POLYPUBLIE

Modélisation et passivité d'un système à un bras flexible

Mohamad Saad

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

Date	2003
Type	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis Thèse de doctorat/Ph.D. thesis
URL de PolyPublie PolyPublie URL	https://publications.polymtl.ca/7314/
Conditions d'utilisation Terms of use	© Tous droits réservés / All rights reserved
Référence Citation	Saad, M. (2003). Modélisation et passivité d'un système à un bras flexible [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/7314/

Détails de la thèse
Thesis details

Directeurs de recherche Advisors	Lahcen Saydy, Ouassima Akhrif, & Jean-Claude Piedboeuf
Programme Program	Non spécifié

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal
https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

Modélisation et passivité d'un système à un bras flexible

Mohamad Saad
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET INFORMATIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
Décembre 2003

© droits réservés de Mohamad Saad 2003.

National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisisitons et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence
ISBN: 0-612-90818-6
Our file Notre référence
ISBN: 0-612-90818-6

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou aturement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this dissertation.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the dissertation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de ce manuscrit.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Cette thèse intitulée:

Modélisation et passivité d'un système à un bras flexible

présentée par: Mohamad Saad

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. DE SANTIS Romano, Ph.D., président

M. SAYDY Lahcen, Ph.D., membre et directeur de recherche

Mme. AKHRIF Ouassima, Ph.D., membre et codirectrice de recherche

M. PIEDBŒUF Jean-Claude, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. O'SHEA Jules, D.Ing., membre

M. DESSAINT Louis A., Ph.D., membre

À mes parents.

Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse ont été menés au laboratoire de recherche en robotique et automatique du Département de génie électrique de l'Ecole polytechnique de Montréal et au groupe de recherche en électronique de puissance et commande industrielle (GREPCI) à l'Ecole de technologie supérieure.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mes directeurs de recherche, le professeur Lahcen Saydy, la professeure Ouassima Akhrif et Monsieur Jean-Claude Piedbœuf, pour la confiance qu'ils m'ont témoignée ainsi que pour leurs encouragements persistants tout au long de mes études au doctorat.

J'aimerais remercier le professeur Romano De Santis pour m'avoir fait l'honneur d'être président du jury de cette thèse. J'aimerais aussi remercier le professeur Jules O'Shea et le professeur Louis A. Dessaint d'avoir accepté de siéger sur le jury de cette thèse.

Je remercie également tous mes collègues du GREPCI pour les discussions enrichissantes et l'ambiance unique qu'ils m'ont fait partager.

Je veux, de plus, remercier tous mes amis dont le nombre ne me permet malheureusement pas de les citer pour leur soutien et leur amitié.

Je ne peux trouver tous les mots pour exprimer ma gratitude envers mes parents et ma famille, pour son soutien tout au long de mes études au Liban et au Canada.

Résumé

Cette thèse est divisée en deux parties majeures : la première partie discute de la modélisation d'un système à un bras flexible et la deuxième présente une stratégie de commande basée sur la passivité du même système. Les déformations de ce système sont continues. Elles dépendent des coordonnées spatiales et du temps. Nous supposons que ces déformations sont faibles par rapport à la longueur du bras flexible, nous tenons compte de l'allongement longitudinal du bras et nous considérons un mouvement dans le plan vertical.

Nous utilisons le principe de Hamilton pour développer la dynamique non linéaire de ce système. Cette dernière sera représentée par des équations aux dérivées ordinaires et des équations aux dérivées partielles associées avec des conditions aux frontières. Les équations différentielles sont spatialement discrétisées moyennant une série de fonctions polynomiales ou trigonométriques. Nous utilisons la méthode de modes supposés et la méthode d'éléments finis pour cette discrétisation. Nous unifions ces deux méthodes dans une seule méthode de type modes supposés. Lors du choix de ces fonctions, nous disposons de plusieurs variantes soit : les fonctions polynomiales, les fonctions de forme d'une poutre tournante, les fonctions de forme des poutres encastrées à la base avec ou sans charge à l'extrémité, les splines ou les B-splines cubiques.

La précision du modèle spatialement discret dépend, entre autre, de ces fonctions, de leurs formes, des conditions qu'elles vérifient, de leur nature, globale ou locale, et de leur nombre. Nous établissons les critères de sélection des fonctions utilisées dans

la discrétisation spatiale. Ces critères dépendent de la rapidité de convergence des fréquences propres, des modes propres et de leurs dérivées, des déformations statiques et de leurs dérivées, ainsi que de la taille de calculs engendrés par les modèles discrets.

La convergence des fréquences du modèle discret est un critère important car elle indique la convergence de l'erreur entre les fréquences réelles et les fréquences approximées par le modèle discret. Nous proposons un théorème de convergence des fréquences propres du modèle discrétisé avec les splines cubiques. Ce théorème démontre que la précision du modèle discret augmente en augmentant le nombre d'éléments utilisé.

Globalement, nous recommandons, sur la base de la comparaison des modèles discrets présentée au chapitre 5, l'utilisation des fonctions de forme d'une poutre encastrée avec charge ou l'utilisation des splines cubiques avec les courbures comme coordonnées généralisées. Pour les splines cubiques, nous recommandons d'ajouter une fonction de forme de plus à ce qui est requis. Pour une structure à plusieurs bras, nous recommandons l'utilisation des splines cubiques car elles sont plus simples à générer que les fonctions propres d'une poutre encastrée et sont indépendantes des paramètres du système sauf de la longueur des bras.

Le modèle correspondant à l'extrémité du système à un bras flexible est à déphasage non minimal. Ce modèle est donc non passif. Pour remédier à ce problème, nous choisissons une sortie appropriée le long du bras flexible de façon à ce que le modèle correspondant soit passif et à déphasage minimal. La sortie choisie est constituée de l'angle de rotation du moteur plus une valeur pondérée de la déformation de l'extrémité. Cette sortie est paramétrisé par un paramètre réel. Nous présentons alors une stratégie de commande basée sur la passivité du système à un bras flexible. Une caractéristique importante de la passivité est que tout contrôleur strictement passif, soit un contrôleur proportionnel, peut stabiliser la sortie considérée. Ce qui facilite l'implantabilité de cette loi de commande ainsi que la synthèse du contrôleur. L'objectif est de sélectionner la sortie pour qu'elle soit aussi proche de l'extrémité de façon

à ce que la relation entre le couple moteur et la sortie soit passive. Nous procédons en deux parties.

Dans la première, nous considérons un modèle linéaire du système avec différentes fonctions de forme. Nous proposons une étude analytique de la passivité des fonctions de transferts correspondantes. En négligeant le frottement du système, nous pouvons tirer des conclusions générales dépendantes des fonctions de forme utilisées ainsi que des caractéristiques physiques du système. Le paramètre réel caractérisant la sortie n'est plus un simple paramètre mais peut être considéré comme un paramètre de design du bras. Dans ce sens, nous pouvons choisir les caractéristiques du système à un bras flexible de façon que la sortie proposée soit proche de l'extrémité.

Dans la deuxième partie, nous considérons le système non linéaire dans le plan vertical. Nous utilisons encore la passivité pour démontrer la convergence asymptotique de la dynamique de l'erreur entre la sortie proposée et la référence.

Abstract

The diversity of the shape functions used in the spatial discretization of the dynamics of flexible robots complicates the task of selecting a particular shape function for a particular robot type. For a desired precision, an appropriate choice of the shape functions may result in a smaller order model, leading to a simpler simulation and an easier control design. This thesis develops the model of a one-link flexible system considering gravity effects. Several assumed modes are used in the spatial discretization process. Namely, the eigenfunctions of a rotating beam, the eigenfunctions of a clamped-free beam, the eigenfunctions of a clamped-payload beam, the polynomial functions, the cubic splines, and the cubic B-splines. A detailed comparison of the eigenvalues, the eigenmodes and their derivatives, and the static deformations and their derivatives is performed on a slewing beam in the vertical plane. Load parameters are changed from their nominal values to test the sensitivity of the shape functions. The comparisons show that the clamped-free eigenfunctions are mostly inadequate while the clamped-payload eigenfunctions are good candidates even when the payload parameters are changed. Overall, the cubic spline shape functions using curvatures as generalized coordinates offer the best compromise between good precision and low calculation complexity.

In this thesis, we apply the concept of passivity to control the position of the system with one flexible link using the input torque at the base. Since the choice of the tip position as an output leads to a non passive system, we select a new output, namely, the noncollocated output measurement consisting of the angle of rotation at

the hub augmented with a weighted value of the angle of rotation of the link's extremity. A technique for determining the closest output to the tip resulting in a passive system is given. We analyse the passivity of the input-output relation for the system in the horizontal plane with and without damping. We also analyse system's passivity in the vertical plane. In the horizontal case, analytical methods based on reactivity and (real) positivity of the transfer function are used to select the output. In the vertical one, we also apply the concept of passivity to prove asymptotic convergence of the dynamics of the error between the selected output and the reference.

Table des matières

Dédicace iv

Remerciements v

Résumé vi

Abstract ix

Table des matières xi

Table des figures xvi

Liste des tableaux xviii

Liste des annexes xix

Liste des sigles et abréviations xx

Liste des notations xxii

1 INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE 1

1.1 Introduction 1

1.2 Problématique 4

1.2.1 Modélisation 4

1.2.2 Commande 7

1.2.3 Originalité 9
1.2.4 Organisation de la thèse 11

2 REVUE DE LA LITTÉRATURE 14
2.1 Modélisation des robots flexibles 15
2.2 Discrétisation des équations dynamiques 18
2.3 Commande des robots flexibles 23
2.3.1 Linéarisation et couple précalculé 23
2.3.2 Perturbations singulières 28
2.3.3 Commande adaptative 29
2.4 Passivité des robots flexibles 31
2.5 Conclusion 34

3 MODÈLE D'UN BRAS TOURNANT DANS LE PLAN VERTICAL 36
3.1 Description du système 37
3.2 Hypothèses de modélisation 38
3.3 Modèle aux dérivées partielles 38
3.3.1 Cinématique d'ordre deux 39
3.3.2 Énergie cinétique 43
3.3.3 Énergie potentielle 44
3.3.4 Fonction de dissipation de Rayleigh 44
3.3.5 Équations du mouvement 44
3.4 Problème aux valeurs propres 47
3.5 Discrétisation spatiale de la dynamique 48
3.6 Modèle d'état non linéaire 52
3.7 Conclusion 52

4 DISCRÉTISATION SPATIALE DES ÉDP : SOLUTIONS APPROXIMATIVES 53

4.1 MMS : Fonctions admissibles globales 55
4.1.1 Fonctions polynomiales 55
4.1.2 Fonctions propres des poutres 56
4.2 MEF : Fonctions admissibles locales 59
4.2.1 Description des splines cubiques 59
4.2.2 Description des B-splines cubiques 63
4.3 Conclusion 65

5 ANALYSE ET COMPARAISON DES MODÈLES DISCRETS . 67
5.1 Modèle pour la comparaison 68
5.2 Convergence des fréquences de la MMS 69
5.3 Convergence des fréquences dans la MEF 70
5.3.1 Convergence des splines cubiques 71
5.4 Comparaison de différents modèles discrets 80
5.4.1 Procédure 81
5.4.2 Simulation 83

6 RAPPEL DE LA PASSIVITÉ 92
6.1 Motivation 93
6.2 Préliminaires mathématiques 94
6.2.1 Passivité et stabilité au sens $\mathcal{L}_p$ 95
6.3 Positivité d'une fonction de transfert 97
6.4 Passivité des systèmes linéaires 100
6.5 Passivité des systèmes sans mémoire 100
6.6 Systèmes à contre-réaction 101
6.6.1 Stabilité interne et passivité 102
6.7 Bézoutien et Résultant 104
6.7.1 Bézoutien 104
6.7.2 Résultant 105

7 PASSIVITÉ DU SYSTÈME À UN BRAS FLEXIBLE : PLAN HORIZONTAL 106

7.1 Choix de la sortie : Le point passif le plus proche de l'extrémité . . . 108

7.2 Passivité du système sans Frottements 109

7.2.1 FT avec les fonctions propres d'une poutre pivotante 110

7.2.2 FT avec les fonctions propres d'une poutre encastrée-charge . 113

7.3 Passivité du système avec Frottements 117

7.3.1 Fonctions de forme d'une poutre pivotante 118

7.3.2 Cas des FF d'une poutre encastrée-charge 119

7.4 Effet de la variation de paramètres sur la passivité 120

7.5 Simulation 122

7.6 Conclusion 124

8 PASSIVITÉ DU SYSTÈME À UN BRAS FLEXIBLE : PLAN VERTICAL 126

8.1 Linéarisation entrée-sortie 127

8.2 Sortie colocalisée 133

8.2.1 Amortissement des variables flexibles 135

8.3 Sortie non colocalisée : Extrémité du bras 137

8.4 Sortie non colocalisée : Point intermédiaire 138

8.4.1 Simulation 143

Conclusion 146

A.1 Variationnelle des énergies cinétiques 162

A.2 Variationnelle des énergies potentielles 163

A.2.1 Équation de mouvement associée à l'angle moteur 164

A.2.2 Équation de mouvement associée à la déformation 165

A.2.3 Conditions aux frontières 166

B.1 Génération des Fonctions propres 168

B.1.1 Modèle continu 168
B.1.2 Les fonctions propres 169
B.2 Relations d'orthogonalités 171
B.2.1 Relation pour $\int_0^L \rho x \phi_i \, dx$ 171
B.2.2 Première relation d'orthogonalité 172
B.2.3 Deuxième relation d'orthogonalité 174
B.2.4 Résumé 175
B.3 Fonctions de forme d'une poutre encastrée avec charge 176
B.4 Fonctions de forme d'une poutre encastrée sans charge 177
C.1 Description du logiciel : ROBOFLEX 179
C.1.1 Partie symbolique 180
C.1.2 Partie numérique 183
D.1 Modèle linéaire : Plan vertical 186
D.2 Modèle linéaire dans le plan horizontal 188
D.2.1 Fonctions de forme d'une poutre pivotante 188
D.2.2 Fonctions de forme d'une poutre encastrée-charge 192
D.3 Fonctions de transfert avec les splines cubiques 197
D.4 Analyse de la passivité avec les splines cubiques 199
D.4.1 Frottement négligeable 200
D.4.2 Frottement non négligeable 201

Table des figures

2.1 Déplacement angulaire virtuel 31

3.1 Le bras flexible 38

4.1 Les quatre premières fonctions de forme polynomiales 56
4.2 Les quatre premières fonctions propres d'un bras tournant 59
4.3 Décomposition d'un bras flexible en EF 60
4.4 Splines cubiques définies sur trois intervalles. 63
4.5 Un B-spline cubique 65
4.6 Quatre B-spline cubiques 66

5.1 Élément cubique 73
5.2 Deux éléments cubiques 73
5.3 Erreurs relatives des fréquences en % : Cas 2 84
5.4 Erreurs relatives des modes propres en % : Cas 2 85
5.5 Erreurs relatives des dérivées secondes des modes propres en % : Cas 2 86
5.6 Erreurs relatives de la déformation statique en % : Cas 2 87
5.7 Erreurs relatives de la dérivée seconde des déformations statiques en % : Cas 2 87
5.8 Erreurs relatives absolues des fréquences en % : Cas Nominal 88
5.9 Erreurs relatives absolues des fréquences en % : Cas 1 89
5.10 Erreurs relatives absolues des fréquences en % : Cas 3 89

6.1 Circuit RLC 93
6.2 Système bouclé 101

7.1 Partie réelle de $G_\alpha(j\omega)$ pour $\nu = 1$, 2 et 3 121
7.2 Effet de la variation de paramètres 122
7.3 contrôleur passif 123
7.4 Contrôleur passif : Sortie point intermédiaire 124

8.1 Commande linéarisante 133
8.2 Réponse pour une sortie colocalisée 134
8.3 Commande linéarisante avec amortissement des variables flexibles . . 136
8.4 Réponse par découplage non linéaire avec amortissement de la flexibilité 137
8.5 Sortie angle extrémité 137
8.6 Système en contre-réaction 141
8.7 Diagramme de Nyquist du système linéaire 143
8.8 Sortie intermédiaire : entrée échelon 144
8.9 Sortie intermédiaire : entrée sinusoïdale 145

C.1 Organigramme de ROBOFLEX : Partie symbolique 181
C.2 Schéma bloc de ROBOFLEX : Partie numérique 184

D.1 Partie réelle de $G_\alpha(j\omega)$ pour un, deux et trois éléments 202

Liste des tableaux

5.1 Paramètres du système 69
5.2 Convergence des fréquences avec les splines cubiques 79
5.3 Les fonctions de forme utilisées dans la comparaison 81
5.4 Variation des paramètres 82
5.5 Conditionnements de la matrice des vecteurs propres : Cas 2 90

7.1 Paramètres pour le contrôle 108

Liste des annexes

A DYNAMIQUE D'UN STSTÈME À UN BRAS FLEXIBLE 162

B FONCTIONS DE FORME D'UN BRAS AVEC CHARGE 167

C LOGICIEL DE MODÉLISATION ET DE SIMULATION 179

D MODÈLES LINÉAIRES DU SYSTÈME À UN BRAS FLEXIBLE 185

Liste des sigles et abréviations

bp	Fonctions propres d'une poutre pivotante avec charge en utilisant les paramètres nominaux
cbs	B-splines cubiques
cf	Fonctions propres d'une poutre encastrée-libre en utilisant les paramètres nominaux
cp	Fonctions propres d'une poutre encastrée-charge en utilisant les paramètres nominaux
cs-c	Splines cubiques avec les courbures comme coordonnées généralisées et la courbure du dernier nœud est indéterminée
cs-d	Splines cubiques en considérant les déplacements aux nœuds comme coordonnées généralisées et la courbure du dernier nœud n est égale à la courbure du nœud $n-1$
pol	Fonctions polynomiales
CF	Conditions aux frontières
ÉDO	Équation aux dérivées ordinaires
ÉDP	Équation aux dérivées partieles
EF	Élément fini
FF	Fonction de forme
FT	Fonction de transfert
MEF	Méthode d'éléments finis
MMS	Méthode de modes supposés

PD	Contrôleur proportionnel-dérivée
PI	Contrôleur proportionnel-intégral
PVP	Problème aux valeurs propres
SPR	Strictement positif réel

Liste des notations

b_m	Coefficient de frottement visqueux du moteur.
q	Vecteur de coordonnées généralisées.
q_f	Vecteur des coordonnées généralisées de la partie flexible.
q_r	Coordonnée généralisée de la partie rigide.
r_c	Distance entre le centre de masse de la charge et l'extrémité du bras.
u	Vecteur propre.
$v(x,t)$	Déformation du bras.
$\dot{v}$	Dérivée partialle de v par rapport au temps $(\partial v/\partial t)$.
v'	Dérivée partialle de v par rapport à x $(\partial v/\partial x)$.
v_0	Évaluation de v pour $x = 0$ $(v(0,t))$.
v_L	Évaluation de v pour $x = L$ $(v(L,t))$.
B	Matrice de frottement.
C	Matrice des termes centrifuges et de Coriolis.
E	Module de Young du bras.
EI_z	Rigidité du bras.
G	Vecteur des forces de gravitation.
I_b	Inertie du bras.
I_c	Inertie de la charge.
I_m	Inertie du moteur.
I_t	Inertie totale vue par le moteur.
I_z	Moment d'aire du bras selon l'axe z.

K Matrice de rigidité.

L Longueur du bras.

M Matrice de masse.

M_c Masse de la charge.

${}^{j}P_i$ Vecteur de position de l'origine du référentiel $\mathcal{R}_i$ par rapport à l'origine du référentiel $\mathcal{R}_j$.

$\mathcal{R}_i$ Référentiel $\{i\}$.

${}^{j}R_i$ Matrice de rotation du référentiel $\mathcal{R}_i$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_j$.

T Énergie cinétique.

V Énergie potentielle.

W_{nc} Travail des forces non conservatives.

$\mathcal{L}$ Lagrangien.

ϕ_i Fonction de forme associée à la $i$ème coordonnée généralisée flexible.

ϕ Vecteur de fonctions de forme.

κ_e Coefficient du frottement interne du bras.

λ Valeur propre.

ν Nombre de modes flexibles.

θ Angle moteur.

ρ Masse du bras par unité de longueur.

τ Couple moteur.

${}^{j}v_i$ Vitesse linéaire d'un référentiel $\mathcal{R}_i$ par rapport au référentiel inertiel exprimée dans un référentiel $\mathcal{R}_j$.

ω Fréquence naturelle.

${}^{j}\omega_i$ Vitesse angulaire d'un référentiel $\mathcal{R}_i$ par rapport au référentiel inertiel exprimée dans un référentiel $\mathcal{R}_j$.

Chapitre 1

INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

1.1 Introduction

La notion de solide indéformable n'est qu'un concept théorique, aucun corps n'étant parfaitement rigide. Une structure mécanique se compose toujours d'un ou de plusieurs éléments dont la rigidité n'est pas infinie, associés entre eux par des liaisons qui elles aussi ont une raideur limitée. Elle présente donc une certaine flexibilité, qui se traduit mathématiquement par un champ de déformations et de contraintes qui dépendent de sa géométrie, des liaisons mécaniques, et de la nature des matériaux. Il existe de plus un couplage entre masse et flexibilité, lié à un échange entre l'énergie de déformation élastique et l'énergie cinétique, qui entraîne en dynamique un comportement oscillant semblable à celui d'un système masses-ressorts. Les résonances qui en résultent, que l'on caractérise par une fréquence propre et une déformée modale, dépendent bien entendu de la répartition de masse dans la structure et de l'ensemble des paramètres mécaniques. Dans la grande majorité des applications, cette flexibilité est indésirable, et ses effets doivent donc être atténués. Parfois, des solutions mécaniques simples suffisent à déplacer le spectre des vibrations, et à faire en sorte

qu'il ne rencontre pas celui des perturbations. Une structure peut ainsi être rigidifiée par le choix de formes géométriques différentes, ou l'utilisation de matériaux plus rigides. Cette solution est efficace dans le cas des machines outils, par exemple. Cependant, dans le domaine de la robotique, cette solution conduit à un surdimensionnement de la structure des robots dits "traditionnels" ou rigides pour lesquels les membrures sont rigides, même si les articulations et les actionneurs peuvent présenter une caractéristique d'élasticité. En effet, pour garantir une bonne précision au niveau de leur positionnement, ces robots sont constitués de membrures lourdes et rigides. Ils sont massifs et demandent beaucoup d'énergie. De plus, pour assurer cette rigidité face aux variations de la charge, on limite la vitesse et l'accélération de manipulation. Ainsi, la rigidité des membrures entraîne des limitations au niveau de la vitesse de déplacement de ces robots, de leur envergure et de leur charge transportable. Cette dernière varie entre 5% à 10% du poids total du robot (Kopacek et al., 1988).

Afin d'améliorer les performances des robots, les membrures doivent être plus légères, leur flexibilité ne peut donc pas être négligée. Leur vitesse peut donc être augmentée, leur structure et leur consommation d'énergie réduites et le coût total minimisé. Malgré tous ces avantages, ces idées n'ont pas encore trouvé leur chemin dans la conception des robots industriels à l'exception de l'industrie spatiale. Les applications dans l'industrie spatiale ont donné une autre tournure aux recherches dans le domaine des robots flexibles. Les robots ne sont plus conçus en fonction de leur rigidité mais en fonction de leur capacité de manipulation. La flexibilité n'est plus une contrainte mais un aspect physique à considérer dans la modélisation dynamique du robot.

C'est avec le lancement des premiers programmes spatiaux de grande envergure dans les années 70 que la commande active des structures flexibles a commencé à susciter de nombreux travaux de recherche au sein de la communauté automaticienne. Les systèmes placés sur orbite doivent, pour satisfaire les contraintes du lancement, être munis d'appendices déployables et légers : la minimisation de la masse des structures,

qui sont souvent d'allongement important, conduit naturellement à l'apparition de vibrations mécaniques de forte amplitude et à basse fréquence, susceptibles de dégrader fortement les performances de la charge utile, et parfois même destructrices.

Du point de vue de l'automaticien, les nécessités structurales se traduisent par un abaissement de la fréquence des modes de résonance, qui viennent interagir avec la bande passante de commande des systèmes embarqués. Ces modes, qui ont un coefficient d'amortissement naturel très faible, peuvent être excités par une source de perturbations externe, ou par la loi de commande elle même. Face à cette difficulté, une solution logique semble être d'accroître l'amortissement des résonances, afin de les rendre moins pénalisantes. Pour cela, deux approches distinctes sont envisageables.

La première approche, dite passive, consiste à dissiper une partie de l'énergie de déformation élastique. Les matériaux viscoélastiques que l'on fixe à la surface d'une structure entrent dans cette catégorie. Toutefois, il subsiste une limitation intrinsèque à ces dispositifs passifs : ils n'empêchent pas la structure de continuer à se déformer, et même à vibrer en présence d'une source de perturbations continue (Vincent, 1996).

La deuxième approche, dite active, consiste au contraire à injecter de l'énergie dans la structure afin de compenser les déformations. Des deux approches, la commande active des vibrations est donc la solution la plus ambitieuse. Elle repose naturellement sur l'utilisation des lois plus complexes, qui rendent possible la commande d'un plus grand nombre de modes flexibles que les dispositifs passifs. Elle peut surtout permettre d'atteindre un niveau de performances supérieur, en réalisant des tâches plus contraignantes que le simple amortissement, telle que le suivi de trajectoire et la réjection de perturbations.

Ainsi, un intérêt croissant s'est manifesté depuis une vingtaine d'années, tant pour le développement de méthodologies de synthèse de lois de commande adaptées au cas extrême des structures flexibles, que pour celui d'outils de modélisation mieux adaptés à cette synthèse.

1.2 Problématique

1.2.1 Modélisation

Au niveau de la modélisation, les robots flexibles se distinguent des robots rigides par le fait qu'ils sont des systèmes continus à paramètres distribués, les modèles discrets constituent simplement une approximation de ces modèles. Les variables intervenant dans la description du mouvement d'un système continu dépendent explicitement de la position spatiale de points appartenant à ce système et du temps.

Lors de la modélisation, les robots flexibles sont décrits par des équations aux dérivées ordinaires (ÉDO) et des équations aux dérivées partielles (ÉDP) associées avec des conditions aux frontières (CF). Ces équations possèdent, dans de cas simples tel qu'un bras flexible tournant dans le plan horizontal, une solution analytique. Cependant, dans le cas général d'un robot à plusieurs bras flexibles et/ou tournant dans le plan vertical, la solution des ÉDP et des CF associées est généralement difficile à obtenir. De plus, le modèle obtenu est d'ordre infini. L'utilisation d'un modèle d'ordre réduit qui fait recours au principe de l'expansion modale facilite l'analyse du modèle. Il facilite aussi la synthèse d'une loi de commande pour ce modèle. Le principe de l'expansion modale permet d'écrire une déformation comme la somme d'une fonction dépendant uniquement de la variable spatiale x, appelée fonction de forme (FF), multipliée par une fonction dépendant uniquement du temps. Si les FF vérifient l'ÉDP avec les CF associées, on dit alors que la solution est exacte. Mais ces fonctions sont généralement difficiles à obtenir. Des solutions d'approximation sont alors utilisées pour estimer les modes propres du système en introduisant des FF qui ne vérifient pas nécessairement l'ÉDP et les CF associées. La précision de la solution approximative dépend, entre autre, du choix de ces fonctions. Il est souhaitable que ces dernières soient optimisées ce qui augmente la précision du modèle. Ce choix est souvent plus ou moins arbitraire et rend les différents résultats publiés dans la littérature difficilement comparables.

Lors de la modélisation, certaines hypothèses doivent être considérées. Pour faciliter l'étude des robots à bras flexibles, les chercheurs considèrent, entre autre, une cinématique linéaire c.à.d que la position d'un point le long d'un bras flexible est indépendante de l'allongement du bras selon son axe neutre. Ceci permet surtout d'éliminer des termes non linéaires et de réduire la complexité du développement du modèle. Cependant, cette hypothèse limite la vitesse d'opération d'un robot à de faibles et moyennes vitesses. Pour surmonter cette restriction, le premier objectif de cette thèse est de développer les ÉDP d'un bras flexible tournant dans le plan vertical en considérant une cinématique non linéaire tout en tenant compte de l'allongement du bras le long de son axe neutre.

D'autres suppositions importantes sont typiquement adoptées lors de la modélisation de façon quasi arbitraire dans la littérature. Vu que le modèle spatialement discrétisé est théoriquement de dimension infinie, une troncature au niveau du modèle s'avère nécessaire pour limiter le nombre de modes vibratoires à étudier. Le choix du nombre de modes vibratoires est un élément important lors de la discrétisation. Ce nombre dépend de la plage de fréquence excitée et de la différence entre les modes vibratoires réels et ceux supposés.

Le choix de la méthode de discrétisation est aussi primordial. Les deux méthodes largement utilisées lors de la discrétisation spatiale de robots flexibles sont la méthode de modes supposés (MMS) et la méthode d'éléments finis (MEF). Il existe aussi des variantes de ces deux méthodes, telles que les modes encastrés à la base d'un bras, sans ou avec une charge à l'extrémité d'un bras flexible pour la MMS, et les éléments cubiques d'Hermite, les splines et les B-splines cubiques pour la MEF.

Dans la littérature, certaines comparaisons de la rapidité de la convergence de modèles discrétisés (basés sur l'une ou sur plusieurs de ces variantes) ont déjà été réalisées. Cependant, ces comparaisons sont souvent limitées soit à la rapidité de la convergence des fréquences d'une méthode de discrétisation en particulier (par exemple la MMS avec des modes encastrés à la base d'un bras et libre à l'autre

extrémité vs des modes encastrés à la base avec une charge à l'extrémité), soit à la comparaison de la rapidité de la convergence des fréquences d'une variante de la MMS par rapport à celle de la MEF (par exemple la MMS avec des modes encastrés vs la MEF avec les éléments cubiques d'Hermite).

Il n'y a pas, à notre connaissance, une comparaison générale et détaillée (au niveau de fréquences, de modes, de modes statiques, de la complexité des méthodes de discrétisation, etc.) de la convergence de différents modèles discrets. Une comparaison exhaustive et détaillée (Chapitre 5) de la précision et de la performance de modèles d'approximation s'impose et constitue le deuxième et l'un des plus importants objectifs de cette recherche. Nous comparons les fréquences, les modes et leurs dérivées spatiales, les déformations statiques et leurs dérivées spatiales et le degré de complexité des calculs engendrés par ces modèles pour différentes fonctions de forme. Pour tester la robustesse de différents modèles, nous changeons les paramètres du système. Dans un premier cas, la charge est annulée. Dans un deuxième cas, la masse et l'inertie de la charge sont amplifiées. De plus, le centre de masse de la charge est éloigné de la base à une position équivalent à 50% de la longueur du bras pour représenter l'effet d'un deuxième bras. Finalement, l'inertie du moteur est réduite par un facteur de mille. Ceci est équivalent à un moteur sans réducteur de vitesse.

Nous ne limiterons pas la comparaison, comme dans la majorité des études comparatives, à un bras flexible tournant dans le plan horizontal. Nous proposons au contraire une comparaison des modèles d'approximation basée sur un bras flexible tournant dans le plan vertical. De plus, nous considérons comme mentionné auparavant le cas d'une cinématique non linéaire pour tenir compte de l'allongement du bras selon son axe neutre.

Les modèles discrets basés sur la MMS possèdent une caractéristique inhérente. La convergence des fréquences propres du modèle croît avec le nombre de modes retenus dans la discrétisation. Cependant, cette caractéristique de convergence est perdue pour un modèle discret basé sur la MEF avec des éléments cubiques d'Hermite.

Pour cela, nous utilisons la MEF avec les splines et nous proposons un théorème de convergence des fréquences du modèle discret (Proposition 2). Cette proposition démontre que la précision du modèle augmente en augmentant le nombre d'éléments utilisé dans la discrétisation.

Un des problèmes majeurs du développement du modèle d'un système à bras flexibles est la complexité du modèle et la taille de calcul engendré surtout lorsque plusieurs méthodes sont envisagées au préalable. Nous présentons un outil informatique pour générer les paramètres du modèle du système à un bras flexible pour les différentes méthodes de discrétisation traitées.

1.2.2 Commande

L'étape d'analyse et de comparaison des méthodes de modélisation est étroitement liée à celle de la commande des robots flexibles. En effet, la complexité du modèle de commande obtenu dépend essentiellement des hypothèses simplificatrices prises en considération lors de la modélisation. Cette complexité peut être caractérisée par des termes non linéaires, des couplages entre les variables, etc. Lors de la commande des robots à une membrure flexible, les chercheurs ont rendu ces hypothèses assez restrictives ce qui a permis essentiellement d'éliminer les termes non linéaires du modèle et a rendu la conception du contrôleur plus simple. Dans les approches plus récentes, on assiste à l'apparition de modèles plus complexes pour décrire les robots flexibles. Les lois de commande envisagées suivent donc tout naturellement cette évolution. Plusieurs algorithmes de commande ont été appliqués dans la littérature aux robots flexibles : les méthodes linéaires classiques, la linéarisation exacte, les perturbations singulières pour n'en mentionner que quelques uns. Malgré tous les progrès réalisés dans le domaine de la commande de robots flexibles, l'implantabilité pratique des méthodes proposées reste néanmoins un problème d'une acuité primordiale. Cette recherche vise précisément à combler cette lacune. Le but est donc de développer des méthodes de commande pour des robots flexibles avec une attention particulière à

leur implantabilité pratique.

Au niveau de la commande, les robots flexibles se distinguent d'autres systèmes de commande par le fait qu'ils possèdent une caractéristique de déphasage non minimal. Cette caractéristique rend la commande directe de l'extrémité du robot plus difficile que pour des systèmes à déphasage minimal. Rappelons que dans le cas d'un système linéaire, cette caractéristique signifie que la fonction de transfert (FT) possède des zéros dans le demi-plan cpmplexe droit. En boucle fermée sur la sortie, avec un contrôleur proportionnel, le gain du contrôleur est donc limité afin de préserver la stabilité du système bouclé.

Pour les robots flexibles, une linéarisation exacte dans l'espace des articulations est possible. Cette linéarisation permet aux articulations de suivre toute entrée bornée. Cependant, l'extrémité du robot est libre d'osciller et les oscillations sont seulement limitées par l'amortissement interne des bras du robot qui est généralement faible. L'application de la technique de la linéarisation exacte à l'extrémité du robot engendre une dynamique interne non bornée à cause de la caractéristique de déphasage non minimal. Pour surmonter ce problème nous proposons de modifier la sortie. Plus précisément, nous choisissons un point sur le bras du robot comme étant la sortie. Nous déterminons ce point en paramétrisant la sortie par un coefficient réel et en considérant la passivité comme critère de sélection. Notre objectif sera de varier ce paramètre réel de façon à ce que le modèle correspondant à la sortie proposée soit passif. Tout contrôleur strictement passif, soit un simple contrôleur proportionnel, stabilise la sortie choisie. Dans plusieurs applications, la passivité sert à profiter de la structure physique du système à contrôler de façon à dissiper l'énergie dans une direction "naturelle". Un retour sur la sortie favorise donc l'amortissement dans le même sens là où l'énergie est dissipée.

La paramétrisation de la sorite nous permet ainsi de généraliser les études précédentes sur la passivité des robots à un bras flexible. Nous procédons en deux étapes. En premier, nous commençons avec un bras flexible tournant dans le plan horizontal. Nous

ne limitons cependant pas notre étude, comme c'est le cas dans les études précédentes, à une analyse numérique de la passivité de la FT. Nous procédons au contraire à une étude analytique en utilisant les applications gardiennes, le Bézoutien et le Résultant. Le modèle étant linéaire, ceci nous permet de tirer des conclusions générales en fonction des caractéristiques du bras flexible et du nombre de modes utilisés lors de la discrétisation. Une conclusion importante de cette étude est que le paramètre qui caractérise la sortie est utilisé comme paramètre de design du robot lui même. Nous pouvons, lors de la conception du système, choisir ses caractéristiques (longueur du bras, rigidité, etc.) de façon à ce que la sortie proposée soit très proche de l'extrémité du bras.

Dans la deuxième étape, nous généralisons notre étude au cas d'un modèle non linéaire d'un bras flexible dans le plan vertical. Nous choisissons le coefficient de paramétrisation de la sortie de façon à ce que la dynamique de l'erreur entre la sortie proposée et la référence soit asymptotiquement stable. Nous utilisons encore la passivité pour démontrer la convergence de l'erreur.

Cette thèse est donc consacrée à l'étude de la représentation adéquate de la flexibilité ainsi qu'à l'analyse de la passivité d'un système à un bras flexible. Le mémoire est articulé en deux grandes parties : l'une est dévolue à la modélisation d'un système à un bras flexible et la comparaison de différentes représentation de la flexibilité, l'autre à l'analyse de la passivité du système pour certaines représentations.

1.2.3 Originalité

Cette recherche porte sur la modélisation et la commande d'un système à un bras flexible. À la meilleure de la connaissance de l'auteur, elle a donné lieu aux contributions suivantes :

1. Le développement du modèle non linéaire (ÉDO et ÉDP avec les CF associées) (équations (3.9)-(3.12)) d'un système à un bras flexible tournant dans le plan vertical avec une cinématique non linéaire, i.e. en tenant compte de l'allonge-

ment longitudinal du bras.

2. Une comparaison exhaustive et complète (Chapitre 5) de la convergence des fréquences, des modes et leurs dérivées spatiales, des déformations statiques et leurs dérivées spatiales et de la complexité mathématique et numérique des différents modèles discrets. Certains paramètres seront variés pour reprendre fidèlement les différentes configurations d'un manipulateur réel. En particulier, les paramètres de la charge ont été variés pour analyser l'effet de cette variation et pour simuler l'effet d'un deuxième bras sur les modes du système discret. L'inertie du moteur a été aussi réduite pour simuler un moteur sans réducteur de vitesse.
3. Une démonstration de la convergence monotonique des fréquences du modèle discret avec les splines cubiques (Proposition 2). Cette démonstration est basée sur l'existence d'une transformation entre les splines cubiques et des éléments hiérarchiques connus pour leur convergence monotonique.
4. L'étude de la passivité du modèle développé associé à une sortie non colocalisée et paramétrisée par un coefficient réel. Dans le cas d'un modèle linéaire, une étude analytique est réalisée (Chapitre 7) pour trouver une sortie le plus proche de l'extrémité du bras tel que le modèle reste passif. Plusieurs configurations ont été considérées (sans et avec frottement) pour différentes FF.
5. La démonstration de la stabilité asymptotique de la dynamique de l'erreur dans le cas d'un mouvement vertical avec la technique de la passivité (Chapitre 8).

Notons que, le modèle non linéaire a été récemment reporté dans la littérature. Notons aussi que pour fin de la modélisation et de la comparaison, il a fallu développer les fonctions de forme d'une poutre pivotante avec une charge non concentrée. La procédure suivie pour générer ces fonctions est déjà présentée dans la littérature. Cependant, les résultats sont, à notre avis, intéressants. Il a fallu aussi unifier les différentes méthodes de discrétisation, soit la méthode de modes supposés et la méthode des éléments finis, ainsi que leurs variantes dans une seule méthode du

genre modes supposés. Ceci nous a permis d'utiliser le même algorithme pour générer les différents paramètres du modèle discrétisé par la MMS et la MEF et de faciliter la comparaison de différents modèles discrets.

1.2.4 Organisation de la thèse

Le deuxième chapitre est une étude bibliographique dont le but est de rappeler les problèmes fondamentaux posés par la modélisation et la commande des manipulateurs flexibles. Nous passons en revue les méthodes de modélisation et les méthodes de discrétisation, en particulier la méthode de modes supposés et la méthode d'éléments finis. Nous insistons sur les études comparatives des modèles discrets. Nous insistons aussi sur l'application des méthodes de commande non linéaire ainsi que sur l'application de la passivité sur les robots flexibles.

Nous développons dans le chapitre 3 le modèle dynamique continu d'un bras tournant dans le plan vertical. Ce modèle est basé sur une cinématique non linéaire d'Euler-Bernoulli et sur la méthode de Hamilton pour générer les ÉDP et les CF qui gouvernent le bras. Nous rappelons aussi le problème aux valeurs propres associé aux robots à bras flexibles. Afin d'analyser, de simuler et de contrôler ce modèle, une discrétisation spatiale paraît nécessaire. Nous présentons à la fin de ce chapitre une discrétisation du modèle développé.

Dans le chapitre 4, nous présentons les méthodes les plus utilisés de la discrétisation spatiale de la flexibilité, à savoir la méthode de modes supposés et la méthode d'éléments finis. Les deux méthodes sont présentées dans un cadre général en les unifiant dans une méthode de type "modes supposés". Ces deux méthodes sont basées sur l'approximation des modes flexibles par des FF polynomiales. Plusieurs variantes existent pour ces deux méthodes, soit : les fonctions propres d'une poutre tournante, les fonctions de forme d'une poutre encastrée sans charge, les fonctions de forme d'une poutre avec charge, les splines cubiques, les B-splines cubiques ainsi que les fonctions polynomiales.

Le choix d'un de ces modes dans un problème donné n'est pas systématique. Le chapitre 5 est donc consacré à la comparaison des différents modèles discrets basés sur les différents modes supposés. Une comparaison détaillée des valeurs propres, des vecteurs propres, des déformations statiques ainsi que de la complexité du calcul des modèles basé sur ces modes est présentée. Nous varions encore les paramètres du modèle pour reprendre fidèlement les différentes configurations d'un manipulateur réel. Nous varions les paramètres de la charge pour simuler et analyser l'effet d'un deuxième bras sur ces modes. Cette comparaison va nous permettre d'effectuer les choix (technologiques) nécessaires à la représentation adéquate de la flexibilité d'un manipulateur flexible. Nous présentons aussi dans ce chapitre la convergence des fréquences propres du modèle discret avec les splines cubiques.

Nous présentons au chapitre 6 quelques rappels sur la passivité et ses applications et nous appliquons au chapitre 7 cette notion de passivité au modèle linéaire d'un bras flexible tournant dans le plan horizontal. Nous considérons une sortie constituée de l'angle moteur plus une pondération de l'angle de l'extrémité du bras. Cette sortie sera paramétrisée par un paramètre réel. Nous procédons à une étude algébrique de la passivité du modèle linéaire à l'aide des applications gardiennes basées sur le Bézoutien et le Résultant. Cette analyse est réalisée pour les différentes fonctions de forme discutée précédemment. Nous varions aussi les paramètres de la charge afin de conclure sur l'effet de cette variation sur la passivité.

Le chapitre 8 est enfin consacré à l'application de la passivité au système non linéaire du bras flexible tournant dans le plan vertical. Une démonstration de la convergence asymptotique de l'erreur est présentée en se basant sur la passivité de la dynamique de l'erreur. Notre étude s'achève sur un rappel des conclusions auxquelles nous sommes parvenus, et sur quelques perspectives ouvertes par notre travail.

Plusieurs annexes sont encore présentées à la fin de cette thèse. Tous les détails mathématiques du développement des différents modèles utilisés dans cette thèse seront présentés dans ces annexes. Nous avons décidé de présenter ces développement

dans des annexes non pas parce qu'ils sont moins importants que le reste de la thèse mais plutôt pour alléger la lecture de la thèse. En particulier, dans l'Annexe A, nous présentons le développement de la dynamique d'un système à un bras flexible. L'Annexe B présente la solution du problème aux valeurs propres d'un système à un bras flexible ayant une charge à son extrémité. L'organigramme du logiciel ROBOFLEX utilisé dans la modélisation et la simulation du système sera présenté en Annexe C. Dans l'Annexe D nous développons le modèle linéaire pour les différentes fonctions de forme présentées en Annexe B.

Chapitre 2

REVUE DE LA LITTÉRATURE

Ce chapitre a pour objet de rappeler les problèmes généraux posés par la modélisation et la commande active des robots flexibles. Nous essaierons ainsi de montrer en quoi les difficultés rencontrées, qui ne sont pas propres à la compensation des vibrations mécaniques, sont ici exacerbées. Nous tenterons dans un premier temps de donner un aperçu des techniques de modélisation les plus utilisées, en insistant sur leurs conséquences sur le plan automatique, et l'on verra que le choix d'une approche dépend évidence tout de la nature du système, de sa complexité, et bien sûr des besoins en modélisation. Cet aspect permettra de mettre en évidence les problèmes liés à la représentation de la flexibilité, et introduira le second point de ce chapitre, à savoir celui de la commande active des structures. Nous essaierons ici aussi de donner une idée globale des techniques adaptées à la commande des flexibilités, en mettant l'accent sur les travaux traitant la passivité.

Les méthodes de modélisation et de commande que nous allons revoir ont été appliquées à des robots dont le degré de complexité varie d'un simple bras tournant dans le plan horizontal jusqu'aux robots à mouvement tridimensionnel. Les bras minces sont adéquatement représentés par le modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli qui néglige les efforts tranchants ainsi que l'inertie de rotation d'une section d'un bras (Meirovitch, 1986). Les déformations des bras sont supposées petites. Pour des bras

courts, les effets des efforts tranchants et de l'inertie de rotation peuvent être inclus en utilisant le modèle de Timoshenko (Bayo et al, 1989). Dans ce qui suit, nous nous limitons aux cas des robots à bras minces.

2.1 Modélisation des robots flexibles

Différents principes et théorèmes de la mécanique analytique peuvent être utilisés pour écrire les équations de l'équilibre dynamique de robots à bras flexibles. Citons les équations de Newton-Euler, le principe de Hamilton, les équations de Lagrange, etc. L'utilisation de l'une ou de l'autre de ces méthodes est liée à la nature finale des équations dynamiques, soit continue ou discrète.

Les équations de Newton-Euler sont appliquées à un élément infinitésimal d'un bras et la dynamique est obtenue en intégrant ces équations sur toute la longueur du bras (Sakawa et al, 1985 ; Sundararajan et al, 1992). L'application des équations de Newton-Euler à une membrure flexible uniforme tournant dans le plan horizontal est directe et relativement facile. Cependant, l'extension de cette méthode aux robots flexibles à plusieurs membrures reste une tâche compliquée et non systématique.

Le principe de Hamilton est un principe variationnel. Ce principe considère le mouvement global du système à étudier entre deux instants t_1 et t_2, et est donc un principe d'intégrale. Les équations différentielles gouvernant le système sont générées à partir des énergies cinétique et potentielle et du travail virtuel effectué entre ces deux instants (Meirovitch, 1967 ; Cannon et Schmitz, 1984 ; Cetinkunt et Yu, 1991 ; Low et Vidyasagar, 1990). Dans sa forme générale, le principe de Hamilton s'écrit sous la forme :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}\, dt = 0 \tag{2.1}$$

où T est l'énergie cinétique, V est l'énergie potentielle, δ est l'opérateur du déplacement virtuel, δW_{nc} est le travail virtuel des forces non conservatives y inclus les frottements et les forces extérieures. L'avantage principal de cette méthode est la façon souple

et naturelle dont les conditions aux frontières (CF) et les propriétés physiques sont imposées. Son désavantage est surtout le calcul laborieux engendré par les intégrales par parties. Low et Vidyasagar (1990) ont appliqué le principe de Hamilton pour générer la dynamique des robots à plusieurs bras rigides et flexibles. La dynamique obtenue est non explicite et est sous la forme d'équations integro-différentielles, ce qui limite leur utilisation dans la commande. Junkins et Kim (1993) ont généralisé explicitement le principe de Hamilton afin d'éviter le calcul laborieux des intégrales par parties.

Les équations de Lagrange représentent cependant la technique la plus répandue pour formuler les équations dynamiques des manipulateurs flexibles (Aoustin et al, 1994; Kwon et Book, 1994; Li, 1994; Piedbœuf et al, 1991). La formulation des équations est systématique. Les équations de Lagrange sont généralement utilisées dans le but d'obtenir un modèle spatialement discret représenté par un système d'équations différentielles ordinaires (ÉDO) plus attirant pour la commande. Ceci représente l'avantage et la popularité de cette méthode. Serna et Bayo (1989) ont utilisé les équations de Lagrange pour développer les équations dynamiques non linéaires de robots à bras rigides et flexibles. Book (1984) a développé le modèle discret d'un robot à plusieurs membrures en utilisant les équations de Lagrange associée avec la méthode de modes supposés. Il a étendu la matrice de transformation homogène de Denavit-Hartenberg pour décrire la déformation cinématique des membrures flexibles connectées par des articulations rotatives. Cependant, cette méthode engendre beaucoup de calcul redondant. Yuan et al. (1993) ont utilisé la même méthode proposée par Book et ils ont démontré les caractéristiques des équations dynamiques nécessaires pour le contrôle. De Luca et Siciliano (1989) ont développé le modèle explicite et compact d'un robot à deux membrures flexibles. Nicosia et al. (1996) ont développé un modèle simplifié linéaire d'un robot à deux bras flexibles. Ils ont linéarisé le modèle non linéaire autour d'une position d'équilibre. Ils ont utilisé la méthode de Lagrange avec des fonctions de forme polynomiales. Ils ont validé expérimentalement les fréquences

du modèle avec un joint bloqué. La différence entre les valeurs expérimentales et théoriques des fréquences est attribuée aux termes négligés dans le modèle linéaire. Torby et Kimura (1999) ont développé les équations dynamiques d'un robot ayant plusieurs bras flexibles y compris des bras avec des articulations prismatiques. Chaque bras est représenté par deux éléments finis dans l'espace tridimensionnel. Les bras avec des joints prismatiques sont traités comme des poutres avec des conditions aux frontières variant dans le temps. Un exemple du développement d'un robot RRP est donné. Piedboeuf (1998) a développé le modèle d'un robot à plusieurs bras enchaînés. Il a utilisé une méthode récursive basée sur le principe de Jordan. Les déformations dans l'espace tridimensionel ainsi que la torsion autour de l'axe longitudinal d'un bras sont prises en compte avec une cinématique non linéaire (d'ordre deux). La méthode récursive facilite la génération symbolique du modèle. Boyer et al. (2002) ont aussi développé le modèle d'un robot à plusieurs bras flexibles relié par des articulations rotatives. Les déformations considérées sont tridimensionnelles et la cinématique est non linéaire, d'ordre quelconque. Un exemple d'un robot à quatre articulations ayant deux bras flexibles est montré. Les modèles non linéaires obtenus sont consistants jusqu'à l'ordre deux par rapport à la loi de la conservation de l'énergie. Book et Obergfell (2000) ont développé un modèle simplifié d'un robot à deux bras flexibles ayant un mécanisme d'actuation parallèle. Ils ont utilisé la méthode de Lagrange avec la méthode de modes supposés. Le modèle développé est comparé aux résultats expérimentaux et à plusieurs cas limites : comparaison de la réponse fréquencielle des joints, la déformation des bras et la déformation de l'extrémité. Le modèle n'est pas très précis pour le développement d'une stratégie de contrôle, mais il est jugé acceptable par les auteurs pour aider à sélectionner et à simuler un contrôleur pour les joints avec un retour de l'extrémité et à le valider avant de l'appliquer physiquement au robot.

Afin d'évaluer les propriétés d'un modèle, certains chercheurs ont étudié l'effet de certains paramètres sur le comportement dynamique du système souvent constitué

d'un moteur, d'un bras flexible et d'une charge. Spector et Flashner (1990) ont analysé la position des pôles et des zéros de la fonction de transfert du système à un bras flexible sans charge en variant la sortie. Ils ont conclu qu'un modèle dynamique précis est d'importance cruciale surtout pour la commande d'un système où la sortie est non colocalisé. Il ont aussi trouvé que les systèmes de contrôle non colocalisé sont toujours à phase non minimale au delà de certaines fréquences. En parallèle, Parks et Pak (1991) ont étudié l'effet des inerties du moteur et de la charge sur la position des pôles et des zéros des fonctions de transfert de la base et de l'extrémité du bras. Principalement, ils ont trouvé que l'inertie de la charge a surtout un effet sur les zéros de la fonction de transfert de l'extrémité et que l'observabilité de cette dernière peut être perdu pour certaines valeurs de l'inertie. L'utilisation de plusieurs capteurs est donc nécessaire pour assurer cette observabilité. Li et al. (1998) ont de plus étudié l'effet de la masse de la charge sur les fréquences. Ils ont aussi considéré l'élasticité de l'articulation à la base. Notons que le développement du modèle et la solution du problème aux valeurs propres est très similaire à la méthode que nous allons présenter ultérieurement dans cette thèse. Ils ont conclu que les fréquences naturelles diminuent et tendent vers une valeur constante en augmentant l'inertie de la base. Pour des faibles valeurs, la fréquence fondamentale est indépendante de cette inertie. La masse de la charge affecte principalement la fréquence fondamentale. Les faibles valeurs de l'inertie de la charge affectent principalement les fréquences élevées, et des grandes valeurs affectent les faibles fréquences. Ata et Elkhoga (1998) ont étudié l'effet de l'inertie du moteur et de la masse de la charge sur le couple moteur solution de la dynamique inverse.

2.2 Discrétisation des équations dynamiques

Le modèle obtenu en appliquant l'une des méthodes déjà citées est théoriquement d'ordre infini. Généralement, du point de vue de la commande, un modèle de dimen-

sion finie est préférable. La discrétisation spatiale et la troncature du modèle sont donc nécessaires afin d'aboutir à un contrôleur relativement simple. Ceci n'a pas empêché quelques chercheurs à travailler avec le modèle continu de dimension infinie (Kelemen et Bagchi, 1993). La discrétisation spatiale peut intervenir à deux niveaux. Le premier est de discrétiser spatialement les équations dynamiques intégro-différentielles (Piedbœuf, 1989; Cetinkunt et Yu, 1991). Le modèle obtenu est toujours d'ordre infini et la précision du modèle est du même ordre que la précision des hypothèses simplificatrices posées lors de la modélisation. Le deuxième niveau est de discrétiser spatialement les expressions des énergies cinétique et potentielle et d'utiliser ces expressions pour aboutir aux équations dynamiques discrètes. La précision du modèle dépend d'une part des hypothèses simplificatrices et d'autre part de la méthode de discrétisation utilisée. Vu que cette approche est plus facile, c'est cette méthode qui est largement répandue pour la modélisation des robots flexibles. Dans ce qui suit, deux méthodes de discrétisation seront discutées : la méthode de modes supposés (MMS) et la méthode d'éléments finis (MEF).

Dans la MMS, la déformation $v(x,t)$ est écrite sous la forme d'une somme infinie d'un produit de deux fonctions : une fonction qui dépend seulement de la variable spatiale et une autre qui dépend seulement du temps, soit

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \tag{2.2}$$

où $\phi_i(x)$ sont les fonctions de forme (FF) du bras flexible et $q_i(t)$ sont des amplitudes variant dans le temps. En général, les FF sont choisies afin de former une base complète et sont rendues orthogonales ce qui permet d'éliminer le couplage entre elles. Les variables $q_i(t)$ constituent les coordonnées généralisées associées à la flexibilité. Pour avoir un modèle d'ordre fini, un nombre fini de modes, ν, est utilisé. La déformation est alors écrite sous la forme suivante :

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\nu} \phi_i(x) q_i(t) \tag{2.3}$$

Les énergies cinétique et potentielle peuvent être exprimées en fonction des coor-

données rigides représentant le mouvement des joints et des coordonnées flexibles. En appliquant les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \qquad i = 1,\ 2, \ldots,\ \nu \tag{2.4}$$

avec les coordonnées modales comme coordonnées généralisées, on obtient un ensemble d'équations différentielles réduites et découplées.

Plusieurs choix des FF sont possibles : les fonctions polynomiales, les FF des poutres encastrées (Hasting et Book, 1987; Piedbœuf, 1992; Yigit, 1994), et les FF des poutres pivotantes (Cetinkunt et Wu, 1990; Hasting et Book, 1987; Kwon et Book 1994). Les termes encastré et pivotant décrivent la nature du lien à la base d'un bras avec le moteur. Les termes charge et libre décrivent les conditions à l'extrémité du bras, i.e. un bras avec charge ou sans charge (libre).

Barbieri et Özgüner (1988) ont comparé expérimentalement, pour une membrure dans le plan horizontal et sans charge à son extrémité, les modèles basés sur les fonctions propres du bras et sur les FF d'une poutre encastrée-libre. Ils ont montré que ces dernières peuvent être utilisée pour l'approximation des fonctions propres si le rapport des inerties du moteur et de la membrure est grand.

Hastings et Book (1987) ont comparé deux types de FF pour modéliser un robot à une membrure flexible : le premier est celui d'une poutre encastrée-charge et le deuxième est celui d'une poutre pivotante-charge. Ils ont comparé les fréquences calculées des deux modèles par rapport aux fréquences mesurées avec des jauges de contrainte à la base de la membrure. Le modèle de la poutre encastrée-charge a donné une meilleure convergence.

Yigit (1994) a appliqué le principe de Hamilton à un robot formé de deux membrures : une rigide et une flexible. La séparation de variables est réalisée en utilisant la méthode de Galerkin (Meirovitch 1967) et les FF utilisées sont celles d'une poutre encastrée-libre. Des simulations comparant la déformation de l'extrémité avec différents nombres de modes montrent la similitude des déformations de l'extrémité. Un modèle avec trois modes vibratoires est alors adopté.

