

**Titre:** Modélisation géométrique par NURBS pour le design  
aérodynamique des ailes d'avion  
Title: aérodynamique des ailes d'avion

**Auteur:** Anas Bentamy  
Author:

**Date:** 2003

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Bentamy, A. (2003). Modélisation géométrique par NURBS pour le design  
aérodynamique des ailes d'avion [Thèse de doctorat, École Polytechnique de  
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7256/>  
Citation:

## Document en libre accès dans PolyPublie Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7256/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Jean-Yves Trépanier, & François Guibault  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE PAR NURBS POUR LE DESIGN  
AÉRODYNAMIQUE DES AILES D'AVION

ANAS BENTAMY

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
DÉCEMBRE 2003



National Library  
of Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

Acquisitions et  
services bibliographiques

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

ISBN: 0-612-89222-0

*Our file* *Notre référence*

ISBN: 0-612-89222-0

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this dissertation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de ce manuscrit.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the dissertation.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

# Canadä

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE PAR NURBS POUR LE DESIGN  
AÉRODYNAMIQUE DES AILES D'AVION

présentée par: BENTAMY Anas

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. REGGIO Marcelo, Ph.D., président

M. TRÉPANIER Jean-Yves, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GUIBAULT François, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. AUBIN Carl-Éric, Ph.D., membre

M. PARASCHIVOIU Marius, Ph.D., membre

À mes très chers parents,  
À qui je suis éternellement redevable.

## REMERCIEMENTS

Je voudrais adresser en premier lieu mes remerciements à :

- mon directeur de recherche, le professeur **Jean-Yves Trépanier**, pour ses multiples encouragements et son soutien indéfectible. Ce fut un réel enrichissement de travailler sous sa direction.
- mon codirecteur de recherche, le professeur **François Guibault**, pour ses conseils avisés et son soutien fort appréciable.

Leur encadrement et leur effort, sans cesse renouvelés, ont permis de mener à bien ce projet.

Je tiens également à remercier Messieurs **François Pépin**, **Yvan Laroche** et **David Leblond** de Bombardier Aéronautique pour leurs aide et suggestions précieuses.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble du personnel, de ce que fut, oh ! hélas, le **CERCA**. Ce centre de recherche en calcul appliqué abritait en son sein de multiples talents au contact toujours facile et agréable. Je commencerai par Monsieur **Paul Labbé** dont les qualités humaines et les compétences semblent ne pas avoir de limite. Un bien grand merci, Paul, pour ces nombreuses journées où tu me prodigiais de précieux enseignements sous l'oeil amusé de Monaco. Vient, bien évidemment ensuite, Monsieur **Julien Dompierre**. Si, ce qui se conçoit bien s'énonce clairement, il faudrait y ajouter l'humour propre à Julien ! Cela rend la communication scientifique des plus attrayantes. L'ordre étant sans importance, je n'oublierai pas Madame **Marie Gabrielle Vallet** qui m'a initié à ce projet avec la plus grande attention. À mon cher compatriote, Monsieur **Mohammed Khachan**, qui a supporté mes états d'âme avec la plus grande amabilité. Ses explications en mathématiques ont toujours été à l'affût des connaissances actuelles. À ses ires

amicales de Monsieur **Christophe Tribes** ! Nos échanges n'en ont jamais souffert. Sa pertinence a été maintes fois sollicitée. Un grand merci à Monsieur **Djamel Bouhemhem** pour sa sollicitude à mon égard et à ses agréables pauses enfumées ! Un merci spécial à Madame **Monique Vachon**, à Monsieur **Pierre Hamelin** et à Monsieur **Richard Lefebvre** pour leur aide appréciable. À tous les étudiants que j'ai côtoyés, dont la perspicacité était mis à l'épreuve, qu'ils veuillent bien m'excuser de ne pas les citer nominativement.

Je voudrais également remercier Monsieur **Hubert Allard** et Monsieur **Badis Besbes**, qui, en plus de leur sincère camaraderie, ont porté attention aux conditions de mon travail.

Je terminerai en soulignant l'apport familial inestimable. Le dévouement inconditionnel de mes parents a toujours été d'un grand réconfort. À ma tendre épouse, **Majda**, qui a su s'adapter à ma vie étudiante.

