on parlera de modèle, nous utiliserons les notations suivantes :

T	horizon temporel, où $T = [0, 1]$ .
I	ensemble d'instants $\alpha_i \in T, i = 1, \dots, m$ , où $m$ étant le nombre d'instants considérés.
A	ensemble des segments de volarcs, où chaque segment est défini par sa capacité, son origine et sa destination.
R	ensemble des routes du réseau, où chaque route est composée d'un ou de plusieurs segment de vol.
$d_r$	demande sur la route $r$ .
$d_a$	demande sur le segment $a$ .
$Cap_a$	capacité de l'appareil utilisé sur le segment $a$ .
$\nu_{r,\alpha_i}$	taux d'essais sur la route $r$ à l'instant $\alpha_i$ .
$\nu_{a,\alpha_i}$	taux d'essais sur le segment $a$ à l'instant $\alpha_i$ .
$u_{r,\alpha_i}$	nombre d'essais sur la route $r$ à l'instant $\alpha_i$ .
$u_{a,\alpha_i}$	nombre d'essais sur le segment $a$ à l'instant $\alpha_i$ .
$\sigma_{r,\alpha_i}^2$	variance du nombre d'essais sur la route $r$ à l'instant $\alpha_i$ .
$\sigma_{a,\alpha_i}^2$	variance du nombre d'essais sur le segment arc $a$ à l'instant $\alpha_i$ .
$sp_{r,\alpha_i}$	taux de refus sur la route $r$ à l'instant $\alpha_i$ .
$sp_{a,\alpha_i}$	taux de refus sur le segment $a$ à l'instant $\alpha_i$ .
$Sp_{r,\alpha_i}$	nombre de refus sur la route $r$ à l'instant $\alpha_i$ .
$Sp_{a,\alpha_i}$	nombre de refus sur le segment $a$ à l'instant $\alpha_i$ .
$\lambda_{r,s}$	coefficient de débordement de la route $s$ sur la route $r$ .

### 3.2.3 Modèle développé

Dans cette section, nous développons un modèle de flots de passagers qui nous permet, tout comme la simulation, d'estimer le nombre de passagers attendus sur chaque arc et sur chacune des routes d'un réseau de transport aérien. La principale différence de notre modèle avec la simulation est qu'il traite simultanément toutes les demandes faites dans un intervalle  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  et procède à partir du premier intervalle jusqu'au dernier, contrairement à la simulation qui le fait en traitant une demande à la fois.

Soit un réseau avec une demande initiale  $D_r$  connue sur chaque route  $r$ , et un horizon temporel  $T$ . On définit la variable aléatoire  $U_r$  étant le nombre d'essais sur une route  $r$ , lequel suit une loi normale de moyenne  $u_r$  et d'écart-type  $\sigma_r$ , qui seront déterminés plus loin.

Le nombre d'essais  $U_a$  sur un arc  $a$  est une variable aléatoire donnée par la somme des nombres d'essais sur les routes qui l'empruntent. Cette variable aléatoire suit une loi normale de moyenne  $u_a = \sum_{r/a \in r} u_r$  et de variance  $\sigma_a^2 = \sum_{r/a \in r} \sigma_r^2$ .

On définit par  $P(Cap_a, u_{a,\alpha_i}, \sigma_{a,\alpha_i})$  noté  $P_{a,\alpha_i}$ , la probabilité qu'un arc  $a$  soit saturé (bloqué) à l'instant  $\alpha_i$  et celle-ci est donnée par l'intégrale de la fonction de densité de la loi normale  $N(u_{a,\alpha_i}, \sigma_{a,\alpha_i})$  sur l'intervalle  $[Cap_a, \infty[$  où  $Cap_a$  est la capacité de l'arc  $a$ . Cette probabilité peut être exprimée en fonction de la variable standardisée  $Z_{a,\alpha_i}^n \sim N(0, 1)$

$$\begin{aligned} P(Cap_a, u_{a,\alpha_i}, \sigma_{a,\alpha_i}) &= P\left(\frac{Cap_a - u_{a,\alpha_i}}{\sigma_{a,\alpha_i}}, 0, 1\right) \\ &= \int_{\frac{Cap_a - u_{a,\alpha_i}}{\sigma_{a,\alpha_i}}}^{\infty} f(z) dz \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $f$  est la fonction de densité de la loi normale  $N(0, 1)$ .

Suivant l'hypothèse d'indépendance sur les arcs d'une route, la probabilité de blocage d'une route à l'instant  $\alpha_i$  de l'horizon temporel est donnée par :

$$P_{r,\alpha_i} = 1 - \prod_{a \in r} (1 - P_{a,\alpha_i}) \quad (3.2)$$

En dénotant par  $Dm_{r,\alpha_i}$  le taux d'essais engendrés par la demande pour la route  $r$  à l'instant  $\alpha_i$  et  $Rec_{r,\alpha_i}$  le taux d'essais récupérés par  $r$  provenant des autres routes à l'instant  $\alpha_i$ , on obtient que :

$$\nu_{r,\alpha_i} = Dm_{r,\alpha_i} + Rec_{r,\alpha_i}. \quad (3.3)$$

En utilisant l'hypothèse (H3) sur la distribution temporelle des essais, on peut faire une remise à l'échelle de l'intervalle de temps durant lequel le processus se déroule pour le transformer en l'intervalle  $T = [0, 1]$  et sur lequel nous considérons que  $Dm_{r,\alpha_i}$  est une fonction constante. Ceci dit, on obtient  $D_r$  en intégrant  $Dm_{r,\alpha_i}$  par rapport à  $\alpha$  sur  $T$ , et on a :

$$Dm_{r,\alpha_i} = \frac{D_r}{1 - 0} = D_r \quad \forall \alpha_i \in T \quad (3.4)$$

ce qui donne qu'à l'instant  $\alpha_i$  du processus, l'équation (3.3) s'écrit sous la forme

$$\nu_{r,\alpha_i} = D_r + Rec_{r,\alpha_i}. \quad (3.5)$$

La proportion des clients refusés sur une route  $r$  déborde sur les autres routes suivant les coefficients de débordement (H5). Ces clients tentent alors de faire une autre réservation. Le taux de récupération de passagers sur la route  $r$  au temps  $\alpha_i$  est alors donné par  $Rec_{r,\alpha_i} = \sum_{s \in R} \lambda_{r,s} sp_{s,\alpha_i}$ , et l'équation (3.5) s'écrit sous la forme

$$\nu_{r,\alpha_i} = D_r + \sum_{s \in R} \lambda_{r,s} sp_{s,\alpha_i}. \quad (3.6)$$

Pour chaque instant  $\alpha_i$  du processus de réservation, le taux de refus de passagers sur la route  $r$  ( $sp_{r,\alpha_i}$ ), qui est une fonction non linéaire des variables  $\nu_{s,\alpha_i}$  ( $s \in R$ ), transforme les équations (3.6) en un système non linéaire d'équations en variables  $\nu_{r,\alpha_i}$  ( $r \in R$ )

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \nu_{r_1,\alpha_i} & = & D_{r_1} + \sum_{s \in R} \lambda_{r_1,s} sp_{s,\alpha_i} \\ \nu_{r_2,\alpha_i} & = & D_{r_2} + \sum_{s \in R} \lambda_{r_2,s} sp_{s,\alpha_i} \\ & \vdots & \\ \nu_{r_k,\alpha_i} & = & D_{r_k} + \sum_{s \in R} \lambda_{r_k,s} sp_{s,\alpha_i} \end{array} \right.$$

qui peut s'écrire sous la forme vectorielle

$$\nu_{\alpha_i} = D + \Lambda sp_{\alpha_i}(\nu_{\alpha_i}) \quad (3.7)$$

où :

$$\begin{aligned} \nu_{\alpha_i} &= (\nu_{r,\alpha_i})_{r \in R}, \\ D &= (D_r)_{r \in R}, \\ \Lambda &= (\lambda_{r,s})_{\substack{r \in R \\ s \in R}}, \\ sp_{\alpha_i}(\nu_{\alpha_i}) &= (sp_{s,\alpha_i})_{s \in R}, \\ k &= |R|. \end{aligned}$$

La résolution du système (3.7) qui sera développée dans la section suivante, permettra de déterminer le point d'équilibre des taux d'essais sur les routes. L'intégrale de l'équation (3.6) par rapport à  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  permet de redéfinir la variable aléatoire  $U_r$  en fonction du nombre total d'essais infructueux sur l'ensemble des routes :

$$U_r = D_r + \sum_{s \in R} \lambda_{r,s} SP_s \quad (3.8)$$

où  $SP_s$  représente l'estimation du nombre total d'essais infructueux pour la route  $s$ .

