

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SIMULATION NUMÉRIQUE DU PROCÉDÉ VARI ET SES DÉRIVÉS

VINCENT ACHIM

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)

OCTOBRE 2004



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-494-01270-6

Our file Notre référence

ISBN: 0-494-01270-6

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

SIMULATION NUMÉRIQUE DU PROCÉDÉ VARI ET SES DÉRIVÉS

présenté par: ACHIM Vincent

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. GAUVIN Raymond, D.Sc.A., président

M. TROCHU François, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. SOUKANE Sofiane, Doct., membre

À mes parents et grand-parents
sans qui je ne serais possible.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche M. François Trochu pour sa confiance envers un jeune informaticien qui à priori ne connaissait rien de l'univers des matériaux composites.

Je tiens également à remercier les nombreuses personnes qui ont collaboré avec moi et ont permis la rédaction de ce mémoire. Plus particulièrement, je tiens à remercier M. Éduardo Ruiz pour ses nombreux et judicieux conseils et M. Ferdiand Tomarchio pour son aide au niveau des formules mathématiques.

Mes remerciements vont également à l'endroit de M. Raymond Gauvin et M. Sofiane Soukane pour avoir accepté d'être membres de mon jury.

Enfin, je tiens à remercier le Centre de recherche appliquée sur les polymères (CRASP) de l'École Polytechnique de Montréal pour son soutien financier ainsi que ESI group pour leur aide technique et leur soutien financier.

RÉSUMÉ

Le Moulage par Transfert de Résine (RTM) est largement reconnu dans l'industrie des matériaux composites comme une méthode fiable et robuste pour fabriquer des pièces composites. Depuis les débuts du RTM, plusieurs améliorations ont été proposées. L'injection-compression (CRTM) propose de réduire le temps de remplissage en exerçant une pression sur le couvercle du moule. L'infusion assistée sous vide (VARI) propose de réduire le coût de production par l'utilisation d'un couvercle flexible, habituellement une pellicule plastique ou une membrane élastique. Comme la plupart des nouvelles technologies, la modélisation et la simulation jouent un rôle clé dans la compréhension et la prédiction des phénomènes impliqués. La modélisation de l'écoulement de résine à travers un milieu fibreux, fondée sur la loi de Darcy et les équations de la consolidation d'un milieu poreux compressible, reste un sujet d'actualité.

Dans ce mémoire, les modèles du CRTM et du VARI qui reposent sur la formulation des bilans de matières sont présentés pour prédire le temps d'injection ainsi que la déformation de la cavité du moule. Ces modèles sont ensuite utilisés dans le but d'étudier les différents types d'injection sous paroi mobile. À partir de ces modèles, nous procéderons à l'étude d'un algorithme rapide pour la prédiction du remplissage en RTM. À la suite de cette analyse, un nouveau coefficient " d'injectabilité " est proposé permettant de comparer la conception de moules différents. Finalement, l'algorithme de simulation rapide est utilisé pour étudier l'effet de variations de la perméabilité sur le remplissage des moules RTM.

ABSTRACT

In the composite materials industry, Resin Transfer Molding (RTM) has become widely accepted as an efficient and reliable method to manufacture composite parts. During the last decade, several improvements have been added to the RTM process. Using an active cover compression, the Compression Resin Transfert Molding (CRTM) process allows an important filling time reduction. Vacuum Assisted Resin Infusion (VARI) reduce the overall process cost by using flexible covers, either a plastic film or an elastic membrane. As with many emerging technologies, modeling and simulation play a key role in understanding the phenomena that govern the process. The modeling of resin flow through a deformable fiber bed, mainly based on Darcy's law and the equations of consolidation is still the focus of much research effort.

In the following investigation, models of CRTM and VARI are presented, based on a formulation of the resin mass balance to predict injection time and mold cavity deformation during the filling stage. Models are implemented in order to conduct a comparative study of the different flexible injection technologies. These models are then transformed to lead to a fast filling algorithm for standard RTM simulation. From this algorithm, a new coefficient "Mold Filling Coefficient" is proposed to compare different mold designs. Finally, the fast filling simulation is also used to predict the effects of permeability variation on the injection.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES TABLEAUX	xi
LISTE DES FIGURES	xii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xv
LISTE DES ANNEXES	xviii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	2
1.1 Quelques chiffres	2
1.2 Bref historique	3
1.3 RTM	4
1.4 CRTM	5
1.5 VARI	6
1.6 Les matériaux	9
1.7 Les équations constitutives	14
1.7.1 L'équation de continuité	14
1.7.2 L'équation d'écoulement en milieux poreux	16

1.7.3	La consolidation	17
a)	Le modèle de Biot	18
b)	L'équation de Terzaghi	20
c)	Les équations générales de la consolidation	21
1.7.4	Conclusion	22
CHAPITRE 2 ALGORITHMES DE REMPLISSAGE SOUS PAROI MOBILE		23
2.1	L'injection-compression (CRTM)	23
2.1.1	Modèle numérique	24
2.1.2	L'injection-compression articulée (ACRTM)	30
2.2	L'infusion sous film plastique (VARI)	32
2.2.1	Couvercle membrane	35
2.2.2	Couvercle à un degré de déplacement en hauteur (C1HD)	38
2.2.3	Couvercle solide linéaire élastique et RTMlight	40
CHAPITRE 3 EXEMPLES D'UTILISATION		47
3.1	Injection-compression articulée (ACRTM)	47
3.2	Infusion sous film plastique (VARI)	50
3.3	Injection sous membrane élastique	53
3.4	Couvercle à un degré de déplacement en hauteur (C1DH)	55
3.5	Comparaison VARI, Membrane et C1HD	58
3.6	Couvercle solide élastique linéaire	61
CHAPITRE 4 REMPLISSAGE RAPIDE : THÉORIE ET APPLICATIONS		65
4.1	Méthode de remplissage rapide	65
4.1.1	Formulation éléments finis	68
4.2	Variabilité de la perméabilité	77
CONCLUSION		83
RÉFÉRENCES		85

ANNEXES	89
-------------------	----

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1	Régimes d'écoulement	17
Tableau 2.1	Paramètres utilisés pour obtenir les résultats de la Figure 2.4 .	27
Tableau 3.1	Paramètres utilisés pour obtenir les résultats de la Figure 3.2 .	48
Tableau 3.2	Paramètres utilisés pour obtenir les résultats de la Figure 3.5 .	51
Tableau 3.3	Paramètres utilisés pour obtenir les résultats de la Figure 3.6 .	53
Tableau 3.4	Paramètres utilisés pour obtenir les résultats de la Figure 3.8 .	57
Tableau 3.5	Paramètres utilisés pour obtenir les résultats des Figures 3.9 et 3.10	59
Tableau 4.1	Paramètres utilisés pour obtenir les résultats de la Figure 4.2 .	72
Tableau 4.2	Comparaison des temps finaux de la simulation Figure 4.2 . .	72
Tableau 4.3	Paramètres utilisés pour obtenir les résultats des Figures 4.4 et 4.5	73
Tableau 4.4	Comparaison entre les simulations 1 et 2 (Figures 4.4 et 4.5) .	75
Tableau 4.5	Paramètres utilisés de perméabilité	80
Tableau I.1	Avantages et inconvénients des procédés : RTM, CRTM et VARI	89

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Schéma du procédé d'injection sur renfort (RTM)	4
Figure 1.2	Schéma du procédé d'injection-compression (CRTM)	5
Figure 1.3	Schéma du procédé d'infusion sous film plastique (VARI) . . .	6
Figure 1.4	Fabrication du Mirabella V du groupe VT Halmatic	7
Figure 1.5	Matériaux	9
Figure 1.6	Tenseur de perméabilité	10
Figure 1.7	Double porosité d'un renfort fibreux	10
Figure 1.8	Courbe de perméabilité en fonction du taux de fibres du Vetrotex M5 450	12
Figure 1.9	Courbe de compression du Vetrotex M5 450	13
Figure 1.10	Exemple pour l'équation de continuité	14
Figure 2.1	Consolidation	23
Figure 2.2	Schéma des pressions lors de la consolidation	24
Figure 2.3	Maillage de la simulation d'injection-compression 1D pour obtenir les résultats de la Figure 2.4	27
Figure 2.4	Résultats numériques et analytiques d'injection-compression .	28
Figure 2.5	Maillage adapté pour de meilleurs résultats de la simulation d'injection-compression à écoulement 1D	29
Figure 2.6	Résultats du volume dans le temps pour la simulation sur le maillage de la Figure 2.5	30
Figure 2.7	Schéma du procédé d'injection-compression articulée (ACRTM)	31
Figure 2.8	Schéma du procédé d'infusion sous film plastique(VARI) . . .	32
Figure 2.9	Schéma d'équilibre des forces	34
Figure 2.10	Schéma de l'infusion sous membrane élastique	35
Figure 2.11	Schéma de l'injection sous couvercle à un degré de liberté . .	39

Figure 2.12	Maillage pour la validation du code élastique linéaire en déformation 1D	44
Figure 2.13	Résultats pour la validation du code élastique linéaire en déformation 1D	45
Figure 2.14	Résultats du code élastique linéaire avec un module de Poisson de 0.3	46
Figure 3.1	Exemple d'utilisation du code d'injection-compression articulée : Maillage	47
Figure 3.2	Exemple d'utilisation du code d'injection-compression articulée : Résultats	49
Figure 3.3	Écoulement dans un milieu de type "sandwich"	50
Figure 3.4	Exemple d'utilisation du code d'infusion sous film plastique : Maillage	51
Figure 3.5	Exemple d'utilisation du code d'infusion sous film plastique : Résultats	52
Figure 3.6	Exemple d'utilisation du code d'infusion sous membrane élastique : Résultats	54
Figure 3.7	Exemple d'utilisation du code d'injection sous couvercle à un degré de déplacement en hauteur (C1DH) : Maillage	55
Figure 3.8	Exemple d'utilisation du code d'injection sous couvercle à un degré de déplacement en hauteur (C1DH) : Résultats	56
Figure 3.9	Comparaison des procédés : Épaisseurs de la cavité à la fin du remplissage	60
Figure 3.10	Comparaison des procédés : Pression de la résine à l'intérieur de la cavité à la fin du remplissage	60
Figure 3.11	Exemple d'utilisation du code d'injection sous moule rigide : Maillage 1	61

Figure 3.12	Exemple d'utilisation du code d'injection sous moule rigide : Maillage 2	61
Figure 3.13	Exemple d'utilisation du code d'injection sous moule rigide : Maillage 1 déformé	62
Figure 3.14	Exemple d'utilisation du code d'injection sous moule rigide : Maillage 2 déformé	63
Figure 3.15	Exemples d'utilisation du code d'injection sous moule rigide : Comparaison des maillages déformés au temps final	64
Figure 4.1	Maillage pour la simulation rapide d'écoulement 1D	70
Figure 4.2	Résultats en pression de la simulation rapide sur le maillage de la Figure 4.1	71
Figure 4.3	Maillage pour la simulation rapide d'une injection à deux entrées	73
Figure 4.4	Résultats pour la simulation 1 avec $P_{inj\ 1} = P_{inj\ 2}$	74
Figure 4.5	Résultats pour la simulation 2 avec $P_{inj\ 1} = P_{inj\ 2}/2$	74
Figure 4.6	Maillage pour la simulation rapide d'une injection 2D complexe	75
Figure 4.7	Vue de P_E pour la simulation de la Figure 4.6	76
Figure 4.8	Maillage 3D pour une simulation rapide d'injection	77
Figure 4.9	Vue de l'inverse de alpha pour la simulation de la Figure 4.8 .	78
Figure 4.10	Distribution de la perméabilité K_x pour le Syncoglas R420 . .	79
Figure 4.11	Maillage pour tester la variabilité de la perméabilité	80
Figure 4.12	Résultat de la simulation de Monte-Carlo qui prend en compte la variance de la perméabilité	82

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

SIGLES

A :	Constante du modèle de compression : taux de fibres pour une pression de 1 Pa
B :	Constante du modèle de compression : indice de rigidité de compression
C :	Constante de Kozeny (—)
d_p :	Diamètre moyen de la section dans la formule de Kozeny (m)
$\mathbf{E}$:	Tenseur d'élasticité du squelette (Pa)
F :	Force (N)
g :	Gravité ($m \cdot s^{-2}$)
h :	Épaisseur de la cavité (m)
h_0^g :	Approximation initiale de l'épaisseur de la cavité (m)
$\mathbf{K}$:	Perméabilité (m^2)
N :	Nombre maximum d'itérations
P :	Pression (Pa)
q :	Débit ($m^3 \cdot s^{-1}$)
S :	Surface (m^2)
s :	Facteur de saturation (%)
t :	Temps (s)
T :	Facteur de pré-tension de la membrane (Pa)
u :	Déplacement (m)
U :	Vitesse de compression du renfort ($m \cdot s^{-1}$)
V :	Volume (m^3)
V :	Volume de contrôle (m^3)
$\vec{v}$:	Vitesse en général ($m \cdot s^{-1}$)

$\vec{v}_D :$	Vitesse de Darcy ($m \cdot s^{-1}$)
$v_f :$	Taux de fibres (%)
$\epsilon :$	Tenseur des déformations linéarisées du squelette (%)
$\in :$	Critère d'arrêt (%)
$\mu :$	Viscosité ($Pa \cdot s$)
$\nu :$	Module de Poisson (%)
$\Omega :$	Volume de travail (m^3)
$d\Omega :$	Volume élémentaire (m^3)
$\phi :$	Porosité (%)
$\sigma :$	Tenseur des contraintes de Cauchy (Pa)
$\sigma' :$	Tenseur des contraintes de Cauchy dues à la déformation du squelette (Pa)
$\rho :$	Masse volumique ($kg \cdot m^{-3}$)

INDICES

$c :$	Compression
$D :$	Darcy
$fl :$	Fluide
$imp :$	Imprégnation
$i, j, k, l :$	Indices sur les tenseurs
$n :$	Normal
$oct :$	Sphérique
$s :$	Solide

ABBREVIATIONS

ACRTM :	Injection-compression articulée (Articulated Resin Transfer Molding)
C1DH :	Couvercle à un degré de déplacement en hauteur
CRTM :	Injection-compression (Compression Resin Transfer Molding)
RTM :	Moulage par transfert de résine (Resin Transfer Molding)
SCRIMP :	Seemann Composite Resin Infusion Molding
VARI :	Infusion sous film plastique (Vacuum assisted resin infusion)

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	RÉCAPITULATION SUR LES PROCÉDÉS RTM, CRTM ET VARI	89
ANNEXE II	SOLUTIONS ANALYTIQUES DES PROCÉDÉS DE MOU- LAGE COMPOSITE	90

INTRODUCTION

Depuis ses débuts, l'humanité a fait de grands pas. Nous avons assisté à plusieurs révolutions qui nous ont amenés à revoir nos habitudes de vie. L'âge de pierre nous a fourni nos premiers outils. L'âge de bronze les a perfectionnés. Nous vivons présentement une autre grande révolution, celle des matériaux composites. Dorénavant, il est envisageable de concevoir et fabriquer avec un minimum de compromis. La combinaison de plusieurs types de matériaux offre la possibilité de trouver une composition qui répond exactement aux spécifications désirées : à la fois mince et rigide, souple et résistant, lisse et coruscant.

Ce travail tentera de progresser plus en avant dans l'univers des procédés LCM (*Liquide Composite Molding*). Tout d'abord, nous introduirons trois grandes familles de procédés composite : soit le RTM (*Resin Transfer Moulding*), le CRTM (*Compression RTM*) et le VARI (*Vacuum Assisted Resin Infusion*). Puis nous procéderons à une brève description des caractéristiques des matériaux utilisés. Ensuite, nous établirons les équations constitutives de l'écoulement de fluide dans les milieux poreux en général. Ceci complétera l'introduction.

Dans une seconde étape, nous apporterons plus de détails sur ces procédés. En partant du plus simple jusqu'au plus compliqué, nous généraliserons le modèle RTM pour obtenir celui du CRTM et aboutir finalement au cas plus complexe du VARI. Nous montrerons qu'il est possible de simuler numériquement tous ces modèles à l'aide de la méthode des éléments finis. Ensuite, nous illustrerons par des exemples les principales différences entre ces procédés. Enfin, nous constaterons qu'il est possible de modifier les modèles CRTM et VARI pour obtenir un algorithme rapide de remplissage dans le cas du procédé RTM. Nous présenterons ensuite deux applications à ce modèle. Finalement, une conclusion générale parachèvera ce travail.

CHAPITRE 1

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Quelques chiffres

Les procédés LCM connaissent une popularité sans cesse grandissante au sein des industries de pointe telles que le nautique, l'automobile et l'aérospatiale. Même des secteurs aussi diversifiés que le médical et l'architecture proposent aujourd'hui l'utilisation des composites.

L'architecte Peter Testa a récemment proposé un prototype de gratte-ciel de 40 étages réalisé entièrement en matériaux composites, principalement en fibres de carbonées. Selon lui d'ici une ou deux décennies, les composites changeront de façon radicale le monde de l'architecture [21].

Dans le rapport spécial de JEC sur l'aéronautique [33], nous apprenions que le nouveau 7E7 Dreamliner de Boeing comptait incorporer 50% de son poids en matériaux composites. Ceci est un pourcentage énorme sachant que le plus récent Airbus, le A380, en contient au plus 25%.

Avec une croissance annuelle de plus de 20% par année [34], des investissements importants sont introduits dans la fabrication des matériaux composites. Il n'est donc pas surprenant de constater que de nombreux laboratoires de recherche s'activent à raffiner les techniques en ce domaine.

1.2 Bref historique

La modélisation des procédés LCM découle des connaissances acquises concernant les milieux poreux. À ce titre, la première étude de la mécanique d'écoulement en milieux poreux fut conduite en 1856 par H. Darcy à Dijon [12], qui proposa un modèle empirique pour caractériser l'écoulement de l'eau à travers un lit de sable. Au début des années 1940, Biot [2] et ensuite Terzaghi [40] étudient le phénomène de consolidation¹. De son côté, Brinkmann approfondit les phénomènes qui se déroulent lors d'écoulements transitoires [4]. Puis à partir des années 70, viennent les Bear, Scheidegger et autre Coussy pour établir les bases théoriques de la mécanique des milieux poreux [1, 11, 35]. Un résumé de l'historique de l'étude des milieux poreux se trouve dans De Boer [13].

Le procédé VARI, nommé également VARTM (*Vacuum Assisted RTM*), est proposé fin des années 40 par Marco. Ce dernier propose une méthode pour confectionner une coque de bateau en matériaux composite [29]. Smith [38], suivi par Green [19], proposent des améliorations à ce procédé. Cependant, il faut attendre jusqu'en 1990 avec la variante SCRIMP (*Seemann Composite Resin Infusion Molding*) [36] avant que cette technologie ne prenne réellement son envol. Aujourd'hui grandement utilisée en industrie, cette variante propose une façon innovatrice de réduire le temps d'injection. L'ajout d'une couche ultra-perméable de renfort en est la clé. Avant d'entrer dans les détails, commençons par introduire les procédés qui seront étudiés dans ce mémoire.

¹Voir section 1.7.3

1.3 Le moulage par transfert de résine (RTM)

La popularité du moulage par transfert de résine (RTM) est en grande partie due à sa simplicité. Cette méthode fut développée dans le but de réduire les émissions hautement cancérigènes de styrène lors de la polymérisation des résines grâce à l'utilisation d'un moule fermé.

Le procédé se déroule en suivant les étapes ci-dessous :

- (a) Un renfort (matière fibreuse) est placé dans la cavité du moule. C'est l'opération dite de drapage. Cette opération, fort simple, doit être effectuée soigneusement vu ses conséquences sur le processus d'injection.
- (b) Le moule est fermé et scellé avant de commencer l'injection. Une pression est appliquée sur la résine à partir du port d'injection afin de produire un écoulement et imprégner le renfort fibreux. Cette phase d'injection est cruciale tant pour la capacité de production que pour la qualité finale des pièces.
- (c) Lorsque la résine a imprégné entièrement le renfort, la résine durcit. Ceci se manifeste par une réaction exothermique dégageant une grande quantité de chaleur. C'est la phase dite de polymérisation.
- (d) Le moule est ouvert et la pièce est démoulée. Une analyse peut alors être effectuée pour s'assurer de la conformité géométrique et de la qualité mécanique de la pièce obtenue.

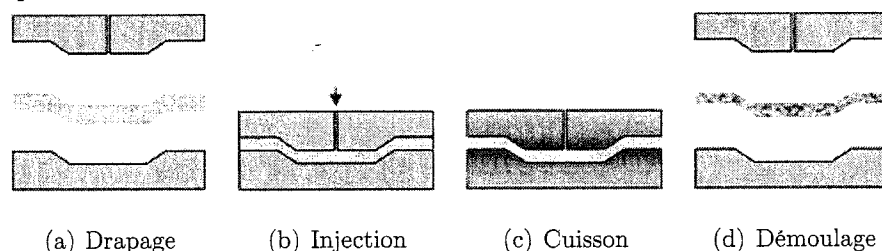


Figure 1.1 Schéma du procédé d'injection sur renfort (RTM)

1.4 L'injection-compression (CRTM)

Un problème avec le RTM classique survient lors de la fabrication d'une pièce ayant un taux de fibres élevé. En effet, comme nous le verrons à la section 1.6, la perméabilité diminue de façon très importante avec l'augmentation du taux de fibres. Par conséquent, l'injection d'une pièce riche en fibres requiert un temps qui peut être considérable. Une solution à ce problème consiste à surélever la paroi supérieure du moule durant l'injection (Figure 1.2a). Lorsque la quantité requise de résine a pénétré dans la cavité, le port d'injection est fermé (Figure 1.2b). Ensuite, le moule est comprimé pour obtenir le taux souhaité de fibres et compléter l'imprégnation du renfort (Figure 1.2c). Cette méthode est connue sous le nom d'injection-compression (CRTM).