L'approximation par l'expansion modale et l'utilisation des FF supposent que ces dernières sont découplées, invariantes et sont indépendantes du contrôleur. Cetinkunt et Yu (1991) ont étudié l'effet en boucle fermée d'un contrôleur proportionnel-dérivé sur les FF encastrée-libre et pivotante-libre pour une membrure avec charge et tournant dans le plan horizontal. Plusieurs simulations ont été montrées pour différentes valeurs de gains du contrôleur. Le critère de comparaison choisi est la largeur de bande passante en boucle fermée. Les résultats donnés par les fonctions d'une poutre encastrée-libre approchent mieux les résultats des fonctions propres. Deux modes sont suffisants dans l'approximation.

Une autre méthode utilisée pour la discrétisation de la déformation est la méthode d'éléments finis (MEF). Cette méthode est encore l'une des méthodes fréquemment utilisées pour la discrétisation spatiale des systèmes continus (Bayo, 1987 ; Jonker, 1990 ; Menq et Chen, 1988). Cette méthode est conceptuellement similaire à la méthode de modes supposés. Chaque membrure est divisée en un nombre fini de segments reliés entre eux par des nœuds. Chaque segment doit satisfaire les conditions de continuité entre les nœuds. La déformation de chaque segment est exprimée en fonction d'un ensemble de coordonnées généralisées et les expressions des énergies cinétique et potentielle des segments sont exprimées en fonction de ces coordonnées. Ces expressions sont insérées dans les équations de Lagrange pour aboutir aux équations dynamiques du système. Généralement, les coordonnées généralisées sont les déplacements et leurs dérivées aux nœuds. Les fonctions d'interpolation cubiques d'Hermite (Meirovitch, 1986) sont souvent utilisées pour décrire le profil de la membrure entre les nœuds. La MEF permet d'estimer les fréquences naturelles d'une structure flexible. Des membrures ayant des sections variables et/ou des matériaux non uniformes peuvent être facilement modélisés par cette méthode. L'avantage de la MEF est l'amélioration de la précision des résultats quand le nombre d'éléments par membrure augmente. La MEF peut alors être utilisée pour mesurer la performance des autres méthodes de discrétisation.

Dancose et al. (1989) et Cho et al. (1991) ont utilisé les splines cubiques comme fonctions d'interpolation. Pour ces dernières, la déformation, sa dérivée première et sa dérivée seconde (la courbure) sont continues aux nœuds entre les éléments. Une relation linéaire entre les déplacements et les courbures aux nœuds est alors obtenue. Le déplacement à l'extrémité d'un élément est alors suffisant pour décrire la déformation. L'idée d'utiliser des splines cubiques vient de leur association naturelle pour décrire la déformation statique des structures flexibles : les deux ont une dérivée quatrième nulle.

Les B-splines cubiques sont aussi utilisés dans l'approximation des FF des membrures flexibles (Pfeiffer et Kleemann, 1989 ; Truckenbrodt, 1980). Ces fonctions sont définies sur plusieurs éléments de la membrure. Truckenbrodt (1980) a défini plusieurs fonctions cubiques vérifiant différentes CF et les a utilisées comme fonctions d'interpolation.

Meirovitch et Kwak (1990) ont comparé la convergence de la fréquence de la MMS et de la MEF pour une poutre non uniforme encastrée à la base et attachée avec un ressort à son extrémité. Les vibrations sont axiales. La comparaison de la convergence des trois premières fréquences montre que la convergence de la MMS est relativement lente. La convergence de la MEF utilisant des fonctions d'interpolation linéaires est bonne pour la première fréquence mais elle se détériore progressivement pour les hautes fréquences. Pour accélérer la convergence des deux méthodes, d'autres types de fonctions sont utilisés : des fonctions de comparaisons et de quasi-comparaisons pour la MMS et des fonctions d'interpolation quadratique et cubique pour la MEF. La convergence est alors améliorée puisqu'on tient compte mieux des CF.

Junkins et Kim (1993) ont montré, pour une structure flexible avec un mouvement du corps rigide, que la convergence des fréquences naturelles des modes encastrés-libre est plus lente que celle des éléments cubiques d'Hermite. Les modes supposés qui sont utilisés dans leur comparaison vérifient seulement les CF géométriques.

En comparant deux modes encastrés-charge et deux éléments cubiques d'Hermite,

Theodore et Ghosal (1995) ont conclu que le nombre d'opérations mathématiques nécessaire pour calculer la matrice de masse est plus petit avec les éléments cubiques que celui avec les modes encastrés. Cependant, le nombre d'équations de mouvement est plus grand pour les éléments cubiques.

Récemment, Tokhi et Mohamed (1999) ont évalué les performances de la MEF pour modéliser un système à un bras flexible. Ils ont comparé la convergence des fréquences des trois premiers modes en augmentant le nombre d'éléments cubiques. Les fréquences sont sous-estimées car le modèle du système n'inclue ni l'inertie de la base ni celle de la charge. Ils ont aussi comparé le temps d'exécution de l'algorithme (développement du modèle) sur deux ordinateurs : un PC 486DX (33MHz) et une station SUN 4-ELC SPARC (33MHz) !

Cette étude nous montre qu'il existe plusieurs façons de représenter la déformation des bras flexibles. Certaines comparaisons ont été faites entre ces représentations afin de sélectionner les FF les mieux adaptées à une application particulière. Cependant, ces comparaisons sont souvent limitées et leurs conclusions ne peuvent pas être généralisées soit à d'autres FF soit encore à d'autres configurations.

2.3 Commande des robots flexibles

Les algorithmes de commande des robots flexibles sont classés selon la nature de la commande, soit linéaire ou non linéaire, adaptative ou non, et en fonction de la sortie par rapport à l'entrée soit colocalisée ou non.

2.3.1 Linéarisation et couple précalculé

La méthode du couple précalculé est très populaire pour les robots rigides. Dans cette méthode, la dynamique est linéarisée par une rétroaction de la dynamique non linéaire pour composer un système d'équations différentielles linéaires de deuxième ordre. Calculée dans le domaine temporel, cette méthode utilise une faible période

d'échantillonnage.

De Luca et Siciliano (1988) ont appliqué la méthode du couple précalculé par la linéarisation au sens entrée-sortie à un modèle non linéaire d'un robot à une membrure flexible dans le plan horizontal. La sortie considérée est la position de l'articulation du robot. Cette technique assure le suivi de certaines trajectoires dans l'espace des variables d'articulations. Ils ont montré qu'un sous-système non linéaire et non observable de la sortie survient en appliquant cette méthode. La stabilité de ce sous-système est à vérifier pour valider le choix du contrôleur. En considérant la position de l'articulation comme sortie, la dynamique non observable est associée aux coordonnées flexibles qui décrivent la déformation de la membrure. Cette dynamique est stable à cause de l'amortissement interne de la membrure. Cependant, cette technique ne peut pas être directement appliquée à l'extrémité du robot à cause du déphasage non-minimal du système correspondant.

Li (1994) pour sa part a appliqué la linéarisation au sens entrée-sortie à un robot à deux membrures : une rigide et une flexible. Le modèle utilisé est non linéaire et les sorties considérées sont les variables d'articulations. Cette technique découple la dynamique de la membrure rigide de celle de la membrure flexible ce qui permet d'appliquer des commandes indépendantes pour chaque membrure. La première est contrôlée avec un simple proportionnel-dérivé (PD), alors que la dernière est contrôlée en utilisant un retour d'état optimal. Les coordonnées rigides sont commandées pour suivre une trajectoire désirée et une valeur désirée nulle est assignée aux coordonnées flexibles. Ce qui permet d'atténuer les vibrations de la membrure flexible.

Yurkovitch et al. (1993) ont décomposé la dynamique d'un robot à deux membrures flexibles en un système représentant la partie rigide et un autre représentant la partie flexible. La partie rigide a été linéarisée en utilisant la méthode du couple précalculé. Un contrôleur PD a été ajouté pour assurer la stabilité en boucle fermée. Un retour de l'accélération de l'extrémité est ajouté pour augmenter l'amortissement dans le système. Une atténuation des vibrations de l'extrémité en régime permanent

est obtenue. L'implantation de cette méthode montre des résultats acceptables. Cette méthode n'assure pas un suivi dans l'espace cartésien.

Pour une accélération de l'extrémité désirée, Bayo (1988) a résolu le problème de la dynamique inverse dans le domaine fréquentiel en utilisant la transformation rapide de Fourier. Il a montré que la dynamique inverse qui considère l'accélération de l'extrémité comme sortie est un système non causal. En dépit d'un excellent résultat, cette méthode nécessite un long calcul pour la transformation du modèle dynamique et de l'entrée du domaine temporel au domaine fréquentiel et la transformation inverse de la sortie au domaine temporel. De plus, l'hypothèse implicite d'une réponse linéaire du système est nécessaire pour que l'analyse dans le domaine fréquentiel soit applicable. Bayo et Moulin (1989) ont appliqué la même méthode à un robot à deux membrures flexibles. Pour réduire la complexité de calculs, ils ont introduit la convolution. Asada et Ma (1989) ont proposé un algorithme pour résoudre les équations de la dynamique inverse en se basant sur un modèle linéaire simplifié. Ils ont montré qu'il y a une vitesse limite à partir de laquelle les forces centrifuges deviennent non négligeables et le modèle simplifié n'est plus valide. Kwon et Book (1990) ont développé les équations de la dynamique inverse d'une membrure dans le plan horizontal. Cette dynamique s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{X}_f &= A X_f + B u_r(t) \\ \tau &= C X_f + D u_r(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

où X_f représente le vecteur des coordonnées flexibles et de leurs dérivées, u_r représente le vecteur des coordonnées rigides et de leurs dérivées et τ est le couple moteur. Ils ont montré que cette dynamique est non intégrable car la matrice d'état A est instable. Si le domaine de solution est étendu pour inclure des solutions non causales, une solution unique peut être obtenue. Une transformation de similarité découple le système en deux sous systèmes intégrables, causal et anti-causal. Le couple anticipatif utilisant cette méthode avec un contrôleur PD sur le moteur a montré un bon suivi des trajectoires des variables d'articulations et de l'extrémité du robot. Malgré les bonnes

performances, cette méthode est limitée aux systèmes linéaires. Pour l'appliquer à un robot à plusieurs membrures, cette méthode doit être combinée avec une technique de compensation non linéaire.

Chen et Paden (1996), Devasia et al. (1996) ont généralisé cette méthode pour les systèmes non linéaires à déphasage non minimal. Le système est linéarisé au sens entrée-sortie et la dynamique de zéros à déphasage non-minimal est générée. Cette dernière est décomposée en une partie stable et une autre instable. Une solution stable et bornée de l'inversion dynamique est alors possible si le point d'équilibre de la dynamique de zéros est hyperbolique et si la norme infinie du vecteur de sortie et ses dérivées est petite.

Une commande anticipative basée sur l'inversion de la dynamique rigide a été appliquée par Pfeiffer et Kleemann (1989) et Ziarati (1993). Une correction quasi-statique est ajoutée pour compenser l'effet de la flexibilité et assurer un suivi de trajectoires de l'extrémité du robot dans le plan cartésien. Un contrôleur de type PD est ajouté pour chaque variable d'articulations pour assurer la stabilité du système. Une commande par rétroaction des signaux des jauges est encore introduite pour amortir les vibrations des membrures. De résultats satisfaisants sont obtenus pour de faibles et moyennes vitesses de rotation.

L'inversion de la dynamique nécessite un choix judicieux de la sortie pour être appliquée. Yim (1993) a démontré qu'en considérant l'extrémité du robot comme étant la sortie, la dynamique interne devient instable causant un mouvement flexible divergent. En paramétrisant les coordonnées généralisées d'une membrure flexible, il a pu déterminer numériquement le point le plus proche de l'extrémité où la dynamique interne reste stable. Le couple appliqué est alors décomposé en deux parties. Un couple précalculé qui linéarise le système en considérant ce point comme sortie. Ce couple assure le suivi de la sortie considérée et la trajectoire est imposée dans l'espace cartésien. Étant donné que la sortie est proche de l'extrémité, celle-ci va "suivre" la trajectoire désirée. Pour assurer le suivi de l'extrémité, un contrôleur optimal est

ajouté seulement à la fin du mouvement en linéarisant la dynamique des coordonnées flexibles. Les résultats de simulation ont montré un bon suivi de l'extrémité dans l'espace cartésien.

Lucibello et Di Benedetto (1993) ont montré que, pour un robot à deux membrures, une rigide et une flexible, il est possible de faire un suivi de trajectoire de l'extrémité dans l'espace cartésien malgré la propriété de déphasage non minimal de la dynamique interne. En effet, pour certaines trajectoires périodiques ayant une dérivée première périodique, ils ont montré que la dynamique interne reste bornée et le suivi de l'extrémité est asymptotique tant que la dynamique des coordonnées rigides est lente et les perturbations et les variations des paramètres sont faibles. Un retour d'état linéaire autour du système découplé est utilisé pour stabiliser localement le système.

Un excellent travail pour une classe de manipulateurs constituée d'une chaîne de bras rigides et d'un bras flexible est présenté par Bigras et al. (1998). Les auteurs ont démontré les caractéristiques du modèle nécessaires pour la commande. Ils ont utilisé la linéarisation au sens entrée-sortie pour découpler et linéariser la dynamique dans l'espace des variables d'articulations. Ensuite une transformation est appliquée pour exprimer la dynamique dans l'espace des coordonnées virtuelles (position de l'extrémité plus les coordonnées flexibles). Une commande type PD assure la convergence exponentielle des coordonnées rigides virtuelles. Cependant, la dynamique interne est instable à cause da le propriété du déphasage non minimal de cette dynamique. Une commande linéaire est utilisée pour stabiliser cette dynamique. Une étude systématique de la stabilité et de la convergence exponentielle de la dynamique de l'erreur est présentée et basée sur la théorie de la stabilité absolue, la stabilité des systèmes triangulaires ou hiérarchisés et les inégalités linéaires matricielles.

Récemment, Moallem et al. (2001) ont considéré la linéarisation au sens entrée-sortie d'un système à un bras rigide et un bras flexible. Ils ont choisie une sortie non colocalisée constitué de l'angle moteur plus une pondération de la déformation de

l'extrémité et paramétrisée par un paramètre α. Ils ont fixé ce paramètre à $0,8$. La dynamique des zéros résultante est localement stable. Cette sortie est l'équivalente de la position angulaire d'un point sur le bras flexible. Leur objectif était de construire un observateur non linéaire pour estimer les coordonnées flexibles et leurs dérivées qui sont difficilement mesurables. Cette estimé sera utilisée dans une loi de commande linéarisante. Un montage expérimental a été réalisé. Une intéressante conclusion de leur travail concerne le choix du nombre de modes à utiliser dans le modèle discret. D'après les auteurs, ce choix est un compromis entre la précision et la robustesse du modèle. Un nombre élevé de modes peut déstabiliser le système en boucle fermée : le contrôleur peut exciter les hautes fréquences du système. De plus, ce choix affecte aussi la précision du modèle, surtout le conditionnement numérique du modèle (inversion de la matrice de masse). Ces points seront discutés en détails dans le chapitre sur la comparaison des modèles discrets (Chapitre 5).

2.3.2 Perturbations singulières

Les déformations des membrures flexibles sont supposées petites comparées au mouvement de la partie rigide. La dynamique non linéaire de robots flexibles peut être séparée en deux parties : la dynamique non linéaire de la partie rigide (lente), et la dynamique linéarisée de la partie flexible (rapide). En profitant de la différence des constantes de temps des deux dynamiques, on peut appliquer la technique de la perturbation singulière pour la conception d'un contrôleur hybride (Aoustin et al, 1993 ; Lewis et Vandegrift, 1993, Moallem et al. 2000). La partie rigide est contrôlée en utilisant un couple précalculé et la partie flexible est traitée avec un contrôleur linéaire en linéarisant le système autour du mouvement rigide. Siciliano et Book (1990) ont aussi appliqué cette méthode à une membrure flexible dans le plan horizontal et ont montré l'avantage de cette méthode par rapport à un contrôleur linéaire. Si la première fréquence naturelle du robot est proche de zéro, le premier mode doit être inclus dans le système lent pour qu'il soit toujours dominant.

La robustesse des lois de commande face à la variation des paramètres et des perturbations est à considérer. La commande adaptative est dans cette classe de contrôleurs.

2.3.3 Commande adaptative

Vu que les caractéristiques des robots flexibles peuvent changer avec la configuration et avec la charge, une loi de commande adaptative peut être considérée pour maintenir les performances désirées du robot. Différents schémas ont été appliqués.

La commande adaptative avec modèle de référence consiste à générer une commande qui fait que le système agit comme un modèle de référence donné. Ce dernier est idéalement conçu pour être stable, linéaire, invariant dans le temps et découplé. Une solution adoptée par Siciliano et al. (1986) consiste à décomposer la commande en deux parties : une nominale basée sur une commande optimale pour le modèle linéarisé et une commande adaptative qui assure la stabilité du système en boucle fermée. Malgré que les résultats de comparaison de la commande optimale et de la commande adaptative, pour une membrure dans le plan horizontal, ont montré que cette dernière est meilleure quand la charge a été doublée, cette méthode est limitée aux cas linéaires.

Si les paramètres du système ou de la charge changent, un contrôleur basé sur une estimation des paramètres du système peut être implanté. C'est la commande adaptative auto-réglée. L'ordre du système est supposé connu. Une loi d'adaptation des paramètres du modèle est nécessaire. Chen et Menq (1988 et 1990) ont comparé expérimentalement trois lois d'identification d'une charge pour une membrure flexible tournant dans le plan horizontal. Les termes non linéaires ont été négligés et le modèle est supposé linéaire. Ils ont comparé la méthode de moindres carrés, la méthode de moindres carrés avec séparation de la charge et la méthode de gradient. Ils ont étudié l'effet de la dynamique non modélisée et du bruit. Ils ont conclu que la méthode de gradient donne de bons résultats en présence des deux effets. Leurs résultats montrent

que la convergence des paramètres se fait en régime permanent et non pas pendant la variation de la charge.

Lammerts et al. (1995) ont adapté la méthode adaptative de Slotine et Li au cas d'un robot flexible avec base mobile et une membrure flexible. La stabilité globale asymptotique de la loi de commande, couple précalculé linéarisant pour les coordonnées rigides, est démontrée et la convergence de la loi d'adaptation des paramètres est assurée en utilisant une fonction de Lyapunov comme dans le cas des robots rigides. Les résultats de simulation sont très satisfaisants. La linéarisation au sens entrée-sortie appliquée aux coordonnées rigides assure seulement le suivi dans l'espace des variables d'articulations.

Feliu et al. (1999) ont appliqué une commande adaptative qui permet d'estimer uniquement la masse de la charge au lieu de tous les paramètres d'un système à un bras flexible. L'effet de la charge est équivalent à une force extérieure appliquée à l'extrémité. Ce qui leur a permis de déduire une loi d'adaptation de la charge indépendamment des autres paramètres du système (comme c'est souvent le cas pour les méthodes adaptatives). Des mesures de l'accélération de la charge sont nécessaires pour la loi d'adaptation. Des résultats expérimentaux montrent la validité de cette méthode.

De Queiroz et al. (1999) ont appliqué une commande adaptative non linéaire pour estimer la rigidité et masse de la charge d'un système à un bras flexible. Ils ont utilisé un modèle dynamique représenté par des EDP avec des CF. Cependant, les termes non linéaires devraient être négligeables (le carré de la déformation). Deux entrées ont été considérées : le couple moteur appliqué à la base et une force externe appliquée à l'extrémité du bras (par un système à air comprimé). Le système expérimental est relativement complexe car il fallait mesurer la déformation de l'extrémité, les forces de cisaillement à l'extrémité, la position et la vitesse du moteur.

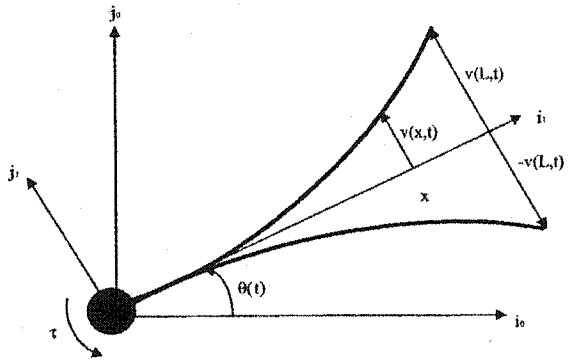


FIG. 2.1 – Déplacement angulaire virtuel

2.4 Passivité des robots flexibles

Pendant les dernières années, la passivité a connu une attention particulière dans le monde de la communauté automaticienne tant au niveau théorique que pratique. Dans certains cas, les liens entre la passivité et la stabilité (aux sens L_2, asymptotique, global, etc.) ont été démontrés. Plusieurs applications dans différents domaines d'ingénierie ont été réalisées (Ortega et al. 1998).

Rappelons tout d'abord que la vérification de la passivité d'un système (dynamique) revient à vérifier dans quel "sens" l'énergie interne du système est naturellement dissipée. La passivité sert donc à profiter de la structure physique de tels systèmes. Par la suite, un retour de la sortie favorise l'amortissement dans le même "sens" là où l'énergie est dissipée.

En négligeant l'amortissement, la fonction de transfert (FT) entre le couple moteur et le déplacement angulaire de l'extrémité d'un bras flexible a un degré relatif apparent (δ) égale à deux. Wang et Vidyasager (1991) ont montré que ce degré relatif n'est pas bien défini quand le nombre de modes flexibles ν dans la série de l'équation (2.3) tend vers l'infini. Pour remédier à ce problème, les auteurs ont proposé une nouvelle sortie, appelée le déplacement angulaire virtuel de l'extrémité, qui est l'image du déplacement angulaire par rapport à l'axe neutre de la membrure (axe i_1 dans la figure 2.1). Cette sortie est définie par :

$$y(t) = L\theta(t) - v(L,t)$$

où L est la longueur du bras, v est sa déformation, θ est l'angle moteur, i_0, j_0 sont les vecteurs directeurs d'un repère fixe, et i_1, j_1 sont les vecteurs directeurs d'un repère tournant avec le moteur. La FT entre le couple moteur et le déplacement virtuel possède un degré relatif bien défini pour tout ν, soit $\delta = 2$. Wang et Vidyasagar (1990) ont montré numériquement que, pour certaines poutres flexibles, la FT avec la vitesse du déplacement virtuel comme sortie est passive.

Pota et Vidyasagar (1991) ont vérifié la passivité d'une FT d'un robot à une membrure flexible avec charge. Ils ont montré que pour une membrure non uniforme, la FT est passive si le rapport I/I_m est suffisamment petit, où I est le second moment d'aire de la membrure et I_m est l'inertie vue de la base du bras. Dans le cas d'une membrure uniforme, la FT est passive si le rapport I_m/I_b est très petit, où I_b est l'inertie du bras. Wang et Vidyasagar (1991) ont montré que pour des robots peu flexible ($I_m/\rho \gg 1$, où ρ est la densité massique linéaire de la membrure), la FT est passive si peu de modes ont été considérés dans la série (2.3).

Rossi et Wang (1996) ont vérifié la passivité d'une membrure flexible avec charge. Un contrôleur proportionnel stabilise donc la sortie (i.e. le déplacement virtuel). Pour rendre le contrôleur robuste vis-à-vis des variations de la charge, les auteurs ont ajouté une boucle de commande adaptative avec modèle de référence. Des simulations ont montré l'efficacité d'une telle commande quand la charge varie.

Chodavarapu et Spong (1996) ont vérifié la passivité d'une FT d'un bras flexible sans charge ayant l'angle de rotation virtuel comme sortie. Cette dernière est constituée de l'angle moteur *plus* une pondération positive de la pente à l'extrémité, soit

$$y(t) = \theta(t) + \kappa \frac{\partial v}{\partial x}(L,t)$$

où $\kappa \in (0,1)$. Pour $\kappa = 1$, le degré relatif de la FT correspondante n'est pas défini. Les auteurs ont montré, pour un $\kappa = 1/2$, que si l'inertie du moteur est très grande (e.g. un moteur avec un réducteur de vitesse), la FT correspondante est passive et que la

dynamique interne est stable. Quand κ s'approche de un, la FT perd sa caractéristique de passivité.

Talebi et al. (1999) ont aussi défini une nouvelle sortie pour laquelle la dynamique des zéros est stable. Une stratégie de commande basée sur l'inversion de la dynamique est ensuite utilisée. La re-définition de la sortie est basée sur le concept d' "action directe". La sortie est la somme de la position de l'extrémité d'un bras flexible plus la sortie d'un système dynamique directe de façon que la dynamique des zéros du système dynamique total soit stable. Olfati-Saber (2000) a proposé une sortie non colocalisée constituée de l'angle de rotation du moteur plus une pondération non linéaire (saturation) de la déformation de l'extrémité d'un bras flexible. Il démontre que la dynamique des zéros qui correspond à cette sortie est à phase minimale. Cependant, toute la démonstration est basée sur le fait que les termes de la déformation d'ordre deux dans la matrice de masse sont non négligeables. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse de la faible déformation considéré par l'auteur pour développer son modèle. Yang et al. (2000) ont plutôt paramétrisé la sortie par les paramètres du contrôleur (du genre retour d'état). Ils ont choisi ces paramètres pour assurer une dynamique des zéros stable et un suivi asymptotique de la sortie en boucle fermée.

Ces études sont intéressantes car elles ouvrent le chemin à l'application de la passivité aux robots flexibles qui jusqu'à présent était restrictive à cause de la caractéristique du déphasage non minimal des modèles associés à ces robots. Les études réalisées pour montrer l'applicabilité de la passivité sont plutôt numériques. Nous proposons dans un chapitre ultérieur une étude algébrique de la passivité. Nous proposons de généraliser les études ultérieures en choisissant un point le long du bras flexible comme sortie. Cette sortie sera paramétrisée par un réel. Le choix de la passivité par rapport à d'autres méthodes de commande citées dans ce chapitre sera évident en rappelant la passivité dans le chapitre 6. En particulier, un avantage important de l'application de la passivité est la simplicité du choix du contrôleur qui est très souvent un contrôleur classique (PD, avance de phase, etc.). Comparativement

à d'autres types de contrôleurs, l'implantabilité du contrôleur conçu par la passivité est donc beaucoup plus simple.

2.5 Conclusion

Cette étude bibliographique a permis de rappeler les problèmes essentiels posés par la modélisation et la commande des vibrations de manipulateurs flexibles. Hughes (1987) a cité qu'une structure ne peut pas avoir un nombre infini de modes, pas plus que le nombre de molécules de la structure elle même qui sont physiquement finis. Généralement le modèle de dimension fini est obtenu en considérant seulement les premiers modes vibratoires, dont le nombre est choisi arbitrairement. Ce choix est basé sur l'idée que l'énergie des modes à fréquences élevées est négligeable comparée à celle des modes à basses fréquences. Il n'y a pas une règle générale pour la sélection de la forme et du nombre de ces modes. Cependant, les actionneurs et les capteurs ont une bande de fréquences limitée. Donc, la fréquence maximale admissible doit correspondre à la plage excitée des fréquences. En utilisant l'expansion modale, il est difficile de choisir le nombre et le type des FF à utiliser. Le choix des ces fonctions dépend de plusieurs facteurs tels que l'expérience, les conditions à la base, les fréquences propres du système, etc. Ces aspects sont fondamentaux, et on les retrouvera tout au long de la première partie de notre étude. L'étude bibliographique nous a aussi permis de réaliser qu'il y avait peu d'études détaillées consacrées à la représentation de la flexibilité. La plupart des travaux faits dans ce domaine se consacrent à l'étude des points particuliers de cette représentation. Nous proposons de nous démarquer des études déjà réalisées, et d'essayer d'évaluer le gain possible en performances des modèles basés sur différentes méthodes de discrétisation de la flexibilité. Nous essayons encore d'unifier les approches de discrétisation : approche modale analytique (MMS) et approche discrète (MEF) dans une seule approche de type modale.

Nous ne désirons pas nous limiter ici à une étude de discrétisation de la flexibilité

parce que les techniques de représentation ne permettent pas de prédire parfaitement le comportement d'un système mécanique. C'est donc le rôle de la commande de compenser pour les incertitudes dans le modèle et dans ses paramètres. Pour cela, nous introduisons la commande du modèle en boucle fermée pour compenser les faibles incertitudes dans le modèle et ses paramètres.

Enfin, comme le suggérait notre introduction, l'application de la passivité dans le domaine de la flexibilité est limitée. Nous généralisons les études réalisées dans ce domaine. Nous présentons une étude complète de la passivité d'un modèle linéaire, et nous l'étendons au cas d'un modèle non linéaire.

Chapitre 3

MODÈLE D'UN BRAS TOURNANT DANS LE PLAN VERTICAL

Nous avons mentionné dans l'introduction qu'un de nos objectifs est de comparer des modèles basés sur différentes discrétisations spatiales. Dans la revue de la littérature, nous avons vu que la majorité des comparaisons déjà réalisées sont basées sur un modèle d'un bras flexible tournant dans le plan horizontal qui donne naissance à un modèle linéaire. Dans ce mémoire, nous ne limitons pas notre recherche à ce modèle linéaire. Notre recherche sera basée par contre sur un modèle non linéaire d'un bras flexible tournant dans le plan vertical. De plus, nous tenons compte de l'allongement du bras le long de son axe neutre. Pour cela, nous développons dans ce chapitre la dynamique d'un système à un bras flexible tournant dans le plan vertical et entraîné par un moteur à courant continu. Nous considérons une cinématique non linéaire et nous appliquons le principe de Hamilton pour générer les équations dynamiques de ce système. Ce dernier est à paramètres distribués, sa dynamique est représentée par des équations aux dérivées ordinaires (ÉDO) et des équations aux dérivées partielles (ÉDP) associé avec des conditions aux frontières (CF). Ensuite

nous discutons de la discrétisation spatiale de cette dynamique. Nous développons par la suite le modèle discret de ce système en appliquant les équations de Lagrange.

Pour valider le modèle dynamique nous avons utilisé le logiciel SYMOFROS (Piedbœuf, 1996 et Piedbœuf, 1998). Notons que les principales références considérées lors du développement du modèle continu et discret sont les suivantes : (Cannon et Schmitz, 1984, De Luca et Siciliano, 1989, Meirovitch, 1967, Meirovitch, 1986, Piedbœuf, 1992, Sakawa et al., 1985, Yuan et al. 1993).

3.1 Description du système

La figure 3.1 montre le système à modéliser. Il est constitué d'un bras flexible encastré dans une base rigide (moteur) et portant une charge à son extrémité. Le moteur génère un couple τ qui représente le seul couple extérieur agissant sur ce système. Le moteur, d'inertie I_m et de coefficient de frottement visqueux b_m, tourne d'un angle $\theta(t)$. Le bras flexible est supposé uniforme et est de longueur L, de masse par unité de longueur ρ et de rigidité EI_z, où E est le module de Young et I_z est le moment d'aire selon z. Le coefficient de frottement interne du bras est noté par κ_e. La déformation du bras est représentée par $v(x,t)$. Pour simplifier, x et t seront omis ultérieurement. La masse de la charge est M_c, son inertie est I_c et la distance entre son centre de masse et l'extrémité du bras est r_c. Le bras tourne dans le plan vertical et la gravité agit selon la verticale. Un référentiel inertiel $\mathcal{R}_0(\vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0)$ est attaché à la base. L'axe $\vec{\imath}_0$ de $\mathcal{R}_0$ est dirigé vers le bas. Un référentiel $\mathcal{R}_1(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1)$ tourne avec la base. Pour $\theta = 0$, $\mathcal{R}_1$ est superposé avec $\mathcal{R}_0$. Un référentiel $\mathcal{R}_2(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2)$ est attaché à l'extrémité du bras. L'axe $\vec{\imath}_2$ est tangent au bras. Un référentiel $\mathcal{R}_{dm}(\vec{\imath}_{dm}, \vec{\jmath}_{dm})$ est attaché au centroïde d'une section quelconque du bras situé à une distance x le long de l'axe $\vec{\imath}_1$. L'axe $\vec{\imath}_{dm}$ est superposé avec l'axe $\vec{\imath}_1$ pour $x = 0$ et avec l'axe $\vec{\imath}_2$ pour $x = L$. Un référentiel $\mathcal{R}_c(\vec{\imath}_c, \vec{\jmath}_c)$ est situé au centre de masse de la charge. Pour $r_c = 0$, l'axe $\vec{\imath}_c$ est superposé avec l'axe $\vec{\imath}_2$.

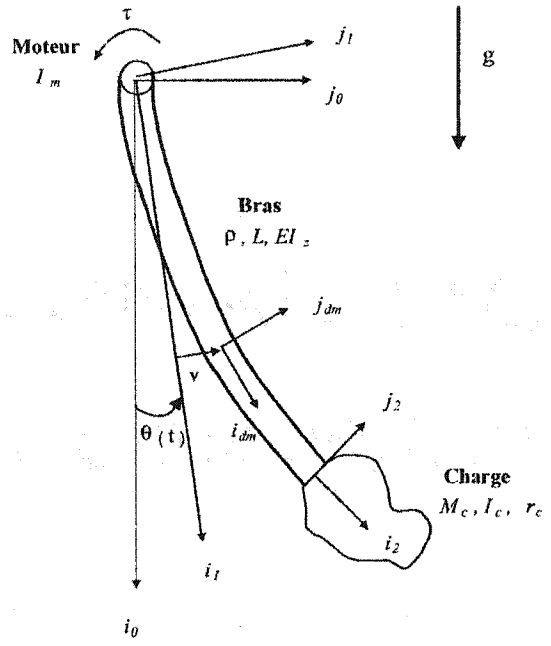


FIG. 3.1 – Le bras flexible

3.2 Hypothèses de modélisation

Lors de la modélisation, quelques hypothèses seront adoptées :

1. Le bras est modélisé comme une poutre d'Euler-Bernoulli, i.e.
   - l'inertie de rotation d'un élément est négligée ;
   - le cisaillement dû à l'effort tranchant est négligé.
2. Les déformations du bras sont supposées petites.

3.3 Modèle aux dérivées partielles

La flexibilité présente un caractère distribué. La déformation $v(x,t)$ dépend non seulement du temps mais aussi de la position selon l'axe longitudinal du bras. Le modèle du système sera donc représenté par des ÉDO et des ÉDP associées avec des CF. Ces équations peuvent être obtenues en appliquant le principe variationnel de

Hamilton, soit

$$\int_{t1}^{t2} \delta(T - V)\, dt + \int_{t1}^{t2} \delta W_{nc}\, dt = 0 \tag{3.1}$$

où T est l'énergie cinétique totale du système, V est son énergie potentielle, W_{nc} est le travail des forces non conservatives y inclus les forces de frottement et $\delta(.)$ représente l'opérateur de déplacement virtuel ou variationnel.

Le calcul de ces énergies fait intervenir la position d'un élément sur le bras ainsi que sa dérivée, i.e. la cinématique de l'élément. Dans ce qui suit, nous allons présenter la cinématique d'ordre deux et développer les expressions des énergies cinétique et potentielle.

Notons que dans toutes les expressions mathématiques qui suivent, les exposants $\dot{(.)}$ et $(.)'$ signifient respectivement une dérivée de l'expression $(.)$ par rapport au temps et par rapport à x, et les indices $(.)_0$ et $(.)_L$ signifient une évaluation de l'expression $(.)$ pour $x = 0$ et $x = L$, respectivement. Par exemple, $\dot{v}' = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}(x,t)$ et $v'_L = \frac{\partial v}{\partial x}(L,t)$. Les notations des vecteurs de position et des matrices de rotation sont adoptées du livre de Craig (1989). Le vecteur de position de l'origine du référentiel $\mathcal{R}_i$ par rapport à l'origine du référentiel $\mathcal{R}_j$ est noté par ${}^jP_i$. La matrice de rotation du référentiel $\mathcal{R}_i$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_j$ est notée ${}^jR_i$. La vitesse angulaire (resp. linéaire) d'un référentiel $\mathcal{R}_i$ par rapport au référentiel inertiel $\mathcal{R}_0$ est notée par ω_i (resp. v_i). Cette dernière peut être exprimée dans un autre référentiel $\mathcal{R}_j$ et sera notée par ${}^j\omega_i$ (resp. ${}^jv_i$). Alors que la vitesse angulaire (resp. linéaire) de $\mathcal{R}_i$ par rapport à $\mathcal{R}_j$ est notée par ${}^j\Omega_i$ (resp. ${}^jV_i$).

3.3.1 Cinématique d'ordre deux

Dans ce cas, nous tenons compte de l'allongement du bras selon l'axe longitudinal. La position du référentiel $\mathcal{R}_1$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0$ est :

$${}^0P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

La matrice de rotation du repère $\mathcal{R}_1$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ est

$$ {}^0R_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

La position du référentiel $\mathcal{R}_{dm}$ situé au centre d'un élément dm par rapport au référentiel $\mathcal{R}_1$ est (Piedbœuf, 1992) :

$$ {}^1P_{dm} = \begin{bmatrix} x - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^x v'^2(s,t)ds}_{\mathcal{O}_2(v)} \\ v(x,t) \\ 0 \end{bmatrix} $$

Le terme identifié par $\mathcal{O}_2(v)$ est un terme d'ordre deux en v. Ce terme sera négligé si la cinématique d'ordre un est considérée pour représenter la position d'un élément sur le bras. La matrice de rotation de $\mathcal{R}_{dm}$ par rapport à $\mathcal{R}_1$ est (Piedbœuf, 1992) :

$$ {}^1R_{dm} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}v'^2 & -v' & 0 \\ v' & 1 - \frac{1}{2}v'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Notons que ${}^1R_{dm}$ vérifie la relation suivante : ${}^1R_{dm}\,{}^1R_{dm}^T = I$, où I est la matrice d'identité de même dimension que ${}^1R_{dm}$.

La position du référentiel $\mathcal{R}_c$ placé au centre de masse de la charge par rapport à $\mathcal{R}_1$ est donnée par :

$$ \begin{aligned} {}^1P_c = {}^1P_2 + {}^1R_2\,{}^2P_c &= \begin{bmatrix} L - \frac{1}{2}\int_0^L v'^2\,dx \\ v_L \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}v_L'^2 & -v_L' & 0 \\ v_L' & 1 - \frac{1}{2}v_L'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L + r_c \\ v_L + r_c\,v_L' \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\int_0^L v'^2 dx - \frac{1}{2}r_c\,v_L'^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} $$

où la matrice ${}^1R_2$ est obtenue à partir de ${}^1R_{dm}$ en remplaçant x par L. Dans le cas où la masse est concentrée à l'extrémité du bras, nous aurons $r_c = 0$. La matrice de rotation de la charge par rapport à R_1 est :

$$ {}^1R_c = {}^1R_2\,{}^2R_c = \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}v_L'^2 & -v_L' & 0 \\ v_L' & 1-\frac{1}{2}v_L'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

où ${}^2R_c$ est une matrice d'identité.

La vitesse angulaire de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ est

$$ \omega_1 = \dot{\theta}\,\vec{k}_1 $$

Pour calculer la vitesse angulaire d'un élément dm du bras nous utilisons une représentation matricielle. La vitesse est représentée par une matrice antisymétrique de la façon suivante :

$$ S = {}^1\dot{R}_{dm}\,{}^1R_{dm}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{v}' & 0 \\ \dot{v}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} $$

La vitesse de rotation de $\mathcal{R}_{dm}$ par rapport à $\mathcal{R}_1$ est alors donnée par le vecteur

$$ {}^1\Omega_{dm} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{v}' \end{bmatrix} $$

Par rapport à $\mathcal{R}_0$, cette vitesse est donnée par :

$$ \omega_{dm} = \omega_1 + {}^0R_1\,{}^1\Omega_{dm} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}+\dot{v}' \end{bmatrix} $$

La vitesse linéaire de l'origine de $\mathcal{R}_{dm}$ par rapport au référentiel inertiel $\mathcal{R}_0$ est donnée par :

$$ v_{dm} = {}^0R_1\,{}^1V_{dm} + \omega_1 \times ({}^0R_1\,{}^1P_{dm}) $$

Exprimé dans $\mathcal{R}_1$, elle s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} {}^1v_{dm} &= {}^0R_1^T\, v_{dm} = \frac{d\,{}^1P_{dm}}{dt} + \omega_1 \times {}^1P_{dm} \\ &= \begin{bmatrix} -\dot\theta\, v \\ \dot v + x\dot\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\int_0^x v'\,\dot v'\,ds \\ -\frac{1}{2}\dot\theta \int_0^x v'^2\,ds \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La vitesse angulaire de la charge est obtenue à partir de ω_{dm} en remplaçant x par L, soit

$$\omega_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta + \dot v'_L \end{bmatrix}$$

La vitesse absolue de la charge, exprimée dans $\mathcal{R}_1$, est :

$$\begin{aligned} {}^1v_c &= \frac{d\,{}^1P_c}{dt} + \omega_1 \times {}^1P_c \\ &= \begin{bmatrix} -\dot\theta(v_L + r_c\, v'_L) \\ (L + r_c)\dot\theta + \dot v_L + r_c\,\dot v'_L \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\int_0^L v'\,\dot v'\,dx - r_c\, v'_L\,\dot v'_L \\ -\frac{1}{2}\dot\theta \int_0^L v'^2\,dx - \frac{1}{2} r_c\,\dot\theta\, v'^2_L \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le vecteur de la gravité est représenté dans le repère $\mathcal{R}_0$ par

$${}^0g = \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où g est l'accélération de la gravité. Dans le repère $\mathcal{R}_1$, il sera représenté par

$${}^1g = {}^1R_0\,{}^0g = {}^0R_1^T\,{}^0g = \begin{bmatrix} g\cos\theta \\ -g\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.3.2 Énergie cinétique

L'énergie cinétique du système est donnée par

$$T = T_B + \int_0^L T_{dm} + T_C \tag{3.2}$$

où T_B est l'énergie cinétique de la base,

$$T_B = \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2$$

T_{dm} est l'énergie cinétique d'un élément du bras,

$$\begin{aligned} T_{dm} &= \frac{1}{2}\rho\, v_{dm}^T v_{dm}\, dx = \frac{1}{2}\rho\, {}^1v_{dm}^T\, {}^1v_{dm}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\rho \left[\dot{\theta}^2 v^2 + 2\dot{\theta}\, v \int_0^x v'\, \dot{v}' ds + \left(\int_0^x v'\, \dot{v}' ds \right)^2 + \dot{v}^2 + x^2\, \dot{\theta}^2 + 2x\dot{\theta}\dot{v} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}\dot{\theta}^2 \left(\int_0^x v'^2\, ds \right)^2 - x\, \dot{\theta}^2 \int_0^x v'^2\, ds - \dot{\theta}\, \dot{v} \int_0^x v'^2\, ds \right] dx \end{aligned}$$

et T_C est l'énergie cinétique de la charge,

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{1}{2} I_c \omega_c^2 + \frac{1}{2} M_c\, v_c^T\, v_c = \frac{1}{2} I_c \omega_c^2 + \frac{1}{2} M_c\, {}^1v_c^T\, {}^1v_c \\ &= \frac{1}{2} I_c \left(\dot{\theta} + \dot{v}'_L \right)^2 + \frac{1}{2} M_c \left(\dot{\theta}^2\, v_L^2 + 2 r_c \dot{\theta}^2\, v_L\, v'_L + r_c^2\, \dot{\theta}^2\, v'^2_L + \dot{v}_L^2 \right. \\ &\quad + (L + r_c)^2\, \dot{\theta}^2 + r_c^2 \dot{v}'^2_L + 2(L + r_c)\dot{\theta}\dot{v}_L + 2 r_c\, \dot{v}_L\, \dot{v}'_L + 2 r_c (L + r_c)\dot{\theta}\dot{v}'_L \\ &\quad \left. - (L + r_c)\, \dot{\theta}^2 \int_0^L v'^2\, dx - r_c (L + r_c)\dot{\theta}^2\, v'^2_L \right) + \mathcal{O}_3(v) \end{aligned}$$

où $\mathcal{O}_3(v)$ sont des termes d'ordre trois en v.

La linéarisation de l'énergie cinétique à l'ordre deux par rapport à v donne :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left(I_m + \frac{1}{3}\rho L^3 + I_c + M_c (L + r_c)^2 \right) \dot{\theta}^2 \\ &\quad + \dot{\theta} \left(\rho \int_0^L x\, \dot{v}\, dx + M_c (L + r_c)\dot{v}_L + [I_c + M_c\, r_c (L + r_c)]\dot{v}'_L \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\rho \int_0^L \dot{v}^2\, dx + \frac{1}{2} M_c \dot{v}_L^2 + \frac{1}{2}(I_c + M_c\, r_c^2)\dot{v}'^2_L + M_c\, r_c \dot{v}_L\, \dot{v}'_L \\ &\quad + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \left(\rho \int_0^L v^2\, dx + M_c\, v_L^2 + 2 M_c\, r_c\, v_L\, v'_L \right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \left(\rho \int_0^L x \int_0^x v'^2\, ds + M_c (L + r_c) \int_0^L v'^2\, dx + M_c\, r_c\, L v'^2_L \right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.3.3 Énergie potentielle

L'énergie potentielle du système est donnée par :

$$V = \int_0^L V_{dm} + V_c \tag{3.4}$$

où V_{dm} est l'énergie potentielle d'un élément dm,

$$\begin{aligned} V_{dm} &= \frac{1}{2} EI_z\, v''^2\, dx - \rho\, {}^1g^T\, {}^1P_{dm}\, dx \\ &= \frac{1}{2} EI_z\, v''^2\, dx - \rho\, g\, x\, \cos\theta\, dx + \rho\, g\, v \sin\theta\, dx + \frac{1}{2}\rho\, g\, \cos\theta \int_0^x v'^2 ds dx \end{aligned}$$

et V_c est l'énergie potentielle de la charge

$$\begin{aligned} V_c &= -M_c\, {}^1g^T\, {}^1P_c \\ &= -M_c\, g(L + r_c)\cos\theta + M_c\, g\, (v_L + r_c v'_L)\sin\theta \\ &\quad + \frac{1}{2} M_c\, g \cos\theta \left(\int_0^L v'^2 dx + r_c\, v'^2_L \right) \end{aligned}$$

3.3.4 Fonction de dissipation de Rayleigh

Le frottement est dû au frottement visqueux du moteur et à l'amortissement interne du bras. La fonction de dissipation de Rayleigh est donnée par

$$R = \frac{1}{2} b_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \kappa_e EI_z \int_0^L \dot{v}''^2\, dx \tag{3.5}$$

3.3.5 Équations du mouvement

Les expressions des énergies cinétique et potentielle sont introduites dans l'équation (3.1). Les variationnelles de ces énergies sont simplifiées en utilisant l'intégration par parties (voir Annexe A). Dans un premier temps, nous négligeons les forces de frottement. La seule force non conservative appliquée est donc le couple moteur τ. Deux équations dynamiques sont alors obtenues. La première est associée à l'angle moteur θ et la deuxième est associée à la déformation du bras v. De plus, des conditions aux

frontières (CF) sont associées à l'équation dynamique de la déformation. Ces conditions décrivent la façon dont le bras est attaché à la base (CF géométriques) et à la charge (CF naturelles).

L'équation du mouvement pour l'angle moteur θ en l'absence de friction visqueuse est :

$$\begin{aligned}
\tau &= \left(I_m + \frac{1}{3}\rho L^3 + I_c + M_c(L+r_c)^2\right)\ddot{\theta} \\
&+ \int_0^L \rho\, x\, \ddot{v}\, dx + M_c(L+r_c)\ddot{v}_L + (I_c + M_c r_c(L+r_c))\ddot{v}'_L \\
&+ \left[\frac{1}{2}\rho g L^2 + M_c g\,(L+r_c)\right]\sin\theta + \left[\int_0^L \rho\, g\, v dx + M_c g\,(v_L + r_c v'_L)\right]\cos\theta \\
&+ \rho\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v^2)\, dx - \frac{1}{2}\rho\int_0^L (L^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v'^2)\, dx \\
&+ M_c\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v_L^2) - M_c(L+r_c)\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v'^2)\, dx \\
&+ 2M_c r_c\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta} v_L v'_L) - M_c L r_c\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta} v'^2_L)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

L'équation du mouvement associée à la déformation v est :

$$\begin{aligned}
0 &= -\rho(\ddot{v} + x\,\ddot{\theta}) - EI_z v'''' + \\
&\dot{\theta}^2\left(\rho\, v + M_c[L+r_c]v'' + \frac{1}{2}\rho\left[-2x\, v' + (L^2 - x^2)v''\right]\right) \\
&+ g\,\cos\theta\,(\rho[-v' + (L-x)v''] + M_c\, v'') - \rho\, g\sin\theta
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Les CF sont données par :

$$\begin{aligned}
0 &= EI_z\, v'''\delta v\big|_0^L - M_c(L\ddot{\theta} + \ddot{v}_L)\delta v_L - \frac{1}{2}\rho\dot{\theta}^2(L^2 - x^2)v'\delta v\Big|_0^L \\
&+ M_c\dot{\theta}^2 v_L\delta v_L - M_c L\dot{\theta}^2 v'\delta v\Big|_0^L - \rho\, g\,\cos\theta(L-x)v'\delta v\big|_0^L \\
&+ M_c r_c\dot{\theta}^2 v'_L\delta v_L - M_c r_c\ddot{\theta}\delta v_L - M_c r_c\ddot{v}'_L\delta v_L - M_c r_c\dot{\theta}^2 v'\,\delta v\Big|_0^L \\
&- M_c\, g\cos\theta v'\,\delta v\big|_0^L - M_c\, g\sin\theta\delta v_L \\
0 &= -I_c(\ddot{\theta} + \ddot{v}'_L)\delta v'_L - EI_z\, v''\delta v'\big|_0^L + M_c r_c\dot{\theta}^2 v_L\,\delta v'_L - M_c\, L\, r_c\ddot{\theta}\,\delta v'_L \\
&- M_c r_c\ddot{v}_L\,\delta v'_L + M_c r_c^2\dot{\theta}^2 v'_L\,\delta v'_L - M_c r_c^2\ddot{\theta}\,\delta v'_L - M_c r_c^2\ddot{v}'_L\,\delta v'_L \\
&- M_c r_c^2\dot{\theta}^2 v'_L\,\delta v'_L - M_c\, L r_c\dot{\theta}^2 v'_L\,\delta v'_L - M_c r_c\, g\,\cos\theta v'_L\,\delta v'_L - M_c r_c\, g\,\sin\theta\,\delta v'_L
\end{aligned}$$

Afin de compléter le modèle, nous ajoutons aux équations précédentes le frottement visqueux à la base et l'amortissement interne dans le bras. Pour tenir compte du frottement à la base dans l'équation (3.6), le couple moteur τ est remplacé par $\tau - b_m \dot{\theta}$. Pour tenir compte de l'amortissement interne du bras, le modèle de Voigt-Kelvin est utilisé (Piedbœuf, 1989). Ce modèle donne la relation suivante entre la contrainte (σ) et la déformation (ϵ) :

$$\sigma = E(\epsilon + \kappa_e \frac{d\epsilon}{dt})$$

Dans l'équation (3.7) et les CF associées, le module de Young E est alors remplacé par l'opérateur :

$$E_\kappa = E(1 + \kappa_e D) \tag{3.8}$$

où D est l'opérateur de dérivation partielle, i.e. $Dv = \frac{\partial v}{\partial t}$.

En tenant compte de l'amortissement, les équations du mouvement (3.6)-(3.7) et les CF associées seront alors remplacées par les équations suivantes :

Équation du mouvement pour l'angle moteur θ

$$\begin{aligned}
\tau \;=\; & \left(I_m + \frac{1}{3}\rho L^3 + I_c + M_c(L + r_c)^2\right)\ddot{\theta} + b_m\dot{\theta} + \\
& \int_0^L \rho\, x\, \ddot{v}\, dx + M_c(L + r_c)\ddot{v}_L + (I_c + M_c r_c(L + r_c))\ddot{v}'_L + \\
& \left[\frac{1}{2}\rho\, g\, L^2 + M_c\, g\, (L + r_c)\right]\sin\theta + \left[\int_0^L \rho\, g\, v dx + M_c\, g\, (v_L + r_c\, v'_L)\right]\cos\theta + \\
& \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\rho\dot{\theta}\, v^2)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^L \rho(L^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v'^2)\, dx + \\
& M_c \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v_L^2) - M_c(L + r_c)\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v'^2)\, dx + \\
& 2M_c r_c \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta} v_L v'_L) - M_c L r_c \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta} v'^2_L)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Équation du mouvement associée à la déformation v

$$\begin{aligned}
0 \;=\; & -\rho(\ddot{v} + x\,\ddot{\theta}) - EI_z v'''' - \kappa_e\, EI_z \dot{v}'''' + \\
& \dot{\theta}^2\left(\rho\, v + M_c[L + r_c]v'' + \frac{1}{2}\rho\left[-2x\, v' + (L^2 - x^2)v''\right]\right) + \\
& g\, \cos\theta\, (\rho[-v' + (L - x)v''] + M_c\, v'') - \rho\, g \sin\theta
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Conditions aux frontières

Les CF sont compatibles avec la configuration géométrique du système. Le bras est encastré à la base, donc $v(0,t) = v'(0,t) = 0$ et $\delta v(L,t)$ et $\delta v'(L,t)$ sont arbitraires. Les CF seront alors données par :

$$\text{à } x = 0 : \quad v_0 = 0 \text{ et } v_0' = 0 \tag{3.11}$$

$$\text{à } x = L : \quad \begin{cases} E_\kappa I_z \, v_L''' &= M_c(L\ddot{\theta} + \ddot{v}_L) + M_c r_c(\ddot{\theta} + \ddot{v}_L') - M_c\dot{\theta}^2(v_L + r_c v_L') \\ &\quad + M_c(L + r_c)\dot{\theta}^2 v_L' + M_c g \, v_L' \cos\theta + M_c g \sin\theta \\ -E_\kappa I_z \, v_L'' &= (I_c + M_c r_c^2)(\ddot{\theta} + \ddot{v}_L') + M_c r_c(L\ddot{\theta} + \ddot{v}_L) \\ &\quad - M_c r_c(v_L + r_c v_L')\dot{\theta}^2 + M_c r_c(L + r_c)v_L'\dot{\theta}^2 \\ &\quad + M_c r_c g \, \cos\theta v_L' + M_c r_c g \sin\theta \end{cases} \tag{3.12}$$

Récemment, des résultats semblables ont été reportés dans la littérature (Piedbœuf, 2001). Boyer et al. (Boyer, 2002) ont montré la procédure de développement des équations dynamiques d'un robot à plusieurs bras flexible en considérant une cinématique non linéaire. Ils ont appliqué cette procédure à un robot ayant un bras flexible. Cependant, la forme analytique du modèle (3.9)-(3.12) n'est pas donnée.

3.4 Problème aux valeurs propres

Le problème aux valeurs propres (PVP) consiste à résoudre, pour la déformation v, la dynamique du système représentée par des ÉDO et des ÉDP avec des CF associées. Considérons le cas d'un problème homogène où le couple moteur est nul, i.e. $\tau = 0$. Nous envisageons une solution pour v séparable en espace et en temps (Meirovitch, 1986). La déformation est alors exprimée par :

$$v(x,t) = \phi(x) q_f(t) \tag{3.13}$$

où $\phi(x)$ représente la configuration générale du bras et dépend uniquement de la variable spatiale x et $q_f(t)$ indique la nature du mouvement exécuté par la configuration et dépend uniquement du temps t. Substituons l'équation (3.13) dans les équations

dynamiques et les CF associées, les ÉDP en v se transforment en des ÉDO en $q_f(t)$. Pour avoir une solution stable, un mouvement harmonique est choisi pour $q_f(t)$ de façon que :

$$\ddot{q}_f(t) = -\omega^2 q_f(t)$$

où ω représente une fréquence naturelle du système. Le PVP revient donc à trouver un ω et une solution non triviale $\phi(x)$ qui vérifient les équations homogènes spatialement discrétisées et les CF associées. Les ω correspondantes sont les valeurs caractéristiques ou les valeurs propres et les $\phi(x)$ sont les fonctions propres. Le PVP engendre généralement la solution d'une équation caractéristique ayant une infinité dénombrable de solutions w_r. D'où l'ordre infini de ce problème. À chaque valeur propre w_r correspond une fonction propre $\phi_r(x)$. Dans le cas général où la dynamique est représentée par des équations non linéaires et à paramètres non uniformes, une solution n'est pratiquement pas possible. Pour cela, nous utilisons des méthodes approximatives pour résoudre ce genre de problème (Chapitre 4).