## RÉSUMÉ

L'évolution des techniques informatiques a permis de dynamiser les recherches dans plusieurs domaines dont notamment la conception assistée par ordinateur. Cette étude s'inscrit dans l'avancée des méthodes de conception numérique en ingénierie, plus particulièrement dans le domaine aérospatial. La modélisation géométrique à base de NURBS a été appliquée avec succès à la génération d'aile d'avion pour les besoins de l'optimisation aérodynamique et prenant en compte un certain nombre de contraintes manufacturières. Le but de construire une représentation géométrique lisse, comprenant un nombre restreint de paramètres, a été respecté. Ainsi, une aile d'avion sous forme de surfaces réglées en son bord d'attaque et ses volets et sous forme de surfaces courbes approchant les propriétés locales de courbes coniques en ses parties centrales, est décrite par 130 points de contrôle et 15 variables de design géométriques. La représentation tridimensionnelle de l'aile a fait appel à des techniques d'investigation de surface afin d'en juger convenablement la qualité visuelle et repérer toutes inversions de signe de la courbure dans les deux directions de paramétrisation  $u$  et  $v$ . La cartographie en couleur de la courbure de Gauss s'est alors révélé adaptée à la visualisation. L'automatisation de la construction de l'aile a nécessité de recourir à une méthode d'optimisation heuristique, le recuit simulé. La convergence rapide des solutions obtenues est venu confirmer le regain d'intérêt que suscite le recuit simulé dans les problèmes d'ingénierie. La robustesse de ce modèle géométrique de l'aile d'avion a été testée avec succès sur un problème académique de design inverse. Les résultats obtenus laissent présager de multiples applications possibles, allant de l'extension à la représentation géométrique d'un avion au complet à l'imbrication d'autres disciplines propres à un cycle de conception préliminaire en design aéronautique.

## ABSTRACT

The constant evolution of the computer science gives rise to many research areas especially in computer aided design. This study is part of the advancement of the numerical methods in engineering computer aided design, specifically in aerospace science. The geometric modeling based on NURBS has been applied successfully to generate a parametric wing surface for aerodynamic design while satisfying manufacturing constraints. The goal of providing a smooth geometry described with few parameters has been achieved. In that case, a wing design including ruled surfaces at the leading edge slat and at the flap, and, curved central surfaces with intrinsic geometric property coming from conic curves, necessitates 130 control points and 15 geometric design variables. The 3D character of the wing need to be analyzed by techniques of investigation of surfaces in order to judge conveniently the visual aspect and detect any sign inversion in both directions of parametrization  $u$  and  $v$ . Color mapping of the Gaussian curvature appears to be a very effective tools in visualization. The automation of the construction has been attained using an heuristic optimization algorithm, simulated annealing. The relative high speed of convergence to the solutions confirms its practical interest in engineering problems nowadays. The robustness of the geometric model has been tested successfully with an academic inverse design problem. The results obtained allow to foresee multiple possible applications from an extension to a complete geometric description of an airplane to the interaction with others disciplines belonging to a preliminary aeronautical design process.

**TABLE DES MATIÈRES**

DÉDICACE . . . . .	iv
REMERCIEMENTS . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vii
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiv
LISTE DES FIGURES . . . . .	xvi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xxii
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xxvi
INTRODUCTION . . . . .	1
0.1 Évolution historique du design en aéronautique . . . . .	1
0.2 Objectifs . . . . .	3
0.3 Organisation de ce document . . . . .	4
CHAPITRE 1 CONCEPTS ET MODÉLISATION EN AÉRONAUTIQUE	5
1.1 Étapes d'un processus de design en aéronautique . . . . .	5
1.2 Calculs des performances aérodynamiques . . . . .	7
1.3 Physique de l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion . . . . .	7
1.4 Caractéristiques de l'écoulement transsonique . . . . .	9
1.5 Modélisation mathématique des écoulements compressibles . . . . .	9

