

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

TARIFICATION AVEC SEGMENTATION DE LA DEMANDE ET
CONGESTION

MAXIME FORTIN

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

DÉCEMBRE 2004



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-494-01325-7

Our file Notre référence

ISBN: 0-494-01325-7

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

TARIFICATION AVEC SEGMENTATION DE LA DEMANDE ET
CONGESTION

présenté par: FORTIN Maxime

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BAPTISTE Pierre, Doctorat, président

M. SAVARD Gilles, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. MARCOTTE Patrice, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. AUDET Charles, Ph.D., membre

À Olivier, Jocelyne et Guymond

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur, Gilles Savard, pour avoir accepté de diriger ce mémoire et pour son soutien tout au long de ces deux années de maîtrise. Merci également à mon codirecteur Patrice Marcotte pour son aide toujours ciblée et efficace. J'ai beaucoup apprécié travailler avec vous et j'en garderai d'excellents souvenirs.

Je tiens aussi à remercier Pierre Baptiste et Charles Audet pour leurs questions et commentaires perspicaces.

Enfin, merci à tout le personnel du GERAD et de Polytechnique pour leur support inconditionnel.

Ce projet a pu être réalisé grâce à une bourse d'études supérieures du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada.

RÉSUMÉ

La tarification optimale des biens et services se modélise naturellement à l'aide de la programmation biniveau. En effet, la programmation biniveau est un outil classique pour modéliser des situations où un sous-ensemble des variables de décisions est contrôlé non pas par le meneur, mais plutôt par un suiveur qui optimise sa propre fonction d'utilité par rapport aux variables de décisions qui lui sont attribuées. Ce mémoire de maîtrise s'attaque à un problème de tarification dans les réseaux de transport avec congestion et segmentation de la demande. Au premier niveau, une firme (meneur) impose des tarifs sur un sous-ensemble d'arcs fixé à l'avance en tentant de maximiser ses revenus. Au deuxième niveau, chaque usager essaie minimiser ses propres coûts de transports, ceux-ci étant une combinaison linéaire du temps de transport et du tarif total déboursé. On suppose qu'il existe une fonction de densité qui décrit la répartition des usagers selon la valeur (monétaire) qu'ils accordent au temps ("value of time" ou VOT). Nous sommes donc en présence d'un problème biniveau à fonction objectif bilinéaire au premier niveau et à fonction objectif convexe au second niveau. Puisque nous supposons une répartition continue des usagers selon la VOT, les variables de décision au second niveau sont des densités de flot et il s'agit donc d'un problème en dimension infinie. Nous introduisons un algorithme à deux phases pour résoudre ce problème. La première phase consiste à obtenir une solution optimale pour le problème discrétisé.

La deuxième phase consiste en une descente de gradient, en utilisant la solution de la première phase comme point de départ.

ABSTRACT

The optimal setting of prices, taxes or subsidies on goods and services can be naturally modeled as a bilevel program. Indeed, bilevel programming is an adequate framework for modeling optimization situations where a subset of decision variables is not controlled by the main optimizer (the leader), but rather by a second agent (the follower) who optimizes its own objective function with respect to this subset of variables. This master's thesis addresses the problem of setting profit-maximizing tolls on a congested transportation network involving several user classes. At the upper level, the firm (leader) sets tolls on a subset of arcs and strives to maximize its revenue. At the lower level, each user minimizes its generalized travel cost, expressed as a linear combination of travel time and out-of-pocket travel cost. We assume the existence of a probability density function that describes the repartition of the value of time (VOT) parameter throughout the population. This yields a bilevel optimization problem involving a bilinear objective at the upper level and a convex objective at the lower level. Since, in this formulation, lower level variables are flow densities, it follows that the lower level problem is infinite-dimensional. We devise a two-phase algorithm to solve this nonconvex problem. The first phase aims at finding a good initial solution by solving for its global optimum a discretized version of the model. The second phase implements a gradient method, starting from the initial point obtained in the initial phase.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xii
LISTE DES FIGURES	xiii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 PROGRAMMES MATHÉMATIQUES AVEC CON-	
TRAINTES D'ÉQUILIBRE	4
1.1 Équilibre de Stackelberg	5
1.1.1 Exemple typique d'un jeu de Stackelberg	5
1.1.2 Définition formelle d'un jeu de Stackelberg	7
1.2 Inéquations variationnelles	9
1.2.1 Formulation des MPEC	11

1.3	Modèle de tarification général	14
1.3.1	Modèle de tarification dans les réseaux de transport	15
CHAPITRE 2 MODÈLE DE TARIFICATION AVEC		
	CONGESTION	18
2.1	Équilibre de Wardrop	19
2.1.1	Paradoxe de Braess	21
2.2	Optimalité du système	22
2.2.1	Coût social marginal	26
2.3	Tarification optimale	27
CHAPITRE 3 MODÈLE DE TARIFICATION AVEC SEGMENTATION DE LA DEMANDE ET CONGESTION		30
3.1	Formulation du modèle	30
3.1.1	Cas discret	33
3.1.2	Cas continu	35
3.2	Résultats théoriques	38
3.2.1	Continuité de la solution d'équilibre	42
3.2.2	Différentiabilité de la fonction objectif	45
3.3	Algorithme de résolution	50
CHAPITRE 4 DISCRÉTISATION DU PROBLÈME		53

4.1	Discrétisation de la segmentation de la demande	53
4.2	Discrétisation de la fonction de congestion	54
4.3	Discrétisation du problème	56
4.3.1	Linéarisation de la fonction objectif	58
4.3.2	Linéarisation de la contrainte de complémentarité	60
4.3.3	Congestion par plateau	62
4.4	Problème discrétisé	64
CHAPITRE 5 RÉSULTATS NUMÉRIQUES		66
5.1	Exemple sur un petit problème	66
5.1.1	Cas sans congestion	66
5.1.2	Cas avec congestion	68
5.1.3	Tests sur la discrétisation	70
5.2	Résolution sur des instances plus grandes	72
5.2.1	Génération de problèmes tests	72
5.2.2	Maximisation du profit	76
5.2.3	Minimisation du temps total de parcours	78
CONCLUSION		83
RÉFÉRENCES		84

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1	Notation pour le problème de tarification	16
Tableau 5.1	Petit exemple	66
Tableau 5.2	Itérations - Petit problème sans congestion 1	68
Tableau 5.3	Itérations - Petit problème sans congestion 2	68
Tableau 5.4	Itérations - Petit problème avec congestion	70
Tableau 5.5	Discrétisation uniforme	72
Tableau 5.6	Discrétisation hauteur de saut constante	73
Tableau 5.7	Statistiques des problèmes tests	75
Tableau 5.8	Statistiques des problèmes de Schoeb	76
Tableau 5.9	Différents choix de vecteurs de taxes initiales	76
Tableau 5.10	Profits pour les problèmes tests	77
Tableau 5.11	Profits pour les problèmes de Schoeb	77
Tableau 5.12	Temps moyens de résolution (en secondes) pour les problèmes tests	78
Tableau 5.13	Temps moyens de résolution (en secondes) pour les problèmes de Schoeb	78
Tableau 5.14	Temps totaux pour les problèmes tests	80
Tableau 5.15	Temps totaux pour les problèmes de Schoeb	81

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Équilibre de Stackelberg	7
Figure 2.1	Réseau du paradoxe de Braess	22
Figure 3.1	Chemins dominés et non dominés	42
Figure 4.1	Discrétisation de la segmentation de la demande	54
Figure 4.2	Discrétisation de la fonction de congestion	57
Figure 5.1	Petit exemple	67
Figure 5.2	Petit exemple sans congestion - Revenu par usager	69
Figure 5.3	Petit exemple avec congestion - Revenu par usager	71
Figure 5.4	Discrétisation uniforme - évolution des vecteurs de taxes initial	73
Figure 5.5	Discrétisation hauteur de saut constante - évolution des vec- teurs de taxes initial	74
Figure 5.6	Itérations de la phase descente pour le problème test 6 - maxi- misation du profit	79
Figure 5.7	Itérations de l'algorithme pour le problème 4 de Schoeb - minimisation du temps total	81
Figure 5.8	Problème 1	82

INTRODUCTION

Le sujet de ce mémoire est la tarification dans les réseaux ("network pricing"). De quel réseaux parle-t-on ici ? En général, les réseaux de transports (routiers, aériens) ou les réseaux de communications (téléphonie, internet). Lorsque vient le temps de formuler mathématiquement de tels systèmes, on sépare le meneur, qui décide des tarifs à imposer, des suiveurs, qui utilisent le réseau, et on suppose que ces derniers se soumettent à un processus de décisions hiérarchiques : le meneur fixe d'abord les tarifs et les suiveurs réagissent. La réaction de ceux-ci vise à minimiser une fonction de coûts en respectant leur (unique) objectif : se rendre d'un point A à un point B du réseau. Cette fonction de coûts dépend évidemment du tarif total imposé sur le chemin emprunté, mais aussi de la qualité de ce chemin telle que perçue par les usagers. La qualité d'un chemin peut dépendre de plusieurs critères, les plus communs étant le temps pour les réseaux de transport (aussi la qualité de service, c.f. le transport aérien) et la qualité ou vitesse de connexion pour les réseaux de communication. Dans le cas où il y a segmentation de la demande, chaque usager peut avoir sa propre fonction de coûts. Il y a (au moins) deux autres points à considérer concernant les usagers. Le premier est leur interaction avec le réseau, où l'on cherche la plupart du temps à modéliser des phénomènes de congestion. Le second concerne la coopération avec le suiveur : on admet généralement que les suiveurs choisissent la meilleure solution, parmi l'ensemble des solutions optimales,

du point de vue du meneur. L'objectif du meneur est de maximiser une fonction d'utilité. On retrouve surtout deux approches dans la littérature : la maximisation du profit résultant de la collecte des tarifs (taxes, péages) et la maximisation de l'utilité sociale d'un point de vue global par rapport au système.

Le but de ce travail est de modéliser un problème de maximisation du profit en considérant à la fois la segmentation continue de la demande et la congestion. Sans congestion et avec segmentation discrète, on peut modéliser problème à l'aide de la programmation mathématique à deux niveaux, voir Labbé, Marcotte et Savard [12]. Ce modèle a été repris par Schoeb et al.^[22], qui y a intégré la segmentation de la demande continue. Il caractérise à l'aide d'un gradient (ou sous-gradient dans certains cas) la variation du trafic sur chaque arc par rapport à une variation des taxes imposées. Il en découle un algorithme de descente classique où on essaie d'obtenir un bon point de départ en résolvant le problème discrétisé de façon exacte. L'approche utilisée dans ce travail est exactement la même, mais nous ajoutons de la congestion sur les arcs. Le calcul de la solution au deuxième niveau est moins direct : il s'agira de résoudre une inéquation variationnelle de dimension infinie. Nous obtenons encore une fois un gradient (ou sous-gradient) pour caractériser l'évolution de la solution d'équilibre sous une perturbation des taxes et proposons donc un algorithme de descente pour résoudre le problème. La flexibilité d'un tel algorithme nous permettra également de résoudre un problème plus "noble" que

l'on retrouve surtout dans les réseaux de transport : imposer des tarifs de sorte que le délai total associé à la solution d'équilibre soit minimal. Cette approche diffère de ce que l'on retrouve dans la littérature à ce propos, car les arcs tarifables constituent un sous-ensemble (fixé a priori) strict des arcs du réseau. On parle alors de "second best pricing".

Le travail est organisé comme suit : le chapitre 1 présente les programmes mathématiques avec contraintes d'équilibre et introduit également le lecteur au modèle de Labbé, Marcotte, Savard. Le chapitre 2 présente les problèmes de gestion de trafic et introduit notamment le principe d'équilibre de Wardrop ^[26]. Le chapitre 3 définit notre modèle de façon formelle. Quelques résultats théoriques sont obtenus et on présente l'algorithme de résolution. On obtient au chapitre 4 une discrétisation du problème, dont la solution sera utilisée comme point de départ de notre algorithme. Enfin, le chapitre 5 présente les performances de notre algorithme sur un ensemble de problèmes tests.

CHAPITRE 1

PROGRAMMES MATHÉMATIQUES AVEC CONTRAINTES D'ÉQUILIBRE

Ce chapitre a pour but d'introduire quelques concepts fondamentaux reliés aux programmes mathématiques avec contraintes d'équilibre ("Mathematical Programming with Equilibrium Constraints" ou MPEC). Ces programmes sont également connus dans la littérature sous le nom de problèmes biniveaux généralisés. Un MPEC est un problème d'optimisation hiérarchique (biniveau dans la plupart des cas) incluant au deuxième niveau une inéquation variationnelle ou des contraintes de complémentarité paramétrées par les variables de décision du premier niveau. On parle de contraintes d'équilibre puisqu'en ingénierie et en économie, l'inéquation variationnelle ou les contraintes de complémentarité du deuxième niveau réfèrent souvent à des phénomènes d'équilibre. On trouve des applications des MPEC dans plusieurs domaines tels que le design de réseaux, le transport (d'où l'intérêt dans le cadre du présent ouvrage), la finance et la théorie des jeux. Le terme "Mathematical Programming with Equilibrium Constraints" serait apparu pour la première fois dans la littérature en 1988 dans un article de Harker et Pang ^[9]. La section 1.1 présente le problème de Stackelberg, exemple classique d'un MPEC, que l'on retrouve à maintes reprises dans la littérature. On introduit à la section 1.2 les

inéquations variationnelles dans le contexte de la formulation des MPEC. Enfin, la section 1.3 présente un modèle de tarification général.

1.1 Équilibre de Stackelberg

Les MPEC forment une large classe de problèmes d'optimisation à laquelle se sont intéressés des mathématiciens, ingénieurs et économistes au début des années 50. Ceux-ci se sont avérés utiles dans la modélisation de processus de décisions hiérarchiques, d'où leur relation avec le problème de Stackelberg. Les jeux de Stackelberg sont pour ainsi dire la première forme de MPEC étudiée dans la littérature. Ce sont des jeux séquentiels où le premier joueur - le meneur - prend une décision optimale à son égard en considérant la réaction du second joueur - le suiveur.

1.1.1 Exemple typique d'un jeu de Stackelberg

Supposons que deux entreprises produisent un bien homogène en quantités y_1 et y_2 (où $y_i \in Q_i = [0, \infty)$ par exemple). La quantité totale de biens produits est donc $Y = y_1 + y_2$. La firme i a un coût de production $c_i(y_i)$. Supposons également que l'on connaisse le prix à fixer pour que le marché écoule cette production ($p(Y) \equiv$ fonction de demande inverse). Le problème de maximisation du profit de l'entreprise 2 est donc le suivant :

$$\max_{y_2} \pi_2(y_1, y_2) = p(y_1 + y_2)y_2 - c_2(y_2). \quad (1.1)$$

Il est évident que le profit de l'entreprise 2 dépend de la quantité de biens produits par l'entreprise 1. Si les fonctions π_i sont dérivables, strictement concaves et satisfont certaines conditions frontières, on peut alors résoudre le problème en utilisant les conditions d'optimalité de premier ordre. On obtient ainsi deux fonctions de réactions propres à chaque entreprise.

Supposons que les 2 entreprises ont un coût marginal fixe, respectivement c_1 et c_2 , avec $c_1 > c_2$. Supposons également que la demande en fonction du prix s'écrit :

$$Y(p) = 1 - p \Rightarrow p = 1 - Y = 1 - y_1 - y_2.$$

Le problème de maximisation devient :

$$\max_{y_2} \pi_2(y_1, y_2) = (1 - y_1 - y_2)y_2 - c_2 y_2.$$

Et alors,

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial y_2} = 1 - c_2 - y_1 - 2y_2 = 0 \Rightarrow y_2^* = \frac{1 - c_2 - y_1}{2}.$$

Connaissant la fonction de réaction de l'entreprise 2 ($y_2^* = \frac{1 - c_2 - y_1}{2}$), on en vient au problème de maximisation suivant pour l'entreprise 1 considérée comme meneur :

$$\max_{y_1} \pi_1(y_1, y_2) = (1 - y_1 - \frac{1 - c_2 - y_1}{2})y_1 - c_1 y_1.$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial y_1} = \frac{1 - 2y_1 + c_2}{2} - c_1 = 0 \Rightarrow y_1^* = \frac{1 - 2c_1 + c_2}{2}.$$

La figure 1.1.1 montre qu'en fait l'équilibre de Stackelberg se situe au point de tangence entre la courbe d'isoprofits de la firme 1 et la courbe de réaction de la firme 2.

