

**Titre:** Reconstruction d'images en imagerie par résonance magnétique :  
Title: approche régularisée par champs de Markov

**Auteur:** Sabine Husse  
Author:

**Date:** 2004

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Husse, S. (2004). Reconstruction d'images en imagerie par résonance magnétique : approche régularisée par champs de Markov [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7313/>  
Citation:

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7313/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Yves Goussard  
Advisors:

**Programme:** Unspecified  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

RECONSTRUCTION D'IMAGES EN IMAGERIE PAR RÉSONANCE  
MAGNÉTIQUE - APPROCHE RÉGULARISÉE PAR CHAMPS DE MARKOV

SABINE HUSSE  
INSTITUT DE GÉNIE BIOMÉDICAL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE BIOMÉDICAL)

FÉVRIER 2004



National Library  
of Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

Acquisitions et  
services bibliographiques

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

ISBN: 0-612-90871-2

*Our file* *Notre référence*

ISBN: 0-612-90871-2

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this dissertation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de ce manuscrit.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the dissertation.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

# Canadä

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

RECONSTRUCTION D'IMAGES EN IMAGERIE PAR RÉSONANCE  
MAGNÉTIQUE - APPROCHE RÉGULARISÉE PAR CHAMPS DE MARKOV

présenté par: HUSSE Sabine

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. MEUNIER Jean, Ph.D, président

M. GOUSSARD Yves, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. BEAUDOIN Gilles, Ph.D, membre

Je dédie cette thèse à Mr. Jean-Maurice Bontinck

## REMERCIEMENTS

Je tiens avant tout à remercier le GRBB, et plus particulièrement toutes les personnes du sixième à l'École Polytechnique. En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de recherche, Yves Goussard pour m'avoir accordé sa confiance, et surtout pour la rigueur qu'il a apportée à orienter et corriger mon travail. Je tiens aussi à le remercier pour m'avoir appris à faire preuve de rigueur aussi bien dans mon travail que dans ma rédaction. Je veux aussi remercier Gilles Beaudoin pour m'avoir fourni mes images d'IRM, ainsi que pour avoir répondu à mes questions d'ordre physique au niveau du fonctionnement de l'IRM. Je veux ensuite remercier Raphaël Guichard pour sa collaboration, nos échanges et discussions, sa maîtrise de Linux et pour avoir résolu mes nombreux problèmes informatiques. Je remercie M. Savard et M. Cloutier pour m'avoir accordé une aide financière, sans quoi ce travail n'aurait pas été possible, au travers respectivement du GRMB et du programme VRQ. Dans le désordre, je remercie tous ceux qui ont su agrémenter mon passage au sixième de nombreuses discussions et de joie de vivre : Annie, Aziza, Benoit, Guillaume, Kaouthar, Nathalie, Séverine, Warsama ... et tous les autres que j'oublie sûrement ainsi que Diane Giroux pour sa disponibilité et pour m'avoir aidée au niveau administratif. . . Finalement je voudrai remercier mes parents pour m'avoir encouragée tout au long de mes études et surtout Mathieu pour m'avoir soutenue pendant ces deux années.

## RÉSUMÉ

Ce travail s'est déroulé en partie en relation avec les groupes de recherche en imagerie vasculaire et orthopédique du Centre hospitalier de l'Université de Montréal (CHUM). Dans ces groupes, l'imagerie par résonance magnétique (IRM) est très utilisée, c'est pourquoi nous nous intéressons ici à l'IRM en étudiant le problème du compromis entre le temps d'acquisition et la qualité des images. Plus précisément, nous souhaitons obtenir des images avec un meilleur contraste, représentant fidèlement les zones homogènes tout en préservant les discontinuités. Par ailleurs, nous savons qu'il nous est impossible de mettre en oeuvre une méthode aussi rapide que la méthode de reconstruction classique ; c'est pourquoi notre but est d'obtenir une méthode dont le volume de calculs reste raisonnable afin qu'elle puisse être appliquée avec des moyens de calcul modestes.

Afin d'atteindre cet objectif, nous avons posé le problème de reconstruction d'images comme un problème inverse et l'image reconstruite est obtenue par minimisation d'un critère composite formé de la somme d'un terme de fidélité aux données et d'un terme de régularisation. Ce dernier est introduit sous la forme d'une fonction de pénalisation qui représente une certaine information *a priori* sur la solution. Pour aboutir à ce critère composite, nous avons utilisé une approche bayésienne de type *maximum a posteriori* et nous avons modélisé l'*a priori* par des champs de Markov (MRF). Ces derniers, souvent utilisés en traitement d'image, sont définis par des interactions locales entre pixels et sont bien adaptés aux objets comportant des zones homogènes séparées par des discontinuités. Afin de simplifier le traitement, nous avons restreint les MRFs à des cliques à deux éléments, c'est-à-dire que les interactions sont limitées aux plus proches voisins dans les directions des axes. Nous avons choisi un MRF de manière à obtenir un critère convexe non quadratique, plus adapté à notre problème ; la convexité permet de faciliter la minimisation. La

combinaison du critère ainsi obtenu à des résultats d'analyse convexe nous a permis de mettre en oeuvre une technique de minimisation *semi-quadratique* efficace.

Nous avons aussi tenu compte de la nature spécifique du problème de reconstruction d'images en IRM : des données de nature complexe et tridimensionnelle et un opérateur de *transformée de Fourier* reliant les données  $\mathbf{y}$  à l'objet  $\mathbf{x}$ . L'utilisation de données tridimensionnelles nous a permis de disposer de plus d'informations *a priori* et donc de développer une reconstruction 3D afin d'obtenir des images de meilleure qualité. Nous avons ainsi adapté les formulations standard et vectorielle de la construction semi-quadratique de Geman & Yang en tirant profit des propriétés de l'opérateur de la transformée de Fourier. Ces propriétés nous permettent entre autres d'obtenir une matrice normale d'une structure particulière et d'augmenter l'efficacité numérique de notre reconstruction. Pour la formulation standard, nous avons développé deux formes : *exacte* et *approximée*. Mais surtout, la principale contribution de ce travail repose sur la formulation d'une forme originale généralisée de la construction de Geman & Yang. Cette généralisation nous permet d'obtenir une structure prédéfinie de la matrice normale, et ainsi diminuer le volume de calcul et de mémoire nécessaire.

La méthode développée a été évaluée sur des données 2D et 3D, simulées et réelles. Les résultats obtenus montrent une réelle amélioration de la qualité des images, avec une préservation des contours et des zones homogènes. De plus, l'utilisation d'un fantôme vasculaire calibré nous a permis de montrer la capacité de la méthode à détecter des détails de très petite taille, soit jusqu'à 1 mm de précision. Les comparaisons expérimentales des vitesses de convergence des différentes formulations montrent que les formulations standard approximée et généralisée présentent la meilleure performance. Cependant, la formulation généralisée sera préférée car elle n'introduit aucune approximation.

## ABSTRACT

This work was carried out partly in relation with the Centre hospitalier de l'Université de Montréal (CHUM) orthopedic and vascular imaging research group. In these groups, Magnetic Resonance Imaging is much used, this is why we have been interested in the MRI by studying the compromise problem between acquisition time and image quality. More precisely, we wish to obtain images with a better contrast, accurately representing the homogeneous area while preserving discontinuities. Moreover, we know it is impossible for us to implement a method as fast as the classical reconstruction method ; this is why our goal is to obtain a method whose computational cost remains reasonable so that it can be applied with modest means of calculation.

To reach this goal, we posed the image reconstruction problem as an inverse problem and the reconstructed image is obtained by minimizing a composite criterion formed by the sum of a fidelity term to the data and a regularization term. This last term is introduced in the form of a penalization function which represents the *a priori* information on the solution. To reach this composite criterion, we used a Bayesian approach of type *maximum a posteriori* and we modeled the *a priori* by a Markov Random Field (MRF). These, often used in image processing, are defined by local interactions between pixels and are well adapted to the objects comprising homogeneous area separated by discontinuities. In order to simplify the treatment, we restricted MRFs to two element *cliques*, that is mean interactions are limited to the closest neighbors in the axes directions. We chose a MRF so as to obtain a non quadratic convex criteria, more adapted to our problem ; convexity facilitates minimization. The combination of the criterion thus obtained with results of convex analysis enabled us to implement an efficient *half quadratic* minimization technique.

We also took into account the specific nature of the image reconstruction problem in MRI : tridimensional and complex data and a *Fourier transform* operator connecting data  $\mathbf{y}$  and image  $\mathbf{x}$ . The use of tridimensional data enabled us to use more *a priori* information and then to develop a 3D reconstruction to obtain images of better quality. We have adapted the standard and vectorial formulations of Geman & Yang half quadratic construction by using the properties of the Fourier transform operator. These properties enable us to obtain a normal matrix of a particular structure and to improve the numerical effectiveness of our reconstruction. For the standard formulation, we developed two forms : *exact* and *approximate*. But above all, the main contribution of this work is the formulation of an original generalized form of Geman & Yang construction. This generalization enables us to obtain a preset structure of the normal matrix and thus to decrease the memory and computational volume necessary.

The developed method was evaluated on 2D and 3D data, simulated and real data. The obtained results show a real improvement of the image quality, with edge and homogeneous area preserving. Moreover, the use of a gauged vascular phantom enabled us to show the capacity of the method to detect details of very small size, that is to say up to 1 mm of precision. The experimental comparisons of speeds convergence of the various formulations show that the approximated standard and generalized formulations present the best performance. However, the generalized formulation will be preferred because it does not introduce any approximation.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iv
REMERCIEMENTS . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	x
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xv
LISTE DES FIGURES . . . . .	xvi
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xx
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xxii
INTRODUCTION . . . . .	3
CHAPITRE 1 GÉNÉRALITÉS SUR L'IRM . . . . .	5
1.1 Fondements physiques . . . . .	5
1.2 Description et équations de fonctionnement . . . . .	7
1.2.1 Équations du mouvement de $M$ . . . . .	9
1.2.2 Superposition de trois gradients. . . . .	11
1.3 Écho de spin . . . . .	14
1.4 Écho de gradient . . . . .	14
1.5 Remarques . . . . .	16
1.6 Conclusion . . . . .	17

CHAPITRE 2	QUALITÉ ET RAPIDITÉ D'ACQUISITION : SOLUTIONS EXISTANTES	19
2.1	Méthodes basées sur l'acquisition des données - grille cartésienne	19
2.1.1	Séquence rapide	19
2.1.1.1	Echo Planar Imaging - EPI	20
2.1.1.2	Fast Spin Echo - Rapid Acquisition with Relaxation Enhancement (RARE)	21
2.1.2	Méthode du demi-plan de Fourier	21
2.1.3	Fast Low Angle Shot Imaging - FLASH	25
2.1.4	Acquisition multi-antennes	26
2.1.4.1	SMASH	26
2.1.4.2	SENSE	26
2.2	Autres méthodes : grille non cartésienne	28
2.2.1	Différents modes de remplissage	28
2.2.2	Méthodes de ré-échantillonnage et de reconstruction	28
2.3	Imagerie dynamique	30
2.3.1	Keyhole et RIGR	30
2.3.2	BRISK	31
2.4	Conclusion	31
CHAPITRE 3	PROBLÈME INVERSE, RÉGULARISATION ET PÉNALISATION SEMI-QUADRATIQUE	32
3.1	Introduction	32
3.2	Problème inverse	32
3.2.1	Méthodes par inversion directe	33
3.2.2	Problème mal posé	35
3.3	Régularisation	36
3.4	Pénalisation quadratique de Tikhonov	37

3.4.1	Définition	37
3.4.2	Exemple	38
3.5	Interprétation bayésienne de la régularisation	40
3.5.1	Rappels	40
3.5.1.1	Maximum de vraisemblance : MV	40
3.5.1.2	Maximum a posteriori : MAP	41
3.5.2	Choix de l' <i>a priori</i> - Champs aléatoires de Markov et de Gibbs	42
3.6	Choix du MRF	45
3.6.1	Champs de Markov à valeurs discrètes	45
3.6.2	Champs de Markov à valeurs continues	46
3.6.3	Fonctions de pénalisation $\varphi$ non quadratiques	47
3.7	Minimisation d'un critère convexe non quadratique	49
3.7.1	Les algorithmes de descente	50
3.7.2	Les méthodes de relaxation	52
3.8	Critère augmenté semi-quadratique. Construction de GY et GR	53
3.8.1	Définitions d'après Rockafellar (1970)	54
3.8.2	Construction d'après Geman & Reynolds	55
3.8.3	Construction d'après Geman & Yang	57
3.8.4	Mise en oeuvre	59
3.8.4.1	Approche directe - Mise à jour groupée	59
3.8.4.2	Mise à jour pixel par pixel	61
3.8.4.3	Réinterprétation de GY et GR	63
3.9	Application à l'IRM	64
3.10	Conclusion	65
CHAPITRE 4 APPLICATION À NOTRE PROBLÈME - RECONSTRUCTION D'IMAGE EN IRM		66
4.1	Remise en contexte	66

4.2	Choix de l'algorithme et de la fonction $\varphi$ . . . . .	68
4.3	Formulation standard de Geman & Yang - Variables complexes . .	70
4.3.1	Relations de dualité . . . . .	70
4.3.2	Estimation de la variable de ligne $\hat{\mathbf{b}}$ . . . . .	71
4.3.3	Estimation de $\hat{\mathbf{x}}$ . . . . .	72
4.3.4	Choix de $\alpha$ assurant la convexité du critère . . . . .	73
4.3.5	Mise en oeuvre . . . . .	75
4.3.6	Formulation exacte . . . . .	76
4.3.7	Formulation approximée . . . . .	79
4.3.8	Conclusion . . . . .	79
4.4	Forme généralisée . . . . .	80
4.5	Forme vectorielle . . . . .	86
4.6	Convergence étendue . . . . .	88
4.7	Conclusion . . . . .	89
CHAPITRE 5 EXTENSION EN 3 D . . . . .		91
5.1	Reformulation du problème . . . . .	91
5.2	Expression du critère primal . . . . .	92
5.3	Formulation standard . . . . .	93
5.3.1	Simple extension 3D . . . . .	93
5.3.2	Mise en oeuvre pour des volumes de grande taille . . . . .	94
5.4	Formulation généralisée . . . . .	97
5.5	Forme vectorielle . . . . .	99
5.6	Conclusion - Discussion . . . . .	100
CHAPITRE 6 RÉSULTATS OBTENUS ET DISCUSSION . . . . .		101
6.1	Introduction - Rappel des objectifs . . . . .	101
6.2	Images simulées - 2D . . . . .	102
6.2.1	Principe de simulation . . . . .	102

6.2.2	Résultats	104
6.2.3	Comparaison expérimentale des vitesses de convergence	106
6.3	Images simulées - 3D	108
6.3.1	Comparaison reconstruction 3D et reconstruction classique	109
6.3.2	Comparaison 2D - 3D	112
6.4	Résultats obtenus sur les données réelles	115
6.4.1	Fantôme en PVC	115
6.4.2	Images de genou	119
6.4.3	Fantôme vasculaire	121
6.5	Conclusion - Discussion	132
CONCLUSION		133
RÉFÉRENCES		135
ANNEXES		145

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Vue d'ensemble de la formulation exacte de la forme standard de GY . . . . .	78
Tableau 4.2	Vue d'ensemble de la formulation approximée de la forme standard de GY . . . . .	79
Tableau 4.3	Vue d'ensemble de la formulation généralisée de GY . . . . .	85
Tableau 4.4	Vue d'ensemble de la formulation vectorielle de GY . . . . .	88
Tableau 5.1	Résumé d'une itération de l'algorithme . . . . .	96
Tableau 6.1	Erreurs obtenues en % . . . . .	105
Tableau 6.2	Erreurs obtenues en % . . . . .	110
Tableau 6.3	Erreurs obtenues en % pour les comparaisons 2D - 3D . . . . .	112

## LISTE DES FIGURES

Figure 1	Photo d'un appareil d'imagerie par résonance magnétique ( <a href="http://www.siemensmedical.com">http://www.siemensmedical.com</a> )	2
Figure 2	Image typique représentant le cerveau	2
Figure 3	Exemple d'image obtenue en IRM	4
Figure 1.1	Carte de densité d'eau, pondération différente selon les tissus (Hornak, 1996-2003)	6
Figure 1.2	Echo de spin, d'après (Hornak, 1996-2003)	15
Figure 1.3	Echo de gradient, d'après (Hornak, 1996-2003)	15
Figure 2.1	Résumé de l'algorithme de Margosian, d'après (Pauly, 2002)	23
Figure 2.2	Résumé de l'algorithme de POCS, d'après (Pauly, 2002)	24
Figure 2.3	Principe de SENSE, d'après (Pruessmann <i>et al.</i> , 1999)	27
Figure 3.1	Résultat obtenu par les moindres carrés. a - signal $\mathbf{x}$ original, b - la réponse impulsionnelle $\mathbf{h}$ , c - $\tilde{\mathbf{y}}$ , d - le signal bruité $\mathbf{y}$ et e - le signal restauré $\hat{\mathbf{x}}$	34
Figure 3.2	Résultats obtenus avec une pénalisation quadratique de Ti- khonov : gauche - fantôme non bruité, centre - fantôme bruité, RSB=10dB	39
Figure 3.3	Représentation d'un voisinage du premier ordre dans le cas 3D - d'après (Villain <i>et al.</i> , 1997)	44
Figure 3.4	Allure des différentes fonctions de pénalisation (trait plein) comparées à la fonction quadratique (pointillés) - (a) branche d'hyperbole pour $\delta = 1$ , (b) fonction de Huber pour $T = 0.5$ et (c) pénalisation $L^p$ pour $p = 1.4$	49

Figure 4.1	Allure de la fonction de pénalisation utilisée(les abscisses correspondent à la différence entre 2 pixels voisins) comparée à la fonction quadratique correspondant à une régularisation gaussienne(pointillés). Les asymptotes en $\pm\infty$ sont aussi représentées. . . . .	69
Figure 6.1	fantôme utilisé dans la partie 6.3 . . . . .	103
Figure 6.2	Comparaison entre la reconstruction classique, la reconstruction de Tikhonov et notre méthode, pour un RSB = 20dB .	105
Figure 6.3	Comparaison entre la reconstruction classique, la reconstruction de Tikhonov et notre méthode, pour un RSB = 10dB .	105
Figure 6.4	Comparaison expérimentale des vitesses de convergence pour une image de taille $128\times 128$ : $J(x)$ vs. nombre d'itérations (gauche) et $J(x)$ vs. temps (droite) . . . . .	107
Figure 6.5	Comparaison expérimentale des vitesses de convergence pour une image de taille $512\times 512$ : $J(x)$ vs. nombre d'itérations (gauche) et $J(x)$ vs. temps (droite) . . . . .	107
Figure 6.6	fantôme 3D utilisé . . . . .	109
Figure 6.7	Résultat pour un RSB de 10 dB pour la 10 <sup>ième</sup> tranche (gauche) et 30 <sup>ième</sup> tranche (droite) - Image d'origine (haut), image obtenue par reconstruction classique (milieu), et image obtenue par notre algorithme (bas) . . . . .	111
Figure 6.8	Détails des contours pour les tranches 10 (gauche) et 30 (droite) - contour obtenu en utilisant la fonction contour de MATLAB . . . . .	112
Figure 6.9	Comparaison reconstruction 2D (bas à gauche) - 3D (bas à droite) pour la 30 <sup>ième</sup> tranche. RSB = 10 dB . . . . .	113
Figure 6.10	Comparaison reconstruction 2D (bas à gauche) - 3D (bas à droite) pour la 30 <sup>ième</sup> tranche. RSB = 0 dB . . . . .	114

Figure 6.11	Détails des contours pour la tranche 30, pour les reconstructions 2D et 3D . . . . .	114
Figure 6.12	Première acquisition de données - Écho de spin 2D. Quinzième tranche. Reconstruction classique (gauche) et GY 3D (droite). . . . .	117
Figure 6.13	Première acquisition de données - Écho de spin 2D. Comparaison d'une reconstruction 2D (droite) et 3D (gauche) pour les quinzième (haut) et vingt-deuxième (bas) tranche. . . . .	118
Figure 6.14	Deuxième acquisition de données - Écho de gradient 3D : quatre-vingt dixième tranche. Reconstruction classique (gauche) et GY (droite). . . . .	119
Figure 6.15	Représentation d'une coupe de genou obtenue en IRM . . . . .	120
Figure 6.16	Résultats obtenus pour le genou : cinquante cinquième tranche. Reconstruction classique (gauche) et GY (droite). . . . .	121
Figure 6.17	Schéma du fantôme vasculaire. D'après (Boussion <i>et al.</i> , 2003)	122
Figure 6.18	Représentation 3D du vaisseau. D'après (Boussion <i>et al.</i> , 2003). Seul quatre segments sont ici représentés : 0.98, 2.40, 4.20 et 6.28 mm de diamètre. Dans notre cas, nous disposons d'un cinquième segment de 8 mm de diamètre. . . . .	122
Figure 6.19	Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique. Image obtenue avec six antennes (gauche) et avec une seule antenne (droite) . . . . .	124
Figure 6.20	Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique. Image obtenue avec six antennes (gauche) et avec une seule antenne (droite) - Détails . . . . .	124
Figure 6.21	Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique (gauche) et GY (droite) . . . . .	126

Figure 6.22	Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique (gauche) et GY (droite) - Détails . . . . .	126
Figure 6.23	Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique. Coupe du segment de 8 mm. Image obtenue avec six antennes (haut) et avec une seule antenne (bas) . . . . .	128
Figure 6.24	Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique. Coupe du segment de 0.98 mm. Image obtenue avec six antennes (haut) et avec une seule antenne (bas) . . . . .	128
Figure 6.25	Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique. Coupe du segment de 8 mm. Image obtenue avec six antennes (haut) et avec une seule antenne (bas) - Détails	129
Figure 6.26	Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique. Coupe du segment de 8 mm. Image obtenue avec six antennes (haut) et avec une seule antenne (bas) - Détails	129
Figure 6.27	Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Coupe du segment de 8 mm. Image obtenue avec la reconstruction classique (haut) et avec notre algorithme (bas) . . . . .	130
Figure 6.28	Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Coupe du segment de 0.98 mm. Image obtenue avec la reconstruction classique (haut) et avec notre algorithme (bas) . . . . .	130
Figure 6.29	Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Coupe du segment de 8 mm. Image obtenue avec la reconstruction classique (haut) et avec notre algorithme (bas) - Détails . . . . .	131
Figure 6.30	Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Coupe du segment de 0.98 mm. Image obtenue avec la reconstruction classique (haut) et avec notre algorithme (bas) - Détails . . . . .	131

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

2D	bidimensionnel
3D	tridimensionnel
ARM	angiographie par résonance magnétique
EPI	Echo Planar Imaging
FoV	champ d'intérêt ( <i>Field of View</i> )
IRM	imagerie par résonance magnétique
IRMF	imagerie par résonance magnétique fonctionnelle
MAP	maximum <i>a posteriori</i>
MRV	champs aléatoire de Markov ( <i>Markov Random Field</i> )
MV	maximum de <i>vraisemblance</i>
RF	radio-fréquence
RMN	résonance magnétique nucléaire
RSB	rapport signal à bruit
FFT	transformée de Fourier rapide ( <i>Fast Fourier Transform</i> )

*Notations du chapitre 3 :*

$x$	objet original
$y$	données mesurées
$H$	opérateur linéaire reliant $x$ à $y$
$n$	bruit aléatoire

*Notations du chapitre 4 (2D) :*

$X$	matrice représentant l'objet original 2D
$Y$	matrice des données mesurées bruitées
$x$	vecteur formé par la concaténation des colonnes de $X$
$y$	vecteur formé par la concaténation des colonnes de $Y$

*Notations du chapitre 5 (3D) :*

$\widetilde{\Phi}_2$	opérateur de transformée de Fourier opérant sur toutes les tranches
$V$	matrice des différences finies du premier ordre opérant sur un objet 3D
$x$	objet original 3D
$y$	données mesurées 3D
$x^{(k)}$	restriction à la tranche $k$ de l'objet original 3D
$y^{(k)}$	restriction à la tranche $k$ des données mesurées 3D

*Notations communes*

$x$	vecteur inconnu à estimer
$\hat{x}$	estimée de $x$
$J(x)$ ou $J_\varphi(x)$	critère qui définit l'estimée $\hat{x}$
$K(x, b)$	critère augmenté semi-quadratique
$b$	variable duale ou encore appelée variable de ligne
$\eta_{i,j}$	voisinage du pixel $(i, j)$
$\eta$	système de voisinage
$\mathcal{C}$	ensemble des cliques
$\mathcal{C}_2$	ensemble des cliques à deux éléments
$\varphi$ ou $\varphi_\alpha$	fonction de pénalisation
$\delta$	paramètre d'échelle de la fonction de pénalisation $\varphi$
$A$	matrice normale du problème
$D$	matrice des différences finies du premier ordre
$d_c$	vecteur de restriction à la clique $c$
$\Phi_2$	matrice unitaire de la transformée de Fourier 2D
$\Delta$	matrice de perturbation
$\Lambda$	matrice de diagonalisation

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	ALGORITHME DE GR, VERSION STANDARD - RELATIONS DE DUALITÉ ET ÉVALUATION DES VARIABLES DE LIGNE . . . . .	145
I.1	Relations de dualité entre $\varphi$ et $\psi$ . . . . .	145
I.2	Calcul de l'estimée $\hat{b}_c$ des variables de ligne . . . . .	146
ANNEXE II	ALGORITHME DE GY, VERSION STANDARD - RELATIONS DE DUALITÉ ET ÉVALUATION DES VARIABLES DE LIGNE . . . . .	148
II.1	Relations de dualité entre $\varphi_\alpha$ et $\psi_\alpha$ . . . . .	148
II.2	Calcul de l'estimée $\hat{b}_c$ des variables de ligne . . . . .	149
ANNEXE III	ALGORITHME DE GY, VERSION STANDARD - FORMULATION COMPLEXE - RELATIONS DE DUALITÉ ET ÉVALUATION DES VARIABLES DE LIGNE . . . . .	151
III.1	Relations de dualité entre $\varphi_\alpha$ et $\psi_\alpha$ . . . . .	151
III.2	Calcul de l'estimée $\hat{\mathbf{b}}$ des variables de ligne . . . . .	152
ANNEXE IV	ÉTABLISSEMENT DE L'EXPRESSION DES MATRICES INTERVENANT DANS LES DIVERSES MÉTHODES . . . . .	154
IV.1	Pénalisation horizontale . . . . .	154
IV.2	Pénalisation verticale . . . . .	157

## AVANT-PROPOS

L'imagerie par résonance magnétique (IRM) est une technique relativement jeune comparativement à la tomographie par rayons X (la tomodensitométrie) ou encore comparativement à la tomographie par émission de positons. Ainsi, le phénomène de résonance magnétique a-t-il été découvert en 1946 par Felix Bloch et Edward Purcell (Hornak, 1996-2003), découverte qui leur vaudra le prix Nobel de physique en 1952. Jusqu'aux années 70 la résonance magnétique nucléaire (RMN) sera principalement utilisée pour les analyses moléculaires physiques et chimiques. Il faut attendre 1971 et Raymond Damadian pour envisager l'IRM comme technique de diagnostique de maladies. Paul Lauterbur obtient les premières images en IRM en 1973 grâce à une technique de rétroprojection, similaire à celle utilisée en tomographie par rayons X. Les techniques de base de l'IRM actuelle, soit le codage par la phase et les fréquences, ainsi que la reconstruction par transformée de Fourier seront introduites en 1975 par Richard Ernst. Finalement, en 1977, Peter Mansfield met au point la technique d'Echo Planar Imaging (EPI), technique qui sera principalement développée les années suivantes et qui permet d'obtenir de quinze à vingt images en une seconde. La même année Raymond Damadian réalise la première image d'un corps entier, tout comme Edelstein, en 1980, ce dernier utilisant la méthode développée par Ernst. Les années suivantes verront principalement le développement de techniques permettant d'accélérer l'acquisition des données, ainsi que l'élargissement du champ d'application de la résonance magnétique, comme l'IRM fonctionnelle (IRMf) et l'angiographie par résonance magnétique (ARM). Finalement, en 2003 Paul Lauterbur et Peter Mansfield ont reçu conjointement le prix Nobel de médecine pour leur contribution au développement de l'IRM. Un exemple d'appareil d'IRM est présenté à la figure 1 et une image type obtenue avec ce genre d'appareil est donnée à la figure 2. De telles images sont d'une grande

utilité clinique et leur utilisation ne cesse de croître. Cependant, cette technique d'imagerie présente l'inconvénient d'une durée d'examen relativement longue, une diminution de la durée de l'examen entraînant une diminution de la qualité des images. Notre projet s'inscrit dans l'amélioration de ce compromis, temps d'acquisition - qualité des images.

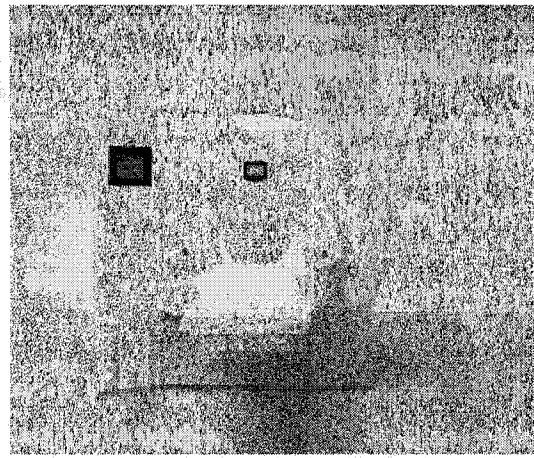


Figure 1 Photo d'un appareil d'imagerie par résonance magnétique (<http://www.siemensmedical.com>)

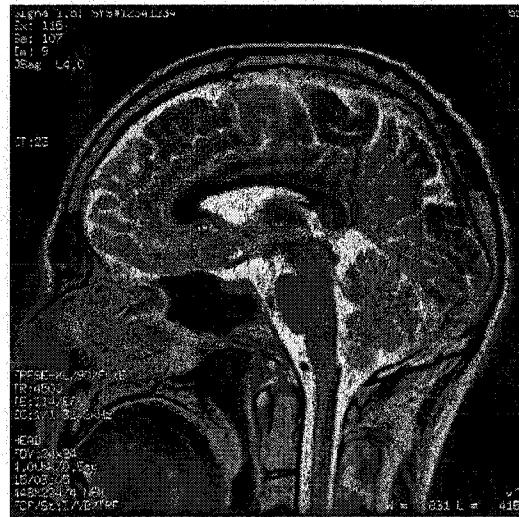


Figure 2 image typique obtenue par un appareil d'imagerie par résonance magnétique (<http://www.gemedicalsystems.com>)

## INTRODUCTION

Ce travail a bénéficié de l'environnement matériel et humain de la plate forme d'imagerie située au Centre hospitalier de l'Université de Montréal (CHUM), au pavillon Notre-Dame. Il s'agit ici de s'intéresser aux images obtenues par imagerie par résonance magnétique (IRM), les principales applications dans ce groupe étant dans les domaines orthopédique et vasculaire.

Comme nous allons le voir au chapitre 1, l'IRM est une technique non invasive, elle permet principalement de cartographier la répartition de l'eau dans l'organisme humain ; cette technique est adéquate aussi bien pour l'imagerie vasculaire qu'orthopédique. Ainsi, dans le cadre de l'imagerie orthopédique, les cartilages, qui contiennent beaucoup d'eau, sont plus aisément visible que par un tomographe à rayons X.

On se rend compte en observant une image obtenue en IRM (figure 3) que celle-ci comporte des oscillations ainsi que de nombreux artefacts dûs aux caractéristiques matérielles du système d'acquisition ainsi qu'aux grandeurs physiques utilisées.

Le principal objectif de cette étude est d'améliorer la qualité des images, c'est à dire obtenir des images représentant fidèlement les zones homogènes tout en préservant les discontinuités. De plus, pour atteindre cette objectif, nous désirons mettre en oeuvre une méthode dont le volume de calculs reste raisonnable.

Il est possible de travailler à différents niveaux pour améliorer la qualité des images :

- physique, soit directement sur la machine ;
- traitement des données, reconstruction de l'image

Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'étape de reconstruction de

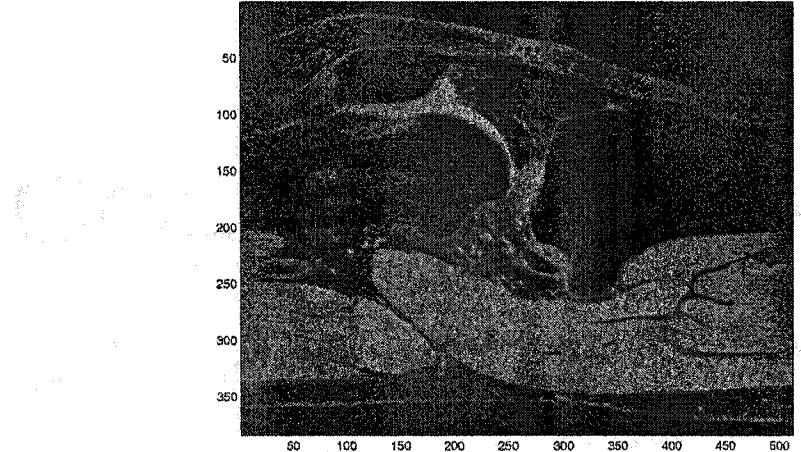


Figure 3 Exemple d'image obtenue en IRM

l'image. Nous avons ainsi développé des méthodes qui répondent à plusieurs critères : des méthodes générales 3D qui peuvent s'adapter à différents types de données et qui ne dépendent pas de l'appareil, et des méthodes qui nous permettent d'obtenir un bon compromis entre le temps de calcul et la qualité des images obtenues.

Dans le chapitre 1, nous effectuons une brève description de l'IRM, afin de poser les bases qui nous seront utiles par la suite. Dans le chapitre 2, nous exposons les différentes techniques utilisées afin d'accélérer l'acquisition des données et améliorer les images obtenues. Cette revue de littérature est prolongée au chapitre 3 par l'étude des problèmes inverses et des pénalisations semi-quadratiques. Partant de cette étude nous exposons au chapitre 4 nos modèles appliqués tout d'abord au cadre 2D, puis au chapitre suivant au cadre 3D. Finalement, au chapitre 6 nous analysons les résultats obtenus, sur des images simulées et réelles, et nous comparons expérimentalement les vitesses de convergence des différentes techniques.

## CHAPITRE 1

### GÉNÉRALITÉS SUR L'IRM

Cette définition un peu sommaire trouvée dans la revue de presse de l'Institut de radiologie de Sion résume le fonctionnement de l'IRM :

*“Il s’agit d’une technique médicale très sophistiquée qui (...) utilise les propriétés magnétiques du corps humain, grâce au fait qu’il contient beaucoup d’eau. (...) En stimulant les protons du corps humain, placé au centre d’un puissant champ magnétique, il est possible d’obtenir un signal que l’on capte à l’aide d’une antenne très sensible.”* ([www.irm-sion.ch/Presse/LeNouvelliste\\_2003-02-12.pdf](http://www.irm-sion.ch/Presse/LeNouvelliste_2003-02-12.pdf))

Dans cette partie, les principes physiques de base de l'IRM ainsi que les équations mathématiques de fonctionnement sont exposés. Pour une description approfondie nous renvoyons le lecteur vers une documentation plus complète sur le sujet. Les principales sources que nous avons utilisées sont les suivantes : (Hornak, 1996-2003; Pauly, 2002; Mc Veigh, 1996; Nishimura, 1996; Roullot, 2001).

#### 1.1 Fondements physiques

L'IRM exploite l'existence de propriétés magnétiques des nucléons (neutrons et protons) qui composent le noyau des atomes. Elle repose plus exactement sur la capacité d'aimantation du proton de l'atome d'hydrogène, composante principale des tissus mous du corps humain. Normalement, les moments magnétiques nucléaires<sup>1</sup> sont orientés de manière aléatoire. Lorsqu'ils sont soumis à un champ magnétique

<sup>1</sup>ou spin, c'est à dire la rotation de la particule sur elle-même, colinéaire au moment magnétique. Nous ne distinguerons pas le spin du moment magnétique, utilisant aussi bien l'un comme l'autre terme.

intense  $B_0$ , ils s'alignent dans le sens de ce dernier. Cependant, le moment magnétique résultant est nul et ne peut être mesuré. C'est pourquoi on crée un phénomène de résonance en excitant les protons par une onde radio-fréquence (RF) : les spins s'écartent de leur position d'équilibre d'un angle proportionnel à la durée et à l'amplitude du champ RF appliqué. Lorsque l'on supprime cette onde, le retour à l'équilibre est différent suivant les tissus traversés. Ce retour à l'équilibre se décompose en deux mouvements : le mouvement de précession, c'est à dire la rotation des spins autour d'une direction avec une vitesse angulaire précise, et le mouvement de relaxation, soit le retour du moment magnétique  $M$  à sa position d'équilibre. C'est à ce niveau que nous retrouvons le principe de base de l'IRM : d'après la loi de Faraday, le mouvement de précession induit une force électromotrice (*fem*) qui est captée par un récepteur RF orienté pour recevoir les changements de la magnétisation dans le plan perpendiculaire au champ  $B_0$ .

Le corps peut ainsi être vu comme un ensemble de petits oscillateurs induisant un signal RF. L'objectif en IRM est de cartographier la distribution spatiale et l'amplitude de ces petits oscillateurs. Le signal capté est proportionnel au nombre de protons, donc à la teneur en eau des tissus. L'image IRM montre ainsi la distribution en eau des différents tissus (figure 1.1).

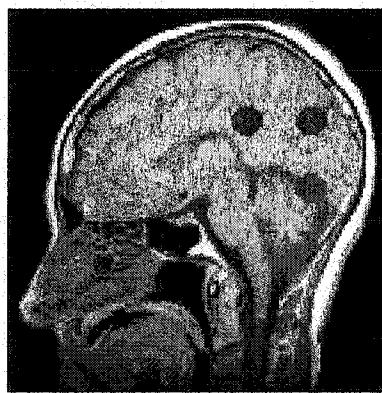


Figure 1.1 Carte de densité d'eau, pondération différente selon les tissus (Hornak, 1996-2003)

Nous allons maintenant poser les bases d'une description plus rigoureuse de ces phénomènes et introduire diverses notions qui seront utilisées par la suite.

## 1.2 Description et équations de fonctionnement

Pour obtenir une image, le patient est placé dans un champ magnétique homogène et puissant  $B_0$ , ce dernier pointant dans la direction de l'axe  $z$ , appelée direction *longitudinale*. En application clinique, le champ maximal autorisé est de 2 Tesla (T), mais en recherche les champs peuvent aller jusqu'à 4 T. À l'équilibre thermique, les protons s'alignent dans la direction du champ (*On parle principalement des noyaux des atomes d'hydrogène car ces derniers représentent l'atome le plus présent dans l'organisme humain*). En fait, les spins tournent autour de la direction  $z$  avec une vitesse angulaire proportionnelle à l'amplitude  $B_0$  de  $B_0$ . Comme nous l'avons dit précédemment, il s'agit d'un *mouvement de précession*. La relation liant cette fréquence de rotation, appelée *fréquence de Larmor*, à l'intensité du champ magnétique est la suivante :

$$f_0 = \frac{\gamma}{2\pi} B_0 \quad \text{ou encore} \quad w_0 = 2\pi f_0 = \gamma B_0 \quad (1.1)$$

où  $\gamma$  représente le moment gyromagnétique du proton,  $\frac{\gamma}{2\pi} = 42.576 \text{ MHz/T}$ .

Ainsi, afin d'obtenir un signal, on applique une onde électromagnétique de fréquence  $f_0$  pour exciter les spins hors de l'état d'équilibre. Cette onde est une impulsion RF appliquée dans le plan  $xy$ , appelé *plan transversal*. À l'arrêt de cette impulsion les spins se sont écartés de leur position d'équilibre d'un angle  $\alpha$  proportionnel à l'amplitude et à la durée d'application de l'impulsion RF. Dans le cas où  $\alpha = 90^\circ$ , les spins précessent dans le plan  $xy$ ; on parle alors d'une impulsion RF à  $90^\circ$ . Lorsque l'on supprime cette onde, au mouvement de précession à la fréquence de

Larmor s'associe le retour à l'équilibre du moment magnétique. Nous avons alors :

1. le mouvement de *précession* à la fréquence de Larmor dont l'équation de mouvement, dans le cas général où un champ magnétique  $\mathbf{B}$  est appliqué, est la suivante :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \wedge \gamma \mathbf{B} \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{M}$  est le moment magnétique d'un volume (Nishimura, 1996, p.57) et  $\wedge$  représente le produit vectoriel.

2. le mouvement de *relaxation* : retour du moment magnétique  $\mathbf{M}$  à sa position d'équilibre, parallèlement au champ  $\mathbf{B}$ . Lors de ce retour à l'équilibre, la composante transversale  $M_{xy}$  diminue alors que la composante longitudinale  $M_z$  qui est dans le sens du champ magnétique statique, augmente. Il nous est possible de décrire le mouvement de ces deux composantes :

- *la composante longitudinale  $M_z$  :*

$$\frac{dM_z}{dt} = -\frac{M_z - M_0}{T_1} \quad (1.3)$$

où  $T_1$  est le temps de relaxation spin-réseau et  $M_0$  représente le moment magnétique à l'équilibre.

- *la composante transversale  $M_{xy}$  :*

$$\frac{dM_{xy}}{dt} = -\frac{M_{xy}}{T_2} \quad (1.4)$$

$$\text{avec } M_{xy} = M_x + iM_y \quad (1.5)$$

où  $T_2$  est le temps de relaxation spin-spin et  $i$  représente la composante imaginaire pure.

Les constantes  $T_1$  et  $T_2$  sont appelées constantes du temps de relaxation. Les ordres de grandeur de ces deux constantes varient de quelques dizaines de millisecondes

(pour  $T_1$ ) à l'ordre de la seconde (pour  $T_2$ ). La variation de ces paramètres d'un tissu à l'autre crée le contraste de l'image.

En combinant les équations (1.2), (1.3) et (1.5), nous obtenons l'équation de Bloch, équation du mouvement de  $\mathbf{M}$  qui incorpore le retour à l'équilibre :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \wedge \gamma \mathbf{B} - \frac{M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j}}{T_2} - \frac{(M_z - M_0) \mathbf{k}}{T_1} \quad (1.6)$$

où  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$  représentent les directions respectives des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . En fait dans l'équation (1.5), nous avons directement utilisé le terme  $M_{xy}$  que l'on retrouve fréquemment dans la littérature. Trouver la valeur du signal récupéré revient dans un premier temps à résoudre l'équation de Bloch.

