

**Titre:** Contributions au problème d'affectation des types d'avion  
Title:

**Auteur:** Nicolas Bélanger  
Author:

**Date:** 2004

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Bélanger, N. (2004). Contributions au problème d'affectation des types d'avion  
Citation: [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
<https://publications.polymtl.ca/7274/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7274/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** François Soumis, & Guy Desautniers  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONTRIBUTIONS AU PROBLÈME D'AFFECTATION DES TYPES D'AVION

NICOLAS BÉLANGER

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR (Ph.D.)  
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)

AVRIL 2004

© Nicolas Bélanger, 2004.



National Library  
of Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

Acquisitions et  
services bibliographiques

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 0-612-92153-0*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 0-612-92153-0*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this dissertation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de ce manuscrit.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the dissertation.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

CONTRIBUTIONS AU PROBLÈME D'AFFECTATION DES TYPES D'AVION

présentée par : BÉLANGER Nicolas

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. GAMACHE Michel, Ph.D., président

M. SOUMIS François, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. DESAULNIERS Guy, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. CORDEAU Jean-François, Ph.D., membre

M. VIGO Daniele, Ph.D., membre externe



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de recherche, messieurs François Soumis et Guy Desaulniers, ainsi que monsieur Jacques Desrosiers, pour leurs contributions scientifique, financière<sup>1</sup> et morale, qui ont été nécessaires à la réalisation de ce travail.

Je remercie également professeurs, collègues étudiants et membres du personnel de soutien du centre de recherche GERAD pour les innombrables petits coups de main rendus sans bruits au cours des dernières années.

J'en profite également pour remercier les employés d'Air Canada avec qui j'ai eu la chance de collaborer, dont en particulier madame June Lavigne.

Je voudrais en terminant remercier mes parents, mes amis et mon épouse Marie pour leurs encouragements, conseils, interpellations et soutiens de toute sorte dont j'ai pu bénéficier tout au long de mes études.

---

<sup>1</sup>Mes études de doctorat ont également bénéficié de l'appui financier du FCAR (bourse du ministère des transports) et du CRSNG.

# Résumé

Dans cette thèse, nous abordons le problème d'affectation des types d'avion aux vols dans un contexte de planification stratégique. La littérature fait état de plusieurs études considérant le problème dans le contexte d'un horaire de vol quotidien, mais les modèles proposés ne permettent pas de prendre en compte de nombreux éléments qui sont soit nécessaires pour garantir la faisabilité pratique des solutions, soit pertinents pour permettre d'obtenir des solutions beaucoup plus profitables. Après avoir décrit le contexte pratique du problème (chapitre 1) et dressé un portrait des travaux déjà effectués sur ce sujet (chapitre 2), nous proposons de nouveaux modèles et approches de résolution afin d'améliorer la qualité des solutions obtenues. Un portrait général de la thèse est présenté au chapitre 3. Nous résumons ici brièvement les modèles et les approches de résolution que nous proposons, ainsi que les principales conclusions auxquelles nous sommes arrivés suite à nos expérimentations.

Tout d'abord, au chapitre 4, nous considérons le problème d'affectation des types d'avion aux vols sur un horizon d'une semaine en intégrant à l'objectif un facteur d'homogénéité dans le choix des types d'avion pour les vols d'un même numéro présent à plusieurs jours dans la semaine. Nous présentons un modèle linéaire en nombres entiers basé sur une formulation de flot dans un réseau espace-temps de type multicommodité. Ce modèle comporte, en outre, des variables de décision concernant le type d'avion affecté pour chaque vol et un type d'avion dominant pour chaque numéro de vol. Une pénalité est associée au fait de ne pas affecter à un vol son type dominant. Nous proposons deux approches de résolution. La première approche consiste à résoudre directement le modèle linéaire en nombres entiers par une méthode de séparation et d'évaluation progressive. La seconde approche consiste à séparer la

résolution du problème en deux phases. Lors de la première phase, on sélectionne un sous-ensemble de journées consécutives de la semaine, et on résout le problème avec homogénéité sur cet horaire restreint (comme pour l'approche directe décrite précédemment). À partir de cette solution, on détermine un type d'avion dominant pour chacun des numéros de vol présents dans cet horaire. Lors de la seconde phase, on résout le problème sur la semaine entière (comme pour l'approche directe), mais en imposant à chacun des vols dont le numéro a été considéré en première phase le type dominant qui y a été déterminé. La première approche permet théoriquement une résolution exacte du problème, alors que la seconde revêt un caractère heuristique. L'intérêt de cette dernière approche est de permettre de trouver de bonnes solutions beaucoup plus rapidement qu'avec la première. De plus, le fait de pouvoir ajuster le nombre de journées considérées en première phase permet à l'utilisateur d'établir un compromis entre la qualité de la solution pouvant être obtenue et le temps de calcul qu'il est disposé à accorder à la résolution. Les résultats des expérimentations que nous avons effectuées à partir de données fournies par le transporteur Air Canada démontrent la viabilité pratique de ce modèle et de ces approches de résolution pour des compagnies aériennes de taille moyenne comme Air Canada. Cette affirmation est encore mieux appuyée par les résultats présentés au chapitre 5, dans lequel on résout en contexte réel le problème hebdomadaire d'affectation des types d'avion aux vols en ayant recours à l'approche en deux phases pour considérer l'homogénéité.

En effet, nous présentons au chapitre 5 les résultats d'un travail de recherche effectué en collaboration avec Air Canada dans le cadre d'un contrat de consultation. Le projet visait à évaluer la pertinence d'intégrer l'utilisation d'un logiciel d'optimisation au travail des planificateurs pour les aider d'une part à identifier et éliminer les segments de vol non profitables du réseau, et d'autre part à établir efficacement l'affectation des types d'avion aux vols. Nous proposons dans ce chapitre une approche de résolution itérative pour prendre en compte le fait que la demande en passagers ne s'exprime pas

en terme de segments de vol mais plutôt en terme d'origine-destination et moment de départ. Nous avons dû intégrer différentes fonctionnalités au modèle de base afin de prendre en compte les contraintes opérationnelles et commerciales nécessaires à l'obtention de solutions utilisables en pratique. L'une des fonctionnalités ayant nécessité le plus grand effort de recherche et de développement a été les temps de connexion minimum variables, à savoir que le temps minimal qu'un avion doit passer au sol après avoir effectué un certain segment de vol ne dépend pas seulement du type d'avion et de la station où la connexion a lieu, mais des deux segments de vol connectés. Certains travaux de recherche ont déjà été menés pour traiter cet aspect, mais les expériences que nous avons menées semblent indiquer que la modélisation que nous proposons s'avère beaucoup plus efficace en pratique. L'expérience avec Air Canada a résulté pour la saison d'été 2002 dans l'obtention d'une solution utilisable en pratique et de meilleure valeur que celle qu'avait construite les planificateurs. Cette nouvelle solution est d'ailleurs celle qui a été utilisée en pratique.

Finalement, au chapitre 6, nous proposons un modèle et une approche de résolution permettant de résoudre le problème d'affectation des types d'avion aux vols d'un horaire périodique dans le cas où les heures de départ des vols possèdent une certaine flexibilité et où l'on veut minimiser la taille de la flotte. Ce modèle comporte des fonctionnalités supplémentaires permettant de prendre en compte dans l'objectif l'impact sur la demande en passagers de chacun des vols de la variation de leur heure de départ et du rapprochement des vols reliant consécutivement les mêmes paires de stations d'origine et de destination. Le modèle proposé consiste en un programme mathématique non linéaire en nombres entiers basé sur une formulation de flot dans un réseau espace-temps de type multi-commodité comportant une ressource. L'approche de résolution consiste en une procédure de séparation et d'évaluation progressive dont les sous-problèmes sont résolus en ayant recours à une méthode de décomposition inspirée de celle de Dantzig-Wolfe pour les programmes linéaires. Les problèmes ainsi

décomposés sont résolus à l'aide d'une technique de génération de colonnes, les colonnes étant générées par la résolution d'un problème de plus long chemin dans un réseau avec une ressource, lequel permet de considérer à la fois des coûts associés au flot sur chacun des arcs et des coûts associés à la valeur de la ressource à chacun des nœuds. Dans le cadre de nos expérimentations, nous avons résolu le problème sur un horizon quotidien pour des jeux de données construits à partir de données réelles obtenues d'un transporteur aérien. Les premières expérimentations ont permis de mettre en évidence d'importantes difficultés au niveau de la résolution de ce type de problème. En particulier, on constate d'importants manques de robustesse dans le processus de branchement pour l'obtention de solutions entières. En outre, en utilisant les méthodes classiques de branchement pour ce genre de problème, il nous a été impossible, pour une grande proportion des problèmes, d'obtenir une solution entière en un temps raisonnable, ni même après 50 heures de calcul. Suite à une analyse minutieuse des solutions fractionnaires aux différents nœuds de branchement, nous avons pu identifier deux importantes causes de ce manque de robustesse. Ces causes sont toutes deux reliées à l'aspect périodique du problème, l'une étant en particulier directement liée à la présence de la flexibilité d'horaire sur les vols qui chevauchent la frontière de l'horizon. Pour remédier à ce manque de robustesse, nous avons développé deux nouvelles méthodes de branchement, lesquelles sont utilisées en priorité au début de l'exploration de l'arbre. Celles-ci ont permis d'accroître énormément la robustesse du processus de résolution. En fait, une solution réalisable de bonne qualité a pu être trouvée en moins de quelques heures pour la plupart des instances considérées.

# Abstract

In this thesis, we approach the problem of assigning aircraft types to flights (what is called aircraft fleet assignment) in a strategic planning context. The literature mentions many studies considering this problem on a daily flight schedule basis, but the proposed models do not allow to consider many elements that are either necessary to assure the practical feasibility of the solutions, or relevant to get more beneficial solutions. After describing the practical context of the problem (Chapter 1) and presenting the literature on the subject (Chapter 2), we propose new models and solution approaches to improve the quality of the solutions obtained. The general scheme of the thesis is presented in Chapter 3. We summarize here the models and solution approaches that we propose, and present the main elements of our conclusions.

First, in Chapter 4, we consider the problem of aircraft fleet assignment over a weekly flight schedule, integrating into the objective an homogeneity factor for driving the choice of the aircraft types for the flights with the same flight number over the week. We present an integer linear model based on a time-space multicommodity network. This model includes, among others, decision variables relative to the aircraft type assigned to each flight and to the dominant aircraft type assigned to each flight number. A penalty is incurred when an other aircraft type than its dominant type is assigned to a given flight. We propose two solution approaches. The first one consists of solving directly the integer linear model through a branch-and-bound scheme. The second approach consists of solving the problem in two phases. In the first phase, we select a subset of consecutive days of the week, and then solve the problem with homogeneity over this restricted schedule in the same way as we solve the whole problem directly when using the first approach. From this solution, we determine

a dominant aircraft type for each flight number appearing on this schedule. In the second phase, we solve the problem over the whole week like for the direct approach, but now imposing to each flight for which the flight number was considered in the first phase the dominant type that was there selected. The first approach theoretically allows one to solve the problem exactly, while the second is a heuristic. The advantage of this second approach is that it can yield good solutions much more rapidly than the first one. Moreover, because one can adjust the number of consecutive days considered in the first phase, it allows to establish a compromise between the expected quality of the solution and the computational time needed. The results of the numerical experiments that we have made using datasets of the airline carrier Air Canada show the practical usefulness of the presented model and solution approaches for a medium-size airline like Air Canada. This claim is strengthened by the results of Chapter 5, in which we solve in a real context the weekly aircraft fleet assignment, using the two-phase approach to consider the homogeneity factor.

We present in Chapter 5 the results of a research project made in collaboration with Air Canada within a consulting contract. The project aimed at analyzing the relevance for the planners of using an optimization software to help them to first identify non profitable flight legs in the network, and second to efficiently establish the aircraft fleet assignment. In this chapter, we propose an iterative approach to take into account the fact that the passenger demand is not known on a leg basis, but rather on an origin-destination and departure time basis. We had to integrate many functionalities to the basic model to take into account the operational and commercial constraints needed to get useful solutions. One of these functionalities which needed a lot of research and development efforts is the variable minimum connection times, that is, the minimum time that an aircraft must spend on the ground after flying a given flight leg does not simply depend on the assigned aircraft type and the station of the connection, but on the two connected flight legs. The literature mentions some

works that have already been done to consider this aspect, but the experiments we made tend to show that the model we propose outperforms those previous results. A very good practical solution for the 2002 summer season was derived from our experiments with Air Canada. This solution was better than the one proposed by the planners and was implemented in practice.

Finally, in Chapter 6, we propose a model and a solution approach that aim at solving the fleet assignment problem over a periodic schedule in the case where there is a flexibility on the flight departure times and the fleet size must be minimized. Moreover, the objective of this model includes the impact on the passenger demand for each flight of the variation of the flight departure times and the closing of the departure times of consecutive flights connecting the same pairs of stations. The model proposed consists of an integer non-linear program based on a time-space multicommodity network with one resource. The solution approach consists of a branch-and-bound scheme, for which the subproblems are solved through a decomposition method derived from the Dantzig-Wolfe method for linear programs. A column generation technique is then used to solve those decomposed problems, the columns being generated by solving a longest path problem with one resource, which must allow to consider both the costs associated with the flow on each arc and the costs associated to the resource value at each node. For our experiments, we solved the problem over a daily horizon, using datasets built from data obtained from an airline carrier. The first experiments we made unveiled important lacks of robustness in the branch-and-bound process used to get integer solutions. Indeed, when using classical branching methods for solving this kind of problem, it appears impossible, for a great proportion of the studied instances, to get any solution in a reasonable amount of time, even within 50 hours. A careful analysis of fractional solutions obtained at the branching nodes helped to identify two main reasons for this lack of robustness. Those two reasons are both related to the periodic aspect of the problem,



one being directly related to the flexibility on the departure times of periodic flights (that is, flights that overlap the bounds of the horizon). In light of these observations, we then developed two new branching methods, which are used in priority at the beginning of the search tree. Those methods greatly increased the robustness of the solution process. Indeed, good feasible solutions can now be obtained in a few hours for most of the instances studied.

# Table des matières

REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	ix
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	xiii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xviii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xxi
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Processus de planification en transport aérien . . . . .	2
1.2 Potentiel de bénéfices lié à l'optimisation de la planification . . . . .	4
1.3 Définition du problème . . . . .	5
1.3.1 Affectation des types d'avion aux vols avec horaire fixe . . . . .	6
1.3.2 Affectation des types d'avion aux vols avec horaire flexible . . . . .	12

<b>CHAPITRE 2 : REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .</b>	<b>17</b>
2.1 Formalisation du problème de planification . . . . .	17
2.2 Quelques références sur chaque étape de la planification . . . . .	25
2.3 Affectation des types d'avion aux vols avec horaire fixe . . . . .	31
2.4 Affectation des types d'avion aux vols avec horaire flexible . . . . .	36
2.5 Critique de la littérature . . . . .	39
<b>CHAPITRE 3 : ORGANISATION DE LA THÈSE . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>CHAPITRE 4 : AFFECTATION HEBDOMADAIRE DES TYPES D'AVION AUX VOLS AVEC HOMOGÉNÉITÉ . . . . .</b>	<b>47</b>
4.1 Weekly Airline Fleet Assignment with Homogeneity . . . . .	50
4.1.1 Introduction . . . . .	52
4.1.2 Problem Definition . . . . .	54
4.1.3 Mathematical Formulation . . . . .	57
4.1.4 Solution Approaches . . . . .	61
4.1.5 Computational Experiments . . . . .	63
4.1.6 Conclusion . . . . .	69
4.1.7 References . . . . .	70

4.2	Modèle raffiné pour l'homogénéité . . . . .	72
4.3	Autres approches heuristiques . . . . .	75
4.3.1	Absence de contraintes d'homogénéité en phase II . . . . .	75
4.3.2	Réduction en îlots . . . . .	77
4.4	Résultats numériques détaillés . . . . .	83
<b>CHAPITRE 5 : APPLICATION CHEZ AIR CANADA . . . . .</b>		<b>91</b>
5.1	Problème de base . . . . .	92
5.2	Extensions . . . . .	93
5.2.1	Objectif d'homogénéité . . . . .	94
5.2.2	Restrictions de type sur certains segments de vol . . . . .	94
5.2.3	Temps de vol maximal . . . . .	95
5.2.4	Temps minimaux de connexion variables . . . . .	96
5.2.5	Connexions directes imposées ou optionnelles . . . . .	100
5.2.6	Violation des temps minimaux de connexion . . . . .	102
5.2.7	Opportunités d'activités d'entretien . . . . .	103
5.2.8	Annulation de segments de vol . . . . .	106
5.2.9	Pénalité pour changement de type d'avion . . . . .	107

5.3	Étude de cas chez Air Canada . . . . .	108
5.3.1	Analyse de sensibilité d'une affectation . . . . .	108
5.3.2	Approche itérative . . . . .	109
5.4	Conclusion . . . . .	122

## CHAPITRE 6 : AFFECTATION DES TYPES D'AVION AUX VOLS AVEC FLEXIBILITÉ D'HORAIRE . . . . . 123

6.1	Periodic Airline Fleet Assignment with Time Windows, Spacing Constraints, and Time Dependent Revenues . . . . .	126
6.1.1	Introduction . . . . .	129
6.1.2	Problem Description . . . . .	130
6.1.3	Literature Review . . . . .	131
6.1.4	A Mathematical Model . . . . .	133
6.1.5	Column Generation . . . . .	141
6.1.6	Branch-and-Bound Strategies . . . . .	143
6.1.7	Computational Experiments . . . . .	146
6.1.8	Conclusion . . . . .	154
6.2	Difficultés au niveau de la résolution en nom-bres entiers . . . . .	158
6.3	Résultats numériques détaillés . . . . .	163

CONCLUSION : SYNTHÈSE ET RECOMMANDATIONS . . . .	170
--	-----

BIBLIOGRAPHIE . . . . .	173
-------------------------	-----

# Liste des tableaux

Tableau 4.1	Data set characteristics . . . . .	64
Tableau 4.2	Computational results (direct MIP approach) . . . . .	65
Tableau 4.3	Computational results (two-phase approach) . . . . .	66
Tableau 4.4	Comparison between our solutions and Air Canada's solution	68
Tableau 4.5	Contraintes d'homogénéité en phase II . . . . .	76
Tableau 4.6	Réduction par îlots . . . . .	80
Tableau 4.7	Résultats numériques - test I ( $\gamma = 500$ ) . . . . .	85
Tableau 4.8	Résultats numériques - test I ( $\gamma = 1000$ ) . . . . .	86
Tableau 4.9	Résultats numériques - test I ( $\gamma = 2000$ ) . . . . .	87
Tableau 4.10	Résultats numériques - test II ( $\gamma = 500$ ) . . . . .	88
Tableau 4.11	Résultats numériques - test II ( $\gamma = 1000$ ) . . . . .	89
Tableau 4.12	Résultats numériques - test II ( $\gamma = 2000$ ) . . . . .	90
Tableau 5.1	Temps de résolution des modèles avec temps de connexion variables . . . . .	101

Tableau 5.2	Statistiques sur les données (saison d'été 2002) . . . . .	111
Tableau 5.3	Taille des modèles . . . . .	118
Tableau 5.4	Temps de résolution des modèles (sec.) . . . . .	119
Tableau 5.5	Résolution avec parallélisme . . . . .	121
Tableau 6.1	Statistics on test problems . . . . .	149
Tableau 6.2	Average (standard deviation) of the time windows widths (in minutes) . . . . .	149
Tableau 6.3	Average compression factor (%) of the original spacings . . . . .	151
Tableau 6.4	Number of aircraft used . . . . .	151
Tableau 6.5	Percentage of profit improvements (spacing penalty) . . . . .	152
Tableau 6.6	CPU times (min.) to find the LP (first integer) solution . . . . .	153
Tableau 6.7	Optimality gaps (%) . . . . .	153
Tableau 6.8	Jeu de données I (méthodes de branchement classiques seulement) . . . . .	164
Tableau 6.9	Jeu de données II (méthodes de branchement classiques seulement) . . . . .	165
Tableau 6.10	Jeu de données III (méthodes de branchement classiques seulement) . . . . .	166



Tableau 6.11 Jeu de données I (avec nouvelles méthodes de branchement) 167

Tableau 6.12 Jeu de données II (avec nouvelles méthodes de branchement) 168

Tableau 6.13 Jeu de données III (avec nouvelles méthodes de branchement) 169

# Liste des figures

Figure 1.1	Horaire original . . . . .	14
Figure 1.2	Nouvel horaire . . . . .	14
Figure 2.1	Demande en passagers selon l'heure de départ pour une paire d'origine et de destination . . . . .	41
Figure 4.1	Trade-off between homogeneity and profits (data set I) . . .	67
Figure 4.2	Trade-off between homogeneity and profits (data set II) . .	68
Figure 4.3	Structures de réseau . . . . .	77
Figure 4.4	Réduction de réseau en îlots . . . . .	78
Figure 4.5	Réduction par îlots ( $\gamma = 500$ ) . . . . .	81
Figure 4.6	Réduction par îlots ( $\gamma = 1000$ ) . . . . .	82
Figure 4.7	Réduction par îlots ( $\gamma = 2000$ ) . . . . .	82
Figure 5.1	Temps de connexion variables (premier modèle) . . . . .	98
Figure 5.2	Temps de connexion variables (second modèle) . . . . .	99
Figure 5.3	Temps de connexion variables (modèle hybride) . . . . .	100

Figure 5.4	Temps de connexion variables avec connexions directes optionnelles . . . . .	102
Figure 5.5	Opportunités d'entretien . . . . .	104
Figure 5.6	Courbe pour la flotte des A320 . . . . .	110
Figure 6.1	Network structure $G^k$ for aircraft $k \in K$ . . . . .	135
Figure 6.2	Type 1 connection . . . . .	137
Figure 6.3	Type 2 connection . . . . .	137
Figure 6.4	Bisection search in the branch-and-bound tree . . . . .	144
Figure 6.5	A fractional solution with two types of aircraft . . . . .	147
Figure 6.6	Non faisabilité dans le cas périodique avec fenêtres de temps . . . . .	160
Figure 6.7	Fenêtres de temps des nœuds de vol supplémentaires des vols $I_r$ et $J_s$ . . . . .	161

# Chapitre 1

## Introduction

Les compagnies aériennes évoluent dans un marché très compétitif avec des chiffres d'affaires considérables mais de faibles marges de profit. L'optimisation de leurs processus de décision peut donc avoir un impact déterminant sur leur compétitivité. Dans la littérature, on appelle *planification* (ou planification stratégique) le travail à long terme consistant à déterminer pour une saison donnée le service à offrir (horaire de vols), la façon d'utiliser les avions et l'organisation du travail du personnel. Actuellement, la planification en transport aérien est un travail beaucoup trop complexe pour pouvoir être traité globalement. Ainsi, on divise généralement ce travail en plusieurs étapes qui sont traitées séquentiellement, à savoir l'élaboration de l'horaire de vols, l'affectation des types d'avion aux vols, la construction des itinéraires d'avion, la construction des rotations d'équipage et la confection des horaires mensuels pour les membres d'équipage. Les travaux présentés dans cette thèse visent principalement à automatiser et optimiser le travail de planification de l'étape de l'affectation des types d'avion aux vols.

Dans la première section de ce chapitre, nous présentons une courte description de chacune des étapes du processus de planification en transport aérien et, à la section suivante, nous mettons en évidence quelques résultats présentés dans la littérature montrant la pertinence d'intégrer des procédures d'optimisation au travail de planification en transport aérien. Par la suite, nous présentons plus en détail la définition du problème d'affectation des types d'avion aux vols auquel on s'attaque particulièrement dans cette thèse. De plus, nous donnons une description détaillée de ce même

problème dans le contexte où l'on permet une flexibilité sur les heures de départ des vols, puisque ce cas sera également considéré dans cette thèse.

## **1.1 Processus de planification en transport aérien**

Nous décrivons ici brièvement chacune des cinq étapes en lesquelles est généralement divisé le processus de planification en transport aérien.

### **Élaboration de l'horaire de vols**

Cette première étape de la planification est certainement la plus importante, l'horaire de vols étant le produit vendu par la compagnie. Un horaire de vols contient la liste des vols devant être effectués au cours d'un certain horizon (par exemple, un jour ou une semaine). Certains vols peuvent comporter une ou plusieurs escales ; on dit alors que ces vols sont constitués de plusieurs segments de vol. L'horaire est construit d'après les analyses de marché, la disponibilité des ressources pour satisfaire la demande et les horaires déjà offerts par les compétiteurs.

### **Affectation des types d'avion aux vols**

Le problème d'affectation des types d'avion aux vols consiste à déterminer par quel type d'avion sera effectué chacun des vols. Le profit associé à un vol étant déterminé par le type d'avion utilisé pour le couvrir, il importe de déterminer optimalement quel type d'avion est le plus approprié pour chacun des vols. Une contrainte importante de ce problème est que l'affectation choisie permette de construire des itinéraires pour les avions disponibles de la flotte de façon à ce que tous les vols soient couverts. Plusieurs

autres contraintes peuvent y être ajoutées afin de favoriser l'obtention de solutions réalisables du point de vue opérationnel. Nous reviendrons plus loin sur ce genre de contraintes alors que nous présenterons une définition détaillée de ce problème.

### **Construction des itinéraires d'avion**

Il s'agit d'établir un itinéraire pour chaque avion spécifique. Ces itinéraires doivent en premier lieu respecter l'affectation choisie à l'étape précédente, c'est-à-dire qu'ils doivent permettre qu'un avion du bon type soit disponible au bon endroit et au bon moment pour pouvoir effectuer chacun des vols, et en second lieu satisfaire un certain nombre de contraintes relatives à l'entretien périodique des avions. La valeur d'un itinéraire dépend, entre autres, de la pertinence des connexions directes qu'il offre, c'est-à-dire des occasions offertes aux passagers de voyager sans devoir changer d'avion entre les segments de vol.

### **Construction des rotations d'équipage**

Une fois que l'on connaît le type d'avion effectuant chaque vol et les itinéraires des avions, il faut construire les *rotations* d'équipage de façon à s'assurer qu'un équipage soit disponible pour chacun des vols. Une rotation est une suite d'activités (couverture de segments de vol, déplacement, repas, repos, etc.) accomplies par un équipage qui débute et se termine à une même station. Ce problème est conceptuellement semblable à celui de la construction des itinéraires pour les avions, à l'exception que le travail des membres des équipages est soumis à des règles provenant des conventions collectives et des lois concernant la sécurité du transport aérien.

## Confection des horaires mensuels pour les membres d'équipage

Il s'agit de planifier, généralement pour un mois, les activités de chacun des membres du personnel de bord (pilotes, co-pilotes, chefs de cabine, agents de bord). Outre la couverture des rotations d'équipage, ces activités comprennent, entre autres, des stages et des périodes d'entraînement, des vacances et des examens médicaux. Ces horaires doivent être préférentiellement construits de façon à minimiser les coûts pour la compagnie tout en maximisant la satisfaction du personnel face à leurs conditions de travail. Évidemment, lors de la confection de ces horaires, on doit encore tenir compte d'une multitude de règles provenant des lois et des conventions collectives.

### 1.2 Potentiel de bénéfices lié à l'optimisation de la planification

La littérature contient plusieurs rapports de recherche faisant état d'un très grand potentiel d'amélioration de la rentabilité des compagnies aérienne découlant de l'optimisation du processus de planification. En effet, une compagnie aérienne de taille significative peut dépenser plusieurs milliards de dollars par année pour l'achat et l'entretien de sa flotte, l'essence ainsi que le salaire et les dépenses des membres d'équipage. Chaque 1% d'amélioration obtenue par l'optimisation de la planification peut donc signifier des économies de plusieurs dizaines de millions de dollars annuellement. Par exemple, chez Delta Air Lines, on dit estimer à plus de 220 000 dollars par jour les économies obtenues grâce à l'optimisation de l'affectation des types d'avion aux vols (voir Subramanian *et al.*, 1994). De même, les travaux menés par Anbil *et al.* (1991) ont permis à American Airlines de faire des économies de l'ordre de 20 millions de dollars annuellement sur les coûts d'équipage.

Également, les expériences menées par Desaulniers *et al.* (1997a) et Rexing *et al.* (2000)

laissent entrevoir un potentiel de bénéfices très important lié à l'optimisation des décisions prises à l'étape de l'affectation des types d'avion aux vols lorsqu'on se permet une révision des heures de départ des vols, et ce tant du point de vue de l'augmentation des profits d'opération que de la réduction de la taille de la flotte. En effet, le coût d'achat d'un avion pouvant varier de quelques dizaines de millions de dollars à plus de 150 millions pour les gros appareils, une réorganisation de la planification permettant d'utiliser un ou quelques avions de moins peut représenter une économie d'argent très importante. Les tests effectués par Desaulniers *et al.* (1997a) à partir d'un horaire fixe fourni par un transporteur nord-américain montrent qu'en permettant une flexibilité de  $\pm 10$  minutes sur les heures de départ des vols par rapport à l'horaire original, on peut faire passer la taille de la flotte de 79 à 76 appareils par rapport à la meilleure solution pouvant être obtenue en utilisant les heures de départ originales. Les mêmes auteurs ont également effectué des tests à partir de données provenant d'un transporteur européen. En comparant la solution de ce transporteur avec leurs solutions obtenues en utilisant la même composition de flotte, ils ont constaté des augmentations de profit de 6.8 % lorsqu'on utilise le même horaire, et de 11.2 % lorsqu'on accorde une flexibilité de  $\pm 10$  minutes sur les heures de départ des vols. Dans Rexing *et al.* (2000), on rapporte un potentiel d'amélioration des bénéfices de l'ordre de 65 000 \$ par jour chez United Airlines avec une flexibilité de  $\pm 10$  minutes.

Ainsi, il apparaît être un enjeu majeur pour la compétitivité d'une compagnie aérienne de se doter d'outils efficaces pour l'optimisation du processus de planification.

### 1.3 Définition du problème

Dans la première partie de cette section, on définit le *problème de base* d'affectation des types d'avion aux vols avec horaire fixe, de même que de multiples extensions



pouvant lui être apportées afin d'augmenter la faisabilité pratique des solutions obtenues. Dans la seconde partie, on considère en détails l'extension du problème où l'on permet une flexibilité sur les heures de départ des vols.

### 1.3.1 Affectation des types d'avion aux vols avec horaire fixe

Introduisons tout d'abord le vocabulaire nécessaire pour énoncer le problème de base :

- **Flotte hétérogène** : Ensemble d'avions ne possédant pas toutes les mêmes caractéristiques. Deux avions peuvent entre autres différer quant à leur capacité en passagers, leur vitesse, leur autonomie de vol, la qualification requise de l'équipage pour les piloter et leurs coûts d'achat, d'entretien et d'opération (particulièrement la consommation en carburant). Des avions possédant les mêmes caractéristiques sont dits être du même *type*.
- **Station** : Endroit où les avions peuvent décoller ou atterrir, où les passagers peuvent monter à bord ou descendre, et où la marchandise peut être chargée et déchargée.
- **Segment de vol** : Déplacement sans escale d'un avion entre deux stations, commençant à une heure donnée.
- **Vol** : Suite d'un ou plusieurs segments de vol joints par des escales et identifiés par un même numéro. Tous ces segments de vol doivent nécessairement être effectués successivement par un même avion. On utilise souvent le terme *connexion directe* pour parler d'une connexion entre deux segments de vol joints par une escale.
- **Profit anticipé d'un segment de vol** : Différence entre les revenus anticipés et les coûts d'opérations d'un segment de vol lorsqu'on utilise un type d'avion donné. Les revenus proviennent du transport des passagers et du cargo, et les coûts incluent entre autres l'essence et le salaire du personnel de bord. L'estimation des revenus est une tâche difficile car il faut tenir compte de facteurs aléatoires et complexes tels

que la demande en passagers pour chaque classe de voyage. L'estimation précise des revenus des segments de vol en fonction du choix des types d'avion est un sujet de recherche en lui-même. En pratique, la distribution de la demande en passagers pour un segment de vol dépend des types d'avion qui ont été affectés à d'autres segments de vol, car la demande réelle en passagers s'établit par paire d'origine et de destination plutôt que par segment de vol, le déplacement d'un passager pouvant se faire sur plusieurs segments de vol. Cependant, les modèles d'affectation des types d'avion aux vols approchent en général la réalité en posant l'hypothèse que le calcul du revenu anticipé d'un segment de vol ne dépend que du type qui lui est affecté. Ainsi, dans le processus d'optimisation, on utilise en général, dans le calcul du profit anticipé de chaque segment de vol, l'espérance mathématique du revenu anticipé en fonction du type qui lui est affecté.

- **Durée d'un segment de vol** : Période de temps s'écoulant entre le décollage de l'avion et son atterrissage. La durée d'un segment de vol dépend essentiellement des stations de départ et d'arrivée et du type d'avion utilisé.
- **Temps de connexion** : Période de temps s'écoulant entre l'atterrissage d'un avion à une station et son prochain décollage.
- **Temps de connexion minimal** : Période de temps minimale devant s'écouler entre le moment où un avion atterrit à une station et celui auquel il peut redécoller. Cette période est entre autres nécessaire pour faire descendre et monter les passagers, charger et décharger la marchandise, et faire le plein d'essence. Dans le problème de base, on considère que le temps de connexion minimal peut dépendre du type d'avion et de la station.
- **Connexion réalisable** : Une connexion a lieu entre deux segments de vol lorsqu'ils sont effectués consécutivement par un même avion. On dit qu'une connexion est réalisable pour un certain type d'avion si et seulement si la station de départ du second segment est la même que la station d'arrivée du premier, et que l'heure de départ du second permet à un avion du type considéré de respecter le temps de connexion minimal après avoir effectué le premier.

- **Connexion directe** : Il arrive que les planificateurs imposent, souvent pour des questions de marketing, que deux segments de vol soient effectués consécutivement par un même avion. En effet, ce type de connexion est très apprécié des passagers qui désirent emprunter ces deux segments de vol, car ils n'ont alors pas à descendre de l'avion. Aussi, le temps de connexion minimal pour une connexion directe est généralement beaucoup plus court que pour une connexion ordinaire, ce qui peut permettre d'établir des connexions autrement non réalisables.
- **Entretien périodique** : Ensemble d'opérations de vérification et de réparation qu'il est nécessaire d'effectuer régulièrement sur les avions de façon à s'assurer du bon fonctionnement de tout l'équipement. Pour chaque type d'avion, ces opérations ne peuvent être effectuées qu'à un nombre limité de stations, lesquelles sont appelées bases d'entretien.
- **Itinéraire d'avion** : Suite de segments de vol et, possiblement, d'opérations d'entretien effectués par un avion spécifique. Les segments de vol n'appartiennent pas nécessairement tous au même vol. Notons qu'un itinéraire *réalisable* ne doit utiliser que des connexions réalisables entre les segments de vol.

Ainsi, on peut poser le problème de base d'affectation des types d'avion aux vols comme suit :

*Étant donné une flotte hétérogène d'avions et un ensemble de vols à effectuer, affecter un type d'avion à chacun des vols de façon à maximiser le total des profits anticipés. L'affectation d'un type particulier d'avion à un vol détermine sa durée, le profit anticipé et le temps de connexion requis avant que l'avion ne puisse redécoller. Une solution réalisable doit permettre de construire des itinéraires réalisables pour les avions de la flotte permettant de couvrir tous les vols sans excéder le nombre d'avions disponibles de chaque type.*

Des extensions de différentes natures peuvent être incorporées au problème de base afin de prendre davantage en compte certains éléments de la réalité du transport

aérien, ou encore de permettre au modèle de prendre plus de décisions que seulement le choix des types d'avion à affecter aux vols. Ce peut être, par exemple, le nombre d'avions de chaque type ou le choix des heures de départ des segments de vol. Nous donnons ici quelques exemples d'extensions pouvant être intéressantes pour les planificateurs.

**Périodicité ou conditions initiales et finales :** Le problème d'affectation des types d'avion est résolu sur un horizon fini, par exemple une journée ou une semaine. Cependant, les planificateurs sont en général intéressés à pouvoir reproduire d'un horizon à l'autre la solution obtenue. Il devient alors nécessaire d'imposer des contraintes de périodicité demandant qu'à chaque station, le nombre d'avions de chaque type soit le même au début et à la fin de l'horizon. Dans d'autres cas particuliers, le problème se pose avec des conditions initiales et/ou finales sur la localisation des avions. C'est notamment souvent le cas dans les problèmes de gestion des opérations en temps réel.

**Contraintes opérationnelles :** On peut également étendre le problème en imposant des contraintes opérationnelles. Ces contraintes assurent que les solutions produites sont conformes à certaines exigences de la réalité. Il en existe une très grande variété et elles sont très dépendantes du contexte dans lequel le problème se pose. Notons que certaines de ces contraintes peuvent grandement complexifier la modélisation et la résolution du problème. C'est le cas notamment des temps minimaux de connexion variables, que nous considérons dans le cadre de l'application chez Air Canada au chapitre 5. Nous donnons ici quelques exemples courants de contraintes opérationnelles :

- *Restrictions par rapport au type d'avion sur un segment de vol :* Ces restrictions peuvent surgir dans maintes situations. Par exemple, certaines stations ne sont pas équipées pour recevoir certains types d'avion et les segments de vol visitant ces stations ne peuvent donc pas être couverts par ces types d'avion. Aussi, la

distance maximale pouvant être parcourue sans escale varie d'un type d'avion à l'autre et certains segments de vol reliant deux stations éloignées ne sont donc pas à la portée de tous les types. De plus, certains segments de vol relient deux stations séparées par un océan et on ne peut donc pas leur affecter un type d'avion qui n'est pas équipé pour voyager au-dessus de l'eau.

- *Couvre-feux* : Pour contrer les inconvénients causés par le bruit des avions, certaines stations sont assujetties à des règlements empêchant certains types d'avion d'atterrir ou de décoller pendant une certaine période de la journée.
- *Restrictions quant au nombre d'atterrissages et de décollages* : À certaines stations achalandées, des limites par transporteur sont imposées sur le nombre d'arrivées et de départs de certains types d'appareil au cours d'une journée.
- *Temps minimaux de connexion variables* : Il arrive qu'à certaines stations le temps minimal de connexion dépende de la provenance et de la destination de l'avion. Par exemple, il se peut qu'à un aéroport l'emplacement des postes de douanes soit tel qu'un avion arrivant d'un pays X et repartant pour un autre pays Y doive être déplacé d'une porte d'embarquement à une autre et doive donc demeurer au sol plus longtemps que s'il arrivait du pays X et repartait vers ce même pays.
- *Temps total de vol maximal pour un type d'avion* : Étant donné que chaque pilote ne peut en général opérer qu'un nombre restreint de types d'avion différents, on doit s'assurer que le nombre total d'heures de vol affectées à un type d'avion puisse réalistement être effectué par les pilotes disponibles pour ce type. Afin de favoriser l'obtention de solutions permettant cela, on peut ajouter des contraintes limitant le temps de vol total pouvant être alloué à chacun des types d'avion.

**Planification de l'entretien** : En pratique, la planification d'une flotte d'avions ne consiste pas seulement à construire les itinéraires des avions pour qu'ils puissent couvrir l'ensemble des vols, mais également à prévoir des moments pour l'entretien périodique des appareils. Ainsi, même si la construction des itinéraires de chacun

des avions ne se fait pas simultanément avec l'affectation des types d'avion aux vols, il est possible d'ajouter à ce dernier problème des contraintes de façon à s'assurer d'une disponibilité minimale des avions pour des activités d'entretien lors de la construction des itinéraires.

**Prise en compte des coûts d'équipage :** Comme il a été mentionné précédemment, la grande complexité du processus de planification nous oblige à le diviser en plusieurs étapes devant être traitées séquentiellement. Toutefois, cela implique que les décisions prises lors des premières étapes ne tiennent pas compte des impacts qu'elles auront sur les suivantes. Par exemple, il se pourrait que lors de l'affectation des types d'avion, on prenne une décision permettant d'économiser légèrement sur les coûts d'opérations de la flotte, mais ayant un impact désastreux sur la qualité globale de la solution lorsqu'on tient compte des coûts associés aux membres d'équipage. Ainsi, il peut s'avérer profitable d'intégrer à l'objectif du problème d'affectation des types d'avion aux vols certains éléments du problème des rotations d'équipage de façon à produire une solution intéressante autant du point de vue des profits associés à la couverture des vols que des dépenses liées aux membres d'équipage.

**Violation des temps minimaux de connexion :** En pratique, il peut arriver que pour permettre une connexion, on accélère le travail au sol entre deux segments de vol. Ces temps de connexion réduits doivent évidemment être utilisés le moins souvent possible car ils entraînent une diminution de la robustesse des solutions. Pour modéliser cette perte de qualité sur les solutions, on pénalisera lors de la résolution l'utilisation de ces temps de connexion réduits. Il demeure néanmoins souhaitable qu'on puisse y recourir à l'occasion car il peut en résulter d'importantes économies.

**Sélection de la flotte :** Une variante du problème consiste à optimiser la taille et la composition de la flotte simultanément avec l'affectation des types d'avion. Nous

considérons alors un coût fixe associé à l'utilisation d'un avion d'un certain type, par exemple l'amortissement journalier. Ce problème peut en plus contenir des contraintes sur les nombres minimum et maximum d'avions disponibles de chaque type.

**Couverture facultative des vols :** Le problème de base demande de couvrir tous les vols proposés dans l'horaire de vols. La couverture de certains vols peut toutefois s'avérer très coûteuse et il peut donc être plus profitable de les retirer de l'horaire. Ainsi, on peut rendre facultative la couverture de certains vols. Ce concept peut également être appliqué dans le cas où l'on désire augmenter le service de vols. En effet, on peut définir un problème dans lequel certains vols potentiels sont présents, la couverture de ces vols étant facultative. Dans une solution optimale, chacun de ces vols sera couvert seulement si cela s'avère profitable.

**Flexibilité sur les heures de départ :** Plutôt que de considérer les heures de départ de l'horaire de vols comme étant fixées, il peut être intéressant de voir s'il n'y aurait pas d'importantes économies pouvant être réalisées en les modifiant légèrement. En effet, il peut parfois être très avantageux du point de vue des coûts d'opération de permettre que les segments de vol ne débutent pas exactement à l'heure proposée dans l'horaire de vols. Puisque cette extension du problème occupe une place importante dans cette thèse, nous la décrivons en détail dans la section suivante.

### **1.3.2 Affectation des types d'avion aux vols avec horaire flexible**

Nous présentons maintenant le problème d'affectation des types d'avion aux vols lorsqu'on permet une certaine flexibilité sur les heures de départ spécifiées dans l'horaire de vols. Dans la littérature, la flexibilité sur les heures de départ est généralement

modélisée en remplaçant l'heure de départ fixée par un intervalle permis pour l'heure de départ que l'on appelle *fenêtre de temps*. Nous montrons en quoi cette flexibilité peut faire augmenter les bénéfices en illustrant quelques exemples de situations où une flexibilité sur les horaires peut permettre d'importantes améliorations par rapport à la solution d'un problème avec horaire fixe.

