

# NOTE TO USERS

This reproduction is the best copy available.

**UMI<sup>®</sup>**



**UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL**

**ÉTALONNAGE D'UN AXE PROSMATIQUE NUMÉRIQUE PAR  
INTERFÉROMÉTRIE LASER**

**YANNICK DUPONT  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)**

**AVRIL 2005**

**© Yannick Dupont, 2005.**



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 0-494-01309-5*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 0-494-01309-5*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ÉTALONNAGE D'UN AXE PRISMATIQUE NUMÉRIQUE PAR  
INTERFÉROMÉTRIE LASER

présenté par: DUPONT Yannick

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. PEGNA Joseph, Ph.D., président

M. CLOUTIER Guy M., Doct, membre et directeur de recherche

M. MAYER René, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. EL OUAFI Abderrazak, Ph.D., membre

À mon père Gilles

et

ma mère Diane

## REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont premièrement à mon directeur de recherche, Guy Cloutier. Sa vision d'une recherche scientifique menée avec curiosité et rigueur m'a permis d'acquérir un apprentissage très précieux à mes yeux. René Mayer, en tant que codirecteur, a su apporter le positivisme et l'écoute nécessaire pour vaincre les embûches de cette maîtrise. Je leur suis aussi reconnaissant d'avoir pu goûter au bouillonnement d'activités scientifiques d'une conférence internationale, celle de LamdaMap 2003, à Huddersfield, Angleterre. Merci à Guy Létourneau, dont les opportunités de projets industriels m'ont permis de vivre un autre penchant de la recherche universitaire.

Sincères remerciements à tous les membres de ma famille, leurs encouragements ont solidifié ma persévérance et ma volonté de réussir. Ma plus grande reconnaissance va à ma copine Josée, et sa force de caractère qui nous a menés si loin. ø

## RÉSUMÉ

L'interférométrie laser est un des appareils de choix dans l'industrie manufacturière pour les tâches de caractérisation des axes machines. La problématique de laquelle est issu ce travail questionne la robustesse d'une méthode de découplage des écarts d'échelle, de tangage et lacet. La dite méthode s'appuie sur un procédé de mesures multi-séquentielles faite par interférométrie laser.

Les mesures d'écart d'échelle sont effectuées par optiques linéaires représentées par un modèle mathématique faisant état des couplages avec les écarts angulaires qui l'entachent. La multiplicité des lignes d'actions de mesure mène à un système des moindres-carrés de type diagonale-bande.

Une étude des erreurs de mesures se base sur l'élaboration de matrices jacobienues. Ces dernières sont calculées selon les hypothèses que sous-entend le principe de superposition. L'erreur sur la solution devient ainsi quantifiable pour chacune des erreurs (aléatoires et constantes) mises en évidences.

La méthodologie développée pour les optiques linéaires est par la suite transposée aux mesures de rectitudes. Ces optiques sont quant à elles entachées de l'écart de roulis. L'alignement laser demeure toutefois un obstacle dans le découplage des écarts en jeu. À cet effet, plusieurs approches sont proposées pour palier à cette caractéristique intrinsèque de ce type de mesure.

Une procédure expérimentale acquiert l'information de l'écart d'échelle d'une mo-

bilité prismatique en six lignes d'actions. Ces données expérimentales permettent de peupler numériquement le système d'identification. Ce dernier est solutionné par l'inverse généralisée de Moore-Penrose et mène à l'identification des écarts d'échelle, de tangage et lacet. La robustesse est validée par le degré de conformité que présentent les écarts identifiés par rapport aux mesures de références.

Le système jacobien permet d'entreprendre une analyse sur les causes pouvant avoir une part de responsabilité sur les résidus de premier ordre. La discussion s'articulant autour de cet objectif arrive à la conclusion que ce sont les erreurs de nature thermiques qui affichent le plus grand pouvoir explicatif.

## ABSTRACT

Laser interferometrie represents a major tool in machine-tool axis characterization tasks. This work aims at evaluating the robustness for decoupling scale, pitch and yaw errors from linear measurements. Multi-sequential measurement lines make the basis of this method.

Scale error measurements are carried out with linear optics and modeled by a mathematical relation that incorporates the coupling behavior with angular errors (pitch and yaw). A least-square system follows from the multiplicity of measurement action lines.

A study of the measurement uncertainties is then explored using jacobian matrices. These are derived based on the assumption of the superposition principle. Thus it is possible to evaluate the error on the solution for each of the measurement uncertainty added to the equation.

Straightness measurements are approached in a similar fashion. In fact, straightness readings are coupled with another angular error, which in this case is the axis roll error. Laser alignment with the axis nominal direction of travel constitutes a obstacle for accurate decoupling of the horizontal and vertical straightness from the roll error. Upon these statements, few solutions involving many action lines combinations are proposed.

Experimental data of scale errors are obtained from six action lines of a prismatic

axis. These are used to populate the identification system which is solved by the Moore-Penrose generalized inverse. Scale, pitch and yaw errors are identified and compared to reference measurements made with angular optics. Robustness proves to be fairly good as shapes of identified errors are close to the reference. Some first order residues are obtained between angular errors.

The jacobian matrix system is used to analyze what uncertainty may be causing such first order residues. The discussion finally points out that thermally induced errors are showing the greatest effect.

## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                        |       |
|------------------------------------------------------------------------|-------|
| DÉDICACE . . . . .                                                     | iv    |
| REMERCIEMENTS . . . . .                                                | v     |
| RÉSUMÉ . . . . .                                                       | vi    |
| ABSTRACT . . . . .                                                     | viii  |
| TABLE DES MATIÈRES . . . . .                                           | x     |
| LISTE DES FIGURES . . . . .                                            | xv    |
| LISTE DES TABLEAUX . . . . .                                           | xviii |
| LISTE DES ANNEXES . . . . .                                            | xix   |
| INTRODUCTION . . . . .                                                 | 1     |
| CHAPITRE 1    REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .                           | 9     |
| 1.1    État des connaissances sur la caractérisation machine . . . . . | 9     |
| 1.1.1    Écarts géométriques . . . . .                                 | 9     |
| 1.1.2    Écart dynamique . . . . .                                     | 11    |
| 1.1.3    Erreurs issues du procédé de coupe . . . . .                  | 11    |
| 1.1.4    Erreur thermique . . . . .                                    | 11    |

|                                                       |                                                              |    |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----|
| 1.2                                                   | État des travaux sur la caractérisation machine . . . . .    | 12 |
| CHAPITRE 2 MESURE ÉCHELLE - LACET - TANGAGE . . . . . |                                                              | 17 |
| 2.1                                                   | Préambule mathématique . . . . .                             | 17 |
| 2.1.1                                                 | Mobilité prismatique et torseur d'écarts . . . . .           | 17 |
| 2.1.2                                                 | Schématisation de la mesure linéaire . . . . .               | 19 |
| 2.2                                                   | Équations régissant la mesure linéaire . . . . .             | 21 |
| 2.2.1                                                 | Direction sensible . . . . .                                 | 21 |
| 2.2.2                                                 | Projection du mouvement dans la direction sensible . . . . . | 22 |
| 2.2.3                                                 | Analyse de résolution . . . . .                              | 24 |
| 2.2.4                                                 | Formes matricielles . . . . .                                | 26 |
| 2.2.5                                                 | Résolution du système . . . . .                              | 29 |
| 2.2.6                                                 | Applicabilité des chaînes cinématiques . . . . .             | 30 |
| 2.3                                                   | Étude de sensibilité . . . . .                               | 30 |
| 2.3.1                                                 | Propagation d'erreur . . . . .                               | 31 |
| 2.3.2                                                 | Erreurs de mesures . . . . .                                 | 32 |
| 2.3.2.1                                               | Erreurs aléatoires . . . . .                                 | 33 |
| 2.3.2.2                                               | Erreurs constantes . . . . .                                 | 37 |
| 2.3.3                                                 | Inclure les erreurs dans l'équation de la mesure . . . . .   | 40 |
| 2.4                                                   | Développement du jacobien . . . . .                          | 41 |
| 2.4.1                                                 | Les jacobiens . . . . .                                      | 42 |
| 2.4.2                                                 | Système jacobiens . . . . .                                  | 43 |

|                                                       |                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|----|
| 2.4.3                                                 | Règles de calcul des jacobiens . . . . .                        | 44 |
| 2.4.4                                                 | Formules . . . . .                                              | 45 |
| CHAPITRE 3 MESURE ROULIS ET RECTITUDES . . . . .      |                                                                 | 47 |
| 3.1                                                   | Préambule mathématique . . . . .                                | 47 |
| 3.1.1                                                 | Schématisation de la mesure . . . . .                           | 47 |
| 3.2                                                   | Équations régissant la mesure . . . . .                         | 48 |
| 3.2.1                                                 | Direction sensible . . . . .                                    | 48 |
| 3.2.2                                                 | Projection du mouvement dans la direction sensible . . . . .    | 49 |
| 3.2.3                                                 | Analyse de résolution . . . . .                                 | 50 |
| 3.3                                                   | L'erreur d'alignement . . . . .                                 | 51 |
| 3.3.1                                                 | Le redressement des mesures brutes . . . . .                    | 52 |
| 3.3.2                                                 | Répercussions sur l'identification du roulis . . . . .          | 53 |
| 3.4                                                   | Méthodes et solutions alternatives . . . . .                    | 54 |
| 3.4.1                                                 | Roulis, rectitudes à une coordonnée . . . . .                   | 55 |
| 3.4.2                                                 | Roulis, rectitudes à toutes les coordonnées . . . . .           | 58 |
| 3.4.3                                                 | Plan d'action et/ou coordonnée(s) instantané(s) du roulis . . . | 60 |
| 3.4.4                                                 | Rectitudes et centre d'action moyen du roulis . . . . .         | 64 |
| 3.5                                                   | Bilan . . . . .                                                 | 65 |
| CHAPITRE 4 PROTOCOLE ET RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX . . . |                                                                 | 66 |
| 4.1                                                   | Protocole expérimental . . . . .                                | 66 |

|            |                                                              |    |
|------------|--------------------------------------------------------------|----|
| 4.1.1      | Hypothèses de travail . . . . .                              | 66 |
| 4.1.2      | La MOCN . . . . .                                            | 68 |
| 4.1.3      | Montage des optiques dans le référentiel de mesure . . . . . | 71 |
| 4.1.4      | Paramètres d'acquisition . . . . .                           | 71 |
| 4.1.4.1    | Code MOCN . . . . .                                          | 71 |
| 4.1.4.2    | Déplacement harmonique double . . . . .                      | 73 |
| 4.1.5      | Nomenclature . . . . .                                       | 75 |
| 4.1.5.1    | Données expérimentales . . . . .                             | 75 |
| 4.1.5.2    | Matrices de données sous MatLab® . . . . .                   | 76 |
| 4.2        | Résultats expérimentaux . . . . .                            | 76 |
| 4.2.1      | Mesures d'échelles . . . . .                                 | 77 |
| 4.2.2      | Mesures de tangage $\epsilon_{yx}(x)$ . . . . .              | 78 |
| 4.2.3      | Mesures de tangage $\epsilon_{zx}(x)$ . . . . .              | 78 |
| 4.2.4      | Résultats d'identifications . . . . .                        | 79 |
| 4.2.5      | Identification par quatre lignes d'action . . . . .          | 79 |
| 4.2.6      | Identification par trois lignes d'action . . . . .           | 80 |
| CHAPITRE 5 | DISCUSSION . . . . .                                         | 88 |
| 5.1        | Stabilité du système $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$ . . . . .    | 88 |
| 5.2        | Linéarité des résidus . . . . .                              | 90 |
| 5.3        | Analyse causale des résidus . . . . .                        | 91 |
| 5.3.1      | Erreurs aléatoires . . . . .                                 | 92 |

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| 5.3.2 Erreurs de positionnement . . . . . | 93  |
| 5.3.3 Erreurs d'alignement . . . . .      | 95  |
| 5.4 Erreurs thermiques . . . . .          | 96  |
| CONCLUSION . . . . .                      | 100 |
| RÉFÉRENCES . . . . .                      | 103 |

## LISTE DES FIGURES

|           |                                                                               |    |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| FIG. 1    | Lignes d'actions . . . . .                                                    | 5  |
| FIG. 2    | Ligne de transmission vs C.G. . . . .                                         | 6  |
| FIG. 3    | Optique linéaires . . . . .                                                   | 7  |
| FIG. 4    | Optique rectitudes . . . . .                                                  | 8  |
| FIG. 1.1  | Dérivation des écarts angulaires pour le calcul des rectitudes .              | 13 |
| FIG. 2.1  | Mobilité prismatique avec référentiel . . . . .                               | 18 |
| FIG. 2.2  | Mobilité prismatique théorique vs mobilité avec écarts géométriques . . . . . | 18 |
| FIG. 2.3  | Rétro-rélecteur positionné dans $\{Y\}$ . . . . .                             | 20 |
| FIG. 2.4  | $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$ selon la coordonnée articulaire . . . . .          | 28 |
| FIG. 2.5  | Lignes d'actions . . . . .                                                    | 32 |
| FIG. 2.6  | Conditionnement de la matrice $M$ . . . . .                                   | 33 |
| FIG. 2.7  | Diagramme d'Ishikawa : Stabilité du système . . . . .                         | 34 |
| FIG. 2.8  | Diagramme d'Ishikawa : Longueur du chemin optique . . . . .                   | 35 |
| FIG. 2.9  | Diagramme d'Ishikawa : Sources systématiques . . . . .                        | 37 |
| FIG. 2.10 | Erreur de positionnement . . . . .                                            | 38 |
| FIG. 2.11 | Erreur cosinus . . . . .                                                      | 39 |
| FIG. 3.1  | Mesure de rectitude . . . . .                                                 | 48 |
| FIG. 3.2  | Erreur d'alignement . . . . .                                                 | 52 |

|           |                                                                                |    |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| FIG. 3.3  | Redressement de mesure de rectitude . . . . .                                  | 53 |
| FIG. 3.4  | Roulis, rectitudes à une coordonnée . . . . .                                  | 56 |
| FIG. 3.5  | Montage pentaprisme-double . . . . .                                           | 56 |
| FIG. 3.6  | Plan d'action du roulis . . . . .                                              | 60 |
| FIG. 3.7  | Centre d'action du roulis . . . . .                                            | 62 |
| FIG. 4.1  | Temporisation . . . . .                                                        | 73 |
| FIG. 4.2  | Déplacement harmonique double . . . . .                                        | 74 |
| FIG. 4.3  | Format matriciel d'une mesure laser . . . . .                                  | 77 |
| FIG. 4.4  | Mesures d'échelle $\delta_{xx}(x)$ moyennes . . . . .                          | 78 |
| FIG. 4.5  | Mesure de tangage $\epsilon_{yx}(x)$ moyennes . . . . .                        | 80 |
| FIG. 4.6  | Mesures de lacet $\epsilon_{zx}(x)$ moyennes . . . . .                         | 81 |
| FIG. 4.7  | Identification et résidus $\delta_{xx}(x)$ par montages 1,3,4 et 5 . . . . .   | 82 |
| FIG. 4.8  | Identification et résidus $\epsilon_{yx}(x)$ par montages 1,3,4 et 5 . . . . . | 83 |
| FIG. 4.9  | Identification et résidus $\epsilon_{zx}(x)$ par montages 1,3,4 et 5 . . . . . | 84 |
| FIG. 4.10 | Identification et résidus $\delta_{xx}(x)$ pour la combinaison 345 . . . . .   | 85 |
| FIG. 4.11 | Identification et résidus $\epsilon_{yx}(x)$ pour la combinaison 345 . . . . . | 86 |
| FIG. 4.12 | Identification et résidus $\epsilon_{zx}(x)$ pour la combinaison 345 . . . . . | 87 |
| FIG. 5.1  | Graphe comparatif des solutions à 3 lignes d'action . . . . .                  | 89 |
| FIG. 5.2  | Graphe comparatif des résidus de solutions à 3 lignes d'action . . . . .       | 90 |
| FIG. 5.3  | Différence entre les solutions à 3 et 4 lignes d'action . . . . .              | 91 |
| FIG. 5.4  | Nappe de mesures, ligne d'action N° 1 . . . . .                                | 97 |

|          |                                                 |    |
|----------|-------------------------------------------------|----|
| FIG. 5.5 | Nappe de mesures, ligne d'action N° 2 . . . . . | 98 |
| FIG. 5.6 | Nappe de mesures, ligne d'action N° 4 . . . . . | 99 |

## LISTE DES TABLEAUX

|          |                                                                                                        |    |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| TAB. 2.1 | Écarts géométrique à 6 d.d.l. . . . .                                                                  | 19 |
| TAB. 2.2 | Indices du système $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$ . . . . .                                                | 27 |
| TAB. 2.3 | Dimensions du système $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$ . . . . .                                             | 29 |
| TAB. 2.4 | Changement $Te, H, P$ engendrant une variation de 1 ppm sur<br>la longueur du chemin optique . . . . . | 36 |
| TAB. 3.1 | Directions sensibles . . . . .                                                                         | 49 |
| TAB. 3.2 | Libertés et contraintes mathématiques : Roulis et rectitudes à<br>toutes les coordonnées . . . . .     | 59 |
| TAB. 3.3 | Liberté et contraintes mathématiques . . . . .                                                         | 63 |
| TAB. 3.4 | Liberté et contraintes mathématiques . . . . .                                                         | 65 |
| TAB. 4.1 | Coordonnées des lignes d'action . . . . .                                                              | 71 |
| TAB. 4.2 | Amplitudes des mesures d'échelle . . . . .                                                             | 79 |
| TAB. 4.3 | Conditionnement des combinaisons à 3 lignes d'actions . . . .                                          | 82 |
| TAB. 5.1 | Fluctuations environnementales maximums . . . . .                                                      | 92 |

**LISTE DES ANNEXES**

|          |                                            |     |
|----------|--------------------------------------------|-----|
| ANNEXE I | RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX SUPPLÉMENTAIRES .  | 105 |
| I.1      | Mesures expérimentales linéaires . . . . . | 105 |

## INTRODUCTION

Le grand projet de Fabrication Virtuelle (FV) se divise en deux artères de recherche. Il s'attaque d'abord aux modèles fins des interactions outils matière, au comportement des machines et des équipements, de l'instrumentation, c'est la micro FV. Dans une sphère complémentaire, la macro FV vient représenter l'ensemble des outils d'analyses, de créations et d'aides informatiques.

À la base, cette FV allie les moyens matériels, informatiques et technologiques pour caractériser l'ensemble des procédés qui la composent. Il devient essentiel de procurer des modèles pertinents et représentatifs demeurant simples dans leur expression et aisément adaptables aux problématiques nouvelles. Mais la problématique nouvelle ne prend pas uniquement naissance avec l'avancement technologique, elle vient surtout à force de creuser et de guetter les faiblesses composant le décor actuel de modélisations et de connaissances de la FV.

Il existe une relation étroite entre la modélisation et l'instrumentation. Le modèle, en tentant de représenter mathématiquement un phénomène observable connu, sera lamentablement freiné dans son évolution sans un apport d'information expérimentale, tandis que l'instrument devient rapidement un matériel inutile sans sollicitation expérimentale. Au delà de cette relation existe aussi un concept plus englobant.

En effet, il faut discerner le concept de mesure qui s'effectue par le biais de l'instrument technologique. C'est au travers de cette mesure que les résultats expérimentaux

pourront venir alimenter ou confronter un modèle théorique quelconque de la micro-FV. Qu'advient-il de la robustesse de ces efforts mathématiques sans un oeil critique envers la mesure ?

Pour une évolution saine de la micro-FV, la mesure ne doit pas demeurer esclave de la modélisation. Bien que la modélisation tire profit de l'instrumentation et des mesures expérimentales, elle devrait aussi fournir un retour d'information, de recommandations et surtout une compréhension accrue de l'instrument et de la nature véritable de sa mesure. Le modèle et la mesure se complètent donc mutuellement et ils demeurent au service l'un de l'autre tant qu'une carence est discernée, qu'un défaut doit être enrayé ou encore mieux que l'évolution est envisageable.

Le cas de l'interférométrie laser est un bel exemple d'un instrument occupant une place spécialisée dans la métrologie machine. L'industrie de la fabrication fait appel à cette technologie pour l'étalonnage de ses machines-outils. Le lot de mesures et le niveau d'utilisation des possibilités qu'offre l'instrument est malheureusement souvent restreint aux écarts en translation. Les critères de performance qui justifient l'interférométrie laser sont sa précision et sa justesse. Toutefois, les critères et le genre d'utilisation sont nettement différents dans le domaine de recherche. En effet, la recherche universitaire pousse plus loin les capacités du laser et des possibilités qu'offre la panoplie d'optiques. Il devient rapidement un instrument primordial pour la validation de nouvelles théories.

Afin que la mesure par interférométrie laser puisse mieux fournir son aide à l'évo-

lution des modèles d'écarts de machine-outil à commande numérique (MOCN), qui à leur tour viendront nécessairement garantir de meilleures méthodes d'étalonnage, de calibration et d'usinage, il faudra se questionner sur les défauts de l'instrument, ses limites ou ses capacités insoupçonnées. Les simulateurs d'usinage qui éclosent de plus en plus exigent un portrait précis des écarts machines. De surcroît, la recherche doit, afin de faire profiter l'industrie des ses avancements, resserrer les critères et reconsidérer les acquis pour que ses modèles soient plus étroitement liés à la nature du comportement machine.

## **La problématique**

L'amélioration d'un modèle ne peut uniquement survenir par le biais de raisonnements logiques, d'observations, d'élaboration d'hypothèses et de phases expérimentales. La chronologie inverse des événements est aussi possible. L'expérimentation en premier lieu (ou simplement l'utilisation de l'instrumentation basée sur les connaissances actuelles) peut mettre à jour les limites d'un modèle. Encore mieux, elle peut montrer l'incapacité de la théorie actuelle à expliquer correctement l'ensemble des résultats ou des mesures. De là surgit le besoin d'approfondir la compréhension et d'élucider l'inexpliqué.

La caractérisation de machine-outil repose principalement sur la modélisation des écarts géométriques, cinématiques, dynamiques, thermiques et de flexion d'outil (procédé de coupe). De ces écarts, l'interférométrie laser est particulièrement apte à mesu-

rer les écarts géométriques et cinématiques. Plus précisément encore, les plus répandues des mesures sont sans contredit l'écart d'échelle et l'écart de rectitude (écarts de translation). Une partie de la problématique vient du besoin d'approfondir leur comportement réel. Par conséquent, il faut identifier précisément la source des mouvements mécaniques dans les diverses lignes d'action en jeux.

Les rectitudes prennent naissances à l'interface guides/patins là où se situe la ligne d'action de guidages (figure 1). De façon combinée, un tangage est créé par une différence d'amplitude entre les mouvement verticaux et la ligne d'action du guidage tandis qu'un lacet résulte d'une différence entre les mouvements horizontaux (incluant aussi la flexion de ses composantes). La nature des écarts d'échelle se rattache à la ligne de transmission du mouvement, soit au système vis-à-bille/écrou.

Ces écarts sont aussi vulnérables à l'emplacement de la ligne de transmission du mouvement par rapport au centre de masse du chariot. Prenez l'exemple d'une machine cinq axes horizontales avec une cinématiques  $YZFXBC$  (figure 2). La vis-à-bille responsable du mouvement du mobilité  $Y$  sur laquelle est fixée la broche, ne passe pas par le centre de masse de l'armature  $Y$  et de la broche. La force à la ligne de transmission du mouvement crée donc un moment autour du centre de masse et le lacet est forcément engendré.

Soit un rétro-réfecteur linéaire utilisé dans la mesure de l'écart d'échelle et fixé rigidement sur le chariot d'une mobilité prismatique. Les déplacements parasites dudit chariot est modélisé par 6 degrés de liberté (DDL) d'un corps rigide décrit relative-

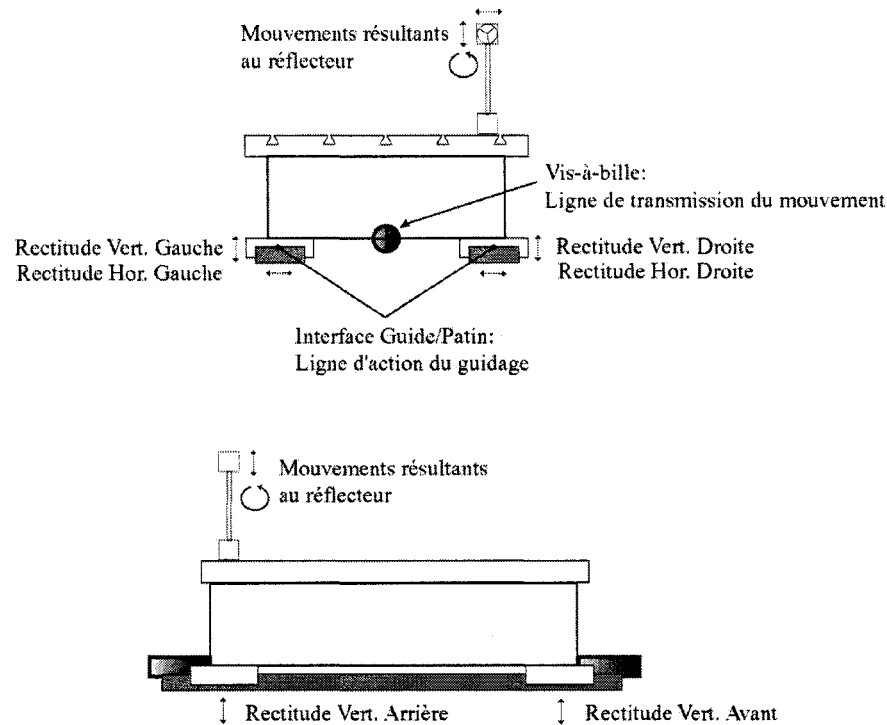


FIG. 1 Lignes d'actions

ment à son système de coordonnées  $X$  et dont le déplacement se fait selon la droite  $\vec{x}$ . Sachant que ce rétro-réflecteur possède une direction sensible parallèle au faisceau laser et que la longueur du chemin optique demeure intacte suite à de petits déplacements dans le plan de normale à la direction du faisceau, la mesure est-elle uniquement constituée du mouvement linéaire selon  $X$  ?

