



Titre: Convection thermosolutale au sein d'une cavité poreuse saturée par un fluide binaire
Title:

Auteur: Lamine Kalla
Author:

Date: 2004

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Kalla, L. (2004). Convection thermosolutale au sein d'une cavité poreuse saturée par un fluide binaire [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal].
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7277/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/7277/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Patrick Vasseur, & Luc Robillard
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONVECTION THERMOSOLUTALE AU SEIN D'UNE CAVITÉ POREUSE
SATURÉE PAR UN FLUIDE BINAIRE

LAMINE KALLA

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR
(GÉNIE MÉCANIQUE)

AVRIL 2004



National Library
of Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

Acquisitions et
services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-612-92158-1

Our file Notre référence

ISBN: 0-612-92158-1

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this dissertation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de ce manuscrit.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the dissertation.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

CONVECTION THERMO-SOLUTALE AU SEIN D'UNE CAVITÉ POREUSE
SATURÉE PAR UN FLUIDE BINAIRE

présentée par : KALLA Lamine

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. PRUD'HOMME Michel, Ph.D., président

M. VASSEUR Patrick, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. ROBILLARD Luc, D.Sc. A., membre et codirecteur de recherche

M. KAHAWITA René, Ph.D., membre

M. SAGHIR Ziad, Ph.D., membre

DÉDICACE

À mon père Amor et ma mère Nissa

À ma mère Rabira et mon père Madjid

À ma femme Nassira

À ma mère Fatma

À la mémoire de mes grands parents

À mes frères et sœurs : Zaky, Sara, Houssam, Nesserine, Hanane

À mon frère Ahmed et toute la famille Mahidjiba

À mes adorables nièces Asmaa, Soumia et Lili

À toute la famille Nedjai

À Wahab et toute sa famille

À Abderahim et Mustapha et leurs familles

À tous ceux qui me sont chers

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mon directeur de recherche, le professeur Patrick Vasseur, pour m'avoir soutenu et guidé tout au long de cette thèse. Je le remercie particulièrement pour la confiance qu'il m'a accordée, pour ses conseils judicieux, sa rigueur scientifique et pour les conditions matérielles, financières et humaines qu'il a su instaurer et qui ont contribué au succès de ce travail.

Je voudrais aussi remercier le professeur Luc Robillard, mon codirecteur de recherche, pour sa disponibilité et ses précieux conseils scientifiques, pour ses qualités personnelles et sa grande expertise dans le domaine du transfert de chaleur et de la mécanique des fluides.

Je tiens également à adresser mes remerciements aux membres du jury de ma thèse les professeurs Michel Prud'homme, René Kahawita et Ziad Saghir pour m'avoir fait l'honneur de passer mes travaux en revue et d'avoir pris le temps de lire cette thèse.

Je remercie le Conseil national de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) pour leur support financier fourni par le biais du programme de bourse ES-B pour la réalisation de ce travail.

Je désire également remercier les docteurs Ahmed Mahidjiba, chercheur à environnement Canada, et Mamou Mahmoud, chercheur au CNRC, qui m'ont initié au domaine du transfert de chaleur et de la mécanique des fluides. Je les remercie aussi pour leur aide, leurs conseils judicieux et leurs connaissances qu'ils ont partagés avec moi sans hésitation ainsi qu'à leur appui tout au long de cette thèse.

Mes vifs remerciements vont également à monsieur Omar Toukal, responsable informatique du département pour son aide, sa disponibilité, son support et son amitié.

Mes remerciements s'adressent également à Khalid Benhadji, Boutana Nabil, Azzedine Allaoui, Youssef Halli, Benzine Toufik de la section aérothermique et Marwan el Rich, Louis Moglo de la section Mécanique Appliquée et Mouloud Gougam et Kalla Zaky de la section Design de l'École Polytechnique pour leur coopération, leur amitié et pour les fructueuses discussions que nous avons eues.

Je remercie également, Ahmed Mahidjiba, Si Youssef Sichaib, Karim Settouane, Adel Goulamallah, Zoheir Bougriou, Youssef Sahnoune, Naim Himrane, Djamel Esselami et Abdelouhad Mustapha, membres du bureau exécutif du CCA pour toutes les années de bénévolats inoubliables passées au service de la communauté.

Mes remerciements vont aussi à mon frère Dridi Wahab pour son soutien, son aide et sa générosité sans égale. Merci Houba.

Enfin, j'aimerais dire un gros merci et exprimer mon extrême gratitude à toute ma famille pour leur patience et leurs encouragements tout au long de ces années d'étude et de recherche. Je remercie mon épouse Nassira pour sa patience et ses encouragements inépuisables. Je remercie énormément mes parents Amor et Nissa, Rabira et Madjid qui ont été présents avec moi depuis le début ainsi que mes frères et sœurs Zaky, Sara, Houssam, Nesrine, et Hannane sans oublier mes adorables petites nièces Asmaa, Soumia et Lili.

RÉSUMÉ

Dans les dernières décennies, les transferts de chaleur et de masse en milieu poreux ont été largement étudiés et ce, à cause de leurs applications potentielles dans les domaines technologiques, physiques, chimiques et microbiologiques. À titre d'exemple, nous citons les applications telles que la croissance cristalline où l'on essaie d'obtenir un monocristal à partir d'un mélange fondu, la dynamique du noyau terrestre, siège d'une solidification par ségrégation, la fusion des icebergs, la convection solaire, la pollution des sols et la géologie. Dans l'ensemble des investigations menées dans ce cadre, l'objectif primaire était toujours de comprendre les différents mécanismes résultant des mouvements convectifs engendrés. Dans toutes ces situations, les forces de volume sont responsables de la naissance de ces mouvements convectifs. Notons que ces forces de volume sont soit d'origine thermique (différence de température), soit d'origine solutale (différence de concentration). D'ailleurs, c'est pour cette raison que l'écoulement ainsi induit prend le nom « thermosolutal » ou « doublement diffusif ».

La présente thèse porte sur l'étude de la convection naturelle thermosolutale au sein d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire confiné dans une enceinte de forme rectangulaire. Le cas de cavité allongée ($A \gg 1$) est considéré dans cette étude. Diverses conditions aux frontières thermiques et solutales de type Neumann ont été appliquées. Comparativement au cas de la convection thermique qui a fait l'objet de plusieurs études dans le passé, cette configuration thermosolutale a reçu en revanche peu d'attention. L'écoulement convectif résultant de la présence simultanée de gradients de température et de concentration dans un milieu poreux est régi par les lois classiques de Darcy. Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la concentration ont été déduites en tenant compte de l'approximation de Boussinesq.

Les écoulements engendrés au sein du système proposé dans le présent travail sont régis par un ensemble d'équations différentielles non linéaires et fortement couplées. Les paramètres de contrôle de ces mouvements convectifs sont le nombre de Rayleigh

thermique, R_T , le rapport des forces de volume N , le rapport de forme de la cavité, A , le nombre de Lewis, Le et les coefficients d'intensité de flux thermique et solutal, α , β , γ et δ .

Deux approches distinctes et complémentaires ont été utilisées. Pour la première, il s'agit de développer une solution analytique en se basant sur l'hypothèse d'un écoulement parallèle et stationnaire. Dans la deuxième approche, il s'agit de résoudre numériquement les équations gouvernantes en utilisant la méthode des différences finies. Les résultats obtenus ont montré un excellent accord entre les prévisions analytiques et les simulations numériques. Dans cette étude, l'effet des paramètres de contrôle sur l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse dans le système a été déterminé. Dans cette thèse, nous nous sommes penchés sur deux configurations dont la première est la cavité horizontale et la seconde est verticale.

ABSTRACT

The heat and/or mass transfers in porous media have been the subject of a great number of investigations during the last decades. This continuous interest is due to the occurrence of these transfers in many technological applications, physical, chemical and microbiological, resulting in a vast field of applications. For example, the crystalline growth where one tries to obtain a monocrystal from a melted mixture, the dynamics of the terrestrial core, where solidification by segregation occurs, the fusion of the icebergs, the solar convection and the pollution of the grounds and geology. In all these situations, the volume forces generating the convective movement consist of two parts, one coming from the difference in temperature and the other from the difference in concentration. For this reason, the flow thus induced is called thermosolutal or double diffusive.

The present thesis deals with on the study of the natural thermosolutal convection within a porous medium saturated by a binary fluid and confined in a rectangular enclosure. The enclosure has a variable aspect ratio A and is subjected to thermal and solutal boundary conditions of Neumann type. This configuration has received little attention in the past, the majority of the cases treated being limited to the case of the pure thermal convection. The convective flow resulting from the simultaneous presence of temperature and concentration gradients is governed by the traditional laws of conservation, i.e, the conservation equations of mass, momentum, energy and concentration within the framework of the Boussinesq approximation.

The flow generated is thus governed by a system of strongly coupled non linear differential equations. The non dimensional governing parameters are the thermal Rayleigh number R_T , the aspect ratio A , the Lewis number Le , the buoyancy forces N and the constant coefficients α, β, γ and δ who give the intensity of the heat and mass fluxes.

The original aspect of this thesis consists in the development of solution methods of this problem. Effective and precise solutions obtained from those methods convective movement obtained, when all the walls of the cavity are active (when constant mass and heat fluxes being applied simultaneously to each wall). Two distinct and complementary approaches were used. An analytical solution, based on the assumption of a parallel and stationary flow was derived. A numerical solution based on finite differences was developed, aimed at solving the temporal and two-dimensional basic equations. A good agreement was obtained between the analytical predictions and the numerical simulations of the solution for various values of the governing parameters. As matter of fact, our study were centered on the influence of the control parameters, on the evolution of the flow structure and on the heat and mass transfers characterizing in the system. The horizontal and vertical orientation of the cavity was also considered.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCEMENTS	v
RÉSUMÉ	vii
ABSTRACT.....	xii
TABLE DES MATIÈRES	xi
LISTE DES FIGURES	xiv
LISTE DES TABLEAUX.....	xviii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : REVUE DE LITTÉRATURE	5
1.1 Introduction.....	5
1.2 Historique de la convection double diffusive en milieu poreux	6
CHAPITRE II : FORMULATION DU PROBLÈME	18
2.1 Définition du problème.....	18
2.2 Hypothèses de recherche	18
2.3 Équations gouvernantes dimensionnelles	20
2.3.1 Équation de conservation de la masse	20
2.3.2 Équation de mouvement	21
2.3.3 Équation de l'énergie	21
2.3.4 Équation de concentration	22
2.4 Équations gouvernantes adimensionnelles	22
2.5 Conditions initiales et aux frontières	24
2.5 Transfert de chaleur et de masse.....	25

CHAPITRE III : SOLUTION ANALYTIQUE	27
3.1 Introduction	27
3.2 Approximation de l'écoulement parallèle	27
3.2.1 Cas ou $\bar{A} > 0$	30
3.2.2 Cas ou $\bar{A} < 0$	31
3.2.3 Cas ou $\bar{A} = 0$	32
CHAPITRE IV : SOLUTION NUMÉRIQUE	34
4.1 Introduction	34
4.2 Discrétisation des équations gouvernantes	36
4.2.1 Équation de l'énergie et de la concentration	36
4.2.2 Équation de mouvement	40
4.2.3 Conditions frontières	41
4.3 Validation du code de calcul	42
CHAPITRE V : RÉSULTATS ET DISCUSSIONS	45
5.1 Introduction	45
5.2 Cavité horizontale ($\theta = 0^\circ$)	45
5.2.1. Cavité soumise à un flux de chaleur et de masse verticaux et un flux de chaleur horizontal	45
5.2.1.1 Convection en absence du chauffage latérale $\beta = 0$	48
5.2.1.2 Convection en présence du chauffage latérale $\beta \neq 0$	52
5.2.2. Cavité chauffée par le coté et soumise à un flux de masse par le bas	66
5.3 Cavité verticale ($\theta = 90^\circ$) chauffée par le bas et soumise à un flux de masse sur le côté	73
5.3.1 Régime thermique dominant ($N \ll 1$)	76
5.3.2 Régime solutal dominant ($N \gg 1$)	78
5.3.3 Régime intermédiaire ($N \approx 1$)	79

CONCLUSION.....	89
RÉFÉRENCES	93

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Définition du modèle physique : cavité rectangulaire inclinée d'un angle θ par rapport au plan horizontal soumise à des flux de chaleur et de masse croisés	19
Figure 4.1	Représentation du maillage du système physique	35
Figure 5.1	Modèle physique, Cas 1	47
Figure 5.2	Diagrammes de bifurcation pour $Le=10$; a) $Rs=0$, convection thermique pure; b) $Rs=10$, contribution solutale déstabilisante; c) $Rs=-10$, contribution solutale stabilisante.....	49
Figure 5.3	Tracé des lignes de courant Ψ , température T , concentration S et densité $\bar{\rho} = -(T + NS)$ pour $Rs=10$, $Le=10$, $A=4$; a) $R_T=5$, b) $R_T=25$	50
Figure 5.4	Tracé des lignes de courant Ψ , température T , concentration S et densité $\bar{\rho} = -(T + NS)$ pour $Rs=10$, $Le=10$, $A=4$; a) $R_T=5$, b) $R_T=25$	50
Figure 5.4.	Surface de solution donnant Ψ_c en fonction de R_T et β pour $Le=10$ $Rs=20$, b) $Rs=-20$	53
Figure 5.5	Intensité de l'écoulement Ψ_c en fonction de R_T pour $Rs=20$, $Le=10$ et de l'intensité du chauffage latérale $\beta=0$ et 0.1	55
Figure 5.6	Tracé des lignes de courant Ψ , température T , concentration S et densité $\bar{\rho} = -(T + NS)$ pour $R_T=25$, $Rs=20$, $Le=10$, $A=4$ et $\beta=0.1$; a) solution naturelle et b) solution antinaturelle	57

Figure 5.7	Intensité de l'écoulement Ψ_c en fonction de β pour $Rs = 20$, $Le = 10$; a) $R_T = -2$, b) $R_T = -8$ et c) $R_T = 10$ (— solution stable, --- solution instable).....	59
Figure 5.8	Courbes de bifurcation en fonction de R_T et β pour $Rs = -20$ et $Le = 5$; a) intensité de l'écoulement Ψ_c , b) nombre de Nusselt Nu et c) nombre de Sherwood Sh (— solution stable, --- solution instable)	60
Figure 5.9	Intensité de l'écoulement Ψ_c en fonction de R_T pour $Rs = -20$, $Le = 10$ et $\beta = 0.005$	63
Figure 5.10	Tracé des lignes de courant Ψ , température T et concentration S pour le cas $Rs = -20$, $R_T = 18$, $Le = 10$, $A = 8$ et $\beta = 0.005$. a) solution naturelle et b) solution antinaturelle	65
Figure 5.11	Modèle physique, Cas 2	66
Figure 5.12	Effet de N et R_T sur Ψ_c pour $Le = 10$	68
Figure 5.13	Lignes de courant (haut), température (milieux) et concentration (bas) pour $R_T = 20$, $A = 4$, $Le = 10$ a) $N = -5$, $\Psi_c = -1.755$, $Nu = 2.272$, $Sh = 6.013$, b) $N = 2.3$, $\Psi_c = -0.986$, $Nu = 1.134$, $Sh = 3.180$ c) $N = 5$, $\Psi_c = -0.038$, $Nu = 1.000$, $Sh = 1.049$	69
Figure 5.14	Lignes de courant (haut), température (milieux) et concentration (bas) pour $R_T = 100$, $A = 4$, $Le = 10$ et $N = 3$ a) $\Psi_c = -1.733$, $Nu = 1.321$, $Sh = 2.152$ et b) $\Psi_c = -0.0833$, $Nu = 1.002$, $Sh = 1.185$	71
Figure 5.15	Effet de N et R_T sur Ψ_c pour $Le = 10$	72

Figure 5.16	Lignes de courant (haut), température (milieux) et concentration (bas) pour $R_T = 2$, $A = 4$, $Le = 10$ et $N = -10$ a) $\Psi_C = 0.433$, $Nu = 1.079$, $Sh = 3.719$ et b) $\Psi_C = -0.660$, $Nu = 1.182$, $Sh = 4.611$	72
Figure 5.17	Représentation schématique du modèle physique, Cas 3	74
Figure 5.18	Résultats numériques pour $R_T = 400$, $Le = 2$, $N = 0.1$ et $A = 8$; (a) lignes de courant (gauche), température (centre) et concentration (droite), (b) profils de la fonction de courant, la température et la concentration, à $x = 0$ ($\Psi_C = 8.714$, $\Delta T^* = 7.094$, $Sh = 5.537$)	75
Figure 5.19	Diagramme de bifurcation pour $N \ll 1$. (a) Ψ_C en fonction de R_T et (b) ΔT^* en fonction de R_T	77
Figure 5.20	Effet du nombre de Rayleigh solutal R_S pour $R_T \ll 1$ sur (a) Ψ_C/Le et (b) Sh	80
Figure 5.21	Effet du nombre de Rayleigh thermique R_T et du rapport des forces de volume N pour $Le = 10$ sur (a) Ψ_C et (b) ΔT^* (c) Sh et (d) nombre de Rayleigh critique R_{TC} en fonction de N	81
Figure 5.22	Tracé des lignes de courant Ψ , température T , concentration S pour $Le = 10$, $N = 0.01$ et $R_T = 100$, (a) solution antinaturelle et (b) solution naturelle.....	83
Figure 5.23	Effet du nombre de Rayleigh thermique R_T sur Ψ_C pour $Le = 10$ et $R_S = 10$	85

Figure 5.24 (a) Effet de N et du nombre de Rayleigh thermique R_T sur l'intensité de l'écoulement Ψ_C pour $Le = 10$ (b) Effet du nombre de Rayleigh thermique R_T sur le rapport des forces de volume critique N_C 86

Figure 5.25 (a) Effet de N et du nombre de Lewis Le sur l'intensité de l'écoulement Ψ_C pour $R_T = 50$ (b) Effet du nombre de Lewis Le sur le rapport des forces de volume critique N_C 88

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum et du nombre de Nusselt avec les résultats donnés par Kimura et al.[66] et Mahidjiba [73]	44
Tableau 4.2	Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum, nombre de Nusselt et nombre de Sherwood avec les résultats donnés par Benhadji [75] et Mamou et al. [50].....	44

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

A	rapport de forme de la cavité, L' / H'
C_s	gradient de concentration dans la direction x
C_T	gradient de température dans la direction x
D	diffusivité massique
Da	nombre de Darcy, K/H'^2
H'	hauteur de la cavité
j'	flux de masse constant par unité de surface
K	perméabilité du milieu poreux
k	conductivité thermique
g	accélération de la pesanteur
L'	largeur de la cavité
Le	nombre de Lewis, α_f / D
N	rapport des forces de volumes, $\beta_s \Delta S' / \beta_T \Delta T'$
Nu	nombre de Nusselt
q'	flux de chaleur constant par unité de surface
R_T	nombre de Rayleigh thermique, $g\beta_T KH' \Delta T' / \alpha \nu$
R_S	nombre de Rayleigh solutal, $NLeR_T$
Re	nombre de Reynolds, $V' \sqrt{K} / \nu$
R_{Tc}^{sup}	nombre de Rayleigh thermique supercritique
Ra_{Tc}^{sub}	nombre de Rayleigh thermique sous-critique
P_d	pression dynamique
S	concentration adimensionnelle, $(S' - S'_0) / \Delta S'$
Sh	nombre de Sherwood

S'_0	concentration de référence à $x' = 0, y' = 0$
$\Delta S'$	concentration caractéristique, $j'H'/D$
ΔS	différence de concentration adimensionnelle
T	température adimensionnelle, $(T' - T'_0) / \Delta T'$
t	temps adimensionnel, $t'\alpha / \sigma H'^2$
T'_0	température de référence à $x' = 0, y' = 0$
$\Delta T'$	écart de température, $q'H'/k$
u	vitesse adimensionnelle dans la direction x , $u'H'/\alpha$
v	vitesse adimensionnelle dans la direction y , $v'H'/\alpha$
x, y	coordonnées cartésiennes adimensionnelles du système, $(x', y') / H'$

SYMBOLES GRECS

$\alpha, \beta, \gamma, \gamma$	coefficients pour le contrôle des flux
α_f	diffusivité thermique, $k / (\rho C)_f$
β_s	coefficient d'expansion solutale
β_T	coefficient d'expansion thermique
ϕ	porosité du milieu poreux
ε	porosité adimensionnelle du milieu poreux, ϕ / σ
ν	viscosité cinématique du fluide
μ	viscosité dynamique du fluide
θ	angle d'inclinaison de la cavité
θ_s	champs de concentration adimensionnelle
θ_T	champs de température adimensionnelle
ρ	densité du fluide
$(\rho C)_f$	capacité calorifique du fluide

$(\rho C)_p$	capacité calorifique du milieu poreux saturé
σ	rapport des capacités calorifiques $(\rho C)_p / (\rho C)_f$
Ψ	fonction de courant adimensionnelle, Ψ' / α
Ψ_c	valeur de la fonction de courant au centre de la cavité

EXPOSANTS

'	variable adimensionnelle
sup	supercritique
sub	soucritique

INDICES

max	maximum
moy	moyen
min	minimum
c	centre
o	référence

INTRODUCTION

L'étude de la convection naturelle a suscité et suscite encore aujourd'hui l'intérêt de nombreux scientifiques et industriels. Les recherches menées, dans ce domaine, s'étendent sur un peu plus d'un siècle. Un nombre considérable de travaux a été entrepris, suite à la découverte du phénomène par les expériences de Bénard [1] et l'analyse théorique de Rayleigh [2] au début du XXème siècle, jusqu'à présent.

Dans un sens général, la convection désigne l'ensemble des mouvements naturels de la matière qui a tendance à monter grâce à la poussée d'Archimède lorsqu'elle est chaude (donc moins dense) et à redescendre une fois refroidie. Elle tient une place importante dont on n'a pas toujours conscience. Elle assure les échanges de chaleur dans la plupart du temps dans notre environnement quotidien. De l'air à l'intérieur des maisons comme celui de l'atmosphère, à l'eau dans une casserole, ou encore les rivières et des océans sont autant d'exemples où ce phénomène se manifeste. Ainsi, pendant notre sommeil, on risquerait d'être étouffé si les mouvements de convection (mouvements provoqués par notre respiration) ne mélangeaient pas rapidement l'air expiré avec de l'air frais. Plus encore, la pollution due aux gaz émis par les automobiles et les effluents industriels doit être évacuée assez rapidement par les mouvements atmosphériques, sinon l'air deviendrait irrespirable. Cependant, heureusement, la température étant plus élevée au sol qu'en altitude, des mouvements de convection assure cette évacuation.

Depuis une vingtaine d'années, un autre type de transport convectif en milieux fluides ou poreux attire l'attention des chercheurs, c'est la convection double diffusive ou thermosolutale qui se manifeste en présence de deux composants différents (par exemple la chaleur et la salinité) ayant différents taux de diffusion. Par exemple, si une couche d'eau plus chaude et plus salée recouvre une couche d'eau douce et plus fraîche il en résulte que la densité de la couche supérieure est égale ou moindre que celle de la couche inférieure. L'eau la plus salée à l'interface perdra de la chaleur vers l'eau la plus fraîche

au-dessous, plus rapidement qu'elle diminuera sa concentration en sel en raison des différences dans les diffusivités moléculaires.

Le phénomène de la double diffusion a été découvert la première fois en 1959 par Stommel [3] dans un contexte océanographique, et sa formulation théorique a été réalisée par Stern [4]. Il peut se produire dans les milieux liquides ou poreux, tels que les magmas, stellaires et planétaires, métaux liquides, océans, lacs et l'atmosphère, et aussi dans beaucoup d'applications technologiques en ingénierie telles que les étangs solaires, les réservoirs pour le stockage de gaz naturel et de déchet radioactif, la fabrication du cristal, le transport de polluant dans le sol....etc.

La convection thermosolutale dans un milieu poreux confiné dans une cavité rectangulaire a été étudiée considérablement ces dernières années. Le livre de Nield et Bejan [5] fournit un résumé complet sur les recherches numériques ou expérimentales déjà accomplies. Un système s'est vite imposé en tant que modèle d'étude : la cellule de Rayleigh-Bénard. Il a servi de référence à de nombreux travaux expérimentaux, théoriques et depuis peu numériques. Une telle cellule consiste en une couche poreuse saturée de fluide binaire prise entre deux plans horizontaux. La convection est entretenue par une différence de température et de concentration constante entre les deux plans.

La résolution d'un problème type de convection double diffusive en milieux poreux se ramène à prédire les champs de température, de concentration et de vitesse ainsi que l'intensité de l'écoulement en fonction des divers paramètres du problème. Il est également important de prédire les taux de transferts thermique (nombre de Nusselt) et massique (nombre de Sherwood) correspondant.

Le présent travail, de nature numérique et analytique, traite de la convection thermosolutale en milieu poreux. Il a pour objectif d'aboutir à une modélisation complète des écoulements et des transferts thermiques et solutaux couplés, dans le cas d'une cavité de géométrie rectangulaire remplie d'un milieu poreux homogène et saturé par un fluide

binaire. Toutes les études précédentes portent sur des cas où on applique des flux de masse et de chaleur constants dans la même direction. Cependant, dans cette étude nous traiterons le cas de flux croisés sur les parois de la cavité avec différentes conditions aux limites et nous nous intéressons aux effets ainsi engendrés sur la structure de l'écoulement interne et sur les transferts de chaleur et de masse dans le système. Les approximations de Darcy [6] et de Boussinesq [7] sont adoptées pour décrire l'écoulement doublement diffusif dans la cavité.

Le nombre de Rayleigh critique correspondant à la naissance de la convection est déterminé. L'écoulement après le point de bifurcation, pouvant être stationnaire (solution issue d'une bifurcation fourche) ou instationnaire oscillant (solution issue d'une bifurcation de Hopf), a été représenté en fonction des paramètres de contrôle du problème (rapport de forme, rapport de forces de volume et le nombre de Rayleigh thermique). Les domaines d'existence de chaque type de bifurcation sont déterminés en fonction des paramètres adimensionnels du problème. De plus, on a mis en évidence l'existence de solutions sous-critiques ainsi que des solutions multiples pour un même ensemble de paramètres. Les diagrammes de bifurcations représentant des branches de solutions stables et instables ont été trouvés et tracés en fonction du nombre de Rayleigh thermique et solutal.

Le présent travail est structuré de la façon suivante :

Dans un premier temps, nous présentons le problème étudié au chapitre : Introduction. Dans le premier chapitre, un travail de recherche bibliographique portant sur la convection thermosolutale dans les milieux poreux sera présenté. Il sera suivi dans le second chapitre par la formulation mathématique du problème où les équations de bases gouvernant le système et les conditions aux frontières associées seront présentées. Ensuite on décrira les méthodes de résolution utilisées dans le cadre de cette étude à savoir, la méthode analytique et numérique. L'objet du troisième chapitre concerne la solution analytique qui utilise l'approche de l'écoulement parallèle. Le quatrième

chapitre quant à lui est consacré à la résolution numérique des équations décrivant l'écoulement par la méthode des différences finies

Le cinquième chapitre porte sur les différents résultats obtenus dans cette thèse et leurs discussions. Deux cas sont présentés. Le premier concerne une cavité poreuse horizontale, dont les parois horizontales sont soumises à des flux uniformes de chaleur et de masse, alors que les parois verticales latérales sont exposées à un flux constant de chaleur d'intensité $\beta q'$ (β un paramètre permettant de contrôler l'intensité du flux). Nous considérons également une cavité soumise à un flux de masse stabilisant sur la paroi horizontale en plus d'un flux de chaleur latéral. Enfin dans le deuxième cas, nous traitons une cavité verticale chauffée par le bas et soumise à un flux de masse sur les cotés.

Enfin, une conclusion générale retraçant les principaux résultats trouvés le long de cette étude ainsi que les perspectives futures feront l'objet du chapitre six.

CHAPITRE I

REVUE DE LITTÉRATURE

1.1 Introduction

La convection naturelle a été largement étudiée pendant les dernières décennies. La littérature sur le sujet est très abondante et la majorité de ces travaux ont été consacrés à la détermination des conditions nécessaires à la naissance des mouvements convectifs induits par des gradients de densité résultant seulement de l'effet de gradients de température. Par ailleurs, la convection thermosolutale ou double diffusive se produit en présence de plus d'une source de forces de volume qui cohabitent et induisent l'écoulement. Dans le cas le plus fréquent, les deux agents responsables de ces mouvements convectifs sont les gradients thermiques et de concentrations. Ils peuvent agir ensemble ou bien en opposition. Des comportements dynamiques intéressants et compliqués peuvent en résulter, surtout quand les deux forces sont en opposition. Dans la plupart des cas, ce phénomène peut se produire dans les liquides, tels que les océans, ou dans les milieux poreux, tel que dans les systèmes géothermiques. Rappelons que les milieux poreux sont définis généralement comme un ensemble de grains solides ou d'agrégats autour desquels existent des espaces vides appelés pores, qui peuvent être interconnectés ou non et saturé par un fluide. La matrice constituée des grains solides est rigide ou peut subir des petites déformations.

De nombreuses recherches ont été menées sur la modélisation du phénomène de la convection double diffusive. Une synthèse des travaux effectués dans le passé est présentée dans le livre de Nield et Bejan [5] pour les milieux poreux et Brandt et Fernando [8] pour les milieux fluides. L'objet de ce chapitre est de procéder à une revue des travaux existants et de mettre en évidence les lacunes qui existent encore en terme de modélisation du transfert de chaleur et de masse en milieux poreux.

1.2 Historique de la convection double diffusive en milieu poreux

L'intérêt pour la convection double-diffusive dans les milieux poreux a commencé après que Nield [9] ait étudié la stabilité d'une couche poreuse horizontale infinie, chauffée et salée par le bas. En utilisant l'analyse de la stabilité linéaire, il a déterminé les valeurs des nombres de Rayleigh critiques caractérisant le début de la convection stationnaire et surstable pour différentes conditions aux frontières. Il a montré que des écoulements convectifs oscillants peuvent se déclencher à des Rayleigh inférieurs au nombre de Rayleigh supercritique lorsque le soluté joue un rôle stabilisant et la chaleur celui d'un déstabilisant.