### 1.2.1 Équations du mouvement de $\mathbf{M}$

Intéressons nous tout d'abord à l'équation (1.2), soit au mouvement de précession. Dans le cas d'un champ uniforme statique  $\mathbf{B}_0$ , nous avons :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \wedge \gamma B_0 \mathbf{k} \quad (1.7)$$

ce qui peut s'écrire matriciellement :

$$\begin{bmatrix} \frac{dM_x}{dt} \\ \frac{dM_y}{dt} \\ \frac{dM_z}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma B_0 & 0 \\ -\gamma B_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Si nous introduisons les équations de relaxation (1.3) et (1.5), nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \frac{dM_x}{dt} \\ \frac{dM_y}{dt} \\ \frac{dM_z}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/T_2 & \gamma B_0 & 0 \\ -\gamma B_0 & -1/T_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/T_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0/T_1 \end{bmatrix}$$

En posant  $\gamma B_0 = w_0$  et en utilisant la définition de  $M_{xy}$  introduite en (1.5), soit

$M_{xy} = M_x + iM_y$ , nous avons :

$$\frac{dM_{xy}}{dt} = -\left(\frac{1}{T_2} + iw_0\right) M_{xy} \Rightarrow M_{xy}(t) = M_0 e^{-t/T_2} e^{-iw_0 t} \quad (1.8)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = -\frac{M_z - M_0}{T_1} \Rightarrow M_z(t) = M_0(1 - e^{-t/T_1}) \quad (1.9)$$

Comme nous l'avons dit précédemment, le mouvement de précession induit une force électromotrice captée par des antennes RF dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}_0$ , soit le plan  $xy$ ; seule la composante  $M_{xy}$  est mesurée. À ce niveau, nous effectuons ici une approximation, car nous estimons qu'entre deux impulsions RF  $\mathbf{M}$  est revenu complètement à son état d'équilibre, où  $M_z = M_0$ , ce qui, en général, n'est pas le cas. De plus, le corps n'est pas un objet homogène :  $T_2$  et  $M_0$  varient selon les tissus. Ils sont dépendants de la position  $\mathbf{r}$  ( $x, y, z$ ) où l'on se situe, soit :

$$M_{xy}(\mathbf{r}, t) = M_0(\mathbf{r}) e^{-t/T_2(\mathbf{r})} e^{-iw_0 t} \quad (1.10)$$

Le signal capté est obtenu par la contribution de toutes les composantes  $M_{xy}(\mathbf{r}, t)$  du volume, soit :

$$S(t) = \int_V M_0(\mathbf{r}) e^{-t/T_2(\mathbf{r})} e^{-i(w_0 t)} dV \quad (1.11)$$

À ce stade, il n'est pas encore possible de distinguer la répartition spatiale des spins et nous allons voir par la suite que cela peut être fait par l'introduction d'un gradient de champ magnétique  $\mathbf{B}_z$ .

### 1.2.2 Superposition de trois gradients.

Tout comme  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{B}_z$  pointe dans la direction  $z$ , mais comme nous appliquons un champ externe, son amplitude varie selon la position. Le gradient peut s'exprimer sous la forme d'un vecteur :

$$\mathbf{G} = G_x \mathbf{i} + G_y \mathbf{j} + G_z \mathbf{k} \quad (1.12)$$

$$\text{où } G_x = \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial x}, \quad G_y = \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial y}, \quad G_z = \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z} \quad (1.13)$$

Le champ magnétique total est alors :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (B_0 + G_x x + G_y y + G_z z) \mathbf{k} = (B_0 + \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{k} \quad (1.14)$$

où  $(\cdot)$  représente le produit scalaire. Si nous introduisons ce champ magnétique total  $\mathbf{B}$  dans l'équation de Bloch (équation 1.6), nous obtenons la composante  $M_{xy}(\mathbf{r}, t)$  suivante :

$$M_{xy}(\mathbf{r}, t) = M_0(\mathbf{r}) e^{-t/T_2(\mathbf{r})} e^{-i\omega_0 t} e^{-i\gamma \mathbf{G} \cdot \mathbf{r} t} \quad (1.15)$$

Sachant que le gradient varie en fonction du temps, le champ magnétique total vaut :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = (B_0 + \mathbf{G}(t) \cdot \mathbf{r}) \mathbf{k} \quad (1.16)$$

soit :

$$M_{xy}(\mathbf{r}, t) = M_0(\mathbf{r}) e^{-t/T_2(\mathbf{r})} e^{-i\omega_0 t} e^{-i\gamma \int_0^t \mathbf{G}(\tau) \cdot \mathbf{r} d\tau} \quad (1.17)$$

$$= M_0(\mathbf{r}) e^{-t/T_2(\mathbf{r})} e^{-i\omega_0 t} e^{-2i\pi \mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{r}} \quad (1.18)$$

où  $\mathbf{k}(t) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^t \mathbf{G}(\tau) d\tau$ .

L'équation du signal reçu à un temps  $t$  introduite en (1.11) est alors modifiée et

nous avons :

$$S(t) = \int_V M_0(\mathbf{r}) e^{-t/T_2(\mathbf{r})} e^{-i\omega_0 t} e^{-2i\pi\mathbf{k}(t)\cdot\mathbf{r}} dV \quad (1.19)$$

$$= e^{-i\omega_0 t} \int_V M_0(\mathbf{r}) e^{-t/T_2(\mathbf{r})} e^{-2i\pi\mathbf{k}(t)\cdot\mathbf{r}} dV \quad (1.20)$$

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le gradient  $\mathbf{G}$  se décompose en trois composantes  $G_x$ ,  $G_y$  et  $G_z$ <sup>2</sup>. Chacune de ces composantes appliquées a un rôle bien défini :

1. L'application d'un gradient  $G_z$  dans la direction  $z$  permet de sélectionner une tranche. L'impulsion RF est émise en présence de ce gradient, permettant la sélection d'une tranche plus ou moins épaisse suivant la largeur de bande du signal RF et l'intensité du gradient  $G_z$ . Seuls les protons contenus dans cette tranche vont entrer en résonance.
2. À l'arrêt du pulse RF, un gradient  $G_y$  est appliqué dans la direction  $y$  pendant une durée  $\tau$ . L'amplitude de ce gradient est fonction de la position spatiale selon la direction  $y$  du plan. Ce gradient provoque un déphasage variant linéairement selon la direction  $y$  : les spins à une position plus élevée précessent plus rapidement que ceux à une position plus basse. Lorsque l'on interrompt ce gradient, les spins précessent à nouveau à la fréquence de Larmor, tout en gardant leur déphasage. Cette étape est appelée *encodage selon l'axe de la phase*.
3. Enfin, il est nécessaire d'effectuer une discrimination selon la direction  $x$ , c'est pourquoi un gradient  $G_x$  est appliqué dans cette direction. Tout comme pour  $G_y$ , ce gradient entraîne des modifications au niveau de la fréquence de précession. Il s'agit de *l'encodage selon l'axe des fréquences*.

---

<sup>2</sup>Nous nous plaçons ici dans le cadre d'une acquisition axiale et 2D, c'est à dire que la tranche à imager est contenue dans le plan  $xy$ . Dans le cas d'une acquisition sagitale, où la tranche à imager est contenue dans le plan  $yz$ , le gradient de sélection de tranche sera selon la direction  $x$ .

Le signal recueilli est la somme des signaux émis par les spins de tous les voxels sélectionnés, avec une distribution de fréquence et un déphasage dépendants de leur position. Dans le cas d'une acquisition 2D, ces trois étapes sont répétées pour chacune des  $N_y$  valeurs du gradient  $G_y$  permettant d'encoder la position selon la direction  $y$ . Pour une application standard, on répète 128 ou 256 fois. Dans le cas d'une acquisition 3D, le gradient  $G_z$  varie aussi, et on effectue alors aussi un encodage en phase selon l'axe du 3D.

Revenons sur l'équation du signal  $S(t)$  (équation 1.20). Dans une première approximation, nous négligeons le terme de relaxation, c'est à dire que nous estimons que  $T_2$  est suffisamment grand pour pouvoir poser  $e^{-t/T_2(r)} \approx 1$ . De plus, le signal reçu  $S(t)$  peut être vu comme le produit d'un terme d'amplitude par une fréquence pure  $w_0$ . Cette fréquence centrale étant beaucoup plus large que la bande passante du signal, le signal  $S(t)$  est démodulé en fréquence par  $w_0$ . Nous obtenons alors la forme approximée suivante du signal reçu :

$$S_r(t) = \int_V M_0(\mathbf{r}) e^{-2i\pi \mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{r}} dV \quad (1.21)$$

On reconnaît une forme familière : *une transformée de Fourier*. Par la suite, nous nommerons espace  $k$  ou encore *plan de Fourier* le domaine dans lequel les données composant ce signal  $S_r(t)$  sont recueillies. Cependant, nous désirons imager  $M_0(\mathbf{r})$  et non  $S_r(t)$  : l'approche la plus pratique est d'utiliser la transformée de Fourier inverse de  $S_r(t)$  pour reconstruire le signal, et donc notre image.

On peut donc voir l'IRM comme le balayage de l'espace de Fourier : lors de l'acquisition des données, on échantillonne l'espace  $k$  en faisant varier les valeurs de  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  et on acquiert à chaque fois un point. La variation de  $\mathbf{k}$  s'effectue au travers des gradients  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Finalement, il existe différentes techniques pour remplir

l'espace  $k$ , la seule condition étant que l'espace des fréquences soit échantillonné suffisamment finement pour pouvoir reconstruire une image. C'est pourquoi, dans les deux paragraphes suivants nous nous attardons plus longuement sur les deux techniques de base de remplissage de l'espace  $k$  : *l'écho de spin* et *l'écho de gradient*. Ces techniques sont présentées dans le cas d'une acquisition 2D.

### 1.3 Écho de spin

Comme nous l'avons expliqué précédemment, on applique tout d'abord simultanément une impulsion RF perpendiculaire à la direction du champ  $B_0$ , soit à  $90^\circ$  et un gradient de sélection de coupe  $G_z$ . Un gradient d'encodage selon l'axe de la phase  $G_y$  est ensuite appliqué, suivi d'un gradient d'encodage selon l'axe des fréquences  $G_x$ . La spécificité de cette méthode vient de l'application d'une seconde impulsion RF à  $180^\circ$ . Avec la première impulsion, les spins précessent dans le plan  $xy$ . La seconde impulsion entraîne une inversion de la phase, ce qui permet aux spins de se rephaser partiellement, provoquant alors un maximum dans le signal lorsqu'ils reviennent en phase : ce signal est appelé écho. Le temps d'écho,  $T_E$  est le temps séparant l'impulsion RF et le milieu du signal acquis. Cette méthode est assez lente car elle nécessite l'application de deux impulsions RF. Le schéma de la figure 1.2 résume cette technique.

### 1.4 Écho de gradient

Cette technique (fig. 1.3) est basée sur le même principe que précédemment. Elle repose sur l'application d'une impulsion RF à  $\alpha^\circ$  (environ  $15^\circ$ ) et de trois gradients, mais le déphasage donnant lieu à l'écho lors du rephasage partiel n'est plus provoqué par une impulsion à  $180^\circ$  mais par un gradient  $G_x$  de signe négatif. Cette technique

est plus rapide que la précédente car il n'est pas nécessaire d'attendre le retour à l'équilibre de la composante longitudinale pour répéter la séquence, ce qui permet de réduire le temps de répétition ( $T_R$ ), c'est à dire le temps qui s'écoule entre deux impulsions RF.

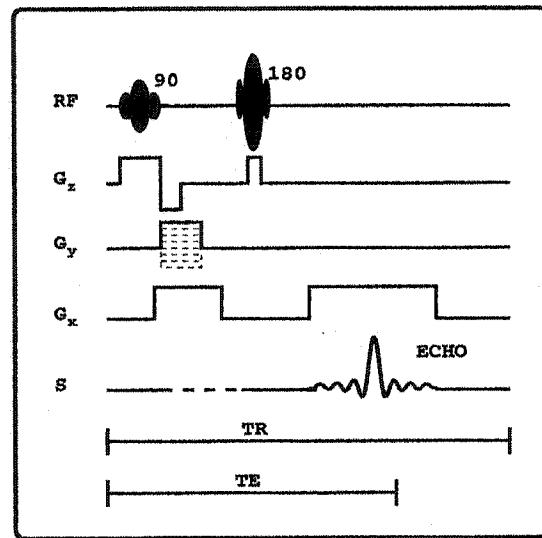


Figure 1.2 Echo de spin, d'après (Hornak, 1996-2003)

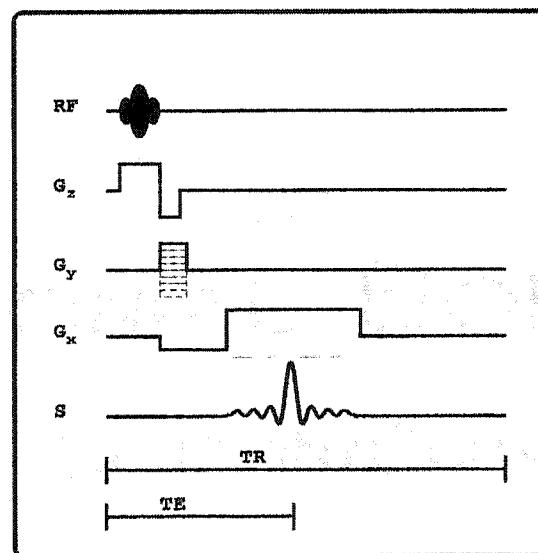


Figure 1.3 Echo de gradient, d'après (Hornak, 1996-2003)

Dans tous les cas, comme nous l'avons dit précédemment, les différentes lignes de l'espace  $k$  sont acquises en répétant ces différentes séquences pour chacune des  $N_y$  valeurs de  $G_y$  dans le cas 2D.

### 1.5 Remarques

L'intensité recueillie ne dépend pas uniquement de  $M_0$ . Elle dépend de paramètres intrinsèques (soit les temps de relaxation  $T_1$  et  $T_2$ , que nous avons négligés lors de l'approximation du signal  $S_r(t)$ , mais aussi les caractéristiques des propriétés physico-chimiques des noyaux, tels que la densité des protons  $H^+$ ), mais aussi de paramètres extrinsèques (paramètres de la machine) comme l'intensité du champ magnétique, la durée et le temps de répétition des impulsions, soit les *temps d'écho*,  $T_E$ , et *temps de répétition*,  $T_R$ . Suivant les valeurs prises pour  $T_E$  et  $T_R$ , il nous est possible d'obtenir des images pondérées en  $T_1$  ou  $T_2$ .

Un examen en IRM dure généralement de 30 à 45 minutes, temps qui peut sembler particulièrement long au patient, surtout lorsque ce dernier doit rester strictement immobile. La principale manière de réduire le temps d'acquisition des données est de jouer sur la taille de la matrice contenant les données dans l'espace  $k$ . Cela peut s'effectuer de deux manière différentes : soit par une diminution du champ d'intérêt, *Field of View* (FoV) en anglais, soit par une diminution du taux de remplissage de l'espace  $k$ <sup>3</sup>. La diminution du FoV revient à cibler plus précisément la région à imager. Cependant, si la largeur de l'objet à imager est plus grande que le FoV, les conditions d'échantillonnage de Shannon-Nyquist ne sont plus vérifiées et du repliement peut être observé sur l'image reconstruite. De même, la diminution du taux de remplissage, qui s'effectue principalement selon l'axe des phases, entraîne

---

<sup>3</sup>Nous verrons dans le prochain chapitre qu'il existe différentes manières de remplir partiellement l'espace  $k$

un échantillonnage plus lâche et donc une diminution du contenu informationnel et de la résolution de l'image.

Nous venons de présenter la technique d'*encodage par transformée de Fourier*, technique d'encodage la plus répandue. Cependant, plusieurs auteurs ont testé d'autres techniques afin d'accélérer l'acquisition des données. Ces techniques reposent sur l'application de gradients  $\mathbf{G}$  différents et d'impulsions RF sélectives spéciales, nous permettant d'obtenir de nouvelles relations entre les mesures et le signal reconstruit. Le plus souvent le codage par la fréquence introduit au paragraphe 1.2.2 est conservé, c'est à dire qu'une transformée de Fourier 1D est nécessaire pour effectuer la reconstruction d'une image. Weaver (Weaver *et al.*, 1992) propose de remplacer le codage en phase classique par un codage en ondelettes, dont le principal avantage, outre sa rapidité, réside dans une sensibilité moins forte aux artefacts de mouvements (Panych, 1996). De son côté, Zientara (Zientara *et al.*, 1994) se base sur la transformation en valeurs singulières (SVD).

## 1.6 Conclusion

Le principal avantage de l'IRM vient finalement du fait qu'il s'agit d'une technique non invasive dont la durée n'a aucune incidence sur la santé du patient, contrairement aux techniques utilisant des radiations ionisantes ou des produits radioactifs.

On peut décrire de manière très simple le fonctionnement des tomographes que l'on trouve dans les cliniques et les hôpitaux : les données  $\mathbf{Y}$  sont acquises dans l'espace  $k$ , elles sont liées à l'image  $\mathbf{X}$  que l'on souhaite reconstruire par une transformée de Fourier :

$$\mathbf{Y} = \phi_2 * \mathbf{X} \quad \text{dans le cas 2D} \quad (1.22)$$

où  $\phi_2$  représente l'opérateur de transformée de Fourier 2D. Pour la reconstruction

de l'image, une simple transformée de Fourier inverse est effectuée.

Cependant, les données acquises  $\mathbf{Y}$  comportent aussi du bruit lié aux caractéristiques matérielles du système d'acquisition, comme les bobines de détection, ainsi qu'aux grandeurs physiques utilisées, champ magnétique, fréquence... Ce bruit se retrouve dans  $\mathbf{X}$ , l'équation définie en (1.22) étant sensible au bruit. De plus, certaines limitations au niveau de l'acquisition empêchent d'acquérir les données très rapidement. C'est pourquoi nous allons présenter dans le prochain chapitre un bref aperçu des différentes modifications et techniques apportées pour améliorer ces différentes limitations.

## CHAPITRE 2

### QUALITÉ ET RAPIDITÉ D'ACQUISITION : SOLUTIONS EXISTANTES

Depuis les vingt dernières années de nombreuses personnes se sont penchées sur l'étude des images IRM afin d'en améliorer la qualité et la rapidité d'acquisition. Cependant rares sont les méthodes qui remettent en question la méthode classique de reconstruction en IRM par transformée de Fourier inverse. Dans un premier temps nous allons donner un bref aperçu de ces diverses techniques, tout en en soulignant les principaux aspects, aussi bien positifs que négatifs.

#### 2.1 Méthodes basées sur l'acquisition des données - grille cartésienne

Les méthodes présentées dans cette section ont pour point commun d'effectuer l'acquisition des données sur une grille cartésienne.

##### 2.1.1 Séquence rapide

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les méthodes d'acquisition par écho de spin et écho de gradient sont le plus fréquemment utilisées, l'écho de gradient permettant d'acquérir les données plus rapidement (paragraphe 1.4). Dans certaines situations, lorsqu'il faut imager des phénomènes qui changent rapidement, la vitesse d'acquisition des données est primordiale et les méthodes d'écho de spins et d'écho de gradient classiques ne sont pas suffisantes. Nous retrouvons cette situation en IRM fonctionnelle (IRMf), en IRM dynamique ou encore en angiographie

par résonance magnétique (ARM). L'IRMf est une technique qui permet d'étudier les fonctions spécifiques du cerveau comme la lecture ou l'écoute. L'IRMf permet de cerner les zones du cerveau activées lors de l'exécution de différentes tâches. Il ne nécessite aucun traceur radioactif, le marqueur le plus souvent utilisé étant l'oxygénation sanguine, phénomène naturel de l'organisme. Cette augmentation de l'oxygénation est due à l'activité neuronale. L'IRM dynamique réfère à l'acquisition d'une séquence d'images d'IRM pour surveiller les changements temporels de la structure du tissu. Enfin l'ARM est l'application de l'IRM à l'imagerie du sang et du flux sanguin et utilise l'injection de gadolinium afin d'accentuer les contrastes. Dans le premier chapitre nous avons déjà abordé d'autres méthodes d'encodage (paragraphe 1.5). Nous présentons ici des alternatives à l'écho de spin et à l'écho de gradient, basées sur l'encodage par *transformée de Fourier*, adaptées aux approches présentées ci-dessus.

### 2.1.1.1 Echo Planar Imaging - EPI

Il s'agit simplement de l'acquisition de plusieurs lignes de l'espace  $k$  pour une seule impulsion RF. Plus précisément, on acquiert plusieurs échos de gradient. Ainsi avec une seule impulsion RF, il est possible de récupérer la totalité de l'espace  $k$  (pour plus de détails, cf (Hornak, 1996-2003; Mansfield, 1977)). Cependant, afin de permettre un balayage complet de l'espace  $k$  pendant la lecture du signal, une légère transformation au niveau de la machine classique s'impose : elle nécessite des gradients de plus forte puissance. Le problème majeur de cette technique réside dans la qualité des images acquises, ces dernières comportant beaucoup d'artefacts : en l'absence d'excitations répétées la non homogénéité des gradients est plus importante, et l'on retrouve des décalages dans l'images dus à l'acquisition de plusieurs lignes de l'espace  $k$ . À cause de cet inconvénient, cette méthode reste principalement utilisée en IRMf où la précision des images n'est pas primordiale, vu que

l'on ne cherche pas à analyser des images anatomiques mais fonctionnelles, on va chercher l'information (signal) qu'elles contiennent.

Une autre technique, *Principle of Echo Shifting with a Train of Observations - PRESTO* (Liu *et al.*, 1993) est basée sur le même principe : elle associe à la technique d'Echo Planar celle d'*echo-shifting*, technique qui entraîne des temps d'écho supérieurs au temps de répétition.

#### **2.1.1.2 Fast Spin Echo - Rapid Acquisition with Relaxation Enhancement (RARE)**

Basée sur le même principe que la méthode d'écho de spin, elle permet non pas d'acquérir plusieurs échos de gradient pour une seule impulsion RF comme l'EPI, mais plusieurs échos de spins. Cette technique est appelée *Fast Spin Echo (FSE)*, *Rapid Acquisition with Relaxation Enhancement(RARE)* (Henning *et al.*, 1986) ou encore *Turbo Spin Echo (TSE)*

Ces deux techniques basées sur le codage multiple, soit l'acquisition de plusieurs échos de spin ou gradient successifs ont donc le principal avantage d'être rapides mais le désavantage d'une qualité ne permettant pas une grande précision.

Une autre approche pour accélérer l'acquisition des données consiste à ne remplir que partiellement l'espace  $k$ .

#### **2.1.2 Méthode du demi-plan de Fourier**

Cette technique porte aussi le nom de *half-Fourier* ou encore *half k-space*. Lors de l'acquisition des données, seule la moitié du plan de Fourier est acquise. Cette méthode est basée sur les propriétés de symétrie hermitienne du plan de Fourier

permettant ainsi de déduire l'autre moitié du plan de Fourier. Dans la pratique, un peu plus de la moitié du plan de Fourier est acquise afin de conserver la redondance pour les basses fréquences. Les données non acquises en totalité ne concernent que les hautes fréquences. Le problème de cette technique se situe au niveau du rapport signal sur bruit (RSB) qui est fortement diminué en raison de la suppression de la redondance lors de l'acquisition, d'où une image de moins bonne qualité.

Une des premières méthodes de reconstruction adaptée à cette technique est celle introduite par Margosian (Margosian *et al.*, 1986; Pauly, 2002; Haacke et Liang, 2000), dont le principe est résumé à la figure 2.1. Margosian estime un terme de correction de phase basé sur le calcul de la transformée de Fourier de la partie centrale de l'espace  $k$ . Cette méthode possède cependant une sensibilité élevée aux erreurs au niveau de la phase, erreurs dues à l'acquisition de seulement la moitié des données. Noll (Noll *et al.*, 1991) a introduit une méthode similaire basée sur la théorie de la détection homodyne. Enfin, afin de pallier les diverses limitations de ces méthodes, Cuppen (Cuppen et East, 1987; Degenhard *et al.*, 2001) propose une méthode d'extrapolation itérative par *Projection Onto Convex Sets*, *POCS* (résumée à la figure 2.2). Quant à Dologlou (Dologlou *et al.*, 1996), il se base sur la décomposition en valeurs singulières pour estimer les données manquantes. Toutes ces approches reposent sur la compensation des données manquantes par une forme de *régularisation*, la régularisation pouvant être vu comme l'apport d'*a priori*. Notons que l'information *a priori* est fixée de manière empirique en fonction du contexte. Nous reviendrons plus longuement sur cette notion de régularisation au chapitre prochain.

D'autres méthodes d'acquisition partielle des données ont aussi vu le jour. Les lignes manquantes ne sont pas obligatoirement adjacentes : Cao et Plevritis (Cao et Levin, 1997; Plevritis et Macovski, 1995) utilisent l'information *a priori* pour choisir les échantillons non acquis. De même, Levin (Kuperman *et al.*, 1999; Yao

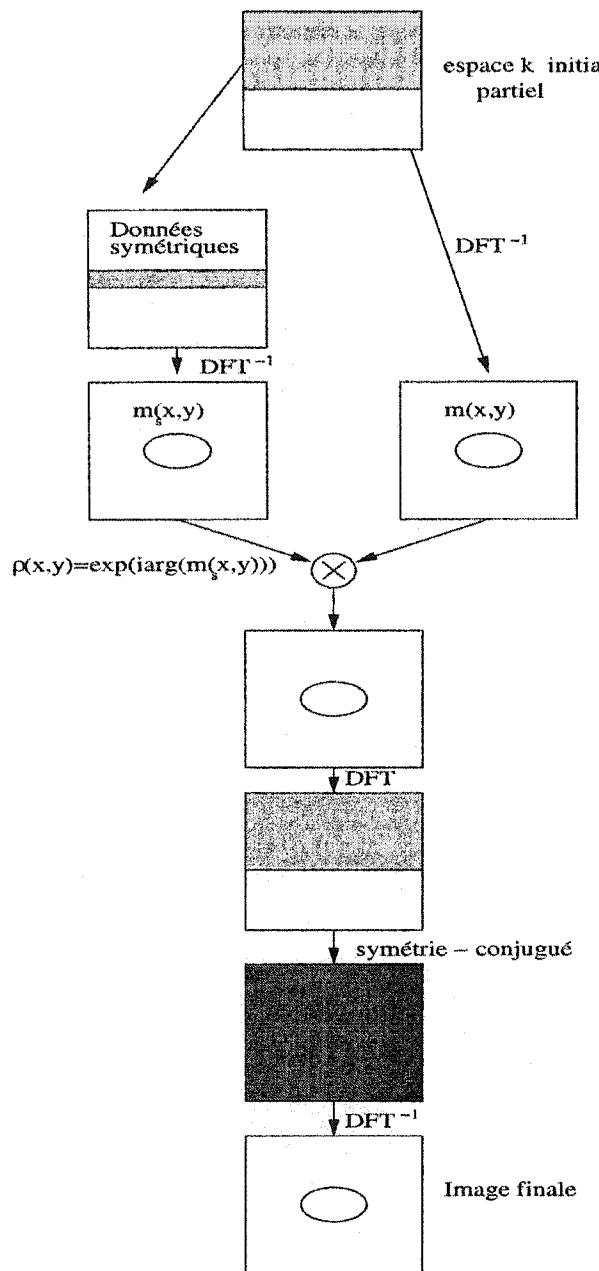


Figure 2.1 Résumé de l'algorithme de Margosian, d'après (Pauly, 2002)

et al., 1995) se base sur le fait que toutes les zones n'ont pas la même importance dans une image en IRM. Il a donc développé une méthode permettant d'obtenir une résolution spatiale plus élevée dans certaine zones, l'utilisateur n'ayant qu'à

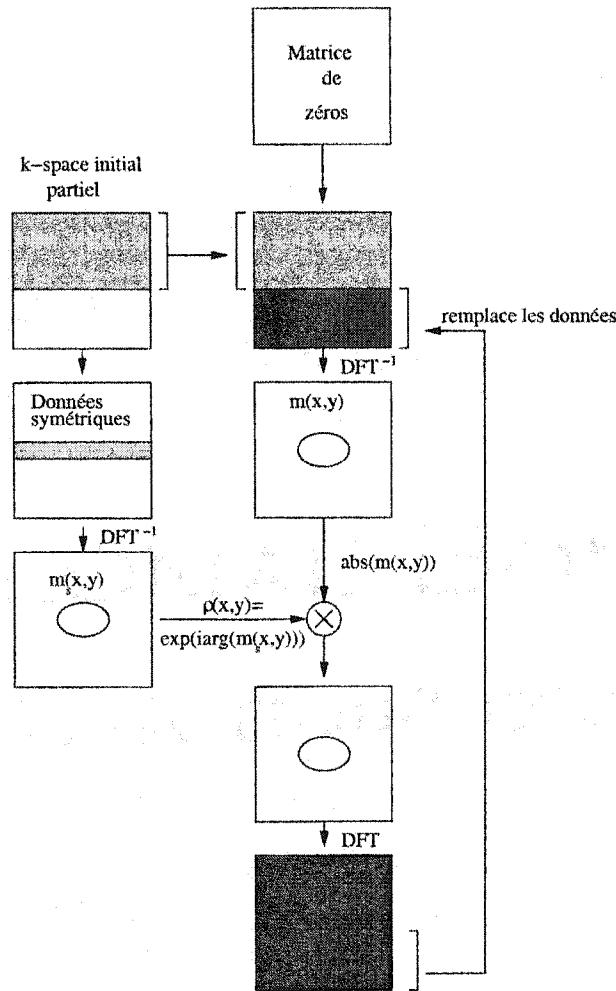


Figure 2.2 Résumé de l'algorithme de POCS, d'après (Pauly, 2002)

déterminer ces zones. L'algorithme génère alors des fonctions de base qui oscillent plus ou moins rapidement suivant les zones. Lors de la reconstruction, il additionne simplement les projections des images dans les différentes bases.

Finalement, tout comme pour les méthodes d'acquisition rapide, le rapport signal à bruit, RSB reste faible. La qualité des images n'est pas très bonne.

Afin de surmonter ces difficultés, des techniques de modélisation paramétrique ont été mises au point. Smith et son groupe (Smith *et al.*, 1986; Hui et Smith, 1995;

Nath et Smith, 1999) furent parmi les premiers à s'intéresser à cet aspect. Smith part de données acquises par un codage classique (codage selon la phase et la fréquence, *cf.* chapitre 1), mais dont les données sont tronquées dans le sens de la phase. L'espace  $k$  est rempli partiellement, les hautes fréquences ne sont pas codées. Il reconstruit les lignes selon la technique classique, soit par une transformée de Fourier inverse, mais, au niveau des colonnes qui comportent des données tronquées, il extrapole les données en les considérant comme la sortie d'un filtre ARMA (autoregressive moving average) à réponse impulsionnelle infinie (RII) excité par une fonction delta de Kronecker. Il s'agit d'une estimation spectrale paramétrique. Le principal avantage de cette technique est de pouvoir estimer une série de données infinie à partir d'un petit groupe de données. Hui, du groupe de Smith, a quant à lui utilisé les réseaux de neurones pour estimer les hautes fréquences manquantes. Le réseau est entraîné en appliquant en entrée un signal complexe tronqué d'IRM de forme connue.

### 2.1.3 Fast Low Angle Shot Imaging - FLASH

Ici, dans le but d'accélérer l'acquisition, soit la réduction du *TR*, des modifications physiques sont apportées à l'appareil.

Le principe de FLASH (Haase *et al.*, 1986) repose sur l'impulsion RF appliquée afin d'écartier les spins de leur position d'équilibre. Ici, les spins ne sont écartés que de quelques degrés par rapport à leur position d'équilibre, éliminant ainsi le long temps d'attente entre différentes acquisitions, le retour à l'équilibre se faisant rapidement. Le problème de cette méthode réside dans la faible intensité du signal, et donc un rapport signal sur bruit très faible.

Les différentes techniques présentées jusqu'ici permettent d'accélérer l'acquisition

des données, mais souvent au dépend de la qualité de l'image obtenue. Nous allons voir dans le prochain paragraphe que l'ajout de nouveau matériel permet d'obtenir un meilleur compromis entre qualité et temps d'acquisition.

#### 2.1.4 Acquisition multi-antennes

Comme son nom l'indique l'imagerie multi-antennes, ou imagerie parallèle repose sur l'utilisation de plusieurs antennes de détection placées à proximité de la zone à imager. Elle peut être utilisée aussi bien pour des acquisitions cartésiennes ou non-cartésiennes. Nous ne traiterons ici que du cas cartésien.

##### 2.1.4.1 SMASH

SMASH, ou encore *Simultaneous Acquisition of Spatial Harmonics* a été développée par Sodickson (Sodickson et Manning, 1997; Sodickson, 2001, 2002; Sodickson *et al.*, 2002). Différentes antennes font l'acquisition simultanément de plusieurs lignes de l'espace  $k$ , réduisant ainsi le temps d'acquisition des données. Cette méthode exploite l'information spatiale contenue dans le réseau d'antennes afin de réaliser l'acquisition de l'espace  $k$ .

##### 2.1.4.2 SENSE

Avec SENSE, *SENsitivity Encoding*, (Pruessmann *et al.*, 1999; Weiger *et al.*, 2001), l'essentiel du travail est effectué dans le domaine de l'image. Plusieurs antennes de sensibilités spatiales différentes sont utilisées afin d'obtenir un ensemble d'images de champ d'intérêt (FoV) inférieur aux dimensions de l'objet imagé. Cependant, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, un FoV inférieur aux dimensions de

l'objet imagé entraîne du repliement. Les différentes images obtenues sont *aliasées* (figure 2.3). L'image finale est obtenue à partir d'une combinaison de cet ensemble d'images.

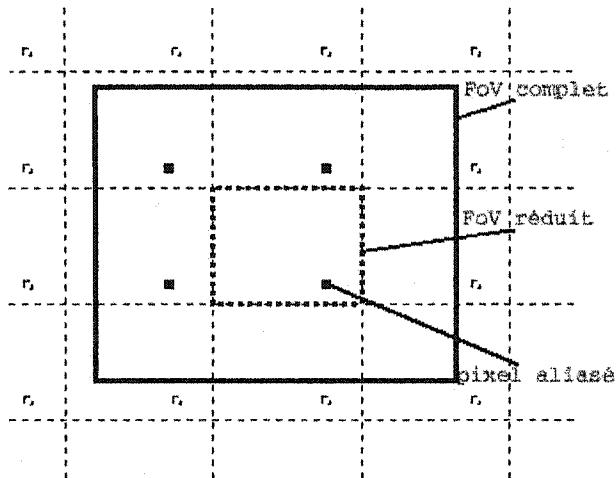


Figure 2.3 Principe de SENSE, d'après (Pruessmann *et al.*, 1999)

Contrairement aux méthodes précédentes, nous ne tronquons pas ici de données. De plus, grâce à l'utilisation de plusieurs antennes, le temps d'acquisition des données se retrouve diminué. Cependant, même si nous disposons de plus de données qu'avec les méthodes précédentes (redondance plus élevée), la perte de signal est proportionnelle à l'accélération de l'acquisition des données (de l'ordre de la racine carré de l'accélération). Ces techniques permettent un bon compromis entre durée d'acquisition, résolution spatiale et RSB. Cette amélioration nécessite cependant de modifier la physique de l'appareil par des aménagements techniques, vu que plusieurs antennes sont utilisées.

Intéressons nous maintenant à des acquisitions non-cartésiennes.

## 2.2 Autres méthodes : grille non cartésienne

Afin de réduire le temps d'acquisition des données, il est possible d'utiliser des séquences d'acquisition non cartésiennes. En effet, l'intérêt de ces techniques réside dans un nombre d'excitations nécessaire pour échantillonner l'espace  $k$  plus faible.

### 2.2.1 Différents modes de remplissage

Dans les séquences d'acquisition non-cartésiennes, on trouve un large éventail de modes de remplissage de l'espace  $k$ , ou encore *trajectoires* :

- trajectoires circulaires (Zhou *et al.*, 1998; Azhari *et al.*, 1997) et en rosette (Noll *et al.*, 1991; Noll, 1997) : elles sont peu utilisées.
- trajectoires en spirale (Meyer *et al.*, 1992; Sedarat *et al.*, 2000), de plus en plus utilisées, principalement en imagerie cardio-vasculaire, rénale et en imagerie fonctionnelle. Le temps d'acquisition est proportionnel au nombre de spirales utilisées. De plus cette acquisition est peu sensible aux artefacts de mouvement.

### 2.2.2 Méthodes de ré-échantillonnage et de reconstruction

Si ces techniques permettent de réduire le temps d'acquisition des données, la reconstruction est plus complexe que pour une grille cartésienne. En effet, il nous serait possible d'effectuer une transformée de Fourier, mais impossible de mettre en oeuvre l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) qui nécessite une grille cartésienne. Ainsi, afin de conserver l'intérêt de la rapidité de cet algorithme, ces méthodes nécessitent un ré-échantillonnage afin d'obtenir une grille cartésienne

complète et effectuer alors une reconstruction classique. Il s'agit d'un problème assez fréquent que l'on retrouve aussi en tomographie par rayons X ou en tomographie par diffraction.

Ce ré-échantillonnage peut être effectué par interpolation (plus proche voisin, fonction linéaire, quadratique, cubique, B-spline, ...) ou par la méthode de *gridding*. Cette technique a été adaptée à l'IRM par Jackson (Jackson *et al.*, 1991) et représente la méthode de reconstruction de référence pour les acquisitions non-cartésiennes. Le *gridding* peut se résumer ainsi (Pauly, 2002; Boubertakh, 2002) :

1. pondération des données dans l'espace  $k$  afin de corriger les effets d'un échantillonnage non uniforme dans l'espace  $k$
2. convolution des données avec une fonction d'interpolation et échantillonnage afin d'obtenir une estimation des données sur une grille cartésienne complète.
3. transformée de Fourier inverse de l'espace  $k$  pour reconstruire l'image
4. dans le domaine de l'image, une dé-apodisation est effectuée afin de corriger l'effet introduit par la fenêtre de convolution dans l'espace  $k$ .

Plus récemment, Rosenfield (Rosenfield, 2002) a introduit une nouvelle méthode, *Block Uniform ReSampling, rBURS*. Ici, des coefficients d'interpolation sont calculés par la résolution d'équations linéaires utilisant la décomposition en valeurs singulières. L'algorithme ainsi développé se base aussi sur des notions d'estimation et de régularisation.

Les méthodes que nous avons vues jusqu'ici peuvent être utilisées dans les différents domaines d'application de l'IRM. Nous allons maintenant nous intéresser à un domaine un peu plus particulier et dont les applications sont multiples, l'IRM dynamique.

## 2.3 Imagerie dynamique

Comme nous l'avons expliqué précédemment, l'IRM dynamique est utilisée pour imager les changements temporels de la structure d'un tissu. La qualité des images et la rapidité d'acquisition des données sont deux choses primordiales. Le moindre mouvement peut fausser les données. De nombreuses recherches ont été effectuées dans le domaine et nous allons nous y attarder un peu. Comme on image un même tissu, la plupart des méthodes reposent sur l'acquisition d'une première image de haute résolution.

### 2.3.1 Keyhole et RIGR

La technique *keyhole* (van Vaals *et al.*, 1993; Jones *et al.*, 1993; Hoge *et al.*, 2002) consiste à acquérir, avec une bonne résolution temporelle, les éléments centraux de l'espace  $k$ , soit les basses fréquences, et à compléter les éléments de hautes fréquences spatiales avec ceux d'une image de référence acquise au début de la séquence. Liang (Liang *et al.*, 2002) fait l'acquisition des données de la même manière dans sa méthode *Reduced-encoding Imaging by Generalized-series Reconstruction, RIGR*. La différence intervient ici au niveau de la reconstruction. Liang n'utilise pas la reconstruction classique, soit la transformée de Fourier, mais une méthode basée sur les séries généralisées. Ainsi, alors que les fonctions de base du modèle de série de Fourier sont les exponentielles complexes,  $\exp(2i\pi kx)$ , il utilise ici comme fonctions de base  $C(x) \exp(2i\pi kx)$  où  $C(x)$  est une fonction de contraintes choisi de telle sorte à contenir l'information *a priori* disponible sur les images. Ainsi  $C(x)$  dépend de la première image haute résolution acquise.

### 2.3.2 BRISK

Suivant le même principe, Doyle a introduit la méthode *Block Regional Interpolation Scheme for K-space, BRISK* (Doyle *et al.*, 1995) : ici, la définition de la fréquence temporelle d'acquisition des différentes zones de l'espace  $k$  est fondée sur une étude spectrale selon la direction temporelle. La fréquence d'acquisition d'une zone est fonction de la fréquence temporelle maximale couramment présente dans cette zone sur une séquence.

Le principal inconvénient de ces méthodes réside dans une plus grande complexité au niveau de la reconstruction des images.

## 2.4 Conclusion

Toutes ces techniques présentées se basent principalement sur l'accélération de l'acquisition des données et sur l'extrapolation - interpolation des données manquantes dans l'espace  $k$ . Une fois toutes les données de l'espace  $k$  estimées, la reconstruction est généralement effectuée grâce à une transformée de Fourier inverse. Les modifications des données sont principalement effectuées dans le domaine des mesures. Or en traitement d'images, une démarche fréquemment utilisée se base sur l'utilisation des mesures telles qu'elles et sur le traitement en fonction de l'information *a priori* dont on dispose. Il s'agit de l'approche de type *problème inverse* que nous allons par la suite adopter. C'est pourquoi dans le prochain chapitre nous allons nous attarder sur les problèmes inverses et la régularisation avant de l'appliquer plus particulièrement à l'IRM au chapitre 4.

## CHAPITRE 3

### PROBLÈME INVERSE, RÉGULARISATION ET PÉNALISATION SEMI-QUADRATIQUE

#### 3.1 Introduction

La revue de littérature a montré que le problème de reconstruction en IRM est rarement abordé du point de vue *problème inverse*. Cette approche est cependant très répandue en traitement d'images, et nous avons décidé de l'adopter dans notre projet. En effet, nous désirons développer une méthode indépendante de la machine et permettant de traiter différents types de données. C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous définissons dans un premier temps les problèmes inverses. Dans un second temps, nous nous attardons sur la notion de régularisation et la formation d'un critère composite. Finalement, nous présentons les différentes manières de minimiser notre critère, en nous intéressant plus particulièrement aux méthodes *semi-quadratiques*.

#### 3.2 Problème inverse

Considérons le modèle linéaire direct régi par l'équation d'observation :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{y}$  sont les données acquises,  $\mathbf{H}$  l'opérateur linéaire reliant  $\mathbf{x}$  à  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}$  l'objet inconnu que l'on souhaite reconstruire et  $\mathbf{n}$  le bruit aléatoire. La problématique

est la suivante : déterminer une valeur de  $\mathbf{x}$  compatible avec les observations  $\mathbf{y}$  connaissant l'opérateur  $\mathbf{H}$  et en présence de bruit  $\mathbf{n}$ .

### 3.2.1 Méthodes par inversion directe

La mise en oeuvre directe dépend principalement de la forme de  $\mathbf{H}$ . La méthode la plus simple, soit  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{y}$  est celle que l'on retrouve dans le cas de la reconstruction classique en IRM,  $\mathbf{H}$  étant égal à l'opérateur de la transformée de Fourier. Cette méthode est cependant dans la majeure partie des cas impossible à mettre en oeuvre,  $\mathbf{H}$  étant souvent non inversible.

Une autre approche consiste alors à minimiser le critère  $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2$ . Nous obtenons la formulation des *moindres carrés*.  $\mathbf{x}$  minimise la distance quadratique entre les données mesurées  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{H}\mathbf{x}$ , ce qui nous donne  $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{y}$ . Cette formulation ne dépend que des données  $\mathbf{y}$  et de  $\mathbf{H}$ . Le principal défaut de cette approche réside dans le fait que nous avons négligé le bruit et qu'il faut que  $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$  soit inversible.

L'exemple suivant illustre les limites de l'approche de moindres carrées. Soit  $\mathbf{x}$  le signal original (3.1-a), il est convolué avec la réponse impulsionnelle  $\mathbf{h}$  présentée en (3.1-b). Nous obtenons le signal  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{h} * \mathbf{x}$  (3.1-c). Ajoutons maintenant un bruit blanc gaussien à  $\tilde{\mathbf{y}}$  de telle sorte à avoir  $\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x} + \mathbf{n}$  et un rapport signal à bruit (RSB) de 50 dB (3.1-d). La différence entre  $\tilde{\mathbf{y}}$  et  $\mathbf{y}$  est à peine discernable. Or si nous estimons maintenant  $\hat{\mathbf{x}}$  par les moindres carrés, soit  $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{H}$  représentant la matrice de convolution, nous obtenons le résultat présenté en (3.1-e), où nous nous rendons compte que le bruit présent dans les mesures provoque de fortes oscillations sur la solution.

