

Titre: Algorithme de simulation des modes propres d'un guide d'onde diélectrique isotrope ou anisotrope
Title: dielectrique isotrope or anisotropic

Auteur: Simon Fortier
Author:

Date: 2005

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Fortier, S. (2005). Algorithme de simulation des modes propres d'un guide d'onde diélectrique isotrope ou anisotrope [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7379/>
Citation:

Document en libre accès dans PolyPublie Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/7379/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Suzanne Lacroix, & Xavier Daxhelet
Advisors:

Programme: Unspecified
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

Algorithme de simulation des modes propres d'un guide
d'onde diélectrique isotrope ou anisotrope

SIMON FORTIER
DÉPARTEMENT DE GÉNIE PHYSIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE PHYSIQUE)

AVRIL 2005



Library and
Archives Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-494-01323-0

Our file Notre référence

ISBN: 0-494-01323-0

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

Algorithme de simulation des modes propres d'un guide
d'onde diélectrique isotrope ou anisotrope

présenté par: FORTIER Simon

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. SKOROBOGATIY Maksim, Ph.D., président

M. LACROIX Suzanne, D.Sc., membre et directrice de recherche

M. DAXHELET Xavier, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. PARÉ Claude, Ph.D., membre

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs, Suzanne LACROIX et Xavier DAXHELET, pour leur soutien au niveau financier, mais aussi au niveau humain, car pendant mes études supérieures, j'ai évolué dans deux mondes aussi fascinants l'un que l'autre : celui de la scène et celui de la science. Dans les deux mondes, et particulièrement dans ce dernier, j'ai eu la chance de travailler avec des personnes qui ont fait preuve de patience et de confiance à mon égard : merci de tout cœur.

Je ne peux passer sous silence l'intégrité et l'énorme générosité d'une personne que j'ai eu la chance de côtoyer, voire même de découvrir, pendant ma maîtrise : Bryan BURGOYNE. Merci pour les conseils, les discussions : ton amitié vaut cher.

Merci à Yannick LIZÉ : au-delà du squash et du reste, je crois qu'on a en commun cette façon de penser qui veut que la vie soit «cool» : let's keep in touch, my friend!

Merci à Félix BUSSIÈRES, Alexandre DUPUIS, Éric SAULNIER, d'être sympathiques comme vous l'êtes.

À ma famille : aucune langue au monde ne peut exprimer tout ce que je ressens pour vous...

À Kira : merci d'être dans ma vie.

Finalement, merci à Dieu, sans qui je ne pourrais avoir écrit ces lignes.

Résumé

Dans ce mémoire de maîtrise, la propagation de la lumière dans les guides d'onde diélectriques est étudiée. Par la méthode des différences finies dans le domaine spectral (DFDS) à discrétisation uniforme, les équations vectorielles aux valeurs propres représentant la propagation à travers un guide d'onde sont établies, dans le cas d'un guide sans pertes et invariant dans la direction de propagation, mais de profil d'indice arbitraire. De plus, ces équations sont généralisées pour inclure un large éventail de guides d'onde anisotropes, soit ceux dont un des axes préférentiels est parallèle à la direction de propagation. Un tel niveau de généralisation de la méthode DFDS est atteint, à notre connaissance, pour la première fois.

Ces équations aux valeurs propres sont ensuite résolues par la méthode des puissances inverses translatées (MPIT). L'algorithme qui en résulte est soumis à une étude d'optimisation de la performance portant sur plusieurs paramètres de contrôle. Il est ensuite testé pour différentes catégories de guides d'onde, soit les fibres circulaires multimodales, les fibres à cristaux photoniques, les coupleurs à fibres effilées, les guides d'onde rectangulaires anisotropes, ainsi qu'un guide d'onde imaginaire constitué de deux fibres anisotropes fusionnées de telle sorte que leurs axes préférentiels ne soient pas alignés.

Lorsqu'une comparaison des résultats avec les solutions analytiques est possible, on constate une excellente concordance des indices effectifs des modes guidés, l'écart relatif se situant entre $7,5 \cdot 10^{-7}$ et $4,7 \cdot 10^{-10}$. En l'absence de telles solutions analytiques, l'erreur sur les indices effectifs se situe toujours en deçà de l'écart-type

d'un ensemble de résultats déjà publiés, sauf dans un seul cas où la discrétisation utilisée dans les méthodes de référence était beaucoup plus fine que dans la présente méthode. Finalement, en vertu de résultats de simulation, une amélioration est exposée brièvement, laquelle porte sur les coupleurs à fibres effilées.

Abstract

In this Masters thesis, the propagation of light in dielectric waveguides is studied. Using a finite difference spectral domain (FDSD) scheme with uniform discretization, the vectorial eigenmode equations representing propagation through a lossless, arbitrary index profile, longitudinally constant waveguide, are derived. Also, a generalization of these FDSD equations for a broad category of anisotropic waveguides, namely those with a preferential axis aligned with the direction of propagation, is presented for the first time to our knowledge.

These equations are then solved using the Shifted Inverse Power Method (SIPM). A performance optimization study is performed on the resulting algorithm, using numerous control parameters. The algorithm is then tested on a wide variety of waveguides : multimode circular fibers, photonic bandgap fibers, fused-fibre couplers, rectangular anisotropic waveguides, and an imaginary waveguide, made of two anisotropic circular fibers fused in such a way that their transverse preferential axis are not aligned.

Comparison of the results with analytical solutions, whenever possible, yields excellent agreement for the effective indexes of the eigenmodes, with relative errors ranging from $7,5 \cdot 10^{-7}$ to $4,7 \cdot 10^{-10}$. When such analytical solutions are not available, results for the effective indexes are always found to be within the standard deviation of a set of previously reported results, except in one case where discretization was much finer in the reported results. Finally, an improvement is briefly discussed for fused-fibre coupler devices, based on simulation results.

Table des matières

Remerciements	iv
Résumé	v
Abstract	vii
Table des matières	viii
Liste des figures	xii
Liste des tableaux	xiv
Liste des annexes	xvi
Liste des sigles et abréviations	xvii
Introduction	1
Chapitre 1 Propagation électromagnétique guidée :	
de l'analytique au numérique	4
1.1 Équations de Maxwell dans les guides d'onde	4
1.2 Équations aux valeurs propres	7
1.2.1 Milieux anisotropes	7
1.2.2 Milieux isotropes	14
1.3 Fonctionnement de l'algorithme	21

1.3.1	Discrétisation	21
1.3.2	Résolution du système aux valeurs propres	26
Chapitre 2 Optimisations	32
2.1	Définitions	33
2.1.1	Paramètres de simulation	33
2.1.2	Mesures de performance	37
2.1.3	Variables modifiées	37
2.2	Méthode	38
2.3	Études d'optimisation	39
2.3.1	Étendue du plan de discrétisation	40
2.3.2	Lissage de l'indice de réfraction	45
2.3.3	Utilisation de la symétrie	50
2.3.4	Étude dynamique du critère d'arrêt de BICGSTAB	55
2.3.5	Étude statique du critère d'arrêt de BICGSTAB	59
2.3.6	Seuil de variation dynamique de la translation	66
2.3.7	Rapport de variation dynamique de la translation	71
2.4	Conclusion de l'étude	75
2.4.1	Gain de performance global	75
2.4.2	Équations caractéristiques de l'algorithme optimisé	77
Chapitre 3 Résultats	82
3.1	Fibre circulaire multimodale	83
3.1.1	Profil du champ	84
3.1.2	Comparaison des indices effectifs	84
3.1.3	Discussion	87
3.2	Fibres à cristaux photoniques	88
3.2.1	Profil du champ	90
3.2.2	Biréfringence numérique	90

3.2.3	Comparaison des indices effectifs	92
3.2.4	Discussion	94
3.3	Fibres fusionnées	95
3.3.1	Profil du champ	97
3.3.2	Comparaison : indice effectif, «coefficient de couplage» et biréfringence de forme	97
3.3.3	Discussion	100
3.4	Guide rectangulaire anisotrope	102
3.4.1	Profil du champ	104
3.4.2	Comparaison des indices effectifs	104
3.4.3	Discussion	107
3.5	Fibres anisotropes fusionnées non-alignées	107
3.5.1	Profil du champ	109
3.5.2	Progression des indices effectifs	117
3.5.3	Discussion	117
Conclusion	121
Bibliographie	122
Annexes	125

Liste des figures

Figure 1	Organigramme des méthodes numériques.	3
Figure 1.1	Discrétisation.	22
Figure 1.2	Matrice propre \mathbf{A} .	25
Figure 2.1	Influence de ΔL sur la précision.	41
Figure 2.2	Influence de ΔL sur le coût.	42
Figure 2.3	Influence de ΔL sur le coût effectif.	43
Figure 2.4	Influence de σ sur la précision.	46
Figure 2.5	Influence de σ sur le coût.	47
Figure 2.6	Influence de σ sur le coût effectif.	48
Figure 2.7	Influence de la symétrie sur la précision.	51
Figure 2.8	Influence de la symétrie sur le coût.	52
Figure 2.9	Influence de la symétrie sur le coût effectif.	53
Figure 2.10	Influence de $\eta_{\delta B}$ sur la précision.	56
Figure 2.11	Influence de $\eta_{\delta B}$ sur le coût.	57
Figure 2.12	Influence de $\eta_{\delta B}$ sur le coût effectif.	58
Figure 2.13	Influence de $\overline{\delta B}$ sur la précision.	61
Figure 2.14	Influence de $\overline{\delta B}$ sur le coût.	62
Figure 2.15	Influence de $\overline{\delta B}$ sur le coût effectif.	63
Figure 2.16	Efficacité comparative des utilisations dynamique et statique de $\overline{\delta B}$.	65

Figure 2.17 Influence de $\bar{\gamma}$ sur la précision.	67
Figure 2.18 Influence de $\bar{\gamma}$ sur le coût.	68
Figure 2.19 Influence de $\bar{\gamma}$ sur le coût effectif.	69
Figure 2.20 Influence de $\eta_{\delta\gamma}$ sur la précision.	72
Figure 2.21 Influence de $\eta_{\delta\gamma}$ sur le coût.	73
Figure 2.22 Influence de $\eta_{\delta\gamma}$ sur le coût effectif.	74
Figure 2.23 Amélioration de la performance.	76
Figure 2.24 Algorithme optimisé : précision en fonction de la résolution. . . .	78
Figure 2.25 Algorithme optimisé : coût en fonction de la taille du calcul. . .	78
Figure 2.26 Algorithme optimisé : coût effectif.	79
Figure 3.1 Fibre circulaire multimodale : modes 1 et 2.	85
Figure 3.2 Fibre circulaire multimodale : modes 3 et 4.	85
Figure 3.3 Fibre circulaire multimodale : modes 5 et 6.	86
Figure 3.4 Fibre circulaire multimodale : mode 7.	86
Figure 3.5 Fibres à cristaux photoniques : schéma.	89
Figure 3.6 Fibre sans gaine : 2 premiers modes guidés.	91
Figure 3.7 Fibre assistée : 2 premiers modes guidés.	91
Figure 3.8 Fibre à cristaux photoniques : 2 premiers modes guidés.	93
Figure 3.9 Fibres à cristaux photoniques : biréfringence numérique.	93
Figure 3.10 Fibres fusionnées : schéma.	97
Figure 3.11 Fibres fusionnées : modes propres.	98
Figure 3.12 Fibres fusionnées : profil du champ magnétique longitudinal. . .	101
Figure 3.13 Guide rectangulaire anisotrope : schéma.	104
Figure 3.14 Guide rectangulaire anisotrope : modes «fondamentaux».	105
Figure 3.15 Guide rectangulaire anisotrope : comparaison de n_{eff}^2	106
Figure 3.16 Fibres anisotropes fusionnées non-alignées : schéma.	108
Figure 3.17 Fibres anisotropes fusionnées non-alignées : $\theta_2 = 0^\circ$	110
Figure 3.18 Fibres anisotropes fusionnées non-alignées : $\theta_2 = 15^\circ$	111

Figure 3.19 Fibres anisotropes fusionnées non-alignées : $\theta_2 = 30^\circ$	112
Figure 3.20 Fibres anisotropes fusionnées non-alignées : $\theta_2 = 45^\circ$	113
Figure 3.21 Fibres anisotropes fusionnées non-alignées : $\theta_2 = 60^\circ$	114
Figure 3.22 Fibres anisotropes fusionnées non-alignées : $\theta_2 = 75^\circ$	115
Figure 3.23 Fibres anisotropes fusionnées non-alignées : $\theta_2 = 90^\circ$	116
Figure 3.24 Fibres anisotropes fusionnées non-alignées : progression de l'indice effectif en fonction de θ_2	118
Figure A.1 Référentiels d'axes.	126

Liste des tableaux

Tableau 2.1	Fibres utilisées pour les tests d'optimisation : caractéristiques	38
Tableau 2.2	Paramètres de simulation par défaut.	39
Tableau 2.3	Paramètres de simulation après optimisation de ΔL	45
Tableau 2.4	Paramètres de simulation après optimisation de σ	50
Tableau 2.5	Paramètres de simulation pour l'étude dynamique de $\overline{\delta B}$	55
Tableau 2.6	Paramètres de simulation pour l'étude statique de $\overline{\delta B}$	60
Tableau 2.7	Paramètres de simulation après optimisation de $\overline{\delta B}$	66
Tableau 2.8	Paramètres de simulation après optimisation de $\overline{\gamma}$	71
Tableau 2.9	Paramètres de simulation après toutes les optimisations.	75
Tableau 3.1	Fibre circulaire multimodale : caractéristiques.	83
Tableau 3.2	Fibre circulaire multimodale : fenêtre de calcul.	84
Tableau 3.3	Fibre circulaire multimodale : comparaison des indices effectifs.	84
Tableau 3.4	Fibres à cristaux photoniques : caractéristiques.	89
Tableau 3.5	Fibres à cristaux photoniques : fenêtre de calcul.	89
Tableau 3.6	Fibres à cristaux photoniques : comparaison des indices effectifs.	94
Tableau 3.7	Fibres fusionnées : caractéristiques.	96
Tableau 3.8	Fibres fusionnées : fenêtre de calcul.	96
Tableau 3.9	Fibres fusionnées : comparaison des indices effectifs.	99

Tableau 3.10 Fibres fusionnées : comparaison des «coefficients de couplage» et de la biréfringence de forme.	99
Tableau 3.11 Guide rectangulaire anisotrope : caractétistiques.	103
Tableau 3.12 Guide rectangulaire anisotrope : fenêtre de calcul.	103
Tableau 3.13 Fibres anisotropes fusionnées non-alignées : fenêtre de calcul. .	109
Tableau 3.14 Fibres anisotropes fusionnées non-alignées : progression des indices effectifs en fonction de θ_2 , quatre premiers modes guidés.	117

Liste des annexes

Annexe A Démonstration de l'expression de $[\epsilon_r]$ en coordonnées cartésiennes	125
Annexe B Expression des fonctionnelles $A_{xx(i,j)}$ à $I_{yy(i,j)}$	129

Liste des sigles et abréviations

\vec{E}	champ électrique ($V \cdot m^{-1}$)
\vec{H}	champ magnétique (T)
\vec{J}	densité de courant ($A \cdot m^{-3}$)
\vec{D}	déplacement électrique ($V \cdot F \cdot m^{-2}$)
\vec{B}	induction magnétique ($T \cdot Wb \cdot A^{-1} \cdot m^{-1}$)
ρ	densité de charge volumique ($C \cdot m^{-3}$)
μ_0	perméabilité magnétique du vide ($= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Wb} \cdot A^{-1} \cdot m^{-1}$)
ϵ_0	permittivité électrique du vide $\left(= \frac{1}{\mu_0 c^2} \right)$ ($= 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot m^{-1}$)
$[\mu_r]$	tenseur de la susceptibilité magnétique relative
$[\epsilon_r]$	tenseur de la permittivité électrique relative
$[I]$	matrice identité
c	vitesse de la lumière dans le vide $\left(= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right)$ ($= 2,99792 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot s^{-1}$)
λ_0	longueur d'onde dans le vide (m)
k	nombre d'onde $\left(= \frac{2\pi}{\lambda_0} \right) m^{-1}$
ω	pulsation ondulatoire $\left(= 2\pi \cdot \frac{c}{\lambda_0} = k \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right)$ (Hz)
Z_0	impédance du vide $\left(= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \right)$ ($= 377 \Omega$)

DF	différences finies
DFDT	différences finies dans le domaine temporel
DFDS	différences finies dans le domaine spectral
ϕ^*	complexe conjugué de ϕ
n_{eff}	indice effectif
β	constante de propagation $\left(= \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_{\text{eff}} = k \cdot n_{\text{eff}} \right) (\text{m}^{-1})$
n	indice de réfraction, dans le cas d'un guide isotrope
ϵ	permittivité électrique relative, dans le cas d'un guide isotrope $(= n^2)$
L_x	dimensions en x du plan de discréétisation (m)
L_y	dimensions en y du plan de discréétisation (m)
Δ_x	pas de discréétisation selon x (m)
Δ_y	pas de discréétisation selon y (m)
N_x	nombre de points de discréétisation selon x $\left(= \frac{L_x}{\Delta_x} + 1 \right)$
N_y	nombre de points de discréétisation selon y $\left(= \frac{L_y}{\Delta_y} + 1 \right)$
$O(\Delta^n)$	grand ordre de Δ à la n
$\mathbb{N}\{a, \dots, b\}$	ensemble des nombres entiers positifs de a à b
A	matrice A
\vec{x}	vecteur \vec{x}
ϕ^t	transposée de ϕ
MP	méthode des puissances
MPIT	méthode des puissances inverses translatées

$\ \vec{x}\ $	norme du vecteur \vec{x}
\hat{x}	vecteur normalisé \hat{x} $\left(= \frac{\vec{x}}{\ \vec{x}\ } \right)$
τ	taux de convergence
γ	translation utilisée dans la MPIT
BICGSTAB	méthode stabilisée des gradients conjugués (<u>Bi-Conjugate Gradient Stabilized</u>)
β_{MAX}	constante de propagation maximale pour un guide à une longueur d'onde donnée
n_{max}	indice de réfraction maximal d'un guide isotrope
N	nombre de points de discréttisation unique lorsque $N_x = N_y$
Δ	pas de discréttisation unique lorsque $\Delta_x = \Delta_y$ (m)
$\overline{\delta M}$	critère d'arrêt de la MPIT
$\delta M(i)$	écart relatif sur n_{eff} à la i^{e} étape de la MPIT
ΔL	dimensions du plan de discréttisation lorsque $L_x = L_y$ (m)
σ	Nombre de points utilisés pour le lissage de l'indice de réfraction d'un guide donné
$\delta B(i)$	écart relatif des solutions entre les i^{e} et $(i - 1)^{\text{e}}$ étapes de BICGSTAB
$\overline{\delta B}$	critère d'arrêt de BICGSTAB
$\eta_{\delta B}$	rapport de variation dynamique de $\overline{\delta B}$
$\eta_{\delta \gamma}$	rapport de variation dynamique de la translation
$\overline{\gamma}$	seuil de variation dynamique de la translation
$n_{\text{eff}}^{\text{ANA}}$	valeur de n_{eff} calculée analytiquement
$n_{\text{eff}}^{\text{NUM}}$	valeur de n_{eff} calculée numériquement

ε	erreur relative sur n_{eff} $\left(= \frac{ n_{\text{eff}}^{\text{ANA}} - n_{\text{eff}}^{\text{NUM}} }{n_{\text{eff}}^{\text{ANA}}} \right)$
Δt	temps de simulation (s)
Δ	Résolution ($= -\log_{10}(\Delta)$)
$\underline{\varepsilon}$	Précision ($= -\log_{10}(\varepsilon)$)
$\underline{\Delta t}$	Coût ($= \log_{10}(\Delta t)$)
r_{co}	Rayon du cœur, dans le cas d'une fibre optique circulaire (m)
n_g	Indice de réfraction de la gaine, dans le cas d'un guide isotrope
Δn	Déférence d'indice entre le cœur et la gaine ($= n_{co} - n_g$)
n_{co}	Indice de réfraction du cœur, dans le cas d'un guide isotrope
$N_{co/g}$	Nombre de points de discréétisation sur l'interface cœur-gaine d'un guide donné
Ω	Nombre total de points de discréétisation pour représenter les champs ($= 2 \cdot N^2$)
\vec{e}_t	Champ électrique transverse ($\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$)
ppm	Partie par million ($1 \text{ ppm} = 1 \cdot 10^{-6}$)
r_t	Rayon des trous, dans le cas d'une fibre à cristaux photoniques (m)
Δ_t	Espacement entre les trous, dans le cas d'une fibre à cristaux photoniques (m)
n_{eff}^x	Indice effectif du mode fondamental orienté selon x d'un guide donné
n_{eff}^y	Indice effectif du mode fondamental orienté selon y d'un guide donné
B	Biréfringence numérique ($= n_{\text{eff}}^x - n_{\text{eff}}^y$)
n_{eff}^{xy}	Indice effectif moyen entre n_{eff}^x et n_{eff}^y

REF	ensemble contenant les valeurs d'une même mesure provenant de plusieurs références
$\langle \text{REF} \rangle$	moyenne de REF
VAR(REF)	variance de REF
δ	écart relatif d'une solution numérique par rapport à $\langle \text{REF} \rangle$
ETN(REF)	<u>Ecart-type</u> <u>normalisé</u> de REF $\left(= \frac{\sqrt{\text{VAR}(\text{REF})}}{\langle \text{REF} \rangle} \right)$
d	diamètre maximal, dans le cas d'un guide formé de fibres fusionnées (m)
f	degré de fusion, dans le cas d'un guide formé de fibres fusionnées
M_x^e	mode pair (<i>even</i>) orienté selon x
M_y^o	mode impair (<i>odd</i>) orienté selon y
C_x	coefficient de couplage entre les modes M_x^e et M_x^o (m^{-1})
C_y	coefficient de couplage entre les modes M_y^e et M_y^o (m^{-1})
B	biréfringence de forme
n_o	indice de réfraction ordinaire, dans le cas d'un guide anisotrope
n_e	indice de réfraction extraordinaire, dans le cas d'un guide anisotrope
θ	angle formé par la direction de n_o et l'axe des x , dans le cas d'un guide anisotrope ($^\circ$)
t	épaisseur d'un guide rectangulaire (m)
W	largeur d'un guide rectangulaire (m)
θ_1	valeur de θ dans la fibre de gauche d'un guide à fibres anisotropes fusionnées ($^\circ$)
θ_2	valeur de θ dans la fibre de droite d'un guide à fibres anisotropes fusionnées ($^\circ$)

- L_B longueur de battement entre deux modes d'un guide donné (m)
- R rapport de puissance des signaux de sortie d'un coupleur à deux fibres fusionnées
- Δz longueur d'étirement lors de la fabrication d'un coupleur par fusion et étirage (m)

Introduction

C'est bien connu, les guides d'onde diélectriques représentent une technologie très répandue : on n'a qu'à considérer l'ampleur des systèmes de télécommunications par fibres optiques, ou encore la panoplie de dispositifs utilisant l'optique intégrée, pour s'en convaincre. Que l'on travaille au design d'un dispositif à base de guides d'onde diélectriques, ou que l'on exécute des travaux de recherche les concernant, il est toujours utile d'établir le lien entre les caractéristiques physiques d'un tel guide (dimensions, matériaux) et ses caractéristiques de propagation, ce avant même de le fabriquer. Comme on le voit au chapitre 1, ce lien réside dans les équations de Maxwell. Or, pour la vaste majorité des guides d'onde diélectriques, ces équations ne possèdent pas de solutions analytiques. On doit alors les résoudre par l'entremise de méthodes numériques : c'est là l'essence du présent travail.

Les équations de Maxwell se présentent sous deux formes équivalentes, soit les formes intégrale et différentielle, chacune donnant naissance à une catégorie de méthodes numériques (Fig. 1). Le présent travail utilise les équations de Maxwell sous leur forme différentielle.

Pour cette forme d'équations, il existe deux sous-catégories de méthodes numériques : les méthodes dans le domaine spectral, et celles dans le domaine temporel. Bien qu'une discussion étendue des mérites de chacune dépasse le cadre de ce travail, on peut généralement affirmer que lorsque l'on modélise un guide d'onde invariant dans la direction de propagation soumis à une excitation quasi-monochromatique, les méthodes dans le domaine spectral permettent de s'affranchir d'une dimension de

calcul : elles sont donc à privilégier. Tous les guides d'onde étudiés dans ce travail font d'ailleurs partie de cette catégorie.

La sous-catégorie des méthodes spectrales compte elle-même plusieurs embranchements, qui dépendent de la façon dont on traite les dimensions transverses du guide. D'abord, on note les méthodes par différences finies, qui consistent à discréteriser les dimensions transverses du guide et à remplacer les opérateurs différentiels contenus dans les équations de Maxwell par leur équivalent discret. Ensuite, on retrouve les méthodes de développement en séries de modes (traduction libre de *mode expansion methods*), qui consistent à exprimer les différents champs comme une somme de fonctions de base analytiques couvrant tout le domaine de calcul, et à trouver la combinaison de ces fonctions qui minimise l'énergie totale du système. Finalement, il existe un hybride entre ces deux dernières catégories, soit les méthodes par éléments finis, qui consistent à segmenter le plan transverse du guide à l'aide de formes géométriques diverses, appelées *éléments*, pour ensuite appliquer le principe d'énergie minimale sur chaque élément. Encore une fois, chaque catégorie de méthodes possède ses forces et faiblesses. Dans ce travail, l'approche par différences finies est utilisée.

Ainsi, un algorithme de calcul des modes propres vectoriels d'un guide d'onde diélectrique invariant dans la direction de propagation, laquelle utilise la méthode des différences finies dans le domaine spectral, est présentée dans ce travail.

Les développements analytiques et numériques nécessaires à la mise au point de cet algorithme sont exposés au chapitre 1. Une fois codé dans le langage C++TM, l'algorithme est optimisé au chapitre 2, selon plusieurs paramètres de contrôle. On présente également, au chapitre 3, des résultats de simulation et de validation obtenus grâce à cet algorithme.

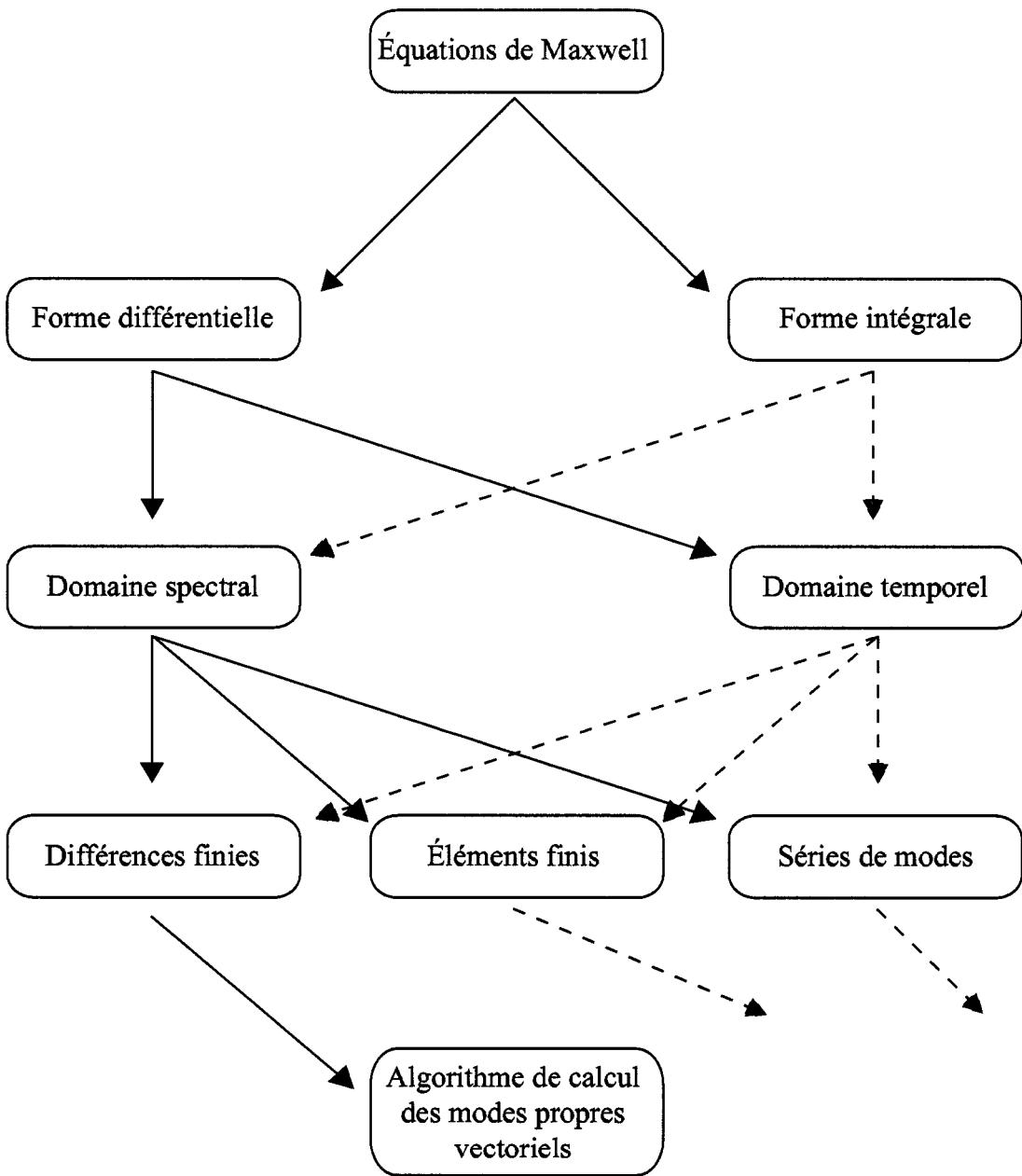


Figure 1 : Organigramme des méthodes numériques.

Chapitre 1

Propagation électromagnétique guidée : de l'analytique au numérique

Dans ce chapitre, l'essentiel de la théorie portant sur la propagation d'ondes électromagnétiques dans les guides diélectriques est abordé. Les développements analytiques et numériques sous-jacents à l'algorithme de simulation présenté dans ce travail sont présentés, ainsi que les limitations et les approximations utilisées. Il est à noter que, pour des raisons de généralité, le système de coordonnées cartésiennes est utilisé tout au long de ce travail.

1.1 Équations de Maxwell dans les guides d'onde

À partir des travaux de Michael Faraday, James Clerk Maxwell (1831-1879) a pu déduire, dans son traité sur l'électricité et le magnétisme [Maxwell 1873], que la lumière n'est autre que la propagation d'une onde électromagnétique. Plus tard, Oliver Heaviside a su réduire la théorie de Maxwell à quatre équations différentielles

vectorielles, qui sont depuis connues sous le nom *d'équations* (ou *lois*) de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.1b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (1.1c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.1d)$$

où \vec{E} et \vec{H} sont, respectivement, les champs électrique et magnétique, \vec{J} est la densité de courant, \vec{D} est le déplacement électrique, \vec{B} est l'induction magnétique, et ρ est la densité de charge volumique.

Or, pour les milieux linéaires, on a :

$$\vec{B} = \mu_0 [\boldsymbol{\mu}_r] \vec{H}, \quad (1.2a)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 [\boldsymbol{\epsilon}_r] \vec{E}, \quad (1.2b)$$

où μ_0 et ϵ_0 sont, respectivement, la perméabilité magnétique et la permittivité électrique du vide, $[\boldsymbol{\mu}_r]$ et $[\boldsymbol{\epsilon}_r]$ sont, respectivement, les tenseurs de la susceptibilité magnétique relative et de la permittivité électrique relative.

Ce qui suit explique les différentes manipulations subies par les équations (1.1), visant à les exprimer sous une forme que l'algorithme de simulation du présent travail est en mesure de traiter.

D'abord, étant donné le caractère non-conducteur des guides d'onde étudiés ici (à base silice, ou SiO_2), et vu qu'ils sont considérés électriquement neutres, on peut poser $\vec{J} = 0$ et $\rho = 0$.

Ensuite, on peut considérer que les différents champs forment des ondes mono-

chromatiques, et que les tenseurs $[\mu_r]$ et $[\epsilon_r]$ sont invariants dans le temps :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad (1.3a)$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad (1.3b)$$

$$\frac{\partial [\mu_r]}{\partial t} = 0, \quad \text{et} \quad (1.3c)$$

$$\frac{\partial [\epsilon_r]}{\partial t} = 0. \quad (1.3d)$$

Ainsi, les dérivées temporelles des champs, présentes dans (1.1), se simplifient. Les équations de Maxwell prennent alors la forme :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega\mu_0[\mu_r]\vec{H}, \quad (1.4a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = i\omega\epsilon_0[\epsilon_r]\vec{E}, \quad (1.4b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot ([\epsilon_r]\vec{E}) = 0, \quad (1.4c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot ([\mu_r]\vec{H}) = 0. \quad (1.4d)$$

Finalement, la silice étant considérée comme un matériau non-magnétique, on pose $[\mu_r] = \mu_0[\mathbf{I}]$ (où $[\mathbf{I}]$ est la matrice identité) et, en utilisant la définition suivante de la pulsation ω :

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}, \quad (1.5)$$

où k est le nombre d'onde, on obtient la version des équations de Maxwell qui est utilisée pour le reste des développements, soit :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \alpha^{-1}k\vec{H}, \quad (1.6a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \alpha k[\epsilon_r]\vec{E}, \quad (1.6b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot ([\epsilon_r]\vec{E}) = 0, \quad (1.6c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0, \quad (1.6d)$$

où la quantité α , introduite pour alléger l'écriture¹, vaut :

$$\alpha = i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}.$$

1.2 Équations aux valeurs propres

Dans cette section, la dérivation analytique des équations aux valeurs propres pour les guides d'onde invariants dans la direction de propagation (soit la direction z dans ce travail) est effectuée. En un premier temps, la forme la plus générale de ces équations, soit la formulation en champs vectoriels pour les guides d'onde anisotropes, est démontrée. Ensuite, le cas particulier (et bien connu) des guides d'onde isotropes est abordé, avec deux approches : formulation en champs vectoriels et scalaires.

1.2.1 Milieux anisotropes

En pratique, plusieurs guides d'onde sont constitués de matériaux anisotropes : il est donc utile de posséder un outil de modélisation de la propagation lumineuse qui tienne compte de cette anisotropie. Certaines méthodes, comme par exemple celle par éléments finis vectoriels [Koshiba, Hayata & Suzuki 1986], ont été appliquées dans le cas de matériaux anisotropes comprenant un tenseur $[\epsilon_r]$ arbitraire. Cependant, ces méthodes sont relativement complexes et difficiles à implanter. Une méthode moins puissante mais beaucoup plus simple, soit la méthode vectorielle par différences finies, ou *DF*, présente une alternative d'autant plus alléchante que son efficacité moindre est compensée par la performance sans cesse croissante des outils de calcul actuels. Parmi les méthodes de ce type figurent la méthode par différences finies dans le domaine temporel, ou *DFDT*, qui utilise une discréttisation spatio-temporelle des équations de Maxwell sous la forme (1.1). Cette dernière méthode a déjà été adaptée pour modéliser des matériaux présentant un tenseur $[\epsilon_r]$ arbitraire [Garcia, Hung-Bao,

¹La quantité α équivaut à $\frac{i}{Z_0}$, où Z_0 est l'impédance du vide ($Z_0 \cong 377 \Omega$).

Martin & Olmedo 1996]. Or, la DFDT ne profite pas de l'invariance en z du guide. Une variante de la DFDT, soit la méthode par différences finies dans le domaine spectral, ou *DFDS*, profite de cette invariance en z , à travers l'équation (1.15), et peut tenir compte de la dispersion par l'utilisation des équations de Maxwell sous la forme (1.4). Toutefois, la DFDS n'a jusqu'à présent été adaptée que pour modéliser des matériaux présentant un tenseur $[\epsilon_r]$ strictement diagonal [Guo, Wu & Albin 2004].

Dans cet ordre d'idées, une démarche est présentée ici, laquelle constitue à notre connaissance la première démonstration d'une formulation aux valeurs propres basée sur la DFDS dans le cas de matériaux dont le tenseur $[\epsilon_r]$ n'est pas obligatoirement diagonal.²

D'abord, on peut démontrer (ce qui est d'ailleurs fait à la fin de cette sous-section) que la résolution d'un système de deux équations différentielles couplées contenant seulement deux composantes indépendantes parmi l'ensemble $\{E_x, E_y, H_x, H_y, E_z, H_z\}$ ³ est suffisante pour obtenir l'ensemble des données voulues, c'est-à-dire les constantes de propagation ainsi que le profil des champs vectoriels (électrique et magnétique) de chaque mode guidé. Ce qui suit vise donc à développer, à partir des équations de Maxwell, un tel système d'équations.

À partir des équations (1.6), on prend le rotationnel de l'équation (1.6a), que l'on compare à l'équation (1.6b), au préalable multipliée par le facteur $\alpha^{-1}k$:

$$\overbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})}^{\text{Eq. 1.6a}} = \underbrace{\alpha^{-1}k(\vec{\nabla} \times \vec{H})}_{\text{Eq. 1.6b}} = \alpha^{-1}k(\alpha k[\epsilon_r]\vec{E}) \quad (= k^2[\epsilon_r]\vec{E}). \quad (1.7)$$

²Au chapitre 3, on démontre qu'il existe des situations où un tel tenseur est absolument nécessaire pour bien représenter le guide d'onde à simuler.

³où E_i et H_i ($\forall i \in \{x, y, z\}$) sont des fonctions de x , y et z représentant la composante selon i de \vec{E} et \vec{H} , respectivement.

On obtient donc une équation ne faisant intervenir que les composantes du champ électrique :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = k^2 [\epsilon_r] \vec{E}. \quad (1.8)$$

On peut simplifier l'équation (1.8) en s'attaquant à la nature du tenseur $[\epsilon_r]$. Celui-ci se définit selon sa forme la plus générale :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

où chaque coefficient de $[\epsilon_r]$ est *a priori* une fonction complexe des trois variables x , y et z . Heureusement, plusieurs propriétés permettent de simplifier l'expression de $[\epsilon_r]$.

D'abord, en posant l'invariance en z de la géométrie et des caractéristiques du guide, on peut réduire chacune des composantes du tenseur $[\epsilon_r]$ à une fonction de deux variables, c'est à dire :

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(x, y) \\ \Rightarrow \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial z} = 0, \end{array} \right\} \quad \forall (i, j) \in \{x, y, z\}. \quad (1.10)$$

Ensuite, pour un milieu sans absorption (comme c'est le cas dans ce travail), le tenseur $[\epsilon_r]$ doit être hermitique, tel que mentionné dans [Popov, Svirko & Zheludev 1995], c'est-à-dire :

$$\epsilon_{ij}^* = \epsilon_{ji}, \quad \forall (i, j) \in \{x, y, z\}. \quad (1.11)$$

De plus, pour les matériaux non-gyrotropes (comme c'est le cas des milieux sans absorption), le tenseur $[\epsilon_r]$ est symétrique⁴ :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}, \quad \forall (i, j) \in \{x, y, z\}. \quad (1.12)$$

On conclut des équations (1.11) et (1.12) que $[\epsilon_r]$ est réel pur.

Finalement, en posant qu'un des axes préférentiels du matériau anisotrope formant le guide est parallèle à la direction de propagation, on peut poser les coefficients ϵ_{xz} , ϵ_{yz} , ϵ_{zx} , et ϵ_{zy} comme étant nuls.

Par la combinaison des principes ci-haut énoncés, le tenseur $[\epsilon_r]$ d'un guide sans pertes dont un des axes préférentiels est parallèle à la direction de propagation prend la forme simplifiée suivante :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Forts de cette définition allégée du tenseur $[\epsilon_r]$, on applique à (1.8) la définition du rotationnel, pour obtenir un ensemble de trois équations impliquant les composantes du champ électrique \vec{E} :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = k^2(\epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y), \quad (1.14a)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = k^2(\epsilon_{xy} E_x + \epsilon_{yy} E_y), \quad (1.14b)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = k^2(\epsilon_{zz} E_z). \quad (1.14c)$$

⁴En effet, la gyrotropie, ou *activité optique*, vient de l'effet magnéto-optique, qui suppose une différence de coefficient d'absorption entre les polarisations circulaires gauche et droite d'une onde se propageant dans un matériau gyrotrope. En absence d'absorption, on a donc également absence de gyrotropie, et la réciprocité temporelle de l'interaction lumière-matière (principe d'*Onsager*) [Popov *et al.* 1995] est maintenue, d'où la symétrie du tenseur $[\epsilon_r]$. Une autre démonstration de cette symétrie se trouve dans [Born & Wolf 1999].

En appliquant aux différentes composantes du champ le principe d'invariance en z du guide, celles-ci prennent alors la forme séparable suivante :

$$E_k(x, y, z) = e_k(x, y) e^{i\beta z}, \quad \forall k \in \{x, y, z\}, \quad (1.15a)$$

$$H_k(x, y, z) = h_k(x, y) e^{i\beta z}, \quad \forall k \in \{x, y, z\}. \quad (1.15b)$$

Le fait de dériver une composante du champ électrique par rapport à z revient alors à une multiplication par $i\beta$. Grâce à ce principe, l'ensemble (1.14) se réduit à un ensemble d'équations qui ne dépendent que des coordonnées transverses x et y :⁵

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial x \partial y} + i\beta \frac{\partial e_z}{\partial x} - \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \beta^2 e_x = k^2(\epsilon_{xx} e_x + \epsilon_{xy} e_y), \quad (1.16a)$$

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial x \partial y} + i\beta \frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} + \beta^2 e_y = k^2(\epsilon_{xy} e_x + \epsilon_{yy} e_y), \quad (1.16b)$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} = k^2(\epsilon_{zz} e_z). \quad (1.16c)$$

Le défi consiste alors à obtenir un ensemble de deux équations différentielles couplées, mais linéairement indépendantes, à partir des trois équations (1.16). En observant les équations (1.16a) et (1.16b), la décision de conserver les composantes e_x et e_y au détriment de e_z paraît naturelle. Or, l'équation (1.16c) n'offre pas une expression explicite de e_z qui puisse aisément se substituer dans (1.16a) et (1.16b). Pour contourner ce problème, l'option d'utiliser la troisième équation de Maxwell (1.6c) à la place de (1.16c) est apparue. En effet, en faisant suivre à (1.6c) le même cheminement que les deux premières équations de Maxwell (soit simplification de $[\epsilon_r]$ et expression de \vec{E} sous forme séparable), on obtient l'équation simplifiée suivante qui, elle, contient

⁵Dans le reste de ce travail, les fonctions $e_x(x, y)$, $e_y(x, y)$ et $e_z(x, y)$ sont désignées e_x , e_y et e_z , respectivement.

l'expression explicite de e_z :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} \right) e_x + \epsilon_{xx} \frac{\partial e_x}{\partial x} + \\ & \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} \right) e_y + \epsilon_{yy} \frac{\partial e_y}{\partial y} + \\ & \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} + \frac{\partial e_x}{\partial y} \right) \epsilon_{xy} + \epsilon_{zz} i\beta e_z = 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

En isolant $i\beta e_z$ à partir de (1.17), et en dérivant tour à tour par rapport à x et y , on obtient :

$$\begin{aligned} i\beta \frac{\partial e_z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{1}{\epsilon_{zz}} \left[\left(\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} \right) e_x + \epsilon_{xx} \frac{\partial e_x}{\partial x} + \right. \right. \\ &\quad \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} \right) e_y + \epsilon_{yy} \frac{\partial e_y}{\partial y} + \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} + \frac{\partial e_x}{\partial y} \right) \epsilon_{xy} \right] \right\} \\ &= \frac{\partial \Gamma}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.18a)$$

et

$$\begin{aligned} i\beta \frac{\partial e_z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\frac{1}{\epsilon_{zz}} \left[\left(\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} \right) e_x + \epsilon_{xx} \frac{\partial e_x}{\partial x} + \right. \right. \\ &\quad \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} \right) e_y + \epsilon_{yy} \frac{\partial e_y}{\partial y} + \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} + \frac{\partial e_x}{\partial y} \right) \epsilon_{xy} \right] \right\} \\ &= \frac{\partial \Gamma}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.18b)$$

où Γ est une fonctionnelle de $\{[\boldsymbol{\epsilon}_r], e_x, e_y\}$ et de leurs dérivées de premier ordre.

