

Titre: Application des surfaces de subdivision à la conception géométrique en ingénierie
Title: géométrique en ingénierie

Auteur: Charles Brassard
Author:

Date: 2004

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Brassard, C. (2004). Application des surfaces de subdivision à la conception géométrique en ingénierie [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7348/>
Citation:

Document en libre accès dans PolyPublie Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/7348/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: François Guibault
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

APPLICATION DES SURFACES DE SUBDIVISION À LA CONCEPTION
GÉOMÉTRIQUE EN INGÉNIERIE

CHARLES BRASSARD
DÉPARTEMENT DE GÉNIE INFORMATIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE INFORMATIQUE)
DÉCEMBRE 2004



Library and
Archives Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*

ISBN: 0-494-01291-9

Our file *Notre référence*

ISBN: 0-494-01291-9

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

APPLICATION DES SURFACES DE SUBDIVISION À LA CONCEPTION
GÉOMÉTRIQUE EN INGÉNIERIE

présenté par: BRASSARD Charles

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

Mme. CHERIET Farida, Ph.D., présidente

M. GUIBAULT François, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. KHACHAN Mohammed, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Je veux d'abord témoigner ma reconnaissance à mon directeur de recherche, le professeur François Guibault, pour sa confiance en m'accordant ce travail, la grande liberté d'action que j'ai pu apprécier sous sa direction et ses conseils avisés.

La réalisation de ce travail n'aurait pas aboutie sans l'apport précieux de Robert Magnan, chercheur à l'Institut de recherche d'Hydro-Québec (IREQ), qui a su transmettre son expérience dans le domaine des turbines hydrauliques.

Je remercie tous les membres du projet Opale, notamment Marie-Gabrielle Vallet et Jean-François Dubé, professionnels de recherche, certains anciens membres du CERCA et des collègues étudiants pour leur aide et soutien, ainsi que les membres du jury pour leurs commentaires.

Enfin, l'Institut de recherche d'Hydro-Québec (IREQ) et le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) pour leur soutien financier.

RÉSUMÉ

Les surfaces de subdivision sont un mode de représentation de plus en plus répandu dans le domaine de la modélisation. Elles permettent de définir à l'aide d'un nombre limité de paramètres une géométrie complexe, de topologie arbitraire, qui peut être déformée tout en conservant son intégrité.

Le travail présenté dans ce mémoire entre dans le cadre d'un projet visant l'optimisation automatique de la géométrie d'aubes de turbines hydrauliques par l'analyse numérique d'écoulements. Le processus d'optimisation nécessite l'application de déformations locales et contrôlées à la géométrie tout en minimisant le nombre de paramètres requis. Ce travail évalue la possibilité d'utiliser les surfaces de subdivision pour représenter les géométries d'aubes avec la précision requise.

Après une revue bibliographique de la pointe du progrès dans le domaine des surfaces de subdivision, trois méthodes de reconstruction de la géométrie à l'aide des surfaces de subdivision sont proposées. La première est basée sur l'interpolation transfinie des frontières. La seconde utilise une application logicielle qui convertit une géométrie polygonale directement en surface de subdivision. Enfin la troisième, développée spécifiquement pour ce projet, nécessite plus d'interactions mais permet d'obtenir un résultat plus propice à d'éventuelles déformations. Chaque méthode est validée à l'aide de l'application MESH mesurant l'écart entre deux surfaces polygonales.

Les deux dernières méthodes permettent d'obtenir la précision requise. La troisième offre toutefois le plus grand potentiel d'amélioration.

Ce travail met également en évidence les similitudes entre courbe de subdivision et B-spline cubique. Il présente un nouveau schéma de subdivision, permettant d'obtenir une correspondance exacte, pour un polygone de contrôle donné, avec une courbe B-spline

cubique non-périodique avec vecteur nodal uniforme.

ABSTRACT

Geometric rendering using subdivision surfaces is increasingly widespread for modeling purposes. Such surfaces allow the definition using a limited number of parameters of a complex geometry, of arbitrary topology, which can be edited while maintaining its integrity.

The work presented in this thesis is part of a project aiming to automatically optimize the design of hydraulic turbine blades by computer fluid dynamics (CFD). The optimization process requires that local and controlled changes be applied to the geometry and that the number of parameters required be minimized. This work evaluates the possibility of using subdivision surfaces to define blade geometries within a prescribed tolerance.

After the literature review of the state of the art in subdivision surfaces, three geometric reconstruction methods using subdivision surfaces are proposed. The first is based on a transfinite interpolation of the boundary curves. The second uses a software application that converts a polygonal geometry to a subdivision surface. The third, developed specifically for this project, requires more interactions but produces results more fit for editing purposes. Each method is validated using the MESH application that measures the gap between two polygonal surfaces.

The required precision was attained with the last two methods. However, the third offers more improvement potential.

This work also brings out the similarities between subdivision curves and cubic B-splines. It presents a new subdivision scheme for curves that produces, for a given control polygon, a curve equivalent to a clamped cubic B-spline with uniform nodal vector.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES TABLEAUX	xii
LISTE DES FIGURES	xiii
LISTE DES ANNEXES	xviii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	7
1.1 Courbes et surfaces de subdivision	8
1.1.1 Exemples	8
1.1.2 Caractéristiques	9
1.1.3 Applications et logiciels disponibles	12
1.1.4 Classification des surfaces de subdivision	13
1.1.5 Terminologie	15
1.1.6 Schémas de subdivision	20
1.1.6.1 Schéma de Catmull-Clark	20
1.1.6.2 Schéma de Loop	21
1.1.6.3 Schéma Butterfly Modifié	22
1.1.6.4 Schéma de Kobbelt	23
1.1.6.5 Schéma de Doo-Sabin	24

1.1.6.6	Schéma Midedge	26
1.1.6.7	Schéma Biquartic	27
1.1.6.8	Schéma $\sqrt{3}$	27
1.1.6.9	Schéma 4 – 8	28
1.1.7	Autres schémas et modifications utiles	28
1.1.7.1	NURSS	28
1.1.7.2	Schéma de subdivision combiné	29
1.1.7.3	Schémas primal/dual	30
1.1.7.4	Correction de continuité aux sommets irréguliers	31
1.2	Reconstruction de surfaces	32
1.2.1	Utilisation d'un schéma d'interpolation	32
1.2.2	Halstead	32
1.2.3	Hoppe	34
1.2.4	Surfaces de subdivision dynamique	35
1.2.5	Suzuki	36
1.2.6	MeshToSS	37
1.3	Modification de surfaces	38
1.3.1	Manipulation géométrique	38
1.3.2	Manipulation basée sur la physique	39
1.3.3	Déformation de forme libre (FFD)	40
1.4	Choix du schéma et de la méthode de reconstruction	42
CHAPITRE 2	MÉTHODOLOGIE	43
2.1	Schéma de subdivision de Loop	44
2.1.1	Règles de subdivision	44
2.1.2	Surface limite	46
2.1.3	Calcul des normales	47
2.2	Reconstruction par interpolation transfinie	48

2.2.1	Reconstruction des frontières	50
2.2.1.1	Courbe de subdivision cubique	51
2.2.1.2	Répartition des points d'interpolation	54
2.2.2	Reconstruction de la surface par interpolation transfinie	56
2.3	Reconstruction par MeshToSS	57
2.3.1	Métrique d'erreur quadrique	58
2.3.2	Algorithme	62
2.3.3	Paramètres du programme	62
2.3.4	Modifications apportées au programme	62
2.4	Reconstruction par sections	63
2.5	Évaluation de la reconstruction	65
2.5.1	Calcul d'erreur pour les courbes	67
2.5.1.1	Calcul d'erreur entre B-spline et courbe de subdivision	67
2.5.1.2	Correspondance entre courbes de subdivision et B-splines cubiques	69
2.5.2	Mesure d'écart par MESH	73
CHAPITRE 3 IMPLANTATION DE SUBDIV		75
3.1	Fichiers	76
3.1.1	Fichier d'entrée	76
3.1.2	Fichier de sauvegarde	77
3.2	Courbes de subdivision	77
3.3	Surfaces de subdivision	78
3.3.1	Structure de données	78
3.3.2	Étapes de subdivision	79
3.4	Reconstruction par interpolation transfinie	81
3.5	Reconstruction par l'application MeshToSS	81
3.6	Reconstruction par sections	82

3.7	Évaluation des erreurs	83
3.7.1	Courbes	83
3.7.2	Surfaces	83
3.7.3	Application graphique SubDiv	84
CHAPITRE 4 VALIDATION		86
4.1	Mesure d'erreur	87
4.1.1	Courbes	87
4.1.2	Surfaces	89
4.2	Reconstruction de courbe	91
4.2.1	Par décalage	91
4.2.2	Par zonages	93
4.3	Reconstruction de surface	94
4.3.1	Méthode de reconstruction basée sur MeshToSS	95
4.3.2	Par sections	97
CONCLUSION		101
RÉFÉRENCES		106
ANNEXES		111

LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU 1.1	Schémas de subdivision	14
TABLEAU 1.2	Valence des sommets réguliers	18

LISTE DES FIGURES

FIGURE 1	Processus de résolution	1
FIGURE 2	Coupe d'une central hydraulique avec roue Francis	2
FIGURE 3	Schéma d'une roue de turbine Francis	2
FIGURE 4	Analyse d'écoulement et modifications	3
FIGURE 5	Aube format STL, frontières, format DAT	5
FIGURE 1.1	Quatre niveaux de subdivision avec l'algorithme de Chaikin	9
FIGURE 1.2	Quatre niveaux de subdivision Catmull-Clark sur un cube avec le programme subdivide 2.0	10
FIGURE 1.3	Résultats des schémas de subdivision sur un cube, Zorin et Schröder, 2000	13
FIGURE 1.4	11 carrelages isoèdres, Zorin et Schröder, 2000	16
FIGURE 1.5	Raffinement selon le type de subdivision et le maillage	17
FIGURE 1.6	Masques de Catmull-Clark, Prautzsch et Umlauf, 1998	18
FIGURE 1.7	Maillage rectangulaire avec deux sommets irréguliers (Zorin et Schröder, 2000)	19
FIGURE 1.8	Schéma de Catmull-Clark	21
FIGURE 1.9	Schéma de Loop	22
FIGURE 1.10	Schéma Butterfly Modifié	23

FIGURE 1.11	Schéma de Kobbelt	24
FIGURE 1.12	Schéma de Doo-Sabin	25
FIGURE 1.13	Schéma de Midedge	26
FIGURE 1.14	Schéma biquartic	27
FIGURE 1.15	Surfaces NURSS avec Catmull-Clark	29
FIGURE 1.16	Surfaces de subdivision combinées avec Catmull-Clark (Levin, 2000)	30
FIGURE 1.17	Surfaces de subdivision combinées - découpage	30
FIGURE 1.18	Différence de courbure gaussienne avant et après modification du schéma de Catmull-Clark, (Prautzsch et Umlauf, 1998)	31
FIGURE 1.19	Reconstruction avec la méthode de Halstead <i>et al.</i> , 1993	33
FIGURE 1.20	Reconstruction avec la méthode de Hoppe <i>et al.</i> , 1994	34
FIGURE 1.21	Exemples de reconstruction de surface (Mandal <i>et al.</i> , 1999)	35
FIGURE 1.22	Algorithme de suzuki (Suzuki <i>et al.</i> , 1999)	36
FIGURE 1.23	Reconstruction de géométries par le programme MeshToSS , (Kanai, 2001)	37
FIGURE 1.24	Étapes de modélisation d'une main avec Maya	39
FIGURE 1.25	Exemples de déformation de surface (Mandal <i>et al.</i> , 1999)	40
FIGURE 1.26	Exemple de déformation de forme libre (MacCracken et Joy, 1996)	41

FIGURE 2.1	Schéma de subdivision de Loop	44
FIGURE 2.2	Raffinement d'un maillage triangulaire suite à une subdivision de Loop	46
FIGURE 2.3	Règles pour obtenir la position limite de sommets existants	46
FIGURE 2.4	Calcul des tangentes	48
FIGURE 2.5	Étapes de reconstruction par transfini	49
FIGURE 2.6	Transfini sur une aube complète	50
FIGURE 2.7	Comparaison entre une paramétrisation uniforme et une paramétrisation logarithmique	53
FIGURE 2.8	Courbure de la frontière aube-couronne	55
FIGURE 2.9	Distribution de la courbure en fonction du décalage	55
FIGURE 2.10	Opérations pour obtenir une interpolation transfinie	57
FIGURE 2.11	Déraffinement d'arête	59
FIGURE 2.12	Opération de déraffinement avec quadrique d'arête	61
FIGURE 2.13	Définition de la longueur de corde	65
FIGURE 2.14	Asymétrie de la distance de Hausdorff	68
FIGURE 2.15	Comparaison B-spline cubique uniforme non-périodique et courbe de subdivision	70
FIGURE 2.16	Comparaison B-spline cubique uniforme non-périodique et courbe de subdivision modifiée	71

FIGURE 2.17	Fenêtre principale de l'application MESH avec à droite la version maillage d'une surface de subdivision et à gauche l'écart avec la surface de référence en tons de gris	74
FIGURE 3.1	Diagramme de paquettage de la bibliothèque de SubDiv	76
FIGURE 3.2	Diagramme de classes pour la représentation des surfaces	78
FIGURE 3.3	Schématisation de la structure de données	80
FIGURE 3.4	Interface graphique de l'application SubDiv	85
FIGURE 4.1	Vues de profil et de face des sections 5 (haut) et 65 (bas) de la géométrie DAT	87
FIGURE 4.2	Effet du nombre de subdivision sur la mesure d'erreur entre B-spline et courbe de subdivision pour deux sections d'aube	88
FIGURE 4.3	Erreurs symétriques moyennes et maximales en fonction du nombre de subdivisions géométries STL (haut) et DAT (bas)	90
FIGURE 4.4	Erreur mesurée en fonction du déplacement du point	91
FIGURE 4.5	Erreur entre courbe cible et courbe de subdivision en fonction du décalage pour les sections 5 et 65 du fichier DAT	92
FIGURE 4.6	Profil d'un bord d'attaque et reconstructions obtenues avec deux valeurs de décalage (< 600 à gauche, > 600 à droite)	93
FIGURE 4.7	Profils des bords d'attaque des sections 5 (gauche) et 65 (droite) .	93
FIGURE 4.8	Comparaison des erreurs avec et sans zonage	94
FIGURE 4.9	Erreur après reconstruction par MeshToSS pour la géométrie STL	96

FIGURE 4.10 Erreur après reconstruction par **MeshToSS** pour la géométrie DAT 97

FIGURE 4.11 Erreur en fonction du nombre de points par section en utilisant la surface de référence complète (haut) et tronquée (bas) 99

FIGURE 4.12 Comparaison de l'erreur par sections et par **MeshToSS** en utilisant la surface de référence complète (gauche) et tronquée (droite) 100

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	FORMATS DE FICHIERS	111
I.1	Fichier STL (.stl)	111
I.2	Fichier DAT (.dat)	111
I.3	Fichier VRML (.wrl)	112
I.4	Fichier PTS (.pts)	112
ANNEXE II	B-SPLINE PAR INTERPOLATION ET APPROXIMATION DE POINTS	113
II.1	B-spline par interpolation	113
II.2	B-spline par approximation	114

INTRODUCTION

Ce mémoire explore la possibilité de mettre en application la théorie des surfaces de subdivision pour modéliser et modifier des géométries industrielles. Il s'inscrit dans le contexte du projet OPALÉ établi entre l'Institut de Recherche d'Hydro-Québec (IREQ) et l'École polytechnique et visant l'optimisation de pales de roues de turbines hydrauliques par un processus automatique d'analyse et de simulation numérique schématisé à la figure 1.

1. Dans ce processus, le modeleur géométrique réalise deux fonctions :

- Fournir au mailleur une représentation suffisamment précise de la géométrie de l'aube de la roue pour permettre une analyse numérique d'écoulements (Computational Fluid Dynamics) ;
- Apporter des modifications mineures et contrôlées à la géométrie en fonction des informations obtenues des modules d'analyse des résultats.

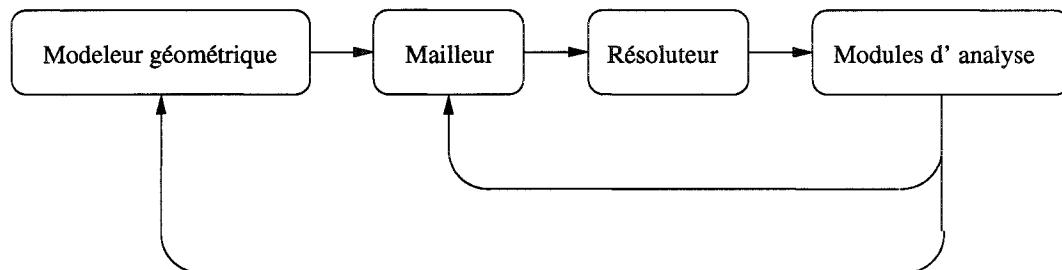


FIGURE 1 Processus de résolution

Le projet porte sur des géométries d'aube de roues de turbines Francis en opération, ayant subi des réparations au fil des ans et qui présentent des lacunes de rendement par rapport aux résultats obtenus sur modèles. La roue est le cœur d'un groupe turbine-alternateur, c'est elle qui transforme l'énergie hydraulique en énergie mécanique transmise à l'alternateur par l'entremise d'un arbre (voir coupe d'une centrale à la figure 2). Un modèle de roue d'une turbine de type Francis est montré à la figure 3. Cette roue est composée d'une série de pales (3) soudées à une couronne (7) au dessus et à une ceinture (4) en des-

sous. L'écoulement entre par le bord d'attaque (1) et sort par le bord de fuite (2). Chaque pale offre une surface concave appelée intrados (6) sur laquelle la force hydraulique est appliquée et une surface convexe appelée extrados (5). La figure 4 montre à gauche, la schématisation d'une analyse d'écoulement numérique et à droite, des modifications apportées au bord de fuite d'une aube telles que recherchées par ce projet.

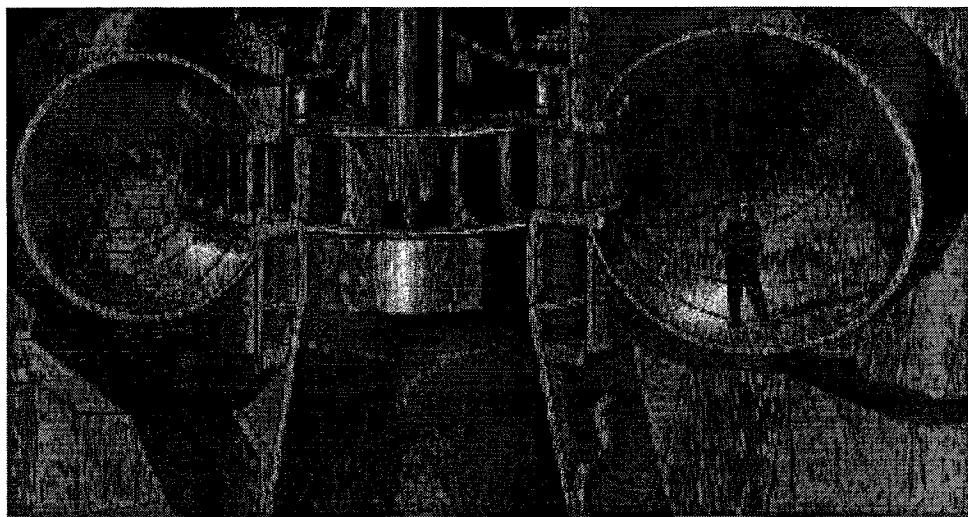


FIGURE 2 Coupe d'une central hydraulique avec roue Francis

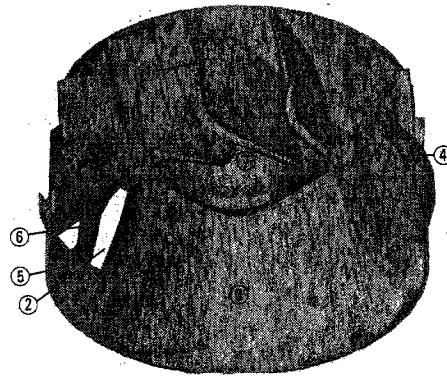


FIGURE 3 Schéma d'une roue de turbine Francis

L'efficacité du processus d'optimisation repose sur la réduction du nombre de paramètres de déformation géométrique. Les géométries fournies au maillage lors d'analyses d'écoulement sont généralement tirées de surfaces paramétriques (NURBS). Ces surfaces permettent de définir de façon précise des formes libres complexes de continuité désirée,

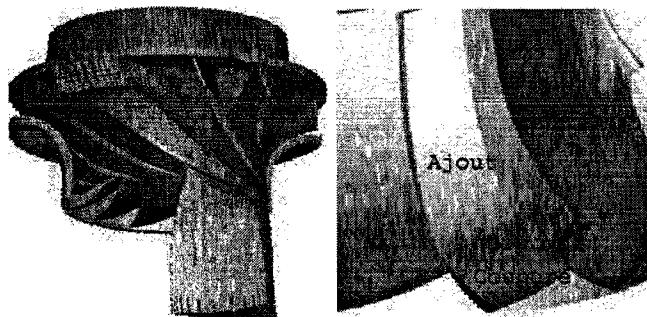


FIGURE 4 Analyse d'écoulement et modifications

et d'obtenir la position d'un point dans l'espace cartésien tridimensionnel en utilisant deux paramètres (u, v). La définition paramétrique facilite la conversion de la géométrie à un format compatible avec le mailleur. Malgré ces avantages, ce mode de représentation ne convient pas à ce projet puisqu'il ne permet pas de contrôler adéquatement le nombre de paramètres. En effet, les surfaces NURBS sont construites à partir de deux séries de courbes B-splines suivant chacune des directions paramétriques et les B-splines de chaque série doivent être définies avec le même nombre de points de contrôle. Une région plus détaillée de la géométrie entraîne donc une multiplication des points de contrôle sur l'ensemble de la surface. Ce problème est souvent contourné en définissant la géométrie par un assemblage de patchs NURBS de manière à limiter la concentration de points de contrôle aux seules régions qui les nécessitent. Or, cette solution peut difficilement s'appliquer à un projet de déformation de géométrie qui entraînerait possiblement des discontinuités inter-patchs qui ne pourraient être automatiquement corrigées.

En revanche, une seule surface de subdivision peut représenter une géométrie complexe tout en garantissant un degré de continuité. Elle peut donc être déformée localement et de façon contrôlée sans perdre son intégrité. Une surface de subdivision est définie uniquement par un maillage initial formé généralement de triangles ou de quadrilatères. La surface en tant que telle est obtenue par l'application infinie d'opérations géométriques sur ce maillage initial. Pour certains types de subdivision, il est toutefois possible de calculer la position correspondante exacte sur la surface de chacun des sommets du maillage.

Ce nombre de sommets, qui est par ailleurs les seules coordonnées connues de la surface, peut être multiplié par l'application des opérations de subdivision. Ces observations font ressortir les deux différences importantes entre les surfaces NURBS et les surfaces de subdivision :

- Connaissance de la surface : contrairement aux surfaces paramétriques qui sont entièrement définies, les surfaces de subdivision ne sont connues qu'aux sommets du maillage qui les définissent. Comment évaluer la précision de la surface si elle n'est connue que d'une façon discrète ?
- Nombre de paramètres de déformation : Les surfaces de subdivision sont définies uniquement par des points de contrôle alors que les NURBS ajoutent des variables de pondération et des vecteurs noraux. Comment cette "rigidité" des surfaces de subdivision affectera-t-elle le nombre de points de contrôle nécessaires à la définition de la surface ?

Les géométries fournies par l'IREQ pour valider la reconstruction par surface de subdivision proviennent de mesures (balayage laser) prises directement sur des roues installées et converties en surfaces paramétriques (NURBS). En tenant compte de la précision des instruments de mesures et des vibrations, ces surfaces renferment une erreur de l'ordre du millimètre. Elles se présentent soit en format STL (stereolithography) qui correspond à un maillage dense de triangles, soit en format DAT qui définit la géométrie par une série de sections, de la couronne à la ceinture, obtenues par l'intersection de l'aube avec une surface de révolution suivant l'axe de la roue. Chaque section est définie par un nombre identique de points. Les géométries d'aube sont bornées par quatre frontières : au bord de fuite du côté intrados et du côté extrados, à la jonction avec la couronne et à la jonction avec la ceinture. La figure 5 montre un exemple de chacun des formats.

Le principal objectif de ce mémoire est de déterminer si les surfaces de subdivision peuvent avantageusement être utilisées au lieu des surfaces paramétriques pour représen-

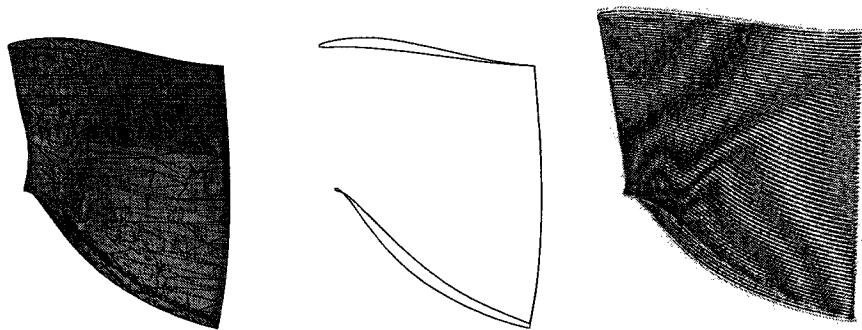


FIGURE 5 Aube format STL, frontières, format DAT

ter les aubes de manière à faciliter l'implantation du cycle automatique d'optimisation. Pour valider cette reconstruction, la tolérance acceptable entre la géométrie fournie par l'IREQ et la surface de subdivision obtenue est établie au millième du diamètre de la roue ;

L'approche méthodologique utilisée pour atteindre cet objectif consiste à réunir les trois éléments suivants :

- **Schéma de subdivision** : Le type de surface de subdivision doit permettre de représenter une surface limite lisse (continuité C^2) avec un maillage initial le plus grossier possible. Il doit aussi s'appliquer à une géométrie ouverte ;
- **Méthode de reconstruction** : La surface de subdivision doit se construire directement à partir des géométries fournies par l'IREQ.
- **Méthode de mesure d'erreur** : L'écart entre la reconstruction et la géométrie initiale doit pouvoir être calculée avec précision de manière à vérifier que les critères de tolérance sont respectés.

Ce mémoire comporte les quatre chapitres suivants :

- **Revue bibliographique** : Étudier la pointe du progrès dans le domaine des surfaces de subdivision. Porter une attention particulière au rendu de caractéristiques, à la reconstruction de surfaces à partir d'un nuage de points ou d'une triangulation initiale et aux méthodes de déformations. Faire ressortir les avantages et les inconvénients des différentes options. Sélectionner les solutions les plus appropriées ;

- **Développement des solutions retenues** : Approfondir la théorie des solutions retenues de manière à recueillir toutes les informations nécessaires à une implantation informatique ;
- **Implantation sous forme d'une librairie objet** : Effectuer l'analyse et la conception d'une librairie objet en C++ à l'aide du langage UML. Implanter la librairie ainsi qu'une application graphique permettant d'en vérifier les fonctionnalités ;
- **Test et vérification** : Valider les méthodes choisies sur des surfaces test et mesurer la qualité des résultats obtenus.

Il se termine par une analyse et une discussion des résultats obtenus et propose des voies supplémentaires de recherche.

CHAPITRE 1

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

L'origine de l'utilisation de la subdivision pour la représentation géométrique remonte au milieu du siècle dernier lorsqu'elle a été introduite pour représenter des courbes lisses par l'application successive d'opération de "coupure de coins" sur un polygone initial. Elle a par la suite été éclipsée dans les années 60, avec l'avènement des modes de représentations paramétriques (B-spline et NURBS), plus propices alors aux applications industrielles. Il y a une vingtaine d'années, des publications introduisant les surfaces de subdivision ont ravivé l'intérêt pour ce mode de représentation qui est maintenant largement répandu dans les domaines de la modélisation géométrique, du cinéma et des jeux vidéos. L'attrait des surfaces de subdivision provient de la simplicité des concepts sous-jacents, de la qualité des surfaces obtenues, de leurs capacité à décrire des formes complexes à l'aide d'une seule surface et surtout de leurs maléabilité, celles-ci pouvant être déformées à volonté tout en conservant leurs intégrité. Malgré ces qualités, ce mode de représentation n'est pas encore utilisé dans le domaine industriel tel que proposé dans ce projet.

Les surfaces de subdivision font actuellement l'objet d'activités de recherche multiples, c'est pourquoi ce chapitre tente en premier lieu de dresser un portrait complet de la pointe du progrès dans le domaine. Cette première étape est nécessaire pour choisir le type de surface de subdivision le plus approprié pour ce projet.

En second lieu, puisque l'objectif principal de ce travail est de reproduire une géométrie industrielle à l'aide d'une surface de subdivision, ce chapitre examine les différentes méthodes de reconstruction disponibles.

En troisième lieu ce chapitre examine les méthodes de déformation de surfaces. Cette

section est donnée à titre d'information puisque la déformation ne fait pas partie de ce travail bien qu'il entre dans la réalisation du projet Opale.

Le chapitre se termine par la présentation des choix des éléments qui seront utilisés.

1.1 Courbes et surfaces de subdivision

Cette section débute par des exemples de courbes et de surfaces de subdivision pour faire ressortir leur caractéristiques par rapport aux courbes B-splines et aux surfaces NURBS. Elle enchaîne avec un répertoire des principales surfaces de subdivision, leurs classification, la terminologie et une description plus détaillée de chacune.

1.1.1 Exemples

Le principe de subdivision provient du souci de représenter une géométrie lisse à l'aide d'un minimum de points. La figure 1.1 illustre l'algorithme de Chaikin, 1974, qui permet d'obtenir, à partir d'une polyligne initiale définie par cinq sommets, une nouvelle polyligne décrivant une courbe lisse après seulement trois opérations de subdivision. Ces opérations, nommées sectionnement des coins (corner cutting), sont identiques à chaque niveau de raffinement et consistent à positionner les nouveaux sommets aux positions $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ des segments du polygone précédent.

Riesenfeld, 1975, a démontré que la courbe lisse vers laquelle font converger les opérations de subdivision de l'algorithme de Chaikin est une B-spline quadratique uniforme périodique (unclamped, voir Piegl et Tiller, 1995, chapitre 12).

Alors que les courbes de subdivision se forment à partir de polylinéaires ouvertes ou fermées, les surfaces le font à partir d'un maillage initial sur lequel sont appliquées des opérations topologiques et géométriques pour former un nouveau maillage plus raffiné

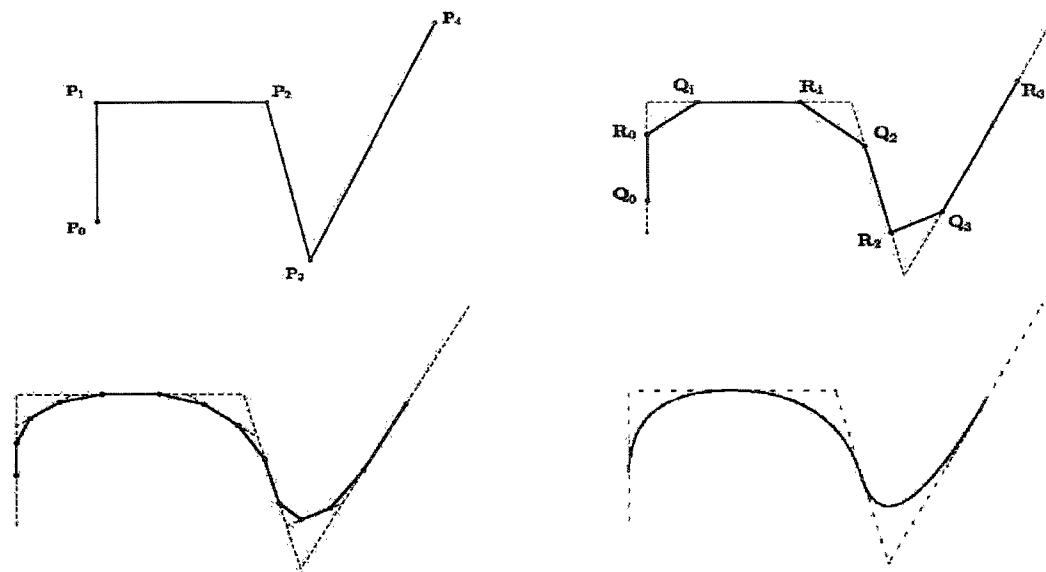


FIGURE 1.1 Quatre niveaux de subdivision avec l'algorithme de Chaikin

qui converge vers une forme limite comme le montre la figure 1.2, où un cube initial converge vers une forme sphérique lisse.