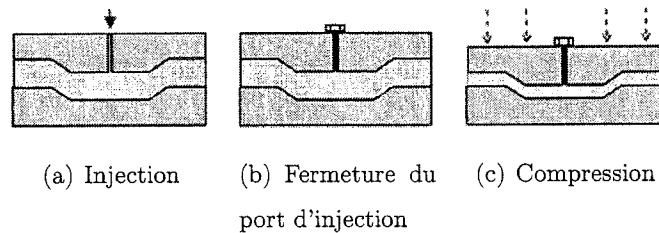


Figure 1.2 Schéma du procédé d'injection-compression (CRTM)

1.5 L'infusion de résine assistée par vide (VARI)

Le procédé RTM et le procédé CRTM utilisent des moules rigides qui peuvent s'avérer coûteux si la taille des pièces à fabriquer est importante. L'infusion de résine assistée par vide (VARI) présente alors une alternative. La solution proposée est simple et élégante. Elle consiste à remplacer la partie supérieure du moule rigide par une matière flexible telle qu'une pellicule plastique. Dans ce cas, plutôt que de pousser la résine, celle-ci est tirée par le vide appliqué à la sortie. L'utilisation du vide a principalement deux rôles : permettre à la résine de s'écouler et maintenir la pellicule plastique en place sur le renfort.

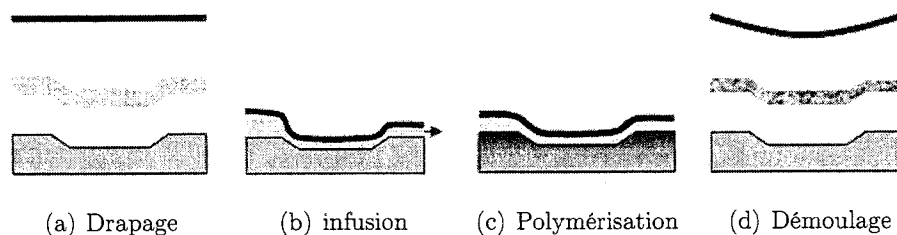


Figure 1.3 Schéma du procédé d'infusion sous film plastique (VARI)

L'unique utilisation du vide pour faire avancer la résine entraîne un temps de remplissage à priori plus long qu'en RTM ou en CRTM. Pour remédier à cette situation, plusieurs variantes ont été proposées. La plus connue est sans aucun doute le procédé SCRIMP (*Seemann Composite Resin Infusion Molding*)². Ce procédé propose l'utilisation d'une couche poreuse supplémentaire qui possède une très grande perméabilité pour favoriser l'écoulement de la résine.

Enfin, la Figure 1.4 montre quelques images prises lors de la confection du Mirabella V, un bateau de 75 mètres de long possédant un mât de 90 mètres de haut fabriqué par le groupe VT Halmac³.

²Voir [36]

³<http://www.mirabellayachts.com/mirabella5>

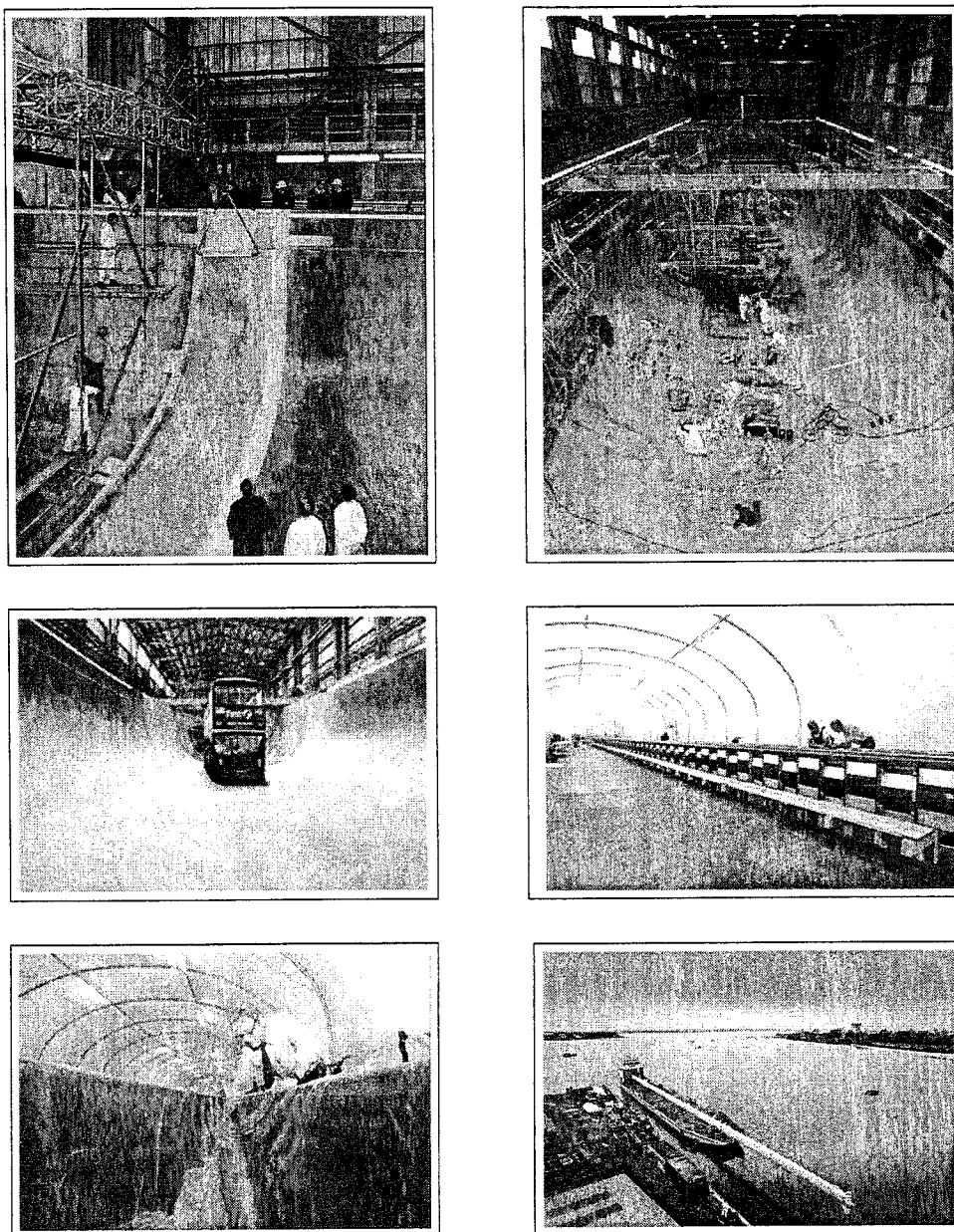


Figure 1.4 Fabrication du Mirabella V du groupe VT Halmatic

Il est évident qu'une telle pièce ne peut être fabriquée par RTM. Nous n'avons qu'à réfléchir au coût et au poids d'un couvercle RTM de 90 mètres de long. Convenons qu'il serait pour ainsi dire quasiment impossible de fabriquer ce bateau en utilisant un couvercle rigide.

1.6 Les matériaux

Pour fabriquer des pièces composites, il est essentiel de connaître la nature des matériaux utilisés. La Figure 1.5 montre deux types de renfort : (a) les matériaux dits à fibres aléatoires et (b) les renforts tissés ou à base d'empilements de fibres unidirectionnelles. Il apparaît clairement que le renfort utilisé définira l'écoulement de la

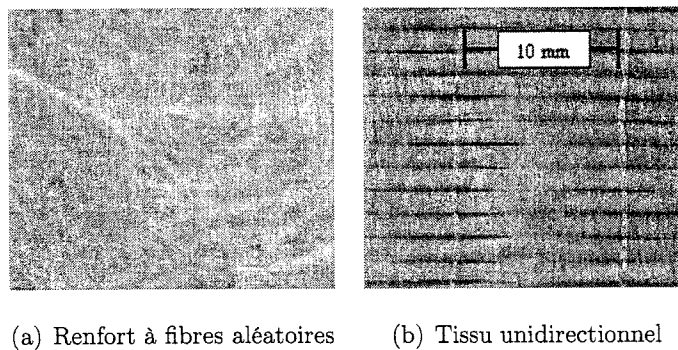


Figure 1.5 Matériaux

résine. Avec les fibres aléatoires, il n'y aura pas d'écoulement préférentiel, tandis que dans un tissu unidirectionnel, le front aura tendance à se déplacer plus rapidement dans le sens horizontal que dans le sens vertical. Par définition, un matériau aléatoire a une perméabilité isotrope, c'est-à-dire identique dans toutes les directions, tandis qu'en général, un tissu sera dit orthotrope.

Définition

La *perméabilité* d'un milieu poreux caractérise l'aptitude d'un fluide de s'y déplacer. Plus la perméabilité du milieu est élevée, plus le liquide s'écoulera facilement et vice-versa. L'*unité* de la perméabilité est le *mètre carré* (m^2). Mathématiquement, la perméabilité plane d'un renfort est définie par un tenseur $\mathbf{K}$ d'ordre deux représenté schématiquement à la Figure 1.6.

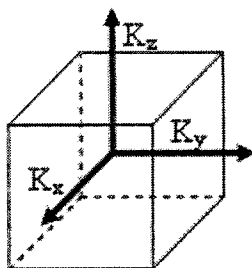
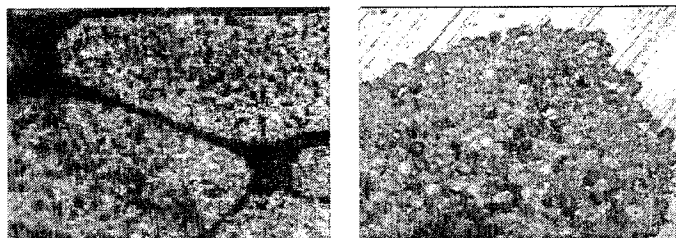


Figure 1.6 Tenseur de perméabilité

Plusieurs techniques ont été développées pour déterminer la perméabilité des renforts fibreux [3, 7, 16, 20, 22]. Toutes ces techniques utilisent la loi de Darcy pour déduire la perméabilité. Les mesures peuvent se faire à pression constante où débit constant. Un écoulement 1D, 2D ou 3D est généré dans un moule avec un fluide d'essai, en général de l'huile de silicone. Chacune des méthodes possède ses avantages et ses inconvénients. Une synthèse sur l'ensemble des techniques de mesures utilisées a été établie par Hammami [20].



(a) Macroscopique

(b) Microscopique

Figure 1.7 Double porosité d'un renfort fibreux

La Figure 1.7a montre un agrandissement de brins de fibre. À cette échelle, nous apercevons en noir un réseau complexe de canaux. Il est aisé de concevoir qu'un fluide s'écoulera d'abord le long de ces canaux, appelés macro-porosités, puis peu à peu imprégnera l'intérieur des brins. En agrandissant davantage, nous obtenons la Figure 1.7b qui montre un brin d'une fibre. Encore une fois, nous pouvons apercevoir

un ensemble complexe de canaux appelés micro-porosité, car les interstices sont d'un ordre de grandeur inférieur à celui des pores formés par les fibres (macro-porosités). Les renforts possèdent donc une "double porosité" sur deux échelles distinctes.

Définitions

Étant donné un volume de contrôle V_{ct} :

La *porosité* ϕ est le pourcentage du volume des vides (connectés) dans le volume total.

Le *taux de fibres* v_f est le pourcentage du volume de fibres dans le volume total. En considérant que tous les pores du milieu sont connectés, le taux de fibres est égal à $1 - \phi$ soit $\phi + v_f = 1$.

La compression d'un renfort entraîne un rétrécissement des pores. Par conséquent, l'écoulement sera plus difficile dû à une perméabilité plus faible. La diminution de la perméabilité est souvent décrite par l'équation de Kozeny-Carman ; à savoir :

$$K_{eff} = C \frac{(1 - v_f)^3}{v_f^2} \quad (1.1)$$

où C est la constante de Kozeny. Cette équation repose sur un grand nombre d'estimations. Elle ne tient pas compte de la tortuosité et ne permet pas de modéliser correctement les milieux anisotropes [39]. Aussi, notez que la constante de Kozeny doit être déterminée expérimentalement et n'est valide que dans une gamme étroite de taux de fibres [37]. Par la suite, nous utiliserons quand même ce modèle étant donné sa simplicité, mais il est toujours possible d'utiliser un modèle plus complexe si nécessaire.

Plus un renfort est comprimé, plus il est difficile de le comprimer d'avantage. Il existe plusieurs modèles pour caractériser ce phénomène [5]. Nous opterons pour le modèle empirique proposé par Gauvin et al. [17] qui relie directement le taux de fibres à la pression de compression :

$$v_f = A (\sigma')^B \quad (1.2)$$

où σ' est la pression de compression, A correspond au taux de fibres pour une pression de 1 Pa, et B est l'indice de rigidité en compression.

Pour illustrer ce phénomène de compression des fibres, analysons le cas du renfort Vetrotex M5 450⁴.

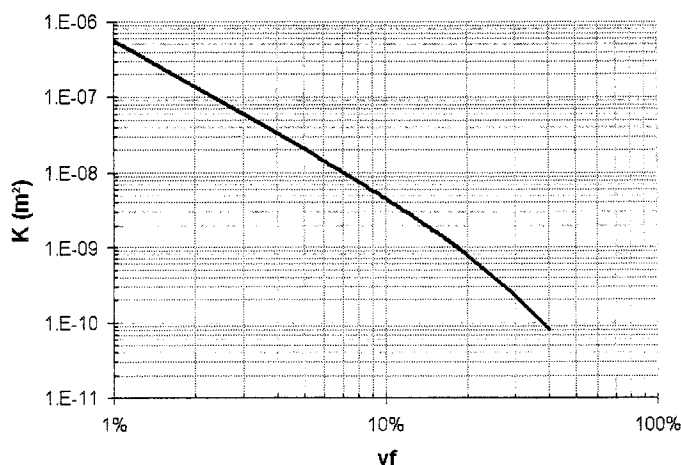


Figure 1.8 Courbe de perméabilité en fonction du taux de fibres du Vetrotex M5 450

La Figure 1.8 illustre sur une échelle log-log la courbe de Kozeny-Carman pour le Vetrotex M5 450. Un changement de quelques pour-cent du taux de fibres entraîne des variations d'un ordre de grandeur sur la perméabilité. Ce comportement typique des renforts fibreux montre la dépendance non linéaire de la perméabilité en fonction

⁴Paramètres tirés de Correia et al. [10]

du taux de fibres.

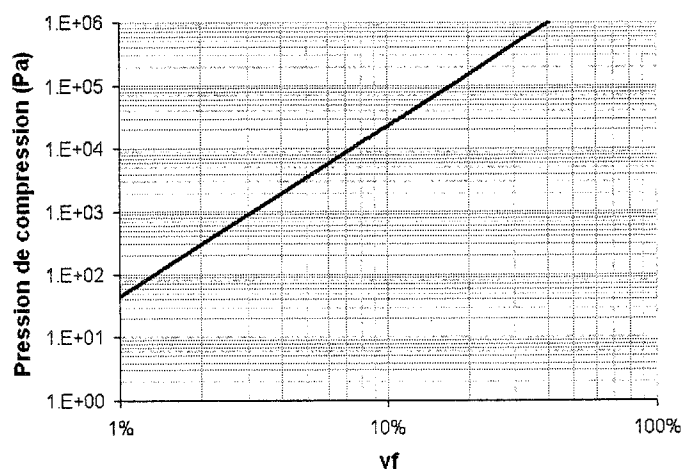


Figure 1.9 Courbe de compression du Vetrotex M5 450

Toujours pour le Vetrotex, une pression de compression d'un atmosphère augmente le taux de fibres à 17% (Figure 1.9). En VARI, comme le vide est l'unique agent appliqué sur les fibres, une pression d'un atmosphère est le maximum théoriquement applicable. Par conséquent, ce procédé ne peut produire de pièces ayant un taux de fibres élevé. Par VARI, le taux de fibres se situe généralement entre 5 et 15%. En revanche, une variante de ce procédé, appelée SCRIMP, utilise une grille de forte perméabilité en peau qui permet d'imprégner des renforts avec des taux de fibres plus importants.

1.7 Les équations constitutives

Dans cette section, nous aborderons les équations constitutives nécessaires à la simulation numérique des procédés RTM, CRTM et VARI à savoir les équations de continuité, d'écoulement en milieu poreux et de consolidation.

1.7.1 L'équation de continuité

L'équation de continuité décrit la conservation de la masse (rien ne se crée, rien ne se perd) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV + \oint_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \hat{n} \, dS = 0 \quad (1.3)$$

où V représente le volume, S la surface du volume, $\vec{v}$ la vitesse, ρ la densité et $\hat{n}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface. Cette équation stipule simplement qu'étant donné un volume fini de taille et de forme arbitraire complètement rempli de fluide, la masse M du volume V ne peut changer que par transfert de matière à travers sa surface S . En supposant toutes les vitesses, constantes, orientées selon un même axe et le matériau incompressible, la forme unidirectionnelle est obtenue :

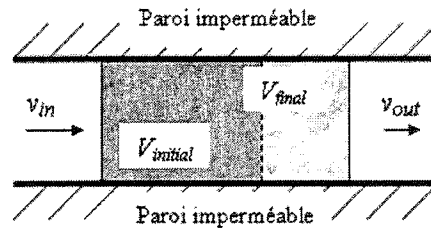


Figure 1.10 Exemple pour l'équation de continuité

$$(V_{final} - V_{initial}) = (v_{in} - v_{out}) \cdot dt \quad (1.4)$$

En RTM, le fluide est supposé incompressible et la cavité du moule indéformable. À chaque instant, le volume de contrôle V_{ct} est choisi de façon à être complètement rempli. Par conséquent, aucune accumulation de matière n'est envisageable. L'équation 1.3 écrite sous forme différentielle se simplifie et devient :

$$div(\vec{v}) = 0 \quad (1.5)$$

En CRTM et en VARI, le couvercle étant mobile, le changement de volume doit être considéré. L'équation de continuité pour chacune des phases impliquées (liquide et solide) s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_l) + div(\phi \rho_l \vec{v}_l) = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - \phi) \rho_s) + div((1 - \phi) \rho_s \vec{v}_s) = 0 \quad (1.7)$$

où l'indice " l " correspond à la phase liquide (résine) et l'indice " s " la phase solide (fibres), $\vec{v}$ est la vitesse des particules de la phase, ρ la densité de la phase et ϕ la porosité du milieu poreux.

En considérant, les fibres et la résine comme des matériaux incompressibles, les équations 1.6 et 1.7 peuvent être réécrites de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi) + div(\phi \vec{v}_l) = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - \phi)) + div((1 - \phi) \vec{v}_s) = 0 \quad (1.9)$$

En additionnant les équations 1.8 et 1.9, l'équation de conservation de la masse dans un milieu poreux compressible devient :

$$div(\phi \vec{v}_l + (1 - \phi) \vec{v}_s) = 0 \quad (1.10)$$

En introduisant la vitesse absolue d'imprégnation $\vec{v}_{imp}$ du fluide par rapport au milieu poreux :

$$\vec{v}_{imp} = \vec{v}_l - \vec{v}_s \quad (1.11)$$

L'équation 1.10 devient :

$$div(-\phi \cdot \vec{v}_{imp}) = div(\vec{v}_s) \quad (1.12)$$

ou encore

$$div(-\vec{v}_D) = div(\vec{v}_s) \quad (1.13)$$

où $\vec{v}_D$ est le débit du fluide par unité d'aire et $\vec{v}_s$ la vitesse absolue de déformation des fibres. Lorsque $\vec{v}_s$ est nulle, les équations 1.12 et 1.13 se résument à l'équation 1.5. Ceci montre que le procédé RTM peut être en fait modélisé d'une manière simplifiée par rapport au CRTM et au VARI.

1.7.2 L'équation d'écoulement en milieux poreux

L'écoulement en milieu poreux est caractérisé par l'équation de Darcy :

$$\vec{v}_D = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla P \quad (1.14)$$

où $\vec{v}_D$ est la vitesse de Darcy ($m \cdot s^{-1}$) ou débit volumique de fluide par unité d'aire, $\mathbf{K}$ le tenseur de perméabilité des fibres (m^2), μ la viscosité de la résine ($Pa \cdot s$) et P la pression de la résine (Pa).

La vitesse de Darcy n'est pas une vitesse au sens physique du terme, même si au niveau des unités, elle correspond à une vitesse. Cette pseudo-vitesse n'est pas mesurable directement. En effet, il faut passer par la relation $v_D = \phi \cdot v_{imp}$ pour la connaître. La vitesse de Darcy ne tient pas compte du volume occupé par le squelette du milieu poreux. Par conséquent, elle sera toujours plus faible que la vitesse réelle

d'imprégnation du fluide qui s'obtient directement de par l'avancement du front de résine.

La loi de Darcy a ses limites. Beaucoup d'auteurs ont travaillé sur sa plage de validité [1] et [27]. À partir du nombre de Reynolds $Re = (v \cdot \sqrt{K}) / \eta$ où v est la vitesse moyenne du fluide, K la perméabilité et η la viscosité cinématique du fluide, les auteurs définissent trois types de régime d'écoulement :

Tableau 1.1 Régimes d'écoulement

	Régime	Forces d'inerties du fluide	Modèle
$Re \ll 1$	laminaire	négligeable	Darcy
$Re \leq 10$ à $Re \leq 100$	laminaire	non négligeable	Forchheimer
$Re > 100$	turbulent	non négligeable	Navier-Stokes

Plusieurs auteurs ont démontré que l'écoulement de la résine dans un renfort fibreux correspondait bien aux hypothèses du modèle de Darcy ($Re \ll 1$) [3, 15, 41]. L'injection de la résine se faisant généralement en régime rampant, il est possible d'appliquer la loi de Darcy dans l'étude des procédés LCM.

1.7.3 La consolidation

Lorsqu'une pression est appliquée à la surface d'un sol sec, celui-ci aura tendance à se comprimer car les pores sont réduits et le sol devient plus compact. Par contre, lorsque la même pression est appliquée à la surface d'un sol saturé, un certain laps de temps s'écoulera avant de voir apparaître une déformation. Ce comportement dépend de la nature du sol. Le front de résine reste une chose observée. Aussi, faut-il se rappeler qu'en fait, il existe plusieurs fronts correspondant à chaque pore. Dans un

milieu poreux saturé, les pores sont entièrement remplis de fluide. Par conséquent, il ne peut y avoir de déformation. Pour comprimer le milieu poreux, le fluide, qui est considéré incompressible, doit d'abord être expulsé. Bien sûr, ceci demande un certain temps. En résumé, lorsqu'un milieu saturé est soumis à une charge, la déformation qui l'accompagne est retardée du temps nécessaire pour évacuer le fluide. Cette façon de vulgariser le phénomène de consolidation d'un milieu poreux permet de comprendre les phénomènes analogues qui se produisent lors de la fabrication des matériaux composites par injection sur renfort.

a) Le modèle de Biot

Les bases de la théorie de la consolidation furent élaborées par Biot (1941) pour étudier les phénomènes intervenant lors de l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux. Ce dernier voulait comprendre les interactions se produisant lors du drainage des sols : sous l'action d'une contrainte extérieure, un sol saturé d'eau est comprimé et une certaine quantité d'eau interstitielle est évacuée.