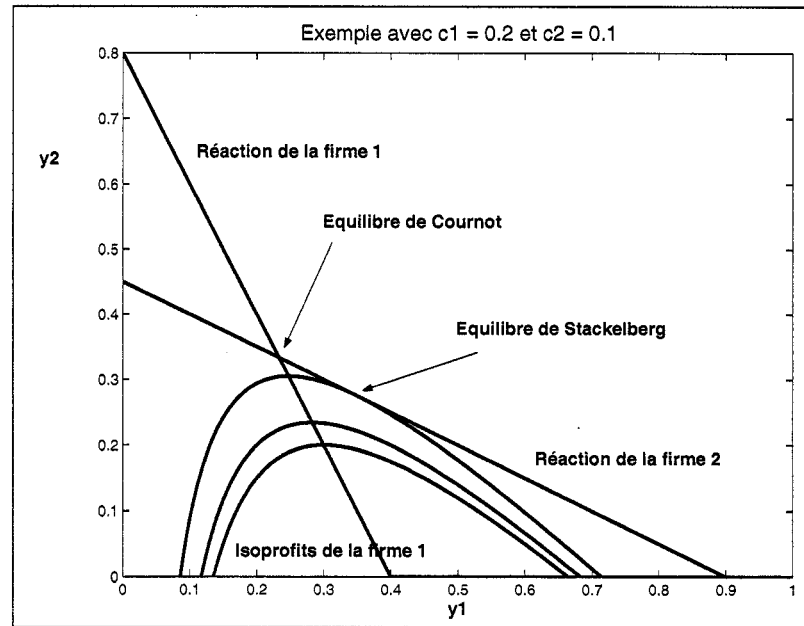


Figure 1.1 Équilibre de Stackelberg

1.1.2 Définition formelle d'un jeu de Stackelberg

Le meneur choisit une stratégie x dans un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^n$ et le suiveur choisira une stratégie y dans l'ensemble $Y(x) \subseteq \mathbb{R}^m$. L'ensemble $Y(x)$ est supposé convexe et fermé. Le suiveur a une fonction de coût $\theta(x, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. La réaction optimale du suiveur sera donc $y^*(x) \in \arg \min\{\theta(x, y) : y \in Y(x)\}$. Soit $f(\cdot, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction de coût du meneur ; le jeu de Stackelberg se formule donc

ainsi :

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} f(x, y) \\ \text{s.c. } y \in \arg \min \{ \theta(x, y') : y' \in Y(x) \}. \end{aligned}$$

Dans le cas où la fonction θ est strictement convexe pour un x fixé, y^* est déterminé de façon unique. Dans le cas où la réaction optimale n'est pas unique, le problème pourrait être mal posé si aucune règle ne spécifie complètement la réaction. À un extrême, un suiveur de "mauvaise foi" pourrait, à x fixé, être tenté de choisir la pire solution y^{wc} ("Worst Case Scenario") du point de vue du meneur. À l'autre, on suppose généralement que le meneur impose au suiveur sa réaction, ce qui est très réaliste la plupart du temps. Il faudrait alors lire le problème de la façon suivante, en remarquant que y est maintenant une variable de décision au premier niveau :

$$\begin{aligned} \min_{x \in X, y} f(x, y) \\ \text{s.c. } y \in \arg \min \{ \theta(x, y') : y' \in Y(x) \}. \end{aligned}$$

Le modèle de Stackelberg, dans sa forme dite statique, a d'abord été introduit par von Stackelberg ^[23] en 1952. Des efforts de recherche ont porté sur le modèle déterministe statique avec contraintes couplantes. Par abus de langage, on retrouve

souvent ce problème sous la forme dite verticale suivante :

$$\begin{aligned}
 & \max_{x,y} && f_1(x,y) \\
 & \text{s.c.} && g_1(x,y) \leq 0 \\
 & && \max_y f_2(x,y) \\
 & && g_2(x,y) \leq 0.
 \end{aligned}$$

Ce type de problème est généralement non-convexe et non-différentiable, ce qui rend sa résolution difficile. En particulier, Jeroslow^[11] a montré que la programmation mathématique linéaire à deux niveaux (où toutes les fonctions sont linéaires) - très semblable au problème de Stackelberg présenté ci-haut - est un problème NP-difficile, et Vicente, Savard et Júdice^[24] ont même montré que l'obtention d'un simple certificat d'optimalité locale était fortement NP-Difficile.

1.2 Inéquations variationnelles

Si l'exemple précédent de jeu de Stackelberg a permis d'introduire les concepts de jeux séquentiels (ou de processus de décisions hiérarchiques), il ne présente toutefois pas un élément essentiel des MPEC, les contraintes d'équilibre. Dans le cadre de cet ouvrage, nous utiliserons des contraintes d'équilibre de trafic, que nous présenterons plus en détail au chapitre 2. La représentation mathématique de phénomènes d'équilibres dans un MPEC fait souvent appel aux inéquations

variationnelles.

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction et $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe. Un vecteur x^* est dit solution de l'inéquation variationnelle $IV(F, X)$ s'il satisfait :

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in X, \quad (1.2)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire usuel. On a de façon équivalente :

$$-F(x^*) \in N_X(x^*), \quad (1.3)$$

où

$$N_X(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle d, y - x^* \rangle \leq 0, \forall y \in X\}$$

est le cône normal à X en $x \in X$.

Dans le cas particulier où F est le gradient d'une fonction f , l'équation 1.3 devient tout simplement la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre impliquant qu'il n'existe pas de direction de descente admissible en x^* .

Le lecteur intéressé par les inéquations variationnelles pourra se référer aux travaux de Harker et Pang ^[8] et Patriksson ^[19]. Les notes de cours de Marcotte ^[16] sont également une excellente introduction aux inéquations variationnelles.

1.2.1 Formulation des MPEC

Pour une fonction $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$, la forme générale d'un MPEC est la suivante :

$$\min_{x,y} \quad f(x,y) \quad (1.4)$$

$$\text{s.c.} \quad (x,y) \in Z \quad (1.5)$$

$$y \in S(x) \quad (1.6)$$

où $Z \in \mathbb{R}^{n+m}$ est un ensemble fermé non-vide (ensemble réalisable) et où $S(x) \subset \mathbb{R}^m$ est l'ensemble des solutions d'une inéquation variationnelle paramétrée en $x \in \mathbb{R}^n$.

Plus précisément, soit X la projection de Z sur $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R}^m \text{ t.q. } (x,y) \in Z\}$$

et soit $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation qui à chaque $x \in \mathbb{R}^n$ associe un ensemble (possiblement vide) fermé et convexe $C(x)$ de $\mathbb{R}^m$. Donc, pour chaque valeur $x \in X$ admissible, l'inéquation variationnelle est $IV(F(x, \cdot), C(x))$, où $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelée fonction d'équilibre. Par définition,

$$y \in S(x) \Leftrightarrow y \in C(x) \text{ et } \langle F(x,y), v - y \rangle \geq 0, \quad \forall v \in C(x). \quad (1.7)$$

Examinons le cas où la transformation $F(x, \cdot)$ est le gradient partiel d'une fonction dérivable $\theta : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$, i.e.

$$F(x, y) = \nabla_y \theta(x, y).$$

Dans ce cas, pour x fixé, les solutions de l'inéquation variationnelle $IV(F(x, \cdot), C(x))$ sont données par l'ensemble qui satisfait les conditions de stationarité du premier ordre du problème (2e niveau)

$$\begin{aligned} & \min_y \theta(x, y) \\ & \text{s.c. } y \in C(x). \end{aligned}$$

Ce cas particulier correspond au problème de programmation biniveau. On pourrait alors croire que les MPEC sont donc une généralisation de la programmation biniveau. Mais remarquons que les MPEC peuvent également être ramenés sous la forme d'un programme biniveau faisant appel à une fonction de gap (Marcotte et Zhu ^[14]). En effet, associons à l'inéquation variationnelle du deuxième niveau $IV(F(x, \cdot), C(x))$ la fonction de gap suivante :

$$G_\alpha(x, y) = \max_{z \in C(x)} \phi(x, y, z)$$

où

$$\phi(x, y, z) = \langle F(x, y), y - z \rangle - \frac{1}{2}\alpha \|y - z\|^2$$

et α est un nombre positif. La fonction ϕ est concave et G_α est positive ou nulle sur $C(x)$. De plus, $G_\alpha(x, y) = 0$ si et seulement si y est solution de l'inéquation variationnelle. Ainsi, $IV(F(x, \cdot), C(x))$ peut se réécrire

$$G_\alpha(x, y) = 0,$$

d'où la reformulation du MPEC initial en :

$$\min_{x, y} \quad f(x, y) \tag{1.8}$$

$$\text{s.c.} \quad x \in X, y \in C(x) \tag{1.9}$$

$$G_\alpha(x, y) = 0. \tag{1.10}$$

Marcotte et Zhu ont proposé de résoudre ce problème en imposant une pénalité sur la fonction objectif ($f(x, y) + \mu G_\alpha(x, y), \mu > 0$). Pour un aperçu plus détaillé des méthodes et algorithmes proposés pour résoudre les MPEC, le lecteur est référé à la thèse de doctorat de Benoît Colson ^[4].

1.3 Modèle de tarification général

Le sujet principal de cet ouvrage étant la tarification dans les réseaux de transport (avec congestion et segmentation de la demande), il va de mise de présenter le modèle de tarification général de Labbé, Marcotte, Savard ^[12]. Il s'agit d'un problème linéaire biniveau :

$$\begin{aligned}
 & \max_{x,T} T x_1 \\
 & \min_{x_1, x_2} (c_1 + T) x_1 + c_2 x_2 \\
 & \text{s.c.} \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 = b \\
 & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0,
 \end{aligned}$$

où T représente le vecteur de taxes (ou de prix), x_1 et x_2 les vecteurs associés aux produits taxables et non-taxables respectivement. Ce problème a été montré fortement NP difficile par Roch ^[20]. En utilisant une approche combinatoire, ce dernier réduit le problème 3-SAT ^[7] en une instance du problème de tarification. Le problème 3-SAT consiste à déterminer si l'expression suivante, constituée de m clauses à trois littéraux (choisis parmi n variables binaires $x_1, \dots, x_n$ et leurs

négations) peut être valide :

$$F = \bigwedge_{i=1}^m (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3}).$$

Roch fournit ensuite un algorithme d'approximation en temps polynomial avec une précision dans le pire des cas de $\frac{1}{2} \log m_T + 1$. Il montre ensuite que cette relaxation est serrée par rapport à la relaxation linéaire en construisant des instances pour lesquelles le saut d'intégralité est atteint.

1.3.1 Modèle de tarification dans les réseaux de transport

Une application intéressante du précédent modèle apparaît dans les réseaux de transport. On introduira d'abord la notation présentée au tableau 1.3.1 :

Le problème consiste à maximiser les revenus du meneur sachant que les usagers (suiveurs) vont se répartir de façon à minimiser leur coût de transport, que toute la demande doit être satisfaite et que les contraintes de conservation de flot sont respectées. Le problème général est le suivant :

Tableau 1.1 Notation pour le problème de tarification

N :	Noeuds du réseau
Ω :	Ensemble des noeuds origines du réseau
Δ :	Ensemble des noeuds destinations du réseau
A :	Ensemble des arcs du réseau
$a = (i, j)$:	Élément de A
A_1 :	Ensemble des arcs taxables
A_2 :	Ensemble des arcs non taxables
i^- :	Ensemble des noeuds précédant i
i^+ :	Ensemble des noeuds suivant i
c_a :	Coût fixe de transport sur a
T_a :	Taxe sur $a \in A_1$
l_a :	Borne inférieure sur T_a
d^{kl} :	Demande de flot entre l'origine k et la destination l
x_a^{kl} :	Flot de l'origine k à la destination l passant par a
x_a :	Flot total sur a

$$\max_{T, x} \sum_{a \in A_1} T_a x_a, \quad (1.11)$$

$$\min_x \sum_{a \in A_1} (c_a + T_a) x_a + \sum_{a \in A_2} c_a x_a, \quad (1.12)$$

$$\sum_{a \in i^+} x_a^{kl} - \sum_{a \in i^-} x_a^{kl} \quad (1.13)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ -1 & \text{si } i = l, \quad \forall i, k, l \in N \times \Omega \times \Delta \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$x_a = \sum_{k, l} d^{kl} x_a^{kl}, \quad \forall a \in A \quad (1.14)$$

$$x_a^{kl} \geq 0, \quad \forall a, k, l \in A \times \Omega \times \Delta \quad (1.15)$$

$$T_a \geq l_a, \quad \forall a \in A_1. \quad (1.16)$$

Les fonctions objectifs du meneur et des suiveurs sont représentées par les équations 1.11 et 1.12. Les contraintes 1.13 et 1.15 sont des contraintes classiques de conservation de flots positifs. La contrainte 1.14 assure la satisfaction de la demande et enfin, la contrainte 1.16 assure le respect des bornes inférieures sur les taxes. Ce problème peut être transformé en un problème linéaire en nombres entiers en se basant sur le fait que les chemins transportent soit tout le flot associé à une origine/destination, soit rien du tout. Comme on le verra dans les chapitres suivants, ce cas ne se présente pas lorsqu'on ajoute une segmentation de la demande et/ou de la congestion au problème.

CHAPITRE 2

MODÈLE DE TARIFICATION AVEC CONGESTION

Ce chapitre a pour but d'introduire le lecteur à l'utilisation des MPEC dans les problèmes de gestion de trafic. On abordera un point de vue légèrement différent de celui présenté à la fin du chapitre 1, car il s'agit ici de diminuer le temps de transport total des usagers (pour diminuer la pollution et le stress des automobilistes !) et non pas de maximiser les profits d'une firme quelconque. Le lecteur est référé à un article de Bergendorff, Hearn et Ramana ^[1], dont l'auteur s'est inspiré. La section 2.1 présente l'équilibre de Wardrop ainsi qu'un exemple bien connu dans la littérature qui permet de différencier l'optimalité du point de vue des usagers et l'optimalité du système : le réseau de Braess ^[3]. On présente ensuite un lemme utilisé pour définir une technique simple pour atteindre l'optimalité du système : la tarification au coût social marginal (section 2.2). Cette dernière technique ne garantit toutefois pas l'obtention de l'optimalité à un coût minimum pour les usagers. On présentera donc une approche qui va dans ce sens à la section 2.3.

À noter que contrairement au chapitre précédent, nous supposons ici qu'il est possible d'imposer un tarif sur tous les arcs pour réconcilier équilibre de trafic (solution optimale du point de vue de chaque usager) et équilibre social (solution optimale du point de vue du système). Ceci est peu pratique dans la vraie vie ;

on voit mal comment il serait possible d'imposer aux automobilistes un péage à chaque coin de rue ! Dans les chapitres suivants, notre approche consistera, comme dans le cas de la maximisation du profit, à se restreindre à des arcs dits tarifables déterminés à l'avance. Le but de ce chapitre n'est donc pas d'établir les bases d'une technique de tarification qui sera utilisée ultérieurement, mais plutôt d'introduire de façon générale les problèmes de gestion de trafic.

2.1 Équilibre de Wardrop

Soit un réseau composé de m chemins différents (mais pouvant emprunter des arcs communs) reliant une origine O à une destination D , et la demande d en nombre d'utilisateurs souhaitant aller de O vers D , c'est-à-dire souhaitant emprunter un des chemins disponibles. On notera $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ un état du réseau, tel que v_j représente le nombre d'utilisateurs empruntant le chemin j . On supposera que le temps de parcours associé au chemin j est fonction de l'état du réseau et est donné par la fonction de délai $D_j(v)$. Un équilibre de trafic, ou équilibre de Wardrop, est atteint lorsque les temps de parcours sur les chemins utilisés sont tous égaux et inférieurs aux temps de parcours sur les chemins non utilisés. Ceci

se traduit de la façon suivante :

$$D_j(v^*) = u^* \quad \forall j : v_j^* > 0$$

$$D_j(v^*) \geq u^* \quad \forall j$$

$$\sum_{j=1}^m v_j^* = d$$

$$v_j^* \geq 0.$$

La première équation garantit que les chemins utilisés ont le même délai u^* , tandis que la deuxième impose que ce délai u^* soit minimal sur tous les chemins. La troisième équation garantit que la demande est satisfaite et enfin, la quatrième interdit un nombre négatif d'usagers sur un chemin. En supposant que le réseau de transport est composé de n arcs, on notera x_i , $i = 1, \dots, n$ le nombre d'usagers empruntant l'arc i et Z la matrice d'incidence arcs-chemins. De plus, la fonction de délai est donnée pour chaque arc et est notée $D_i(x)$. Soit A la matrice d'incidence origine-destination / chemin et b le vecteur de demande par paire origine-destination. L'ensemble des flots admissibles devra satisfaire :

$$x = Zv$$

$$Av = b$$

$$v \geq 0.$$

On définira les ensembles :

Ensemble réalisable arcs/chemins $F = \{(x, v) | x = Zv, Av = b, v \geq 0\}$;

Ensemble réalisable arcs $X = \{x | \text{il existe } v \text{ t.q. } (x, v) \in F\}$.

Bref, un flot x^* est à l'équilibre selon le principe de Wardrop ^[26] si et seulement si il est solution de l'inéquation variationnelle $IV(D, X)$, c'est-à-dire

$$\langle D(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in X.$$

2.1.1 Paradoxe de Braess

Un exemple bien connu de ce modèle d'affectation du trafic est illustré à la figure 2.1. Ce réseau, dit de Braess, est formé de trois chemins ACD, ABD et ABCD reliant l'origine A et la destination D et où la demande est fixée à 6 unités. L'équilibre est atteint en affectant 2 unités à chaque chemin, résultant en un délai de 92 par chemin et en un coût total pour le système de $6 \times 92 = 552$. Or, on constate qu'il aurait été plus efficace d'affecter 3 unités aux chemins ACD et ABD, résultant en un délai de 83 par chemin et en un coût total de $6 \times 83 = 498$. Mais cette solution est instable, car dans cet état, le délai du chemin ABCD est de 70. La solution optimale du système ne pourra être atteinte qu'avec une coopération entre les usagers ou à l'aide d'un planificateur qui interdirait l'accès à l'arc BC, d'où le paradoxe de Braess. On verra plus loin comment il est possible d'atteindre

l'optimalité du système en formulant un MPEC approprié.

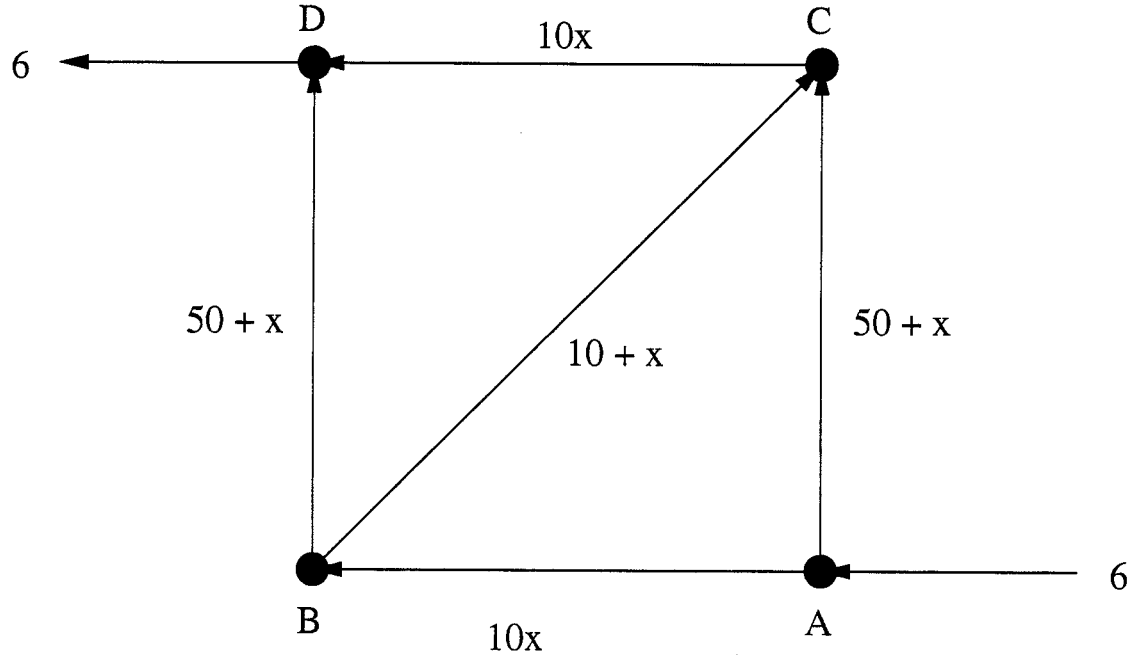


Figure 2.1 Réseau du paradoxe de Braess

2.2 Optimalité du système

Du point de vue d'un planificateur, l'objectif est de minimiser le temps total de transport des usagers. Comme nous l'avons montré à la section 2.1.1, l'affectation naturelle à l'équilibre n'est pas nécessairement optimale du point de vue du système. On étudiera alors les situations d'équilibre résultant de la perturbation du vecteur de délais D (vecteur coûts) à l'aide d'une taxe T , tel que le coût pour les usagers est désormais de

$$D_T(x) = D(x) + T.$$

Remarquons qu'ici, la fonction D exprime le délai en unité monétaire. Introduisons d'abord le lemme suivant qui sera utilisé lors de la définition de la tarification au coût social marginal.