Comme pour les courbes, il y a un lien direct pour cet algorithme de subdivision entre la surface limite correspondant à une des faces initiales et une B-spline bi-cubique uniforme.

1.1.2 Caractéristiques

Ces exemples montrent que les géométries de subdivision sont définies par un nombre limité de sommets, mais que ceux-ci sont positionnés de manière à respecter certaines contraintes de lissage intrinsèques à la définition des géométries paramétriques. Ces observations permettent de situer les surfaces de subdivision entre les représentations discrètes (ligne polygonales ou surfaces polygonales) et les représentations paramétriques (B-splines et NURBS). Les exemples font déjà ressortir l'avantage des géométries de subdivision par rapport à une représentation discrète.

Par ailleurs les surfaces de subdivision présentent certaines des propriétés intéressantes

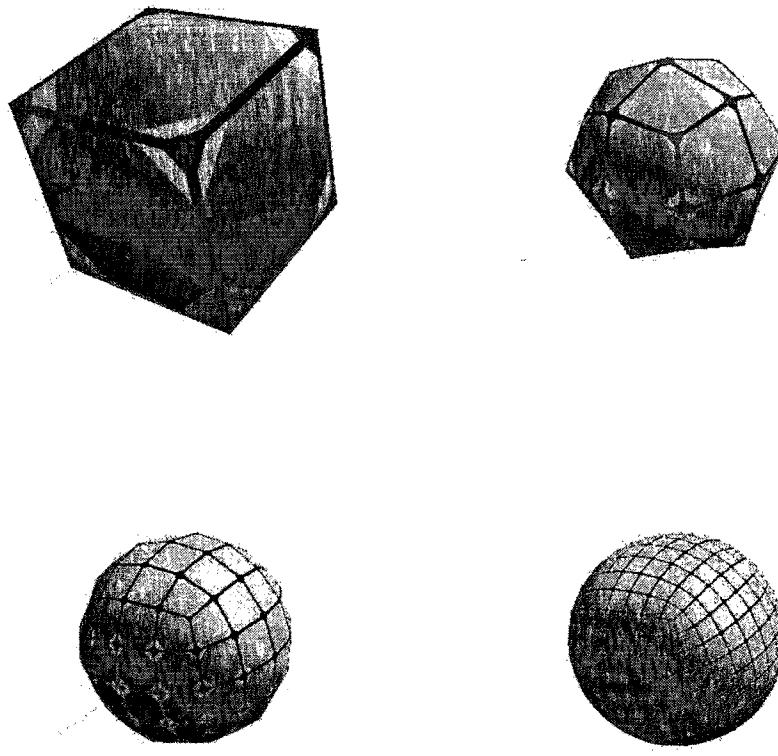


FIGURE 1.2 Quatre niveaux de subdivision Catmull-Clark sur un cube avec le programme subdivde 2.0

des surfaces B-splines telles que :

- **Support compact** : le déplacement d'un sommet sur le polygone de contrôle n'influence qu'une région de la géométrie à proximité de ce sommet ;
- **Définition locale** : les règles servant au calcul de la géométrie n'utilisent que les points voisins de la région de calcul ;
- **Invariance affine** : la géométrie étant définie par des sommets, toutes les transformations (translation, mise à l'échelle, rotation, etc.) peuvent s'appliquer directement sur les points de contrôle ;

- **Simplicité** : la surface de subdivision se calcule par l’application successive de pondérations sur les sommets existants ;
- **Continuité** : les règles de subdivision garantissent un degré de continuité à la surface limite.

Toutefois, les splines possèdent des avantages évidents, notamment :

- **Continuité** : Les règles de subdivision imposent une continuité fixe alors qu’il est possible d’imposer la continuité voulue sur une géométrie paramétrique ;
- **Interrogation de surface** : Grâce aux paramètres, il est possible de calculer la position d’un point sur l’ensemble de la géométrie paramétrique alors que la géométrie de subdivision ne permet de connaître que la position des points générés par les règles de subdivision ;
- **Vecteur nodal** : En plus du polygone de contrôle, les NURBS sont définies par un vecteur nodal. Ce vecteur permet d’obtenir une infinité de nuance de formes en variant les valeurs nodales.

Malgré ces limitations, les géométries de subdivision, et particulièrement les surfaces, offrent un avantage indéniable par rapport aux surfaces paramétriques : elles permettent de définir à partir d’un seul maillage initial une géométrie de topologie arbitraire. Les surfaces paramétriques sont limitées à des topologies homomorphiques à un rectangle. Pour définir une géométrie plus complexe, il faut assembler un certain nombre de patchs indépendantes. Cet assemblage nécessite des contraintes de jonction aux interfaces qui ne se présentent pas pour les surfaces de subdivision étant donné qu’une certaine continuité est assurée sur son ensemble (Levin, 2000).

1.1.3 Applications et logiciels disponibles

La possibilité de définir des géométries complexes, de topologie arbitraire, à partir d'un seul maillage de départ ainsi que les possibilités d'édition sont à l'origine de l'essor des géométries de subdivision dans plusieurs domaines d'applications graphiques, notamment dans les films d'animation (Gery's game, Toy Story II), les personnages fictifs dans les films (The hulk, The lord of the ring), les jeux vidéo et la publicité. Aussi, cette revue a fait ressortir d'autres applications marginales telles que leur intégration dans la modélisation par éléments finis de plaques minces (Cirak *et al.*, 2001) et l'utilisation d'un schéma de subdivision pour l'analyse de l'écoulement des fluides (Weimer et Warren, 1999).

Par ailleur, voici une liste d'applications disponibles sur le web et qui ont été utilisées dans la réalisation de cette étude :

- **Maya Personal Learning Edition** : une version éducative du logiciel Maya commercial utilisant les surfaces de subdivision est disponible gratuitement de leur site web (<http://www.alias.com>) ;
- **Subdivide 2.0** : Ce programme développé par le Media Research Lab à l'université de New York permet de visualiser la subdivision de surfaces initiales en format VRML modifié (des exemples de géométries sont fournis). Les schémas de Loop et de Catmull-Clark sont utilisés.
(<http://mrl.nyu.edu/~biermann/subdivision/>) ;
- **MeshToSS** : Converti un maillage initial dense de triangles en une surface de subdivision de type Loop. Le logiciel ne fonctionne qu'en version exécutable pour Windows. Par contre le code source est fourni.
(<http://graphics.sfc.keio.ac.jp/MeshToSS/>) ;
- **MESH** : Mesure l'erreur entre deux surfaces représentées par des triangles en utilisant la distance de Hausdorff (<http://mesh.epfl.ch/>) ;

1.1.4 Classification des surfaces de subdivision

Les surfaces de subdivision sont classées selon des schémas. Un schéma porte souvent le nom de son ou ses créateur(s) et décrit l'ensemble des opérations géométriques nécessaires au calcul d'une surface limite à partir d'un maillage initial. Pour un maillage initial de forme identique, chaque schéma produit une surface limite différente (figure 1.3). Le tableau 1.1 présente les principaux schémas de subdivision répertoriés.

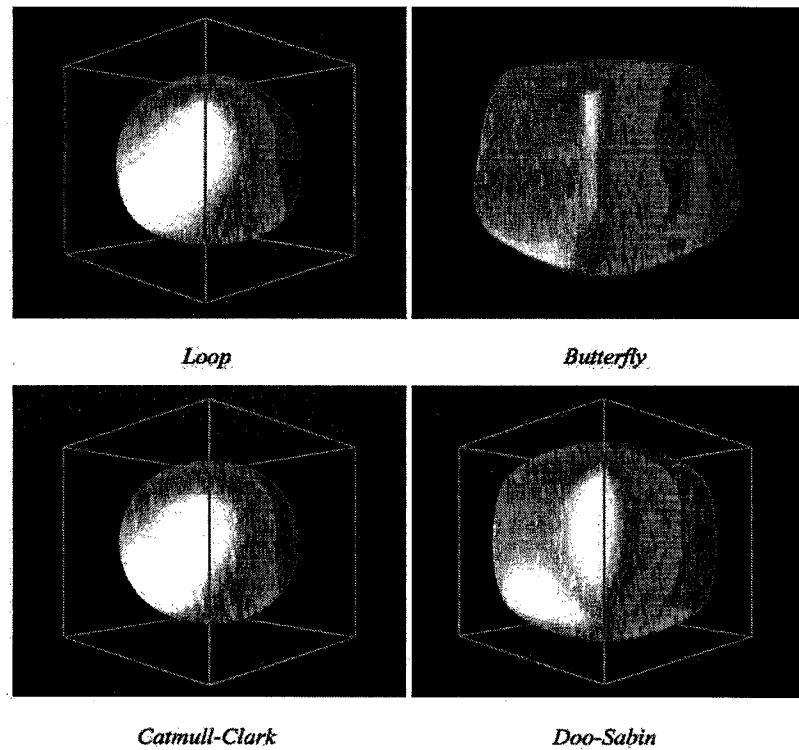


FIGURE 1.3 Résultats des schémas de subdivision sur un cube, Zorin et Schröder, 2000

Les différents schémas sont classés selon les caractéristiques suivantes :

- **Type de schéma :** Un schéma de subdivision peut être de deux types :
 - **Schéma d'interpolation :** Les sommets du maillage initial et chaque nouveau sommet obtenu par les opérations de subdivision appartiennent à la surface limite (par exemple pour le schéma *Butterfly* de la figure 1.3, le cube est à l'intérieur de la

TABLEAU 1.1 Schémas de subdivision

Nom du schéma	Type de schéma	Type de maillage	Type de subdivision	Continuité
Catmull-Clark	approximation	quadrilatère	primal	C^2
Loop	approximation	triangle	primal	C^2
Butterfly	interpolation	triangle	primal	C^1
Kobbelt	interpolation	quadrilatère	primal	C^1
Doo-Sabin	approximation	quadrilatère	dual	C^1
Midedge	approximation	quadrilatère	dual	C^1
Biquartic	approximation	quadrilatère	dual	C^2
$\sqrt{3}$	approximation	6^3	tiling	C^2
4 – 8	approximation	4.8^2	tiling	C^4

surface) ;

- **Schéma d'approximation :** À chaque étape de subdivision tous les anciens sommets sont déplacés et les nouveaux sommets sont placés pour converger vers (mais ne pas atteindre) la surface limite.
- **Type de maillage :** Normalement le maillage est formé de faces triangulaires ou quadrilatérales. Toutefois, certains schémas plus récents utilisent les carrelages (tilings). Ces carrelages sont isoèdre, c'est-à-dire que chaque tuile est identique et pour chaque sommet, les angles entre les arêtes sont égaux comme le montre la figure 1.4. Toutefois, le maillage des schémas $\sqrt{3}$ et 4 – 8 sont formés de triangles.
- **Type de subdivision :** Le type de subdivision détermine les changements géométriques que subit la surface d'un niveau de subdivision à l'autre. Il y a deux types principaux de subdivision : la division des faces (face split ou primal) et division des sommets (vertex split ou dual). La figure 1.5 montre les types de subdivision associés aux schémas du tableau 1.1. Les trois premiers graphiques s'appliquent aux sept premiers schémas. Le maillage subdivisé conserve l'allure général du maillage initial mais chaque entité (face ou sommet) est multiplié par quatre. Les deux derniers graphiques s'appliquent aux schémas $\sqrt{3}$ et 4 – 8 respectivement. Pour le schéma $\sqrt{3}$, un sommet est ajouté au barycentre de chaque triangle pour diviser la face en trois et les arêtes du maillage précédent sont permutées pour obtenir un maillage identique au précédent mais réduit

de $\sqrt{3}$ et ayant subit une rotation de 30 degrés. Pour le schéma 4 – 8, chaque triangle est divisé en deux, le maillage obtenu est réduit de $\sqrt{2}$ et a subit une rotation de 45 degrés par rapport à l'original.

- **Continuité :** Le degré de continuité de la surface de subdivision est démontré mathématiquement. Toutefois, ces continuités ne s'appliquent qu'aux sommets réguliers (définis à la section suivante). La continuité aux autres sommets est généralement inférieure d'un ordre.

Tous ces schémas sont dits stationnaires, c'est-à-dire que les mêmes règles s'appliquent à chaque niveau de subdivision. Dans certains cas, cette uniformité permet de représenter l'opération de subdivision comme une opération matricielle sur les sommets du niveau précédent. L'analyse de ces matrices a permis de définir des fonctions fournissant directement, pour un sommet donné à un niveau de subdivision quelconque, sa position sur la surface limite. Ces mêmes fonctions permettent d'effectuer l'opération inverse, soit d'obtenir le polygone de contrôle correspondant à un maillage dont les sommets appartiennent à la surface que l'on veut approximer, en résolvant un système d'équations.

1.1.5 Terminologie

- **Courbe et surface initiales :** Dans ce mémoire, la ligne polygonale décrivant la courbe de subdivision avant toute subdivision est appelée courbe initiale (C^0) et de la même façon, le maillage de départ est appelé surface initiale (S^0).
- **Courbe et surface limites :** Puisque les schémas de subdivision de type approximation font converger une courbe ou un surface initiale vers une forme limite qui n'est atteinte qu'après l'application infinie des règles de subdivision, elles seront qualifiées de courbe et de surface limites (C^∞ et S^∞).
- **Nouveaux sommets et sommets existants :** Dans le processus de subdivision, les sommets ajoutés seront dénommés *nouveaux sommets* et les sommets obtenus du niveau de

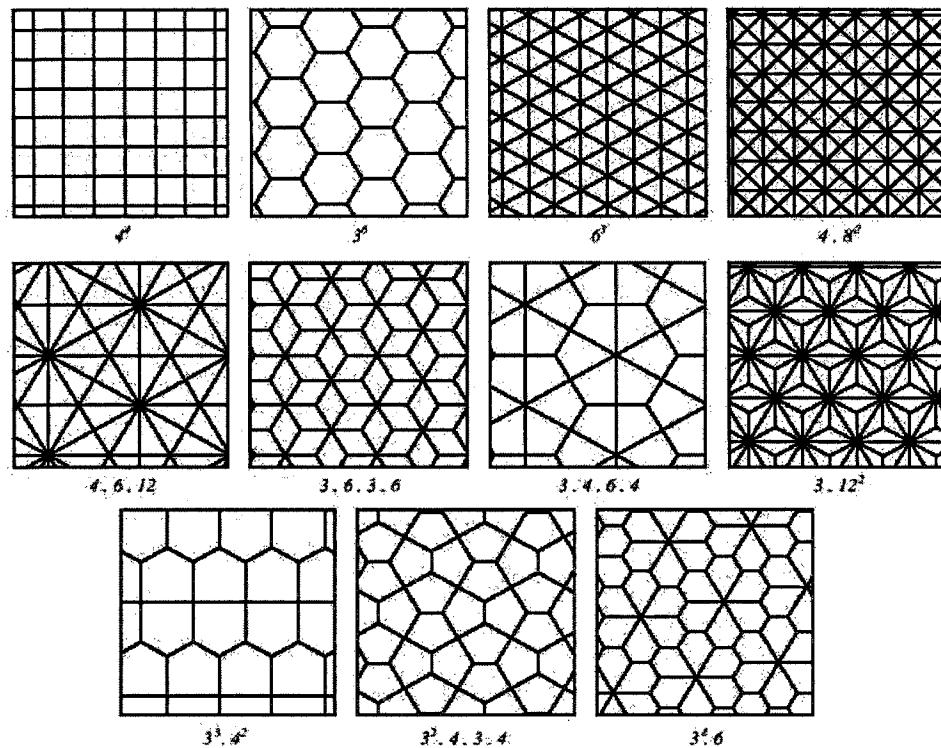


FIGURE 1.4 11 carrelages isoèdres, Zorin et Schröder, 2000

subdivision précédente seront appelés *sommets existants*.

- **Masque** : Tant pour les courbes que pour les surfaces, les règles de subdivision sont exprimées à l'aide de masques. La figure 1.6 montre les masques du schéma de Catmull-Clark pour les nœuds internes d'un maillage formé de quadrillatères. Les deux premiers masques s'appliquent à la génération de nouveaux sommets (au centre du quadrillatère pour le premier, à chaque arête pour le deuxième), et le troisième au calcul de la nouvelle position d'un sommet hérité du niveau de subdivision précédent. Les fractions (dont la somme égale l'unité pour chaque masque) sont les pondérations appliquées aux coordonnées des sommets voisins pour obtenir la position du nouveau sommet ou la nouvelle position du sommet hérité. Pour le troisième masque, la pondération est fonction de la valence n du sommet en question. Ces masques ont servis aux étapes de subdivision de la figure 1.2.
- **Sommet régulier et irrégulier** : Chaque sommet possède une valence, c'est-à-dire un

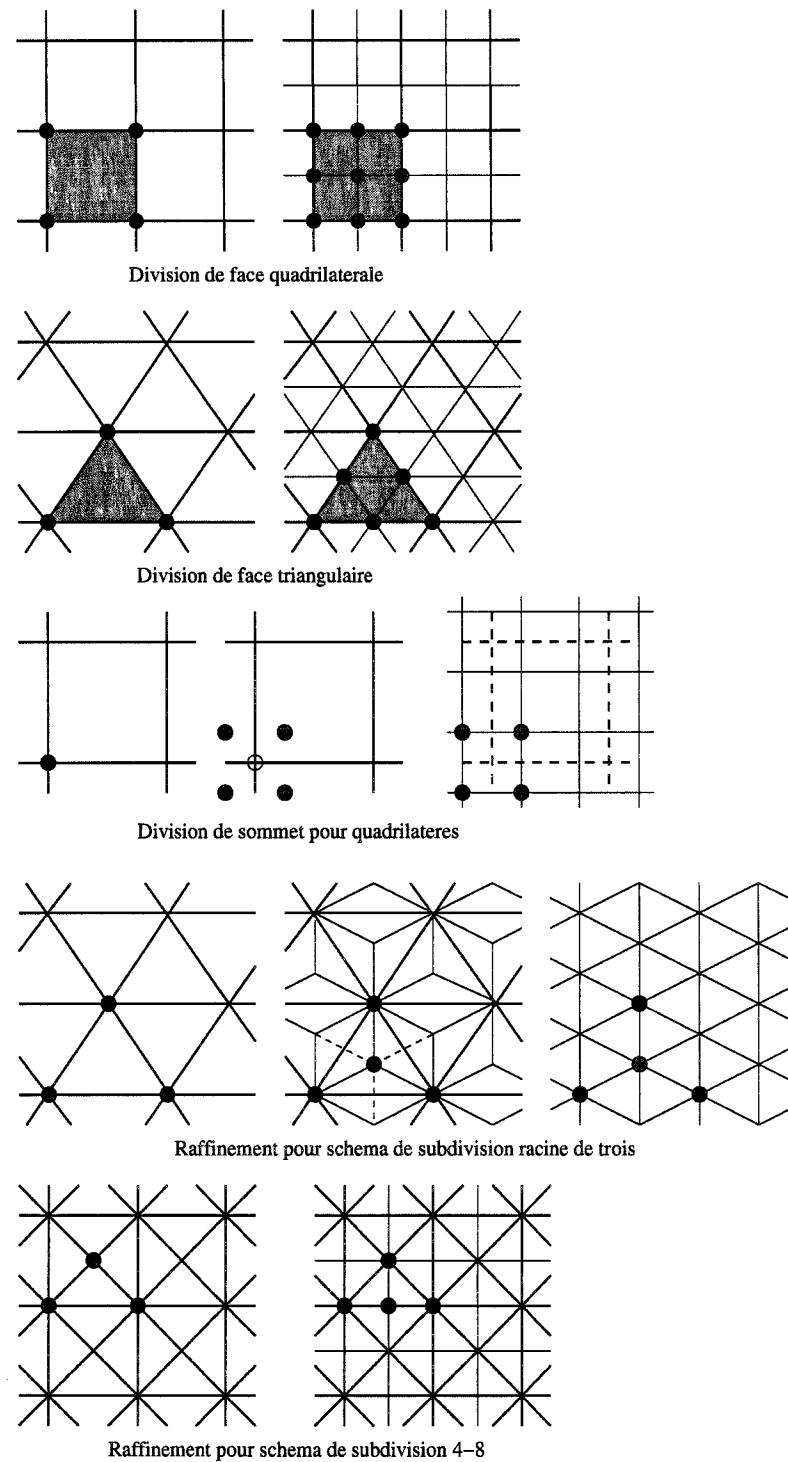


FIGURE 1.5 Raffinement selon le type de subdivision et le maillage

TABLEAU 1.2 Valence des sommets réguliers

Sommet	Quadrilatère	Triangle
Intérieur	4	6
Frontière	3	4

nombre fixe d'arêtes associées. Un sommet est régulier lorsque sa valence est conforme aux valeurs du tableau 1.2. Tout sommet qui ne respecte pas ces valences est un sommet irrégulier. La figure 1.1.5 présente deux niveaux de subdivision d'un maillage qui comporte deux sommets irréguliers et montre que l'opération de subdivision n'ajoute que des sommets réguliers de sorte que la quantité des sommets irréguliers reste constante à tout niveau de subdivision.

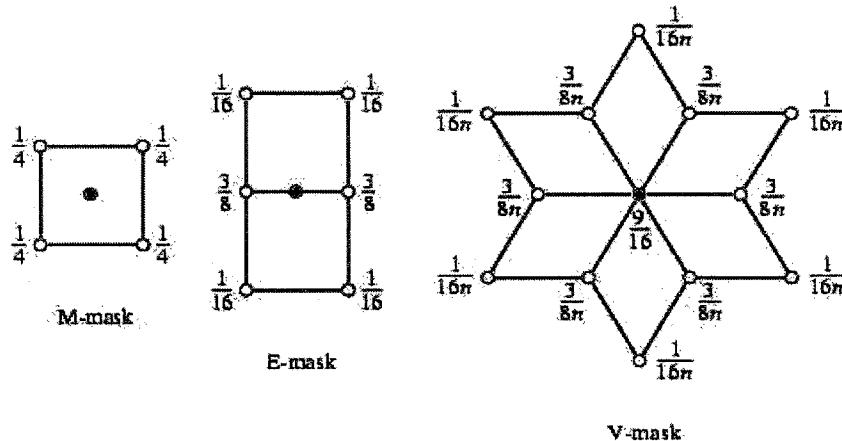


FIGURE 1.6 Masques de Catmull-Clark, Prautzsch et Umlauf, 1998

- **Caractéristiques de surface :** Normalement les surfaces de subdivision s'appliquent à des géométries lisses fermées. Les caractéristiques de surfaces désignent les discontinuités que peuvent représenter des frontières ou des jonctions de surfaces telles que :
 - Pli (crease) : courbe générée lorsque la continuité entre deux surfaces est C^0 ;
 - Coin (corner) : point où trois plis ou plus se joignent ;
 - Pince (dart) : point intérieur d'une surface où un pli se termine.
- **Étiquetage :** Introduit par Hoppe *et al.*, 1994, l'étiquetage s'applique à certains sché-

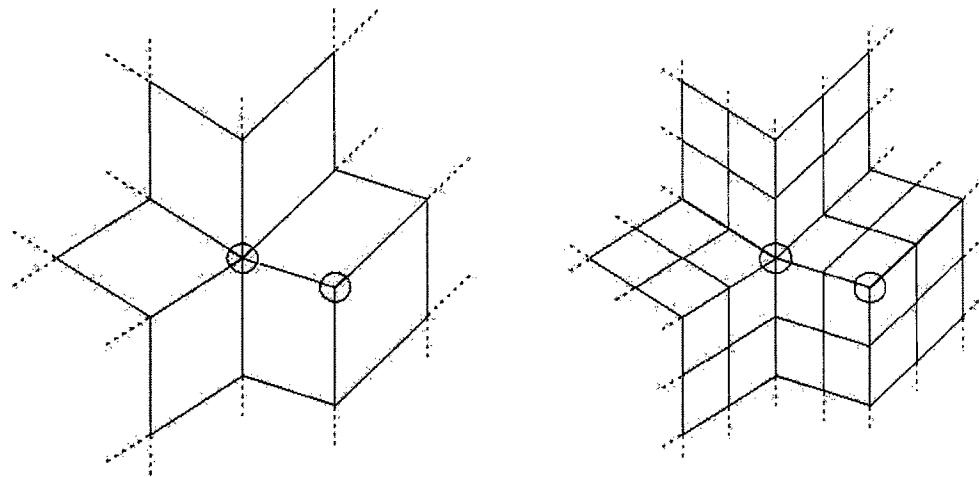


FIGURE 1.7 Maillage rectangulaire avec deux sommets irréguliers
(Zorin et Schröder, 2000)

mas (Catmull-Clark, Loop et Butterfly modifié) et permet de faire ressortir des caractéristiques particulières de la surface (plis, coins) en signalant, par une valeur associée à certains sommets ou arêtes (étiquette), que des règles de subdivision spéciales s'appliquent ;

- **Multirésolution** : propriété permettant de faire varier le niveau de détails d'une surface (par la granularité du maillage) tant du plus grossier au plus précis que l'inverse. En général, les surfaces de subdivision intègrent la multirésolution du plus grossier au plus précis. Toutefois l'inverse ne peut s'appliquer à moins d'une modification au mode de représentation de la surface Zorin et Schröder, 2000 et lorsqu'une surface de subdivision subit une modification, le niveau de subdivision de cette modification devient la nouvelle surface initiale. En effet, les modifications précises apportées à un maillage très fin ne peuvent s'intégrer à un maillage plus grossier sans une perte d'information ;
- **Lissage (smoothing)** : Opération permettant d'effectuer l'opération inverse d'une subdivision ($S^{i-1} = HS^i$). Il y a plusieurs méthodes pour effectuer cette opération :
 - Le calcul du moindre carré entre la surface S^i et la subdivision de la surface calculée S^{i-1} . Cette méthode peut générer des ondulations indésirables ;
 - La résolution d'un problème variationnel global ;

- Le lissage local proposé par Taubin, 1995.

1.1.6 Schémas de subdivision

1.1.6.1 Schéma de Catmull-Clark

Le schéma de Catmull-Clark (Catmull et Clark, 1978) est une généralisation des surfaces B-splines uniformes bi-cubiques. Il permet de représenter des surfaces d'aspect lisse de continuité C^2 partout sauf aux sommets irréguliers où la continuité est C^1 . La continuité de ce schéma a été étudiée par Ball et Storry, 1988 et la continuité C^1 démontrée par Peters et Reif, 1997.

La figure 1.8 montre les masques pour les sommets internes et frontières. Puisque ce schéma se raffine par division de faces quadrilatères, il y a deux masques pour obtenir la position des nouveaux sommets : un pour le centre de chaque face et l'autre pour le centre de chaque arête. Étant donné qu'il s'agit d'un schéma d'approximation, un masque pour les sommets existants permet de calculer la nouvelle position du sommet après subdivision. Les coefficients de ce dernier masque sont fonction de la valence du sommet.

Ce schéma, en plus de permettre la représentation des frontières de la surface par une courbe de subdivision équivalent à une B-spline cubique uniforme, permet, par l'emploi d'étiquettes, de définir des caractéristiques de surface (voir section 1.1.5) suite aux travaux de Biermann *et al.*, 1999.

Stam, 1998, a montré qu'il est possible d'obtenir la position et les dérivées à tous les sommets de la surface limite. De plus, Peters, 2000 présente une méthode pour convertir les parties régulières de la surface (dont les coins sont des sommets irréguliers) en surfaces NURBS de manière à permettre l'évaluation complète de la surface (ne pas être restreint aux sommets générés par les règles de subdivision).

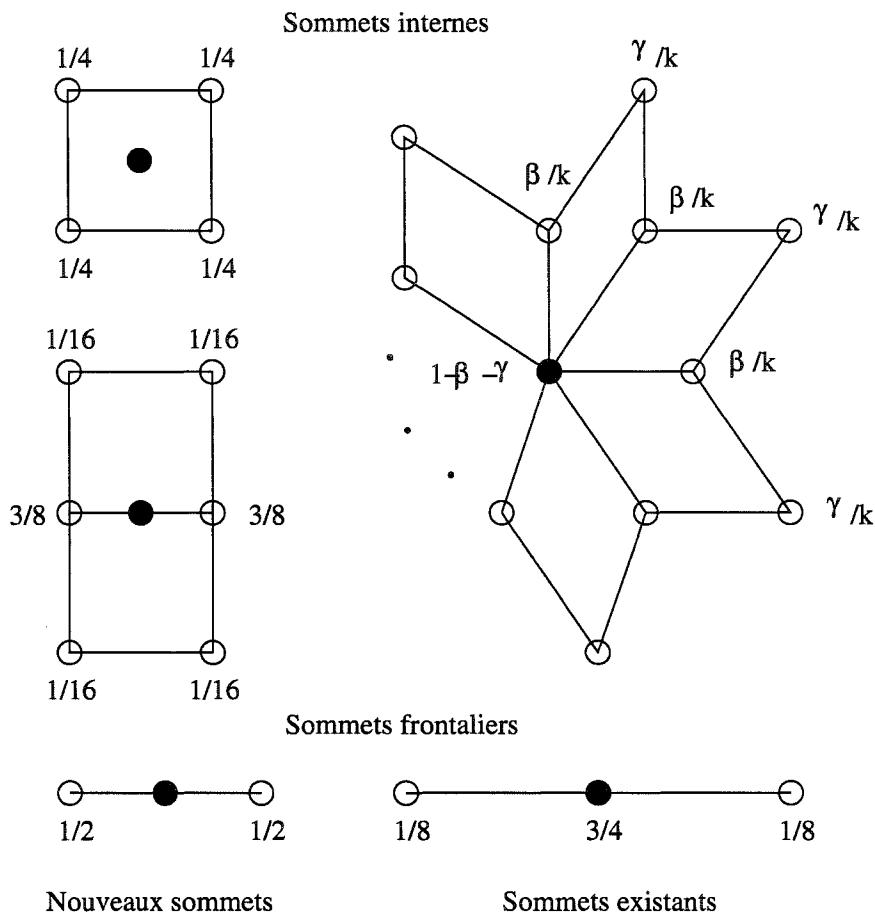


FIGURE 1.8 Schéma de Catmul-Clark

1.1.6.2 Schéma de Loop

Ce schéma (Loop, 1987) pour maillages triangulaires est basé sur les Box-splines de degré quatre. La continuité est C^2 partout sauf aux sommets irréguliers. La continuité C^1 pour ces derniers a été démontrée par Schweitzer, 1996 et par Zorin, 1997.

Ce schéma se raffinant par division de faces triangulaires (figure 1.5), un seul masque suffit pour calculer la position des nouveaux points sur chaque arête (voir figure 2.1). Ce schéma d'approximation comprend aussi un masque pour calculer la nouvelle position des sommets existants.

Les masques des sommets frontaliers sont identiques à ceux du schéma de Catmull-Clark étant donné que ces deux schémas partagent la même continuité.

Le schéma a été amélioré pour permettre la définition d'arêtes vives (Hoppe *et al.*, 1994). Biermann *et al.*, 1999, définissent des règles pour les frontières et pour les coins concaves ainsi que la modification des normales. Zorin et Schröder, 2000 fournissent des équations pour calculer la position d'un point à la surface limite et les tangentes de la surface à ce point.