À la lumière de la figure 3, il devient clair que le déplacement dans la direction sensible n'est pas purement tributaire du déplacement axial de la mobilité dès que l'axe de cette mobilité est porté sur une ligne d'action non confondue au faisceau lui-même. Les écarts angulaires de tangage et de lacet participent aussi au déplacement du rétro-réflecteur, proportionnellement au bras de levier définissant l'apex à l'origine

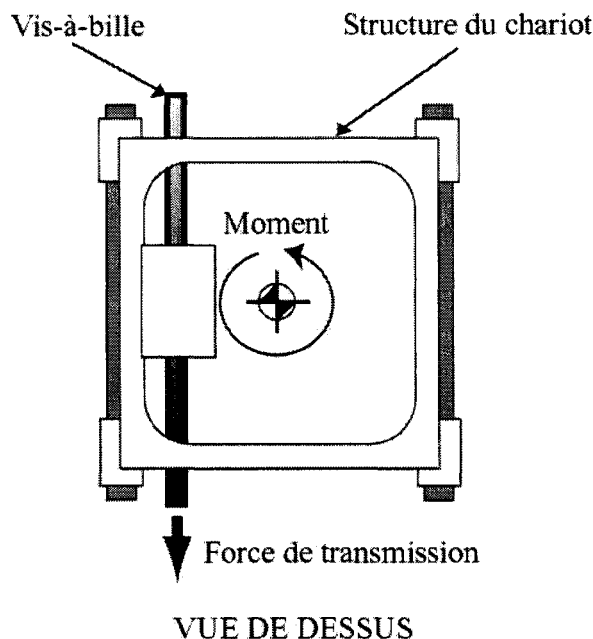


FIG. 2 Ligne de transmission vs C.G.

du système de coordonnées.

Dans un même ordre d'idées, les mesures retournées par les optiques de rectitudes (figure 4) sont elles aussi entachées d'un écart autre que celui visé par la direction sensible de l'optique. Que ce soit celui de l'optique visant à récupérer l'écart de rectitude vertical ou celui récupérant l'écart de rectitude horizontal, le roulis vient ajouter à la composante sensible du réflecteur de rectitude.

Que penser à la lumière de cette analyse brève et simplifiée ? Les procédures usuelles ne dictent que certaines précautions, faisant appel au principe d'Abbé, voulant diminuer ces effets de couplage entre écarts linéaires et angulaires. De surcroît, la tendance industrielle veut que ces couplages soient négligeables et soient exclues de toute conséquence néfaste sur le résultat de la mesure. Malheureusement, dans

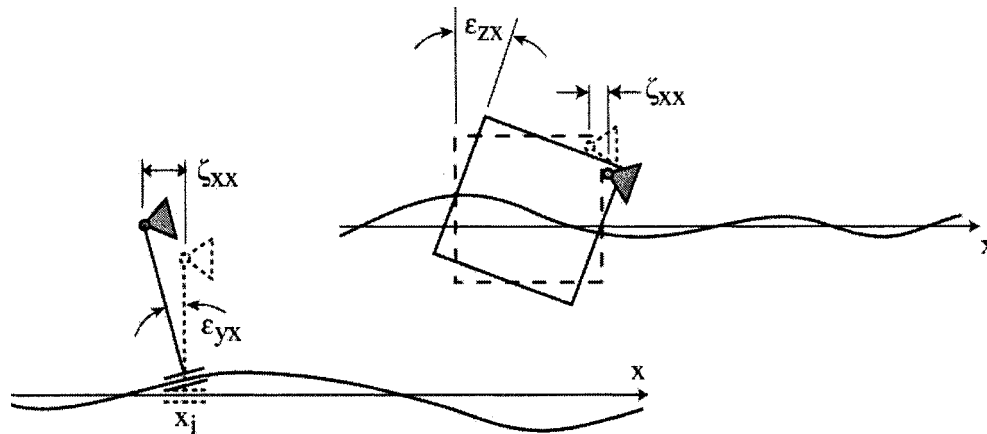


FIG. 3 Optique linéaires

le contexte de la fabrication industrielle, soit que ces erreurs tombent en dessous du seuil de curiosité, faute de temps et d'argent, et en viennent à être oubliées dans la validation des mesures, soit que l'on s'avoue vaincu malgré la conscience que l'on en a, faute de compensations appropriées. Dans le meilleur des cas, on compense l'échelle selon une ligne d'action « raisonnable » au regard du volume des pièces à fabriquer. Par conséquent, il existe certainement une divergence d'intérêts dans l'exercice de la mesure (et l'utilisation de l'instrumentation) d'avec celui de la recherche universitaire.

C'est à travers ce champs d'idées que prennent naissance les objectifs du projet. Le besoin de faire ressortir la mathématique du couplage d'écarts d'échelle, de tangage et de lacet, et celui des rectitudes et du roulis est ici la motivation première faisant naître le projet.

Le questionnement sur le « comment » de la chose repose sur un effort de former un système matriciel capable d'identifier toutes les inconnues en jeu. Ce système doit évidemment représenter une méthode expérimentale, dans notre cas une séquence de

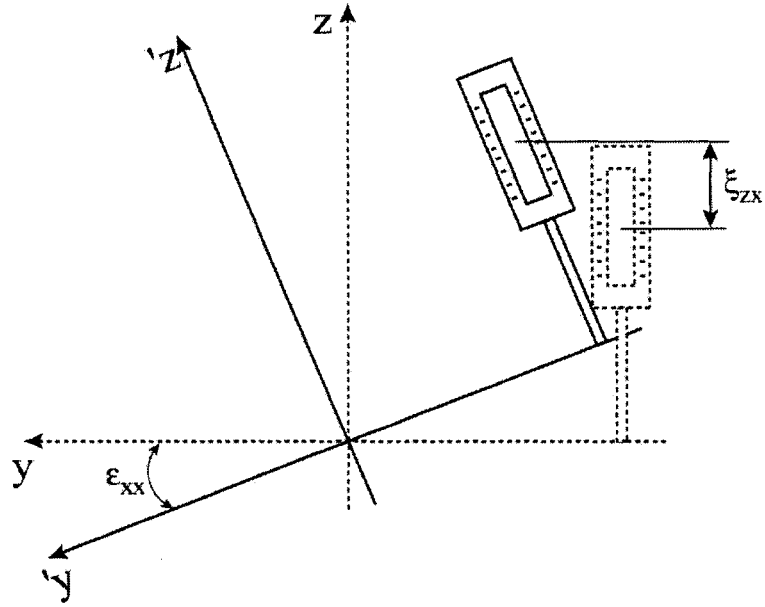


FIG. 4 Optique rectitudes

mesures laser.

En ce qui concerne le traitement des mesures, une étude de la sensibilité du système par rapport aux erreurs expérimentales est faite.

Finalement, il y a la confrontation du modèle, par l'entremise d'une expérimentation, sur un des axes prismatiques d'une MOCN, permettant d'alimenter numériquement le système d'identification. La robustesse et les failles du modèle sont ainsi évaluées.

## CHAPITRE 1

### REVUE DE LITTÉRATURE

#### 1.1 État des connaissances sur la caractérisation machine

La présente section se veut a priori une description théorique des écarts machine importants dans le développement de cet ouvrage. Ils sont regroupés en quatre catégories, soit les écarts géométriques, les écarts dynamiques et d'asservissement et finalement les écarts d'origines thermiques.

Diverses approches de modélisation de ces sources d'erreurs sont présentées dans la section 1.2.

##### 1.1.1 Écarts géométriques

À prime abord, il existe les paramètres d'écart géométrique indépendants de la position (PEGIP) naissant de la structure de la machine-outil à commande numérique (MOCN) et des défauts d'assemblage de ses principales articulations mécaniques. Ces écarts décrivent la position et l'orientation des organes mécaniques de translation et de rotation (mobilité prismatique et rotoïde) après l'installation et la « mise de niveau » de la MOCN. Cet alignement se fait par l'entremise des ajustements présents aux points d'appui entre la structure et le sol et demeure invariant selon la coordonnée articulaire adoptée par une ou plusieurs mobilités de la MOCN. Il s'agit du cas de la

perpendicularité et du parallélisme qui dénotent tous deux un état relatif entre deux axes nominaux de déplacement. Par exemple, la perpendicularité entre l'axe théorique de la broche et le plan fait par les mobilités prismatiques  $X$  et  $Y$  d'une MOCN de type  $ZFXY$  ou encore, le parallélisme entre l'axe de rotation d'une mobilité rotoïde  $B$  et la mobilité prismatique  $Y$  d'une topologie  $OYZFXB$ .

Aussi parmi ces écarts, on distingue des variables essentielles à la tâche qu'a le post-processeur d'interpréter une séquence de commandes machine, tel que les constantes de construction, distances inter-axes ou zéro mobilité. Il est à noter que la constante de temps de ces variables est suffisamment longue pour que leurs effets soient considérés comme négligeables dans le cadre de cette étude. Toutefois, un brusque changement d'état est possible suite à une collision ou encore une relocalisation physique de la MOCN.

Le second type d'écarts, le plus pertinent à ce travail, est nommé PEGDP (paramètre d'écart géométrique dépendant de la position) puisqu'ils varient selon la coordonnée articulaire d'une mobilité. Ils sont directement tributaires de la position des guides, de la vis-à-billes, des entraînements mécaniques et des moteurs. Ainsi, les six DDL d'un corps rigide représentent la position et l'orientation d'une mobilité. Sa forme mathématique est celle d'une matrice colonne  $\tau$ , constituée d'un premier vecteur de petites translations (lettre grecque  $\delta$ ) et d'un second vecteur de petites rotations (lettre grecque  $\epsilon$ ).

### 1.1.2 Écart dynamique

Cette catégorie d'erreurs n'intervient à aucun niveau dans cette étude puisque toutes les mesures expérimentales ordonnent que la ou les mobilités soient à une position fixe (durant la prise de mesure). Plus encore, ces positions sont atteintes à des vitesses très basses et ne sollicitent pas dynamiquement la MOCN.

Les écarts de cette nature reflètent la performance de l'asservissement du contrôleur jumelée aux caractéristiques physiques des axes mobiles de la MOCN, soit la masse, l'inertie, etc. Selon le type d'asservissement (prioritaire à la position ou à la vitesse) et de capteurs, des écarts de positions ou de vitesses dans les trajectoires programmées pourront être observés.

### 1.1.3 Erreurs issues du procédé de coupe

Cette catégorie d'erreurs dans la métrologie machine n'est pas considérée dans ce mémoire. Aucun usinage ni même outil de coupe ne figure parmi les objectifs du projet. À titre informel, ces erreurs sont induites par les forces d'usinage, de la dynamique broche/outil et de l'interaction outil/matière. Ces phénomènes engendrent des écarts au niveau de la géométrie de la pièce et du fini de surface.

### 1.1.4 Erreur thermique

Les erreurs de nature thermique peuvent rapidement supplanter en amplitudes, voir amplifier, tout autre écart. En effet, les sources et les mécanismes internes de

génération et d'entretien de chaleur d'une MOCN sont nombreux.

Le mécanisme de création de chaleur le plus répandu est certes celui de la friction. Lee *et al.* (2003) trouvent que le coefficient de friction est fonction de la vitesse et de la pression de contact. Dans le cas d'une MOCN, la vitesse correspond à celle des patins par rapport aux guides tandis que la pression provient du poids transporté additionné aux forces d'usinage.

$$F = \mu(x, P)N$$

La température ambiante qui évolue dans le temps, joue aussi un rôle important dans l'état thermique d'une MOCN. Comme mesurent Longstaff *et al.* (2003), une MOCN ne subit pas que des changements thermiques mesurables au niveau des écarts géométriques selon l'heure du jour (climatisation, éclairage), mais également selon le moment de la semaine (congé, nombre de travailleurs) et selon la saison (humidité, température de l'air). Un environnement d'atelier n'est certainement pas comparable à celui d'un laboratoire.

## 1.2 État des travaux sur la caractérisation machine

### Identification avec interférométrie laser

Chen *et al.* (2001) procèdent à un ensemble de mesures laser séquentielles, d'intégrations numériques et d'identification par inverse généralisé. Neuf (9) lignes de mesures laser linéaires sollicitant chacun des axes prismatiques de la MOCN sont

nécessaires pour identifier les écarts d'échelle, de tangage et de lacet. Il est à noter que ces derniers sont dérivés des mesures brutes par le principe d'Abbé. Les écarts de rectitudes sont identifiés par intégration numérique des écarts angulaires. Finalement, six (6) autres mesures laser linéaires diagonales servent à former un système matriciel des moindres-carrés permettant d'identifier les coefficients des polynômes des trois (3) roulis et des trois (3) écarts de perpendicularité. Un total de 21 écarts géométriques sont ainsi identifiés. Les résultats expérimentaux montrent une correspondance relativement satisfaisante entre les valeurs mesurées et calculées.

Il faut toutefois préciser que le succès du calcul des rectitudes par intégration des écarts angulaires dépend fortement de la forme de ces derniers. Tout dépend des points de l'interdistance des points de contact du chariots.

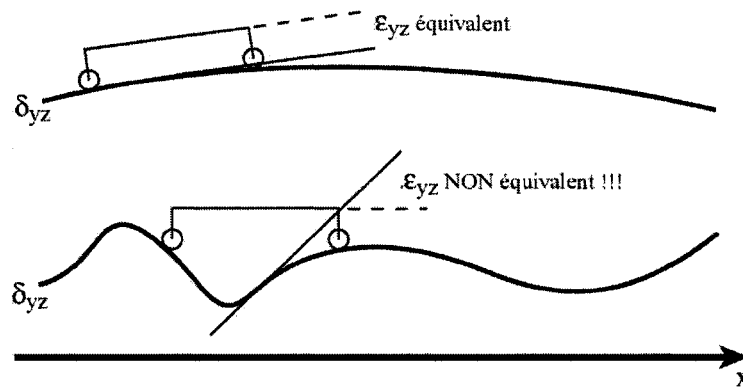


FIG. 1.1 Dérivation des écarts angulaires pour le calcul des rectitudes

Dans le premier cas, l'approximation s'avère bonne. Vue la faible fréquence d'ondulation du profil, l'orientation perçue du chariot équivaut à la pente du profil. Toutefois, dans le cas d'un défaut de rectitude particulièrement accidenté, que vaut cette approximation lorsqu'en plus le profil n'est pas connu d'avance ?

## Modèles d'erreurs géométriques

Okafor et Ertekin (2000) a prédisent l'erreur volumétrique d'une MOCN 3-axes à l'aide d'un modèle construit sur la cinématique des corps rigides et par l'utilisation de matrices de transformations homogènes, de l'approximation des petits angles et déplacements. Il devient aisé de représenter l'écart de position en tous points du volume de travail, connaissant les six (6) écarts de chacun des axes prismatiques, les écarts de perpendicularité et les constantes de fabrication (distances entres-axes).

## Modèles d'erreurs thermiques

Lee *et al.* (2003) adressent le problème de la modélisation de la dérive thermique d'une broche par une approche statistique. Des régressions linéaires successives permettent d'obtenir un modèle d'erreurs exprimé par une combinaison linéaire des principales variables. Le temps de calcul du modèle est amélioré en réduisant les variables sélectionnées selon un critère de corrélation, et ce de façon suffisante pour qu'il soit implanté dans une boucle de compensation agissant en temps-réel. Sa précision et sa robustesse face aux bruits de mesures sont jugées bonnes. Ces travaux donnent une nouvelle perspective pour vaincre ces écarts thermiques en attendant de savoir comment les modéliser parfaitement. D'autres prennent des approches de « capacités ponctuelles » (Kim et Cho (1997)), d'éléments finis (Wu et Kung (2003)) et de modèle de régression (Huang (1994)) pour atteindre des objectifs similaires.

## Exemples de mesures lasers

Okafor et Ertekin (2000)<sup>c</sup> procèdent à des mesures laser linéaires sur une MOCN 3-axes. Un résumé expérimental rend compte d'une variation des écarts d'échelle dans le temps qu'ils attribuent aux phénomènes thermiques. De la même manière, Okafor et Ertekin (2000)<sup>b</sup> présentent les résultats de mesures angulaires (lacet et tangage) sur la même MOCN et avec la même instrumentation. Ils rapportent entre autres que l'écart de tangage de la mobilité  $X$  présente une ondulation sinusoïdale dont la période correspondrait au pas de la vis-à-bille. Les écarts angulaires sont aussi affectés par des phénomènes thermiques, mais aucune règle de comportement n'est identifiée. Surtout, les auteurs ne portent aucun jugement sur l'effet de l'emplacement de la ligne d'action de la mesure et les conséquences sur l'identification des écarts. Les phénomènes thermiques sont pointés du doigt, mais les auteurs n'abordent pas leurs effets sur l'exactitude des mesures faites par interférométrie laser.

## Instrumentation

Laser sur diagonales : Miguel *et al.* (1995) utilisent le système laser Renishaw couplé à un miroir pivotant qui permet l'orientation du faisceau sur une des diagonales du volume de travail. Ils trouvent que la forme des erreurs peut être retrouvée dans son ensemble avec une lacune au niveau de la précision de ces mesures. Quel est l'avantage de cette méthode étant donné ce manque en précision ? Celle-ci n'est pas tout à fait un outil diagnostique étant donné le montage lent et surtout le fait que

d'autres appareils s'aquittent d'une telle tâche beaucoup plus aisément.

Lau *et al.* (1999) de la firme API (Automated Precision Inc.) présentent leur instrumentation laser comme un instrument pouvant réduire considérablement le temps de mesure des 18 écarts d'une MOCN à 3 mobilités prismatiques. Ce système est nommé 5D/6D puisqu'il mesure simultanément les 3 écarts de translations et le tangage/lacet, le roulis étant assuré par un niveau électronique physiquement intégré au système. Des essais de ce système permettent toutefois d'apporter un bémol sur l'utilité de cet appareil favorable au rapport temps vs quantité d'informations. La performance en stabilité et la répétabilité des mesures viennent freiner l'ardeur que quelqu'un aurait à vouloir l'utiliser comme entrée à un simulateur comparativement à l'interférométrie laser classique. Aussi sa rapidité d'installation et d'acquisition lui donne un énorme avantage comme outil diagnostique.

## CHAPITRE 2

### MESURE ÉCHELLE - LACET - TANGAGE

#### 2.1 Préambule mathématique

Il a été montré dans la section problématique () qu'une mesure d'échelle par interférométrie laser présente le risque d'être faussée par d'autres écarts de la mobilité. Ce chapitre approfondit davantage la relation existant entre la mesure de l'écart d'échelle  $\delta_{yy}(y)$  et les écarts parasites de tangage  $\epsilon_{xy}(y)$  et de lacet  $\epsilon_{zy}(y)$  pour une mobilité prismatique  $Y$ .

##### 2.1.1 Mobilité prismatique et torseur d'écarts

Premièrement, il existe une mobilité prismatique, d'une MOCN quelconque, dont on voudrait identifier l'écart d'échelle, c'est-à-dire l'erreur de positionnement dans la direction de l'axe numérique. Dans le cas d'une mobilité ayant un déplacement principal selon  $Y$ , et selon la convention établie précédemment, cet écart prend la notation  $\delta_{yy}(y)$ .

Cette mobilité possède un référentiel noté  $\{Y\}$  dont le vecteur unitaire  $\vec{y}$  est colinéaire à l'axe de déplacement. Sans écart, ce référentiel est parfaitement orienté avec le référentiel de la fondation  $\{F\}$  et la distance entre les origines correspond en tout temps à la coordonnée articulaire  $Y_i$  (en acceptant que le zéro soit fait aux origines

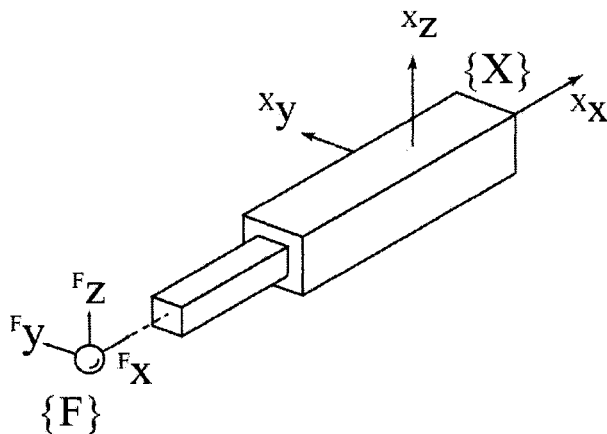


FIG. 2.1 Mobilité prismatique avec référentiel

confondues).

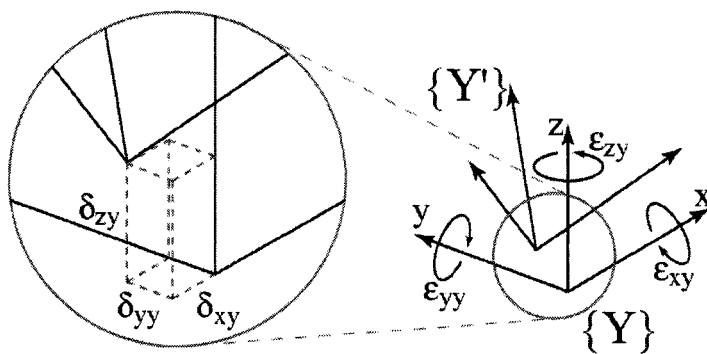


FIG. 2.2 Mobilité prismatique théorique vs mobilité avec écarts géométriques

Pourtant, la mobilité ne décrit pas de trajectoire parfaite comme l'indique la figure 2.1. Le besoin de définir correctement ce corps par rapport à son état théorique dans l'espace est comblé par le torseur d'écart. Ce torseur n'est pas un vecteur, il est un

empilement de trois petites translations et de trois petites rotations, venant ainsi définir complètement, sans redondance, la position et l'orientation du référentiel  $\{Y'\}$  par rapport au référentiel  $\{Y\}$  théorique.

$${}^y\tau = \begin{bmatrix} \delta_{xy}(y) & \delta_{yy}(y) & \delta_{zy}(y) & \epsilon_{xy}(y) & \epsilon_{yy}(y) & \epsilon_{zy}(y) \end{bmatrix}^T \quad (2.1)$$

Il existe autant de torseur comme celui de l'équation (2.1) qu'il existe de points de discrétisation sur la plage de déplacement de la mobilité.

Le premier indice désigne la direction de l'écart tandis que le second désigne la direction libre de la mobilité et la lettre entre parenthèse est simplement la variable articulaire. Le tableau ci-bas dénote les équivalents linguistiques d'une mobilité prismatique en  $X$ .

TAB. 2.1 Écarts géométrique à 6 d.d.l.

| symbole math.      | équivalent linguistique |
|--------------------|-------------------------|
| $\delta_{xy}(y)$   | rectitude en x          |
| $\delta_{yy}(y)$   | échelle                 |
| $\delta_{zy}(y)$   | rectitude en z          |
| $\epsilon_{xy}(y)$ | tangage                 |
| $\epsilon_{yy}(y)$ | roulis                  |
| $\epsilon_{zy}(y)$ | lacet                   |

### 2.1.2 Schématisation de la mesure linéaire

Une mesure par interférométrie laser comporte trois éléments essentiels. La source laser, habituellement positionnée sur un trépied à l'extérieur de la MOCN, dont le

faisceau sortant est séparé, un interféromètre rigidement fixé et immobile dans le volume de la MOCN, puis un rétro-réflecteur rigidement fixé sur la mobilité à étalonner. Dans la problématique qui nous incombe, il est question du mouvement réel que fait ce rétro-réflecteur lors d'une mesure d'écart d'échelle d'une mobilité prismatique affligée des six écarts géométriques (PEGDP).

Il faut d'abord décrire la position de l'apex du rétro-réflecteur dans le référentiel  $\{Y\}$ . Le vecteur  $\vec{T}$  décrit dans  $\{Y\}$  un point sur la ligne d'action du laser, donc l'apex, ou du moins la ligne de mesure équivalente entre les faisceaux incidents et réfléchis au rétro-réflecteur. Tout au long de cette analyse, le terme « ligne d'action de mesure » désigne la ligne dans l'espace où est obtenue la donnée mesurée de l'instrument.