Comme premier exemple, supposons qu'à une certaine station  $S$ , on ait deux vols entrants  $A$  et  $C$  se terminant respectivement aux temps  $a$  et  $c$  (en incluant les temps de connexion minimaux), et qu'on ait deux vols sortants  $B$  et  $D$  débutant respectivement aux temps  $b$  et  $d$ , avec  $a < b < c < d$  et  $c - b$  positif mais petit (voir la figure 1.1). Supposons également que les vols  $A$  et  $D$  aient de faibles demandes, mais que celles des vols  $B$  et  $C$  soient élevées. Ainsi, on désire autant que possible affecter de petits avions aux vols  $A$  et  $D$ , et des avions plus gros aux vols  $B$  et  $C$ . Il serait donc souhaitable de pouvoir effectuer les connexions  $A \rightarrow D$  et  $C \rightarrow B$ . Or, à moins d'immobiliser un avion au sol pour une durée équivalente à celle de l'horizon (par exemple, 24 heures), la connexion  $C \rightarrow B$  est impossible, et on est forcé d'effectuer les connexions  $A \rightarrow B$  et  $C \rightarrow D$ , ce qui revient à dire qu'on ne pourra pas réaliser l'affectation désirée. Cependant, si nous avons la possibilité de devancer légèrement le vol  $C$  (ce qui déplace son moment d'arrivée au temps  $c' < c$ ) et/ou de retarder le départ du vol  $B$  (départ au temps  $b' > b$ ), nous pouvons nous retrouver dans la situation où le vol  $C$  se termine avant le début de  $B$  et la connexion  $C \rightarrow B$  deviendrait alors possible (voir la figure 1.2). On voit donc qu'une flexibilité sur l'horaire de vols peut permettre d'augmenter le bénéfice en affectant des types d'avions mieux appropriés à chacun des vols.

Une autre amélioration possible provenant de la flexibilité des horaires découle du fait que les avions de type différent voyagent à des vitesses différentes. Soient  $A$  et  $B$  deux vols où  $B$  commence au temps  $b$  et où l'heure à laquelle se termine le vol  $A$  dépend du type d'avion qu'on lui affecte. Si l'avion est suffisamment rapide,  $A$



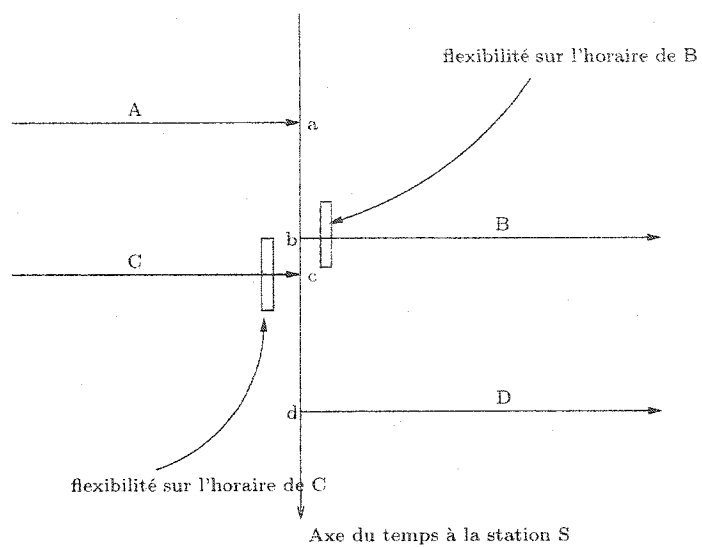


Figure 1.1 – Horaire original

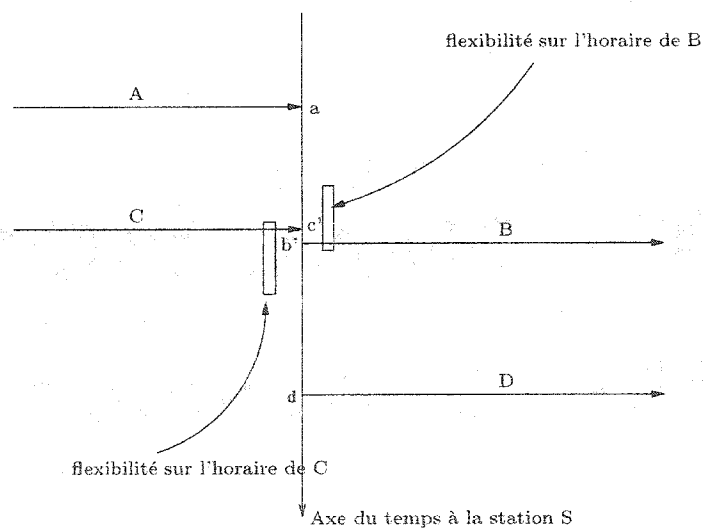


Figure 1.2 – Nouvel horaire

se terminera avant  $b$  et la connexion  $A \rightarrow B$  sera possible. À l'inverse, si on doit utiliser un avion plus lent, il se peut que  $A$  se termine trop tard pour pouvoir faire la connexion, cela pouvant entraîner des coûts supplémentaires, voire même nécessiter un avion de plus. C'est pourquoi il peut arriver qu'un type d'avion plus coûteux à opérer mais plus rapide soit affecté au vol  $A$  uniquement pour assurer la connexion avec le vol suivant. Si nous disposions d'une flexibilité sur l'horaire, nous pourrions devancer le vol  $A$  et/ou retarder  $B$  et ainsi permettre d'affecter le type d'avion le plus approprié sans perdre la connexion, malgré la vitesse inférieure de l'avion.

Il est à noter que pour pouvoir tenir compte de cette flexibilité, on doit modifier de façon importante les modèles d'optimisation, avec comme résultat un alourdissement significatif du processus de résolution. De plus, les expérimentations dont fait mention la littérature démontrent que les temps de calculs tendent à augmenter de façon importante avec l'élargissement des fenêtres de temps. En effet, la flexibilité des horaires, en permettant un nombre accru de possibilités de solution, augmente considérablement la combinatoire des problèmes.

### **Extension : Synchronisation des heures de départ**

Lorsque l'horizon de planification s'étend sur plus d'une journée, un nouveau problème surgit : les vols de même numéro doivent partir à la même heure chaque jour où ils ont lieu. En effet, une compagnie aérienne est intéressée à avoir le maximum de cohérence et d'uniformité dans son horaire de vols, et ne pas avoir à annoncer le vol 101 à 10:00 le lundi, 10:20 le mardi, 10:15 le mercredi, et ainsi de suite. C'est pourquoi la flexibilité sur les heures de départ doit être accompagnée de contraintes de synchronisation qui assurent que tous les vols d'un même numéro partiront à la même heure. Bien qu'un modèle théorique ait pu être développé par Ioachim *et al.* (1999), celui-ci ne permet de résoudre que des problèmes beaucoup plus petits que ceux que l'on rencontre dans les contextes réels. En outre, les problèmes considérés dans cet

article ne comportent qu'un seul type d'avion et au plus une centaine de vols par semaine.

## Chapitre 2

### Revue de littérature

Les travaux pertinents dans le domaine de l'optimisation en transport aérien remontent jusqu'au début des années 1960. Des articles font la synthèse de ces travaux, notamment ceux de Simpson (1968) et de Etschmaier et Mathaisel (1984, 1985). Pour la littérature plus récente, nous rappelons brièvement les principaux résultats de recherche obtenus pour traiter chacune des étapes du processus de planification, puis nous insistons davantage sur les travaux liés à l'étape de l'affectation des types d'avion aux vols, laquelle fait l'objet de cette thèse. Cependant, nous proposons dans un premier temps une vision formelle de l'ensemble des approches de résolution du problème global de planification en transport aérien.

#### 2.1 Formalisation du problème de planification

Trouver une solution au problème de planification en transport aérien revient formellement à fixer un ensemble de *variables de décision* assujetties à un ensemble de *contraintes*, la valeur d'une solution étant déterminée par une *fonction objectif* qui peut prendre en compte un certain nombre de facteurs avec une certaine exactitude. L'objectif consiste évidemment à trouver une solution de meilleure valeur possible.

Les *variables de décision* à fixer correspondent essentiellement à celles-ci :

- l'horaire de vols ;
- le type d'avion affecté à chacun des vols ;
- l'itinéraire de chaque avion spécifique ;
- les rotations d'équipage ;
- l'horaire mensuel de chacun des membres d'équipage.

Parmi les principales *contraintes* à respecter, on retrouve :

- la taille choisie pour la flotte ;
- les contraintes opérationnelles pour les avions ;
- la conservation du flot des avions ;
- les contraintes de périodicité ou de conditions initiales et/ou finales ;
- les contraintes d'entretien périodique des avions ;
- la disponibilité des membres d'équipage ;
- la conservation du flot des membres d'équipage ;
- les conventions collectives des membres d'équipage ;
- le respect de la législation concernant le travail du personnel navigant.

La *fonction objectif* déterminant la valeur d'une solution doit prendre en compte plusieurs facteurs économiques tels que :

- les revenus de la vente des billets aux passagers ;
- les revenus provenant du transport de marchandise ;
- les coûts d'achat des avions ;
- les coûts d'opération des différents types d'avion (essence, entretien, etc.) ;
- les frais de service aux aéroports ;
- les coûts d'équipage (salaire, frais d'hôtel et de repas, etc.).

Pour résoudre globalement le problème de planification, on doit déterminer la valeur des variables de décision  $x \in D$ ,  $D$  étant défini par l'ensemble des contraintes du problème. Si  $f$  est la fonction objectif utilisée pour quantifier la qualité des différentes

solutions réalisables, alors le problème peut s'écrire simplement :

$$\min_{x \in D} f(x).$$

Étant donné la difficulté de trouver de bons modèles prenant en compte toutes les interactions qu'ont entre elles les différentes décisions et la puissance de calcul limitée des ordinateurs, nous sommes en pratique contraints à décomposer le processus de planification en plusieurs sous-problèmes, lesquels sont souvent résolus séquentiellement. Dans la littérature, on retrouve plusieurs articles de recherche où l'on tente de résoudre certains de ces sous-problèmes. La façon de diviser le problème global en sous-problèmes peut varier d'un auteur à l'autre, mais en parcourant la littérature, on constate qu'en général le problème est séparé en cinq sous-problèmes, soit l'horaire de vols, l'affectation des types d'avion aux vols, les itinéraires des avions, les rotations d'équipage et l'horaire mensuel des membres d'équipage. Généralement, ces cinq étapes sont résolues dans cet ordre. Nous supposons ici aussi que le problème global est séparé en ces cinq étapes résolues séquentiellement.

Pour un sous-problème donné, l'ensemble des contraintes considérées et le raffinement de la fonction objectif peut sensiblement varier d'un auteur à l'autre, ce qui apporte parfois quelques confusions autour de la définition formelle d'un sous-problème. Par exemple, le sous-problème d'affectation des types d'avion aux vols a déjà été considéré en fixant *a priori* les connexions entre les vols, le problème consistant ainsi à affecter les types d'avion aux itinéraires plutôt qu'aux vols (cf. Agard *et al.*, 1973). Également, certains auteurs formulent ce même problème en considérant des temps minimaux de connexion entre les segments de vol qui ne dépendent que du type d'avion et d'un seul des deux segments de vol connectés (cf. Subramanian *et al.*, 1994 ou Hane *et al.*, 1995), alors que d'autres considèrent des temps minimaux de connexion pouvant varier en fonction des deux segments de vol de la connexion (cf. Abara, 1989, Rushmeier et Kontogiorgis, 1997, ou encore le chapitre 5 de cette thèse).

Plus formellement, il s'agit donc de fixer cinq ensembles de variables de décision l'un à la suite de l'autre pour finalement obtenir un quintuplet  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in D$ , où  $x_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , correspond à l'ensemble de variables de décision  $i$ . Cette solution doit être réalisable pour le problème global, mais est possiblement non optimale. Pour résoudre chacun de ces sous-problèmes  $i$ , il faut aussi sélectionner un ensemble de contraintes définissant un domaine  $D_i$  pour l'ensemble de variables  $x_i$ . Soit  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1})$  une solution pour les sous-problèmes 1 à  $i-1$ , définissons  $D(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}) = \{x \in D_i \mid (x_1, \dots, x_{i-1}) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1})\} \subset D$  comme le domaine réalisable pour  $x_i$  étant donné qu'on a déjà fixé les valeurs des variables  $x_1, \dots, x_{i-1}$  à  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}$  respectivement. De plus, lors de la résolution de chacun des sous-problèmes  $i$ , on doit définir une fonction objectif  $f_i$  qui retourne une valeur pour toute solution  $x_i$ . Ainsi, on peut écrire formellement le processus d'optimisation séquentiel du problème global de planification de la façon suivante :

$$\bar{x}_1 \in \arg \min_{x_1 \in D_1} f_1(x_1) \quad (2.1)$$

$$\bar{x}_2 \in \arg \min_{x_2 \in D_2(\bar{x}_1)} f_2(\bar{x}_1, x_2) \quad (2.2)$$

$$\bar{x}_3 \in \arg \min_{x_3 \in D_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} f_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3) \quad (2.3)$$

$$\bar{x}_4 \in \arg \min_{x_4 \in D_4(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} f_4(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_4) \quad (2.4)$$

$$\bar{x}_5 \in \arg \min_{x_5 \in D_5(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)} f_5(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, x_5) \quad (2.5)$$

et la valeur de la solution  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5)$  pour le problème global sera :

$$v = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5).$$

On remarque également dans la littérature, et ce particulièrement dans les articles les plus récents, que l'on tend à développer des modèles et des approches de résolution permettant d'augmenter le nombre de variables de décision considérées simultanément. Cette intégration totale ou partielle de plusieurs sous-problèmes permet

normalement d'obtenir de meilleures solutions au problème global. Par exemple, on tentera de résoudre ensemble les problèmes d'affectation et de construction des itinéraires pour les avions (cf. Barnhart *et al.*, 1998a), ou encore de résoudre le problème de construction des itinéraires pour les avions en même temps que la construction des rotations d'équipage (cf. Cordeau *et al.*, 2001, ou Mercier *et al.*, 2004).

Également, dans plusieurs articles de la littérature, on décrit des expériences dans lesquelles on ajoute des contraintes à une étape donnée afin d'empêcher que les problèmes des étapes ultérieures deviennent non réalisables étant donné les décisions prises à cette étape antérieure. En effet, lorsqu'on traite les étapes de la planification de façon séquentielle, on prend le risque que des décisions prises à une certaine étape intermédiaire puissent compromettre la faisabilité du problème global. De plus, la qualité de la solution globale peut grandement être détériorée si on néglige trop fortement les interrelations entre les différentes étapes du processus de planification. C'est pourquoi on retrouve aussi des travaux dans lesquels on montre la pertinence d'enrichir la fonction objectif à une étape afin de mieux refléter l'impact sur les prochaines étapes des décisions qui y sont prises. Comme exemple d'ajout de contraintes, nous pouvons mentionner les problèmes d'affectation des types d'avion auxquels on intègre des contraintes concernant l'entretien périodique des avions. En effet, sans ces contraintes, il est beaucoup moins probable qu'à partir de l'affectation obtenue, on puisse construire des itinéraires permettant de respecter les contraintes d'entretien. Également, il peut être très profitable d'ajouter des éléments à la fonction objectif pour tenir compte de certains coûts d'équipage lors de l'affectation des types d'avion. En effet, certaines affectations de bonne qualité du point de vue des coûts d'opérations des avions peuvent être très médiocres lorsqu'on considère les inconvénients qu'elles posent du point de vue des équipages (nuits à l'hôtel supplémentaires, dépenses de temps supplémentaire, déplacements inutiles, etc.). On retrouve en particulier dans Clarke *et al.* (1996) un modèle pour le problème d'affectation des types d'avion aux vols comportant ce type de contraintes d'entretien et de fonction objectif enrichie pour tenir compte des coûts d'équipage.



## Analogies avec le principe de décomposition de Benders

Le principe de séparation du problème global en sous-problèmes n'est pas sans rappeler le principe de décomposition de Benders. Celui-ci consiste à résoudre itérativement un problème maître, qui considère seulement une partie des variables et les contraintes qui les concernent, et un sous-problème qui détermine la valeur des autres variables. À chaque itération, le sous-problème produit des coupes de faisabilité ou d'optimalité qui sont ajoutées au problème maître de façon à l'orienter pour qu'il fixe les variables optimalement pour le problème global. Notons que si toutes les coupes de faisabilité et d'optimalité étaient intégrées *a priori* au problème maître, la méthode produirait une solution optimale pour le problème global en une seule itération.

Par exemple, si l'on doit résoudre le problème :

$$\min f(y) + g(x) \tag{2.6}$$

$$y \in D \tag{2.7}$$

$$x \in F(y), \tag{2.8}$$

où  $F(y)$  est le domaine réalisable pour  $x$  étant donné une valeur donnée à  $y$ , alors le problème maître s'écrit :

$$\min_{y \in D} f(y)$$

et le sous-problème :

$$\min_{x \in F(y)} g(x).$$

Lors d'une itération, le problème maître donne une valeur  $\bar{y}$  à  $y$ , laquelle détermine un domaine réalisable  $F(\bar{y})$  pour  $x$  dans le sous-problème, et la résolution du sous-problème permet alors de déterminer une solution pour  $x$ . Dans le cas où cette solution obtenue n'est pas réalisable ou optimale pour le problème global, le sous-problème génère également des coupes de faisabilité ou d'optimalité qui sont intégrées

dans le problème maître, lequel est résolu à nouveau, et ainsi de suite. Le processus s'arrête lorsqu'aucune coupe ne peut être générée par le sous-problème. Si  $\gamma(y)$  est la fonction obtenue en prenant le maximum de toutes les coupes d'optimalité générées, et  $C$  est le domaine défini par l'ensemble de toutes les coupes de faisabilité, on peut écrire le problème maître enrichi de coupes provenant du sous-problème comme :

$$\min f(y) + \gamma(y) \quad (2.9)$$

$$y \in D \quad (2.10)$$

$$y \in C. \quad (2.11)$$

Le processus séquentiel de décision pour l'optimisation de la planification peut être vu comme une décomposition de Benders généralisée avec cinq groupes de variables au lieu de deux. En effet, lors de la résolution de chaque étape du processus de planification, on résout un sous-problème fixant un sous-ensemble des variables du problème global, le cinquième sous-problème fixant les dernières variables du problème. L'ajout de contraintes à une certaine étape pour éviter de produire une solution globalement non réalisable peut être vu comme l'ajout de coupes de faisabilité provenant des sous-problèmes ultérieurs. De même, l'enrichissement de la fonction objectif pour mieux tenir compte de l'impact d'une solution sur le coût des prochains sous-problèmes peut être vu comme l'ajout de coupes d'optimalité. Notons que contrairement à la décomposition de Benders qui se fait itérativement, la résolution des sous-problèmes se fait généralement en ajoutant en une seule fois certaines coupes de faisabilité et d'optimalité.

Nous illustrons ici le cas où l'on intègre des coupes de faisabilité et d'optimalité lors de la résolution de la deuxième étape.

$$\bar{x}_2 \in \arg \min f_2(\bar{x}_1, x_2) + \gamma(\bar{x}_1, x_2) \quad (2.12)$$

$$x_2 \in D_2(\bar{x}_1) \quad (2.13)$$

$$x_2 \in C(\bar{x}_1) \quad (2.14)$$

où  $C$  correspond au sous-domaine engendré par un ensemble de coupes de faisabilité provenant des étapes  $j > 2$  et  $\gamma$  est une fonction obtenue en prenant le maximum de certaines coupes d'optimalité provenant de ces mêmes étapes.

En plus de ces ajouts de coupes de faisabilité et d'optimalité, on peut tenter d'améliorer la solution du problème global en permettant, à une étape donnée, de réviser certaines décisions prises lors d'étapes antérieures. Pour la seconde étape, cette extension peut s'écrire ainsi :

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \arg \min f_2(x_1, x_2) + \gamma(x_1, x_2) \quad (2.15)$$

$$x_2 \in D_2(x_1) \quad (2.16)$$

$$x_2 \in C(x_1) \quad (2.17)$$

$$x_1 \in S(\bar{x}_1) \quad (2.18)$$

où  $S(\bar{x}_1)$  est l'espace admissible pour l'ensemble de variables  $x_1$  étant donné que la solution  $\bar{x}_1$  a été obtenue à l'étape antérieure. Cet espace  $S(\bar{x}_1)$  n'est qu'une partie du domaine initial de  $x_1$ , ce qui peut permettre de simplifier la fonction objectif originale  $f$  et d'éliminer certaines contraintes sur  $x_1$  de façon à obtenir un problème plus facile à résoudre que ce que serait le problème de résoudre les deux étapes simultanément. Par exemple, on peut définir  $S(\bar{x}_1)$  comme un voisinage de  $\bar{x}_1$  suffisamment petit pour que la variation de la fonction objectif en terme de  $x_1$  puisse être considérée comme constante ou linéaire et qu'aucune contrainte relative à  $x_1$  n'ait à être intégrée au modèle. Comme exemple typique de ces révisions de décision, mentionnons l'ajout d'une flexibilité sur les heures de départ lors de l'affectation des types d'avion aux vols.

## 2.2 Quelques références sur chaque étape de la planification

### Construction de l'horaire de vols

La littérature fait état de peu de modèles complets permettant de produire des horaires de vols utilisables en pratique, et il semble que le développement essentiellement manuel des horaires soit encore ce qui est le plus largement utilisé dans l'industrie. On retrouve une revue de littérature importante sur le sujet dans Etschmaier et Mathaisel (1985). Par après, Phillips et Boyd (1989) ont proposé une approche heuristique intégrée permettant de déterminer l'horaire de vols, la composition de la flotte et l'utilisation des avions. La résolution requiert une solution initiale, laquelle est ensuite améliorée itérativement. Nikulainen (1992) présente une méthode permettant de déterminer un bon horaire de vols à partir des courbes de la demande en passagers en fonction de l'heure de départ pour chaque paire d'origine et de destination. Il doit cependant faire l'hypothèse assez forte qu'il n'y a jamais d'excédent de passagers par rapport à la capacité des avions sur chacun des vols (*spill*). Dobson and Lederer (1993) proposent une approche heuristique permettant de trouver un bon horaire de vols, en prenant en compte les horaires de vols des compétiteurs. De plus, dans le même article, ils proposent un modèle d'équilibre dans lequel on modélise la réaction des compétiteurs du point de vue de leurs horaires de vols face aux décisions prises par la compagnie. Les tests ont seulement été effectués sur de petits problèmes, mais les auteurs sont confiants que leurs stratégies puissent être appliquées relativement aisément à la résolution de problèmes de taille réelle.

### Affectation des types d'avions aux vols

Les problèmes d'affectation des types d'avion aux vols peuvent naturellement se diviser en deux catégories. Dans la première, on est intéressé à améliorer une solution déjà

existante et on appelle souvent *warm start* ce genre de procédé. Ceci peut entre autres permettre d'obtenir rapidement de nouvelles solutions lorsque de légers changements sont apportés au niveau des données ou des contraintes du problème initial. Par exemple, on peut vouloir réoptimiser un problème pour lequel on observe quelques variations dans les prévisions de demande en passagers, ou encore un changement dans la disponibilité des avions ou des équipages. En particulier, l'affectation des types d'avion aux vols est souvent déterminée à partir d'un horizon d'une journée, et doit être répétée quotidiennement. On fait alors l'hypothèse que la structure de la demande en passagers varie peu d'un jour à l'autre. Or, on observe en pratique que la demande varie de façon non négligeable entre les différents jours de la semaine. Ceci est particulièrement vrai en ce qui concerne les demandes pendant les week-ends par rapport à celles pour les autres jours de la semaine. Klinkewicz et Rosenwein (1995) proposent donc une approche permettant de remanier l'affectation des types d'avion afin de mieux prendre en compte les particularités de chaque jour. De façon plus générale, afin de permettre d'apporter rapidement des changements de plusieurs natures à une solution initiale, Talluri (1996) propose une méthode heuristique d'échanges, alors que Jarrah *et al.* (2000) proposent un modèle de flot dans un réseau de type multicommodité accompagné de contraintes supplémentaires.

Dans la seconde catégorie, on cherche plutôt à obtenir une solution initiale, ce qu'on appelle *cold start*. On peut également être appelé à résoudre ce genre de problème pour refaire l'affectation des types d'avion aux vols lorsque des changements majeurs ont été apportés au problème, par exemple à l'horaire de vols. Nous élaborerons davantage sur ce problème dans les prochaines sections, ce dernier faisant l'objet principal de cette thèse.

### Construction des itinéraires d'avion

Nous retrouvons dans Clarke *et al.* (1997) une procédure heuristique basée sur une approche de relaxation lagrangienne permettant la construction d'itinéraires respectant les contraintes d'entretien tout en optimisant le choix des connexions directes. Gopalan et Talluri (1998) et Talluri (1998) proposent quant à eux des procédures heuristiques pour la construction des itinéraires de façon à assurer un entretien périodique des appareils à tous les trois ou quatre jours, respectivement. On suppose ici que les avions passent la nuit au sol et que les activités d'entretien ne peuvent avoir lieu qu'à ce moment.

Jarrah et Strehler (2002) considèrent le problème d'optimiser le choix des connexions directes. Ils proposent une approche consistant à résoudre des problèmes de réseaux comportant certaines contraintes linéaires supplémentaires permettant, entre autres, de pénaliser le manque de balancement dans le choix des marchés desservis par des connexions directes. En effet, la compagnie peut désirer que des paires de marchés complémentaires (e.g. New York - Los Angeles et Los Angeles - New York) soient équitablement desservies par des vols en connexions directes. Certaines autres contraintes supplémentaires permettent de s'assurer que les suites de vols reliés par des connexions directes ne sont pas en compétition avec d'autres vols sans escale offerts par la compagnie.

### Construction des rotations d'équipage

Le problème de construction des rotations d'équipage est un problème difficile principalement à cause du très grand nombre de rotations possibles, de même qu'à la complexité des règles déterminant la validité des rotations. On a souvent recours à des approches consistant à décomposer le problème en un générateur de rotations

et en un problème de partitionnement d'ensemble. Le premier génère des rotations valides prometteuses, alors que le second fait une sélection parmi ces rotations de façon à assurer que tous les segments de vol de l'horaire soient couverts par les rotations choisies et que soit minimisé le total des dépenses associées à ces rotations. Une énumération exhaustive de toutes les rotations possibles étant impensable pour la plupart des problèmes réels, on retrouve dans la littérature plusieurs expériences dans lesquelles on génère *a priori* un ensemble de rotations prometteuses au moyen d'une procédure heuristique. Les rotations sont ensuite sélectionnées grâce à la résolution d'un problème de partitionnement d'ensemble, lequel peut être résolu de façon exacte ou heuristique. Des procédures heuristiques d'amélioration de la solution obtenue sont parfois aussi appliquées par la suite. On peut entre autres retrouver ce genre de travaux dans les articles de Graves *et al.* (1993) et de Chu *et al.* (1997).

On peut également résoudre le problème de partitionnement en considérant implicitement toutes les rotations possibles à l'aide d'une approche de génération de colonnes, le tout étant imbriqué dans une procédure de séparation et d'évaluation progressive (*branch-and-bound*). En effet, les sous-problèmes de chacun des nœuds de branchement sont résolus en effectuant plusieurs itérations entre la génération des rotations (colonnes) et la résolution de la relaxation linéaire du problème de partitionnement. À chaque itération, les variables duales obtenues lors de la résolution du problème de partitionnement sont transférées au générateur de rotations. Le générateur peut ainsi savoir s'il existe ou non des rotations non encore générées permettant d'améliorer la solution courante et, le cas échéant, quelles rotations sont les plus pertinentes à générer pour l'itération courante. Ceci procure une méthode exacte pour résoudre les sous-problèmes sans avoir à énumérer l'ensemble de toutes les rotations possibles. Évidemment, les difficultés à obtenir rapidement de bonnes solutions entières font souvent en sorte que des techniques de branchement heuristiques doivent être utilisées. De plus, la convergence parfois lente du processus de génération de colonnes

conduit souvent à devoir interrompre la résolution des sous-problèmes avant l'obtention de la preuve de l'optimalité. Cette approche de génération de colonnes a été utilisée dans les travaux de Desaulniers *et al.* (1997b). Une approche de ce genre avait déjà été utilisée par Lavoie *et al.* (1988) pour résoudre la relaxation linéaire du problème de partitionnement, mais les auteurs ne proposent pas de méthodes pour garantir l'obtention de solutions entières. Également, dans Barnhart *et al.* (1994), on résout la relaxation linéaire à l'aide de ce procédé de génération de colonnes, mais on ne génère pas de colonnes lors de la résolution des sous-problèmes associés aux noeuds de l'arbre d'énumération autres que le noeud racine. Cette approche heuristique beaucoup plus facile à mettre en œuvre peut permettre de produire rapidement de bonnes solutions, mais possède en contrepartie l'inconvénient de ne pas pouvoir garantir l'obtention de solutions optimales, ni même réalisables.

Barnhart *et al.* (1995) proposent une approche pour résoudre le problème en permettant aux membres d'équipages de voyager à titre de passagers sur des segments de vol offerts par la compagnie ou même par d'autres transporteurs. Ces opportunités de déplacement en tant que passagers sont considérées implicitement à l'aide d'une procédure de génération de colonnes. Barnhart et Sheno (1998) proposent de résoudre d'abord un modèle approximatif qui est une relaxation du véritable problème à résoudre. Ils relaxent les contraintes concernant les durées de séjour hors des bases et les restrictions sur les stations de début et de fin pour les rotations. Cette relaxation permet de formuler le problème comme un problème de circulation dans un réseau espace-temps avec contraintes linéaires supplémentaires, lequel peut alors être résolu très efficacement. Ceci permet de trouver rapidement une bonne solution initiale et une bonne borne inférieure pour la solution optimale. Un procédé semblable à celui présenté dans Barnhart *et al.* (1995) est également appliqué pour sélectionner des opportunités de déplacement de membres d'équipages à titre de passagers.

Certains autres articles de la littérature font état de résultats obtenus à l'aide de techniques heuristiques de décomposition de problème accompagnées de procédures



d'amélioration locale (Ball et Roberts, 1985 et Anbil *et al.*, 1991), ou encore à l'aide d'approches méta-heuristiques, comme la technique de recuit simulé (*simulated annealing*), tel que proposé par Emden-Weinert et Proksch (1999).

### Confection des horaires mensuels pour les membres d'équipage

Nous présentons brièvement trois approches pour arriver à construire ces horaires mensuels. Une première approche, en anglais appelée *bidline*, consiste à construire, indépendamment des employés, un ensemble d'horaires de travail permettant de couvrir toutes les rotations. Les employés doivent ensuite indiquer leurs préférences et les horaires leur sont ainsi attribués selon un système de priorités quelconque. Cette méthode a l'inconvénient de ne pas tenir compte des activités préassignées particulières à chacun des employés, telles les vacances et les entraînements, et on doit donc souvent remanier les horaires *a posteriori*. Certaines rotations peuvent même alors ne plus être couvertes. On retrouve des résultats de recherche sur cette approche dans Glanert (1984) et Jones (1989).

Une seconde approche, nommée *rostering*, permet de construire un horaire personnalisé pour chaque employé. On peut alors tenir compte des activités préassignées, évitant ainsi de devoir revoir les horaires après l'optimisation. Pour résoudre ce problème, Ryan (1992) génère *a priori* un ensemble d'horaires pour chaque employé à l'aide d'une méthode heuristique et résout ensuite un problème de partitionnement pour assurer la couverture des rotations. Des approches optimales sont par ailleurs formulées dans Gamache et Soumis (1998) et Gamache *et al.* (1998), où l'on fait appel à une procédure de génération de colonnes. Les horaires, plutôt que d'être générés heuristiquement et *a priori*, sont générés dynamiquement en résolvant des problèmes de plus court chemin avec ressources. Le problème maître, un problème de partitionnement, assure la couverture de toutes les rotations.

La troisième approche, nommée *preferential bidding*, offre la possibilité de prendre en compte les intérêts particuliers de chaque employé (destinations préférées, congés les week-ends ou d'autres jours de la semaine, heures de travail, etc.) lors de la confection des horaires. Souvent, les intérêts des employés avec le plus d'ancienneté sont mieux pris en compte, aux dépens des employés juniors. La résolution de ce problème est un peu plus complexe que celle du problème de *rostering*. Moore *et al.* (1978) et Byrne (1988) ont proposé des algorithmes heuristiques gloutons, tandis que Gamache *et al.* (1998) proposent une approche quasi-optimale, encore une fois à l'aide d'une décomposition par génération de colonnes comportant la résolution de problèmes de plus court chemin avec ressources. Plus récemment, Fahle *et al.* (2002) ont proposé une approche de génération de colonnes dans laquelle les sous-problèmes sont résolus à l'aide d'une technique de programmation par contraintes.

## 2.3 Affectation des types d'avion aux vols avec horaire fixe

Mentionnons tout d'abord que Gu *et al.* (1994) ont démontré que le problème consistant à trouver une affectation réalisable des types d'avion aux vols était NP-complet dès qu'il y avait plus de deux types d'avion différents à considérer. De plus, ils montrent que le saut d'intégrité (écart entre la valeur optimale de la relaxation linéaire et de la solution entière) peut théoriquement être très grand. Néanmoins, la littérature fait état de plusieurs modèles et approches de résolution qui ont permis en pratique de résoudre efficacement ce genre de problème. Nous passons ici en revue les principales approches que l'on y retrouve.

Plusieurs formulations assez semblables de modèles linéaires en nombres entiers sont proposées dans la littérature. La plupart de ceux-ci se situe à l'intérieur de l'une

ou l'autre des deux classes suivantes, soient les modèles dans lesquels les connexions entre les segments de vol sont implicitement modélisées, et ceux où elles le sont explicitement. Dans Subramanian *et al.* (1994) et Hane *et al.* (1995), on présente un modèle permettant de considérer implicitement les connexions. Ce modèle utilise une technique d'arcs d'attente au sol permettant de déterminer à chaque instant, pour chacune des stations, le nombre d'avions de chaque type prêts à entreprendre un segment de vol. Ainsi, le nombre de contraintes et de variables de réseau varient linéairement en fonction du nombre de segments de vol, plutôt que quadratiquement comme pour les approches où toutes les connexions possibles sont explicitement représentées. Cependant, une telle modélisation ne permet plus d'associer directement un coût et un temps minimal de connexion particulier à chacune des connexions. Ainsi, le temps minimal de connexion ne peut s'exprimer seulement qu'en fonction du type d'avion et de la station à laquelle a lieu la connexion, et non plus en fonction des deux segments de vol connectés. Nous proposons au chapitre 5 de considérer des temps de connexion dépendant des deux segments de vol connectés sans avoir recours à une modélisation considérant explicitement toutes les connexions possibles.

Abara (1989) et Rushmeier et Kontogiorgis (1997) proposent des modèles où les connexions entre les segments de vol sont explicitement représentées. Le fait de représenter explicitement les connexions permet d'une part de pouvoir associer un coût au fait d'effectuer une connexion précise, et d'autre part de pouvoir considérer de façon exacte le temps minimal au sol nécessaire pour effectuer chacune des connexions. Cependant, ce genre de modélisation possède l'inconvénient majeur de générer des problèmes de très grande taille qui ne peuvent être résolus en pratique. En effet, le nombre de contraintes et de variables de réseau varient alors quadratiquement en fonction du nombre de segments de vol. Pour arriver à utiliser ce genre de modèles, on doit en général limiter *a priori* l'ensemble des connexions possibles, ce qui rend alors heuristique l'approche de résolution. Dans Abara (1989), on émet simplement

l'hypothèse que le nombre de connexions possibles suivant chaque segment de vol demeure relativement petit, alors que dans Rushmeier et Kontogiorgis (1997), on a recours à une procédure heuristique pour restreindre ce nombre de possibilités de connexion. En effet, pour chacune des stations, on partitionne l'ensemble des arrivées et des départs en des sous-ensembles balancés (c'est-à-dire comportant le même nombre d'arrivées et de départs). Ce type de partitionnement généralise le concept d'agrégation en îlots introduit par Hane *et al.* (1995). Un segment de vol dont l'arrivée appartient à un certain sous-ensemble ne peut être connecté qu'à un segment de vol dont le départ appartient à ce même sous-ensemble. Aussi, on s'assure autant que possible que la plupart des arrivées d'un sous-ensemble ont lieu avant la plupart des départs de ce même sous-ensemble.

Comme il a été mentionné précédemment, dans Clarke *et al.* (1996), on enrichit le modèle d'affectation des types d'avion aux vols proposé par Hane *et al.* (1995) en lui ajoutant des coupes de faisabilité, à savoir des contraintes supplémentaires relatives aux activités d'entretien, de façon à accroître la probabilité que la solution produite pour ce problème permette d'obtenir une solution réalisable pour le problème des itinéraires d'avion. On ajoute également des coupes d'optimalité, c'est-à-dire qu'on enrichit la fonction de coût pour pénaliser certaines affectations qui engendrent des coûts élevés par rapport aux équipages. Cette particularité permet d'éviter d'obtenir de trop mauvaises solutions lors de la planification des équipages.

Dans Barnhart *et al.* (1998a), on présente une modélisation permettant de résoudre simultanément le problème d'affectation des types d'avion et de construction des itinéraires. Le processus de résolution utilisé suit le schéma proposé dans Barnhart *et al.* (1998b) pour la résolution en nombres entiers de problèmes de grande taille. On y fait appel à une technique de génération de colonnes pour construire des itinéraires valides devant entre autres satisfaire les contraintes d'entretien et permettre de recouvrir l'ensemble des segments de vol. Certaines stratégies heuristiques

sont utilisées pour réduire la taille des problèmes à résoudre, dont la méthode d'agrégation en îlots de Hane *et al.* (1995). Les auteurs affirment avoir obtenu des solutions comportant un saut d'intégrité d'environ 1.5% en des temps de calcul d'environ cinq heures et demi, dont quatre heures et demi pour résoudre la relaxation linéaire.

Dans les modèles proposés ci-haut, on suppose que le revenu passager pour chacun des segments de vol est uniquement fonction du type d'avion affecté à ce segment de vol. Or, on sait qu'en réalité, les passagers ne voyagent pas seulement à l'aide de vols directs, mais peuvent voyager sur plus d'un segment de vol (appartenant à des vols différents) pour réaliser leur déplacement d'un point à un autre. Ainsi, il est en principe faux de prétendre que le flot de passagers voyageant sur un segment de vol est indépendant du choix de type d'avion (et donc de capacité) pour les autres segments de vol du réseau. Cependant, il est très complexe de résoudre optimalement le problème en considérant cet aspect particulier de la fonction objectif. C'est pourquoi la plupart des modèles font l'hypothèse d'indépendance des choix de types d'avion entre les différents segments de vol. Dans le but d'éviter d'avoir à poser une telle hypothèse que l'on sait inexacte, Barnhart *et al.* (2002) résolvent le problème d'affectation des types d'avion aux vols en intégrant explicitement une composante de répartition des passagers à leur modèle. Ils utilisent le modèle de Hane *et al.* (1995) comme modèle de base, et y ajoutent une très grande quantité de variables et de contraintes. Le modèle demeure un modèle linéaire en nombres entiers, mais le nombre élevé de variables et de contraintes conduit les auteurs à utiliser une stratégie permettant de générer dynamiquement certains types de variables et de contraintes pour résoudre ce problème. Une telle formulation du problème s'avère toutefois discutable, puisqu'alors on considère un modèle permettant à la compagnie de choisir de faire voyager les passagers dans son réseau de façon à minimiser ses dépenses, sans tenir compte de leurs préférences. Ainsi, on suppose implicitement que les passagers s'entendent pour utiliser les services de la compagnie de façon optimale du point de vue de la rentabilité de cette dernière. Ceci est évidemment sans fondement pratique, puisqu'on

sait que chaque passager cherche à maximiser son propre bénéfice et ne choisira pas de diminuer sa satisfaction, même légèrement, pour permettre à la compagnie d'augmenter sa rentabilité. En somme, un tel genre de modèle risque fort de considérer une fonction objectif erronée, voire même plus erronée que celle obtenue en posant l'hypothèse d'indépendance utilisée dans les modèles présentés précédemment.

Auparavant, Soumis *et al.* (1980) avaient présenté un modèle intégrant à la fois l'aspect de construction de l'horaire de vols et de l'affectation des types d'avion aux vols. Pour permettre la construction des horaires, un ensemble de segments de vol "candidats" était défini et l'optimiseur pouvait sélectionner un ensemble de ceux-ci. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la fonction objectif ne peut être exprimée de façon simple, et ceci est d'autant plus vrai que dans ce cas, la structure même du réseau n'est pas fixée *a priori*. Ainsi, la fonction objectif était définie comme la somme des coûts et des revenus, ces derniers étant obtenus en résolvant un modèle de répartition du flot de passagers dans le réseau. Pour la résolution, les auteurs ont proposé un algorithme de descente inspiré de l'algorithme de Frank-Wolfe pour les problèmes continus non linéaires et convexes. En effet, puisque des solutions entières étaient requises, les pas de descente correspondaient à ajouter ou à retirer des segments de vol, ou encore à en changer le type d'avion affecté.

Dans un ordre d'idées semblables, Mashford et Marksjö (2001) proposent un système d'optimisation heuristique permettant d'intégrer le problème de construction de l'horaire de vols, l'affectation des types d'avion aux vols et la construction des itinéraires. L'approche de résolution est basée cette fois sur une stratégie de recherche de type recuit simulé. Encore une fois, la composante du revenu passager de la fonction objectif revêt un aspect complexe. Ainsi, pour s'assurer d'une fonction objectif de bonne qualité, une réévaluation en est faite périodiquement en appliquant un modèle de répartition des passagers à la solution courante. La méthode paraît intéressante, mais les auteurs rapportent seulement des résultats numériques concernant le traitement

de problèmes de petite taille nécessitant des temps de calcul de plus de 24 heures. Les auteurs mentionnent cependant des stratégies d'accélération pouvant être développées pour améliorer la performance du système, spécialement au niveau du calcul périodique de la répartition des passagers.

## 2.4 Affectation des types d'avion aux vols avec horaire flexible

Nous donnons maintenant un bref aperçu de ce qui existe dans la littérature permettant de résoudre le problème d'affectation des types d'avion aux vols lorsqu'on permet une flexibilité sur les heures de départ des segments de vols.

### Discrétisation des fenêtres de temps

Levin (1971) propose une approche consistant à permettre pour chaque segment de vol un nombre fini de choix d'heures de départ au voisinage de celle proposée dans l'horaire de vols. Comme pour le cas avec heures de départ fixées, la formulation proposée est basée sur une structure de réseau de type multicommodité. L'idée consiste à créer, pour chaque segment de vol, autant d'arcs de vol qu'il y a d'heures de départ permises, et d'ajouter des contraintes indiquant qu'un et un seul de ces arcs ne doit être utilisé pour chaque segment de vol. Le problème en demeure alors un de programmation linéaire en nombres entiers. L'auteur ne formule que le cas pour lequel on ne fait que minimiser le nombre total d'avions utilisés, tous les avions étant du même type dans le problème considéré.

On utilise une technique semblable de discrétisation dans Rexing *et al.* (2000). Deux approches de résolution sont proposées dans ce dernier article. La première revient

à intégrer les idées proposées par Levin (1971) à celles de Hane *et al.* (1995). Ainsi, les auteurs proposent des techniques permettant de résoudre un problème formulé à partir d'une structure de réseau de type multicommodité. Chaque segment de vol est représenté par plusieurs arcs de façon à modéliser à la fois le choix du type d'avion et le choix de l'heure de départ. Évidemment, ce type d'approche risque fort d'engendrer un très grand nombre de variables. C'est pourquoi les auteurs proposent une seconde approche permettant de résoudre le problème en ne considérant à la fois qu'un petit sous-ensemble des possibilités d'heure de départ. Cette approche de nature itérative consiste essentiellement à produire une solution initiale en n'utilisant qu'un arc par segment de vol et type d'avion, et par la suite à générer dynamiquement des arcs permettant d'améliorer successivement la solution courante. Les expérimentations menées par les auteurs les amènent à conclure que cette dernière approche possède l'inconvénient d'être moins performante que la première, mais qu'elle permet de s'attaquer à de plus gros problèmes qui ne pourraient pas être résolus par la première approche étant donné la trop grande quantité de mémoire nécessaire pour résoudre ces problèmes de façon directe.