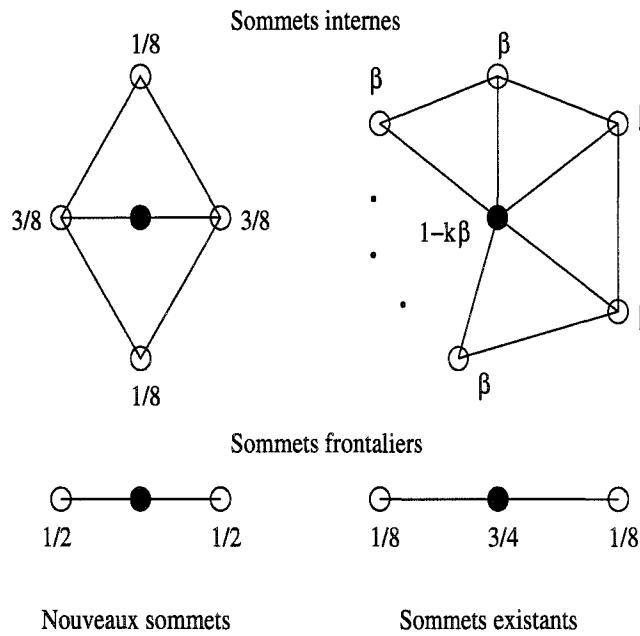


FIGURE 1.9 Schéma de Loop

1.1.6.3 Schéma Butterfly Modifié

Ce schéma d'interpolation basé sur les triangles donne une surface de continuité C^1 partout sauf aux sommets irréguliers (Dyn *et al.*, 1990) de valences $k=3$ et $k>7$. Un schéma Butterfly modifié (Zorin *et al.*, 1996) garantit une continuité C^1 sur toute la surface. Puisque la position des sommets existants ne change pas dans un schéma d'interpolation (chaque sommet se situe sur la surface limite), les masques ne s'appliquent qu'au

calcul des nouveaux points au centre des arêtes. La figure 1.10 montre que les masques doivent couvrir une plus grande région que les schémas d'approximation pour une continuité moindre. Les règles pour les frontières correspondent à un schéma de subdivision d'interpolation pour courbes appelé 'quatre-points' (four-point subdivision scheme, Dyn *et al.*, 1987). Au delà de ces masques, Zorin et Schröder, 2000, montrent comment calculer, pour chaque sommet, des tangentes à la surfaces (donc la normale) ainsi que des variantes de masques dans les cas particuliers de frontières et de plis.

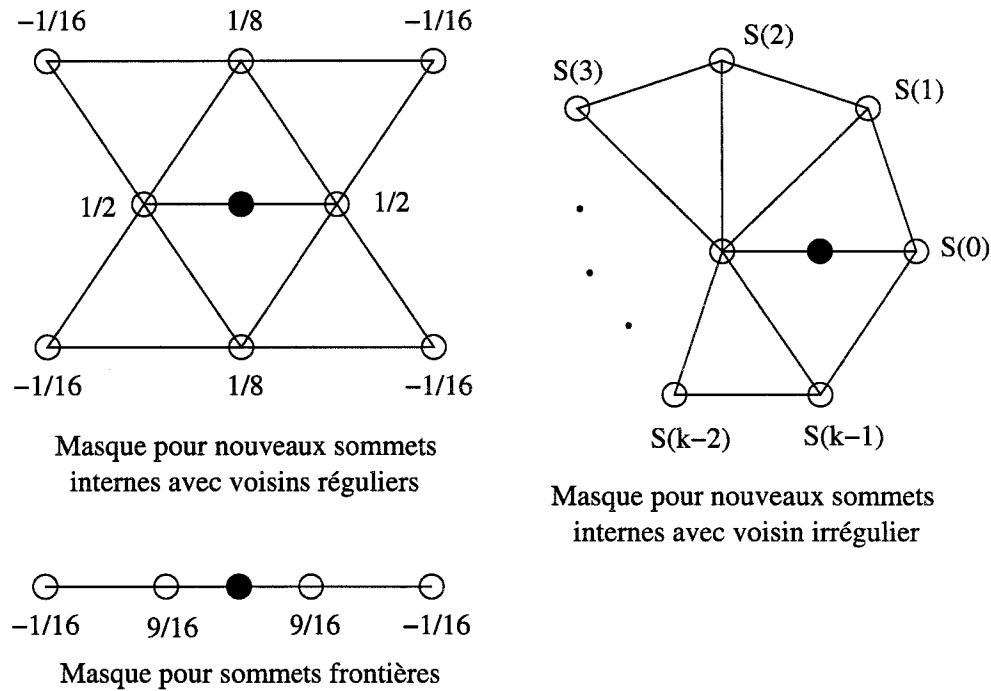


FIGURE 1.10 Schéma Butterfly Modifié

1.1.6.4 Schéma de Kobbelt

Ce schéma d'interpolation applicable à des maillages de quadrilatères génère une surface de continuité C^1 pour tous les sommets internes quelle que soit leurs valence. La figure 1.11 montre que pour les sommets réguliers internes, ce schéma est simplement un "patch" créée à partir du produit tensoriel du schéma "quatre-points", lui-même utilisé

pour calculer les nouveaux sommets sur chaque arête et pour les sommets frontaliers. Des règles particulières s'appliquent lorsque le sommet de face est voisin d'un sommet irrégulier. Contrairement aux autres schémas stationnaires, la matrice de subdivision associée à ce schéma ne permet pas d'obtenir une expression précise des tangentes aux sommets.

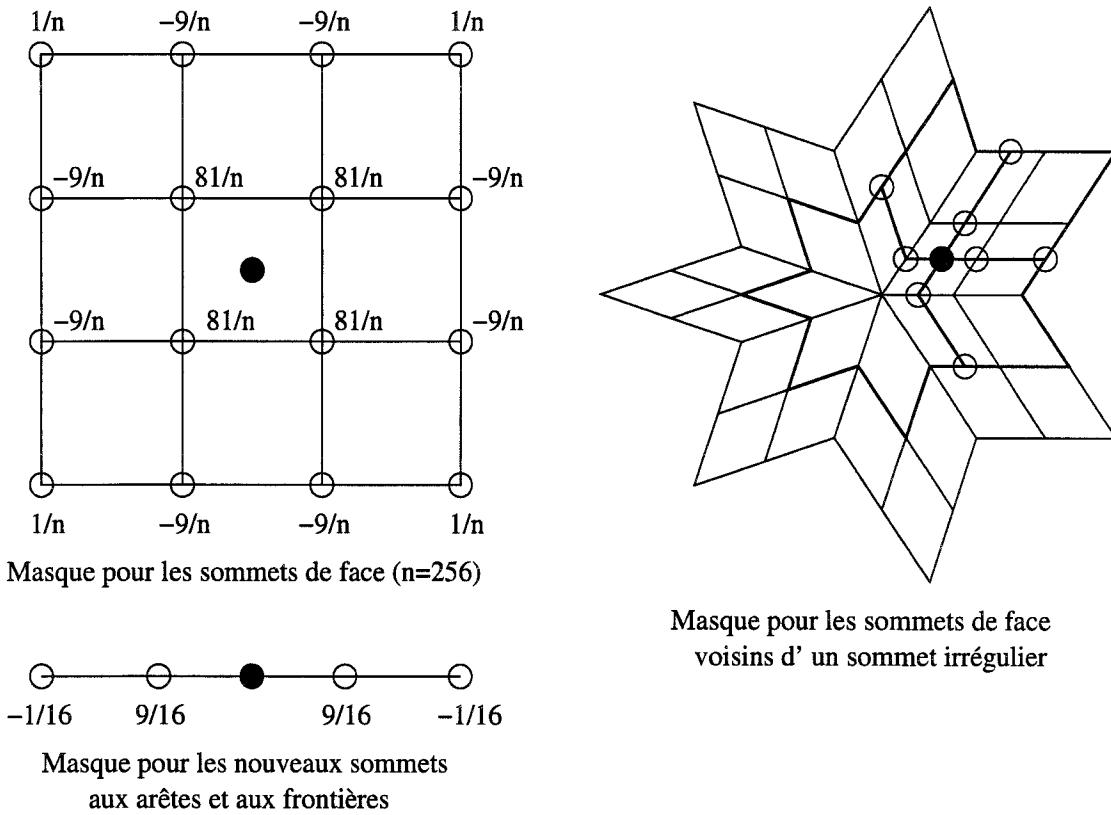


FIGURE 1.11 Schéma de Kobbelt

1.1.6.5 Schéma de Doo-Sabin

Ce schéma (Doo et Sabin, 1978) est basé sur une B-spline bi-quadratique uniforme. La surface obtenue a une continuité C^1 sauf aux sommets irréguliers (Peters et Reif, 1997). Le type de raffinement par division des sommets (figure 1.5) réduit, par rapport aux schémas précédents, la portée et le nombre de masques. La figure 1.12 montre que pour les sommets réguliers le même masque est appliqué pour calculer chacun des quatre nou-

veaux sommets. Des coefficients différents sont appliqués lorsque la face n'est pas régulière. Le masque pour les sommets frontaliers correspond à l'algorithme de Chaikin (section 1.1.1) qui correspond à une spline quadratique. Le diagramme du bas montre que les coefficients du masque pour les sommets réguliers correspondent à un double moyennage : pour un coin donné du carré, le sommet central de la face et de chaque arête associée au coin sont interpolés, ensuite ces quatre sommets sont interpolés pour obtenir le sommet du schéma.

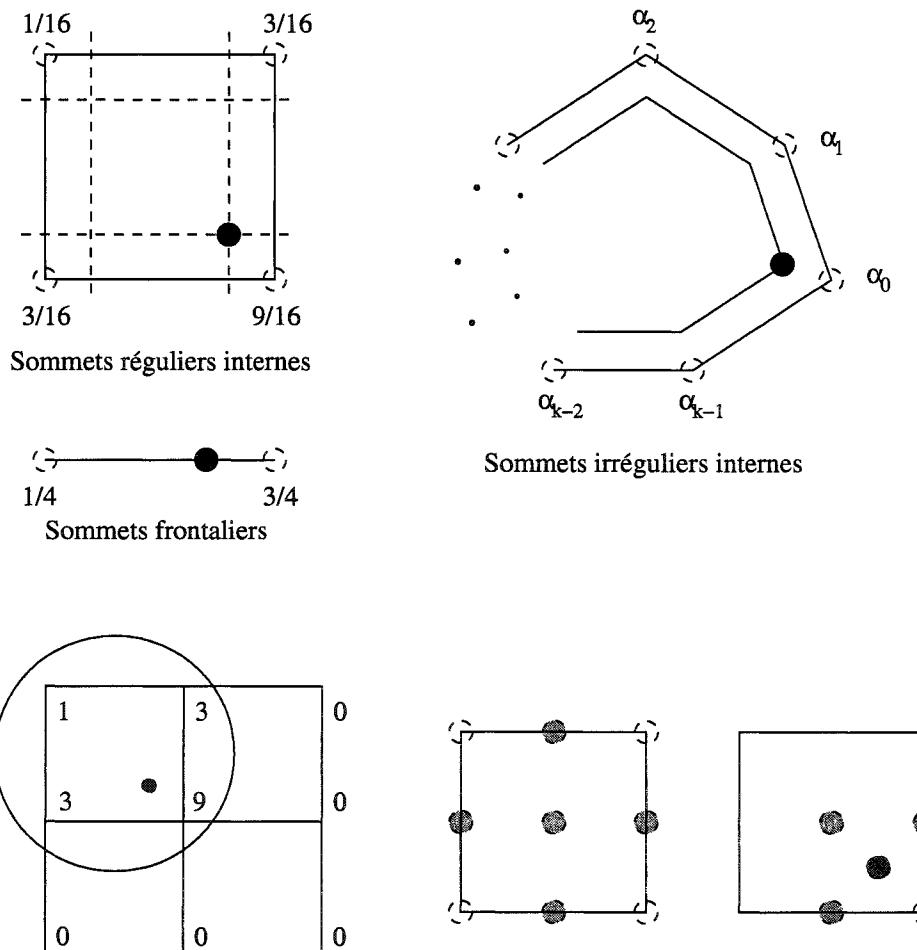
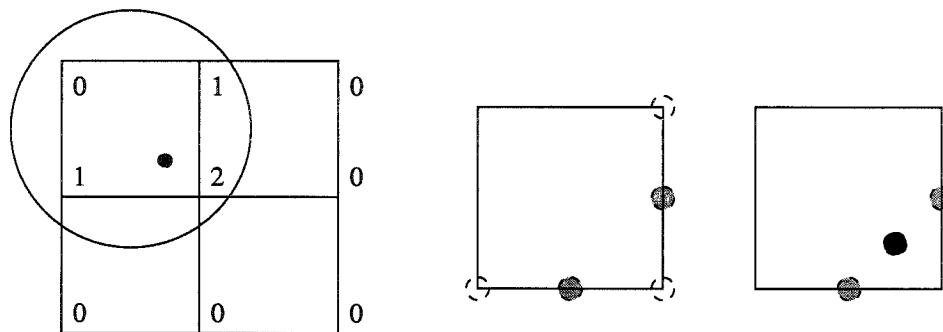
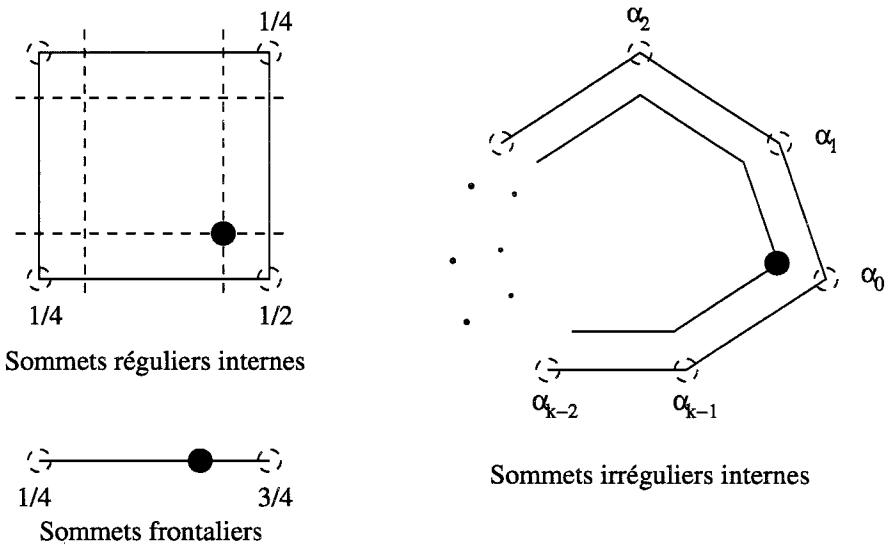


FIGURE 1.12 Schéma de Doo-Sabin

1.1.6.6 Schéma Midedge

Le schéma Midedge est une version simplifiée du schéma de Doo-Sabin bien qu'il présente les mêmes propriétés de continuité. En fait, c'est le schéma de subdivision le plus simple. Pour le calcul des nouveaux sommets sur une face régulière, seuls trois sommets sur quatre sont utilisés. La figure 1.13 présente le schéma et un graphique montrant que les coefficients correspondent encore à une série de moyennages.



Équivalence entre coefficients et double moyennage

FIGURE 1.13 Schéma de Midedge

1.1.6.7 Schéma Biquartic

Le schéma Biquartic est un schéma de type division de sommets qui permet d'obtenir des surfaces de continuité C^4 aux faces régulières. La figure 1.14 montre le masque pour des faces régulières et les trois étapes de moyennage correspondantes : d'abord le moyennage du schéma de Doo-Sabin est appliqué, ensuite les sommets calculés sont interpolés pour obtenir la position de quatre nouveaux sommets et enfin ces sommets sont interpolés à leur tour pour obtenir la position du sommet final.

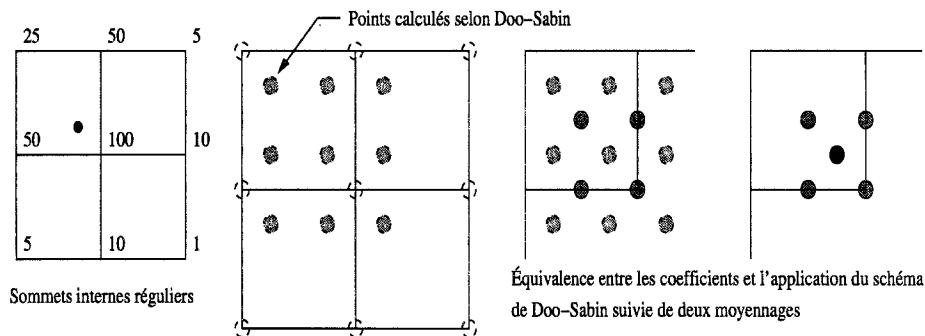


FIGURE 1.14 Schéma biquartic

1.1.6.8 Schéma $\sqrt{3}$

Ce schéma de type tiling présenté par Kobbelt, 2000, génère des surfaces de continuité C^2 partout sauf aux sommets irréguliers où elle est C^1 . Comme le montre la figure 1.5, ce schéma se distingue à plusieurs égards de ceux étudiés jusqu'à maintenant. D'une part, le nombre de faces est multiplié par trois plutôt que quatre d'un niveau de subdivision à l'autre. D'autre part, aucune arête n'est conservée, le retournement des arêtes transforme le maillage initial en un maillage plus dense identique mais tourné de 30 degrés. Les étapes de subdivision sont très simples : d'abord, un sommet est ajouté au barycentre de chaque triangle, ensuite la position des sommets existants est calculée en fonction de la position de ces nouveaux sommets barycentriques qui leurs sont adjacents, enfin, chaque

arête reliant deux sommets existants est retournée pour relier deux sommets barycentriques. Le fractionnement réduit des faces ralentit l'augmentation de la complexité du maillage à chaque niveau de subdivision quoiqu'elle reste exponentielle (3^n).

1.1.6.9 Schéma 4 – 8

Présenté par Velho et Zorin, 2000, cet autre schéma de type tiling procède par la bisection des faces : le nombre de faces double au lieu de quadrupler. La surface produite est de continuité C^4 partout sauf aux sommets irréguliers où elle est C^1 . La figure 1.5 montre les étapes de subdivision : d'abord pour chaque triangle, le quadrilatère englobant ce triangle est localisé, le barycentre de ce quadrilatère est calculé pour obtenir le nouveau sommet qui permet de diviser le triangle en deux, ensuite la position des sommets existants est calculé en fonction des nouveaux sommets qui sont leurs voisins immédiats.

1.1.7 Autres schémas et modifications utiles

1.1.7.1 NURSS

Les schémas de Catmull-Clark et Doo-Sabin sont basés sur le produit tensoriel de B-Splines uniformes (ie : dont les nœuds du vecteur nodal sont espacés uniformément). Avec les NURSS (Non-Uniform Recursive Subdivision Surfaces), Sederberg *et al.*, 1998 proposent de nouvelles règles pour des schémas de Catmull-Clark et Doo-Sabin non-uniformes. Une variable définie pour simuler la distance entre deux valeurs nodales est associée à chaque sommet (Doo-Sabin) ou arête (Catmull-Clark). Ces variables sont intégrées à des fonctions pour calculer les coefficients de subdivision. Une valeur nulle permet de créer des plis. La figure 1.15 montre un exemple avec le schéma de Catmull-Clark.

Cette méthode alourdit les opérations de subdivision. Les coefficients constants sont rem-

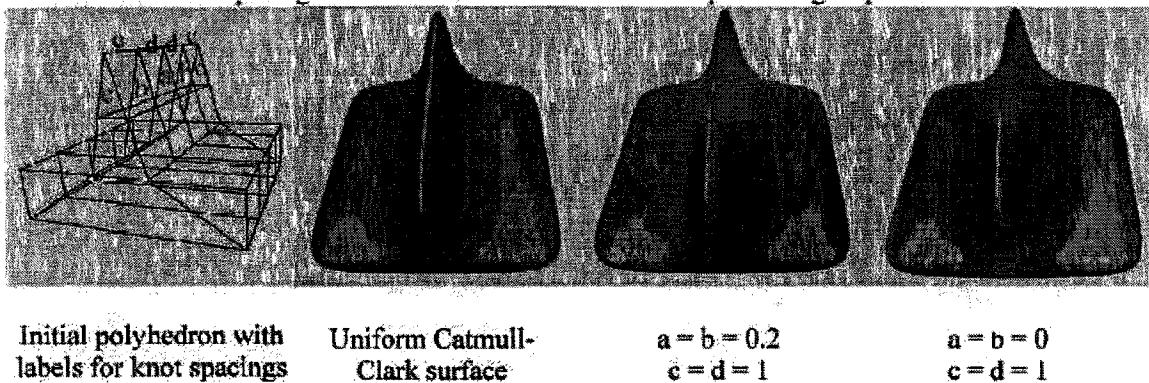


FIGURE 1.15 Surfaces NURSS avec Catmull-Clark

placés par des fonctions qui changent à chaque niveau de subdivision. Ce schéma non-stationnaire ne permet donc pas de calculer directement la position limite des sommets du polygone de contrôle. Par ailleurs, Wang *et al.*, 2000, ont développé une méthode pour évaluer une surface NURSS de manière paramétrique.

1.1.7.2 Schéma de subdivision combiné

Le schéma de subdivision combiné (Levin, 1999, Levin, 2000) consiste à interpoler un ensemble de courbes NURBS à l'aide d'une surface de subdivision (notamment Catmull-Clark ou Doo-Sabin) de manière à obtenir une surface lisse de continuité C^2 ou C^1 selon le schéma de subdivision choisi. Les courbes décrivent les frontières et le squelette de la surface. La figure 1.16 montre des exemples de surfaces obtenues à l'aide de ce schéma.

Aussi, ce schéma donne des outils pour découper une surface de subdivision selon une courbe NURBS comme le montre la figure 1.17 (Litke *et al.*, 2001).

En ajoutant des courbes paramétriques au schéma, la subdivision combinée limite les possibilités d'édition. Bien qu'elle permette une définition plus précise des frontières, elle ne permet pas d'intégrer les autres caractéristiques de surface.

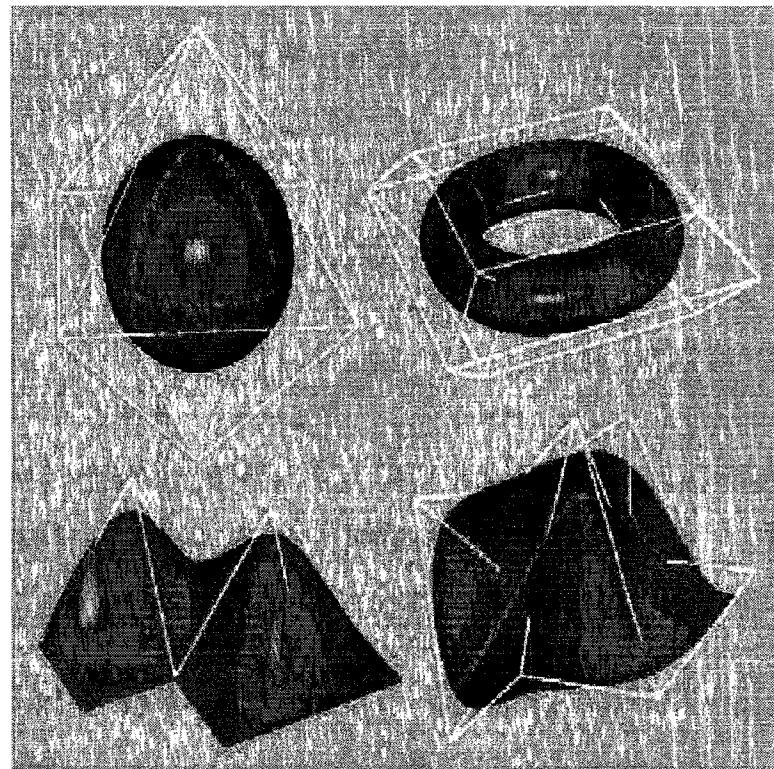


FIGURE 1.16 Surfaces de subdivision combinées avec Cattmull-Clark (Levin, 2000)

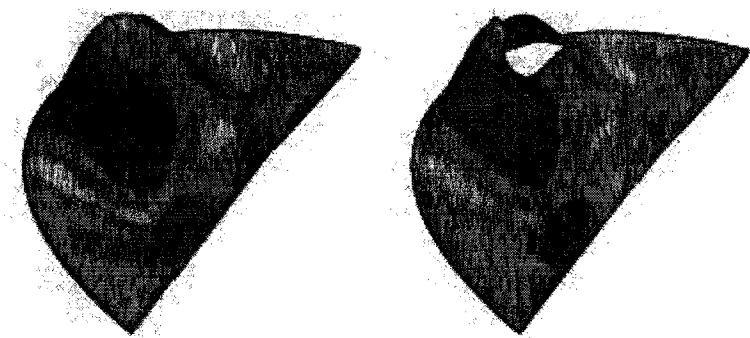


FIGURE 1.17 Surfaces de subdivision combinées - découpage

1.1.7.3 Schémas primal/dual

Ces schémas visent à obtenir une surface plus lisse (continuité plus élevée) par l'application alternative de la division des faces (primal) et de la division des sommets (dual).

Les règles de subdivision se résument à une série d'opérations de moyennage comme celles introduites au schéma Biquartic. Bien que les continuités soient plus élevées, elles se limitent toujours à C^1 aux sommets irréguliers. Ces schémas sont décrits dans Zorin et Schröder, 2001 pour les faces quadrilatérales et dans Oswald et Schröder, 2003 pour les faces triangulaires.

1.1.7.4 Correction de continuité aux sommets irréguliers

Pour corriger le problème de continuité aux sommets irréguliers, Prautzsch et Umlauf, 1998, proposent pour le schéma de Catmull-Clark de nouveaux masques plus étendus et l'utilisation de nouveaux coefficients (parfois négatifs) afin d'obtenir une surface G^2 . La figure 1.1.7.4 montre les courbures gaussiennes sur une surface de Catmull-Clark avant et après l'application de ces modifications.

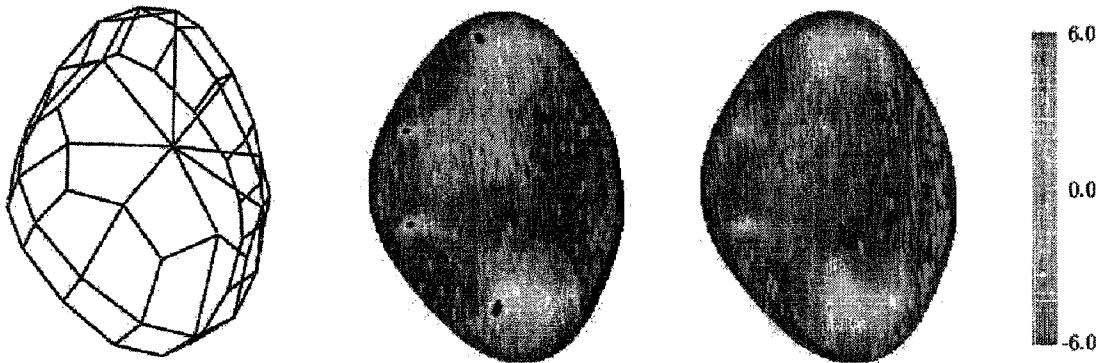


FIGURE 1.18 Différence de courbure gaussienne avant et après modification du schéma de Catmull-Clark, (Prautzsch et Umlauf, 1998)

Des modifications similaires ont été apportées aux schémas de Loop et Butterfly modifié (Prautzsch et Umlauf, 2000) pour obtenir des surfaces G^2 et G^1 respectivement.

1.2 Reconstruction de surfaces

Un aspect important du projet est d'évaluer la capacité des surfaces de subdivision à reconstruire de façon précise les géométries fournies par l'IREQ. Ces géométries sont définies par un maillage très dense de triangles ou un nuage de points. Cette section présente cinq méthodes de reconstruction de surface, leurs avantages et leurs inconvénients.

1.2.1 Utilisation d'un schéma d'interpolation

Étant donné que les sommets d'une surface d'interpolation (Doo-Sabin, Kobbelt) appartiennent à la surface, l'approche la plus simple pour reconstruire une géométrie serait de construire un maillage de départ à partir des points connus de la surface. Cette approche ne garantit toutefois pas une surface de qualité d'autant plus que la continuité de ces schémas est limitée à C^1 aux sommets réguliers.

1.2.2 Halstead

La reconstruction proposée par Halstead *et al.*, 1993 utilise les propriétés intéressantes des matrices de subdivision pour déterminer pour un point connu de la surface limite, la position d'un sommet sur le maillage initial. Cette opération se fait par la résolution d'un système d'équations. Toutefois, elle n'est pas suffisante puisque la surface limite obtenue après subdivision présente des ondulations. Pour réduire ces ondulations, le maillage obtenu fait d'abord l'objet d'une subdivision pour augmenter le nombre de degrés de liberté et d'un lissage basé sur la minimisation d'une équation d'énergie.

La figure 1.19 montre les étapes de reconstruction d'une surface. La rangée du haut montre les maillages initiaux et la rangée du bas, les surfaces limites correspondantes par la subdivision de Catmull-Clark. La figure de gauche montre le maillage de départ

dont les sommets appartiennent à la surface à interpoler. La figure du centre montre le maillage de topologie identique obtenu après la résolution du système d'équation. Enfin, la figure de droite montre le maillage après les opérations de subdivision et de lissage (fairing).

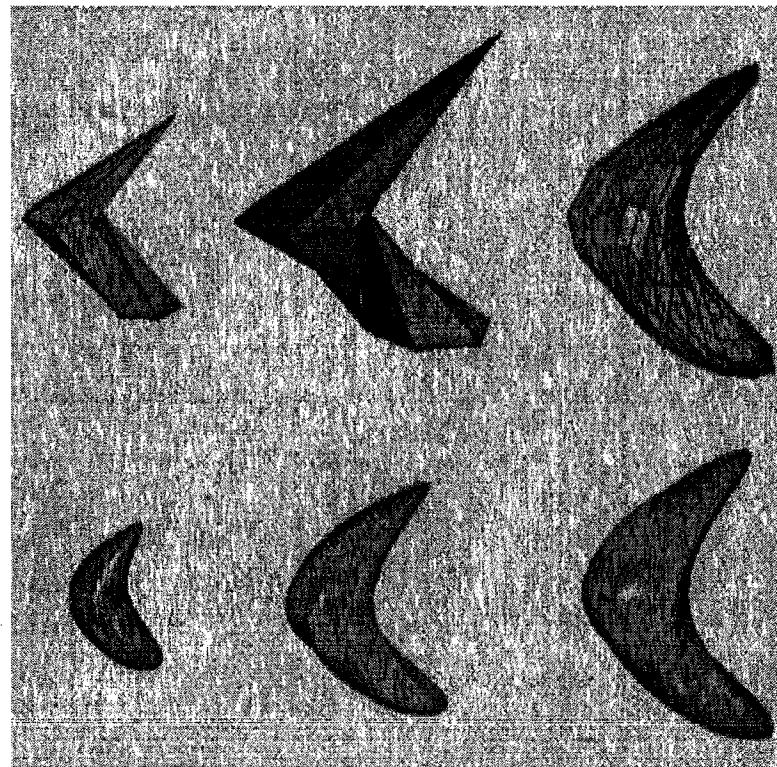


FIGURE 1.19 Reconstruction avec la méthode de Halstead *et al.*, 1993

Cette méthode n'intègre pas les caractéristiques de surface dans la reconstruction. Par ailleurs, selon Zorin *et al.*, 1996, il n'est pas prouvé que le système d'équations est soluble. Aussi, la précision de l'interpolation est affectée par les opérations de subdivision et de minimisation d'énergie.

1.2.3 Hoppe

Cette méthode permet de reconstruire une surface avec des détails en partant d'un nuage de points appartenant à la surface (Hoppe *et al.*, 1994). La reconstruction se fait en trois phases :

- Construction d'un maillage triangulaire à partir du nuage de points pour déterminer la topologie de la surface et pour avoir une approximation de la géométrie (Hoppe *et al.*, 1992). Cette phase n'est pas nécessaire si un maillage triangulaire de la surface est déjà disponible ;
- Optimisation du maillage à l'aide d'une fonction d'énergie qui modélise le compromis entre un nombre minimum de triangles et un écart minimum entre la surface et les données (nuage de points). (Hoppe *et al.*, 1993, DeRose *et al.*, 1992)
- Application d'une surface de subdivision à la surface optimisée. Le schéma de Loop est utilisé. Il y a détection automatique des détails de surface par l'établissement d'un seuil pour l'angle entre deux faces.

Ces différentes étapes de reconstruction sont illustrées à la figure 1.20.

