

NOTE TO USERS

This reproduction is the best copy available.

UMI[®]

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

OPTIMISATION DU CONTROLE ACTIF DE LA COUCHE LIMITE PAR
ASPIRATION SUR UN PROFIL

CÉDRIC BÉGUIN

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
DÉCEMBRE 2004



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-494-01279-X

Our file Notre référence

ISBN: 0-494-01279-X

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

OPTIMISATION DU CONTROLE ACTIF DE LA COUCHE LIMITE PAR
ASPIRATION SUR UN PROFIL

présenté par: BÉGUIN Cédric

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., président

M. PARASCHIVOIU Ion, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. TRIFU Octavian, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. LANGLOIS Marc, Ph.D., membre

à ma famille,

Aux nombreux auteurs qui m'ont accompagné durant mes trajets,

bla bla bla CAMUS

bla bla bla HOUELBEQ

bla bla bla SORAL

bla bla bla PENNAC

REMERCIEMENTS

A l'issue de ce mémoire, je tiens à exprimer ma gratitude à tous ceux qui m'ont apporté un soutien scientifique, matériel ou moral.

Je me dois d'abord de remercier mon directeur de thèse Dr. Ion Paraschivoiu, titulaire de la Chaire en aéronautique J.-A. Bombardier à l'École Polytechnique de Montréal, pour m'avoir invité au sein de son groupe de recherche et avoir assuré mon support financier tout au long du projet.

Je suis très fier que le Dr. Dominique Pelletier ait accepté d'être le président de ma thèse. Je peux ainsi exprimer mon estime ainsi que mon plaisir d'avoir suivi son cours.

Je suis très reconnaissant à mon co-directeur, Dr. Octavian Trifu pour sa disponibilité, sa gentillesse et la pertinence de ses remarques.

Je remercie sincèrement le Dr. Marc Langlois (Bombardier Aéronautique) pour l'intérêt porté à mon travail, et le temps qu'il m'a consacré pour aiguiller mon travail.

Un grand merci à Corentin Brette pour son amitié et le soin qu'il a pris pour superviser mon travail de rédaction.

Je désire également remercier l'ensemble des étudiants de la chaire pour leur bonne humeur aussi bien au travail, que lors de nos sorties. Salut à toi Tété, Schum et Coco, Salut à toi Momo, Matthieu, Salut à toi Christophe. Mais je tiens tout particulièrement à remercier Romain et Guillaume avec lesquels j'ai travaillé en étroite collaboration, dans la sympathie et le sérieux.

Je tiens enfin à exprimer ma gratitude, mon amitié, et plus si affinité... à mes collocataires Fifi, Juju, Ben, Bouss, Vince, Jimmy, Caroline et Jasmine pour leur soutien moral et les très bon moments à leurs côté passés et à venir.

Merci enfin à tous mes amis (Soche, Karine, Fabien, Anne-So, Julie Q., Julie NB., Julie P., Esteban...) et anonymes qui m'ont tant fait apprécier ces deux années à Montréal

Finalement et surtout une reconnaissance sans limite à ma famille en France et à Montréal qui m'a apporté un soutien précieux sans faille.

RÉSUMÉ

L'objectif premier de cette thèse est de développer un code d'optimisation du contrôle actif de la couche limite par aspiration. L'aspiration a pour effet de changer la structure de la couche limite en réduisant son épaisseur et en augmentant sa stabilité. Cela a deux effets essentiels sur l'écoulement :

- le retard de la transition laminaire-turbulent
- modification de l'intensité et de la position du choc dans les écoulements transsoniques

Pour des débits d'aspiration faibles d'une dizaine de cm^3/s (pour 1 m d'envergure), l'impact sur les performances aérodynamiques d'un profil est significatif.

Le temps de calcul élevé de la prédiction du point de transition nous a contraint à choisir une stratégie utilisant trois codes couplés (un code de calcul des équations d'Euler, un code de correction couche limite, un code de prédiction de la transition). Ces trois codes doivent pouvoir dialoguer automatiquement entre eux afin de les utiliser au sein d'un algorithme d'optimisation.

La méthode proposée de prédiction de la transition fait appel à la théorie de la stabilité. Nous avons utilisé le code SCOLIC développé à la Chaire Bombardier qui permet de résoudre les équations compressible de la stabilité linéaire parallèle.

Dans un souci d'amélioration de la qualité des résultats, nous avons également travaillé à l'élaboration d'un code de prediction de la transition faisant appel aux équations parabolisées de la stabilité (PSE) en compressible.

Pour le calcul de l'écoulement, nous avons modifié un code Euler développé à la Chaire afin de le coupler à un code de correction de couche limite (CLDF -

ONERA).

Enfin nous avons développé une méthode originale d'optimisation de l'aspiration couplée aux résultats des codes précédemment décrits. Nous avons pour cela utilisé le Krigeage et un algorithme d'apprentissage.

Le présent mémoire résume les théories et les algorithmes mis en place pour cette optimisation. Pour terminer, nous présentons les résultats de cette optimisation sur un profil laminaire, et formulerons quelques conclusions.

ABSTRACT

The primary objective of this thesis is the development of an optimization code for the active control of the boundary layer by suction. Suction changes the structure of the boundary layer by reducing its thickness and increasing its stability. This has two essential effects on the flow :

- delay of the laminar-turbulent transition
- modification of the intensity and position of the shock in transonic flows.

For low rates of suction of ten cm^3/s (for 1 m of scale), the impact is significant on the aerodynamic performances of a profile.

The large computing time for the prediction of the transition point has compelled us to carry out the calculations by using three coupled codes (a code for solving the Euler equations, a code for boundary layer correction and a code for the prediction of the transition). In order to use them within an algorithm of optimization, these three codes must be able to communicate automatically with each other.

The proposed method of transition prediction uses the stability theory. We used the SCOLIC code, developed at the Bombardier Chair, which solves the Orr-Sommerfeld equations.

In our concern to improve the quality of the results, we have also worked at the developement of a code for the prediction of the transition using the compressible Parabolized Stability Equations (PSE).

For the calculation of the flow we have modified an Euler code, developed at the Chair, in order to couple it to a boundary layer code (CLDF-ONERA). Finally we have developed an original method for the optimization of the suction, coupled

with the results of the codes previously written. For that we have used Kriging and a learning algorithm.

The present thesis summarizes the theories and the algorithms set up for this optimization. Finally, we present the results of this optimization on a laminar profile.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vii
ABSTRACT	ix
TABLE DES MATIÈRES	xi
LISTE DES FIGURES	xiv
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xvi
LISTE DES ANNEXES	xx
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 TRANSITION DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE .	5
1.1 Concept de base	5
1.2 Transition de la couche limite laminaire	6
1.3 Critère de transition	7
1.4 Historique de la théorie de la stabilité de la couche limite	8
1.5 Contrôle actif de la couche limite	10
CHAPITRE 2 THÉORIE LINÉAIRE DE LA STABILITÉ PARALLELE	13
2.1 Description du phénomène physique	13
2.2 Approche de la théorie de la stabilité linéaire	14
2.2.1 Équations générales du mouvement	14
2.2.2 Propriétés physiques	15

2.2.3	Technique des petites perturbations	15
2.3	Modèle d'Orr-Sommerfeld pour des écoulements incompressibles . .	18
2.3.1	Système de coordonnées	18
2.3.2	Hypothèses	19
2.3.3	Équations de stabilité	21
2.3.4	Théorie temporelle, théorie spatiale	22
2.4	La méthode du facteur N	23
2.4.1	Calcul du facteur N	24
CHAPITRE 3 THÉORIE LINÉAIRE NON PARALLÈLE		26
3.1	Hypothèses	26
3.2	Les coefficients thermodynamiques	27
3.3	Équations de stabilité	28
3.4	Conditions aux limites	30
3.5	Normalisation	31
3.6	Mesure des amplitudes	32
3.6.1	Redéfinition des amplitudes	32
CHAPITRE 4 CALCUL NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT MOYEN .		34
4.1	L'écoulement potentiel	34
4.2	Régime transsonique	35
4.3	Equations d'Euler	35
4.4	Schéma de Jameson	35
4.5	Notions de couche limite	37
4.5.1	Couplage visqueux - non visqueux	37
4.6	Maillage automatique	38
4.7	Correction couche limite	40
4.7.1	Principe général du couplage	41

CHAPITRE 5	CALCUL NUMÉRIQUE DE LA PERTURBATION . . .	43
5.1	Résolution Orr-Sommerfeld	43
5.2	Résolution PSE	44
5.2.1	Adimensionalisation	45
5.2.2	Algorithme et organigramme	46
5.2.3	Organigramme	48
5.3	Proposition de calcul de l'équation de dispersion	49
CHAPITRE 6	L'OPTIMISATION	52
6.1	Principe de l'optimisation	52
6.2	Paramétrisation	55
6.3	Les fonctions coût	57
6.4	Calcul automatique du Design d'expérience	59
6.4.1	Premier calcul de Design	60
6.4.2	Calcul de Design suivant	67
CHAPITRE 7	RÉSULTATS	70
7.1	Présentation du cas d'étude	70
7.2	L'écoulement Euler	70
7.3	La stabilité de la couche limite	71
7.4	Qualité de l'interpolation	76
CONCLUSION		80
ANNEXES		85

LISTE DES FIGURES

FIG. 1	Coefficient de friction sur une plaque plane ($U_\infty = 50 \text{ m/s}$) .	2
FIG. 2	RAE2822 à $M = 0,78$: Evolution de l'épaisseur de couche limite, profil de vitesse pour $\frac{x}{c} = 0,1$ et $0,4$.	3
FIG. 3	Fronts de transition sur un planeur	4
FIG. 1.1	Couche limite sur un RAE 2822	5
FIG. 2.1	Repère fixe, repère lié à la paroi	18
FIG. 4.1	Maillage autour du profil pour le calcul Euler	38
FIG. 4.2	Zoom du maillage	39
FIG. 4.3	Comparaison entre l'expérience, le code Euler sans et avec couplage couche limite	41
FIG. 4.4	Organigramme du principe de couplage	42
FIG. 5.1	Organigramme du code PSE compressible	49
FIG. 6.1	Algorithme d'Optimisation	53
FIG. 6.2	Architecture du programme	54
FIG. 6.3	Paramétrisation des panneaux d'aspiration	56
FIG. 6.4	Evolution des $\vec{\delta}$ au cours des premières itérations	66
FIG. 6.5	Evolution des $\vec{\delta}$ au cours des dernières itérations	66
FIG. 6.6	Evolution du $\lambda \vec{\nabla} M$ (cf. équation 6.19) en échelle logarithmique en fonction du nombre d'itération	67
FIG. 6.7	Evolution du M (cf. définition 6.8) en échelle logarithmique en fonction du nombre d'itération	68
FIG. 6.8	Cercles de rayon $R=0.3$ tracés autour des points solutions et zones n'appartenant à aucun des cercles	69
FIG. 7.1	Coefficient de portance	71
FIG. 7.2	Coefficient de trainée de pression	71
FIG. 7.3	Coefficient de pression	72

FIG. 7.4	$Tu = 0.58\%, \alpha = 0^\circ ; Tu = 0.58\%, \alpha = 1^\circ$	73
FIG. 7.5	$Tu = 0.30\%, \alpha = 0^\circ ; Tu = 0.30\%, \alpha = 1^\circ$	73
FIG. 7.6	$Tu = 0.30\%, \alpha = 0^\circ ; Tu = 0.30\%, \alpha = 1^\circ$	74
FIG. 7.7	$Tu = 0.30\%, \alpha = 0^\circ ; Tu = 0.30\%, \alpha = 1^\circ$	74
FIG. 7.8	Influence du contrôle actif : $Cf(x/c)$	75
FIG. 7.9	6 cas	77
FIG. 7.10	10 cas	77
FIG. 7.11	14 cas	78
FIG. 7.12	18 cas	78
FIG. 7.13	22 cas	79
FIG. 7.14	26 cas	79

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

Abreviation

PSE *Parabolized Stability Equation* Equation de la Stabilité Parabolisé

Constantes

R constante des gaz parfaits

Propriété physique du fluide

Grandeur dimensionnelle

ρ masse volumique

$\vec{V}$ vitesse

U, V, W composantes de la vitesse respectivement selon x, y et z

$\vec{\omega}$ vorticité ($\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$)

P Pression

μ coefficient de viscosité dynamique

λ second coefficient de viscosité dynamique

λ_c coefficient de conduction

ν coefficient de viscosité cinématique

T Température

Espace et temps

Grandeur dimensionnelle x, y, z, t

Grandeur sans dimension $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$

Caractéristiques de l'écoulement moyen

Grandeur dimensionnelle $\bar{X}^*$ ($\bar{\rho}^*, \bar{T}^* \dots$)

Grandeur sans dimension $\bar{X}$ ($\bar{\rho}, \bar{T} \dots$)

Caractéristiques des petites perturbations

Grandeur dimensionnelle X_φ^* ($\rho_\varphi^*, T_\varphi^* \dots$)

Grandeur sans dimension X_φ ($\rho_\varphi, T_\varphi \dots$)

Caractéristiques de l'écoulement lointain

$U_\infty, V_\infty, W_\infty$ vitesse à l'infini respectivement selon x,y et z

Q_∞ vitesse à l'infini $Q_\infty = \sqrt{U_\infty^2 + V_\infty^2 + W_\infty^2}$

Caractéristiques de la couche limite

U_e, V_e, W_e vitesse à l'extérieur de la couche limite respectivement selon x,y et z

T_e Température à l'extérieur de la couche limite

P_e Pression à l'extérieur de la couche limite

δ épaisseur de la couche limite $U(\delta) = 0.99.U_e$

Notation vectorielle

A scalaire ($\in \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

$\vec{\nabla} A$ gradient de A

$\vec{A}$ vecteur

$\vec{\vec{A}}$ tenseur d'ordre 2

$\vec{\mathbb{I}}$ tenseur identité d'ordre 2

$[\vec{A}]^t$ tenseur transposé de $\vec{A}$

$\nabla \cdot \vec{A}$ divergence de $\vec{A}$ ($\in \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ rotationnel de $\vec{A}$ (vecteur)

$\vec{\vec{\nabla}} \vec{A}$ gradient de $\vec{A}$ (tenseur)

$\vec{A} \odot \vec{B}$ produit tensoriel doublement contracté ($\in \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

En coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} A = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} \\ \frac{\partial A}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\vec{\vec{A}} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\vec{\vec{\mathbb{I}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$[\vec{\vec{A}}]^t = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{yx} & A_{zx} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{zy} \\ A_{xz} & A_{yz} & A_{zz} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (6)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\vec{\vec{\nabla}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (9)$$

Par exemple

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ([\vec{\nabla} \vec{V}] + [\vec{\nabla} \vec{V}]^t) &= \nabla \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} 2\frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} & 2\frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} & 2\frac{\partial W}{\partial z} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	CALCUL DE L'ÉCOULEMENT EXTERNE	85
I.1	L'écoulement potentiel	85
I.2	Les écoulement cyclique et condition de Kutta	87
I.3	Écoulement Euler	89
ANNEXE II	CORRECTION COUCHE LIMITE	91
ANNEXE III	KRIGEAGE	97
III.1	La théorie du Krigeage	97
III.1.1	La philosophie du Krigeage dual	98
III.2	Le système d'équations linéaires du Krigeage	99
III.2.1	La condition de non-biais	100
III.2.2	Minimisation de l'erreur d'estimation	100
III.2.3	La covariance généralisée	103
III.2.4	Le système de krigeage	104
III.3	Le passage au krigeage dual dans le cas d'une dérive linéaire	107

INTRODUCTION

En 1883, O. Reynolds étudiait l'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique. Il observa qu'à faible vitesse, un filet de fluide coloré reste rectiligne et parallèle à la direction moyenne de l'écoulement. Lorsque la vitesse augmente, les filets de fluide perdent progressivement de leur régularité et finissent par diffuser dans l'ensemble de l'écoulement. Ces observations l'ont amené à définir deux types d'écoulement.

L'écoulement laminaire est un écoulement dans lequel les couches de fluide glissent les unes sur les autres sans échange de particules tandis que l'écoulement turbulent est par opposition un écoulement dans lequel les filets de fluide se mélangent, prenant un caractère aléatoire et chaotique. Reynolds avait ainsi mis en évidence un phénomène de transition entre l'écoulement laminaire et turbulent dépendant étroitement du nombre sans dimension portant son nom qui compare les forces visqueuses aux forces d'inerties.

Depuis un siècle, l'intérêt porté par les chercheurs au phénomène de transition n'a jamais faibli et le problème est loin d'être résolu. De nombreuses théories ont été avancées afin de comprendre les mécanismes complexes qui font passer un écoulement de l'état laminaire à turbulent.

Cet intérêt s'explique par les changements notables des caractéristiques de l'écoulement, lorsqu'il passe d'un état à l'autre. Dans l'écoulement turbulent, le fait que les couches de fluides se mélangent permet un échange d'énergie accru entre elles. En particulier une couche limite reçoit un apport énergétique supplémentaire de

l'écoulement externe ayant deux effets principaux :

a) une forte augmentation du flux de chaleur

elle peut dans certains cas nécessiter un revêtement de protection thermique comme dans le cas de la pénétration d'une navette spatiale dans l'atmosphère. Elle a également une forte influence sur la formation de givre sur les ailes d'avion

b) une forte augmentation du frottement pariétal

Ce phénomène est illustré par l'évolution typique du coefficient de frottement pariétal C_f le long d'une aile. (voir Figure 1)

Cette augmentation de la traînée de friction est liée à une augmentation de la

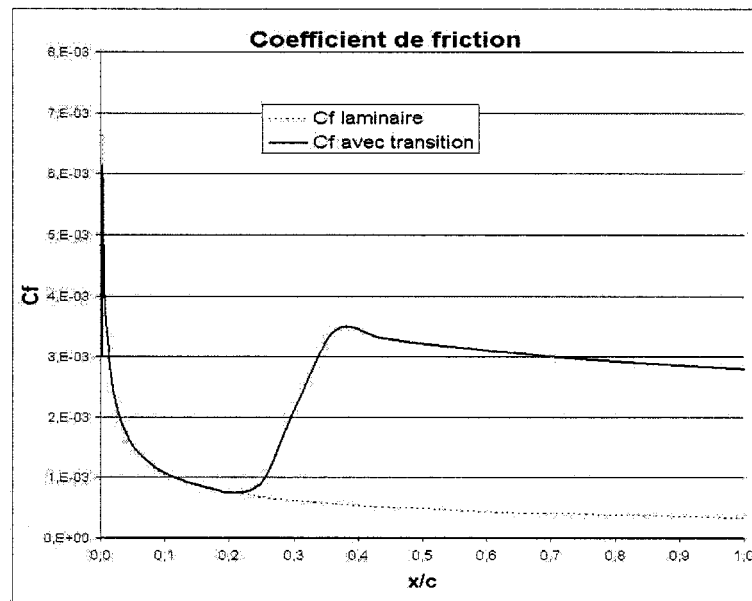


FIG. 1 Coefficient de friction sur une plaque plane ($U_\infty = 50 \text{ m/s}$)

dérivée de la vitesse moyenne dans la direction normale à la paroi. La turbulence augmente également l'épaisseur de la couche limite (cf. figure 2) ce qui permet de retarder le phénomène de décollement.

La prédiction de la transition est donc un élément primordial pour la prédiction des performances d'un avion. La figure 3 illustre un exemple de calcul tridimension-

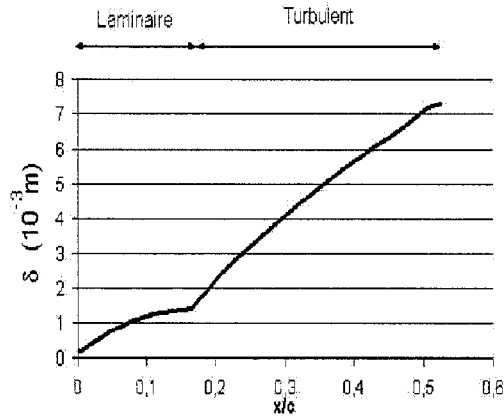


FIG. 2 RAE2822 à $M = 0,78$: Evolution de l'épaisseur de couche limite, profil de vitesse pour $\frac{x}{c} = 0,1$ et $0,4$

nel complet pour une incidence de 0, et une vitesse à l'infini $Q_\infty = 105 \text{ km/h}$ avec couche limite et montre l'étendue de laminarité réalisable sur les plans porteurs et le fuselage du planeur biplace Marianne.¹

Des études ont prouvé l'efficacité d'un contrôle de la transition par aspiration de la couche limite [1, 3]. La chaire Bombardier a développé des méthodes de prédiction numérique de la transition basées sur les équations de Orr-Sommerfeld 1907. L'objectif de cette thèse est le développement d'un outil d'optimisation du contrôle actif de la couche limite par aspiration.

Le chapitre 1 consiste en une revue bibliographique des principaux travaux touchant à la stabilité de la couche limite et la transition laminaire turbulent. Les chapitres suivants s'attachent au développement de la théorie de la stabilité. Le chapitre 2 explique les fondements de la théorie dite parallèle conduisant aux équations d'Orr-Sommerfeld, le chapitre 3 considère la formulation non parallèle (PSE). Aux

¹La figure 3 est issue du site de Alain BUGEAU -Aérodynamicien chez Dassault Aviation-
<http://inter.action.free.fr/>

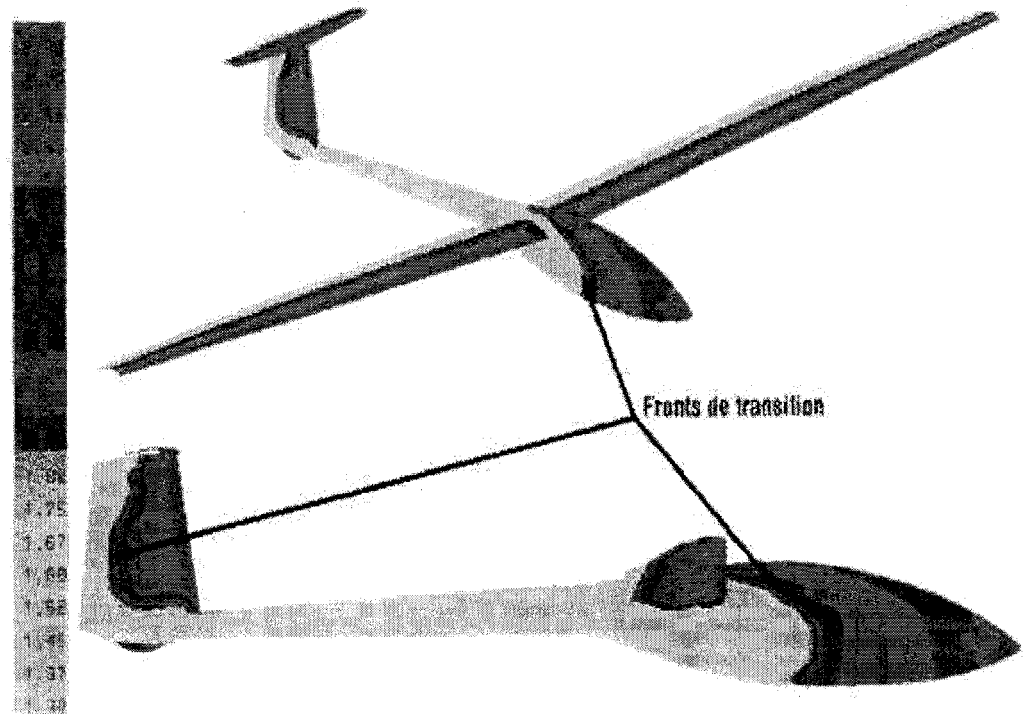


FIG. 3 Fronts de transition sur un planeur

chapitres 4, 5 et 6, on présente les outils numériques développés pour le calcul de l'écoulement moyen, celui des petites perturbations et enfin l'algorithme d'optimisation. Dans le septième et dernier chapitre nous effectuons une étude de cas sur un profil laminaire à $Mach = 0.3$.

CHAPITRE 1

TRANSITION DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE

1.1 Concept de base

Un écoulement autour d'un profil d'aile peut se diviser en deux régions :

- Une région éloignée du profil, où l'écoulement obéit aux lois des fluides non visqueux (cf.annexe I), en noir sur la figure 1.1
- Une région proche du profil, où l'écoulement peut être approximé par un écoulement de type couche limite (cf.annexe II) en gris sur la figure 1.1

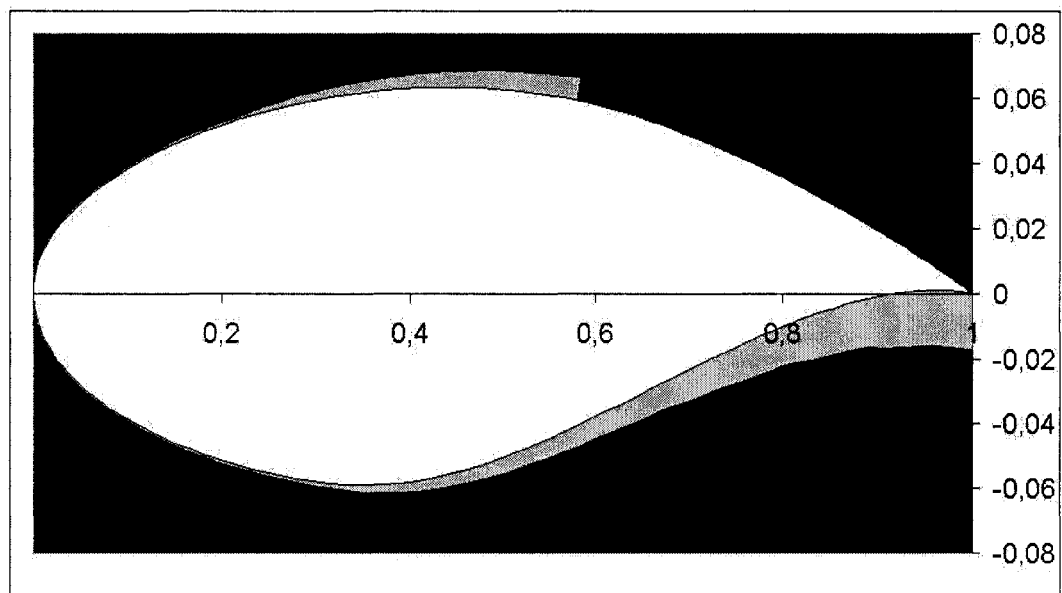


FIG. 1.1 Couche limite sur un RAE 2822

L'écoulement Euler accompagné d'une correction couche limite nous permet d'obtenir l'écoulement moyen (similaire à la solution des Equations de Navier-Stokes stationnaires). L'influence entre l'écoulement externe et la couche limite est mutuelle. Afin de tenir compte de celle-ci, nous devons effectuer un couplage Euler-Correction couche limite (cf. section 4.5.1). Sur la figure 1.1 on remarque que la couche limite sur l'extrados n'est pas calculée au delà du point $\frac{x}{c} \simeq 0.5$, car la correction de couche limite qu'on a utilisée n'est pas capable de prévoir l'influence du choc sur la couche limite. On modélise pour l'instant une épaisseur de couche limite constante après le choc.