### Génération de colonnes

Desaulniers *et al.* (1997a) considèrent le cas où les heures de départ de chacun des segments de vol doivent être comprises à l'intérieur d'une certaine fenêtre de temps. Ils proposent une formulation basée sur un problème de flot dans un réseau de type multicommodité auquel sont incorporées des variables et des contraintes de temps. Cette formulation s'insère dans le cadre plus général présenté par Desaulniers *et al.* (1998), où l'on présente un modèle général basé sur une structure de réseau de même qu'une approche de résolution pour les problèmes d'horaires et de tournées de véhicule. Le modèle consiste en une formulation non linéaire en nombres entiers, sur lequel on peut appliquer une extension du principe de décomposition de Dantzig-Wolfe pour



les programmes linéaires (Dantzig et Wolfe, 1960). L'approche de résolution se résume essentiellement en une procédure de séparation et d'évaluation progressive, dont les sous-problèmes sont résolus grâce à une approche de génération de colonnes. Le problème-maître consiste en un programme linéaire, alors que la génération des colonnes se fait en résolvant un problème de plus court chemin avec ressources. Dans le cas particulier du problème d'affectation des types d'avion avec fenêtres de temps, l'algorithme de plus court chemin utilisé est celui proposé par Desrochers et Soumis (1988a, b), lequel comporte une seule ressource (le temps).

Notons de plus que le modèle proposé permet de formuler de façon exacte le problème d'affectation des types d'avion aux vols avec flexibilité d'horaire, alors que ce n'est pas le cas des modèles qui ont recours à des techniques de discrétisation des intervalles de temps pour modéliser la flexibilité d'horaire. Ce dernier genre de modèles permet d'obtenir des solutions de bonne qualité dans la mesure où le niveau de raffinement de la discrétisation est suffisamment élevé, ce qui risque d'entraîner une explosion du nombre de variables.

Dans Ioachim *et al.* (1999), on considère le problème d'affectation des types d'avion aux vols avec flexibilité d'horaire sur un horizon hebdomadaire, plutôt que quotidien comme pour la plupart des articles mentionnés précédemment. La particularité principale de ce problème tient dans ce que l'on doit s'assurer que les vols de même numéro partent à la même heure chaque jour. La formulation utilisée est semblable à celle proposée par Desaulniers *et al.* (1997a), à l'exception que l'on doit ajouter ces contraintes dites de *synchronisation d'horaire*. Cette formulation s'insère encore une fois dans le cadre générale décrit par Desaulniers *et al.* (1998). Les contraintes de synchronisation d'horaire doivent être considérées au niveau du problème-maître, rendant la résolution de ce dernier beaucoup plus difficile. De plus, la génération des colonnes doit se faire à l'aide d'un algorithme spécialisé de plus court chemin pouvant tenir compte de coûts linéaires sur les heures de visite des nœuds (Ioachim *et al.*, 1998) provenant des variables duales des contraintes de synchronisation.

## 2.5 Critique de la littérature

Nous portons maintenant un regard critique sur les travaux visant à résoudre le problème d'affectation des types d'avion aux vols que l'on retrouve dans la littérature. Nous relevons certaines faiblesses des modèles existants, lesquelles ont en grande partie motivé les efforts de recherche qui ont permis d'obtenir les résultats présentés dans cette thèse.

Tout d'abord, les modèles proposés dans la littérature ont généralement été conçus pour résoudre des problèmes sur une base quotidienne. Or, on sait que les horaires de vols des compagnies aériennes peuvent varier significativement d'un jour à l'autre, entre autres parce que la demande en passagers n'est pas répartie uniformément entre les jours de la semaine, ou encore parce que la demande pour certaines paires d'origine et de destination ne justifie pas une fréquence de vol quotidienne. Ainsi, il en découle que les planificateurs doivent souvent, pour chaque jour de la semaine, adapter manuellement une solution quotidienne obtenue à partir de l'optimisation d'une journée type de la semaine de façon à prendre en compte les particularités de l'horaire de chacune des journées. Ce travail, en plus d'être très fastidieux, peut entraîner des pertes importantes en terme de profitabilité par rapport à une solution qui serait obtenue à partir d'une optimisation menée directement sur un horizon hebdomadaire. De plus, comme nous le verrons plus loin, les modèles proposés pour le problème quotidien ne peuvent en général pas être utilisés directement pour résoudre le problème hebdomadaire. En effet, on doit pouvoir prendre en compte l'aspect d'homogénéité dans le choix des types d'avion pour les vols de même numéro. Cette homogénéité s'obtient implicitement lorsque la solution hebdomadaire est obtenue de la juxtaposition des solutions de chacune des journées de la semaine, ce qui n'est plus le cas lorsqu'on optimise la semaine de façon globale. Nous proposons donc au chapitre 4 un modèle et des méthodes de résolution au problème hebdomadaire, tout

en préservant l'homogénéité de l'affectation des types d'avion. Le chapitre 5 complète ce dernier en enrichissant ces stratégies de résolution pour permettre l'obtention de solutions vraiment réalisables en pratique.

Dans un autre ordre d'idée, un problème majeur se pose lorsqu'on observe les modèles d'affectation des types d'avion avec horaire de vols flexible : on ne tient pas compte de l'impact de la flexibilité d'horaire sur la demande en passagers pour les différents vols. En effet, on sait que la demande en passagers fluctue beaucoup au cours d'une journée. Ainsi, si les fenêtres de temps sont trop larges, il en résulte une mauvaise estimation du revenu des vols dont l'horaire est modifié. La figure 2.1 donne un exemple de la répartition au cours d'une journée de la demande anticipée en passagers pour une paire d'origine et destination donnée. On voit clairement qu'une flexibilité de  $\pm 30$  minutes sur l'heure de départ d'un vol initialement fixée à 8:00 risque d'entraîner une très mauvaise estimation de son profit anticipé. En effet, si le vol a lieu à 7:30, la demande sera surestimée, alors que s'il a lieu à 8:30, elle sera sous-estimée. De plus, l'heure de départ de ce vol aura un impact sur la demande pour les autres vols avoisinants. Si le vol a lieu à 7:30, il risque de faire diminuer la demande pour un vol partant à 6:30. De la même façon, s'il part à 8:30, certains des passagers qui auraient voulu prendre le vol à 8:00 se tourneront possiblement vers celui de 6:30 ou vers un autre transporteur. De plus, nous pourrions également étudier les impacts d'une modification de l'horaire du vol de 6:30 (appliquée conjointement avec celle du vol de 8:30), et ainsi de suite. Nous voyons donc que le problème est extrêmement complexe, car chaque modification à l'horaire a un effet global sur la demande en passagers des autres vols. Il en ressort donc que le profit associé à un vol ne peut pas dépendre seulement du type d'avion utilisé pour le couvrir, mais également des heures de départ des vols.

De plus, lorsqu'on modifie les heures de départ proposées dans l'horaire de vols, il faut tenir compte du fait que certains vols de la compagnie peuvent alors se concurrencer mutuellement. Cela entraîne une surestimation des revenus de ces vols et,

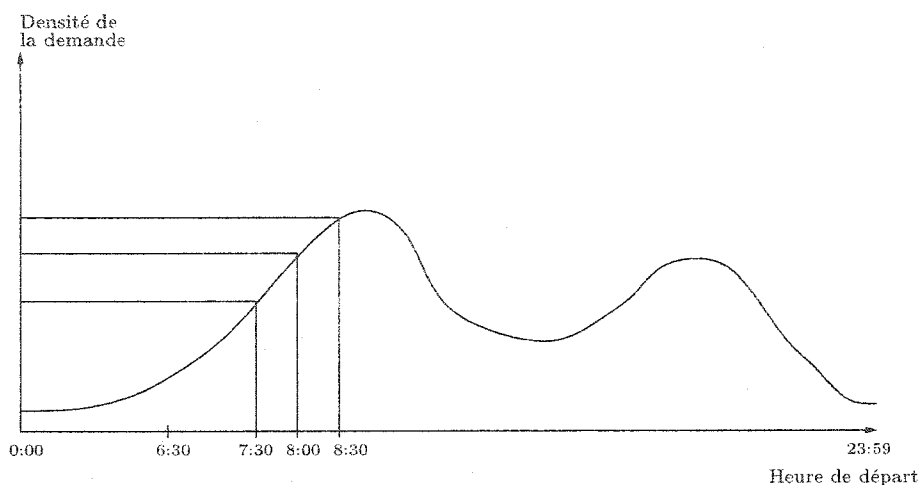


Figure 2.1 – Demande en passagers selon l’heure de départ pour une paire d’origine et de destination

possiblement, une sous-estimation des revenus de certains autres vols. Par exemple, supposons que deux vols reliant Montréal-Toronto soient initialement prévus pour 8:00 et 8:30. En modifiant les horaires avec des fenêtres de temps de  $\pm 10$  minutes, on pourrait se retrouver avec un nouvel horaire où ces vols auraient lieu à 8:10 et 8:20. Ces deux vols s’adresseraient alors essentiellement au même segment de marché et leurs revenus, calculés comme s’ils satisfaisaient deux marchés différents, seraient alors surestimés. Aussi, les passagers désireux de partir avant 8:00 et après 8:30 seraient moins bien servis et pourraient décider de voyager avec un autre transporteur. Cette réalité doit être incorporée au modèle d’optimisation.

Lorsque la flexibilité permise sur les heures de départ est relativement petite, on peut raisonnablement poser l’hypothèse que les niveaux de demande en passagers ne sont pas influencés par les modifications apportées aux heures de départ des vols. Cependant, plus la flexibilité devient importante, plus il est inexact de poser cette hypothèse et plus il devient important de considérer au niveau du modèle la dépendance entre la demande et les heures de départ. Nous proposons au chapitre 6 un

modèle permettant de prendre en compte cette dépendance dans le cas où la flexibilité d'horaire est importante. Ceci permet d'obtenir des solutions plus profitables car la fonction objectif est alors plus précise et permet, par le fait même, de réduire le nombre d'ajustements que les planificateurs doivent apporter à la solution produite par l'optimiseur dus au fait que les modèles ne tiennent pas compte des considérations soulevées ci-haut.

## Chapitre 3

# Organisation de la thèse

Dans cette thèse, nous considérons le problème d'optimiser l'affectation des types d'avion aux vols dans un contexte de planification. Dans la revue de littérature présentée précédemment, nous avons relevé quelques travaux relativement récents portant sur ce sujet. Toutefois, nous avons également soulevé certaines faiblesses des modèles existants, lesquelles peuvent grandement compromettre la faisabilité pratique des solutions obtenues, ou du moins en diminuer grandement la profitabilité. Nous proposons donc différents moyens permettant de produire des solutions beaucoup plus facilement utilisables en pratique et de plus grande profitabilité que celles pouvant être produites par les modèles développés jusqu'à ce jour. Dans un premier temps, nous proposons des approches permettant de résoudre le problème hebdomadaire avec horaire fixe, ce qui fait l'objet des chapitres 4 et 5. Dans un second temps, au chapitre 6, nous abordons le problème quotidien avec flexibilité sur les heures de départ des vols.

Les deux prochains chapitres (4 et 5) traitent donc du problème avec horaire fixe. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les modèles développés et présentés dans la littérature se rapportent presque exclusivement au problème quotidien. Le problème y est résolu sur un horizon d'une journée à partir d'une journée-type de la semaine, et les planificateurs utilisent cette solution pour bâtir une solution hebdomadaire en tentant de répéter successivement chaque jour la même solution quotidienne. Or, on sait que les horaires des différents jours de la semaine ne sont

pas identiques (bien que souvent relativement semblables, spécialement du lundi au vendredi) et que les demandes en passagers pour chaque origine-destination varient d'un jour à l'autre. Les planificateurs doivent donc prendre en compte les particularités de chacune des journées de la semaine lors de la construction de la solution hebdomadaire. Cette façon de faire ne garantit évidemment pas l'optimalité de l'affectation obtenue pour l'ensemble de la semaine, en plus de souvent nécessiter une intervention humaine fastidieuse dans le processus de planification. Nous proposons donc de résoudre le problème directement sur un horizon hebdomadaire. Un aspect important est toutefois à prendre en compte dans une telle approche, à savoir que les compagnies aériennes souhaitent en général que les vols d'un même numéro soient couverts par un même type d'avion au cours de la semaine. Les principales raisons de ceci sont expliquées au chapitre 4. Les solutions au problème hebdomadaire obtenues à partir de la résolution d'un problème sur une journée tendent naturellement à avoir un haut degré d'homogénéité dans le choix des types d'avion pour un numéro de vol donné, ce qui n'est plus du tout le cas lorsqu'on résout directement le problème hebdomadaire (voir section de résultats du chapitre 4). Ainsi, nous proposons dans l'article incorporé au chapitre 4 un modèle et des approches de résolution permettant de prendre en compte cet aspect d'homogénéité des types d'avion dans l'objectif du problème. Cet article est suivi de trois sections, la première portant sur une modélisation plus générale du problème avec homogénéité présenté dans l'article, la seconde apportant une discussion sur l'utilisation de la méthode de réduction en îlots proposée par Hane *et al.* (1995), et la troisième fournissant des tableaux de résultats plus détaillés que ceux présentés dans l'article.

Le modèle proposé au chapitre 4 a permis de démontrer la possibilité d'obtenir efficacement de bonnes solutions au problème hebdomadaire avec homogénéité. Toutefois, beaucoup de contraintes opérationnelles nécessaires à l'obtention de solutions utilisables en pratique y sont absentes. Nous avons donc travaillé en étroite collaboration

avec Air Canada afin d'identifier tous les aspects qu'il était nécessaire de considérer pour pouvoir obtenir des solutions valides de bonne qualité à l'aide d'un modèle d'optimisation. Ces fonctionnalités sont présentées en détail dans la première partie du chapitre 5. Nous avons, entre autres, développé des stratégies efficaces permettant de considérer les temps de connexion variables entre différentes paires de segments de vol pouvant être connectés. Nous avons pour cela développé deux modèles. Le choix de l'un ou l'autre de ces deux modèles peut être fait indépendamment pour chaque station et type d'avion. Comme l'un de ces modèles s'avère plus approprié pour les stations achalandées et que l'autre l'est davantage pour les stations avec un faible taux d'activité, nous proposons également le modèle hybride consistant à choisir le modèle le plus approprié pour chacune des stations et types d'avion. Notons que tous ces modèles permettent l'ajout des autres fonctionnalités présentées dans le chapitre, dont l'ajout de contraintes relatives aux activités d'entretien périodique.

Dans la seconde partie de ce même chapitre, nous présentons un résumé du cheminement expérimental que nous avons effectué avec Air Canada. Dans un premier temps, nous avons développé une méthode permettant d'effectuer des analyses de sensibilité d'une affectation. Cette méthode permet d'évaluer l'opportunité pour la compagnie de réduire la taille de sa flotte en permettant la réduction de son service de vols. Dans un second temps, nous avons utilisé une approche itérative consistant à résoudre un problème d'optimisation à chaque itération, en recalculant la répartition de la demande en passagers entre les itérations. Lors des premières itérations, on pouvait également permettre à l'optimiseur d'éliminer des segments de vol de l'horaire. Ce processus a mené à l'obtention de solutions utilisables en pratique et de meilleure rentabilité que celles proposées initialement par les planificateurs d'Air Canada. Ceux-ci ont d'ailleurs choisi d'utiliser l'une de ces solutions pour la saison d'été 2002.

Finalement, au chapitre 6 de cette thèse, nous abordons le problème d'affecter les types d'avion aux vols avec flexibilité sur les heures de départ. La littérature fait état



de quelques travaux de recherche effectués dans les dernières années pour tenter de résoudre ce problème. Cependant, tel qu'expliqué dans la revue de littérature, lorsque la flexibilité sur les heures de départ est relativement grande, il devient nécessaire de prendre en compte l'impact des heures de départ des segments de vol sur leur demande en passagers respective. Le modèle que nous proposons, lequel fait l'objet de l'article incorporé au chapitre 6, permet à l'optimiseur de prendre en compte à deux niveaux cet effet sur la demande. D'une part, le modèle permet que les profits pour un segment de vol donné ne dépendent pas seulement du type d'avion qui lui est affecté, mais également de son heure de départ. D'autre part, le modèle permet de considérer l'impact sur la demande en passagers du rapprochement de deux segments de vol reliant consécutivement une même paire de stations. En effet, les segments de vol risquent alors de se faire mutuellement compétition, et négliger de prendre ceci en compte peut entraîner une surestimation de la demande pour ces mêmes segments de vol. Notons finalement que le modèle proposé permet d'incorporer de façon exacte les contraintes de périodicité dans le cas où les heures de départ sont flexibles. Nous avons ajouté deux sections à la suite de l'article. La première contient des détails supplémentaires sur la difficulté à obtenir efficacement de bonnes solutions entières pour ce genre de problème, alors que dans la seconde, nous fournissons des tableaux détaillés des résultats numériques qui sont commentés dans l'article.

Finalement, en guise de conclusion, nous dressons une synthèse des principales méthodes de résolution et résultats présentés dans la thèse, et apportons quelques recommandations que nous jugeons pertinentes.

## Chapitre 4

# Affectation hebdomadaire des types d'avion aux vols avec homogénéité

Ce chapitre aborde le problème de l'affectation des types d'avion aux vols sur un horizon d'une semaine, dans le cas où l'on souhaite que les vols d'un même numéro apparaissant à plusieurs reprises au cours de la semaine soient autant que possible couverts par un même type d'avion. On présente une formulation mathématique pour ce problème et des approches de résolution exacte et heuristiques.

En général, l'affectation des types d'avion aux vols sur une base quotidienne peut servir de point de départ pour produire une affectation sur un horizon d'une semaine. En effet, si les horaires de vols des différentes journées de la semaine se ressemblent suffisamment, on peut tenter d'utiliser, pour chacune des journées, l'affectation obtenue par l'optimisation d'une journée-type de la semaine. On doit alors adapter cette affectation à chacune des journées de la semaine de façon à tenir compte des légères différences existant entre elles, lesquelles sont principalement dues au fait que certains numéros de vol n'apparaissent pas tous les jours de la semaine (comme c'est le cas pour certains vols internationaux), ou encore que des variations au niveau de la demande en passagers peuvent être observées au cours de la semaine pour certains numéros de vol. Dans ce dernier cas, il peut être avantageux d'affecter des types d'avion différents pour des vols ayant des demandes passablement différentes.

Une affectation hebdomadaire ainsi obtenue à partir d'une affectation quotidienne de base possède la propriété que les vols d'un même numéro sont très souvent couverts par un même type d'avion, ce qu'apprécient grandement les compagnies. En effet, la couverture des vols de même numéro par un même type d'avion permet, entres autres, d'améliorer le service aux clients et de faciliter l'organisation de l'entretien des appareils et du service au sol (e.g. ravitaillement en essence et en nourriture). Toutefois, l'affectation obtenue par cette approche risque fort de ne pas être optimale car, alors, on ne considère pas globalement l'horaire de la semaine. Ceci sera d'autant plus vrai que les différences entre les journées seront importantes. En particulier, on peut souvent observer des différences significatives entre les jours de week-end et le reste de la semaine.

Lorsque la taille des problèmes le permet, il est possible d'effectuer l'affectation des types d'avion en considérant globalement toute la semaine. En effet, on peut utiliser un modèle de programmation linéaire en nombres entiers pour résoudre le problème d'affectation sur un horizon d'une semaine, en autant que ce programme puisse être résolu en un temps raisonnable, ce qui est le cas à ce jour pour des compagnies de taille moyenne comme Air Canada. Ceci permet d'obtenir une affectation globalement optimale pour la semaine entière, mais ne favorise plus l'homogénéité dans le choix des types d'avion pour les vols de même numéro.

L'objectif de ce chapitre est donc de proposer un modèle permettant de résoudre le problème en considérant globalement la semaine entière, tout en cherchant à préserver autant que possible la propriété d'homogénéité dans le choix des types d'avion. Évidemment, bien que l'homogénéité des solutions soit fort appréciable, il ne faut pas qu'elle entraîne une trop grande détérioration des profits. Ainsi, nous devons déterminer un "poids" à accorder à l'homogénéité pour ainsi pouvoir faire un compromis entre la qualité d'une affectation du point de vue des profits et de son homogénéité. Nous proposons d'abord une modélisation de programmation linéaire en nombres entiers.

Pour les problèmes que nous avons considérés, nous avons pu obtenir des solutions réalisables de bonne qualité en utilisant ce modèle, mais en des temps de résolution assez élevés. Nous avons donc développé une famille d'approches de résolution en deux phases, permettant de trouver des solutions réalisables de qualité inférieure, mais encore intéressante, en des temps de calcul nettement inférieurs. Les différentes approches de résolution proposées dans ce chapitre fournissent une gamme d'outils permettant de produire des solutions de différentes qualités selon l'effort de calcul pouvant être investi. Nos expérimentations permettent également d'étudier l'impact de l'homogénéité sur les profits et montrent que celui-ci est relativement peu élevé.

Le chapitre est constitué d'un article, soumis pour publication à la revue *Transportation Research (Part B)*, ainsi que de trois sections supplémentaires. Dans la première de ces sections, nous présentons un modèle pour résoudre un problème plus raffiné d'affectation des types d'avions aux vols avec homogénéité. L'implantation informatique de ce modèle et l'analyse des résultats en découlant sont laissés pour des travaux futurs. La seconde section traite de méthodes pouvant permettre d'obtenir des solutions réalisables aux problèmes en des temps de calcul moindres qu'avec les approches heuristiques présentées dans l'article, mais possiblement de qualité inférieure. Finalement, puisque, pour des fins de concision, nous ne présentons dans l'article que des résultats numériques agrégés, nous présentons dans la dernière section les résultats détaillés de nos expérimentations.

## **4.1 Weekly Airline Fleet Assignment with Homogeneity**

**Nicolas Bélanger, Guy Desaulniers and François Soumis**

École Polytechnique and GERAD

Montréal, Québec, Canada

{Nicolas.Bélanger, Guy.Desaulniers,  
François.Soumis}@gerad.ca

**Jacques Desrosiers**

École des Hautes Études Commerciales and GERAD

Montréal, Québec, Canada

Jacques.Desrosiers@hec.ca

**June Lavigne**

Air Canada

Dorval, Québec, Canada

JLavigne@aircanada.ca

### Abstract

Given the flight schedule of an airline, the fleet assignment problem consists of determining the aircraft type to assign to each flight leg in order to maximize the total expected profits while satisfying aircraft routing and availability constraints. The profit for a leg is a function of the leg's stochastic passenger demand, the capacity of the aircraft assigned to the leg, and the aircraft operational costs. This paper considers the weekly fleet assignment problem in the case where homogeneity of aircraft type is sought over legs sharing the same flight number. Homogeneity allows, among other things, easier ground service planning. An exact mixed integer linear programming model, as well as heuristic solution approaches based on mathematical programming, are presented. Computational results obtained on Air Canada instances involving up to 4400 flight legs are reported. The system produces realistic solutions arising from a trade-off between profits and homogeneity, and solves large-scale instances in short times.

### 4.1.1 Introduction

In the usual sequential process of planning the operations for an airline, the fleet assignment problem arises between the problem of determining a flight schedule given the passenger demand curves for each pair of origin and destination, and the problem of routing individual aircraft to cover all scheduled flight legs while satisfying maintenance requirements. It consists of determining the aircraft type to assign to each flight leg of a given flight schedule. These decisions must be made in order to maximize the sum of the expected profits for each leg (which depend on the chosen aircraft type), while satisfying a certain number of constraints described later on. The sequential planning process is then completed by computing crew rotations and monthly schedules for individual crew members that minimize crew costs while satisfying government regulations and collective agreement working rules.

This paper addresses the fleet assignment problem for a weekly flight schedule where it is desirable to assign the same type of aircraft to the legs operating on different days of the week but with the same flight number. Even though it reduces schedule profitability, aircraft type homogeneity is sought in order to improve customer service and the planning of operations. Indeed, when the same aircraft type is assigned to legs with the same flight number, the same gate can be used for these legs, which is considered as more convenient for regular passengers. Also, the ground equipment needed to service and resupply the aircraft can remain near that gate. Finally, when crews are assigned to one-day rotations, as it is often the case for regional carriers, homogeneous assignments allow building the same crew rotations day after day. Such rotations are appreciated by the crew members, which usually prefer regular working days.

To our knowledge, no papers have been published on this extension of the fleet assignment problem. However, several papers addressing the classical fleet assignment

problem can be found in the literature. The problem is often formulated as a mixed integer, linear, multicommodity flow problem with side constraints defined on a time-space network (see Abara, 1989, Subramanian *et al.*, 1994 and Hane *et al.*, 1995). In Desaulniers *et al.* (1997) and Rexing *et al.* (2000), a variant of the problem is tackled where some flexibility on the flight departure times is allowed. These departure times must fall within given time intervals called time windows. Such flexibility opens up new feasible flight connection opportunities and, thus, can yield a more profitable fleet assignment. Formulating the problem as a special case of the unified formulation for time constrained vehicle and crew scheduling problems subsequently presented in Desaulniers *et al.* (1998), Desaulniers *et al.* (1997) solve it using a column generation approach embedded in a branch-and-bound search tree. Based on a discretization of the time windows, Rexing *et al.* (2000) formulate the problem as an integer linear program similar to the one proposed for the case with fixed departure times and solve it using a preprocessor, an LP solver and a branch-and-bound scheme.

Sometimes, solving the fleet assignment problem for a single day of the week can be a good starting point to obtain a fleet assignment for the whole week. Indeed, if the daily schedules are sufficiently similar from one day to the other, one can obtain an initial (perhaps infeasible) solution by duplicating the one-day solution over the week. This initial weekly solution often needs to be adapted to take into account the minor differences existing between the days (for instance, when a flight is not flown every day of the week or when the passenger demand of a flight varies substantially over the week). In the latter case, it might be advantageous to assign different aircraft types to flight legs having quite different demands.

A weekly assignment derived from a daily solution tends to be homogeneous. However, in most cases, it is not optimal since the aircraft type assignment is determined from the schedule of a given day rather than from the whole week schedule. This is all the more true when the differences between the days are important. In particular, significant differences can often be observed between weekdays and weekend days.



On the other hand, when the problem size allows it, one may solve the problem (without homogeneity) considering the whole week schedule by using a model similar to that of Hane *et al.* (1995). Such an approach can produce optimal solutions in terms of profits but does not favor homogeneity since it is not taken into account.

The first contribution of this paper is to propose a model for the fleet assignment problem with homogeneity that can be used to yield highly profitable homogeneous solutions. Its second contribution consists of developing different heuristic solution approaches for this model that provide solutions of various qualities in various solution times. Third, these methodologies can be used to evaluate the impact of trading-off profits for homogeneity. Finally, this paper shows that optimization tools can be used to produce solutions almost directly usable in practice by introducing elements that facilitate the operations.

The paper is organized as follows. Section 4.1.2 gives a detailed definition of the fleet assignment problem with homogeneity. Section 4.1.3 proposes a mixed integer linear programming formulation for it. Section 4.1.4 exposes the heuristic approaches used to obtain solutions of various qualities. Section 4.1.5 presents the computational results of the tests that were conducted using two data sets provided by Air Canada. These results allow for a comparison of the different solution approaches and show the impact of trading-off profits for homogeneity. Conclusions are drawn in Section 4.1.6.

#### **4.1.2 Problem Definition**

We consider the planning problem of determining the aircraft types assigned to each flight leg of a given flight schedule. These assignments provide the flight seating capacities. In general, this planning problem is solved several months in advance for a typical week of the season to come. At that time, the locations where the individual

aircraft will be at the beginning of the week are unknown and, consequently, individual aircraft cannot be considered. The problem rather consists of finding the number of aircraft of each type (0 or 1) to assign to each flight leg as well as the number of aircraft of each type (a non-negative integer) that remains on the ground in each station at each time. In each station, the number of aircraft of each type at the beginning of the week is a variable to determine. However, it is imposed that these numbers of aircraft be the same at the beginning and the end of the week to ensure that the solution can be repeated week after week during the season. Therefore, the flight schedule must be balanced at each station. If this is not the case, ferry flights can be added to the schedule to balance it.

Similarly, during the planning process, the maintenance status of the individual aircraft at the beginning of the week is unknown as well as their next scheduled maintenance checks. Therefore, maintenance scheduling cannot be taken into account at that time. It will rather be dealt with a few days before the operations. In networks where maintenance scheduling is difficult and must be considered in the planning process, certain additional constraints can be included in the model to facilitate maintenance scheduling at the operations level (see Clarke *et al.*, 1996). Nonetheless, a feasible solution to the problem must ensure that aircraft routings (without maintenance considerations) can be computed.

The following data are provided for each flight leg to cover: the departure and arrival stations, the departure time, the flight duration for each aircraft type, and a list of legal aircraft types. Note that the departure times are fixed, the flight duration depends on the aircraft type assigned to the flight, and that not all aircraft types can be assigned to all flight legs (for instance, due to aircraft autonomy or aircraft size). Furthermore, minimal connection times are also provided for each station and each aircraft type. Such a minimal connection time must be respected for each pair of consecutive legs assigned to the same aircraft of the corresponding type and

connecting at the corresponding station. The problem may also include thru-flights, that is, imposed connections between two flight legs. They are easy to deal with by treating the legs of a thru-flight as a single leg. The problem also involves upper bounds on the number of aircraft available per type, although these can be replaced by an objective that aims at minimizing the number of aircraft used.

In this problem, one strives to assign the same aircraft type to legs sharing the same flight number. However, it is acceptable that some of the legs with the same flight number be assigned to different aircraft types on the basis of a compromise between maximizing homogeneity and profits. Therefore, homogeneity for a flight number is not a binary property (homogeneous or not) and can be quantified from the distribution of the aircraft types among the legs associated to a given flight number. The most frequently chosen type (one of them if there are many) is called the dominant type for this flight number. Non-homogeneity, which needs to be penalized, can be measured for each flight number by the number of legs, among the ones with the same flight number, that are not flown by the dominant type. For instance, if there are five legs with the same flight number among which three are flown by a type  $k_1$  aircraft, one by a type  $k_2$  aircraft, and one by a type  $k_3$  aircraft, then the last two legs are said to be non-homogeneous since the dominant type is  $k_1$ . Note that it is difficult to determine a penalty value that reflects the real impact of a non-homogeneous flight leg on the expected profits. Therefore, this penalty must be chosen empirically by analyzing several scenarios.

Besides satisfying all these constraints, a solution to the fleet assignment problem with homogeneity must maximize the total expected profits from the flight schedule. In our model, expected profits are computed by flight leg and vary according to the aircraft type assigned to it. This is an approximation of the reality since the passenger demand arises by origin-destination pair and the passenger demand per leg can only be obtained when passenger routing is known. However, this routing

depends on the capacity of each leg given by the fleet assignment. In order to get a better approximation, our model could be integrated in a feedback loop involving a passenger routing model. Another alternative, introduced by Barnhart *et al.* (2002), would be to consider simultaneous fleet assignment and passenger routing. However, the work of these authors does not address the bi-level optimization involved in the interaction between passengers and aircraft. Further research is, therefore, needed to obtain a more realistic model that includes this important aspect of the problem.

Finally, for each aircraft type, a fixed cost is incurred to reflect the average weekly cost for owning an aircraft of that type. Note that the addition of these costs do not imply fleet minimization since it can be more profitable to use a slightly larger number of aircraft than the minimum number necessary to cover all flight legs. In fact, assigning better adapted aircraft types to the flights can yield a substantial increase in expected profits that compensates for the additional aircraft fixed costs.

### 4.1.3 Mathematical Formulation

This section presents a mathematical formulation for the fleet assignment problem with homogeneity. This formulation, which is an adaptation of the model proposed by Hane *et al.* (1995), includes additional variables and constraints for treating homogeneity. Before presenting the model, the following notation needs to be defined.

Let  $K$  be the set of the different aircraft types,  $n^k$  the number of available aircraft of type  $k \in K$ ,  $S$  the set of stations,  $S^k \subseteq S$  the set of stations that can accommodate aircraft of type  $k \in K$ ,  $L$  the set of flight legs to cover,  $L^k \subseteq L$  the set of legs to which an aircraft of type  $k \in K$  can be assigned,  $F$  the set of flight numbers, and  $K^f \subseteq K$  the set of aircraft types that can be assigned to a leg with flight number  $f \in F$ . Depending on the situation, a leg in  $L$  can be denoted by  $l$  or by  $(o, d, t)$ ,

where  $o, d \in S$  are its origin and destination stations, respectively, and  $t$  its departure time. Furthermore, denote by  $\tau_{odt}^k$  the arrival time of flight leg  $(o, d, t) \in L^k$  when it is covered by an aircraft of type  $k$ , and by  $f(l) \in F$  the flight number of leg  $l \in L$ . What we call the arrival time is in fact the time when the aircraft is ready to take off for another flight. Hence, the value  $\tau_{odt}^k$  is obtained by adding to the flight departure time the flight duration and the minimal connection time at the arrival station, both depending on the aircraft type. Note that a one-week modulo is applied to this value to cope with the case where the arrival occurs after the end of the week.

Given a weekly flight schedule, there exists, for each pair of aircraft type  $k \in K$  and station  $o \in S^k$ , a list of potential events (flight departures and arrivals) that can be sorted in chronological order. For each such pair, let  $T_o^k = (t_1, t_2, \dots, t_{n_o^k})$  be the ordered list of times associated with these  $n_o^k$  events, where arrival times are ordered before departure times in case of equality. Define  $t^+$  as the time of the event that immediately follows the event occurring at time  $t$  (for example,  $t_1^+ = t_2$ ) and  $t^-$  as the time of its immediate predecessor. For notational convenience, we also use  $t_{n_o^k}^+ = t_1$  and  $t_1^- = t_{n_o^k}$ .

The problem is formulated as a mixed integer multicommodity network flow problem on a time-space network, where a commodity is defined for each aircraft type. Thus, a subnetwork  $G^k = (N^k, A^k)$  is constructed for each type  $k \in K$ , where  $N^k$  and  $A^k$  denote its node and arc sets, respectively. A node represents a potential event that may occur at station  $o \in S^k$  at time  $t \in T_o^k$  and is denoted by  $(k, o, t)$ . The arc set  $A^k$  contains two types of arcs: flight arcs and ground arcs. A flight arc, denoted by  $(k, l)$  or  $(k, o, d, t)$ , represents the assignment of an aircraft of type  $k$  to the corresponding flight leg  $l = (o, d, t) \in L^k$ . A ground arc, denoted by  $(k, o, t, t^+)$ , represents aircraft of type  $k$  available at a station  $o \in S^k$  between times  $t$  and  $t^+$ , both in  $T_o^k$ . Note that ground arcs are added between the nodes  $(k, o, t_{n_o^k})$  and  $(k, o, t_1)$  for each station  $o \in S^k$ . These arcs yield a cyclic subnetwork and serve to balance the number of aircraft of type  $k$  at each station at the beginning and the end of the week.

To count the total number of aircraft of each type used, a specific time of the week is chosen where the number of aircraft in flight and the number of aircraft available on the ground are computed. It is obvious that the number of aircraft computed does not depend on the chosen time since aircraft flow conservation is ensured in the subnetworks. For subnetwork  $G^k$ ,  $k \in K$ , denote by  $A_F^k \subset A^k$  the set of flight arcs associated with flights in operation at the chosen time, and by  $A_G^k \subset A^k$  the set of ground arcs representing waiting at that time.

The coefficients of the objective function are denoted by:  $p_l^k$ , the profits expected from assigning an aircraft of type  $k \in K$  to flight leg  $l \in L^k$ ;  $c^k$ , the average weekly fixed cost incurred for owning an aircraft of type  $k \in K$ ; and  $\gamma > 0$ , the penalty for each non-homogeneous flight leg.

The formulation involves five variable types. First, a binary flow variable  $X_l^k$  (or  $X_{odt}^k$ ) is defined for each flight arc  $(k, l) = (k, o, d, t)$ ,  $k \in K$ ,  $l = (o, d, t) \in L^k$ . It takes value 1 if an aircraft of type  $k$  is assigned to flight leg  $l$ , and 0 otherwise. Second, a non-negative flow variable  $Y_{ott+}^k$  is associated with each ground arc  $(k, o, t, t+)$ ,  $k \in K$ ,  $o \in S^k$  and  $t \in T_o^k$ . Such a variable indicates the number of aircraft of type  $k$  available on the ground at station  $o$  between the times  $t$  and  $t+$ . Third, a non-negative variable  $E^k$  is defined for each aircraft type  $k \in K$  to count the number of aircraft of type  $k$  used in the solution. Fourth, a binary variable  $D_f^k$  is associated with each flight number  $f \in F$  and each aircraft type  $k \in K^f$ . It takes value 1 if type  $k$  is the dominant type for flight number  $f$ , and 0 otherwise. Finally, a non-negative variable  $P_l^k$  is associated with each aircraft type  $k \in K$  and each flight leg  $l \in L^k$  to indicate if leg  $l$  is non-homogeneous because an aircraft of a non-dominant type  $k$  has been assigned to it.

Using this notation, the fleet assignment problem with homogeneity can be formulated as:

$$\text{Maximize} \quad \sum_{k \in K} \left( \sum_{l \in L^k} (p_l^k X_l^k - \gamma P_l^k) - c^k E^k \right) \quad (4.1)$$

subject to:

$$\sum_{k \in K^{f(l)}} X_l^k = 1, \quad \forall l \in L \quad (4.2)$$

$$\sum_{k \in K^f} D_f^k = 1, \quad \forall f \in F \quad (4.3)$$

$$X_l^k - D_{f(l)}^k - P_l^k \leq 0, \quad \forall k \in K, l \in L^k \quad (4.4)$$

$$\sum_{d \in S^k} \sum_{t': \tau_{dot'}^k = t} X_{dot'}^k + Y_{ot-t}^k - \sum_{d \in S^k} X_{odt}^k - Y_{ott+}^k = 0, \quad \forall k \in K, (k, o, t) \in N^k \quad (4.5)$$

$$\sum_{l \in A_F^k} X_l^k + \sum_{(k, o, t, t+) \in A_G^k} Y_{ott+}^k - E^k = 0, \quad \forall k \in K \quad (4.6)$$

$$0 \leq E^k \leq n^k, \quad \forall k \in K \quad (4.7)$$

$$Y_{ott+}^k \geq 0, \quad \forall k \in K, (k, o, t) \in N^k \quad (4.8)$$

$$X_l^k \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K, l \in L^k \quad (4.9)$$

$$P_l^k \geq 0, \quad \forall k \in K, l \in L^k \quad (4.10)$$

$$D_f^k \in \{0, 1\}, \quad \forall f \in F, k \in K^f. \quad (4.11)$$

The objective (4.1) consists of maximizing the total profits minus the sum of the aircraft fixed costs and the penalties for the non-homogeneous flight legs. Constraints (4.2) ensure that each leg be covered exactly once by a legal aircraft type. Constraint sets (4.3) and (4.4) deal with homogeneity. The first of these sets imposes that exactly one aircraft type be the dominant type for each flight number, while the second indirectly imposes a penalty through  $P_l^k$  for each flight leg violating homogeneity. Indeed, on the one hand, if type  $k$  is assigned to leg  $l$  ( $X_l^k = 1$ ) and type  $k$  is the dominant type for flight number  $f(l)$  ( $D_{f(l)}^k = 1$ ), then  $P_l^k$  can take value 0 and no penalty is incurred. On the other hand, if type  $k$  is assigned to leg  $l$  ( $X_l^k = 1$ ) and type  $k$  is not the dominant type ( $D_{f(l)}^k = 0$ ), then  $P_l^k$  must take value 1 and a penalty is incurred. Relations (4.5) are the flow conservation constraints in each of

the subnetwork  $G^k$ . They ensure that aircraft routings can be obtained from the fleet assignment solution. Constraint sets (4.6) and (4.7) are used to compute and limit the number of aircraft of each type used in the solution. Finally, constraints (4.8)–(4.11) restrict the domain of the  $Y$ ,  $X$ ,  $P$  and  $D$  variables.

Note that the  $Y$  and  $E$  variables automatically take integer values when the binary requirements (4.9) on the  $X$  variables are satisfied. Also, in this case and because  $\gamma$  is positive, the  $P$  variables are forced to take binary values in any optimal solution.

#### 4.1.4 Solution Approaches

This section describes the heuristic mixed integer programming (MIP) approach that we use to solve directly the model (4.1)–(4.11) for fleet assignment problem with homogeneity. As it will be shown in Section 4.1.5, this approach can produce very good solutions, but it requires large amounts of computation time. Consequently, this section also proposes a heuristic two-phase approach, based on the same model, that aims at significantly reducing the solution times while preserving as much as possible the quality of the solutions.

##### Direct MIP Approach

The mixed integer linear programming model (4.1)–(4.11) is solved using the CPLEX 6.5 callable library with branching strategies adapted for the specific context of the application at hand. Branching decisions are made in priority on the  $D$  variables and then on the  $X$  variables. Based on the linear relaxation solutions, a priority order is also established for the decisions on the  $D$  variables. Among the variables taking a fractional value, the closest to an integer value (0 or 1) has the highest priority.



Moreover, the branch corresponding to fixing the selected variable to the nearest integer is always explored first. The decisions made on the  $X$  variables are managed by CPLEX. Given the large size of the search tree, a depth-first search strategy is used to quickly find an integer solution. According to our observations, this solution always has a value very close to the linear relaxation bound. Hence, given the high cost in terms of computation time to obtain a slightly better integer solution, we have chosen to stop the exploration of the search tree as soon as the first integer solution is found. At each node of the branch-and-bound search tree, the linear relaxation is solved using the dual simplex method. Note also that aggregation procedures similar to the one used by Hane *et al.* (1995) are applied before starting the solution process.

### Two-Phase Approach

The heuristic two-phase solution approach proceeds as follows. The first phase uses a subset of the complete flight schedule for determining the dominant aircraft types of a large subset of the flight numbers. Using a subset of flight numbers can substantially reduce solution time, but may yield sub-optimal dominant types. Then, in the second phase, the model (4.1)–(4.11) is solved after fixing the  $D$  variables of the flight numbers considered in the first phase. The other  $D$  variables are left to be determined. Depending on the number of variables fixed, the second phase can also be solved rather rapidly.

In the first phase, the flight schedule subset is composed of the flights that appear in a selected horizon of  $n$  consecutive days of the week ( $n < 7$ ). Then, the model (4.1)–(4.11) restricted to this subset of flights is solved using the MIP approach proposed earlier. The solution provides a dominant type for each flight number that appears at least once in this reduced problem. Denote by  $F^*$  the set of these flight numbers and by  $L^*$  the set of legs with a flight number in  $F^*$ .

In the second phase which considers the complete flight schedule, the model (4.1)–(4.11) is reduced by fixing the  $D$  variables associated with the flight numbers in  $F^*$ . The values of these variables are set according to the dominant types computed in the first phase. In this case, putting the non-homogeneity penalty  $\gamma$  in the cost coefficient of the variables  $X_l^k$  such that  $k \in K$ ,  $l \in L^k \cap L^*$  and  $k$  is not the dominant type for  $f(l)$  allows to omit variables  $P_l^k$  for all  $k \in K$  and  $l \in L^k \cap L^*$ . The objective function can then be written as:

$$\text{Maximize} \quad \sum_{k \in K} \left( \sum_{l \in L^k} \bar{p}_l^k X_l^k - \sum_{l \in L^k \setminus L^*} \gamma P_l^k - c^k E^k \right) \quad (4.12)$$

where

$$\bar{p}_l^k = \begin{cases} p_l^k - \gamma & \text{if } f(l) \in F^* \text{ and } D_{f(l)}^k \text{ is fixed at 0} \\ p_l^k & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Furthermore, the following constraints can be removed: constraints (4.4) and (4.10) for all  $k \in K$  and  $l \in L^k \cap L^*$ ; constraints (4.3) for all  $f \in F^*$ ; and constraints (4.11) for all  $f \in F^*$  and  $k \in K^f$ . This reduced formulation is solved using again the direct MIP approach proposed above.