1.6	Approches de modification des modèles géométriques . . . . .	12
1.6.1	Approche vectorielle et approche analytique . . . . .	12
1.6.2	Approche par domaine . . . . .	13
1.6.3	Approche par équation aux dérivées partielles . . . . .	13
1.6.4	Approche discrète . . . . .	14
1.6.5	Approche polynomiale . . . . .	15
1.6.6	Modélisation basée sur les caractéristiques ou <i>Features</i> . . .	15
1.6.7	Déformations particulières (Free Form Deformation Approach)	16
1.6.8	Choix du modèle géométrique adapté à cette étude . . . . .	18
<b>CHAPITRE 2 MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE EN CAO . . . . .</b>		<b>20</b>
2.1	Introduction . . . . .	20
2.2	Représentation paramétrique des surfaces gauches . . . . .	21
2.3	Représentation paramétrique utilisant les NURBS. . . . .	26
2.3.1	Équations paramétriques et équations implicites . . . . .	26
2.3.2	Propriétés recherchées pour les fonctions d'interpolation ( <i>'blending functions'</i> ) . . . . .	28
2.3.3	Fonctions de base B-Splines . . . . .	29
2.3.3.1	Définition d'une B-Spline . . . . .	29
2.3.3.2	Dérivées des B-Splines . . . . .	30
2.3.4	Classes de fonctions polynomiales rationnelles . . . . .	31
2.3.5	Définition d'une surface NURBS . . . . .	33
<b>CHAPITRE 3 TECHNIQUES DE VISUALISATION POUR L'ANALYSE DE SURFACE . . . . .</b>		<b>36</b>
3.1	Nécessité de méthodes d'investigation de surface . . . . .	36
3.2	Notions de géométrie différentielle . . . . .	37
3.3	Méthodes d'investigation de surface . . . . .	41

3.3.1	Lignes Iso . . . . .	42
3.3.1.1	Lignes de contour . . . . .	42
3.3.1.2	Lignes paraboliques . . . . .	43
3.3.2	Méthodes de réflexion . . . . .	45
3.3.2.1	Lignes de réflexion . . . . .	46
3.3.2.2	Lignes de reflet . . . . .	46
3.3.3	Isophote . . . . .	46
3.3.4	Surfaces offsets généralisées . . . . .	47
3.3.5	Cartographie en couleur . . . . .	48
3.3.6	Lignes caractéristiques . . . . .	49
3.3.6.1	Lignes de courbure . . . . .	49
3.3.6.2	Lignes géodésiques . . . . .	49
3.4	Visualisation . . . . .	50
<b>CHAPITRE 4 REPRÉSENTATION NURBS D'UNE AILE D'AVION AVEC CONTRAINTES GÉOMÉTRIQUES . . . . .</b>		<b>51</b>
4.1	Présentation de la problématique . . . . .	51
4.2	Localisation des différentes contraintes géométriques . . . . .	51
4.3	Construction initiale de l'aile . . . . .	52
4.4	Limite de l'influence des points de contrôle . . . . .	55
4.5	Cassures et surfaces réglées . . . . .	57
4.5.1	Duplication de points de contrôle . . . . .	58
4.5.2	Duplication de points de contrôle et insertion de noeud . . . . .	60
4.5.3	Insertion de noeuds . . . . .	61
4.6	Introduction de parties coniques . . . . .	67
4.6.1	Insertion d'une ligne de points de contrôle . . . . .	68
4.6.2	Écartement de points triples suivant des directions imposées	70

4.6.3	Écartement des points triples à l'aide d'un schéma d'interpolation modifié . . . . .	74
4.6.4	Qualité de la construction initiale de l'aile . . . . .	82
CHAPITRE 5 AUTOMATISATION DE LA CONSTRUCTION DE L'AILE AVEC CONTRAINTES GÉOMÉTRIQUES . . . . .		85
5.1	Optimisation de la forme géométrique . . . . .	85
5.1.1	Critères et techniques d'amélioration de la forme d'une représentation géométrique . . . . .	86
5.1.2	Algorithme de lissage . . . . .	87
5.2	Algorithmes d'optimisation . . . . .	90
5.2.1	Formulation d'un problème d'optimisation . . . . .	90
5.2.2	Choix de l'optimiseur . . . . .	92
5.2.3	Résultats de l'automatisation de la construction de l'aile . . . . .	93
CHAPITRE 6 CONTEXTE DE DESIGN OPTIMAL . . . . .		98
6.1	Description de la méthode de validation . . . . .	100
6.1.1	Construction initiale de l'aile . . . . .	100
6.1.2	Paramètres d'optimisation et objectifs aérodynamiques . . . . .	101
6.1.3	Fonction coût globale $\mathcal{F}(\bar{X})$ . . . . .	104
6.1.4	Expressions analytiques de la fonction coût $\mathcal{F}(\bar{X})$ . . . . .	105
6.1.5	Choix de l'optimiseur à gradient . . . . .	106
6.2	Organigramme du schéma d'échange de données . . . . .	107
6.3	Effet du pas de différenciation et du bruit numérique dans l'évaluation du gradient de la fonction objectif $\mathcal{F}(\bar{X})$ . . . . .	109
6.4	Performances des reformulations monobjectif et limite de convergence	111
6.4.1	Calcul des fonctions objectif locales $f^{max}$ et $f^o$ . . . . .	111
6.4.2	Optimisation aérodynamique des trois sections de définition	112