Lemme 1. (*Bergendorff, Hearn, Ramana^[1]*) Soit $x^* \in X$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. x^* est un équilibre de trafic, i.e., x^* est solution de $IV(D, X)$.
2. $x^* \in \arg \min\{D(x^*)^T x \mid x \in X\}$, i.e., $\min\{D(x^*)^T x \mid x \in X\} = D(x^*)^T x^*$.
3. Il existe μ tel que :

$$Z^T D(x^*) \geq A^T \mu,$$

$$D(x^*)^T x^* = b^T \mu.$$

Démonstration. En utilisant la définition de $IV(D, X)$, l'équivalence entre 1 et 2 suit immédiatement. Sachant que $x^* \in X$, on peut réécrire 2 de la façon suivante :

$$\min\{D(x^*)^T Zv \mid Av = b, v \geq 0\} \geq D(x^*)^T x^*.$$

Par dualité, on obtient :

$$\max\{b^T \mu \mid A^T \mu \leq Z^T D(x^*)\} \geq D(x^*)^T x^*.$$

Il existe donc μ tel que

$$A^T \mu \leq Z^T D(x^*),$$

$$b^T \mu \geq D(x^*)^T x^*.$$

Soit $v^* \geq 0$ tel que $x^* = Zv^*$, $Av^* = b$, on voit que

$$b^T \mu \geq (x^*)^T D(x^*) = (v^*)^T (Z^T D(x^*)) \geq (v^*)^T A^T \mu = b^T \mu$$

On peut remonter les arguments précédents dans le sens inverse pour en déduire l'équivalence entre 2 et 3. D'où la conclusion du lemme. $\square$

Dans le cas où la fonction D est strictement monotone, l'unicité de la solution d'équilibre est garantie. Notons que la troisième affirmation du lemme précédent est la plus intéressante d'un point de vue d'optimisation, car elle caractérise un équilibre de trafic sous forme de contraintes paramétrisées par la variable μ qui représente en fait la durée associée aux chemins utilisés.

Examinons maintenant le problème du planificateur qui consiste à minimiser le

temps total de transport :

$$\min_{x,v} \langle D(x), x \rangle$$

s.c.

$$x = Zv$$

$$Av = b$$

$$v \geq 0.$$

En reformulant ce problème en la variable v seulement et en laissant de côté la contrainte couplante $x = Zv$, le lagrangien et la condition nécessaire d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker s'écrivent :

$$L(v; \mu; \theta) = D(Zv)^T Zv + \mu^T (b - Av) - \theta^T v$$

$$\nabla L = Z^T D(Zv) + Z^T \nabla D(Zv) Zv - A^T \mu - \theta = 0$$

$$\theta \geq 0$$

$$v \geq 0$$

$$\theta^T v = 0$$

$$Av = b.$$

En remplaçant les Zv par x , on remarque qu'il existe un minimum local (x^*, v^*)

seulement s'il existe μ tel que :

$$Z^T(D(x^*) + \nabla D(x^*)x^*) \geq A^T \mu$$

$$x^*(D(x^*) + \nabla D(x^*)x^*) = b^t \mu.$$

Le lecteur remarquera la ressemblance entre les contraintes précédentes et la troisième affirmation du lemme 1.

2.2.1 Coût social marginal

On remarque ainsi qu'en posant $T = \nabla D(x^*)x^*$, la solution (x^*, v^*) est à l'équilibre du point de vue des usagers (il s'agit d'appliquer le lemme 1). La stricte monotonicté nous assure qu'il s'agit de l'unique solution d'équilibre. On dit de cette méthode de tarification qu'elle se base sur les coût sociaux marginaux. Ce principe stipule que pour atteindre l'optimalité du point de vue du système, on doit faire payer à un usager additionnel le coût associé à sa route additionné du coût total imposé aux autres usagers par sa décision d'utiliser le réseau

$$\delta(D(x^*)x^*) = (D(x^*) + \underbrace{\nabla D(x^*)x^*}_T) \delta x^*.$$

Bref, dans le contexte de la tarification marginale, on fait en réalité payer seulement le coût marginal T , l'autre composante étant l'équivalent coût de la conges-

tion. On reprendra ici l'exemple du réseau de Braess présenté à la section 2.1.1 en indexant les arcs dans l'ordre AB, AC, BC, BD, CD. Ainsi, $x^* = (3, 3, 0, 3, 3)$ et $\nabla D(x^*)x^* = (30, 3, 0, 3, 30)$. En imposant une taxe $T = (30, 3, 0, 3, 30)$, on remarque que x^* est à l'équilibre, le coût sur les chemins utilisés étant de 116 (pour un coût total de $6 \times 116 = 696$) et sur le chemin non utilisé étant de 130. Par contre, l'équilibre aurait pu être atteint autrement, en imposant par exemple une taxe de 13 sur l'arc BC et nulle sur les autres arcs, pour un coût total de 498.

2.3 Tarification optimale

Comme nous l'avons montré avec l'exemple précédent, on peut faire mieux qu'utiliser les coûts marginaux pour induire un équilibre de trafic. En effet, il est possible d'imposer moins de taxes aux usagers tout en obtenant une solution optimale du point de vue du système. L'approche présentée dans cette section va dans ce sens. Soit (x^*, v^*) une solution optimale du point de vue du système, mais qui n'est pas à l'équilibre. Il s'agira de trouver un vecteur de taxes β qui rend cette solution à l'équilibre en imposant aux usagers un coût total minimum. Ce coût total s'écrit $\langle D_\beta(x^*), x^* \rangle = \langle D(x^*), x^* \rangle + \langle \beta, x^* \rangle$. On ne conservera que le deuxième terme, le premier étant constant. Mais ce vecteur de taxes doit faire en sorte que (x^*, v^*) est une solution d'équilibre, c'est-à-dire que β doit satisfaire les contraintes :

$$Z^T D_\beta(x^*) \geq A^T \rho,$$

$$D_{\beta}(x^*)^T x^* = b^T \rho.$$

Bref, le problème s'écrit ainsi :

$$\min_{\beta, \rho} \langle \beta, x^* \rangle \quad (2.1)$$

$$\text{s.c.} \quad (2.2)$$

$$Z^T \beta - A^T \rho \geq -Z^T D(x^*) \quad (2.3)$$

$$(x^*)^T \beta - b^T \rho = -(x^*)^T D(x^*). \quad (2.4)$$

Si on se ramène à l'exemple précédent, on a $x^* = (3, 3, 0, 3, 3)^T$, $D(x^*) = (30, 53, 10, 53, 30)^T$, $A = (1, 1, 1)$, $b = 6$ et la matrice d'incidence arcs-chemins est donnée par

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le programme linéaire à résoudre est donc :

$$\begin{aligned} \min_{\beta, \rho} \quad & 3\beta_1 + 3\beta_2 + 3\beta_4 + 3\beta_5 \\ & \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_4 \\ \beta_2 + \beta_5 \\ \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \\ \rho \end{pmatrix} \geq - \begin{pmatrix} 83 \\ 83 \\ 70 \end{pmatrix} \quad (2.5) \\ & 3\beta_1 + 3\beta_2 + 3\beta_4 + 3\beta_5 - 6\rho = -498. \quad (2.6) \end{aligned}$$

La solution optimale est $\beta^* = [0 \ 0 \ 13 \ 0 \ 0]^T$ et $\rho = 83$. Son coût est de 0. Il s'agit bien de la solution mentionnée précédemment. Bref, pour trouver le vecteur de taxes qui permettra d'atteindre l'optimalité du système à un coût minimum, il s'agit premièrement de déterminer la répartition optimale des usagers et ensuite de résoudre le système 2.1 - 2.4. Comme nous l'avons mentionné précédemment, on pourra être amené à tarifier tous les arcs, ce qui peut ne pas être praticable dans la vraie vie. Cette approche ne sera pas utilisée lors de cette étude, car il nous semble difficile d'y intégrer la segmentation de la demande. Nous allons toutefois essayer de minimiser le temps total des usagers de la même façon que nous allons maximiser les revenus associés aux arcs taxables.

CHAPITRE 3

MODÈLE DE TARIFICATION AVEC SEGMENTATION DE LA DEMANDE ET CONGESTION

Dans ce chapitre, on laisse de côté le bien commun et la poursuite d'une solution système-optimale pour revenir à la maximisation du profit, avec un ajout par rapport à ce qui fut présenté au chapitre 2 : la segmentation de la demande. Il s'agira ici de définir le problème de façon formelle, car c'est sur cette base que nous dériverons des résultats théoriques, ainsi qu'un algorithme de résolution. La section 3.1 présente la formulation du modèle dans les cas multi-classes discret et continu. La section 3.2 présente quelques résultats théoriques intéressants desquels découle un algorithme de résolution (section 3.3).

3.1 Formulation du modèle

On considère un modèle biniveau de tarification dans un réseau (de transport, de communication, etc.). Au premier niveau, une firme - leader - fixe un prix (taxe, droit de passage, etc.) sur un sous-ensemble d'arcs lui appartenant dans le but de maximiser ses revenus. Au deuxième niveau, des clients - suiveurs - cherchent à minimiser leurs coûts en supposant qu'ils agissent de façon rationnelle. On supposera que la firme a au moins un compétiteur, ce qui assure que les revenus sont

bornés supérieurement. On supposera enfin que les clients sont caractérisés par une valeur qu'ils accordent au temps (*value of time* ou VOT), qui suit une loi de densité (continue ou discrète) dans la population. Le problème résultant est un problème d'optimisation biniveau aux fonctions objectifs bilinéaires (on cherche à maximiser la somme des produits $t_a x_a$ au premier niveau et à minimiser la somme des produits $\pi_p v_p$ au deuxième niveau) et où le problème du deuxième niveau fait appel à une inéquation variationnelle de dimension finie ou, dans le cas où il y a segmentation continue de la demande, de dimension infinie. Toutefois, nous verrons plus loin que même dans ce cas (segmentation continue de la demande), on peut ramener le problème en un nombre fini de variables.

On se donne un réseau formé d'arcs appartenant à la concurrence et d'arcs appartenant à la firme maximisant ses profits. On suppose que chaque arc est caractérisé par un coût fixe. Sur chaque arc lui appartenant, la firme peut collecter une taxe (ou encore un péage) qui, du point de vue des consommateurs, viendra s'ajouter au coût fixe. On suppose également qu'il existe des demandes connues pour voyager entre certaines paires d'origine/destination. Ce problème tel qu'il est présenté jusqu'à maintenant est équivalent au problème de tarification dans les réseaux de transport de la section 1.3.1. Un premier ajout à ce problème, la congestion, a été présenté au chapitre 2. On en fera ici un deuxième : on caractérisera les consommateurs par la valeur qu'ils accordent au temps (segmentation de la demande).

Plus formellement, soit $G = (N, A \cup A', K)$ un réseau de transport formé d'un ensemble de sommets N , d'un ensemble d'arcs $A \cup A'$ et d'un ensemble de paires origine/destination $K \subseteq N \times N$. Les arcs de A sont ceux de la concurrence et ceux de A' les arcs taxables de la firme. On notera d_k la demande associée à la paire O-D $k \in K$, P_k l'ensemble des chemins reliant cette paire O-D et $P = \bigcup_{k \in K} P_k$ l'ensemble de tous les chemins. À chaque arc $a \in A \cup A'$, on associera le nombre total d'utilisateurs voyageant sur cet arc, un délai et un coût fixe notés respectivement x_a , $d_a(x_a)$ et c_a . On supposera que les fonctions d_a sont croissantes. À chaque arc $a \in A'$, on associe également la taxe t_a et on définit le vecteur de taxes $t = \{t_a\}_{a \in A'}$. On notera $A(p)$ l'ensemble des arcs faisant partie du chemin p . Le délai et le coût fixe sur le chemin p est donc donné par :

$$D_p(x) = \sum_{a \in A(p)} d_a(x_a), \quad C_p = \sum_{a \in A(p)} c_a, \quad (3.1)$$

où $x = \{x_a\}_{a \in A \cup A'}$ est le vecteur de flot sur les arcs.

On supposera que les consommateurs ont leur propre valeur monétaire d'une unité de temps, qui s'exprime par le paramètre α , celui-ci étant distribué de façon discrète ou continue dans la population. Ainsi le coût (en unités de temps) perçu sur le chemin p par un consommateur de paramètre α est le suivant :

$$\pi_p(\alpha, x, t) = D_p(x) + \alpha \left(C_p + \sum_{a \in A'(p)} t_a \right) \quad (3.2)$$

où $A'(p) = A(p) \cap A'$ et $t = \{t_a\}_{a \in A'}$ est le vecteur de taxe sur les arcs appartenant à la firme.

3.1.1 Cas discret

On suppose ici que la population est répartie en L classes, chaque classe l étant caractérisée par sa valeur α_l et que, par souci de simplicité, cette répartition est la même pour toutes les O-D. Une affectation d'équilibre est obtenue lorsque pour chaque classe d'utilisateurs et chaque paire origine-destination, les coûts perçus sur les chemins utilisés sont égaux et inférieurs aux coûts perçus sur les chemins non utilisés. On retrouve le principe d'équilibre de Wardrop décrit au chapitre 2.

On notera v_p^l le débit de consommateurs de classe l sur le chemin p et $v^l = \{v_p^l\}_{p \in P}$ le vecteur débit par chemin associé à cette classe. Ainsi, on définit l'ensemble des vecteurs débit réalisable

$$Y^l = \left\{ v^l \geq 0 : \sum_{p \in P_k} v_p^l = h^l d_k \quad \forall k \in K \right\} = h^l \bar{Y} \quad (3.3)$$

avec $\bar{Y} = \left\{ \bar{v} \geq 0 : \sum_{p \in P_k} \bar{v}_p = d_k \quad \forall k \in K \right\}$, un polyèdre compact de dimension finie ^[15], et où $(h^l)_l$ est une densité discrète, i.e un vecteur de nombres positifs et de somme égale à 1.

Ainsi, dans le cas sans congestion on obtient le modèle de décision biniveau suivant :

$$\max_{t,v} \sum_{a \in A'} t_a x_a \quad (3.4)$$

$$\min_v \sum_{k \in K} \sum_{l=1, \dots, L} \sum_{p \in P_k} \pi_p(\alpha_l, x, t) v_p^l \quad (3.5)$$

$$x_a = \sum_{p|a \in A(p)} \sum_{l=1, \dots, L} v_p^l, \quad \forall a \in A \quad (3.6)$$

$$v^l \in Y^l. \quad (3.7)$$

Dans le cas avec congestion, on se ramène au principe de Wardrop qui se formule ainsi : le vecteur multi-classe $v = (v^l)_l$ admissible est une solution d'équilibre si et seulement si pour toute classe il n'existe pas de vecteurs $y^l \in Y^l$ de coût inférieur par rapport au vecteur de coûts perçus $\pi = (\pi_p)_p$ sur chaque chemin.

$$v^l \in Y^l, \quad \forall l = 1, \dots, L \quad (3.8)$$

$$\bar{v} = \sum_{l=1}^L v^l \quad (3.9)$$

$$\langle \pi(\alpha^l, x, t), v^l - y^l \rangle \leq 0, \quad \forall y^l \in Y^l, \quad \forall l = 1, \dots, L \quad (3.10)$$

On reconnaîtra tout de suite qu'il s'agit ici d'une inéquation variationnelle de dimension finie.

3.1.2 Cas continu

On s'intéressera maintenant au cas où la distribution du paramètre α est continue, positive sur l'intervalle ouvert $(0, \alpha_{\max})$, nulle aux frontières et intégrable sur l'intervalle fermé $[0, \alpha_{\max}]$. En reprenant une notation semblable au cas continu mais en remplaçant les v_p^l par des $v_p(\alpha)$ (il s'agit maintenant d'une densité de clients), on définit l'ensemble des flots-chemins admissibles $v(\alpha) = \{v_p(\alpha)\}_{p \in P}$ par :

$$Y(\alpha) = \left\{ v(\alpha) : \sum_{p \in P_k} v_p(\alpha) = d_k h(\alpha), \quad \forall k \in K \text{ et } v(\alpha) \geq 0 \right\}. \quad (3.11)$$

On se limitera ici aux fonctions bornées continues presque partout. En intégrant le vecteur $v(\alpha)$ sur le domaine de définition de α ($[0, \alpha_{\max}]$ par exemple), on obtiendra le vecteur de flot total $\bar{v} = \{\bar{v}_p\}_{p \in P}$, qui, il est facile de le vérifier, se retrouve dans le polyèdre de dimension finie

$$\bar{Y} = \left\{ \bar{v} : \sum_{p \in P_k} \bar{v}_p = d_k, \quad \forall k \in K \text{ et } \bar{v} \geq 0 \right\}. \quad (3.12)$$

Ainsi, dans le cas sans congestion on obtient le modèle de décision biniveau

suivant :

$$\max_{t, v(\alpha)} \sum_{a \in A'} t_a x_a \quad (3.13)$$

$$\min_{v(\alpha)} \sum_{k \in K} \sum_{p \in P_k} \int_0^{\alpha_{\max}} \pi_p(\alpha, t) v_p(\alpha) d\alpha \quad (3.14)$$

$$x_a = \sum_{p|a \in A(p)} \int_0^{\alpha_{\max}} v_p(\alpha) d\alpha, \quad \forall a \in A \quad (3.15)$$

$$v(\alpha) \in Y(\alpha). \quad (3.16)$$

Le lecteur intéressé par ce problème est référé à un article d'Alexandre Schoeb et al. [22] qui en présente les propriétés théoriques. Les principaux résultats concernent l'unicité, la continuité et l'obtention d'un gradient du vecteur d'affectation $x(t)$ exprimé en fonction du vecteur de taxes dans le problème du deuxième niveau.