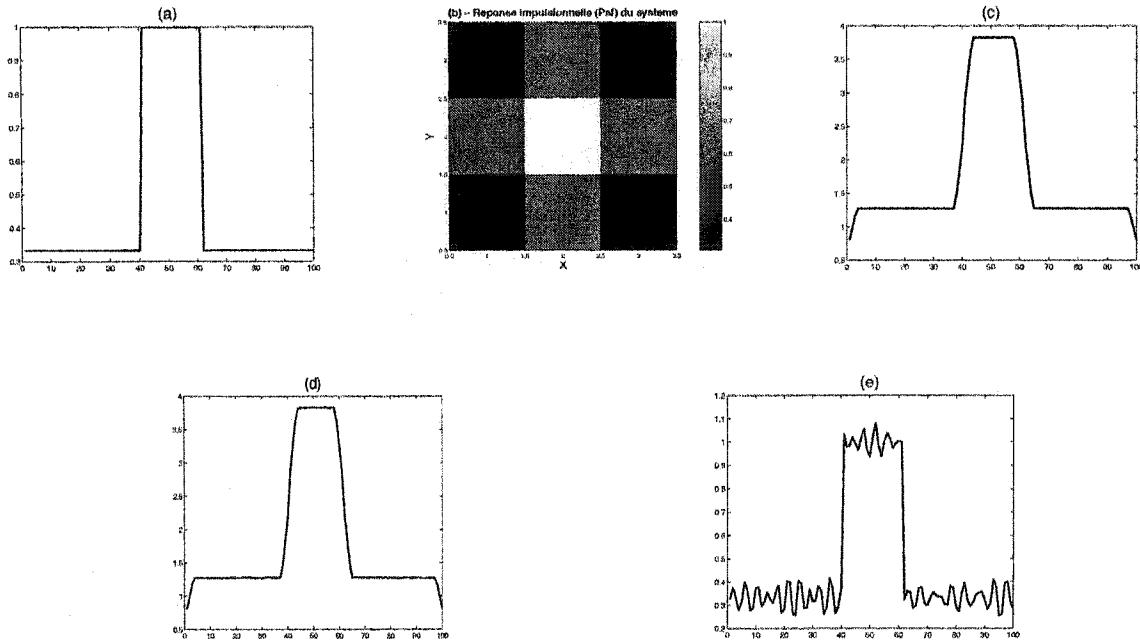


Figure 3.1 Résultat obtenu par les moindres carrés. a - signal  $x$  original, b - la réponse impulsionale  $\mathbf{h}$ , c -  $\tilde{\mathbf{y}}$ , d - le signal bruité  $\mathbf{y}$  et e - le signal restauré  $\hat{\mathbf{x}}$

En fait, ayant négligé le bruit, nous avons réellement calculé :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \\
 &= (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{Hx} + \mathbf{n}) \\
 &= (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Hx} + (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{n} \\
 &= \mathbf{x} + (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{n}
 \end{aligned}$$

Cette technique peut conduire à des résultats décevants, principalement lorsque  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  possède des valeurs propres proches de zéro, le bruit étant alors amplifié. Dans ce cas, les *moindres carrés* ne sont pas adaptés. Ce type de comportement est caractéristique des problèmes *mal posés*.

### 3.2.2 Problème mal posé

On définit un problème *mal posé* par opposition à un problème *bien posé* qui doit respecter les trois conditions d'Hadamard (Hadamard, 1923) soit :

- pour chaque donnée  $y$  dans une classe définie  $\mathcal{Y}$ , il existe une solution  $x$  dans une classe prescrite  $\mathcal{X}$ , (*existence*)
- la solution est unique dans  $\mathcal{X}$  (*unicité*)
- la dépendance de  $x$  par rapport à  $y$  est continue, c'est-à-dire que lorsque l'erreur  $\delta y$  sur la donnée  $y$  tend vers zéro, l'erreur  $\delta x$  induite sur la solution  $x$  tend aussi vers zéro (*continuité*)

Dans le cadre général du problème inverse,  $x = \mathcal{H}^{-1}y$ , les trois conditions sont équivalentes à (Demoment, 1989) :

- $y \in \text{Im}(\mathcal{H})$
- $\text{Ker}(\mathcal{H}) = 0$
- $\text{Im}(\mathcal{H})$  est un espace fermé

L'existence et l'unicité sont deux conditions généralement requises pour la résolution d'un problème physique. La troisième condition, soit l'exigence de continuité est reliée à celle de robustesse de la solution. En général, si l'opérateur  $\mathcal{H}$  est compact et borné, son image n'est pas fermée, et la troisième condition n'est pas vérifiée. Dans le cas particulier où  $\mathcal{H}$  est de dimension fini, ce qui correspond à notre cas où l'opérateur linéaire  $\mathcal{H}$  est une matrice  $\mathbf{H}$ ,  $\text{Im}(\mathcal{H})$  est fermé, et nous avons un problème bien posé. Cependant, il peut être mal conditionné, la condition de continuité étant une condition nécessaire mais non suffisante de robustesse. Ainsi un faible bruit sur les données peut être fortement amplifié sur la solution. Par la suite, nous ne faisons pas la différence entre les notions de problème mal posé et mal conditionné.

Pour surmonter cette difficulté, l'idée est de redéfinir le problème afin de le stabiliser et de le rendre bien posé. Une des approches possibles repose sur la *régularisation*, que nous allons maintenant définir.

### 3.3 Régularisation

On définit un *régulariseur* de l'équation  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\mathbf{x}$  comme une famille d'opérateurs  $\{\mathbf{R}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  tels que (Nashed, 1981; Tikhonov et Arsenin, 1977; Twomey, 1962) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda \in \Lambda \quad , \quad \mathbf{R}_\lambda \text{ est un opérateur continu de } \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \\ \forall \tilde{\mathbf{y}} \in \text{Im}(\mathbf{H}) \quad , \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{R}_\lambda \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{H}^\dagger \tilde{\mathbf{y}} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

où  $\lambda$  est appelé *coefficient de régularisation* et  $\mathbf{H}^\dagger$  représente *l'inverse généralisée* définie par :  $\mathbf{H}^\dagger = \lim_{u \rightarrow 0} (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + u\mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^T$ . Dans le cas où  $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}$ , on a :

$$\mathbf{R}_\lambda \mathbf{y} = \mathbf{R}_\lambda \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{R}_\lambda \mathbf{n} \quad (3.3)$$

le second terme diverge lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , la matrice  $\mathbf{H}$  étant mal conditionné. Régulariser notre problème revient à trouver un compromis entre les deux termes : l'erreur d'approximation ( $\mathbf{R}_\lambda \tilde{\mathbf{y}}$ ) et l'erreur due au bruit ( $\mathbf{R}_\lambda \mathbf{n}$ ).

Les approches de régularisation peuvent se classer en deux familles : une première qui opère par contrôle des dimensions et une seconde qui procède par minimisation d'un critère composite. À la première approche se rattachent certaines des méthodes vues au chapitre précédent, dont la SVD. Nous allons ici nous intéresser plus particulièrement à la seconde approche. Notre choix s'est dirigé vers cette seconde famille, à laquelle la méthode POCS vue au paragraphe 2.1.2 se rattache, car elle permet une souplesse de mise en oeuvre.

L'idée générale est d'effectuer un compromis entre l'information contenue dans les données et celle connue *a priori* (Titterington, 1985). Comme nous l'avons vu précédemment, l'opérateur des moindres carrés, fidèle aux données, introduit de grandes variations dues au bruit. Il va donc nous falloir introduire de l'*infidélité* aux données sous forme d'information *a priori* afin de lisser l'image reconstruite le moins possible pour rester fidèle à l'objet attendu. Cela revient à chercher une solution  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_\lambda \mathbf{y}$  qui minimise le critère  $J(\mathbf{x})$  suivant :

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{Hx}\|^2 + \lambda F(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

où  $\|\mathbf{y} - \mathbf{Hx}\|^2$  représente le terme de fidélité aux données, sous forme de norme euclidienne,  $F(\mathbf{x})$  la fidélité aux *a priori*, c'est à dire qui résume nos connaissances *a priori* sur notre solution et  $\lambda$  le paramètre de régularisation introduit précédemment.

Si nous choisissons  $\lambda = 0$ , nous retrouvons une formulation classique des moindres carrées, soit une fidélité parfaite aux données. Pour  $\lambda \rightarrow 0$ , cette approche satisfait bien la seconde condition émise en (3.2), nous obtenons l'inverse généralisée.

Le choix de  $F(\mathbf{x})$  est très important et va déterminer la manière dont la régularisation va être effectuée. Il faut de plus que  $F(\mathbf{x})$  permette de satisfaire la première condition émise en (3.2).

### 3.4 Pénalisation quadratique de Tikhonov

#### 3.4.1 Définition

Une des méthodes de régularisation les plus simples est celle introduite par Tikhonov (Tikhonov et Arsenin, 1977; Demoment, 1989). Il s'agit, dans le cadre de la

forme adaptée à l'équation 3.4, de poser  $F(\mathbf{x})$  égal à une distance quadratique, soit :

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{Hx}\|^2 + \lambda \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_M^2 \quad (3.5)$$

où  $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_M^2 = (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})^T \mathbf{M} (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})$ ,  $\mathbf{M}$  désignant une matrice définie positive.  $\tilde{\mathbf{x}}$  représente la solution par défaut, soit la solution obtenue pour  $\lambda \rightarrow \infty$ , c'est à dire lorsque l'on ne considère que l'information *a priori*. Le plus souvent, on pose  $\tilde{\mathbf{x}} = 0$ , car en absence d'information *a priori* suffisante sur l'objet, on choisit  $\tilde{\mathbf{x}}$  comme une image très lisse de densité uniforme. Nous avons alors :

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{Hx}\|^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_M^2 \quad (3.6)$$

Nous avons ici un critère convexe, ce qui nous permet d'assurer l'existence d'un unique minimum  $\hat{\mathbf{x}}$  qui est un minimum global.  $\hat{\mathbf{x}}$  est défini par :

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left( \|\mathbf{y} - \mathbf{Hx}\|^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_M^2 \right) \quad (3.7)$$

Le calcul explicite du gradient du critère par rapport à  $\mathbf{x}$  donne :

$$\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = -2\mathbf{H}^T(\mathbf{y} - \mathbf{Hx}) + 2\lambda \mathbf{Mx} \quad (3.8)$$

La valeur minimale est obtenue pour  $\hat{\mathbf{x}}$  qui annule le gradient :

$$\hat{\mathbf{x}} = \boxed{\underbrace{(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{M})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}}_{\mathbf{R}_\lambda}} \quad (3.9)$$

### 3.4.2 Exemple

À titre d'exemple, nous présentons les résultats obtenus dans le cas particulier de l'IRM. Le fantôme 2D utilisé (figure 3.2 - gauche) possède des discontinuités,

et notre objectif ici est de préserver ces dernières tout en améliorant la qualité de l'image. Nous avons posé  $\mathbf{M} = \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mathbf{I}$  où  $\mathbf{D}$  représente la matrice des différences finies du premier ordre entre pixels voisins. L'ajout de la matrice identité nous permet d'assurer que  $\mathbf{M}$  soit définie positive. Les résultats obtenus sont présentés à la figure (3.2).

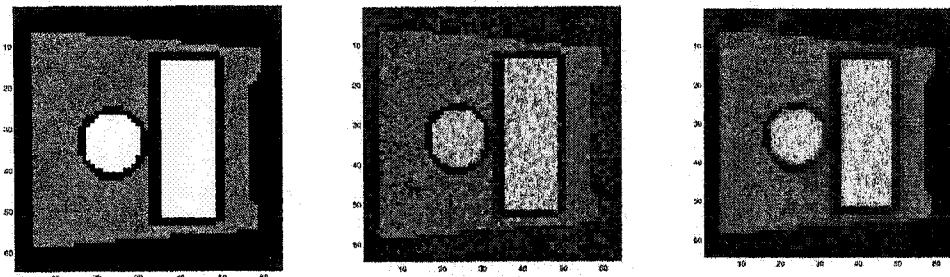


Figure 3.2 Résultats obtenus avec une pénalisation quadratique de Tikhonov : gauche - fantôme non bruité, centre - fantôme bruité, RSB=10dB

Cette approche, de mise en oeuvre aisée, permet d'améliorer légèrement la qualité de l'image par rapport à la reconstruction classique. Cependant la régularisation introduite repose sur un lissage de l'image : la diminution des oscillations dans les zones homogènes est accompagnée d'un adoucissement des contours. En effet, les changements brusques, soit un écart important entre deux pixels, sont trop pénalisés par rapport aux zones homogènes. Cette approche ne semble pas nous permettre d'atteindre nos objectifs, c'est à dire l'amélioration de la qualité de l'image tout en conservant les discontinuités. C'est pourquoi nous allons par la suite choisir d'autres formes d'*a priori*. Pour cela, il nous est nécessaire d'introduire une approche bayésienne, ce que nous allons faire maintenant.

### 3.5 Interprétation bayésienne de la régularisation

#### 3.5.1 Rappels

Soit l'équation  $\mathbf{y} = \mathbf{Hx} + \mathbf{n}$  introduite au paragraphe 3.1. Dans le cadre bayésien, nous considérons  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{n}$  comme deux vecteurs aléatoires de densité de probabilité  $p(\mathbf{x})$  et  $p(\mathbf{n})$ ;  $p(\mathbf{x})$  est appelée densité de probabilité *a priori* sur l'objet  $\mathbf{x}$ .

##### 3.5.1.1 Maximum de vraisemblance : MV

L'estimateur du *maximum de vraisemblance*,  $MV$  est défini comme :

$$\hat{\mathbf{x}}_{MV} = \arg \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \quad (3.10)$$

où  $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  est la loi conditionnelle de  $\mathbf{y}$  sachant  $\mathbf{x}$ .

L'estimateur MV reflète la fidélité aux données car seules les données  $\mathbf{y}$  sont utilisées pour déterminer  $\hat{\mathbf{x}}_{MV}$ , nous ne tenons compte d'aucun *a priori*.

Si nous posons l'hypothèse que le bruit  $\mathbf{n}$  est indépendant de  $\mathbf{x}$  et que  $\mathbf{n}$  est un bruit blanc gaussien, centré, de matrice de covariance  $\Sigma$ , nous avons :

$$p(\mathbf{n}) = \frac{1}{Z} \exp \left( -\frac{1}{2} \mathbf{n}^T \Sigma^{-1} \mathbf{n} \right) \quad (3.11)$$

où  $Z$  est le coefficient de normalisation. De plus,  $\mathbf{y}$  suit la même loi que  $\mathbf{n}$ , décalée en moyenne de  $\mathbf{Hx}$  :

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp \left( -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{Hx})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{Hx}) \right) \quad (3.12)$$

Donc maximiser  $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ , et ainsi déterminer  $\hat{\mathbf{x}}_{MV}$  revient à minimiser la norme  $\left\| \Sigma^{1/2}(\mathbf{y} - \mathbf{Hx}) \right\|^2$ . Dans le cas où  $\Sigma$  est égale à la matrice identité, nous retrouvons le critère des moindres carrés introduit au paragraphe (3.2.1).

### 3.5.1.2 Maximum a posteriori : MAP

L'estimateur du *maximum a posteriori* est défini par :

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \quad (3.13)$$

où  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  est appelée probabilité *a posteriori* car elle décrit les probabilités des objets  $\mathbf{x}$  d'aboutir aux données  $\mathbf{y}$ . On choisit la valeur de  $\mathbf{x}$  qui maximise la probabilité *a posteriori* de  $\mathbf{x}$ . L'application de la règle de Bayes nous permet d'exprimer  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  en fonction de l'information *a priori*, soit :

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} \quad (3.14)$$

Comme nous connaissons les données  $\mathbf{y}$ , la recherche de  $\mathbf{x}$  ne dépend pas de  $p(\mathbf{y})$  qui est une constante ; par conséquent  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})$  et nous obtenons alors :

$$\hat{\mathbf{x}}_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \quad (3.15)$$

Sous les mêmes hypothèses que celles émises dans le cas de l'estimateur MV, soit un bruit blanc gaussien  $\mathbf{n}$  indépendant de  $\mathbf{x}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{MAP} &= \arg \max \left[ \frac{1}{Z} \exp \left( -\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{Hx})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{Hx}) \right) p(\mathbf{x}) \right] \\ &= \arg \min \left[ \left\| \Sigma^{1/2}(\mathbf{y} - \mathbf{Hx}) \right\|^2 - \log(p(\mathbf{x})) \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Un lien peut ici être fait entre l'approche déterministe et l'estimation du MAP. En effet,  $\|\Sigma^{1/2}(\mathbf{y} - \mathbf{Hx})\|^2$  représente le terme de fidélité aux données, alors que  $-\log(p(\mathbf{x}))$  est équivalent aux fidélités aux *a priori*, soit  $\lambda F(\mathbf{x})$ . Si nous posons  $\Sigma = \mathbf{I}$ , nous retrouvons plus particulièrement la norme euclidienne. Tout comme dans le cadre déterministe, l'importance réside dans le choix de la densité de probabilité  $p(\mathbf{x})$ . Si l'objet  $\mathbf{x}$  est modélisé par un champ uniforme gaussien de moyenne  $\bar{\mathbf{x}}$  et de matrice de covariance  $\mathbf{W}$ , alors nous avons :

$$p(\mathbf{x}) \propto \frac{1}{Z_2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right) \quad (3.17)$$

où  $Z_2$  est le coefficient de normalisation. La pénalisation quadratique de Tikhonov est un cas particulier d'estimateur MAP. Nous avons vu au paragraphe (3.4) que la pénalisation quadratique de Tikhonov ne nous permet pas d'atteindre notre objectif, soit la conservation des discontinuités.

### 3.5.2 Choix de l'*a priori* - Champs aléatoires de Markov et de Gibbs

Les résultats obtenus avec des champs gaussiens n'étant pas satisfaisants, la question qui se pose alors est de savoir quelle direction prendre lorsque nous travaillons avec un objet  $\mathbf{x}$  de dimension 2D ou 3D. Une des seules alternatives viables et très utilisée en traitement d'images est celle des *champs aléatoires de Markov*, en anglais *Markov Random Field*, *MRF*. Les MRFs permettent de définir une classe de modèles pertinents vis à vis de l'application et souple à mettre en oeuvre. Les MRFs sont des représentations d'objets dont les propriétés sont régies par des interactions locales (Derin et Kelly, 1989). Ils sont très souvent utilisés en reconstruction d'images vu qu'ils sont particulièrement bien adaptés aux objets comportant des zones homogènes ainsi que des discontinuités.

Soit un champ  $\mathbf{X}$  de support  $S$ . Un voisinage  $\eta$  est défini par (Allain, 2002) :

$$\eta = \{\eta_{ij} \in S, (i, j) \in S\} \quad (3.18)$$

où  $\eta_{ij}$  représente le voisinage du pixel  $(i, j)$  et doit vérifier la propriété suivante :

$$\begin{cases} (i, j) \notin \eta_{ij}, \\ (k, l) \in \eta_{ij} \Rightarrow (i, j) \in \eta_{kl} \end{cases} \quad (3.19)$$

ce qui signifie que le voisinage du pixel  $(i, j)$  ne contient pas le pixel lui-même et si le pixel  $(k, l)$  est voisin du pixel  $(i, j)$  alors le pixel  $(i, j)$  est aussi voisin du pixel  $(k, l)$  (propriété de *réciprocité*).

On appelle *champ aléatoire de Markov* par rapport à un support  $S$  et un voisinage  $\eta$  tout champ  $\mathbf{X}$  de support  $S$  tel que les probabilités conditionnelles de ses éléments  $X_{ij}$  vérifient la relation suivante :

$$p(X_{ij}|X_{kl}, (k, l) \in \Omega) = p(X_{ij}|X_{kl}, (k, l) \in \eta_{ij}) \quad (3.20)$$

pour tout sous ensemble  $\Omega$  de  $S$  contenant le voisinage  $\eta_{ij}$  de  $(i, j)$  et ne contenant pas  $(i, j)$ .

Il nous est possible de construire différents MRFs, mais ces derniers ne sont généralement utiles qu'avec un voisinage restreint. En effet, l'intérêt des MRFs réside dans la description locale des interactions qui permet d'appliquer des méthodes de résolution locale, de faible charge calculatoire, et d'écrire  $p(\mathbf{x})$  sous une forme générale, explicite et simple. Cependant, l'équation (3.20) ne nous permet pas de déduire et d'écrire  $p(\mathbf{x})$  sous une forme explicite et simple. Ceci est rendu possible en faisant intervenir les potentiels de Gibbs. Sur un support fini  $S$ , on appelle *champ aléatoire de Gibbs (GRF)* associé à un système de voisinage  $\eta$  tout champ

$\mathbf{X}$  dont la densité de probabilité est de la forme :

$$p(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp \left( -\frac{1}{T} \sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(\mathbf{x}) \right) \quad (3.21)$$

où  $Z$  et  $T$  représentent respectivement les constantes de normalisation et de température.  $V_c$  est une fonction potentiel associée à la clique  $c$ . Une clique est un ensemble de pixels tels que deux pixels quelconques de cet ensemble sont toujours voisins. Enfin,  $\mathcal{C}$  représente l'ensemble des cliques associées à  $(S, \eta)$ . Cette formulation nous permet d'obtenir une forme explicite de  $p(\mathbf{x})$ . Sous condition de positivité, le théorème de Hammersley-Clifford (Winkler, 1995) montre l'équivalence entre champs de Markov et champs de Gibbs. On définit le plus souvent un MRF par sa densité de Gibbs. Un choix convenable de  $V_c$  permet de favoriser les zones homogènes sans pour autant perdre les discontinuités.

Les voisinages les plus souvent utilisés sont ceux du premier ordre (figure 3.3) et du second ordre. Dans le premier cas, le voisinage ne contient que les quatre pixels adjacents (six dans le cas d'un voisinage en 3D) alors que dans le second cas, il contient les huit pixels les plus proches (vingt-six dans le cas d'un voisinage 3D).

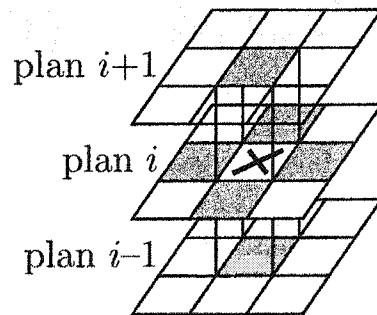


Figure 3.3 Représentation d'un voisinage du premier ordre dans le cas 3D - d'après (Villain *et al.*, 1997).

### 3.6 Choix du MRF

Dans la littérature, on trouve différents modèles de champs de Markov. Depuis ces dernières années, ils sont de formulation plus simples permettant entre autre d'obtenir un problème d'optimisation plus simple à résoudre. Les différents modèles sont exposés par la suite.

#### 3.6.1 Champs de Markov à valeurs discrètes

Parmi les modèles à valeurs discrètes (Besag, 1986), le modèle le plus ancien et le plus simple est celui introduit par Ising :

$$V_c(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K \alpha_k n_k + \sum_{k=1}^K \sum_{l=k}^K \beta_{kl} n_{kl} \quad (3.22)$$

où  $K$  représente le nombre de couleurs de l'image (nous nous situons dans le cadre du traitement d'images où les différents niveaux de gris sont appelés *couleur*),  $n_k$  le nombre de pixels de couleur  $k$  et  $n_{kl}$  le nombre de paires de voisins de couleur respective  $k$  et  $l$ . De plus, on note  $\alpha_k$  la pénalité qui dépend de la couleur du pixel  $k$  et  $\beta_{kl}$  la pénalité pour les cliques formées de deux pixels de couleurs différentes. En appliquant des pénalités plus ou moins élevées, ce modèle nous permet de conserver les discontinuités ainsi que les zones homogènes. Cependant, pour un nombre élevé de niveaux de gris, ce modèle est lourd à utiliser pour la restauration ou la reconstruction d'images. On retrouve aussi l'approche introduite par Geman et Geman (1984) et par Blake et Zisserman (1987)<sup>1</sup>. Il s'agit d'une approche de *détection-estimation* : on considère à la fois le problème d'*estimation* de  $\mathbf{x}$  et de *détection* des discontinuités. Entre chaque pixel et ses voisins, une variable de *ligne*  $l$  est introduite. Il s'agit d'une variable binaire de telle sorte que  $l_{ij} = 0$  si les pixels

<sup>1</sup>pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à ces deux articles fondateurs

$i$  et  $j$  appartiennent à la même couleur et  $l_{ij} = 1$  sinon. L'optimisation du critère obtenu dans les deux cas pose cependant un problème complexe : Geman et Geman ont utilisé le recuit-simulé, alors que Blake et Zisserman ont mis en oeuvre la méthode de *non convexité graduelle*. Ces deux méthodes étant lourdes à mettre en oeuvre, nous ne les développerons pas. C'est pourquoi, par la suite nous allons nous intéresser plus particulièrement aux modèles à valeurs continues.

### 3.6.2 Champs de Markov à valeurs continues

Dans le cas de champs à valeurs continues, nous pouvons écrire la probabilité sous la forme suivante :

$$p(\mathbf{x}) \propto \frac{1}{Z} \exp \left( -\frac{1}{T} \sum_{c=1}^C \varphi_c(\mathbf{x}_c) \right) \quad (3.23)$$

où  $C$  représente l'ensemble des cliques,  $\varphi_c$  la fonction de *pénalisation* associée à la clique  $c$  et  $\mathbf{x}_c$  la restriction de  $\mathbf{x}$  à la clique  $c$ . Si nous considérons un champ homogène, nous avons :

$$p(\mathbf{x}) \propto \frac{1}{Z} \exp \left( -\frac{1}{T} \sum_{c=1}^C \varphi(\mathbf{x}_c) \right) \quad (3.24)$$

L'objectif ici est de déterminer la fonction  $\varphi$  qui s'adapte le mieux à notre problème : faciliter la résolution et refléter l'*a priori* de notre objet  $\mathbf{x}$ . La forme la plus simple est le champ gaussien markovien, de variance  $\sigma^2$ , soit  $\varphi(u) = (\frac{u}{\sigma})^2$ . On retrouve le cas gaussien introduit à l'équation (3.17), pour certaines formes particulières de  $\mathbf{W}$ . Nous avons ici une pénalisation quadratique, ce qui signifie un calcul de gradient aisé. Cependant, comme nous l'avons remarqué dans le cas de la pénalisation quadratique de Tikhonov,  $\varphi$  devient vite grande pour des écarts importants entre pixels voisins. Comme nous souhaitons préserver les discontinuités, le modèle gaussien est mal adapté à notre situation, nous ne conserverons donc pas

cette approche. Afin de remédier à cette situation, nous allons nous intéresser à une dernière famille de MRF composée de critères non quadratiques : ils permettent de conserver les discontinuités mais sont de minimisation plus complexe. De plus, afin d'avoir un modèle de mise en oeuvre simple, les cliques utilisées sont le plus souvent composées de deux éléments, soit les paires de pixels voisins. On pénalise plus particulièrement la différence entre pixels voisins. Nous obtenons alors :

$$p(\mathbf{x}) \propto \frac{1}{Z} \exp \left( -\frac{1}{T} \sum_{c \in \mathcal{C}_2} \varphi(\mathbf{d}_c^T \mathbf{x}) \right) \quad (3.25)$$

où  $\mathcal{C}_2$  représente l'ensemble des cliques à deux éléments et  $\mathbf{d}_c$  le vecteur de restriction à la clique  $c$ .

### 3.6.3 Fonctions de pénalisation $\varphi$ non quadratiques

Le principe est d'utiliser une fonction  $\varphi$  qui croît moins vite qu'une parabole, modèle gaussien, afin de préserver les contours, c'est à dire de moins pénaliser les variations importantes. On retrouve essentiellement trois familles de fonctions  $\varphi$  :

- $L_2L_1$  : fonctions non constantes, paires,  $C^1$  et  $C^2$  en zéro (question d'algorithme), convexes, continûment différentiables, de comportement quadratique à l'origine ( $\varphi(u) \sim u^2$  pour  $u \rightarrow 0 \Rightarrow L_2$ ) et asymptotiquement linéaire ( $\varphi(u) \sim u$  pour  $u \rightarrow \infty \Rightarrow L_1$ ).
- $L_2L_0$  : fonctions non constantes, paires,  $C^2$  en zéro, croissantes sur  $\mathbb{R}^+$ , de comportement quadratique à l'origine ( $\varphi(u) \sim u^2$  pour  $u \rightarrow 0 \Rightarrow L_2$ ) et tendant vers une constante à l'infini ( $\varphi(u) \sim M$  pour  $u \rightarrow \infty \Rightarrow L_0$ ). Il s'agit de fonctions non convexes.
- $L_p$  :  $\varphi(u) = |u|^p$ ,  $1 \leq p < 2$  (Bouman et Sauer, 1993). Cette fonction n'est pas  $C^2$  en zéro et non différentiable pour  $p = 1$ .

La seconde famille nous permet d'obtenir des frontières franches, mais nous sommes face à des fonctions non convexes. Le critère qui en résulte est lui aussi non convexe, ce qui en complique beaucoup la minimisation. Le coût des calculs pour éviter les minima locaux peut être très important. Les algorithmes les plus répandus sont ceux du *recuit simulé* (Geman et Geman, 1984), les *algorithmes génétiques* (Haupt, 1995) ou la *non convexité graduelle* (Nikolova *et al.*, 1998). Comme nous l'avons remarqué précédemment, ces méthodes ont un coût calculatoire très élevé, surtout en imagerie médicale où nous travaillons avec des images dont la taille peut rapidement devenir importante. La troisième famille nous permet d'obtenir des résultats qualitativement proches des fonctions  $L_2L_1$ . Nous allons donc plus particulièrement nous intéresser à la première famille de fonctions. Nous effectuons ici un compromis : nous disposons d'un modèle moins bien conçu pour conserver les discontinuités qu'avec les fonctions  $L_2L_0$  mais dont la mise en oeuvre est plus aisée. En effet, suite à la convexité de notre critère, nous sommes assuré de l'existence d'une solution unique  $\hat{x}$ , ce qui nous permet de mettre en oeuvre des techniques usuelles d'optimisation, et la continuité de  $\hat{x}$  vis à vis des données garantie la robustesse de la méthode (Li, 1995). Le comportement  $L_2L_1$  permet d'assurer une bonne diminution des oscillations présentes dans l'image (comportement  $L_2$ ) et de limiter la progression trop forte de la pénalisation pour de grandes différences entre pixels voisins (comportement  $L_1$ ).

Différentes fonctions  $\varphi$  (figure 3.4) peuvent être utilisées. Celles que l'on retrouve le plus souvent sont les suivantes (Idier, 2001) :

1. la branche d'hyperbole (Charbonnier *et al.*, 1997) :  $\varphi(u) = \sqrt{\delta^2 + u^2}$ ,  $\delta > 0$
2. la fonction de Huber (Huber, 1981) :

$$\begin{cases} \varphi(u) = u^2 & 0 < |u| \leq T \\ \varphi(u) = 2T|u| - T^2 & |u| > T \end{cases} \quad (3.26)$$

Toutes ces fonctions dépendent d'un paramètre d'échelle qu'il faut régler lors de la mise en oeuvre.

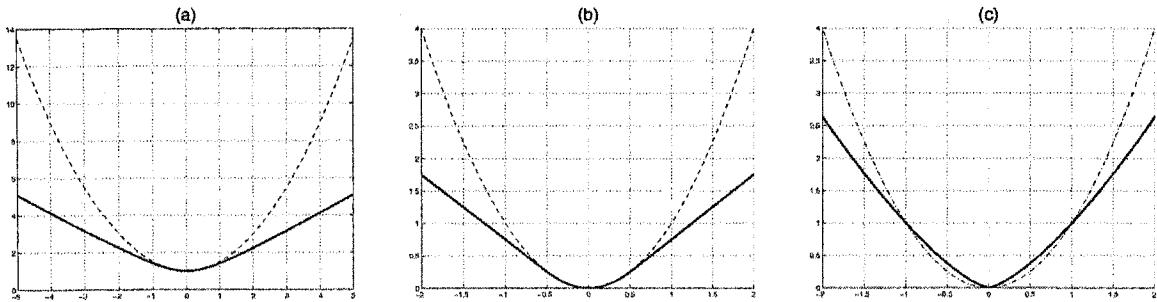


Figure 3.4 Allure des différentes fonctions de pénalisation (trait plein) comparées à la fonction quadratique (pointillés) - (a) branche d'hyperbole pour  $\delta = 1$ , (b) fonction de Huber pour  $T = 0.5$  et (c) pénalisation  $L^p$  pour  $p = 1.4$

### 3.7 Minimisation d'un critère convexe non quadratique

Nous allons maintenant nous intéresser uniquement aux fonctions  $L_2L_1$ , et aux cliques formées d'une paire de pixels. Notre critère  $J_\varphi(\mathbf{x})$  est de la forme suivante :

$$J_\varphi(\mathbf{x}) = \underbrace{\|\mathbf{y} - \mathbf{Hx}\|^2}_{J_0(\mathbf{x})} + \lambda \sum_{c \in \mathcal{C}_2} \varphi(\mathbf{d}_c^T \mathbf{x}) \quad (3.27)$$

où nous poserons par la suite  $\mathbf{D} = [\mathbf{d}_1 | \dots | \mathbf{d}_M]^T$  avec  $M = |\mathcal{C}_2|$ .

Afin de minimiser le critère, il nous est possible d'utiliser des méthodes de minimisation locale. Nous allons ici présenter deux approches, *les algorithmes de descente et les méthodes de relaxation*.

### 3.7.1 Les algorithmes de descente

Il s'agit de méthodes itératives partant d'une valeur initiale quelconque  $\mathbf{x}^{(0)}$  et dont la mise à jour s'écrit :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \rho^{(k)} \boldsymbol{\xi}^{(k)} \quad , \quad \rho^{(k)} > 0 \quad (3.28)$$

où  $\rho^{(k)}$  est la longueur du pas à l'itération  $(k)$  et  $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$  la direction de descente. Le couple  $(\rho^{(k)}, \boldsymbol{\xi}^{(k)})$  est choisi de telle sorte à avoir :  $J(\mathbf{x}^{(k+1)}) < J(\mathbf{x}^{(k)})$ . La mise à jour de ce couple peut être effectuée de différentes manières, mais le but est d'obtenir un compromis entre simplicité de mise en oeuvre et assurance de convergence. Nous allons par la suite présenter quelques choix classiques.

On peut choisir d'utiliser un pas  $\rho^{(k)}$  fixe, méthode peu utilisée, ou variable. Dans ce second cas, une recherche linéaire est nécessaire. On doit résoudre l'équation suivante :

$$J(\mathbf{x}^{(k+1)}) = J\left(\mathbf{x}^{(k)} + \rho^{(k)} \boldsymbol{\xi}^{(k)}\right) \quad (3.29)$$

$$= \inf_{\rho > 0} \left( J\left(\mathbf{x}^{(k)} + \rho \boldsymbol{\xi}^{(k)}\right) \right) \quad (3.30)$$

Pour l'évaluation de la direction  $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$ , la plupart des méthodes sont basées sur une utilisation du gradient  $\nabla J(\mathbf{x}^{(k)})$ , mais on trouve aussi une utilisation du hessien  $\mathbf{H}$ . Le choix le plus naturel est de prendre  $\boldsymbol{\xi}^{(k)} = -\nabla J(\mathbf{x}^{(k)})$ . Il s'agit de la méthode *de plus forte pente*. Ce choix entraîne cependant une vitesse de convergence asymptotique lente. D'autres directions de descente peuvent être utilisées. Comme par exemple, celle obtenue par l'algorithme du *gradient conjugué*, introduit par Hestenes et Stiefel (1952). Le nom de *gradient conjugué* provient du fait que deux directions de descente successives  $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$  et  $\boldsymbol{\xi}^{(k+1)}$  sont *H-conjuguées*, c'est

à dire qu'elles satisfont l'égalité suivante :

$$(\boldsymbol{\xi}^{(k+1)})^T \mathbf{H} \boldsymbol{\xi}^{(k)} = 0 \quad (3.31)$$

où  $\mathbf{H}$  est le hessien du critère.

Dans le cas de fonctions quadratiques, si  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ , l'algorithme converge en au plus  $N$  itérations. Il peut aussi être mis en oeuvre avec des fonctions non quadratiques (version de Polack-Ribièvre et Fletcher-Reeves). En effet, localement une fonction  $f$  suffisamment régulière est *proche* d'une fonction quadratique. La vitesse de convergence est plus rapide que dans le cas de la plus forte pente car les corrections successives n'interfèrent pas entre elles (Sauer et Bouman, 1993). Elle peut être accélérée par l'introduction de *préconditionnement*. Pour ces méthodes, la mise à jour doit être effectuée sur le vecteur complet des données, et peut être lourde à mettre en oeuvre dans le cas de problèmes de grandes dimensions.

On retrouve enfin les algorithmes de Newton. Ici, la direction de descente est calculée à partir du hessien  $\mathbf{H}^{(k)}$  de  $J$  :

$$\mathbf{H}^{(k)} \boldsymbol{\xi}^{(k)} = -\nabla J(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (3.32)$$

Le principal avantage de cette méthode est que nous avons une convergence quadratique. Cependant l'inconvénient réside dans le calcul à chaque itération du hessien. Il faut de plus s'assurer de l'existence de  $\mathbf{H}^{-1}$ . Ces deux problèmes peuvent être contournés par les méthodes *quasi Newton* :  $\mathbf{H}^{(k)}$  est approximé par une matrice  $\mathbf{B}^{(k)}$  définie positive et qui garantit la décroissance à chaque itération.

### 3.7.2 Les méthodes de relaxation

L'objectif est toujours de résoudre l'équation  $\widehat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} J(\mathbf{x})$ . Le principe des méthodes de relaxation classique est d'initialiser l'algorithme avec une valeur arbitraire  $\mathbf{x}^{(0)}$  et d'effectuer la minimisation de  $J$  composante par composante :

→ méthode de Jacobi :

$$\widehat{x}_i^{(k+1)} = \arg \min_{v_i \in \mathcal{X}_i} \left\{ J \left( x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, v_i, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right) \right\}$$

→ méthode de Gauss-Siedel :

$$\widehat{x}_i^{(k+1)} = \arg \min_{v_i \in \mathcal{X}_i} \left\{ J \left( x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, v_i, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right) \right\}$$

La principale différence entre les méthodes de Jacobi et Gauss-Siedel se situe dans le remplacement des composantes du vecteur  $\mathbf{x}$  : avec Gauss-Siedel on remplace au fur et à mesure les composantes de  $\mathbf{x}$ , ce qui permet d'économiser de la mémoire, et d'accélérer la convergence.

Il est possible de définir un facteur de relaxation  $\theta$  afin d'accélérer la vitesse de convergence de telle sorte à avoir :

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \theta)x_i^{(k)} + \theta\widehat{x}_i^{(k+1)} \quad ; \quad \theta \in ]0, 2[ \quad (3.33)$$

Le principal inconvénient des méthodes de relaxation réside dans le taux de convergence équivalent à celui d'un simple algorithme de Gradient (Bertsekas, 1995).

Afin de contourner les inconvénients des algorithmes de descente et des méthodes de relaxation, nous avons décidé de mettre en oeuvre une autre famille d'algorithmes possédant une grande popularité depuis quelques années dans le milieu du traitement d'images : *les pénalisations semi-quadratiques basées sur la dualité de*

*Fechel* pour construire un critère augmenté. Nous allons maintenant présenter la manière de construire ces algorithmes.

### 3.8 Critère augmenté semi-quadratique. Construction de GY et GR

Le critère que nous cherchons à minimiser est celui introduit en (3.27), soit :

$$J_\varphi(\mathbf{x}) = J_0(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{c \in \mathcal{C}_2} \varphi(\mathbf{d}_c^T \mathbf{x}) \quad (3.34)$$

Par la suite, nous poserons  $u_c = \mathbf{d}_c^T \mathbf{x}$ .

Afin de simplifier la mise en oeuvre, l'idée est d'introduire de nouvelles variables auxiliaires : au lieu de minimiser le critère *primal*  $J_\varphi(\mathbf{x})$ , nous minimisons un critère *primal/dual*  $K(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  aux propriétés suivantes :

- Il est quadratique pour les variables primales  $\mathbf{x}$  à  $\mathbf{b}$  fixé.
- Sa minimisation vis à vis des variables duales  $\mathbf{b}$  est explicite. (3.35)
- $\min_{\mathbf{b}} K(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J(\mathbf{x})$ .

On parle alors de critère *augmenté semi-quadratique*. Il est dit *augmenté* car nous introduisons une variable  $\mathbf{b}$ , et semi-quadratique car il répond aux propriétés (3.35).

Le nouveau critère  $K(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  à minimiser est de la forme suivante :

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_0(\mathbf{x}) + \lambda \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) \quad (3.36)$$

où :

$$\begin{cases} J_0(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{Hx}\|^2 \\ \min_{\mathbf{b}} \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = F(\mathbf{x}) = \lambda \sum_{c \in \mathcal{C}_2} \varphi(u_c) \end{cases} \quad (3.37)$$

L'originalité de ce critère réside dans le terme  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ . Cependant, la difficulté ici est de construire  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  qui satisfasse (3.37). Des solutions ont été apportées par Geman et Reynolds (1992), notée GR et Geman et Yang (1995), notée GY, GR étant antérieure à GY. Nous allons ici présenter ces deux approches semi-quadratiques qui nous permettent la construction de critères augmentés et par là la minimisation de critères convexes non quadratiques. Ces deux formulations sont largement utilisées depuis les dix dernières années.

Ces deux constructions sont basées sur une approche primale-duale et s'appuient sur des résultats issus de l'analyse convexe (Rockafellar, 1970). Afin d'effectuer cette étude nous nous sommes principalement basés sur deux auteurs auxquels nous renverrons le lecteur pour plus de détails : Idier (2001) et Allain (2002).

Dans un premier temps, nous allons introduire quelques définitions d'analyse convexe qui nous seront utiles par la suite.

### 3.8.1 Définitions d'après Rockafellar (1970)

1.  $f^\dagger$  est la fonction convexe conjuguée de  $f$  si :

$$f^\dagger(v) = \sup_{u \in \mathbb{R}} (\langle u | v \rangle - f(u)) \quad (3.38)$$

L'application  $f \rightarrow f^\dagger$  est appelée *transformation de Legendre*.

2. Si  $f$  est convexe, alors  $f^\dagger$  est bien définie et convexe, et  $(f^\dagger)^\dagger = f$ .

Ainsi, on dit que deux fonctions  $f$  et  $g$  sont *convexes conjuguées* si :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(u) = \sup_v (\langle u | v \rangle - f(v)) \\ f \text{ convexe} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(v) = \sup_u (\langle u | v \rangle - g(u)) \\ g \text{ convexe} \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Les constructions de GR et GY sont principalement basées sur ces relations de dualité qui permettent de mettre en oeuvre la reconstruction semi-quadratique.