6.4.3 Optimisation aérodynamique de l'aile avec contraintes géométriques . . . . .	115
CONCLUSION . . . . .	120
RÉFÉRENCES . . . . .	123
ANNEXES . . . . .	131

## LISTE DES TABLEAUX

TABLEAU 1.1	Avantages et inconvénients de différentes types de modèles géométriques utilisées en design aéronautique . . . . .	17
TABLEAU 5.1	Évolution typique de la fonction coût pour la partie centrale intérieure intrados. Le nombre de variable de design est 3. En gras, la meilleure surface de représentation satisfaisant les critères de courbure pour cette partie . . . . .	94
TABLEAU 5.2	Évolution typique de la fonction coût pour la partie centrale extérieure intrados. Le nombre de variable de design est 6. En gras, la meilleure surface de représentation satisfaisant les critères de courbure pour cette partie . . . . .	95
TABLEAU 5.3	Évolution typique de la fonction coût pour la partie centrale extrados. Le nombre de variable de design est 6. En gras, la meilleure surface de représentation satisfaisant les critères de courbure pour cette partie . . . . .	95
TABLEAU 6.1	Coût de calcul des solutions aérodynamiques en design inverse des cinq stations de l'aile, calculées séparément, et, valeurs des fonctions coût locales $f^{max}$ et $f^o$ . . . . .	113
TABLEAU 6.2	Coût de calcul de diverses stratégies de reformulation monobjectif et valeurs de la fonction coût $\mathcal{F}(\bar{X})$ initiales et finales. Seules les trois sections de définition ont été optimisées aérodynamiquement . . . . .	116

TABLEAU 6.3 Valeurs comparatives des fonctions coût locales $f$ initiales et finales, des trois sections de définition, pour les diverses stratégies de reformulation monobjectif testées . . . . .	116
TABLEAU 6.4 Valeurs des fonctions coût locales $f_i$ ( $1 \leq i \leq 5$ ), et, de la fonction coût $\mathcal{F}(\bar{X})$ . . . . .	118

## LISTE DES FIGURES

<b>FIGURE 1.1</b>	Processus de design aérodynamique . . . . .	6
<b>FIGURE 1.2</b>	Illustration de l'écoulement transsonique . . . . .	10
<b>FIGURE 1.3</b>	Hiérarchie des modélisations physiques des écoulements compressibles . . . . .	11
<b>FIGURE 1.4</b>	Définition d'un domaine . . . . .	14
<b>FIGURE 2.1</b>	Segment de courbe et morceau ("patch") de surface de Ferguson	23
<b>FIGURE 2.2</b>	Morceau ("patch") de surface de Coons . . . . .	23
<b>FIGURE 2.3</b>	Schéma d'une <i>spline</i> et de ces poids ou points d'attache . . .	25
<b>FIGURE 2.4</b>	Développement des méthodes de descriptions mathématiques des courbes et surfaces . . . . .	26
<b>FIGURE 2.5</b>	Fonctions de base B-spline cubiques (a) et leurs dérivées premières (b), figure Fig.2.10 dans <i>The NURBS book</i> (Piegl et Tiller (1997)) . . . . .	32
<b>FIGURE 3.1</b>	Surface paramétrique . . . . .	38
<b>FIGURE 3.2</b>	Vecteurs tangent et normal d'une courbe inscrite sur la surface $\bar{\sigma}(u, v)$ . . . . .	39
<b>FIGURE 3.3</b>	Courbure de Gauss strictement positive, $G > 0$ . Au voisinage de chaque point, la surface est <i>convexe</i> ( <i>point elliptique</i> ) . .	42