En substituant les équations (1.18a) et (1.18b) dans (1.16a) et (1.16b), respectivement, et en réarrangeant les termes, on obtient l'ensemble voulu, soit deux équations

différentielles couplées, mais linéairement indépendantes, ne faisant intervenir que les composantes e_x et e_y du champ électrique :

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + k^2(\epsilon_{xx}e_x + \epsilon_{xy}e_y) = \beta^2 e_x, \quad (1.19a)$$

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Gamma}{\partial y} + k^2(\epsilon_{xy}e_x + \epsilon_{yy}e_y) = \beta^2 e_y. \quad (1.19b)$$

Un dernier développement s'impose avant de clore cette section, soit l'obtention des quatre composantes h_x , h_y , e_z et h_z à partir de la connaissance de la constante de propagation β ainsi que celle des champs e_x et e_y (et leurs dérivées). Bien que cette procédure soit suffisamment documentée dans le cas de guides d'onde isotropes, notamment dans [Snyder & Love 1983], ce n'est pas le cas pour les guides anisotropes, d'où cette parenthèse.

On revient à l'équation (1.17), où l'on isole e_z :

$$e_z = \frac{i}{\beta \epsilon_{zz}} \times \left\{ \left(\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} \right) e_x + \epsilon_{xx} \frac{\partial e_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} \right) e_y + \epsilon_{yy} \frac{\partial e_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} + \frac{\partial e_x}{\partial y} \right) \epsilon_{xy} \right\}. \quad (1.20)$$

À partir de cette dernière équation, l'obtention de la composante e_z est directe si l'on connaît e_x , e_y (et leurs dérivées), ainsi que β . Pour retrouver ensuite les composantes du champ magnétique, on n'a qu'à utiliser dans l'équation (1.6a) la définition du rotationnel ainsi que le principe d'invariance en z du guide, pour obtenir, après réarrangement des termes, le système suivant :

$$h_x = \frac{\alpha}{k} \left(\frac{\partial e_z}{\partial y} - i\beta e_y \right), \quad (1.21a)$$

$$h_y = \frac{\alpha}{k} \left(i\beta e_x - \frac{\partial e_z}{\partial x} \right), \quad (1.21b)$$

$$h_z = \frac{\alpha}{k} \left(\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} \right), \quad (1.21c)$$

où chaque composante du champ magnétique est encore une fois obtenue directement à partir de e_x , e_y et e_z (et de leurs dérivées), ainsi que β .

1.2.2 Milieux isotropes

Dans le cas des milieux isotropes, le développement menant à l'obtention d'un système d'équations semblable à celui de la sous-section précédente est beaucoup plus aisé. Il est effectué ici, selon deux choix de paires de composantes : $\{e_x, e_y\}$ et $\{h_x, h_y\}$.⁶ Dans la première partie, il est démontré qu'en appliquant le cas particulier d'un tenseur isotrope à la formulation généralisée développée dans le cadre de ce travail, on retrouve exactement le système d'équations couplées impliquant les composantes e_x et e_y décrit dans la littérature, notamment dans [Snyder & Love 1983]. Dans la seconde partie, en rappel d'une procédure bien connue, un système de deux équations différentielles couplées impliquant les composantes h_x et h_y est dérivé à partir des équations de Maxwell.

1.2.2.1 Formulation vectorielle en $\{e_x, e_y\}$

On impose d'abord les conditions particulières d'isotropie sur le tenseur $[\epsilon_r]$, soit :

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon, \quad \text{et} \quad (1.22a)$$

$$\epsilon_{xy} = 0. \quad (1.22b)$$

Ici, $\epsilon = n^2$, où n est une fonction de x et y représentant le profil transverse de l'indice de réfraction.

⁶Une autre possibilité courante, soit la paire $\{e_z, h_z\}$, a été volontairement négligée ici.

Le tenseur $[\epsilon_r]$ prend alors la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Il est à noter que, sous cette forme, la multiplication de $[\epsilon_r]$ par un vecteur revient à la multiplication de ce vecteur par le scalaire ϵ , ce qui correspond bien à la condition d'un guide isotrope. On applique ce cas particulier au système d'équations anisotropes (1.19) :

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Gamma_{\text{Iso}}}{\partial x} + k^2 \epsilon e_x = \beta^2 e_x, \quad (1.24a)$$

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Gamma_{\text{Iso}}}{\partial y} + k^2 \epsilon e_y = \beta^2 e_y, \quad (1.24b)$$

où Γ_{Iso} , la forme isotrope de l'expression Γ présentée à la sous-section précédente, prend la forme simplifiée suivante :

$$\Gamma_{\text{Iso}} = -\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x} e_x + \frac{\partial \epsilon}{\partial y} e_y \right) - \frac{\partial e_x}{\partial x} - \frac{\partial e_y}{\partial y}. \quad (1.25)$$

En appliquant la propriété de dérivation d'un logarithme népérien :

$$\vec{\nabla}(\ln \Psi) = \frac{1}{\Psi} \cdot \vec{\nabla} \Psi, \quad (1.26)$$

où Ψ est un champ scalaire, on a :

$$\Gamma_{\text{Iso}} = -\frac{\partial \ln(\epsilon)}{\partial x} e_x - \frac{\partial \ln(\epsilon)}{\partial y} e_y - \frac{\partial e_x}{\partial x} - \frac{\partial e_y}{\partial y}. \quad (1.27)$$

Les dérivées de Γ_{Iso} par rapport à x et y prennent alors les formes suivantes :

$$\frac{\partial \Gamma_{\text{Iso}}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \ln(\epsilon)}{\partial x} e_x + \frac{\partial \ln(\epsilon)}{\partial y} e_y \right\} - \frac{\partial^2 e_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_y}{\partial x \partial y}, \quad (1.28a)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\text{Iso}}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \ln(\epsilon)}{\partial x} e_x + \frac{\partial \ln(\epsilon)}{\partial y} e_y \right\} - \frac{\partial^2 e_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e_x}{\partial x \partial y}. \quad (1.28b)$$

En remplaçant ces expressions dans les équations (1.24), on voit qu'il y a annulation de certains termes, de sorte que ces dernières prennent la forme finale suivante :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \epsilon \right\} e_x + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \ln(\epsilon)}{\partial x} e_x + \frac{\partial \ln(\epsilon)}{\partial y} e_y \right\} = \beta^2 e_x, \quad (1.29a)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \epsilon \right\} e_y + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \ln(\epsilon)}{\partial x} e_x + \frac{\partial \ln(\epsilon)}{\partial y} e_y \right\} = \beta^2 e_y. \quad (1.29b)$$

En réarrangeant les termes de ces dernières équations (et avec $\epsilon \equiv n^2$), ce cas particulier revient exactement à la formulation pour guides isotropes décrite dans [Snyder & Love 1983], qui a été obtenue directement à partir des équations de Maxwell, soit :

$$\nabla_t^2 e_x + (k^2 n^2 - \beta^2) e_x + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial x} e_x + \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial y} e_y \right\} = 0, \quad (1.30a)$$

$$\nabla_t^2 e_y + (k^2 n^2 - \beta^2) e_y + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial x} e_x + \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial y} e_y \right\} = 0, \quad (1.30b)$$

où ∇_t^2 est le Laplacien transverse, soit l'opérateur scalaire $\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\}$.

Ce dernier développement est intéressant, pour deux raisons : premièrement, il fournit un système d'équations différentielles couplées utilisable pour la simulation de guides d'onde isotropes dans le cadre de ce travail ; deuxièmement, il offre un élément de démonstration de la validité de la formulation anisotrope développée dans ce travail, de par sa concordance avec la littérature dans un cas particulier.

1.2.2.2 Formulation vectorielle en $\{h_x, h_y\}$

Comme dans l'approche en $\{e_x, e_y\}$, on substitue d'abord le tenseur $[\epsilon_r]$ par son équivalent scalaire n^2 , mais cette fois-ci directement dans les équations de Maxwell de départ, soit (1.6). On obtient ainsi l'ensemble d'équations de Maxwell suivant, valable pour les milieux isotropes :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \alpha^{-1} k \vec{H}, \quad (1.31a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \alpha k n^2 \vec{E}, \quad (1.31b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (n^2 \vec{E}) = 0, \quad (1.31c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0. \quad (1.31d)$$

Il importe d'abord de citer quelques propriétés d'algèbre vectorielle qui sont utilisées dans le reste de ce développement, soit :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}, \quad (1.32a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad (1.32b)$$

$$\vec{\nabla} \times (\Psi \vec{A}) = \Psi(\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{\nabla}\Psi \times \vec{A}, \quad (1.32c)$$

où Ψ est un champ scalaire et \vec{A} , un champ vectoriel. À partir de ces nouvelles équations, on prend le rotationnel de l'équation (1.31b) :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \alpha k \vec{\nabla} \times (n^2 \vec{E}), \quad (1.33)$$

où l'on applique la propriété (1.32a) à la partie de gauche, et la propriété (1.32c) à la partie de droite :

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \vec{\nabla}^2 \vec{H} = \alpha k \{n^2 \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla}(n^2) \times \vec{E}\}. \quad (1.34)$$

Dans cette dernière équation, on applique (1.31a) et (1.31d) aux expressions $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}$, respectivement. Après simplification, on obtient :

$$\{\vec{\nabla}^2 + n^2 k^2\} \vec{H} = -\alpha k \vec{\nabla}(n^2) \times \vec{E}. \quad (1.35)$$

À partir de l'équation (1.35), on remplace l'expression de \vec{E} par son équivalent selon (1.31b), pour obtenir une équation qui contient uniquement le champ \vec{H} :

$$\{\vec{\nabla}^2 + n^2 k^2\} \vec{H} = -\frac{\vec{\nabla}(n^2)}{n^2} \times \vec{\nabla} \times \vec{H}. \quad (1.36)$$

Pour rendre l'équation (1.36) plus compacte, on peut profiter de la propriété (1.26), ainsi que de la propriété suivante, portant sur les produits vectoriels :

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}, \quad (1.37)$$

où \vec{A} et \vec{B} sont des champs vectoriels. On obtient ainsi :

$$\{\vec{\nabla}^2 + n^2 k^2\} \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{H} \times \vec{\nabla}[\ln(n^2)]. \quad (1.38)$$

Par la suite, on applique à (1.38) la définition des différents opérateurs pour obtenir un ensemble de trois équations faisant intervenir les composantes du champ magnétique :

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 n^2 H_x = \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial z} - \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial y}, \quad (1.39a)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k^2 n^2 H_y = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial x} - \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial z}, \quad (1.39b)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 n^2 H_z = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial y} - \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial x}. \quad (1.39c)$$

Grâce au principe (1.15), ce dernier système devient :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 n^2 - \beta^2 \right\} h_x = - \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial y}, \quad (1.40a)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 n^2 - \beta^2 \right\} h_y = \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial x}, \quad (1.40b)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 n^2 - \beta^2 \right\} h_z &= \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial y} \\ &\quad - \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.40c)$$

Par observation du système d'équations ainsi obtenu, on peut constater que les équations (1.40a) et (1.40b) ne dépendent chacune que des composantes h_x et h_y . Puisqu'il est possible, à partir de la connaissance de ces deux composantes, de reconstituer les quatre autres, on peut donc former un système linéairement indépendant d'équations différentielles couplées à partir de ces deux équations uniquement. Ainsi, en réorganisant les termes et en abandonnant l'équation (1.40c), on obtient l'homogène

logue du système d'équations (1.30), en formulation $\{h_x, h_y\}$ cette fois :

$$\nabla_t^2 h_x + (k^2 n^2 - \beta^2) h_x + \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial y} = 0, \quad (1.41a)$$

$$\nabla_t^2 h_y + (k^2 n^2 - \beta^2) h_y - \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \ln(n^2)}{\partial x} = 0. \quad (1.41b)$$

1.2.2.3 Formulation scalaire

Pour les guides d'onde faiblement guidants, on peut poser que le gradient de l'indice de réfraction est quasi-nul, ce qui amène :

$$\frac{\partial \ln(n^2)}{\partial j} \approx 0, \quad \forall j \in \{x, y\}. \quad (1.42)$$

Cette approximation amène les équations vectorielles (1.30) et (1.41) à adopter une forme simplifiée et dégénérée, soit :

$$\nabla_t^2 \Psi + (k^2 n^2 - \beta^2) \Psi = 0, \quad (1.43)$$

où Ψ peut être remplacé, tour à tour, par les éléments de l'ensemble $\{e_x, e_y, h_x, h_y\}$.

Les quatre systèmes d'équations développés dans cette section, soit (1.19), (1.30), (1.41) et (1.43), sont tous pris en charge par l'algorithme de simulation du présent travail. Ainsi, en fonction des caractéristiques des guides d'onde à étudier, on peut utiliser la formulation la plus appropriée. De plus, cette polyvalence de l'algorithme permet d'évaluer la validité de certaines approximations (champ scalaire, guide isotrope) lors de la simulation d'un guide d'onde donné, par comparaison des résultats obtenus selon les différentes formulations. L'obtention de tels résultats numériques à partir de ces différentes formulations analytiques fait l'objet de la section suivante.

1.3 Fonctionnement de l'algorithme

Les systèmes d'équations différentielles présentés dans la section précédente sont, la plupart du temps, impossibles à résoudre analytiquement, d'autant plus que l'objectif de ce travail est d'obtenir les modes propres d'un guide de profil d'indice *arbitraire*. On doit alors recourir à des méthodes numériques de résolution. L'objet de la présente section est de montrer comment on parvient à l'expression des modes propres d'un guide à partir des formulations analytiques de la section précédente. Cette démarche est explicitée en deux étapes : d'abord, on traite de la discrétisation du problème ; ensuite, on aborde la résolution du système linéaire obtenu lors de la discrétisation.

1.3.1 Discrétisation

Cette sous-section traite de la première étape de bien des méthodes numériques, soit la transformation d'un système d'équations différentielles opérant sur des fonctions continues vers un système linéaire d'équations opérant sur des fonctions discrètes. Dans le présent travail, cette transformation varie légèrement selon que l'on considère une formulation en champs vectoriels ou scalaires, ou que l'on traite d'un guide d'onde isotrope ou anisotrope. On explique donc le cas le plus général, soit le cas de la formulation en champs vectoriels, $\{e_x, e_y\}$, dans le cas d'un guide anisotrope.

Vu que le guide est invariant en z (traduit par le fait que toutes les formulations sont en deux dimensions), on prend donc une section rectangulaire du guide, selon le plan transverse xy . Cette section, que l'on nomme *plan de discrétisation*, a pour dimensions $L_x \times L_y$. On découpe ce plan de discrétisation de façon uniforme, dans les directions x et y . Notons que les intervalles ainsi formés, Δ_x et Δ_y , peuvent être différents l'un de l'autre ; il en va de même pour le nombre de points de discrétisation, N_x et N_y . Les fonctions continues $e_x(x, y)$ et $e_y(x, y)$, ainsi que l'ensemble de fonctions $\{\epsilon_{xx}(x, y), \epsilon_{yy}(x, y), \epsilon_{zz}(x, y), \epsilon_{xy}(x, y)\}$, sont discrétisés ainsi (Fig. 1.1). Lors de cette démarche, on doit s'assurer de choisir L_x et L_y de telle sorte que les dimensions trans-

verses du guide soient petites par rapport aux dimensions du plan de discréétisation : on peut alors poser que les différentes composantes du champ sont nulles à l'extérieur de ce dernier.

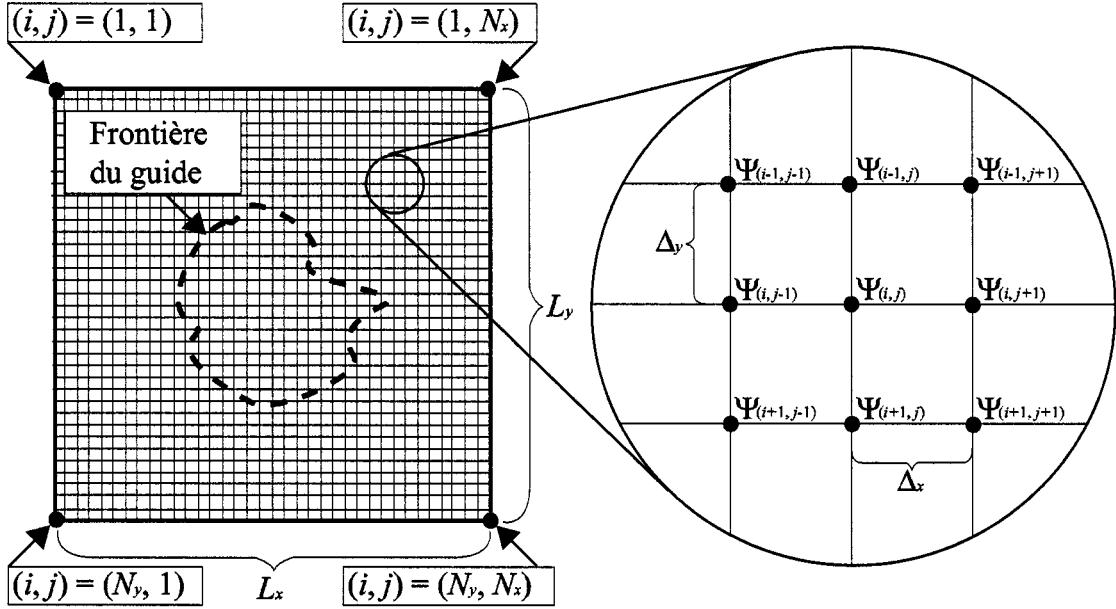


Figure 1.1 : Schéma de discréétisation dans le plan xy .

Suite à cette discréétisation des composantes du champ électrique et de celles du tenseur $[\epsilon_r]$, on procède à la discréétisation des opérateurs différentiels intervenant dans le système d'équations (1.19). Il est facile à démontrer, comme dans [Fortin 1995], que selon la convention d'indices introduite à la figure 1.1, on a :

$$\frac{\partial \Psi_{(i,j)}}{\partial x} = \frac{\Psi_{(i,j+1)} - \Psi_{(i,j-1)}}{2\Delta_x} + O(\Delta_x^2), \quad (1.44a)$$

$$\frac{\partial \Psi_{(i,j)}}{\partial y} = \frac{\Psi_{(i-1,j)} - \Psi_{(i+1,j)}}{2\Delta_y} + O(\Delta_y^2), \quad (1.44b)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{(i,j)}}{\partial x^2} = \frac{\Psi_{(i,j+1)} + \Psi_{(i,j-1)} - 2\Psi_{(i,j)}}{\Delta_x^2} + O(\Delta_x^2), \quad (1.44c)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{(i,j)}}{\partial y^2} = \frac{\Psi_{(i+1,j)} + \Psi_{(i-1,j)} - 2\Psi_{(i,j)}}{\Delta_y^2} + O(\Delta_y^2). \quad (1.44d)$$

On tire également, de (1.44a) et (1.44b), l'expression suivante de la dérivée mixte :

$$\frac{\partial^2 \Psi_{(i,j)}}{\partial x \partial y} = \frac{\Psi_{(i-1,j+1)} - \Psi_{(i-1,j-1)} - \Psi_{(i+1,j+1)} + \Psi_{(i+1,j-1)}}{4\Delta_x \Delta_y} + O(\Delta_x^2) + O(\Delta_y^2). \quad (1.44e)$$

Dans les expressions (1.44), Ψ peut être remplacé par e_x ou e_y , ou par chacune des composantes de $[\epsilon_r]$. Ces dernières équations sont à la base de la technique de résolution par *différences finies*.

L'étape suivante consiste à remplacer, dans (1.19), les opérateurs différentiels qui agissent sur les composantes e_x et e_y , par leurs équivalents en différences finies (1.44). On réordonne ensuite les termes de ces nouvelles équations, d'abord selon les indices de localisation j et i (soit de gauche à droite, puis de haut en bas), et ensuite selon la nature de la composante du champ, soit x ou y . On obtient alors le système linéaire voulu, soit :

$$\begin{aligned} & A_{mx(i,j)} e_{x(i-1,j-1)} + A_{my(i,j)} e_{y(i-1,j-1)} + B_{mx(i,j)} e_{x(i-1,j)} + B_{my(i,j)} e_{y(i-1,j)} + \\ & C_{mx(i,j)} e_{x(i-1,j+1)} + C_{my(i,j)} e_{y(i-1,j+1)} + D_{mx(i,j)} e_{x(i,j-1)} + D_{my(i,j)} e_{y(i,j-1)} + \\ & E_{mx(i,j)} e_{x(i,j)} + E_{my(i,j)} e_{y(i,j)} + F_{mx(i,j)} e_{x(i,j+1)} + F_{my(i,j)} e_{y(i,j+1)} + \\ & G_{mx(i,j)} e_{x(i+1,j-1)} + G_{my(i,j)} e_{y(i+1,j-1)} + H_{mx(i,j)} e_{x(i+1,j)} + H_{my(i,j)} e_{y(i+1,j)} + \\ & I_{mx(i,j)} e_{x(i+1,j+1)} + I_{my(i,j)} e_{y(i+1,j+1)} = \beta^2 e_{m(i,j)}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\forall m \in \{x, y\}, \quad \forall i \in \mathbb{N}\{1, \dots, N_y\}, \quad \forall j \in \mathbb{N}\{1, \dots, N_x\}.$$

Dans le dernier système d'équations, les indices m et n des différentes fonctionnelles $\Psi_{mn(i,j)}$, $\Psi \in \{A, \dots, I\}$ représentent, respectivement, la composante du champ électrique affectée du terme β^2 dans le membre de droite de l'équation et la composante du champ électrique que multiplie $\Psi_{mn(i,j)}$ (cette notation prend toute sa signification ci-après). Ces fonctionnelles, dont toutes les expressions se trouvent à

l'annexe B, ne dépendent que des quantités Δ_x , Δ_y et k , ainsi que de la valeur des fonctions discrètes $\epsilon_{xx(i,j)}$, $\epsilon_{yy(i,j)}$, $\epsilon_{zz(i,j)}$, $\epsilon_{xy(i,j)}$ (et de leurs dérivées approximées par différences finies). Ces dernières quantités sont toutes connues au début du problème : l'ensemble des fonctionnelles $\Psi_{mn(i,j)}$ l'est donc également.

La démarche de discréétisation fournit donc $2 \cdot N_x \cdot N_y$ équations impliquant à prime abord autant d'inconnues, soit les différentes valeurs des composantes $e_{x(i,j)}$ et $e_{y(i,j)}$. Or, vu que le système est dit *aux valeurs propres*, il comporte une inconnue supplémentaire, soit β^2 . Exprimé sous forme matricielle, ce système s'exprime ainsi :

$$\mathbf{A}\vec{x} = \beta^2\vec{x}, \quad (1.46)$$

où \mathbf{A} est une matrice et \vec{x} , un vecteur. On peut exprimer l'équation (1.46) sous une forme relativement compacte, en posant que \vec{x} est un vecteur-colonne de longueur $N_x \cdot N_y$ ayant la forme suivante :

$$\vec{x} = [\vec{e}_{(1,1)}, \vec{e}_{(1,2)}, \dots, \vec{e}_{(1,N_x)}, \vec{e}_{(2,1)}, \vec{e}_{(2,2)}, \dots, \vec{e}_{(N_y,N_x)}]^t, \quad (1.47)$$

où chaque sous-vecteur $\vec{e}_{(i,j)}$ a la forme : $\vec{e}_{(i,j)} = [e_{x(i,j)}, e_{y(i,j)}]^t$, et que \mathbf{A} est nonadiagonale de taille $(N_x \cdot N_y) \times (N_x \cdot N_y)$, tel que montré à la figure 1.2. Les indices (i, j) de départ de chaque diagonale sont identifiés sur cette même figure, et suivent par la suite le même ordre que ceux de \vec{x} . Dans la matrice \mathbf{A} , chaque symbole identifié de A à I est en fait une sous-matrice 2×2 , dont les éléments correspondent aux fonctionnelles énoncées en (1.45) :

$$\Psi_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \Psi_{xx(i,j)} & \Psi_{xy(i,j)} \\ \Psi_{yx(i,j)} & \Psi_{yy(i,j)} \end{bmatrix}, \quad (1.48)$$

où $\Psi \in \{A, \dots, I\}$.

La sous-section suivante porte sur la résolution numérique de ce système à valeurs propres.

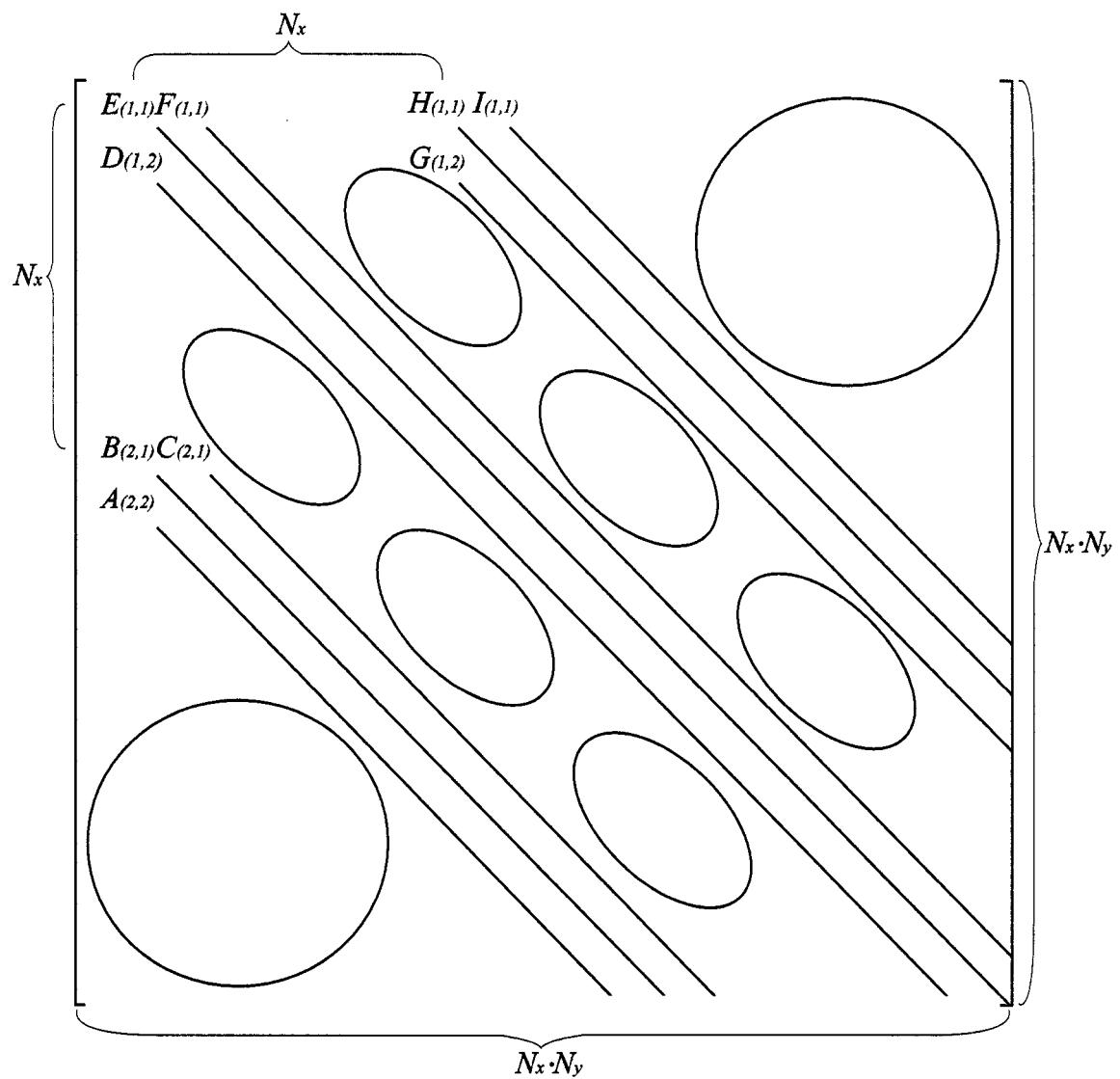


Figure 1.2 : Matrice propre \mathbf{A} .

1.3.2 Résolution du système aux valeurs propres

Le fait de rechercher les N modes propres d'un guide d'onde, où $N = 2 \times N_x \times N_y$, revient donc à trouver les N solutions de l'équation (1.46). Il existe, dans la littérature, une panoplie d'algorithmes pouvant résoudre un tel problème. Dans cette sous-section, on présente d'abord deux méthodes, soit la méthode des puissances (ou *MP*) et une méthode dérivée de celle-ci, la méthode des puissances inverses translatées (ou *MPI*), toutes deux tirées de [Saad 1991]. Ensuite, un argument en faveur de cette dernière est amené.

1.3.2.1 Méthode des puissances

Soient les propriétés d'algèbre linéaire suivantes :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\mathbf{A})^m \vec{x} = \vec{x}_P, \quad (1.49a)$$

et

$$\mathbf{A} \frac{\vec{x}_P}{\|\vec{x}_P\|} = \mathbf{A} \hat{x}_P = \beta^2 \hat{x}_P, \quad (1.49b)$$

où β^2 est la valeur propre la plus élevée (en valeur absolue) de \mathbf{A} , \vec{x}_P est le vecteur propre non-normalisé de \mathbf{A} correspondant à β^2 , et \hat{x}_P est l'équivalent normalisé de \vec{x}_P . Pour trouver simultanément les n valeurs propres les plus élevées (en valeur absolue) de la matrice A ainsi que les n vecteurs propres correspondants, on peut appliquer la

méthode suivante, soit la *méthode des puissances* :

Pour s variant de 1 à n (où s représente le numéro de chaque mode) :

1. générer un vecteur aléatoire non-nul normalisé de taille N , soit $\hat{x}_0^{[s]}$;
2. à partir de $i = 1$ (un itérateur), créer le vecteur $\vec{x}_i^{[s]}$ en multipliant $\hat{x}_{i-1}^{[s]}$ par \mathbf{A} ;
3. grâce à la méthode de Gram-Schmidt [Butkov 1968], orthonormaliser le vecteur obtenu à l'étape (2) par rapport à l'ensemble $\{\hat{x}_P^{[0]}, \dots, \hat{x}_P^{[s-1]}\}$ des $s-1$ vecteurs propres orthonormalisés déjà obtenus, pour obtenir le vecteur $\hat{x}_i^{[s]}$ (si $s = 1$, cette procédure revient à normaliser le seul vecteur $\vec{x}_i^{[1]}$) ;
4. répéter (2) et (3) en incrémentant i , jusqu'à ce que $\Delta_i^{[s]} \leq \Delta_{Err}$, où $\Delta_i^{[s]} = \|\hat{x}_i^{[s]} - \hat{x}_{i-1}^{[s]}\|$, et Δ_{Err} est une tolérance arbitrairement faible ;
5. lorsque la condition en (4) est remplie, poser $\hat{x}_P^{[s]} = \hat{x}_i^{[s]}$, et $(\beta^2)^{[s]} = \|\mathbf{A}\hat{x}_P^{[s]}\|$.

Le taux de convergence de cette méthode pour le s^e vecteur propre, défini comme :

$$\tau^{[s]} = \frac{\Delta_i^{[s]}}{\Delta_{i-1}^{[s]}}, \quad (1.50)$$

obéit à la loi suivante :

$$\tau^{[s]} = \frac{|(\beta^2)^{[s+1]}|}{|(\beta^2)^{[s]}|}.^7 \quad (1.51)$$

Or, dans les guides d'onde, il n'est pas rare que le rapport de deux valeurs propres consécutives soit très proche de l'unité, ce qui rend la MP tellement inefficace qu'elle en devient pratiquement inutilisable.

Une méthode dérivée de la MP permet d'éviter ce problème. Elle est exposée dans ce qui suit.

⁷L'expression de τ suit une logique inverse : le taux de convergence est d'autant plus élevé que la valeur de τ est faible.

1.3.2.2 Méthode des puissances inverses translatées

La méthode dite des *puissances inverses translatées* se base sur les propriétés suivantes de translation en algèbre linéaire :

Soient les ensembles $\{(\beta^2)^{[s]}\}$, $\{(\beta^2)^{[s]} - \gamma\}$ et $\{\hat{x}_P^{[s]}\}$, $\forall s \in \mathbb{N}\{1, \dots, N\}$:

$\{(\beta^2)^{[s]}\}$ est l'ensemble des N valeurs propres de \mathbf{A}

$$\iff$$

$\{(\beta^2)^{[s]} - \gamma\}$ est l'ensemble des N valeurs propres de $(\mathbf{A} - \gamma[\mathbf{I}])$, et (1.52a)

$\{\hat{x}_P^{[s]}\}$ est l'ensemble des N vecteurs propres de \mathbf{A}

$$\iff$$

$\{\hat{x}_P^{[s]}\}$ est l'ensemble des N vecteurs propres de $(\mathbf{A} - \gamma[\mathbf{I}])$, (1.52b)

où γ est un nombre quelconque. Grâce à cette propriété de translation, on peut faire évoluer le système (1.49b) de la façon suivante :

$$\mathbf{A}\hat{x}_P = \beta^2\hat{x}_P, \quad (\text{Eq. 1.49b}) \quad (1.53a)$$

$$\Downarrow$$

$$(\mathbf{A} - \gamma[\mathbf{I}])\hat{x}_P = (\beta^2 - \gamma)\hat{x}_P, \quad (\text{principe 1.52}) \quad (1.53b)$$

$$\Downarrow$$

$$(\mathbf{A} - \gamma[\mathbf{I}])^{-1}(\mathbf{A} - \gamma[\mathbf{I}])\hat{x}_P = (\beta^2 - \gamma)(\mathbf{A} - \gamma[\mathbf{I}])^{-1}\hat{x}_P, \quad (1.53c)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{(\beta^2 - \gamma)}\hat{x}_P = (\mathbf{A} - \gamma[\mathbf{I}])^{-1}\hat{x}_P, \quad (1.53d)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{A}'\hat{x}_P = \lambda'\hat{x}_P, \quad (1.53e)$$

où $\mathbf{A}' = (\mathbf{A} - \gamma[\mathbf{I}])^{-1}$, et $\lambda' = \frac{1}{(\beta^2 - \gamma)}$. En appliquant la MP sur le nouveau système (1.53e), on obtient donc, indirectement, les valeurs et vecteurs propres du système de départ. C'est là l'essence de la MPIT.

Or, on remarque que la matrice inverse $(\mathbf{A} - \gamma[\mathbf{I}])^{-1}$, requise à l'étape (2) de la MP, est souvent fort difficile à calculer, de par sa taille. Pour s'affranchir de ce calcul, on y remplace la multiplication :

$$(\mathbf{A} - \gamma[\mathbf{I}])^{-1}\hat{x}_{i-1}^{[s]} = \vec{x}_i^{[s]} \quad (1.54)$$

par son équivalent mathématique, qui consiste à solutionner l'équation :

$$(\mathbf{A} - \gamma[\mathbf{I}])\vec{x}_i^{[s]} = \hat{x}_{i-1}^{[s]}, \quad (1.55)$$

où $\hat{x}_{i-1}^{[s]}$ est, dans les deux cas, le vecteur connu. Cette dernière astuce permet donc d'utiliser la MPIT sans avoir à calculer explicitement l'inverse d'une matrice de très grande taille. Quant à la résolution du système linéaire (1.55), on peut faire appel à un éventail de méthodes numériques dont, entre autres, la décomposition LU [Fortin 1995] ou la méthode stabilisée des gradients conjugués (ou *BICGSTAB*), tirée de [Van der Vorst 1992]. La matrice caractéristique du système aux valeurs propres du présent travail possédant une très grande quantité d'éléments nuls et la méthode BICGSTAB étant en mesure de mettre cette faible densité à profit, elle s'avère d'une grande efficacité et est donc retenue.

Dans ce qui suit, on explique pourquoi la MPIT s'avère, malgré tout, plus efficace que la MP.

1.3.2.3 Comparaison des méthodes

Au premier coup d'œil, il est évident que la MPIT est beaucoup plus complexe que la MP : en effet, contrairement à cette dernière, la MPIT force la résolution d'un système linéaire à chacune de ses itérations. Il importe donc de démontrer ici à quel

point cette apparente lacune est compensée par d'autres facteurs.

Au préalable, on constate, par analogie avec la MP, que le système $\mathbf{A}'\hat{x}_P = \lambda'\hat{x}_P$ converge d'abord vers la plus grande valeur de $|\lambda'|$, donc vers la plus faible valeur de $|\beta^2 - \gamma|$. Ainsi, les valeurs propres de \mathbf{A} convergent selon leur proximité de γ , de la plus proche à la plus éloignée. Or, on cherche la plupart du temps à obtenir les valeurs propres (correspondant aux constantes de propagation d'un guide d'onde donné) en ordre décroissant. La condition suivante est suffisante⁸ pour s'assurer de cette décroissance :

$$\gamma > \beta_{\text{MAX}}^2, \quad (1.56)$$

où β_{MAX}^2 est la constante de propagation dont la valeur est la plus élevée. En pratique, on ne connaît pas la valeur de β_{MAX}^2 . Pour pallier ce fait, on se base sur une autre condition, nécessaire à l'existence d'un mode guidé :

$$\text{Le } s^{\text{e}} \text{ mode est guidé} \Rightarrow n_{\text{eff}}^{[s]} < n_{\text{max}}, \quad (1.57)$$

où $n_{\text{eff}}^{[s]} \left(= \sqrt{\frac{(\beta^2)^{[s]}}{k^2}}\right)$ est l'indice effectif du mode, et n_{max} est l'indice de réfraction maximal du guide. Ainsi, en posant :

$$\gamma = k^2(n_{\text{max}})^2, \quad (1.58)$$

on s'assure que la condition (1.56) est respectée : les constantes de propagation apparaissent donc en ordre décroissant. La MPIT est donc, à cet égard, aussi pratique que la MP.

L'avantage principal de la MPIT réside cependant dans son taux de convergence. En effet, à l'instar de la MP, il s'exprime ainsi :

$$\tau^{[s]} = \frac{|(\lambda')^{[s+1]}|}{|\lambda'^{[s]}|} = \frac{|(\beta^2)^{[s]} - \gamma|}{|(\beta^2)^{[s+1]} - \gamma|}. \quad (1.59)$$

⁸Sans pour autant être nécessaire.

En observant l'équation (1.59), on constate que lorsque la valeur de γ tend vers celle de $(\beta^2)^{[s]}$, la valeur de $\tau^{[s]}$ tend vers 0. Ainsi, en choisissant judicieusement la valeur de γ , on s'assure que le taux de convergence de la MPIT soit de plusieurs ordres de grandeur plus faible que celui de la MP, compensant largement le coût supplémentaire imposé par la résolution d'un système linéaire à chaque itération. La MPIT s'avère ainsi plus efficace que sa concurrente. C'est donc cette méthode que l'on choisit pour résoudre le système aux valeurs propres (1.46).

Dans ce chapitre, toutes les démarches analytiques et numériques menant à l'algorithme de simulation du présent travail ont été mises en place. Au chapitre suivant, on voit comment cet algorithme se comporte en cours d'utilisation, ainsi que diverses façons de l'optimiser.

Chapitre 2

Optimisations

Le code de l'algorithme présenté au chapitre précédent permettant de faire varier plusieurs paramètres de simulation, l'objet du présent chapitre porte donc sur la recherche de paramètres d'utilisation qui soient optimaux.

À cette fin, on procède dans ce chapitre à l'optimisation séquentielle de plusieurs paramètres de simulation distincts. Cette méthode séquentielle n'est pas à toute épreuve mais, étant donné le nombre élevé de paramètres à l'étude (soit sept), une étude d'optimisation multidimensionnelle aurait nécessité un nombre de simulations beaucoup trop grand (soit n^7 , où n est le nombre de points de mesure dans chaque étude d'optimisation) pour considérer cette dernière approche.

La première section de ce chapitre présente deux ensembles de définitions : celui des différents paramètres de simulation à l'étude et celui des critères de performance utilisés pour mesurer les effets des différentes optimisations. On y présente également certaines variables modifiées, utiles à la discussion. La seconde section est consacrée à la description de la méthode commune à toutes les études d'optimisation. La troisième section traite des études d'optimisation telles quelles, à raison d'une sous-section par paramètre à optimiser. Dans la quatrième et dernière section, on conclut le chapitre sur un aperçu du gain de performance global provenant de l'ensemble des études, ainsi que sur les équations caractéristiques de performance de l'algorithme optimisé.

2.1 Définitions

Pour bien comprendre les résultats des études qui suivent et pour alléger le texte, on fournit ici la définition de plusieurs variables, en trois familles : paramètres de simulation, mesures de performance et variables modifiées.

2.1.1 Paramètres de simulation

Sauf mention, tous les paramètres suivants font l'objet d'une optimisation.

2.1.1.1 Nombre de points de discrétisation (N)

Ce paramètre ne fait pas l'objet d'une optimisation proprement dite, mais il varie dans toutes les études pour donner un aperçu du comportement de l'algorithme en fonction de la taille du problème. Il est à noter que la discrétisation est identique selon x et y , de sorte que l'on peut définir N ainsi :

$$N = N_x (= N_y) \quad (2.1)$$

2.1.1.2 Pas de discrétisation (Δ)

De façon semblable à N , ce paramètre ne fait pas l'objet d'une optimisation proprement dite, mais il varie lui aussi dans toutes les études. Vu que le plan de discrétisation est de forme carrée et que $N_x = N_y$, on peut donc définir Δ ainsi :

$$\Delta = \Delta_x (= \Delta_y) \quad (2.2)$$

2.1.1.3 Critère d'arrêt de la MPIT ($\overline{\delta M}$)

Dans ce chapitre, on utilise la définition suivante de la variation relative de β^2 à la i^e étape de la MPIT, $\delta M(i)$:

$$\delta M(i) = \frac{|(\beta^2)^{[i]} - (\beta^2)^{[i-1]}|}{(\beta^2)^{[i-1]}}, \quad (2.3)$$

où $(\beta^2)^{[i]}$ est la valeur de la constante de propagation d'un mode donné, obtenue à la i^e étape de la MPIT. La MPIT cesse lorsque la condition $\delta M(i) \leq \overline{\delta M}$ est respectée pendant deux étapes consécutives. Le paramètre $\overline{\delta M}$ ne fait toutefois pas l'objet d'une optimisation, et sa valeur reste constante à $1 \cdot 10^{-9}$ tout au long de ce chapitre.

2.1.1.4 Étendue du plan de discréétisation (ΔL)

Dans toutes ces études, le plan de discréétisation est de forme carrée, de sorte que son étendue, ΔL , se définit :

$$\Delta L = L_x (= L_y). \quad (2.4)$$

2.1.1.5 Nombre de points pour le lissage de $n_{(i,j)}$ (σ)

Pour compenser les effets de la discréétisation sur le profil d'indice, on peut procéder, avant de commencer la simulation proprement dite, à un lissage de ce profil, qui consiste à effectuer le remplacement suivant :

$$n(x_j, y_i) \rightarrow \frac{\iint_S n(x, y) dS}{S}, \quad (2.5)$$

où S est une surface carrée, d'aire Δ^2 , bornée par : $x \in [x_j - \frac{\Delta}{2}, x_j + \frac{\Delta}{2}]$ et $y \in [y_i - \frac{\Delta}{2}, y_i + \frac{\Delta}{2}]$. L'intégrale de l'équation (2.5) est remplacée par un équivalent numérique discret, soit la méthode des trapèzes en deux dimensions. Cette méthode discréétise la surface S en utilisant le même nombre de points selon x et y , soit σ . Il est à noter que σ est toujours impair, afin d'inclure le point central $n(x_j, y_i)$ dans le

lissage. Si $\sigma = 1$, cela revient à n'opérer aucun lissage.

