



**Titre:** Analyse des effets thermiques, élastiques et géométriques sur les  
Title: écarts cinématiques articulaires d'un guidage de MMT

**Auteur:** Tevfik Onat Ekinici  
Author:

**Date:** 2005

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Ekinici, T. O. (2005). Analyse des effets thermiques, élastiques et géométriques  
Citation: sur les écarts cinématiques articulaires d'un guidage de MMT [Mémoire de  
maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
<https://publications.polymtl.ca/7375/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7375/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** René Mayer, & Guy Cloutier  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ANALYSE DES EFFETS THERMIQUES, ÉLASTIQUES ET  
GÉOMÉTRIQUES SUR LES ÉCARTS CINÉMATIQUES ARTICULAIRES  
D'UN GUIDAGE DE MMT

TEVFIK ONAT EKINCI  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES (M.Sc.A.)  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

JANVIER 2005





Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 0-494-01317-6*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 0-494-01317-6*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ANALYSE DES EFFETS THERMIQUES, ÉLASTIQUES ET  
GÉOMÉTRIQUES SUR LES ÉCARTS CINÉMATIQUES ARTICULAIRES  
D'UN GUIDAGE DE MMT

présenté par: EKINCI Tevfik Onat,

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BARON, Luc, Ph.D., président

M. MAYER, J.R.René, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. CLOUTIER, Guy, Doct., membre et codirecteur de recherche

M. FORTIN, Clément, Ph.D., membre



# Remerciements

Je voudrais remercier mes directeurs René Mayer et Guy Cloutier qui m'ont tant poussé à percer ma carapace théorique.

Je tiens également à remercier François Ménard, sans son aide technique et son humour québécois les heures dans la salle de métrologie auraient été beaucoup plus pénibles et moroses.



# Résumé

L'objectif de ce mémoire est de proposer une approche de modélisation des articulations prismatiques des machines à mesurer tridimensionnelles à partir des écarts géométriques des glissières. Ceci contraste avec l'approche usuelle dans ce domaine qui consiste à modéliser les écarts cinématiques articulaires (communément appelés écarts de mouvement). La méthode proposée est causale et permet une modélisation plus en amont du système mécanique permettant ainsi une avancée importante vers la machine virtuelle. Ce lien causal permet une plus grande compréhension du comportement de la machine et de ses causes. Ce passage de la modélisation d'écarts cinématiques à celle des écarts géométriques représente une transition de l'analyse des effets à l'analyse des causes. Un passage similaire ayant eu lieu il y a plus de deux décennies alors de la modélisation des écarts volumétriques à la modélisation des écarts cinématiques.

Notre approche de modélisation est basée sur la détermination de l'erreur cinématique du chariot en partant des équations d'équilibre statique des forces provisoires qui se forment sur les paliers à air en raison des déviations de surfaces. Un banc d'essai constitué d'une poutre et des paliers de MMT octroyés par la compagnie Mitutoyo est installé afin de vérifier la théorie proposée. Les expériences vérificatrices de la théorie de thermoélasticité sont concluantes. Les vérifications expérimentales concernant l'effet des perturbations sur l'erreur cinématique restent à réaliser.



# Abstract

The purpose of the thesis is to propose a means to calculate the kinematic errors (commonly called motion errors) of each machine joint from the knowledge of the guideway geometric errors. Until now, the machine modeling has generally been based on the use of kinematic errors of machines for each machine joints. The proposed model establishes a closer causal relationship between the physical imperfections and their impact on the machine accuracy. By establishing the functions between the guideways geometric errors and the kinematic errors of the machine, a better understanding of the machine behavior and its root causes will be gained. The passage from kinematic to geometric errors also represents the transition from analysis of effects to analysis of causes. This conversion is similar to the shift from a volumetric error approach to a kinematic error approach which occurred a few decades ago.



# Table des matières

<b>Remerciements</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>Résumé</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>Abstract</b> . . . . .	<b>vi</b>
<b>Table des matières</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>Liste des figures</b> . . . . .	<b>x</b>
<b>Liste des annexes</b> . . . . .	<b>xv</b>
<b>Liste des sigles et abréviations</b> . . . . .	<b>xvi</b>
<b>1 INTRODUCTION</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Généralités . . . . .	1
1.2 Problématique et objectifs de la recherche . . . . .	2
1.3 Organisation du mémoire . . . . .	6
<b>2 ANALYSE DES SOURCES D'ÉCARTS ET MOYENS POUR LES CONTRÔLER</b> . . . . .	<b>9</b>
2.1 Les causes physiques des écarts des machines à mesurer tridimen- sionnelles . . . . .	9
2.2 Aperçu des brevets concernant les MMTs . . . . .	11



<b>3</b>	<b>ANALYSE MÉCANIQUE DU SYSTÈME GLISSIÈRE-CHARIOT</b>	<b>17</b>
3.1	Généralités . . . . .	17
3.2	Modélisation cinématique et géométrique des liaisons . . . . .	18
3.2.1	Liaisons cinématiquement équivalentes . . . . .	18
3.3	La précontrainte dans les systèmes de guidage . . . . .	21
3.4	Modélisation cinématique et statique du système du guidage . . . . .	22
3.5	Analyse de sensibilité . . . . .	31
3.6	Conclusion . . . . .	36
<b>4</b>	<b>PALIER À AIR</b> . . . . .	<b>37</b>
4.1	Théorie de l'aérostatique . . . . .	37
4.1.1	Généralités . . . . .	37
4.1.2	Fonctionnement . . . . .	40
4.1.3	Analyse . . . . .	42
4.2	Analyse de l'effet des déviations des surfaces sur la rigidité des paliers à air . . . . .	48
4.3	Conclusion . . . . .	53
<b>5</b>	<b>ANALYSE THERMIQUE DU GUIDE</b> . . . . .	<b>54</b>
5.1	Généralités . . . . .	54
5.2	Théorie de thermoélasticité . . . . .	55
5.3	Comparaison Eléments Finis, Expériences et Théorie Elastique . . . . .	59
<b>6</b>	<b>DÉFORMATION ÉLASTIQUES</b> . . . . .	<b>66</b>
6.1	Flexion de la poutre . . . . .	66
6.1.1	Poids propre de la poutre et du chariot . . . . .	66
6.2	Elasticité des composants mécaniques . . . . .	69
6.2.1	Liaison conique sphérique . . . . .	69



6.2.2	Tige . . . . .	70
6.2.3	Chariot . . . . .	73
<b>7</b>	<b>CONCLUSION . . . . .</b>	<b>75</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>77</b>



# Liste des figures

1.1	MMT Vue d'élévation [Mayer 2002] . . . . .	3
1.2	MMT Vue de plan [Mayer 2002] . . . . .	4
1.3	Le banc d'essai . . . . .	5
1.4	Schéma organisationnel du mémoire . . . . .	8
2.1	MMT Mitutoyo conventionnelle (extrait du brevet no : EP2160975) .	12
2.2	Mitutoyo, Brevet No : EP2160975 . . . . .	12
2.3	Mitutoyo, Brevet No : EP2160975, structure avec des composantes mécaniques . . . . .	13
2.4	Mitutoyo, Brevet No : EP2160975, structure avec des paliers intégrés 13	
2.5	Zeiss, Brevet No US 4,587,622, écart cinématique mesurée au moyen des capteurs . . . . .	14
2.6	Johansson, Brevet No EP0629833 . . . . .	15
2.7	Johansson, Brevet No EP0629833 . . . . .	15
3.1	Schéma cinématique minimal . . . . .	19
3.2	Graphe d'une liaison équivalente . . . . .	19
3.3	Liaisons en parallèle . . . . .	20
3.4	Chaîne cinématique d'une machine . . . . .	20
3.5	Système Chariot-Glissière . . . . .	21
3.6	Système Chariot-Glissière . . . . .	23



3.7	Liasion équivalente . . . . .	23
3.8	Palier à air . . . . .	24
3.9	Liaison Ponctuelle . . . . .	25
3.10	Système glissière chariot, configuration expérimentale . . . . .	25
3.11	Chariot supporté par n paliers . . . . .	26
3.12	Déplacement d'un chariot sur les ressorts . . . . .	27
3.13	Système Chariot-Glissière . . . . .	29
3.14	Effet des rigidités des paliers sur l'écart de rectitude du déplacement du chariot ( $K_A = K_B = K_C$ ) . . . . .	32
3.15	Effet des rigidités des paliers sur l'écart de rectitude du déplacement du chariot ( $K_A = K_B = \frac{K_C}{4}$ ) . . . . .	33
3.16	Écart type de la rectitude du déplacement du chariot vs. les disper- sions des rigidités des paliers et des rectitudes des glissières . . . . .	34
3.17	Écart type du tangage du déplacement du chariot vs. les dispersions des rigidités des paliers et des rectitudes des glissières . . . . .	35
4.1	La capacité de charge versus l'épaisseur de couche d'air pour le palier à air Mitutoyo (Gracieuseté de compagnie Mitutoyo) . . . . .	38
4.2	Palier à air schématisé ( $p_s$ =pression d'alimentation, $p_o$ =pression d'orifice), $p_a$ =pression atmosphérique) . . . . .	40
4.3	Les paliers selon le type de réducteurs de débit: Réducteur à com- pensation inhérente (en haut), Réducteurs à poche (en bas) . . . . .	42
4.4	La couche d'air sous le palier . . . . .	43
4.5	Distribution de pression d'un palier à un orifice (surface) . . . . .	49
4.6	Distribution de pression d'un palier à un orifice (contour) . . . . .	49
4.7	Distribution de pression d'un palier à 4 orifices (surface) . . . . .	50
4.8	Distribution de pression d'un palier à 4 orifices (contour) . . . . .	50
4.9	Variation de capacité de charge par rapport à $\frac{B}{\lambda}$ (palier à 1 ori- fice,normalisé) . . . . .	51



4.10	Rigidité par rapport à $\frac{B}{\lambda}$ (palier à 1 orifice) . . . . .	51
4.11	Variation de capacité de charge par rapport à $\frac{B}{\lambda}$ (palier à 4 orifices,normalisé) . . . . .	52
4.12	Rigidité par rapport à $\frac{B}{\lambda}$ (palier à 4 orifices) . . . . .	52
5.1	Poutre mince de section rectangulaire . . . . .	56
5.2	Distribution de température de la poutre (Température de paroi supérieure : 28.6 °C) . . . . .	61
5.3	Distribution de température de la poutre - Résultats de MEF (Température de la paroi supérieure : 28.6 °C) . . . . .	62
5.4	Comparaison de gradients de température mesuré et calculé avec la MEF (Température de la paroi supérieure : 28.6 °C) . . . . .	63
5.5	Déplacement verticale de la poutre - Résultats de MEF (Température de la paroi supérieure : 28.6 °C) . . . . .	64
5.6	Comparaison des résultats mesurés et calculés : MEF, résultats expérimentaux, formules dérivés de la théorie de thermoélasticité (Température de la paroi supérieure : 28.6 °C) . . . . .	65
6.1	Flèche de la poutre sous son propre poids . . . . .	67
6.2	Flèche de la poutre sous son propre poids et le poids de chariot . . . . .	68
6.3	Liaison conique-sphérique reliant le palier à air au chariot . . . . .	70
6.4	Déformation de liaison vs. la force appliquée . . . . .	71
6.5	Rigidité de liaison vs. la force appliquée . . . . .	72
6.6	Déformation du chariot sous l'effet des forces aérostatiques ,Force=800 N ,Résultats de la MEF . . . . .	74
B.1	Distribution des contraintes selon la distance aux extrémités . . . . .	89
C.1	L'émissivité du céramique selon la longueur d'onde [Modest 1993] . . . . .	92
C.2	La distribution de température sur la poutre (fichier Matlab) . . . . .	93



C.3	La distribution de température sur la poutre (contour) . . . . .	94
C.4	Le signal de radiance selon les zones sur la poutre (contour) . . . . .	95
C.5	Fonction reliant le signal de radiance à la température . . . . .	96
C.6	L'incertitude spatial correspondant à divers regions de température . . . . .	97
E.1	Distribution de température de la poutre (Température de paroi supérieure : 22.2 C) . . . . .	103
E.2	Distribution de température de la poutre (Température de paroi supérieure : 24.6 C) . . . . .	104
E.3	Distribution de température de la poutre (Température de paroi supérieure : 26.4 C) . . . . .	105
E.4	Distribution de température de la poutre - Résultats de MEF (Température de la paroi supérieure : 22.2 C) . . . . .	106
E.5	Distribution de température de la poutre - Résultats de la MEF (Température de la paroi supérieure : 24.6 C) . . . . .	107
E.6	Distribution de température de la poutre - Résultats de la MEF (Température de la paroi supérieure : 26.4 C) . . . . .	108
E.7	Comparaison de gradients de température mesuré et calculé avec la MEF (Température de la paroi supérieure : 22.2 °C) . . . . .	109
E.8	Comparaison de gradients de température mesuré et calculé avec la MEF (Température de la paroi supérieure : 24.6 °C) . . . . .	110
E.9	Comparaison de gradients de température mesuré et calculé avec la MEF (Température de la paroi supérieure : 26.4 °C) . . . . .	111
E.10	Déplacement verticale de la poutre - Résultats de MEF (Température de la paroi supérieure : 22.2 C) . . . . .	112
E.11	Déplacement verticale de la poutre - Résultats de MEF (Température de la paroi supérieure : 24.6 C) . . . . .	113
E.12	Déplacement verticale de la poutre - Résultats de MEF (Température de la paroi supérieure : 26.4 C) . . . . .	114



E.13 Comparaison des résultats mesurés et calculés : MEF, résultats expérimentales, formules dérivés de la théorie de thermoélasticité (Température de la paroi supérieure : 22.2 C) . . . . .	115
E.14 Comparaison des résultats mesurés et calculés : MEF, résultats expérimentales, formules dérivés de la théorie de thermoélasticité (Température de la paroi supérieure : 24.6 C) . . . . .	116
E.15 Comparaison des résultats mesurés et calculés : MEF, résultats expérimentales, formules dérivés de la théorie de thermoélasticité (Température de la paroi supérieure : 26.4 C) . . . . .	117



# Liste des annexes

<b>A ANALYSE DIFFÉRENTIELLE DU MOUVEMENT DES FLUIDES</b>	<b>81</b>
A.1 Conservation de masse	81
A.2 Accélération d'une particule dans un champs de vitesse	83
A.3 Équations de Navier-Stokes	83
<b>B THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ</b>	<b>86</b>
B.1 Relations Contraintes-Déformations	86
B.2 Relations Déformations-Déplacements	87
B.3 Fonction de contrainte	87
B.4 Principe de Saint-Venant	88
<b>C PARTIE EXPÉRIMENTALE</b>	<b>90</b>
C.1 Analyse d'incertitude	90
C.1.1 Mesure de rectitude	90
C.1.2 Mesures thermiques	91
<b>D DESSINS TECHNIQUES</b>	<b>98</b>
<b>E MESURES THERMALES ET RESULTATS D'ANALYSE MEF</b>	<b>103</b>



# Liste des sigles et abréviations

- $L_t$ : la radiance de cible ,
- $L_m$ : la radiance mesurée
- $L_b$ : la radiance réfléchie de l'arrière-plan
- $\alpha$  : angle de conicité d'une liaison conique-sphérique
- $\tau_{O,R}$ : torseur défini par rapport au repère R
- $\tau_{P,R}^c$  :torseur cinématique
- $\tau_{P,R}^s$  :torseur statique
- $R$ : matrice de rotation
- $p$ : matrice anti-symétrique du préproduit vectoriel
- $L_{1,2}$ : liaison cinématique équivalente entre les solides 1 et 2
- K: rigidité d'un palier à air
- $\mu$  : viscosité cinématique
- p: pression d'air
- h: épaisseur de couche d'air sous un palier
- $\sigma$ : contrainte mécanique
- $\alpha$ : coefficient d'expansion thermique
- T: température
- E: module d'élasticité
- $\varepsilon$ : déformation élastique
- I: moment d'inertie
- $\delta$  : déviation de surface



$P$ : pression normalisée

$H$ : épaisseur de la couche d'air normalisée

$X$ : longueur de palier normalisée

$u$ : vitesse d'air sur l'axe  $x$

$v$ : vitesse d'air sur l'axe  $y$

$h_o$ : épaisseur nominale de couche d'air

$h_e$ : magnitude d'erreur de couche d'air

$p_s$ : pression d'alimentation

$p_o$ : pression d'orifice

$B$ : longueur de palier

$L$ : largeur de palier



# Chapitre 1

## INTRODUCTION

### 1.1 Généralités

I can not understand what I can not create.

Richard Feynman

L'amélioration globale des technologies de fabrication couplée avec la compétition sévère pour une réduction de prix des produits supérieurs a déterminé le statut de l'ingénierie de précision comme un facteur clé pour la survie des entreprises. L'ingénierie de précision est aujourd'hui indispensable pour les procédés de fabrication de plusieurs produits stratégiques avancés. Au fur et à mesure que l'industrie moderne évolue vers les standards plus stricts tout en essayant de réduire les coûts, l'ingénierie de précision devient de plus en plus une priorité pour les compagnies en quête de niches dans le marché.

La justesse est un facteur essentiel dans les étapes de fabrication et d'inspection. À l'étape d'inspection, la qualité de l'inspection et d'évaluation dépend souvent des machines à mesurer tridimensionnelle (MMT), qui sont les instruments de mesure les plus avancés sur le marché. L'inspection des pièces mécaniques au moyen des MMT se fait sur un matériel métrologique permettant le mesurage dans au moins 3 directions et ce sans manipulation de la pièce. La justesse des MMT devrait



être 10 fois plus grande que celle des machines-outils dans la chaîne de fabrication [Slocum 1992]. Donc l'analyse détaillée et la compensation des erreurs des MMT sont essentiels dans la détermination de justesse de tout le système de fabrication.

## 1.2 Problématique et objectifs de la recherche

L'objectif principal de ce mémoire est de modéliser le mécanisme physique engendrant les erreurs cinématiques des machines à mesurer tridimensionnelles (MMT) et aussi de contribuer au débat sur la nécessité d'une justesse mécanique dans les machines en tenant compte de la possibilité de compensation par les logiciels.

L'approche générale de notre analyse, qui sera aussi examinée au moyen des expériences, est essentiellement basée sur l'analyse d'un axe de la machine; l'axe Y d'un MMT à configuration à portique qui se déplace sur la portique qui représente l'axe X (figures 1.1, 1.2) [Mayer 2002]. Un banc d'essai constitué principalement des composants d'une MMT Mitutoyo est construit afin d'observer le comportement du chariot sous l'effet des perturbations des glissières.

Le banc d'essai construit dans la salle de métrologie consiste principalement en une poutre et les paliers de MMT octroyés par la compagnie Mitutoyo dont les dessins techniques sont présentés dans l'annexe. L'assemblage du système glissière-chariot est dans la phase finale (Figure 1.3). La motorisation se fait par un moteur pas à pas contrôlé au moyen d'un programme Labview.

Le problème majeur posé dans l'étape d'analyse était la justesse extrême des composants mécaniques fournis par Mitutoyo. Ainsi, l'erreur de rectitude des surfaces fonctionnelles de la poutre utilisée pour le guidage était moins que  $3\mu m$ , ce qui est proche de la précision des niveaux électroniques qui servent à mesurer la rectitude de ces surfaces. La méthode adaptée pour contrer ce problème était de créer les perturbations prévisibles sur la glissière afin de calculer les erreurs du chariot qui se déplace sur la glissière par la suite. De ce fait, une déviation de rectitude



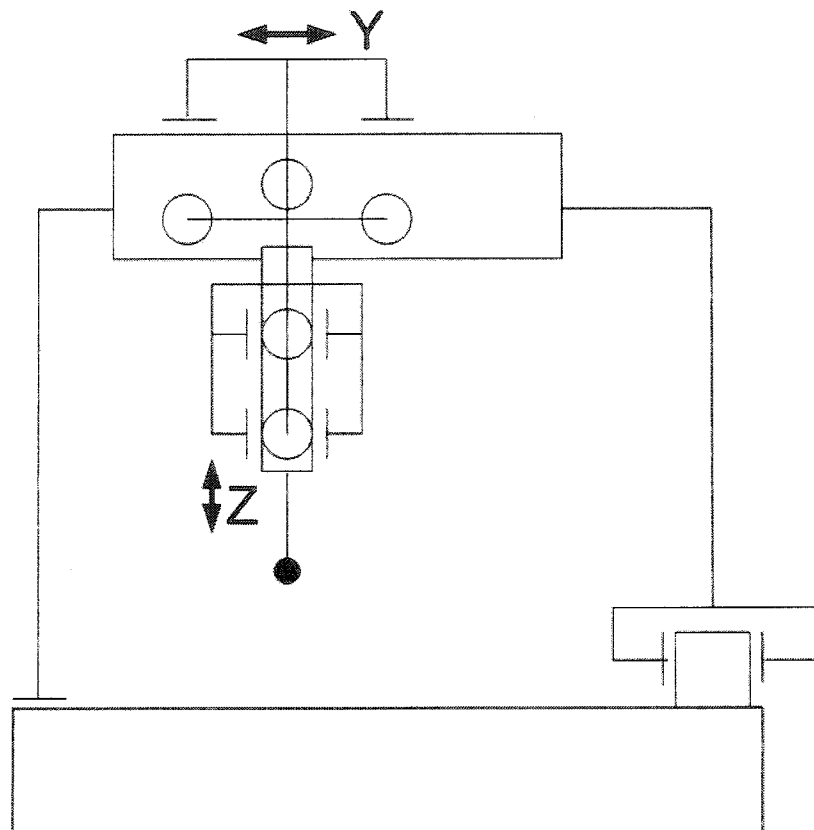


Figure 1.1 : MMT Vue d'élévation [Mayer 2002]



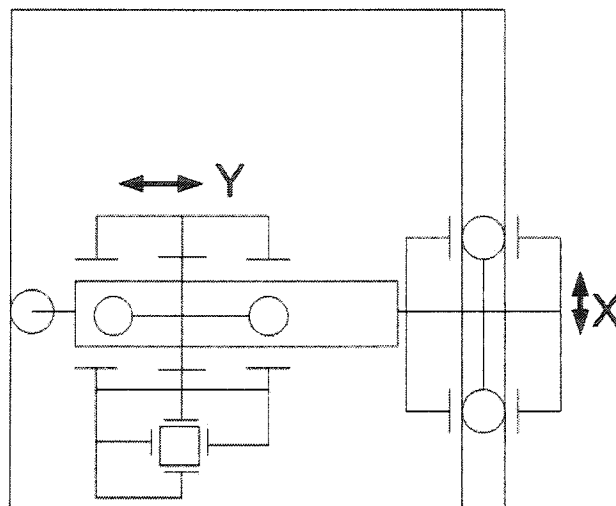


Figure 1.2 : MMT Vue de plan [Mayer 2002]

est créée sur la surface de la glissière au moyen d'un élément chauffant installé sur la partie supérieure de la poutre. Cette installation est effectuée en considération de la prévisibilité de la déformation de la poutre à la suite du chauffage suivant les lois de thermoélasticité. Par conséquent, l'élément chauffant est placé sur la partie supérieure de la poutre afin de créer un gradient de température constant tout le long de la poutre. De ce fait, on va s'occuper uniquement des erreurs créées suivant cette perturbation.

L'objectif ultime de ce mémoire est de participer de façon constructive au débat entre deux points de vue qui s'opposent dans le marché des machines et, dans une moindre mesure, dans la littérature. Le point de vue dominant, qui est la compensation par logiciel consiste à développer des modèles mathématiques afin de prédire les erreurs machines. Selon l'étude de Sartori et al. [Sartori & Zhang 1992] l'application de la compensation basée sur le logiciel a produit une réduction importante des coûts de production des MMTs, tout en diminuant l'erreur maximum



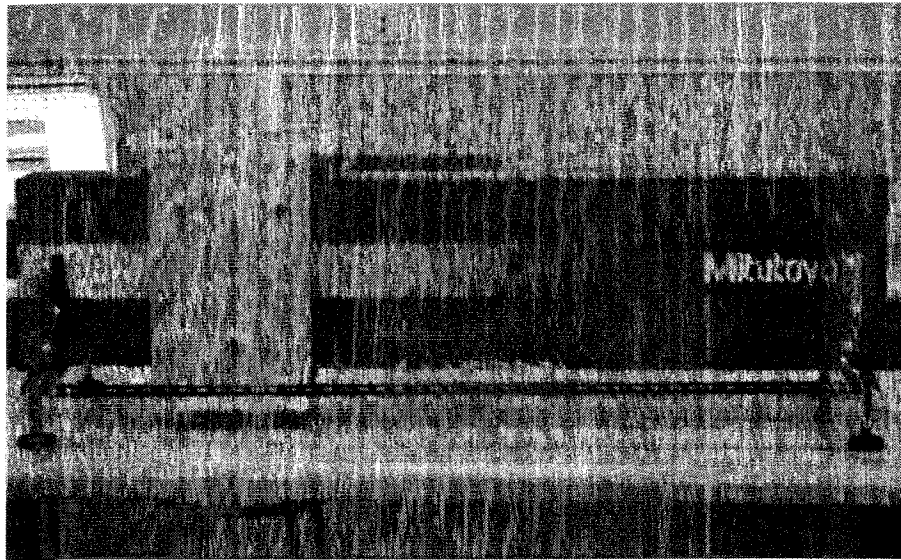


Figure 1.3 : Le banc d'essai

et augmentant la vitesse de mouvement. L'approche classique qui consistait à rectifier les glissières selon les sollicitations des machines est totalement abandonnée.

En observant les articles publiés durant les vingt dernières années ([Donmez, Blomquist & Hocken 1986][Kiridena & Ferreira 1994][Veldhius & Elbestawi 1995]), on peut facilement observer la tendance générale dans la littérature à se cantonner à observer les erreurs cinématiques par les instruments de mesure assez élaborés et d'effectuer la compensation des machines par le logiciel de contrôleur en utilisant des modèles mathématiques sophistiqués comme les réseaux neuroniques ou l'intelligence artificielle. La logique sous-jacente de cette approche provient toujours de l'hypothèse qu'un changement de design de machine serait beaucoup plus onéreux que de construire une machine imparfaite et de connaître son comporte-



ment en ajustant les paramètres avec le contrôleur.

Tout en respectant les principes fondamentaux de la méthode de compensation par logiciel, notre recherche va se concentrer sur l'approche de la justesse "absolue", c'est-à-dire la justesse mécanique de la machine avant la compensation par logiciel. Cette tendance a ses raisons d'être tout aussi pratiques que scientifiques.

La raison la plus évidente est que l'objectif de toute activité de recherche scientifique doit être la compréhension des événements qui se produisent dans la nature, établissant des relations causales entre les divers phénomènes. Bâtir des modèles mathématiques, aussi élaborés soient-ils, au moyen des instruments extrêmement complexes sans connaître le mécanisme derrière les faits implique une ignorance vis-à-vis de la nature.

Les raisons plus pratiques sont tout aussi dignes de considération:

- Les modèles développés sont sensibles aux conditions environnementales de la machine, notamment la température, durant la modélisation. C'est la plus importante limitation selon Sartori et al. [Sartori & Zhang 1992].
- Les modèles développés par ces méthodes seront largement cas spécifiques et même machine spécifiques.

Selon les guides de performance des MMT [ASME 1990], les erreurs dominantes dans les MMT sont systématiques, et non aléatoires, donc les procédés statistiques doivent être exclus de leur analyse. Ce point de vue justifie également la démarche dans notre recherche qui consiste à examiner les fondements physiques des erreurs machines.

### 1.3 Organisation du mémoire

Vu l'ampleur de la tâche, le mémoire est divisé en 6 chapitres.

Après avoir présenté la problématique et les défis dans le premier chapitre, le



deuxième chapitre expose différents types d'erreurs des MMTs et les moyens de prévention commerciaux avec un bref survol des recherches dans le domaine.

Le troisième chapitre débute par un exposé d'un système de modélisation mathématique basé sur les appuis non rigides en configuration cinématique parallèle. La nécessité de formaliser l'analyse d'un système relativement simple comme le chariot-glissière découle du fait de l'existence des liaisons parallèles dans ce dernier, à la différence de l'analyse cinématique des machines qui implique uniquement des liaisons sérielles.

Le quatrième chapitre traite des paliers à air qui sont des éléments essentiels dans la construction d'un système de guidage d'une MMT. Une analyse basée sur la méthode des différences finies est conduite afin de prédire le comportement des paliers vis-à-vis des surfaces des glissières qui les supportent.

Le cinquième chapitre concerne l'analyse de la déformation thermique de la poutre. La prédiction se fait au moyen de la méthode des éléments finis en utilisant le programme commercial ANSYS. Une théorie de thermoélasticité est également développée afin d'effectuer des calculs plus efficaces. Les résultats sont vérifiés par des expériences.

Enfin le sixième chapitre traite des déformations élastiques dans la structure du système chariot-glissière. Une analyse des rigidités des divers composants mécaniques qui font le lien entre le chariot et les glissières, et aussi du chariot lui-même est réalisée afin de comparer le tout avec la rigidité nominale des paliers. Le point critique à considérer est d'avoir un chariot assez rigide pour qu'il puisse se déplacer suivant les déviations des surfaces, dans le cas inverse c'est la déformation élastique du chariot qui va absorber toute la déviation. Selon les calculs, il faut placer des nervures le long des lignes d'application de forces des paliers à air. Ce point reste à être vérifié par les expériences.

La figure 1.4 présente les principales parties du mémoire selon leur rapport aux éléments de la chaîne cinématique analysée.