En considérant l'espérance de ces variables, en notant par  $u_r$  l'espérance de  $U_r$ ,  $d_r$  l'espérance de  $D_r$  et  $Sp_r$  l'espérance de  $SP_r$  et en prenant l'espérance de l'équation (3.8), on aura

$$u_r = d_r + \sum_{s \in R} \lambda_{r,s} Sp_s. \quad (3.9)$$

### 3.3 Résolution du modèle

La résolution du système (3.7) n'est pas triviale du fait que les équations sont non linéaires. Pour cela et afin de déterminer la solution du système pour chaque instant  $\alpha_i \in I$  considéré du processus de réservation, nous utilisons une méthode de recherche itérative, soit la méthode du point fixe. Initialement on pose  $\nu^0 = d$  où  $d = (d_r)_{r \in R}$ , et on applique la procédure de recherche du point d'équilibre sur le système

$$\nu_{\alpha_i}^n = d + \Lambda sp(\nu_{\alpha_i}^{n-1}).$$

où  $\nu^n$  est le vecteur des taux d'essais à l'étape  $n$ .

Pour chaque itération, nous serons amenés à déterminer  $sp(\nu^{n-1})$  qui nécessite plusieurs étapes de calcul. En effet, pour chaque instant  $\alpha_i \in I$  considéré du processus de réservation, on détermine le point d'équilibre du système (3.7) en deux phases. Pour chaque arc  $a \in A$  et sur chaque route  $r \in R$ , la première consiste à estimer le nombre d'essais, déterminer les probabilités de blocage ou de saturation, et calculer les taux de refus sur les routes. Celle-ci se fait en suivant les étapes 0 à 6 ci-bas. Puis intervient la deuxième phase, qui est la phase de mise à jour pour les nouveaux taux d'essais en considérant les taux de débordement des routes et ceci correspond à l'étape 7. À la dernière étape, on vérifie si le point d'équilibre est atteint.

Les étapes de la procédure sont donc :

0. *Initialisation :*

$$\begin{aligned} n &= 0, \\ \nu_{r,\alpha_i}^0 &= d_r, \\ \nu_{a,\alpha_i}^0 &= \sum_{r|a \in r} \nu_{r,\alpha_i}^0, \\ u_{r,\alpha_0} &= 0 \\ u_{a,\alpha_0} &= 0. \end{aligned}$$

1. Estimation de l'espérance du nombre d'appels sur l'arc  $a \in A$  et sur la route  $r \in R$ ,

$$u_{a,\alpha_i}^n = u_{a,\alpha_{i-1}} + \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \nu_a^n(\alpha) d\alpha \quad \text{et} \quad u_{r,\alpha_i}^n = u_{r,\alpha_{i-1}} + \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \nu_r^n(\alpha) d\alpha,$$

où  $\nu_a^n(\alpha)$  et  $\nu_r^n(\alpha)$  sont les taux d'essais sur le segment  $a$  et la route  $r$  à l'instant  $\alpha$ . Comme ces fonctions ne sont pas connues de façon analytique, les intégrales se calculent à l'aide de méthodes d'intégration numérique faisant appel aux valeurs de ces fonctions aux instants  $\alpha_{i-1}$  et  $\alpha_i$ . Ces méthodes sont décrites à la section 3.4.

2. Calcul de  $(\sigma_{r,\alpha_i}^n)^2$ , la variance du nombre d'appels placés sur la route  $r$ , selon la variante du modèle (voir section 3.5)
3. Calcul de la variance du nombre d'appels placés sur l'arc  $a \in A$ ,

$$(\sigma_{a,\alpha_i}^n)^2 = \sum_{r|a \in r} (\sigma_{r,\alpha_i}^n)^2$$

4. Calcul de la probabilité de blocage sur l'arc  $a \in A$

$$P_{a,\alpha_i}^n = \int_{cap_a}^{\infty} f(u) du$$

où  $f$  est la fonction de densité de la loi normale  $N(u_{a,\alpha_i}^n, (\sigma_{a,\alpha_i}^n)^2)$ .

5. Calcul de la probabilité de blocage sur la route  $r \in R$ ,

$$P_{r,\alpha_i}^n = 1 - \prod_{a \in r} (1 - P_{a,\alpha_i}^n)$$

6. Calcul du taux de débordement sur la route  $r \in R$

$$sp_{r,\alpha_i}^n = P_{r,\alpha_i}^n \cdot \nu_{r,\alpha_i}^n$$

7. Mise à jour des taux d'appels pour  $r \in R$  et  $a \in A$

$$\nu_{r,\alpha_i}^{n+1} = d_r + \sum_{s \in R} \lambda_{s,r} sp_{r,\alpha_i}^n \quad \nu_{a,\alpha_i}^{n+1} = \sum_{r|a \in r} \nu_{r,\alpha_i}^{n+1}$$

8. Tant que les taux d'appels ne sont pas raisonnablement stables, i.e.

$$\|\nu^{n+1} - \nu^n\| < \epsilon$$

incrémenter  $n$  de 1, et aller à l'étape 1.

Une fois le point d'équilibre  $\nu$  atteint sur la tranche de temps considérée, le nombre de passagers acceptés sur la route  $r$ , noté  $Nb_r$ , est calculé à partir de la différence entre le nombre d'essais total et le nombre d'essais non fructueux sur la route, donnée par la formule :

$$Nb_r = u_r - Sp_r.$$

Le nombre de passagers acceptés sur un arc  $a$ , noté  $Nb_a$ , est donné par la somme des nombres de passagers acceptés sur les routes utilisant cet arc. En d'autres termes :

$$Nb_a = \sum_{r|a \in r} Nb_r = \sum_{r|a \in r} (u_r - Sp_r).$$

## 3.4 Approximation numérique des intégrales

Afin de déterminer certaines quantités, comme par exemple l'espérance du nombre d'appels ou la probabilité de blocage, on est amené à faire des calculs d'intégrales. Comme l'intégrale d'une fonction entre deux bornes donne l'aire sous la courbe de la fonction considérée, les méthodes numériques peuvent approcher cette aire en additionnant les aires sous la courbe des sous domaines approximatifs sous les parties linéarisées de la fonction à des points uniformément répartis. Un algorithme pour évaluer une telle intégrale peut être écrit en termes de la fonction aux points choisis entre les deux limites. Par exemple, supposons que les limites de l'intégrale pour la fonction  $f(x)$  soient  $a$  et  $b$  et les valeurs de fonction entre les deux limites à des intervalles de  $h$  sont :  $f(a), f(a+h), f(a+2h), \dots, f(b)$ . Le nombre d'échantillons est de  $\frac{(b-a)}{h}$  et plusieurs méthodes existent pour approcher la valeur d'une intégrale en terme de ces valeurs d'échantillon. Dans notre cas, nous ne connaissons pas l'expression de la fonction à intégrer, ce qui nous empêche de déterminer un tel échantillon. Nous avons donc utilisé deux méthodes, que nous présentons dans les sous-sections suivantes, afin d'approcher l'intégrale de ces fonctions.

### 3.4.1 Première méthode

Une première méthode consiste à approcher l'intégrale définie  $\int_a^b f(x)dx$  par la méthode des trapèzes composée. Dans ce cas, nous approchons la courbe de la fonction  $f$  par une ligne droite entre les deux points  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$  du graphe, ce qui nous permet de construire un trapèze et l'approximation de l'aire du secteur sous le trapèze du graphe de la fonction  $f$  sera donné par

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(b) + f(a)]$$

### 3.4.2 Deuxième méthode

La première méthode, définie dans la section précédente, fournit une approximation raisonnable d'intégrale définie si nous prenons un grand nombre d'intervalles. Notons que l'erreur dans l'approximation provient du fait qu'en général, les graphes sont courbés et nous les approchons par des segments de droite. Pour tenir compte de la courbure des graphes des fonctions, nous introduisons une nouvelle approximation en approchant une courbe par une parabole (figure 3.2).

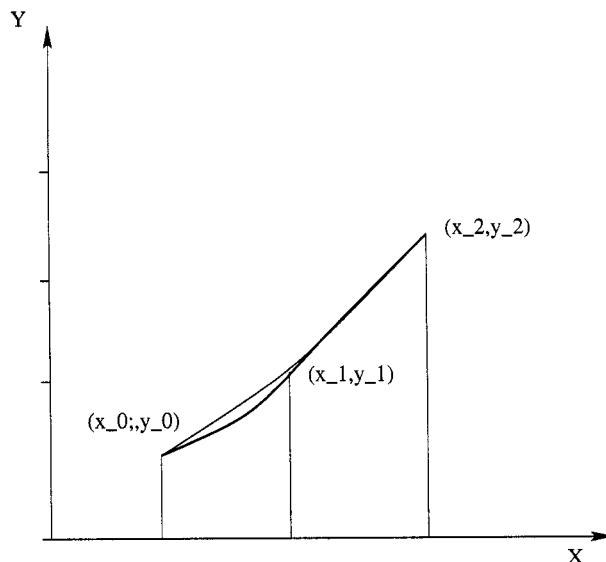


Figure 3.2 – Approche quadratique du calcul d'intégrale.