2.1.1.6 Utilisation de la symétrie

Lorsque le guide possède un axe de symétrie selon x ou y (ou les deux), l'algorithme peut en tenir compte, et profiter d'une réduction correspondante du plan de discré-tisation. Dans la présente étude, lorsqu'une telle symétrie est utilisée, on profite d'une symétrie à deux axes et on ne considère que le cadran supérieur droit du plan de discré-tisation. Pour effectuer une simulation en utilisant la symétrie, on doit spécifier à l'algorithme la parité d'une des deux composantes de champ utilisée, pour chaque direction symétrique : l'algorithme donne automatiquement la parité contraire à l'autre composante. Par exemple, si l'on effectue une simulation en utilisant les composantes e_x et e_y du champ électrique pour un guide présentant une symétrie à deux axes, on peut imposer que la composante e_x soit paire dans la direction x et impaire dans la direction y : l'algorithme déclare alors automatiquement e_y comme impaire selon x et paire selon y .¹ Cette parité influence par la suite la définition, sur les axes de symétrie, des opérateurs différentiels de la matrice à valeurs propres.

2.1.1.7 Critère d'arrêt de BICGSTAB ($\overline{\delta B}$)

BICGSTAB étant une méthode itérative, on définit ainsi la variation relative à sa i^e étape, $\delta B(i)$:

$$\delta B(i) = \frac{\|\Delta \vec{v}^{(i)}\|}{\|\vec{v}^{(i)}\|}, \quad (2.6)$$

où $\vec{v}^{(i)}$ est le vecteur représentant les composantes en x et y du champ (électrique ou magnétique, dépendant de la formulation utilisée) à la i^e étape de BICGSTAB, et $\Delta \vec{v}^{(i)}$ est le vecteur de correction qui s'ajoute à $\vec{v}^{(i)}$, toujours à la i^e étape. BICGSTAB cesse lorsque $\delta B(i) \leq \overline{\delta B}$.

¹En effet, en vertu de la façon dont les différentes composantes des champs sont extraites à partir des composantes de départ, ces dernières doivent présenter des parités opposées entre elles pour qu'il y ait existence d'un mode guidé.

2.1.1.8 Rapport de variation dynamique de $\overline{\delta B}$ ($\eta_{\delta B}$)

Il est possible d'ajuster dynamiquement le critère d'arrêt de BICGSTAB en fonction de l'erreur $\delta M(i)$, ce à chaque étape de la MPIT. Lorsqu'on utilise une telle fonctionnalité, le critère d'arrêt sur BICGSTAB qui est utilisé lors de la $(i+1)^{\text{e}}$ étape de la MPIT, $\overline{\delta B}(i+1)$, est alors déterminé par un rapport-cible, $\eta_{\delta B}$:

$$\overline{\delta B}(i+1) = \eta_{\delta B} \times \delta M(i). \quad (2.7)$$

2.1.1.9 Rapport de variation dynamique de la translation ($\eta_{\delta \gamma}$)

Dans toutes les simulations, la translation de départ qu'utilise la MPIT, γ_0 , correspond à $(n_{\max}k)^2$, où l'on utilise les définitions du chapitre 1 pour n_{\max} et k . Or, il est possible d'ajuster cette translation dynamiquement. Lorsqu'on utilise une telle fonctionnalité, la nouvelle valeur de translation, γ' , est alors déterminée en fonction de deux bornes : la valeur de γ_0 et la valeur de la constante de propagation au moment d'effectuer le changement de translation, soit $(\beta^2)^{[i]}$. Le rapport de variation dynamique de la translation, $\eta_{\delta \gamma}$, détermine ainsi la nouvelle valeur de la translation :

$$\gamma' = \gamma_0 - \eta_{\delta \gamma} \times (\gamma_0 - (\beta^2)^{[i]}). \quad (2.8)$$

2.1.1.10 Seuil de variation dynamique de la translation ($\bar{\gamma}$)

Si l'on utilise la variation dynamique de la translation, cette-ci survient lorsque la condition $\delta M(i) \leq \bar{\gamma}$ pendant deux étapes consécutives de la MPIT. En jouant sur cette valeur de seuil, on peut donc retarder ou même désactiver complètement la variation dynamique de la translation.²

²Il est possible d'ajuster la translation γ à chaque étape de la MPIT ; cependant, la convergence de cette dernière méthode n'étant pas nécessairement homogène décroissante, le fait de varier γ à *chaque* étape risque de déstabiliser la convergence, faisant en sorte que certains modes propres du guide ne soient pas détectés. C'est pourquoi on varie γ une seule fois, lorsqu'un minimum de convergence, $\bar{\gamma}$, est atteint.

2.1.2 Mesures de performance

Afin d'évaluer l'effet de chaque optimisation, on prend les deux mesures suivantes lors de chaque simulation : l'erreur relative et le temps de calcul. On définit l'erreur relative, ε , comme suit :

$$\varepsilon = \frac{|n_{\text{eff}}^{\text{ANA}} - n_{\text{eff}}^{\text{NUM}}|}{n_{\text{eff}}^{\text{ANA}}}, \quad (2.9)$$

où $n_{\text{eff}}^{\text{ANA}}$ est l'indice effectif du mode fondamental de la fibre calculé analytiquement et $n_{\text{eff}}^{\text{NUM}}$ est son homologue, obtenu par simulation numérique. Le temps de calcul, Δt , est le temps écoulé entre le début de chaque simulation et le moment où la valeur de l'indice effectif devient disponible, le tout exprimé en secondes.

2.1.3 Variables modifiées

Pour des raisons de visibilité dans les graphiques, de facilité d'analyse et de discussion, on utilise les variables modifiées suivantes, soit la «résolution», la «précision» et le «coût», respectivement :

$$\underline{\Delta} = -\log_{10}(\Delta), \quad (2.10a)$$

$$\underline{\varepsilon} = -\log_{10}(\varepsilon), \quad (2.10b)$$

$$\underline{\Delta t} = \log_{10}(\Delta t), \quad (2.10c)$$

En plus de ces variables modifiées, on utilise une relation nommée «coût effectif», définie comme le coût $\underline{\Delta t}$ relié à l'obtention d'une précision voulue $\underline{\varepsilon}$.

Les termes «résolution», «précision», «coût» et «coût effectif» ont été choisis en vertu d'une certaine logique lexicale, afin d'éviter toute confusion lors des différentes discussions : par exemple, lorsque l'on mentionne un degré de précision élevé, la valeur correspondante de $\underline{\varepsilon}$ est bel et bien positive et élevée (correspondant à une faible erreur relative ε), etc.

2.2 Méthode

Toutes les études menées dans ce chapitre portent sur deux types de guides d'onde : une fibre SMF28TM et une fibre identique à cette dernière, hormis un saut d'indice dix fois plus élevé, auxquelles on réfère par la suite par «fibre A» et «fibre B», respectivement. Les deux fibres sont considérées à deux couches, de sorte que seuls les modes de cœur apparaissent comme des modes guidés. Le tableau 2.1 présente les paramètres de ces fibres ainsi que l'indice effectif de leur mode fondamental calculé analytiquement, $n_{\text{eff}}^{\text{ANA}}$. Dans tous les tableaux, le symbole «–» apparaît lorsqu'un certain paramètre est inutilisé ou sans signification.

Tableau 2.1 : Paramètres des fibres.

Paramètre (avec unités, lorsque requis)	Fibre A	Fibre B
λ_0 (μm)	0,6328	<i>Idem</i>
r_{co} (μm)	4,5	<i>Idem</i>
n_g	1,4574199459	<i>Idem</i>
Δn	0,0045	0,045
n_{co}	1,4619199459	1,5024199459
$n_{\text{eff}}^{\text{ANA}}$	1,4612320758	1,5015611886

Le tableau 2.2 présente les valeurs par défaut qui sont utilisées lors de la première étude d'optimisation, lesquelles sont mises à jour au fur et à mesure des différentes études.

Toutes les études consistent à effectuer la même opération de base, qui consiste à trouver l'indice effectif du mode fondamental du guide (par la suite, on désignera par *simulation* cette opération de base), et de mesurer, pour chacune, l'erreur relative et le temps de calcul. Pour chaque incrément du paramètre à optimiser, on effectue six simulations (désigné *ensemble de simulations*), soit une pour chacune des valeurs de N suivantes : $N \in \{11 ; 21 ; 41 ; 81 ; 161 ; 321\}$. Grâce à ces mesures, on peut établir trois types de relations : $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{\Delta t}$ en fonction de Δ (précision et coût, respectivement),

Tableau 2.2 : Paramètres de simulation par défaut.

Paramètre	Unités	Fibre A	Fibre B
δM	–	$1 \cdot 10^{-9}$	<i>Idem</i>
ΔL	μm	<i>Variable</i>	<i>Idem</i>
σ	–	1	1
Symétrie	–	–	–
$\overline{\delta B}$	–	$1 \cdot 10^{-12}$	<i>Idem</i>
$\overline{\gamma}$	–	–	–
$\eta_{\delta B}$	–	–	–
$\eta_{\delta \gamma}$	–	–	–

ainsi que Δt en fonction de ε (coût effectif). Chaque relation est représentée par un graphique contenant plusieurs courbes, à raison d'une courbe par valeur du paramètre à optimiser.

2.3 Études d'optimisation

Cette section contient les études d'optimisation des paramètres suivants, dans l'ordre : étendue du plan de discréétisation, lissage de l'indice de réfraction, utilisation de la symétrie, études dynamique et statique du critère d'arrêt de BICGSTAB, seuil de variation dynamique de la translation, rapport de variation dynamique de la translation.

2.3.1 Étendue du plan de discréétisation

Cette étude vise à déterminer la valeur optimale de l'étendue du plan de discréétisation, ΔL .

Pour cette étude, les valeurs suivantes de ΔL sont utilisées :

$$\Delta L \in \{11,25 ; 22,5 ; 45 ; 90\} \mu\text{m}.$$
³

2.3.1.1 Résultats

La figure 2.1 montre la précision ε en fonction de la résolution Δ pour les fibres A et B. La figure 2.2 montre le coût $\underline{\Delta t}$ en fonction de la résolution Δ pour les fibres A et B. La figure 2.3 montre le coût effectif, soit $\underline{\Delta t}$ en fonction de la précision atteinte ε , pour les fibres A et B.

2.3.1.2 Discussion

En ce qui concerne la fibre A, on remarque d'entrée de jeu que la variation de ΔL n'affecte pas la précision pour de grandes valeurs de ce paramètre, mais que cette précision subit une dégradation importante lorsqu'on utilise $\Delta L = 11,25 \mu\text{m}$. On explique ainsi cette dégradation : pour un guide faible dont le rayon est de $4,5 \mu\text{m}$, le prolongement dans la gaine du mode fondamental est tel que la valeur des différentes composantes du champ n'est pas quasi-nulle aux limites du plan de discréétisation. Or, l'algorithme utilise l'hypothèse de champ nul aux frontières et impose cette condition lors des calculs. Ainsi, pour un mode fortement étendu, les frontières du plan de discréétisation agissent comme un guide virtuel, créant une erreur numérique considérable. Pour cette raison, on peut s'attendre à ce qu'une valeur trop faible de ΔL , et $\Delta L = 11,25 \mu\text{m}$ en particulier, soit à rejeter. Pour départager les trois candidats restants, on observe leur coût respectif. On constate que pour de

³Malgré que l'étendue du plan de discréétisation ΔL varie au cours de cette étude, l'ensemble des valeurs de N décrit à la section 2.2 demeure inchangé, ce qui amène un ensemble de valeurs de Δ différent pour chaque valeur de ΔL .

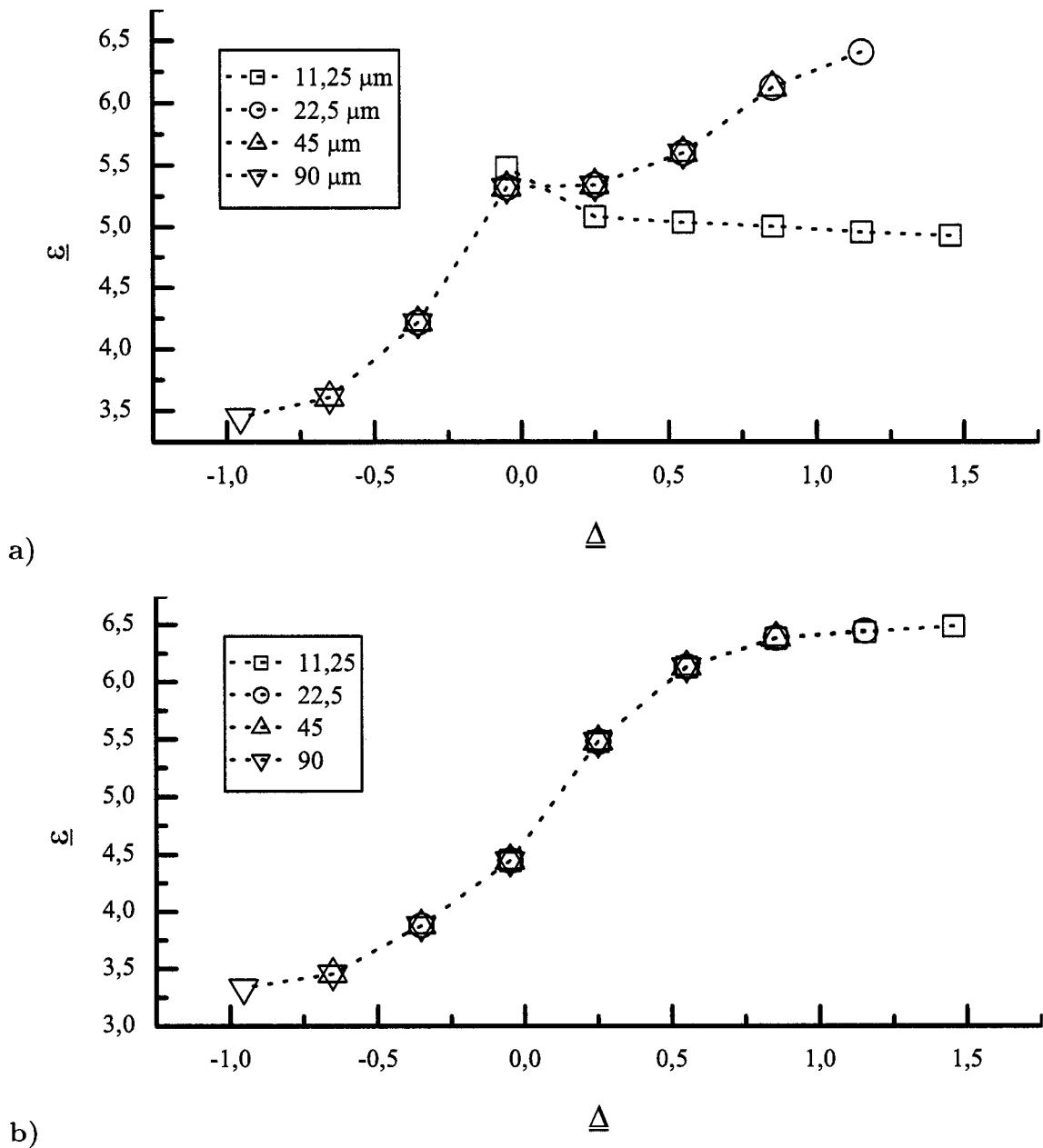


Figure 2.1 : Précision : $\underline{\varepsilon}$ en fonction de Δ pour différentes valeurs de ΔL indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

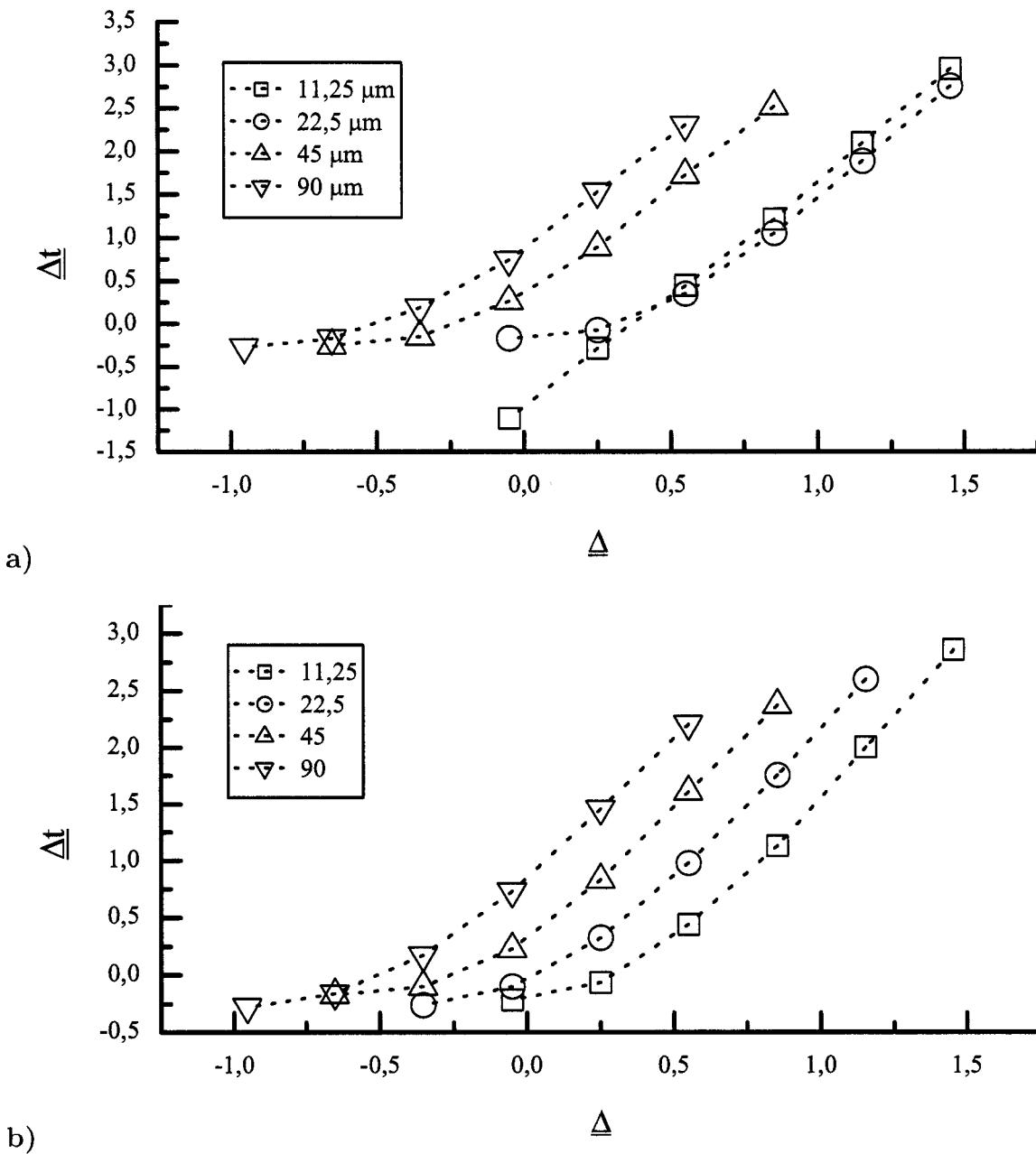


Figure 2.2 : Coût : Δ_t en fonction de Δ pour différentes valeurs de ΔL indiquées en médaillo : a) fibre A ; b) fibre B.

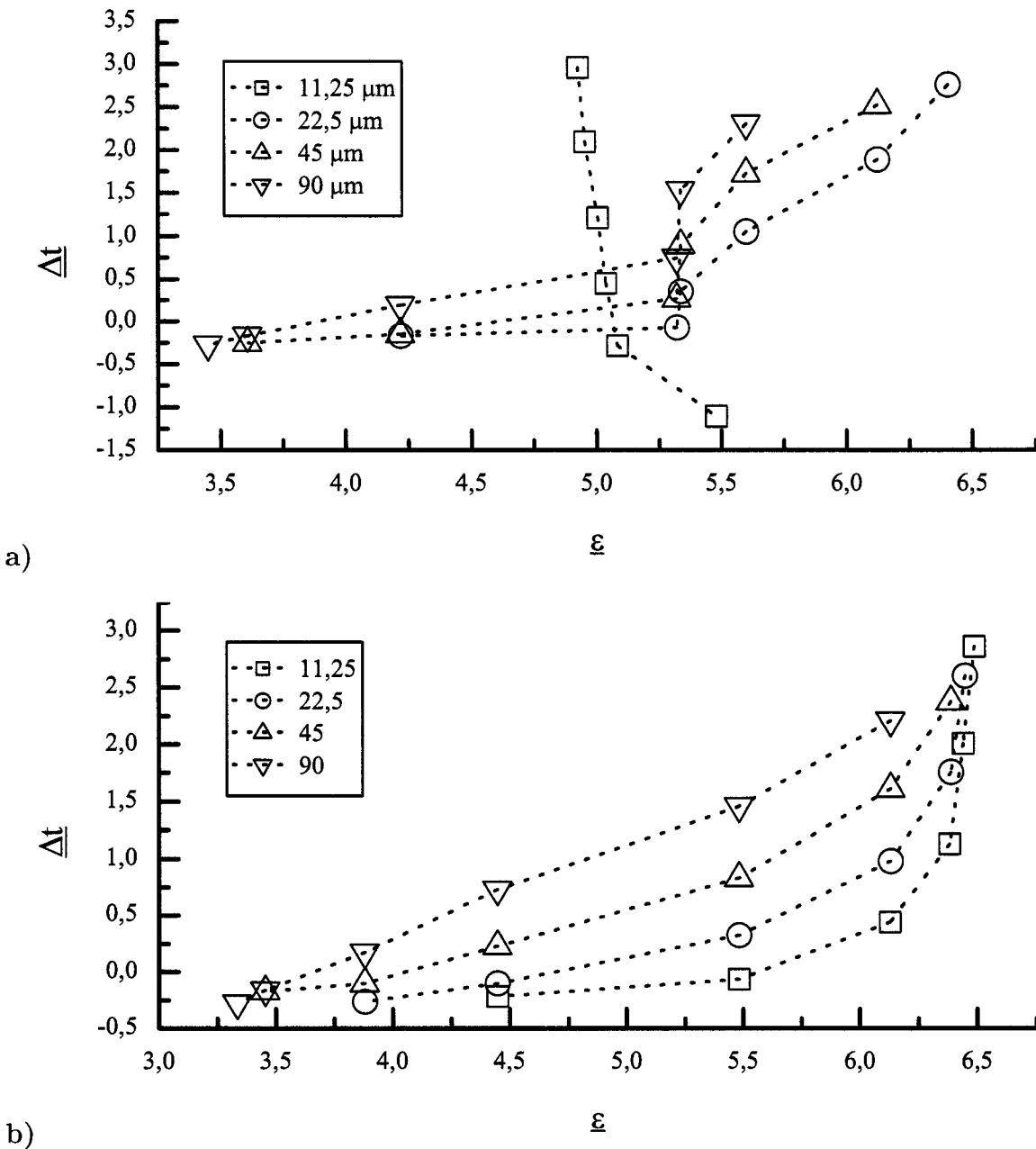


Figure 2.3 : Coût effectif : $\Delta\bar{t}$ en fonction de $\bar{\varepsilon}$ pour différentes valeurs de ΔL indiquées en médaillon : **a)** fibre A ; **b)** fibre B.

grandes résolutions, le coût relié à la valeur $\Delta L = 22,5 \mu\text{m}$ est le plus faible. La raison pour laquelle cette dernière valeur est moins coûteuse que $\Delta L = 11,25 \mu\text{m}$ est reliée à la stabilité du calcul : on a vu plus haut que pour $\Delta L = 11,25 \mu\text{m}$, la précision diminue grandement : on peut donc s'attendre à ce que l'algorithme converge difficilement, d'où un temps de calcul (coût) plus élevé. D'autre part, il est normal que le temps de calcul soit proportionnel à ΔL , car pour une valeur donnée du pas de discrétisation Δ , le nombre de points de discrétisation N est proportionnel à ΔL , et c'est N qui détermine le temps de calcul. La valeur $\Delta L = 22,5 \mu\text{m}$ semble donc optimale. Pour s'en assurer d'un seul coup d'œil, on peut se fier au graphique du coût effectif (Fig. 2.3), qui représente en quelque sorte l'autorité finale en ce qui a trait à l'optimisation des différents paramètres. On y voit que pour des valeurs croissantes de la précision voulue ξ , le coût effectif relié à $\Delta L = 22,5 \mu\text{m}$ est bel et bien le moindre. La valeur optimale de ΔL dans le cas de la fibre A est donc $\Delta L = 22,5 \mu\text{m}$.

Dans le cas de la fibre B, un coup d'œil au graphique de la précision ne permet pas de différencier les différents candidats, celle-ci n'étant visiblement pas influencée par le choix de ΔL . On pouvait s'y attendre : dans le cas de ce guide fort, le mode fondamental est bien confiné au cœur de la fibre, son étendue dans la gaine est donc très faible, et la condition de champ nul aux limites du plan de discrétisation est respectée d'emblée. On n'observe donc pas le phénomène de dégradation décrit ci-dessus. Pour départager les candidats, on doit alors se référer au graphique du coût, qui indique clairement que $\Delta L = 11,25 \mu\text{m}$ offre un avantage à cet égard. On confirme le tout par le graphique du coût effectif, qui indique bel et bien que $\Delta L = 11,25 \mu\text{m}$ est le candidat présentant le plus faible coût effectif : c'est donc le choix optimal pour cette fibre à guidage fort.

2.3.2 Lissage de l'indice de réfraction

Dans cette étude, on tente de déterminer σ , soit le nombre de points à utiliser lors du lissage de l'indice de réfraction. En vertu de l'optimisation précédente, le tableau 2.3 donne la valeur des paramètres qui sont utilisés dans la présente étude.

Tableau 2.3 : Paramètres de simulation après optimisation de ΔL .

Paramètre	Unités	Fibre A	Fibre B
δM	–	$1 \cdot 10^{-9}$	<i>Idem</i>
ΔL	μm	22,5	11,25
σ	–	Variable	<i>Idem</i>
Symétrie	–	–	–
$\overline{\delta B}$	–	$1 \cdot 10^{-12}$	<i>Idem</i>
$\overline{\gamma}$	–	–	–
$\eta_{\delta B}$	–	–	–
$\eta_{\delta \gamma}$	–	–	–

Le paramètre σ prend les valeurs suivantes : $\sigma \in \{1 ; 15 ; 31 ; 61\}$.

2.3.2.1 Résultats

La figure 2.4 montre la précision $\underline{\varepsilon}$ en fonction de la résolution $\underline{\Delta}$ pour les fibres A et B. La figure 2.5 montre le coût $\underline{\Delta t}$ en fonction de la résolution $\underline{\Delta}$ pour les fibres A et B. La figure 2.6 montre le coût effectif, soit $\underline{\Delta t}$ en fonction de la précision atteinte $\underline{\varepsilon}$, pour les fibres A et B.

2.3.2.2 Discussion

Dans cette étude, le comportement ne varie que peu en fonction du guide considéré : on peut donc tirer les mêmes conclusions dans les deux cas. D'abord, on remarque que du point de vue de la précision, le fait même d'utiliser un lissage de l'indice offre un gain notable, soit environ un ordre de grandeur lorsqu'on passe de 1 à 15 points d'intégration. Par la suite, le fait d'utiliser une intégration numérique

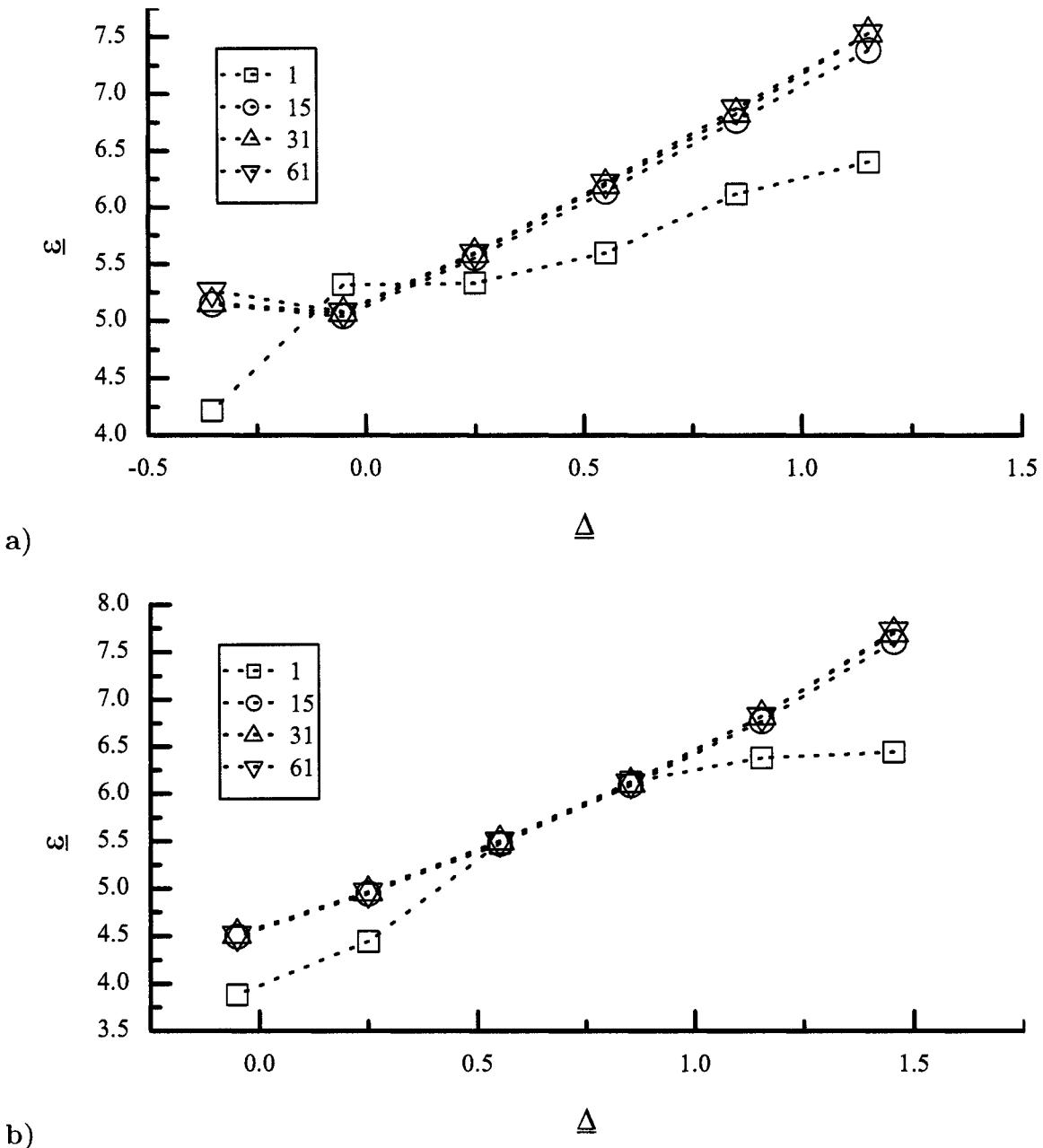


Figure 2.4 : Précision : $\bar{\varepsilon}$ en fonction de Δ pour différentes valeurs de σ indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

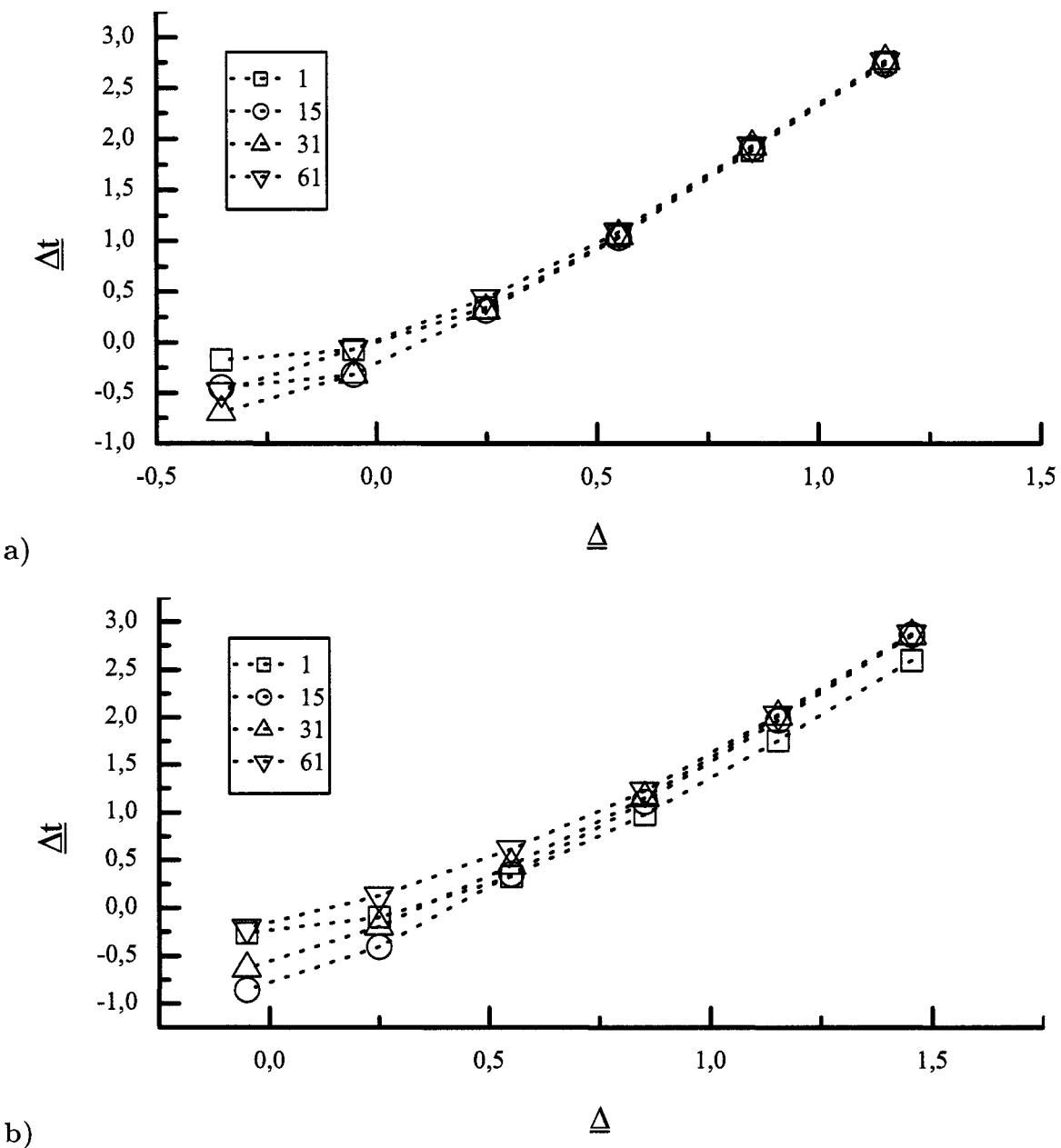


Figure 2.5 : Coût : Δ_t en fonction de Δ pour différentes valeurs de σ indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

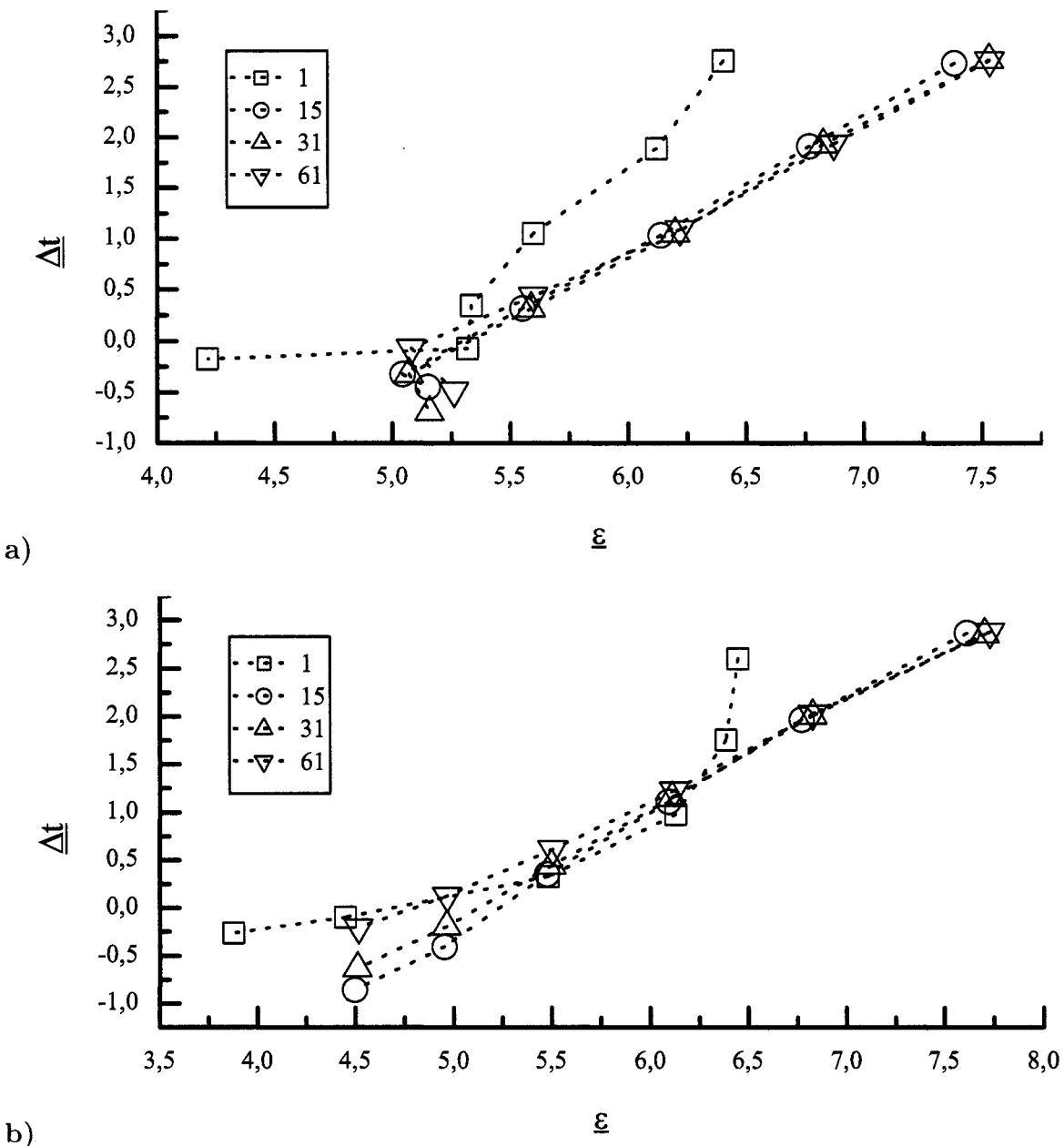


Figure 2.6 : Coût effectif : $\Delta\bar{t}$ en fonction de ε pour différentes valeurs de σ indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

à 31 points offre un très léger gain de précision par rapport au cas $\sigma = 15$. Quant au fait d'utiliser 61 points plutôt que 31, le gain de précision y est pratiquement imperceptible. Du point de vue du coût, on constate peu de différence entre les différents candidats. Ce qui suit démontre pourquoi il en est ainsi.

D'une part, le lissage de l'indice de réfraction est une opération unique et préliminaire aux calculs proprement dits, qui n'est effectuée qu'aux endroits où elle s'avère vraiment nécessaire, soit sur l'interface cœur-gaine. Le lissage nécessite environ σ^2 opérations numériques par endroit du plan où il est requis. Or, on peut estimer le nombre de points de discrétisation situés sur l'interface cœur-gaine, $N_{co/g}$, par le rapport entre la circonference du cœur et le pas de discrétisation :

$$N_{co/g} \approx \frac{2\pi r_{co}}{\Delta} = \frac{2\pi r_{co}}{\left(\frac{\Delta L}{N-1}\right)} = \frac{2\pi(N-1)r_{co}}{\Delta L} \quad (2.11)$$

De plus, le rayon du cœur est proportionnel à l'étendue du plan de discrétisation :

$$r_{co} = \kappa \Delta L, \quad 0 < \kappa < 1. \quad (2.12)$$

Ainsi, on a :

$$N_{co/g} \approx \frac{2\pi(N-1)\kappa \Delta L}{\Delta L} = 2\pi(N-1)\kappa, \quad (2.13)$$

et le lissage complet du guide nécessite $(\sigma)^2 \times N_{co/g}$, soit $(\sigma)^2 \times 2\pi\kappa(N-1)$ opérations, quantité qui ne présente visiblement qu'une dépendance linéaire en N .

D'autre part, chaque étape de la MPIT nécessite un nombre d'opérations de l'ordre de N^2 (provenant du fonctionnement de BICGSTAB, dont on traite plus loin). On comprend alors que le coût de cette étape du calcul devienne vite dominant face à celui du lissage d'indice, d'où une variation de coût presque nulle en fonction du nombre de points utilisés dans ce lissage pour les grandes résolutions, alors que ces différences de coût étaient perceptibles pour de faibles résolutions.

Somme toute, les coûts effectifs respectifs de calculs utilisant un lissage à 31 ou 61

points sont tous deux minimaux et indifférenciés, quelle que soit la fibre considérée. On choisit donc $\sigma = 61$ comme valeur optimale dans les deux cas.⁴

2.3.3 Utilisation de la symétrie

Suite à l'optimisation précédente, le tableau 2.4 donne la valeur des paramètres qui sont utilisés dans la présente étude.

Tableau 2.4 : Paramètres de simulation après optimisation de σ .

Paramètre	Unités	Fibre A	Fibre B
$\overline{\delta M}$	–	$1 \cdot 10^{-9}$	<i>Idem</i>
ΔL	μm	22,5	11,25
σ	–	61	<i>Idem</i>
Symétrie	–	<i>Variable</i>	<i>Idem</i>
$\overline{\delta B}$	–	$1 \cdot 10^{-12}$	<i>Idem</i>
$\overline{\gamma}$	–	–	–
$\eta_{\delta B}$	–	–	–
$\eta_{\delta \gamma}$	–	–	–

Pour cette étude, un ensemble de simulations a été effectué sans tenir compte de la symétrie des différentes fibres et un autre l'a été en utilisant deux axes de symétrie à la fois, soit x et y .

2.3.3.1 Résultats

La figure 2.7 montre la précision $\underline{\varepsilon}$ en fonction de la résolution $\underline{\Delta}$ pour les fibres A et B. La figure 2.8 montre le coût $\underline{\Delta t}$ en fonction de la résolution $\underline{\Delta}$ pour les fibres A et B. La figure 2.9 montre le coût effectif, soit $\underline{\Delta t}$ en fonction de la précision atteinte $\underline{\varepsilon}$, pour les fibres A et B.

⁴Ce choix n'est cependant pas tout à fait arbitraire : en effet, on peut penser, dans le cas de guides très forts comme les fibres à cristaux photoniques par exemple ($\Delta n \approx 0,45$), que la variation abrupte de l'indice de réfraction à l'interface cœur-gaine puisse justifier la meilleure résolution amenée par un lissage à 61 points plutôt que 31.