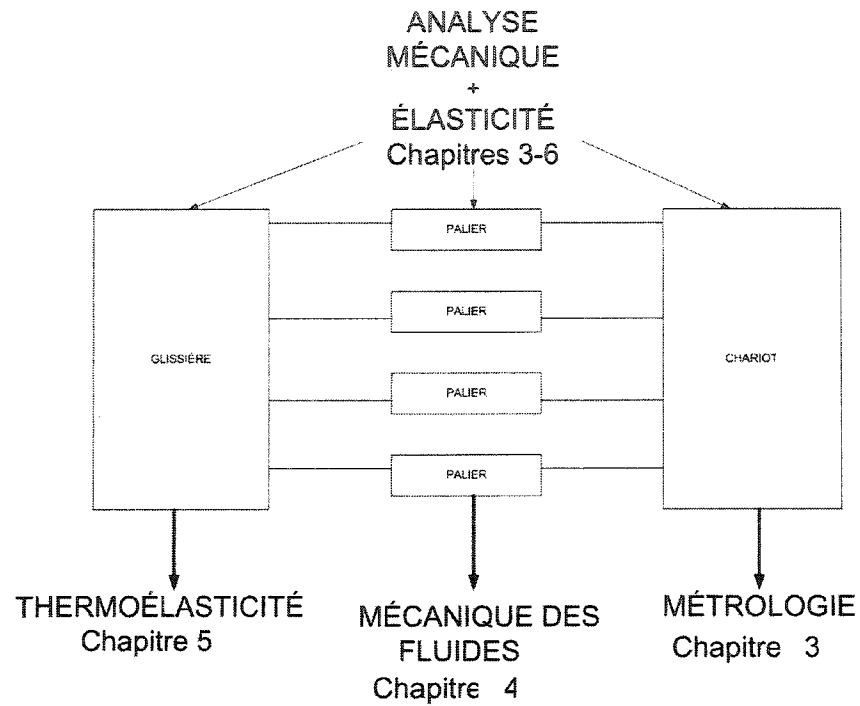


Figure 1.4 : Schéma organisationnel du mémoire

La configuration de la machine qui est analysée dans l'ensemble du mémoire est de type XYZ à structure portique. C'est la configuration la plus populaire sur le marché. Comme on peut l'observer sur les figures 1.1 et 1.2, l'axe X est formé d'un portique qui se déplace sur une table en granite et qui porte l'ensemble des axes Y et Z. L'axe Y est un chariot qui se positionne sur le portique et qui supporte l'axe Z qui se déplace à la verticale. La discussion sur les axes de la machine dans le reste de l'ouvrage sera basée sur la terminologie de cette configuration.



## Chapitre 2

# ANALYSE DES SOURCES D'ÉCARTS ET MOYENS POUR LES CONTRÔLER

### 2.1 Les causes physiques des écarts des machines à mesurer tridimensionnelles

Selon *Bosch* [Bosch 1995], les causes physiques des écarts des machines à mesurer tridimensionnelles (MMT) peuvent être classées en deux catégories selon qu'elles soient dépendantes ou indépendantes de la température.

#### **Les causes indépendantes de la température:**

- Les erreurs de fabrication (de rectitude) des guides

L'erreur de rectitude des guides est sans doute une source majeure dans les écarts cinématiques des machines, bien qu'insuffisamment analysé dans la littérature. Une des raisons provient du fait que les glissières des machines commercialisées sont couvertes pour la protection contre les effets environnementaux, rendant toutes sorte de mesures quasi impossible.



- Les paliers défectueux

Les paliers sont des éléments primordiaux concernant la rigidité totale du système de la machine. Puisque l'objet de notre recherche se rapporte aux MMT, les paliers étudiés seront de types aérostatiques. Le fonctionnement des paliers sera examiné en profondeur dans les chapitres suivants.

- Les erreurs des capteurs

Les erreurs des échelles influent sur l'erreur de positionnement linéaire des axes, et ne seront pas inclus dans le contenu de ce mémoire.

- Les erreurs de réglage des composants de la machine

Les erreurs de réglage entre les axes de la machine causent l'écart d'orthogonalité. Bien qu'assez important dans l'analyse des écarts machine, ces écarts ne seront pas analysés puisqu'ils touchent essentiellement l'interaction entre les différents axes de la machine.

- Les déformations élastiques causées par le déplacement des masses (le mouvement du chariot)

On peut classer les écarts élastiques qui proviennent du déplacement des masses (les chariots Y et Z sur X, et Z sur Y) en deux groupes :

- Les écarts qui découlent de l'élasticité des corps. Il faut souligner que l'effet des déformations élastiques est minimisé à l'extrême par les constructions assez rigides des structures des machines. Ainsi, l'erreur de la déformation de l'axe Y de la MMT analysé ne peut être plus que (0.5 micromètres) comme il sera vérifié dans un chapitre ultérieure. Zhang et al. [Zhang, Veale, Charlton & Hocken 1985] ont calculé la déformation de la table en granite de l'axe X comme étant moins de 1  $\mu m$ .

- Les écarts qui découlent de la rigidité des paliers

Les axes qui supportent les autres dans la chaîne cinématique de la



machine subissent l'écrasement variable de la couche d'air des paliers. Ce type d'écart et les méthodes utilisés par les fabricants pour sa prévention seront examinés dans la section suivante.

#### **Les causes dépendantes de la température:**

- La variation uniforme de température dans la structure de la machine et causant l'élongation des échelles;
- Le gradient de température dans la structure de la machine et causant la flexion des guides.

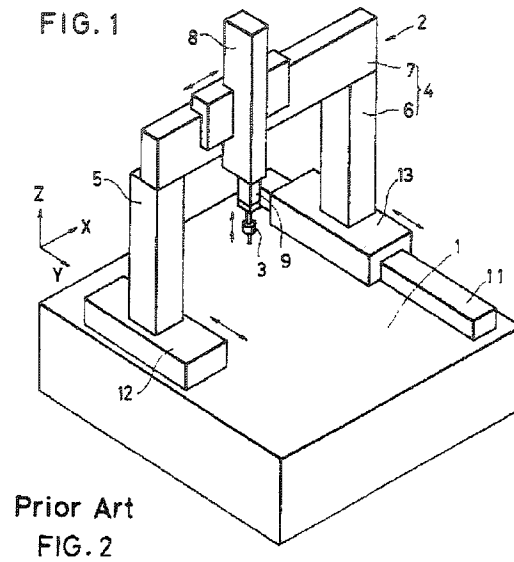
## **2.2 Aperçu des brevets concernant les MMTs**

Dans cette section, un aperçu des brevets concernant l'élimination ou la prédiction des écarts exposés dans la section précédente sera effectué. Les méthodes d'élimination mentionnées sont basées sur des ajustements de conception des machines, et excluent la compensation conventionnel par le logiciel . En raison de la diversité des sujets analysés dans les chapitres, on a préféré de situer les revues de littérature au début de chaque chapitre concerné.

Selon le principe de design conventionel, l'axe Y se déplace sur l'axe X causant la diminution ou l'augmentation de la couche d'air des paliers à air, et par conséquence produisant un écart de roulis de l'axe X (figure 2.1). La compagnie Mitutoyo, évite cet écart en dissociant les mouvement des axes X et Y (figure 2.2), tandis que la compagnie LK utilise un système mécanique qui consiste à équilibrer le roulis en ajustant la hauteur des colonnes de l'axe X [LK 1989].

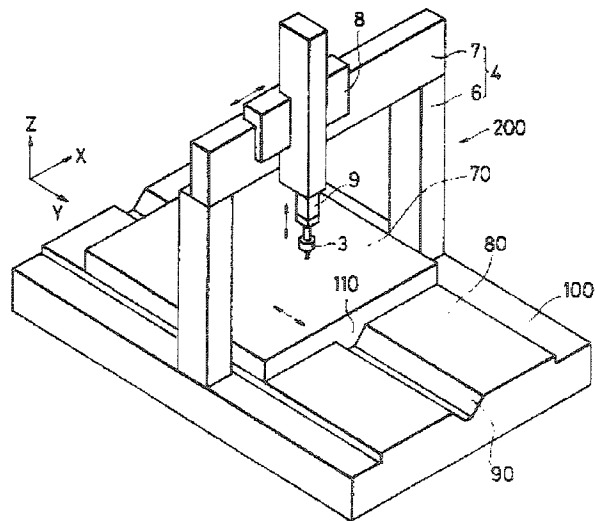
Le montage conventionnel est d'attacher les paliers au moyen de liaisons sphériques qui sont attachés aux tiges filetées montés sur la structure du chariot. Mais ces liaisons elles-mêmes peuvent détenir de faibles rigidités diminuant la rigidité totale du système. La solution proposée par plusieurs compagnies est l'intégration des





PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version <http://www.fineprint.com>

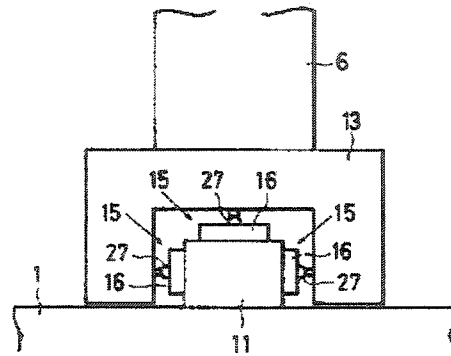
Figure 2.1 : MMT Mitutoyo conventionnelle (extrait du brevet no : EP2160975)



PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version <http://www.fineprint.com>

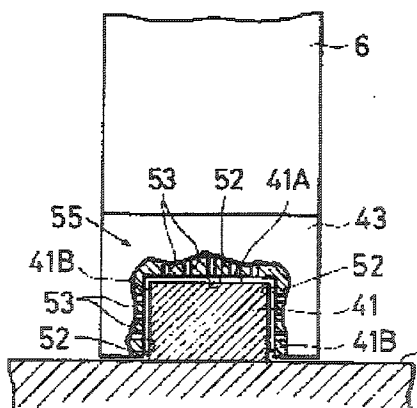
Figure 2.2 : Mitutoyo, Brevet No : EP2160975





PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version <http://www.fineprint.com>

Figure 2.3 : Mitutoyo, Brevet No : EP2160975, structure avec des composantes mécaniques



PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version <http://www.fineprint.com>

Figure 2.4 : Mitutoyo, Brevet No : EP2160975, structure avec des paliers intégrés



paliers dans la structure (embedded design). Comme proposé par Mitutoyo dans le brevet No : 2160975 , (Figures 2.3 et 2.4) l'alimentation de l'air se fait uniquement par le biais de la structure, éliminant le problème de rigidité lié aux composants mécaniques. Bien entendu, l'application d'une telle conception est assez limitée en raison du coût élevé de fabrication.

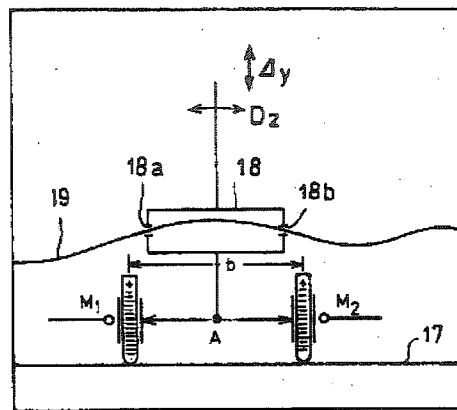


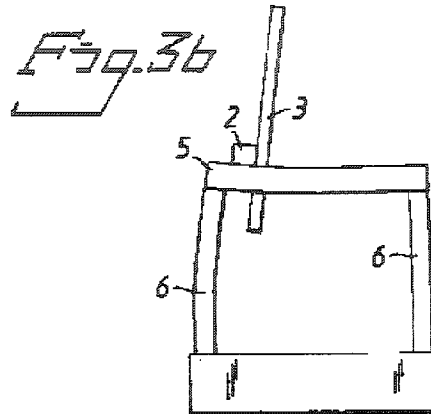
Figure 2.5 : Zeiss, Brevet No US 4,587,622, écart cinématique mesurée au moyen des capteurs

La compagnie Zeiss (figure 2.5) est la seule qui se penche spécifiquement sur le sujet des écarts de guides. Dans le brevet no: US 4,587,622, une installation des capteurs sur le chariot est proposée afin de déterminer les écarts angulaires et de rectitude du chariot en comparaison à une surface de référence.

La compagnie Johansson vise à déterminer l'écart causé par le déplacement de l'axe Y (et aussi de son accélération) d'une façon déterministe ce qui est difficile avec le design conventionnel en raison du flambage des colonnes de l'axe X (figure 2.6). Selon leur concept (figure 2.7), la poutre de l'axe X est rendue indépendante des colonnes qui la supportent par des liaisons cylindriques et sphériques. Pourtant il faudra tenir compte cette fois-ci des rigidités de ces composants.

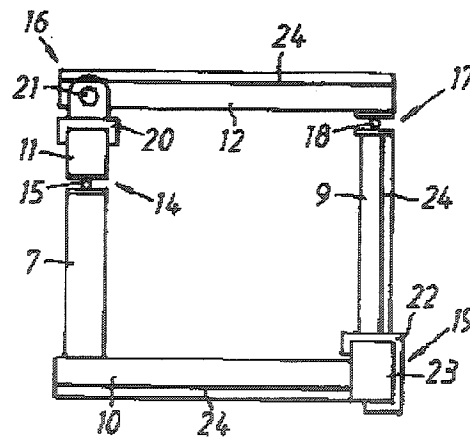
Un autre point important du point de vue conception est le palier à air lui-





PDF created with FreePrinted.pdf factory Pro trial version <http://www.freeprint.com>

Figure 2.6 : Johansonn, Brevet No EP0629833



PDF created with FreePrinted.pdf factory Pro trial version <http://www.freeprint.com>

Figure 2.7 : Johansonn, Brevet No EP0629833



même, notamment les paliers à air poreux qui représentent la dernière génération de palier et qui sont actuellement les plus populaires. Les paliers à air avec orifices ont le désavantage d'une formation d'un gradient de pression, tandis que les paliers à air poreux, grâce à des millions de passages d'air, présentent l'avantage d'une distribution de pression beaucoup plus uniforme. Un autre avantage des paliers à air poreux est qu'à l'encontre des égratignures de surface, le problème de 'shunting' de l'air (une chute de pression brutale) ne se pose pas. Mais il faut aussi garder un certain degré de réserve envers les spécifications des fabricants, car comme le cite Slocum [Slocum 1992], le bouchage des orifices des paliers à air peut s'effectuer plus facilement, (sans oublier la faible probabilité de débouchage), causant une forte perte de rigidité dans le système. Dans le chapitre 4 il sera démontré qu'en augmentant le nombre d'orifices dans un palier, on diminue les chances d'une diminution de pression d'une façon dramatique, tout en obtenant une distribution de pression plus équilibrée et une rigidité plus élevée.



## Chapitre 3

# ANALYSE MÉCANIQUE DU SYSTÈME GLISSIÈRE-CHARIOT

### 3.1 Généralités

Dans ce chapitre, les outils mathématiques largement utilisés dans l'analyse des erreurs cinématiques seront d'abord introduits. La notation de *Agati* [Agati & Rossetto 1994] sera exposée en soulignant les points qui nous concernent. Ainsi des concepts de base seront développés pour la formalisation de l'analyse d'un mécanisme formé par des liaisons parallèles. Et enfin, en s'appuyant sur ces concepts, on va développer le système d'équations pour analyser le comportement du chariot selon la déviation des glissières.

Peu de travaux ont été publiés concernant le lien entre les écarts cinématiques du chariot et les écarts géométriques des guides. En fait, *Shamoto et al.* [Shamoto, Park & Moriwaki 2001] ont réalisé le seul travail dans la littérature qui étudie cette relation. Le chariot utilisé se déplace sur des paliers hydrostatiques et une méthode de compensation de «hardware» (par rectification des surfaces) est effectuée. La



course totale du chariot est de  $140mm$ , et la longueur de la glissière est de  $250mm$ . Après la rectification, l'écart cinématique articulaire du chariot est réduit à l'échelle nanométrique.

*Slocum et al.* [Slocum, Basaran, Cortesi & Hart 2003], bien que limité à l'analyse de l'application d'un moteur linéaire à un chariot aérostatique, donnent un bon exemple d'analyse des causes des erreurs cinématiques. Les paliers sont précontraints par le vacuum et par la force d'attraction du moteur, ce qui évite donc l'utilisation des paliers opposés. Le système est hyperstatique et très rigide. L'analyse se concentre surtout sur l'influence du moteur sur les erreurs cinématiques et dynamiques.

## 3.2 Modélisation cinématique et géométrique des liaisons

### 3.2.1 Liaisons cinématiquement équivalentes

**Définition :** Une liaison cinématiquement équivalente entre deux liaisons est définie comme la liaison qui se substituerait à l'ensemble des liaisons réalisées entre ces pièces sans pièce intermédiaire. Si on prend l'exemple d'une liaison pivot d'axe  $(A, x)$  qui relie le bâti (1) au vérin (2) (figure 3.1), on peut exprimer ce simple système par un graphe (Figure 3.2).

#### 3.2.1.1 Liaisons en parallèle

**Définition :**  $n$  liaisons sont disposés en parallèles entre deux solides si chaque liaison relie chaque solide. Ainsi entre les solides 1 et 2 existent  $n$  liaisons simples en parallèle numérotées de  $L_1$  à  $L_n$ , avec  $L_{1,2}$  la liaison équivalente (Figure 3.3)



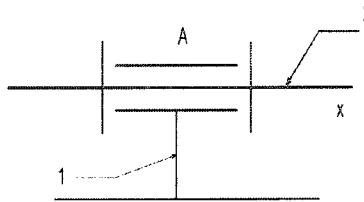


Figure 3.1 : Schéma cinématique minimal

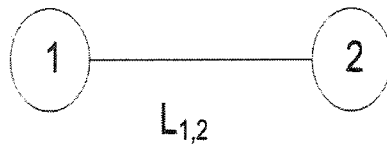


Figure 3.2 : Graphe d'une liaison équivalente

### 3.2.1.2 Liaisons en série

Les liaisons sérielles sont surtout utilisées dans la modélisation cinématique des machines et des robots, et vu la profusion de leur étude dans la littérature, il n'est pas nécessaire d'élaborer leur analyse dans ce travail.

Bien que la configuration des axes d'une machine soit sérielle, les axes eux-mêmes sont souvent reliés entre eux par les liaisons parallèles (Figure 3.4), sous la forme des paliers, ce qui crée un système hybride. On peut ainsi réaliser une modélisation plus complète des machines qui tient compte de la construction mécanique des machines au lieu de la seule configuration cinématique comme c'est le cas dans la plupart des analyses dans le domaine.



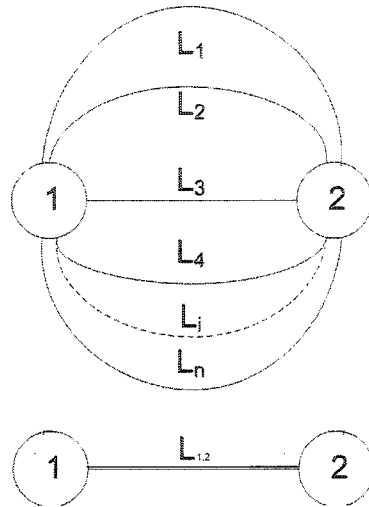


Figure 3.3 : Liaisons en parallèle

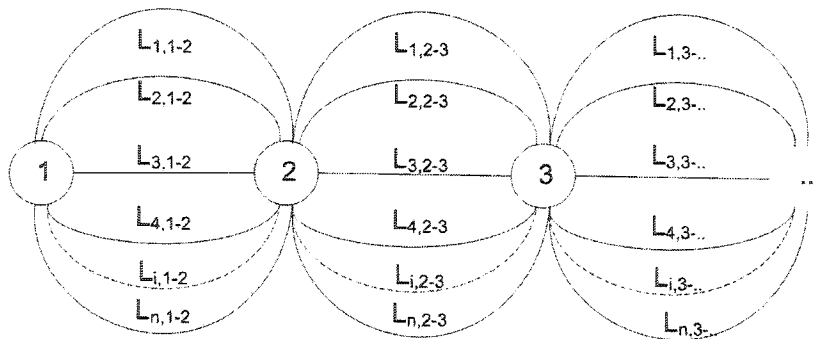


Figure 3.4 : Chaîne cinématique d'une machine



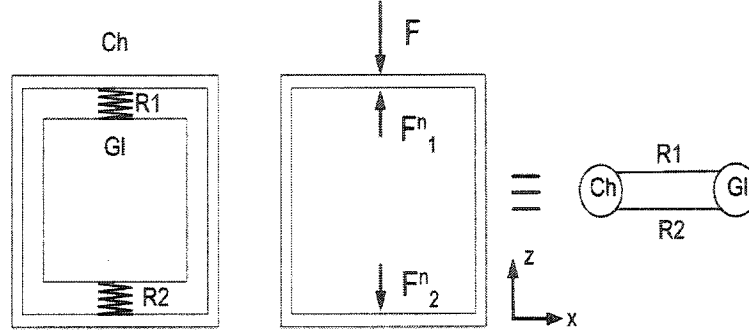


Figure 3.5 : Système Chariot-Glissière

### 3.3 La précontrainte dans les systèmes de guidage

Selon [Spinnler 1997], un système mécanique est précontraint lorsqu'il est le siège d'efforts intérieurs en l'absence de toute charge extérieure. La précontrainte par les paliers opposés est très souvent utilisée dans les guidages des MMTs afin de diminuer la sollicitation dynamique et d'augmenter la rigidité du système, puisque la configuration des paliers opposés est équivalente à un système de ressorts en parallèles. L'équation d'équilibre statique pour le chariot (Ch)(en négligeant le poids du chariot) est (Figure 3.5) :

$$\mathbf{F}_1^r = \mathbf{F}_2^r + \mathbf{F} \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{F}$  représente la force extérieure appliquée, et  $\mathbf{F}_1^r$  et  $\mathbf{F}_2^r$  représentent les forces de réaction aux paliers 1 et 2 respectivement et (Gl) la glissière. En exprimant les



forces en fonction des rigidités et des écrasements :

$$K_1(z_1 + \delta z_1) - K_2(z_2 - \delta z_2) = K_{eq}\delta z \quad (3.2)$$

où  $z_1$  et  $z_2$  représentent l'écrasement des paliers dans le système en équilibre avant l'application de la force extérieure,  $\delta z_1$  et  $\delta z_2$  sont des écrasements induits par l'application de cette même force et  $\delta z$  est le mouvement dans la direction  $z$  du chariot.

Puisqu'à l'équilibre initial sans force extérieure:

$$K_1 z_1 = K_2 z_2 \quad (3.3)$$

et aussi:

$$\delta z_1 = \delta z_2 = \delta z \quad (3.4)$$

on obtient:

$$K_1 + K_2 = K_{eq} \quad (3.5)$$

Donc, le système des paliers est équivalent à une configuration de ressorts parallèles.

### 3.4 Modélisation cinématique et statique du système du guidage

Les pièces chariot (Ch) et glissière (Gl) sont liées ensemble par une combinaison parallèle de paliers à air, chacun pouvant être représentés par une chaîne série de d'une liaison appui plan et d'une liaison sphérique (Figure 3.6) Les défauts de forme des glissières et la couche d'air sous les paliers sont pour le moment négligées pour une analyse simplifiée. La liaison équivalente peut donc être représentée par la figure 3.7.



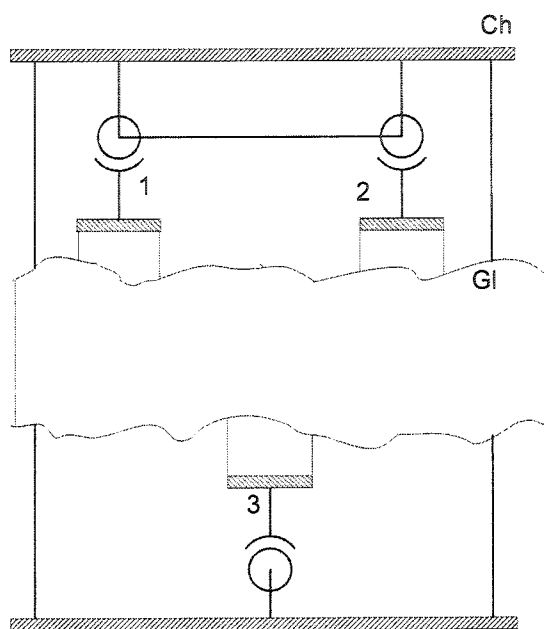


Figure 3.6 : Système Chariot-Glissière

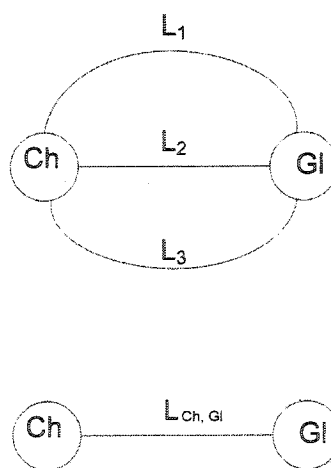


Figure 3.7 : Liasion équivalente



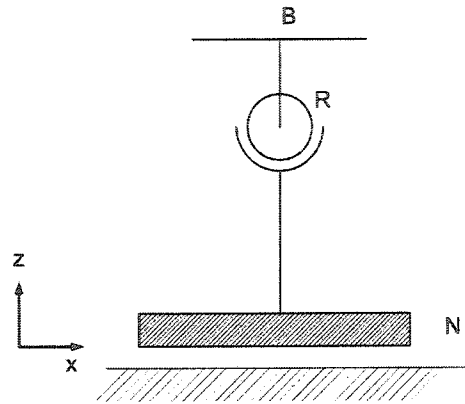


Figure 3.8 : Palier à air

Chacune des liaisons  $L_1$  à  $L_3$  qui relient le chariot à la glissière est formée d'un ensemble sériel des liaisons appui plan-liaison sphérique (Figure 3.8). Une telle configuration est équivalente à une liaison ponctuelle (figure 3.9), puisque la liaison sphérique permet la rotation suivant les axes  $x, y$  et  $z$  mais contraint toutes les translations, tandis que les paliers permettent les translations en  $x$  et  $y$ . La liaison équivalente n'est donc contrainte qu'en translation en  $z$ . Notons cependant une surface beaucoup plus grande qu'un contact ponctuel, faisant en sorte que le moyennage et le filtrage d'effet des déviations des surfaces de glissières est considérable.

Le système glissière-chariot qui sera construit est modélisé à la figure 3.10. Les discussions ultérieures sur les écarts géométriques des guidages seront développés suivant les termes s'affichant sur cette figure. L'étude cinématique sera limitée à l'analyse de rectitude en  $z$  et du tangage, puisque l'effet de l'élément chauffant concernera uniquement la déformation en  $z$  comme il sera exposé dans le chapitre (5).

Dans un système formé de plusieurs paliers (Figure 3.11), les déviations des surfaces se manifestent comme des forces extérieures agissant sur le chariot par



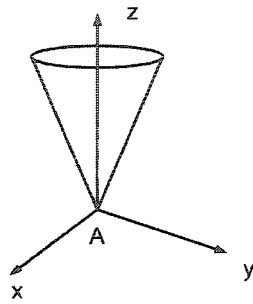


Figure 3.9 : Liaison Ponctuelle

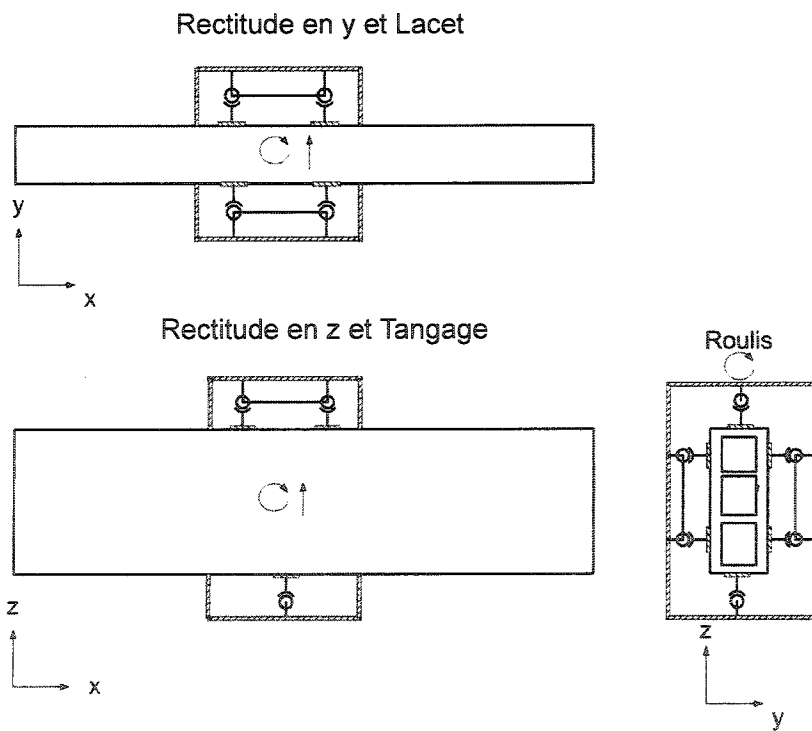


Figure 3.10 : Système glissière chariot, configuration expérimentale



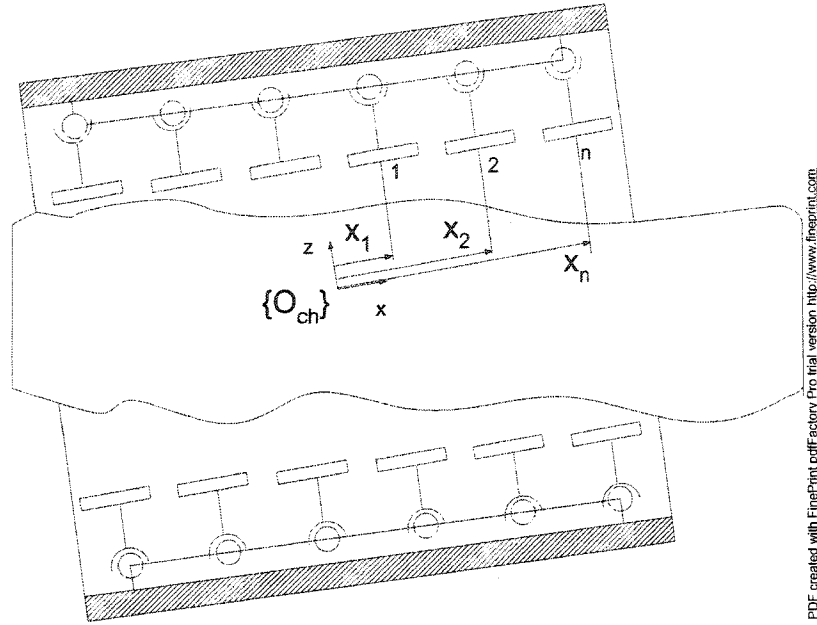


Figure 3.11 : Chariot supporté par n paliers

l'intermédiaire des paliers à air. Une fois à l'équilibre au début de sa trajectoire, le système essaiera de garder son équilibre tout en se déplaçant sur la glissière représentée par une surface imparfaite. Le système est équivalent à un système de ressorts en configuration parallèle (Figure 3.12).