La parabole en question est le graphique d'une fonction quadratique

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Pour déterminer les coefficients  $a$ ,  $b$ , et  $c$  de l'équation, on résout le système :

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = y_0 \\ ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \end{cases}$$

où  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  sont des points qui appartiennent au graphe de la fonction  $f$ .

Lorsqu'on applique la procédure de recherche de point d'équilibre présentée à la section 3.4, on est amené à ne calculer que l'aire sous la courbe entre les deux derniers points calculés ( $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ ), et dans ce cas l'aire sous la courbe entre les deux abscisses  $x_1$  et  $x_2$  sera donnée par l'approximation

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx [\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + e]_{x_1}^{x_2}$$

où  $e$  est une constante.

Dans nos expériences, nous avons choisi :

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_{i-2} \\ x_1 = \alpha_{i-1} \\ x_2 = \alpha_i \end{cases}$$

### 3.5 Variantes du modèle

Une première famille  $ML_u$  des différentes variantes du modèle est celle qui calcule l'écart type  $\sigma_r$  de la variable aléatoire  $U_r$  en fonction du nombre d'appels assignés à la route  $r$  :  $\sigma_r = (0.3)u_r$ . Cette première famille utilise l'approche linéaire (méthode des trapèzes) pour l'approximation des intégrales.

On définit par  $ML_{u1000}$ ,  $ML_{u100}$ ,  $ML_{u50}$ ,  $ML_{u25}$  et  $ML_{u12}$  les variantes du modèle correspondant respectivement à des discréétisations de 1000, 100, 50, 25 et 12 intervalles de longueur égale, de l'horizon temporel.

Une deuxième famille, notée  $ML_d$ , diffère de la première dans la façon de calculer l'écart type de la variable aléatoire  $U_r$ . Ici, l'écart type est en fonction de la demande initiale assignée à la route  $r$ , i.e.  $\sigma_r = (0.3)d_r$ . Les variantes  $ML_{d1000}$ ,  $ML_{d100}$ ,  $ML_{d50}$ ,  $ML_{d25}$  et  $ML_{d12}$  correspondent aux discréétisations définies plus haut.

Une troisième famille, notée  $MQ_u$ , est celle qui calcule l'écart type  $\sigma_r$  de la variable aléatoire  $U_r$  en fonction du nombre d'appels assignés à la route  $r$  :  $\sigma_r = (0.3)u_r$ . Cette famille utilise l'approche quadratique pour l'approximation des intégrales. Les variantes  $MQ_{u1000}$ ,  $MQ_{u100}$ ,  $MQ_{u50}$ ,  $MQ_{u25}$  et  $MQ_{u12}$  correspondent aussi aux discréétisations définies plus haut.

Une dernière famille, notée  $MQ_d$ , diffère de la famille précédente dans la façon de calculer l'écart type de la variable aléatoire  $U_r$ . Dans ce cas, l'écart type est en fonction de la demande initiale assignée à la route  $r$  donné par  $\sigma_r = (0.3)d_r$ . Les variantes  $MQ_{d1000}$ ,  $MQ_{d100}$ ,  $MQ_{d50}$ ,  $MQ_{d25}$  et  $MQ_{d12}$  correspondent aux discréétisations définies plus haut.

### 3.6 Tests et résultats

Dans cette section, nous présentons les résultats des tests que nous avons effectués pour les différentes familles de variantes du modèle. Pour faire ces tests, nous avons utilisé les mêmes réseaux que ceux de la simulation décrite précédemment, dans le but de comparer les résultats obtenus pour nos modèles avec ceux de la simulation. Les tests ont été réalisés sur une machine IntelXeon de 2.66GHz avec 1G de RAM sous le système d'exploitation Linux.

Le premier réseau noté «Réseau<sub>1</sub>» est un réseau fictif qui comprend 8 aéroports et 50 segments de vol. Il contient 170 routes dont 50 routes à un segment, 75 routes à deux segments et 45 routes à trois segments.

Le second réseau noté «Réseau<sub>2</sub>» est un sous-réseau du grand réseau de transport de la compagnie Air Canada. Il comprend 35 aéroports, dont 20 sont répartis sur le territoire canadien, 11 en Asie-Australie et 4 sur l'ouest du territoire des États-Unis, reliés par plusieurs itinéraires dans l'espace et dans le temps. Ce réseau contient 4351 segments de vol et 20595 routes qui se répartissent en 4351 routes à un segment (vol direct), 12763 routes à deux segments et 3481 routes à trois segments. Nous avons utilisé des données réelles d'une semaine typique de l'hiver 2002 chez Air Canada.

Nous avons testé chacune des variantes du modèle sur ces deux réseaux en augmentant la demande totale. À chaque augmentation correspond un numéro de test. On obtient alors pour chacune des routes et chacun des arcs le nombre de passagers attendus. On calcule par la suite pour chacun des tests la différence signée et la différence en valeur absolue sur les arcs entre le nombre obtenu par la simulation et celui obtenu pour chacune des variantes afin de mesurer l'erreur sur l'estimation du nombre de passagers attendus. La différence signée ( $D_{sig}$ ) et celle en valeur absolue ( $D_{abs}$ ) sont calculées respectivement à partir des formules (3.10) et (3.11), pour lesquelles  $P_a^{mod}$  est le nombre de passagers sur l'arc  $a$  calculé par le modèle et  $P_a^{sim}$  celui calculé par la simulation.

$$D_{sig} = \frac{\sum_{a \in A} (P_a^{mod} - P_a^{sim})}{\sum_{a \in A} P_a^{sim}} \times 100 \quad (3.10)$$

$$D_{abs} = \frac{\sum_{a \in A} |P_a^{mod} - P_a^{sim}|}{\sum_{a \in A} P_a^{sim}} \times 100. \quad (3.11)$$

Pour chacun des tableaux 3.1 à 3.8, la première colonne rapporte les numéros des tests pour lesquels chaque numéro correspond à un facteur de la demande ( $F_d$ ) du réseau rapporté sur la même ligne à la seconde colonne, et qui est défini par :

$$F_d = \frac{\sum_{a \in A} d_a}{\sum_{a \in A} Cap_a} \times 100. \quad (3.12)$$

La troisième colonne rapporte pour chaque test et pour chaque variante du modèle, la différence signée sur la première ligne et la différence en valeur absolue sur la seconde.

Pour le «Réseau<sub>1</sub>», les tableaux 3.1 et 3.2 donnent les résultats pour les familles  $ML_d$  et  $ML_u$ , et les tableaux 3.3 et 3.4 ceux des familles  $MQ_d$  et  $MQ_u$ .

Pour les familles  $ML_d$ ,  $ML_u$ ,  $MQ_d$  et  $MQ_u$  et des facteurs faibles de la demande sur le Réseau<sub>1</sub>, on peut remarquer à partir des tableaux 3.1 à 3.4 que, pour un nombre d'intervalles de discrétisation plus petit, l'erreur absolue est plus faible, comme c'est le cas pour les tests 1, 2, 3 et 4. Ceci est contraire à ce qui devrait se produire, c'est-à-dire que l'erreur devrait augmenter pour un nombre de discrétisation plus petit. On pourrait expliquer ce phénomène par le fait que les courbes des taux d'appels pour des demandes faibles sont presque constantes au début du processus de réservation et ont des pentes positives vers la fin. Par conséquent, une discrétisation grossière ne peut capturer toute l'information fournie par la forme des courbes, ce qui donne une erreur plus faible dans l'ensemble. Cependant, pour les familles  $MQ_d$  et  $MQ_u$ , les tests de 1 à 4 rapportent que l'erreur augmente pour la discrétisation de 12 intervalles. Pour les tests 5 et 6 qui correspondent à des facteurs plus élevés, l'erreur absolue est plus faible pour des nombres d'intervalles de discrétisation plus grands et ceci pour toutes les familles.