Dans le cas avec congestion, on se ramène encore au principe de Wardrop. Un vecteur de fonctions $v(\alpha)$ est en équilibre s'il est solution du système infini suivant :

$$v(\alpha) \in Y(\alpha) = h(\alpha) \bar{Y} \quad (3.17)$$

$$\bar{v} = \int_0^{\alpha_{\max}} v(\alpha) d\alpha \quad (3.18)$$

$$\langle \pi(\alpha, \bar{v}, t), v(\alpha) - y(\alpha) \rangle \leq 0 \quad \forall y(\alpha) \in Y(\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_{\max}]. \quad (3.19)$$

Si l'on recherche une condition d'équilibre presque partout, on obtient en intégrant

(3.19) :

$$v \in \widehat{Y} = \left\{ v \in \{\ell^2(0, \alpha_{\max})\}^{|P|} : v(\alpha) \in Y(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_{\max}] \right\}$$

$$\langle D(\bar{v}) + \alpha C, v - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in \widehat{Y} \quad (3.20)$$

avec $C = \{C_p + \sum_{a \in A'(p)} t_a\}_{p \in P}$ et où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire dans $\{\ell^2(0, \alpha_{\max})\}^{|P|}$, i.e :

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_0^{\alpha_{\max}} \langle \Phi(\alpha), \Psi(\alpha) \rangle d\alpha.$$

On reconnaît ici une équation variationnelle de dimension infinie. Ce problème a été étudié en profondeur par Marcotte et Zhu ^[15]. Dans le cas où $D = (D_p)_{p \in P}$ est le gradient d'une fonction d , on peut montrer que v est une solution d'équilibre si et seulement si il satisfait les conditions d'optimalité du premier ordre associées au programme mathématique en dimension infinie

$$\min_{v \in \widehat{Y}} d(\bar{v}) + \int_0^{\alpha_{\max}} \alpha \langle C, v(\alpha) \rangle d\alpha.$$

Le modèle de tarification se reformule donc en le programme biniveau suivant :

$$BP : \max_{t, x, v(\alpha)} \sum_{a \in A'} t_a x_a \quad (3.21)$$

$$x_a = \sum_{p|a \in A(p)} \int_0^{\alpha_{\max}} v_p(\alpha) d\alpha, \forall a \in A \quad (3.22)$$

$$\min_{x, v(\alpha)} d(\bar{v}) + \int_0^{\alpha_{\max}} \alpha \langle C, v(\alpha) \rangle d\alpha \quad (3.23)$$

$$v(\alpha) \in Y(\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_{\max}]. \quad (3.24)$$

3.2 Résultats théoriques

Le but de cette section est de présenter, comme l'a fait Schoeb et al.^[22] dans le cas sans congestion, des résultats concernant l'unicité de la solution d'équilibre, la continuité de cette solution par rapport à une variation du vecteur de taxes et enfin l'obtention d'un gradient (ou sur-gradient) local pour la fonction objectif de maximisation du profit. On s'inspire d'abord des deux théorèmes suivants :

Théorème 1. (Marcotte et Zhu ^[15]) *Si les fonctions C et D sont continues, et l'ensemble $\bar{Y}$ est compact, alors l'ensemble des solutions de l'inégalité variationnelle de dimension infinie (3.20) est non vide.*

Notons que dans notre cas, la fonction C est constante sur $\bar{Y}$. Avant de présenter le prochain théorème, nous introduisons une condition impliquant les points extrêmes Y^i de $\bar{Y}$ et le vecteur de coût C qui assurera l'unicité (presque partout)

de la solution d'équilibre v dans $\widehat{Y}$. Soit Y^i , $i = 1, \dots, N$ les points extrêmes du polyèdre compact $\overline{Y}$, et posons :

$$D^i(\overline{v}) = \langle D(\overline{v}), Y^i \rangle \quad i \in [1, N]$$

$$C^i = \langle C, Y^i \rangle \quad i \in [1, N]$$

Condition A : $C^i \neq C^j$ pour tout couple de points extrémaux distincts Y^i et Y^j du polyèdre compact $\overline{Y}$.

Ceci nous mène au théorème suivant :

Théorème 2. (Marcotte et Zhu ^[15]) *Si D est monotone sur $\overline{Y}$ et si la condition A est satisfaite, alors la solution d'équilibre est unique.*

Nous allons maintenant introduire la fonction de gap :

$$g(v) = \max_{y \in \widehat{Y}} \langle H(v), v - y \rangle \quad (3.25)$$

où $H(v) = D(\overline{v}) + \alpha C$. La fonction g est continue et positive sur $\widehat{Y}$ et on voit que x est solution de l'inégalité variationnelle (3.20) si et seulement si $g(v) = 0$, i.e si v est un optimum global du programme mathématique :

$$\min_{v \in \widehat{Y}} g(v) \quad (3.26)$$

Marcotte et Zhu ^[15] ont présenté un algorithme de linéarisation, qui se veut une extension de l'algorithme de Frank et Wolfe, ainsi que l'analyse de convergence pour résoudre ce programme mathématique. L'algorithme est le suivant :

ALGORITHME DE LINÉARISATION

ϵ : facteur de tolérance

$\{t_k\}$: longueur de pas

initialisation : Soit $v^{(0)} \in \hat{Y}$

Poser $k = 0$

tant que $g(v^{(k)}) > \epsilon$ **faire**

$$\bar{v}^{(k)} = \int_0^{\alpha_{\max}} v^{(k)}(\alpha) d\alpha$$

$$y^{(k)} \in \arg \max_{y \in \hat{Y}} \langle D(\bar{v}^{(k)}) + \alpha C, v^{(k)} - y \rangle$$

$$d^{(k)} = y^{(k)} - v^{(k)}$$

$$v^{(k+1)} = v^{(k)} + t_k d^{(k)}$$

Poser $k = k + 1$

fin tant que

L'algorithme nécessite de résoudre, à $\bar{v}$ fixé, le programme linéaire suivant pour chaque valeur de α :

$$LP(\alpha) : \min_{y(\alpha) \in Y(\alpha)} \langle D(\bar{v}) + \alpha C, y(\alpha) \rangle. \quad (3.27)$$

La solution de ce problème est unique presque partout (Marcotte et Zhu ^[15]).

On cherchera ensuite à caractériser les solutions d'équilibre en introduisant les définitions suivantes où l'on considère l'intervalle $[0, \alpha_{\max}]$, illustrées à la figure 3.1 :

Définition 1. *Un point extrême Y^i de $\bar{Y}$ est dominé en $\bar{v}$ si*

$$D^i(\bar{v}) + \alpha C^i > \min_{j=1, \dots, N; j \neq i} \{D^j(\bar{v}) + \alpha C^j\}$$

pour tout α dans $[0, \alpha_{\max}]$.

Définition 2. *Un point extrême Y^i de $\bar{Y}$ est fortement non-dominé en $\bar{v}$ si*

$$D^i(\bar{v}) + \alpha C^i = \min_{j=1, \dots, N; j \neq i} \{D^j(\bar{v}) + \alpha C^j\}$$

pour un intervalle $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ dans $[0, \alpha_{\max}]$, tel que $\alpha_{i-1} < \alpha_i$.

Définition 3. *Un point extrême Y^i de $\bar{Y}$ est faiblement non-dominé en $\bar{v}$ si*

$$D^i(\bar{v}) + \alpha C^i = \min_{j=1, \dots, N; j \neq i} \{D^j(\bar{v}) + \alpha C^j\}$$

pour un unique α dans $[0, \alpha_{\max}]$.

Sans trop entrer dans les détails, on remarquera qu'il est possible de partitionner l'espace $[0, \alpha_{\max}]$ en $\bigcup_{j=0, \dots, M < N} [\alpha_{i_j}, \alpha_{i_{j+1}}]$ avec $0 = \alpha_{i_0} < \alpha_{i_1} < \dots < \alpha_{i_M} < \alpha_{i_{M+1}}$

de telle sorte que Y^{i_j} est fortement non-dominé sur l'intervalle $[\alpha_{i_{j-1}}, \alpha_{i_j}]$ avec :

$$\alpha_{i_j} = \frac{D^{i_{j+1}}(\bar{v}) - D^{i_j}(\bar{v})}{C^{i_j} - C^{i_{j+1}}}. \quad (3.28)$$

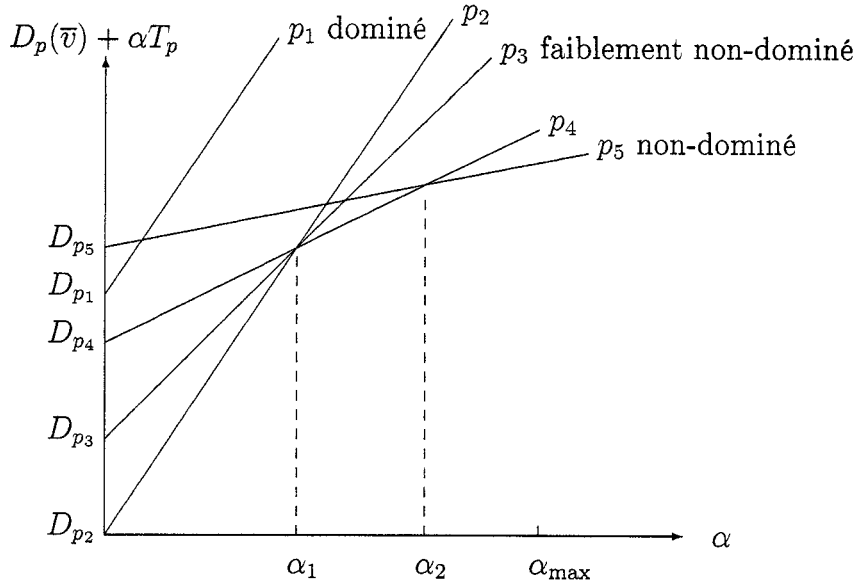


Figure 3.1 Chemins dominés et non dominés

La solution unique (presque partout) de LP est donc (voir figure 3.1) :

$$y(\bar{v}, \alpha) = Y^{i_k} h(\alpha) \quad \text{pour } \alpha \in [\alpha_{i_{k-1}}, \alpha_{i_k}].$$

3.2.1 Continuité de la solution d'équilibre

On s'intéresse ici à montrer que dans le cas où la solution d'équilibre existe et est unique (D monotone, C constante et respect de la Condition A), celle-ci est

continue en le vecteur de taxe t . On notera l'unique solution d'équilibre $v(t)$ et le gap sera noté $g(v, t)$ avec évidemment $g(v(t), t) = 0$.

Lemme 2. *Si l'espérance de α est finie et que la Condition A est respectée, alors la fonction $g(v, t)$ est continue en t .*

Démonstration. Soit Z la matrice d'incidence chemin-arc taxable, alors on a

$$\begin{aligned}
 g(v, t + \epsilon) &= \max_{y \in \hat{Y}} \langle D(\bar{v}) + \alpha (C + Z(t + \epsilon)), v - y \rangle \\
 &\leq \max_{y \in \hat{Y}} \langle D(\bar{v}) + \alpha (C + Zt), v - y \rangle + \max_{y \in \hat{Y}} \langle \alpha Z\epsilon, v - y \rangle \\
 &= g(v, t) + \max_{y \in \hat{Y}} \sum_{p \in P} \left[\int_0^{\alpha_{\max}} \alpha Z_p \epsilon (v_p(\alpha) - y_p(\alpha)) d\alpha \right] \\
 &\leq g(v, t) + |P| |d|_{\infty} E[\alpha] |\epsilon|_1
 \end{aligned}$$

et donc $g(v, t + \epsilon) \longrightarrow g(v, t)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. □

Lemme 3. *Si la Condition A est respectée, alors la fonction $g(v, t)$ est continue en v , où l'on considère la convergence dans $\{\ell^2(0, \alpha_{\max})\}^{|P|}$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 g(v + \epsilon, t) &= \max_{y \in \hat{Y}} \langle D(\overline{v + \epsilon}) + \alpha (C + Zt), v + \epsilon - y \rangle \\
 &\leq \max_{y \in \hat{Y}} \langle D(\overline{v + \epsilon}) + \alpha (C + Zt), v - y \rangle + \langle D(\overline{v + \epsilon}) + \alpha (C + Zt), \epsilon \rangle.
 \end{aligned}$$

Le premier terme converge vers $g(v, t)$ du fait de la continuité de D et le deuxième terme converge vers 0 car

$$\langle D(\overline{v} + \epsilon) + \alpha(C + Zt), \epsilon \rangle \leq \|\epsilon\|_2 \sum_{p \in P} \sqrt{\int_0^{\alpha_{\max}} D(\overline{v} + \epsilon) + \alpha(C + Zt)^2 d\alpha}.$$

Bref, on a $g(v + \epsilon, t) \longrightarrow g(v, t)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. □

Théorème 3. *Si D monotone, C est constante, la condition A est respectée et l'espérance de α est finie, alors la fonction $\overline{v}$ est continue en t .*

Démonstration. Supposons par contradiction que $\overline{v}$ n'est pas continue en t . Ceci implique qu'il existe une suite $\{\epsilon_k\}$, $\epsilon_k \rightarrow 0$ telle que $\overline{v}(t + \epsilon_k) \rightarrow \overline{u} \neq \overline{v}(t)$. Les solutions d'équilibre faisant appel aux points extrêmes de $Y(\alpha)$ pour tout $\alpha \in [0, \alpha_{\max}]$, on en déduit qu'il existe au moins un intervalle ouvert (β_1, β_2) associé à deux chemins p_1 et p_2 reliant une paire O-D $k \in K$ tels que dans l'intervalle (β_1, β_2) :

$$\overline{v}_{p_1}(t) = d_k h(\alpha)$$

$$\overline{v}_{p_2}(t) = 0$$

$$\overline{u}_{p_1} = 0$$

$$\overline{u}_{p_2} = d_k h(\alpha).$$

Or, on a en utilisant la définition du gap et les lemmes 2 et 3 que

$$\begin{aligned}
 g(v(t + \epsilon_k), t + \epsilon_k) &= 0 \quad \forall k = 1, \dots, \infty \\
 v(t + \epsilon_k) \rightarrow u &\Rightarrow g(v(t + \epsilon_k), t + \epsilon_k) \rightarrow g(u, t) \\
 &\Rightarrow g(u, t) = 0
 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une contradiction envers l'unicité de la solution d'équilibre. $\square$

3.2.2 Différentiabilité de la fonction objectif

Tel que mentionné précédemment, notre objectif consiste à maximiser les profits de la firme en jouant sur les taxes associées aux arcs lui appartenant. Soit Z la matrice d'incidence chemins-arcs taxables, le problème est donc le suivant :

$$\max_t R(t) = \sum_{a \in A'} t_a x_a = \langle Zt, \bar{v} \rangle \quad (3.29)$$

$$v \text{ solution de (3.20)} \quad (3.30)$$

$$\bar{v} = \int_0^{\alpha_{\max}} v(\alpha) d\alpha. \quad (3.31)$$

Nous nous intéresserons à la trajectoire de la solution d'équilibre en fonction du vecteur de taxes, notée $v(t)$.

Lemme 4. *Soit t et t' deux vecteurs de taxes. Notons (SU, WU, D) et (SU', WU', D') les ensembles de points extrêmes respectivement fortement non-dominés, faiblement*

non-dominés et dominés par rapport à t et t' . Alors, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|t - t'\| < \delta \Rightarrow SU \subseteq SU', D \subseteq D'. \quad (3.32)$$

Démonstration. Par contradiction, supposons que pour tout $\delta > 0$, il existe un point extrême $Y(\delta) \in SU$ tel que $Y(\delta) \notin SU'$. Ceci implique que pour tout $\delta > 0$, $\|v(t) - v(t')\|^2 \geq \min_{Y^i \in SU} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} (|K| h(\alpha))^2 d\alpha$. La partie de droite de l'inégalité étant une constante positive, ceci contredit la continuité de $\bar{v}(t)$. Le même raisonnement s'applique pour D . $\square$

Bref, lorsque pour t donné l'ensemble WU est vide, on sait que dans un voisinage de t , la solution $v(t + \epsilon)$ fait appel aux mêmes points extrêmes de $\bar{Y}$ et l'on s'intéressera donc au changement des α_i en fonction de t , en supposant que la fonction D est dérivable. Pour simplifier, on sépare le problème selon les différentes paires origine-destination. Ainsi, un point extrémal correspondra à un unique chemin. Pour chaque paire O-D $k \in K$, on notera ces chemins optimaux $p_1^k, \dots, p_{M_k}^k$ avec comme points d'intersection $0 = \alpha_0^k, \alpha_1^k, \dots, \alpha_{M_k}^k, \alpha_{M_k+1}^k = \alpha_{\max}$. En supposant qu'en un vecteur de taxes t donné l'ensemble WU est vide, on obtient à partir de

l'équation (3.28) :

$$\frac{\partial \alpha_i^k}{\partial t_a} = \left(\frac{1}{C_i^k - C_{i+1}^k} \right) \frac{\partial (D_{i+1}^k - D_i^k)}{\partial t_a} - \left(\frac{D_{i+1}^k - D_i^k}{(C_i^k - C_{i+1}^k)^2} \right) \frac{\partial (C_i^k - C_{i+1}^k)}{\partial t_a}, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial C_i^k}{\partial t_a} = \mathbb{1} \{a \in A(p_i^k)\}, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial D_i^k(x)}{\partial t_a} = \sum_{a \in A(p_i^k)} d'_a(x_a) \frac{\partial x_a}{\partial t_a}, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial x_a}{\partial t_a} = \sum_{k \in K} \sum_{i=1}^{M_k} \mathbb{1} \{a \in A(p_i^k)\} \left(d^k h(\alpha_i^k) \frac{\partial \alpha_i^k}{\partial t_a} - d^k h(\alpha_{i-1}^k) \frac{\partial \alpha_{i-1}^k}{\partial t_a} \right). \quad (3.36)$$