1.2 Transition de la couche limite laminaire

Théoriquement, la turbulence est due à l'influence grandissante des termes non-linéaire de convection dans les équations de Navier-Stokes. Cette influence est bien évaluée par le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement δ^* :

$Re_{\delta^*} = \frac{\rho_\infty \cdot \delta^*}{\nu}$. L'épaisseur de déplacement est définie par :

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_e U_e}\right) dy \quad (1.1)$$

Où, δ est l'épaisseur de couche limite définie par :

$$U(\delta) = 0.99 \cdot U_e \quad (1.2)$$

Typiquement on parle d'un Reynolds critique $(Re_{\delta^*})_{cr} = 1000$ à partir duquel la couche limite laminaire est instable, elle a alors des chances de devenir turbulente.

Les couches limites laminaires ne résistent pas aux grands nombres de Reynolds. Nous pouvons avoir une idée de sa cause en analysant la solution analytique de Blasius (cf. le cours de P. Huerre [4]) pour une plaque plane. Nous pouvons ainsi estimer Re_{δ^*} , en effet pour Blasius

$$\delta^* = 1.72 * \left(\frac{\nu x}{Q_\infty} \right)^{1/2} \quad (1.3)$$

d'où

$$Re_{\delta^*} = 1.72 * \left(\frac{Q_\infty x}{\nu} \right)^{1/2} = 1.72 * \sqrt{\frac{x}{c}} \sqrt{Re} \quad (1.4)$$

Ainsi pour des nombres de Reynolds élevés le $(Re_{\delta^*})_{cr}$ est atteint plus tôt.

$$\left(\frac{x}{c} \right)_{cr} \sim \frac{1}{Re} \quad (1.5)$$

On est encore incapable de prédire analytiquement la transition. Le passage en régime turbulent est observé expérimentalement. Les études expérimentales ont cependant permis de déduire l'influence de certains paramètres caractéristiques de la couche limite.

1.3 Critère de transition

Le principe des critères de transition est de comparer une quantité issue du calcul laminaire à un seuil (déterminé généralement de manière expérimentale) et de définir le point de transition comme le point où ce seuil est atteint. En écoulement bidimensionnel, incompressible, sur paroi lisse, les deux paramètres essentiels agissant sur la transition sont le gradient de pression longitudinal et le niveau de turbulence à l'extérieure de la couche limite. Les critères semi-empiriques suivants sont parmi les plus importants, ils sont respectivement basés sur :

-Gradient de Pression :

Critères de Granville, de Michel, de Cebeci-Smith

Critères C1 de l'ONERA

Deuxième critère de Van Driest et Blumer

- Turbulence extérieure :

Critère d'Arnal-Habiballah-Delcourt

Critères C2 de l'ONERA

Premier critère de Van Driest et Blumer

- État de la paroi :

Critère de Gibbings, de Von Doenhoff

1.4 Historique de la théorie de la stabilité de la couche limite

Rayleigh fut le premier à étudier l'instabilité de la couche limite entre 1880 et 1913 et à trouver des résultats sur les instabilités inflexionnelles.

Théorème

Pour un écoulement **non-visqueux**, il est nécessaire pour avoir l'instabilité que le profil de vitesses $U(y)$ présente un point d'inflexion.

Ce théorème avait pour longtemps conduit les chercheurs à penser qu'un écoulement visqueux avec un profil de vitesse sans point d'inflexion était stable. Ce n'est qu'en 1921 que Prandtl a montré que la viscosité peut avoir un effet déstabilisateur. En 1930 les travaux de Tollmien et Schlichting ont montré que la transition est due à l'amplification de petites perturbations introduites dans la couche limite. Ces perturbations, appelées ondes T-S, initialement infinitésimales, se propagent dans la couche limite en s'amplifiant dans le temps et dans l'espace, jusqu'à atteindre

une amplitude suffisamment élevée pour qu'apparaisse la turbulence. Orr et Sommerfeld ont proposé quelques bases mathématiques pour étudier ces perturbations en écoulement bidimensionnel incompressible (cf. chapitre 2). En 1933, Schlichting calcule le rapport des amplitudes des perturbations les plus instables en fonction du nombre de Reynolds pour un profil de Blasius. Il trouve que le logarithme de ce rapport au moment de la transition reste compris entre 5 et 9.

Les premières expériences en soufflerie menées par Burgers et Dryden ne révélèrent aucune onde d'instabilité mais confirmèrent le même début de transition (les expériences étaient en fait contaminées par un taux de turbulence élevé et des problèmes acoustiques propres aux souffleries de l'époque).

En 1933, Squire montre que la transition apparaît puis se propage le long du profil dans la direction de l'écoulement. La théorie de la stabilité dictée par Tollmien - Schlichting n'a que peu de succès en dehors de l'Allemagne en raison de sa complexité mathématique et physique (aucun instrument de mesure de l'époque ne peut détecter les ondes de Tollmien - Schlichting responsables des instabilités). L'expérience de Schubauer et Skramstad (1941, publiée après la guerre)[13] met en évidence l'existence des ondes TS ainsi que leur influence directe sur les instabilités et la transition et confirme ainsi la théorie de Tollmien et Schlichting.

A la suite de ces expériences, des études plus approfondies furent menées. Lin (1945) étudia la stabilité des écoulements tridimensionnels parallèles incompressibles, puis développa avec Lees la théorie de la stabilité en écoulement compressible non visqueux. En 1955, Dunn et Lin montrèrent que l'instabilité d'un écoulement tridimensionnel à l'égard d'une perturbation se propageant dans une direction quelconque peut être étudiée en deux dimensions en projetant le long de

la direction de la perturbation. En 1956, Smith et Gamberoni[14] (États Unis) et Van Ingen [16] (Europe) proposent une méthode semi empirique permettant de relier la théorie de la stabilité à la prédiction de la transition : la méthode du facteur N .

À partir des années 1950, avec l'apparition des calculateurs puis des ordinateurs, les théories ont pu être explorées sur le plan numérique. Thomas (1953) emploie la théorie de la stabilité linéaire pour l'écoulement de Poiseuille et réussit à confirmer les résultats de Lin en utilisant un schéma aux différences finies. Le calcul dura cent cinquante heures. Brown (1954-1965) a effectué des calculs numériques pour les écoulements pour une vaste plage de nombre de Reynolds. Mack [7] effectue les premiers calculs numériques en compressible.

Le cas 3D compressible a été étudié par Malik (NASA, Langley) par une méthode temporelle. Le même problème a été étudié par Arnal (ONERA) et Cebeci (Douglas Aircraft) par une approche spatiale.

Nous verrons le détail de cette théorie dans le chapitre 2

1.5 Contrôle actif de la couche limite

En principe la conservation du caractère laminaire de la couche limite et le retard de la transition s'obtient par une augmentation de la courbure négative du profil de vitesse. Reshotko [11] démontre que cette courbure vérifie

$$\mu_w \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0) = \frac{\partial P}{\partial x} + \left(\rho v_w - \frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y}(0) \right) \frac{\partial u}{\partial y}(0) \quad (1.6)$$

où l'indice w indique la valeur de la variable à la paroi.

A partir de cette équation, on peut remarquer que le membre de droit devient plus négatif en :

- Créant un gradient de pression favorable $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$
- Refroidissant la paroi $\frac{\partial T}{\partial y} > 0$ (car d'après Sutherland $\frac{\partial \mu}{\partial T} > 0$)
- Aspirant la couche limite à la paroi $v_w < 0$

On obtient une répartition des pressions (gradient de pression favorable) sur l'extrados telle que le point de dépression maximale, auquel est lié la position du point de transition, est situé plus vers l'arrière du profil par un recul de la position de l'épaisseur maximale (à 50-60% de la corde au lieu de 30% sur les profils traditionnels). Ce procédé ne représente un gain sur la traînée que pour une faible plage d'incidence (1 à 4 degrés). Au delà de cette incidence, les dépressions augmentent près du bord d'attaque, d'où une brusque avancé du point de transition et une augmentation de la traînée qui est souvent plus forte que pour un profil classique de même épaisseur.

Le refroidissement de la paroi est très efficace pour laminariser la couche limite, mais demeure dispendieux sur le plan de la réalisation technique, rendant ce procédé efficace seulement pour les avions à moteur cryogénique où une source de refroidissement est déjà disponible sur l'appareil. De plus un tel système rentre en conflit avec les besoin de chauffer la paroi pour la dégivrer.

L'aspiration de la couche limite a une influence stabilisatrice. Elle réduit l'épaississement de la couche limite, elle permet également de retarder le décollement de la couche limite (laminaire ou turbulente). Le débit d'aspiration nécessaire est

relativement faible. Toutefois ce procédé est moins efficace pour les ailes en flèche où un autre type de transition appelé "contamination du bord d'attaque" risque d'entrer en jeu. Dans ce type de transition, la turbulence de l'écoulement sur le fuselage contamine le bord d'attaque de l'aile et crée une transition accélérée qui réduit l'efficacité de l'aspiration.

CHAPITRE 2

THÉORIE LINÉAIRE DE LA STABILITÉ PARALLELE

2.1 Description du phénomène physique

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, l'idée de base de cette théorie est que la transition est causée par l'amplification sélective d'ondes d'instabilité infinitésimales initialement présentes dans l'écoulement et produites par des ondes acoustiques, des vibrations de la paroi, la turbulence extérieure ou des irrégularités de surface. La vie de ces ondes (T-S) peut être grossièrement divisée en trois phases. La première phase correspond à leur naissance, nous l'étudions par les théories dites de réceptivité. La deuxième phase (celle que nous étudions) est bien modélisée par la théorie de la stabilité linéaire. Un peu plus en aval, leur amplitude cesse d'être infinitésimale et les ondes entrent alors dans une troisième phase caractérisée par des phénomènes non linéaires. Cette phase précède finalement l'apparition du premier spot turbulent.

2.2 Approche de la théorie de la stabilité linéaire

2.2.1 Équations générales du mouvement

Pour l'étude de la stabilité d'une couche limite compressible, nous partons des équations de Navier-Stokes.

- équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

- équation vectorielle de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{\nabla} \vec{V}) \cdot \vec{V} = -\vec{\nabla} P + \nabla \cdot \left(\lambda (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{\mathbb{I}} + \mu ([\vec{\nabla} \vec{V}] + [\vec{\nabla} \vec{V}]^t) \right) \quad (2.1)$$

- équation pour l'énergie interne $e = C_v \cdot T$:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho (\vec{\nabla} e \cdot \vec{V}) = -P \nabla \cdot \vec{V} + \Phi_D - \nabla \cdot (-\lambda_c \vec{\nabla} T)$$

Le terme Φ_D représente la fonction de dissipation et s'exprime par :

$$\Phi_D = (\lambda (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{\mathbb{I}} + \mu ([\vec{\nabla} \vec{V}] + [\vec{\nabla} \vec{V}]^t)) \odot \vec{\nabla} \vec{V}$$

Le terme $-\lambda_c \vec{\nabla} T$ représente le flux de chaleur par conduction où λ_c désigne le coefficient de conduction du fluide (loi de Fourier). Le $\odot$ exprime le produit tensoriel contracté deux fois (cf. notations et symboles)

- équation d'état des gaz parfaits :

$$P = \rho R T \quad (2.2)$$

2.2.2 Propriétés physiques

La pression étant assez faible et la température assez grande, on peut supposer que les interactions entre les molécules interviennent seulement pendant les collisions, ainsi le gaz peut être modélisé comme un gaz idéal calorifiquement et thermiquement parfait. La chaleur massique C_v est alors supposée constante.

Par ailleurs on adopte l'hypothèse classique suivante : les coefficients thermodynamiques λ_c , λ et μ sont supposés ne dépendre que de la température. La viscosité $\mu(T)$ suit la loi de Sutherland.

$$\mu(T) = \mu_0 \cdot \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + S}{T + S} \quad (2.3)$$

où, pour l'air :

$$\begin{aligned} T_0 &= 273K \\ \mu_0 &= 1.716 \times 10^{-5} kg.m.s^{-1} \\ S &= 111K \end{aligned} \quad (2.4)$$

De plus, les coefficients $\lambda(T)$ et $\mu(T)$ sont supposés satisfaire l'hypothèse de Stokes :

$$3\lambda(T) + 2\mu(T) = 0 \quad (2.5)$$

2.2.3 Technique des petites perturbations

La technique des petites perturbations est régulièrement utilisée dans les théories de stabilité. Elle suppose que les mécanismes d'instabilité peuvent être représentés par l'évolution d'une perturbation superposée à un écoulement de base. Une étude de réceptivité permet de connaître les mécanismes générateurs des perturbations.

Nous ne ferons pas d'étude de réceptivité; nous supposons a priori l'existence des perturbations. L'écoulement général est alors décomposé en la somme d'un écoulement moyen **stationnaire** et d'une perturbation instationnaire. Le principe n'est pas de comprendre la naissance de la perturbation mais de suivre son évolution :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{V}(\vec{x}, t) & = & \vec{V}^*(\vec{x}) + \vec{v}_\varphi^*(\vec{x}, t) \\ P(\vec{x}, t) & = & \bar{P}^*(\vec{x}) + p_\varphi^*(\vec{x}, t) \\ \rho(\vec{x}, t) & = & \bar{\rho}^*(\vec{x}) + \rho_\varphi^*(\vec{x}, t) \\ T(\vec{x}, t) & = & \bar{T}^*(\vec{x}) + T_\varphi^*(\vec{x}, t) \\ \mu(\vec{x}, t) & = & \bar{\mu}^*(\vec{x}) + \mu_\varphi^*(\vec{x}, t) \\ \lambda(\vec{x}, t) & = & \bar{\lambda}^*(\vec{x}) + \lambda_\varphi^*(\vec{x}, t) \\ \lambda_c(\vec{x}, t) & = & \bar{\lambda}_c^*(\vec{x}) + \lambda_{c\varphi}^*(\vec{x}, t) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Remarque, on note X^* les variables avec dimensions de l'écoulement moyen et des petites perturbations

On reporte cette décomposition dans le système d'équations 2.1. On simplifie l'équation en tenant compte du fait que l'écoulement moyen en est une solution particulière. On obtient :

- équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho_\varphi^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}^* \vec{v}_\varphi^* + \rho_\varphi^* \vec{\bar{V}}^* + \rho_\varphi^* \vec{v}_\varphi^*) = 0$$

- équation vectorielle de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}^* \frac{\partial \vec{v}_\varphi^*}{\partial t} + \bar{\rho}^* \left((\vec{\nabla} \vec{v}_\varphi^*) \cdot \vec{\bar{V}}^* + (\vec{\nabla} \vec{\bar{V}}^*) \cdot \vec{v}_\varphi^* + (\vec{\nabla} \vec{v}_\varphi^*) \cdot \vec{v}_\varphi^* \right) \\ & + \rho_\varphi^* \left((\vec{\nabla} \vec{\bar{V}}^*) \cdot \vec{\bar{V}}^* + (\vec{\nabla} \vec{v}_\varphi^*) \cdot \vec{\bar{V}}^* + (\vec{\nabla} \vec{\bar{V}}^*) \cdot \vec{v}_\varphi^* \right) = - \vec{\nabla} p_\varphi^* \\ & + \nabla \cdot (\bar{\lambda}^* (\nabla \cdot \vec{v}_\varphi^*) \vec{\mathbb{I}} + \lambda_\varphi^* (\nabla \cdot \vec{\bar{V}}^*) \vec{\mathbb{I}} \\ & + \bar{\mu}^* ([\vec{\nabla} \vec{v}_\varphi^*] + [\vec{\nabla} \vec{v}_\varphi^*]^t) + \mu_\varphi^* ([\vec{\nabla} \vec{\bar{V}}^*] + [\vec{\nabla} \vec{\bar{V}}^*]^t)) \end{aligned}$$

- équation pour l'énergie interne $e = C_v \cdot T$:

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}^* \frac{\partial C_v T_\varphi^*}{\partial t} + \bar{\rho}^* \left((\vec{\nabla} (C_v T_\varphi^*)) \cdot \vec{\bar{V}}^* + (\vec{\nabla} (C_v \bar{T}^*)) \cdot \vec{v}_\varphi^* + (\vec{\nabla} (C_v T_\varphi^*)) \cdot \vec{v}_\varphi^* \right) \\ & + \rho_\varphi^* \left((\vec{\nabla} (C_v \bar{T}^*)) \cdot \vec{\bar{V}}^* + (\vec{\nabla} (C_v \bar{T}^*)) \cdot \vec{v}_\varphi^* + (\vec{\nabla} (C_v T_\varphi^*)) \cdot \vec{\bar{V}}^* \right) \\ & = - \bar{P}^* \nabla \cdot \vec{v}_\varphi^* - p_\varphi^* \nabla \cdot \vec{\bar{V}}^* - p_\varphi^* \nabla \cdot \vec{v}_\varphi^* + \Phi_D - \nabla \cdot (-\bar{\lambda}_c^* \vec{\nabla} T_\varphi^* + \lambda_c^* \vec{\nabla} \bar{T}^*) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le terme Φ_D représente la fonction de dissipation et s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_D &= (\bar{\lambda}^* (\nabla \cdot \vec{v}_\varphi^*) + \lambda_\varphi^* (\nabla \cdot \vec{\bar{V}}^*) + \bar{\mu}^* ([\vec{\nabla} \vec{v}_\varphi^*] + [\vec{\nabla} \vec{v}_\varphi^*]^t) \\ & + \mu_\varphi^* ([\vec{\nabla} \vec{\bar{V}}^*] + [\vec{\nabla} \vec{\bar{V}}^*]^t)) \odot \vec{\nabla} \vec{\bar{V}}^* + (\bar{\lambda}^* (\nabla \cdot \vec{\bar{V}}^*) \\ & + \bar{\mu}^* ([\vec{\nabla} \vec{\bar{V}}^*] + [\vec{\nabla} \vec{\bar{V}}^*]^t)) \odot \vec{\nabla} \vec{v}_\varphi^* \end{aligned}$$

- équation d'état des gaz parfaits :

$$\frac{p_\varphi^*}{\bar{P}^*} = \frac{T_\varphi^*}{\bar{T}^*} + \frac{\rho_\varphi^*}{\bar{\rho}^*}$$

Ce système d'équations est elliptique donc presque aussi difficile à résoudre que les équations de Navier-Stokes. Il constitue cependant le point de départ des théories d'Orr-Sommerfeld et PSE qui vont être développées par la suite.

2.3 Modèle d'Orr-Sommerfeld pour des écoulements incompressibles

La théorie locale parallèle est appelée ainsi à cause des hypothèses utilisées (cf. section 2.3.2). Elle conduit à la célèbre équation d'Orr-Sommerfeld pour un écoulement bidimensionnel et incompressible où la courbure à la paroi est négligée.

2.3.1 Système de coordonnées

On part d'un repère cartésien fixe $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ où $\vec{X}$ est aligné avec la corde de l'aile (dans l'axe de l'avion), $\vec{Y}$ est selon la verticale et le $\vec{Z}$ complète le repère orthonormé direct. Pour résoudre les équations de la couche limite on se place dans le repère local $(M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{Z})$. Nous effectuons le changement de variable suivant,

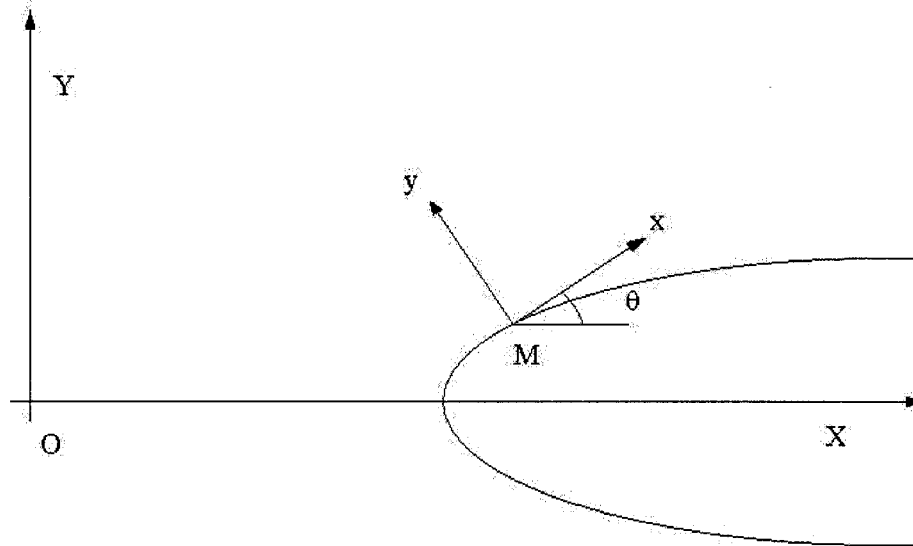


FIG. 2.1 Repère fixe, repère lié à la paroi

afin de se placer sur le repère lié à la paroi :

$$\begin{cases} X = x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ Y = x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ Z = z \end{cases} \quad (2.8)$$

Du coup intervient un terme de courbure dans les équations noté $K(= -\frac{d\theta}{dx})$. Ce terme permet de prendre en compte la déformation des axes de coordonnées liés au corps étudié. Une analyse simple permet de montrer que $K = -\frac{1}{R \cdot \cos\theta}$, mais celui-ci sera négligé par un souci de clarté (d'autant que dans les domaines d'étude classique le rayon de courbure R est grand). L'influence de la courbure est explicitée plus en détail dans la thèse de H.Salinas [12].

2.3.2 Hypothèses

Nous réduisons le problème de la stabilité à un problème local. Plus précisément, la stabilité d'un écoulement est recherchée dans une section infiniment mince de la couche limite, entre deux abscisses x et $x + dx$ indépendamment des variations des caractéristiques de l'écoulement en amont ou en aval de la section considérée. On néglige ainsi localement la dépendance en x de l'écoulement moyen ; le profil de vitesse ne dépend plus que de y . On suppose que localement la couche limite ne s'épaissit pas, ce qui revient à négliger la vitesse verticale moyenne. On note :

$$\begin{cases} \frac{1}{Q_\infty} \overrightarrow{V} = \begin{Bmatrix} \overline{U} \\ \overline{V} \\ \overline{W} \end{Bmatrix} \\ \overline{P} = \frac{\overline{P}^*}{\rho_\infty \cdot Q_\infty^2} \\ \overline{\rho} = \frac{\overline{\rho}^*}{\rho_\infty} \end{cases} \quad (2.9)$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overline{U} & = & \overline{U}(y) \\ \overline{V} & = & 0 \\ \overline{W} & = & \overline{W}(y) \\ \overline{P} & = & \overline{P}(y) \\ \overline{\rho} & = & \overline{\rho}(y) \end{array} \right. \quad (2.10)$$

La perturbation est cherchée sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_\varphi^* &= [u_\varphi^*(x, y, z, t), v_\varphi^*(x, y, z, t), w_\varphi^*(x, y, z, t), p_\varphi^*(x, y, z, t), \rho_\varphi^*(x, y, z, t)] \\ \vec{\phi}_\varphi^* &= \phi^*(y) e^{(i\alpha x + i\beta z - i\omega t)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

où,

$$\vec{\phi}^*(y) = [\hat{u}(y)^*, \hat{v}^*(y), \hat{w}^*(y), \hat{p}^*(y), \hat{\rho}^*(y)] \quad (2.12)$$

on adimensionne par

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u} = \frac{\hat{u}^*}{Q_\infty} \\ \hat{v} = \frac{\hat{v}^*}{Q_\infty} \\ \hat{w} = \frac{\hat{w}^*}{Q_\infty} \\ \hat{p} = \frac{\hat{p}^*}{\rho_\infty Q_\infty^2} \\ \hat{\rho} = \frac{\hat{\rho}^*}{\rho_\infty} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

De même pour l'espace et le temps (c représente la corde).

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{x} = \frac{x}{c} \\ \overline{y} = \frac{y}{c} \\ \overline{z} = \frac{z}{c} \\ \overline{t} = \frac{t Q_\infty}{c} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

avec $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_x}$, $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_z}$ et $\omega = 2\pi f$ où λ_x et λ_z sont les longueurs d'ondes des perturbations dans les directions x et z et f est la fréquence physique de la per-

turbation.

Nous introduisons la forme du champ moyen ainsi que celle des perturbations dans les équations de Navier-Stokes linéarisées 2.7, en particulier nous annulons toutes les dérivées en x et z du champ moyen ainsi que $\bar{V}$.