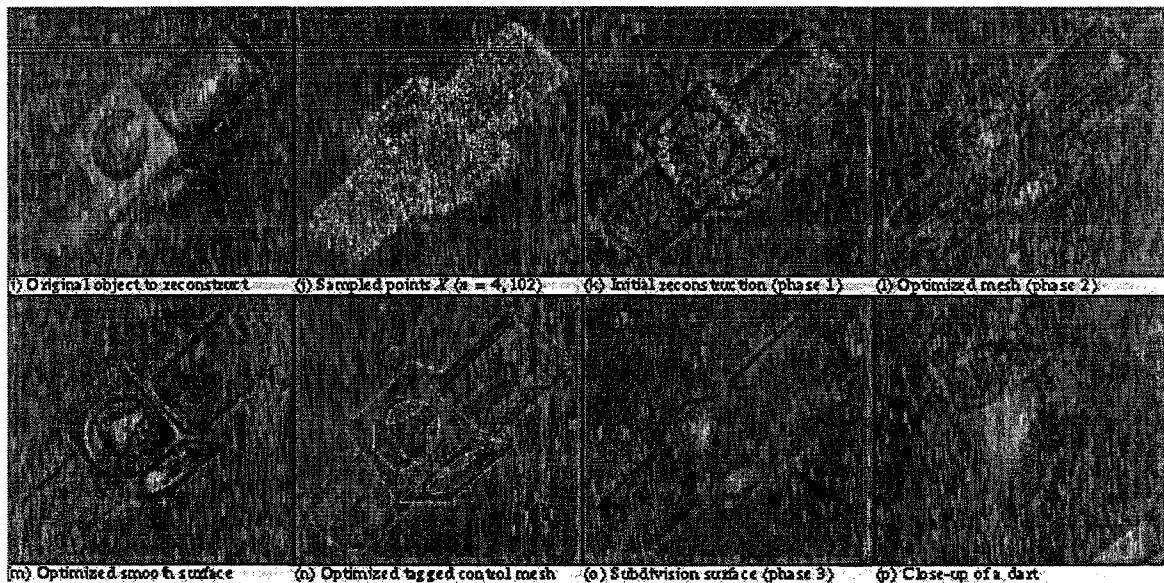


FIGURE 1.20 Reconstruction avec la méthode de Hoppe *et al.*, 1994

Ce mode de reconstruction est souvent cité mais présente l'inconvénient de prendre du temps. De plus, le nuage de points doit être dense et régulier pour permettre la détection efficace des caractéristiques.

1.2.4 Surfaces de subdivision dynamique

Mandal *et al.*, 1999 propose une méthode de reconstruction combinant le schéma de Catmull-Clark à la théorie des splines dynamiques. Cette méthode récupère une surface à partir d'un nuage de points ou d'un maillage de départ. Elle consiste à définir un modèle initial (une surface de subdivision fermée) et à le déformer en appliquant des forces qui sont fonction d'une équation Lagrangienne de mouvement et qui se minimisent au fur et à mesure que le modèle épouse la forme définie par les points. Le modèle est alors subdivisé et l'application des forces reprise jusqu'à ce qu'un critère d'erreur soit atteint. Cette méthode s'applique surtout aux surfaces fermées (sans frontière).

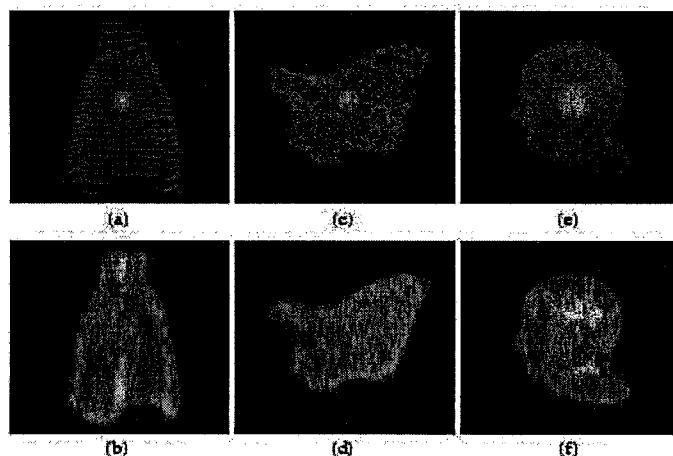


FIGURE 1.21 Exemples de reconstruction de surface (Mandal *et al.*, 1999)

1.2.5 Suzuki

À partir d'un maillage de départ grossier (boîte englobante), l'algorithme de Suzuki *et al.*, 1999, effectue dans une boucle des opérations d'ajustement de position de sommets et de subdivision (schéma de Loop) jusqu'à ce que la surface limite soit à l'intérieur d'une tolérance donnée. La figure 1.22 montre la reconstruction d'une tête de tigre : la qualité des géométrie obtenues est médiocre (pas de détails) et semble fortement influencée par l'approximation initiale du maillage. Cette méthode doit être adaptée pour les surfaces ouvertes et nécessite une approximation initiale assez précise pour obtenir un maillage de départ assez grossier.

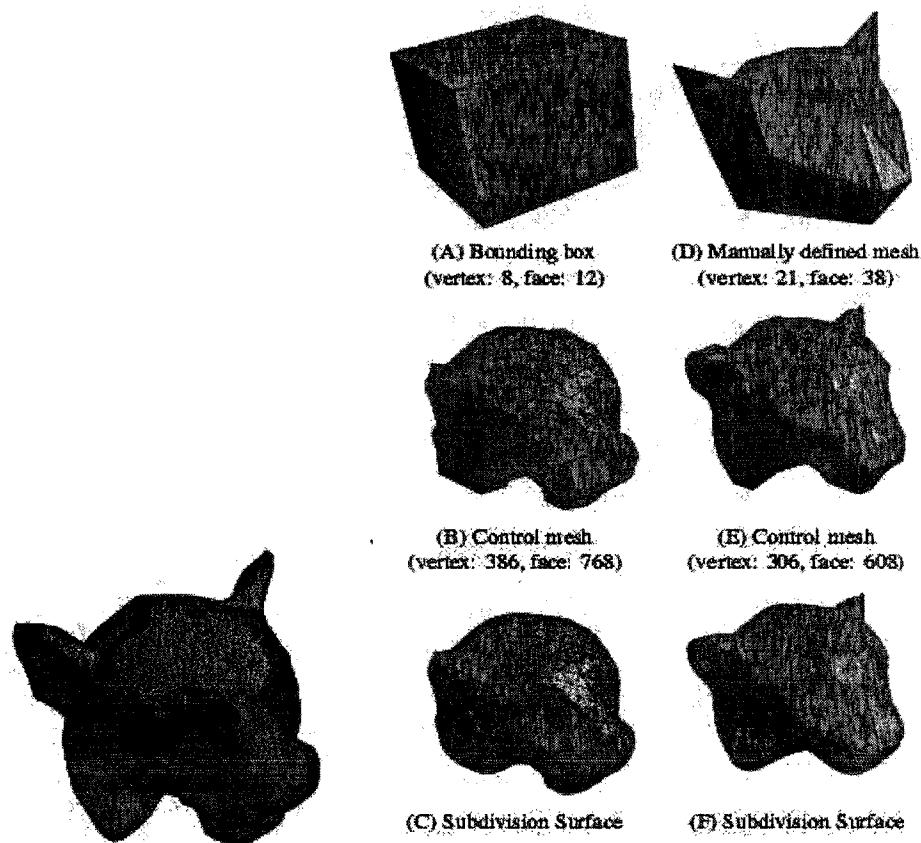


FIGURE 1.22 Algorithme de suzuki (Suzuki *et al.*, 1999)

1.2.6 MeshToSS

MeshToSS est un logiciel développé par Kanai, 2001, permettant de convertir un maillage dense en une surface de subdivision de type Loop en fonction du nombre de sommets ou d'une erreur d'approximation fourni par l'usager. Il est une extension d'un algorithme de simplification de maillage proposée par Garland et Heckbert, 1997, appelé *Quadric Error Metrics* ou QEM. Il présente les avantages suivants :

- Préservation lors de la conversion de certaines caractéristiques de surface telles les frontières et les plis ;
- Temps d'exécution réduit considérablement par rapport à d'autres approches basées sur l'optimisation ;
- Possibilité de construire à partir d'une géométrie un éventail de reconstructions de résolutions progressives (multirésolution) ;

La figure 1.23 montre des exemples de résultats obtenus avec deux géométries : une sphère et un nœud. La première figure montre le maillage initial M composé de 14,582 et 23,232 sommets pour la sphère et le nœud respectivement. Les figures suivantes montrent le polygone de contrôle de la surface de subdivision C^n et la surface limite S^n pour un nombre de sommets n de 1000 et 300.

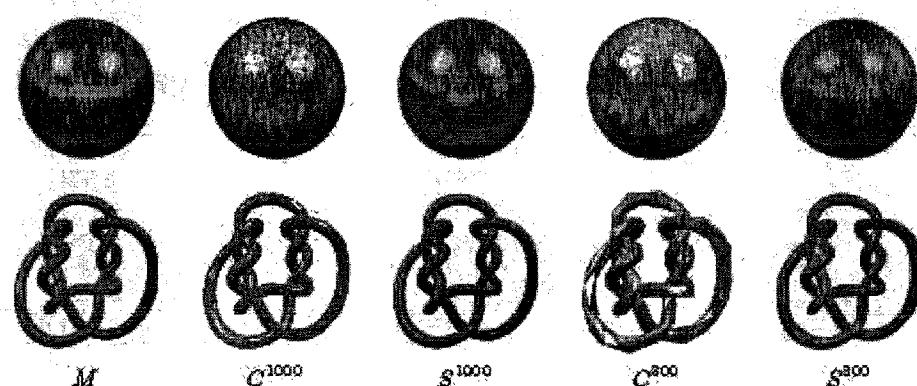


FIGURE 1.23 Reconstruction de géométries par le programme MeshToSS , (Kanai, 2001)

1.3 Modification de surfaces

Cette section est basée sur un rapport technique réalisé par McDonnell et Qin, 2000, portant sur les différentes méthodes de modélisation de solides. En plus de présenter sommairement les principales méthodes de représentation géométrique (fonctions implicites (CSG), représentation des frontières (B-splines, NURBS, surfaces de subdivision), décomposition de cellules), ce rapport présente certaines des approches actuelles pour effectuer des modifications interactives de la géométrie, notamment :

- Manipulation géométrique ;
- Manipulation basée sur la physique ;
- Déformation libre ;

Chacune de ces approches sera présentée dans le contexte des surfaces de subdivision.

1.3.1 Manipulation géométrique

Cette approche traditionnelle consiste à déformer la géométrie par l'entremise de ses points de contrôle. C'est la méthode utilisée par Maya. La figure 1.24 montre les étapes pour modéliser une main avec des surfaces de subdivision de Catmull-Clark. Il y a deux niveaux d'interaction :

- **Niveau supérieur** : les déformations s'effectuent par des modifications au niveau du polyèdre de contrôle initial qui se répercutent sur la surface de subdivision limite. Les doigts sont formés simplement en extrudant des surfaces en se servant d'un système de coordonnées local permettant des déplacements, des mises à l'échelle ainsi que des rotations selon trois axes. Ce niveau a permis la modélisation grossière de la main ;
- **Après subdivision** : chaque niveau de subdivision offre un quadrillage plus dense de la surface permettant d'y opérer des déformations circonscrites. L'ensemble des points de contrôles d'une région sont sélectionnés interactivement pour effectuer des

déplacements communs. Comme au niveau supérieur, un système de coordonné local (U,V,N) est associé à la région la translation suivant ces axes de l'ensemble des points sélectionnés. De plus, la frontière de ces régions peut présenter des discontinuités grâce à l'association d'étiquettes à certaines arêtes. Le pouce de la figure 1.24 montre le niveau de détail qui peut être atteint par cette méthode.

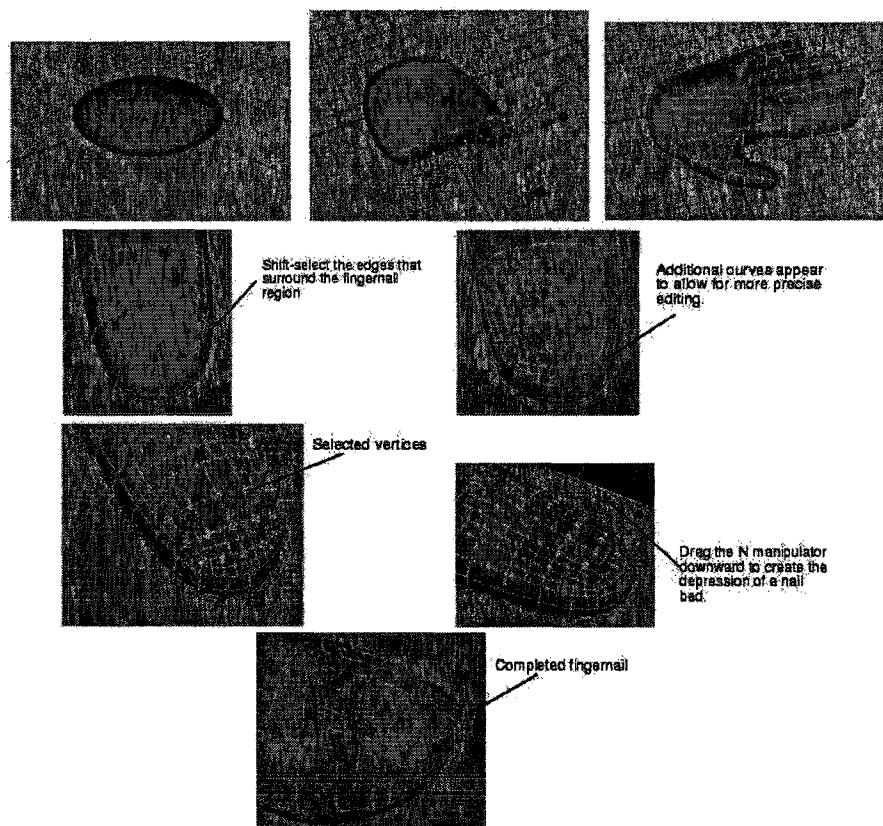


FIGURE 1.24 Étapes de modélisation d'une main avec Maya

1.3.2 Manipulation basée sur la physique

Cette méthode utilise les mêmes principes qu'à la section 1.2.4 pour la reconstruction de surfaces à partir d'un nuage de points. Pour la déformation de surface, des forces virtuelles sont imposées à la géométrie à travers une interface usager. La figure 1.25 montre des exemples de résultats. Les caractéristiques de surface ne sont pas traitées par

cette méthode.

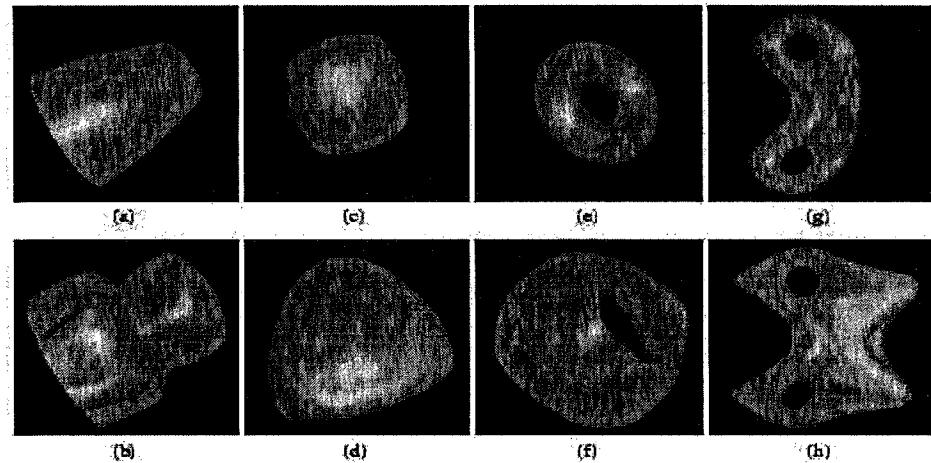


FIGURE 1.25 Exemples de déformation de surface (Mandal *et al.*, 1999)

1.3.3 Déformation de forme libre (FFD)

La FFD (Free-form deformation) est une technique de déformation développée par Sederberg et Parry, 1986, qui permet d'éviter le déplacement de sommets individuels et qui consiste à englober l'ensemble ou une région de la géométrie dans un espace paramétrique appelé treillis de contrôle et normalement défini par une B-spline solide. Une position paramétrique est associée à chaque sommet de la géométrie positionné à l'intérieur du treillis de contrôle. Il suffit alors de déplacer les points de contrôle du solide pour déformer la géométrie.

Coquillart, 1990, a développé une généralisation de la méthode appelée EFFD (Extended free-form deformation) par laquelle l'espace paramétrique est défini par des solides NURBS. Ce changement permet de définir des espaces paramétriques de formes autres que cubiques, notamment cylindriques.

En se basant sur la FFD, Hsu *et al.*, 1992, proposent une nouvelle approche permettant la manipulation directe des sommets de la géométrie. Après le déplacement d'un sommet,

un algorithme basé sur les moindres-carrés calcule la déformation que doit prendre la B-spline solide : l'ensemble des sommets de la géométrie sont déplacés en conséquence.

Finalement, MacCracken et Joy, 1996, ont appliqué la théorie des surfaces de subdivision pour permettre la construction d'un treillis de contrôle de topologie arbitraire. Le processus de déformation comprend quatre étapes :

- **Construction du treillis** : Un treillis est construit par l'assemblage arbitraire de formes simples qui forment chacune une cellule ;
- **Positionnement du treillis** : Ce treillis initial est placé autour ou sur une partie de la géométrie à déformer ;
- **Raffinement du treillis** : Le processus de raffinement du treillis sert à générer des cellules paramétrisables de manière à ce que la position de chacun des sommets de la géométrie soit associé à une position (u, v, w) de la cellule qui l'englobe ;
- **Déformation du treillis** : la déformation de la géométrie s'opère par le déplacement des points de contrôle du treillis initial.

La figure 1.26 montre un exemple de déformation d'un disque avec un treillis en forme d'étoile.

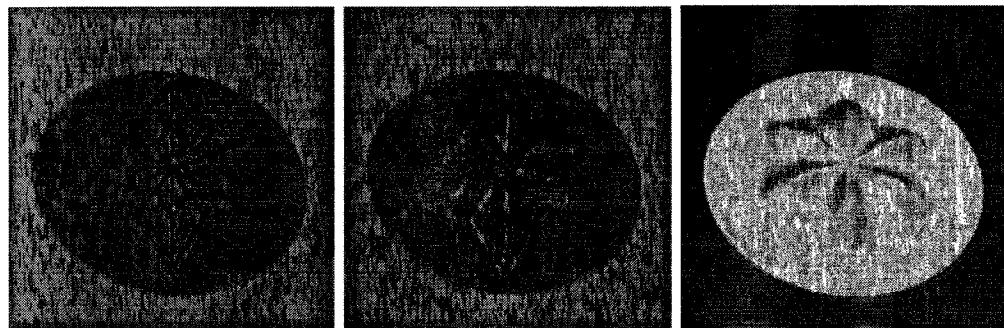


FIGURE 1.26 Exemple de déformation de forme libre (MacCracken et Joy, 1996)

1.4 Choix du schéma et de la méthode de reconstruction

Ce chapitre a montré que la théorie des surfaces de subdivision offre plusieurs alternatives quant au choix des schémas. Toutefois, les caractéristiques des géométries sur lesquelles porte cette étude permettent de réduire les candidats aux schémas de Loop et de Catmull-Clark. En effet, la complexité des formes impose une continuité maximale de la surface ce qui exclut les schémas d'interpolation, et les frontières ne permettent pas l'application de schémas de type dual. De plus, les schémas non-stationnaires (tiling, NURSS) se prêtent difficilement à la reconstruction de surface. Entre les deux candidats, le schéma de Loop a été retenu pour sa simplicité, sa continuité C^2 et sa représentation par maillage de triangles.

Pour ce qui est de la reconstruction, la méthode de Halstead nécessite des opérations de lissage qui nuisent à la précision. La méthode de Hoppe utilise des algorithmes d'optimisation. Les surfaces dynamiques s'appliquent uniquement aux surfaces fermées. Enfin, la méthode Suzuki requiert une approximation initiale de la géométrie. Seule l'application MeshToSS semble offrir une méthode très efficace et directe pour reconstruire une géométrie à partie d'un maillage de triangles initial.

CHAPITRE 2

MÉTHODOLOGIE

La revue bibliographique a permis de faire le choix du schéma de subdivision qui sera utilisé dans ce travail et de retenir l'application **MeshToSS** pour la reconstruction d'une géométrie à l'aide d'une surface de subdivision. Ce chapitre décrit plus en détails ces éléments, d'autres méthodes de reconstruction ainsi que les outils utilisés pour vérifier la qualité des géométries construites. Il décrit aussi les principaux algorithmes et les méthodes numériques utilisées pour atteindre les objectifs de ce travail, et qui forment la base méthodologique de l'application **SubDiv** présentée au chapitre suivant.

La première section de ce chapitre décrit en détail le schéma de Loop. Cette description comprend les masques nécessaires tant pour les opérations de subdivision que de projection (sur la surface limite S^∞) et le calcul des normales à la surface pour le rendu graphique. Un traitement séparé des frontières et des surfaces est présenté pour tenir compte des caractéristiques particulières des géométries.

Les sections suivantes traitent des méthodes de reconstruction. En tout, trois méthodes sont proposées. D'abord la reconstruction par interpolation transfinie fondée sur les frontières de la géométrie. Ensuite, la reconstruction par **MeshToSS** basée sur un algorithme de simplification de maillage de triangles. Enfin, la reconstruction par sections, similaire à la première méthode, mais tenant compte des points internes de la géométrie. Elle s'applique à des géométries définies par des sections d'aube (fichier DAT) et consiste à reconstruire certaines sections à l'aide de courbes de subdivision pour obtenir une grille de points. L'interpolation de cette grille donne la surface de subdivision initiale ;

La dernière section présente les méthodes d'évaluation des erreurs sur les courbes et les

surfaces reconstruites. Ces méthodes sont nécessaires afin de déterminer si ces reconstructions répondent aux critères de qualités exigés par l'industrie.

2.1 Schéma de subdivision de Loop

2.1.1 Règles de subdivision

Une surface de subdivision est définie par un maillage de départ S^0 qui, par l'application d'un certain nombre d'opérations de subdivision, converge vers une surface limite unique S^∞ . Étant donné que le schéma de Loop est stationnaire, les mêmes règles sont appliquées à chaque niveau. La figure 2.1 présente les masques associées au schéma de Loop.

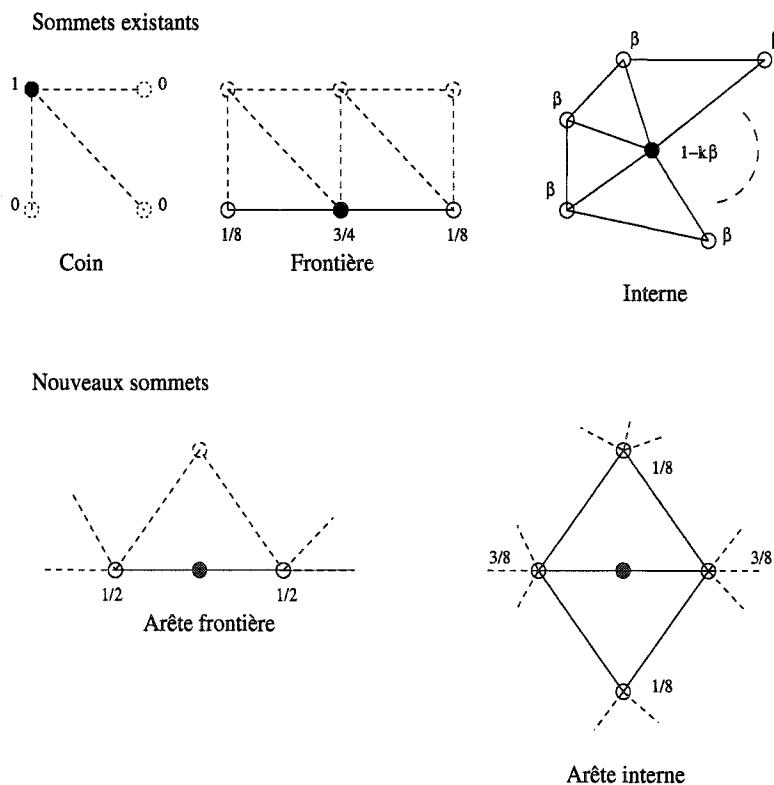


FIGURE 2.1 Schéma de subdivision de Loop

Les masques sont normalement divisés en deux catégories selon le type de sommet :

- **Sommets existants** : ces masques s’appliquent aux sommets existants et utilisent les sommets existants voisins pour calculer leur nouvelle position. Cette position se rapproche de la surface limite à chaque niveau de subdivision (sauf pour les sommets situés aux coins qui conservent leur position) ;
- **Nouveaux sommets** : ces masques permettent de calculer la position de nouveaux sommets (au milieu de chaque arête dans le cas du schéma de Loop) nécessaires à la génération de nouvelles faces (quatre nouvelles faces pour chaque face dans le cas du schéma de Loop).

La nouvelle position des sommets existants de même que la position des nouveaux sommets est calculée à l’aide de coefficients de pondération appliqués aux coordonnées des sommets existants. Pour la nouvelle position des sommets existants internes, la variable k représente la multiplicité du sommet (le nombre de sommets voisins) et β une valeur de pondération obtenue par la formule suivante :

$$\beta = \frac{1}{k} \left(\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{k} \right)^2 \right) \quad (2.1)$$

La figure 2.2 illustre la transformation que produit une opération de subdivision du schéma de Loop sur une surface initiale et fait ressortir les observations suivantes :

- D’un niveau de subdivision à l’autre, la multiplicité des sommets existants est conservée de sorte que le nombre de sommets irréguliers sur S^0 est le même que sur S^∞ quel que soit le nombre de subdivisions ;
- Les sommets ajoutés au centre de chaque arête sont tous réguliers ;
- Chaque face est remplacée par quatre faces ;

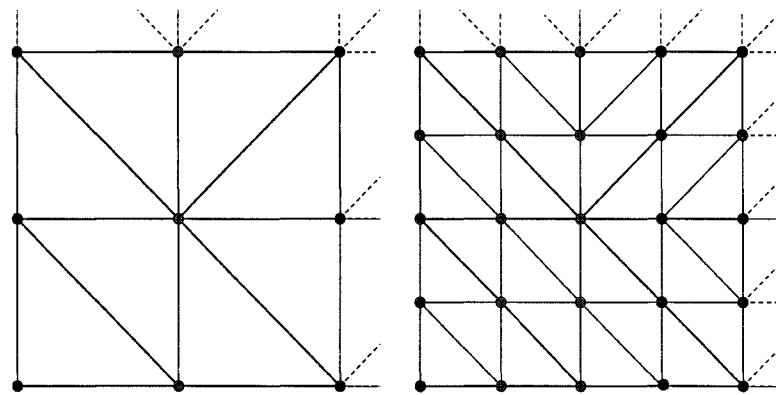


FIGURE 2.2 Raffinement d'un maillage triangulaire suite à une subdivision de Loop

2.1.2 Surface limite

À tout niveau de subdivision, il est possible de calculer la position limite de chaque sommet en appliquant les règles décrites à la figure 2.3. Pour les noeuds internes, la variable k représente la multiplicité du sommet et la pondération χ est obtenue par :

$$\chi = \frac{1}{\frac{3}{8\beta} + k} \quad (2.2)$$

Avec β selon l'équation 2.1.

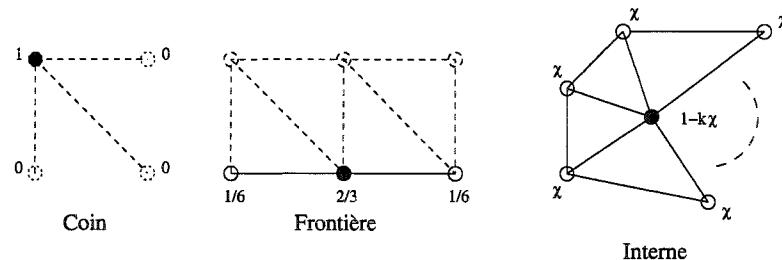


FIGURE 2.3 Règles pour obtenir la position limite de sommets existants

Ces règles peuvent être utilisées pour visualiser la surface limite S^∞ à un niveau de subdivision selon la finesse désirée et inversement pour interpoler une surface initiale S^0 en résolvant un système d'équations sur un maillage de triangles représentant la géométrie à reconstruire.

2.1.3 Calcul des normales

Le schéma de Loop offre une méthode pour calculer les normales de la surface à chaque sommet. Cette normale pour un sommet quelconque \mathbf{p}_n s'obtient par le produit vectoriel de deux tangentes ($\mathbf{t1}_n \times \mathbf{t2}_n$) qui sont calculées différemment selon que le sommet est interne ou frontalier. Pour les sommets internes, les vecteurs tangents se calculent par :

$$\mathbf{t1}_n = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\cos \frac{2\pi i}{k} \right) \mathbf{p}_{n,i} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{t2}_n = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sin \frac{2\pi i}{k} \right) \mathbf{p}_{n,i} \quad (2.4)$$

Pour les sommets frontaliers (coin et côté), le vecteur tangent $\mathbf{t1}_n$ s'obtient par :

$$\mathbf{t1}_n = \mathbf{p}_{n,0} - \mathbf{p}_{n,k-1} \quad (2.5)$$

Et le vecteur $\mathbf{t2}_n$ selon la multiplicité k du sommet comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{t2}_n &= \mathbf{p}_{n,0} + \mathbf{p}_{n,1} - \mathbf{p}_n & \text{si } k = 2 \\ \mathbf{t2}_n &= \mathbf{p}_{n,2} - \mathbf{p}_n & \text{si } k = 3 \\ \mathbf{t2}_n &= \sin(\theta)(\mathbf{p}_{n,0} + \mathbf{p}_{n,1}) + (2 \cos \theta - 2) \sum_{i=1}^{k-2} \sin(i\theta) \mathbf{p}_{n,i} & \text{si } k \geq 4 \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec $\theta = \frac{\pi}{k-1}$. La figure 2.4 montre comment l'application de ces formules nécessite, pour chaque sommet, la liste ordonnée dans un sens cohérent de ses sommets voisins.

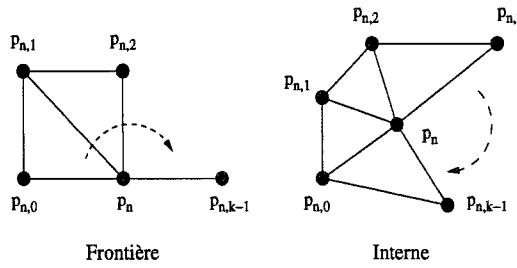


FIGURE 2.4 Calcul des tangentes

2.2 Reconstruction par interpolation transfinie

Cette section présente une première méthode originale de reconstruction de surface utilisant une interpolation transfinie.

Les différentes étapes pour reconstruire une surface de subdivision à partir d'une géométrie cible sont illustrées à la figure 2.5 et sont décrites comme suit :

1. Lire la géométrie (1,2) et établir la connectivité entre les triangles pour isoler les frontières (3) ;
2. Déetecter les quatre coins $P00$, $P01$, $P10$ et $P11$ et isoler les quatre polyligne $u0$, $u1$, $v0$ et $v1$ selon des directions orthogonales (3). Approximer chaque polyligne à l'aide d'une courbe de subdivision. Pour chaque direction, les courbes doivent être définies avec le même nombre de points de contrôle ;
3. Construire une grille régulière par interpolation transfinie (4) en se servant de la position limite de chacun de points de contrôle des courbes de subdivision. Découper chaque face en deux triangles de manière à obtenir un maillage de triangles sur lequel peuvent s'appliquer les règles de Loop ;
4. Déplacer chacun des points internes du maillage vers le point interne le plus proche du fichier de géométrie (5). Ce maillage devient S^∞ ;
5. Résoudre un système d'équations basé sur les règles de subdivision de Loop afin d'obtenir S^0 à partir du maillage construit. (6) ;

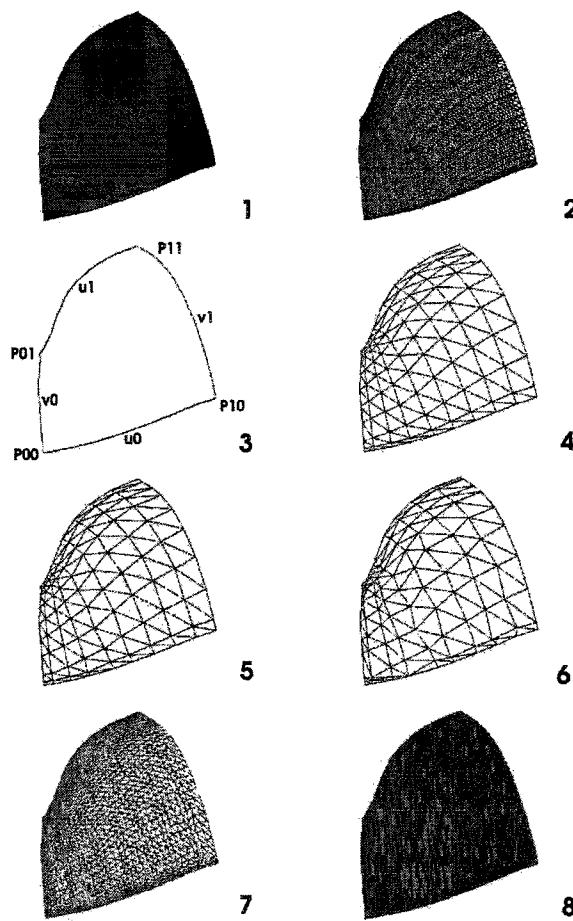


FIGURE 2.5 Étapes de reconstruction par transfini

6. Appliquer l'algorithme de subdivision de Loop à la surface initiale et projeter les sommets à leur position limite pour obtenir la surface reconstruite. (7 (deux subdivisions), 8) ;
7. Utiliser l'application MESH pour mesurer l'écart entre la surface initiale et la surface obtenue. Si l'écart est trop grand, augmenter le nombre de points de contrôle pour définir les courbes de subdivision à l'étape 2.