La force qui va affecter chacun des paliers à air à l'équilibre statique peut s'exprimer comme suit:

$$F_i = K_i(\delta_i - (\delta z + \epsilon_y \cdot x_i)) \quad (3.6)$$

où  $x_i$  représente la distance du palier par rapport au centre de gravité du chariot,  $K_i$  est la rigidité de chaque palier à air,  $\delta_i$  représente la déviation des surfaces des glissières définies par rapport à leur normale,  $\delta z$  l'erreur de rectitude du chariot en  $z$  et  $\epsilon_y$  l'erreur de tangage du chariot par rapport à la poutre. L'expression (3.6) représente la situation du retour à l'équilibre statique du chariot après le



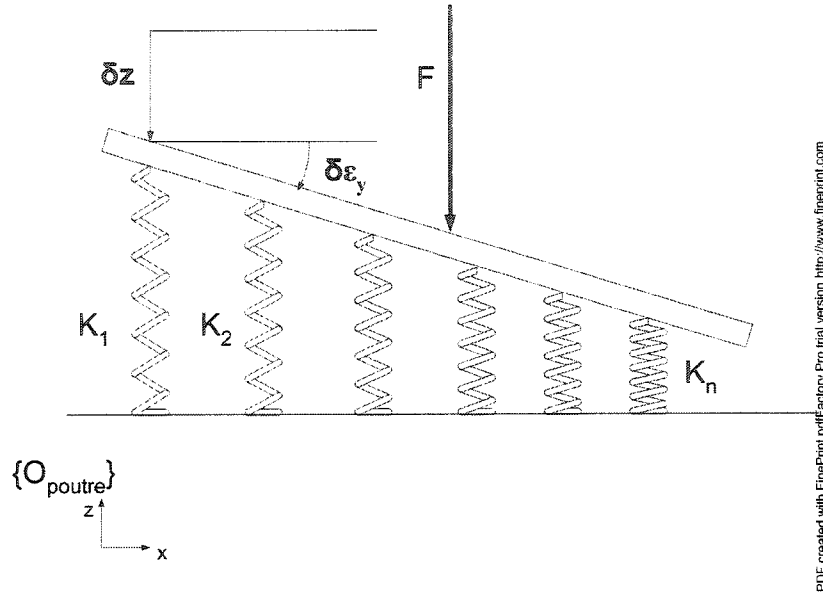


Figure 3.12 : Déplacement d'un chariot sur les ressorts

nouveau positionnement du chariot afin d'équilibrer les équations suivantes:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0 \quad (3.8)$$

On développe ces équations en remplaçant l'expression des paliers individuels (équation 3.6):

$$\sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n K_i(\delta_i - (\delta z + \epsilon_y \cdot x_i)) = 0 \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n K_i(\delta_i - (\delta z + \epsilon_y \cdot x_i))x_i = 0 \quad (3.10)$$



puis on sépare l'expression pour les déviations des glissières de l'expression des écarts de chariot:

$$\sum_{i=1}^n K_i \delta_i = \delta z \sum_{i=1}^n K_i + \epsilon_y \sum_{i=1}^n K_i x_i \quad (3.11)$$

$$\sum_{i=1}^n K_i \delta_i x_i = \delta z \sum_{i=1}^n K_i x_i + \epsilon_y \sum_{i=1}^n K_i x_i^2 \quad (3.12)$$

Enfin on peut reformatter le système de forces et de moments formé de n paliers sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ \xi_1 x_1 & \xi_1 x_2 & \dots & \xi_n x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n K_i & \sum_{i=1}^n K_i x_i \\ \sum_{i=1}^n K_i x_i & \sum_{i=1}^n K_i x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta z \\ \epsilon_y \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

où les  $m_i$  et les  $\xi_i$  sont -1 ou 1 dépendemment de la direction de la force appliquée sur le palier sur l'axe z et la position du palier par rapport au système de coordonnées situé sur le centre de gravité.

On peut imaginer ces forces comme des forces provisoires influant sur le système contre l'effet perturbateur des glissières et pour la restauration de l'équilibre statique établi au tout début de la trajectoire. Le fait que les paliers à air transmettent une force dans la direction de leur normale aux surfaces des glissières présente un autre avantage qu'on va expliciter dans les lignes suivantes:

En supposant tous les paliers situés symétriquement par rapport au système de coordonnées situé au centre de gravité du chariot, la matrice de rigidité sur la partie droite de l'équation devient diagonale. Donc, en profitant de la diagonalité de cette matrice, on peut réécrire le système comme suit :



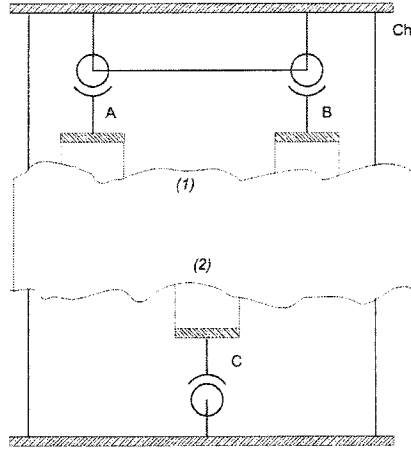


Figure 3.13 : Système Chariot-Glissière

$$\begin{pmatrix} \delta z \\ \epsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sum_{i=1}^n K_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum_{i=1}^n K_i \cdot x_i^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ \xi x_1 & \xi x_2 & \dots & \xi x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Dans le cas du chariot qu'on analysera durant les expériences (figure 3.13) qui est soutenu par 2 paliers A, B, sur la surface supérieure (1) et C sur la surface inférieure du guide (2), on peut écrire le système d'équations suivant :

$$\begin{pmatrix} \delta z \\ \epsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{K_A + K_B + K_C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{K_A \cdot x_A^2 + K_B \cdot x_B^2 + K_C \cdot x_C^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x_A & x_B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_A & 0 & 0 \\ 0 & K_B & 0 \\ 0 & 0 & K_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Un point intéressant de notre analyse est que le système d'équation qu'on obtient est déterminé bien qu'on ait un système mécanique hyperstatique. Cette particularité peut être expliquée de la façon suivante : du fait qu'on connaît a pri-



ori les rigidités des paliers et les déviations de surfaces, on peut déterminer toutes les forces qui influent sur les système et avec les équations d'équilibre, on obtient à la fin un système de deux équation à deux inconnus. On interprète cela comme une moyenne arithmétique pondérée où les facteurs de pondération proviennent des rigidités des paliers. Si c'était un chariot soutenu par des paliers rigides, on devrait faire une régression linéaire en partant des déviations de surfaces. Sans compter les complications qui proviendraient de l'effet de contact entre les paliers et la glissière. A ce point il sera utile de préciser certaines suppositions qu'on doit faire afin de résoudre le système :

- Le chariot est assez rigide pour ne pas être déformé par les forces créées par les déviations,
- Les déviations ne dépassent pas certaines limites :
  1. Un minimum pour garder toujours la couche d'air entre la surface des paliers et la glissière,
  2. Un maximum pour avoir une rigidité suffisante.
  3. L'erreur de parallélisme entre les deux surfaces est négligeable (les références fictives de rectitude des deux surfaces de guidages sont supposés parallèles.)

L'effet de la rigidité des paliers peut être démontré par une simulation. En négligeant le poids du chariot, on constate facilement que dans le cas où la rigidité du palier inférieure est égal à celle des paliers supérieures ( $K_A = K_B = K_C$ ), la rectitude du chariot est déterminée principalement par l'erreur de rectitude du guide supérieure (guide 1) qui est beaucoup plus grande que celle du guide inférieur (guide 2)(Figure 3.14) . Mais en augmentant la valeur de rigidité du palier inférieur ; par exemple  $K_A = K_B = \frac{K_C}{4}$ , nous constatons que cette fois-ci la rectitude résultante est principalement dominé par la rectitude du guide inférieur



(Figure 3.15). C'est un point intéressant du point de vue design. On peut diminuer les exigences de l'état de surface des glissières en utilisant les paliers rigides sur les surfaces les plus lisses.

Le terme trajectoire peut aussi s'appliquer dans le sens temporel. Supposons qu'on place le chariot sur la glissière et qu'on le chauffe après l'ajustement de la force de précontrainte. Le chariot, tout en gardant la même position en  $x$ , va se comporter de manière à satisfaire les équations d'équilibre mentionnées ci-dessus. (On suppose que la force de précontrainte est établie au début de déplacement du chariot).

### 3.5 Analyse de sensibilité

À l'aide du modèle développé dans les sections précédentes, on peut analyser l'effet des dispersions des composantes du système, c'est-à-dire celles de rigidité des paliers et de la rectitude des glissières sur la dispersion des erreurs cinématiques du chariot. Les calculs seront réalisés pour une analyse en deux dimensions; l'erreur du tangage et de la rectitude en  $z$  du chariot, pour les raisons exposées dans au chapitre précédent.

Sur les figures 3.16 et 3.17, on suppose une erreur de rectitude de  $3\mu m$  (erreur géométrique) pour les glissières et on ajoute une dispersion supposant un effet environnemental (erreur thermique) afin de perturber le système. La dispersion de  $K$  varie jusqu'à 25% de la valeur nominale ( $50\text{ N}/\mu m$ ), ce qui est une conjecture admissible comme exposé dans Kwan et al. [Kwan & Post 2000]. Comme on peut facilement le constater sur les figures, les dispersions de rectitude des glissières sont beaucoup plus influentes que les dispersions de rigidité des paliers.



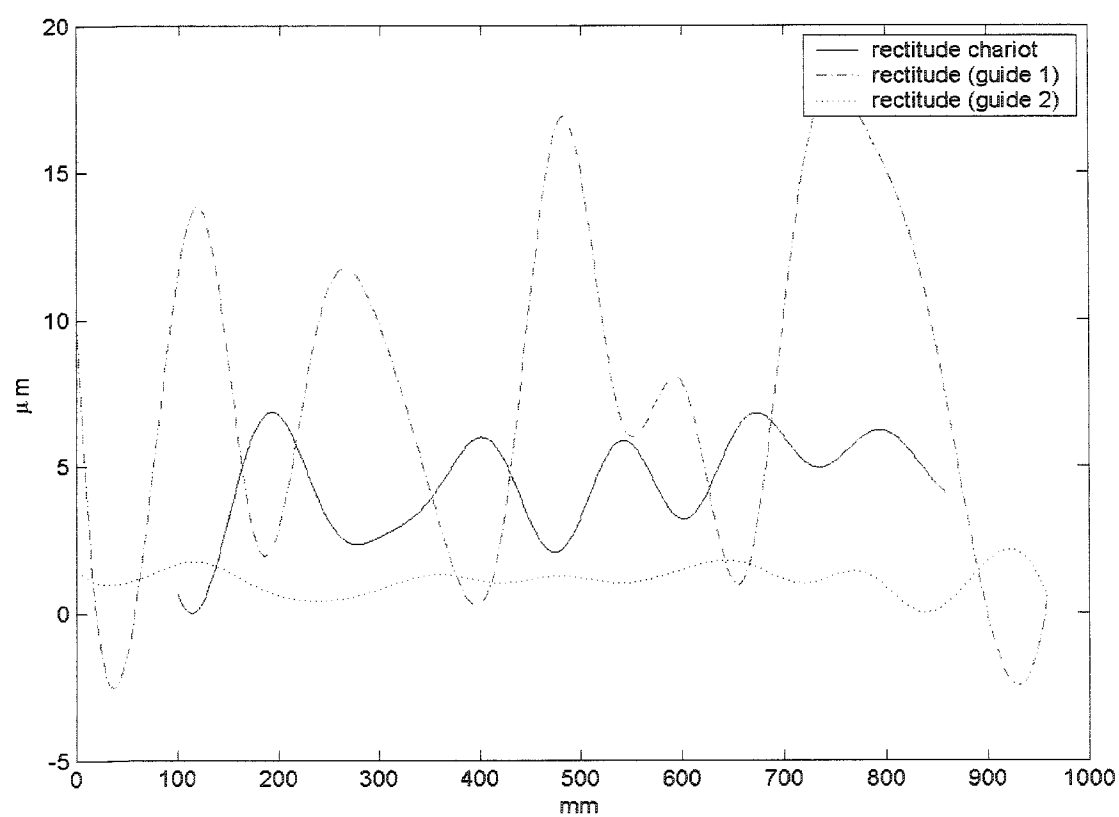


Figure 3.14 : Effet des rigidités des paliers sur l'écart de rectitude du déplacement du chariot ( $K_A = K_B = K_C$ )



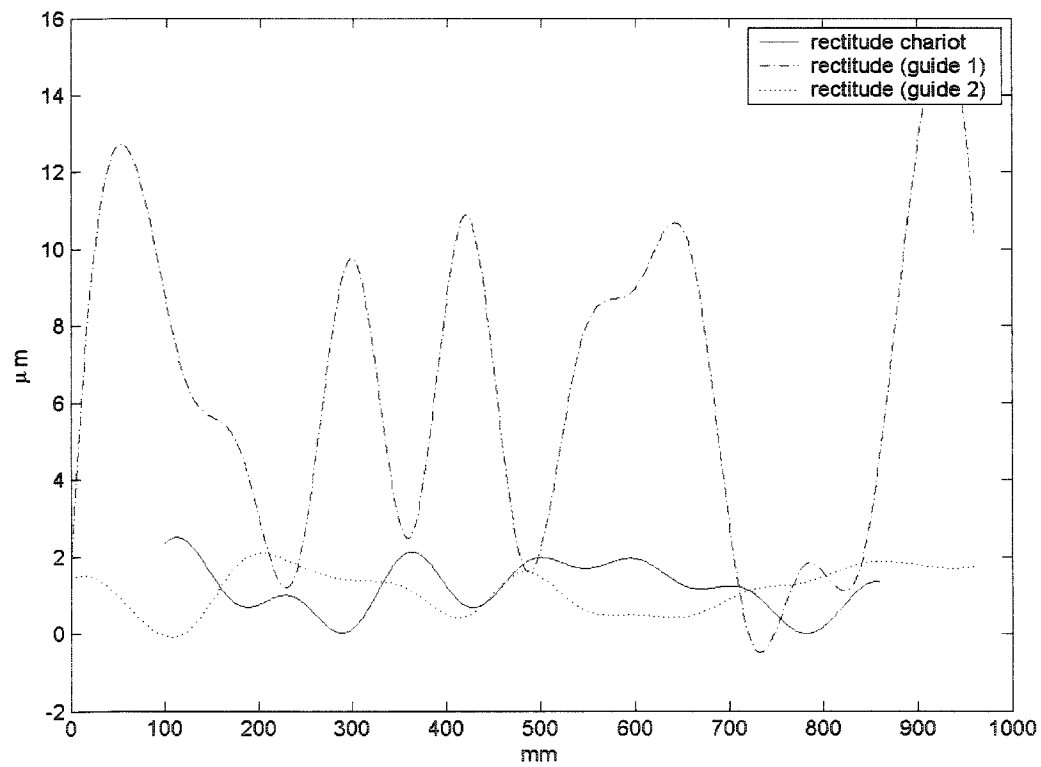


Figure 3.15 : Effet des rigidités des paliers sur l'écart de rectitude du déplacement du chariot ( $K_A = K_B = \frac{K_C}{4}$ )



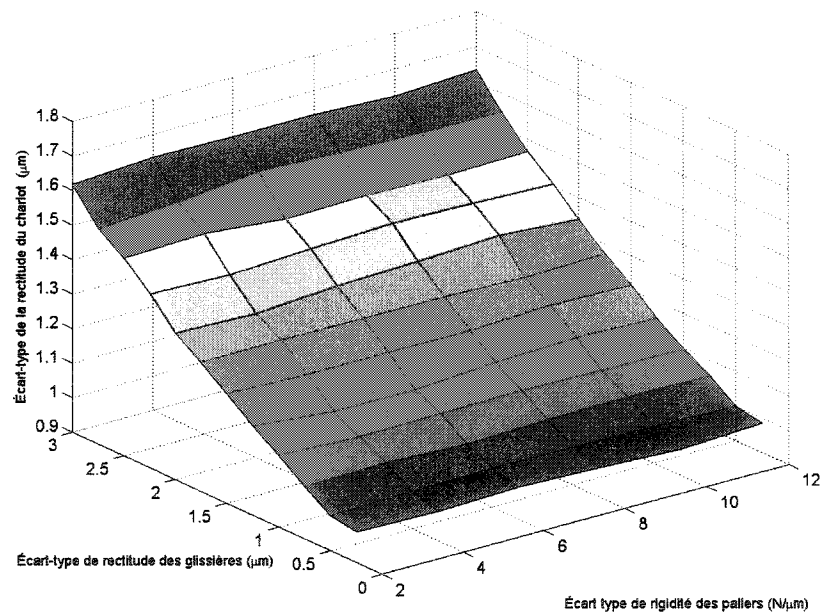


Figure 3.16 : Écart type de la rectitude du déplacement du chariot vs. les dispersions des rigidités des paliers et des rectitudes des glissières



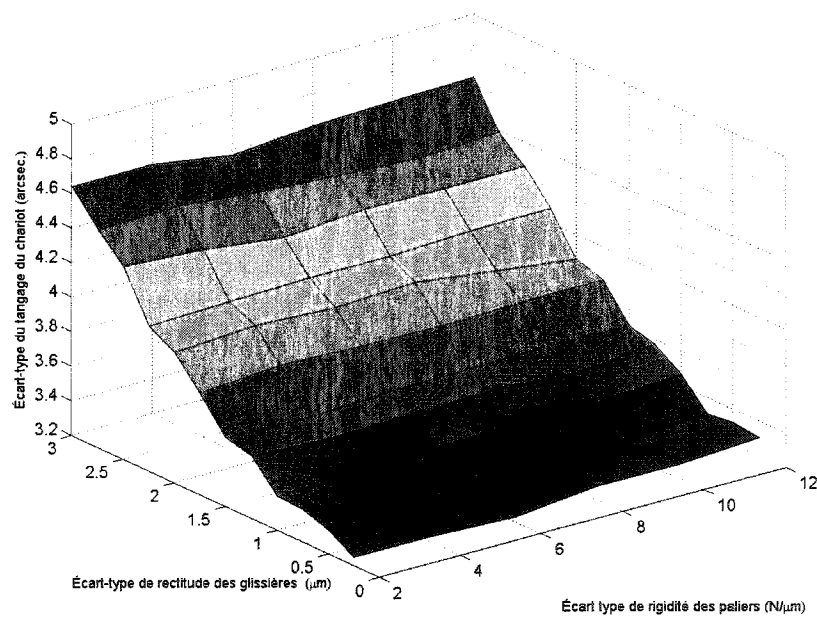


Figure 3.17 : Écart type du tangage du déplacement du chariot vs. les dispersions des rigidités des paliers et des rectitudes des glissières



## 3.6 Conclusion

Dans cette section, une analyse mécanique du système glissière-chariot est effectuée. Les paliers à air qui supportent le chariot étant des éléments fondamentaux dans l'analyse, leurs caractéristiques mécaniques qu'on va élaborer dans la section suivante, se révèlent particulièrement importantes.

Un point assez particulier dans notre analyse est qu'en partant de l'analyse statique des paliers qui supportent le chariot, on trouve à la fin l'erreur cinématique du chariot.

Notre étude sur les erreurs cinématiques du chariot n'est pas complète du fait qu'on a préféré ne pas élargir le système aux différentes configurations ou aux différents types de paliers avant la confirmation de théorie par les expériences sur le banc d'essai avec la configuration examinée dans le présent chapitre puisque le système s'avère être très sensible aux rigidités des différentes composantes mécaniques comme on va l'examiner dans les chapitres ultérieurs.



## Chapitre 4

# PALIER À AIR

### 4.1 Théorie de l'aérostatique

#### 4.1.1 Généralités

Il est très important de comprendre le fonctionnement et la construction physique des paliers à air qui supportent le chariot afin de prédire le comportement mécanique de ce dernier. Les paliers à air sont largement utilisés dans les systèmes qui possèdent des exigences fonctionnelles de précision extrêmes, en l'occurrence, les MMTs. Ils sont aussi largement employés dans les systèmes de propulsion des missiles, grâce à leur viscosité constante par rapport à la température [Gross 1962]. Ce sera aussi un avantage pour les expériences finales où on va susciter des perturbations dans les déviations de surface par un apport calorifique.

Il faut bien préciser que la littérature sur les paliers à air est exhaustive et la partie qu'on explicitera a pour but d'éclaircir les points qui peuvent se révéler importants dans le déroulement des expériences. La plupart des ouvrages sur le sujet datent des années soixante, et une révision pourrait bien être nécessaire pour y inclure les innovations récentes, notamment, le palier à air poreux, qui est le type de palier aérostatique le plus utilisé de nos jours. En ce qui concerne notre



recherche, il faudra surtout se concentrer sur l'effet des déviations de surface sur la rigidité de palier. On essayera également de démontrer que pour les déviations de surface dont la période est suffisamment grande par rapport à longueur du palier, on peut aisément faire l'hypothèse de rigidité constante de palier en tous points le long de la surface. Un point critique parmi les critères est certainement l'épaisseur de la couche d'air sous le palier. L'épaisseur de la couche d'air sous les paliers aérostatiques est spécifiée à être entre 5-20  $\mu m$  selon toutes les références consultées et ce, peu importe le type de palier. Ce qui est d'ailleurs justifié par le graphe de capacité de charge versus l'épaisseur de la couche d'air des paliers de Mitutoyo (figure 4.1) qui représente une rigidité quasi constante dans cette plage.

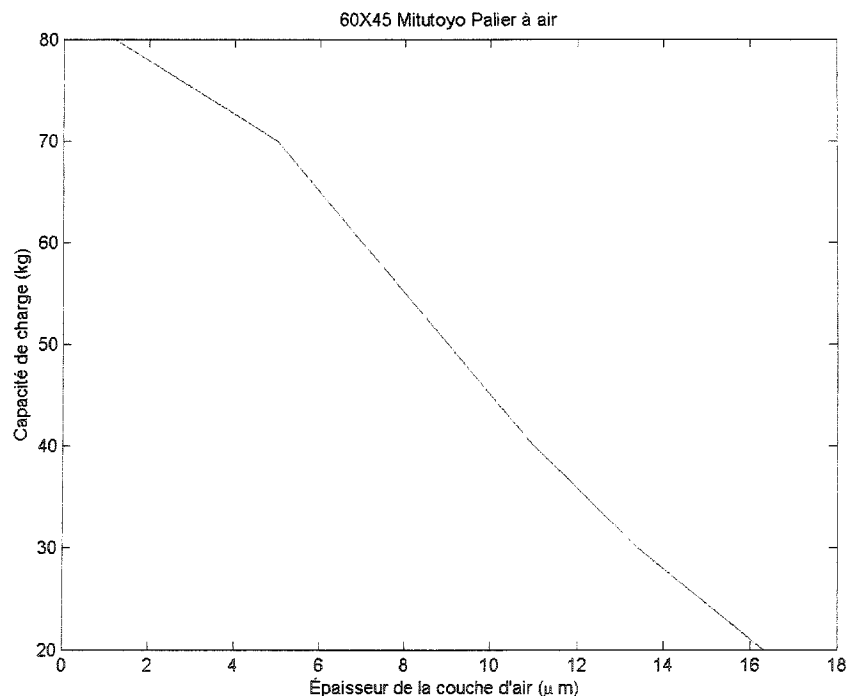


Figure 4.1 : La capacité de charge versus l'épaisseur de couche d'air pour le palier à air Mitutoyo (Gracieuseté de compagnie Mitutoyo)



L'épaisseur de couche d'air optimisé se situe entre :

- Une valeur minimale ( $5 \mu m$ ) entre la surface de palier d'air et la surface de glissière afin d'éviter le contact et la détérioration du palier,
- Une valeur maximale ( $20 \mu m$ ) pour éviter le problème de turbulence, d'instabilité et surtout des vibrations quand il s'agit d'une MMT haut de gamme.

La valeur optimale est citée comme étant 5 à 6  $\mu m$  dans plusieurs articles, qui permet le maximum de capacité de charge pour un palier.

Les hypothèses faites avant la réalisation de simulation sont conformes à celles des plusieurs références consultées ([Rowe & Stout 1973],[Stout, El-Ashkar, Ghasi & Tawfik 1992]):

- L'écoulement est laminaire ;
- L'état est stationnaire ;
- La déviation de surface du roulement à air est négligée ;
- L'écoulement est à viscosité prépondérante, c'est-à-dire que, en général, les forces de volume et les quantités d'accélération peuvent être négligées par rapport aux forces de viscosité et de pression.

Il faut souligner que la rigidité des paliers est très sensible aux déviations dimensionnelles comme le diamètre des orifices et la surface effective du palier [Kwan & Post 2000]). Mais ces spécifications sont assez complexes et leurs effets sont négligés dans notre recherche. Pourtant les effets de ces déviations peuvent être pris en compte pour calculer leur influence sur le comportement du chariot à l'aide de simulations Monte-Carlo.



### 4.1.2 Fonctionnement

Des oeuvres entièrement consacrées au sujet des paliers à air n'étant pas disponibles (ou étant obsolètes), on a eu besoin de recourir aux articles qui traitent le domaine de manière exhaustive, notamment ; [Holster & Jacobs 1987]et [Majumdar 1980].

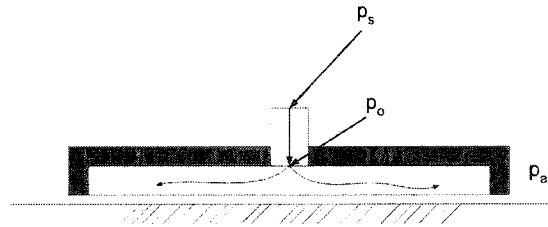


Figure 4.2 : Palier à air schématisé ( $p_s$ =pression d'alimentation,  $p_o$ =pression d'orifice),  $p_a$ =pression atmosphérique)

Les deux éléments qui sont essentiels dans le fonctionnement des paliers à air sont:

- Les orifices de sortie d'air en dessous des paliers qu'on appelle en littérature «réducteurs de débit» («restrictors» en anglais),
- La couche d'air sous le palier.

#### 4.1.2.1 Réducteurs de débit

Malgré leur apparence triviale, soulignons que les réducteurs de débit jouent un rôle fondamental dans la détermination du comportement des paliers à air, et il



existe une vaste littérature sur leur design et optimisation ([Tawfik & Stout 1989], [Salem & Shawky 1978],[Kassab, Nourelden & Shawky 1997]).

En pratique, il est nécessaire que la charge varie inversement à l'épaisseur de couche d'air et c'est le réducteur de débit qui remplit cette fonction : quand la charge extérieure augmente, l'épaisseur de la couche d'air diminue et avec elle le débit massique d'air, ce qui entraîne une diminution dans la chute de pression le long du réducteur. De ce fait, la pression  $p_o$  (figure 4.3) s'amplifie, et en conséquence, la capacité de charge de palier augmente.

Les deux importants types de réducteurs de débit sont :

- Réducteurs à compensation inhérente : qui désigne tout simplement des orifices sous les paliers qui assument la fonction de compensation.
- Réducteurs à poche : Les orifices avec des poches dans leur périphérie, ce qui réduit la turbulence et accroît la pression autour de l'orifice.

En raison de leur complexité excessive,(mode turbulent,effets inertiels, effets de tolérance) l'analyse des réducteurs ne sera pas abordée dans notre étude. Mais en considérant que la suite de notre analyse suppose un épaisseur optimisé entre 10-20  $\mu m$ , et que selon Kassab et al. [Kassab *et al.* 1997], la chute de pression d'alimentation est minimale dans cette plage, on peut conclure que le coût de cette simplification ne sera pas élevé.