Dans la théorie de Biot, le squelette du sol présente un comportement élastique linéaire quasi-statique. Les déformations du squelette sont considérées faibles. Par conséquent, les deux points suivants sont déduits :

1. La relation contrainte-déformation obéit à la loi de Hooke généralisée :

$$\sigma'_{ij} = E_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (1.15)$$

où σ' est le tenseur des contraintes effectives s'appliquant sur le squelette, E est le tenseur d'élasticité du matériau et ε le tenseur des déformations.

2. En considérant les forces massiques négligeables, l'équilibre du tenseur des contraintes effectives de Cauchy s'écrit simplement :

$$\nabla \sigma' = 0 \quad (1.16)$$

Lorsque le sol est un milieu isotrope et que le fluide est de l'eau (viscosité 1), la loi de Darcy devient :

$$\vec{v}_D = -\mathbf{K} \nabla P \quad (1.17)$$

où $\vec{v}_D$ est la vitesse de Darcy, $\mathbf{K}$ la perméabilité et ∇P le gradient de la charge hydraulique.

À partir des hypothèses précédentes et de l'équation de continuité :

$$\text{div}(-\vec{v}_D) = \text{div}(\vec{v}_s) \quad (1.18)$$

le terme de droite se développe de la façon suivante :

$$\text{div}(\vec{v}_s) = \frac{\partial \epsilon_{vol}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1-2\nu}{E} (\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz}) \right) \quad (1.19)$$

où $\text{div}(\vec{v}_s)$ représente la variation de volume du sol dans le temps.

En introduisant la contrainte sphérique effective $\sigma'_{oct} = (\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz})/3$, la formule de la théorie de consolidation de Biot s'écrit :

$$K \nabla^2 P = \frac{3(1-2\nu)}{E} \cdot \frac{\partial \sigma'_{oct}}{\partial t} \quad (1.20)$$

Enfin, en notant :

$$C_{v3} = \frac{KE}{3(1-2\nu)} \quad (1.21)$$

La formule 1.20 de la théorie de consolidation de Biot se réécrit :

$$\nabla^2 P = \frac{1}{C_{v3}} \cdot \frac{\partial \sigma'_{oct}}{\partial t} \quad (1.22)$$

où C_{v3} est le coefficient sphérique de consolidation.

b) L'équation de Terzaghi

En 1943, Terzaghi proposa de décomposer la contrainte extérieure en deux parties : la première contribution résulte de la contrainte moyenne interne au squelette σ' , la seconde est créée par la pression hydrostatique p de l'eau interstitielle de telle sorte que :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} P \quad (1.23)$$

où δ_{ij} est le tenseur unitaire. Dans cette équation, il est possible de constater que :

$$\sigma_{oct} = \sigma'_{oct} + P \quad (1.24)$$

L'hypothèse de Terzaghi conduit à écrire l'équation 1.22 sous la forme suivante :

$$\nabla^2 P = \frac{1}{C_{v_3}} \cdot \left(\frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) \quad (1.25)$$

Terzaghi dérivait aussi le modèle unidimensionnel dans le cas où la contrainte appliquée σ_{zz} est constante dans le temps. Reprenant de l'équation 1.18 avec cette fois $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$ et $\sigma_{zz} = cte$, l'équation 1.19 devient :

$$div(\vec{v}_s) = \frac{\partial \epsilon_{vol}}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} (\sigma'_{zz}) \right) \quad (1.26)$$

Par conséquent dans ce cas particulier, l'équation 1.20 est simplifiée pour obtenir :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{C_{v_1}} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.27)$$

avec

$$C_{v_1} = - \frac{KE(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (1.28)$$

c) Les équations générales de la consolidation

À partir du travail de Biot, il est possible de dégager les cinq équations fondamentales qui régissent le phénomène de consolidation.

1. Trois équations gouvernent la déformation du solide :

(a) Équation d'équilibre du milieu :

$$\sigma'_{ij,j} + P_{,j} + \rho f_i = 0 \quad (1.29)$$

où ρ est la densité du milieu et f_i la force massique.

(b) Loi de comportement élastique :

$$\sigma'_{ij} = E_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (1.30)$$

(c) Relation déplacement/déformation :

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\{u_s\}_{k,l} + \{u_s\}_{l,k} \right) \quad (1.31)$$

2. Deux équations gouvernent l'écoulement :

(a) Loi de Darcy :

$$\{\vec{v}_D\}_i = -\frac{K_{ij}}{\mu} (P_{,j} + \rho_{fl} f_j) \quad (1.32)$$

(b) Équation de continuité⁵ :

$$\{\vec{v}_D\}_{i,j} + \{\vec{v}_s\}_{i,j} = 0 \quad (1.33)$$

Les équations précédentes conduisent à deux systèmes couplés.

$$\left\{ -\frac{K_{ij}}{\mu} (P_{,j} + \rho_{fl} f_j) \right\}_{,i} + \{\vec{v}_s\}_{i,i} = 0 \quad (1.34a)$$

⁵où $\vec{v}_s = \dot{u}_s$

$$\frac{1}{2}E_{ijkl} \cdot \left\{ \{u_s\}_{k,l} + \{u_s\}_{l,k} \right\}_{,j} + P_{,j} + \rho_s f_i = 0 \quad (1.34b)$$

1.7.4 Conclusion

De façon générale, la résolution du problème de la consolidation s'obtient en faisant l'approximation simultanée des systèmes 1.34a et 1.34b. Notez qu'habituellement, les tenseurs de perméabilité et d'élasticité du matériau présentent un comportement hautement non linéaire en fonction du déplacement. Par conséquent, une résolution numérique appropriée de ces systèmes devra être adaptée.

CHAPITRE 2

ALGORITHMES DE REMPLISSAGE SOUS PAROI MOBILE

2.1 L'injection-compression (CRTM)

Plusieurs auteurs ont appliqué avec succès la théorie de la consolidation à l'étude des matériaux composites [14, 26, 31, 32]. Considérons par exemple, le cas simplifié¹ suivant à l'instant $t = 0$:

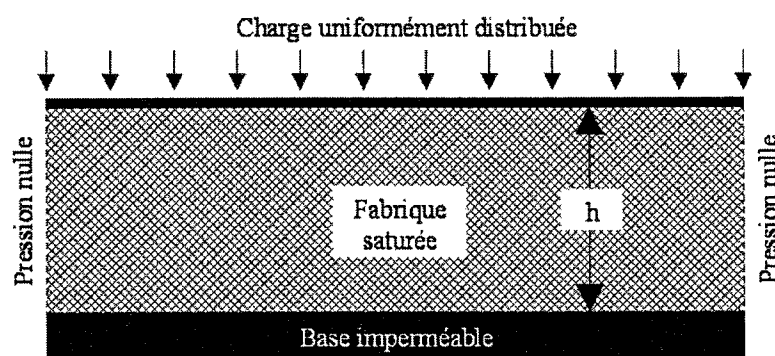


Figure 2.1 Consolidation

Une charge uniformément distribuée est appliquée sur la surface d'un renfort tissé saturé. Le renfort est placé dans un moule rigide. Initialement, lorsque la charge externe est appliquée sur la partie supérieure du moule, la pression totale augmente. Puisque le renfort est saturé de fluide initialement inerte, il ne peut alors se déformer. À l'équilibre, une déformation nulle implique une différence de pression nulle. Par conséquent, la pression du fluide doit augmenter autant que la pression totale. Ainsi à l'instant zéro, comme le fluide est inerte, sa pression est constante et égale à l'aug-

¹En CRTM, la fabrique n'est pas initialement entièrement saturée.

mentation de la pression totale. Mathématiquement, ceci se formule de la manière suivante :

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} \quad (2.1)$$

$$\epsilon_{zz} = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = 0 \quad (2.2)$$

Subséquentement, un gradient de pression s'établira dans le fluide. Celui-ci s'écoulera peu à peu. La pression du fluide diminuera augmentant ainsi la pression effective sur le renfort jusqu'à ce que la pression effective soit égale à la pression totale. Ceci est montré schématiquement à la Figure 2.2

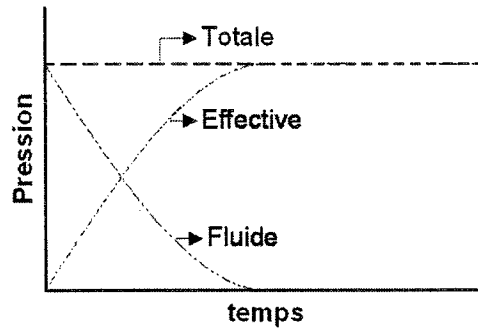


Figure 2.2 Schéma des pressions lors de la consolidation

2.1.1 Modèle numérique

En utilisant la théorie de Biot et en faisant l'hypothèse que le squelette se déforme dans une direction perpendiculaire au plan du moule, Pham [31] propose le modèle suivant :

$$\nabla \left\{ -\frac{K}{\mu} \nabla P \right\} = -\frac{U_n}{h(t)} \quad (2.3)$$

où U_n est la vitesse de compression perpendiculaire à la surface, $h(t)$ est l'épaisseur interne de la cavité du moule et K , μ et P sont les paramètres de l'équation de Darcy.

L'équation 2.3 peut être modifiée pour tenir en compte de la déformation du squelette :

$$\nabla \left\{ -h \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla P \right\} = -U_n \quad (2.4)$$

La différence entre les équations 2.3 et 2.4 est que l'épaisseur de la cavité est à l'intérieur de l'opérateur divergence plutôt qu'à l'extérieur. Ceci peut être expliqué à partir de l'équation 1.3 de conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV + \iiint_V \operatorname{div} (\rho \cdot \vec{v}) \, dV = 0 \quad (2.5)$$

Sous l'hypothèse que la porosité varie peu à l'intérieur d'un volume de contrôle, que la pression est constante à travers l'épaisseur de la cavité et que la déformation axiale est négligeable, l'équation 2.5 peut être intégrée suivant l'épaisseur :

$$\iint_A \left[\frac{\partial}{\partial t} (\phi h) + \operatorname{div} (\phi h \vec{v}) \right] dA = 0 \quad (2.6)$$

L'équation 2.6 doit être vraie quelque soit dA , par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi h) + \operatorname{div} (\phi h \vec{v}) = 0 \quad (2.7)$$

En considérant que la masse du solide à l'intérieur du volume de contrôle reste constante dans le temps :

$$v_f h = \text{cte} \quad (2.8)$$

Par conséquent,

$$\phi h = h - \text{cte} \quad (2.9)$$

L'équation 2.7 devient :

$$\nabla \cdot (\phi h \vec{v}) = -\frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.10)$$

Comme l'épaisseur h de la cavité est définie dans une direction normale à la surface,

la vitesse normale U_n de déformation de l'épaisseur de la cavité peut être introduite :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = U_n \quad (2.11)$$

L'équation du CRTM s'écrit enfin :

$$\nabla \left\{ -h \frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla P \right\} = -U_n \quad (2.12)$$

Notez que lorsque l'épaisseur h est constante à travers la pièce, l'équation 2.12 se réduit à l'équation 2.3. Par conséquent, l'équation 2.12 est plus générale que celle proposée par Pham [31].

Nous avons résolu l'équation 2.12 à l'aide de la méthode des éléments finis. La Figure 2.4 compare les résultats numériques obtenus avec les résultats du modèle analytique pour un remplissage unidimensionnel. Nous avons utilisé un maillage de 406 éléments triangulaires (Figure 2.3) et les paramètres définis dans le Tableau 2.1. L'injection s'est effectuée de bas en haut. Lorsque suffisamment de résine a été injectée, la compression sur toute la surface du maillage a été effectuée. Lorsque la cavité atteint une épaisseur de 3 mm, le moule est entièrement rempli et le calcul s'arrête.

Une très bonne concordance est obtenue. En effet, une erreur relative d'environ 3% est obtenue en comparant les volumes finaux de résine entre la solution analytique et le résultat numérique. Cette erreur est principalement due à la méthode de remplissage. Le remplissage s'effectue par déversement. Pour qu'un élément transfère une quantité de résine à un de ses voisins, il doit d'abord être complètement saturé. Joint à la forme triangulaire des éléments, ceci rend très difficile un suivi exact de la position du front de résine et donc une prise en compte adéquate et précise du terme source de l'équation 2.12. Une adaptation de maillage ou un algorithme plus sophistiqué de remplissage serait requis pour minimiser cette erreur.

Tableau 2.1 Paramètres utilisés pour obtenir les résultats de la Figure 2.4

Paramètre	Valeur
Constante de Kozeny	$6,12 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$
Densité superficielle sur densité volumique	$4 \cdot 10^{-4}$
Dimension de la pièce	$0,1 \times 0,2 \text{ m}$
Épaisseur initiale	5 mm
Épaisseur finale	3 mm
Pression relative d'injection	$1,5 \text{ bar}$
Vitesse de fermeture	$1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$
Viscosité	$0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

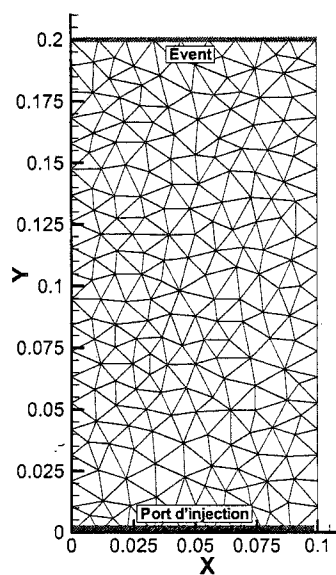


Figure 2.3 Maillage de la simulation d'injection-compression 1D pour obtenir les résultats de la Figure 2.4

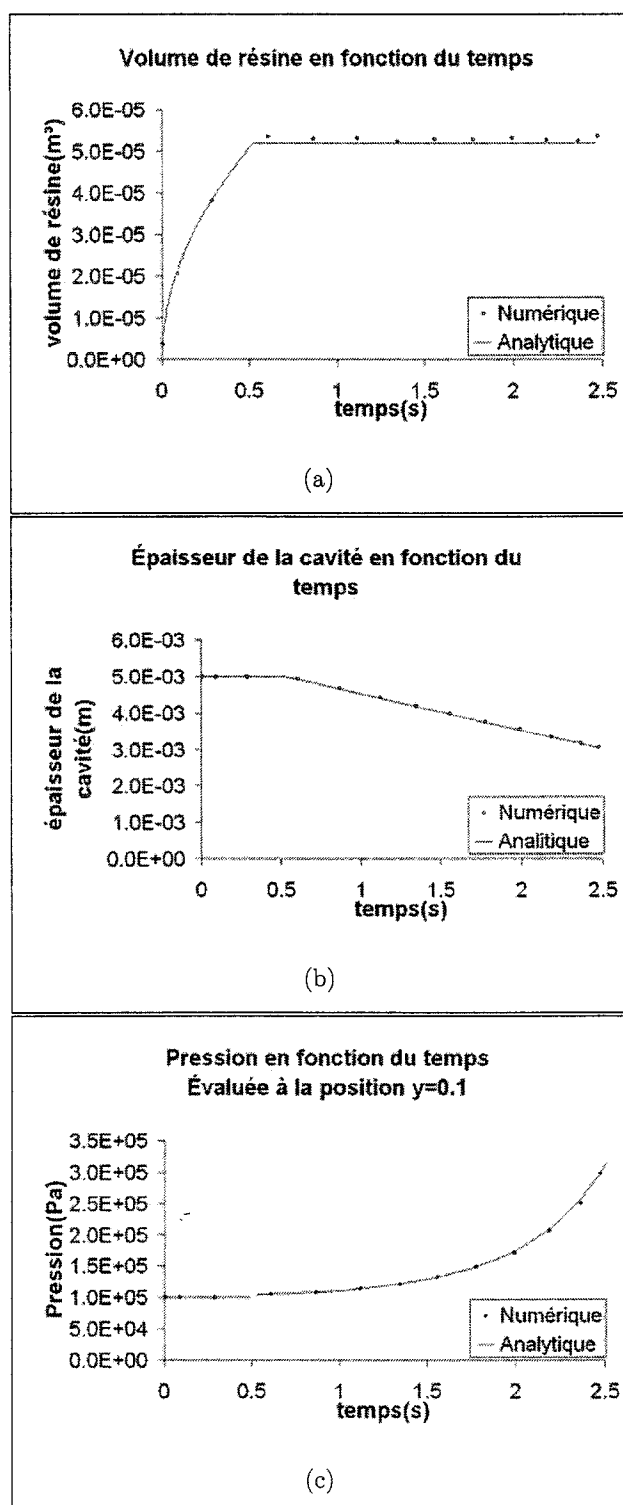


Figure 2.4 Résultats numériques et analytiques d'injection-compression (CRTM)

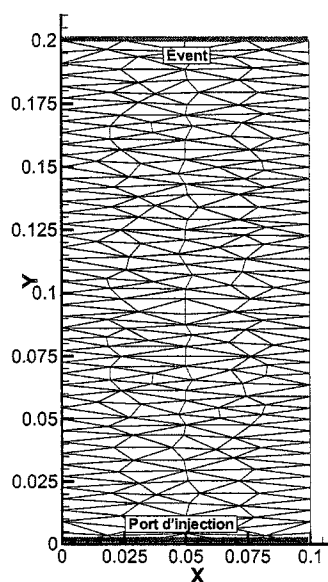


Figure 2.5 Maillage adapté pour de meilleurs résultats de la simulation d'injection-compression à écoulement 1D

Par exemple, les éléments du maillage de la Figure 2.5 ont été adaptés par rapport à la forme du front de résine. Il comporte aussi 406 éléments. Pour les mêmes paramètres de simulation, une erreur 100 fois plus petite est obtenue, soit 0,03%. Toutefois, d'un point de vue pratique, une erreur de 3% reste acceptable.

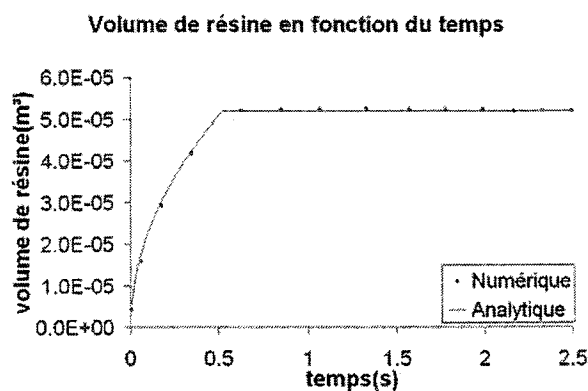


Figure 2.6 Résultats du volume dans le temps pour la simulation sur le maillage de la Figure 2.5

2.1.2 L'injection-compression articulée (ACRTM)

Une variante du procédé CRTM standard a récemment été proposée par Choi et al. [8, 9]. Les auteurs ont nommé cette variante "compression-injection articulée (ACRTM)".

En CRTM traditionnel, le couvercle du moule est fabriqué d'une seule pièce. Autrement dit, la poussée s'effectue uniformément sur tout le couvercle. Cependant, comme la perméabilité diminue avec l'épaisseur, le liquide s'écoule beaucoup plus difficilement à la fin du cycle de compression et la presse doit fournir un effort considérable. Il est toutefois possible de minimiser cet effort en articulant le couvercle. En effet, il suffit de comprimer uniquement la partie du renfort déjà imprégnée. La Figure 2.7 illustre les étapes du procédé.

À l'étape (a), la résine est injectée sous le segment 1. En (b), le segment 1 descend à la hauteur finale désirée pendant que le segment 2 monte. Cette opération est ensuite répétée avec les segments suivants (c,d,e). Un autre avantage de cette approche réside dans la possibilité de diriger le front de résine. Par exemple, il est possible de transformer un écoulement de type radial divergent en un écoulement de type unidi-

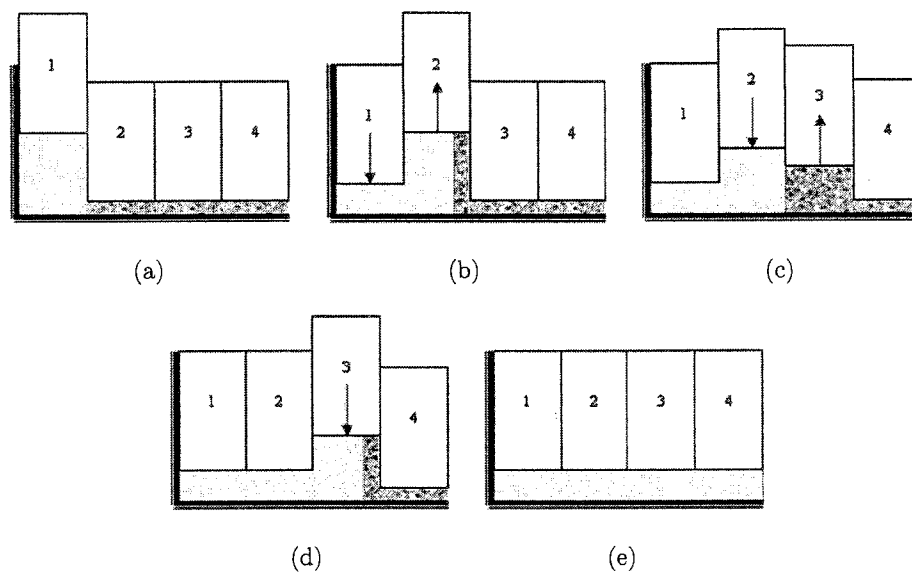


Figure 2.7 Schéma du procédé d'injection-compression articulée (ACRTM)

rectionnel. Effectivement, en jouant avec la hauteur de la cavité et donc en changeant indirectement la perméabilité, il est possible de créer des canaux préférentiels pour l'écoulement de la résine. Une fois la pièce presque remplie, les canaux ainsi formés peuvent être comprimés pour répondre aux spécifications. Nous verrons un exemple dans le chapitre suivant.