#### 4.1.5 Computational Experiments

The solution approaches proposed in the previous section have been tested on two data sets provided by Air Canada. The characteristics of these data sets, which correspond to two different seasons, are presented in Table 4.1. For each data set, the columns indicate in order the data set number, the number of flight numbers, the number of flight legs, the average number of legs per flight number, the number of aircraft types, and the average number of legal types per leg. One can observe that the data sets are rather large since they involve 3205 and 4452 flight legs per week. Also, flights are consistent as they repeat themselves 6.0 and 5.7 times per week on

Table 4.1: Data set characteristics

Data set	Nb of fl nbs	Nb of fl legs	Avg nb legs per fl nb	Nb of types	Avg nb types per leg
I	536	3205	6.0	10	9.7
II	782	4452	5.7	10	3.3

average. Finally, data set I offers on average a wider variety of aircraft types per leg than data set II.

First, we have applied the direct MIP solution approach for each data set, considering different penalties for non-homogeneous flights ( $\gamma = 500, 1000, 2000$ ). Table 4.2 provides the results for each scenario tested, where the columns indicate in order the data set number, the value of  $\gamma$ , the number of non-homogeneous flight legs in the solution, the optimality gap in percentage, and the total CPU time in seconds. Note that, for all tests, the optimality gap is obtained by comparing the value of the computed solution with that of the linear relaxation solution of the direct MIP approach, and the CPU times are reported for a SUN Ultra-10/440. From these results, one can observe that, even with the heuristic strategies used to obtain integer solutions, the quality of the solutions remains very interesting as shown by the small optimality gaps. However, the computation times are probably too long for using this solution approach in practice. They range from 6.2 to 21.1 hours and seem to be increasing with the value of the non-homogeneity penalty.

The two-phase approach aims at computing in much less time solutions that are comparable in quality to those obtained from the direct MIP approach. This approach can also be extremely useful for tackling large-scale problems when the direct MIP approach requires a huge amount of time. For testing the two-phase approach, first phase horizons of one to five days were successively used. For each horizon length  $n$ ,

Table 4.2: Computational results (direct MIP approach)

Data set	$\gamma$	Nb of non-homo legs	Opt gap (%)	CPU time (sec.)
I	500	287	0.06	22 346
	1000	167	0.11	28 428
	2000	93	0.55	76 159
II	500	416	0.08	26 128
	1000	272	0.08	24 600
	2000	175	0.19	32 119

the problems were solved for the seven possible choices of  $n$  consecutive days within a week. The experiments showed that there is almost no variance in the results for these choices. Average results were therefore computed for each horizon length. They are reported in Table 4.3, where the last three columns indicate the average CPU time for the first phase, the second phase and the overall process, respectively. Note that the CPU time increases exponentially with the horizon length  $n$  for the first phase. However, it remains more or less constant for the second phase. Again, we can notice that the total CPU time increases with the value of  $\gamma$ . As expected, these results show that solution times can be reduced significantly by using the two-phase approach without deteriorating too much the quality of the solutions in terms of anticipated profits and homogeneity.

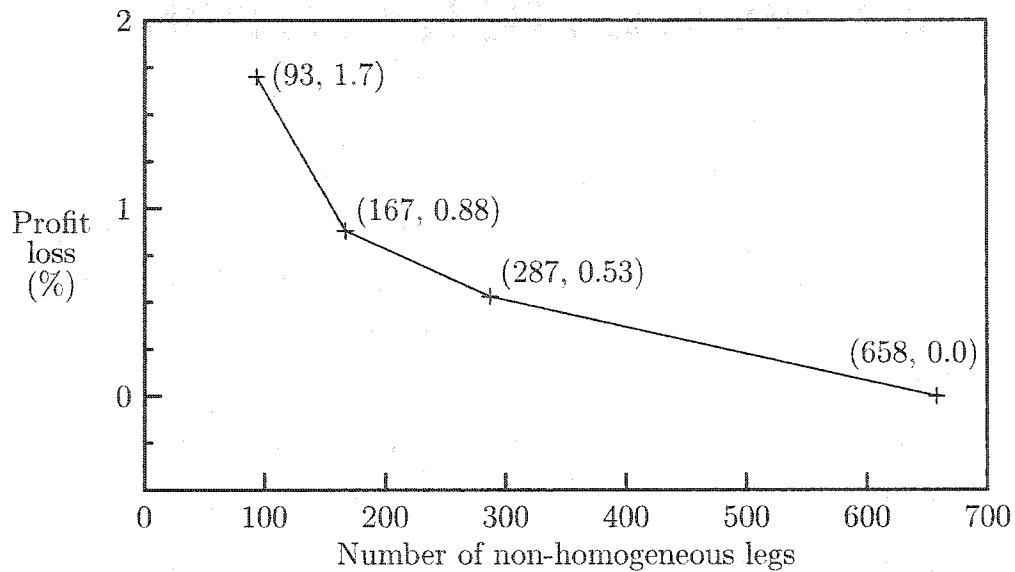
To evaluate the impact of homogeneity on the total expected profits, we have solved the problems using the direct MIP approach with  $\gamma$  values of 0, 500, 1000, and 2000. Figures 4.1 and 4.2 show the results for data sets I and II, respectively. Since homogeneity has a negative impact on the expected profits, each figure illustrates the expected profit loss in percentage, compared to the solution obtained with  $\gamma = 0$ , in function of the number of non-homogeneous legs. The line linking the data points

Table 4.3: Computational results (two-phase approach)

Data set	$\gamma$	$n$	Avg nb of non-homo legs	Avg opt gap (%)	Avg CPU time phase 1 (sec.)	Avg CPU time phase 2 (sec.)	Avg CPU time total (sec.)
I	500	1	404.0	0.63	13	1237	1250
		2	406.6	0.63	286	1085	1371
		3	365.6	0.44	1142	864	2006
		4	353.1	0.39	3302	1160	4463
		5	344.7	0.30	10437	1234	11671
I	1000	1	252.3	0.77	15	1537	1553
		2	247.9	0.75	593	1156	1750
		3	202.6	0.59	1792	1350	3142
		4	195.4	0.41	5631	876	6507
		5	183.9	0.27	10922	885	11808
I	2000	1	145.9	1.24	15	1933	1949
		2	134.4	1.04	807	1737	2545
		3	95.7	0.78	1721	659	2381
		4	95.1	0.68	5149	805	5954
		5	101.6	0.61	20024	3204	23229
II	500	1	523.1	0.48	10	4759	4769
		2	528.4	0.43	543	3020	3564
		3	503.6	0.28	1436	2955	4392
		4	473.0	0.26	4319	1716	6036
		5	464.7	0.20	8042	2698	10741
II	1000	1	428.7	0.59	10	4838	4848
		2	409.0	0.58	509	2791	3300
		3	433.3	0.52	2342	10033	12375
		4	382.4	0.30	6736	5447	12183
		5	372.4	0.17	13014	3874	16888
II	2000	1	316.0	1.21	10	9111	9122
		2	299.1	1.07	591	5373	5964
		3	300.7	0.80	3137	7610	10748
		4	273.1	0.44	7770	5059	12830
		5	268.6	0.47	14950	6592	21543

yields an approximation of the expected profit loss for other values of  $\gamma$ . One can see that the number of non-homogeneous legs can be substantially reduced without losing too much profits, the profit loss being 1.7% and 0.85% for the most homogeneous solution on data sets I and II, respectively.

Figure 4.1: Trade-off between homogeneity and profits (data set I)



Finally, for data set II, it was possible to compare our solutions with the solution produced by Air Canada. Table 4.4 presents the results obtained for four different values of  $\gamma$  using the two-phase approach with  $n = 4$ . This table reports for each scenario the number of non-homogeneous legs and the expected profit gain in percentage (without including the aircraft fixed costs) when compared to Air Canada's solution. The last row gives the number of non-homogeneous legs for Air Canada's solution. These results show that the expected profits can be increased by 2.9% when homogeneity is neglected ( $\gamma = 0$ ) and by 2.2% for a level of homogeneity comparable with that of Air Canada's solution ( $\gamma = 1000$ ). Moreover, the model and approaches

Figure 4.2: Trade-off between homogeneity and profits (data set II)

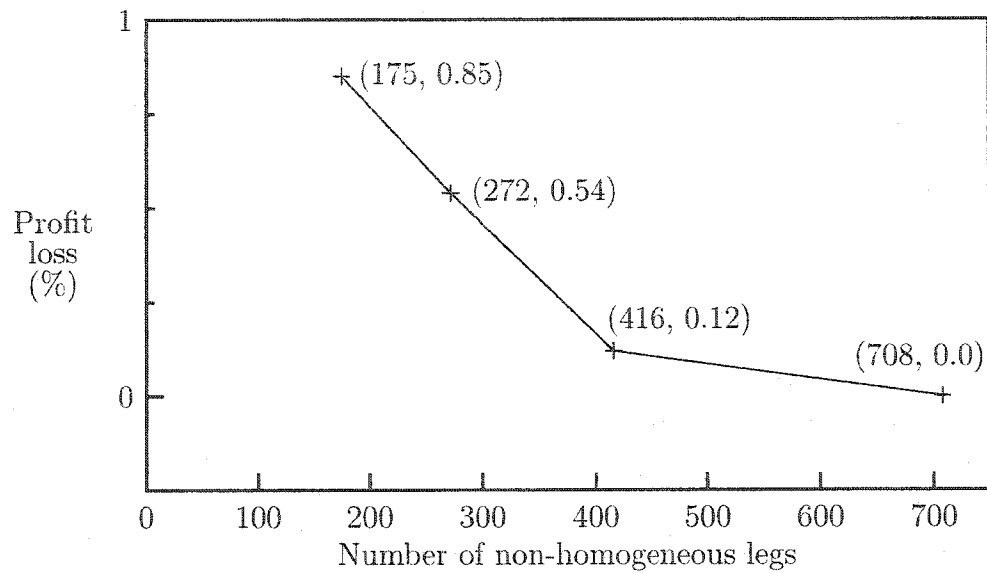


Table 4.4: Comparison between our solutions and Air Canada's solution

$\gamma$	Nb of non-homo legs	Profit gain (%)
0	709	2.9
500	446	2.6
1000	263	2.2
2000	167	1.9
Air Canada	241	-

proposed in this paper can be used to produce a much better solution in terms of homogeneity ( $\gamma = 2000$ ) while still increasing the profits by 1.9%. A preliminary analysis of our solutions has also highlighted the possibility of using less aircraft to cover the complete flight schedule.

#### 4.1.6 Conclusion

In this paper, we presented a mixed integer linear programming formulation for the fleet assignment problem with homogeneity. On the two real-world data sets provided by Air Canada, we showed that it is possible to produce very good quality solutions using a heuristic mixed integer programming approach. We also proposed a heuristic two-phase approach that can be used to obtain good quality solutions in reasonable computation times. We showed that it is possible to generate assignments with a relatively high level of homogeneity without sacrificing too much expected profits.

The comparison with Air Canada's solution proves that the methodology proposed in this paper can produce solutions with nearly the same number of non-homogeneous legs as in Air Canada's solution, while yielding a significant increase in expected profits and a potential fleet reduction. Moreover, these expected profits are underestimated since the profit by leg was not adjusted using a spill and recapture passenger model.

On top of offering important gains in productivity and profitability, our methodology meets the expectations of the operations planners on the qualitative aspects of the solutions. It opens up the door to the utilization of optimization tools for assigning aircraft to the flights, knowing however that human interventions will still be needed to adjust the fine details of the schedule.



## Acknowledgements

We would like to thank the employees of Air Canada for providing data and expertise which lead us to a deeper understanding of the issues involved in the fleet assignment problem, especially concerning the homogeneity factor.

## 4.1.7 References

- ABARA, J., "Applying Integer Linear Programming to the Fleet Assignment Problem," *Interfaces* 19, 20–28, 1989.
- BARNHART, C., T. KNIKER, AND M. LOHATEPANONT, "Itinerary-Based Airline Fleet Assignment," *Transportation Science* 36(2), 199–217, 2002.
- CLARKE, L.W., C.A. HANE, E.L. JOHNSON, AND G.L. NEMHAUSER, "Maintenance and Crew Considerations in Fleet Assignment," *Transportation Science* 30(3), 249–260, 1996.
- DESAULNIERS, G., J. DESROSIERS, Y. DUMAS, M.M. SOLOMON, AND F. SOUMIS, "Daily Aircraft Routing and Scheduling," *Management Science* 43(6), 841–855, 1997.
- DESAULNIERS, G., J. DESROSIERS, I. IOACHIM, F. SOUMIS, M.M. SOLOMON, AND D. VILLENEUVE, "A Unified Framework for Time Constrained Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems," *Fleet Management and Logistics*, T. Crainic and G. Laporte (eds), Kluwer, Norwell, MA, 57–93, 1998.
- HANE, C., C. BARNHART, E.L. JOHNSON, R. MARSTEN, G.L. NEMHAUSER, AND G. SIGISMONDI, "The Fleet Assignment Problem: Solving a Large-Scale Integer Program," *Mathematical Programming* 70, 211–232, 1995.

SUBRAMANIAN, R., R.P. SCHEFF, J.D. QUILLINAN, D.S. WIPER, AND R.E. MARSTEN, "Coldstart: Fleet Assignment at Delta Air Lines," *Interfaces* 24(1), 104-120, 1994.

REXING, B., C. BARNHART, T. KNIKER, A. JARRAH, AND N. KRISHNAMURTHY, "Airline Fleet Assignment with Time Windows," *Transportation Science* 34(1), 1-20, 2000.

## 4.2 Modèle raffiné pour l'homogénéité

Voyons maintenant comment nous pourrions raffiner la modélisation de l'homogénéité d'une affectation. Considérons le cas d'un vol apparaissant aux sept jours de la semaine. Si on associe une lettre à chaque type d'avion de la flotte, on peut décrire une affectation par l'expression : AAAABBC (laquelle signifie alors que le type A est affecté à ce vol pour les jours 1 à 4, le type B pour les jours 5 et 6 et le type C pour le jour 7). Dans le modèle présenté dans l'article, les affectations non homogènes de la forme AAABBCC, AAABBBC et AAABCDE se voient infliger la même pénalité liée au manque d'homogénéité, alors qu'en réalité, on peut considérer que la dernière est bien moins homogène que les deux premières. De plus, en pratique, l'homogénéité peut s'avérer plus pertinente pour certains numéros de vol que pour d'autres. Il peut donc être intéressant de pouvoir attribuer des poids différents à l'homogénéité en fonction du numéro de vol.

Nous présentons donc ici un modèle plus général que celui de l'article, permettant d'évaluer de façon plus fine la qualité des affectations quant à leur homogénéité. Ce nouveau modèle demeure un programme linéaire en nombres entiers. Au lieu de chercher à déterminer un unique type dominant pour chaque numéro de vol, on cherche plutôt à déterminer un certain ensemble ordonné de types dominants. Ainsi, pour chaque numéro de vol  $f \in F$ , on doit déterminer un type dominant  $k_1$  d'ordre 1, puis, si nécessaire, un type dominant  $k_2$  d'ordre 2, puis peut-être un type dominant  $k_3$  d'ordre 3, et ainsi de suite. Par exemple, dans le cas AAAABBC, le type A serait le type dominant d'ordre 1, B le type dominant d'ordre 2 et C le type dominant d'ordre 3. La taille de l'ensemble des types dominants pour un numéro de vol  $f$  est bornée supérieurement par le nombre  $J_f$  de fois que ce numéro de vol apparaît au cours de l'horizon et par le nombre de types  $|K^f|$  pouvant être affectés aux vols de numéro  $f$ . Pour chaque numéro de vol  $f \in F$ , on définit l'ensemble des ordres de type

dominant par  $U^f = \{1, 2, \dots, \min(J_f, |K^f|)\}$ . Pour chaque vol  $l \in L$  tel que  $f(l) = f$ , il n'y a aucune pénalité pour lui affecter son type dominant d'ordre 1 ( $\gamma_{f,1} = 0$ ) et les pénalités liées à l'affectation des types d'ordre supérieur croissent avec la valeur de l'ordre. De cette façon, on inflige une pénalité  $\gamma_{f,2} \geq 0$  pour affecter un type dominant d'ordre 2 et une pénalité  $\gamma_{f,3} \geq \gamma_{f,2}$  pour affecter un type d'ordre 3.

Les variables  $D_f^k$  sont remplacées par les variables  $D_{f,u}^k$ , lesquelles prennent la valeur 1 si le type  $k$  est choisi comme le type dominant d'ordre  $u$  pour les vols de numéro  $f$ , et 0 sinon. Également, les variables  $P_l^k$  font place aux variables  $P_{l,u}^k$ , qui servent à incorporer dans l'objectif la pénalité liée au manque d'homogénéité lorsqu'on affecte le type  $k$  au vol  $l$  alors que ce type correspond au type dominant d'ordre  $u$  pour les vols de numéro  $f(l)$ .

Le nouveau modèle s'écrit :

$$\text{Maximiser} \quad \sum_{k \in K} \left\{ \sum_{l \in L^k} \left( p_l^k X_l^k - \sum_{u \in U^{f(l)}} \gamma_{f(l),u} P_{l,u}^k \right) - c^k E^k \right\} \quad (4.13)$$

sujet à :

$$\sum_{k \in K^{f(l)}} X_l^k = 1, \quad \forall l \in L \quad (4.14)$$

$$\sum_{k \in K^f} D_{f,u}^k = 1, \quad \forall f \in F, u \in U^f \quad (4.15)$$

$$\sum_{u \in U^{f(l)}} P_{l,u}^k - X_l^k = 0, \quad \forall k \in K, l \in L^k \quad (4.16)$$

$$P_{l,u}^k - D_{f(l),u}^k \leq 0, \quad \forall k \in K, l \in L^k, u \in U^{f(l)} \quad (4.17)$$

$$\sum_{d \in S^k} \sum_{t': \tau_{dot'}^k = t} X_{dot'}^k + Y_{ot-t}^k - \sum_{d \in S^k} X_{odt}^k - Y_{ott+}^k = 0, \quad \forall k \in K, \quad (k, o, t) \in N^k \quad (4.18)$$

$$\sum_{l \in A_F^k} X_l^k + \sum_{(k, o, t, t^+) \in A_G^k} Y_{ott+}^k - E^k = 0, \quad \forall k \in K \quad (4.19)$$

$$0 \leq E^k \leq n^k, \quad \forall k \in K \quad (4.20)$$

$$Y_{ott+}^k \geq 0, \quad \forall k \in K, \quad (k, o, t) \in N^k \quad (4.21)$$

$$X_l^k \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K, l \in L^k \quad (4.22)$$

$$D_{f,u}^k \in \{0, 1\}, \quad \forall f \in F, k \in K^f, u \in U^f \quad (4.23)$$

$$P_{l,u}^k \in \{0, 1\}, \quad \forall l \in L, k \in K^l, u \in U^{f(l)} \quad (4.24)$$

où on a que  $\gamma_{f,1} = 0$  et  $\gamma_{f,u-1} \leq \gamma_{f,u}$ ,  $\forall u \in U^f \setminus \{1\}$ ,  $f \in F$ .

L'objectif (4.13) consiste à maximiser le total des profits anticipés, auquel on soustrait la somme des pénalités dues au manque d'homogénéité et les coûts fixes d'utilisation des avions. Les contraintes (4.14) et (4.22) assurent que chaque vol est couvert par un et un seul type d'avion. Les contraintes (4.15) et (4.23) imposent qu'un et un seul type dominant de chaque ordre puisse être assigné à chacun des numéros de vol. Les contraintes (4.16) et (4.17) permettent d'établir, pour chacun des vols  $l \in L$ , la pénalité à infliger, celle-ci étant calculée en fonction du choix du type pour ce vol par rapport aux types dominants pour les vols de ce numéro ( $f(l)$ ). En effet, supposons que le vol  $l$  est couvert par un avion de type  $k$  ( $X_l^k = 1$ ), et que les types dominants pour ce vol sont données par les valeurs des variables binaires  $D_{f(l),u}^k$ ,  $u \in U^{f(l)}$ . Un niveau  $u \in U^{f(l)}$  de pénalisation pour la non-homogénéité doit être établi. Pour ce faire, on impose, par (4.16), que  $\sum_{u \in U^{f(l)}} P_{l,u}^k = 1$ . Le niveau de pénalisation  $u$  ne peut être choisi que si le type  $k$  correspond au type dominant d'ordre  $u$  pour les vols de numéros  $f(l)$ , c'est-à-dire que  $P_{l,u}^k = 1$  seulement si  $D_{f(l),u}^k = 1$ . Pour ce faire, on impose, par (4.17), que  $P_{l,u}^k \leq D_{f(l),u}^k$ . Dans une solution optimale, pour chaque

numéro de vol  $f$  pour lequel les valeurs de  $\gamma_{f,u}$  sont strictement croissantes en fonction de  $u$ , on tend à choisir  $u$  le plus petit possible de façon à éviter les pénalités liées au manque d'homogénéité, tout en tenant compte du fait qu'un et un seul type d'avion peut être dominant pour chaque ordre. Les contraintes (4.18) imposent de préserver la conservation de flot dans chacun des sous-réseaux. Les contraintes (4.19) et (4.20) limitent la quantité d'avions disponibles pour chaque type. Notons que les contraintes de conservation de flot font en sorte que les variables  $Y_{ott+}^k$  et  $E^k$  sont implicitement contraintes à être entières étant donné que les variables  $X_f^k$  le sont. De plus, puisque les pénalités  $\gamma$  sont toutes non négatives et, étant donné les contraintes (4.16), on peut, sans changer l'espace des solutions optimales réalisables au problème, relaxer les contraintes (4.23) sur les variables  $D_{f,u}^k$  et les contraintes (4.24) sur les variables  $P_{l,u}^k$  et les remplacer par des contraintes de non-négativité.

### 4.3 Autres approches heuristiques

Nous présentons dans cette section deux autres approches de résolution permettant d'obtenir des solutions réalisables au problème en des temps de calcul généralement moindres qu'avec les approches heuristiques présentées dans l'article, mais souvent de qualité inférieure. La première consiste à ne pas incorporer les contraintes d'homogénéité en phase II. La seconde consiste à réduire la taille des réseaux par une stratégie de réduction en îlots.

#### 4.3.1 Absence de contraintes d'homogénéité en phase II

En seconde phase de l'approche de résolution en deux phases présentées dans l'article, on propose d'incorporer les contraintes d'homogénéité correspondant aux numéros

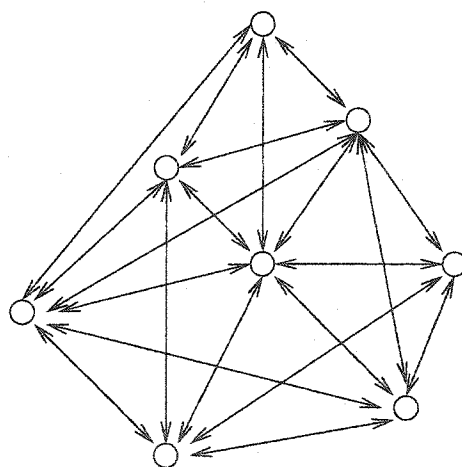
de vol qui n'ont pas été considérés en phase I, c'est-à-dire l'ensemble des numéros de vol  $F \setminus F^*$ . Afin d'accélérer la résolution de la seconde phase du problème, il est possible de ne pas y incorporer ces dernières contraintes. Cependant, il peut en résulter une détérioration au niveau de l'homogénéité de la solution ainsi obtenue et ceci risque d'être d'autant plus vrai que  $F^*$  diffère de  $F$ . Nous présentons au tableau 4.5 les résultats obtenus en utilisant une seule journée en phase I et en omettant les contraintes d'homogénéité en phase II pour les numéros de vol  $f \notin F^*$ . De plus, pour fin de comparaison, ces résultats sont accompagnés de ceux obtenus en incorporant ces contraintes d'homogénéité lors de la phase II. Nous pouvons ainsi apprécier la détérioration de la qualité des solutions par rapport à la diminution des temps de résolution. Pour chacun des deux jeux de données et pour les trois différentes valeurs de pénalité associées au manque d'homogénéité, on présente la moyenne, calculée sur l'ensemble des sept choix de journée en phase I, des sauts d'optimalité, du nombre d'exceptions à l'homogénéité, et du temps de calcul en secondes requis pour résoudre les deux phases.

Tableau 4.5 – Contraintes d'homogénéité en phase II

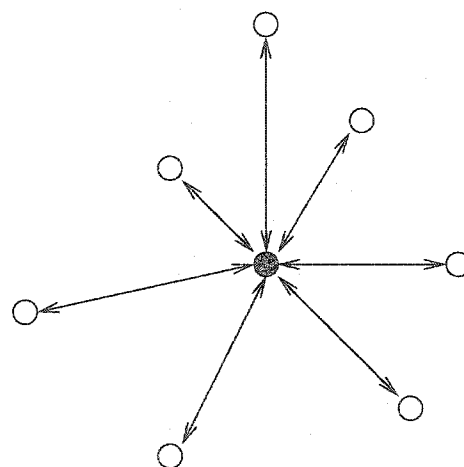
Test	$\gamma$	Sans contrainte d'homo.			Avec contraintes d'homo.		
		Saut moyen d'opt.	Nb moyen d'exceptions à l'homo.	CPU moyen (sec.)	Saut moyen d'opt.	Nb moyen d'exceptions à l'homo.	CPU moyen (sec.)
I	500	0.73	424	970	0.63	404	1250
	1000	0.89	283	1205	0.77	252	1553
	2000	1.49	184	1444	1.24	145	1949
II	500	0.63	551	3410	0.58	523	4769
	1000	0.76	469	7866	0.59	428	4848
	2000	0.97	347	6018	0.86	316	9122

### 4.3.2 Réduction en îlots

On retrouve dans la littérature (Hane *et al.*, 1995) une technique dite de “réduction en îlots” s’appliquant pour les problèmes d’affectation des types d’avion aux vols, surtout lorsque la structure des réseaux correspond à une topologie de type *hub-and-spoke*. Les transporteurs aériens ont tendance à construire leurs réseaux de vols selon cette structure de façon à pouvoir facilement faire voyager les passagers d’une station à une autre en les faisant transiter par certaines stations choisies (*hubs*), lesquelles servent ainsi de plaque tournante. Ceci permet d’établir des connexions entre  $n$  stations avec un nombre de segments de vol de l’ordre de  $n$ , plutôt que  $n^2$  (voir figure 4.3). Les réseaux des problèmes considérés dans notre étude possèdent cette propriété.



Réseau sans structure hub-and-spoke



Réseau avec structure hub-and-spoke

Figure 4.3 – Structures de réseau

L’idée de base de la méthode de réduction en îlots s’appuie sur l’hypothèse qu’une solution optimale doit tendre à minimiser la taille de la flotte nécessaire pour le recouvrement des vols (par exemple, si les valeurs des  $c^k$  de l’objectif sont élevées).



Sous cette hypothèse, on peut, pour chaque station et pour chaque type d'avion, déterminer un ou plusieurs moments de l'horizon où le nombre d'avions au sol doit être nul, sans quoi la taille de la flotte ne pourrait être minimale. Ces observations permettent de retirer les arcs d'attente au sol correspondant à ces moments, ce qui permet alors de simplifier considérablement la structure des réseaux. La figure 4.4 illustre la technique à partir d'un petit exemple de réseau. Les arcs en pointillés correspondent aux arcs d'attente au sol qui sont retirés du réseau par la réduction en îlots, les arcs en trait continu aux arcs d'attente au sol qui sont conservés, et les arcs en tirets aux arcs de vol.

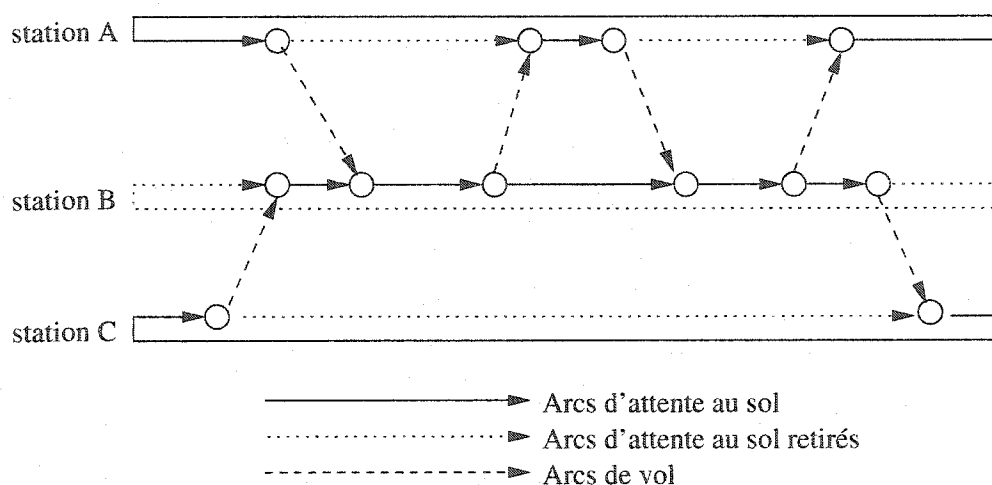


Figure 4.4 – Réduction de réseau en îlots

L'hypothèse de la minimalité de la taille de la flotte dans une solution optimale n'est toutefois pas toujours vérifiée en pratique, car il peut être très intéressant, pour obtenir une meilleure affectation, d'utiliser un nombre d'avions légèrement supérieur à ce qui est nécessaire pour assurer la faisabilité de la solution. De plus, même lorsque l'hypothèse est vérifiée, cette stratégie de réduction peut entraîner une perte de qualité de la valeur des solutions ou peut même théoriquement compromettre la faisabilité du

problème. Ceci peut, entre autres, provenir du fait que tous les types d'avion ne sont pas autorisés à couvrir tous les vols, ou que la durée d'un vol et le temps minimum au sol qui le suit varient selon le type d'avion qui lui est affecté. Il apparaît donc important d'appliquer avec grande prudence cette méthode de réduction. En particulier, on doit éviter de l'appliquer aux stations très achalandées comme les stations de type *hub*, où le nombre de connexions possibles est grand et, donc, la probabilité qu'y soient possibles des connexions intéressantes qui deviendraient impossibles du point de vue de l'optimiseur par la réduction en îlots est grande.

Les expérimentations faites à partir du second jeu de données tendent à montrer qu'en général, la méthode de réduction en îlots permet de résoudre les problèmes avec homogénéité en des temps de résolution inférieurs, mais en obtenant souvent des solutions légèrement de moindre qualité. Notons que ces résultats ont été obtenus en appliquant la réduction par îlots sur toutes les stations à l'exception des trois principaux *hubs* du réseau, soit Montréal, Toronto et Vancouver.

Le tableau 4.6 présente, pour chaque valeur choisie de pénalité  $\gamma$  et pour chaque type d'approche de résolution, les résultats obtenus avec les îlots quant au saut d'optimalité (en % par rapport à la meilleure borne connue obtenue par la résolution du problème sans la réduction en îlots), le nombre d'exceptions à l'homogénéité ainsi que le nombre de nœuds de branchement et les temps de calcul (en secondes) pour chacune des phases. Pour tous les résultats de l'approche en deux phases, les résultats varient dans ce dernier cas selon le nombre  $n$  de jours consécutifs choisis en phase I. Les résultats indiqués dans le tableau sont ceux obtenus en faisant la moyenne sur les sept choix possibles de  $n$  jours consécutifs. Notons également que  $n = 1^*$  signifie que nous avons utilisé la méthode sans contraintes d'homogénéité en phase II, avec une seule journée en phase I.

Pour véritablement comparer la performance des approches avec et sans îlots, nous pouvons étudier les résultats en considérant le rapport entre les temps de résolution

Tableau 4.6 – Réduction par îlots

$\gamma$	$n$	Saut moyen d'opt.	Nb moyen d'exceptions à l'homo.	CPU moyen (sec.)			Nœuds de branchement	
				phase I	phase II	total	I	II
500	1*	0.79	562	6	1641	1647	12	52
	1	0.76	547	6	2142	2148	12	57
	2	0.57	509	157	2654	2812	56	33
	3	0.60	547	1338	1140	2478	128	35
	4	0.54	515	2849	1269	4119	121	40
	5	0.48	493	6581	822	7404	126	23
	Directe	0.14	410	12520	-	12520	103	-
1000	1*	0.90	481	7	1999	2006	12	55
	1	0.77	455	6	2146	2153	12	44
	2	0.64	404	274	1145	1419	56	29
	3	0.45	421	1610	1382	2993	94	33
	4	0.37	416	3951	1593	5544	105	36
	5	0.28	386	9977	1249	11227	148	28
	Directe	0.34	365	33839	-	33839	162	-
2000	1*	1.15	402	6	3123	3130	12	90
	1	0.98	363	6	4294	4300	12	80
	2	0.71	324	331	1820	2151	58	40
	3	0.48	319	2039	1336	3376	102	34
	4	0.43	312	5854	1970	7824	120	47
	5	0.27	286	13411	827	14238	135	24
	Directe	0.29	215	31437	-	31437	96	-

et la qualité des solutions. Par exemple, il peut arriver qu'une approche de résolution sans îlots appliquée pour résoudre un problème avec un certain nombre de jours en phase I se résolve dans le même temps qu'une approche de résolution avec îlots utilisant un nombre supérieur de jours en phase I. Ainsi, il se peut qu'à temps égal de résolution, la méthode par îlots produisent de meilleures solutions que la méthode sans îlots. Les figures 4.5, 4.6 et 4.7 situent les solutions obtenues avec et sans îlots quant à leur qualité (saut d'optimalité) et leur temps de résolution, et ce pour chaque valeur choisie de pénalité  $\gamma$  liée au manque d'homogénéité.

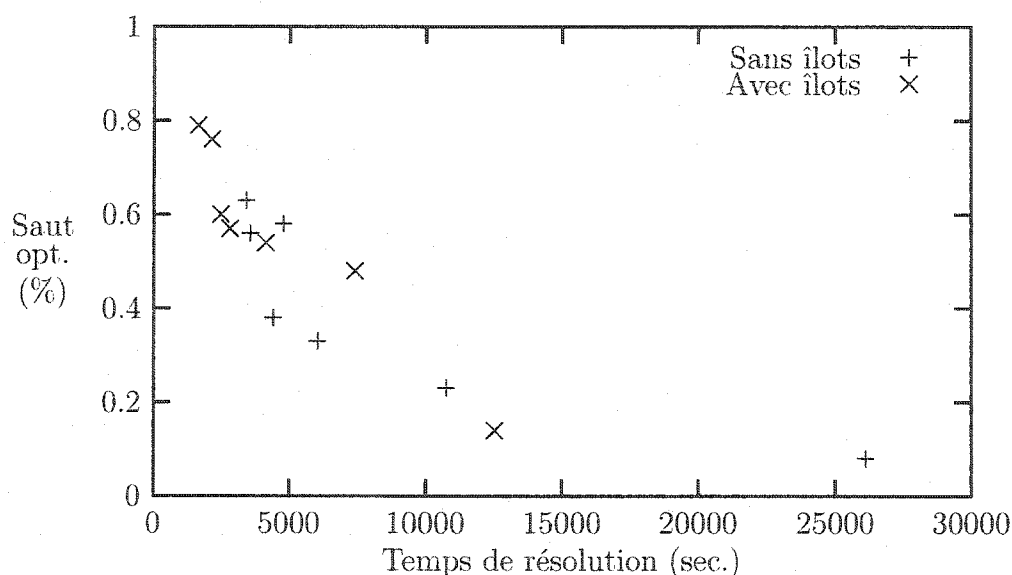
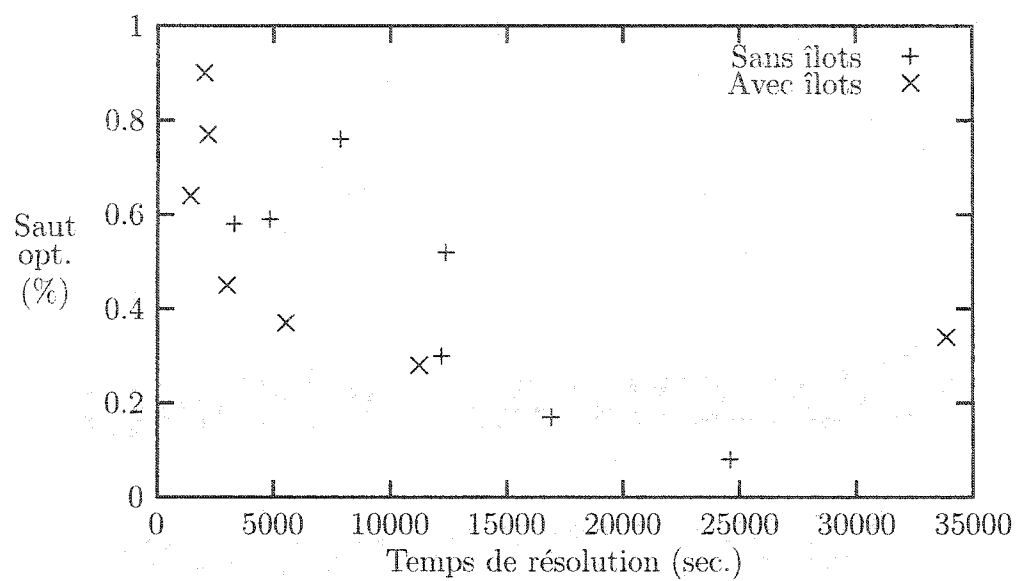
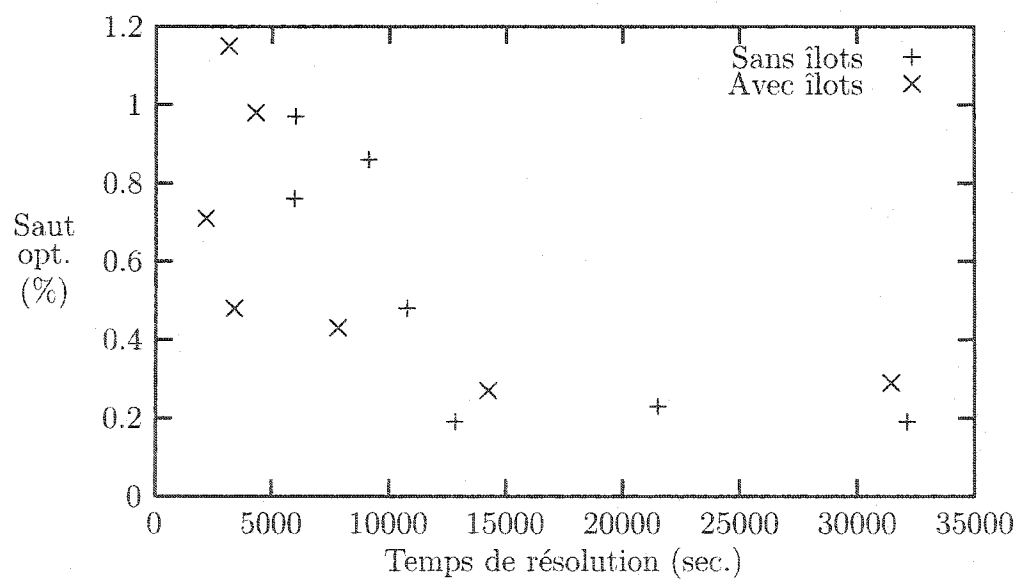


Figure 4.5 - Réduction par îlots ( $\gamma = 500$ )

En observant les figures 4.5 à 4.7, on constate que les points X, qui correspondent aux résultats obtenus avec la réduction en îlots, ont tendance à être davantage situés en-dessous et à gauche des points +, qui correspondent aux résultats obtenus sans réduction en îlots. Ceci est particulièrement vrai dans le cas des problèmes résolus avec des pénalités de 1000 et de 2000. Ceci révèle que, bien que l'utilisation des îlots

Figure 4.6 – Réduction par îlots ( $\gamma = 1000$ )Figure 4.7 – Réduction par îlots ( $\gamma = 2000$ )

engendre en général une détérioration dans la qualité de la solution obtenue pour un problème donné, le gain en temps de calcul qui en découle peut être suffisamment significatif pour justifier l'emploi d'une approche en deux phases avec plus de jours en phase I, jumelée avec cette réduction en îlots, permettant ainsi d'obtenir en bout de ligne une solution de meilleure qualité en temps comparable. De plus, dans un contexte où l'on désirerait obtenir rapidement une solution réalisable de qualité acceptable, la réduction en îlots s'avère très intéressante. En effet, on observe une nette dominance de points X dans la partie gauche des figures. En contrepartie, les points + semblent dominants dans la partie inférieure des figures, ce qui tend à confirmer qu'il est préférable de ne pas recourir à la réduction en îlots si l'on désire obtenir les meilleures solutions possibles en étant prêt à investir un grand effort en terme de temps de calcul.

## 4.4 Résultats numériques détaillés

Les résultats (sauts d'optimalité, temps de calcul) présentés dans les tableaux de l'article ont été obtenus en calculant, pour chaque type d'approche, la moyenne des résultats pour les sept choix possibles de jours consécutifs pendant une semaine. Nous fournissons donc dans cette section les résultats non agrégés de nos expérimentations. Nous pouvons remarquer une certaine instabilité, surtout observable en phase I, dans les temps de résolution due au caractère instable du nombre de nœuds de branchement. Les coûts fixes  $c^k$  sont relativement élevés et tendent à produire des solutions avec un nombre minimal d'avions. Cependant, pour quelques solutions, il advient qu'il soit malgré tout profitable d'utiliser un nombre d'avions légèrement supérieur à ce nombre minimal. La comparaison des profits entre des solutions utilisant un nombre différent d'avions est délicate. Une façon de fournir une base de comparaison raisonnable entre ces solutions et les autres consiste à corriger le profit des solutions

utilisant plus d'avions en leur soustrayant le coût des avions excédentaires. Ainsi, nous avons indiqué dans les tableaux le nombre d'avions utilisés dans chaque solution. Pour les solutions utilisant plus d'avions que le nombre minimal nécessaire, les sauts d'optimalité indiqués sont ceux corrigés. Dans la colonne *approche de résolution*, nous énumérons le choix des jours utilisés en phase I. Dans les autres colonnes, on indique le nombre d'avions de la solution, le nombre d'exceptions à l'homogénéité, l'écart (en %) entre la valeur de la solution et la meilleure borne connue (saut d'optimalité) ainsi que le nombre de nœuds de branchement et les temps de résolution pour chacune des phases.