#### 4.1.2.2 Couche d'air

La couche d'air sous le palier détermine la capacité de charge du palier par la distribution de pression. Une méthode basée sur les différences finies pour calculer cette distribution (et la capacité de charge) sera exposée à la section suivante. On déterminera ensuite l'effet des formes des déviations de surface des glissières qui soutiennent les paliers sur la capacité de charge d'un palier à air. Cette influence



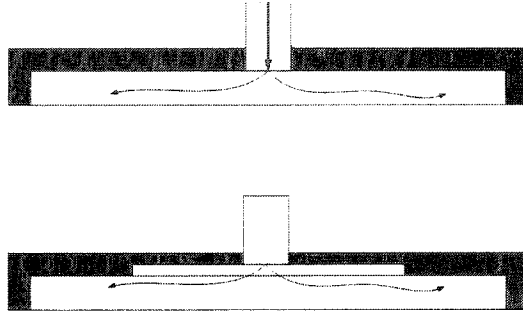


Figure 4.3 : Les paliers selon le type de réducteurs de débit: Réducteur à compensation inhérente (en haut), Réducteurs à poche (en bas)

sera imposée principalement par le biais de la couche d'air et l'impact sur l'orifice de sortie sera négligé.

### 4.1.3 Analyse

D'après les hypothèses de 4.1.1, on peut réduire les équations de Navier-Stokes (A.3) à :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (4.2)$$

où  $p$  désigne la pression,  $u$  et  $v$  sont les vitesses dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement, et  $\mu$  est la viscosité.

Définissons les conditions de frontières selon la figure (4.4):



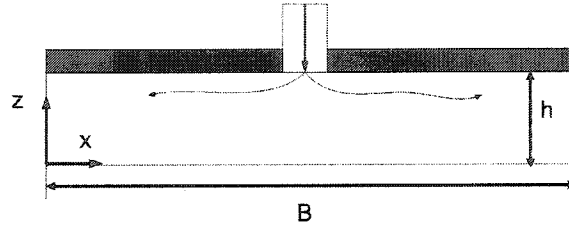


Figure 4.4 : La couche d'air sous le palier

$$u(x, y, 0) = 0 \quad u(x, y, h) = 0 \quad v(x, y, 0) = 0 \quad v(x, y, h) = 0 \quad (4.3)$$

et intégrons avec une viscosité constante:

$$u = \frac{hz}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (4.4)$$

$$v = \frac{hz}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (4.5)$$

l'équation de continuité d'un fluide étant:

$$\frac{\partial \rho w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \quad (4.6)$$



par l'intégration :

$$\int_0^h d\rho w = - \int_0^h \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dz \quad (4.7)$$

La partie gauche de l'équation est égal à zéro par l'hypothèse de l'état stationnaire. En interchangent les opérations d'intégration et de différentiation on obtient:

$$0 = - \left( \frac{\partial \int_0^h \rho u dz}{\partial x} + \frac{\partial \int_0^h \rho v dz}{\partial y} + \frac{\partial \rho h}{\partial t} \right) \quad (4.8)$$

remplaçant les équations 4.4 et 4.5 dans 4.8:

$$0 = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{hz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \left( \frac{hz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) \right) \right) \right) \quad (4.9)$$

En supposant une densité constante et un état stationnaire, on obtient finalement:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\rho h^3 \nabla p}{\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.10)$$

L'équation dérivée ci-dessus se nomme l'équation de Reynolds dans la littérature sur les paliers aérostatiques, et c'est une équation classique dans l'analyse des paliers [Gross 1962]. Dans la suite de notre analyse, les perturbations seront in-



duites dans l'équation de Reynolds afin de prédire la sensibilité des paliers aux déviations de surfaces sur lesquelles ils se déplacent.

En supposant que la couche d'épaisseur varie selon l'axe x uniquement ( $h=h(x)$ ) et une couche d'air parfaitement isothermale ( $\frac{p}{\rho} = Constant$ ), équation (4.10) se transforme en:

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{3}{h} \frac{dh}{dx} \frac{\partial p^2}{\partial x} = 0 \quad (4.11)$$

En normalisant les variables;

$$P = \frac{p}{p_a} \quad X = \frac{x}{B} \quad Y = \frac{y}{L} \quad (4.12)$$

où B est la longueur de palier (le long de la fonction d'erreur dans notre analyse) et L désigne la largeur et  $p_a$  la pression atmosphérique.

Soit

$$H = \frac{h}{h_o} \quad A = \frac{h_e(x)}{h_o} \quad (4.13)$$

où  $h_e(x)$  représente le magnitude d'erreur induite par les déviations et  $h_o(x)$  l'épaisseur nominal de la couche d'air.

L'épaisseur de couche d'air avec la contribution d'erreur est exprimé par:

$$h = h_o + h_e \sin\left(\frac{2\pi x}{B}\right) \quad (4.14)$$



sous sa forme normalisée:

$$H = 1 + A \sin(2\pi X) \quad (4.15)$$

Donc:

$$\frac{dH}{dX} = A 2\pi \cos(2\pi x) \quad (4.16)$$

remplaçant les formes normalisés dans 4.11, on obtient:

$$\frac{\partial^2 P^2}{\partial X^2} + \frac{B^2}{L^2} \frac{\partial^2 P^2}{\partial Y^2} + \frac{3}{H} \frac{dH}{dX} \frac{\partial P^2}{\partial X} = 0 \quad (4.17)$$

avec

$$q = p^2 \quad \Delta x = \Delta y = \Delta \quad (4.18)$$

En exprimant les différences partielles:

$$\frac{dq}{dx} = \frac{q(i+1, j) - q(i-1, j)}{2\Delta x} \quad (4.19)$$

$$\frac{d^2 q}{dx^2} = \frac{q(i+1, j) - 2q(i, j) + q(i-1, j)}{\Delta x^2} \quad (4.20)$$



$$\frac{d^2q}{dy^2} = \frac{q(i, j+1) - 2q(i, j) + q(i, j-1)}{\Delta y^2} \quad (4.21)$$

En utilisant les équations (4.18) à (4.21), on transforme (4.17) en:

$$\frac{q(i+1, j) - 2q(i, j) + q(i-1, j)}{\Delta x^2} + \frac{B^2}{L^2} \frac{q(i, j+1) - 2q(i, j) + q(i, j-1)}{\Delta y^2} + \dots \quad (4.22)$$

$$\dots - \frac{3}{\vec{h}(i, j)} * A\pi \cos(2\pi x) * \frac{q(i+1, j) - q(i-1, j)}{2\Delta x} = 0$$

En manipulant, on obtient finalement:

$$q(i, j) = \left( \left( 1 - \frac{3}{\vec{h}(i, j)} A\pi \cos(2\pi x) \Delta q(i+1, j) \right) \left( 1 + \frac{3}{\vec{h}(i, j)} A\pi \cos(2\pi x) \Delta q(i-1, j) \right) + \dots \right) \quad (4.23)$$

$$\dots - \frac{B^2}{L^2} (q(i, j+1) + q(i, j-1)) \left( 2 + 2\frac{B^2}{L^2} \right)^{-1}$$

La capacité de charge sera calculé par l'intégration:

$$F = \int \int p dx dy \quad (4.24)$$

Et on obtient la rigidité avec:

$$K = \frac{F}{h} \quad (4.25)$$

où h désigne la hauteur de couche d'air moyenne sous le palier.



Les simulations seront réalisées à partir de (4.24) et (4.25). Les conditions de frontières seront définies avec certains hypothèses. L'amplitude de déviation de surface sous le palier ne dépassant pas  $5\mu m$ , la chute de pression et les effets inertiels aux orifices seront négligés, par conséquent la pression à la sortie des orifices sera égale à la pression d'alimentation. La pression autour du palier à air sera égale à la pression atmosphérique.

## 4.2 Analyse de l'effet des déviations des surfaces sur la rigidité des paliers à air

En partant des résultats de notre analyse, on peut tracer la courbe de distribution de pression sous le palier (Figures 4.5, 4.6, 4.7, 4.8). On a examiné deux types de palier avec le nombre des orifices de 1 et 4. Quant aux déviations, on a choisi d'expérimenter avec 7 différentes périodes d'erreur. B représentant la longueur des paliers, l'axe x des graphes désigne le ratio de la longueur de palier à la période d'erreur.

Deux différentes amplitudes d'erreur sont simulés, leurs proportions par rapport à la valeur nominale de l'épaisseur de couche d'air étant :0.3 et 0.5 . Sur les figures 4.9 et 4.11, on constate clairement que la variabilité de capacité de charge diminue avec l'augmentation de la période d'erreur de rectitude de la surface par rapport à la largeur du palier le long d'erreur et la capacité de charge s'approche à la valeur nominale. Les résultats concernant la variation de rigidité des paliers sont présentés sur les figures 4.10 et 4.12.

Soulignons aussi que la capacité de charge nominal calculé par la méthode de différences finis est 62 kg, ce qui correspond approximativement à la valeur de capacité de charge pour une épaisseur optimale de couche d'air d'un palier de Mitutoyo ( Figure 4.1).



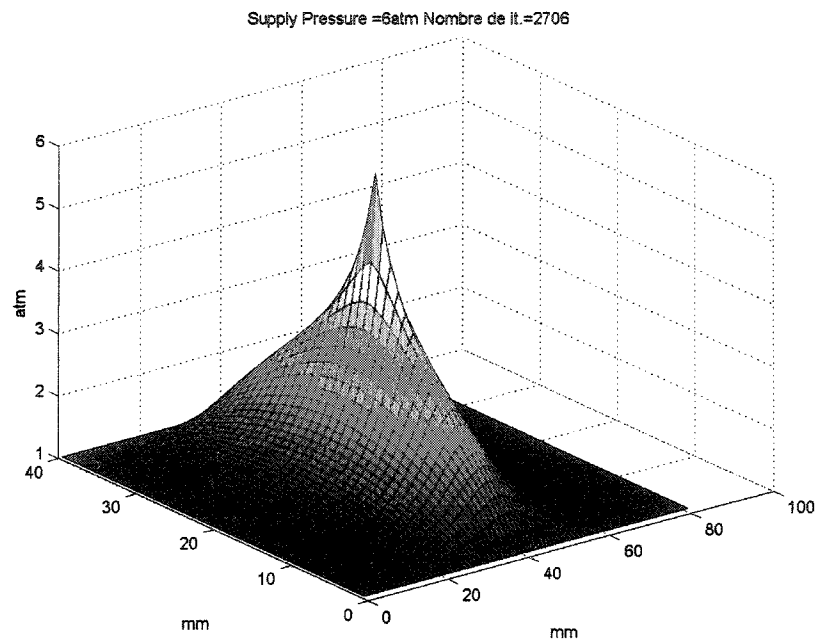


Figure 4.5 : Distribution de pression d'un palier à un orifice (surface)

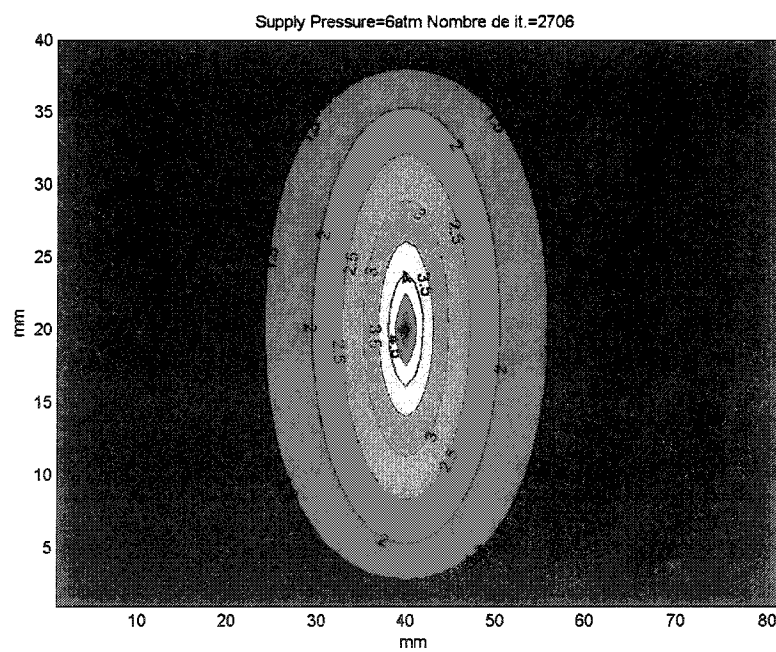


Figure 4.6 : Distribution de pression d'un palier à un orifice (contour)



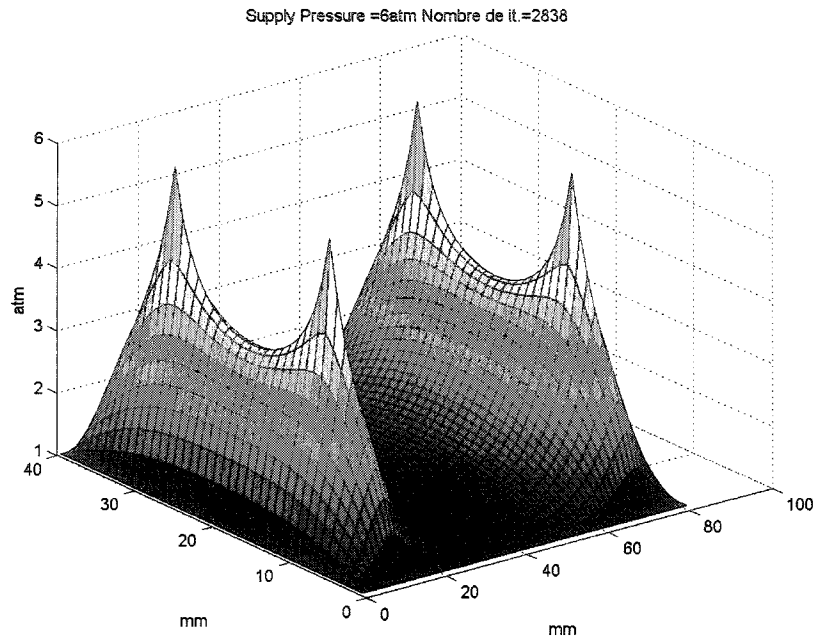


Figure 4.7 : Distribution de pression d'un palier à 4 orifices (surface)

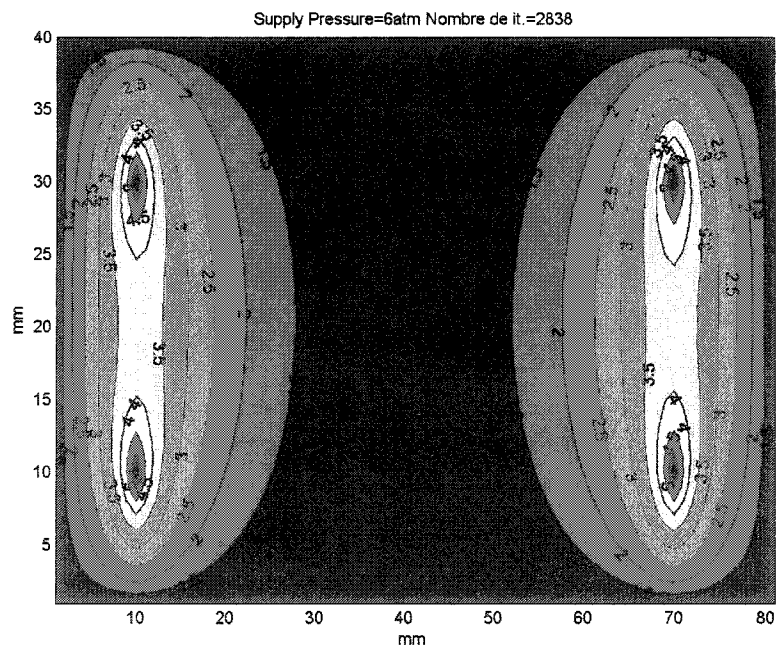


Figure 4.8 : Distribution de pression d'un palier à 4 orifices (contour)



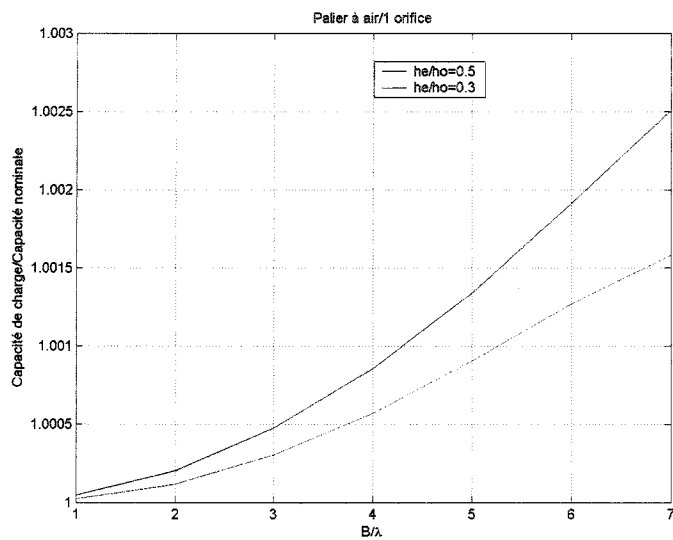


Figure 4.9 : Variation de capacité de charge par rapport à  $\frac{B}{\lambda}$  (palier à 1 orifice, normalisé)

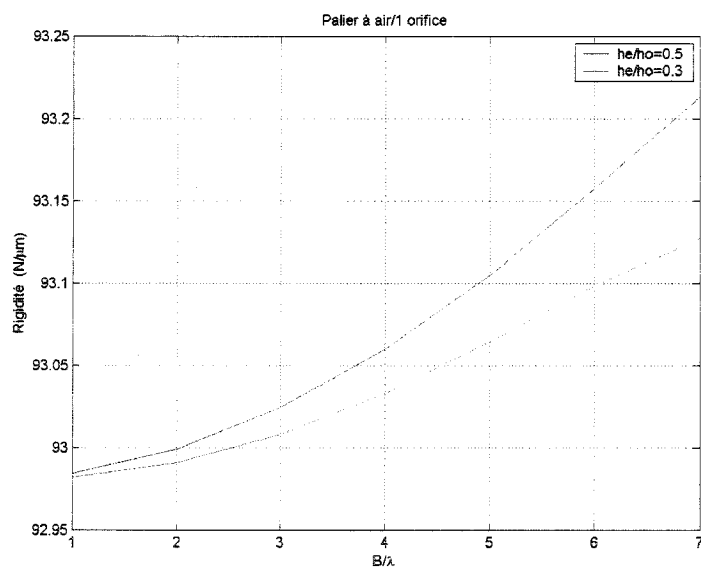


Figure 4.10 : Rigidité par rapport à  $\frac{B}{\lambda}$  (palier à 1 orifice)



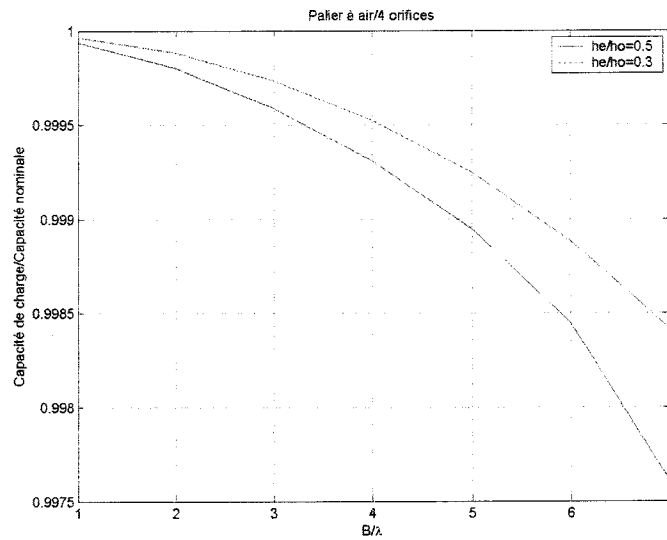


Figure 4.11 : Variation de capacité de charge par rapport à  $\frac{B}{\lambda}$  (palier à 4 orifices, normalisé)

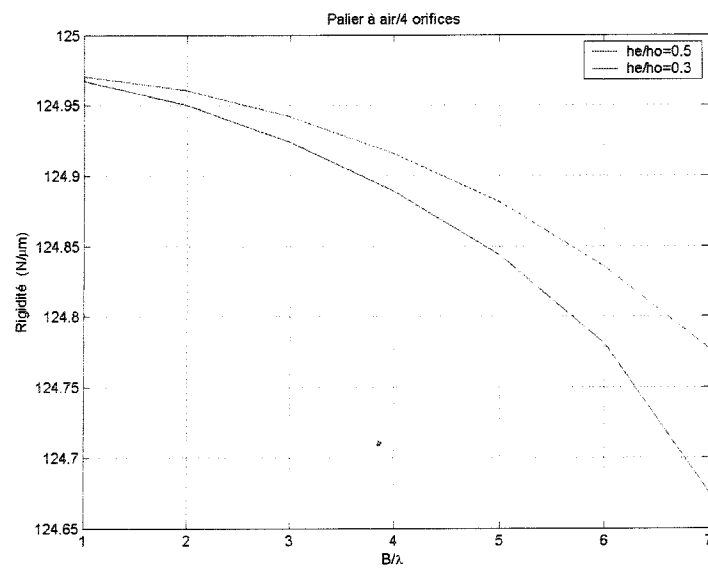


Figure 4.12 : Rigidité par rapport à  $\frac{B}{\lambda}$  (palier à 4 orifices)



## 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a cherché à acquérir une connaissance de base concernant les paliers à air qui sont des éléments fondamentaux dans l'analyse causale des erreurs cinématiques du chariot. Il est à préciser qu'il y a une pénurie de références de base sur le sujet et il a fallu faire une revue de littérature exhaustive des articles. Notre analyse est pourtant partielle puisqu'il ne couvre que la couche d'air sous les paliers en excluant les effets inertiels dans les orifices.

Pourtant les simulations sont assez révélatrices sur l'importance de l'augmentation du nombre d'orifices qui procure une distribution de pression équilibrée sous le palier. Mais ce qui est plus important pour notre analyse mécanique était d'identifier la relation entre la déviation de surface et la rigidité du palier. Notre analyse montre que la variabilité de rigidité diminue avec l'augmentation de la longueur d'onde d'erreur de rectitude de surface par rapport à la largeur du palier le long d'erreur. Puisque l'erreur de surface obtenue par le chauffage sur la poutre est plusieurs fois plus grande que la largeur du palier, on peut en conclure que dans l'analyse du système construit sur le banc d'essai les rigidités des paliers peuvent être supposés constants.



## Chapitre 5

# ANALYSE THERMIQUE DU GUIDE

### 5.1 Généralités

Parmi les articles récents qui s'occupent des relations entre les erreurs d'origine thermique et les erreurs cinématiques, on peut citer [Lee, Yoo & Yang 2003], qui analysent les effets des déformations d'origine thermique sur le mouvement d'une liaison glissière à contact surfacique. En raison de l'hyperstatisme de la liaison, il n'est pas possible d'estimer les erreurs cinématiques à partir des déformations.

[Wu & Kung 2003] mettent l'accent sur la déformation de vis à billes entraînant le chariot d'une liaison glissière, en estimant l'effet de la précontrainte et de la vitesse d'alimentation. [Kim, Jeong & Cho 2004] examinent les effets de chauffage provenant des moteurs, de la friction des guides et du système de refroidissement au moyen des méthodes des MEF sur une machine outil en confirmant par les expériences.

[Barakat, Spence & Elbestawi 2000] ont conduit une recherche sur la compensation des erreurs des MMTs , en produisant des perturbations thermiques dans l'air ambiant. Leur modèle est basé sur une analyse de régression linéaire dont les



variables sont la position des axes et la température ambiante.

Le gradient de température uniforme le long de l'axe d'une MMT a été examiné par [Lingard, Purss, Sona & Thwaite 1991] en utilisant un élément chauffant à ventilation, donc au moyen du chauffage par convection. La déformation de l'axe subissant le gradient de température se fait par la MEF. La vérification se fait par une barre à bille fixe en zérodur. Une analyse similaire sera mise en oeuvre sur le banc d'essai pendant nos expériences, par contre le chauffage sera de type conductif (avec un élément chauffant collé sur la poutre) de façon à minimiser les incertitudes créées par le chauffage convectif et accroître le contrôle.

Dans nos expériences, le guide sur lequel le chariot se déplace est perturbé thermiquement dans le but d'obtenir des déviations de surfaces symétriques de deux côtés opposés et, également, d'obtenir une perturbation contrôlée et prévisible. La source thermique est constituée d'un élément chauffant collé sur la surface intérieure de la paroi supérieure de la glissière. L'élément chauffant est contrôlé par le moyen d'un contrôleur PID dont le schéma est présenté dans l'annexe. La déviation sera calculée selon la théorie de thermoélasticité qu'on explicitera dans la section suivante.

Grâce à l'élément chauffant qui s'étend sur toute la partie supérieure de la poutre, dans les chapitres ultérieurs il sera démontré que la déformation de la poutre sera dans la direction verticale dû au gradient constant tout le long de la poutre.

## 5.2 Théorie de thermoélasticité

La poutre (figure 5.1) à analyser est de profondeur  $b$  et de hauteur  $2h$  qui sont supposés très petits par rapport à la longueur  $L$ . Comme l'étendue de l'élément chauffant inclut toute la longueur de la poutre, on peut aisément supposer que  $T=T(z)$ .



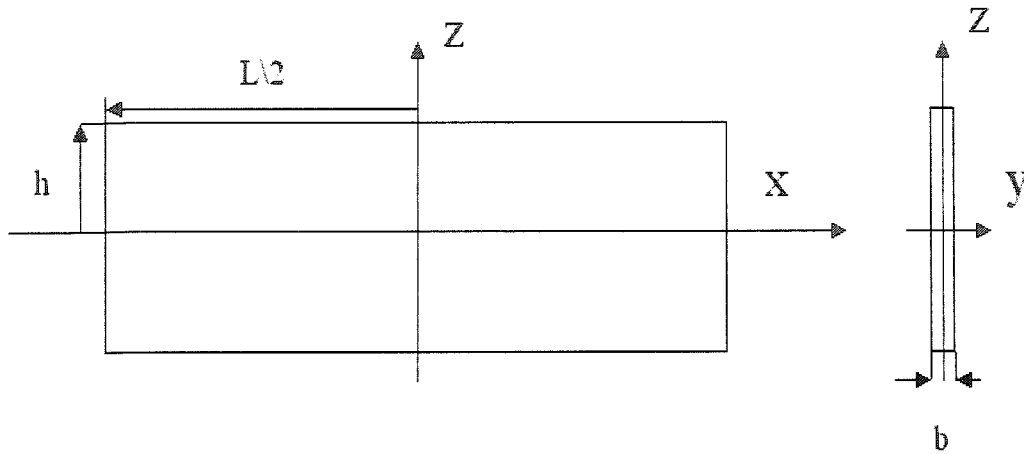


Figure 5.1 : Poutre mince de section rectangulaire

Grâce à la minceur de la poutre, on peut aussi accepter les hypothèses de la contrainte plane;

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{zy} = 0 \quad (5.1)$$

où  $\sigma_{yy}$  désigne la contrainte normale dans la direction y,  $\sigma_{xy}$  la contrainte de cisaillement dans le plan xy, et  $\sigma_{zy}$  la contrainte de cisaillement dans le plan zy.

De plus, les parties inférieures et supérieures ne sont pas contraintes, donc on peut faire l'hypothèse:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0 \quad (5.2)$$

où  $\sigma_{zz}$  désigne la contrainte normale dans la direction z et  $\sigma_{xz}$  la contrainte de



cisaillement dans le plan  $xz$ .

Finalement, puisque la température varie uniquement le long de l'axe  $z$ :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(z) \quad (5.3)$$

où  $\sigma_{xx}$  désigne la contrainte normale dans la direction  $x$ .

Si on se rappelle de l'équation B.17(Annexe B):

$$\nabla^4 F = -E\alpha\nabla^2 T \quad (5.4)$$

alors les équations (B.16, Annexe B) et les hypothèses (5.1 – 5.2) , 5.4 se réduit à:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_{xx} + E\alpha T) = 0 \quad (5.5)$$

Donc

$$\sigma_{xx} = -E\alpha T + C_1 + C_2 z \quad (5.6)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes, qui devraient être déterminées à partir des conditions de frontière de traction zéro sur les surfaces latérales de la poutre. Mais il est clair de l'équation précédente qu'il est impossible d'obtenir la condition de traction zéro tout le long de la surface latérale. Donc on fait l'hypothèse de force et moment résultants zéro le long de la surface de sorte que :

$$\int_{-h}^h \sigma_{xx} dz = 0 \quad \int_{-h}^h \sigma_{xx} z dz = 0 \quad (5.7)$$

Il faut ajouter à ce point que, la solution obtenue à partir de ces hypothèses ne sera pas exacte, mais par le principe de Saint Venant (Annexe B.4), elle sera raisonnable à une distance suffisamment grande des extrémités. Selon [Thornton 1996] la solution obtenue donne de bon résultats même pour les poutres relativement courtes (en l'occurrence, la nôtre) avec  $L \geq 6h$



Donc on trouve finalement:

$$\sigma_{xx} = E\alpha(-T + \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T dz + \frac{3z}{2h^3} \int_{-h}^h Tz dz) \quad (5.8)$$

Soient N et M la force et le moment créés par le gradient de température :

$$N = \alpha E \int_{-h}^h T dz \quad M = \alpha E \int_{-h}^h Tz dz \quad (5.9)$$

Donc, (5.8) devient:

$$\sigma_{xx} = -\alpha ET + \frac{1}{2h} N + \frac{3z}{2h^3} M = -\alpha ET + \frac{b}{A} N + \frac{zb}{I} M \quad (5.10)$$

Avec les équations (B.12, Annexe B) on obtient les déformations:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left( \frac{b}{A} N + \frac{zb}{I} M \right) \quad (5.11)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{v}{E} \left( \frac{b}{A} N + \frac{zb}{I} M \right) + (1+v)\alpha T \quad (5.12)$$

$$\varepsilon_{xz} = 0 \quad (5.13)$$

Et finalement, on trouve les déplacements avec les équations (B.4, Annexe B):

$$u = \frac{x}{E} \left( \frac{b}{A} N + \frac{zb}{I} M \right) \quad (5.14)$$

$$w = -\frac{bMx^2}{2EI} - \frac{v}{E} \left( \frac{b}{A} Nz + \frac{z^2b}{2I} M \right) + (1+v)\alpha \int_0^z T dz \quad (5.15)$$

où I et A représentent le moment d'inertie et l'aire de la surface transversale de la poutre, respectivement.