Le ACRTM est un cas plus général que le CRTM standard. Par conséquent, nous avons transformé le code précédemment développé pour ajouter un ensemble de fonctionnalités de contrôle supplémentaire. Ces fonctionnalités, de type gâchette, ont pour but d'offrir à l'utilisateur un contrôle plus aisé des segments. Nous avons défini un nouvel objet nommé "trigger". Il s'agit d'un senseur placé sur le maillage qui chaque pas de temps vérifie si un certain seuil vient d'être franchi. Ceci offre la possibilité de déclencher la compression d'un segment lorsque la résine atteint un point de la pièce ou encore de fermer un port d'injection ou un événement.

2.2 L'infusion sous film plastique (VARI)

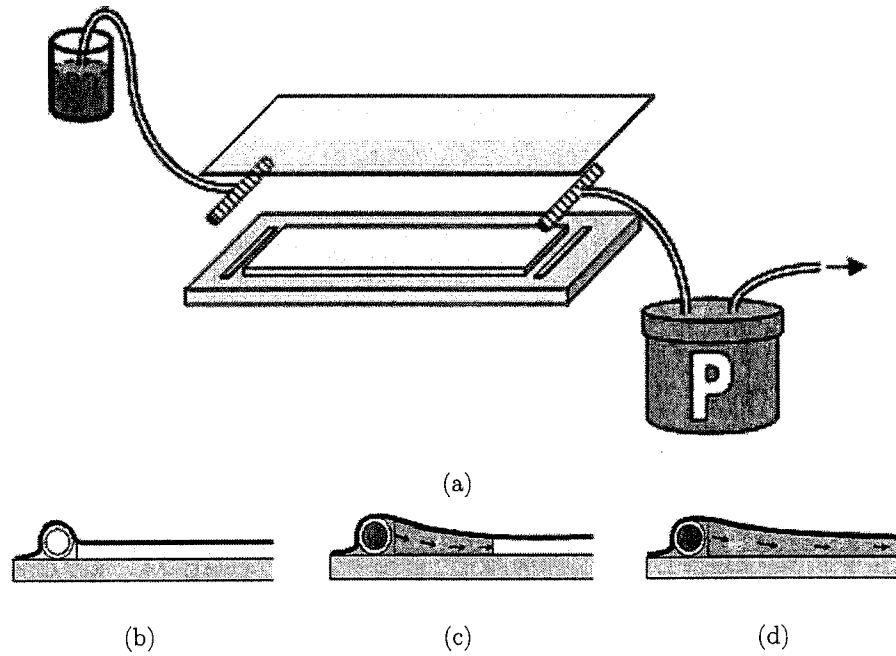


Figure 2.8 Schéma du procédé d'infusion sous film plastique(VARI)

Dans le procédé VARI, le couvercle rigide en RTM et en CRTM est remplacé par une pellicule de film plastique. Pour modéliser ce procédé, nous partirons du modèle proposé par Joubaud et al. [24]. Tout d'abord, la pellicule est considérée présenter un comportement strictement plastique, c'est à dire que chaque point du couvercle est libre de se déplacer indépendamment. L'équilibre des forces peut être réduit à une forme unidimensionnelle dans la direction perpendiculaire à la base du moule. D'un point de vue mathématique, ceci peut être représenté par le modèle 1D de la loi de Hooke :

$$\sigma' = E \cdot \varepsilon \quad (2.13)$$

Pour de petites déformations, ε peut s'exprimer en fonction de la hauteur du squelette

des fibres de la manière suivante :

$$\varepsilon = \frac{h - h_0}{h_0} \quad (2.14)$$

Par conséquent

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h_0}{E} \frac{d\sigma'}{dt} = \frac{h_0}{E} \left(\frac{d\sigma}{dt} - \frac{dP}{dt} \right) \quad (2.15)$$

où σ correspond à la pression agissant sur le couvercle du moule. En VARI, il s'agit là de la pression extérieure (1 atm), donc constante dans le temps. L'équation 2.15 devient donc :

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{h_0}{E} \frac{dP}{dt} \quad (2.16)$$

En remplaçant le second membre de l'équation 2.10 par celui de l'équation 2.16, l'équation de la conservation de masse pour le VARI devient :

$$\text{div}(\phi h \vec{v}) = \frac{h_0}{E} \frac{dP}{dt} \quad (2.17a)$$

En considérant les hypothèses de la loi de Darcy applicables, l'équation précédente revient à :

$$\text{div} \left(\frac{h \mathbf{K}}{\mu} \nabla P \right) + \frac{h_0}{E} \frac{dP}{dt} = 0 \quad (2.17b)$$

Dans ce modèle, l'écoulement se situe à l'intérieur du milieu poreux² et le phénomène de déformation du moule est considéré quasi-statique. La somme des pressions de compression P_c et de résine P doit donc équilibrer la pression extérieure P_{ext} en chaque point dans le temps :

$$P_{ext} = P + P_c \quad (2.18)$$

²C'est à dire qu'à tout moment aucun espace suffisant n'existe entre les fibres et les parois du moule qui aurait pour conséquence de transformer l'écoulement en un écoulement de type Stokes [25].

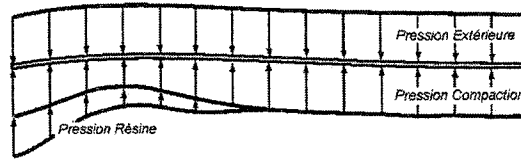


Figure 2.9 Schéma d'équilibre des forces

Par conséquent, connaissant une fonction reliant la pression de compression à l'épaisseur des fibres, il est facile de déduire pour une pression de résine donnée l'épaisseur du moule en chaque point. Par exemple, en supposant que le modèle de compression des fibres correspond au modèle de Gauvin et al. défini à la section 1.6, la fonction reliant l'épaisseur à la pression de la résine devient :

$$h(P) = \frac{d_f}{\rho_f A} \frac{1}{(P_{ext} - P)^B} \quad (2.19)$$

où d_f est la densité surfacique des fibres, ρ_f est la densité volumique des fibres, A et B sont des constantes du renfort³, P_{ext} est la pression extérieure qui agit sur le couvercle et P est la pression de la résine.

L'approche adoptée pour la solution numérique est la suivante :

1. Résoudre l'équation 2.17b.
2. Trouver l'épaisseur h par la formule 2.19.
3. Actualiser les paramètres physiques : épaisseur, perméabilité et porosité.
4. Avancer le front de résine.
5. Répéter 1 à 4 jusqu'à ce que le moule soit entièrement rempli.

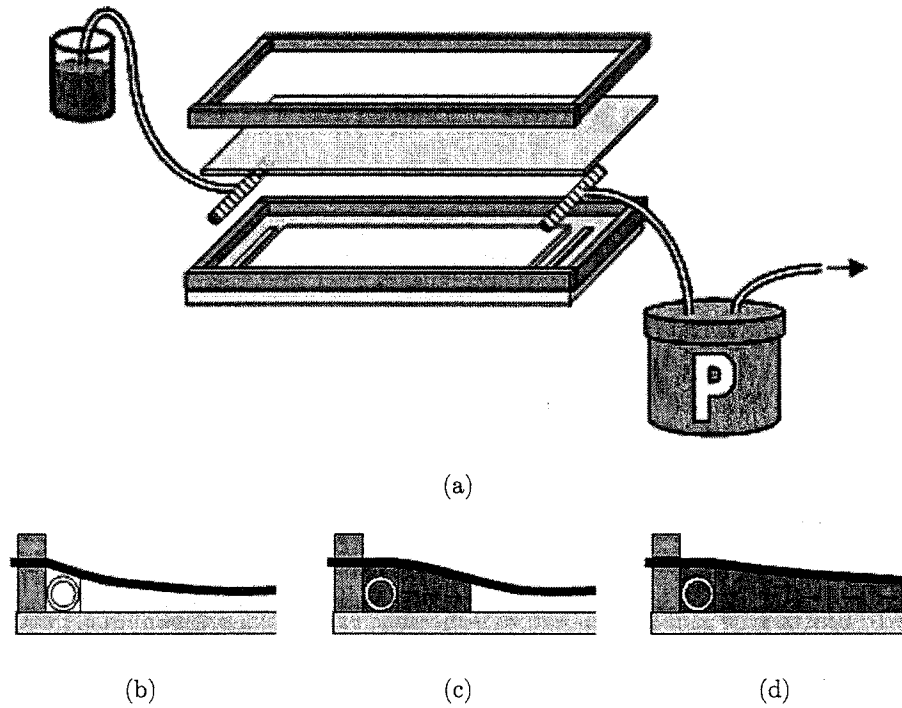


Figure 2.10 Schéma de l'infusion sous membrane élastique

2.2.1 Couvercle membrane

Compte tenu du fait que la compression des fibres suit des modèles fortement non linéaires, une forme modifiée de l'équation d'équilibre d'une membrane est utilisée, à savoir :

$$-T \cdot \nabla^2 h - k(h) - p = 0 \quad (2.20)$$

où T est le facteur de pré-tension, p est la somme des pressions qui s'exercent sur la membrane ($P + P_c - P_{ext}$) et $k(h)$ est une fonction croissante dérivable et continue en tout point du domaine d'étude⁴.

³Voir page 12

⁴fonction du type x^n ou e^x

Analyse par éléments finis

La résolution de systèmes non linéaires s'obtient généralement de façon itérative. Partant d'une première approximation vérifiant toutes les conditions aux limites essentielles h_g^0 , il s'agit de trouver la correction δh qui minimise l'erreur telle que :

$$R(h_g^0 + \delta h, w) = 0 \quad (2.21)$$

où R est le résidu et w une fonction test. Pour ce faire, le problème est d'abord linéarisé par un développement en série de Taylor :

$$R(h_g^0 + \delta h, w) = R(h_g^0, w) + \frac{\partial R}{\partial h}(h_g^0, w) \cdot \delta h + O(\epsilon(h)^2) = 0 \quad (2.22)$$

En négligeant le terme d'ordre supérieur, la solution s'obtient par la résolution d'une série de problèmes linéaires de la forme :

$$R(h_g^0, w) + \frac{\partial R(h_g^0, w)}{\partial h} \delta h = 0 \quad (2.23)$$

Pour la résolution de l'équation d'une membrane sur fondation à comportement non linéaire, l'équation 2.21 devient :

$$R(h, w) = \int_{\Omega} (T \cdot \nabla h \nabla w - k(h) w - pw) dv = 0 \quad (2.24)$$

où

$$h = h_g^0 + \delta h \quad (2.25)$$

Le premier terme de l'équation 2.23 s'évalue directement. Procédons donc à l'analyse du second terme en utilisant la dérivée au sens de Gâteaux :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R(h_g^0, w)}{\partial h} \cdot \delta h \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left(\int_{\Omega} (T \cdot \nabla (h_g^0 + \lambda \delta h) \nabla w - k(h = h_g^0 + \lambda \delta h) w - p w) dv \right) \Big|_{\lambda=0} \end{aligned} \quad (2.26a)$$

$$\frac{\partial R(h_g^0, w)}{\partial h} \cdot \delta h = \int_{\Omega} (T \cdot \nabla (\delta h) \nabla w - k'(h = h_g^0) \delta h w) dv \quad (2.26b)$$

Enfin, en remplaçant dans 2.24, nous obtenons le système final :

$$\int_{\Omega} (T \cdot \nabla (\delta h) \nabla w - k'(h_g^0) \delta h w) dv = - \int_{\Omega} (T \cdot \nabla h \nabla w - k(h) w - p w) dv \quad (2.27)$$

La solution de l'équation précédente se fait de manière itérative. Étant donné les notations suivantes :

- N nombre maximum d'itérations
- ϵ critère d'arrêt
- h_g^0 approximation initiale de la solution satisfaisant aux conditions limites homogènes
- i numéro de l'itération (initialisé à 1)

L'algorithme de solution s'énonce comme suit :

1. Résoudre δh pour le système linéaire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (T \cdot \nabla (\delta h^i) \nabla w - k' (h = h_g^{i-1}) (\delta h^i) w) dv \\ = - \int_{\Omega} (T \cdot \nabla (h_g^{i-1}) \nabla w - k (h = h_g^{i-1}) w - pw) dv \end{aligned} \quad (2.28)$$

2. Mettre à jour h

$$h_g^k = h_g^{k-1} + \Delta t \cdot ((1 - \alpha) (\delta h^{k-1}) + (\alpha) (\delta h^k)) \quad (2.29)$$

où α est un facteur variant de 0 à 1. Présentement à 0.5 (schéma Crank-Nicolson)
et Δt est un temps fictif choisi de façon à assurer des épaisseurs positives

3. La convergence est atteinte si le critère suivant est vérifié :

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n |h_g^k - h_g^{k-1}|^2}{\sum_{i=1}^n |h_g^k|^2} \right)^{1/2} < \epsilon \quad (2.30)$$

4. Si $i = N$, arrêter le calcul (convergence non atteinte)
5. Retour à l'étape 1 avec $i = i+1$.

Pour le remplissage, les mêmes étapes que pour le VARI sont adoptées. Cependant bien sûr, l'équation de l'étape 2 est remplacée par la solution de l'équation 2.20.

2.2.2 Couvercle à un degré de déplacement en hauteur (C1HD)

Les praticiens ont découvert qu'il était parfois souhaitable de laisser une certaine liberté en déplacement au couvercle d'un moule RTM. Un code a donc été développé pour tenter de comprendre ce phénomène. Initialement (Figure 2.11a) le couvercle,

de par son poids, comprime les fibres et repose sur la base du moule. Rapidement après le début de l'injection (Figure 2.11b), la pression de la résine soulève le couvercle jusqu'à obtenir l'épaisseur maximale permise de la cavité. Ceci a pour effet d'accélérer

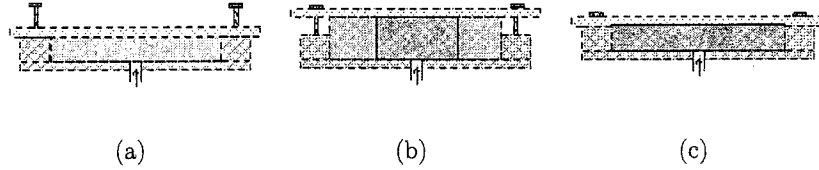


Figure 2.11 Schéma de l'injection sous couvercle à un degré de liberté

l'injection. Lorsque suffisamment de résine est disponible à l'intérieur du moule, les vis sont resserrées (Figure 2.11c) et l'injection est terminée.

Suivant la première loi de Newton, la somme des forces sur un corps à l'équilibre est nulle.

$$\sum F = 0 \quad (2.31)$$

Considérant le couvercle du moule, l'équation 2.31 devient :

$$\vec{F}_{ext} + \vec{F}_{mold} + \vec{F}_r + \vec{F}_c + \vec{F}_{frame} = 0 \quad (2.32)$$

Dans le cas qui nous intéresse, un seul degré de liberté est permis en déplacement et aucun en rotation. Le moule (les vis dans le cas de la Figure 2.11) appliquera une pression nécessaire pour que le couvercle demeure immobile dans la direction axiale. Par conséquent, il est possible de calculer les forces uniquement dans la direction du déplacement :

$$\left(\sum (P_{ext} A_e \hat{n}_e) + \sum (P_r A_e \hat{n}_e) + (W_{mold} \cdot g \cdot \hat{n}_{gravity}) + \vec{F}_c \right) \cdot \hat{n}_{OneDofDirection} = 0 \quad (2.33)$$

Alors

$$\vec{F}_c \cdot \vec{d} = \left(\left(\sum P_{ext} A_e \hat{n}_e \cdot \vec{d} \right) + \left(\sum P_r A_e \hat{n}_e \cdot \vec{d} \right) + \left(W_{mold} \cdot g \cdot \hat{n}_{gravity} \cdot \vec{d} \right) \right) \quad (2.34)$$

En isolant les termes, il vient :

$$P_c^1 = \frac{\vec{F}_R - \sum_{j=2}^{n_z} \sum_{i=1}^{n_{ze}} \left[P_c^j \cdot \int_{\Omega_e} \left(\hat{n}_e^{ij} \cdot \vec{d} dA \right) \right]}{\int_{\Omega_e} \left(\hat{n}_e^{i1} \cdot \vec{d} dA \right)} \quad (2.35)$$

En supposant une épaisseur initiale, l'algorithme de solution s'énonce comme suit :

1. Calculer P_c^1 à l'aide de l'équation 2.35.
2. Mettre à jour l'épaisseur h à l'aide de la formule suivante :

$$h(P) = \frac{d_f}{\rho_f A} \frac{1}{(P_{ext} - P)^B} \quad (2.36)$$

3. La convergence est atteinte si la différence relative d'épaisseur avec l'itération précédente est plus petite que le critère ϵ de convergence.
4. Si le nombre maximum d'itérations est atteint, arrêter le calcul.
5. Retour à l'étape 1.

Encore une fois, pour le remplissage, les mêmes étapes que pour le VARI sont adoptés. Cependant, l'équation de l'étape 2 est remplacée par la solution de l'équation 2.35.

2.2.3 Couvercle solide linéaire élastique et RTMlight

Dans le cas où une étude tridimensionnelle de la pièce est requise, nous avons développé un code pour l'analyse élastique de la déformation d'un moule rigide.

Soit, $\mathbf{r}$ les forces externes par unité de volume ($N \cdot m^{-3}$) et $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes

de Cauchy, les équations d'équilibres s'écrivent :

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r} \quad (2.37)$$

Pour obtenir la formulation éléments finis, l'équation 2.37 est multipliée par une fonction test ($\mathbf{w}$), puis intégrée par parties.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \quad (2.38)$$

Il reste alors à introduire une loi de comportement reliant le vecteur déplacement au tenseur des contraintes. La loi de Hooke généralisée est utilisée :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.39)$$

où $\mathbf{C}$ est le tenseur d'élasticité d'ordre 4 du matériau et définit les paramètres de rigidité. Ce tenseur possède donc 81 coefficients. Cependant, en considérant les symétries, il est possible de constater qu'il n'y a en fait que 21 coefficients indépendants pour un matériau anisotrope. Par conséquent, comme $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$, l'équation 2.39 s'écrit sous une forme condensée :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & \ddots & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ & sym & & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

Les matériaux composites sont en général orthotropes. Par conséquent, en supposant qu'il existe une fonction d'énergie définie suivant trois axes principaux, il est possible

de réduire le tenseur à 9 coefficients : 3 modules de Young (E_1, E_2, E_3), 3 modules de Poisson ($\nu_{23}, \nu_{13}, \nu_{12}$) et 3 modules de cisaillement (G_{23}, G_{13}, G_{12}) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323} & 0 & 0 \\ sym & \dots & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.41a)$$

où

$$\begin{aligned} C_{1111} &= \frac{E_1(1-\nu_{23}^2)}{1-2\nu_{23}\nu_{13}\nu_{12}-\nu_{23}^2-\nu_{13}^2-\nu_{12}^2} \\ C_{2222} &= \frac{E_2(1-\nu_{13}^2)}{1-2\nu_{23}\nu_{13}\nu_{12}-\nu_{23}^2-\nu_{13}^2-\nu_{12}^2} \\ C_{3333} &= \frac{E_3(1-\nu_{12}^2)}{1-2\nu_{23}\nu_{13}\nu_{12}-\nu_{23}^2-\nu_{13}^2-\nu_{12}^2} \\ C_{2233} &= \frac{E_2(\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{12})}{1-2\nu_{23}\nu_{13}\nu_{12}-\nu_{23}^2-\nu_{13}^2-\nu_{12}^2} \\ C_{1133} &= \frac{E_1(\nu_{13}+\nu_{23}\nu_{12})}{1-2\nu_{23}\nu_{13}\nu_{12}-\nu_{23}^2-\nu_{13}^2-\nu_{12}^2} \\ C_{1122} &= \frac{E_1(\nu_{12}+\nu_{23}\nu_{13})}{1-2\nu_{23}\nu_{13}\nu_{12}-\nu_{23}^2-\nu_{13}^2-\nu_{12}^2} \\ C_{2323} &= G_{23} \\ C_{1313} &= G_{13} \\ C_{1212} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.41b)$$

Enfin lorsque le matériau est isotrope, seulement deux coefficients sont nécessaires : un module de Young (E) et un module de Poisson (ν).

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1-2\nu & 0 & 0 \\ sym & & & & 1-2\nu & 0 \\ & & & & & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Le détail du développement des termes du tenseur rigidité peut être trouvé dans Jayne et Suddarth [23]. La relation déplacement-déformation s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

En remplaçant les équations 2.39 et 2.43 dans 2.38, la formulation éléments finis pour le problème d'élasticité revient à :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{C} \nabla \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \quad (2.44)$$

où $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ dans la condition naturelle. Ce système comporte donc trois conditions aux limites essentielles, une pour chacun des trois axes. Les trois conditions aux limites naturelles correspondantes portent sur le vecteur de traction $\mathbf{t}$. Notez qu'en un point de la frontière du domaine, une condition essentielle u_i et une condition naturelle t_i ne doivent pas être imposées en même temps. Par contre, il est possible d'imposer u_i

et t_j si $i \neq j$.

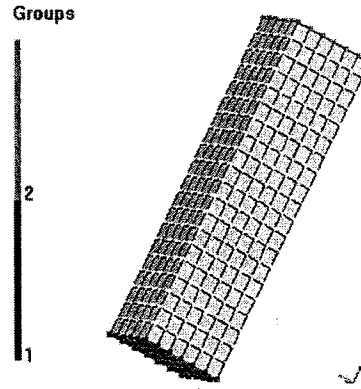


Figure 2.12 Maillage pour la validation du code élastique linéaire en déformation 1D

Une comparaison avec une solution analytique 1D est effectuée. La Figure 2.12 est un maillage de 600 éléments de $0,1 \times 0,1 \times 0,4m$ (où l'aire $A = 0,01m^2$ et la hauteur initiale $H_0 = 0,4m$). Une condition d'encastrement est définie au niveau du groupe 1 (face inférieure). Une condition de traction F de 100 kN est définie au niveau du groupe 2 (face supérieure). Le matériau, fictif, possède un module de Young E de 1 GPa et un module de Poisson ν nul.

$$\sigma = E\varepsilon = E \cdot \frac{\Delta H}{H_0} \quad (2.45a)$$

$$\Delta H = \frac{H_0 \cdot F}{A \cdot E} = \frac{0,4 \cdot 10^5}{(0,01) \cdot 10^9} = 0,004\text{ m} \quad (2.45b)$$

où H correspond à l'épaisseur finale. Le résultat de la Figure 2.13c concorde parfaitement avec le résultat analytique.