FIGURE 3.4	Courbure de Gauss strictement négative, $G < 0$ . Au voisinage de chaque point, présence d'un <i>col</i> ( <i>point hyperbolique</i> ) . . . . .	43
FIGURE 3.5	Courbure de Gauss nulle, $G = 0$ . Au voisinage de chaque point, la surface est <i>cylindrique</i> ( <i>point parabolique</i> ) . . . . .	44
FIGURE 3.6	Courbure de Gauss, $G \leq 0$ , d'une surface <i>réglée</i> . . . . .	44
FIGURE 3.7	Courbure de Gauss d'une demi-sphère. $G = 1/R^2$ , où $R$ rayon de la demi-sphère . . . . .	45
FIGURE 3.8	Lignes de contour de la courbure de Gauss (a) et paraboliques (b) . . . . .	45
FIGURE 3.9	Lignes de réflexion (a) et de reflet (b) . . . . .	47
FIGURE 4.1	L'extrados est à droite, l'intrados à gauche . . . . .	52
FIGURE 4.2	Localisation des différentes contraintes géométriques . . . . .	53
FIGURE 4.3	Les 5 différentes parties de l'aile . . . . .	54
FIGURE 4.4	Répartition type des points de collocation (en bleu) et des points de contrôle (en rouge) . . . . .	56
FIGURE 4.5	Limite de l'influence de la rangée $j$ dans le sens de l'envergure des points de contrôle écartés suivant le vecteur nodal $\overline{U}$ . . .	57

FIGURE 4.6	Courbes B-Spline cubiques définies sur le vecteur nodal : a) $\bar{U} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.4 \ 0.6 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ , b) $\bar{U} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ avec un noeud double et un point de contrôle double, c) $\bar{U} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 0.5 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ avec un point de contrôle triple $P_2 = P_3 = P_4$ , d) $\bar{U} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ avec un noeud triple . . . . .	64
FIGURE 4.7	Points de contrôle associés aux courbes de la figure 4.6 . . . . .	65
FIGURE 4.8	Points de contrôle d'une aile à une cassure . . . . .	66
FIGURE 4.9	Visualisation d'une cassure à l'aide d'un maillage cartésien de la surface extérieure de l'aile d'avion . . . . .	66
FIGURE 4.10	Courbure de Gauss à l'extrados (a) et à l'intrados (b) d'une aile à une cassure . . . . .	67
FIGURE 4.11	Description du sens de déplacement d'un point de contrôle de la ligne de points de contrôle insérée . . . . .	69
FIGURE 4.12	Coupes suivant des plans à Y constant dans le domaine d'influence des points de contrôle déplacés . . . . .	70
FIGURE 4.13	Courbes isoparamétriques ( $v = 0.26$ ) suivant la valeur de la position relative extrados et intrados . . . . .	70
FIGURE 4.14	Courbes iso_u à l'extrados dans le domaine d'influence du point de contrôle modifié . . . . .	71

FIGURE 4.15	Courbes isoparamétriques ( $u = 0.72$ ), projetées dans le plan (YZ), pour des valeurs de la position relative extrados ne faisant pas apparaître de bosse . . . . .	71
FIGURE 4.16	Courbes iso_u à l'intrados dans le domaine d'influence du point de contrôle modifié . . . . .	72
FIGURE 4.17	Courbes isoparamétriques ( $u = 0.24$ ), projetées dans le plan (YZ), pour des valeurs de la position relative intrados ne faisant pas apparaître de bosses . . . . .	72
FIGURE 4.18	Description du sens de déplacement de deux points de contrôle	73
FIGURE 4.19	Intersection entre l'aile et le plan ( $Y = 2.75$ ) pour plusieurs valeurs de l'écartement intérieur et extérieur à l'extrados et à l'intrados. Les angles de déviation sont maintenus à zéro .	74
FIGURE 4.20	Courbes iso-paramétriques ( $u = 0.72$ ), projetées dans le plan (YZ), pour des valeurs d'écartements extrêmes à l'extrados ne faisant pas apparaître de bosses . . . . .	74
FIGURE 4.21	Courbes iso-paramétriques ( $u = 0.22$ ), projetées dans le plan (YZ), pour des valeurs d'écartements extrêmes à l'intrados ne faisant pas apparaître de bosses . . . . .	75
FIGURE 4.22	Conique construite à partir d'une rationnelle quadratique de Bézier à trois points de contrôle . . . . .	77
FIGURE 4.23	Répartition des points de contrôle résultant de l'application du schéma d'interpolation modifié . . . . .	80