3.5 Discrétisation spatiale de la dynamique

Le modèle du système est mathématiquement d'ordre infini. Dans le but d'analyser et de contrôler ce système, un modèle d'état spatialement discret et d'ordre fini est souhaitable. Un nombre fini est alors retenu dans la discrétisation de la déformation qui est réécrite sous la forme :

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\nu} \phi_i(x)\, q_{f_i}(t) = \phi^T(x)\, q_f(t) \tag{3.14}$$

où ν est le nombre de modes retenu dans la série, $\phi = [\phi_1,\ \phi_2,\ \ldots,\ \phi_\nu]^T$ et $q_f = [q_{f_1},\ q_{f_2},\ \ldots,\ q_{f_\nu}]^T$. La discrétisation de l'énergie cinétique (3.3) donne :

$$T = \frac{1}{2} I_t\, \dot{\theta}^2 + \dot{\theta}\beta^T \dot{q}_f + \frac{1}{2}\dot{q}_f^T\, M_{ff}\, \dot{q}_f + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 q_f^T\, C_{rr}\, q_f \tag{3.15}$$

où I_t est l'inertie totale vue par le moteur, soit

$$I_t = I_m + \frac{1}{3}\rho L^3 + I_c + M_c(L + r_c)^2$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= \int_0^L \rho\, x\, \phi\, dx + M_c(L+r_c)\phi_L + [I_c + M_c r_c(L+r_c)]\phi'_L \\
M_{ff} &= \rho \int_0^L \phi\, \phi^T dx + M_c \phi_L\, \phi_L^T + (I_c + M_c r_c^2)\phi'_L\, \phi_L'^T + M_c r_c(\phi'_L\, \phi_L^T + \phi_L\, \phi_L'^T) \\
C_{rr} &= \rho \int_0^L \phi\, \phi^T\, dx + M_c\, \phi_L\, \phi_L^T + M_c\, r_c(\phi_L\, \phi_L'^T + \phi'_L\, \phi_L^T) \\
&\quad -\rho \int_0^L x \int_0^x \phi'\, \phi'\, ds - M_c(L+r_c) \int_0^L \phi'\, \phi'^T\, dx - M_c\, r_c\, L \phi'_L\, \phi_L'^T
\end{aligned}
$$

Sous une forme matricielle, l'énergie cinétique s'écrit sous la forme suivante :

$$
T = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot\theta & \dot q_f{}^T \end{bmatrix}}_{\dot q^T} \underbrace{\begin{bmatrix} I_t + q_f^T C_{rr}\, q_f & \beta^T \\ \beta & M_{ff} \end{bmatrix}}_{M(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot\theta \\ \dot q_f \end{bmatrix}}_{\dot q} \tag{3.16}
$$

Le terme $q_f^T C_{rr}\, q_f$ dans la matrice de masse $M(q)$ est un terme d'ordre deux en v qui sera négligé par la suite.

La discrétisation de l'énergie potentielle (3.4) donne :

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2} q_f^T \int_0^L EI_z\, \phi''\, \phi''^T\, dx\, q_f - \left(\frac{1}{2}\rho\, g\, L^2 + M_c\, g(L+r_c)\right)\cos\theta \\
&\quad + \frac{1}{2} g \cos\theta\, q_f^T \left(\rho \int_0^L \int_0^x \phi'\, \phi'^T\, ds dx + M_c \left[\int_0^L \phi'\, \phi'^T\, dx + r_c\, \phi'_L\, \phi_L'^T\right]\right) q_f \\
&\quad + g \sin\theta \left(\int_0^L \rho \phi^T\, dx + M_c(\phi_L^T + r_c\, \phi_L'^T)\right) q_f \\
&= \frac{1}{2} q_f^T\, K_{ff}\, q_f - G_{rr}\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\, q_f^T\, G_{ff}\, q_f + \sin\theta\, G_{rf}^T\, q_f
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

où

$$
\begin{aligned}
K_{ff} &= EI_z \int_0^L \phi''\, \phi''^T dx \\
G_{rr} &= \frac{1}{2}\rho\, g\, L^2 + M_c\, g(L+r_c) \\
G_{rf} &= \int_0^L \rho\, g \phi dx + M_c\, g(\phi_L + r_c \phi'_L) \\
G_{ff} &= \rho\, g \int_0^L (L-x)\phi'\phi'^T\, dx + M_c\, g \int_0^L \phi'\phi'^T\, dx + M_c\, g\, r_c\, \phi'_L\, \phi_L'^T
\end{aligned}
$$

La discrétisation de la fonction de dissipation de Rayleigh (3.5) donne :

$$
R = \frac{1}{2} b_m \dot q_r^2 + \frac{1}{2} \dot q_f^T \kappa_e \int_0^L EI_z \dot v''^2\, dx\, \dot q_f
$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta} & \dot{q_f}^T \end{bmatrix}}_{\dot{q}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} b_m & 0 \\ 0 & B_{ff} \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q_f} \end{bmatrix}}_{\dot{q}} \tag{3.18}$$

où $B_{ff} = \kappa_e K_{ff}$.

Nous introduisons ensuite ces expressions dans le Lagrangien $\mathcal{L} = T - V$, et nous appliquons les équations de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{3.19}$$

où q_j sont les coordonnées généralisées, Q_j sont les forces généralisées, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ et $n = \nu + 1$ est le nombre total de coordonnées généralisées. Dans les équations de Lagrange, $q_f(t)$ représente le vecteur de coordonnées généralisées associées à la flexibilité. Soit q_r la coordonnée généralisée associée au mouvement de la base, i.e. $q_r(t) = \theta(t)$. Le vecteur des coordonnées généralisées est alors donné par

$$q(t) = [q_r(t),\ q_f(t)^T]^T$$

La dynamique (spatialement discrète) sera donnée par :

$$\begin{aligned} \tau &= I_t\,\ddot{q}_r + \beta^T\,\ddot{q}_f + b_m\,\dot{q}_r + G_{rr}\,\sin q_r + \cos q_r\,G_{rf}\,q_f \\ &\quad + 2\dot{q}_r\,q_f^T\,C_{rr}\,\dot{q}_f + \ddot{q}_r\,q_f^T\,C_{rr}q_f \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \beta\,\ddot{q}_r + M_{ff}\,\ddot{q}_f + B_{ff}\dot{q}_f - \dot{q}_r^2\,C_{rr}q_f + K_{ff}\,q_f \\ &\quad + g\,\cos q_r\,G_{ff}\,q_f + g\sin q_r\,G_{rf} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Les équations (3.20)-(3.21) sont réécrites sous la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_t + q_f^T C_{rr} q_f & \beta^T \\ \beta & M_{ff} \end{bmatrix}}_{M(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix}}_{\ddot{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_m & 0 \\ 0 & B_{ff} \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_f \end{bmatrix}}_{\dot{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} q_r \\ q_f \end{bmatrix}}_{q}$$

$$+ \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} G_{rr} & G_{rf}^T \\ G_{rf} & G_{ff} \end{bmatrix}}_{G_1} \begin{bmatrix} \sin q_r \\ q_f \cos q_r \end{bmatrix}}_{G(q)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2\,\dot{q}_r\,q_f^T\,C_{rr}\,\dot{q}_f \\ -\dot{q}_r^2\,C_{rr}\,q_f \end{bmatrix}}_{C(q,\dot{q})\dot{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{L} \tau \tag{3.22}$$

soit encore sous la forme :

$$M(q)\,\ddot{q} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + B\,\dot{q} + K\,q + G(q) = L\,\tau \tag{3.23}$$

où M est la matrice de masse, B est la matrice de frottement, K est la matrice de rigidité, $C(q,\dot{q})\dot{q}$ est le vecteur des forces de Coriolis et centrifuges et $G(q)$ est le vecteur de forces dues à la gravité.

Les matrices M, B et K_{ff} sont symétriques et définies positives. La matrice associée à la gravité, G_1, est symétrique.

Proposition 1 *La matrice de masse, M, et le vecteur des forces de Coriolis et centrifuges, $C(q,\,\dot{q})\,\dot{q}$, vérifient la relation suivante :*

$$\dot{M}(q) - 2\,C(q,\,\dot{q}) = S \tag{3.24}$$

où S est une matrice antisymétrique.

Démonstration. Soit

$$C(q,\,\dot{q}) = \begin{bmatrix} q_f^T C_{rr}\dot{q}_f & \dot{q}_r q_f^T C_{rr} \\ -\dot{q}_r C_{rr} q_f & 0 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

Alors

$$x^T\left(\dot{M}(q) - 2\,C(q,\,\dot{q})\right)x = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{R}^{(\nu+1)}$$

où ν est le nombre de modes flexibles et $\mathcal{R}$ est l'ensemble des réels. $\triangledown$

En négligeant le terme d'ordre deux en v dans la matrice de masse, l'équation (3.23) devient :

$$M\,\ddot{q} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + B\,\dot{q} + K\,q + G(q) = L\,\tau \tag{3.26}$$

3.6 Modèle d'état non linéaire

Soit $x = [x_1^T \;\; x_2^T]^T = [q^T \;\; \dot{q}^T]^T$ le vecteur d'état. Le modèle d'état non linéaire du système sera donné par :

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}[C(x_1,x_2)x_2 + G(x_1)] \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}L \end{bmatrix}}_{g(x)} \tau \tag{3.27}$$

soit encore sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\,u \tag{3.28}$$

3.7 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre le modèle dynamique non linéaire du système à un bras flexible tournant dans le plan vertical. Nous avons d'abord développé les ÉDP en utilisant le principe de Hamilton et en considérant une cinématique non linéaire. Nous avons ensuite développé le modèle discret d'ordre fini moyennant les équations de Lagrange. Notre étude comparative sur les méthodes de discrétisation spatiale sera basée sur ce modèle discret. Le calcul des fonctions de forme, des paramètres du modèle dynamique développé ainsi que la comparaison des différents modèles discrets est une tâche fastidieuse. Ceci montre l'intérêt de développer un logiciel pour la modélisation, la comparaison et la simulation du système à un bras flexible (Annexe C).

Chapitre 4

DISCRÉTISATION SPATIALE DES ÉDP : SOLUTIONS APPROXIMATIVES

Nous avons présenté dans le chapitre précédent la dynamique non linéaire d'un bras flexible tournant dans le plan vertical. Cette dynamique est représentée par des ÉDO et des ÉDP associées avec des CF. Dans des cas simplifiés, en négligeant par exemple les termes non linéaires et le frottement, une solution analytique de cette dynamique est possible. Cependant, dans le cas général, une solution analytique n'est pratiquement pas possible. On procède donc soit à des méthodes d'approximation soit à des solutions numériques. Les deux méthodes largement utilisées dans la littérature sont la méthode de modes supposés (MMS) et la méthode d'éléments finis (MEF).

Dans le cas d'une solution analytique ou de méthodes d'approximation, un problème aux valeurs propres (PVP) est à résoudre. Pour un système à paramètres distribués, le PVP est défini par des équations différentielles avec des CF associées. Souvent, particulièrement pour des structures non uniformes, une solution analytique du PVP n'est pratiquement pas faisable. La MMS est l'une des techniques utilisées pour obtenir une solution approximative de ce problème. Cette méthode consiste en l'approxima-

tion de la solution d'un PVP par une série finie de fonctions supposées multipliées par des coefficients indéterminés. Il y a deux approches pour choisir la solution approximative. La première est de manipuler l'équation différentielle et de choisir les fonctions supposées dans l'espace des fonctions de comparaison, i.e. des fonctions qui vérifient toutes les CF. Dans la deuxième approche, les fonctions supposées sont sélectionnées dans l'espace des fonctions admissibles, i.e. des fonctions qui vérifient les CF géométriques. Puisque les fonctions admissibles sont plus nombreuses que les fonctions de comparaison et sont généralement plus faciles à construire, les fonctions admissibles telles que les FF des poutres encastrées et sans charge à l'extrémité du bras sont souvent utilisées dans la littérature. Ceci pose une question sur leur validité pour approximer les modes propres de robots à bras flexibles.

Dans ce qui suit, nous proposons de développer les fonctions de forme du bras tournant dans le plan vertical. Nous tenons compte de la masse à l'extrémité du bras flexible. Nous supposons encore que cette masse est décentrée ce qui nous laisse la possibilité de varier le centre de gravité de cette masse pour simuler l'effet d'un deuxième bras sur les fonctions de forme (FF). Les FF utilisées dans la littérature seront donc considérées comme des cas particuliers du cas général développé dans ce mémoire.

La MEF peut être considérée comme une MMS. La différence principale entre les deux méthodes est la nature des fonctions admissibles. En effet, dans la MMS les fonctions admissibles sont des fonctions globales, i.e. qu'elles sont définies sur toute la longueur d'un bras flexible. La différentiabilité de ces fonctions est rarement posée. Alors que dans la MEF, les fonctions admissibles sont locales, i.e. qu'elles sont définies sur de petits intervalles du bras. Les fonctions admissibles sont des polynômes à bas degré, satisfaisant les exigences minimales de différentiabilité. Elles sont souvent nommées des fonctions d'interpolation. Vu que les CF sont au nombre de quatre, des fonctions cubiques sont nécessaires. Les éléments cubiques d'Hermite sont souvent utilisés. Cependant, les fréquences du modèle correspondant sont non

convergentes. Les éléments cubiques de type splines cubiques sont encore suggérés dans la littérature. Ils sont présentés comme étant différents des fonctions globales et sont définis en fonction de la configuration du robot, en particulier en fonction de la charge. Nous utilisons les splines cubiques. Cependant, nous proposons de les intégrer dans le cadre des fonctions globales générées à partir de la MMS pour unifier notre étude de comparaison présentée dans le chapitre suivant. Nous suggérons encore d'identifier les splines cubiques indépendamment de la configuration du robot, en particulier de la masse de la charge. Ceci permet de généraliser leurs utilisations à toutes les configurations possibles. Ceci est d'ailleurs l'un des avantages de l'utilisation de la MEF. De plus, nous proposons dans le chapitre suivant un théorème de convergence des fréquences du modèle discrétisé avec les splines cubiques.

Dans la suite, nous examinons les deux méthodes, la MMS et la MEF. En particulier, nous présentons les fonctions polynomiales, les fonctions de forme des poutres tournantes, les fonctions de forme des poutres encastrées avec ou sans charge, les splines et les B-splines cubiques. Dans le développement de la matière de ce chapitre, nous avons principalement consulté les références suivantes : (Piedbœuf, 1989, Meirovitch, 1986, Gerald et Wheatley, 1994, Dancose et al., 1989, Gerald et Wheatley, 1994, Truckenbrodt, 1980)

4.1 MMS : Fonctions admissibles globales

4.1.1 Fonctions polynomiales

La déformation est exprimée par :

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{x}{L}\right)^{i+1} q_f(t) \tag{4.1}$$

où les CF à $x = 0$ ($v_0 = v_0' = 0$) ont été prises en considération. Le vecteur de modes supposés est alors donné par

$$\phi^T(x) = \left[\begin{array}{cccccccc} (\frac{x}{L})^2 & (\frac{x}{L})^3 & \cdots & (\frac{x}{L})^{i+1} & \cdots & (\frac{x}{L})^{\nu} & (\frac{x}{L})^{\nu+1} \end{array} \right] \tag{4.2}$$

Les quatre premières fonctions de forme polynomiales sont tracées dans la figure (4.1)

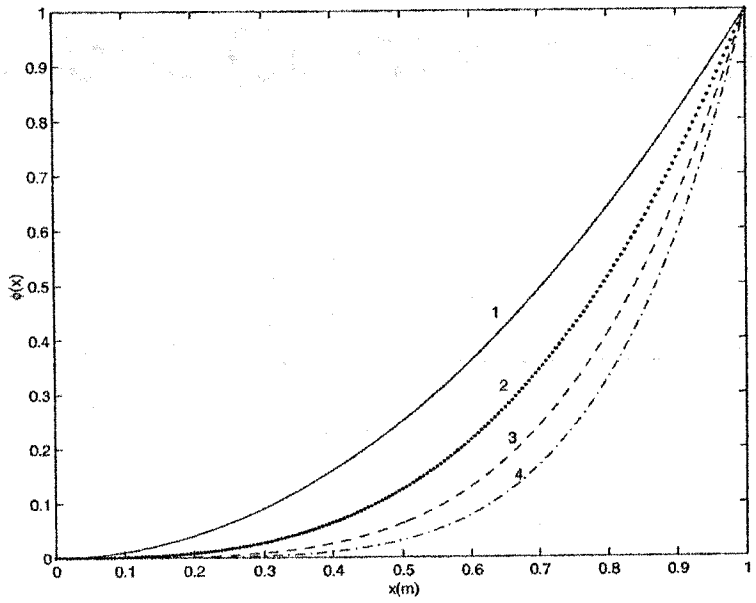


FIG. 4.1 – Les quatre premières fonctions de forme polynomiales

4.1.2 Fonctions propres des poutres

Les fonctions propres des poutres sont généralement la solution d'un PVP linéaire et simple à résoudre mais lié au problème initial non linéaire. Nous développons dans cette section les fonctions propres du système montré dans la figure (3.1) et représenté par le modèle non linéaire (3.9)-(3.12). Pour avoir un modèle linéaire, la vitesse de rotation du moteur est supposée faible. Pour résoudre le PVP homogène, le couple moteur et la gravité sont annulés et les frottements sont négligés. Dans ce qui suit, nous allons suivre la même procédure que celle présentée dans (Piedbœuf, 1989) pour développer les fonctions de forme d'une poutre pivotante avec charge concentrée.

L'équation d'équilibre des moments d'une section du bras située à la base est donnée par

$$\tau + E_\kappa I_z \, v_0'' = I_m \, \ddot{\theta}$$

où E_κ est donné par l'équation (3.8). En tenant compte de la condition d'homogénéité ($\tau = 0$, $E_\kappa I_z = EI_z$), l'accélération est remplacée par :

$$\ddot{\theta} = \frac{EI_z v_0''}{I_m} \tag{4.3}$$

et en négligeant la vitesse du moteur, l'ÉDP associée à la déformation (3.10) sera remplacée par :

$$-\rho(\ddot{v} + x\,\ddot{\theta}) - EI_z v'''' = 0 \tag{4.4}$$

avec les CF suivantes :

$$\text{à } x = 0 : \quad v_0 = 0 \text{ et } v_0' = 0 \tag{4.5}$$

$$\text{à } x = L : \quad \begin{cases} EI_z\, v_L''' &= M_c(L\ddot{\theta} + \ddot{v}_L) + M_c\, r_c(\ddot{\theta} + \ddot{v}_L') \\ -EI_z\, v_L'' &= (I_c + M_c\, r_c^2)(\ddot{\theta} + \ddot{v}_L') + M_c\, r_c(L\ddot{\theta} + \ddot{v}_L) \end{cases} \tag{4.6}$$

Substituant $\ddot{\theta}$ par sa valeur dans l'équation (4.4), cette dernière devient :

$$-\rho(\ddot{v} + x\frac{EI_z v_0''}{I_m}) - EI_z v'''' = 0 \tag{4.7}$$

avec les CF

$$v_0 = 0 \tag{4.8}$$

$$v_0' = 0 \tag{4.9}$$

$$EI_z v_L''' = M_c\left(\ddot{v}_L + (L + r_c)\frac{EI_z v_0''}{I_m} + r_c\ddot{v}_L'\right) \tag{4.10}$$

$$-EI_z v_L'' = M_c r_c\left(\ddot{v}_L + (L + r_c)\frac{EI_z v_0''}{I_m} + r_c\ddot{v}_L'\right) + \left(\ddot{v}_L' + \frac{EI_z v_0''}{I_m}\right) I_c \tag{4.11}$$

Nous procédons avec la méthode de séparation de variables et nous appliquons la méthode de Frobenius sur la partie spatiale de l'équation, nous pouvons alors démontrer que la solution de (4.7) avec les CF (4.8)-(4.11) est de la forme (Annexe B) :

$$\phi_i(x) = A_i\left[\mu_3\lambda_i^3\left(\cos\beta_i x - \cosh\beta_i x\right) + (1 + c_i)\sin\beta_i x + (1 - c_i)\sinh\beta_i x - 2\beta_i x\right] \tag{4.12}$$

où A_i est une constante de normalisation et $\beta_i = \frac{\lambda_i}{L}$. λ_i est la solution de l'équation caractéristique suivante :

$$\left(\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_3\mu_5 - \mu_3\mu_4^2\right)\lambda^7\left(1 - C\,Ch\right) - \mu_3\left(\mu_1 + \mu_5\right)\lambda^6\left(S\,Ch + C\,Sh\right)$$
$$-2\mu_3\mu_4\lambda^5 S\,Sh + \left(\mu_2\mu_5 + \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 - \mu_4^2\right)\lambda^4\left(C\,Sh - S\,Ch\right) + \mu_3\lambda^3\left(1 + C\,Ch\right)$$
$$+2\left(\mu_1 + \mu_5\right)\lambda^3 C\,Ch + 2\mu_4\lambda^2\left(C\,Sh + S\,Ch\right) + 2\mu_2\lambda S\,Sh + S\,Ch - C\,Sh = 0 \quad (4.13)$$

avec

$$\mu_1 = \frac{I_c}{\rho L^3},\quad \mu_2 = \frac{M_c}{\rho L},\quad \mu_3 = \frac{I_m}{\rho L^3},\quad \mu_4 = \frac{M_c r_c}{\rho L^2},\quad \mu_5 = \frac{M_c r_c^2}{\rho L^3},$$
$$C = \cos\lambda,\quad S = \sin\lambda,\quad Ch = \cosh\lambda,\quad Sh = \sinh\lambda.$$

Il existe deux relations d'orthogonalité entre les fonctions propres. La première est donnée par :

$$\int_0^L \rho\phi_i\phi_j dx + M_c\phi_{i,L}\phi_{j,L} + \left(I_c + M_c r_c^2\right)\phi'_{i,L}\phi'_{j,L} + M_c r_c\left(\phi_{i,L}\phi'_{j,L} + \phi'_{i,L}\phi_{j,L}\right)$$
$$-I_t\frac{EI_z}{I_m\omega_i^2}\phi''_{i,0}\frac{EI_z}{I_m\omega_j^2}\phi''_{j,0} = \delta_{ij} \quad (4.14)$$

où $\phi''_{i,0} = \phi''_i(0)$, $\phi'_{i,L} = \phi'_i(L)$, $\omega_i^2 = \frac{EI_z\beta_i^4}{\rho}$, $I_t = I_m + \rho L^3/3 + I_c + M_c(L + r_c)^2$ et δ_{ij} représente le delta de Kronecker. La deuxième relation d'orthogonalité est

$$\int_0^L EI_z\phi''_i\phi''_j dx = \omega_i^2\delta_{ij} \quad (4.15)$$

De plus, les fonctions propres vérifient la relation suivante :

$$\int_0^L \rho x\phi_i dx + M_c(L + r_c)\phi_{i,L} + (I_c + M_c r_c(L + r_c))\phi'_{i,L} = I_t\frac{EI_z}{I_m\omega_i^2}\phi''_{i,0} \quad (4.16)$$

Les fonctions propres d'un bras tournant dans le plan horizontal avec une charge concentrée à son extrémité sont déduites (voir Annexe B) de celles du bras tournant en supposant que le centre de masse de la charge $r_c = 0$. Les fonctions propres de poutres encastrées avec ou sans charge sont encore déduites du cas précédent en supposant respectivement que l'inertie du moteur I_m tend vers l'infini et que l'inertie de la charge I_c et sa masse M_c sont nulles (Annexe B). Les quatre premières fonctions propres d'un bras tournant sont montrées à la figure (4.2) pour les valeurs numériques données dans le tableau (5.1).

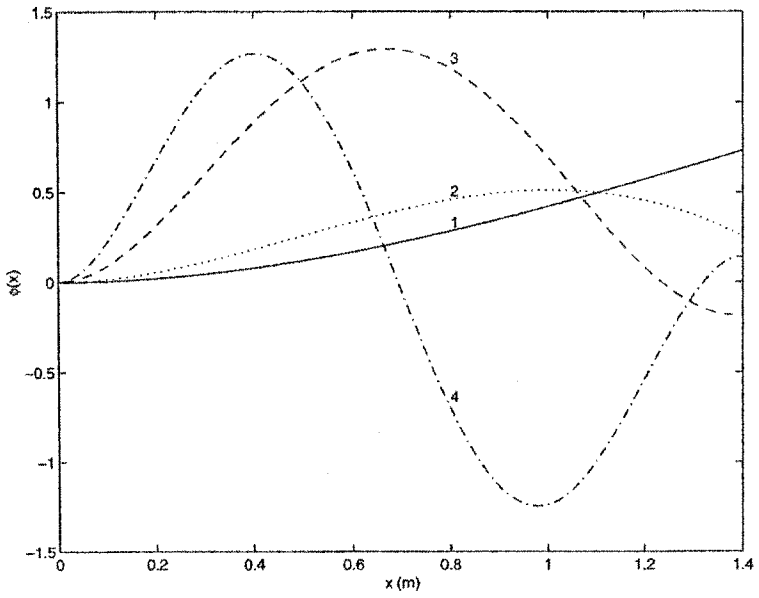


FIG. 4.2 – Les quatre premières fonctions propres d'un bras tournant

4.2 MEF : Fonctions admissibles locales

La MEF est encore utilisée pour discrétiser spatialement les équations dynamiques de robots flexibles. Des éléments cubiques sont nécessaires pour discrétiser les ÉDP d'ordre quatre. Les polynômes d'Hermite sont souvent utilisés comme fonctions d'interpolation dans la MEF. Cependant, la convergence des valeurs propres résultant du modèle basé sur ces polynômes n'est pas monotone (Meirovitch, 1986). Les splines et les B-splines cubiques sont encore utilisés comme des fonctions d'interpolation (Gerald et Wheatley, 1994). Dancose et al. (1989) ont utilisé les splines pour discrétiser spatialement la dynamique d'un bras flexible. Les CF ont été fixées en fonction de la charge. Nous montrons que les splines cubiques peuvent être considérées comme des modes supposés en fixant les CF naturelles indépendamment de la charge.

4.2.1 Description des splines cubiques

Le bras est décomposé en n éléments finis (EF) d'abscisses $x_0 = 0$, x_1, ..., x_{n-1}, $x_n = L$. Dans l'intervalle $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, la déformation est approximée par une spline

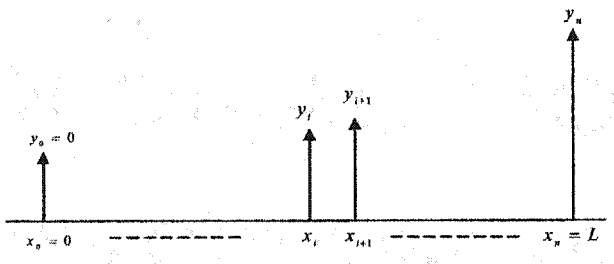


FIG. 4.3 – Décomposition d'un bras flexible en EF

cubique de la façon suivante (Gerald et Wheatley 1994) :

$$v_i(x,t) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \tag{4.17}$$

La déformation v et la courbure v'' à $x = x_i$ sont notées par y_i et y_i''. La déformation et la courbure à $x = x_{i+1}$ sont y_{i+1} et y_{i+1}'' (Figure 4.3). Connaissons les déformations et les courbures aux deux extrémités d'un élément, les paramètres d'une spline sont calculés de la façon suivante :

$$a_i = \frac{y_{i+1}'' - y_i''}{6h_i} \tag{4.18}$$

$$b_i = \frac{y_i''}{2} \tag{4.19}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i\, y_i'' + h_i\, y_{i+1}''}{6} \tag{4.20}$$

$$d_i = y_i \tag{4.21}$$

où $h_i = x_{i+1} - x_i$. La continuité de la première dérivée de la déformation par rapport à la variable spatiale en un nœud intermédiaire x_i (i.e. $v_i'(x_i,t) = v_{i-1}'(x_i,t)$) donne la relation suivante :

$$h_{i-1}\, y_{i-1}'' + 2(h_{i-1} + h_i)\, y_i'' + h_i\, y_{i+1}'' = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \tag{4.22}$$

L'équation (4.22) est applicable aux nœuds intermédiaires de $i = 2$ à $n - 1$ où n est le nombre total d'éléments. Ceci nous donne $n - 2$ équations reliant les n valeurs de y_i'' et de y_i. Deux conditions additionnelles sont ajoutées en imposant les CF aux

deux extrémités du bras. Le bras est encastré à la base. Alors, $v(0,t) = y_0 = 0$ et $v'(0,t) = y'_0 = 0$. D'où

$$2h_0^2 y''_0 + h_0^2 y''_1 = 6y_1 \tag{4.23}$$

Pour l'autre extrémité à $x = L$, quatre choix sont possibles :

1. imposer $y''_n = 0$, i.e. imposer un moment fléchissant nul à l'extrémité ;
2. imposer $y''_n = y''_{n-1}$, i.e. imposer un moment constant sur le dernier élément ;
3. imposer y''_n comme une extrapolation linéaire de y''_{n-1} et y''_{n-2},

$$y''_n = \frac{(h_{n-2} + h_{n-1})\, y''_{n-1} - h_{n-1}\, y''_{n-2}}{h_{n-2}}$$

4. imposer une courbure y''_n inconnue à $x = L$.

Le dernier choix est imposable seulement dans le cas où les courbures sont les coordonnées généralisées. Une caractéristique intéressante des splines cubiques est la relation entre les courbures et les déplacements aux nœuds. D'ailleurs, l'association de l'équation (4.22) avec les CF donne l'équation suivante :

$$\mathbf{A}\,\mathbf{Y}'' = 6\,\mathbf{C}\,\mathbf{Y} \tag{4.24}$$

où $\mathbf{Y}''$ et $\mathbf{Y}$ sont respectivement les vecteurs des courbures et des déplacements aux nœuds. L'équation (4.24) peut être résolue soit pour le vecteur de déplacements $\mathbf{Y}$, soit pour le vecteur de courbures $\mathbf{Y}''$. Par conséquent, les coordonnées généralisées utilisées dans le modèle discret peuvent être soit les courbures ou soit les déplacements aux nœuds. Comme c'est mentionné dans (Dancose et Angeles, 1989), l'utilisation des courbures présente quelques avantages du point de vue de la commande car les courbures sont directement mesurables par des jauges de contraintes.

Pour un bras flexible qui fait partie d'une structure générale d'un robot flexible, la charge à l'extrémité n'est pas connue a priori. Donc, le moment fléchissant, qui est lié aux courbures, est inconnu. Quand l'équation (4.24) est résolue en fonction du vecteur de déplacements aux nœuds $\mathbf{Y}$, la courbure à l'extrémité $x = L$ peut être

considérée comme inconnue (4ème condition plus haut). Ceci veut dire que les $n-1$ déplacements y_i sont exprimés en fonction des n courbures y_i''.

Nous présentons, à titre d'exemple, le calcul des splines cubiques pour deux cas différents. Le système considéré est le bras flexible montré dans la figure (3.1). Le bras est divisé en trois EF. Dans le premier cas, nous choisissons la deuxième condition plus haut ($y_4'' = y_3''$). L'équation (4.24) s'écrit alors

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2h_1 & h_1 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 \\ 0 & h_2 & 2h_2+3h_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y''}} = 6 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 \\ \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3} & \frac{1}{h_3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} \tag{4.25}$$

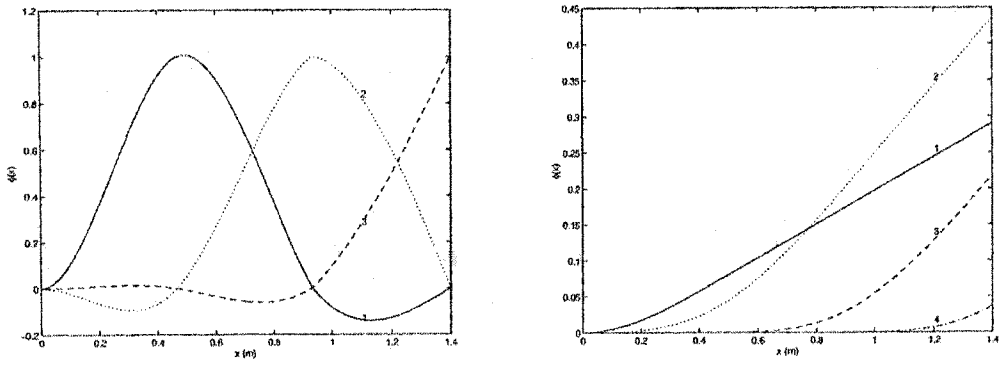
Cette équation peut être résolue soit pour les courbures $\mathbf{Y''}$, soit pour les déplacements $\mathbf{Y}$. Si, dans le deuxième cas, la courbure à l'extrémité, y_4'', est considérée comme inconnue alors la matrice $\mathbf{C}$ reste inchangé comme dans l'équation (4.25), tandis que la matrice $\mathbf{A}$ devient :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2h_1 & h_1 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

L'équation (4.25) peut seulement être résolue pour les déplacements. Les courbures seront considérées comme les coordonnées généralisées.

Les splines cubiques sont définies par intervalles. Pour les présenter sous forme de modes supposés exprimés sur tout le bras, nous utilisons la fonction de Heaviside μ. La déformation en un point quelconque sur le bras d'abscisse x ($0 \leq x \leq L$) est écrite sous la forme :

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{n-2} v_i \left[\mu(x-x_i) - \mu(x-x_{i+1})\right] + v_{n-1}\,\mu(x-x_{n-1}) \tag{4.27}$$



a) Déplacements aux nœuds. b) Courbures aux nœuds.

FIG. 4.4 – Splines cubiques définies sur trois intervalles.

Il est alors possible d'exprimer l'équation (4.27) en fonction des coordonnées généralisées représentant la flexibilité q_f comme suit :

$$v(x,t) = \underbrace{\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial \mathbf{Y}''(t)}\right)^T}_{\boldsymbol{\phi}^T(x)} \underbrace{\mathbf{Y}''(t)}_{\mathbf{q}_f(t)} \quad \text{ou} \quad v(x,t) = \underbrace{\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial \mathbf{Y}(t)}\right)^T}_{\boldsymbol{\phi}^T(x)} \underbrace{\mathbf{Y}(t)}_{\mathbf{q}_f(t)} \tag{4.28}$$

où chaque composant du vecteur $\boldsymbol{\phi}(x)$ est un mode supposé $\phi_i(x)$. La figure (4.4-a) illustre les trois modes supposés dans le cas où les déplacements sont les coordonnées généralisées. La figure (4.4-b) montre les quatre modes supposés dans le cas où les courbures sont les coordonnées généralisées et la courbure au dernier nœud y_4'' est supposée inconnue.

4.2.2 Description des B-splines cubiques

Les B-splines cubiques[1] sont aussi utilisés comme des modes supposés (Trucken-brodt, 1980). Un B-spline cubique est défini sur quatre intervalles avec une spline cubique sur chacun des intervalles, de la façon suivante :

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \tag{4.29}$$

[1]En Anglais : Bell-shaped splines

pour $x_{i-1} \leq x < x_i$, $i = 1, \ldots, 4$. Chaque spline cubique nécessite quatre paramètres. Un total de 16 paramètres est alors à calculer. Si les B-splines sont non nuls sur chaque intervalle, alors les conditions de continuité des splines et de leurs dérivées premières et secondes permettent d'imposer neuf conditions. Six autres conditions peuvent être imposées avec les CF à la base et à l'extrémité. La dernière condition est fixée arbitrairement, e.g. en spécifiant un déplacement unitaire en un nœud intermédiaire. Un B-spline cubique peut être nul sur quelques intervalles.

Pour n intervalles, le nombre total des B-splines est donné par (Truckenbrodt, 1980) :

$$N = n - \nu_0 - \nu_1 + 3 \tag{4.30}$$

où ν_0 (respectivement ν_1) est le nombre des CF pour lesquelles $S(x)$, $S'(x)$ ou $S''(x)$ est égale à zéro à $x = 0$ (respectivement à $x = L$). Par exemple, si un bras est encastré à la base et ayant une charge à son extrémité, alors il a seulement deux CF nulles à $x = 0$ ($S(0) = S'(0) = 0$). D'où $\nu_0 = 2$ et $\nu_1 = 0$. Si le bras est divisé en deux intervalles ($n = 2$), alors trois B-splines cubiques sont exigés. Nous développons, à titre d'exemple, un B-spline défini sur deux intervalles. Les CF internes (entre les splines cubiques) et externes (géométriques et naturelles) sont :

$$\begin{gathered}
S(x) = S'(x) = S''(x) = S'''(x) = 0 \text{ pour } x_0 \leq x < x_1, \\
S(x_1) = S'(x_1) = 0, \\
S(x),\ S'(x),\ S''(x) \text{ sont continus pour } x = x_2, \text{ et } S(x_2) = 1, \\
S(x_3) = S''(x_3) = 0, \\
S(x) = S'(x) = S''(x) = S'''(x) = 0 \text{ pour } x_3 \leq x < x_4.
\end{gathered} \tag{4.31}$$

Il est facile de vérifier que 16 conditions sont imposées. Le B-spline cubique est tracé dans la figure (4.5). La fonction unitaire de Heaviside est encore utilisée pour s'assurer que le B-spline est défini sur toute la longueur du bras. L'équation du B-spline

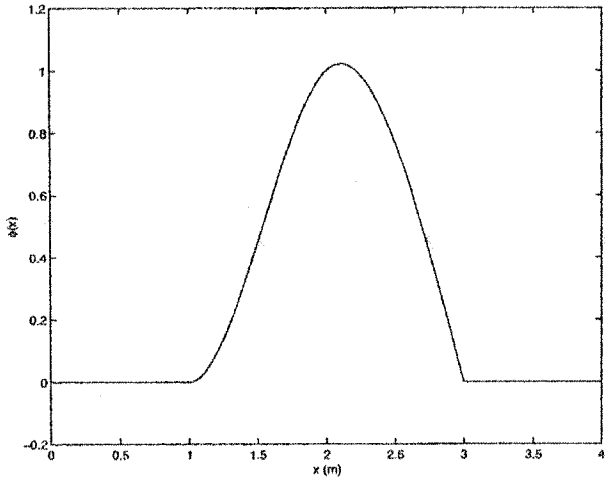


FIG. 4.5 – Un B-spline cubique

correspondant à (4.31) est donnée par :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{7}\left(-11\,x^3+51\,x^2-69\,x+29\right)\mu(x-1)\\ &\quad+\frac{1}{7}\left(16\,x^3-96\,x^2+192\,x-128\right)\mu(x-2)\\ &\quad+\frac{1}{7}\left(-5\,x^3+45\,x^2-123\,x+99\right)\mu(x-3)\end{aligned}\tag{4.32}$$

Le choix des B-splines doit évidemment respecter les conditions géométriques à la base du bras. La figure (4.6) montre les quatre B-splines cubiques utilisés lorsque le bras est subdivisé en trois intervalles.

4.3 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une description détaillée des différentes méthodes de discrétisation spatiale des systèmes à paramètres continus, tels que : la méthode de modes supposés et la méthode d'éléments finis. En particulier, nous avons présenté les fonctions polynomiales, les fonctions propres de poutres tournantes et encastrées et les splines et B-splines cubiques.

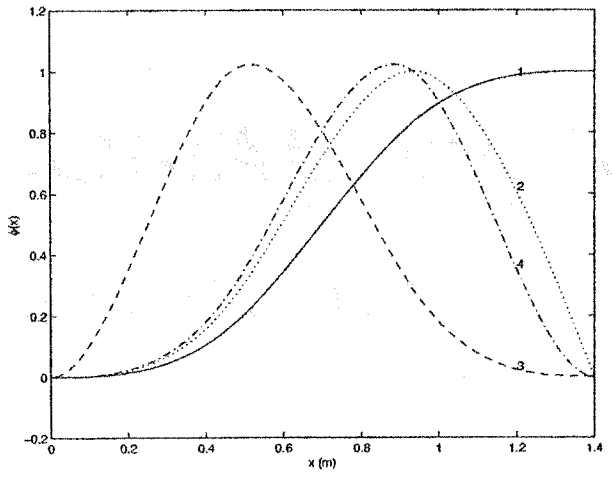


FIG. 4.6 – Quatre B-spline cubiques

Chapitre 5

ANALYSE ET COMPARAISON DES MODÈLES DISCRETS

Nous avons présenté dans le chapitre précédent les différentes fonctions de forme (FF) utilisées dans la discrétisation spatiale de la déformation de robots flexibles. Le choix des FF offre, dans chaque application, une grande diversité de stratégies, ce qui laisse libre cours à l'ingéniosité et l'expérience de l'ingénieur. Le degré de précision atteint dépendra fortement de ces facteurs.

Dans la littérature, certaines comparaisons ont déjà été faites entre les modèles basés sur ces fonctions. Ces comparaisons sont surtout basées sur la rapidité de convergence des fréquences propres des modèles en variant le nombre de modes utilisés dans la discrétisation (Barbieri et Özgüner, 1988; Hasting et Book, 1987; Junkins et Kim, 1993). D'autres auteurs ont comparé le temps de calcul des modèles notamment le temps de calcul de la matrice de masse et son inverse pour différentes FF (Theodore et Ghosal, 1995). Cependant, il n'y a pas à notre connaissance une étude comparative détaillée des fréquences, des modes, des déformations statiques ainsi que de la complexité du modèle.

Une autre problématique dont traite ce chapitre est le fait qu'un modèle discret basé sur la MMS possède une caractéristique inhérente : Les fréquences propres de ce

modèle convergent de façon monotone en augmentant le nombre de modes utilisés. Cette caractéristique n'est cependant plus valide pour un modèle discrétisé avec les éléments cubiques d'Hermite souvent utilisé dans la littérature.

Dans ce chapitre, nous proposons donc une analyse et une comparaison détaillées et exhaustives des modèles basés sur les différentes FF décrites dans le chapitre précédent. Nous proposons aussi un théorème de convergence monotone des fréquences du modèle basé sur les splines cubiques. Ainsi la précision du modèle augmente en augmentant le nombre d'éléments utilisés. Les résultats sont partiellement publiés dans (Saad et al. 2000).

Les principales références consultées lors du développement de ce chapitre sont : (Saad et al. 2000 ; Barbieri et Özgüner, 1988 ; Hasting et Book, 1987 ; Junkins et Kim, 1993 ; Theodore et Ghosal, 1995 ; Meirovitch, 1986 ; Meirovitch, 1980 ; Strang et Fix, 1973 ; Watkins, 1991)

5.1 Modèle pour la comparaison

Le modèle qui sert à la comparaison des différentes FF est obtenu à partir du modèle non linéaire (3.26). Nous supposons que la vitesse de rotation du moteur est faible ce qui permet d'éliminer l'effet de l'allongement du bras (les termes d'ordre deux en v). Nous linéarisons le modèle autour de $\theta = \pi/2$. Les frottements du joint et du bras sont encore négligés. Le modèle devient :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_t & \beta^T \\ \beta & M_{ff} \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix}}_{\ddot{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta \\ q_f \end{bmatrix}}_{q} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_r \\ h_f \end{bmatrix}}_{h} \tag{5.1}$$

soit encore sous la forme :

$$M\,\ddot{q} + K\,q = h \tag{5.2}$$

où le vecteur h regroupe les termes dûs à l'entrée et à la gravité. Les paramètres du système sont donnés dans le tableau (5.1) (Saad et al., 2000). Dans ce qui suit, nous

analysons la convergence des fréquences des modèles basés sur les différentes FF.

TAB. 5.1 – Paramètres du système

Paramètres	**Valeurs**	
I_m	Inertie du moteur	$10\ kg\,m^2$
L	Longueur du bras	$1.4\ m$
ρ	masse par unité de longueur	$1\ Kg/m$
EI_z	Rigidité du bras	$500\ Nm^2$
M_c	Masse de la charge	$5\ kg$
I_c	Inertie de la charge	$1\ kg\,m^2$
r_c	Distance entre le CG de la charge et l'extrémité bu bras	$0.7\ m$

5.2 Convergence des fréquences de la MMS

Soient $M^{(n)}$ et $K^{(n)}$ les matrices de masse et de rigidité dans l'équation (5.2) correspondant à n termes dans la série

$$v(x,t) = \phi^T(x)\, q_f(t) \tag{5.3}$$

Soient $\lambda_r^{(n)}$ et $\Lambda_r^{(n)}$, $r = 1, 2, \ldots, n$ les valeurs propres calculées et exactes, respectivement. Ces valeurs propres sont ordonnées telles que $\lambda_1^{(n)} \leq \lambda_2^{(n)} \leq \cdots \leq \lambda_n^{(n)}$ et $\Lambda_1^{(n)} \leq \Lambda_2^{(n)} \leq \cdots \leq \Lambda_n^{(n)}$. L'ensemble des FF polynomiales et des poutres est complet. L'erreur entre les valeurs propres exactes et calculées peut être minimisée autant que possible en incrémentant le nombre de modes dans la série (5.3). Alors, les valeurs propres calculées approchent celles exactes quand le nombre de fonctions admissibles $n \to \infty$.

L'approximation d'un système continu d'ordre infini par un système discret d'ordre n fini est assurée par imposition de la contrainte $q_{f_i} = 0,\ i > n$ dans la série (5.3). La contrainte a pour effet d'augmenter la rigidité du système de façon que les valeurs propres estimées tendent à être plus grandes que les valeurs propres exactes (Meirovitch, 1986)

$$\Lambda_r^{(n)} \leq \lambda_r^{(n)}$$

De plus, les matrices de masse et de rigidité correspondant à $n+1$ termes dans la série (5.3) sont obtenues en ajoutant une ligne et une colonne aux mêmes matrices de l'étape précédente

$$M^{(n+1)} = \begin{bmatrix} M^{(n)} & X \\ X & X \end{bmatrix}, \quad K^{(n+1)} = \begin{bmatrix} K^{(n)} & X \\ X & X \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

où les X sont les entrées dues à la fonction admissible ajoutée dans la série. Les nouvelles matrices de masse et de rigidité $M^{(n+1)}$ et $K^{(n+1)}$ donnent les valeurs propres calculées $\lambda_r^{(n+1)}$ $(r = 1, 2, \ldots, n+1)$. La propriété d'insertion dans les relations (5.4) permet l'application du principe d'inclusion (Meirovitch, 1980) qui donne l'inégalité suivante :

$$\lambda_1^{(n+1)} \leq \lambda_1^{(n)} \leq \lambda_2^{(n+1)} \leq \lambda_2^{(n)} \leq \cdots \leq \lambda_n^{(n)} \leq \lambda_{n+1}^{(n+1)} \tag{5.5}$$

Cette dernière indique qu'en augmentant n, les valeurs propres calculées approchent de façon monotone les valeurs propres exactes.

5.3 Convergence des fréquences dans la MEF

La MEF est essentiellement une méthode de Rayleigh-Ritz. La seule différence réside dans la manière dont sont choisies les déformations. Dans la MMS (méthode classique de Ritz), les déformations sont données par des expressions définies sur l'ensemble du domaine à discrétiser. Dans la MEF, les déformations sont définies par des représentations par morceaux, chaque paramètre nodal n'influençant que ses éléments adjacents.

Par sa nature, la MMS est limitée à des domaines de forme géométriques relativement simple, tandis que dans la MEF, cette limitation ne s'impose qu'à la forme de l'élément lui-même. Donc des configurations plus complexes, réalistes, pourront être obtenues par l'assemblage d'éléments de forme simple. Plus grand sera le nombre de degrés de liberté, plus précise sera l'approximation de la solution exacte à condition que les déformations réelles puissent être indéfiniment approchées.

5.3.1 Convergence des splines cubiques

Dans la MEF, les fonctions supposées sont définies localement sur un petit intervalle et tendent à être des polynômes simples. Pour améliorer la précision de la solution du PVP algébrique, le maillage des éléments est raffiné en diminuant la longueur h de chaque élément tout en fixant l'ordre p des fonctions polynomiales. C'est la "h-version" de la MEF. Les fonctions d'interpolation ne forment pas généralement un ensemble complet, la convergence monotone ne peut pas être toujours garantie (Meirovitch, 1986). Une autre approche pour améliorer la précision de la solution calculée est de fixer h et d'augmenter le nombre de polynômes par élément. Ce qui revient à augmenter le degré p des polynômes. C'est la "p-version" de la MEF (Meirovitch, 1986). Plusieurs choix d'ensembles de polynômes sont possibles, pourvu que ces ensembles soient complets. Les polynômes hiérarchiques sont les plus désirables. Dans ce cas, le principe d'inclusion est valide et la convergence de la solution calculée est assurée. À titre d'exemple, nous présentons un ensemble de polynômes hiérarchiques. Les polynômes cubiques d'Hermite souvent utilisés dans le cas de bras flexibles sont (Meirovitch, 1986) :

$$\begin{aligned} L_1 &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \qquad L_2 = \xi^2 - \xi^3 \\ L_3 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad L_4 = -\xi + 2\xi^2 - \xi^3 \end{aligned} \tag{5.6}$$

où $\xi = 1 - x/h$ est une variable locale à un EF. Un ensemble convenable de fonctions hiérarchiques sont les polynômes suivants :

$$\begin{aligned} L_5 &= \xi^2(1-\xi)^2 \\ L_6 &= \xi^2(1-\xi)^2(1-2\xi) \\ L_7 &= \xi^2(1-\xi)^2(1-3\xi)(2-3\xi) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_{4+i} &= \xi^2(1-\xi)^2 \prod_{j=2}^{i}(j-1-i\xi) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Il a été montré dans (Meirovitch et Silverberg, 1983) que pour un système du second ordre, le principe d'inclusion est valide pour la "h-version" de la MEF, pourvu que des fonctions d'interpolation linéaires soient utilisées comme des fonctions admissibles. Cependant, pour un système d'ordre quatre (ÉDP d'un bras flexible), le principe d'inclusion n'est pas valide si les polynômes cubiques d'Hermite sont utilisés comme des fonctions admissibles. Dans ce qui suit, nous allons montrer la convergence monotone des valeurs propres calculées dans le cas de la MEF avec les splines cubiques comme fonctions admissibles.

Proposition 2 *Le principe d'inclusion est valide pour un système d'ordre quatre dans le cas de la "h-version" de la MEF pourvu que les splines cubiques soient utilisées comme des fonctions admissibles.*

La démonstration de cette proposition est basée sur l'équivalence des deux représentations "h-version" et "p-version" de la MEF. Nous cherchons à montrer que, pour un système d'ordre quatre, la MEF "h-version" (où la convergence n'est pas toujours monotone) est équivalente à la MEF "p-version" (où la convergence est monotone) si les fonctions admissibles utilisées sont les splines cubiques.

La figure (5.1) représente un élément cubique de longueur h. Soit $v(x,t)$ le déplacement en x, $v''(x,t) = \partial^2 v(x,t)/\partial x^2$ est sa courbure, $y_i = v(x_i,t)$ est le déplacement au noeud x_i et $y_i'' = v''(x_i,t)$ est sa courbure. Dans la suite, la variable t sera omise. En utilisant les splines cubiques, le déplacement (4.17) est réécrit sous la forme suivante

$$v(x) = L_1(x,h)\,y_1 + L_2(x,h)\,y_2 + L_3(x,h)\,y_1'' + L_4(x,h)\,y_2'' \tag{5.8}$$

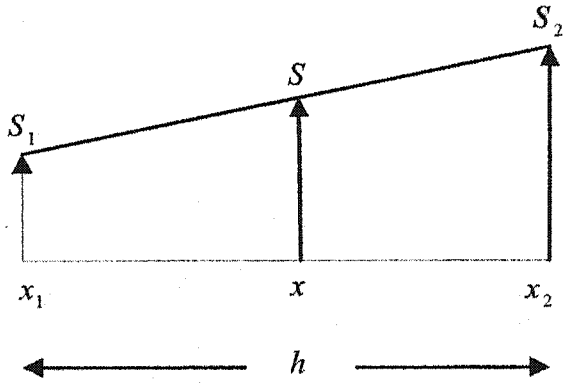


FIG. 5.1 – Élément cubique

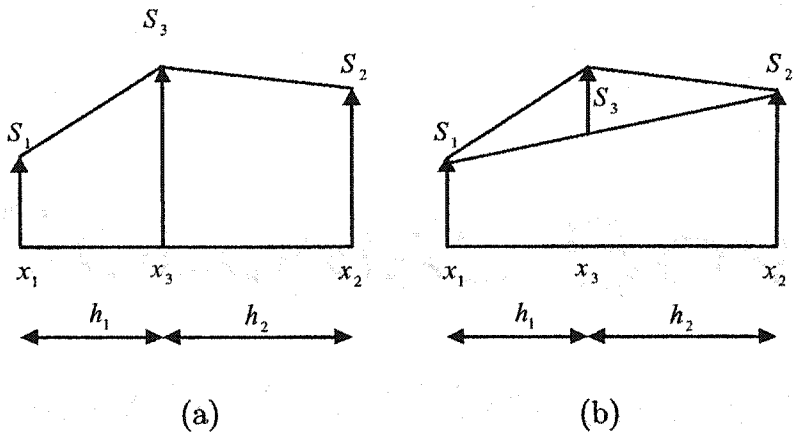


FIG. 5.2 – Deux éléments cubiques

où

$$\begin{aligned} L_1(x,h) &= 1-\tfrac{x}{h}, \quad & L_3(x,h) &= \tfrac{1}{6}h^2\left[-\left(\tfrac{x}{h}\right)^3+3\left(\tfrac{x}{h}\right)^2-2\tfrac{x}{h}\right] \\ L_2(x,h) &= \tfrac{x}{h}, & L_4(x,h) &= \tfrac{1}{6}h^2\left[\left(\tfrac{x}{h}\right)^3-\tfrac{x}{h}\right] \end{aligned} \tag{5.9}$$

La courbure est donnée par :

$$v''(x) = L_3''(x,h)y_1'' + L_4''(x,h)y_2'' = (1-\frac{x}{h})y_1'' + \frac{x}{h}y_2'' \tag{5.10}$$

La courbure en un point x est une combinaison linéaire de y_1'' et y_2''.

En utilisant la "h-version" de la MEF, h est subdivisé en deux éléments (Figure 5.2). Pour $0 \leq x \leq h_1$,

$$v(x) = L_1(x,h_1)y_1 + L_2(x,h_1)y_3 + L_3(x,h_1)\,y_1'' + L_4(x,h_1)\,y_3'' \qquad (5.11)$$

et pour $h_1 \leq x \leq h$,

$$v(x) = L_1(x-h_1,h_2)y_3 + L_2(x-h_1,h_2)y_2 + L_3(x-h_1,h_2)\,y_3'' + L_4(x-h_1,h_2)\,y_2'' \quad (5.12)$$

En utilisant la MEF hiérarchique ("p-version"), nous ajoutons à l'expression du déplacement (5.8) deux polynômes d'interpolation L_5 et L_6 correspondant aux deux coordonnées généralisées $\overline{y}_3$ et $\overline{y}_3''$. Le déplacement est alors exprimé par :

$$v(x) = L_1(x,h)y_1 + L_2(x,h)y_2 + L_3(x,h)\,y_1'' + L_4(x,h)\,y_2'' + L_5(x)\overline{y}_3 + L_6(x)\overline{y}_3'' \quad (5.13)$$

Nous essayons de trouver L_5 et L_6 telles que les deux versions de la MEF soient équivalentes.

Pour $0 \leq x \leq h_1$, les équations (5.11)-(5.13) donnent le déplacement à h_1, soit

$$\begin{aligned} v(h_1) &= L_1(h_1,h_1)y_1 + L_2(h_1,h_1)y_3 + L_3(h_1,h_1)\,y_1'' + L_4(h_1,h_1)\,y_3'' = y_3 \\ &= L_1(h_1,h)y_1 + L_2(h_1,h)y_2 + L_3(h_1,h)\,y_1'' + L_4(h_1,h)\,y_2'' \\ &\quad + L_5(h_1)\overline{y}_3 + L_6(h_1)\overline{y}_3'' \end{aligned}$$

et la courbure est donnée par

$$\begin{aligned} v''(h_1) &= L_1''(h_1,h_1)y_1 + L_2''(h_1,h_1)y_3 + L_3''(h_1,h_1)\,y_1'' + L_4''(h_1,h_1)\,y_3'' = y_3'' \\ &= L_1''(h_1,h)y_1 + L_2''(h_1,h)y_2 + L_3''(h_1,h)\,y_1'' \\ &\quad + L_4''(h_1,h)\,y_2'' + L_5''(h_1)\overline{y}_3 + L_6''(h_1)\overline{y}_3'' \\ &= L_3''(h_1,h)\,y_1'' + L_4''(h_1,h)\,y_2'' + L_5''(h_1)\overline{y}_3 + L_6''(h_1)\overline{y}_3'' \end{aligned}$$

Supposons que :

$$L_5(h_1) = 1,\ L_6(h_1) = 0,\ L_5''(h_1) = 0,\ L_6''(h_1) = 1$$

Alors,

$$\begin{aligned} \overline{y}_3 &= y_3 - L_1(h_1,h)y_1 - L_2(h_1,h)y_2 - L_3(h_1,h)\,y_1'' - L_4(h_1,h)\,y_2'' \\ \overline{y}_3'' &= y_3'' - L_3''(h_1,h)\,y_1'' - L_4''(h_1,h)\,y_2'' \end{aligned} \qquad (5.14)$$

Substituons $\overline{y}_3$, $\overline{y}_3''$ dans l'équation (5.13), nous aurons

$$\begin{aligned} v(x) &= L_1(x,h)y_1 + L_2(x,h)y_2 + L_3(x,h)\,y_1'' + L_4(x,h)\,y_2'' \\ &\quad + L_5(x)\,[y_3 - L_1(h_1,h)y_1 - L_2(h_1,h)y_2 - L_3(h_1,h)\,y_1'' - L_4(h_1,h)\,y_2''] \\ &\quad + L_6(x)\,[y_3'' - L_3''(h_1,h)\,y_1'' - L_4''(h_1,h)\,y_2''] \end{aligned} \tag{5.15}$$

Comparons les deux équations (5.11) et (5.15), nous aurons

$$L_1(x,h_1) = L_1(x,h) - L_1(h_1,h)\,L_5(x) \tag{5.16}$$

$$0 = L_2(x,h) - L_2(h_1,h)L_5(x) \tag{5.17}$$

$$L_2(x,h_1) = L_5(x) \tag{5.18}$$

$$L_3(x,h_1) = L_3(x,h) - L_3(h_1,h)\,L_5(x) - L_3''(h_1,h)L_6(x) \tag{5.19}$$

$$0 = L_4(x,h) - L_4(h_1,h)\,L_5(x) - L_4''(h_1,h)L_6(x) \tag{5.20}$$

$$L_4(x,h_1) = L_6(x) \tag{5.21}$$

À partir des équations (5.16)-(5.21), nous obtenons

$$L_5(x) = L_2(x,h_1) \tag{5.22}$$

$$L_6(x) = L_4(x,h_1) \tag{5.23}$$

Notons que $L_5(0) = L_6(0) = 0$.