L'analyse de Nield a été réétudiée d'une manière plus complète par Taunton et al [10] qui l'ont utilisée pour déterminer les conditions pour lesquelles le phénomène de "salt finger" se développe en présence de gradients thermiques et solutaux. Trois régimes convectifs ont été trouvés. Un premier régime dit stable caractérisant l'état de repos du fluide est suivi d'un second régime appelé oscillant caractérisant l'apparition de la convection oscillante. La zone d'apparition de ces deux régimes est délimitée par le nombre de Rayleigh critique surstable et le nombre de Rayleigh critique oscillant. Le dernier régime est le régime direct qui caractérise l'apparition de la convection marginale quand le nombre de Rayleigh est supérieur au nombre de Rayleigh critique marginal. Notons aussi les travaux de Rubin [11], basés sur la même configuration. Cet auteur a souligné l'effet induit par un profil non linéaire de la salinité sur le déclenchement de la convection double diffusive. Rubin [12] s'intéressa aussi au phénomène de la dispersion du sel. Il a trouvé que la dispersion de la matière dissoute réduit l'effet stabilisateur du profil de la salinité.

Tyvand [13] a étudié théoriquement le début de la convection thermohaline dans une couche poreuse horizontale homogène et anisotrope sauf pour la perméabilité. La diffusivité thermique et la diffusivité solutale sont supposées isotropiques dans la direction horizontale. Les résultats présentés montrent qu'il n'y a aucune différence entre

le diagramme de stabilité pour les milieux poreux anisotropes et isotropes. Plus récemment d'autres auteurs se sont intéressés à ce phénomène dont Malashetty [31] et Nguyen et al. [32]. Le premier auteur a utilisé l'analyse de la stabilité linéaire pour déterminer l'effet des courants thermo-convectifs anisotropes et les nombres de Rayleigh critiques pour des mouvements marginaux et surstables en présence des effets Soret et Dufour. Le second auteur a traité la convection naturelle induite par les transferts de la chaleur et de la masse combinés dans une cavité remplie de deux couches poreuses anisotropes saturées avec un fluide binaire. Les résultats des expériences ainsi réalisées ont été validés par un modèle numérique (méthode pseudo-spectrale utilisant des polynômes de Chebyshev comme fonctions de base). Ces résultats montrent des différences remarquables parmi l'écoulement, la température, et les champs de concentration, selon l'orientation des conditions aux frontières des champs de la température et de la concentration. Les taux globaux de transfert thermique peuvent être ou ne pas être sensibles aux nombres de Rayleigh. Plus récemment, Bennacer et al. [60] dans une étude plus générale, ont considéré une cavité verticale soumise à des températures et des concentrations constantes sur les parois verticales. Les forces de volume induisant l'écoulement sont supposées coopérantes. L'analyse d'échelle a été utilisée dans les cas limites thermique pure ($N \ll 1$) et solutal pure ($N \gg 1$) en régime de couche limite. Ils ont démontré que les propriétés anisotropiques du milieu poreux affectent considérablement les taux de transfert de la chaleur et de la masse dans la cavité. Bera et Khalil [62] ont, quant à eux, introduit des modifications au niveau des conditions aux frontières, en considérant des flux de chaleur et de masse sur les parois verticale. Une attention particulière a été portée à la compréhension de l'effet que produisent les paramètres d'anisotropie sur l'existence des solutions oscillantes instables et des solutions multiples en fonction du rapport des forces de volume. Ils ont observé qu'une petite rotation du tenseur de la perméabilité provoque un changement important dans l'intensité de l'écoulement et sur les profils de la température et de la concentration.

Les travaux expérimentaux de Griffiths [14] ont permis de mesurer les valeurs des flux de chaleur et de concentration dans une mince interface diffusive entre deux couches convectives ayant des valeurs initiales différentes pour la température et la concentration. Il a souligné l'importance des gradients solutaux au niveau de l'interface entre les deux couches et trouvé que le rapport des forces volume N est de l'ordre de εLe^{-1} , où ε représente la porosité et Le le nombre de Lewis, respectivement. Ces résultats ont permis à Griffiths d'expliquer certains phénomènes géothermiques dans la région de Wairakei en Nouvelle-Zélande.

Le seuil de la convection à amplitude finie dans une cavité poreuse allongée saturée par un fluide binaire a été étudié par Rudraiah et al [15]. Les auteurs ont utilisé une analyse de stabilité non linéaire basée sur une représentation tronquée des séries de Fourier. Les effets des nombres de Prandtl et de Lewis sur la convection ont été considérés.

Brand et Steinberg [16] ont étudié la convection à amplitude finie près du seuil de la convection stationnaire et surstable. L'évolution oscillatoire temporelle des taux de transfert de la chaleur et de la masse a été également mise en évidence par ces auteurs. Dans une autre publication, Brand et Steinberg [17] se sont intéressés à l'effet Soret en milieux poreux (gradient de concentration induit par un gradient de température dans un mélange binaire). Ils ont constaté qu'une instabilité stationnaire ou oscillante peut se produire comme première bifurcation selon le signe et l'intensité du coefficient de Soret. Ils ont aussi déterminé les mécanismes qui créent ces instabilités en se servant de bilans énergétiques.

Khair et Bejan [18] ont considéré le phénomène de la convection thermosolutale qui survient au voisinage d'une plaque verticale plongée dans un milieu poreux saturé par un fluide. Une analyse d'échelle a permis d'identifier quatre régimes possibles de convection selon les valeurs des forces de volume N et le nombre de Lewis Le . Le problème de la couche limite a été ensuite résolu numériquement par une méthode de similarité pour une

gamme de $-5 \leq N \leq 4$ et $1 \leq Le \leq 100$. Les résultats numériques étaient en bonne concordance avec ceux de la méthode analytique.

Trevisan et Bejan [19] ont utilisé une méthode numérique pour étudier la convection double diffusive dans une cavité carrée poreuse avec des parois verticales maintenues à des températures et des concentrations constantes et des parois horizontales adiabatiques et imperméables. Une analyse d'échelle a été utilisée pour traiter ce problème dans les cas limites des écoulements entraînés par les effets thermiques ou massiques et de dégager les divers effets qui influencent les résultats globaux de transfert de chaleur et de masse. Il a été trouvé que l'écoulement du fluide était possible au-delà d'un certain nombre de Rayleigh critique quand $Le \neq 1$. Cependant, le mouvement du fluide disparaît complètement pour $Le = 1$ et $N = -1$. Les résultats de cette analyse ont été trouvés en accord avec les calculs numériques. Peu après, Trevisan et Bejan [20] ont réétudié analytiquement et numériquement le problème précédant, mais cette fois en considérant une cavité poreuse rectangulaire dont les faces verticales sont soumises à des flux de chaleur et de masse uniformes. Une solution analytique linéarisée d'Oseen a été présentée en régime de couche limite pour $Le = 1$. Par contre, une méthode de similitude a été utilisée pour $Le > 1$ dans le cas d'un écoulement doublement diffusif dominé par les effets thermiques.

Poulikakos [21] a présenté un travail sur l'analyse de la stabilité linéaire dans une couche poreuse horizontale en double diffusion. Les paramètres critiques du problème sont déterminés et les frontières définissant les régions des régimes de convection directs et surstables sont obtenues. L'écoulement dans la matrice poreuse est modélisé en utilisant l'équation de Darcy Brinkman qui tient compte du frottement dû au cisaillement. Des résultats pour le cas limite d'un fluide classique ont également été obtenus. Parallèlement, Taslim et Narusawa [22] ont prouvé qu'il y a une analogie entre les effets Soret et Dufour et la double diffusion dans le sens que les équations peuvent être mises sous la même forme mathématique.

Mehta et Nandakumar [23] ont étudié l'effet de l'hétérogénéité du milieu dans le cas de la convection naturelle dans une couche poreuse verticale. Les écoulements sont engendrés par des flux de chaleur et de masse uniformes imposés le long des deux parois verticales de la couche poreuse. Ils ont trouvé que l'effet de l'hétérogénéité est sensible pour des variations importantes de perméabilité et de grandes valeurs du nombre de Rayleigh, du nombre de Lewis et du rapport de forces de volume. Les estimations des nombres de Nusselt et de Sherwood dans de telles conditions sont très différentes de celles obtenues pour un milieu homogène. Le transfert de masse par convection thermique à grand nombres de Rayleigh (50-2000) dans un milieu poreux chauffé par le bas a été traité théoriquement et numériquement par Trevisan et Bejan [24]. Les prédictions d'une analyse d'échelles proposée par ces auteurs se sont avérées en bon accord avec leurs résultats numériques.

Murray et Chen [25] ont été les premiers à étudier expérimentalement la convection double diffusive dans un milieu poreux. Leur dispositif, composé d'une boîte métallique remplie de billes de verre saturées avec de l'eau distillée, était soumis à des flux de masse et de chaleur. Une bonne concordance pour le nombre de Rayleigh thermique critique a été obtenue entre les expériences et la théorie de la stabilité linéaire. Fournier [26] a appliqué le modèle de la convection double diffusive dans l'étude des roches hétérogènes des systèmes géothermiques réels (Salton sea). Ce modèle tient compte des gradients solutaux verticaux et latéraux. Il a proposé pour les futures études, de tenir compte d'une part de la décroissance de la salinité et la température du bas vers le haut et du centre vers les côtés du système, et d'autre part d'un transfert de chaleur très élevé au-dessus du système accompagné d'une densité relativement uniforme du fluide.

Rosenberg et Spera [27] ont démontré numériquement que la dynamique des écoulements pour des nombres de Rayleigh et Lewis donnés dépend fortement du rapport des forces de volume dans le cas d'une couche poreuse chauffée par le bas. Ils ont constaté que l'écoulement évoluait d'un régime convectif permanent vers un régime oscillant chaotique puis vers l'état de repos. Chen et Chen [28] ont considéré la double diffusion

non linéaire dans une couche poreuse horizontale saturée. Le modèle de Darcy avec les termes de Brinkman et de Forchheimer (termes tenant compte des effets visqueux et d'inertie), a été utilisé. Une méthode numérique mixte Galerkin- différences finies a été adoptée pour prédire les limites de stabilités délimitant les différents régimes d'écoulements en fonction du nombre de Rayleigh thermique et solutal. Le cas précédant a été repris par Goyeau et al. [35] qui ont considéré la convection coopérante ($N > 0$). Les résultats numériques se sont avérés en accord avec l'analyse d'échelles en régime de couche limite. Des corrélations pour les transferts de la chaleur et de la masse, Nu et Sh , respectivement ont été proposées. Nithiarasu et al. [36] ont développé un modèle généralisé simulant la gamme entière de l'écoulement de Darcy en milieu poreux jusqu'au cas du fluide pur. Les résultats obtenus montrent l'augmentation des taux de transfert de chaleur et de masse avec le nombre de Darcy. L'influence du rapport de force de volume, du nombre de Rayleigh, du nombre de Biot et du nombre de Darcy sur le transfert de la chaleur et de la masse a été discutée dans une autre publication de Nithiarasu et al. [37]. Ils ont trouvé que le nombre de Sherwood devient constant à mesure que le nombre de Biot augmente.

Karimi-Fard et al. [38] ont décrit numériquement, en utilisant la méthode des volumes finis, l'effet des termes de Forchheimer et de Brinkman sur l'écoulement convectif dans une cavité poreuse carrée. Leur étude a montré comment la variation du nombre de Darcy et Lewis peut affecter l'écoulement au sein de l'enceinte poreuse. Plus récemment, Amahmid et al. [39] et Mamou et al. [43] ont utilisé le modèle de Brinkman pour étudier analytiquement et numériquement la convection naturelle thermosolutale induite dans une couche poreuse verticale soumise à des flux de chaleur et de masse uniformes. Ils se sont intéressés particulièrement au cas où les forces de volume thermiques et solutales sont opposées et de même intensité. Les nombres de Rayleigh critiques caractérisant l'apparition des mouvements convectifs sont calculés analytiquement en fonction des nombres de Lewis et de Darcy (Da). Il a été trouvé que le nombre de Rayleigh thermique critique augmente lorsque Da augmente ou lorsque Le tend vers l'unité. De plus, il a été montré que l'augmentation de Da induit une diminution de l'intensité de l'écoulement et

des transferts thermiques et massiques. Par contre l'augmentation du nombre de Rayleigh cause l'augmentation monotone de l'intensité de l'écoulement. Les résultats du milieu fluide ont été également obtenus à partir de la présente solution pour des nombres de Darcy suffisamment élevés. Parallèlement, Amahmid et al. [49] ont reconsidéré le cas précédant mais cette fois dans une cavité allongée, soumise à des flux de chaleur et de masse sur ces parois horizontales.

Alavyoon [29] a reconsidéré la configuration étudiée précédemment par Trevisan et Bejan [20]. Il a proposé des solutions analytiques et numériques dans le cas où les forces de volume thermiques et solutales coopèrent. Une analyse d'échelle a été également appliquée au problème en considérant des écoulements de type couche limite. La solution analytique développée et basée sur l'hypothèse d'un écoulement parallèle a été trouvée être en bon accord avec les calculs numériques quand le rapport de forme devient assez élevé. Le même problème a été repris par Alavyoon et al [30] dans le cas où les forces de volume thermiques et solutales ont des effets opposés. Ils ont montré que pour une combinaison donnée des paramètres de contrôle, le problème peut avoir plusieurs solutions. Par ailleurs, il a été montré, qu'il est possible d'obtenir une solution fortement convective même dans le cas où les forces de volume thermiques et solutales sont égales, sachant que pour cette situation particulière le repos est une solution exacte du problème.

La convection à amplitude finie dans une cavité poreuse de forme carrée, soumise à des flux horizontaux uniformes de chaleur et de masse a été considérée par Mamou et al [33]. Ils ont montré que pour une même combinaison des paramètres, le problème peut avoir plusieurs solutions quand les forces thermiques et massiques sont opposées et de même ordre de grandeur. Ces solutions sont fortement dépendantes du nombre de Rayleigh thermique et du nombre de Lewis. Les mêmes auteurs [34] ont revu numériquement et analytiquement le problème précédant mais cette fois pour le cas d'une couche poreuse inclinée. La solution analytique, basée sur l'hypothèse d'un écoulement parallèle, a été trouvée être en bon accord avec les résultats numériques. Ils ont observé que les nombres de Nusselt et de Sherwood étaient minimums à proximité de $N = -1$ et que des solutions

multiples étaient aussi possibles. Les nombres de Rayleigh critiques correspondant à l'apparition des mouvements convectifs ont été également déterminés dans le cas limite d'une couche horizontale. L'effet de l'inclinaison de la cavité sur la nature de l'écoulement convectif a été aussi discuté dans leur étude.

Le seuil de développement de la convection double diffusive dans une couche poreuse dans laquelle l'agent stabilisant est celui ayant la diffusivité la plus élevée, a été étudié par Nguyen et al. [40]. Les auteurs ont démontré, en se basant sur la théorie linéaire et non-linéaire de la stabilité, que la convection peut exister à des nombres de Rayleigh au dessous de la valeur supercritique. Mamou et al. [41] (cavité inclinée, chauffée et salée sur ces parois verticales et adiabatiques selon les parois horizontales) et Mamou et al. [44] (cavité inclinée, soumise à des flux de chaleur et de masse sur ces parois verticales et adiabatique selon les parois horizontales) ont développés une méthode numérique basée sur la formulation de Galerkin et la méthode des éléments finis, qui leur a permis d'étudier la stabilité linéaire transitoire en fonction de l'angle d'inclinaison de la cavité, du rapport de forme et du nombre de Lewis. Ils ont démontré que le principe de l'échange de stabilité n'est valide que lorsque la porosité du milieu poreux est égale à l'unité. Les résultats trouvés viennent compléter les travaux de Charrier-Mojtabi et al. [42] qui ont utilisé uniquement la stabilité linéaire.

Sezai et Mohamad [45] ont présenté des résultats pour l'écoulement tridimensionnel dans une cavité poreuse cubique soumise à des gradients de chaleur et de concentration opposés, appliqués sur les parois verticales. Leurs résultats ont indiqué que pour une certaine gamme des paramètres de contrôle, l'écoulement devient tridimensionnel et plusieurs solutions sont possibles. Par conséquent, il est difficile de justifier les prédictions du cas bidimensionnel pour cette gamme de paramètres de contrôle. Ce genre de problème a été récemment considéré par Sezai [48] qui a étudié la même cavité soumise à des flux de chaleur et de masse sur ces parois horizontales. Il identifia 36 structures d'écoulement symétrique en fonction de N , Le et R_T .

Mamou et Vasseur [50], au moyen de la théorie linéaire et non linéaire de perturbation et de l'approximation de l'écoulement parallèle, ont analysé l'instabilité diffusive dans une couche poreuse rectangulaire horizontale dont les parois horizontales sont soumises à des flux de chaleur et de masse. Les résultats indiquent que selon les paramètres de contrôle, quatre régimes différents peuvent exister (diffusive stable, convectif surstable, oscillant et direct). La solution des équations gouvernantes a indiqué que la convection peut apparaître à des nombres de Rayleigh au-dessous de la valeur supercritique. Dans le régime surstable, l'existence des solutions multiples a été démontrée. D'autres auteurs ont trouvé des résultats similaires aux cas précédents mais en considérant des conditions aux frontières variées. Marcoux et al. [51], ont étudié les régimes d'écoulement dans une cavité verticale soumise à des flux de chaleur et de masse. Karimi-Fard et al [52], ont considéré des conditions aux frontières de type Dirichlet (température et concentration constantes sur les parois verticales de la cavité poreuse) et Mojtabi et Charier Mojtabi [53] ont étudié le cas d'une cavité inclinée soumise à des conditions aux frontières de type Neumann.

Mahidjiba et al. [54] ont examiné l'effet des conditions aux frontières thermiques et solutales de type Neumann et Dirichlet, respectivement sur le régime de la convection double diffusive dans une cavité horizontale poreuse. En utilisant l'analyse de la stabilité linéaire, ils ont déterminé trois nombres de Rayleigh critiques à savoir, le Rayleigh supercritique, surcritique et oscillant en mettant en évidence l'influence du paramètre relatif aux forces de volume NLe sur l'évolution de la structure des écoulements. Les auteurs ont montré que si les conditions aux frontières thermique sont de type Dirichlet et solutal de type Neumann, l'écoulement est convectif et sa structure est multicellulaire indépendamment de la valeur du rapport de forme pour $NLe < -1$. Par contre quant $NLe \leq -1$, l'écoulement est inconditionnellement stable selon la stabilité linéaire.

Benhadji et Vasseur [46] ont étudié la convection thermosolutale d'un fluide non newtonien binaire au sein d'une cavité poreuse écrasée. Le modèle de Pascal est utilisé pour simuler le comportement rhéologique du fluide non newtonien. Deux types de conditions aux frontières ont été considérées, à savoir des flux de chaleur et de masse verticaux ou horizontaux. Les auteurs ont montré qu'une augmentation de l'indice de comportement ($n > 1$, c'est à dire fluide dilatant) cause une forte réduction du transfert de chaleur et du transfert de masse. Cependant, les transferts de chaleur et de masse augmentent lorsque l'indice de comportement décroît ($n < 1$, c'est à dire pour des fluide pseudoplastiques).

Chamkha et Hameed [55] ont fait une généralisation des travaux réalisés par Nishimura [56], pour inclure l'inclinaison de la cavité, et ceux de Mamou et al. [41] pour tenir compte du cas où les forces de volume sont différentes de l'unité. Ils ont constaté d'une part, que les mécanismes de transfert de chaleur et de masse et les caractéristiques de l'écoulement sont fortement dépendants de $1/Da$ et de l'angle d'inclinaison. D'une autre part, les nombres moyens de Nusselt et de Sherwood sont minimums pour n'importe quelle valeur de $1/Da$ et pour $N \approx 1.2$. Ils ont aussi démontré que l'augmentation de l'angle d'inclinaison de la cavité diminue le nombre moyen de Nu et Sh quand les forces de volume sont dominées par les effets thermiques.

Abdulmajeed et al. [59], ont présenté des résultats pour une cavité de rapport de forme égal à deux et soumise à des températures et concentrations constantes. Les résultats trouvés montrent que l'écoulement devient instable pour des rapports de forces de volume N variant de 0.8 à 1, dépendamment des conditions initiales. Une extension dans le domaine tridimensionnel de cette dernière étude a été réalisée par Mohamad et Bennacer [61]. Ils ont démontré que la structure de l'écoulement se compose principalement d'un écoulement thermiquement induit de recirculation superposé à un faible écoulement secondaire et se développant en spirales selon la direction transversale. Cependant, quand le rapport des forces de volume $N \approx -1$ (environ -0.8), l'écoulement bifurque selon deux

branches induites thermiquement. Par contre, quand N augmente (plus grand que l'unité dans le sens négatif) l'écoulement se stabilise et diminue en intensité. Les auteurs ont conclu qu'un modèle bidimensionnel est suffisant pour prédire correctement le taux de transfert de la chaleur et de la masse, au moins pour la gamme des paramètres étudiés.

Joly et al. [47] ont étudié l'influence de l'effet de Soret sur la convection naturelle dans une cavité verticale saturée par un fluide binaire. Ils ont montré que l'effet Soret est maximum quand le nombre de Lewis tend vers zéro. Ces auteurs ont montré aussi que pour des grands nombres de Rayleigh, la solution numérique indique l'apparition d'une bifurcation de Hopf. Bahloul et al. [70] ont examiné les écoulements dans une cavité horizontale soumise à des flux verticaux de chaleur et de masse à l'effet Soret. Ils ont démontré que la solution prend la forme d'une bifurcation qui peut être sous-critique ou fourche, dépendamment du rapport des forces de volume, N , et du nombre de Lewis, Le . Avec les mêmes conditions précédentes, le cas de la cavité verticale a été étudié par Boutana et al. [71] qui ont prédits divers types d'écoulements. Ils ont démontré que dans le cas d'un écoulement opposé et au voisinage de $N > -1$, des solutions multiples sont possibles pour des valeurs données des paramètres de contrôle du problème.

Bennacer et al. [72] ont introduit l'effet Soret sur le modèle proposé dans le passé par Kalla et al. [58]. Ils ont mis en évidence l'effet du coefficient de Soret sur la structure de l'écoulement et sur l'existence des écoulements naturels et antinaturels. Ils ont aussi montré que, quand le gradient vertical de concentration stabilise, les solutions multiples sont possibles dans une gamme du rapport des forces de volume, N , qui dépend fortement du coefficient de Soret.

Récemment, Mamou [63] en se basant sur les études précédentes de Mamou et al. [41], [44] et Karimi-Fard [52], a étudié l'effet de différentes conditions frontières thermiques et solutales sur l'écoulement. Les seuils de la convection oscillante et stationnaire sont déterminés en fonction des paramètres de contrôle. Il a conclu que la porosité et le

paramètre d'accélération du milieu poreux $\zeta = Da/(\varepsilon\sigma Pr)$, ont un fort effet sur le début de l'overstabilité pour une cavité confinée et sur le nombre d'onde pour une cavité infinie. L'augmentation de ces paramètres retarde l'apparition de l'écoulement oscillant d'amplitudes finies. Mamou [64] réalise une investigation complète sur l'analyse de stabilité des écoulements convectifs dans des cavités poreuses horizontales sujettes à des gradients verticaux thermiques et solutaux. Son étude est en fait une extension des travaux déjà réalisés par Mamou et Vasseur [50] et Mahidjiba et al. [54], en considérant l'effet du paramètre d'accélération (ou inertie) et de la porosité normale du milieu poreux sur le début des overstabilités et de la transition (transition de l'écoulement stationnaire d'amplitude finie à l'écoulement oscillant). Le seuil de la transition est déterminé en utilisant une analyse linéaire de stabilité de l'état convectif stable perturbé.

Très récemment, Bourich et al.[65] ont analysé numériquement la convection double diffusive dans une cavité poreuse carrée dont les parois horizontales sont chauffées à des températures constantes et des concentrations sont appliqués sur les parois verticales. Les auteurs ont démontré que pour un certain nombre de rapports de forme, supérieur à un N critique, les solutions multiples disparaissent. Par contre une solution monocellulaire se maintient quand la convection est coopérante ($N > 0$) ou opposée ($N < 0$). Des corrélations des valeurs critiques, pour lesquelles la transition de l'écoulement monocellulaire naturel vers le l'écoulement monocellulaire antinaturel, ont été proposés.

CHAPITRE II

FORMULATION DU PROBLÈME

2.1 Définition du problème

La recherche réalisée dans cette thèse porte de façon générale sur la modélisation des écoulements et des transferts dans les milieux poreux. Pour réaliser une formulation simple du modèle mathématique décrivant le phénomène, nous considérons un milieu poreux saturé confiné dans une enceinte rectangulaire imperméable de largeur L' et de hauteur H' inclinée d'un angle θ par rapport au plan horizontal (voir la figure 2.1). La cavité est placée dans un champ de pesanteur uniforme est constant g . L'interaction entre la gravité et les gradients de température et de soluté donnent naissance à des mouvements convectifs. Les parois de la cavité sont soumises à des flux de chaleur q' et de masse j' par unité de surface. Les constantes α , β , γ et δ servent à contrôler l'intensité relatives des flux. Leur valeur maximum est l'unité. Elles prennent la valeur zéro en l'absence de flux. L'originalité du problème consiste en la perturbation apporté par ces conditions aux frontières transversaux sur la solution.

2.2 Hypothèses de recherche

Nous adoptons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- 1- La matrice poreuse est isotrope et homogène.
- 2- Le fluide saturant le milieu poreux est binaire, newtonien et incompressible.
- 3- L'écoulement engendré est laminaire et bidimensionnel.
- 4- Le travail, induit par les forces visqueuses et de pression, est négligeable.
- 5- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable ainsi que l'interaction entre les transferts de chaleur et de masse (effets Soret et Dufour).

- 6- Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes et sont déterminées à partir de la température et la concentration de référence T'_0 et S'_0 respectivement. Par contre, la densité du fluide dans le terme des forces de volume varie linéairement avec la température T' et la concentration S' selon l'approximation de Boussinesq [7]. Cette variation est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta_T (T' - T'_0) - \beta_S (S' - S'_0)) \quad (2.1)$$

où ρ_0 est la densité à la température et concentration de référence, β_T est le coefficient d'expansion volumique thermique et β_S le coefficient d'expansion volumique solutale exprimés ci-dessous :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T'} \right)_{P', S'} \quad \text{et} \quad \beta_S = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S'} \right)_{P', T'} \quad (2.2)$$

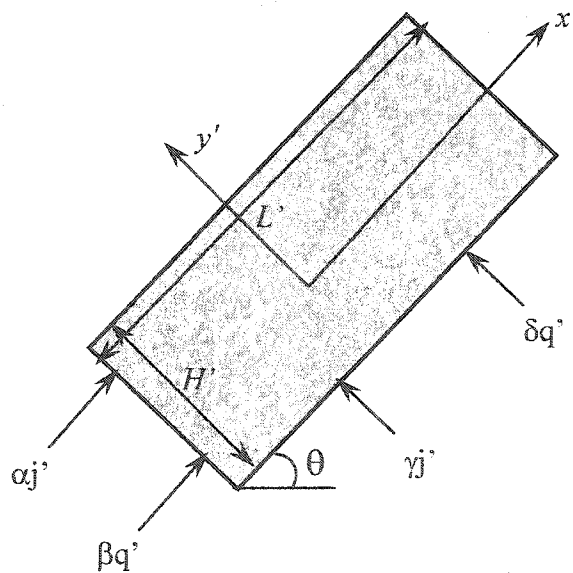


Figure 2.1 : Définition du modèle physique : cavité rectangulaire inclinée d'un angle θ par rapport au plan horizontal soumise à des flux de chaleur et de masse croisés

2.3 Équations gouvernantes dimensionnelles

La résolution d'un problème de convection naturelle consiste à déterminer les champs de vitesse, de température et de concentration en chaque point du domaine occupé par le fluide. Pour cela, nous devons établir les équations de base régissant le problème. Ces équations sont déduites des principes fondamentaux de conservation de la masse, de la quantité de mouvement (loi de Darcy [6]), de l'énergie et de la concentration.

Pour le milieu poreux, l'écoulement laminaire des fluides homogènes est régie par la loi de Darcy, valide en autant que le nombre de Reynolds est suffisamment faible, de sorte que l'on puisse négliger l'effet des forces d'inertie. Pour que la loi de Darcy s'applique, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

$$\varepsilon' \leq 0.8 \quad Da = \frac{K}{H'^2} \leq 10^{-6} \quad Re = \frac{V' \sqrt{K}}{\nu} < 1 \quad (2.3)$$

où ε' représente la porosité, K , la perméabilité du milieu poreux, Da le nombre de Darcy, Re le nombre de Reynolds, V' la vitesse moyenne de filtration des particules fluides et ν la viscosité cinématique du fluide.

2.3.1 Équation de conservation de la masse

L'équation de continuité exprime le principe de la conservation de la masse d'un fluide en mouvement. Dans un volume élémentaire, la masse du fluide prélevé ou injecté est égale à la somme de la variation de la masse du fluide durant un intervalle de temps élémentaire et des flux massiques traversant la surface de ce volume. Elle est définie par :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (2.4)$$

Les composantes de la vitesse u' et v' peuvent s'exprimer comme suit

$$u' = \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} \quad \text{et} \quad v' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x'} \quad (2.5)$$

où Ψ' représente la fonction de courant.

2.3.2 Équation de mouvement

Pour un milieu de Darcy classique la vitesse de filtration \bar{u}' est donnée par :

$$\bar{u}' = -\frac{K}{\mu} [\nabla p'_d + \rho_0 (\beta_T (T' - T'_0) + \beta_S (S' - S'_0)) \bar{g}'] \quad (2.6)$$

dans laquelle K est la perméabilité du milieu poreux, μ , la viscosité dynamique du fluide et p'_d , la pression dynamique.

Les composantes de \bar{u}' s'écrivent alors sous la forme suivante en tenant compte des composantes de la gravité $\bar{g}'(-g \sin \theta, -g \cos \theta)$:

$$\begin{cases} u' = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p'_d}{\partial x'} - \rho_0 g (\beta_T (T' - T'_0) + \beta_S (S' - S'_0)) \sin \theta \right) \\ v' = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p'_d}{\partial y'} - \rho_0 g (\beta_T (T' - T'_0) + \beta_S (S' - S'_0)) \cos \theta \right) \end{cases} \quad (2.7)$$

2.3.3 Équation de l'énergie

La première loi de thermodynamique permet d'établir des relations entre les différentes formes d'énergie mises en jeu dans le milieu poreux. L'équation de l'énergie, dans laquelle les termes de dissipation visqueuses sont négligés, s'écrit comme suit :

$$(\rho c)_p \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho c)_f (u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'}) = k \nabla^2 T' \quad (2.8)$$

où $(\rho c)_p$, $(\rho c)_f$ et k sont respectivement la capacité thermique du milieu poreux saturé, la capacité thermique du fluide et la conductivité thermique.