Si on analyse en détail les composants de l'équation 5.15, on constate que c'est seulement le premier terme qui influe sur la rectitude des surfaces, les autres étant constants pour une coordonnée  $z$  donnée et n'agissant que sur l'expansion globale dans la direction  $z$ . Le calcul du second terme donne une valeur maximale de  $4 \mu m$  pour la plage de température analysée, et celui du troisième  $5 \mu m$ , et leurs effets sont dans les directions opposées.

Les formules obtenues sont vérifiées sur une poutre octroyée au département par la compagnie Mitutoyo. Les valeurs des déplacements obtenus par la théorie de thermoélasticité sont aussi vérifiées par l'analyse d'éléments finis qui sera présentée dans la section suivante.

### 5.3 Comparaison Eléments Finis, Expériences et Théorie Elastique

Pour analyser la déformation de la poutre qui découle du chauffage, on a pris des mesures avec la caméra thermique sur la poutre (Figure 5.2). Bien que les mesures et les analyses théoriques concernent les 4 états de distribution de température différentes, un seul état est présenté dans cette section (Température de paroi supérieure :  $28.6^\circ C$ ). Le gradient de température est déterminé par les mesures de caméra thermique Thermacam 3000 dont l'analyse d'incertitude est présentée dans l'annexe. Les distributions de température étaient désignées principalement par la température moyenne de la paroi supérieure de la poutre,  $22.2^\circ C$ ,  $24.6^\circ C$ ,  $26.4^\circ C$ ,  $28.6^\circ C$ . Les résultats des analyses sur les autres distributions de température sont présentés dans l'annexe E. On a divisé la surface de la poutre en 6 zones selon la température. Ensuite, on a effectué une transposition des distribution de température sur un modèle d'éléments finis en utilisant le module d'analyse thermique du programme commercial ANSYS 8 (Figure 5.3 ). Le décalage entre les mesures thermiques et les valeurs de MEF est négligeable (Figure ). La déformation



Conductivité thermique	30 $W/m^{\circ}K$
Module d'élasticité	370 $MPa$
Coefficient d'expansion thermique	7.4 $\mu m/m^{\circ}K$
Coefficient de Poisson	0.22
Densité	3960 $kg/m^3$

Tableau 5.1 : Propriétés d'oxyde d'aluminium  $Al_2O_3$ (%99.9)

se calcule sur le module d'analyse de structure à partir des résultats du module thermal de ANSYS. Le résultat d'analyse de déplacement thermal est présenté sur la figure (5.5).

Le type de maillage utilisé dans l'analyse thermique est tetrahedral formé de 10 noeuds (SOLID87 dans ANSYS), et dans l'analyse structurelle est tetrahedral formé de 10 noeuds (SOLID92 dans ANSYS). Le nombre d'éléments totale est 10333 pour chacun des modèles. Les contraintes sont de types linéiques pour trois translations x, y, et z dans une extrémité et pour deux translations y, et z dans l'autre. Les valeurs de propriétés de céramique ( $Al_2O_3$ (%99.9)) utilisées sont présentées dans le tableau 5.1. Soulignons que les propriétés de la céramique sont moins sujettes aux incertitudes par rapport aux autres matériaux, tel que l'acier. Et aussi, le modèle thermoélastique est assez robuste aux incertitudes dans les propriétés.

La comparaison des résultats de l'étude de la MEF, des formules dérivées de l'analyse de thermoélasticité et les expériences sont présentés sur la figure (5.4). On peut facilement constater que les deux analyses se justifient et elles sont toutes les deux validées par les résultats expérimentaux.

Comme il sera exposé plus amplement dans l'annexe C, en supposant une incertitude de 0.7 °C découlant de la camera, avec une analyse de Monte Carlo, on obtient une incertitude dans les déformations de 2  $\mu m$ , ce qui est petit si l'on considère la valeur moyenne de rectitude qui serait 25  $\mu m$ .

Mais soulignons qu'en raison de la forte sensibilité aux incertitudes de mesures,



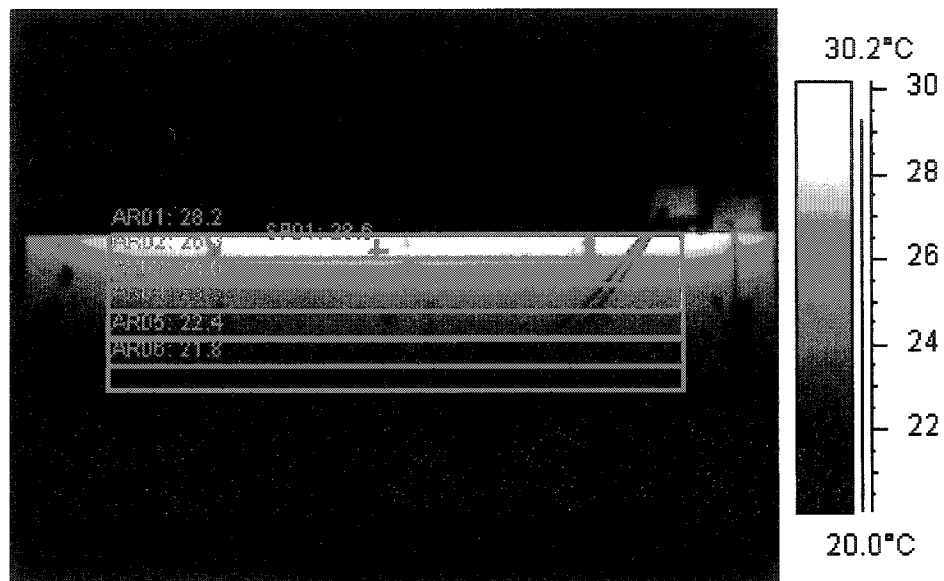


Figure 5.2 : Distribution de température de la poutre (Température de paroi supérieure : 28.6 °C)

le calcul de la contrainte normale  $\sigma_{xx}$  s'avère très difficile avec la méthode thermoélastique proposée. Pour une incertitude de 1 °C, l'incertitude de contrainte s'élève à 50% de la valeur nominale.



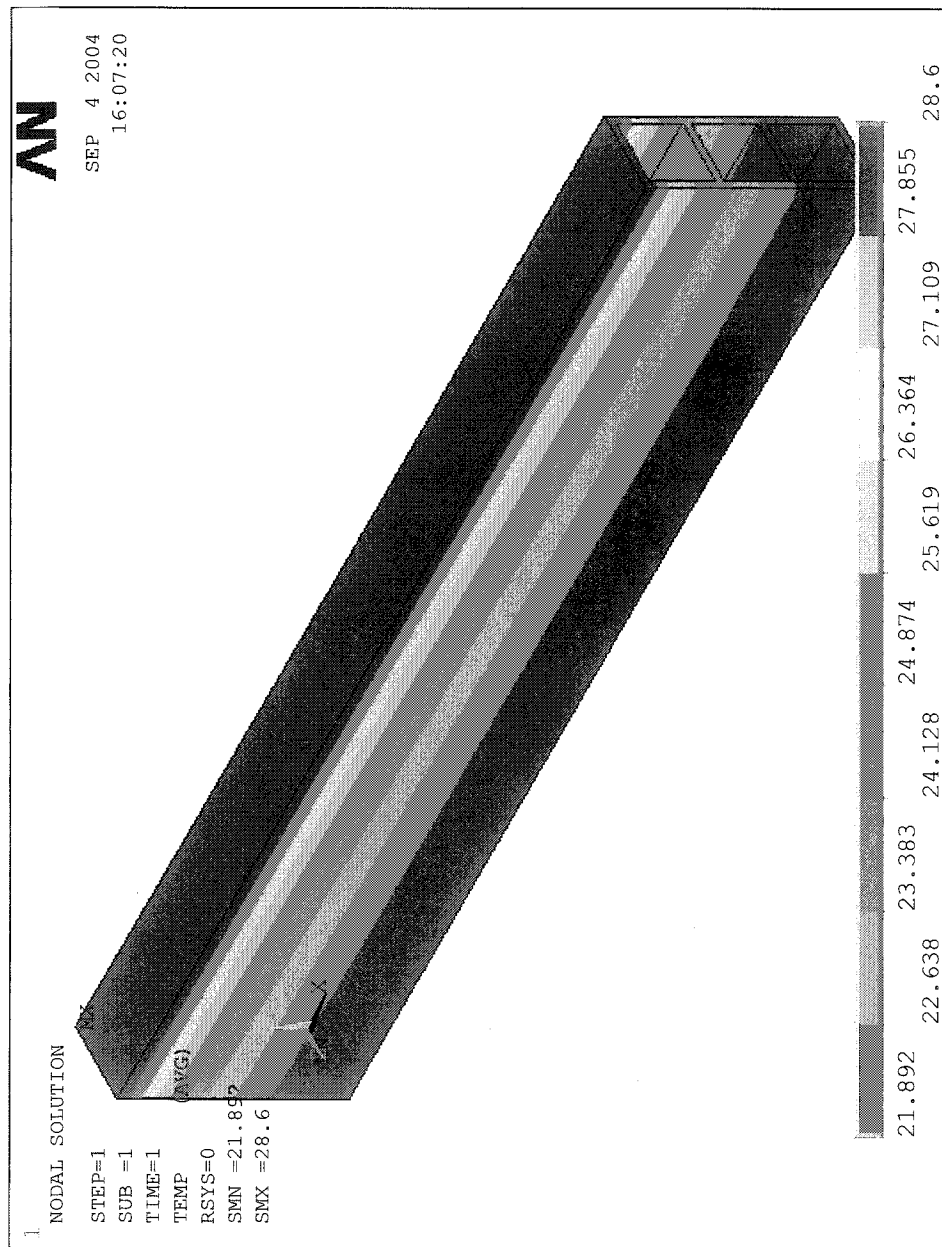


Figure 5.3 : Distribution de température de la poutre - Résultats de MEF  
(Température de la paroi supérieure : 28.6 °C)



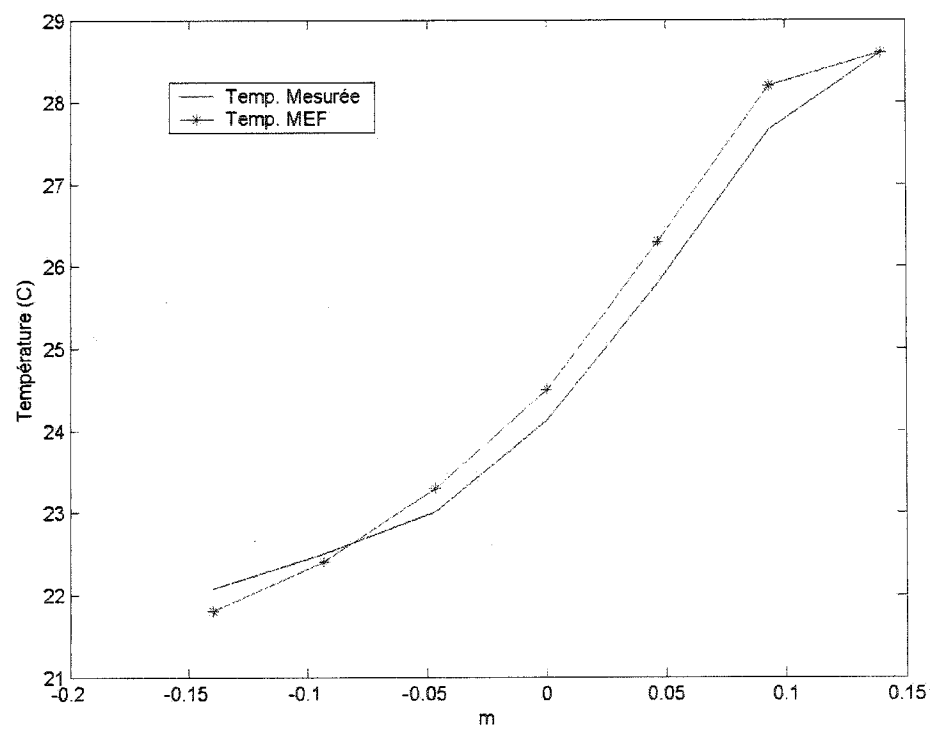


Figure 5.4 : Comparaison de gradients de température mesuré et calculé avec la MEF (Température de la paroi supérieure : 28.6 °C)



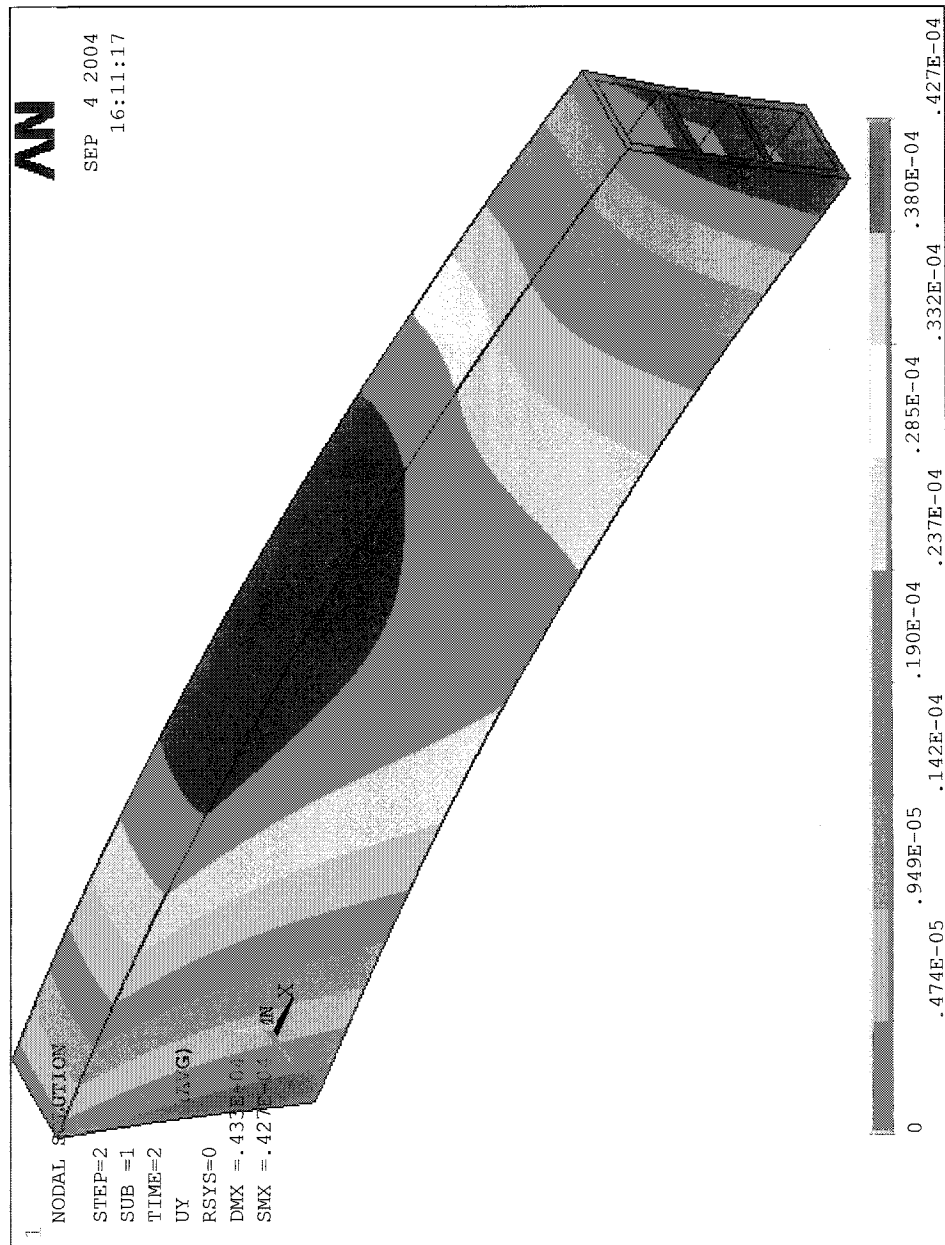


Figure 5.5 : Déplacement verticale de la poutre - Résultats de MEF (Température de la paroi supérieure : 28.6 °C)



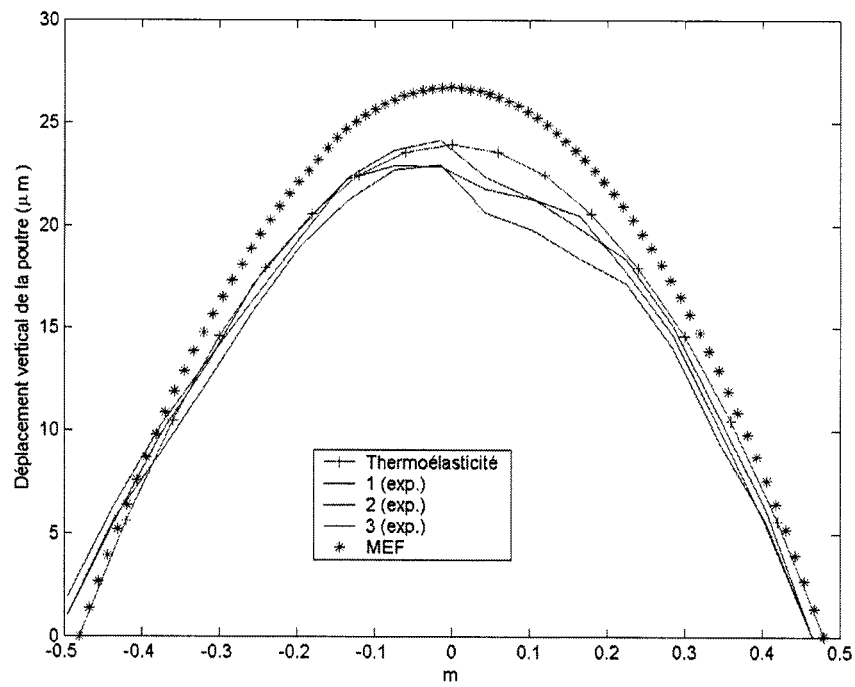


Figure 5.6 : Comparaison des résultats mesurés et calculés : MEF, résultats expérimentaux, formules dérivés de la théorie de thermoélasticité (Température de la paroi supérieure : 28.6 °C)



## Chapitre 6

# DÉFORMATION ÉLASTIQUES

### 6.1 Flexion de la poutre

#### 6.1.1 Poids propre de la poutre et du chariot

L'effet du poids de la poutre dans la déformation de celle-ci peut être calculé d'une façon assez précise par la méthode des éléments finis (figure 6.1). L'effet du poids du chariot combiné avec celui du propre poids de la poutre calculé par le théorème de Castigliano est présenté à la figure 6.2. La figure 6.2 représente la position où le chariot se trouve au milieu de sa trajectoire le long de la poutre. On peut constater que la déformation combinée provenant du poids du chariot et du propre poids de la poutre est moins que  $1 \mu m$ . Le très considérable module d'élasticité de la céramique (370 GPa) et le moment d'inertie de la poutre qui est assez élevé procurent une déformation minimale. Les calculs ont été conduits pour une longueur de 1.2 m, bien que durant les expériences la partie active de la poutre soit plus courte en raison d'une fêlure dans la partie inférieure.

Le type de maillage utilisé dans l'analyse structurelle de ANSYS est tetrahedral formé de 10 noeuds (SOLID92 dans ANSYS). Le nombre d'éléments totale est 5638. Les contraintes sont de types linéiques pour trois translations x, y, et z dans une



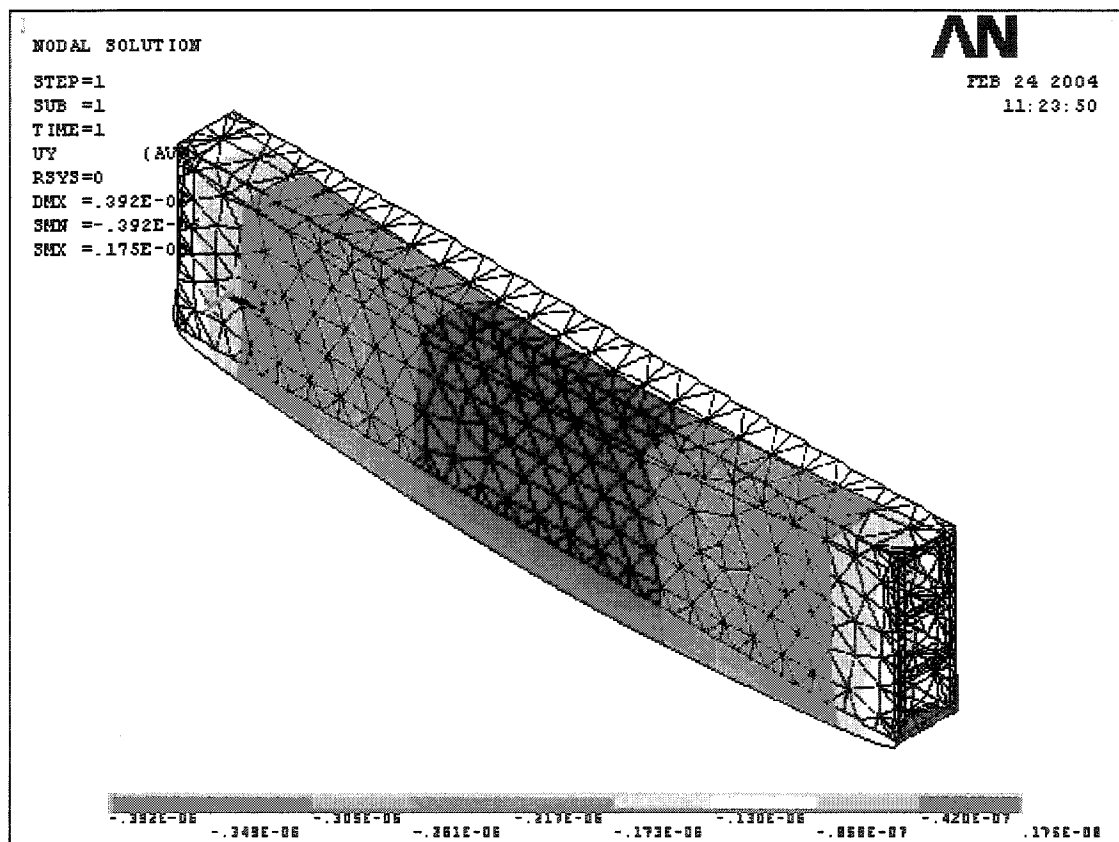


Figure 6.1 : Flèche de la poutre sous son propre poids



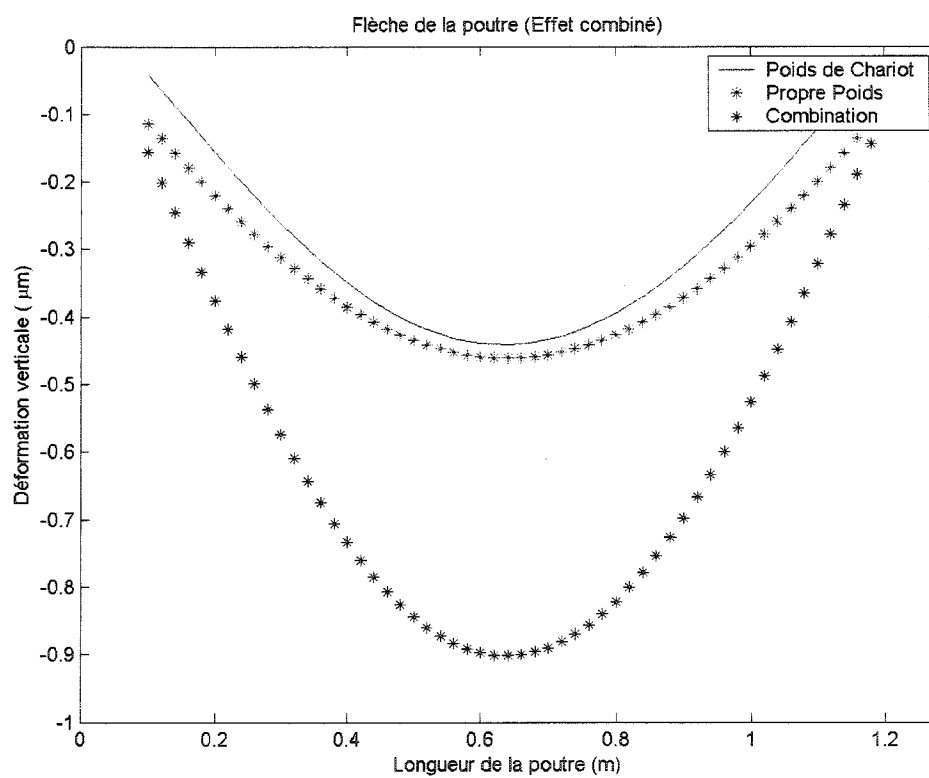


Figure 6.2 : Flèche de la poutre sous son propre poids et le poids de chariot



extrémité et pour deux translations y, et z dans l'autre.

## 6.2 Elasticité des composants mécaniques

### 6.2.1 Liaison conique sphérique

La jonction entre le palier à air et le chariot se fait au moyen d'un contact cône-sphère, dont l'analyse cinématique est réalisée au chapitre 3. Le contact entre la rotule de vis (sphère) et la surface de palier (cône) est supposé être linéique dans les conditions idéales (Figure 6.3). Il faut pourtant souligner que l'accroissement des forces appliquées peut causer l'écrasement des surfaces et le contact peut devenir surfacique. Dans le cas d'un contact linéique, la déformation ne peut pas se calculer par la théorie conventionnel de Hertz. Cependant le résultat empirique fréquemment cité [Aublin, Boncompain & Boulaton 1992] de Palmgren nous donne:

$$\delta = \frac{2.45 F_n^{0.9}}{E_r^{0.9} L_{eff}^{0.8}}$$

où  $F_n$  est la force perpendiculaire à la surface de contact;  $F_n = F \cos \alpha$ ,  $L_{eff}$  est la longueur effective de contact ;  $L_{eff} = 2\pi R \sin \alpha$ , R est le rayon de la sphère, et  $\alpha$  est l'angle de conicité (Figure 6.3).

Si on calcule la déformation transversale  $\delta_t = \delta \cos \alpha$ ;

$$\delta_t = \frac{0.62 F^{0.9} (\cos \alpha)^{1.9}}{E^{0.9} R^{0.8} (\sin \alpha)^{0.8}}$$

alors finalement, la rigidité transversale peut se calculer par:

$$K_e = \frac{dF}{d\delta_t} = \frac{0.56 E^{0.9} R^{0.8} F^{0.1} (\sin \alpha)^{0.85}}{(\cos \alpha)^{1.9}}$$

En utilisant cette formule, on calcule la valeur optimale de  $\alpha$  maximisant la rigidité égal à 30 degrés, approximativement. En utilisant cette valeur dans les



formules précédentes, on peut trouver diverses valeurs de déformation et de rigidité correspondant à une plage de force appliquée située entre 100 et 1000 N. Les résultats sont présentés aux figures 6.4 et 6.5 . On peut ainsi observer que la valeur de rigidité de la liaison qui est plus grande que  $100 \text{ N}/\mu\text{m}$  est fortement supérieure à la rigidité de palier ( $50 \text{ N}/\mu\text{m}$ ).

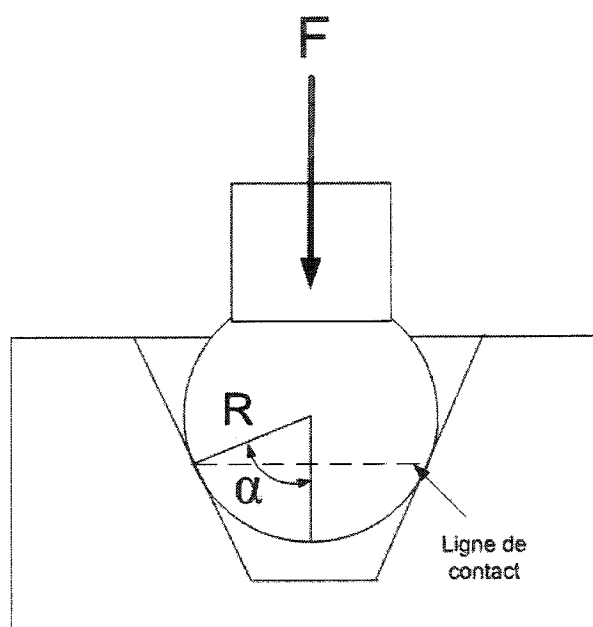


Figure 6.3 : Liaison conique-sphérique reliant le palier à air au chariot

### 6.2.2 Tige

La rigidité de la tige de vis sollicitée axialement est donnée par  $K = \frac{EA}{L}$ . Selon les dimensions de la vis des paliers à air NewwayBEARINGS (présenté dans l'annexe D) on obtient une valeur de rigidité de l'ordre de  $118 \text{ N}/\mu\text{m}$ , ce qui est assez grande pour que le vis ne soit pas déformé sous l'action des paliers.