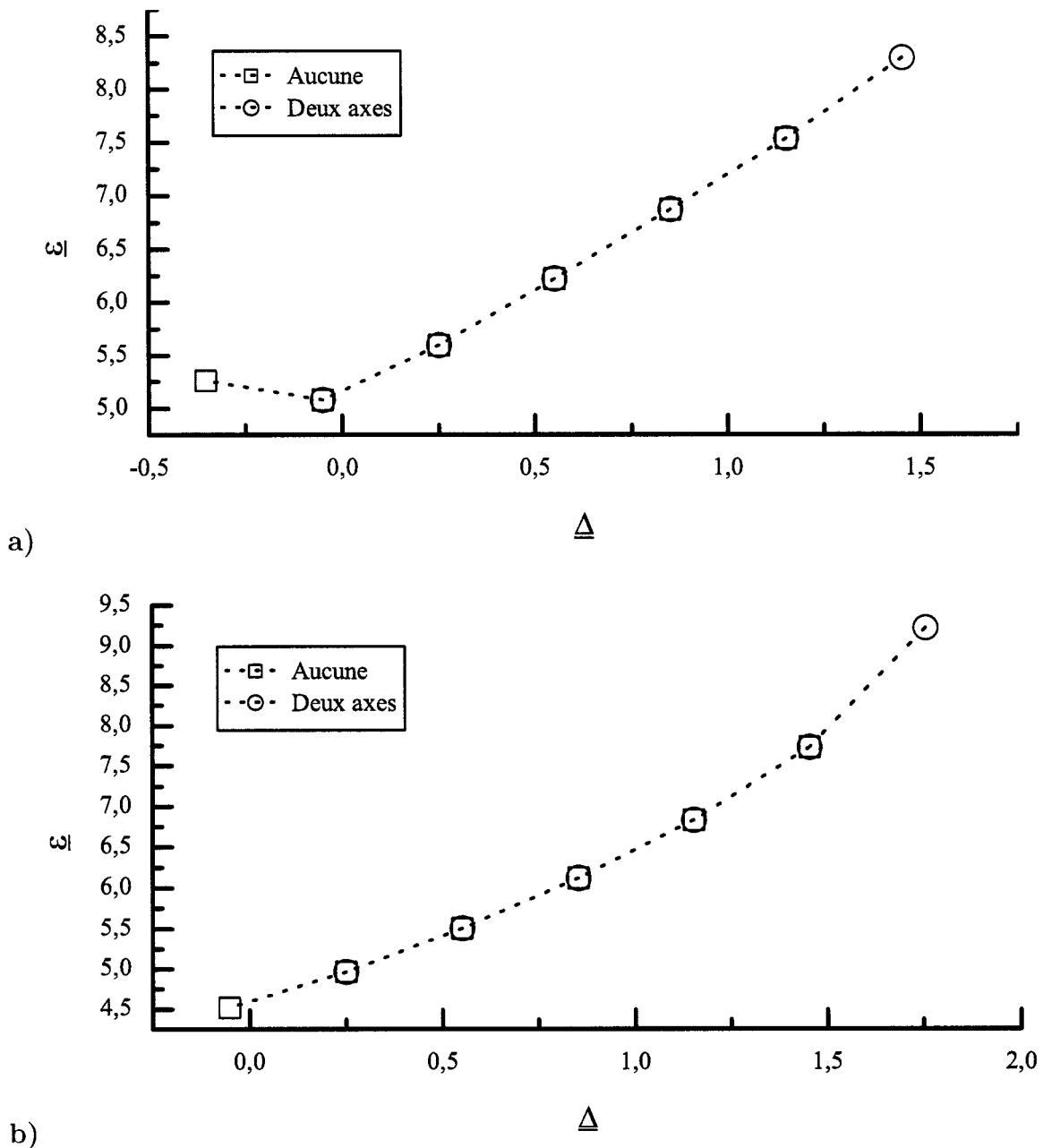


Figure 2.7 : Précision : ε en fonction de Δ pour différentes symétries indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

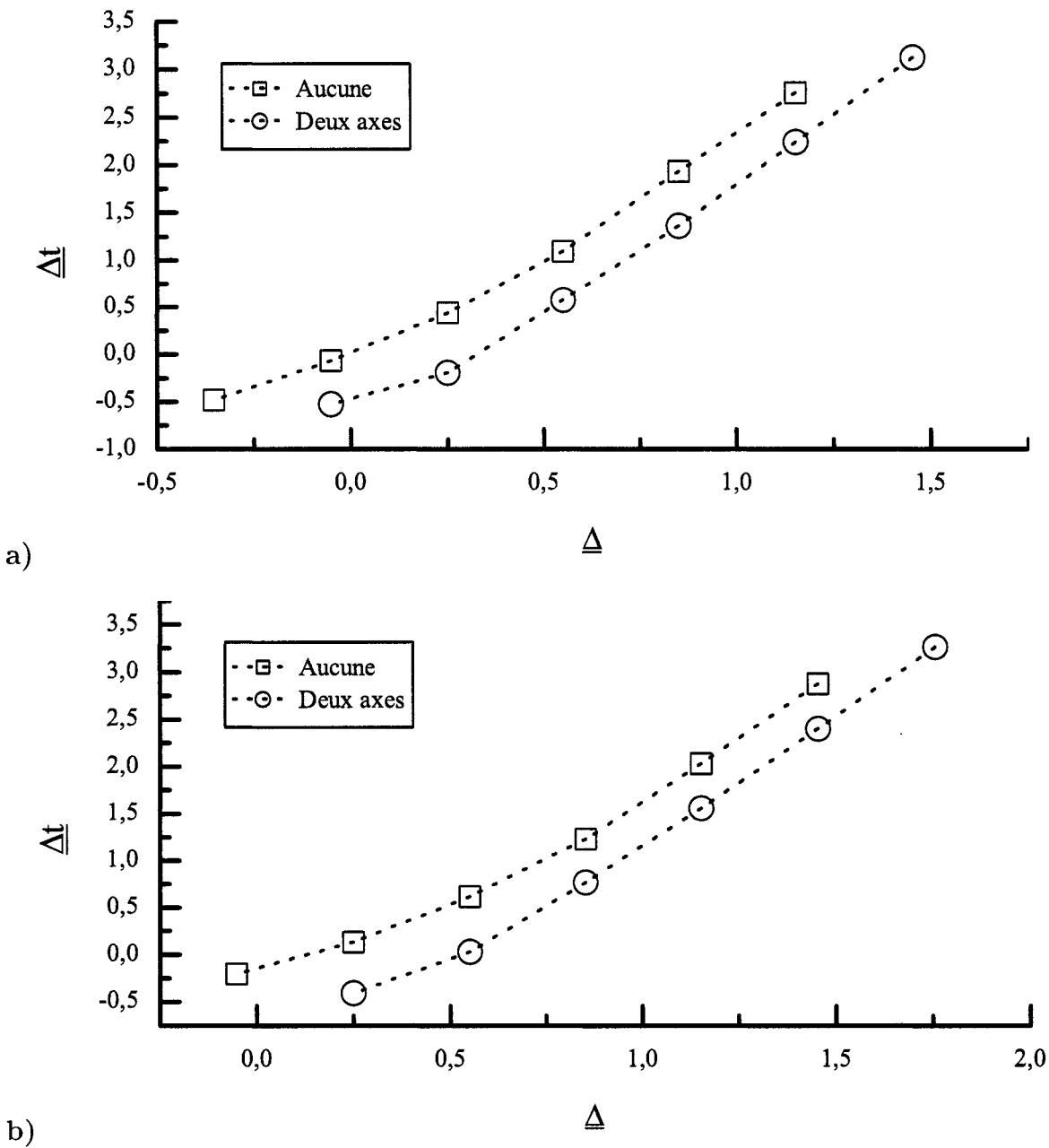


Figure 2.8 : Coût : Δt en fonction de Δ pour différentes symétries indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

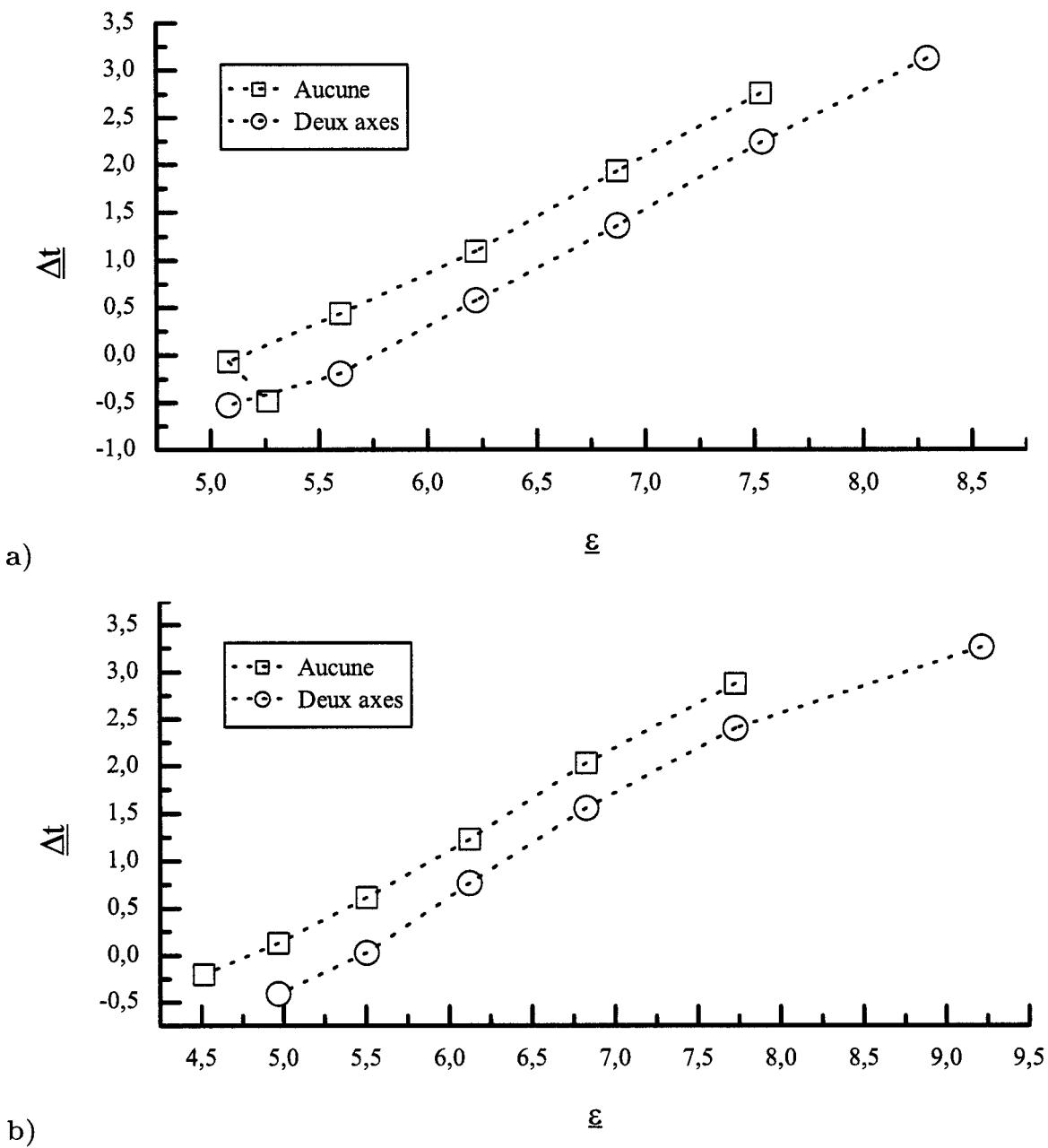


Figure 2.9 : Coût effectif : $\Delta\bar{t}$ en fonction de ε pour différentes symétries indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

2.3.3.2 Discussion

Encore une fois, les comportements sont ici similaires pour les deux guides. D'abord, comme on peut s'y attendre, la précision n'est pas du tout affectée, pour une même résolution, par l'utilisation de la symétrie du guide. C'est d'ailleurs là une preuve que le code de l'algorithme qui permet l'utilisation de la symétrie est exempt d'erreurs. On se réfère donc au graphique du coût pour évaluer l'effet de cette symétrie. Cette fois, la différence est nette : en moyennant sur toutes les valeurs de Δ pour les deux guides, on note une réduction moyenne du coût d'environ 70% lorsque la symétrie du guide est mise à profit. Le fait que cette valeur soit proche de 75% s'explique ainsi : pour une même résolution, le fait d'utiliser la symétrie à deux axes diminue d'un facteur quatre le nombre de points de calcul, d'où une diminution théorique du coût de 75%. Le graphique du coût effectif reflète bien entendu ces deux constats, et on conclut que l'utilisation de la symétrie à deux axes est souhaitable pour augmenter la performance de l'algorithme.

2.3.4 Étude dynamique du critère d'arrêt de BICGSTAB

Dans cette étude, on cherche à faire varier dynamiquement (à chaque étape de la MPIT) la valeur du critère d'arrêt sur la méthode BICGSTAB, soit $\overline{\delta B}$, à l'aide du paramètre $\eta_{\delta B}$. Suite à l'optimisation précédente, le tableau 2.5 donne la valeur des paramètres qui sont utilisés dans la présente étude.

Tableau 2.5 : Paramètres de simulation pour l'étude dynamique de $\overline{\delta B}$.

Paramètre	Unités	Fibre A	Fibre B
$\overline{\delta M}$	–	$1 \cdot 10^{-9}$	<i>Idem</i>
ΔL	μm	22,5	11,25
σ	–	61	<i>Idem</i>
Symétrie	–	Deux axes	<i>Idem</i>
$\overline{\delta B}$	–	–	–
$\overline{\gamma}$	–	–	–
$\eta_{\delta B}$	–	<i>Variable</i>	<i>Idem</i>
$\eta_{\delta \gamma}$	–	–	–

Le paramètre $\eta_{\delta B}$ prend les valeurs suivantes :

$$\eta_{\delta B} \in \{1 \cdot 10^{-6}; 1 \cdot 10^{-4}; 1 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^0; 1 \cdot 10^2; 1 \cdot 10^4; 1 \cdot 10^6\}.$$

2.3.4.1 Résultats

La figure 2.10 montre la précision $\underline{\varepsilon}$ en fonction de la résolution $\underline{\Delta}$ pour les fibres A et B. La figure 2.11 montre le coût $\underline{\Delta t}$ en fonction de la résolution $\underline{\Delta}$ pour les fibres A et B. La figure 2.12 montre le coût effectif, soit $\underline{\Delta t}$ en fonction de la précision atteinte $\underline{\varepsilon}$, pour les fibres A et B.

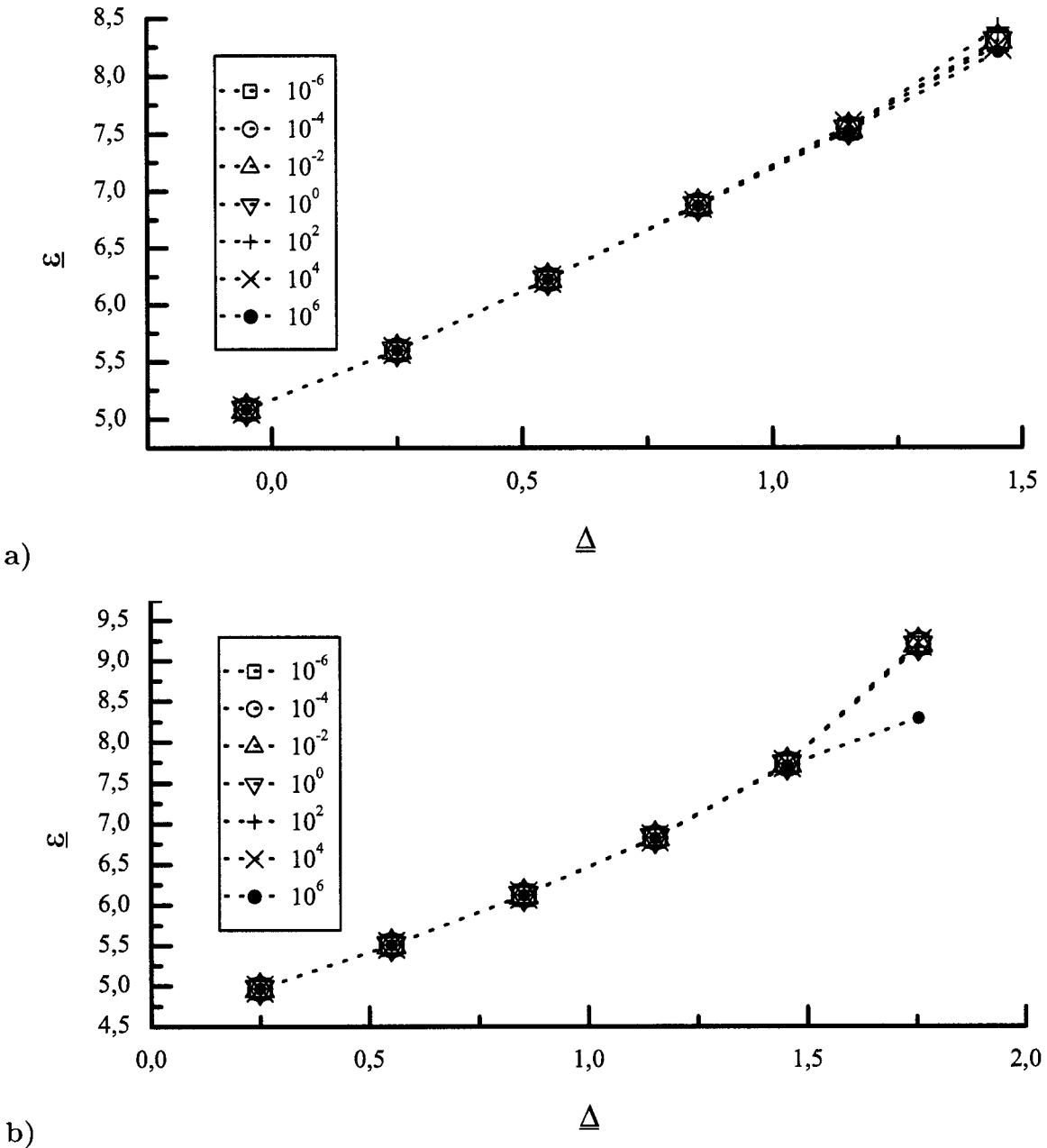


Figure 2.10 : Précision : $\underline{\varepsilon}$ en fonction de $\underline{\Delta}$ pour différentes valeurs de $\eta_{\delta B}$ indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

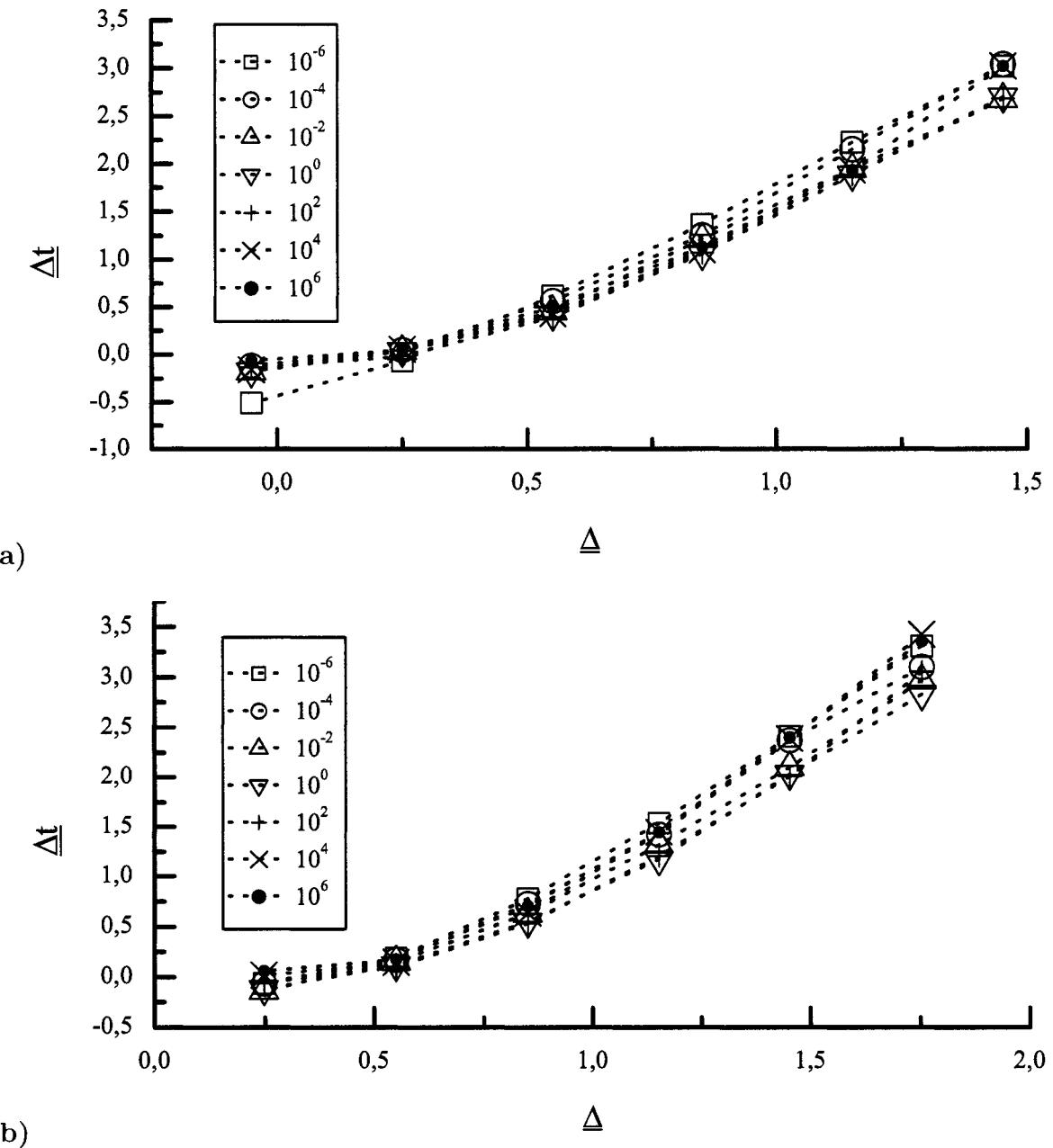


Figure 2.11 : Coût : $\underline{\Delta}t$ en fonction de $\underline{\Delta}$ pour différentes valeurs de $\eta_{\delta B}$ indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

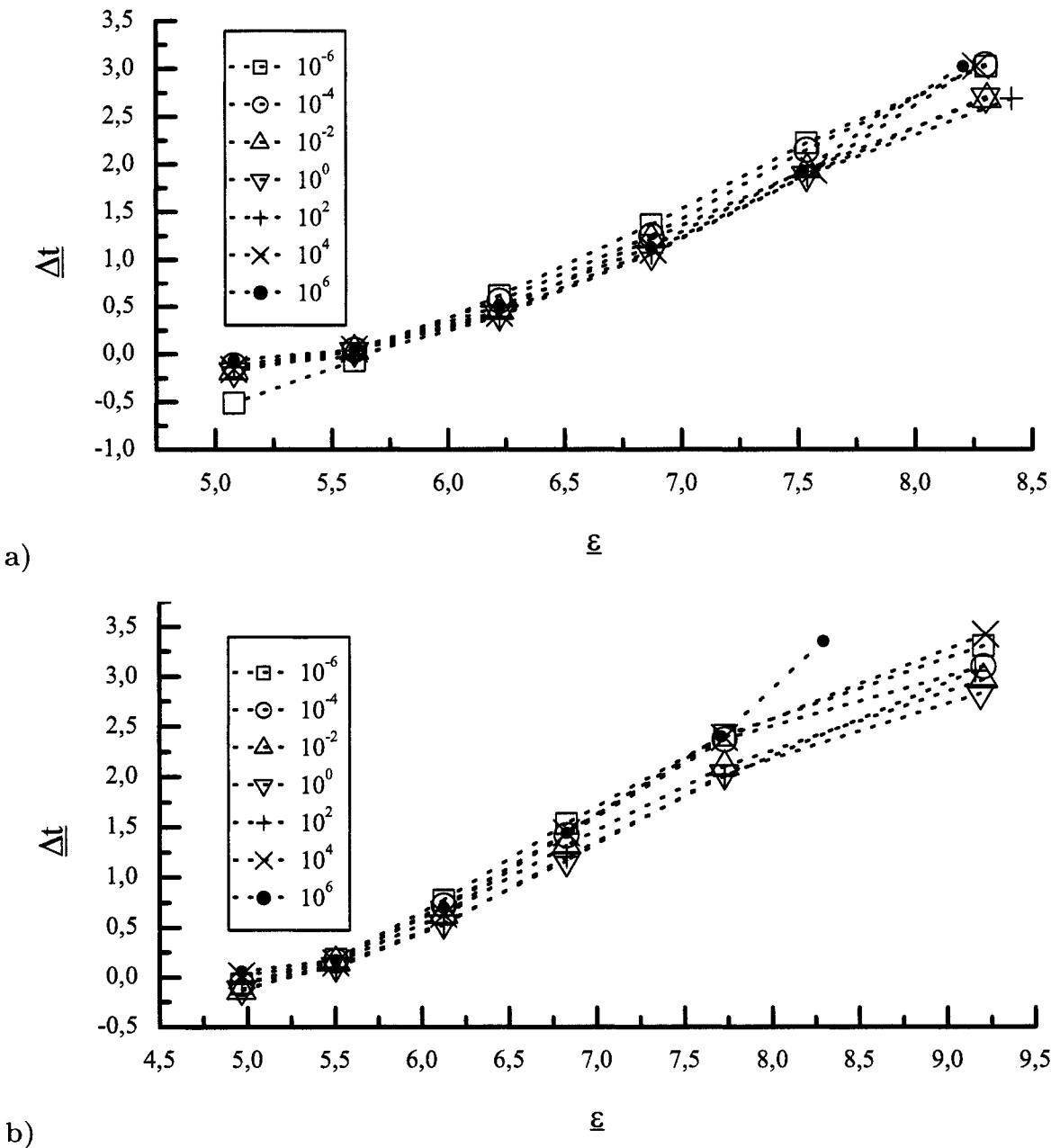


Figure 2.12 : Coût effectif : Δt en fonction de ε pour différentes valeurs de $\eta_{\delta B}$ indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

2.3.4.2 Discussion

D'abord, la précision des calculs n'est pas influencée par le rapport $\eta_{\delta B}$, hormis pour de grandes résolutions : en effet, ce n'est qu'à $\Delta = 1,454$ et $\Delta = 1,755$, pour les fibres A et B respectivement, que l'on observe une différenciation, quoique faible, à cet égard. Les valeurs $\eta_{\delta B} = 1 \cdot 10^2$ et $\eta_{\delta B} = 1 \cdot 10^4$ offrent la meilleure précision pour les fibres A et B, respectivement. Ensuite, au niveau du coût, on note de faibles différences pour toutes les résolutions. Les valeurs de $\eta_{\delta B}$ offrant le meilleur coût sont $1 \cdot 10^{-2}$, $1 \cdot 10^0$ et $1 \cdot 10^2$ (*ex æquo*) dans le cas de la fibre A, et $1 \cdot 10^0$ dans le cas de la fibre B. Un coup d'œil au graphique du coût effectif permet de départager les candidats : dans le cas de la fibre A, le coût effectif relié à la valeur $1 \cdot 10^2$ est légèrement inférieur à celui des deux autres candidats, en plus d'atteindre une valeur de précision plus grande que ces derniers ; dans le cas de la fibre B, le coût effectif relié à la valeur $1 \cdot 10^0$ est sans contredit le plus faible. On retient donc les valeurs $1 \cdot 10^2$ et $1 \cdot 10^0$ comme optimums de $\eta_{\delta B}$ pour les fibres A et B, respectivement.

Cependant, on peut également fixer la valeur de la tolérance $\overline{\delta B}$ et vérifier si une telle utilisation statique permet de meilleurs résultats. C'est le but de la prochaine étude.

2.3.5 Étude statique du critère d'arrêt de BICGSTAB

Contrairement à l'étude précédente, où $\overline{\delta B}$ variait de façon dynamique, cette valeur est ici statique. Cette étude vise deux objectifs : déterminer quelle valeur statique de $\overline{\delta B}$ offre les meilleures performances, et déterminer si cette valeur optimale permet de surclasser la méthode de variation dynamique de $\overline{\delta B}$. À cette fin, le tableau 2.6 donne la valeur des paramètres qui sont utilisés dans la présente étude.

Le paramètre $\overline{\delta B}$ prend les valeurs suivantes :

$$\overline{\delta B} \in \{1 \cdot 10^{-12}; 1 \cdot 10^{-10}; 1 \cdot 10^{-8}; 1 \cdot 10^{-6}; 1 \cdot 10^{-4}; 1 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^0\}.$$

Tableau 2.6 : Paramètres de simulation pour l'étude statique de $\overline{\delta B}$.

Paramètre	Unités	Fibre A	Fibre B
$\overline{\delta M}$	–	$1 \cdot 10^{-9}$	<i>Idem</i>
ΔL	μm	22,5	11,25
σ	–	61	<i>Idem</i>
Symétrie	–	Deux axes	<i>Idem</i>
$\overline{\delta B}$	–	Variable	<i>Idem</i>
$\overline{\gamma}$	–	–	–
$\eta_{\delta B}$	–	–	–
$\eta_{\delta \gamma}$	–	–	–

2.3.5.1 Résultats

La figure 2.13 montre la précision $\underline{\varepsilon}$ en fonction de la résolution Δ pour les fibres A et B. La figure 2.14 montre le coût $\underline{\Delta t}$ en fonction de la résolution Δ pour les fibres A et B. La figure 2.15 montre le coût effectif, soit $\underline{\Delta t}$ en fonction de la précision atteinte $\underline{\varepsilon}$, pour les fibres A et B.

2.3.5.2 Discussion

Du point de vue de la précision, on note ici que pour de grandes valeurs de Δ , c'est la valeur $\overline{\delta B} = 1 \cdot 10^{-6}$ qui donne les meilleurs résultats pour la fibre A (par une très mince marge), et les valeurs $\overline{\delta B} \in \{1 \cdot 10^{-8}; 1 \cdot 10^{-10}; 1 \cdot 10^{-12}\}$, toutes *ex aequo*, pour la fibre B. De plus, dans le cas de la fibre A, on constate que les valeurs $\overline{\delta B} = 1 \cdot 10^{-4}$ et $\overline{\delta B} = 1 \cdot 10^{-6}$ sont aussi peu coûteuses l'une que l'autre et que $\overline{\delta B} = 1 \cdot 10^{-6}$ s'avère le choix le moins coûteux pour la fibre B. Le coût effectif révèle finalement que pour la fibre A, c'est la valeur $\overline{\delta B} = 1 \cdot 10^{-6}$ qui est optimale. Pour la fibre B, on doit faire un choix entre privilégier un candidat dont le coût effectif est moindre sur la majorité de l'intervalle de $\underline{\varepsilon}$, mais qui ne permet pas d'atteindre le maximum de précision, ou un candidat qui, malgré un coût effectif plutôt ordinaire sur tout l'intervalle, fait partie de l'ensemble des candidats qui permettent d'atteindre le maximum de précision, tout

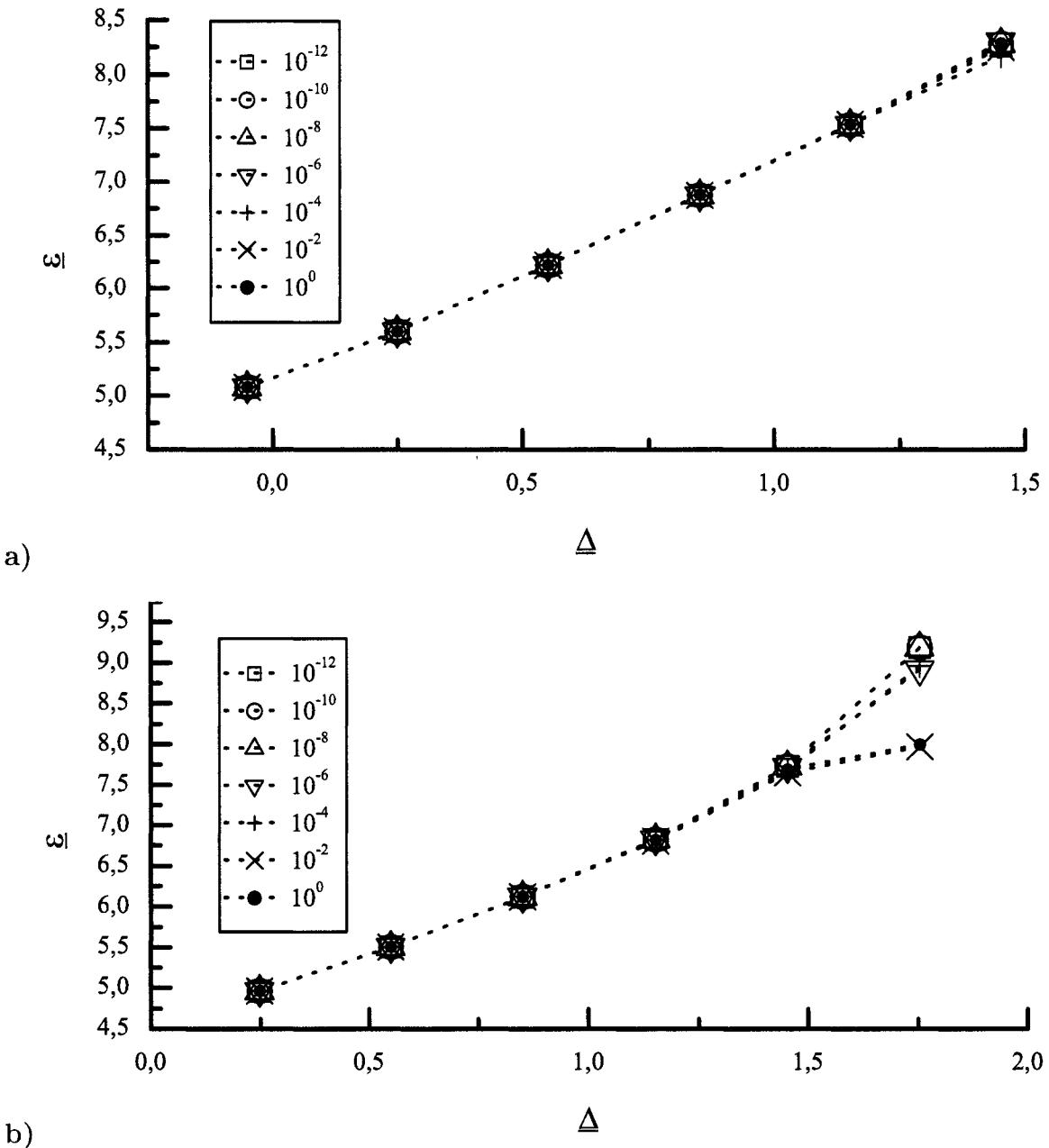


Figure 2.13 : Précision : ε en fonction de Δ pour différentes valeurs de $\overline{\delta B}$ indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

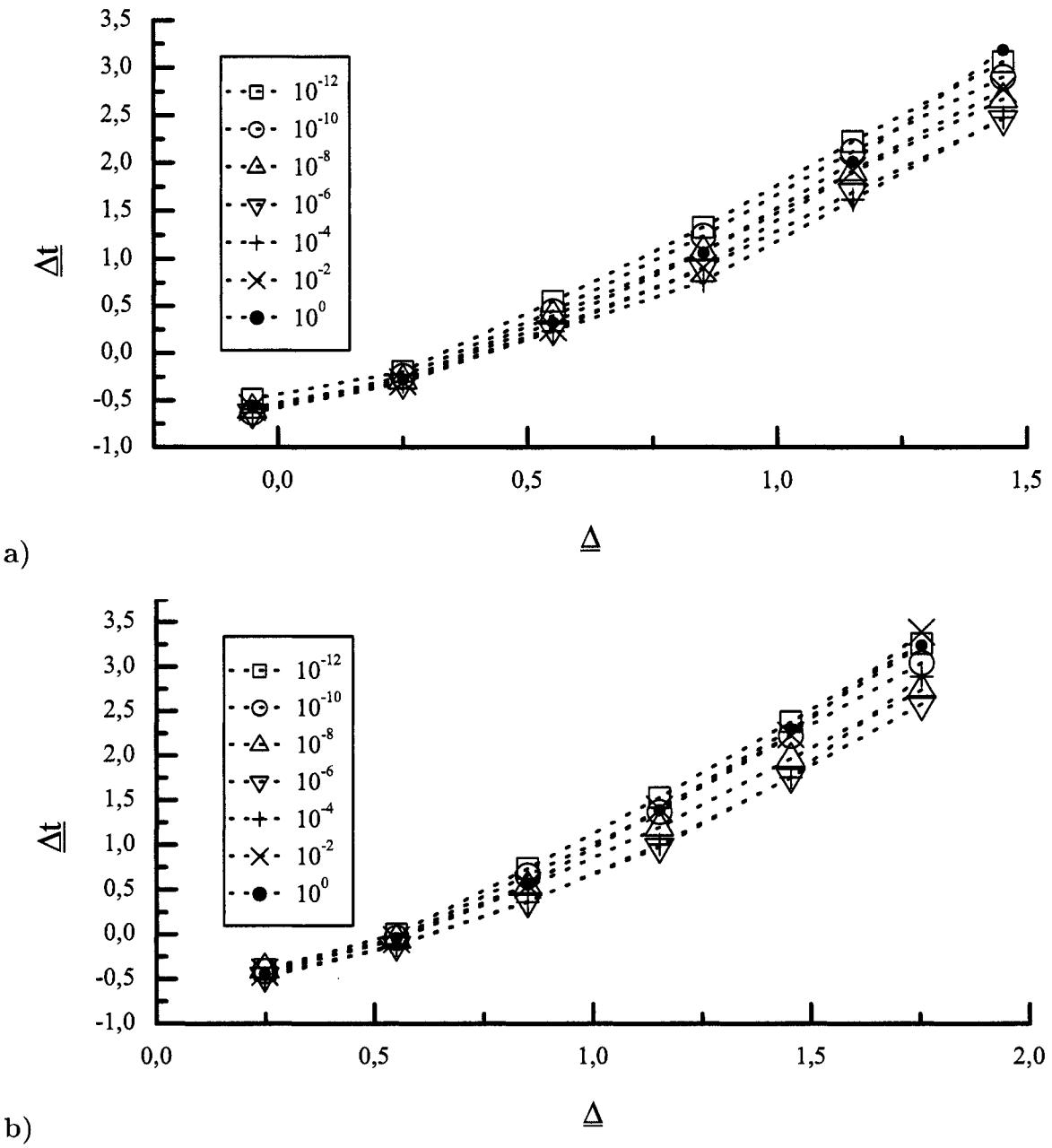


Figure 2.14 : Coût : Δt en fonction de Δ pour différentes valeurs de $\overline{\delta B}$ indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

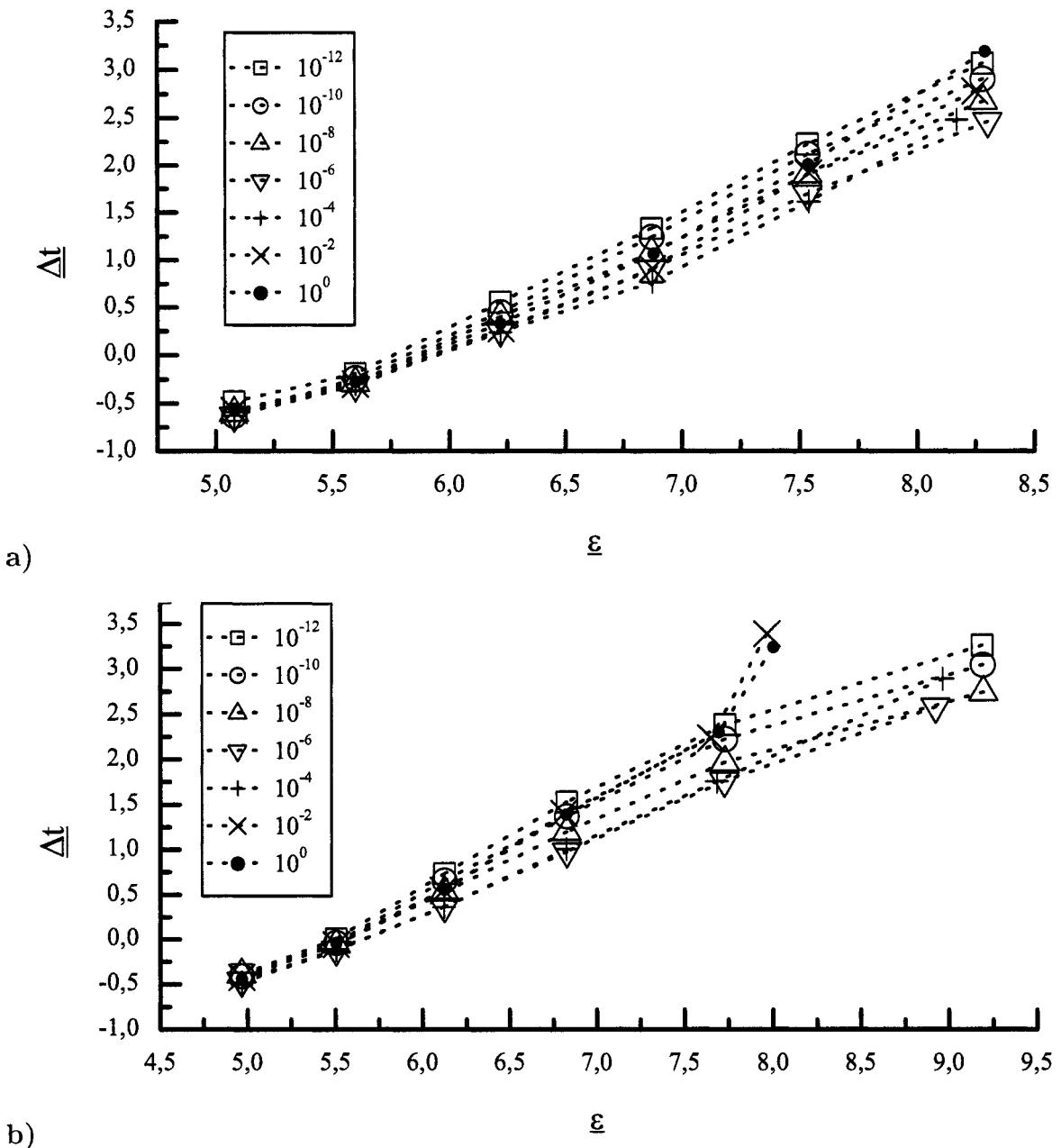


Figure 2.15 : Coût effectif : $\Delta\bar{t}$ en fonction de ε pour différentes valeurs de $\overline{\delta B}$ indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

en étant le moins coûteux de cet ensemble. Par souci de généralité de l'algorithme, on choisit ici le candidat qui permettra à un utilisateur de spécifier les contraintes les plus sévères au niveau de la précision des calculs. On opte donc pour $\overline{\delta B} = 1 \cdot 10^{-8}$ comme valeur optimale dans le cas de la fibre B.⁵

Maintenant, une discussion s'impose quant à l'utilisation de la variation dynamique de $\overline{\delta B}$. En comparant le coût effectif relié aux valeurs optimales de $\eta_{\delta B}$ (méthode dynamique) et de $\overline{\delta B}$ (méthode statique) pour chaque fibre, on constate, grâce à la figure 2.16, que le coût effectif relié à une utilisation statique de $\overline{\delta B}$ est légèrement plus faible que celui relié à une utilisation dynamique de ce paramètre, pour la grande majorité des valeurs de $\underline{\varepsilon}$. On choisit donc la méthode statique comme étant optimale en ce qui a trait au paramètre $\overline{\delta B}$.