### 3.8.2 Construction d'après Geman & Reynolds

Sous réserve que  $\varphi$  soit paire,  $C^1$  et que  $\varphi(\sqrt{\cdot})$  soit concave sur  $\mathbb{R}^+$ , la construction d'après GR est basée sur l'introduction de la fonction auxiliaire  $g$  définie par :

$$\begin{cases} \forall u < 0 \quad , \quad g(u) = +\infty \\ \forall u \geq 0 \quad , \quad g(u) = -\varphi(\sqrt{u}) \end{cases} \quad (3.40)$$

$g$  étant définie convexe,  $g$  et  $g^\dagger$  forment une paire de fonctions convexes conjuguées. En définissant  $\psi(b)$  par :  $\psi(b) = g^\dagger(-b)$ , l'application des relations introduites en (3.39) nous donne les relations de dualité suivantes<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \inf_b (u^2 b + \psi(b)) \\ \psi(b) &= \sup_u (-u^2 b + \varphi(u)) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Si nous revenons à notre critère  $J_\varphi(\mathbf{x})$  (équation 3.34), en appliquant les relations (3.41), il nous est possible de construire le critère augmenté  $K_{\text{GR}}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  qui réponde aux conditions (3.35) et (3.37) :

$$K_{\text{GR}}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_0(\mathbf{x}) + \lambda \underbrace{\sum_{c \in \mathcal{C}_2} ((\mathbf{d}_c^T \mathbf{x})^2 b_c + \psi(b_c))}_{\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{b})} \quad (3.42)$$

$$= J_0(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{c \in \mathcal{C}_2} (u_c^2 b_c + \psi(b_c)) \quad (3.43)$$

---

<sup>2</sup>Les détails des calculs se trouvent en Annexe I

Par construction nous avons bien  $\min_{\mathbf{b}} K_{\text{GR}}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_{\varphi}(\mathbf{x})$  :

$$K_{\text{GR}}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_0(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{c \in \mathcal{C}_2} (u_c^2 b_c + \psi(b_c)) \quad (3.44)$$

$$\text{d'où } \min_{\mathbf{b}} K_{\text{GR}}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{b}} \left( J_0(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{c \in \mathcal{C}_2} (u_c^2 b_c + \psi(b_c)) \right) \quad (3.45)$$

$$= \min_{\mathbf{b}} J_0(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{c \in \mathcal{C}_2} \min_{\mathbf{b}} (u_c^2 b_c + \psi(b_c)) \quad (3.46)$$

$$= J_0(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{c \in \mathcal{C}_2} \varphi(u_c) \quad (3.47)$$

$$= J_{\varphi}(\mathbf{x}) \quad (3.48)$$

Le passage de (3.46) à (3.47) s'effectue en appliquant (3.41). D'après l'expression de  $K_{\text{GR}}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  donnée en (3.42), on s'aperçoit que la forme est bien quadratique par rapport à  $\mathbf{x}$ , ce qui nous permet de déterminer  $\hat{\mathbf{x}}$ , à  $\mathbf{b}$  fixé :

$$\underbrace{\left( \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{B} \mathbf{D} \right)}_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (3.49)$$

avec  $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, \dots, b_c)$ ,  $\forall c \in \mathcal{C}_2$ . De même, une forme explicite des variables duales (ou encore appelées variables de lignes)  $\mathbf{b}$  à  $\mathbf{x}$  fixé peut alors être obtenue<sup>3</sup> :

$$\hat{b}_c = \arg \min_{b_c} \{u_c^2 b_c + \psi(b_c)\} \quad , \quad c \in \mathcal{C}_2 \quad (3.50)$$

sachant que  $\psi(b_c)$  est lié à  $\varphi(u_c)$ , nous n'avons en aucun cas besoin de connaître  $\psi(b_c)$ , et nous obtenons :

$$\hat{b}_c = \frac{\varphi'(u_c)}{2u_c} \quad , \quad c \in \mathcal{C}_2 \quad (3.51)$$

La forme de  $K_{\text{GR}}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  nous permet d'obtenir les minima en  $\mathbf{x}$  et en  $\mathbf{b}$  par deux opérations simples de minimisation. Cette forme suggère une procédure itérative

---

<sup>3</sup>Le détail des calculs se trouve en Annexe I

de relaxation par blocs où la mise à jour de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{b}$  est effectuée alternativement, suivant les équations 3.49 et 3.51. Dans ce cas là une condition suffisante de convergence d'un tel schéma vers un minimum global est de s'assurer de la convexité du critère augmenté en  $\mathbf{x}$  et en  $\mathbf{b}$ , ce qui n'est pas toujours le cas. Les conditions sont les suivantes (Charbonnier *et al.*, 1997; Idier, 2001; Allain, 2002) :

1.  $\varphi$  strictement convexe
2.  $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{\varphi'(u)}{u} = 0$
3.  $\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{\varphi'(u)}{u} < +\infty$

### 3.8.3 Construction d'après Geman & Yang

La construction de GY est basée sur le même principe, soit l'introduction de la fonction auxiliaire  $g_\alpha(u) = \frac{u^2}{2} - \varphi_\alpha(u)$  où  $\varphi_\alpha = \alpha\varphi$  est définie de telle sorte à ce que  $g_\alpha(u)$  soit une fonction convexe. Désignons par  $g_\alpha^\dagger(b)$  sa fonction convexe conjuguée, on pose  $g_\alpha^\dagger(b) = \psi_\alpha(b) + \frac{b^2}{2}$ . Nous avons alors<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(u) &= \inf_b \left( \frac{(u-b)^2}{2} + \psi_\alpha(b) \right) \\ \psi_\alpha(b) &= \sup_u \left( -\frac{(u-b)^2}{2} + \varphi_\alpha(u) \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

L'introduction de ce paramètre  $\alpha$  (Idier, 2001) nous permet d'assurer la convexité de  $g_\alpha(u)$  pour toutes les valeurs du paramètre d'échelle présent dans les fonctions  $\varphi L_2 L_1$  introduites au paragraphe 3.6.3.

Pour que  $g_\alpha(\cdot)$  soit convexe, il suffit que :

$$\alpha \leq \alpha_{max} \leq \varphi''(u) \quad (3.53)$$

---

<sup>4</sup>Les détails des calculs se trouvent en Annexe II

Notre critère  $J_\varphi(\mathbf{x})$  se réécrit sous la forme suivante :

$$J_\varphi(\mathbf{x}) = J_0(\mathbf{x}) + \frac{\lambda}{\alpha} \sum_{c \in \mathcal{C}_2} \varphi_\alpha(u_c) \quad (3.54)$$

En suivant un raisonnement identique à celui exposé pour GR, nous construisons le critère augmenté  $K_{\text{GY}}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  de telle manière que  $\min_{\mathbf{b}} K_{\text{GY}}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J(\mathbf{x})$ , en remplaçant  $\varphi_\alpha(u)$  par la relation introduite en (3.52) :

$$K_{\text{GY}}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_0(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{c \in \mathcal{C}_2} \left( \frac{(\mathbf{d}_c^T \mathbf{x} - b_c)^2}{2\alpha} + \frac{\psi_\alpha(b_c)}{\alpha} \right) \quad (3.55)$$

$$K_{\text{GY}}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_0(\mathbf{x}) + \lambda \sum_{c \in \mathcal{C}_2} \left( \frac{(u_c - b_c)^2}{2\alpha} + \frac{\psi_\alpha(b_c)}{\alpha} \right) \quad (3.56)$$

De même, la forme de  $\hat{\mathbf{b}}$  est explicite, et nous avons<sup>5</sup> :

$$\hat{b}_c = \arg \min_{b_c} \left\{ \frac{(u_c - b_c)^2}{2} + \psi_\alpha(b_c) \right\} \quad , \quad \forall c \in \mathcal{C}_2 \quad (3.57)$$

$$\hat{b}_c = u_c - \alpha \varphi'(u_c) \quad ; \quad \forall c \in \mathcal{C}_2 \quad (3.58)$$

La forme du critère augmenté  $K(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  étant quadratique en  $\mathbf{x}$ , nous obtenons :

$$\underbrace{\left( \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{\lambda}{2\alpha} \mathbf{D}^T \mathbf{D} \right)}_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T \mathbf{y} + \frac{\lambda}{2\alpha} \mathbf{D}^T \mathbf{b} \quad (3.59)$$

Tout comme dans le cas de GR, une condition suffisante de convergence d'un tel schéma est de s'assurer de la convexité du critère augmenté en  $\mathbf{x}$  et en  $\mathbf{b}$ . Nous obtenons alors :

1.  $\varphi$  strictement convexe
2.  $g_\alpha$  strictement convexe

---

<sup>5</sup>Le détail des calculs se trouve en Annexe II

3.  $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{\alpha\varphi(u)}{u^2} < \frac{1}{2}$  : condition toujours vérifiée pour les fonctions  $L_1L_2$  introduite au paragraphe 3.6 pour  $\alpha \leq \alpha_{max}$ .

Expérimentalement, du point de vu nombre d'itération, GR semble converger plus rapidement que GY (Allain, 2002).

Si nous comparons les matrices normales  $\mathbf{A}$  obtenues pour chacune des formulations, nous nous apercevons que dans le cas de GR,  $\mathbf{A}$  dépend des variables de lignes  $\mathbf{b}$ , alors que dans le cas de GY, nous ne retrouvons que des constantes dans la formulation de  $\mathbf{A}$ . Cette forme spécifique de  $\mathbf{A}$  forme un des attraits de l'algorithme de GY, vu que la matrice  $\mathbf{A}$  ne devra être calculée qu'une seule fois. Les formules obtenues précédemment suggèrent la mise en oeuvre d'un algorithme de relaxation par blocs.

### 3.8.4 Mise en oeuvre

À ce stade ci, une des principales questions qui se pose est comment minimiser efficacement le critère  $K(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  tout en ayant une garantie de convergence.

Plusieurs algorithmes peuvent être envisagés suivant la nature des données et la taille du problème. Nous allons présenter deux approches : une approche directe et une approche par *pixels*. Dans ces deux approches, la minimisation de  $K(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  est effectuée itérativement.

#### 3.8.4.1 Approche directe - Mise à jour groupée

Une application directe des structures mises en évidence au paragraphe précédent, aux équations (3.58) et (3.59) dans le cas de GY et (3.51) et (3.49) pour GR nous permet d'obtenir une mise à jour *groupée*. Il s'agit de l'approche utilisée par Char-

bonnier *et al.* (1994, 1997) dans les algorithmes LEGEND (approche de type GY) et ARTHUR (approche de type GR). Dans ce cas là, on travaille matriciellement, c'est à dire que l'on effectue la mise à jour de l'ensemble des variables primales puis de l'ensemble des variables duales. À l'itération  $(k + 1)$ , nous avons :

$$GY \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \underbrace{\left( \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{\lambda}{2\alpha} \mathbf{D}^T \mathbf{D} \right)^{-1}}_{\mathbf{A}} \left( \mathbf{H}^T \mathbf{y} + \frac{\lambda}{2\alpha} \mathbf{D}^T \mathbf{b}^{(k)} \right) \\ \hat{\mathbf{b}}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k+1)} - \alpha \varphi'(\mathbf{u}^{(k+1)}) \end{array} \right. \quad (3.60)$$

$$et \quad GR \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \underbrace{\left( \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{B} \mathbf{D} \right)^{-1}}_{\mathbf{A}} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \\ \hat{\mathbf{b}}^{(k+1)} = \frac{\varphi'(\mathbf{u}^{(k+1)})}{2\mathbf{u}^{(k+1)}} \end{array} \right. \quad (3.61)$$

Dans le cas de GR, un abus de notation a été effectué, la division introduite dans le calcul de  $\hat{\mathbf{b}}$  étant vue comme une division terme à terme.

Cette technique comporte certains inconvénients. Tout d'abord, il faut s'assurer que la matrice normale  $\mathbf{A}$  soit bien inversible, d'où l'introduction dans de nombreux cas d'un terme de *rappel à zéro* de la forme  $\varphi(\mathbf{x})$ . En fait, cela ajoute un *a priori* sur  $\mathbf{x}$  dans lequel on considère la clique formée du pixel lui-même. Le nom de *rappel à zéro* vient du fait que ce terme pénalise l'écart de chacun des pixels par rapport à zéro. L'introduction de ce terme permet de stabiliser l'inversion en pénalisant fortement les trop grandes valeurs de  $\mathbf{x}$ . De plus, dans le cas de problème de grande taille, l'inversion directe de  $\mathbf{A}$  peut devenir problématique, et il faut alors utiliser des techniques itératives comme le gradient conjugué (Charbonnier *et al.*, 1997) afin de résoudre les systèmes linéaires (3.59) et (3.49). Certains auteurs, comme Roullot (2001) en IRM, tirent parti du caractère quasi bloc circulant de la matrice normale dans le cas de GY afin d'effectuer des simplifications via l'opérateur de Fourier.

Finalement, on se rend compte, en observant la matrice  $\mathbf{A}$  que pour une mise à jour groupée GY est plus attrayante que GR : dans le cas de GY, contrairement à GR,  $\mathbf{A}$  ne dépend que de constantes, elle pourra donc être calculée et inversée au tout début de la mise en œuvre de l'algorithme et stockée une fois pour toute.

### 3.8.4.2 Mise à jour pixel par pixel

Dans le cas de problèmes de grande taille, comme nous l'avons dit précédemment, l'inversion directe et le stockage (dans le cas de GY) de la matrice  $\mathbf{A}$  peut s'avérer problématique et très coûteux. Afin d'éviter l'inversion de cette matrice, une résolution itérative du problème de minimisation de  $\mathbf{x}$  à  $\mathbf{b}$  fixé peut être envisagée, réduisant ainsi le coût informatique. Il s'agit d'une mise à jour pixel par pixel. La mise à jour peut, par exemple, être effectuée selon le schéma de Gauss-Seidel introduit précédemment (paragraphe 3.7.2).

Pour un vecteur  $\mathbf{x}$  de taille  $N$ , nous pouvons résumer la mise à jour ainsi, pour chaque itération  $j$  :

1. évaluation de  $b_c, \forall c \in \mathcal{C}_2$
2. à  $\mathbf{b}$  fixé, jusqu'à convergence
  - pour  $i = 1 \dots N$  :
    - évaluation de  $x_i$
  - fin de pour

Les formes des variables de lignes  $b_c$  sont identiques à celles présentées aux équations (3.58) et (3.51). Pour  $x_i$ , nous nous basons sur les formes des critères augmentés  $K$  présentées en 3.55 (resp. 3.42) pour GY (resp. GR) sur lesquels une minimisation par rapport à  $x_i$  est effectuée.

Nous trouvons alors (Allain, 2002) :

**1 -GY :**

$$\begin{aligned}\hat{b}_c^{(k+1)} &= u_c^{(k+1)} - \alpha \varphi'(u_c^{(k+1)}) \quad , \quad \forall c \in \mathcal{C}_2 \\ \hat{x}_n^{(k+1)} &= \hat{x}_n^{(k)} + \frac{2 [\mathbf{H}^T \mathbf{y}]_n + \lambda / \alpha [\mathbf{D}^T]_{n,\bullet} \mathbf{b}^{(k)} - [\mathbf{B} \mathbf{x}^{(k)}]_n}{[\mathbf{B}]_{n,n}} \\ \mathbf{B} &= 2 \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda / \alpha \mathbf{D}^T \mathbf{D}\end{aligned}\quad (3.62)$$

**2 -GR :**

$$\begin{aligned}\hat{b}_c^{(k+1)} &= \frac{\varphi'(u_c^{(k+1)})}{2 u_c^{(k+1)}} \quad , \quad \forall c \in \mathcal{C}_2 \\ \hat{x}_n^{(k+1)} &= \hat{x}_n^{(k)} + \frac{[\mathbf{H}^T \mathbf{y}]_n - [\mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{x}^{(k)}]_n \lambda [\mathbf{D}^T \mathbf{B}^{(k)} \mathbf{D} \mathbf{x}^{(k)}]_n}{[\mathbf{H}^T \mathbf{H}]_{n,n} + \underbrace{\lambda [\mathbf{D}^T \mathbf{B}^{(k)} \mathbf{D}]_{n,n}}_{\mathcal{B}}}\end{aligned}\quad (3.63)$$

où  $[\mathbf{Z}]_{n,m}$  représente l'élément situé en (ligne  $n$ , colonne  $m$ ) d'une matrice  $\mathbf{Z}$ , et  $[\mathbf{Z}]_{n,\bullet}$  la  $n$ -ème ligne de  $\mathbf{Z}$ .

Dans le cas de l'approche pixels par pixels, on se rend compte que les méthodes de GY et GR ont un coût numérique semblable. En effet, évaluer le terme  $\mathcal{B}$  est équivalent à effectuer la somme des  $K = |\eta_n|$  variables de lignes  $b_c$ ,  $c \in \eta_n$  intervenants dans le calcul de  $\hat{x}_n^{(k+1)}$ ,  $\eta_n$  représentant le voisinage du pixel  $x_n$ . C'est pourquoi, dans cette approche, on privilégiera GR qui converge plus rapidement.

Comme nous l'avons dit lors de l'introduction des méthodes de relaxation, il est aussi possible d'ajouter un paramètre de sur-relaxation par rapport à  $\mathbf{x}$  et/ou  $\mathbf{b}$  (Villain, 1997; Allain, 2002), afin d'augmenter la vitesse de convergence :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(k+1)} &= (1 - \theta) \mathbf{x}^{(k)} + \theta \hat{\mathbf{x}}^{(k+1)} \quad ; \quad \theta \in ]0; 2[ \\ \mathbf{b}^{(k+1)} &= (1 - \gamma) \mathbf{b}^{(k)} + \gamma \hat{\mathbf{b}}^{(k+1)} \quad ; \quad \gamma \in ]0; 1[\end{aligned}\quad (3.64)$$

Nicolas Villain *et coll.* (Villain, 1997; Villain *et al.*, 2003) ont appliqué cette approche pixels par pixels, (en anglais, Single Site Update, SSU) en tomographie par rayons X. Ils ont plus particulièrement privilégié l'approche GR. L'utilisation de la mise à jour SSU leur a permis de développer un algorithme de restauration d'images 3D avec un coût de mise en oeuvre faible.

### 3.8.4.3 Réinterprétation de GY et GR

Marc Allain a montré dans sa thèse (Allain, 2002, chap.IX) que lorsque l'on néglige la relaxation sur la variable de ligne  $\mathbf{b}$ , c'est à dire lorsque l'on pose  $\gamma = 1$ , les algorithmes de relaxation semi-quadratique sont en fait des algorithmes de descente à pas fixe sur le critère primal, de type quasi-Newton. L'idée clé ici est qu'il nous est possible de recombiner les deux étapes de mise à jour de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{b}$  en une seule, c'est à dire en remplaçant  $\mathbf{b}$  dans l'expression de  $\mathbf{x}$  par son estimation. On obtient ainsi un  $\widehat{\mathbf{x}}^{(k+1)}$  qui ne dépend pas de la variable de ligne :

$$\widehat{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \theta(\mathbf{A}^{(k)})^{-1} \nabla J(\mathbf{x}^{(k)}) , \quad \theta \in ]0, 2[ \quad (3.65)$$

où  $\mathbf{A}$  représente les matrices normales introduites en (3.49) et (3.59).

Partant de cette formulation, Marc Allain a étudié la convergence globale des algorithmes semi-quadratiques en se basant sur des outils d'optimisation sans contraintes classiques, et plus particulièrement sur la règle d'Armijo (Allain *et al.*, 2002, proposition 2). Il obtient ainsi des domaines de convergences étendus. La convergence est assurée même si le critère augmenté  $K(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  n'est pas convexe. Nous obtenons un nouveau domaine de convergence en  $(\theta, \alpha)$  :

$$(\theta, \alpha) \in ]0; 2[ \times ]0; 2\alpha_{max}/\theta[ \quad (3.66)$$

où  $\alpha_{max}$  appartient à l'ensemble de définition trouvé précédemment lors de l'étude de la convexité du critère primal/dual (3.53). Ce nouveau domaine de convergence permet en général une augmentation de la vitesse de convergence.

### 3.9 Application à l'IRM

Ces techniques basées sur les problèmes inverses sont peu utilisées en IRM. Parmi les recherches récentes, nous trouvons Élodie Roullet (Roullet *et al.*, 2000a; Roullet, 2001; Herment *et al.*, 2002; Roullet *et al.*, 2000b) qui a proposé une régularisation par introduction d'information *a priori* sur l'objet imagé dans le cas d'acquisition de deux volumes anisotropes ayant chacun une résolution dégradée dans une direction distincte. Elle a plus précisément utilisé une régularisation semi-quadratique, se basant lors de la reconstruction sur l'algorithme LEGEND. De même, dans le cadre d'acquisition non-cartésienne, le modèle introduit par Rédha Boubertakh (Boubertakh, 2002) se propose de n'effectuer aucune estimation directe des données manquantes mais d'introduire de l'information *a priori* sur l'image. Ainsi, il propose tout comme Élodie Roullet l'introduction d'un terme de fidélité aux données et d'un terme de régularisation. Lors de la reconstruction, il utilise l'algorithme du gradient conjugué. Finalement, Rachid Deriche *et al.* (Deriche *et al.*, 2003) ont effectué une comparaison dans le cas d'images IRM des algorithmes de GY et GR. Cette comparaison, principalement effectuée du point de vue temps de calcul au niveau CPU, leur a permis de montrer que la formulation GY est plus rapide que GR.

### 3.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes plus particulièrement intéressé aux problèmes inverses et aux moyens de les régulariser via une pénalisation  $L_2L_1$ . Nous avons ciblé notre attention sur les algorithmes semi-quadratiques de Geman & Reynolds et Geman & Yang. Nous allons maintenant appliquer ces formulations semi-quadratiques à notre problème, soit *la reconstruction d'images en IRM*. L'intérêt principal de ces deux formulation pour notre problème réside dans la possibilité d'utiliser un critère convexe non quadratique, et ainsi préserver les discontinuités des images, tout en permettant une mise en oeuvre efficace. Nous allons principalement effectuer une adaptation et une extension en tenant compte des particularités de notre problème comme nous le verrons au prochain chapitre.

## CHAPITRE 4

### APPLICATION À NOTRE PROBLÈME - RECONSTRUCTION D'IMAGE EN IRM

Nous allons appliquer ici les méthodes de reconstruction semi-quadratiques vues au chapitre précédent au domaine auquel nous nous intéressons, l'IRM. Notre travail tout au long de ce chapitre sera principalement guidé par un fil conducteur : développer une mise en oeuvre rapide et efficace de la formulation de GY. Dans un premier temps, nous allons effectuer une remise en contexte et justifier notre choix pour l'approche de type Geman & Yang à celle de Geman & Reynolds. Dans un second temps, nous allons adapter cette approche au cadre particulier de l'IRM et ainsi développer différentes formulations tirant parti de la structure du problème : *formulation standard*, *formulation vectorielle*, introduite récemment par Fiani *et al.* (2001) et Allain (2002), et une formulation originale que nous nommerons *formulation généralisée*.

#### 4.1 Remise en contexte

Dans ce chapitre, nous travaillons avec des images  $\mathbf{X}$  et des données  $\mathbf{Y}$  2D, le passage en 3D étant détaillé au chapitre 5. Les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont les vecteurs images et données obtenus en concaténant colonne par colonne les matrices  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ . Ainsi le pixel  $(i, j)$  d'une image de taille  $I \times J$  correspond à la composante d'indice  $i + (j - 1) \times I$  du vecteur de taille  $L = I \times J$ .

Revenons tout d'abord sur l'équation du critère  $J$  à minimiser introduite en (3.27) ;

nous avons :

$$J_\varphi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 + \frac{\lambda}{\alpha} \sum_{c \in \mathcal{C}_2} \varphi_\alpha(u_c) \quad (4.1)$$

où  $u_c$  représente la différence entre deux pixels de la clique  $c$ ,  $\mathcal{C}_2$  l'ensemble des cliques à deux éléments,  $\varphi_\alpha = \alpha\varphi$  et  $\mathbf{H}$  est l'opérateur permettant d'obtenir les données  $\mathbf{y}$  à partir de l'image  $\mathbf{x}$ . Dans le cas de l'IRM, il s'agit de l'opérateur de la *transformée de Fourier*. De plus, comme nous travaillons maintenant avec des images  $\mathbf{x}$  de dimension connue, 2D, nous allons différencier l'ensemble  $\mathcal{C}_2$  des cliques  $c$  à deux éléments :  $\mathcal{C}^1$  (resp.  $\mathcal{C}^2$ ) va représenter l'ensemble des paires de pixels adjacentes horizontales (resp. verticales), soit :

$$J_\varphi(\mathbf{x}) = \underbrace{\|\mathbf{y} - \Phi_2 \mathbf{x}\|^2}_{J_0(\mathbf{x})} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{\alpha} \sum_{c \in \mathcal{C}^l} \varphi_\alpha(\mathbf{d}_{l,c}^T \mathbf{x}) \quad (4.2)$$

où  $\Phi_2$  représente la matrice unitaire de la transformée de Fourier 2D et chaque vecteur  $\mathbf{d}_{l,c}$  est de support limité à la clique  $c$ . Nous avons aussi introduit un terme de *rappel à zéro* qui permet d'améliorer les résultats en assurant l'existence d'une solution. Il fait intervenir la même fonction  $\varphi_\alpha$  et s'écrit :

$$\lambda_0 \sum_{(i,j) \in \mathcal{X}} \varphi_\alpha(x_{i,j}) \quad (4.3)$$

où  $\mathcal{X}$  est le support de  $\mathbf{x}$ . Afin d'obtenir une forme compacte du critère  $J_\varphi(\mathbf{x})$ , nous avons posé  $\mathcal{C}^0 = \mathcal{X}$ , tel que  $\forall c \in \mathcal{C}^0, u_c = \mathbf{d}_{0,c}^T \mathbf{x} = x_c$ .

Les vecteurs  $\mathbf{d}_{l,c}^T$  sont de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{0,c}^T &= [0 \dots 1 \dots 0] \quad \Rightarrow \quad \forall i \in c, c \in \mathcal{C}^0, \quad \mathbf{d}_{0,c}^T(i) = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \notin c, \quad \mathbf{d}_{0,c}^T(j) = 0 \\ \mathbf{d}_{l,c}^T &= [0 \dots 1 \dots 0 \dots -1 \dots 0] \quad ; \quad l \in \{1, 2\} \\ \Rightarrow \quad \forall (i,j) \in c, c \in \mathcal{C}^l, \quad \mathbf{d}_{l,c}^T(i) &= 1, \quad \mathbf{d}_{l,c}^T(j) = -1 \quad \text{et} \quad \forall k \notin c, \quad \mathbf{d}_{l,c}^T(k) = 0 \end{aligned}$$

Par la suite nous utiliserons les matrices des différences finies<sup>1</sup>  $\mathbf{D}_l$  :

$$\mathbf{D}_l = [\mathbf{d}_{l,1} | \dots | \mathbf{d}_{l,M_l}]^T \quad , \quad \text{avec} \quad M_l = |\mathcal{C}^l| \quad , \quad l \in \{0, 1, 2\} \quad (4.4)$$

et nous poserons  $\mathbf{u}_l = \mathbf{D}_l \mathbf{x}$ .

L'opérateur  $\Phi_2$  possède la propriété suivante que nous allons exploiter par la suite :

$$\Phi_2^{-1} \Phi_2 = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \Phi_2^* = N_{col} N_{lig} \times \Phi_2^{-1} \quad (4.5)$$

où  $(.)^*$  représente l'opérateur de *transconjugation* et  $N_{col} \times N_{lig}$  sont les dimensions de l'image  $\mathbf{X}$ .

## 4.2 Choix de l'algorithme et de la fonction $\varphi$

Notre choix s'est dirigé vers l'approche de type Geman & Yang, et plus particulièrement vers une approche de mise à jour groupée. Les raisons suivantes ont motivé notre choix :

1. les propriétés de  $\Phi_2$  énoncées précédemment vont nous permettre d'obtenir une forme particulière pour la matrice normale  $\mathbf{A}$  : une matrice *quasi bloc-circulante*.
2. des travaux récents qui se prêtent à une mise en oeuvre efficace de l'algorithme de GY, par exemple ceux d'Élodie Roullet (Roullet, 2001), qui a privilégié l'algorithme LEGEND, approche de type GY, à ARTHUR, approche de type GR, et plus récemment ceux de Deriche *et al.* (2003) indiquent que la forme GY est plus rapide (en terme de nombre d'opérations pour atteindre la convergence) que la forme GR.

---

<sup>1</sup>les formes précises des matrices  $\mathbf{D}_l$  ,  $l \in \{1, 2\}$  se trouvent en Annexe IV.  $\mathbf{D}_0$  est égale à la matrice identité

Pour la fonction de pénalisation  $\varphi$ , nous avons choisi d'utiliser une des fonctions  $L_2L_1$  introduites au chapitre précédent, soit :

$$\varphi(u) = \sqrt{\delta^2 + u^2}, \quad \delta > 0 \quad (4.6)$$

où  $\delta$  est un paramètre d'échelle qui règle la transition entre les comportements quadratique et linéaire. L'utilisation d'une telle fonction va nous permettre de ne pas trop pénaliser les grandes différences entre pixels voisins, permettant ainsi la préservation des discontinuités. Une fonction de ce type représente en fait le meilleur compromis entre conservation des discontinuités et obtention d'un critère convexe (ce qui va grandement faciliter la minimisation de celui-ci).

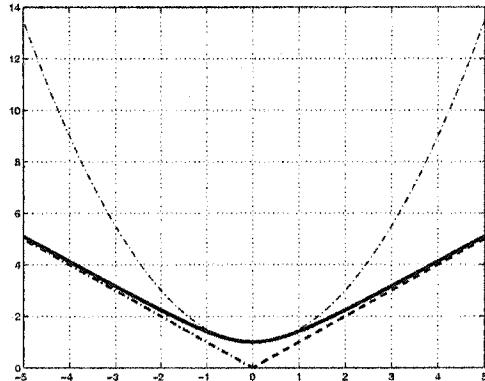


Figure 4.1 Allure de la fonction de pénalisation utilisée (les abscisses correspondent à la différence entre 2 pixels voisins) comparée à la fonction quadratique correspondant à une régularisation gaussienne (pointillés). Les asymptotes en  $\pm\infty$  sont aussi représentées.

Nous allons maintenant nous attarder sur la reformulation de l'algorithme de GY introduit au chapitre précédent en tenant compte du fait qu'en IRM nous travaillons avec des données complexes de la forme  $a = a_r + i \times a_i$ .

### 4.3 Formulation standard de Geman & Yang - Variables complexes

La principale question ici est de savoir comment traiter les données complexes. Il est possible de considérer une variable complexe  $u = u_r + iu_i$  comme un vecteur à deux variables réelles, soit  $u = [u_r \ u_i]$ , et d'appliquer le terme de pénalisation sur chacune des variables. Vu la forme de la fonction  $\varphi$ , il apparaît cependant plus logique de pénaliser le module des différences, c'est à dire de poser :

$$\varphi(u) = \sqrt{\delta^2 + |u|^2} = \sqrt{\delta^2 + u_r^2 + u_i^2}, \quad \delta > 0 \quad (4.7)$$

Pour étendre les résultats du chapitre précédent au cas des variables complexes, nous allons à la fois :

1. appliquer les résultats vus au chapitre précédent sur une pénalisation vectorielle, soit en considérant  $u = [u_r \ u_i]$ ;
2. utiliser les résultats généraux des théorèmes sur les variables complexes et adapter l'approche du chapitre précédent.

#### 4.3.1 Relations de dualité

En nous basant sur Rockafellar (1970), nous pouvons étendre la notion de fonctions convexes conjuguées introduite en (3.38) aux cas de variables complexes. Le produit scalaire  $\langle u | v \rangle$  est ici égal à  $\frac{1}{2}(uv^* + u^*v)$ , ce qui nous donne (Ciuciu et Idier, 2002) :

Soit  $f : \mathbb{C}^M \mapsto \mathbb{R}$  une fonction convexe. Le conjugué convexe *complexe* de  $f$  est défini par :

$$\forall v \in \mathbb{C}^M, \quad f^\dagger(v) = \sup_{u \in \mathbb{C}^M} (\langle u | v \rangle - f(u)) \quad (4.8)$$

et  $f^\dagger$  est une fonction convexe sur  $\mathbb{C}^M$ . Le couple  $(f, f^\dagger)$  de fonctions à valeurs réelles sur  $\mathbb{C}^M$  forme une paire de Legendre (Ciuciu et Idier, 2002, Def. 2, p. 945).

Afin de mettre en oeuvre la reconstruction semi-quadratique, la paire de fonctions convexes conjuguées  $(g_\alpha, g_\alpha^\dagger)$  que nous introduisons est la même que celle présentée en (3.52), le produit  $x * x$  étant remplacé par  $x^* x$ . Nous aboutissons alors au couple de fonctions duales *complexes*  $(\varphi, \psi)$ <sup>2</sup> :

$$GY = \begin{cases} \varphi_\alpha(u) &= \inf_{b \in \mathbb{C}} \left( \frac{(u - b)^*(u - b)}{2} + \psi_\alpha(b) \right) \\ \psi_\alpha(b) &= \sup_{u \in \mathbb{C}} \left( -\frac{(u - b)^*(u - b)}{2} + \varphi_\alpha(u) \right) \end{cases} \quad (4.9)$$

Comme nos variables primales  $\mathbf{x}$  sont complexes, les variables duales  $\mathbf{b}$  le sont aussi. La fonction  $\varphi_\alpha$  est définie de manière à ce que  $g_\alpha(u)$  soit convexe.

Nous pouvons alors construire le critère augmenté  $K_\alpha^{GY}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  :

$$K_\alpha^{GY}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_0(\mathbf{x}) + \sum_{l=0}^2 \lambda_l \left( \frac{(\mathbf{u}_l - \mathbf{b}_l)^*(\mathbf{u}_l - \mathbf{b}_l)}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} \Psi_{l\alpha}(\mathbf{b}_l) \right) \quad (4.10)$$

$$\text{avec } \Psi_{l\alpha}(\mathbf{b}_l) = \sum_{c \in \mathcal{C}^l} \psi_\alpha(b_c).$$

En nous basant toujours sur les résultats du chapitre précédent, nous allons nous attarder sur la mise à jour des variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{b}$ .

#### 4.3.2 Estimation de la variable de ligne $\hat{\mathbf{b}}$

Comme nous avons une forme explicite en  $\mathbf{b}$ , la mise à jour s'effectue simplement en posant  $u = u_r + iu_i$  et  $b = b_r + ib_i$  et en séparant les parties réelles et imaginaires.

En suivant un raisonnement analogue à celui exposé au paragraphe 3.8.3, nous

---

<sup>2</sup>démonstration en Annexe III

obtenons<sup>3</sup> :

$$\hat{b}_c = u_c - \alpha \frac{u_c}{\sqrt{\delta^2 + |u_c|^2}} \quad , \quad \forall c \in \mathcal{C}^l, \quad l \in \{0, 1, 2\} \quad (4.11)$$

Ou encore :

$$\boxed{\hat{b}_l = u_l - \alpha \frac{u_l}{\sqrt{\delta^2 + |u_l|^2}}} \quad (4.12)$$

où le quotient doit s'entendre comme une division composante par composante.

#### 4.3.3 Estimation de $\hat{x}$

Le critère augmenté  $K_\alpha^{\text{GY}}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  est quadratique en  $\mathbf{x}$ . En suivant la même démarche que celle utilisée pour  $\hat{b}$  et en se basant sur les résultats obtenus aux paragraphes 3.8.3 et 3.8.5.1, nous trouvons :

$$\hat{x} = \left( \Phi_2^* \Phi_2 + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha} \mathbf{D}_l^* \mathbf{D}_l \right)^{-1} \left( \Phi_2^* \mathbf{y} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha} \mathbf{D}_l^* \hat{b} \right) \quad (4.13)$$

Si nous utilisons les propriétés de l'opérateur de Fourier présentées en (4.5),  $\hat{x}$  s'écrit :

$$\hat{x} = \left( N_{\text{col}} N_{\text{lig}} \mathbf{I} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha} \mathbf{D}_l^* \mathbf{D}_l \right)^{-1} \left( N_{\text{col}} N_{\text{lig}} \Phi_2^{-1} \mathbf{y} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha} \mathbf{D}_l^* \hat{b} \right) \quad (4.14)$$

Ou encore :

$$\boxed{\hat{x} = \underbrace{\left( \mathbf{I} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{\text{col}} N_{\text{lig}}} \mathbf{D}_l^* \mathbf{D}_l \right)^{-1}}_A \left( \Phi_2^{-1} \mathbf{y} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{\text{col}} N_{\text{lig}}} \mathbf{D}_l^* \hat{b} \right)} \quad (4.15)$$

<sup>3</sup>le lecteur intéressé par les développements mathématiques pourra se référer à l'Annexe III.

La matrice normale  $\mathbf{A}$  est d'une forme particulière. En effet, l'expression donnée en (4.15) montre qu'il s'agit d'une matrice hermitienne de taille  $N_{col}N_{lig} \times N_{col}N_{lig}$ . De plus, il faut noter que le produit  $\mathbf{D}_l^* \mathbf{D}$  est quasi *bloc-circulant*<sup>4</sup>. C'est pourquoi la matrice  $\mathbf{A}$  est quasi *bloc-circulante*.

Avant de voir comment nous allons tirer parti de cette propriété, il nous faut nous assurer que notre critère est bien convexe.

#### 4.3.4 Choix de $\alpha$ assurant la convexité du critère

Afin de s'assurer de la convergence vers un minimum global, il faut nous assurer de la convexité du critère augmenté  $K(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ . Les conditions présentées au paragraphe 3.8.4 peuvent être étendues au cas complexe :

1.  $\varphi$  strictement convexe
2.  $g_\alpha$  strictement convexe
3.  $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{\alpha\varphi(u)}{u^*u} < \frac{1}{2}$

La première condition est bien vérifiée. Pour la seconde, il nous faut trouver l'ensemble de définition de  $\alpha$  nous permettant d'obtenir une fonction  $g_\alpha$  strictement convexe.

Il nous faut donc calculer le hessien de  $g_\alpha(u)$  et trouver pour quel  $\alpha$  il est défini positif. Dans le cas de variables complexes, il nous est possible d'effectuer ce calcul en considérant  $u$  comme un vecteur à deux composantes. Ce calcul est dans certaines situations fastidieux. C'est pourquoi nous allons ici nous baser sur une propriété introduite par Philippe Ciuciu (Ciuciu et Idier, 2002) pour démontrer la convexité de  $g_\alpha(u)$  (Propriété 1).

---

<sup>4</sup>On renverra le lecteur à l'Annexe IV pour avoir les formes détaillées des matrices

**Propriété 1** Soit une fonction  $f : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{R}$  circulaire, alors  $f$  est (resp. strictement) convexe si et seulement si sa restriction sur  $\mathbb{R}_+^M$  est une fonction (resp. strictement) convexe et non décroissante (resp. croissante) selon les coordonnées.

Une fonction  $f$  dite circulaire respecte la propriété suivante :  $f(|x|) = f(x)$  et une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}_+^M \rightarrow \mathbb{R}$  est dite non décroissante selon les coordonnées si et seulement si  $\forall i \in \{1, \dots, M\}$  :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^M, \quad \forall t \geq 0, \quad f(\mathbf{v}) \leq f(\mathbf{v} + t\mathbf{1}_i)$$

où  $\mathbf{1}_i$  est un vecteur  $\mathbf{u}$  de taille  $M$  tel que  $\mathbf{u}(i) = 1$  et  $\forall j \in \{1, \dots, M\} \setminus i, \mathbf{u}(j) = 0$ . Cette propriété peut aussi se traduire par une dérivée première  $\frac{\partial f(\mathbf{m})}{\partial m_i}$  positive ou nulle. Les conditions de convexité d'une fonction  $f_\alpha(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^* \mathbf{u} / 2 - \Phi_\alpha(\mathbf{u})$ ,  $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^M$ , où  $\Phi_\alpha(\mathbf{u}) = \alpha \Phi(\mathbf{u})$ , peuvent être résumées dans le corollaire suivant (Ciuciu et Idier, 2002, corollaire 1, p.946) :

**Corollaire 1** Soit une fonction  $f_\alpha$  définie telle que précédemment. Supposons que  $\Phi$  soit circulaire,  $C^2$  et convexe sur  $\mathbb{C}^M$ . Alors  $f_\alpha$  est strictement convexe si et seulement si :

$$\forall \mathbf{m} \in \mathbb{R}_+^M, \quad \begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}^M, \quad \alpha < m_i [\partial \Phi / \partial m_i(\mathbf{m})]^{-1} \\ \mathbf{I}_M - \alpha \nabla^2 \Phi(\mathbf{m}) > 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Dans notre cas où  $M = 1$  et où la fonction  $f_\alpha$  est égale à la fonction  $g_\alpha = (u^* u) / 2 - \varphi_\alpha(u)$ , nous obtenons les conditions de convexité suivantes :

$$\alpha < \inf_u \left( \frac{u}{\varphi'(u)} \right) \quad \text{et} \quad \alpha < \left[ \sup_u (\varphi''(u)) \right]^{-1} \quad (\text{Allain, 2002; Ciuciu et Idier, 2002}) \quad (4.17)$$

ce qui nous donne l'ensemble de définition suivant :  $\alpha \in ]0, \delta[$ , les deux conditions de (4.16) aboutissant à la même borne supérieure.

Si nous revenons aux trois conditions émises au début du paragraphe, la seconde est bien vérifiée pour  $\alpha < \alpha_{max}$ . Enfin, la troisième condition est toujours vérifiée pour la fonction  $\varphi$  introduite en (4.6) pour  $\alpha \leq \alpha_{max}$ . Nous sommes donc sûrs de converger vers un minimum global.

#### 4.3.5 Mise en oeuvre

Attardons nous sur les équations (4.12) et (4.15) :

**équation 4.12 :** Les opérations sont effectuées composantes par composantes sur un vecteur. L'évaluation de  $\mathbf{b}$  ne comporte aucune difficulté majeur.

**équation 4.15 :**  $\Phi_2^{-1}\mathbf{y}$  : L'évaluation du terme est facile, elle s'effectue grâce à l'algorithme de transformée de Fourier rapide (*Fast Fourier Transform, FFT*)

dont la mise en oeuvre s'effectue de manière efficace sous MATLAB et en C.

$\mathbf{D}_l^* \widehat{\mathbf{b}}_l$  :  $\mathbf{D}_l$  représente les matrices des différences finies du premier ordre, comme il s'agit de matrices creuses, le produit  $\mathbf{D}_l^* \widehat{\mathbf{b}}_l$  ne nécessite pas de grande ressource mémoire.

$\mathbf{A}$  : elle se calcule facilement, mais elle est de taille  $N_{col}N_{lig} \times N_{col}N_{lig}$ , ce qui peut devenir problématique avec des images de taille réaliste, soit  $512 \times 512$ .

La mise à jour de  $\mathbf{x}$  pose donc plus de difficulté que celle de  $\mathbf{b}$ , notamment dans le cas de grandes images. La principale difficulté réside dans l'inversion de  $\mathbf{A}$ . Or nous avons vu précédemment que cette dernière est quasi *bloc-circulante*. Nous allons tirer parti de cette caractéristique pour simplifier son inversion.

#### 4.3.6 Formulation exacte

La matrice  $\mathbf{A}$  *quasi bloc-circulante* peut être exprimée comme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} - \Delta \quad (4.18)$$

où  $\mathbf{C}$  est bloc-circulante et  $\Delta$  est une matrice de perturbation de rang faible. Suite à la symétrie hermitienne de  $\mathbf{A}$ ,  $\Delta$  peut être factorisée sous la forme suivante :

$$\Delta = \mathbf{U}\mathbf{U}^* \quad (4.19)$$

où  $\mathbf{U}$  est une matrice rectangulaire dont la taille est typiquement  $N_{col}N_{lig} \times N_{col}$  (resp.  $N_{col}N_{lig} \times N_{lig}$ ) dans le cas de la pénalisation horizontale (resp. verticale).

L'inversion de  $\mathbf{A}$  peut alors être effectuée de manière efficace en utilisant le *lemme d'inversion* des matrices (Lemme 1) et le fait que  $\mathbf{C}$  peut être diagonalisée en appliquant l'opérateur de la transformée de Fourier 2D,  $\Phi_2$  (Corollaire 2).

**Lemme 1 Lemme d'inversion des matrices (Scharf, 1991) :**

Soit  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{Y}$  deux matrices carrées régulières,  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Z}$  deux matrices quelconques dont les dimensions sont telles que  $\dim(\mathbf{W}) = \dim(\mathbf{XYZ})$ . Si  $\mathbf{W} + \mathbf{XYZ}$  est une matrice régulière, alors :

1.  $\mathbf{Y}^{-1} + \mathbf{ZW}^{-1}\mathbf{X}$  est une matrice régulière;
2.  $(\mathbf{W} + \mathbf{XYZ})^{-1} = \mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{Y}^{-1} + \mathbf{ZW}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{ZW}^{-1}$

**Corollaire 2 Diagonalisation de la matrice  $\mathbf{C}$  : (Hunt, 1973)**

Soit  $\mathbf{C}$  une matrice bloc-circulante, elle vérifie la propriété suivante :

$$\mathbf{C} \times \Phi_2^{-1} = \Phi_2^{-1} \times \Lambda \quad (4.20)$$

où  $\Lambda$  représente la matrice diagonale formée des valeurs propres de  $\mathbf{C}$ . Ces dernières peuvent être obtenues très facilement par :  $\text{diag}(\Lambda) = \Phi_2 \times \mathbf{c}$ , où  $\mathbf{c}$  représente la première colonne de la matrice  $\mathbf{C}$ .