2.3.4 Équation de concentration

Le principe de conservation de la masse mène à l'équation de concentration suivante

$$\varepsilon' \frac{\partial S'}{\partial t'} + u' \frac{\partial S'}{\partial x'} + v' \frac{\partial S'}{\partial y'} = D \nabla^2 S' \quad (2.9)$$

avec D étant la diffusivité massique de la concentration dans la matrice poreuse saturée.

2.4 Équations gouvernantes adimensionnelles

De façon à rendre les équations précédentes adimensionnelles, la dimension H' de la cavité a été choisie comme longueur de référence. La diffusivité thermique a été utilisée pour adimensionnaliser la vitesse. La température et la concentration sont adimensionnalisées respectivement par rapport aux écarts de température $\Delta T'$ et de concentration $\Delta S'$ entre les deux parois actives de la cavité.

Les différentes grandeurs sans dimension sont données par les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} (x, y) = (x', y') / H' & (u, v) = (u', v') H' / \alpha_f & \\ t = t' \alpha_f / \sigma H'^2 & \Psi = \Psi' / \alpha_f & P' = \frac{\alpha_f \mu}{k} P \\ T = \frac{T' - T'_0}{\Delta T'} & S = \frac{S' - S'_0}{\Delta S'} & \varepsilon' = \alpha_f \varepsilon \end{array} \right. \quad (2.10)$$

où $\sigma, \alpha_f, \varepsilon', \Delta S'$ et $\Delta T'$ désignent respectivement le rapport des chaleurs massiques, la diffusivité thermique du fluide, la porosité normalisée et les différences caractéristiques de concentration et de température. Ces paramètres sont donnés par :

$$\sigma = \frac{(\rho C)_p}{(\rho C)_f}, \quad \alpha_f = \frac{k_p}{(\rho C)_f}, \quad \Delta S' = \frac{j'H'}{D}, \quad \Delta T' = \frac{q'H'}{k} \quad (2.11)$$

En introduisant ces grandeurs sans dimensions dans les équations de conservation de masse (2.4), de mouvement (2.7), d'énergie (2.8) et de concentration (2.9), on obtient respectivement :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial P_d}{\partial x} - R_T (T + N S) \sin \theta \\ v &= -\frac{\partial P_d}{\partial y} - R_T (T + N S) \cos \theta \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (2.14)$$

$$\varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{Le} \nabla^2 S \quad (2.15)$$

L'adimensionnalisation du système d'équations introduit les paramètres de contrôle du problème: $R_T = K H' g \rho_0 \beta_T \Delta T' / \alpha \mu$ est le nombre de Rayleigh thermique, $N = \beta_S \Delta S / \beta_T \Delta T'$ est le rapport des forces de volume thermiques et solutales et $Le = \alpha_f / D$ est le nombre de Lewis qui représente le rapport de la diffusivité thermique à la diffusivité massique du milieu poreux saturé et les constantes α, β, γ et δ .

Dans les problèmes de transfert de chaleur il est courant d'éliminer la pression en utilisant la formulation fonction de courant Ψ . Sous la forme adimensionnelle nous avons :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.16)$$

En introduisant la fonction de courant (2.16) dans les équations de mouvement (2.13) et en prenant son rotationnel, on obtient l'équation suivante :

$$\nabla^2 \Psi = -R_T \frac{\partial}{\partial x} (T + NS) \cos \theta + R_T \frac{\partial}{\partial y} (T + NS) \sin \theta \quad (2.17)$$

De même pour l'équation de l'énergie et de concentration on obtient :

$$\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.18)$$

$$\nabla^2 S = Le(\varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial S}{\partial y}) \quad (2.19)$$

Les équations (2.17)-(2.19) constituent les équations gouvernantes du problème. Il est à noter que l'équation de conservation de la masse, Eq. (2.12) est automatiquement satisfaite par la fonction de courant Ψ .

2.5 Conditions initiales et aux frontières

Les équations de base décrites précédemment sont résolues en tenant compte des conditions initiales et des conditions aux frontières spécifiques à notre problème. Ces dernières sont les suivantes :

- **Conditions Initiales**

Nous considérons qu'à $t = 0$, les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{aligned} u &= 0 & v &= 0 \\ T &= 0 & S &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

L'ensemble des équations (2.20) indique initialement le fluide est au repos avec une température T'_0 et une concentration S'_0 uniformes.

• **Conditions aux frontières**

Les conditions hydrodynamiques sur toutes les parois de la cavité sont les suivantes

$$x = \mp \frac{A}{2} : \quad u = 0 \quad \Psi = 0 \quad (2.21)$$

$$y = \mp \frac{1}{2} : \quad v = 0 \quad \Psi = 0$$

ou $A = L'/H'$ est le rapport de forme de la cavité.

Les conditions aux frontières thermiques et massiques adimensionnalisées s'expriment par

Quant les flux sont appliqués sur les parois verticales

$$x = \mp \frac{A}{2} : \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -\beta \quad \frac{\partial S}{\partial x} = -\alpha \quad (2.22)$$

Pour les parois horizontales ont a

$$y = \pm \frac{1}{2} : \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\delta \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -\gamma \quad (2.23)$$

2.6 Transfert de chaleur et de masse

L'étude du transfert de chaleur et de masse dans la cavité soumise à des flux constants, nécessite la détermination des taux de transfert de chaleur et de masse, donnés par le biais des nombres de Nusselt et Sherwood, respectivement. Les valeurs de ces derniers sur les parois horizontale, évalués à $x = 0$, sont définis comme suit :

$$Nu = \frac{1}{\Delta T} = \frac{1}{T(0,-0.5) - T(0,+0.5)} \quad \text{et} \quad Sh = \frac{1}{\Delta S} = \frac{1}{S(0,-0.5) - S(0,+0.5)} \quad (2.24)$$

Les valeurs moyennes des nombres de Nusselt et de Sherwood le long de ces parois sont calculées par les intégrales suivantes :

$$Nu^{moy} = \frac{1}{A} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} Nu.(x)dx \quad \text{et} \quad Sh^{moy} = \frac{1}{A} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} Sh(x).dx \quad (2.25)$$

Similairement, les transferts de chaleur et de masse sur les parois verticales, évalués à $y = 0$, sont donnés par

$$Nu = \frac{A}{\Delta T} = \frac{A}{T(-A/2,0) - T(A/2,0)} \quad \text{et} \quad Sh = \frac{A}{\Delta S} = \frac{A}{S(-A/2,0) - S(A/2,0)} \quad (2.26)$$

et

$$Nu^{moy} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Nu.(y)dy \quad \text{et} \quad Sh^{moy} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Sh(y).dy \quad (2.27)$$

Ayant déterminé les équations gouvernantes le problème, ainsi que les conditions aux frontières, la prochaine étape consiste à les résoudre. Deux types d'approches seront utilisés à cette fin, à savoir :

- Une méthode analytique, basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle, sera traitée dans le prochain chapitre.
- Une méthode numérique basée sur un schéma aux différences finies, complètement implicite, décrite dans le quatrième chapitre.

CHAPITRE III

SOLUTION ANALYTIQUE

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les équations de base régissant la convection thermosolutale. Ces équations forment un système d'équations différentielles partielles non-linéaires couplées qui sont difficiles à résoudre analytiquement. Cependant, dans le cas limite de couches poreuses de grande extension ($A \gg 1$) des solutions analytiques approchées sont possibles.

Les équations gouvernantes peuvent être simplifiées en utilisant l'approximation de l'écoulement parallèle (utilisé dans le passé par plusieurs auteurs dont Sen et al. [67], Alavyoon [29], Mamou et al [33], Kalla et al. [57], [58]) lesquels considèrent que l'écoulement engendré dans le cœur d'une cavité infinie ($A \gg 1$) devient parallèle aux parois dans la région centrale. Le renversement de l'écoulement par 180° se faisant aux extrémités aux extrémités de la cavité. Les profils de la température et de la concentration dépendent alors de la coordonnée transversale.

3.2 Approximation de l'écoulement parallèle

Lorsque la cavité présente un grand rapport de forme ($A \gg 1$), les équations gouvernantes sont donc grandement simplifiées par le fait que l'écoulement engendré dans le centre de la cavité devient parallèle aux longs cotés, de sorte que :

$$u(x, y) \approx u(y) \quad \text{et} \quad v(x, y) \approx 0 \quad (3.1)$$

Nous obtenons ainsi des lignes de courant parallèles à l'axe des x , et une fonction de courant Ψ dépendant uniquement de l'ordonnée y :

$$\Psi(x, y) = \Psi(y) \quad (3.2)$$

Quant aux profils de la température et de la concentration, ils sont donnés par la somme d'un terme définissant une variation longitudinale linéaire et d'un autre terme donnant la distribution transversale :

$$T = C_T x + \theta_T(y) \quad (3.3)$$

$$S = C_S x + \theta_S(y) \quad (3.4)$$

où C_T et C_S sont des constantes qui expriment les gradients de température et de concentration selon la direction x .

En substituant les équations (3.2)-(3.4) dans (2.17)-(2.19) et après calcul et réarrangement des termes on obtient les expressions suivantes :

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} = R_T \left(\frac{d\theta_T}{dy} + N \frac{d\theta_S}{dy} \right) \sin\theta - R_T (C_T + NC_S) \cos\theta \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2\theta_T}{dy^2} = C_T \frac{d\Psi}{dy} \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2\theta_S}{dy^2} = C_S Le \frac{d\Psi}{dy} \quad (3.7)$$

En tenant compte des conditions aux frontières (2.21)-(2.23), les équations (3.6) et (3.7) deviennent :

$$\frac{d\theta_T}{dy} = C_T \Psi - \delta \quad (3.8)$$

$$\frac{d\theta_S}{dy} = Le C_S \Psi - \gamma \quad (3.9)$$

L'équation de mouvement (3.5) devient, après substitution des expressions (3.8) et (3.9):

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} = \bar{A}\Psi + \bar{B} \quad (3.10)$$

avec $\bar{B} = -R_T((C_T + NC_S)\cos\theta + (\delta + N\gamma)\sin\theta)$ et $\bar{A} = R_T(C_T + NLeC_S)\sin\theta$.

Les mouvements convectifs, au sein de la cavité, sont régis par l'équation différentielle (3.10) dont sa solution dépend du signe du paramètre \bar{A} .

Les constantes C_T et C_S peuvent être déterminées en intégrant l'équation de mouvement (2.17), d'énergie (2.18) et de concentration (2.19) sur le volume de contrôle, tout en tenant compte des conditions aux frontières citées précédemment, nous obtenons après simplification :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x} dy + \beta = \int_{-1/2}^{1/2} T u dy \quad (3.11)$$

$$Le \int_{-1/2}^{1/2} S u dx = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial S}{\partial x} dy + \alpha \quad (3.12)$$

En portant les profils de la température (3.3) et de la concentration (3.4) dans les expressions précédentes et après intégration on obtient les expressions des gradients de température et de concentration.

Ainsi selon la valeur et le signe du paramètre \bar{A} , trois types de solutions sont possibles. Ces dernières sont décrites ci-dessous :

3.2.1 Cas ou $\bar{A} > 0$:

Cette situation est atteinte lorsque les forces de volume sont coopérantes, $N > 0$, où opposées, tel que $|N| \ll 1$ ou $|N| \gg 1$. La résolution de l'équation différentielle (3.10), en tenant compte des conditions aux limites (2.21)-(2.23) donne :

$$\Psi(y) = \frac{\bar{B}}{\bar{A}} \left[\frac{\cosh(ay)}{\cosh(a/2)} - 1 \right] \quad (3.13)$$

avec, $a = \sqrt{\bar{A}}$

De cette solution générale, on peut déduire Ψ_c , la valeur de la fonction de courant au centre de la cavité, laquelle caractérise en quelque sorte l'intensité de l'écoulement :

$$\Psi_c = \frac{\bar{B}}{\bar{A}} \left[\frac{1}{\cosh(a/2)} - 1 \right] \quad (3.14)$$

Quant aux profils de température et de concentration, ils sont donnés par:

$$T = C_T(x + \bar{D}) - \delta y \quad (3.15)$$

$$S = C_S(x + Le\bar{D}) - \gamma y \quad (3.16)$$

avec $\bar{D} = \frac{\bar{B}}{\bar{A}} \left(\frac{\sinh(ay)}{a \cosh(a/2)} - y \right)$

Les expressions des constantes C_T et C_S sont données par

$$C_T = \frac{-\beta + \delta G}{1 + F}, \quad C_S = \frac{-\alpha + \gamma Le G}{1 + Le^2 F} \quad (3.17)$$

où F et G sont définis par :

$$F = \int_{-1/2}^{1/2} \Psi^2 dy, \quad G = \int_{-1/2}^{1/2} \Psi dy \quad (3.18)$$

On remplaçant la fonction de courant par sa valeur donnée en (3.13), on obtient :

$$F = \frac{\bar{B}^2}{a^5} \left[\frac{a(\cosh(a/2)^2 + 1/2) - 3 \cosh(a/2) \sinh(a/2)}{\cosh(a/2)^2} \right], \quad G = \frac{\bar{B}}{a^3} [2 \tanh(a/2) - a] \quad (3.19)$$

Par ailleurs, les nombres de Nusselt et de Sherwood, d'après les équations (2.24), ont pour expressions :

$$Nu = \frac{a^3}{C_T \bar{B} [a - 2 \tanh(a/2)] + \delta a^3} \quad (3.20)$$

$$Sh = \frac{a^3}{C_S Le \bar{B} [a - 2 \tanh(a/2)] + \gamma a^3} \quad (3.21)$$

3.2.2 Cas où $\bar{A} < 0$:

Quand les forces de volume N sont opposées et de même ordre de grandeur, le paramètre \bar{A} devient négatif. Dans ce cas, la solution de l'équation différentielle (3.10) s'écrit :

$$\Psi(y) = \frac{\bar{B}}{\bar{A}} \left[\frac{\cos(ay)}{\cos(a/2)} - 1 \right] \quad (3.22)$$

avec $a = \sqrt{-\bar{A}}$

Les profils de température et de concentration deviennent alors :

$$T = C_T (x + \bar{D}) - \delta y \quad (3.23)$$

$$S = C_S (x + Le \bar{D}) - \gamma y \quad (3.24)$$

avec $\bar{D} = \frac{\bar{B}}{a^2} \left(\frac{\sin(ay)}{a \cos(a/2)} - y \right)$

Les gradients de température et de concentration sont donnés par (3.17) avec

$$F = \frac{\bar{B}^2}{a^5} \left[\frac{a(\cos(a/2))^2 + 1/2 - 3\cos(a/2)\sin(a/2)}{\cos(a/2)^2} \right], \quad G = \frac{\bar{B}}{a^3} [2\tan(a/2) - a]$$

Les taux de transfert de chaleur et de masse, représentés par le nombre de Nusselt et Sherwood, respectivement, sont exprimés à partir de:

$$Nu = \frac{a^3}{C_T \bar{B} [a - 2\tan(a/2)] + \delta a^3} \quad (3.25)$$

$$Sh = \frac{a^3}{C_S Le \bar{B} [a - 2\tan(a/2)] + \gamma a^3} \quad (3.26)$$

3.2.3 Cas ou $\bar{A} = 0$:

Le paramètre \bar{A} est nul dans deux cas. Le premier quand l'angle d'inclinaison de la cavité est égale à 0° ou 180° (cas d'une cavité horizontale). Le second quand la cavité est inclinée d'un angle quelconque avec des forces de volume opposé de valeur $N = -C_T / (Le C_S)$. La forme de l'écoulement de base est alors donnée par les profils suivants :

$$\Psi(y) = \frac{\bar{B}}{2} (y^2 - \frac{1}{4}) \quad (3.27)$$

$$T = C_T (x + \bar{D}) - \delta y \quad (3.28)$$

$$S = C_S (x + Le \bar{D}) - \gamma y \quad (3.29)$$

avec $\bar{D} = \frac{\bar{B}}{2} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y}{4} \right)$

Dans ce cas les gradients de température et de concentration sont obtenus en suivant la même démarche précédente ce qui nous donne :

$$C_T = -10 \frac{12\beta + \delta \bar{B}}{120 + \bar{B}^2}, C_S = -10 \frac{12\alpha + \gamma Le \bar{B}}{120 + Le^2 \bar{B}^2} \quad (3.30)$$

Les nombres de Nusselt et Sherwood sont alors donnés par :

$$Nu = \frac{12}{12\delta + C_T \bar{B}} \quad (3.31)$$

$$Sh = \frac{12}{12\gamma + C_S Le \bar{B}} \quad (3.32)$$

En résumé, nous constatons que nous pouvons avoir plusieurs solutions selon le signe du paramètre \bar{A} .

CHAPITRE IV

SOLUTION NUMÉRIQUE

4.1 Introduction

La méthode des différences finies a été introduite au 18^e siècle par Euler [6]. Elle s'avère la plus adaptée et la plus facile d'utilisation pour les problèmes à géométrie simple. Cette méthode consiste à discrétiser les équations continues aux nœuds d'un maillage prédéfini (voir figure 4.1). En calculant chaque dérivée partielle à l'aide de séries de Taylor tronquées, on obtient des équations linéaires reliant la valeur des inconnues en un nœud aux valeurs de ces mêmes inconnues aux nœuds voisins. La température, la concentration et la fonction de courant aux nœuds sont les inconnues du problème; quant à la vitesse, elle est déduite de la valeur de la fonction de courant.

Dans un repère cartésien, chaque nœud est identifié par le couple d'indices (i,j) désignant les lignes d'intersection du maillage. Les nœuds voisins sont implicitement définis en augmentant ou en abaissant l'un des indices par un incrément unitaire. Les équations différentielles gouvernantes du problème servent de point de départ à la méthode aux différences finies. Elles seront approximées par un système d'équations algébriques dans lesquelles les valeurs des variables aux nœuds sont les inconnues du problème.

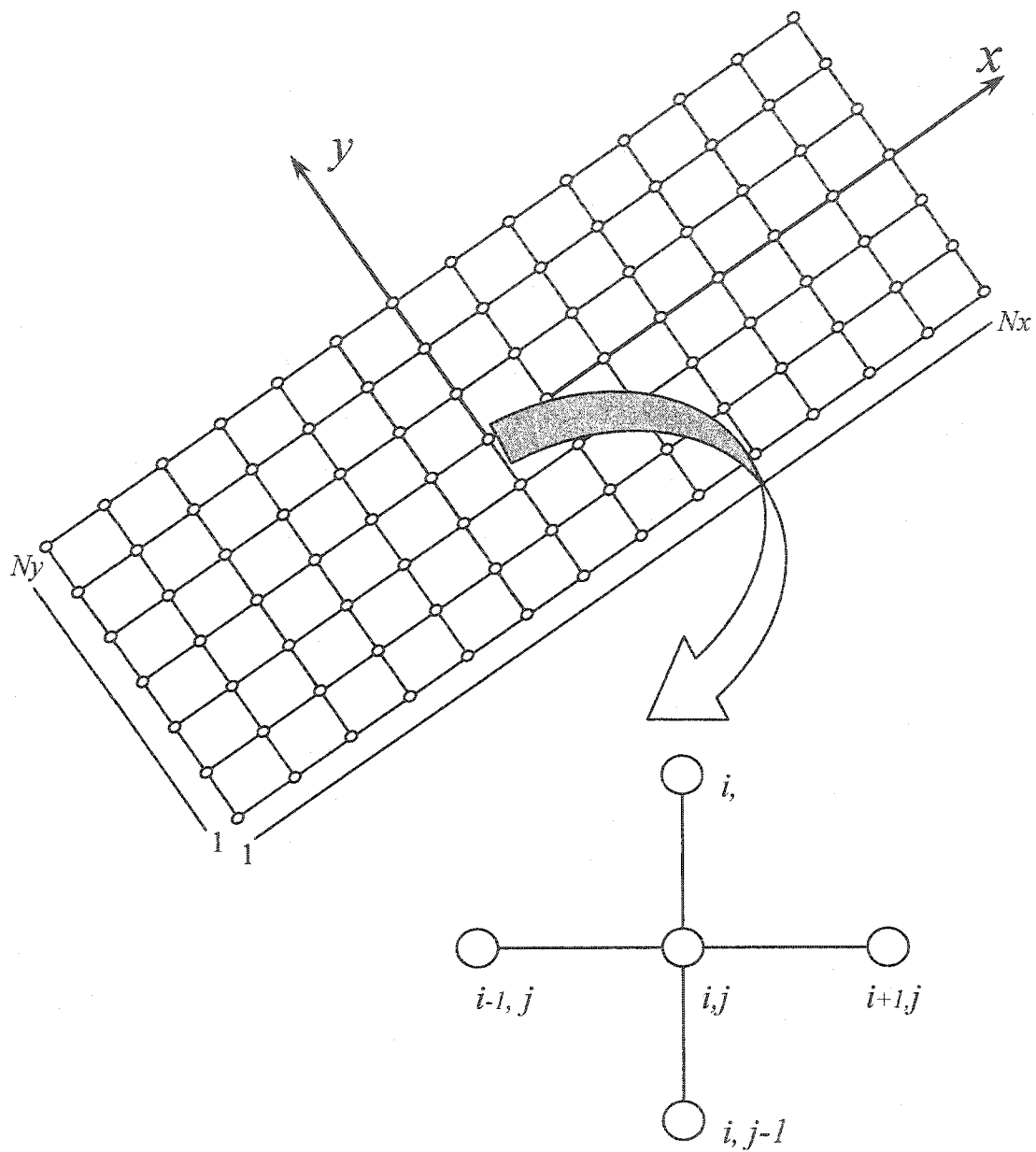


Figure 4.1 : Représentation du maillage du système physique

4.2 Discrétisation des équations gouvernantes

A l'intérieur du domaine discrétisé, les dérivées partielles de premier et deuxième ordre sont approchées selon un schéma aux différences finies centrées à savoir :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}, & \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j} &= \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{(\Delta x)^2}, & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{i,j} &= \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

où f représente soit la température T ou la concentration S ou la fonction de courant Ψ et $(\Delta x), (\Delta y)$ l'espace entre deux nœuds voisins.

Une fois discrétisées avec le schéma centré classique, les équations de base sont résolues numériquement. D'abord les équations d'énergie et de concentration sont résolues par le biais de la méthode implicite aux directions alternées (ADI.). Ensuite l'équation du mouvement est résolue par la méthode de surrelaxation (S.O.R.) à partir des champs de température et de concentration déjà établis.

4.2.1 Équation de l'énergie et de la concentration

Les équations d'énergie (2.14) et de la concentration (2.15) étant paraboliques par rapport au temps et elliptiques par rapport aux coordonnées spatiales, la méthode implicite aux directions alternées A.D.I. est choisie comme outil de résolution. Cette technique donne lieu à deux systèmes matriciels tridiagonaux dans les deux directions et pour chaque pas de temps. L'un est obtenu par la discrétisation implicite selon la direction x et explicite selon y , l'autre par la discrétisation implicite selon la direction y et explicite selon x .

La solution est obtenue en faisant un balayage du domaine d'abord dans la direction x , ensuite dans la direction y , et en utilisant à chacune de ces étapes les derniers résultats obtenus.

Compte tenu de l'équation de continuité (2.12), les équations de l'énergie (2.14) et de concentration (2.15) peuvent se réécrire de la façon suivante mieux adaptée à la résolution numérique :

$$\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{Le} \nabla^2 S = \varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(uS)}{\partial x} + \frac{\partial(vS)}{\partial y} \quad (4.3)$$

- **Forme Implicite en x et explicite en y**

On utilise une discrétisation implicite dans la direction x , en optant pour des différences centrées au temps $n + \frac{1}{2}$ pour les dérivées en x et au temps n pour les dérivées en y , chaque terme des équations (4.2) et (4.3) est discrétisé comme suit

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{i,j} &= \frac{f_{i,j}^{n+1/2} - f_{i,j}^n}{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)} \\ \left(\frac{\partial(uf)}{\partial x} \right)_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j}^n f_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{i-1,j}^n f_{i-1,j}^{n+1/2}}{2(\Delta x)} \\ \left(\frac{\partial(vf)}{\partial y} \right)_{i,j} &= \frac{v_{i,j+1}^n f_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n f_{i,j-1}^n}{2(\Delta y)} \\ (\nabla^2 f)_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j}^{n+1/2} - 2f_{i,j}^{n+1/2} + f_{i-1,j}^{n+1/2}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

où f représente soit la température T ou la concentration S

En remplaçant les expressions (4,4) dans l'équation de l'énergie (4.2) et de la concentration (4.3) on obtient la forme discrète implicite en x sous la forme matricielle suivante

$$A_i f_{i-1,j}^{n+1/2} + B_i f_{i,j}^{n+1/2} + C_i f_{i+1,j}^{n+1/2} = D_i \quad (4.5)$$

avec les coefficients suivant pour l'équation de l'énergie :

$$A_i = \frac{u_{i-1,j}^n}{2(\Delta x)} + \frac{1}{(\Delta x)^2} \quad B_i = \frac{-2}{(\Delta t)} + \frac{-2}{(\Delta x)^2} \quad C_i = \frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{u_{i+1,j}^n}{2(\Delta x)}$$

$$D_i = -\left[\frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{v_{i,j-1}^n}{2(\Delta y)} + \right] T_{i,j-1}^n + \left[\frac{-2}{(\Delta t)} + \frac{2}{(\Delta y)^2} \right] T_{i,j}^n + \left[\frac{-1}{(\Delta y)^2} + \frac{v_{i,j+1}^n}{2(\Delta y)} + \right] T_{i,j+1}^n$$

Pour l'équation de la concentration, les coefficients précédant prennent les valeurs suivantes :

$$A_i = \frac{u_{i-1,j}^n}{2(\Delta x)} + \frac{1}{Le(\Delta x)^2} \quad B_i = \frac{-2\varepsilon}{(\Delta t)} + \frac{-2}{Le(\Delta x)^2} \quad C_i = \frac{1}{Le(\Delta x)^2} - \frac{u_{i+1,j}^n}{2(\Delta x)}$$

$$D_i = -\left[\frac{1}{Le(\Delta y)^2} + \frac{v_{i,j-1}^n}{2(\Delta y)} + \right] S_{i,j-1}^n + \left[\frac{-2\varepsilon}{(\Delta t)} + \frac{2}{Le(\Delta y)^2} \right] S_{i,j}^n + \left[\frac{-1}{Le(\Delta y)^2} + \frac{v_{i,j+1}^n}{2(\Delta y)} + \right] S_{i,j+1}^n$$

- **Forme Implicite en y et explicite en x**

C'est un schéma aux différences centrées au temps (n) pour les dérivées en x et au temps $(n+1)$ pour les dérivées partielles par rapport à y . Les termes des équations (4,2) et (4.3) seront discrétisés comme suit

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{i,j} &= \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}, & \left(\frac{\partial(uf)}{\partial x}\right)_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j}^n f_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^n f_{i-1,j}^{n+1}}{2(\Delta x)} \\
\left(\frac{\partial(vf)}{\partial y}\right)_{i,j} &= \frac{v_{i,j+1}^n f_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^n f_{i,j-1}^{n+1}}{2(\Delta y)} \\
(\nabla^2 f)_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

où f représente soit la température T ou la concentration S

On obtient alors la forme implicite en y suivante :

$$A'_i f_{i,j-1}^{n+1} + B'_i f_{i,j}^{n+1/2} + C'_i f_{i,j+1}^{n+1/2} = D'_i \tag{4.7}$$

Pour l'équation de l'énergie :

$$\begin{aligned}
A'_i &= \frac{v_{i,j-1}^n}{2(\Delta y)} + \frac{1}{(\Delta y)^2} & B'_i &= \frac{-2}{(\Delta t)} + \frac{-2}{(\Delta y)^2} & C'_i &= \frac{1}{(\Delta y)^2} - \frac{v_{i,j-1}^n}{2(\Delta y)} \\
D'_i &= -\left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i-1,j}^n}{2(\Delta x)} + \right] T_{i-1,j}^n + \left[\frac{-2}{(\Delta t)} + \frac{2}{(\Delta x)^2} + \right] T_{i,j}^n + \left[\frac{-1}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1,j}^n}{2(\Delta x)} + \right] T_{i+1,j}^n
\end{aligned}$$

Pour l'équation de la concentration :

$$\begin{aligned}
A'_i &= \frac{v_{i,j-1}^n}{2(\Delta y)} + \frac{1}{Le(\Delta y)^2} & B'_i &= \frac{-2\varepsilon}{(\Delta t)} + \frac{-2}{Le(\Delta y)^2} & C'_i &= \frac{1}{Le(\Delta y)^2} - \frac{v_{i,j-1}^n}{2(\Delta y)} \\
D'_i &= -\left[\frac{1}{Le(\Delta x)^2} + \frac{u_{i-1,j}^n}{2(\Delta x)} + \right] S_{i-1,j}^n + \left[\frac{-2\varepsilon}{(\Delta t)} + \frac{2}{Le(\Delta x)^2} + \right] S_{i,j}^n + \left[\frac{-1}{Le(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1,j}^n}{2(\Delta x)} + \right] S_{i+1,j}^n
\end{aligned}$$

En tenant compte de l'ensemble des nœuds on obtient un système d'équations dont la solution se ramène à l'inversion d'une matrice tridiagonale. Le champ de température, obtenu pour l'ensemble des nœuds du domaine, sera utilisé pour résoudre l'équation de mouvement.

4.2.2 Équation de mouvement

Chaque terme de l'équation de mouvement (2.17) est discrétisé selon un schéma centré classique (4.1), on trouve l'expression générale suivante de la fonction de courant

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j}^{n+1} = & a_1 \left[(T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}) + N(S_{i+1,j}^{n+1} - S_{i-1,j}^{n+1}) \right] + a_2 \left[(T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}) + N(S_{i,j+1}^{n+1} - S_{i,j-1}^{n+1}) \right] \\ & + b [\Psi_{i+1,j}^{n+1} + \Psi_{i-1,j}^{n+1}] + c [\Psi_{i,j+1}^{n+1} + \Psi_{i,j-1}^{n+1}] \end{aligned} \quad (4.8)$$

où a_1, a_2, b et c sont des constantes définies par :

$$\begin{aligned} a_1 = R_T \sin \theta \frac{\Delta x \Delta y^2}{4(\Delta x^2 + \Delta y^2)}, \quad a_2 = R_T \cos \theta \frac{\Delta x \Delta y^2}{4(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \\ b = \frac{\Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}, \quad c = \frac{\Delta x^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

La résolution de l'équation (4.8), se fait par la méthode de surrelaxation successive *S.O.R.* par point. Cette méthode donne directement la valeur de Ψ à l'instant $(n+1)\Delta t$ au nœud considéré par la relation suivante :

$$\Psi_{i,j}^{k+1} = (1 - \omega) \Psi_{i,j}^k + \omega \Psi_{i,j}^{k+1} \quad (4.10)$$

ω étant le coefficient de surrelaxation défini comme suit

$$\omega = \frac{2}{\zeta^2} (1 - \sqrt{1 - \zeta^2}), \quad \zeta = \frac{2 \cos(\pi/n_x) + (\Delta x^2/\Delta y^2) \cos(\pi/n_y)}{1 + (\Delta x^2/\Delta y^2)}$$

n_x, n_y correspondent au nombres d'éléments selon les direction x et y , respectivement.