En appliquant la même procédure qu'auparavant, nous obtenons pour $h_1 \leq x \leq h$,

$$\begin{aligned} v(x) &= L_1(x,h)y_1 + L_2(x,h)y_2 + L_3(x,h)y_1'' + L_4(x,h)y_2'' \\ &\quad + L_5(x)\,[y_3 - L_1(h_1,h)y_1 - L_2(h_1,h)y_2 - L_3(h_1,h)y_1'' - L_4(h_1,h)y_2''] \\ &\quad + L_6(x)\,[y_3'' - L_3''(h_1,h)y_1'' - L_4''(h_1,h)y_2''] \end{aligned} \tag{5.24}$$

Comparons (5.12) et (5.24), nous obtenons

$$0 = L_1(x,h) - L_1(h_1,h)\,L_5(x) \tag{5.25}$$

$$L_2(x-h_1,h_2) = L_2(x,h) - L_2(h_1,h)L_5(x) \tag{5.26}$$

$$L_1(x-h_1,h_2) = L_5(x) \tag{5.27}$$

$$0 = L_3(x,h) - L_3(h_1,h)\,L_5(x) - L_3''(h_1,h)L_6(x) \tag{5.28}$$

$$L_4(x-h_1,h_2) = L_4(x,h) - L_4(h_1,h)\,L_5(x) - L_4''(h_1,h)L_6(x) \tag{5.29}$$

$$L_3(x-h_1,h_2) = L_6(x) \tag{5.30}$$

À partir des équations (5.25)-(5.30), nous aurons

$$L_5(x) = L_1(x-h_1,h_2) \tag{5.31}$$

$$L_6(x) = L_3(x-h_1,h_2) \tag{5.32}$$

Notons que $L_5(h) = L_6(h) = 0$. Alors les termes $L_5(x)$ et $L_6(x)$ n'affectent aucun élément que les éléments en considération.

En utilisant les deux versions de la MEF, nous avons ajouté deux coordonnées pour améliorer la précision de la solution calculée. Dans la "h-version", le déplacement et la courbure à un nœud interne sont ajoutés. Cependant, deux modes supposés sont de plus ajoutés dans la "p-version" hiérarchique. Ceci ne nous montre pas que la convergence de la solution est monotone. Nous allons utiliser la relation entre les déplacements et les courbures aux nœuds pour éliminer une de ces deux variables, soit le déplacement, et représenter la déformation seulement en fonction des courbures aux nœuds. En d'autres mots, raffiner le maillage dans la "h-version" de la MEF nous mène à ajouter une variable au lieu de deux de façon que le principe d'inclusion est valide et que la convergence monotone de la solution est assurée.

Nous allons utiliser la relation entre les déplacements et les courbures aux nœuds. Soit $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Y}''$ les vecteurs de déplacements et de courbures aux nœuds,

$$\mathbf{Y} = [y_1,\ y_3,\ y_2]^T,\ \mathbf{Y}'' = [y_1'',\ y_3'',\ y_2'']^T$$

Nous allons encore considérer les CF. Nous supposons que le bras est encastré à la base, i.e. $y_1 = 0$ et $y_1' = 0$, et qu'il y a une charge à l'autre extrémité. Alors, la courbure à l'extrémité doit être choisie. Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il y a plusieurs choix pour la courbure à l'extrémité du bras : $y_2'' = y_3''$, ou y_2'' dépend

linéairement de y_3'', ou encore la courbure à l'extrémité y_2'' est supposée inconnue. Pour chaque choix, différentes CF seront obtenues. Dans ce qui suit, nous supposons que la courbure à l'extrémité est inconnue. Alors, la courbure et le déplacement aux nœuds vérifient la relation suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\,h_1 & h_1 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1'' \\ y_3'' \\ y_2'' \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y''}} = 6 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} & 0 \\ -(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}) & \frac{1}{h_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} y_3 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} \tag{5.33}$$

Alors,

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{6}\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{Y''}$$

D'où

$$y_3 = \frac{1}{6}\left[2\,h_1^2\,y_1'' + h_1^2\,y_3''\right] \tag{5.34}$$

$$y_2 = \frac{1}{6}\left[h1(2h1+3h2)y_1'' + (h_1+h_2)(h_1+2\,h_2)y_3'' + h_2^2\,y_2''\right] \tag{5.35}$$

En substituant les déplacements aux nœuds par leur valeur dans les équations (5.11) et (5.15) nous constatons que les deux représentations sont identiques. La même conclusion est tirée en substituant les déplacements dans les équations (5.12) et (5.24). Les coordonnées nodales de la figure (5.2-a) peuvent être exprimées en fonction de celles de la figure (5.2-b) de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_1'' \\ y_2 \\ y_2'' \\ y_3 \\ y_3'' \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1'' \\ y_2 \\ y_2'' \\ \overline{y}_3 \\ \overline{y}_3'' \end{bmatrix} \tag{5.36}$$

où, à partir des équations (5.9) et (5.14), la matrice de transformation T est donnée

par

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-\frac{h_1}{h} & \frac{1}{6}h^2\left[-\left(\frac{h_1}{h}\right)^3+3\left(\frac{h_1}{h}\right)^2-2\left(\frac{h_1}{h}\right)\right] & \frac{h_1}{h} & \frac{1}{6}h^2\left[\left(\frac{h_1}{h}\right)^3-\left(\frac{h_1}{h}\right)\right] & 1 & 0 \\ 0 & 1-\frac{h_1}{h} & 0 & \frac{h_1}{h} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

La transformation homogène T est régulière. Ses valeurs propres sont toutes unitaires.

En utilisant (5.14), les équations (5.34)-(5.35) sont réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{6}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{Y}'' = \frac{1}{6}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\frac{h_1}{h} & 1 & \frac{h_1}{h} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1'' \\ \overline{y}_3'' \\ y_2'' \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\frac{1}{6}\begin{bmatrix} h_1^2(2h+h_2)/h & h_1^2 & h_1^3/h \\ 2h^2 & h^2+h\,h_2 & h^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_1}\begin{bmatrix} y_1'' \\ \overline{y}_3'' \\ y_2'' \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.38}$$

Nous pouvons donc constater, en remplaçant les déplacements aux nœuds par leur valeur en fonction des courbures aux nœuds, que les deux représentations "h-version" et "p-version" de la MEF sont identiques. En considérant les courbures comme coordonnées généralisées, raffiner le maillage dans la "h-version" de la MEF revient à ajouter une fonction polynomiale correspondante dans la "p-version" de la MEF. Les matrices de masse, $M^{(n+1)}$, et de rigidité, $K^{(n+1)}$, obtenues en ajoutant la fonction hiérarchique à un des EF possèdent la propriété d'insertion décrite plus haut. Malgré que les matrices de masse et de rigidité obtenues par le "h-version" de la MEF ne vérifient pas explicitement cette propriété, elles la vérifient implicitement. Les matrices de masse et de rigidité de la figure (5.2-a) peuvent être transformées en une forme possédant la caractéristique d'insertion en pré-multipliant les matrices

$M^{(n)}$ et $K^{(n)}$ par la transformation T^T et en post-multipliant ces deux matrices par T.

À titre d'exemple, nous calculons les valeurs propres du modèle du bras flexible (Figure 3.1) avec les splines cubiques. Les courbures sont considérées comme étant les coordonnées généralisées et la courbure à l'extrémité est supposée inconnue. Le maillage du bras est fait de façon que les nouveaux éléments sont toujours imbriqués dans les anciens éléments. Ainsi, pour raffiner le maillage, chaque élément est subdivisé en deux. Pour un maillage à un élément, le vecteur des nœuds est $X = [0,\ L]$. Pour deux éléments, $X = [0,\ L/2,\ L]$. Pour trois éléments $X = [0,\ L/4,\ L/2,\ L]$, pour quatre, $X = [0,\ L/4,\ L/2,\ 3L/4,\ L]$, et ainsi de suite. Pour un nombre d'éléments variant de 1 à 8, les valeurs propres résultant de ce maillage sont données dans le tableau (5.2). La première colonne de ce tableau indique le nombre d'éléments et la première ligne indique les valeurs propres. Ce tableau montre que la convergence des fréquences est monotone.

TAB. 5.2 – Convergence des fréquences avec les splines cubiques

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
1	2.739505003	10.2540626						
2	2.739429839	10.2225165	44.5945					
3	2.739428467	10.2225156	44.2413	135.93				
4	2.739411520	10.2201174	44.0098	116.87	228.86			
5	2.739411518	10.2201172	44.0096	116.86	225.64	518.86		
6	2.739411517	10.2201080	43.9809	115.59	225.42	420.60	810.6	
7	2.739411454	10.2200411	43.9370	114.93	225.00	384.77	621.1	951.5
8	2.739410468	10.2199873	43.9370	114.84	222.93	369.87	562.2	805.6

5.4 Comparaison de différents modèles discrets

Il est facile de comprendre que la précision d'un modèle dynamique utilisant la MMS dépend des fonctions admissibles sélectionnées mais aussi du nombre de termes retenu dans l'approximation. De même, la précision d'un modèle basé sur la MEF dépend évidemment du nombre d'éléments ainsi que des fonctions d'interpolation utilisés dans la discrétisation.

Dans cette section, nous comparons les modèles discrets du système à un bras flexible en utilisant les différentes FF discutées précédemment. Nous comparons premièrement les fréquences, les modes et leurs dérivées spatiales. Deuxièmement, nous comparons les déformations statiques et leurs dérivées spatiales pour la position du moteur $\theta = \pi/2$. Finalement, nous comparons le degré de complexité des calculs engendrés par ces modèles. Le tableau (5.3) décrit les différentes FF utilisées dans cette comparaison. Le calcul des fonctions propres des poutres nécessite d'avoir les paramètres du système, i.e. du moteur, du bras ou de la charge selon le cas. Par contre, les splines et B-splines cubiques ainsi que les fonctions polynomiales dépendent seulement de la longueur du bras. Cependant, pour les splines cubiques, un choix des CF doit être effectué. Pour tester la robustesse de différents modèles, nous changeons les paramètres du système (Tableau 5.4). Dans le premier cas, la charge est annulée. Dans le deuxième cas, la masse et l'inertie de la charge sont amplifiées. De plus, le centre de masse de la charge est éloigné de la base à une position équivalente à 50% de la longueur du bras pour représenter l'effet d'un deuxième bras. Finalement, dans le troisième cas, l'inertie du moteur vue de la base est réduite par un facteur de mille. Ceci est équivalent à enlever le réducteur de vitesse de rapport de réduction 32 : 1. Dans tous les cas, nous supposons que les paramètres du système sont connus.

TAB. 5.3 – Les fonctions de forme utilisées dans la comparaison

cf	Fonctions propres d'une poutre encastrée-libre en utilisant les paramètres nominaux
cp	Fonctions propres d'une poutre encastrée-charge en utilisant les paramètres nominaux
bp	Fonctions propres d'une poutre pivotante avec charge en utilisant les paramètres nominaux
cbs	B-splines cubiques
cs-d	Splines cubiques en considérant les déplacements aux nœuds comme coordonnées généralisées et la courbure du dernier nœud n est égale à la courbure du nœud $n-1$
cs-c	Splines cubiques avec les courbures comme coordonnées généralisées et la courbure du dernier nœud est indéterminée
pol	Fonctions polynomiales

5.4.1 Procédure

Dans chaque cas, nous calculons les fréquences exactes en utilisant les fonctions propres d'une poutre tournante (4.12). À partir de l'équation (5.2), les valeurs et les vecteurs propres sont les solutions du PVP algébrique suivant :

$$K\,u = \tilde{\omega}^2\,M\,u, \tag{5.39}$$

où M et K sont les matrices de masse et de rigidité données par l'équation (5.2), $\tilde{\omega}$ est la fréquence estimée et u est le vecteur propre associé avec cette fréquence. Nous avons supposé que l'amortissement est nul. Alors le mode rigide est toujours nul. Il ne sera pas inclus dans les résultats de comparaison. Les vecteurs propres associés à la flexibilité sont regroupés dans la matrice suivante :

$$U_f = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_\nu \end{bmatrix}$$

TAB. 5.4 – Variation des paramètres

Paramètres	**Nominaux**	**Cas 1**	**Cas 2**	**Cas 3**
$I_m\ (kg\,m^2)$	10	10	10	0.01
$M_c\ (kg)$	2	0	5	2
$I_c\ (kg\,m^2)$	0.36	0	1	0.36
$r_c\ (m)$	0	0	0.7	0

où ν est le nombre des coordonnées flexibles. Les modes propres sont exprimés en fonction des vecteurs propres par :

$$\tilde{Y}(x) = U_f^T\, \boldsymbol{\phi}(x) \tag{5.40}$$

où $\boldsymbol{\phi}(x)$ est le vecteur des FF. Les trois premières dérivées spatiales des modes propres sont calculées en utilisant $\boldsymbol{\phi}'(x)$, $\boldsymbol{\phi}''(x)$ et $\boldsymbol{\phi}'''(x)$. Les modes et leurs dérivées premières sont normalisés de façon à ce que leur maximum soit égal à un. Les dérivées deuxième et troisième sont normalisées pour que leur amplitude soit égale à un à $x = 0$. Nous calculons l'erreur relative entre les fréquences exactes et calculées de la façon suivante :

$$\epsilon_{f,i} = 100\frac{\tilde{f}_i - f_i}{f_i} \tag{5.41}$$

où $\tilde{f}_i$ et f_i sont respectivement les valeurs calculée et exacte de la $i$ème fréquence en $Hz(f = \omega/2\pi)$. Pour comparer les modes, nous utilisons la norme L_1 de l'erreur des modes normalisée par la norme L_1 du mode exact.

$$\epsilon_{m_d,i} = 100\frac{\int_0^L |\tilde{Y}_{d,i}(x) - Y_{d,i}(x)|dx}{\int_0^L |Y_{d,i}(x)|dx} \tag{5.42}$$

où $d = 0, \ldots, 3$ indique l'ordre de la dérivée du $i$ème mode. $\tilde{Y}$ et Y sont les modes calculé et exact, respectivement.

La déformation statique exacte d'une poutre encastrée avec une charge à son extrémité et dans le plan horizontal est donnée par :

$$s(x) = -\frac{g\,x^2}{24\,EI_z}\left[\rho(x^2 - 4\,x\,L + 6\,L^2) + M_c(12\,L + 12\,r_c - 4\,x)\right] \tag{5.43}$$

Nous calculons la déformation statique estimée à partir des équations (5.1) et (5.3) de la façon suivante :

$$\tilde{s}(x) \;=\; \boldsymbol{\phi}(x)^T q_f \;=\; \boldsymbol{\phi}(x)^T K_{ff}^{-1} h_f \tag{5.44}$$

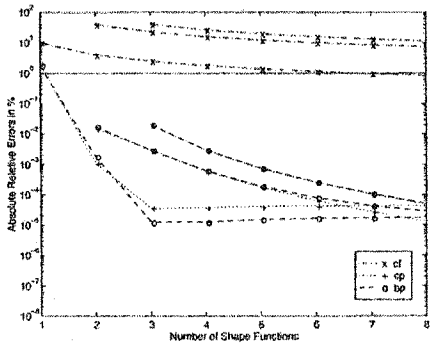
Les trois premières dérivées de la déformation statique sont calculées à partir de $\boldsymbol{\phi}'(x)$, $\boldsymbol{\phi}''(x)$ et $\boldsymbol{\phi}'''(x)$. L'erreur est similaire à celle des modes, soit :

$$\epsilon_{s_d} = 100\frac{\int_0^L |\tilde{s}_d(x) - s_d(x)|dx}{\int_0^L |s_d(x)|dx} \tag{5.45}$$

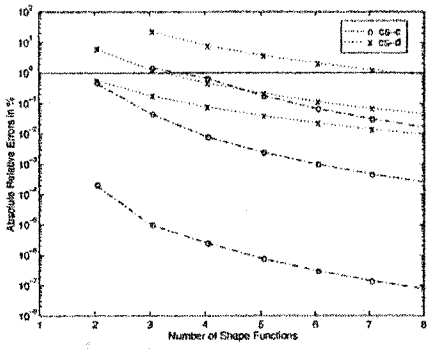
5.4.2 Simulation

Nous générons le modèle correspondant à chacune des FF données dans le tableau (5.3). Nous étudions l'amélioration de la solution en utilisant une à huit FF (deux à huit fonctions pour les splines). Nous présentons les résultats correspondants aux trois premiers modes mais la discussion est encore valide pour les autres modes. Dans toutes les figures, l'axe des abscisses représente le nombre de modes et l'axe des ordonnés représente le pourcentage de l'erreur relative absolue.

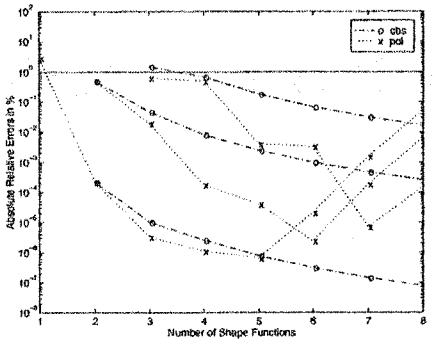
Le Cas 2 (Tableau 5.4) est le cas le plus général, nous allons le discuter en détail. La figure (5.3) donne la valeur absolue de l'erreur relative des valeurs propres (Eq. 5.41) pour les différentes FF. Les fréquences exactes des trois premiers modes sont 1.6, 9.3 et 45.3 Hz. Dans chaque figure, nous traçons un ensemble de trois courbes par FF correspondant aux trois fréquences calculées. La courbe la plus basse correspond à la première fréquence et la courbe la plus élevée correspond à la troisième fréquence. Par exemple, trois fonctions *cs-c* donne une erreur de 0.05% pour la deuxième fréquence. Les figures montrent l'amélioration de la solution quand le nombre de fonctions augmente. Les modèles *bp* et *cp* sont similaires surtout pour la deuxième et la troisième fréquence. Pour la première fréquence, la précision des deux modèles n'est presque pas affectée après trois modes. Les fréquences données par les modèles *cbs* et *cs-c* sont presque identiques pour les trois modes. Les modèles *cbs* et *cs-c* donnent une meilleure approximation pour le premier mode. Ceci n'est pas le cas pour les deux



(a) Les Modèles *cf*, *cp* et *bp*



(b) Les modèles *cs-c* et *cs-d*

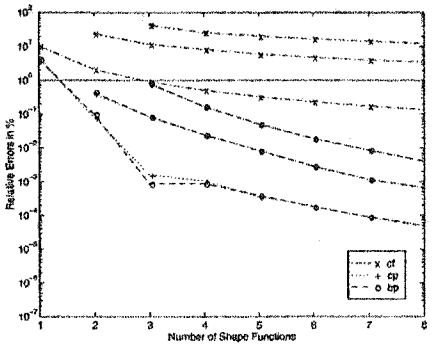


(c) Les modèles *cbs* et *pol*

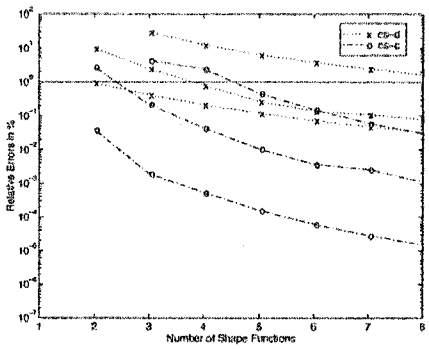
FIG. 5.3 – Erreurs relatives des fréquences en % : Cas 2

autres modes. L'erreur du modèle *cf* est rarement sous le 1%. Cependant, l'erreur du premier mode du *cs-d* est plus grande que celle donnée par *cs-c* pour le même mode. Les autres modèles donnent une erreur relativement faible. Pour le premier mode, l'erreur donnée par le modèle *pol* est similaire à celle donnée par *cbs* jusqu'à cinq modes. Les résultats sont même identiques quand deux FF sont utilisées. Ensuite, la précision est réduite dramatiquement parce que les puissances $(\frac{x}{L})^k$ sont presque linéairement dépendantes. Elles ont essentiellement le même poids au voisinage de $x = L$ (Strang et Fix, 1973).

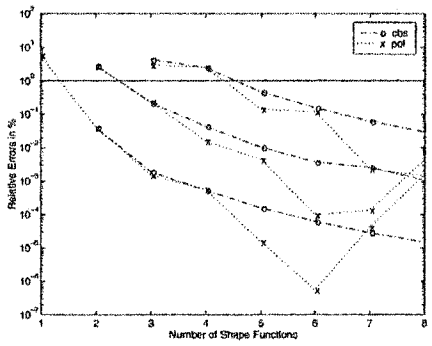
La figure (5.4) montre l'erreur relative des modes propres et la figure (5.5) donne l'erreur de leurs dérivées secondes. La dérivée seconde est importante dans la pratique parce qu'elle est liée à la courbure. Cette dernière est directement mesurable par des



(a) Modèles *cf*, *cp* et *bp*



(b) Modèles *cs-c* et *cs-d*

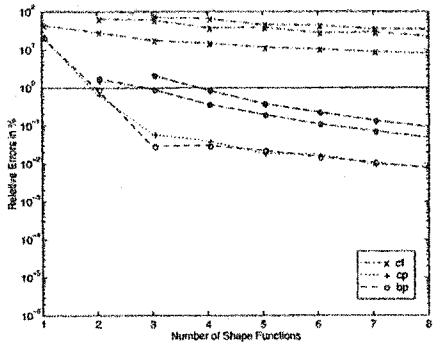


(c) Modèles *cbs* et *pol*

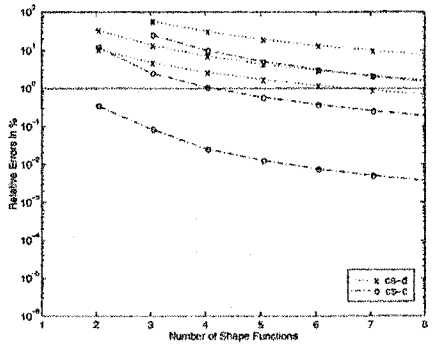
FIG. 5.4 – Erreurs relatives des modes propres en % : Cas 2

jauges de contrainte. Les observations faites pour les fréquences sont applicables pour les modes et leurs dérivées. Cependant, l'erreur sur l'approximation des modes est supérieure à celle des fréquences. L'erreur sur la deuxième dérivée est encore plus élevée. Par exemple, l'erreur de la deuxième dérivée du premier mode du modèle *cf* (Figure 5.5-a) atteint à peine le 10% même avec huit fonctions *cf*. L'erreur des modes propres du modèle *pol* est proche de celle des modèles *cbs* et *cs-c* jusqu'aux quatre FF (Figure 5.4-c).

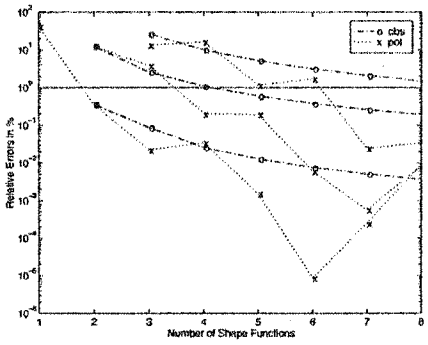
La figure (5.6) montre l'erreur de la déformation statique et figure (5.7) donne l'erreur de leur dérivée seconde. Il est clair que le modèle *pol* donne de bons résultats particulièrement pour les trois premières FF (Figure 5.6-b). Ceci est prévu car la solution exacte (Eq. 5.43) est un polynôme d'ordre quatre. Les modèles *cp* et *bp*



(a) Modèles *cf*, *cp* et *bp*



(b) Modèles *cs-c* et *cs-d*

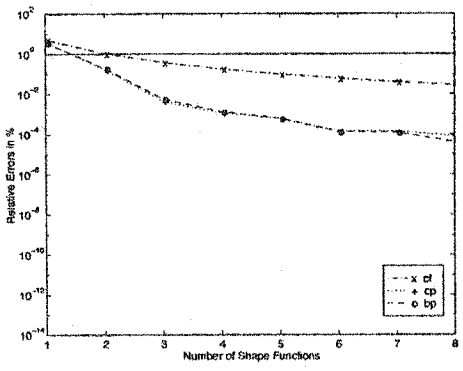


(c) Modèles *cbs* et *pol*

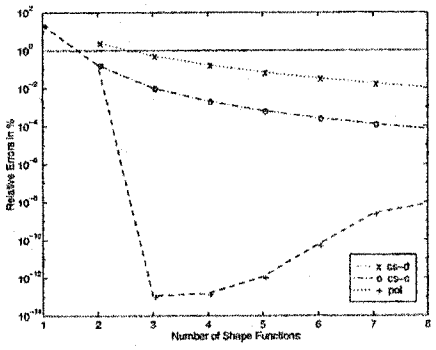
FIG. 5.5 – Erreurs relatives des dérivées secondes des modes propres en % : Cas 2

(Figures 5.6-a), 5.7-a), *cbs* et *cs-c* (Figures 5.6-b), 5.7-b) donnent des résultats similaires (les *cbs* et *cs-c* sont superposés). L'erreur du modèle *cf* est importante particulièrement pour la dérivée seconde où l'erreur minimale est à peu près de 40% avec huit FF. Le modèle *cs-d* n'est pas aussi performant que les modèles *cbs* et *cs-c*.

Les trois dernières figures, (5.8)-(5.10), présentent l'erreur des valeurs propres pour le cas Nominal, Cas 1 et Cas 3, respectivement. Les fréquences pour les trois cas sont respectivement : 2.7, 10.2, 43.9 Hz, 6.7, 40.1, 112 Hz, et 8.1, 29.8, 75.3 Hz. Puisque les *cbs* et *cs-c* donne les mêmes résultats, seuls les résultats de *cs-c* sont présentés. Comme prévu, dans le cas Nominal, le modèle *bp* donne les meilleures approximations (Figure 5.8-a). Les erreurs de ce modèle sont les erreurs numériques de Matlab puisque nous calculons les fréquences exactes dans Maple avec une précision de trente chiffres

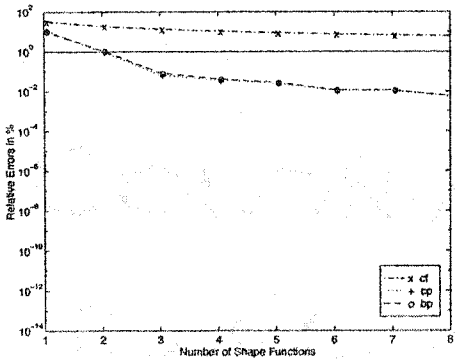


(a) Modèles *cf*, *cp* et *bp*

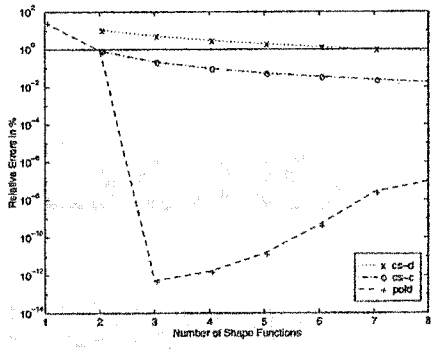


(b) Modèles *cs-c*, *cs-d* et *pol*

FIG. 5.6 – Erreurs relatives de la déformation statique en % : Cas 2

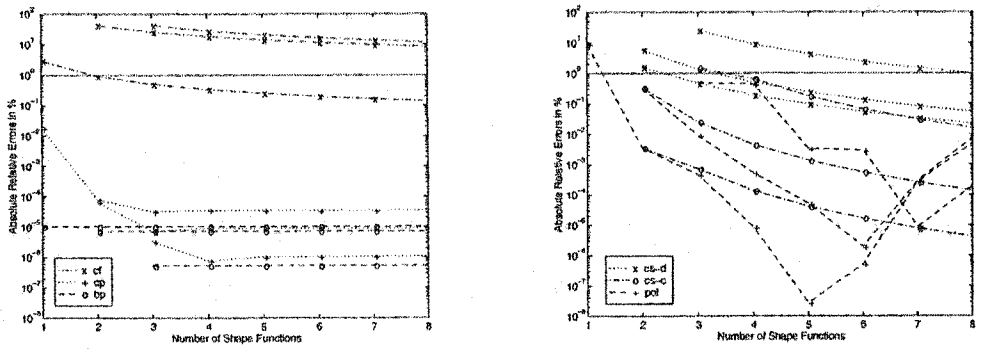


(a) Modèle *cf*, *cp* et *bp*



(b) Modèle *cs-c*, *cs-d* et *pol*

FIG. 5.7 – Erreurs relatives de la dérivée seconde des déformations statiques en % : Cas 2

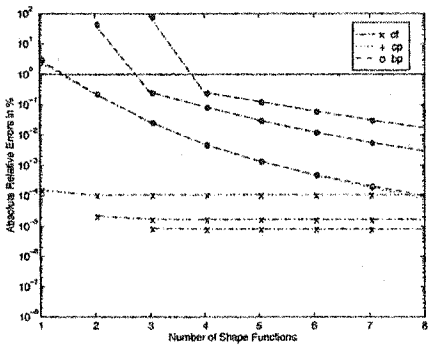


(a) Modèles *cf*, *cp* et *bp* (b) Modèles *cs-c*, *cs-d* et *pol*

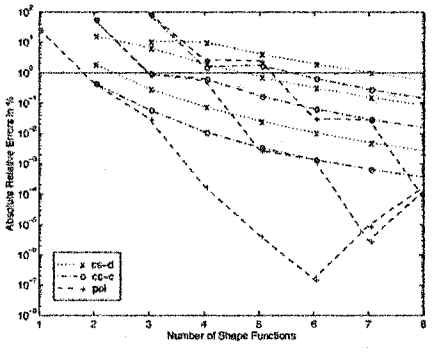
FIG. 5.8 – Erreurs relatives absolues des fréquences en % : Cas Nominal

décimaux. Le comportement des autres modèles sont les mêmes que pour le Cas 2. Le modèle *cp* demeure le meilleur comme dans le Cas 2. Le seul cas où le modèle *cf* donne de bons résultats est le cas où le bras est sans charge (Figure 5.9). La convergence des autres modèles qui ne suppose pas un moment fléchissant nul à l'extrémité est plus lente et l'erreur est plus grande que dans le Cas 2. Pour les splines cubiques, il est facile d'imposer un moment fléchissant nul à l'extrémité ce qui améliore leur convergence. Dans la figure (5.9-b), la convergence des modèles *cs-c* et *cs-d* n'est pas strictement monotone. Les éléments ne sont pas imbriqués l'un dans l'autre. La longueur des éléments est uniforme (L/n où n est le nombre d'éléments). Dans le cas où l'inertie de la base est réduite, Cas 3, les modèles présentent le même comportement de convergence (Figure 5.10). Cependant, la convergence est moins rapide que dans les autres cas. Pour avoir la même convergence il faut augmenter le nombre des FF.

Les conditionnements de la matrice des vecteurs propres, $\kappa_2(V)$ (Watkins, 1991), sont présentés dans le tableau (5.5) pour un nombre de FF variant de un à huit. Ces conditionnements mesurent la sensibilité de la solution du système linéaire (5.39) vis-à-vis des variations des données et doivent être aussi proche que possible de 1. Le tableau (5.5) indique que le modèle *pol* devient très sensible quand le nombre de FF augmente. Alors que l'approximation de la solution du PVP doit s'améliorer en

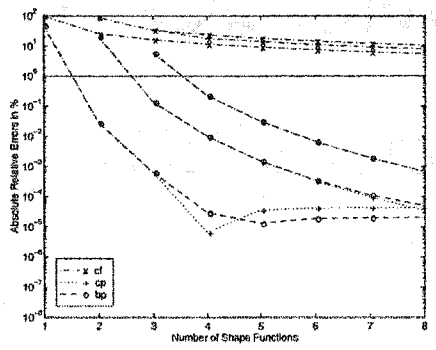


(a) Modèles *cf*, *cp* et *bp*

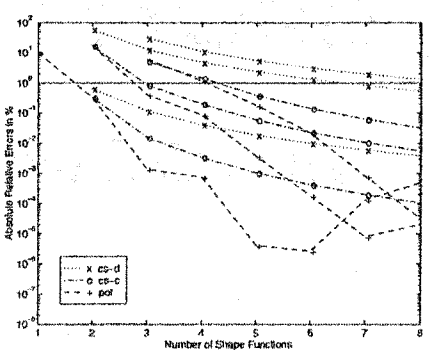


(b) Modèles *cs-c*, *cs-d* et *pol*

FIG. 5.9 – Erreurs relatives absolues des fréquences en % : Cas 1



(a) Modèles *cf*, *cp* et *bp*



(b) Modèles *cs-c*, *cs-d* et *pol*

FIG. 5.10 – Erreurs relatives absolues des fréquences en % : Cas 3

TAB. 5.5 – Conditionnements de la matrice des vecteurs propres : Cas 2

	1	2	3	4	5	6	7	8
cf	2.3	6.1	10.7	16.1	22.3	29.2	36.6	44.7
cp	1.4	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
bp	1.5	2.2	2.2	2.2	2.2	2.2	2.2	2.2
cbs	–	2.3	4.9	3.6	4.8	6.2	7.7	9.3
cs-c	–	1.7	1.7	1.7	1.6	1.6	1.6	1.6
cs-d	–	5.2	8.4	12.1	16.3	21.1	26.2	31.6
pol	1.9	4.8	11.6	24.4	54.5	253	1.3e3	7.3e3

augmentant le nombre de FF, la sensibilité aux erreurs numériques et aux variations des paramètres réduit cette amélioration. La sensibilité des modèles *cf* , *cs-d* , et de façon moins importante, la sensibilité du modèle *cbs* augmente aussi quand le nombre de modes augmente. Alors que, la sensibilité des modèles *cp* , *bp* et *cs-c* est presque constante. Ayant le conditionnement le plus petit, le modèle *cs-c* est le moins sensible de tous les modèles face aux erreurs numériques et aux erreurs du modèle.

Une première conclusion est que les FF d'une poutre encastrée-libre (*cf*), qui sont parfois utilisées dans la littérature, sont inadéquates dans tous les cas du moins dans le cas où le bras est sans charge. Les FF encastrée-charge (*cp*) donnent une très bonne estimation même si la charge est surestimée. Leur seul désavantage est qu'elles sont relativement complexes. Cependant, les relations d'orthogonalité entre ces FF permettent de simplifier le calcul de certains termes dans la dynamique. La complexité additionnelle des FF d'une poutre pivotante avec charge (*bp*) ne se reflète pas dans les résultats. Les fonctions polynomiales sont bonnes pour un nombre de modes inférieur à quatre. Cependant, dû à leur sensibilité, ces fonctions sont à éviter pour de structures à plusieurs bras. Les modèles basés sur les splines donnent des résultats intéressants. Les meilleurs résultats sont obtenus avec les B-splines (*cbs*) et les splines cubiques avec les courbures comme coordonnées généralisées (*cs-c*). Les CF

peuvent être changées selon que le système possède ou non une charge. Globalement, nous favorisons les fonctions *cs-c* car elles sont générées automatiquement alors que les B-splines nécessitent quelques choix des CF. De plus, les *cs-c* sont les moins sensibles.

Globalement, nous recommandons l'utilisation des fonctions de forme d'une poutre encastrée avec charge ou l'utilisation des splines cubiques avec les courbures comme coordonnées généralisées. Pour les splines cubiques, nous recommandons d'ajouter une FF de plus à ce qui est requis et de réajuster les CF selon le système à étudier. Par exemple, utiliser trois FF pour bien approximer les deux premiers modes. Pour une structure à plusieurs bras, nous recommandons l'utilisation des splines cubiques car elles sont plus simples à générer que les fonctions propres d'une poutre encastrée et sont indépendantes des paramètres du système (sauf la longueur des bras L).

Chapitre 6

RAPPEL DE LA PASSIVITÉ

La passivité trouve son origine dans le domaine des circuits électriques. Elle consiste à vérifier si l'énergie fournie à travers l'entrée sera dissipée ou générée par le système vu de sa sortie. Pour cela, le choix de la sortie joue un rôle important dans l'analyse de la passivité d'un système donné. Un modèle peut être passif ou non selon le choix du couple entrée-sortie. Bien que la connaissance des caractéristiques physiques d'un système puisse aider à sélectionner des entrées et des sorties pour lesquelles le modèle est passif, il n'existe pas de méthodes systématiques pour ce faire.

L'essence de la dissipativité est d'élargir, au sens théorique, le sens du stockage d'énergie. La propriété de dissipation a été introduite par Willems (1972) comme une généralisation de la passivité via une inégalité basée sur une description d'état. Un système dissipatif possède une "fonction d'énergie" semblable à celle des systèmes physiques, à l'exception que, en général, les fonctions de stockage d'énergie ne sont pas uniques. Hill et Moylan (1976 et 1980) ont été intéressés par la dissipativité particulièrement comme un moyen pour étudier la stabilité des systèmes interconnectés.

Les notions de passivité et de dissipativité sont applicables aussi bien aux systèmes linéaires que non linéaires. Cependant, dans le cas des systèmes linéaires représentés par des FT à coefficients réels, la passivité et la positivité de la partie réelle de la

FT sont équivalentes (Slotine et Li, 1991). Ceci dit, il sera donc possible de tester la positivité de la FT pour vérifier sa passivité.

Ce chapitre commence par un rappel de quelques notions mathématiques. Ensuite, les notions de base de la passivité ainsi que quelques théorèmes qui sont liés à la stabilité des systèmes passifs seront présentés. Notons que le matériel y inclu tous les théorèmes montionnés de ce chapitre trouve son origine dans (Khalil, 1996) chapitre 10, section 10.3, (Slotine et Li, 1987), chapitre 4, sections : 4.6 et 4.7) et (Desoer et Vidyasagar, 1975) et (Ortega et al, 1998) chapitres 2 et 3. Les résultats des chapitres subséquents ont été développés dans le cadre de cette thèse.

6.1 Motivation

Certains systèmes physiques, notamment les circuits électriques, ont motivé l'approche par passivité. On verra que certains systèmes ont des propriétés de dissipation d'énergie dans le même sens qu'un circuit électrique. Pour illustrer cette idée, considérons donc un réseau comme celui de la figure 6.1.

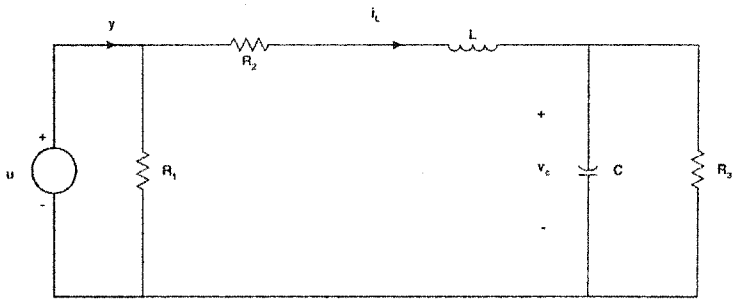


FIG. 6.1 – Circuit RLC

La puissance délivrée à ce circuit à un instant t est $u(t)i(t)$ où $u(t)$ est la tension de la source et $i(t)$ est son courant. Le modèle d'état de ce circuit, avec $x_1 = i_L$,

$x_2 = v_c$ et $y = i(t)$, s'écrit :

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -R_2 x_1 - x_2 + u \\ C\dot{x}_2 &= x_1 - \tfrac{1}{R_3} x_2 \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$y = x_1 + \frac{1}{R_1} u \tag{6.2}$$

À un instant t, l'énergie emmagasinée dans le circuit est :

$$V(x) = \frac{1}{2} L x_1^2 + \frac{1}{2} C x_2^2 \tag{6.3}$$

Le circuit RLC ne génère pas d'énergie. Il est donc passif. Soit $V(x_0)$ l'énergie emmagasinée dans ce circuit à l'instant t_0. Ce circuit dissipe au maximum autant d'énergie que celle qui lui est fournie, soit :

$$V(x(0)) + \int_0^t u(\tau) y(\tau) d\tau \geq V(x(t)) \tag{6.4}$$

L'inégalité (6.4) doit être vérifiée pour tout t. Il est donc vrai que la puissance instantanée vérifie, pour tout t, l'inégalité

$$u(t) y(t) \geq \dot{V}(x(t)) \tag{6.5}$$

6.2 Préliminaires mathématiques

Dans cette section, on fait un rappel sur les espaces de fonctions $\mathcal{L}_p$ et sur des concepts tels que produit scalaire et troncature. Soit une fonction à valeurs réelles $f(t) : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^n$. Soit un entier $p \in [1, \infty)$, l'ensemble $\mathcal{L}_p[0, \infty) \triangleq \mathcal{L}_p$ est constitué par toutes les fonctions f telles que

$$\int_0^\infty \|f(t)\|^p dt < \infty$$

et $\mathcal{L}_\infty[0, \infty) \triangleq \mathcal{L}_\infty$ est l'ensemble de toutes les fonctions f qui sont bornées sur $[0, \infty)$.

Les espaces ainsi définis sont des espaces normés :

$$\|f\|_p \triangleq \left[\int_0^\infty \|f(t)\|^p dt \right]^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

et

$$\|f\|_\infty \triangleq \sup_{t\in[0,\infty)} \|f(t)\|$$

Dans certains cas, il s'avère nécessaire de mesurer des fonctions dont la norme peut tendre vers l'infini dans un temps fini. Ce genre de fonction vit dans les espaces $\mathcal{L}_p$ étendus notés $\mathcal{L}_{pe}$. Pour définir ces espaces, on doit d'abord introduire le concept de fonction tronquée f_T :

$$f_T(t) \triangleq \begin{cases} f(t), & 0 \le t \le T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

On définit donc les espaces $\mathcal{L}_{pe}$ comme les espaces des signaux $f(t)$ tels que $f_T(t) \in \mathcal{L}_p$ avec $0 < T < \infty$. Il faut remarquer que, pour un $f(t) \in \mathcal{L}_{pe}$ il n'est pas exclu que

$$\lim_{T\to\infty} \|f_T(t)\|_p = \infty$$

6.2.1 Passivité et stabilité au sens $\mathcal{L}_p$

Soit le système dynamique Σ défini par

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \quad x(0) = x_0 \in \mathcal{R}^n \\ y = h(x,u) \end{cases} \tag{6.6}$$

où l'état $x \in \mathcal{R}^n$, l'entrée $u \in \mathcal{R}^m$, la sortie $y \in \mathcal{R}^m$, les fonctions f et h sont continues, $f(0,0) = 0$ et $h(0,0) = 0$. Considérons une fonction de puissance $w : \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^m \longrightarrow \mathcal{R}$ intégrable le long de la solution de (6.6), i.e. pour toute condition initiale $x(0) = x_0 \in \mathcal{R}^n$ et toute entrée u admissible

$$\int_0^t |w(u(\tau), y(\tau))| d\tau < \infty, \quad \forall t \ge 0 \tag{6.7}$$

Nous allons principalement nous concentrer sur une forme particulière de w, soit

$$w = u^T y \tag{6.8}$$

Définition 1 *(Passivité) (Desoer, 1975) Le système (6.6) est passif si et seulement si* $\exists\ \beta \in \mathcal{R}$ *tel que*

$$\langle u(t), y(t)\rangle_T \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T u^T(t) y(t)\, dt \ge \beta, \ \ \forall u \in \mathcal{L}_{2e}, \ \ \forall T \ge 0 \tag{6.9}$$

Si on suppose que le système est initialement au repos, l'inégalité (6.9) peut être écrite sous la forme (Desoer et Vidyasagar 1975)

$$\langle u(t), y(t)\rangle_T \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{L}_{2e}, \quad \forall T \geq 0 \tag{6.10}$$

Définition 2 *(Passivité stricte) (Desoer, 1975)* Σ *est strictement passif si* $\exists\ \beta \in \mathcal{R}$ *tel que*

$$\langle u(t), y(t)\rangle_T > \beta, \quad \forall u \in \mathcal{L}_{2e}, \quad \forall T \geq 0$$

Dans (Khalil, 1996), on fait la différence entre passivité stricte par rapport à la sortie ($\exists \delta > 0,\ \langle u(t), y(t)\rangle_T \geq \delta y^T y + \beta$), à l'entrée ($\exists \epsilon > 0,\ \langle u(t), y(t)\rangle_T \geq \epsilon u^T u + \beta$) ou à l'état ($\exists \rho > 0,\ \langle u(t), y(t)\rangle_T \geq \rho\psi(x) + \beta$, où $\psi(x)$ est une fonction semi définie positive telle que $\psi(x(t)) \equiv 0 \Longrightarrow x(t) \equiv 0$ pour toutes les solutions de l'équation (6.6) et tout $u(t)$ pour laquelle la solution existe).

Définition 3 *(Stabilité au sens* $\mathcal{L}_2$ *) (Desoer, 1975)* Σ *est* $\mathcal{L}_2$ *stable si* $\exists \gamma > 0$ *tel que* $\forall x_0 \in \mathcal{R}^n$, $\exists \beta = \beta(x_0) < \infty$ *tel que*

$$\|y\|_{2T} \leq \gamma \|u\|_{2T} + \beta, \quad \forall T \geq 0$$

La valeur la plus petite de γ pour laquelle cette inégalité est vérifiée est appelée le gain du système.

Dans le cas d'un système strictement passif à la sortie, nous allons de plus nous intéresser à la propriété suivante

$$y(t) \equiv 0 \Longrightarrow x(t) \equiv 0 \tag{6.11}$$

pour toutes les solutions de (6.6) quand $u \equiv 0$ (i.e. $\dot{x} = f(x, 0)$).

La condition (6.11) peut être interprétée comme une condition d'observabilité. Rappelons que pour un système linéaire

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx$$

l'observabilité est équivalente à

$$y(t) = C\,e^{At}x(0) \equiv 0 \Longrightarrow x(0) \equiv 0 \Longrightarrow x(t) \equiv 0$$

Définition 4 *(Khalil, 1996) Le système (6.6) est observable si aucune solution de* $\dot{x} = f(x,0)$ *initiée en* $S = \{x \in \mathcal{R}^n | h(x,0) = 0\}$ *ne demeure dedans entièrement, à l'exception de la solution triviale* $x(t) \equiv 0$. *Si* $x = 0$ *est asymptotiquement stable dans* S, *alors ce système est détectable.*

Les systèmes passifs possèdent une fonction de stockage d'énergie définie positive. Cette fonction joue le rôle d'une fonction de Lyapunov dans l'étude de la stabilité d'un système passif. C'est cette caractéristique physique que possèdent les systèmes passifs qui favorise à établir la passivité dans les systèmes dynamiques. La stabilité d'un système passif est montrée dans le théorème suivant.

Théorème 1 *(Khalil, 1996) Soit le système (6.6).*

- *Si le système est passif avec une fonction de stockage* $V(x)$ *définie positive, alors l'origine de* $\dot{x} = f(x,0)$ *est stable.*
- *Si le système est strictement passif à la sortie, alors il est* $\mathcal{L}_2$ *stable à gain fini.*
- *Si le système est strictement passif à la sortie, possède une fonction* $V(x)$ *définie positive et est observable, alors l'origine de* $\dot{x} = f(x,0)$ *est asymptotiquement stable.*
- *Si le système est strictement passif à l'état et possède une fonction* $V(x)$ *définie positive, alors l'origine de* $\dot{x} = f(x,0)$ *est asymptotiquement stable.*

De plus, si $V(x)$ *est radialement non bornée dans l'un des deux derniers cas, l'origine est globalement asymptotiquement stable.*

6.3 Positivité d'une fonction de transfert

Nous avons déjà mentionné que la positivité et la passivité sont équivalentes pour un système linéaire représenté par sa FT. Nous allons donc introduire la positivité

d'une FT et donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit positive réelle.

Considérons un système linéaire représenté par une FT rationnelle et à coefficients réels :

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Définition 5 *(Slotine et Li 1991) Une fonction de transfert $H(s)$ est positive réelle (PR) si*

$$Re[H(s)] \geq 0, \quad \forall\, Re[s] \geq 0$$

où $Re[\cdot]$ est la partie réelle de $[\cdot]$. Elle est strictement positive réelle (SPR) si

$$\exists\, \epsilon > 0 \mid H(s-\epsilon) \text{ est positive réelle}$$

Par exemple, $1/s$ est PR et $1/(s+a)$ est SPR pour tout $a > 0$.

Géométriquement, une fonction PR est une application qui à chaque point du demi-plan s droit fermé (i.e. y compris l'axe imaginaire) fait correspondre un point du demi-plan droit fermé de $H(s)$. Une conséquence de cette interprétation est qu'une fonction PR d'une autre fonction PR est elle-même une fonction PR. De même, si $H(s)$ est PR, $1/H(s)$ et $H(1/s)$ sont PR. Le théorème suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une FT soit PR.

Théorème 2 *(Slotine et Li, 1991) Une fonction de transfert $H(s)$ est PR si et seulement si*

- *$H(s)$ est analytique pour $Re[s] > 0$;*
- *Les pôles sur l'axe imaginaire (y inclus les pôles à $s = 0, \infty$) sont simples et leurs résidus sont réels et non négatifs ;*
- *$\forall \omega \geq 0$, $Re[H(j\omega)] \geq 0$, excepté aux pôles.*

Ce théorème offre des conditions nécessaires simples pour vérifier si une FT est PR :

1. $H(s)$ n'a ni pôles ni zéros dans le demi-plan droit ;
2. $H(s)$ a un degré relatif 1 ;

3. les zéros à l'infini sont simples.

Une autre condition nécessaire et suffisante est donnée par le résultat ci dessous.

Théorème 3 *(Balabanian, 1969) Une fonction de transfert est PR si et seulement si*

$$|arg[H(s)]| \leq |arg[s]| \quad (0 \leq |arg[s]| \leq \pi/2)$$

où $arg[\cdot]$ est l'argument de $[\cdot]$. Un cas particulier des FT qui sont PR correspond aux fonctions qui transforment un point sur l'axe imaginaire du plan s en un point sur l'axe imaginaire du plan $H(s)$, soit encore $Re[H(j\omega)] = 0$.

Définition 6 *Une FT est réactive si*

$$Re[H(j\omega)] = 0$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une FT soit réactive sont citées dans le théorème suivant.

Théorème 4 *(Balabanian, 1969) Une fonction de transfert est réactive si et seulement si*

- *Tous les pôles sont simples et imaginaires purs ;*
- *Les résidus sont réels et positifs ;*
- *$H(s)$ a un pôle ou un zéro à $s = 0$ et à $s = \infty$;*
- *$\exists \omega \mid Re[H(j\omega)] = 0$.*

Dans ce cas, la FT a la forme générale suivante :

$$H(s) = \frac{k_0}{s} + k_\infty s + \sum_{i=1}^{n} \frac{2k_i\, s}{s^2 + \omega_i^2} \tag{6.12}$$

La propriété d'alternance des pôles et des zéros d'une fonction réactive constitue, elle aussi, la base d'une autre alternative des conditions nécessaires et suffisantes.

Théorème 5 *(Balabanian, 1969) Une fonction de transfert est réactive si et seulement si tous ses pôles et ses zéros sont simples, imaginaires purs et sont entrelacés.*

6.4 Passivité des systèmes linéaires

Le théorème suivant résume les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système linéaire soit passif.

Théorème 6 *Un système linéaire, représenté par une FT rationnelle analytique, est (strictement) passif si et seulement si l'une des deux conditions est satisfaite :*

- *la fonction de transfert est (strictement) positive réelle, ou*
- *la fonction de transfert est réactive.*

Nous terminons cette section avec un théorème sur la stabilité des systèmes linéaires.

Théorème 7 *(Ortega et al., 1998) Soit $y = G(s)u$, où $G(s)$ est une fonction de transfert $n \times m$ strictement propre et strictement stable. Alors, $u \in \mathcal{L}_2^m$ implique que $y \in \mathcal{L}_2^n \bigcap \mathcal{L}_\infty^n$, $y(t)$ est continue et $y(t) \to 0$ quand $t \to \infty$. Si de plus, $u(t) \to 0$ quand $t \to \infty$, alors $\dot{y}(t) \to 0$.*

6.5 Passivité des systèmes sans mémoire

Considérons la fonction non linéaire, continue et variant dans le temps :

$$y = h(t, u) \tag{6.13}$$

où $h : \mathcal{R} \times \mathcal{R}^m \longrightarrow \mathcal{R}^m$.

Définition 7 *(Khalil, 1996) Le système (6.13) est passif si*

$$u^T y \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{R}^m$$

Le système est strictement passif si

$$u^T y > 0, \quad \forall u \in \mathcal{R}^m$$

Dans (Khalil, 1996), on fait encore la différence entre un système strictement passif à l'entrée (si $\exists \epsilon > 0, u^T y > \epsilon u^T u, \ \forall u \in \mathcal{R}^m$) et un système strictement passif à la sortie (si $\exists \delta > 0, u^T y > \delta y^T y, \ \forall u \in \mathcal{R}^m$)

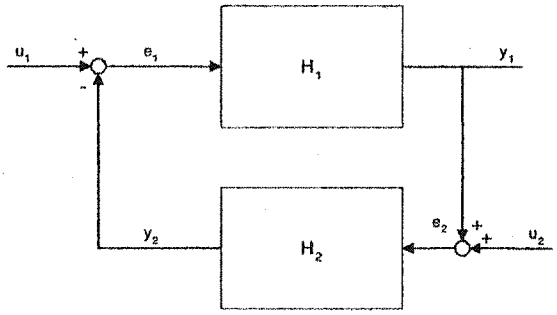


FIG. 6.2 – Système bouclé

6.6 Systèmes à contre-réaction

Dans ce qui suit, nous allons énoncer quelques théorèmes importants qui vont nous servir par la suite. Soit le système à contre-réaction de la figure (6.2) où H_1 et H_2 sont deux systèmes dynamiques de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_i, e_i) \\ y_i &= h_i(x_i, e_i) \end{aligned}$$

pour $i = 1,\ 2$, avec f_i et h_i sont des fonctions continues. Supposons que le système bouclé a un modèle d'état bien défini

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned}$$

où

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$f(0,0) = 0$ et $h(0,0) = 0$. Nous allons analyser la stabilité de ce système quand H_1 et H_2 sont passifs. Trois théorèmes seront énoncés concernant la stabilité du système bouclé (Khalil, 1996). Le premier concerne la stabilité au sens entrée-bornée sortie-bornée. Le deuxième théorème traite la stabilité asymptotique de l'origine du système non forcé quand les deux blocs H_1 et H_2 représentent des systèmes dynamiques. Enfin, le troisième théorème traite encore la stabilité asymptotique, mais pour un bloc H_2 sans mémoire.

Lemme 1 *(Slotine et Li, 1991) Soit le système à contre-réaction de la figure (6.2) avec $u_2 \equiv 0$. Supposons que H_1 et H_2 sont (strictement) passifs. Alors, le système bouclé est (strictement) passif. Aussi, le système résultant de deux systèmes passifs en parallèle (i.e. la somme) est passif. Par conséquent, toute combinaison de systèmes passifs en parallèle et/ou en contre-réaction est passive.*

Théorème 8 *(Khalil, 1996) Supposons que le système à contre-réaction de la figure (6.2) est bien défini. Soient H_1 et H_2 deux systèmes passifs. Alors, la relation entrée-sortie du système bouclé de (u_1, u_2) à (y_1, y_2) est $\mathcal{L}_2$ stable avec gain fini si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. *H_1 et H_2 sont strictement passifs à l'entrée,*
2. *H_1 et H_2 sont strictement passifs à la sortie, ou*
3. *un composant est passif alors que l'autre est simultanément strictement passif à l'entrée et à la sortie.*

Une interprétation de ce théorème est qu'un système à contre-réaction est $\mathcal{L}_2$ stable si le manque de dissipation d'énergie à la sortie (ou à l'entrée) d'un des systèmes est compensé dans l'autre par un excédent de dissipation. Ainsi, ce théorème est une reformulation du principe de conservation de l'énergie.

6.6.1 Stabilité interne et passivité

Les systèmes stables au sens entrée bornée sortie bornée peuvent aussi être stables au sens interne, i.e. au sens de Lyapunov, si quelques propriétés d'observabilité sont satisfaites.

Théorème 9 *(Khalil, 1996) Supposons que H_1 et H_2 sont passifs avec deux fonctions de stockage $V_1(x_1)$ et $V_2(x_2)$ définies positives. Alors, l'origine de*

$$\dot{x} = f(x, 0) \tag{6.14}$$

est (localement) stable. Si $V_1(x_1)$ et $V_2(x_2)$ sont radialement non bornés alors toutes les solutions de (6.14) sont bornées. L'origine est asymptotiquement stable dans l'un des cas suivants :

- *H_1 et H_2 sont strictement passifs à l'état,*
- *un bloc est strictement passif à l'entrée et à l'état et l'autre bloc est observable,*
- *un bloc est strictement passif à l'état et l'autre est strictement passif à la sortie et est observable,*
- *H_1 et H_2 sont observables et l'un des cas cités après le théorème 8 s'applique.*

De plus, si dans l'un des quatre cas ci-dessus V_1 et V_2 sont radialement non bornés, alors l'origine sera globalement asymptotiquement stable.