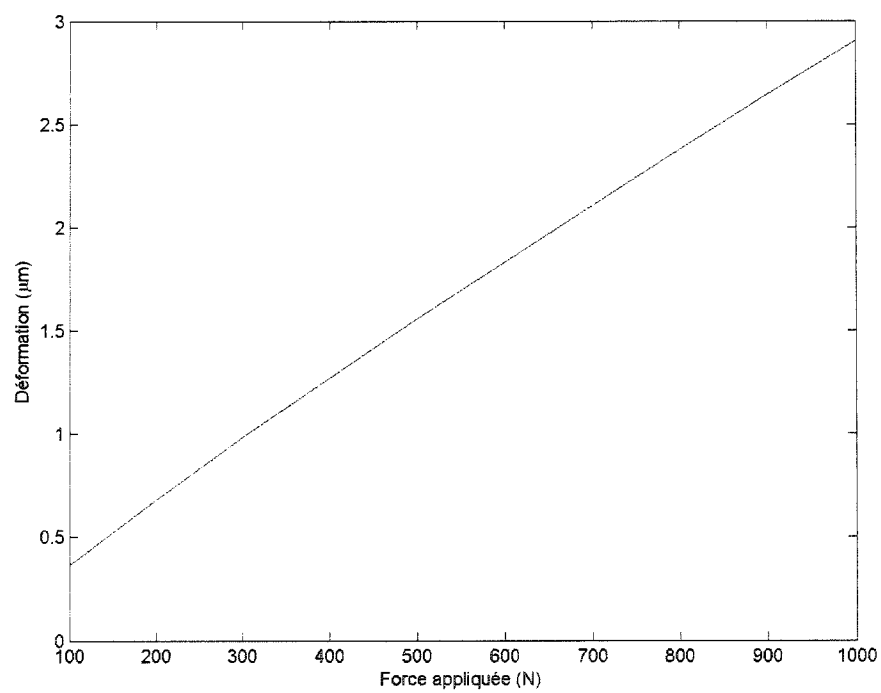


Figure 6.4 : Déformation de liaison vs. la force appliquée



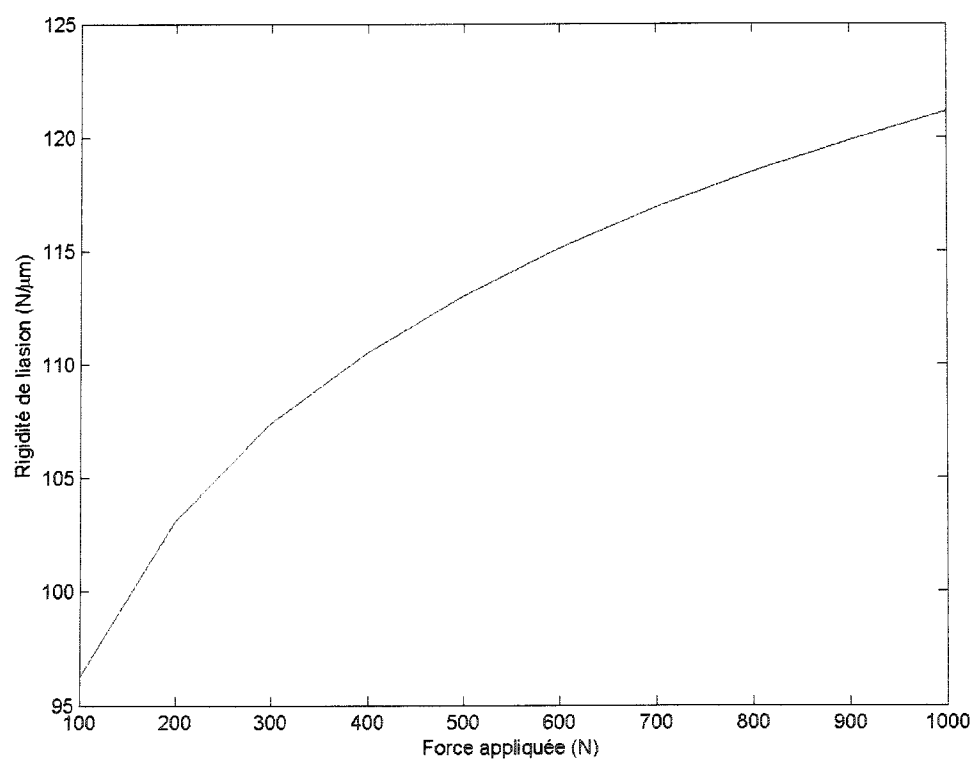


Figure 6.5 : Rigidité de liaison vs. la force appliquée



### 6.2.3 Chariot

La rigidité structurelle du chariot est calculée en partant du théorème de Castigliano et vérifiée par la méthode des éléments finis au moyen du logiciel ANSYS. Selon le théorème de Castigliano, la rigidité verticale est calculée comme  $11 \text{ N}/\mu\text{m}$ , ce qui est très bas par rapport à la rigidité nominale des paliers Mitutoyo ( $50 \text{ N}/\mu\text{m}$  nominale). L'analyse par éléments finis donne la valeur approximative de  $16 \text{ N}/\mu\text{m}$  (Figure 6.6). Ce qui veut dire que les déviations vont être absorbées par la déformation du chariot, et le déplacement nécessaire pour la validité du modèle mécanique ne sera pas réalisé. Ce point reste à vérifier par les expériences. Si ces prévisions sont justifiées par les calculs, il faudra ajouter des nervures à la structure du chariot afin d'en augmenter la rigidité.



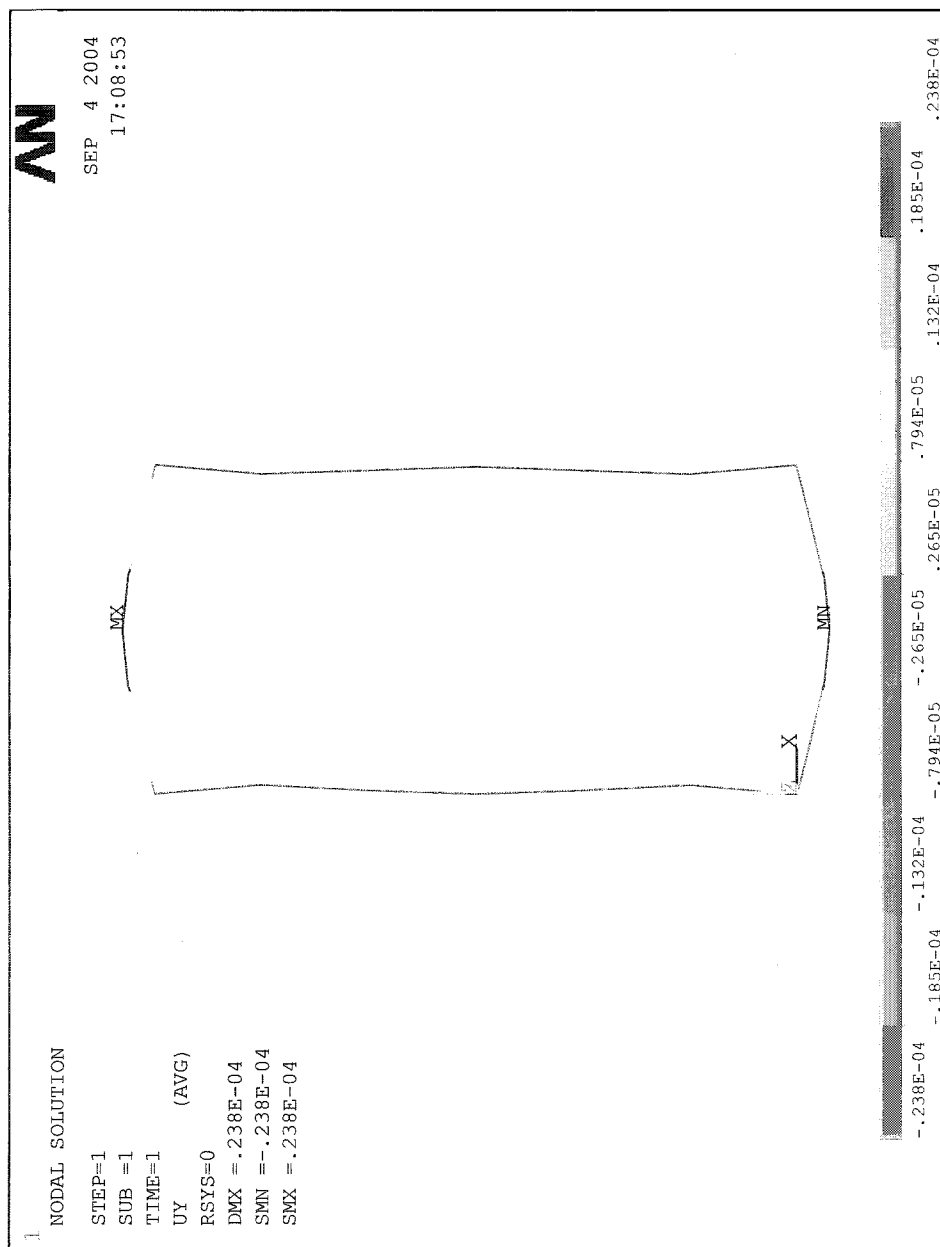


Figure 6.6 : Déformation du chariot sous l'effet des forces aérostatiques ,Force=800 N ,Résultats de la MEF



## Chapitre 7

# CONCLUSION

On a proposé de développer une approche nouvelle dans l'analyse des erreurs machines. À l'encontre de l'approche conventionnelle qui met l'accent sur la compensation par le logiciel en supposant des machines parfaitement conçues et dont le changement de design coûtera extrêmement cher, notre méthode consiste à souligner avant tout l'importance des composantes mécaniques et de leur comportements mécaniques sous l'effet des facteurs thermiques et élastiques.

On a également exposé les contributions des différents composants, notamment la glissière, le chariot et les paliers à air. Les calculs concernant l'incertitude dans les mesures et dans la théorie sont aussi effectués. Tous les composants nécessaires pour l'installation d'un banc d'essai simulant un axe d'une MMT ont été assemblés. Les expériences concernant la vérification de la théorie de la déformation thermique sont concluantes. Les vérifications expérimentales concernant l'effet des perturbations sur l'erreur cinématique restent à réaliser.

Il faut pourtant préciser les faiblesses potentielles du modèle dont les ampleurs respectives seront dévoilées par les expériences:

- l'effet de refroidissement par les paliers à air en raison de l'expansion de l'air aux orifices n'est pas considéré,



- le chariot peut ne pas être assez rigide et il peut se déformer sans se déplacer comme prévu par le modèle,
- l'ajustement de la couche d'air sous les paliers à air au moyen des vis ultra-fines s'avère très sensible et sujet aux incertitudes.

L'absence des précurseurs dans la littérature est un autre problème qu'il faut mentionner. Bien qu'il existe des travaux sur des systèmes chariot-glissière qui sont d'ailleurs cités dans les chapitres précédents, leurs analyses sur la relation entre la déformation thermique et les erreurs cinématiques se basent sur la régression et les modèles mécaniques y font défaut.

Enfin une fois l'étape expérimentale franchie, le modèle peut devenir un élément important dans la construction d'une module d'une MMT virtuelle afin de déterminer l'effet des incertitudes provenant des différentes composantes dans une prise de mesure de MMT. Une sous-module thermique concernant les incertitudes provenant des gradients spatiaux de température sur la structure de la machine en raison des divers sources de chaleur ou des effets environnementaux pourrait également faire partie de la MMT virtuelle.



# Bibliographie

(1989). *LK Mechanical Calibration Manual*.

AGATI, P. & ROSSETTO, M. (1994). *Liaisons et Mechanismes*. Dunod, Paris.

ASME (1990). *B89.1.12M -1990 Methods for Performance Evaluation of Coordinate Measuring Machines*. Rapport technique, ASME.

AUBLIN, M., BONCOMPAIN, R. & BOULATON, M. (1992). *Systemes Mecaniques*. Dunod.

BARAKAT, N.A., SPENCE, A. D. & ELBESTAWI, M. A. (2000). Adaptive compensation of quasi-static errors for an intrinsic machine. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **40**, 2267–2291.

BEER, F.R. & JOHNSTON, JR. (1992). *Strength of Materials*. Mc Graw Hill, Berkshire, England.

BOSCH, J. (1995). *Coordinate measuring machines and systems*. M. Dekker, New York.

CANDEL, S. (1995). *Mécanique des fluides : cours /*. Dunod, Paris, sur la couverture: Ecoles d'ingénieurs/2e cycle universitaire. Bibliographie: p. 433-440.

DONMEZ, A., BLOMQUIST, D.S. & HOCKEN, R.J. (1986). A general methodology for machine tool accuracy enhancement: Theory, application and implementation. *Precision Engineering*, **8**, 187.



- FOX, R.W. (2004). *Introduction to fluid mechanics* /. Wiley, Hoboken, NJ.
- GROSS, W.A. (1962). *Gas Film Lubrication*. John Wiley and Sons, New York.
- HOLSTER, P.L. & JACOBS, J.A. (1987). Theoretical analysis and experimental verification on the static properties of externally preesurized air-bearing pads with load compensation. *Tribology Int.*, **20**(5).
- KASSAB, S., NOURELDEN, E. & SHAWKY, M. (1997). Effects of operating conditions and supply hole diameter on the performance of a rectangular aerostatic bearing. *Tribology Int.*, (7), 533–545.
- KIM, J-J., JEONG, Y.H. & CHO, D.-W. (2004). Thermal behavior of a machine tool equipped with linear motors. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **44**, 749–758.
- KIRIDENA, V.S.B. & FERREIRA, P.M. (1994). Kinematic modelling of quasistatic errors of three-axis machining centers. *International Journal of Machine Tool and Manufacture*, **34**(1), 85–100.
- KWAN, Y.-B. P. & POST, J B. (2000). A tolerancing procedure for inherently compensated, rectangular aerostatic thrust bearings. *Tribology International*, **33**(8), 581–585.
- LEE, S.K., YOO, J.H. & YANG, M.S. (2003). Effect of thermal deformation on machine tool slide guide motion. *Tribology International*, **36**, 41–47.
- LINGARD, P.S., PURSS, M.E., SONA, C.M. & THWAITE, E.G. (1991). Temperature perturbation effects in a high precision cmm. *Precision Engineering*, **13**(1), 41–50.
- MAJUMDAR, C. (1980). Externally pressurized gas bearings: A review. *Wear*, **62**, 299–314.



- MAYER, R. (2002). *MEC4500 Contrôle dimensionnel, Notes de cours*.
- MODEST, M. (1993). *Radiative Heat Transfer*. New York.
- ROWE, W.B. & STOUT, K.J. (1973). Design of externally pressurized gas-fed journal bearings employing slot restrictors. *Tribology Int.*, 140–144.
- SALEM, E. & SHAWKY, M. (1978). An experimental investigation into the performance of externally pressurized rectangular air bearings. *Wear*, **50**, 237–257.
- SARTORI, S & ZHANG, X. (1992). Geometric error measurement and compensation of machines. *Cirp Annals*.
- SHAMOTO, E., PARK, C.H. & MORIWAKI, T. (2001). Analysis and improvement of motion accuracy of hydrostatic feed table. *CIRP Annals*.
- SLOCUM, A. (1992). *Precision Machine Design*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- SLOCUM, A., BASARAN, M., CORTESI, R. & HART, A. J. (2003). Linear motion carriage with aerostatic bearings preloaded by inclined iron core linear electric motor. *Precision Engineering*, **27**, 382–394.
- SPINNLER, G. (1997). *Conception des machines Principes et applications*, vol. 1. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- STOUT, K.J., EL-ASHKAR, S., GHASI, V. & TAWFIK, M. (1992). Theoretical analysis of two configurations of aerostatic flat pad bearings using pocketed orifice restrictors. *Tribology Int.*, **26**(4), 265–273.
- TAWFIK, M. & STOUT, K.J. (1989). The design of high efficiency flat pad aerostatic bearings using laminar restrictions. *Tribology Int.*, **22**(4).



- THORNTON, E.A. (1996). *Thermal structures for aerospace applications*. Reston, Virginia : American Institute of Aeronautics and Astronautics., xvi, 479 p. : ill. ; 24 cm. –.
- TIMOSHENKO, S. & GOODIER, J.N. (1961). *Théorie de l'élasticité*. Librairie Polytechnique, Paris.
- VELDHIUS, S.C. & ELBESTAWI, M.A. (1995). A strategy for the compensation of errors in five-axis machining. *Annals of CIRP*, **43**(1).
- WU, C.H. & KUNG, Y.T. (2003). Thermal analysis for the feed drive system of a cnc machine center. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **43**, 1521–1527.
- ZHANG, G., VEALE, R., CHARLTON, B. & HOCKEN, R. (1985). Error compensation of coordinate measuring machines. *Cirp Annals*, **34**(1).



# Annexe A

## ANALYSE DIFFÉRENTIELLE DU MOUVEMENT DES FLUIDES

Dans cette partie de l'annexe, les équations fondamentales de la mécanique des fluides seront établies en partant des ouvrages de base comme [Fox 2004], [Candel 1995].

### A.1 Conservation de masse

Considérons un volume matériel  $V_m(t)$ . La masse  $m$  contenue dans ce volume est :

$$m = \int_{V_m(t)} \rho dV \quad (\text{A.1})$$

où  $\rho$  désigne la densité locale. Si le volume matériel ne contient ni sources ni puits la masse qui se trouve dans  $V_m(t)$  est constante et on peut écrire :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = 0 \quad (\text{A.2})$$



Si on applique le théorème de transport au volume  $V_m(t)$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (\text{A.3})$$

où  $\vec{v} \cdot \vec{n}$  désigne la portion de la vitesse dans la direction normale à la surface de contrôle  $A_m(t)$ .

D'après A.2 on peut écrire:

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (\text{A.4})$$

Si le volume  $V_m(t)$  ne contient pas de surface de discontinuité l'intégrale sur la surface  $A_m$  peut être remplacée par une intégrale de volume et le théorème de Greene permet d'écrire :

$$\int_{A_m(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_{V_m(t)} \nabla \cdot \rho \vec{v} dV \quad (\text{A.5})$$

Donc A.4 devient :

$$\int_{V_m(t)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \right) dV = 0 \quad (\text{A.6})$$

Le volume d'intégration est arbitraire, par conséquent l'intégrande doit être identiquement nul :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Cette équation exprime la conservation de masse et elle est souvent désignée sous le nom d'équation de continuité.



## A.2 Accélération d'une particule dans un champs de vélocité

Soit la vélocité d'une particule au temps  $t$ ,  $\vec{V}_P = \vec{V}(x, y, z, t)$ . La variation dans la vélocité causée par une déplacement, est:

$$d\vec{V}_P = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt \quad (\text{A.8})$$

On trouve l'accélération totale de la particule comme:

$$d\vec{a}_p = \frac{\partial \vec{V}_p}{\partial t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (\text{A.9})$$

avec

$$\frac{x_p}{t} = u, \quad \frac{y_p}{t} = v, \quad \frac{z_p}{t} = w, \quad (\text{A.10})$$

on a:

$$d\vec{a}_p = \frac{\partial \vec{V}_p}{\partial t} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} w + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (\text{A.11})$$

où la partie:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} w \quad (\text{A.12})$$

représente l'accélération convective ,et:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (\text{A.13})$$

représente l'accélération locale.

## A.3 Équations de Navier-Stokes

Lorsque le fluide est en écoulement newtonien, les équations de conservation de la quantité de mouvement prennent la forme des équations aux dérivées partielles



non-linéaires de Navier Stokes, ce qui est l'équivalent de la relation fondamentale de la dynamique (aussi appelée seconde loi de Newton) dans la mécanique des fluides. Leur dérivation sera négligée par souci de brièveté.

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (\text{A.14})$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (\text{A.15})$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (\text{A.16})$$

### Turbulence

Les écoulements turbulents sont caractérisés par leur irrégularité. Les variables comme la vitesse, la pression, la température fluctuent de façon aléatoire. La turbulence apparaît dans des écoulements dont le nombre de Reynolds est très élevé. Lorsque le nombre de Reynolds dépasse une certaine valeur critique, les petites perturbations de l'écoulement deviennent instables et leur croissance rapide produit la transition vers la turbulence.

### Compressibilité

*Le nombre de Mach* : Le nombre de Mach est défini comme le rapport de fluide  $v$  à la vitesse locale des perturbations acoustiques :

$$M = \frac{v}{c}$$

où  $c$  est la vitesse sonore.

Très généralement, les gaz sont traités comme des fluides compressibles. Cependant aux faibles vitesses d'écoulement (au nombre de Mach  $\leq 0.3$ ) les variations



de densité sont faibles et on peut traiter l'écoulement à l'aide des équations qui régissent les écoulements incompressibles.



# Annexe B

## THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

Dans cette section on fera une introduction concise aux relations fondamentales concernant la théorie de l'élasticité. Leur dérivations seront exclues du texte par souci de brièveté. Le lecteur intéressé peut se référer à des ouvrages de référence classique: ([Timoshenko & Goodier 1961], [Beer & Johnston 1992])

### B.1 Relations Contraintes-Déformations

En employant la lettre  $\varepsilon$  pour désigner l'extension et la lettre  $\gamma$  pour désigner la déformation transversale rapportée à l'unité d'angle d'un élément de corps élastique, les relations entre les contraintes et les déformations peuvent s'exprimer par:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) + \alpha T \quad (\text{B.1})$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) + \alpha T \quad (\text{B.2})$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) + \alpha T \quad (\text{B.3})$$



## B.2 Relations Déformations-Déplacements

Si un élément de corps élastique est soumis à l'action de contraintes normales,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , uniformément réparties sur les surfaces, les relations entre les déformations et les déplacements peuvent s'exprimer par:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{B.4})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{B.5})$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{B.6})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{B.7})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{B.8})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{B.9})$$

$$(\text{B.10})$$

## B.3 Fonction de contrainte

L'équation fondamentale qui donne la relation entre les déformations se nomme condition de compatibilité:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (\text{B.11})$$

Avec l'hypothèse de contrainte plane ( $\sigma_z = 0$ ) les relations entre les contraintes



et les déformations (B.1) se réduisent à :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y)) + \alpha T \quad (\text{B.12})$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x)) + \alpha T \quad (\text{B.13})$$

$$\varepsilon_z = \frac{1 + \nu}{E}(\sigma_{xy}) \quad (\text{B.14})$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de compatibilité (B.11):

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + E\alpha\nabla^2 T = 2(1 + \nu)\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (\text{B.15})$$

En définissant une fonction de contrainte F:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \quad (\text{B.16})$$

Équation (B.15) se réduit à :

$$\nabla^4 F = -E\alpha\nabla^2 T \quad (\text{B.17})$$

où:

$$\nabla^4 F = \nabla^2(\nabla^2 F) = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \quad (\text{B.18})$$

## B.4 Principe de Saint-Venant

Si les forces, qui agissent sur un élément de la surface d'un corps élastique, sont remplacées par un autre système de forces statiquement équivalent agissant sur le même élément, la nouvelle distribution des efforts produit des modifications notables dans les contraintes locales, mais reste sans effet, ou tout au moins n'a qu'une influence négligeable sur les contraintes qui se produisent à des distances de



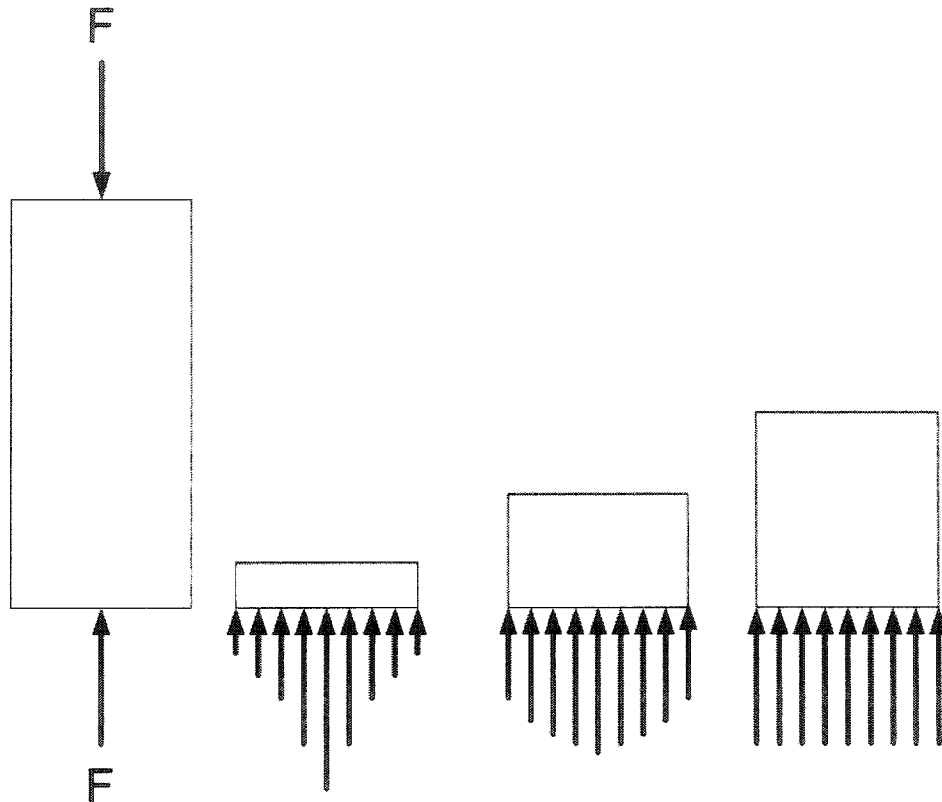


Figure B.1 : Distribution des contraintes selon la distance aux extrémités

l'élément qui sont considérables par rapport aux dimensions linéaires de celle-ci. Dans le cas d'une traction simple par exemple (figure B.1), ce n'est que dans le voisinage de l'extrémité sollicitée que la distribution des contraintes dépend du mode d'application de la force de traction: dans les sections transversales situées à une certaine distance des extrémités, les contraintes sont, pratiquement, uniformément distribuées.



# Annexe C

## PARTIE EXPÉRIMENTALE

### C.1 Analyse d'incertitude

Bien que le calcul d'incertitude soit basé sur une théorie assez conventionnelle et ne représente pas un caractère assez singulier, les instruments utilisés durant l'expérience nécessitent un intérêt particulier. Nous nous concentrerons spécifiquement sur deux mesures qui sont d'une importance fondamentale pour le bien-fondé de l'exactitude des expériences :

- La mesure de la rectitude de surface de la glissière par les niveaux électroniques,
- Les mesures de température de guide par le camera thermal.

#### C.1.1 Mesure de rectitude

Le programme de calcul de la rectitude du logiciel de Nivel Plane (le niveau électronique) est simulé sur Matlab. Les résultats étaient identiques. Vu le caractère cumulatif de chaque mesure sur la mesure successive, on a décidé de diviser l'intervalle de mesure en deux, puis rassembler les deux parties afin d'augmenter l'exactitude de mesure.



L'erreur systématique du niveau électronique Nivel Plane pour chaque mesure est spécifié comme étant :  $\pm 0.001 \text{ mrad} (mm/m)$ . L'erreur aléatoire de chaque mesure repérée par les expériences est  $\pm 0.002 \text{ mrad}$ . Il faut aussi souligner que l'intervalle de mesure de chaque mesure effectuée est de  $60 \text{ mm}$  qui correspond à la largeur d'un palier à air. Pour exécuter ces mesures une base spéciale pour monter le niveau est fabriquée dont le dessin détaillé est présenté dans l'annexe. Selon les résultats des simulations Monte Carlo effectuées en partant de ces données, on obtient un écart type de mesure de rectitude de  $0.5 \text{ } \mu\text{m}$  sur une longueur de  $960 \text{ mm}$ .

### C.1.2 Mesures thermiques

Tous les objets émettent de l'énergie de radiance, appelé la radiation thermique, en raison de sa provenance de température. La relation entre l'énergie radiée  $q$  et la température  $T$  est exprimé par la loi de Stefan-Boltzmann :

$$q = \varepsilon \sigma T^4$$

où  $\varepsilon$  est l'émissivité et  $\sigma$  le constant de Stefan-Boltzmann ;  $\sigma = 5.675 \cdot 10^{-8}$ .

Un camera thermal de Thermacam 3000 est utilisé afin de mesurer la radiation thermique émis par l'objet.

L'émissivité est définie comme le rapport entre l'énergie émis par l'objet à une température définie, et l'énergie d'un corps noir à la même température. L'émissivité d'un corps noir est bien entendu 1, tandis que les métaux polis ont des émissivités très bas, variant entre  $0.1 - 0.3$ .