Les composantes du champ de vitesse $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$ sont évaluées à partir de la fonction de courant. Ils sont discrétisés par un schéma de différences finies centré du premier ordre :

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \quad v_{i,j}^{n+1} = -\frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1} - \Psi_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (4.11)$$

4.2.3 Conditions frontières

Les conditions aux frontières (2.22) et (2.23) sont discrétisées selon un schéma aux différences finies décentré avant ou arrière selon la paroi considérée.

Dans le cas des deux parois verticales on a :

$$\text{si } x = -\frac{A}{2}$$

$$T_{i,j} = \frac{4T_{i+1,j} - T_{i+2,j} + 2\beta \Delta x}{3} \quad \text{et} \quad S_{i,j} = \frac{4S_{i+1,j} - S_{i+2,j} + 2\alpha \Delta x}{3}$$

$$\text{si } x = \frac{A}{2}$$

$$T_{i,j} = \frac{4T_{i-1,j} - T_{i-2,j} - 2\beta \Delta x}{3} \quad \text{et} \quad S_{i,j} = \frac{4S_{i-1,j} - S_{i-2,j} - 2\alpha \Delta x}{3} \quad (4.12)$$

Pour les parois horizontales on a :

$$\text{si } y = -\frac{I}{2}$$

$$T_{i,j} = \frac{4T_{i,j+1} - T_{i,j+2} + 2\delta \Delta y}{3} \quad \text{et} \quad S_{i,j} = \frac{4S_{i,j+1} - S_{i,j+2} + 2\gamma \Delta y}{3}$$

$$\text{si } y = \frac{I}{2}$$

$$T_{i,j} = \frac{4T_{i,j-1} - T_{i,j-2} - 2\delta \Delta y}{3} \quad \text{et} \quad S_{i,j} = \frac{4S_{i,j-1} - S_{i,j-2} - 2\gamma \Delta y}{3} \quad (4.13)$$

4.3 Validation du code de calcul

Le processus de résolution des équations gouvernantes se fait selon l'algorithme de calcul suivant :

- Initialisation et lecture des données.
- Calcul du facteur de surelaxation
- Génération du maillage.
- Introduction des conditions initiales sur la température, la concentration et la fonction de courant.
- Début de la boucle sur le temps.
 - Calcul du champ de température par la méthode A.D.I.
 - Calcul du champ de la concentration par la méthode A.D.I.
 - Calcul du champ de la fonction de courant par la méthode S.O.R.
 - Détermination du champ de vitesse (u , v) à partir de la relation (4.11).
- Fin de la boucle sur le temps, quand le critère de convergence suivant est satisfait :

$$\frac{\sum_i \sum_j |\Psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^n|}{\sum_i \sum_j |\Psi_{i,j}^{n+1}|} \leq 10^{-5}$$

- Impression des résultats.

Afin de valider la précision du programme numérique développé dans le cadre de la présente thèse, nous l'avons testé sur un grand nombre de configurations. Nous présentons quelques comparaisons d'abord en convection naturelle dans le cas d'une cavité horizontale chauffée par le bas (Tableau 4.1) et ensuite dans un cas de convection thermosolutale ou la cavité horizontale est chauffée et salée par le bas (Tableau 4.2).

La comparaison a porté sur les nombres adimensionnels caractérisant les transferts thermiques et massiques, Nu et Sh , ainsi que la valeur de la fonction de courant maximum. Le Tableau 4.1 compare nos résultats à ceux de Kimura et al. [66] et Mahidjiba.[73], pour le cas d'une cavité horizontale chauffée par le bas ($\alpha = \beta = \gamma = 0$ et $\delta = 1$), ayant un rapport de forme $A = 4$ et pour différents nombres de Rayleigh thermique ($R_T = 100, 200$ et 400). A noter que cette simulation a été réalisée avec un maillage uniforme de 20×100 . Tandis que dans le Tableau 4.2 on compare nos résultats avec ceux donnés par Benhadji.[75] et Mamou et al. [50] pour le cas d'une cavité horizontale chauffé et salé par le bas ($\alpha = \beta = 0$ et $\delta = \gamma = 1$). Notre simulation a été réalisée pour un rapport de forme égal à 8, un nombre de Lewis $Le = 10$, un nombre de Rayleigh thermique $R_T = 100$, un rapport de force de volume $N = -0.8$ et un maillage uniforme de 20×220 .

Ces deux tableaux montrent un bon accord entre les résultats des différents auteurs et ceux obtenus avec le présent code. Des erreurs variant de 0.5% et 1.5 % ont été observées.

Tableau 4.1 Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum et du nombre de Nusselt avec les résultats donnés par Kimura et al.[66] et Mahidjiba [73]

Rayleigh R_T	Présente étude 20×100		Kimura et al.[66]. 21×101		Mahidjiba. [73] 20×100	
	Ψ_{\max}	Nu	Ψ_{\max}	Nu	Ψ_{\max}	Nu
100	3.745	3.7507	3.756	3.544	3.730	3.661
200	5.439	4.288	5.447	4.366	5.425	4.521
400	7.777	4.988	7.828	4.957	-	-

Tableau 4.2 Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum, nombre de Nusselt et nombre de Sherwood avec les résultats donnés par Benhadji. [75] et Mamou et al. [50]

	Présente étude 20×220	Benhadji.[75] 51×181	Mamou et al. [50]
Ψ_{\max}	3.675	3.695	3.689
Nu	3.649	3.653	3.635
Sh	6.742	6.747	6.739

CHAPITRE V

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

5.1 Introduction

Les résultats obtenus au cours de cette étude sont présentés dans ce chapitre. Dans un premier temps, on traite le cas d'une cavité poreuse horizontale soumise à des flux de chaleur et de masse verticaux et horizontaux. Dans un second temps on considère le cas d'une cavité verticale chauffée par le bas et soumise à un flux de masse latérale. Les effets des paramètres de contrôle du problème, à savoir le rapport de force de volume N , le nombre de Rayleigh thermique R_T , le nombre de Lewis Le , la porosité normalisée du milieu poreux ε , le rapport de forme A et les coefficients α , β , γ et δ sont discutés pour ces deux géométries.

Dans ce qui suit on suppose que la porosité normalisée du milieu poreux est $\varepsilon = 1$ et que la formulation de la solution analytique est basée sur des cavités allongées ($A \gg 1$).

5.2 Cavité horizontale ($\theta = 0^\circ$)

5.2.1 . Cavité soumise à des flux de chaleur et de masse verticaux et un flux de chaleur horizontal

Dans ce premier cas, on a étudié la cavité poreuse horizontale allongée illustrée dans la figure 5.1.

Le problème actuel est régi par six paramètres sans dimensions, à savoir R_T , N , Le , A , ε et β . Dans la discussion suivante, Les équations régissant l'écoulement sont obtenues en injectant les paramètres suivants ($\delta = 1$, $\gamma = 1$, $\alpha = 0$ et $\theta = 0$) dans le modèle général développé au Chapitre III.

La solution analytique pour les champs de fonction de courant, de température et de concentration, dans le cas considéré ici ($\beta \neq 0$), est obtenue à partir des équations (3.27)-(3.29) comme suit :

$$\Psi = -\Psi_C(4y^2 - 1) \quad (5.1)$$

$$T = C_T x - \frac{C_T \Psi_C}{3} (4y^3 - 3y) - y \quad (5.2)$$

$$S = C_S x - \frac{C_S Le \Psi_C}{3} (4y^3 - 3y) - y \quad (5.3)$$

avec

$$\Psi_C = \frac{3}{2} R_T^0 (C_T + N C_S), \quad R_T^0 = \frac{R_T}{12} \quad (5.4)$$

Le gradient de température et de concentration C_T et C_S s'écrivent :

$$C_T = \frac{(4\Psi_C - 6\beta)b}{3(2b + \Psi_C^2)}, \quad C_S = \frac{4bLe\Psi_C}{3(2b + Le^2\Psi_C^2)} \quad (5.5)$$

avec $b = 15/16$.

En substituant les valeurs de C_T et C_S (5.5) dans (5.4), on obtient l'équation gouvernante du problème de cinquième degrés en Ψ_C .

$$\sum_{i=0}^5 a_i \Psi_C^i = 0 \quad (5.6)$$

ou

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 6b^2 R_T^0 \beta \\
 a_1 &= -4b^2 [R_T^0 (1 + NLe) - 1] \\
 a_2 &= 3\beta b Le^2 R_T^0 \\
 a_3 &= -2b [R_T^0 Le (N + Le) - (1 + Le^2)] \\
 a_4 &= 0 \\
 a_5 &= Le^2
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Par ailleurs, les taux de transfert de chaleur et de masse ont pour expressions :

$$Nu = \frac{6(\Psi_C^2 + 2b)}{(12b + \Psi_C^2)} \tag{5.8}$$

$$Sh = \frac{6(2b + Le^2 \Psi_C^2)}{(12b + Le^2 \Psi_C^2)} \tag{5.9}$$

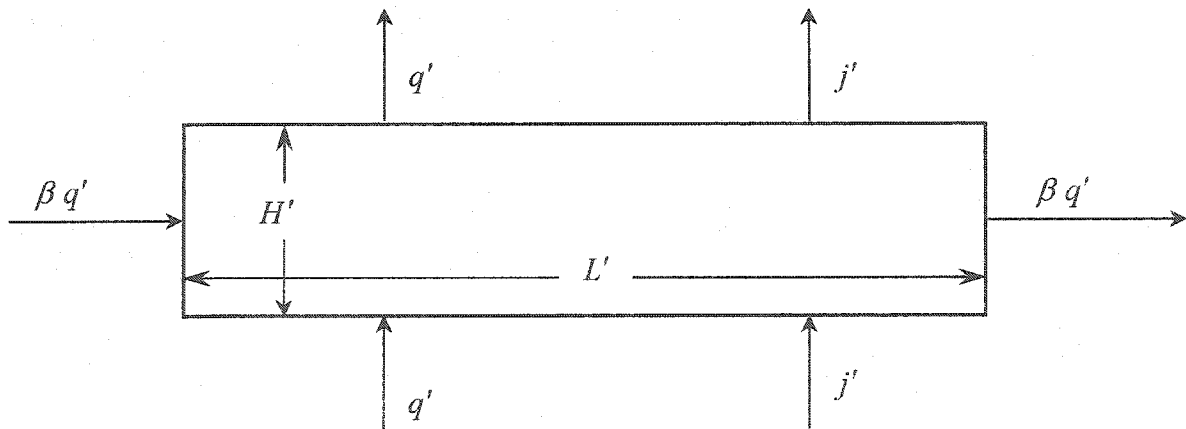


Figure 5.1 : modèle physique

5.2.1.1 Convection en l'absence du chauffage latérale ($\beta = 0$)

En l'absence du chauffage latéral $\beta = 0$, la cavité est chauffée et salée par le bas par l'entremise de flux constants. La solution prend la forme d'une bifurcation standard de Bénard ou au dessus d'un nombre de Rayleigh supercritique, R_{Tc}^{sup} , la convection s'amorce. Deux solutions convectives bifurquent de l'état de repos avec un écoulement à amplitude nulle ($\Psi_c = 0$). Le nombre de Rayleigh supercritique est donné par l'expression $R_{Tc}^{\text{sup}} = 12 - R_s$, dans laquelle $R_s = R_T NLe$ représente le nombre de Rayleigh solutal. Les effets de R_s sur l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, sont illustrés sur la figure 5.2 (a)-(c), pour $Le = 10$.

Le cas $R_s = 0$, correspond au cas où les forces de volume solutales sont nulles. L'écoulement au sein de la cavité est alors contrôlé uniquement par le flux de chaleur uniforme imposé. Ces conditions frontières donnent lieu à des cellules classiques de Bénard. Cependant, avec le temps, ces cellules se réorganisent pour donner lieu à un écoulement monocellulaire parallèle. En principe cette cellule unique de convection existe jusqu'à la situation asymptotique d'une couche horizontale s'étendant à l'infini. La figure 5.2a montre le diagramme de bifurcation pour Ψ_c en fonction du nombre de Rayleigh thermique R_T . Une bifurcation fourche se produit pour le nombre de Rayleigh critique $R_{Tc}^{\text{sup}} = 12$. Ce nombre de Rayleigh critique a été prédit dans le passé par Nield [9] en se basant sur la théorie de la stabilité linéaire. Pour des nombres de Rayleigh inférieurs à 12, tout mouvement initial est résorbé et la conduction pure constitue une solution possible. Cependant, pour les valeurs $R_T > 12$, l'intensité de l'écoulement augmente avec le nombre de Rayleigh et deux mouvements convectifs en sens opposés sont possibles, en plus de la solution triviale de conduction pure ($\Psi = 0$) qui de fait est instable.

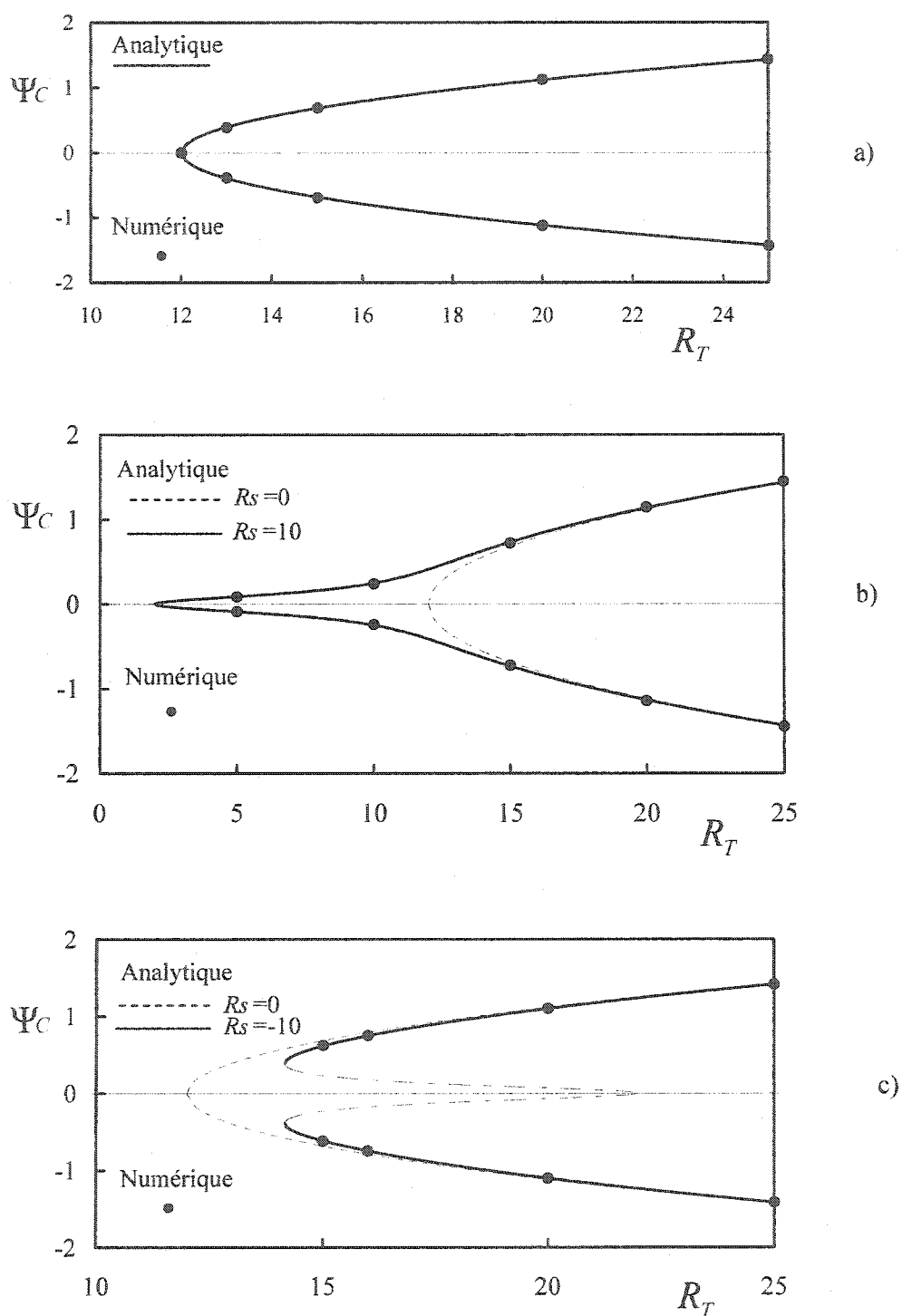


Figure 5.2 Diagrammes de bifurcation pour $Le=10$; a) $R_s = 0$, convection thermique pure; b) $R_s = 10$, contribution solutale déstabilisante; c) $R_s = -10$, contribution solutale stabilisante

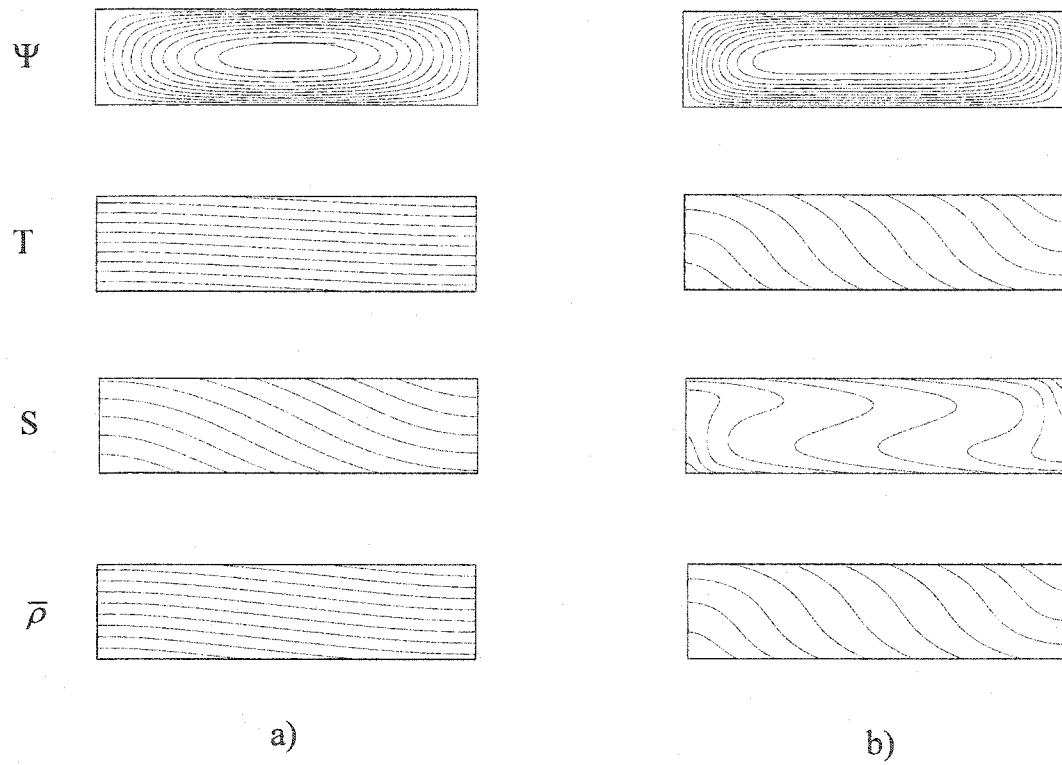


Figure 5.3 Tracé des lignes de courant Ψ , température T , concentration S et densité $\bar{\rho} = -(T + NS)$ pour $Rs = 10$, $Le = 10$, $A = 4$; a) $R_T = 5$, b) $R_T = 25$

La courbe de bifurcation obtenue pour $R_s = 10$, pour laquelle les forces de volume thermiques et solutales coopèrent et contribuent à l'augmentation de l'intensité de l'écoulement, est donnée sur la figure 5.2b. Pour cette situation la convection dite supercritique est obtenue pour un nombre de Rayleigh supercritique correspondant à $R_{Tc}^{sup} = 2$, qui est inférieur au nombre de Rayleigh $R_{Tc}^{sup} = 12$ prédit lorsque le système est déstabilisé seulement par les forces thermiques. Nous observons également que l'intensité de l'écoulement s'accroît avec le nombre de Rayleigh thermique.

La figure 5.3(a)-(b) représente deux cas d'écoulements unicellulaires, obtenus numériquement, en cavité allongée correspondant à des nombres de Rayleigh $R_T = 5$ et $R_T = 25$. Les champs de vitesse, de température, de concentration et de densité sont représentés par des lignes de courant, des isothermes, de concentrations et de densités respectivement. Ces résultats illustrent clairement la validité de l'approximation de l'écoulement parallèle dans la région centrale de la cavité.

La figure 5.2c illustre des résultats obtenus pour le cas $R_s = -10$. Pour cette situation la convection est opposée c.-à-d. les effets solutaux sont stabilisants et les effets thermiques déstabilisants. La convection survient selon une bifurcation sous critique avec amplitude finie ($\Psi_c = \sqrt{bd_1}/Le$). Le nombre de Rayleigh sous-critique, R_{Tc}^{sub} , auquel de tels écoulements sont possibles est donné par l'expression

$$R_{Tc}^{sub} = \frac{12}{Le^2} \left(\sqrt{Le^2 - 1} + \sqrt{-R_s/12} \right)^2 \quad (5.11)$$

Le nombre de Rayleigh sous-critique est égal à 14.16 pour les valeurs de R_s et Le considérés ici. Quant au Rayleigh supercritique, il est égal à 22. Pour des Rayleigh compris en ces deux limites, la solution analytique prédit cinq solutions possibles. La première correspond au régime conductif (état de repos, $\Psi_c = 0$) et les quatre autres

correspondent aux régimes convectifs d'écoulements à amplitude finie. L'équation générale (5.6) donnant ces solutions en terme de Ψ_c peut s'écrire sous la forme simplifiée suivante

$$\Psi_c = \pm \frac{\sqrt{b}}{Le} \left[d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \right]^{1/2} \quad (5.12)$$

avec

$$d_1 = R_T^0 Le(N + Le) - (Le^2 + 1) \quad (5.13)$$

$$d_2 = 4Le^2 [R_T^0(1 + NLe) - 1] \quad (5.14)$$

Il est à noter que pour toutes les figures 5.2, le mouvement peut se produire indifféremment dans un sens ou dans l'autre, c'est-à-dire que la cellule de convection peut tourner dans le sens horaire ou antihoraire sans préférence

La solution analytique représentée par les lignes (—) est en excellent accord avec la solution numérique des équations gouvernantes, représentée par des points.

5.2.1.2 Convection en présence du chauffage latéral ($\beta \neq 0$)

Dans ce qui suit, nous allons étudier l'effet d'un flux de chaleur latéral (pour une valeur β donnée), sur la structure de l'écoulement. La représentation de Ψ_c , solution du problème, en fonction de R_T et de la constante β pour le cas $Le = 10$, $R_S = 20$ et $R_S = -20$ prend la forme d'une surface courbe dans un espace tridimensionnel, illustrée aux figures 5.4 (a)-(b). Un résultat similaire a été obtenu par Kalla et al. [68] pour le

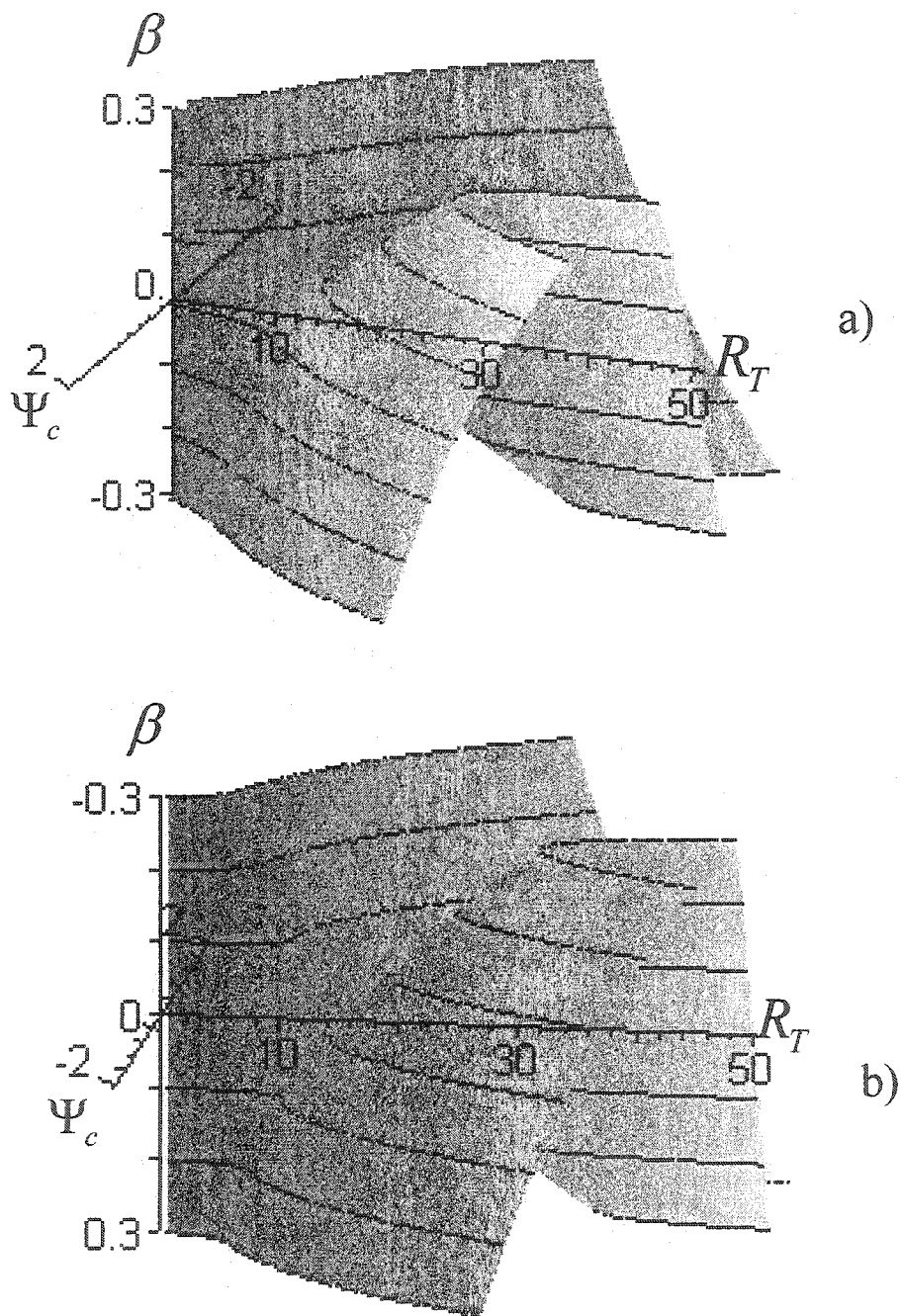


Figure 5.4. Surface de solution donant Ψ_c en fonction de R_T et β pour $Le=10$
 a) $Rs = 20$, b) $Rs = -20$

cas d'une cavité poreuse soumise à des flux uniformes de chaleur et par Nguyen [40] pour le cas d'une couche fluide.

Pour une valeur β donnée, par exemple $\beta = 0$, la solution correspond à l'intersection entre la surface courbe et le plan $\beta = 0$ et prend la forme d'une bifurcation classique de Rayleigh-Bénard étudiée précédemment (voir la figure 5.2 a,b,c). Par contre, si $\beta \neq 0$, le chauffage latéral agit en tant qu'imperfection apportée aux courbes de bifurcation. Un autre type d'imperfection celui d'un angle d'inclinaison, a été considéré dans le passé par Sen et al. [67] lors de l'étude de l'effet d'une faible inclinaison de la cavité poreuse chauffée par le bas.

La figure 5.5 montre l'effet du chauffage latéral ($\beta = 0.1$) sur l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité Ψ_c en fonction de R_T pour $Le = 10$ et $R_s = 20$. La solution analytique représentée par des lignes continues (branches stables) et discontinues (branches instables) est en bon accord avec les résultats numériques représentés par des points. Ces graphes montrent aussi les courbes de bifurcation correspondant à la convection en l'absence du chauffage latéral ($R_s = 20$, $\beta = 0$) ainsi que celles représentant le cas thermique pur ($R_s = 0$, $\beta = 0$). Comme illustré dans la figure 5.5 dans laquelle $R_s = 20$, la convection en présence du chauffage latéral ($\beta \neq 0$) est possible pour n'importe quelle valeur du nombre de Rayleigh thermique R_T .