On remarque également une légère surestimation de moins de 0.35% pour les quatre premiers tests à l'exception du test 4 pour une discrétisation de 12 intervalles (tableaux 3.1 et 3.3) qui donne une légère sous-estimation. En ce qui concerne les deux derniers tests (5 et 6), toutes les familles donnent une sous-estimation. On peut aussi remarquer que l'amélioration des erreurs est de moins de 0.1% quand on passe de 50 intervalles de discrétisation à 100 et à 1000 intervalles. Cette amélioration n'étant pas très significative, les variantes à 50 intervalles de discrétisation sont suffisamment bonnes. Les familles  $ML_d$  et  $MQ_d$  se comportent mieux que  $ML_u$  et  $MQ_u$  respectivement pour les quatre premiers tests. Par contre, pour les deux derniers tests, les familles  $ML_u$  et  $MQ_u$  ont un meilleur comportement.

En résumé, on peut noter qu'en général, les familles des variantes  $ML_d$  et  $ML_\mu$  utilisant l'approche linéaire donnent une erreur légèrement plus faible que l'approche quadratique et ce pour les quatre premiers tests. Par contre, pour les autres tests avec des facteurs de demande plus élevés, les familles de variantes  $MQ_d$  et  $MQ_\mu$  utilisant l'approche quadratique donnent une erreur plus petite.

Tableau 3.1 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $ML_d$  pour le Réseau<sub>1</sub>.

Série de tests $n^0$	Fd (%)	$ML_{d1000}$	$ML_{d100}$	$ML_{d50}$	$ML_{d25}$	$ML_{d12}$
1	66.6	0.1935	0.1933	0.1926	0.1897	0.1383
		0.6846	0.684	0.6821	0.6744	0.6549
2	71.7	0.1946	0.1942	0.193	0.1879	0.1274
		0.5783	0.5774	0.5747	0.5638	0.5311
3	76.8	0.1421	0.1415	0.1394	0.1316	0.0602
		0.4508	0.4503	0.4483	0.4415	0.4165
4	81.9	0.027	0.0259	0.0226	0.0092	-0.0844
		0.5719	0.5715	0.5704	0.5674	0.5412
5	97.3	-1.799	-1.8061	-1.827	-1.9112	-2.2978
		2.3325	2.336	2.3466	2.3893	2.6178
6	102	-3.3549	-3.3613	-3.3803	-3.4588	-3.8106
		3.5961	3.6002	3.6123	3.6621	3.8977

Tableau 3.2 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $ML_u$  pour le Réseau<sub>1</sub>.

Série de tests $n^0$	Fd (%)	$ML_{u1000}$	$ML_{u100}$	$ML_{u50}$	$ML_{u25}$	$ML_{u12}$
1	66.6	0.2496	0.2494	0.2486	0.2456	0.1932
		0.8695	0.8688	0.8667	0.8586	0.8355
2	71.7	0.294	0.2936	0.2923	0.2871	0.226
		0.8762	0.8753	0.8726	0.8619	0.8327
3	76.8	0.3019	0.3013	0.2992	0.291	0.218
		0.7766	0.7757	0.7728	0.7617	0.7219
4	81.9	0.2684	0.2673	0.2637	0.2496	0.1523
		0.7263	0.7258	0.7242	0.7174	0.6941
5	97.3	-0.7857	-0.792	-0.8117	-0.8894	-1.2519
		1.6707	1.6725	1.678	1.7006	1.8044
6	102	-1.8376	-1.8437	-1.8633	-1.9402	-2.2907
		2.4777	2.4793	2.4848	2.5093	2.6617

Tableau 3.3 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $MQ_d$  pour le Réseau<sub>1</sub>.

Série de tests n <sup>0</sup>	Fd (%)	$MQ_{d1000}$	$MQ_{d100}$	$MQ_{d50}$	$MQ_{d25}$	$MQ_{d12}$
1	66.6	0.1935	0.1935	0.1935	0.193	0.1504
		0.6847	0.6846	0.6845	0.6835	0.6892
2	71.7	0.1946	0.1946	0.1946	0.1939	0.1503
		0.5783	0.5783	0.5782	0.5774	0.586
3	76.8	0.1421	0.1421	0.142	0.1412	0.0976
		0.4508	0.4508	0.4509	0.4505	0.4542
4	81.9	0.027	0.0269	0.0266	0.0249	-0.0244
		0.5719	0.5718	0.5714	0.5685	0.5314
5	97.3	-1.799	-1.7989	-1.799	-1.8017	-1.8817
		2.3325	2.3321	2.3313	2.3246	2.3022
6	102	-3.3548	-3.3549	-3.3549	-3.3526	-3.3364
		3.596	3.5963	3.596	3.5925	3.5311

Tableau 3.4 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $MQ_u$  pour le Réseau<sub>1</sub>.

Série de tests n <sup>0</sup>	Fd (%)	$MQ_{u1000}$	$MQ_{u100}$	$MQ_{u50}$	$MQ_{u25}$	$MQ_{u12}$
1	66.6	0.2496	0.2496	0.2495	0.2491	0.2063
		0.8695	0.8695	0.8694	0.8684	0.8732
2	71.7	0.294	0.294	0.2939	0.2934	0.2498
		0.8762	0.8762	0.8761	0.876	0.8895
3	76.8	0.3019	0.3019	0.3018	0.3009	0.2565
		0.7766	0.7765	0.7766	0.7768	0.7868
4	81.9	0.2684	0.2684	0.2681	0.2659	0.2146
		0.7263	0.7263	0.7262	0.7263	0.7307
5	97.3	-0.7856	-0.7854	-0.7857	-0.7894	-0.8659
		1.6707	1.6703	1.6699	1.6663	1.6536
6	102	-1.8375	-1.8375	-1.8372	-1.8353	-1.8346
		2.4777	2.4776	2.4776	2.4751	2.4388

Pour le «Réseau<sub>2</sub>», les tableaux 3.5 et 3.6 donnent les résultats des familles  $ML_d$  et  $ML_u$ , les tableaux 3.7 et 3.8 ceux des familles  $MQ_d$  et  $MQ_u$ .

Pour toutes les familles, à savoir  $ML_d$ ,  $ML_u$ ,  $MQ_d$  et  $MQ_u$ , l'erreur absolue calculée augmente pour des discrétisations moins fines, sauf pour le test 1 du tableau 3.6 où l'erreur absolue diminue. On peut aussi observer que toutes les variantes des différentes familles ont tendance à sous-estimer le nombre de passagers acceptés sauf pour la première série de tests rapportés dans les tableaux 3.6 et 3.8 pour laquelle on a une surestimation pour des discrétisations de 1000 à 25 intervalles. Les variantes à 50 intervalles de discrétisation reste assez bonnes pour le «Réseau<sub>2</sub>».

Tableau 3.5 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $ML_d$  pour le Réseau<sub>2</sub>.

Série de tests	Fd (%)	$ML_{d1000}$	$ML_{d100}$	$ML_{d50}$	$ML_{d25}$	$ML_{d12}$
1	57.6	-0.1147	-0.1151	-0.1163	-0.1211	-0.1801
		0.3783	0.3785	0.3791	0.3819	0.4032
2	63.36	-0.3091	-0.3098	-0.312	-0.3209	-0.3971
		0.6077	0.6086	0.611	0.6212	0.6748
3	69.12	-0.6359	-0.6371	-0.6408	-0.6561	-0.7581
		1.0709	1.0723	1.0766	1.094	1.1776
4	74.88	-1.1561	-1.1579	-1.1634	-1.186	-1.3176
		1.7035	1.7054	1.7111	1.7341	1.8448
5	80.64	-1.825	-1.8274	-1.8349	-1.8652	-2.0288
		2.4507	2.4531	2.4605	2.4904	2.6321
6	86.4	-2.5865	-2.5893	-2.5984	-2.6357	-2.8269
		3.2512	3.2539	3.2622	3.2966	3.4579
7	92.16	-3.3879	-3.3911	-3.4017	-3.4454	-3.6619
		4.0475	4.0505	4.06	4.0988	4.2834
8	97.92	-4.1836	-4.1869	-4.1983	-4.2458	-4.4748
		4.7994	4.8027	4.8132	4.8564	5.059

Tableau 3.6 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $ML_u$  pour le Réseau<sub>2</sub>.