On peut écrire ce système sous forme matricielle, on notera :

$$\partial \alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_0^1}{\partial t_{a_1}} & \frac{\partial \alpha_0^1}{\partial t_{a_2}} & \dots & \frac{\partial \alpha_0^1}{\partial t_{a_{|A'|}}}} \\ \frac{\partial \alpha_1^1}{\partial t_{a_1}} & \frac{\partial \alpha_1^1}{\partial t_{a_2}} & \dots & \frac{\partial \alpha_1^1}{\partial t_{a_{|A'|}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \alpha_{M_1+1}^1}{\partial t_{a_1}} & \frac{\partial \alpha_{M_1+1}^1}{\partial t_{a_2}} & \dots & \frac{\partial \alpha_{M_1+1}^1}{\partial t_{a_{|A'|}}} \\ \frac{\partial \alpha_0^2}{\partial t_{a_1}} & \frac{\partial \alpha_0^2}{\partial t_{a_2}} & \dots & \frac{\partial \alpha_0^2}{\partial t_{a_{|A'|}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \alpha_{M_{|K|}+1}^{|K|}}{\partial t_{a_1}} & \frac{\partial \alpha_{M_{|K|}+1}^{|K|}}{\partial t_{a_2}} & \dots & \frac{\partial \alpha_{M_{|K|}+1}^{|K|}}{\partial t_{a_{|A'|}}} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$\delta_{a,i}^k = \mathbb{1} \{a \in A(p_i^k)\} \quad \forall a \in A, \forall k \in K, i = 1, \dots, M_k + 1 \quad (3.38)$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_{a_1, 1}^1 & \delta_{a_2, 1}^1 & \cdots & \delta_{a_{|A'|}, 1}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{a_1, M_1+1}^1 & \delta_{a_2, M_1+1}^1 & \cdots & \delta_{a_{|A'|}, M_1+1}^1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_{a_1, 1}^2 & \delta_{a_2, 1}^2 & \cdots & \delta_{a_{|A'|}, 1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{a_1, M_{|K|}+1}^{|K|} & \delta_{a_2, M_{|K|}+1}^{|K|} & \cdots & \delta_{a_{|A'|}, M_{|K|}+1}^{|K|} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$\delta' = \begin{pmatrix} \delta_{a_1, 1}^1 & \delta_{a_2, 1}^1 & \cdots & \delta_{a_{|A'|}, 1}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{a_1, M_1+1}^1 & \delta_{a_2, M_1+1}^1 & \cdots & \delta_{a_{|A'|}, M_1+1}^1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_{a_1, 1}^2 & \delta_{a_2, 1}^2 & \cdots & \delta_{a_{|A'|}, 1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{a_1, M_{|K|}+1}^{|K|} & \delta_{a_2, M_{|K|}+1}^{|K|} & \cdots & \delta_{a_{|A'|}, M_{|K|}+1}^{|K|} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{C_1^1 - C_2^1} & \frac{1}{C_1^1 - C_2^1} & \cdots & \frac{1}{C_1^1 - C_2^1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{C_{M_1}^1 - C_{M_1+1}^1} & \frac{1}{C_{M_1}^1 - C_{M_1+1}^1} & \cdots & \frac{1}{C_{M_1}^1 - C_{M_1+1}^1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{C_1^2 - C_2^2} & \frac{1}{C_1^2 - C_2^2} & \cdots & \frac{1}{C_1^2 - C_2^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{C_{M_{|K|}}^{|K|} - C_{M_{|K|}+1}^{|K|}} & \frac{1}{C_{M_{|K|}}^{|K|} - C_{M_{|K|}+1}^{|K|}} & \cdots & \frac{1}{C_{M_{|K|}}^{|K|} - C_{M_{|K|}+1}^{|K|}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

$$d = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & d'_a(\bar{x}_a) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{M_{|K|}+1}^{|K|} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$H = \begin{pmatrix} d^1 h(\alpha_0^1) & & & & \\ -d^1 h(\alpha_1^1) & d^1 h(\alpha_2^1) & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -d^1 h(\alpha_{M_1}^1) & d^1 h(\alpha_{M_1+1}^1) & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -d^{|K|} h(\alpha_{M_{|K|}}^{|K|}) & d^{|K|} h(\alpha_{M_{|K|}+1}^{|K|}) \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Le système (3.33-3.36) devient donc :

$$\partial \alpha = D [(\delta' - \delta) d\delta H \partial \alpha + \alpha (\delta' - \delta)]. \quad (3.45)$$

Il suffira de le résoudre pour $\partial \alpha$ pour calculer la variation du nombre d'utilisateurs par arc en fonction d'une perturbation du vecteur de taxes (équation 3.36). Ainsi la fonction de profit R est différentiable en t et sa dérivée partielle par rapport à t_a , $a \in A'$ est donnée par

$$\frac{\partial R(t)}{\partial t_a} = x_a(t) + \sum_{a' \in A' - \{a\}} t_{a'} \frac{\partial x_{a'}(t)}{\partial t_a}. \quad (3.46)$$

3.3 Algorithme de résolution

On propose un algorithme simple pour maximiser la fonction objectif. Comme on vient de le voir, on réussit à obtenir un gradient lorsque l'ensemble des chemins faiblement non-dominés est vide. Pour un vecteur de taxes donné, il s'agira donc de calculer ce gradient en résolvant d'abord le système (3.36) et ensuite d'effectuer

une recherche linéaire (en utilisant la règle d'Armijo par exemple) pour déterminer un vecteur de taxes qui améliore la solution actuelle. Dans le cas où l'ensemble des chemins faiblement non-dominés est non vide ou dans le cas où la fonction est différentiable dans un voisinage du point courant, on effectuera un pas harmonique dans la direction du gradient calculé (qui doit plutôt être considéré comme un sur-gradient dans ce cas).

ALGORITHME Toller

Phase 1 Étape 0 : trouver un point initial t_0 et poser $k = 0$;

Phase 2 Étape 1 : calculer $g_k = \nabla R(t_k)$; si $\|g_k\| \leq \epsilon$ alors **arrêt**;

Étape 2 : la recherche linéaire est-elle un succès?

Oui : $\lambda_k \in \arg \max_{\lambda \geq 0} R(t_k + \lambda g_k)$;

Non : $\lambda_k = 1/(k + 1)$;

Étape 3 : poser $t_{k+1} = t_k + \lambda_k g_k$, remplacer k par $k + 1$ et

retourner à l'étape 1.

Remarquons que le gradient est d'abord obtenu en analysant la réaction des usagers face à un changement du vecteur de taxes. On incorpore ensuite ces $\frac{\partial x_{a'}(t)}{\partial t_a}$ dans la dérivée partielle de la fonction objectif par rapport à la taxe t_a . La mé-

thode proposée est donc bien adaptée pour d'autres fonctions objectifs dérivables, notamment la fonction qui cherche à minimiser le temps total de transport des usagers :

$$\Phi = \sum_{a \in A \cap A'} D_a(x_a)x_a \quad (3.47)$$

Nous présenterons donc au chapitre 5 des résultats numériques pour les deux types d'approche, soit la maximisation du profit et la minimisation du temps total de parcours.

CHAPITRE 4

DISCRÉTISATION DU PROBLÈME

Puisque le problème de maximisation est généralement non convexe, la performance de l'algorithme TOLLER est dépendante du point initial. Il apparaît souhaitable d'utiliser un point de départ près de la solution optimale. Il nous est possible de résoudre exactement une discrétisation du problème qui pourrait fournir un tel point de départ. Dans ce chapitre, nous considérons le problème en discrétisant à la fois les classes d'utilisateurs (section 4.1) et la fonction de congestion associée à chaque arc (section 4.2). Les différentes étapes menant à la discrétisation du problème sont présentées à la section 4.3. Enfin, on présente le problème discrétisé sous sa forme finale à la section 4.4

4.1 Discrétisation de la segmentation de la demande

Considérons d'abord que les utilisateurs sont répartis en n classes et que pour chaque classe i une valeur α_i et un vecteur de poids h_i lui est attribuée ($\sum_{i=1}^n h_i = 1$, $h_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$). On choisira les α_i de façon à séparer la fonction de densité $h(\alpha)$ en $n + 1$ régions d'aires égales en leur attribuant un poids constant $h_i = \frac{1}{n}$. Pour une densité triangulaire sur l'intervalle $[0, 1]$, la figure 4.1 montre le résultat d'une telle discrétisation.

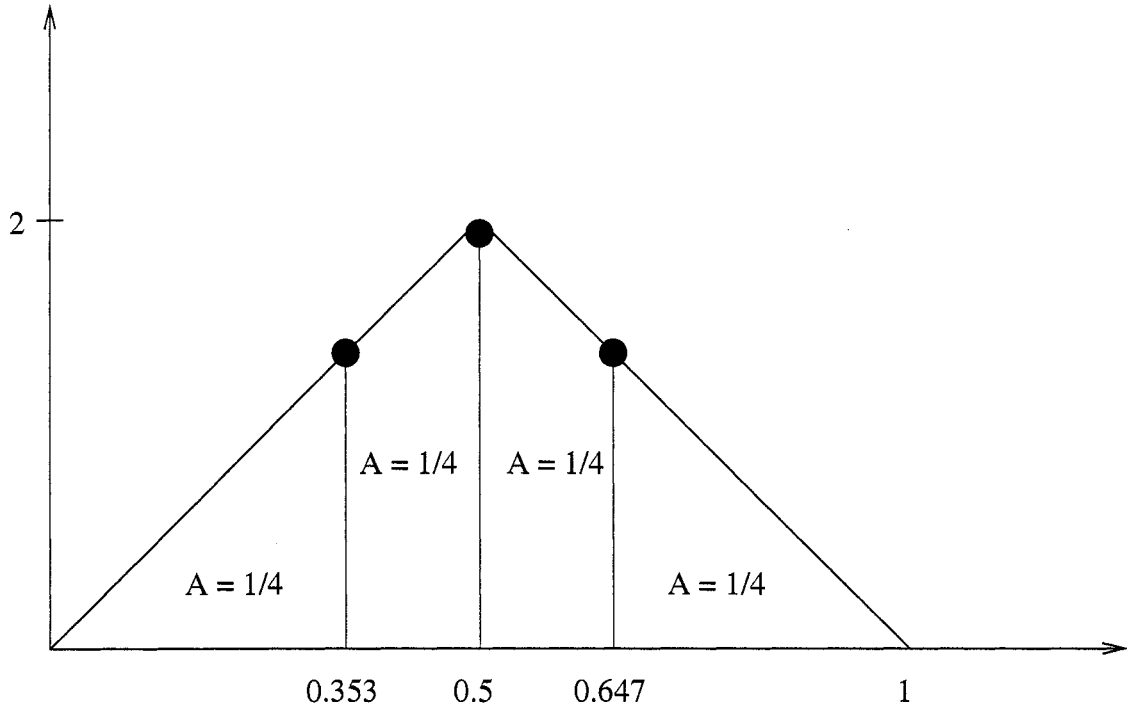


Figure 4.1 Discretisation de la segmentation de la demande

4.2 Discretisation de la fonction de congestion

Soit x_a le nombre total d'utilisateurs empruntant l'arc a . On discrétisera la fonction de congestion $D_a(x_a)$ de la façon suivante, en supposant, par souci de simplicité, que la discrétisation de l'espace $[0, \infty[$ est la même pour tous les arcs :

$$D_a(x_a) = \begin{cases} D_a^1 & \text{si } s^0 \leq x_a < s^1 \\ D_a^2 & \text{si } s^1 \leq x_a < s^2 \\ \vdots & \\ D_a^L & \text{si } s^{L-1} \leq x_a < s^L \end{cases} \quad (4.1)$$

avec $\{0 = s^0 < s^1 < \dots < s^{L-1} < s^L = \infty\}$.

Nous illustrons deux types de discrétisation en considérant la fonction de congestion continue $D_a(x_a) = D_a \exp(\lambda x_a)$. La première consiste à séparer l'espace des x_a par des longueurs de pas constantes. Soit Δ la longueur de pas, on posera donc

$$\begin{aligned} s^0 &= 0, \\ s^1 &= \Delta, \\ s^2 &= 2\Delta, \\ &\vdots \\ s^{L-1} &= (L-1)\Delta, \\ s^L &= \infty. \end{aligned}$$

On veillera à ce que $L\Delta$ soit du même ordre de grandeur que le nombre maximum d'utilisateurs pouvant emprunter l'arc a .

La deuxième discrétisation consiste à prendre des longueurs de pas telles que la hauteur de saut d'un palier à un autre soit constante. En supposant que nos plateaux soient ainsi répartis de 0 à $x_a^{\max}$, on remarque que la hauteur de saut est

égale à $D_a(\exp(\lambda x_a^{\max}) - 1)/L$. Ainsi, on obtient la discrétisation suivante :

$$\begin{aligned}
 s^0 &= 0, \\
 s^1 &= \frac{1}{\lambda} \ln \left(1 + \frac{\exp(\lambda x_a^{\max}) - 1}{L} \right), \\
 s^2 &= \frac{1}{\lambda} \ln \left(1 + \frac{2(\exp(\lambda x_a^{\max}) - 1)}{L} \right), \\
 &\vdots \\
 s^{L-1} &= \frac{1}{\lambda} \ln \left(1 + \frac{(L-1)(\exp(\lambda x_a^{\max}) - 1)}{L} \right), \\
 s^L &= \infty.
 \end{aligned}$$

La figure 4.2 donne un aperçu de ce que peut donner la discrétisation dans les 2 cas présentés précédemment.

4.3 Discrétisation du problème

Nous considérons dans un premier temps le problème résultant de la discrétisation de la segmentation de la demande. Nous incorporerons, à la section 4.3.3, la

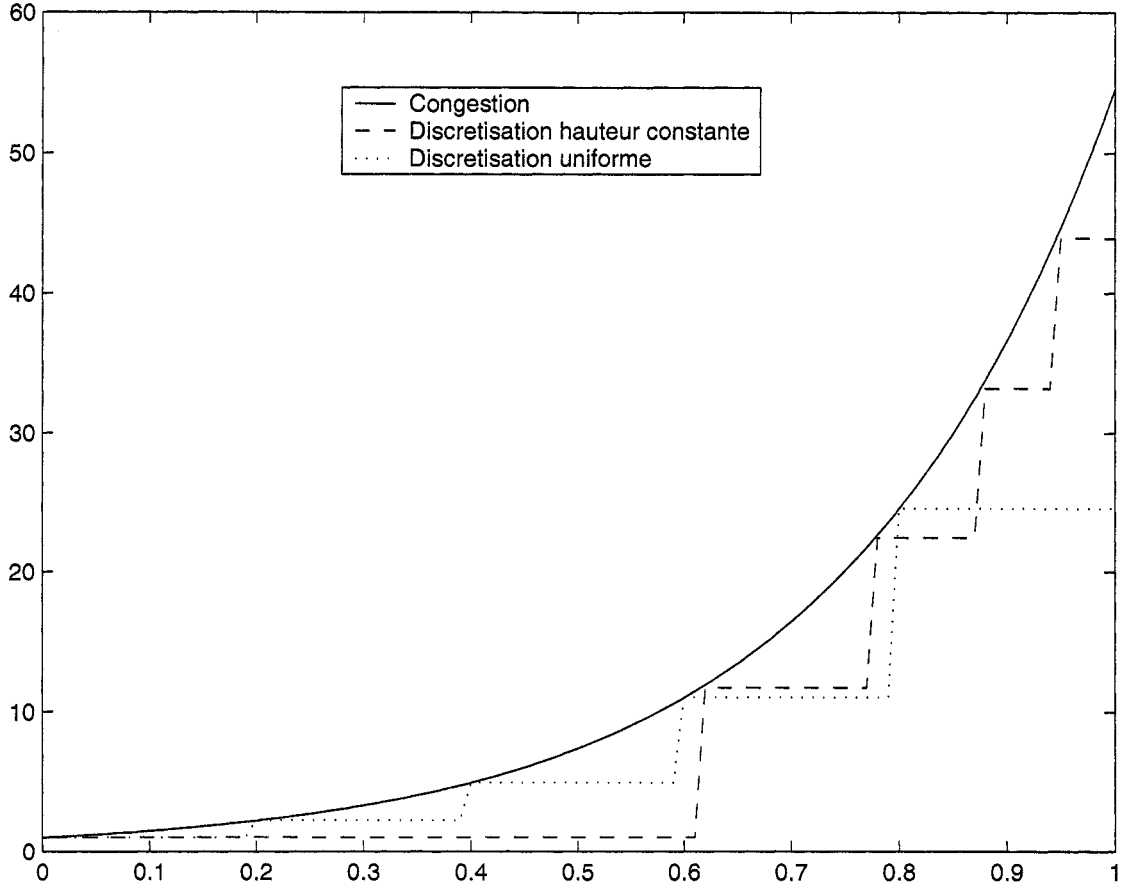


Figure 4.2 Discretisation de la fonction de congestion

discretisation de la fonction de congestion. Le problème discrétisé est le suivant :

$$\max_{t,x,v} \sum_{a \in A'} t_a x_a \quad (4.2)$$

$$\sum_{p \in P_k} v_{p,i} = d_k h_i, \quad \forall i \in [1, n], \forall k \in K \quad (4.3)$$

$$v_{p,i} \geq 0, \quad \forall i \in [1, n], \forall p \in P \quad (4.4)$$

$$x_a = \sum_{p|a \in A(p)} \sum_{i=1}^n v_{p,i}, \quad \forall a \in A \quad (4.5)$$

$$D_p(x) + \alpha_i(C_p + T_p) \geq \zeta_{i,k}, \quad \forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n] \quad (4.6)$$

$$\langle D_p(x) + \alpha_i(C_p + T_p) - \zeta_{i,k}, v_{p,i} \rangle_k = 0, \quad \forall k \in K, \forall i \in [1, n]. \quad (4.7)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ représente le produit scalaire usuel sur les chemins appartenant à $P(k)$. Les contraintes 4.6 et 4.7 doivent être perçus de la façon suivante : pour chaque paire O-D $k \in K$ et chaque classe i , le chemin le moins coûteux pour un usager de paramètre α_i reliant l'origine et la destination de k a pour coût $\zeta_{i,k}$. Un chemin de coût strictement plus élevé que $\zeta_{i,k}$ ne sera pas utilisé et inversement, un chemin utilisé a forcément un coût égal à $\zeta_{i,k}$. On reconnaît ici le principe d'équilibre de Wardrop.

Sans même considérer le fait que les D_p sont fonctions de x , on remarque que cette formulation n'est pas linéaire du fait de la fonction objectif et de la contrainte de complémentarité 4.7.