Le cas $R_T = 0$ sera considéré en premier. Cette situation correspond au cas d'une couche poreuse dont la paroi inférieure est soumise uniquement à un gradient solutal. Le mouvement convectif résultant donne naissance à un écoulement unicellulaire qui peut tourner indifféremment dans le sens horaire ou dans le sens contraire. La convection dans ce cas n'apparaît que pour des nombres de Rayleigh solutaux au-dessus du nombre de Rayleigh supercritique $R_{sc}^{sup} = 12$. Le cas $R_T < 0$ correspond à la situation où l'on chauffe la paroi supérieure et on refroidit la paroi inférieure de la cavité, cette contribution thermique joue le rôle d'un stabilisant. Puisque les effets thermiques ont

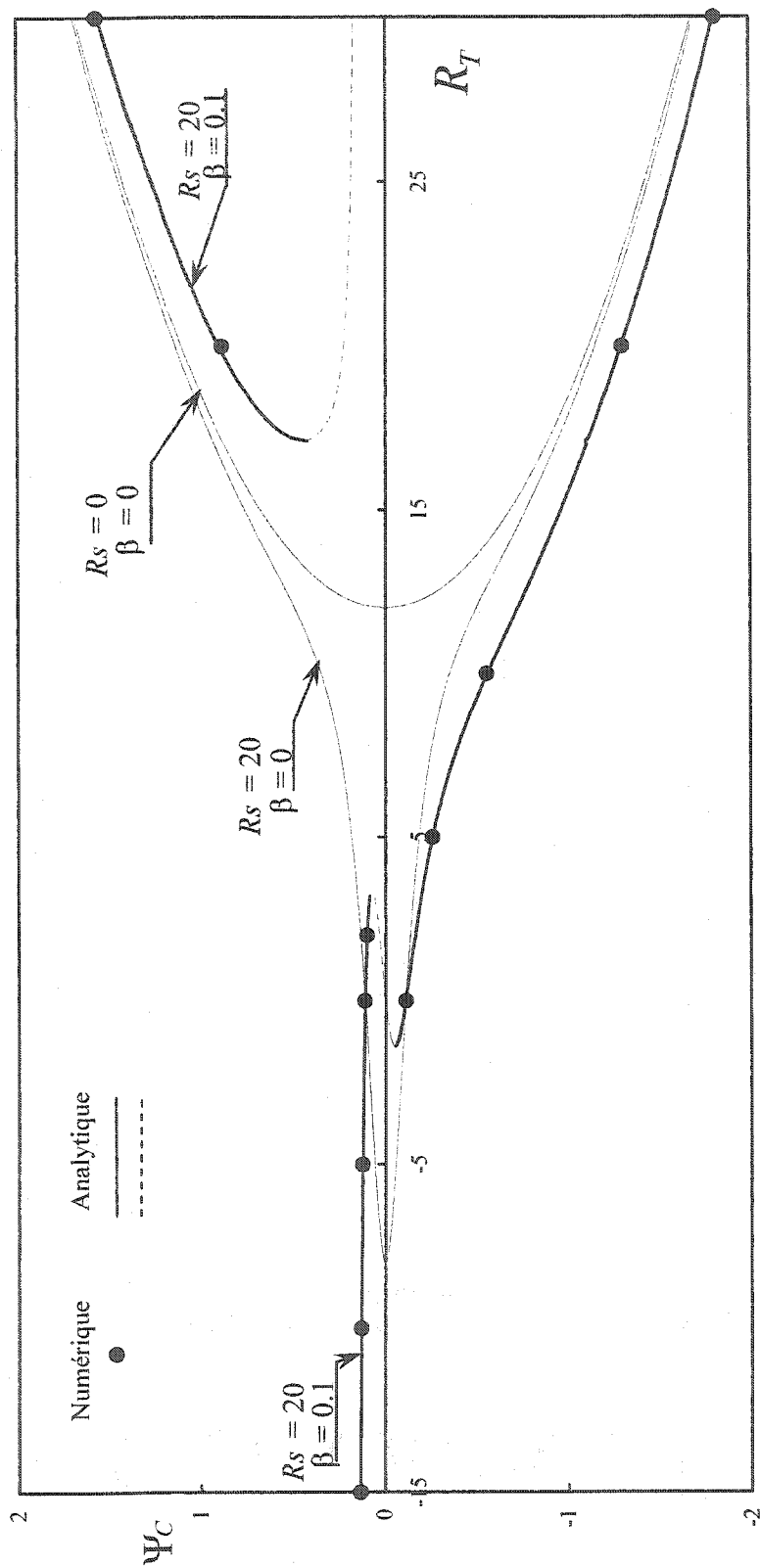


Figure 5.5 Intensité de l'écoulement Ψ_c en fonction de R_T pour $R_s = 20$, $Le = 10$ et de l'intensité du chauffage latérale $\beta = 0$ et 0.1 .

tendance à diminuer la densité dans la partie droite de la cavité et l'augmenter dans la partie gauche, une circulation antihoraire de l'écoulement ($\Psi_c > 0$) est engendrée. Cependant le sens de l'écoulement prendra un sens horaire ($\Psi_c < 0$) pour $R_T > 0$. Pour interpréter correctement les figures reliés aux bifurcations, à commencer par la figure 5.5, il faut d'une part considérer que le flux thermique latéral est proportionnel au flux thermique vertical c'est-à-dire que ce flux latéral est dirigé de droite à gauche pour R_T négatif et de gauche à droite pour R_T positif. D'autre part il faut également considérer comme sens de rotation naturel de la cellule convective celui qui correspond au mouvement imposé par le flux latéral si ce dernier agissait seul. En contre partie, le sens de rotation antinaturelle correspond à un mouvement contraire à celui qui serait imposé par le flux latéral. Ainsi, un flux thermique latéral de gauche à droite génère une rotation dans le sens horaire et la solution naturelle correspond à un Ψ_c négatif.

Dans la figure 5.5, nous remarquons que si le nombre de Rayleigh augmente au-delà du nombre de Rayleigh $R_{Tc}^a \approx 17$, deux solutions antinaturelles ($\Psi_c > 0$), l'une stable (trait plein) et l'autre instable (trait pointillés), sont possibles en plus de la solution naturelle ($\Psi_c < 0$). Les points numériques se trouvant sur la branche stable sont obtenus en utilisant des conditions initiales spécifiques pour Ψ . Par contre, il est intéressant de noter qu'il est impossible de trouver des points numériques sur la partie instable de la branche antinaturelle, indépendamment des conditions initiales utilisées. On constate aussi l'absence de résultats numériques à proximité de l'endroit où la courbe antinaturelle devient verticale ($R_T \approx 17$). Le domaine d'attraction de chaque courbe antinaturelle se rétrécit à mesure que l'on s'approche de $R_{Tc}^a \approx 17$. A titre d'exemple, le résultat numérique correspondant à $R_T = 20$ sur la courbe antinaturelle $\beta = 0.1$ de la figure 5.5 a été obtenu à partir de conditions initiales correspondant au résultat numérique $R_T = 30$ sur la même courbe, en faisant décroître lentement R_T et en obtenant la convergence à chaque étape. Pour $R_T < 20$, on a pas obtenu de solutions antinaturelles stables et la solution évolue vers la branche naturelle.

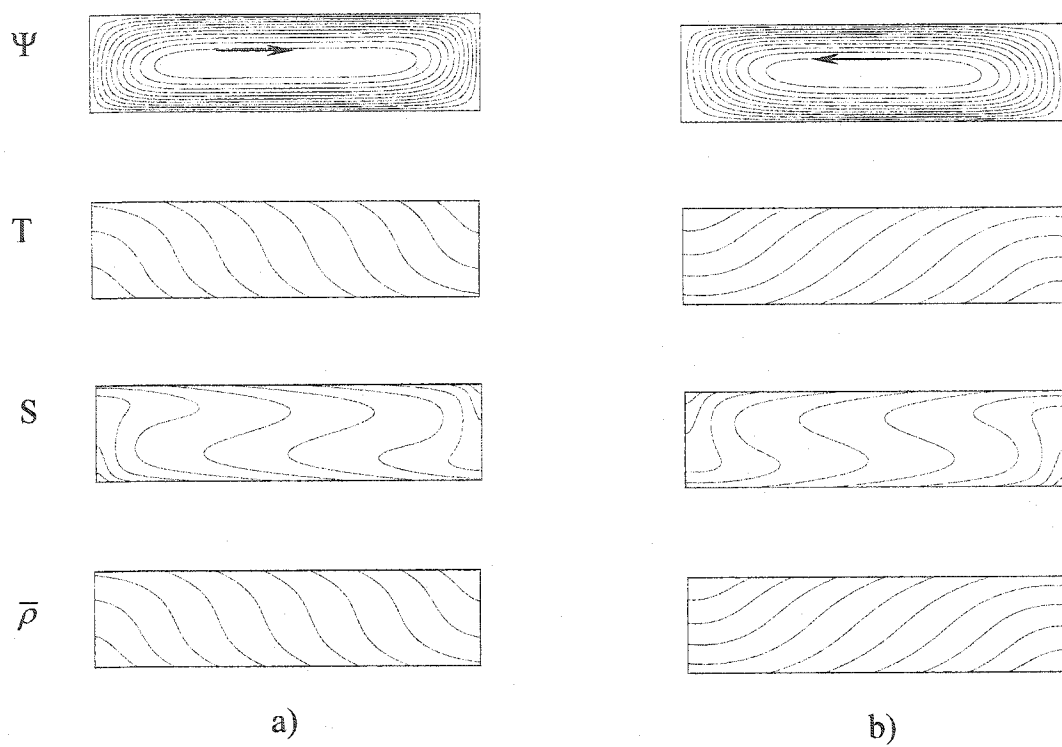
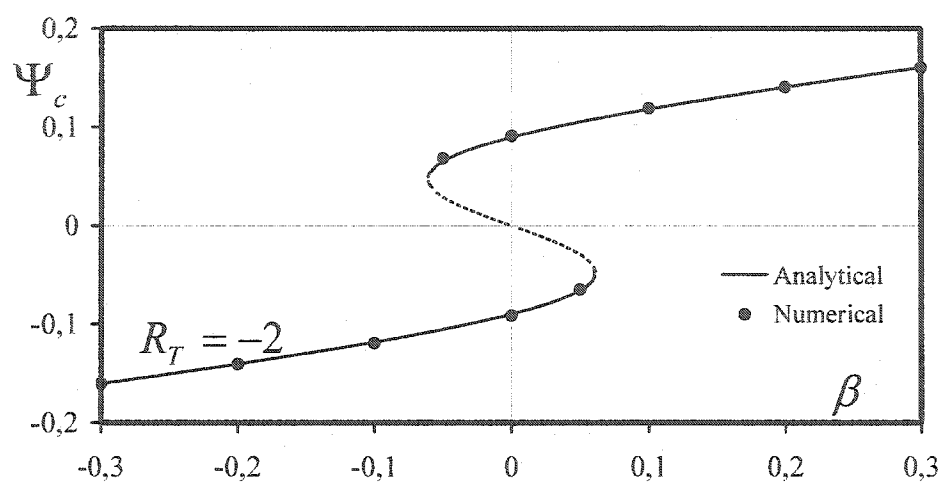


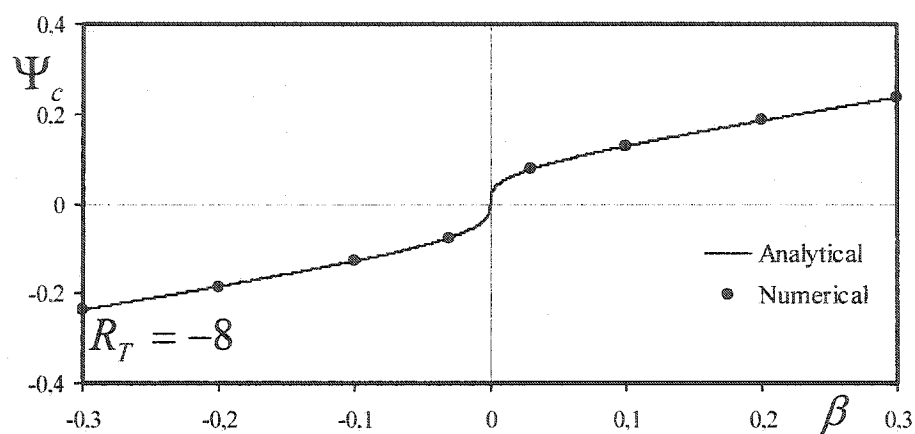
Figure 5.6 Tracé des lignes de courant Ψ , température T , concentration S et densité $\bar{\rho} = -(T + NS)$ pour $R_T = 25$, $R_S = 20$, $Le = 10$, $A = 4$ et $\beta = 0.1$; a) solution naturelle et b) solution antinaturelle

Des exemples de champs d'écoulement, de température, de concentration et de densité sont représentés à la figure 5.6 pour $R_T = 25$, $R_S = 20$, $Le = 10$, $\beta = 0.1$ et $A = 4$, pour le cas naturel et le cas antinaturel. Le mouvement convectif de la figure 5.6b est antinaturel, puisque le mouvement du fluide est dirigé vers le bas près de la paroi verticale de gauche, bien que celle-ci soit chauffée. Alternativement on peut représenter la surface de la figure 5.4 b par des lignes de contour correspondant à différentes valeurs de R_T sur un graphique $\Psi_C - \beta$. C'est le cas de la figure 5.7 a, b, c où les lignes de contour correspondent à $R_T = -2, -8$ et 10 . Pour le cas $R_S = 20$ et $Le = 10$. Le cas $\beta = 0$ correspond au cas classique de Bénard où l'écoulement peut tourner dans un sens ou dans l'autre indifféremment. La convection est toujours possible si $R_T \geq -8$. Pour $\beta > 0$ les courbes au-dessus et au-dessous de l'abscisse correspondent respectivement à l'écoulement naturel et antinaturel (l'inverse est vrai lorsque $\beta < 0$).

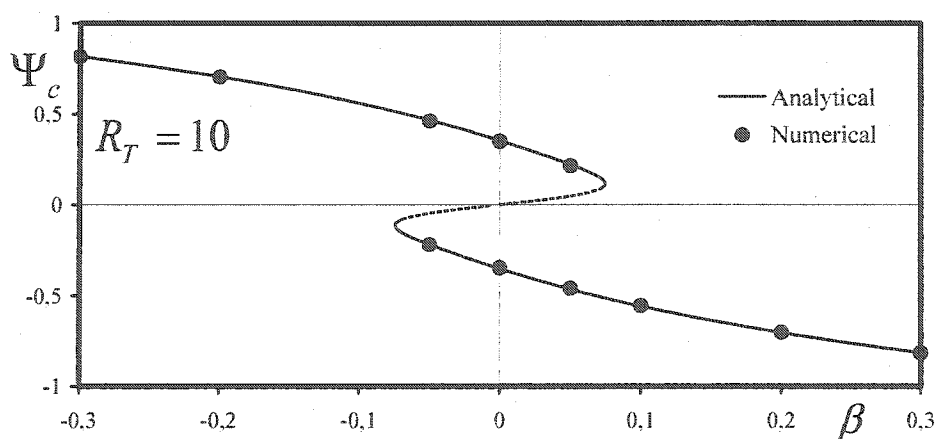
La figure 5.7a montre l'effet du chauffage latéral sur l'intensité de l'écoulement quand $R_T = -2$. Dans cette situation la contribution thermique sur les parois horizontales joue un rôle stabilisant. L'écoulement est dominé par les effets solutaux en absence du chauffage latéral $\beta = 0$, donnant naissance à deux états différents correspondant à un écoulement unicellulaire circulant indifféremment dans le sens horaire ou antihoraire. Le fait d'augmenter l'intensité du chauffage latéral ($\beta > 0$) va augmenter l'intensité de l'écoulement donnant une solution dominante dans le sens antihoraire. L'inverse se produit quand $\beta < 0$ dans le sens ou l'intensité du chauffage latérale va donner une solution dominante dans le sens horaire. Nous notons également l'existence de solutions multiples (stables et instables) à proximité de $\beta = 0$. La figure 5.7b montre la courbe de bifurcation obtenue pour $R_T = -8$. Pour cette situation, la valeur de la fonction de courant au centre de la cavité, Ψ_C , est nulle quand $\beta = 0$ car R_T correspond exactement au nombre de Rayleigh critique caractérisant le seuil de convection supercritique. Comme dans le cas précédent, le chauffage latéral exerce une influence prépondérante sur l'écoulement en introduisant dans ce dernier une cellule convective naturelle, dont



a)



b)



c)

Figure 5.7 Intensité de l'écoulement Ψ_c en fonction de β pour $Rs = 20$, $Le=10$;

a) $R_T = -2$, b) $R_T = -8$ et c) $R_T = 10$ (— solution stable, --- solution instable)

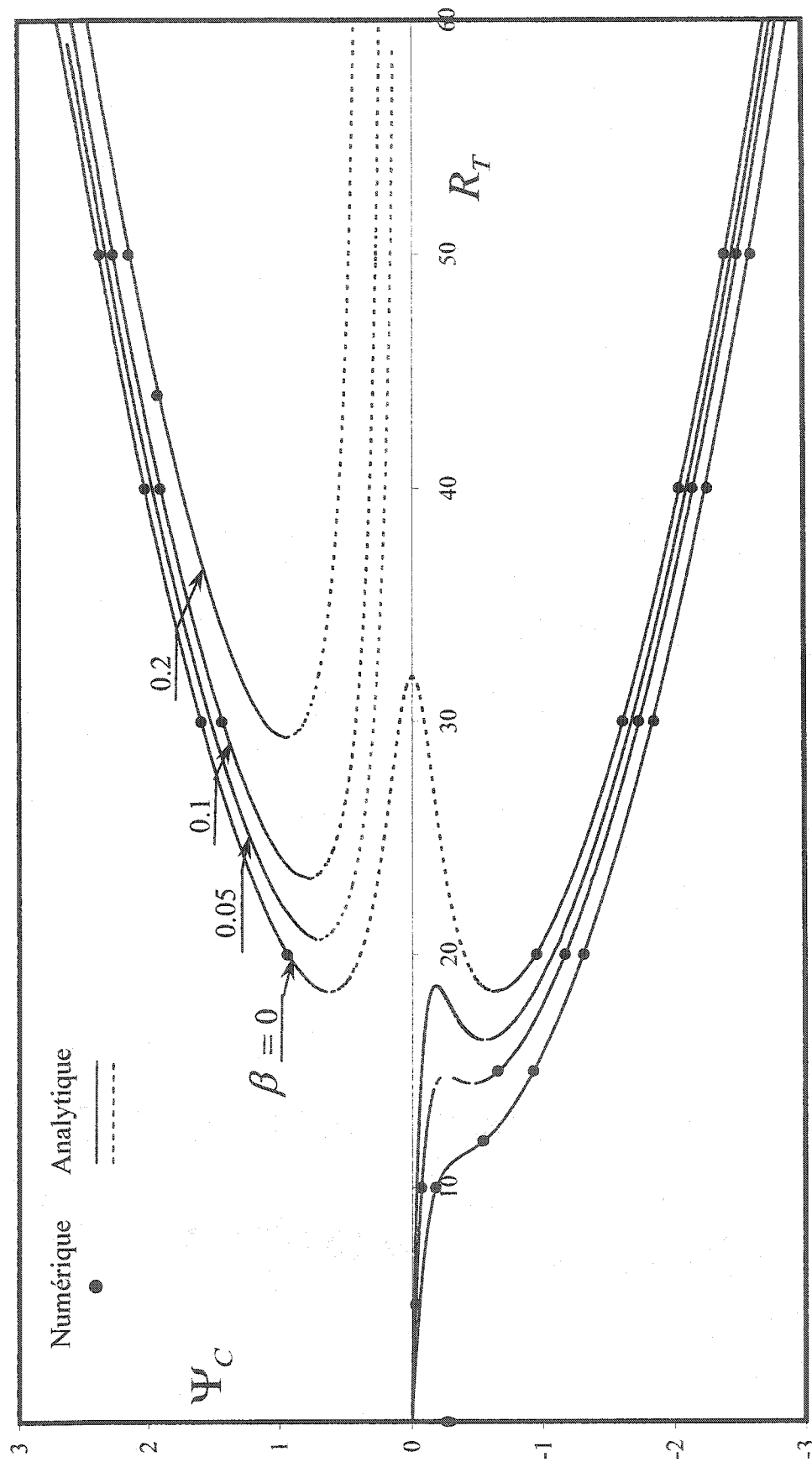


Figure 5.8a Courbes de bifurcation en fonction de R_T et β pour $Rs = -20$ et $Le = 5$;
a) Intensité de l'écoulement (— solution stable, ---- solution instable)

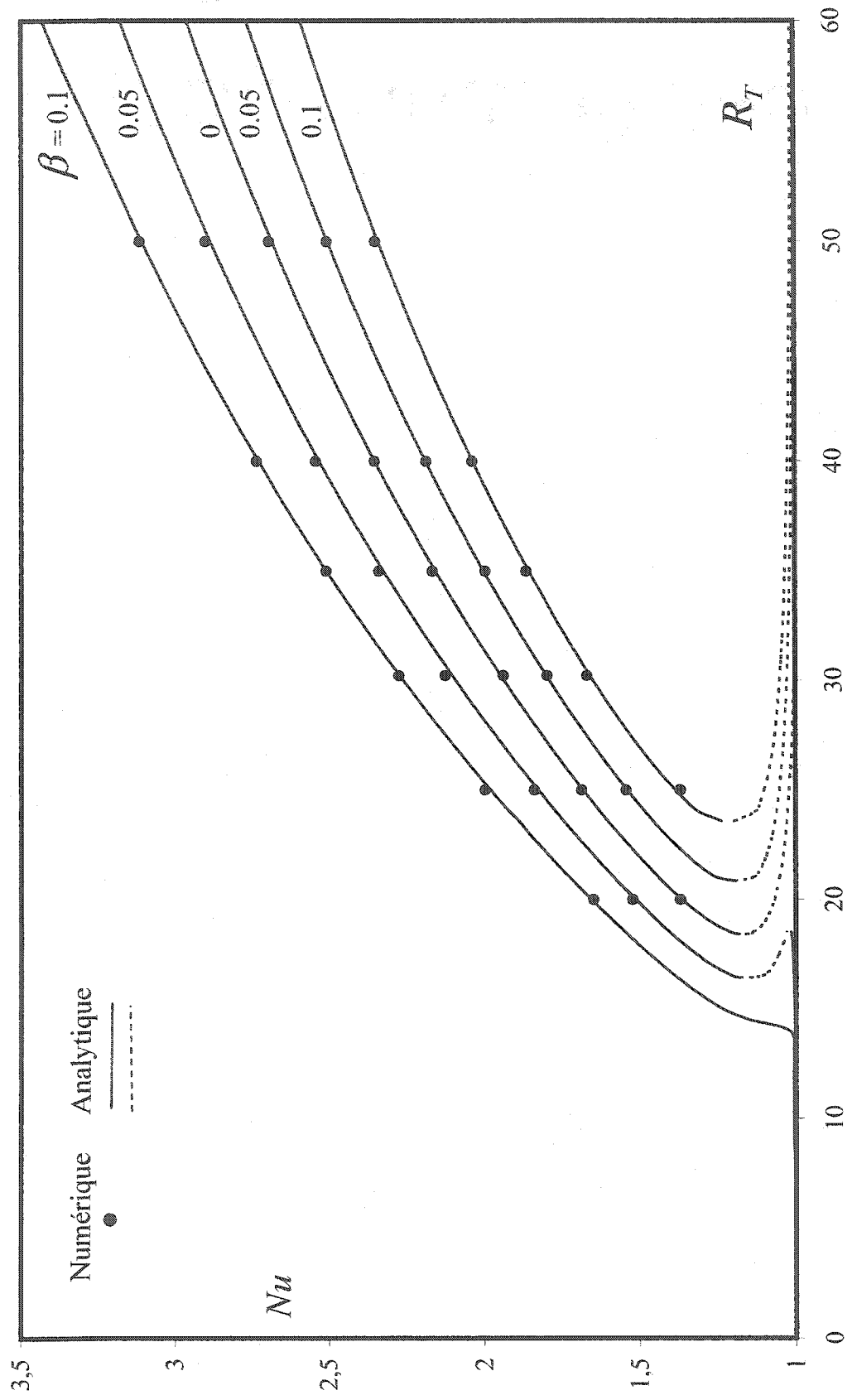


Figure 5.8b Nombre de Nusselt en fonction de R_T et β pour $R_S = -20$ et $Le = 5$

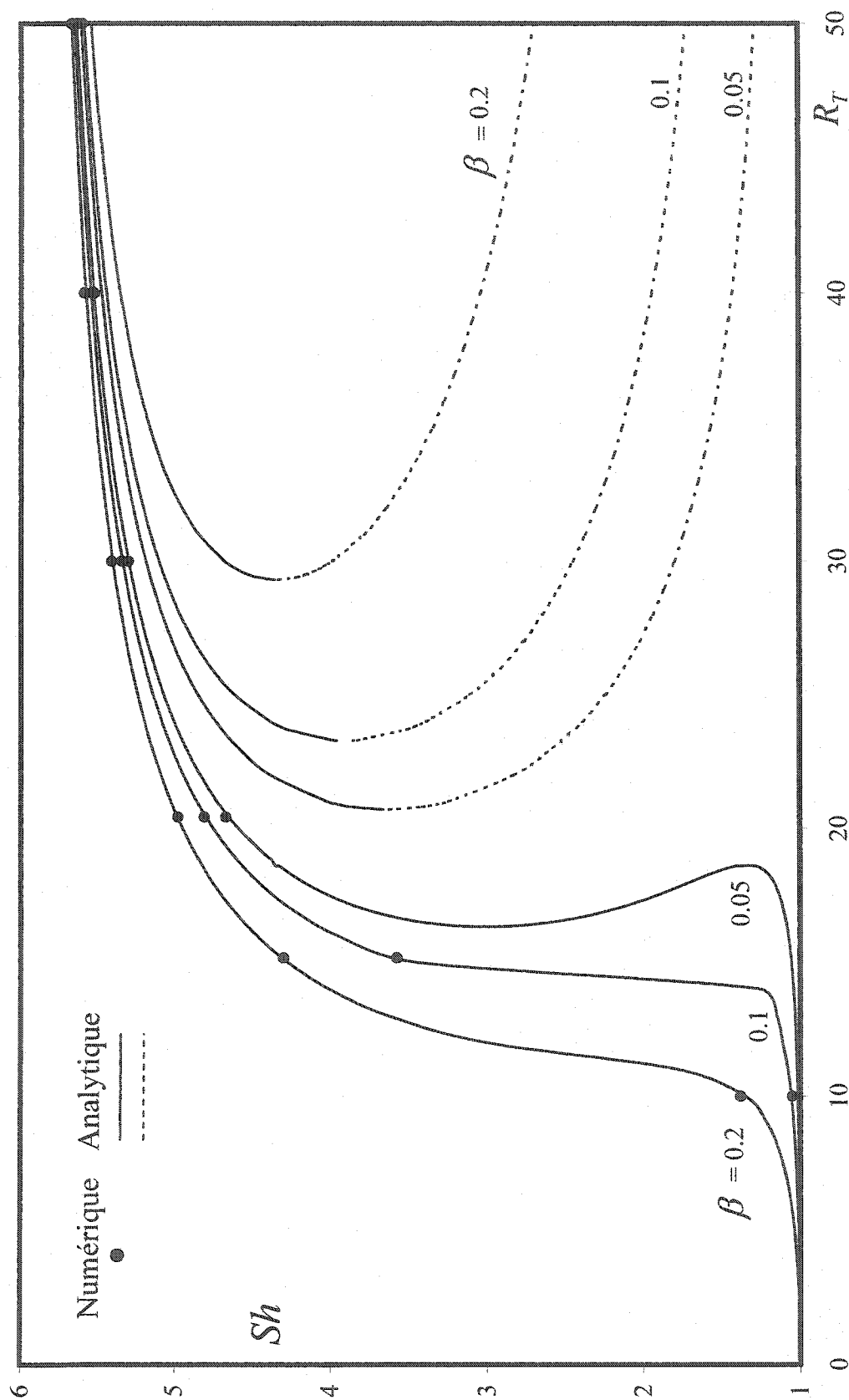


Figure 5.8c Nombre de Sherwood en fonction de Re_T et β pour $Rs = -20$ et $Le = 5$

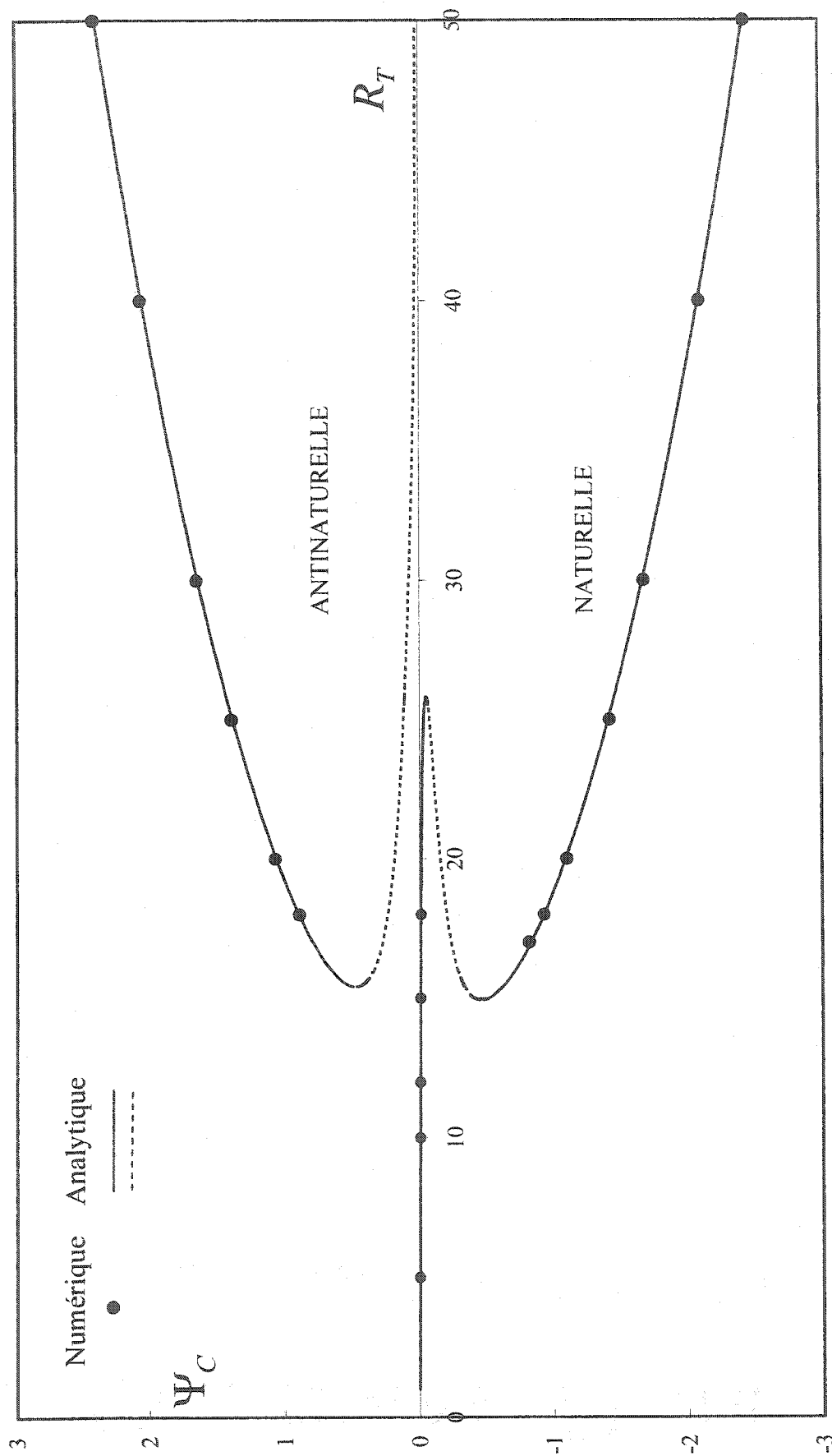


Figure 5.9 Intensité de l'écoulement Ψ_c en fonction de R_T pour $R_s = -20$, $Le = 10$
et $\beta = 0.005$.

l'intensité augmente avec la valeur de β . La figure 5.7c représente les résultats obtenus pour $R_T = 10$.