Série de tests	Fd (%)	$ML_{u1000}$	$ML_{u100}$	$ML_{u50}$	$ML_{u25}$	$ML_{u12}$
1	57.6	0.0246	0.0242	0.0229	0.0179	-0.0423
		0.5709	0.5706	0.5697	0.5661	0.5595
2	63.36	-0.073	-0.0738	-0.076	-0.085	-0.1617
		0.6267	0.6267	0.6266	0.6266	0.6418
3	69.12	-0.2386	-0.2398	-0.2434	-0.2582	-0.3579
		0.8397	0.8402	0.8417	0.8476	0.8882
4	74.88	-0.5116	-0.5134	-0.5187	-0.54	-0.6661
		1.2366	1.2376	1.2406	1.2527	1.3211
5	80.64	-0.8482	-0.8506	-0.8579	-0.8871	-1.0462
		1.8073	1.8086	1.8126	1.8292	1.9175
6	86.4	-1.217	-1.2201	-1.2292	-1.2659	-1.4533
		2.4404	2.442	2.4469	2.4671	2.5697
7	92.16	-1.5845	-1.5881	-1.599	-1.6427	-1.8578
		3.0641	3.0659	3.0715	3.0945	3.2099
8	97.92	-1.9169	-1.9210	-1.9334	-1.983	-2.2226
		3.6664	3.6683	3.6741	3.6977	3.8162

Dans l'ensemble, les familles des variantes  $ML_u$  et  $MQ_u$  donnent de meilleures estimations du nombre de passagers acceptés que celles obtenues par les familles des variantes  $ML_d$  et  $MQ_d$  respectivement.

Tableau 3.7 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $MQ_d$  pour le Réseau<sub>2</sub>.

Série de tests	Fd (%)	$MQ_{d1000}$	$MQ_{d100}$	$MQ_{d50}$	$MQ_{d25}$	$MQ_{d12}$
1	57.6	-0.1147 0.3783	-0.1147 0.3783	-0.1148 0.3783	-0.1152 0.3783	-0.157 0.3842
2	63.36	-0.3091 0.6077	-0.3091 0.6078	-0.3092 0.6078	-0.3101 0.6084	-0.3548 0.6198
3	69.12	-0.6359 1.0708	-0.6359 1.0708	-0.636 1.0709	-0.6373 1.0717	-0.6837 1.0843
4	74.88	-1.1561 1.7035	-1.156 1.7035	-1.1561 1.7036	-1.1576 1.7043	-1.2038 1.7173
5	80.64	-1.825 2.4507	-1.8249 2.4507	-1.8249 2.4507	-1.8264 2.4514	-1.8716 2.4653
6	86.4	-2.5865 3.2511	-2.5862 3.251	-2.5862 3.251	-2.5875 3.2513	-2.6285 3.2602
7	92.16	-3.3878 4.0475	-3.3875 4.0474	-3.3873 4.0472	-3.3885 4.0474	-3.4269 4.0568
8	97.92	-4.1835 4.7994	-4.1829 4.7992	-4.1824 4.7991	-4.1828 4.7995	-4.2117 4.8103

Tableau 3.8 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $MQ_u$  pour le Réseau<sub>2</sub>.

Série de tests	Fd (%)	$MQ_{u1000}$	$MQ_{u100}$	$MQ_{u50}$	$MQ_{u25}$	$MQ_{u12}$
1	57.6	0.0246 0.5709	0.0246 0.5709	0.0246 0.5709	0.024 0.5706	-0.0183 0.5748
2	63.36	-0.073 0.6267	-0.073 0.6267	-0.0732 0.6268	-0.0741 0.6271	-0.1187 0.6396
3	69.12	-0.2386 0.8397	-0.2386 0.8397	-0.2387 0.8398	-0.2399 0.8404	-0.2857 0.8566
4	74.88	-0.5116 1.2366	-0.5116 1.2366	-0.5118 1.2367	-0.5134 1.2374	-0.5587 1.255
5	80.64	-0.8482 1.8073	-0.8482 1.8073	-0.8484 1.8074	-0.8503 1.8082	-0.8975 1.8259
6	86.4	-1.217 2.4404	-1.217 2.4404	-1.2172 2.4404	-1.2192 2.4408	-1.2619 2.4538
7	92.16	-1.5845 3.064	-1.5845 3.064	-1.5847 3.064	-1.5869 3.0645	-1.6282 3.0771
8	97.92	-1.9169 3.6663	-1.9169 3.6663	-1.9171 3.6664	-1.9194 3.6669	-1.9599 3.6786

Le tableau 3.9 rapporte les temps d'exécution en secondes pour les familles des différentes variantes des modèles  $ML_d$ ,  $ML_u$ ,  $MQ_d$  et  $MQ_u$ , pour chacun des deux réseaux considérés.

On peut remarquer que le temps d'exécution est proportionnel au nombre d'intervalles de discréétisation. En effet, les temps d'exécution augmentent pour des discréétisations fines et diminuent pour les moins fines, mais restent tout à fait raisonnables. Par ailleurs, les temps d'exécution de nos modèles sont largement inférieurs à ceux de la simulation qui vont d'une journée à une semaine.

Le temps de calcul moyen des variantes à 50 intervalles de discréétisation est 1.79 (resp. 14.81) fois plus petit que celui de la variante à 100 (resp. 1000) intervalles.

Tableau 3.9 – Temps moyen d'exécution en secondes pour les familles  $ML_d$ ,  $ML_u$ ,  $MQ_d$  et  $MQ_u$ .

Réseau	Famille	Nombre d'intervalles de discréétisation				
		1000	100	50	25	12
1	$ML_d$	0.849	0.108	0.066	0.041	0.029
	$ML_u$	0.727	0.100	0.056	0.037	0.025
	$MQ_d$	1.774	0.215	0.123	0.068	0.046
	$MQ_u$	1.541	0.188	0.109	0.063	0.043
2	$ML_d$	1327.110	153.820	88.300	43.900	22.800
	$ML_u$	1331.116	151.430	80.800	44.200	24.800
	$MQ_d$	1638.598	197.570	100.905	53.833	29.472
	$MQ_u$	1617.846	187.050	99.024	53.639	28.861

### 3.6.1 Discussion des résultats

Les résultats pour les deux réseaux montrent que l'augmentation de la demande entraîne une sous-estimation systématique des passagers pour les différentes familles de variantes du modèle. Dans la réalité, pour une route utilisant des arcs  $a_1$  et  $a_2$ , où  $a_1$  est presque plein et  $a_2$  ne l'est pas, si le nombre de passagers estimé sur la route est élevé à l'équilibre, plusieurs des essais sur  $r$  peuvent être refusés. Ces refus seront dus à l'arc  $a_1$  qui est plein plutôt qu'à l'arc  $a_2$ . Par contre, dans nos modèles, les taux d'appels sur  $r$  contribuent à ceux de  $a_2$  du fait que  $\nu_a = \sum_{r|a \in r} \nu_r$ , même si en réalité certains de ces appels sont refusés à cause de la congestion de  $a_1$ .

Ce phénomène fait en sorte que la variable  $\nu_{a_2}$  a une valeur supérieure à celle qu'on souhaiterait et la probabilité de blocage sur l'arc  $a_2$  est, par conséquent, plus grande que celle attendue, ce qui cause une surestimation du taux de refus sur la route  $r$ .

La figure 3.3 donne l'allure des taux d'appels obtenus sur quelques arcs. Comme on peut le remarquer, les taux d'appels sont toujours croissants. Ceci est tout à fait normal du fait que plus le taux de refus sur les routes augmente, plus on a de passagers récupérés qui vont contribuer aux nouveaux essais sur d'autres routes en tentant d'obtenir une réservation.

Pour contrer le phénomène de surestimation du refus qui se produit dans les familles de variantes du modèle développé, nous allons proposer dans la section suivante une nouvelle manière de calculer les taux d'appels placés sur les arcs.

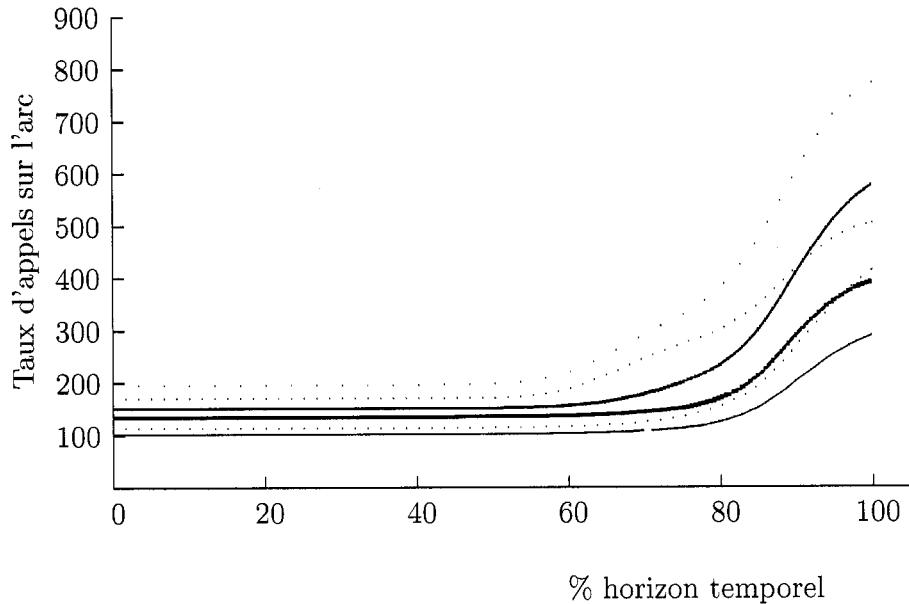


Figure 3.3 – Courbes des taux d'appels sur les arcs pour le modèle avec débordement indépendant.