La Figure 2.14 est obtenue en changeant le module de Poisson pour une valeur de 0,3. Le maillage a été déformé proportionnellement. La condition d'encastrement est bien respectée. En plus, comme la traction est appliquée dans la direction z uniquement, les déformations selon les axes x et y sont identiques.

Dans le chapitre suivant, nous démontrerons l'utilisation du code solide élastique cou-

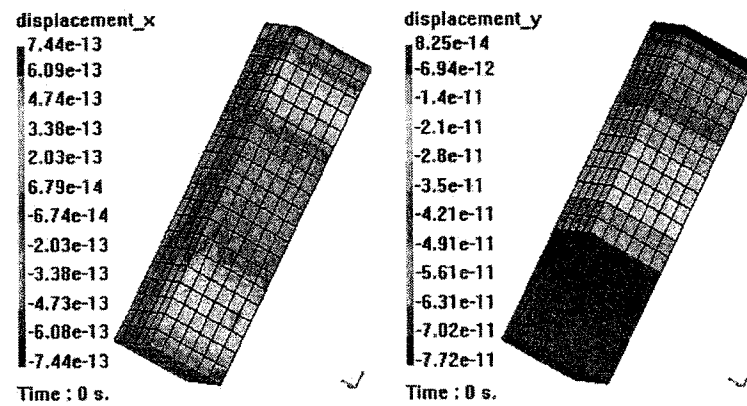
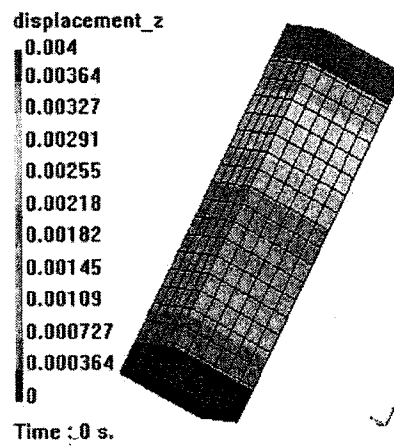
(a) Déplacement suivant x (b) Déplacement suivant y (c) Déplacement suivant z

Figure 2.13 Résultats pour la validation du code élastique linéaire en déformation 1D

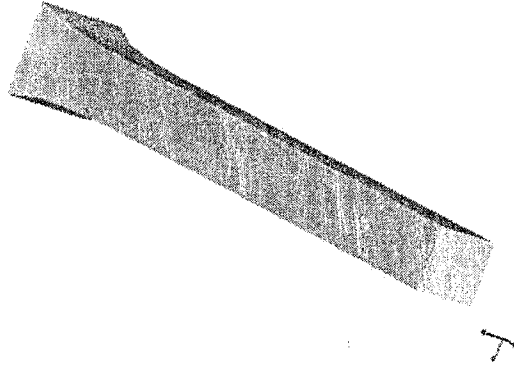


Figure 2.14 Résultats du code élastique linéaire avec un module de Poisson de 0.3

plé avec l'écoulement pour simuler le procédé RTMLight. Enfin, il est important de souligner qu'il est conseillé autant que possible d'utiliser une des solutions développées précédemment. En effet, un maillage tridimensionnel comporte beaucoup plus de degrés de liberté que son équivalent 2,5D. Conséquemment, la résolution de la déformation du moule ajoute un temps supplémentaire considérable au calcul.

CHAPITRE 3

EXEMPLES D'UTILISATION

Dans ce chapitre, des résultats de simulation seront démontrés et analysés.

3.1 Injection-compression articulée (ACRTM)

La Figure 3.1 montre le maillage d'un capot de voiture. Le maillage a été divisé en neuf zones servant à représenter chacun des segments du couvercle du moule. Le port d'injection se situe au milieu du moule. La Figure 3.2 présente le résultat de la simu-

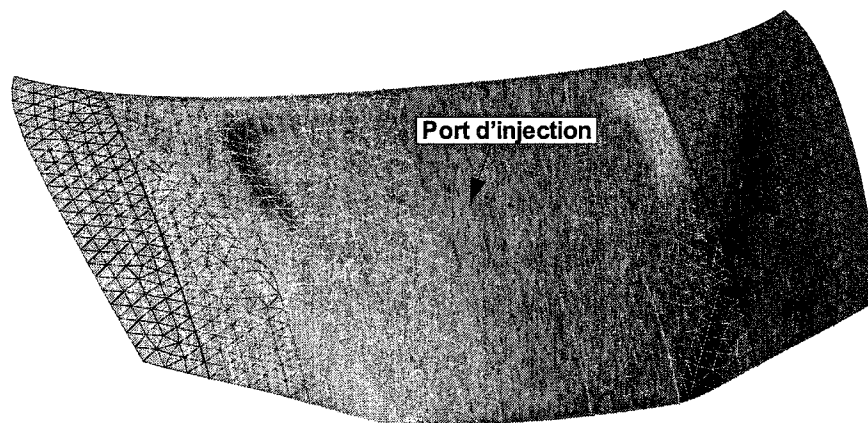


Figure 3.1 Exemple d'utilisation du code d'injection-compression articulée : Maillage

de remplissage. Initialement, le segment central est surélevé. Par conséquent lorsque l'injection débute, la perméabilité sous ce segment est plus grande, la résine remplit alors préférentiellement cette sous-cavité. L'écoulement, initialement de type radial divergent, se transforme rapidement en écoulement de type unidirectionnel.

Lorsque suffisamment de résine est injectée pour remplir les dimensions finales de la cavité, le port d'injection est fermé et la phase de compression débute. En alternance, les segments sont articulés jusqu'à la fin du remplissage. Notez que malgré les frontières arrondies du capot, le front de résine conserve tout de même une allure unidimensionnelle tout au long du remplissage.

Tableau 3.1 Paramètres utilisés pour obtenir les résultats de la Figure 3.2

Paramètre	Valeur
Constante de Kozeny	$6,12 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$
Densité superficielle sur densité volumique	$4 \cdot 10^{-4}$
Pression relative d'injection	$2,5 \text{ MPa}$
Viscosité	$0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Vitesse de fermeture des segments	$0,3 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$

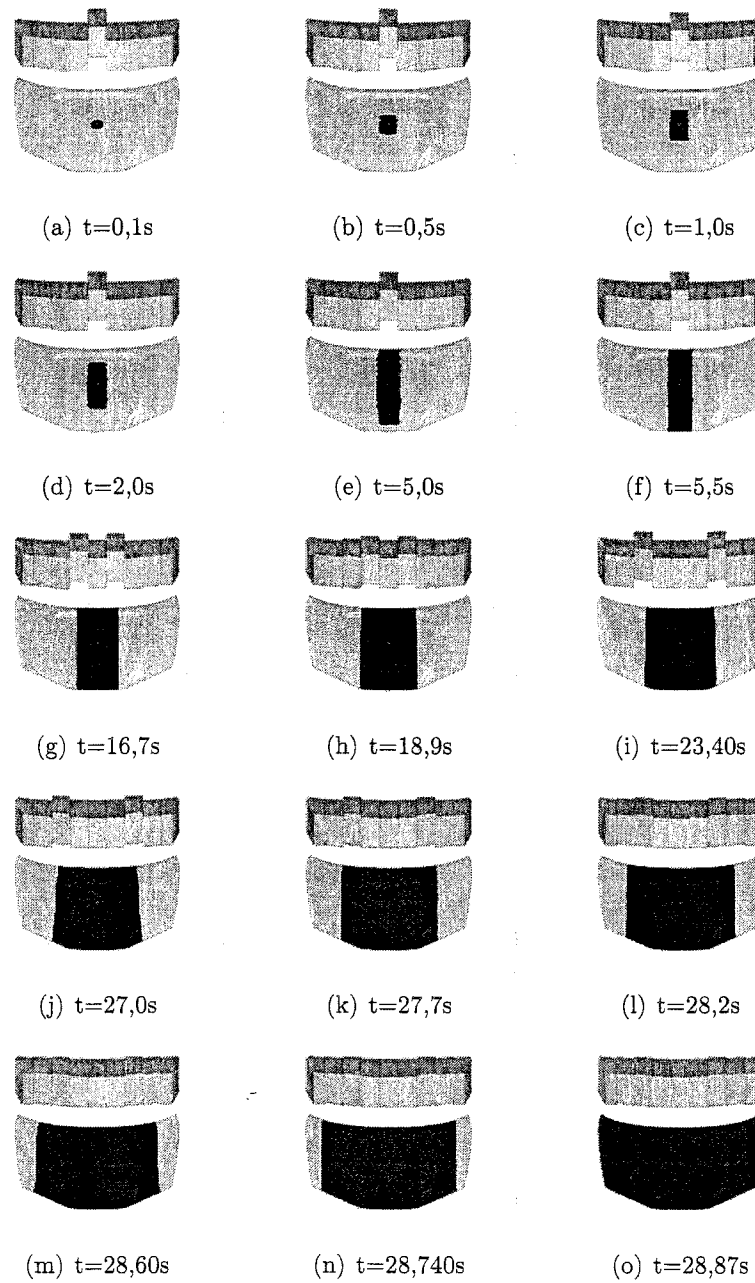


Figure 3.2 Exemple d'utilisation du code d'injection-compression articulée : Résultats

3.2 Infusion sous film plastique (VARI)

L'infusion sous film plastique est largement utilisée en pratique pour la fabrication de coques de bateaux. La Figure 3.4 montre un exemple. Les dimensions du moule sont de 2,12 x 0,66 x 0,3 mètres. Pour avoir un temps de remplissage rapide, nous avons choisi d'injecter par tout le pourtour du haut. La plupart du temps les coques de bateaux requièrent l'utilisation d'empilements de type "sandwich" pour assurer la rigidité. Cependant pour ce type d'empilement, la simulation de multiples écoulements superposés n'est pas possible par l'état actuelle de l'algorithme (Figure 3.3). En effet

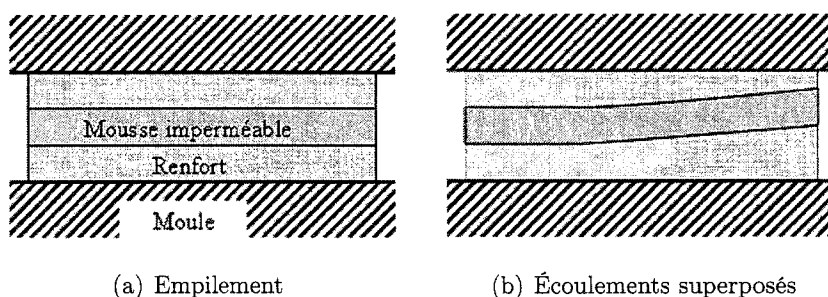


Figure 3.3 Écoulement dans un milieu de type "sandwich"

Figure 3.3a, il est possible de constater que les épaisseurs du renfort du haut et du bas sont reliées par l'intermédiaire d'une couche imperméable. À la Figure 3.3b, le fluide du bas étant plus rapide a provoqué une augmentation de la pression dans la cavité du bas. L'épaisseur du renfort du bas s'est donc accrue au détriment de celle du haut. Comme la perméabilité est directement reliée à l'épaisseur, le phénomène s'accentuera. L'algorithme actuelle ne prévoit pas ce type de comportement.

Par conséquent pour la simulation, nous utiliserons donc une seule couche d'Unifilo. La Figure 3.5 montre les résultats de la simulation. Le remplissage s'est effectué en 108 secondes. Notez que l'épaisseur à la fin du remplissage n'est pas uniforme dans la pièce.

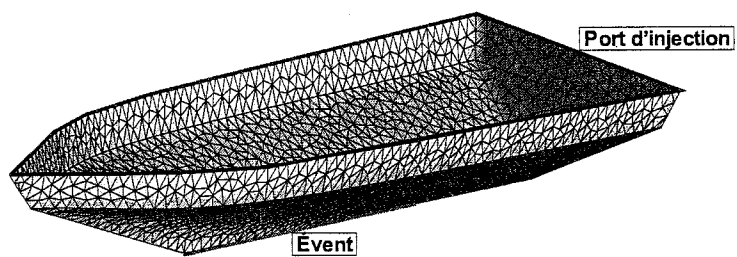
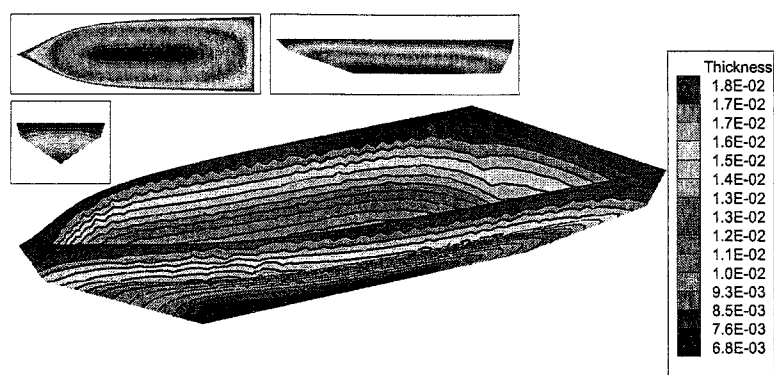


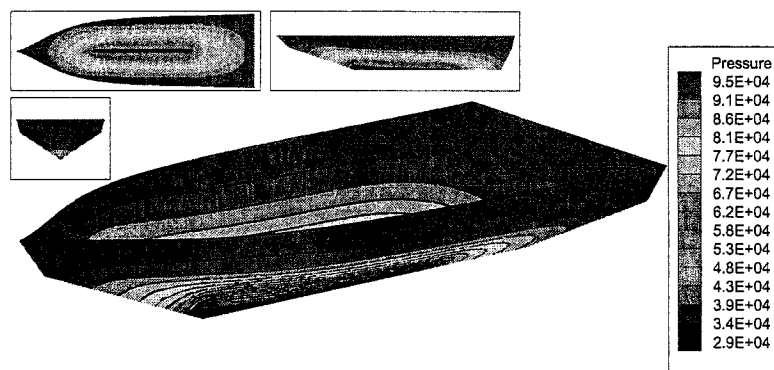
Figure 3.4 Exemple d'utilisation du code d'infusion sous film plastique : Maillage

Tableau 3.2 Paramètres utilisés pour obtenir les résultats de la Figure 3.5

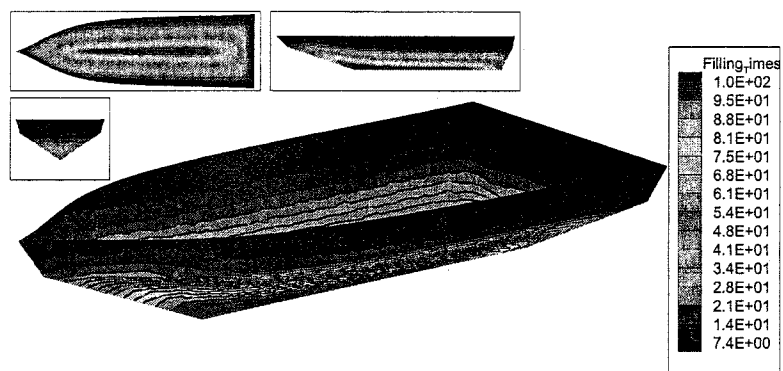
Paramètre	Valeur
Constante A de compression	$1,59 \cdot 10^7$
Constante B de compression	2,93
Constante de Kozeny	$1,17 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$
Densité superficielle sur densité volumique	$9,6 \cdot 10^{-4}$
Dimension	$2,12 \times 0,66 \times 0,3 \text{ m}$
Pression de vide	$0,28 \text{ MPa}$
Pression d'injection	$1,0 \text{ MPa}$
Pression extérieure	$1,0 \text{ MPa}$
Viscosité	$0,104 \text{ Pa} \cdot \text{s}$



(a) Épaisseur au temps final



(b) Pression au temps final



(c) Temps de remplissage

Figure 3.5 Exemple d'utilisation du code d'infusion sous film plastique : Résultats

3.3 Injection sous membrane élastique

La Figure 3.6 montre les résultats d'un remplissage sous membrane élastique. Les frontières de la cavité sont fixées à une hauteur de 9 *mm*. La pression absolue à l'entrée est de 3 *MPa*, la pression absolue du vide est de 0,28 *MPa* et la pression extérieure est de 1 *MPa*. Enfin, la pré-tension de la membrane est de 2,0 *MPa*. Contrairement à l'infusion sous film plastique, la déformation en un point du couvercle influence directement ses voisins. Initialement, la présence du vide comprime la cavité. Au fur et à mesure de l'avancée du front de résine, la cavité s'épaissit, même dans les zones sèches, favorisant l'écoulement au front de résine.

Tableau 3.3 Paramètres utilisés pour obtenir les résultats de la Figure 3.6

Paramètre	Valeur
Constante A de compression	$1,59 \cdot 10^7$
Constante B de compression	2,93
Constante de Kozeny	$1,17 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$
Dimension	$0,5 \times 0,5 \text{ m}$
Densité superficielle sur densité volumique	$9,6 \cdot 10^{-4}$
Épaisseur frontière de la cavité	9 <i>mm</i>
Pression de vide	0,28 <i>MPa</i>
Pression d'injection	3,0 <i>MPa</i>
Pression extérieure	1,0 <i>MPa</i>
Pré-tension	2,0 <i>MPa</i>
Viscosité	0,104 <i>Pa · s</i>

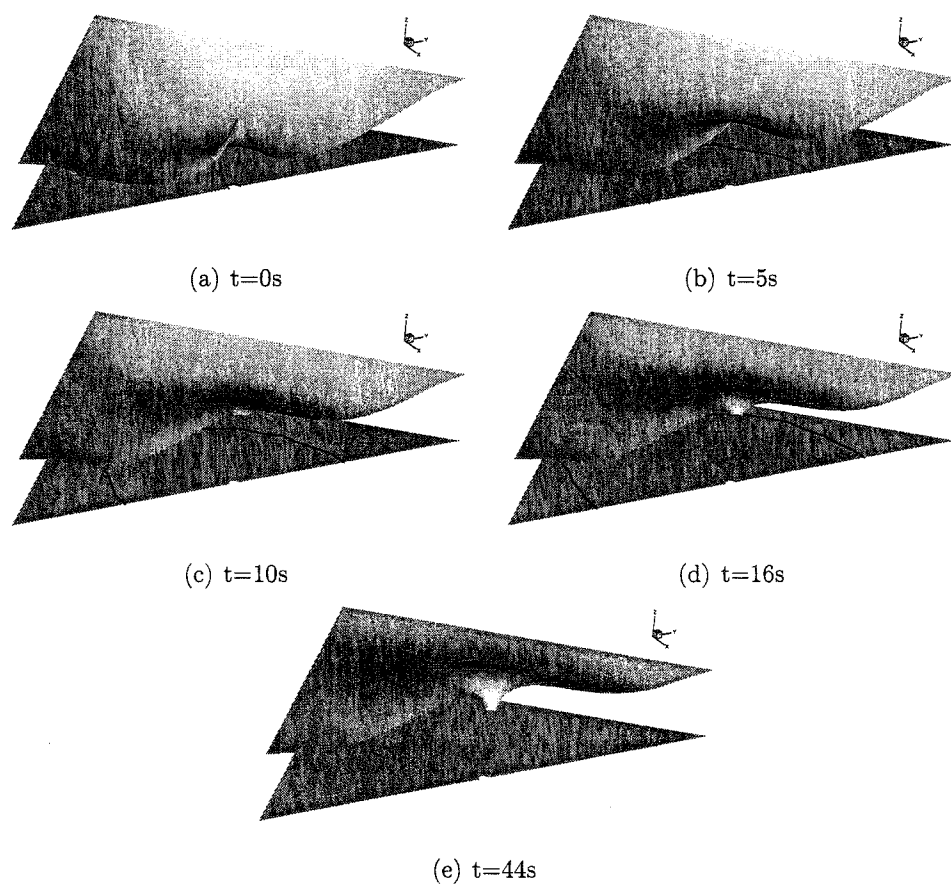


Figure 3.6 Exemple d'utilisation du code d'infusion sous membrane élastique : Résultats

3.4 Couvercle à un degré de déplacement en hauteur (C1DH)

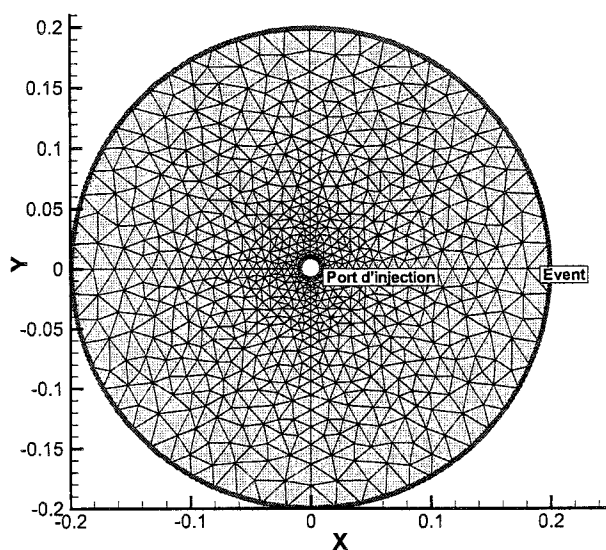
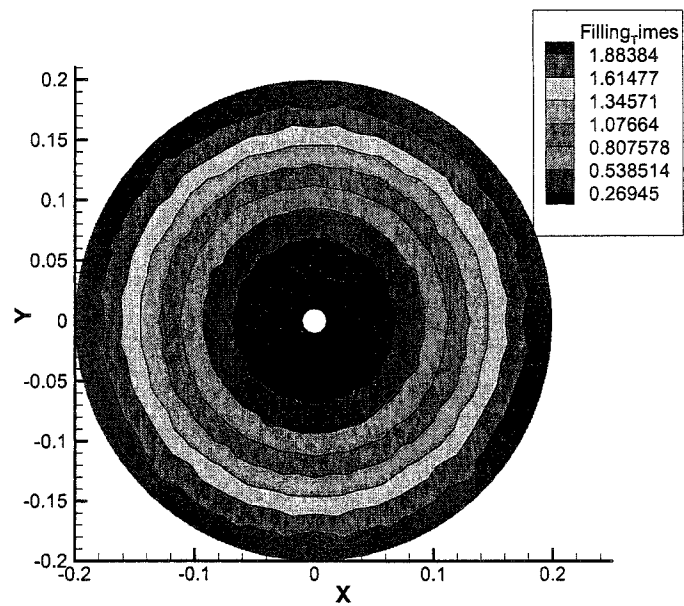
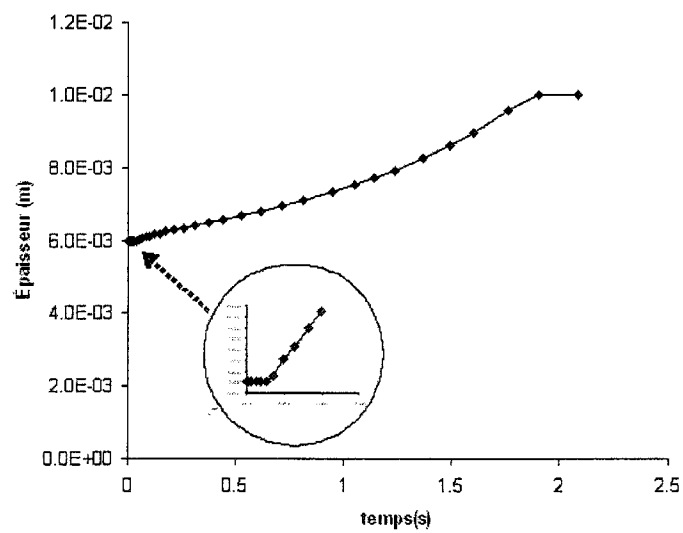


Figure 3.7 Exemple d'utilisation du code d'injection sous couvercle à un degré de déplacement en hauteur (C1DH) : Maillage

La Figure 3.7 montre un exemple d'injection sous couvercle à un degré de déplacement en hauteur (C1DH). Notez à la Figure 3.8a que le front de résine possède la même allure que son équivalent RTM. Effectivement, comme la hauteur de la cavité augmente également partout sur la pièce, l'allure du front est similaire, seuls les temps de passages sont différents. Dans le cas présent, le temps final d'injection est de 2,15 secondes. Pour injecter la même quantité de résine en RTM, un temps de 6,25 secondes serait nécessaire. Par conséquent, un jeu de 4 mm sur le couvercle en déplacement a diminué par un facteur 3 le temps final d'injection. Aussi il est possible de constater à la Figure 3.8b que la butée inférieure est de 6 mm tandis que la butée supérieure est de 10 mm.