Les figures 5.8a, b et c concernent l'effet du chauffage latéral sur les courbes de bifurcation de la figure 5.2c. Elle illustrent l'influence de β sur l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité Ψ_C , les nombres de Nusselt et de Sherwood en fonction de R_T pour $Le = 5$ et $R_S = -20$.

En l'absence du chauffage latéral ($\beta = 0$), déjà discutée dans la figure 5.2, la courbe de bifurcation est dite sous-critique. Le nombre de Rayleigh supercritique est $R_{TC}^{Sup} = 32$ et celui sous critique est $R_{TC}^{Sub} \approx 18.32$. Lorsqu'on applique le chauffage latéral (figure 5.8a), trois mouvements convectifs sont possibles pour différentes valeurs de R_T . Notons qu'une de ces solutions est instable. La solution analytique prédit aussi l'existence de cinq solutions différentes, dont deux sont instables tel qu'illustré dans la figure 5.9 pour le cas $R_S = -20$, $Le = 10$ et $\beta = 0.005$.

Des représentations typiques de lignes de courant, de température et de concentration, pour le cas $R_S = -20$, $Le = 10$ et $\beta = 0.005$, sont donnés dans la figure 5.10. Pour cette situation, la solution numérique prédit l'existence de trois solutions stables pour le cas $R_T = 18$, comme on peut le voir sur les figures 5.10a-c. Ces solutions correspondent respectivement à une solution antinaturelle et deux autres naturelles. Lorsque l'intensité du chauffage latéral est grande, nous constatons sur la figure 5.8a que la pénétration de l'écoulement naturel dans la zone souscritique disparaît progressivement. Nous notons également que pour des valeurs suffisamment grandes du nombre de Rayleigh thermique, R_T , seulement deux solutions convectives stables sont possibles.

On peut également observer sur l'ensemble de ces graphiques la correspondance quasi parfaite entre les résultats analytiques et numériques.

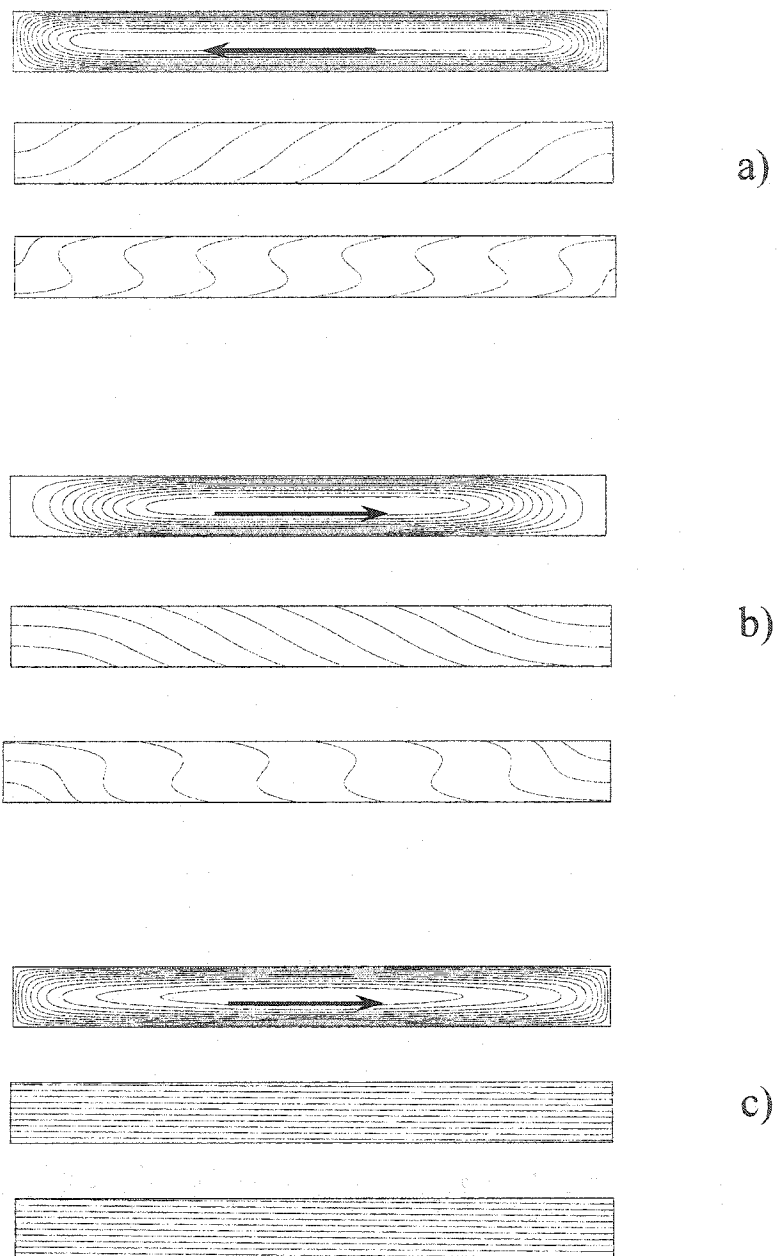


Figure 5.10 Tracé des lignes de courant Ψ , température T et concentration S pour le cas $Rs = -20$, $R_T = 18$, $Le = 10$, $A = 8$ et $\beta = 0.005$

5.2.2. Cavité chauffée par le coté et soumise à un flux de masse par le bas

Dans ce deuxième cas, on considère une cavité horizontale chauffée et refroidit latéralement par un flux uniforme de chaleur alors qu'un gradient solutal est imposé sur les parois horizontales ($\delta = 0$, $\gamma = -1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ et $\theta = 0^\circ$), voir figure 5.11. Les paramètres gouvernant le problème sont le nombre de Rayleigh thermique R_T , le nombre de Lewis Le et le rapport des forces de volume N . Dans cette situation l'écoulement est fortement dépendant de N . Quand N est nul l'écoulement convectif est induit uniquement par les forces thermiques, la circulation se fait alors dans le sens horaire et dépend du nombre de Rayleigh thermique R_T (induit dans ce cas par le chauffage latéral). Par contre si $|N| \rightarrow \infty$, l'écoulement dans la cavité poreuse sera généré par les forces solutales. Le gradient solutal va jouer le rôle d'un déstabilisant si le signe de N est négatif. Il s'agit alors d'une situation analogue au problème classique de Rayleigh Bénard où l'agent de déstabilisation est la chaleur. Les valeurs positives de N quant à elles donnent lieu à un fort gradient solutal vertical stabilisant dans la couche poreuse, ce qui a pour effet d'atténuer le mouvement et à la limite $N \rightarrow \infty$ d'amener le fluide au repos. Une concurrence entre les forces de volume thermiques et solutales est observée pour des valeurs intermédiaires de N .

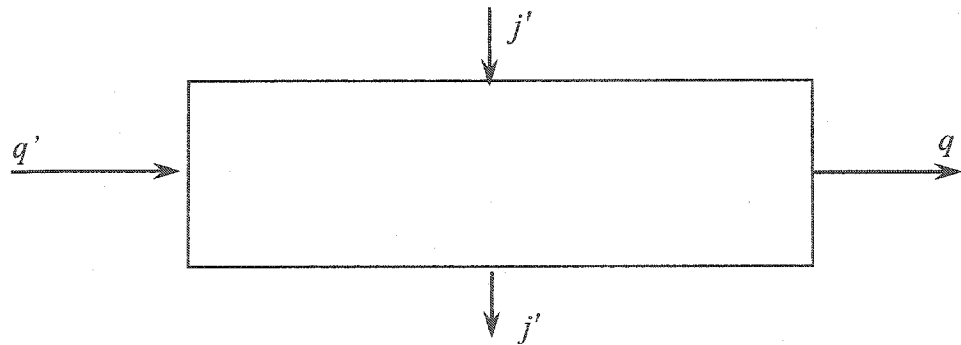


Figure 5.11 : modèle physique

Les équations gouvernantes du problème sont obtenues à partir de la forme générale données au chapitre III. Pour ce cas particulier les valeurs des constantes C_T et C_S sont:

$$C_T = -\frac{120}{120 + B^2} \quad \text{et} \quad C_S = -\frac{10LeB}{120 + B^2} \quad (5.16)$$

avec $B = -R_T(C_T + NC_S)$

L'écoulement est alors régi par l'équation suivante

$$B^5 Le^2 + (120Le^2 + 10R_T N^2 Le + 120)B^3 + 120R_T LeB^2 + 14400 + 1200R_T N^2 LeB + 14400R_T = 0 \quad (5.17)$$

La solution de l'équation transcendante (5.17) est obtenue numériquement en utilisant la méthode de Newton Raphson et dépend des paramètres R_T , Le et N .

Le nombre de Sherwood Sh pour cette situation devient :

$$Sh = 1 + \frac{Le C_S}{24} \quad (5.18)$$

La solution analytique obtenue de l'approximation de l'écoulement parallèle a été vérifiée numériquement à l'aide d'un code aux différences finies basé sur l'approche numérique décrite précédemment. La comparaison des résultats analytiques et numériques est maintenant présentée pour la fonction de courant au centre Ψ_c et le rapport des forces de volume N . La courbe de bifurcation, Figure 5.12, est obtenue pour différents nombres de Rayleigh (5, 20, 50 et 100) et pour un $Le = 10$. Les lignes solides correspondant aux branches stables et celles en pointillées aux branches instables.

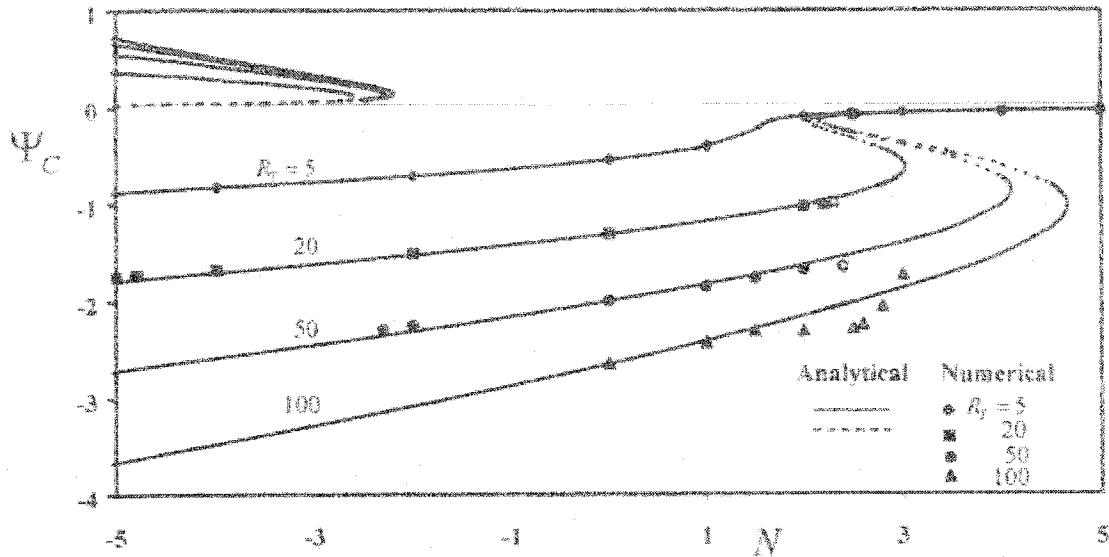


Figure 5.12 Effet de N et R_T sur Ψ_C pour $Le = 10$

On s'intéresse d'abord à la structure des écoulements naturels ($\Psi_C < 0$), qui numériquement peuvent se développer à partir du repos en tant que conditions initiales. On constate que, pour n'importe quelle valeur de R_T , le fait d'augmenter la valeur de N dans le sens positif, réduit l'intensité de la circulation de l'écoulement dû à l'imposition d'un gradient de concentration d'intensité élevée. Par contre pour des valeurs de N négatives croissantes, les forces solutales et thermiques vont coopérer pour augmenter l'intensité de l'écoulement convectif. Ainsi, la courbe $R_T = 5$ indique que Ψ_C diminue de façon monotone quand N est de plus en plus faible. Cependant, pour une valeur plus élevée de R_T , la solution analytique prévoit l'existence de trois solutions différentes quand $2 \leq N \leq 4.66$.

La figure 5.13 montre des résultats numériques représentant les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations obtenus pour le cas $R_T = 20$, $Le = 10$, $A = 4$ et $N = -5$, 2.3 et 5 respectivement. La figure 5.13a présente les résultats obtenus à $N = -5$ pour

lequel l'écoulement est induit principalement par les forces de volume solutales déstabilisantes. Nous remarquons que les lignes de courant dans le coeur de la cavité sont essentiellement parallèles, alors que celles donnant la température et la concentration sont linéairement stratifiées dans les directions horizontales et verticales. En raison de l'intensité de la convection ($\Psi_c = -1.755$), on observe l'existence d'une inversion de gradient de concentration se produisant dans le coeur de la cavité. Lorsque nous augmentons le rapport des forces de volume N jusqu'à 2.3 l'intensité de l'écoulement diminue ($\Psi_c = -0.986$) comme l'illustre la figure 5.13b. En outre, le modèle d'écoulement convectif est multicellulaire avec une grande cellule thermique tournant dans le sens horaire et deux petites cellules solutales tournantes dans le sens antihoraire. Au fur et à mesure, que la valeur de N augmente ($N = 5$) l'écoulement devient parallèle et un régime purement diffusif s'installe ($\Psi_c = -0.038$) dû à l'imposition d'un gradient de concentration très fort comme montré à la figure 5.13c.

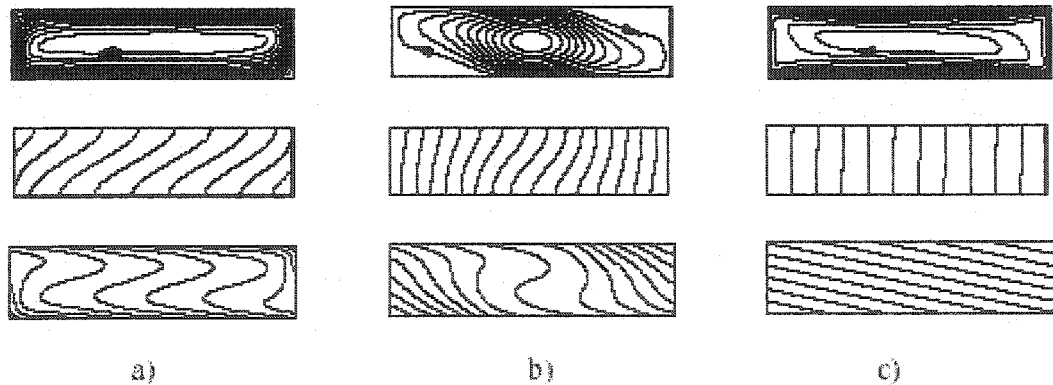


Figure 5.13 Lignes de courant (haut), température (milieux) et concentration (bas) pour $R_T = 20$, $A = 4$, $Le = 10$ a) $N = -5$, $\Psi_c = -1.755$, $Nu = 2.272$, $Sh = 6.013$, b) $N = 2.3$, $\Psi_c = -0.986$, $Nu = 1.134$, $Sh = 3.180$ c) $N = 5$, $\Psi_c = -0.038$, $Nu = 1.000$, $Sh = 1.049$

La figure 5.14 illustre les lignes de courant, température et concentration correspondant aux deux solutions stables possibles obtenues numériquement pour $R_T=100$, $N=3$, $Le=10$ et $A=4$. Pour ces mêmes valeurs une troisième solution existe, mais elle est instable. La figure 5.14a a été obtenue en débutant les calculs numériques avec $N=0$ et en utilisant ces résultats en tant que conditions initiales pour trouver les points numériques à des N plus élevés. L'écoulement demeure stable jusqu'à $N=3$, alors que pour des N plus élevés la solution bifurque vers la branche conductrice. La seconde solution, figure 5.14b, a été obtenue en commençant la simulation par $N=5$ mais en diminuant cette fois-ci graduellement N . Malgré le fait que dans cette zone, l'écoulement n'est pas parallèle, la concordance entre les résultats numériques et analytiques n'est pas trop mauvaise. En plus nous remarquons que pour des valeurs de $N < 0$, à des R_T donnés, il n'était pas possible d'obtenir la solution numérique car l'écoulement était oscillant (voir figure. 5.12). Pour des paramètres de contrôle très élevés, les mouvements du fluide au sein de la cavité deviennent très complexes, puis fortement désordonnés. C'est le régime de convection oscillant.

D'autres solutions correspondant aux écoulements dans le sens antihoraire pour des valeurs négatives de N sont possibles (figure 5.15). Ces écoulements, pour lesquels on a $\Psi_c > 0$, sont antinaturels et se composent de deux branches, une solution stable et l'autre instable. La solution stable peut être obtenue numériquement en utilisant un écoulement tournant dans une direction appropriée comme condition initiale (voir par exemple Sen et al. [67], Kalla et al. [68] et Mamou [70]). L'effet du rapport des forces de volume N sur l'intensité de l'écoulement est présenté pour $R_T=1, 2, 5$ et $Le=10$. L'augmentation de $|N|$ affecte directement l'intensité de l'écoulement qui augmente proportionnellement avec le nombre de Rayleigh. Il est à noter que, pour un R_T donné, il n'était pas possible d'obtenir des résultats numériques pour des valeurs de N plus faibles que ceux indiqués dans la figure 5.15. Au-dessous de ces valeurs, le champ d'écoulement converge vers l'état naturel. Pour cette raison aucun résultat numérique n'a été obtenu pour $R_T=5$. La

figure 5.16(a) et 5.16(b), correspondant à $N = -10$, $Le = 5$ et $A = 4$, illustre les lignes de courant, de température et de concentration pour les écoulements dominés par les effets solutaux, qui dans ce cas joue un rôle déstabilisant pour $R_T = 2$. Deux solutions stables l'une naturelle et l'autre antinaturelle sont possibles.

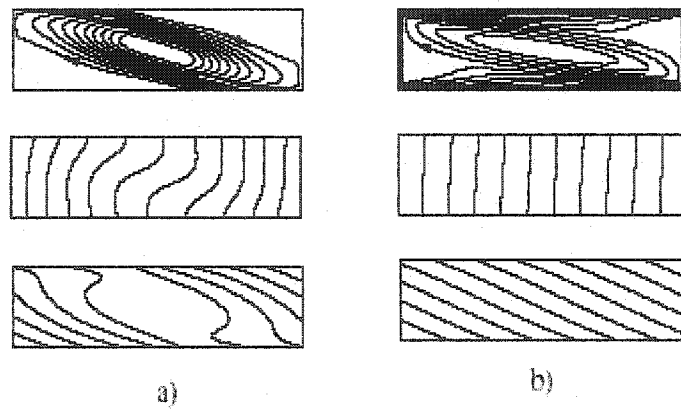


Figure 5.14 Lignes de courant (haut), température (milieux) et concentration (bas) pour $R_T = 100$, $A = 4$, $Le = 10$ et $N = 3$ a) $\Psi_C = -1.733$, $Nu = 1.321$, $Sh = 2.152$ et b) $\Psi_C = -0.0833$, $Nu = 1.002$, $Sh = 1.185$

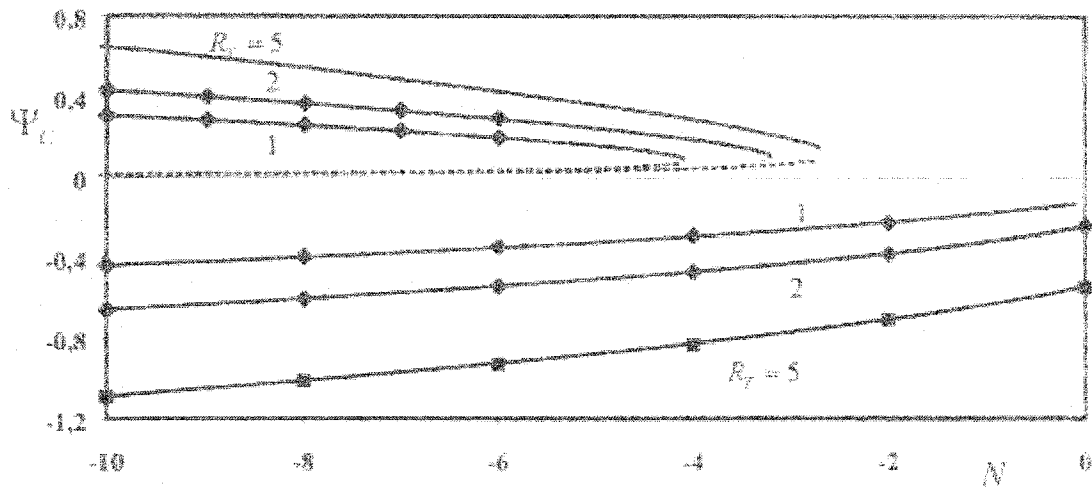


Figure 5.15 Effet de N et R_T sur Ψ_C pour $Le = 10$

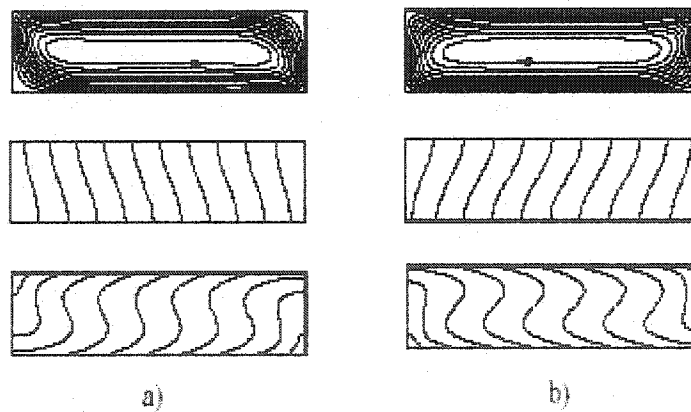


Figure 5.16 Lignes de courant (haut), température (milieux) et concentration (bas) pour $R_T = 2$, $A = 4$, $Le = 10$ et $N = -10$ a) $\Psi_C = 0.433$, $Nu = 1.079$, $Sh = 3.719$ et b) $\Psi_C = -0.660$, $Nu = 1.182$, $Sh = 4.611$

5.3 Cavité verticale ($\theta = 90^\circ$) chauffée par le bas et soumise à un flux de masse sur le coté

Le dernier cas étudié concerne une cavité poreuse verticale, représenté à la figure 5.17, dont les faces verticales sont soumises à des flux de masse et les parois horizontales à des flux de chaleur. ($\delta = 0$, $\gamma = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ et $\theta = 90^\circ$). Les résultats sont obtenus pour $-6 \times 10^2 \leq R_T \leq 10^4$, $0 \leq N \leq 10^3$ et $10^{-2} \leq Le \leq 10^2$. Afin d'étudier l'effet des paramètres de contrôle, deux cas limites sont d'abord présentés, à savoir $N \ll 1$ (la convection induite seulement par les gradients thermiques) et $N \gg 1$ (convection induite seulement par les gradients solutaux). Enfin le cas général est considéré pour lequel la convection est induite par la combinaison des deux gradients.

Comme dans les deux cas précédents, les équations gouvernantes ont été résolues numériquement par le biais de la méthode des différences finies en utilisant un maillage régulier de 60×180 . Ces résultats ont été comparés avec une méthode analytique basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle valide pour $A \gg 1$. Les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations, présentées sur la figure 5.18a, sont obtenus numériquement pour $R_T = 400$, $Le = 2$, $N = 0.1$ et $A = 8$. Elles illustrent clairement les caractéristiques et la validité de l'écoulement parallèle pour ce type de cavité. Les profils de la fonction de courant, de la température et de la concentration dans le plan médian de la cavité, présentés dans la figure 5.18 (b), indiquent une stratification dans la direction verticale des profils de température et de concentration. Une bonne concordance entre solutions analytiques et numériques est constatée.

Selon la valeur du rapport des forces de volume N , trois régimes convectifs seront discutés dans les parties qui suivent.

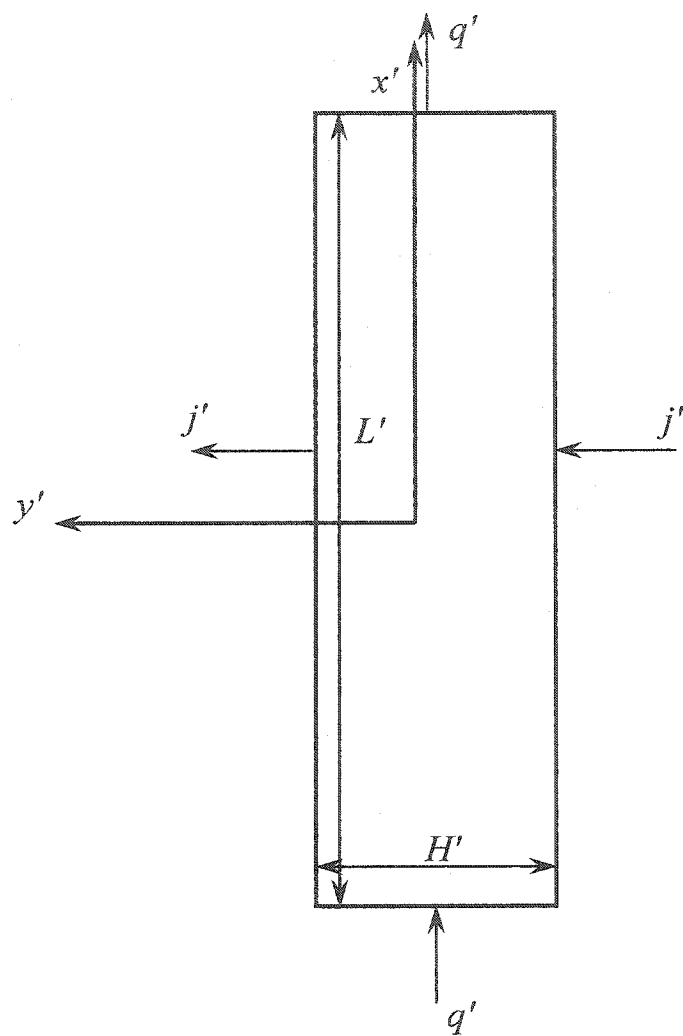


Figure 5.17 Représentation schématique du modèle physique – Cas 3

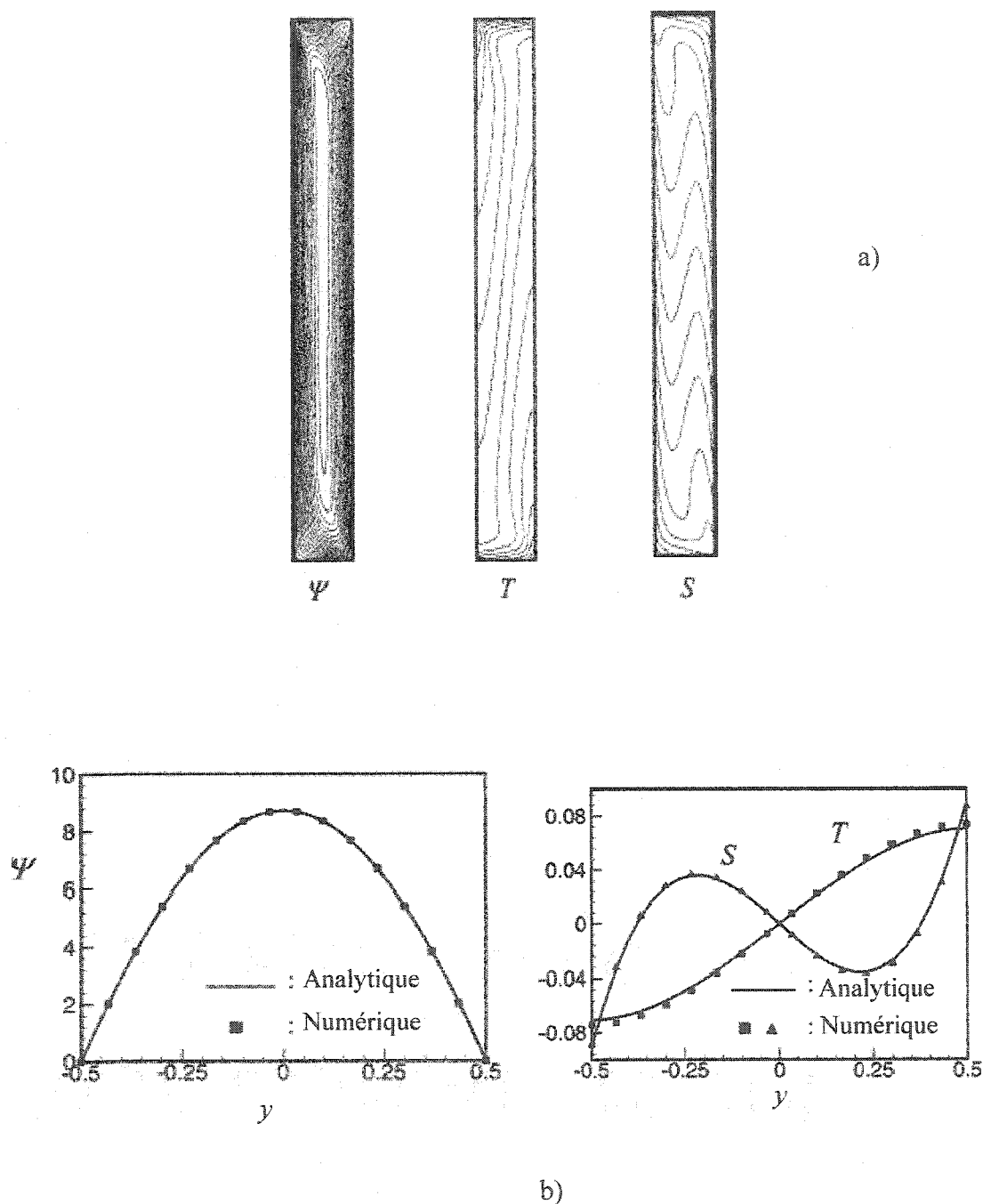


Figure 5.18 Résultats numérique pour $R_r = 400$, $Le = 2$, $N = 0.1$ et $A = 8$; (a) Lignes de courant (gauche), température (centre) et concentration (droite), (b) profils de la fonction de courant, la température et la concentration, à $x = 0$ ($\Psi_C = 8.714$, $\Delta T^* = 7.094$, $Sh = 5.537$)

5.3.1 Régime thermique dominant ($N \ll 1$)

Quand N est très faible ($N \ll 1$), l'écoulement convectif est dû exclusivement aux effets thermiques. On retrouve le cas particulier d'une cavité chauffée par le bas. Les champs de fonction de courant et température sont donnés par

$$\Psi^n = \frac{P^n R_T}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi y) \quad (5.19)$$

$$T^n = -\frac{n^2 \pi^2}{R_T} x + \frac{P^n}{n\pi} \sin(n\pi y) \quad (5.20)$$

où

$$P^n = \pm \frac{n\pi}{R_T} \sqrt{2(R_T - n^2 \pi^2)} \quad (5.21)$$

$n = 1, 3, 5, \dots$ correspond à n nombres de cellules verticales. Selon l'équation 5.21 la convection n'est possible dans ce cas que pour $R_T > n^2 \pi^2$, qui correspond au nombre de Rayleigh critique.