⁵À prime abord, il peut sembler étonnant que la valeur optimale de $\overline{\delta B}$ ne soit pas aussi faible que $\overline{\delta M}$, soit $1 \cdot 10^{-9}$. Ceci s'explique en partie par l'influence de la translation γ sur ces deux paramètres : en effet, $\overline{\delta B}$ étant la norme d'un vecteur de correction ajouté à une étape donnée de la méthode BICGSTAB, ce paramètre ne dépend pas de γ , tandis que la définition de $\overline{\delta M}$ est explicitement liée à γ à travers l'expression du taux de convergence τ défini au chapitre 1. La valeur de γ étant tout à fait arbitraire, il est dès lors normal que les valeurs de $\overline{\delta M}$ et $\overline{\delta B}$ ne soient pas complètement corrélées.

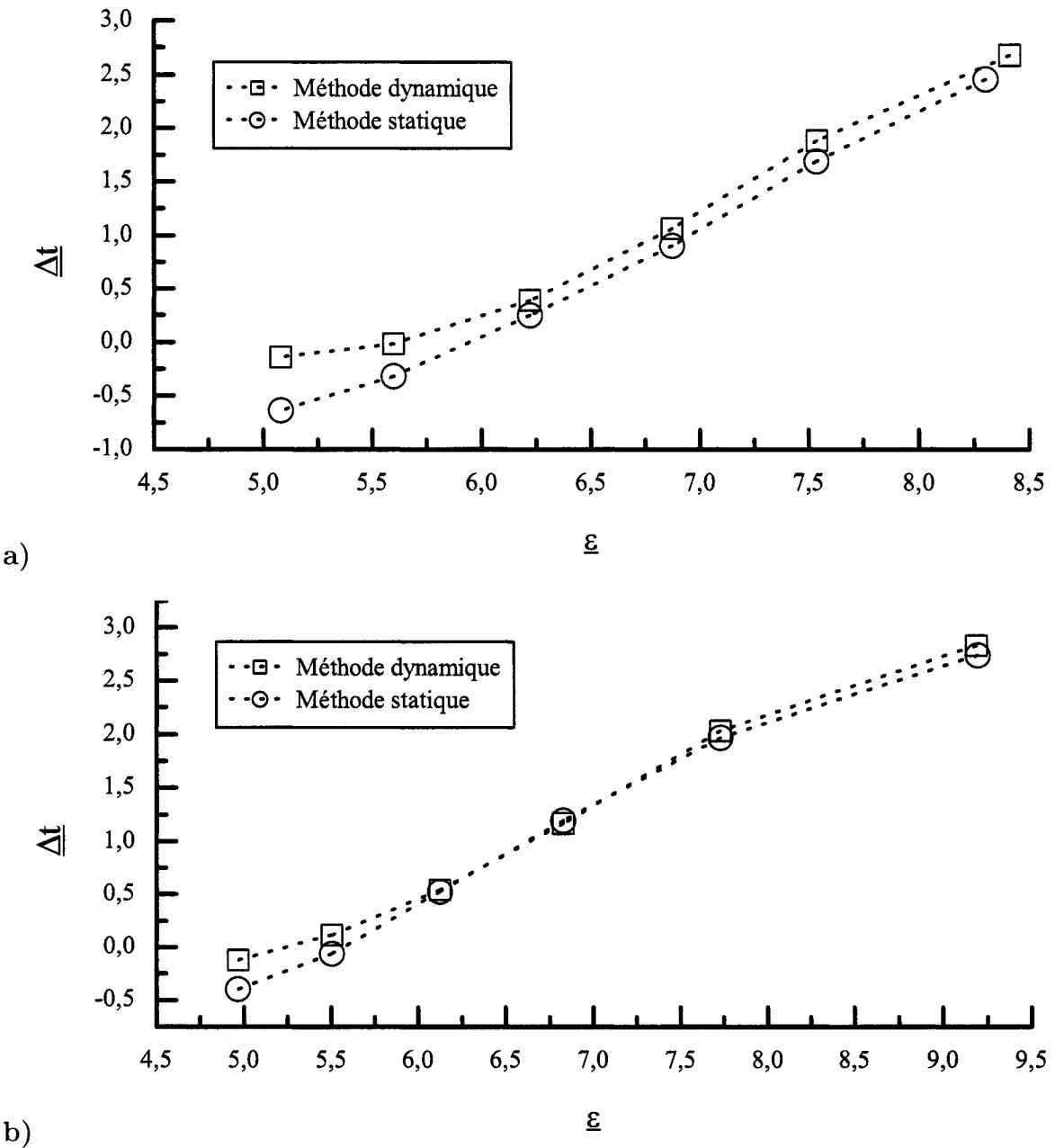


Figure 2.16 : Comparaison des coûts effectifs des méthodes d'utilisation de $\overline{\delta B}$ indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

2.3.6 Seuil de variation dynamique de la translation

Cette étude vise à vérifier si une variation dynamique de la valeur de la translation γ_0 a un effet sur la performance de l'algorithme et, le cas échéant, quelle valeur du seuil $\bar{\gamma}$ permet les meilleurs gains de performance. Dans le cadre de cette étude, on fixe à 0,5 le rapport de variation dynamique de la translation, $\eta_{\delta\gamma}$. Suite à l'optimisation précédente, le tableau 2.7 donne la valeur des paramètres qui sont utilisés dans la présente étude.

Tableau 2.7 : Paramètres de simulation après optimisation de $\bar{\delta}B$.

Paramètre	Unités	Fibre A	Fibre B
$\bar{\delta}M$	–	$1 \cdot 10^{-9}$	<i>Idem</i>
ΔL	μm	22,5	11,25
σ	–	61	<i>Idem</i>
Symétrie	–	Deux axes	<i>Idem</i>
$\bar{\delta}B$	–	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-8}$
$\bar{\gamma}$	–	<i>Variable</i>	<i>Idem</i>
$\eta_{\delta B}$	–	–	–
$\eta_{\delta\gamma}$	–	0,5	<i>Idem</i>

Le paramètre $\bar{\gamma}$ prend les valeurs suivantes :

$$\bar{\gamma} \in \{1 \cdot 10^{-2}; 1 \cdot 10^{-4}; 1 \cdot 10^{-6}; 1 \cdot 10^{-8}\}.$$

2.3.6.1 Résultats

La figure 2.17 montre la précision $\underline{\varepsilon}$ en fonction de la résolution $\underline{\Delta}$ pour les fibres A et B. La figure 2.18 montre le coût $\underline{\Delta t}$ en fonction de la résolution $\underline{\Delta}$ pour les fibres A et B. La figure 2.19 montre le coût effectif, soit $\underline{\Delta t}$ en fonction de la précision atteinte $\underline{\varepsilon}$, pour les fibres A et B.

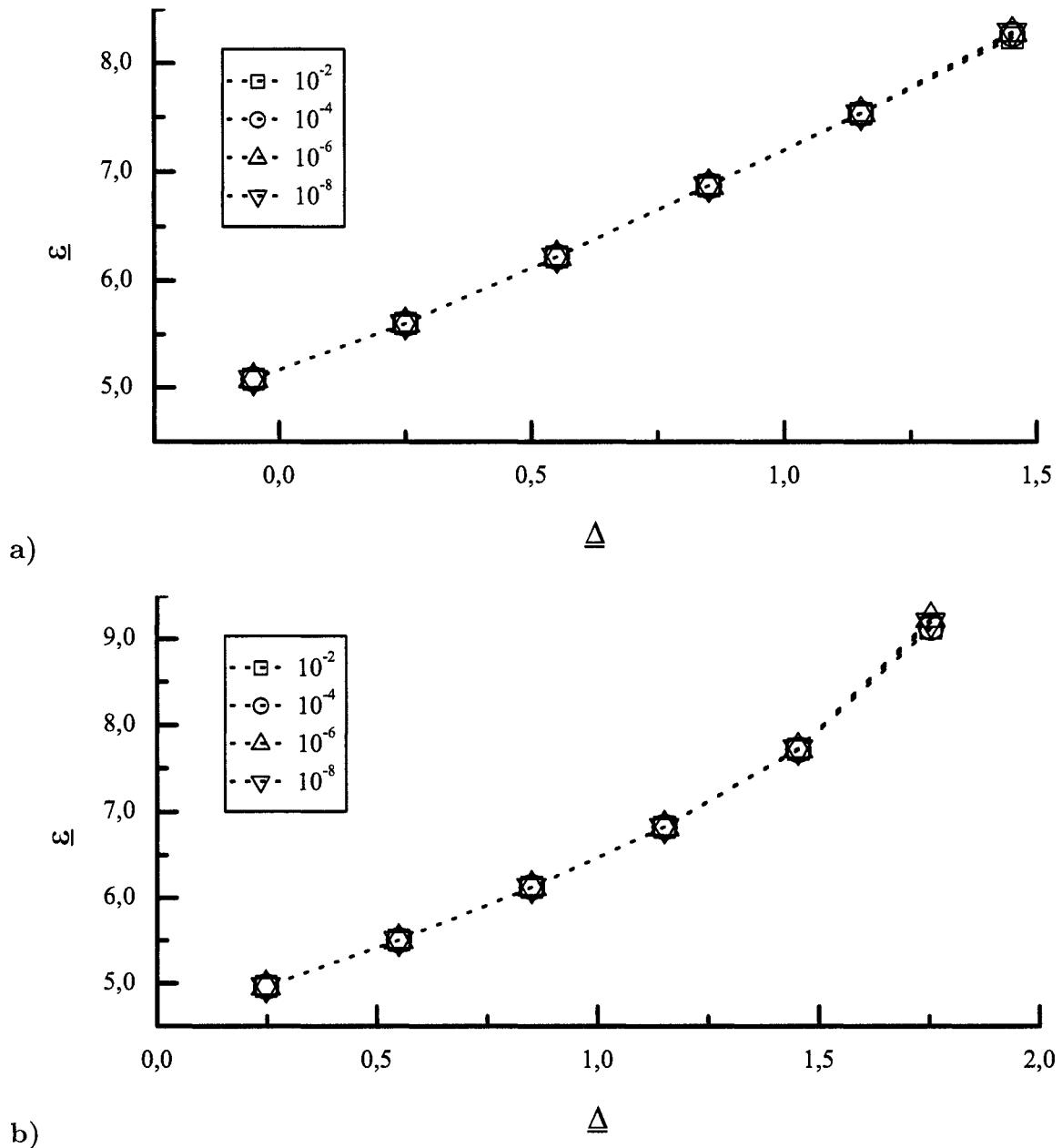


Figure 2.17 : Précision : ε en fonction de Δ pour différentes valeurs de $\bar{\gamma}$ indiquées en médailloons : a) fibre A ; b) fibre B.

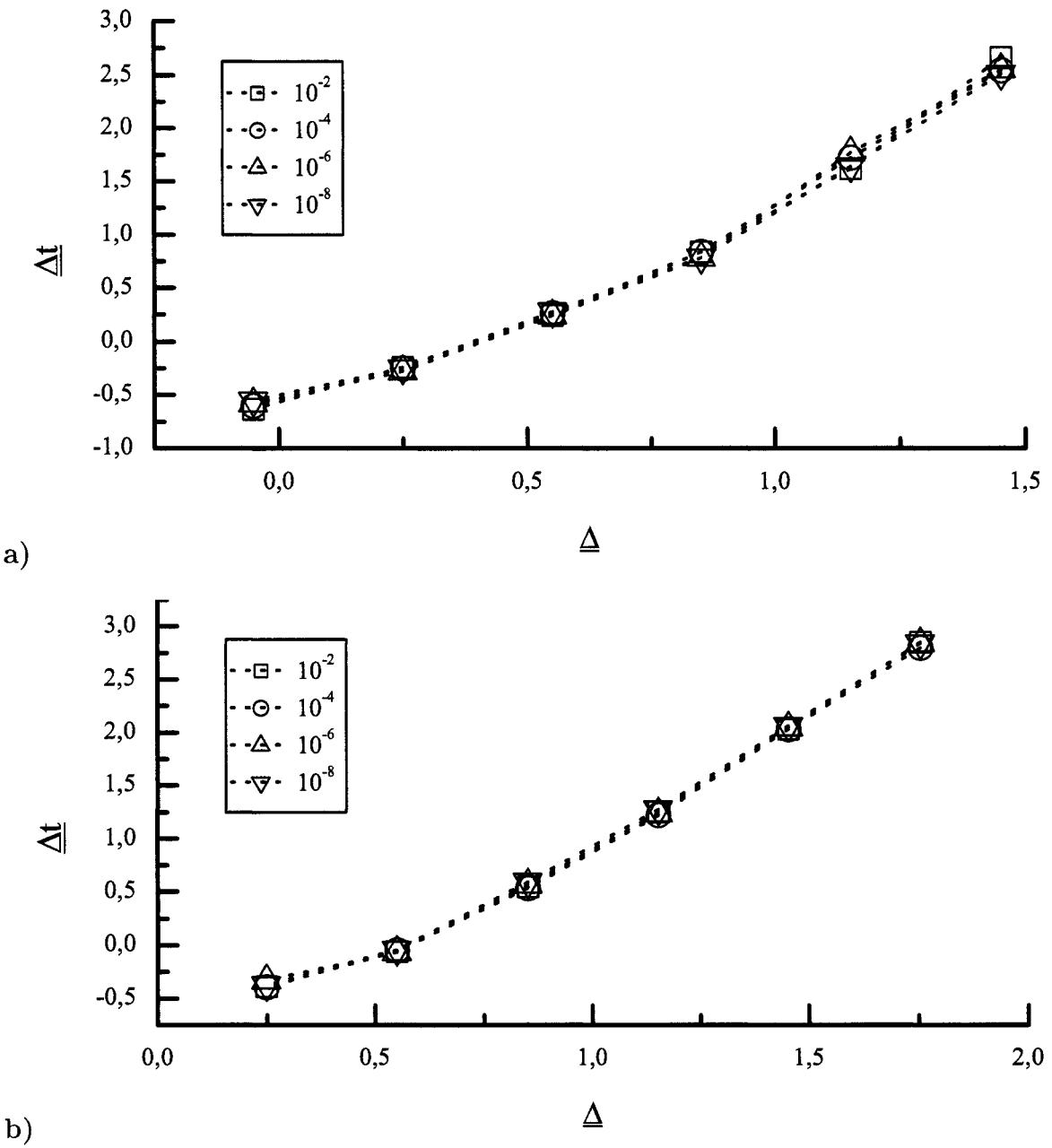


Figure 2.18 : Coût : Δ_t en fonction de Δ pour différentes valeurs de $\bar{\gamma}$ indiquées en médailloons : a) fibre A ; b) fibre B.

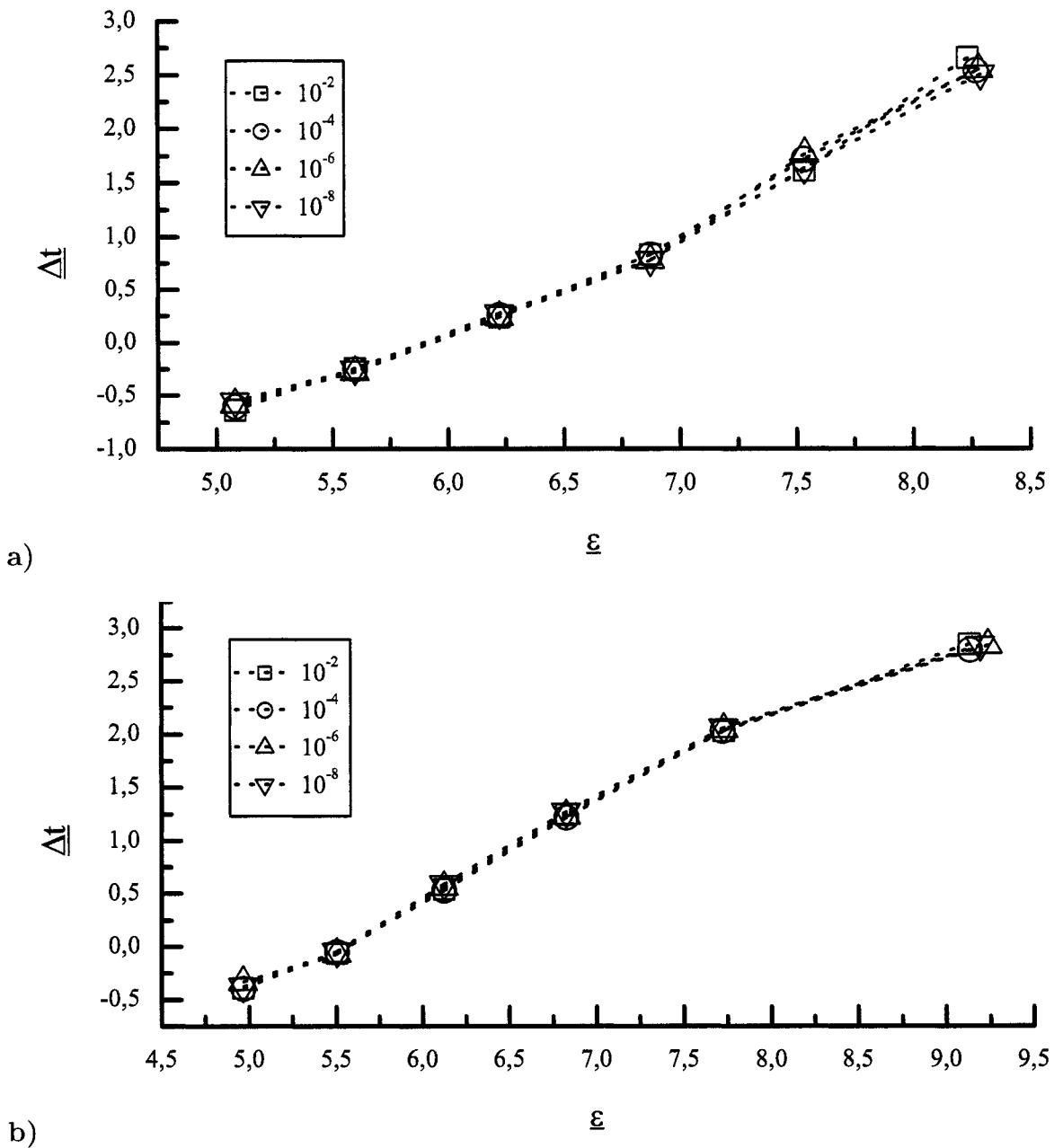


Figure 2.19 : Coût effectif : $\Delta\bar{t}$ en fonction de ε pour différentes valeurs de $\bar{\gamma}$ indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

2.3.6.2 Discussion

Pour les deux fibres, les gains de précision ne sont perceptibles que pour la plus grande résolution. Les valeurs $\bar{\gamma} = 1 \cdot 10^{-8}$ et $\bar{\gamma} = 1 \cdot 10^{-6}$ offrent la meilleure précision pour les fibres A et B, respectivement, malgré que ce soit par une très mince marge. Les différents candidats sont également difficiles à départager au niveau du coût, bien que les valeurs $\bar{\gamma} = 1 \cdot 10^{-8}$ et $\bar{\gamma} = 1 \cdot 10^{-4}$ semblent présenter le plus faible coût pour les fibres A et B, respectivement. Le graphique du coût effectif confirme finalement que $\bar{\gamma} = 1 \cdot 10^{-8}$ est la valeur optimale pour la fibre A, et que $\bar{\gamma} = 1 \cdot 10^{-6}$ est considérée optimale pour la fibre B, vu qu'elle permet une plus grande précision.

2.3.7 Rapport de variation dynamique de la translation

Dans cette étude, on procède à une variation de la translation au meilleur moment, déterminé par la valeur optimale de $\bar{\gamma}$, selon une proportion $\eta_{\delta\gamma}$, paramètre que l'on cherche à optimiser. Suite à l'optimisation précédente, le tableau 2.8 donne la valeur des paramètres qui sont utilisés dans la présente étude.

Tableau 2.8 : Paramètres de simulation après optimisation de $\bar{\gamma}$.

Paramètre	Unités	Fibre A	Fibre B
$\overline{\delta M}$	–	$1 \cdot 10^{-9}$	<i>Idem</i>
ΔL	μm	22,5	11,25
σ	–	61	<i>Idem</i>
Symétrie	–	Deux axes	<i>Idem</i>
$\overline{\delta B}$	–	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-8}$
$\bar{\gamma}$	–	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-6}$
$\eta_{\delta B}$	–	–	–
$\eta_{\delta\gamma}$	–	<i>Variable</i>	<i>Idem</i>

Le paramètre $\eta_{\delta\gamma}$ prend les valeurs suivantes : $\eta_{\delta\gamma} \in \{0 ; 0,1 ; 0,3 ; 0,5 ; 0,7 ; 0,9\}$.

2.3.7.1 Résultats

La figure 2.20 montre la précision $\underline{\varepsilon}$ en fonction de la résolution Δ pour les fibres A et B. La figure 2.21 montre le coût $\underline{\Delta t}$ en fonction de la résolution Δ pour les fibres A et B. La figure 2.22 montre le coût effectif, soit $\underline{\Delta t}$ en fonction de la précision atteinte $\underline{\varepsilon}$, pour les fibres A et B.

2.3.7.2 Discussion

Encore une fois, on remarque que les seuls gains de précision perceptibles surviennent pour la plus grande résolution. À cet égard, les valeurs $\eta_{\delta\gamma} = 0$ et $\eta_{\delta\gamma} = 0,7$ offrent la meilleure précision dans le cas des fibres A et B, respectivement. Pour ce qui est du coût, les valeurs $\eta_{\delta\gamma} = 0,1$ et $\eta_{\delta\gamma} = 0$ offrent le coût le plus faible dans

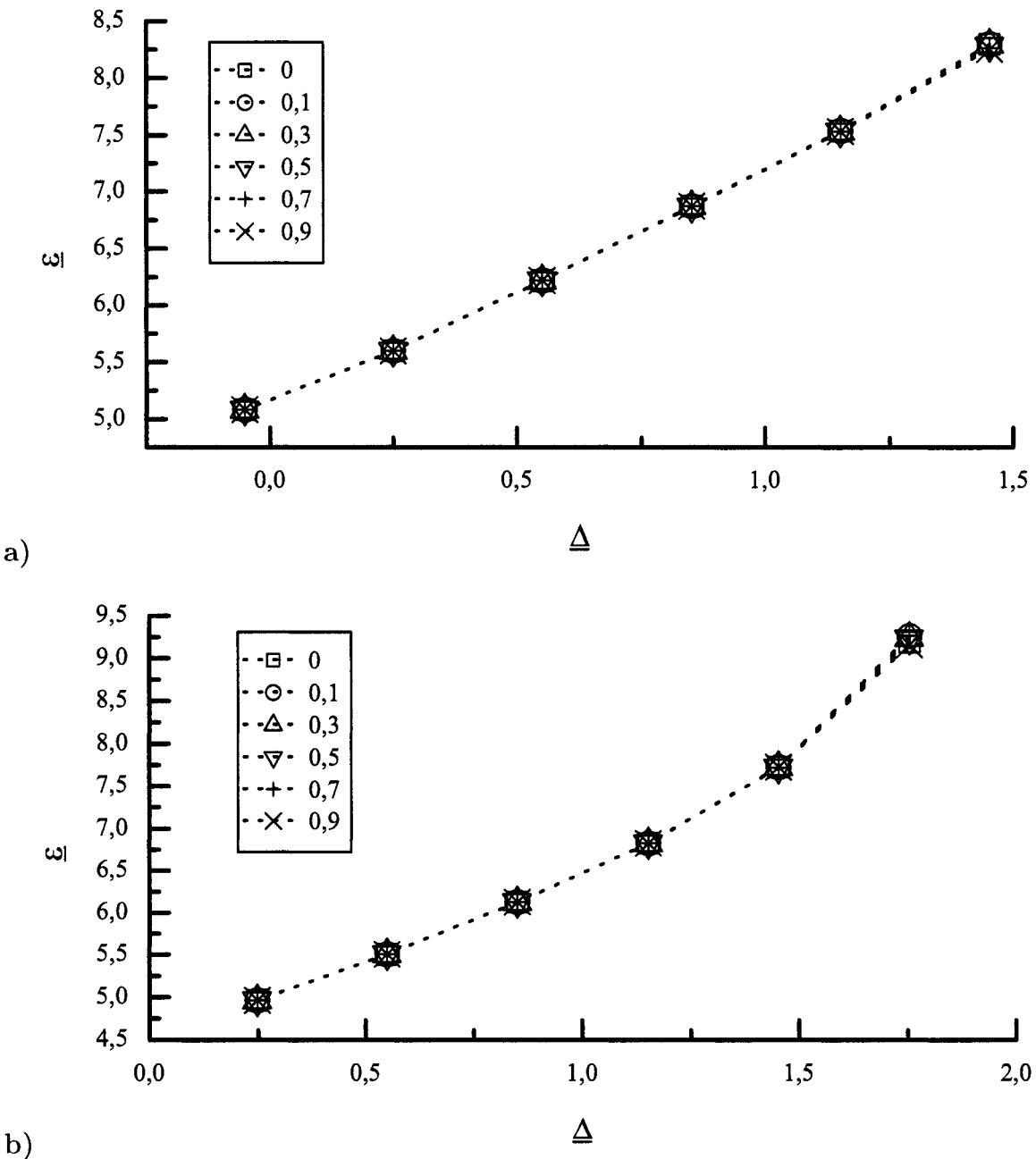


Figure 2.20 : Précision : ε en fonction de Δ pour différentes valeurs de $\eta_{\delta\gamma}$ indiquées en médaillon : **a)** fibre A ; **b)** fibre B.

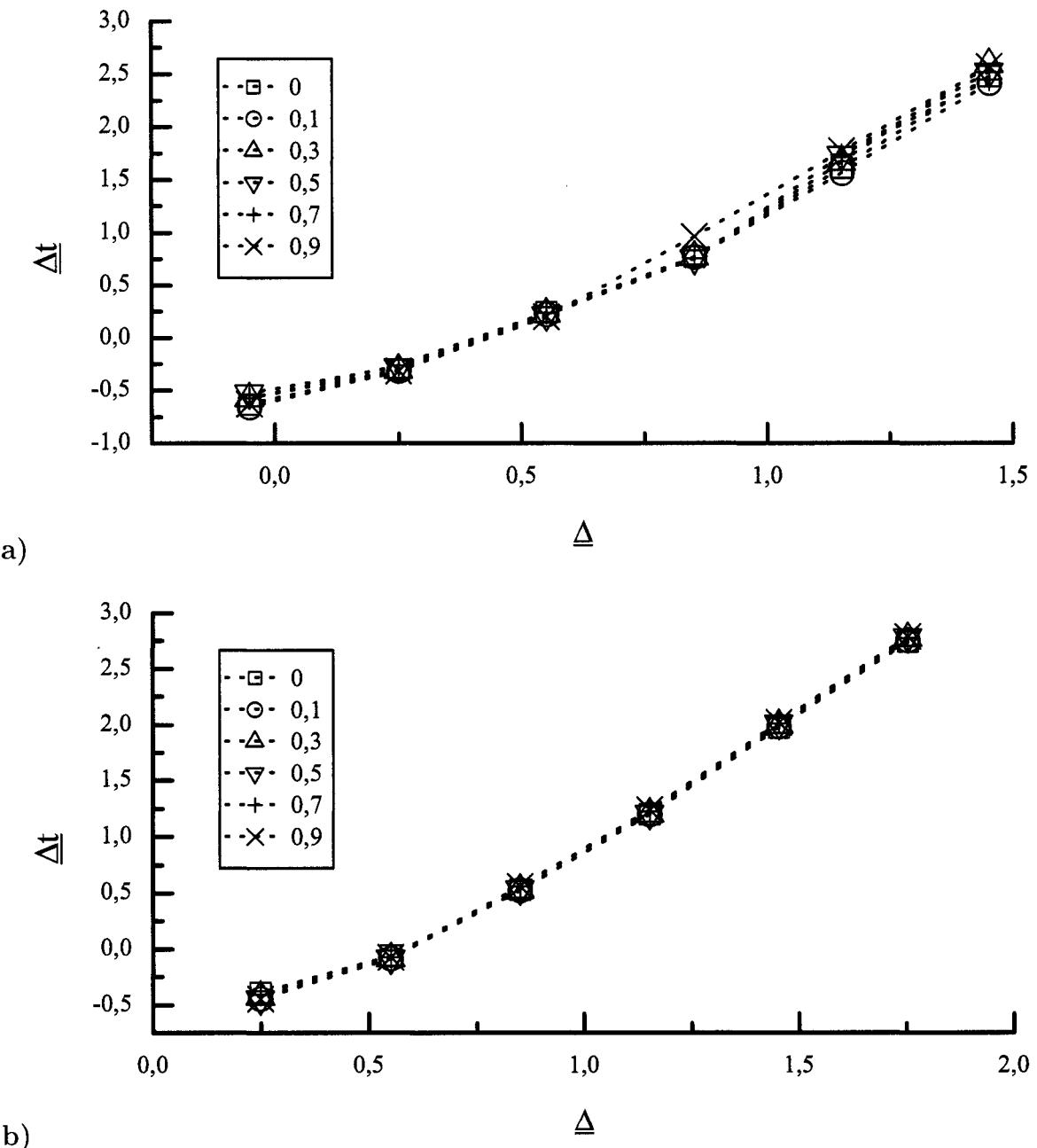


Figure 2.21 : Coût : Δt en fonction de Δ pour différentes valeurs de $\eta_{\delta\gamma}$ indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

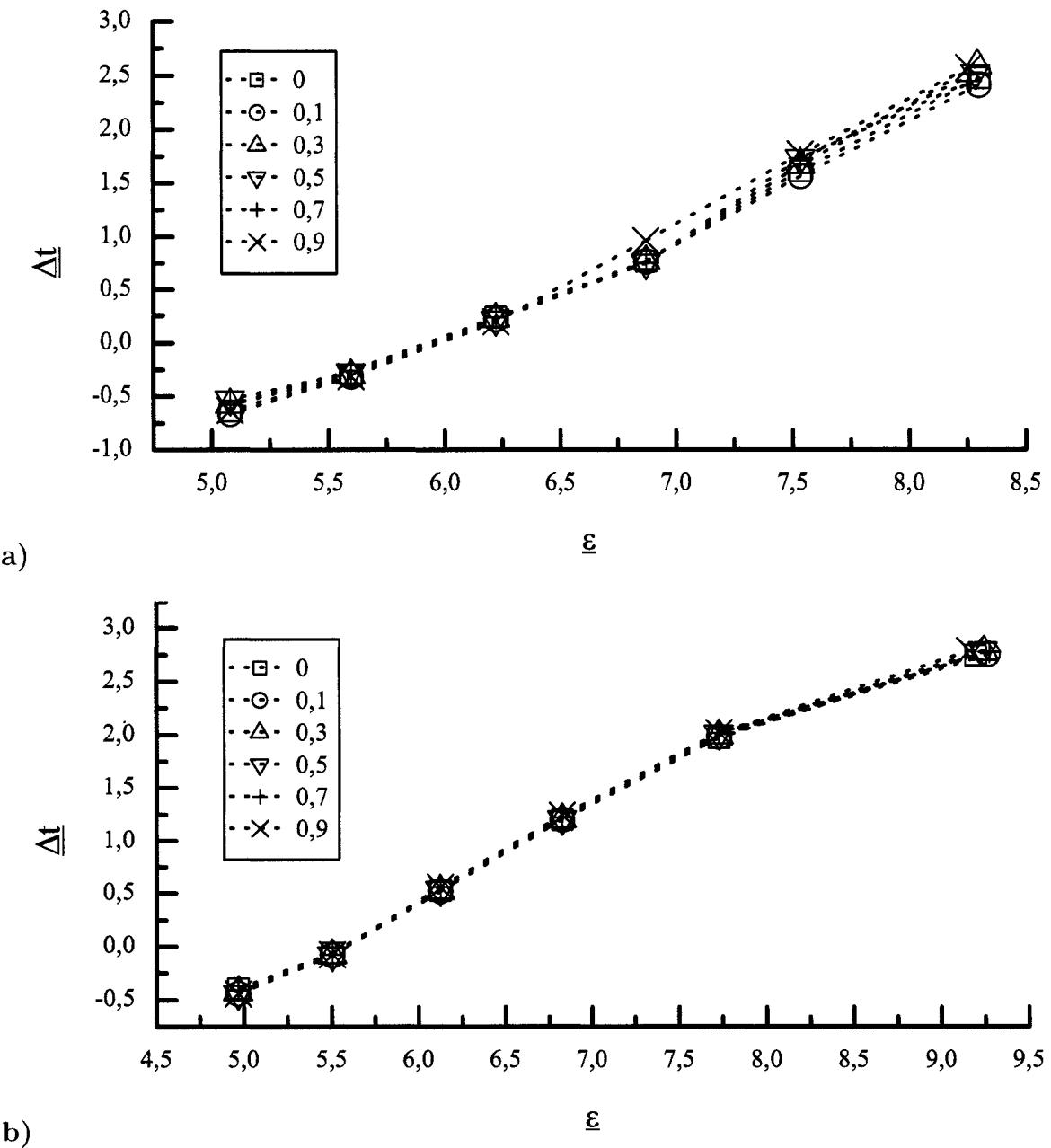


Figure 2.22 : Coût effectif : Δt en fonction de $\underline{\varepsilon}$ pour différentes valeurs de $\eta_{\delta\gamma}$ indiquées en médaillon : a) fibre A ; b) fibre B.

le cas des fibres A et B, respectivement. Finalement, en observant le graphique du coût effectif pour la fibre A, on constate que les précisions amenées par les valeurs $\eta_{\delta\gamma} = 0,1$ et $\eta_{\delta\gamma} = 0$ sont tellement proches que l'on doit considérer comme optimale la valeur qui amène le moindre coût, soit $\eta_{\delta\gamma} = 0,1$. Au contraire, pour la fibre B, l'avantage de précision est plus marqué, pour des coûts forts similaires, de sorte que $\eta_{\delta\gamma} = 0,7$ est considérée comme optimale.

2.4 Conclusion de l'étude

Suite à toutes les optimisations effectuées, le tableau 2.9 donne la valeur optimale de tous les paramètres étudiés, pour les deux types de guides utilisés.

Tableau 2.9 : Paramètres de simulation après toutes les optimisations.

Paramètre	Unités	Fibre A	Fibre B
$\overline{\delta M}$	–	$1 \cdot 10^{-9}$ (par défaut)	<i>Idem</i>
ΔL	μm	22,5	11,25
σ	–	61	<i>Idem</i>
Symétrie	–	Deux axes	<i>Idem</i>
$\overline{\delta B}$	–	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-8}$
$\overline{\gamma}$	–	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-6}$
$\eta_{\delta B}$	–	–	–
$\eta_{\delta\gamma}$	–	0,1	0,7

2.4.1 Gain de performance global

La figure 2.23 compare la performance (au moyen du coût effectif) de l'algorithme avant et après l'ensemble des optimisations (ces deux situations étant représentées par les tableaux de paramètres 2.2 et 2.9, respectivement) pour les fibres A et B. À prime abord, on peut apprécier les gains de performance réalisés : pour les deux types de fibres, le coût effectif des calculs diminue considérablement en vertu des différentes

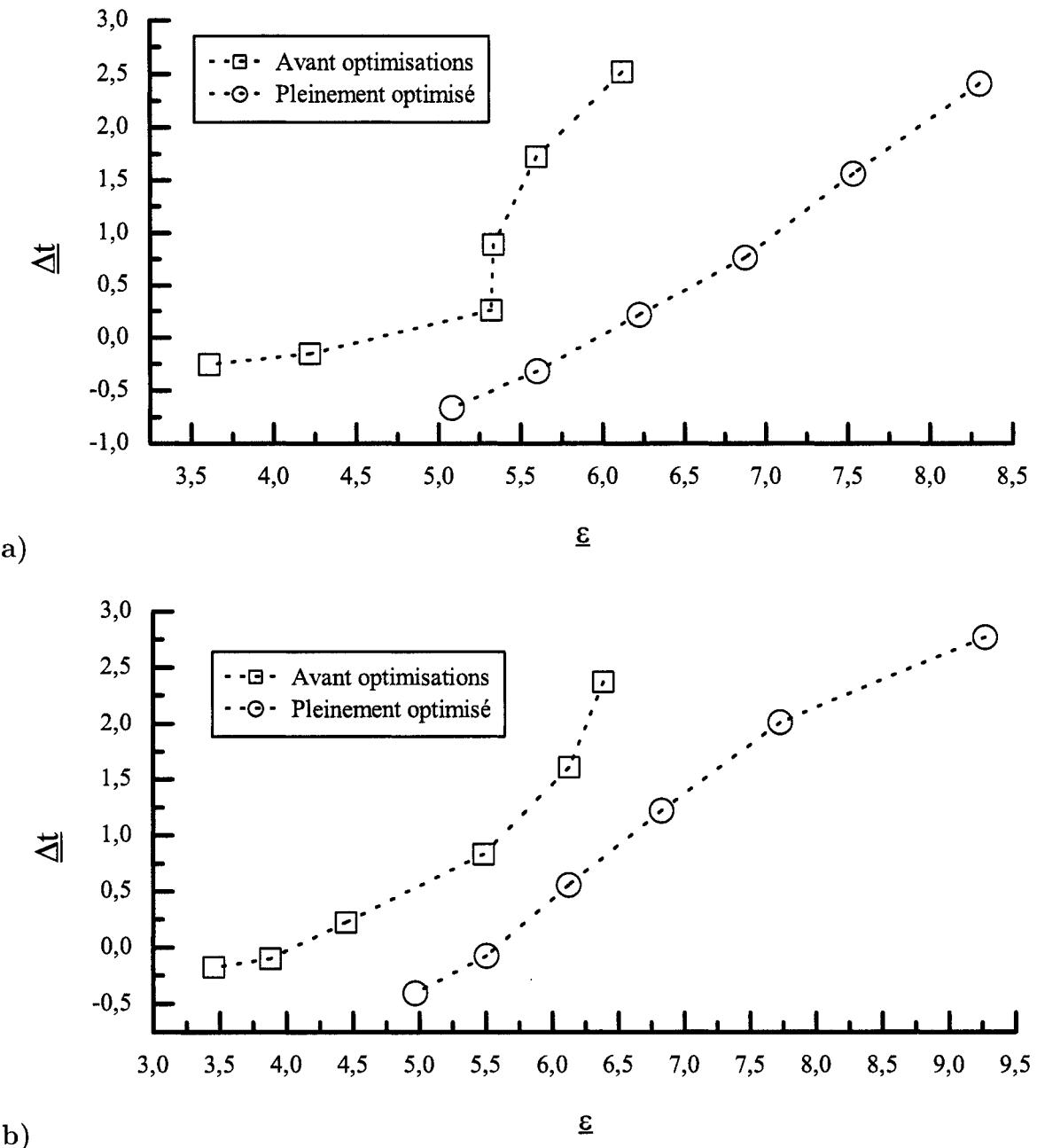


Figure 2.23 : Comparaison des efficacités avant et après les optimisations : a) fibre A ; b) fibre B.

optimisations, peu importe la précision cherchée. On peut mesurer l'utilité des optimisations par la diminution maximale des coûts effectifs avant et après optimisation de l'algorithme. Dans le cas de la fibre A, cette diminution maximale du coût effectif survient à $\underline{\varepsilon} \cong 6,12$, et vaut environ 2,386. Cette valeur signifie que pour une même précision voulue, le temps de calcul Δt peut être jusqu'à environ 2,386 ordres de grandeur plus faible une fois l'algorithme optimisé, soit un gain de performance d'environ 24338%, nombre qui s'avère, somme toute, considérable. Dans le cas de la fibre B, la diminution maximale du coût effectif survient à $\underline{\varepsilon} \cong 6,39$ et vaut environ 1,564, équivalant à un gain de performance d'environ 3669%.

Vu d'une autre façon, à coût égal, l'algorithme connaît un gain maximal de précision d'environ 2,253 et 2,074 ordres de grandeur pour les fibres A et B, respectivement, correspondant à des gains de précision à coût égal de 17907% et 11850%, respectivement. Il va sans dire que ces optimisations s'avéraient nécessaires.

2.4.2 Équations caractéristiques de l'algorithme optimisé

Une fois que l'on possède un algorithme dans sa forme la plus performante, on peut conclure ce chapitre en dressant les équations caractéristiques de cet algorithme pour chaque type de guide étudié. Pour bien alimenter la discussion, on présente ici les graphiques suivants : précision $\underline{\varepsilon}$ en fonction de la résolution Δ (Fig. 2.24), coût en fonction du logarithme du nombre de points $\log_{10}(N)$ (Fig. 2.25), et coût effectif, soit $\underline{\Delta t}$ en fonction de la précision voulue $\underline{\varepsilon}$ (Fig. 2.26). Pour chacune de ces courbes (dont l'abscisse et l'ordonnée sont toutes deux des valeurs logarithmiques, rappelons-le), on dresse une droite de moindres carrés qui couvre le maximum de points correspondant à une tendance linéaire. À partir des équations de ces droites, on tire les équations caractéristiques suivantes, qui relient entre elles les variables non-logarithmiques, soit l'erreur relative ε , le temps de calcul Δt , le pas de discréétisation Δ et le nombre de points de discréétisation N .

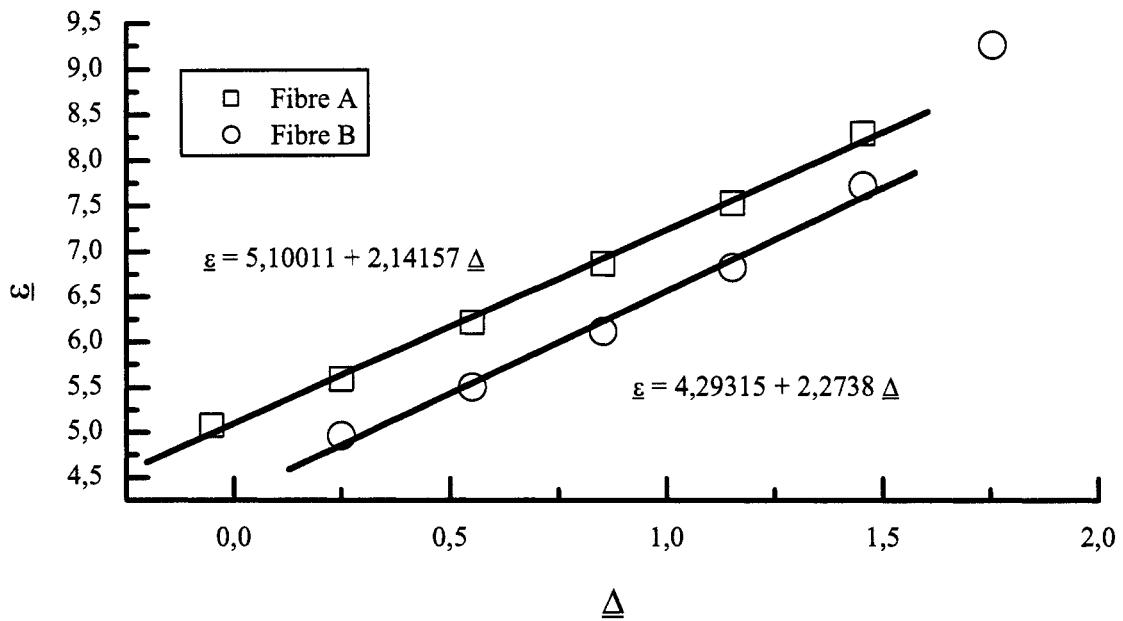


Figure 2.24 : Précision de l'algorithme optimisé en fonction de la résolution, fibres A et B.