2.3.3 Équations de stabilité

En utilisant le nombre de Reynolds basé sur la corde $Re = \frac{Q_\infty c}{\nu}$, les équations de stabilité de la théorie parallèle pour un écoulement incompressible sont :

$$\begin{cases} i\alpha\hat{u} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial\bar{y}} + i\beta\hat{w} & = 0 \\ -i\omega\hat{u} + i\alpha\bar{U}\hat{u} + i\beta\bar{W}\hat{u} + \hat{v}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}} & = -i\alpha\hat{p} + \frac{1}{Re}[(-\alpha^2 - \beta^2)\hat{u} + \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\bar{y}^2}] \\ -i\omega\hat{v} + i\alpha\bar{U}\hat{v} + i\beta\bar{W}\hat{v} & = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\hat{p}}{\partial\bar{y}} + \frac{1}{Re}[(-\alpha^2 - \beta^2)\hat{v} + \frac{\partial^2\hat{v}}{\partial\bar{y}^2}] \\ -i\omega\hat{w} + i\alpha\bar{U}\hat{w} + i\beta\bar{W}\hat{w} + \hat{v}\frac{\partial\bar{W}}{\partial\bar{y}} & = -i\beta\hat{p} + \frac{1}{Re}[(-\alpha^2 - \beta^2)\hat{w} + \frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\bar{y}^2}] \end{cases} \quad (2.15)$$

En général les conditions aux limites du problème sont une perturbation nulle à la paroi et à l'infini soit :

$$\begin{cases} \hat{u}(0) = 0 & \lim_{\bar{y} \rightarrow +\infty} \hat{u}(\bar{y}) = 0 \\ \hat{v}(0) = 0 & \lim_{\bar{y} \rightarrow +\infty} \hat{v}(\bar{y}) = 0 \\ \hat{w}(0) = 0 & \lim_{\bar{y} \rightarrow +\infty} \hat{w}(\bar{y}) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Dans le cas d'Orr-Sommerfeld, le système peut s'écrire plus simplement par manipulation des équations 2.15. En dérivant par y et en recombinaut les équations de quantité de mouvement en x et z (sachant que $\frac{\partial\hat{v}}{\partial\bar{y}} = -i(\alpha\hat{u} + \beta\hat{w})$) on exprime $\frac{\partial\hat{p}}{\partial\bar{y}}$ en fonction de $\hat{v}$, l'équation de quantité de mouvement selon y nous donne alors

le système :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{iRe} (D^2 - (\alpha^2 + \beta^2))^2 - (\alpha \bar{U} + \beta \bar{W} - \omega)(D^2 - (\alpha^2 + \beta^2)) + (\alpha \bar{U}'' + \beta \bar{W}'') \right)}_{\text{opérateur L}} \hat{v} = 0$$

$$\text{avec } D = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \bar{U}'' = \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \text{ et } \bar{W}'' = \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}^2}$$

L doit être singulier pour que les petites perturbations existent, on en déduit une relation de dispersion.

$$F(\alpha, \beta, \omega, Re) = 0 \quad (2.17)$$

2.3.4 Théorie temporelle, théorie spatiale

A priori les nombres α , β et ω sont complexes ce qui fait six paramètres dont deux sont fixés par la relation de dispersion. On peut toutefois diminuer le nombre de paramètres en appliquant soit la théorie temporelle soit la théorie spatiale. La première suppose une évolution au cours du temps de l'amplitude des différentes perturbations en un point donné de l'espace. La seconde suppose une évolution spatiale de l'amplitude des différentes perturbations en un instant donné. On notera pour un nombre complexe $X = X_r + i.X_i$

Théorie temporelle Dans la théorie temporelle α et β sont réels et ω est complexe. La forme mathématique de $\vec{\phi}_\varphi$ s'écrit alors :

$$\vec{\phi}_\varphi = \vec{\phi}(y) e^{\omega_i t} e^{(i\alpha x + i\beta z - i\omega_r t)} \quad (2.18)$$

ω_i représente le facteur d'amplification temporelle. La perturbation s'amplifie si $\omega_i > 0$, s'amortit si $\omega_i < 0$ et est neutre si $\omega_i = 0$.

Théorie spatiale Dans la théorie spatiale ω est réel, α et β sont complexes. On prend comme hypothèse que la partie imaginaire de β est nulle, d'où :

$$\vec{\phi}_\varphi = \vec{\phi}(y)e^{-(\alpha_i x)}e^{i(\alpha_r x + \beta_r z - \omega_r t)} \quad (2.19)$$

Cette écriture représente une onde caractérisée par le vecteur d'onde $\vec{k}$, dont le module est égal à $(\alpha_r^2 + \beta_r^2)^{0.5}$, avec pour direction l'angle $\psi = \tan^{-1}(\beta_r/\alpha_r)$ et pour vitesse, la quantité $c = \omega/|k|$.

Dans le cas de l'étude de la stabilité de la couche limite, il est plus naturel de considérer la théorie spatiale. Deux cas sont alors à distinguer :

- zone stable ($\alpha_i \geq 0$).
- zone instable ($\alpha_i < 0$).

2.4 La méthode du facteur N

Soit une perturbation donnée d'amplitude A_0 en X_i (début de la couche limite instable) et qui va s'amplifier pour donner naissance à la turbulence en X_{tr} . Son amplitude A va croître dans le temps et dans l'espace. Le rapport $\ln(\frac{A(x)}{A_0})$ est appelé facteur N : $N(x) = \ln(\frac{A(x)}{A_0})$; on a ainsi $N(X_i) = 0$ et $N(X_{tr}) = N_{tr}$.

Cette méthode permet de détecter les perturbations instables ainsi que leur évolutions dans le temps et dans l'espace. Il reste à déterminer la valeur de N_{tr}

pour laquelle la transition apparaît. A ce point, il est nécessaire de faire appel à l'expérience pour pouvoir relier l'amplification des ondes instables à la transition. En 1956, Smith et Gamberoni ont constaté, qu'au point de transition, la valeur critique de N_{tr} était proche de 9 pour un écoulement compressible et de 5 pour un écoulement incompressible. Ce critère sera confirmé par Van Ingen en 1956. Cela signifie que l'amplitude d'une onde doit être multipliée par e^9 soit 8100 en compressible pour qu'elle donne naissance à la turbulence.

2.4.1 Calcul du facteur N

Sur le plan pratique, il est important de déterminer (ou d'estimer) l'abscisse de transition. En théorie spatiale pour un écoulement bidimensionnel ($\Rightarrow \beta = 0$), une fluctuation de fréquence ω qui a pour taux d'amplification α_i permet de définir une amplitude $A(\vec{x}, \omega) = ||\vec{\phi}_\varphi||$ (cf. équation 2.19) par :

$$\alpha_i = -\frac{1}{A(\vec{x}, \omega)} \times \frac{\partial A(\vec{x}, \omega)}{\partial x} \quad (2.20)$$

soit par intégration, pour des valeurs de ω fixées :

$$\ln\left(\frac{A(\vec{x}, \omega)}{A_0}\right) = \int_{x_I}^x -\alpha_i(\xi) \partial \xi \quad (2.21)$$

où l'indice 0 indique que la quantité est prise à l'abscisse de la première instabilité représente par x_I .

L'idée de la méthode du facteur N consiste à supposer qu'il existe une valeur critique $N_{Tr} = N(x_{Tr})$ telle que pour $x \geq x_{Tr}$ l'écoulement n'est plus laminaire. Mack [7] a affiné cette estimation en introduisant le taux de turbulence extérieur

Tu pour la détermination de N_{Tr} avec la relation suivante :

$$N_{Tr} = -8.43 - 2.4 \ln(Tu) \quad (2.22)$$

Cette relation semi-empirique intègre une étude de réceptivité à travers le taux de turbulence extérieure Tu défini comme

$$Tu = \frac{(< U^2 > + < V^2 > + < W^2 >)}{3.Q_\infty^2} \quad (2.23)$$

Notons que pour $Tu = 2.98.10^{-2}$, on obtient $n_{Tr} = 0$; ceci signifie que la transition se produit au point d'instabilité $x = x_I$. En réalité pour des taux de turbulence trop élevés, la théorie de la stabilité n'est plus valable, car l'expérience montre que la turbulence apparaît avant le point d'instabilité.

Pour résoudre cette équation on fixe ω et on peut adopter pour β l'une des stratégies suivantes :

- β fixé
- méthode enveloppe : on effectue un balayage en β , et on retient pour chaque valeur de x la valeur de β la plus instable, c'est à dire celle qui correspond au coefficient α_i le plus négatif. En deux dimensions β_r est nulle, mais ce n'est pas le cas en trois dimensions d'où l'existence de plusieurs techniques d'intégration.

CHAPITRE 3

THÉORIE LINÉAIRE NON PARALLÈLE

Le développement du code PSE (*Parabolized Stability Equations*) a commencé à la chaire en 1996, avec un premier programme développé par Marc Langlois [6] pour des écoulements incompressibles. Cependant, afin de pouvoir introduire les effets non parallèles et les effets de courbure pour les écoulements transsoniques il est important de développer un code de résolution compressible PSE.

3.1 Hypothèses

On suppose que l'écoulement moyen ne subit pas d'évolution suivant z (hypothèse d'une aile d'envergure infinie). Comme pour les autres théories dites non parallèles, l'épaississement de la couche limite est pris en compte, en considérant notamment la vitesse normale à la paroi $\bar{V}$. En outre, on tient compte de la dépendance en x du champ moyen. On considère alors un champ moyen de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{U}^* = \bar{U}^*(x, y) \\ \bar{V}^* = \bar{V}^*(x, y) \\ \bar{W}^* = \bar{W}^*(x, y) \\ \bar{P}^* = \bar{P}^*(x, y) \\ \bar{T}^* = \bar{T}^*(x, y) \\ \bar{\rho}^* = \bar{\rho}^*(x, y) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

A comparer avec les hypothèses du modèle d'Orr-Sommerfeld (cf. Equations 2.10)

De même on considère que la perturbation adimensionnée a la forme :

$$\begin{aligned}\vec{q}_\varphi^* &= [u_\varphi^*(x, y, z, t), v_\varphi^*(x, y, z, t), w_\varphi^*(x, y, z, t), p_\varphi^*(x, y, z, t), \rho_\varphi^*(x, y, z, t), T_\varphi^*(x, y, z, t)] \\ \vec{q}_\varphi^* &= \vec{q}^*(x, y) e^{i(\int_{x_I}^x -\alpha(\xi, \beta, \omega) d\xi + i\beta z - i\omega t)}\end{aligned}\quad (3.2)$$

où :

$$\vec{q}^* = [\hat{u}^*(x, y), \hat{v}^*(x, y), \hat{w}^*(x, y), \hat{p}^*(x, y), \hat{\rho}^*(x, y), \hat{T}^*(x, y)] \quad (3.3)$$

A comparer avec les hypothèses du modèle Orr-Sommerfeld (cf. Equations 2.11)

L'abscisse x_I désigne la station initiale du calcul PSE (où se développe la première instabilité), $\alpha, \beta, \omega \dots$ ont les mêmes définitions que dans la théorie de Orr-Sommerfeld. Cependant α ainsi que les fonctions d'amplitudes dépendent explicitement de x contrairement à la théorie parallèle développée précédemment. Toutefois on suppose que cette dépendance en fonction de x est faible c'est pourquoi on ne tiendra compte que des ordres 0 et 1 dans le développement des équations.

3.2 Les coefficients thermodynamiques

Les coefficients thermodynamiques $\hat{\lambda}^*, \hat{\mu}^*, \bar{\lambda}, \bar{\mu}$ et $\bar{\lambda}_c$ sont directement reliés au fluctuation de la température. En les notant génériquement $\hat{\kappa}^*$ pour $\hat{\lambda}^*, \hat{\mu}^*, \hat{\lambda}_c^*$ et $\bar{\kappa}$ pour $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}_c$, nous avons ainsi :

$$\kappa^* = \frac{d\bar{\kappa}}{dT} \hat{T}^* \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial X} = \frac{d\bar{\kappa}}{dT} \frac{\partial \bar{T}}{\partial X} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \kappa^*}{\partial X} = \frac{d^2 \bar{\kappa}}{dT^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial X} \hat{T}^* + \frac{d\bar{\kappa}}{dT} \frac{\partial \hat{T}^*}{\partial X} \quad (3.6)$$

3.3 Équations de stabilité

En reprenant les équations de Navier-Stokes, on introduit le champ moyen et la nouvelle forme des petites perturbations.

- équation de continuité

$$\begin{aligned}
 & -i\omega\hat{\rho}^* + \bar{\rho}^*[\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{u}^* + \frac{\partial\hat{v}^*}{\partial y} + i\beta^*\omega^*] \\
 & + \hat{\rho}^*[\frac{\partial\bar{U}^*}{\partial x} + \frac{\partial\bar{V}^*}{\partial y}] + \bar{U}^*(\frac{\partial\hat{\rho}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{\rho}^*) \\
 & + \hat{u}^*\frac{\partial\bar{\rho}^*}{\partial x} + \bar{V}^*\frac{\partial\hat{\rho}^*}{\partial y} + \hat{v}^*\frac{\partial\bar{\rho}^*}{\partial y} + i\beta^*\hat{\rho}^*\bar{W}^* = 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

- équation de quantité de mouvement suivant Ox

$$\begin{aligned}
 & \bar{\rho}^*[-i\omega^*\hat{u}^* + (\bar{U}^*\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{u}^*) + \hat{u}^*\frac{\partial\bar{U}^*}{\partial x} + \bar{V}^*\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial y} + \hat{v}^*\frac{\partial\bar{U}^*}{\partial y} + i\beta^*\bar{W}^*\hat{u}^*] \\
 & + \hat{\rho}^*[\bar{U}^*\frac{\partial\bar{U}^*}{\partial x} + \bar{V}^*\frac{\partial\bar{U}^*}{\partial y}] = -i\alpha^*\hat{p}^* + \frac{d(\bar{\lambda}^*+2\bar{\mu}^*)}{d\bar{T}^*}\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial x}i\alpha^*\hat{u}^* + \frac{d\bar{\lambda}^*}{d\bar{T}^*}\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial x}(\frac{\partial\hat{v}^*}{\partial x} + i\beta^*\omega^*) \\
 & (\bar{\lambda}^* + 2\bar{\mu}^*)(i\frac{\partial\alpha^*}{\partial x}\hat{u}^* + 2i\alpha^*\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial x} - \alpha^{*2}\hat{u}^*) + \bar{\lambda}^*(\frac{\partial^2\hat{v}^*}{\partial x\partial y} + i\alpha^*\frac{\partial\hat{v}^*}{\partial y}) \\
 & + \bar{\lambda}^*i\beta^*(\frac{\partial\hat{w}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{w}^*) + \frac{d\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^*}\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial y}(\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial y} + \frac{\partial\hat{v}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{v}^*) + \bar{\mu}^*(\frac{\partial^2\hat{u}^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\hat{v}^*}{\partial x\partial y} + i\alpha^*\frac{\partial\hat{v}^*}{\partial y}) \\
 & + \bar{\mu}^*(-\beta^{*2}\hat{u}^* + i\beta^*(\frac{\partial\hat{w}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{w}^*)) + \frac{d(\bar{\lambda}^*+2\bar{\mu}^*)}{d\bar{T}^*}(i\alpha^*\hat{T}^*)\frac{\partial\bar{U}^*}{\partial x} \\
 & + \frac{d\bar{\lambda}^*}{d\bar{T}^*}(\frac{\partial\hat{T}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{T}^*)\frac{\partial\bar{V}^*}{\partial y} + (\frac{d^2\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^{*2}}\hat{T}^*\frac{d\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^*}\frac{\partial\hat{T}^*}{\partial y})\frac{\partial\bar{U}^*}{\partial y} + \frac{d\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^*}\hat{T}^*\frac{\partial^2\bar{U}^*}{\partial y^2} + \frac{d\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^*}i\beta^*\hat{T}^*\frac{\partial\bar{U}^*}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

- équation de quantité de mouvement suivant Oy

$$\begin{aligned}
& \bar{\rho}^*[-i\omega^*\hat{v}^* + (\bar{U}^*\frac{\partial\hat{v}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{v}^*) + u^*\frac{\partial\bar{V}^*}{\partial x} + \bar{V}^*\frac{\partial\hat{v}^*}{\partial y} + \hat{v}^*\frac{\partial\bar{V}^*}{\partial y} + i\beta^*\bar{W}^*\hat{v}^*] \\
& + \hat{\rho}^*[\bar{V}^*\frac{\partial\bar{V}^*}{\partial y}] = -\frac{\partial\hat{p}^*}{\partial y} + \frac{d(\bar{\lambda}^*+2\bar{\mu}^*)}{d\bar{T}^*}\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial y}\frac{\partial\hat{v}^*}{\partial y} + \frac{d\bar{\lambda}^*}{d\bar{T}^*}\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial x}(\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{u}^* + i\beta^*\hat{w}^*) \\
& + (\bar{\lambda}^* + 2\bar{\mu}^*)\frac{\partial^2\hat{v}^*}{\partial^2y} + \bar{\lambda}^*(\frac{\partial^2\hat{u}^*}{\partial x\partial y} + i\alpha^*\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial y}) \\
& + \bar{\lambda}^*i\beta^*\frac{\partial\hat{w}^*}{\partial y} + \frac{d\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^*}\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial x}(\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial y} + i\alpha^*\hat{v}^*) + \bar{\mu}^*(\frac{\partial^2\hat{u}^*}{\partial x\partial y} - \alpha^*\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial y} + i\frac{\partial\alpha^*}{\partial x}\hat{v}^* + 2i\alpha^*\frac{\partial\hat{v}^*}{\partial x} - \alpha^{*2}\hat{v}^*) \\
& + \bar{\mu}^*(-\beta^{*2}\hat{v}^* + i\beta^*(\frac{\partial\hat{w}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{w}^*)) + (\frac{d^2(\bar{\lambda}^*+2\bar{\mu}^*)}{d\bar{T}^{*2}}\hat{T}^*\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial y} + \frac{d(\bar{\lambda}^*+2\bar{\mu}^*)}{d\bar{T}^*})\frac{\partial\bar{V}^*}{\partial y} \\
& + (\frac{d(\bar{\lambda}^*+2\bar{\mu}^*)}{d\bar{T}^*}\hat{T}^*\frac{\partial^2\bar{V}^*}{\partial^2y} + \frac{d^2\bar{\lambda}^*}{\partial^2\bar{T}^*}\hat{T}^*\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial y} + \frac{d\bar{\lambda}^*}{d\bar{T}^*}\frac{\partial\hat{T}^*}{\partial y})\frac{\partial\bar{U}^*}{\partial x} \\
& + \frac{d\bar{\lambda}^*}{d\bar{T}^*}\hat{T}^*\frac{\partial^2\hat{u}^*}{\partial x\partial y} + \frac{d\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^*}i\beta^*\hat{T}^*\frac{\partial\bar{W}^*}{\partial y} \\
& + (\frac{d^2\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^{*2}}\hat{T}^*\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial x} + \frac{d\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^*}(\frac{\partial\hat{T}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{T}^*))\frac{\partial\bar{U}^*}{\partial y} + \frac{d\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^*}\hat{T}^*\frac{\partial^2\bar{U}^*}{\partial y\partial x}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

- équation de quantité de mouvement suivant Oz

$$\begin{aligned}
& \bar{\rho}^*[-i\omega^*\hat{w}^* + (\bar{U}^*\frac{\partial\hat{w}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{w}^*) + \hat{u}^*\frac{\partial\bar{W}^*}{\partial x} + \bar{V}^*\frac{\partial\hat{w}^*}{\partial y} + \hat{v}^*\frac{\partial\bar{W}^*}{\partial y} + i\beta^*\bar{W}^*\hat{w}^*] \\
& + \hat{\rho}^*[\bar{U}^*\frac{\partial\bar{W}^*}{\partial x} + \bar{V}^*\frac{\partial\bar{W}^*}{\partial y}] = -i\beta^*\hat{p}^* + \hat{\lambda}^*i\beta^*(\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{u}^*) + \bar{\lambda}^*i\beta^*\frac{\partial\hat{v}^*}{\partial y} \\
& - (\bar{\lambda}^* + 2\bar{\mu}^*)\beta^{*2}\hat{w}^* + \frac{d\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^*}\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial x}(i\beta^*\hat{u}^* + i\alpha^*\hat{w}^*) + \bar{\mu}^*(i\beta^*\hat{v}^*(\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{u}^*)) \\
& + (i\frac{\partial\alpha^*}{\partial x}\hat{w}^* + 2i\alpha^*\frac{\partial\hat{w}^*}{\partial x} - \alpha^{*2}\hat{w}^*) + \frac{d\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^*}\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial y}(i\beta^*\hat{v}^* + \frac{\partial\hat{w}^*}{\partial y}) \\
& + \bar{\mu}^*(i\beta^*\frac{\partial\hat{v}^*}{\partial y} + \frac{\partial^2\hat{v}^*}{\partial y^2})\frac{d\bar{\lambda}^*}{d\bar{T}^*}i\beta^*\hat{T}^*(\frac{\partial\bar{U}^*}{\partial x} + \frac{\partial\bar{V}^*}{\partial y}) \\
& + (\frac{d^2\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^{*2}}\hat{T}^*\frac{d\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^*})\frac{\partial\bar{W}^*}{\partial y} + \bar{\mu}^*\frac{\partial^2\bar{W}^*}{\partial y^2} + \frac{d\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^*}i\alpha^*\hat{T}^*\frac{\partial\bar{W}^*}{\partial x}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

- équation de l'énergie

$$\begin{aligned}
& \bar{\rho}^*C_v(-i\omega^*\hat{T}^* + (\bar{U}^*(\frac{\partial\hat{T}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{T}^*) + \hat{u}^*\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial x}) + \bar{V}^*\frac{\partial\hat{T}^*}{\partial y} + \hat{v}^*\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial y} + i\beta^*\bar{W}^*\hat{T}^*) \\
& + \rho C_v(\bar{U}^*\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial x} + \bar{V}^*\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial y}) = \bar{P}^*((\frac{\partial\hat{u}^*}{\partial x} + i\alpha^*\hat{u}^*) + \frac{\partial\hat{v}^*}{\partial y} + i\beta^*\hat{w}^*) + (\hat{p}^*\frac{\partial\bar{U}^*}{\partial x} + \frac{\partial\bar{V}^*}{\partial x}) \\
& + \Phi_d + \frac{\partial\hat{\lambda}_c^*}{\partial\bar{T}^*}\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial x}(i\alpha^*\hat{T}^*) + \frac{\partial\hat{\lambda}_c^*}{\partial\bar{T}^*}(i\alpha^*\hat{T}^*)\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial x} + \hat{\lambda}_c^*(i\frac{d\alpha^*}{dx}\hat{T}^* + 2i\alpha^*\frac{\partial\hat{T}^*}{\partial x} - \alpha^{*2}\hat{T}^*) \\
& + \frac{\partial\hat{\lambda}_c^*}{\partial\bar{T}^*}\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial y}\frac{\partial\hat{T}^*}{\partial y} + (\frac{d^2\hat{\lambda}_c^*}{d\bar{T}^{*2}}\hat{T}^*\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial y} + \frac{d\hat{\lambda}_c^*}{d\bar{T}^*}\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial y})\frac{\partial\bar{T}^*}{\partial y} + \hat{\lambda}_c^*\frac{\partial^2\hat{T}^*}{\partial^2y} + \frac{d\hat{\lambda}_c^*}{d\bar{T}^*}\hat{T}^*\frac{\partial^2\bar{T}^*}{\partial^2y} - \hat{\lambda}_c^*\beta^{*2}\hat{T}^*
\end{aligned} \tag{3.11}$$

où :

$$\begin{aligned}
\Phi_d = & 2(\bar{\lambda}^* + 2\bar{\mu}^*) \left[\frac{\partial \bar{U}^*}{\partial x} (i\alpha^* \hat{u}^*) + \frac{\partial \bar{V}^*}{\partial y} \frac{\partial \hat{v}^*}{\partial y} \right] \\
& + 2\bar{\lambda}^* \left[\frac{\partial \bar{U}^*}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{v}^*}{\partial y} + i\beta^* \hat{w}^* \right) + \frac{\partial \bar{V}^*}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial \hat{u}^*}{\partial x} + i\alpha^* \hat{u}^* \right) + i\beta^* \hat{w}^* \right) \right] \\
& + 2\bar{\mu}^* \left[\left(\frac{\partial \hat{u}^*}{\partial y} \left(\frac{\partial \hat{v}^*}{\partial x} + i\alpha^* \hat{v}^* \right) \right) \frac{\partial \bar{U}^*}{\partial y} + \left(i\beta^* \hat{v}^* + \frac{\partial \hat{w}^*}{\partial y} \right) \frac{\partial \bar{W}^*}{\partial y} + \left(i\beta^* \hat{u}^* + i\alpha^* \hat{w}^* \right) \frac{\partial \bar{W}^*}{\partial x} \right] \\
& + 2 \frac{d(\bar{\lambda}^* + 2\bar{\mu}^*)}{d\bar{T}^*} \left(\frac{\partial \bar{V}^*}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{d\bar{\lambda}^*}{d\bar{T}^*} \hat{T}^* \left[\frac{\partial \bar{U}^*}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}^*}{\partial y} \right] + 2 \frac{d\bar{\mu}^*}{d\bar{T}^*} \hat{T}^* \left[\left(\frac{\partial \bar{U}^*}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{V}^*}{\partial y} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.12}$$

- équation d'état

$$\frac{\hat{p}^*}{\bar{P}^*} = \frac{\hat{T}^*}{\bar{T}^*} + \frac{\hat{\rho}^*}{\bar{\rho}^*} \tag{3.13}$$

Il est à noter que toutes les variables sont dimensionnelles. Le système peut se mettre sous la forme d'un système différentiel aux dérivées partielles :

$$[A^*] \vec{q}^* + [C^*] \frac{\partial \vec{q}^*}{\partial y} + \vec{B}^* = 0 \tag{3.14}$$

où

$$\vec{q}^* = [\hat{u}^*, \hat{v}^*, \hat{w}^*, \hat{p}^*, \hat{\rho}^*, \hat{T}^*]^t \tag{3.15}$$

3.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont du même type que pour Orr-Sommerfeld. Le domaine d'intégration des équations de stabilité est de forme rectangulaire dans le plan (x, y) .

Conditions limites Ce sont les conditions d'adhérence à la paroi, et loin de la paroi, on impose que toutes les grandeurs fluctuantes soient nulles.