4.3.1 Linéarisation de la fonction objectif

On peut réécrire la contrainte 4.7 comme suit :

$$\langle T_p, v_{p,i} \rangle_k = \left\langle \frac{1}{\alpha_i} \zeta_{i,k} - \frac{1}{\alpha_i} D_p(x) - C_p, v_{p,i} \right\rangle_k \quad \forall k \in K, \forall i \in [1, n]. \quad (4.8)$$

Or, on remarque que :

$$\sum_{a \in A'} t_a x_a = \sum_{i=1}^n \sum_{k \in K} \langle T_p, v_{p,i} \rangle_k, \quad (4.9)$$

$$\sum_{a \in A'} t_a x_a = \sum_{i=1}^n \sum_{k \in K} \sum_{p \in P_k} \left(\frac{1}{\alpha_i} \zeta_{i,k} v_{p,i} - \frac{1}{\alpha_i} D_p(x) v_{p,i} - C_p v_{p,i} \right). \quad (4.10)$$

En utilisant la contrainte 4.3, on voit que :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k \in K} \sum_{p \in P_k} \frac{1}{\alpha_i} \zeta_{i,k} v_{p,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k \in K} \frac{1}{\alpha_i} \zeta_{i,k} d_k h_i. \quad (4.11)$$

On apportera ensuite une légère modification au problème. Nous remplacerons les variable x_a (nombre d'utilisateurs empruntant l'arc a) par les variable $x_{a,i}$ qui représenteront le nombre d'utilisateurs de la classe i empruntant l'arc a . La contrainte 4.5 devient donc tout simplement

$$x_{a,i} = \sum_{p|a \in A(p)} v_{p,i} \quad \forall a \in A, \forall i \in [1, n]. \quad (4.12)$$

On pourra donc en venir à réécrire

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k \in K} \sum_{p \in P_k} \frac{1}{\alpha_i} D_p(x) v_{p,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{a \in A} \frac{1}{\alpha_i} D_a(x) x_{a,i}, \quad (4.13)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k \in K} \sum_{p \in P_k} C_p v_{p,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{a \in A} C_a x_{a,i}. \quad (4.14)$$

Bref la fonction objectif linéarisé (si on considère les D_a constants) s'écrit

$$\text{obj} : \sum_{i=1}^n \sum_{k \in K} \frac{1}{\alpha_i} \zeta_{i,k} d_k h_i - \sum_{i=1}^n \sum_{a \in A} \frac{1}{\alpha_i} D_a(x) x_{a,i} - \sum_{i=1}^n \sum_{a \in A} C_a x_{a,i}. \quad (4.15)$$

Les valeurs $\frac{1}{\alpha_i}$ permettant de transformer une unité de temps en unité monétaire,

on remarque que l'équation 4.11 représente la désutilité totale perçue en valeur monétaire, que l'équation 4.13 représente la désutilité totale en temps de transport ramenée en valeur monétaire et que l'équation 4.14 représente la désutilité totale en coûts fixes. La fonction objectif correspond donc à l'équation qualitative "Taxes perçues = Coût total - Coûts de durée de transport - Coûts fixes".

4.3.2 Linéarisation de la contrainte de complémentarité

Les contraintes 4.6 et 4.7 seront reformulées pour obtenir une formulation en nombres entiers. D'abord introduisons des variables $\mu_{p,i} \geq 0$ telles que la contrainte 4.6 devient

$$D_p(x) + \alpha_i(C_p + T_p) - \zeta_{i,k} = \mu_{p,i} \quad \forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n], \quad (4.16)$$

$$\mu_{p,i} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n]. \quad (4.17)$$

La contrainte 4.7 peut alors s'exprimer de la façon suivante

$$\mu_{p,i} > 0 \Rightarrow v_{p,i} = 0,$$

$$v_{p,i} > 0 \Rightarrow \mu_{p,i} = 0.$$

On utilisera donc une variable binaire $y_{p,i} \in \{0, 1\}$ et un grand M pour réécrire la contrainte de complémentarité 4.7 de la façon suivante

$$\mu_{p,i} \leq M y_{p,i}, \quad (4.18)$$

$$v_{p,i} \leq M(1 - y_{p,i}), \quad (4.19)$$

$$y_{p,i} \in \{0, 1\}. \quad (4.20)$$

Bref, sans congestion sur les arcs (i.e. à D_a constants), on obtient une formulation MIP de notre problème discrétisé, où l'on a remplacé $D_p(x)$, C_p et T_p par leurs équivalents sur les arcs :

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{k \in K} \frac{1}{\alpha_i} \zeta_{i,k} d_k h_i - \sum_{i=1}^n \sum_{a \in A} \frac{1}{\alpha_i} D_a(x) x_{a,i} - \sum_{i=1}^n \sum_{a \in A} C_a x_{a,i} \quad (4.21)$$

$$\sum_{p \in P_k} v_{p,i} = d_k h_i \quad \forall k \in K, \forall i \in [1, n] \quad (4.22)$$

$$v_{p,i} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.23)$$

$$x_{a,i} = \sum_{p|a \in A(p)} v_{p,i} \quad \forall a \in A, \forall i \in [1, n] \quad (4.24)$$

$$\sum_{a \in A(p)} D_a(x) + \alpha_i \left(\sum_{a \in A(p)} C_a + \sum_{a \in A'(p)} T_a \right) - \zeta_{i,k} = \mu_{p,i} \quad \forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n] \quad (4.25)$$

$$\mu_{p,i} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.26)$$

$$\mu_{p,i} \leq M y_{p,i} \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.27)$$

$$v_{p,i} \leq M(1 - y_{p,i}) \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.28)$$

$$y_{p,i} \in \{0, 1\} \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.29)$$

4.3.3 Congestion par plateau

Notre objectif est maintenant de préserver cette formulation linéaire en nombres entiers tout en y incorporant la congestion par plateau telle que présentée à la section 4.2. On remarque que les fonctions de congestion $D_a(x)$ apparaissent dans l'objectif et dans la contrainte 4.25.

Une première modification à la formulation précédente sera l'ajout de variable indicatrices de la zone de discrétisation dans laquelle se trouve le nombre total d'utilisateurs empruntant l'arc a . On définit ainsi les variables binaires $z_{a,l}$, $a \in A$, $l \in [1, L]$ telles que

$$z_{a,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } s^{l-1} \leq x_a < s^l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.30)$$

avec bien entendu $x_a = \sum_{i=1}^n x_{a,i}$.

Pour s'assurer que les $z_{a,l}$ possèdent cette propriété, il faudra ajouter l'ensemble de contraintes suivantes, utilisant encore une fois un grand M :

$$x_a \geq s^{l-1} - M(1 - z_{a,l}) \quad \forall a \in A, \quad \forall l \in [1, L] \quad (4.31)$$

$$x_a \leq s^l + M(1 - z_{a,l}) \quad \forall a \in A, \quad \forall l \in [1, L] \quad (4.32)$$

$$\sum_{l=1}^L z_{a,l} = 1 \quad \forall a \in A \quad (4.33)$$

$$z_{a,l} \in \{0, 1\} \quad \forall a \in A, \quad \forall l \in [1, L]. \quad (4.34)$$

De cette façon, les fonctions $D_a(x)$, s'écrivent simplement

$$D_a(x) = \sum_{l=1}^L D_a^l z_{a,l}. \quad (4.35)$$

On remarque qu'en substituant ces D_a dans la contrainte 4.25, celle-ci demeure linéaire.

Le cas de la fonction objectif est plus compliqué puisqu'on y retrouve les termes $D_a(x)x_{a,i}$ non linéaires même une fois la substitution précédente effectuée. Pour parvenir à nos fins, nous allons une fois de plus rajouter un indice aux variables x . Nous allons désormais utiliser des variables $x_{a,i,l}$ telles que

$$x_{a,i,l} = \begin{cases} x_{a,i} & \text{si } z_{a,l} = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.36)$$

Il suffira donc de remplacer $x_{a,i}$ par $\sum_{l=1}^L x_{a,i,l}$ dans la fonction objectif et dans toutes les contraintes précédentes et d'ajouter la contrainte suivante :

$$x_{a,i,l} \leq M z_{a,l} \quad \forall a \in A, \quad \forall i \in [1, n], \quad \forall l \in [1, L]. \quad (4.37)$$

Cette nouvelle formulation permet de remplacer les termes $D_a(x)x_{a,i}$ par $\sum_{l=1}^L D_a^l x_{a,i,l}$.

4.4 Problème discrétisé

On obtient finalement le problème MIP suivant :

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{k \in K} \frac{1}{\alpha_i} \zeta_{i,k} d_k h_i - \sum_{i=1}^n \sum_{a \in A} \sum_{l=1}^L \frac{1}{\alpha_i} D_a^l x_{a,i,l} - \sum_{i=1}^n \sum_{a \in A} \sum_{l=1}^L C_a x_{a,i,l} \quad (4.38)$$

$$\sum_{p \in P_k} v_{p,i} = d_k h_i \quad \forall k \in K, \forall i \in [1, n] \quad (4.39)$$

$$v_{p,i} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.40)$$

$$\sum_{l=1}^L x_{a,i,l} = \sum_{p|a \in A(p)} v_{p,i} \quad \forall a \in A, \forall i \in [1, n] \quad (4.41)$$

$$\sum_{a \in A(p)} \sum_{l=1}^L D_a^l z_{a,l} + \alpha_i \left(\sum_{a \in A(p)} C_a + \sum_{a \in A'(p)} T_a \right) - \zeta_{i,k} = \mu_{p,i} \quad \forall k \in K, \forall p \in P_k, \forall i \in [1, n] \quad (4.42)$$

$$\mu_{p,i} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.43)$$

$$\mu_{p,i} \leq M y_{p,i} \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.44)$$

$$v_{p,i} \leq M(1 - y_{p,i}) \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.45)$$

$$y_{p,i} \in \{0, 1\} \quad \forall p \in P, \forall i \in [1, n] \quad (4.46)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^L x_{a,i,l} \geq s^{l-1} - M(1 - z_{a,l}) \quad \forall a \in A, \forall l \in [1, L] \quad (4.47)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^L x_{a,i,l} \leq s^l + M(1 - z_{a,l}) \quad \forall a \in A, \forall l \in [1, L] \quad (4.48)$$

$$\sum_{l=1}^L z_{a,l} = 1 \quad \forall a \in A \quad (4.49)$$

$$z_{a,l} \in \{0, 1\} \quad \forall a \in A, \forall l \in [1, L] \quad (4.50)$$

$$x_{a,i,l} \leq M z_{a,l} \quad \forall a \in A, \forall i \in [1, n], \forall l \in [1, L] \quad (4.51)$$

Il s'agit d'un problème linéaire mixte avec $(L \times |A|) + (n \times |P|)$ variables binaires.

À l'aide de logiciels comme CPLEX, on peut résoudre ce genre de problème (de taille réduite) de façon exacte ("Branch and Cut") et ainsi espérer obtenir un bon

point de départ pour l'algorithme de descente de gradient présenté au chapitre 3.

CHAPITRE 5

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Ce chapitre a pour but de tester les performances de notre algorithme. On présentera d'abord à la section 5.1 des tests sur un problème de petite taille déjà étudié par Schoeb ^[22] dans le cas sans congestion. Ensuite, la section 5.2 présente les résultats obtenus pour des instances plus importantes où nous avons essayé de résoudre à la fois les problèmes de maximisation du profit et de minimisation du temps total de parcours.

5.1 Exemple sur un petit problème

5.1.1 Cas sans congestion

Nous reprenons ici un problème présenté par Alexandre Schoeb ^[22] dont le réseau est présenté à la figure 5.1. La firme leader contrôle les taxes sur les arcs $(1, 2)$ et $(3, 4)$, notées respectivement u et v . La demande est fixée à 10 unités entre les noeuds 1 et 4. Chaque utilisateur choisira donc un des chemins suivants :

Tableau 5.1 Petit exemple					
Chemin	Arcs	Délai	Coût fixe	Taxe leader	Coût perçu
A	1-2-3-4	15	52	$u + v$	$15\alpha + 52 + u + v$
B	1-2-4	16	45	u	$16\alpha + 45 + u$
C	1-3-4	17	62	v	$17\alpha + 62 + v$
D	1-4	20	25		$20\alpha + 25$

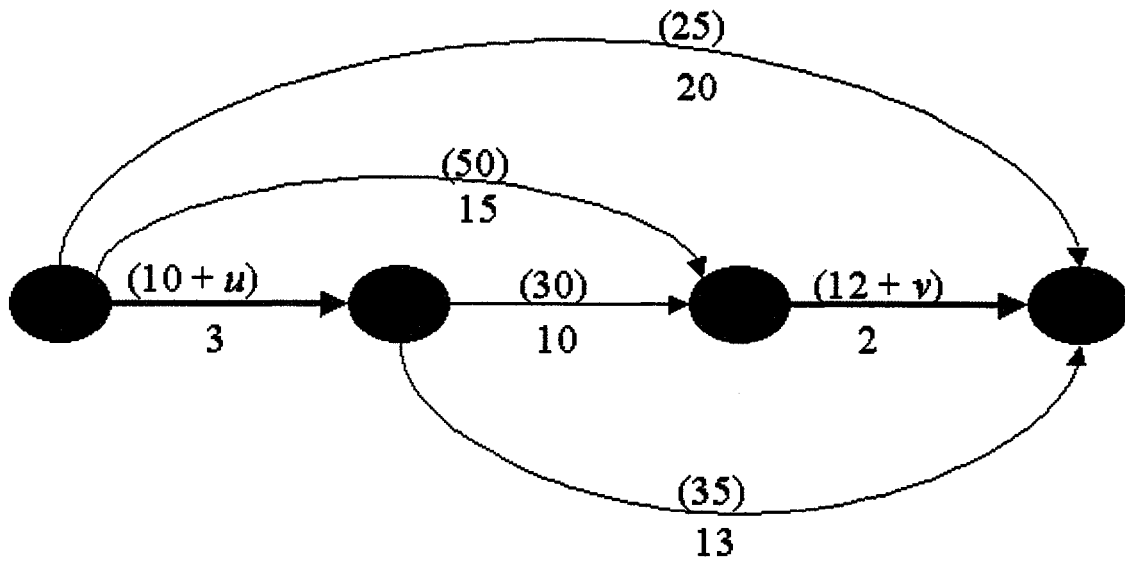


Figure 5.1 Petit exemple

En supposant que la densité du paramètre α est triangulaire sur l'intervalle $[0, 10]$, alors le maximum global est

$$u^* = 20/3,$$

$$v^* = 1,$$

ce qui mène à la valeur optimale de 15.615 (ou 1.5615 par usager) pour la fonction revenu. La figure 5.2 représente la fonction revenu en fonction de u et v . On remarque la présence de plusieurs optima locaux. Ceci met en évidence l'importance du vecteur de taxes initial. Par exemple, nous avons utilisé notre algorithme avec deux vecteurs de taxes différents. D'abord un vecteur de taxes près de l'optimum global ($u = 5, v = 0.8$) et ensuite un vecteur de taxes nul ($u = 0, v = 0$). Les ré-

Tableau 5.2 Itérations - Petit problème sans congestion 1

Itération	u	v	Revenu
0	5.00	0.80	14.837
1	6.88	1.33	15.547
2	6.77	1.00	15.612
3	6.67	1.00	15.615
4	6.67	1.00	15.615

Tableau 5.3 Itérations - Petit problème sans congestion 2

Itération	u	v	Revenu
0	0.00	0.00	0.000
1	10.0	3.60	12.500
2	5.00	3.60	14.063
3	6.88	3.60	14.804
4	6.67	3.60	14.815
5	6.67	3.60	14.815

sultats sont présentés dans les tableaux 5.2 et 5.3. Dans le premier cas seulement, l'algorithme converge vers l'optimum global.

5.1.2 Cas avec congestion

La congestion, telle que présentée précédemment, est définie sur chaque arc. On s'intéressera ici à deux types de congestion, linéaire et exponentielle définies ainsi :

Définition 4. *Congestion*

linéaire : $d_a(\bar{v}_a) = d_a + \theta_a \bar{v}_a$

exponentielle : $d_a(\bar{v}_a) = d_a \exp(\lambda_a \bar{v}_a)$.

Supposons que chaque arc est soumis à une congestion exponentielle de

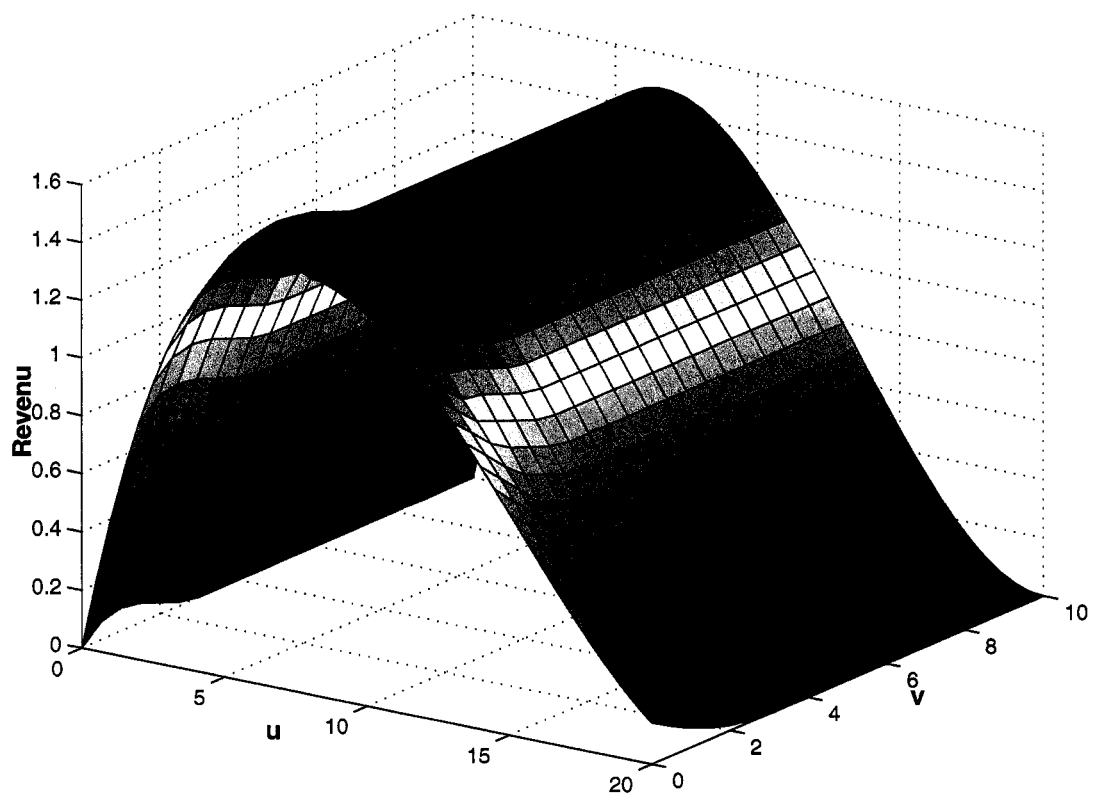


Figure 5.2 Petit exemple sans congestion - Revenu par usager

Tableau 5.4 Itérations - Petit problème avec congestion

Itération	u	v	Revenu
0	0.000	0.000	0.00
1	88.90	62.97	274.69
2	90.12	87.82	296.87
3	121.54	92.69	304.80
4	111.70	110.87	313.18
5	122.33	106.66	314.49
6	120.27	111.09	316.31
7	129.62	120.51	317.91
8	129.74	120.46	317.91

paramètre $\lambda = 0.1$. La nouvelle fonction revenu est présentée à la figure 5.3. Remarquez la discontinuité qui apparaît lorsque $u - v = 17$. Il s'agit en fait d'un non respect de la *Condition A*, car dans ce cas les chemins B et C ont des coûts égaux (coûts fixes + taxes = 62). Cette fois-ci, notre algorithme avec comme vecteur de taxes initial nul converge vers l'optimum global (voir tableau 5.4).