Cette approche permet d'obtenir une surface sans sommet irrégulier. Par contre, les prochaines sections montrent que la transition des polylinéaires décrivant les frontières aux courbes de subdivision ne peut s'effectuer sans le recours à des B-splines. De plus, pour des surfaces repliées comme celles des aubes de turbine, le déplacement de chaque point

de la surface transfinie vers la géométrie n'est pas applicable étant donné l'écart qui peut se créer entre les deux surfaces (voir figure 2.6).

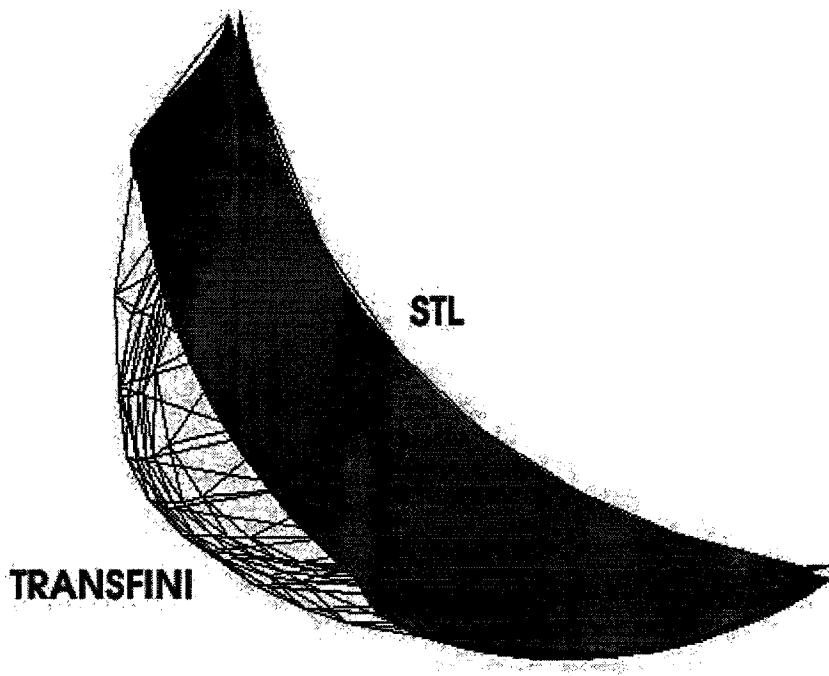


FIGURE 2.6 Transfini sur une aube complète

2.2.1 Reconstruction des frontières

Dans le schéma de Loop, les règles de subdivision aux frontières ne s'appliquent qu'au sommets frontaliers de sorte qu'il est possible de reconstruire d'abord les frontières pour ensuite s'attaquer à la surface. Toutefois, dans les fichiers de géométrie, ces frontières sont décrites par des polylignes dont les sommets sont de nombre et d'espacement aléatoires. Étant donné que pour construire le maillage, le nombre de points de la courbe de subdivision doit être identique dans une direction donnée, un transfert direct par interpolation de chaque polyligne à une courbe de subdivision est écarté. Pour effectuer ce transfert, il a fallu avoir recours à des B-splines cubiques. Cette section est divisée comme suit :

- **Courbe de subdivision** : règles de subdivision applicables aux courbes de subdivision cubique et justification de l'utilisation des B-Splines ;
- **Répartition des points d'interpolation** : méthode pour répartir sur la B-spline les points d'interpolation devant servir à construire la courbe de subdivision de manière à ce que l'écart entre cette courbe et la B-spline soit minimisé.

2.2.1.1 Courbe de subdivision cubique

Les règles de subdivision de Loop aux frontières permettent d'obtenir des courbes de continuité C^2 aux frontières. Dans ce qui suit, ces règles sont appliquées pour approximer les courbes frontières à l'aide de courbes de subdivision.

À chaque niveau de subdivision s , si nous avons une série de $(n + 1)$ points de contrôle P_i^s avec $i = 0, \dots, n$, au niveau suivant nous aurons une série de $(2n + 1)$ points de contrôle. Dans cette nouvelle série de points de contrôle, les extrémités restent inchangées ($P_0^{s+1} = P_0^s$ et $P_{2n}^{s+1} = P_n^s$ suivant les règles modifiées par Hoppe *et al.*, 1994), les points P_i^{s+1} dont l'indice i est pair correspondent aux points du niveau précédent avec une pondération des voisins ($P_i^{s+1} = \frac{1}{8}P_{\frac{i}{2}-1}^s + \frac{3}{4}P_{\frac{i}{2}}^s + \frac{1}{8}P_{\frac{i}{2}+1}^s$) et ceux dont l'indice i est impair correspondent aux points ajoutés ($P_i^{s+1} = \frac{1}{2}P_{\frac{(i-1)}{2}}^s + \frac{1}{2}P_{\frac{(i-1)}{2}+1}^s$). Ces règles de subdivision peuvent être représentées par une opération matricielle sur la liste initiale de points en utilisant une matrice de dimensions $[(2n + 1) \times (n + 1)]$ comme suit :

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & & & 1 & \end{array} \right] \begin{bmatrix} P_0^s \\ P_1^s \\ P_2^s \\ \vdots \\ P_{n-2}^s \\ P_{n-1}^s \\ P_n^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0^{s+1} \\ P_1^{s+1} \\ P_2^{s+1} \\ \vdots \\ P_{2n-2}^{s+1} \\ P_{2n-1}^{s+1} \\ P_{2n}^{s+1} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Il est possible, pour chaque point de contrôle, de déterminer sa position sur la courbe limite quel que soit le niveau de subdivision s . Alors que les extrémités restent inchangées, la position de chaque point de contrôle sur la courbe limite est obtenue par la pondération suivante :

$$P_i^\infty = \frac{1}{6}P_{i-1}^s + \frac{2}{3}P_i^s + \frac{1}{6}P_{i+1}^s \quad (2.8)$$

Ce qui peut se traduire par l'opération matricielle suivante :

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \\ & & & & 1 & \end{array} \right] \begin{bmatrix} P_0^s \\ P_1^s \\ \vdots \\ P_{n-1}^s \\ P_n^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0^\infty \\ P_1^\infty \\ \vdots \\ P_{n-1}^\infty \\ P_n^\infty \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Cette relation directe entre les points de contrôle et leurs positions respectives sur la courbe limite permet d'effectuer l'opération inverse : si nous avons une série de points $\{Q_k\}$, $k = 0, \dots, n$ nous pouvons résoudre un système d'équations pour obtenir les points de contrôle qui donneront une courbe de subdivision limite passant par ces points. Toutefois, deux raisons ne nous permettent pas d'utiliser directement cette relation :

- **Nombre de points de contrôle** : Nous devons minimiser le nombre de points de contrôle des courbes de subdivision si nous voulons une surface de subdivision initiale la plus grossière possible. Une interpolation directe nous impose un nombre de points de contrôle égal au nombre de points sur les courbes du fichier STL ;
- **Paramétrisation** : Les courbes de subdivision s'apparentent à une B-spline uniforme périodique (cette relation est étudiée plus en détail à la section 2.5.1.2). L'obtention d'une courbe de subdivision à partir de l'interpolation d'une série de points connus équivaut donc à une paramétrisation uniforme. Or, comme le montre la figure 2.2.1.1, la forme de la courbe obtenue par paramétrisation uniforme est très influencée par l'uniformité dans l'espacement des points, uniformité que ne peuvent garantir les points frontières du fichier STL. Conséquemment, une paramétrisation logarithmique (décrise à l'annexe II) produisant une courbe moins oscillante est utilisée pour obtenir la courbe B-spline.

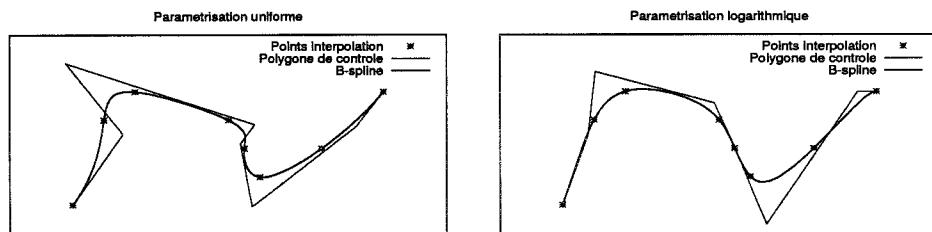


FIGURE 2.7 Comparaison entre une paramétrisation uniforme et une paramétrisation logarithmique

Afin d'obtenir une courbe de subdivision adéquate avec un minimum de points de contrôle, nous devons donc remplacer chacune des quatre polylinéaires frontières obtenue du fichier STL par une courbe paramétrique cubique (B-spline), que nous appellerons *courbe cible*, et qui nous permettra de choisir le nombre et la position des points d'interpolation nécessaires à la construction de la courbe de subdivision.

Chaque courbe frontière est définie par une série de points $\{Q_k\}$, $k = 0, \dots, n$. Afin d'obtenir les courbes cibles, deux approches ont été implantées :

- **Interpolation** : Une B-spline cubique passant par tous les points Q_k et définie par un

- polygone de contrôle de $(k + 1)$ points ;
- **Approximation** : Une B-spline qui minimise une fonction de distance avec les points de la polyligne à reconstruire (moindre carré).

Ces deux méthodes sont présentées en détail à l'annexe II.

2.2.1.2 Répartition des points d'interpolation

Après avoir générée la courbe cible, il faut déterminer la position des points d'interpolation P_i^∞ devant servir à la résolution de l'équation 2.9 de manière à ce que l'écart entre la courbe cible et la courbe de subdivision reste en deça de l'écart maximal prescrit. Afin de minimiser le nombre de points requis, il est préférable de les concentrer dans les régions de fortes courbures et de les espacer dans les régions plus ou moins rectilignes. Cette répartition adaptée est obtenue en s'inspirant des travaux de Lépine *et al.*, 1999, pour positionner ces points en fonction de la courbure calculée selon la formule :

$$\mathcal{C}(u) = \frac{|C'(u) \times C''(u)|}{|C'(u)|^3} \quad (2.10)$$

Le tracé de la courbure de la spline obtenue pour une courbe issue d'une géométrie industrielle typique pour cette étude est présenté à la figure 2.8. Nous voyons, dans ce cas, que la courbure est presque nulle sur toute la longueur sauf dans la région du milieu.

Afin de déterminer les valeurs du paramètre u qui serviront à déterminer les points d'interpolation Q_k , la courbure de la courbe est intégrée suivant l'équation :

$$F(u) = \frac{1}{K} \int_0^u \mathcal{C}(u) + D du$$

Une constante D appelée *décalage* est ajoutée lors de l'intégration afin d'atténuer les

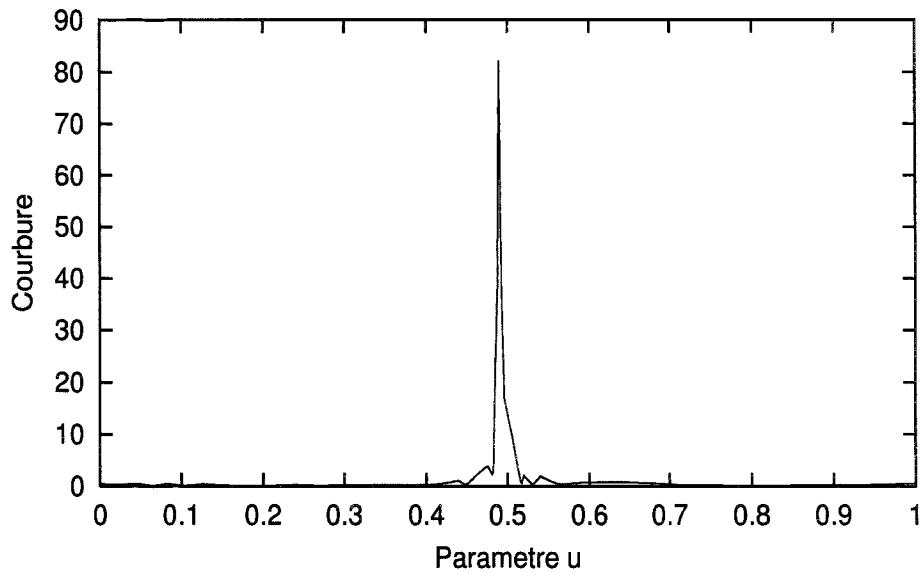


FIGURE 2.8 Courbure de la frontière aube-couronne

fortes variations de valeur de courbure. La figure 2.9 montre la distribution de la courbure obtenue pour différentes valeurs de décalage. Pour obtenir la valeur des paramètres u , il suffit de diviser uniformément l'ordonnée par le nombre de points de calcul désirés et de trouver les valeurs de u correspondantes pour une valeur de décalage donnée.

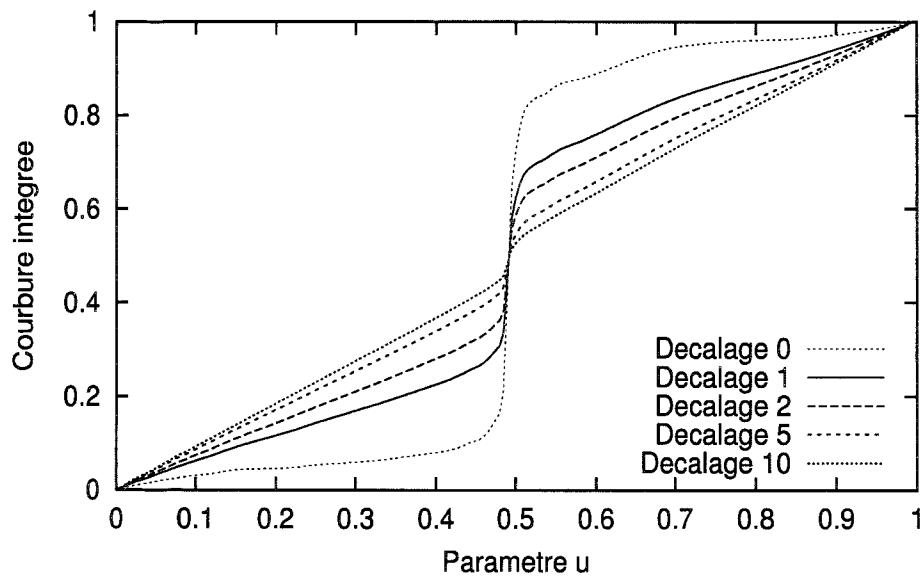


FIGURE 2.9 Distribution de la courbure en fonction du décalage

2.2.2 Reconstruction de la surface par interpolation transfinie

L'interpolation transfinie permet de construire une surface paramétrique bornée par quatre B-splines. Normalement, ces surfaces sont construites en divisant les B-splines dans chaque direction u et v par le nombre de points désirés n et m pour former une grille de $n \times m$ points. Les deux surfaces réglées s'obtiennent par :

$$R_c(u, v) = (1 - v)P(u, 0) + vP(u, 1) \quad (2.11)$$

$$R_d(u, v) = (1 - u)P(0, v) + vP(1, v) \quad (2.12)$$

La surface passant par les quatre coins P_{00} , P_{01} , P_{10} et P_{11} s'obtient par :

$$R_{cd}(u, v) = (1 - v)((1 - u)P_{00} + uP_{10}) + v((1 - u)P_{01} + uP_{11}) \quad (2.13)$$

L'interpolation transfinie est définie par l'addition des deux surfaces réglées, de laquelle la surface passant par les quatre coins est soustraite (voir figure 2.10) :

$$Q(u, v) = R_c(u, v) + R_d(u, v) - R_{cd}(u, v) \quad (2.14)$$

Normalement, l'interpolation transfinie se construit avec des valeurs constantes de vecteur nodal dans chaque direction u et v . Pour les surfaces de subdivision, les points issus de l'interpolation transfinie doivent correspondre aux points des courbes de subdivision définissant les frontières. Comme chaque courbe de subdivision est construite de façon indépendante, des valeurs différentes du vecteur nodal de chaque courbe selon les directions u et v définissent la position des points de chaque côté de la surface à reconstruire. Pour remédier à cette différence, les valeurs nodales pour le calcul des points internes sont pondérées. À partir de la grille de points, un maillage de triangles correspondant à la

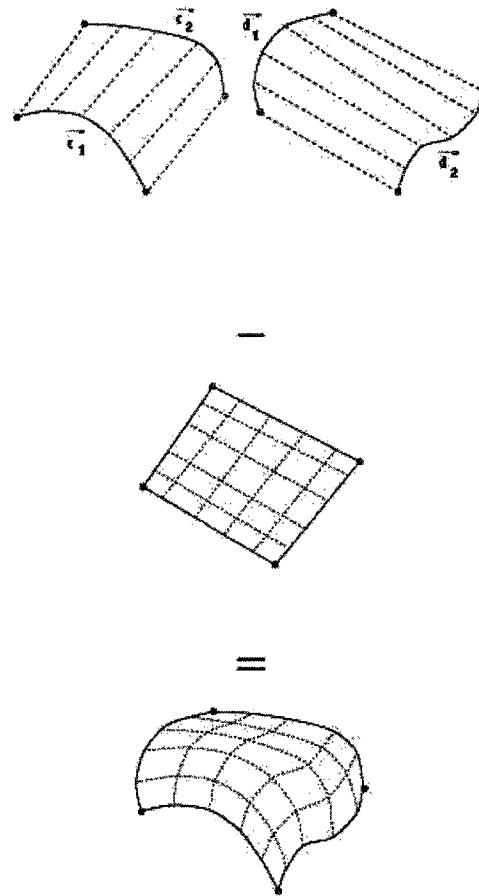


FIGURE 2.10 Opérations pour obtenir une interpolation transfinie

surface limite S^∞ est construit.

2.3 Reconstruction par MeshToSS

MeshToSS est un programme dont le code source est disponible sur internet et qui a pu être adapté à nos besoins. Il permet d'obtenir une surface de subdivision de Loop à partir d'une géométrie de départ décrite par un maillage de triangles comme le STL. Il est basé sur un algorithme de simplification de maillage par déraffinement d'arête (edge collapse) qui permet, à partir d'un maillage dense, d'obtenir un maillage plus grossier en fonction

d'un nombre de sommets ou d'un écart maximal désiré. Bien que ce dernier critère d'arrêt soit offert dans **MeshToSS**, il ne correspond pas à une mesure précise de l'écart entre la surface de référence et la surface de subdivision limite. Pour cette raison, le programme est utilisé pour déraffiner uniquement en fonction d'un nombre de sommets cibles et l'écart est mesuré à l'aide de l'application **MESH** décrite à la section 2.5.2. Le programme offre deux modes de métriques : le mode basé uniquement sur les sommets correspond à la QEM originale proposée par Garland et Heckbert, 1997, et celui basé sur à la fois sur les sommets et les arêtes proposé par l'auteur du programme Kanai, 2001. Dans ce projet, seul le deuxième mode sera utilisé pour la reconstruction de surfaces. Cette section décrit sommairement la métrique d'erreur quadrique utilisée lors du processus de déraffinement, les paramètres d'exécution et enfin les modifications effectuées au programme.

2.3.1 Métrique d'erreur quadrique

La métrique d'erreur quadrique a été développée par Garland et Heckbert, 1997, dans le but d'obtenir une méthode efficace d'approximation de maillage et s'appuie sur le principe qu'une droite ou un plan peut être défini par l'ensemble des points \mathbf{v} pour lesquels l'équation suivante est vérifiée :

$$\mathbf{n}^\top \mathbf{v} + d = 0 \quad (2.15)$$

où $\mathbf{n} = [abc]^\top$ est un vecteur unitaire ($a^2 + b^2 + c^2 = 1$) indiquant la direction de la perpendiculaire à la droite ou de la normale au plan et d est une constante scalaire. La distance au carré d'un point $\mathbf{v} = [xyz]^\top$ par rapport à cette droite ou à ce plan peut alors être définie par :

$$D^2(\mathbf{v}) = (\mathbf{n}^\top \mathbf{v} + d)^2 = (ax + by + cz + d)^2 \quad (2.16)$$

En se basant sur le fait qu'un sommet est la jonction de deux droites ou de plusieurs plans, Garland et Heckbert, 1997, définit la métrique pour mesurer l'erreur entre un point quelconque et un sommet comme la somme des distances minimales au carré de ce point par rapport aux droites ou aux plans :

$$Erreur(\mathbf{v}) = \sum_i D_i^2(\mathbf{v}) = \sum_i (\mathbf{n}^\top \mathbf{v} + d_i)^2 \quad (2.17)$$

Alors que l'utilisation de la distance maximale serait plus proche de la distance de Hausdorff, l'utilisation de la somme permet d'augmenter grandement la performance de l'algorithme. À titre d'exemple, la figure 2.11 montre un déraffinement d'arête sur un plan. Les sommets \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_j sont associés aux paires de droites $P_i = \{A, C\}$ et $P_j = \{B, C\}$ respectivement. Lors du déraffinement, les sommets \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_j sont remplacés par un seul sommet $\bar{\mathbf{v}}$ associé aux trois droites ($\bar{P} = \{A, B, C\}$). Comme aucun point ne peut appartenir à ces trois droites en même temps, l'erreur ne peut être nulle. Par contre la position de $\bar{\mathbf{v}}$ devrait minimiser la valeur de $Erreur(\bar{\mathbf{v}})$. Les courbes elliptiques de la figure 2.11 indiquent les régions autour de $\bar{\mathbf{v}}$ où l'erreur est constante. Dans le cas tridimensionnel, ces valeurs constantes d'erreur ont la forme d'une surface quadrique (ellipsoïde), d'où le nom "métrique d'erreur quadrique".

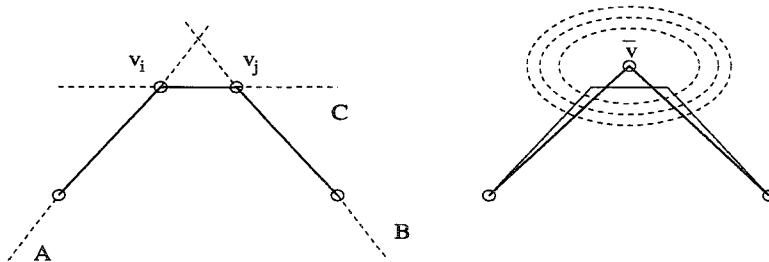


FIGURE 2.11 Déraffinement d'arête

Afin d'utiliser cette métrique de façon efficace dans un programme, Garland et Heckbert, 1997, a reformulé l'équation comme suit :

$$\begin{aligned}
D^2 &= (\mathbf{n}^\top \mathbf{v} + d)^2 \\
&= (\mathbf{n}^\top \mathbf{v} + d)(\mathbf{n}^\top \mathbf{v} + d) \\
&= \mathbf{v}^\top \mathbf{n} \mathbf{n}^\top \mathbf{v} + 2d \mathbf{n}^\top \mathbf{v} + d^2 \\
&= \mathbf{v}^\top (\mathbf{n} \mathbf{n}^\top) \mathbf{v} + 2(d \mathbf{n})^\top \mathbf{v} + d^2
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Cette nouvelle formulation permet de définir une quadrique Q définie par :

$$Q = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, c) \tag{2.19}$$

où

$$\mathbf{A} = \mathbf{n} \mathbf{n}^\top = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = d \mathbf{n}$$

$$c = d^2$$

La quadrique associée à chaque sommet peut donc être définie par dix valeurs distinctes (six pour \mathbf{A} , trois pour \mathbf{b} , et une pour c). Cette notation permet de faciliter la manipulation des quadriques : la quadrique associée à un sommet est la somme des quadriques des faces (plans) voisines et celle associée à une arête est la somme des faces voisines. Une métrique d'erreur quadrique peut alors être associée à chaque sommet v à l'aide de l'équation d'ordre deux suivante :

$$Q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^\top \mathbf{A} \mathbf{v} + 2\mathbf{b}^\top \mathbf{v} + c \tag{2.20}$$

L'application MeshToSS offre deux modes de métriques :

- **Quadrique de sommet** : seules les quadriques des sommets sont utilisées. La quadrique utilisée lors du remplacement d'une arête par un sommet est la somme des quadriques des sommets de cette arête ;
- **Quadrique d'arête** : méthode proposée par Kanai qui tient compte à la fois des quadriques des sommets de l'arête et de celle de l'arête elle-même. La figure 2.12 schématise ce type de déraffinement. Les valeurs de quadriques, initialement nulles, sont mises à jour à chaque opération de retrait d'arête par les opérations suivantes :

$$Q^{\bar{v}} = Q^e + Q^{v_1} + Q^{v_2}$$

$$Q^{\bar{e}} = Q^{e_1} + Q^{e_2}$$

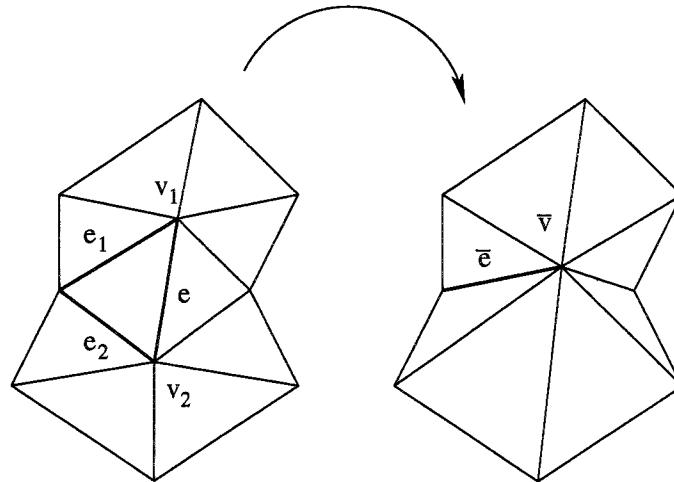


FIGURE 2.12 Opération de déraffinement avec quadrique d'arête

Lors des opérations de déraffinement, la position du nouveau sommet v^{min} est déterminée de manière à minimiser l'équation quadratique 2.20, donc la position où $\nabla Q^{\bar{v}}$ est nul. Cette position est obtenue en résolvant l'équation linéaire suivante :

$$\mathbf{A}v^{min} = -\mathbf{b}$$

2.3.2 Algorithme

L'algorithme de simplification, de type vorace, se résume par les procédures suivantes :

1. Calcul des coefficients pour chaque face de manière à obtenir les métriques associées à chaque sommet et, selon le cas, chaque arête ;
2. Pour chaque arête, calcul du v^{min} et de l'erreur quadrique correspondante $Q(v^{min})$.
Les quadriques sont mises dans une liste en ordre croissant d'erreur ;
3. Chaque arête est remplacée par un sommet en ordre croissant d'erreur, l'erreur quadrique des arêtes affectées est recalculée et leur position dans la liste ajustée ;
4. L'algorithme s'arrête lorsque le nombre de sommets désiré est atteint.

2.3.3 Paramètres du programme

En plus du choix du type de quadrique, le programme MeshToSS offre les paramètres suivants :

- **vnum** nombre de sommets désiré pour le maillage simplifié ;
- **discount_penalty** : pénalité utilisée pour conserver les frontières de la géométrie ;
- **angle_tol** : tolérance d'angle maximale entre deux faces pour détecter les recouvrements ;
- **shape_tol** : variable pour imposer une régularité dans la forme des triangles ;

2.3.4 Modifications apportées au programme

Le programme ne permet pas d'imposer des contraintes géométriques telles que les coins au bord de fuite à la couronne et à la ceinture. Utilisé tel quel, le programme génère une surface de subdivision avec des arrondis à ces endroits. Pour obtenir des résultats satisfaisants, une étiquette est ajoutée à chaque sommet de manière à signaler les coins

et lors des opérations de déraffinement, les arêtes comportant un sommet de coin ne sont pas traitées.

2.4 Reconstruction par sections

Cette troisième méthode, également originale, consiste à obtenir une surface de subdivision S^0 à partir de l’interpolation d’un maillage limite S^∞ construit par l’assemblage de courbes de subdivisions tirées de la reconstruction de certaines sections d’aube définies dans un fichier de géométrie de format DAT. En utilisant des sections internes, plutôt qu’uniquement les frontières comme dans le cas de l’interpolation transfinie (section 2.2), cette méthode peut s’appliquer à des surfaces repliées. Les différentes étapes sont décrites comme suit :

1. Lecture de l’ensemble des sections du fichier DAT. Les sections frontières décrivant les jonctions entre l’aube et la ceinture et entre l’aube et la couronne sont retenues comme limites de la géométrie ;
2. Génération d’une courbe B-spline représentant le bord de fuite. La liste des points est obtenue en prenant, pour chaque section, la moyenne des deux points extrêmes du bord de fuite. La reconstruction de cette B-Spline par une courbe de subdivision permet d’obtenir une première approximation du nombre m et du choix des sections qui entreront dans la reconstruction de l’ensemble de l’aube ;
3. Reconstruction des première et dernière sections avec le même nombre de points n . Les points sur les sections intermédiaires sont obtenus par interpolation linéaire des valeurs nodales des première et dernière sections ;
4. À partir de l’ensemble des sommets obtenus, construction d’une grille régulière de $n \times m$ sommets. Une diagonale est ajoutée à chaque face de la grille pour obtenir une estimation du maillage limite ;
5. À partir des règles de subdivision de Loop permettant d’obtenir la position limite

des sommets d'un polygone de contrôle, effectuer l'opération inverse pour obtenir le polygone de contrôle correspondant aux points de la grille ;

6. Obtenir la surface de subdivision en subdivisant et projetant les sommets à leur position limite.

Bien que cette méthode nécessite plus de manipulations que l'application MeshToSS, elle permet d'avoir plus de contrôle sur la qualité du maillage. La construction du maillage à partir d'une grille de points, et la triangulation subséquente, permet d'obtenir un maillage sans sommet irrégulier (voir section 1.1.5). Elle génère de plus un maillage dont l'alignement des points suit le contour des frontières de la surface comme celui obtenu avec l'interpolation transfinie (voir figure 2.5).

La construction de la grille de points s'effectue à l'aide de l'application SubCrb . Cette application, consacrée uniquement aux courbes de subdivision, est bâtie sur les éléments de reconstruction de courbes de SubDiv . En plus d'offrir la technique de reconstruction de courbe par décalage décrite à la section 2.2.1.2, l'application offre la possibilité de travailler simultanément avec plusieurs sections de géométries DAT et divers outils pour améliorer la reconstruction globale de l'aube.

Un de ces outils consiste à définir des zones. La méthode du décalage basée sur la courbure et utilisée pour l'interpolation transfinie permet d'améliorer la précision de la courbe au bord d'attaque. Toutefois, cette concentration des points au bord d'attaque se fait au détriment de la précision au bord de fuite. Pour permettre une meilleure répartition des points, deux zones sont définies, l'une du côté du bord d'attaque et l'autre du côté du bord de fuite. La frontière de chaque zone est fixée selon un pourcentage de la longueur de corde de la section. Ce pourcentage progresse du bord d'attaque au bord de fuite comme le montre la figure 2.13. Quatre paramètres s'ajoutent au décalage. Ce sont les pourcentages définissant la frontière de chaque zone et le nombre de points à l'intérieur de chaque zone. La frontière d'une zone est établie en fixant trois points de chaque côté du profil.