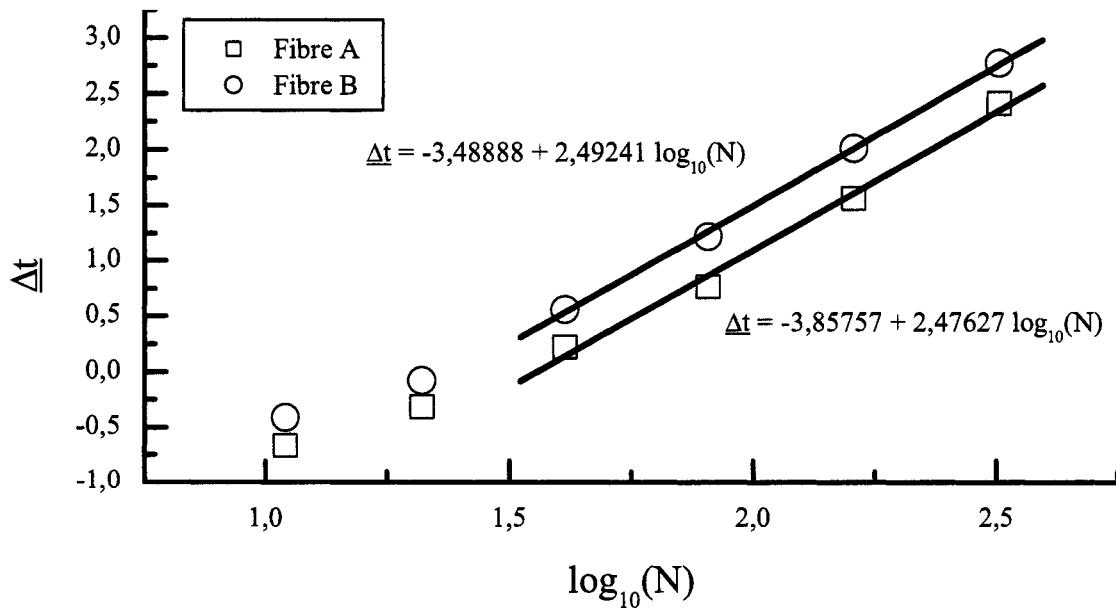


Figure 2.25 : Coût de l'algorithme optimisé en fonction de $\log_{10}(N)$, fibres A et B.

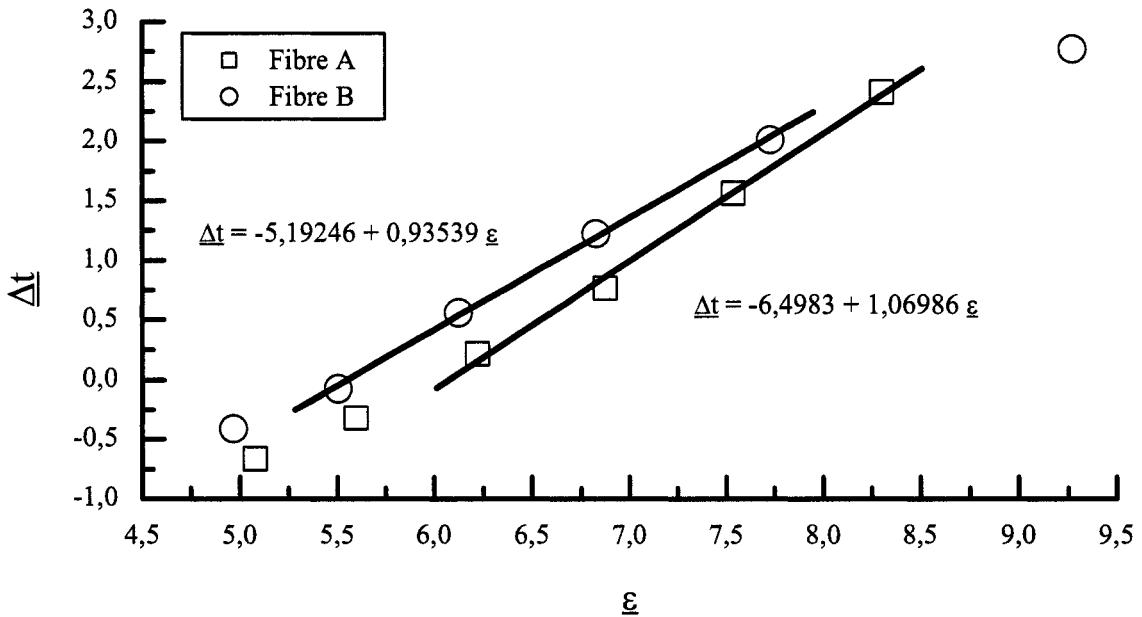


Figure 2.26 : Coût effectif de l'algorithme optimisé, fibres A et B.

Pour la fibre A, on obtient :

$$\varepsilon(\Delta) = 10^{-5,10011} \times \Delta^{2,14157} = 7,94 \cdot 10^{-6} \times \Delta^{2,14157}, \quad (2.14a)$$

$$\Delta t(N) = 10^{-3,85757} \times N^{2,47627} = 1,39 \cdot 10^{-4} \times N^{2,47627}, \quad (2.14b)$$

$$\Delta t(\varepsilon) = 10^{-6,49830} \times \varepsilon^{-1,06986} = 3,17 \cdot 10^{-7} \times \varepsilon^{-1,06986}, \quad (2.14c)$$

et pour la fibre B :

$$\varepsilon(\Delta) = 10^{-4,29315} \times \Delta^{2,2738} = 5,09 \cdot 10^{-5} \times \Delta^{2,2738}, \quad (2.15a)$$

$$\Delta t(N) = 10^{-3,48888} \times N^{2,49241} = 3,24 \cdot 10^{-4} \times N^{2,49241}, \quad (2.15b)$$

$$\Delta t(\varepsilon) = 10^{-5,19246} \times \varepsilon^{-0,93539} = 6,42 \cdot 10^{-6} \times \varepsilon^{-0,93539}. \quad (2.15c)$$

Ces équations caractéristiques permettent d'informer l'utilisateur du comportement éventuel de l'algorithme. De plus, les deux premières équations permettent d'effectuer un lien direct entre la théorie et le comportement réel de l'algorithme.

D'abord, du point de vue de l'erreur relative ε en fonction du pas de discrétisation Δ , on constate que l'entier le plus près des exposants de Δ dans les équations (2.14a) et (2.15a) est 2. Ce fait concorde bien avec la théorie : en effet, l'erreur principale des équations aux valeurs propres que l'algorithme utilise provient de l'approximation en différences finies de la dérivée des différentes composantes du champ et de celle de l'indice de réfraction. Or, l'erreur associée à une telle approximation, tel que montré aux équations (1.44), varie comme le carré du pas de discrétisation, d'où le facteur 2 que l'on retrouve ici.

Ensuite, du point de vue du temps de calcul, si l'on considère la quantité $\Omega = 2 \cdot N^2$, soit le nombre total de points de calcul (et par le fait même, la dimension des matrices et vecteurs du système à résoudre), on constate, selon les équations (2.14b) et (2.15b), que le temps de calcul Δt varie selon $\Omega^{1,238}$ et $\Omega^{1,246}$ pour les fibres A et B, respectivement. L'entier le plus près de ces exposants est, dans les deux cas, 1. Là encore, ce caractère linéaire trouve son explication dans la méthode numérique utilisée : en effet, l'opération la plus coûteuse de la MPIT est sans contredit la résolution d'un système linéaire, effectuée par la méthode BICGSTAB. Or, cette méthode fonctionne par multiplication successive d'un vecteur de dimension Ω par une matrice de Ω lignes comportant au plus l colonnes non-nulles, où l est une constante. En profitant de ce nombre restreint de colonnes dans l'opération de multiplication, on permet une résolution du système en un nombre d'opérations proportionnel à Ω , et non à Ω^2 , comme c'est le cas avec des matrices pleines. Ainsi, le temps de calcul, dont le comportement est dominé par celui de ces multiplications matrice-vecteur lorsque N est élevé, est linéaire selon Ω , d'où la valeur unitaire de l'exposant que l'on retrouve ici. D'autre part, à la figure 2.25, on peut démontrer qu'une tendance linéaire relie Δt et N pour les deux plus faibles valeurs de N , autant

pour la fibre A que la fibre B : cette dépendance linéaire s'explique par la domination du coût de l'opération de lissage pour de très faibles valeurs de N.

Suite aux nombreuses optimisations effectuées dans ce chapitre, on est maintenant en mesure d'utiliser l'algorithme de façon efficace, dans le cadre de simulations utiles. À cet effet, le prochain chapitre présente des exemples concrets d'utilisation de l'algorithme, par le biais d'études de cas portant sur différents types de guides d'onde, en utilisant la formulation en champs vectoriels de l'algorithme, ce pour des matériaux isotropes ou non.

Chapitre 3

Résultats

Une fois l'algorithme optimisé au chapitre précédent, il importe ici d'en démontrer l'utilité pratique ainsi que la polyvalence. À cette fin, le présent chapitre présente la comparaison entre les résultats de simulation obtenus par l'algorithme du présent travail et la littérature (ou avec la solution analytique s'il y a lieu), pour différents types de guides d'onde. Étant donné que le coût des calculs a été suffisamment documenté au chapitre précédent, seule la précision des résultats est considérée dans le présent chapitre.

Chaque section traite d'un guide de type différent, à savoir : fibre optique circulaire multimodale, fibre à cristaux photoniques, fibres fusionnées, guide d'onde rectangulaire anisotrope, ainsi qu'un coupleur formé de deux fibres anisotropes dont les axes préférentiels ne sont pas alignés. Pour chaque exemple de guide d'onde, on présente d'abord le profil vectoriel du champ électrique transverse obtenu avec l'algorithme du présent travail, superposé à la norme de ce même champ. On définit ainsi le champ électrique transverse :

$$\vec{e}_t = e_x \hat{x} + e_y \hat{y}, \quad (3.1)$$

où e_x et e_y sont, respectivement, les composantes en x et y du champ électrique, et \hat{x} et \hat{y} sont des vecteurs orthonormaux.

La norme de \vec{e}_t se définit ainsi :

$$\|\vec{e}_t\| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}. \quad (3.2)$$

On compare ensuite les valeurs d'indices effectifs obtenues avec le présent algorithme et celles trouvées dans la littérature. Une discussion accompagne les résultats pour chaque guide.¹

3.1 Fibre circulaire multimodale

Pour cette étude comparée, on choisit une fibre SMF28TM, dont les caractéristiques se retrouvent au tableau 3.1, opérée en régime multimodal, soit à $\lambda_0 = 0,6328$ nm (où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide). Pour simuler ce guide, on utilise une fenêtre de calcul dont les caractéristiques se retrouvent au tableau 3.2.²

Tableau 3.1 : Paramètres de la fibre circulaire multimodale (SMF28TM).

Paramètre	Valeur
r_{co}	$4,5 \mu\text{m}$
n_g	1,4574199459
Δn	0,0045
n_{co}	1,4619199459

¹Sauf indication contraire et pour l'ensemble du présent chapitre, les mots «champ» et «norme» désignent respectivement le champ électrique transverse et la norme du champ électrique transverse, tels que définis en (3.1) et (3.2).

²Les définitions de tous les paramètres de ce tableau se trouvent au chapitre 2. Lorsqu'un paramètre est identique selon x et y , on le présente sous forme compacte (soit L , N ou Δ). Lorsque la symétrie est utilisée, on présente les dimensions de la fenêtre de calcul en entier, mais le calcul du pas de discréétisation tient compte de la réduction de la fenêtre de calcul.

Tableau 3.2 : Paramètres de la fenêtre de calcul utilisée, fibre circulaire multimodale.

Paramètre	Valeur
L	$22,5 \mu\text{m}$
N	321
Symétrie	Deux axes
Δ	$\cong 0,03515 \mu\text{m}$

3.1.1 Profil du champ

Les figures 3.1 à 3.4 montrent le champ et sa norme, en vue de coupe du guide d'onde, pour les sept modes vectoriels guidés par cette fibre. Les traits pointillés représentent le cœur du guide.

3.1.2 Comparaison des indices effectifs

Le tableau 3.3 montre la comparaison de l'indice effectif pour les différents modes vectoriels guidés par cette fibre, entre les valeurs obtenues par l'algorithme du présent travail, $n_{\text{eff}}^{\text{NUM}}$, et les solutions analytiques, $n_{\text{eff}}^{\text{ANA}}$. L'erreur relative ε , telle que définie au chapitre 2, est aussi présentée.³

Tableau 3.3 : Comparaison des indices effectifs, fibre circulaire multimodale.

Mode vectoriel	Équivalent scalaire	$n_{\text{eff}}^{\text{NUM}}$	$n_{\text{eff}}^{\text{ANA}}$	ε
HE ₁₁	LP ₀₁	1,46123206773560	1,4612320758410	-5,5 · 10 ⁻⁹
TE ₀₁	LP ₁₁	1,46019977548360	1,4601997747986	4,7 · 10 ⁻¹⁰
HE ₂₁	LP ₁₁	1,46019797717610	1,4601979547650	1,5 · 10 ⁻⁸
TM ₀₁	LP ₁₁	1,46019746807810	1,4601974342787	2,3 · 10 ⁻⁸
EH ₁₁	LP ₂₁	1,45888888659310	1,4588899760522	-7,5 · 10 ⁻⁷
HE ₃₁	LP ₂₁	1,45888884370690	1,4588877821799	7,3 · 10 ⁻⁷
HE ₁₂	LP ₀₂	1,45850617249440	1,4585061802936	-5,3 · 10 ⁻⁹

³Dans le présent chapitre, l'erreur relative ε est utilisée partout où une solution analytique est disponible ; dans le cas contraire, ε est remplacé par l'écart relatif δ , défini ci-après (section 3.2.3).

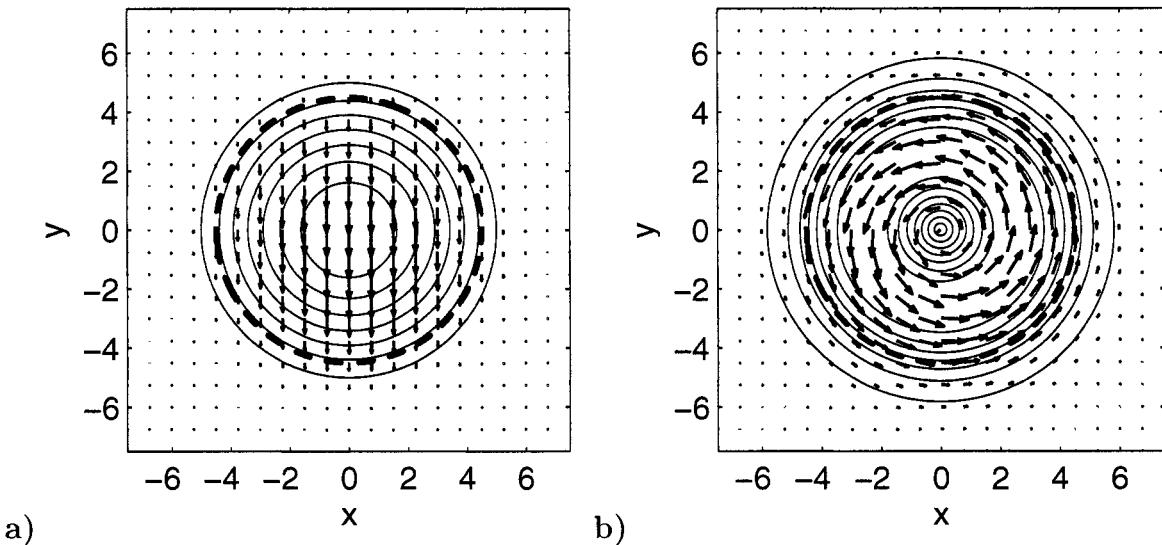


Figure 3.1 : Fibre circulaire multimodale : a) mode HE_{11} ; b) mode TE_{01} .

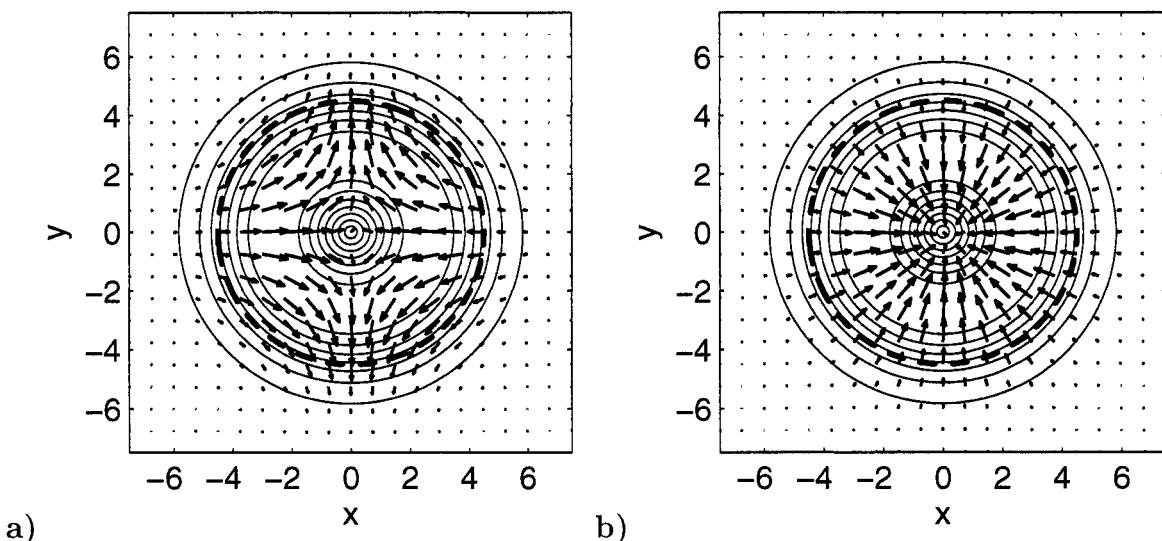


Figure 3.2 : Fibre circulaire multimodale : a) mode HE_{21} ; b) mode TM_{01} .

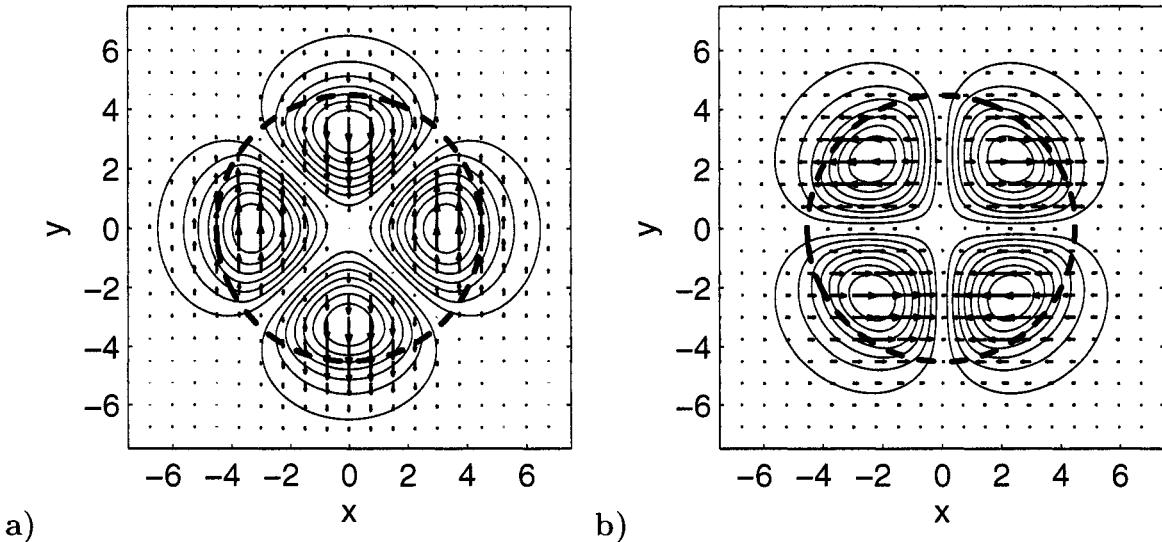


Figure 3.3 : Fibre circulaire multimodale : a) mode EH₁₁ ; b) mode HE₃₁.

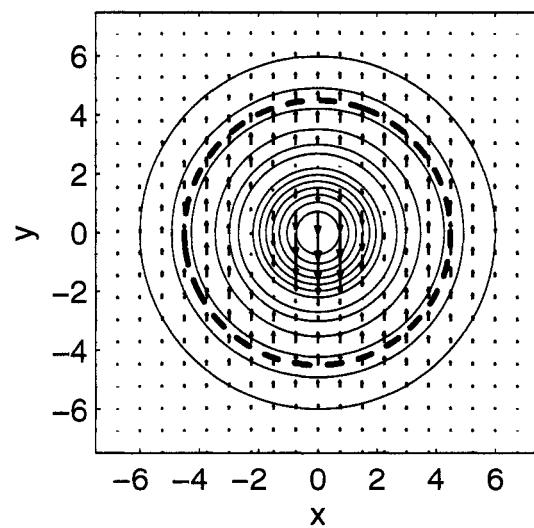


Figure 3.4 : Fibre circulaire multimodale : mode HE₁₂.

3.1.3 Discussion

Une première analyse porte sur l'identité des modes propres vectoriels obtenus pour ce guide. Quoique l'on puisse se fier sur la hiérarchie des valeurs de leur indice effectif respectif pour les identifier, on peut, pour certains, obtenir quelques indices par simple observation de leur profil de champ.

Par exemple, en observant la forme et l'orientation des modes présentés aux figures 3.1a), 3.3a), 3.3b) et 3.4 de ce guide faiblement guidant, on constate que l'orientation du champ y est quasi constante sur tout le guide : on peut donc y reconnaître des caractéristiques semblables à celles des «modes» scalaires, soit les «modes» LP_{ij} , où i représente la dépendance azimutale de la norme du champ et j représente la dépendance radiale de cette même norme. Selon cette convention, i est égal au nombre de fois où la norme du champ s'annule lors d'un balayage azimutal entre 0 et π radians, et j est égal au nombre de fois où cette même norme s'annule lors d'un balayage radial entre $r = 0$ et $r = \infty$ (on considère que le champ s'annule à $r = \infty$). Ainsi, le mode présenté à la figure 3.1a) s'apparente au mode LP_{01} , les modes des figures 3.3a) et 3.3b) s'apparentent respectivement aux modes $LP_{21}\text{-cos}$ et $LP_{21}\text{-sin}$, et le mode de la figure 3.4 s'apparente au mode LP_{02} . De plus, les modes des figures 3.1b) et 3.2b) s'identifient aisément comme les modes TE_{01} et TM_{01} , respectivement. En effet, tous deux présentent la symétrie circulaire : le premier est reconnaissable par l'absence d'une quelconque composante radiale du champ, et le second se démarque, au contraire, par l'absence de composante tangentielle pour ce champ.

Une seconde analyse, quant à elle, porte sur la valeur des indices effectifs obtenus. Le tableau 3.3 révèle une erreur relative sur la valeur de l'indice effectif variant entre $7,5 \cdot 10^{-7}$ et $4,7 \cdot 10^{-10}$ (en valeur absolue), des valeurs qui semblent fort raisonnables : à titre d'exemple, le degré de précision de ces indices effectifs permettrait de calculer la longueur de battement entre les modes HE_{11} et HE_{12} , une mesure très sensible à la précision sur les indices effectifs, avec une erreur inférieure à 4 ppm, ou *parties par*

*million.*⁴ Même dans le cas des deux modes les plus dégénérés, soit HE₂₁ et TM₀₁, l'erreur sur leur longueur de battement serait inférieure à $8 \cdot 10^{-2}$. On conclut donc que l'algorithme du présent travail peut être utilisé pour simuler adéquatement les modes propres vectoriels d'une fibre circulaire opérée en régime multimodal.

3.2 Fibres à cristaux photoniques

De par sa nature, l'algorithme de simulation du présent travail permet d'obtenir les caractéristiques de propagation de guides de profil transverse arbitraire. Il permet donc de simuler des fibres présentant de fortes variations d'indice de réfraction et, à plus forte raison, des fibres à cristaux photoniques, pour lesquelles $\Delta n \approx 0,5$. Pour cette étude comparée, trois fibres sont présentées (tableau 3.4) : une fibre circulaire dépourvue de gaine ; une fibre « assistée », identique à une fibre à guidage faible, hormis la présence d'une couronne de trous au voisinage du cœur ; une fibre à cristaux photoniques proprement dite, présentant des trous répartis uniformément dans la gaine sauf au centre du guide. Toutes trois sont tirées de [Zhu & Brown 2002] ; les fibres « assistée » et à cristaux photoniques sont présentées à la figure 3.5. Dans ces tableaux et figures, les paramètres suivants sont utilisés au besoin : r_{co} , qui représente le rayon du cœur ; r_t , qui représente le rayon des trous ; Δ_t , qui représente la distance entre le centre de deux trous voisins. Les autres paramètres sont tels que définis précédemment. Les trous, lorsque présents, sont remplis d'air, lequel possède un indice de réfraction unitaire.

Pour simuler chaque fibre, des fenêtres de calcul différentes ont été utilisées, dont les caractéristiques se retrouvent au tableau 3.5. Toutes les simulations ont été effectuées à $\lambda_0 = 1,5 \mu\text{m}$.

⁴En effet, on peut démontrer que l'erreur relative maximale δ_{\max} sur le calcul de la longueur de battement entre deux modes dont les indices effectifs exacts sont n_1 et n_2 (où $n_1 > n_2$), s'exprime ainsi : $\delta_{\max} = \frac{|\delta n_1| + |\delta n_2|}{(n_1 - n_2) - (|\delta n_1| + |\delta n_2|)}$, où δn_i est l'erreur absolue sur la valeur de l'indice effectif du mode i .

Tableau 3.4 : Paramètres des fibres sans gaine, «assistée», et à cristaux photoniques.

Paramètre (unités)	Fibre sans gaine	...«assistée»	... à cristaux photoniques
r_{co} (μm)	3,0	2,0	—
r_t (μm)	—	2,0	0,5
Δ_t (μm)	—	5,0	2,3
n_g	1,0	1,42	1,45
Δn	0,45	0,03	—
n_{co}	1,45	1,45	—

Tableau 3.5 : Paramètres de la fenêtre de calcul utilisée, fibres sans gaine, «assistée» et à cristaux photoniques.

Paramètre (unités)	Fibre sans gaine	...«assistée»	... à cristaux photoniques
L (μm)	12,0	16,0	13,8
N	121	121	121
Symétrie	Deux axes	Deux axes	Deux axes
Δ	0,05	$\cong 0,067$	0,0575

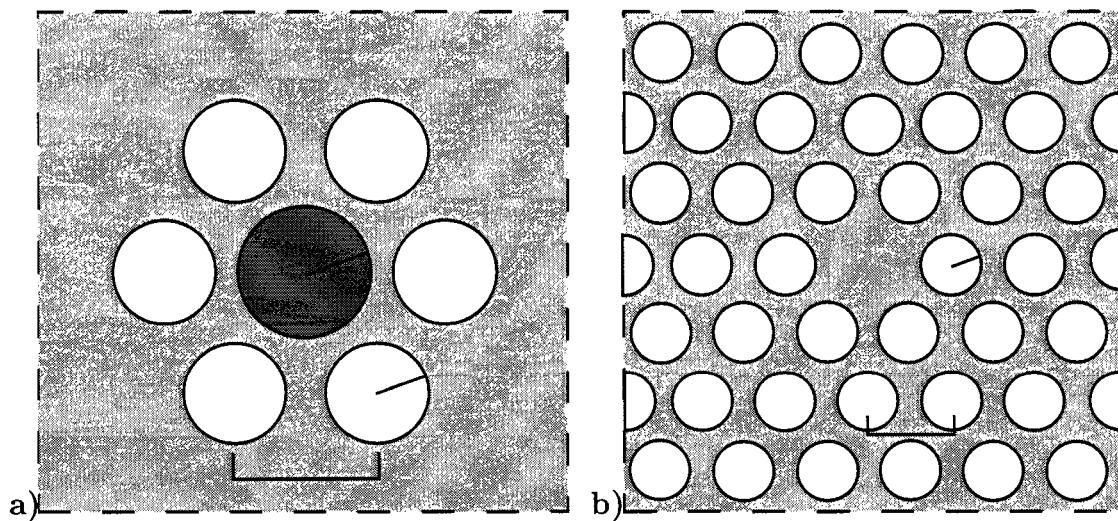


Figure 3.5 : Caractéristiques : a) fibre assistée ; b) fibre à cristaux photoniques.

3.2.1 Profil du champ

Les figures 3.6, 3.7 et 3.8 montrent le champ et sa norme, en vue de coupe du guide d'onde, pour les deux premiers modes vectoriels guidés par les fibres sans gaine, «assistée» et à cristaux photoniques, respectivement. Les traits pointillés représentent la position des trous, s'il y a lieu.

3.2.2 Biréfringence numérique

Vu la symétrie des différents guides, les constantes de propagation des modes orientés en x et y devraient normalement être identiques, et ces modes devraient être dégénérés. On s'attarde ici à la preuve de cette dégénérescence dans le cas des fibres «assistée» et à cristaux photoniques.

D'une part, on constate, pour chacun de ces guides, que le profil de la norme est identique pour les modes orientés selon x et y . Le champ de ces deux modes diffère donc *uniquement* par son orientation.

D'autre part, ces deux types de guides possèdent une symétrie de rotation de 60° , en vertu de la disposition hexagonale de leurs trous. Il existe donc deux directions non-colinéaires qui sont exactement équivalentes au niveau de la propagation, soit les vecteurs normalisés \hat{x} et $(\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y})$. Ces deux vecteurs étant linéairement indépendants, on peut donc exprimer tout vecteur du plan xy comme une combinaison linéaire de ces vecteurs de base.

Ainsi, en se basant sur ces deux faits (égalité des profils de norme et combinaison linéaire), on constate, pour chaque guide, que le champ vectoriel correspondant au mode de propagation orienté selon y est une combinaison linéaire de deux champs vectoriels, soit le mode de propagation orienté selon x et sa copie conforme orientée selon $(\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y})$. On conclut donc à la dégénérescence des modes propres orientés selon x et y , et à l'égalité de leurs indices effectifs, même lorsqu'il s'agit des modes propres de guides possédant des axes de symétrie autres que x et y .

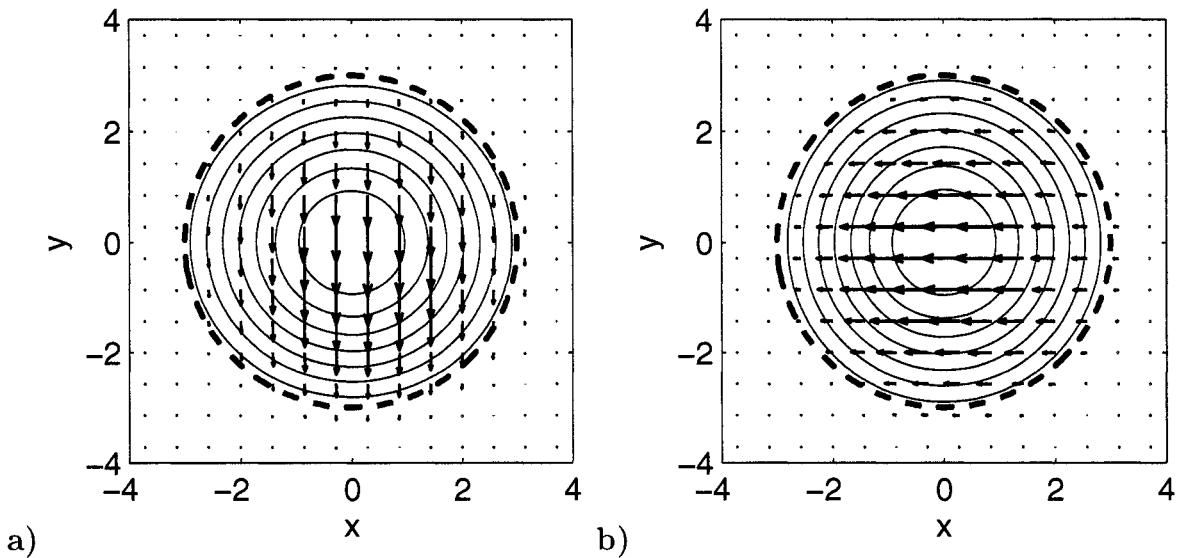


Figure 3.6 : Fibre sans gaine : **a)** mode fondamental orienté selon y ; **b)** mode fondamental orienté selon x .

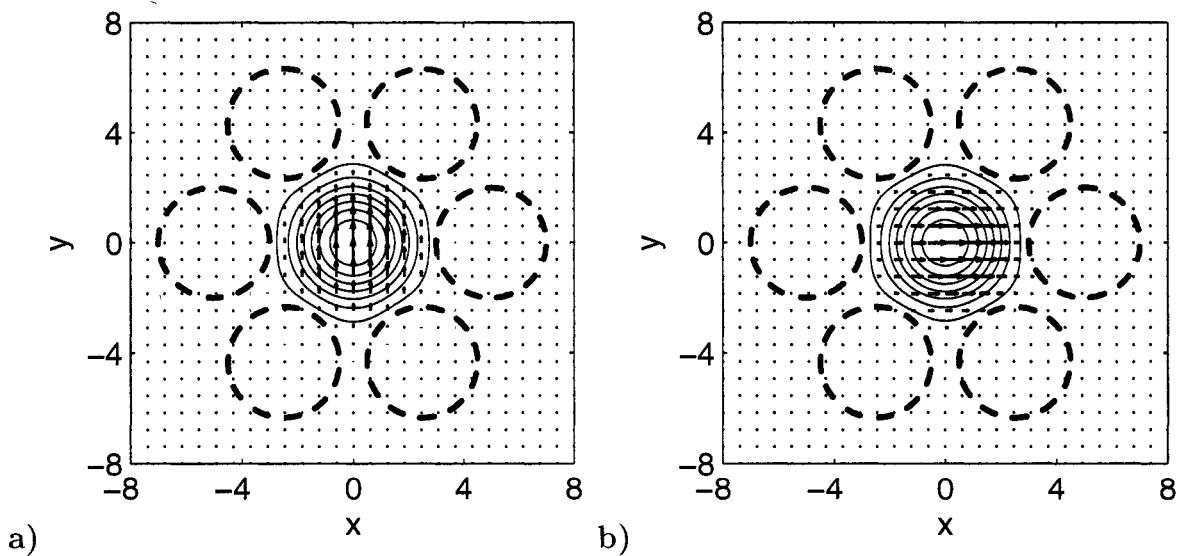


Figure 3.7 : Fibre assistée : **a)** mode fondamental orienté selon y ; **b)** mode fondamental orienté selon x .

Vu la dégénérescence des modes orientés selon x et y pour chaque guide, toute différence d'indice effectif entre ces derniers s'avère un artéfact numérique, que l'on nomme ici «biréfringence numérique», ou B ($B = n_{\text{eff}}^x - n_{\text{eff}}^y$, où n_{eff}^x et n_{eff}^y sont les indices effectifs des modes fondamentaux orientés selon x et y , respectivement). Cette quantité est comparée, à la figure 3.9, aux valeurs obtenues dans [Zhu & Brown 2002] pour chaque guide, en fonction du nombre de points de discrétisation. Dans cette même figure, les résultats du présent travail sont représentés par des cercles vides reliés par des pointillés.⁵

3.2.3 Comparaison des indices effectifs

En vertu de la dégénérescence démontrée à la section précédente, on peut donc utiliser, à des fins de comparaison des résultats avec la littérature, la moyenne des indices effectifs des modes orientés selon x et y , désignée n_{eff}^{xy} .

Or, dans le cas présent, on ne dispose pas d'une solution analytique avec laquelle comparer la valeur de n_{eff}^{xy} , mais plutôt d'un ensemble de références. Pour valider les résultats dans ces conditions, on utilise les concepts statistiques décrits ci-après.

Soit Q_{NUM} , la valeur numérique obtenue par simulation d'une certaine quantité Q , quantité que l'on veut comparer à une ou plusieurs valeurs de référence contenues dans un vecteur désigné REF . Dans le cas présent, la quantité Q correspond à n_{eff}^{xy} . On peut calculer la moyenne et la variance du vecteur REF , désignées respectivement $\langle \text{REF} \rangle$ et $\text{VAR}(\text{REF})$:

$$\langle \text{REF} \rangle = \frac{1}{M} \times \sum_{i=1}^{i=M} \text{REF}_i, \quad (3.3a)$$

$$\text{VAR}(\text{REF}) = \frac{1}{M} \times \sum_{i=1}^{i=M} [\text{REF}_i - \langle \text{REF} \rangle]^2, \quad (3.3b)$$

⁵Dans cette référence, les résultats ne sont disponibles que sous forme graphique : on génère donc une version transparente de ce graphique, que l'on superpose avec les résultats du présent travail.

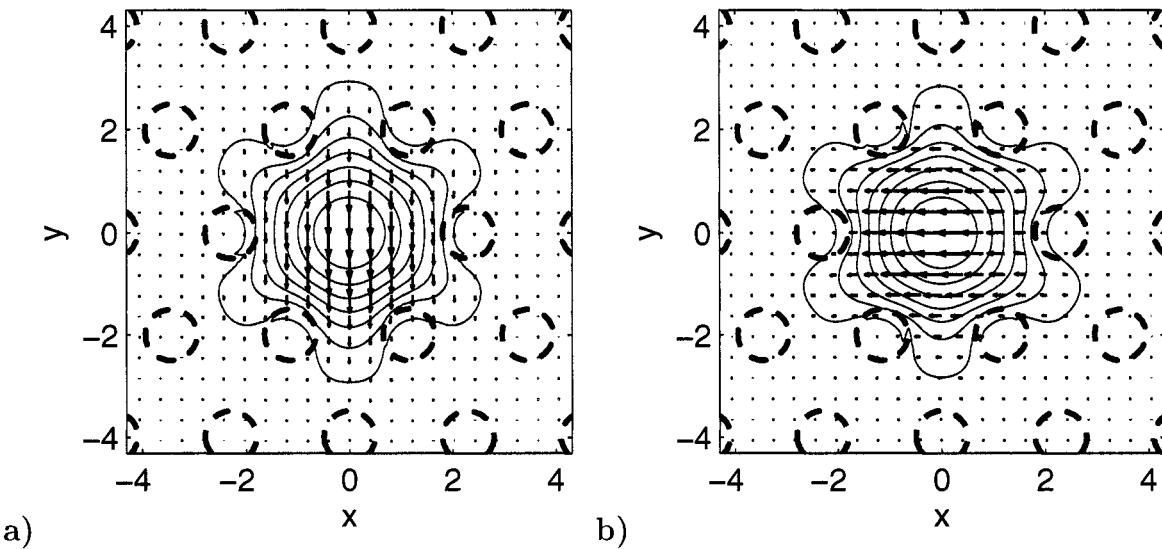


Figure 3.8 : Fibre à cristaux photoniques : **a)** mode fondamental orienté selon y ; **b)** mode fondamental orienté selon x .

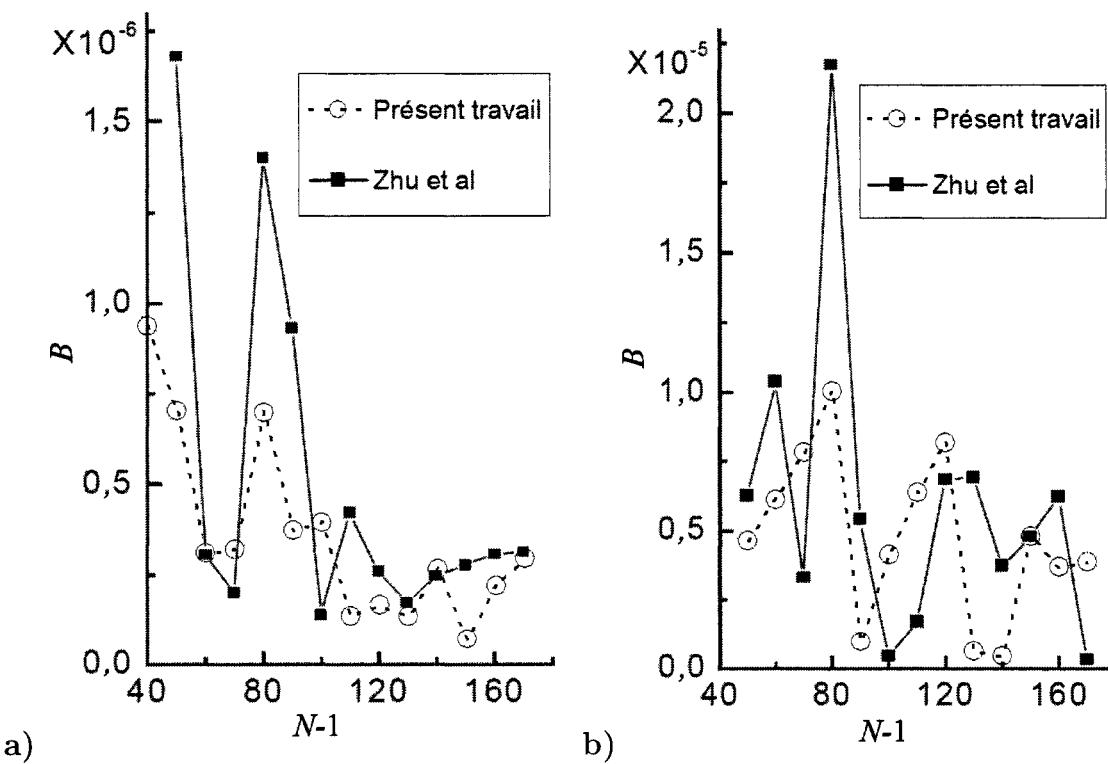


Figure 3.9 : Évolution de la biréfringence numérique : a) fibre assistée ; b) fibre à cristaux photoniques.

où REF_i est le i^{e} élément du vecteur REF , et M est le nombre de valeurs de référence dont on dispose.

Afin de valider les résultats, on définit ensuite deux quantités possédant les mêmes unités, soit l'écart relatif et l'écart-type normalisé des références, désignés respectivement δ et $\text{ETN}(\text{REF})$:

$$\delta = \left| \frac{(\text{Q}_{\text{NUM}} - \langle \text{REF} \rangle)}{\langle \text{REF} \rangle} \right|, \quad (3.4a)$$

$$\text{ETN}(\text{REF}) = \frac{\sqrt{\text{VAR}(\text{REF})}}{\langle \text{REF} \rangle}. \quad (3.4b)$$

Le tableau 3.6 présente deux paires de résultats pour chaque type de guide : d'abord, la valeur de n_{eff}^{xy} obtenue avec le présent algorithme accompagnée de la moyenne $\langle \text{REF} \rangle$ de trois références, soit [Zhu & Brown 2002], [Lüsse, Stuwe, Schüle & Unger 1994] et [Huang & Xu 1993] ; ensuite, la comparaison entre δ et $\text{ETN}(\text{REF})$.

Tableau 3.6 : Comparaison de n_{eff}^{xy} : fibres sans gaine, «assistée», et à cristaux photoniques.