FIGURE 4.24	Courbe iso_u ( $u = 0.13$ ) à l'intrados projetée dans le plan (XZ) . . . . .	80
FIGURE 4.25	Courbe iso_u ( $u = 0.77$ ) à l'extrados projetée dans le plan (XZ) . . . . .	81
FIGURE 4.26	Courbe iso_u ( $u = 0.77$ ) à l'extrados projetée dans le plan (YZ) . . . . .	81
FIGURE 4.27	Extrados de l'aile à une cassure : inversion du signe de la courbure de Gauss pour la partie centrale matérialisé par le changement de couleur (bleu-rouge) . . . . .	83
FIGURE 4.28	Intrados de l'aile à une cassure : inversion du signe de la courbure de Gauss pour les parties centrales matérialisées par le changement de couleur (bleu-rouge) au travers d'une même partie centrale . . . . .	84
FIGURE 5.1	Extrados de l'aile à une cassure : une courbure de Gauss nulle pour les parties réglées (coloration verte) et négative pour les parties de forme hyperbolique (coloration bleue) . . . . .	96
FIGURE 5.2	Intrados de l'aile à une cassure : une courbure de Gauss nulle pour les parties réglées (coloration verte), négative pour les parties de forme hyperbolique (coloration bleue) et positive pour les parties de forme elliptique (coloration rouge) . . . . .	97
FIGURE 6.1	Positionnement des cinq stations de l'aile initiale avec les courbes de $C_p$ correspondantes. Courbure de Gauss nulle pour les parties réglées (coloration verte) et négative pour la partie de forme hyperbolique (coloration bleue) . . . . .	102

FIGURE 6.2	Courbes de $C_p$ initiales et cibles aux cinq stations de l'aile initiale. La coordonnée $x$ est normalisée avec la corde. Les coefficients de portance sont : a) $C_L = 0.7028$ , b) $C_L = 0.6529$ , c) $C_L = 0.5700$ , d) $C_L = 0.5128$ , e) $C_L = 0.3923$ . . .	103
FIGURE 6.3	Organigramme des échanges de données entre les programmes de construction géométrique de l'aile, d'automatisation de la construction géométrique, du résoluteur d'écoulement BGK et de l'optimiseur aérodynamique . . . . .	108
FIGURE 6.4	Courbes de $C_p$ initiales, cibles et finales aux cinq stations de l'aile, optimisées individuellement. La coordonnée $x$ est normalisée avec la corde. Les coefficients de portance finaux sont : a) $C_L = 0.7079$ , b) $C_L = 0.6892$ , c) $C_L = 0.5418$ , d) $C_L = 0.5049$ , e) $C_L = 0.3794$ . . . . .	114
FIGURE 6.5	Courbes de $C_p$ initiales, cibles et finales aux cinq stations de l'aile optimisée. La coordonnée $x$ est normalisée avec la corde. Les coefficients de portance sont : a) $C_L = 0.7121$ , b) $C_L = 0.6645$ , c) $C_L = 0.5719$ , d) $C_L = 0.5114$ , e) $C_L = 0.4028$	118
FIGURE 6.6	Positionnement des cinq stations de l'aile optimisée avec les courbes de $C_p$ correspondantes. Courbure de Gauss nulle pour les parties réglées (coloration verte) et négative pour la partie de forme hyperbolique (coloration bleue) . . . . .	119

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### Acronymes

CAD	Computer Aided Design
CAGD	Computer Aided Geometric Design
CAO	Conception Assistée par Ordinateur
CFD	Computational Fluid Dynamics
MDO	Multidisciplinary Design Optimisation
MOO	Multi-Objective Optimisation
NURBS	Non-Uniform Rational B-Splines

### Caractères usuels

$C_p$	coefficient de pression
$C_D$	coefficient de traînée
$C_L$	coefficient de portance
$D$	variable de reparamétrisation sans dimension
$F$	matrice de la première forme fondamentale
$G$	matrice de la deuxième forme fondamentale
$h$	pas de discrétisation absolu
$h_r$	pas de discrétisation relatif
$H_k$	matrice hessienne à l'itération $k$
$K$	courbure de Gauss
$k_n$	courbure normale à une surface
$\mathbf{k}_{min}$ et $\mathbf{k}_{max}$	courbures principales d'une surface
$M_{cr}$	nombre de Mach critique