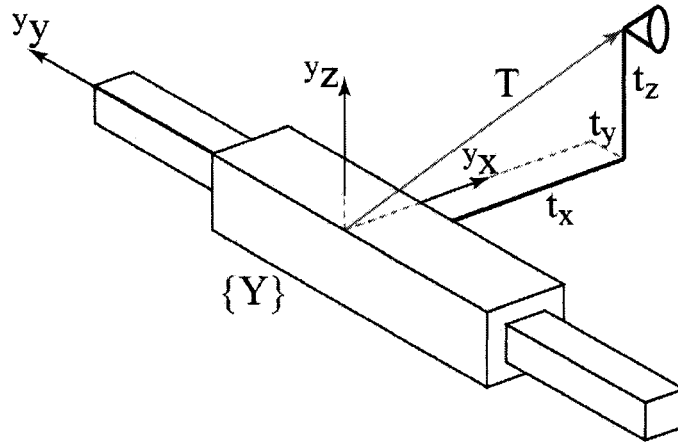


FIG. 2.3 Rétro-réflecteur positionné dans  $\{Y\}$

## 2.2 Équations régissant la mesure linéaire

Le principe de « ligne d'action » nécessite une définition plus approfondie. La ligne d'action est un espace bi-dimensionnel virtuel dans la mesure. Cet espace est une ligne équivalente entre les faisceau incident et réfléchi du rétro-rélecteur. Une mesure linéaire rend donc compte, sur cette ligne, d'une combinaison d'écart géométriques appartenant au corps rigide sur lequel le rétro-rélecteur est fixé. On pourrait croire que cette mesure ne rend compte que de l'écart d'échelle de la mobilité prismatique étant donné la propriété de l'optique linéaire. Or, il en est tout autrement.

### 2.2.1 Direction sensible

Un rétro-rélecteur linéaire possède une caractéristique intrinsèque nommée direction sensible. En effet, l'optique ainsi déplacée avec la mobilité ne changera la longueur du chemin optique que selon une seule composante de son déplacement.

Soit une source laser nominale orientée selon l'axe global d'une mobilité prismatique  $y$  et un rétro-rélecteur linéaire placé sur cette dernière.

1. La longueur du chemin optique *ne changera pas* suite à :
  - un tout *petit* déplacement du rétro-rélecteur perpendiculaire ( $x$  et  $z$ ) au faisceau.
  - une rotation (autour de  $y$ ) du rétro-rélecteur dont l'axe instantané passe par l'apex du rétro-rélecteur.
2. La longueur du chemin optique *changera* suite à :

- un déplacement du rétro-rélecteur parallèle au faisceau

Par conséquent, ces axiomes permettent d'ériger une définition vectorielle du principe de direction sensible comme étant

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.2)$$

dans le cas où le faisceau est nominalelement aligné avec une mobilité suivant l'axe  $y$  de son repère.

### 2.2.2 Projection du mouvement dans la direction sensible

Le rétro-rélecteur est rigidement fixé sur la mobilité sous étalonnage. L'optique est donc un prolongement hypothétiquement rigide de ce corps et tout écart géométrique exprimé par les 6 DDL au référentiel engendre un déplacement complexe au niveau de cet optique.

Dans un monde parfait, le rétro-rélecteur serait positionné de manière à faire correspondre la ligne d'action avec le centre de la vis-à-bille. En effet, c'est la source mécanique d'un écart d'échelle. Or, il n'existe pas un instrument capable d'effectuer une mesure à travers la matière et aucune adaptation des systèmes lasers n'est possible.

La mobilité prismatique est donc caractérisée par son torseur, (2.1), se décomposant en un vecteur de translations

$${}^Y d_o(y) = \begin{bmatrix} \delta_{xy}(y) & \delta_{yy}(y) & \delta_{zy}(y) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

et un quasi-vecteur de petites rotations

$${}^Y r_o(y) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xy}(y) & \epsilon_{yy}(y) & \epsilon_{zy}(y) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Soit une optique alignée pour capter un écart d'échelle  $\delta_{yy}(y)$ , sa direction sensible étant

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.5)$$

Il s'agit de connaître la conséquence, au niveau de l'apex, qu'engendre les  $d_o(y)$  et  $r_o(y)$  définit au repère  $\{Y\}$ . L'apex, tel qu'énoncé précédemment, est positionné dans  $\{Y\}$  par

$${}^Y \vec{T} = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}^T \quad (2.6)$$

Une projection du mouvement de l'apex, suivant la direction  $\vec{n}$ , se définit par

$$\begin{aligned} \xi_d &= d_o(y) \bullet \vec{n} \\ \xi_d &= \delta_{yy}(y) \end{aligned} \quad (2.7)$$

et

$$\begin{aligned}\xi_r &= (r_o(y) \wedge \vec{T}) \bullet \vec{n} \\ \xi_r &= -t_z \cdot \epsilon_{xy}(y) + t_x \cdot \epsilon_{zy}(y)\end{aligned}\tag{2.8}$$

La résultante  $\xi_{yy}(y)$  d'un d'écart d'échelle fait selon une ligne d'action passant par l'apex d'un rétro-réfecteur situé en  $\vec{T}$  et étant la somme des projections  $\xi_d$  et  $\xi_r$ , s'exprime comme suit :

$$\xi_{yy}(y) = \xi_d + \xi_r.\tag{2.9}$$

### 2.2.3 Analyse de résolution

Une mesure linéaire faite à une coordonnée  $y_i$  de la mobilité forme un système à une équation et trois inconnues (2.9). L'ajout d'une mesure subséquente au système, à  $y_{i+1}$ , vient ajouter les termes d'écarts géométriques  $\delta_{yy}(y_{i+1})$ ,  $\epsilon_{xy}(y_{i+1})$  et  $\epsilon_{zy}(y_{i+1})$  selon la même ligne d'action spécifiée par les composantes  $t_x$  et  $t_z$ . Ces inconnues sont fonctions de la coordonnée articulaire et les composantes du vecteur  $\vec{T}$  demeurent constantes tant que la mesure s'effectue sur la même ligne d'action.

La résolution doit s'orienter vers une méthode augmentant le nombre d'équations sans toutefois augmenter simultanément, ou du moins à un taux inférieur, le nombre d'inconnues. Cette méthode doit mathématiquement représenter une séquence expé-

rimentale valide, sans quoi il ne s'agirait que d'un artifice théorique sans espoir d'être transposé dans la réalité instrumentale.

À la lumière du bilan des termes connus et inconnus, la première stratégie à envisager est certainement de profiter du vecteur  $\vec{T}$ . Qu'advient-il si un second vecteur  $\vec{T}$  est créé, c'est-à-dire si la mesure est aussi faite suivant une seconde ligne d'action ?

$$\begin{aligned} {}^Y\xi_1(y_i) &= \delta_{yy}(y_i) - t_{z_1} \cdot \epsilon_{xy}(y_i) + t_{x_1} \cdot \epsilon_{zy}(y_i) \\ {}^Y\xi_2(y_i) &= \delta_{yy}(y_i) - t_{z_2} \cdot \epsilon_{xy}(y_i) + t_{x_2} \cdot \epsilon_{zy}(y_i) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ce système à deux équations comprend encore le même nombre d'écarts géométriques inconnus, il revient donc à dire que l'ajout de lignes d'action enrichit le rang du système et il en faut éventuellement un minimum de trois pour tout identifier. Par conséquent, trois lignes d'actions  $\vec{T}_1$ ,  $\vec{T}_2$  et  $\vec{T}_3$  mènent au système suivant :

$$\begin{aligned} {}^Y\xi_1(y_i) &= \delta_{yy}(y_i) - t_{z_1} \cdot \epsilon_{xy}(y_i) + t_{x_1} \cdot \epsilon_{zy}(y_i) \\ {}^Y\xi_2(y_i) &= \delta_{yy}(y_i) - t_{z_2} \cdot \epsilon_{xy}(y_i) + t_{x_2} \cdot \epsilon_{zy}(y_i) \\ {}^Y\xi_3(y_i) &= \delta_{yy}(y_i) - t_{z_3} \cdot \epsilon_{xy}(y_i) + t_{x_3} \cdot \epsilon_{zy}(y_i) \end{aligned} \quad (2.11)$$

En outre, la variable  $\vec{T}$  est celle à exciter pour augmenter le rang du système. Il s'agit de fournir des positions de montage au rétro-rélecteur dont l'apex corresponde

aux lignes d'actions respectives.

#### 2.2.4 Formes matricielles

Le concept de reprise de mesure est indroduit dans cette section. Il est plus aisé de le définir avec une version matricielle du système de l'équation 2.11.

D'abord, les inconnues sont regroupées dans la matrice empilement  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \delta_{yy}(y_i) & \epsilon_{xy}(y_i) & \epsilon_{zy}(y_i) \end{bmatrix}^T, \quad (2.12)$$

puis les mesures expérimentales forment elles aussi une matrice colonne  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} {}^Y\xi_1(y_i) & {}^Y\xi_2(y_i) & {}^Y\xi_3(y_i) \end{bmatrix}^T \quad (2.13)$$

et finalement, la matrice  $\mathbf{M}$  renferme les positions de montage

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -t_{z_1} & +t_{x_1} \\ 1 & -t_{z_2} & +t_{x_2} \\ 1 & -t_{z_3} & +t_{x_3} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Le système matriciel  $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$  est ainsi créé.

$$\begin{bmatrix} 1 & -t_{z_1} & +t_{x_1} \\ 1 & -t_{z_2} & +t_{x_2} \\ 1 & -t_{z_3} & +t_{x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{yy}(y_i) \\ \epsilon_{xy}(y_i) \\ \epsilon_{zy}(y_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^Y\xi_1(y_i) \\ {}^Y\xi_2(y_i) \\ {}^Y\xi_3(y_i) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Le système précédent doit pourtant être précisé davantage par l'ajout d'indices spécifiant les particularités de la mesure.

TAB. 2.2 Indices du système  $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$

| Indice | Domaine |
|--------|---------|
| i      | 1 ... m |
| j      | 1 ... r |
| k      | 1 ... p |

L'indice  $j$  dénote le nombre de reprises faites à une coordonnée articulaire le long d'une ligne d'action de mesure  $k$ . Il est ainsi possible d'amener le système de l'équation 2.15 à une forme plus complète :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_m \end{bmatrix}_{p \cdot m \times 3 \cdot m} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_m \end{bmatrix}_{3 \cdot m \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_m \end{bmatrix}_{p \cdot m \times 1} \quad (2.16)$$

où

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} 1 & -t_{z_1} & +t_{x_1} \\ 1 & -t_{z_2} & +t_{x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -t_{z_p} & +t_{x_p} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \delta_{yy}(y_i) & \epsilon_{xy}(y_i) & \epsilon_{zy}(y_i) \end{bmatrix}^T \quad (2.18)$$

et

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1(y_i) & \bar{\xi}_2(y_i) & \cdots & \bar{\xi}_p(y_i) \end{bmatrix}^T \quad (2.19)$$

L'indice de reprises est compris dans les sous matrices  $\mathbf{M}_i$  et  $\mathbf{E}_i$ . D'abord dans la mesure,  $\bar{\xi}$  représente des reprises faites à une ligne d'action  $k$  et à une coordonnée  $i$ , tel que :

$$\bar{\xi}_k = \sum_{j=1}^r \xi_{kj}. \quad (2.20)$$

La mobilité est par conséquent caractérisée par autant de segments que les objectifs expérimentaux le justifient. Une telle discrétisation crée des cibles de mesures (pour un total de  $m$ ) représentées par l'indice  $i$  dans les équations 2.17, 2.18 et 2.19.

Le système se résoud aussi à  $m$  systèmes indépendants et est donc admissible à un système global « diagonale-bande » (2.16) que l'illustration de la figure 2.4 montre.

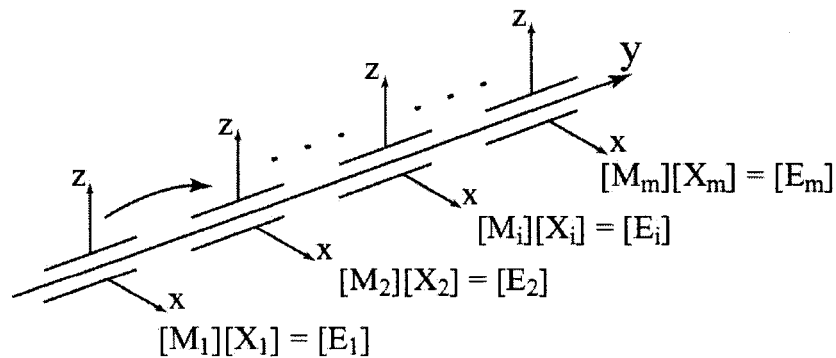


FIG. 2.4  $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$  selon la coordonnée articulaire

### 2.2.5 Résolution du système

Il existe un seul critère régissant la méthode employée pour résoudre ce système.

D'abord, voici les dimensions matricielles du dit système :

TAB. 2.3 Dimensions du système  $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$

|          | rangée      | col         |
|----------|-------------|-------------|
| <b>M</b> | $p \cdot m$ | $3 \cdot m$ |
| <b>X</b> | $3 \cdot m$ | 1           |
| <b>E</b> | $p \cdot m$ | 1           |

Les indices réfèrent à ceux définis préalablement dans la section 2.2.4.

Dans le premier cas, le nombre minimum de lignes d'action est

$$p = 3$$

et une matrice carrée  $(3 \cdot m, 3 \cdot m)$  est obtenue et donc inversible. La solution est alors donnée par

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E} \quad (2.21)$$

Dans le dernier cas,

$$p > 3$$

$$\mathbf{M} \neq \text{carre}$$

donc impossible à inverser directement. Il s'agit tout de même d'un système dit des

moindres-carrés dont la solution s'obtient par l'inverse généralisé de Moore-Penrose.

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}^t \mathbf{E}$$

$$\mathbf{M}^t = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T$$

### 2.2.6 Applicabilité des chaînes cinématiques

Certaines considérations sont à être analysées en vue de dresser un portrait complet de la méthode multi-séquentielle concernant la mesure linéaire. Il devient nécessaire de vérifier les exigences suivantes :

- Positionnement de l'interféromètre
- Positionnement du réflecteur
- Accommodation des différentes lignes d'actions par :
  - Mouvement d'autres axes
  - Repositionnement des optiques

## 2.3 Étude de sensibilité

La manipulation des mesures et le traitement des données risquent d'être perturbés par des sources d'erreurs se transmettant à chacune des opérations. L'étude de sensibilité répond aux besoins d'identifier ces erreurs puis d'en qualifier les répercussions sur la solution numérique.

### 2.3.1 Propagation d'erreur

Dans le système  $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$ , des écarts de mesure compris dans  $(\mathbf{E} + \delta\mathbf{E})$  entraînent obligatoirement une variation sur la solution  $(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X})$ . La « sensibilité » conséquente à ces écarts peut être évaluée par le conditionnement de la matrice  $\mathbf{M}$ , noté :

$$cond(\mathbf{M}) = \|\mathbf{M}\| \|\mathbf{M}^{-1}\| \quad (2.22)$$

Le résultat scalaire devient un indice du facteur d'amplification maximum de ces erreurs. Plus précisément, l'erreur relative des données expérimentales est ainsi potentiellement amplifiée produisant une erreur relative proportionnelle sur la solution. Pour une paire de normes cohérentes

$$\|\mathbf{MX}\| \leq \|\mathbf{M}\| \|\mathbf{X}\| \quad (2.23)$$

D'où l'équation 2.24.

$$\frac{\|\delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} \leq cond(\mathbf{M}) \cdot \frac{\|\delta\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{E}\|} \quad (2.24)$$

La formulation matricielle de la séquence de mesures laser arbore donc une caractéristique primordiale à sa résolution. Cette caractéristique est une fonction du contenu numérique de  $\mathbf{M}$ . Il faut ainsi connaître le comportement du conditionnement de  $\mathbf{M}$  en fonction de la position des lignes d'action qu'elle traduit.

Soit un référentiel de la mobilité prismatique à étalonner, dans laquelle la fenêtre

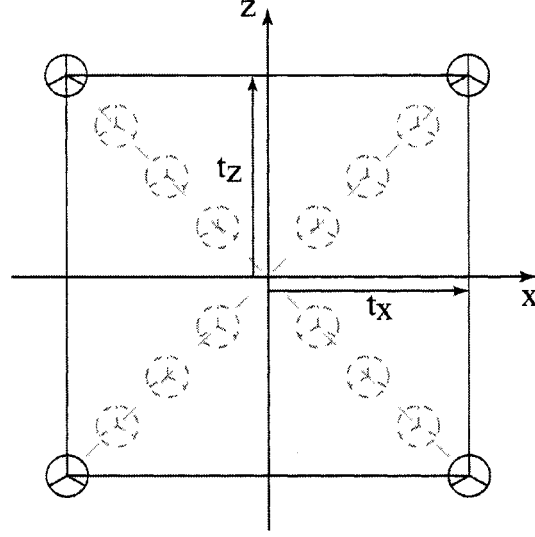


FIG. 2.5 Lignes d'actions

rend compte du domaine d'applicabilité des lignes d'action. En supposant qu'il y ait quatre de ces lignes d'action, chacune située sur la diagonale de la fenêtre carrée (figure 2.5), le comportement de  $cond(\mathbf{M})$  est illustré dans le graphe de la figure 2.6.

Il devient évident que l'augmentation de la distance entre les lignes d'action est la clé permettant de diminuer la valeur du conditionnement et par conséquent procure une solution de meilleure qualité. Par « meilleure » qualité, nous entendons une solution moins affectée par les erreurs entachant les mesures.

### 2.3.2 Erreurs de mesures

Un algorithme qui traite des données recueillies séquentiellement plutôt que simultanément est nécessairement affecté par les variables de nuisance susceptibles d'agir entre les prises de mesures. Il diffère en cela de ce que l'on attendrait d'une méthode

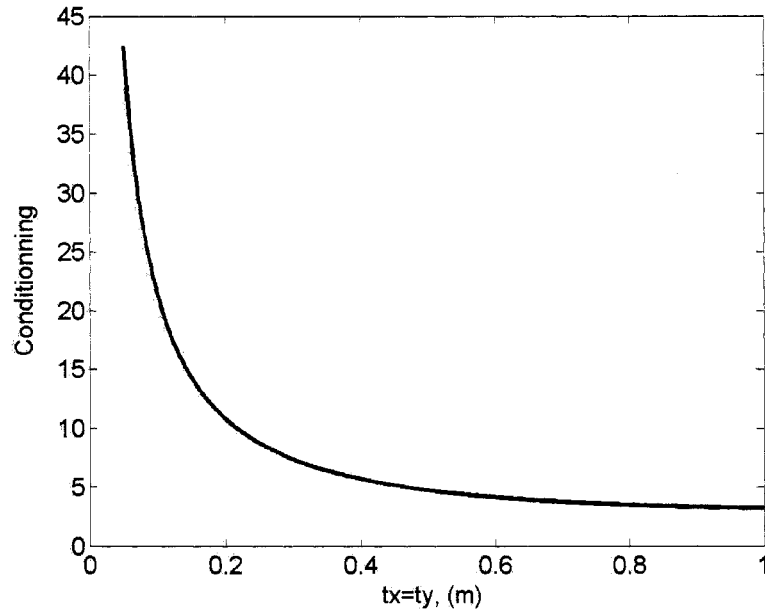


FIG. 2.6 Conditionnement de la matrice  $M$

recueillant les données simultanément.

### 2.3.2.1 Erreurs aléatoires

Les diagrammes d'Ishikawa des figures 2.7 et 2.8 font état des phénomènes aléatoires ayant un impact sur la longueur du chemin optique et la stabilité du système.

La source de changement la plus important est sans contredit celle des variables ambiantes qui caractérisent l'état physique du médium dans lequel la lumière laser voyage.

De surcroît, les systèmes lasers possèdent une forme de compensation qui ajuste la lecture brute en fonction des changements de température, d'humidité relative et de pression atmosphérique (TeHP). La longueur d'onde est entre autres une fonction de ces variables, tel que :

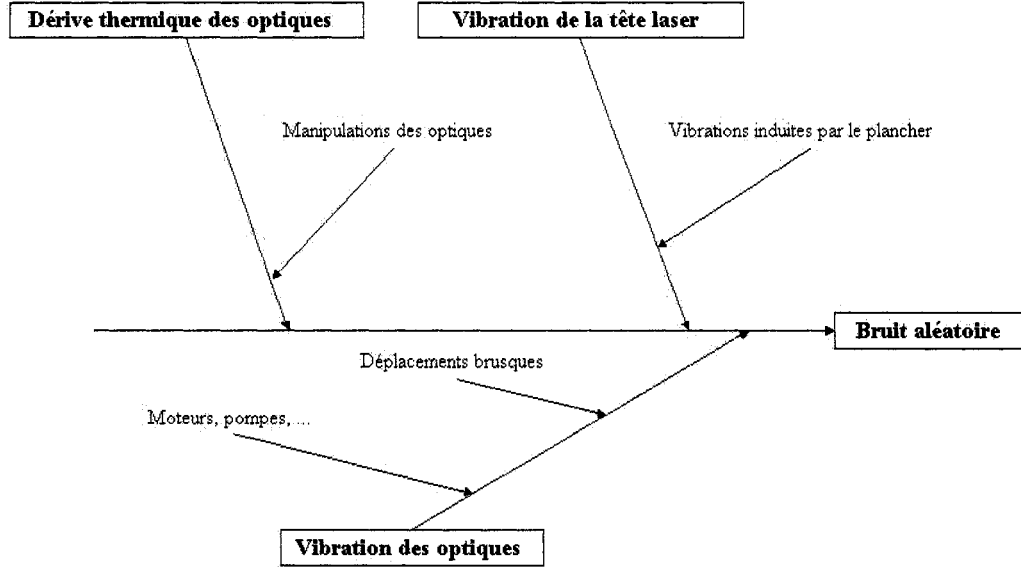


FIG. 2.7 Diagramme d'Ishikawa : Stabilité du système

$$\lambda_{air} = \frac{\lambda_{vacuum}}{\eta_{air}} \quad (2.25)$$

dont l'indice de réfraction s'exprime par

$$\eta_{air} = 1 + \left( 78.603 (1 + 0.540 (x - 0.0003)) \frac{P}{Tz} - 0.042066 f e_s \frac{HR}{100} \right) 10^{-8} \quad (2.26)$$

Le système de compensation peut donc pallier ces variations de TeHP grâce aux capteurs fonctionnant en temps réel et suivant l'hypothèse suivante :

« La mesure des capteurs est similaire aux valeurs réelles ambiantes situées sur la droite du chemin optique. »

Or, ces capteurs sont physiquement très distincts de la ligne d'action, il y aurait

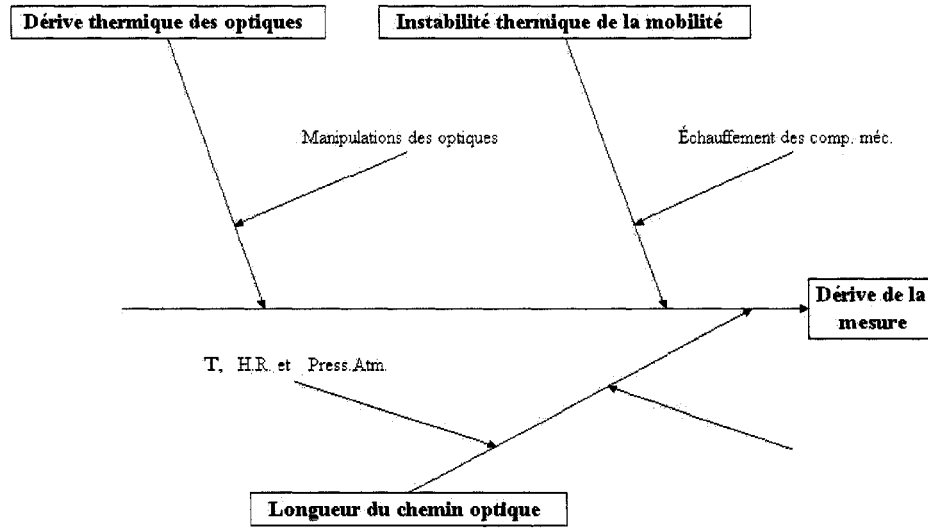


FIG. 2.8 Diagramme d'Ishikawa : Longueur du chemin optique

obstruction autrement. Il y a donc raison de croire que la compensation peut être légèrement erronée. Quelle est alors l'ampleur d'une telle divergence sur la mesure ?

Il devient aisé d'utiliser l'équation 2.26 pour identifier la relation entre chacune des variations ambiantes et la longueur du chemin optique. Quelle variation de température engendre une variation de la longueur optique de 1 ppm. Premièrement,

$$\Delta T_e = (T_{e_{ini}} - T_{e_i}) \quad (2.27)$$

c'est-à-dire, la différence relative à l'état initial de la phase expérimentale. Le tableau 2.4 résume les résultats.

On désigne l'erreur  $\xi$  comme étant la différence entre la distance de mesure  $x_m$  et la distance vraie  $x_v$

TAB. 2.4 Changement  $Te$ ,  $H$ ,  $P$  engendrant une variation de 1 ppm sur la longueur du chemin optique

| $\Delta L$ | $\Delta Te$ | $\Delta H$ | $\Delta P$ |
|------------|-------------|------------|------------|
| 1 ppm      | -1 °C       | +30%       | -33 mbar   |

$$\xi = x_v - x_m \quad (2.28)$$

Dans le cas d'un  $\Delta Te$ , on désigne

$$\xi_{Te} = \Delta Te \left(10^{-6}\right) x_m \quad (2.29)$$

puisqu'il s'agit de parties par million. Par conséquent, la distance vraie  $x_v$  est définie par

$$x_v = x_m (1 + \xi_{Te}) \quad (2.30)$$

Il en va de même pour les erreurs engendrées par  $\Delta H$  et  $\Delta P$

$$\begin{aligned} \xi_H &= \Delta H \left( \frac{10^{-6}}{30} \right) x_m \\ x_v &= x_m (1 + \xi_H) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \xi_P &= \Delta H \left( \frac{10^{-6}}{3.3} \right) x_m \\ x_v &= x_m (1 + \xi_P) \end{aligned} \quad (2.32)$$

De façon à simplifier les développements subséquents, les écarts dus à ces mesures seront notés :

$$\delta T_e = (10^{-6}) \Delta T_e$$

$$\delta H = (10^{-6}) \Delta H$$

$$\delta P = (10^{-6}) \Delta P$$

### 2.3.2.2 Erreurs constantes

Certains paramètres viennent perturber la mesure d'une manière constante. La figure 2.9 résume quelques sources d'erreurs venant infliger un « biais systématique constant ».