(a) Temps de remplissage



(b) Épaisseur en fonction du temps

Figure 3.8 Exemple d'utilisation du code d'injection sous couvercle à un degré de déplacement en hauteur (C1DH) : Résultats

Tableau 3.4 Paramètres utilisés pour obtenir les résultats de la Figure 3.8

Paramètre	Valeur
Butée inférieure	6 <i>mm</i>
Butée supérieure	10 <i>mm</i>
Constante A de compression	$1,59 \cdot 10^7$
Constante B de compression	2,93
Constante de Kozeny	$1,17 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$
Densité superficielle sur densité volumique	$9,6 \cdot 10^{-4}$
Poids du moule	10 <i>kg</i>
Pression d'injection	5,0 <i>MPa</i>
Pression extérieure	1,0 <i>MPa</i>
Pression de vide	0,25 <i>MPa</i>
Rayon extérieur	0,40 <i>m</i>
Rayon intérieur	0,01 <i>m</i>
Viscosité	0,104 <i>Pa · s</i>

3.5 Comparaison VARI, Membrane Élastique et Couvercle à un degré de déplacement en hauteur

Comparons les trois procédés précédents sur une pièce à écoulement unidirectionnel. Les Figures 3.9 et 3.10 montrent l'épaisseur et la pression à la fin du remplissage. Respectivement, les temps de remplissage sont de 56 secondes, 129 secondes et 156 secondes. En RTM, la solution analytique du temps de remplissage est de 218 secondes.

Dans le cas du film plastique, la pression à l'entrée ne doit pas dépasser la pression atmosphérique. Si cette contrainte n'est pas respectée, un écoulement de type Stokes se développera au-dessus des fibres résultant en une pièce de moindre qualité. Les autres types de couvercle offrent la possibilité d'une pression d'injection plus grande réduisant ainsi le temps d'injection. Cependant, ces solutions sont plus coûteuses et parfois plus difficiles en pratique. Par conséquent, chacune de ces solutions a ses avantages et ses inconvénients. Le Tableau I.1 en annexe regroupe les plus importants.

Tableau 3.5 Paramètres utilisés pour obtenir les résultats des Figures 3.9 et 3.10

Paramètre	Valeur
Constante A de compression	$1,59 \cdot 10^7$
Constante B de compression	2,93
Constante de Kozeny	$1,17 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$
Densité superficielle sur densité volumique	$9,6 \cdot 10^{-4}$
Dimension	$0,3 \times 1,0 \text{ m}$
Pression de vide	$0,28 \text{ MPa}$
Pression d'injection	$1,0 \text{ MPa}$
Pression extérieure	$1,0 \text{ MPa}$
Viscosité	$0,104 \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Paramètres supplémentaires	
Membrane	
Épaisseur frontière de la cavité	6 mm
Pré-tension	50 kPa
C1HD	
Butée inférieure	6 mm
Poids du moule	50 kg

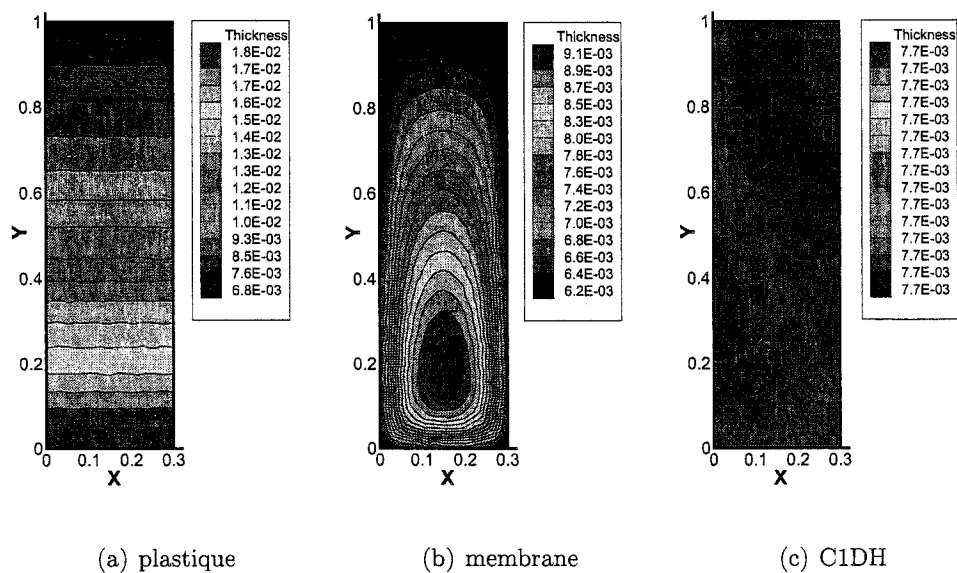


Figure 3.9 Comparaison des procédés : Épaisseurs de la cavité à la fin du remplissage

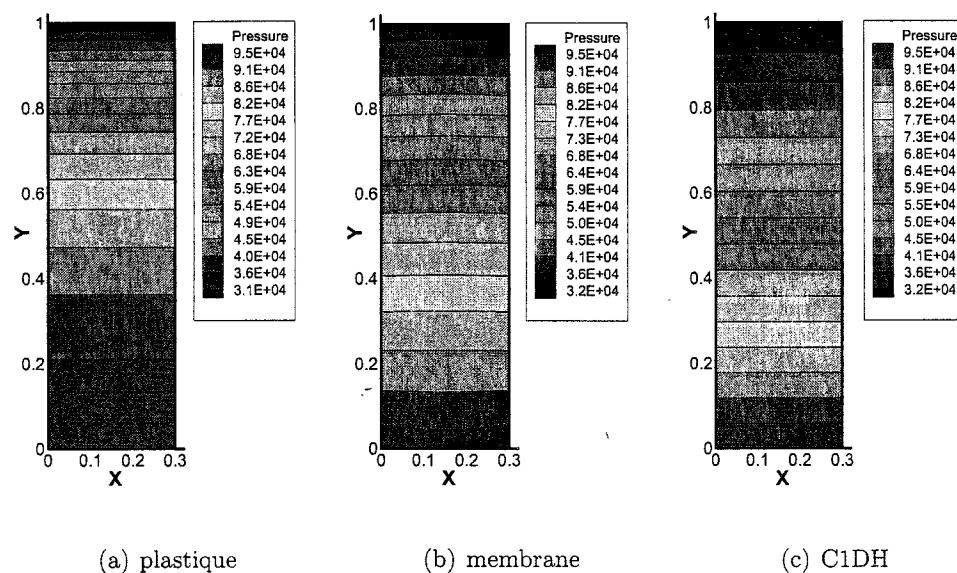


Figure 3.10 Comparaison des procédés : Pression de la résine à l'intérieur de la cavité à la fin du remplissage

3.6 Couvercle solide élastique linéaire

Dans cette section, nous étudierons l'effet de deux configurations de stabilisateurs du couvercle du moule sur une pièce rectangulaire de $0,8 \times 0,5 m$. Le premier, Figure 3.11, présente un soutien en forme de croix "X". Le second, Figure 3.12, présente un soutien en forme de double dagues "‡".

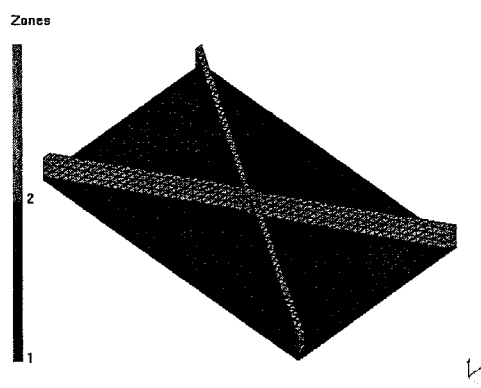


Figure 3.11 Exemple d'utilisation du code d'injection sous moule rigide : Maillage "X"

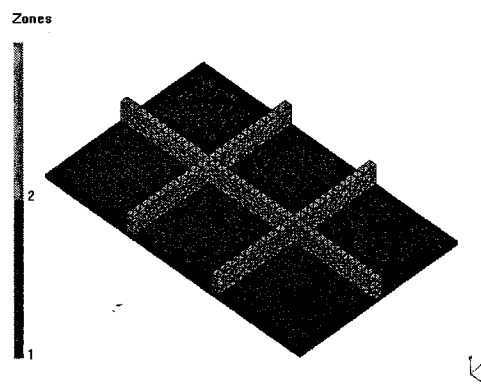


Figure 3.12 Exemple d'utilisation du code d'injection sous moule rigide : Maillage "‡"

La zone 1 (peau) est composée d'un matériau flexible : module d'Young 0.7 GPa , tandis que la zone 2 (soutien) est en métal : module d'Young 190 GPa . Les deux

zones ont un module de Poisson de 0.3. La hauteur de la cavité est fixée au bord à 5 mm et un gradient de pression d'injection de 1 MPa est utilisé.

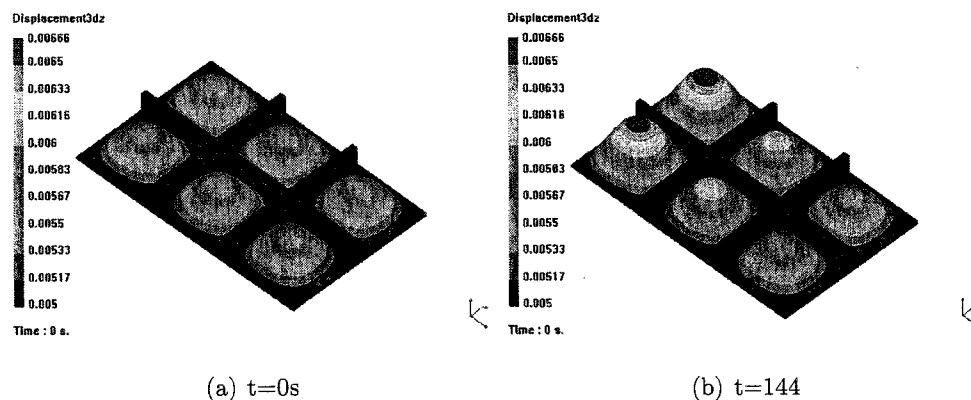


Figure 3.13 Exemple d'utilisation du code d'injection sous moule rigide : Maillage " ‡ " déformé

Les Figures 3.13, 3.14 et 3.15 montrent les résultats de simulations obtenus. La déformation des maillages a été amplifiée pour fin de visualisation. Les épaisseurs maximales de la cavité sont respectivement de 7,5 mm et 6,7 mm pour le maillage croix et le maillage double dagues. En terme de déformation, le maillage avec soutien double dagues est légèrement plus stable. Cependant, en terme de temps de remplissage, la cavité sous le maillage en croix est remplie plus facilement (135 secondes comparative-ment à 144 secondes). Ceci s'explique par l'augmentation de la perméabilité suivant l'épaisseur de la cavité. Un moule souple aura tendance à être rempli plus rapidement qu'un moule rigide. Il est donc possible d'optimiser, par un certain nombre de simulations, l'injection en permettant au couvercle un maximum de flexibilité tout en respectant les contraintes en déformation.

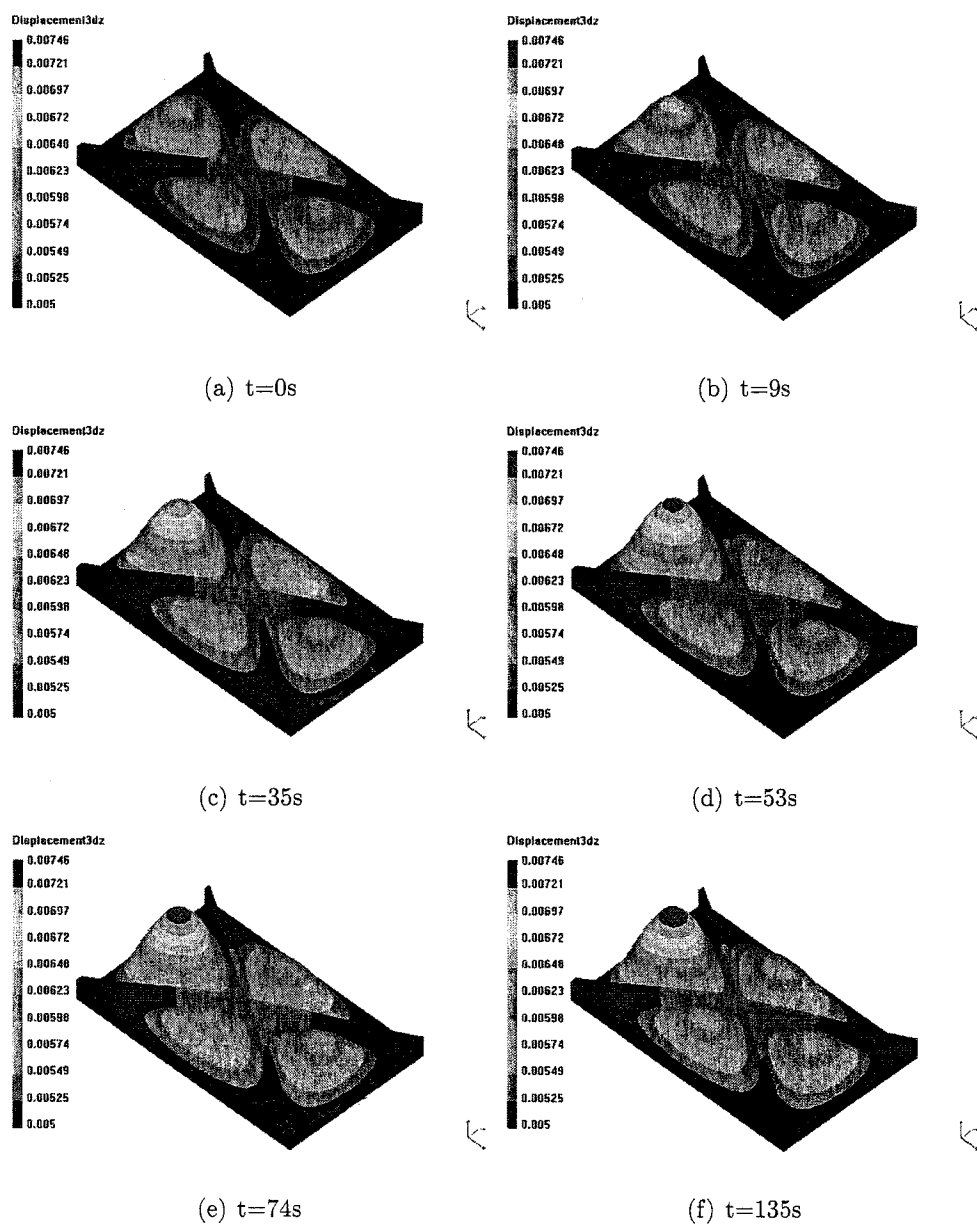


Figure 3.14 Exemple d'utilisation du code d'injection sous moule rigide : Maillage "X" déformé

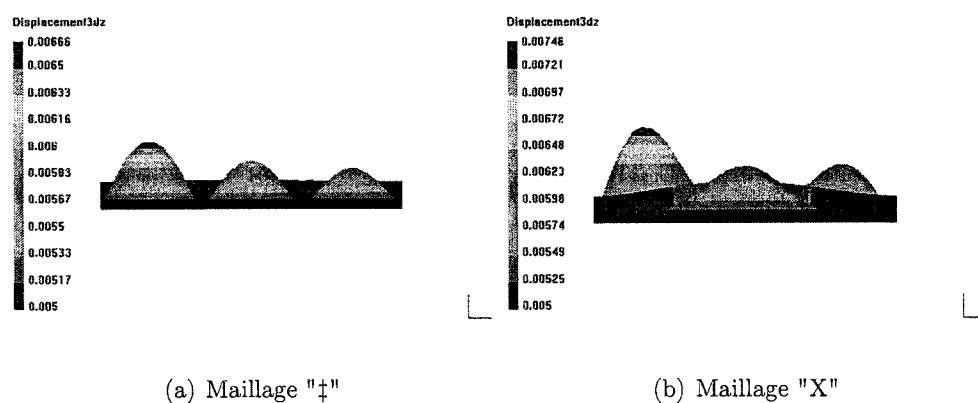


Figure 3.15 Exemples d'utilisation du code d'injection sous moule rigide : Comparaison des maillages déformés au temps final

CHAPITRE 4

REEMPLISSAGE RAPIDE : THÉORIE ET APPLICATIONS

4.1 Méthode de remplissage rapide

En considérant le milieu complètement saturé et la phase solide déformable, nous avons posé l'équation de continuité sous la forme :

$$\mathbf{div}(-\vec{v}_D) = \mathbf{div}(\vec{v}_s) \quad (4.1)$$

Faisons l'hypothèse inverse à savoir : milieu partiellement saturé et solide incompressible. Chacun des pores peut alors être dans état partiellement saturé. Sous sa forme différentielle, l'équation de continuité prend la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.2)$$

où ρ est la masse volumique et $\vec{v}$ est la vitesse de l'écoulement. Pour la phase fluide, posons :

$$\rho = \rho_f \phi s \quad (4.3)$$

où ρ_f est la densité (constante) du fluide, ϕ la porosité et s un coefficient de saturation variant entre 0 et 1. Ce coefficient vaut un quand le point est saturé. Il est nul aux endroits secs [28]. L'équation 4.2 revient à :

$$\frac{\partial(\phi s)}{\partial t} + \mathbf{div}(\phi s \vec{v}) = 0 \quad (4.4)$$

Puisqu'il n'y a pas de déformation du solide, la porosité ϕ reste constante dans le temps. Ceci entraîne :

$$\phi \frac{\partial(s)}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}_D) = 0 \quad (4.5)$$

où $\vec{v}_D$ est la vitesse de Darcy. Rappelons que la vitesse de Darcy est reliée à la vitesse absolue par la relation $\vec{v}_D = \phi s \vec{v}$. En introduisant la loi de Darcy dans l'équation 4.5, l'équation qui gouverne un écoulement partiellement saturé en milieu poreux prend alors la forme finale suivante :

$$\text{div}\left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla p\right) = \phi \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.6)$$

Cette équation est similaire à l'équation du CRTM. En effet, les deux équations proviennent de la même équation de continuité dans laquelle a été introduite la loi de Darcy. La seule différence réside dans les hypothèses initiales. Dans le premier cas, l'hypothèse de saturation complète avec déformation du solide est faite. Dans le second cas, une hypothèse de saturation partielle sans déformation du solide est considérée.

L'équation du procédé CRTM fait intervenir un terme source proportionnel à :

$$\propto \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial(\ln h)}{\partial t} \quad (4.7)$$

tandis que l'équation de saturation fait intervenir un terme proportionnel à :

$$\propto \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.8)$$

L'équation 4.6 est plus facile à traiter numériquement que l'équation du CRTM. Nous pouvons simplement réutiliser le code qui a été développé précédemment sans modification majeure.

L'équation 4.6 possède un autre avantage intéressant. En effet, Voller et Chen [42] ont démontré, sous certaines conditions, l'existence et unicité de la solution dans le temps. Lorsque le fluide est Newtonien et que la pression capillaire est négligeable, l'équation 4.6 possède une solution unique. Ce fait est extrêmement intéressant et entraîne les auteurs à proposer, dans le même article, une méthode dite "*One-Shot*" pour prédire le temps de remplissage et le dernier point à être rempli.

Introduisant la fraction macroscopique F de liquide à l'intérieur d'un volume de contrôle :

$$F = \frac{1}{A_{por}} \int_{A_{por}} \phi dA \quad (4.9)$$

Voller propose d'utiliser un schéma linéaire pour réduire le terme source de l'équation 4.6 sous la forme suivante :

$$\frac{\partial s}{\partial t} \equiv \frac{F_1 - F_0}{\Delta t} \quad (4.10)$$

L'équation 4.6 revient à :

$$\text{div} \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla P \right) = \left(\frac{F_1 - F_0}{\Delta t} \right) \quad (4.11)$$

Cette équation est ensuite approximée par une formulation volume de contrôle :

$$[A] \{P\} = \frac{1}{\Delta t} \{F_0 - F_1\} + \{B\} \quad (4.12)$$

où A est la matrice des contributions en pression, et B la contribution des conditions frontières. Puis il remarque qu'en raison de l'existence et de l'unicité de la solution, il est possible de résoudre ce système en une seule itération dans le temps. En fait, lorsqu'un seul Δt est considéré pour remplir le moule, $\Delta t = t_{fill}$. Comme le moule est initialement vide et après remplissage complètement plein, $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. Ce système peut alors être résolu dans le temps en deux étapes.