Théorème 10 *(Khalil, 1996) Soit le système bouclé de la figure (6.2) où H_1 est un système dynamique et H_2 un système sans mémoire. Supposons que H_1 est passif avec une fonction d'énergie définie positive et que H_2 est passif. Alors, l'origine de*

$$\dot{x} = f(t, x, 0) \tag{6.15}$$

est uniformément stable. Si la fonction d'énergie de H_1 est radialement non bornée alors toutes les solutions de (6.15) sont bornées. L'origine de (6.15) est uniformément asymptotiquement stable si H_1 est strictement passif par rapport à l'état. Si H_2 est invariant dans le temps alors l'origine est asymptotiquement stable dans l'un des deux cas suivants :

- *H_1 est strictement passif à l'état ;*
- *H_1 est strictement passif à la sortie et est observable (détectable) et H_2 est passif à l'entrée.*

De plus, si la fonction d'énergie de H_1 est radialement non bornée, alors l'origine sera globalement asymptotiquement stable.

6.7 Bézoutien et Résultant

Dans le chapitre suivant nous allons utiliser le Bézoutien et le Résultant pour chercher les racines communes entre le numérateur et le dénominateur de certaines FT. Pour cela, nous allons brièvement en rappeler les principales propriétés (Lancaster et Tismenetsky, 1985, Loos, 1982). Soit $p(s)$, $q(s)$ et $r(s)$ des polynômes en s tels que $p(s) = \sum_{i=0}^{n} p_i s^i$, $q(s) = \sum_{i=0}^{m} q_i s^i$ et $r(s) = \sum_{i=0}^{l} r_i s^i$ avec $p_n \neq 0$, $q_m \neq 0$ et $n \geq m$.

6.7.1 Bézoutien

Soit le polynôme en deux variables x et y

$$\frac{p(x)q(y) - q(x)p(y)}{x - y} =: \sum_{i,j=0}^{n-1} \gamma_{ij} x^i y^j$$

La matrice $Bez(p,q) = [\gamma_{ij}]_{i,j=0}^{n-1}$ est appellée la matrice Bézoutienne des deux polynômes p et q.

6.7.1.1 Propriétés

- $Bez(p,p) = 0$;
- $Bez(p,q) = -Bez(q,p)$;
- $Bez(p, \beta q + \gamma r) = \beta Bez(p,q) + \gamma Bez(p,r)$.

6.7.2 Résultant

La matrice Résultante ou de Sylvester de p et q est donnée par :

$$M = \begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} & \cdots & & p_0 & & \\ & p_n & p_{n-1} & \cdots & & p_0 & \\ & & & \cdots & \cdots & & \\ & & & p_n & p_{n-1} & \cdots & p_0 \\ q_m & q_{m-1} & \cdots & & q_0 & & \\ & q_m & q_{m-1} & \cdots & & q_0 & \\ & & & \cdots & \cdots & & \\ & & & q_m & q_{m-1} & \cdots & q_0 \end{bmatrix}$$

Le Résultant de p et q est :

$$Res(p,q) := det(M)$$

6.7.2.1 Propriétés

- $Res(p,q) = (-1)^{nm} Res(q,p)$;
- $Res(a\,p,q) = a^n Res(p,q)$, $a \in \mathcal{R}$;
- $Res(p,q) = p_n^m \prod_{i=1}^{n} q(\alpha_i) = (-1)^{nm} q_m^n \prod_{i=1}^{m} p(\beta_i) = p_n^m q_m^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j)$, où α_i et β_j sont respectivement les racines de $p(s)$ et $q(s)$;
- $Res(p, q_1 q_2) = Res(p, q_1) Res(p, q_2)$;
- $Res(p, p\,r + q) = p_n^{l-m} Res(p,q)$, où $l = deg(pq + r)$.

Les matrices Bézoutienne et Résultante seront utilisées pour trouver les racines communes entre deux polynômes.

Théorème 11 *Les polynômes p et q n'ont pas de racines en commun si et seulement si la matrice Bézoutienne ou la matrice Résultante associée à p et q est non singulière.*

Dans ce chapitre, nous avons revu les concepts de base de la passivité. Nous avons aussi montré la relation entre la passivité et la stabilité au sens entrée-sortie et la stabilité au sens de Lyapunov.

Chapitre 7

PASSIVITÉ DU SYSTÈME À UN BRAS FLEXIBLE : PLAN HORIZONTAL

Nous avons vu qu'un système passif peut être stabilisé dans un sens approprié par *tout* contrôleur strictement passif (Théorème 1 ou Théorème 8, Chapitre 6) aussi simple soit-il. Ceci permet en principe la conception de contrôleurs plus simples que ceux qui ne sont pas basés sur la méthode de la passivité (Wang et Vidyasagar, 1990). Pour un bras rigide, la fonction de transfert (FT) liant le couple d'entrée à la vitesse de l'articulation est, par exemple, passive (Gevarter, 1970). Pour un bras flexible, la même propriété est encore valide. Cependant, dans le cas d'un suivi de l'extrémité, ce ne sont pas les coordonnées (position et vitesse) de l'articulation qui nous intéressent mais plutôt celles de l'extrémité. Dans ce cas, la FT qui relie le couple moteur à la position de l'extrémité est à phase non minimale (Cannon et Schmitz, 1984), donc non passive (Slotine et Li, 1991). Ceci a mené plusieurs chercheurs à chercher d'autres sorties pour lesquelles la propriété de la passivité est vérifiée. Comme nous l'avons mentionné dans la revue de la littérature, Wang et Vidyasager (1990) ont proposé l'image miroir par rapport à l'axe neutre du bras de la position de l'extrémité comme

une telle sortie. Cette sortie correspond à la position du bras supposé rigide *moins* la déformation de l'extrémité du bras. Pota et Vidyasagar (1991) ont utilisé cette sortie pour montrer que, à la limite, pour un bras non uniforme, la FT entre le couple moteur et la dérivée de la sortie proposée est passive tant que le rapport de l'inertie du bras et de l'inertie de la base est suffisamment petit. Chodavarapu et Spong (1996) ont considéré l'angle de rotation virtuel qui correspond à l'angle de rotation du moteur *plus* une valeur pondérée de la pente à l'extrémité du bras. Ils ont montré que la FT correspondante est à phase minimale et que la dynamique des zéros est stable.

Dans ce qui suit, nous allons proposer une sortie non colocalisée pour laquelle la propriété de la passivité est vérifiée. Les cas déjà mentionnés dans la littérature seront alors des cas particuliers du cas présenté. Nous allons vérifier la passivité en nous inspirant des applications gardiennes (Saydy et al., 1990). Ces résultas ont été publiés dans (Saad et al., 2000-B; Saad et al., 2000-C; Saad et al., 2000-D) pour les cas des fonctions de forme (FF) d'une poutre encastrée-charge, des FF d'un bras tournant, et dans le cas où la charge est inconnue, respectivement.

Nous allons traiter d'abord dans ce chapitre le cas du bras flexible tournant dans le plan horizontal (Figure 3.1). Nous supposons que la vitesse de rotation du moteur est faible, ce qui permet de négliger les termes dus à l'allongement du bras selon son axe neutre. Nous traitons les deux cas suivants : le premier correspond au cas limite où les frottements sont négligeables et le deuxième cas correspond aux frottements non négligeables. Les paramètres de ce système sont donnés dans le tableau (7.1). Étant donné que le modèle dynamique du bras est linéaire, le système sera représenté par sa FT. Nous présentons en premier les FT qui correspondent aux différentes FF. Tous les détails mathématiques liés aux calculs de ces FT sont présentés en Annexe D.

TAB. 7.1 – Paramètres pour le contrôle

Paramètres	Valeurs
I_m	$0,01\ kg\,m^2$
b_m	$0,05\ Nms$
L	$1,1\ m$
ρ	$0,624\ Kg/m$
EI_z	$12,85\ Nm^2$
κ_e	$0,001$
M_c	$0,31\ kg$
I_c	$0,0037\ kg\,m^2$

7.1 Choix de la sortie : Le point passif le plus proche de l'extrémité

Le modèle linéaire du système à un bras flexible (Figure 3.1), qui sera développé dans les sections suivantes pour différentes FF, s'écrit généralement sous la forme suivante :

$$M\,\ddot{q} + B\,\dot{q} + K\,q = L\,\tau \tag{7.1}$$

En prenant comme vecteur d'état $x = [q^T \ \ \dot{q}^T]^T$, le modèle d'état s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}L \end{bmatrix} \tau =: A\,x + B\,u \tag{7.2}$$

La FT correspondante à une sortie donnée s'écrit sous la forme :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{\tau(s)} = C(sI - A)^{-1}B \tag{7.3}$$

où C est la matrice de sortie.

Pour un nombre fini de modes, la FT entre le couple moteur et la position de l'extrémité est d'ordre relatif 2. Par conséquent, on considère la dérivée d'une telle

position comme sortie pour avoir un degré relatif 1 (rappelons que le degré relatif d'une FT passive doit être 0 ou 1). Nous choisissons une sortie non colocalisée qui consiste en la vitesse de rotation du moteur *plus* une valeur pondérée de la dérivée de la déformation de l'extrémité, soit

$$y_\alpha(t) = \dot{\theta}(t) + \alpha\frac{1}{L}\dot{v}(L,t) = \dot{q}_r(t) + \alpha\frac{1}{L}\phi_L^T\dot{q}_f(t) = Cx \tag{7.4}$$

où α est un paramètre réel. Pour $\alpha = 0$, la sortie correspondante y_α est simplement la vitesse moteur résultant en une FT $G_0(s) := \frac{Y_0(s)}{\tau(s)}$ qui, on le sait, est passive. Pour $\alpha = 1$, y_α est la vitesse angulaire de l'extrémité donnant une FT $G_1(s) := \frac{Y_1(s)}{\tau(s)}$ qui est à phase non minimale, donc non passive. Finalement, pour $\alpha = -1$, y_α est la dérivée de la position de l'image de l'extrémité par rapport à son axe neutre qui est passive pour un bras et des paramètres particuliers (Wang et Vidyasagar, 1990). Évidemment, $G_\alpha(s) := \frac{Y_\alpha(s)}{\tau(s)}$ va rester passive pour de petites valeurs de α, i.e. pour des sorties très proches de la base. Étant donné que l'objectif est de contrôler l'extrémité du bras, la question qu'on se pose est la suivante : "De combien peut-on s'approcher de l'extrémité tout en préservant la passivité ?"

La FT (7.3) dépend, pour une sortie donnée, des FF par l'entremise des matrices M, B et C. Dans le chapitre 5 nous avons comparé des modèles basés sur différentes FF et nous avons conclu que les FF d'une poutre tournante (i.e. l'inertie de la base est finie), les FF d'une poutre encastrée-charge et les FF correspondantes aux splines cubiques, avec les courbures aux nœuds comme coordonnées, sont les meilleures pour approximer les modes d'un bras flexible. Nous allons donc nous limiter à l'analyse des modèles basés sur ces FF. Cependant, les résultats correspondant aux splines cubiques, de nature numérique, seront présentés en Annexe (D).

7.2 Passivité du système sans Frottements

Nous traitons tout d'abord le cas limite où les frottements sont négligeables. Dans ce cas, pour qu'une FT soit passive, il suffit qu'elle soit réactive (Théorème 6,

Chapitre 6).

7.2.1 FT avec les fonctions propres d'une poutre pivotante

En tenant compte des hypothèses simplificatrices précédentes, la dynamique linéaire est déduite de celle non linéaire (Éq. 3.26) et est donnée par :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_t & \beta^T \\ \beta & M_{ff} \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix}}_{\ddot{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} q_r \\ q_f \end{bmatrix}}_{q} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{L} \tau \tag{7.5}$$

soit encore sous la forme :

$$M\,\ddot{q} + K\,q = L\,\tau \tag{7.6}$$

où les matrices de masse, M, et de rigidité, K_{ff}, sont positives définies.

En utilisant les relations (4.14)-(4.16), les entrées des matrices M et K_{ff} sont données par :

$$\begin{aligned}
\beta_i &= \int_0^L \rho x \phi_i \, dx + M_c(L + r_c)\phi_{i,L} + (I_c + M_c r_c(L + r_c))\phi'_{i,L} = \frac{I_t \, EI_z}{I_m \, \omega_i^2} \phi''_{i,0} \\
M_{ff}(i,j) &= \int_0^L \rho \, \phi_i \, \phi_j \, dx + M_c \phi_{i,L} \, \phi_{j,L} + (I_c + M_c r_c^2)\phi'_{i,L} \, \phi'_{j,L} + \\
&\quad M_c r_c(\phi_{i,L} \, \phi'_{j,L} + \phi'_{i,L} \, \phi_{j,L}) = \delta_{ij} + \frac{\beta_i \, \beta_j}{I_t} \\
K_{ff}(i,j) &= \int_0^L EI_z \phi''_i \, \phi''_j \, dx = \omega_i^2 \, \delta_{ij}
\end{aligned}$$

Pour ν modes flexibles, l'équation (7.5) s'écrira sous la forme :

$$\begin{bmatrix} I_t & \beta_1 & \dots & \beta_\nu \\ \beta_1 & 1 + \beta_1^2/I_t & \dots & \beta_1 \, \beta_\nu / I_t \\ \vdots & & & \\ \beta_\nu & \beta_\nu \, \beta_1 / I_t & \dots & 1 + \beta_\nu^2 / I_t \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \omega_\nu^2 \end{bmatrix} q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tau \tag{7.7}$$

Proposition 3 *Les fonctions de transfert correspondantes à la coordonnée rigide, q_r, et à la ième coordonnée flexible sont respectivement données par :*

$$F_0(s) = \frac{q_r(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{I_t} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{I_t^2} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\beta_i^2}{s^2 + \omega_i^2} \tag{7.8}$$

$$F_i(s) = \frac{q_{f_i}(s)}{\tau(s)} = -\frac{1}{I_t}\frac{\beta_i}{s^2+\omega_i^2} \tag{7.9}$$

Démonstration : Voir Annexe D.2.1. ▽

Les FT correspondantes à la dérivée de la coordonnée rigide q_r et à la dérivée de la i*ème* coordonnée flexible sont calculées à partir de (7.8)-(7.9), soit

$$G_0(s) := \frac{\dot{q}_r(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{I_t}\frac{1}{s} + \frac{1}{I_t^2}\sum_{i=1}^{\nu}\frac{\beta_i^2\, s}{s^2+\omega_i^2} \tag{7.10}$$

$$G_i(s) := \frac{\dot{q}_{f_i}(s)}{\tau(s)} = -\frac{1}{I_t}\frac{\beta_i\, s}{s^2+\omega_i^2} \tag{7.11}$$

Pour une sortie quelconque paramétrisée par α, la FT correspondante à y_α est donnée par :

$$\begin{aligned} G_\alpha(s) &:= \frac{y_\alpha(s)}{\tau(s)} = G_0(s) + \frac{\alpha}{L}\sum_{i=1}^{\nu}\phi_{i,L}\, G_i(s) \\ &= \frac{1}{I_t}\frac{1}{s} + \frac{1}{I_t}\sum_{i=1}^{\nu}\left(\frac{\beta_i^2}{I_t} - \alpha\frac{\beta_i\,\phi_{i,L}}{L}\right)\frac{s}{s^2+\omega_i^2} \end{aligned} \tag{7.12}$$

où ν est le nombre de modes retenus dans la discrétisation de la déformation.

Nous allons tout d'abord montrer que la famille de FT $G_\alpha(s)$ est nominalement passive pour une valeur de α donnée, soit pour $\alpha = 0$. Notons que pour $\alpha = 0$, le couple d'entrée τ et la sortie y_0 sont colocalisés.

Proposition 4 *La fonction de transfert $G_0(s)$ est passive.*

Démonstration : Les fonctions $\frac{1}{s}$ et $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ sont réactives donc passives pour tout ω. La FT $G_0(s)$ étant la somme pondérée à coefficients positifs (i.e. $\frac{1}{I_t}$ et $\frac{\beta_i^2}{I_t^2}$) de fonctions passives, est donc passive (Lemme 1, Chapitre 6). ▽

La famille $G_\alpha(s)$ est donc nominalement réactive, soit encore passive, pour la valeur de $\alpha = 0$. Elle reste réactive tant que ses pôles et ses zéros sont entrelacés. $G_\alpha(s)$ cesse d'être réactive quand un de ses zéros devient égale à un de ses pôles. Nous allons utiliser cette caractéristique pour chercher la valeur limite de α pour laquelle $G_\alpha(s)$ reste passive. Notons que les pôles de $G_\alpha(s)$ sont facilement identifiables ($s = 0$ et $s = \pm j\omega$) pour les FF considérées.

Proposition 5 : *La famille de FT nominalement réactive*

$$G_\alpha(s) := \left\{ \frac{y_\alpha(s)}{\tau(s)} : \alpha > 0 \right\}$$

demeure réactive pour tout $\alpha < \alpha_c$ *où*

$$\alpha_c = \min\left(\frac{L\,\beta_i}{I_t\,\phi_{i,L}}\right), \quad i = 1, \ldots, \nu \tag{7.13}$$

Par ailleurs, elle cesse de l'être précisément pour $\alpha = \alpha_c$.

Démonstration : $G_\alpha(s)$ s'écrit sous la forme :

$$G_\alpha(s) = \frac{N_\alpha(s)}{D_0(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{\nu}(s^2+\omega_i^2) + s^2 \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu}(s^2+\omega_j^2)}{I_t s \prod_{i=1}^{\nu}(s^2+\omega_i^2)} \tag{7.14}$$

où

$$\gamma_i = \frac{\beta_i^2}{I_t} - \alpha\frac{\beta_i\,\phi_{i,L}}{L}$$

La FT $G_0(s) = \frac{N_0(s)}{D_0(s)}$ est réactive. Il s'en suit que ses zéros et ses pôles satisfont la propriété d'entrelacement sur l'axe imaginaire. Lorsque α varie à partir de zéro, les zéros de $G_\alpha(s)$ se mettent à se déplacer sur l'axe imaginaire. La propriété d'entrelacement (et donc celle de réactivité) se perd lorsque l'un des zéros du numérateur de $G_\alpha(s)$ coïncide avec un de ses pôles. Ceci se produit lorsque

$$N_\alpha|_{s^2=-\omega_k^2} = 0$$

pour une valeur de $1 \leq k \leq \nu$. À partir de l'équation (7.14), on obtient que :

$$N_\alpha|_{s^2=-\omega_k^2} = -\omega_k^2\,\gamma_k \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{\nu}(-\omega_k^2+\omega_j^2) = 0 \Longleftrightarrow \gamma_k = 0$$

$$\Longleftrightarrow \alpha = \alpha_k := \frac{L\beta_k}{I_t\phi_{k,L}}$$

Noter que $N_\alpha(0) = \prod_{i=1}^{\nu}\omega_i^2 \neq 0$, on n'a donc pas à considérer le pôle à l'origine. Il s'en suit que :

$$\alpha_c = \min_{1\leq i\leq \nu} \alpha_i$$

∇

Exemple : Pour les valeurs numériques données dans le tableau (7.1) et pour un nombre de modes $\nu = 3$, la valeur critique de α est donnée par

$$\alpha_c = \alpha_1 = \frac{L\,\beta_1}{I_t\,\phi_{1,L}} = 0,880$$

7.2.2 FT avec les fonctions propres d'une poutre encastrée-charge

Dans ce cas, les entrées des matrices M et K_{ff} sont données dans l'Annexe (B) par (B.53)-(B.55), soit :

$$\begin{aligned}
\beta_i &= \int_0^L \rho x \phi_i\,dx + M_c(L+r_c)\phi_{i,L} + (I_c + M_c\,r_c(L+r_c))\phi'_{i,L} = \frac{EI_z}{\omega_i^2}\phi''_{i,0} \\
M_{ff}(i,j) &= \int_0^L \rho\,\phi_i\,\phi_j\,dx + M_c\phi_{i,L}\,\phi_{j,L} + (I_c + M_c\,r_c^2)\phi'_{i,L}\,\phi'_{j,L} + \\
&\quad M_c\,r_c(\phi_{i,L}\,\phi'_{j,L} + \phi'_{i,L}\,\phi_{j,L}) = \delta_{ij} \\
K_{ff}(i,j) &= \int_0^L EI_z\phi''_i\,\phi''_j\,dx = \omega_i^2\,\delta_{ij}
\end{aligned}$$

L'équation dynamique devient :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_t & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_\nu \\ \beta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \beta_\nu & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{M} \ddot{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_\nu^2 \end{bmatrix}}_{K} q = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{L} \tau \qquad (7.15)$$

Proposition 6 *Les FT correspondantes aux dérivées des coordonnées rigide et de la ième coordonnée flexible sont données par*

$$G_0(s) = \frac{sq_r(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{I_t\,s\,d(s^2)} \prod_{i=1}^{\nu}(s^2 + \omega_i^2) \qquad (7.16)$$

$$G_i(s) = \frac{sq_{f_i}(s)}{\tau(s)} = -\beta_i \frac{s}{I_t\,d(s^2)} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu}(s^2 + \omega_j^2) \qquad (7.17)$$

où $d(s)$ est donné par

$$d(s) = \prod_{i=1}^{\nu}(s+\omega_i^2) - s\sum_{i=1}^{\nu}\frac{\beta_i^2}{I_t}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu}(s+\omega_j^2) \tag{7.18}$$

Démonstration : Voir Annexe D.2.2. ▽

Par exemple, pour trois modes flexibles ($\nu = 3$), la FT qui correspond à la coordonnée rigide est

$$G_0(s) = \frac{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_3^2)}{I_t s\, d(s^2)}$$

et les FT correspondant au premier, deuxième et au troisième mode flexible sont données par :

$$\begin{aligned} G_1(s) &= -\beta_1\frac{s(s^2+\omega_2^2)(s^2+\omega_3^2)}{I_t d(s^2)} \\ G_2(s) &= -\beta_2\frac{s(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_3^2)}{I_t d(s^2)} \\ G_3(s) &= -\beta_3\frac{s(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)}{I_t d(s^2)} \end{aligned}$$

où $d(s)$ est donné par

$$\begin{aligned} d(s) &= (s+\omega_1^2)(s+\omega_2^2)(s+\omega_3^2) - \\ &\quad s\left(\tfrac{\beta_1^2}{I_t}(s+\omega_2^2)(s+\omega_3^2) + \tfrac{\beta_2^2}{I_t}(s+\omega_1^2)(s+\omega_3^2) + \tfrac{\beta_3^2}{I_t}(s+\omega_1^2)(s+\omega_2^2)\right) \end{aligned}$$

La FT correspondante à la sortie y_α est donnée par

$$\begin{aligned} G_\alpha(s) &:= \frac{y_\alpha(s)}{\tau(s)} = G_0(s) + \frac{\alpha}{L}\sum_{i=1}^{\nu}\phi_{i,L}\,G_i(s) \\ &= \frac{1}{I_t\, s d(s^2)}\left(\prod_{i=1}^{\nu}(s^2+\omega_i^2) - \alpha\, s^2\sum_{i=1}^{\nu}\frac{\beta_i\phi_{i,L}}{L}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu}(s^2+\omega_j^2)\right) \end{aligned} \tag{7.19}$$

Ici aussi, la famille G_α est nominalement passive pour une valeur donnée de α.

Proposition 7 *La fonction de transfert $G_0(s)$ est passive.*

Démonstration : $G_0(s)$ est passive si son inverse $\frac{1}{G_0(s)}$ est passive. Soit :

$$F(s) := \frac{d(s)}{\prod_{i=1}^{\nu}(s+\omega_i^2)}$$

Alors $\frac{1}{G_0(s)} = I_t\, s\, F(s^2)$. La décomposition en fractions simples de $F(s)$ donne

$$F(s) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{k_i}{s + \omega_i^2}$$

où

$$k_i = \lim_{s \to -\omega_i^2} (s + \omega_i^2) F(s) = \frac{\beta_i^2}{I_t} \omega_i^2$$

Donc, $\frac{1}{G_0(s)}$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{G_0(s)} = I_t\, s F(s^2) = \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i^2 \omega_i^2 \frac{s}{s^2 + \omega_i^2}$$

Alors, $\frac{1}{G_0(s)}$ est la somme pondérée à coefficients positifs de FT réactives, donc passives, est elle aussi passive. D'où la passivité de $G_0(s)$. $\triangledown$

D'après la proposition précédente, la famille $G_\alpha(s)$ est nominalement passive pour la valeur de $\alpha = 0$. Nous allons suivre la même procédure que précédemment pour trouver la valeur critique de α pour laquelle G_α cesse d'être passive. Ceci arrive quand le numérateur et le dénominateur ont une racine en commun. Cependant, dans le cas présent, les pôles ne sont pas directement identifiables comme dans le cas précédent. Nous allons donc utiliser le Bézoutien et ses propriétés (Section 6.7) pour chercher les racines communes au numérateur et au dénominateur de la FT $G_\alpha(s)$.

Proposition 8 *La famille de FT nominalement passive et paramétrisée par* α

$$G_\alpha(s) := \left\{ \frac{y_\alpha(s)}{\tau(s)} : \alpha > 0 \right\}$$

demeure passive pour tout $\alpha < \alpha_c$, *où*

$$\alpha_c = \min\left(\frac{L\,\beta_i}{I_t\,\phi_{i,L}}\right), \quad i = 1, \ldots, \nu \tag{7.20}$$

Par ailleurs, elle cesse de l'être précisément pour $\alpha = \alpha_c$.

Démonstration : Pour chercher la valeur critique de α, nous transformons le problème du domaine complexe au domaine réel. Nous substituons s^2 par s dans la FT G_α. Soit la FT :

$$F_\alpha(s) := \frac{\prod_{i=1}^{\nu}(s + \omega_i^2) - \alpha \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\beta_i \phi_{i,L}}{L} s \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} (s + \omega_j^2)}{\prod_{i=1}^{\nu}(s + \omega_i^2) - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\beta_i^2}{I_t} s \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} (s + \omega_j^2)} = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{7.21}$$

Alors, $G_\alpha(s) = \frac{1}{I_t s} F_\alpha(s^2)$. Comme dans le cas précédent, G_α est nominalement réactive pour $\alpha = 0$. Les pôles et les zéros de $G_0(s)$ sont entrelacés sur l'axe imaginaire. Les pôles et les zéros de la FT $F_0(s)$ sont donc entrelacés sur l'axe réel. Quand α se met à varier à partir de zéro, les zéros de F_α se mettent à bouger sur l'axe réel. La propriété d'entrelacement des pôles et des zéros est perdu quand un zéro de $F_0(s)$ est égal à un des ses pôles.

Les deux polynômes $N(s)$ et $D(s)$ ont une racine commune si leur Bézoutien est singulier. Nous utilisons la propriété de bilinéarité du Bézoutien pour chercher la valeur de α pour laquelle N et D ont une racine en commun. Soit :

$$n_0(s) = \prod_{i=1}^{\nu}(s+\omega_i^2) \quad et \quad n_i(s) = s\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu}(s+\omega_j^2) = n_0(s)|_{\omega_i=0}$$

Le Bézoutien des deux polynômes $N(s)$ et $D(s)$ s'écrit alors :

$$Bez(N,D) = Bez(n_0 - \sum_{i=1}^{\nu}\alpha\frac{\beta_i\phi_{i,L}}{L}n_i,\ n_0 - \sum_{i=1}^{\nu}\frac{\beta_i^2}{I_t}n_i)$$

Le Bézoutien étant bilinéaire, nous aurons

$$\begin{aligned} Bez(N,D) &= Bez(n_0,n_0) - \sum_{i=1}^{\nu}\alpha\frac{\beta_i\phi_{i,L}}{L}Bez(n_i,n_0) - \\ &\quad \sum_{i=1}^{\nu}\frac{\beta_i^2}{I_t}\left(Bez(n_0,n_i) - \sum_{i=1}^{\nu}\alpha\frac{\beta_i\phi_{i,L}}{L}Bez(n_i,n_i)\right) \end{aligned}$$

Nous savons que $Bez(n,n) = 0$ et que $Bez(p,q) = -Bez(q,p)$. En éliminant le premier et le dernier termes et en regroupant les deux autres termes, le Bézoutien devient :

$$Bez(N,D) = Bez\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{\nu}(\frac{\beta_i^2}{I_t} - \alpha\frac{\beta_i\phi_{i,L}}{L})n_i}_{n(s)}, n_0\right)$$

Le Bézoutien de N et D est singulier si $n(s)$ et $n_0(s)$ ont une racine en commun. Les racines de $n_0(s)$ sont facilement identifiables :

$$n_0(s) = \prod_{i=1}^{\nu}(s+\omega_i^2) = 0 \Longrightarrow s = -\omega_i^2, \quad i = 1,\cdots,\nu$$

Le Bézoutien est alors singulier si

$$n(-\omega_i^2) = 0 \quad pour\ i = 1, \cdots, \nu$$

Notons que :

$$n(s) = \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i n_i(s) = \gamma_1 s \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{\nu} (s+\omega_j^2) + \gamma_2 s \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{\nu} (s+\omega_j^2) + \cdots + \gamma_\nu s \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq \nu}}^{\nu} (s+\omega_j^2)$$

Alors,

$$n(-\omega_i^2) = \gamma_i \, (-\omega_i^2) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\nu} (-\omega_i^2 + \omega_j^2)$$

Les deux polynômes N et D ont une racine en commun si et seulement si ($\omega_i \neq 0$ et $\omega_i \neq \omega_j,\ \forall i, \forall j$),

$$\gamma_i = \frac{\beta_i^2}{I_t} - \alpha \frac{\beta_i \phi_{i,L}}{L} = 0, \quad i = 1, \cdots, \nu$$

D'où

$$\alpha_i = \frac{L\beta_i}{I_t \phi_{i,L}}, \quad i = 1, \cdots, \nu$$

La valeur critique de α est donc donnée par :

$$\alpha_c = \min_{1 \leq i \leq \nu} \left(\frac{L\beta_i}{I_t \phi_{i,L}}\right) \qquad \nabla$$

Notons que l'expression (7.20) est identique à celle de (7.13). Cependant les valeurs numériques seront différentes car les FF sont différentes.

Exemple : Pour les valeurs numériques données dans le tableau (7.1) et pour un nombre de modes $\nu = 3$, la valeur critique de α est donnée par

$$\alpha_c = \alpha_1 = \frac{L\,\beta_1}{I_t\,\phi_{1,L}} = 0,918$$

7.3 Passivité du système avec Frottements

Nous tenons compte dans cette section des frottements du moteur (b_m) et du bras ($\zeta_i, i = 1, \cdots, \nu$ sont les facteurs d'amortissement associé à chaque mode). Dans

ce cas, les pôles et les zéros de la FT correspondante n'appartiennent plus à l'axe imaginaire. Pour valider sa passivité, nous vérifions si la FT est réelle positive. Dans le cas des FF d'une poutre pivotante, nous procédons avec un test analytique de la passivité. Cependant, dans le cas des FF d'une poutre encastrée, nous faisons cela numériquement.

7.3.1 Fonctions de forme d'une poutre pivotante

Nous déduisons les FT avec les FF d'une poutre pivotante à partir des FT (7.10) et (7.11), soit :

$$G_0(s) := \frac{\dot{q}_r(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{I_t}\frac{1}{s+b_m} + \frac{1}{I_t^2}\sum_{i=1}^{\nu}\frac{\beta_i^2\, s}{s^2+2\zeta_i\omega_i s+\omega_i^2} \tag{7.22}$$

$$G_i(s) := \frac{\dot{q}_{f_i}(s)}{\tau(s)} = -\frac{1}{I_t}\frac{\beta_i\, s}{s^2+2\zeta_i\omega_i s+\omega_i^2} \tag{7.23}$$

Nous étudions tout d'abord la FT $G_0(s)$ puis nous traitons le cas général de la famille G_α.

Les pôles et les zéros de $G_0(s)$ ne sont plus confinés à l'axe imaginaire. Nous vérifions la stricte passivité de $G_0(s)$ en vérifions si elle est strictement réelle positive. Une condition nécessaire est la stabilité stricte de cette FT.

Proposition 9 *La fonction de transfert $G_0(s)$ est strictement passive.*

Démonstration : Il est évident que $G_0(s)$ est strictement stable, i.e. que tous ses pôles sont à parties réelles négatives. $G_0(s)$ est la somme pondérée à coefficients strictement positifs de FT strictement passives. Elle est donc strictement passive. $\triangledown$

La FT correspondante à y_α est alors donnée par :

$$\begin{aligned} G_\alpha(s) &= G_0(s) + \alpha\sum_{i=1}^{\nu}\frac{\phi_{i,L}}{L}G_i(s) \\ &= \frac{1}{I_t}\frac{1}{s+b_m} + \frac{1}{I_t}\sum_{i=1}^{\nu}\left(\underbrace{\frac{\beta_i^2}{I_t} - \alpha\frac{\beta_i\phi_{i,L}}{L}}_{\gamma_i}\right)\frac{s}{s^2+2\zeta_i\omega_i s+\omega_i^2} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{\nu}(s^2+2\zeta_i\omega_i s+\omega_i^2) + \sum_{i=1}^{\nu}\gamma_i s(s+b_m)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu}(s^2+2\zeta_j\omega_j s+\omega_j^2)}{I_t(s+b_m)\prod_{i=1}^{\nu}(s^2+2\zeta_i\omega_i s+\omega_i^2)} \end{aligned}$$

L'objectif est encore de trouver la valeur critique α_c de α pour laquelle cette famille demeure (strictement) passive $\forall \alpha < \alpha_c$.

Proposition 10 *Une condition suffisante pour que la fonction de transfert $G_\alpha(s)$ soit strictement passive est $\alpha < \alpha_c = \min(\frac{L\beta_i}{I_t \phi_{i,L}})$, $i = 1, \cdots, \nu$*

Démonstration : Clairement, $G_\alpha(s)$ est strictement stable. $G_\alpha(s)$ est la somme pondérée à coefficients réels des FT strictement passives : $\frac{1}{s+b_m}$ et $\frac{s}{s^2+2\zeta_i\omega_i s+\omega_i^2}$. Pour qu'elle soit strictement passive, il suffit que ces coefficients soeint strictement positifs, i.e.

$$\gamma_i = \frac{\beta_i^2}{I_t} - \alpha\frac{\beta_i \phi_{i,L}}{L} > 0, \quad i = 1, \cdots, \nu$$

Il suffit donc que

$$\alpha < \alpha_i = \frac{L\beta_i}{I_t \phi_{i,L}}, \quad i = 1, \cdots, \nu$$

Soit

$$\alpha_c = \min_{1 \leq i \leq \nu}(\alpha_i)$$

Alors, la FT $G_\alpha(s)$ est strictement passif si $\alpha < \alpha_c$. ▽

C'est une condition suffisante car il peut y avoir des valeurs de $\alpha > \alpha_c$ pour lesquelles la FT est passive.

7.3.2 Cas des FF d'une poutre encastrée-charge

Dans ce cas, il nous a été difficile de trouver une forme algébrique analytique compacte pour les FT correspondante à l'angle moteur et aux coordonnées flexibles, et donc été difficile d'appliquer les mêmes méthodes analytiques présentées dans les sections précédentes. Cependant, nous pouvons toujours vérifier la passivité en utilisant les définitions et les propriétés présentées dans le chapitre précédent, e.g. la positivité de la partie réelle. Nous allons donc procéder avec un test numérique de la passivité pour différent nombre de modes. Nous vérifions aussi la stabilité (stricte) de la FT.

La dynamique est donnée par l'équation (7.1), où M et K sont données dans l'équation (7.15) et $B = diag([b_m, b_1, \cdots, b_\nu])$. Pour la sortie donnée par l'équation

(7.4) et paramétrisé par α, la FT correspondante est donnée par (7.3). À titre d'exemple, pour un seul mode, nous avons :

$$G_\alpha(s) = \frac{(1 - \alpha\,\phi_{1,L}/L\,\beta_1)\,s^2 + b_1\,s + \omega_1^2}{(I_t - \beta_1^2)\,s^3 + (I_t\,b_1 + b_m)\,s^2 + (I_t\,\omega_1^2 + b_m\,b_1)\,s + \omega_1^2 b_m}$$

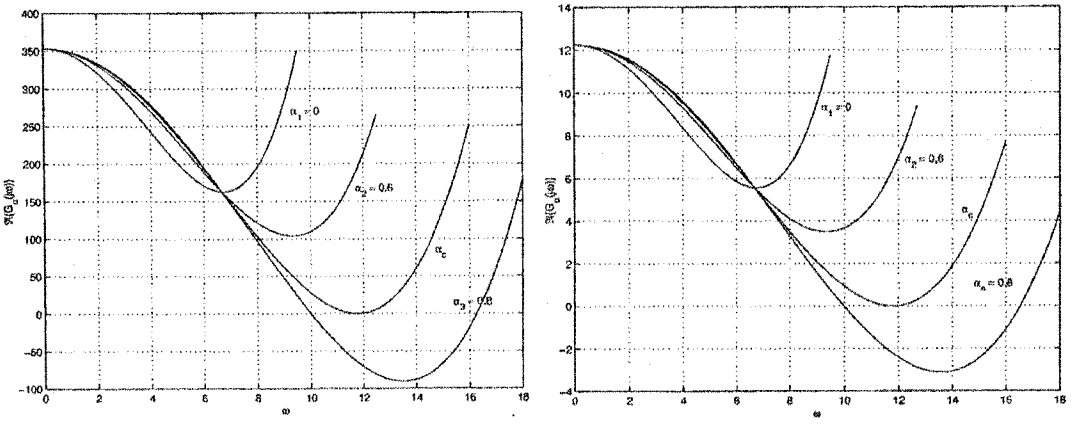
Pour $\alpha = 0$, l'entrée, i.e. le couple moteur, et la sortie, i.e. la vitesse moteur sont colocalisées. La FT est strictement passive avec une matrice de frottement strictement positive définie (Ortega et al, 1998). La famille $G_\alpha(s)$, nominalement passive pour $\alpha = 0$, est passive si elle est positive réelle, i.e.

$$\Re\{G_\alpha(j\omega)\} > 0$$

Dans la suite, nous allons tracer la partie réelle de G_α pour différent nombres de modes. La figure (7.1-a) montre les variations de la partie réelle de $G_\alpha(s)$ pour le bras en considération pour un mode. Cette figure montre que la FT est passive pour $\alpha \leq \alpha_c = 0,74964$. Les figures (7.1-b) et (7.1-c) montrent les variations de la partie réelle des FT correspondantes à un nombre de modes égale à deux et trois, respectivement. Nous pouvons conclure que $G_\alpha(s)$ est PR, donc passive, pour $\alpha \leq \alpha_c = 0,748275$ et pour $\alpha \leq \alpha_c = 0,748297$, respectivement.

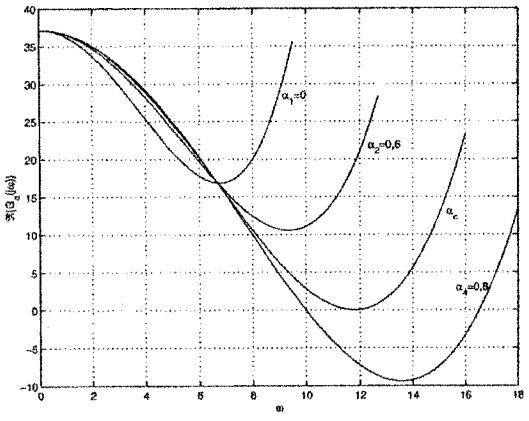
7.4 Effet de la variation de paramètres sur la passivité

Nous avons supposé jusqu'à présent que tous les paramètres du système sont connus. Cependant, certains paramètres peuvent varier ou sont incertains, tels que la masse de la charge et son inertie, l'inertie du moteur et son coefficient de frottement visqueux, etc. La valeur critique α_c dépend de tous ces paramètres. Elle peut changer si certains de ces paramètres varient ou sont inconnus. Pour cela, nous étudions, entre autre, l'effet de la variation de la masse de la charge M_c et de l'inertie du moteur I_m sur la valeur de α_c.



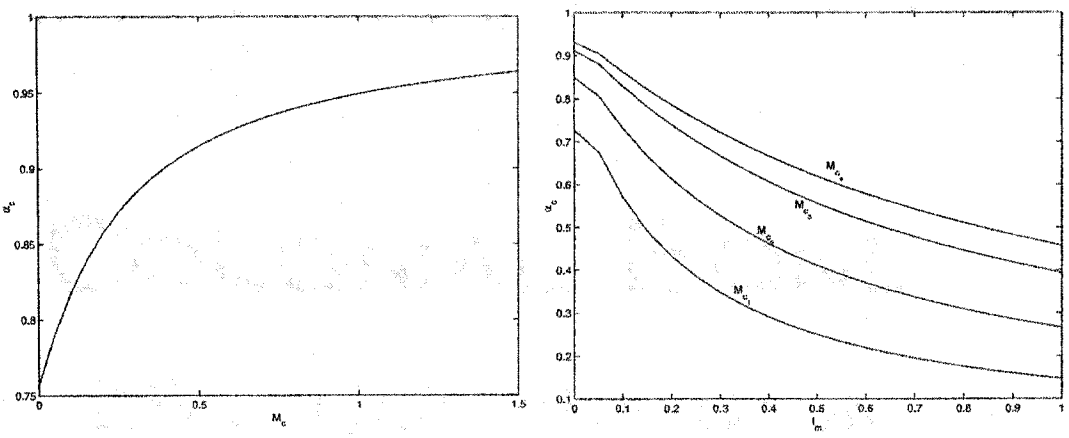
a) $\nu = 1$.

b) $\nu = 2$.



c) $\nu = 3$.

FIG. 7.1 – Partie réelle de $G_\alpha(j\omega)$ pour $\nu = 1$, 2 et 3



a) Variation de la masse M_c. b) Variation de l'inertie du moteur I_m.

FIG. 7.2 – Effet de la variation de paramètres

Supposons que M_c et I_c sont inconnues mais fixes. La masse de la charge peut varier dans l'intervalle $[\underline{M}_c,\ \overline{M}_c]$ (par exemple, de zéro (bras sans charge) jusqu'à deux fois la masse du bras). Quand un paramètre varie, la FT peut cesser d'être passive. Pour étudier l'effet de la variation de la masse de la charge nous traçons la variation de α_c pour différentes valeurs de M_c. La figure (7.2-a), obtenue pour trois modes flexibles, montre que $0.757 < \alpha_c \leq 0.97$ pour toutes les valeurs admissibles de M_c. Alors, la FT $G_\alpha(s)$ est passive pour $\alpha_c = 0.757$ pour toute $M_c \geq 0$. Cette figure montre encore qu'à la limite, quand la masse devient très grande, α_c tend vers 1. Alors la FT qui correspond à l'extrémité tend à être passive. Nous traçons ensuite la variation de α_c en fonction de I_m pour différentes valeurs de M_c, ou $M_{c_1} < \cdots < M_{c_4}$ (Figure 7.2(b)). Cette figure montre que pour de faibles valeurs de l'inertie, α_c est grande.

7.5 Simulation

Nous présentons dans cette section les résultats de simulation d'un bras flexible avec un contrôleur basé sur la passivité. L'objectif de contrôle est de déplacer

l'extrémité de 0 à $\pi/2$. Nous supposons que le modèle du bras a trois modes flexibles avec les FF d'une poutre encastrée-charge et que les frottements sont négligeables. Un contrôleur proportionnel K strictement passif est utilisé avec la vitesse angulaire du point intermédiaire comme sortie. Ce contrôleur (Figure 7.3) est équivalent à un contrôleur dérivé, $K\,s$, pour la position angulaire comme sortie. Un pôle avec une faible constante de temps est ajouté pour des considérations pratiques (Wang et Vidyasagar 1990). Cependant, la FT résultante $(K/(1+\tau s)$ est toujours strictement passive)

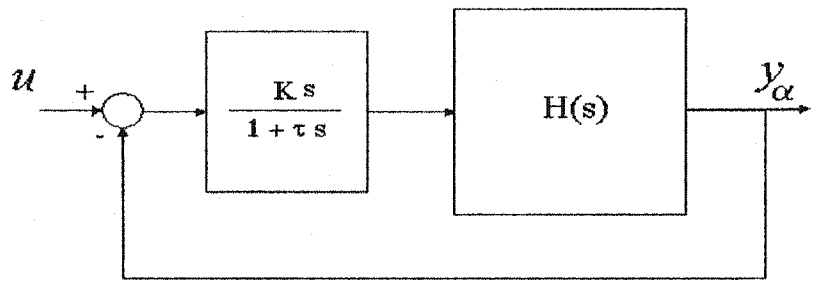
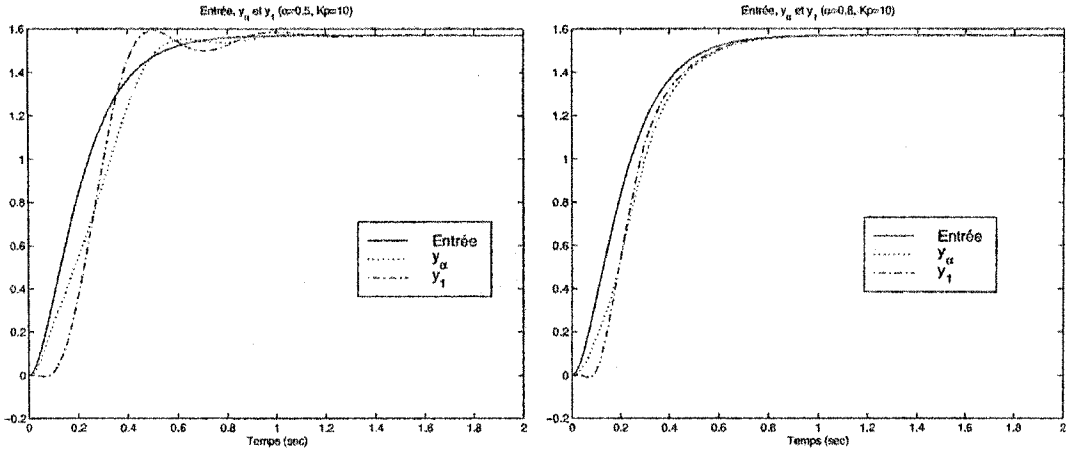
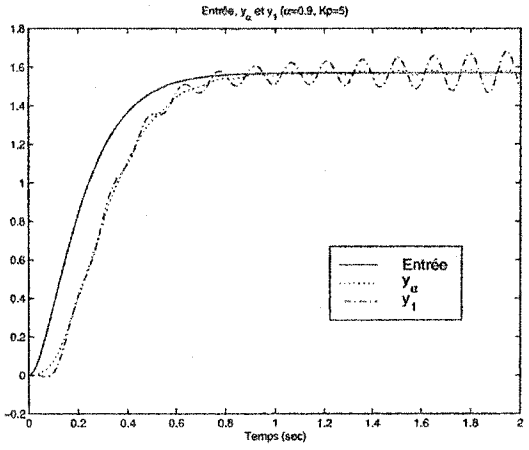


FIG. 7.3 – contrôleur passif

Les résultas présentés dans la figure (7.4) sont obtenus pour $K = 10$, $\tau = 0,02s$, $\alpha = 0,5$, $\alpha = 0,8$ et $\alpha = 0.9$, respectivement. La référence, la sortie y_α ainsi que l'extrémité y_1 sont présentées dans chaque figure. Pour $\alpha = 0,5$ et $\alpha = 0,8$ le système en boucle fermée est passif. Nous pouvons remarquer que plus α est proche de sa valeur critique ($\alpha_c = 0,88$), mieux est le suivi de l'extrémité. Pour améliorer davantage les performances, il faut soit augmenter la valeur du gain K, soit choisir une autre structure de contrôleur passif. Par contre, pour $\alpha = 0,9 > \alpha_c$, le système peut devenir instable pour certaines valeurs de K car le procédé est à déphasage non minimal. Il faut donc réduire K. Les performances seront réduites en conséquence.



a) $\alpha = 0,5$ et $K = 10$ b) $\alpha = 0,8$ et $K = 10$



c) $\alpha = 0,9$ et $K = 5$

FIG. 7.4 – Contrôleur passif : Sortie point intermédiaire

7.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la théorie de la passivité au modèle linéaire du bras flexible tournant dans le plan horizontal. Nous avons tout d'abord proposé une sortie non colocalisée paramétrisé par un paramètre α. Cette sortie est une combinaison linéaire de l'angle moteur plus une pondération de l'angle de l'extrémité. Nous avons cherché la valeur critique α_c de α la plus proche de un pour laquelle la FT correspondante à cette sortie est passive. Plusieurs cas ont été étudié, notament le

cas du système sans et avec frottement pour les FF des poutres pivotante et encastrée avec charge. Dans certains de ces cas, nous avons trouvé une expression analytique de la valeur critique α_c, soit $\alpha_c = \min_{1 \leq i \leq \nu}(\frac{L\beta_i}{I_t \phi_{i,L}})$.

Chapitre 8

PASSIVITÉ DU SYSTÈME À UN BRAS FLEXIBLE : PLAN VERTICAL

Dans le chapitre précédent, nous avons analysé la passivité du système à un bras flexible tournant dans le plan horizontal. Le modèle étant linéaire, nous avons utilisé la positivité de la fonction de transfert. Nous traitons dans ce chapitre le cas du même système mais tournant dans le plan vertical. De ce fait, le modèle du système est non linéaire comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre de la modélisation. Nous supposons aussi que les forces de Coriolis sont négligeables.

Le modèle étant non linéaire, nous utilisons la représentation par le modèle d'état et nous procédons avec les théorèmes du chapitre (6) basés sur cette représentation. Nous présentons dans un premier temps le modèle non linéaire et nous définissons un changement de variables pour introduire la nouvelle sortie, soit l'angle d'un point sur le bras paramétrisé par une variable α. Ensuite nous appliquons la linéarisation, au sens entrée-sortie, au modèle obtenu. Cette linéarisation permet de faciliter l'analyse par la passivité du modèle obtenu. C'est en sorte une façon de rendre le modèle passif par linéarisation (Byrnes et al., 1991). Rappelons que l'application entre

l'entrée et la sortie est passive s'il existe une fonction de stockage telle que certaines conditions (Définition 1, inégalité 6.9) sont satisfaites. La passivité assure la stabilité au sens entrée bornée/sortie bornée. Pour assurer une stabilité asymptotique le système doit posséder une caractéristique supplémentaire, soit la détectabilité, chose que nous allons démontrer. Comme il a été mentionné dans la littérature, récemment, Moallem et al. (2001) ont considéré la linéarisation au sens entrée-sortie d'un système à un bras rigide et un bras flexible. Ils ont choisi une sortie non collocalisée constituée de l'angle moteur plus une pondération de la déformation de l'extrémité. La sortie est ainsi paramétrisée par un paramètre de pondération *alpha*. Ce paramètre a été fixé à 0,8 pour que la dynamique des zéros soit localement stable.

Les principales références consultées lors du développement de chapitre sont : (Byrnes et al., 1991 ; Khalil, 1996 ; Yim, 1993 ; Ortega, 1998 ; Sepulchre, 1997)

8.1 Linéarisation entrée-sortie

Le modèle dynamique non linéaire du système à un bras flexible dans le plan vertical est réécrit ici, soit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{rr} & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix}}_{\ddot{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{rr} & 0 \\ 0 & B_{ff} \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_f \end{bmatrix}}_{\dot{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} q_r \\ q_f \end{bmatrix}}_{q}$$

$$+ \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} G_{rr} & G_{rf}^T \\ G_{rf} & 0 \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} \sin q_r \\ \cos(q_r)\, q_f \end{bmatrix}}_{G(q)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{L} \tau \tag{8.1}$$

ou bien sous la forme suivante :

$$M_{rr}\ddot{q}_r + M_{rf}^T\ddot{q}_f + B_{rr}\dot{q}_r + G_{rr}\sin q_r + G_{rf}^T q_f \cos q_r = \tau \tag{8.2}$$

$$M_{rf}\ddot{q}_r + M_{ff}\ddot{q}_f + B_{ff}\dot{q}_f + K_{ff}q_f + G_{rf}\sin q_r = 0 \tag{8.3}$$

Nous introduisons une nouvelle sortie, soit l'angle d'un point sur le bras, paramétrisée par la variable α. Soit

$$q_\alpha = q_r + \alpha \frac{1}{L} \phi_L^T q_f = q_r + \alpha \, \Phi_L^T q_f \tag{8.4}$$

où $\Phi_L = \phi_L / L$. Alors,

$$\begin{aligned} q_r &= q_\alpha - \alpha \, \Phi_L^T q_f \\ \dot{q}_r &= \dot{q}_\alpha - \alpha \, \Phi_L^T \dot{q}_f \\ \ddot{q}_r &= \ddot{q}_\alpha - \alpha \, \Phi_L^T \ddot{q}_f \end{aligned}$$

Substituons q_α et ses dérivées dans les équations (8.2)-(8.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} &M_{rr}(\ddot{q}_\alpha - \alpha \Phi_L^T \ddot{q}_f) + M_{rf}^T \ddot{q}_f + B_{rr}(\dot{q}_\alpha - \alpha \, \Phi_L^T \dot{q}_f) \\ &\quad + G_{rr} \sin(q_\alpha - \alpha \, \Phi_L^T q_f) + G_{rf}^T \cos(q_\alpha - \alpha \, \Phi_L^T q_f) \, q_f = \tau \end{aligned} \tag{8.5}$$

$$M_{rf}(\ddot{q}_\alpha - \alpha \Phi_L^T \ddot{q}_f) + M_{ff} \ddot{q}_f + B_{ff} \dot{q}_f + K_{ff} q_f + G_{rf} \sin(q_\alpha - \alpha \, \Phi_L^T q_f) = 0 \tag{8.6}$$

soit encore sous la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{rr} & (M_{rf}^T - \alpha M_{rr} \Phi_L^T) \\ M_{rf} & (M_{ff} - \alpha M_{rf} \Phi_L^T) \end{bmatrix}}_{M_\alpha} \begin{bmatrix} \ddot{q}_\alpha \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{rr} & -\alpha \, B_{rr} \Phi_L^T \\ 0 & B_{ff} \end{bmatrix}}_{B_\alpha} \begin{bmatrix} \dot{q}_\alpha \\ \dot{q}_f \end{bmatrix}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix}}_{K_\alpha = K} \begin{bmatrix} q_\alpha \\ q_f \end{bmatrix} + \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} G_{rr} & G_{rf}^T \\ G_{rf} & 0 \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} \sin(q_\alpha - \alpha \, \Phi_L^T q_f) \\ q_f \cos(q_\alpha - \alpha \, \Phi_L^T q_f) \end{bmatrix}}_{G_\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tau \tag{8.7}$$

Dans la procédure de la linéarisation, nous avons besoin d'inverser la matrice M_α. Soit P_α l'inverse de cette matrice,

$$P_\alpha := M_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Remarques :

- M_α est non singulière si $\overline{M}_{ff} := (M_{ff} - \alpha M_{rf}\Phi_L^T)$ est non singulière (Annexe D, Eq. D.4). Pour $\alpha = 0$, $q_\alpha = q_r$. $\overline{M}_{ff} = M_{ff}$ est positive réelle, donc non singulière.
- Pour les FF d'une poutre encastrée-charge (Section B.3), les ν valeurs propres de $\overline{M}_{ff}$ sont :

$$1, 1, \cdots, 1, 1 - \alpha\, M_{rf}^T\, \Phi_L$$

Alors, $\overline{M}_{ff}$ est non singulière si

$$\alpha \neq \frac{1}{M_{rf}^T\, \Phi_L}$$

- Pour les FF d'un bras tournant (Section B.2.4), les ν valeurs propres de $\overline{M}_{ff}$ sont

$$1, 1, \cdots, 1, -\alpha\, M_{rf}^T\, \Phi_L + \frac{1}{I_t}(I_t + M_{rf}^T M_{rf})$$

Alors $\overline{M}_{ff}$ est non singulière si

$$\alpha \neq \frac{1 + M_{rf}^T M_{rf}/I_t}{M_{rf}^T \Phi_L}$$

- Une condition (conservative) de la non singularité de la matrice $\overline{M}_{ff}$ est que toutes ses valeurs propres soient positives. Les deux inéquations précédentes deviennent alors des inégalités, soit :

$$\alpha < \frac{1}{M_{rf}^T\, \Phi_L} \text{ pour les FF d'une poutre encastrée-charge, et}$$

$$\alpha < \frac{1 + M_{rf}^T M_{rf}/I_t}{M_{rf}^T \Phi_L} \text{ pour les FF d'une poutre pivotante.}$$

À partir du système (8.7), avec $\overline{q} = [q_\alpha,\ q_f^T]^T$ est le vecteur des coordonnées généralisées, nous pouvons déduire $\ddot{\overline{q}}$, soit

$$\ddot{\overline{q}} = -P_\alpha\, B_\alpha\, \dot{\overline{q}} - P_\alpha\, K\, \overline{q} - P_\alpha\, G(\overline{q}) + P_\alpha\, L\, \tau \tag{8.8}$$

Par la suite nous calculerons le couple qui partiellement linéarise cette équation. Cette dernière est réécrite sous la forme suivante :

$$\ddot{q}_\alpha \;=\; -P_{11} B_{rr} \dot{q}_\alpha - (-\alpha P_{11} B_{rr} \Phi_L^T + P_{12} B_{ff}) \dot{q}_f - P_{12} K_{ff}\, q_f$$

$$-(P_{11}G_{rr}+P_{12}G_{rf})\sin(q_\alpha-\alpha\Phi_L^Tq_f)-P_{11}G_{rf}^Tq_f\cos(q_\alpha-\alpha\Phi_L^Tq_f)$$
$$+P_{11}\tau \tag{8.9}$$

$$\begin{aligned}\ddot{q}_f &= -P_{21}B_{rr}\dot{q}_\alpha-(-\alpha P_{21}B_{rr}\Phi_L^T+P_{22}B_{ff})\dot{q}_f-P_{22}K_{ff}q_f\\ &\quad -(P_{21}G_{rr}+P_{22}G_{rf})\sin(q_\alpha-\alpha\Phi_L^Tq_f)-P_{21}G_{rf}^Tq_f\cos(q_\alpha-\alpha\Phi_L^Tq_f)\\ &\quad +P_{21}\tau \end{aligned}\tag{8.10}$$

À partir de la première équation, le couple précalculé

$$\begin{aligned}\tau &= P_{11}^{-1}\Big(u+P_{11}B_{rr}\dot{q}_\alpha+(-\alpha P_{11}B_{rr}\Phi_L^T+P_{12}B_{ff})\dot{q}_f+P_{12}K_{ff}q_f\\ &\quad +(P_{11}G_{rr}+P_{12}G_{rf})\sin(q_\alpha-\alpha\Phi_L^Tq_f)\\ &\quad +P_{11}G_{rf}^Tq_f\cos(q_\alpha-\alpha\Phi_L^Tq_f)\Big)\end{aligned}\tag{8.11}$$

donne

$$\begin{aligned}\ddot{q}_\alpha &= u\\ \ddot{q}_f &= -P_{21}B_{rr}\dot{q}_\alpha-(-\alpha P_{21}B_{rr}\Phi_L^T+P_{22}B_{ff})\dot{q}_f-P_{22}K_{ff}q_f\\ &\quad -(P_{21}G_{rr}+P_{22}G_{rf})\sin(q_\alpha-\alpha\Phi_L^Tq_f)-P_{21}G_{rf}^T\cos(q_\alpha-\alpha\Phi_L^Tq_f)q_f+P_{21}\tau\end{aligned}$$

En remplaçant τ par sa valeur dans $\ddot{q}_f$ et en utilisant les relations entre les éléments de la matrice M_α et son inverse P_α (des relations semblables aux relations (D.4)-(D.8)), nous aurons

$$\ddot{q}_\alpha = u \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned}\ddot{q}_f &= -\overline{M}_{ff}^{-1}B_{ff}\dot{q}_f-\overline{M}_{ff}^{-1}K_{ff}q_f-\overline{M}_{ff}^{-1}G_{rf}\sin(q_\alpha-\alpha\Phi_L^Tq_f)-\overline{M}_{ff}^{-1}M_{rf}\,u\\ &= -\overline{K}_{ff}q_f-\overline{B}_{ff}\dot{q}_f-\overline{G}_{rf}\sin(q_\alpha-\alpha\Phi_L^Tq_f)-\overline{M}_{rf}\,u\end{aligned}\tag{8.13}$$

où $\overline{K}_{ff}=\overline{M}_{ff}^{-1}K_{ff}$, $\overline{B}_{ff}=\overline{M}_{ff}^{-1}B_{ff}$, $\overline{G}_{rf}=\overline{M}_{ff}^{-1}G_{rf}$, $\overline{M}_{rf}=\overline{M}_{ff}^{-1}M_{rf}$.