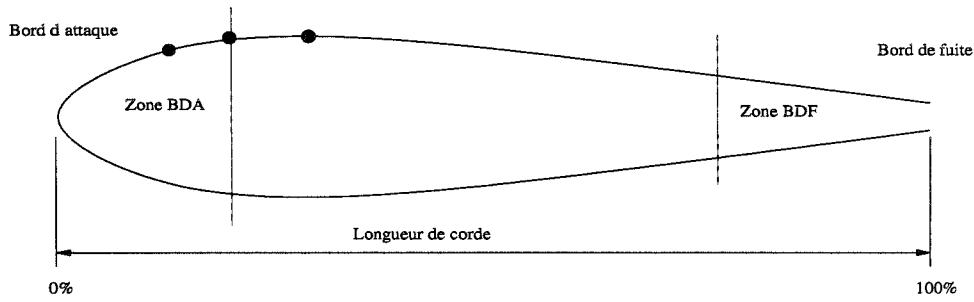


FIGURE 2.13 Définition de la longueur de corde

2.5 Évaluation de la reconstruction

La pertinence de ce projet repose en grande partie sur la capacité des surfaces de subdivision à reproduire une géométrie assez précisément pour qu'elle soit utilisée dans des simulations d'écoulement. Pour mesurer l'écart entre deux géométries, les métriques d'erreur géométrique les plus utilisées sont les normes L_∞ et L_2 . Pour une fonction $f(t)$, son approximation $g(t)$ et un intervalle d'intérêt $[a, b]$ la norme L_∞ mesure l'écart maximal entre les deux fonctions :

$$\|f - g\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)| \quad (2.21)$$

La norme L_2 mesure l'écart moyen entre les deux fonctions :

$$\|f - g\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2 dt} \quad (2.22)$$

Alors que pour les fonctions $f(t)$ et $g(t)$, l'écart se mesure par une simple soustraction, dans le cas de deux surfaces quelconques dans un espace 3D, il faut mesurer la distance entre les points les plus rapprochés. Si l'ensemble des points de la surface à approximer S_1 est défini par \mathbf{x} , alors la distance minimale $d(S_1, \mathbf{y})$ d'un point \mathbf{y} de l'approximation

S_2 par rapport à la surface S_1 est définie par :

$$d(S_1, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x} \in S_1} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (2.23)$$

où $\|\cdot\|$ correspond à la longueur Euclidienne. Cette mesure permet de définir des équivalences aux normes L_∞ et L_2 pour des surfaces. Dans le cas de la norme L_∞ , elle correspond à la distance de Hausdorff définie par :

$$\hat{E}_{max}(S_1, S_2) = \max(\max_{\mathbf{x} \in S_1} d(S_2, \mathbf{x}), \max_{\mathbf{y} \in S_2} d(S_1, \mathbf{y})) \quad (2.24)$$

La distance d'Hausdorff mesure l'écart maximal entre les deux surfaces. C'est-à-dire que si la distance de Hausdorff est ϵ alors tous les points de la surface d'approximation ne sont jamais éloignés d'une distance de plus de ϵ de la surface originale et, inversement, tous les points de la surfaces originale ne s'écartent jamais de plus de ϵ de la surface d'approximation.

Une équivalence avec la norme L_2 peut s'obtenir par la mesure de la moyenne des distances au carré entre les deux modèles :

$$\hat{E}_{moy}(S_1, S_2) = \frac{1}{w_1 + w_2} \left(\int_{\mathbf{x}} d^2(S_2, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{y}} d^2(S_1, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \quad (2.25)$$

où w_1 et w_2 sont les aires des surfaces S_1 et S_2 respectivement.

Afin de donner à ces métriques une utilité pratique, il faut limiter leur calcul à un échantillon de points. De l'ensemble des points \mathbf{x} et \mathbf{y} de chacune des surfaces, deux échantillons $X \subset \mathbf{x}$ et $Y \subset \mathbf{y}$ constitués respectivement de k_x et k_y points peuvent servir à l'application des métriques. Les métriques d'erreur se calculent alors avec des versions

discrète des formules précédentes :

$$E_{max}(S_1, S_2) = \max(\max_{\mathbf{x} \in X} d(S_2, \mathbf{x}), \max_{\mathbf{y} \in Y} d(S_1, \mathbf{y})) \quad (2.26)$$

et

$$E_{moy}(S_1, S_2) = \frac{1}{k_x + k_y} \left(\sum_{\mathbf{x} \in X} d^2(S_2, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{\mathbf{y} \in Y} d^2(S_1, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \quad (2.27)$$

En général, E_{moy} donne une meilleure mesure de la qualité générale de l'approximation que E_{max} et est moins sensible au bruit. Par contre, la mesure E_{max} permet de repérer des écarts locaux.

2.5.1 Calcul d'erreur pour les courbes

Le calcul de l'erreur pour les courbes s'effectue entre la courbe cible (B-spline cubique obtenue par interpolation ou approximation sur les points connus de la géométrie cible) et une courbe de subdivision. Contrairement aux B-splines qui sont des courbes paramétriques, les courbes de subdivision ne sont définies qu'à des points précis dont la quantité peut être ajustée par le nombre de subdivisions. Les sections suivantes présentent d'abord un algorithme qui permet d'obtenir une mesure satisfaisante de l'écart entre une B-spline et une courbe de subdivision et ensuite comment le schéma de subdivision pourrait être modifié de manière à correspondre à une B-spline cubique uniforme non-périodique (clamped) et par conséquent devenir paramétrique.

2.5.1.1 Calcul d'erreur entre B-spline et courbe de subdivision

La figure 2.14 montre la motivation derrière l'utilisation de la distance de Hausdorff pour mesurer l'écart entre deux courbes. La figure présente deux courbes B-splines A et B . La

courbe A est plutôt lisse et la courbe B présente un creux. La figure permet de constater que la distance maximale entre les deux courbes pour un échantillonage identique est différente selon le sens des mesures ($h(A, B) \neq h(B, A)$).

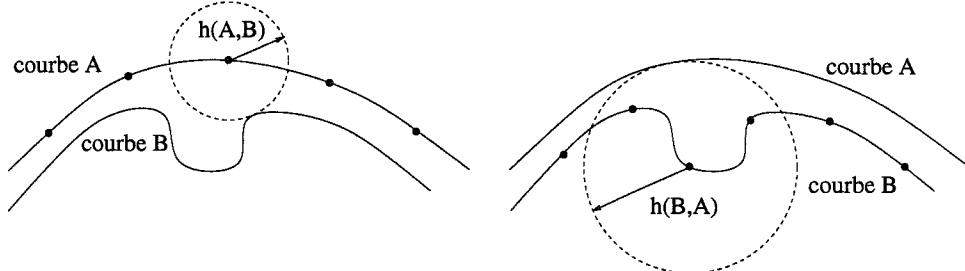


FIGURE 2.14 Asymétrie de la distance de Hausdorff

En dépit de ces observations, l'algorithme de mesure d'écart entre une B-Spline et une courbe de subdivision proposé dans ce mémoire n'utilise pas la distance de Hausdorff : seul l'écart des points de la courbe de subdivision par rapport à la spline est calculé. Ce choix repose sur le fait que la représentation de la courbe B à l'aide d'un schéma de subdivision entraînerait nécessairement une concentration de points dans la région du creux. À la suite d'un certain nombre de subdivisions, le polygone résultant devrait donner un échantillon de points suffisant pour obtenir une mesure adéquate de l'erreur entre les deux courbes.

L'algorithme mesure l'écart entre chaque point de la courbe de subdivision et la B-spline. L'algorithme se présente comme suit :

1. La spline est divisée en segments ;
2. Pour chaque point de la courbe de subdivision, le segment de spline le plus proche est déterminé ;
3. Ce segment de spline est parcouru de manière à obtenir la valeur du paramètre u qui donne la position la plus proche du point de la courbe de subdivision selon le critère d'arrêt ;

4. Lorsque l'écart maximum a été calculé pour tous les points de la courbe de subdivision, la moyenne et la valeur maximale sont extraites.

Trois paramètres sont utilisés :

- **Nombre d'intervalles** : afin de déterminer le segment de la B-spline situé le plus proche du point de la courbe de subdivision, la spline est découpée en un certain nombre d'intervalles ;
- **Nombre de subdivision** : la précision du calcul d'écart est fonction du nombre de points de comparaison, lui-même fonction du nombre de subdivisions appliquées à la courbe avant le lancement de l'algorithme ;
- **Critère d'arrêt** : lorsque le segment de la spline voisin du point de calcul est identifié, ce segment est balayé jusqu'à ce que la différence entre deux mesures d'écart soit inférieure à une valeur prescrite.

2.5.1.2 Correspondance entre courbes de subdivision et B-splines cubiques

Les règles de subdivision aux frontières du schéma de Loop, appliquées à un polygone de contrôle donné, produisent une courbe limite identique à la B-spline cubique périodique (unclamped) avec un vecteur nodal uniforme ayant le même polygone de contrôle. Toutefois ce projet nécessite la définition de courbes avec extrémités fixes, d'où le recours à des règles de subdivision spécifiques aux extrémités des courbes (règle du coin, sommets existants, figures 2.1).

Cette section montre qu'en appliquant cette nouvelle règle aux extrémités, la courbe limite obtenue ne correspond pas à la B-spline cubique non-périodique (clamped) avec vecteur nodal uniforme correspondante et propose des règles de subdivision différentes de celles rencontrées lors de la revue bibliographique et qui permettent d'obtenir cette correspondance.

La figure 2.5.1.2 montre, pour un même polygone de contrôle, la B-spline cubique non-

périodique et la courbe limite de subdivision selon les règles mentionnées plus haut. Pour la B-spline cubique, les \times indiquent la position sur la courbe correspondant à la valeur des noeuds internes : Pour un polygone de contrôle de $(n + 1)$ points et une B-spline cubique ($p = 3$), nous avons un vecteur nodal de dimension $n + 4$ avec $n - 4$ valeurs nodales internes de la forme :

$$U = \{0, 0, 0, 0, \underbrace{\frac{1}{n-3}, \frac{2}{n-3}, \dots, \frac{n-4}{n-3}}_{n-4}, 1, 1, 1, 1\} \quad (2.28)$$

Les $+$ indiquent la position des points de contrôle sur la courbe limite. Nous constatons que les deux courbes se confondent dans les tronçons délimités par les points de contrôle P_p et P_{n-p} . La juxtaposition de ces deux courbes montre qu'il y a une correspondance exacte entre chaque noeud interne et une position limite d'un point de contrôle sur la courbe de subdivision. Cette relation ne se retrouve pas aux extrémités de la spline (où les points de contrôle P_1 et P_{n-1} ne semblent pas avoir de correspondance sur la spline).

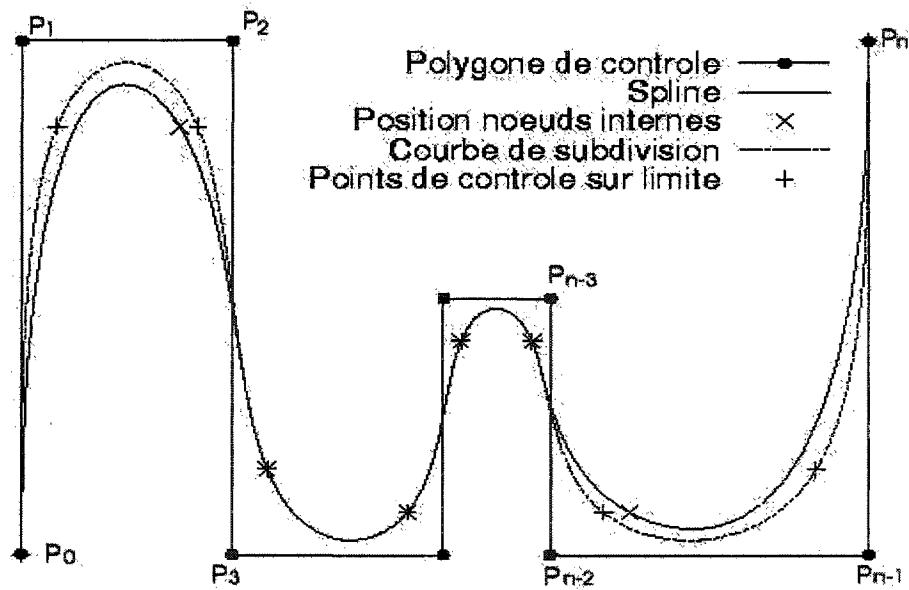


FIGURE 2.15 Comparaison B-spline cubique uniforme non-périodique et courbe de subdivision

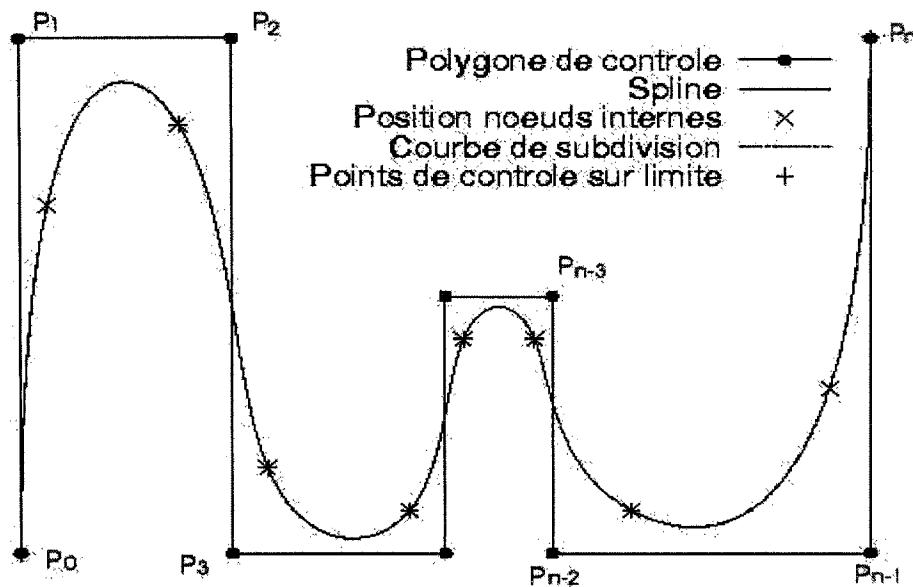


FIGURE 2.16 Comparaison B-spline cubique uniforme non-périodique et courbe de subdivision modifiée

En modifiant les règles de subdivision, nous sommes parvenus à une courbe de subdivision identique à la spline sur toute sa longueur (voir figure 2.5.1.2). Les règles de subdivision modifiées peuvent être représentées par l'opération matricielle suivante (les chiffres en gras sont reproduits en bloc sur la diagonale) :

$$\begin{bmatrix}
 1 & & & & & & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & & \\
 \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & & & & & & \\
 \frac{1}{4} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & & & & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & & \\
 \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & & & & & \\
 \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & & & & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} & & & & \\
 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & & & & & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0^s \\ P_1^s \\ P_2^s \\ P_3^s \\ P_4^s \\ \vdots \\ P_{n-4}^s \\ P_{n-3}^s \\ P_{n-2}^s \\ P_{n-1}^s \\ P_n^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0^{s+1} \\ P_1^{s+1} \\ P_2^{s+1} \\ P_3^{s+1} \\ P_4^{s+1} \\ P_5^{s+1} \\ \vdots \\ P_{2n-7}^{s+1} \\ P_{2n-6}^{s+1} \\ P_{2n-5}^{s+1} \\ P_{2n-4}^{s+1} \\ P_{2n-3}^{s+1} \\ P_{2n-2}^{s+1} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Ces nouvelles règles compliquent toutefois l'interpolation d'une spline. En effet, à chaque niveau subdivision, la distance entre les points P_0 et P_1 et entre les points P_{n-1} et P_n diminue et, à la limite, les points sont surperposés. Un polygone de $(n + 1)$ points de contrôle donne donc $(n - 1)$ points distincts sur la surface limite. Une façon de résoudre ce problème est d'obtenir deux points d'interpolation additionnels de la spline comme ceux correspondant aux valeurs nodales des points intermédiaires situées entre u_p et u_{p+1} et entre u_n et u_{n+1} . Pour interpoler une courbe B-spline avec $(n + 1)$ points, il suffit donc de discréteriser la spline en $(n - 1)$ points et d'ajouter deux points au milieu des premiers et derniers intervalles. En procédant de la sorte, on peut interpoler à l'aide de la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix}
 1 & & & & & & & \\
 \frac{14}{96} & \frac{55}{96} & \frac{27}{96} & & & & & \\
 \frac{1}{4} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & & & & & \\
 \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & & & & \\
 \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & & & \\
 & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} & & & & \\
 & \frac{27}{96} & \frac{55}{96} & \frac{14}{96} & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 P_0^0 & & & & & & & \\
 P_1^0 & & & & & & & \\
 P_2^0 & & & & & & & \\
 P_3^0 & & & & & & & \\
 P_4^0 & & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & & \\
 P_{n-4}^0 & & & & & & & \\
 P_{n-3}^0 & & & & & & & \\
 P_{n-2}^0 & & & & & & & \\
 P_{n-1}^0 & & & & & & & \\
 P_n^0 & & & & & & & \\
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 P_0^\infty & & & & & & & \\
 P_1^\infty & & & & & & & \\
 P_2^\infty & & & & & & & \\
 P_3^\infty & & & & & & & \\
 P_4^\infty & & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & & \\
 P_{n-2}^\infty & & & & & & & \\
 P_{n-2}^\infty & & & & & & & \\
 P_{n-2}^\infty & & & & & & & \\
 P_{n-1}^\infty & & & & & & & \\
 P_n^\infty & & & & & & & \\
 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

2.5.2 Mesure d'écart par MESH

L'application MESH (Measuring Errors between Surfaces using the Hausdorff distance, voir Aspert *et al.*, 2002), développée à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) est utilisée pour évaluer la qualité des reconstructions de surfaces obtenues. Cette application graphique permet de visualiser l'écart entre deux surfaces définies par un maillage triangulaire en utilisant la distance de Hausdorff. La figure 2.17 montre la fenêtre principale de l'application avec l'affichage de deux surfaces, l'une d'elles montrant l'importance des écarts par un gradient de couleurs. Le programme donne aussi des statistiques sur ces écarts notamment l'écart maximal en valeur absolue ainsi qu'en pourcentage par rapport à la longueur de la diagonale de la boîte englobante.

L'application MESH s'applique à des géométries définies par un maillage de triangles en format VRML (voir Annexe I). Trois paramètres sont offerts à l'usager :

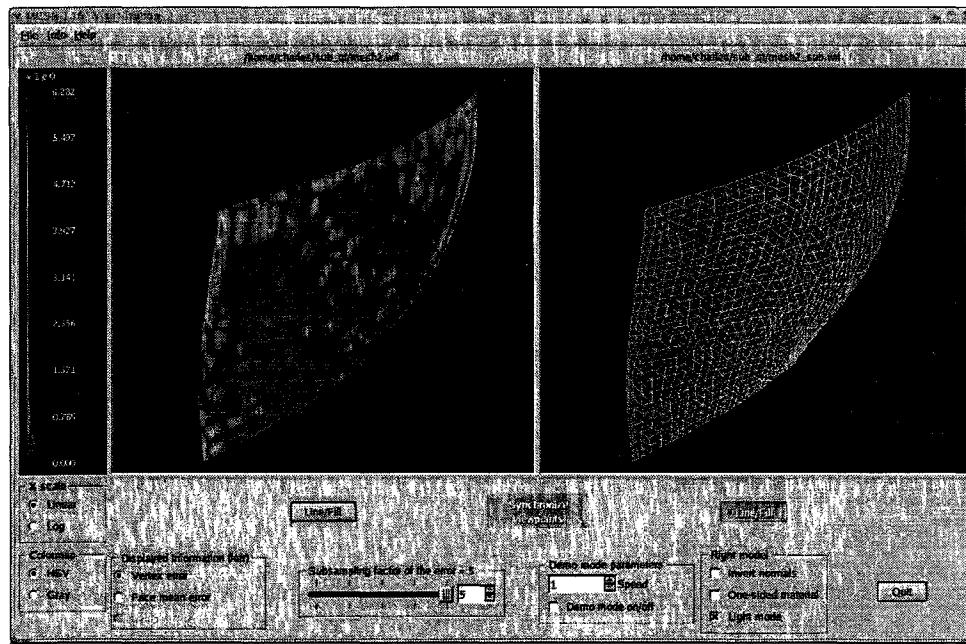


FIGURE 2.17 Fenêtre principale de l'application MESH avec à droite la version maillage d'une surface de subdivision et à gauche l'écart avec la surface de référence en tons de gris

- **Pas d'échantillonage** : le pas d'échantillonage δ ([0.02,2]), exprimé en pourcentage de la diagonale de la boîte englobante, définit une densité d'échantillonnage $1/\delta^2$.
- **Fréquence d'échantillonage** : valeur entière pour définir le nombre de points d'échantillonage sur chaque face par le nombre de points sur chaque arête d'un triangle. Une fréquence d'échantillonage de n indique qu'il y aura $n(n+1)/2$ points d'échantillonage sur le triangle. La valeur de n devrait être supérieure à $n' = \sqrt{1/4 + 2|T|/\delta^2} - 1/2$ où T est la surface du triangle et δ le pas d'échantillonage ;
- **Symétrie** : le programme offre la possibilité de calculer les écarts dans les deux sens (distance de Hausdorff).

CHAPITRE 3

IMPLANTATION DE SUBDIV

L’application SubDiv permet, par l’entremise d’une interface graphique, d’accéder à une bibliothèque de classes offrant les fonctionnalités décrites au chapitre précédent. Ce chapitre propose un survol des différents éléments que composent cette bibliothèque selon les volets suivants :

- **Fichiers entrée/sortie** : Description des différents formats de fichiers d’entrée et de sauvegarde utilisés par SubDiv ;
- **Courbes de subdivision** : Description des classes et des fonctionnalités disponibles pour la construction de courbes de subdivision ;
- **Surfaces de subdivision** : Description de la structure de données, des classes et des fonctionnalités disponibles pour manipuler les surfaces de subdivision ;
- **Reconstruction par interpolation transfinie** : Description des fonctionnalités permettant de reconstruire une surface par interpolation transfinie ;
- **Reconstruction par MeshToSS** : Description de l’intégration de MeshToSS dans SubDiv ;
- **Reconstruction par sections** : Description des fonctionnalités de SubCrb utilisés pour appliquer ce type de reconstruction ;
- **Évaluation des erreurs** : Description des fonctionnalités pour mesurer l’erreur sur les courbes et de l’intégration de l’application MESH dans SubDiv pour l’erreur sur les surfaces.

La figure 3.1 montre le diagramme de paquetage de la bibliothèque SubDiv .

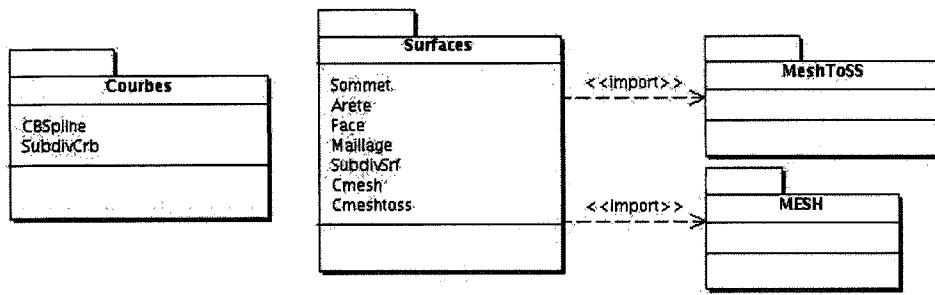


FIGURE 3.1 Diagramme de paquetage de la bibliothèque de SubDiv

3.1 Fichiers

SubDiv manipule en entrée et en sortie trois types de format de fichier. Des exemples de chacun de ces types sont donnés à l'annexe A.

3.1.1 Fichier d'entrée

SubDiv reçoit en entrée la définition de la géométrie à reconstruire. Cette définition peut se présenter selon les deux formats de fichier d'entrée suivants :

- **STL (.stl)** : La géométrie est définie par une liste de triangles indépendants, chacun de ces triangles étant défini par les coordonnées de ses trois sommets.
- **DAT (.dat)** : L'aube est définie par un certain nombre de sections découpant l'aube du bord d'attaque au bord de fuite suivant une position fixe entre la ceinture et la couronne. Chaque section est décrite par une liste de deux coordonnées correspondant chacune à l'intrados et à l'extrados de l'aube et définissant les points du bord d'attaque au bord de fuite.

3.1.2 Fichier de sauvegarde

Puisque l’application MESH reçoit en entrée des géométries en format VRML (.wrl) pour mesurer l’écart entre les surfaces, la bibliothèque offre des outils pour convertir chaque fichier STL ou DAT ainsi que la surface de subdivision en format VRML. Ce format définit d’abord la liste des sommets de la géométrie et ensuite la liste des triangles par l’indice de leurs trois sommets.

3.2 Courbes de subdivision

La procédure pour créer une courbe de subdivision à partir d’un polyligne par l’entremise d’une B-spline (voir section 2.2.1) se trouve dans les classes *CBSplines* et *SubdivCrb* de *SubDiv* .

La classe *CBSpline* permet d’interpoler ou d’approximer un polyligne à l’aide d’une B-spline cubique et d’obtenir les points d’interpolation de la courbe de subdivision en fonction du nombre de points de contrôle désiré et du décalage prescrit.

La classe *SubdivCrb* définit une courbe de subdivision par son polygone de contrôle (une simple liste de sommets). La classe permet d’obtenir ce polygone de contrôle par interpolation des points obtenus par décalage. Elle offre également des méthodes de subdivision de la courbe et de projection des sommets à leurs positions limites. Les méthodes d’interpolation, de subdivision et de projection sont offertes en deux versions soit avec les règles de subdivision du schéma de Loop et avec les règles modifiées décrites à la section 2.5.1.2. Toutefois, seule la première méthode est utilisée dans l’application graphique *SubDiv* .

3.3 Surfaces de subdivision

3.3.1 Structure de données

L'implantation efficace du schéma de Loop repose sur une structure de données permettant d'effectuer les opérations de subdivision et le calcul des normales de manière systématique. SubDiv utilise les classes *Maillage* et *SubdivSrf* pour représenter la géométrie cible et la surface de subdivision respectivement. Puisque, conceptuellement, une surface de subdivision de Loop peut être considérée comme un maillage de triangles avec ses propres fonctionnalités, la classe *SubdivSrf* dérive de la classe *Maillage* pour hériter entre autres de sa structure de données.

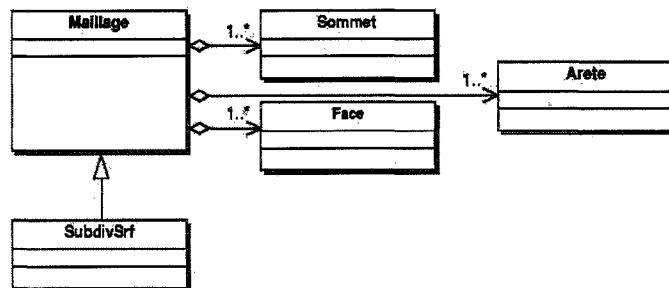


FIGURE 3.2 Diagramme de classes pour la représentation des surfaces

La figure 3.2 montre le diagramme de classes relatif aux maillages. Pour définir le maillage, la classe de base (*Maillage*) fait appel à trois listes contenant chacune des objets des classes suivantes :

- *Sommet* : chaque sommet enregistre les coordonnées d'un sommet du maillage ainsi que sa normale. La normale se calcule par la moyenne des normales aux faces adjacentes pour les objets de la classe *Maillage* et par les formules de la section 2.1.3 pour les objets de la classe *SubdivSrf* ;
- *Arête* : Chaque arête n'est définie qu'une fois par un sommet de départ s_1 et un sommet

d'arrivée s_2 . Chaque arête enregistre aussi sa ou ses faces adjacentes selon que l'arête est frontalière ou interne. L'enregistrement des faces permet de détecter facilement les frontières de la géométrie et facilite l'application des règles de subdivision pour les nouveaux sommets (voir figure 2.1) ;

- *Face* : Chaque face est définie par la liste des trois arêtes qui la composent ainsi que la liste des orientations de chaque arête de manière à obtenir une boucle orientée fermée. Cette boucle fermée, dont le sens est identique pour toutes les faces du maillage (voir figure 3.3), facilite le traitement des opérations suivantes :
 - Assurer la cohérence de l'orientation de la normale des faces sur l'ensemble de la géométrie ;
 - Déterminer le sommet opposé à l'arête d'une face donnée pour le calcul de la position des nouveaux sommets ;
 - Générer la liste ordonnée des sommets voisins d'un sommet pour le calcul des normales ;
 - Composer les quatre nouvelles faces lors des opérations de subdivision.

La classe *Maillage* utilise cette structure de données pour construire la géométrie cible (fichier STL ou DAT), pour extraire les frontières ainsi que pour la création du fichier (VRML) correspondant.

Les objets de la classe *SubdivSrf* se construisent en fournissant les trois listes (sommets, faces et arêtes). À partir de ces trois listes, la classe *SubdivSrf* permet de générer la liste ordonnée des sommets voisins de chacun des sommets du maillage, nécessaire au calcul des normales et de la nouvelle position des points existants.

3.3.2 Étapes de subdivision

La subdivision d'une surface de subdivision S^n , du niveau de subdivision n à $n + 1$, comportant s^n sommets, a^n arêtes et f^n faces s'effectue en suivant les étapes suivantes :

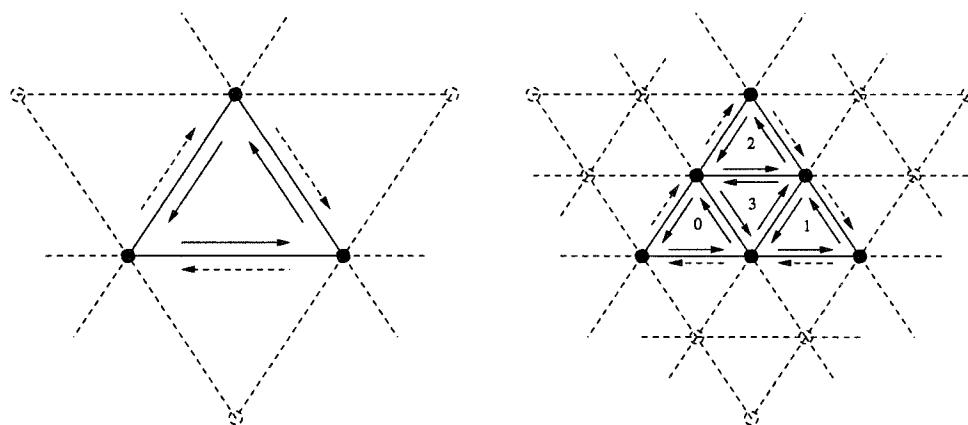


FIGURE 3.3 Schématisation de la structure de données

1. Les sommets existant de S^n sont déplacés et de nouveaux sommets sont créés sur chaque arête de manière à obtenir une nouvelle liste de sommets de dimension $s^{n+1} = s^n + a^n$. Les règles de subdivision de la figure 2.1, permettent de calculer la nouvelle position de tous les sommets de la surfaces S^{n+1} .
2. Chaque arête existante est remplacée par deux nouvelles arêtes et trois arêtes sont ajoutées à chaque face pour obtenir une nouvelle liste d'arêtes de dimension $a^{n+1} = 2a^n + 3f^n$. Pour le remplacement d'une arête existante d'indice i , il suffit d'utiliser l'indice des sommets de cette arête et l'indice du nouveau sommet dans la liste des sommets ($s^n + i$). Les nouvelles arêtes sont insérées dans la nouvelle liste de manière à ce que l'arête d'indice i dans l'ancienne liste corresponde aux arêtes d'indices $2i$ et $2i + 1$ dans la nouvelle.
3. Chaque face est remplacée par quatre nouvelles faces pour former une liste de faces de dimension $f^{n+1} = 4f^n$. Connaissant l'indice des anciennes arêtes et leurs orientations, chaque nouvelle face est construite dans l'ordre indiqué à la figure 3.3 avec les nouvelles arêtes dérivées des anciennes arêtes et en ajoutant trois nouvelles arêtes reliant les nouveaux sommets.
4. Pour chaque sommet, on détermine la liste ordonnée de ses sommets voisins afin de calculer la normale.

3.4 Reconstruction par interpolation transfinie

Les étapes de création d'une interpolation transfinie ont été décrites à la section 2.2.2. Dans **SubDiv** , après avoir obtenu les courbes de subdivision pour chacune des courbes frontières de la géométrie, et s'être assuré du même nombre de points dans chaque direction, il suffit de fournir ces courbes à la méthode *Creer_Trans()* de la classe *Maillage* pour obtenir un grille de points. Chacun des sommets internes de cette grille est ensuite déplacé (fixé) à la position du sommet de la géométrie cible le plus proche. Le maillage obtenu en divisant chaque face de la grille en deux triangles correspond à une surface limite sans subdivision. Pour obtenir le maillage de contrôle, il suffit d'interpoler chacun des sommets à l'aide des règles de la section 2.1.2. Ces opérations s'effectuent en utilisant les méthodes *Fixer_Sommets()* et *Interpoler()* de la classe *SubdivSrf*. Bien que cette méthode de reconstruction ne puisse s'appliquer qu'à des géométries planes, elle partage certaines méthode avec la reconstruction par sections qui construit elle aussi une grille de points pour obtenir un maillage limite.