- sur la paroi, $\forall x$,

$$\begin{cases} \hat{u}^*(x, 0) = 0 \\ \hat{v}^*(x, 0) = 0 \\ \hat{w}^*(x, 0) = 0 \\ \hat{T}^*(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

- à l'infini, $\forall x$,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \begin{cases} \hat{u}^*(x, y) = 0 \\ \hat{v}^*(x, y) = 0 \\ \hat{w}^*(x, y) = 0 \\ \hat{T}^*(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

3.5 Normalisation

Les équations de stabilité avec les conditions aux limites précisées ci-dessus ne constituent pas un problème fermé. Il reste à déterminer une loi d'évolution pour la fonction $\alpha(x)$. Cette dernière doit être telle que l'essentiel de la dépendance en x de la perturbation se situe dans le terme exponentiel. Herbert a proposé une équation de fermeture appelée normalisation. Elle est basée sur les fonctions d'amplitudes et s'exprime par l'intégrale suivante :

$$\int_0^\infty \hat{u}^{*t} \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial x} + \hat{v}^{*t} \frac{\partial \hat{v}^*}{\partial x} + \hat{w}^{*t} \frac{\partial \hat{w}^*}{\partial x} + \hat{T}^{*t} \frac{\partial \hat{T}^*}{\partial x} + \hat{\rho}^{*t} \frac{\partial \hat{\rho}^*}{\partial x} dy = 0 \quad (3.18)$$

où z^t désigne la quantité conjuguée de z .

3.6 Mesure des amplitudes

Les amplitudes sont ensuite calculées à β^* constant à l'aide du facteur N, déjà décrit dans les sections précédentes. Une redéfinition des amplitudes est cependant nécessaire.

3.6.1 Redéfinition des amplitudes

Les grandeurs physiques mesurées par le code PSE le sont en fonction de x et de y . Pour exploiter ces résultats, on élimine la dépendance en y en définissant une amplitude dont il existe plusieurs définitions :

- Double de l'énergie cinétique des fluctuations

$$A(x) = \sqrt{\int_0^\infty \rho_{moy} (|u_\varphi^*(x, y)|_{rms}^2 + |v_\varphi^*(x, y)|_{rms}^2 + |w_\varphi^*(x, y)|_{rms}^2) dy} \quad (3.19)$$

- Maximum de la fluctuation de quantité de mouvement

$$A(x) = |U_{moy} \rho_\varphi^* + \rho_{moy} u_\varphi^*|_{rms} \quad (3.20)$$

- Maximum de u

$$A(x) = |u_\varphi^*(x, y_{max})|_{rms} \quad (3.21)$$

- Maximum de v

$$A(x) = |v_\varphi^*(x, y_{max})|_{rms} \quad (3.22)$$

- Maximum de w

$$A(x) = |w_\varphi^*(x, y_{max})|_{rms} \quad (3.23)$$

- Maximum de u à y_{ref}

$$A(x) = |u_\varphi^*(x, y_{ref})|_{rms} \quad (3.24)$$

y_{ref} est une distance à la paroi initialement fixée et rms représente la valeur efficace :

$$|f(x)|_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(x, t)|^2 dt} \quad (3.25)$$

ici T désigne la période.

CHAPITRE 4

CALCUL NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT MOYEN

Nous savons que l'écoulement loin du profil peut être approximé par celui d'un fluide parfait. Une analyse dimensionnelle nous prouve que cette hypothèse est raisonnable pour un nombre de Re élevé. On peut faire l'hypothèse de "fluide parfait" ; pour un nombre de Mach faible, et un rapport des températures faible, on peut faire l'hypothèse de "fluide incompressible".

4.1 L'écoulement potentiel

Dans le cas d'un écoulement potentiel on fait l'hypothèse que le fluide est parfait incompressible et que l'écoulement est irrotationnel. Les développements mathématiques permettant la résolution d'un tel écoulement sont expliqués dans l'annexe I.

Comme démontré dans l'annexe, l'hypothèse d'écoulement potentiel est limitée. D'une part l'hypothèse d'incompressibilité n'est pas justifié pour les écoulements transsoniques, d'autre part l'hypothèse irrotationnelle obligeant l'introduction de la condition de Kutta est limitée. Dès que l'écoulement dépasse un nombre de Mach de 0.3 les effets de compressibilité ne sont plus négligeables, les équation d'Euler sont alors plus adéquates que l'écoulement potentiel. Ces équations permettront également de résoudre les écoulements transsoniques.

4.2 Régime transsonique

On définit un écoulement transsonique comme étant un écoulement dans lequel on retrouve juxtaposées des zones subsoniques et des zones supersoniques. La juxtaposition de ces deux régimes donne lieu à l'apparition d'ondes de chocs qui créent des discontinuités dans l'écoulement. On note l'existence d'un nombre de Mach critique, à partir duquel l'écoulement est sonique (i.e $M_{local} = 1$) en un point. Ce nombre de Mach critique est défini pour une géométrie et un angle d'attaque donné. Bien que l'écoulement à l'infini ne soit pas sonique, c'est l'accélération provoquée par la cambrure du profil qui amène le nombre de Mach à être supérieur à 1 localement.

De nos jours, il est devenu impératif d'étudier un tel régime afin de pouvoir "dessiner" correctement les avions volant juste en dessous de la vitesse du son. Par exemple, le nombre de Mach de croisière d'un avion de type Airbus A320 est d'environ 0,78.

4.3 Equations d'Euler

On définit les équations d'Euler comme les équations de Navier-Stokes avec une viscosité négligeable; elles sont développées dans l'annexe I. Ces dernières sont résolues par le schéma de Jameson

4.4 Schéma de Jameson

Afin de décomposer le domaine de calcul, on utilise un maillage structuré de type O et la discrétisation spatiale est effectuée par l'intermédiaire d'une formulation aux

volumes finis. Le principe de cette méthode étant justement d'intégrer les lois de conservation sur chaque cellule élémentaire, elle s'applique donc bien au problème donné. Ainsi, sur chaque cellule (i, j) l'équation (I.14) s'écrit :

$$\Omega \frac{\partial w}{\partial t} + Q(w) = 0 \quad (4.1)$$

où Q représente le flux convectif de la cellule à travers les cotés, i.e l'intégrale de bords définie par le second terme de l'équation (I.14).

Soit Δx_k et Δy_k les incréments suivant les axes x et y suivant le côté k de chaque cellule (i, j) . L'équation (4.1) va devenir :

$$\Omega \frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{k=1}^4 Q_k = 0 \quad (4.2)$$

avec :

$$Q_k = f_k \Delta y_k - g_k \Delta x_k$$

Les flux f_k et g_k sur chacun des cotés d'une cellule donnée sont évalués comme la moyenne entre les valeurs de f et g dans chacune des cellules adjacentes. Afin de résoudre numériquement l'équation (4.1), il faut choisir un schéma numérique qui permettra d'approcher les flux en fonction de l'inconnue. Pour cela, on utilise une méthode FTCS (Forward Time Centered Space) que l'on rend stable près des régions de fort gradient de pression en ajoutant un terme de dissipation artificielle dans la définition du flux. Ainsi, le flux est séparé en une partie convective et une partie dissipative. Ce schéma est connu sous le nom de schéma centré avec dissipation de Jameson-Schmidt-Turkel [5]. On note D ce terme de dissipation artificielle (ou flux dissipatif), et la nouvelle équation à résoudre est alors de la forme :

$$\Omega \frac{\partial w}{\partial t} + Q(w) - D(w) = 0 \quad (4.3)$$

Ce terme dissipatif est constitué de termes du second ordre qui jouent le rôle de viscosité artificielle près des chocs et de termes du quatrième ordre qui réduisent l'effet de la viscosité artificielle dans les zones où la solution est naturellement stable.

4.5 Notions de couche limite

Nous présentons dans cette section le principe de couplage entre un code non visqueux et un code de calcul de couche limite ainsi que des notions sur le contrôle de la couche limite laminaire.

4.5.1 Couplage visqueux - non visqueux

L'écoulement Euler accompagné d'une correction couche limite nous permet d'obtenir l'écoulement moyen (équivalent à la solution des équations de Navier-Stokes stationnaires). Afin de mieux rendre compte des effets de la couche limite sur l'écoulement externe et en particulier de l'interaction choc-couche limite ainsi que l'influence de l'aspiration de la couche limite sur l'écoulement externe, nous pouvons effectuer un couplage entre le code Euler et un code de correction de couche limite. En effet, la présence d'une couche limite peut amener à un décalage de la position du choc de l'ordre de 20% de la corde entre un calcul visqueux et un calcul non visqueux [2].

Pour modéliser les conséquences de la couche limite sur l'écoulement non visqueux, nous avons effectué un calcul Euler à partir du profil initial auquel nous avons ajouté

l'épaisseur de déplacement δ^* ajoutée à l'épaisseur de quantité de mouvement θ .

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_e U_e}\right) dy \quad (4.4)$$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{\rho U}{\rho_e U_e} \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_e U_e}\right) dy \quad (4.5)$$

où δ l'épaisseur de la couche limite définie telle que $U(\delta) = 0.99U_e$ est de l'ordre de grandeur de δ_C qui nous a servi à adimensionner les équations de la couche limite (cf. équations II.6)

4.6 Maillage automatique

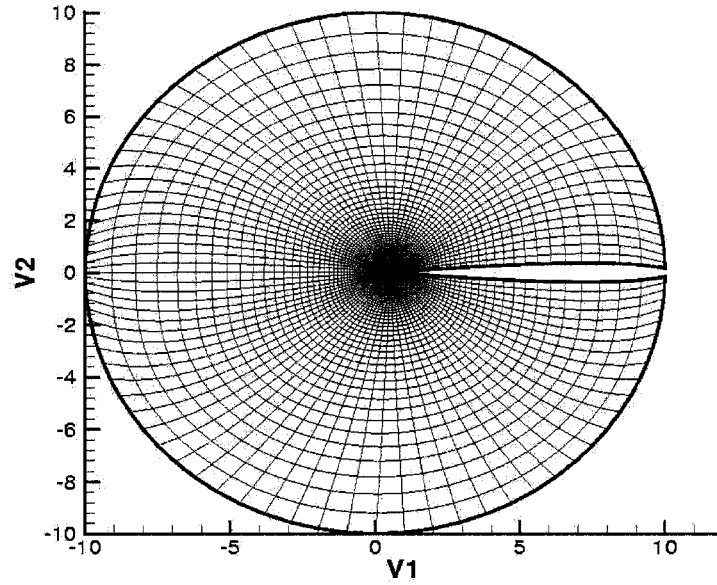


FIG. 4.1 Maillage autour du profil pour le calcul Euler

Afin de pouvoir mailler le nouveau profil (avec l'épaisseur de couche limite), nous avons travaillé à l'élaboration d'un mailleur automatique. Le mailleur codé utilise la technique de Poisson. Le maillage constitué est un maillage structuré en 0

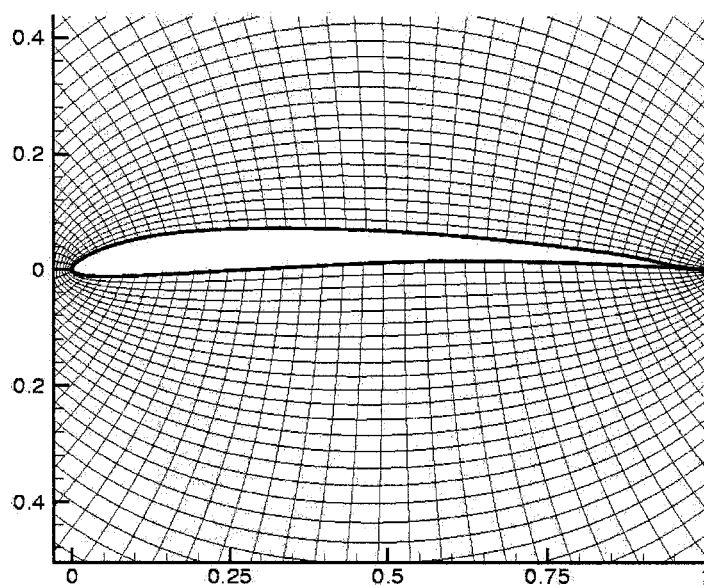


FIG. 4.2 Zoom du maillage

autour du profil, avec des fonction de concentration prédéfinies. Les mailles sur le profil sont concentrées au bord d'attaque, et au bord de fuite. Enfin dans l'espace les mailles sont concentrées autour du profil (cf. figures 4.1 et 4.2). Il faut choisir judicieusement le nombre de maille sur le profil (i), vs le nombre dans l'espace (j) afin d'obtenir des cellules à faible allongement. Un maillage 90x60 est un bon choix.

Après une résolution du code Euler on lance le code CLDF afin de calculer les épaisseurs de couche limite. On redéfinit ainsi un nouveau profil prenant en compte l'effet de la couche limite, on remaille autours de ce profil puis on relance le code Euler.

4.7 Correction couche limite

La correction "couche limite" est effectuée grâce au code CLDF, développé à l'ONERA, qui permet de résoudre les équations de la couche limite développées dans l'annexe II. Comme déjà illustré par la figure 1.1 la correction de couche limite ne modélise pas le passage de la couche limite à travers le choc.

Ce code permet d'obtenir les profils de vitesses dans la couche limite ainsi que les grandeurs caractéristiques de la couche limite comme δ , δ^* , C_f ,.... Le code CLDF permet de calculer la transition en utilisant quatre critères différents¹ :

- le critère longitudinal "Arnal-Habiballah-Delcourt", qui prend en compte les influences du taux de turbulence extérieure et du gradient de pression longitudinal ;
- le critère longitudinal "Arnal-Vialle-Jelliti", qui se base sur un calcul approché de l'amplification totale des ondes les plus instables ;
- le critère transversal C1, qui compare la valeur locale du Reynolds basée sur l'épaisseur de déplacement transversal à une valeur critique fonction du paramètre de forme longitudinal incompressible ;
- le critère transversal C2, qui cherche la direction la plus instable de l'écoulement, et compare ensuite le Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement dans cette direction à une valeur fonction du taux de turbulence extérieure.

Le couplage Euler-couche limite n'a pas été installé au sein du code d'optimisation. Bien qu'il donne des résultats encourageants (cf. la figure 4.3), d'une part il ne prédit pas le passage de la couche limite à travers un choc transsonique, d'autre

¹On pourra consulter le manuel de CLDF pour obtenir une liste de références sur les critères de transition cités.

part il prévoit la transition grace au critère propre à CLDF (cf. ci-dessus) et n'utilise pas la théorie de stabilité. Actuellement le code d'optimisation ne prévoit donc pas l'influence de la couche limite et donc en particulier de l'aspiration sur l'écoulement externe à la couche limite.

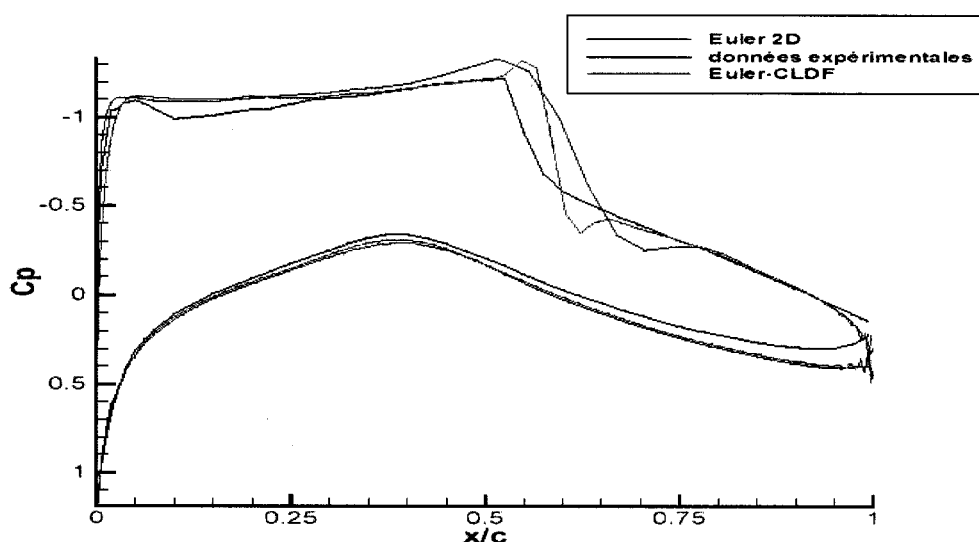


FIG. 4.3 Comparaison entre l'expérience, le code Euler sans et avec couplage couche limite

4.7.1 Principe général du couplage

L'ensemble de l'algorithme est finalement illustré par l'organigramme 4.4

L'ensemble de ce travail sur le code Euler a été réalisé en collaboration avec Romain Prunières, et afin d'avoir plus de précisions vous pouvez vous référer à son rapport [10].

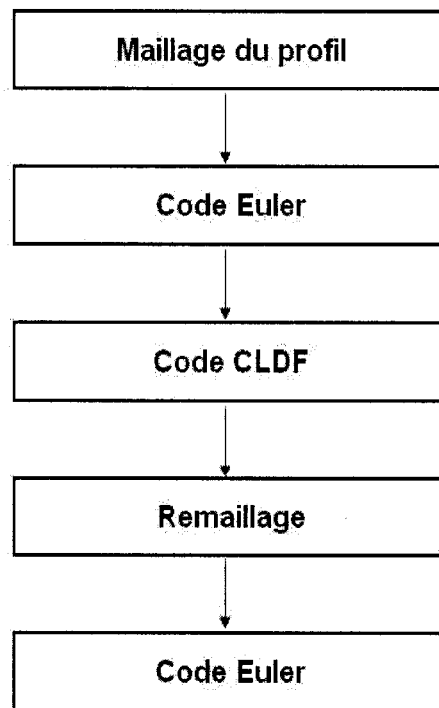


FIG. 4.4 Organigramme du principe de couplage

CHAPITRE 5

CALCUL NUMÉRIQUE DE LA PERTURBATION

5.1 Résolution Orr-Sommerfeld

Nous avons montré comment obtenir les équations de stabilité avec les hypothèses d'Orr-Sommerfeld (cf. les équations 2.10,2.11,2.15). Après une discrétisation classique en différence finie selon y , les équations obtenues peuvent se mettre sous forme matricielle

$$(\omega[M_1] + \alpha[M_2] + \alpha^2[M_3] + \beta[M_4] + \beta^2[M_5] + [M_6])\vec{\Phi} = 0 \quad (5.1)$$

où le vecteur $\vec{\Phi}$ représente les vecteurs propres $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w} \dots)$ en chaque point du maillage à une station donnée.

Dans la théorie temporelle (cf. section 2.3.4), où α et β sont supposés réels et donnés, le système matriciel 5.1 se ramène à un système à valeur propre linéaire en ω de la forme

$$\begin{aligned} [P_t]\vec{\Phi} &= \omega[M_1]\vec{\Phi} \\ \text{Où : } [P_t] &= -(\alpha[M_2] + \alpha^2[M_3] + \beta[M_4] + \beta^2[M_5] + [M_6]) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Un tel système peut se résoudre par des algorithmes numériques classiques. Ces méthodes peuvent se diviser en deux catégories : les méthodes globales et les méthodes locales. Les méthodes globales sont coûteuses en temps de calcul (typiquement ordre $\Theta\{n^3\}$ où n l'ordre des matrices), mais ne nécessitent pas d'initia-

lisation. En revanche les méthodes locales convergent rapidement mais nécessitent une estimation initiales des valeurs propres. SCOLIC utilise un algorithme global sur un maillage grossier afin d'obtenir une estimation de $\vec{\Phi}$ qui sert d'estimé pour une méthode locale sur un maillage raffiné. SCOLIC utilise une approche hybride théorie temporelle, théorie spatiale, ou une approche temporelle "pure". Pour plus de détail on se référera à la thèse de M. Mirshams [9].

5.2 Résolution PSE

Conditions d'entrée Le système d'équations PSE est un système aux dérivées partielles parabolique dans la direction x . Des conditions aux limites (ou conditions 'initiales', par analogie aux problèmes temporels) sont requises au départ du calcul de stabilité en $x = x_0$. Elles portent sur le nombre complexe α^* et $\hat{u}^*, \hat{v}^*, \hat{w}^*, \hat{\rho}^*, \hat{T}^*$. On choisit de les initialiser avec la solution des équations d'Orr Sommerfeld qui est calculée par SCOLIC, un code développé par M. Mirshams [9] en 1994 et M. Langlois [6] en 1996. L'ensemble des équations et la construction du système matriciel est explicitée dans la thèse d'H. Salinas [12]. Nous présentons ici succinctement le principe de résolution numérique. Nous commençons par adimensionnaliser le vecteur Φ^* des petites perturbations.

5.2.1 Adimensionalisation

On utilise les caractéristiques de l'écoulement externe à la première station de calcul comme valeur de référence. Nous avons ainsi pour l'espace et le temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = \frac{x}{\delta^*(x)} \\ \bar{y} = \frac{y}{\delta^*(x)} \\ \bar{z} = \frac{z}{\delta^*(x)} \\ \bar{t} = \frac{t.U_{ref}}{\delta^*(x)} \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Pour les variables physiques de l'écoulement moyen nous prenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{U} = \frac{\bar{U}^*}{U_{ref}} \\ \bar{V} = \frac{\bar{V}^*}{U_{ref}} \\ \bar{W} = \frac{\bar{W}^*}{U_{ref}} \\ \bar{P} = \frac{\bar{P}^* \cdot \gamma \cdot M_{ref}^2}{\rho_{ref} \cdot U_{ref}^2} \\ \bar{T} = \frac{\bar{T}^*}{T_{ref}} \\ \bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}^*}{\rho_{ref}} \\ \bar{\mu} = \frac{\bar{\mu}^*}{\mu_{ref}} \\ \bar{\lambda}_c = \frac{\bar{\lambda}_c^*}{\lambda_{c_{ref}}} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Pour les variables physiques des petites perturbations

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u} = \frac{\hat{u}^*}{U_{ref}} \\ \hat{v} = \frac{\hat{v}^*}{U_{ref}} \\ \hat{w} = \frac{\hat{w}^*}{U_{ref}} \\ \hat{p} = \frac{\hat{p}^* \cdot \gamma \cdot M_{ref}^2}{\rho_{ref} \cdot U_{ref}^2} \\ \hat{T} = \frac{\hat{T}^*}{T_{ref}} \\ \hat{\rho} = \frac{\hat{\rho}^*}{\rho_{ref}} \\ \hat{\mu} = \frac{\hat{\mu}^*}{\mu_{ref}} \\ \hat{\lambda}_c = \frac{\hat{\lambda}_c^*}{\lambda_{cref}} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Pour les variables des ondes

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha^* \delta^*(x) \\ \beta = \beta^* \delta^*(x) \\ \omega = \frac{\omega^* \delta^*(x)}{U_{ref}} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Il apparait alors dans les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} Re = \frac{\rho_{ref} U_{ref} \delta^*}{\mu_{ref}} \\ Pr = \frac{\mu_{ref} C_p \bar{\mu}}{\lambda_{cref} \bar{\lambda}_{cref}} \\ M_{ref} = \frac{U_{ref}}{\sqrt{\gamma R T_{ref}}} \end{array} \right. \quad (5.7)$$

On suppose le Pr constant d'où $\bar{\lambda}_c = \bar{\mu}$. L'hypothèse de Stokes permet de calculer $\bar{\lambda} = -\frac{2}{3}\bar{\mu}$

5.2.2 Algorithme et organigramme

Construction du système matriciel On exprime le système d'équations de Navier-Stokes où les petites perturbations sont introduites sous la forme matri-

cielle :

$$[A]\Phi + [C]\frac{\partial\Phi}{\partial y} + [B] = 0 \quad (5.8)$$

et

$$\Phi = [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\rho}, \hat{T}, \hat{p}, \frac{\partial\hat{u}}{\partial y}, \frac{\partial\hat{v}}{\partial y}, \frac{\partial\hat{w}}{\partial y}, \frac{\partial\hat{T}}{\partial y}]^t \quad (5.9)$$

C'est un système 5×10 (les 5 équations de Navier-Stokes)

Obtention du système matriciel 8×8 On obtient ensuite un système 8 par 8 en supprimant la variable p et la dérivée v par rapport à y en recombinaison les équations d'état et de continuité (cf. thèse de H. Salinas [12]) :

$$[G]\frac{\partial\Phi}{\partial y} = [F]\Phi + [H] \quad (5.10)$$

avec

$$\Phi = [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\rho}, \hat{T}, \frac{\partial\hat{u}}{\partial y}, \frac{\partial\hat{w}}{\partial y}, \frac{\partial\hat{T}}{\partial y}]^t \quad (5.11)$$

Les 3 nouvelles équations relient $\hat{u}, \hat{w}, \hat{T}$ et $\frac{\partial\hat{u}}{\partial y}, \frac{\partial\hat{w}}{\partial y}, \frac{\partial\hat{T}}{\partial y}$ par l'intermédiaire de $[G]$ et $[F]$

On inverse ensuite la matrice $[G]$, pour obtenir un système de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= [M]\Phi + [N] \\ [M] &= [G]^{-1} \cdot [F] \\ [N] &= [G]^{-1}[H] \end{aligned} \quad (5.12)$$

On discrétise ensuite en y selon un schéma compact d'ordre 4 dit de Hirsch et on obtient :

$$[E]^k \Phi^k + [G]^k \Phi^{k-1} = [F]^k \quad (5.13)$$

où $[E]^k$, $[G]^k$ et $[F]^k$ dépendent de $[M]$ $[N]$

Contruction du système global Les matrices $[E]^k$, $[G]^k$ et $[F]^k$ sont calculées en chaque noeud du maillage et on forme ensuite la matrice tridiagonale par bloc 8×8 du système global.

Résolution du système On inverse ensuite le système tridiagonal par blocs composé des matrices 8×8 à chaque noeud.