Tableau 4.7 - Résultats numériques - test I ( $\gamma = 500$ )

Approche de résolution	Nombre d'avions	Nombre d'exceptions à l'homo.	Saut d'optimalité (en %)	Nœuds de branchement		CPU (sec.)		Total
				I	II	I	II	
1	101	402	0.82	9	0	8	777	785
2	101	401	0.58	29	0	27	770	797
3	101	412	0.65	15	0	18	795	814
4	101	378	0.49	0	5	7	812	820
5	101	355	0.48	0	0	7	717	724
6	101	450	0.74	3	20	4	3708	3713
7	101	430	0.66	21	1	20	1079	1100
12	101	397	0.56	16	0	217	747	965
23	101	385	0.50	66	5	820	1294	2114
34	101	362	0.46	13	0	182	936	1118
45	101	367	0.43	0	0	103	803	907
56	101	429	0.68	11	0	82	723	806
67	101	422	0.69	63	13	290	2269	2560
71	101	484	1.12	47	0	306	821	1128
123	101	423	0.62	72	2	2809	968	3778
234	101	358	0.38	32	0	1362	819	2181
345	101	321	0.18	43	0	1784	724	2508
456	101	348	0.36	13	0	490	702	1192
567	101	397	0.60	17	2	484	919	1403
671	101	367	0.52	11	0	345	997	1342
712	101	345	0.44	14	2	719	916	1636
1234	101	359	0.42	46	17	4455	2401	6857
2345	101	332	0.30	65	0	5483	708	6191
3456	101	352	0.30	64	0	3731	911	4642
4567	101	359	0.40	14	2	1683	796	2479
5671	101	358	0.50	24	0	1507	820	2327
6712	101	329	0.36	22	3	1485	998	2484
7123	101	383	0.48	65	11	4770	1489	6260
12345	101	343	0.27	93	4	18440	1050	19490
23456	101	361	0.30	80	1	10815	744	11560
34567	101	379	0.39	53	4	8068	1008	9076
45671	101	321	0.31	70	6	6828	1547	8375
56712	101	341	0.28	72	3	8927	927	9854
67123	101	316	0.19	34	8	5541	1146	6687
71234	101	352	0.35	98	27	14441	2216	16657
Directe	101	287	0.06	55	-	22346	-	22346



Tableau 4.8 - Résultats numériques - test I ( $\gamma = 1000$ )

Approche de résolution	Nombre d'avions	Nombre d'exceptions à l'homo.	Saut d'optimalité (en %)	Nœuds de branchement		CPU (sec.)		
				I	II	I	II	Total
1	101	264	0.97	9	4	9	1062	1072
2	101	276	0.97	29	3	31	1079	1111
3	101	240	0.88	15	4	21	1210	1232
4	101	209	0.58	0	0	8	804	813
5	101	182	0.67	0	0	7	1004	1011
6	102	298	0.94	3	12	5	3756	3761
7	101	297	0.92	21	6	26	1847	1873
12	101	227	0.66	8	6	267	1201	1469
23	101	233	0.72	99	5	1804	1269	3073
34	101	217	0.57	30	0	554	730	1285
45	101	174	0.43	3	0	207	670	878
56	101	297	0.94	28	10	341	1609	1951
67	101	286	0.92	42	0	396	1450	1846
71	101	301	1.01	32	5	583	1165	1748
123	101	231	0.74	60	34	4435	3817	8253
234	101	166	0.47	5	0	601	783	1384
345	101	185	0.35	37	1	2737	880	3618
456	101	193	0.48	48	0	2391	1013	3405
567	101	225	0.72	25	7	1168	1143	2311
671	101	214	0.74	0	5	396	1024	1421
712	101	204	0.63	6	0	816	788	1605
1234	101	229	0.51	69	5	10350	1071	11421
2345	101	164	0.26	13	0	3205	792	3998
3456	101	198	0.42	44	0	5546	851	6398
4567	101	201	0.51	30	0	3132	884	4017
5671	101	209	0.54	44	0	4756	745	5501
6712	101	184	0.53	6	0	1569	856	2425
7123	102	183	0.57	85	0	10858	932	11790
12345	101	156	0.12	1	0	3841	974	4816
23456	101	217	0.37	67	0	15949	590	16539
34567	101	195	0.48	56	3	13216	1050	14267
45671	101	208	0.48	57	0	12407	822	13229
56712	101	192	0.39	65	1	14509	855	15365
67123	101	158	0.25	30	0	8114	1013	9127
71234	102	161	0.30	24	0	8418	891	9310
Directe	101	167	0.10	29	-	28428	-	28428

Tableau 4.9 – Résultats numériques - test I ( $\gamma = 2000$ )

Approche de résolution	Nombre d'avions	Nombre d'exceptions à l'homo.	Saut d'optimalité (en %)	Nœuds de branchement		CPU (sec.)		Total
				I	II	I	II	
1	101	136	1.69	9	2	9	1165	1175
2	101	161	1.39	29	4	30	1448	1479
3	101	139	1.47	15	0	21	736	757
4	101	131	0.91	0	2	8	639	647
5	101	70	0.96	0	0	7	551	559
6	102	226	1.54	3	9	5	4695	4701
7	102	158	1.49	21	18	26	4298	4324
12	101	134	1.00	9	3	424	824	1249
23	101	146	0.92	36	1	1332	737	2069
34	101	112	0.70	23	0	735	612	1348
45	101	86	0.60	0	0	176	586	762
56	101	170	1.08	136	16	1894	2656	4551
67	101	153	1.87	12	8	251	2124	2376
71	102	140	1.73	25	32	837	4623	5461
123	101	110	0.77	42	4	5864	826	6690
234	101	83	0.55	1	1	625	683	1309
345	101	79	0.22	7	1	1697	572	2270
456	101	102	0.75	0	0	725	711	1437
567	101	114	1.17	28	0	1898	775	2673
671	101	109	1.21	0	0	492	642	1134
712	101	73	0.88	0	0	746	406	1152
1234	101	99	0.71	0	1	1924	692	2616
2345	101	76	0.33	3	0	2336	492	2828
3456	101	116	0.68	60	1	10499	1005	11504
4567	101	112	0.96	42	4	6822	1087	7909
5671	101	102	0.80	34	0	5987	788	6776
6712	101	82	0.80	5	0	2366	734	3101
7123	101	79	0.54	28	2	6112	835	6947
12345	101	69	0.42	4	0	4325	775	5100
23456	101	170	0.90	116	57	40100	11924	52025
34567	101	86	0.74	35	13	11666	2039	13706
45671	101	98	0.94	60	39	18726	5619	24345
56712	101	118	0.68	69	0	20158	736	20894
67123	101	79	0.57	28	0	12870	732	13602
71234	102	91	0.83	74	0	32325	606	32932
Directe	101	93	0.56	55	-	76159	-	76159

Tableau 4.10 – Résultats numériques - test II ( $\gamma = 500$ )

Approche de résolution	Nombre d'avions	Nombre d'exceptions à l'homo.	Saut d'optimalité (en %)	Nœuds de branchement		CPU (sec.)		
				I	II	I	II	Total
1	159	476	0.19	9	19	11	1066	1077
2	159	514	0.50	20	33	17	2218	2235
3	159	467	0.46	22	33	13	2140	2154
4	159	541	0.54	6	97	6	6633	6640
5	160	548	0.91	4	154	9	11805	11814
6	159	538	0.25	25	45	11	3172	3183
7	159	578	0.53	4	69	4	6276	6280
12	159	460	0.48	58	26	403	1687	2091
23	159	472	0.43	93	45	654	3701	4356
34	159	483	0.44	60	15	474	1375	1850
45	159	503	0.47	115	27	950	1412	2363
56	159	587	0.31	145	33	830	2669	3499
67	159	611	0.62	89	107	237	7545	7783
71	159	583	0.28	69	54	253	2751	3005
123	159	424	0.11	26	8	816	774	1590
234	159	457	0.41	37	33	967	2810	3777
345	159	437	0.38	87	17	2295	1170	3465
456	159	529	0.20	117	51	2172	2750	4922
567	159	512	0.24	163	35	2045	2614	4660
671	159	519	0.25	84	6	943	811	1755
712	159	647	0.37	54	151	816	9756	10572
1234	159	430	0.36	91	32	4538	2121	6660
2345	159	421	0.64	149	23	7788	1886	9675
3456	159	496	0.15	111	29	4542	2147	6690
4567	159	439	0.12	137	20	4558	985	5544
5671	159	485	0.18	133	21	3582	1500	5082
6712	159	475	0.17	106	6	2778	543	3322
7123	159	565	0.22	81	39	2448	2828	5277
12345	159	403	0.32	54	15	6889	1008	7898
23456	160	525	0.54	142	133	12564	10075	22640
34567	159	432	0.11	133	23	9430	1347	10777
45671	159	422	0.11	93	21	5589	1707	7296
56712	159	450	0.17	149	22	10380	1568	11948
67123	159	441	0.11	116	15	7709	1030	8739
71234	159	580	0.05	49	24	3732	2154	5886
Directe	159	416	0.08	118	-	26128	-	26128

Tableau 4.11 – Résultats numériques - test II ( $\gamma = 1000$ )

Approche de résolution	Nombre d'avions	Nombre d'exceptions à l'homo.	Saut d'optimalité (en %)	Nœuds de branchement		CPU (sec.)		Total
				I	II	I	II	
1	159	358	0.14	9	9	11	803	814
2	159	416	0.84	20	46	17	3922	3939
3	159	392	0.39	22	42	13	2745	2759
4	159	413	0.78	6	72	6	5437	5443
5	159	445	0.83	4	12	9	1513	1522
6	159	487	0.39	25	53	11	5550	5562
7	159	490	0.75	4	125	3	13895	13899
12	159	333	0.35	0	12	82	1321	1404
23	159	394	0.72	58	28	562	2131	2693
34	159	355	0.69	52	36	708	3441	4149
45	159	322	0.63	85	12	825	1144	1969
56	159	466	0.62	119	32	845	2553	3399
67	159	495	0.79	84	74	335	6171	6507
71	160	498	0.15	30	43	203	2777	2981
123	159	364	0.00	7	23	651	1907	2559
234	159	462	1.26	68	277	3003	25493	28497
345	159	330	0.32	58	21	2354	2133	4487
456	159	502	1.00	172	272	3893	22232	26125
567	159	410	0.48	189	42	3475	3386	6862
671	159	464	0.31	112	11	1911	1241	3152
712	160	501	0.17	54	167	1105	13839	14944
1234	159	298	0.17	79	7	6536	920	7457
2345	159	329	0.80	178	74	12577	5115	17693
3456	159	420	0.14	121	33	7505	2174	9679
4567	159	333	0.22	135	39	6845	2026	8871
5671	159	415	0.19	160	63	6430	5436	11867
6712	160	389	0.13	71	114	3587	9858	13446
7123	160	493	0.17	70	165	3670	12599	16270
12345	159	326	0.22	104	22	14568	1546	16115
23456	160	448	0.35	113	137	16755	9316	26071
34567	159	310	0.15	168	15	16920	825	17745
45671	159	335	0.00	151	14	14251	1261	15513
56712	160	325	0.14	121	75	12457	5526	17983
67123	159	346	0.05	116	22	11437	2732	14169
71234	159	517	0.00	42	74	4708	5913	10621
Directe	159	272	0.08	68	-	24600	-	24600

Tableau 4.12 – Résultats numériques - test II ( $\gamma = 2000$ )

Approche de résolution	Nombre d'avions	Nombre d'exceptions à l'homo.	Saut d'optimalité (en %)	Nœuds de branchement		CPU (sec.)		
				I	II	I	II	Total
1	159	264	0.46	9	8	11	661	672
2	160	285	1.43	20	95	17	11441	11458
3	159	399	1.63	22	192	14	22632	22647
4	160	286	1.41	6	145	6	11495	11502
5	160	279	1.29	4	22	9	2612	2621
6	160	369	1.18	25	71	11	8386	8398
7	160	330	1.07	4	41	3	6549	6553
12	160	293	0.86	51	83	802	7722	8525
23	159	231	0.86	2	9	125	629	754
34	159	252	1.01	16	23	366	2486	2853
45	159	238	1.12	52	3	815	677	1492
56	159	420	1.55	97	156	962	14469	15432
67	161	302	1.36	93	94	658	9893	10552
71	161	358	0.73	57	23	406	1736	2143
123	159	274	0.57	34	90	2072	7173	9246
234	159	271	1.00	68	48	3709	3966	7676
345	159	238	0.64	69	33	3342	2328	5671
456	160	313	0.26	131	105	4936	10491	15427
567	160	275	0.98	148	12	3671	1130	4802
671	161	328	1.00	90	140	2478	10055	12533
712	161	406	1.15	74	205	1749	18129	19879
1234	160	233	0.68	44	81	6025	6309	12335
2345	159	210	0.47	71	4	8286	544	8830
3456	160	289	0.10	120	16	10174	1876	12050
4567	159	217	0.24	151	5	10050	498	10548
5671	159	303	0.54	122	72	7553	6609	14163
6712	160	250	0.58	104	106	7605	9074	16679
7123	160	410	0.45	68	132	4698	10506	15205
12345	159	201	0.34	42	3	12286	585	12872
23456	161	306	0.25	113	34	22930	4688	27618
34567	159	196	0.25	88	0	14991	320	15311
45671	159	204	0.03	80	4	13129	331	13460
56712	159	342	1.25	146	134	18876	15415	34292
67123	160	217	0.25	113	24	14577	1179	15756
71234	162	414	0.91	55	238	7863	23628	31491
Directe	159	175	0.19	54	-	32119	-	32119

## Chapitre 5

### Application chez Air Canada

L'affectation stratégique des types d'avion aux vols constitue, après la construction de l'horaire de vols, une des étapes les plus cruciales pour assurer la rentabilité d'un réseau de transport aérien. Il s'avère donc essentiel pour les planificateurs aériens d'avoir à leur disposition les meilleurs outils possible pour mener à bien leur tâche. Dans les dernières années, plusieurs modèles et approches de résolution ont été proposés afin de résoudre ce genre de problème de façon automatique et optimale. Toutefois, la plupart de ces modèles sont présentés en ayant recours à des hypothèses fortement simplificatrices, ce qui en rend l'application directe aux problèmes industriels passablement difficile. On rapporte dans Subramanian *et al.* (1994) une application d'un de ces modèles chez Delta Airlines, mais sans toutefois donner beaucoup de détails sur la modélisation des différentes contraintes à apporter au modèle de base classique, ni sur les différentes façons avec lesquelles les planificateurs peuvent utiliser le modèle pour évaluer différents scénarios.

Dans ce chapitre, nous présentons une approche permettant de prendre en compte les différents aspects commerciaux et opérationnels qui préoccupent les planificateurs et qui sont souvent négligés dans les modèles de base traditionnels que l'on retrouve dans la littérature. Le modèle que nous avons développé et l'approche d'utilisation que nous proposons sont le fruit d'un travail conjoint avec le transporteur international Air Canada qui s'est étendu sur près d'une année. La collaboration étroite avec les experts en matière de marketing et de gestion des opérations aériennes nous a permis

de bien définir le problème à résoudre et de confronter les solutions produites par l'optimiseur avec leur expertise en matière d'analyse de faisabilité et de qualité des solutions. De plus, les expérimentations que nous avons faites avec cette compagnie aérienne l'ont été dans un contexte réel de planification, ce qui montre la viabilité du processus proposé en milieu industriel. L'apport de solutions par l'optimiseur a grandement contribué à faciliter et améliorer le travail des planificateurs, et la solution retenue pour la mise en opération a été une de celles produites par l'optimiseur, à laquelle les planificateurs ont apporté seulement quelques remaniements mineurs.

Nous présentons tout d'abord à la section 5.1 un bref rappel du modèle de base pour le problème d'affectation des types d'avion aux vols, puis, à la section 5.2, les extensions nécessaires pour prendre davantage en compte la réalité du contexte dans lequel s'effectue le transport aérien, tant du point de vue des contraintes opérationnelles que de celui du contrôle de certains objectifs de qualité pour les solutions. Nous décrivons à la section 5.3 deux types d'étude de cas que nous avons menée avec Air Canada, ainsi que les principaux résultats qui en ressortent. Nous concluons à la section 5.4.

## 5.1 Problème de base

Nous faisons ici un bref rappel du problème d'affectation des types d'avion aux vols, le lecteur pouvant se référer au chapitre d'introduction de cette thèse pour de plus amples détails. Le problème consiste à déterminer le type d'avion par lequel sera effectué chacun des segments de vol d'un horaire cyclique défini sur un horizon d'un ou plusieurs jours, et ce de façon à maximiser le total des profits anticipés. Dans certains cas, on veut également minimiser le nombre total d'avions nécessaires pour couvrir l'ensemble des segments de vol, ou encore tenir compte d'un coût fixe associé

à l'utilisation de chaque avion pendant la durée de l'horizon, lequel peut varier en fonction du type. La très grande majorité des études rapportées dans la littérature font référence à un horaire d'une journée. Dans le cas de notre étude avec Air Canada, l'horaire s'étend sur une semaine. On suppose également que l'on connaît le nombre d'avions disponibles de chaque type et, pour chaque segment de vol, la durée (incluant le temps minimal à passer au sol avant le prochain segment de vol) et le profit anticipé en fonction du type d'avion qui lui est affecté. Une solution réalisable au problème doit permettre la construction d'itinéraires valides (suite de segments de vol effectués par un même avion au cours de l'horizon) pour chaque avion utilisé, c'est-à-dire qu'il doit y avoir conservation du flot d'avions de chaque type en tout temps à travers le réseau de transport au cours de l'horizon considéré. Comme une solution cyclique est désirée, l'affectation doit faire en sorte que ces itinéraires puissent être juxtaposés pour former des cycles sur une ou plusieurs longueurs entières de l'horizon considéré. L'ensemble de ces itinéraires doit couvrir l'ensemble de tous les segments de vol, tout en ne requérant pas au delà du nombre maximal d'avions disponibles de chaque type.

Un bon modèle pour le problème de base est décrit dans Hane *et al.* (1995). L'idée est de définir un problème de flot multi-commodité dans un réseau espace-temps (une commodité par type d'avion), dans lequel on retrouve des contraintes liantes associées au recouvrement des segments de vol et aux limites sur le nombre d'avions disponibles pour chaque type. Ce modèle correspond à celui présenté au chapitre 4, auquel on retire les variables de type  $D$  et  $P$ , ainsi que les contraintes (4.3), (4.4), (4.10) et (4.11). Le lecteur peut se référer à la figure 4.4 pour voir une illustration de la structure de réseau qui y est utilisée.

## 5.2 Extensions

Nous présentons maintenant des extensions au modèle de base qui permettent de considérer différentes contraintes, tant d'aspect opérationnel que commercial, afin de



mieux prendre en compte la réalité du transport aérien. Nous décrivons brièvement en quoi constitue chaque extension et sa raison d'être, de même que la façon que nous proposons de les intégrer au modèle de base.

### 5.2.1 Objectif d'homogénéité

Puisque le problème est résolu sur un horizon d'une semaine, on doit incorporer un système de contraintes pour favoriser l'homogénéité de l'affectation, c'est-à-dire favoriser le fait que les vols de même numéro soient couverts par un même type d'avion. La raison d'être de cette extension de même que son intégration au modèle de base sont présentées en détail au chapitre 4. Comme la modélisation et l'approche de résolution que nous y proposons pour résoudre le problème avec homogénéité est compatible avec toutes les nouvelles fonctionnalités présentées dans ce chapitre, nous avons pu les utiliser pour ces nouveaux problèmes.

### 5.2.2 Restrictions de type sur certains segments de vol

Il arrive que certains segments de vol ne puissent être effectués par un type d'avion donné. Par exemple, certains segments de vol nécessitent une grande autonomie de vol ou encore nécessitent de l'équipement approprié pour traverser un océan, ce qui n'est pas toujours le cas pour tous les types d'avion de la flotte. De plus, sur certains marchés, des décisions commerciales stratégiques conduisent les planificateurs à banir l'utilisation de certains types d'avion sur certains segments de vol. Par exemple, sur des segments de vol à forte concentration de voyageurs d'affaires réguliers, on peut vouloir davantage exclure les types d'avion les moins confortables. L'incorporation de ces contraintes au modèle de base est très simple. Si un segment de vol  $l \in L$  ne peut être effectué par un certain type d'avion  $k \in K$ , alors il suffit de ne pas considérer

ce segment de vol lors de la construction du réseau associé à ce type, c'est-à-dire de poser  $k \notin K^{f(l)}$ .

### 5.2.3 Temps de vol maximal

La plupart des pilotes ne peuvent opérer qu'un nombre très restreint de types d'avion différents. Ainsi, le choix d'un type d'avion sur un segment de vol détermine la classe de pilote devant y être affectée. Comme la compagnie ne peut pas significativement remanier la composition de son personnel naviguant à chaque saison, elle doit tenir compte, lors de l'affectation des types d'avion aux vols, du nombre total d'heures-pilotes disponibles pour chaque type d'avion. L'intégration de ces contraintes au modèle de base nécessite l'ajout d'une contrainte liante par type d'avion, dont les coefficients sont les durées des segments de vol effectués par ce type d'avion. La somme de ces durées doit être inférieure ou égale à un certain nombre d'heures de vol. Notons qu'on peut vouloir accorder à ces contraintes une certaine souplesse en leur ajoutant une variable de surplus à laquelle on associe une pénalité. Ceci peut entre autres permettre d'éviter que des problèmes deviennent non réalisables en raison d'un excès négligeable sur les temps de vol maximaux.

Si on dénote par  $d_l^k$  la durée du segment de vol  $l$  lorsqu'effectué par un avion de type  $k$ , par  $M^k$  la limite sur le nombre total d'heures de vol pour ce type d'avion, et par  $s^k$  la variable de surplus permettant d'excéder cette dernière limite (variable à laquelle sera associée une pénalité dans la fonction objectif), alors les contraintes à ajouter au modèle s'écrivent

$$\sum_{l \in L^k} d_l^k X_l^k - s^k \leq M^k, \forall k \in K.$$

L'ajout de ces contraintes apporte au programme linéaire des coefficients de tailles très variées, ce qui peut en diminuer l'efficacité de la résolution. Cependant, ces contraintes seront en général peu nombreuses et auront donc un impact assez faible sur les temps de résolution.

### 5.2.4 Temps minimaux de connexion variables

Dans la définition du problème de base que nous donnons ci-haut, le temps minimal de connexion entre deux segments de vol dépend seulement du premier segment de vol et du type d'avion affecté. Il peut souvent arriver qu'il n'en soit pas ainsi dans la réalité à certains aéroports. Par exemple, il peut arriver que pour faciliter la gestion des opérations douanières, les quais d'embarquement des vols internationaux soient situés dans une zone différente de l'aéroport de ceux des vols domestiques. Ceci a pour conséquence qu'un avion affecté à un vol international ne peut pas accueillir les passagers au même endroit où il a laissé descendre ceux du vol précédent si ce dernier était un vol domestique, et vice-versa. L'avion doit donc être déplacé d'un quai à un autre, ce qui augmente considérablement le temps minimal de la connexion. Dans le contexte d'Air Canada, les temps de connexion minimaux varient selon que les segments de vol à connecter sont de types domestique, transfrontalier ou international. Il est donc important que la structure du modèle puisse considérer des temps minimaux de connexion qui dépendent à la fois du type de segment de vol entrant et du type de segment de vol sortant. Notons qu'une telle modélisation des temps minimaux de connexion peut également être utilisée dans les cas où il existe un système de vols express pour lequel le temps minimal de connexion entre deux vols appartenant à ce système est réduit.

Dans les modèles de Subramanian *et al.* (1994) et de Hane *et al.* (1995), il n'est pas directement possible de considérer cette structure de temps de connexion car les différentes connexions possibles sont représentées implicitement par des arcs d'attente au sol. Cela est cependant possible dans le modèle de Abara (1989), les connexions étant toutes explicitement représentées dans le modèle, mais cette représentation explicite entraîne une explosion du nombre d'arcs à mesure que s'accroît la taille des problèmes à résoudre. Nous proposons ici deux modèles permettant de représenter

ces temps de connexion de façon exacte, tout en limitant la croissance du nombre d'arcs.

Dans le premier modèle, on crée pour chaque type d'avion un réseau semblable à celui créé dans le modèle de base, mais dans lequel le temps de fin d'un segment de vol est calculé en additionnant à son temps de départ sa durée ainsi qu'un temps minimal de connexion correspondant au plus grand temps minimal de connexion entre ce segment de vol et les segments de vol avec lesquels il peut être connecté. On représente de façon explicite les connexions entre le segment de vol et les segments de vol d'autres types avec lesquels une connexion est possible et dont le temps minimal de connexion est inférieur au plus grand temps déterminé précédemment. Pour ce faire (figure 5.1), chaque arc de vol est remplacé par une suite de deux arcs, soit un arc d'opportunité de vol et un arc de vol. Le flot sur ce dernier type d'arc contribue à la contrainte de recouvrement du segment de vol correspondant. Les nœuds intermédiaires connectant ces paires d'arcs peuvent ainsi être utilisés pour représenter les connexions explicites, une connexion explicite étant représentée par un arc allant d'un nœud intermédiaire à un autre. Le flot sur les arcs de connexion explicite entre deux segments de vol contribue à la contrainte de recouvrement du premier segment de vol. À la figure 5.1 sont représentées les arrivées et les départs à une station donnée pour une certaine portion de l'horizon. Les arcs verticaux correspondent aux arcs d'attente au sol, les autres arcs en trait plein aux arcs d'opportunité de vol et aux arcs de vol, et les arcs en pointillé aux arcs de connexion explicite. L'exemple de la figure comporte des segments de vol domestiques (dom) et internationaux (int). On suppose qu'à la station illustrée sur la figure, le temps de connexion entre deux segments de vol internationaux est plus petit que celui entre un segment de vol international et un segment de vol domestique. Ainsi le nœud de fin de vol du segment de vol international entrant est calculé en considérant un temps de connexion avec un segment de vol de type domestique. Si la connexion entre le segment de vol international entrant et le

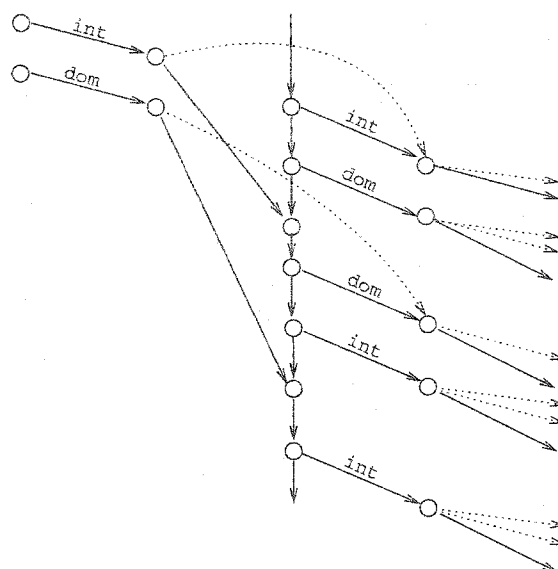


Figure 5.1 – Temps de connexion variables (premier modèle)

premier segment de vol international sortant est possible, alors on doit ajouter une connexion explicite entre ces deux segments de vol.

Le second modèle (figure 5.2) consiste à construire pour chaque station autant de suite d'arcs au sol qu'il y a de types de segment de vol entrant ou sortant à cette station. De plus, on multiplie par ce même nombre les arcs de vol entrant à cette station, chacun de ces arcs étant connecté à une suite différente d'arcs au sol. Le temps de fin de vol associé à chacun de ces arcs est calculé en fonction du temps de connexion entre le segment de vol et un segment de vol quelconque du type associé à la suite d'arcs au sol à laquelle est connecté l'arc de vol. Nous avons illustré ceci à la figure 5.2. Chaque suite d'arcs au sol a été identifiée par le type de segment de vol auquel elle est associée (dans l'exemple, on retrouve les types domestique, transfrontalier et international). On suppose que le segment de vol entrant est de type domestique. Les arcs de vol de ce segment de vol ont été identifiés par le total (en minutes) de la durée du segment de vol et du temps de connexion (200, 225

et 245 minutes). On peut ainsi constater que le temps de connexion requis pour effectuer une connexion entre ce segment de vol et un segment de vol sortant de type domestique est significativement inférieur à celui requis pour effectuer une connexion avec un segment de vol transfrontalier ou international. Finalement, les nœuds de début de vol des segments de vol sortants sont incorporés dans la suite d'arcs au sol correspondant à leur type respectif.

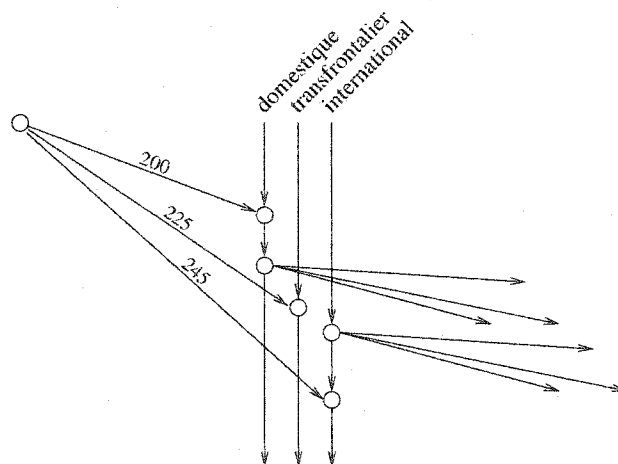


Figure 5.2 – Temps de connexion variables (second modèle)

Le premier modèle comportera en général moins d'arcs que le second aux stations peu achalandées, alors que ce sera l'inverse aux stations très achalandées. Il s'avère donc pertinent de définir un modèle hybride dans lequel le choix du modèle varie en fonction de la station. Ainsi, pour chaque station, nous évaluons quel est le modèle le plus intéressant à utiliser. Pour créer un tel modèle hybride, il suffit d'intégrer au second modèle des nœuds intermédiaires pour chacun des segments de vol, lesquels relieront ensemble les multiples arcs de vol associés à un même segment de vol. Ces nœuds intermédiaires permettront d'établir facilement les connexions explicites que l'on retrouve dans le premier modèle. Un exemple est illustré à la figure 5.3, où l'on utilise le premier modèle aux stations A et C, et le second modèle à la station B.

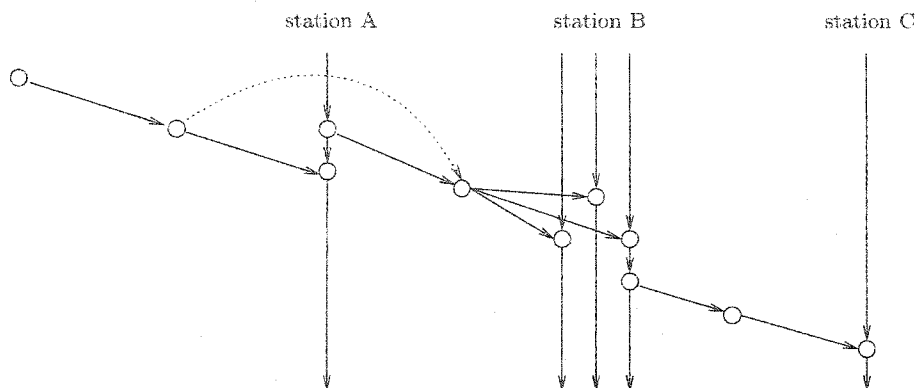


Figure 5.3 – Temps de connexion variables (modèle hybride)

Pour fins de comparaison, nous indiquons au tableau 5.1 les temps de résolution obtenus pour résoudre deux jeux de données (hiver et été 2002) à l'aide de deux algorithmes de résolution différents. Dans le cas du modèle hybride, le premier modèle a été utilisé à toutes les stations, à l'exception des trois stations très achalandées de Montréal, Toronto et Vancouver. Les colonnes du tableau indiquent le jeu de données utilisé, l'algorithme utilisé pour résoudre le problème avec homogénéité (approche en deux phases présentée au chapitre 4 avec une ou trois journées consécutives considérées en phase I pour déterminer les types dominants), ainsi que les temps de résolution observés en utilisant le premier ou le second modèle, ou encore le modèle hybride. On constate qu'étant donné le choix des stations achalandées que nous avons fait, le modèle hybride s'est avéré en général plus performant que les deux autres.

### 5.2.5 Connexions directes imposées ou optionnelles

Les passagers désirent voyager en fonction de l'origine-destination et du moment de départ et/ou d'arrivée, et non en fonction des segments de vol offerts. Ainsi, il arrive souvent que leurs déplacements soient composés de deux segments de vol ou plus. Il est en général apprécié par les passagers que ces segments de vol soient connectés de

Tableau 5.1 – Temps de résolution des modèles avec temps de connexion variables

Jeu de données	Algo	Modèles		
		Premier (sec.)	Second (sec.)	Hybride (sec.)
Hiver (2002)	1 jour	6163	7181	5087
	3 jours	7420	8254	7057
Été (2002)	1 jour	8967	14355	9179
	3 jours	56022	40490	28017

façon directe pour former un vol avec escale, ce qui simplifie et accélère beaucoup leur connexion, car ils n'ont alors pas à changer d'avion. Les compagnies aériennes peuvent donc, pour des raisons commerciales, tenir à préserver certaines connexions directes entre certains segments de vol associés à des marchés spécifiques, ce qui implique évidemment que ces segments de vol soient couverts par le même avion. Au niveau du modèle, une suite de segments de vol entre lesquels on impose des connexions directes peut être considérée comme un seul segment de vol pour lequel la station et le moment du départ sont ceux du premier segment de vol de la suite et la station et le moment d'arrivée sont ceux du dernier segment de vol.

Il peut de plus être intéressant pour la compagnie de vouloir favoriser l'utilisation de connexions directes sur certaines suites de segments de vol pour profiter de leur impact positif sur la clientèle sans toutefois vouloir l'imposer, afin de permettre l'utilisation d'avions de types différents sur ces segments de vol si cela s'avérait globalement plus profitable. Également, il peut être intéressant d'établir des connexions directes pour profiter du fait que le temps requis pour ces connexions est en général significativement plus court que le temps requis pour une connexion standard. En effet, cela peut parfois permettre de connecter deux segments de vol qui, autrement, ne pourraient pas être effectués consécutivement.



Il apparaît donc pertinent de représenter dans le modèle la possibilité d'utiliser des connexions directes. Pour représenter ces connexions directes optionnelles, il suffit de relier par un arc les nœuds intermédiaires des segments de vol à connecter directement et, s'il y a lieu, d'attribuer sur cet arc une rétribution permettant de favoriser l'utilisation de cette connexion directe. La figure 5.4, semblable à la figure 5.1, illustre l'ajout au premier modèle d'une possibilité de connexion directe (représentée par un arc en tirets) entre deux segments de vol domestiques.

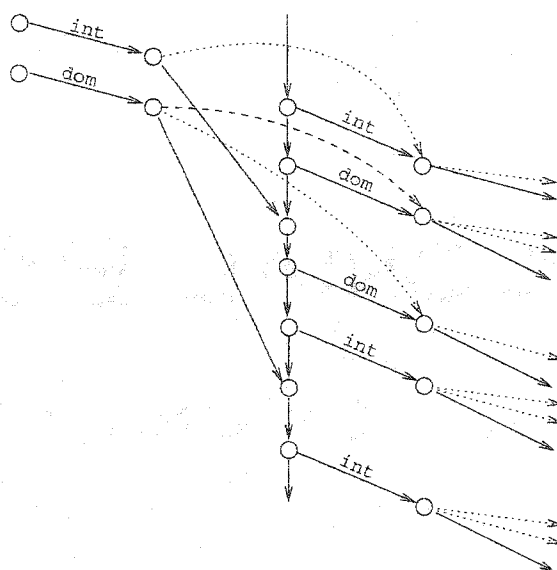


Figure 5.4 – Temps de connexion variables avec connexions directes optionnelles

### 5.2.6 Violation des temps minimaux de connexion

Les temps minimaux de connexion entre les segments de vol sont évidemment approximatifs, et il peut être intéressant d'évaluer l'impact de permettre une certaine flexibilité sur ces valeurs. Une connexion serrée entre deux segments de vol contribue à rendre le réseau plus fragile et augmente la probabilité de délai suite à des

imprévus pouvant se produire dans le contexte opérationnel. Cependant, en utilisant des temps de connexion minimaux trop conservateurs, on risque de perdre de bonnes opportunités de rentabiliser davantage le réseau.

Pour considérer cette possibilité d'accorder une flexibilité aux temps de connexion, nous avons utilisé une idée très semblable aux connexions directes optionnelles. Lorsque deux segments de vol ne peuvent être connectés à cause d'un léger manque de temps pour effectuer la connexion entre eux-ci, un arc de connexion explicite est créé, auquel est rattachée une certaine pénalité pour considérer la perte de robustesse au niveau du réseau. La valeur de cette pénalité peut être déterminée de plusieurs façon. En général, on la calculera à partir d'une fonction croissante de la violation du temps de connexion minimal.

### 5.2.7 Opportunités d'activités d'entretien

Lors de l'affectation des types d'avion aux vols, les planificateurs cherchent généralement à réserver des périodes où un avion d'un certain type devra demeurer au sol à une station pouvant offrir un service d'entretien. Ceci facilite considérablement le problème de construction des itinéraires pour les avions, dans lequel on doit s'assurer que chaque appareil puisse recevoir l'entretien nécessaire suffisamment régulièrement. Différents types d'entretien périodique sont requis, et chaque entretien s'applique sur un type d'avion spécifique. Ceux-ci peuvent avoir des durées différentes et peuvent devoir être effectués à des endroits et à des moments différents. Les planificateurs doivent donc spécifier, pour chaque type d'entretien, le type d'avion sur lequel il s'applique, la durée de cet entretien, le nombre d'opportunités d'entretien à réserver au cours de la semaine, une liste de stations pouvant offrir ce service d'entretien et, pour chacune de ces stations, des intervalles de temps pendant la semaine au cours desquels l'entretien peut être effectué (un intervalle peut par exemple consister en

quelques heures consécutives au cours d'une nuit), et le nombre maximal d'entretiens de ce type pouvant y être effectués simultanément.

Pour incorporer au modèle ces contraintes d'opportunité d'entretien, nous avons utilisé un modèle semblable à celui proposé par Clarke *et al.* (1996), que nous avons adapté à nos modèles avec temps de connexion variables. On doit dans un premier temps, pour chaque opportunité d'entretien, modifier le réseau correspondant au type d'avion sur lequel l'entretien s'applique afin de permettre à l'optimiseur de sélectionner cette opportunité d'entretien. Pour fins de simplification, la description des modifications à apporter au réseau est ici faite en supposant que le premier modèle est utilisé pour traiter les temps de connexion variables. Dans le cas où le second modèle est utilisé, les modifications au réseau décrites ci-après doivent être effectuées pour chacune des suites d'arcs au sol. La figure 5.5 illustre les modifications à apporter au réseau.

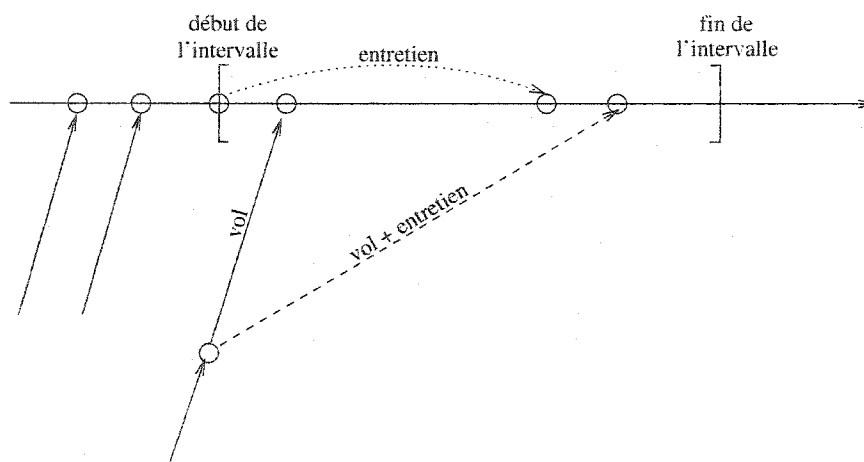


Figure 5.5 – Opportunités d'entretien

Tout d'abord, pour chaque type d'entretien et chaque station et intervalle de temps où il peut être effectué, on insère un arc reliant la station avec elle-même. Cet arc

est représenté en pointillé sur la figure 5.5. Le début de l'arc correspond au début de l'intervalle de temps au cours duquel peut s'effectuer l'entretien, et la fin de l'arc correspond au moment où l'avion est disponible pour débiter un prochain segment de vol après un entretien ayant commencé au début de l'intervalle. Le flot sur cet arc représente le nombre d'entretiens effectués sur les avions déjà au sol à cette station au début de l'intervalle. La capacité de cet arc est égale au nombre d'entretiens de ce type qu'il est possible d'effectuer simultanément à cette station à ce moment. Dans le cas d'un segment de vol dont l'arc arrive plus tard que le début de l'intervalle, mais tel que son heure d'arrivée permet qu'un entretien puisse être effectué à sa suite et être terminé avant la fin de l'intervalle, on modélise explicitement la possibilité d'effectuer cette opportunité d'entretien à la suite de ce segment de vol. Pour ce faire, on crée, en plus de l'arc de vol standard, un autre arc de vol dont le moment d'arrivée correspond à celui où l'avion est disponible après avoir effectué à la fois le segment de vol et l'entretien qui le suit. Cet arc est représenté en tirets sur la figure 5.5. Un flot sur cet arc correspond au recouvrement à la fois du segment de vol et de l'opportunité d'entretien, et doit donc contribuer aux contraintes de recouvrement de l'un et l'autre.

On doit également ajouter des contraintes pour s'assurer que le nombre requis d'opportunités d'entretien soit sélectionné et que le nombre maximal d'opportunités d'entretien effectuées simultanément à chaque station ne soit pas excédé. Dans le cas des problèmes d'Air Canada, toutes les activités d'entretien possédaient des durées supérieures à la moitié de la durée des intervalles de temps au cours desquels elles pouvaient être effectuées. Le modèle présenté ici tire profit de cette propriété. En effet, le nombre maximal d'opportunités d'entretien pouvant être effectuées simultanément à chaque station est alors égal au nombre maximal d'opportunités d'entretien pouvant y être effectuées au cours de l'intervalle. Ainsi, soit  $M$  l'ensemble des types d'opportunité d'entretien à couvrir,  $r_m$  le nombre requis d'opportunités d'entretien

de type  $m \in M$ ,  $S_m$  l'ensemble des stations où peuvent être effectués les entretiens de type  $m$ ,  $I_{ms}$  l'ensemble des intervalles de temps de la semaine pendant lesquels les entretiens de type  $m$  peuvent être effectués à la station  $s \in S_m$ , et  $g_i$  le nombre maximal d'entretiens de type  $m$  pouvant être effectués simultanément à la station  $s$  pendant l'intervalle  $i \in I_{ms}$ . De plus, soit  $\sigma_a^{msi}$  un indicateur binaire qui vaut 1 si l'arc  $a \in A$  correspond à une opportunité d'entretien de type  $m$  effectuée à la station  $s$  pendant l'intervalle  $i \in I_{ms}$  (et qui vaut 0 autrement), et  $x_a$  une variable dont la valeur correspond au flot sur l'arc  $a$ . Ainsi, les contraintes à ajouter s'écrivent comme suit :

$$\sum_{s \in S_m} \sum_{i \in I_{ms}} \sum_{a \in A} \sigma_a^{msi} x_a \geq r_m, \quad \forall m \in M, \quad (5.1)$$

$$\sum_{a \in A} \sigma_a^{msi} x_a \leq g_i, \quad \forall m \in M, s \in S_m, i \in I_{ms}, \quad (5.2)$$

où le premier ensemble de contraintes assure la couverture des opportunités d'entretien, et le second ensemble assure que le nombre maximal d'entretiens d'un certain type effectués simultanément à une station est respecté.