L'effet du nombre de Rayleigh R_T sur la fonction de courant et le transfert de chaleur ΔT^* (caractérisé par la différence de la température entre les parois verticales de la cavité) est présenté sur la figure 5.19 (a) et (b). Dans le cas mono cellulaire ($n=1$), on remarque qu'aucun mouvement convectif (le fluide reste immobile) n'est possible au dessous du nombre de Rayleigh critique π^2 . Par contre pour un nombre de Rayleigh supérieur au seuil critique, les mouvements convectifs s'amorcent.

Notons que malgré le fait que les calculs analytiques montrent que le problème admet plusieurs solutions, seuls les modes d'écoulements unicellulaires ($n=1$) ont pu être obtenus numériquement. En fait, toutes les simulations numériques faites pour $n \neq 1$, en prenant comme conditions initiales des solutions analytiques multicellulaires convergent vers une solution numérique monocellulaire. Pour cette raison on ne

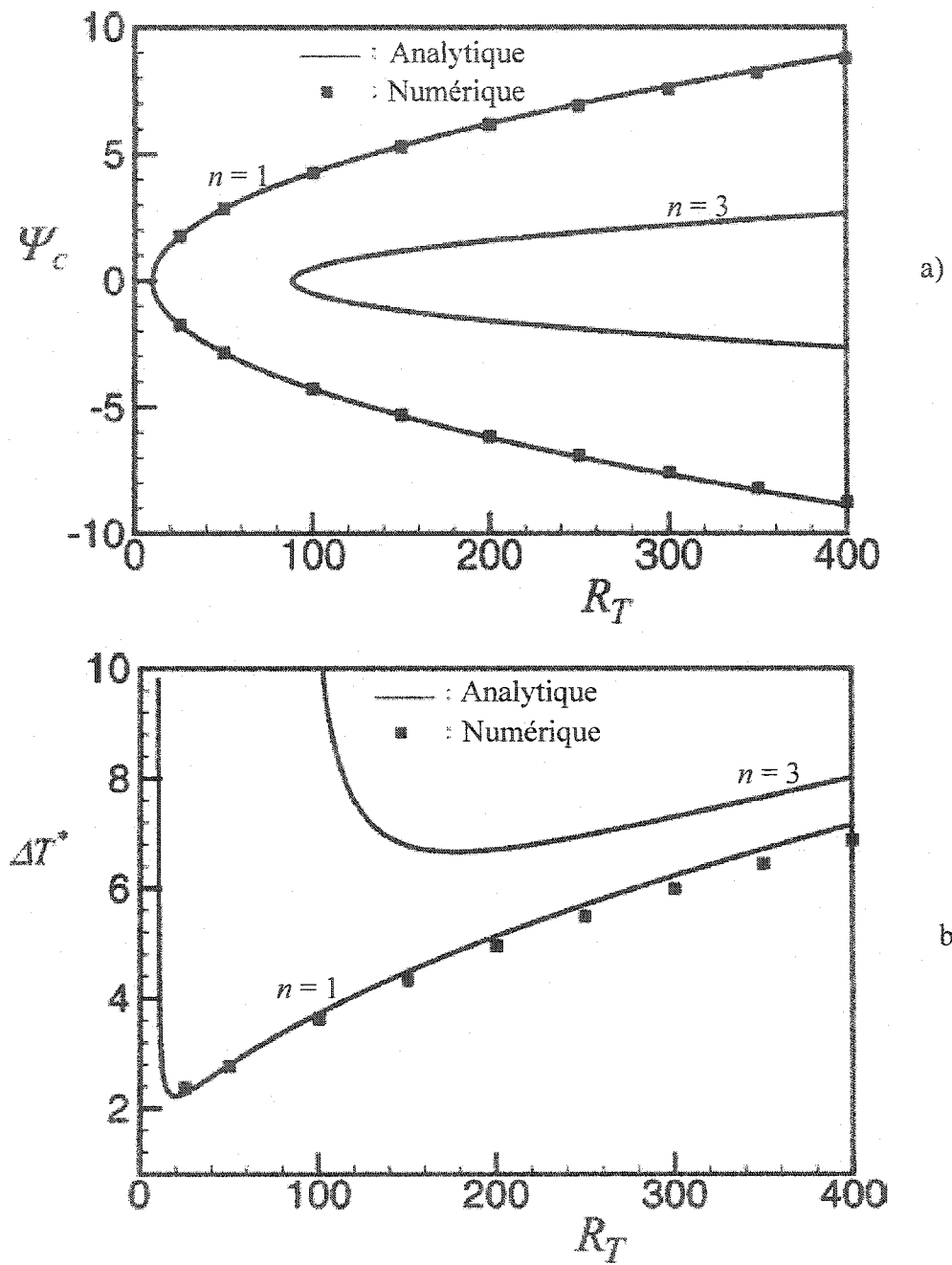


Figure 5.19 Diagramme de bifurcation pour $N \ll 1$. (a) Ψ_c en fonction de R_T et (b) ΔT^* en fonction de R_T

considérera que les résultats correspondant à des solutions monocellulaires ($n = 1$). Les autres solutions numériques sont supposées instables.

5.3.2 Régime solutal dominant ($N \gg 1$)

Quand N est très grand ($N \gg 1$), l'écoulement convectif est dominé par les effets solutaux. C'est le cas particulier d'une cavité verticale chauffée faiblement par le bas et soumise à un très fort flux solutal sur les cotés. La convection est possible pour n'importe quelle valeur de nombre de nombre de Rayleigh solutal $R_s = R_T N Le$. Un régime de type couche limite est atteint quant $R_s \gg 1$. L'intensité de l'écoulement et le nombre de Sherwood sont alors donnés par les expressions suivantes

$$\overline{\Psi}_c = \frac{\Psi_c}{Le} \approx \sqrt{R_s^{2/5}} \quad (5.22)$$

$$Sh = \frac{R_s^{2/5}}{2} \quad (5.23)$$

L'effet du nombre de Rayleigh solutal sur l'écoulement et le transfert de masse au sein de la cavité est donné dans les figure 5.20 (a) et (b). On remarque que pour un Rayleigh solutal très faible la convection existe mais a un effet négligeable sur le transfert de masse qui se fait presque exclusivement par diffusion (régime de pseudo diffusion, ($Sh=1$)). Au fur et à mesure qu'on augmente le Rayleigh solutal l'écoulement s'intensifie jusqu'à atteindre le régime de la couche limite pour $R_s \geq 10^3$.

5.3.3 Régime intermédiaire ($N \approx 1$)

Le régime intermédiaire correspond au cas où les forces de volume thermique et solutale sont comparables. Les évolutions de Ψ_c , Nu et Sh en fonction de R_T sont présentées sur les figures 5.21 (a)-(c) pour $Le = 10$ et $N = 0.01, 0.5$ et 1 . On constate que les solutions convectives en régime permanent peuvent être obtenues pour n'importe quelle valeur de R_T .

Pour un $R_T = 100$, $N = 0.01$ et $Le = 10$, la solution analytique prévoit l'existence de trois solutions possibles. Le flux massique latéral agissant de droite vers la gauche il génère une rotation dans le sens antihoraire et la solution naturelle correspond à un Ψ_c positif. Par contre la rotation antinaturelle correspond à un Ψ_c négatif. Numériquement on peut vérifier l'existence de deux types de solutions monocellulaires. La première correspond à l'écoulement antinaturel (figure 5.22a) et la seconde est naturelle (figure 5.22b). On remarque aussi qu'en augmentant le nombre de Rayleigh, le nombre de Sherwood tend vers une valeur asymptotique qui dépend du rapport des forces de volume N (figure 5.21c). Quant au transfert de chaleur entre les parois verticales ΔT^* , il converge vers une valeur asymptotique indépendamment de N , figure 5.21b. Ce comportement est caractéristique des conditions frontières considérées ici. Les résultats montrent aussi que les transferts de masse s'accroissent plus rapidement quand N augmente.

Pour mettre en évidence l'existence de solutions multiples et surtout les solutions antinaturelles, on a étudié l'effet du rapport des forces de volume sur le nombre de Rayleigh critique R_{Tc} pour lequel ces solutions existent. La figure 5.21d montre l'évolution du nombre de Rayleigh critique R_{Tc} en fonction de N pour $Le = 10$ dans le cas d'un mode d'écoulement monocellulaire ($n = 1$). On peut remarquer que le nombre de Rayleigh critique R_{Tc} diminue asymptotiquement vers une valeur nulle quand N augmente.

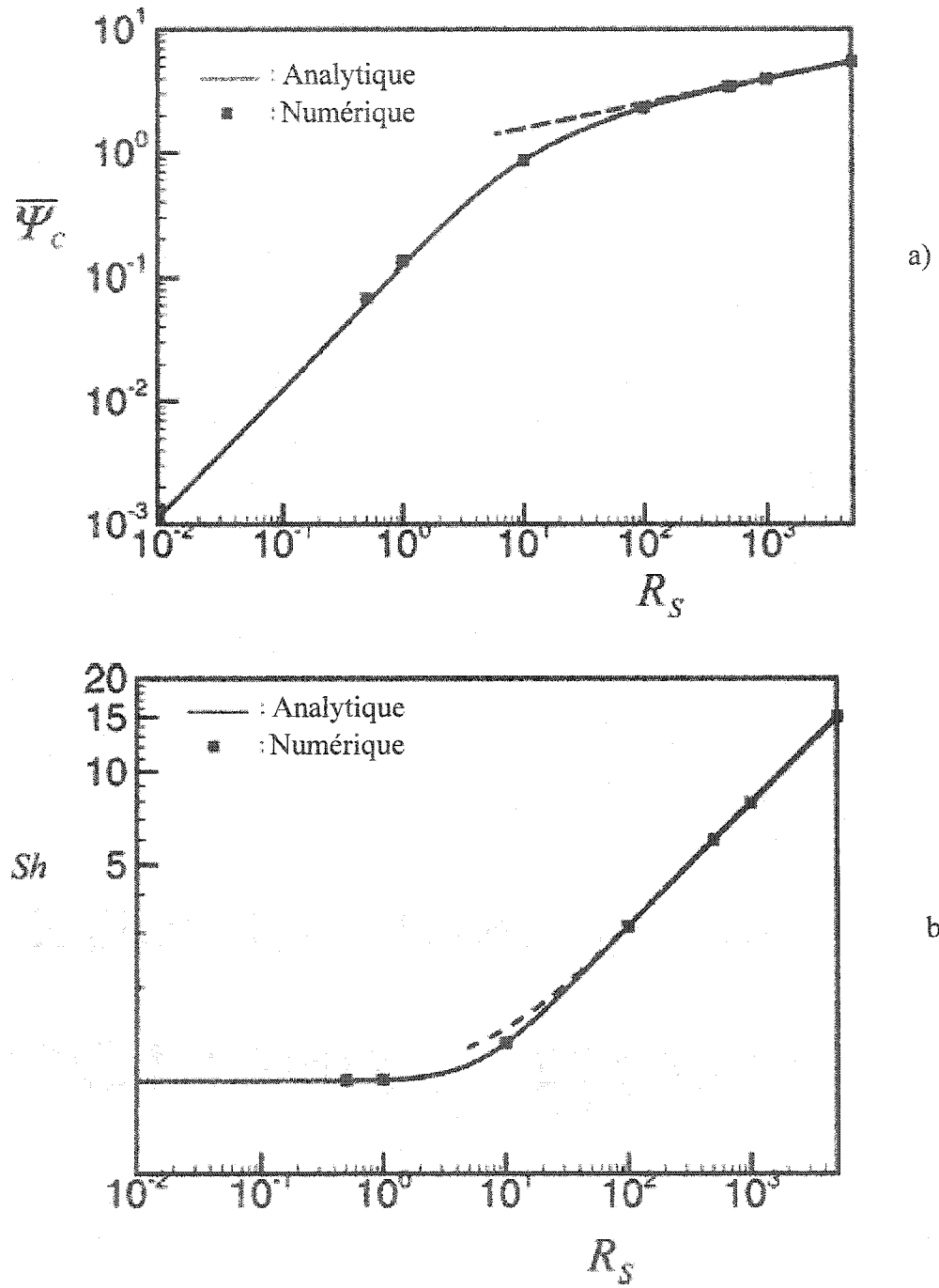


Figure 5.20 Effet du nombre de Rayleigh solutal R_s pour $R_T \ll 1$ sur
 (a) $\overline{\Psi}_c = \Psi_c / Le$ et (b) Sh

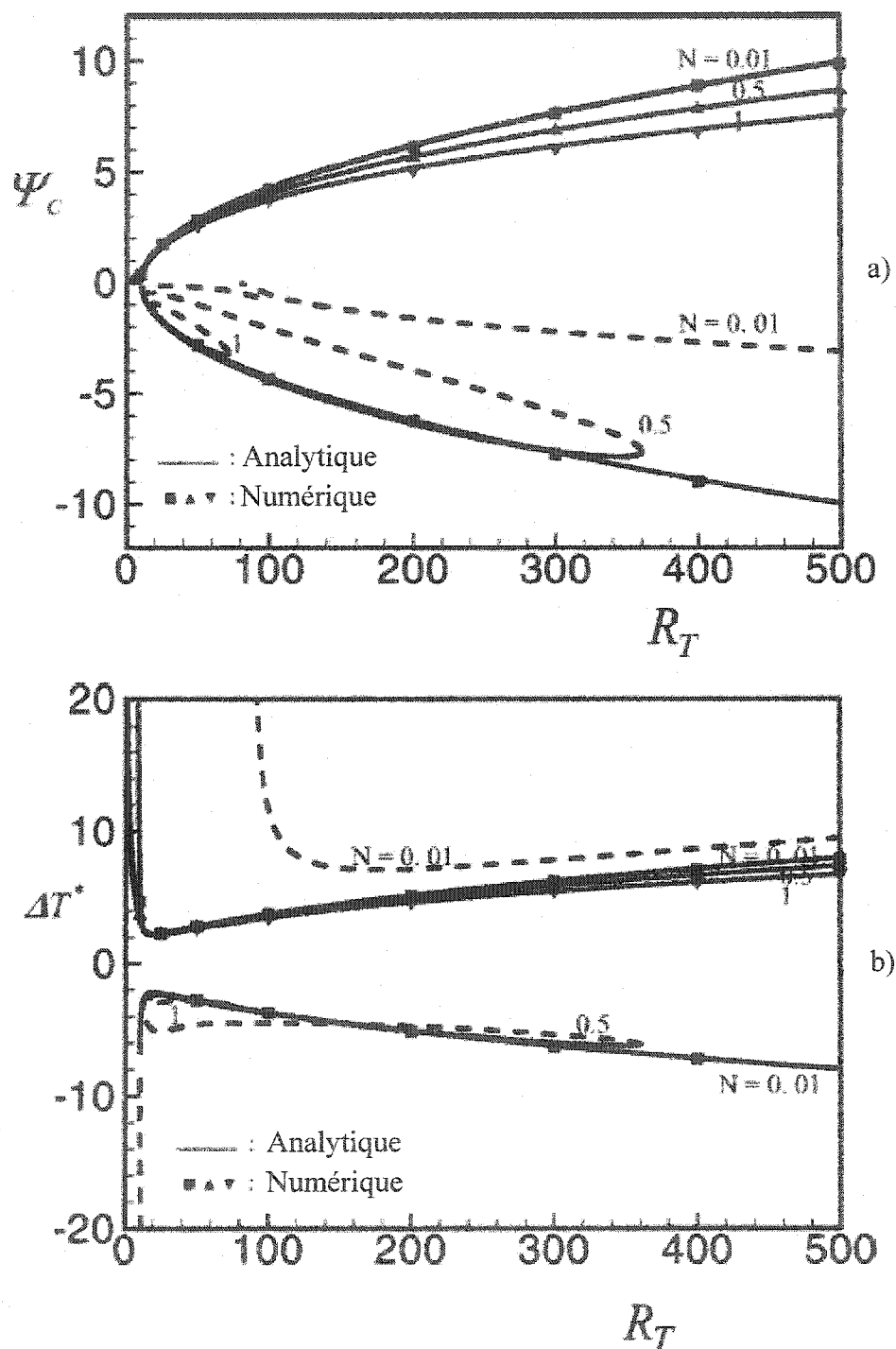


Figure 5.21 Effet du nombre de Rayleigh thermique R_T et du rapport des forces de volume N pour $Le = 10$ sur (a) Ψ_c et (b) ΔT^* (c) Sh et (d) nombre de Rayleigh critique R_{Tc} en fonction de N

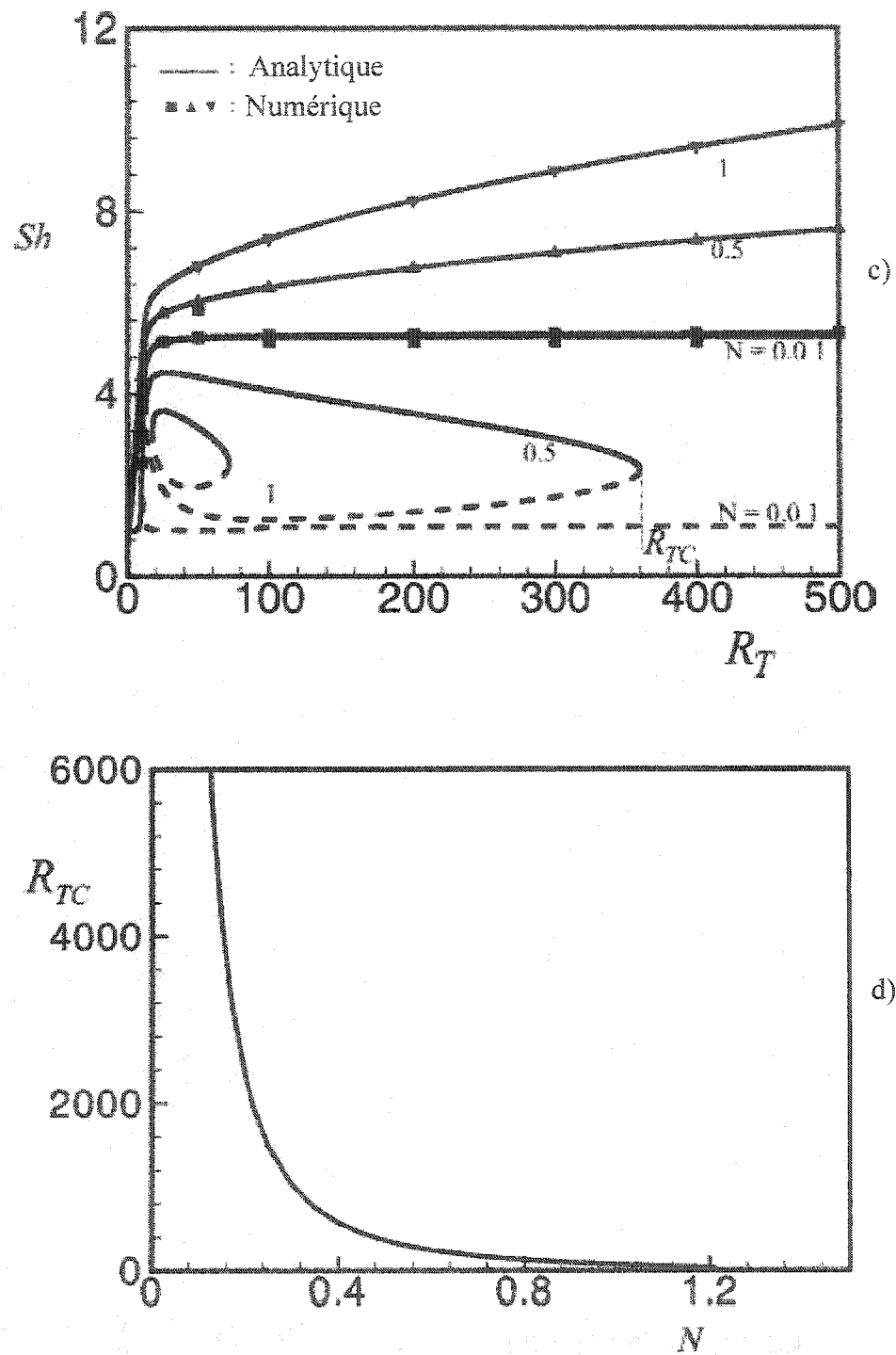


Figure 5.21 Effet du nombre de Rayleigh thermique R_T et du rapport des forces de volume N pour $Le = 10$ sur (a) Ψ_c et (b) ΔT^* (c) Sh et (d) nombre de Rayleigh critique R_{TC} en fonction de N

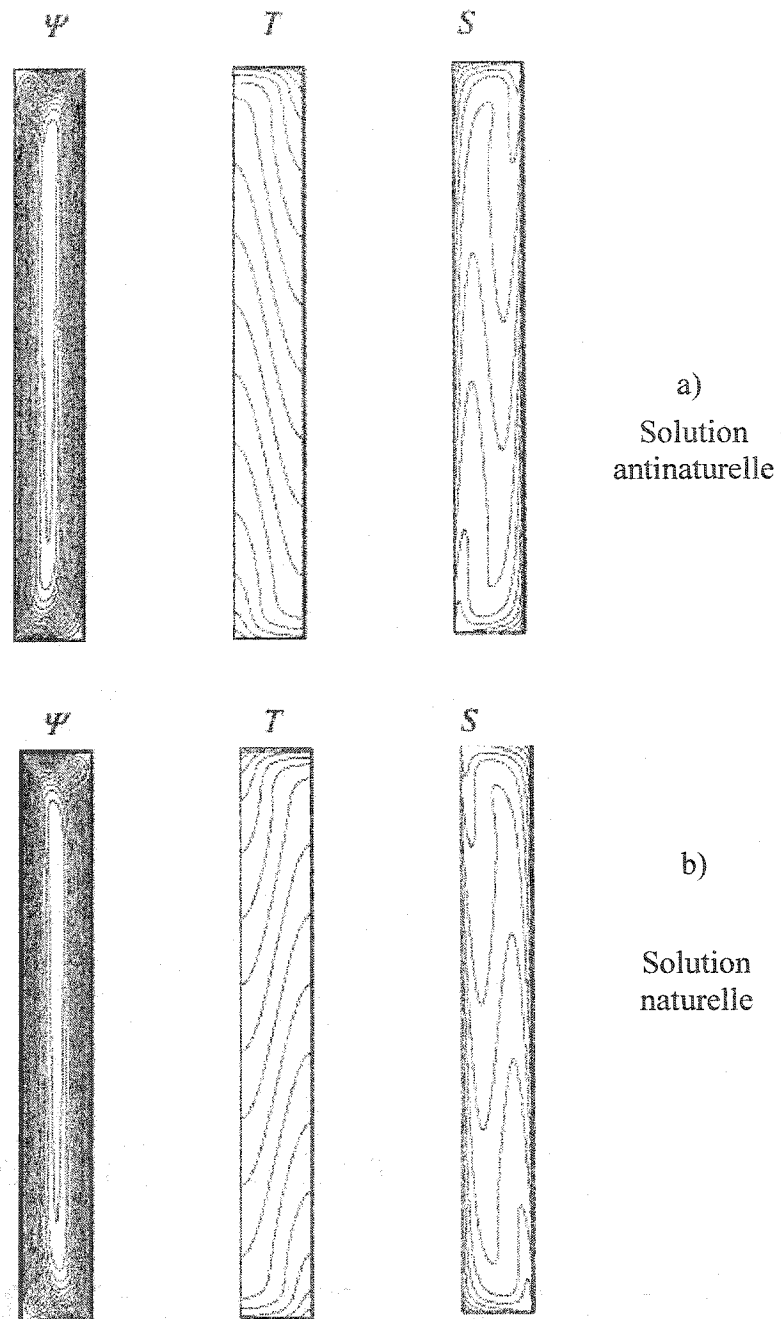


Figure 5.22 Tracé des lignes de courant Ψ , température T , concentration S pour $Le = 10$, $N = 0.01$ et $R_T = 100$, (a) solution antinaturelle et (b) solution naturelle

La figure 5.23, montre l'effet de R_T sur l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité Ψ_c . pour $R_S = 10$, l'illustre parfaitement. Quant on coupe le chauffage par le bas ($R_T = 0$) la convection est induite par des effets solutaux. La présence du chauffage par le bas ($R_T > 0$) va contribuer à produire un écoulement plus intense. L'effet inverse ce produit quand $R_T < 0$. Dans cette situation on chauffe la paroi supérieure horizontale et on refroidit la paroi inférieure. L'effet thermique joue alors un rôle stabilisant ce qui produit une diminution de l'intensité de l'écoulement.

Les effets du rapport des forces de volume sur la fonction de courant, sont illustrés sur la figure 5.24a pour $Le = 10$ et des nombres de Rayleigh thermique $R_T = 50, 100, 200$ et 500 . Pour le cas $R_T = 50$, on remarque que, quand N est faible, l'écoulement est dominé par les effets thermiques. Pour cette situation, trois solutions sont possibles, une des solution est naturelle ($\Psi_c > 0$) et les deux autres antinaturelles ($\Psi_c < 0$). En augmentant N vers des valeurs plus élevées, l'écoulement se réduit à une seule solution naturelle. De même on constate que l'écoulement s'intensifie pour des Rayleigh élevés et que toutes ces solutions tendent vers une valeur asymptotique quand N est très grand.

La figure 5.25a présente l'effet de N sur l'intensité de l'écoulement pour $R_T = 50$ et $Le = 0.5, 1, 2, 5$ et 10 . Les courbes montrent que pour $N < N_c$, les effets thermiques contrôlent entièrement l'écoulement convectif et que trois solutions sont possibles indépendamment de Le . Au delà du N_c , le renversement de l'écoulement se produit suite à des effets solutaux dominants. Une solution naturelle est possible dont l'intensité augmente avec N et diminue avec Le . La figure 5.25b illustre l'influence du nombre de Lewis sur l'existence de solutions multiples, N_c , pour $R_T = 50$. Lorsque Lewis est faible ($Le < 1$) la limite d'existence des solutions tend vers une valeur asymptotique $N_c = 0.38$. Cette valeur augmente avec l'augmentation de Le pour atteindre une autre valeur asymptotique supérieure $N_c = 1.1$ pour des nombre de Lewis élevés

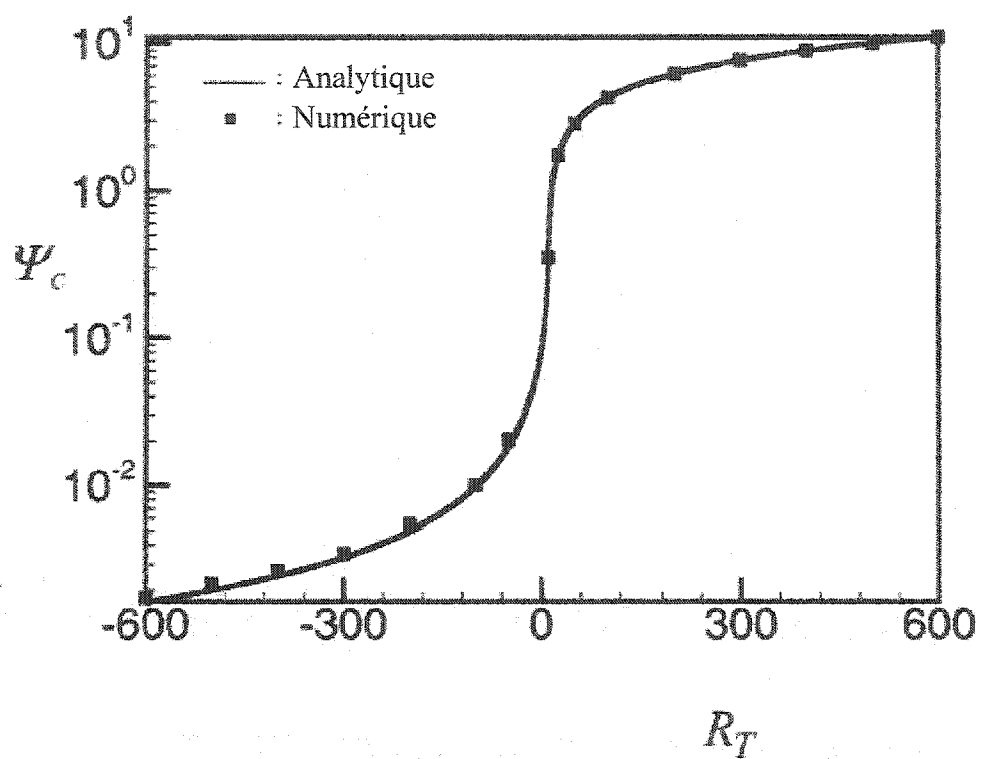


Figure 5.23 Effet du nombre de Rayleigh thermique R_T sur Ψ_c pour $Le = 10$ et $R_s = 10$

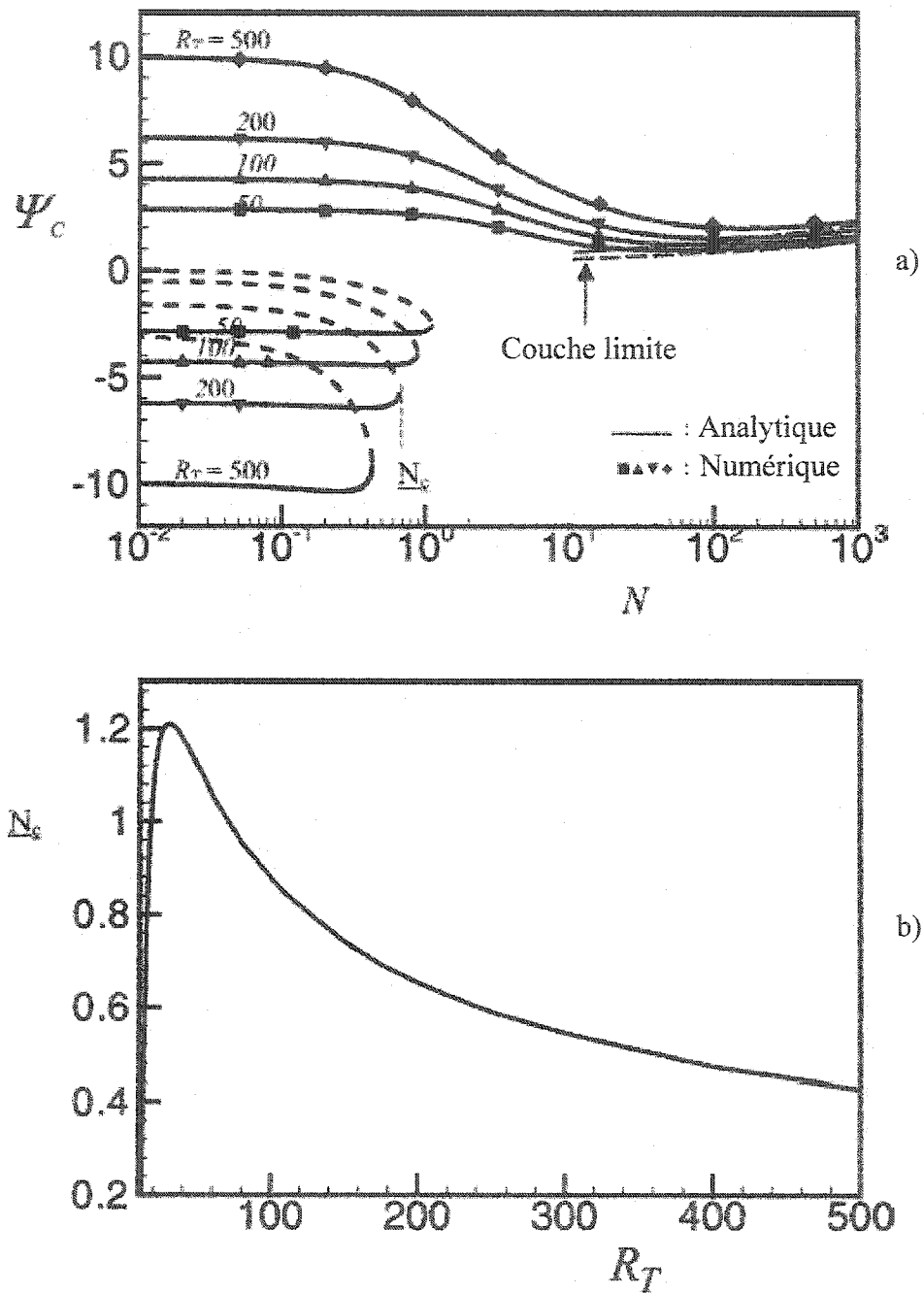


Figure 5.24

(a) Effet de N et du nombre de Rayleigh thermique R_T sur l'intensité de l'écoulement Ψ_C pour $Le = 10$ (b) Effet du nombre de Rayleigh thermique R_T sur le rapport des forces de volume critique N_C .