### 3.7 Modèle ajusté

Afin de pallier le problème des taux d'appels élevés que nous avons rencontrés dans la section précédente, nous allons proposer dans ce qui suit une nouvelle façon de calculer et de mettre à jour les taux d'appels placés sur les arcs lors de la recherche du point d'équilibre du système (3.7). Elle revient à déterminer un coefficient qui sera défini en fonction des probabilités de saturation des arcs de la route, et à calculer le taux d'appels sur chaque arc, de façon à ce que les arcs ayant des probabilités de saturation plus élevées reçoivent plus d'appels.

On définit par  $\rho_{a,\alpha_i}^r$  le coefficient d'ajustement des taux d'appels sur l'arc  $a$  de la route  $r$  à l'instant  $\alpha_i$ . Ce coefficient est donné par la formule

$$\rho_{a,\alpha}^r = (P_{a,\alpha} - \sum_{\substack{b \in r \\ a \neq b}} P_{b,\alpha}) / \sum_{b \in r} P_{b,\alpha}.$$

La procédure de recherche du point d'équilibre du système (3.7) pour chaque instant  $\alpha_i$  du processus de réservation se fait de la même manière que celle décrite dans la section 3.3, à l'exception de l'étape 7 où au lieu de calculer le taux d'appels sur les arcs par la formule  $\nu_{a,\alpha} = \sum_{r|a \in r} \nu_{r,\alpha}$ , on le calcule dans ce cas-ci en fonction du coefficient d'ajustement à savoir

$$\nu_{a,\alpha_i} = \sum_{r|a \in r} (\nu_{r,\alpha_i} + \rho_{a,\alpha_i}^r \cdot sp_{r,\alpha_i}).$$

L'étape 7 pour la mise à jour des taux d'appels de la procédure devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \rho_{a,\alpha_i}^{r,n} & = & (P_{a,\alpha_i}^n - \sum_{\substack{b \in r \\ a \neq b}} P_{b,\alpha_i}^n) / \sum_{b \in r} P_{b,\alpha_i}^n \\ \\ \nu_{r,\alpha_i}^{n+1} & = & d_r + \sum_{s \in R} \lambda_{s,r} sp_{r,\alpha_i}^n \\ \\ \nu_{a,\alpha_i}^{n+1} & = & \sum_{r|a \in r} (\nu_{r,\alpha_i}^{n+1} + \rho_{a,\alpha_i}^{r,n} \cdot sp_{r,\alpha_i}^n) \end{array} \right.$$

### 3.8 Tests et résultats

Comme pour le modèle précédent, on définit quatre familles de variantes  $AL_d$ ,  $AL_u$ ,  $AQ_d$  et  $AQ_u$  qui ont les mêmes caractéristiques que les familles  $ML_d$ ,  $ML_u$ ,  $MQ_d$  et  $MQ_u$  respectivement. Les résultats que nous exposerons dans cette section sont issus de tests qui ont été effectués sur les mêmes réseaux que ceux décrits dans les sections précédentes, à savoir «Réseau<sub>1</sub>» et «Réseau<sub>2</sub>». Le format des tableaux 3.10 à 3.17 est le même que celui utilisé tableaux 3.1 à 3.8.

Les tableaux 3.10 à 3.11 donnent les résultats des familles  $AL_d$ ,  $AL_u$ ,  $AQ_d$  et  $AQ_u$  respectivement pour le «Réseau<sub>1</sub>». Dans l'ensemble, toutes les familles donnent une faible surestimation du nombre de passagers sauf pour la variante  $AL_{d12}$  au test 5 (tableau 3.10) et au test 6 pour les familles  $AL_d$  et  $AQ_d$  (tableaux 3.10 et 3.12).

Quand à la différence absolue, cette dernière diminue dans l'ensemble sauf pour la variante  $AQ_{d12}$  pour les tests 1 et 2 (tableau 3.12). Pour tous les tableaux, l'erreur absolue et l'erreur signée sont de moins de 1%.

Pour le «Réseau<sub>2</sub>», les résultats se trouvent dans les tableaux 3.14 à 3.17. Les familles  $AQ_d$  et  $AQ_u$  donnent une sous-estimation du nombre de passagers (tableaux 3.14 et 3.16) ainsi que la variante  $AL_{u12}$  pour les tests 3, 4 et 5 (tableau 3.15). Pour tout le reste, on a une surestimation du nombre de passagers.

Pour toutes les familles, l'erreur absolue calculée pour une discrétisation de 1000 intervalles est la même que celle calculée pour une discrétisation de 100 intervalles. Pour le reste des discrétisations, elle augmente légèrement avec la diminution du nombre d'intervalles.

Tableau 3.10 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $AL_d$  pour le Réseau<sub>1</sub>.

Série de tests $n^0$	Fd (%)	$AL_{d1000}$	$AL_{d100}$	$AL_{d50}$	$AL_{d25}$	$AL_{d12}$
1	66.6	0.2034	0.2032	0.2026	0.2002	0.1507
		0.708	0.7075	0.7057	0.6989	0.6824
2	71.7	0.2368	0.2365	0.2355	0.2316	0.1761
		0.6696	0.6688	0.6663	0.6564	0.6267
3	76.8	0.2555	0.255	0.2534	0.2473	0.1831
		0.5757	0.5748	0.5718	0.5602	0.5158
4	81.9	0.2536	0.2528	0.2503	0.24	0.1594
		0.4205	0.4194	0.4161	0.4023	0.3533
5	97.3	0.1223	0.1189	0.1084	0.0666	-0.1459
		0.4912	0.4888	0.4823	0.4557	0.3754
6	102	-0.1235	-0.1279	-0.1401	-0.1901	-0.432
		0.5136	0.513	0.5114	0.507	0.5882

Tableau 3.11 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $AL_u$  pour le Réseau<sub>1</sub>.

Série de tests $n^0$	Fd (%)	$AL_{u1000}$	$AL_{u100}$	$AL_{u50}$	$AL_{u25}$	$AL_{u12}$
1	66.6	0.2565	0.2563	0.2557	0.2531	0.2027
		0.8853	0.8847	0.8829	0.8754	0.8562
2	71.7	0.3256	0.3252	0.3242	0.3201	0.2637
		0.9478	0.947	0.9446	0.9347	0.9081
3	76.8	0.391	0.3904	0.3888	0.3823	0.3164
		0.9353	0.9343	0.9316	0.9207	0.8783
4	81.9	0.4524	0.4514	0.4487	0.4378	0.3537
		0.8391	0.8382	0.8351	0.8235	0.7791
5	97.3	0.7133	0.7101	0.7003	0.6613	0.462
		0.762	0.7592	0.7507	0.7167	0.5796
6	102	0.7401	0.7365	0.7251	0.6808	0.4641
		0.8332	0.8304	0.8216	0.7869	0.6407

Tableau 3.12 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $AQ_d$  pour le Réseau<sub>1</sub>.

Série de tests n <sup>0</sup>	Fd (%)	$AQ_{d1000}$	$AQ_{d100}$	$AQ_{d50}$	$AQ_{d25}$	$AQ_{d12}$
1	66.6	0.2034	0.2034	0.2034	0.203	0.1613
		0.708	0.708	0.708	0.7071	0.7138
2	71.7	0.2368	0.2368	0.2367	0.2363	0.1941
		0.6696	0.6696	0.6695	0.6688	0.6756
3	76.8	0.2555	0.2555	0.2554	0.2548	0.2116
		0.5757	0.5757	0.5757	0.5755	0.5751
4	81.9	0.2536	0.2536	0.2534	0.252	0.2053
		0.4205	0.4205	0.4204	0.4197	0.4161
5	97.3	0.1224	0.1224	0.122	0.1175	0.053
		0.491	0.491	0.4906	0.4867	0.4375
6	102	-0.1235	-0.1236	-0.1237	-0.1248	-0.1646
		0.5136	0.5137	0.5136	0.512	0.495

Tableau 3.13 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $AQ_u$  pour le Réseau<sub>1</sub>.