### 5.2.8 Annulation de segments de vol

Il peut être intéressant pour les planificateurs de pouvoir considérer, en même temps que le problème d'affectation des types d'avion aux vols, la possibilité de modifier l'horaire de vols. Cela peut se faire en permettant au modèle d'annuler certains segments de vol de l'horaire, ou encore de combiner deux segments de vol consécutifs reliant une même paire origine-destination en un seul segment de vol dont le moment du départ est situé entre ces deux segments de vol initiaux, ou encore de permettre une flexibilité sur les heures de départ des segments de vol. Dans le cas de l'étude menée avec Air Canada, seule la première possibilité, soit l'annulation de segments de

vol, a été intégrée au modèle. Pour ce faire, il suffit de définir, pour chaque segment de vol  $l \in L$  pouvant être annulé, une variable binaire  $A_l$ , qui vaut 1 si le segment de vol  $l$  est annulé et 0 sinon, et de l'incorporer à la contrainte de recouvrement du segment de vol  $l$  de la façon suivante :

$$\sum_{k \in K} X_l^k + A_l = 1, \forall l \in L.$$

S'il y a lieu, on associe également une pénalité à cette variable  $A_l$  dans la fonction objectif. Cette pénalité peut être utilisée pour refléter un certain impact négatif lié à l'annulation d'un segment de vol, ou encore servir à éviter que des segments de vol soient annulés pour un bénéfice négligeable.

Parfois les planificateurs voudront effectuer des tests en limitant le nombre total de segments de vol pouvant être annulés. Ceci permet, entre autres, d'identifier les annulations de segments de vol qui produisent le plus grand impact positif sur la profitabilité de la solution. Pour ce faire, il suffit d'ajouter une contrainte imposant que la somme des variables d'écart soit inférieure à cette quantité limite  $A_{max}$ , soit

$$\sum_{l \in L} A_l \leq A_{max}.$$

### 5.2.9 Pénalité pour changement de type d'avion

Il arrive qu'on veuille chercher à favoriser le choix de certains types d'avion sur certains segments de vol. Par exemple, il se peut qu'on possède déjà une solution à un problème donné et qu'on veuille obtenir une meilleure solution qui ne s'écarte pas trop de cette solution. On peut alors attribuer une pénalité au fait d'affecter à un segment de vol un type d'avion différent de celui qui lui est affecté dans la première solution. Pour ce faire, il suffit de soustraire cette pénalité aux coefficients de la fonction objectif associés à l'affectation de types d'avion différents sur ce segment de vol.

## 5.3 Étude de cas chez Air Canada

Nous présentons dans cette section une étude de cas menée dans le cadre d'un contrat de consultation pour Air Canada. L'objectif du projet était d'évaluer la pertinence d'intégrer l'utilisation d'un logiciel d'optimisation au travail des planificateurs pour les aider d'une part à identifier et éliminer les segments de vol non profitables du réseau, et d'autre part à planifier efficacement l'affectation des types d'avion aux vols. Pour ce faire, la compagnie aérienne nous a fourni les spécifications propres à son contexte opérationnel et commercial à partir desquelles nous avons mené les recherches qui ont permis le développement des fonctionnalités présentées à la section précédente. Nous avons effectué successivement deux types d'étude, lesquelles sont présentées aux sections 5.3.1 et 5.3.2.

### 5.3.1 Analyse de sensibilité d'une affectation

La première étude que nous avons menée pour Air Canada a été une analyse de sensibilité de leurs affectations pour les saisons d'hiver et d'été 2001. Elle consistait à étudier l'opportunité de diminuer la taille de chacune des flottes en permettant d'annuler des segments de vol prévus à l'horaire. Nous avons effectué une analyse par flotte, pour chacune des saisons. Ainsi, à partir d'une affectation donnée pour une certaine saison, nous avons considéré, pour chacune des flottes, l'ensemble des segments de vol couverts par les avions de cette flotte. Pour chaque nombre d'avions inférieur ou égal à celui utilisé dans la solution d'Air Canada, nous avons, à l'aide de notre optimiseur, été en mesure de déterminer le meilleur profit pouvant être obtenu en permettant d'annuler autant de segments de vol que nécessaire. De cette façon, nous avons pu établir pour chaque flotte une courbe décrivant le profit total en fonction du nombre d'avions. La figure 5.6 présente une de ces courbes pour la flotte

des avions de type *Airbus A320* pour l'horaire d'hiver 2001. L'abscisse correspond au nombre d'avions, alors que l'ordonnée correspond au total des profits, auxquels on a soustrait le coût fixe hebdomadaire de possession des avions de ce type. Ce coût par avion est indiqué au haut de la figure. En-dessous de chacun des points, nous indiquons le nombre de segments de vol conservés dans l'horaire. Le nombre de segments de vol présents dans l'horaire original d'Air Canada est indiqué au haut de la figure. Le nombre d'avions correspondant au point situé à l'extrême droite de la courbe coïncide avec le nombre d'avions utilisés par Air Canada. Le nombre de segments de vol indiqué en dessous de ce point correspond donc à celui obtenu à l'aide de notre optimiseur en conservant le même nombre d'avions qu'Air Canada. Notons que les temps de résolution observés pour l'obtention de ces courbes sont de l'ordre de quelques secondes.

Ces courbes ont permis aux planificateurs d'Air Canada d'obtenir rapidement des indices de rentabilité pour leurs différentes flottes et d'identifier les flottes pour lesquelles il pouvait s'avérer pertinent d'effectuer une réduction de taille tout en ayant une bonne idée des segments de vol à éliminer pour y arriver. Cette méthode d'analyse comporte toutefois d'importantes limites, car on ne permet pas de remettre en question le type d'avion affecté à chacun des vols. Nos recherches ont donc par la suite porté sur le développement d'un système d'optimisation complet permettant de considérer globalement le problème à résoudre, lequel fait l'objet de la section suivante.

### 5.3.2 Approche itérative

La seconde étude a été menée au cours de la planification de la saison d'été 2002. Air Canada a fourni un horaire hebdomadaire de vols accompagné d'une solution initiale, c'est-à-dire d'une affectation valide. À partir de cette solution et d'un modèle de



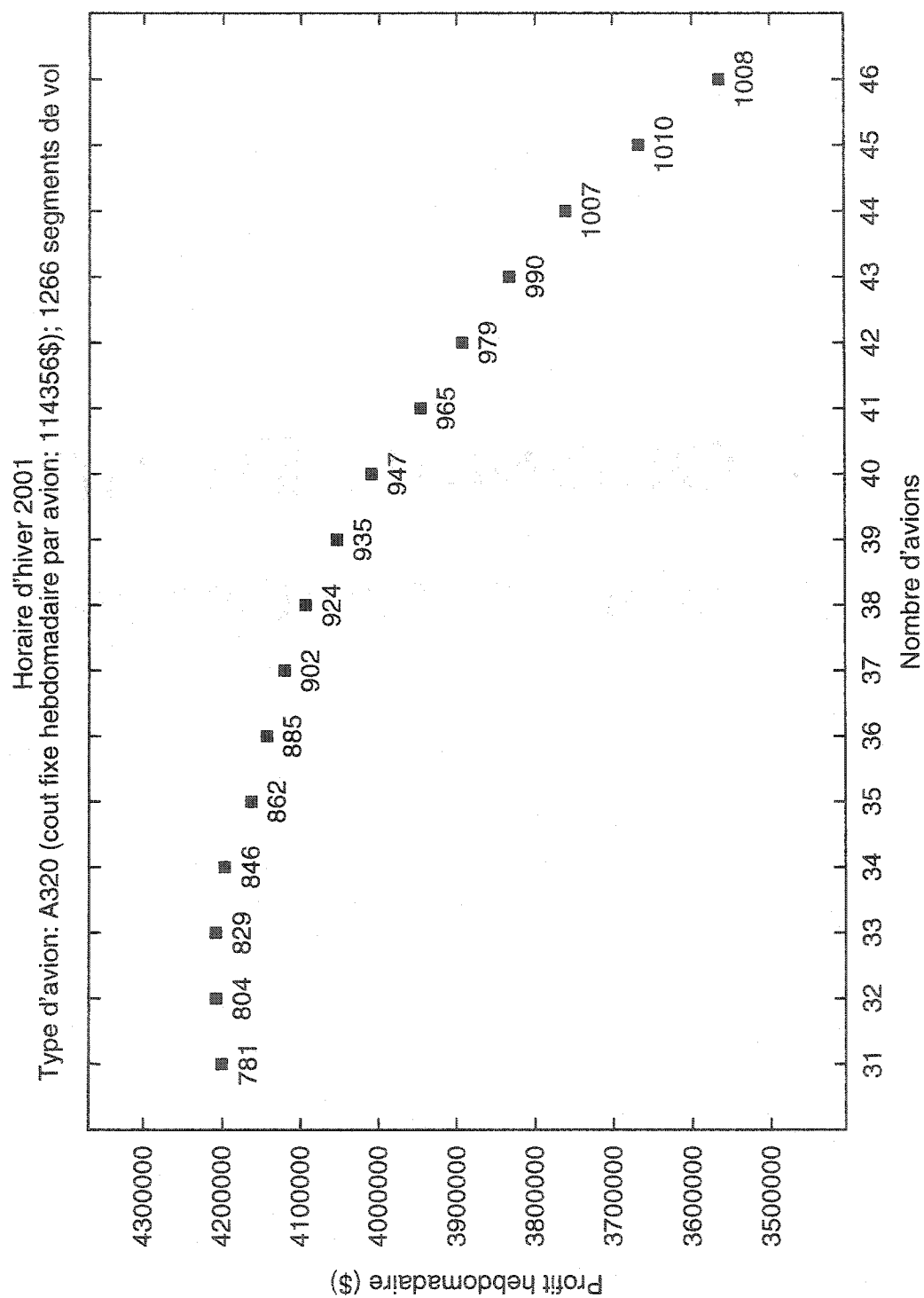


Figure 5.6 – Courbe pour la flotte des A320

répartition du flot de passagers (*Passenger Flow Model*) utilisé par la compagnie, nous avons pu obtenir un estimé de la demande en passagers pour chacun des segments de vol et, ainsi, calculer le profit anticipé pour chacun de ceux-ci en fonction du type d'avion affecté. D'autres spécifications étaient également fournies concernant les durées de vol, les temps minimaux de connexion au sol et les différentes contraintes opérationnelles et commerciales comme les restrictions de type sur certains segments de vol, les temps de vol maximaux pour chaque type d'avion, les connexions directes imposées ou optionnelles, et les opportunités requises pour les activités d'entretien. Nous indiquons au tableau 5.2 les principales caractéristiques de ce jeu de données, soit le nombre de segments de vol, le nombre d'avions, le nombre de types d'avion, le nombre moyen de types d'avion que l'on peut affecter à un segment de vol, et le nombre de stations.

Tableau 5.2 – Statistiques sur les données (saison d'été 2002)

Nb de seg. de vol	Nb avions	Nb types	Nb moy. de types par seg. de vol	Nb stations
5203	203	15	8.3	97

La démarche que nous avons utilisée pour obtenir nos solutions ne s'est pas résu-  
mée à la résolution d'un seul problème d'optimisation, mais a plutôt consisté en la  
résolution successive de plusieurs problèmes, après chacun desquels on a recalculé à  
partir de la solution obtenue la répartition du flot de passagers sur les segments de  
vol. Un tel procédé itératif permet de prendre en compte le fait que la demande en  
passagers s'exprime fondamentalement non pas en terme de segments de vol, mais  
en terme de déplacement d'une origine vers une destination à un moment précis, un  
tel déplacement pouvant être constitué de plusieurs segments de vol. Le choix de ce  
procédé a été d'autant plus important que l'on permettait à l'optimiseur d'annuler

des segments de vol. En effet, dans un tel cas, une certaine proportion des passagers qui auraient choisi un segment de vol qui a été annulé choisiront de voyager sur d'autres segments de vol offerts par le transporteur, ce qui augmentera la demande pour ces segments de vol. Ainsi, plus on annule de segments de vol, plus la demande en passagers estimée à partir de la solution initiale devient inexacte, et plus il devient important de recalculer la répartition des passagers sur les segments de vol pour obtenir des données économiques significatives. Notons que même dans le cas où il n'y a pas d'annulation de vols, cette approche itérative s'avère quand même importante, étant donné que tout changement apporté aux capacités sur les segments de vol est susceptible d'entraîner des changements au niveau de la demande en passagers pour les segments de vol. Par exemple, une augmentation de la capacité sur un segment de vol peut faire en sorte que davantage de passagers voyageront sur ce segment de vol, en partie au dépens de certains autres segments de vol du réseau.

Lors des premières itérations, on cherche surtout à réviser l'horaire de vols en annulant un nombre restreint de segments de vol globalement non profitables pour le transporteur. Au fur et à mesure des itérations, on annule de moins en moins de vols et, lors des dernières itérations, il n'y a plus d'annulation, mais seulement un ajustement final des valeurs des différentes pénalités. Il s'agit alors essentiellement de trouver le bon compromis entre la profitabilité de la solution obtenue, son niveau d'homogénéité et, possiblement, son niveau de différence par rapport à une solution de référence (par exemple, la solution initiale ou la solution choisie à l'itération précédente). Dans le cadre du projet avec Air Canada, à chacune des itérations, une famille de scénarios étaient résolus parallèlement et analysés par la suite, les scénarios d'une famille variant selon les valeurs attribuées aux différents paramètres, dont les coûts et les pénalités, ainsi que le nombre maximal de segments de vol pouvant être annulés. Nous avons effectué une dizaine d'itérations, comportant environ de trois à cinq scénarios chacune. Ces itérations se sont étalées sur une période de deux à quatre semaines, ce qui est très raisonnable comme durée en contexte de planification.

Entre chaque itération, les experts en planification prennent connaissance des changements proposés par l'optimiseur et les évaluent en tenant compte des aspects commercial et opérationnel, puis choisissent de les accepter, modifier ou rejeter. Par exemple, du point de vue commercial, puisqu'on résout un problème hebdomadaire, il se peut que parmi les vols d'un même numéro présents à plusieurs jours dans la semaine, un certain nombre de ceux-ci soient annulés par l'optimiseur, mais pas la totalité. Les planificateurs peuvent alors choisir d'annuler complètement l'ensemble des vols de ce numéro ou encore de le conserver dans sa totalité, selon la proportion de vols annulés par l'optimiseur. Les décisions ne sont ainsi pas prises vol par vol, mais plutôt par marché. Également, il arrive souvent qu'après l'observation d'une solution produite par l'optimiseur, on réalise que certaines contraintes opérationnelles ou commerciales n'ont pas été incorporées dans le modèle. Ces contraintes manquantes, lorsqu'il y en a, sont intégrées au modèle avant de passer à l'itération suivante.

Pour résoudre chacun des problèmes d'optimisation de chacune des itérations, nous avons utilisé l'approche de résolution en deux phases présentée au chapitre 4 pour le problème hebdomadaire avec homogénéité. En phase I, on détermine, en résolvant le problème avec les contraintes d'homogénéité sur un nombre restreint de journées consécutives, un type dominant pour chacun des numéros de vol présents au cours de ces journées. En phase II, l'optimisation se fait sur la semaine entière, en pénalisant, pour les numéros de vol dont le type dominant a été fixé en phase I, l'utilisation d'un autre type que ce type dominant. Quant aux numéros de vol non considérés en phase I, l'homogénéité est obtenue directement à l'aide des contraintes d'homogénéité. Les contraintes de temps maximal de vol et d'opportunité d'entretien, de même que les possibilités d'annulation de vols sont considérés uniquement lors de la résolution de la phase II, celles-ci ne s'exprimant qu'en terme de l'horizon hebdomadaire complet. Des recherches pourraient être faites dans le but d'intégrer ces aspects au niveau de la phase I.

Comme le temps de calcul augmente assez rapidement avec le nombre de journées considérées en phase I, nous avons choisi ce nombre de jours en fonction du niveau d'optimalité désiré pour l'itération courante. De plus, afin d'accélérer le processus et obtenir rapidement des solutions, il nous est arrivé de réduire l'étendue des possibilités de changements de type d'avion sur les vols. Pour ce faire, nous avons utilisé le concept de restriction de type sur certains segments de vol présenté à la section 5.2.2. Par exemple, nous avons à certains moments émis l'hypothèse que seul un type d'avion d'une certaine taille minimale serait affecté à un vol avec une demande élevée ou, à l'inverse, que seul un petit type d'avion serait affecté à un vol à faible demande.

Nous avons de plus introduit certaines fonctionnalités dans le but de se prémunir contre une trop grande sensibilité aux données dont pourrait faire preuve l'optimiseur. Par exemple, on sait qu'il y a toujours une certaine erreur d'estimation dans les prévisions de demande en passagers. Il est donc souhaitable que des annulations de vols ou des changements par rapport à l'affectation d'une solution de référence n'aient pas lieu dans le but d'engendrer des bénéfices qui seraient du même ordre de grandeur que les erreurs d'estimation. On ne veut donc pas annuler ou modifier le service sur un vol pour des motifs insuffisants, mais seulement si le gain estimé associé à ce changement est supérieur à un certain seuil. Pour ce faire, nous avons associé une pénalité correspondant à ce seuil à chacun des changements (cf. sections 5.2.8 et 5.2.9). Notons de plus que le fait de restreindre ainsi implicitement le nombre de changements de type (et donc de capacité) sur les segments de vol permet de garantir une certaine qualité dans l'estimation de la demande (et donc des revenus) par segment de vol pour la solution obtenue.

Également, les données concernant les temps minimaux de connexion sont en général quelque peu approximatives. Nous avons donc permis de légères violations de ces temps, que l'on a pénalisées, afin de permettre des connexions pouvant engendrer une profitabilité accrue des solutions produites. Pour ce faire, nous avons utilisé la

modélisation présentée à la section 5.2.6, en utilisant une fonction constante pour la pénalisation des violations. Nous avons associé une pénalité plus élevée aux violations des temps de connexion ayant lieu aux stations plus achalandées, là où la flexibilité sur les durées des opérations au sol est souvent moins grande.

## Résultats

Le projet mené avec Air Canada a permis d'obtenir pour l'été 2002 une solution dont la profitabilité hebdomadaire était d'environ 265 000 \$ supérieure à celle proposée initialement par les planificateurs, et ce en faisant seulement passer la proportion de segments de vol non homogènes de 4,0% à 4,8% et en apportant des changements de type d'avion à moins de 4,0% des segments de vol. De plus, la solution proposée par les planificateurs permettait de couvrir seulement 101 des 113 opportunités d'entretien souhaitées, alors que la solution produite par l'optimiseur permettait d'en couvrir la totalité. Après validation et quelques remaniements manuels mineurs, cette solution a été mise en opération, ce qui démontre la pertinence d'un tel outil d'optimisation dans le processus de planification. De plus, nous avons pu constater à quel point l'optimiseur présentait un attrait important pour les planificateurs d'Air Canada, tant du point de vue de l'équipe de marketing que de l'équipe de gestion des opérations. Ils ont en particulier apprécié le potentiel d'automatisation et d'optimisation du processus de planification, qui leur permet d'évaluer rapidement et à peu de frais beaucoup de scénarios possibles. Ceci leur permet donc de pouvoir rapidement évaluer la faisabilité au niveau opérationnel de leurs propositions de changement au niveau du service de vol, de même que l'impact de ceux-ci sur la profitabilité.

La résolution de chaque problème a été effectuée à l'aide de l'optimiseur CPLEX 7.5, en utilisant un processeur d'une machine Sun Entreprise 10000 (400 MHz). Avant la résolution de chaque problème, nous avons eu recours à la procédure de réduction algébrique fournie par CPLEX. De plus, après la résolution du nœud racine, nous avons

appliqué une procédure heuristique d'arrondi afin de faciliter l'obtention de solutions entières dans le branchement. Ainsi, les variables de flot binaires (et d'homogénéité, s'il y a lieu) dont la valeur était fractionnaire et supérieure à un certain seuil (que nous avons posé à 0.8) étaient fixées à 1. Ceci nous a permis d'obtenir de très bonnes solutions entières beaucoup plus efficacement. Les relaxations linéaires ont été résolues à l'aide de l'algorithme de barrière suivi d'une procédure de recouvrement de base (*crossover*), autant pour la résolution du nœud racine que pour celles des autres nœuds de l'arbre de branchement. En effet, nous avons observé que la résolution des nœuds de l'arbre par cet algorithme offrait une bien meilleure stabilité dans les temps totaux de résolution des problèmes que lorsqu'on utilisait l'algorithme du simplexe dual, qui est généralement utilisé dans le branchement pour ce genre d'application.

Nous avons effectué une série de comparaisons dans le but d'évaluer l'impact des nouvelles fonctionnalités introduites sur la taille des problèmes et leur temps de résolution. Nous avons particulièrement étudié l'impact de l'utilisation des deux fonctionnalités les plus susceptibles de faire augmenter les temps de résolution, soit les temps de connexion variables et les opportunités d'entretien. Pour ce faire, nous avons effectué des tests à partir du jeu de données de l'été 2002, que nous avons résolu avec et sans les temps de connexion minimaux variables et les contraintes d'opportunité d'entretien. Notons que pour la construction des problèmes pour les cas sans temps de connexion minimaux variables, nous avons supposé que le temps de connexion nécessaire suite à un segment de vol correspondait au temps de connexion avec un autre segment de vol du même type (et donc en général le plus court possible). Nous avons utilisé deux approches de résolution différentes pour résoudre chacun des problèmes. Ces deux approches correspondent à l'approche en deux phases, mais comportent respectivement une et deux journées en phase I. Aux tableaux 5.3 et 5.4, nous indiquons respectivement la taille des problèmes (nombre de contraintes et nombre de variables) et les temps de résolution observés. La taille des problèmes

est donnée pour chacune des phases, avant et après avoir appliqué la procédure de réduction algébrique fournie par CPLEX. Les temps de calcul sont également donnés pour chacune des phases et correspondent aux temps nécessaires pour l'obtention de la première solution entière, dont la valeur est en général relativement près de l'optimalité. Remarquons que, puisqu'on n'intègre pas les contraintes d'opportunité d'entretien en phase I pour l'approche en deux phases, la taille des problèmes et les temps de résolution correspondant à celle-ci ne varient pas selon que le problème comporte ou non ce type de contrainte. Pour chacune des données (nombre de contraintes ou de variables, temps de résolution) et pour chacune des phases, nous avons indiqué entre parenthèses l'augmentation observée par rapport au problème sans temps de connexion variables et sans contraintes d'opportunité d'entretien.

On constate tout d'abord que l'ajout des temps de connexion variables fait croître de façon significative le nombre de variables. Étant donné que nous avons utilisé le modèle hybride pour modéliser cette fonctionnalité, le nombre de contraintes est demeuré relativement inchangé. En effet, dans le modèle hybride, on utilise pour la plupart des stations le premier modèle pour les temps de connexion variables, à l'exception des quelques stations les plus achalandées. Or, dans ce premier modèle, le nombre de contraintes n'augmente pratiquement pas par rapport au modèle avec temps de connexion constants (comme celui de Hane *et al.*, 1995). On remarque cependant qu'après avoir appliqué la procédure de réduction algébrique sur le modèle, les nombres de contraintes et de variables dans le modèle avec temps de connexion variables tendent à être beaucoup plus importants que dans celui avec temps de connexion constants. Ceci montre que l'ajout des arcs dans le premier modèle diminue de beaucoup les possibilités de réduction de la taille du modèle par ce genre de procédure. On remarque en particulier que le nombre de variables est doublé, lesquelles sont essentiellement des variables binaires de flot sur les arcs. Ceci laisse toutefois croire que ce type de modèle soit plus performant que celui de Rushmeier



Tableau 5.3 – Taille des modèles

	Sans temps conn. min. var.		Avec temps conn. min. var.	
	Sans opportunités d'entretien	Avec opportunités d'entretien	Sans opportunités d'entretien	Avec opportunités d'entretien
<i>1 jour – phase I</i>				
Contraintes	20582	20582 (0 %)	20874 (1 %)	20874 (1 %)
Variables	27458	27458 (0 %)	35120 (28 %)	35120 (28 %)
Contraintes (réduit)	4933	4933 (0 %)	8169 (66 %)	8169 (66 %)
Variables (réduit)	11560	11560 (0 %)	22163 (92 %)	22163 (92 %)
<i>1 jour – phase II</i>				
Contraintes	134181	141495 (5 %)	134637 (0 %)	143143 (7 %)
Variables	175880	188832 (7 %)	223699 (27 %)	238885 (36 %)
Contraintes (réduit)	35443	39818 (12 %)	56871 (60 %)	59529 (68 %)
Variables (réduit)	77068	86905 (13 %)	145863 (89 %)	155025 (101 %)
<i>2 jours – phase I</i>				
Contraintes	53054	53054 (0 %)	53346 (1 %)	53346 (1 %)
Variables	72321	72321 (0 %)	87124 (20 %)	87124 (20 %)
Contraintes (réduit)	23386	23386 (0 %)	29711 (27 %)	29711 (27 %)
Variables (réduit)	42630	42630 (0 %)	63451 (49 %)	63451 (49 %)
<i>2 jours – phase II</i>				
Contraintes	133586	140900 (5 %)	133878 (0 %)	142384 (7 %)
Variables	175182	188134 (7 %)	222817 (27 %)	238003 (36 %)
Contraintes (réduit)	34848	39223 (13 %)	56118 (61 %)	58776 (69 %)
Variables (réduit)	76370	86207 (13 %)	144987 (90 %)	154149 (102 %)

Tableau 5.4 – Temps de résolution des modèles (sec.)

	Sans temps conn. min. var.		Avec temps conn. min. var.	
	Sans opportunités d'entretien	Avec opportunités d'entretien	Sans opportunités d'entretien	Avec opportunités d'entretien
1 jour – phase I	129	129 (0 %)	285 (121 %)	285 (121 %)
1 jour – phase II	4997	7833 (57 %)	6041 (21 %)	8230 (65 %)
2 jours – phase I	3796	3796 (0 %)	3831 (1 %)	3831 (1 %)
2 jours – phase II	3334	6314 (89 %)	5544 (66 %)	6953 (109 %)

et Kontogiorgis (1997), pour lequel on peut estimer que le nombre d'arcs est triplé par rapport au modèle à temps de connexion constant. De plus, le modèle que nous proposons permet de modéliser de façon exacte les temps de connexion variables sans devoir faire l'ajout d'hypothèses restrictives pour éviter une explosion du nombre d'arcs, comme on doit le faire lorsqu'on utilise les modèles de Rushmeier et Kontogiorgis (1997) ou de Abara (1989).

On peut également voir que l'ajout des opportunités d'entretien ne fait qu'accroître relativement peu la taille des modèles, mais en fait augmenter significativement les temps de résolution. De plus, l'analyse des résultats pour l'approche en deux jours fait ressortir le fait que lorsqu'on utilise une approche avec plusieurs jours en phase I, la présence des contraintes d'homogénéité et les difficultés numériques qui en découlent font en sorte que la différence relative de performance entre les modèles avec ou sans temps de connexion variables apparaît moins importante.

## Parallélisme

Nous avons effectué des expérimentations dans le but d'évaluer la pertinence d'utiliser plusieurs processeurs en parallèle pour réduire les temps de résolution. Dans le cas de notre algorithmine, la parallélisation peut s'effectuer essentiellement à deux niveaux. On peut paralléliser la résolution des relaxations linéaires aux différents nœuds de branchement, ou encore résoudre simultanément plusieurs nœuds en parallèle. Nous avons opté pour une parallélisation de la résolution de la première relaxation linéaire (au nœud racine de l'arbre de branchement) en utilisant la version parallèle de l'optimiseur *Barrier* de CPLEX. Par la suite, l'exploration de l'arbre de branchement s'est faite en résolvant plusieurs nœuds de l'arbre simultanément, chacun d'eux étant résolu au moyen d'un seul processeur. Ce choix a été préféré à celui où l'on résout un seul nœud à la fois avec plusieurs processeurs, car étant donné qu'une procédure importante d'arrondi est appliquée après la résolution de la relaxation linéaire du nœud racine avant d'appliquer la procédure de branchement, la taille des sous-problèmes de l'arbre est relativement petite et la parallélisation s'avère alors beaucoup moins appropriée.

Nos expériences laissent entrevoir que l'utilisation d'un grand nombre de processeurs a peu de chance de significativement réduire les temps totaux de calcul. À titre d'illustration des résultats obtenus, on présente au tableau 5.5 les temps de résolution observés en ayant recours à différents nombres de processeurs pour résoudre une phase I comportant deux jours consécutifs d'un problème provenant de la saison d'été 2002 d'Air Canada. On y indique le temps de résolution observé pour l'obtention de la solution optimale de la relaxation linéaire, le nombre de variables fractionnaires après l'application de la procédure d'arrondi, le temps passé au niveau du processus de branchement pour l'obtention de la première bonne solution entière, la profondeur de cette solution dans l'arbre de branchement, ainsi que le temps total de résolution,

Tableau 5.5 – Résolution avec parallélisme

Nb de CPU	Relaxation linéaire (sec.)	Nombre de variables fractionnaires	Branchement (sec.)	Profondeur de la solution	Temps total (sec.)
1	1929	909	5885	530	7814
2	1309	905	6812	554	8121
3	1094	913	7302	544	8396
4	1082	909	6808	469	7890

lequel correspond à la somme de la première et de la troisième colonnes. L'observation des temps de résolution de la relaxation linéaire au nœud racine est assez favorable au parallélisme. L'algorithme de barrière semble relativement bien profiter d'un ou deux processeurs supplémentaires. De plus, dans le cas de plus gros problèmes, le gain pourrait fort possiblement s'avérer encore plus substantiel.<sup>1</sup> Cependant, le parallélisme ne semble pas être profitable au niveau de la recherche d'une solution entière. Ceci s'explique entre autres par le fait que la stratégie de recherche dans l'arbre de branchement que nous utilisons est de type "profondeur-d'abord", et que les solutions entières se trouvent en général toutes assez profondément dans l'arbre. Les résultats concernant la profondeur des solutions trouvées tendent à corroborer cette affirmation. Ainsi, le fait d'explorer simultanément plusieurs directions de recherche en recourant à plusieurs processeurs ne permet pas d'apporter des améliorations significatives aux temps nécessaires pour l'obtention de la première bonne solution entière. En fait, il semble que la variation des temps de résolution provenant du caractère intrinsèquement instable du processus de branchement occulte les possibles gains pouvant provenir de la parallélisation.

<sup>1</sup>Notons que la parallélisation ne s'applique toutefois pas au niveau de la procédure de recouvrement de base (*crossover*), dont la durée peut parfois occuper une proportion non négligeable du temps de résolution de la relaxation linéaire.

## 5.4 Conclusion

Nous avons développé un modèle d'optimisation et une approche de résolution intégrant l'essentiel des fonctionnalités nécessaires pour produire des solutions réalisables en pratique au problème d'affectation des types d'avion aux vols. En particulier, le modèle permet de considérer des temps de connexion minimaux entre les segments de vol qui dépendent à la fois du segment de vol entrant et du segment de vol sortant, et ce en conservant une taille très raisonnable au modèle. De plus, ce modèle peut être utilisé pour revoir l'horaire de vols, en permettant, entre autres, l'annulation de certains segments de vol. Étant donné que la demande en passagers s'exprime fondamentalement non pas en terme de segments de vol mais en terme d'origine-destination et moment de départ, nous proposons d'utiliser une approche itérative dans laquelle on résout en alternance un problème d'affectation des types d'avion aux vols et un modèle de répartition de la demande en passagers.

Les temps de calcul nécessaires à la résolution de chaque scénario sont raisonnables dans un contexte de planification pour une compagnie de taille moyenne comme Air Canada et permettent ainsi de faire plusieurs itérations et d'étudier, à chacune de ces itérations, une famille de différents scénarios. Les résultats des expérimentations effectuées en contexte réel avec Air Canada montre que le système d'optimisation que nous avons développé peut à grand profit être utilisé à l'intérieur du processus de planification en transport aérien pour obtenir de bonnes solutions utilisables en pratique.

## Chapitre 6

# Affectation des types d'avion aux vols avec flexibilité d'horaire

Ce chapitre aborde le problème de l'affectation des types d'avion aux vols dans le contexte où l'on permet une révision significative des heures de départ des vols. Une telle flexibilité sur les horaires permet d'élargir la gamme des connexions possibles entre les vols et peut donc engendrer d'une part une diminution de la taille de la flotte nécessaire pour le recouvrement des vols, et d'autre part une augmentation de la profitabilité du réseau. Certaines précautions sont toutefois à prendre lorsqu'on permet une flexibilité significative sur les heures de départ des vols. Entre autres, lorsqu'on rapproche les heures de départ de deux vols reliant une même paire de station d'origine et de destination, on risque de surestimer la demande totale en passagers pour ces deux vols, ceux-ci devenant alors en quelque sorte en compétition l'un avec l'autre. Il apparaît donc fort souhaitable que la flexibilité sur les heures de départ soit encadrée de façon à prendre en compte l'effet du rapprochement des heures de départ des vols reliant consécutivement une même paire origine-destination. De plus, la demande en passagers pouvant fluctuer considérablement selon l'heure de départ, une grande flexibilité d'horaire risque d'entraîner une mauvaise évaluation des profits par vol. Une évaluation des profits par vol dépendant à la fois du type d'avion qui lui est affecté et de son heure de départ permettrait de mieux prendre en compte cette variation de la demande en passagers et serait ainsi plus exacte.

Nous proposons dans ce chapitre un modèle mathématique et une approche de résolution exacte permettant de résoudre le problème d'affectation des types d'avion

aux vols d'un horaire périodique en permettant une flexibilité d'horaire, tout en pénalisant un rapprochement trop prononcé entre les heures de départ de certains vols et en intégrant l'heure de départ dans le calcul du profit par vol. Le modèle est un programme mathématique en nombres entiers basé sur une structure de réseau espace-temps de type multi-commodité, que l'on résout par une approche de séparation et d'évaluation progressive en relaxant les contraintes d'intégrité sur les variables de flot. Les noeuds de l'arbre de branchement sont résolus par une approche de génération de colonnes appliquée sur une reformulation inspirée de celle de Dantzig-Wolfe. Cette approche de résolution a été testée à partir de jeux de données fournis par un transporteur aérien de taille moyenne.

Les premières expérimentations que nous avons menées ont révélé d'importants manques de robustesse au niveau de l'exploration de l'arbre de branchement lorsqu'on fait appel aux méthodes classiques de branchement pour les problèmes d'horaires et de tournées de véhicule. Nous avons mis en évidence deux principales causes de ces difficultés, toutes deux reliées à l'aspect périodique du problème. À partir de ces observations, nous avons élaboré de nouvelles méthodes de branchement spécialement adaptées pour surmonter ces difficultés. Ces nouvelles méthodes de branchement ont permis d'améliorer très significativement la performance de l'optimiseur sur ce problème. Ces expérimentations nous ont de plus permis d'observer d'importants sauts d'intégrité associés aux contraintes d'espacement. Nous présentons à la fin de ce chapitre un exemple montrant en quoi ces contraintes peuvent être la source d'importants sauts d'intégrité.

Également, les résultats expérimentaux obtenus ont permis d'évaluer les bénéfices liés à différents degrés de flexibilité sur les heures de départ des vols et de montrer qu'il est à ce jour numériquement possible, pour des problèmes de taille moyenne, d'intégrer à l'objectif du programme d'optimisation l'impact des réductions d'espacement entre certains vols, de même que la variation des revenus par vol en fonction de l'heure de

départ. Ainsi, puisqu'une bonne flexibilité sur les heures de départ permet de réduire substantiellement la taille de la flotte et/ou d'améliorer significativement la profitabilité, il s'avère pertinent d'intégrer une flexibilité d'horaire importante au problème d'affectation des avions aux vols, quitte à devoir l'encadrer par des contraintes d'espacement et à prendre en compte l'effet de dépendance des revenus par rapport aux heures de départ.

Le contenu du chapitre est essentiellement constitué d'un article soumis pour publication à la revue *European Journal of Operational Research*. À la suite de cet article, on présente en détail deux exemples auxquels on fait référence dans l'article. Ces deux exemples sont liés aux découvertes que nous avons faites concernant les causes des difficultés au niveau de l'obtention de bonnes solutions entières pour le problème considéré.



## **6.1 Periodic Airline Fleet Assignment with Time Windows, Spacing Constraints, and Time Dependent Revenues**

**Nicolas Bélanger, Guy Desaulniers and François Soumis**  
École Polytechnique and GERAD  
Montréal, Québec, Canada  
{Nicolas.Bélanger, Guy.Desaulniers,  
François.Soumis}@gerad.ca

**Jacques Desrosiers**  
École des Hautes Études Commerciales and GERAD  
Montréal, Québec, Canada  
Jacques.Desrosiers@hec.ca

### Abstract

Given the sets of flights and aircraft of an airline carrier, the fleet assignment problem consists of assigning the most profitable aircraft type to each flight. In this paper we propose a model for the periodic fleet assignment problem with time windows in which departure times are also determined. Anticipated profits depend on the schedule and the selection of aircraft types. In addition, short spacings between consecutive flights which serve the same origin-destination pair of airports are penalized. We propose a non-linear integer multi-commodity network flow formulation. We develop new branch-and-bound strategies which are embedded in our branch-and-price solution strategy. Finally, we present computational results for periodic daily schedules on three real-world data sets.

*Keywords :* Integer programming; Dantzig-Wolfe decomposition; Column generation; Routing; Scheduling; Airline fleet assignment.

### Résumé

Le problème d'affectation des types d'avions aux vols consiste à déterminer le choix le plus profitable pour un transporteur aérien quant au type d'avion à être affecté à chacun des vols d'un horizon donné. Nous proposons dans cet article une extension avec fenêtres de temps sur les heures de départ dans laquelle est pénalisé l'espace-ment trop court entre les vols desservant consécutivement la même paire de villes. Les profits sont estimés en fonction des heures de départ choisies et des types d'avions sélectionnés. Nous proposons un modèle multi-flots non linéaire en nombres entiers intégrant des variables de temps. L'approche de résolution fait appel à la génération de colonnes et de nouvelles stratégies de branchement ont été développées. Nous présentons les résultats d'un ensemble de tests numériques pour un horizon périodique d'une journée réalisés sur trois jeux de données.

*Mots clés :* Programmation en nombres entiers ; décomposition Dantzig-Wolfe ; génération de colonnes ; routage ; horaire ; transport aérien.

### 6.1.1 Introduction

Given the set of flights and the aircraft fleet of an airline carrier, the fleet assignment problem consists of assigning the most profitable aircraft type to each flight leg. An extension to this problem is to allow for some flexibility on flight departure times. These time adjustments increase the number of possible connections and therefore improve the solution quality in terms of profits or in the reduction of the number of aircraft utilized to cover all flights. However, such adjustments should be done with care. For instance, if the departure times of two flights which serve the same pair of cities become too close, these flights compete with each other and passenger demands on these flights may be overestimated. Since passenger demand depends on departure times, estimates of flight revenues may as well be inaccurate when relatively large time windows are used. Therefore it is important to control the spacing out between consecutive flights which serve the same origin-destination pair and the demand estimations within the time windows.

In this paper we consider a periodic scheduling horizon and we propose a model for the fleet assignment problem with time windows in which short spacings between consecutive flights which serve the same origin-destination pair are penalized while profit estimates are functions of both departure times and aircraft types. We propose a mathematical model based on a non-linear integer multi-commodity network flow structure. We also present a solution approach using a branch-and-price strategy applied to a decomposition of the model. Columns are generated using a specialized longest path problem with time windows and linear costs on arc flows and on node visiting times. New branching strategies are presented, which appear to be essential for efficiently solving the problem. Our experiments show that this approach performs well for solving daily instances with large time windows.

The paper is organized as follows : In Section 6.1.2 we describe the problem. The literature is reviewed in the following section. A mathematical model is developed in

Section 6.1.4. The column generation solution approach is presented in Section 6.1.5 followed in Section 6.1.6 by a detailed description of the branch-and-bound strategies. Section 6.1.7 presents a series of results for periodic daily schedules on three real-world data sets. Our conclusions are reported in Section 6.1.8.

## 6.1.2 Problem Description

A flight is characterized by a pair of origin-destination (O-D) airports, its duration with respect to an aircraft type and a time window in which departure must occur. Given a heterogeneous fleet of aircraft and a scheduling horizon, we are looking for the best assignment of aircraft types to flights together with the departure time of each flight. Restrictions on time windows may apply for some aircraft, for example, to respect curfew imposed at certain airports. An aircraft itinerary is a sequence of flights (that can be covered by a single aircraft) between consecutive O-D airports for which departure times within the corresponding time windows allow for sufficient connection times. We assume here that the minimum connection time depends on the inbound flight and the aircraft type. In some cases, it may also depend on the outbound flight. Indeed, a domestic flight followed by an international one (or vice versa) may require the towing of the aircraft between assigned gates, and hence may significantly increase the connection time.

In a feasible fleet assignment the itineraries of all aircraft must be constructed in such a way that each flight is operated by the selected type, and that the itineraries can be repeated over the subsequent scheduling horizons. An optimal assignment maximizes the total anticipated profits, taking into account the negative impact of short spacing between the departure times of consecutive flights as well as the fixed costs incurred by the use of the aircraft fleet. In this paper, the anticipated profits of a flight do not only depend on the aircraft type but also on the selected departure time which

in turn influences passenger demand. Moreover, in order to minimize the fleet size, we use a large fixed cost for the utilization of an aircraft.

### 6.1.3 Literature Review

Literature on the fleet assignment problem with a fixed schedule spans over several decades, the most recent papers being those of Abara (1989), Subramanian *et al.* (1994), Hane *et al.* (1995), and Rushmeier and Kontogiorgis (1997). Formulations and solution approaches are very similar. They rely on a mixed integer multi-commodity network flow formulations based on a space-time graph representations that are solved by branch-and-bound.

Richer fleet assignment models taking into account additional components of the airline decision process have also been considered. Clarke *et al.* (1996) introduce maintenance and crew considerations while Barnhart *et al.* (1998) propose an extended weekly model with maintenance constraints that is solved using a branch-and-price approach. Each node of the search tree corresponds to the linear relaxation of a problem based on a set partitioning model solved by column generation where the column generator is a longest path problem. Columns in the set partitioning problem refer to feasible aircraft itineraries.

Two types of approaches have been proposed in the literature to handle departure time windows. In the first (Levin, 1971 and Rexing *et al.*, 2000), time windows are discretized, hence creating a number of copies for each flight in the underlying space-time network representation. The problem then formulates as an integer program that is solved by a branch-and-bound algorithm or an iterative solution approach proposed in Rexing *et al.* (2000). In the second (Desaulniers *et al.*, 1997), a multi-commodity network flow model involving continuous time variables and time window restrictions

on these variables is solved by branch-and-price where the column generator is a time constrained longest path problem (see Desrochers and Soumis (1988a, 1988b)). The first approach type has the disadvantage of being less accurate than the second type when a coarse discretization is used to obtain a tractable formulation size. However, it can easily handle time dependent revenues which require an increasing complexity of the column generator in the second approach type. For both types, similar constraints must be incorporated into the model to account for spacing requirements. In this paper, we chose an approach of the second type due to its higher accuracy.

Bélanger *et al.* (2002) address the fleet assignment problem for a weekly flight schedule where it is desirable to assign the same type of aircraft to the legs operating with the same flight number on different days of the week. Even though it may reduce schedule profitability, aircraft type homogeneity is sought in order to improve the planning and implementation of the operations.

A solution to the fleet assignment problem must maximize the total expected profits from the flight schedule. In our model, expected profits are computed by flight leg and vary according to the aircraft type assigned to it. This is an approximation of the reality since passenger demand arises by O-D pair and the passenger demand for each flight leg can only be obtained when passenger routing is known. However, this routing depends on the capacity of each leg given by the fleet assignment. In order to get a better approximation, our model could be integrated in a feedback loop with a passenger routing model. Another alternative, introduced in Barnhart *et al.* (2002), would be to consider simultaneous fleet assignment and passenger routing. However, the work of these authors does not address the bi-level optimization problem involved in the interaction between the airline that tries to maximize their profits, and the passengers that select their routing among the choices proposed by the airline and its competitors according to their preferences (namely, a low ticket fare). Further research is, therefore, needed to obtain a more realistic model that includes this important aspect of the problem.