5.2.3 Organigramme

On avance la solution dans la direction x . Le point de départ est donné par une condition initiale en x_0 calculée par la théorie parallèle (code SCOLIC). Pour les stations suivantes on procède par itérations. Pour initialiser la procédure on prend $\alpha_j = \alpha_0$ et $\Phi = \Phi_0$ où α_0 et Φ_0 proviennent de la station précédente. En fixant α_j^p , on trouve les fonctions d'amplitude Φ_j^{p+1} . La normalisation $N = 0$ permet de corriger α_j^p pour obtenir α_j^{p+1} :

$$\alpha_j^{(p+1)} = \alpha_j^{(p)} + \Delta \alpha_j^{(p)} \quad (5.14)$$

où

$$\Delta \alpha_j^{(p)} = -i \frac{N(\alpha_j^{(p)}, \vec{\Phi}_j^{(p+1)})}{A^2(\alpha_j^{(p)}, \vec{\Phi}_j^{(p+1)})} \quad (5.15)$$

$\vec{\Phi}$ est le vecteur des petites perturbations défini par 5.11

La solution (α_j, q_j) du système d'équations PSE converge lorsque l'on satisfait le critère :

$$\max(|\frac{\Delta\alpha^{(p)}}{\alpha^{(p)}}|; |\frac{\Delta\alpha_i^{(p)}}{\alpha_i^{(p)}}|) < \epsilon \quad (5.16)$$

L'ensemble de ce travail a été réalisé en collaboration avec Guillaume Matile. On pourra se reporter à son rapport pour plus de renseignement [8]

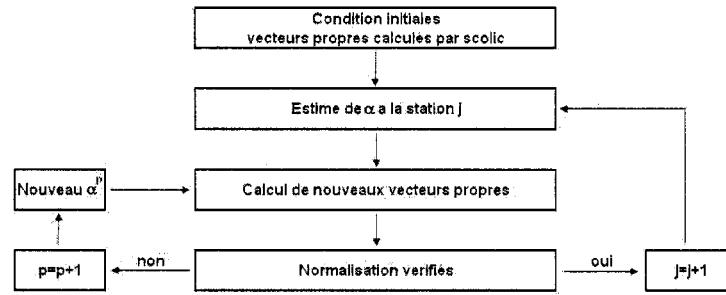


FIG. 5.1 Organigramme du code PSE compressible

5.3 Proposition de calcul de l'équation de dispersion

Dans la résolution des équations on modélise les petites perturbations par des fonctions linéaire par morceaux. Nous utilisons la définition décrite par les équations

2.11. Pour la résolution numérique nous avons :

$$\begin{aligned}\vec{\phi}_\varphi &= \vec{\phi}(y)e^{(i\alpha x + i\beta z - i\omega t)} \\ \text{avec} \\ \vec{\phi}(y) &= \sum_{k=1}^N \vec{\phi}_k C_k(y) \\ \text{où} \\ \phi_k &= [\hat{u}(y_k), \hat{v}(y_k), \hat{w}(y_k), \hat{p}(y_k), \hat{\rho}(y_k)]\end{aligned}\tag{5.17}$$

et

$$C_k(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < y_{k-1} \\ \frac{y - y_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} & \text{si } y_{k-1} \leq y < y_k \\ 1 - \frac{y - y_k}{y_{k+1} - y_k} & \text{si } y_k \leq y < y_{k+1} \\ 0 & \text{si } y_{k+1} \leq y \end{cases}$$

Nous nous proposons de changer d'espace vectoriel :

$$\begin{aligned}\vec{\phi}_\varphi &= \vec{\phi}(y)e^{(i\alpha x + i\beta z - i\omega t)} \\ \text{où} \\ \vec{\phi}(y) &= e^{-ay} \sum_{k=1}^N \vec{\phi}_k E_k(y) \\ \text{et} \\ \phi_k &= [\hat{u}_k, \hat{v}_k, \hat{w}_k, \hat{p}_k, \hat{\rho}_k] \\ \text{et} \\ E_k(y) &= e^{-i.k.y}\end{aligned}\tag{5.18}$$

Dans ce cas ci (équations 5.18) il y aurait N+1 inconnues pour chaque variable contrairement aux équations 5.17 qui implique uniquement la valeur de la fonction à chaque noeud. Nous pensons que nous pouvons obtenir des solutions aussi bonnes avec bien moins d'inconnues étant donné la forme typique des perturbations. L'avantage de cette méthode vient du fait que les fonctions $E_k(y)$ forment

une base orthogonale puisque

$$\int_0^{2\pi} E_{-k}(y) E_j(y) dy = \int_0^{2\pi} e^{-iky} e^{ijy} dy = \delta_{k,j} * 2\pi \quad (5.19)$$

où

$$\delta_{i,j} \text{ represente le symbole de Kronecker } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.20)$$

Les dérivées par rapport à y donnent

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\phi}(y)}{\partial y} &= -ae^{-ay} \sum_{k=1}^N \vec{\phi}_k e^{-iky} + e^{-ay} \sum_{k=1}^N -ik \vec{\phi}_k e^{-iky} \\ \frac{\partial \vec{\phi}(y)}{\partial y} &= -a \vec{\phi}(y) + e^{-ay} \sum_{k=1}^N -ik \vec{\phi}_k e^{-iky} \end{aligned} \quad (5.21)$$

ainsi pour l'équation de la continuité nous avons

$$i\alpha u_\varphi + \frac{\partial v_\varphi}{\partial y} + i\beta w_\varphi = 0 \quad (5.22)$$

$$e^{-ay} \left(i\alpha \sum_{k=1}^N u_k e^{-iky} - a \sum_{k=1}^N v_k e^{-iky} + \sum_{k=1}^N -ik v_k e^{-iky} + i\beta \sum_{k=1}^N w_k e^{-iky} \right) = 0 \quad (5.23)$$

Nous multiplions par e^{ay+ijy} puis intégrons sur $[0, 2\pi]$: on a

$$\begin{aligned} \forall j \in [1, N] \\ 2 * \pi (i\alpha u_j - a v_j - ij v_j + i\beta w_j) = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ainsi la matrice resultante est donc tout aussi creuse que celle de la formulation classique 5.17.

CHAPITRE 6

L'OPTIMISATION

On évalue la qualité d'une configuration d'aspiration grâce à une fonction coût qu'on va chercher à maximiser ou à minimiser. Une fonction coût est une fonction qui va d'un espace E (de dimension quelconque mais finie) dans $\mathbb{R}$. Dans notre cas l'espace E décrit les configurations à optimiser. Cet espace dit de Design décrit la position, la taille et le débit des panneaux d'aspiration. Nous avons décidé de réduire le nombre de variables de design en conservant une vitesse d'aspiration constante sur tous les panneaux d'aspiration. La dimension de E reste cependant directement reliée au nombre de panneau (2 variables par panneaux (taille et position) auxquelles on ajoute le débit. Comme nous ne savons pas faire d'optimisation à partir d'espace de dimensions variables, nous sommes obligés de fixer le nombre de panneaux pour effectuer notre optimisation. Nous faisons l'optimisation à dimension fixée, mais il est possible de faire plusieurs optimisations pour différentes dimensions.

Dans ce chapitre nous allons décrire le principe de l'optimisation, la paramétrisation des configurations d'aspiration choisies, ainsi que les outils algorithmiques utilisés.

6.1 Principe de l'optimisation

Après un calcul de la position de la transition sur le profil sans aspiration, nous déduisons une limite raisonnable de la position des panneaux d'aspiration Dans un

premier temps nous cherchons à obtenir une bonne idée du phénomène. Nous cherchons donc à couvrir au mieux l'espace de Design en un nombre limité de points (cf. la section 6.4). Choisir un nombre de point $\vec{\delta}$ de l'ordre de trois fois la dimension de l'espace de Design semble raisonnable pour se faire une première idée des variations de la fonction coût. Une fois la fonction calculée sur ces points nous effectuons une interpolation par krigeage (cf. l'annexe III), nous réduisons la distance entre les points d'un facteur environ 2, en ne conservant que ceux qui semblent intéressants à calculer (cf. section 6.4.2). Sur ces nouveaux points nous calculons la fonction coût ce qui nous permet d'affiner son interpolation. Le schéma de l'algorithme d'apprentissage est illustré à la figure 6.1 Cette technique d'optimisation puisqu'elle ne fait

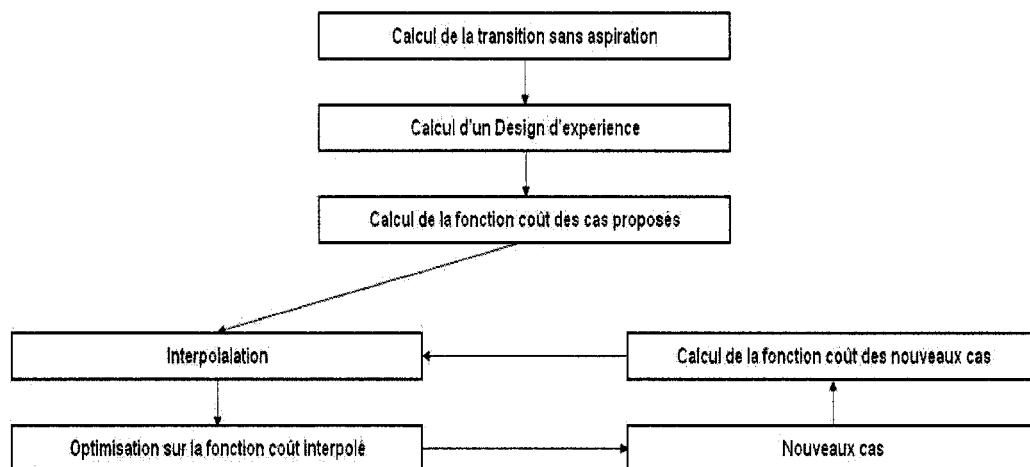


FIG. 6.1 Algorithme d'Optimisation

pas appel au gradient permet d'optimiser des fonctions non-continues à plusieurs optimums locaux. Cependant du fait du passage par l'interpolation (construction d'une fonction continue), la fonction ne doit pas représenter de trop fortes discontinuités. Nous représentons l'architecture du code à la figure 6.2

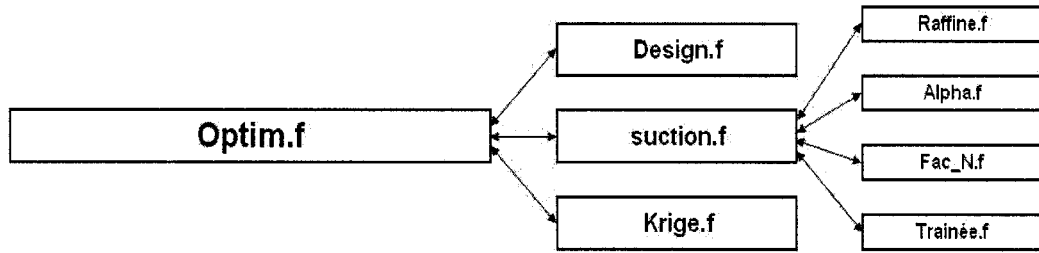


FIG. 6.2 Architecture du programme

Le fichier "Optim.f" contient le programme principal ainsi que celui du calcul de la fonction coût. Il fait appel aux sous-routines de "Design.f", "suction.f" et "Krige.f".

Le fichier "Design.f" contient les sous-routines nécessaires au calcul automatique du Design (cf. section 6.4), il fait appel aux sous-routines de "Krige.f" pour l'élimination des points sans intérêt (cf. section 6.4.2).

Le fichier "Krige.f" contient les sous-routines nécessaires à la conception d'une fonction d'interpolation par Krigeage (cf. l'annexe III) ainsi que l'évaluation de sa qualité (cf. section 6.4.2).

Le fichier "suction.f" contient les sous-routines nécessaires au calcul des performances aérodynamiques du profil. Cette sous-routine fait d'abord appel à la sous-routine "raffine.f" qui raffine le maillage et impose les conditions d'aspiration au code de correction de couche limite CLDF. Ensuite par l'intermédiaire de "alpha.f", nous recherchons la première station instable avant de calculer le facteur N grâce à "fac_n.f". Finalement, le facteur N étant évalué, nous calculons la trainée en imposant à CLDF la transition prévue (fichier "trainee.f").

6.2 Paramétrisation

L'aspiration sur le profil va s'effectuer par des panneaux d'aspiration constitués de tôle perforée au LASER. La taille des trous est typiquement de l'ordre de $0,05 \text{ mm}$ et la porosité d'un panneau d'aspiration est de l'ordre de $0,35\%$. Nous positionnons les zones d'aspiration grâce à la coordonnée curviligne de début et de fin de panneaux. Nous caractérisons les zones d'aspiration comme suit : Exemple avec N panneaux d'aspiration.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{de } s_1 \text{ à } s_2 & \text{Localisation du premier panneau d'aspiration} \\ \text{de } s_3 \text{ à } s_4 & \text{Localisation du deuxième panneau d'aspiration} \\ \dots & \\ \text{de } s_{2N-1} \text{ à } s_{2N} & \text{Localisation du } N^{ieme} \text{ panneau d'aspiration} \\ D & \text{Debit volumique linéique} \\ & \text{débit pour un mètre d'envergure en } m^3.s^{-1}.m^{-1} \end{array} \right. \quad (6.1)$$

La taille totale de la zone d'aspiration sur le profil est donc $T = \sum_{k=1}^N s_{2k} - s_{2k-1}$. La vitesse d'aspiration est donc de $v_{asp} = \frac{D}{T}$. Cette paramétrisation nous impose quelques contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} s_{min} < s_1 < s_2 < \dots < s_{2N} < s_{max} & \text{contraintes géométriques} \\ D_{min} \leq D \leq D_{max} & \text{Limites du débit} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

D_{min} et D_{max} sont choisis par l'utilisateur. s_{min} et s_{max} sont choisis par le programme d'optimisation en fonction des caractéristiques du profil sans aspiration.

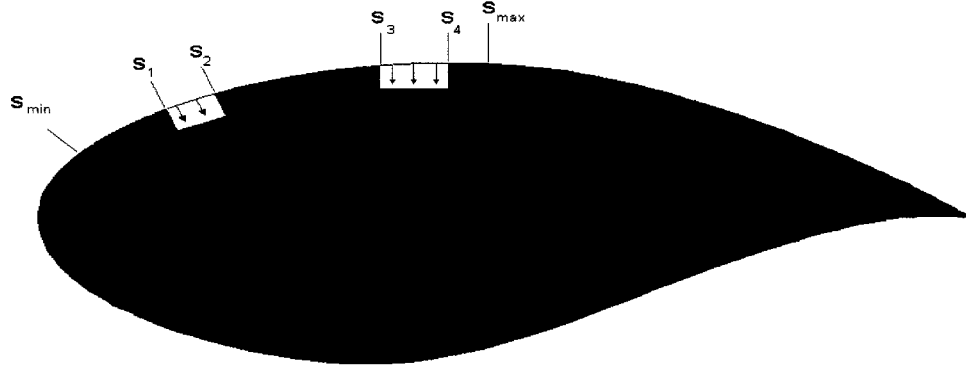


FIG. 6.3 Paramétrisation des panneaux d'aspiration

En réalité nous allons être plus restrictifs et imposer :

$$\begin{cases} \forall i \in [|1, 2N - 1|] \\ s_{i+1} - s_i \geq \delta_{min} \end{cases} \quad (6.3)$$

Car nous savons que pour des dimensions de panneaux trop faibles l'effet est minime.

Pour une meilleure optimisation, il faut donner dans la mesure du possible aux variables de l'espace E le même ordre de grandeur. Nous adimensionnons la paramétrisation de l'aspiration en introduisant du vecteur $\vec{\delta}^k$ caractérisant le $k^{ième}$ cas d'aspiration. δ_i^k représente la $i^{ième}$ variable du $k^{ième}$ cas d'aspiration.

$$\vec{\delta}^k = \begin{pmatrix} \delta_1^k \\ \delta_2^k \\ \dots \\ \delta_{2N+1}^k \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Nous récupérons les s_i et D grâce à :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1^k - s_{min} = \delta_{min} + \delta_1^k(\Delta s - 2N\delta_{min}) \\ \forall i \in [1, 2N - 1] \\ s_{i+1}^k - s_i^k = \delta_{min} + \delta_{i+1}^k(\Delta s - 2N\delta_{min}) \\ \text{soit } \forall i \in [1, 2N] \\ s_i^k = s_{min} + i.\delta_{min} + (\Delta s - 2N\delta_{min}) \sum_{j=1}^i \delta_j^k \\ \text{et } D = D_{min} + \delta_{2N+1}^k(D_{max} - D_{min}) \\ \text{Les contraintes deviennent } \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [1, 2N + 1] \delta_i^k \in [0, 1] \\ \sum_{j=1}^{2N} \delta_j^k \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

En notant $\Delta s = s_{max} - s_{min}$ la taille maximale d'une zone d'aspiration, δ_{min} sa taille minimale, D_{min} et D_{max} les débits minimum et maximum.

L'espace E de dimension $2N + 1$ décrit par les $\vec{\delta}^k$ est appelé espace de Design.

6.3 Les fonctions coût

Le programme codé à la chaire propose une optimisation à partir de plusieurs fonctions coût, l'utilisateur choisira sur quelle fonction il désire effectuer son opti-

misation.

fonction à maximiser

$$F_1(\vec{\delta}) = s_{trans}$$

fonction à minimiser

$$F_2(\vec{\delta}) = \frac{T_f}{T_0}$$

$$F_3(\vec{\delta}) = \frac{\lambda_t T_f + \lambda_p D}{\lambda_t T_{f0}}$$

(6.6)

$$\text{notons } s_{obj} = s_{nat} + 0.1 * (s_{nat} - s_{arret})$$

$$F_4(\vec{\delta}) = \delta_{2N} + \begin{cases} \text{si } s_{trans} < s_{obj} & 400 * \left(\frac{s_{trans} - s_{obj}}{s_{nat} - s_{arret}} \right)^2 \\ \text{si } s_{trans} > s_{obj} & 0 \end{cases}$$

$$F_5(\vec{\delta}) = \delta_{2N} + \begin{cases} \text{si } s_{trans} < s_{obj} & 1 - \delta_{2N} \\ \text{si } s_{trans} > s_{obj} & 0 \end{cases}$$

La fonction F_1 permet de maximiser la zone laminaire. On note s_{trans} la coordonnée curviligne de la transition

La fonction F_2 permet de minimiser la traînée de friction (notée T_f)

La fonction F_3 permet de minimiser la consommation en Kérosène du système. Pour des avions à turboréacteur, la consommation de Kérosène est une fonction linéaire de la poussée. Typiquement, la consommation spécifique λ_t d'un turboréacteur est de l'ordre de 1 kg de Kérosène par heure et par Newton de poussée. Or en régime de croisière la poussée est égale à la traînée d'où une consommation égale à $\lambda_t T_f$. Une pompe consomme typiquement 10 Wh pour 1 m^3/h d'air. Un kg de Kérosène permet typiquement d'obtenir 12 kWh. Pour un débit de 1 m^3/s on consomme donc 3kg/h de Kerosene. On a donc choisi $\lambda_t = 1$ et $\lambda_p = 3$

La fonction F_4 permet de minimiser le débit avec un terme de pénalité sur le recul de la transition. Pour la pénalisation nous avons choisi comme critère limite $s_{obj} = s_{nat} + 0.1 * (s_{nat} - s_{arret})$ c'est-à-dire 10% au-delà de la transition sans aspiration noté s_{nat} (On note s_{arret} , la coordonnée curviligne du point d'arrêt). Si la transition est au-delà de cet objectif noté s_{obj} , le terme de pénalité est nul, si la

transition est en-deçà de cet objectif le terme de pénalité est de $400 * (\frac{s_{trans} - s_{obj}}{s_{nat} - s_{arret}})^2$. Étant donnée que $\delta_{2N} \in [0, 1]$ on peut aisément espérer que la transition soit au-delà de :

$$400 * (\frac{s_{trans_{min}} - s_{obj}}{s_{nat} - s_{arret}})^2 = 1 \text{ soit} \quad (6.7)$$

$$s_{trans_{min}} = s_{nat} + \frac{s_{nat} - s_{arret}}{20}$$

La fonction F_5 permet de minimiser le débit avec un terme de pénalité sur le recul de la transition. Cette fois-ci nous avons choisi un terme de pénalité strict de façon que la transition soit strictement au-delà de s_{obj}

Les deux dernières fonctions ont été ajoutées afin de pouvoir tenir compte des contraintes structurelles.

Étant donné le temps important de calcul nécessaire pour calculer la transition ainsi que la traînée (de l'ordre de l'heure avec les ressources informatiques disponibles à l'école), il faut choisir une méthode d'optimisation qui demande peu d'appels à la fonction coût.

6.4 Calcul automatique du Design d'expérience

Le but du calcul automatique d'expérience est une couverture maximale de l'espace de Design défini par les équations 6.5. Pour cela on va chercher à maximiser M : la distance minimum entre deux vecteurs $\vec{\delta}$. Pour un calcul avec C cas dans un espace de dimension $2N + 1$.

$$\text{avec } i, j, k \in \mathbb{N}^3$$

$$M = \min_{i, j \in [1, C]^2, i \neq j} \left\| \vec{\delta}^i, \vec{\delta}^j \right\| \quad (6.8)$$

$$\text{où } \left\| \vec{\delta}^i, \vec{\delta}^j \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{2N+1} (\delta_k^i - \delta_k^j)^2}$$

6.4.1 Premier calcul de Design

Nous utilisons une méthode itérative pour obtenir les vecteurs $\vec{\delta}^k$ qui maximisent M (cf. definition 6.8).

Initialisation

Comme toute méthode itérative une bonne initialisation permettra une convergence plus rapide.

Étant donné que l'on cherche à écarter les points au maximum les extrema de l'espace de Design feront partie de la solution.

Si $D_{min} = D_{max}$ l'espace est de dimension $2N$ on fixe alors arbitrairement tous les $\delta_{2N} = 1$. On note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$$\forall k \in [1, 2N] \quad \vec{\delta}^k = \begin{pmatrix} \delta_{1,k} \\ \delta_{2,k} \\ \dots \\ \delta_{2N,k} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

auxquels on ajoute les vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{\delta}^{2N+1} & \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} \\ \text{et } \vec{\delta}^{2N+2} & \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2N} \\ \frac{1}{2N} \\ \dots \\ \frac{1}{2N} \\ 1 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Ainsi, dans un cas à deux dimensions :

$$\vec{\delta}^k = \left\{ \begin{array}{c} \delta_1^k \\ \delta_2^k \\ 1 \end{array} \right\} \quad (6.11)$$

Dans ce cas là, les contraintes sont :

$$\begin{aligned} (\delta_1, \delta_2) & \in [0, 1]^2 \\ \delta_1 + \delta_2 & \leq 1 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Les vecteurs initiaux sont alors :

$$\vec{\delta}^1 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}, \vec{\delta}^2 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\}, \vec{\delta}^3 = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}, \vec{\delta}^4 = \left\{ \begin{array}{c} 0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{array} \right\} \quad (6.13)$$

A partir de là on complète l'initialisation en ajoutant les vecteurs un à un jusqu'à

obtention du nombre requis. On ajoute un vecteur à partir du couple de vecteur (i, j) parmi les C vecteurs déjà créés vérifiant

$$\|\vec{\delta}^i, \vec{\delta}^j\| = \max_{k \in [1, C]} \left(\min_{l \in [1, C], l \neq k} \|\vec{\delta}^k, \vec{\delta}^l\| \right) \quad (6.14)$$

C'est-à dire les deux vecteurs côte à côte les plus éloignés, on ajoute alors le vecteur

$$\vec{\delta}^{C+1} = \frac{1}{2}(\vec{\delta}^i + \vec{\delta}^j) \quad (6.15)$$

En reprenant l'exemple on ajoute donc :

$$\vec{\delta}^5 = \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 0.25 \\ 1 \end{Bmatrix}, \vec{\delta}^6 = \begin{Bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \\ 1 \end{Bmatrix}, \vec{\delta}^7 = \begin{Bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 1 \end{Bmatrix} \dots \quad (6.16)$$

Si $D_{min} \neq D_{max}$ l'espace est alors de dimension $2N+1$ en gardant les même nota-

tions

$$\forall k \in [|1, 2N|] \quad \overrightarrow{\delta}^k = \begin{pmatrix} \delta_{1,k} \\ \delta_{2,k} \\ \dots \\ \delta_{2N,k} \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $\delta_{i,j}$ représente le symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

auxquels on ajoute les vecteurs

$$\overrightarrow{\delta}^{2N+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

et $\overrightarrow{\delta}^{2N+2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2N} \\ \frac{1}{2N} \\ \dots \\ \frac{1}{2N} \\ 1 \end{pmatrix}$

auxquels on ajoute les vecteurs identiques mais cette fois-ci

$$\text{avec } \delta_{2N+1} = 0$$

A partir de là on complète l'initialisation de la même manière.