5.1.3 Tests sur la discrétisation

On reprend ici l'exemple avec congestion présenté précédemment. Les tableaux 5.5 et 5.6 et les figures 5.4 et 5.5 présentent les résultats obtenus pour les discrétisations uniforme et à hauteur de saut constante. On notera *Revenus disc.* la valeur optimale du problème discrétisé et *Revenus cont.* le revenu obtenu pour le problème continu en utilisant le vecteur de taxes optimal du problème discrétisé. On remarque que règle générale, *Revenus disc. > Solution optimale > Revenus cont.*,

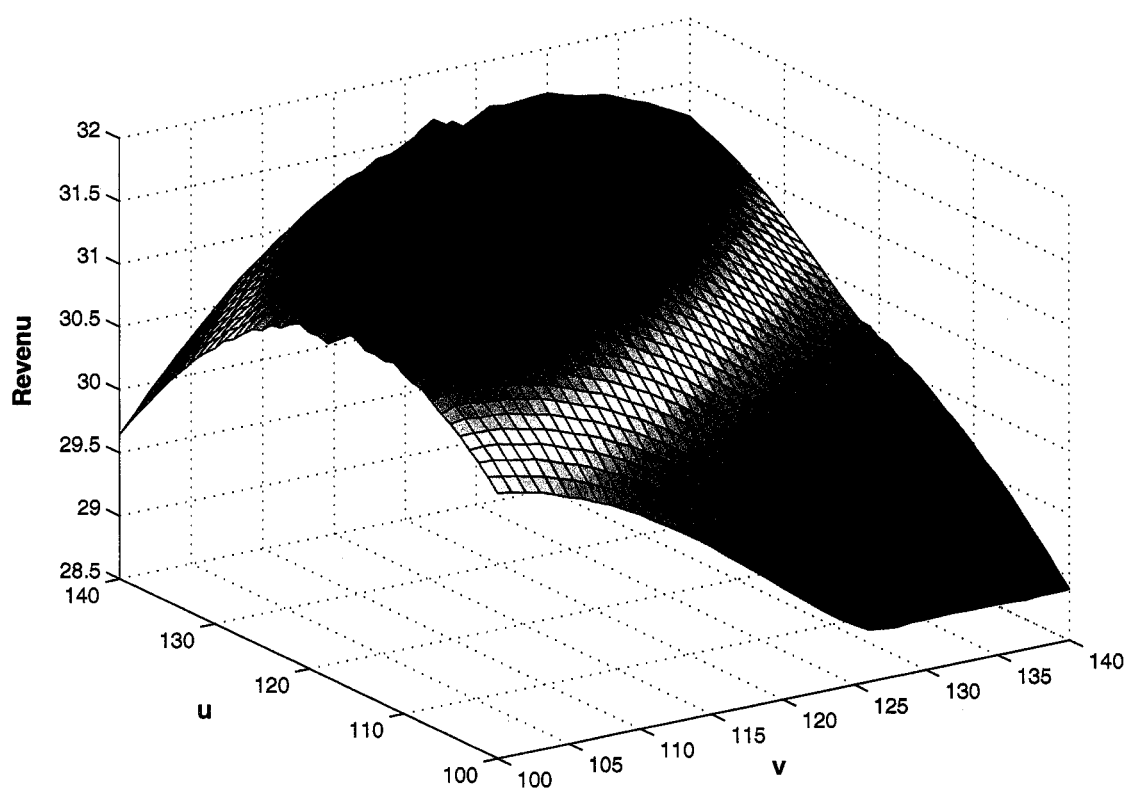


Figure 5.3 Petit exemple avec congestion - Revenu par usager

Tableau 5.5 Discrétisation uniforme

n	L	Revenus disc.	Revenus cont.	temps (s)
2	5	358.037404	295.2386	0.56
4	5	349.898122	295.8025	0.54
8	5	340.144248	299.7381	3.32
16	5	338.284565	290.6781	17.52
32	5	344.514306	298.1114	473.03
2	10	328.111404	312.9638	1.04
4	10	330.034194	317.4376	2.18
8	10	329.289436	313.6397	21.37
16	10	346.028285	315.9313	788.87
2	20	312.223847	309.8694	1.94
4	20	353.207373	313.0096	6.38
8	20	343.417882	315.9307	208.16
16	20	338.190032	316.2156	7352.31

mais qu'à partir d'une discrétisation où $n \geq 4$ et $L \geq 10$, on se retrouve très près de la solution optimale de 317.91. Évidemment, les temps de calcul augmentent de façon importante lorsque la discrétisation se raffine.

5.2 Résolution sur des instances plus grandes

5.2.1 Génération de problèmes tests

Nous avons utilisé pour nos tests des réseaux générés aléatoirement de 30 noeuds, 200 arcs, 20 arcs appartenant au leader et 10 paires origine-destination. La demande associée à chaque paire OD est fixée à 1. Le délai et le coût fixe associé à

Tableau 5.6 Discretisation hauteur de saut constante

n	L	Revenus disc.	Revenus cont.	temps (s)
2	5	366.357140	312.1638	0.70
4	5	370.851245	311.5363	1.53
8	5	366.357140	312.1638	3.83
16	5	384.129640	313.3236	13.51
32	5	380.477043	313.5220	31.47
64	5	384.977703	313.3461	976.60
2	10	335.894752	312.1584	1.49
4	10	349.055242	311.5363	3.45
8	10	339.000219	302.0036	20.09
16	10	354.708669	312.8691	184.14
2	20	316.079793	300.3467	5.91
4	20	354.392669	310.5249	14.75
8	20	343.887337	311.8717	704.71
16	20	338.743576	312.0718	2032.32

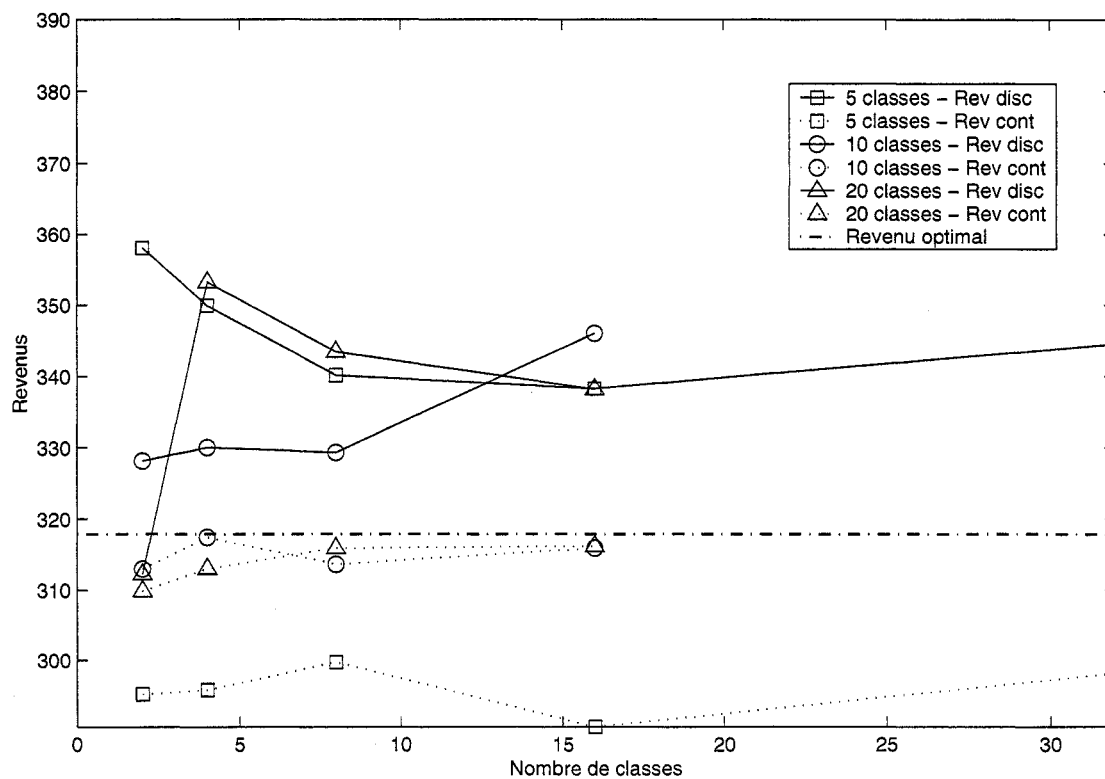


Figure 5.4 Discretisation uniforme - évolution des vecteurs de taxes initial

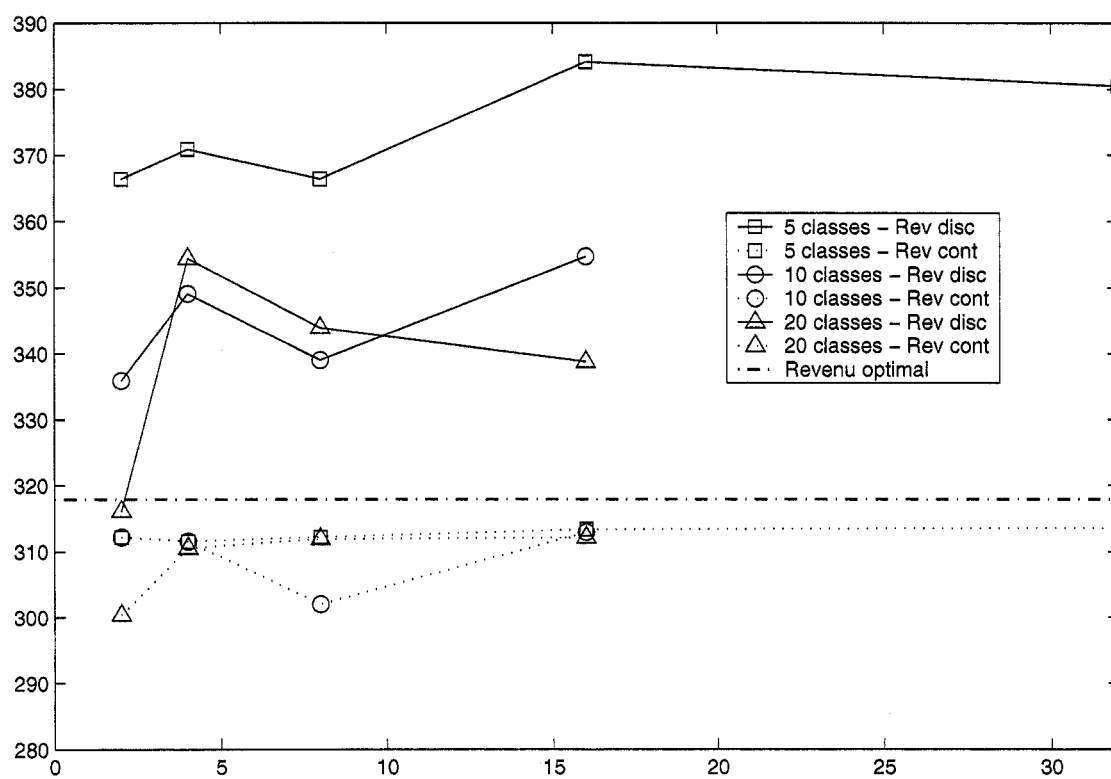


Figure 5.5 Discretisation hauteur de saut constante - évolution des vecteurs de taxes initial

Tableau 5.7 Statistiques des problèmes tests

Pb	Arcs actifs		Nombre de chemins										Total
	Total	Leader	od^1	od^2	od^3	od^4	od^5	od^6	od^7	od^8	od^9	od^{10}	
1	58	5	2	3	2	3	3	3	6	10	2	2	41
2	58	4	2	3	2	4	3	3	3	3	9	3	39
3	54	7	4	3	3	2	2	3	7	2	3	2	38
4	51	6	2	6	2	2	3	5	2	4	2	4	38
5	58	9	2	4	6	4	2	3	3	5	2	3	43
6	56	6	3	4	2	2	2	5	2	5	4	2	37
7	59	7	3	3	3	2	6	3	4	3	4	3	41
8	56	3	4	5	2	2	2	4	3	2	4	6	37
9	52	5	3	3	2	2	4	5	2	4	2	3	35
10	64	8	2	8	6	2	5	2	2	7	4	3	49

chaque arc sont distribués uniformément sur l'intervalle $[20, 50]$ et $[15, 35]$ respectivement. Parmi les arcs du réseau, on retrouve 10 arcs appartenant à la concurrence reliant chaque paire OD, pour s'assurer que le revenu optimal est borné. Le délai associé à ces arcs a été multiplié par 30 et le coût fixe associé aux arcs du leader divisé par 2. Nous avons généré dix problèmes pour notre étude et avons utilisé un algorithme de k plus courts chemins (en négligeant la congestion) pour identifier les chemins entre les différentes OD. Un arc est dit actif s'il fait partie d'au moins un chemin. Les statistiques de nos problèmes se retrouvent au tableau 5.7 et le problème 1 est présenté à la figure 5.8. Nous avons également effectué des tests sur les problèmes de Schoeb ^[22] (voir tableau 5.8). Nous avons utilisé une segmentation de la demande triangulaire sur l'intervalle $[0, 10]$ et une congestion exponentielle de paramètre $\lambda = 0.1$.

La première phase de notre algorithme consistant à déterminer un point de départ à partir de la solution optimale du problème discrétisé, nous présentons au tableau 5.9 les différents scénarios utilisés.

Tableau 5.8 Statistiques des problèmes de Schoeb

Pb	Arcs actifs		Nombre de chemins										Total
	Total	Leader	od^1	od^2	od^3	od^4	od^5	od^6	od^7	od^8	od^9	od^{10}	
1	55	11	2	4	13	3	2	2	2	4	4	4	40
2	45	12	4	2	2	2	2	2	6	6	4	5	35
3	52	10	12	2	2	2	2	2	2	3	2	2	31
4	60	15	6	16	6	2	3	3	2	4	2	2	46
5	45	7	3	2	2	2	2	2	3	4	4	3	27

Tableau 5.9 Différents choix de vecteurs de taxes initiales
Scénario Discrétisation

a	Taxes initiales nulles
b	2 classes, 2 plateaux de congestion
c	3 classes, 2 plateaux de congestion
d	4 classes, 2 plateaux de congestion
e	2 classes, 4 plateaux de congestion
f	4 classes, 4 plateaux de congestion

5.2.2 Maximisation du profit

Nous avons introduit cette étude dans un contexte de management de revenus (ou "Yield Management") et nous présentons donc ici les résultats obtenus par notre algorithme en ce qui concerne la maximisation des profits de la firme leader (voir tableaux 5.10 et 5.11). Remarquons d'abord que pour les problèmes tests 1, 3, 4, 8 et 9 et le problème de Schoeb 5, le scénario *a* converge vers la solution optimale et la discrétisation n'apporte rien. Par contre, pour les problèmes tests 5 et 6 et les problèmes de Schoeb 3 et 4, la meilleure discrétisation améliore de plus de 10% la solution obtenue avec le scénario *a* (28% dans le cas du problème 4 de Schoeb). Les temps de résolution moyens sont également présentés dans les tableaux 5.12 et 5.13. À noter que nous avons utilisé le logiciel C-PLEX avec un ordinateur Linux à 2 processeurs Pentium III 1 GHz. Il est intéressant de constater que les meilleurs

Tableau 5.10 Profits pour les problèmes tests

Pb	Stratégie - vecteur de taxes initiales					
	a	b	c	d	e	f
1	449.7	446.9	444.2	444.0	444.1	443.9
2	223.4	233.2	233.5	233.5	233.3	233.0
3	619.3	620.6	620.8	619.4	619.3	619.5
4	337.5	339.3	339.3	338.7	339.2	338.6
5	371.6	407.1	392.4	383.3	407.0	383.3
6	390.2	406.5	408.0	407.8	459.7	461.9
7	632.3	640.4	640.6	640.6	640.4	640.6
8	124.8	125.0	124.9	125.0	125.0	125.0
9	159.3	160.2	160.0	159.8	161.2	161.3
10	450.0	455.9	455.7	456.0	455.9	456.0
Amélioration moyenne	-	2.1%	1.7%	1.4%	3.5%	2.9%
Ecart type	-	2.9%	2.2%	1.9%	5.6%	5.4%

Tableau 5.11 Profits pour les problèmes de Schoeb

Pb	Stratégie - vecteur de taxes initiales				
	a	b	c	d	e
1	1110.8	1117.5	1116.0	1117.4	1120.9
2	1510.3	1523.3	1532.2	1535.0	1442.
3	659.4	739.2	739.2	739.8	737.1
4	737.5	909.6	928.0	877.8	942.2
5	368.7	369.6	370.5	368.8	360.5
Amélioration moyenne	-	7.4%	8.1%	6.7%	6.8%
Ecart type	-	9.1%	9.9%	7.6%	11.9%

Tableau 5.12 Temps moyens de résolution (en secondes) pour les problèmes tests

Scénario	Phase Discrétisation	Écart Type	Phase Descente	Écart Type
a	-	-	121	82
b	0.04	0.02	225	374
c	0.12	0.06	112	82
d	0.22	0.13	88	58
e	1.7	0.8	106	46
f	58	151	105	86

Tableau 5.13 Temps moyens de résolution (en secondes) pour les problèmes de Schoeb

Scénario	Phase Discrétisation	Écart Type	Phase Descente	Écart Type
a	-	-	58	34
b	0.4	0.2	79	81
c	0.9	1.0	58	40
d	53	64	69	44
e	173	288	85	67

scénarios (*e* pour les problèmes tests et *c* pour les problèmes de Schoeb) ne sont pas ceux dont la discrétisation est la plus fine et donc ne nécessitent pas un temps de calcul important lors de la première phase. La figure 5.6 montre les itérations de la phase descente pour les scénarios *a* - triangles - et *f* - cercles. On voit que dans ce cas, la première phase de discrétisation a un réel apport.