The model proposed in this paper for the periodic fleet assignment problem with time windows follows the general vehicle routing and crew scheduling framework proposed in Desaulniers *et al.* (1998). Multi-commodity flows, branch-and-bound and column generation are used to solve it. One difficulty is the generation of the columns, or equivalently, the feasible aircraft itineraries. To account for flight spacing constraints as well as time dependent profit estimates, itineraries are generated using a specialized time window constrained longest path problem in which the objective function is of the form  $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \alpha^\top \mathbf{t}$ , that is, a linear combination of the arc flow ( $\mathbf{x}$ ) and node time ( $\mathbf{t}$ ) variables. Ioachim *et al.* (1998) propose an efficient dynamic programming algorithm to solve that type of time constrained path problem. It has already been used in several applications, among which are aircraft routing with schedule synchronization (Ioachim *et al.*, 1999) and simultaneous optimization of flight and pilot schedules in a recovery environment (Stojković and Soumis, 2001). In the former application, flights on certain O-D pairs must be scheduled at the same time but on different days of a weekly horizon. In the latter, small schedule perturbations do not alter aircraft itineraries but flight departure times are delayed at a certain cost.

#### 6.1.4 A Mathematical Model

Let  $K$  and  $L$  be the sets of aircraft and flight legs, respectively. Assume the scheduling horizon is given by the interval  $[0, T]$ . For a flight  $l$  operated by aircraft  $k$ , let  $d_l^k$  and  $[A_l^k, B_l^k]$  be its duration and the departure time window, respectively. The duration of a flight is defined as the time elapsed between its departure time and the moment the aircraft is ready for a subsequent flight, that is, it includes a minimal connection time at the arrival airport. In a periodic schedule, it is allowed that time windows intersect with the horizon boundary. Without loss of generality, we assume  $0 \leq A_l^k < T$  while  $B_l^k > T$  is legitimate. We denote by  $p_l^k$  the anticipated profits if the departure



time occurs at time  $A_l^k$ . Let  $\lambda_l^k$  be the slope of the profit adjustment within time window  $[A_l^k, B_l^k]$ . Therefore, the anticipated profits are given by the affine function  $p_l^k + \lambda_l^k(t_l^k - A_l^k)$ , where  $t_l^k \in [A_l^k, B_l^k]$  is the optimized departure time. Additionally, for a pair  $(i, j)$  of consecutive flights  $i, j \in L$  which serve the same O-D pair, a penalty  $P_{ij}$  is incurred if the spacing between consecutive departure times is less than a certain threshold denoted by  $\Delta_{ij}$ . Let  $M$  be the set of such flight pairs for which this is required.

The mathematical model is built on a space-time graph which describes the possible movements of the fleet of aircraft. The following two subsections provide a description of the underlying network structure and the proposed mathematical formulation.

### A Multi-Commodity Network Structure

To each aircraft  $k \in K$ , we assign a network flow commodity. We denote by  $L^k \subset L$  the set of flights that can be served by this specific aircraft  $k$ . A space-time network  $G^k = (N^k, A^k)$  is constructed, where  $N^k$  and  $A^k$  are the sets of nodes and arcs, respectively. To model the flexibility on flight departure times, time intervals on nodes and durations on arcs are required. Unless otherwise specified, all arcs of  $G^k$  are assigned a null profit and a null duration. We first define a source node  $o^k$  and a sink node  $d^k$  with time windows  $(-\infty, 0]$  and  $[0, T]$ , respectively (see Figure 6.1 where  $T = 1440$ ). Arc  $o^k \rightarrow d^k$  allows for the non utilization of aircraft  $k$ .

For each flight  $l \in L^k$  which serves a given O-D pair of airports the sequence  $O_l^k \rightarrow n_l^k \rightarrow D_l^k$  of nodes and arcs is created. We assign time windows  $[0, T]$  to the origin node  $O_l^k$ ,  $[A_l^k, B_l^k]$  to the flight node  $n_l^k$ , and  $[0, T]$  to the destination node  $D_l^k$ . The first arc is assigned the anticipated profits  $p_l^k$  while the second arc is assigned the flight duration  $d_l^k$ .



To construct a periodic solution, we need additional nodes and arcs to ensure that all aircraft will be at the right place and time at the beginning of the next period. Depending on the departure time, a part of flight  $l$  may fall into the next scheduling period if  $B_l^k + d_l^k > T$ . Three new nodes are created for such a flight : flight nodes  $\bar{n}_l^k$  and  $\hat{n}_l^k$ , to which we assign time windows  $[A_l^k, B_l^k]$  and  $[A_l^k - T, B_l^k - T]$ , respectively ; and a destination node  $\hat{D}_l^k$  with time window  $[0, T]$ . To ensure periodicity in the mathematical formulation, the scheduling times at nodes  $\bar{n}_l^k$  and  $\hat{n}_l^k$  must be synchronized, that is, the time at node  $\bar{n}_l^k$  must be equal to the time at node  $\hat{n}_l^k$  plus  $T$ . The new arc sequences are :  $n_l^k \rightarrow \bar{n}_l^k \rightarrow d^k$  at the end of the horizon, and  $o^k \rightarrow \hat{n}_l^k \rightarrow \hat{D}_l^k$  at the beginning of the horizon. In the following, arc  $\bar{n}_l^k \rightarrow d^k$  is denoted  $\bar{a}_l^k$  and arc  $o^k \rightarrow \hat{n}_l^k$  is denoted  $\hat{a}_l^k$ . Arc  $\hat{n}_l^k \rightarrow \hat{D}_l^k$  is assigned the flight duration value  $d_l^k$ . Note that if  $A_l^k + d_l^k > T$ , the original destination node  $D_l^k$  and the arc  $n_l^k \rightarrow D_l^k$  can be removed since no other flights can be served by that aircraft after flight  $l$ .

With each origin or destination node  $O_l^k$ ,  $D_l^k$ , or  $\hat{D}_l^k$ , for all  $k \in K$  and for all  $l \in L^k$ , is associated the corresponding takeoff or landing airport  $s_l^k \in S$ . For a given airport, time values are assigned to these nodes so that they can be chronologically sorted. Origin node  $O_l^k$  is assigned the latest possible departure time  $B_l^k$  while destination nodes  $D_l^k$  and  $\hat{D}_l^k$  are assigned the earliest arrival time  $A_l^k + d_l^k$ . In case of a tie, destination nodes precede origin nodes. Ground arcs are created between the successive nodes at an airport. For  $s \in S$ , arc  $a_{os}^k$  links the source node  $o^k$  to the first node of airport  $s$  with a negative profit corresponding to the fixed cost incurred for using aircraft  $k$  while arc  $a_{ds}^k$  connects the last node of airport  $s$  to the sink  $d^k$ .

**Remark 1.** Two types of possible connections are not considered in the above basic network construction. Type 1 occurs when a flight  $l$  can end after time  $T$  and another flight  $l'$  can be served immediately after it (see Figure 6.2). Formally, the necessary and sufficient conditions for such a connection are :  $A_l^k + d_l^k \leq B_{l'}^k$ ,  $B_l^k + d_l^k > T$ , and

$B_l^k > T$ . In this case, arc  $n_l^k \rightarrow n_{l'}^k$  is created (see Figure 6.1) to which we assign the duration  $d_l^k$  and the anticipated profits  $p_{l'}^k$ .

Connections of type 2 appear when a flight  $l'$  can start after time  $T$  (i.e.,  $B_{l'}^k > T$ ) following a flight  $l$  starting just after  $T$ , that is, at the beginning of the next horizon (see Figure 6.3). The conditions are :  $A_l^k + d_l^k \leq B_{l'}^k - T$ . Flight  $l$  is located at the beginning of the horizon while flight  $l'$  is at the end, which forbids the allowed connection. In this case, two supplementary nodes are created for  $l'$  :  $\tilde{n}_{l'}^k$  with time window  $[A_{l'}^k - T, B_{l'}^k - T]$  and  $\tilde{D}_{l'}^k$  with time window  $[0, T]$ . The arc sequence is  $n_l^k \rightarrow \tilde{n}_{l'}^k \rightarrow \tilde{D}_{l'}^k$ ; the first arc supports the flight duration  $d_l^k$  and the anticipated profits  $p_{l'}^k$  while the second arc is assigned the flight duration  $d_{l'}^k$ .

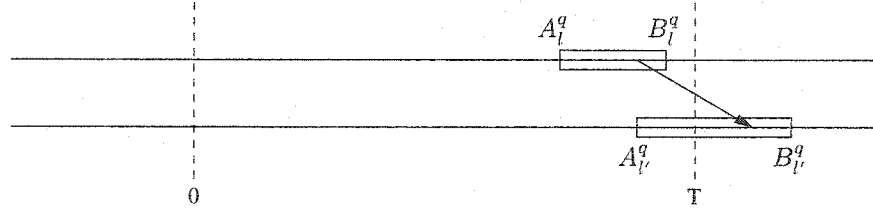


Figure 6.2 – Type 1 connection

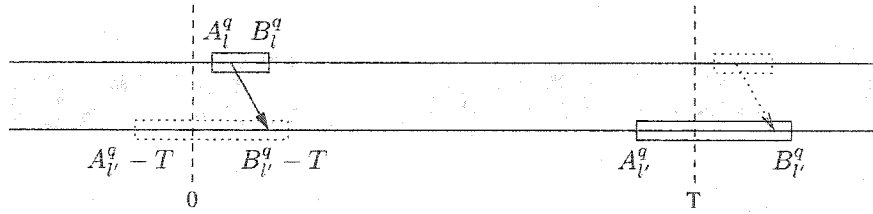


Figure 6.3 – Type 2 connection

## A Mathematical Formulation

Given a node  $n \in N^k$ ,  $k \in K$ , let  $\Gamma(n) \subset A^k$  be the subset of outgoing arcs and  $\Gamma^{-1}(n) \subset A^k$  the set of entering arcs. The associated time window is denoted  $[a_n^k, b_n^k]$ . A linear cost  $\alpha_n^k = \lambda_l^k$  is assigned to each node  $n = n_l^k$  and  $n = \hat{n}_l^k$ ,  $l \in L^k$ , and 0 to all the remaining nodes. We assign a profit  $c_a^k$  and a duration  $d_a^k$  to each arc. And a binary flow variable  $x_a^k$  assumes the value 1 if and only if arc  $a \in A^k$  is used. We also define the time variable  $t_n^k$  which represents the difference between the visiting time and the beginning  $a_n^k$  of the time window at node  $n \in N^k$ . This time definition has been chosen in place of the service time at node  $n$  for the reason of an improved numerical stability. Given two consecutive flight legs  $i$  and  $j$ ,  $(i, j) \in M$ , we also define a non-negative time variable  $T_{ij}$  that is used to penalize a spacing between the corresponding departure times which is below a certain threshold  $\Delta_{ij}$ .

To complete the notation, let  $K' \subset K$  be the subset of aircraft that can cover flight leg  $l \in L$ . Define  $Q$  as the set of aircraft types and let  $K_q \subset K$  be the subset of aircraft of type  $q \in Q$ . Finally, define  $P \subset L$  as the subset of flights that overlap on two periods and need to satisfy synchronization constraints in a periodic schedule.

To simplify the presentation of the mathematical model and without loss of generality, we assume that the networks are constructed over two periods so that it is not necessary to introduce the *modulo function* within several constraints which involve the difference of time variables. A mathematical formulation of the problem based on the previous definitions and the multi-commodity network structure is as follows :

$$\text{Maximize } Z = \sum_{k \in K} \sum_{a \in A^k} c_a^k x_a^k + \sum_{k \in K} \sum_{n \in N^k} \alpha_n^k t_n^k - \sum_{(i,j) \in M} P_{ij} T_{ij} \quad (6.1)$$

subject to :

$$\sum_{k \in K^l} \sum_{a \in \Gamma(n_l^k)} x_a^k = 1, \quad \forall l \in L \quad (6.2)$$

$$\sum_{k \in K^j} (t_{n_j^k}^k + a_{n_j^k}^k X_{n_j^k}^k) - \sum_{k \in K^i} (t_{n_i^k}^k + a_{n_i^k}^k X_{n_i^k}^k) + T_{ij} \geq \Delta_{ij}, \quad \forall (i, j) \in M \quad (6.3)$$

$$\sum_{k \in K_q} x_{a_{os}^k}^k = \sum_{k \in K_q} x_{a_{ds}^k}^k, \quad \forall q \in Q, s \in S \quad (6.4)$$

$$\sum_{k \in K_q \cap K^l} x_{a_l^k}^k = \sum_{k \in K_q \cap K^l} x_{a_l^k}^k, \quad \forall q \in Q, l \in P \quad (6.5)$$

$$\sum_{k \in K^l} (t_{n_l^k}^k + a_{n_l^k}^k X_{n_l^k}^k) = \sum_{k \in K^l} (t_{n_l^k}^k + a_{n_l^k}^k X_{n_l^k}^k), \quad \forall l \in P \quad (6.6)$$

$$\sum_{a \in \Gamma(n)} x_a^k - \sum_{a \in \Gamma^{-1}(n)} x_a^k = \begin{cases} 1, & \forall k \in K, n = o^k \\ 0, & \forall k \in K, n \in N^k \setminus \{o^k, d^k\} \\ -1, & \forall k \in K, n = d^k \end{cases} \quad (6.7)$$

$$0 \leq t_n^k \leq (t_n^k - a_n^k) X_n^k, \quad \forall k \in K, n \in N^k \quad (6.8)$$

$$x_{(n,m)}^k (t_n^k + a_n^k + d_{(n,m)}^k - (t_m^k + a_m^k)) \leq 0, \quad \forall k \in K, n \in N^k, m \in \Gamma(n) \quad (6.9)$$

$$X_n^k = \sum_{a \in \Gamma(n)} x_a^k, \quad \forall k \in K, n \in N^k \quad (6.10)$$

$$x_a^k \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K, a \in A^k. \quad (6.11)$$

The objective function (6.1) reflects maximization of the total anticipated profits adjusted for the spacing penalties and the fixed costs for the use of the aircraft fleet. Constraint set (6.2) ensures the covering of all flights exactly once. Each of the constraints in (6.3) is used to compute the deviation between the optimized spacing time and the threshold  $\Delta_{ij}$  for two consecutive flights  $i$  and  $j$  which operate between the same O-D pair,  $(i, j) \in M$ . Note that we have implemented the special case where the time windows do not depend on the aircraft type, i.e.,  $a_n^k = a_n, \forall n \in N^k, k \in K$ ; therefore, the spacing constraints are rewritten as

$$\sum_{k \in K^j} t_{n_j^k}^k - \sum_{k \in K^i} t_{n_i^k}^k + T_{ij} \geq \Delta_{ij} + a_{n_i} - a_{n_j}, \quad \forall (i, j) \in M. \quad (6.12)$$

Constraints (6.4)–(6.6) are imposed to ensure a periodic schedule. Set (6.4) guarantees that the number of aircraft on the ground for each type  $q$  is the same at the beginning and at the end of the schedule horizon in each airport  $s$ . For any flight that overlaps the horizon boundaries, that is, for  $l \in P$ , constraints (6.5) ensure the flow conservation for the supplementary arcs introduced to model the presence of these overlapping flights. Set (6.6) synchronizes the corresponding scheduling times on the supplementary flight nodes. Note again that with  $a_n^k = a_n$ ,  $\forall n \in N^k$ ,  $k \in K$ , these synchronization constraints are rewritten as

$$\sum_{k \in K^l} t_{\bar{n}_l^k}^k = \sum_{k \in K^l} t_{\bar{n}_l^k}^k, \quad \forall l \in P. \quad (6.13)$$

The remaining constraints are separable by aircraft  $k \in K$ . Constraints (6.7) are classical path constraints from the source node  $o^k$  to the sink node  $d^k$ . The time window at each node is defined by (6.8) and it imposes a zero width if the node is not visited. In this case, there is no contribution of that time variable in the objective function, in the spacing (6.3) and the synchronization (6.6) constraints. Non-linear constraints (6.9) specify the time adjustment from one node to the other. Finally, (6.10) are used only to simplify the presentation of several expressions. The domain of the variables is given by (6.11). Note that it is not necessary to require integrality on time variables.

**Remark 2.** The binary restrictions on flow variables given by constraints (6.11) are not necessary to obtain a feasible solution to the problem. To determine the aircraft type assigned to a flight, it would be sufficient to impose binary restrictions on the following smaller subsets given by the sum of flow variables :

$$X_{n_l^k}^k, X_{\bar{n}_l^k}^k, X_{\hat{n}_l^k}^k \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K, l \in L^k. \quad (6.14)$$

**Remark 3.** If the instance to be solved involves special connections of the second type, one needs to define the variables  $X_{\bar{n}_l^k}^k$  and adequately adjust for the flight

covering (6.2) and spacing out (6.3) constraints. As for the other sets of variables mentioned in Remark 2, binary restrictions must be imposed also on those variables if binary restrictions on flow variables are discarded.

### 6.1.5 Column Generation

Problem (6.1)–(6.11) is solved using a branch-and-price strategy. Our methodology follows the general scheme inspired by the Dantzig-Wolfe decomposition (Dantzig and Wolfe, 1960), as described in Desaulniers *et al.* (1998). Constraints (6.7)–(6.11) form a block angular structure separable for the  $|K|$  groups of variables  $(\mathbf{X}^k, \mathbf{T}^k)$ ,  $k \in K$ , where  $\mathbf{X}^k = (x_a^k, a \in A^k)$  and  $\mathbf{T}^k = (t_n^k, n \in N^k)$ , corresponding to the itinerary and the schedule of an aircraft. For  $k \in K$ , let  $\Omega^k$  be the set of extreme points of constraint set (6.7)–(6.11). Each one represents a path in network  $G^k$ . Recall that the non-linear constraints (6.9) can be relaxed by the following linearization (see Desrosiers *et al.*, 1995, p. 86)

$$t_n^k + d_{(n,m)}^k - t_m^k \leq (1 - x_{(n,m)}^k)(\max\{b_n^k + d_{(n,m)}^k - a_m^k, 0\}), \forall k \in K, n \in N^k, m \in \Gamma(n).$$

Therefore (6.7)–(6.11) can be considered as a set of linear constraints. Since the associated polyhedron is bounded, feasible points can be expressed as a convex combination of its extreme points only. The resulting expression substitutes variables in (6.1)–(6.6). For each path  $p \in \Omega^k$ , define a variable  $\theta_p^k \in [0, 1]$  and let

$$x_a^k = \sum_{p \in \Omega^k} x_{ap}^k \theta_p^k \quad \text{and} \quad t_n^k = \sum_{p \in \Omega^k} t_{np}^k \theta_p^k, \quad (6.15)$$

where  $x_{ap}^k$  and  $t_{np}^k$  correspond in path  $p$  to arc flow and node time variables  $x_a^k$  and  $t_n^k$ , respectively. Therefore, we can reformulate the linear relaxation of problem (6.1)–(6.11) with (6.3) and (6.6) replaced by (6.12) and (6.13), respectively, as follows :



$$\text{Maximize } Z = \sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} c_p^k \theta_p^k - \sum_{(i,j) \in M} P_{ij} T_{ij} \quad (6.16)$$

subject to :

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} v_{n_l^k p}^k \theta_p^k = 1, \quad \forall l \in L \quad (6.17)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in \Omega^k} \tau_{ijp}^k \theta_p^k + T_{ij} \geq \Delta_{ij} + a_{n_i^k}^k - a_{n_j^k}^k, \quad \forall (i, j) \in M \quad (6.18)$$

$$\sum_{k \in K_q} \sum_{p \in \Omega^k} b_{sp}^k \theta_p^k = 0, \quad \forall q \in Q, s \in S \quad (6.19)$$

$$\sum_{k \in K_q \cap K^l} \sum_{p \in \Omega^k} d_{lp}^k \theta_p^k = 0, \quad \forall q \in Q, l \in P \quad (6.20)$$

$$\sum_{k \in K^l} \sum_{p \in \Omega^k} e_{lp}^k \theta_p^k = 0, \quad \forall l \in P \quad (6.21)$$

$$\sum_{p \in \Omega^k} \theta_p^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (6.22)$$

$$\theta_p^k \geq 0, \quad \forall p \in \Omega^k, k \in K \quad (6.23)$$

where,

$$\begin{aligned} c_p^k &= \sum_{a \in A^k} c_a^k x_{ap}^k + \sum_{n \in N^k} \alpha_n^k t_{np}^k & b_{sp}^k &= x_{a_{s,p}^k}^k - x_{a_{s,p}^k}^k \\ v_{np}^k &= \sum_{a \in \Gamma(n)} x_{ap}^k & d_{lp}^k &= x_{a_l^k p}^k - x_{a_l^k p}^k \\ \tau_{ijp}^k &= I(k \in K^j) t_{n_j^k p}^k - I(k \in K^i) t_{n_i^k p}^k & e_{lp}^k &= t_{n_l^k p}^k - t_{n_l^k p}^k \end{aligned}$$

The indicator function  $I$  assumes a value of 1 if its argument is true, and 0 otherwise.

Constraint set (6.22) can be aggregated by aircraft type so that the number of rows of this linear program is  $|L| + |M| + |Q| \times |S| + |Q| \times |P| + |P| + |Q|$ . The solution in terms of the original variables can be retrieved from (6.15). Assigning dual variables  $\pi_l$ ,  $\epsilon_{ij}$ ,  $\beta_{sq}$ ,  $\phi_{lq}$ ,  $\delta_l$  and  $\psi^k$  to constraint sets (6.17) through (6.22), respectively, the reduced cost of variable  $\theta_p^k$  is given by

$$c_p^k - \sum_{l \in L} v_{n_l^k p}^k \pi_l - \sum_{(i,j) \in M} \tau_{ijp}^k \epsilon_{ij} - \sum_{\substack{s \in S \\ q \in Q: k \in K_q}} b_{sp}^k \beta_{sq} - \sum_{\substack{l \in P \\ q \in Q: k \in K_q \cap K^l}} d_{lp}^k \phi_{lq} - \sum_{l \in P: k \in K^l} e_{lp}^k \delta_l - \psi^k.$$

This formula can be rewritten, using the previous coefficient definitions, as an affine function in terms of the arc flow and node time variables using modified coefficients  $\bar{c}_a^k$  and  $\bar{\alpha}_n^k$ :

$$\sum_{a \in A^k} \bar{c}_a^k x_{ap}^k + \sum_{n \in N^k} \bar{\alpha}_n^k t_{np}^k - \psi^k.$$

Therefore, generating columns with positive reduced cost for a possible increase of the objective function boils down, for each  $k \in K$ , to satisfy constraints (6.7)–(6.11) while maximizing

$$\sum_{a \in A^k} \bar{c}_a^k x_a^k + \sum_{n \in N^k} \bar{\alpha}_n^k t_n^k - \psi^k.$$

This amounts to solving, for each  $k \in K$ , a time window constrained longest path problem over network  $G^k$  where the objective function depends on both the flow and the time variables. To solve it, one can use the pseudo-polynomial dynamic programming algorithm described in Ioachim *et al.* (1998), as long as time window widths guarantee that network  $G^k$  is acyclic. Otherwise, one can use an appropriate discretization of the time windows.

### 6.1.6 Branch-and-Bound Strategies

We have assigned a large fixed cost for the use of an aircraft so as to prioritize minimization of the fleet size. This is implemented in the following way. Given the number of aircraft  $v = \sum_{k \in K} \sum_{a \in \Gamma(o^k)} x_a^k$  at the root node, we fix the number of aircraft to exactly  $\lceil v \rceil$ . In all our test problems, this was sufficient to find the optimal number of aircraft. If the solution was still infeasible, we would explore the next

integer, and so on. Similar to vehicle routing applications involving multiple types of vehicles (or multiple depots), branching decisions can be taken on whether there is a connection between two flights or not, or on assigning a specific aircraft type to a given flight or not. In both cases, two branches are created in the search tree.

Given an integer number of aircraft and the solution at a branching node, the next node is chosen according to a modified depth-first search. Let  $Z_{inf}$  denote the best known solution (which gives a lower bound on the optimal adjusted profits) and let  $Z^{sup}$  denote the largest upper bound over all active nodes. Interval  $[Z_{inf}, Z^{sup}]$  on total profits is explored according to a bisection search. The first subinterval ranges from  $r_1$  to  $Z^{sup}$ , where  $r_1 = \frac{Z_{inf} + Z^{sup}}{2}$ , the second from  $r_2$  to  $r_1$ , where  $r_2 = \frac{Z_{inf} + r_1}{2}$ , and so on (see Figure 6.4). The exploration of a branch is stopped if its upper bound is smaller than  $r_1$ . When all active nodes of the first search interval have their upper bound smaller than  $r_1$ , the exploration continues with the nodes of the second interval, that is, nodes for which the upper bound is between  $r_2$  and  $r_1$ . This strategy is applied for the remaining intervals. Each time a better integer solution is found, the interval partitioning is recomputed. This strategy favors the search for significantly better integer solutions. The search is stopped whenever  $Z^{sup} - Z_{inf} \leq \epsilon$  for a given small  $\epsilon > 0$ , or when the CPU time reaches a maximum value.

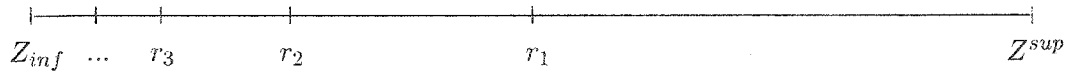


Figure 6.4 – Bisection search in the branch-and-bound tree

Applying only the above branching strategies on our test problems was disastrous. For many of them, we could not even find a feasible solution within 50 hours of CPU time (see Section 6.1.7), although for several instances this was possible within only one or two hours. We carefully examined the search trees, and concluded that in

many cases, we were not able to efficiently detect the infeasibility of a subtree. That is, even though we have a fractional solution available in terms of the flow variables, there are no integer solutions. Most of the time we were not even able to complete the exploration of such a subtree. We have identified two reasons for that behavior, both related to the periodicity requirements. We have implemented new branching strategies which are called before traditional ones are used.

Constraint set (6.13) calls for the synchronization of the time variables for a flight  $l \in P$  that overlaps over the horizon boundaries. For  $k \in K$ , node  $\bar{n}_l^k$  is located at the end of the horizon while node  $\hat{n}_l^k$  is at the beginning, both being copies of flight node  $n_l^k$ . For a selected aircraft  $k$ , Bélanger (2004) constructs an example in which a fractional solution exists although no integer solutions to the problem are possible.

As a remedy to this situation, we could possibly add constraint  $t_{\bar{n}_l^k}^k \geq t_{\hat{n}_l^k}^k$  in subproblem  $k$  but this would destroy the structure of the time constrained longest path problem. Additionally, this would only eliminate possible cycles within a single period and the master problem would have to manage the longer ones. Instead of that, we have implemented branching decisions on the shared time window of nodes  $n_l^k$ ,  $\bar{n}_l^k$  and  $\hat{n}_l^k$  as follows. For a given flight  $l \in P$ , we first merge all identical itineraries but with flights at different departure times. The time values are computed according to the fractional flow on these itineraries. For example, if the itinerary composed of the two flights F1 and F2 {F1 (10:00), F2 (18:00)} of flow 0.2 in the solution of problem (6.1)–(6.11) is merged with the itinerary {F1 (10:21), F2 (17:51)} of flow 0.4, this gives the itinerary {F1 (10:07), F2 (17:57)} of flow 0.6. If this merging results in a single itinerary of flow 1.0, that is, all the itineraries covering flight  $l$  are composed of the same sequence of flights, this flight is not eligible to branching on time windows. Otherwise, itineraries are sorted chronologically based upon their service time at flight  $l$ . Next we determine the largest portion that can be removed from the time window such that the first itinerary is eliminated but not the second. For example,

if the time window is  $[10, 40]$  and the first itinerary serves that flight at time 11 while the second itinerary serves it at time 33, then interval  $[10, 32]$  can be removed. Assigned to this first possible decision is a score that depends on the flow on the first itinerary and the portion of the interval that is discarded. The same procedure is applied to the last itinerary, such that the branching decision removes it but not the preceding itinerary. Again a score is assigned to that second possible decision. The highest score on all possible decisions of flights in  $P$  determines the branching decision to make.

The second identified difficulty comes from the heterogeneous aspect of the fleet to achieve a periodic solution. Assume that a problem is solved on a single-day horizon and, at a certain branching node, a set of flights that makes up *a cycle over two days* has to be covered by exactly two different aircraft, based upon the previous branching decisions. Figure 6.5 shows two itineraries for which it is impossible to get an integer solution using aircraft types B767 and B763. However, a fractional solution with a flow of 0.5 for each aircraft on each itinerary creates two identical cycles of two days that cover all the flights exactly once. Our way to overcome this situation is twofold : On the one hand, we branch on the number of aircraft of a certain type at the end of a day, see constraint set (6.4), that is, on quantities  $\sum_{k \in K_q} x_{a_{ds}}^k$  ( $q \in Q, s \in S$ ). On the other hand, we make binary decisions on the type of aircraft that covers the flights involved in the synchronization constraints, that is, on  $\sum_{k \in K_q} x_{a_l^k}^k$  ( $q \in Q, l \in L_q$ ), where  $L_q \subset L$  is the subset of flights that can be covered by an aircraft of type  $q$ , a subset of variables involved in constraint set (6.5).

### 6.1.7 Computational Experiments

The solution approach has been tested using data provided by an international North-American carrier. The original data set includes a solution for a fixed flight schedule.

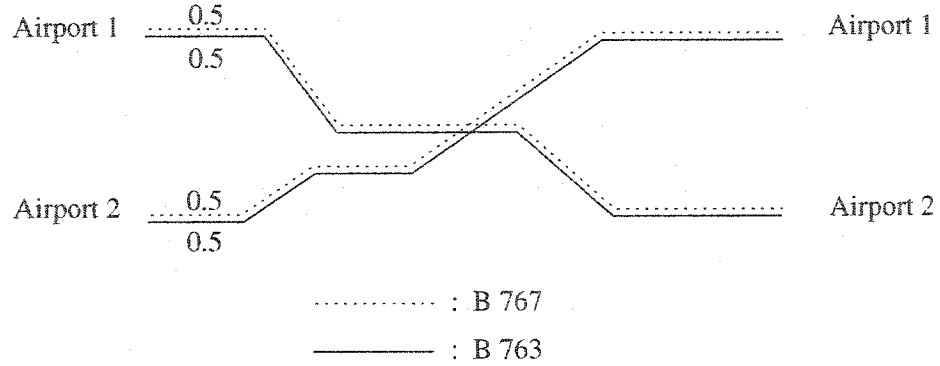


Figure 6.5 – A fractional solution with two types of aircraft

It also gives the duration and the anticipated profits for each flight which both depend on the aircraft type. Various scenarios have been constructed to study the impact of time window flexibility and spacing.

### Parameters and Statistics

Time window width is driven by a parameter  $\mu$ , a percentage of the original spacing between flights offered more than once on the same O-D airports, independently of the aircraft type. Let  $f_i$  and  $f_j$  represent the fixed departure times for consecutive flights  $i$  and  $j$ , and  $f_{ij} = (f_j - f_i) \bmod T$  represent the time spacing between those two departure times,  $(i, j) \in M$ . Then time window bounds are computed as  $B_i = f_i + \mu f_{ij}$  and  $A_j = f_j - \mu f_{ij}$ . If a flight  $l$  is offered only once in the scheduling period, the time interval is  $f_l \pm \mu T$ . In both cases, the positive and negative variations are bounded from above by half the duration  $d_l$  of the flight as flown by the aircraft type given in the solution of the data set. Time windows are also limited by curfew rules at each airport.

Let  $t_i$  and  $t_j$  be the optimized departure times for consecutive flights  $i$  and  $j$ , and let  $t_{ij} = (t_j - t_i) \bmod T$  be the optimized spacing,  $(i, j) \in M$ . By the above construction

of the time windows,  $t_{ij} \geq (1 - 2\mu)f_{ij}$ , where the right-hand side is the smallest possible spacing. If the optimized spacing is shorter than a certain threshold denoted  $\Delta_{ij}$ , a penalty  $P_{ij}$  is incurred.  $\Delta_{ij}$  is chosen according to parameter  $\nu \in [0, 1]$  and is computed as a convex combination of the minimum and original spacings :

$$\Delta_{ij} = (1 - 2\mu)f_{ij}\nu + f_{ij}(1 - \nu) = (1 - 2\mu\nu)f_{ij}.$$

When  $\nu = 100\%$ , the allowable spacing reduction incurs no cost while 75% of it is penalized if  $\nu = 25\%$ . The penalty term  $P_{ij}T_{ij}$  becomes effective in the objective function for values  $\Delta_{ij} - t_{ij} > 0$ . In our tests,  $P_{ij} = \frac{10^5}{f_{ij}}$ ,  $(i, j) \in M$ , that is, a one thousand penalty per minute of violation for an original spacing of 100 minutes. Recall that there is no minimum spacing when a flight is offered only once.

Revenues for a flight depend on the demand which in turn depends on its scheduled time. Profit variations  $\lambda_l^k$  for flight leg  $l$  on aircraft  $k$  have been determined independently of the aircraft type according to a Gaussian distribution  $N(0, \sigma_l^2)$ , where  $\sigma_l = \frac{1000}{d_l}$ . Finally, a large fixed cost has been utilized for the use of any aircraft in order to first minimize the fleet size, and then the adjusted profits, in that order.

Table 6.1 presents statistics for three flight sets. The first two data sets involve a large number of international flights while the third essentially consists of domestic and transborder flight legs. For each data set, we give the number of airports and flight legs, the fleet size and the number of aircraft types, the number of spacing constraints, the number of overlapping flights, and finally, the row size of the linear program (6.16)–(6.23). The actual LP size varies dynamically with the introduction and the removal of constraints derived from the branch-and-bound strategies. As most of the flights are within North America, the horizon boundary has been set at  $-9:00$  UTC so as to minimize the number of synchronization constraints in (6.5) and (6.6). Table 6.2 presents the average and the standard deviation of the time window widths (in minutes) as a function of the  $\mu$ -parameter. On average for  $\mu = 8\%$ , the time intervals are as large as one hour and a half.

Tableau 6.1 – Statistics on test problems

Data set	Airports	Flights	Aircraft	Aircraft types	Spacing constraints	Overlapping flights	LP row size
I	45	283	93	13	192	30	1493
II	62	411	114	13	307	32	1985
III	47	412	90	7	345	0	1093

Tableau 6.2 – Average (standard deviation) of the time windows widths (in minutes)

Data set	Time window parameter $\mu$ (%)			
	2	4	6	8
I	23.7 (21.5)	47.8 (43.1)	70.8 (63.7)	89.6 (81.0)
II	22.4 (20.1)	45.2 (40.3)	66.0 (59.1)	82.8 (74.9)
III	19.5 (17.1)	38.3 (32.5)	54.0 (45.1)	63.9 (51.7)



## Results

Tests have been conducted on a Sun Enterprise 10000 (400 MHz) using a single processor with a time limit of 8 hours, for parameter  $\mu = 0\%$ , 2%, 4%, 6%, and 8%, and for parameter  $\nu = 100\%$ , 50%, 33%, and 25%. Table 6.3 shows the average compression factor in percentage of the original spacing between consecutive flights serving the same O-D airports. The smallest average compression is 91.4%. One can observe that as  $\nu$  decreases, the optimized spacing remains closer to its original value.

The \* symbol indicates the single unsolved instance. Without the three new branch-and-bound strategies developed specifically for this application, we found solutions for all 17 test problems of data set III. However, we were not able to find any integer solutions within 50 hours of CPU time for 12 instances of data set I and 10 instances of data set II. These two sets involve a large number of overlapping flights and therefore a large number of synchronization constraints (see Table 6.1).

As shown in Table 6.4, time window flexibility on departure times has a spectacular impact on the reduction of the number of aircraft needed to cover all the flights. This is usually coupled with an increase in the anticipated (adjusted) profits, or a small decrease in some few cases. This can be seen in Table 6.5 where we also give the spacing penalty as a percentage of the profits computed using  $\mu = 0\%$  and  $\nu = 100\%$  (in parenthesis). Recall that there is no penalty when  $\nu = 100\%$ .

As expected, an increasing flexibility in departure times and a tightening of the spacing constraints make the problems more difficult to solve. It is relatively fast to reach a solution of the linear relaxation while it may take hours to obtain the first integer solution. For the same amount of CPU time, the average optimality gaps are also larger. Tables 6.6 and 6.7 provide results on these aspects. As seen before, the introduction of spacing and synchronization constraints in the master problem generates

Tableau 6.3 – Average compression factor (%) of the original spacings

Data set	$\nu$ (%)	Time window parameter $\mu$ (%)				
		0	2	4	6	8
I	100	100	97.6	95.7	94.0	*
	50		98.4	96.9	95.2	94.1
	33		99.0	98.9	96.6	95.4
	25		99.2	98.3	97.5	96.3
II	100	100	97.7	95.8	93.7	92.4
	50		98.4	96.9	95.3	94.4
	33		99.0	97.8	96.7	95.7
	25		99.1	98.7	97.4	96.5
III	100	100	97.8	95.7	93.2	91.4
	50		98.5	96.9	95.4	94.3
	33		99.0	97.8	96.7	95.9
	25		99.2	98.2	97.5	96.7

Tableau 6.4 – Number of aircraft used

Data set	Time window parameter $\mu$ (%)				
	0	2	4	6	8
I	88	83	82	80	79
II	110	106	105	103	102
III	90	87	86	83	80

Tableau 6.5 – Percentage of profit improvements (spacing penalty)

Data set	$\nu$ (%)	Time window parameter $\mu$ (%)				
		0	2	4	6	8
I	100	1 180 693 \$	25.5	29.1	28.1	*
	50		25.3 (0.0)	30.6 (0.0)	21.4 (2.4)	29.8 (0.5)
	33		24.7 (0.2)	30.0 (0.4)	22.4 (1.2)	26.3 (2.4)
	25		24.5 (0.5)	30.0 (0.7)	22.3 (1.0)	25.3 (3.7)
II	100	1 654 107 \$	2.8	3.4	1.4	8.9
	50		2.4 (0.0)	3.1 (0.3)	2.4 (0.5)	8.4 (0.1)
	33		-0.5 (0.2)	2.2 (0.4)	-1.1 (1.4)	6.1 (1.7)
	25		-1.2 (0.4)	1.4 (1.0)	-3.5 (1.4)	4.9 (2.6)
III	100	1 112 004 \$	8.0	11.9	13.3	13.2
	50		7.4 (0.1)	11.4 (0.1)	9.4 (0.6)	12.2 (0.2)
	33		6.9 (0.4)	9.4 (1.4)	8.7 (2.3)	7.2 (1.8)
	25		6.6 (0.6)	6.8 (2.6)	8.4 (2.4)	7.9 (2.5)

a number of difficulties in the branch-and-bound phase. See Bélanger (2004) for an example showing why there exists an integrality gap when using spacing constraints.

With more than 95% of the total CPU time, the solution of the master problem largely dominates the time spent to solve the column generation subproblem. Due to the presence of time constraints, the generated columns are represented not only by binary coefficients corresponding to the covered flights but also by their departure times. This makes the master problem much larger in row size compared to the usual set partitioning formulation. Moreover, the spacing constraints introduce coefficients of very different scales.

One line of future research in this area is certainly the acceleration of the master problem solution. Perturbation of the right-hand side of the synchronization constraints might be of interest (see Desaulniers *et al.*, 2002).

Tableau 6.6 – CPU times (min.) to find the LP (first integer) solution

Data set	$\nu$ (%)	Time window parameter $\mu$ (%)				
		0	2	4	6	8
I	100	2 (2)	3 (15)	4 (193)	3 (45)	4 (*)
	50		5 (82)	7 (92)	8 (135)	8 (161)
	33		6 (75)	8 (76)	8 (122)	9 (136)
	25		6 (64)	9 (74)	9 (133)	8 (152)
II	100	5 (5)	8 (84)	8 (66)	8 (162)	9 (143)
	50		16 (188)	21 (294)	19 (373)	20 (368)
	33		20 (228)	23 (320)	23 (355)	26 (358)
	25		18 (259)	23 (295)	24 (366)	26 (327)
III	100	4 (26)	5 (5)	4 (6)	4 (114)	5 (9)
	50		17 (130)	16 (152)	22 (230)	20 (282)
	33		18 (174)	20 (112)	21 (147)	22 (174)
	25		16 (162)	21 (98)	20 (202)	22 (147)

Tableau 6.7 – Optimality gaps (%)

Data set	$\nu$ (%)	Time window parameter $\mu$ (%)				
		0	2	4	6	8
I	100	0	0.3	1.9	1.0	*
	50		0.3	0.6	6.5	3.5
	33		0.6	0.9	5.3	5.8
	25		0.6	0.5	5.0	6.1
II	100	0	0.1	0.6	4.4	1.3
	50		0.4	0.7	3.0	1.5
	33		2.9	1.2	6.0	3.2
	25		3.5	1.7	8.1	3.9
III	100	0	0.0	0.0	0.6	0.0
	50		0.2	0.1	3.6	0.4
	33		0.2	1.2	3.3	4.1
	25		0.2	3.1	2.5	2.2

### 6.1.8 Conclusion

We have proposed an extension of the periodic aircraft fleet assignment problem that incorporates time dependent revenues within time windows on departure times as well as penalties to account for short spacings between consecutive flights serving the same O-D airports. This formulation is solved using a branch-and-price approach where the master problem involves spacing and synchronization constraints added to the classical set partitioning model. Columns represent aircraft itineraries and are generated using a specialized time constrained longest path subproblem using arc cost for flow variables and node cost for time variables.

Computational experiments conducted on data sets provided by a medium North-American airline carrier show that classical branch-and-bound strategies are not sufficient. We have introduced three new strategies which are specific to this application. Time windows allow for an important reduction in the number of aircraft, most of the time accompanied by increasing profits. The incorporation of penalized time variables in addition to the usual network flow variables permits to adequately control the spacing restrictions.

### References

- Abara, J. (1989), "Applying Integer Linear Programming to the Fleet Assignment Problem", *Interfaces* 19, 20–28.
- Barnhart, C., Boland N., Clarke L.W., Johnson E.L., Nemhauser G.L., and Shenoi R.G. (1998), "Flight String Models for Aircraft Fleeting and Routing", *Transportation Science* 32, 208–220.
- Barnhart, C., Kniker, T.S., and Lohatepanont, M., "Itinerary-Based Airline Fleet Assignment", *Transportation Science* 36(2), 199–217, 2002.

Bélanger, N. (2004), *Contributions au problème d'affectation des types d'avion*, Ph.D. dissertation, École Polytechnique de Montréal.

Bélanger, N., Desaulniers, G., Soumis, F., Desrosiers, J., and Lavigne, J. (2002), "Weekly Airline Fleet Assignment with Homogeneity", Les Cahiers du GERAD, G-2002-70, HEC Montréal.

Clarke L.W., Hane C.A., Johnson E.L., and Nemhauser G.L. (1996), "Maintenance and Crew Considerations in Fleet Assignment", *Transportation Science* 30(3), 249–260.

Dantzig, G.B. and Wolfe P. (1960), "Decomposition Principle for Linear Programs", *Operations Research* 8, 101–111.

Desaulniers G., Desrosiers J., Dumas Y., Solomon M.M., and Soumis F. (1997), "Daily Aircraft Routing and Scheduling", *Management Science* 43, 841–855.

Desaulniers G., Desrosiers J., Ioachim I., Solomon M.M., Soumis F., and Villeneuve D. (1998), "A Unified Framework for Time Constrained Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems", *Fleet Management and Logistics*, T. Crainic and G. Laporte (eds), Kluwer, Norwell, MA, 57–93.

Desaulniers G., Desrosiers J., and Solomon M.M. (2002), "Accelerating Strategies in Column Generation Methods for Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems", in C.C. Ribeiro and P. Hansen (eds), *Essays and Surveys in Metaheuristics*, Kluwer, Norwell, MA, 309–324.