3.5 Reconstruction par l'application MeshToSS

L'intégration des algorithmes de simplification de maillage de l'application MeshToSS dans **SubDiv** s'effectue par l'entremise de la classe *Cmeshtoss*. Cette classe instancie les deux structures nécessaires à l'exécution des fonctions de déraffinement :

- *Sppd* : cette structure définit la géométrie. Normalement, celle-ci est lue et sauvegardée après simplification dans un fichier de format propre à l'application **MeshToSS** . Par contre ce format ne permet pas de spécifier les coins qui sont traités différemment suivant les modifications décrites à la section 2.3.4. Pour cette raison, la classe *Cmeshtoss* offre des méthodes de conversion de la classe *Maillage* à la structure *Sppd* et l'inverse utilisées avant et après le raffinement ;

- *Params* : cette structure renferme les paramètres de simplification de maillage. Dans la classe *Cmeshtoss*, seuls les paramètres suivants peuvent être modifiés :
 - *vnum* : Nombre de sommets de la surface déraffinée ;
 - *discon_penalty* : variable servant à factoriser les quadriques des arêtes frontières de manière à ajuster le déraffinement aux frontières. Plus cette constante est élevée, moins l’arête sera prioritaire dans le processus de déraffinement et plus il en restera sur la géométrie déraffinée. Les valeurs peuvent varier de 1 (aucune restriction) à un chiffre très élevé (10^6) ;
 - *angle_tol* : Tolérance d’angle admissible entre les normales de deux surfaces voisines qui permet d’éviter les replis de surface. Le déraffinement ne s’effectue pas si cette exigence n’est pas vérifiée. Sa valeur peut varier de 0 (restriction complète) à 180 (replis acceptés) ;
 - *shape_tol* : Paramètre permettant de spécifier une forme de triangle d’arbitraire (0) à équilatéral (100) ;

3.6 Reconstruction par sections

La reconstruction par sections requiert l’exécution des applications **SubDiv** et **SubCrb**. Les outils de reconstruction de courbes par décalage sont d’abord utilisés pour obtenir un fichier DAT ne contenant que les sections adjacentes aux points d’interpolation de la courbe du bord de fuite. L’application **SubCrb** est ensuite exécutée pour lire ce fichier DAT et permettre à l’utilisateur de reconstruire les sections de manière à minimiser l’erreur et d’obtenir la grille de points décrite dans la section 2.4. Cette grille est alors sauvegardée dans un fichier de format PTS (.pts, voir annexe I) pour être lu par l’application **SubDiv** afin de générer le maillage limite initial.

3.7 Évaluation des erreurs

3.7.1 Courbes

La classe *CBSpline* renferme la méthode *CalculEcart()* pour mesurer les écarts entre une B-spline cible et une courbe de subdivision. Cette méthode reçoit une liste de points correspondants à la courbe de subdivision limite après un certain nombre de subdivisions et le nombre d'intervalles appliqué à la B-spline pour déterminer le tronçon le plus proche du points à évaluer. Un critère d'arrêt (différence entre les résultats de deux itérations) de 10^{-6} est intégré à la fonction.

3.7.2 Surfaces

Le calcul des écarts entre la surface de référence et la surface de subdivision obtenue s'effectue avec la méthode *MerureErreur()* de la classe *Cmesh*. Cette classe façade exécute la fonction *mesh_run()* de l'application MESH responsable de ces calculs d'erreur en ayant au préalable initialiser les structures principales suivantes :

- Structure *args* : enregistre le nom des deux fichiers VRML à comparer et les paramètres d'évaluation (pas et fréquence d'échantillonage, symétrie, affichage de la fenêtre graphique) ;
- Structure *dist_surf_surf_stats* : utilisée par MESH pour enregistrer les résultats des calculs.

Cette classe *Cmesh* permet à l'application graphique **SubDiv** d'afficher uniquement les erreurs maximales et moyenne. Il est toutefois toujours possible d'exécuter l'application MESH avec les deux surfaces VRML obtenues de **SubDiv** si on veut avoir accès aux gradients d'erreurs.

3.7.3 Application graphique SubDiv

L'ensemble des fonctionnalités décrites plus haut (exceptées celles offertes par l'application **SubCrb**) sont accessibles à travers l'application graphique **SubDiv** . La figure 3.4 montre l'interface comprenant une fenêtre graphique et les widgets d'interaction. Ces derniers sont regroupés en plusieurs fenêtres accessibles par onglets. La première fenêtre permet de choisir les éléments de la géométrie cible à afficher et le type de reconstruction souhaité. Les trois fenêtres suivantes permettent d'ajuster les paramètres associés à chacun des types de reconstruction. Enfin, la dernière fenêtre permet d'ajuster l'affichage des surfaces de subdivision ainsi que le nombre de subdivisions.

L'option Aide de la barre menu permet d'accéder à la documentation de **SubDiv** générée par l'application Doxygen.

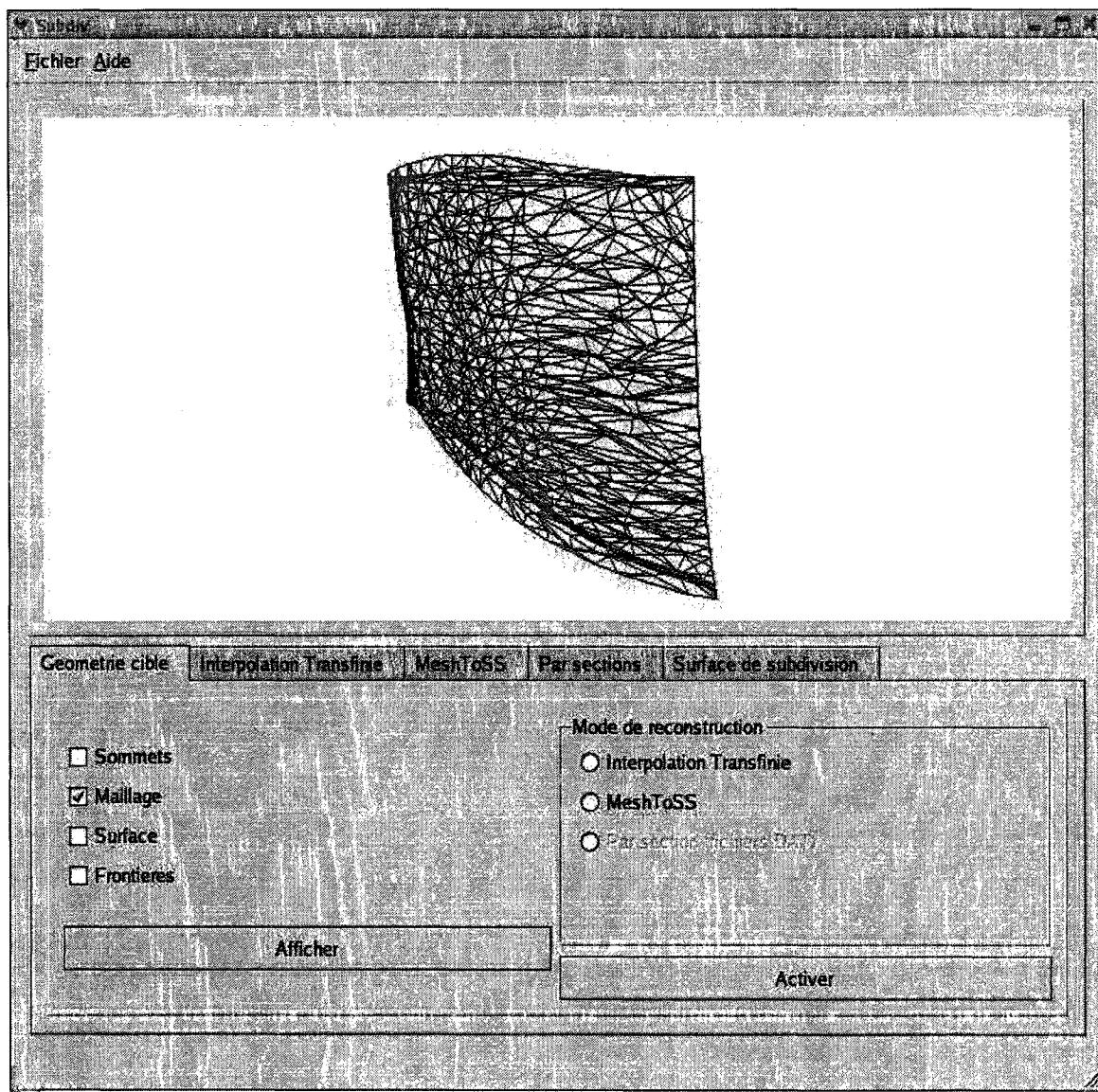


FIGURE 3.4 Interface graphique de l'application SubDiv

CHAPITRE 4

VALIDATION

Ce chapitre présente la validation des différentes méthodes de reconstruction et de mesure d'erreur utilisées dans l'application **SubDiv**. Cette validation comprend les trois volets suivants :

- **Mesure d'erreur** : la mesure d'erreur pour les courbes et les surfaces ;
- **Reconstruction de courbe** : évaluation des différentes méthodes de reconstruction de courbe ;
- **Reconstruction de surface** : évaluation de l'application **MeshToSS** et de la reconstruction par section.

Deux géométries d'aubes mesurées en centrale sont utilisées pour effectuer l'ensemble des validations :

- **Géométrie STL** : surface triangulée de 625 points définissant une aube provenant d'une roue de 5.4m de diamètre ;
- **Géométrie DAT** : surface définie par une série de sections correspondant au découpage de l'aube selon des surfaces de révolution générées entre la couronne et la ceinture de la roue. Le fichier DAT définit une aube à l'aide de 70 sections comprenant chacune 1200 points pour un total de 84000 points. Ce mode de représentation permet de convertir facilement cette représentation en un maillage de triangles. L'aube provient d'une roue de 6.0m de diamètre.

La validation des courbes s'effectue avec les sections 5 et 65 du fichier DAT. Ces sections, tout en n'étant pas trop proches des congés à la jonction avec la couronne et la ceinture, représentent assez bien l'éventail des formes de courbe à reconstruire, de la plus simple (section 5) à la plus complexe (section 65) comme le montre la figure 4.1.

Dans ce chapitre, les mesures d'erreur sur les sections et les surfaces d'aubes sont présentées par unité de longueur métrique de la roue correspondante.

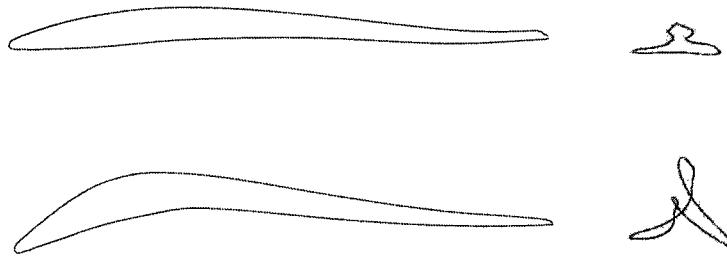


FIGURE 4.1 Vues de profil et de face des sections 5 (haut) et 65 (bas) de la géométrie DAT

4.1 Mesure d'erreur

L'efficacité des méthodes de reconstruction se mesurent à l'écart entre la courbe ou la surface cible et celle reconstruite. On examine ici la façon d'évaluer cette erreur géométrique.

4.1.1 Courbes

Les paramètres pouvant influencer les résultats du calcul d'écart entre une B-spline et une courbe de subdivision avec les méthodes proposées à la section 2.5.1 sont :

- **Nombre de subdivisions** : Le nombre de subdivisions appliquées à la courbe détermine le nombre de points pour lesquels l'écart avec la B-spline sera calculé. Sans subdivision, les points de la courbe correspondent aux points d'interpolation qui ont servi à obtenir la B-spline et l'écart calculé est nul. Par ailleurs, un nombre trop élevé de subdivisions peut réduire l'efficacité de la méthode puisqu'elle doit être appliquée à

chaque point ;

- **Nombre d’intervalles** : Afin de projeter les points de la courbe de subdivision sur la portion correspondante de la B-spline, cette dernière est segmentée. Le nombre d’intervalles spécifie en combien de segments la spline doit être divisée. Un petit nombre d’intervalles peut entraîner un calcul d’erreur erroné si le segment le plus rapproché du point n’est pas choisi. Un trop grand nombre d’intervalles peut réduire l’efficacité de la méthode ;
- **Critère d’arrêt** : La méthode balaye les segments de splines jusqu’à ce que la différence entre les deux derniers écarts calculés soit inférieure à une tolérance spécifique. Afin de valider la méthode, l’algorithme est appliqué aux sections 5 et 65 du fichier DAT. Chaque section a été reconstruite par la méthode du décalage en utilisant 17 points et un décalage de 200. Le critère d’arrêt utilisé est de 10^{-6} . Le nombre d’intervalles appliqués à la B-spline est de 100, bien que l’expérimentation révèle qu’une valeur supérieure à 50 suffise. La figure 4.2 montre la progression de l’erreur maximale et moyenne en fonction du nombre de subdivisions. Il ressort qu’au moins quatre subdivisions doivent être appliquées à la courbe de subdivision avant l’utilisation de l’algorithme de mesure d’écart.

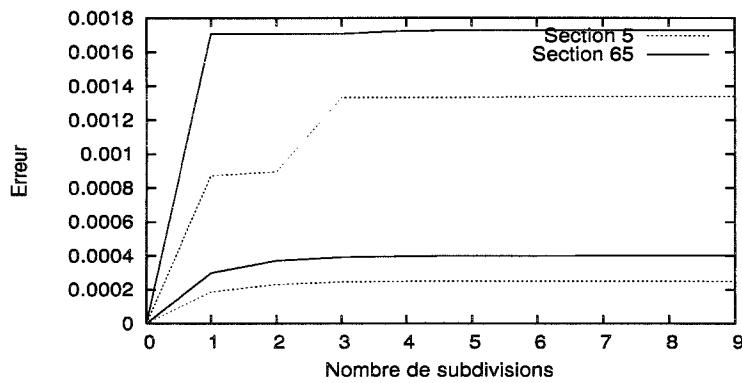


FIGURE 4.2 Effet du nombre de subdivision sur la mesure d’erreur entre B-spline et courbe de subdivision pour deux sections d’aube

4.1.2 Surfaces

L’application MESH a été retenue pour évaluer la qualité de la reconstruction des surfaces. Cette application mesure l’écart maximal et moyen entre deux surfaces S_1 et S_2 en format VRML (maillage de triangles). Dans ce projet, S_1 est la surface originale, de format STL ou DAT, convertie en format VRML, et S_2 la surface de subdivision représentant la reconstruction de la géométrie. Étant donné l’importance de cette application, certaines vérifications ont été effectuées, notamment :

- L’influence du nombre de subdivisions appliquée à S_2 avant d’utiliser MESH ;
- L’influence des paramètres de l’application : le pas d’échantillonnage, la fréquence d’échantillonnage et le calcul des écarts dans les deux sens (symétrique) conformément à la distance d’Hausdorff ;
- La capacité à détecter des erreurs imposées.

Les surfaces STL et DAT originales et leurs reconstructions respectives par MeshToSS avec cent sommets ont été utilisées comme S_1 et S_2 respectivement afin de valider le nombre de subdivisions et les paramètres. La figure 4.3 présente les résultats de l’influence du nombre de subdivisions et de la symétrie sur l’écart maximal et moyen calculés.

Pour le nombre de subdivisions, les graphiques indiquent qu’un minimum de trois subdivisions doivent être appliquées avant l’utilisation de MESH .

Quant aux paramètres, le pas d’échantillonage (2 par défaut) ne semble pas avoir d’influence sur les résultats et la fréquence d’échantillonnage influence surtout l’efficacité de la méthode : plus sa valeur est petite, plus le temps de résolution augmente. Par contre, de trop grandes valeurs peuvent réduire la précision. Les essais ont révélés que la valeur par défaut de 0.5 présente un bon compromis entre l’efficacité et la précision. Pour ce qui est du calcul symétrique, la figure 4.3 montre qu’elle peut donner des résultats plus fiables. Cependant, il n’est pas toujours possible d’utiliser la mesure symétrique, notam-

ment lorsque l'on souhaite écarter de la mesure certaines régions de la géométrie (voir section 4.3). La mesure unidirectionnelle donne tout de même une très bonne indication de l'erreur.

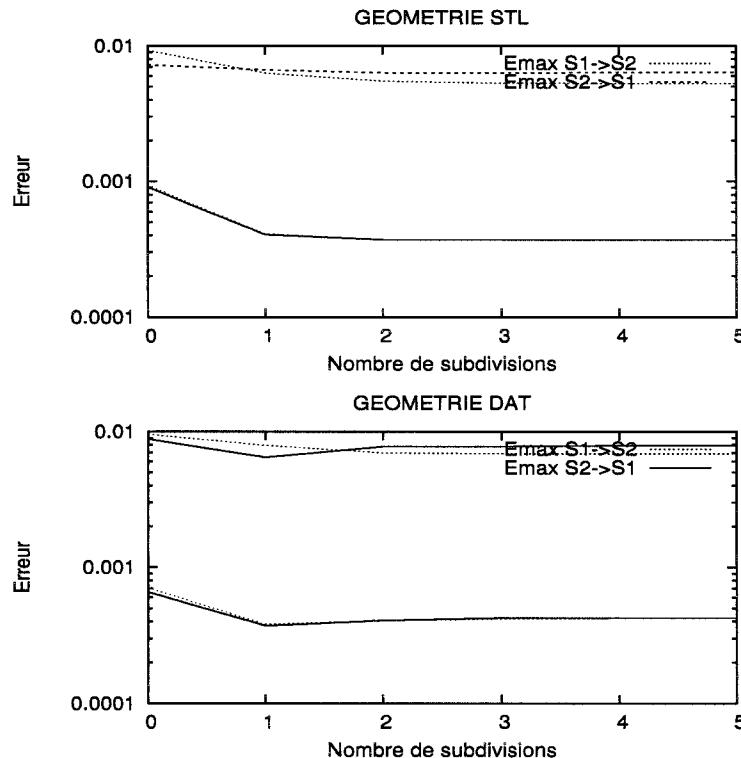


FIGURE 4.3 Erreurs symétriques moyennes et maximales en fonction du nombre de subdivisions géométries STL (haut) et DAT (bas)

La précision de l'application a aussi été testée avec la géométrie DAT originale en mesurant l'écart entre deux surfaces identiques lorsqu'un sommet de l'une d'elles est déplacé suivant la normale. Trois sommets sont déplacés alternativement à trois endroits différents de l'aube : l'intrados, l'extrados et le bord d'attaque pour vérifier l'influence possible de la forme de la surface (concave, convexe, fortement courbée) sur les résultats. La figure 4.4 montre le graphique de l'erreur mesurée en fonction du déplacement des points. Le graphique montre un début de déterioration des résultats à partir de 5×10^{-6} (Les points ne sont pas précisément superposés). Un déplacement de 5×10^{-7} ne change pas les coordonnées et MESH compare deux surfaces identiques.

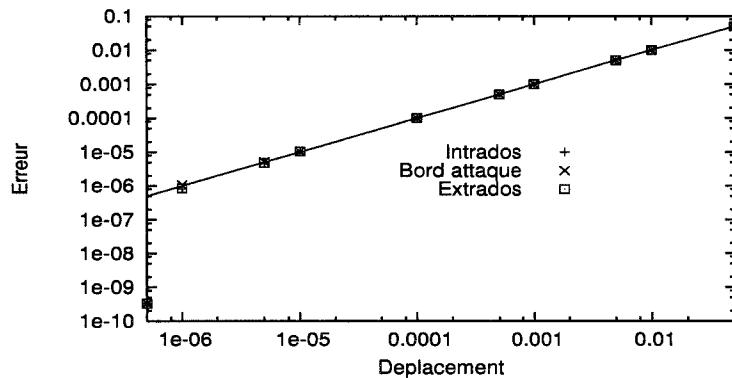


FIGURE 4.4 Erreur mesurée en fonction du déplacement du point

4.2 Reconstruction de courbe

On a retenu deux méthodes pour reconstruire des sections d'aubes par des courbes de subdivision : la méthode par décalage (sec. 2.2.1.2) et celle par zonage (sec. 2.4).

4.2.1 Par décalage

La reconstruction par décalage nécessite le choix d'un nombre de points et d'une valeur de décalage. La figure 4.5 montre les écarts obtenus pour chacune des sections en faisant varier le décalage de 0 à 1500 par incrément de 10 et pour différents nombres de points d'interpolation. Les deux figures présentent le même comportement :

- Les erreurs maximales varient plus à de petites valeurs de décalage (0 à 600). À ces basses valeurs, bien que des erreurs minimales soient parfois atteintes, la sensibilité à des variations minimes du décalage indiquent que la reconstruction obtenue n'est pas optimale. En effet, la figure 4.6 montre le même profil de bord d'attaque reconstruit à gauche avec une valeur de décalage inférieure à 600 et à droite une valeur supérieure. Bien que les deux reconstructions présentent sensiblement la même erreur maximale, celle de gauche ne pourrait pas être utilisée pour ce projet ;
- L'erreur se stabilise à des valeurs de décalage supérieures à 600 pour augmenter gra-

duellement à mesure que le décalage augmente, donc à mesure que l'on approche d'une répartition uniforme des points ;

- Pour les deux sections, l'erreur maximale ne semble pas s'améliorer au-delà d'un décalage de 600. Cette erreur se situe du côté du bord de fuite de l'aube qui présente un arrondi plus ou moins sévère (voir figure 4.7 montrant le profil du bord de fuite pour les sections 5 et 65). La concentration des points au bord d'attaque qu'impose le décalage empêche une reconstruction adéquate de cette partie du profil. Aussi, l'arrondi plus sévère de la section 5 peut expliquer que, malgré son profil plus lisse (voir figure 4.1), les erreurs maximales générées par cette section se stabilisent à des valeurs supérieures à celles de la section 65.

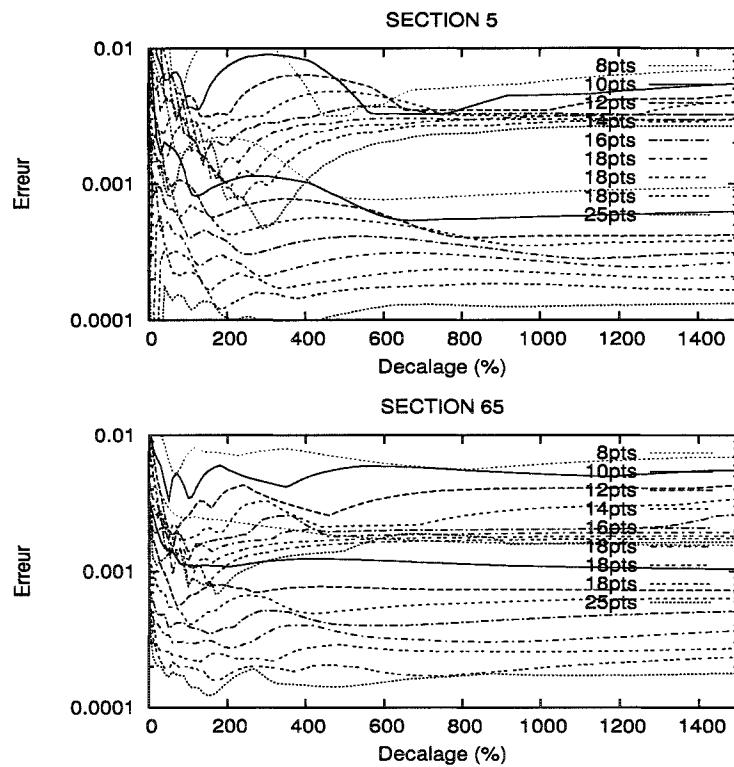


FIGURE 4.5 Erreur entre courbe cible et courbe de subdivision en fonction du décalage pour les sections 5 et 65 du fichier DAT

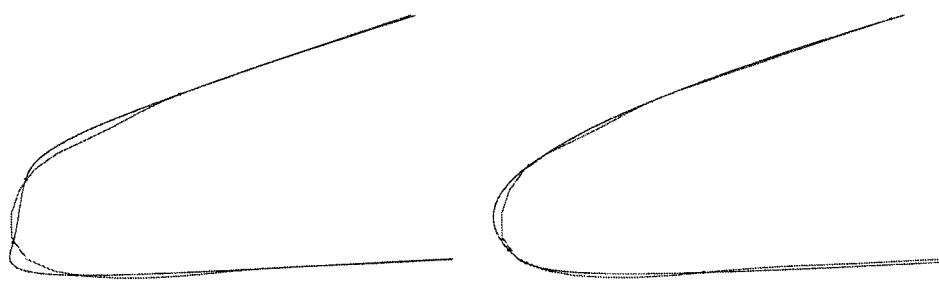


FIGURE 4.6 Profil d'un bord d'attaque et reconstructions obtenues avec deux valeurs de décalage (< 600 à gauche, > 600 à droite)



FIGURE 4.7 Profils des bords d'attaque des sections 5 (gauche) et 65 (droite)

4.2.2 Par zonages

Comme mentionné à la section 2.4, la reconstruction basée sur le décalage permet de contrôler la reconstruction au bord d'attaque, mais risque de détériorer le bord de fuite. La méthode par zonage permet de mieux répartir les points d'interpolation en définissant deux zones sur la section de l'aube : la zone du bord d'attaque et la zone du bord de fuite. En plus du nombre de points d'interpolation et du décalage, la reconstruction de courbe par zonages nécessite deux paramètres par zone : le pourcentage de la longueur de corde qui délimite la zone (de 0 en montant pour le bord d'attaque, de 100 en descendant pour le bord de fuite) et le nombre de points d'interpolation à l'intérieur la zone.

La méthode par zonage a été appliquée aux sections 5 et 65 en faisant varier le pourcentage entre 0 et 20 au bord d'attaque et 80 et 100 au bord de fuite et en ajoutant de 0 à 4 points. La figure 4.8 compare les meilleurs résultats obtenus avec ceux de la méthode

précédente (décalage de 800 sur la figure 4.5). Ces résultats attestent de l'efficacité de la méthode par sections pour améliorer la reconstruction des courbes, les erreurs maximales étant significativement réduites.

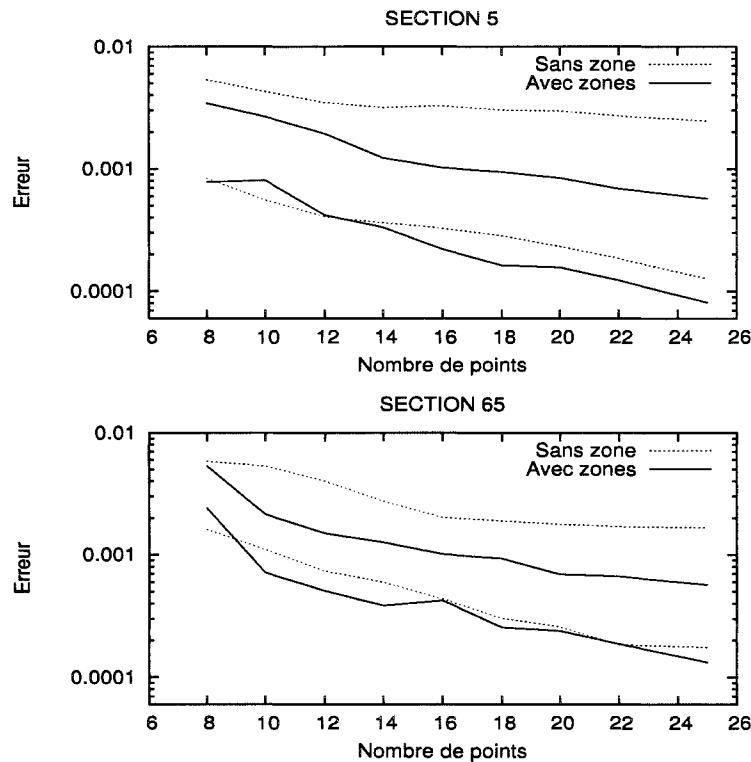


FIGURE 4.8 Comparaison des erreurs avec et sans zonage

4.3 Reconstruction de surface

Dans ce mémoire, trois méthodes ont été envisagées pour la reconstruction des surfaces : par interpolation transfinie (sec. 2.2), par **MeshToSS** (sec. 2.3), et par sections (sec. 2.4). Cette section compare les deux dernières méthodes, qui paraissent capables de produire le type de surface recherché. Aucune validation supplémentaire n'a été faite sur la méthode par interpolation transfinie, la section 2.2 ayant montré qu'elle ne peut s'appliquer à des surfaces repliées comme les aubes de turbines.

4.3.1 Méthode de reconstruction basée sur MeshToSS

L’application MeshToSS a été appliquée aux géométries STL et DAT. Pour les deux cas, le paramètre **discon_penalty** a été fixé à 1000 (valeur par défaut). Ce paramètre, servant à ajuster la concentration des points aux frontières, influence peu les résultats. De plus, pour un même nombre de points global, la concentration des points aux frontières tend à se faire au détriment de la précision à l’intérieur de la surface. Les paramètres **angle_tol** et **shape_tol** ont eux aussi été fixés à leur valeur de défaut de 160 degrés et 0 respectivement. L’utilisation de valeurs plus restrictives pour ces deux derniers paramètres entraîne de moins bons résultats.

Il faut rappeler que MeshToSS génère à sa sortie une surface de subdivision de Loop (S^0). Pour mesurer sa précision par rapport à la surface de référence, il faut obtenir S^∞ en la subdivisant au moins trois fois et en projetant ses sommets à leur position limite.

La surface STL a été reconstruite en imposant un nombre de sommets **vnum** variant de 50 à 625 sommets. Cette dernière valeur représente le nombre de sommets de la surface initiale et ne devrait occasionner aucun déraffinement. La figure 4.9 montre les erreurs maximales et moyennes obtenues pour différentes valeurs de **vnum**. Étonnamment, l’erreur moyenne augmente lorsque **vnum** approche du nombre de points de la surface de référence. De plus, il faut presque tous les points pour atteindre la tolérance minimale requise. Ce résultat décevant s’explique par le manque de densité du maillage initial, MeshToSS ayant été conçu principalement pour le déraffinement de nuages de points obtenus par scanner. Aussi, plus un maillage est dense, moins sa géométrie est susceptible d’être affectée par les opérations de subdivision et de projection. Ce n’est pas le cas avec la géométrie STL et les erreurs significatives rencontrées lorsqu’aucun déraffinement n’est appliqué proviennent des opérations de subdivision et de projection qui devraient normalement occasionner des déplacements minimes.

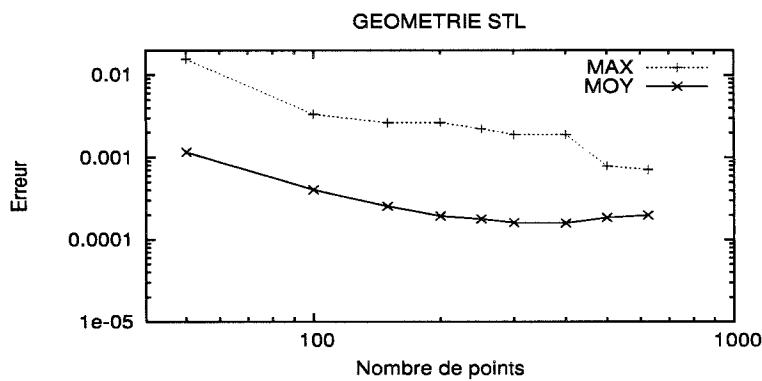


FIGURE 4.9 Erreur après reconstruction par MeshToSS pour la géométrie STL

Ce problème de densité ne se présente pas pour la surface DAT. L'application MeshToSS est appliquée à un maillage construit avec la moitié des points de chaque section de la géométrie de référence, pour un total de 42,000 points. Des valeurs de **vnum** variant de 50 à 2000 points sont utilisées.

Pour la mesure des écarts, les fichiers DAT offrent la possibilité d'en restreindre l'application en tronquant la géométrie de référence d'un certain nombre de sections. De cette manière, des zones problématiques de la géométrie de référence telles les congés à la jonction aube-ceinture et aube-couronne ou les frontières de la reconstruction peuvent être soustraites à l'évaluation. Cependant, la mesure symétrique (voir section 4.1.2) ne peut s'appliquer dans ce cas.