5.2.3 Minimisation du temps total de parcours

Comme nous l'avons mentionné à la fin du chapitre 3, notre algorithme est aussi adapté pour minimiser le temps total de transport des usagers. Nous reprenons ici exactement les mêmes problèmes avec les mêmes arcs taxables, segmentation de la demande et fonction de congestion. Par contre, le scénario de référence change,

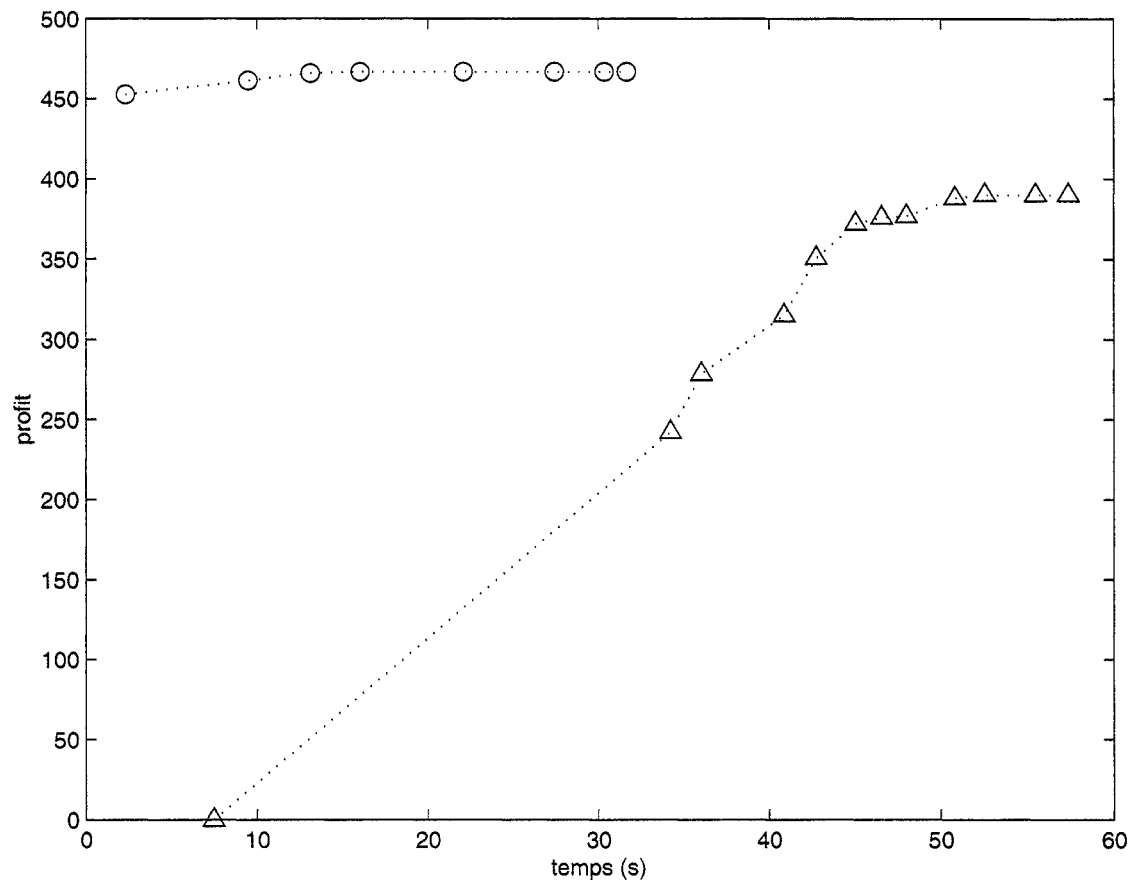


Figure 5.6 Itérations de la phase descente pour le problème test 6 - maximisation du profit

Tableau 5.14 Temps totaux pour les problèmes tests
Stratégie - vecteur de taxes initiales

Pb	T=0	a	b	c	d	e	f
1	7163.4	7009.1	7009.1	7009.1	7009.1	7090.9	7115.5
2	7519.8	7446.6	7467.8	7457.6	7465.5	7467.9	7522.5
3	6829.0	6484.8	6457.5	6457.5	6454.8	6481.9	6457.8
4	7474.1	7342.9	7342.9	7342.9	7342.9	7316.9	7279.4
5	8512.9	8421.7	8421.1	8422.5	8422.8	8463.9	8422.9
6	8179.9	7926.5	8350.3	8531.4	8513.6	7957.2	7921.5
7	6862.0	6722.6	6722.6	6722.6	6722.6	6648.2	6646.2
8	9393.1	9364.9	9364.9	9364.9	9364.9	9364.9	9364.9
9	7387.5	7181.4	7211.0	7176.0	7210.1	7184.7	7215.2
10	7291.3	7075.4	7075.4	7132.0	7082.5	7083.0	7082.5
Amélioration moyenne	-	2.2%	1.7%	1.4%	1.5%	2.1%	2.2%
Ecart type	-	1.3%	1.8%	2.3%	2.3%	1.4%	1.6%

c'est-à-dire que l'on mesure maintenant l'amélioration de la solution optimale par rapport à une non intervention au niveau du vecteur de taxes ($T = 0$). On remarque (voir tableaux 5.14 et 5.15) que l'on réussit à améliorer la solution d'environ 2% dans le cas des problèmes tests et d'environ 3% dans le cas des problèmes de Schoeb. Par contre, il est encore une fois difficile de déterminer si une discrétisation plus fine entraînera en moyenne de meilleurs résultats. Le problème 4 de Schoeb pourrait nous laisser croire que oui (voir figure 5.7 où l'on retrouve les itérations de la phase descente pour les scénarios b - triangles - et e - cercles).

Tableau 5.15 Temps totaux pour les problèmes de Schoeb

Pb	Stratégie - vecteur de taxes initiales					
	T=0	a	b	c	d	e
1	7633.1	7360.7	7379.1	7360.7	7360.7	7353.3
2	9645.2	9005.1	9005.6	9005.1	9005.1	9004.2
3	10292.6	10145.5	10167.0	10145.5	10145.5	10167.03
4	9165.4	8884.0	8891.0	8884.0	8884.0	8803.2
5	8563.7	8423.0	8424.1	8423.0	8423.0	8423.1
Amélioration moyenne	-	3.3%	3.2%	3.3%	3.3%	3.4%
Ecart type	-	1.9%	1.9%	1.9%	1.9%	1.9%

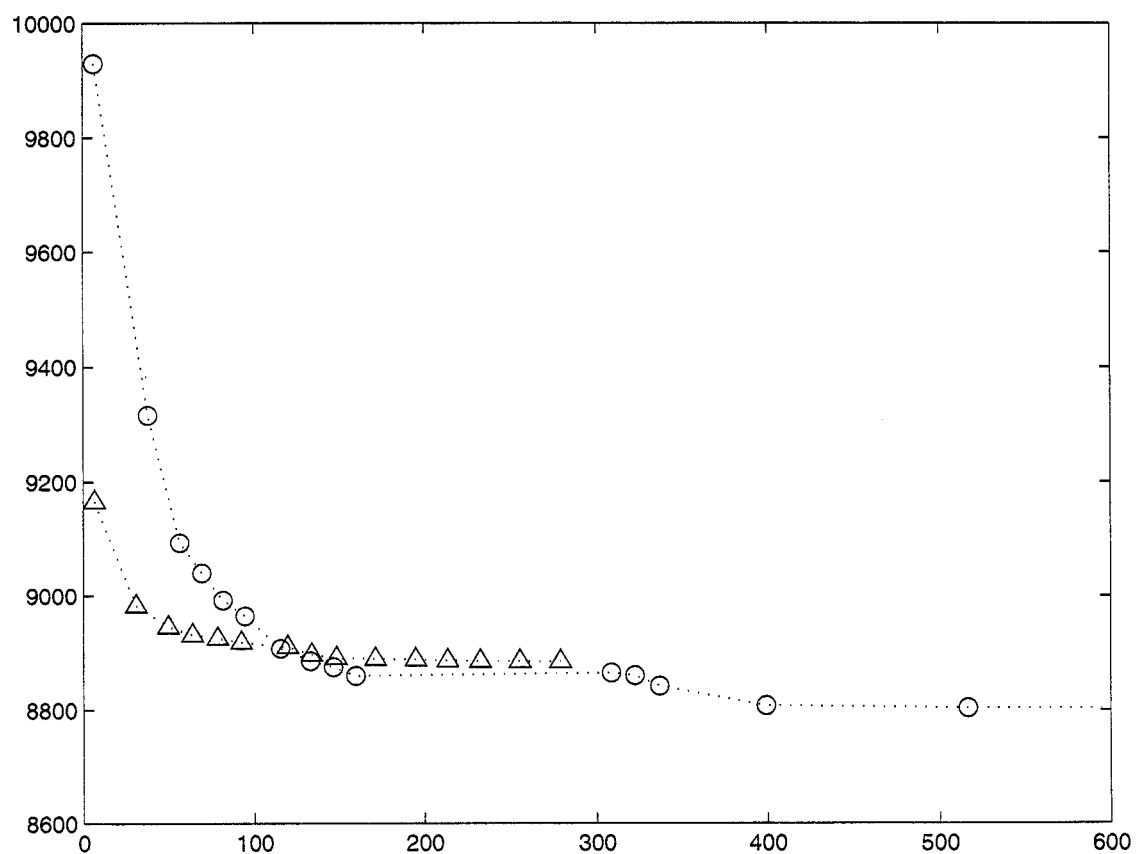


Figure 5.7 Itérations de l'algorithme pour le problème 4 de Schoeb - minimisation du temps total

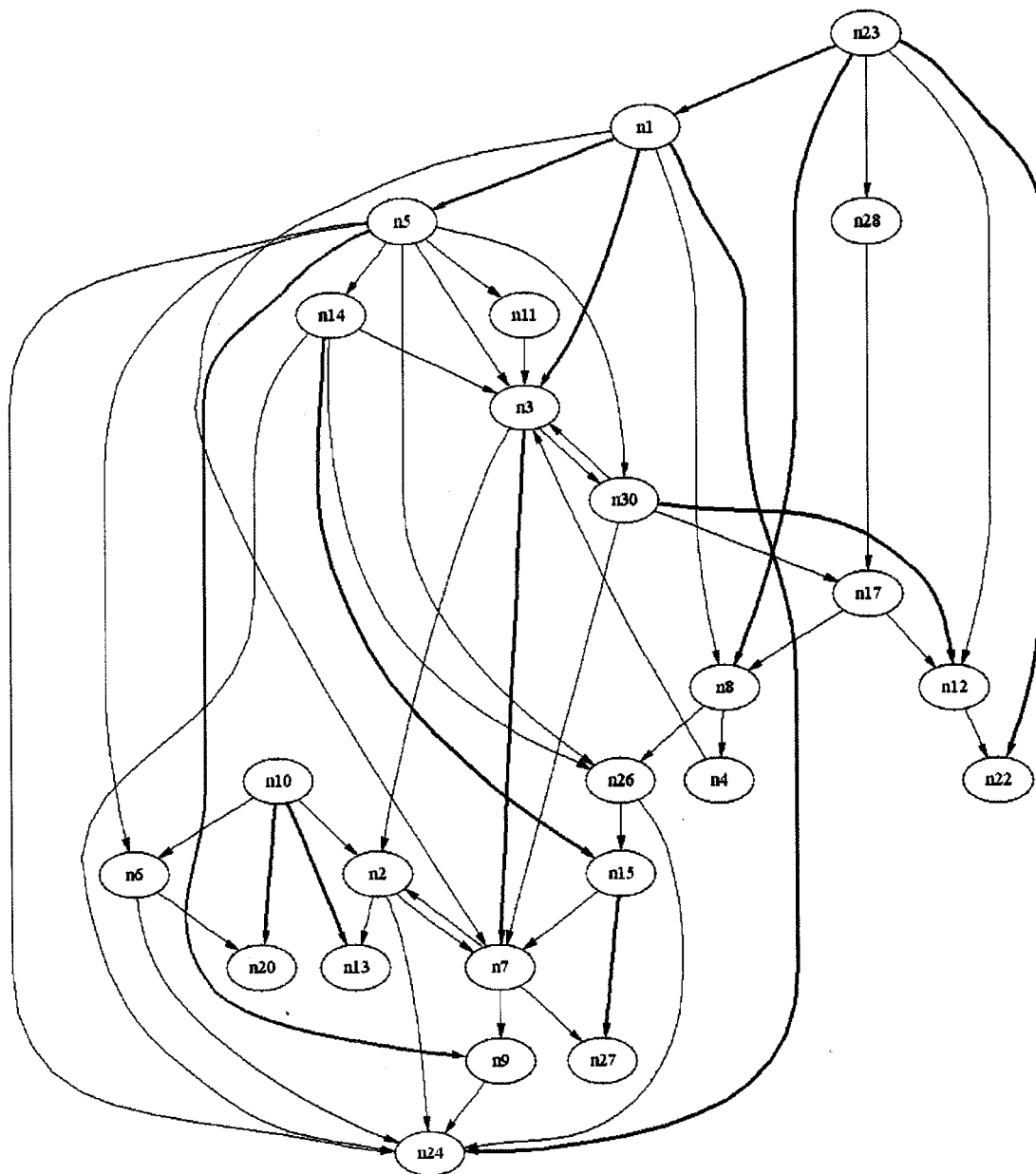


Figure 5.8 Problème 1

CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce travail un modèle de tarification dans les réseaux de transport avec segmentation continue de la demande et congestion. L'obtention d'un gradient (ou sous-gradient) caractérisant l'évolution de l'affectation des flots à l'équilibre par rapport à une perturbation du vecteur de taxes est la contribution la plus importante de ce mémoire. Il en découle un algorithme hybride (optimisation du problème discrétisé et phase de descente) flexible permettant à la fois de maximiser les revenus ou de minimiser le délai total pour un ensemble d'arcs tarifables fixé. Des tests numériques ont été effectués sur des instances de tests générées aléatoirement et il semble que la phase discrétisation permette d'améliorer la solution obtenue par rapport à l'utilisation d'un point de départ trivial (taxes nulles). Toutefois, il n'est pas clair qu'une discrétisation beaucoup plus fine entraîne de meilleurs résultats, alors que le temps de résolution de cette phase augmente très rapidement. Bref, un modèle discrétisé différent serait peut-être approprié.

RÉFÉRENCES

- [1] BERGENDORFF P., HEARN, D. W. et RAMANA, M. V., (1996). "Congestion Toll Pricing of Traffic Networks", *Center for Applied Optimization, University of Florida*.
- [2] BERTRAND, J., (1883). "Théorie mathématique de la richesse sociale", *Journal des Savants*, 499-508.
- [3] BRAESS, D., (1968). "Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung.", *Unternehmensforschung*, 12 :258-268.
- [4] COLSON, B., (2003). "Trust-Region Algorithms for Derivative-Free Optimization and Nonlinear Bilevel Programming ", *Thèse de doctorat - Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur*.
- [5] COLSON, B., (1999). "Mathematical Programs with Equilibrium Constraints and Nonlinear Bilevel Programming Problems", *Mémoire de DEA - Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur*.
- [6] COURNOT, A., (1838). *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, Paris.
- [7] GAREY, M. R. et JOHNSON, D. S., (1979). "Computers and Intractability : A Guide to the theory of NP-completeness." *W. H. Freeman*, San Francisco.

- [8] HARKER, P.T. et PANG, J.S., (1990). "Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems : a survey of theory, algorithms and applications", *Mathematical Programming*, 60, 161-220.
- [9] HARKER, P.T. et PANG, J.S., (1988). "On the existence of optimal solutions to mathematical program with equilibrium constraints", *Operations Research Letters*, 7, 61-64.
- [10] HARSANYI, J., (1967-68). "Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players", *Management Science*, 14, 159-182, 320-334, 486-502.
- [11] JEROSLOW, R.G., (1985). "A Polynomial Hierarchy and a Simple Model for Competitive Analysis", *Mathematical Programming* 32, 146-164.
- [12] LABBÉ, M., MARCOTTE, P. et SAVARD, G., (1998). "A Bilevel Model of Taxation and Its Application to Optimal Highway Pricing", *Management Science*, Vol. 44, No. 12, Part 1 of 2.
- [13] LUO, Z-Q., PANG, J.-S. et RALPH, D., (1998). "Mathematical Programming with Equilibrium Constraints", *Cambridge University Press*, UK. Dordrecht 109-124.
- [14] MARCOTTE, P. et ZHU, D. L., (1996). "Exact and inexact penalty methods for the generalized bilevel programming problem", *Mathematical Programming*, 74 :141-157.

- [15] MARCOTTE, P. et ZHU, D. L., (1997). "Equilibria with infinitely many differentiated classes of customers", in Complementarity and Variational Problems. State of the Art, *Proceedings of the 13th International Conference on Complementarity Problems*, Jong-Shi Pang and Michael Ferris, eds., SIAM, Philadelphia, 234-258.
- [16] MARCOTTE, P., (1997). "Inéquations Variationnelles : Motivation, Algorithmes de Résolution et quelques Applications", Cours donné à Zinal, Suisse, 4-8 mars
- [17] NASH, J., (1950). "Equilibrium points in N-person games", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36, 48-49.
- [18] NASH, J., (1951). "Non-coöperative games", *Annals of Mathematics*, 54, 286-295.
- [19] PATRIKSSON, M., (1998). "Nonlinear Programming and Variational Inequality Problems : a Unified Approach", *Kluwer Academic Publishers*.
- [20] ROCH, S., SAVARD, G. et MARCOTTE, P., (2003). "Design and analysis of an approximation algorithm for Stackelberg network pricing".
- [21] SELTEN, R., (1965). "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragenträgheit", *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, 12, 301-324.

- [22] SCHOEB, A., MARCOTTE, P. et SAVARD, G., (2003). "A Hybrid Algorithm for a Pricing Model with Demand Segmentation", à publier.
- [23] STACKELBERG VON, H., (1952). "The Theory of the Market Theory", *Oxford University Press, Oxford, England*.
- [24] VICENTE, L., SAVARD, G. et JÚDICE, J., (1994). "Descent Approaches for Quadratic Bilevel Programming", *Journal of optimization Theory and Applications* 81, 379-399.
- [25] VON NEUMANN, J. et MORGENSTERN, O., (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press 499-508.
- [26] WARDROP, J. G., (1952). *Some theoretical aspects of road traffic research*, Proceedings of the Institute of Civil Engineers, Part II, 325-378.