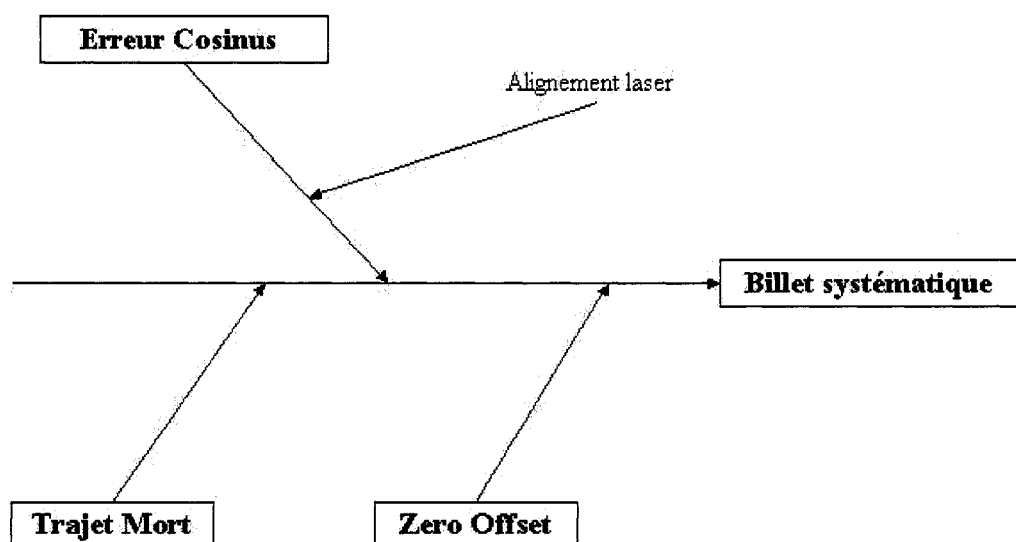


FIG. 2.9 Diagramme d'Ishikawa : Sources systématiques

### Erreur de positionnement

Le système matriciel rend compte du positionnement de multiples lignes de mesure spécifiées par les vecteurs  $\vec{T}_i$ . D'autant plus que le positionnement s'appuie sur une procédure qui procure une bonne précision dans la pose de l'optique. Or, la précision d'usinage des pièces du montage, la flexion ou la pose en tant que tel, peut certainement entraîner une « erreur de positionnement ».

Cette erreur doit s'exprimer à travers le système  $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$  afin de permettre d'étudier son implication sur la solution. La matrice  $\mathbf{M}$  est la seule à comporter le contenu des positions des lignes de mesures spécifiées par les  $\vec{T}_i$ .

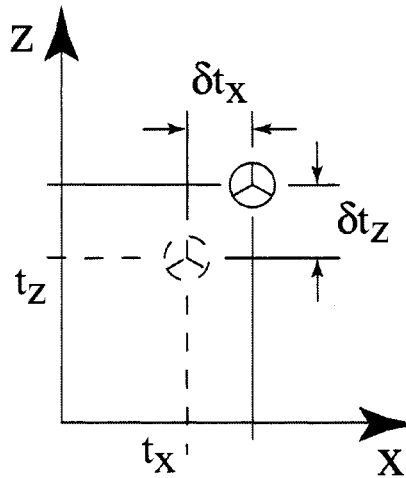


FIG. 2.10 Erreur de positionnement

L'écart de positionnement peut donc être représenté par un  $\delta t_x$ ,  $\delta t_y$  et  $\delta t_z$ , s'ajoutant à la définition du vecteur tel que

$$\begin{bmatrix} (t_x + \delta t_x) & (t_y + \delta t_y) & (t_z + \delta t_z) \end{bmatrix}^T \quad (2.33)$$

### Erreur cosinus

Théoriquement, la procédure d'alignement de la tête laser doit rendre le faisceau parallèle à l'axe vrai de déplacement de la mobilité.

La conséquence survient au niveau du chemin optique. Pour une cible située théoriquement à une distance  $x_v$ , la lecture indique une distance  $x_m$  inférieure, d'où l'« effet cosinus ».

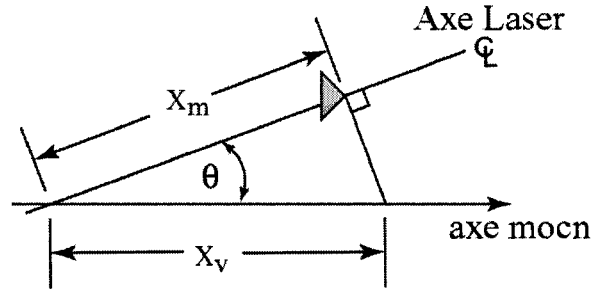


FIG. 2.11 Erreur cosinus

Évidemment, ce mésalignement est constant pour toutes positions du rétro-réflecteur le long de la course. Par contre, l'erreur engendrée n'est pas invariante. Soit

$$\begin{aligned}
 x_v - x_m &= x_v - x_v \cos(\theta) \\
 \xi_\theta &\cong x_v - x_v \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \\
 \xi_\theta &\cong x_v \left(\frac{\theta^2}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

où  $\xi_\theta$  est l'erreur engendrée par le mésalignement. Comme précédemment, il faut exprimer, en fonction de cette erreur, la mesure vraie  $x_v$  (position véritable de la

mobilité s'il n'y avait aucune erreur)

$$x_v \cong x_m \left( 1 + \frac{\theta^2}{2} \right) \quad (2.35)$$

Il est désormais clair que l'erreur cosinus est fonction de la position ( $x_m$ ) et de l'angle  $\theta$  de l'erreur d'alignement.

### 2.3.3 Inclure les erreurs dans l'équation de la mesure

Cinq sources d'erreurs et leurs effets sur la mesure sont maintenant définis. La conséquence sur la solution reste à évaluer, mais d'abord, il est essentiel d'incorporer ces erreurs dans l'équation 2.9 exprimant la relation entre l'écart d'échelle, de lacet et de tangage.

Les sections précédentes ont développé la relation entre une source d'erreur et la mesure  $x_m$  et  $x_v$  de façon indépendante. Par contre, la réalité dicte une interaction, un couplage de ces erreurs de mesure. Par exemple, l'erreur cosinus est différente selon qu'il y ait ou non un changement de température  $\Delta T_e$ . Or, ces changements sont de très petite amplitude relativement à la mesure, et les incorporer dans l'équation 2.9 en tant que variables découplées facilite grandement l'analyse en la réduisant au premier ordre.

Autrement dit, il s'agit ici d'appliquer le principe de superposition pour incorporer ensemble les équations 2.35, 2.29, 2.31 et 2.33.

$$x_v(y_i) = x_m \left( 1 + \delta T e(y_i) + \delta H(y_i) + \delta P(y_i) + \frac{\theta^2}{2} \right) \quad (2.36)$$

Ayant  $x_v = f(\delta T e, \delta H, \delta P, \theta)$ , il devient possible de redéfinir sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 1 & -(t_z + \delta t_z) & (t_x + \delta t_x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{yy}(y_i) \\ \epsilon_{xy}(y_i) \\ \epsilon_{zy}(y_i) \end{bmatrix} = x_n(y_i) - x_v(y_i) \quad (2.37)$$

Il est à noter que les variables de l'équation précédente devront arborer les indices  $i, j, k$ . En effet, les  $\delta T e$ ,  $\delta H$ ,  $\delta P$  varient dans le temps et donc en fonction des coordonnées (indice  $i$ ), des répliques (indice  $j$ ) et pour tous les montages (indice  $k$ ).

Les erreurs de positionnement sont jugées stables sur l'ensemble du temps requis pour toutes les reprises / coordonnées d'un montage.

En ce qui concerne  $\theta$ , l'alignement ne porte que l'indice de « montage ».

## 2.4 Développement du jacobien

Les derniers paragraphes ont permis l'obtention d'une équation générale rendant compte de toutes les variables (écarts géométriques et sources d'erreurs) ressortant d'une mesure linéaire.

Étudier la sensibilité de ce système requiert de démontrer les effets de variations des sources d'erreurs sur la solution. Dans le cas présent, il est question du système d'équation  $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$ . Le contexte d'analyse est lié à la méthode de résolution em-

ployée, soit la pseudo-inverse de Moore-Penrose.

$$\mathbf{X} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{E} \quad (2.38)$$

Les sources d'erreurs prennent place à la droite de cette équation et il faut développer un outil capable d'exprimer, au niveau de la solution  $\mathbf{X}$ , les conséquences variationnelles des erreurs. Ce genre d'outil mathématique est facilement obtenu par le biais de matrices jacobiniennes.

#### 2.4.1 Les jacobiens

Suivant l'idée que ces erreurs peuvent être considérées indépendantes, il est tout à fait admissible d'appliquer ici aussi le principe de superposition. Par conséquent, un jacobien par sources d'erreurs est requis.

Ayant défini un total de six sources d'erreurs, les jacobiens suivants seront créés :

$$J_{Te}, J_H, J_P, J_{Tz}, J_{Ty}, J_\theta$$

respectivement selon des erreurs de température, d'humidité relative, de pression atmosphérique, de positions de montage en  $y$ , de positions de montage en  $z$  et d'alignement  $\theta$ .

La matrice solution  $X$  de l'équation 2.38 renferme trois termes d'écart solutionnés et donc trois équations distinctes qui seront notées  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ , tel que :

$$\begin{aligned}
X_1(\delta_{xx}(x_i)) &= f(\Theta, \delta T_y, \delta T_z, \delta T_e(x_i), \delta H(x_i), \delta P(x_i)) \\
X_2(\epsilon_{yx}(x_i)) &= f(\Theta, \delta T_y, \delta T_z, \delta T_e(x_i), \delta H(x_i), \delta P(x_i)) \\
X_3(\epsilon_{zx}(x_i)) &= f(\Theta, \delta T_y, \delta T_z, \delta T_e(x_i), \delta H(x_i), \delta P(x_i))
\end{aligned} \tag{2.39}$$

### 2.4.2 Système jacobiens

Le jacobien des erreurs d'alignement  $\Theta$  permet d'exprimer la variation sur la solution en fonction des erreurs. Soit un système à  $p$  montage :

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta_{xx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{yx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{zx}(x_i) \end{bmatrix}_{3 \times 1} = [J_\theta]_{3 \times p} \begin{bmatrix} \theta_1^2 \\ \theta_2^2 \\ \vdots \\ \theta_k^2 \\ \vdots \\ \theta_p^2 \end{bmatrix}_{p \times 1} \tag{2.40}$$

Sous forme abrégée, on écrit

$$\Delta = J_\theta \cdot \Theta \tag{2.41}$$

Les variations des solutions sont notées  $\Delta\delta_{xx}(x_i)$  (l'écart d'échelle),  $\Delta\epsilon_{yx}(x_i)$  (tangage) et  $\Delta\epsilon_{zx}(x_i)$  (lacet). De façon cumulative, il est tout aussi nécessaire de quantifier

l'état variationnel des écarts identifiés par rapport aux variations de toute la gamme d'erreurs du procédé. Suivant le principe de superposition, la somme des contributions mène à la formation d'un « système jacobien »

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Delta\delta_{xx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{yx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{zx}(x_i) \end{bmatrix} &= J_\theta \begin{bmatrix} \theta_1^2 \\ \theta_2^2 \\ \vdots \\ \theta_k^2 \\ \vdots \\ \theta_p^2 \end{bmatrix} + J_{Te} \begin{bmatrix} \delta Te_1(x_i) \\ \delta Te_2(x_i) \\ \vdots \\ \delta Te_k(x_i) \\ \vdots \\ \delta Te_p(x_i) \end{bmatrix} + J_H \begin{bmatrix} \delta H_1(x_i) \\ \delta H_2(x_i) \\ \vdots \\ \delta H_k(x_i) \\ \vdots \\ \delta H_p(x_i) \end{bmatrix} \\
 &+ J_P \begin{bmatrix} \delta P_1(x_i) \\ \delta P_2(x_i) \\ \vdots \\ \delta P_k(x_i) \\ \vdots \\ \delta P_p(x_i) \end{bmatrix} + J_{Ty} \begin{bmatrix} \delta Ty_1 \\ \delta Ty_2 \\ \vdots \\ \delta Ty_k \\ \vdots \\ \delta Ty_p \end{bmatrix} + J_{Tz} \begin{bmatrix} \delta Tz_1 \\ \delta Tz_2 \\ \vdots \\ \delta Tz_k \\ \vdots \\ \delta Tz_p \end{bmatrix} \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

### 2.4.3 Règles de calcul des jacobiens

Le développement mathématique des six matrices jacobiennes est effectué selon la définition habituelle, mais aussi par le biais de certaines règles d'approximation propres au contexte.

Dans un premier temps, voici à titre d'exemple pour les erreurs d'alignement, la définition du jacobien  $J_\theta$  :

$$J_\theta = \begin{bmatrix} \partial X_1/\partial\theta_1 & \dots & \partial X_1/\partial\theta_k & \dots & \partial X_1/\partial\theta_p \\ \partial X_2/\partial\theta_1 & \dots & \partial X_2/\partial\theta_k & \dots & \partial X_2/\partial\theta_p \\ \partial X_3/\partial\theta_1 & \dots & \partial X_3/\partial\theta_k & \dots & \partial X_3/\partial\theta_p \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

De la même manière, les  $J_{Te}$ ,  $J_H$ ,  $J_P$ ,  $J_{Tz}$  et  $J_{Ty}$  sont ainsi obtenus.

Dans un dernier temps, le principe de superposition impose quelques règles fondamentales :

1. Dans la dérivée partielle  $\partial X_1/\partial\theta_1$ , tout autre variable  $\theta_k$  est ramenée à zéro.
2. L'annulation des termes de second degré (et plus) est appliquée.

#### 2.4.4 Formules

Un développement mathématique suivant les règles ci-dessus permet d'aboutir à des formules générales. Ces formules sont différentes selon qu'il s'agit d'un système à trois lignes d'actions ou à quatre (et plus) lignes d'action.

Tout d'abord, pour un système à trois lignes d'actions, il est facile de démontrer que la formule générale est

$$J(i, j) = \frac{-1^{(i+j)} m_{ji} x_{mj}}{\det(M)} \quad (2.44)$$

où  $m_{ji}$  est la mineur de la matrice  $\mathbf{M}$  du système  $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$  et  $J(i, j)$  le terme de

la  $i$ ème rangée et de la  $j$ ème colonne. Cette formule est valable pour les jacobien  $J_{Te}$ ,  $J_H$ ,  $J_P$  et  $J_\theta$ .

Lorsqu'il est question de quatre lignes d'actions et plus, la formule générale prend la forme suivante :

$$J(i, j) = \frac{\left[ (-1)^{1+i} m^T m_{1i} + (-1)^{2+i} m^T m_{2i} \cdot m(j, 2) + (-1)^{3+i} m^T m_{3i} \cdot m(j, 3) \right] x_{mj}}{\det(M^T M)} \quad (2.45)$$

où  $m^T m$  est la mineur de la multiplication matricielle  $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$ .

Suivant les mêmes règles, les formules pour les jacobiens  $J_{Ty}$  et  $J_{Tz}$  sont facilement obtenues, mais difficiles à condenser pour l'inclure dans ces paragraphes. En ce qui concerne les formules pour des systèmes à quatres lignes d'actions et plus, la tâche de simplification est très ardue et aucune formule simple n'a pu être extraite.

## CHAPITRE 3

### MESURE ROULIS ET RECTITUDES

La méthode multi-séquentielle utilisée avec les optiques linéaires peut aussi s'étendre à d'autres optiques laser.

L'interférométrie présente une faiblesse lorsque vient le temps de mesurer le roulis d'une mobilité. En effet, il est possible de mesurer tous les écarts de translation (par optique linéaire et de rectitude) mais seul le tangage et le lacet sont mesurables par le biais d'optiques angulaires. Par conséquent, le roulis fait appel aux niveaux électroniques pour être identifié.

Par contre, l'intérêt de connaître le comportement réel des optiques de rectitude met à jour un couplage d'écarts. Le présent chapitre étudie les possibilités qu'offre la méthode multi-séquentielle dans le cas des optiques de rectitude.

### 3.1 Préambule mathématique

#### 3.1.1 Schématisation de la mesure

Soit une mobilité prismatique sur laquelle est fixé un réflecteur de rectitude mesurant le déplacement selon  $x$ , soit l'écart  $\delta_{yx}$ .

Les variables en jeu sont donc les deux écarts de rectitude l'un comme l'autre entachés du roulis. L'effet est proportionnel au bras de levier spécifié par  $\vec{T}$ ,

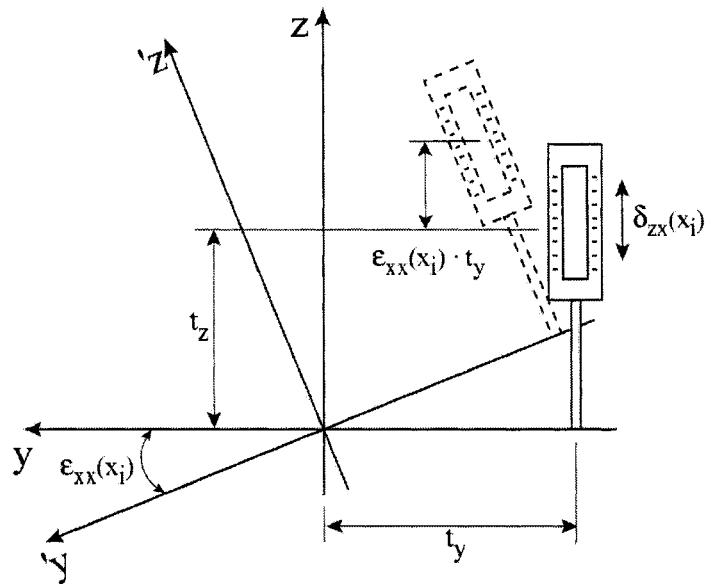


FIG. 3.1 Mesure de rectitude

$$\delta_{yx}, \delta_{zx}, \epsilon_{xx}$$

### 3.2 Équations régissant la mesure

Il devient clair que la mesure de rectitude ne peut être purement constituée de cet écart. Avant toute chose, il est nécessaire de définir les équations de ces optiques.

#### 3.2.1 Direction sensible

Poursuivons le développement avec une mobilité prismatique en  $X$ . D'abord, la mesure de rectitude peut s'effectuer selon deux directions, horizontale et verticale, spécifiquement  $\delta_{yx}$  et  $\delta_{zx}$ .

Les vecteur  $\vec{n}$  sont donc :

TAB. 3.1 Directions sensibles

|           | $\delta_{yx}$   | $\delta_{zx}$   |
|-----------|-----------------|-----------------|
| $\vec{n}$ | $[0 \ 1 \ 0]^T$ | $[0 \ 0 \ 1]^T$ |

Ces directions sensibles cachent aussi l'hypothèse de mesures suivante :

- La différence de longueur de chemin optique ne change pas suite à :
  - des petits déplacements contenus dans le plan perpendiculaire au faisceau,
  - des petites rotations autour de la direction sensible.

### 3.2.2 Projection du mouvement dans la direction sensible

Reprenant la suite d'opération de la section 2.2.2, dans un premier temps pour la rectitude horizontale  $\delta_{yx}$ , on trouve ce qui suit.

Soit la projection des translations puis des rotations dans cette direction sensible horizontale :

$$\begin{aligned}
 \vec{n} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \\
 \xi_d &= d_o(x) \bullet \vec{n} \\
 \xi_d &= \delta_{yx}(x)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 \xi_r &= (\vec{T} \wedge \vec{n}) \bullet r_o(x) \\
 \xi_r &= [t_x t_y t_z] \bullet r_o(y) \\
 \xi_r &= -t_z \cdot \epsilon_{xx}(x)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

La résultante s'exprime comme suit :

$$\xi_{yx}(x) = \delta_{yx}(x) - t_z \cdot \epsilon_{xx}(x) \quad (3.3)$$

En ce qui concerne la rectitude verticale  $\delta_{zx}$ , le développement de projection donne :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ \xi_d &= \delta_{zx}(x) \\ \xi_r &= t_y \cdot \epsilon_{xx}(x) \end{aligned} \quad (3.4)$$

La résultante de mesure  $\xi_{zx}(x)$  étant :

$$\xi_{zx}(x) = \delta_{zx}(x) + t_y \cdot \epsilon_{xx}(x) \quad (3.5)$$

### 3.2.3 Analyse de résolution

Les mesures de rectitudes verticales et horizontales engendrent des relations similaires sans être parfaitement identiques dans leur contenu.

Or, les équations comportent chacune l'écart de roulis amplifié et l'écart de rectitude correspondant. Prises séparément, il s'agit d'une équation à deux inconnues. Considérées ensemble, le système s'enrichit et devient deux équations à deux in-

nues. C'est dire qu'il suffit d'en ajouter une troisième, que ce soit une  $\xi_{yx}(x)$  ou  $\xi_{zx}(x)$ , pour procurer un rang minimum mais suffisant à l'identification des inconnues.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_{z_1} \\ 1 & 0 & -t_{z_2} \\ 1 & +t_{x_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{yx}(x_i) \\ \delta_{zx}(x_i) \\ \epsilon_{xx}(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{yx1}(x_i) \\ \xi_{yx2}(x_i) \\ \xi_{zx3}(x_i) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_{z_1} \\ 1 & +t_{x_2} & 0 \\ 1 & +t_{x_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{yx}(x_i) \\ \delta_{zx}(x_i) \\ \epsilon_{xx}(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{yx1}(x_i) \\ \xi_{zx2}(x_i) \\ \xi_{zx3}(x_i) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

L'ajout de mesures supplémentaires forme, comme dans le chapitre précédent, un système des moindres-carrés. De plus, les formes matricielles équivalentes peuvent être formulées selon les mêmes conventions indicielles. Les méthodes de résolutions de la section 2.2.3 demeurent valides.

### 3.3 L'erreur d'alignement

Les mesures de rectitudes présentent toujours un gain en fonction de la distance. La procédure d'alignement veut réduire ce gain sans toutefois être en mesure de l'annuler.

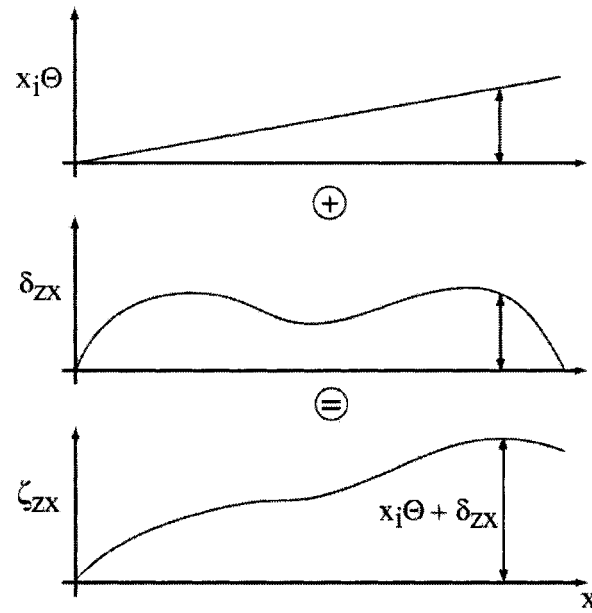


FIG. 3.2 Erreur d'alignement

### 3.3.1 Le redressement des mesures brutes

Il est par conséquent nécessaire de redresser les mesures brutes de manière à obtenir le profil de rectitude entre les points minimum et maximum de la course.