Calcul et projection des gradients

Nous maximisons ensuite M à l'aide de la méthode du gradient conjugué. Pour chaque vecteur nous calculons le gradient de M définie par (6.8).

$$\vec{\nabla} M^k = \begin{pmatrix} \frac{\partial M}{\partial \delta_1^k} \\ \frac{\partial M}{\partial \delta_2^k} \\ \dots \\ \frac{\partial M}{\partial \delta_{2N+1}^k} \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

Nous calculons ensuite les nouveaux vecteurs $\vec{\delta}^{k*}$ comme suit :

$$\begin{aligned} & \forall k \in [|1, C|] \\ \vec{\delta}^{k*} &= \vec{\delta}^k + \text{proj}\{\lambda. \vec{\nabla} M^k\} \\ & \lambda \text{ est le pas} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Nous avons projeté $\lambda. \vec{\nabla} M^k$ de façon que $\vec{\delta}^{k*}$ reste dans l'espace de Design (c'est-à-dire vérifie les contraintes définies par les équations 6.5). La projection s'effectue de la manière suivante

$$\text{proj}\{\lambda. \vec{\nabla} M^k\} = \begin{pmatrix} \max \left\{ \min \left(\lambda. \frac{\partial M}{\partial \delta_1^k} ; 1 - \sum_{j=1}^{2N} |\delta_j^k| \right), -\delta_1^k \right\} \\ \dots \\ \max \left\{ \min \left(\lambda. \frac{\partial M}{\partial \delta_{2N}^k} ; 1 - \sum_{j=1}^{2N} |\delta_j^k| \right), -\delta_{2N}^k \right\} \\ \max \left\{ \min \left(\lambda. \frac{\partial M}{\partial \delta_{2N+1}^k} ; 1 - \delta_{2N+1}^k \right), -\delta_{2N+1}^k \right\} \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

La quantité $T_i = \min \left(\lambda \cdot \frac{\partial M}{\partial \delta_i^k} ; 1 - \sum_{j=1}^{2N} |\delta_j^k| \right)$ assure que

$$\delta_i^{k*} < 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{2N} \delta_j^{k*} < 1$$

La quantité $G_i = \max (T_i ; -\delta_i^k)$ assure que

$$\delta_i^{k*} > 0$$

de même la quantité $T_{2N+1} = \min \left(\lambda \cdot \frac{\partial M}{\partial \delta_{2N+1}^k} ; 1 - \delta_{2N+1}^k \right)$ assure que

$$\delta_{2N+1}^{k*} < 1$$

La quantité $G_{2N+1} = \max (T ; -\delta_{2N+1}^k)$ assure que

$$\delta_{2N+1}^{k*} = \delta_{2N+1}^k + G_{2N+1} > 0$$

Calcul du pas optimum

On sait que la méthode du gradient conjugué converge à coup sûr si les λ_P (P désignant les itérations) vérifient

$$\lim_{P \rightarrow +\infty} \lambda_P = 0 \text{ et } \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{P=1}^N \lambda_P = +\infty \quad (6.21)$$

Parmi les séries respectans ces conditions, celle qui donnait les meilleurs résultat était :

$$\lambda_P = \frac{\lambda_0}{\ln(10 + P)} \quad (6.22)$$

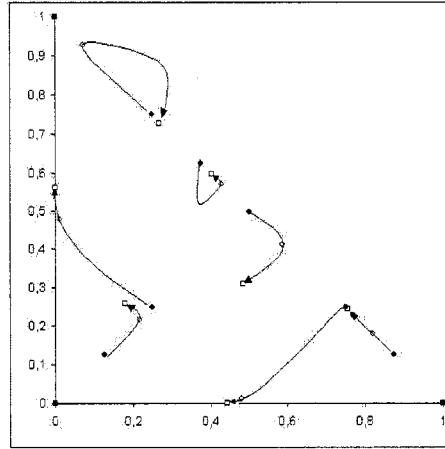


FIG. 6.4 Evolution des $\vec{\delta}$ au cours des premières itérations

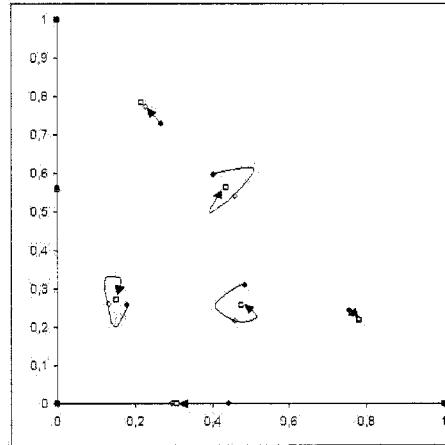


FIG. 6.5 Evolution des $\vec{\delta}$ au cours des dernières itérations

Afin d'accélérer la convergence nous choisissons $\lambda_0 = 10$ mais toutes les 25 itérations si M n'a pas augmenté nous divisons λ_0 par 1.25. Les figures 6.4, 6.5 illustrent le déplacement des vecteurs $\vec{\delta}$ dans un cas en 2D à 10 vecteurs. Nous avons représenté les vecteurs $\vec{\delta}$ par les points de coordonnées (δ_1, δ_2) . Nous pouvons voir la vitesse de convergence de l'algorithme choisi grâce à l'évolution du résidu (cf. figure 6.6) ainsi que l'évolution de la distance minimum (cf. figure 6.7) en fonction des itérations.

Nous pouvons juger de la justesse de la solution obtenue grâce aux figures 6.8. Sur la première figure nous avons représenté les vecteurs solutions entourés d'un

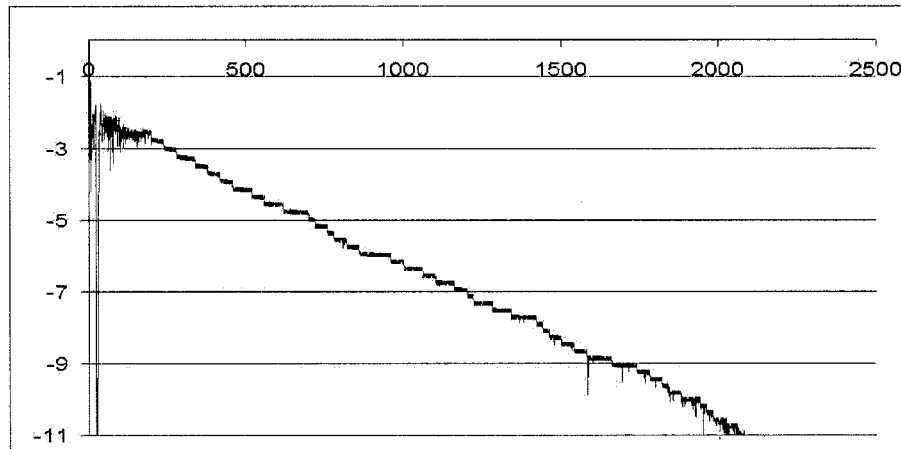


FIG. 6.6 Evolution du $\lambda \vec{\nabla} M$ (cf. équation 6.19) en échelle logarithmique en fonction du nombre d'itération

cercle de rayon 0.3 (Comme l'illustre la figure 6.7, la distance minimale entre les vecteurs est d'environ 0.3083), nous pouvons voir la bonne équidistance entre les points. Pour mieux visualiser cette équidistance, nous avons représenté en noir sur la deuxième figure les zones qui n'appartiennent à aucun cercle.

6.4.2 Calcul de Design suivant

Après le calcul de la fonction coût sur les cas proposés, nous allons chercher à affiner la connaissance de notre fonction coût sur l'espace de Design en particulier son optimum. Nous cherchons à resserrer la couverture de notre espace de Design. Pour cela on augmente le nombre de vecteurs $\vec{\delta}$ dans le but de diviser par 2 environ la distance M définie par l'équation 6.8. Dans cette opération nous conservons intacts les vecteurs pour lesquels on connaît exactement la valeur de la fonction coût. Afin d'éviter de calculer la fonction coût, nous allons effectuer une sélection parmi les nouveaux vecteurs proposés.

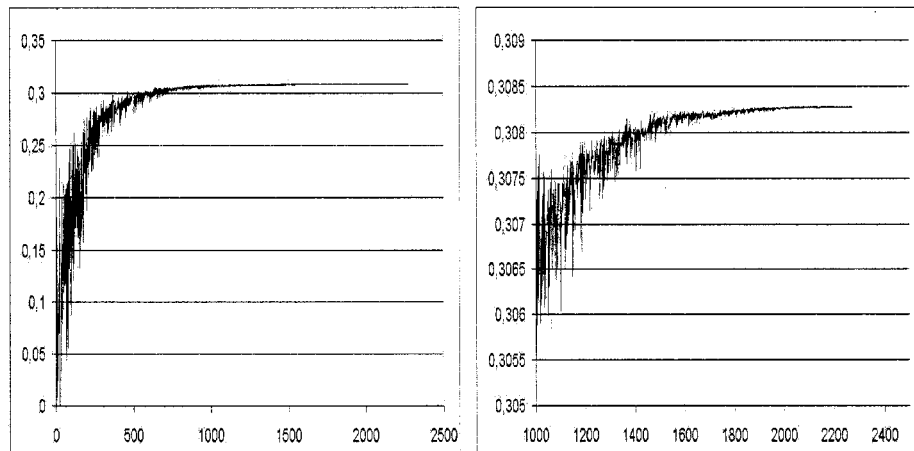


FIG. 6.7 Evolution du M (cf.définition 6.8) en échelle logarithmique en fonction du nombre d'itération

Amélioration de l'optimum

Nous conservons les vecteurs dont la fonction coût interpolée est optimum. Afin de bien explorer toutes les directions autour des optima déjà calculés, nous conservons un nombre de points égal à la dimension de l'espace de Design.

Amélioration de l'interpolation

Une méthode connue pour évaluer la justesse d'une interpolation est d'effectuer du Krigage croisé (cf. le cours de F. Trochu [15]). Nous conservons des points autour des endroits où notre interpolation est mauvaise. Comme cette priorité est moins importante que l'amélioration de l'optimum nous conservons un nombre de points égal à la moitié de la dimension de l'espace de Design (arrondi à l'inférieur).

Le Krigage croisé consiste à évaluer la qualité de l'interpolation en chacun de ses points. Pour cela, supposons que nous connaissons la valeur exacte de la fonction coût en 10 points, nous effectuons 11 interpolations notées $F_0, F_1, \dots, F_{10}$. La fonction F_0

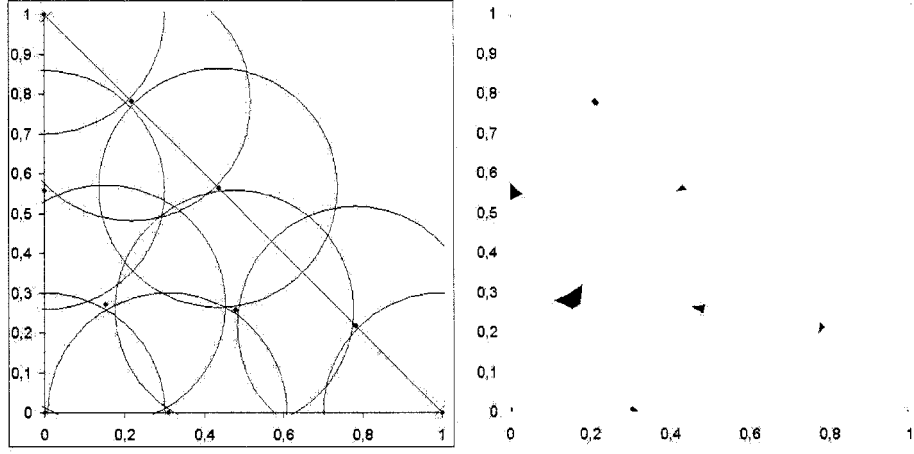


FIG. 6.8 Cercles de rayon $R=0.3$ tracés autour des points solutions et zones n'appartenant à aucun des cercles

est la fonction interpolée à partir de tous les points d'évaluation $(\vec{\delta}^1, \dots, \vec{\delta}^{10})$. Les fonctions suivantes F_i ($i \in [1, 10]$) sont les fonctions interpolées à partir des points d'évaluation $(\vec{\delta}^1, \dots, \vec{\delta}^{i-1}, \vec{\delta}^{i+1}, \dots, \vec{\delta}^{10})$. En chaque point $\vec{\delta}$ on évalue la qualité de l'interpolation par la valeur

$$E(\vec{\delta}) = \max_{i=1,10} F_i(\vec{\delta}) - \min_{i=1,10} F_i(\vec{\delta}) \quad (6.23)$$

Dans le cas particulier des points d'évaluation nous avons

$$E(\vec{\delta}^i) = \left| F_i(\vec{\delta}^i) - F_0(\vec{\delta}^i) \right| \quad (6.24)$$

Puisque le krigeage est exact aux points d'évaluation, nous avons

$$\forall j \neq i, F_j(\vec{\delta}^i) = F_0(\vec{\delta}^i) \quad (6.25)$$

Plus E sera grand, plus la zone autour de ce point est mal renseignée. Il est donc intéressant de raffiner nos connaissances sur la fonction de coût autour de ce point.

CHAPITRE 7

RÉSULTATS

7.1 Présentation du cas d'étude

Le cas d'étude est un profil laminaire nommé BE50¹. Nous avons calculé l'écoulement d'Euler pour des angles d'attaque ($\alpha = -1^\circ, 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 5^\circ, 7^\circ, 9^\circ$) sur un maillage 90x60 présenté aux figures 4.1 et 4.2. Nous avons décidé de nous placer à la limite de la compressibilité, les calculs sont donc effectués pour $Mach = 0.3$, pour une Température de $-20^\circ C$ (à cette température $Mach = 0.3$ correspond à une vitesse de 95.7 m/s). Nous nous sommes placés à une pression de $P = 700\text{ kPa}$ soit la pression typique à 3000m d'altitude. Nous avons choisi un facteur N à la transition $N_{tr} = 4$ puis $N_{tr} = 5.5$; ce qui correspond à un taux de turbulence de 0.56% et 0.30% respectivement (cf. relation de Mack 2.22)

7.2 L'écoulement Euler

Nous avons fait converger tous les cas avec des résidus inférieurs à 10^{-10} , nous présentons ici les résultats (cf. figures 7.1 et 7.2) Nous avons décidé d'effectuer des optimisations du contrôle actif pour les angles d'attaque spécifiques au vol de croisière ($\alpha = 0^\circ$ et 1°).

¹trouvé sur le site <http://a190754.free.fr/PROFILS.HTM>

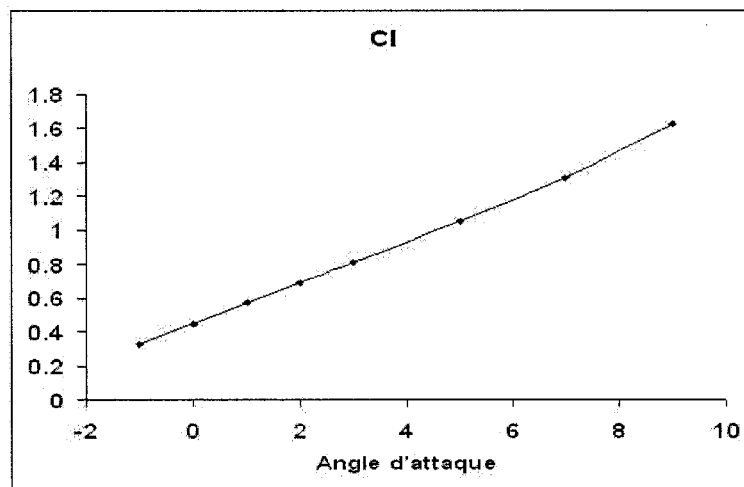


FIG. 7.1 Coefficient de portance

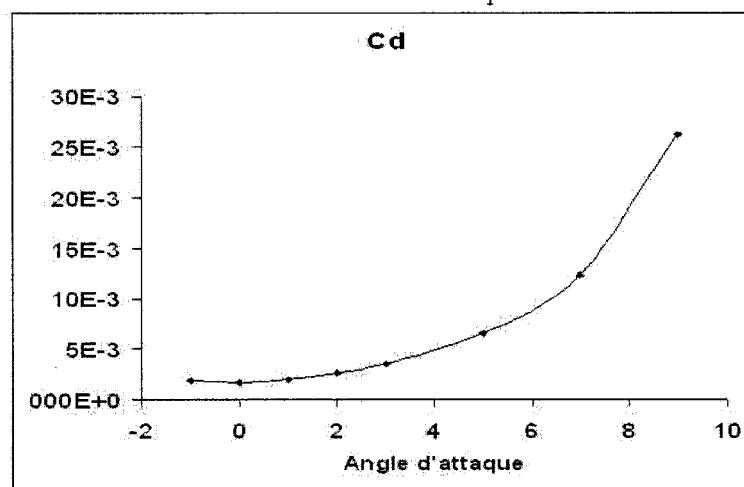


FIG. 7.2 Coefficient de trainée de pression

7.3 La stabilité de la couche limite

Nous remarquons que plus l'angle d'attaque α augmente, moins la couche limite est stable. Cela peut se comprendre par un $\frac{\partial P}{\partial x}$ (cf. figure 7.3) de plus en plus défavorable pour la stabilité de la couche limite (cf. section 1.5). De même on s'aperçoit que la première station instable correspond au moment où la vitesse extérieure à la couche limite U_e commence à décroître. Cette remarque nous fait

bien saisir qu'il est important de rapidement ajouter le module de couplage pour prédire correctement la transition. En effet d'une part l'aspiration augmente l'apport d'énergie de l'écoulement externe vers la couche limite et d'autre part diminue l'épaisseur "perçue" du profil par l'écoulement Euler. La vitesse extérieure est donc moins ralentie en présence d'une aspiration, favorisant ainsi la stabilité de la couche limite.

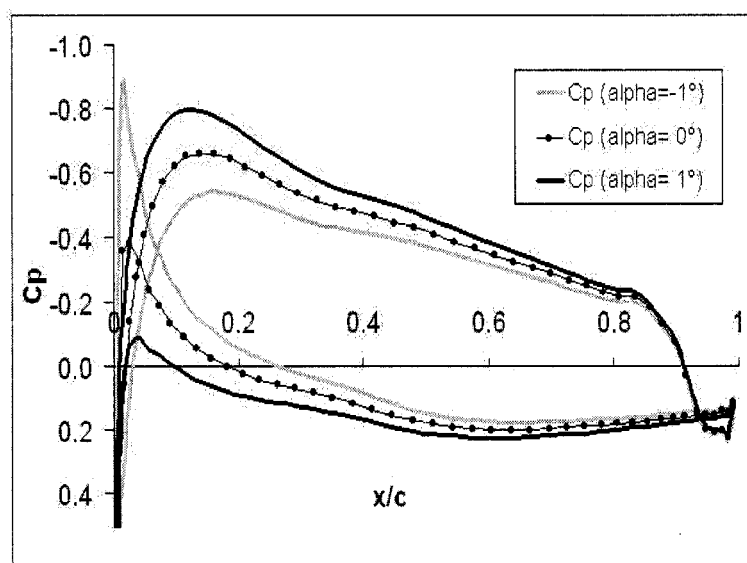
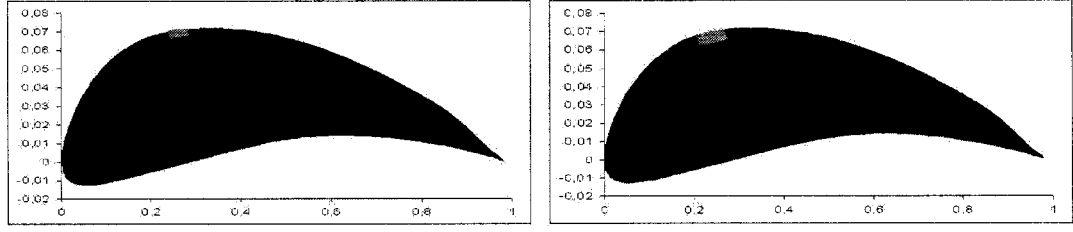
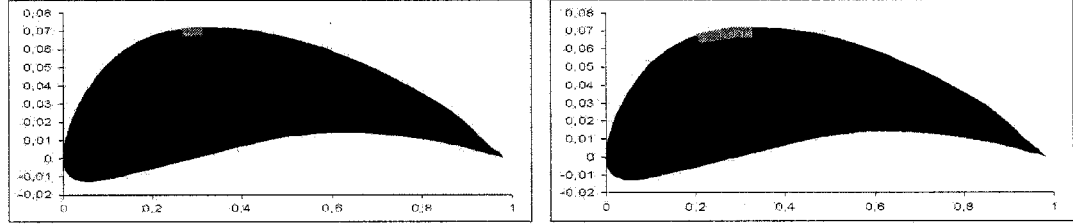


FIG. 7.3 Coefficient de pression

Comme le montre le tableau de la page suivante, la transition sur l'extrados est d'autant plus précoce que l'angle d'attaque est élevé. Nous remarquons également que les fréquences critiques sont de plus en plus élevées. Nous avons d'ailleurs remarqué que le rapport de Fr_{cr} sur $\frac{Q_\infty}{x_{trans}}$ quelque soit l'angle d'attaque reste proche de 13 pour $Tu = 0.58\%$, de 13.7 pour $Tu = 0.30\%$. En admettant que l'onde critique se déplace à la vitesse Q_∞ pour le cas $Tu = 0.58\%$, elle a parcouru 13 longueurs d'onde avant de déclencher la turbulence.

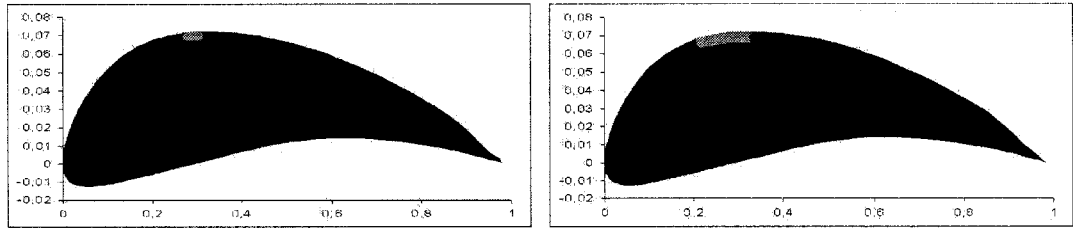
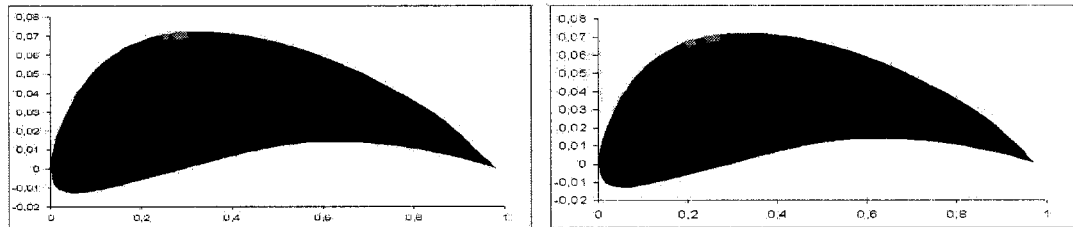
FIG. 7.4 $Tu = 0.58\%, \alpha = 0^\circ$; $Tu = 0.58\%, \alpha = 1^\circ$ FIG. 7.5 $Tu = 0.30\%, \alpha = 0^\circ$; $Tu = 0.30\%, \alpha = 1^\circ$

	angle d'attaque α	-1°	0°	1°	2°	3°
$Tu = 0.58\%$	point de transition x_{trans}	0.2736	0.2557	0.2336	0.2156	0.2001
	Frequence critique Fr_{cr} (Hz)	4750	4800	5450	5925	6250
$Tu = 0.30\%$	point de transition x/c	0.2986	0.2759	0.2513	0.2318	0.2153
	Frequence critique Fr_{cr} (Hz)	4550	4800	5350	5800	6150

Nous avons effectué des optimisations de la traînée pour un débit constant de $4.10^{-4}m^3/s.m^{-1}$ pour un panneau d'aspiration. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous, le gain présenté ne correspond qu'au gain sur la traînée visqueuse sur l'extrados du profil.

	angle d'attaque α	0°	1°
$Tu = 0.58\%$	Gain sur la traînée visqueuse	5.2%	4.8%
$Tu = 0.30\%$	Gain sur la traînée visqueuse	5.7%	4%

Nous avons représenté sur les figures 7.4, 7.5, les zones d'aspiration optimisées, pour les différents cas. Nous remarquons que lorsque l'angle d'attaque augmente,

FIG. 7.6 $Tu = 0.30\%, \alpha = 0^\circ$; $Tu = 0.30\%, \alpha = 1^\circ$ FIG. 7.7 $Tu = 0.30\%, \alpha = 0^\circ$; $Tu = 0.30\%, \alpha = 1^\circ$

il faut augmenter la taille de la zone d'aspiration. Lorsque le taux de turbulence diminue, il faut reculer la zone d'aspiration. Nous avons également comparé une optimisation entre un ou deux panneaux d'aspiration. Dans ce cas ci nous avons conservé un taux de turbulence de 0.30%. Nous rappelons que ces résultats correspondent au gain pour un mètre d'envergure.

	<i>angle d'attaque α</i>	0°	1°
1 panneau de succion	<i>Gain sur la trainée visqueuse</i>	5.7%	4%
2 panneaux de succion	<i>Gain sur la trainée visqueuse</i>	5.7%	4.4%

Nous avons représenté sur les figures 7.6 et 7.7, les zones d'aspiration optimisées, pour les différents cas. Nous remarquons qu'en passant de un à deux panneaux la zone d'aspiration optimale reste la même en revanche la taille de la zone d'aspiration diminue.

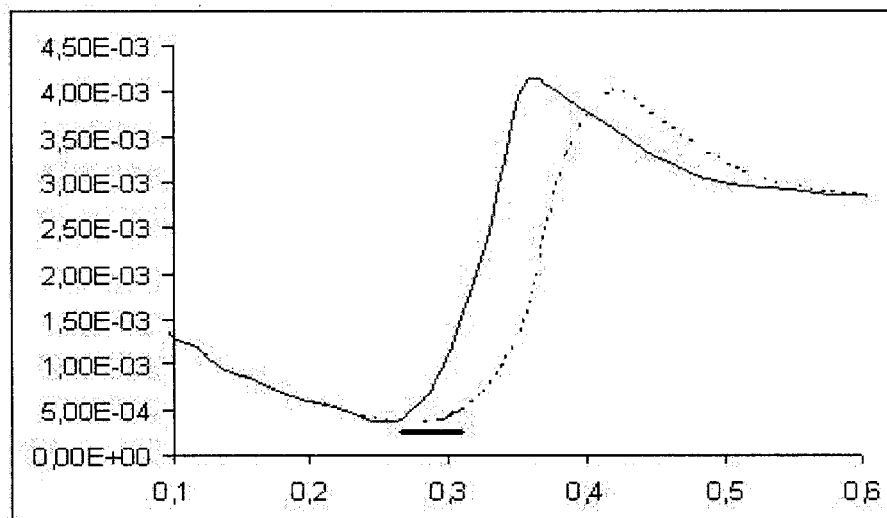


FIG. 7.8 Influence du contrôle actif : $C_f(x/c)$

Enfin nous avons effectué une optimisation à débit constant en minimisant la consommation de kérosène. Nous rappelons qu'il faut 3kg/h pour faire fonctionner une pompe à $1\text{m}^3/\text{s}$, et 1kg/h pour 1 N de poussée. (cf. section 6.3)

<i>angle d'attaque α</i>	0°	1°
<i>Economie de Carburant en kg/h</i>	0.7	0.5

Nous avons pu réaliser un gain sur la traînée visqueuse en provoquant un retardement de la transition, nous pouvons voir cet effet à la figure 7.8 où on a représenté en trait plein le C_f sans contrôle actif de la couche limite en pointillé avec contrôle actif (la zone d'aspiration est matérialisée par le trait gras horizontal).