$M_\infty$	nombre de Mach à l'infini
$N_{i,p}(u)$	fonction de base B-Spline d'ordre p
$P_{i,j}$	point contrôle
$Re$	nombre de Reynolds
$R_{i,j}(u, v)$	fonction de base rationnelle
$S(u, v)$	surface NURBS
$S_k$	vecteur direction de recherche à l'itération $k$
$u$	paramètre dans la direction de la corde
$\bar{U}$	vecteur nodal U pour le paramètre u
$v$	paramètre dans la direction de l'envergure
$\bar{V}$	vecteur nodal V pour le paramètre v
$V_\infty$	vitesse d'écoulement à l'infini
$x, y, z$	axes des coordonnées cartésiennes
$x_i^L$	borne inférieure de la variable de design $x_i$ (L pour <i>lower</i> )
$x_i^U$	borne supérieure de la variable de design $x_i$ (U pour <i>upper</i> )
$\bar{X}$	vecteur des variables de design d'un point quelconque de l'espace de design
$X_0$	point initial
$X_k$	point à l'itération $k$
$X^*$	point optimal au sens de <i>Pareto</i>

### Caractères grecs

$\alpha$	angle de rotation du vecteur de la dérivée seconde autour du vecteur de la dérivée première (en radian)
$\alpha_1$	poids du point de contrôle milieu de la conique de référence

$\beta_k$	scalaire définissant la longueur parcourue le long du vecteur $S_k$ à l'itération $k$
$\delta$	incrément
$\eta$	dérivée du paramètre $u$ de la surface $\bar{\sigma}(u, v)$ en fonction de la paramétrisation d'une courbe inscrite sur cette surface
$\theta$	réel $\in [0, 1]$
$\lambda_i$	coefficient de pondération
$\nu$	vecteur normal à la surface $\sigma$
$\xi$	dérivée du paramètre $v$ de la surface $\bar{\sigma}(u, v)$ en fonction de la paramétrisation d'une courbe inscrite sur cette surface
$\rho$	paramètre de la méthode du <i>min-max</i> augmentée
$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(u, v)$	surface paramétrée en $u$ et en $v$
$d\bar{\sigma}$	dérivée totale de la surface $\sigma$ paramétrée en $u$ et en $v$
$\tau_1$	vecteur tangent à la surface $\sigma$ dans la direction de paramétrisation $u$
$\tau_2$	vecteur tangent à la surface $\sigma$ dans la direction de paramétrisation $v$
$\omega_{i,j}$	poids associé au point de contrôle $P_{i,j}$
$\nabla \mathcal{F}(\bar{X})$	vecteur gradient de la fonction coût $\mathcal{F}(\bar{X})$

## Indices

$o$	indice dénotant l'état optimal
$\otimes$	produit dyadique

## Symboles

$f$	fonction coût locale
-----	----------------------

$f^{trans}$	fonction coût locale normalisée
$\mathcal{F}$	fonction objective ou fonction coût globale
$\mathcal{G}$	vecteur des contraintes d'inégalité
$\mathcal{H}$	vecteur des contraintes d'égalité

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	ALGORITHME DE REPARAMÉTRISATION . . . . .	131
ANNEXE II	CALCUL DE LA ROTATION DU VECTEUR DE LA DÉ- RIVÉE SECONDE $C_{INITIALE}(V_4)^{(2)}$ AUTOUR DE LA DÉ- RIVÉE PREMIÈRE $C_{INITIALE}(V_4)^{(1)}$ . . . . .	133
II.1	Rotation autour d'un axe arbitraire . . . . .	133
II.2	Exemple de rotation du vecteur de la dérivée seconde $C_{initial}(v_4)^{(2)}$ autour de la dérivée première $C_{initial}(v_4)^{(1)}$ . . . . .	135
ANNEXE III	CALCUL DE L'ÉNERGIE DE PLAQUES MINCES AP- PROCHÉES . . . . .	137
III.1	Calcul de l'énergie de plaques minces approchées . . . . .	137
III.2	Mesure de <i>fairness</i> . . . . .	138
ANNEXE IV	ALGORITHME DU RECUIT SIMULÉ . . . . .	140