Revenons à l'expression de  $\mathbf{A}$  donnée en (4.15) ; nous avons :

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \frac{\lambda_0}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{D}_0^* \mathbf{D}_0 + \frac{\lambda_1}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{D}_1^* \mathbf{D}_1 + \frac{\lambda_2}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{D}_2^* \mathbf{D}_2 \quad (4.21)$$

où  $\mathbf{D}_0$  représente la matrice des différences finies utilisée pour le rappel à zéro, soit la matrice identité,  $\mathbf{D}_0 = \mathbf{I}$ . Nous pouvons alors réécrire  $\mathbf{A}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left(1 + \frac{\lambda_0}{2\alpha N_{col} N_{lig}}\right) \mathbf{I} + \sum_{l=1}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} (\mathbf{C}_l - \Delta_l) \\ &= \left(1 + \frac{\lambda_0}{2\alpha N_{col} N_{lig}}\right) \mathbf{I} + \sum_{l=1}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} (\Phi_2^{-1} \Lambda_l \Phi_2 - \mathbf{U}_l \mathbf{U}_l^*) \quad (4.22) \\ &= \Phi_2^{-1} \left[ \left(1 + \frac{\lambda_0}{2\alpha N_{col} N_{lig}}\right) \mathbf{I} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \left( \Lambda_l - \frac{1}{N_{col} N_{lig}} (\Phi_2 \mathbf{U}_l) (\Phi_2 \mathbf{U}_l)^* \right) \right] \Phi_2 \end{aligned}$$

où  $\Lambda_l$  représente la matrice diagonale obtenue en appliquant le Corollaire 2 à  $\mathbf{C}_l$ . Il nous est alors possible d'appliquer le lemme d'inversion des matrices pour calculer l'inverse de  $\mathbf{A}$ , en posant :

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \left(1 + \frac{\lambda_0}{2\alpha N_{col} N_{lig}}\right) \mathbf{I} + \sum_{l=1}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \Lambda_l \quad ; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Phi_2 \mathbf{U}_1 & \Phi_2 \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y} &= \frac{1}{2\alpha (N_{col} N_{lig})^2} \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} \\ & \lambda_2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} (\Phi_2 \mathbf{U}_1)^* \\ (\Phi_2 \mathbf{U}_2)^* \end{bmatrix} \quad (4.23) \end{aligned}$$

de tailles respectives  $N_{col} N_{lig} \times N_{col} N_{lig}$ ,  $N_{col} N_{lig} \times (N_{col} + N_{lig})$ ,  $(N_{col} + N_{lig}) \times (N_{col} + N_{lig})$  et  $(N_{col} + N_{lig}) \times N_{col} N_{lig}$ .

Nous avons appelé cette version *formulation exacte de la forme standard* de GY car nous n'effectuons aucune approximation. La mise en oeuvre de cette version est résumée au tableau (4.1). Sans l'utilisation du Corollaire 2 et du Lemme 1, l'inversion de  $\mathbf{A}$  nécessitait l'inversion d'une matrice de taille  $N_{col}N_{lig} \times N_{col}N_{lig}$ , maintenant, les seules matrices à inverser sont les matrices  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{Y}$ , qui sont diagonales et la matrice  $(\mathbf{Y}^{-1} + \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X})$  de taille  $(N_{col} + N_{lig}) \times (N_{col} + N_{lig})$ .

Tableau 4.1 Vue d'ensemble de la formulation exacte de la forme standard de GY

- (a) Initialisation
- (b) Calcul de  $\mathbf{A}^{-1}$  suivant (4.22) et (4.23)
- (c) Jusqu'à convergence (plus précisément jusqu'à ce qu'une règle d'arrêt soit vérifiée)
  - (c1) Mise à jour des variables de lignes  $\hat{\mathbf{b}}_l$ ,  $l \in \{0, 1, 2\}$  suivant (4.12)
  - (c2) Mise à jour de  $\hat{\mathbf{x}}$  suivant (4.15) :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \left( \Phi_2^{-1} \mathbf{y} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col}N_{lig}} \mathbf{D}_l^* \hat{\mathbf{b}}_l \right)$$

Cependant, même si nous avons su franchir l'obstacle de l'inversion d'une matrice de taille  $N_{col}N_{lig} \times N_{col}N_{lig}$  et ainsi réduire le coût total des opérations, pour des images IRM de taille réaliste (par ex.  $512 \times 512$ ), le coût total des opérations reste élevé. Ceci s'explique facilement en s'attardant sur les matrices introduites dans le lemme d'inversion :  $\mathbf{W}$  est de taille élevée, mais comme il s'agit d'une matrice diagonale, nous pouvons facilement la stocker, par contre, les matrices  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Z}$  sont de taille importante, respectivement  $N_{col}N_{lig} \times (N_{col} + N_{lig})$  et  $(N_{col} + N_{lig}) \times N_{col}N_{lig}$ , et elles ne sont pas creuses, d'où une plus grande difficulté à les stocker. C'est pourquoi, dans un premier temps, afin de réduire d'avantage la quantité de calculs, nous avons proposé une formulation *approximée* décrite ci-dessous.

#### 4.3.7 Formulation approximée

Nous négligeons la matrice de perturbation  $\Delta$ , ce qui revient à poser  $\mathbf{A} \approx \mathbf{C}$ , et à supposer notre signal périodique selon les directions des lignes et des colonnes.  $\mathbf{C}$  étant bloc-circulante, nous pouvons appliquer le Corollaire 2, et nous obtenons :

$$\mathbf{A} = \Phi_2^{-1} \left[ \left( 1 + \frac{\lambda_0}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \right) \mathbf{I} + \sum_{l=1}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{\Lambda}_l \right] \Phi_2 \quad (4.24)$$

$\mathbf{I}$  et  $\mathbf{\Lambda}_l$  étant deux matrices diagonales, l'inverse de  $\mathbf{A}$  se calcule facilement. De plus, comme nous avons des matrices creuses, peu d'espace mémoire est requis. La mise en oeuvre de cette version est résumée au tableau (4.2).

Tableau 4.2 Vue d'ensemble de la formulation approximée de la forme standard de GY

- (a) Initialisation
- (b) Calcul de  $\mathbf{A}^{-1}$  suivant (4.24)
- (c) Jusqu'à convergence (plus précisément jusqu'à ce qu'une règle d'arrêt soit vérifiée)
  - (c1) Mise à jour des variables de lignes  $\hat{\mathbf{b}}_l$ ,  $l \in \{0, 1, 2\}$  suivant (4.12)
  - (c2) Mise à jour de  $\hat{\mathbf{x}}$  suivant (4.15) :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \left( \Phi_2^{-1} \mathbf{y} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{D}_l^* \hat{\mathbf{b}}_l \right)$$

#### 4.3.8 Conclusion

Nous disposons de deux formulations de la version standard de GY. Une première, *exacte*, application de LEGEND à l'IRM, nous permet d'optimiser l'inversion de la

matrice  $\mathbf{A}$ , cependant sa mise en oeuvre est encore lente et difficilement utilisable en IRM avec des images de taille réaliste. Une seconde formulation, *approximée* ne nécessite plus l'application du lemme d'inversion des matrices, la matrice à inverser étant équivalente à une matrice identité, elle est donc rapide. Dans le but d'obtenir une formulation dont la complexité numérique est équivalente à celle de la forme approximée, mais sans approximation, nous avons décidé de nous attarder sur d'autres formulations de GY.

#### 4.4 Forme généralisée

Notre but est ici d'obtenir une matrice normale  $\mathbf{A}$  qui se prête à une inversion efficace numériquement. Notre approche consiste à introduire un degré de liberté supplémentaire dans la construction de GY en remplaçant le produit scalaire canonique habituel, qui apparaît dans les relations de dualité convexes, par un produit scalaire général défini par :

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \mathbf{M} \mathbf{v} \quad (4.25)$$

où  $\mathbf{M}$  est une matrice réelle symétrique définie positive.

Notre objectif est de voir quel choix de  $\mathbf{M}$  va nous permettre de modifier efficacement la structure de la matrice normale  $\mathbf{A}$  et ainsi la rendre circulante, rendant son inversion plus aisée. Mais avant, la question est ici de savoir si, en se basant sur Rockafellar (1970), les relations entre la fonction convexe  $f$  introduite en (4.8) et son conjugué  $f^\dagger$  peuvent être étendues au produit scalaire défini par (4.25) ; c'est à dire a-t-on les relations suivantes ?

$$\begin{aligned} f^\dagger(\mathbf{v}) &= \sup_{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^M} (\mathbf{v}^* \mathbf{M} \mathbf{u} - f(\mathbf{u})) \\ f(\mathbf{u}) &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^M} (\mathbf{u}^* \mathbf{M} \mathbf{v} - f^\dagger(\mathbf{v})) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Démonstration :

Soit  $f$  une fonction convexe,  $\mathbf{M}$  une matrice symétrique définie positive. Soit  $\mathbf{T}$  une racine carrée de  $\mathbf{M}$ , c'est à dire toute matrice  $\mathbf{T}$  telle que  $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{M}$ . Définissons  $h(\mathbf{u}) = f(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{u})$ .  $h$  est convexe comme étant la composée d'une fonction convexe et d'une transformation linéaire. On a donc les relations :

$$\begin{aligned} h^\dagger(\mathbf{v}) &= \sup_{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^M} (\mathbf{v}^* \mathbf{u} - h(\mathbf{u})) \\ h(\mathbf{u}) &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^M} (\mathbf{u}^* \mathbf{v} - h^\dagger(\mathbf{v})) \end{aligned} \quad (4.27)$$

où  $(h, h^\dagger)$  est une paire de Legendre au sens usuel.

Effectuons le changement de variables :

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{y}$$

En définissant  $f^\dagger(\mathbf{y}) = h^\dagger(\mathbf{T}\mathbf{y})$ ,  $f^\dagger$  est convexe comme étant la composée d'une fonction convexe et d'une fonction linéaire, nous obtenons les relations :

$$\begin{aligned} f^\dagger(\mathbf{y}) &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^M} (\mathbf{y}^* \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{x} - f(\mathbf{x})) \\ f(\mathbf{x}) &= \sup_{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M} (\mathbf{x}^* \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{y} - f^\dagger(\mathbf{y})) \end{aligned} \quad (4.28)$$

□

Nous disposons d'une forme étendue des relations de dualité. Nous allons reprendre la construction de GY et voir si un choix approprié de matrice  $\mathbf{M}$  nous permet d'atteindre l'objectif de simplification de la mise en oeuvre. Tout comme pour la formulation standard, afin de pouvoir mettre en oeuvre la formulation semi-quadratique, nous introduisons un couple de fonctions auxiliaires convexes  $(g_{l\alpha}, g_{l\alpha}^\dagger)$

de telle sorte que :

$$\begin{aligned} g_{l\alpha}(\mathbf{u}) &= \frac{\mathbf{u}^* \mathbf{M}_l \mathbf{u}}{2} - \Phi_{l\alpha}(\mathbf{u}) & l \in \{0, 1, 2\} \\ g_{l\alpha}^\dagger(\mathbf{b}) &= \frac{\mathbf{b}^* \mathbf{M}_l \mathbf{b}}{2} + \Psi_{l\alpha}(\mathbf{b}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

avec  $\Phi_{l\alpha}(\mathbf{u}) = \alpha \sum_{c \in \mathcal{C}^l} \varphi(u_c)$ .

La matrice  $\mathbf{M}_l$  introduite dans le produit scalaire a comme seule condition de devoir être symétrique définie positive. Le choix de  $\mathbf{M}_l$  de manière à simplifier la mise en oeuvre des algorithmes sera abordé plus loin.

De même, le couple  $(\Phi_{l\alpha}, \Psi_{l\alpha})$  est défini comme :

$$GY = \begin{cases} \Phi_{l\alpha}(\mathbf{u}) &= \inf_{\mathbf{b}} \left( \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{b})^* \mathbf{M}_l (\mathbf{u} - \mathbf{b})}{2} + \Psi_{l\alpha}(\mathbf{b}) \right) \\ \Psi_{l\alpha}(\mathbf{b}) &= \sup_{\mathbf{u}} \left( -\frac{(\mathbf{u} - \mathbf{b})^* \mathbf{M}_l (\mathbf{u} - \mathbf{b})}{2} + \Phi_{l\alpha}(\mathbf{u}) \right) \end{cases} \quad (4.30)$$

et le critère augmenté  $K_\alpha^{GYg}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  prend alors la forme :

$$K_\alpha^{GYg}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_0(\mathbf{x}) + \sum_{l=0}^2 \lambda_l \left( \frac{(\mathbf{u}_l - \mathbf{b}_l)^* \mathbf{M}_l (\mathbf{u}_l - \mathbf{b}_l)}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} \Psi_{l\alpha}(\mathbf{b}_l) \right) \quad (4.31)$$

En effectuant les mêmes calculs que dans le cadre de la version standard, il est alors aisément de trouver les formes de  $\hat{\mathbf{x}}$  et de  $\hat{\mathbf{b}}$  (nous ne détaillerons pas les calculs, le principe étant similaire à la version standard) :

$$\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{\left( \mathbf{I} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{D}_l^* \mathbf{M}_l \mathbf{D}_l \right)^{-1}}_{\mathbf{A}} \left( \Phi_2^{-1} \mathbf{y} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{D}_l^* \mathbf{M}_l \hat{\mathbf{b}}_l \right)$$

(4.32)

et :

$$\boxed{\mathbf{M}_l \hat{\mathbf{b}}_l = \mathbf{M}_l \mathbf{u}_l - \alpha \frac{\mathbf{u}_l}{\sqrt{\delta^2 + |\mathbf{u}_l|^2}}} \quad (4.33)$$

On observe que l'équation (4.33) permet de remettre à jour  $\mathbf{M}_l \hat{\mathbf{b}}_l$  et non plus  $\hat{\mathbf{b}}$ . Ceci n'est pas gênant dans la mesure où c'est maintenant cette même quantité  $\mathbf{M}_l \hat{\mathbf{b}}_l$  qui intervient dans (4.32). Il est donc inutile d'évaluer les variables de ligne  $\hat{\mathbf{b}}$  en tant que telles.

Nous nous intéressons maintenant au choix des matrices  $\mathbf{M}_l$  de manière à simplifier l'inversion de  $\mathbf{A}$ . Notre objectif est d'obtenir une matrice  $\mathbf{A}$  bloc-circulante de manière à pouvoir inverser  $\mathbf{A}$  par la même technique que celle décrite au paragraphe 4.3.5. Pour  $l = 0$ , comme  $\mathbf{D}_0 = \mathbf{I}$ , il nous suffit de choisir  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{I}$ . Pour  $l = 1$  et 2, comme nous l'avons mentionné au paragraphe précédent, le produit  $\mathbf{D}_l^* \mathbf{D}_l$  est quasi bloc-circulant et peut s'écrire sous la forme :  $\mathbf{D}_l^* \mathbf{D}_l = \mathbf{C}_l - \mathbf{U}_l \mathbf{U}_l^*$ , où  $\mathbf{C}_l$  est une matrice bloc-circulante. Nous cherchons donc une matrice  $\mathbf{M}_l$  telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_l^* \mathbf{M}_l \mathbf{D}_l &= \mathbf{C}_l = \mathbf{D}_l^* \mathbf{D}_l + \mathbf{U}_l \mathbf{U}_l^* \\ &\Leftrightarrow \\ \mathbf{D}_l^* (\mathbf{M}_l - \mathbf{I}) \mathbf{D}_l &= \mathbf{U}_l \mathbf{U}_l^* \quad ; \quad l \in \{1, 2\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$\mathbf{D}_l$  est de rang plein, et  $\mathbf{U}_l \mathbf{U}_l^*$  de rang égal à  $N_{col}$  pour  $l = 1$  (resp.  $N_{lig}$  pour  $l = 2$ ). Nous cherchons donc  $(\mathbf{M}_l - \mathbf{I})$  sous la forme d'une matrice de rang  $N_{col}$  (resp.  $N_{lig}$ ) et pouvant ainsi s'écrire comme :

$$\mathbf{M}_l - \mathbf{I} = \mathbf{S}_l \mathbf{S}_l^* \quad (4.35)$$

D'après (4.34), nous avons :

$$\mathbf{D}_l^* \mathbf{S}_l = \mathbf{U}_l \quad (4.36)$$

La solution de cette équation est alors simple à trouver dans le cas de différence du premier ordre<sup>5</sup>.

D'après (4.35),  $\mathbf{M}_l = \mathbf{I} + \mathbf{S}_l \mathbf{S}_l^*$ .  $\mathbf{A}$  présente donc une structure bloc-circulante sans que nous ayons eu à introduire d'approximations. Plus précisément, en appliquant le Corollaire 2 aux produits  $\mathbf{D}_l^* \mathbf{M}_l \mathbf{D}_l$ , nous obtenons :

$$\mathbf{A} = \Phi_2^{-1} \left[ \left( 1 + \frac{\lambda_0}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \right) \mathbf{I} + \sum_{l=1}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{\Lambda}_l \right] \Phi_2 \quad (4.37)$$

Enfin, le calcul de  $\mathbf{M}_l \mathbf{u}_l$  intervenant dans l'évaluation de  $\mathbf{M}_l \widehat{\mathbf{b}}_l$  n'entraîne pas de calculs importants. Nous savons que  $\mathbf{M}_l$  peut se décomposer comme la somme de la matrice  $\mathbf{I}$  et du produit  $\mathbf{S}_l \mathbf{S}_l^*$ ,  $\mathbf{S}_l$  étant de taille  $(N_{lig} - 1)N_{col} \times N_{col}$  pour  $l = 1$  et  $(N_{col} - 1)N_{lig} \times N_{lig}$  pour  $l = 2$ , ce qui nous donne :

$$\mathbf{M}_l \mathbf{u}_l = (\mathbf{I} + \mathbf{S}_l \mathbf{S}_l^*) \mathbf{u}_l = \mathbf{u}_l + \mathbf{S}_l (\mathbf{S}_l^* \mathbf{u}_l) \quad (4.38)$$

nous n'avons nul besoin de construire  $\mathbf{M}_l$ .

### Valeurs de $\alpha$ assurant la convexité du critère

L'ensemble de définition de  $\alpha$  assurant la stricte convexité de  $g_{l\alpha}$  est le même que dans le cadre de la formulation standard, soit  $\alpha \in ]0, \delta[$ . En effet, vu la forme que nous venons de trouver pour les matrices  $\mathbf{M}_l$ , nous pouvons réécrire la fonction auxiliaire  $g_{l\alpha}$  définie en (4.29) comme :

$$\begin{aligned} g_{l\alpha}(\mathbf{u}) &= \frac{\mathbf{u}^* (\mathbf{S}_l \mathbf{S}_l^* + \mathbf{I}) \mathbf{u}}{2} - \Phi_{l\alpha}(\mathbf{u}) \\ &= \underbrace{\frac{\mathbf{u}^* \mathbf{u}}{2}}_{(1)} - \Phi_{l\alpha}(\mathbf{u}) + \underbrace{\frac{\mathbf{u}^* (\mathbf{S}_l \mathbf{S}_l^*) \mathbf{u}}{2}}_{(2)} \end{aligned} \quad (4.39)$$

---

<sup>5</sup>Les formes exactes de  $\mathbf{S}_l$  se trouvent en Annexe IV

où nous retrouvons pour le terme (1) la forme déjà définie dans le cas de la forme standard, convexe pour  $\alpha \in ]0, \delta[$ . Le terme (2) définit une fonction convexe (dont la convexité peut être simplement démontrée en considérant le vecteur complexe comme un vecteur à deux composantes).

Tout comme pour la version standard, la convergence vers un minimum global est assurée si le critère augmenté  $K_\alpha^{\text{GYg}}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  est convexe. Si nous nous référons aux trois conditions présentées au paragraphe (4.3.7), nous nous apercevons que les deux premières conditions sont équivalentes, et sont vérifiées. La troisième condition devient :

$$\lim_{\mathbf{u}^* \mathbf{M}_l \mathbf{u} \rightarrow +\infty} \frac{\Phi_{l\alpha}(\mathbf{u})}{\mathbf{u}^* \mathbf{M}_l \mathbf{u}} < \frac{1}{2} \quad (4.40)$$

Condition qui est toujours vérifiée pour  $\varphi$  si  $\alpha \leq \alpha_{max}$ .

## Conclusion

La mise en oeuvre de cette version est résumée dans le tableau (4.3).

Tableau 4.3 Vue d'ensemble de la formulation généralisée de GY

- |   |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>(a) Initialisation</li> <li>(b) Calcul de <math>\mathbf{A}^{-1}</math> suivant (4.37)</li> <li>(c) Jusqu'à convergence (plus précisément jusqu'à ce qu'une règle d'arrêt soit vérifiée) <ul style="list-style-type: none"> <li>(c1) Mise à jour des variables <math>\mathbf{M}_l \hat{\mathbf{b}}_l</math>, <math>l \in \{0, 1, 2\}</math> suivant (4.33) et (4.38)</li> <li>(c2) Mise à jour de <math>\hat{\mathbf{x}}</math> suivant (4.32) :</li> </ul> </li> </ul> |
|---|

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \left( \Phi_2^{-1} \mathbf{y} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{D}_l^* \mathbf{M}_l \hat{\mathbf{b}}_l \right)$$

Cette formulation nous semble une bonne alternative à la formulation approximée

car nous n'effectuons ici aucune approximation, et dans le même temps nous obtenons un gain de calcul important vu que le calcul de l'inverse de la matrice normale  $\mathbf{A}$  revient à calculer l'inverse d'une matrice diagonale. Il nous faut cependant vérifier si l'introduction de la matrice  $\mathbf{M}$  n'entraîne pas une convergence plus lente. Nous verrons au chapitre 6 que le coût numérique des versions standard approximée et généralisée est très proche.

#### 4.5 Forme vectorielle

Finalement, dans notre quête d'une matrice  $\mathbf{A}$  inversible sans grands calculs, nous avons testé une dernière formulation de GY, proposée par Fiani *et al.* (2001) et Allain (2002). En effet, comme nous allons le voir, cette formulation *vectorielle* nous permet d'obtenir une matrice normale  $\mathbf{A}$  à la forme très simple dans le cadre de la reconstruction en IRM : une matrice identité !

La démarche est la suivante : on applique les relations de dualité convexe directement à la fonction vectorielle  $F_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{c \in \mathcal{C}^l} \varphi_\alpha(\mathbf{d}_c^T \mathbf{x})$ . Les fonctions auxiliaires  $(g_\alpha, g_\alpha^\dagger)$  sont définies comme :

$$\begin{aligned} g_\alpha(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{x}^* \mathbf{x}}{2} - F_\alpha(\mathbf{x}) \\ g_\alpha^\dagger(\mathbf{b}) &= \psi_\alpha(\mathbf{b}) + \frac{\mathbf{b}^* \mathbf{b}}{2} \end{aligned} \quad (4.41)$$

$g_\alpha$  et  $g_\alpha^\dagger$  forment une paire de fonctions convexes conjuguées complexes.

De même, le couple  $(F_\alpha, \psi_\alpha)$  est défini comme :

$$GY = \begin{cases} F_\alpha(\mathbf{x}) &= \inf_{\mathbf{b}} \left( \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{b})^* (\mathbf{x} - \mathbf{b})}{2} + \psi_\alpha(\mathbf{b}) \right) \\ \psi_\alpha(\mathbf{b}) &= \sup_{\mathbf{x}} \left( -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{b})^* (\mathbf{x} - \mathbf{b})}{2} + F_\alpha(\mathbf{x}) \right) \end{cases} \quad (4.42)$$

Le critère augmenté  $K_\alpha^v(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  peut alors être exprimé comme étant :

$$K_\alpha^v(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_0(\mathbf{x}) + \sum_{l=0}^2 \lambda_l \left( \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{b}_l)^* (\mathbf{x} - \mathbf{b}_l)}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} \psi_\alpha(\mathbf{b}_l) \right) \quad (4.43)$$

$K_\alpha^v$  est bien quadratique en  $\mathbf{x}$  et la minimisation en  $\mathbf{b}$  est explicite. En suivant la même démarche que celle présentée pour les versions standard et généralisée, nous obtenons :

$$\widehat{\mathbf{x}} = \underbrace{\left( \mathbf{I} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{I} \right)^{-1}}_{\mathbf{A}} \left( \Phi_2^{-1} \mathbf{y} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \widehat{\mathbf{b}}_l \right) \quad (4.44)$$

et :

$$\widehat{\mathbf{b}}_l = \mathbf{x} - \alpha \mathbf{D}_l^* \frac{\mathbf{u}_l}{\sqrt{\delta^2 + |\mathbf{u}_l|^2}} \quad (4.45)$$

### Valeurs de $\alpha$ assurant la convexité du critère

Comme précédemment, il nous faut définir l'ensemble de définition de  $\alpha$  qui nous assure la convexité de  $g_\alpha$  :

$$g_\alpha \text{ est convexe si } \alpha < \left\{ \sup_{\mathbf{x}} [\rho(\nabla^2 F(\mathbf{x}))] \right\}^{-1} \quad (4.46)$$

où  $\rho(\cdot)$  représente le rayon spectral. Avec notre fonction  $\varphi_\alpha$ , ceci est équivalent à :  $\alpha_l \in ]0, \delta/\rho(\mathbf{D}_l^* \mathbf{D}_l)[$ .

Pour s'assurer de la convergence vers un minimum global, vérifions la convexité de  $K$ . Les conditions à vérifier sont encore semblables à celles présentées au paragraphe (4.3.7). Les deux premières conditions sont inchangées, et vérifiées, et la troisième

devient :

$$\lim_{\mathbf{x}^* \mathbf{x} \rightarrow +\infty} \frac{F_\alpha(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} < \frac{1}{2} \quad (4.47)$$

Condition qui est toujours vérifiée pour  $\varphi$  si  $\alpha \leq \alpha_{max}$ .

### Conclusion

La mise en oeuvre de cette version est résumée dans le tableau (4.4).

Tableau 4.4 Vue d'ensemble de la formulation vectorielle de GY

- |  |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>(a) Initialisation</li> <li>(b) Calcul de <math>\mathbf{A}^{-1}</math> suivant (4.44)</li> <li>(c) Jusqu'à convergence (plus précisément jusqu'à ce qu'une règle d'arrêt soit vérifiée) <ul style="list-style-type: none"> <li>(c1) Mise à jour des variables <math>\hat{\mathbf{b}}_l</math>, <math>l \in \{0, 1, 2\}</math> suivant (4.45)</li> <li>(c2) Mise à jour de <math>\hat{\mathbf{x}}</math> suivant (4.44) :</li> </ul> </li> </ul> |
|--|

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \left( \Phi_2^{-1} \mathbf{y} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{D}_l^* \hat{\mathbf{b}}_l \right)$$

Le principal avantage avec cette méthode vient du fait qu'aucune inversion matricielle n'est nécessaire, vu que la matrice normale  $\mathbf{A}$  est proportionnelle à la matrice identité! Cependant, la simplicité de cette méthode est obtenue au détriment d'une vitesse de convergence beaucoup plus faible que pour les deux autres méthodes, comme nous le verrons au chapitre suivant.

### 4.6 Convergence étendue

Au chapitre précédent, nous nous sommes intéressés au domaine de convergence étendu introduit par Marc Allain au cours de sa thèse et permettant d'augmenter la

vitesse de convergence (Allain, 2002, chap. X). Marc Allain ayant effectué son étude dans le cas de variables réelles, nous avons conjecturé que cela pouvait s'étendre au cas de variables complexes, et nous l'avons appliqué. Il faudrait cependant vérifier certains points plus rigoureusement :

1. l'extension au domaine complexe de la condition d'Armijo et donc la justification de la Proposition 4 de Marc Allain (Allain, 2002, p.160). Même si nous avons trouvé des personnes l'utilisant dans le domaine complexe (Borzi *et al.*, 2002), nous n'avons pas pu trouver une démonstration rigoureuse ;
2. la notion d'approximation quadratique de  $J$  tangente en  $\mathbf{u}$ , telle que spécifiée par Marc Allain à la définition 5 du chapitre IX de (Allain, 2002, p.144)

L'introduction de ce nouveau domaine de convergence (3.66) nous permet d'augmenter la vitesse de convergence. Si nous revenons à l'ensemble de définition introduit au paragraphe 3.8.5.3, nous avons :

$$\hat{\alpha} \in ]0; 2\alpha_{max}[ \quad (4.48)$$

Dans notre cas, nous avons posé  $\theta = 1$  car nous n'appliquons pas de sur-relaxation. Cet ensemble de définition est valable pour les formulations standard, vectorielle et généralisée.

#### 4.7 Conclusion

Tout au long de ce chapitre, le fil conducteur a été d'optimiser la forme de la matrice normale  $\mathbf{A}$  afin d'en rendre son inversion aisée. Nous avons ainsi tiré profit de la forme particulière de la matrice  $\mathbf{H}$  reliant l'image  $\mathbf{x}$  aux données  $\mathbf{y}$  dans le cas de la reconstruction d'images en IRM, c'est à dire la transformée de Fourier. Nous avons tiré profit de la forme quasi bloc-circulante de  $\mathbf{A}$ , aux travers du lemme d'inversion

des matrices et du corollaire de diagonalisation des matrices circulantes. Nous avons ainsi présenté et adapté différentes formulations de l'algorithme de GY :

- les formulations standard complexe et vectorielle basées sur les formes introduites par (Geman et Yang, 1995; Idier, 2001; Fiani *et al.*, 2001; Allain, 2002). Pour la formulation standard, nous disposons de deux formulations, une *exacte* et une *approximée* ;
- la formulation généralisée, forme originale dont la principale originalité réside dans la reformulation du produit scalaire par l'introduction d'une matrice  $M$  permettant d'obtenir une matrice normale  $A$  bloc-circulante.

Soulignons cependant que le volume de calcul total nécessaire à la reconstruction d'une image IRM est fonction non seulement de la complexité numérique des équations de remise à jour de  $x$  et  $b$ , mais aussi du nombre d'itérations nécessaire pour atteindre le minimum global du critère (ou une valeur très voisine de celui-ci). Une étude empirique de la convergence de ces divers algorithmes sera effectuée au chapitre 6. Mais avant cela, nous allons dans le prochain chapitre étendre la reconstruction d'image en 3D.

## CHAPITRE 5

### EXTENSION EN 3 D

#### 5.1 Reformulation du problème

Jusqu'ici, nous avons travaillé avec un objet 2D. Nous allons ici étendre notre formulation en 3D. Il nous faut cependant avant tout expliciter le problème direct. L'acquisition d'un volume 3D en IRM peut être effectuée de deux manières différentes :

- soit en appliquant dans un premier temps un gradient  $\mathbf{G}_z$  dans la direction  $z$ , puis en faisant varier les gradients selon les directions  $x$  et  $y$ ,  $\mathbf{G}_x$  et  $\mathbf{G}_y$  comme décrit au paragraphe 1.2.2. Dans cette situation on effectue l'acquisition d'un nombre  $N_z$  de tranches de taille  $N_{col} \times N_{lig}$ . La reconstruction du volume final par l'approche standard est simplement obtenue en réalisant une transformée de Fourier 2D sur chacune des tranches. Nous sommes dans cette situation lorsque nous travaillons avec des images de type écho de spin - 2D.
- soit en faisant varier simultanément les 3 gradients :  $\mathbf{G}_x$ ,  $\mathbf{G}_y$  et  $\mathbf{G}_z$ . On fait l'acquisition d'un volume global de taille  $N_z \times N_{col} \times N_{lig}$ , et la reconstruction du volume final par l'approche standard est obtenue en réalisant une transformée de Fourier 3D. Nous sommes dans cette situation avec les images de type écho de gradient - 3D.

Cependant, l'opérateur de transformée de Fourier est séparable, et effectuer une transformée de Fourier 3D revient à effectuer une série de transformées de Fourier 1D selon chacune des directions. C'est pourquoi dans le cas de l'acquisition 3D réalisée en faisant varier les 3 gradients, il nous est possible d'effectuer dans un

premier temps une transformée de Fourier selon la direction  $z$  et de considérer  $N_z$  tranches de taille  $N_{col} \times N_{lig}$ . Par la suite, quel que soit le mode d'acquisition, nous allons appliquer cette propriété de séparabilité et considérer nos volumes 3D comme  $N_z$  tranches de taille  $N_{col} \times N_{lig}$ . Cette propriété de séparabilité va nous permettre de mettre en oeuvre efficacement les techniques de reconstruction que nous avons développées.

Tout comme dans le cas 2D, nous considérons un voisinage du premier ordre. Un tel voisinage en 3D est décrit à la figure (3.3).

## 5.2 Expression du critère primal

Dans un premier temps, revenons sur l'expression du critère  $J(\mathbf{x})$  obtenu en 2D (voir (4.2)). La reformulation pour un objet  $\mathbf{x}$  3D nous donne :

$$J_\varphi(\mathbf{x}) = \underbrace{\left\| \mathbf{y} - \tilde{\Phi}_2 \mathbf{x} \right\|^2}_{J_0(\mathbf{x})} + \sum_{l=0}^3 \frac{\lambda_l}{\alpha} \sum_{c \in \mathcal{C}^l} \varphi_\alpha(\mathbf{d}_{l,c}^T \mathbf{x}) \quad (5.1)$$

où  $\tilde{\Phi}_2$  est l'opérateur de transformée de Fourier 2D opérant sur toutes les tranches et liant les données  $\mathbf{y}$  à l'objet  $\mathbf{x}$ ,  $\mathcal{C}^l$  représente l'ensemble des paires de pixels de type  $l$  (1 : pénalisation horizontale, 2 : pénalisation verticale, 3 : pénalisation entre les tranches, selon  $z$ ). Comme dans le cas 2D, chaque vecteur  $\mathbf{d}_{l,c}$  est de support limité à la clique  $c$  de telle sorte à avoir les matrices des différences finies du premier ordre  $\mathbf{V}_l = [\mathbf{d}_{l,1} | \dots | \mathbf{d}_{l,M_l}]^T$ , avec  $M_l = |\mathcal{C}^l|$ ,  $l \in \{1, 2, 3\}$ . Par la suite, nous poserons  $\mathbf{V}_l \mathbf{x} = \mathbf{u}_l$ . Nous avons aussi introduit un terme de *rappel à zéro* afin d'améliorer les résultats. Il fait intervenir la même fonction  $\varphi_\alpha$  et s'écrit :

$$\lambda_0 \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{X}} \varphi_\alpha(x_{i,j,k}) \quad (5.2)$$

où  $\mathcal{X}$  est le support de  $\mathbf{x}$ . Afin d'obtenir des notations homogènes, nous définissons l'ensemble  $\mathcal{C}^0 = \mathcal{X}$ . De même, nous posons  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{x}$  et  $\mathbf{V}_0 = \mathbf{I}$ .

### 5.3 Formulation standard

#### 5.3.1 Simple extension 3D

Intéressons nous maintenant à la formulation standard complexe de la construction de GY. Il s'agit d'une extension immédiate en 3D du travail présenté au paragraphe (4.3). Le critère augmenté  $K_\alpha^{\text{GY}}$  s'écrit :

$$K_\alpha^{\text{GY}}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_0(\mathbf{x}) + \sum_{l=0}^3 \lambda_l \left( \frac{(\mathbf{u}_l - \mathbf{b}_l)^* (\mathbf{u}_l - \mathbf{b}_l)}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} \Psi_{l\alpha}(\mathbf{b}_l) \right) \quad (5.3)$$

avec  $\Psi_{l\alpha}(\mathbf{b}_l) = \sum_{c \in \mathcal{C}^l} \psi_\alpha(b_c)$  où  $\psi_\alpha(b_c)$  est défini en (4.9). Les formules de mise à jour des variables primales  $\mathbf{x}$  et duales  $\mathbf{b}$  sont obtenues de manière identique au cas 2D.

Ainsi on obtient la valeur de  $\widehat{\mathbf{x}}$  qui minimise  $K_\alpha^{\text{GY}}$  à  $\mathbf{b}$  fixé :

$$\frac{\partial K_\alpha^{\text{GY}}}{\partial \mathbf{x}} = 0 \Rightarrow \widehat{\mathbf{x}} = \underbrace{\left( \mathbf{I} + \sum_{l=0}^3 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{\text{col}} N_{\text{lig}}} \mathbf{V}_l^* \mathbf{V}_l \right)^{-1}}_{\mathbf{A}} \left( \tilde{\Phi}_2^{-1} \mathbf{y} + \sum_{l=0}^3 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{\text{col}} N_{\text{lig}}} \mathbf{V}_l^* \widehat{\mathbf{b}}_l \right) \quad (5.4)$$

et celle de  $\widehat{\mathbf{b}}_l$  qui minimise  $K_\alpha^{\text{GY}}$  à  $\mathbf{x}$  fixé :

$$\frac{\partial K_\alpha^{\text{GY}}}{\partial \mathbf{b}_l} = 0 \Rightarrow \widehat{\mathbf{b}}_l = \mathbf{u}_l - \alpha \frac{\mathbf{u}_l}{\sqrt{\delta^2 + |\mathbf{u}_l|^2}} \quad , \quad \forall c \in \mathcal{C}^l, \quad l \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (5.5)$$

où le quotient s'entend comme une division pixel par pixel.

Lorsque l'objet  $\mathbf{x}$  est de petite taille, il est possible de mettre en oeuvre cet algorithme, mais pour un volume 3D de taille réaliste, par exemple  $512 \times 512 \times 110$ ,

les besoins en mémoire dépassent la capacité d'un ordinateur vu que le produit matriciel  $\mathbf{V}_l^* \mathbf{V}_l$  serait de taille  $N_{lig} N_{col} N_z \times N_{lig} N_{col} N_z$ .

### 5.3.2 Mise en oeuvre pour des volumes de grande taille

Il nous est possible de contourner cette difficulté grâce à la forme de notre opérateur : *la transformée de Fourier*. Comme nous l'avons remarqué au préalable, l'opérateur de Fourier est séparable, ce qui nous a permis dans le cas d'une acquisition écho de gradient 3D d'effectuer au préalable une première transformée de Fourier dans la direction  $z$ . Ainsi, comme indiqué au paragraphe 5.1, nous travaillons avec un volume de données  $\mathbf{y}$  3D qui peut être vu comme un volume composé de  $N_z$  tranches quelque soit le mode d'acquisition des données. En raison de la séparabilité de l'opérateur de Fourier  $\tilde{\Phi}_2$ , il nous est donc possible de partitionner  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  en tranches et de réécrire :

$$\|\mathbf{y} - \tilde{\Phi}_2 \mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{N_z} \|\mathbf{y}^{(k)} - \Phi_2 \mathbf{x}^{(k)}\|^2 \quad (5.6)$$

où  $\Phi_2$  représente l'opérateur de transformée de Fourier 2D introduit au chapitre précédent, c'est à dire opérant sur une tranche 2D. La partition la plus naturelle est de séparer  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  en  $N_z$  blocs égaux  $\mathbf{x}^{(k)}$  et  $\mathbf{y}^{(k)}$ . Ces blocs correspondent aux  $N_z$  tranches 2D de l'objet  $\mathbf{x}$  et aux mesures correspondantes.

En se basant sur une méthode de relaxation, et plus précisément Gauss-Siedel (paragraphe 3.7.2), nous effectuons la minimisation de  $K_\alpha^{\text{GY}}$  à  $\mathbf{b}$  fixé tranche par tranche. Cela revient à trouver la valeur de  $\mathbf{x}^{(k)}$  qui minimise le critère  $K_\alpha^{\text{GY}}$  lorsque les variables de ligne  $\mathbf{b}$  et toutes les autres composantes de  $\mathbf{x}$  sont fixées. En raison des caractéristiques semi-quadratique du critère, la solution est donnée par  $\frac{\partial K_\alpha^{\text{GY}}}{\partial \mathbf{x}^{(k)}} =$

0, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{x}}^{(k)} = & \mathbf{A}^{-1} \left[ \Phi_2^{-1} \mathbf{y}^{(k)} + \frac{1}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \sum_{l=0}^2 \lambda_l \mathbf{D}_l^* \widehat{\mathbf{b}}_l^{(k)} \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_3}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{D}_0^* \left( (\mathbf{x}^{(k-1)} + \widehat{\mathbf{b}}_3^{(k-1)}) + (\mathbf{x}^{(k+1)} - \widehat{\mathbf{b}}_3^{(k)}) \right) \right]\end{aligned}\quad (5.7)$$

avec

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \frac{1}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \left( \sum_{l=0}^2 \lambda_l \mathbf{D}_l^* \mathbf{D}_l + 2\lambda_3 \mathbf{D}_0^* \mathbf{D}_0 \right) \quad (5.8)$$

où  $\mathbf{D}_l$  représente la restriction de l'opérateur des différences finies d'ordre un  $\mathbf{V}_l$  à un plan 2D<sup>1</sup>. De même  $\widehat{\mathbf{b}}_l^{(k)}$  représente l'ensemble des variables de lignes intervenant dans le calcul de  $\mathbf{x}^{(k)}$ , soit l'ensemble des variables de ligne relatives à des cliques auxquelles appartiennent les pixels de  $\mathbf{x}^{(k)}$ . En aucun cas nous ne faisons intervenir explicitement la matrice  $\mathbf{V}_3$ . En effet, lorsque toutes les composantes de  $\mathbf{x}$  autres que  $\mathbf{x}^{(k)}$  sont fixées, les termes de différences première dans la direction  $z$  peuvent être vus comme les différences entre les éléments de la tranche  $\mathbf{x}^{(k)}$  et des tranches  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  et  $\mathbf{x}^{(k-1)}$ , soit  $(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)})$  et  $(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)})$ . Pour mettre à jour les éléments de la tranche  $\mathbf{x}^{(k)}$ , seule l'utilisation des tranches  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  et  $\mathbf{x}^{(k-1)}$  est nécessaire, ce qui nous permet d'éviter la manipulation de volumes de données importants. Au niveau des variables de ligne  $\mathbf{b}$ , la mise à jour est inchangée.

La minimisation par rapport à  $\mathbf{x}^{(k)}$  s'effectue lorsque les variables de lignes  $\mathbf{b}$  sont fixées. Le tableau (5.1) résume une itération de l'algorithme.

La principale différence avec la simple extension 3D vue au paragraphe 5.3.1 est que pour s'assurer de converger vers le minimum global du critère augmenté  $K$  il faut balayer plusieurs fois l'ensemble des tranches. Nous précisons maintenant la forme exacte que prennent en 3D les différents algorithmes présentés au chapitre

---

<sup>1</sup>Nous retrouvons les matrices des différences finies introduites au Chap. 4 et dont les formes exactes se trouvent en Annexe IV

Tableau 5.1 Résumé d'une itération de l'algorithme

- (a) Mise à jour de toutes les variables de lignes  $\hat{\mathbf{b}}_l$ ,  $l \in \{0, 1, 2, 3\}$  suivant (5.5)
- (b) pour chaque image  $k = 1, \dots, N_z$  :
- (b1) Mise à jour de  $\hat{\mathbf{x}}^{(k)}$  suivant (5.7)
- Itérer l'étape (b) jusqu'à convergence (plus précisément jusqu'à ce qu'une règle d'arrêt soit vérifiée)

précédent.