Paramètre	Fibre sans gaine	... «assistée»	... à cristaux photoniques
n_{eff}^{xy}	1,438597650	1,435354235	1,428626251
$\langle \text{REF} \rangle$	1,438606667	1,435353133	1,428646667
δ	$6,3 \cdot 10^{-6}$	$7,7 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$
$\text{ETN}(\text{REF})$	$6,7 \cdot 10^{-6}$	$7,0 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$

3.2.4 Discussion

D'abord, on s'interroge sur les raisons de l'existence d'une biréfringence numérique non-nulle, mise en évidence à la figure 3.9. Celle-ci s'explique ainsi : vu la discréétisation selon x et y du profil d'indice de réfraction, propre à la méthode numérique

utilisée dans le présent travail, force est de constater que les directions \hat{x} et $(\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y})$ ne sont plus exactement équivalentes au niveau du profil d'indice. On assiste alors à une légère levée de la dégénérescence, d'où la biréfringence non-nulle. On constate d'ailleurs, à la figure 3.9, que cette biréfringence est comparable, quel que soit le nombre de points de discrétisation, à celle obtenue par [Zhu & Brown 2002], et ce autant pour la fibre «assistée» que pour la fibre à cristaux photoniques.

Ensuite, en ce qui a trait aux indices effectifs, on constate au tableau 3.6 que l'écart relatif δ est inférieur à la valeur de ETN(REF), cette dernière valeur étant environ 1,1, 9,1 et 2,4 fois plus élevée que δ pour la fibre sans gaine, la fibre «assistée» et la fibre à cristaux photoniques, respectivement. On peut comprendre pourquoi c'est la fibre «assistée» qui présente la meilleure précision : vu que le mode est principalement guidé par le faible saut d'indice entre le cœur et la gaine présent dans cette fibre, on évite les imprécisions inhérentes au fort saut d'indice entre la gaine et l'air, que la méthode numérique utilisée éprouve de la difficulté à bien représenter. La valeur de δ dans le cas des fibres sans gaine et à cristaux photoniques est semblable, le guidage de ces deux fibres étant caractérisé par un saut d'indice identique : elle est cependant plus élevée dans le cas de la fibre à cristaux photoniques, ce qui s'explique par le fait que ce dernier guide présente de fortes discontinuités d'indice aux abords de chaque trou, tandis que la fibre sans gaine ne les subit que sur une seule interface, d'où une meilleure précision des résultats.

Somme toute, l'algorithme du présent travail s'avère donc raisonnablement précis lors de simulations portant sur des fibres à saut d'indice très élevé, et à cristaux photoniques en particulier.

3.3 Fibres fusionnées

Une autre application de l'algorithme du présent travail réside dans la simulation de fibres fusionnées, présentes dans les coupleurs à fibres. Dans le cas présent, un

ensemble de deux fibres fusionnées, tiré de [Chiang, Chiou & Chang 2002] et dont les caractéristiques se retrouvent au tableau 3.7, a été simulé (Fig. 3.10). On peut supposer que ce profil d'indice corresponde à la partie centrale d'un coupleur à fibres, étant donné l'absence de cœurs proprement dits, et la présence d'air dans le voisinage immédiat de chaque fibre. Les caractéristiques de la fenêtre de calcul utilisée se retrouvent au tableau 3.8.

Tableau 3.7 : Paramètres des fibres fusionnées.

Paramètre	Valeur
r_{co}	11,54 μm
d	20,77654 μm
n_{co}	1,45

Tableau 3.8 : Paramètres de la fenêtre de calcul, fibres fusionnées.

Paramètre	Valeur
L	60,0 μm
N	641
Symétrie	Deux axes
Δ	0,046875 μm

Dans le tableau 3.7 et à la figure 3.10, le paramètre d représente le diamètre maximal du guide.⁶

Les simulations ont été effectuées à $\lambda_0 = 1,523 \mu\text{m}$.

⁶D'après ces caractéristiques, on peut déduire le degré de fusion f :

$$f = \frac{2r_{co} - d}{2(2 - \sqrt{2})r_{co}} \cong 0,3414.$$

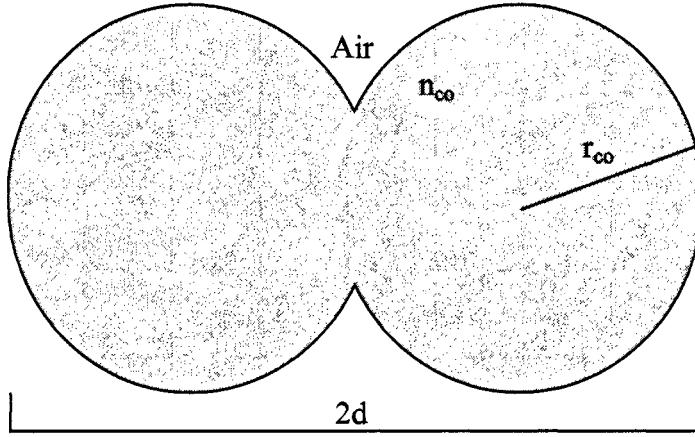


Figure 3.10 : Caractéristiques : fibres fusionnées.

3.3.1 Profil du champ

La figure 3.11 montre le champ et sa norme, en vue de coupe du guide d'onde, pour les quatre premiers modes vectoriels guidés. Les traits pointillés représentent l'interface cœur-gaine (ou encore : verre-air) du guide. On utilise la terminologie suivante pour les modes : $M_i^{\{e,o\}}$, où M désigne le mode lui-même, i indique l'orientation principale du champ (x ou y), e et o indiquent que la composante principale du champ est respectivement paire ou impaire.

3.3.2 Comparaison : indice effectif, «coefficient de couplage» et biréfringence de forme

En accord avec [Chiang *et al.* 2002], on définit le «coefficient de couplage» de la façon suivante :

$$C_i = k \cdot \frac{[n_{\text{eff}}(M_i^e) - n_{\text{eff}}(M_i^o)]}{2}, \quad i \in \{x, y\}, \quad (3.5)$$

où $n_{\text{eff}}(M_i^e)$ et $n_{\text{eff}}(M_i^o)$ sont les indices effectifs des modes M_i^e et M_i^o , respectivement, et $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

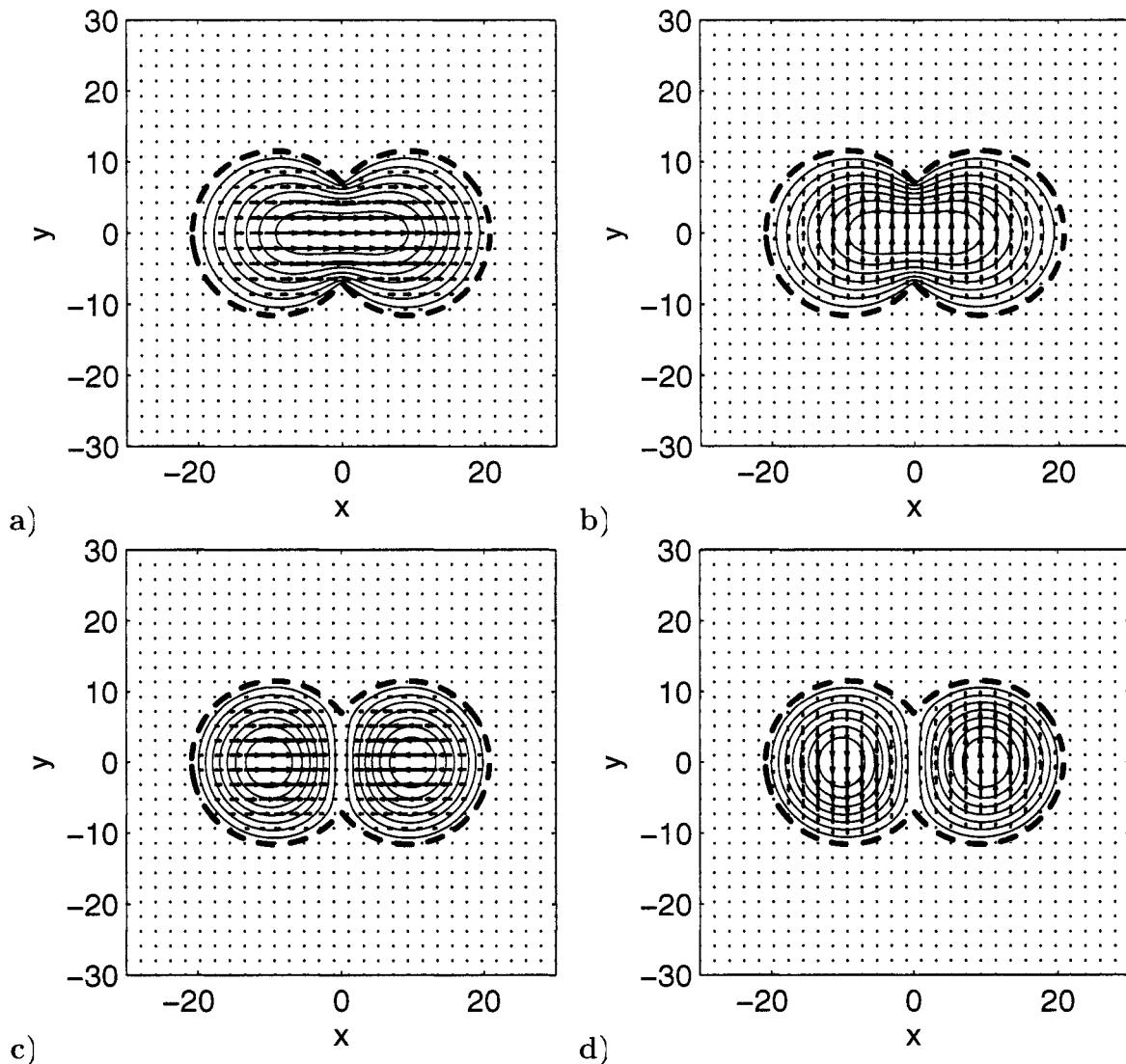


Figure 3.11 : Fibres fusionnées : a) mode M_x^e ; b) mode M_y^e ; c) mode M_x^o ; d) mode M_y^o .

La biréfringence de forme, quant à elle, est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{2}(kn_{\text{co}}r)^3}{\sqrt{n_{\text{co}}^2 - n_{\text{g}}^2}} \cdot [n_{\text{eff}}(M_x^e) - n_{\text{eff}}(M_x^o) + n_{\text{eff}}(M_y^o) - n_{\text{eff}}(M_y^e)] \\ &= \frac{k^2(\sqrt{2}n_{\text{co}}r)^3}{\sqrt{n_{\text{co}}^2 - n_{\text{g}}^2}} \cdot (C_x - C_y). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les tableaux 3.9 et 3.10 présentent la comparaison entre les résultats du présent travail (désignés par NUM) et ceux d'un ensemble de deux références (le vecteur REF), soit [Chiang *et al.* 2002] (méthode vectorielle par différences finies pour guides à saut d'indice) et [Yang & Chang 1998] (méthode des équations intégrales de surface), pour les valeurs d'indices effectifs, de coefficients de couplage et de biréfringence de forme.

Tableau 3.9 : Comparaison des indices effectifs, fibres fusionnées.

Mode	NUM	< REF >	δ	ETN(REF)
M_x^e	1,449353100	1,449234347	$8,2 \cdot 10^{-5}$	$7,9 \cdot 10^{-8}$
M_y^e	1,449348849	1,449229516	$8,2 \cdot 10^{-5}$	$5,1 \cdot 10^{-8}$
M_x^o	1,449080207	1,448911687	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$
M_y^o	1,449077845	1,448908812	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$

Tableau 3.10 : Comparaison des «coefficients de couplage» et de la biréfringence de forme, fibres fusionnées.

	NUM	< REF >	δ	ETN(REF)
C_x	$5,6291 \cdot 10^{-4}$	$5,6259 \cdot 10^{-4}$	$5,7 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$
C_y	$5,5902 \cdot 10^{-4}$	$5,5916 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$
B	0,838	0,738	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$

3.3.3 Discussion

Une première analyse porte sur le profil des différents modes guidés. La figure 3.11 témoigne de l'influence de la forme du guide sur l'orientation du champ. En effet, bien que ce guide soit fait de matériau isotrope, son absence de symétrie circulaire favorise le guidage de certaines orientations du champ, soit x et y dans le cas présent, au détriment des autres. De plus, le bris de symétrie circulaire signifie que les directions x et y ne sont plus équivalentes au niveau de leurs caractéristiques de propagation, d'où une différence entre les indices effectifs des modes orientés selon x et y . C'est cette différenciation des indices effectifs selon x et y , causée par l'absence de symétrie circulaire, que l'on nomme *biréfringence de forme*. On constate cependant que le profil de la norme du champ est, quant à lui, indépendant de l'orientation de ce dernier.

Une seconde analyse porte sur la valeur des indices effectifs, des coefficients de couplage et de la biréfringence de forme obtenues par l'algorithme du présent travail, comparées à celles de [Chiang *et al.* 2002] et [Yang & Chang 1998], aux tableaux 3.9 et 3.10. En ce qui a trait aux indices effectifs, on constate que la valeur de δ est de plusieurs ordres de grandeur supérieure à la valeur de ETN(REF). Considérant qu'à la section précédente, l'algorithme a pu simuler avec succès un guide présentant des variations d'indice de réfraction comparables, on doit s'interroger sur la présence d'un si grand écart relatif dans le cas présent. On n'a qu'à observer la figure 3.12, qui présente le champ magnétique longitudinal du mode M_x^e , pour se rendre compte d'un problème de précision numérique : bien que la variation du champ électrique transverse soit faible aux interfaces verre-air communes aux deux fibres, la variation du champ magnétique longitudinal, elle, y est énorme,⁷ d'où la forte concentration de

⁷Ce phénomène est en fait un artefact numérique dû à la présence à cet endroit d'une interface en pointe présentant un rayon de courbure nul. En pratique cependant, la jonction entre deux fibres est soumise, lors de la fusion, à une tension de surface qui a pour effet de lisser ces pointes, leur redonnant un rayon de courbure non-nul. On peut donc s'attendre à de bien meilleurs résultats lors de simulations portant sur des profils d'indice réels.

courbes de niveaux à ces deux endroits.

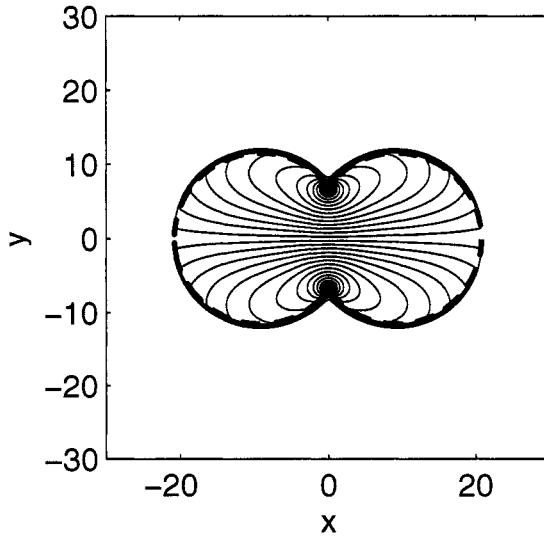


Figure 3.12 : Fibres fusionnées : profil de h_z pour le mode M_x^e .

On doit donc forcément représenter cette région du guide avec une résolution spatiale d'autant plus fine que les variations du champ longitudinal y sont élevées. Ainsi, en plus de la nécessité de considérer une fenêtre de calcul très large pour bien simuler ce guide, on doit aussi s'assurer d'une très grande résolution à certains endroits. Contrairement à celui de la référence, l'algorithme du présent travail est basé sur une discrétisation uniforme : on doit donc utiliser un très grand nombre de points pour obtenir une précision satisfaisante, rendant prohibitif le temps de calcul. Cette étude lève donc le voile sur un désavantage majeur de la méthode par différences finies à discrétisation uniforme.

Malgré cette relative imprécision sur la valeur des différents indices effectifs, on constate que l'écart relatif est toujours de même signe, en plus d'être de valeur comparable pour ces quatre modes. Ainsi, la soustraction des indices requise par le calcul des coefficients de couplage C_x et C_y a pour effet de diminuer la valeur de δ qui leur est rattachée. En effet, on constate au tableau 3.10 que cette dernière valeur est,

cette fois-ci, fort comparable à la valeur de ETN(REF).

Finalement, la biréfringence B ne jouit pas d'une telle réduction de la valeur de δ . En fait, vu que B s'obtient par soustraction des coefficients de couplage C_x et C_y , et que les valeurs de δ rattachées à ces deux quantités sont de signe opposé, on se retrouve avec une valeur de B relativement imprécise : l'écart relatif s'avère, cette fois, dix fois plus élevé que la valeur de ETN(REF). La biréfringence de forme est cependant une quantité qui est extrêmement sensible aux imprécisions sur les indices effectifs des quatre modes fondamentaux de ce guide fort et, comme on vient de le voir, ces indices sont invariablement destinés à être imprécis. Un écart relatif de 10% sur la valeur de B s'avère donc, somme toute, satisfaisante.

3.4 Guide rectangulaire anisotrope

Une caractéristique non-négligeable de l'algorithme du présent travail réside dans sa capacité de tenir compte de la nature tensorielle de la permittivité électrique d'un guide anisotrope, même lorsque ce tenseur est non-diagonal. Pour en faire la démonstration, on effectue ici la simulation d'un guide diélectrique rectangulaire dont l'indice de réfraction vaut n_o dans les directions c et z (indice *ordinaire*), et n_e dans la direction $c \times z$ (indice *extraordinaire*). La direction c forme un angle θ avec l'axe des x (où θ suit la convention de la main droite). La gaine, d'indice n_g , est quant à elle isotrope. Ce guide est tiré de [Koshiba, Hayata & Suzuki 1984], ses caractéristiques se retrouvent au tableau 3.11 et il est présenté à la figure 3.13. La fenêtre de calcul utilisée pour simuler ce guide est décrite au tableau 3.12.

Tableau 3.11 : Paramètres du guide rectangulaire anisotrope.

Paramètre	Valeur
t	$1,0 \mu\text{m}$
W	$2,0 \mu\text{m}$
θ	45°
n_o	$\sqrt{2,31} (\cong 1,5198684)$
n_e	$\sqrt{2,19} (\cong 1,4798648)$
n_g	$\sqrt{2,05} (\cong 1,4317821)$

Tableau 3.12 : Paramètres de la fenêtre de calcul, guide rectangulaire anisotrope.

Paramètre	Valeur
L	$8,0 \mu\text{m}$
N	321
Symétrie	Aucune
Δ	$0,025 \mu\text{m}$

En coordonnées cartésiennes, le tenseur $[\epsilon_r]$ prend la forme suivante dans le cœur, tel que démontré à l'annexe A :

$$[\epsilon_r] (\theta, n_o, n_e) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta)n_o^2 + \sin^2(\theta)n_e^2 & \cos(\theta)\sin(\theta)(n_o^2 - n_e^2) & 0 \\ \cos(\theta)\sin(\theta)(n_o^2 - n_e^2) & \sin^2(\theta)n_o^2 + \cos^2(\theta)n_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_o^2 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

et avec $\theta = 45^\circ$, on obtient :

$$[\epsilon_r] = \begin{bmatrix} 2,25 & 0,06 & 0 \\ 0,06 & 2,25 & 0 \\ 0 & 0 & 2,31 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

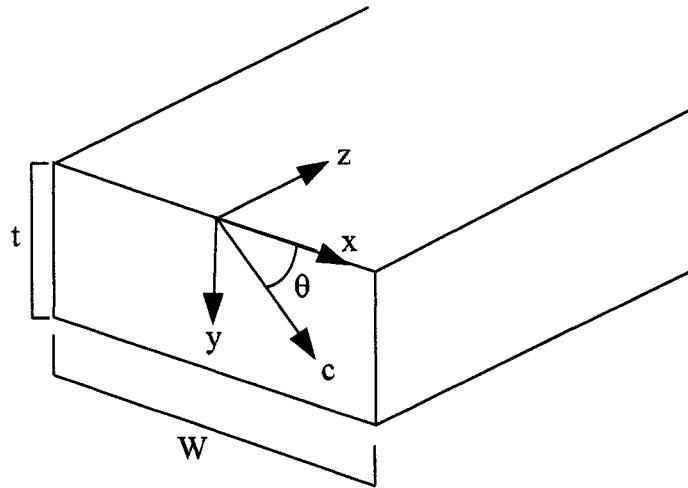


Figure 3.13 : Caractéristiques : guide rectangulaire anisotrope.

3.4.1 Profil du champ

Pour cette étude, on fait décroître λ_0 , et on suit la progression des quatre premiers modes à être guidés au fil de cette décroissance, nommés ici modes «fondamentaux». La nomenclature de ces modes respecte celle de [Koshiba *et al.* 1984]. La figure 3.14 montre le champ et sa norme, en vue de coupe du guide d'onde, pour ces quatre modes, à $\lambda_0 = 0,418879 \mu\text{m}$.⁸ Les traits pointillés représentent l'interface cœur-gaine du guide.

3.4.2 Comparaison des indices effectifs

Afin d'évaluer la validité de l'approche tensorielle du présent algorithme, la figure 3.15 présente le carré de l'indice effectif pour les quatre modes «fondamentaux» du présent guide, pour différentes valeurs de k . Les résultats obtenus par le présent algorithme, représentés par des losanges vides, sont comparés à ceux obtenus par

⁸Il est à noter que les modes sont présentés dans leur ordre d'apparition en fonction de la décroissance de λ_0 , et non en ordre décroissant d'indice effectif à $\lambda_0 = 0,418879$.

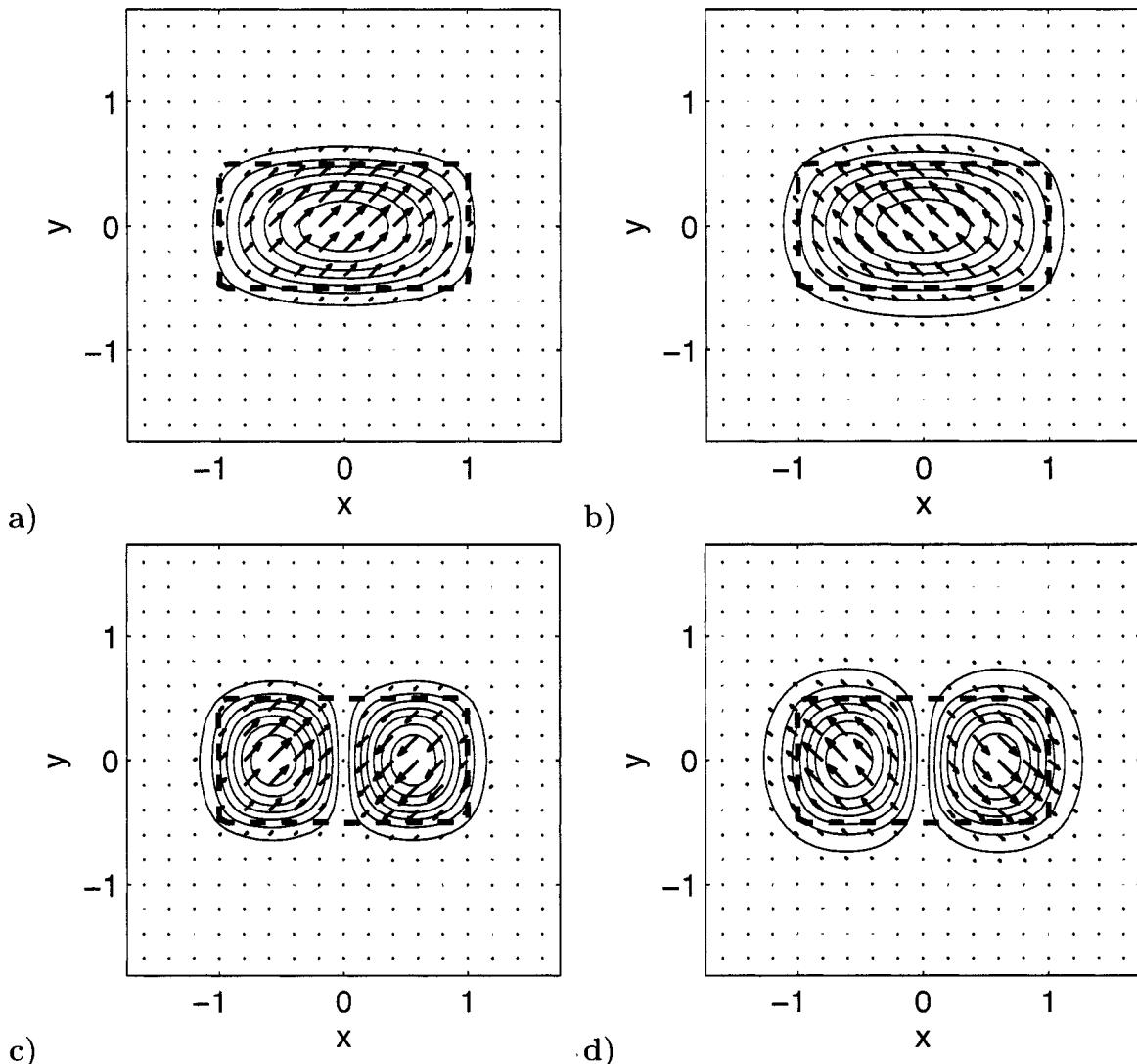


Figure 3.14 : Guide rectangulaire anisotrope, modes «fondamentaux» : a) E_{11}^x ; b) E_{11}^y ; c) E_{21}^x ; d) E_{21}^y .

[Koshiba *et al.* 1984] (trait continu, méthode scalaire par éléments finis) et par la méthode variationnelle [Ohtaka 1981] (cercles pleins).⁹

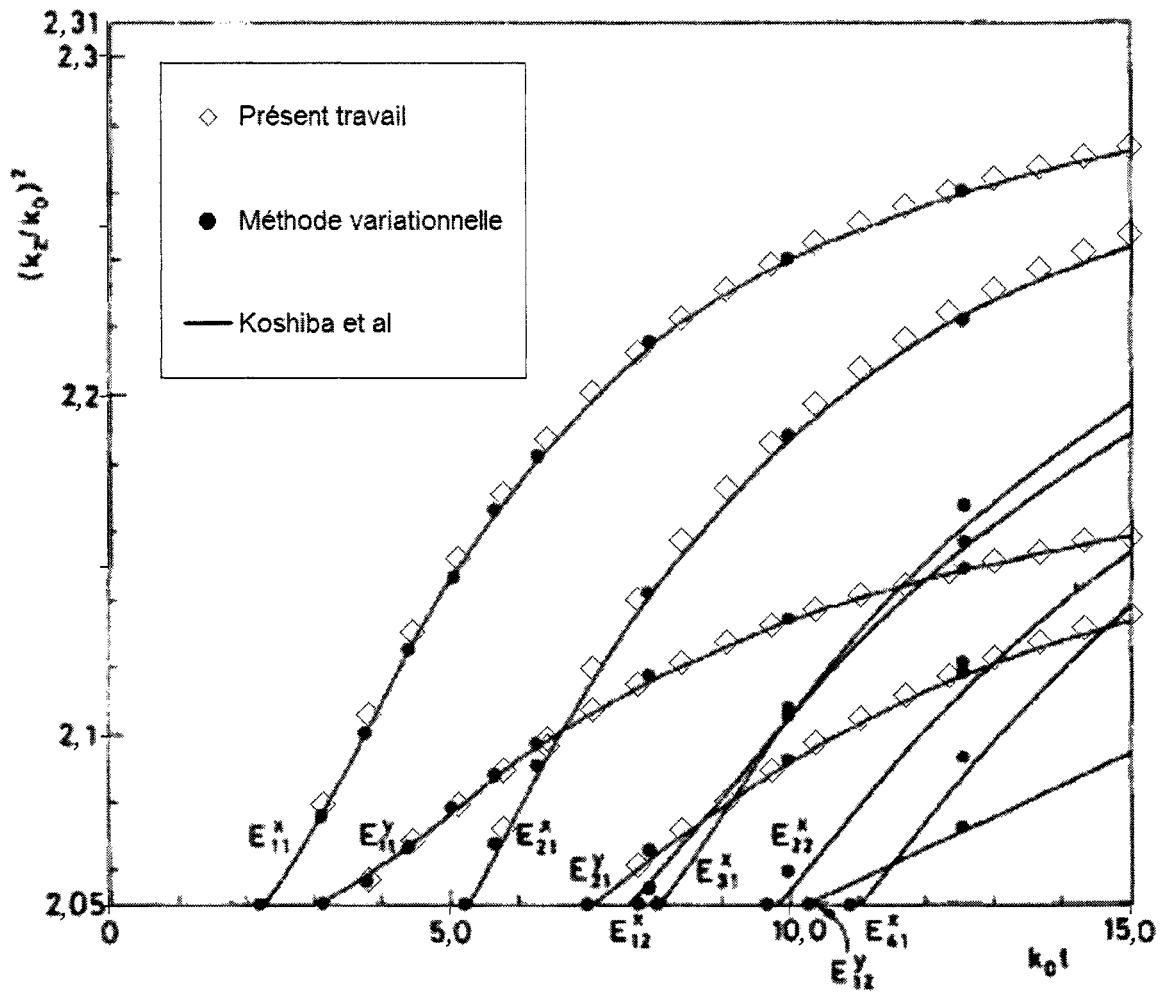


Figure 3.15 : Guide rectangulaire anisotrope : comparaison de n_{eff}^2 (désigné $(k_z/k_0)^2$) en fonction de $k_0 t$, pour $t = 1 \mu\text{m}$.

⁹Encore une fois, la comparaison des résultats se fait de façon graphique, comme à la section 3.2.2.

3.4.3 Discussion

En premier lieu, on peut commenter sur le profil des champs des quatre modes «fondamentaux» de ce guide anisotrope. D'abord, bien que la forme rectangulaire du guide puisse favoriser les orientations selon x et y du champ, ce n'est pas le cas ici. En effet, selon la figure 3.14, le champ semble plutôt adopter l'orientation correspondant aux axes préférentiels du milieu anisotrope, soit 45° par rapport à l'axe des x . Ainsi, dans ce cas, ce sont les propriétés intrinsèques du matériau dont le guide est formé, sous la forme du tenseur $[\epsilon_r]$, qui prennent le dessus sur la forme de ce même guide. Ce constat prouve que la nature tensorielle de la permittivité électrique du matériau est bel et bien considérée dans la résolution des modes propres de ce guide anisotrope. Pour sa part, le profil de la norme du champ s'avère dicté par la forme du guide, et par sa forme uniquement : en effet, ce profil présente deux axes de symétrie, soit x et y , lesquels correspondent bien à la symétrie de la *forme* du guide, malgré le fait que la nature du tenseur $[\epsilon_r]$ de ce dernier vienne briser sa symétrie globale.

En second lieu, on constate, à la figure 3.15, que la valeur du carré de l'indice effectif des quatre modes «fondamentaux» de ce guide anisotrope correspond fort bien à celle trouvée dans [Koshiba *et al.* 1984], pour toutes les longueurs d'onde à l'étude, soit de $\lambda_0 = 0,41887902 \mu\text{m}$ à $\lambda_0 = 2,513274123 \mu\text{m}$.

Ces résultats démontrent que l'algorithme du présent travail peut correctement simuler les modes propres vectoriels d'un guide anisotrope dont le tenseur $[\epsilon_r]$ est non-diagonal.

3.5 Fibres anisotropes fusionnées non-alignées

Ayant validé les résultats obtenus grâce à l'algorithme du présent travail par comparaison avec la littérature pour différents types de guides d'onde, on peut maintenant s'aventurer à obtenir les caractéristiques de propagation d'un guide imaginaire, soit un ensemble de deux fibres circulaires fusionnées, chaque fibre étant anisotrope. Les deux

fibres considérées présentent les mêmes valeurs d'indice ordinaire et extraordinaire ; elles sont cependant fixées l'une à l'autre de façon telle que leurs axes préférentiels ne soient pas co-linéaires (Fig. 3.16). Ce guide d'onde a la particularité suivante : il n'existe aucun référentiel d'axes xy tel que sa permittivité électrique puisse être représentée partout par un tenseur diagonal. En effet, si l'on oriente le guide pour aligner l'axe préférentiel de la fibre de gauche avec un certain référentiel xy , le tenseur $[\epsilon_r]$ est diagonal dans cette partie du guide, mais non dans la partie de droite, et vice-versa. Des simulations sur un tel guide ont ainsi pour objet de démontrer la réelle pertinence de la formulation pour tenseurs $[\epsilon_r]$ non-diagonaux présentée dans ce travail.

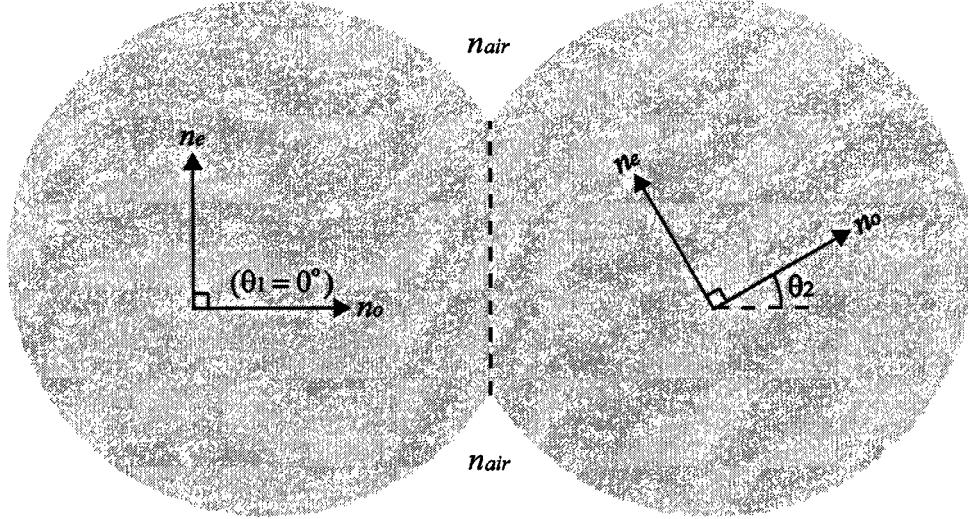


Figure 3.16 : Caractéristiques : fibres anisotropes fusionnées à axes préférentiels non-alignés.

Pour cette étude, on calque les dimensions du guide présenté à la section 3.3, et l'on exprime cette fois sa permittivité électrique relative comme un tenseur dont l'expression générale se retrouve à l'équation (3.7).

Plus précisément, $[\epsilon_r]$ prend ici la forme suivante :

$$[\epsilon_r] = \begin{cases} [\epsilon_r](\theta_1, n_o, n_e), & \forall x < 0, \\ [\epsilon_r](\theta_2, n_o, n_e), & \forall x \geq 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

où $n_e = \sqrt{2,1025} = 1,45$ et $n_o = \sqrt{4,205} \cong 2,050609665$.

La présente étude consiste à simuler les quatre premiers modes de ce guide, en posant toujours $\theta_1 = 0$, mais en utilisant, tour à tour, chacune des valeurs de θ_2 suivantes : $\theta_2 \in \{0^\circ ; 15^\circ ; 30^\circ ; 45^\circ ; 60^\circ ; 75^\circ ; 90^\circ\}$. Pour simuler ce guide, une fenêtre de calcul dont les caractéristiques sont présentées au tableau 3.13 est utilisée.

Tableau 3.13 : Paramètres de la fenêtre de calcul, fibres anisotropes fusionnées non-alignées.

Paramètre	Valeur
L	$60,0 \mu\text{m}$
N	321
Symétrie	Aucune
Δ	$0,1875 \mu\text{m}$

Toutes les simulations ont été effectuées à $\lambda_0 = 1,523 \mu\text{m}$.

3.5.1 Profil du champ

Les figures 3.17 à 3.23 montrent le champ et sa norme, en vue de coupe du guide d'onde, pour les quatre premiers modes guidés, ce pour différentes valeurs de l'angle θ_2 . Les traits pointillés représentent l'interface cœur-gaine (ou verre-air) du guide.

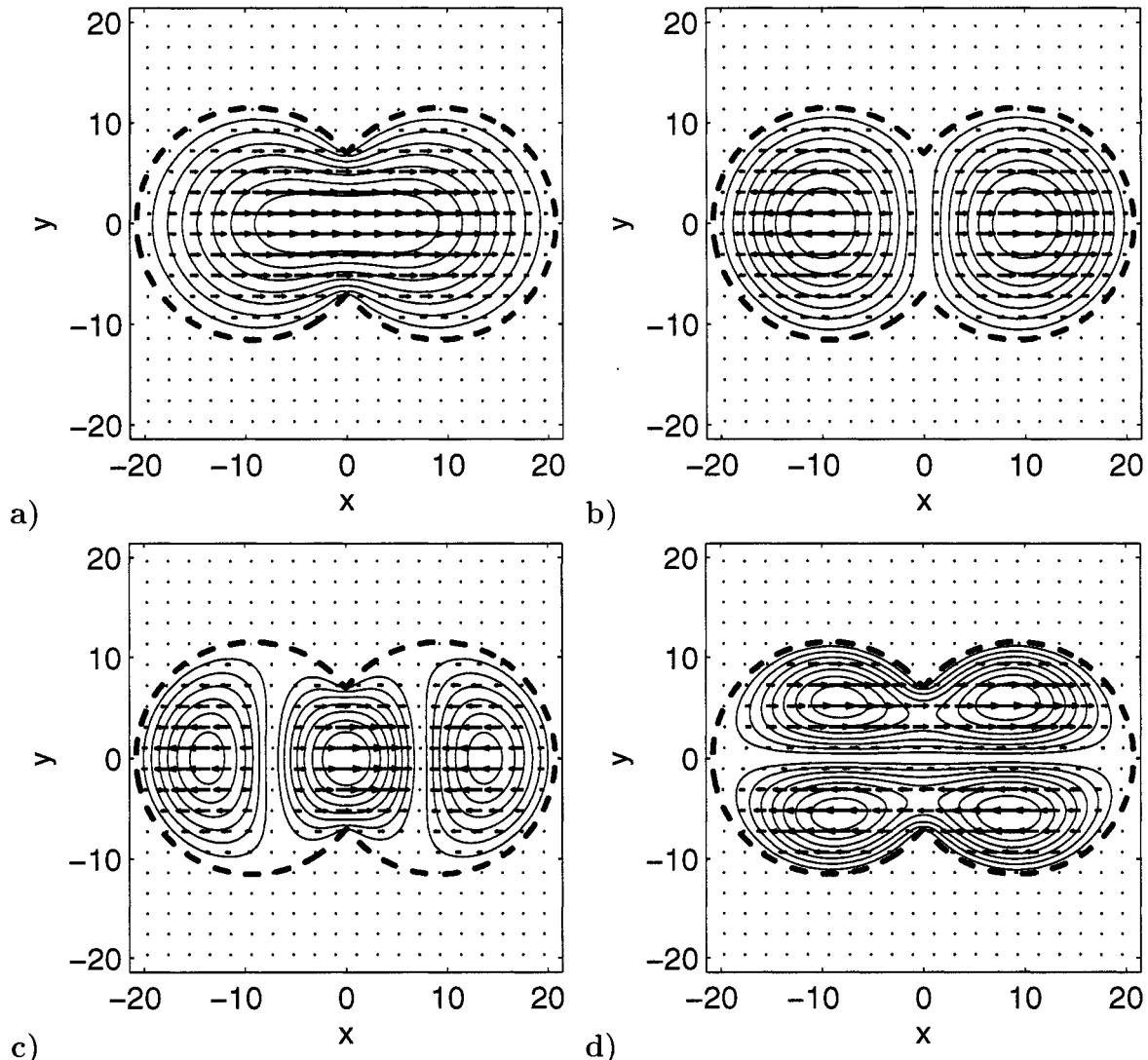


Figure 3.17 : Fibres fusionnées anisotropes non-alignées où $\theta_2 = 0^\circ$: a) mode 1 ; b) mode 2 ; c) mode 3 ; d) mode 4.

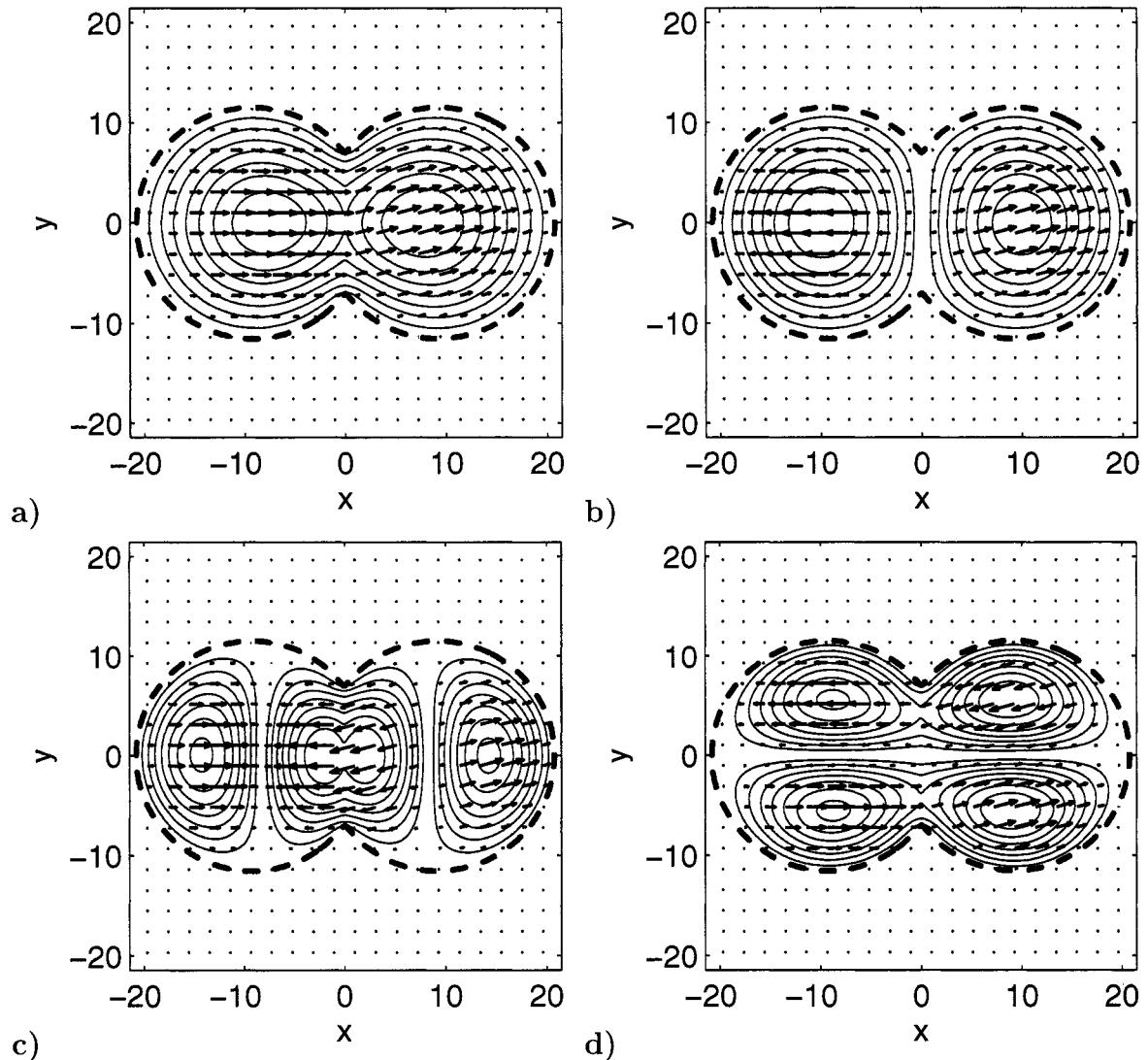


Figure 3.18 : Fibres fusionnées anisotropes non-alignées où $\theta_2 = 15^\circ$: a) mode 1 ; b) mode 2 ; c) mode 3 ; d) mode 4.