Il faut donc aussi enrichir l'équation des termes exprimant la mesure de rectitude en fonction de cette erreur d'alignement.

$$\xi_{yx}(x_i) = x_i\theta + \delta_{yx}(x_i) \quad (3.8)$$

Subséquentement, l'équation reprise et enrichie devient

$$\xi_{yx}(x_i) = \delta_{yx}(x_i) - t_z\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta \quad (3.9)$$

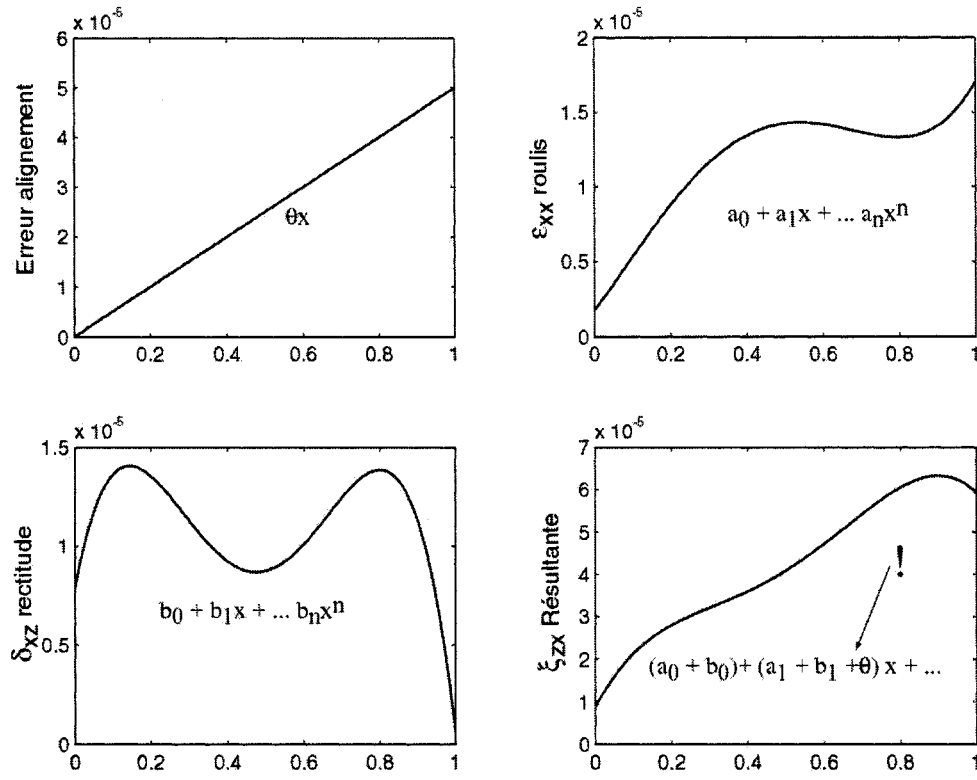


FIG. 3.3 Redressement de mesure de rectitude

### 3.3.2 Répercussions sur l'identification du roulis

Le redressement des mesures brutes décrit précédemment met en péril la qualité voir l'exactitude de la solution  $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$ .

En effet, avant l'inclusion dans la matrice  $\mathbf{E}$ , les mesures devraient être « redressées », chacune d'elles différemment selon les lignes d'action. Autrement dit, il existe autant de variables  $\theta_i$  que de montage. À titre d'exemple, pour quatres lignes d'actions, le système aura l'allure suivante (avant redressement) :

$$\xi_{yx1}(x_i) = \delta_{yx}(x_i) - t_{z1}\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_1$$

$$\begin{aligned}
\xi_{yx2}(x_i) &= \delta_{yx}(x_i) - t_{z2}\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_2 \\
\xi_{zx3}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + t_{x3}\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_3 \\
\xi_{zx4}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + t_{x4}\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_4
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ce redressement a donc la responsabilité de retirer ce premier ordre contenu dans les  $\xi_{yx}(x_i)$  ou  $\xi_{zx}(x_i)$ . Or, d'autres termes des équations 3.9 sont aussi susceptibles de se voir retirer leur terme de premier ordre. En effet, le roulis peut très bien être modélisé par un polynôme de degré  $n$ , tel que :

$$\epsilon_{xx}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \tag{3.11}$$

Le danger de cette procédure, pourtant nécessaire, est de retirer le terme  $a_1x$  du roulis.

### 3.4 Méthodes et solutions alternatives

Il est tout de même possible de pousser un peu plus loin en prenant avantage de certaines caractéristiques des variables des équations de rectitude. Les développements théoriques suivants n'ont pas comme principal objectif des solutions directement applicables expérimentalement. Bien plus, il s'agit de chercher et d'exploiter les moindres détails susceptibles d'augmenter le nombre d'inconnues identifiables.

### 3.4.1 Roulis, rectitudes à une coordonnée

Conséquemment aux développements précédents, il faut une séquence de mesures se traduisant par un système d'équations capable d'identifier non seulement les écarts géométriques, mais aussi les erreurs d'alignement prévenant ainsi l'annulation du premier ordre de certaines inconnues.

Le système minimum de trois lignes d'action,

$$\begin{aligned}
 \xi_{yx1}(x_i) &= \delta_{yx}(x_i) - t_{z1}\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_1 \\
 \xi_{zx2}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + t_{x2}\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_2 \\
 \xi_{zx3}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + t_{x3}\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_3
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

présente six inconnues :

$$\delta_{yx}(x_i), \delta_{zx}(x_i), \epsilon_{xx}(x_i), \theta_1, \theta_2 \text{ et } \theta_3$$

Le nombre de lignes d'action est nettement insuffisant. Afin d'y pallier, le premier réflexe est d'ajouter une ligne d'action supplémentaire,  $\xi_{yx4}$  ou  $\xi_{zx4}$ , mais ceci n'a pour effet que d'encombrer le système d'une nouvelle inconnue  $\theta_4$ . Autrement dit, le ratio initial d'équations vs inconnues reste le même.

Il devient donc primordial d'explorer une nouvelle avenue. Il existe une optique appelée « pentaprisme », dont la caractéristique est de dévier un faisceau incident

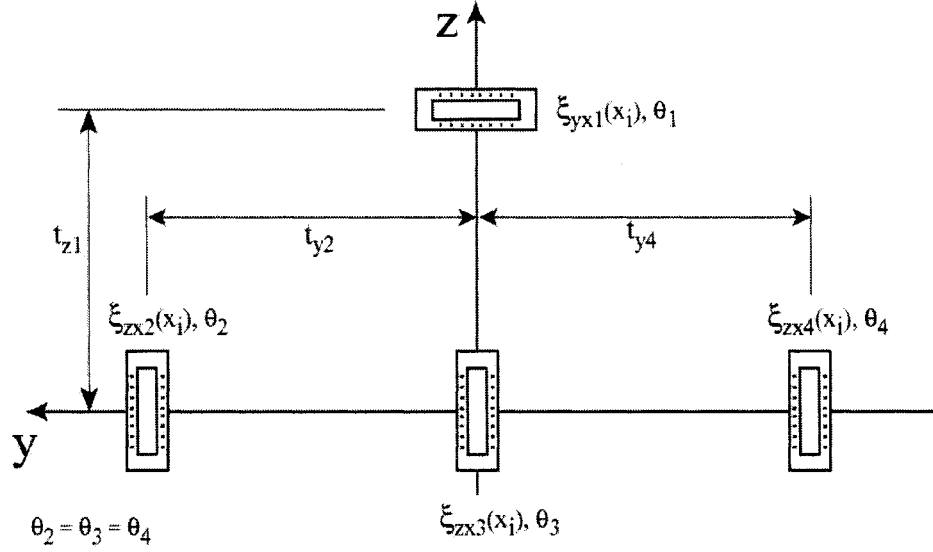


FIG. 3.4 Roulis, rectitudes à une coordonnée

d'un angle nominal de  $90^\circ$ . En juxtaposant<sup>1</sup> deux de ces optiques, il devient possible de « traduire » le faisceau incident. Autrement dit, le faisceau ainsi réfléchi par le « pentaprisme double » est parallèle au faisceau incident (3.5).

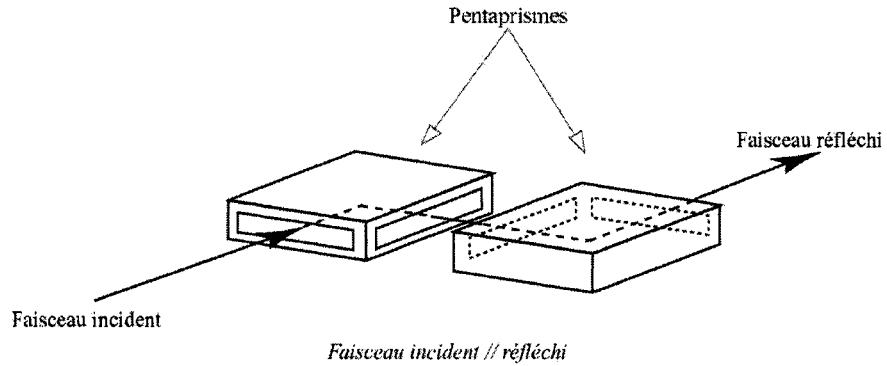


FIG. 3.5 Montage pentaprisme-double

Dans le cas de l'analyse qui nous concerne, cette solution est réellement avantageuse puisqu'elle permet d'utiliser la même orientation laser. En effet, les lignes

<sup>1</sup>Remarquez que cette façon de faire n'a pas été vérifiée expérimentalement.

d'action utilisant un faisceau incident identique auront par conséquent des faisceaux réfléchis parallèles affichant la même erreur d'alignement.

Ainsi, pour le système de l'équation 3.12 le nombre d'inconnues chute à cinq, prenant pour acquis que les deux mesures de rectitude  $\xi_{zx}$  sont effectuées avec le même alignement laser, soit que

$$\theta_2 = \theta_3$$

Il est aussi possible d'effectuer une troisième mesure  $\xi_{zx}$  utilisant le même alignement, ajoutant ainsi une quatrième équation au système en conservant toutefois un nombre de cinq inconnues.

$$\xi_{zx4}(x_i) = \delta_{zx}(x_i) + t_{y4}\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_4$$

$$\theta_4 = (\theta_2 = \theta_3)$$

Poursuivant dans le développement, une quatrième mesure  $\xi_{yx}$ , elle aussi empruntant l'alignement

$$\theta_5 = (\theta_2 = \theta_3 = \theta_4)$$

permet finalement au système de présenter un rang suffisant pour tout identifier.

La forme matricielle se traduit par

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & t_{z1} & x_i & 0 \\ 1 & 0 & -t_{y2} & 0 & x_i \\ 1 & 0 & -t_{y3} & 0 & x_i \\ 1 & 0 & -t_{y4} & 0 & x_i \\ 1 & 0 & -t_{y5} & 0 & x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{yx}(x_i) \\ \delta_{zx}(x_i) \\ \epsilon_{xx}(x_i) \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{yx1}(x_i) \\ \xi_{yx2}(x_i) \\ \xi_{zx3}(x_i) \\ \xi_{yx4}(x_i) \\ \xi_{zx5}(x_i) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Dans cet exemple, il est théoriquement possible d'identifier les écarts géométriques de rectitude et de roulis, ainsi que les erreurs d'alignement contenues dans les mesures brutes. Il faut toutefois comprendre que le roulis est forcé au centre du repère de mesure, soit l'origine désignant les bras de levier  $\vec{T}_i$ .

### 3.4.2 Roulis, rectitudes à toutes les coordonnées

L'exemple précédent fait état d'un système d'équations permettant de définir les écarts géométriques en cause à une seule coordonnée de mesure. Or, il est tout aussi souhaitable de décrire ces écarts selon toute la course de la mobilité et pour ce faire, il faut prendre avantage d'une caractéristique importante de l'erreur d'alignement.

En effet, tous les écarts sont des variables fonctions de  $x$  et il n'y a que les  $\theta$  qui demeurent tout à fait constants peu importe la coordonnée articulaire.

Du système d'équations 3.13, le tableau ci-dessous fait état du nombre d'inconnues et du nombre d'équations en fonction du nombre de coordonnées.

Il y aura donc toujours un manque à gagner de trois. D'autre part, en enrichissant le système d'une quatrième ligne d'action, tel que :

$$\xi_{zx4}(x_i) = \delta_{zx}(x_i) + t_{y4}\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_4$$

le système évolue cette fois-ci d'une manière tout à fait satisfaisante, en permettant d'identifier toutes les inconnues à la quatrième coordonnée articulaire.

TAB. 3.2 Libertés et contraintes mathématiques : Roulis et rectitudes à toutes les coordonnées

| Coord. | Nb. Inc.  | Nb. Éq. |
|--------|-----------|---------|
| 1      | (3+4)=7   | 4       |
| 2      | (6+4)=10  | 8       |
| 3      | (9+4)=13  | 12      |
| 4      | (12+4)=16 | 16      |
| m      | (3m+4)    | 4m      |

Les écarts identifiés étant

$$\delta_{yx}(x_i), \delta_{zx}(x_i), \epsilon_{xx}(x_i)$$

$$i = 1 \dots m$$

tandis que les erreurs d'alignement identifiées sont :

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3 \text{ et } \theta_4.$$

En appliquant cette même logique au cas de la section précédente, où toutes les mesures de rectitude en  $\xi_{zx}$  partageaient la même erreur d'alignement, il est aisé de trouver que la relation générale du système est :

$$(3m + 4) \leq 4m$$

c'est-à-dire, qu'il ne faut que deux coordonnées pour identifier la totalité des écarts géométriques ainsi que les deux erreurs d'alignement.

### 3.4.3 Plan d'action et/ou coordonnée(s) instantané(s) du roulis

Dans toutes les solutions précédentes, le roulis est forcé au centre du repère. Or, son centre instantané d'action diffère de cette origine à toute fin pratique artificielle et devrait plutôt être une variable fonction de la coordonnée articulaire.

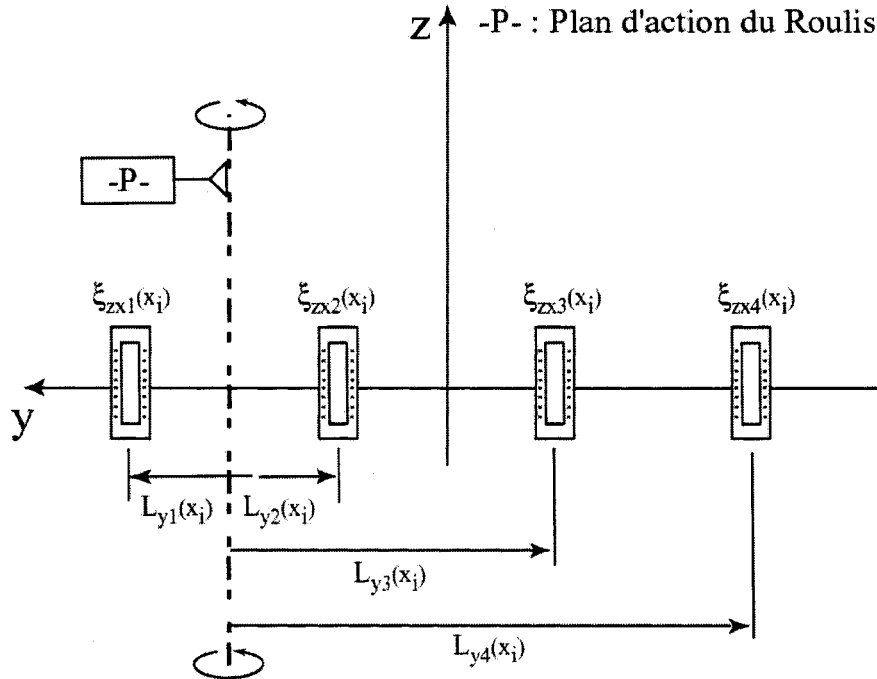


FIG. 3.6 Plan d'action du roulis

Prenant un système uniquement constitué de mesures de rectitudes horizontales  $\xi_{zx}$ , dont l'alignement est encore une fois considéré identique par l'utilisation du penta-

prisme double, le système d'équation résultant est :

$$\begin{aligned}
 \xi_{zx1}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + (t_{y1} - L_{y1}(x_i))\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_1 \\
 \xi_{zx2}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + (t_{y2} - L_{y2}(x_i))\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_1 \\
 \xi_{zx3}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + (t_{y3} - L_{y3}(x_i))\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_1 \\
 \xi_{zx4}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + (t_{y4} - L_{y4}(x_i))\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_1
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\tag{3.15}$$

Dans ces équations, les termes  $L_{yi}$  permettent en effet de définir un plan d'action instantané du roulis. La seconde coordonnée nécessaire pour passer à un centre d'action instantané ne peut être identifié dans ce système de mesure particulier. La forme générale de résolution devient par conséquent

$$(3m + 1) \leq 4m$$

C'est donc conclure qu'il est possible d'identifier, en plus de l'erreur d'alignement  $\theta$  les termes :

$$\delta_{zx}(x_i), \epsilon_{xx}(x_i) \text{ et } L_{yi}(x_i)$$

$$i = 1 \dots m$$

où  $L_{yi}(x_i)$  définit un plan d'action du roulis.

À la lumière de cette solution, la question suivante se pose : est-il alors possible de définir aussi une seconde coordonnée instantanée du roulis de manière à obtenir un centre d'action à chacune des coordonnées articulaires ?

Pour faire intervenir la seconde coordonnée, il faut absolument incorporer une mesure de rectitude verticale  $\xi_{yx}$ , dans laquelle est spécifié un  $L_{zi}(x_i)$ , tel que :

$$\xi_{yx}(x_i) = \delta_{yx}(x_i) - (t_{z4} - L_{z4}(x_i))\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta$$

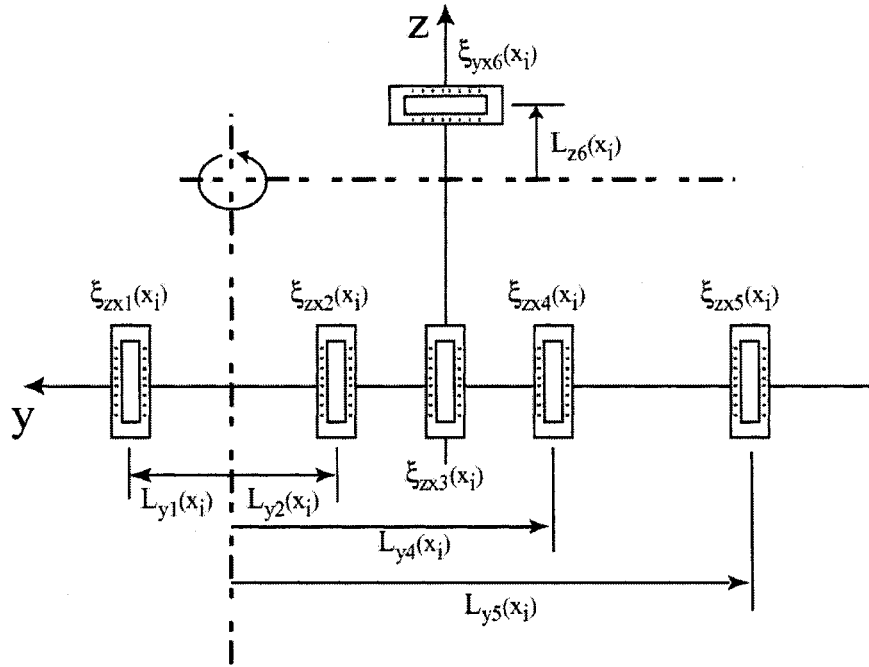


FIG. 3.7 Centre d'action du roulis

Il est de surcroît possible de démontrer qu'il faut enrichir le système d'un minimum de cinq mesures de rectitude  $\xi_{yx}$  pour rendre possible les objectifs d'identification. Un tel système est décrit dans l'équation ci-bas et le tableau 3.3 témoigne de l'évolution

du nombre d'inconnues et d'équations en fonction de la coordonnée articulaire.

$$\begin{aligned}
\xi_{zx1}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + (t_{y1} - L_{y1})\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_1 \\
\xi_{zx2}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + (t_{y2} - L_{y2})\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_2 \\
\xi_{zx3}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + (t_{y3} - L_{y3})\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_3 \\
\xi_{zx4}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + (t_{y4} - L_{y4})\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_4 \\
\xi_{zx5}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + (t_{y5} - L_{y5})\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_5 \\
\xi_{yx6}(x_i) &= \delta_{yx}(x_i) - (t_{z6} - L_{z6})\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_6
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Où les  $\theta_1$  à  $\theta_5$  sont évidemment identiques.

TAB. 3.3 Liberté et contraintes mathématiques

| Coord. | Nb. Inc.  | Nb. Éq. |
|--------|-----------|---------|
| 1      | (5+2)=7   | 6       |
| 2      | (10+2)=12 | 12      |
| 3      | (15+2)=17 | 18      |
| 4      | (20+2)=22 | 24      |
| m      | (5m+2)    | 6m      |

Le prix à payer pour obtenir un centre d'action instantané du roulis réside dans le nombre de lignes d'action nécessaire. Il s'agit de toute évidence d'une solution qui risque d'être lourde au niveau expérimental et coûteuse envers le taux de broche.

### 3.4.4 Rectitudes et centre d'action moyen du roulis

Définitivement, la pénalité de vouloir identifier des variables qui sont fonctions de la coordonnée articulaire se fait ressentir au niveau du nombre de lignes d'action. Cette dernière solution, dans un effort de pallier à ce désavantage, propose d'identifier un centre d'action moyen du roulis.

Il ne s'agit plus de forcer l'expression du roulis au centre du repère, mais plutôt à un centre « moyen » qui convient mieux à l'ensemble des mesures discrètes du roulis le long de la trajectoire. De cette manière, les termes  $L_y$  et  $L_z$  se comportent comme les erreurs d'alignement, c'est-à-dire qu'ils sont définis constants peu importe la coordonnée articulaire.

$$\begin{aligned}
 \xi_{zx1}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + (t_{y1} - L_y)\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_1 \\
 \xi_{zx2}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + (t_{y2} - L_y)\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_2 \\
 \xi_{zx3}(x_i) &= \delta_{zx}(x_i) + (t_{y3} - L_y)\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_3 \\
 \xi_{yx4}(x_i) &= \delta_{yx}(x_i) - (t_{z4} - L_z)\epsilon_{xx}(x_i) + x_i\theta_4
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Où encore une fois,  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$

TAB. 3.4 Liberté et contraintes mathématiques

| Coord. | Nb. Inc.    | Nb. Éq. |
|--------|-------------|---------|
| 1      | $(3+4)=7$   | 4       |
| 2      | $(6+4)=10$  | 8       |
| 3      | $(9+4)=13$  | 12      |
| 4      | $(12+4)=16$ | 16      |
| m      | $(3m+4)$    | 4m      |

### 3.5 Bilan

Le développement prospectif du dernier chapitre a finalement permis d'élaborer quelques approches nouvelles. Les écarts de rectitudes et de roulis peuvent profiter d'une multiplicité de lignes d'actions intelligemment définies et permettre ainsi leur découplage. Plus encore, il est possible de définir des centres d'action du roulis, à défaut de le forcer à l'origine du repère, au dépend d'un grand nombre de lignes d'actions.

## CHAPITRE 4

### PROTOCOLE ET RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Ce chapitre fait suite à la méthode d'identification du chapitre 2 concernant les écart d'échelle, de tangage et de lacet. L'accent est mis sur les détails nécessaires aux objectifs de validation de la robustesse expérimentale de la dite méthode.

La vérification de la robustesse du modèle de mesure de l'erreur d'une mobilité prismatique par optiques simples (ou linéaires) se fait en deux étapes. La première vient résoudre au sens des moindres carrés la mesure d'erreurs linéaires et l'expression des composantes angulaires ainsi calculée est validée par le biais de mesures de référence utilisant les optiques angulaires appropriées.

#### 4.1 Protocole expérimental

Le protocole se veut le plus général possible, mais le montage utilisé et décrit ici est totalement dédié à la Matsuura 760FX 5 axes, en opération à l'atelier central de l'École Polytechnique de Montréal. Bien sûr, l'adaptation à une autre MOCN devrait être facilitée par le contenu de ce chapitre.

##### 4.1.1 Hypothèses de travail

Le transfert de la méthode mathématique vers une séquence expérimentale fait entrer en ligne de compte quelques hypothèses. Celles-ci garantissent la validité des

mesures face à des phénomènes dont l'étude n'a pas été faite sur la MOCN en question.

### **Erreurs non-rigides**

Les erreurs non-rigides d'une MOCN prennent naissance avec le déplacement d'une mobilité située en bout de chaîne cinématique. Son déplacement entraîne des états de flexion et torsion différents selon la position. Par exemple dans une topologie OZFYXP, l'étalonnage de  $Y$  pourrait être légèrement différente selon que la table  $P$  soit positionnée en  $X_1$  ou  $X_2$ .

Par surcroît, les déflexions sont directement liées aux charges statiques ou dynamiques appliquées sur les composantes mécaniques des mobilités. Dans le cas présent, les charges statiques des optiques et de l'unité de compensation sont tout à fait négligeables. Les charges dynamiques sont aussi inexistantes étant donné l'absence de forces d'usinage ainsi que de déplacements rapides (i.e. : fortes accélérations).

### **Erreurs thermiques**

Une grande portion des écarts géométriques d'une mobilité prismatique sont attribuables aux phénomènes de friction. La chaleur s'en dégageant crée des états thermiques des pièces mécaniques pouvant amplifier les écarts géométriques initialement engendrés uniquement par les défauts de formes, d'usinage et d'assemblages de ces composantes.

L'hypothèse ici est de poser que les états thermiques engendrés par la procédure de mesure seront gardés sous contrôle étant donné la nature des déplacements ordonnés.

En effet, les changements de position de la mobilité sont effectués à vitesses très basses et un temps de repos est nécessaire entre chaque déplacement (pour la mesure laser) ce qui permet au système d'évacuer la chaleur créée par ces déplacements.

## Mesures de Références

L'évaluation de la robustesse du modèle et de la procédure de résolution s'obtiennent par la comparaison des écarts 'mesurés' et 'calculés'.

Pour ce qui est des écarts angulaires calculés, ceux-ci sont comparés à des mesures faites par le biais des optiques angulaires. Celles-ci ont la propriété avantageuse d'être constantes partout dans le plan perpendiculaire à la ligne d'action, à la valeur de la coordonnée de l'axe numérique. De plus, elles sont insensibles aux variations des constantes ambiantes ce qui leur procure un statut de mesure de référence pour les écarts angulaires.