La variation de la valeur critique de N (N_c), au delà de laquelle les solutions antinaturelles disparaissent, en fonction du Rayleigh thermique pour $Le = 10$ est présentée sur la figure 5.24b. Pour $R_T = 50$, nous avons obtenu $N_c = 1.11$, N_c décroît asymptotiquement vers 0.43 quant R_T diminue et vers zéro quant R_T augmente. On note l'absence de solutions multiples convectives quand $N \geq N_c$.

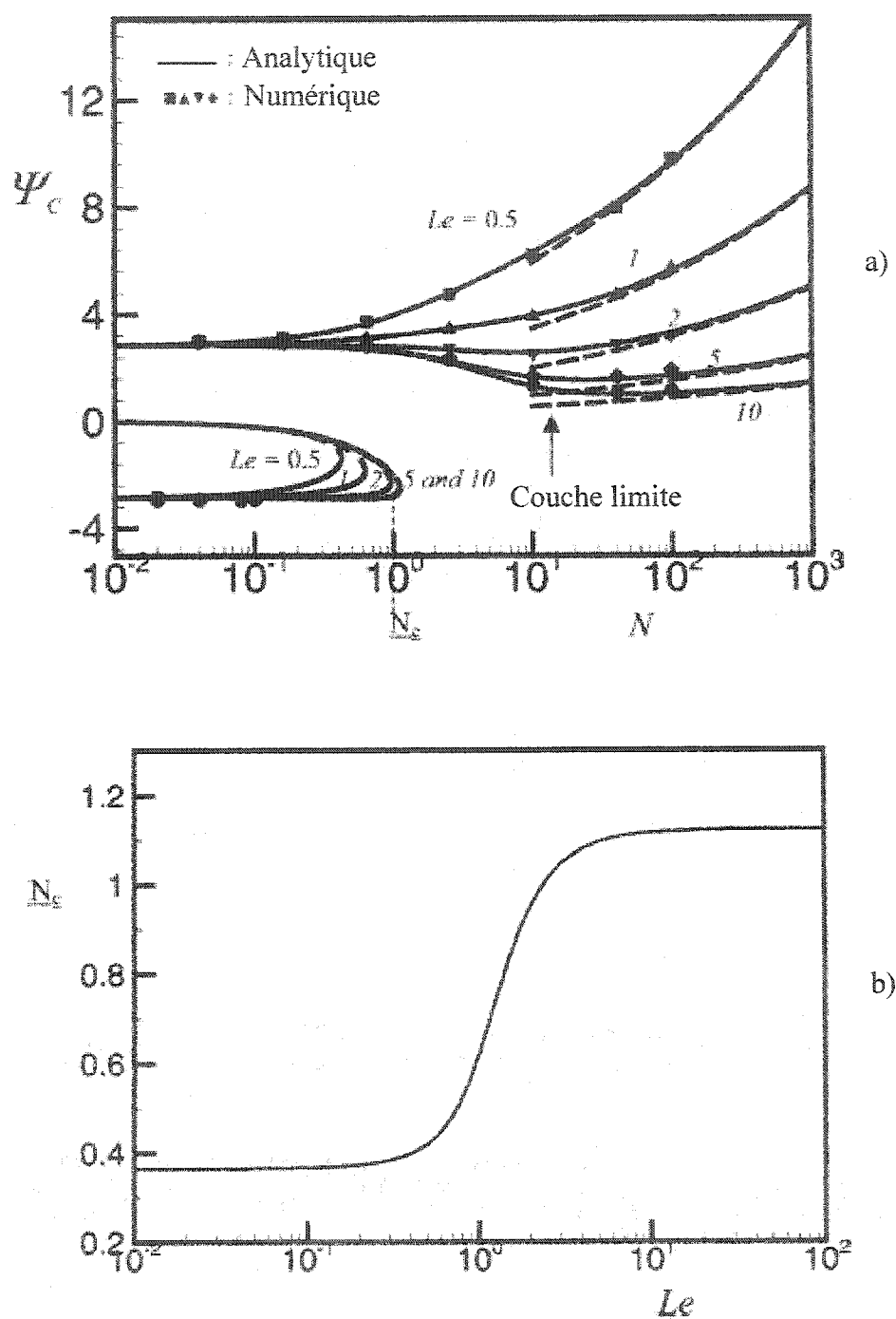


Figure 5.25 (a) Effet de N et du nombre de Lewis Le sur l'intensité de l'écoulement Ψ_C pour $R_T = 50$ (b) Effet du nombre de Lewis Le sur le rapport des forces de volume critique N_C .

CONCLUSION

Le travail présenté dans ce mémoire nous a permis d'étudier théoriquement et numériquement les transferts de chaleur et de masse couplés dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire, pour le cas d'une géométrie rectangulaire bidimensionnelle. Des conditions aux frontières de type Newman (flux constant de chaleur et de masse) ont été considérées. On utilise le modèle de Darcy et l'approximation de Boussinesq pour établir le modèle mathématique décrivant le phénomène de la convection thermosolutale au sein du milieu poreux.

Le système d'équations gouvernant le problème est résolu numériquement par un code de calcul basé sur la méthode des différences finies. De plus, une solution analytique, basée sur l'approximation d'un écoulement parallèle, a été obtenue pour le cas limite d'une cavité allongée ($A \gg 1$). L'intensité de l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse sont exprimés en termes des paramètres de contrôle du problème, ces paramètres étant le rapport de forme A , le rapport des forces de volume N , le nombre de Rayleigh thermique R_T , le nombre de Rayleigh solutale R_S et le nombre de Lewis Le . L'influence de ces paramètres sur la fonction de courant au centre de la cavité Ψ_c , sur le transfert de chaleur Nu , et sur le transfert de masse Sh a été établie pour trois cas différent.

Le premier concerne une cavité poreuse horizontale, dont les parois horizontales sont soumises à des flux uniformes de chaleur et de masse, alors que les parois verticales latérales sont soumises à un flux constant de chaleur dont l'intensité est donnée par $\beta q'$. Dans un premier temps, nous avons considéré la configuration sans le chauffage $\beta = 0$. Pour le cas où le rapport de forces de volumes est positif ou nul ($N \geq 0$), l'écoulement prend la forme d'une bifurcation standard de Bénard. Deux mouvements convectifs en sens opposés, en plus de la solution triviale de conduction pure ($\Psi = 0$) sont possibles pour des nombres de Rayleigh supérieurs à la limite critique

$R_{Tc}^{\text{sup}} = 12 - R_S$. Cependant quand la convection est opposée, c'est-à-dire lorsque des effets solutaux stabilisants et des effets thermiques déstabilisant sont en interaction ($N < 0$) cinq solutions sont alors possibles (une correspondant à l'état de repos et les quatre autres correspondent aux régimes convectifs d'écoulements à amplitude finie) pour des Rayleigh compris entre la limite supérieure R_{Tc}^{sup} et sous critique R_{Tc}^{sub} (équation 5.11).

L'introduction d'une imperfection par le biais d'un chauffage latéral ($\beta \neq 0$) à la bifurcation change considérablement la structure de l'écoulement et la convection est possible pour n'importe quelle valeur du nombre de Rayleigh thermique R_T , et ce, même pour des valeurs nulles de R_T (écoulement dominé par les effets solutaux). Pour des nombres de Rayleigh plus grand qu'une certaine limite critique R_{Tc}^a ($R_{Tc}^a \approx 17, \beta = 0.1, R_S = 20$ et $Le = 10$) des solutions multiples sont aussi possibles. L'effet du chauffage latéral β sur l'intensité de la convection (intensité donnée par la fonction de courant au centre de la cavité Ψ_C), sur les nombres de Nusselt et de Sherwood en fonction de R_T a été établi dans le cas où la convection est coopérante ($N > 0$) ou opposée ($N < 0$).

Le deuxième cas concerne une cavité horizontale pour laquelle on a appliqué un flux de masse constant sur les parois horizontales et un flux de chaleur sur les parois latérales. Les résultats montrent clairement que l'écoulement dépend du rapport des forces de volume N . Ainsi, il a été observé que l'écoulement convectif induit par les forces thermiques ($N = 0$), dépend fortement du nombre de Rayleigh thermique R_T . Par contre, quand le régime est induit par les forces solutales ($|N| \rightarrow \infty$), deux situations sont possibles. La première concerne la convection coopérante (N positif), pour laquelle l'écoulement dans la cavité poreuse devient parallèle et pour laquelle un régime purement diffusif s'installe, suite à l'imposition d'un gradient de concentration très fort. La seconde situation est celle de la convection opposée (N négatif), pour laquelle des solutions multiples surviennent. Ces solutions multiples sont au nombre de trois pour un N donné :

deux solutions antinaturelles (l'écoulement se fait dans le sens antihoraire, $\Psi_c > 0$), l'une stable et l'autre instable, et une troisième solution dite solution naturelle (l'écoulement se fait dans le sens horaire, $\Psi_c < 0$).

Quand le régime de convection est intermédiaire ($2 \leq N \leq 4.66$), des solutions multiples existent aussi, mais avec des mouvements convectifs se faisant dans le sens horaire.

Dans le dernier cas, on a étudié une cavité de forme verticale chauffé par le bas et soumise à un flux de masse latéral. L'effet des forces de volume a été étudié pour différentes valeurs des paramètres de contrôles. Le régime d'origine thermique dominant $N \ll 1$ considéré en premier montre que la convection s'amorce pour un Rayleigh thermique égale à π^2 . Le taux du transfert thermique dépend alors uniquement du nombre de Rayleigh thermique. Le second cas limite considéré est celui où les forces de volume d'origine solutale sont dominantes $N \gg 1$, l'intensité de l'écoulement augmente alors proportionnellement avec le nombre de Rayleigh solutal jusqu'à atteindre une limite asymptotique de type couche limite. Le taux du transfert de masse (Sh) est alors proportionnel à $R_s^{2/5}$. Le cas de la convection intermédiaire $N \approx 1$, a aussi été abordé. Pour cette situation, les mouvements convectifs s'amorcent pour n'importe quelle valeur du nombre de Rayleigh thermique R_T . Les résultats montrent aussi que le transfert de masse s'accroît plus rapidement quant N augmente et que le transfert thermique entre les parois verticale converge vers une valeur asymptotique indépendante de N .

L'effet de N_c dont dépend l'existence de solution multiple (solution naturelle stable et antinaturelle instable) a été étudié numériquement et théoriquement en fonction du nombre de Rayleigh thermique R_T et du nombre de Lewis Le . Les résultats de ces deux approches concluent parfaitement.

Les perspectives d'étude apparaissant à l'issue de ce travail sont les suivantes :

- 1) Possibilité de modéliser le milieu poreux en considérant le modèle de Brinkman-Forcheheimer, lequel tient compte des effets visqueux et de l'inertie;
- 2) Possibilité de traiter le problème en tenant compte : 1° de l'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique et 2° de l'interaction entre les effets thermique et solutaux (effet Soret et Dufour) des milieux poreux;
- 3) Possibilité de généraliser le modèle par une approche tridimensionnelle qui tient compte des géométries complexes. Dans ce cas, d'autres techniques numériques devront être envisagées pour résoudre les équations gouvernantes, par exemple la méthode des éléments finis ou celle des volumes finis. Des mesures expérimentales pourraient également être envisagées.
- 4) Utilisation d'une analyse de stabilité linéaire et non linéaire pour déterminer avec précision les nombres de Rayleigh supercritique et souscritique.
- 5) Possibilité de considérer des conditions aux frontières de type Dirichlet (température et concentration imposées) et dynamiques (flux périodique imposé).

RÉFÉRENCES

1. Bénard, H. (1901). Les Tourbillons Cellulaires dans une Nappe Liquide Transportant de la Chaleur par Convection en Régime Permanent. Ann. Chim. Phys. 7 (Ser. 23): 62-79.
2. Rayleigh, L. (1916). On Convection Currents in a Horizontal Layer of Fluid, When the Higher Temperature is on the Underside. Phil. Mag. 32: 529-538.
3. Stommel, H., Arons, A.B., & Blanchard, D.(1956). An Oceanographic Curiosity: the Perpetual Salt Fountain.Deep-Sea Research, 3,152-153.
4. Stern, M.E., (1969). Collective Instability of Salt Fingers. Journal of Fluid Mechanics, 35(2). 209-218.
5. Nield, D. A . and Bejan, A., (1999). Convection in Porous Media . Springer-Verlag
6. Darcy, H., (1856). Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon , distribution d'eaux et filtrage des eaux, Victor Dalmont, Paris.
7. Boussinesq, J.,(1903). Théorie Analytique de la Chaleur mise en Harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie Mécanique de la Lumière, Tome II: Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité. Courants de Convection . Paris: Gauthier-Villars, 657-669.
8. Brandt, A., Fernando, H.(1995). Double Diffusive Convection, Amer Geophysical Union.
9. Nield., D. A., (1968). Onset of Thermohaline Convection in Porous Medium , Water Resources Research, 4, 553-560.

10. Taunton, J., Lightfoot, E. and Green, T., (1972). Thermohaline Instability and Salt Fingers in a Porous Medium , Physics of Fluids, 15, 748-753.
11. Rubin, H. Y., (1973). Effect of Nonlinear Stabilizing Salinity Profiles on Thermal Convection in a Porous Medium Layer . Water Resources Res. 9, 211–221.
12. Rubin, H. Y.,(1973). Effect of Solute Dispersion on Thermal Convection in a Porous Medium Layer , Water Resources, 9, 968-974.
13. Tyvand, P. A.,(1980). Thermohaline Instability in Anisotropic Porous Media , Water Resources Research, 16, 2, 325-330.
14. Griffiths, R. W.,(1981). Layered Double-Diffusive Convection in Porous Media . J. Fluid Mechanics, 102, 221-248.
15. Rudraiah, N., Shrimani, P.K. and Friedrich, R., (1982). Finite Amplitude Convection in a Two-Component Fluid Saturated Porous Layer , Int. J. Heat and Mass Transfer, 25, 715-722.
16. Brand, H. and Steinberg, V., (1983). Nonlinear Effect in the Convective Instability of a Binary Mixture in a Porous Medium Near Threshold , Physics letters, 93A, 333-336.
17. Brand, H. and Steinberg, V., (1983). Convective Instabilities in Binary Mixture in a Porous Medium , Physica, A 119, 327–338.
18. Khair, K., R. and Bejan, A., (1985). Mass Transfer to Natural Convection Boundary Layer Flow Driven by Heat Transfer . J. Heat Transfer, 107, 979-981.
19. Trevisan, O.,V. and Bejan, A., (1985). Natural Convection with Combined Heat and Mass Transfer Buoyancy Effects in a Porous Medium , Int. J. Heat and Mass Transfer, 28, 1597-1611.

20. Trevisan, O.,V. and Bejan A., (1986). Mass and Heat Transfer by Natural Convection in a Vertical Slot Filled with Porous Medium . Int. J. Heat Mass Transfer ,29, 403–415.
21. Poulikakos, D., (1986). Double Diffusive Convection in a Horizontal Sparsely Packed Porous Layer , Int. Comm. Heat Mass Transfer, 13, 587-598.
22. Taslim, M., and Narussawa, U.,(1986). Binary Fluid Composition and Double Diffusive Convection in a Porous Medium . J. Heat Transfer, 108, 221-224.
23. Mehta, K., N., and Nandakumar, K., (1987). Natural Convection with Combined Heat and Mass Transfer Buoyancy Effects in Non-Homogeneous Porous Medium , Int. J. Heat and Mass Transfer, 30, 12, 2651-2656.
24. Trevisan, O.,V. and Bejan A., (1987). Mass and Heat Transfer by High Rayleigh Number Convection in a Porous Medium Heated From Below . Int. J. Heat Mass Transfer, 30, 2341–2356.
25. Murray, B.,T. and Chen ,C.,F., (1989). Double-Diffusive Convection in a Porous Medium . J. Fluid Mechanics ,201,147–166.
26. Fournier, R.,O., (1990). Double-Diffusive Convection in Geothermal Systems: the Salton Sea, California, Geothermal System as a Likely Candidate , Geothermics, 19, 6, 481-496.
27. Rosenberg, N., D., and Spera, F., J.,(1992). Thermohaline Convection in a Porous Medium Heated from Below , Int. J. Heat and Mass Transfer, 35, 1261-1272.
28. Chen, F., and Chen, C., F., (1993). Double-Diffusive Convection in a Porous Medium . Int. J. Heat Mass Transfer, 36, 793-807.

29. Alavyoon, F., (1993). On natural Convection in Vertical Porous Enclosures due to Prescribed Fluxes of Heat and Mass at the Vertical Boundaries , Int. J. Heat Mass Transfer, 36, 2479–2498.
30. Alavyoon, F., Masuda, Y., and Kimura, S., (1994). On natural Convection in Vertical Porous Enclosures due to Opposing Fluxes of Heat and Mass Prescribed at the Vertical Walls , Int. J. Heat Mass Transfer, 37, 195–206.
31. Malashetty, M., S., (1993). Anisotropic Thermoconvective Effects on the Onset of Double Diffusive Convection in a Porous Medium , Int. J. Heat Mass Transfer, 39, 2397-2401.
32. Nguyen, H., D., Paik, S., and Douglass, R., W., (1994). Study of Double-Diffusive Convection in Layered Anisotropic Porous Media , Num.Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 26, 4, 489-505.
33. Mamou, M., Vasseur, P., and Bilgen, E., (1995). Multiple Solutions for Double-Diffusive Convection in a Vertical Porous Enclosure : Int. J. Heat and Mass Transfer, 38, 10, 1787-1798.
34. Mamou, M., Vasseur, P., Bilgen, E. and Gobin, D., (1995). Double-Diffusive Convection in an Inclined Slot Filled with Porous Medium , Eur. J. Mechanics, B/Fluids, 14, 629-652.
35. Goyeau, B., J., Songbe, P., and Gobin, D., (1996). Numerical Study of Double-Diffusive Natural Convection in a Porous Cavity Using the Darcy-Brinkman Formulation , Int. J. Heat and Mass Transfer, 39, 7, 1363-1378.
36. Nithiarasu, P., Seetharamu, K. N. and Sundarajan, T., (1996). Double-Diffusive Natural Convection in an Enclosure Filled with Fluid-Saturated Porous Medium: a General non-Darcy Approach . Num. Heat Transfer, 30, 413–426.

37. Nithiarasu, P., Sundararajan, K.,N. and Seetharamu, T., (1997). Double-Diffusive Natural Convection in a Fluid Saturated Porous Cavity with a Freely Convecting Wall , Int. Comm Heat and Mass Transfer, 24, 8, 1121-1130.
38. Karimi-Fard, M., Charrier-Mojtabi, M.C. and Vafai, K.,(1997). Non-Darcian Effects on Double-Diffusive Convection within a Porous Medium . Num. Heat Transfer, A 31, 837–852.
39. Amahmid, A., Hasnaoui, M, and Vasseur, P., (1999). Etude Analytique et Numérique de la Convection Naturelle dans une Couche Poreuse de Brinkman Doublement Diffusive , Int. J. Heat and Mass Transfer, 42, 15, 2991-3005.
40. Nguyen, T., H., Ha, T.T. and Vasseur, P., (1997). Onset and Development of Double Diffusive Convection in Horizontal Porous Layer . Procedding of the Int. Conference Engineering Mechanics today EMT'97, Hanoi, Vietnam, 225-238
41. Mamou, M., Vasseur, P and Bilgen, E. (1998). A Galerkin Finite-Element Study of the Onset of Double-Diffusive Convection in an Inclined Porous Enclosure . Int. J. Heat Mass Transfer ,41, 1513–1529.
42. Charrier-Mojtabi, M.C., Karimi-Fard, M. and Mojtabi A., (1997). Onset of Thermosolutal Convective Regimes in a Rectangular Porous Cavity, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy, 324, 1, 9-17
43. Mamou, M., Hasnaoui, M., Amahmid, A. and Vasseur, P., (1998). Stability Analysis of Double Diffusive Convection in a Vertical Brinkman Porous Enclosure , Int. Comm. Heat and Mass Transfer, 25, 4, 491-500.
44. Mamou, P., Vasseur and Bilgen, E., (1998). Double-Diffusive Convection Instability Problem in a Vertical Porous Enclosure . J. Fluid Mech, 368, 263–289.

45. Sezai, I., and Mohamad., A. (1999). Three-Dimensional Double-Diffusive Convection in a Porous Cubic Enclosure due to Opposing Gradients of Temperature and Concentration . J. Fluid Mech., 400, 333–353.
46. Benhadji, K. and Vasseur, P., (2001). Double-Diffusive Convection in a Shallow Cavity Filled with Non-Newtonian Fluid . Int. Comm. Heat Mass Transfer, 28,06, 763–772.
47. Joly, F., Vasseur, P. and Labrosse, G. (2000). Soret Driven Thermosolutal Convection in a Vertical Enclosure . Int.Comm.Heat Mass Transfer, 27, 6,755-764.
48. Sezai, I. (2002). Flow Transitions in Three-Dimensional Double-Diffusive fingering Convection in a Porous Cavity . J. Fluid Mech., 464, 311–344.
49. Amahmid, A., Hasnaoui, M, Mamou, M and P. Vasseur, (1999). Double-Diffusive Parallel Flow Induced in a Horizontal Brinkman Porous Layer Subjected to Constant Heat and Mass Fluxes: Analytical and Numerical Studies . J. Heat Mass Transfer, 35, 409–421.
50. Mamou, M. and Vasseur, P.(1999). Thermosolutal Bifurcation Phenomena in a Porous Enclosure Subject to Vertical Temperature and Concentration Gradients , J. Fluid Mechanics, 395 , 61–87.
51. Marcoux, M., Karimi-Fard, M, and Charrier-Mojtabi., MC, (1999) Naissance de la Convection Thermosolutale dans une Cellule Rectangulaire Poreuse Soumise à des Flux de Chaleur et de Masse , Int. J. Thermal Sciences, 38, 3, 258-266.
52. Karimi-Fard, M. Charrier-Mojtabi, C., and Mojtabi, A.(1999). Onset of Stationary and Oscillatory Convection in a Tilted Porous Cavity Saturated with a Binary Fluid: Linear Stability Analysis , Physics of Fluids, 11,6, 1346-1358.

53. Mojtabi., A., and Charrier-Mojtabi, M., C, (2000). Double Diffusive Convection in Porous Media . In handbook of porous medium, ed K. Vafai, 559-603, Marcel Dekker, New York.
54. Mahidjiba, A., M. Mamou and P. Vasseur, (2000). Onset of Double-Diffusive Convection in a Rectangular Porous Cavity Subject to Mixed Boundary Conditions , Int. J. Heat and Mass Transfer, 43, 9, 1505-1522.
55. Chamkha., A J and Hameed., A, (2001). Double-Diffusive Convection in an Inclined Porous Enclosure with Opposing Temperature and Concentration Gradients , Int.J.Thermal Sciences, 40, 3, 227-244.
56. Nishimura., T., Wakamatsu,M and Morega, A.,M (1998). Oscillatory Double-Diffusive Convection in a Rectangular Enclosure with Combined Horizontal Temperature and Concentration Gradients , Int. J. Heat and Mass Transfer, 41, 11, 1601-1611.
57. Kalla., L. Mamou., M, Vasseur, P. and Robillard., L (2001). Multiple Solutions for Double Diffusive Convection in a Shallow Porous Cavity with Vertical Fluxes of Heat and Mass , Int. J. Heat and Mass Transfer, 44, 23, 4493-4504.
58. Kalla., L, Vasseur., P, Benacer, R. Beji., H and Duval. R, (2001). Double Diffusive Convection within a Horizontal Porous Layer Salted from the Bottom and Heated Horizontally . Int. Comm. Heat Mass Transfer ,28, 1-10.
59. Abdulmajeed., M and Bennacer., R (2001). Natural Convection in a Confined Saturated Porous Medium with Horizontal Temperature and Vertical Solutal Gradients , Int. J.Thermal Sciences, 40, 1, 82-93.

60. Bennacer, R., Tobbal, A., Beji, H. and Vasseur, P., (2001). Double Diffusive Convection in a Vertical Enclosure Filled with Anisotropic Porous Media , Int. J. Thermal Sciences, 40, 1, 30-41.
61. Mohamad., A and Bennacer., R. (2002). Double diffusion, Natural Convection in an Enclosure Filled with Saturated Porous Medium Subjected to Cross Gradients; Stably Stratified Fluid , Int. J.Heat and Mass Transfer, 45, 18, 3725-3740.
62. Bera, P. and Khalili, A., (2002). Double-Diffusive Natural Convection in an Anisotropic Porous Cavity with Opposing Buoyancy Forces: Multi-Solutions and Oscillations , Int. J.Heat and Mass Transfer, 45, 15, 3205-3222.
63. Mamou, M., (2002). Stability Analysis of Thermosolutal Convection in a Vertical Packed Porous Enclosure , Physics of Fluids, 14,12 , 4302-4314.
64. Mamou, M., (2003). Stability Analysis of the Perturbed Rest State and of the Finite Amplitude Steady Double-Diffusive Convection in a Shallow Porous Enclosure , Int. J.Heat and Mass Transfer, 46, 12, 2263-2277.
65. Bourich, M., Amahmid, A. and Hasnaoui, M., (2003). Double Diffusive Convection in a Porous Enclosure Submitted to Cross Gradients of Temperature and Concentration , Energy Conversion and Management, In Press.
66. Kimura, S., Vynnycky, M. and Alavyoon.,F (1995). Unicellular natural circulation in a shallow horizontal porous layer heated from below by a constant flux , J. Fluid Mech, 294, 231-248.
67. Sen., M., Vasseur, P. and Robillard, L., (1987). Multiple Steady States for Unicellular Natural Convection in an Inclined Porous Layer , Int. J. Heat Mass Transfer., 30, 10, 2097-2113.

68. Kalla., L., Mamou, M. ,Vasseur, P. and Robillard, L., (1999). Multiple Steady States for Natural Convection in a Shallow Porous Cavity Subject to Uniform Heat Fluxes , Int.Comm. Heat Mass Transfer, 26, 6, 761-770.
69. Mamou., M (1998). Convection Thermosolutale dans les Milieux Poreux et Fluides Confinés, thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.
70. Bahloul, A, Boutana, N and Vasseur, P (2003). Double-Diffusive and Soret Induced Convection in a Shallow Horizontal Porous Layer , J. Fluid Mechanics, 491, 325 – 352.
71. Boutana, N, Bahloul, A. Vasseur, P and Joly, F. (2004). Soret Driven and Double Diffusive Natural Convection in a Vertical Porous Cavity , J. Porous Media, under press.
72. Bennacer, R. Mahidjiba, A, Vasseur,P., Beji, H. and Duval, R. (2003). The Soret Effect on Convection in a Horizontal Porous Domain Under Cross Temperature and concentration gradient , Int. J. Num. Methods Heat and Fluid Flow,13, 2, 199-215.
73. Mahidjiba., A (1998). Convection naturelle thermosolutale au sein d'une couche poreuse horizontale, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.
74. Benhadji., K. (2001). Convection thermo-solutale au sein d'une cavité poreuse saturée par un fluide non newtonien binaire, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.