Série de tests n <sup>0</sup>	Fd (%)	$AQ_{u1000}$	$AQ_{u100}$	$AQ_{u50}$	$AQ_{u25}$	$AQ_{u12}$
1	66.6	0.2565	0.2565	0.2565	0.2561	0.2533
		0.8853	0.8853	0.8853	0.8845	0.8777
2	71.7	0.3256	0.3256	0.3256	0.3251	0.3212
		0.9478	0.9478	0.9478	0.9476	0.9431
3	76.8	0.391	0.391	0.391	0.3901	0.3835
		0.9352	0.9352	0.9352	0.9352	0.9336
4	81.9	0.4524	0.4523	0.4521	0.4505	0.4373
		0.8392	0.8392	0.8393	0.8395	0.8409
5	97.3	0.7133	0.7133	0.7131	0.7106	0.6801
		0.762	0.762	0.7618	0.7597	0.7346
6	102	0.7401	0.7399	0.74	0.7403	0.7307
		0.8332	0.8331	0.8333	0.8349	0.8337

Tableau 3.14 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $AL_d$  pour le Réseau<sub>2</sub>.

Série de tests n <sup>0</sup>	Fd (%)	$AL_{d1000}$	$AL_{d100}$	$AL_{d50}$	$AL_{d25}$	$AL_{d12}$
1	57.6	-0.0294 0.2791	-0.0294 0.2791	-0.0304 0.2789	-0.0342 0.2778	-0.089 0.2854
2	63.36	-0.1214 0.3609	-0.1214 0.3609	-0.1229 0.3624	-0.1293 0.3682	-0.1942 0.4054
3	69.12	-0.2448 0.5728	-0.2448 0.5728	-0.2473 0.5756	-0.2574 0.5868	-0.3376 0.6439
4	74.88	-0.4342 0.8282	-0.4342 0.8282	-0.4379 0.8321	-0.453 0.8474	-0.5534 0.9257
5	80.64	-0.6634 1.0853	-0.6634 1.0853	-0.6685 1.0901	-0.6893 1.1095	-0.8122 1.2106
6	86.4	-0.9055 1.3323	-0.9055 1.3323	-0.912 1.3381	-0.9382 1.3618	-1.0824 1.4811
7	92.16	-1.1445 1.5634	-1.1445 1.5634	-1.1519 1.5701	-1.1829 1.5976	-1.3451 1.7309
8	97.92	-1.3616 1.757	-1.3616 1.757	-1.3698 1.7646	-1.4043 1.7952	-1.5793 1.9441

Tableau 3.15 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $AL_u$  pour le Réseau<sub>2</sub>.

Série de tests n <sup>0</sup>	Fd (%)	$AL_{u1000}$	$AL_{u100}$	$AL_{u50}$	$AL_{u25}$	$AL_{u12}$
1	57.6	0.0939 0.5674	0.0939 0.5674	0.0929 0.566	0.0889 0.5605	0.0331 0.5421
2	63.36	0.0827 0.5489	0.0827 0.5489	0.0811 0.5475	0.0745 0.5417	0.0083 0.5297
3	69.12	0.0832 0.6004	0.0832 0.6004	0.0807 0.5994	0.0706 0.5955	-0.0095 0.594
4	74.88	0.0799 0.7383	0.0799 0.7383	0.0763 0.738	0.0619 0.7374	-0.0351 0.7531
5	80.64	0.1122 0.9784	0.1122 0.9784	0.1073 0.9783	0.0878 0.9784	-0.0294 0.9974
6	86.4	0.201 1.2595	0.201 1.2595	0.1949 1.2594	0.1701 1.2592	0.0326 1.2756
7	92.16	0.3446 1.5458	0.3446 1.5458	0.3372 1.5454	0.3079 1.5442	0.1526 1.5533
8	97.92	0.5473 1.8165	0.5473 1.8165	0.539 1.8155	0.5054 1.812	0.3351 1.8079

Tableau 3.16 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $AQ_d$  pour le Réseau<sub>2</sub>.

Série de tests n <sup>0</sup>	Fd (%)	$AQ_{d1000}$	$AQ_{d100}$	$AQ_{d50}$	$AQ_{d25}$	$AQ_{d12}$
1	57.6	-0.0292	-0.0291	-0.0292	-0.0296	-0.0709
		0.2792	0.2792	0.2793	0.2793	0.2838
2	63.36	-0.1209	-0.1209	-0.1209	-0.1215	-0.1632
		0.3605	0.3605	0.3606	0.3609	0.3706
3	69.12	-0.244	-0.244	-0.2441	-0.245	-0.2879
		0.5719	0.5719	0.572	0.5727	0.5845
4	74.88	-0.433	-0.4329	-0.433	-0.4341	-0.4774
		0.8269	0.827	0.8271	0.828	0.842
5	80.64	-0.6618	-0.6617	-0.6617	-0.6628	-0.7048
		1.0837	1.0838	1.0839	1.0845	1.0992
6	86.4	-0.9036	-0.9034	-0.9033	-0.9042	-0.9424
		1.3304	1.3304	1.3304	1.331	1.3448
7	92.16	-1.1422	-1.1419	-1.1417	-1.1422	-1.1758
		1.5612	1.5612	1.5613	1.5616	1.5738
8	97.92	-1.3592	-1.3587	-1.3583	-1.3582	-1.3859
		1.7545	1.7546	1.7547	1.7556	1.7692

Tableau 3.17 –  $D_{sig}$  et  $D_{abs}$  des variantes  $AQ_u$  pour le Réseau<sub>2</sub>.

Série de tests n <sup>0</sup>	Fd (%)	$AQ_{u1000}$	$AQ_{u100}$	$AQ_{u50}$	$AQ_{u25}$	$AQ_{u12}$
1	57.6	0.0942	0.0942	0.0942	0.0938	0.0521
		0.5679	0.5679	0.5679	0.5678	0.571
2	63.36	0.0833	0.0833	0.0832	0.0826	0.0405
		0.5494	0.5494	0.5494	0.5496	0.5585
3	69.12	0.0841	0.084	0.084	0.0832	0.0406
		0.6007	0.6007	0.6008	0.6014	0.6166
4	74.88	0.0811	0.0811	0.081	0.0799	0.0379
		0.7384	0.7384	0.7385	0.7393	0.7589
5	80.64	0.1138	0.1138	0.1137	0.1125	0.0709
		0.9784	0.9785	0.9786	0.9795	0.9993
6	86.4	0.2031	0.2031	0.203	0.2018	0.1628
		1.2596	1.2596	1.2597	1.2606	1.2792
7	92.16	0.347	0.347	0.3469	0.3459	0.3113
		1.5459	1.5459	1.546	1.5466	1.5611
8	97.92	0.5501	0.5501	0.55	0.549	0.5178
		1.8168	1.8168	1.8168	1.817	1.8263

Le tableau 3.18 rapporte les temps d'exécution en secondes pour les différentes familles des variantes du modèle ajusté. Comme pour les variantes du modèle développé précédemment, les temps d'exécution augmentent quand le nombre d'intervalles de discrétisation augmente, mais reste de l'ordre de moins de 30 minutes et ce même pour la plus grande discrétisation.

Les variantes à 50 intervalles de discrétisation donnent des résultats de bonne qualité et leurs temps de calcul moyen est de moins de 2 minutes, et ce même pour la plus grande discrétisation. Il est 1.75 (resp. 14.46) fois plus petit que celui de la variante à 100 (resp. 1000) intervalles.

Tableau 3.18 – Temps moyen d'exécution en secondes pour les familles  $AL_d$ ,  $AL_u$ ,  $AQ_d$  et  $AQ_u$ .

Réseau	Famille	Nombre d'intervalles de discrétisation				
		1000	100	50	25	12
1	$AL_d$	0.802	0.102	0.064	0.040	0.027
	$AL_u$	0.712	0.093	0.060	0.035	0.028
	$AQ_d$	1.629	0.201	0.116	0.067	0.044
	$AQ2_u$	1.416	0.177	0.100	0.060	0.040
2	$AL_d$	1239.045	140.750	77.546	43.461	22.781
	$AL_u$	1210.921	139.630	77.490	43.781	23.103
	$AQ_d$	1490.621	173.510	93.105	53.889	28.895
	$AQ2_u$	1483 .177	185.210	95.586	54.055	29.382

### 3.8.1 Discussion des résultats

Dans l'ensemble les résultats obtenus par le modèle ajusté montrent qu'il est plus performant que le premier modèle développé. On observe en moyenne une réduction de l'erreur pour les variantes  $AL_d$ ,  $AL_u$ ,  $AQ_d$  et  $AQ_u$  par rapport au variantes  $ML_d$ ,  $ML_u$ ,  $MQ_d$  et  $MQ_u$  respectivement de 65.70%, 41.52%, 64.72%, et 38.69% pour le  $Réseau_1$  par rapport à la simulation, et elle est, respectivement, de 56.82%, 44.18%, 57.22%, et 42.97% pour le  $Réseau_2$ . Ainsi, l'introduction du coefficient d'ajustement des taux d'appels sur les arcs a eu pour effet de diminuer nettement les pentes des courbes comme illustré à la figure 3.4, et ce pour les mêmes arcs que ceux de la figure 3.3.