Revenons sur les formes définies en (5.7) et en (5.8). Si nous les comparons aux équations (4.15) et (4.21) introduites au chapitre 4, nous nous apercevons que nous avons des formes très similaires. Le terme entre crochets du membre de droite de l'expression (5.7) ne pose aucun problème lors de son calcul en ce qui concerne la matrice  $\mathbf{A}$ . Sachant que  $\mathbf{D}_0$  est égale à la matrice identité, si nous comparons (4.21) et (5.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 4.21 &: \mathbf{A} = \mathbf{I} + \frac{\lambda_0}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{D}_0^* \mathbf{D}_0 + \frac{\lambda_1}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{D}_1^* \mathbf{D}_1 + \frac{\lambda_2}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{D}_2^* \mathbf{D}_2 \\
 &= \underbrace{\left(1 + \frac{\lambda_0}{2\alpha N_{col} N_{lig}}\right)}_{(1)} \mathbf{I} + \frac{1}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \sum_{l=1}^2 \lambda_l \mathbf{D}_l^* \mathbf{D}_l \\
 5.8 &: \mathbf{A} = \mathbf{I} + \frac{1}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \left( \sum_{l=0}^2 \lambda_l \mathbf{D}_l^* \mathbf{D}_l + 2\lambda_3 \mathbf{D}_0^* \mathbf{D}_0 \right) \\
 &= \underbrace{\left(1 + \frac{\lambda_0 + 2\lambda_3}{2\alpha N_{col} N_{lig}}\right)}_{(2)} \mathbf{I} + \frac{1}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \sum_{l=1}^2 \lambda_l \mathbf{D}_l^* \mathbf{D}_l
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous nous apercevons que la seule différence entre les deux équations se situe au niveau des termes (1) et (2), soit au niveau des coefficients de la matrice  $\mathbf{I}$ . Cela

signifie que nous pouvons appliquer la même technique que dans le cadre 2D : la diagonalisation via une transformée de Fourier 2D, puis l'application du lemme d'inversion des matrices où seule la matrice  $\mathbf{W}$  est changée,  $\mathbf{W}$  prenant la forme :

$$\mathbf{W} = \left( 1 + \frac{\lambda_0 + 2\lambda_3}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \right) + \sum_{l=1}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{\Lambda}_l \quad (5.9)$$

Nous obtenons ainsi la *formulation exacte de la forme standard* dans le cas d'une formulation 3D. Au niveau de la formulation *approximée*, nous effectuons les mêmes changements que ceux présentés au paragraphe 4.3.6. D'après l'équation (4.24), nous obtenons la matrice normale  $\mathbf{A}$  suivante :

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Phi}_2^{-1} \left[ \left( 1 + \frac{\lambda_0 + 2\lambda_3}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \right) \mathbf{I} + \sum_{l=1}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{\Lambda}_l \right] \mathbf{\Phi}_2 \quad (5.10)$$

où  $\mathbf{\Lambda}_l$  sont les matrices diagonales obtenues par le Corollaire 2 (partie 4.3.5).

Il nous faut cependant mentionner que les formules de mise à jour de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{b}$  devront être adaptées lors de la mise en oeuvre pour la première et la dernière tranche afin d'éviter les effets de bords. En effet dans le cas de la tranche  $\mathbf{x}^{(1)}$  (resp.  $\mathbf{x}^{(N_z)}$ ),  $\mathbf{x}^{(0)}$  (resp.  $\mathbf{x}^{(N_z+1)}$ ) n'existe pas. Cette remarque est valable pour toutes les formulations.

#### 5.4 Formulation généralisée

Nous avons présenté dans le paragraphe précédent l'extension 3D adapté à notre problème dans le cas de la formulation standard. Nous allons dans ce paragraphe et dans le prochain effectuer l'extension pour les formulations généralisée et vectorielle en nous basant sur le principe présenté dans le paragraphe 5.3.2, soit la

minimisation tranche par tranche du critère  $K$ .

En nous basant sur le paragraphe 4.4, nous trouvons la forme de  $K_{\alpha}^{GYg}$  suivante :

$$K_{\alpha}^{GYg}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_0(\mathbf{x}) + \sum_{l=0}^3 \lambda_l \left( \frac{(\mathbf{u}_l - \mathbf{b}_l)^* \widetilde{\mathbf{M}}_l (\mathbf{u}_l - \mathbf{b}_l)}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} \Psi_{l\alpha}(\mathbf{b}_l) \right) \quad (5.11)$$

où  $J_0(\mathbf{x})$  et  $\Psi_{l\alpha}(\mathbf{b}_l)$  sont respectivement définis en (5.6) et (4.30). Si nous suivons le même raisonnement que précédemment, nous obtenons :

$$\widetilde{\mathbf{M}}_l \widehat{\mathbf{b}}_l = \widetilde{\mathbf{M}}_l \mathbf{u}_l - \alpha \frac{\mathbf{u}_l}{\sqrt{\delta^2 + |\mathbf{u}_l|^2}} \quad ; \quad l = 0, \dots, 3 \quad (5.12)$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}}^{(k)} &= \mathbf{A}^{-1} \left[ \Phi_2^{-1} \mathbf{y}^{(k)} + \frac{1}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \sum_{l=0}^2 \lambda_l \mathbf{D}_l^* \mathbf{M}_l \widehat{\mathbf{b}}_l^{(k)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_3}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{D}_0^* \mathbf{M}_0 \left( (\mathbf{x}^{(k-1)} + \widehat{\mathbf{b}}_3^{(k-1)}) + (\mathbf{x}^{(k+1)} - \widehat{\mathbf{b}}_3^{(k)}) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{A} = \mathbf{I} + \frac{1}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \left( \sum_{l=0}^2 \lambda_l \mathbf{D}_l^* \mathbf{M}_l \mathbf{D}_l + 2\lambda_3 \mathbf{D}_0^* \mathbf{M}_0 \mathbf{D}_0 \right) \quad (5.14)$$

Comme nous l'avons présenté au chapitre 4, nous avons introduit les matrices  $\mathbf{M}_l$ , restrictions au plan 2D des matrices  $\widetilde{\mathbf{M}}_l$ , afin d'obtenir une matrice normale  $\mathbf{A}$  bloc-circulante, et ainsi diagonalisable. Comme la matrice  $\mathbf{D}_0$  est la matrice identité, nous posons  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{I}$ . Nous obtenons alors :

$$\mathbf{A} = \underbrace{\left( 1 + \frac{\lambda_0 + 2\lambda_3}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \right) \mathbf{I}}_{(1)} + \frac{1}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \sum_{l=1}^2 \lambda_l \mathbf{D}_l^* \mathbf{M}_l \mathbf{D}_l \quad (5.15)$$

Cette forme est très similaire à celle obtenue en (4.32), la seule différence se situant encore au niveau du terme (1) de la matrice  $\mathbf{A}$ . De plus, les matrices  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$

sont les mêmes que celles déterminées au chapitre 4, avec  $\mathbf{M}_l = \mathbf{I} + \mathbf{S}_l \mathbf{S}_l^*$ ,  $l = 1, 2$ <sup>2</sup>. Il est alors possible de diagonaliser  $\mathbf{A}$  (4.37) et nous obtenons :

$$\mathbf{A} = \Phi_2^{-1} \left[ \left( 1 + \frac{\lambda_0 + 2\lambda_3}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \right) \mathbf{I} + \sum_{l=1}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{\Lambda}_l \right] \Phi_2 \quad (5.16)$$

L'évaluation du membre de droite entre crochets de (5.13) ne pose aucune difficulté. La forme généralisée s'étend donc aisément au cas 3D. Une itération de l'algorithme ainsi obtenu suit le même schéma que celui présenté au tableau (5.1).

## 5.5 Forme vectorielle

Comme précédemment, si nous nous basons sur les résultats obtenus au paragraphe 4.5, nous avons :

$$K_\alpha^v(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = J_0(\mathbf{x}) + \sum_{l=0}^3 \lambda_l \left( \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{b}_l)^* (\mathbf{x} - \mathbf{b}_l)}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha} \psi_\alpha(\mathbf{b}_l) \right) \quad (5.17)$$

où  $J_0(\mathbf{x})$  et  $\psi_\alpha(\mathbf{b}_l)$  sont respectivement définis en (5.6) et (4.42). La minimisation de  $K_\alpha^v(\mathbf{x}, \mathbf{b})$  par rapport à  $\mathbf{x}^{(k)}$  à  $\mathbf{b}$  fixé nous donne :

$$\widehat{\mathbf{x}}^{(k)} = \underbrace{\left( \mathbf{I} + \sum_{l=0}^3 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{I} \right)^{-1}}_{\mathbf{A}} \left( \Phi_2^{-1} \mathbf{y}^{(k)} + \sum_{l=0}^3 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \widehat{\mathbf{b}}_l^{(k)} \right) \quad (5.18)$$

et par rapport à  $\mathbf{b}$  à  $\mathbf{x}$  fixé :

$$\widehat{\mathbf{b}}_l = \mathbf{x} - \alpha \mathbf{V}_l^* \frac{\mathbf{u}_l}{\sqrt{\delta^2 + |\mathbf{u}_l|^2}} \quad ; \quad l = 0, \dots, 3 \quad (5.19)$$

---

<sup>2</sup>Les formes des matrice  $\mathbf{S}_l$ ,  $l = 1, 2$  se trouvent à l'Annexe IV

La forme obtenue de  $\hat{\mathbf{x}}^{(k)}$  en (5.18) est très similaire à celle obtenue au chapitre 4 :

$$\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{\left( \mathbf{I} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \mathbf{I} \right)^{-1}}_{\mathbf{A}'} \left( \Phi_2^{-1} \mathbf{y} + \sum_{l=0}^2 \frac{\lambda_l}{2\alpha N_{col} N_{lig}} \hat{\mathbf{b}}_l \right) \quad (5.20)$$

Le calcul de  $\hat{\mathbf{x}}^{(k)}$  ne pose donc aucun problème de mise en oeuvre et une itération de l'algorithme ainsi obtenu suit le même schéma que celui présenté au tableau (5.1).

## 5.6 Conclusion - Discussion

Nous venons d'effectuer l'extension 3D de notre modèle. Si nous nous attardons sur la quantité de calculs requis pour estimer notre volume 3D, nous nous apercevons que l'ordre de grandeur est similaire à celui d'un traitement 2D d'une succession de tranches. La grande différence se situe au niveau de la mémoire utilisée vu que l'évaluation de  $\hat{\mathbf{x}}^{(k)}$  nécessite de garder en mémoire  $\hat{\mathbf{x}}^{(k+1)}$  et  $\hat{\mathbf{x}}^{(k-1)}$ . Par contre, la formulation 3D nous permet de tenir compte de la nature tridimensionnelle de notre objet, c'est à dire des informations contenues dans les tranches  $\hat{\mathbf{x}}^{(k+1)}$  et  $\hat{\mathbf{x}}^{(k-1)}$ .

## CHAPITRE 6

### RÉSULTATS OBTENUS ET DISCUSSION

#### 6.1 Introduction - Rappel des objectifs

Notre principal objectif dans la reconstruction d'image en IRM est d'améliorer le compromis temps de reconstruction - qualité de l'image obtenue. Un élément important de cette qualité est la préservation des zones homogènes et des discontinuités dans l'image. Nous savons qu'il nous est impossible de rivaliser au niveau temps avec la méthode de reconstruction classique que l'on retrouve mise en œuvre commercialement dans les appareils d'IRM. Nous avons donc accepté de mettre en œuvre une reconstruction entraînant des temps de calcul plus long, mais nous permettant d'améliorer la précision des images. Notre présentation des résultats est axée sur cet objectif :

- Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la qualité des résultats dans le cadre 2D. À cette fin, nous avons utilisé des données simulées. Toujours dans le cadre 2D, nous avons ensuite comparé les vitesses de convergence des différents formulations de GY présentées au chapitre 4.
- Dans un second temps, nous avons testé notre modèle dans un cadre 3D. Nous nous sommes plus particulièrement intéressées à la qualité des résultats, d'abord sur des données simulées puis réelles.

Tout au long de ce chapitre, les notations suivantes seront utilisées :

- |  |                              |
|--|------------------------------|
| • $x$ : l'objet original                 | • $y$ : les données mesurées |
| • $\tilde{y}$ : les données non bruitées | • $\hat{x}$ : l'objet estimé |

## 6.2 Images simulées - 2D

### 6.2.1 Principe de simulation

Lors de la simulation, nous souhaitons obtenir des conditions très proches des conditions réelles. C'est pourquoi nous avons simulé des objets contenant à la fois des zones homogènes et des discontinuités. De plus, les données étant acquises dans l'espace  $k$ , le bruit additif se situe dans cet espace. Nous avons simulé nos données de la manière suivante :

1. création d'un objet  $\mathbf{x}$  de taille  $N_{col} \times N_{lig}$  ;
2. calcul de la transformée de Fourier  $\tilde{\mathbf{y}}$  de  $\mathbf{x}$  ;
3. ajout de bruit  $\mathbf{n}$  complexe dans l'espace  $k$ ,  $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{n}$  ;
4. calcul de  $\mathbf{x}_r^c$  par la méthode de reconstruction classique, soit la transformée de Fourier inverse, en utilisant l'algorithme de transformée de Fourier inverse rapide :  $\mathbf{x}_r^c = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{y})$  où  $\mathcal{F}$  désigne l'opérateur de transformée de Fourier ;
5. évaluation de  $\hat{\mathbf{x}}$  par une des méthodes de reconstruction proposées ;
6. comparaison de  $\mathbf{x}_r^c$  et de  $\hat{\mathbf{x}}$ .

À ce niveau là, il convient de se poser la question sur la nature du bruit à ajouter dans le domaine de Fourier. Or il a été montré que le bruit est de nature gaussienne (Wang et Lei, 1994; Sijbers *et al.*, 1996), c'est pourquoi le bruit que nous avons ajouté à notre signal  $\tilde{\mathbf{y}}$  est un bruit gaussien centré de variance  $\sigma^2$ . Le choix de la valeur de  $\sigma^2$  sera discuté plus loin.

Le fantôme utilisé pour les simulations présentées à la section 6.2.2 est basé sur un vrai fantôme physique de taille  $64 \times 64$ , utilisé dans nos études expérimentales présentant des discontinuités et des zones homogènes (figure 6.1).

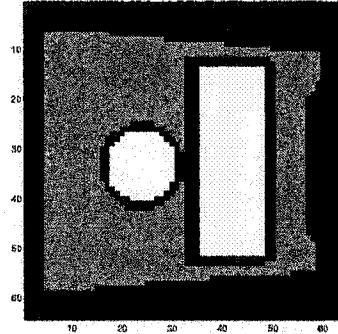


Figure 6.1 fantôme utilisé dans la partie 6.3

Lors de nos simulations, nous avons ajouté du bruit de sorte à avoir un rapport signal sur bruit, RSB, de l'ordre de 10 à 20 dB. Le RSB est défini de la manière suivante :

$$RSB = 10 \log \frac{\widehat{\sigma}_y^2}{\widehat{\sigma}_n^2} = 10 \log \frac{(1/N) \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i^2 - m^2}{\widehat{\sigma}_n^2} \quad (6.1)$$

où  $\widehat{\sigma}_y^2$  et  $\widehat{\sigma}_n^2$  représentent respectivement les variances estimées de nos données non bruité  $\tilde{\mathbf{y}}$  et du bruit  $\mathbf{n}$  et  $m$  est la valeur moyenne de  $\tilde{\mathbf{y}}$ . Afin d'effectuer les diverses comparaisons, nous avons calculé :

- le critère  $J$  afin de pouvoir comparer son évolution pour les différentes formulations
- l'erreur quadratique moyenne qui est de la forme :

$$E = \frac{\|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \quad (6.2)$$

avec  $\mathbf{x}$  l'objet original et  $\widehat{\mathbf{x}}$  l'objet estimé.

- l'erreur quadratique sur les modules :

$$\widehat{E} = \frac{\|\|\mathbf{x}\| - \|\widehat{\mathbf{x}}\|\|^2}{\|\|\mathbf{x}\|\|^2} \quad (6.3)$$

En effet même si les données sur lesquelles nous travaillons, et donc l'estimée  $\widehat{\mathbf{x}}$ , sont intrinsèquement complexes l'image analysée par les médecins se limite le plus

souvent au module (la phase étant rarement utilisée). C'est pourquoi nous avons décidé de calculer aussi l'erreur quadratique sur les modules.

Afin de mettre en oeuvre notre algorithme, nous devons régler les différents paramètres suivants :

1. les paramètres de régularisation  $\lambda$  (cf. chapitre 4) :  $\lambda_0$  pour le rappel à 0,  $\lambda_1$  pour les différences verticales et  $\lambda_2$  pour les différences horizontales
2. le paramètre d'échelle  $\delta$
3. le paramètre  $\alpha$

Nous présentons uniquement les résultats obtenus pour des paramètres optimaux, c'est à dire ceux nous permettant d'obtenir les meilleures erreurs  $E$  et  $\widehat{E}$ . Ils ont été obtenus en essayant plusieurs valeurs de  $(\lambda, \delta)$  et en retenant celles produisant les erreurs de reconstruction les plus faibles. Le paramètre  $\alpha$  a été choisi de telle sorte à avoir la vitesse de convergence la plus élevée possible, soit :  $\alpha = 1.99\delta$  pour les formulations standard et généralisée et  $\alpha = 1.99\delta/\rho(\mathbf{D}_l^* \mathbf{D}_l^*)$  pour la formulation vectorielle (cf. Chapitre 4).

### 6.2.2 Résultats

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la qualité des images. Afin de comparer les résultats obtenus, nous avons suivi les étapes décrites à la section (6.2.1) auxquelles nous avons rajouté la reconstruction effectuée en suivant la méthode de Tikhonov présentée au chapitre 3. Comme les différentes formulations de GY que nous avons introduites aux chapitres 4 et 5 sont toutes basées sur la minimisation du même critère  $J_\varphi$  (sauf la version approximée où le critère est légèrement modifié), elles convergent toutes vers le même minimum global ; nous avons utilisé la formulation exacte de la formulation standard afin d'effectuer cette première comparaison. Les résultats obtenus sont présentés aux figures 6.2 (RSB

de 20 dB) et 6.3 (RSB de 10 dB). Nous avons représenté ici le module de  $\hat{x}$ . Les erreurs obtenues sont présentées au tableau (6.1).

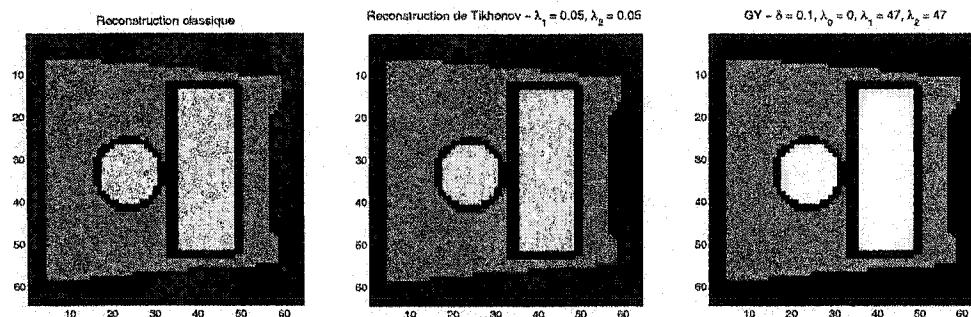


Figure 6.2 Comparaison entre la reconstruction classique, la reconstruction de Tikhonov et notre méthode, pour un RSB = 20dB

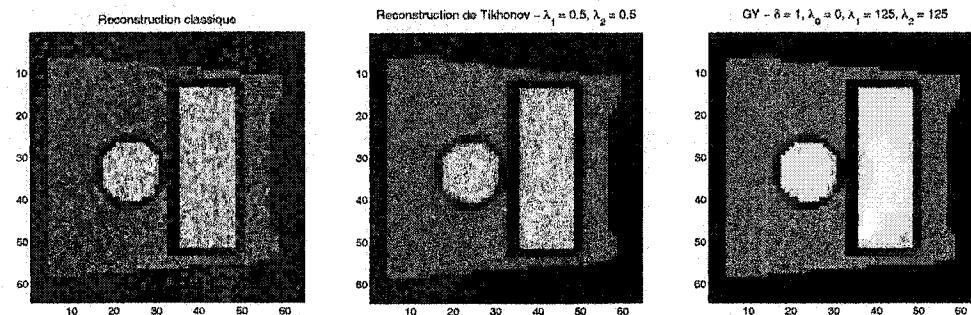


Figure 6.3 Comparaison entre la reconstruction classique, la reconstruction de Tikhonov et notre méthode, pour un RSB = 10dB

Tableau 6.1 Erreurs obtenues en %

	20 dB		10dB	
	$E$	$\hat{E}$	$E$	$\hat{E}$
reconstruction classique	0.99	0.63	10.09	6.76
méthode de Tikhonov	0.80	0.55	4.01	3.45
méthode proposée	0.14	0.15	1.28	1.11

Les résultats obtenus avec la méthode de GY montrent une réduction satisfaisante des oscillations dues au bruit dans les zones homogènes et une préservation adéquate des discontinuités. Au contraire les résultats obtenus par la méthode de Tikhonov

montrent peu d'amélioration, la diminution du bruit dans les zones homogènes étant accompagné de lissage au niveau des discontinuités.

### 6.2.3 Comparaison expérimentale des vitesses de convergence

Parmi les différents algorithmes développés au chapitre 4, soit les trois formulations exactes (standard - formulation exacte, vectorielle et généralisée) et une formulation approximée (standard - formulation approximée) nous cherchons à savoir laquelle de ces formulations nous donne le meilleur compromis volume de calcul - qualité de l'image. Comme le volume de calcul et la vitesse de convergence sont intrinsèquement liés, nous avons comparé expérimentalement les vitesses de convergence des différents algorithmes, à la fois en termes de nombre d'itérations et en nombre d'opérations (ou temps de calcul).

Ces comparaisons expérimentales ont été réalisées sous MATLAB sur une image  $128 \times 128$ , la boucle principale effectuant la mise à jour des variables primales et duales étant programmée en langage C<sup>1</sup>. Nous avons ainsi tracé à la fois l'évolution du critère  $J$  en fonction du nombre d'itérations et en fonction du temps d'exécution. On se rend compte en observant la figure 6.4 qu'en terme de nombre d'itérations, la méthode de GY vectorielle semble moins intéressante que les trois autres qui affichent des résultats très similaires. Cependant, en terme de temps et donc de volume de calculs, la formulation vectorielle de GY peut être considérée comme une option intéressante suite à sa vitesse de convergence acceptable et sa facilité de mise en oeuvre. Si on s'attarde sur la forme exacte de la formulation standard de GY, on s'aperçoit que la performance est médiocre, ce qui la met hors compétition, alors que les formes approximée et généralisée de GY présentent les

---

<sup>1</sup>une version purement en C est aussi disponible. Pour une question de simplicité, nous avons préféré comparer les convergences des différentes formulations avec la version MATLAB

meilleures performances. Nous avons aussi réalisé les comparaisons sur une image de taille  $512 \times 512$  (figure 6.5). Pour cette comparaison, nous n'avons pas utilisé la formulation standard exacte qui demandait de trop grandes ressources mémoires et dont les résultats avaient déjà été jugé médiocres sur la simulation précédente. Nous nous rendons compte que bien que la taille de l'image soit plus importante, ce qui signifie des matrices  $S$  de plus grande taille dans le cas de la méthode généralisée, cette dernière reste très compétitive par rapport à la méthode approximée. Ces résultats ont été obtenus sur un Pentium IV de 2.2 GHz.

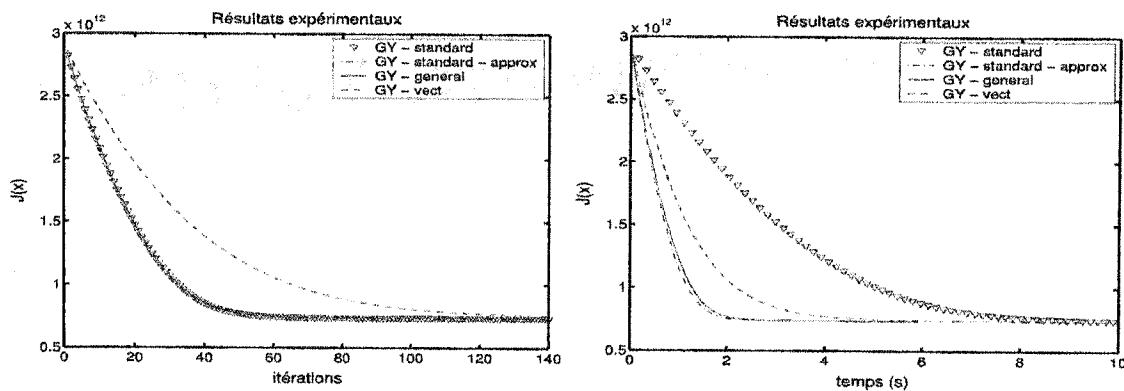


Figure 6.4 Comparaison expérimentale des vitesses de convergence pour une image de taille  $128 \times 128$  :  $J(x)$  vs. nombre d'itérations (gauche) et  $J(x)$  vs. temps (droite)

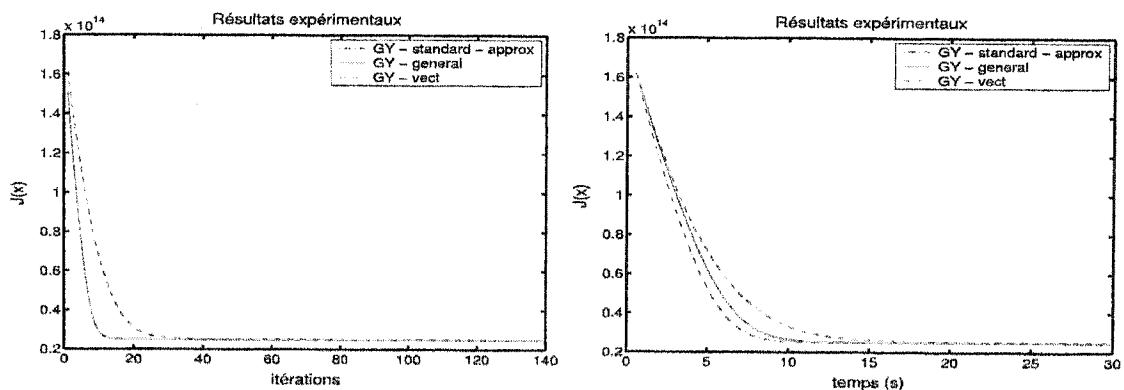


Figure 6.5 Comparaison expérimentale des vitesses de convergence pour une image de taille  $512 \times 512$  :  $J(x)$  vs. nombre d'itérations (gauche) et  $J(x)$  vs. temps (droite)

Comparons ces méthodes à la méthode de reconstruction classique. Vu que la re-

construction classique est une simple transformée de Fourier, le meilleur critère de comparaison se situe en terme de nombre de transformées de Fourier effectuées.

Dans le cas 2D, nous avons :

- reconstruction classique  $\Rightarrow$  une transformée de Fourier 2D
- GY, forme standard, standard approximée et généralisée  $\Rightarrow$  une transformée de Fourier 2D pour initialiser  $x^0$  puis deux transformées de Fourier 2D à chaque itération
- GY, forme vectorielle  $\Rightarrow$  une transformée de Fourier 2D pour initialiser  $x^0$

### Conclusion

De cette première étude, nous pouvons conclure d'après les figures 6.4 et 6.5 que les temps d'exécution sont satisfaisants. De plus, les méthodes standard approximée et généralisée nous donnant des résultats similaires, nous allons privilégier la méthode ne comportant aucune approximation, soit la méthode *généralisée*.

### 6.3 Images simulées - 3D

Les résultats étant satisfaisants dans le cadre 2D, nous nous sommes attardés sur la reconstruction 3D. Dans un premier temps, nous l'avons comparée à la reconstruction classique. Cependant, comme nous l'avons remarqué au chapitre 5, la formulation 3D est plus coûteuse au niveau des calculs que la formulation 2D. C'est pourquoi, dans un second temps nous avons comparé les formulations 2D et 3D.

### 6.3.1 Comparaison reconstruction 3D et reconstruction classique

Nous avons utilisé un fantôme numérique composé de 73 tranches de taille  $128 \times 128$ .

Nous avons fait de telle sorte à ce que les voxels soient isotropes. Le fantôme est construit à partir de formes géométriques simples, afin de constituer un volume comportant des zones arrondies ainsi que des discontinuités. Le fantôme ainsi obtenu possède certaines caractéristiques géométriques (parties concaves et convexes, parties arrondies, arrêtes) qui rappellent celles présentes dans une partie distale du fémur (figure 6.6). Le fantôme physique<sup>2</sup> comportant les mêmes caractéristiques est utilisé dans le paragraphe 6.4.1. Nous avons procédé comme au paragraphe 6.2.1 pour effectuer le bruitage et la reconstruction de notre fantôme.

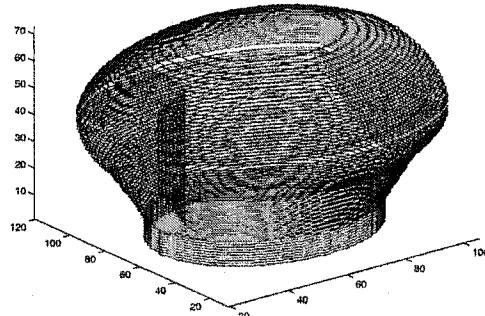


Figure 6.6 fantôme 3D utilisé

Comme indiqué dans le cas 2D, nous devons régler différents paramètres afin de mettre en oeuvre notre algorithme (Cf. Chapitre 5). Nous ne présentons ici que les résultats obtenus pour les paramètres optimum, soit pour  $E$  et  $\hat{E}$  minimum. Les différentes notations que nous avons utilisées pour les divers paramètres sont les suivantes :

- paramètres de régularisation :  $\lambda_0$  = rappel à zéro,  $\lambda_1$  = pénalisations verticales

---

<sup>2</sup>Ce fantôme a été conçu à l'origine par Nicolas Villain afin de tester des méthodes de reconstruction en tomographie par rayons X

et horizontales,  $\lambda_2$  = pénalisations 3D, soit entre les tranches, selon l'axe  $z$ .

- paramètre d'échelle :  $\delta$
- paramètre  $\alpha = 1.99\delta$  pour les formulations standard et généralisée et  $\alpha = 1.99\delta/\rho(\mathbf{D}_l^* \mathbf{D}_l)$  pour la formulation vectorielle.

Comparons maintenant la reconstruction classique et nos méthodes 3D. Les figure 6.7 et tableau 6.2 présentent les différents résultats obtenus pour les tranches 10 et 30 du fantôme. Nous avons préalablement ajouté du bruit de sorte à avoir un RSB de 10 dB. Si nous regardons tout d'abord la figure 6.7, nous nous apercevons que nous avons bien amélioré la qualité de l'image tout en conservant les zones homogènes et les discontinuités. Ainsi si nous comparons les erreurs quadratiques moyennes  $E$ , nous voyons que nous sommes passés de 15.08% à 0.33% pour la 10<sup>ème</sup> tranche et de 9.30% à 0.36% pour la 30<sup>ème</sup> tranche (tableau 6.2). On observe compte que la diminution de l'erreur quadratique est plus importante avec la dixième tranche qu'avec la trentième. En effet, avec la reconstruction classique, l'erreur quadratique est plus élevée pour la dixième tranche, car l'objet estimé (disque blanc) est de plus petite taille que l'objet réel, alors qu'avec notre méthode nous obtenons des erreurs quadratiques très semblables, la taille de l'objet est toujours correctement estimée. Si nous nous intéressons aux contours des coupes 10 et 30 détectés par simple seuillage (figure 6.8), nous nous apercevons que notre méthode 3D permet d'obtenir un contour beaucoup plus proche de l'image d'origine que la reconstruction classique.

Tableau 6.2 Erreurs obtenues en %

	10 <sup>ème</sup> tranche		30 <sup>ème</sup> tranche	
	$E$	$\hat{E}$	$E$	$\hat{E}$
reconstruction classique	15.08	13.28	9.30	7.51
méthode proposée - 3D	0.33	0.33	0.36	0.36

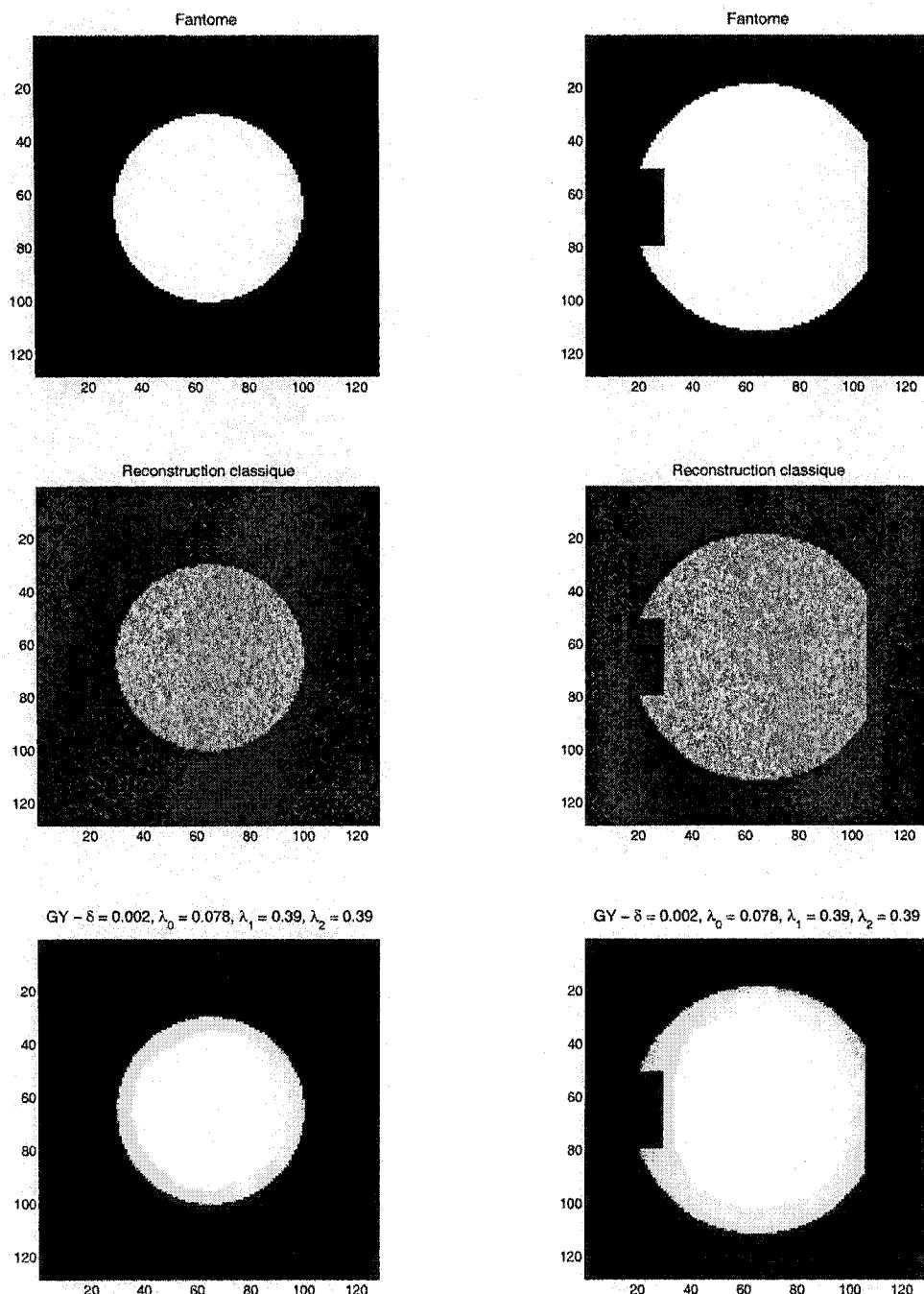


Figure 6.7 Résultat pour un RSB de 10 dB pour la 10<sup>ième</sup> tranche (gauche) et 30<sup>ième</sup> tranche (droite) - Image d'origine (haut), image obtenue par reconstruction classique (milieu), et image obtenue par notre algorithme (bas)

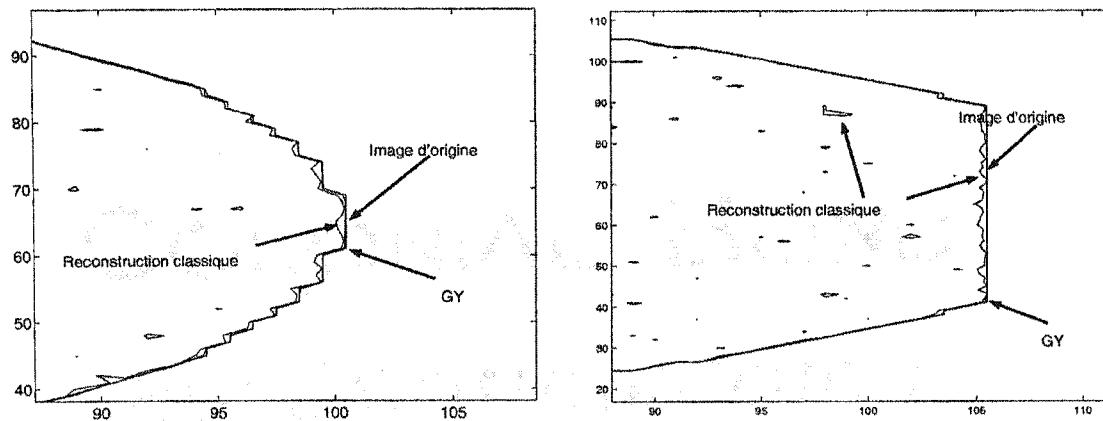


Figure 6.8 Détails des contours pour les tranches 10 (gauche) et 30 (droite) - contour obtenu en utilisant la fonction contour de MATLAB

### 6.3.2 Comparaison 2D - 3D

Comparons maintenant les reconstructions 2D et 3D. Le fantôme est le même que celui introduit dans le paragraphe précédent. Nous avons utilisé ici un RSB de 10 (figure 6.9) et de 0 dB (figure 6.10).

Tableau 6.3 Erreurs obtenues en % pour les comparaisons 2D - 3D

	Reconstruction classique		GY - 2D		GY - 3D	
	$E$	$\hat{E}$	$E$	$\hat{E}$	$E$	$\hat{E}$
10 dB	9.30	7.51	0.30	0.29	0.36	0.36
0 dB	91.67	72.9	1.94	1.66	1.71	1.69

Si nous nous attardons dans un premier temps sur les résultats obtenus avec un RSB de 10 dB (figure 6.9), nous nous apercevons que les reconstructions 2D et 3D sont très similaires et que les erreurs quadratiques  $E$  sont équivalentes. Dans le cas d'un objet plus bruité, correspondant à un RSB de 0 dB (figure 6.10), nous nous rendons compte que l'objet présente des zones plus homogènes avec la recons-

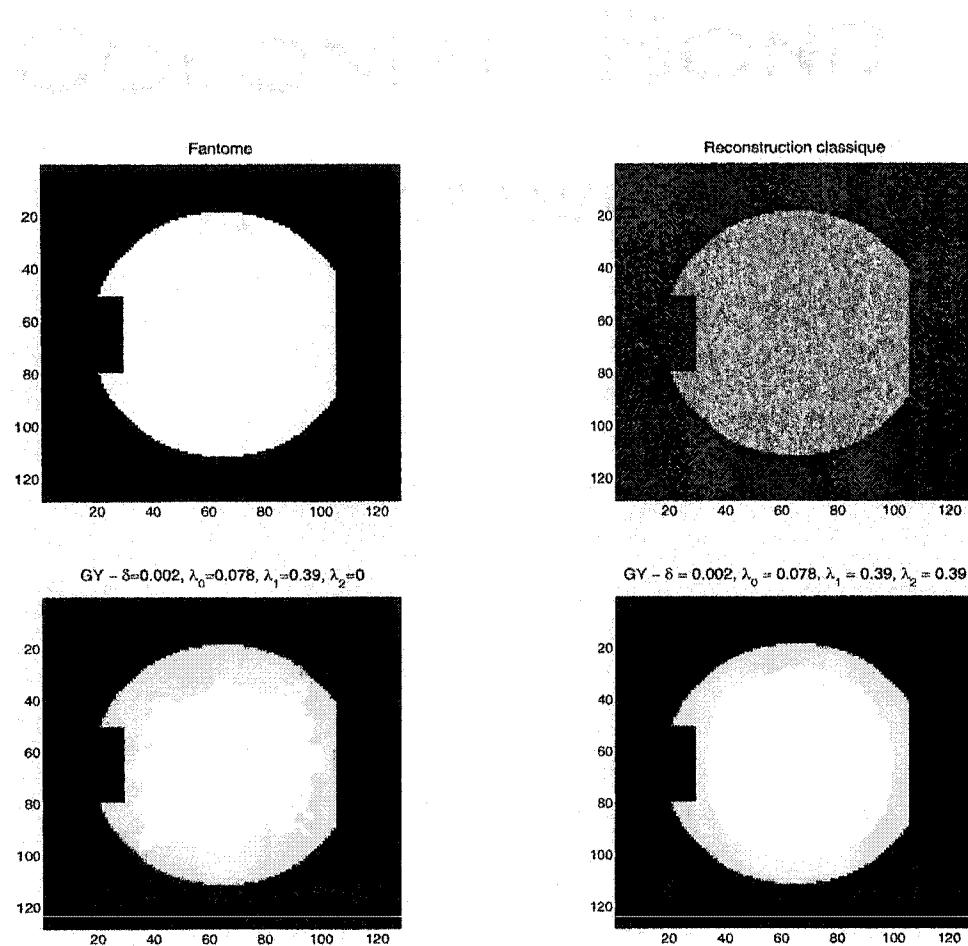


Figure 6.9 Comparaison reconstruction 2D (bas à gauche) - 3D (bas à droite) pour la 30<sup>ème</sup> tranche. RSB = 10 dB

truction 3D et nous obtenons une erreur  $E$  plus faible dans le cas 3D (1.71%) que 2D (1.94%). Ainsi, si nous traçons le contour obtenu par les reconstructions 2D et 3D, nous obtenons le résultat présenté à la figure 6.11 où nous pouvons voir que la méthode 3D nous permet d'obtenir un contour plus proche de l'image d'origine que la méthode 2D. Cette précision plus élevée s'explique par l'apport plus grand d'information *a priori* dans la méthode 3D.

Au vu des résultats concluants obtenus avec les simulations, nous allons maintenant nous intéresser plus longuement aux résultats obtenus avec des données réelles.

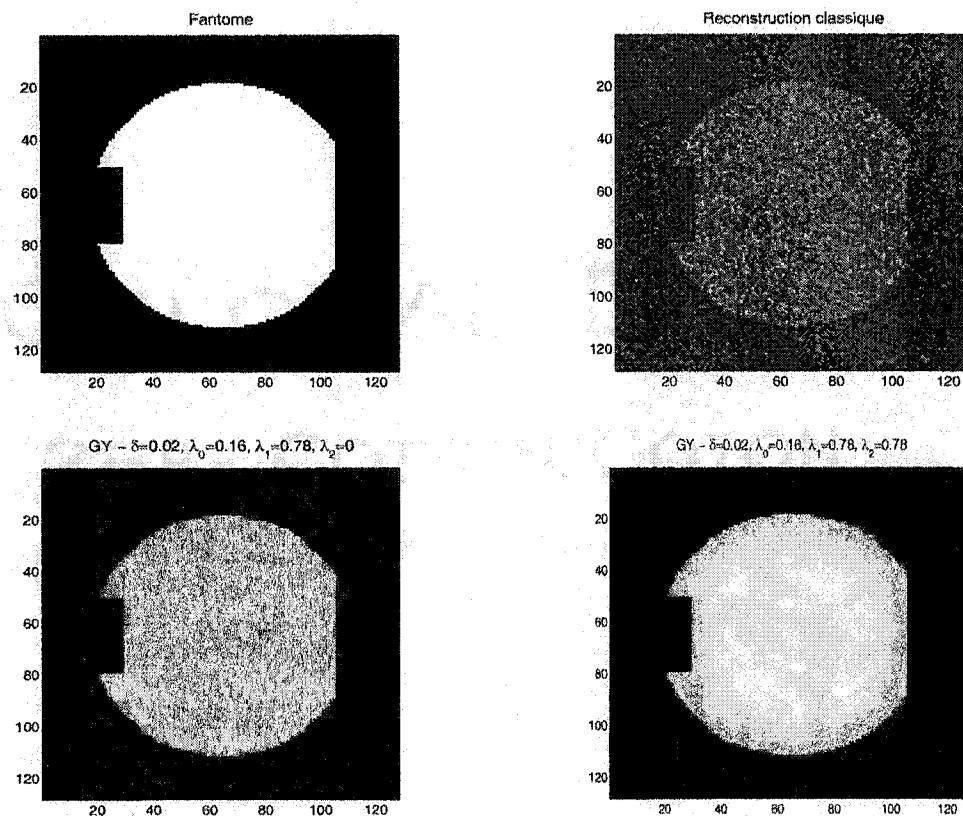


Figure 6.10 Comparaison reconstruction 2D (bas à gauche) - 3D (bas à droite) pour la 30<sup>ème</sup> tranche. RSB = 0 dB

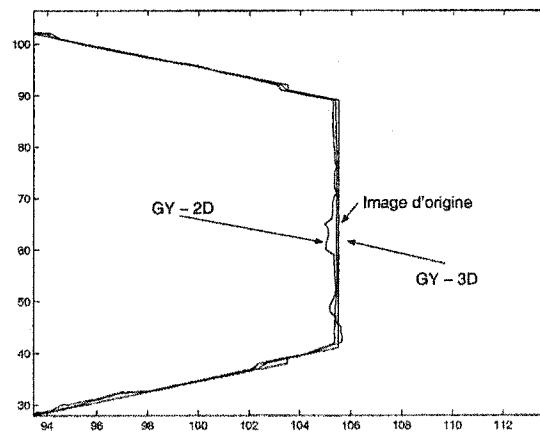


Figure 6.11 Détails des contours pour la tranche 30, pour les reconstructions 2D et 3D

## 6.4 Résultats obtenus sur les données réelles

Il nous faut avant tout remarquer qu'il est très difficile dans le cas d'images réelles d'évaluer la reconstruction. En effet, il n'est pas possible de calculer d'erreur quadratique, et les critères sont alors très subjectifs, vu que nous pouvons uniquement nous fier à une évaluation visuelle, sauf dans le cas du fantôme calibré.