Dans l'analyse, l'émissivité de la céramique est supposé à être 0.95 selon [Modest 1993] et l'incertitude de l'émissivité est supposé comme  $\pm 0.05$ . Bien que la céramique est 'blanche' (réflective) dans la région visible, elle est 'noire' (émissive)



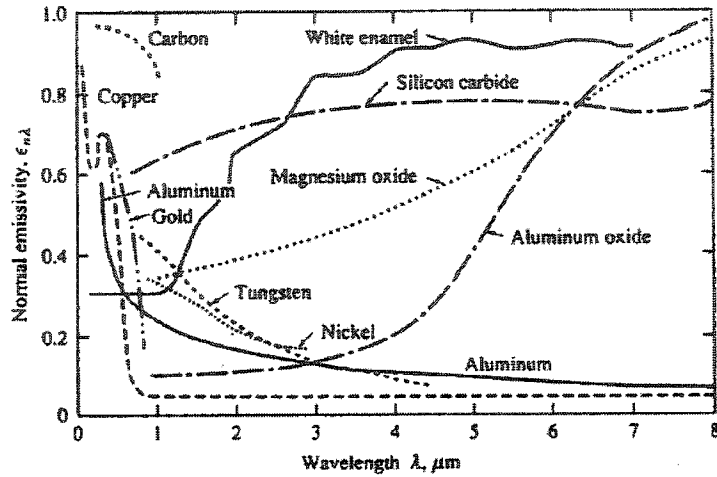


Figure C.1 : L'émissivité du céramique selon la longueur d'onde [Modest 1993]

dans la région infrarouge; son émissivité est très élevé (Figure C.1) .

Les fichiers de mesure peuvent représenter soit l'énergie qui correspond à la zone infrarouge prédéterminée reçue par le camera, soit la température déterminé à partir de l'énergie reçu. En identifiant la relation entre les deux types de données on serait capable de calculer l'incertitude spatiale.

La relation entre le valeur de la radiance de la cible  $L_t$  et la température peut être exprimée par la formule :

$$T = A \ln L_t + B \quad (\text{C.1})$$

Donc:

$$\Delta T = \frac{A \Delta L_t}{L_t} \quad (\text{C.2})$$

On peut exprimer la relation suivante entre la radiance de cible  $L_t$ , la radiance



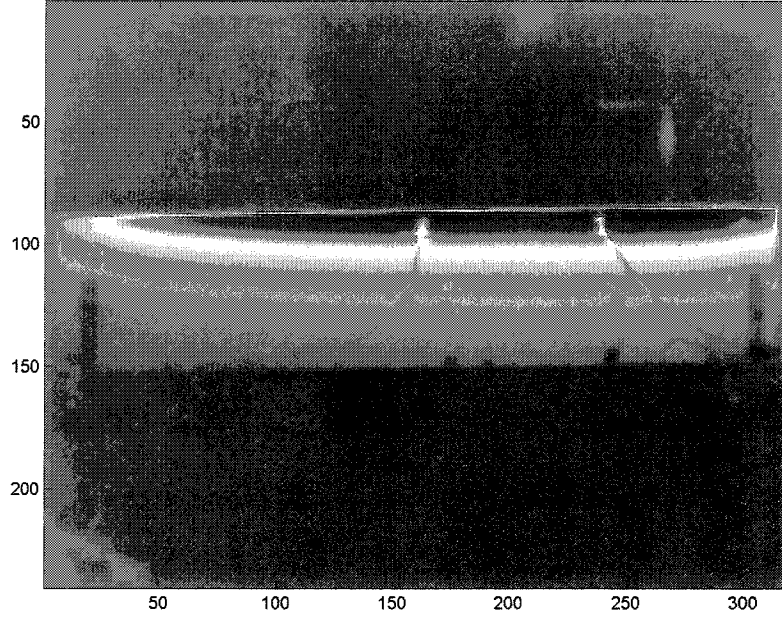


Figure C.2 : La distribution de température sur la poutre (fichier Matlab)

mesurée  $L_m$  et la radiance réfléchie de l'arrière-plan  $L_b$ :

$$L_t = \frac{L_m - (1 - \varepsilon)L_b}{\varepsilon} \quad (\text{C.3})$$

Si on applique la méthode de racine carré de la somme des carrés (root-sum-square) pour l'analyse d'incertitude à (C.3):

$$E_{rss} = \sqrt{(\Delta u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1})^2 + (\Delta u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2})^2 + \dots} \quad (\text{C.4})$$

Donc on obtient :

$$\frac{\Delta L_t}{L_t} = \frac{\sqrt{\Delta L_m^2 + \Delta \varepsilon^2 (L_m - L_b)^2 + \Delta L_b^2 (\varepsilon - 1)^2}}{L_m - (1 - \varepsilon)L_b} \quad (\text{C.5})$$



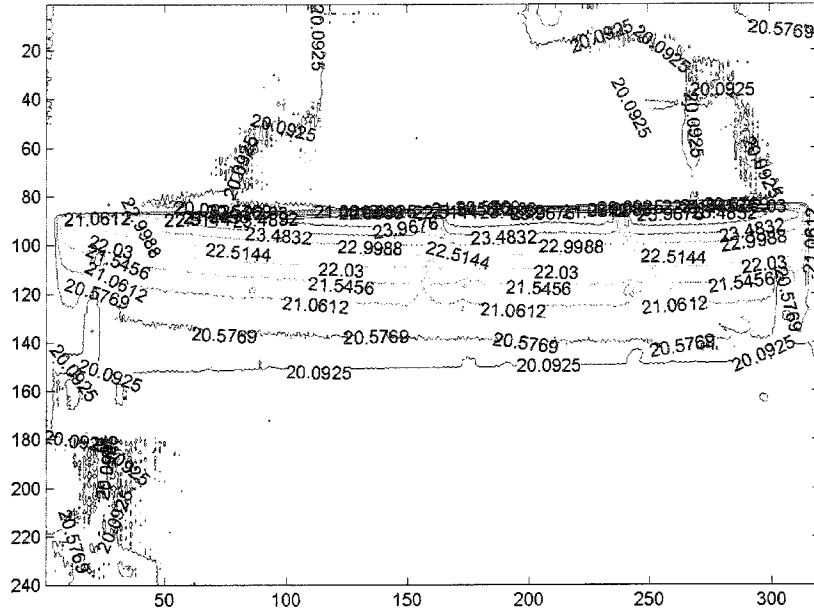


Figure C.3 : La distribution de température sur la poutre (contour)

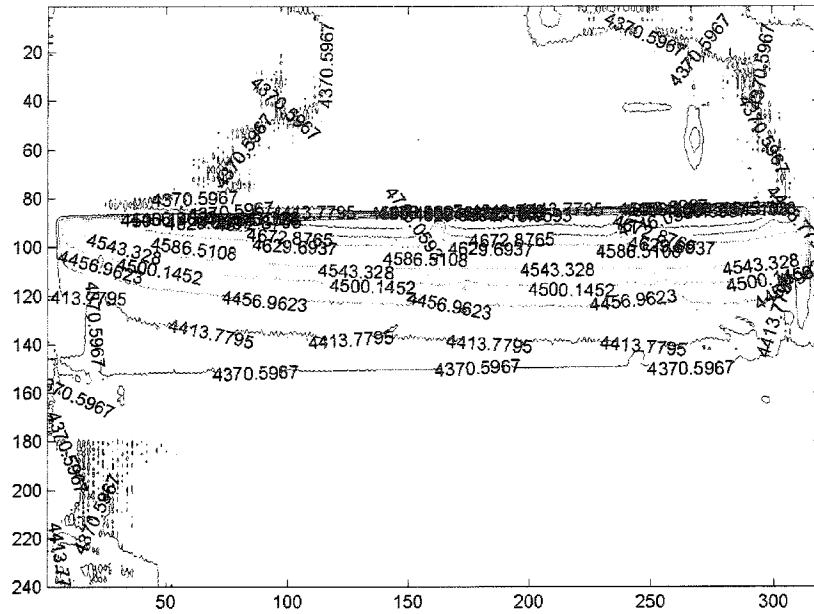
En remplaçant dans (C.2):

$$\Delta T_t = A \frac{\sqrt{\Delta L_m^2 + \Delta \varepsilon^2 (L_m - L_b)^2 + \Delta L_b^2 (\varepsilon - 1)^2}}{L_m - (1 - \varepsilon)L_b} \quad (C.6)$$

Étant donné l'étroitesse de la plage de mesure de valeur de radiance on pouvait exprimer la relation entre la radiance et la température comme une relation linéaire mais les résultats des calculs d'incertitude ne change pas sensiblement.

Si on prend un exemple d'une mesure par camera thermal (Figure C.2) qui est en effet une matrice sous forme de fichier Matlab (et non pas un fichier image) sur laquelle les valeurs des pixels représentent la température ou la radiance. On peut aussi les représenter en spécifiant les zones par les contours (Figures C.3, C.4)







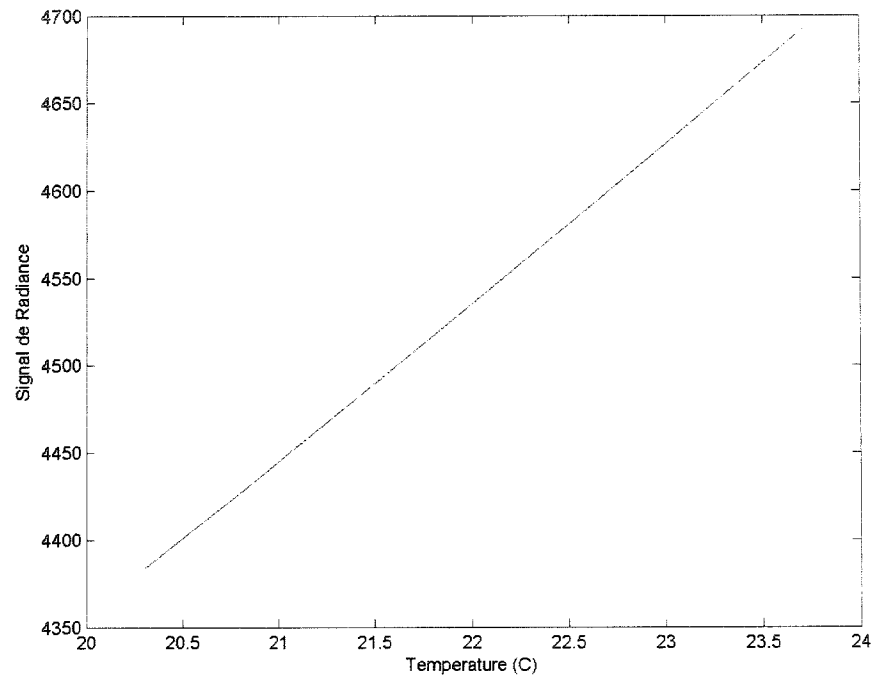


Figure C.5 : Fonction reliant le signal de radiance à la température

la dispersion dans la rectitude de guide serait  $2\mu m.$  , ce qui est assez insignifiante compte tenu de la valeur moyenne de rectitude qui serait  $25\mu m.$



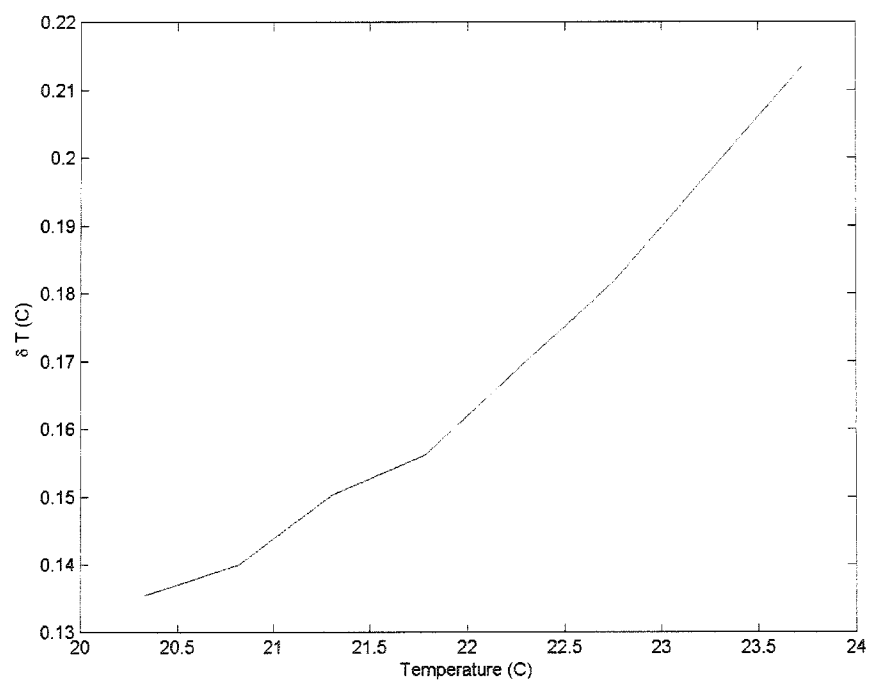
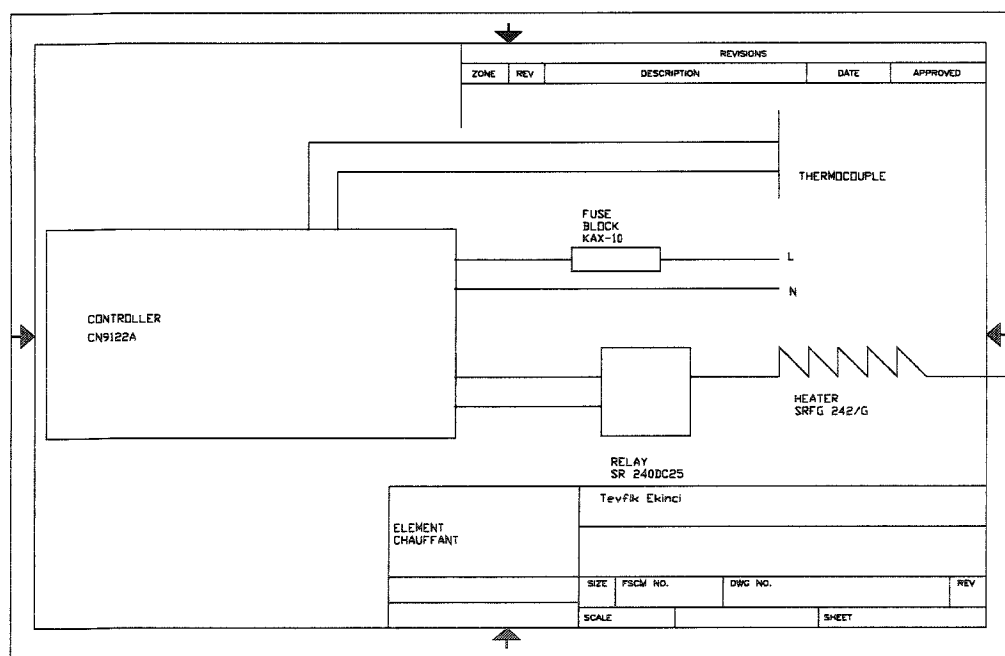


Figure C.6 : L'incertitude spatial correspondant à divers regions de température



# Annexe D

## DESSINS TECHNIQUES



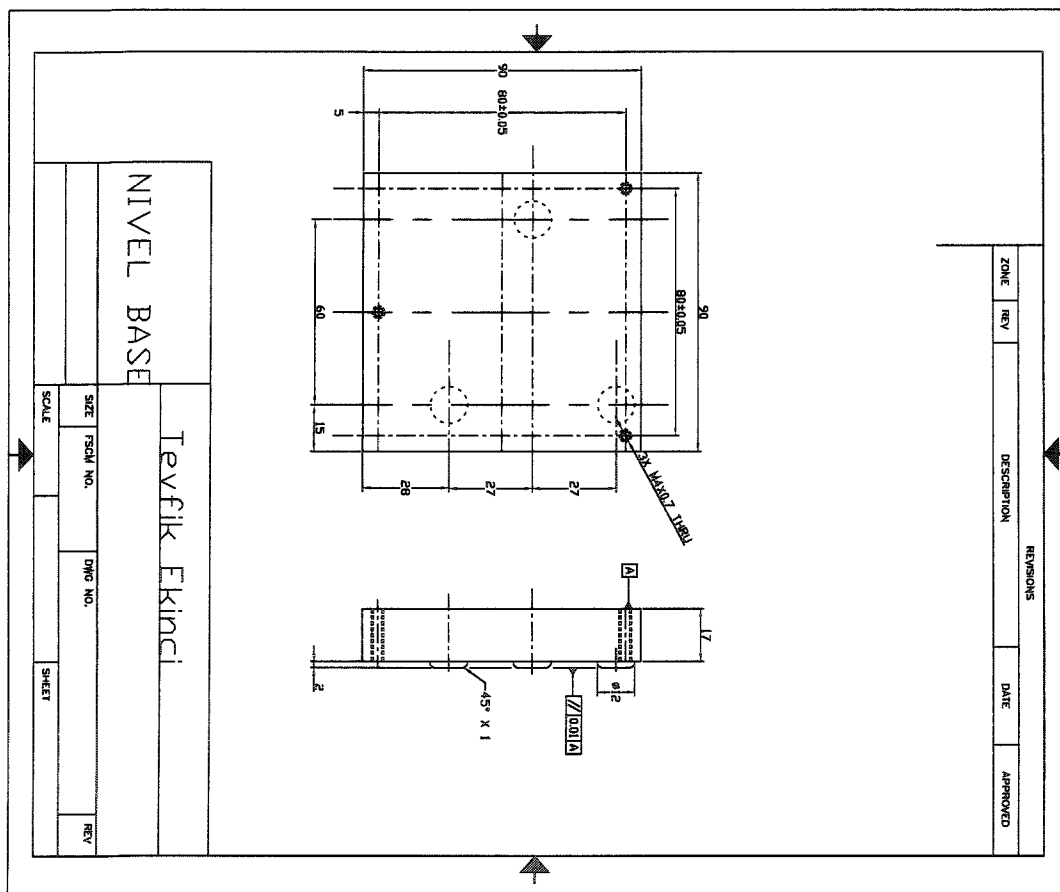


















## Annexe E

# MESURES THERMALES ET RESULTATS D'ANALYSE MEF

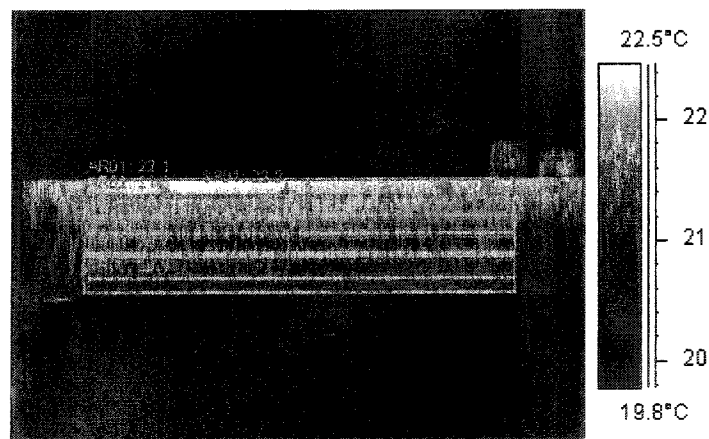


Figure E.1 : Distribution de température de la poutre (Température de paroi supérieure : 22.2 C)



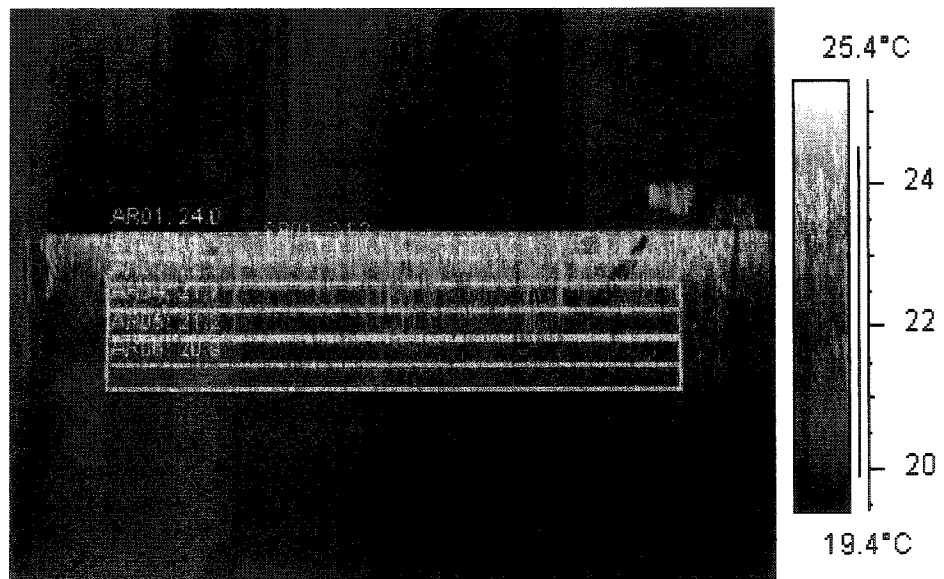


Figure E.2 : Distribution de température de la poutre (Température de paroi supérieure : 24.6 C)



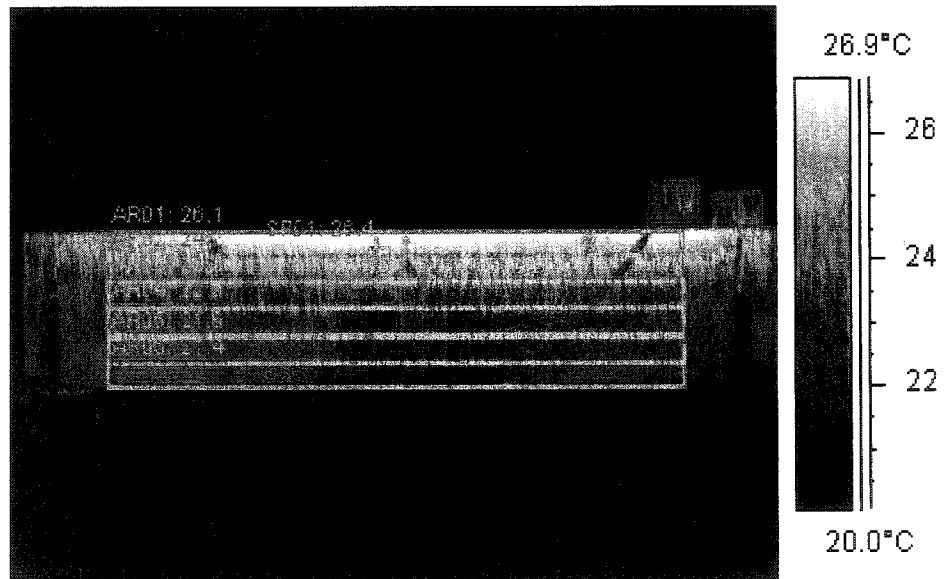


Figure E.3 : Distribution de température de la poutre (Température de paroi supérieure : 26.4 C)



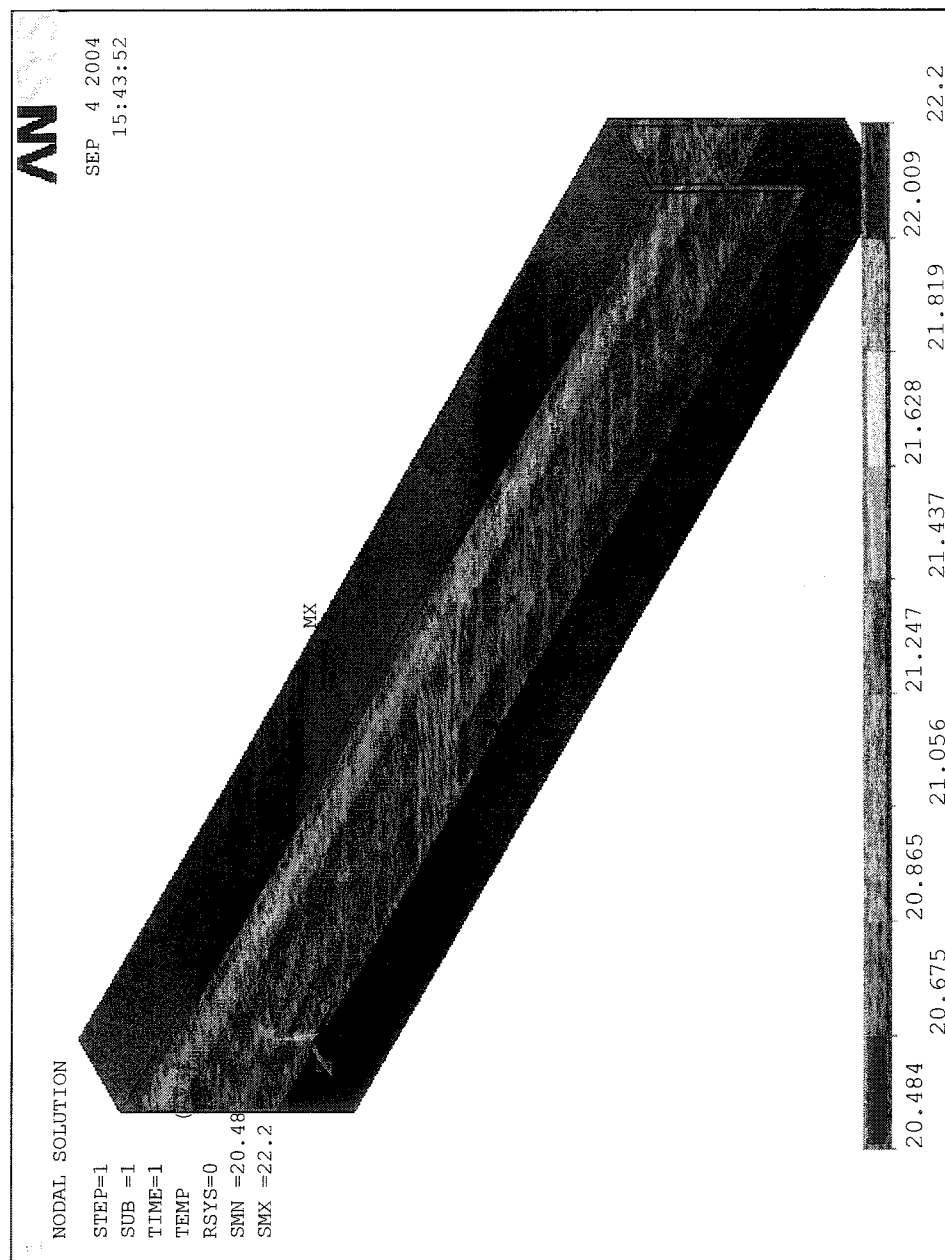


Figure E.4 : Distribution de température de la poutre - Résultats de MEF  
(Température de la paroi supérieure : 22.2 C)



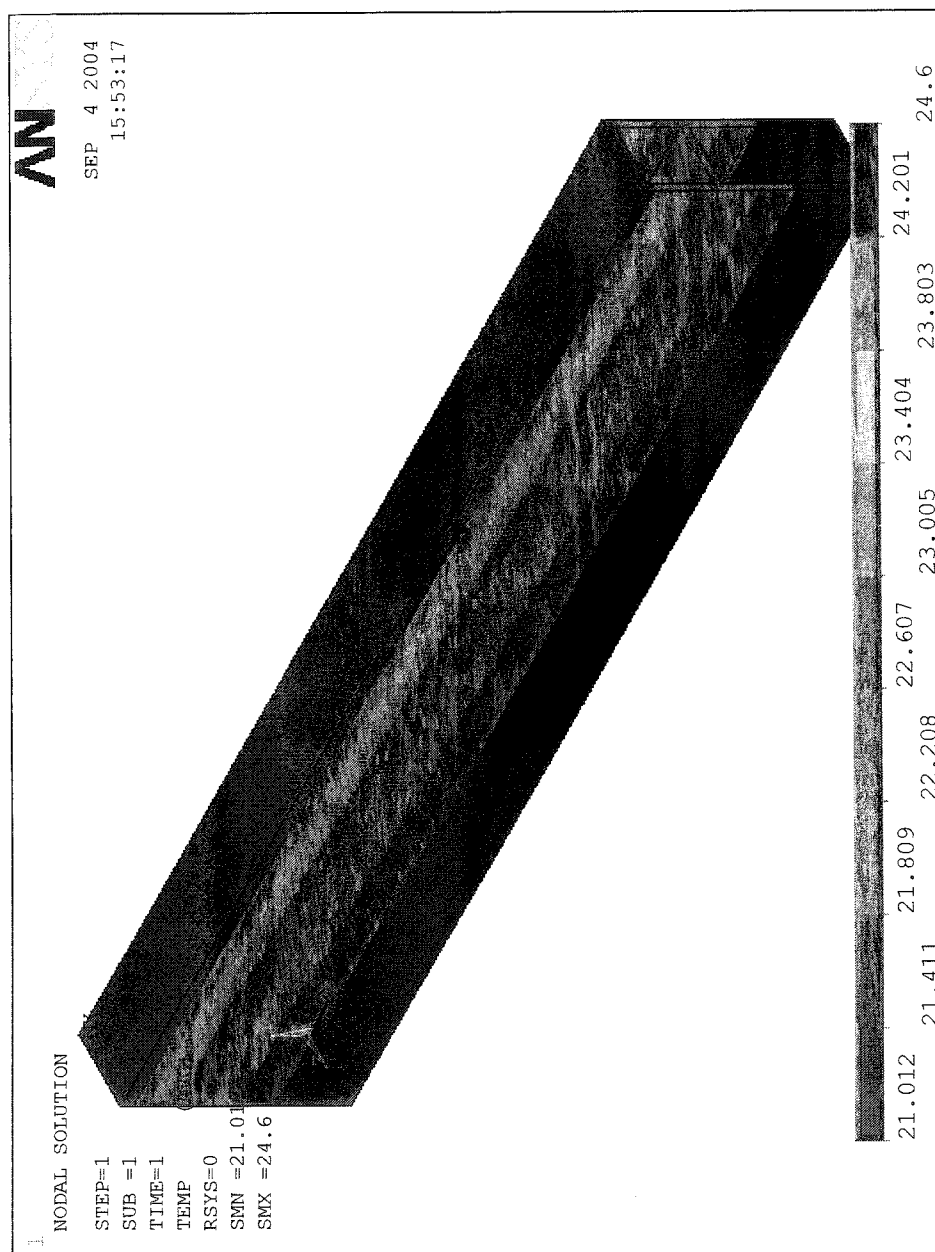


Figure E.5 : Distribution de température de la poutre - Résultats de la MEF  
(Température de la paroi supérieure : 24.6 C)