Soit $x_1 = q_\alpha$, $x_2 = q_f$, $x_3 = \dot{q}_\alpha$, et $x_4 = \dot{q}_f$ les composantes du vecteur d'état x. Les équations (8.12)-(8.13) sont réécrites sous la forme du modèle d'état (Σ) suivant :

$$(\Sigma)\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= u \\ \dot{x}_4 &= -\overline{K}_{ff}x_2 - \overline{B}_{ff}x_4 - \overline{G}_{rf}\sin(x_1 - \alpha\Phi_L^T x_2) - \overline{M}_{rf}\,u \end{cases} \tag{8.14}$$

Nous avons ainsi montré que pour $\alpha < 1/M_{rf}^T\,\Phi_L$ pour les FF d'une poutre encastrée-charge (et $\alpha < (1 + M_{rf}^T M_{rf}/I_t)/M_{rf}^T\Phi_L$ pour les FF d'un bras tournant) le changement de variables paramétrisé par α (8.4) et le couple précalculé (8.11) transforment le modèle non linéaire (8.1) en un modèle partiellement linéaire (8.14). Le degré relatif de ce système est deux. Comme dans le cas du système linéaire, une condition nécessaire pour qu'un système non linéaire soit passif est que son degré relatif soit égal à un (Byrnes et al., 1991). Nous considérons alors $\dot{q}_\alpha$, la dérivée de q_α, comme étant la sortie. Nous présentons ensuite un théorème qui démontre la passivité de l'application entre l'entrée et la sortie.

Proposition 11 *L'application entre l'entrée u et la sortie $y = x_3 = \dot{q}_\alpha$ du système (Σ) (8.14) est passive.*

Démonstration. Soit la fonction $S(x) = \frac{1}{2}x_3^2 \geq 0$. Sa dérivée $\dot{S}(x) = x_3\,\dot{x}_3 = x_3\,u = y\,u$. En intégrant des deux côtés la relation précédente, l'application entre l'entrée u et la sortie $y = \dot{q}_\alpha = x_3$ est alors passive. ▽

En choisissant un contrôleur strictement passif, nous pouvons ainsi au moins assurer la stabilité au sens entrée-sortie du système en boucle fermée. Cependant, la stabilité interne n'est pas garantie. Pour garantir la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre, il faut des conditions supplémentaires telle que l'observabilité ou la stricte passivité vis-à-vis l'état (Théorèmes 9 et 10).

Le point d'équilibre auquel nous nous intéressons est $x \equiv 0$. D'ailleurs, on peut démontrer que les points d'équilibre du système sont : $(x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0)$ et

($x_1 = \pi,\ x_2 = x_3 = x_4 = 0$). En effet, un point d'équilibre du système (Σ) est la solution du système algébrique suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 = 0 \\ \dot{x}_2 &= x_4 = 0 \\ \dot{x}_4 &= -\overline{K}_{ff}x_2 - \overline{B}_{ff}x_4 - \overline{G}_{rf}\sin(x_1 - \alpha\Phi_L^T x_2) = 0 \end{aligned} \tag{8.15}$$

Un premier point d'équilibre est $x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = x_4 = 0$. Tout autre point d'équilibre doit satisfaire :

$$-\overline{M}_{ff}^{-1}K_{ff}x_2 - \overline{M}_{ff}^{-1}G_{rf}\sin(x_1 - \alpha\Phi_L^T x_2) = 0$$

La matrice $\overline{M}_{ff}^{-1}$ étant non singulière, cette dernière équation s'écrit :

$$-K_{ff}x_2 - G_{rf}\sin(x_1 - \alpha\Phi_L^T x_2) = 0$$

soit encore :

$$x_2 = K_{ff}^{-1}G_{rf}\sin(\alpha\Phi_L^T x_2 - x_1)$$

Pour un nombre de modes égale à un, toutes les variables de l'équation précédente deviennent des scalaires. Le point d'équilibre est alors l'intersection des deux courbes en x_2 : la droite x_2 et la courbe $K_{ff}^{-1}G_{rf}\sin(\alpha\Phi_L^T x_2 - x_1)$, avec x_1 une constante. On sait que :

$$\frac{\sin(x)}{x} < 1, \forall x \in \mathcal{R} - \{0\} \text{ et } \sin(x) = x \text{ pour } x = 0$$

La pente à l'origine à la courbe sinusoïdale est : $\alpha K_{ff}^{-1}G_{rf}\Phi_L\cos(x_1)$. Le module de cette pente est (généralement) petit ($\alpha < 1,\ |\cos(x_1)| \leq 1,\ \left|K_{ff}^{-1}G_{rf}\Phi_L\right| \ll 1$). Alors, le seul point d'intersection des deux courbes est l'origine $x_2 = 0$. Le même argument s'applique pour un nombre de modes supérieur à un. Dans ce cas, il suffit d'appliquer le même raisonnement à chaque composante du vecteur x_2. La partie de droite de (8.15) se réduit alors à :

$$G_{rf}\sin(x_1) = 0$$

Ce qui implique que les deux points d'équilibre correspondent à $x_1 = 0$ ou $x_1 = \pi$.

Par la suite, nous allons choisir α pour assurer une stabilité asymptotique du point d'équilibre $x = 0$. Nous allons commencer avec les résultats connus où l'entrée et la sortie sont localisées.

8.2 Sortie colocalisée

Pour $\alpha = 0$, la sortie est colocalisée avec l'entrée. Le système correspondant est connu pour être passif (Gevarter, 1970). D'où la popularité du contrôleur strictement passif proportionnel-dérivé (PD) pour l'angle moteur. Pour suivre une trajectoire désirée donnée par $q_r^d(t)$, $\dot{q}_r^d(t)$ et $\ddot{q}_r^d(t)$ nous choisissons le contrôleur suivant (Figure 8.1) :

$$u = u_r = \ddot{q}_r^d + k_{dr}\,\dot{\tilde{q}}_r + k_{pr}\,\tilde{q}_r \tag{8.16}$$

où k_{pr} et k_{dr} sont des gains constants et $\tilde{q}_r = q_r^d - q_r$. L'erreur de suivi de trajectoire

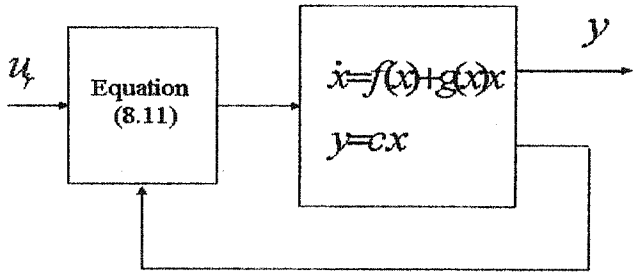
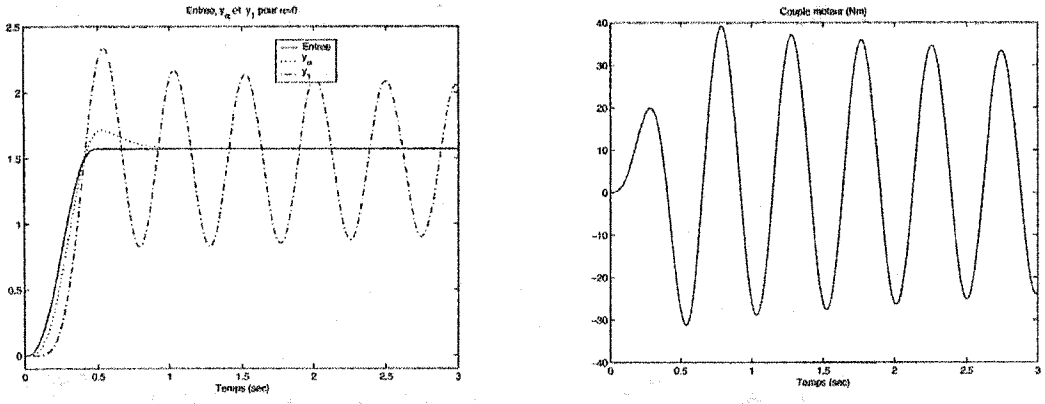


FIG. 8.1 – Commande linéarisante

de la coordonnée rigide est régie par une équation linéaire invariante et découplée

$$\ddot{\tilde{q}}_r + k_{dr}\,\dot{\tilde{q}}_r + k_{pr}\,\tilde{q}_r = 0 \tag{8.17}$$

Dans le cas de robots rigides ($\nu = 0$), on peut vérifier que la loi de commande ainsi proposée représente la solution classique de découplage et de linéarisation exacte du modèle dynamique de robots rigides. Dans le cas des robots à bras flexibles, la loi de



a) Angles moteur et extrémité b) Couple moteur

FIG. 8.2 – Réponse pour une sortie colocalisée

commande (8.16) assure la linéarisation des variables rigides. Les variables flexibles sont libres ou peuvent être excitées car la seconde équation de la dynamique de l'erreur (8.13) n'a pas été prise en considération. Cette dernière représente la dynamique interne et elle s'écrit sous la forme (pour $\alpha = 0$) :

$$M_{ff}\ddot{q}_f + B_{ff}\,\dot{q}_f + K_{ff}\,q_f = -G_{rf}\sin(q_r) - M_{rf}\,u \tag{8.18}$$

La dynamique des zéros est alors donnée par :

$$M_{ff}\ddot{q}_f + B_{ff}\,\dot{q}_f + K_{ff}\,q_f = 0 \tag{8.19}$$

Les matrices de masse M_{ff}, de frottement B_{ff} et de rigidité K_{ff} sont définies positives. La dynamique de zéro est alors asymptotiquement stable. Rappelons que le coefficient de frottement du bras est relativement faible. La dynamique des coordonnées flexibles est donc très oscillatoire. Si on simule le système (8.1) avec le contrôleur (8.11) et (8.16) et avec des valeurs de gain $k_{pr} = 31,6$ et $k_{dr} = 8$ obtenu avec une commande linéaire quadratique (lqry), les réponses des angles moteur et extrémité sont données dans la figure (8.2). Nous remarquons que l'angle moteur suit la référence, cependant l'extrémité est oscillatoire. Nous avons choisie une commande quadratique pour pouvoir comparer les résultats avec le cas suivant.

Cette technique de commande colocalisée est généralement bonne pour faire le suivi de l'angle moteur. Elle n'est évidemment pas bonne pour faire un suivi de l'extrémité. Dans le domaine de la robotique, l'objectif est le suivi de l'extrémité. Par la suite, on rajoutera un couple qui assure l'amortissement des vibrations élastiques sans trop perturber les résultats précédents.

8.2.1 Amortissement des variables flexibles

Nous présentons ici une méthode qui linéarise et découple les variables articulaires et parallèlement amortit les variables flexibles. Au vecteur de commande u défini par l'équation (8.16), on propose d'ajouter un terme de correction des variables flexibles, soit

$$u = u_r + u_f \tag{8.20}$$

avec $u_r = \ddot{q}_{rd} + k_{dr}\dot{\tilde{q}}_r + k_{pr}\tilde{q}_r$, $u_f = k_{df}\dot{\tilde{q}}_f + k_{pf}\tilde{q}_f$, $\tilde{q}_f = q_f^d - q_f$ et $\dot{\tilde{q}}_f = \dot{q}_f^d - \dot{q}_f = -\dot{q}_f$. D'après les équations (8.12)-(8.13) et (8.20), la dynamique de l'erreur de la coordonnée rigide devient :

$$\ddot{\tilde{q}}_r + K_{PD}\,\tilde{x} = 0 \tag{8.21}$$

avec $K_{PD} = [k_{pr},\ k_{pf},\ k_{dr},\ k_{df}]$ et $\tilde{x} = [\tilde{q}_r;\ \tilde{q}_f;\ \dot{\tilde{q}}_r;\ \dot{\tilde{q}}_f]$. En comparant (8.21) à (8.17), on observe que la présence des corrections flexibles perturbe la linéarisation et le découplage des variables rigides. La dynamique des variables flexibles devient alors :

$$\ddot{q}_f = -\ddot{\tilde{q}}_f = -\overline{K}_{ff}\,q_f - \overline{B}_{ff}\,\dot{q}_f - \overline{G}_{rf}\sin(q_r) - \overline{M}_{rf}(\ddot{q}_r^d + K_{PD}\tilde{x}) \tag{8.22}$$

En considérant l'équation (8.22) autour d'une configuration désirée ($q_r^d = \pi/2,\ q_f^d = 0$), on obtient l'équation suivante :

$$\ddot{\tilde{q}}_f = -\overline{K}_{ff}\,\tilde{q}_f - \overline{B}_{ff}\,\dot{\tilde{q}}_f + \overline{M}_{rf}\,K_{PD}\tilde{x} + \overline{M}_{rf}\ddot{q}_r^d + \overline{G}_{rf}\sin(q_r) \tag{8.23}$$

À partir des équations 8.21 et (8.23), l'équation globale des erreurs est

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\,\tilde{x} + \tilde{B} \tag{8.24}$$

Disposant d'un modèle linéaire, on peut choisir la matrice des gains K_{PD} telles que les valeurs propres de la matrice d'état $\tilde{A}$ soient à parties réelles négatives. Ce qui assure la convergence asymptotique du point d'équilibre $\tilde{x} = 0$ du système homogène $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x}$. La matrice $\tilde{B}$ étant bornée, elle constitue une perturbation pour le sous-système homogène. La convergence de l'erreur n'est plus asymptotique, cependant l'erreur est toujours bornée (Khalil, 1996). Le schéma bloc en boucle fermée est montré à la figure (8.3). Pour le même système qu'auparavant et pour une matrice des gains

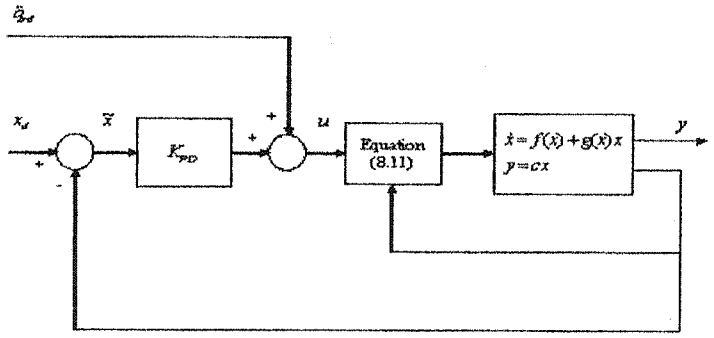


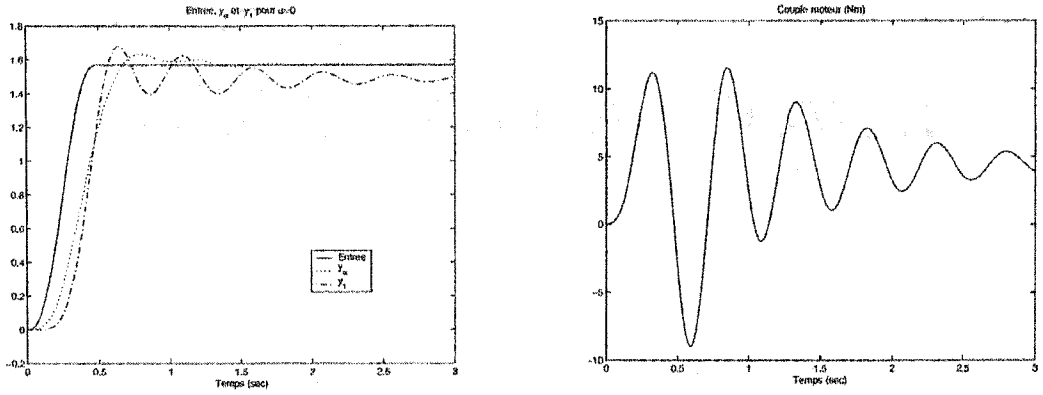
FIG. 8.3 – Commande linéarisante avec amortissement des variables flexibles

$$K_{PD} = [40.90,\ -37.14,\ -458.08,\ 10.53,\ -2.59,\ -27.51]$$

obtenu avec la même commande linéaire quadratique, les valeurs propres de la matrice $\tilde{A}$ sont :

$$\{-1.08 \pm j\,12.85 - 4.97 \pm j\,3.97;\ -5.08 \pm j\,90.26;\ \}$$

Les réponses correspondantes ainsi que le couple moteur développé sont montrés à la figure (8.4). On peut remarquer que l'extrémité est bien plus amortie que dans le cas précédent. Cette méthode est limitée pour le cas d'une stabilisation autour d'un point de fonctionnement.

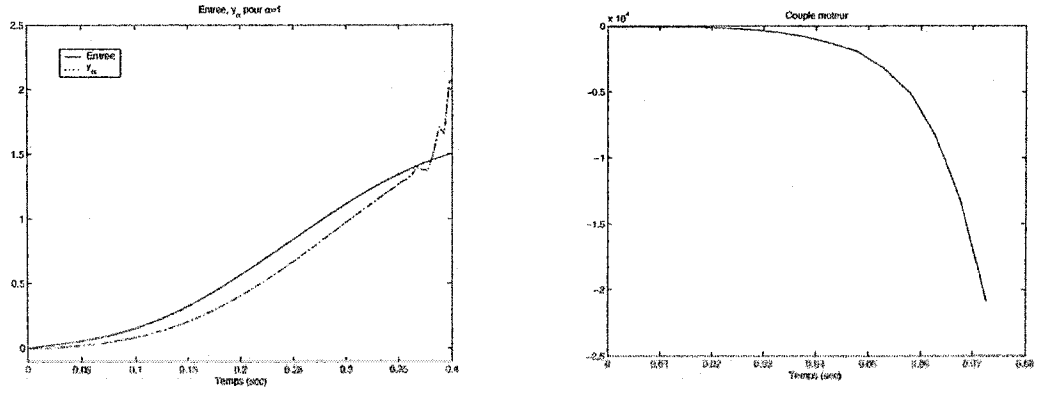


a) Angles moteur et extrémité b) Couple moteur

FIG. 8.4 – Réponse par découplage non linéaire avec amortissement de la flexibilité

8.3 Sortie non colocalisée : Extrémité du bras

Pour $\alpha = 1$, l'entrée et la sortie sont non colocalisées. La passivité est maintenue entre l'entrée u et la sortie, i.e. la vitesse de l'extrémité $\dot{q}_1$. Cependant, le système est à déphasage non minimal. La dynamique interne est instable (Yim, 1993). La simulation suivante (Figure 8.5) montre l'instabilité de ce système à déphasage non minimal. Le couple tend vers l'infini en un temps fini.



a) Angle de l'extrémité b) Couple moteur

FIG. 8.5 – Sortie angle extrémité

8.4 Sortie non colocalisée : Point intermédiaire

Dans cette section, nous allons considérer une sortie non colocalisée, soit un point intermédiaire entre la base et l'extrémité. Nous allons démontrer la stabilité asymptotique du point d'équilibre de la dynamique de l'erreur. Nous allons suivre la même procédure qu'auparavant. Cependant, il y a une difficulté supplémentaire du fait que la dynamique de l'erreur est non autonome. La relation de passivité entre l'entrée et la sortie est toujours maintenue. Rappelons que la passivité ne nous assure pas la stabilité asymptotique. Nous allons donc utiliser les théorèmes (1) et (10) du Chapitre 6 pour choisir la sortie de façon à ce que le point d'équilibre $\tilde{x} = 0$ soit asymptotiquement stable. Pour cela, nous allons décomposer la dynamique de l'erreur en une partie linéaire en retour avec une partie non linéaire et non autonome. Nous allons ensuite utiliser les propriétés de passivité des deux parties pour prouver la stabilité asymptotique du point d'équilibre.

À partir des équations (8.12)-(8.13), la dynamique de l'erreur est donnée par :

$$\ddot{\tilde{q}}_\alpha = \ddot{q}_\alpha^d - u \tag{8.25}$$

$$\ddot{\tilde{q}}_f = -\overline{K}_{ff}\,\tilde{q}_f - \overline{B}_{ff}\,\dot{\tilde{q}}_f - \overline{G}_{rf}\,\psi(t,\tilde{q}) - \overline{M}_{rf}\,(\ddot{q}_\alpha^d - u) \tag{8.26}$$

où $\tilde{q}_\alpha = q_\alpha^d - q_\alpha$, $\tilde{q}_f = q_f^d - q_f$, $\tilde{q}^T = [\tilde{q}_\alpha,\ \tilde{q}_f^T]$, q_α^d et q_f^d sont respectivement les valeurs désirées de q_α et q_f et

$$\begin{aligned}
\psi(t,\tilde{q}) &= \sin(q_\alpha^d - \alpha\Phi_L q_f^d) - \sin(q_\alpha - \alpha\Phi_L q_f) \\
&= \sin(q_\alpha^d - \alpha\Phi_L q_f^d) - \sin[q_\alpha^d - \tilde{q}_\alpha - \alpha\Phi_L(q_f^d - \tilde{q}_f)] \\
&= \sin(C_\alpha^T\,\overline{q}^d) - \sin(C_\alpha^T\,\overline{q}^d - C_\alpha^T\,\tilde{q})
\end{aligned} \tag{8.27}$$

où $C_\alpha^T = [1,\ -\alpha\,\Phi_L^T]$.

Soit $\tilde{x}_1 = \tilde{q}_\alpha$, $\tilde{x}_2 = \tilde{q}_f$, $\tilde{x}_3 = \dot{\tilde{q}}_\alpha$, et $\tilde{x}_4 = \dot{\tilde{q}}_f$. Les équations (8.25)-(8.26) sont

réécrites sous la forme du modèle d'état $(\widetilde{\Sigma})$ suivant, avec $\delta u = \ddot{q}_\alpha^d - u$,

$$(\widetilde{\Sigma}) \begin{cases} \dot{\widetilde{x}}_1 &= \widetilde{x}_3 \\ \dot{\widetilde{x}}_2 &= \widetilde{x}_4 \\ \dot{\widetilde{x}}_3 &= \delta u \\ \dot{\widetilde{x}}_4 &= -\overline{K}_{ff}\widetilde{x}_2 - \overline{B}_{ff}\widetilde{x}_4 - \overline{G}_{rf}\psi(t,\widetilde{x}) - \overline{M}_{rf}\,\delta u \end{cases} \tag{8.28}$$

Le théorème précédent (Théorème 11) s'applique aussi au système $(\widetilde{\Sigma})$ pour le couple entrée-sortie $(\delta u, y = \dot{\widetilde{q}}_\alpha)$. Le système $\widetilde{\Sigma}$ est alors passif. La propriété de passivité est conservée avec la loi de contrôle (Ortega, 1998)

$$\delta u = -K_p\widetilde{q}_\alpha + \delta v = -K_p\widetilde{x}_1 + \delta v \tag{8.29}$$

D'ailleurs, en choisissant la fonction d'énergie sous la forme :

$$S(\widetilde{x}) = \frac{1}{2}\widetilde{x}_3^2 + \frac{1}{2}K_p\widetilde{x}_1^2 \geq 0$$

avec $K_p > 0$, nous pouvons démontrer que la relation $\delta v \to x_3$ est toujours passive. De plus, En choisissant la commande δu sous la forme :

$$\delta u = -K_p\widetilde{q}_\alpha - K_d\,\dot{\widetilde{q}}_\alpha + \delta v \tag{8.30}$$

où K_p et K_d sont positifs, la relation entre l'entrée δv et la sortie $y = \dot{\widetilde{q}}_\alpha$ devient strictement passive à la sortie. Alors, les erreurs de la position et de la vitesse $\widetilde{q}_\alpha$ et $\dot{\widetilde{q}}_\alpha \to 0$ quand $t \to \infty$ (Théorème 7, Chapitre 6).

Par la suite nous allons choisir α pour que la dynamique des coordonnées flexibles soit asymptotiquement stable. Le point d'équilibre $\widetilde{x} = 0$ du système $(\widetilde{\Sigma})$ est asymptotiquement stable si ce système est strictement passif à la sortie et est observable (Théorème 1). Notons que dans certaines références (Byrnes et al., 1991 et Sepulchre, 1997) la détectabilité est suffisante. La première condition est déjà vérifiée. Pour tester sa détectabilité, nous annulons l'entrée et la sortie et nous vérifions la stabilité asymptotique du point d'équilibre du système résultant, i.e. la dynamique des coordonnées flexibles.

À partir de l'équation (8.28), la dynamique des coordonnées flexibles s'écrit sous la forme :

$$\dot{\widetilde{x}}_f = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -\overline{K}_{ff} & -\overline{B}_{ff} \end{bmatrix}}_{\widetilde{A}_f} \widetilde{x}_f - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \overline{G}_{rf} \end{bmatrix}}_{\widetilde{G}_f} \psi(t, C_f^T \widetilde{x}_f) \tag{8.31}$$

où $\widetilde{x}_f = [\widetilde{x}_2;\ \widetilde{x}_4]$, $C_f^T = [-\alpha\,\Phi_L^T,\ 0]$. Dans la suite nous allons choisir α pour que cette dernière soit (globalement) asymptotiquement stable.

Proposition 12 *Le point d'équilibre $\widetilde{x}_f = 0$ du système (8.31) est globalement asymptotiquement stable, pour un $\alpha < \alpha_c$ donné.*

Le système (8.31) s'écrit sous la forme suivante :

$$(H) \begin{cases} \dot{\widetilde{x}}_f &= \widetilde{A}_f \widetilde{x}_f + \widetilde{G}_f\, v \\ y &= C_f^T\, \widetilde{x}_f \end{cases} \tag{8.32}$$

en contre-réaction avec (Figure 8.6-a)

$$v = -\psi(t, y) \tag{8.33}$$

Nous allons utiliser la passivité pour analyser la stabilité du point d'équilibre $\widetilde{x} = 0$. D'après le Théorème (10), le point d'équilibre $\widetilde{x}_f = 0$ est (globalement) asymptotiquement stable si le système linéaire (H) est strictement passif à l'entrée et si $\psi(.,.)$ est passif.

La fonction $\psi(t, y)$ est continue en t et y, et $\psi(t, 0) = 0$. Puisque

$$\begin{aligned} y\,\psi(t,y) &= y\,[\sin(C_1^T\,\overline{q}^d) - \sin(C_1^T\,\overline{q}^d - y)] \\ &= y\,[2\cos(C_1^T\,\overline{q}^d - y/2)\sin(y/2)] \end{aligned}$$

cette dernière vérifie donc les inégalités suivantes :

$$-k\,y^2 \leq y\,\psi(t,y) \leq k\,y^2, \quad \text{avec} \quad k = 1$$

soit encore :

$$y(\psi(t,y) + k\,y) \geq 0, \quad \forall y \in \mathcal{R}$$

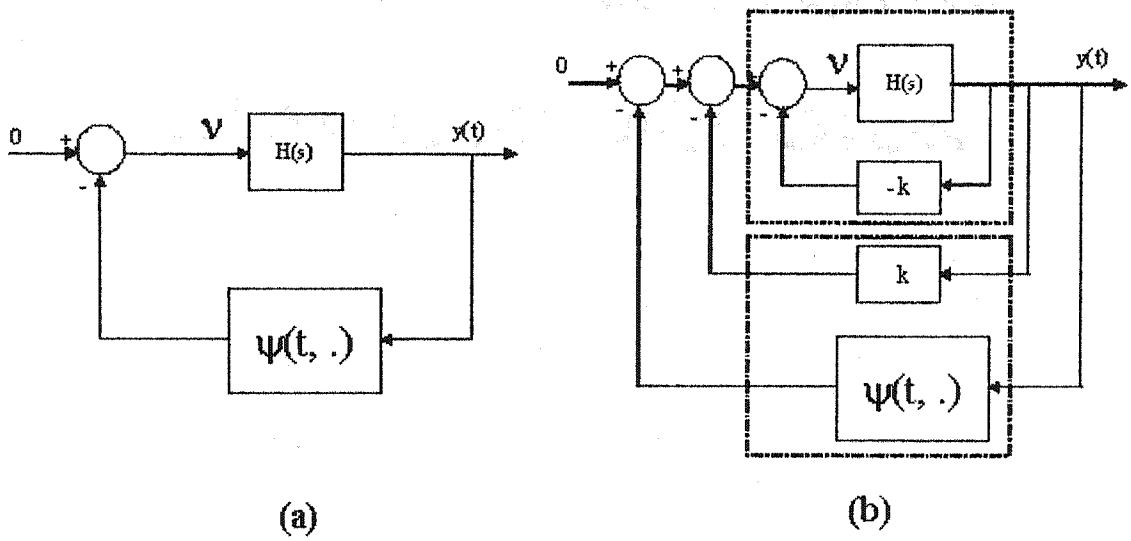


FIG. 8.6 – Système en contre-réaction

La nouvelle non linéarité

$$\psi_T(t, y) = \psi(t, y) + k\, y$$

est alors passive.

Le système (8.32)-(8.33) est alors équivalent au système représenté à la figure (8.6-b). Le point d'équilibre est asymptotiquement stable si le système linéaire équivalent H_T (H en contre réaction avec $-k$) est strictement passif à l'état. La fonction de transfert est strictement passive à l'état si elle est SPR (Khalil, 1996). Nous devons donc choisir le paramètre α de façon que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1. Le système linéaire H_T est strictement stable, et
2. H_T est strictement positive réelle.

La première condition est valide si la matrice d'état (H avec le retour de la sortie $v = k\, y + v_1$)

$$A_T = \tilde{A}_f + k\tilde{G}_f\tilde{C}_f^T$$

est Hurwitz. Notons que cette famille de matrices est nominalement Hurwitz pour

$\alpha = 0$. Dans ce cas ($\tilde{C}_f = 0$),

$$A_T = \tilde{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_{ff}^{-1}K_{ff} & -M_{ff}^{-1}B_{ff} \end{bmatrix}$$

Les matrices M, B, et K sont définie positives. La matrice A_T est alors strictement stable.

La valeur de $\alpha < 1$, si elle existe, qui fait que la matrice A_T reste strictement stable, i.e. H_T est Hurwitz, est calculée en utilisant l'application gardienne suivante (Saydy, 1990) :

$$\nu(\alpha) = \det(A_T \oplus A_T)$$

où $\oplus$ est la somme de Kronecker. La matrice A_T cesse d'être Hurwitz quand la condition suivante est valide, soit :

$$\nu(\alpha) = 0$$

La valeur critique de α est alors donnée par :

$$\alpha_c = \min(\alpha_i) \mid \nu(\alpha_i) = 0, \text{ et } \alpha_i \in \mathcal{R} \tag{8.34}$$

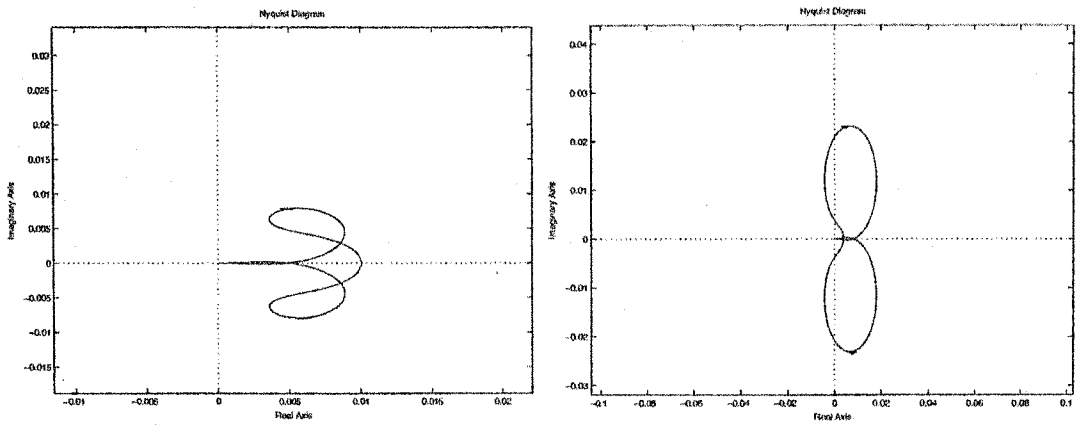
La deuxième condition de stricte positivité est valide si le diagramme de Nyquist de H_T est dans le demi-plan s droit. Nous allons choisir le paramètre α pour que la première condition soit satisfaite et valider la deuxième condition de SPR pour la valeur trouvée.

Pour un nombre de modes égal à deux et pour les FF d'une poutre encastrée-charge, l'application gardienne donne la valeur critique α_c suivante :

$$\alpha_c = 0,8775$$

Pour cette valeur, le diagramme de Nyquist de $H_T(j\omega)$ (Figure 8.7-a) montre clairement qu'il se trouve dans le demi-plan droit. Alors la condition de SPR (stricte passivité) est vérifiée. D'où la stabilité asymptotique globale de l'origine. $\triangledown$

La figure (8.7-b) montre le diagramme de Nyquist pour $\alpha = 0,95$.



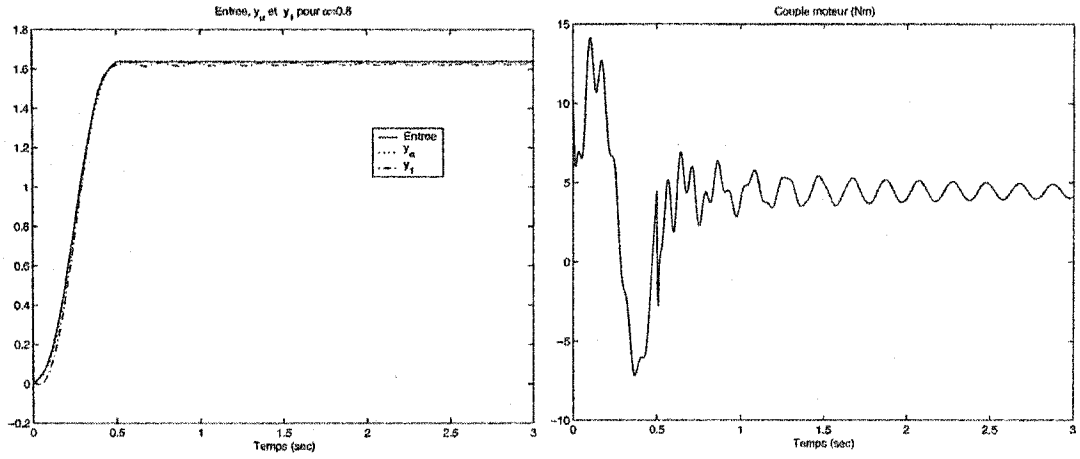
a) $\alpha = 0,877$ b) $\alpha = 0,95$

FIG. 8.7 – Diagramme de Nyquist du système linéaire

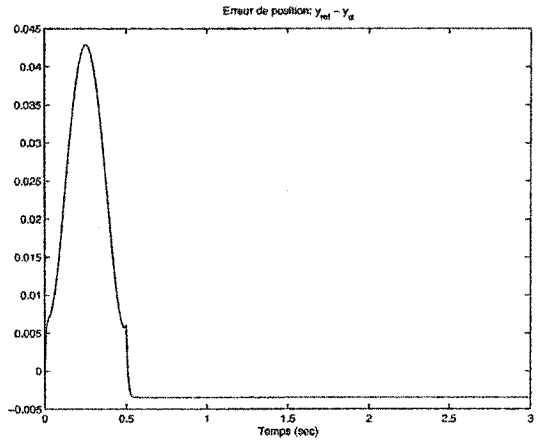
8.4.1 Simulation

La figure (8.8) montre la simulation du système à un bras flexible pour la valeur de $\alpha = 0,8$ et pour le contrôleur strictement passif donné par l'équation (8.30) et pour $K_p = 100$ et $K_d = 20$. La figure (8.8-a) montre la référence, la position de la sortie y_α et la position de l'extrémité. La figure (8.8-b) montre le couple moteur et la figure (8.8-c) montre l'erreur de position entre la référence et la sortie. Cette simulation montre que la sortie y_α suit la référence. Cependant, l'extrémité continue à osciller (oscillations amorties) avec de faibles amplitudes. Ces oscillations sont dûes au fait que la trajectoire désirée est celle de la sortie y et non pas celle de l'extrémité. Pour éliminer ces oscillations, il faudrait considérer une trajectoire désirée pour l'extrémité et déduire celle du point intermédiaire en considérant une inversion de la dynamique. Les résultats de simulation pour une entrée sinusoïdale sont aussi montrés à la figure (8.9), dans le même ordre que précédemment.

Dans ce chapitre, nous avons considéré la passivité pour démontrer la stabilité asymptotique de la dynamique de l'erreur d'un point intermédiaire paramétrisé par le paramètre α. Nous avons linéarisé au sens entrée-sortie cette dynamique. Nous avons utilisé un contrôleur strictement passif pour contrôler la partie linéarisée et



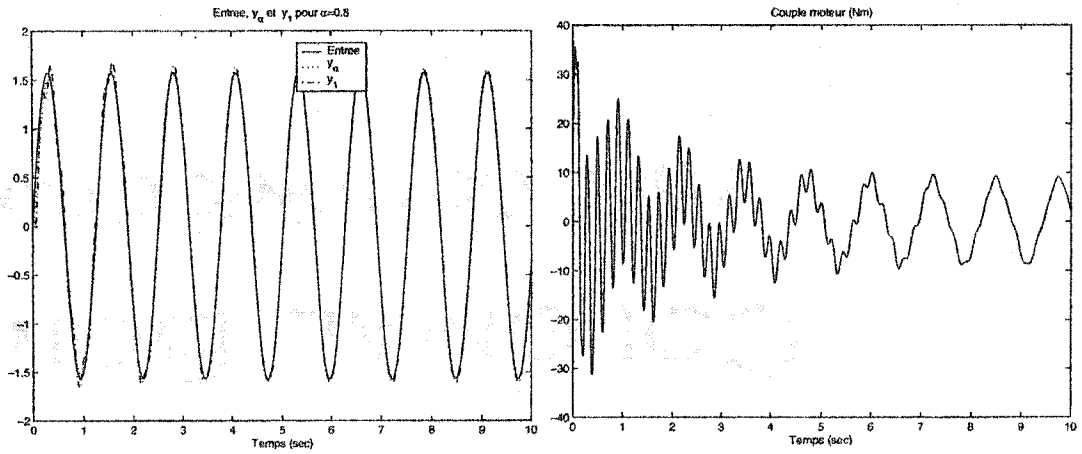
a) Sortie et extrémité b) Couple moteur



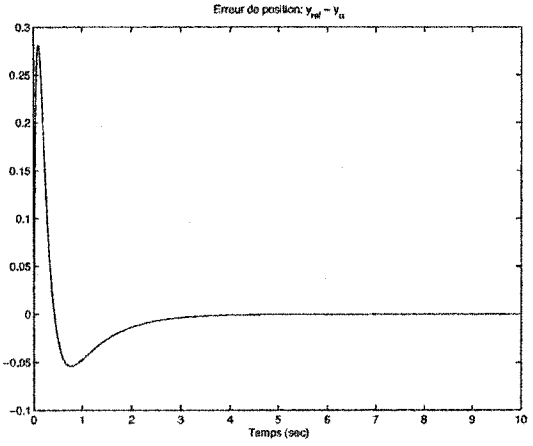
c) Erreur de position

FIG. 8.8 – Sortie intermédiaire : entrée échelon

décomposé la partie non linéaire (équivalente à la dynamique interne) en une partie linéaire strictement passive en contre-réaction avec une partie non linéaire passive. Nous avons utilisé le théorème de la passivité pour démontrer la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre.



a) Sortie et extrémité b) Couple moteur



c) Erreur de position

FIG. 8.9 – Sortie intermédiaire : entrée sinusoïdale

Conclusion

Une étude de la modélisation et de la commande par la passivité d'un système à un bras flexible a été abordée dans cette thèse. Les systèmes à bras flexibles sont des systèmes continus à paramètres distribués décrits par des équations aux dérivées ordinaires et des équations aux dérivées partielles associées avec des conditions aux frontières. Cette étude utilise principalement la méthode de modes supposés pour discrétiser ces équations. La déformation du bras est alors écrite sous la forme d'une somme de fonctions de forme dépendant de la variable spatiale, multipliée par de fonctions dépendant uniquement du temps. L'objectif était de comparer la précision et la performance des modèles discrets basés sur différentes fonctions de forme et le choix du nombre de modes associé lors d'une application particulière. Entre autres, nous avons considéré les fonctions propres des poutres sans et avec charge, les fonctions de forme d'une poutre pivotante avec charge, les splines et les B-splines cubiques. Les critères de comparaison étaient basés sur la convergence des fréquences et des modes propres ainsi que leurs dérivées, sur l'estimation de la déformation statique et de leurs dérivées et sur la complexité numérique du modèle obtenu.

La discrétisation a permis de transformer les équations aux dérivées partielles en équations aux dérivées ordinaires et de réduire l'ordre infini du modèle en un ordre fini et ainsi de pouvoir utiliser les techniques classiques et modernes relatives à la commande des systèmes. En considérant l'extrémité des bras comme sortie, les systèmes à bras flexibles possèdent généralement une caractéristique de déphase non minimal. Cette caractéristique rend la commande directe de l'extrémité plus difficile que celle

des systèmes à déphasage minimal. En particulier, l'application de la passivité à ce genre de système est limitée. L'objectif de commande était essentiellement d'utiliser un contrôleur très simple qui facilite l'implantabilité de la loi de commande. Pour cela nous avons considéré la passivité comme critère de sélection de la loi de commande. Nous avons considéré deux cas : le cas d'un mouvement dans le plan horizontal et le cas d'un mouvement dans le plan vertical. Dans le premier cas, la relation de passivité entre l'entrée et la sortie est équivalente à la positivité de la fonction de transfert correspondante. Dans le second cas, les critères généraux de la passivité sont vérifiés.

En particulier, quelques conclusions peuvent être tirées aux niveaux de la modélisation et de la commande de ce système :

1. Les fonctions de forme d'une poutre encastrée-libre, qui sont souvent utilisées dans la littérature, sont inadéquates pour discrétiser les systèmes à bras flexibles, sauf peut être dans le cas d'un bras flexible sans charge. Les fonctions de forme d'une poutre encastrée-charge donnent une très bonne estimation des fréquences, des modes et des déformations statiques même si la charge est surestimée. Leur seul désavantage est qu'elles sont relativement complexes. Cependant, les relations d'orthogonalité entre ces fonctions de forme permettent de simplifier le calcul de certains termes dans la dynamique. La complexité additionnelle des fonctions de forme d'une poutre pivotante avec charge ne se reflète pas dans les résultats. Les fonctions polynomiales sont bonnes pour un nombre de modes inférieur à quatre. Cependant, dû à leur sensibilité, ces fonctions sont à éviter pour des structures à plusieurs bras. Les modèles basés sur les splines donnent des résultats intéressants. Les meilleurs résultats sont obtenus avec les B-splines et les splines cubiques avec les courbures comme coordonnées généralisées. Les conditions aux frontières peuvent être changées selon que le système possède ou non une charge.

   Globalement, nous recommandons l'utilisation des fonctions de forme d'une poutre encastrée avec charge ou l'utilisation des splines cubiques avec les cour-

bures comme coordonnées généralisées. Pour les splines cubiques, nous recommandons d'ajouter une fonction de forme de plus à ce qui est requis et de réajuster les CF selon le système à étudier. Pour une structure à plusieurs bras, nous recommandons l'utilisation des splines cubiques car elles sont plus simples à générer que les fonctions propres d'une poutre encastrée et sont indépendantes des paramètres du système.

2. Un modèle discret basé sur la méthode de modes supposés possède une caractéristique inhérente : les fréquences propres de ce modèle convergent de façon monotone en augmentant le nombre de modes utilisés. Ceci est le cas des modèles basés sur les fonctions de forme de poutres et les fonctions polynomiales. Nous avons proposé au chapitre 5 un théorème de convergence monotone des fréquences du modèle basé sur les splines cubiques avec les courbures comme coordonnées généralisées. Ainsi la précision du modèle basé sur ces fonctions augmente en augmentant le nombre d'éléments utilisés. Ce théorème est basé sur la validité du principe d'inclusion et est basé sur l'équivalence des deux représentations de la discrétisation de la déformation : les splines cubiques et les polynômes hiérarchiques. Pour ces dernières, le principe d'inclusion est valide et la convergence des fréquences calculées est assurée.

3. L'application entre le couple d'entrée et l'extrémité du bras est une application à déphasage non minimal. Nous avons utilisé une sortie non colocalisée : Le point passif le plus proche de l'extrémité. Cette sortie est paramétrisée par un paramètre α et consiste en la mesure de l'angle de rotation du moteur *plus* une valeur pondérée de la déformation de l'extrémité du bras.

4. Au chapitre 7 nous avons choisi α pour que la relation entre l'entrée et la sortie choisie soit passive. Le modèle du système tournant dans le plan horizontal étant linéaire, nous avons utilisé l'équivalence entre la passivité et la positivité de la partie réelle de la fonction de transfert correspondante. Nous avons aussi utilisé la réactivité pour calculer les valeurs critiques α_c de α pour lesquelles la

fonction de transfert entre le couple moteur et la sortie proposée reste passive. Nous avons traité les cas correspondant aux différentes fonctions de forme.

5. Pour les fonctions de forme de poutres tournante ou encastrée, nous avons une expression analytique pour la valeur critique α_c. Cependant, pour les splines cubiques, nous ne possédons pas une telle expression. Nous avons procédé avec une méthode numérique pour trouver cette valeur critique.
6. Pour le cas d'un bras tournant dans le plan horizontal, la fonction de transfert étant passive, l'utilisation de tout contrôleur strictement passif, tel qu'un simple contrôleur proportionnel, assure la stabilité (asymptotique) en boucle fermée.
7. La valeur critique α_c varie avec les paramètres du système, telles que la masse de la charge, l'inertie du moteur, etc. Cette variation affecte la passivité de la fonction de transfert. Nous avons analysé l'effet de la variation de certains paramètres sur la valeur critique $alpha_c$.
8. Le paramètre α est considéré comme un paramètre de design lors de la conception du bras flexible. A cet effet, nous pouvons faire la conception du bras, choix et dimension de matériels, de façon à ce que la sortie sélectionnée soit la plus proche possible de l'extrémité du bras.
9. Au chapitre 8, nous avons traité le cas du système tournant dans le plan vertical. L'objectif était de généraliser la procédure suivi pour le cas horizontal et de retrouver une valeur de α pour laquelle la relation entre l'entrée et la sortie est passive. Nous avons démontré la convergence asymptotique globale de la dynamique de l'erreur en se basant sur le théorème de la passivité. La dynamique de l'erreur est décomposée en deux parties : une partie linéaire stable strictement passive et une partie non linéaire sans mémoire et passive.

La méthode présentée dans le chapitre 7 est limitée aux systèmes linéaires ou linéarisables autour d'un point d'équilibre. Cependant, l'étude réalisée avec notre approche nous a permis de généraliser et d'extrapoler de façon analytique et méthodique

les études précédentes sur la passivité des systèmes à un bras flexible et tournant dans le plan horizontal.

La loi de commande passive présentée au chapitre 8 assure la convergence asymptotique globale de la dynamique de l'erreur. Cependant, une linéarisation au sens entrée-sortie du modèle non linéaire était nécessaire pour démontrer la passivité. C'est donc une passification par linéarisation. L'inconvénient de la linéarisation est que la loi de commande dépend de l'état du système. Elle nécessite donc la mesure ou l'estimation de cet état. La loi de commande n'est pas robuste vis-à-vis des incertitudes dans le modèle ou dans la charge.

Dans cette thèse, l'analyse des systèmes mécaniques à un bras flexible et le design d'une loi de commande passive ont été étudiés. Cependant, il reste que plusieurs extensions de recherche peuvent être relevées. Quelques recherches possibles peuvent être suggérées :

1. L'analyse d'autres types de contrôleurs strictement passifs dans le cas du système tournant dans le plan horizontal. Cette analyse sera fortement suggérée surtout que le modèle est linéaire.
2. La considération des incertitudes qui concernent le modèle, y inclus la charge, est d'une grande importance étant donné que d'un point de vue pratique, les paramètres d'un modèle ne peuvent jamais être connus parfaitement.
3. La démonstration de la passivité du système non linéaire sans avoir recours à la linéarisation entrée-sortie est souhaitable surtout dans le cas analytique. Ceci permettra de concevoir un contrôleur (purement) de sortie.
4. Une expérimentation des résultats présentés dans cette thèse serait souhaitable.
5. L'étude de la passivité de certaines classes de systèmes à plusieurs bras flexibles et la généralisation de la méthode développée pour un bras seraient encore intéressant à traiter.

Bibliographie

[1] AOUSTIN, Y., CHEVALLEREAU, C., GLUMINEAU, A., et MOOG, C.H. (1994). Experimental Results for the End-Effector Control of a Single Flexible Robotic Arm. IEEE Trans. Cont. Systs. Tech., 2, 4, 371-381.

[2] AOUSTIN, Y. et CHEVALLEREAU, C. (1993). The Singular Perturbation Control of a Two-Flexible-Link Robot. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automation, 737-742.

[3] ASADA, H. et MA, Z.D. (1989). Inverse Dynamics of Flexible Robots. Proc. American Control Conference, 2352-2359.

[4] ATA, A. et ELKHOGA, S. (1998). Effect of Tip Mass and Actuator Inertia on the Behavior of a Flexible Arm Robot. Proc. 1998 IEEE Int. Conf. Intelligent Robot and Systems, 502-507.

[5] BALABANIAN, N. et BICKART, T. (1969). Electrical Network Theory, John Wiley & Sons.

[6] BARBIERI, E. et ÖZGUNER, U. (1988). Unconstrained and Constrained Mode Expansions for a Flexible Slewing Link. Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Meas. Cont., 416-421.

[7] BAYO, E. (1988). Computed Torque for the Position Control of Open-Chain Flexible Robots. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automation, 316-321.

[8] BAYO, E., PAPADOPOULOS, P., STUBBE, J. et SERNA, M.A. (1989). Inverse Dynamics Kinematics of Multi-Link Elastic Robots : An Alternative Fre-

quency Domain Approach. Int. J. of Robotics Research, 49-62.

[9] BAYO, E. et MOULIN, H. (1989). An Efficient Computation of the Inverse Dynamics of Flexible Manipulators in the Time Domain, Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automation, 710-715.

[10] BAYO, E. (1987). A Finite-Element Approach to Control the End-Point Motion of a Single-Link Flexible Robot. J. Robotic Systems, 4, 1, 63-75.

[11] BIGRAS, P., SAAD, M. et O'ShEA, J., 2001. Robust Trajectory Tracking in the Workspace of a Class of Flexible Robots, J. Robotic Systems, 18, 6, 275-288.

[12] BOOK, W. et OBERGFELL, K. (2000). Practical Models for Practical Flexible Arms. Proc. of the 2000 IEEE International Conf. Robotics & Automation, 835-842.

[13] BOOK, W. (1993). Controlled Motion in an Elastic Word. Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Cont., 115, 252-261.

[14] BOOK, W. (1984). Recursive Lagragian Dynamics of Flexible Manipulator Arms. Int. J. Robotics Research, 87-101.

[15] BOYER, F., GLANDAIS, N. et KHALIL, W. (2002). Flexible Multi-body Dynamics Based on a Non-Linear Euler-Bernoulli Kinematics. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 54, 27-59.

[16] BYRNES, C., ISIDORI, A. et WILLEMS, J.C. (1991). Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of minimum Phase Nonlinear Systems. IEEE Trans. Automatic Control, 36, 11, 1228-1240.

[17] CANNON, R.H. et SCHMITZ, E. (1984). Initial Experiments on The End-Point Control of a Flexible One-Link Robot. Int. J. Robotics Research, 62-75.

[18] CETINKUNT, S. et WU, S. (1990). Tip Positon Control of a Flexible One-Arm Robot with Predictive Adaptive Output Feedback Implemented with Latice Filter Parameter Identifier. Computers and Strucutres, 36, 3, 492-441.

[19] CETINKUNT, S. et YU, S. (1991). Closed-Loop Behavior of a Feedback-Controlled Flexible Arm : A Comparative Study. Int. J. Robotics Research, 10, 3, 263-275.

[20] CHEN, C.H. et MENQ, J.S. (1990). Experiments on the Payload-Adaptation of a Flexible One-Link Manipulator with Unknown Payload. IEEE Conf. Robotics and Automation, 1614-1619.

[21] CHEN, C.H. et MENQ, J.S. (1999). Dynamic Modeling and Payload-Adaptive Control of a Flexible Manipulator. IEEE Conf. Robotics and Automation, 488-494.

[22] CHEN, D. et PADEN, B. (1996). Stable Inversion of Non-Minimum Phase Systems. Int. J. Control, 64, 1, 81-97.

[23] CHO, K., HORI, N. et ANGELES, J. (1991). On the Controllability and Observability of Flexible Beams Under Rigid-Body Motion. IEEE IECON, 455-460.

[24] CHODAVARAPU, P.A., SPONG, W. (1996). On Noncollocated Control of a Single Flexible Link. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 1101-1106.

[25] CRAIG, J. (1989). Introduction to Robotics : Mechanics and Control, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company.

[26] DANCOSE, S., ANGELES, J. et HORI, N. (1989). Optimal Vibration Controlof a Rotating Flexible Beam. ASME Conf. Diagnostics, Vehile Dynamics and Special Topics, 259-264.

[27] De QUEIROZ, M.S., AGARWAL, D.M., ZHANG, F. (1999). Adaptive Nonlinear Boundary Control of a Flexible Link Robot Arm. IEEE Trans. Robotics and Automation, 15, 4, 779-787.

[28] DEVASIA, S., CHEN, D. et PADEN, B. (1996). Nonlinear Inversion-Base Output Tracking. IEEE Trans. Automatic Control, 41, 7, 930-942.

[29] DE LUCA, A. et SICILIANO, B. (1989). Closed-Form Dynamic Model of Planar Multilink Lightweight Robots. IEEE Trans. Syst. Man Cyber., 21, 4, 826-839.

[30] DE LUCA, A. et SICILIANO, B. (1988). Joint-Based Control of a Nonlinear Model of a Flexible Arm. Proc. American Control Conf., Boston, 935-940.

[31] DESOER, C. A. et VIDYASAGAR, M. (1975). Feedback Systems : Input-Output Properties. Academic Press.

[32] FELIU, J.J., FELIU, V. et CERRADA, C. (1999). Load Adaptive Control of Single-Link Flexible Arms BAsed on a New Modeling Technique. IEEE Trans. Robotics and Automation, 15, 5, 793-804.

[33] GERALD, C.F., WHEATLEY, P.O. (1994). Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley Publishing Company.

[34] GEVARTER, W.B., (1970). Basic Relation for Control of Flexible Vehicles. AIAA Journal, 30, 4, 666-672.

[35] HILL, D. et MOYLAN, P. (1976). Stability of Nonlinear Dissipative Systems. IEEE Trans. Automatic Control, AC21, 708-711.

[36] HILL, D. et MOYLAN, P. (1980). Connection Between Finite Gain and Asymptotic Stabitily. IEEE Trans. Automatic Control, AC25, 931-936.