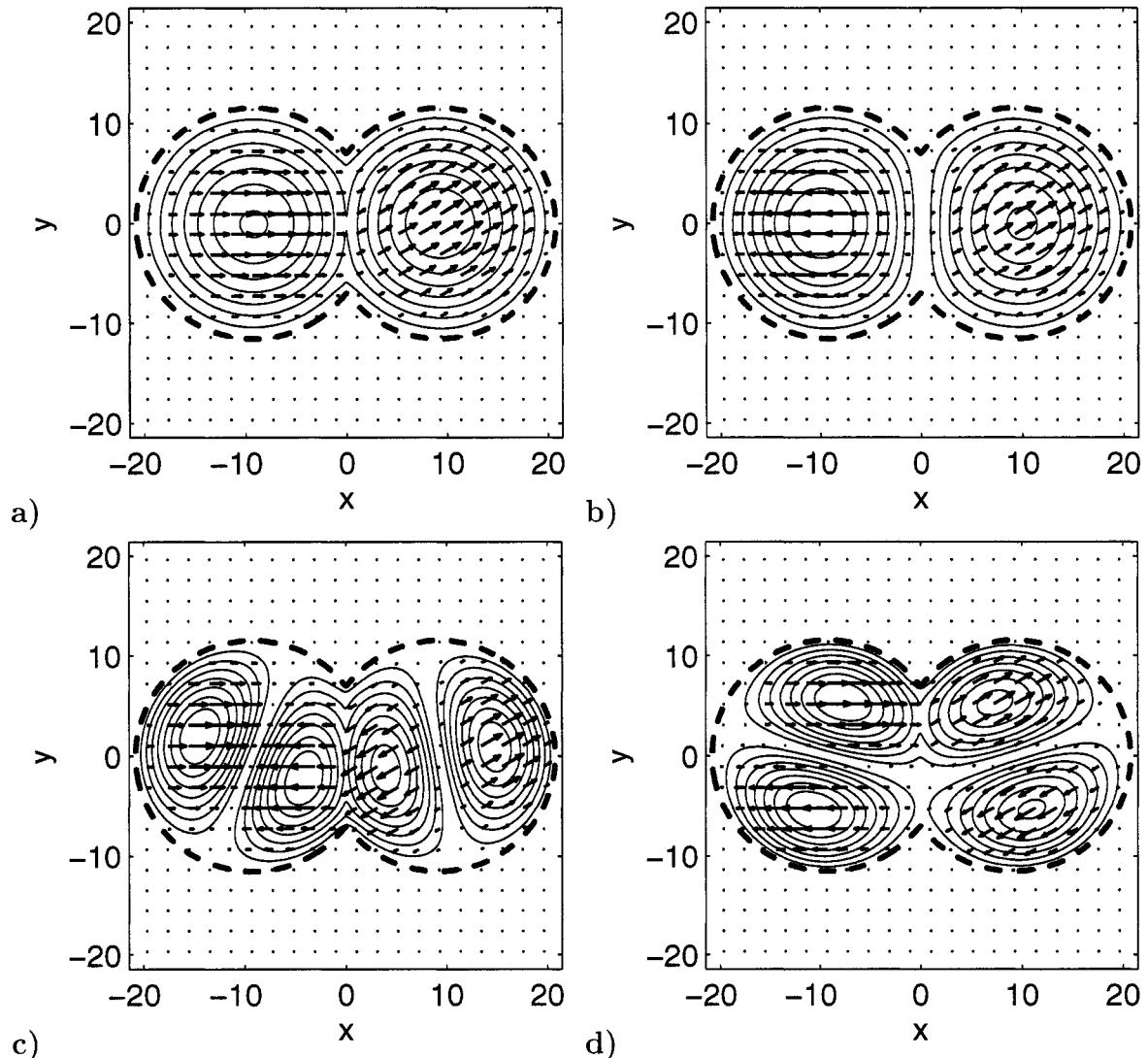


Figure 3.19 : Fibres fusionnées anisotropes non-alignées où $\theta_2 = 30^\circ$: a) mode 1 ; b) mode 2 ; c) mode 3 ; d) mode 4.

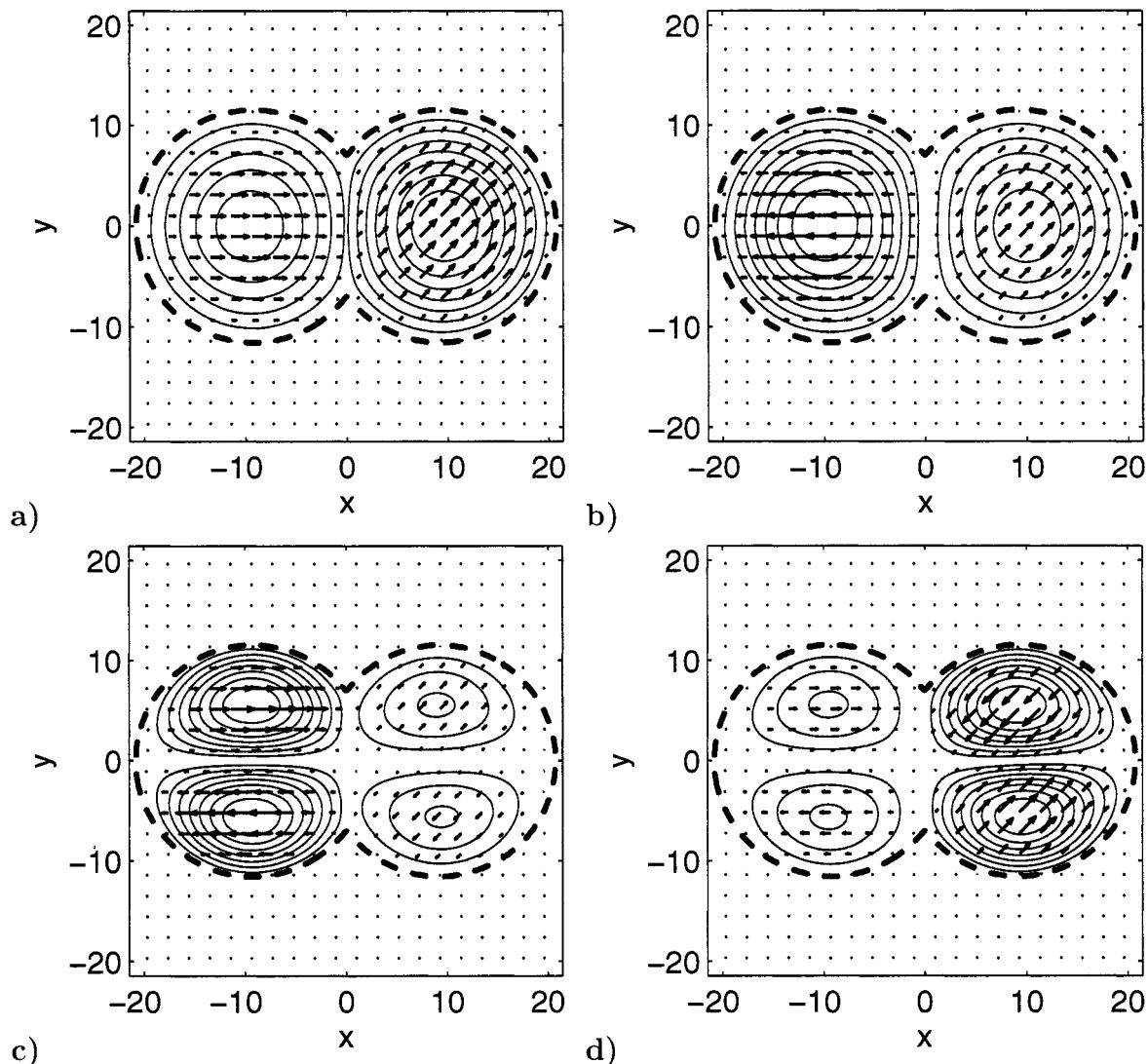


Figure 3.20 : Fibres fusionnées anisotropes non-alignées où $\theta_2 = 45^\circ$: a) mode 1 ; b) mode 2 ; c) mode 3 ; d) mode 4.

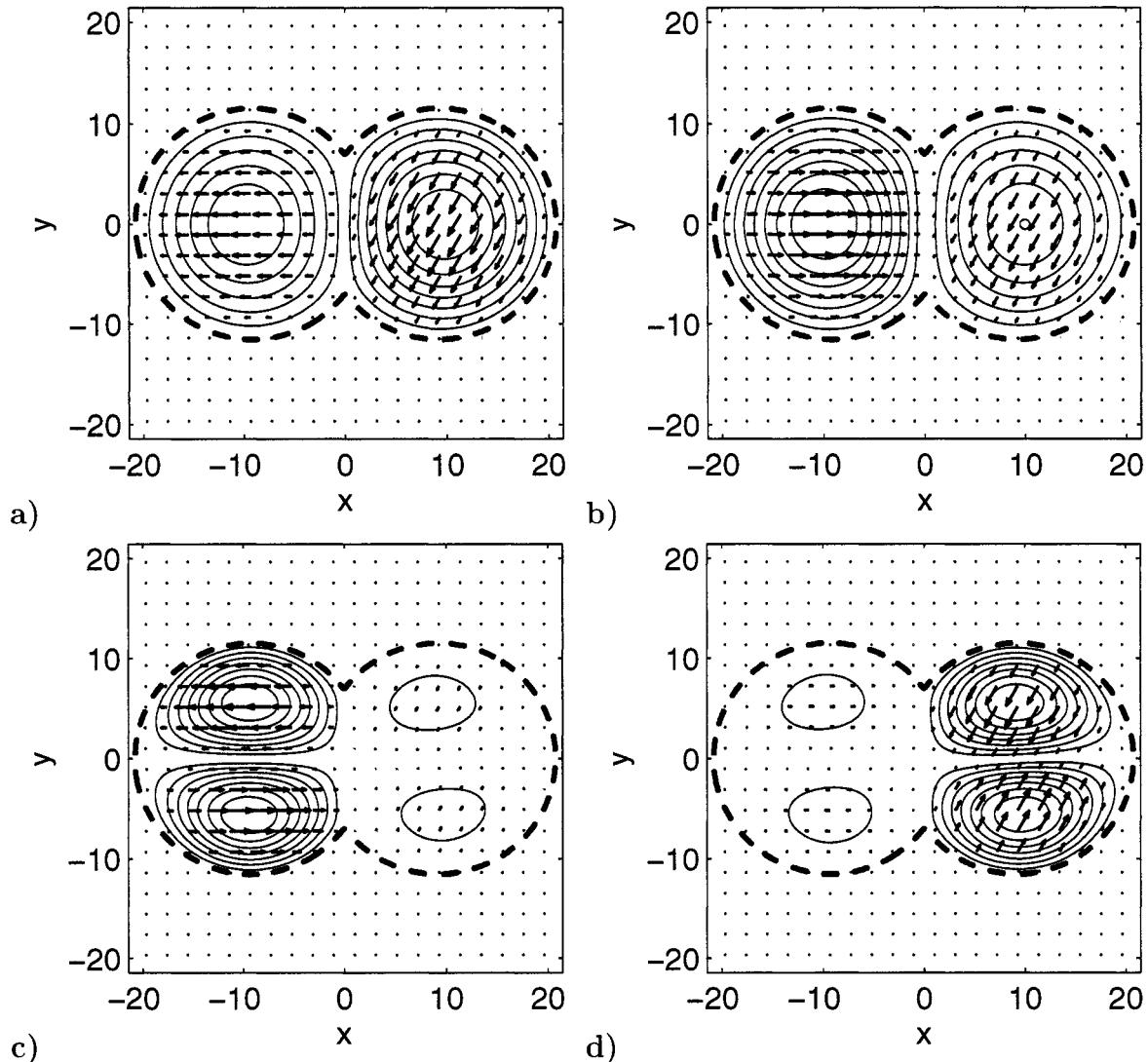


Figure 3.21 : Fibres fusionnées anisotropes non-alignées où $\theta_2 = 60^\circ$: a) mode 1 ; b) mode 2 ; c) mode 3 ; d) mode 4.

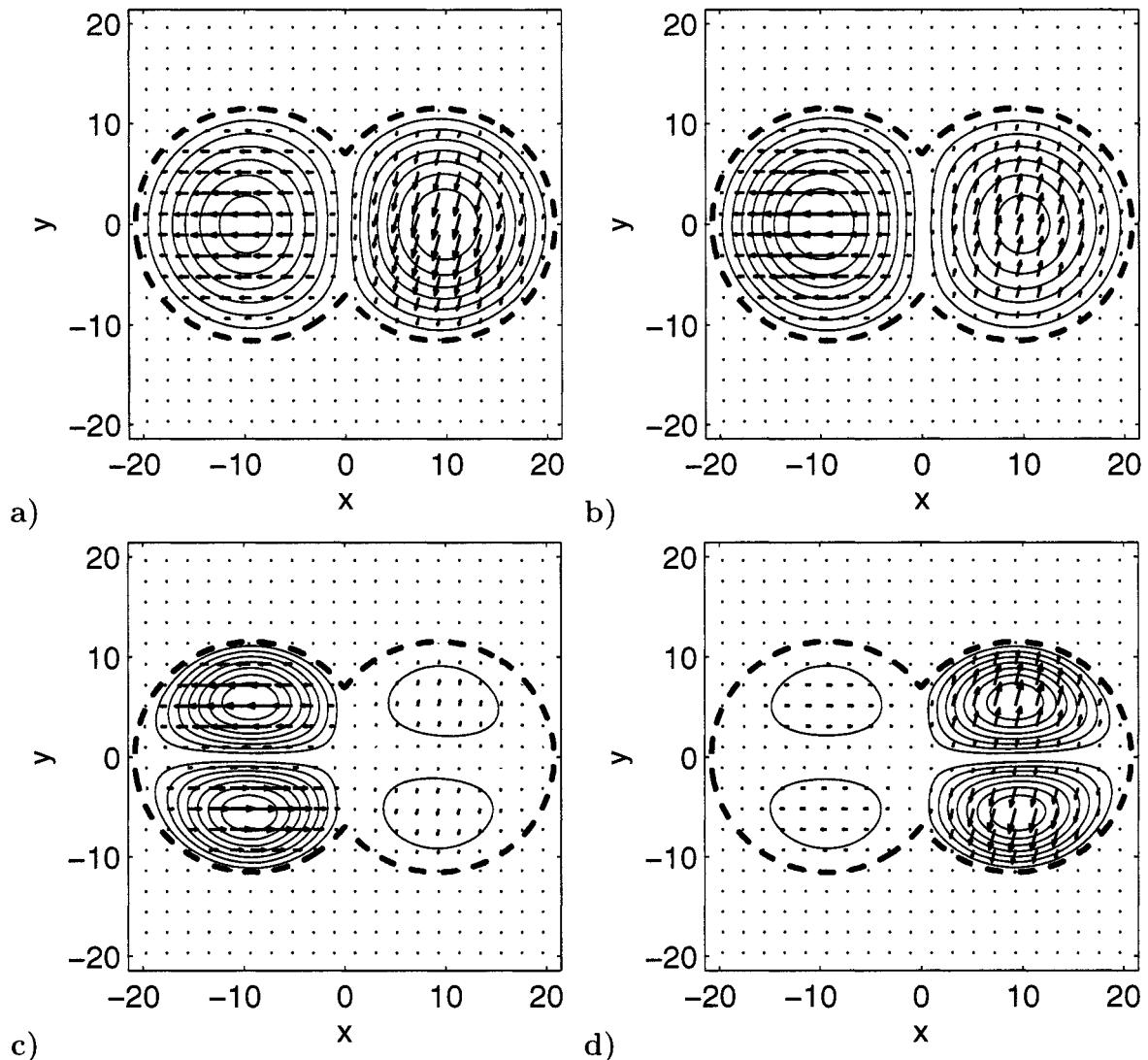


Figure 3.22 : Fibres fusionnées anisotropes non-alignées où $\theta_2 = 75^\circ$: a) mode 1 ; b) mode 2 ; c) mode 3 ; d) mode 4.

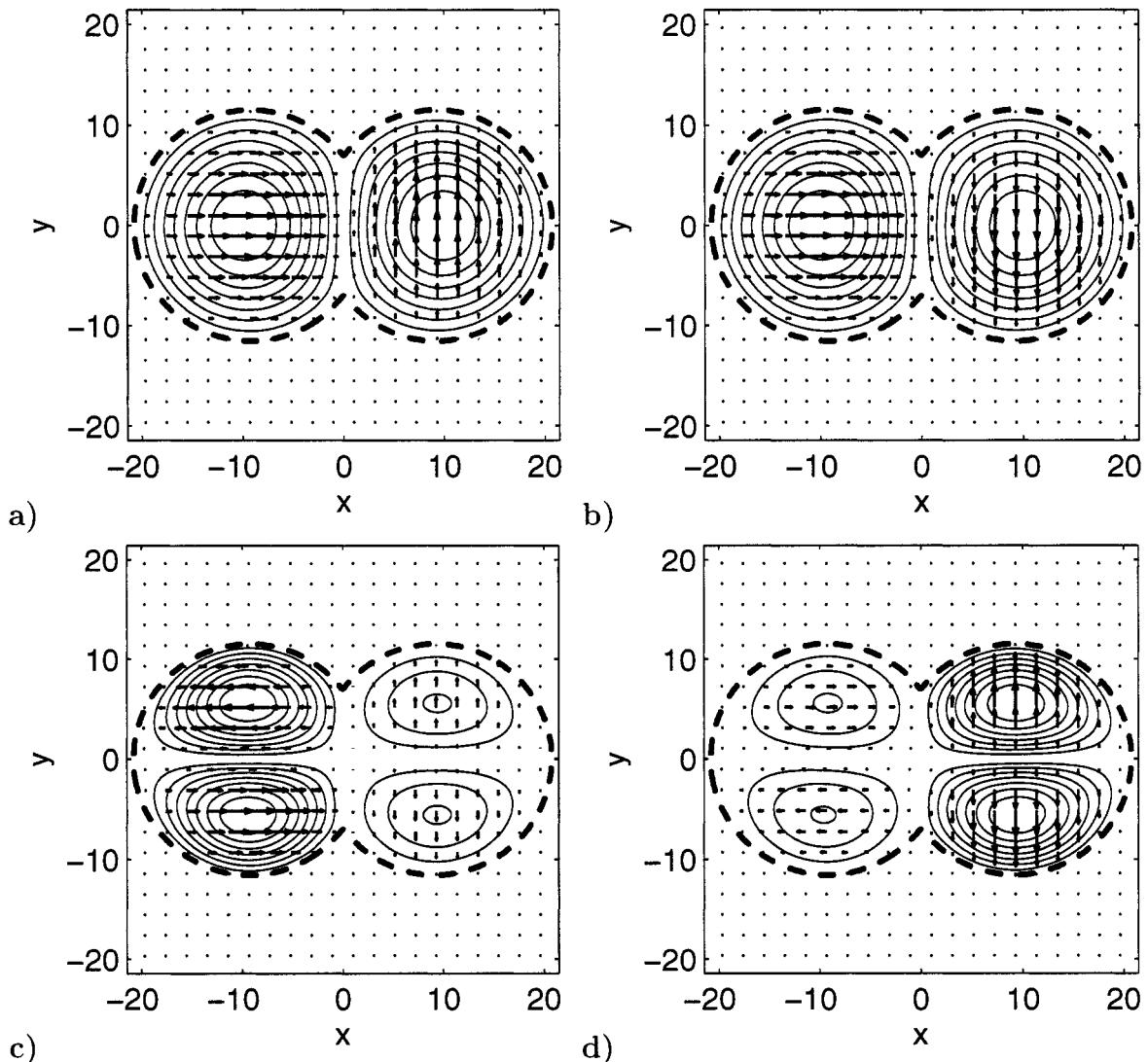


Figure 3.23 : Fibres fusionnées anisotropes non-alignées où $\theta_2 = 90^\circ$: a) mode 1 ; b) mode 2 ; c) mode 3 ; d) mode 4.

3.5.2 Progression des indices effectifs

Le tableau 3.14 montre la progression en fonction de l'angle θ_2 de l'indice effectif des quatre modes fondamentaux du guide à l'étude, tandis que la figure 3.24 présente ces résultats de façon graphique.

Tableau 3.14 : Indices effectifs des quatre premiers modes guidés en fonction de θ_2 , fibres anisotropes fusionnées non-alignées.

θ_2 ($^{\circ}$)	n_{eff}^1	n_{eff}^2	n_{eff}^3	n_{eff}^4
0	2,050147991691	2,049951645069	2,049422247582	2,049130887374
15	2,050065584967	2,049951712295	2,049255796333	2,049098391209
30	2,049997618134	2,049951994391	2,049040468290	2,049064322049
45	2,049972434908	2,049952746547	2,049048726432	2,049035383579
60	2,049962619778	2,049952965801	2,049042306034	2,049032981482
75	2,049957825978	2,049953736450	2,049038854909	2,049031721556
90	2,049955216130	2,049955214971	2,049038286042	2,049030832086

3.5.3 Discussion

À partir des figures 3.17 à 3.23, on se penche d'abord sur la progression des modes 1 et 2. À $\theta_2 = 0$, on reconnaît dans ces deux modes le profil des modes M_x^e et M_x^o de la section 3.3. D'ailleurs, on remarque que le second mode guidé n'est plus M_y^e comme dans le cas isotrope, mais bien M_x^o . On explique ce fait par la forte anisotropie du présent guide ($\frac{n_x^2}{n_e^2} = \frac{n_x^2}{n_y^2} = 2$), qui favorise la propagation des modes orientés selon x plutôt que selon y .¹⁰

De $\theta_2 = 0^{\circ}$ à $\theta_2 = 45^{\circ}$ environ, on constate un affaissement graduel de la norme du champ près de la jonction entre les fibres pour le mode 1, tandis que le mode 2

¹⁰Il a été établi, par exemple, que les modes en y n'apparaissent toujours pas même après le 20^e mode.

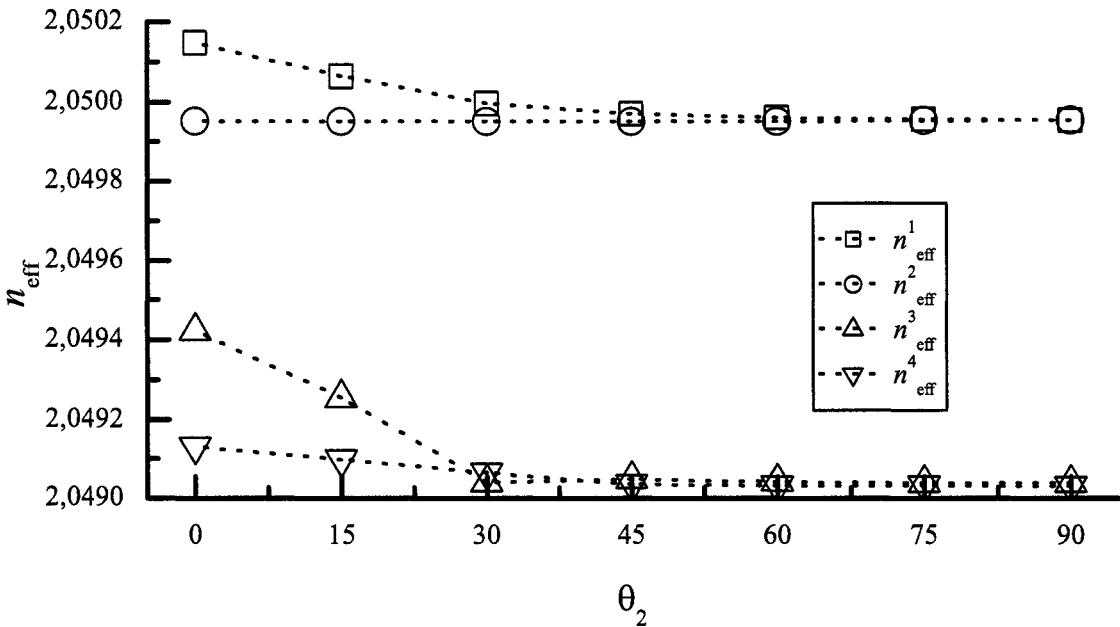


Figure 3.24 : Fibres fusionnées anisotropes non-alignées : progression en fonction de θ_2 de l'indice effectif des quatre premiers modes guidés, identifiés en médaillon.

ne subit aucune variation majeure de cette norme. Ces deux constats se traduisent, dans la figure 3.24, par une forte diminution de l'indice effectif du mode 1 (soit n_{eff}^1) en fonction de θ_2 , alors que la courbe de l'indice effectif du mode 2 (soit n_{eff}^2) est, à toutes fins pratiques, constante. En consultant le tableau 3.14, on constate en fait que n_{eff}^2 subit une très légère hausse à mesure que θ_2 augmente. On explique cette hausse par la biréfringence de forme dans la fibre de droite, soit l'endroit principal où le mode est affecté par la variation de θ_2 . En effet, à cause de la fusion des fibres, le champ dans chaque fibre est légèrement plus confiné dans la direction x que dans la direction y pour ce mode impair. La propagation d'un mode orienté selon y y est donc légèrement plus aisée, ce qui se traduit par un indice effectif légèrement plus élevé en y qu'en x . Or, le champ dans la fibre de droite suit docilement l'orientation de n_o . Il est donc normal qu'à mesure que θ_2 augmente, le champ dans la fibre de droite se rapproche de cette condition de propagation idéale, d'où une légère pente

positive de n_{eff}^2 en fonction de θ_2 .

À la limite, soit pour $\theta_2 = 90^\circ$, les modes 1 et 2 deviennent complètement dégénérés : l'écart relatif entre leurs indices effectifs respectifs se chiffre alors à $5,6 \cdot 10^{-10}$. On peut facilement assimiler cette valeur à de la biréfringence numérique.

Ensuite, en ce qui a trait aux modes 3 et 4, on peut noter qu'ils sont bien distincts à $\theta_2 = 0^\circ$, le mode 3 présentant trois maxima de la norme du champ dans la direction x et un seul selon y , et le mode 4 présentant deux maxima de cette norme selon chaque axe. Cette distinction entre les modes 3 et 4 se traduit, à la figure 3.24, par un écart relatif notable (soit $1,421 \cdot 10^{-4}$) entre leurs indices effectifs respectifs à $\theta_2 = 0^\circ$. À $\theta_2 = 15^\circ$ cependant, on perçoit une amorce de séparation du maximum central du mode 3, séparation qui devient quasi complète à $\theta_2 = 30^\circ$, où l'on peut clairement voir quatre maxima. Pour cette dernière valeur de θ_2 , on constate un fait intéressant : si l'on effectue une rotation adéquate du profil de la norme du champ dans chaque moitié du coupleur, on obtient une correspondance quasi parfaite entre ces profils pour les modes 3 et 4. Cette similitude se traduit, à la figure 3.24, par une quasi-dégénérescence des indices effectifs de ces modes pour $\theta_2 = 30^\circ$, leur écart relatif chutant à $1,1641429 \cdot 10^{-5}$, une valeur dix fois moindre qu'à $\theta_2 = 0^\circ$.

À $\theta_2 = 45^\circ$, les modes 3 et 4 ne se distinguent plus que par le rapport des normes des champs entre les portions gauche et droite du coupleur. Cette dégénérescence continue de progresser jusqu'à $\theta_2 = 90^\circ$. Cependant, contrairement aux modes 1 et 2, cette dégénérescence n'est ici jamais complète. On explique ce fait en observant les modes 3 et 4 à $\theta_2 = 90^\circ$: en effet, en pivotant le profil de norme du mode 3 de 180 degrés, on obtiendrait une très bonne correspondance avec celui du mode 4. Cependant, l'orientation des champs demeurerait différente : celui du mode 3 serait parallèle à l'axe des x , direction dans laquelle la variation de la norme du champ est minimale, tandis que celui du mode 4 serait selon y , qui présente de fortes variations de la norme du champ. Une distinction entre les modes 3 et 4 demeure donc inévitable, même à $\theta_2 = 90^\circ$, ce qui se traduit à la figure 3.24 par un écart, quoique très faible,

entre leurs indices effectifs.

Les résultats portant sur ce dernier guide ouvrent la porte à des applications fort intéressantes. En effet, ils démontrent que si l'on possède des fibres suffisamment anisotropes, on peut créer un coupleur pour lequel la longueur de battement entre les deux premiers supermodes, L_B , est ajustable, non seulement en fonction de paramètres comme le profil du rayon en fonction de z et le degré de fusion, mais aussi en fonction de θ_2 . Cet ajustement de la longueur de battement en fonction de l'angle ne peut cependant s'effectuer qu'à la hausse.

Il existe néanmoins des avantages pratiques à ce nouveau degré de liberté. Un exemple réside dans la fabrication de divers types de coupleurs par la technique de fusion et d'étirage. Le but de tels coupleurs est de séparer plusieurs signaux optiques provenant d'une même branche d'entrée et de les distribuer, selon un rapport R précis, dans deux branches de sortie (ou plus). La valeur de R peut être influencée par plusieurs facteurs, comme par exemple la longueur d'onde des différents signaux ou leur polarisation. Lors de l'étape d'étirage, propre à la fabrication de ces coupleurs, la sensibilité de R en fonction de la longueur d'étirage Δz devient vite élevée, rendant difficile l'obtention d'une valeur précise de R . Cette sensibilité de R est inversement proportionnelle à L_B . Ainsi, en choisissant judicieusement l'angle entre deux fibres anisotropes, on peut créer une augmentation arbitraire de L_B , diminuant du même coup la sensibilité de R en fonction de l'étirage. On peut donc plus facilement atteindre une grande précision sur la valeur de R ou, mieux encore, rendre le dispositif beaucoup moins sensible aux variations de longueur inhérentes à son utilisation dans un environnement non-contrôlé. Bien entendu, la fabrication d'un tel dispositif est conditionnelle à ce que l'anisotropie des fibres utilisées survive au processus de fabrication, ce qui demeure un obstacle majeur en pratique. Du point de vue académique cependant, les possibilités semblent bel et bien présentes.

Conclusion

Dans ce mémoire, un algorithme basé sur la méthode des différences finies dans le domaine spectral (DFDS) a été présenté, lequel permet la simulation des modes propres vectoriels d'un guide d'onde sans pertes et invariant dans la direction de propagation, mais de profil d'indice arbitraire. Cet algorithme est assez général pour simuler des guides d'onde constitués de matériaux anisotropes dont un des axes préférentiels est parallèle à la direction de propagation, généralité atteinte pour la première fois, à notre connaissance, dans le cas d'un algorithme utilisant la méthode DFDS.

Les différents tests menés sur diverses catégories de guides d'onde, soit les fibres circulaires multimodales, les fibres à cristaux photoniques, les coupleurs à fibres effilées et les guides d'onde rectangulaires anisotropes, ont permis de valider les résultats obtenus grâce à cet algorithme : des erreurs relatives aussi faibles que $4,7 \cdot 10^{-10}$ sur les indices effectifs des modes guidés ont été atteintes.

Une dernière analyse, portant sur un coupleur à fibres anisotropes fusionnées, a révélé que l'angle formé entre les axes préférentiels des fibres constituant un tel coupleur a une grande influence sur la longueur de battement de ses supermodes. Ceci ouvre la porte à une amélioration éventuelle du procédé de fabrication des coupleurs à fibres fusionnées, incluant la fabrication de coupleurs beaucoup moins sensibles aux variations de température.

La poursuite expérimentale de cette dernière hypothèse constituerait donc, à mon avis, un sujet de recherche des plus pertinents.

Bibliographie

- BORN, MAX & WOLF, EMIL, *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light (7th edition)*, Cambridge University Press (1999).
- BUTKOV, E., *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1968).
- CHIANG, YEN-CHUNG, CHIOU, YIH-PENG & CHANG, HUNG-CHUN, Improved full-vectorial finite-difference mode solver for optical waveguides with step-index profiles. *Journal of Lightwave technology*, **20**(8) (2002).
- FORTIN, A., *Analyse numérique pour ingénieurs*, École Polytechnique de Montréal (1995).
- GARCÌA, SALVADOR GONZÀLEZ, HUNG-BAO, T. MATERDEY, MARTÌN, RAFAEL GÒMEZ & OLMEDO, BERNARDO GARCÌA, On the application of finite methods in time domain to anisotropic dielectric waveguides. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **44**(12) (1996).
- GUO, SHANGPING, WU, FENG & ALBIN, SACHARIA, Loss and dispersion analysis of microstructures fibers by finite difference method. *Optics Express*, **12**(15) (2004).
- HUANG, W.P. & XU, C.L., Simulation of three-dimensional optical waveguides by a full-vector beam propagation method. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **29** (1993).

- KOSHIBA, MASANORI, HAYATA, KAZUYA & SUZUKI, MICHIO, Approximate scalar finite-element analysis of anisotropic optical waveguides with off-diagonal elements in a permittivity tensor. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **Mtt-32**(6) (1984).
- KOSHIBA, MASANORI, HAYATA, KAZUYA & SUZUKI, MICHIO, Finite-element solution of anisotropic waveguides with arbitrary tensor permittivity. *Journal of Lightwave Technology*, **LT-4**(2) (1986).
- LÜSSE, P., STUWE, P., SCHÜLE, J. & UNGER, H.G., Analysis of vectorial mode fields in optical waveguides by a new finite difference method. *Journal of Lightwave Technology*, (12) (1994).
- MAXWELL, J.C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press (1873).
- OHTAKA, M., Analysis of the guided modes in the anisotropic dielectric optical waveguides. *Trans. Inst. Electron. Commun. Eng. Japan*, **J64-C** (1981).
- POPOV, S.V., SVIRKO, YU P & ZHELUDOV, N I, *Susceptibility Tensors for Non-linear Optics*, Institute of Physics Publishing Ltd (1995).
- SAAD, Y., *Numerical methods for large eigenvalue problems*, Manchester University Press (1991).
- SNYDER, ALLAN W. & LOVE, JOHN D., *Optival Waveguide Theory*, Chapman and Hall (1983).
- VAN DER VORST, H.A., BI-CGSTAB : A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **13**(2) (1992).
- YANG, S.W. & CHANG, H.-C., Numerical modeling of weakly fused fiber-optic polarization beamsplitters – part i : Accurate calculation of coupling coefficients and form birefringence. *Journal of Lightwave technology*, **16** (1998).

ZHU, Z. & BROWN, THOMAS G., Full-vectorial finite-difference analysis of microstructured optical fibers. *Optics Express*, **17**(10) (2002).

Annexe A

Démonstration de l'expression de $[\epsilon_r]$ en coordonnées cartésiennes

Soit un matériau anisotrope avec des axes optiques u , v et w caractérisés par les indices de réfraction n_u , n_v et n_w . Dans un référentiel formé des vecteurs u , v et w , le tenseur de permittivité électrique, noté $[\epsilon_r]'$, est diagonal :

$$[\epsilon_r]' = \begin{bmatrix} \epsilon_u & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_v & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_w \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

où $\epsilon_i = n_i^2$, $i \in \{u, v, w\}$.

Dans le cas particulier où l'axe w correspond à l'axe z du référentiel xyz (désigné *coordonnées cartésiennes*), on peut également affirmer que $\epsilon_w \equiv \epsilon_z$, et le référentiel uvw devient le référentiel uvz . On désigne alors par θ l'angle formé par les axes u et x (Fig. A.1).

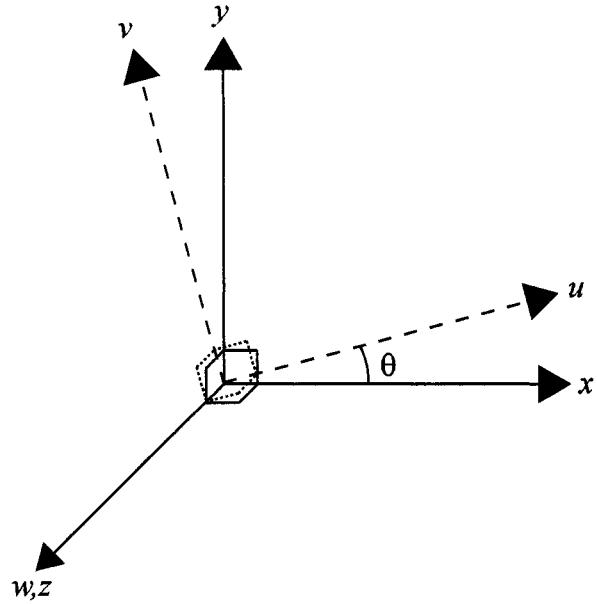


Figure A.1 : Référentiels : xyz (cartésien) et uvw .

D'autre part, le vecteur déplacement électrique en coordonnées cartésiennes, noté \vec{D} , s'exprime ainsi :

$$\vec{D} = \epsilon_0 [\epsilon_r] \vec{E}, \quad (\text{A.2})$$

où \vec{E} et $[\epsilon_r]$ sont, respectivement, le vecteur champ électrique et le tenseur de permittivité électrique relative en coordonnées cartésiennes.

Vu que la définition du déplacement électrique est la même dans tout référentiel, on peut également dire :

$$\vec{D}' = \epsilon_0 [\epsilon_r]' \vec{E}', \quad (\text{A.3})$$

où \vec{E}' est le vecteur champ électrique dans le référentiel uvw , et $[\epsilon_r]'$ est le tenseur de permittivité électrique dans ce même référentiel.

Par rotation autour de l'axe commun aux deux référentiels, soit z ($\equiv w$), on peut exprimer la relation entre les vecteurs \vec{D} et \vec{E} et leurs homologues respectifs, soit \vec{D}' et \vec{E}' . Cette rotation, d'angle θ , est représentée par la matrice $[R]$:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= [R]\vec{E}', \quad \text{et} \\ \vec{D} &= [R]\vec{D}',\end{aligned}\quad \text{où :} \tag{A.4}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On constate de plus que $[R]$ est unitaire :

$$[R]^{-1} = [R]^t. \tag{A.5}$$

Par manipulation des équations (A.4), et grâce à la propriété (A.5), on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= [R]^{-1}\vec{E} = [R]^t\vec{E}, \quad \text{et} \\ \vec{D}' &= [R]^{-1}\vec{D} = [R]^t\vec{D}.\end{aligned} \tag{A.6}$$

En appliquant l'équation (A.6) à l'équation (A.3), on obtient :

$$[R]^t\vec{D} = \epsilon_0[\boldsymbol{\epsilon}_r]'[R]^t\vec{E}, \tag{A.7}$$

expression que l'on manipule pour obtenir :

$$\vec{D} = \epsilon_0(R[\boldsymbol{\epsilon}_r]'R^t)\vec{E}. \tag{A.8}$$

Ainsi, par identification basée sur les équations (A.8) et (A.2), on conclut que le tenseur de la permittivité électrique en coordonnées cartésiennes, $[\epsilon_r]$, peut s'obtenir à partir de son homologue $[\epsilon_r]'$ et de l'angle θ :

$$\begin{aligned}
 [\epsilon_r] &= [R][\epsilon_r]'[R]^t = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_u & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_v & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta)n_u^2 + \sin^2(\theta)n_v^2 & \cos(\theta)\sin(\theta)(n_u^2 - n_v^2) & 0 \\ \cos(\theta)\sin(\theta)(n_u^2 - n_v^2) & \sin^2(\theta)n_u^2 + \cos^2(\theta)n_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_w^2 \end{bmatrix}. \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Annexe B

Expression des fonctionnelles

$A_{xx(i,j)}$ à $I_{yy(i,j)}$

$$A_{xx(i,j)} = -\delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \right\},$$

$$A_{xy(i,j)} = -\delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} - 1 \right\},$$

$$B_{xx(i,j)} = \frac{1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} - \epsilon_{xy} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial x} \right\} \delta_y + \delta_{yy},$$

$$B_{xy(i,j)} = \frac{1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} - \epsilon_{yy} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial x} \right\} \delta_y,$$

$$C_{xx(i,j)} = \delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \right\},$$

$$C_{xy(i,j)} = \delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} - 1 \right\},$$

$$D_{xx(i,j)} = \frac{1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \epsilon_{xx} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} \right\} \delta_x + \left\{ \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} \right\} \delta_{xx},$$

$$D_{xy(i,j)} = \frac{1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \epsilon_{xy} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} \right\} \delta_x + \left\{ \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \right\} \delta_{xx},$$

$$\begin{aligned}
E_{xx(i,j)} &= \frac{1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial x} \right\} + k^2 \epsilon_{xx} - 2 \left\{ \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} \delta_{xx} + \delta_{yy} \right\}, \\
E_{xy(i,j)} &= \frac{1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} \right) \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial x} \right\} + k^2 \epsilon_{xy} - 2 \left\{ \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \delta_{xx} \right\}, \\
F_{xx(i,j)} &= \frac{-1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \epsilon_{xx} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} \right\} \delta_x + \left\{ \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} \right\} \delta_{xx}, \\
F_{xy(i,j)} &= \frac{-1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \epsilon_{xy} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} \right\} \delta_x + \left\{ \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \right\} \delta_{xx}, \\
G_{xx(i,j)} &= \delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \right\}, \\
G_{xy(i,j)} &= \delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} - 1 \right\}, \\
H_{xx(i,j)} &= \frac{-1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} - \epsilon_{xy} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial x} \right\} \delta_y + \delta_{yy}, \\
H_{xy(i,j)} &= \frac{-1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} - \epsilon_{yy} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial x} \right\} \delta_y, \\
I_{xx(i,j)} &= -\delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \right\}, \\
I_{xy(i,j)} &= -\delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} - 1 \right\},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A_{yx(i,j)} &= -\delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} - 1 \right\}, \\
A_{yy(i,j)} &= -\delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \right\}, \\
B_{yx(i,j)} &= \frac{1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} - \epsilon_{xy} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial y} \right\} \delta_y + \left\{ \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \right\} \delta_{yy}, \\
B_{yy(i,j)} &= \frac{1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} - \epsilon_{yy} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial y} \right\} \delta_y + \left\{ \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} \right\} \delta_{yy}, \\
C_{yx(i,j)} &= \delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} - 1 \right\}, \\
C_{yy(i,j)} &= \delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \right\}, \\
D_{yx(i,j)} &= \frac{1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \epsilon_{xx} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \right\} \delta_x, \\
D_{yy(i,j)} &= \frac{1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \epsilon_{xy} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} \right\} \delta_x + \delta_{xx},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{yx(i,j)} &= \frac{1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial y} \right\} + k^2 \epsilon_{xy} - 2 \left\{ \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \delta_{yy} \right\}, \\
E_{yy(i,j)} &= \frac{1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} \right) \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial y} \right\} + k^2 \epsilon_{yy} - 2 \left\{ \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} \delta_{yy} + \delta_{xx} \right\}, \\
F_{yx(i,j)} &= \frac{-1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \epsilon_{xx} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} \right\} \delta_x, \\
F_{yy(i,j)} &= \frac{-1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \epsilon_{xy} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} \right\} \delta_x + \delta_{xx}, \\
G_{yx(i,j)} &= \delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} - 1 \right\}, \\
G_{yy(i,j)} &= \delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \right\}, \\
H_{yx(i,j)} &= \frac{-1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} - \epsilon_{xy} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial y} \right\} \delta_y + \left\{ \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \right\} \delta_{yy}, \\
H_{yy(i,j)} &= \frac{-1}{\epsilon_{zz}} \left\{ \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial y} - \epsilon_{yy} \frac{\partial \ln(\epsilon_{zz})}{\partial y} \right\} \delta_y + \left\{ \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} \right\} \delta_{yy}, \\
I_{yx(i,j)} &= -\delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} - 1 \right\}, \\
I_{yy(i,j)} &= -\delta_{xy} \left\{ \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{zz}} \right\},
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
\delta_x &= \frac{1}{2\Delta_x}, \\
\delta_y &= \frac{1}{2\Delta_y}, \\
\delta_{xx} &= \frac{1}{(\Delta_x)^2}, \\
\delta_{yy} &= \frac{1}{(\Delta_y)^2}, \\
\delta_{xy} &= \frac{1}{4\Delta_x \Delta_y}.
\end{aligned}$$