La figure 4.10 présente les résultats. La surface obtenue par l'application MeshToSS est comparée d'une part avec l'aube de référence complète (84,000 points) et d'autre part avec l'aube de référence tronquée des cinq premières et cinq dernières sections afin d'observer la part de la reconstruction des frontières aube-ceinture et aube-couronne dans les écarts mesurés.

Les résultats sont beaucoup plus acceptables que ceux obtenus avec la géométrie STL. D'abord, parce que toutes les erreurs ont tendance à diminuer avec le nombre de points utilisés pour reconstruire. Ensuite, parce que déjà avec environ le dixième des points de

la géométrie de référence, l'écart maximal désiré est atteint. La réduction significative de cette erreur maximale lorsque la mesure est faite sans les cinq premières et dernières sections semble montrer que les erreurs maximales de la reconstruction se situaient dans ces régions. Quant aux erreurs moyennes, elles sont moins significativement influencées par les mesures restreintes.

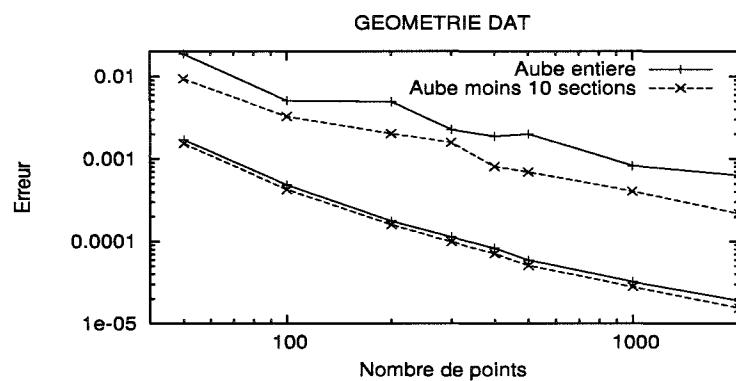


FIGURE 4.10 Erreur après reconstruction par MeshToSS pour la géométrie DAT

Bien que les résultats soient encourageants pour la géométrie DAT, l'application MeshToSS comporte plusieurs lacunes. D'abord, les restrictions sur la possibilité de faire varier d'autres paramètres que le nombre de points de reconstruction font qu'elle offre très peu de possibilité de faire varier les solutions. Ensuite, pour obtenir des résultats satisfaisants, il faut s'accommoder d'un maillage composé de triangles hétéroclites. Enfin, il n'y a aucun contrôle sur le nombre de sommets irréguliers que contient la surface obtenue ce qui peut influencer la qualité de la surface de subdivision.

4.3.2 Par sections

La méthode par sections ne s'applique qu'à la géométrie DAT. Contrairement à l'application MeshToSS, elle nécessite plusieurs manipulations. Pour cette validation, les étapes suivantes ont été suivies :

1. Choisir les sections qui entreront dans la reconstruction en fonction de la courbure

du bord de fuite ;

2. Reconstruire les première et dernière sections avec le même nombre de points et en utilisant le zonage. Ces points correspondent à des valeurs nodales des courbes cibles ;
3. Construire la grille de points par interpolation linéaire des vecteurs nodaux de la première et dernière section sur les sections intermédiaires de manière à éviter la reconstruction de chaque section et à obtenir un alignement des points.

Le choix des sections s'est fait en reconstruisant le bord de fuite avec 15, 20, 25 et 30 points en utilisant un décalage de 200. Les première et dernière sections ont été reconstruites avec 15, 20, 25 et 30 points de manière à minimiser les erreurs maximale et moyenne. La figure 4.11 montre les écarts, selon le nombre de sections et le nombre de points par section, entre la surface de subdivision résultante et d'une part la géométrie DAT complète, et d'autre part la géométrie DAT tronquée des cinq premières et dernières sections.

En général, les erreurs diminuent avec l'ajout de sections et de points par section. Toutefois, les erreurs maximales ne semblent pas vouloir descendre en dessous de l'erreur maximale admissible. De plus, ces erreurs sont minimalement améliorées par la réduction de la surface de référence. Cette dernière observation laisse sous-entendre que les erreurs de reconstruction les plus importantes ne se situent pas aux jonctions aube-couronne et aube-ceinture. Il faut tenir compte qu'étant donné que l'ensemble de l'aube est reconstruite à partir des première et dernière courbes qui définissent ces jonctions, on peut s'attendre à ce que la précision soit plus grande à ces endroits. Par ailleurs, on ne peut s'attendre à une reconstruction précise des sections intermédiaires en utilisant une interpolation linéaire des paramètres utilisés pour les deux sections d'extrémité et une première amélioration à la méthode serait de reconstruire certaines sections intermédiaires.

Afin de comparer les résultats de MeshToSS et de la reconstruction par section, la figure 4.12 présente les résultats de chaque méthode. Dans le cas de la méthode par sections, le

nombre de points est obtenu par le produit du nombre de sections et du nombre de points par section.

Les niveaux d'erreur obtenus avec la méthode par sections sont très comparables à ceux de MeshToSS. On aurait pu s'attendre à une détérioration étant donné que la méthode par sections impose une structure $n \times m$ à la reconstruction alors que MeshToSS utilise un maillage sans contrainte. Par ailleurs, la méthode par sections offre l'avantage de générer un maillage aux sommets réguliers et aux points alignés suivant les frontières de la géométrie (voir section 2.4).

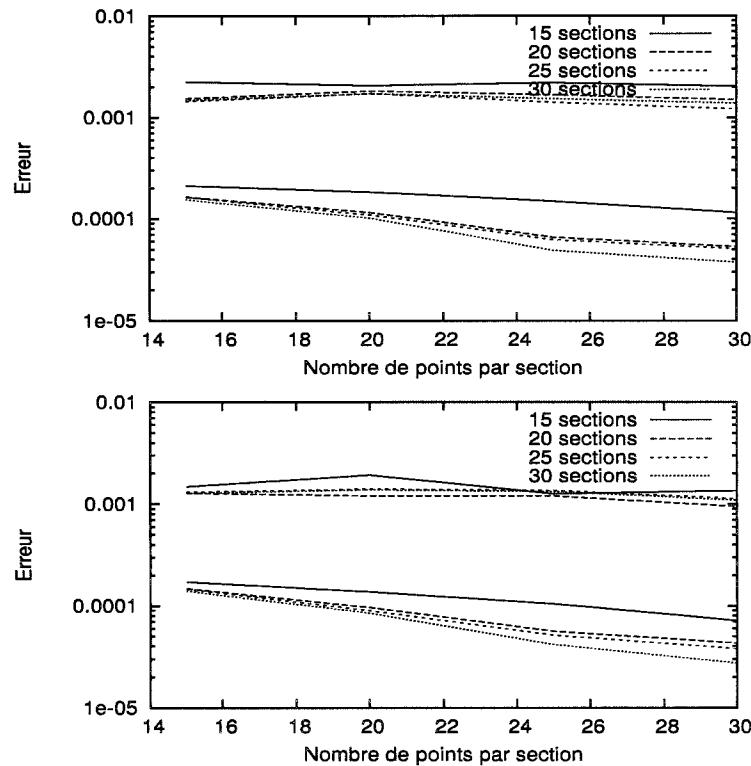


FIGURE 4.11 Erreur en fonction du nombre de points par section en utilisant la surface de référence complète (haut) et tronquée (bas)

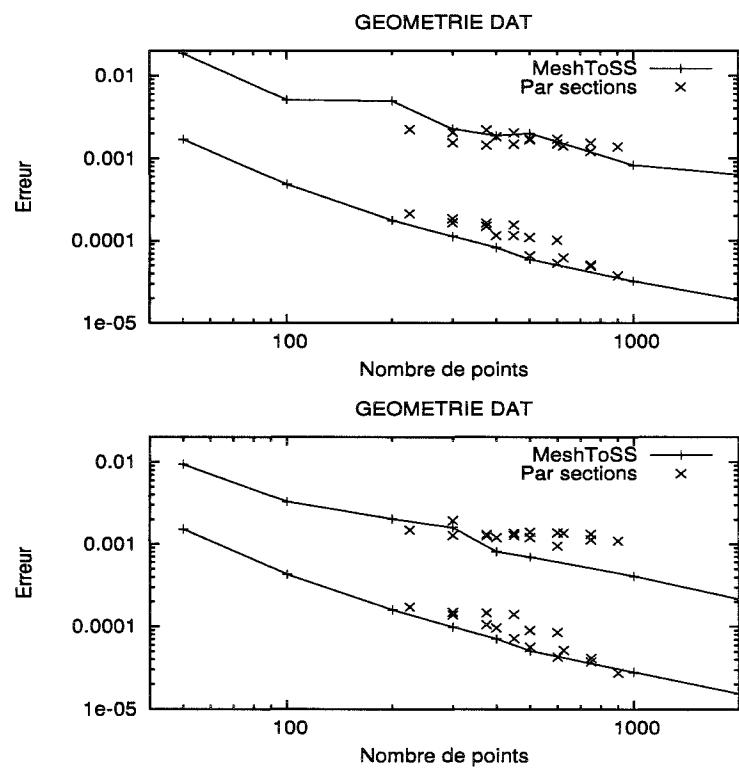


FIGURE 4.12 Comparaison de l'erreur par sections et par MeshToSS en utilisant la surface de référence complète (gauche) et tronquée (droite)

CONCLUSION

L'objectif principal de ce projet était de déterminer s'il est possible de représenter avec suffisamment de précision des géométries complexes, telles des aubes de turbines hydrauliques, en utilisant les surfaces de subdivision. Cet objectif est la première étape pour valider l'utilisation des surfaces de subdivision dans un processus d'optimisation de la géométrie qui mettra en valeur les capacités d'édition de ce type de représentation.

L'atteinte de cet objectif a nécessité d'abord une étude de la pointe du progrès dans le domaine des surfaces de subdivision qui a permis de retenir le choix du schéma de Loop, une méthode de reconstruction (**MeshToSS**) et, vu l'importance de la précision de cette reconstruction, une application permettant de mesurer l'écart entre deux surfaces de triangles.

Au cours de la réalisation de ce projet, deux méthodes de reconstruction de surfaces se sont ajoutées et des travaux ont été faits sur la reconstruction des courbes de subdivision. Cette conclusion comprend deux parties. La première dresse un bilan des travaux exécutés jusqu'à présent. La deuxième propose des avenues de recherches futures.

Bilan des travaux

Le bilan des travaux comporte quatre volets : le format des géométries à reconstruire, la reconstruction de courbes, la reconstruction de surfaces et la mesure des écarts.

Deux formats de géométrie ont été utilisés dans ce projet : STL et DAT. La géométrie décrite avec le format STL, sur laquelle seules les méthodes de reconstruction par interpolation transfinie et par **MeshToSS** peuvent s'appliquer, s'est avérée trop grossière avec **MeshToSS** (voir section 4.3.1). Bien qu'un maillage plus dense aurait probable-

ment donné de meilleurs résultats, ce type de format ne peut rivaliser avec les avantages que procure le format DAT. En définissant la géométrie de manière structurée plutôt que par un assemblage de triangles disparates, le format DAT permet de tronquer la géométrie autant aux jonctions aube-couronne et aube-ceinture qu'au bord de fuite. Cette particularité a été utilisée pour restreindre la mesure des écarts entre les surfaces avec l'application MESH . De plus ce format s'applique aux trois méthodes de reconstruction étudiées.

Pour les méthodes de reconstruction par interpolation transfinie et par section, il a fallu reconstruire des courbes en utilisant les masques de subdivision. En partant des polylignes des fichiers STL et DAT, des courbes de subdivision de précision satisfaisante ont été obtenues en ayant recours aux B-splines. Pour les sections d'aube, la division du profil en sections a donné les meilleurs résultats.

En tout trois méthodes de reconstruction de surface ont été analysées dans ce travail. D'abord, la reconstruction par interpolation transfinie s'est avérée inutile pour une géométrie à surface repliée comme l'aube. Ensuite, l'application **MeshToSS** fournit des résultats intéressants en autant que le maillage de la géométrie initiale soit suffisamment dense. Par contre, elle ne donne aucun contrôle sur la qualité du maillage généré. Cette lacune est importante puisqu'il faut limiter les sommets irréguliers (voir section 1.1.5) et surtout s'il est important de délimiter des régions pour appliquer des déformations. Enfin, la reconstruction par section semble donner des résultats prometteurs d'autant plus qu'ils ont été obtenus en se basant sur la reconstruction des deux sections les plus problématiques : celles décrivant les jonctions aube-couronne et aube-ceinture. Certaines améliorations pour construire la grille de points décrites dans la prochaine section devraient significativement améliorer la précision de cette méthode. La précision n'est pas l'atout unique de cette méthode. En effet, elle génère un maillage sans sommet irrégulier et sa construction en grille qui donne aux points un alignement avec les frontières peut faciliter l'isolement des zones de déformations.

Les outils de mesure d'écart, tant entre deux courbes qu'entre deux surfaces, se sont avérés efficaces, précis et fiables.

Travaux futurs

La suggestion de travaux futurs porte d'abord sur des améliorations pouvant être apportées à la reconstruction des courbes et des surfaces (méthode par sections). Elle aborde ensuite des considérations plus globales sur la manière de reconstruire les surfaces géométriques en tenant compte des besoins spécifiques au projet d'optimisation.

La reconstruction des profils s'effectue en appliquant un décalage et en spécifiant des zones au bord d'attaque et au bord de fuite. Pour le moment, les points frontaliers des zones sont établis en fonction du pourcentage d'une droite entre les extrémités du profil et sont placés sur la courbe selon la perpendiculaire à cette droite. Or, les profils ont parfois une cambrure assez prononcée (voir section 65, figure 4.1). Il serait donc préférable de positionner les points selon la perpendiculaire à une courbe médiane à mi-chemin entre l'intrados et l'extrados.

Une autre amélioration consisterait à appliquer un algorithme d'optimisation après avoir obtenu une solution acceptable avec les autres méthodes.

Les propositions d'améliorations à la reconstruction de surfaces portent essentiellement sur la méthode de reconstruction par sections, et donc avec les fichiers DAT. Ces fichiers définissent la géométrie par un certain nombre de sections découpant l'aube de la couenne à la ceinture. Dans ce travail, la grille de points servant à reconstruire la surface est obtenue d'abord en sélectionnant un certain nombre de sections en fonction de la reconstruction du bord de fuite, ensuite, en reconstruisant la première et la dernière section avec les méthodes décrites plus haut et enfin en interpolant linéairement les valeurs nodales de ces deux sections sur l'ensemble des sections intermédiaires.

Comme première amélioration, au lieu de sélectionner les sections voisines des points de reconstruction du bord de fuite, il serait intéressant de générer des sections intermédiaires des sections du fichier DAT de manière à ce que celles-ci soient alignées avec ces points de reconstruction.

Deuxièmement, la reconstruction des sections intermédiaires par interpolation linéaire ne devrait pas dépendre entièrement de la reconstruction des sections situées aux jonctions aube-couronne et aube-ceinture où se trouve des congés de soudures. Le profil de ces sections contient possiblement des détails de congés de sorte qu'il diffère sensiblement du profil de la section voisine. Ceci pourrait expliquer que les erreurs maximales obtenues au chapitre précédent se situent plus à l'intérieur de l'aube que sur ses frontières. Une façon d'obtenir des résultats plus précis à l'intérieur de l'aube serait de reconstruire en détails certaines des sections intermédiaires.

Finalement, fixer le bord d'attaque. Une aube est composée d'un côté intrados et d'un côté extrados. Le fichier de géométrie DAT définit chaque côté de la section par le même nombre de points du bord d'attaque au bord de fuite. Cette définition assure un alignement des points au bord d'attaque lors de l'assemblage des sections. Le mode de reconstruction de courbe par décalage n'assure ni une répartition uniforme des points d'une section à l'autre, ni l'alignement des points du bord d'attaque. Cette lacune peut entraîner une détérioration du maillage lors de l'assemblage des sections qui se traduit par des ondulations de la surface au bord d'attaque. Le remède consiste à fixer pour chaque section la position du bord d'attaque délimitant l'intrados et l'extrados. Cette approche permet aussi d'assurer l'uniformité du nombre de point des deux côtés de la section et un alignement adéquat au bord d'attaque. Cette position du bord d'attaque serait fixée comme le point le plus éloigné du point médian entre les deux points qui définissent l'extrémité du bord de fuite.

Tout au long de ce travail, une attention particulière s'est portée sur la réduction au mini-

mum du nombre de points de contrôle dans la définition de S^0 . Avec le recul, il semble évident que cette restriction devrait s'appliquer uniquement aux régions de la géométrie qui feront l'objet de déformations pour le volet optimisation du projet. Par exemple, pour des déformations au bord de fuite, la surface S^0 pourrait présenter un maillage grossier au bord de fuite et plus dense du côté du bord d'attaque. La méthode de reconstruction par sections se prête bien à la création d'un tel maillage.

Une meilleure solution serait d'utiliser un maillage hybride composé d'une partie polygonale et d'une partie S^∞ . La partie polygonale représenterait la partie de la géométrie DAT ne nécessitant pas de déformations et serait utilisée telle quelle. La partie S^∞ définirait la surface de subdivision représentant uniquement la région de déformation avec une zone de transition fixe à sa frontière avec la partie polygonale. Les deux parties seraient greffées avant d'être transmises au mailleur.

RÉFÉRENCES

ASPERT, N., SANTA-CRUZ, D. et EBRAHIMI, T. (2002). Mesh : Measuring errors between surfaces using the hausdorff distance. *IEEE International Conference in Multimedia and Expo (ICME)*. vol. 1, 705–708. [Http://mesh.epfl.ch/](http://mesh.epfl.ch/).

BALL, A. A. et STORRY, D. J. T. (1988). Conditions for tangent plane continuity over recursively generated b-spline surfaces. *ACM Transaction on Graphics*, 7, 83–102.

BIERMANN, H., LEVIN, A. et ZORIN, D. (1999). Piecewise smooth subdivision surfaces with normal control. Rapport technique TR1999–781, New York University.

CATMULL, E. et CLARK, J. (1978). Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Design*, 350–355.

CHAIKIN, G. (1974). An algorithm for high speed curve generation. *Computer Graphics and Image Processing*, 346–349.

CIRAK, F., SCOTT, M. J., ANTONSON, E. K., ORTIZ, M. et SCHRÖDER, P. (2001). Integrated modeling, finite-element analysis, and engineering design for thin-shell structures using subdivision. *Elsevier Preprints*.

COQUILLART, S. (1990). Extended free-form deformation : A sculpturing tool for 3D geometric modeling. *Computer Graphics (SIGGRAPH 90 Proceedings)*. 187–196.

DEROSE, T., HOPPE, H., DUCHAMP, T., McDONALD, J. et STUETZLE, W. (1992). Fitting of surfaces to scattered data. *SPIE*, 1830, 212–220.

DOO, D. et SABIN, M. (1978). Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer Aided Design*, 356–360.

DYN, N., LEVINE, D. et GREGORY, J. A. (1987). A four-point interpolatory scheme for curve design. *Computer Aided Geometric Design*, 257–268.

DYN, N., LEVINE, D. et GREGORY, J. A. (1990). A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 9, 160–169.

GARLAND, M. et HECKBERT, P. (1997). Surface simplification using quadric error metrics. *Proceedings of SIGGRAPH 97*.

HALSTEAD, M., KASS, M. et DEROSSE, T. (1993). Efficient, fair interpolation using Catmull-Clark surfaces. *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM Siggraph*. 35–44.

HOPPE, H., DEROSSE, T., DUCHAMP, T., HALSTEAD, M., JIN, H., McDONALD, J., SCHWEITZER, J. et STUETZLE, W. (1994). Piecewise smooth surface reconstruction. *Computer Graphics Proceedings. Annual Conference Series*, 295–302.

HOPPE, H., DEROSSE, T., DUCHAMP, T., McDONALD, J. et STUETZLE, W. (1992). Surface reconstruction from unorganized points. *Computer Graphics (SIGGRAPH '92) proceedings*. vol. 26, 71–78.

HOPPE, H., DEROSSE, T., DUCHAMP, T., McDONALD, J. et STUETZLE, W. (1993). Mesh optimization. *Computer Graphics (SIGGRAPH '93 Proceedings)*. 19–26.

HSU, W., HUGHES, J. et KAUFMAN, H. (1992). Direct manipulation of free-form deformations. *Computer Graphics (SIGGRAPH 92 Proceedings)*. 177–184.

KANAI, T. (2001). Meshtoss : Converting subdivision surfaces from dense meshes. *Proceedings 6th International Workshop on Vision, Modeling and Visualization 2001*

(*Stuttgart, Germany, 21-23 Nov 2001*. IOS Press, Amsterdam, 325–332. [Http ://graphics.sfc.keio.ac.jp/MeshToSS](http://graphics.sfc.keio.ac.jp/MeshToSS).

KOBBELT, L. (2000). $\sqrt{3}$ -subdivision. *Proceedings of SIGGRAPH 2000*. 103–112.

LEVIN, A. (1999). Interpolating nets of curves by smooth subdivision surfaces. *Proceedings of SIGGRAPH 99, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*. 57–64.

LEVIN, A. (2000). *Combined Subdivision Schemes*. Thèse de doctorat, Tel-Aviv University, School of Mathematical Sciences.

LITKE, N., LEVIN, A. et SCHRÖDER, P. (2001). Trimming for subdivision surfaces. *CAGD*, 463–481.

LOOP, C. (1987). *Smooth subdivision surfaces based on triangles*. Mémoire de maîtrise, Department of Mathematics, University of Utah.

LÉPINE, J., GUIBAULT, F., VALLET, M.-G. et TRÉPANIER, Y. (1999). Optimization of a curve approximation based on NURBS interpolation. V. U. Press, éditeur, *Curve and Surface Design : Saint-Malo 1999*, Vanderbilt University Press. 213–220.

MACCRACKEN, R. et JOY, K. (1996). Free-form deformations with lattices of arbitrary topology. *Computer Graphics (SIGGRAPH 96 Proceedings)*. 181–188.

MANDAL, C., QIN, H. et VEMURI, B. (1999). A novel fem-based dynamic framework for subdivision surfaces. *Fifth ACM Symposium on Solid Modeling and Applications*. 191–202.

MCDONNELL, K. et QIN, H. (2000). Dynamic subdivision-based solid modeling. Rapport technique, State University of New York, Stony Brook, New York.

OSWALD, P. et SCHRÖDER, P. (2003). Composite primal/dual $\sqrt{3}$ -subdivision schemes. *Computer Aided Geometric Design*, 20, 135–164.

PETERS, J. (2000). Patching Catmull-Clark meshes. *Computer Graphics Proceedings ACM SIGGRAPH*. 255–258.

PETERS, J. et REIF, U. (1997). Analysis of generalized b-spline subdivision algorithms. *SIAM Journal of Numerical Analysis*.

PIEGL, L. et TILLER, W. (1995). *The NURBS Book*. Springer.

PRAUTZSCH, H. et UMLAUF, G. (1998). A G^2 -subdivision algorithm. G. Farin, H. Bieri, G. Brunet et T. DeRose, éditeurs, *Geometric Modeling*, Springer-Verlag, vol. 13. Computing suppl. édition, 217–224.

PRAUTZSCH, H. et UMLAUF, G. (2000). A g^1 and g^2 subdivision scheme for triangular nets. *International Journal of Shape Modeling*, 6, 21–35.

RIESENFIELD (1975). On Chaikin's algorithm. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 4, 304–310.

SCHWEITZER, J. E. (1996). *Analysis and Application of Subdivision Surfaces*. Thèse de doctorat, University of Washington, Seattle.

SEDERBERG, T. et PARRY, S. (1986). Free-form deformation of solid geometric models. *Computer Graphics (SIGGRAPH 86 Proceedings)*. 151–160.

SEDERBERG, T. W., SEWELL, D. et SABIN, M. (1998). Non-uniform recursive subdivision surfaces. *Proceedings of SIGGRAPH '98*. 387–394.

STAM, J. (1998). Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values. *Proceedings of SIGGRAPH 98*. 395–404.

SUZUKI, H., TAKEUCHI, S. et KANAI, T. (1999). Subdivision surface fitting to a range of points. *Proceedings of Pacific Graphics* 99. 158–167.

TAUBIN, G. (1995). A signal processing approach to fair surface design. *SIGGRAPH 95 Conference Proceedings*. Annual Conference Series, 351–358.

VELHO, L. et ZORIN, D. (2000). 4-8 subdivision. Rapport technique, CGAD.

WANG, H., QIN, K. et KIKINIS, R. (2000). Exact evaluation of nurss at arbitrary parameter values. *Proceedings of the IASTED International Conference on Computer Graphics and Imaging (CGIM 2000)*. Las Vegas, USA, 169–174. SPL technical report #237, posted September 2001.

WEIMER, H. et WARREN, J. (1999). Subdivision schemes for fluid flow. *Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 111–120.

ZORIN, D. (1997). *Subdivision and Multiresolution Surface Representation*. Thèse de doctorat, Caltech, Pasadena.

ZORIN, D. et SCHRÖDER, P. (2001). A unified framework for primal/dual quadrilateral subdivision schemes. *Computer Aided Geometric Design*, 18, 429–454.

ZORIN, D., SCHRÖDER, P. et SWELDENS, W. (1996). Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology. *Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH 96)*. 189–192.

ZORIN, D. et SCHRÖDER, P. (2000). *Subdivision for modeling and animation*. SIGGRAPH.

ANNEXE I

FORMATS DE FICHIERS

I.1 Fichier STL (.stl)

```

solid ICEM CFD/CAE part
facet normal -0.980560 -0.181418 0.074762
  outer loop
    vertex 1.25321 -0.540721 0.220103
    vertex 1.20062 -0.264229 0.201279
    vertex 1.19125 -0.242363 0.131435
  endloop
endfacet
facet normal 0.986258 0.118349 -0.115281
  outer loop
    vertex 1.30351 -0.782836 0.372777
    vertex 1.33987 -1.01415 0.446352
    vertex 1.3034 -0.818699 0.335074
  endloop
endfacet
:
:
:
facet normal 0.454732 0.145028 0.878741
  outer loop
    vertex 2.28526 -1.13565 -1.45161
    vertex 2.34414 -1.0188 -1.50136
    vertex 2.33584 -0.989832 -1.50185
  endloop
endfacet
endsolid

```

I.2 Fichier DAT (.dat)

```

--- Geometrie des aubes de centrale
-----
--- n_aubes  n_sections  n_pts_section  coord
    13      70      600      'CARTESIEN'
--- ----- INTRADOS ----- ----- EXTRADOS -----
---   Xi      Yi      Zi      Xe      Ye      Ze
--- Section .... 1
2.02995 -1.86396 0.691428 2.02995 -1.86396 0.691428
2.03159 -1.86213 0.691426 2.02808 -1.86568 0.69141
2.03304 -1.86016 0.691404 2.02607 -1.86722 0.691372

```

I.3 Fichier VRML (.wrl)

```
#VRML V2.0 utf8
geometry IndexedFaceSet {
  coord Coordinate {
    point [
      1.25321 -0.540721 0.220103,
      1.20062 -0.264229 0.201279,
      1.19125 -0.242363 0.131435,
      1.30351 -0.782836 0.372777,
      :
      1.88355 -1.7174 -0.982589,
      2.28526 -1.13565 -1.45161,
    ]
  }
  coordIndex [
    0, 1, 2, -1,
    5, 4, 3, -1,
    6, 4, 5, -1,
    7, 0, 5, -1,
    :
    592, 624, 543, -1,
    592, 591, 624, -1,
    543, 624, 603, -1,
  ]
}
```

I.4 Fichier PTS (.pts)

```
15
50
1.31526 0.216018 0.0802427
1.33849 0.197178 0.0952529
1.37536 0.134542 0.116952
1.42148 0.0418423 0.146875
1.46303 -0.0532904 0.176665
1.49935 -0.150004 0.205183
:
:
```

ANNEXE II

B-SPLINE PAR INTERPOLATION ET APPROXIMATION DE POINTS

II.1 B-spline par interpolation

Cette méthode permet d'obtenir par simple résolution d'un système d'équations une B-spline passant par chacun des points de calcul. Elle consiste à chercher les points de contrôle P_i tels que :

$$C(\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) P_i = Q_k$$

Où les \bar{u}_k sont les valeurs de paramètres sur la courbe correspondant à chacun des points Q_k . Celles-ci sont obtenues par la méthode de paramétrisation logarithmique développée au CERCA.

$\bar{u}_0 = 0$, $\bar{u}_n = 1$ et

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{\log(1 + |Q_k - Q_{k-1}|)}{d} \quad k = 1, \dots, n-1$$

avec

$$d = \sum_{k=1}^n \log(1 + |Q_k - Q_{k-1}|)$$

Les fonctions de base $N_{i,p}$ sont calculées pour une spline de degré p (dans notre cas $p = 3$) avec le vecteur nodal suivant ($m = n + p + 1$) :

$$u_0 = \dots = u_p = 0 \quad u_{m-p} = \dots = u_m = 1$$

$$u_{j+p} = \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} \bar{u}_i \quad j = 1, \dots, n-p$$

Les points de contrôle de la B-Spline s'obtiennent par la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ N_{0,p}(\bar{u}_1) & N_{1,p}(\bar{u}_1) & \cdots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_{n-1}) & N_{n,p}(\bar{u}_{n-1}) & \\ & & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ \vdots \\ P_{n-1}^0 \\ P_n^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_{n-1} \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

II.2 B-spline par approximation

Cette méthode permet d'obtenir une B-spline définie avec moins de points de contrôle qu'avec une courbe interpolée et qui ne passe pas par les points de la courbe qu'elle cherche à approximer. Cette méthode comporte plusieurs inconvénients par rapport à l'interpolation :

- **Pas entièrement automatique** : il faut spécifier le nombre de points de contrôle de la spline finale (nombre inférieur au nombre de points de la polyligne) ;
- **Mesure d'écart** : La méthode ne garantit pas un écart maximal avec les points de la polyligne. Il faut donc effectuer une vérification pour trouver le nombre optimal de points de contrôle pour une précision voulue ;
- **Détérioration** : Lorsque le nombre de points de contrôle approche du nombre de points de la polyligne, des ondulations apparaissent à l'une des extrémités de la courbe sans que celle-ci ne s'écarte des points de mesure.

Pour l'approximation d'une série de points $\{Q_k\}$, $k = 0, \dots, m$, nous cherchons à définir une courbe B-spline définie par n ($m > n \geq p$) points de contrôle $\{P_i\}$, $i = 0, \dots, n$:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p} P_i \quad u \in [0, 1] \quad (\text{II.2})$$

de telle sorte que :

- $Q_0 = C(0)$ et $Q_m = C(1)$;
- les autres points soient approximés au sens des moindres carrés :

$$\text{minimiser} \sum_{k=1}^{m-1} |Q_k - C(\bar{u}_k)|^2$$

Selon le paragraphe 9.4.1 de Piegl, cette approximation s'effectue en résolvant le système d'équations :

$$(N^T N)P = R$$

où :

$$N = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1) & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1,p}(\bar{u}_{m-1}) & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1}) \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1)R_1 + \cdots + N_{1,p}(\bar{u}_{m-1})R_{m-1} \\ \vdots \\ N_{n-1,p}(\bar{u}_1)R_1 + \cdots + N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1})R_{m-1} \end{bmatrix}$$

$$R_k = Q_k - N_{0,p}(\bar{u}_k)Q_0 - N_{n,p}(\bar{u}_k)Q_m \quad k = 1, \dots, m-1$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix}$$

Les valeurs de \bar{u}_k sont obtenues par la méthode de paramétrisation logarithmique décrite en II.1. Pour ce qui est du vecteur nodal utilisé pour calculer les valeurs des fonctions de

base $N_{i,p}$, les noeuds doivent être positionnés de manière à ce que chaque intervalle entre les noeuds internes du vecteur nodal renferme une valeur \bar{u}_k . Cette exigence est garantie en répartissant les noeuds comme suit :

$$d = \frac{m+1}{n-p+1}$$

$$u_0 = \dots = u_p = 0 \quad u_{m-p} = \dots = u_m = 1$$

$$i = \text{int}(jd) \quad \alpha = jd - i$$

$$u_{j+p} = (1-\alpha)\bar{u}_{i-1} + \alpha\bar{u}_i \quad j = 1, \dots, n-p$$