### 6.4.1 Fantôme en PVC

Nous nous sommes d'abord intéressés aux résultats obtenus sur un fantôme PVC représentant une tête stylisée de fémur. Il s'agit du fantôme physique équivalent au fantôme numérique utilisé pour les simulations du paragraphe précédent. Pour effectuer les acquisitions, ce dernier a été immergé dans un bac d'eau<sup>3</sup>. Différentes séries d'acquisition ont été réalisées. Nous allons nous attarder sur deux d'entre elles, la première étant obtenue par écho de spin 2D et la seconde par écho de gradient 3D. Comme nous l'avons mentionné au Chapitre 5, dans le cas de cette seconde acquisition, nous avons effectué une première transformée de Fourier selon l'axe  $z$  afin de considérer  $N_z$  tranches de taille  $N_{col} \times N_{lig}$  et non un volume 3D de taille  $N_z \times N_{col} \times N_{lig}$ .

#### Première série de données - Écho de spin 2D

Nous disposons de vingt-six tranches de taille  $256 \times 256$ , chacune de 5 mm d'épaisseur. Les paramètres de cette acquisition étaient les suivants :

- écho de spin 2D
- TR = 15ms, TE = 7.5ms, FoV = 8/8

---

<sup>3</sup>Nous remercions Mr. Gilles Beaudoïn du pavillon Notre-Dame du CHUM pour nous avoir fourni ces images

Les résultats obtenus sont présentés au figures 6.12 et 6.13.

### Deuxième série de données - Écho de gradient 3D

Nous disposons de cent trente huit tranches de taille  $128 \times 256$ , chacune de 1 mm d'épaisseur. Les paramètres de cette acquisition étaient les suivants :

- écho de gradient 3D
- $TR = 14\text{ms}$ ,  $TE = 5\text{ms}$ ,  $\text{FoV} = 4/8$

Les résultats obtenus sont présentés à la figure 6.14.

Si l'on compare visuellement les deux méthodes de reconstruction, soit la reconstruction classique et la méthode de GY- 3D, nous voyons que nous obtenons une réduction du bruit importante avec notre méthode (figure 6.12 et 6.14), principalement dans la zone de l'eau. Les bords sont aussi correctement conservés. Cependant, du flou peut être observé ; ceci peut être attribué à l'effet de volume partiel ainsi qu'aux bulles d'air présentes aux environs du fantôme. L'effet de volume partiel est plus important dans le cadre de la première série de données, les tranches ayant une épaisseur de cinq millimètres. Dans le cas de la première série de données, nous avons aussi comparé les méthodes GY 2D et 3D (figure 6.13). Nous nous apercevons que la méthode 2D donne de bons résultats, mais la méthode 3D nous permet d'obtenir des résultats plus nets au niveau de l'eau. Pour la vingt-deuxième tranche, il y a un effet assez important de volume partiel qui est mieux géré avec la méthode 3D, vu qu'en 3D nous tenons compte de la nature tridimensionnelle du fantôme, et donc de la ressemblance entre tranches successives. Il faut cependant remarquer que même si ici nous pouvons améliorer la qualité de l'image, l'effet dû au volume partiel reste assez important, en raison de la grande épaisseur des tranches (5 mm).

Notre méthode 3D nous permet bien d'atteindre nos objectifs, soit l'amélioration de la qualité des images avec conservation des zones homogènes. Au vu de ce com-

portement satisfaisant de notre méthode sur des fantômes, nous allons maintenant nous intéresser à des images obtenues sur un cas réel.

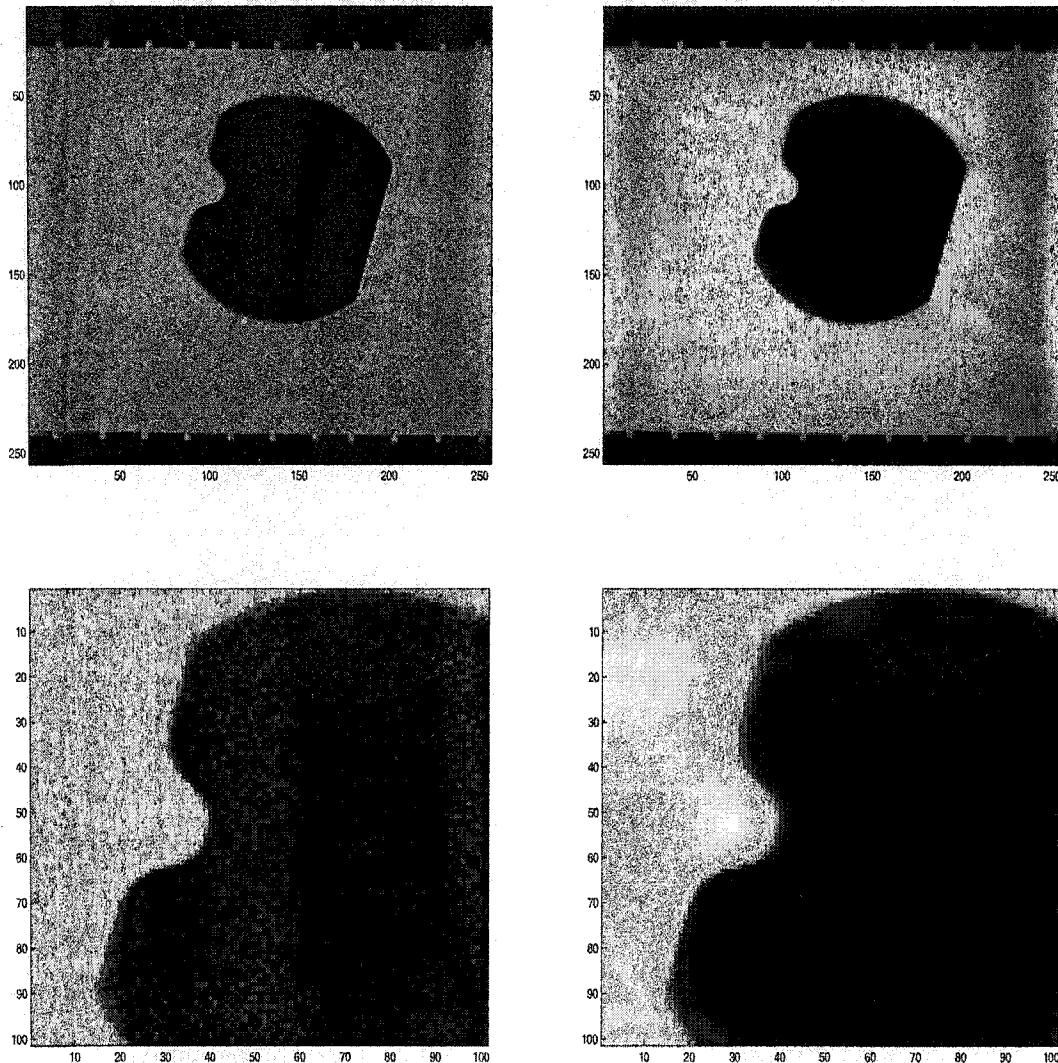


Figure 6.12 Première acquisition de données - Écho de spin 2D. Quinzième tranche. Reconstruction classique (gauche) et GY 3D (droite).

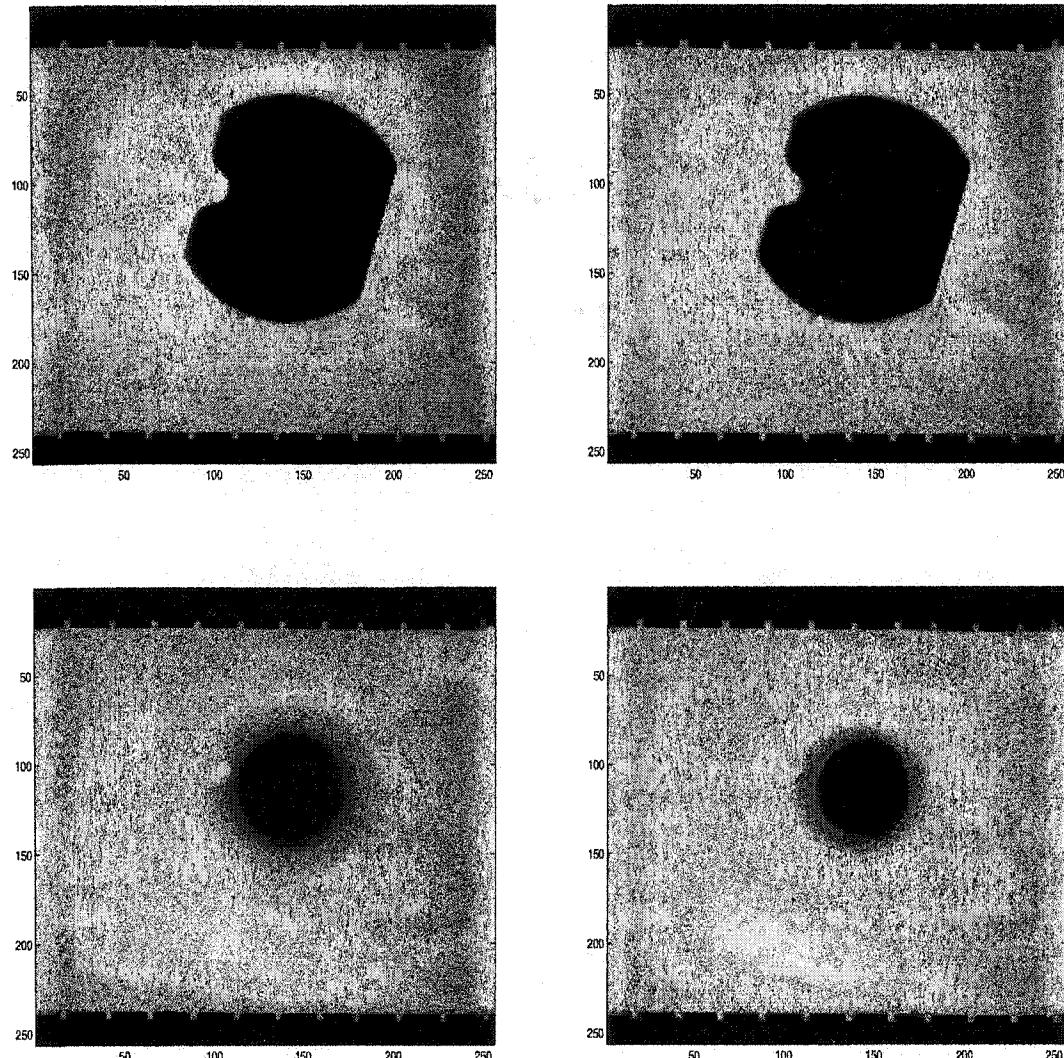


Figure 6.13 Première acquisition de données - Écho de spin 2D. Comparaison d'une reconstruction 2D (droite) et 3D (gauche) pour les quinzième (haut) et vingt-deuxième (bas) tranche.

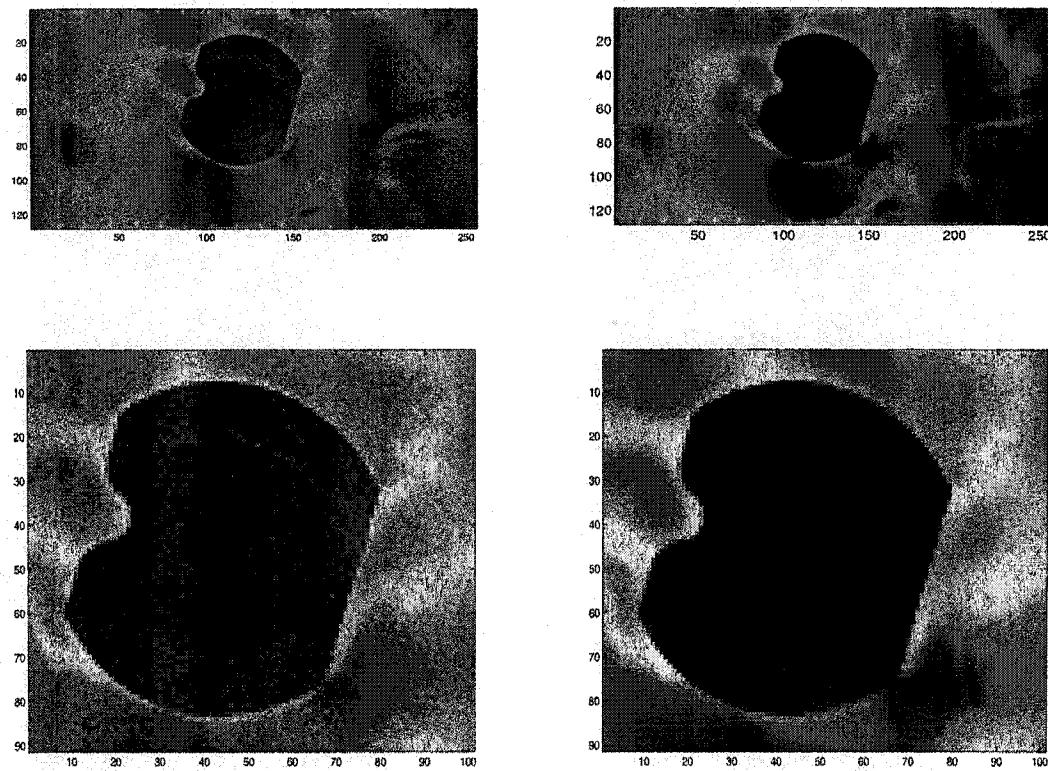


Figure 6.14 Deuxième acquisition de données - Écho de gradient 3D : quatre-vingt dixième tranche. Reconstruction classique (gauche) et GY (droite).

#### 6.4.2 Images de genou

Au vu des résultats obtenus avec le fantôme, nous nous sommes intéressés à des images obtenues dans un cas réel, soit des images de genou. Ici encore, notre principal objectif était de voir si sur un cas réel il nous était possible d'améliorer la qualité des résultats obtenus tout en préservant les discontinuités. De plus, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, l'IRM a l'avantage d'imager avec une grande précision les tissus mous, donc dans le cas du genou, elle est particulièrement utile pour observer l'épaisseur du cartilage (figure 6.15) et ainsi détecter de possibles dégradations, la dégradation du cartilage étant un problème de santé majeur. Nous avons voulu voir si en améliorant la qualité de nos images il nous

était possible de distinguer avec une plus grande précision l'épaisseur du cartilage.

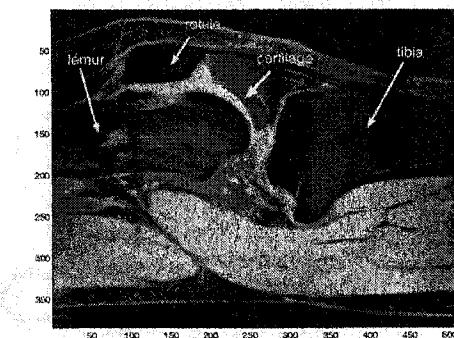


Figure 6.15 Représentation d'une coupe de genou obtenue en IRM

La série d'image que nous avons étudié ici est composée de cent dix tranches de taille  $512 \times 384$  d'épaisseur de 1 mm.

Les paramètres d'acquisition étaient les suivants :

- écho de gradient 3D
- TR = 24 ms, TE = 7ms, FoV = 6/8

En observant les résultats présentés à la figure 6.16, on se rend compte que la qualité de l'image est bien améliorée, le bruit est diminué de manière significative. Les zones homogènes ainsi que les discontinuités sont bien conservées. Notre principal objectif est bien atteint. De plus, si nous observons les détails présentés à la figure 6.16, nous nous apercevons que la qualité de la représentation du cartilage est meilleure : la présence de petites oscillations dues au bruit est plus faible et les contours sont bien conservés. Il ne s'agit cependant que d'un exemple, de résultats préliminaires. Une étude plus rigoureuse sur différents cas, dont certains comportant un cartilage très détérioré, devrait être menée pour pouvoir conclure sur une amélioration réelle.

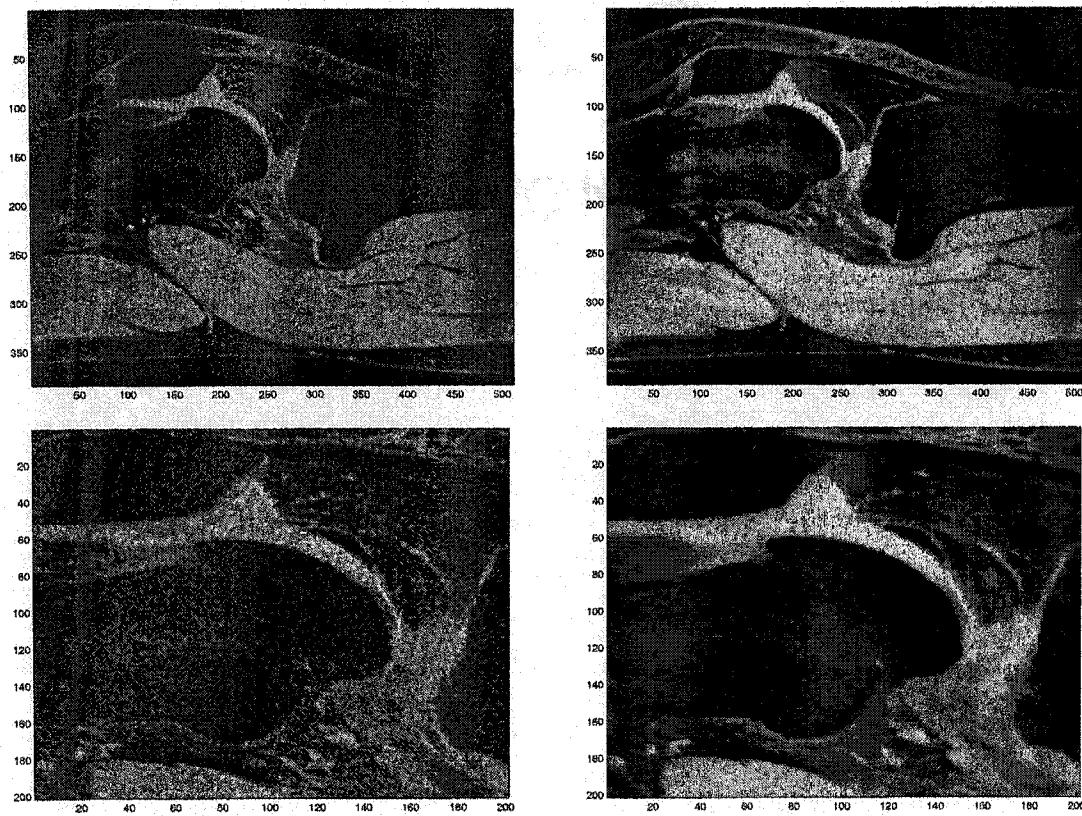
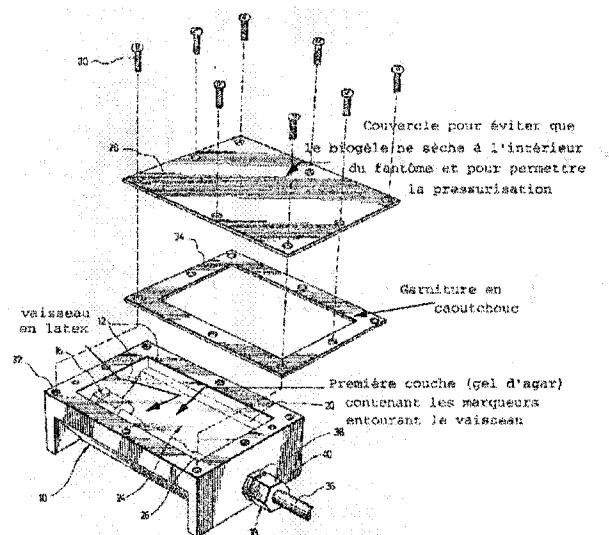


Figure 6.16 Résultats obtenus pour le genou : cinquante cinquième tranche. Reconstruction classique (gauche) et GY (droite).

#### 6.4.3 Fantôme vasculaire

Finalement, nous avons voulu savoir si notre méthode pouvait s'appliquer dans le cas d'images comportant des objets très minces, comme dans le cas de l'IRM vasculaire. Nous avons pour cela utilisé un fantôme vasculaire calibré (figure 6.17 et 6.18) mis au point par une équipe du CHUM et pouvant être utilisé dans divers systèmes d'imagerie (Cloutier *et al.*, 2003; Boussion *et al.*, 2003). Nous ne nous attarderons pas ici sur la manière dont le fantôme a été fabriqué, pour plus d'information, nous renvoyons le lecteur aux deux sources citées précédemment. Le *vaisseau sanguin* simulé est composé de cinq segments en latex de diamètre respectif 0.98, 2.40, 4.20,

6.28 et 8 mm. Le vaisseau baigne dans du gel agar qui présente des caractéristiques analogues à celles des tissus humain vis à vis de l'IRM. Enfin, une solution de gadolinium circule dans le vaisseau afin de simuler l'effet du sang circulant dans nos vaisseaux .



Nous disposons de deux jeux de données de soixante-douze tranches de 1 mm d'épaisseur : le premier a été obtenu par une acquisition écho de gradient 3D, et le second par une acquisition écho de gradient 3D, mais grâce à six antennes RF, ce qui nous permet d'obtenir un RSB beaucoup plus élevé. Dans les deux cas, les paramètres d'acquisition étaient les suivants : TR = 34 ms, TE = 14 ms et FoV = 8/8.

Dans un premier temps comparons les reconstructions classiques obtenues avec les deux acquisitions. Intéressons nous plus particulièrement à la tranche quarante-six qui nous permet de visualiser l'ensemble du fantôme (figures 6.19 et 6.20). Il nous faut remarquer que la répartition du gradient n'est pas homogène, ce qui entraîne la courbure du vaisseau. Lors de la reconstruction mise en oeuvre dans les appareils, une transformation est effectuée afin de corriger cet aspect. Cependant cette transformation n'avait pas encore été effectuée sur les données brutes dont nous disposions.

Si nous nous attardons sur la qualité des images, nous nous rendons compte que le segment de diamètre 0.98 mm est presque invisible dans le cas de la première acquisition, avec une seule antenne RF. De plus, avec cette acquisition, il est presque impossible de faire la distinction entre l'air et le gel d'agar entourant le fantôme. Ce gel est cependant très bien visible sur la figure 6.20 (figure de gauche), soit celle obtenue avec six antennes.

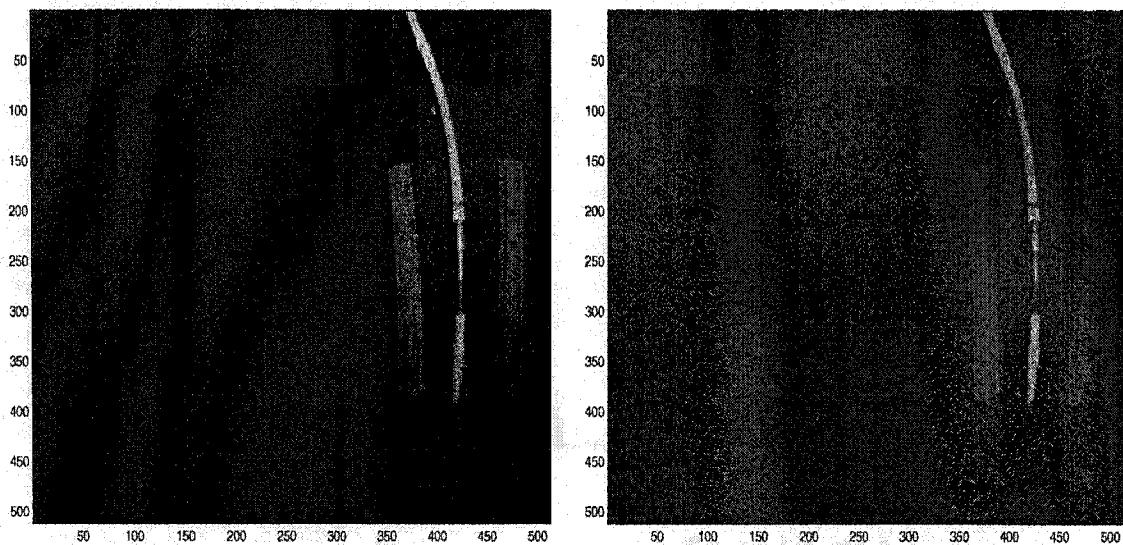


Figure 6.19 Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique. Image obtenue avec six antennes (gauche) et avec une seule antenne (droite)

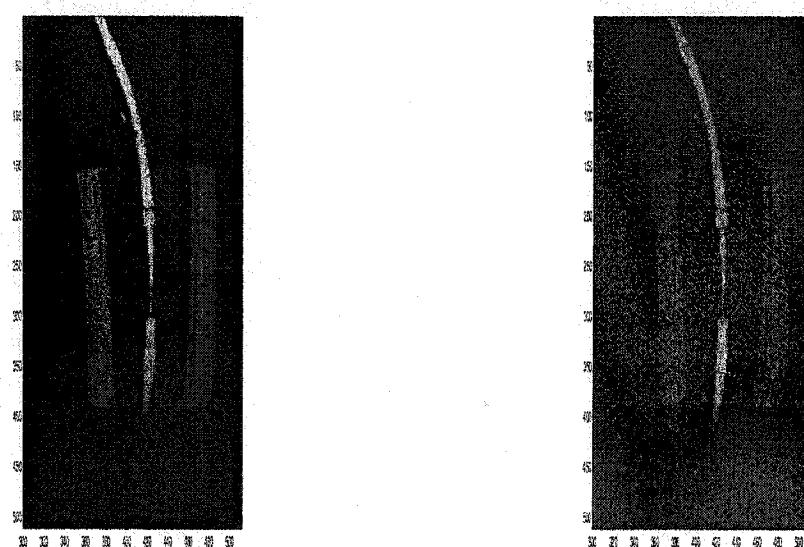


Figure 6.20 Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique. Image obtenue avec six antennes (gauche) et avec une seule antenne (droite) - Détails

Notre principal objectif ici est de voir si il nous est possible d'obtenir à partir de données acquises grâce à une antenne des résultats de qualité égale à ceux obtenus grâce à six antennes.

Nous avons donc appliqué nos méthodes de reconstruction 3D introduites au chapitre 5 aux données acquises avec une seule antenne. Les résultats sont présentés aux figures 6.21 et 6.22.

Ces résultats ont été obtenus en effectuant 30 itérations sur l'ensemble du volume des données, et 10 itérations sur  $\mathbf{x}$  à  $\mathbf{b}$  fixé. Le temps d'exécution est d'environ 130 minutes sur un ordinateur de 4 Go de mémoire vive et un processeur Intel, Pentium IV de 3 GHz. Le temps a été évalué sur un programme effectué en C, sur des variables en flottant. De plus il s'agit ici de résultats obtenus grâce à la version généralisée, la version approximée donne un temps moyen d'exécution de 105 minutes.

Nous avons tout d'abord comparé les résultats obtenus avec la reconstruction classique de la même série de données. Nous nous apercevons que nous avons sensiblement réussi à améliorer la qualité de l'image sans perdre le tube de un millimètre. De plus si nous comparons notre méthode à la reconstruction classique de données acquises par six antennes (figure 6.19) , nous nous rendons compte que nous obtenons des résultats de qualité assez proche.

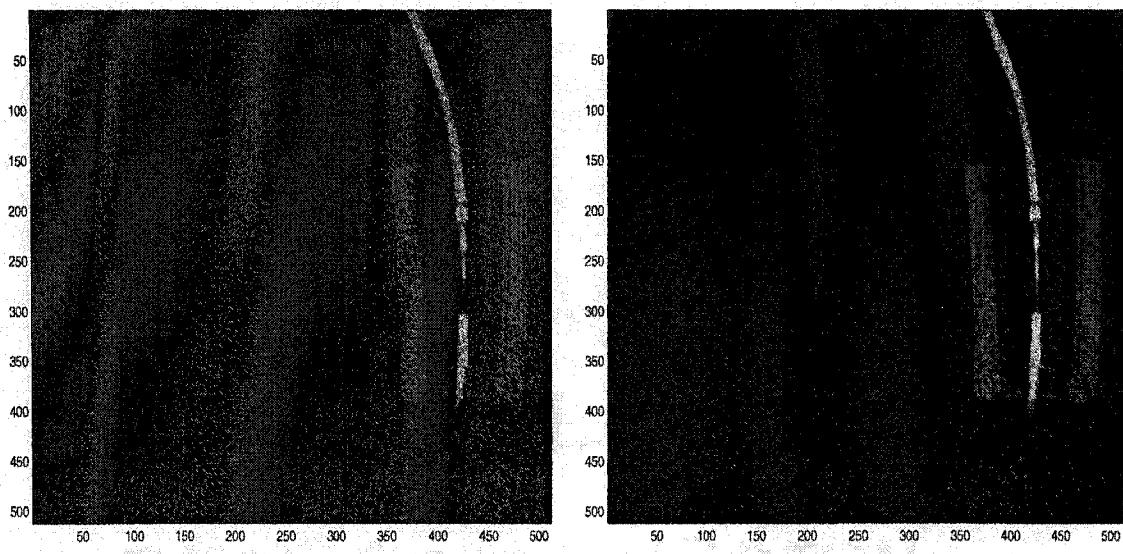


Figure 6.21 Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique (gauche) et GY (droite)

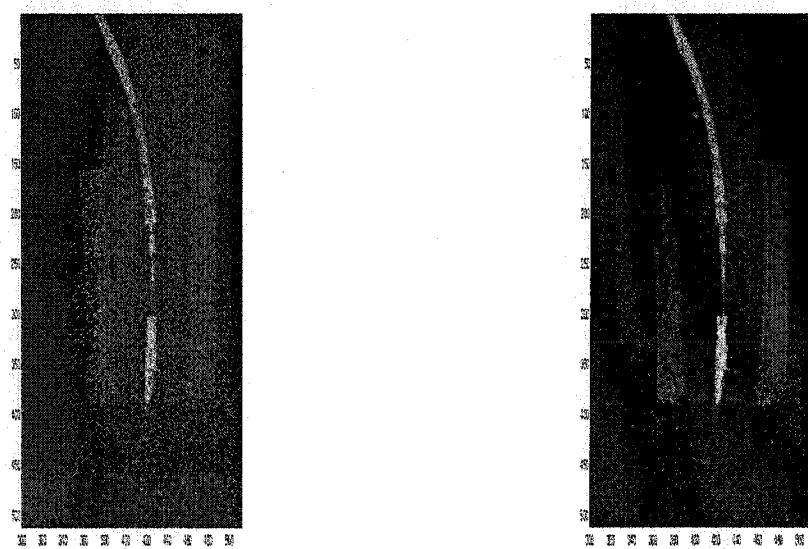


Figure 6.22 Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique (gauche) et GY (droite) - Détails

Dans un second temps, afin de pouvoir visualiser les coupes des différents segments, nous nous sommes placés dans un plan perpendiculaire à l'axe du fantôme, soit des vaisseaux simulés. Les résultats obtenus dans le cas de la reconstruction classique pour les deux acquisitions sont présentés aux figures 6.23 à 6.26. Nous avons représenté les coupes des vaisseaux de 8 et 0.98 mm. L'aspect elliptique plus que circulaire des coupes est dû au fait que les voxels ne sont pas isotropes. Comme précédemment, nous nous apercevons que dans le cas de l'image obtenue avec une seule antenne, l'image est très bruité et il nous est impossible de distinguer le gel d'agar. De plus, si nous nous attardons plus particulièrement sur la coupe du vaisseau de 0.98 mm, nous nous apercevons que le vaisseau est perdu dans le bruit dans le cas d'une acquisition avec une seule antenne contrairement à celle obtenue avec six antennes.

Les coupes des images obtenues grâce à notre méthode, dans le cas de l'acquisition par une antenne, sont présentées aux figures 6.27 à 6.30. Les conditions d'obtention de ces résultats sont les mêmes que celles énoncées précédemment. Nous nous apercevons que la qualité des images est meilleure sur les images obtenues par notre méthode que sur celles représentant la reconstruction classique. Si nous observons plus particulièrement la coupe du vaisseau de 0.98 mm, nous nous apercevons qu'il nous est possible de le distinguer sur l'image obtenue grâce à notre méthode, contrairement à l'image obtenue par la reconstruction classique.

Cette dernière étude, effectuée sur un fantôme calibré, nous a permis de montrer la viabilité de notre méthode. En effet, on observe qu'il est possible d'améliorer la qualité sans perdre des détails, pouvant aller jusqu'à une précision de l'ordre de un millimètre.

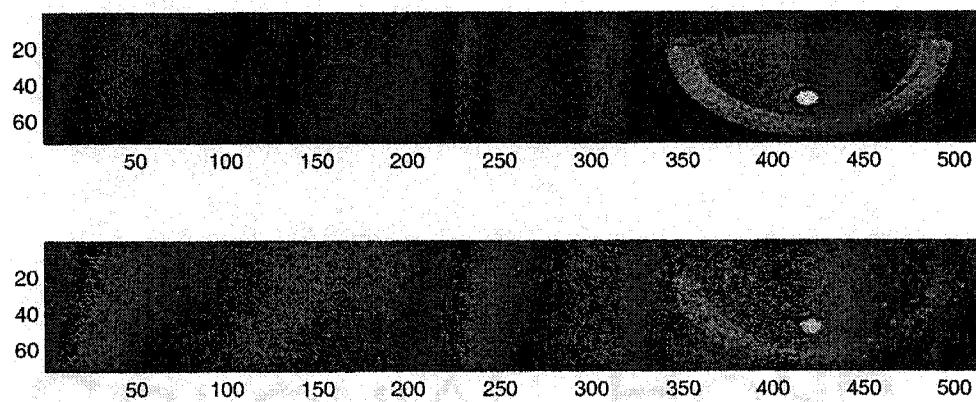


Figure 6.23 Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique. Coupe du segment de 8 mm. Image obtenue avec six antennes (haut) et avec une seule antenne (bas)

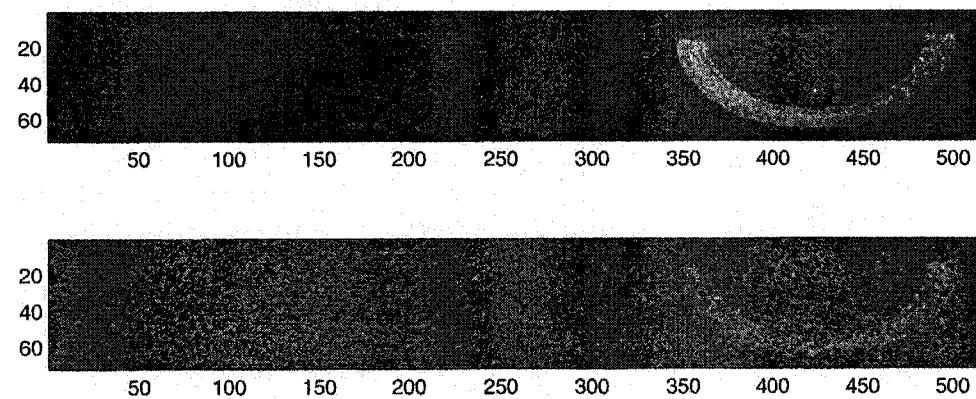


Figure 6.24 Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique. Coupe du segment de 0.98 mm. Image obtenue avec six antennes (haut) et avec une seule antenne (bas)

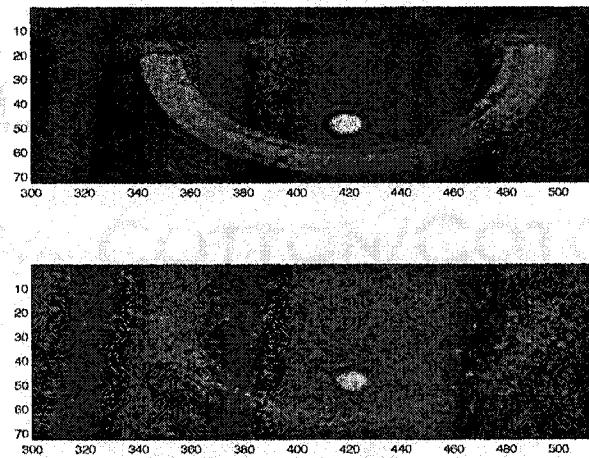


Figure 6.25 Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique. Coupe du segment de 8 mm. Image obtenue avec six antennes (haut) et avec une seule antenne (bas) - Détails

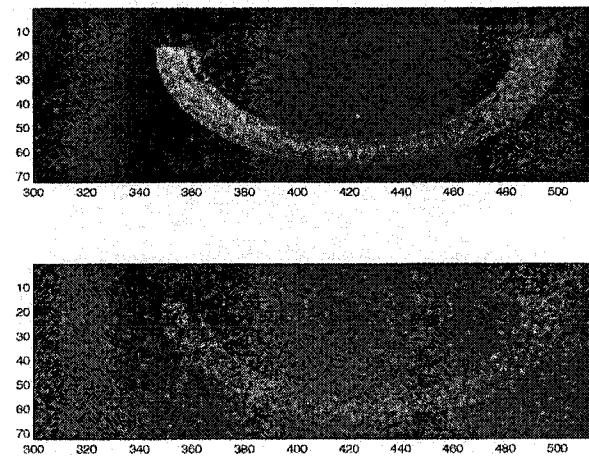


Figure 6.26 Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Reconstruction classique. Coupe du segment de 8 mm. Image obtenue avec six antennes (haut) et avec une seule antenne (bas) - Détails

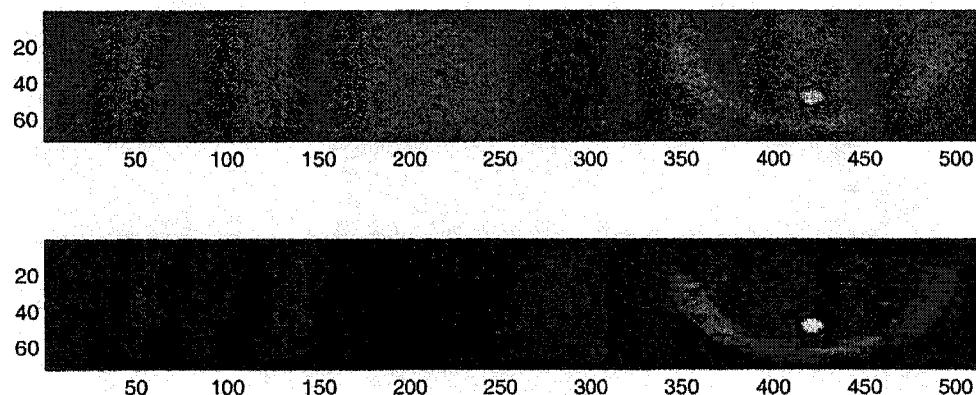


Figure 6.27 Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Coupe du segment de 8 mm. Image obtenue avec la reconstruction classique (haut) et avec notre algorithme (bas)

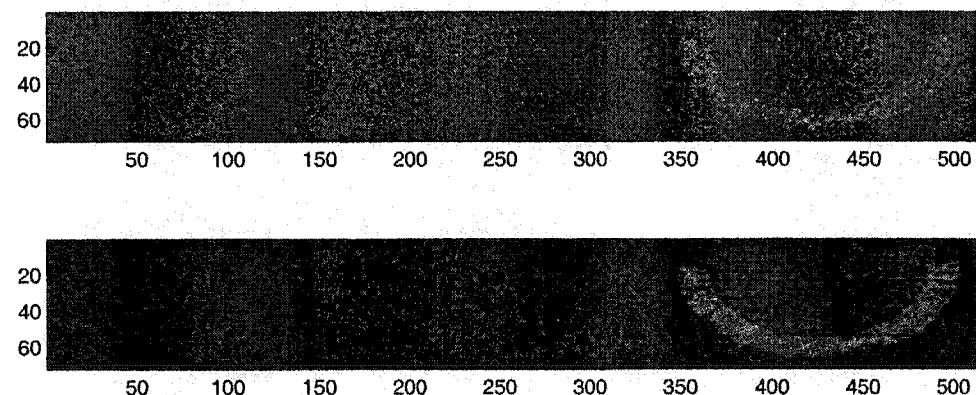


Figure 6.28 Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Coupe du segment de 0.98 mm. Image obtenue avec la reconstruction classique (haut) et avec notre algorithme (bas)



131

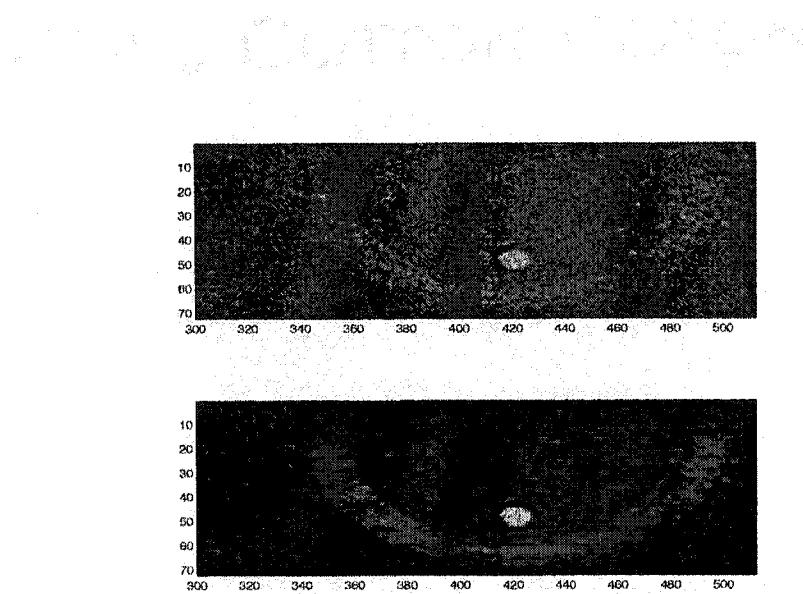


Figure 6.29 Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Coupe du segment de 8 mm. Image obtenue avec la reconstruction classique (haut) et avec notre algorithme (bas) - Détails

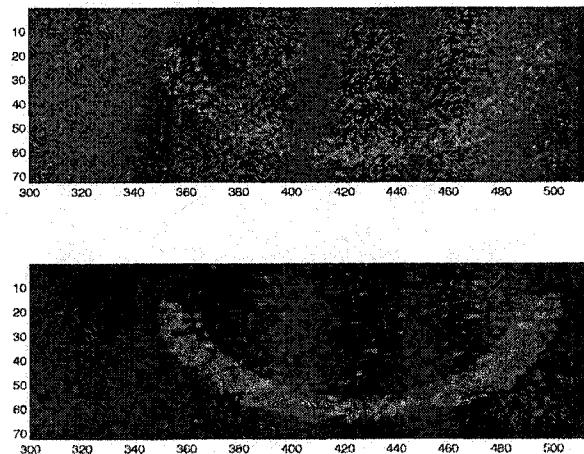


Figure 6.30 Résultats obtenus pour le fantôme vasculaire. Coupe du segment de 0.98 mm. Image obtenue avec la reconstruction classique (haut) et avec notre algorithme (bas) - Détails

## 6.5 Conclusion - Discussion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les différents résultats obtenus grâce à notre algorithme de reconstruction. Nous avons vu que les résultats sont satisfaisants à plusieurs points :

- La qualité de l'image est améliorée de manière sensible. Cela se traduit par une diminution importante du bruit, des oscillations contenues dans les images, sans pour autant lisser les discontinuités de manière sensible.
- Dans le cas de fantôme comportant de très petits détails, il nous est possible de conserver ces derniers tout en améliorant la qualité des images.
- Le temps de calculs reste raisonnable
- Les résultats obtenus avec le fantôme vasculaire sont encourageants : avec une seule antenne RF il nous est possible d'obtenir des résultats compatibles à ceux obtenus avec six antennes. Cela permettrait de diminuer le volume de données à acquérir.