Desrochers M. and F. Soumis (1988a), "A Generalized Permanent Labeling Algorithm for the Shortest Path Problem with Time Windows", *INFOR* 26, 191–212.

Desrochers M. and F. Soumis (1988b), "A Reoptimization Algorithm for the Shortest

Path Problem with Time Windows", *European Journal of Operational Research* 35, 242–254.

Desrosiers J., Dumas Y., Solomon M.M., and Soumis F. (1995), "Time Constrained Routing and Scheduling", *Network Routing : Handbooks in Operations Research and Management Science* 8, M. Ball, T. Magnanti, C. Monma, G. Newhauser (eds.), Elsevier Science Publisher B.V., Amsterdam, 35–139.

Hane C., Barnhart C., Johnson E.L., Marsten R.E., Nemhauser G.L., and Sigismondi G. (1995), "The Fleet Assignment Problem : Solving a Large-Scale Integer Program", *Mathematical Programming* 70, 211–232.

Ioachim I., Desrosiers J., Soumis F., and Bélanger N. (1999), "Fleet Routing with Schedule Synchronization Constraints", *European Journal of Operational Research* 119, 75–90.

Ioachim I., Gélinas S., Desrosiers J., and Soumis F. (1998), "A Dynamic Programming Algorithm for the Shortest Path Problem with Time Windows and Linear Node Costs", *Networks* 31, 193–204.

Levin, A. (1971), "Scheduling and Fleet Routing Models for Transportation Systems." *Transportation Science* 5, 232–255.

Rexing B., Barnhart C., Kniker T., Jarrah A., and Krishnamurthy N. (2000), "Airline Fleet Assignment with Time Windows", *Transportation Science* 34, 1–20.

Rushmeier, R.A. and Kontogiorgis S.A. (1997), "Advances in the Optimization of Airline Fleet Assignment", *Transportation Science* 31, 159–169.

Stojković M. and Soumis F. (2001), "An Optimization Model for the Simultaneous Operational Flight and Pilot Scheduling Problem", *Management Science* 47, 1290–1305.

Subramanian R., Scheff R.P., Quillinan J.D., Wiper D.S., and Marsten R.E. (1994), "Coldstart : Fleet Assignment at Delta Air Lines", *Interfaces* 24, 104–120.



## 6.2 Difficultés au niveau de la résolution en nombres entiers

Un des principaux aspects ressortant de l'analyse des expérimentations numériques est la difficulté d'obtenir rapidement de bonnes solutions entières. En fait, sans les méthodes de branchement spécialement adaptées au problème, il s'avère impossible, pour une grande proportion des problèmes, d'obtenir une première solution entière après 50 heures de calcul. Nous avons mentionné dans l'article que ceci était principalement dû au fait que l'algorithme de branchement s'enlisait dans l'exploration de sous-arbres non réalisables, c'est-à-dire dont l'espace-solution est réalisable en nombres fractionnaires mais ne comporte aucune solution entière réalisable. Nous avons identifié deux causes favorisant ce phénomène, la seconde ayant été illustrée dans l'article à la section 6.1.6. La première partie de la présente section illustre par un petit exemple la première cause mentionnée dans l'article pouvant engendrer un tel genre de sous-arbre non réalisable.

Également, nous avons montré que les bornes supérieures sur les sauts d'intégrité des solutions entières obtenues devenaient souvent de moins bonne qualité à mesure que s'accroissaient la flexibilité sur les heures de départ et le resserrement des contraintes d'espacement. Nous montrons dans la seconde partie de cette section un petit exemple montrant qu'il peut exister des sauts d'intégrité non nuls entre la valeur optimale de la relaxation linéaire et la valeur optimale du problème original en nombres entiers en présence de contraintes d'espacement.

### Sous-arbres de branchement non réalisables

La première cause pouvant engendrer des sous-arbres de branchement non réalisables provient des vols périodiques avec fenêtre de temps sur les heures de départ. Afin de

s'assurer de la cohérence entre les temps de visite des nœuds de début de vol supplémentaires, les contraintes (6.6) ont été introduites. Ainsi, pour un vol  $l$  et un avion donné  $k$ , les temps de visite des nœuds  $\hat{n}_l^k$  et  $\bar{n}_l^k$  doivent être synchronisés. Or, il est possible qu'à un nœud donné de l'arbre de branchement, des solutions à la relaxation linéaire du problème puissent satisfaire ces contraintes, mais qu'aucune solution au problème original (avec flots entiers) ne le puisse. Par exemple, supposons qu'à une certaine étape du processus de branchement, deux ensembles de vols  $(I_1, \dots, I_r)$  et  $(J_1, \dots, J_s)$  doivent être couverts par un total de deux avions, et que pour chacun de ces ensembles, les vols peuvent et doivent être couverts par un même avion au cours de l'horizon de la façon suivante :

$$I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_r \text{ et } J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_s.$$

On suppose de plus que les stations d'origine et de destination des vols font en sorte qu'il soit possible d'effectuer les connexions,  $I_r \rightarrow J_1$ ,  $J_s \rightarrow I_1$ ,  $I_r \rightarrow I_1$ , et  $J_s \rightarrow J_1$ , en autant que les horaires le permettent. Si les horaires font en sorte que les connexions  $I_r \rightarrow J_1$  et  $J_s \rightarrow I_1$  sont possibles, alors on pourra couvrir les vols en construisant le cycle de deux périodes

$$I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_r \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_s \rightarrow I_1. \quad (6.24)$$

Également, si les horaires rendent possibles les connexions  $I_r \rightarrow I_1$  et  $J_s \rightarrow J_1$ , alors les vols pourront être couverts par les deux cycles d'une période

$$J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_s \rightarrow J_1 \text{ et } I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_r \rightarrow I_1. \quad (6.25)$$

On suppose qu'il n'y a pas d'autre façon réalisable de couvrir tous les vols avec deux avions. Or, si les fenêtres de temps et les durées de ces vols font en sorte que les connexions  $I_r \rightarrow J_1$  et  $J_s \rightarrow J_1$  ne sont pas réalisables, alors il est impossible de couvrir ces vols avec seulement deux avions (ni avec le cycle de deux périodes, ni avec

les deux cycles d'une période), et le problème est donc non réalisable. Cependant, comme les vols  $I_r$  et  $J_s$  sont des vols périodiques, la faisabilité des connexions  $I_r \rightarrow J_1$  et  $J_s \rightarrow J_1$  est imposée au niveau du problème-maître via les contraintes de synchronisation (6.6) et, pour cette raison, il se peut qu'il soit possible de construire une solution réalisable pour le problème auquel on a relaxé les contraintes d'intégrité sur les flots. En effet, nous allons montrer que si les connexions  $J_s \rightarrow I_1$  et  $I_r \rightarrow I_1$  sont suffisamment molles, il se peut qu'il existe  $\alpha \in (0, 1)$  tel qu'en attribuant un flot de  $\alpha$  au cycle de deux périodes (6.24) et un flot de  $1 - \alpha$  à chacun des deux cycles d'une période (6.25), on puisse avec un total de deux avions couvrir tous les vols avec un flot total de 1 tout en satisfaisant les contraintes de synchronisation. Considérons par exemple les quatre itinéraires de la figure 6.6, dont les deux premiers (A et B) correspondent au cycle de deux périodes, et les deux derniers (C et D) correspondent à chacun des cycles d'une période. Pour alléger la figure, nous y avons illustré seulement

$$\begin{aligned}
 A : \hat{n}_{J_s} &\rightarrow n_{I_1} \rightarrow \dots \rightarrow n_{I_r} \rightarrow \bar{n}_{I_r} \\
 B : \hat{n}_{I_r} &\rightarrow n_{J_1} \rightarrow \dots \rightarrow n_{J_s} \rightarrow \bar{n}_{J_s} \\
 C : \hat{n}_{J_s} &\rightarrow n_{J_1} \rightarrow \dots \rightarrow n_{J_s} \rightarrow \bar{n}_{J_s} \\
 D : \hat{n}_{I_r} &\rightarrow n_{I_1} \rightarrow \dots \rightarrow n_{I_r} \rightarrow \bar{n}_{I_r}
 \end{aligned}$$

Figure 6.6 – Non faisabilité dans le cas périodique avec fenêtres de temps

les nœuds de vol ainsi que les nœuds de vol supplémentaires nécessaires pour la modélisation des contraintes de synchronisation. De plus, les indices  $k$  ont été omis pour la notation des nœuds. Également, on note par  $t_n^X$  la valeur de la ressource temps au nœud  $n$  dans l'itinéraire  $X$ . On a par hypothèse que la connexion  $I_r \rightarrow J_1$  n'est pas réalisable, ce qui revient à dire qu'il existe  $\bar{\tau}_r$  tel que  $t_{\bar{n}_{I_r}}^A > \bar{\tau}_r$  dans tout itinéraire A réalisable, et qu'il existe  $\hat{\tau}_r < \bar{\tau}_r$  tel que  $t_{\hat{n}_{I_r}}^B < \hat{\tau}_r$  dans tout itinéraire B réalisable, de telle sorte qu'il soit impossible de satisfaire les contraintes (6.6) voulant

que  $t_{\hat{n}_{I_r}}^A = t_{\hat{n}_{I_r}}^B$ . Ainsi, il est impossible d'attribuer un flot de 1 aux itinéraires A et B. De la même façon, on peut montrer que puisque la connexion  $J_s \rightarrow J_1$  n'est pas réalisable, il existe  $\hat{\tau}_s$  et  $\bar{\tau}_s$  tel que dans tout itinéraire C réalisable, on aura que  $t_{\hat{n}_{J_s}}^C < \hat{\tau}_s < \bar{\tau}_s < t_{\bar{n}_{J_s}}^C$ , et donc qu'il est impossible d'attribuer un flot de 1 à l'itinéraire C. Cependant, il peut arriver qu'il soit possible qu'en attribuant un flot fractionnaire  $\alpha$  aux itinéraires A et B, et un flot  $1 - \alpha$  aux itinéraires C et D, on puisse satisfaire les contraintes de synchronisation. La figure 6.7, dans laquelle on représente les fenêtres de temps des nœuds de vol supplémentaires des vols  $I_r$  et  $J_s$ , illustre les temps de visite des différents itinéraires A, B, C et D, de même que le flot attribué à chacun de ces itinéraires ( $\alpha$  ou  $1 - \alpha$ ). Les traits en pointillés illustrent, pour chaque nœud,

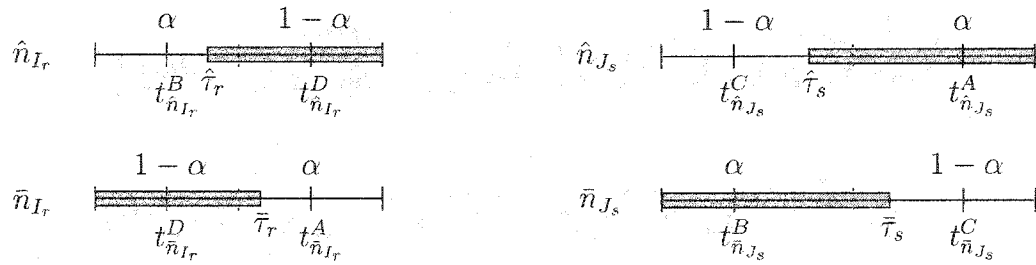


Figure 6.7 – Fenêtres de temps des nœuds de vol supplémentaires des vols  $I_r$  et  $J_s$

le temps correspondant à la combinaison convexe des temps de visite des itinéraires qui le visitent. Les valeurs  $\tau$  sont indiquées sur la figure, et chaque rectangle gris correspond à la portion de fenêtre de temps non admissible dans une solution entière réalisable pour le nœud correspondant. Si, tel qu'illustré sur cette figure, on a que

$$\alpha t_{\hat{n}_{I_r}}^B + (1 - \alpha) t_{\hat{n}_{I_r}}^D = (1 - \alpha) t_{\bar{n}_{I_r}}^D + \alpha t_{\bar{n}_{I_r}}^A$$

$$(1 - \alpha) t_{\hat{n}_{J_s}}^C + \alpha t_{\hat{n}_{J_s}}^A = \alpha t_{\bar{n}_{J_s}}^B + (1 - \alpha) t_{\bar{n}_{J_s}}^C$$

alors les contraintes de synchronisation sont satisfaites pour cette solution fractionnaire.

## Sauts d'intégrité avec contraintes d'espacement

L'augmentation de la flexibilité d'horaire et le resserrement des contraintes d'espacement semblent rendre plus difficile l'obtention d'une solution réalisable prouvée être de bonne qualité. En effet, le nombre de nœuds de branchement requis pour l'obtention des solutions tend à s'accroître et, à temps égal de résolution, les bornes supérieures sur les sauts d'intégrité sont généralement plus élevées. On peut montrer qu'il est possible que les contraintes d'espacement engendrent un écart non nul entre la valeur optimale de la relaxation linéaire du problème et celle du problème original. Nous donnons ici un petit exemple d'un tel cas. Soient quatre vols A, B, C et D d'un certain problème, qui peuvent être connectés selon les possibilités suivantes :  $A \rightarrow C$ ,  $A \rightarrow D$ ,  $B \rightarrow C$ , et  $B \rightarrow D$ . Supposons qu'à cause des espacements minimaux requis avec d'autres vols, une pénalité doit être appliquée si l'un ou l'autre des vols C ou D débute après le temps  $t$ . Supposons également que le vol A se termine après le temps  $t$ , mais que le vol B se termine avant. Dans une solution réalisable, il se peut que l'on doive choisir d'attribuer un flot de 1 à un itinéraire effectuant la connexion  $A \rightarrow C$  ou  $A \rightarrow D$ , violant ainsi une contrainte d'espacement dans l'un ou l'autre cas. Cependant, il peut être possible d'attribuer des flots fractionnaires à des itinéraires effectuant les connexions  $A \rightarrow C$  et  $A \rightarrow D$  pour lesquels les temps de départ de C et D sont après  $t$ , et d'autres itinéraires effectuant  $B \rightarrow C$  et  $B \rightarrow D$  pour lesquels les temps de départ de C et D sont avant  $t$ , de telle sorte que les combinaisons convexes des temps de départ de ces vols soient toutes avant  $t$ , ne violant donc aucune contrainte d'espacement. Notons aussi que dans le cas où les contraintes d'espacement seraient rigides, un tel problème pourrait n'avoir aucune solution réalisable avec flots entiers. Ceci montre qu'il est dans ce cas possible que, pour certains problèmes, l'exploration de l'arbre de branchement s'enlise, comme décrit précédemment, dans l'exploration d'un sous-arbre non réalisable à cause de ce genre de situation.

### 6.3 Résultats numériques détaillés

Nous présentons ici des tableaux de résultats plus détaillés que ceux présentés dans l'article en rapport avec nos expérimentations numériques. Nous présentons deux séries de tableaux. La première série (tableaux 6.8 à 6.10) correspond à la résolution des problèmes en utilisant les méthodes classiques de branchement pour les problèmes de tournées de véhicule. La seconde série (tableaux 6.11 à 6.13) correspond à la résolution des problèmes en ayant recours aux nouvelles méthodes de branchement présentées dans l'article, lesquelles ont permis de diminuer l'instabilité dans la recherche de solutions entières au niveau de l'arbre de branchement.

Dans chaque série, un tableau est présenté pour chaque jeu de données. Dans chacun des tableaux, les résultats sont indiqués pour chaque valeur de  $\mu$  et de  $\nu$  que nous avons utilisées. Notons que dans l'article, nous n'avons rapporté que les résultats pour  $\mu \leq 8\%$ , étant donné qu'au-delà de ce niveau de flexibilité, le nombre de problèmes pour lesquels on ne trouve aucune solution en temps raisonnable devient très élevé, même en ayant recours aux nouvelles méthodes de branchement que nous avons proposées. Nous rapportons cependant dans cette section les résultats que nous avons obtenus pour  $\mu = 10\%$ . On indique les temps de résolution nécessaires pour l'obtention de la solution de la relaxation linéaire, ainsi que le temps de résolution en secondes, le nombre de nœuds de branchement et la borne sur le saut d'intégrité que nous avons observés pour la première et la meilleure solution entière réalisable trouvée à l'intérieur du temps maximal alloué. Lorsqu'aucune solution à un problème n'a pu être trouvée à l'intérieur du temps maximal alloué (8 heures), un astérisque (\*) remplace les statistiques. On peut remarquer que le nombre de ces problèmes pour les deux premiers jeux de données est très grand, ce qui s'explique par le grand nombre de vols périodiques dont ils sont composés.

Tableau 6.8: Jeu de données I (méthodes de branchement classiques seulement)

	$\nu(\%)$	$\mu(\%)$					
		0	2	4	6	8	10
Temps CPU (Relaxation)	100	117	157	176	183	253	247
Temps CPU (Relaxation)	50		302	425	460	499	531
Temps CPU (Relaxation)	33		385	437	494	611	552
Temps CPU (Relaxation)	25		347	457	556	560	586
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	100	235	*	*	*	*	*
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	50		3225	*	*	*	*
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	33		*	4623	2959	*	*
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	25		2676	*	*	*	*
Temps CPU (meilleure sol.)	100	296	*	*	*	*	*
Temps CPU (meilleure sol.)	50		3225	*	*	*	*
Temps CPU (meilleure sol.)	33		*	4623	2959	*	*
Temps CPU (meilleure sol.)	25		2676	*	*	*	*
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	100	6	*	*	*	*	*
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	50		61	*	*	*	*
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	33		*	70	145	*	*
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	25		86	*	*	*	*
Nœuds (meilleure sol.)	100	8	*	*	*	*	*
Nœuds (meilleure sol.)	50		61	*	*	*	*
Nœuds (meilleure sol.)	33		*	70	145	*	*
Nœuds (meilleure sol.)	25		86	*	*	*	*
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	100	162	*	*	*	*	*
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	50		10920	*	*	*	*
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	33		*	42963	48246	*	*
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	25		29039	*	*	*	*
Saut d'int. (meilleure sol.)	100	0	0	0	0	*	*
Saut d'int. (meilleure sol.)	50		10920	0	0	*	*
Saut d'int. (meilleure sol.)	33		0	42963	48246	*	*
Saut d'int. (meilleure sol.)	25		29039	0	0	*	*

Tableau 6.9: Jeu de données II (méthodes de branchement classiques seulement)

	$\nu(\%)$	$\mu(\%)$					
		0	2	4	6	8	10
Temps CPU (Relaxation)	100	325	434	461	456	528	547
Temps CPU (Relaxation)	50		924	1262	1225	1047	999
Temps CPU (Relaxation)	33		1178	1370	1372	1567	1423
Temps CPU (Relaxation)	25		1081	1361	1194	1536	1609
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	100	2274	*	3472	*	*	*
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	50		*	27957	*	*	*
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	33		11501	13471	*	*	*
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	25		10022	11263	*	*	*
Temps CPU (meilleure sol.)	100	3920	*	3472	*	*	*
Temps CPU (meilleure sol.)	50		*	27957	*	*	*
Temps CPU (meilleure sol.)	33		11501	13471	*	*	*
Temps CPU (meilleure sol.)	25		10022	11263	*	*	*
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	100	32	*	41	*	*	*
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	50		*	126	*	*	*
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	33		107	107	*	*	*
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	25		98	117	*	*	*
Nœuds (meilleure sol.)	100	65	*	41	*	*	*
Nœuds (meilleure sol.)	50		*	126	*	*	*
Nœuds (meilleure sol.)	33		107	107	*	*	*
Nœuds (meilleure sol.)	25		98	117	*	*	*
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	100	5679	*	4661	*	*	*
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	50		*	52195	*	*	*
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	33		34490	18531	*	*	*
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	25		17971	24699	*	*	*
Saut d'int. (meilleure sol.)	100	1320	0	4661	0	0	0
Saut d'int. (meilleure sol.)	50		0	52195	0	0	0
Saut d'int. (meilleure sol.)	33		34490	18531	0	0	0
Saut d'int. (meilleure sol.)	25		17971	24699	0	0	0



Tableau 6.10: Jeu de données III (méthodes de branchement classiques seulement)

	$\nu(\%)$	$\mu(\%)$					
		0	2	4	6	8	10
Temps CPU (Relaxation)	100	311	363	293	278	289	288
Temps CPU (Relaxation)	50		1046	1433	987	1174	1113
Temps CPU (Relaxation)	33		1369	1278	1244	1473	1267
Temps CPU (Relaxation)	25		1299	1280	1335	1430	1316
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	100	309	2234	516	671	1759	2770
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	50		5926	7412	7031	8827	7600
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	33		6852	7048	8188	8232	6426
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	25		6274	6927	7021	8765	5951
Temps CPU (meilleure sol.)	100	309	7342	516	671	1968	3000
Temps CPU (meilleure sol.)	50		5926	7412	7031	8827	7600
Temps CPU (meilleure sol.)	33		7427	7634	28061	8232	6426
Temps CPU (meilleure sol.)	25		6274	6927	7021	8765	5951
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	100	0	23	2	6	15	42
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	50		51	53	65	63	84
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	33		57	65	93	111	123
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	25		58	74	95	103	157
Nœuds (meilleure sol.)	100	0	56	2	6	16	43
Nœuds (meilleure sol.)	50		51	53	65	63	84
Nœuds (meilleure sol.)	33		59	72	317	111	123
Nœuds (meilleure sol.)	25		58	74	95	103	157
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	100	0	44498	469028	36	8903	17454
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	50		10357	2400	18913	15620	19172
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	33		21417	6305	34137	36874	61627
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	25		11355	5609	39416	29571	74637
Saut d'int. (meilleure sol.)	100	0	0	0	0	7418	14248
Saut d'int. (meilleure sol.)	50		10357	2400	18913	15620	19172
Saut d'int. (meilleure sol.)	33		10475	2012	22012	36874	61627
Saut d'int. (meilleure sol.)	25		11355	5609	39416	29571	74637

Tableau 6.11: Jeu de données I (avec nouvelles méthodes de branchement)

	$\nu(\%)$	$\mu(\%)$					
		0	2	4	6	8	10
Temps CPU (Relaxation)	100	132	158	210	185	210	223
Temps CPU (Relaxation)	50		298	414	467	465	571
Temps CPU (Relaxation)	33		381	469	492	561	617
Temps CPU (Relaxation)	25		343	518	526	501	608
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	100	129	886	11599	2717	*	*
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	50		4935	5529	8084	9643	13231
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	33		4480	4573	7337	8167	*
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	25		3859	4427	7963	9102	*
Temps CPU (meilleure sol.)	100	129	4590	23070	3504	*	*
Temps CPU (meilleure sol.)	50		26230	5529	8084	9643	13231
Temps CPU (meilleure sol.)	33		4480	4573	7337	8167	*
Temps CPU (meilleure sol.)	25		3859	4427	7963	9102	*
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	100	0	16	193	78	*	*
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	50		58	39	153	113	141
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	33		68	64	131	140	*
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	25		57	65	153	150	*
Nœuds (meilleure sol.)	100	0	77	344	90	*	*
Nœuds (meilleure sol.)	50		249	39	153	113	141
Nœuds (meilleure sol.)	33		68	64	131	140	*
Nœuds (meilleure sol.)	25		57	65	153	150	*
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	100	74	5233	56637	58887	*	*
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	50		6587	9610	92701	53201	78712
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	33		8563	13176	76396	86997	*
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	25		9048	8324	71708	89657	*
Saut d'int. (meilleure sol.)	100	0	3902	28377	15760	0	0
Saut d'int. (meilleure sol.)	50		4626	9610	92701	53201	78712
Saut d'int. (meilleure sol.)	33		8563	13176	76396	86997	0
Saut d'int. (meilleure sol.)	25		9048	8324	71708	89657	0

Tableau 6.12: Jeu de données II (avec nouvelles méthodes de branchement)

	$\nu(\%)$	$\mu(\%)$					
		0	2	4	6	8	10
Temps CPU (Relaxation)	100	321	462	457	479	533	535
Temps CPU (Relaxation)	50		938	1262	1136	1214	995
Temps CPU (Relaxation)	33		1170	1353	1366	1551	1437
Temps CPU (Relaxation)	25		1076	1360	1433	1582	1641
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	100	305	5063	3935	9717	8571	19677
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	50		11303	17667	22407	22070	*
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	33		13708	19207	21301	21474	25408
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	25		15522	17679	21969	19612	*
Temps CPU (meilleure sol.)	100	1897	7252	3935	9717	8571	19677
Temps CPU (meilleure sol.)	50		19581	17667	22407	22070	*
Temps CPU (meilleure sol.)	33		13708	19207	21301	21474	25408
Temps CPU (meilleure sol.)	25		15522	17679	21969	19612	*
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	100	0	58	39	86	45	203
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	50		63	78	147	129	*
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	33		104	99	195	160	175
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	25		134	128	229	211	*
Nœuds (meilleure sol.)	100	16	72	39	86	45	203
Nœuds (meilleure sol.)	50		107	78	147	129	*
Nœuds (meilleure sol.)	33		104	99	195	160	175
Nœuds (meilleure sol.)	25		134	128	229	211	*
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	100	1998	59114	10248	73494	23521	67083
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	50		44752	11096	51031	27044	*
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	33		48541	19618	97788	56849	77802
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	25		57945	27990	128607	67630	*
Saut d'int. (meilleure sol.)	100	0	2497	10248	73494	23521	67083
Saut d'int. (meilleure sol.)	50		6423	11096	51031	27044	0
Saut d'int. (meilleure sol.)	33		48541	19618	97788	56849	77802
Saut d'int. (meilleure sol.)	25		57945	27990	128607	67630	0

Tableau 6.13: Jeu de données III (avec nouvelles méthodes de branchement)

	$\nu(\%)$	$\mu(\%)$					
		0	2	4	6	8	10
Temps CPU (Relaxation)	100	255	283	258	267	317	293
Temps CPU (Relaxation)	50		1001	988	1313	1206	1061
Temps CPU (Relaxation)	33		1109	1198	1238	1313	1282
Temps CPU (Relaxation)	25		978	1261	1223	1343	1376
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	100	1569	282	364	6810	566	3286
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	50		7794	9092	13819	16910	8782
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	33		10410	6744	8835	10426	7333
Temps CPU (1 <sup>re</sup> sol.)	25		9718	5879	12096	8849	10969
Temps CPU (meilleure sol.)	100	6690	282	373	20310	581	3317
Temps CPU (meilleure sol.)	50		7849	9092	13819	16919	8824
Temps CPU (meilleure sol.)	33		10426	6744	21318	10426	7333
Temps CPU (meilleure sol.)	25		9755	5879	12096	8855	10970
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	100	18	0	2	67	3	53
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	50		72	69	151	109	213
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	33		100	192	196	211	234
Nœuds (1 <sup>re</sup> sol.)	25		114	216	204	179	263
Nœuds (meilleure sol.)	100	67	0	2	163	3	53
Nœuds (meilleure sol.)	50		72	69	151	109	213
Nœuds (meilleure sol.)	33		100	192	409	211	234
Nœuds (meilleure sol.)	25		114	216	204	179	263
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	100	1985	0	497341	21598	97	8049
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	50		2733	869	44019	4925	52592
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	33		4202	14078	54830	48399	88945
Saut d'int. (1 <sup>re</sup> sol.)	25		3156	36414	30288	25694	72664
Saut d'int. (meilleure sol.)	100	0	0	0	7568	0	6948
Saut d'int. (meilleure sol.)	50		2683	869	44019	4855	50561
Saut d'int. (meilleure sol.)	33		2856	14078	40436	48399	88945
Saut d'int. (meilleure sol.)	25		2493	36414	30288	25429	69465

## Conclusion : synthèse et recommandations

Nous avons proposé dans cette thèse des stratégies d'automatisation et d'optimisation pour le problème de l'affectation des types d'avion aux vols dans un contexte de planification stratégique. Ces stratégies ont été présentées de façon incrémentale en terme de fonctionnalité. Les différentes fonctionnalités introduites ont été choisies suite à des discussions avec des planificateurs dans le milieu aérien, principalement de la compagnie Air Canada, ce qui en confirme leur pertinence. Au chapitre 4, nous avons proposé des approches permettant de résoudre le problème sur un horizon hebdomadaire, en particulier en incorporant l'aspect d'homogénéité à un modèle déjà proposé dans la littérature pour un horizon quotidien. De même, au chapitre suivant, nous avons intégré différentes fonctionnalités permettant de prendre en compte plusieurs aspects opérationnels et commerciaux susceptibles d'influencer les décisions prises au niveau de l'affectation des types d'avion aux vols, notamment les temps minimaux de connexion variables et les activités d'entretien périodiques. Nous avons également présenté une approche itérative permettant de prendre en compte l'interdépendance des décisions au niveau de l'affectation des types d'avion aux vols et de la répartition de la demande en passagers. Finalement, au chapitre 6, nous avons introduit la notion de flexibilité sur les heures de départ des vols. Les stratégies d'optimisation proposées se détachent de celles que l'on retrouve déjà dans la littérature principalement en ce qu'elles permettent d'intégrer à l'objectif l'impact des modifications des heures de départ sur la demande en passagers pour chacun des vols.

Les stratégies proposées aux chapitres 4 et 5 ont été expérimentées et validées par des planificateurs chez Air Canada et les résultats obtenus ont été très satisfaisants.

Il serait toutefois pertinent de poursuivre les recherches dans le but de pouvoir s'attaquer à des problèmes de plus grandes tailles tout en conservant des temps de calcul raisonnables. En effet, certains grands transporteurs desservent un nombre de vols beaucoup plus élevé que celui d'Air Canada et, possiblement, avec une plus grande hétérogénéité dans la composition de leur flotte. Ces deux facteurs peuvent faire en sorte que les stratégies de résolution que nous avons proposées s'avèrent insuffisamment efficaces pour résoudre les problèmes de tels transporteurs. Également, il serait intéressant d'étudier des approches plus sophistiquées pour gérer l'interdépendance entre la répartition de la demande en passagers, la gestion du revenu et l'affectation des types d'avion aux vols.

Quant au chapitre 6, les résultats obtenus lors de nos expérimentations pour le problème quotidien avec flexibilité d'horaire laissent croire que notre approche de résolution pourrait être utilisée en pratique pour des compagnies de taille moyenne. Cependant, la possibilité de résoudre des problèmes hebdomadaires directement par cette approche est moins évidente. Premièrement, le nombre total de vols est alors beaucoup plus grand, ce qui augmente significativement le nombre de contraintes au niveau du problème-maître, dont le temps de résolution occupe l'essentiel du temps total de calcul. Deuxièmement, le nombre d'éléments non nuls dans les colonnes de la matrice du problème-maître sera beaucoup plus élevé, étant donné que chaque avion fera environ sept fois plus de vols au cours d'un horizon. Ceci laisse présager une convergence très difficile à atteindre pour le processus de génération de colonnes. Troisièmement, la compagnie voudra en général observer une synchronisation dans les heures de départ des différents vols d'un même numéro au cours de la semaine. Ceci nécessite l'ajout d'autres contraintes globales de ressource au niveau du problème-maître (du même genre que les contraintes d'espacement). À la lumière des expérimentations effectuées par Ioachim *et al.* (1999), on peut craindre que ces contraintes rendent très difficile la résolution du problème. Certaines avenues

de recherche de méthodes heuristiques pourraient être empruntées, comme celle de résoudre un problème quotidien avec flexibilité d'horaire pour une journée-type de la semaine de façon à déterminer un nouvel horaire pour les numéros de vols présents lors de cette journée, puis de résoudre un problème hebdomadaire avec horaire fixe, les heures de départ des vols étant fixées en fonction des résultats obtenus lors de la résolution de la journée-type. Une fois le nouvel horaire établi, l'approche avec homogénéité (cf. chapitres 4 et 5) pourrait être utilisée pour déterminer l'affectation des types d'avion aux vols pour la semaine entière. De plus, dans les cas où la taille des problèmes le permet, on pourrait directement utiliser l'approche en deux phases pour l'homogénéité en considérant la flexibilité d'horaire en phase I, en plus du choix des types dominants. Ceci suppose qu'il soit possible de résoudre le problème avec flexibilité d'horaire sur un horizon de deux ou trois jours par exemple, ce qui apparaît tout de même beaucoup plus réaliste que de pouvoir résoudre le problème directement sur une semaine.

# Bibliographie

ABARA, J. (1989). Applying Integer Linear Programming to the Fleet Assignment Problem, *Interfaces* 19, 20-28.

AGARD J., J. SUDAROVITCH et F. HEMMER (1973). Selection and Optimal Assignment of an Aircraft Fleet, *R.A.I.R.O.* 7, 3-26.

ANBIL, R., E. GELMAN, B. PATTY et R. TANGA (1991). Recent Advances in Crew Pairing Optimization at American Airlines, *Interfaces* 21, 62-74.

BALL, M.O. et A. ROBERTS (1985). A Graph Partitioning Approach to Air Crew Scheduling, *Transportation Science* 19, 107-126.

BARNHART, C., N. BOLAND, L.W. CLARKE, E.L. JOHNSON, G.L. NEMHAUSER et R.G. SHENOI (1998a). Flight String Models for Aircraft Fleeting and Routing, *Transportation Science* 32, no 3, 208-220.

BARNHART, C., L. HATAY et E.L. JOHNSON (1995). Deadhead Selection for the Long-Haul Crew Pairing Problem, *Operations Research* 43, no 3, 491-499.

BARNHART, C., E.L. JOHNSON, R. ANBIL et L. HATAY (1994). A Column Generation Technique for the Long-Haul Crew Assignment Problem, *Mathematical Programming and Modeling Techniques in Practice*, T.A. Ciriani et R. Leachman (eds.), Optimization in Industry 2, John Wiley and Sons, New York, 7-22.

BARNHART, C., E.L. JOHNSON, G.L. NEMHAUSER, M.W.P. SAVELSBERGH et P. VANCE (1998b). Branch-and-Price : Column Generation for Solving Huge Integer Program, *Operations Research* 46, no 3, 316-329.



BARNHART, C., T.S. KNIKER et M. LOHATEPANONT (2002). Itinerary-based Airline Fleet Assignment, *Transportation Science* 36, no 2, 199–217.

BARNHART, C. et R.G. SHENOI (1998). An Approximate Model and Solution Approach for the Long-Haul Crew Pairing Problem, *Transportation Science* 32, no 3, 221–231.

BYRNE, J. (1988). A Preferential Biddings System for Technical Aircrew, *AGIFORS Symposium Proceedings* 28, 87–99.

CHU, H. D., E. GELMAN et E. JOHNSON (1997). Solving Large Scale Crew Scheduling Problems, *European Journal of Operational Research* 97, 260–268.

CLARKE, L.W., C.A. HANE, E.L. JOHNSON et G.L. NEMHAUSER (1996). Maintenance and Crew Considerations in Fleet Assignment, *Transportation Science* 30, no 3, 249–260.

CLARKE, L.W., E.L. JOHNSON, G.L. NEMHAUSER et Z. ZHONGXI (1997). The Aircraft Rotation Problem, *Annals of Operations Research* 69, 33–46.

CORDEAU, J.-F., G. STOJKOVIĆ, F. SOUMIS et J. DESROSIERS (2001). Benders Decomposition for Simultaneous Aircraft Routing and Crew Scheduling, *Transportation Science* 35, no 4, 375–388.

DANTZIG, G.B. et P. WOLFE (1960). Decomposition Principle for Linear Programs, *Operations Research* 8, 101–111.

DESAULNIERS, G., J. DESROSIERS, Y. DUMAS, S. MARC, B. RIOUX, M. SOLOMON et F. SOUMIS (1997b). Crew Pairing at Air France, *European Journal of Operational Research* 97, 245–259.

DESAULNIERS, G., J. DESROSIERS, Y. DUMAS, M.M. SOLOMON et F. SOUMIS (1997a). Daily Aircraft Routing and Scheduling, *Management Science* 43, no 6, 841–855.

DESAULNIERS, G., J. DESROSIERS, I. IOACHIM, F. SOUMIS et M. SOLOMON (1998). A Unified Framework for Time Constrained Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems, *Fleet Management and Logistics*, T. Crainic et G. Laporte (eds), Kluwer, Norwell, MA, 57–93.

DESAULNIERS, G., J. DESROSIERS et M.M. SOLOMON (2002). Accelerating Strategies in Column Generation Methods for Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems, *Essays and Surveys in Metaheuristics*, C.C. Ribeiro et P. Hansen (eds), Kluwer, Norwell, MA, 309–324.

DESROCHERS, M. et F. SOUMIS (1988a). A Generalized Permanent Labeling Algorithm for the Shortest Path Problem with Time Windows, *INFOR* 26, 191–212.

DESROCHERS, M. et F. SOUMIS (1988b). A Reoptimization Algorithm for the Shortest Path Problem with Time Windows, *European Journal of Operational Research* 35, 242–254.

DESROSIERS, J., Y. DUMAS, M.M. SOLOMON et F. SOUMIS (1995). Time Constrained Routing and Scheduling, *Network Routing : Handbooks in Operations Research and Management Science* 8, M. Ball, T. Magnanti, C. Monma, G. Newhauser (eds.), Elsevier Science Publisher B.V., Amsterdam, 35–139.

DOBSON, G. et P.J. LEDERER (1993). Airline Scheduling and Routing in a Hub and Spoke System, , *Transportation Science* 27, 281–297.

EMDEN-WEINERT, T. et M. PROKSCH (1999). Best practice simulated annealing for the airline crew scheduling problem, *Journal of Heuristics* 5, 419–436.

ETSCHMAIER, M.M. et D.F.X. MATHAISEL (1984). Aircraft Scheduling : The State of the Art, *AGIFORS Symposium Proceedings 24*, 181–225.

ETSCHMAIER, M.M. et D.F.X. MATHAISEL (1985). Airline Scheduling : an Overview, *Transportation Science 19*, 127–138.

FAHLE, T., U. JUNKER, S.E.KARISCH, N. KOHL, M. SELLMANN et B. VAA-BEN (2002). Constraint programming based column generation for crew assignment, *Journal of Heuristics 8*, 59–81.

GAMACHE, M. et F. SOUMIS (1998). A Method for Optimally Solving the Rostering Problem, *Operations Research in Airline Industry*, G. Yu (ed.), Kluwer, Boston, 124–157.

GAMACHE, M., F. SOUMIS, G. MARQUIS et J. DESROSIERS (1999). A column generation approach for large-scale aircrew rostering problems *Operations Research Volume 47*, 247–262.

GAMACHE, M., F. SOUMIS, D. VILLENEUVE, J. DESROSIERS et É. GÉLINAS (1998). The Preferential Bidding System at Air Canada, *Transportation Science 32*, no 3, 246–255.

GLANERT, W. (1984). A Timetable Approach to the Assignment of Pilots to Rotations, *AGIFORS Symposium Proceedings 24*, 369–391.

GOPALAN, R. et K.T. TALLURI (1998). The Aircraft Maintenance Routing Problem, *Operations Research 46*, no 2, 260–271.

GRAVES, G.W., R.D. MCBRIDE, I. GERSHKOFF, D. ANDERSON ET D. MAHID-HARA (1993). Flight Crew Scheduling, *Management Science 39*, 736–745.

GU, Z., E.L. JOHNSON, G.L. NEMHAUSER et Y. WANG (1994). Some Properties of the Fleet Assignment Problem, *Operations Research Letters* 15, 59–71.

HANE, C., C. BARNHART, E.L. JOHNSON, R. MARSTEN, G.L. NEMHAUSER et G. SIGISMONDI (1995). The Fleet Assignment Problem : Solving a Large-Scale Integer Program, *Mathematical Programming* 70, 211–232.

IOACHIM, I., J. DESROSIERS, F. SOUMIS et N. BÉLANGER (1999). Fleet Routing with Schedule Synchronization Constraints, *European Journal of Operational Research* 119, 75–90.

IOACHIM, I., S. GÉLINAS, J. DESROSIERS et F. SOUMIS (1998). A Dynamic Programming Algorithm for the Shortest Path Problem with Time Windows and Linear Node Costs, *Networks* 31, 193–204.

JARRAH, A.I., J. GOODSTEIN et R. NARASIMHAN (2000). An efficient airline re-fleeting model for the incremental modification of planned fleet assignments, *Transportation Science* 34, 349–363.

JARRAH, A.I. et J.C. STREHLER (2002). An optimization model for assigning through flights, *IIE Transactions* 32, 237–244.

JONES, R.D. (1989). Development of an Automated Airline Crew Bid Generation System, *Interfaces* 19, 44–51.

KLINCEWICZ, J.G. et M.B. ROSENWEIN (1995). The Airline Exception Scheduling Problem, *Transportation Science* 29, no 1, 4–16.

LAVOIE, S., M. MINOUX et E. ODIER (1988). A New Approach of Crew Pairing Problems by Column Generation and Application to Air Transport, *European Journal of Operational Research* 35, 45–58.

- LEVIN, A. (1971). Scheduling and Fleet Routing Models for Transportation Systems, *Transportation Science* 5, 232–255.
- MASHFORD, J.S. et B.S. MARKSJO (2001). Airline Base Schedule Optimisation by Flight Network Annealing, *Annals of Operations Research* 108, p. 293–313.
- MERCIER, A., J.-F. CORDEAU et F. SOUMIS (2004). A Computational Study of Benders Decomposition for the Integrated Aircraft Routing and Crew Scheduling Problem, à paraître dans *Computers and Operations Research*.
- MOORE, R., J. EVANS et H. NOO (1978). Computerized Tailored Blocking, *AGIFORS Symposium Proceedings* 18, 343–361.
- NIKULAINEN, M. (1992). A Simple Mathematical Method to Define Demand for Schedule Planning, *AGIFORS Symposium Proceedings* 32, 77–85.
- PHILLIPS, R.L. et D.W. BOYD (1989). An Integrated Approach to Airline Fleet and Scheduling Planning, *AGIFORS Symposium Proceedings* 29, 284–298.
- REXING, B., C. BARNHART, T. KNIKER, A. JARRAH et N. KRISHNAMURTHY (2000). Airline Fleet Assignment with Time Windows, *Transportation Science* 34, no 1, 1–20.
- RUSHMEIER, R.A. et S.A. KONTOGIORGIS (1997). Advances in the Optimization of Airline Fleet Assignment, *Transportation Science* 31, no 3, 159–169.
- RYAN, D.M. (1992). The Solution of Massive Generalized Set Partitioning Problems in Air Crew Rostering, *Journal of the Operational Research Society* 43, no 5, 459–467.
- SIMPSON, R.W. (1968). A Review of Scheduling and Routing Models for Airline Scheduling, *AGIFORS Symposium Proceedings* 8.

- SOUMIS, F., J. FERLAND et J.-M. ROUSSEAU (1980). A Large Scale Model for Airline Fleet Planning and Scheduling Problem, *Transportation Research 14B*, 191–201.
- STOJKOVIĆ, M. ET F. SOUMIS (2001). An Optimization Model for the Simultaneous Operational Flight and Pilot Scheduling Problem, *Management Science 47*, 1290–1305.
- SUBRAMANIAN, R., R.P. SCHEFF, J.D. QUILLINAN, D.S. WIPER et R.E. MARSTEN (1994). Coldstart : Fleet Assignment at Delta Air Lines, *Interfaces 24*, no 1, 104–120.
- TALLURI, K.T. (1996). Swapping Applications in a Daily Airline Fleet Assignment, *Transportation Science 30*, no 3.
- TALLURI, K.T. (1998) The Four-Day Aircraft Maintenance Routing Problem, *Transportation Science 32*, no 1.
- VANCE, P.H., C. BARNHART, E.L. JOHNSON et G.L. NEWHAUSER (1997). Airline Crew Scheduling : a New Formulation and Decomposition Algorithm, *Operations Research 45*, no 2, 188–200.