Nous nous apercevons que malgré la variation de l'angle d'attaque ou du taux de turbulence extérieure, le système peut réduire la traînée visqueuse d'environ 4% ce qui correspond à une économie de carburant de 0.5kg/h en prenant en compte le fonctionnement de la pompe. Ces résultats ne sont qu'un ordre de grandeur de ce

qu'il est possible de faire grâce au contrôle actif de la couche limite. La technique de prédiction du point de transition et de la traînée n'est pas encore complète et mérite de nombreuses améliorations.

7.4 Qualité de l'interpolation

Comme expliqué dans la section 6.4.2, nous poursuivons un double objectif, l'amélioration de la fonction coût et de la qualité de l'interpolation telle que mesurée par "l'erreur" (cf. équation 6.23). Nous illustrons notre propos par le cas d'un angle d'attaque $\alpha = 0^\circ$ avec un taux de turbulence extérieure $Tu = 0.30\%$. Nous présentons une optimisation 2D (un panneau d'aspiration, débit constant $4.10^{-4} m^3/s.m^{-1}$) Nous avons représenté sur les graphiques 7.9 à 7.14 l'évolution typique d'une fonction d'interpolation et de son "erreur", en fonction du nombre d'évaluation directe de la fonction coût. Pour tous les graphiques, nous avons conservé la même échelle de couleurs, elles représentent à droite la valeur de la fonction coût (c'est-à-dire la traînée), à gauche "l'erreur" (cf. équation 6.23). En abscisse et ordonnée nous avons respectivement δ_1 et δ_2 . Nous rappelons que la coordonnée curviligne du début de la zone d'aspiration s_1 et la *Taille* de la zone d'aspiration sont (cf. Définition 6.5) :

$$\begin{cases} s_1 & \approx s_{min} + \delta_1 \cdot (s_{max} - s_{min}) \\ Taille = s_2 - s_1 & \approx \delta_2 \cdot (s_{max} - s_{min}) \end{cases} \quad (7.1)$$

Ces graphiques permettent d'illustrer la réalisation du double objectifs. Nous pouvons voir que 26 cas sont largement suffisants à l'obtention d'un bon optimum (24h de calcul).

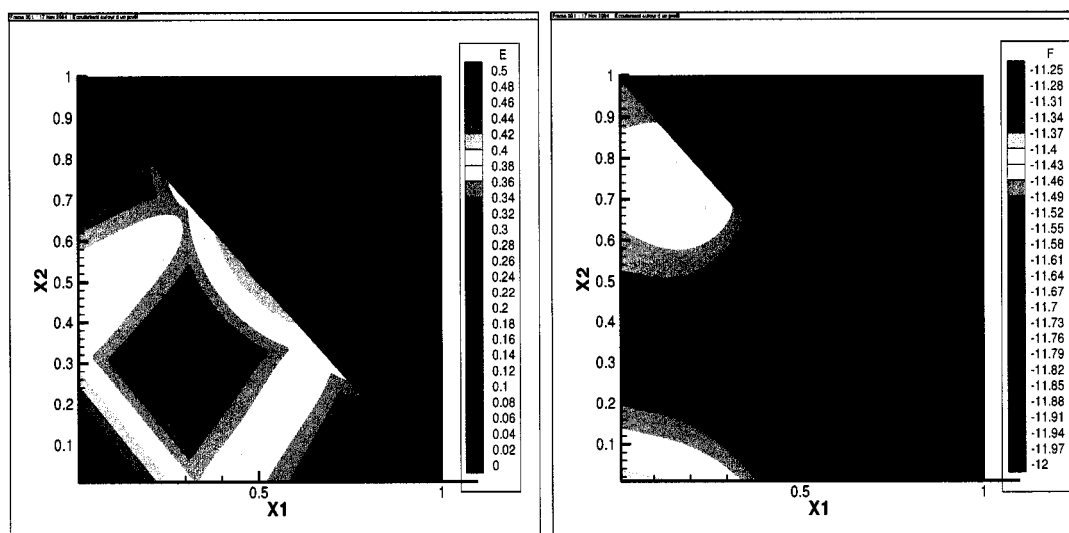


FIG. 7.9 6 cas

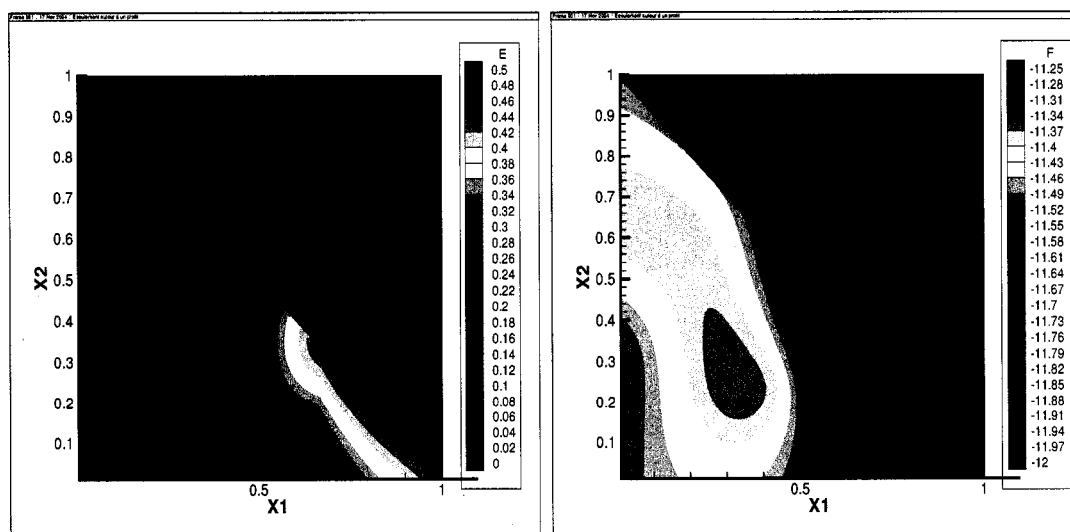


FIG. 7.10 10 cas

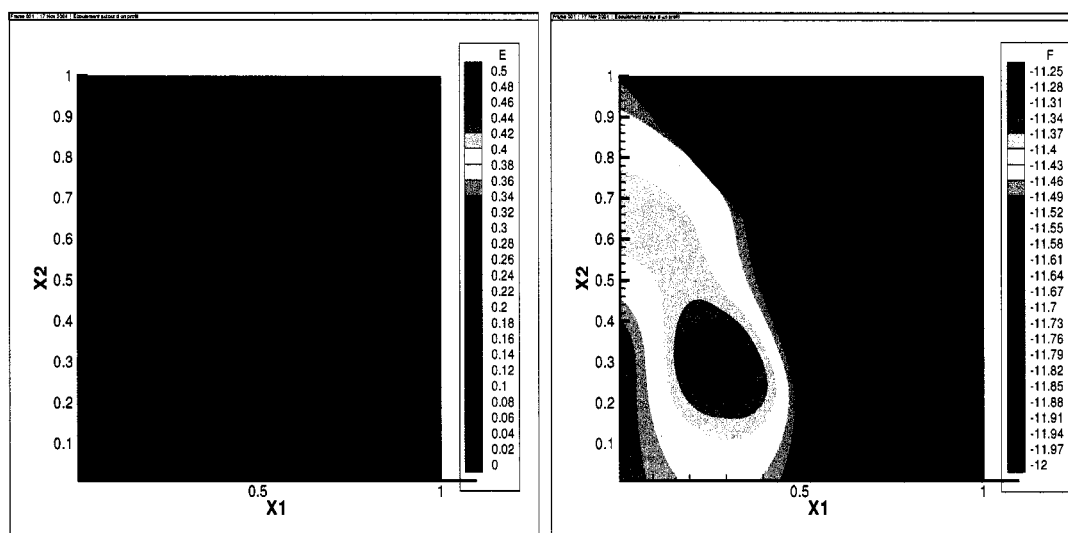


FIG. 7.11 14 cas

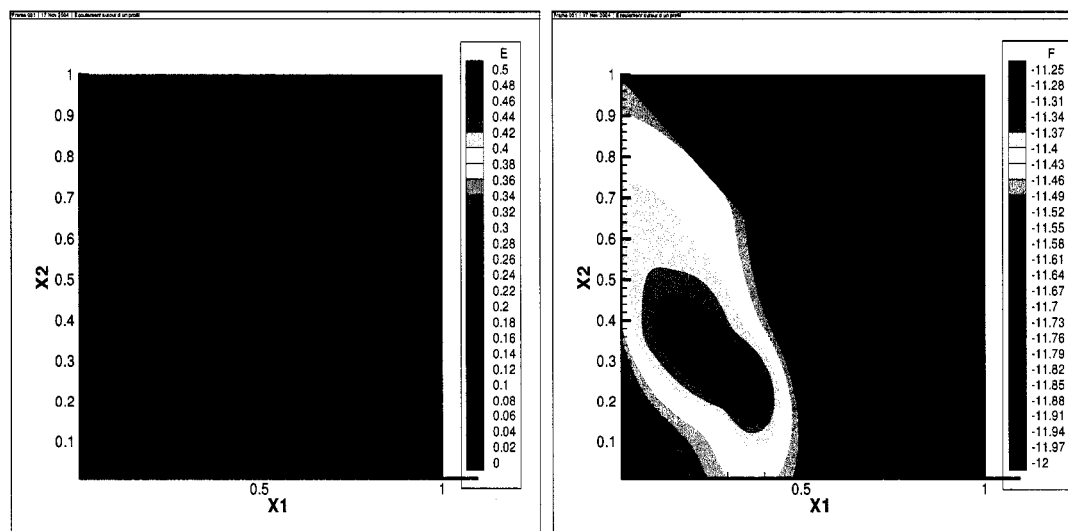


FIG. 7.12 18 cas

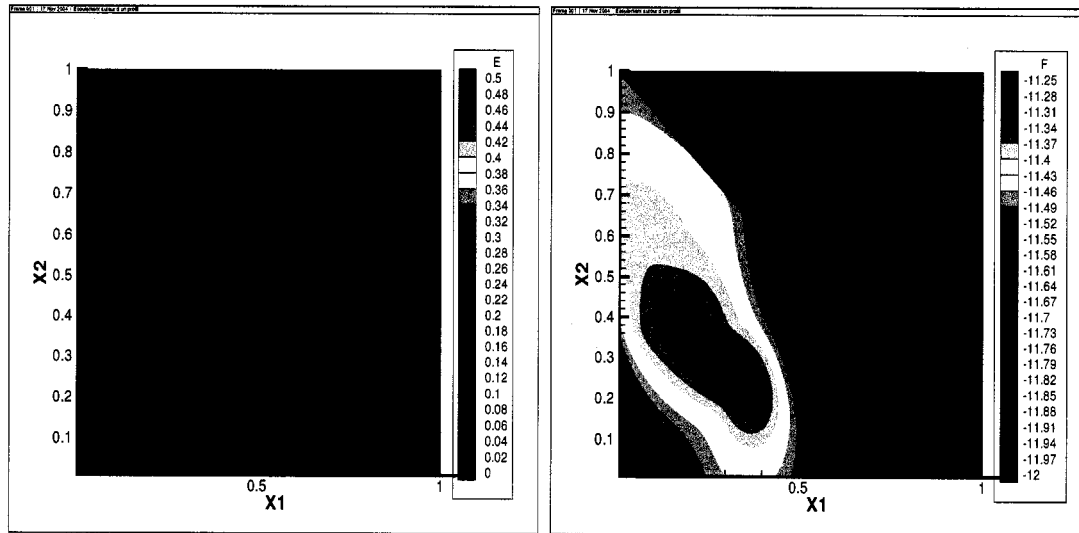


FIG. 7.13 22 cas

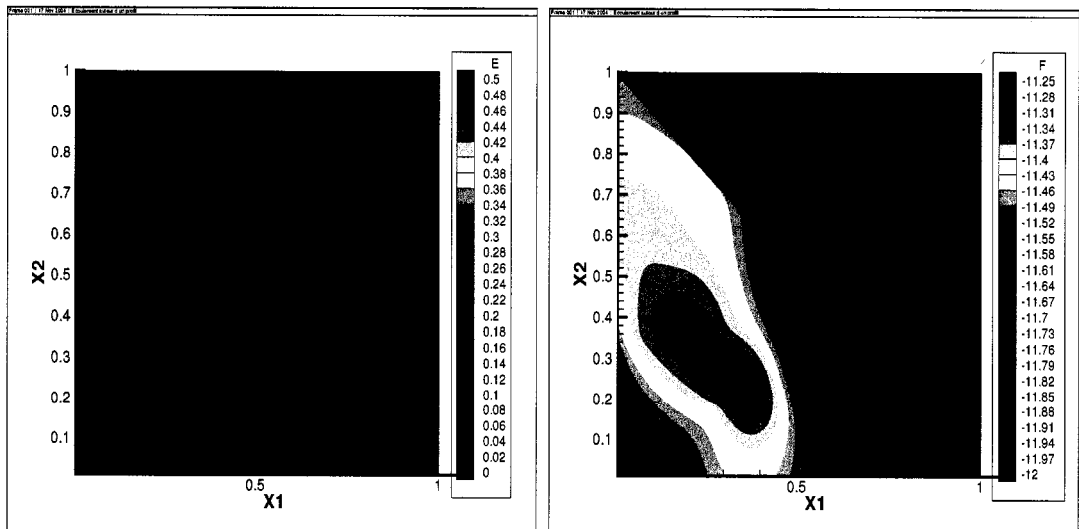


FIG. 7.14 26 cas

CONCLUSION

L'objectif principal de cette thèse, qui était la mise en place d'un outil d'optimisation, a été atteint. Cependant l'outil est encore perfectible en bien des points. Après avoir fait une revue du travail réalisé, nous proposons quelques perspectives de travaux futurs, enfin nous commenterons brièvement les résultats obtenus

Réalisations

Prédiction de l'écoulement moyen

Afin d'améliorer le calcul de l'écoulement moyen, nous avons travaillé sur le code Euler développé à la chaire. D'une part nous avons amélioré la convergence et la convivialité du code et d'autre part mis en place un couplage Euler-couche limite. Nous avons programmé un mailleur qui à terme sera adaptatif. Les résultats ont permis de prévoir l'influence de la couche limite sur la position du choc.

Prédiction de la transition

Afin de rendre plus convivial le code SCOLIC, nous avons mis en place une automatisation du code avec CLDF (le code de correction de couche limite) avec la possibilité d'installer des zones d'aspiration. Par ailleurs nous avons travaillé à l'élaboration d'un code de résolution des équations de la stabilité parabolisées en compressible, ce travail est malheureusement inachevé.

Mise en place d'un processus d'optimisation

C'est la partie qui a nécessité le plus de travail. Nous avons essayé plusieurs techniques d'optimisation (génétique, gradient conjugué) afin de choisir celle qui sem-

blait la plus adaptée à la spécificité de notre problème. Ce travail a nécessité la création de plusieurs modules d'interprétation automatique des résultats de SCOLIC, Euler et CLDF. Nous avons également travaillé sur l'implémentation de différents algorithmes dont un de calcul automatique de Design et un de Kriegeage.

Suggestion de travaux futurs

Prédiction de l'écoulement moyen

Deux travaux essentiels restent à faire avant de pouvoir implémenter les nouveaux modules au sein du processus d'optimisation.

- L'adaptativité du maillage : elle permettra de mieux capter les phénomènes autour du choc, des zones d'aspiration, bords d'attaque et de fuite, tout en facilitant la convergence.
- Interaction Choc-couche limite : il faudra trouver un moyen de modéliser l'influence du choc sur la couche limite afin de prévoir les caractéristiques complètes en écoulement transsonique.

Prédiction de la transition

Dans le domaine de la prédiction de la transition, deux axes de travaux pourraient être suivis

- PSE compressible : nous devons achever le travail commencé pour rendre le code opérationnel.
- Nouvelle approche du calcul des vecteurs propres : nous pourrions essayer de programmer la nouvelle approche mathématique présentée dans ce mémoire afin de voir si nous pouvons gagner en précision et en vitesse de calcul.

Mise en place d'un processus d'optimisation

Dans ce domaine, nous pouvons complexifier un peu le code afin de permettre une paramétrisation plus complexe en particulier un débit variable pour chaque zone d'aspiration. Par ailleurs la vitesse du calcul automatique de Design peut être grandement améliorée en vitesse de convergence d'une part par la méthode de calcul des gradients mais surtout sur l'initialisation.

Conclusions

Les résultats obtenus par l'optimisation ont démontré l'intérêt du contrôle actif de la couche limite. Nous prédisons une réduction de la trainée visqueuse sur l'extrados de l'ordre de 5%. Cependant l'impact de l'aspiration sur les performances aérodynamiques d'un profil est encore mal prédit. Il y a encore beaucoup d'hypothèses fortes, il faut donc interpréter ces résultats avec prudence. Il va donc falloir améliorer les outils de prédiction sans pour autant perdre trop de temps de calcul. La méthode originale d'optimisation a fait ses preuves. Nous pouvons cependant travailler encore un peu sur l'algorithme pour le rendre plus rapide et plus souple. À terme il sera possible de capter les effets du contrôle actif de la couche limite aussi bien sur la turbulence de l'écoulement que sur le choc.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AIRIAU, C., *Stabilité linéaire et faiblement non linéaire d'une couche limite laminaire incompressible par un système d'équations parabolisé (PSE)*, Mémoire Ph.D., ENSAE, 1994
- [2] BAUER, F., GARABEDIAN, P., KORN, D., *Supercritical Wing Sections II*, New York, Springer-Verlag, 1975
- [3] COPIE, M-L., *Stabilité linéaire et faiblement non linéaire d'une couche limite pour un fluide incompressible, avec l'approche PSE*, Mémoire Ph.D., Ecole Nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, 1996
- [4] HUERRE, P., *Mécanique des fluides*, cours de l'École Polytechnique, Paris, 1998
- [5] JAMESON, A., SCHMIDT, W., TURKEL, E. *Numerical solution of the Euler Equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes*, AIAA, paper 81-1259, juin 1981
- [6] LANGLOIS, M., *Prediction de la transition sur des configurations tridimensionnelles en régime transsonique*, Mémoire Ph.D., Ecole Polytechnique de Montréal, 2000
- [7] MACK, L.M., *Transition prediction and linear stability theory*, AGARD REPORT, 224, 1977
- [8] MATILE, G., *Étude de la stabilité de la couche limite autour d'un profil quasi 3D par la méthode PSE*, Projet de Fin d'Étude, Ecole Polytechnique de Montréal, 2004
- [9] MIRSHAMS, M., *Transition de la couche limite sur une aile en flèche en régime transsonique*, Mémoire M.Ing, Ecole Polytechnique de Montréal, 1994
- [10] PRUNIERES, R., *Calcul de l'écoulement autour de profil en régime transsonique*, Projet de Fin d'Étude, Ecole Polytechnique de Montréal, 2004

- [11] RESHOTKO, E., *Boundary layer stability and Transition*, Ann. Rev. Fluid. Mech.,8 pp.311-349,1976
- [12] SALINAS, H., *Stabilité linéaire et faiblement non linéaire d'une couche limite laminaire compressible tridimensionnelle par l'approche PSE*, Mémoire Ph.D., Ecole Nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, 1998
- [13] SCHUBAUER, G.B. et SKRAMSTAD, H.K., *Laminar boundary layer oscillation and transition on a flat plate*, J.Aeronaut.Sci.14 :69-78, 1947
- [14] SMITH, A.M.O. et GAMBERONI, N., *Transition, pressure gradient and stability theory*, Rept. ES 26388, Douglas Aircraft Co.,El Segundo, California, 1956
- [15] TROCHU, F., N., *Krigeage en CAO et FAO*, Cours de l'École Polytechnique de Montréal, 2000
- [16] VAN HIGEN, J.L., *A suggested semi-empirical method for the calculation of boundary layer transition region*, Rept. UTH-74, Uni. of Tech.,Dept of Aero. Eng.,Delft,1956

ANNEXE I

CALCUL DE L'ÉCOULEMENT EXTERNE

I.1 L'écoulement potentiel

L'écoulement potentiel est un écoulement stationnaire incompressible irrotationnel d'un fluide parfait, homogène soumis à des forces de volumes conservatives.

Remarque

La théorie des écoulements potentiels permet un calcul instationnaire mais cela ne nous intéresse pas pour notre étude.

Puisque les forces de volumes sont conservatives on peut écrire

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (\text{I.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{V} = 0 & \text{écoulement incompressible} \\ \rho((\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} + \vec{\nabla}\Phi) = -\vec{\nabla}P & \text{quantité de mouvement} \\ \nabla \wedge \vec{V} = \vec{0} & \text{écoulement irrotationnel} \end{array} \right. \quad (\text{I.2})$$

Or

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = (\nabla \wedge \vec{V}) \wedge \vec{V} + \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right) \quad (\text{I.3})$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \rho((\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \vec{\nabla} \Phi) &= -\vec{\nabla} \vec{P} \\
 \vec{\nabla}(\frac{\vec{V}^2}{2} + \Phi) &= -\vec{\nabla} \frac{\vec{P}}{\rho} \\
 P &= C^{te} - \rho(\frac{\vec{V}^2}{2} + \Phi)
 \end{aligned} \tag{I.4}$$

De plus $\nabla \wedge \vec{V} = \vec{0}$ nous permet décrire

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \varphi \tag{I.5}$$

On peut donc calculer intégralement un écoulement potentiel par le potentiel de vitesse φ vérifiant l'équation de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi = 0 \\ \text{on déduit les variables physique par :} \\ \vec{V} = \vec{\nabla} \varphi \\ P = C^{te} - \rho(\frac{\vec{V}^2}{2} + \Phi) \end{array} \right. \tag{I.6}$$

Les conditions aux limites sont des conditions de glissements, ajouté aux condition a l'infini constitue un problème dit de Neumann

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi = 0 \\ \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{n} = \vec{W} \cdot \vec{n} \text{ sur } S \\ \varphi(\vec{x}) \rightarrow K, \|\vec{x}\| \rightarrow \infty \end{array} \right. \tag{I.7}$$

L'équation de Laplace I.6 est linéaire; ainsi une somme de solutions vérifie toujours l'équation différentielle. L'écoulement potentiel a le même formalisme mathématique que l'electro-statique. Les champs electro-statiques induits par des charges ponctuelles sont donc des champs de vitesses admissibles. Cette constatation a conduit à l'élaboration de la technique des panneaux. On cherche l'intensité

de singularités (charge, doublet, triplet...) placées judicieusement afin de vérifier la condition de tangence sur des points de contrôle sur le profil ainsi que la condition de Kutta (cf. I.2) qui impose l'existence d'un point d'arrêt au bord de fuite du profil. Cette méthode permet de calculer rapidement et simplement l'écoulement potentiel autour d'un profil.

I.2 Les écoulement cyclique et condition de Kutta

Definition

Un fluide est barotrope lorsque sa pression ne dépend que de la masse volumique

Dans un fluide barotrope, les isochores et les isobares coïncident. Un fluide homogène incompressible est barotrope (ρ est constant quelque soit la pression). D'après l'équation bilan de la vortricité

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = (\vec{\nabla} \vec{V}) \cdot \vec{\omega} - (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{\omega} + \vec{\nabla} \wedge \vec{F} + \frac{1}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \wedge \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\rho} \nabla \vec{\tau} \right) \quad (\text{I.8})$$

Les sources de vortricité sont :

- les forces de volume non conservative $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$

nulles dans le cas de l'hypothèse d'écoulement potentiel

- les effets baroclines $\frac{1}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \wedge \vec{\nabla} P$

nuls dans le cas de l'hypothèse d'écoulement potentiel (fluide barotrope)

- les effets visqueux $\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\rho} \nabla \vec{\tau} \right)$

nuls dans le cas de l'hypothèse d'écoulement potentiel (fluide parfait)

- Étirement et gauchissement des tube de vortricité $(\vec{\nabla} \vec{V}) \cdot \vec{\omega} - (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{\omega}$

nuls dans le cas d'un écoulement initialement irrotationnel

La condition d'irrotationnalité est donc justifié par :

Théorème de Lagrange

Dans un fluide parfait barotrope, soumis à des forces de volume conservatives, tout écoulement irrotationnel à un instant particulier demeure irrotationnel aux instants ultérieurs.

Definition

Une courbe fermé est dite **réductible** dans un domaine donné lorsqu'on peut la réduire à un point par une déformation continue sans sortir du domaine. Dans le cas contraire elle est dite **irréductible**.

On montre que dans un écoulement irrotationnel la circulation le long de toute courbe réductible est nulle. Dans un domaine doublement connexe (ex : écoulement autour d'un obstacle d'envergure infinie), la circulation est la même le long de toutes les courbes irréductibles à une boucle (ne faisant qu'une fois le tour de l'obstacle). On l'appelle la constante cyclique de l'écoulement.

Or en partant de $\vec{x}_0$ un point quelconque dans l'écoulement on peut écrire sachant que $d\varphi = \vec{V} \cdot \vec{dl}$

$$\varphi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}_0, t) + \int_L \vec{V} \cdot \vec{dl} \quad (I.9)$$

Dans un domaine doublement connexe si on revient à $\vec{x}_0$ par une courbe L irréductible on s'aperçoit que φ admet une infinité de détermination dont les valeurs en tout point $\vec{x}$ diffèrent d'un multiple de la constante cyclique Γ . Bien entendu, le champ de vitesse calculé par $\vec{V} = \vec{\nabla}\varphi$ reste défini en tout point de l'écoulement.