En ce qui concerne l'écart d'échelle calculé, il est comparé à une mesure faite selon la ligne d'action correspondant à l'origine du référentiel de mesure. Cette référence est toutefois plus perturbée par les variations des constantes environnementales qu'une mesure angulaire. Il va sans dire que ces références linéaires ne doivent pas entrer dans le système matriciel d'identification  $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$ .

### 4.1.2 La MOCN

Quelques données techniques permettant d'entrevoir le contexte technologique sur lequel la procédure expérimentale repose. Cette MOCN est la Matsuura 5 axes de

l'atelier de Polytechnique, dans son état et dans sa configuration de l'été 2002<sup>1</sup>.

### Informations techniques

1. Contrôleur : YASNAC MX-3
2. Déplacement des axes : X=750 mm, Y=500 mm, Z=300 mm
3. Vitesse maximum : X=5000 mm/min, Y=5000 mm/min, Z=4000 mm/min
4. Topologie : TZFYXAC



### Axe étalonné

La mobilité **X** est visée par la procédure puisqu'elle possède la plus grande course et les portes de part et d'autre de la machine permettent une certaine aisance pour

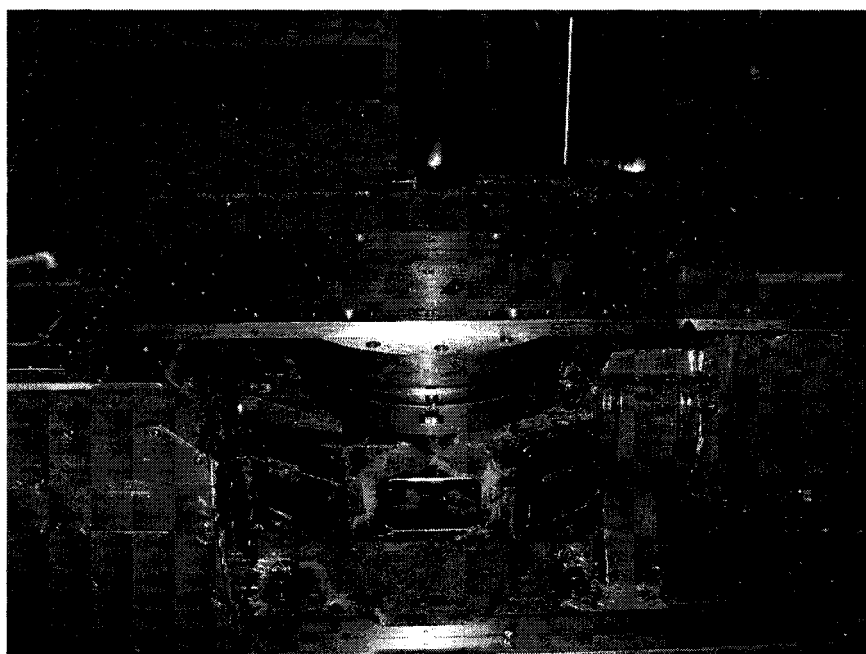
---

<sup>1</sup>L'atelier a subi d'importante rénovation depuis et cette machine a été déplacée

la mise en place de tout l'équipement. Une distance de 700 mm a fait l'objet de la mesure, les 50 mm restant servant de distance de garde (i.e. : interférence des optiques et de la broche) et de dépassements commandés par le système laser.

### **Table de montage**

De manière à rendre possible l'étalonnage de la plus grande portion possible de la course en **X**, une table de surélévation a dû être utilisée. Cette artifice permet de positionner l'interféromètre dans la broche, le réflecteur sur la table et la source laser à l'extérieur de la MOCN.



### 4.1.3 Montage des optiques dans le référentiel de mesure

#### Optiques linéaires

Une analyse d'interférence entre les optiques, la broche, la table et l'ouverture des portails de la Matsuura permet d'établir une fenêtre de 300mm suivant  $y$  et 200 mm suivant  $Z$ . Les quatre coins de ce rectangle ont fait l'objet de lignes d'action. La cinquième ligne d'action est faite à l'origine du référentiel de mesure. Le tableau 4.1 ci-après résume les coordonnées de ces lignes d'action.

TAB. 4.1 Coordonnées des lignes d'action

| (mm)          | N° 1       | N° 2  | N° 3      | N° 4     | N° 5    |
|---------------|------------|-------|-----------|----------|---------|
| Vecteur (y,z) | (-150,200) | (0,0) | (150,200) | (-150,0) | (150,0) |

#### Optiques angulaires

Théoriquement, ces optiques donnent la même mesure angulaire peu importe la ligne d'action. Par rigueur, cette ligne d'action est colinéaire à l'origine du référentiel de mesure.

### 4.1.4 Paramètres d'acquisition

#### 4.1.4.1 Code MOCN

Le code développé dans le cadre des expérimentations gère plus d'un paramètre propre aux exigences des mesures. Notamment, le nombre de cibles, le nombre de



reprises des mesures et finalement, les dépassements en début et en fin de courses.

D'abord, un nouveau référentiel de travail (i.e. : G58) est fait en position X-50.0 du repère machine. Le déplacement vers cette coordonnée est assuré par la sous-routine O212 depuis la coordonné X-150.0 .

Pour satisfaire aux exigences du laser et annuler un éventuel jeu d'inversion, un dépassement doit précéder la première cible. Le programme O214 déplace l'axe X de 5 mm, c'est-à-dire à X5.0 du repère de travail G58. Le retour à la première cible (X0.0) se fait par le programme O213.

Les déplacements entre les cibles sont assurés par un seul et même sous-programme (O211). Cette sous-routine est produite selon un déplacement harmonique double. Chacune des cibles est distancée de 10mm.

Encore une fois, le laser exige un dépassement de la dernière cible. Cette tâche

est accomplie par la sous-routine O213. La dernière étape d'une reprise consiste au retour de la table en position X0.0 du référentiel de mesure, après quoi, le processus est refait autant de fois qu'il y a de répétitions nécessaires. Le retour fait appel au sous-programme O215. Par ailleurs, une pause de 15 secondes est appliquée à chaque cible afin de permettre la mesure.

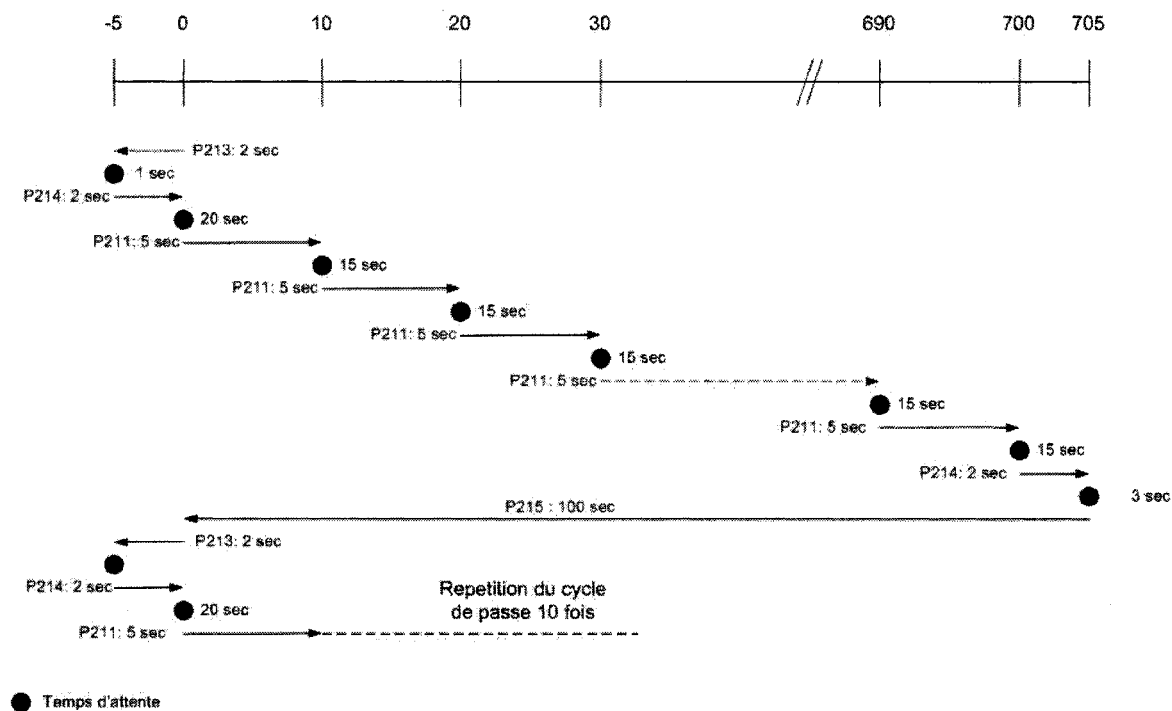


FIG. 4.1 Temporisat on

#### 4.1.4.2 Déplacement harmonique double

Le type de déplacement est emprunté au savoir-faire utilisé dans la conception des cames. Cette fonction implique des accélérations et des décélérations graduelles en début et en fin de déplacement. La figure 4.2 illustre la position, la vitesse et l'accélération en fonction du temps.

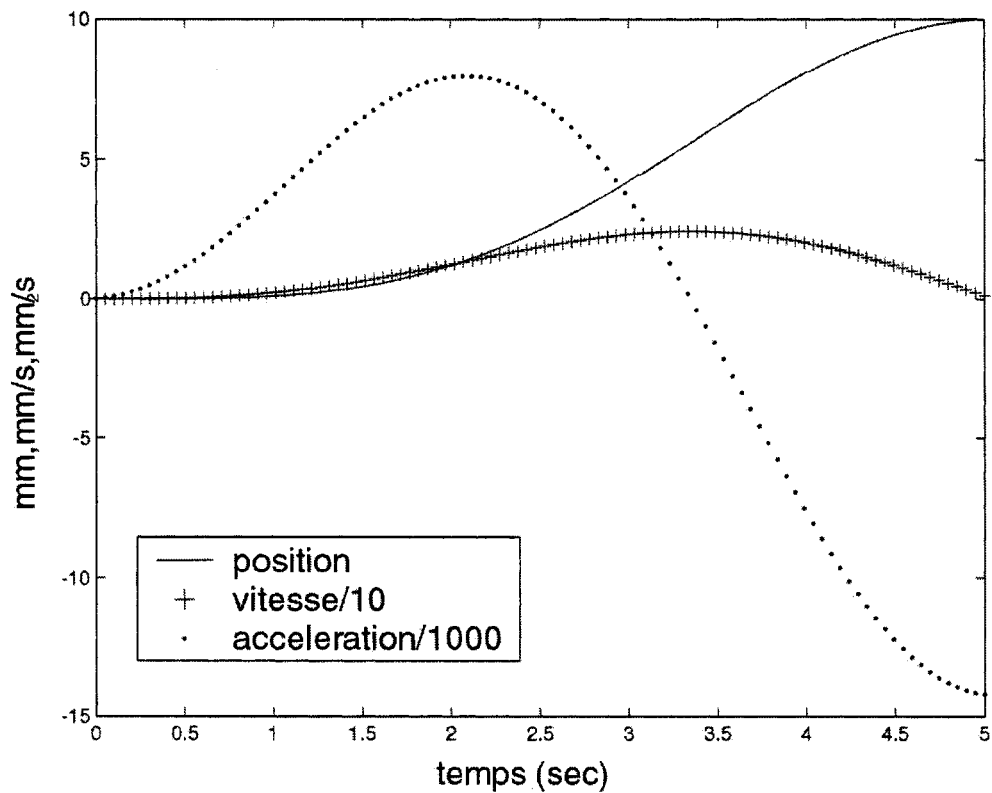


FIG. 4.2 Déplacement harmonique double

Pour un déplacement entre deux cibles de mesures, le principal attrait d'adapter cette formule vient qu'il suffit de spécifier un delta de déplacement joint à un delta de temps, lequel correspond au temps requis pour effectuer la totalité du déplacement. C'est ainsi qu'il est possible de caractériser l'ensemble des déplacements requis par le protocole, non seulement en terme de distance à parcourir mais surtout en terme de temps nécessaire. Les délais de déplacement étant choisis et fixés, il devient facile de tracer le schéma temporel du protocole et par conséquent faciliter l'automatisation des mesures.

#### 4.1.5 Nomenclature

La multitude d'optiques disponibles et la variété importante des caractéristiques expérimentales obligent une nomenclature de fichier d'acquisition. Le nom de fichier doit être signifiant en soit.

##### 4.1.5.1 Données expérimentales

La nomenclature adoptée permet de rendre compte des éléments suivants :

1. Le type de mesure (linéaire, angulaire, rectitude, ...).
2. La direction de l'écart mesuré et l'axe s'y rattachant.
3. La ligne d'action de mesure utilisée.
4. Le nombre de reprises effectué par cible.
5. La date de l'acquisition.
6. Le numéro d'exécution (dans le cas d'interruption de la mesure).

Un fichier d'acquisition aura donc la forme suivante :

AAABB\_CC\_DD\_JJMMAA\_E

1. AAA : LIN, ANG, REC, ROL
2. BB : XX,XY,XZ,YX,YY,YZ,ZX,ZY,ZZ
3. CC : 01,02,...,10,11,... selon la désignation du plan expérimental.
4. DD : 01,02,...,10,11,...

5. JJMMAA : jour, mois, année

6. E : 1,2,... <10

À titre d'exemple, une mesure angulaire de lacet selon l'axe X, faite à la ligne d'action N° 2 le 30 juillet 2002, comportant 10 reprises de mesure aux cibles et acquise durant la première exécution, prend la forme suivante :

ANGZX\_02\_10\_300702\_1

#### 4.1.5.2 Matrices de données sous MatLab®

Un formatage des fichiers sources Renishaw est nécessaire pour un traitement numérique (calculs, identification, résultats, ...).

Le format standard est illustré à la figure 4.3, et n'est utile que pour des séquences d'acquisition « aller » ou « aller-retour » ; il n'est pas adapté pour des modes « pendule », etc.

Le fichier \*.mat prend la même appellation que le fichier source (section 4.1.5.1).

## 4.2 Résultats expérimentaux

Dans cette section, les résultats des mesures expérimentales sont présentés en plus des résultats d'identification par l'entremise du système  $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$  vu au chapitre 2.

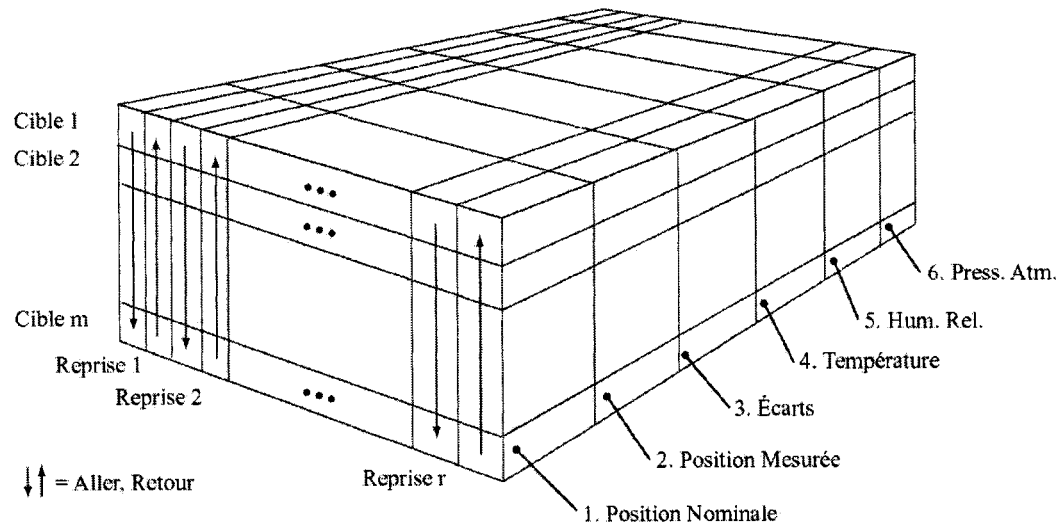


FIG. 4.3 Format matriciel d'une mesure laser

#### 4.2.1 Mesures d'échelles

La figure 4.4 fait un compte rendu des cinq mesures d'échelle. Chacune de ces courbes représente la moyenne des reprises faites pour une de ces lignes d'action. La numérotation utilisée suit celle définie par le tableau ??.

À première vue, il est facile d'observer que chacune des courbes présente une forme très similaire. Les amplitudes mesurées cadrent bien avec le type de mobilité de la Matsuura compte tenu de l'absence de compensation, d'une vis-à-bille à encodeur rotatif et de l'âge de la machine. Le tableau 4.2 fait état des amplitudes des cinq échelles mesurées.

Les différences d'amplitude semblent être fonctions de la coordonnée articulaire et il est probable qu'elles proviennent d'un niveau de couplage angulaire qui reflète leur position respective dans le plan de travail.

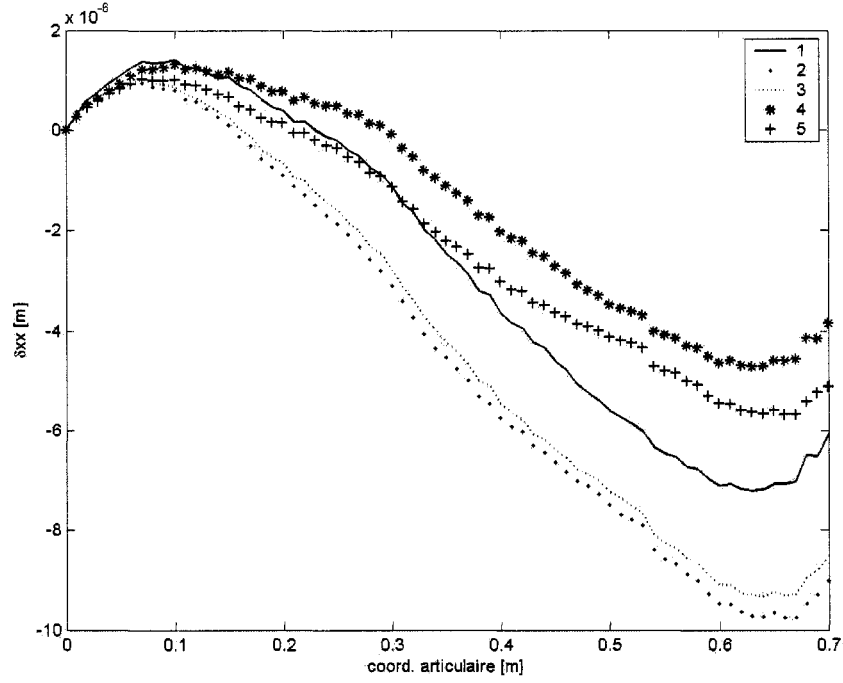


FIG. 4.4 Mesures d'échelle  $\delta_{xx}(x)$  moyennes

#### 4.2.2 Mesures de tangage $\epsilon_{yx}(x)$

La figure 4.5 fait un compte rendu des mesures de tangage faites avec les optiques angulaires. Cette courbe représente la moyenne des reprises. La forme de l'écart  $\epsilon_{yx}(x)$  est semblable aux  $\delta_{xx}(x)$  et présente une courbe très lissée. En ce qui concerne l'amplitude, elle prend une valeur maximum de  $+2.5\mu m/m$  et un minimum de  $-22\mu m/m$ .

#### 4.2.3 Mesures de tangage $\epsilon_{zx}(x)$

La figure 4.6 fait un compte rendu des mesures de lacet faites avec les optiques angulaires. Cette courbe représente la moyenne des reprises. L'amplitude prend une valeur maximum de  $+5.5\mu m/m$  et un minimum de  $-2.2\mu m/m$ . Cet écart présente

TAB. 4.2 Amplitudes des mesures d'échelle

| $(\mu m)$ | N° 1 | N° 2 | N° 3 | N° 4 | N° 5 |
|-----------|------|------|------|------|------|
| Max       | +1.5 | +1.0 | +1.0 | +1.5 | +1.0 |
| Min       | -7.0 | -9.5 | -9.0 | -4.5 | -5.5 |
| Étendue   | 8.5  | 10.5 | 10.0 | 6.0  | 6.5  |

une courbe moins lisse que les précédentes.

#### 4.2.4 Résultats d'identifications

Dans un premier temps, l'identification des écarts d'échelle, de tangage et de lacet est présentée pour le cas où 4 lignes d'action nourrissent le système  $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$ . Dans un deuxième temps, quatre identifications différentes sont présentées cette fois-ci selon des combinaisons de trois lignes d'action.

#### 4.2.5 Identification par quatre lignes d'action

Étant donné que la ligne d'action N° 2 passant par l'origine du référentiel de mesure doit demeurer exclue des données entrant dans la composition de la matrice  $\mathbf{E}$ , les lignes 1,3,4 et 5 forment la seule combinaison à quatre montages.

Dans le cas de l'identification de l'écart d'échelle (figure 4.7), il est surprenant de voir que la forme de l'écart est très bien retrouvée; le graphe des résidus à l'appui puisque la différence entre la courbe calculée et la référence oscille entre 0 et  $-2\mu m$ . De surcroît, on ne note aucune tendance dans ces résidus sinon des sections quasi linéaire entre  $0.1 - 0.3m$  et entre  $0.3 - 0.6m$ .

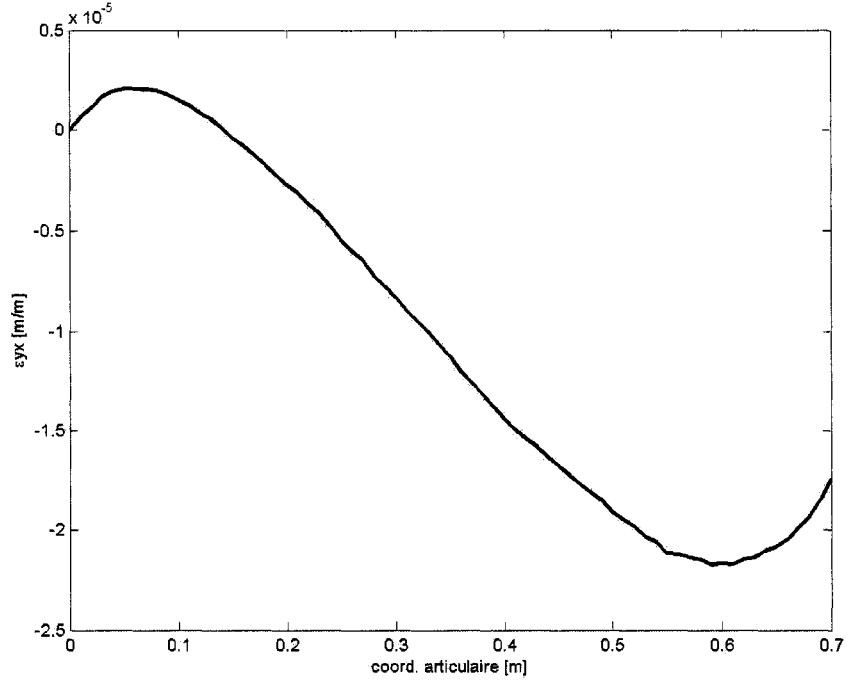


FIG. 4.5 Mesure de tangage  $\epsilon_{yx}(x)$  moyennes

En ce qui concerne les écarts angulaires de tangage et lacet (figures 4.8 et 4.9), la forme générale est aussi bien retrouvée. Une divergence maximum de  $10 \mu rad$  dans le premier cas et un peu moins de  $20 \mu rad$  dans le second cas. Par dessus tout, ce qui frappe c'est la linéarité que présente les graphes des résidus.

#### 4.2.6 Identification par trois lignes d'action

Avec quatre lignes d'action ayant le potentiel d'entrer dans le système d'identification, il est possible de produire quatre systèmes distincts optant pour une combinaison à trois lignes d'action. Le tableau 4.3 fait état du conditionnement des combinaisons retenues.

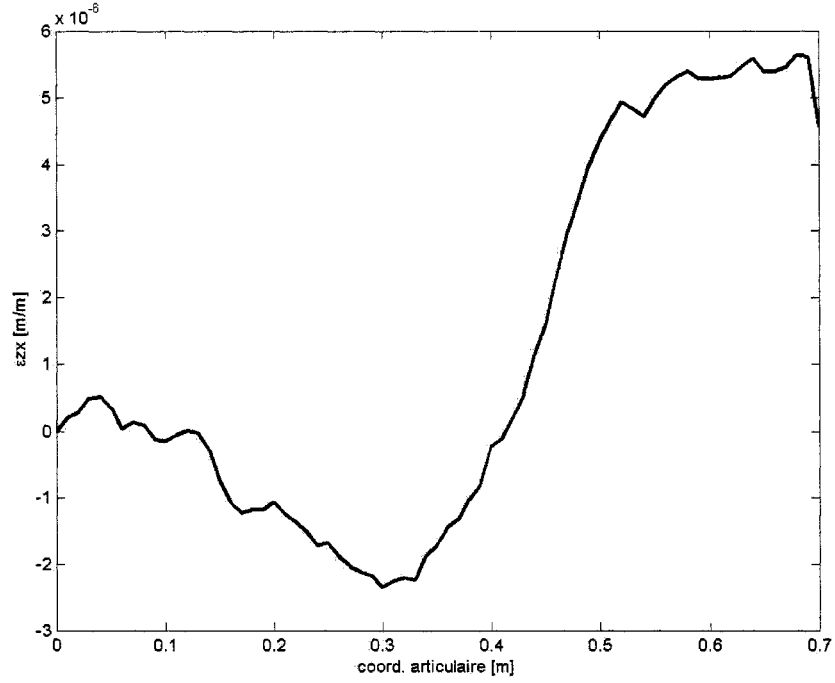


FIG. 4.6 Mesures de lacet  $\epsilon_{zx}(x)$  moyennes

Il n'est pas nécessaire de présenter l'ensemble des résultats d'identification pour chacune des combinaisons choisies puisque les résultats sont très semblables et les graphes appuyant ceci sont présentés en discussion. Voici tout de même les résultats de la combinaison ayant la plus faible valeur de conditionnement. Observer les fortes similitudes que ces sous-groupes montrent relativement aux résultats précédents à quatre lignes d'action (forme des résidus et degré de conformité aux références).