1. Il s'agit d'abord d'inverser :

$$[A] \{P_E\} = -\{1\} \quad (4.13a)$$

2. Puis de résoudre le système suivant :

$$[A] \{P_B\} = \{B\} \quad (4.13b)$$

Le temps final correspondra alors à

$$t_f = \frac{1}{\min \left[-\frac{P_B}{P_E} \right]_{i=1..N}} \quad (4.14)$$

où N est le nombre de volumes de contrôle choisi pour la discrétisation. La mise en oeuvre tridimensionnelle de cette approche reste difficile. Un deuxième article [6] traite cette difficulté. À l'encontre de Chen et al. qui utilisent la méthode des volumes de contrôle, nous avons opté pour la résolution par éléments finis du système 4.11. Par conséquent, les systèmes 4.13a et 4.13b ont eux aussi été reformulés.

4.1.1 Formulation éléments finis

Soit w une fonction test, multiplions l'équation 4.11 par cette fonction test et intégrons le terme de diffusion par parties :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla P \nabla w \right) d\Omega = \oint_{\Gamma} \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla P w \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{F_1 - F_0}{\Delta t} w \right) d\Omega \quad (4.15)$$

En définissant la porosité constante par élément et en appliquant le même raisonnement que Voller, le système élémentaire s'écrit :

$$\int_{\Omega^K} \left(\frac{\mathbf{K}^K}{\mu^K} \nabla P^K \nabla w^K \right) d\Omega^K = \oint_{\Gamma^K} \left(\frac{\mathbf{K}^K}{\mu^K} \nabla P^K w^K \right) d\Gamma^K - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega^K} w^K d\Omega^K \quad (4.16)$$

Il est encore une fois possible de résoudre ce système dans le temps en le divisant en deux :

$$\int_{\Omega^K} \left(\frac{\mathbf{K}^K}{\mu^K} \nabla P_E^K \nabla w^K \right) d\Omega^K = \int_{\Omega^K} -w^K d\Omega^K \quad (4.17a)$$

$$\int_{\Omega^K} \left(\frac{\mathbf{K}^K}{\mu^K} \nabla P_B^K \nabla w^K \right) d\Omega^K = \oint_{\Gamma^K} \left(\frac{\mathbf{K}^K}{\mu^K} \nabla P_B^K w^K \right) d\Gamma^K \quad (4.17b)$$

L'équation pour le temps final est identique à l'équation 4.14, mais cette fois, la variable N est égale au nombre de degrés de liberté choisi pour la discrétisation.

Cette méthode possède un grand avantage par rapport aux méthodes traditionnelles de remplissage. La solution nécessite l'inversion de seulement deux systèmes linéaires. Par conséquent, plus les maillages sont fins, plus la différence en temps de résolution est grande. Sur un Pentium 1,6GHz, un système de 10000 éléments prend quelques secondes à résoudre au lieu d'une heure par une approche conventionnelle. Un tel gain ouvre donc la porte sur de nombreuses méthodes qui auparavant étaient simplement trop onéreuses en temps de calcul comme par exemple les algorithmes génétiques et la méthode Monte-Carlo.

Cependant, cette méthode rapide de résolution comporte aussi ses inconvénients. Elle n'est applicable qu'au cas isotherme. Il est difficile d'imposer a priori la position des événements. Aussi, si cette méthode permet de connaître exactement les positions et les temps finaux, il en est autrement des positions et des temps de passage. Sur ce point, la méthode rapide ne donne qu'une solution grossière. En fait, les temps de passages moyens sont évalués par rapport à la durée totale du remplissage. Pour les connaître exactement, il est nécessaire de simuler le remplissage par petits incréments de temps. Cet inconvénient peut cependant être minimisé en optimisant la position des ports d'injection et des événements à l'aide de la méthode rapide et en appliquant la méthode traditionnelle uniquement à la solution finale.

Ceci étant, procédons à l'analyse par quelques exemples :

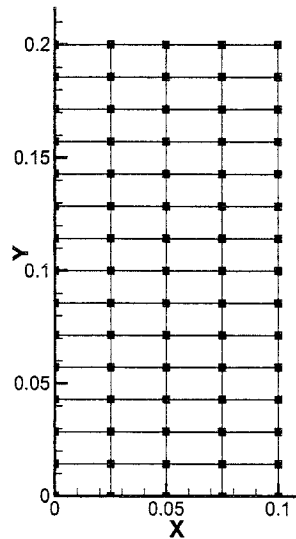


Figure 4.1 Maillage pour la simulation rapide d'écoulement 1D

La Figure 4.2 montre les résultats obtenus de pression pour un écoulement unidirectionnel. Le temps final obtenu par l'algorithme de remplissage rapide concorde parfaitement avec la solution analytique (Tableau 4.2).

La Figure 4.2a montre une pression constante de 1 MPa puisque la seule condition imposée sur le système est une pression d'injection de 1 MPa . Ceci démontre bien la proportionnalité entre le temps d'injection et la pression. Notez que la valeur de la pression P_B ne dépend en aucune façon de la perméabilité, de la porosité ou de la viscosité, ni même de la forme du moule. Par conséquent, ces autres facteurs doivent être contenus dans la solution de la Figure 4.2b. Notez que la condition en pression ne s'y trouve pas puisqu'elle est déjà prise en compte dans la Figure 4.2a.

La valeur minimale de P_E nous donne une idée de "l'injectabilité" du moule. Mais

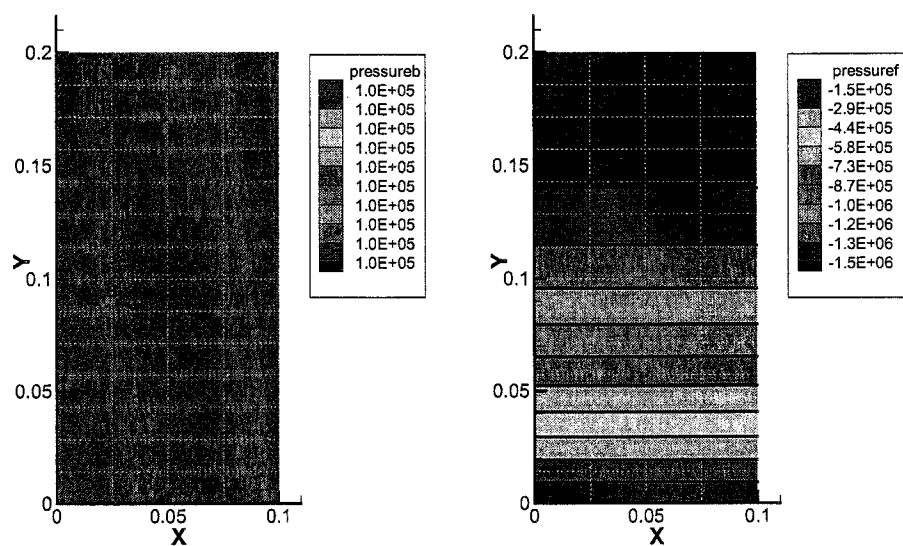
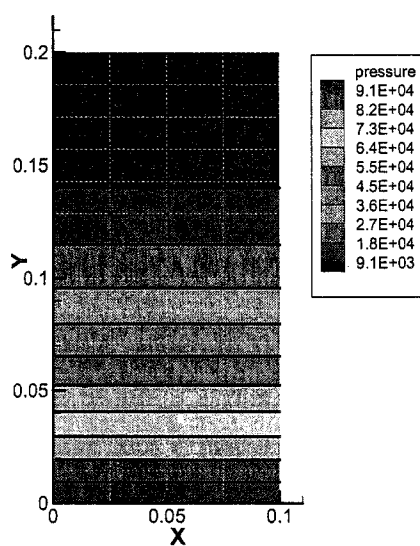
(a) P_B (b) P_E (c) $P = \frac{P_E}{\alpha} + P_B$

Figure 4.2 Résultats en pression de la simulation rapide sur le maillage de la Figure 4.1

Tableau 4.1 Paramètres utilisés pour obtenir les résultats de la Figure 4.2

Paramètre	Valeur
Dimension de la pièce	$0,1 \times 0,2 \text{ m}$
Épaisseur	5 mm
Perméabilité	$1 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$
Porosité	0,8
Pression relative d'injection	1 MPa
Viscosité	$0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Tableau 4.2 Comparaison des temps finaux de la simulation Figure 4.2

Temps final analytique	16s
Temps final numérique	1,600000E+001s

qu'est-ce que l'injectabilité ? On définit l'injectabilité (MFC¹) comme étant :

$$MFC = \min(P_E) \quad (4.18)$$

L'injectabilité représente la facilité avec laquelle un moule se remplit. Plus la valeur de MFC sera grande, plus il sera facile de remplir le moule. En effet, ce coefficient, qui valorise le design du moule, ne dépend pas de la condition de pression d'injection. Il permet donc de chiffrer l'effort qui doit être fourni pour remplir un moule.

Afin de démontrer l'indépendance de coefficient d'injectabilité par rapport aux conditions en pression, analysons le cas de deux simulations sur le moule de la Figure 4.3, moule qui comporte deux ports d'injection. Pour la simulation 1, les deux ports d'injection sont d'égale pression. Pour la simulation 2, la pression au port d'injection 2 est deux fois plus petite que la pression au port d'injection 1. En regardant le

¹Mold filling Coefficient

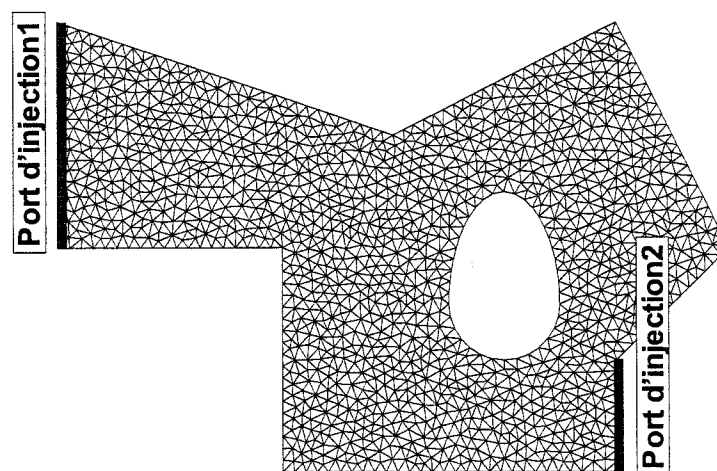


Figure 4.3 Maillage pour la simulation rapide d'une injection à deux entrées

Tableau 4.3 Paramètres utilisés pour obtenir les résultats des Figures 4.4 et 4.5

Paramètre	Valeur
Viscosité	$0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Perméabilité	$1\cdot 10^{-9} \text{ m}^2$
Porosité	0,5
SIMULATION 1 (Figure 4.4)	
Pression d'injection port 1	$1,0 \text{ MPa}$
Pression d'injection port 2	$1,0 \text{ MPa}$
SIMULATION 2 (Figure 4.5)	
Pression d'injection port 1	$1,0 \text{ MPa}$
Pression d'injection port 2	$0,5 \text{ MPa}$

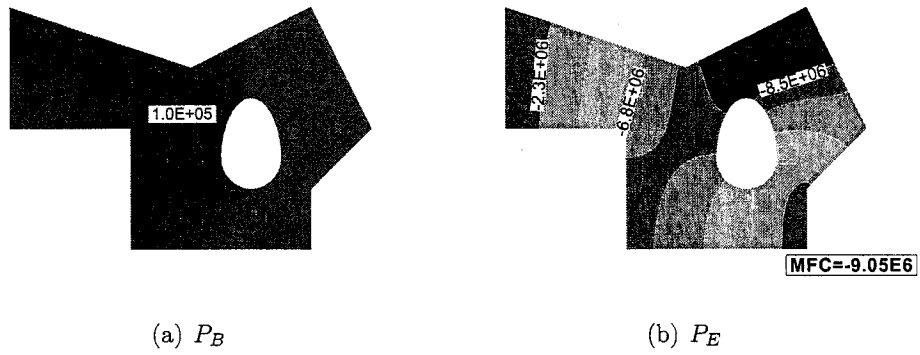


Figure 4.4 Résultats pour la simulation 1 avec $P_{inj\ 1} = P_{inj\ 2}$

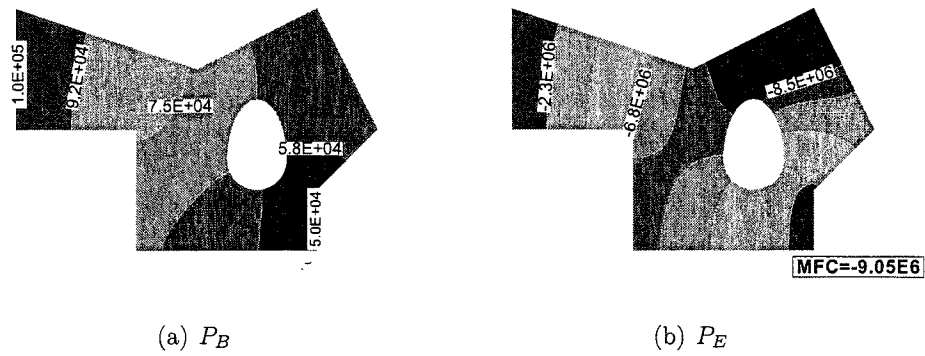


Figure 4.5 Résultats pour la simulation 2 avec $P_{inj\ 1} = P_{inj\ 2}/2$

Tableau 4.4, il est possible de constater que les conditions en pression affectent uniquement le temps final d'injection. En effet, on voit bien sur les Figures 4.4 et 4.5 que les champs scalaires P_E sont identiques pour les deux simulations contrairement aux champs scalaires P_B . Concluons alors que le coefficient d'injectabilité MFC valorise bien le design d'un moule indépendamment des conditions appliquées en pression.

Tableau 4.4 Comparaison entre les simulations 1 et 2 (Figures 4.4 et 4.5)

	Simulation 1	Simulation 2
Temps final d'injection	90, 5s	141, 3s
MFC simulation 1	$-9,05 \cdot 10^6 s$	$-9,05 \cdot 10^6 s$

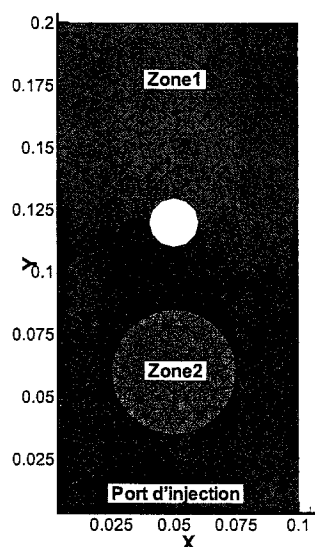


Figure 4.6 Maillage pour la simulation rapide d'une injection 2D complexe

Analysons maintenant l'effet de la perméabilité sur le coefficient d'injectabilité. La zone 1 de la Figure 4.6 possède une perméabilité de $10^{-10} m^2$ et la zone 2 une perméabilité de $10^{-9} m^2$. Pour le reste, les paramètres sont identiques à ceux du Tableau 4.1. Sur la Figure 4.7, le maillage a été déformé proportionnellement à P_E . Deux phénomènes sont constatés. Premièrement, la pente dans la zone de plus grande perméabilité

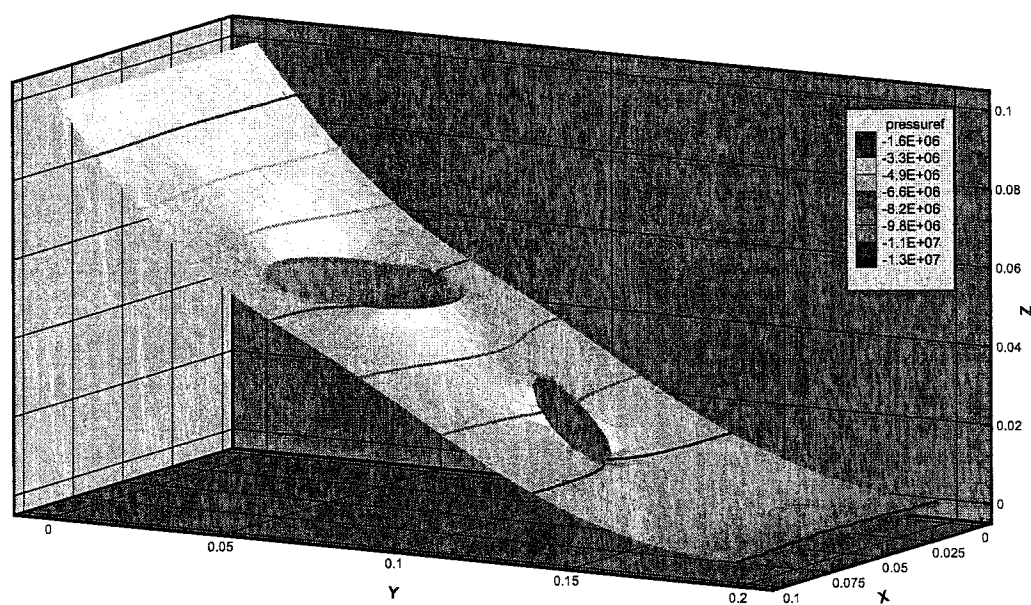


Figure 4.7 Vue de P_E pour la simulation de la Figure 4.6

est moins accentuée. Effectivement, plus la perméabilité est élevée, plus rapidement se déroulera l'injection. Deuxièmement, la pente s'accroît dans les zones où l'écoulement est de type radial divergent, elle est constante dans les zones de type ligne et elle s'estompe dans les zones de type radial convergent. Il est donc possible de repérer immédiatement les endroits susceptibles de poser des problèmes pendant l'injection.

La méthode rapide de Voller permet donc d'obtenir très rapidement un très grand nombre d'informations sur l'étape d'injection.

Les Figures 4.8 et 4.9 montrent que l'algorithme actuellement utilisé fonctionne tout aussi bien pour une pièce 3D.

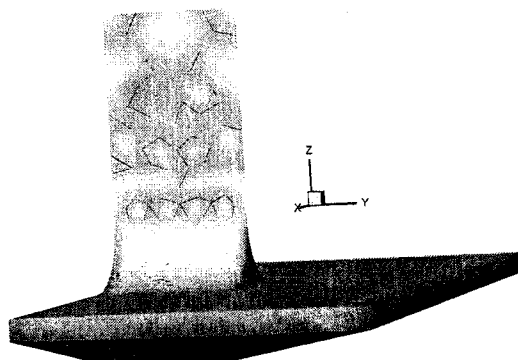


Figure 4.8 Maillage 3D pour une simulation rapide d'injection

4.2 Variabilité de la perméabilité

Plusieurs méthodes ont été proposées pour caractériser expérimentalement la perméabilité des renforts [3, 7, 18, 22, 30]. La valeur de la perméabilité mesurée est en général une valeur moyenne. D'un essai à l'autre, plusieurs facteurs peuvent influencer la valeur mesurée de la perméabilité. Par exemple, le taux de fibres, voire même

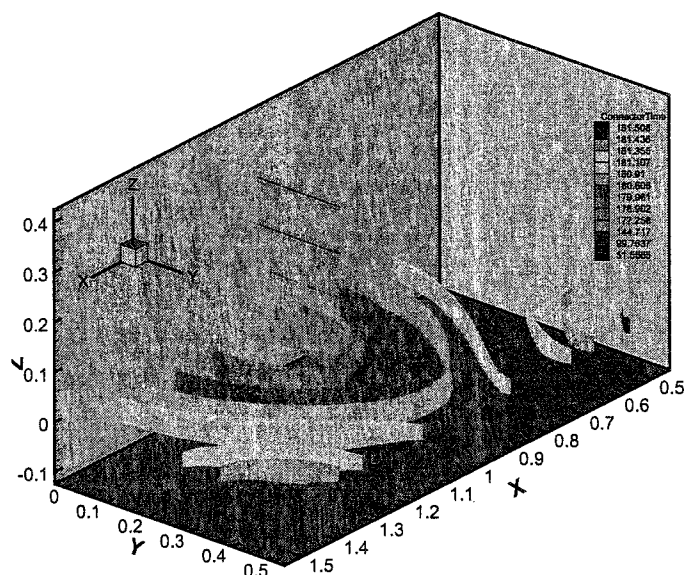


Figure 4.9 Vue de l'inverse de alpha pour la simulation de la Figure 4.8

l'opérateur, peuvent avoir une influence sur la mesure. Pan et al [30] ont publié sur le caractère statistique de la perméabilité et en ont souligné l'importance. Plus récemment Hoes et al. [22] ont proposé un montage qui permet d'évaluer la moyenne et la variance de la perméabilité. La Figure 4.10 est tirée de cet article. Il s'agit du résultat de 86 essais effectués sur le Syncoglas R420, un renfort composé de fibres de verre tissées à plat ayant une densité de surface de 420 g/m^2 . La Figure 4.10 illustre bien la distribution de la perméabilité suivant le nombre d'observations. Dans les logiciels de simulation, il est habituel d'utiliser une valeur moyenne mesurée. Cependant dans l'industrie, en raison de la complexité des moules voire des tissus utilisés, la variabilité de la perméabilité a parfois des conséquences néfastes. Il s'avère donc primordial de comprendre son influence.

À l'aide de la méthode rapide de remplissage, nous avons créé un programme de simulation Monte-Carlo. L'utilisateur fournit la valeur moyenne ainsi que l'écart type

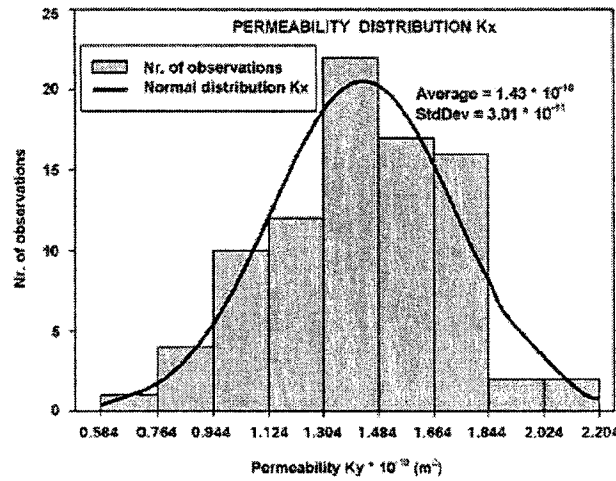


Figure 4.10 Distribution de la perméabilité K_x pour le Syncoglas R420

de la perméabilité pour chacun des matériaux considérés. Ensuite, une série de simulations rapides est exécutée. Pour chaque essai, la perméabilité locale de chacun des matériaux est choisie selon une loi normale. Présentement, la loi normale est générée par la formule suivante :

$$K = K_{moy} \cdot \left(1 + K_{std} \cdot \left(-6 + \sum_{n=1}^6 \text{rand}(0, 1) \right) \right) \quad (4.19)$$

Suite à chacune des simulations, le temps ainsi que les derniers points à être remplis sont notés.