[37] HILL, D. et MOYLAN, P. (1980). Dissipative Dynamical Systems : Basic Input-Output and State Properties. Journal of Franklin Institute, 309, 327-357.

[38] HUGHES, P.C. (1987). Space Strucutre Vibration Modes : How Many Exit? Which Ones Are Important?. IEEE Control System Magazine, 22-28.

[39] JONKER, B. (1990). A Finite Element Dynamic Analysis of Flexible Manipulators. Int. J. Robotics Research, 9, 4, 59-74.

[40] JUNKINS, J.L., et KIM, Y. (1993). Introduction to Dynamics and Control of Flexible Strucutre. AIAA Education Series Publishers.

[41] KELEMEN, M. et BAGCHI, B. (1993). Modeling and Feedback Control of a Flexible Arm of a Robot for Prescribed Frequency Domain Tolerances. Automatica, 29, 4, 899-909.

[42] KHALIL, H. (1996). Nonlinear Systems, 2nd Edition, Prentice Hall, 400-450.

[43] MOALLEM, M., PATEL, R.V. et KHARASANI, K. (2000). Flexible-Link Robot Mmanipulators, Springer-Verlag.

[44] KOPACEK, P. et DESOYER, K. et LUGNER, P. (1988). Modeling of Flexible Robots–An Introduction. IFAC Robot Control, 21-28.

[45] KWON, D.S. et BOOK, W. (1990). An Inverse Dynamic Mehtod Yielding Flexible Manipulator State Trajectories. Proc. of American Control Conf., 186-193.

[46] KWON, D.S. et BOOK, W. (1994). A Time-Domain Inverse Dynamic Tracking Control of a Single-Link Flexible Manipulator. Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Cont., 116, 193-200.

[47] LAMMERTS, I.M.M., VELDPAUS, F.E., VAN DE MOLENGRAFT, M.J.G. et KOK, J.J. (1995). Adaptive Computed Reference Computed Torque Control of Flexible Robots. Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Cont., 117, 31-36.

[48] LANCASTER, P. et TISMENETSKY, M. (1985). The Theory of Matrices, Academic Press.

[49] LEWIS, F.L. et VANDEGRIFT, M. (1993). Flexible Robot Arm Control by a Feedback Linearization/Singular Parturbation Approach. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics Automation, 729-736.

[50] LI, D., ZU, J. W. et GOLDENBERG, A. A. (1998). Dynamic Modeling and Mode Analysis of Flexible-Link, Flexible-Joint Robots. Mechanism and Machine Theory, 33, 7, 1031-1044.

[51] LI, D. (1994). Nonlinear Control Design for Tip Position Tracking of a Flexible Manipulator Arm. Int. J. of Control, 60, 6, 1065-1082.

[52] LUCIBELLO, P. et DI BENEDETTO, M.D. (1993). Output Tracking for a Nonlinear Flexible Arm. Trans. ASME J. Dyn. Syst. Meas. Cont., 115, 78-85.

[53] LOW, K.H. (1987). A Systematic Formulation of Dynamic Equations for Robot Manipulators with Elastic Links. J. Robotic Systems, 4, 3, 435-567.

[54] LOW, K.H. et VIDYASAGAR, M. (1990). A Lagrangian Formulation of the Dynamic Model for Flexible Manipulator Systems. Trans. ASME J. Dyn. Meas. Syst. Cont., 110, 175-181.

[55] MEIROVITCH, L. et SILVERBERG, L.M. (1983). Two Bracketing Theorems Characterizing the Eigensolution for the h-Version of the Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19, 1691-1704.

[56] MEIROVITCH, L. (1986). Element of Vibration Analysis, McGraw-Hill.

[57] MEIROVITCH, L. (1980). Computational Methods in Structural Dynamics, Sijthoff & Noordhoff.

[58] MEIROVITCH, L. (1967). Analytical Methods in Vibrations, MacMillan.

[59] MEIROVITCH, L. et KWAK, M.K. (1990). Convergence of the Classical Rayleigh-Ritz Method and the Finite Element Method. AIAA Journal, 28, 8, 1509-1516.

[60] MENQ, C.H. et CHEN, J.S. (1988). Dynamic Modeling and Payload-Adaptive Control of a Flexible Manipulator. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 488-493.

[61] MOALLEM, M., PATEL, R.V. et KHORASANI, K. (2002). Nonlinear Tip-Position Tracking Control of a Flexible-Link Manipulator : Theory and Experiments. Automatica, 37, 11, 1825-1834.

[62] NICOSIA, s., VALIGI, P. et ZACCARIAN, L. (1996). Dynamic Modelling of a Two Link Flexible Robot and Experimental Validation. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 1953-1958.

[63] ORTEGA, R., NICKLASSON, P.J. et SIRA-RAMIREZ, H. (1998). Passivity-Based Control of Euler-Lagrange Systems : Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications, Springer-Verlag.

[64] PARKS, T.R. et PAK, H.A. (1991). Effect of Payload on the Dynamics of a Flexible Manipulator - Modeling for Control. Trans. of the ASME Journal of Dynamic Systems Measurment and Control, 113, 409-418.

[65] PFEIFFER, F. et KLEEMANN, U. (1989). Elasticity and Vibration Control for Manipulator. Proc. IEEE Conf. Control and Applications, TA-3-2, 1-7.

[66] PIEDBŒUF, J.C. (2001). Six Methods to Model a Flexible Beam Rotating in the Vertical Plane. Proc. of the 2001 IEEE Int. Conf. on Robotics & Automation, 2832-2839.

[67] PIEDBŒUF, J.C. (1998). Recursive Modeling of Serial Flexible Manipulators. Journal of the Astronautical Sciences, 47, 1, 1-24.

[68] PIEDBŒUF, J.C. (1996). Modelling of Flexible Robots with Maple. The Maple Technical Newsletter, 3, 1, 38-47.

[69] PIEDBŒUF, J.C. (1992). Introduction à la modélisation des robots flexibles. Rapport interne, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[70] PIEDBŒUF, J.C., DOCHAIN, D., HURTEAU, R. et BENAMEUR, K. (1991). Optimal Control of the Tip of a Flexible Beam. Congrès canadien en génie électrique et informatique, 73.2.1-73.2.4

[71] PIEDBŒUF, J.C. (1989). Étude du modèle non-linéaire d'un manipulateur avec une membrure flexible. Thèse de Doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[72] POTA, H.R. et VIDYASAGAR, M. (1991). Passivity of Flexible Beam Transfer Function with Modified Outputs. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 2826-2831.

[73] ROSSI, M., WANG, D. (1996). Hybrid Passive/Adaptive Control of a Single Flexible Link Manipulator with a Payload. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 2109-2116.

[74] SAAD, M., PIEDBŒUF, J.C., Akhrif, O., et Saydy, L. (2000-A). Shape Function Comparison for a Flexible Slewing Beam Model. Int. Symposium on Robotics and Automation, Monterrey, N.L., Mexico, 10-12.

[75] SAAD, M., SAYDY, L. et AKHRIF, O. (2000-B). Noncollocated Passive Transfer Functions for a Flexible Link Robot. IEEE Int. Conf. on Control Applications, Alaska, USA, 971-975.

[76] SAAD, M., SAYDY, L. et AKHRIF, O. (2000-C). Passivity-Based Control of a Flexible Link Robot. Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, Halifax, NS, Canada, 118-123.

[77] SAAD, M., SAYDY, L. et AKHRIF, O. (2000-D). Robust Noncollocated Passive Models of a Flexible Link with Uncertain Payload and Joint Inertia. 7th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, Kaslik, Lebanon, 713-717.

[78] SAKAWA, Y., MATSUNO, F. et FUKUSHIMA, S. (1985). Modeling and Feedback Control of a Flexible Arm. J. Robotic Systems, 2, 4, 453-472.

[79] SAYDY, L., TITS, A.L. et ABED, E.H. (1990). Guardian Maps and the Generalized Stability of Parameterized Families of Matrices and Polynomials. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 3, 345-371.

[80] Sepulchre, Rodolphe (1997). Constructuve Nonlinear Control. Springer-Verlag, New York, N.Y.

[81] SERNA, M.A. et BAYO, E. (1989). A Simple and Efficient Computational Approach for the Forward Dynamics of Elastic Robots. J. Robotic Systems, 6,

4, 363-382.

[82] SICILIANO, B. et BOOK, W.J. (1990). A Singular Perturbation Approach to Control a Light Weight Flexible Manipulator. Int. J. Robotics Research, 79-90.

[83] SICILIANO, B., YUAN, B.S. et BOOK, W.J. (1986). Model reference Adaptive Control of a One Link Flexible Arm. Proc. Conf. Decision and Control, 91-95.

[84] SLOTINE, J.J., LI, W. (1987). On the Adaptive Control of Robot Manipulators. Int. J. Robotics Research, 6, 3, 49-59.

[85] SLOTINE, J.J., LI W. (1991). Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall Publishers.

[86] STRANGE, W.G., FIX, G.J. (1973). An analysis of the finite element method, Prentice-Hall Publishers.

[87] SUNDARARAJAN, N., LAI, K.Y. et LEE, K.C. (1992). Modeling and Control of Flexible Robotic Manipulators. Proc. Int. Conf. on Automation, Robotics and Computer Vision, RO-3.6.1-RO-3.6.8.

[88] TALEBI, H.A., KHORASANI, K. et PATEL, R.V (1999). Experimental Results on Traking Control of a Flexible-Link Manipulator : A New Output Redefinition Approach. Proc. 1999 IEEE Int. Conf. on Robotics & Automation, 1090-1095.

[89] THEODORE, R. et GHOSAL, A. (1995). Comparison of the Assumed Modes and Finite Element Models for Flexible Multilink Manipulators. International Journal of Robotics Research, 14, 2, 91-111.

[90] TOKHI, M.O. et MOHAMED, Z. (1999). Finite Element Approach to Dynamic Modelling of a Flexible Robot Manipulator : Performance Evaluation and Computational Requirements. Communications in Numerical Methods in Engineering, 15, 669-678.

[91] TORBY, B.J. et KIMURA, I. (1999). Dynamic Modeling of a Flexible Manipulator With Prismatic Link. J. Dynamic System, Measurement, and Control, 121, 691-696.

[92] TRUCKENBRODT, A. (1980). Programmsystem Splin-Erzeugung Von Splineansatzfunktionen für Hybride Mehrkörpersysteme. Rapport interne, Technische Universität München, Allemagne.

[93] WATKINS, D.S. (1991). Fundamentals of Matrix Computations, John Wiley and Sons Publishers.

[94] WANG, D. et VIDYASAGAR, M. (1991). Transfer Functions for a Single Flexible Link. Int. Journal of Robotics Research, 10, 5, 540-549.

[95] WANG, D., VIDYASAGAR, M. (1990). Passive Control of a Single Flexible Link. Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 1432-1437.

[96] WILLEMS, J.C. (1972). Dissipative Dynamical Systems - Part I : General Theory. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 45, 321-351.

[97] XIA, Z. et MENQ, C.H. (1992). Modeling and Control of Flexible Manipulators : Part I - Dynamic Analysis and Characterization. AMD, ASME, Dynamics of Flexible Multibody Systems : Theory and Experiment, 141, 105-114.

[98] YANG, H., KRISHNAN, H. et YANG, M.H. (2000). Tip-Trajectory Tracking Control of Single-Link Flexible Robots bY Output redefinition. IEE Proceedings-Control Theory Applications, 147, 6, 580-587.

[99] YIGIT, A. (1994). On the Stability of PD Control for a Two-Link Rigid-Flexible Manipulator. Trans. ASME , J. Dyn. Syst. Meas. Cont., 116, 208-215.

[100] YIM, W. (1993). End-Point Trajectory Control, Stabilisation, and Zero Dynamics of a Tree-Link Flexible Manipulator. Proc. IEEE Conf. Robotics Automation, 468-473.

[101] YUAN, B.S., BOOK, W.J. et HUGGINS, J.D. (1993). Dynamics of Flexible Manipulator Arms : Alternative Derivation, Verification, and Characteristics for Control. Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Meas. Cont., 115, 394-404.

[102] YURKOVITCH, S., GARCIA-BENITEZ, E. et WATKINS, J. (1993). Feedback Linearization with Acceleration Feedback for a Two-Link Flexible Manipulator. Proc. American Control Conference, 1360-1365.

[103] ZIARATI, K. (1993). Mise au point d'un contrôleur anticipatif pour un manipulateur flexible, Mémoire de maitrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.

Annexe A

DYNAMIQUE D'UN STSTÈME À UN BRAS FLEXIBLE

A.1 Variationnelle des énergies cinétiques

L'énergie cinétique (3.3) est réécrite ici :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}I_t\dot{\theta}^2 + \dot{\theta}^2\left[\frac{1}{2}\rho\int_0^L v^2\,dx + \frac{1}{2}M_c\,v_L^2 + M_c\,r_c\,v_L\,v_L'\right] \\ &\quad +\dot{\theta}\left[\rho\int_0^L x\,\dot{v}\,dx + M_c(L+r_c)\dot{v}_L + I_p\dot{v}_L'\right] \\ &\quad +\frac{1}{2}\rho\int_0^L \dot{v}^2\,dx + \frac{1}{2}M_c\dot{v}_L^2 + \frac{1}{2}(I_c + M_c\,r_c^2)\dot{v}_L'^2 + M_c\,r_c\dot{v}_L\,\dot{v}_L' \\ &\quad -\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\left[\rho\int_0^L x\int_0^x v'^2\,ds + M_c(L+r_c)\int_0^L v'^2\,dx + M_c\,r_c\,Lv_L'^2\right] \end{aligned} \tag{A.1}$$

où $I_t = I_m + \frac{1}{3}\rho\,L^3 + I_c + M_c(L+r_c)^2$ et $I_p = [I_c + M_c\,r_c(L+r_c)]$. L'énergie cinétique est composée de plusieurs termes. La variationnelle de chacun des termes sera présentée séparément.

$$\begin{aligned} \delta\int_{t1}^{t2}\frac{1}{2}I_t\,\dot{\theta}^2\,dt &= -\int_{t1}^{t2} I_t\,\ddot{\theta}\,\delta\theta\,dt \\ \delta\int_{t1}^{t2}\int_0^L\frac{1}{2}\rho\,\dot{\theta}^2\,v^2\,dx\,dt &= -\int_{t1}^{t2}\int_0^L\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\dot{\theta}\,v^2)\delta\theta\,dx\,dt \\ &\quad +\int_{t1}^{t2}\int_0^L \rho\dot{\theta}^2\,v\,\delta v\,dx\,dt \end{aligned}$$

$$\delta \int_{t1}^{t2} \frac{1}{2} M_c \dot{\theta}^2 v_L^2 \, dt = -\int_{t1}^{t2} M_c \frac{\partial}{\partial t}\left(v_L^2 \dot{\theta}\right) \delta\theta \, dt + \int_{t1}^{t2} M_c \dot{\theta}^2 v_L \, \delta v_L \, dt$$

$$\delta \int_{t1}^{t2} M_c r_c \dot{\theta}^2 v'_L v_L \, dt = -2M_c r_c \int_{t1}^{t2} \frac{\partial(\dot{\theta} v'_L v_L)}{\partial t} \delta\theta \, dt + M_c r_c \int_{t1}^{t2} \dot{\theta}^2 (v'_L \delta v_L + v_L \delta v'_L) dt$$

$$\delta \int_{t1}^{t2} \int_0^L \rho x \dot{\theta} \dot{v} \, dx \, dt = -\int_{t1}^{t2} \int_0^L \rho x \left(\ddot{\theta} \delta v + \ddot{v} \delta\theta\right) dx \, dt$$

$$\delta \int_{t1}^{t2} M_c (L + r_c) \dot{\theta} \dot{v}_L dt = -\int_{t1}^{t2} M_c (L + r_c) \ddot{v}_L \delta\theta \, dt - \int_{t1}^{t2} M_c (L + r_c) \ddot{\theta} \delta v_L \, dt$$

$$\delta \int_{t1}^{t2} I_p \dot{\theta} \dot{v}'_L dt = -I_p \int_{t1}^{t2} (\ddot{v}'_L \delta\theta + \ddot{\theta} \delta v'_L) dt$$

$$\delta \int_{t1}^{t2} \int_0^L \frac{1}{2} \rho \dot{v}^2 dx \, dt = -\int_{t1}^{t2} \int_0^L \rho \ddot{v} \delta v dx \, dt$$

$$\delta \int_{t1}^{t2} \frac{1}{2} M_c \dot{v}_L^2 \, dt = -\int_{t1}^{t2} M_c \ddot{v}_L \delta v_L \, dt$$

$$\delta \int_{t1}^{t2} \frac{1}{2} (I_c + M_c r_c^2) \dot{v}'^2_L \, dt = -(I_c + M_c r_c^2) \int_{t1}^{t2} \ddot{v}'_L \delta v'_L \, dt$$

$$\delta \int_{t1}^{t2} M_c r_c \dot{v}'_L \dot{v}_L dt = -M_c r_c \int_{t1}^{t2} (\ddot{v}_L \delta v'_L + \ddot{v}'_L \delta v_L) dt$$

$$\delta \int_{t1}^{t2} \int_0^L -\frac{1}{2} \rho x \dot{\theta}^2 \left(\int_0^x v'^2 \, ds\right) dx \, dt =$$
$$\frac{1}{2} \rho \int_{t1}^{t2} \int_0^L (L^2 - x^2) \frac{\partial(\dot{\theta} v'^2)}{\partial t} \delta\theta \, dx dt$$
$$-\frac{1}{2} \rho \int_{t1}^{t2} \dot{\theta}^2 \left[(L^2 - x^2) v' \, \delta v \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left[(L^2 - x^2) v'\right] \delta v \, dx \right] dt$$

$$\delta \int_{t1}^{t2} -\frac{1}{2} M_c (L + r_c) \dot{\theta}^2 \int_0^L v'^2 \, dx \, dt = \int_{t1}^{t2} \int_0^L M_c (L + r_c) \frac{\partial(\dot{\theta} v'^2)}{\partial t} \delta\theta \, dx \, dt$$
$$- \int_{t1}^{t2} M_c (L + r_c) \dot{\theta}^2 v' \, \delta v \Big|_0^L + \int_{t1}^{t2} \int_0^L M_c (L + r_c) \dot{\theta}^2 v'' \, \delta v \, dx \, dt$$

$$\delta \int_{t1}^{t2} -\frac{1}{2} M_c r_c L \dot{\theta}^2 v'^2_L \, dt = M_c r_c L \int_{t1}^{t2} \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\theta} v'^2_L) \delta\theta \, dt - M_c r_c L \int_{t1}^{t2} \dot{\theta}^2 v'_L \, \delta v'_L \, dt$$

A.2 Variationnelle des énergies potentielles

L'énergie potentielle (3.4) est réécrite ici :

$$V = \int_0^L \frac{1}{2} E I_z v''^2 \, dx - \rho g \cos\theta \int_0^L \left(x - \frac{1}{2} \int_0^x v'^2 ds\right) dx + \rho g \int_0^L v \, \sin\theta \, dx$$

$$-M_c\,g\cos\theta\left[(L+r_c)-\frac{1}{2}\int_0^L v'^2dx-\frac{1}{2}r_c\,v_L'^2\right]$$
$$+M_c\,g\,(v_L+r_c v_L')\sin\theta \qquad (A.2)$$

La variationnelle de chacun de ses termes est donnée par :

$$\delta\int_{t1}^{t2}\int_0^L\frac{1}{2}EI_z\,v''^2\,dx\,dt = \int_{t1}^{t2}[EI_z v''\,\delta v']_0^L\,dt-\int_{t1}^{t2}[EI_z v'''\,\delta v]_0^L\,dt+\int_{t1}^{t2}\int_0^L EI_z v''''\,\delta v\,dx\,dt$$

$$\delta\int_{t1}^{t2}\int_0^L-\rho\,g\,x\,\cos\theta\,dx\,dt = \int_{t1}^{t2}\frac{1}{2}\rho\,g\,L^2\,\sin\theta\,\delta\theta\,dt$$

$$\delta\int_{t1}^{t2}\int_0^L\frac{1}{2}\rho\,g\,\cos\theta\left(\int_0^x v'^2\,ds\right)dx\,dt =$$
$$-\int_{t1}^{t2}\int_0^L\frac{1}{2}\rho\,g\,(L-x)\sin\theta\,v'^2\,\delta\theta\,dx\,dt$$
$$+\int_{t1}^{t2}\rho\,g\,\cos\theta\left[(L-x)v'\,\delta v|_0^L-\int_0^L\frac{\partial}{\partial x}[(L-x)v']\,\delta v\right]dx\,dt$$
$$=\int_{t1}^{t2}\rho\,g\,\cos\theta\left[(L-x)v'\,\delta v|_0^L-\int_0^L\frac{\partial}{\partial x}[(L-x)v']\,\delta v dx\right]dt$$

$$\delta\int_{t1}^{t2}\int_0^L\rho\,g\,v\,\sin\theta\,dx\,dt = \int_{t1}^{t2}\int_0^L\rho\,g\,(\sin\theta\,\delta v+v\,\cos\theta\,\delta\theta)\,dx\,dt$$
$$\delta\int_{t1}^{t2}-M_c\,g(L+r_c)\cos\theta\,dt = \int_{t1}^{t2}M_c\,g(L+r_c)\sin\theta\,\delta\theta\,dt$$
$$\delta\int_{t1}^{t2}\frac{1}{2}M_c\,g\,\cos\theta\int_0^L v'^2dx\,dt = \int_{t1}^{t2}M_c\,g\,\cos\theta\left[v'\,\delta v|_0^L-\int_0^L v''\,\delta v\,dx\right]dt$$
$$\delta\int_{t1}^{t2}M_c\,g\,v_L\,\sin\theta\,dt = \int_{t1}^{t2}M_c\,g[v_L\,\cos\theta\,\delta\theta+\sin\theta\,\delta v_L]\,dt$$
$$\delta\int_{t1}^{t2}\frac{1}{2}M_c\,g\,r_c\,\cos\theta v_L'^2\,dt = M_c\,g\,r_c\int_{t1}^{t2}\cos\theta\,v_L'\,\delta v_L'\,dt$$
$$\delta\int_{t1}^{t2}M_c\,g\,r_c\,\sin\theta\,v_L'\,dt = M_c\,g\,r_c\int_{t1}^{t2}(\sin\theta\,\delta v_L'+v_L'\,\cos\theta\,\delta\theta)\,dt$$

A.2.1 Équation de mouvement associée à l'angle moteur

$$0 = \int_{t1}^{t2}T_m\,\delta\theta\,dt-\int_{t1}^{t2}\left(I_m+\frac{1}{3}\rho\,L^3+I_c+M_c(L+r_c)^2\right)\ddot{\theta}\,\delta\theta\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_{t1}^{t2} \left[\int_0^L \rho\, x\, \ddot{v} dx + M_c\,(L + r_c)\ddot{v}_L + (I_c + M_c\, r_c(L + r_c))\ddot{v}'_L \right] \delta\theta dt \\
&-\rho \int_{t1}^{t2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v^2)\delta\theta\, dx\, dt + \frac{1}{2}\rho \int_{t1}^{t2} \int_0^L (L^2 - x^2)\frac{\partial(\dot{\theta} v'^2)}{\partial t}\delta\theta\, dx dt \\
&-M_c \int_{t1}^{t2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\theta} v_L^2\right)\delta\theta\, dx dt + \int_{t1}^{t2} \int_0^L M_c(L + r_c)\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v'^2)\delta\theta\, dx\, dt \\
&-2M_c\, r_c \int_{t1}^{t2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v'_L\, v_L)\delta\theta\, dx dt + M_c\, r_c\, L \int_{t1}^{t2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v'^2_L)\delta\theta\, dx dt \\
&- \int_{t1}^{t2} \left(\frac{1}{2} g\rho\, L^2 + M_c\, g(L + r_c)\right) \sin\theta \delta\theta\, dt \\
&- \left(\int_0^L \rho\, g\, v dx + M_c\, g(v_L + r_c\, v'_L) \right) \cos\theta \delta\theta\, dt
\end{aligned}
$$

$\delta\theta$ est arbitraire, alors

$$
\begin{aligned}
T_m = &\left(I_m + \frac{1}{3}\rho\, L^3 + I_c + M_c(L + r_c)^2\right)\ddot{\theta} \\
&+ \int_0^L \rho\, x\, \ddot{v} dx + M_c\,(L + r_c)\ddot{v}_L + (I_c + M_c\, r_c(L + r_c))\ddot{v}'_L \\
&+ \left(\frac{1}{2} g\rho\, L^2 + M_c\, g(L + r_c)\right)\sin\theta + \left(\int_0^L \rho\, g\, v dx + M_c\, g(v_L + r_c\, v'_L) \right)\cos\theta \\
&+\rho \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v^2)\, dx + M_c \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\theta}\, v_L^2\right) dx + 2M_c\, r_c \int_0^L \frac{\partial(\dot{\theta}\, v'_L\, v_L)}{\partial t} dx \\
&-\frac{1}{2}\rho \int_0^L (L^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta} v'^2) dx - \int_0^L M_c(L + r_c)\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v'^2) dx \\
&-M_c\, r_c\, L \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v'^2_L) dx
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

A.2.2 Équation de mouvement associée à la déformation

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; &- \int_{t1}^{t2} \int_0^L \rho(\ddot{v} + x\,\ddot{\theta})\delta v dx\, dt - \int_{t1}^{t2} \int_0^L EI_z v'''' \,\delta v\, dx\, dt \\
&+ \int_{t1}^{t2} \int_0^L \dot{\theta}^2 \left(\rho v + M_c(L + r_c)v'' + \frac{1}{2}\rho \frac{\partial}{\partial x}\left[(L^2 - x^2)v'\right] \right) \delta v\, dx\, dt \\
&+ \int_{t1}^{t2} \int_0^L \cos\theta \left(\rho\, g \frac{\partial}{\partial x}\left[(L - x)v'\right] + M_c\, g\, v'' \right) \delta v dx\, dt \\
&- \int_{t1}^{t2} \int_0^L \rho\, g \sin\theta\, \delta v dx\, dt
\end{aligned}
$$

δv est arbitraire, l'équation de mouvement associée à la déformation devient alors

$$0 = -\rho(\ddot{v} + x\,\ddot{\theta}) - EI_z v'''' + \dot{\theta}^2 \rho v - \rho\, g \sin\theta + \tag{A.4}$$
$$\dot{\theta}^2 \left(M_c(L + r_c)v'' + \frac{1}{2}\rho \frac{\partial}{\partial x}\left[(L^2 - x^2)v'\right] \right) + g\cos\theta \left(\rho \frac{\partial}{\partial x}\left[(L - x)v'\right] + M_c\, v'' \right)$$

A.2.3 Conditions aux frontières

Pour obtenir les CF, nous regroupons les termes dépendant des CF (i.e. $x = 0$, $x = L$), soit

$$\begin{aligned}
0 \;=\; & -\frac{1}{2}\rho \int_{t1}^{t2} \dot{\theta}^2\,(L^2 - x^2)v'\,\delta v\Big|_0^L\,dt + \int_{t1}^{t2} M_c\,\dot{\theta}^2\,v_L\,\delta v_L\,dt - \int_{t1}^{t2} M_c \ddot{v}_L\,\delta v_L\,dt \\
& - \int_{t1}^{t2} M_c\,L\,\ddot{\theta}\,\delta v_L\,dt - \int_{t1}^{t2} M_c\,L\,\dot{\theta}^2\,v'\,\delta v\Big|_0^L\,dt + M_c\,r_c \int_{t1}^{t2} \dot{\theta}^2 v'_L \delta v_L\,dt \\
& - M_c\,r_c \int_{t1}^{t2} \ddot{\theta}\,\delta v_L dt - M_c\,r_c \int_{t1}^{t2} \dot{\theta}^2 v' \delta v\Big|_0^L\,dt - M_c\,r_c \int_{t1}^{t2} \ddot{v}'_L\,\delta v_L dt \\
& + \int_{t1}^{t2} [EI_z v'''\,\delta v]_0^L\,dt - \int_{t1}^{t2} \rho\, g\,\cos\theta\,(L - x)v'\,\delta v\Big|_0^L\,dt - \int_{t1}^{t2} M_c\, g\,\cos\theta\,v'\,\delta v\Big|_0^L\,dt \\
& - \int_{t1}^{t2} M_c\, g \sin\theta\,\delta v_L\,dt - \int_{t1}^{t2} I_c(\ddot{\theta} + \ddot{v}'_L)\,\delta v'_L\,dt - M_c\,r_c^2 \int_{t1}^{t2} \ddot{\theta}\,\delta v'_L dt \\
& - M_c\,r_c^2 \int_{t1}^{t2} \ddot{v}'_L\,\delta v'_L\,dt + M_r\,r_c \int_{t1}^{t2} \dot{\theta}^2 v_L\,\delta v'_L dt - M_c\,r_c\,L \int_{t1}^{t2} \ddot{\theta}\,\delta v'_L dt \\
& - M_c\,r_c \int_{t1}^{t2} \ddot{v}_L\,\delta v'_L dt - M_c\,r_c\,L \int_{t1}^{t2} \dot{\theta}^2\,v'_L\,\delta v'_L\,dt - \int_{t1}^{t2} [EI_z v''\,\delta v']_0^L\,dt \\
& - M_c\,g\,r_c \int_{t1}^{t2} \cos\theta\,v'_L\,\delta v'_L\,dt - M_c\,g\,r_c \int_{t1}^{t2} \sin\theta\,\delta v'_L dt
\end{aligned}$$

Les CF sont compatibles avec la configuration. Le bras est encastré à la base, i.e. $v_0 = 0$ et $v'_0 = 0$, et δv_L et $\delta v'_L$ sont arbitraires. D'où les CF :

$$v_0 = 0, \quad v'_0 = 0 \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
EI_z v'''_L \;=\; & M_c(L\,\ddot{\theta} + \ddot{v}_L) + M_c\,r_c(\ddot{\theta} + \ddot{v}'_L) - M_c\,\dot{\theta}^2(v_L + r_c v'_L) \\
& + M_c(L + r_c)\dot{\theta}^2 v'_L + M_c\,g\,v'_L\cos\theta + M_c\,g\sin\theta
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
-EI_z v''_L \;=\; & (I_c + M_c\,r_c^2)(\ddot{\theta} + \ddot{v}'_L) + M_c\,r_c(L\ddot{\theta} + \ddot{v}_L) \\
& - M_r\,r_c\dot{\theta}^2(v_L + r_c v'_L) + M_c\,r_c(L + r_c)\dot{\theta}^2\,v'_L \\
& + M_c\,g\,r_c\cos\theta\,v'_L + M_c\,g\,r_c\sin\theta
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Annexe B

FONCTIONS DE FORME D'UN BRAS AVEC CHARGE

Cette annexe présente la solution du problème aux valeurs propres (PVP) d'un système à un bras flexible ayant une charge à son extrémité. Rappelons que les déformations sont supposées dans le plan. Le bras est modélisé comme une poutre d'Euler-Bernouilli et les déformations sont supposées petites. Le bras est supposé uniforme et tous les paramètres du système sont supposés constants. Le moteur, d'inertie I_m, génère un couple τ et tourne d'un angle $\theta(t)$. Le bras flexible a une masse par unité de longueur ρ, une rigidité EI_z et une longueur L. La charge a une masse M_c, une inertie I_c et la distance entre l'extrémité du bras et le centre de masse de la charge est r_c. La déformation du bras est $v(x,t)$. Pour simplifier, x et t seront ôtés ultérieurement.

B.1 Génération des Fonctions propres

B.1.1 Modèle continu

Le modèle continu consiste en une ÉDO pour le moteur et une ÉDP associée avec quatre CF pour le bras flexible. L'équation du moteur est (3.9) :

$$\begin{aligned}\tau &= \left(I_m + \frac{1}{3}\rho L^3 + I_c + M_c(L+r_c)^2\right)\ddot{\theta} + \int_0^L \rho\, x\, \ddot{v}\, dx \\ &\quad + M_c(L+r_c)\ddot{v}_L + (I_c + M_c r_c(L+r_c))\ddot{v}'_L + b_m\dot{\theta} \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}\rho\, g\, L^2 + M_c\, g\,(L+r_c)\right]\sin\theta + \left[\int_0^L \rho\, g\, v dx + M_c\, g\,(v_L + r_c\, v'_L)\right]\cos\theta \\ &\quad + \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\rho\dot{\theta}\, v^2)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^L \rho(L^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v'^2)\, dx \\ &\quad + M_c\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v_L^2) - M_c(L+r_c)\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta}\, v'^2)\, dx \\ &\quad + 2M_c r_c\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta} v_L v'_L) - M_c L r_c\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\theta} v'^2_L) \end{aligned} \tag{B.1}$$

L'équation de mouvement associée à la déformation v est (3.10) :

$$\begin{aligned} 0 &= -\rho(\ddot{v} + x\,\ddot{\theta}) - EI_z v'''' - \kappa_e\, EI_z \dot{v}'''' \\ &\quad + \dot{\theta}^2\left(\rho\, v + M_c[L+r_c]v'' + \frac{1}{2}\rho\left[-2x\, v' + (L^2 - x^2)v''\right]\right) \\ &\quad + g\,\cos\theta\,(\rho[-v' + (L-x)v''] + M_c\, v'') - \rho\, g\sin\theta \end{aligned} \tag{B.2}$$

Les quatre CF sont alors données par (3.11)-(3.12) :

$$\text{à } x = 0 : \quad v_0 = 0 \text{ et } v'_0 = 0 \tag{B.3}$$

$$\text{à } x = L : \quad \begin{cases} E_\kappa I_z\, v'''_L &= M_c(L\ddot{\theta} + \ddot{v}_L) + M_c r_c(\ddot{\theta} + \ddot{v}'_L) - M_c\dot{\theta}^2(v_L + r_c\, v'_L) \\ &\quad + M_c(L+r_c)\dot{\theta}^2 v'_L + M_c\, g\, v'_L\cos\theta + M_c\, g\sin\theta \\ -E_\kappa I_z\, v''_L &= (I_c + M_c r_c^2)(\ddot{\theta} + \ddot{v}'_L) + M_c r_c(L\ddot{\theta} + \ddot{v}_L) \\ &\quad - M_c r_c(v_L + r_c\, v'_L)\dot{\theta}^2 + M_c r_c(L+r_c)v'_L\dot{\theta}^2 \\ &\quad + M_c r_c\, g\,\cos\theta v'_L + M_c r_c\, g\sin\theta \end{cases} \tag{B.4}$$

L'équation d'équilibre des moments d'une section à la base est :

$$\tau + E_\kappa I_z\, v''_0 = I_m\,\ddot{\theta} \tag{B.5}$$

B.1.2 Les fonctions propres

Pour résoudre le PVP homogène, le couple moteur et la gravité sont annulés, ainsi que les frottements sont négligés (i.e. $b_m = 0$ et $E_\kappa I_z = EI_z$). L'équation (B.2) devient :

$$-\rho(\ddot{v} + x\,\ddot{\theta}) - EI_z v'''' = 0 \tag{B.6}$$

L'accélération $\ddot{\theta}$ est remplacée par sa valeur en fonction de v'' à partir de (B.5) et la déformation est discrétisée, soit

$$\ddot{\theta} = \frac{EI_z v_0''}{I_m} \tag{B.7}$$

$$v(x,t) = \phi(x) f(t) \tag{B.8}$$

Substituons (B.7)-(B.8) dans (B.6), nous aurons

$$\frac{EI_z\,\phi'''' + \frac{\rho\, x\, EI_z}{I_m}\phi_0''}{\rho\,\phi} = -\frac{\ddot{f(t)}}{f(t)} = \omega^2 \tag{B.9}$$

qui donne les deux équations différentielles suivantes :

$$\ddot{f} + \omega^2 f = 0 \tag{B.10}$$

$$\phi'''' + \frac{\rho\, x}{I_m}\phi_0'' - \beta^4\,\phi = 0 \tag{B.11}$$

où $\beta^4 = \frac{\rho\omega^2}{EI_z}$. La discrétisation des CF (B.3)-(B.4) donne :

$$0 = \phi_0 \tag{B.12}$$

$$0 = \phi_0' \tag{B.13}$$

$$0 = \phi_L''' - \frac{M_c(L+r_c)}{I_m}\phi_0'' + \frac{M_c}{\rho}\beta^4\phi_L + \frac{M_c r_c}{\rho}\beta^4\phi_L' \tag{B.14}$$

$$0 = \phi_L'' + \frac{I_c + M_c r_c(L+r_c)}{I_m}\phi_0'' - \frac{I_c + M_c\, r_c^2}{\rho}\beta^4\phi_L' - \frac{M_c r_c}{\rho}\beta^4\phi_L \tag{B.15}$$

En utilisant la méthode de Frobenius, les fonctions de forme sont supposées de la forme :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^n \tag{B.16}$$

Les équations (B.11)-(B.13) donnent :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{C_2}{\beta^2}\left(-\cos(\beta x)+\cosh(\beta x)\right)+\frac{3C_3}{\beta^3}\left(-\sin(\beta x)+\sinh(\beta x)\right)\\ &\quad -\frac{\rho C_2}{I_m\beta^5}\left(\sin(\beta x)+\sinh(\beta x)\right)+\frac{2\rho C_2}{I_m\beta^4}x \end{aligned} \tag{B.17}$$

Substituons (B.16) dans (B.14)-(B.15) nous aurons :

$$\begin{aligned}&\left[\frac{M_c\beta^2}{\rho}(-C+Ch)-\frac{M_c}{I_m\beta}(S+Sh)+\beta(-S+Sh)-\frac{\rho}{I_m\beta^2}(-C+Ch)\right.\\ &\qquad\left.-\frac{M_c r_c}{I_m}(C+Ch)+\frac{M_c r_c}{\rho}\beta^3(S+Sh)\right]C_2\\ &+3\left[(C+Ch)+\frac{M_c\beta}{\rho}(-S+Sh)-\frac{M_c r_c}{\rho}\beta^2(C-Ch)\right]C_3=0\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}&\left[(C+Ch)+\frac{\rho}{I_c\beta^3}(S-Sh)-\frac{I_c+M_c r_c^2}{\rho}\beta^3(S+Sh)+\frac{I_c+M_c r_c^2}{I_m}(C+Ch)\right.\\ &\qquad\left.+\frac{M_c r_c}{\rho}\beta^2(C-Ch)+\frac{M_c r_c}{I_m\beta}(S+Sh)\right]C_2\\ &+3\left[\frac{1}{\beta}(S+Sh)+\frac{I_c+M_c r_c^2}{\rho}\beta^2(C-Ch)+\frac{M_c r_c}{\rho}\beta(S-Sh)\right]C_3=0\end{aligned} \tag{B.19}$$

Ici

$$C=\cos\lambda,\quad S=\sin\lambda,\quad Ch=\cosh\lambda,\quad \text{and } Sh=\sinh\lambda$$

Soit

$$\mu_1=\tfrac{I_c}{\rho L^3},\quad \mu_2=\tfrac{M_c}{\rho L},\quad \mu_3=\tfrac{I_m}{\rho L^3},\quad \mu_4=\tfrac{M_c r_c}{\rho L^2},\quad \mu_5=\tfrac{M_c r_c^2}{\rho L^3},\quad \text{et } \lambda=\beta L$$

alors, (B.18)-(B.19) sont réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}&\left[(\mu_2\mu_3\lambda^4-1)(-C+Ch)+(\mu_3\mu_4\lambda^5-\mu_2\lambda)(S+Sh)+\mu_3\lambda^3(-S+Sh)\right.\\ &\qquad\left.-\mu_4\lambda^2(C+Ch)\right]C_2\\ &+3\mu_3 L\lambda^2\left[(C+Ch)+\mu_2\lambda(-S+Sh)+\mu_4\lambda^2(-C+Ch)\right]C_3=0\end{aligned} \tag{B.20}$$

$$\begin{aligned}&\left[(S-Sh)-\mu_3(\mu_1+\mu_5)\lambda^6(S+Sh)+(\mu_1+\mu_3+\mu_5)\lambda^3(C+Ch)\right.\\ &\qquad\left.+\mu_3\mu_4\lambda^5(C-Ch)+\mu_4\lambda^2(S+Sh)\right]C_2\\ &+3\mu_3 L\lambda^2\left[(S+Sh)+(\mu_1+\mu_5)\lambda^3(C-Ch)+\mu_4\lambda^2(S-Sh)\right]C_3=0\end{aligned} \tag{B.21}$$

B.1.2.1 Équation caractéristique

Les équations (B.20)-(B.21) représentent un système d'équation en C_2 et C_3. Elles sont écrites sous la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & 3\mu_3 L \lambda^2 A_{12} \\ A_{21} & 3\mu_3 L \lambda^2 A_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.22}$$

où les entrées $A_{ij}, i = 1, 2$, et $j = 1, 2$ de la matrice A sont facilement identifiables de (B.20) et (B.21). Une solution non triviale est obtenue si le déterminant de la matrice A est nul. Ceci génère l'équation caractéristique suivante :

$$det(\mathbf{A}) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} = 0 \tag{B.23}$$

Cette dernière est résolue pour λ et génère une équation transcendantale ayant une infinité dénombrable de solutions. Les fonctions propres (B.17) sont alors écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \phi_i(x) = A_i \Big[& \mu_3 \lambda_i^3 (\cos(\frac{\lambda_i x}{L}) - \cosh(\frac{\lambda_i x}{L})) + (1 + c_i) \sin(\frac{\lambda_i x}{L}) \\ & + (1 - c_i) \sinh(\frac{\lambda_i x}{L}) - 2\frac{\lambda_i x}{L} \Big] \end{aligned} \tag{B.24}$$

où

$$A_i = -\frac{L^2}{\mu_3 \lambda_i^5} C_{2i}, \quad C_{3i} = -\frac{A_{11}}{A_{12}} C_{2i} = -\frac{A_{21}}{A_{22}} C_{2i} = c_{3i} C_{2i}$$

C_{2i} et C_{3i} sont les valeurs de C_2 et C_3 correspondant à λ_i, et la constante c_i dans (B.24) est donnée par :

$$c_i = 3 L \lambda_i^2 c_{3i} \mu_3$$

B.2 Relations d'orthogonalités

B.2.1 Relation pour $\int_0^L \rho x \phi_i \, dx$

Cherchons tout d'abord une expression pour

$$\int_0^l \rho x \phi_i \, dx \tag{B.25}$$

À partir de (B.11) nous pouvons déduire une expression pour ϕ_i, soit

$$\phi_i = \frac{1}{\beta_i^4}(\phi_i'''' + \frac{\rho x}{I_m}\phi_{i,0}''). \tag{B.26}$$

Substituons (B.26) dans (B.25) et utilisons l'intégration par parties, nous aurons

$$\int_0^l \rho x \phi_i \, dx = \frac{1}{\beta_i^4}(\frac{\rho^2 L^3}{3I_m}\phi_{i,0}'' + \rho L \phi_{i,L}''' - \rho \phi_{i,L}'' + \rho \phi_{i,0}'') \tag{B.27}$$

À partir des CF (B.14)-(B.15), nous aurons une expression pour $\phi_{i,L}'''$ et $\phi_{i,L}''$ telle que :

$$\phi_{i,L}''' = \frac{M_c(L+r_c)}{I_m}\phi_{i,0}'' - \frac{M_c}{\rho}\beta_i^4\phi_{i,L} - \frac{M_c r_c}{\rho}\beta_i^4\phi_{i,L}', \tag{B.28}$$

$$\phi_{i,L}'' = \frac{I_c + M_c r_c^2}{\rho}\beta_i^4\phi_{i,L}' - \frac{I_c + M_c r_c(L+r_c)}{I_m}\phi_{i,0}'' + \frac{M_c r_c}{\rho}\beta_i^4\phi_{i,L}. \tag{B.29}$$

Substituons (B.28)-(B.29) dans (B.27), nous aurons

$$\int_0^l \rho x \phi_i \, dx = \frac{I_t \rho}{I_m \beta_i^4}\phi_{i,0}'' - M_c(L+r_c)\phi_{i,L} - (I_c + M_c r_c(L+r_c))\phi_{i,L}' \tag{B.30}$$

Équation (B.30) peut être encore écrite sous la forme suivante :

$$\int_0^l \rho x \phi_i \, dx + M_c(L+r_c)\phi_{i,L} + (I_c + M_c r_c(L+r_c))\phi_{i,L}' = I_t \frac{EI_z}{I_m \omega_i^2}\phi_{i,0}'' \tag{B.31}$$

où $I_t = I_m + \frac{1}{3}\rho L^3 + I_c + M_c(L+r_c)^2$ est l'inertie totale vue de la base.

B.2.2 Première relation d'orthogonalité

Soit $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel défini par :

$$\mathcal{L}[\phi_i] = \phi_i'''' + \frac{\rho x}{I_m}\phi_{i,0}'' \tag{B.32}$$

Alors,

$$\int_0^l \phi_i \, \mathcal{L}[\phi_j] \, dx = \int_0^l \phi_i \, \phi_j'''' \, dx + \int_0^l \frac{\rho x}{I_m}\phi_i \, \phi_{j,0}'' \, dx \tag{B.33}$$

Utilisons l'intégration par parties, le premier terme à la droite de l'égalité de l'équation précédente est évalué à :

$$\int_0^l \phi_i \, \phi_j'''' \, dx = \phi_{i,L} \, \phi_{j,L}''' - \phi_{i,L}' \, \phi_{j,L}'' + \phi_{i,L}'' \, \phi_{j,L}' - \phi_{i,L}''' \, \phi_{j,L} + \int_0^l \phi_i'''' \, \phi_j \, dx \tag{B.34}$$

En utilisant l'expression de ϕ_i'''' de (B.11), i.e.

$$\phi_i'''' = \beta_i^4\,\phi_i - \frac{\rho x}{I_m}\phi_{i,0}'' \tag{B.35}$$

avec (B.34), équation (B.33) devient

$$\begin{aligned}\int_0^l \phi_i\,\mathcal{L}[\phi_j]\,dx &= \int_0^l \beta_j^4\phi_i\phi_j\,dx \\ &= \int_0^l \frac{\rho x}{I_m}\phi_i\,\phi_{j,0}''\,dx + \int_0^l \beta_i^4\phi_i\,\phi_j\,dx - \int_0^l \frac{\rho\,x}{I_m}\phi_{i,0}''\,\phi_j\,dx \\ &\quad + \phi_{i,L}\phi_{j,L}''' - \phi_{i,L}'\phi_{j,L}'' + \phi_{i,L}''\phi_{j,L}' - \phi_{i,L}'''\phi_{j,L}\end{aligned} \tag{B.36}$$

$\phi_{i,L}'''$ et $\phi_{i,L}''$ sont remplacés par leur expressions (B.14)-(B.15) dans les derniers quatre termes de la dernière équation,

$$\begin{aligned}&\int_0^L \beta_j^4\,\phi_i\,\phi_j\,dx = \\ &\int_0^L \frac{\rho x}{I_m}\,\phi_i\,\phi_{j,0}''\,dx + \int_0^L \beta_i^4\,\phi_i\,\phi_j\,dx - \int_0^L \frac{\rho x}{I_m}\,\phi_{i,0}''\,\phi_j\,dx \\ &+\frac{M_c(L+r_c)}{I_m}\,\phi_{i,L}\,\phi_{j,0}'' - \frac{M_c\beta_j^4}{\rho}\,\phi_{i,L}\,\phi_{j,L} - \frac{M_c r_c\beta_j^4}{\rho}\,\phi_{i,L}\,\phi_{j,L}' \\ &+\frac{I_c + M_c r_c(L+r_c)}{I_m}\,\phi_{i,L}'\,\phi_{j,0}'' - \frac{I_c + M_c r_c^2}{\rho}\beta_j^4\,\phi_{i,L}'\,\phi_{j,L}' - \frac{M_c r_c\beta_j^4}{\rho}\,\phi_{i,L}'\,\phi_{j,L} \\ &+\frac{I_c + M_c r_c^2}{\rho}\beta_i^4\,\phi_{i,L}'\,\phi_{j,L}' - \frac{I_c + M_c r_c(L+r_c)}{I_m}\,\phi_{i,0}''\,\phi_{j,L}' + \frac{M_c r_c\beta_i^4}{\rho}\,\phi_{i,L}\,\phi_{j,L}' \\ &-\frac{M_c(L+r_c)}{I_m}\,\phi_{i,0}''\,\phi_{j,L} + \frac{M_c\beta_i^4}{\rho}\,\phi_{i,L}\,\phi_{j,L} + \frac{M_c r_c\beta_i^4}{\rho}\,\phi_{i,L}'\,\phi_{j,L}\end{aligned} \tag{B.37}$$

Après quelques simplifications, (B.37) donne

$$\begin{aligned}&(\beta_i^4 - \beta_j^4)\left[\int_0^L \phi_i\,\phi_j\,dx + \frac{M_c}{\rho}\phi_{i,L},\phi_{j,L} + \frac{I_c + M_c r_c^2}{\rho}\phi_{i,L}'\phi_{j,L}' + \frac{M_c r_c}{\rho}\phi_{i,L}\,\phi_{j,L}' + \right. \\ &\left.\frac{M_c r_c}{\rho}\phi_{i,L}'\,\phi_{j,L}\right] + \left[\frac{M_c(L+r_c)}{I_m}\phi_{i,L} + \frac{I_c + M_c r_c(L+r_c)}{I_m}\phi_{i,L}'\right]\phi_{j,0}'' \\ &- \left[\frac{M_c(L+r_c)}{I_m}\phi_{j,L} + \frac{I_c + M_c r_c(L+r_c)}{I_m}\phi_{j,L}'\right]\phi_{i,0}'' \\ &+ \int_0^L \frac{\rho x}{I_m}\,\phi_i\,\phi_{j,0}''\,dx - \int_0^L \frac{\rho x}{I_m}\,\phi_{i,0}''\,\phi_j\,dx = 0\end{aligned} \tag{B.38}$$

Les deux dernières intégrales dans (B.38) sont évaluées en utilisant la relation (B.31), nous aurons

$$\frac{1}{I_m}\phi''_{i,0}\int_0^l \rho x\phi_j\,dx = \frac{1}{I_m}\phi''_{i,0}\left[I_t\frac{EI_z}{I_m\omega_j^2}\phi''_{j,0} - M_c(L+r_c)\phi_{j,L} - (I_c+M_cr_c(L+r_c))\phi'_{j,L}\right] \tag{B.39}$$

$$\frac{1}{I_m}\phi''_{j,0}\int_0^l \rho x\phi_i\,dx = \frac{1}{I_m}\phi''_{j,0}\left[I_t\frac{EI_z}{I_m\omega_i^2}\phi''_{i,0} - M_c(L+r_c)\phi_{i,L} - (I_c+M_cr_c(L+r_c))\phi'_{i,L}\right] \tag{B.40}$$

Substituons ces deux équations dans (B.38), nous aurons

$$\frac{(\omega_i^4-\omega_j^4)}{EI_z}\left[\int_0^L \rho\,\phi_i\,\phi_j\,dx + M_c\phi_{i,L}\,\phi_{j,L} + (I_c+M_cr_c^2)\phi'_{i,L}\,\phi'_{j,L}\right.$$

$$\left.+M_cr_c(\phi_{i,L}\,\phi'_{j,L}+\phi'_{i,L}\,\phi_{j,L}) - I_t\frac{EI_z}{I_m\omega_i^2}\phi''_{i,0}\frac{EI_z}{I_m\omega_j^2}\phi''_{j,0}\right] = 0 \tag{B.41}$$

Pour $i \neq j$, $\omega_i \neq \omega_j$. Alors l'expression entre les crochets doit être nulles. Pour $i = j$, $\omega_i = \omega_j$. La constante A_i est choisie de façon que l'expression entre crochets est égale à un. Ceci donne la première relation d'orthogonalité :

$$\int_0^L \rho\,\phi_i\,\phi_j\,dx + M_c\phi_{i,L}\,\phi_{j,L} + (I_c+M_cr_c^2)\phi'_{i,L}\,\phi'_{j,L} + M_c\,r_c(\phi_{i,L}\,\phi'_{j,L}+\phi'_{i,L}\,\phi_{j,L})$$

$$-I_t\frac{EI_z}{I_m\omega_i^2}\phi''_{i,0}\frac{EI_z}{I_m\omega_j^2}\phi''_{j,0} = \delta_{ij} \tag{B.42}$$

où δ est le delta de Kronecker.

B.2.3 Deuxième relation d'orthogonalité

La deuxième relation d'orthogonalité est obtenue en intégrant par parties l'intégrale

$$\int_0^L EI_z\phi''_i\,\phi''_j\,dx. \tag{B.43}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}\int_0^L EI_z\phi''_i\,\phi''_j\,dx &= EI_z\phi'_{i,L}\,\phi''_{j,L} - \int_0^L EI_z\phi'_i\,\phi'''_j\,dx \\ &= EI_z\phi'_{i,L}\,\phi''_{j,L} - EI_z\phi_{i,L}\,\phi'''_{j,L} + \int_0^L EI_z\phi_i\,\phi''''_j\,dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \; & EI_z\phi'_{i,L}\left[\frac{M_c r_c}{\rho}\beta_j^4\phi_{j,L} + \frac{I_c + M_c r_c^2}{\rho}\beta_j^4\phi'_{j,L} - \frac{I_c + M_c r_c(L+r_c)}{I_m}\phi''_{j,0}\right] \\
& -EI_z\phi_{i,L}\left[\frac{M_c(L+r_c)}{I_m}\phi''_{j,0} - \frac{M_c r_c}{\rho}\beta_j^4\phi'_{j,L} - \frac{M_c}{\rho}\beta_j^4\phi_{j,L}\right] \\
& + \int_0^L EI_z\phi_i(\beta_j^4\phi_j - \frac{\rho x}{I_m}\phi''_{j,0})\,dx
\end{aligned} \tag{B.44}
$$

Après quelques simplifications,

$$
\begin{aligned}
\int_0^L EI_z\phi_i''\,\phi_j''\,dx = \omega_j^2 \Bigg\{ & \int_0^L \rho\phi_i\phi_j\,dx + M_c\phi_{i,L}\phi_{j,L} + (I_c + M_c r_c^2)\phi'_{i,L}\,\phi'_{j,L} \\
& + M_c\, r_c(\phi_{i,L}\,\phi'_{j,L} + \phi'_{i,L}\,\phi_{j,L}) \\
& - \frac{EI_z}{I_m\omega_j^2}\phi''_{j,0}\left[\int_0^L \rho x\phi_i\,dx + M_c(L+r_c)\phi_{i,L} + (I_c + M_c r_c(L+r_c))\phi'_{i,L}\right]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

qui donne la relation d'orthogonalité suivante :

$$
\int_0^L EI_z\phi_i''\,\phi_j''\,dx = \omega_i^2\,\delta_{ij} \tag{B.45}
$$

B.2.4 Résumé

Les fonctions propres d'un bras avec charge à l'extrémité sont données par :

$$
\begin{aligned}
\phi_i(x) = A_i \Bigg[& \mu_3\lambda_i^3(\cos(\frac{\lambda_i x}{L}) - \cosh(\frac{\lambda_i x}{L})) + (1+c_i)\sin(\frac{\lambda_i x}{L}) \\
& + (1-c_i)\sinh(\frac{\lambda_i x}{L}) - 2\frac{\lambda_i x}{L}\Bigg]
\end{aligned} \tag{B.46}
$$

où A_i sont des constantes de normalisation et λ_i sont la solution de l'équation caractéristique suivante :

$$
det(\mathbf{A}) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} = 0 \tag{B.47}
$$

où

$$
\begin{aligned}
A_{11} = \; & (\mu_2\mu_3\lambda^4 - 1)(-C + Ch) + (\mu_3\mu_4\lambda^5 - \mu_2\lambda)(S + Sh) \\
& + \mu_3\lambda^3(-S + Sh) - \mu_4\lambda^2(C + Ch) \\
A_{12} = \; & (C + Ch) + \mu_2\lambda(-S + Sh) + \mu_4\lambda^2(-C + Ch)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{21} &= (S-Sh)-\mu_3(\mu_1+\mu_5)\lambda^6(S+Sh)+(\mu_1+\mu_3+\mu_5)\lambda^3(C+Ch) \\
&\quad +\mu_3\mu_4\lambda^5(C-Ch)+\mu_4\lambda^2(S+Sh) \\
A_{22} &= (S+Sh)+(\mu_1+\mu_5)\lambda^3(C-Ch)+\mu_4\lambda^2(S-Sh)
\end{aligned}
$$

où

$$C=\cos\lambda,\quad S=\sin\lambda,\quad Ch=\cosh\lambda,\quad \text{and } Sh=\sinh\lambda$$

$$\mu_1=\tfrac{I_c}{\rho L^3},\quad \mu_2=\tfrac{M_c}{\rho L},\quad \mu_3=\tfrac{I_m}{\rho L^3},\quad \mu_4=\tfrac{M_c r_c}{\rho L^2},\quad \mu_5=\tfrac{M_c r_c^2}{\rho L^3},\quad \text{et } \lambda=\beta L$$

La constante c_i apparaissant dans l'expression des fonctions propres est donnée par :

$$c_i=-3L\,\mu_3\,\lambda_i^2\frac{A_{11}}{A_{12}}=-3L\,\mu_3\,\lambda_i^2\frac{A_{21}}{A_{22}}$$

Une fonction propre vérifie la relation suivante :

$$\int_0^l \rho x\phi_i\,dx+M_c(L+r_c)\phi_{i,L}+(I_c+M_c r_c(L+r_c))\phi'_{i,L}=I_t\,\frac{EI_z}{I_m\,\omega_i^2}\phi''_{i,0} \tag{B.48}$$

où $I_t=I_m+\frac{1}{3}\rho L^3+I_c+M_c(L+r_c)^2$ est l'inertie totale vue par le moteur. Les deux relations d'orthogonalité entre les fonctions propres sont :

$$\int_0^L \rho\,\phi_i\,\phi_j\,dx+M_c\phi_{i,L}\,\phi_{j,L}+(I_c+M_c r_c^2)\phi'_{i,L}\,\phi'_{j,L}+M_c\,r_c(\phi_{i,L}\,\phi'_{j,L}+\phi'_{i,L}\,\phi_{j,L})$$

$$-I_t\frac{EI_z}{I_m\omega_i^2}\phi''_{i,0}\frac{EI_z}{I_m\omega_j^2}\phi''_{j,0}=\delta_{ij} \tag{B.49}$$

$$\int_0^L EI_z\phi''_i\,\phi''_j\,dx=\omega_i^2\,\delta_{ij} \tag{B.50}$$

où $\omega_i^2=\frac{EI_z}{\rho}\beta_i^4$ et δ est le delta de Kronecker.