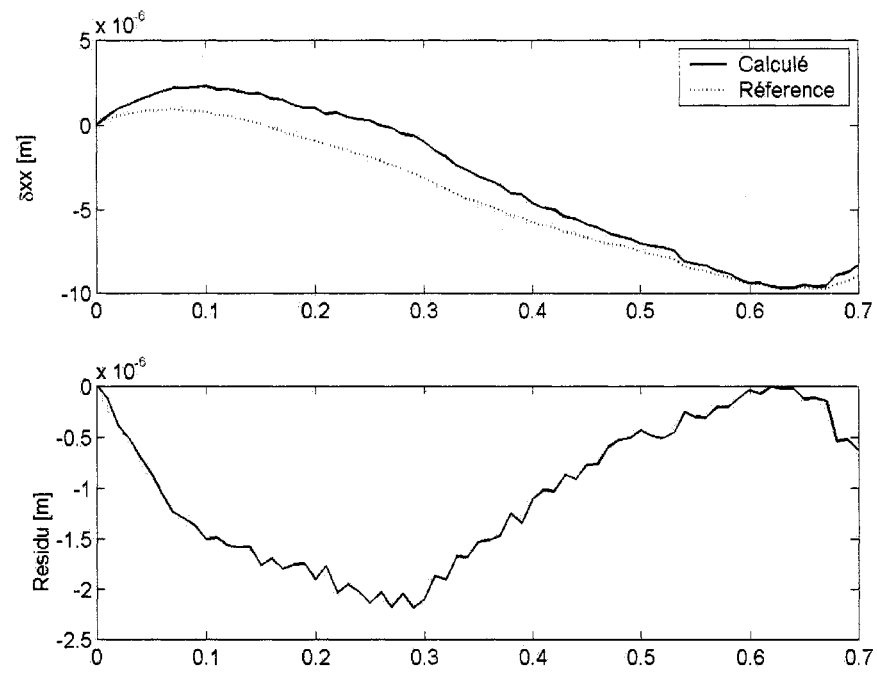


FIG. 4.7 Identification et résidus  $\delta_{xx}(x)$  par montages 1,3,4 et 5

TAB. 4.3 Conditionnement des combinaisons à 3 lignes d'actions

| Combinaison | Conditionnement |
|-------------|-----------------|
| 134         | 15.32           |
| 135         | 13.44           |
| 145         | 15.57           |
| 345         | 12.82           |

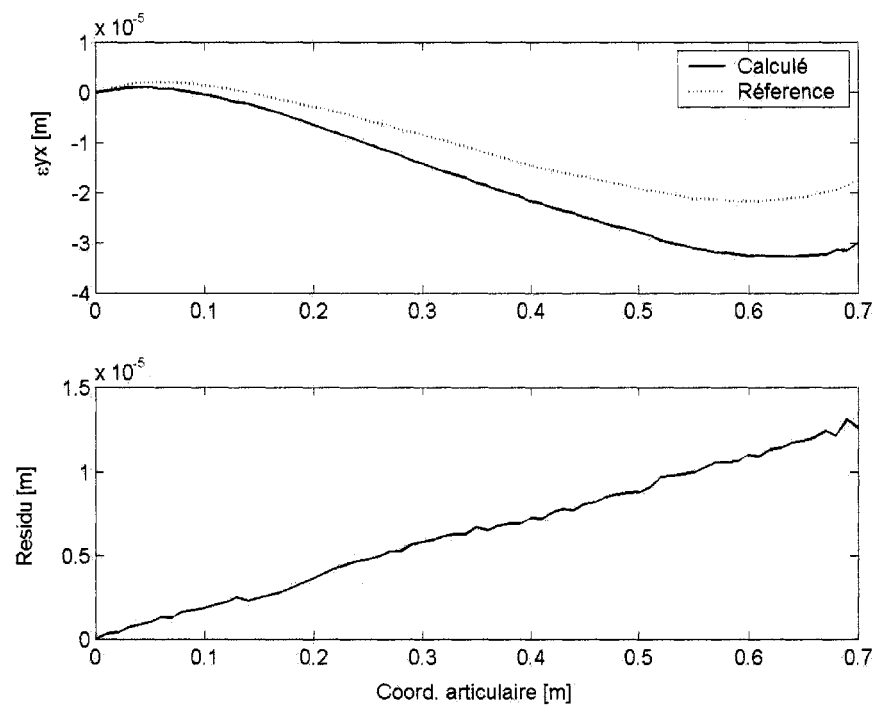


FIG. 4.8 Identification et résidus  $\epsilon_{yx}(x)$  par montages 1,3,4 et 5

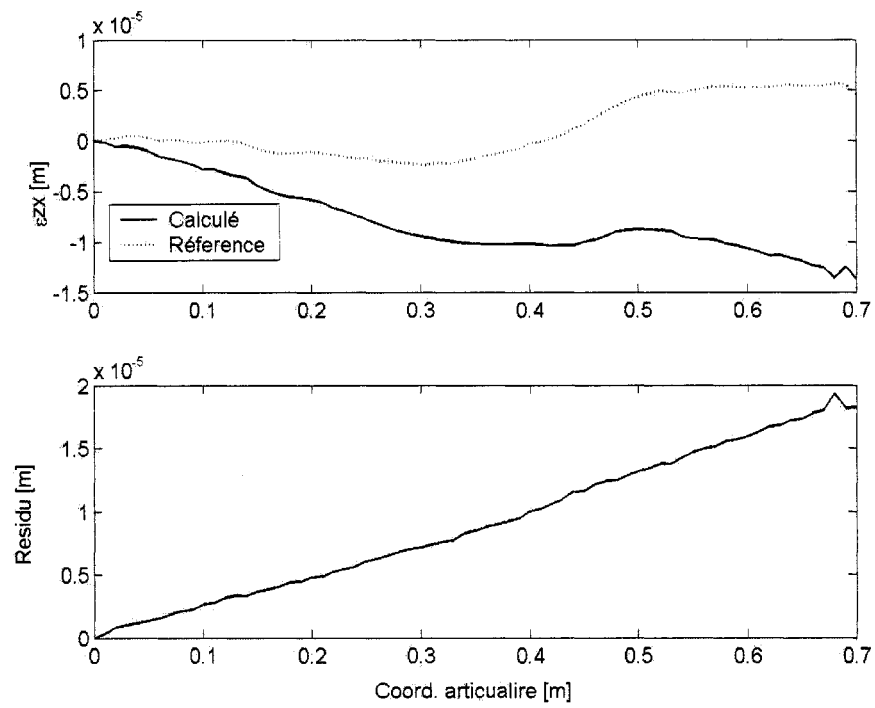


FIG. 4.9 Identification et résidus  $\epsilon_{zx}(x)$  par montages 1,3,4 et 5

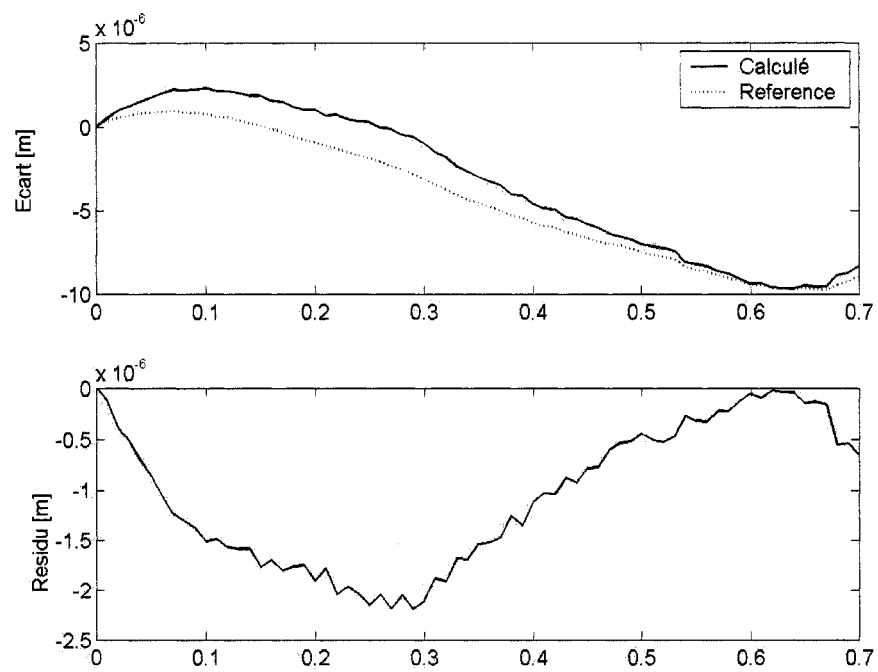


FIG. 4.10 Identification et résidus  $\delta_{xx}(x)$  pour la combinaison 345

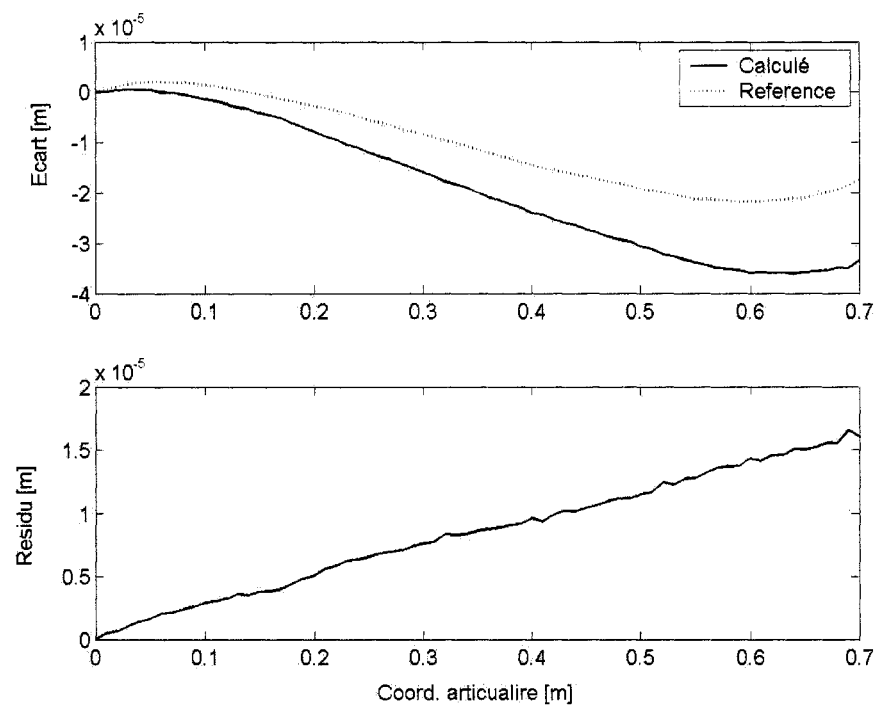


FIG. 4.11 Identification et résidus  $\epsilon_{yx}(x)$  pour la combinaison 345

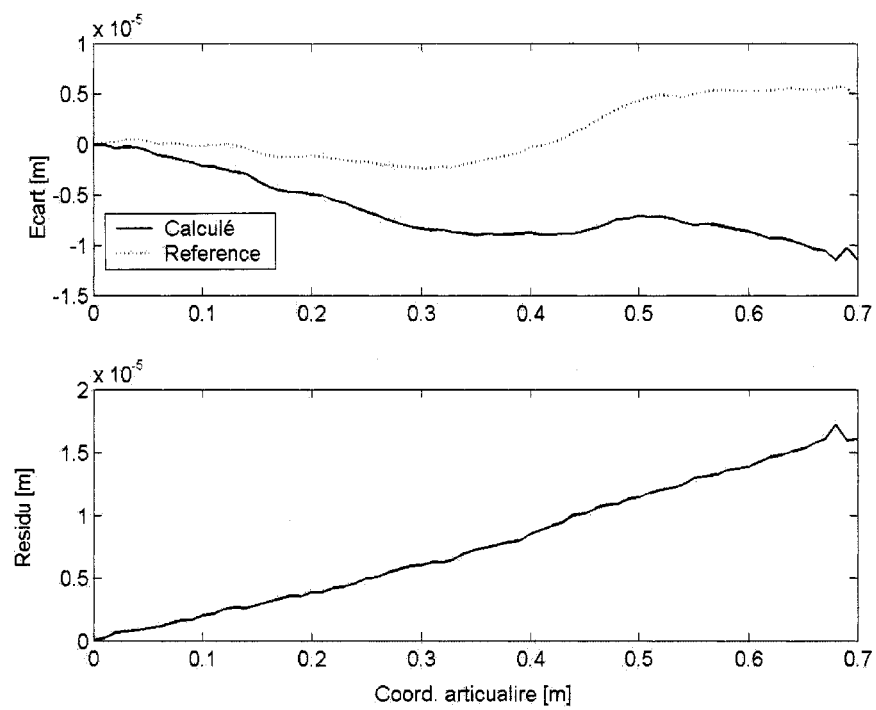


FIG. 4.12 Identification et résidus  $\epsilon_{zx}(x)$  pour la combinaison 345

## CHAPITRE 5

### DISCUSSION

La partie expérimentale a permis d'alimenter le système d'identification d'un nombre suffisant de lignes d'action de mesures. Ensuite, l'identification des écarts d'échelle, de tangage et de roulis mène à s'interroger sur la robustesse de la méthode. L'argumentation suivante fait état de la stabilité du système d'identification  $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$  et amène une explication quand à la linéarité des résidus. Ces derniers font ensuite l'objet d'une analyse causale.

#### 5.1 Stabilité du système $\mathbf{MX} = \mathbf{E}$

Conclure que la méthode d'identification possède une stabilité de résolution satisfaisante demande que les résultats d'identification remplissent au moins les deux critères suivants :

- Tous les sous-groupes de combinaisons présentent des résultats similaires entre eux.
- Tous les sous-groupes de combinaisons présentent des résultats similaires avec la combinaison incluant toutes les lignes d'action (1345).

Un sous-groupe est défini par une combinaison dont le total de lignes d'action peuplant le système d'identification est inférieur au nombre maximum de lignes disponibles. Dans le cas présent, les sous-groupes possibles sont les solutions à trois lignes

d'actions (134, 135, 145 et 345) et la combinaison complète englobant les quatres lignes d'action (1345).

La figure 5.1 démontre que le critère d'homogénéité entre les solutions de sous-groupes est satisfait, notamment au niveau de l'écart d'échelle où l'étendue des résultats est très limitée.

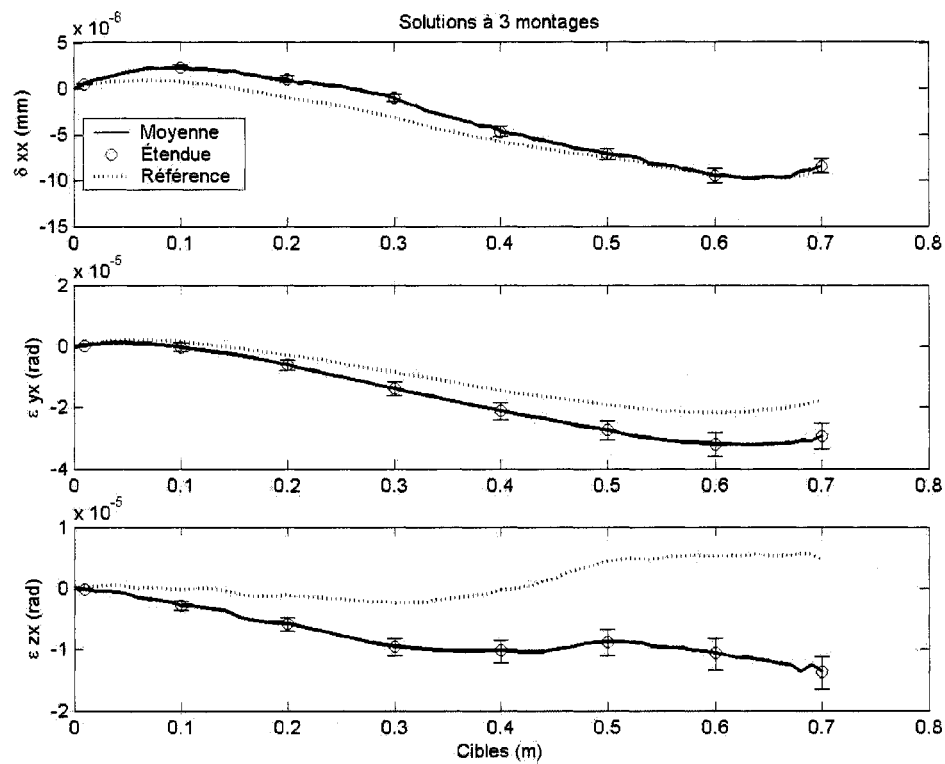


FIG. 5.1 Graphe comparatif des solutions à 3 lignes d'action

Le graphe comparatif des résidus renforce lui aussi cet argument (figure 5.2).

Le second critère exige une similarité des résultats des sous-groupes par rapport à ceux de la combinaison complète. La moyenne des résultats d'échelle, de tangage et de lacet des combinaisons à 3 lignes d'actions est comparée à l'identification faite par

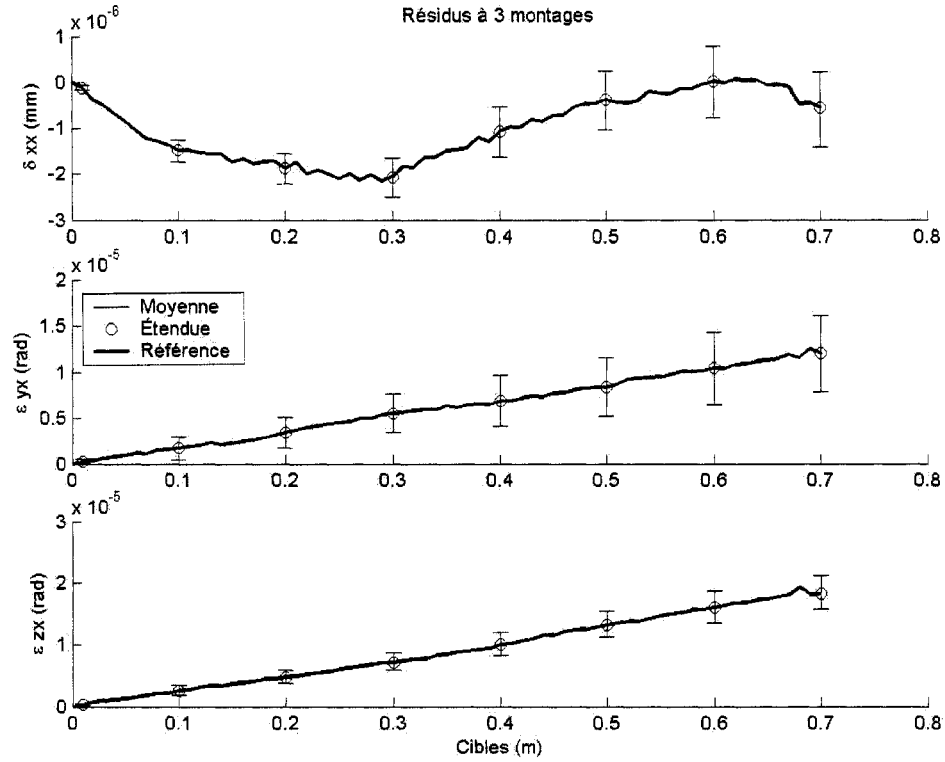


FIG. 5.2 Graphe comparatif des résidus de solutions à 3 lignes d'action

quatre lignes d'action à la figure 5.3. Les différences sont clairement des fonctions du premier ordre et leur amplitude se limite à 50% du résidu correspondant.

## 5.2 Linéarité des résidus

Les figures 4.8, 4.9, 4.11 et 4.12 affichent de façon univoque des résidus ayant tout d'une fonction de premier ordre. Il semble que les écarts d'échelle identifiés par une quelconque combinaison soient affectés différemment puisque leurs résidus ne sont pas linéaires.

Quelle explication peut venir clarifier un tel comportement du système ? L'identi-

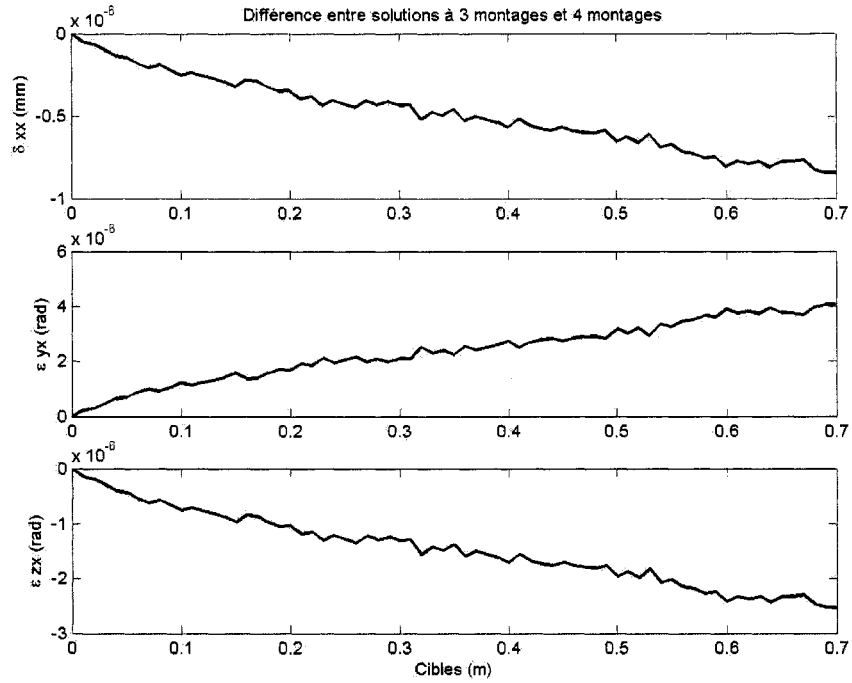


FIG. 5.3 Différence entre les solutions à 3 et 4 lignes d'action

fication est basée sur le modèle élaboré au chapitre 2 et il est probable que certaines hypothèses quant aux erreurs de mesure soient en cause. Bien plus, il se pourrait que le modèle soit incomplet voire même que la cause soit une variable manquante. La section suivante passe en revue ces hypothèses.

### 5.3 Analyse causale des résidus

À prime abord, il faut revoir les hypothèses de mesure sur lesquelles est fondé ce travail. Celles-ci portent sur les erreurs aléatoires telle que la température, l'humidité relative et la pression atmosphérique. Les erreurs constantes sont constituées des erreurs de positionnement et d'alignement.

### 5.3.1 Erreurs aléatoires

Premièrement, il faut rappeler que l'acquisition expérimentale est faite avec le module de compensation environnementale. Par conséquent, toute variation de température, d'humidité relative et de pression atmosphérique qui affecte la longueur du chemin optique dans l'air est compensée par ce module instrumental.

Pourtant les capteurs ne sont pas positionnés sur la ligne d'action du laser, et il est probable qu'il y persiste une divergence dans les valeurs de ces variables, c'est-à-dire entre les points de lecture et la ligne d'action. Les données expérimentales montrent des fluctuations moyennes au cours des mesures (tableau 5.1).

TAB. 5.1 Fluctuations environnementales maximums

| $\delta T_e$ | $\delta H$ | $\delta P$ |
|--------------|------------|------------|
| 2 °C         | 5 %        | 2 mBar     |

Or, le tableau 2.4 ordonne des différentiels d'état beaucoup plus élevés pour attribuer un faible changement de 1 *ppm*, soit .75  $\mu m$  dans le cas présent. D'autant plus que ces fluctuations sont compensées par le module, ce qu'il peut subsister comme écart entre la valeur au capteur et la ligne d'action est forcément bien en-dessous du dixième des valeurs présentées au tableau 5.1. Les erreurs aléatoires d'ambient ont par conséquent un pouvoir explicatif quasi nul sur la forme et l'amplitude des résidus d'identification.

### 5.3.2 Erreurs de positionnement

Les erreurs de nature constante concernent d'abord le positionnement des lignes d'action. Plus précisément, il s'agit d'évaluer ce qu'entraîne une erreur de positionnement sur le résultat d'identification. Les jacobiens développés à la section 2.4 sont ici mis à profit.

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta_{xx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{yx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{zx}(x_i) \end{bmatrix} = J_{Ty} \begin{bmatrix} \delta T y_1 \\ \delta T y_2 \\ \delta T y_3 \end{bmatrix} + J_{Tz} \begin{bmatrix} \delta T z_1 \\ \delta T z_2 \\ \delta T z_3 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Dans le cas d'un système à trois lignes d'actions, ces matrices jacobiennes peuvent être obtenues numériquement en prenant en compte des paramètres suivants.