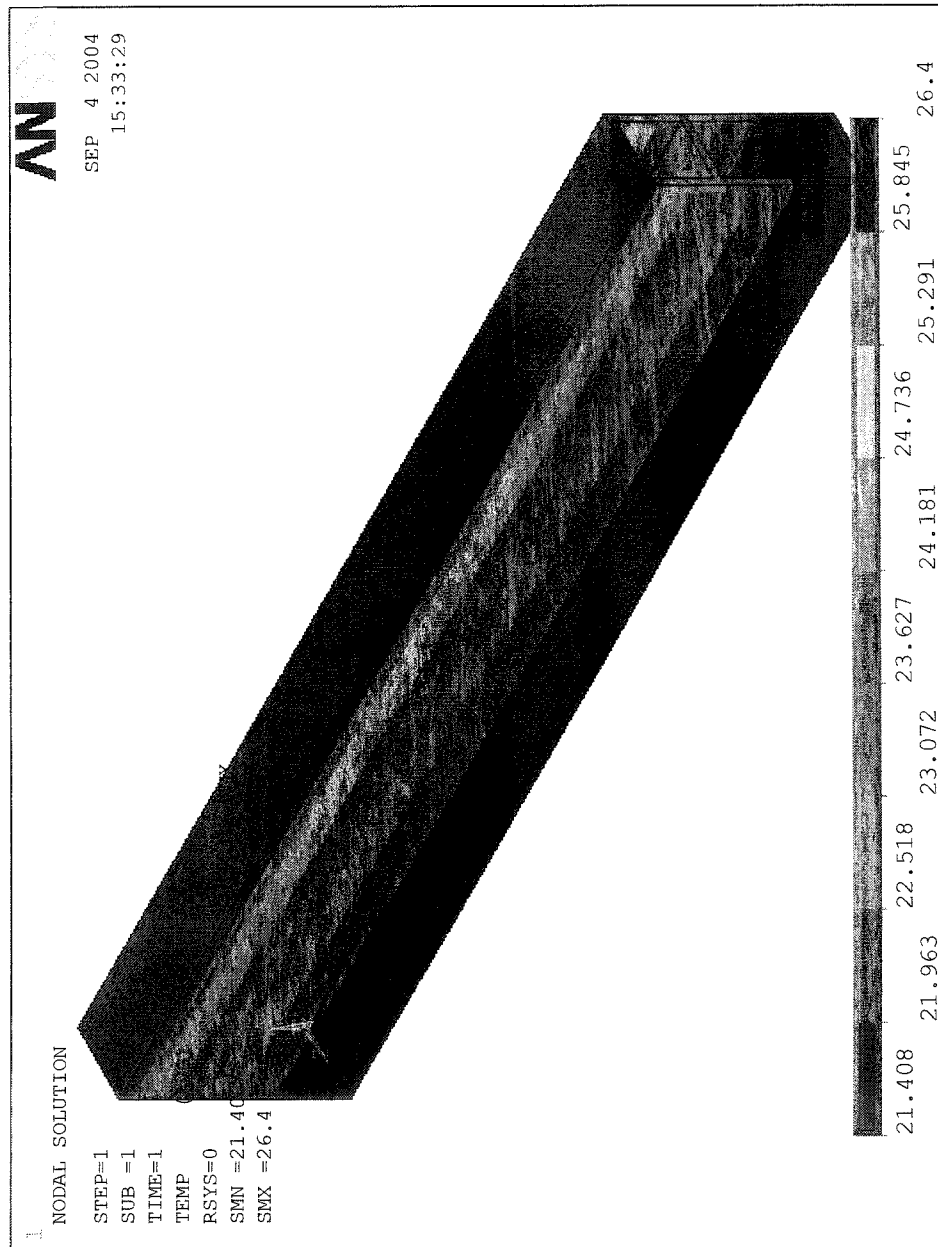


Figure E.6 : Distribution de température de la poutre - Résultats de la MEF  
(Température de la paroi supérieure : 26.4 C)



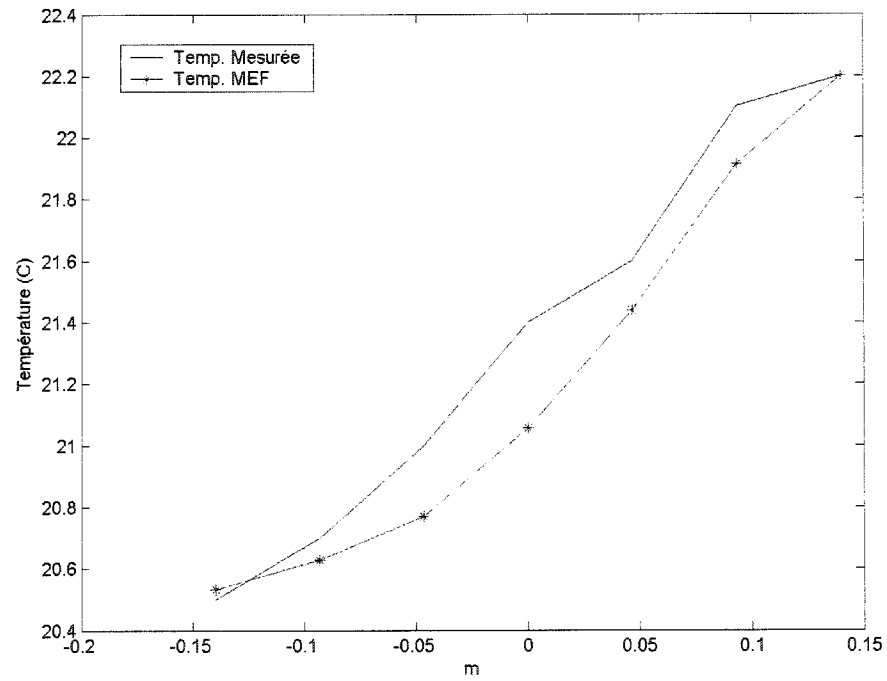


Figure E.7 : Comparaison de gradients de température mesuré et calculé avec la MEF (Température de la paroi supérieure : 22.2 °C)



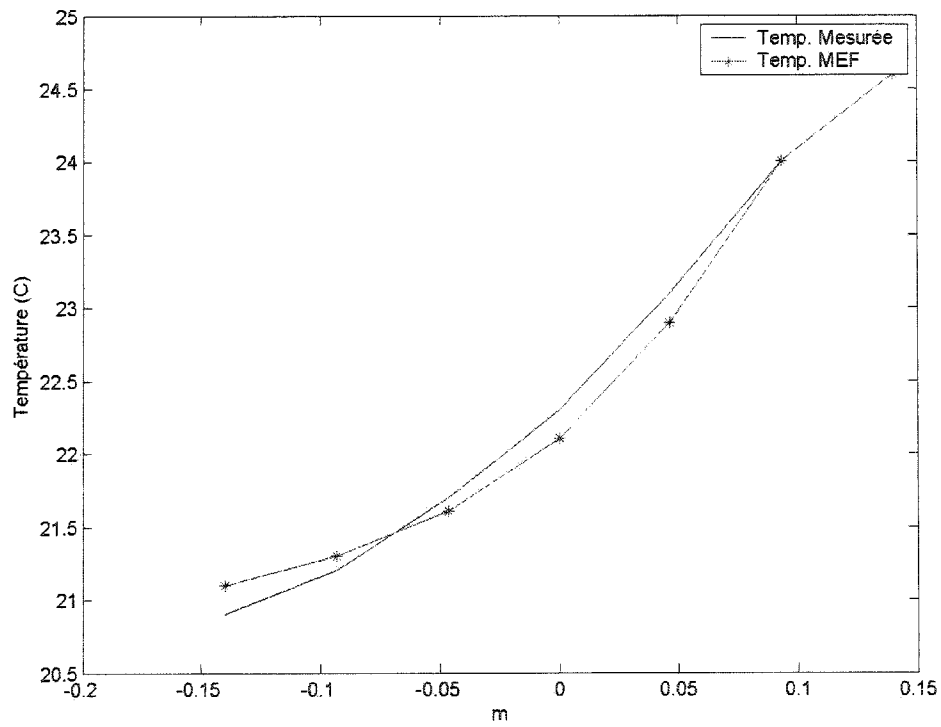


Figure E.8 : Comparaison de gradients de température mesuré et calculé avec la MEF (Température de la paroi supérieure : 24.6 °C)



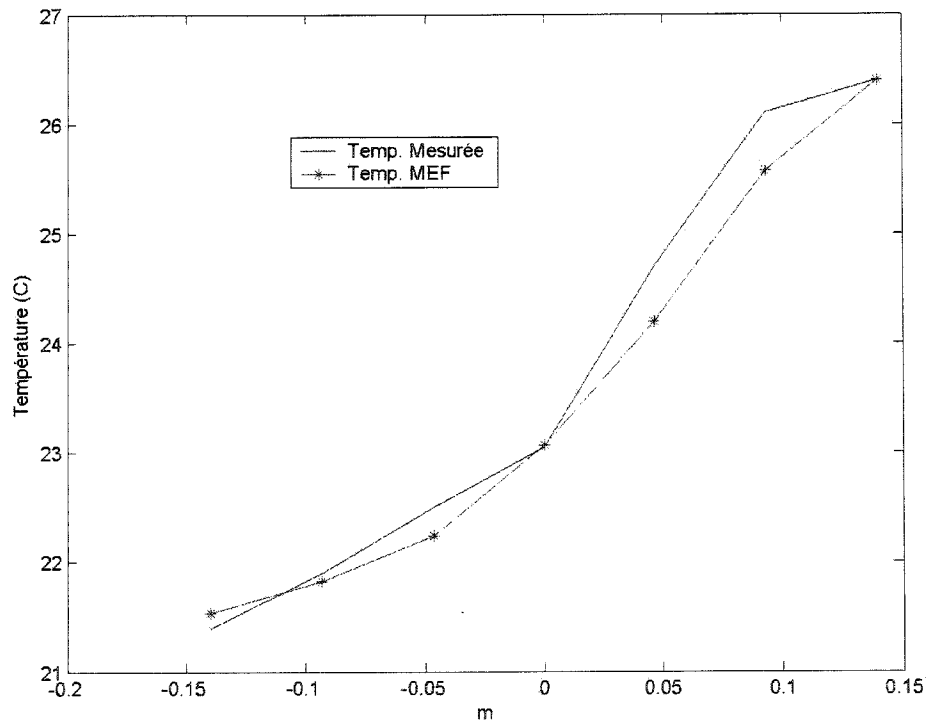


Figure E.9 : Comparaison de gradients de température mesuré et calculé avec la MEF (Température de la paroi supérieure : 26.4 °C)



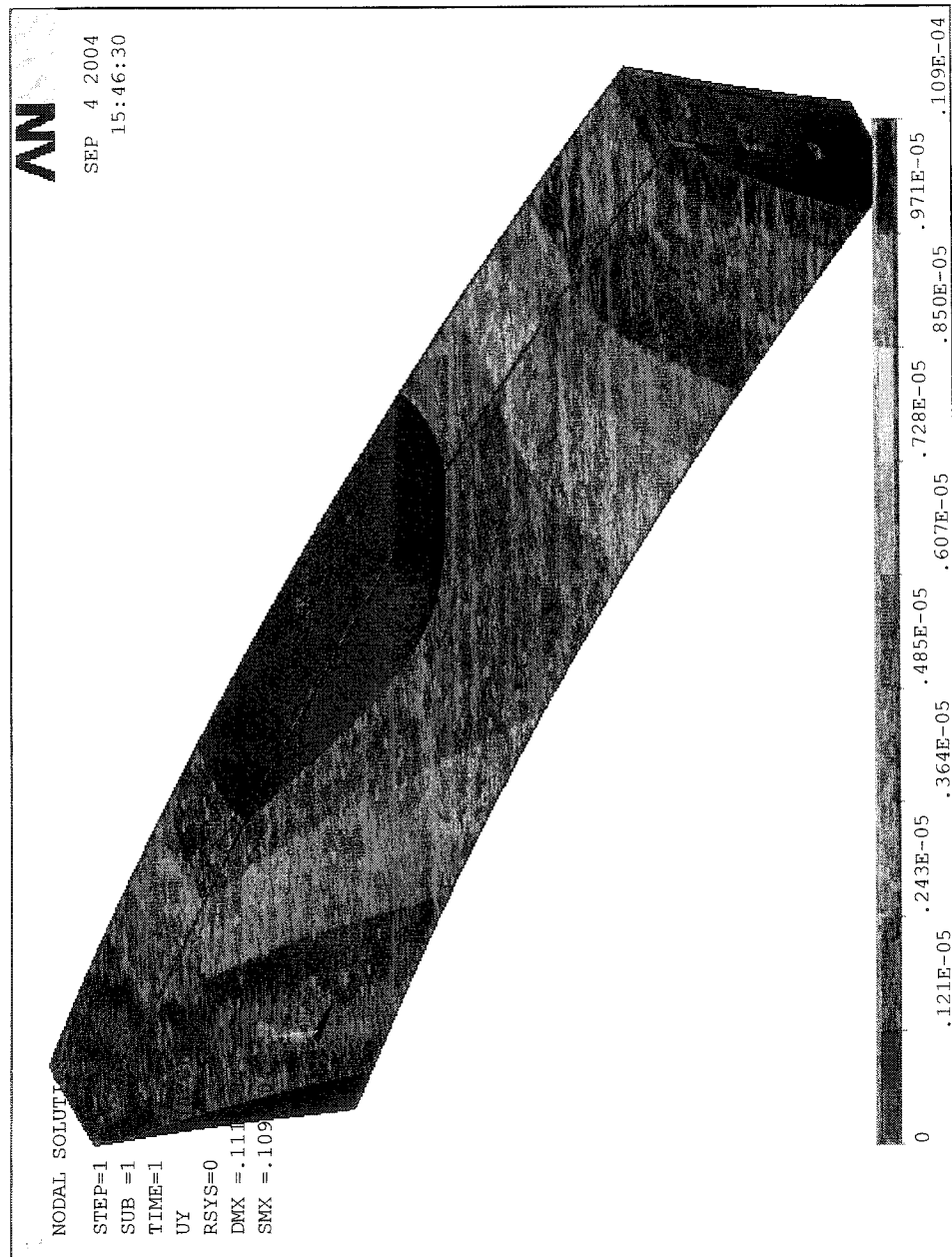


Figure E.10 : Déplacement verticale de la poutre - Résultats de MEF (Température de la paroi supérieure : 22.2 C)



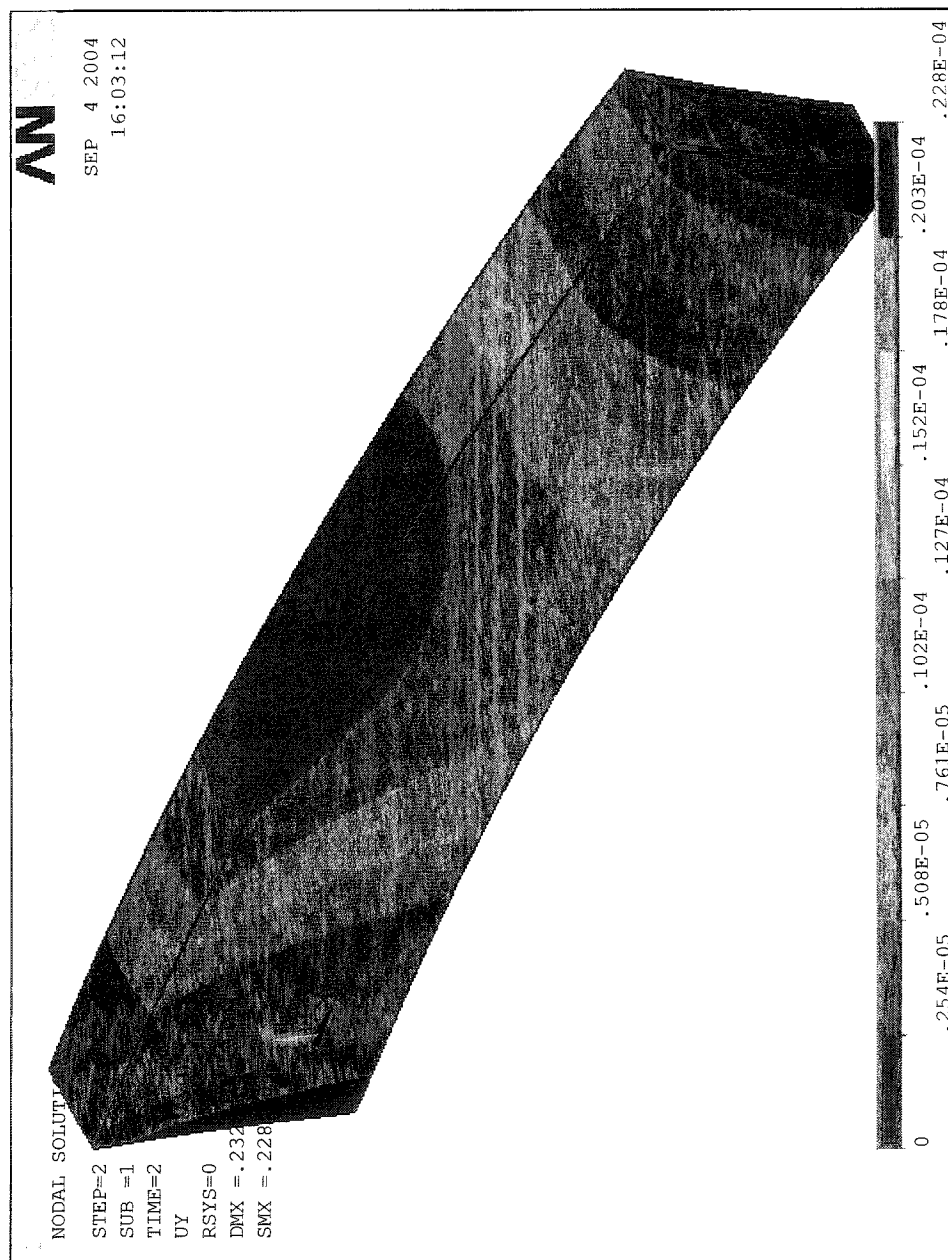


Figure E.11 : Déplacement verticale de la poutre - Résultats de MEF (Température de la paroi supérieure : 24.6 C)



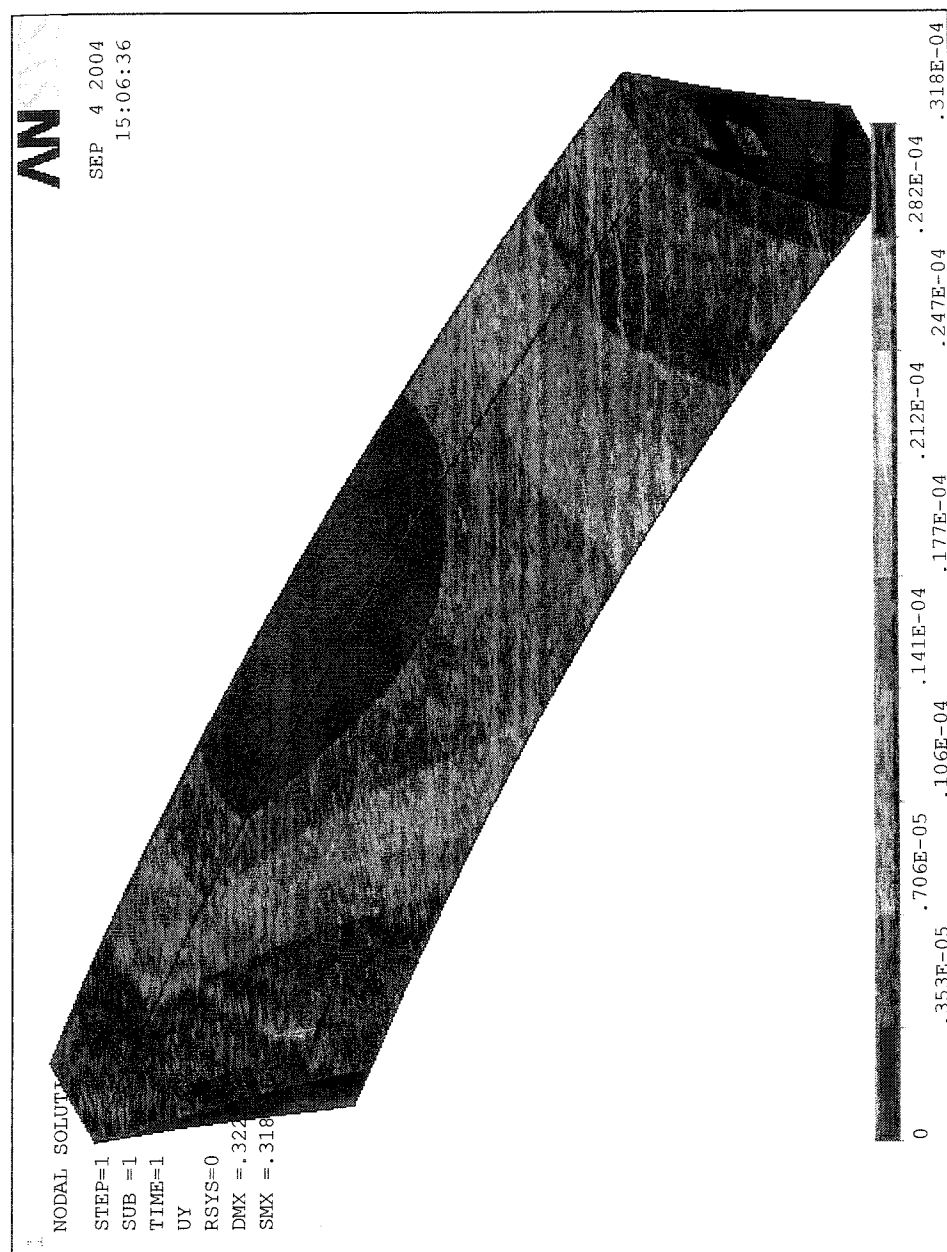


Figure E.12 : Déplacement verticale de la poutre - Résultats de MEF (Température de la paroi supérieure : 26.4 C)



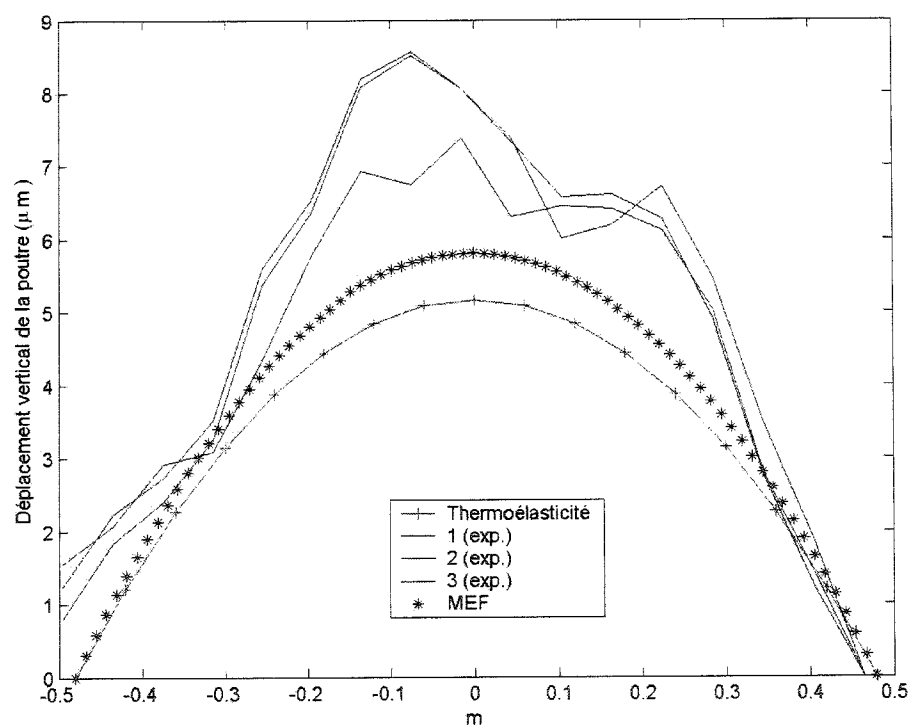


Figure E.13 : Comparaison des résultats mesurés et calculés : MEF, résultats expérimentales, formules dérivés de la théorie de thermoélasticité (Température de la paroi supérieure : 22.2 C)



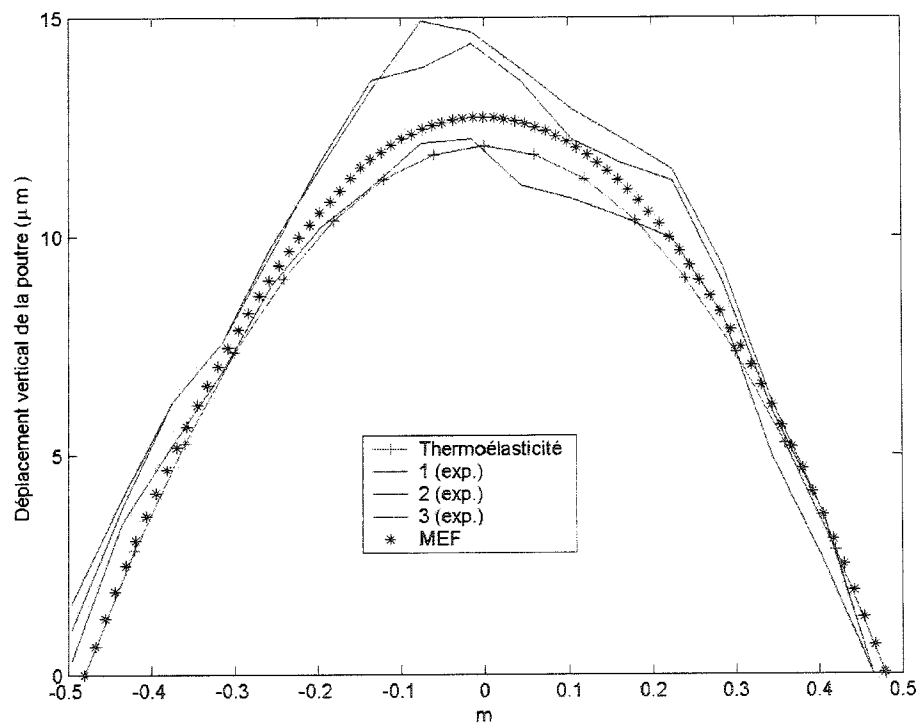


Figure E.14 : Comparaison des résultats mesurés et calculés : MEF, résultats expérimentales, formules dérivés de la théorie de thermoélasticité (Température de la paroi supérieure : 24.6 C)



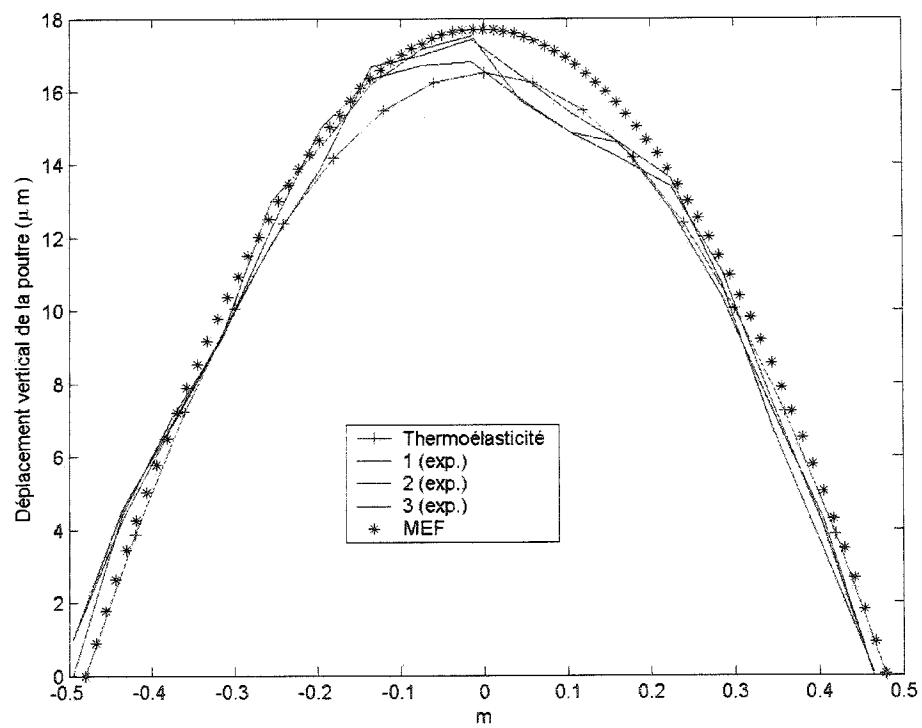


Figure E.15 : Comparaison des résultats mesurés et calculés : MEF, résultats expérimentales, formules dérivés de la théorie de thermoélasticité (Température de la paroi supérieure : 26.4 C)