On note cependant que :

- Il ne nous est pas possible de diminuer l'effet de volume partiel. Il serait utile comme prolongement à ce travail d'incorporer dans les simulations l'effet du volume partiel afin d'en mesurer l'impact
- Dans certaines situations, en présence d'un faible bruit, le choix d'une reconstruction 3D plutôt que 2D est discutable, vu que les résultats obtenus par ces deux approches sont sensiblement identiques.

## CONCLUSION

L'objectif de ce travail était d'améliorer la qualité des images obtenues en IRM, c'est à dire obtenir des images comportant moins d'oscillations tout en conservant les zones homogènes et les discontinuités. Pour cela, nous avons considéré le problème de reconstruction d'images en IRM comme un problème de type *problème inverse*, approche très utilisée en traitement d'images. L'image reconstruite est obtenue non pas en effectuant une transformée de Fourier inverse comme dans le cas de la reconstruction classique en IRM, mais en minimisant un critère composé de la somme d'un terme de fidélité aux données et d'un terme de régularisation. Au chapitre 3, nous nous sommes plus particulièrement attardé sur comment construire un tel critère de manière à atteindre nos objectifs. Nous avons décidé d'utiliser une approche basée sur les champs de Markov, cette approche nous permettant d'obtenir un modèle souple à mettre en oeuvre. Aux chapitres 4 et 5 nous avons développé différentes formulations 2D puis 3D basées sur la construction *semi-quadratique* de Geman & Yang. Pour cela, nous avons tiré parti des caractéristiques de notre problème, c'est à dire des propriétés de l'opérateur de transformée de Fourier et de la forme particulière de la matrice normale, *quasi bloc-circulante*.

La principale originalité de notre travail repose sur l'introduction d'une formulation généralisée de la construction de GY nous permettant d'obtenir une structure prédéfinie de la matrice normale. Cette propriété a été utilisée afin d'améliorer l'efficacité numérique de la reconstruction. Les résultats obtenus avec des données simulées et réelles présentés au chapitre 6 ont prouvé que nos objectifs avaient été atteints. Nous avons bien amélioré la qualité de nos images sans perte des discontinuités. De plus, la méthode généralisée nous a permis d'obtenir le meilleur compromis entre le temps de calcul et la qualité des images. En effet, cette formulation ne comporte aucune approximation et sa vitesse de convergence est proche de

celle obtenue avec la formulation standard approximée. Enfin, les résultats obtenus avec un fantôme calibré nous ont permis de montrer la viabilité de notre méthode, vu qu'il nous a été possible de détecter des détails jusqu'à une précision de 1 mm.

Un prolongement de ce travail consisterait dans un premier temps à développer une méthode non supervisée, c'est à dire permettant un réglage automatique des paramètres d'échelle  $\delta$  et de régularisation  $\lambda$ . Il faudrait aussi améliorer la construction des matrices des différences finies en introduisant la pondération des différentes cliques (c'est à dire horizontale-verticale et 3D). Dans un second temps, il serait utile de comparer les résultats obtenus avec un voisinage du second ordre. En effet dans le cas d'images ayant de formes arrondies un voisinage du second ordre permettrait d'obtenir de meilleurs résultats vu que l'information *a priori* fait intervenir les différences premières dans un plus grand nombre de directions. Finalement, même si il ne nous est pas possible de rivaliser au niveau temps de calcul avec la méthode de reconstruction classique que l'on retrouve dans les appareils commerciaux, le compromis obtenu entre le temps d'exécution et la qualité des images pour la formulation 3D est assez encourageant ; l'efficacité numérique des programmes peut encore être améliorée.

## RÉFÉRENCES

- ALLAIN, M. (2002). Approche pénalisée en tomographie hélicoïdale. Application à la conception d'une prothèse personnalisée du genou. Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay, France.
- ALLAIN, M., IDIER, J. et GOUSSARD, Y. (2002). On Global and Local Convergence of Half-Quadratic Algorithms. Dans *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, volume 2, Rochester, NY, 833–836.
- AZHARI, H., DENISOVA, O., MONTAG, A. et SHAPIRO, E. (1997). Circular Sampling : Perspective of a Time-Saving Scanning Procedure. *Magnetic Resonance Imaging*, 14, 625–631.
- BERTSEKAS, D. (1995). Non Linear Programming. Athena Scientific, Belmont, MA.
- BESAG, J. E. (1986). On the statistical analysis of dirty pictures (With discussion). *Journal of the Royal Statistical Society B*, 48, 259–302.
- BLAKE, A. et ZISSERMAN, A. (1987). Visual reconstruction. MIT Press, Cambridge, MA.
- BORZI, A., STADLER, G. et HOHENESTER, U. (2002). Optimal Quantum Control in Nanostructures : Theory and Application to Generic Three-Level System. *Physical Review A*, 66.
- BOUBERTAKH, R. (2002). Synthèse de Fourier régularisée : cas des données incomplètes et application à l'IRM cardiaque rapide. Thèse de Doctorat, Université de Paris-sud.
- BOUMAN, C. et SAUER, K. (1993). A Generalized Gaussian Image Model for Edge-Preserving MAP Estimation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2, 296–310.

- BOUSSION, N., GUISE, J. D., SOULLEZ, G., DARONAT, M. et CLOUTIER, G. (2003). Registration and Fusion of Multimodal Vascular Images : a Phantom Study. Dans *Proceedings of SPIE, Medical Imaging 2003 : Image Processing*, Édité par M. Sonka et J. Fitzpatrick, volume 5032, 1081–1089.
- CAO, Y. et LEVIN, D. (1997). Using Prior Knowledge of Human Anatomy to Constrain MR Image Acquisition and Reconstruction : Half K-Space and Full K-Space Techniques. *Magnetic Resonance Imaging*, 15, 669–677.
- CHARBONNIER, P., BLANC-FÉRAUD, L., AUBERT, G. et BARLAUD, M. (1994). Two Deterministic Half-Quadratic Regularization Algorithms for Computed Imaging. Dans *Proceedings of IEEE ICIP*, volume 2, 168–172.
- CHARBONNIER, P., BLANC-FÉRAUD, L., AUBERT, G. et BARLAUD, M. (1997). Deterministic Edge-Preserving Regularization in Computed Imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6, 298–311.
- CIUCIU, P. et IDIER, J. (2002). A Half-Quadratic Block-Coordinate Descent Method for Spectral Estimation. *Signal Processing*, 82, 941–959.
- CLOUTIER, G., SOULLEZ, G., TEPPAZ, P., QANADLI, S., QIN, Z. et DURAND, L. (2003). A Multimodality Vascular Imaging Phantom for Calibration Purpose. Dans *Proceedings of SPIE, Medical Imaging 2003 : Visualization, Image-guided Procedures, and Display*, Édité par G. Jr., volume 5029, 707–716.
- CUPPEN, J. et EAST, A. V. (1987). Reducing MR Imaging Time by One-Side Reconstruction. *Magnetic Resonance Imaging*, 5, 526–527.
- DEGENHARD, A., TANNER, C., HAYES, C., HAWKES, D. et LEACH, M. (2001). Pre-Processed Image Reconstruction Applied to Breast and Brain MR Imaging. *Physiological Measurement*, 22, 589–604.
- DEMOMENT, G. (1989). Image Reconstruction and Restoration : Overview of Common Estimation Structure and Problems. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, ASSP-37, 2024–2036.

- DERICHE, R., KORNPROBST, P., NIKOLOVA, M. et NG, M. (2003). Half-Quadratic Regularization for MRI Image Restoration. Dans *Proceedings of IEEE ICASSP*, 585–588.
- DERIN, H. et KELLY, P. A. (1989). Discrete-Index Markov-Type Random Processes. *Proceedings of the IEEE*, 77, 1485–1510.
- DOLOGLOU, I., ORMONDT, D. V. et CARAYANNIS, G. (1996). MRI Scan Time Reduction Through Non-Uniform Sampling and SVD-Based Estimation. *Signal Processing*, 55, 207–219.
- DOYLE, M., WALSH, E., BLACKWELL, G. et POHOST, G. (1995). Block Regional Interpolation Scheme For K-Space (BRISK) : a Rapid Cardiac Imaging Technique. *Magnetic Resonance in Medicine*, 33, 163–170.
- FIANI, M., IDIER, J. et GAUTIER, S. (2001). Algorithmes ART Semi-Quadratiques pour la Reconstruction à Partir de Radiographies. Dans *Actes 18<sup>e</sup> coll. GRETSI*, Toulouse, 183–186.
- GEMAN, D. et YANG, C. (1995). Nonlinear Image Recovery with Half-Quadratic Regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, IP-4, 932–946.
- GEMAN, S. et GEMAN, D. (1984). Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-6, 721–741.
- GEMAN, S. et REYNOLDS, G. (1992). Constrained Restoration and Recovery of Discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-14, 367–383.
- HAACKE, E. et LIANG, Z. (2000). Challenges of Imaging Structure and Function with MRI. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 19, 55–62.
- HAASE, A., FRAHM, J., MATTHAEI, D., HANICKE, W. et MERBOLDT, K. (1986). FLASH Imaging. Rapid NMR Imaging Using Low Flip-Angle Shot. *Journal of Magnetic Resonance*, 67, 258–266.

- HADAMARD, J. (1923). Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. Masson, Paris.
- HAUPT, R. (1995). An Introduction to Genetic Algorithms for Electromagnetics. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 37, 7-15.
- HENNING, J., NAUERTH, J. et FRIEDBURG, H. (1986). RARE Imaging : A Fast Method for Clinical MR. *Magnetic Resonance in Medicine*, 3, 823-833.
- HERMENT, A., ROULLOT, E., BLOCH, I., PELLAT, C., TODD-POKROPEK, A. et MOUSSEAUX, E. (2002). Improvement of the SNR - Resolution Compromise in MRA Using Spatial Segmented K-Space Acquisitions. Dans *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging*, 947-950.
- HESTENES, M. et STIEFEL, E. (1952). Methods of Conjugate Gradient for Solving Linear Systems. *National Bureau of Standards Journal of Research*, 49, 409-436.
- HOGE, W., MILLER, E., LEV-ARI, H., BROOKS, D. et PANYCH, L. (2002). A Doubly Adaptive Approach to Dynamic MRI Sequence Estimation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11, 1168-1178.
- HORNAK, J. P. (1996-2003). The Basics of MRI. internet, [www.cis.rit.edu/htbooks/mri](http://www.cis.rit.edu/htbooks/mri).
- HUBER, P. (1981). Robust Statistics. John Wiley, New York.
- HUI, Y. et SMITH, M. (1995). MRI Reconstruction From Truncated Data Using A Complex Domain Backpropagation Neural Network. Dans *IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing*, Victoria, 513-516.
- HUNT, B. (1973). The Application of Constrained Least Squares Estimation to Image Restoration by Digital Computer. *IEEE Transactions on Communications*, C-22, 805-812.

- IDIER, J. (2001). Convex Half-Quadratic Criteria and Interacting Auxiliary Variables for Image Restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10, 1001–1009.
- JACKSON, J., MEYER, C., NISHIMURA, D. et MACOVSKI, A. (1991). Selection of a Convolution Function for Fourier Inversion Using Gridding. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 10, 473–478.
- JONES, R., HARALDSETH, O., MÜLLER, T., RINCK, P. et ØKSENDAL, A. (1993). K-Space Substitution : A Novel Dynamic Imaging Technique. *Magnetic Resonance in Medicine*, 29, 830–834.
- KUPERMAN, V., NAGLE, S., ALLEY, M., GLOVER, G. et LEVIN, D. (1999). Locally-Focused Contrast-Enhanced Carotid MRA. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 9, 663–669.
- LI, S. Z. (1995). On Discontinuity-Adaptive Smoothness Priors in Computer Vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-17, 576–586.
- LIANG, Z., BAMMER, R., JI, J., PELC, N. et GLOVER, G. (2002). Improved Image Reconstruction from Sensitivity-Encoded Data by Wavelet Denoising and Tikhonov Regularization. Dans *Proceedings of IEEE International Symposium on Biomedical Imaging*, 493–496.
- LIU, G., SOBERING, G., DUYN, J. et MOONEN, C. (1993). A Functional MRI Technique Combining Principles of Echo-Shifting with a Train of Observations (PRESTO). *Magnetic Resonance in Medicine*, 30, 764–768.
- MANSFIELD, P. (1977). Multi-Planar Image Formation Using NMR Spin Echoes. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 10, L55–L58.
- MARGOSIAN, P., SCHMITT, F. et PURDY, D. (1986). Faster MR Imaging : Imaging with Half the Data. *Health Care Instrumentation*, 1, 195–197.

- MC VEIGH, A. (1996). Magnetic Resonance Imaging : A Primer for Engineers. Johns Hopkins University.
- MEYER, C., CRAIG, H., HU, B., NISHIMURA, D. et MACOVSKI, A. (1992). Fast Spiral Coronary Artery Imaging. *Magnetic Resonance in Medicine*, 28, 202–213.
- NASHED, M. Z. (1981). Operator-Theoretic and Computational Approaches to Ill-Posed Problems with Applications to Antenna Theory. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-29, 220–231.
- NATH, S. et SMITH, M. (1999). Improved Image Reconstruction by Combining ARMA Modeling with Wavelet Decomposition : Preliminary Results. Dans *Proceedings of the 1999 IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, Shaw Conference Center, Edmonton, Alberta, Canada, 693–697.
- NIKOLOVA, M., IDIER, J. et MOHAMMAD-DJAFARI, A. (1998). Inversion of Large-Support Ill-Posed Linear Operators Using a Piecewise Gaussian MRF. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7, 571–585.
- NISHIMURA, D. G. (1996). Principles of Magnetic Resonance Imaging. Stanford University.
- NOLL, D. (1997). Multishot Rosette Trajectories for Spectrally Selective MR Imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16, 372–377.
- NOLL, D., NISHIMURA, D. et MAKOVSKI, A. (1991). Homodyne Detection in Magnetic Resonance Imaging. *IEEE Transaction in Medical Imaging*, 10, 154–163.
- PANYCH, L. (1996). Theoretical Comparison of Fourier and Wavelet Encoding in Magnetic Resonance Imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15, 141–153.
- PAULY, J. (2002). EE392X : Medical Image reconstruction. cours sur Internet, [www.stanford.edu/class/ee392x](http://www.stanford.edu/class/ee392x).

- PLEVRITIS, S. et MACOVSKI, A. (1995). MRS Imaging Using Anatomically Based K-Space Sampling and Extrapolation. *Magnetic Resonance in Medicine*, 34, 686–693.
- PRUESSMANN, K., WEIGER, M., SCHEIDEGGER, M. et BOESIGER, P. (1999). SENSE : Sensitivity Encoding for Fast MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, 42, 952–962.
- ROCKAFELLAR, R. T. (1970). Convex Analysis. Princeton University Press.
- ROSENFIELD, D. (2002). New Approach to Gridding Using Regularization and Estimation Theory. *Magnetic Resonance in Medicine*, 48, 193–202.
- ROULLOT, E. (2001). Analyse d'acquisitions multiples anisotropes en angiographie par résonance magnétique 3D : modélisation et reconstruction régularisée pour l'amélioration de la résolution spatiale. Thèse de Doctorat, Télécom Paris.
- ROULLOT, E., HERMENT, A., BLOCH, I., NIKOLAVA, M. et MOUSSEAUX, E. (2000a). Reconstruction régularisée d'images de résonance magnétique 3D de haute résolution à partir d'acquisitions de résolutions anisotropes. Dans *RFIA '2000, 12<sup>e</sup> Congrès Francophone AFRIF-AFIA de Reconnaissance des formes et intelligence artificielle*, volume 2, 59–68.
- ROULLOT, L., HERMENT, A., BLOCH, I., NIKOLOVA, M. et MOUSSEAUX, E. (2000b). Regularized Reconstruction of 3D High Resolution Magnetic Resonance Images from Acquisitions of Anisotropically Degraded Resolutions. Dans *Proc. 15th Int. Conf. on Pattern Recognition*, IEEE, Barcelona, Spain.
- SAUER, K. et BOUMAN, C. (1993). A Local Update Strategy for Iterative Reconstruction from Projections. *IEEE Transactions on Signal Processing*, SP-41, 534–548.
- SCHARF, L. (1991). Statistical Signal Processing : Detection, Estimation and Time Series. Addison-Wesley.

- SEDARAT, H., KERR, A., PAULY, J. et NISHIMURA, D. (2000). Partial-FOV Reconstruction in Dynamic Spiral Imaging. *Magnetic Resonance in Medicine*, *43*, 429–439.
- SIJBERS, J., SCHEUNDERS, P., BONNET, N., DYCK, D. V. et RAMAN, E. (1996). Quantification and Improvement of the Signal-to-Noise Ratio in a Magnetic Resonance Image Acquisition Procedure. *Magnetic Resonance Imaging*, *14*, 1157–1163.
- SMITH, M., NICHOLS, S., HENKELMAN, R. et WOOD, L. (1986). Application of Autoregressive Moving Average Parametric Modeling in Magnetic Resonance Image Reconstruction. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, *5*, 132–139.
- SODICKSON, D. (2001). SMASH Imaging. web, <http://www.bidmc.harvard.edu/cmr/smash/smash.html>.
- SODICKSON, D. (2002). Breaking the Speed Limit in Magnetic Resonance Imaging : An Introduction to Parallel MRI. Dans *Proceedings of the Second Joint EMBS/BMES Conference*, Édité par IEEE, 1173–1174.
- SODICKSON, D. et MANNING, W. (1997). Simultaneous Acquisition of Spatial Harmonics (SMASH) :Fast Imaging with Radiofrequency Coil Arrays. *Magnetic Resonance in Medicine*, *38*, 591–603.
- SODICKSON, D., MCKENZIE, C., OHLIGER, M., YEH, E. et PRICE, M. (2002). Recent Advances in Image Reconstruction, Coil Sensitivity Calibration, and Coil Array Design for SMASH and Generalized Parallel MRI. *Magnetic Resonance Materials in Physics, Biology and Medicine*, *13*, 158–163.
- TIKHONOV, A. N. et ARSENIN, V. Y. (1977). Solution of ill-posed problems. John Wiley & Sons, New York, NY.
- TITTERINGTON, D. M. (1985). General Structure of Regularization Procedures in Image Reconstruction. *Astronomy and Astrophysics*, *144*, 381–387.

- TWOMEY, S. (1962). On the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind by the Inversion of the Linear System Produced by Quadrature. *J. Assoc. Comp. Mach.*, 10, 97–101.
- VAALS, J. V., BRUMMER, M., DIXON, W., TUITHOF, H., ENGELS, H., NELSON, R., GERETY, B., CHEZMAR, J. et BOER, J. D. (1993). "Keyhole" Method for Accelerating Imaging of Contrast Agent Uptake. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 3, 671–675.
- VILLAIN, N. (1997). Restauration markovienne tridimensionnelle d'images tomodiagnostiques ; application à la conception de prothèses personnalisées du genou. Mémoire de maîtrise, Ecole Polytechnique de Montréal.
- VILLAIN, N., GOUSSARD, Y. et IDIER, J. (1997). Restauration d'Images Tomographiques par Champ de Markov 3D. Dans *Proc. ACFAS Conf.*
- VILLAIN, N., GOUSSARD, Y., IDIER, J. et ALLAIN, M. (2003). Three-Dimensional Edge-Preserving Image Enhancement for Computed Tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22, 1275–1287.
- WANG, Y. et LEI, T. (1994). Statistical Analysis of MR Imaging and its Applications in Imaging Modeling. Dans *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, volume 1, 866–870.
- WEAVER, J., XU, Y., HEALY, D. et DRISCOLL, J. (1992). Wavelet-Encoded MR Imaging. *Magnetic Resonance in Medicine*, 24, 275–287.
- WEIGER, M., PRUESSMANN, K., LEUSSLER, C., ROSCHMANN, P. et BOESIGER, P. (2001). Specific Coil Design for SENSE : A Six-Element Cardiac Array. *Magnetic Resonance in Medicine*, 45, 495–504.
- WINKLER, G. (1995). Image Analysis, Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods. Springer Verlag, Berlin, Allemagne.
- YAO, L., CAO, Y. et LEVIN, D. (1995). Locally Focused MRI. Dans *Proceedings SPIE*, volume 2622, 780–784.

- ZHOU, X., LIANG, Z., GEWALT, S., COFER, G., LAUTERBUR, P. et JOHN-SON, G. (1998). A Fast Spin Echo Technique with Circular Sampling. *Magnetic Resonance in Medicine*, 39, 23–27.
- ZIENTARA, G., PANYCH, L. et JOLESZ, F. (1994). Dynamically Adaptive MRI with Encoding by Singular Value Decomposition. *Magnetic Resonance in Medicine*, 32, 268–274.

## ANNEXE I

## ALGORITHME DE GR, VERSION STANDARD - RELATIONS DE DUALITÉ ET ÉVALUATION DES VARIABLES DE LIGNE

Nous allons ici présenter plus en détails les démonstrations nous permettant d'aboutir aux équations de dualité liant  $\varphi$  et  $\psi$ , ainsi qu'à la formulation exacte de l'estimée des variables de lignes  $\hat{b}_c$  à  $\mathbf{x}$  constant. Nous travaillons ici avec des variables réelles.

I.1 Relations de dualité entre  $\varphi$  et  $\psi$ 

Soit  $u \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Considérons la fonction  $g$  introduite au paragraphe 3.8.2 :

$$\begin{cases} \forall u < 0, \quad g(u) = +\infty \\ \forall u \geq 0, \quad g(u) = -\varphi(\sqrt{u}) \end{cases} \quad (I.1)$$

$g$  est convexe. Soit  $g^\dagger(u)$  sa fonction convexe conjuguée, on pose  $g^\dagger(-b) = \psi(b)$ . En utilisant les équations (3.39) liant deux fonctions convexes conjuguées et en posant  $\langle u | b \rangle = ub$ , nous obtenons :

---


$$\begin{aligned} g^\dagger(b) &= \sup_u (ub - g(u)) \\ &= \sup_u (ub + \varphi(\sqrt{u})) \\ \text{d'où } g^\dagger(-b) &= \sup_u (-u^2b + \varphi(u)) \\ \text{et } \psi(b) &= \sup_u (\varphi(u) - u^2b) \end{aligned} \quad (I.2)$$

De même,

$$\begin{aligned}
 g(u) &= \sup_b (ub - g^\dagger(b)) \\
 \text{d'où } -\varphi(\sqrt{u}) &= \sup_b (ub - g^\dagger(-b)) \\
 \text{et } -\varphi(u) &= \sup_b (u^2b - \psi(b)) \\
 \text{soit } \varphi(u) &= \inf_b (\psi(b) + u^2b) \tag{I.3}
 \end{aligned}$$

Nous obtenons alors les deux relations de dualité suivantes :

$$\psi(b) = \sup_u (\varphi(u) - u^2b) \quad \varphi(u) = \inf_b (\psi(b) + u^2b) \tag{I.4}$$

Ces deux relations permettent de construire le critère augmenté  $K_{\text{GR}}$

## I.2 Calcul de l'estimée $\hat{b}_c$ des variables de ligne

Nous détaillons ici les calculs permettant d'aboutir à l'équation (3.51) présentée au chapitre 3.  $\hat{b}_c$  est défini par :

$$\hat{b}_c = \arg \min_{b_c} \{u_c^2 b_c + \psi(b_c)\} \quad , \quad c \in \mathcal{C} \tag{I.5}$$

Ce minimiseur annule le gradient de  $u_c^2 b_c + \psi(b_c)$ , d'où la condition :

$$\frac{\partial \psi(b)}{\partial b} - u_c^2 = 0 \tag{I.6}$$

De plus, comme  $\hat{b}_c$  est un minimum, nous pouvons exprimer  $\varphi(u_c)$  défini à l'équation (I.4) en fonction de  $\hat{b}_c$  :

$$\varphi(u_c) = \psi(\hat{b}_c) + u_c^2 \hat{b}_c \tag{I.7}$$

ce qui nous donne :

$$\frac{\partial \varphi(u_c)}{\partial u_c} = 2u_c \hat{b}_c + \frac{\partial \psi(\hat{b}_c)}{\partial \hat{b}_c} \frac{\partial \hat{b}_c}{\partial u_c} - u_c^2 \frac{\partial \hat{b}_c}{\partial u_c} \quad (I.8)$$

$$= 2u_c \hat{b}_c + \underbrace{\left( \frac{\partial \psi(\hat{b}_c)}{\partial \hat{b}_c} - u_c^2 \right)}_{=0} \frac{\partial \hat{b}_c}{\partial u_c} \quad (I.9)$$

$$= 2u_c \hat{b}_c \quad (I.10)$$

Soit :

$$\hat{b}_c = \frac{\varphi'(u_c)}{2u_c} \quad , \quad c \in \mathcal{C}^l \quad (I.11)$$

□

## ANNEXE II

## ALGORITHME DE GY, VERSION STANDARD - RELATIONS DE DUALITÉ ET ÉVALUATION DES VARIABLES DE LIGNE

Nous allons ici présenter plus en détails les démonstrations nous permettant d'aboutir aux équations de dualité liant  $\varphi$  et  $\psi$ , ainsi qu'à la formulation exacte des variables de lignes  $\hat{b}_c$ . Nous travaillons ici avec des variables réelles

II.1 Relations de dualité entre  $\varphi_\alpha$  et  $\psi_\alpha$ 

Soit  $u \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Considérons la fonction auxiliaire  $g_\alpha = \frac{u^2}{2} - \varphi_\alpha(u)$  introduite au paragraphe 3.8.3. Supposons que  $g_\alpha$  soit convexe et désignons par  $g_\alpha^\dagger(b)$  sa fonction convexe conjuguée. On pose  $\psi_\alpha(b) = g_\alpha^\dagger(b) - \frac{b^2}{2}$ .

En utilisant les équations (3.39) liant deux fonctions convexes conjuguées et en posant  $\langle u | b \rangle = ub$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} g^\dagger(b) &= \sup_u (ub - g(u)) \\ \text{d'où } b^2/2 + \psi_\alpha(b) &= \sup_u (ub - u^2/2 + \varphi_\alpha(u)) \\ \text{et } \psi_\alpha(b) &= \sup_u \left( -\frac{(u-b)^2}{2} + \varphi_\alpha(u) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

De même,

$$\begin{aligned} g(u) &= \sup_b (ub - g^\dagger(b)) \\ \text{d'où } u^2/2 - \varphi_\alpha(u) &= \sup_b (ub - b^2/2 - \psi_\alpha(b)) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Soit :

$$\begin{aligned} -\varphi_\alpha(u) &= \sup_b \left( -\frac{(u-b)^2}{2} - \psi_\alpha(b) \right) \\ \text{et } \varphi_\alpha(u) &= \inf_b \left( \psi_\alpha(b) + \frac{(u-b)^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Nous avons donc les 2 relations de dualité suivantes :

$$\psi_\alpha(b) = \sup_u \left( -\frac{(u-b)^2}{2} + \varphi_\alpha(u) \right) \quad \varphi_\alpha(u) = \inf_b \left( \psi_\alpha(b) + \frac{(u-b)^2}{2} \right) \quad (\text{II.4})$$

## II.2 Calcul de l'estimée $\hat{b}_c$ des variables de ligne

Nous détaillons ici les calculs permettant d'aboutir à l'équation (3.58) présentée au chapitre 3.  $b_c$  est défini par :

$$\hat{b}_c = \arg \min_{b_c} \left\{ \frac{(u-b)^2}{2} + \psi_\alpha(b_c) \right\} \quad , \quad c \in \mathcal{C}^l \quad (\text{II.5})$$

Ce minimiseur annule le gradient de  $\frac{(u-b)^2}{2} + \psi_\alpha(b_c)$ , d'où la condition :

$$\frac{\partial \psi_\alpha(b)}{\partial b} - u_c + b_c = 0 \quad (\text{II.6})$$

De plus, comme  $\hat{b}_c$  est un minimum, nous pouvons exprimer  $\varphi_\alpha(u_c)$  défini à l'équation (II.4) en fonction de  $\hat{b}_c$  :

$$\varphi_\alpha(u_c) = \psi_\alpha(\hat{b}_c) + \frac{(u_c - \hat{b}_c)^2}{2} \quad (\text{II.7})$$

ce qui nous donne :

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(u_c)}{\partial u_c} = u_c - \hat{b}_c + \frac{\partial \psi_\alpha(\hat{b}_c)}{\partial \hat{b}_c} \frac{\partial \hat{b}_c}{\partial u_c} - (u_c - \hat{b}_c) \frac{\partial \hat{b}_c}{\partial u_c} \quad (\text{II.8})$$

$$= u_c - \hat{b}_c + \underbrace{\left( \frac{\partial \psi_\alpha(\hat{b}_c)}{\partial \hat{b}_c} - u_c + \hat{b}_c \right)}_{=0} \frac{\partial \hat{b}_c}{\partial u_c} \quad (\text{II.9})$$

$$= u_c - \hat{b}_c \quad (\text{II.10})$$

Soit :

$$\hat{b}_c = u_c - \varphi'_\alpha(u_c) \quad , \quad c \in \mathcal{C}^l \quad (\text{II.11})$$

$$= u_c - \alpha \varphi'(u_c) \quad , \quad c \in \mathcal{C}^l \quad (\text{II.12})$$

□

## ANNEXE III

**ALGORITHME DE GY, VERSION STANDARD - FORMULATION  
COMPLEXE - RELATIONS DE DUALITÉ ET ÉVALUATION DES  
VARIABLES DE LIGNE**

Nous présentons en détails les démonstrations nous permettant d'aboutir aux diverses égalités présentes dans la formulation complexe de la version standard de l'algorithme de Geman & Yang. Les calculs des versions vectorielle et généralisée ne sont pas détaillés, le raisonnement étant semblable.

III.1 Relations de dualité entre  $\varphi_\alpha$  et  $\psi_\alpha$

Soit  $u = u_r + iu_i \in \mathbb{C}$  et  $b = b_r + ib_i \in \mathbb{C}$ . Considérons la paire de Legendre  $(g, g^\dagger)$  suivante :

$$\begin{cases} g_\alpha(u) &= \frac{\langle u | u \rangle}{2} - \varphi_\alpha(u) \\ g_\alpha^\dagger(b) &= \psi_\alpha(b) + \frac{\langle b | b \rangle}{2} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Comme nous travaillons avec des variables complexes, le produit  $\langle u | b \rangle$  est équivalent à :

$$\langle u | b \rangle = u_r b_r + u_i b_i = \frac{1}{2} (u^* b + u b^*) \quad (\text{III.2})$$

où  $(.)^*$  représente l'opérateur de conjugaison. Un raisonnement analogue à celui présenté à l'Annexe II nous permet d'obtenir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(b) &= \sup_{u \in \mathbb{C}} \left( -\frac{(u - b)^*(u - b)}{2} + \varphi_\alpha(u) \right) \\ \varphi_\alpha(u) &= \inf_{b \in \mathbb{C}} \left( \frac{(u - b)^*(u - b)}{2} + \psi_\alpha(b) \right) \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

### III.2 Calcul de l'estimée $\hat{b}$ des variables de ligne

Considérant des variables complexes, le développement est identique à celui exposé au paragraphe II.2. D'après l'équation (II.6), nous obtenons :

$$\frac{\partial \psi_{l\alpha}(b_c)}{\partial b_{cr}} - u_{cr} + b_{cr} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Psi_{l\alpha}(bc)}{\partial b_{ci}} - u_{ci} + b_{ci} = 0 \quad ; \quad c \in \mathcal{C}_l \quad (\text{III.4})$$

De plus, nous savons que  $b_c$  est un minimum global, nous pouvons donc exprimer  $\varphi_\alpha(u)$  défini à l'équation (4.9) en fonction de  $\hat{b}_c$  :

$$\varphi_\alpha(u_c) = \psi_{l\alpha}(\hat{b}_c) + \frac{(u_c - \hat{b}_c)^*(u_c - \hat{b}_c)}{2} \quad (\text{III.5})$$

De plus  $b_c$  est une fonction de  $u_c$ , donc en dérivant (III.5) par rapport à  $u_c$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_\alpha(u_c)}{\partial u_{cr}} &= u_{cr} - \hat{b}_{cr} + (\hat{b}_{cr} - u_{cr}) \frac{\partial \hat{b}_{cr}}{\partial u_{cr}} + (\hat{b}_{ci} - u_{ci}) \frac{\partial \hat{b}_{ci}}{\partial u_{cr}} \\ &+ \frac{\partial \psi_{l\alpha}(\hat{b}_c)}{\partial \hat{b}_{cr}} \frac{\partial \hat{b}_{cr}}{\partial u_{cr}} + \frac{\partial \psi_{l\alpha}(\hat{b}_c)}{\partial \hat{b}_{ci}} \frac{\partial \hat{b}_{ci}}{\partial u_{cr}} \\ &= u_{cr} - \hat{b}_{cr} + \frac{\partial \hat{b}_{cr}}{\partial u_{cr}} \underbrace{\left[ \frac{\partial \psi_{l\alpha}(\hat{b}_c)}{\partial \hat{b}_{cr}} + (\hat{b}_{cr} - u_{cr}) \right]}_{0 \text{ d'après III.4}} \\ &+ \frac{\partial \hat{b}_{ci}}{\partial u_{cr}} \underbrace{\left[ \frac{\partial \psi_{l\alpha}(\hat{b}_c)}{\partial \hat{b}_{ci}} + (\hat{b}_{ci} - u_{ci}) \right]}_{0 \text{ d'après III.4}} \\ &= u_{cr} - \hat{b}_{cr} \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

De la même manière, on trouve que :

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(u_c)}{\partial u_{ci}} = u_{ci} - \hat{b}_{ci} \quad (\text{III.7})$$

Au final, nous obtenons l'expression de  $\hat{b}_c$  suivante :

$$\hat{b}_c = \hat{b}_{cr} + i \times \hat{b}_{ci} = u_c - \frac{\partial \varphi_\alpha(u_c)}{\partial u_{cr}} - i \times \frac{\partial \varphi_\alpha(u_c)}{\partial u_{ci}} \quad (\text{III.8})$$

Comme dans notre cas  $\varphi_\alpha(u_c) = \alpha \sqrt{\delta^2 + |u_c|^2}$ , nous obtenons :

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(u_c)}{\partial u_{cr}} = \alpha \frac{u_{cr}}{\sqrt{\delta^2 + |u_c|^2}} \quad ; \quad \frac{\partial \varphi_\alpha(u_c)}{\partial u_{ci}} = \alpha \frac{u_{ci}}{\sqrt{\delta^2 + |u_c|^2}} \quad (\text{III.9})$$

Soit :

$$\hat{b}_c = u_c - \alpha \frac{u_c}{\sqrt{\delta^2 + |u_c|^2}} \quad , \quad \forall c \in \mathcal{C}^l, \quad l \in \{0, 1, 2\} \quad (\text{III.10})$$

où le quotient doit s'entendre comme une division composante par composante.

□

## ANNEXE IV

**ÉTABLISSEMENT DE L'EXPRESSION DES MATRICES  
INTERVENANT DANS LES DIVERSES MÉTHODES**

Nous allons dans cette section décrire les matrices de différence du premier ordre  $\mathbf{D}_l, l \in \{1, 2\}$  que nous utilisons dans le cadre d'image en 2D, soit les matrices des différences horizontales ( $l = 1$ ) et verticales ( $l = 2$ ). Nous allons aussi nous attarder sur les formes des matrices  $\mathbf{C}$  et  $\Delta$  (paragraphe 4.3) et  $\mathbf{S}$  (paragraphe 4.4). Nous partons d'une image initiale  $\mathbf{X}$  de dimension  $N_{lig} \times N_{col}$ .

Il nous faut préciser que les matrices des différences  $\mathbf{D}_l$  décrites par la suite sont construites de telle sorte à opérer sur des vecteurs  $\mathbf{x}$  obtenus en concaténant colonne par colonne l'image  $\mathbf{X}$ . Ainsi, le pixel  $(i, j)$  d'une image  $\mathbf{X}$  de taille  $N_{lig} \times N_{col}$  correspond à la composante d'indice  $i + (j - 1) \times N_{lig}$  du vecteur  $\mathbf{x}$  de taille  $N_{tot} = N_{lig}N_{col}$ .

#### IV.1 Pénalisation horizontale

L'expression de la matrice  $\mathbf{D}_1$  de taille  $(N_{lig} - 1)N_{col} \times N_{lig}N_{col}$  est la suivante :

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (IV.1)$$

où  $\mathbf{D}$  est de taille  $(N_{lig} - 1) \times N_{lig}$ .

Le produit  $\mathbf{D}_1^* \mathbf{D}_1$  nous donne :

$$\mathbf{D}_1^* \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^* \mathbf{D} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{D}^* \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

où

$$\mathbf{D}^* \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

$\mathbf{D}_1^* \mathbf{D}_1$  et  $\mathbf{D}^* \mathbf{D}$  sont de taille respective  $N_{lig} N_{col} \times N_{lig} N_{col}$  et  $N_{lig} \times N_{lig}$ .

Nous avons vu au paragraphe 4.4 qu'il est possible de créer une matrice  $\mathbf{C}_1$  bloc circulante à partir du produit  $\mathbf{D}_1^* \mathbf{D}_1$  de telle sorte à avoir :  $\mathbf{D}_1^* \mathbf{D}_1 = \mathbf{C}_1 - \Delta_1$ , soit :

$$\mathbf{D}_1^* \mathbf{D}_1 = \mathbf{C}_1 - \Delta_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{C}_{1,1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \Delta_{1,1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

Les matrices  $\mathbf{C}_{1,1}$  et  $\Delta_{1,1}$  sont de même dimension que  $\mathbf{D}^* \mathbf{D}$ , soit  $N_{lig} \times N_{lig}$ . Elles ont pour expression :

$$\mathbf{C}_{1,1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

De plus, la matrice de perturbation  $\Delta_1$  peut se décomposer de la manière suivante :  $\Delta_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^*$ , où  $\mathbf{U}_1$  est définie en (IV.6).

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{u}_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

$\mathbf{U}_1$  (resp.  $\mathbf{u}_1$ ) est de taille  $N_{lig} N_{col} \times N_{col}$  (resp.  $N_{lig} \times 1$ ).

Enfin, au paragraphe (4.3), nous avons introduit les matrices  $\mathbf{S}_l$  régies par l'équation (4.36) :  $\mathbf{D}_l^* \mathbf{S}_l = \mathbf{U}_l$ ,  $l = \{1, 2\}$ . En nous basant sur les matrices  $\mathbf{D}_1$  et  $\mathbf{U}_1$  introduites précédemment, nous trouvons la forme générale de  $\mathbf{S}_1$  :

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{s}_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

$\mathbf{S}_1$  (resp.  $\mathbf{s}_1$ ) est de taille  $(N_{lig} - 1)N_{col} \times N_{col}$  (resp.  $(N_{lig} - 1) \times 1$ ).

## IV.2 Pénalisation verticale

Sur le même principe que pour les pénalisations horizontales, nous avons  $\mathbf{D}_2$  (IV.8) de taille  $(N_{col} - 1)N_{lig} \times N_{lig}N_{col}$  tel que pour  $i = 1 \dots (N_{col} - 1)N_{lig}$ ,  $\mathbf{D}_2(i, i) = 1$  et  $\mathbf{D}_2(i, i + N_{lig}) = -1$ , soit :

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

Le produit  $\mathbf{D}_2^* \mathbf{D}_2 = \mathbf{C}_2 - \Delta_2$ , de taille  $N_{lig}N_{col} \times N_{lig}N_{col}$ , est donné en (IV.9) et (IV.10).

$$\mathbf{D}_2^* \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ -1 & \ddots & \ddots & 2 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

soit :

$$\forall i = 1, \dots, N_{lig} \Rightarrow \mathbf{D}_2^* \mathbf{D}_2(i, i) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_2^* \mathbf{D}_2(i, i + N_{lig}) = -1$$

$$\forall i = N_{lig} + 1, \dots, (N_{col} - 1)N_{lig} \Rightarrow \mathbf{D}_2^* \mathbf{D}_2(i, i - N_{lig}) = -1, \quad \mathbf{D}_2^* \mathbf{D}_2(i, i) = 2$$

$$\text{et} \quad \mathbf{D}_2^* \mathbf{D}_2(i, i + N_{lig}) = -1$$

$$\forall i = (N_{col} - 1)N_{lig} + 1, \dots, N_{col}N_{lig} \Rightarrow \mathbf{D}_2^* \mathbf{D}_2(i, i) = -1 \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_2^* \mathbf{D}_2(i, i + N_{lig}) = 1$$

$$\mathbf{D}_2^* \mathbf{D}_2 = \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{C}_{0,2} & \mathbf{C}_{N,2} & \dots & \mathbf{C}_{1,2} \\ \mathbf{C}_{1,2} & \mathbf{C}_{0,2} & \dots & \mathbf{C}_{2,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_{N-1,2} & \mathbf{C}_{N-2} & \dots & \mathbf{C}_{N,2} \\ \mathbf{C}_{N,2} & \mathbf{C}_{N-1,2} & \dots & \mathbf{C}_{0,2} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{ccccc} \Delta_{1,2} & 0 & \dots & 0 & -\Delta_{1,2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\Delta_{1,2} & 0 & \dots & 0 & \Delta_{1,2} \end{array} \right] \quad (\text{IV.10})$$

où  $\mathbf{C}_{0,2} = 2 * \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{C}_{1,2} = \mathbf{C}_{N,2} = -\mathbf{I}$ , avec  $\mathbf{I}$  matrice Identité de taille  $N_{lig} \times N_{lig}$  et  $\forall i \neq \{0, 1, N\}$ ,  $\mathbf{C}_{i,2} = [0]$ . De même,  $\Delta_{1,2} = \mathbf{I}$ .

Enfin, la matrice de perturbation  $\Delta_2$  est égale à  $\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^*$  (IV.11).

$$\Delta_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^* \quad \text{avec} \quad \mathbf{U}_2 = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\mathbf{I} \end{array} \right] \quad (\text{IV.11})$$

où  $\mathbf{U}_2$  est de taille  $N_{lig}N_{col} \times N_{lig}$

Nous pouvons alors déduire la matrice  $\mathbf{S}_2$  de taille  $(N_{col} - 1)N_{lig} \times N_{lig}$  (IV.12).

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

où  $\mathbf{I}$  est ici une matrice identité de taille  $N_{lig} \times N_{lig}$