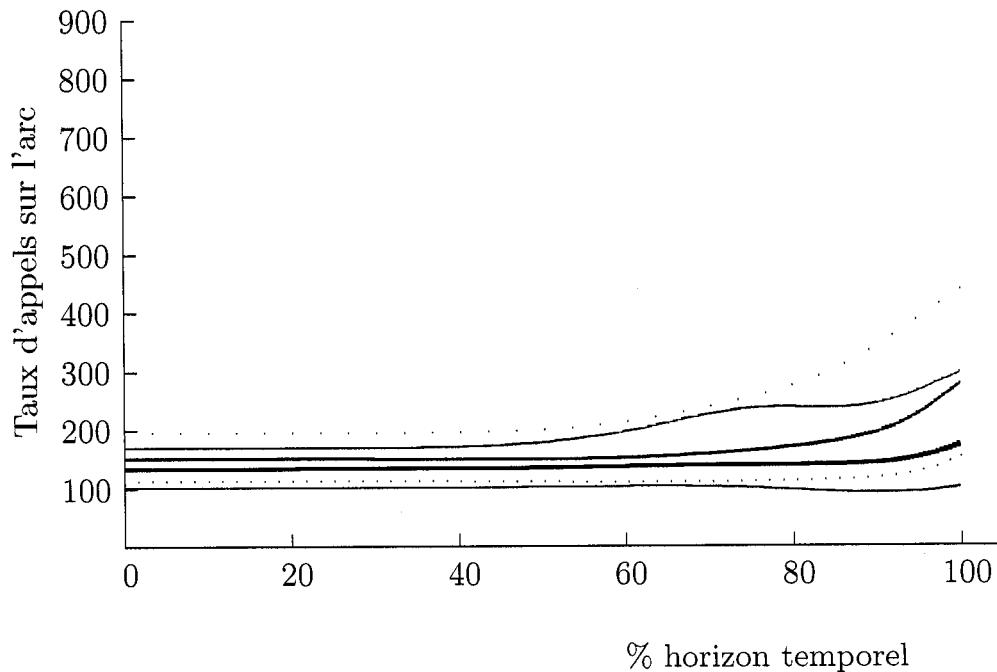


Figure 3.4 – Courbes des taux d'appels sur les arcs pour le modèle ajusté

Les temps de résolution du modèle ajusté sont du même ordre que ceux du premier modèle pour le  $Réseau_1$  et plus court pour le  $Réseau_2$ , et cela pour des discréétisations de plus de 50 intervalles.

Les résultats que nous fournit le modèle ajusté sont tout à fait acceptables. En effet, pour le  $Réseau_1$ , quand le facteur de demande ( $Fd$ ) augmente (réseau chargé), l'erreur diminue. Par contre, quand la charge du réseau dépasse sa capacité ( $Fd = 102$ ), on observe une faible augmentation de l'erreur. Pour le  $Réseau_2$ , l'erreur augmente en fonction de la charge du réseau et reste tout le temps en dessous de 2%.

## CONCLUSION

Nous avons étudié dans le cadre de ce mémoire le problème de prédiction du nombre de passagers attendus sur les vols d'une compagnie aérienne, problème dont l'importance n'est plus à démontrer.

En premier lieu, nous avons étudié des données issues du système utilisé par la compagnie aérienne Air Canada pour déterminer le flot de passagers attendus sur les vols offerts. Cette étude est basée sur des données d'une semaine typique de l'hiver 2001-2002, dans le but d'évaluer les performances de ce système en terme de qualité de solution. Nous avons essentiellement retenu que le modèle donne une légère sous-estimation du nombre de passagers refusés sur chacune des routes du réseau considéré. Cette sous-estimation peut atteindre parfois deux passagers et l'addition de ces erreurs pourrait donner un mauvais calcul du nombre de passagers transportés, d'où une mauvaise estimation du revenu.

Dans un deuxième temps, nous avons développé deux modèles d'équilibre de flots de passagers avec plusieurs familles de variantes afin de reproduire le comportement des passagers pour les différents vols offerts sur une certaine période de temps. Dans chacun des modèles, le point d'équilibre du système est calculé par une méthode itérative. De plus, deux méthodes d'approximation des intégrales sont utilisées pour faire les calculs des intégrales lors de la recherche du point d'équilibre nécessaire au calcul du nombre de passagers attendus et excédentaires. Les variantes de chaque famille de modèles se distinguent par le nombre d'intervalles de discrétisation et l'approche utilisée pour le calcul des intégrales, et les deux familles se distinguent par la fonction de calcul du taux d'appel sur les arcs.

La famille du premier modèle a tendance à donner une sous-estimation des passagers attendus à bord des appareils pour des fortes demandes. Ceci est dû aux taux d'appels sur les arcs qui ont des valeurs supérieures à ceux qu'on souhaiterait et les probabilités de blocage sur ces arcs sont, par conséquent, plus grandes que celle attendues, causant ainsi une surestimation des taux de refus sur la route.

Pour cette raison et pour contrer ce phénomène de surestimation du refus qui se produit dans la famille du premier modèle, nous avons développé une seconde famille de modèles qui utilise les mêmes procédures de recherche et de calcul, et qui se distingue de la première dans la façon de calculer les taux d'appels placés sur les arcs. Cette nouvelle façon de calculer nous a permis d'observer à travers les différents résultats obtenus sur deux types de réseaux différents que le deuxième modèle donnait une meilleure estimation du nombre de passagers attendus.

Les modèles proposés dans ce mémoire sont conceptuellement très satisfaisants, du fait qu'il reproduisent sans trop de compromis les principales interactions définissant le cheminement des passagers. Du point de vue pratique, ils permettent d'obtenir économiquement des solutions stables. Leur qualité devrait permettre de les utiliser efficacement dans un processus de planification pour évaluer et modifier les horaires de vols. Ils peuvent aussi être intégrés à un modèle de génération d'horaire traitant en simultanément la circulation des passagers et des avions.

## BIBLIOGRAPHIE

- AURIGNAC, A. et BENATTAR, M., (1981), *Modèle d'affection de la demande journalière dans une grille de trains.* Les Cahiers Scientifiques de la Revue Transports, No. 5, deuxième semestre.
- DETZEL, E.G.Jr., (1971), *A simulation of airline market shares as a function of scheduling.* Thèse de doctorat, Graduate School, Evanston, Illinois, U.S.A.
- DUMAS J. et SOUMIS F., (2004), *Passenger flow models for airline networks,* Rapport de recherche Gérard, HEC-Montréal.
- ERICSON, S.E. et TANEJA, N.K., (1980), *Evaluation of scheduled Air passenger service in domestic markets.* Journal of Aircraft, Vol. 17, No. 1.
- GAGNON , G. (1967), *A model for flowing passengers over airlines networks.* Proceedings of the Seventh AGIFORS Symposium.
- R.L. PHILLIPS, D.W. BOWD and T.A. GROSMAN Jr, (1991), *An algorithm for calculating consistent itenerary flows.* Transportation Science, Vol. 25, No 3, 225-239.
- SHAW, G.C., (1968), *The schedule-its effect on passenger volumes.* Proceedings of the Eight AGIFORS Symposium.

SOUМИS, F., (1978), *Planification d'une flotte d'avions*. Thèse de doctorat. Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, Publication #318.

SOUМИS F., (1979), *Modèle de comportement des clients du transport aérien*. Symposium IFAC/INFOR, Toulouse, p. 165-173, Pergamon Press.

SOUМИS F., FERLAND J. A. et ROUSSEAU J. M., (1981), *MAPUM : A model for assigning passengers to flight schedule*, Transportation Research A, Vol 15A.

SOUМИS, F. et NAGURNEY, A., (1993), *A stochastic, multiclass airline network equilibrium model*. Operations Research, Vol. 41, No. 4.

WONG, Y. et BIRCH, W., (1978), *Boeing aircraft selective and evaluation system*. User's Guide, Boeing Company.