On montre que dans un domaine simplement connexe (à condition que le fluide soit au repos à l'infini), il existe une solution unique φ à une constante additive près au problème de Neumann I.7

On montre que dans un domaine doublement connexe (à condition que le fluide soit au repos à l'infini), il existe une solution unique φ à une constante additive près au problème de Neumann I.7 si et seulement si la constante cyclique Γ est connue. Dans le cas d'un écoulement autour d'un profil d'aile la constante est déterminée par la condition de Kutta.

I.3 Écoulement Euler

L'écoulement Euler est un écoulement stationnaire non-visqueux solution des équation de Navier-Stokes avec une viscosité négligeable. L'écoulement peut être rotationnel, compressible les hypothèses sont donc moins restrictive que l'écoulement potentiel et reflètent mieux la réalité La forme conservative des ces équations s'écrit en deux dimensions de la manière suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.10})$$

où :

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u h_0 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v h_0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.11})$$

et

$$h_0 = \frac{e + p}{\rho} = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right) \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (\text{I.12})$$

On note : γ le rapport des chaleurs spécifiques (pour l'air $\gamma=1.4$) et h_0 l'enthalpie totale.

Dans le reste du problème, on suppose que l'écoulement satisfait l'hypothèse d'homogénéité. Ainsi, on a $h_0 = \text{cte} = h_\infty$ dans tout le fluide et on peut remplacer la quatrième équation du système par la relation suivante :

$$h_0 = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right) \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = \text{cte} \quad (\text{I.13})$$

Le système des équations d'Euler constitue un système d'équations hyperboliques non linéaires. Une propriété importante d'un tel système est le fait que, même avec des conditions initiales et aux limites parfaitement régulières, il peut apparaître au bout d'un temps fini des solutions discontinues. La solution n'étant plus alors différentiable en tous points, l'équation(I.10) n'a plus de sens sur la discontinuité. Cependant, la forme intégrale des équations reste valable, et c'est donc forme que nous allons utiliser pour la résolution.

Soit une surface quelconque Ω de frontière $\partial\Omega$, les équations d'Euler peuvent s'écrire sous forme intégrale de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} w dx dy + \int_{\partial\Omega} (f dy - g dx) = 0 \quad (\text{I.14})$$

À partir de cette équation, on va pouvoir appliquer le schéma de Jameson décrit dans la section 4.4.

ANNEXE II

CORRECTION COUCHE LIMITE

Pour l'établissement des équations nous utilisons le repère lié à l'aile suivant explicité à la section 2.3.1. Par un souci de clarté nous négligeons les termes de courbure.

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) &= 0 \\ \rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} &= -\vec{\nabla} P + \mu(\Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}(\nabla \cdot \vec{V})) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

En notant U , V et W les composantes de la vitesse selon x , y et z , P la pression, ρ est la densité de l'air, μ sa viscosité

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W) &= 0 \\ (U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z})U &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu((\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})U + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z})) \\ (U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z})V &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu((\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})V + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z})) \\ (U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z})W &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu((\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})W + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z})) \end{cases}$$

Nous adimensionnons les équations de Navier-Stokes stationnaire II.1 par :

$$\begin{cases} \bar{x} &= \frac{x}{c} \\ \bar{y} &= \frac{y}{\delta_C} \\ \bar{z} &= \frac{z}{b} \\ \bar{U} &= \frac{U}{U_\infty} \\ \bar{V} &= \frac{V}{V_0} \\ \bar{W} &= \frac{W}{W_\infty} \\ \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0} \\ \bar{P} &= \frac{P}{\rho_0 Q_\infty^2} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

avec c la corde, b l'envergure, δ_C l'épaisseur caractéristique de la couche limite (à déterminer), Q_∞ la vitesse à l'infini, $U_\infty = Q_\infty \cos(\alpha)$, $W_\infty = Q_\infty \sin(\alpha)$, α l'angle de flèche, V_0 échelle de la vitesse verticale (à déterminer) ρ_0 la densité de l'air au repos. Regardons ce que deviennent les équations de Navier-Stokes adimensionnées.

a) L'équation de continuité

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W) &= 0 \\ \frac{\rho_0 Q_\infty}{c} \left(\frac{U_\infty}{Q_\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{\rho} \cdot \bar{U}) + \frac{c V_0}{\delta_C Q_\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\bar{\rho} \cdot \bar{V}) + \frac{c W_\infty}{b Q_\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{\rho} \cdot \bar{W}) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

or $\frac{c}{b}$ est le rapport de forme et il est raisonnablement compris entre 2 et 20. D'autre part $\frac{W_\infty}{Q_\infty} = \sin \alpha$ dépend de l'angle de flèche α en particulier pour un angle de flèche nulle $\frac{W_\infty}{Q_\infty} = 0$. Il ne faut pas que dans ce cas particulier l'équation de continuité soit triviale, elle doit donc comporter deux termes prépondérants. Nous concluons que :

$$\frac{c V_0}{\delta_C Q_\infty} = 1 \quad (\text{II.4})$$

et l'équation de continuité devient alors

$$\cos \alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{\rho} \cdot \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\bar{\rho} \cdot \bar{V}) + \frac{c}{b} \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{\rho} \cdot \bar{W}) = 0 \quad (\text{II.5})$$

Par ailleurs en remarquant que la couche limite est par définition la zone telle que les forces de viscosité $F_{viscosite} \approx \frac{\mu Q_\infty}{\delta_C^2}$ sont comparable aux forces d'inertie $F_{inertie} \approx \rho \frac{Q_\infty^2}{c}$, nous pouvons choisir δ_C tel que $\frac{\mu Q_\infty}{\delta_C^2} = \rho \frac{Q_\infty^2}{c}$. Nous avons donc en notant $Re = \frac{Q_\infty c}{\nu}$.

$$\delta_C = \frac{c}{\sqrt{Re}} \quad \text{et} \quad V_0 = \frac{Q_\infty}{\sqrt{Re}} \quad (\text{II.6})$$

Nous en déduisons que pour $Re \gg 1$ on a $\frac{\delta_C}{c} \ll 1$, $\frac{\delta_C}{b} \ll 1$ et $\frac{V_0}{Q_\infty} \ll 1$

b) L'équation de mouvement selon x

$$\left\{ \begin{array}{l} (U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z})U = \frac{Q_\infty^2}{c} \frac{U_\infty}{Q_\infty} (\frac{U_\infty}{Q_\infty} \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{V_0}{Q_\infty} \bar{V} \frac{c}{\delta_C} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{W_\infty}{Q_\infty} \bar{W} \frac{c}{b} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}) \\ = \frac{Q_\infty^2}{c} \cos \alpha (\cos \alpha \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{c}{b} \sin \alpha \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}) \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{Q_\infty^2}{c} (-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}}) \\ \nu ((\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})U) = \frac{Q_\infty^2}{c} \frac{\nu}{Q_\infty c} \frac{U_\infty}{Q_\infty} \frac{c^2}{\delta_C^2} ((\frac{\delta_C^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\delta_C^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2})\bar{U}) \\ = \frac{Q_\infty^2}{c} \frac{\cos \alpha}{Re} \frac{c^2}{\delta_C^2} ((\frac{\delta_C^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\delta_C^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2})\bar{U}) \\ = \frac{Q_\infty^2}{c} \cos \alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \\ \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}) = \frac{Q_\infty^2}{c} \frac{\nu}{Q_\infty c} \frac{1}{3} (\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\frac{U_\infty}{Q_\infty} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{cV_0}{\delta_C Q_\infty} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} + \frac{cW_\infty}{bQ_\infty} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}})) \\ = \frac{Q_\infty^2}{c} \frac{1}{Re} \frac{1}{3} (\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\cos \alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} + \frac{c}{b} \sin \alpha \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}})) \\ \ll \frac{Q_\infty^2}{c} \cos \alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \end{array} \right. \quad (II.7)$$

soit :

$$\cos \alpha (\cos \alpha \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{c}{b} \sin \alpha \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}) = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \cos \alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \quad (II.8)$$

c) L'équation de mouvement selon y

$$\left\{ \begin{array}{l} (U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z})V = \frac{Q_\infty^2}{\delta_C} \frac{V_0}{Q_\infty} (\frac{U_\infty}{Q_\infty} \bar{U} \frac{\delta_C}{c} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} + \frac{V_0}{Q_\infty} \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} + \frac{W_\infty}{Q_\infty} \bar{W} \frac{\delta_C}{b} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}}) \\ = \frac{Q_\infty^2}{\delta_C} \frac{1}{Re} (\cos \alpha \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} + \frac{c}{b} \sin \alpha \bar{W} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}}) \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{Q_\infty^2}{\delta_C} (-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}}) \\ \nu ((\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})V) = \frac{Q_\infty^2}{\delta_C} \frac{\nu}{Q_\infty c} \frac{V_0}{Q_\infty} \frac{c}{\delta_C} ((\frac{\delta_C^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\delta_C^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2})\bar{V}) \\ = \frac{Q_\infty^2}{\delta_C} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{y}^2} \\ \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}) = \frac{Q_\infty^2}{\delta_C} \frac{\nu}{Q_\infty c} \frac{1}{3} (\frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\frac{U_\infty}{Q_\infty} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{cV_0}{\delta_C Q_\infty} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} + \frac{cW_\infty}{bQ_\infty} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}})) \\ = \frac{Q_\infty^2}{c} \frac{1}{Re} \frac{1}{3} (\frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\cos \alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} + \frac{c}{b} \sin \alpha \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}})) \end{array} \right. \quad (II.9)$$

soit :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (\text{II.10})$$

d) L'équation de mouvement selon z

$$\left\{ \begin{array}{l} (U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z}) W = \frac{Q_\infty^2}{b} \frac{W_\infty}{Q_\infty} (\frac{U_\infty}{Q_\infty} \bar{U} \frac{b}{c} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{V_0}{Q_\infty} \bar{V} \frac{b}{\delta_C} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{W_\infty}{Q_\infty} \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}) \\ = \frac{Q_\infty^2}{b} \sin \alpha (\cos \alpha \frac{b}{c} \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{b}{c} \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \sin \alpha \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}) \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{Q_\infty^2}{b} (-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}}) \\ \nu ((\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) W) = \frac{Q_\infty^2}{b} \frac{\nu}{Q_\infty c} \frac{W_\infty}{Q_\infty} \frac{cb}{\delta_C^2} ((\frac{\delta_C^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\delta_C^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}) \bar{W}) \\ = \frac{Q_\infty^2}{b} \frac{\sin \alpha}{Re} \frac{c^2}{\delta_C^2} \frac{b}{c} ((\frac{\delta_C^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\delta_C^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}) \bar{W}) \\ = \frac{Q_\infty^2}{b} \frac{b}{c} \sin \alpha \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}^2} \\ \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}) = \frac{Q_\infty^2}{b} \frac{\nu}{Q_\infty c} \frac{1}{3} (\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\frac{U_\infty}{Q_\infty} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{cV_0}{\delta_C Q_\infty} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} + \frac{cW_\infty}{bQ_\infty} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}})) \\ = \frac{Q_\infty^2}{b} \frac{1}{Re} \frac{1}{3} (\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\cos \alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} + \frac{c}{b} \sin \alpha \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}})) \\ \ll \frac{Q_\infty^2}{b} \sin \alpha \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{y}^2} \end{array} \right. \quad (\text{II.11})$$

soit :

$$\sin \alpha (\cos \alpha \frac{b}{c} \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{b}{c} \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \sin \alpha \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \cos \alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \quad (\text{II.12})$$

e) Les équations de couche limite

Les équations II.5,II.8,II.10,II.12 nous donnent le système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{\rho} \cdot \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\bar{\rho} \cdot \bar{V}) + \frac{c}{b} \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{\rho} \cdot \bar{W}) & = & 0 \\ \cos \alpha (\cos \alpha \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{c}{b} \sin \alpha \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}) & = & -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \cos \alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} & = & 0 \\ \sin \alpha (\cos \alpha \frac{b}{c} \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{b}{c} \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \sin \alpha \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}) & = & -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} + \cos \alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \end{array} \right. \quad (\text{II.13})$$

cas incompressible

$$\bar{\rho} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{U}) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\bar{V}) + \frac{c}{b} \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{W}) & = & 0 \\ \cos \alpha (\cos \alpha \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \frac{c}{b} \sin \alpha \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}) & = & -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \cos \alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} & = & 0 \\ \sin \alpha (\cos \alpha \frac{b}{c} \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{b}{c} \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} + \sin \alpha \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{z}}) & = & -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} + \cos \alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \end{array} \right.$$

cas 2D

$$\alpha = 0$$

$$W = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\rho} \cdot \bar{V}}{\partial \bar{y}} & = & 0 \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} & = & -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{y}^2} \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} & = & 0 \end{array} \right.$$

cas 2D, incompressible

$$\bar{\rho} = 1$$

$$\alpha = 0$$

$$W = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} & = & 0 \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} & = & -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} & = & 0 \end{array} \right.$$

Pour un complement d'information, on pourra consulter le cours de P. Huerre [4]

ANNEXE III

KRIGEAGE

Le krigeage est une méthode d'interpolation d'origine statistique. D. C. Krige en fut l'instigateur en 1951 en l'utilisant pour estimer les réserves des mines d'or en Afrique du Sud à partir d'échantillons. À la fin des années 60, le mathématicien français G. Matheron a établi le formalisme mathématique de la méthode. Par la suite, les techniques de krigeage se sont améliorées et les domaines d'applications se sont diversifiés. Le principe du krigeage consiste à établir une fonction aléatoire dans l'espace à partir d'un certain nombre de points de mesure. La fonction aléatoire est décomposée en somme de deux termes : une valeur moyenne au sens des moindres carrés et un terme de correction tenant compte des fluctuations autour de cette moyenne. Le krigeage est donc une méthode d'interpolation qui généralise la méthode des moindres carrés. En effet, le terme de correction permet au modèle de passer ou non par les points de mesure. Cette méthode s'applique à un espace de dimension n . Cette théorie est expliquée en détail dans le cours de Mr F. Trochu [15]

III.1 La théorie du Krigeage

Ce chapitre traite des fondements mathématiques de la méthode de krigeage. Dans un premier temps le krigeage dual est présenté, puis la démarche pour obtenir le système d'équations linéaires du krigeage sous la forme primale est développée.

III.1.1 La philosophie du Krigeage dual

On s'intéresse ici à l'interpolation par krigeage de la fonction de coût en fonction des paramètres de Design $\vec{\delta}_i = (\delta_i^1, \delta_i^2, \dots, \delta_i^n)$

Le principe du krigeage consiste à établir une fonction $U(\vec{\delta})$ à partir d'une série de points de mesure $\vec{\delta}_i$, où i varie entre 1 et N le nombre de points d'échantillonnage. La fonction $U(\vec{\delta})$ est aléatoire, d'où son origine statistique, et est décomposée en la somme de deux termes :

$$U(\vec{\delta}) = a(\vec{\delta}) + W(\vec{\delta})$$

De plus la fonction aléatoire $U(\vec{\delta})$ doit vérifier les propriétés suivantes :

- La fonction doit passer par les points de mesure soit $U(\vec{\delta}_i) = F_{cout}(\vec{\delta}_i)$, pour $1 \leq i \leq N$
- $a(\vec{\delta})$ représente la dérive. C'est une estimation, ou valeur moyenne de la fonction aléatoire $U(\vec{\delta})$ au sens statistique. Ainsi l'espérance mathématique de $U(\vec{\delta})$ peut s'écrire $a(\vec{\delta}) = E[U(\vec{\delta})]$
- de plus, comme $a(\vec{\delta})$ est une valeur moyenne, son espérance mathématique correspond à $E[a(\vec{\delta})] = a(\vec{\delta})$

Généralement le choix de la dérive est dicté par l'idée que l'on se fait du phénomène. On choisira en général parmi deux possibilités, soit une *dérive polynômiale*, soit une *dérive trigonométrique* dans le cas des phénomènes périodiques. Dans le cas

polynômial, on doit de plus choisir le degré du polynôme, et dans le cas trigonométrique, on doit choisir la pulsation w . Dans notre cas d'étude on choisira une dérive polynômiale :

$$a(\vec{\delta}) = a_0 + \vec{a}_1 \cdot \vec{\delta} + \dots + \vec{a}_p \vec{\delta}^p$$

Voici donc les dérivées les plus utilisées :

$a(\vec{x}) = a_0$	<i>dérive constante</i>
$a(\vec{x}) = a_0 + \vec{a}_1 \vec{x}$	<i>dérive linéaire</i>
$a(\vec{x}) = a_0 + \vec{a}_1 \vec{x} + \vec{a}_2 \vec{x}^2$	<i>dérive quadratique</i>

III.2 Le système d'équations linéaires du Krigage

Avant de développer le krigage dual, il est nécessaire de d'abord formuler le krigage sous sa forme primale. La façon la plus simple d'estimer la fonction $U(\vec{x})$ est par une combinaison linéaire finie des observations U_i , soit

$$U^*(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i U(x_i)$$

$U^*(x)$ est un estimateur de $U(x)$

III.2.1 La condition de non-biais

La condition de non-biais signifie que l'espérance mathématique de la fonction aléatoire doit être la même que celle de l'estimation de la fonction. Ainsi on a :

$$E[U(x)] = E[U^*(x)] \quad (\text{III.1})$$

$$E[U(x)] = E\left[\sum_{i=1}^N \lambda_i U(x_i)\right] = \sum_{i=1}^N \lambda_i E[U(x_i)] \quad (\text{III.2})$$

III.2.2 Minimisation de l'erreur d'estimation

Le krigeage sous sa forme primale consiste à déterminer les coefficients λ_i de façon à minimiser l'écart quadratique. On peut dans un premier temps écrire la variance de l'erreur d'estimation.

Soit ϵ_x l'erreur associée à l'estimateur $U^*(x)$. On a :

$$\begin{aligned} \text{var}(\epsilon_x) &= E[(\epsilon_x - E[\epsilon_x])^2] = E[\epsilon_x^2] = E[(U^*(x) - U(x))^2] \\ &= E\left[\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i U(x_i) - U(x)\right)^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j U(x_i) U(x_j) - 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) U(x_i) U(x) + U(x)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j E[U(x_i) U(x_j)] - 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) E[U(x_i) U(x)] + E[U(x)^2] \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

La variance de l'erreur d'estimation doit être minimisée en fonction des degrés de liberté $\lambda_i(x)$ tout en respectant la condition de non-biais. Habituellement on choisit

de minimiser la demi-variance de l'erreur d'estimation pour simplifier l'expression finale des équations. La recherche du *meilleur estimateur linéaire* peut donc être résumée pour tout $x \in [\alpha, \beta]$:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiser pour } (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N \\
 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j E[U(x_i) \cdot U(x_j)] - \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) E[U(x_i) \cdot U(x)] + \frac{1}{2} E[U(x)^2] \\
 & \text{sous la contrainte} \\
 & E[U(x)] = \sum_{i=1}^N \lambda_i E[U(x_i)]
 \end{aligned}$$

Dans l'expression à minimiser ainsi que dans la condition de non-biais, on rencontre des termes de la forme $E[U(x)]$, $E[U(x_i)]$, $E[U(x_i) \cdot U(x_j)]$, $E[U(x_i) \cdot U(x)]$, dont on ne connaît pas la valeur. On va donc poser des hypothèses afin d'être en mesure de résoudre le problème de minimisation.

Reformulons la condition de non-biais appliquée à notre hypothèse fondamentale que nous rappelons :

$$U(x) = \underbrace{a(x)}_{\text{dérive}} + \underbrace{W(x)}_{\text{fluctuation}}$$

Puisque l'on souhaite que la dérive représente le comportement moyen du phénomène, on doit avoir

$$E[U(x)] = a(x)$$

La condition de non-biais peut donc s'exprimer de la sorte :

$$E[U(x)] = \sum_{i=1}^N \lambda_i E[U(x_i)] \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \cdot a(x_i) = a(x)$$

Nous avons vu que l'on choisissait généralement une dérive polynomiale, dont le degré dépend de l'idée que l'on se fait du phénomène.

Pour toute fonction a appartenant à l'espace de fonctions choisi pour représenter la dérive du phénomène, une dérive de degré p nous permet donc d'exprimer la condition de non-biais sous la forme :

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \cdot \left(\sum_{j=0}^p a_j x_i^j \right) = a_j x_i \Rightarrow \sum_{j=0}^p \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \cdot x_i^j - x^j \right) \cdot a_j = 0$$

qui doit être vérifiée quelque soit les coefficients $(a_j)_{0 \leq j \leq p}$ d'où :

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \cdot x_i^j = x^j \text{ pour } 0 \leq j \leq p$$

Les conditions de non biais s'adaptent aux cas de dérive évoqués précédemment.

Dérive Constante $a(x) = a_0$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$$

Dérive Linéaire $a(x) = a_0 + a_1 \cdot x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot x_i = x \end{cases}$$

Dérive Quadratique $a(x) = a_o + a_1x + a_2x^2$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot x_i = x \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot x_i^2 = x^2 \end{cases}$$

III.2.3 La covariance généralisée

Nous avons évoqué un peu plus haut que dans l'expression à minimiser, les termes $E[U(x)], E[U(x_i)], E[U(x_i).U(x_j)], E[U(x_i).U(x)]$ n'étaient pas facile à déterminer. Pour cela nous allons évoquer la notion de covariance qui permet de quantifier le degré de corrélation entre deux variables aléatoires X et Y. Par définition on a :

$$C(X, Y) = E[(X - E[X]).(Y - E[Y])] = E[X.Y] - E[X].E[Y]$$

On a donc, pour tout $x, y \in [a, b]$:

$$E[U(x).U(y)] = C(U(x), U(y)) + E[U(x)].E[U(y)]$$

Ainsi on peut remarquer que le terme $E[U(x).U(y)]$ est donc relié à la covariance $C(U(x), U(y))$. On va alors faire l'hypothèse, appelée *hypothèse intrinsèque*, que le terme $E[U(x).U(y)]$ dépend uniquement d'une fonction de distance entre x et y de sorte que :

$$E[U(x).U(y)] = K(|x - y|) \Rightarrow \text{Hypothèse intrinsèque}$$

La fonction K est appelée fonction de **covariance généralisée** et généralement elle est choisie parmi les fonctions suivantes :

Covariance	Forme
Linéaire	$K(h) = h$
Cubique	$K(h) = h^3$
Logarithmique	$K(h) = h^2 \ln(h)$
Trigonométrique	$K(h) = \sin(\omega h)$

III.2.4 Le système de krigeage

La minimisation sous contrainte peut être reformulée grâce aux notions de dérive et de covariance généralisée. Dans le cas d'une dérive linéaire on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiser pour } (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N \\
 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \cdot K(|x_i - x_j|) - \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \cdot K(|x_i - x|) \\
 & \text{sous les contraintes} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \lambda_i - 1 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot x_i - x = 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Nous allons ajouter à l'expression à minimiser les contraintes pondérées par des coefficients μ_l , l'expression obtenue est appelée Lagrangien. On se ramène ainsi à un problème de minimisation sans contrainte :

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimiser pour } (\lambda_1, \dots, \lambda_N, \mu_0, \mu_1) \in \mathbb{R}^{N+2} \\
 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \cdot K(|x_i - x_j|) - \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \cdot K(|x_i - x|) + \mu_0 \cdot \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i - 1 \right) + \mu_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot x_i - x \right)
 \end{aligned}$$

On dérive alors le Lagrangien obtenu par rapport à chacune des variables $\lambda_1, \dots, \lambda_N, \mu_0, \mu_1$ et on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N K(|x_i - x_j|) \cdot \lambda_j(x) + \mu_0 + \mu_1 x_i = K(|x - x_i|) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \cdot x_i = x \end{array} \right.$$

qui peut aussi être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} & & & 1 & x_1 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & K(|x_i - x_j|) & & 1 & x_N \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & \dots & x_N & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_N(x) \\ \mu_0(x) \\ \mu_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(|x - x_1|) \\ \vdots \\ K(|x - x_N|) \\ 1 \\ x \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{M}$ de ce système linéaire est symétrique.

Une fois le système résolu pour un x donné, les coefficients $\lambda_i(x)$ sont connus, et la valeur interpolée $u(x)$ peut finalement être obtenue à partir des réalisations connues des variables aléatoires $U(x_i)$. On obtient alors :

$$u(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \cdot u_i$$

III.3 Le passage au krigage dual dans le cas d'une dérive linéaire

La fonction krigée de l'équation III.2.4 peut s'écrire sous la forme :

$$u(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \cdot u_i = \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) \cdot u_i + \mu_0 \cdot 0 + \mu_1 \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow u(x) = [\lambda_1(x) \dots \lambda_N(x) \mu_0(x) \mu_1(x)] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Or le vecteur $u(x) = [\lambda_1(x) \dots \lambda_N(x) \mu_0(x) \mu_1(x)]$ est solution du système de krigage défini précédemment. On peut donc réécrire $u(x)$ sous la forme :

$$u(x) = [K(|x - x_1|) \dots K(|x - x_N|) \ 1 \ x] \cdot M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

Notons maintenant $[b_1 \dots b_N \ a_0 \ a_1]$ le vecteur tel que :

$$u(x) = [K(|x - x_1|) \dots K(|x - x_N|) \ 1 \ x] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

ou encore sous la forme suivante :

$$u(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \sum_i^N b_i \cdot K(|x - x_i|)$$

Où le vecteur $[b_1 \dots b_N \ a_0 \ a_1]$ est solution du système linéaire de krigeage dual :

$$\begin{bmatrix} & & & 1 & x_1 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & K(|x_i - x_j|) & & 1 & x_N \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & \dots & x_N & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_N(x) \\ a_0(x) \\ a_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On remarque bien que la fonction krigée s'écrit comme la somme d'un terme de dérive dans notre cas linéaire et d'une perturbation exprimée en fonction de la covariance généralisée. Les N premières équations du système de krigeage reviennent à écrire $u(x_i) = u_i$, c'est à dire que *le modèle passe par les points de mesure*.