Les Figures 4.11 et 4.12 donnent un exemple de ce genre de simulation. Les valeurs du Tableau 4.5 ont été choisies aléatoirement pour tenter de représenter plusieurs circonstances qui pourraient survenir sur une pièce réelle. L'injection démarre au port central de la zone 1. La zone 1 est un canal d'écoulement, qui possède une plus grande perméabilité, mais est aussi une zone dans laquelle la perméabilité est moins certaine. Les zones 2 et 3 sont des régions intermédiaires. En raison de la grande courbure dans ces zones, le drapage n'est jamais identique. En revanche la perméabilité de la zone

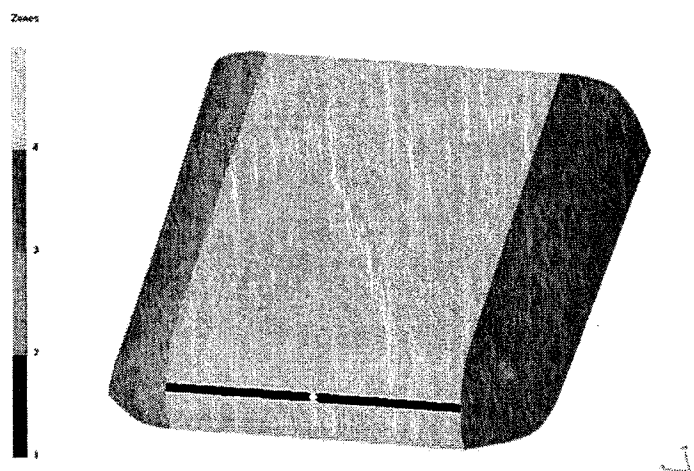


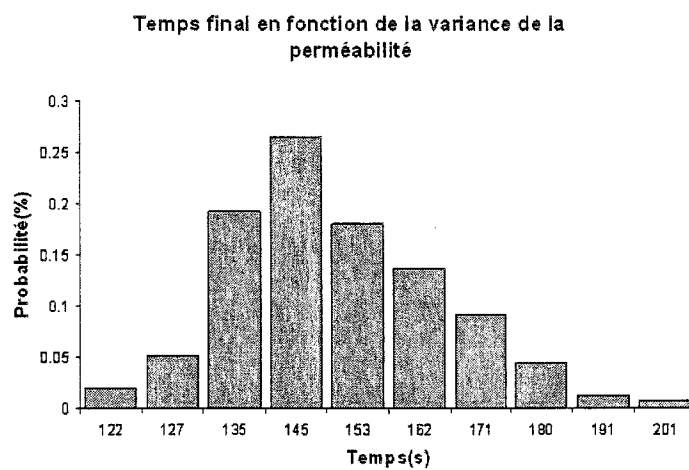
Figure 4.11 Maillage pour tester la variabilité de la perméabilité

Tableau 4.5 Paramètres utilisés de perméabilité

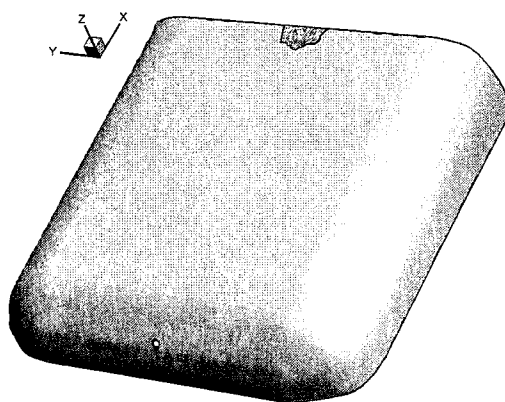
Zone	Moyenne	Écart Type
Zone1	1E-08	3,00E-09
Zone2	5E-09	1,25E-09
Zone3	5E-09	1,25E-09
Zone4	1E-10	2,00E-12

4 est connue avec une grande précision.

La Figure 4.12 est le résultat de 250 simulations. Il est possible de constater que le point final de remplissage varie peu. Le temps le plus long fut 3min21s et le plus court 2min2s. Pour environ 75% des essais, le temps final d'injection s'est situé entre 135s et 170s soit, entre 2min15s à 2min50s. Sur une telle pièce, un ingénieur devrait alors s'assurer que la résine ne polymérise pas avant environ 3 minutes.



(a) Distribution des temps finaux



(b) Distribution des points finaux d'injection

Figure 4.12 Résultat de la simulation de Monte-Carlo qui prend en compte la variance de la perméabilité

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons décrit trois grandes familles de procédé d'injection sous renfort. Le moulage par transfert de résine (RTM) est un procédé d'injection sous moule rigide. La résine est poussée à travers le renfort et aucune déformation du moule n'est possible. Cette méthode est fiable et robuste, mais possède des limitations. L'injection-compression (CRTM) répond au problème causé par des pièces à haut taux de fibres. Tout comme le RTM, le CRTM comporte aussi une phase d'injection sous moule rigide. Cependant, pour faciliter l'injection de pièces à haut taux de fibres, deux changements sont proposés. Le premier étant de surélever légèrement la cavité durant l'injection, le second étant d'utiliser une phase active de compression sur la cavité. Par conséquent, la perméabilité est optimisée durant l'injection et le gradient de pression au front est considérablement augmenté par la compression. Une variante du CRTM nommée injection-compression articulée (ACRTM) propose de diviser le couvercle en plusieurs segments, ceci dans le but de minimiser l'effort de compression. L'infusion sous film plastique (VARI) répond au problème du coût des moules pour les pièces de grandes tailles. Cette fois, le couvercle rigide est remplacé par une pellicule plastique. Pour rendre l'opération possible, un vide est établi dans la cavité, ce qui maintient la pellicule en place et permet l'infusion de la résine. Suivant le même principe, la pellicule plastique peut être remplacée par une membrane élastique. La pré-tension initiale sur la membrane complique l'installation, mais permet d'augmenter la pression au port d'injection. Enfin poursuivant dans le même ordre d'idées, la membrane élastique peut-être remplacée par un couvercle semi-rigide pour arriver au RTMlight. En résumé, partant du procédé RTM, plusieurs améliorations peuvent être obtenues par l'utilisation d'un couvercle mobile. Même le simple fait de relâcher légèrement le couvercle améliore les temps d'injection².

²Procédé C1HD, voir section 3.4

Des modèles numériques, fondés sur la conservation de la masse et l'équation de Darcy, ont été proposés afin d'analyser de plus près les procédés sous couvercle mobile. Aussi, un algorithme rapide de résolution a été mis au point pour prédire la position finale et le temps total d'injection. À partir de cette algorithme, nous avons défini un nouveau coefficient d'injectabilité (MFC) permettant de comparer différentes conceptions de moules. Finalement, l'algorithme rapide de remplissage nous a permis d'analyser les effets de la variance de la perméabilité sur une pièce à l'aide de la méthode Monté-Carlo.

Toutefois, tous les modèles que nous avons démontrés sont fondés sur les hypothèses de l'équation de Darcy qui peut s'avérer erronée pour de grandes déformations du couvercle. En effet, il est possible qu'il se forme un espace entre les fibres et le couvercle de façon à permettre en peau un écoulement de type Stokes. Pour comprendre ce phénomène, il faudra donc coupler l'écoulement de Stokes avec celui de Darcy. Aussi, il serait intéressant d'adapter les modèles pour injecter des pièces épaisses tridimensionnelles. Ceci permettrait de simuler l'écoulement dans les renforts à empilements de type sandwich (plusieurs flux indépendants dans l'épaisseur). Enfin le concept de saturation partielle des fibres, tel qu'abordé par l'algorithme rapide de remplissage, jouera probablement un rôle clé dans la modélisation appropriée de certains phénomènes.

RÉFÉRENCES

- [1] BEAR, J. (1972). *Dynamics of fluid in porous media*. Environmental Science Series. American Elsevier. 764 pages.
- [2] BIOT, M. (1941), General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 12 :155–164.
- [3] BREARD, J., (1997). *Matériaux composites à matrice polymère : Modélisation numérique de la phase de remplissage du procédé RTM et détermination expérimentale de la perméabilité d'un renfort fibreux*. PhD thesis, Université du Havre.
- [4] BRINKMAN, H. (1947), A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Applied Science Research*, 1 :27–41.
- [5] CHEN, B., LANG, E. J., et CHOU, T.-W. (2001), Experimental and theoretical studies of fabric compaction behavior in resin transfer molding. *Materials science and engineering*, 317 :188–196.
- [6] CHEN, Y. et VOLLER, V. (1997), Prediction of filling time and vent locations for resin transfer molds. *Journal of Composite Materials*, 31(11) :1141–1161.
- [7] CHIBANI, M., (1990). *Modélisation du procédé de moulage par transfert de résine*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal.
- [8] CHOI, J. H. et DHARAN, C. (2002), Enhancement of resin transfer molding using articulated tooling. *Polymer composites*, 23 :674–681.
- [9] CHOI, J. et DHARAN, C. (2002), Mold fill time and void reduction in resin transfer molding achieved by articulated tooling. *Journal of composite materials*, 36 :2267–2285.
- [10] CORREIA, N., RAGONDET, A., ROBITAILLE, F., LONG, A., et RUDD, C. Modelling the vacuum infusion of composite materials. 8 pages.
- [11] COUSSY, O. (1991). *Mécanique des milieux poreux*. Édition Technip. 437 pages.

- [12] DARCY, H. (1856). *Les fontaines publics de la ville de Dijon*. Dalmont. "<http://biosystems.okstate.edu/darcy/French/index.htm>".
- [13] DE BOER, R. (2000). *Theory of Porous Media : Highlights in Historical Development and Current State*. Springer-Verlag. 618 pages.
- [14] FARINA, A. (1997), Flow in deformable porous media : Modelling and simulations of compressin moulding process. *Mathl. Compute. Modelling*, 26 :1–15.
- [15] FERLAND, P. (1994). Simulation numérique non isotherme du procédé de moulage par transfert de résine. Master's thesis, École Polytechnique de Montréal.
- [16] FERLAND, P., GUITTARD, D., et TROCHU, F. (1994), Concurrent methods for permeability measurement in resin transfer molding. *Polymer composites*, 17 :149–158.
- [17] GAUVIN, R., LEMEEN, Y., CLERK, P., et TROCHU, F. (1994), Compaction and creep behavior of glass reinforcements for liquid composites molding. *10th ASM/ESD Advanced composites conference*, pages 357–367.
- [18] GAUVIN, R., TROCHU, F., LEMENN, Y., et DIALLO, L. (1996), Permeability measurement and flow simulation through fiber reinforcement. *Polym. Compos*, 17(1) :34–42.
- [19] GREEN, P., (1959). U.K. Patent Office. Pat No. 944955.
- [20] HAMMAMI, A., (1996). *Étude expérimentale et modélisations des perturbations de l'écoulement pour le procédé de moulage par transfert de résine*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal.
- [21] HAWTHORNE, C., (2003). Carbon fiber future. "http://www.metropolismag.com/html/content_0203/fib/index.html".
- [22] HOES, K., DINESCU, D., SOL, H., VANHEULE, M., PARNAS, R. S., LUO, Y., et VERPOEST, I. (2002), New set-up for measurement of permeability properties of fibrous reinforcements for rtm. *Composites Part A : applied science and manufacturing*, 33 :959–969.

- [23] JAYNE, B. et SUDDARTH, S. (1966), Matrix-tensor mathematics in orthotropic elasticity. *ASTM STP 405*, page 39.
- [24] JOUBAUD, L., ACHIM, V., et TROCHU, F. Numerical simulation of resin infusion and reinforcement consolidation under flexible cover. 16 pages.
- [25] LAYTON, W. J., SCHIEWECK, F., et YOTOV, I. Coupling fluid flow with porous media flow. 31 pages.
- [26] LE RICHE, R., SAOUAB, A., et BRÉARD, J. (2003), Coupled compression rtm and composite layup optimization. *Composites Science and Technology*, 63 :2277–2287.
- [27] LEBRUN, G., (1995). *Études des phénomènes d'échanges thermiques pour le moulage par transfert de résine*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal.
- [28] LIN, M., HAHNS, H. T., et HUH, H. (1998), Finite element simulation of resin transfer molding based on partial node saturation and implicit time integration. *Composites Part A : applied science and manufacturing*, 29 :541–550.
- [29] MARCO, , (1950). U.S. Patent Office. Pat No. 2495640.
- [30] PAN, R., LIANG, Z., ZHANG, C., et WANG, B. (2000), Statistical characterization of fiber permeability for composite manufacturing. *Polym. Compos.*, 21(6) :996–1006.
- [31] PHAM, X.-T., (1999). *Simulation numérique de la fabrication des composites par injection-compression*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal.
- [32] PILLAI, K., TUCKER, C., et PHELAN, F. (2001), Numerical simulation of injection/compression liquid composite molding. part 2 : preform compression. *Composites Part A : applied science and manufacturing*, 32 :207–220.
- [33] REUX, F. (2004), An unprecedented challenged for composites materials. *JEC composites*, 10 :3.
- [34] SANJAY, K. et MAZUMDAR, . (2003). Global composites market 2003-2008 : Materials, markets and technologies. Technical report, E-Composites, inc, (2003).

- [35] SCHEIDEGGER, A. E. (1974). *The physics of flow through porous media*. University of Toronto Press. ISBN :0802018491.
- [36] SEEMANN, W., (1990). U.S. Patent Office. Pat No. 4902215.
- [37] SKARTISIS, L., KARDOS, L., et KHOMANI, . (1994), Resin flow through fiber beds during composite manufacturing process. part i : Review of newtonian flow through fiber beds. *Polym. Eng. Sci*, 32 :221–239.
- [38] SMITH, G., (1959). U.S. Patent Office. Pat No. 2913036.
- [39] SNEIDEGGER, A. (1974). *The physics of flow through porous media*. University of Toronto Press.
- [40] TERZAGHI, K. (1942). *Theoretical soil mechanics*. John Wiley and Sons.
- [41] TROCHU, F., GAUVIN, R., et GAO, D. (1993), Numerical analysis of the resin transfer molding process by the finite element method. *Advance in Polymer Technology*, 12 :329–342.
- [42] VOLLER, V. et CHEN, Y. (1996), Prediction of filling times of porous cavities. *International journal for numerical methods in fluids*, 23 :661–672.

ANNEXE I

RÉCAPITULATION SUR LES PROCÉDÉS RTM, CRTM ET VARI

Tableau I.1 Avantages et inconvénients des procédés: RTM, CRTM et VARI

Procédé	Types	Avantages	Inconvénients
RTM	* Couvercle rigide	* simple	* Coût: grande pièce
	* Aucun déplacement	* Rapide à modéliser	* Injection lente à taux de fibres élevé
CRTM	* Couvercle rigide	* Injection rapide	* Complexe
	* Déplacement	* Variable de contrôle supplémentaire en compression	* Coûteux
VARI	* Couvercle flexible	* Coût faible	* Injection lente
	* Déplacement	* Ne nécessite que de peu d'équipement	* Contrôle: pression de vide

ANNEXE II

SOLUTIONS ANALYTIQUES DES PROCÉDÉS DE MOULAGE COMPOSITE

Ci-dessous sont regroupées certaines formules analytiques.

- Conservation de la masse pour le fluide et le squelette, déformation du squelette négligée :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi \vec{v}_l) = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \operatorname{div}((1-\phi)\vec{v}_s) = 0 \quad (\text{II.2})$$

- Conservation de la masse pour le fluide et le squelette, déformation du squelette non négligée, cas unidimensionnel :

$$\operatorname{div}(h\phi\vec{v}_l) = -\frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.3})$$

- Loi de Darcy :

$$\vec{v}_D = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla P \quad (\text{II.4})$$

$$\vec{v}_D = \phi(\vec{v}_l - \vec{v}_s) \quad (\text{II.5})$$

- Loi de Darcy combinée à l'équation de continuité, déformation du squelette négligée :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla P \right) = \operatorname{div} (\vec{v}_s) \quad (\text{II.6})$$

– solide immobile :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla P \right) = 0 \quad (\text{II.7})$$

– solide mobile :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla P \right) = \frac{1}{d\Omega_t} \frac{d}{dt} (d\Omega_t) \quad (\text{II.8})$$

- Loi de Darcy combinée à l'équation de continuité, déformation du squelette négligée :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{h\mathbf{K}}{\mu} \nabla P \right) \quad (\text{II.9})$$

- Injection pour un écoulement 1D :

– contrôle en vitesse :

$$P(x) = \frac{\mu v_0 L(t)}{K_x} \left(1 - \frac{x}{L(t)} \right) \quad (\text{II.10})$$

– contrôle en pression :

$$P(x) = P_0 \left(1 - \frac{x}{L(t)} \right) \quad (\text{II.11})$$

$$v_{imp} = \frac{v_{D_x}}{\phi} = \frac{K}{\mu \phi} \frac{P_0}{L(t)} \quad (\text{II.12})$$

$$t_f = \frac{\mu \phi}{2K P_0} L_f^2 \quad (\text{II.13})$$

- Injection pour un écoulement radial divergent :

$$P(r) = P_0 \frac{\ln\left(\frac{r}{r(t)}\right)}{\ln\left(\frac{a}{r(t)}\right)} \quad (\text{II.14})$$

$$v_{imp} = \frac{v_{Dr}}{\phi} = \frac{K}{\mu\phi} \frac{P_0}{r \ln\left(\frac{r(t)}{a}\right)} \quad (\text{II.15})$$

$$t_f = \frac{\mu\phi a^2}{4KP_0} \left[\left(\frac{L_f}{a}\right)^2 \left[2 \ln\left(\frac{L_f}{a}\right) - 1 \right] + 1 \right] \quad (\text{II.16})$$

- Injection pour un écoulement radial convergent :

$$P(r) = P_0 \frac{\ln\left(\frac{r}{r(t)}\right)}{\ln\left(\frac{b}{r(t)}\right)} \quad (\text{II.17})$$

$$v_{imp} = \frac{v_{Dr}}{\phi} = -\frac{K}{\mu\phi} \cdot \frac{P_0}{r \ln\left(\frac{b}{r(t)}\right)} \quad (\text{II.18})$$

$$t_f = \frac{\mu\phi a^2}{4KP_0} \left[\left(\frac{L_f}{a}\right)^2 - \left[1 + 2 \ln\left(\frac{L_f}{a}\right) \right] \right] \quad (\text{II.19})$$

- Cas d'anisotropie de la perméabilité :

$$y = \sqrt{\frac{K_y}{K_x}} x \quad (\text{II.20})$$

- Injection pour un écoulement radial divergent :

$$P(r) = P_0 \frac{1 - \frac{r(t)}{r}}{1 - \frac{r(t)}{a}} \quad (\text{II.21})$$

$$v_{imp} = \frac{v_{Dr}}{\phi} = -\frac{K}{\mu\phi} \cdot \frac{P_0}{1 - \frac{r(t)}{a}} \cdot \frac{r(t)}{r^2} \quad (\text{II.22})$$

$$t_f = \frac{\mu\phi a^2}{2KP_0} \left[\left(\frac{L_f}{a}\right)^2 \left(\frac{2L_f}{3a} - 1\right) + \frac{1}{3} \right] \quad (\text{II.23})$$

– Injection pour un écoulement radial convergent :

$$P(r) = P_0 \frac{1 - \frac{r(t)}{r}}{1 - \frac{r(t)}{b}} \quad (\text{II.24})$$

$$v_{imp} = \frac{v_{Dr}}{\phi} = -\frac{K}{\mu\phi} \cdot \frac{P_0}{1 - \frac{r(t)}{b}} \cdot \frac{r(t)}{r^2} \quad (\text{II.25})$$

$$t_f = \frac{\mu\phi a^2}{2KP_0} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{L_f}{a} \right)^2 - \left(1 - \frac{2a}{3L_f} \right) \right] \quad (\text{II.26})$$

• Injection pour l'injection compression (CRTM) :

$$\text{div} \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla P \right) = \frac{U_n}{h(t)} \quad (\text{II.27})$$

$$P(x) = \frac{\mu U_n}{2h(t)K_x} x^2 - \frac{\mu v_0}{K_x} x + \left(\frac{\mu v_0}{K_x} L - \frac{\mu U_n}{2h(t)K_x} L^2 \right) \quad (\text{II.28})$$

$$v_{imp} = \frac{v_{Dx}}{\phi} = -\frac{K_x}{\mu\phi} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\phi} \left(v_0 - U_n \frac{x}{h(t)} \right) \quad (\text{II.29})$$

$$t_f = -\frac{\phi h(t)}{U_n} \ln \left(1 - \frac{U_n L_f}{v_0 h(t)} \right) \quad (\text{II.30})$$

• Injection pour l'infusion sous film plastique (VARI) :

– modèle de la consolidation :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h_0}{E} \left(\frac{d\sigma}{dt} - \frac{dP}{dt} \right) \quad (\text{II.31})$$

– déformation du squelette négligée :

$$\text{div} \left(\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla P \right) + \frac{h_0}{Eh} \frac{dP}{dt} = \frac{h_0}{Eh} \frac{d\sigma}{dt} \quad (\text{II.32})$$

– déformation du squelette non négligée :

$$\operatorname{div} \left(\frac{h\mathbf{K}}{\mu} \nabla P \right) + \frac{h_0}{E} \frac{dP}{dt} = \frac{h_0}{E} \frac{d\sigma}{dt} \quad (\text{II.33})$$

- Consolidation 1D et écoulement 1D :

$$P(x, t) = \sum_{n=1,3,5\dots} -\frac{4L^2 A_0}{K_0 \pi^3 n^3} e^{-\frac{K_0 \pi^2 n^2}{L^2} t} \sin \left(\frac{\pi n x}{L} \right) - \frac{A_0}{2K_0} x (x - L) \quad (\text{II.34})$$