B.3 Fonctions de forme d'une poutre encastrée avec charge

Les FF d'une poutre encastrée avec charge sont obtenues à partir des fonctions propres du bras pivotant en supposant que l'inertie du moteur I_m, soit encore μ_3, tend vers l'infini. Les fonctions de forme sont alors données par :

$$\phi_i(x)=A_i\left[\lambda_i^3\left(\cos(\frac{\lambda_i x}{L})-\cosh(\frac{\lambda_i x}{L})\right)+c_i\left(\sin(\frac{\lambda_i x}{L})-\sinh(\frac{\lambda_i x}{L})\right)\right] \tag{B.51}$$

où A_i sont des constantes de normalisation et λ_i sont la solution de l'équation caractéristique suivante :

$$det(\mathbf{A}) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} = 0 \tag{B.52}$$

où

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \mu_2\lambda^4(-C + Ch) + \mu_4\lambda^5(S + Sh) + \lambda^3(-S + Sh) \\
A_{12} &= (C + Ch) + \mu_2\lambda(-S + Sh) + \mu_4\lambda^2(-C + Ch) \\
A_{21} &= -(\mu_1 + \mu_5)\lambda^6(S + Sh) + \lambda^3(C + Ch) + \mu_4\lambda^5(C - Ch) \\
A_{22} &= (S + Sh) + (\mu_1 + \mu_5)\lambda^3(C - Ch) + \mu_4\lambda^2(S - Sh)
\end{aligned}$$

La constante c_i apparaissant dans l'expression des fonctions propres est donnée par :

$$c_i = -3L\,\lambda_i^2\frac{A_{11}}{A_{12}} = -3L\,\lambda_i^2\frac{A_{21}}{A_{22}}$$

Une fonction propre vérifie la relation suivante :

$$\int_0^l \rho x\phi_i\,dx + M_c(L + r_c)\phi_{i,L} + (I_c + M_c r_c(L + r_c))\phi'_{i,L} = \frac{EI_z}{\omega_i^2}\phi''_{i,0} \tag{B.53}$$

Les deux relations d'orthogonalité entre les fonctions propres sont :

$$\int_0^L \rho\,\phi_i\,\phi_j\,dx + M_c\phi_{il}\,\phi_{j,L} + (I_c + M_c r_c^2)\phi'_{i,L}\,\phi'_{j,L} + M_c\,r_c(\phi_{i,L}\,\phi'_{j,L} + \phi'_{i,L}\,\phi_{j,L}) = \delta_{ij} \tag{B.54}$$

$$\int_0^L EI_z\phi''_i\,\phi''_j\,dx = \omega_i^2\,\delta_{ij} \tag{B.55}$$

où δ est le delta de Kronecker.

B.4 Fonctions de forme d'une poutre encastrée sans charge

Les FF d'une poutre encastrée sans charge sont obtenues à partir des fonctions propres d'une poutre encastrée avec charge en supposant que la masse et l'inertie de la charge sont nulles, i.e. $\mu_1 = \mu_2 = \mu_4 = \mu_5 = 0$.

Les FF sont :

$$\phi_i(x) = A_i \left[\lambda_i^3 \left(\cos(\frac{\lambda_i x}{L}) - \cosh(\frac{\lambda_i x}{L}) \right) + c_i \left(\sin(\frac{\lambda_i x}{L}) - \sinh(\frac{\lambda_i x}{L}) \right) \right] \tag{B.56}$$

où A_i sont des constantes de normalisation et λ_i sont la solution de l'équation caractéristique suivante :

$$1 + C\,Ch = 0 \tag{B.57}$$

La constante c_i apparaissant dans l'expression des fonctions propres est donnée par :

$$c_i = -3L\,\lambda_i^5 \frac{-S + Sh}{C + Ch} = -3L\,\lambda_i^5 \frac{C + Ch}{S + Sh}$$

Une fonction propre vérifie la relation suivante :

$$\int_0^l \rho x \phi_i \, dx = \frac{EI_z}{\omega_i^2} \phi''_{i,0} \tag{B.58}$$

Les deux relations d'orthogonalité entre les fonctions propres sont :

$$\int_0^L \rho\,\phi_i\,\phi_j\,dx = \delta_{ij} \tag{B.59}$$

$$\int_0^L EI_z \phi_i'' \,\phi_j''\,dx = \omega_i^2\,\delta_{ij} \tag{B.60}$$

Annexe C

LOGICIEL DE MODÉLISATION ET DE SIMULATION

C.1 Description du logiciel : ROBOFLEX

La complexité du modèle développé montre la nécessité de développer un outil de modélisation et de simulation du sytème constitué d'une membrure flexible tournant dans le plan horizontal ou vertical.

Afin de pouvoir simuler le modèle d'une membrure flexible, il faut choisir les fonctions de forme, le nombre de modes à retenir et calculer les dérivées et les intégrales des ces fonctions. Notons que ces intégrales sont indépendantes du temps. Elles peuvent donc être calculées hors ligne une fois pour toutes. Nous avons vu dans le chapitre 5, que la comparaison des différents modèles discrets dépend de plusieurs variantes. Il serait donc indispensable de posséder un outil simple et efficace qui permet de contourner la complexité du modèle. Ceci est fait à l'aide du logiciel de simulation ROBOFLEX. Le logiciel est conçu pour étudier les modèles linéaire et non linéaire d'une membrure flexible entraînée par un moteur à courant continu et ayant une charge à l'extrémité. Le mouvement de la membrure peut être considéré dans le plan horizontal ou vertical. Il utilise le modèle d'ordre réduit pour la simulation et

différentes fonctions de forme peuvent être envisagées. Le logiciel ROBOFLEX est divisé en deux parties : une partie symbolique et une partie numérique.

C.1.1 Partie symbolique

Le logiciel de calcul symbolique MAPLE est utilisé pour générer le modèle dynamique d'ordre réduit. Il permet de surmonter le calcul laborieux des fonctions de forme ainsi que de toute fonction mathématique devant être générée. Le logiciel ROBOFLEX résout l'équation aux valeurs propres. Il calcule les valeurs propres, les constantes d'intégration, et génère les fonctions de forme à utiliser dans la discrétisation de la déformation de la membrure. À partir des expressions des énergies cinétique et potentielle et de la fonction de dissipation de Rayleigh appliquées à la membrure dans le plan vertical, le logiciel génère les paramètres du modèle dynamique, i.e. les matrices et vecteurs apparaissant dans le modèle et qui dépendent des fonctions de forme. Les résultats peuvent être sauvegardés sous format C ou Fortran et sont réutilisés dans la simulation numérique de la dynamique de la membrure (Figure C.1).

Dans la construction du programme, un soin particulier à sa généralité a été prévu dès le départ, dans le sens de pouvoir facilement choisir une fonction de forme donnée et le nombre de modes à retenir sans avoir à changer plusieurs paramètres du programme. Notons que dans le cas de la méthode de modes supposés avec des fonctions de forme d'une membrure encastrée dans une base fixe ou mobile, il est préférable de fixer un nombre maximum de modes (selon la capacité de l'ordinateur) et de calculer les paramètres du système correspondant (les intégrales des fonctions de forme). Dans le cas des modèles avec un nombre de modes plus petit, ces paramètres peuvent être déduits directement à partir du cas précédent. Par exemple, en calculant le modèle avec les quatre premiers modes d'une membrure encastrée-libre, la matrice de masse dans un modèle ayant seulement deux modes se déduit directement en sélectionnant la sous matrice (1 :2,1 :2) de la matrice de masse déjà calculée. Dans

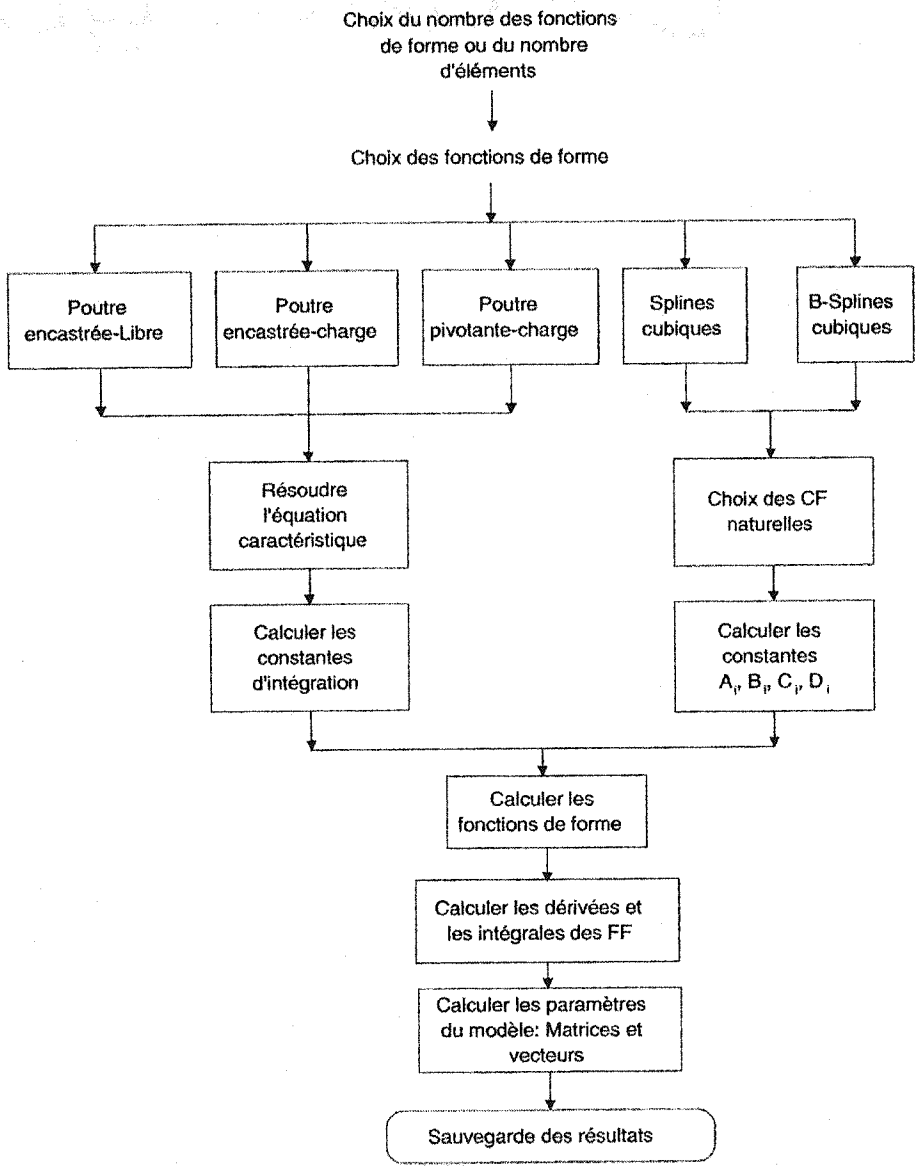


FIG. C.1 – Organigramme de ROBOFLEX : Partie symbolique

le cas des splines et des B-splines cubiques les paramètres du modèle sont recalculés à chaque fois que le nombre de modes retenus est modifié. Cependant, le calcul des différents paramètres est dans ce cas plus simples.

Toutes les fonctions de forme sont définies pour toute la longueur de la membrure sauf pour les splines cubiques où les fonctions de forme sont définies par élément de la membrure. Afin d'utiliser le même logiciel de génération du modèle, une normalisation des fonctions de forme obtenues par la méthode des splines cubiques est indispensable. Les fonctions de forme des splines et des B-splines cubiques présentent cependant un avantage par rapport aux fonctions de forme des poutres. En effet, les fonctions de forme des splines et B-splines sont indépendantes des paramètres du système (masses, inerties, etc.). Ces derniers interviennent dans les équations caractéristiques des fonctions de forme des membrures encastrée-charge et base mobile-charge. Donc, chaque fois que les paramètres de la charge changent il faut recalculer les fonctions de forme. Rappelons que l'équation caractéristique des poutres encastrées sans charge est lui même indépendant des paramètres du système. C'est l'une des raisons de sa popularité.

Vu que les fonctions de forme des splines et des B-splines sont des polynômes cubiques, le logiciel MAPLE manipule très facilement tous les paramètres dont l'équation dynamique dépend. Pour le même nombre de modes, le calcul de ces paramètres prend un temps beaucoup plus court que celui des mêmes paramètres avec les fonctions de forme des poutres. Les splines et les B-splines cubiques sont par conséquent les meilleures du point de vue temps de calcul et robustesse vis-à-vis des variations des paramètres du système surtout les variations de la charge (masse et inertie). Pour accélérer le calcul des paramètres du modèle utilisant les fonctions de forme des membrures encastrées, une expansion en série de Taylor de ces fonctions peut être utilisée comme fonctions de forme. Ces polynômes vérifiant les CF géométriques sont facilement manipulables par le logiciel de calcul symbolique.

C.1.2 Partie numérique

Le logiciel de simulation MATLAB avec le Toolbox Simulink sont utilisés dans la simulation numérique. Les données générées par le programme symbolique sont adaptées et réarrangées pour être utilisées par MATLAB. Ainsi le programme symbolique génère les différents modèles et les simulations temporelles et fréquentielles sont faites dans MATLAB. La figure (C.2) représente le module de simulation utilisé dans SIMULINK. Le bloc "Single Link Model" exécute une routine qui contient le modèle dynamique de la membrure. On peut choisir le plan de mouvement de la membrure, soit horizontal ($g = 0$) soit vertical ($g = 9.81$). Les fonctions de forme et le nombre de modes sont encore sélectionnés dans ce bloc. Une variable est attribuée aux fonctions de forme. Elle varie de 1 à 5 (encastrée-libre = 1, encastrée-charge = 2, base mobile-charge = 3, splines cubiques = 4, B-splines cubiques = 5). Le nombre de modes voulu est directement selectionné (Figure C.2). Le bloc "Figure" trace les résultats de la simulation. Le bloc "Chargement de données" exécute une routine qui contient les données numériques du système. Elle est exécutée avant la simulation.

Le logiciel ROBOFLEX nous permet de valider facilement le modèle d'une membrure flexible ainsi que les lois de commande à appliquer à ce modèle. Il sert aussi comme un outil de base dans l'étude de l'effet des fonctions de forme sur le modèle. Il permet de changer ces fonctions, modifier les paramètres du système, sélectionner différents nombres de modes, choisir un mouvement dans le plan horizontal et vertical et de varier les paramètres de la charge.

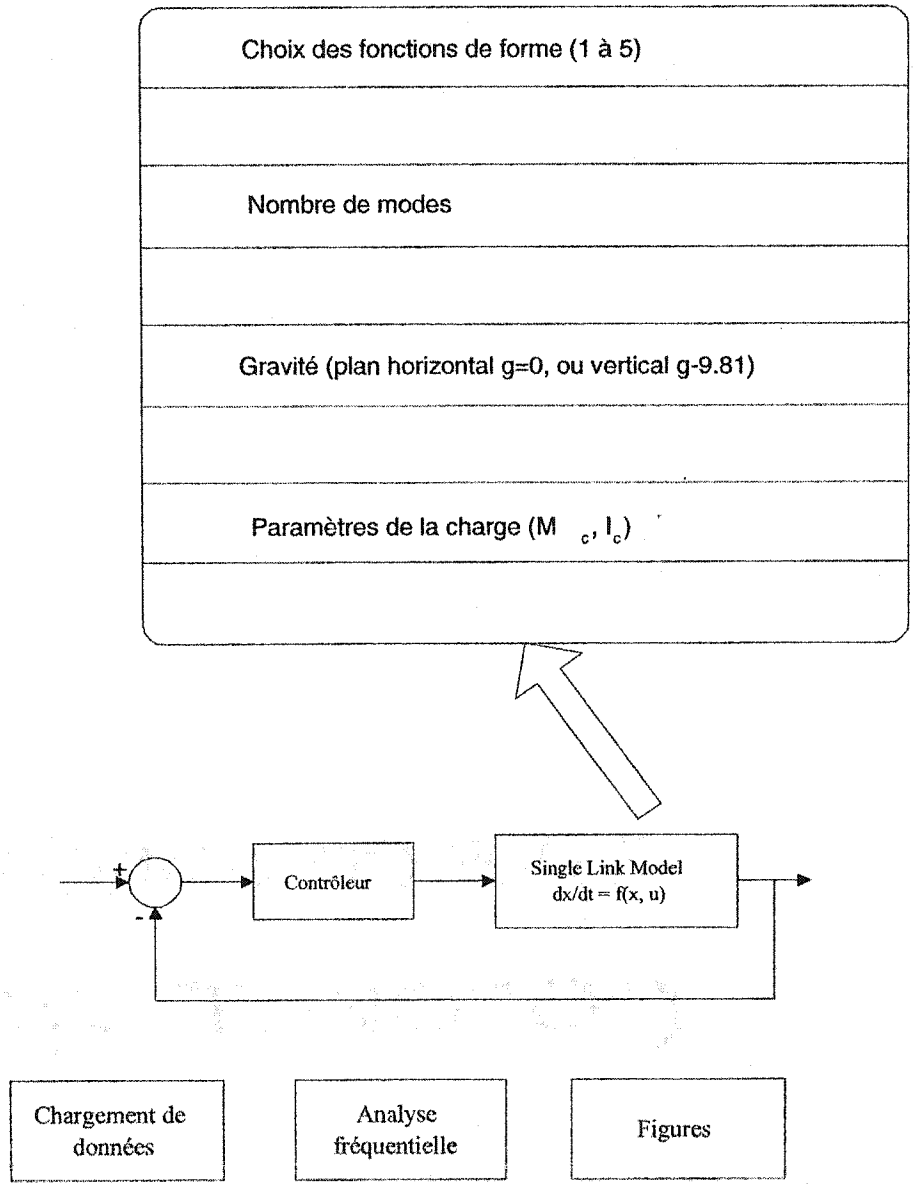


FIG. C.2 – Schéma bloc de ROBOFLEX : Partie numérique

Annexe D

MODÈLES LINÉAIRES DU SYSTÈME À UN BRAS FLEXIBLE

Dans ce chapitre nous développons les modèles linéaires du système à un bras flexible dans les plans vertical et horizontal. Dans les deux cas, nous supposons que la vitesse de rotation du moteur est faible. Cela permet de négliger les forces de centrifuges et de Coriolis. Dans le cas d'un mouvement dans le plan vertical, nous linéarisons le modèle non linéaire autour d'un point de fonctionnement. Alors que dans le cas d'un mouvement dans le plan horizontal, le modèle linéaire est déduite à partir des équations non linéaires en annulant l'effet de la gravité. De plus, les frottements sont supposés négligeables.

En tenant compte de ces hypothèses, le modèle non linéaire (3.22)-(3.23) devient :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_t & \beta^T \\ \beta & M_{ff} \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix}}_{\ddot{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_m & 0 \\ 0 & B_{ff} \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{q}_f \end{bmatrix}}_{\dot{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} q_r \\ q_f \end{bmatrix}}_{q}$$

$$+\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} G_{rr} & G_{rf}^T \\ G_{rf} & G_{ff} \end{bmatrix}}_{G} \begin{bmatrix} \sin q_r \\ q_f \cos q_r \end{bmatrix}}_{G(q)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{L} \tau \tag{D.1}$$

soit encore sous la forme :

$$M\,\ddot{q} + B\,\dot{q} + K\,q + G(q) = L\,\tau \tag{D.2}$$

Les matrices d'inertie et de masse, M, de frottement, B, et de rigidité, K_{ff}, sont symétriques positives définies. L'inverse de la matrice de masse, notée P, est symétrique positive définie :

$$P = M^{-1} = \begin{bmatrix} P_{rr} & P_{rf}^T \\ P_{rf} & P_{ff} \end{bmatrix} \tag{D.3}$$

Il est facile de vérifier que les éléments de P vérifient les relations suivantes :

$$P_{rr} = \left(I_t - \beta^T M_{ff}^{-1} \beta\right)^{-1} = \nabla^{-1} \tag{D.4}$$

$$P_{ff} = \left(M_{ff} - \beta I_t^{-1} \beta^T\right)^{-1} = \Delta^{-1} \tag{D.5}$$

$$P_{rf}^T = -I_t^{-1} \beta^T \Delta^{-1} = -\nabla^{-1} \beta^T M_{ff}^{-1} \tag{D.6}$$

$$P_{rf}^T\, P_{ff}^{-1} = -I_t^{-1}\, \beta^T \text{ ou } P_{ff}^{-1}\, P_{rf} = -\beta\, I_t^{-1} \tag{D.7}$$

$$P_{rr}^{-1}\, P_{rf}^T = -\beta^T\, M_{ff}^{-1} \text{ ou } P_{rf}\, P_{rr}^{-1} = -M_{ff}^{-1}\, \beta \tag{D.8}$$

Soit $x = [q^T \;\; \dot{q}^T]^T$ le vecteur d'état. Le modèle d'état s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -P\,[B\,x_2 + K\,x_1 + G(x_1)] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P\,L \end{bmatrix} \tau \\ &= f(x) + g(x)\,u \end{aligned} \tag{D.9}$$

D.1 Modèle linéaire : Plan vertical

Le modèle d'état est linéarisé autour du point $x^0 = (x_1^0, x_2^0) = (x_1^0, 0)$, ce qui revient à linéariser le modèle dynamique (D.1) autour de (q_r^0, q_f^0). Ceci est fait en

remplaçant $q_r = q_r^0 + \delta q_r$, $q_f = q_f^0 + \delta q_f$ et $\tau = \tau^0 + \delta\tau$ dans (D.1). D'où le modèle linéarisé :

$$G_{rr}\sin(q_r^0) + G_{rf}^T q_f^0 \cos(q_r^0) = \tau^0 \tag{D.10}$$

$$K_{ff} q_f^0 + G_{rf}\sin(q_r^0) + G_{ff}\cos(q_r^0) q_f^0 = 0 \tag{D.11}$$

$$\begin{aligned}
\delta\tau &= M_{rr}\delta\ddot{q}_r + M_{rf}^T\delta\ddot{q}_f + B_{rr}\delta\dot{q}_r + \left(G_{rr}\cos(q_r^0) - G_{rf}^T q_f^0 \sin(q_r^0)\right)\delta q_r \\
&\quad + G_{rf}^T\cos(q_r^0)\delta q_f \\
0 &= M_{rf}\delta\ddot{q}_r + M_{ff}^T\delta\ddot{q}_f + B_{ff}\delta\dot{q}_f + \left(G_{rf}\cos(q_r^0) - G_{ff} q_f^0 \sin(q_r^0)\right)\delta q_r \\
&\quad + \left(K_{ff} + G_{ff}\cos(q_r^0)\right)\delta q_f
\end{aligned}$$

Les deux dernières équations s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} M_{rr} & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix}\delta\ddot{q} + \begin{bmatrix} B_{rr} & 0 \\ 0 & B_{ff} \end{bmatrix}\delta\dot{q} \\
&\quad + \begin{bmatrix} G_{rr}\cos(q_r^0) - G_{rf}^T q_f^0 \sin(q_r^0) & G_{rf}^T\cos(q_r^0) \\ G_{rf}\cos(q_r^0) - G_{ff} q_f^0 \sin(q_r^0) & K_{ff} + G_{ff}\cos(q_r^0) \end{bmatrix}\delta q = L\,\delta\tau
\end{aligned} \tag{D.12}$$

ou sous la forme matricielle compacte :

$$M\,\delta\ddot{q} + B\,\delta\dot{q} + K_l\,\delta q = L\,\delta\tau \tag{D.13}$$

La linéarisation autour du point ($q_r^0 = 0$, $q_f^0 = 0$) donne le modèle suivant :

$$\tau^0 = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{rr} & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix}}_{M}\delta\ddot{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{rr} & 0 \\ 0 & B_{ff} \end{bmatrix}}_{B}\delta\dot{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} G_{rr} & G_{rf}^T \\ G_{rf} & K_{ff} + G_{ff} \end{bmatrix}}_{K_l}\delta q = L\,\delta\tau$$

$$M\,\delta\ddot{q} + B\,\delta\dot{q} + K_l\,q = L\,\delta\tau$$

La linéarisation autour du point ($q_r^0 = \pi/2$, q_f^0) donne :

$$G_{rf} + K_{ff} q_f^0 = 0$$

$$\tau^0 = G_{rr}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{rr} & M_{rf}^T \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix}}_{M} \delta\ddot{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{rr} & 0 \\ 0 & B_{ff} \end{bmatrix}}_{B} \delta\dot{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} -G_{rf}^T q_f^0 & 0 \\ -G_{ff} q_f^0 & K_{ff} \end{bmatrix}}_{K_l} \delta q = L\,\delta\tau$$

Le modèle d'état linéarisé autour du point x^0 est directement déduit à partir de l'équation (D.13). Il s'écrit sous la forme, avec $x = [\ \delta q^T \quad \delta\dot{q}^T\ ]^T$:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -P\,K_l & -P\,B \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ P\,L \end{bmatrix} \delta\tau \tag{D.14}$$

$$= A_l\,x + B_l\,u \tag{D.15}$$

D.2 Modèle linéaire dans le plan horizontal

En tenant compte des hypothèses précédentes et en supposant que le frottement est négligeable, la dynamique sera donnée par :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_t & \beta^T \\ \beta & M_{ff} \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix}}_{\ddot{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} q_r \\ q_f \end{bmatrix}}_{q} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{L} \tau \tag{D.16}$$

soit encore sous la forme :

$$M\,\ddot{q} + K\,q = L\,\tau \tag{D.17}$$

D.2.1 Fonctions de forme d'une poutre pivotante

En utilisant les relations (B.48)-(B.50), les éléments des matrices de masse, M, et de rigidité, K, dans (D.16) seront donnés par :

$$\beta_i = \int_0^l \rho x \phi_i\,dx + m_p(l+r_p)\phi_{i,l} + (I_p + m_p r_p(l+r_p))\phi'_{i,l} = I_t \frac{EI_z}{I_m\,\omega_i^2}\phi''_{i,0}$$

$$M_{ff}(i,j) = \int_0^l \rho\,\phi_i\,\phi_j\,dx + m_p\phi_{il}\,\phi_{j,l} + (I_p + m_p r_p^2)\phi'_{i,l}\,\phi'_{j,l} + m_p\,r_p(\phi_{i,l}\,\phi'_{j,l} + \phi'_{i,l}\,\phi_{j,l})$$

$$= \delta_{ij} + I_t \frac{EI_z}{I_m\omega_i^2}\phi''_{i,0}\frac{EI_z}{I_m\omega_j^2}\phi''_{j,0} = \delta_{ij} + \frac{\beta_i\,\beta_j}{I_t}$$

$$K_{ff}(i,j) = \int_0^l EI_z\phi''_i\,\phi''_j\,dx = \omega_i^2\,\delta_{ij}$$

Pour ν modes flexibles, l'équation (D.16) s'écrira sous la forme :

$$\begin{bmatrix} I_t & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_\nu \\ \beta_1 & 1+\beta_1^2/I_t & \beta_1\,\beta_2/I_t & \dots & \beta_1\,\beta_\nu/I_t \\ \beta_2 & \beta_2\,\beta_1/I_t & 1+\beta_2^2/I_t & \dots & \beta_2\,\beta_\nu/I_t \\ \vdots & & & & \\ \beta_\nu & \beta_\nu\,\beta_1/I_t & \beta_\nu\,\beta_2/I_t & \dots & 1+\beta_\nu^2/I_t \end{bmatrix} \ddot{q} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_\nu^2 \end{bmatrix} q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tau \qquad \text{(D.18)}$$

Pour calculer le modèle d'état, nous introduisons un ensemble de nouvelles variables, q_1, qui permettent de transformer la matrice de masse M en une matrice diagonale. Cet ensemble est défini par la transformation suivante :

$$q = T\ q_1 \qquad \text{(D.19)}$$

La matrice de transformation, T, est choisie de façon que la matrice

$$M_1 = T^T\ M\ T \qquad \text{(D.20)}$$

soit diagonale et donnée par

$$M_1 = \begin{bmatrix} I_t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(D.21)}$$

La matrice de transformation T est alors donnée par

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta_1}{I_t} & -\frac{\beta_2}{I_t} & \dots & -\frac{\beta_\nu}{I_t} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{D.22}$$

En utilisant les nouvelles coordonnées, le modèle dynamique est représenté par :

$$M_1 \, \ddot{q}_1 \; + \; K_1 \, q_1 \; = \; L_1 \, \tau$$

où $K_1 = T^T \, K \, T$ et $L_1 = T^T \, L$. Dans la nouvelle base, le modèle d'état est donné par

$$\begin{aligned} \dot{x} \; &= \; \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_1^{-1} \, K_1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M_1^{-1} \, L_1 \end{bmatrix} u \\ &= \; A_1 \, x + B_1 \, u \end{aligned} \tag{D.23}$$

avec $x = [q_1 \;\; \dot{q}_1]^T$ et $u = \tau$. Il est facile de vérifer que :

$$\begin{aligned} M_1^{-1} \, K_1 \; &= \; K \\ M_1^{-1} \, L_1 \; &= \; \begin{bmatrix} 1/I_t & -\beta_1/I_t & \dots & -\beta_\nu/I_t \end{bmatrix}^T \; = \; \begin{bmatrix} 1/I_t & -\beta^T/I_t \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Pour trois modes flexibles, le modèle d'état est donné par

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/I_t \\ -\beta_1/I_t \\ -\beta_2/I_t \\ -\beta_3/I_t \end{bmatrix} u \tag{D.24}$$

À partir de ce modèle, nous pouvons générer la FT correspondante à une sortie donnée. Les (anciennes) coordonnées rigide et flexibles, q_r et q_f, sont liées aux (nouvelles) coordonnées, $q_r^{(1)}$ et $q_f^{(1)}$, par les relations suivantes :

$$q_r = q_r^{(1)} - \frac{1}{I_t}\beta^T q_f^{(1)} \tag{D.25}$$

$$q_f = q_f^{(1)} \tag{D.26}$$

Nous générons les FT qui correspondent à l'angle moteur et à une coordonnée flexible quelconque. Nous considérons un modèle avec trois modes flexibles.

La sortie qui corresponde à la coordonnée $q_r^{(1)}$ est donnée par :

$$y = q_r^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = C_0\, x$$

La FT est donnée par

$$G_0^{(1)}(s) = C_0\, (s\, I - A_1)^{-1}\, B_1$$

Cependant,

$$(s\, I - A_1)^{-1} = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} s\, I & I \\ -K & s\, I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta^{-1} & 0 \\ 0 & \Delta^{-1} \end{bmatrix}$$

où $\Delta = s^{-1}\,(s^2\, I + K)$ est une matrice diagonale. La FT est alors donnée par

$$G_0^{(1)}(s) = \frac{1}{I_t}\frac{1}{s^2} \tag{D.27}$$

La sortie qui corresponde au premier mode flexible est donnée par

$$y = q_{f1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = C_1\, x$$

La FT est donnée par

$$G_1(s) = \frac{q_{f_1}(s)}{\tau(s)} = C_1\, (s\, I - A_1)^{-1}\, B_1 = -\frac{1}{I_t}\frac{\beta_1}{s^2 + \omega_1^2} \tag{D.28}$$

Suivons la même procédure, les FT qui correspondent à la deuxième et à la troisième mode flexible sont respectivement données par

$$G_2(s) = \frac{q_{f_2}(s)}{\tau(s)} = -\frac{1}{I_t}\frac{\beta_2}{s^2 + \omega_2^2} \tag{D.29}$$

$$G_3(s) = \frac{q_{f_3}(s)}{\tau(s)} = -\frac{1}{I_t}\frac{\beta_3}{s^2+\omega_3^2} \tag{D.30}$$

En utilisant l'équation (D.25), la fonction correspondante à l'angle moteur q_r est donnée par

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \frac{q_r(s)}{\tau(s)} = G_0^{(1)} - \frac{1}{I_t}\beta^T\, q_f^{(1)} \\ &= \frac{1}{I_t}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{I_t^2}\frac{\beta_1^2}{s^2+\omega_1^2} + \frac{1}{I_t^2}\frac{\beta_2^2}{s^2+\omega_2^2} + \frac{1}{I_t^2}\frac{\beta_3^2}{s^2+\omega_3^2} \end{aligned} \tag{D.31}$$

Pour une sortie qui est une combinaison linéaire des coordonnées rigide et flexibles,

$$y_\alpha = q_r + \frac{1}{L}\alpha\, \boldsymbol{\phi}_L^T\, q_f = q_r^{(1)} + \left(\frac{1}{L}\alpha\, \boldsymbol{\phi}_L^T - \frac{1}{I_t}\beta^T\right) q_f$$

la FT est donnée par

$$G_\alpha(s) = \frac{y_\alpha(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{I_t}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{I_t}\sum_{i=0}^{\nu}\left(\beta_i^2 - \frac{1}{L}\alpha\,\phi_{i,L}\,\beta_i\right)\frac{1}{s^2+\omega_i^2} \tag{D.32}$$

D.2.2 Fonctions de forme d'une poutre encastrée-charge

En utilisant les relations entre les fonctions propres d'une poutre encastrée-charge (B.53)-(B.55), les éléments des matrices de masse, M, et de rigidité, K, dans (D.16) seront donnés par :

$$\begin{aligned} \beta_i &= \int_0^l \rho x \phi_i\, dx + m_p(l+r_p)\phi_{i,l} + (I_p + m_p r_p(l+r_p))\phi'_{i,l} = \frac{EI_z}{\omega_i^2}\phi''_{i,0} \\ M_{ff}(i,j) &= \int_0^l \rho\,\phi_i\,\phi_j\, dx + m_p\phi_{il}\,\phi_{j,l} + (I_p + m_p r_p^2)\phi'_{i,l}\,\phi'_{j,l} + m_p\, r_p(\phi_{i,l}\,\phi'_{j,l} + \phi'_{i,l}\,\phi_{j,l}) \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

La dynamique linéaire s'écrit sous la forme :

$$M\ddot{q} + Kq = L\tau$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} I_t & \beta^T \\ \beta & I \end{bmatrix};\quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix};\quad L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{ff} = diag([\omega_i^2]), \quad i = 1, \cdots, \nu$$

Le modèle d'état est :

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}L \end{bmatrix}}_{B} u \tag{D.33}$$

La FT est donnée par :

$$G(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B$$

où C est la matrice de sortie.

Pour calculer une expression générale de la FT il faut inverser la matrice $(sI - A)$ donnée par

$$sI - A = \begin{bmatrix} s\,I & -I \\ M^{-1}K & s\,I \end{bmatrix}$$

L'inverse de cette matrice est donnée par :

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} \Delta^{-1} & -\Delta^{-1}(-I)s^{-1} \\ -s^{-1}M^{-1}K\Delta^{-1} & s^{-1}\,I + s^{-1}M^{-1}K\Delta^{-1}(-I)s^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Delta^{-1} & \Delta^{-1}\,s^{-1} \\ -s^{-1}M^{-1}K\Delta^{-1} & s^{-1}\,I - s^{-1}M^{-1}K\Delta^{-1}\,s^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{D.34}$$

où Δ est donné par :

$$\Delta = s\,I + s^{-1}M^{-1}K = s^{-1}M^{-1}(M\,s^2 + K)$$

Alors,

$$\Delta^{-1} = s(M\,s^2 + K)^{-1}M$$

Cependant,

$$M\,s^2 + K = \begin{bmatrix} I_t s^2 & \beta^T\,s^2 \\ \beta\,s^2 & s^2\,I + K_{ff} \end{bmatrix}$$

Notons

$$D = s^2\,I + K_{ff} = diag([s^2 + \omega_i^2]), \quad i = 1, \cdots, \nu$$

$$D^{-1} = diag([(s^2 + \omega_i^2)^{-1}]), \quad i = 1, \cdots, \nu$$

Soit δ un scalair donné par :

$$\delta = I_t s^2 - \beta^T s^2 D^{-1} \beta s^2 = I_t s^2 - (\beta^T D^{-1} \beta) s^4 = \left(I_t - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\beta_i^2 \, s^2}{s^2 + \omega_i^2} \right) s^2$$

d'où

$$\begin{aligned} (M\,s^2 + K)^{-1} &= \begin{bmatrix} \delta^{-1} & -\delta^{-1} \beta^T s^2 D^{-1} \\ -D^{-1} \beta \, s^2 \delta^{-1} & D^{-1} + D^{-1} \beta s^2 \delta^{-1} \beta^T s^2 D^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\beta^T D^{-1} \, s^2 \\ -D^{-1} \beta \, s^2 & D^{-1} \delta + D^{-1} \beta \, \beta^T D^{-1} \, s^4 \end{bmatrix} \delta^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &= s(M\,s^2 + K)^{-1} M \\ &= s \begin{bmatrix} 1 & -\beta^T D^{-1} \, s^2 \\ -D^{-1} \beta \, s^2 & D^{-1} \delta + D^{-1} \beta \, \beta^T D^{-1} \, s^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_t & \beta^T \\ \beta & I \end{bmatrix} \delta^{-1} \\ &= s \, \delta^{-1} \begin{bmatrix} \Delta_{11}^{-1} & \Delta_{12}^{-1} \\ \Delta_{21}^{-1} & \Delta_{22}^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_{11}^{-1} &= I_t - \beta^T D^{-1} \beta \, s^2 \\ \Delta_{12}^{-1} &= \beta^T - \beta^T D^{-1} \, s^2 \\ \Delta_{21}^{-1} &= -I_t \, D^{-1} \beta \, s^2 + (D^{-1} \delta + D^{-1} \beta \, \beta^T D^{-1} \, s^4) \beta \\ \Delta_{22}^{-1} &= -D^{-1} \beta \beta^T \, s^2 + D^{-1} \delta + D^{-1} \beta \, \beta^T D^{-1} \, s^4 \end{aligned}$$

D'autre part, soit

$$\gamma = I_t - \beta^T \beta$$

d'où

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma^{-1} & -\gamma^{-1} \beta^T \\ -\beta \gamma^{-1} & I + \beta \gamma^{-1} \beta^T \end{bmatrix} = \gamma^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -\beta^T \\ -\beta & \gamma \, I + \beta \beta^T \end{bmatrix}$$

Alors

$$M^{-1}K = \gamma^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -\beta^T \\ -\beta & \gamma I + \beta\beta^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix}$$
$$= \gamma^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -\beta^T K_{ff} \\ 0 & (\gamma I + \beta\beta^T)K_{ff} \end{bmatrix}$$

d'où $(s\,I - A)^{-1}$ sera donné par

$$(s\,I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \delta^{-1}\Delta_{11}^{-1}s & \delta^{-1}\Delta_{12}^{-1}s & \cdots \\ \delta^{-1}\Delta_{21}^{-1}s & \delta^{-1}\Delta_{22}^{-1}s & \\ \gamma^{-1}\delta^{-1}\beta^T K_{ff}\Delta_{21}^{-1} & \gamma^{-1}\delta^{-1}\beta^T K_{ff}\Delta_{22}^{-1} & \\ -\gamma^{-1}\delta^{-1}(\gamma I + \beta\beta^T)K_{ff}\Delta_{21}^{-1} & -\gamma^{-1}\delta^{-1}(\gamma I + \beta\beta^T)K_{ff}\Delta_{22}^{-1} & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta^{-1}\Delta_{11}^{-1} & \delta^{-1}\Delta_{12}^{-1} \\ \delta^{-1}\Delta_{21}^{-1} & \delta^{-1}\Delta_{22}^{-1} \\ s^{-1}I + \gamma^{-1}\delta^{-1}\beta^T K_{ff}\Delta_{21}^{-1}s^{-1} & \gamma^{-1}\delta^{-1}\beta^T K_{ff}\Delta_{22}^{-1}s^{-1} \\ -\gamma^{-1}\delta^{-1}(\gamma I + \beta\beta^T)K_{ff}\Delta_{21}^{-1}s^{-1} & s^{-1}I - \gamma^{-1}\delta^{-1}(\gamma I + \beta\beta^T)K_{ff}\Delta_{22}^{-1}s^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{(D.35)}$$

Le vecteur d'entrée B est donné par :

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ M^{-1}L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ \gamma^{-1} \\ -\gamma^{-1}\beta \end{bmatrix}$$

Le produit $(s\,I - A)^{-1}B$ sera donné par :

$$(s\,I - A)^{-1}B = \gamma^{-1}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

où

$$z_1 = \delta^{-1}\Delta_{11}^{-1} - \delta^{-1}\Delta_{12}^{-1}\beta$$

$$
\begin{aligned}
z_2 &= \delta^{-1}\Delta_{21}^{-1} - \delta^{-1}\Delta_{22}^{-1}\beta \\
z_3 &= s^{-1}I + \gamma^{-1}\delta^{-1}\beta^T K_{ff}\Delta_{21}^{-1}s^{-1} - \gamma^{-1}\delta^{-1}\beta^T K_{ff}\Delta_{22}^{-1}\beta s^{-1} \\
z_4 &= -\gamma^{-1}\delta^{-1}(\gamma I + \beta\beta^T)K_{ff}\Delta_{21}^{-1}s^{-1} - (s^{-1}I - \gamma^{-1}\delta^{-1}(\gamma I + \beta\beta^T)K_{ff}\Delta_{22}^{-1}s^{-1})\beta
\end{aligned}
$$

La FT qui corresponde à l'angle moteur comme sortie est alors donnée par :

$$
\begin{aligned}
G_0(s) &= \frac{q_r(s)}{\tau(s)} \\
&= C(s\,I - A)^{-1}\,B \\
&= \gamma^{-1}(\delta^{-1}\Delta_{11}^{-1} - \delta^{-1}\Delta_{12}^{-1}\beta) \\
&= \gamma^{-1}\delta^{-1}[I_t - \beta^T D^{-1}\beta\, s^2 - \beta^T\beta + \beta^T D^{-1}\beta\, s^2] \\
&= \gamma^{-1}\delta^{-1}(I_t - \beta^T\beta) = \frac{1}{(I_t - (\beta^T D^{-1}\beta)s^2)(s^2)} \\
&= \frac{1}{\left(I_t - \sum_{i=1}^{\nu}\frac{\beta_i^2\, s^2}{s^2+\omega_i^2}\right)s^2}
\end{aligned}
\tag{D.36}
$$

Les FT qui correspondent aux coordonnées flexibles sont données par (C = [0, I, 0, 0]) :

$$
\begin{aligned}
G_f(s) &= \frac{q_{f_i}(s)}{\tau(s)} \\
&= \gamma^{-1}\delta^{-1}(\Delta_{21}^{-1} - \Delta_{22}^{-1}\beta) \\
&= \gamma^{-1}\delta^{-1}\left(-I_t D^{-1}\beta\, s^2 + (D^{-1}\delta + D^{-1}\beta\,\beta^T D^{-1}\, s^4)\beta + D^{-1}(\beta\beta^T)\beta\, s^2\right. \\
&\qquad \left. -D^{-1}\beta\delta - D^{-1}\beta\,\beta^T D^{-1}\beta\, s^4\right) \\
&= \gamma^{-1}\delta^{-1}D^{-1}\left(-I_t\, I + \beta\beta^T\right)\beta\, s^2 \\
&= [\gamma^{-1}\left(-I_t\, I + \beta\beta^T\right)\beta]\, D^{-1}\delta^{-1}\, s^2
\end{aligned}
\tag{D.37}
$$

La FT qui corresponde à la i *ème* coordonnée flexible est de la forme :

$$
G_i(s) = \frac{1}{I_t - \beta^T\beta}\left(-\beta_i(I_t - \beta_i^2) + \beta_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\nu}\beta_j^2\right)\frac{1}{s^2+\omega_i^2}\frac{1}{\left(I_t - \sum_{i=1}^{\nu}\frac{\beta_i^2\, s^2}{s^2+\omega_i^2}\right)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\beta_i \frac{I_t - \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j^2}{I_t - \beta^T \beta} \frac{1}{s^2 + \omega_i^2} \frac{1}{\left(I_t - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\beta_i^2 \, s^2}{s^2 + \omega_i^2} \right)} \\
&= -\beta_i \frac{1}{s^2 + \omega_i^2} \frac{1}{\left(I_t - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\beta_i^2 \, s^2}{s^2 + \omega_i^2} \right)}
\end{aligned}
\tag{D.38}
$$

D.3 Fonctions de transfert avec les splines cubiques

Nous considérons les splines cubiques avec les courbures comme coordonnées généralisées (Section 4.2). Pour un nombre d'éléments égal à un, les matrices symétriques de masse et de rigidité sont données par :

$$
M = \begin{bmatrix}
I_t & \frac{11}{120} \rho L^4 + 1/3 \, M_c L^3 + 1/2 \, I_c L & 1/30 \, \rho L^4 + 1/6 \, M_c L^3 + 1/2 \, I_c L \\
\cdots & \frac{11}{420} \rho L^5 + 1/9 \, M_c L^4 + 1/4 \, I_c L^2 & \frac{5}{504} \rho L^5 + 1/18 \, M_c L^4 + 1/4 \, I_c L^2 \\
\cdots & \cdots & \frac{1}{252} \rho L^5 + 1/36 \, M_c L^4 + 1/4 \, I_c L^2
\end{bmatrix}
$$

$$
K = L E I_z \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 1/3 & 1/6 \\
0 & 1/6 & 1/3
\end{bmatrix}
$$

Pour un nombre d'éléments égal à deux, les matrices symétriques de masse et de rigidité sont données par :

$$
M = \begin{bmatrix}
M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\
M_{12} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\
M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} \\
M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44}
\end{bmatrix}
$$

où :

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= I_t \\
M_{12} &= 121/1920 \rho L^4 + 5/24 M_c L^3 + 1/4 I_c L
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{13} &= 11/192\rho\, L^4 + 1/4 M_c\, L^3 + 1/2 I_c\, L \\
M_{14} &= 3/640\rho L^4 + 1/24 M_c\, L^3 + 1/4 I_c\, L \\
M_{22} &= 61/5040\rho\, L^5 + 25/576 M_c\, L^4 + 1/16 I_c\, L^2 \\
M_{23} &= 607/53760\rho\, L^5 + 5/96 M_c\, L^4 + 1/8\, I_c\, L^2 \\
M_{24} &= 11/11520\rho\, L^5 + 5/576 M_c\, L^4 + 1/16\, I_c\, L^2 \\
M_{33} &= 451/40320\rho\, L^5 + 1/16 M_c\, L^4 + 1/4\, I_c\, L^2 \\
M_{34} &= 169/161280\rho\, L^5 + 1/96 M_c\, L^4 + 1/8\, I_c\, L^2 \\
M_{44} &= 1/8064\rho\, L^5 + 1/576 M_c\, L^4 + 1/16\, I_c\, L^2
\end{aligned}
$$

$$
K = L\, E I_z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/12 & 0 \\ 0 & 1/12 & 1/3 & 1/12 \\ 0 & 0 & 1/12 & 1/6 \end{bmatrix}
$$

Pour un nombre d'éléments égal à trois, les matrices de masse et de rigidité sont données par :

$$
M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} & M_{45} \\ M_{15} & M_{25} & M_{35} & M_{45} & M_{55} \end{bmatrix}
$$

où

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= I_t \\
M_{12} &= 1121/30720\rho\, L^4 + 11/96 M_c\, L^3 + 1/8 I_c\, L \\
M_{13} &= 163/3072\rho\, L^4 + 3/16 M_c\, L^3 + 1/4 I_c\, L \\
M_{14} &= 63/2048\rho\, L^4 + 5/32 M_c\, L^3 + 3/8 I_c\, L \\
M_{15} &= 3/640\rho\, L^4 + 1/24 M_c\, L^3 + 1/4 I_c\, L \\
M_{22} &= 863/215040\rho\, L^5 + 121/9216 M_c\, L^4 + 1/64 I_c\, L^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{23} &= 10127/1720320\rho L^5 + 11/512 M_c L^4 + 1/32 I_c L^2 \\
M_{24} &= 85/24576\rho L^5 + 55/3072 M_c L^4 + 3/64 I_c L^2 \\
M_{25} &= 49/92160\rho L^5 + 11/2304 M_c L^4 + 1/32 I_c L^2 \\
M_{33} &= 11371/1290240\rho L^5 + 9/256 M_c L^4 + 1/16 I_c L^2 \\
M_{34} &= 27721/5160960\rho L^5 + 15/512 M_c L^4 + 3/32 I_c L^2 \\
M_{35} &= 13/15360\rho L^5 + 1/128 M_c L^4 + 1/16 I_c L^2 \\
M_{44} &= 1553/430080\rho L^5 + 25/1024 M_c L^4 + 9/64 I_c L^2 \\
M_{45} &= 403/645120\rho L^5 + 5/768 M_c L^4 + 3/32 I_c L^2 \\
M_{55} &= 1/8064\rho L^5 + 1/576 M_c L^4 + 1/16 I_c L^2
\end{aligned}
$$

$$
K = L E I_z \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/12 & 1/24 & 0 & 0 \\
0 & 1/24 & 1/6 & 1/24 & 0 \\
0 & 0 & 1/24 & 1/4 & 1/12 \\
0 & 0 & 0 & 1/12 & 1/6
\end{bmatrix}
$$

D.4 Analyse de la passivité avec les splines cubiques

Nous considérons les splines cubiques avec les courbures comme coordonnées généralisées. Par la suite, nous traitons $G_\alpha(s)$ comme une famille de FT à un paramètre $\{G_\alpha(s) : \alpha > 0\}$ qui sont nominalement réactives (i.e. pour $\alpha = 0$). Nous cherchons la valeur critique α_c de α, G_α où la FT cesse d'être passive quand α est incrémenté continuellement à partir de sa valeur nominale égale à zéro. Nous considérons les deux cas suivants : sans et avec frottement. Dans le premier cas, nous transformons le problème, du domaine complexe au domaine réel en considérant la fonction de transfert $H_\alpha(s^2) := s\,G_\alpha(s) = n(s)/d(s)$. Nous utilisons les applications gardiennes (Saydy et al. 1990) pour vérifier la réactivité (passivité) de la FT. En général, une

application gardienne pour un problème de ce genre est une application scalaire qui, évaluée le long de la famille paramétrisée, reste non nulle tant que les membres de cette famille restent réactives et elle s'annule précisément quand cette famille cesse de l'être. Dans le deuxième cas, nous vérifions si la FT est posivite réelle.

D.4.1 Frottement négligeable

Pour un élément, la FT est donnée par :

$$G_\alpha(s) = \frac{b_4\, s^4 + b_2\, s^2 + b_0}{s(a_4\, s^4 + a_2\, s^2 + a_0)}$$

où

$$\begin{aligned}
b_4 &= \alpha\left(\frac{1}{L}\phi_{1,L}(M_{13}M_{23} - M_{12}M_{33}) - \frac{1}{L}\phi_{2,L}(M_{13}M_{22} + M_{12}M_{23})\right) + M_{22}M_{33} \\
&\quad -M_{23}^2 \\
b_2 &= \alpha\left(-\frac{1}{L}\phi_{1,L}(K_{33}M_{12} + M_{13}K_{23}) + \frac{1}{L}\phi_{2,L}(K_{23}M_{12} - M_{13}K_{22})\right) \\
&\quad +M_{33}K_{22} - 2K_{23}M_{23} + K_{33}M_{22} \\
b_0 &= K_{22}K_{33} - K_{23}^2 \\
a_4 &= M_{11}(M_{22}M_{33} - M_{23}^2) + 2M_{12}M_{13}M_{23} - M_{12}^2M_{33} - M_{13}^2M_{22} \\
a_2 &= -\big(K_{22}M_{13}^2 + K_{33}M_{12}^2 - K_{33}M_{11}M_{22} + 2K_{23}M_{11}M_{23} - 2K_{23}M_{12}M_{13} \\
&\quad -K_{22}M_{11}M_{33}) \\
a_0 &= M_{11}(K_{22}K_{33} - K_{23}^2)
\end{aligned}$$

où M_{ij} et K_{ij} sont les entrées de la matrice de masse et de rigidité, respectivement. Pour $\alpha = 0$, $G_0(s)$ est donnée par

$$G_0(s) = \frac{1}{s}H_\alpha(s^2) = \frac{0,1494 \times 10^{-4}s^4 + 0,1647s^2 + 13,7602}{s(0,1843 \times 10^{-6}s^4 + 0,3904 \times 10^{-2}s^2 + 7,2628)}$$

Il est facile de vérifier que $G_\alpha(s)$ est nominalement réactive pour $\alpha = 0$ (les pôles et zéros sont simples, imaginaires purs et entrelacés).

Considérons l'application gardienne

$$v(G_\alpha) = \det\left(Bez(n(s), d(s))\right) \tag{D.39}$$

où $Bez(n,d)$ denote la matrice Bezoutienne des polynômes n et d. Évaluer le long de H_α, nous abtenons une *fonction polynomiale* de α d'order ν,

$$v(\alpha) := v\left(H_\alpha\right) \tag{D.40}$$

La démonstration est basée sur le fait que : (i) $H_\alpha(s)$ est nominallement réactive pour $\alpha = 0$, (ii) elle est une fonction continue de α et (iii) ses pôles et ses zéros sont des fonctions continues de α. Donc α_c est la plus petite racine positive de $v(\alpha)$.

Le Bézoutien associée à H_α est singulier si le polynôme

$$v(\alpha) = (\alpha - 0,89913)(\alpha - 1,10921) \tag{D.41}$$

D'où la valeur critique α_c de α,

$$\alpha_c = 0,89913$$

Pour deux et trois intervalles, les polynômes sont respectivement données par :

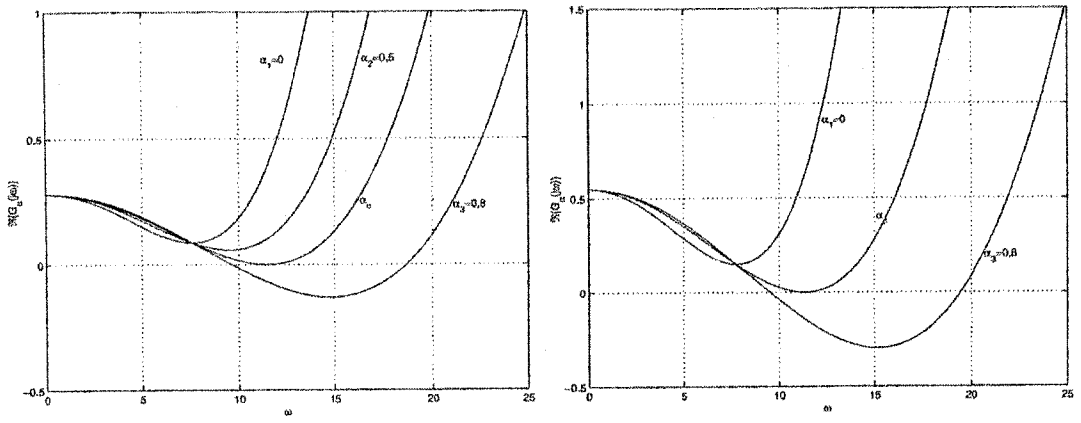
$$\begin{aligned} v &= (\alpha - 0,79679)(\alpha - 0,88638)(\alpha - 1,06322) \\ v &= (\alpha - 0,88638)(\alpha - 0,88663)(\alpha - 1,06450)(\alpha - 1,52245) \end{aligned}$$

Les valeurs critiques correspondantes sont alors données par

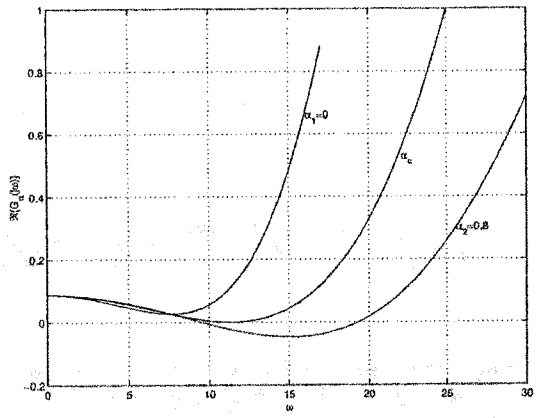
$$\begin{aligned} \alpha_c &= 0,79679 \\ \alpha_c &= 0,88638 \end{aligned}$$

D.4.2 Frottement non négligeable

Pour un, deux et trois intervals les parties réelles de la FT sont données dans la figure D.1. Les valeurs critiques de α sont $\alpha_c = 0.67862$, $\alpha_c = 0.65181$ et $\alpha_c = 0.66316$, respectivement.



a) Un élément. b) Deux éléments.



c) trois éléments.

FIG. D.1 – Partie réelle de $G_\alpha(j\omega)$ pour un, deux et trois éléments