1. À la coordonnée  $x_i$  concernée, les lignes d'action ont un écart d'échelle mesuré

$$\xi_{xx1}(.75) = 20.5\mu m, \xi_{xx2}(.75) = 20.1\mu m \text{ et } \xi_{xx3}(.75) = 20.8\mu m.$$

2. La combinaison comprend les lignes d'action 345.

3. Supposons des erreurs de positionnement aux lignes d'action de  $\begin{bmatrix} 0 & .005 & .001 \end{bmatrix}^T$   
 $\begin{bmatrix} 0 & .007 & .010 \end{bmatrix}^T$  et  $\begin{bmatrix} 0 & .006 & .006 \end{bmatrix}^T$  respectivement (unités en m).

Il faut noter que ces valeurs sont extrêmes. En effet, il est impossible d'atteindre des erreurs de positionnement de l'ordre du millimètre. Toutefois, les résultats suivants rendent l'exercice intéressant. Le système jacobien numérique obtenu est

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Delta\delta_{xx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{yx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{zx}(x_i) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} .15 & -1.09 & -1.26 \\ -10.90 & 0 & 10.9 \\ -1.02 & 7.28 & -6.26 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \begin{bmatrix} .005 \\ .007 \\ .006 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} .11 & -.77 & -.88 \\ -7.69 & 0 & 7.69 \\ -.72 & 5.12 & -4.41 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \begin{bmatrix} .001 \\ .010 \\ .006 \end{bmatrix} \quad (5.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Delta\delta_{xx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{yx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{zx}(x_i) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -.014 \\ .010 \\ .008 \end{bmatrix} \times 10^{-6} + \begin{bmatrix} -.012 \\ .038 \\ .024 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \quad (5.3) \\
\begin{bmatrix} \Delta\delta_{xx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{yx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{zx}(x_i) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -.027 \\ .050 \\ .032 \end{bmatrix} \times 10^{-6}
\end{aligned}$$

Même avec des erreurs de positionnement exagérément évaluées de 1 à 10 *mm*, il est difficile d'obtenir une erreur d'identification plus élevée que 50 *nm*. Il est possible d'affirmer hors de tout doute qu'aucun pouvoir explicatif ne réside dans ce type d'erreurs.

### 5.3.3 Erreurs d'alignement

L'alignement laser se fait visuellement, par superposition des faisceaux incident et réfléchi à la cible disposée sur la tête laser. Pour une longueur de course (utilisée pour l'alignement) de  $.75\text{ m}$ , cela fait  $1.5\text{ m}$  de bras de longueur utile (aller+retour). Admettant une erreur possible de  $1\text{ mm}$  sur la superposition des faisceaux à la cible, l'erreur d'alignement maximum admissible est de :

$$\theta = \arctan\left(\frac{.001}{1 \times 2}\right) \quad (5.4)$$

$$\theta = .5 \times 10^{-3} \text{rad} \quad (5.5)$$

En développant la matrice jacobienne pour la même combinaison de trois lignes d'action (345), à une coordonnée  $x = .75\text{ m}$ , des écarts d'échelle mesurés  $\xi_{xx1}(.75) = 20.5\text{ }\mu\text{m}$ ,  $\xi_{xx2}(.75) = 20.1\text{ }\mu\text{m}$  et  $\xi_{xx3}(.75) = 20.8\text{ }\mu\text{m}$ , et des erreurs d'alignement oscillant autour de  $.5 \times 10^{-3}\text{ rad}$

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta_{xx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{yx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{zx}(x_i) \end{bmatrix} = J_\theta \begin{bmatrix} \theta_1^2 \\ \theta_2^2 \\ \theta_3^2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta_{xx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{yx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{zx}(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.44 & 10.05 & 11.86 \\ 102.50 & 0 & -104.00 \\ 9.57 & -67.0 & 59.63 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \begin{bmatrix} .50^2/2 \\ .55^2/2 \\ .45^2/2 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta_{xx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{yx}(x_i) \\ \Delta\epsilon_{zx}(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.54 \\ 2.28 \\ -2.90 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

L'équation finale 5.6 montre qu'en admettant une erreur d'alignement maximum de  $.5 \times 10^{-3} \text{ rad}$ , l'erreur sur les écarts d'identification sont en dessous de  $3 \mu m$  sur l'écart d'échelle et en-dessous de  $3 \mu rad$  sur les écarts angulaires. Ce résultat prouve hors de tout doute que le blâme ne peut être mis sur un mauvais alignement laser.

## 5.4 Erreurs thermiques

La section 4.1.1 pose une hypothèse expérimentale relativement aux erreurs thermiques stipulant que le type de déplacements commandés entre les cibles de mesures fournissait une excitation thermique négligeable.

Dans le cas des mesures d'échelle, l'acquisition effectuée 30 reprises prenant 25 minutes chacune et comprenant 71 cibles. Les déplacements extrêmement lents visent à réduire l'échauffement de la vis-à-bille. Lee *et al.* (2003) stipulent que son échauffement est notamment fonction de la vitesse. Il s'agit donc de 600 minutes d'excitation thermique. L'hypothèse veut également que, malgré un état thermique initial différé-

rent selon la ligne de mesure, l'équilibre thermique de la machine soit atteint bien avant les 600 minutes. Autrement dit, la machine ne peut être, par des déplacements si lents, en état transitoire durant ces 600 minutes.

Or, sans capteur de température installé en des points stratégiques de la mobilité, il devient difficile de procéder à des vérifications de l'évolution de l'état thermique durant la mesure. De surcroît, la superposition des 30 reprises en un graphe 2D, ne permet pas d'apprécier ce comportement. Mais, qu'advient-il si ces répliques sont agencées différemment tel qu'à la figure 5.4 ?

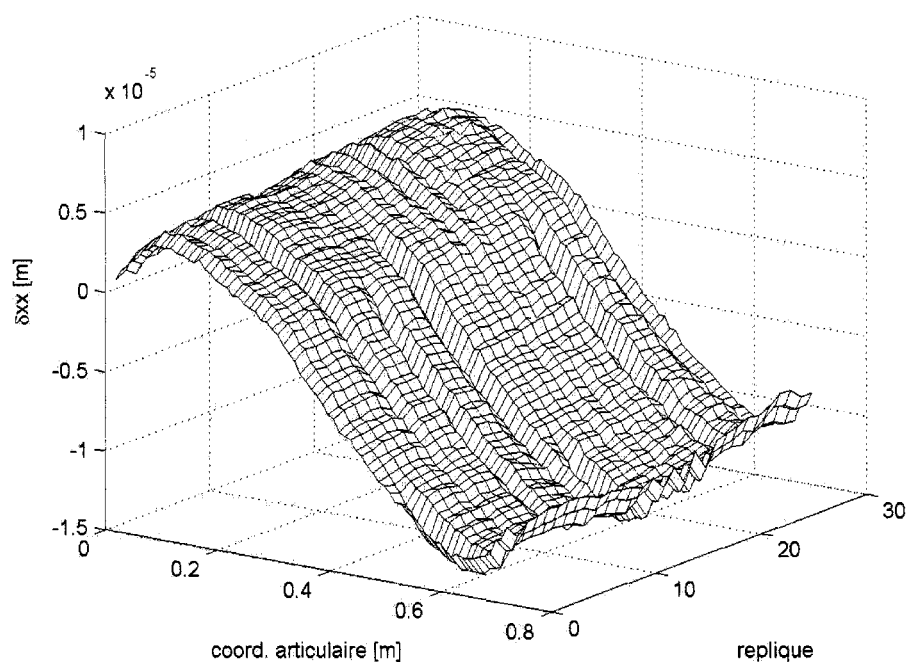


FIG. 5.4 Nappe de mesures, ligne d'action N° 1

Cette nappe de mesures fait état des 30 reprises de la mesure d'échelle selon la ligne d'action N° 1. Cette acquisition est relativement stable comparativement aux

nappes des lignes N° 2 et N° 4, présentées aux figures 5.5 et 5.6 respectivement.

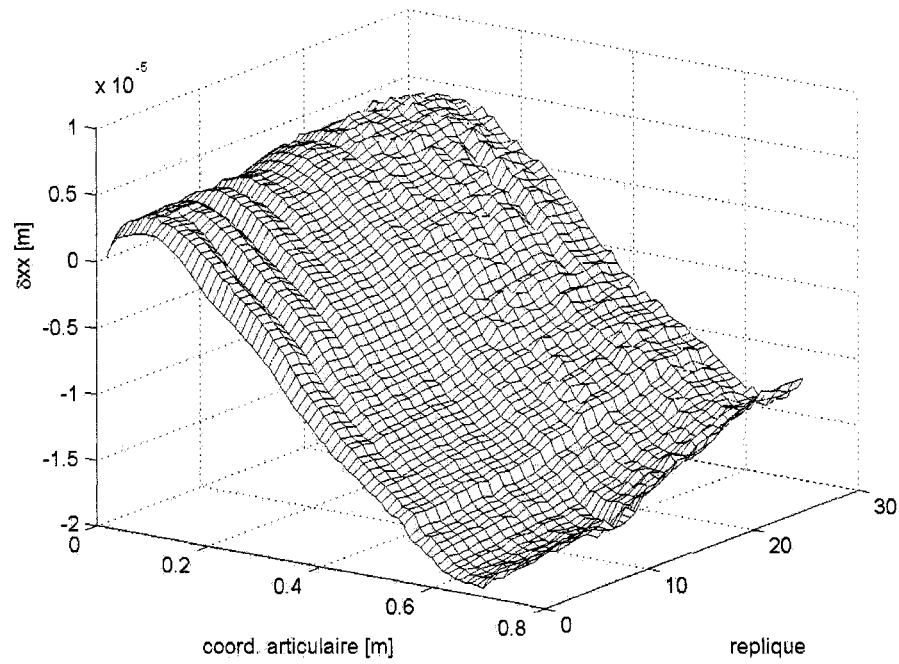


FIG. 5.5 Nappe de mesures, ligne d'action N° 2

Ces nappes font clairement ressortir le changement de pente de l'écart d'échelle. Ces changements s'apparentent aux conséquences d'échauffement thermique d'une vis-à-bille tel que démontré dans les travaux de White *et al.* (1999). La possibilité que l'état thermique de la Matsuura ne soit pas stable durant ces acquisitions est renforcée par le type d'encodeur qui équipe ses axes. En effet, Frank et Ruech (1999) montrent que l'écart de positionnement d'une mobilité déplacée par un encodeur rotatif est gravement influencé par les changements thermiques de ses composantes mécaniques (vis-à-bille, écrou, roulements et guides).

Finalement, ces erreurs thermiques possèdent un pouvoir explicatif bien supérieur

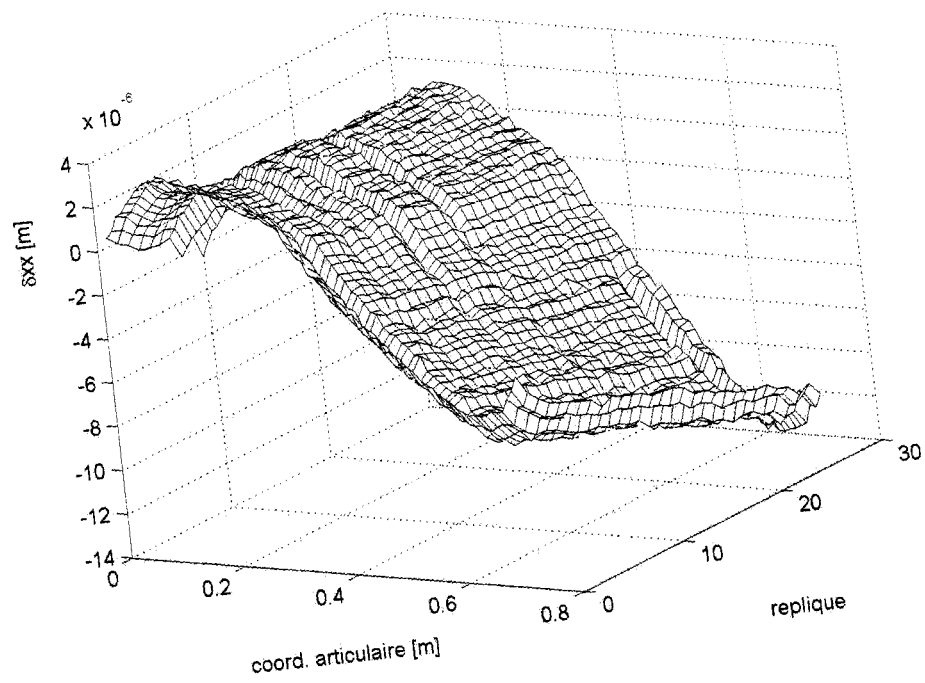


FIG. 5.6 Nappe de mesures, ligne d'action N° 4

à toutes autres erreurs analysées dans ce chapitre.

## CONCLUSION

Le chapitre précédent ont échafaudé la théorie d'une méthode de découplage des écarts d'échelle par mesures multi-séquentielles. L'appareil de mesure au coeur de l'étude est l'instrumentation de référence dans l'industrie de la fabrication pour la caractérisation et la compensation des machines-outils à commande numérique, c'est-à-dire l'interférométrie laser.

La construction d'un système des moindres-carrés est forgée sur un modèle d'une mesure de l'écart d'échelle faisant état des couplages des écarts de tangage et de lacet entachant la mesure. Ce modèle est enrichi des variables expérimentales tel que le nombre de cible de mesures, de reprises et de lignes d'action. Le système résultant est de type diagonale-bande, il contient autant de sous-systèmes indépendants que de cibles de mesure et demande un minimum de trois lignes d'action pour découpler les écarts en jeu.

Les erreurs de mesures qui risquent d'affaiblir la robustesse de la méthode multi-séquentielle sont définies. Chacune d'entre-elles est modélisée et incorporée dans le modèle de base. Ce modèle augmenté des erreurs de mesures sert de fondation à un système de matrices jacobienues, dérivé par le principe de superposition, quantifiant l'erreur sur la solution du système d'identification.

La méthode multi-séquentielle est extrapolée aux optiques de rectitude dont le comportement est aussi entaché d'un écart angulaire, le roulis. Dans ce cas, la méthode

est d'autant plus intéressante qu'il n'existe aucune optique laser capable de mesurer le roulis, seul le niveau électronique en est apte et seulement pour des mobilités horizontales. Étant donné que les rectitudes peuvent mesurer, avec le jeu de miroirs adéquat, le long d'une mobilité verticale, il deviendrait possible d'y identifier le roulis.

Une procédure expérimentale a permis de fournir numériquement le système d'identification. Le découplage des écarts d'échelle, de tangage et de lacet est conluent. La forme des écarts est retrouvée et la méthode est prouvée stable peu importe la combinaison de sous-groupes de lignes d'action qui peuplent le système. Des résidus linéaires des écarts angulaires par rapport à la référence suggèrent qu'une variable est absente du modèle.

Une analyse causale permet d'attribuer la responsabilité quant à la forme et l'amplitude de ces résidus. Grâce au système jacobien, il devient possible de vérifier le pouvoir explicatif de chacune des erreurs de mesure. Ainsi, les sources d'erreurs aléatoires telles que la température ambiante, l'humidité relative et la pression atmosphérique prouvent que leurs effets sont négligeables sur l'exactitude de la solution. Les erreurs d'alignement montrent quant à elles, une très faible possibilité d'être à l'origine du manque d'exactitude.

Par conséquent, l'hypothèse initiale se devant d'être contrevérifiée est celle concernant les erreurs de nature thermique. Des nappes de mesures montrent de façon probante qu'une stabilité thermique de la mobilité n'a presque jamais existé durant le cycle des reprises de mesures. C'est donc le phénomène de dérive dans ces nappes qui

réflètent un changement de pente dans l'écart d'échelle et corrobore le comportement thermique des machines étudié par d'autres travaux. La variable caractérisant cet état thermique est par conséquent manquante au modèle de la mesure utilisé ici.

Une telle observation soulève une lacune importante. La mesure par interférométrie laser, qu'elle soit vouée à une compensation ou à une entrée d'un modèle de simulation, doit être exécutée en connaissant l'état thermique de la machine sur une chaîne de commande comme celle de la Matsuura. Encore faut-il que l'état puisse être maintenu stable et qu'un cycle d'échauffement soit effectué pour établir un plateau thermique identique quelque soit la ligne d'action mesurée. Il faudrait aussi qu'il soit atteignable peu importe l'état initial. La principale difficulté est donc de concevoir un cycle d'échauffement et d'équiper la machine de capteurs pouvant rendre compte de l'évolution thermique dans le temps.

La méthode multi-séquence s'avère montrer plusieurs points positifs. Une identification des écarts machine par optique dégradée est donc possible moyennant un meilleur contrôle des variables thermiques. La voie est peut-être ouverte pour la conception d'un instrument compact avec une miniaturisation des optiques linaires et de rectitudes. Cet appareil pourrait offrir un module dans lequel serait imbriqué, par le prépositionnement des réflecteurs, plusieurs lignes d'action. Une tête laser et un module de séparateur de faisceaux viendrait compléter le concept. Reste à établir si une telle évolution de l'instrument serait technologiquement concevable et surtout compétitive et plus robuste que les systèmes 5&6D.

## RÉFÉRENCES

- CHEN, G., YUAN, J. ET NI, J. (2001). A displacement measurement approach for machine geometric error assessment. *Int. Journal of Machine Tools and Manufacture*, 41, 149–161.
- FRANK, A. ET RUECH, F. (1999). Position measurement in cnc machines : rotary encoder versus linear transducer, how to cope with thermal problems. *Laser Metrology and Machine Performance IV*, 369–378.
- HUANG, S. (1994). Analysis of a model to forecast thermal deformation of ball screw feed drive systems. *Int. Journal of Machine Tools and Manufacture*, 35, 1099–1104.
- KIM, S. ET CHO, D. (1997). Real-time estimation of temperature distribution in a ball screw system. *Int. Journal of Machine Tools and Manufacture*, 37, 451–464.
- LAU, K., MA, Q., CHU, X., LIU, Y. ET OLSON, S. (1999). An advanced 6-degree-of-freedom laser system for quick cnc machine and cmm error mapping and compensation. *Laser Metrology and Machine Performance IV*, 421–433.
- LEE, S., YOO, J. ET YANG, M. (2003). Effect of thermal deformation on machine tool slide guide motion. *Tribology International*, 36, 41–47.
- LONGSTAFF, A., FLETCHER, S. ET FORD, D. (2003). Practical experience of thermal testing with reference to iso 230 part 3. *Laser Metrology and Machine*

*Performance VI*, 473–483.

MIGUEL, P., KING, T. ET DAVIS, E. (1995). Application of laser interferometry for checking cmm. *Laser Metrology and Machine Performance II*, 33–39.

OKAFOR, A. ET ERTEKIN, Y. M. (2000a). Derivation of machine tool error models and error compensation procedure for three axes vertical machining center using rigid body kinematics. *Int. Journal of Machine Tools and Manufacture*, 40, 1199–1213.

OKAFOR, A. ET ERTEKIN, Y. M. (2000b). Vertical machining center accuracy characterization using laser interferometer part 2. angular errors. *Journal of Material Processing Technology*, 105, 407–420.

OKAFOR, A. ET ERTEKIN, Y. M. (2000c). Vertical machining center accuracy characterization using laser interferometer part 2. linear positionnal errors. *Journal of Material Processing Technology*, 105, 394–406.

WHITE, A., POSTLETHWAITE, S. ET FORD, D. (1999). An investigation into relative accuracy of ball-screws and linear encoders over a broad range of application configurations and usage conditions. *Laser Metrology and Machine Performance IV*, 345–355.

WU, C. ET KUNG, Y. (2003). Thernmal analysis for the feed drive system of a cnc machine center. *Int. Journal of Machine Tools and Manufacture*, 43, 1521–1528.

## ANNEXE I

## Résultats expérimentaux supplémentaires

## I.1 Mesures expérimentales linéaires

Voici les nappes de mesures n'ayant pas figurée dans la section 5.4.

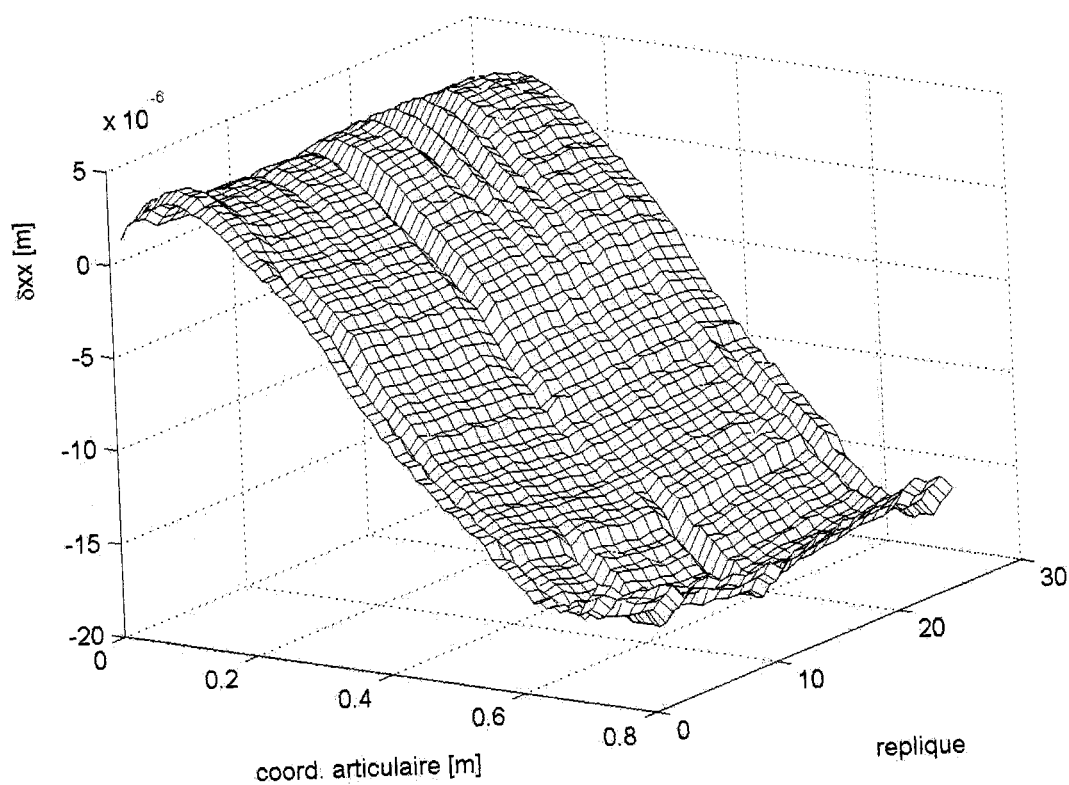


FIG. I.1 Nappe de mesure, ligne d'action N° 3

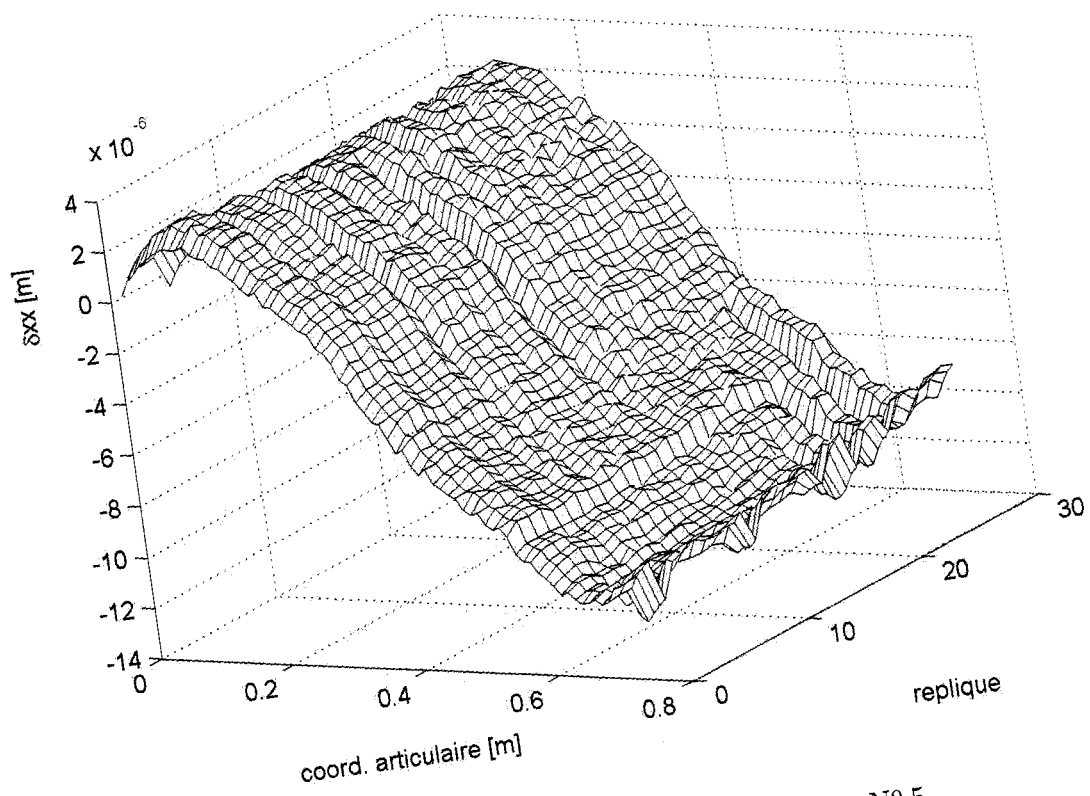


FIG. 1.2 Nappe de mesure, ligne d'action N° 5