## INTRODUCTION

### 0.1 Évolution historique du design en aéronautique

Depuis le tout début de l'aviation jusqu'au milieu du XXème siècle, la conception d'avions tant civils que militaires était un art où excellaient des ingénieurs aux multiples compétences. Leur expérience personnelle appuyées par le savoir des sciences aéronautiques de l'époque leur permettaient de juger efficacement des faiblesses ou des atouts d'un modèle de conception. Il était ainsi possible d'établir par presque une seule personne des modèles préliminaires rencontrant toutes les exigences formulées pour un type d'avion donné. Se succédaient alors des équipes spécialisées en structure, aérodynamique et en performance pour raffiner le modèle initial. Cependant, après la seconde guerre mondiale, avec l'imbrication de technologies de plus en plus complexe, l'expertise multidisciplinaire s'est retrouvée dans des départements d'études avancées conceptuelles et on a vu apparaître des équipes spécialisées dans tel ou tel domaine. De plus l'émergence sans cesse croissante d'avions plus coûteux aux caractéristiques disparates diversifiait tant les modèles de conception qu'il devenait difficile d'en acquérir de l'expérience par un seul individu. Puis l'avènement des moteurs à réaction permettant des vols à hautes vitesses rendit obsolète un grand nombre d'analyses et de méthodes de conception jusque là épargnées par les progrès techniques. Au fur et à mesure que chaque discipline invoquée dans un processus de design aéronautique se complexifiait, il devint important de résoudre chronologiquement par des méthodes efficaces les problèmes propres à chacune de ces disciplines.

L'une d'entre ces disciplines, autour de laquelle la présente recherche s'articule, est le mode de représentation géométrique. Les concepts et les outils mathématiques

mis en jeu dans cette dernière discipline conjointement aux récents développements informatiques appartiennent à ce qu'on appelle communément aujourd'hui *conception assistée par ordinateur* (**CAO** ou en utilisant les abréviations anglaises **CAD** pour *Computer Aided Design* ou encore **CAGD** pour *Computer Aided Geometric Design*). L'automatisation de la construction des surfaces de représentation aux caractéristiques optimales tant du point de vue aérodynamique que structurel, pour ne citer que deux disciplines en interaction directe avec les paramètres de contrôle de la géométrie, est étroitement lié à l'implantation des différentes contraintes géométriques nécessaires. Avant l'ère informatique, l'approche couramment utilisée en modélisation géométrique relevait de la géométrie descriptive. Une surface se définissait par une série de courbes planes adjoignant quelques lignes directrices, informations suffisantes à la construction de patrons ou de maquettes. La manufacturabilité de telles surfaces dépendaient de l'habileté des fraiseuses de reproduction à retracer toutes les informations géométriques contenues dans la maquette. À la fin des années 50, l'automatisation des machines de fraisage permit d'extraire numériquement les informations géométriques. Le problème de manufacturabilité fut ainsi transporté à la modélisation mathématique de formes géométriques. Les années 60 (Bézier (1972)) ont alors été caractérisées par la mise en équation mathématique des formes géométriques plus spécifiquement dénommées, dans la littérature, les surfaces gauches ou de dénomination anglaise **Free Form shapes**. Toutes les techniques développées alors, jusqu'aux plus récentes aujourd'hui, s'appuient sur une discréétisation de la géométrie. Une série de points extraite soit d'un modèle physique, soit de diagrammes décrivant les principales propriétés géométriques, est employée afin de construire le modèle mathématique. De toutes les descriptions mathématiques disponibles à ce jour, les **NURBS** acronyme de *Non-Uniform Rational B-Splines*, ont montré leurs avantages tant au niveau de la plurité des courbes et des surfaces possibles d'être engendrées, qu'au niveau de leur

grande souplesse d'utilisation. Elles sont ainsi devenues un standard d'échanges d'informations et de modélisation géométrique.

## 0.2 Objectifs

L'objectif de ce travail est de développer une méthodologie pour satisfaire les exigences de fabrication d'une aile d'avion tout en améliorant ses performances aérodynamiques. Les contraintes de fabrication se résument en la représentation d'une surface tridimensionnelle comprenant des parties réglées correspondant au bord d'attaque et au bord de fuite, et, une partie centrale s'approchant de conique dans le sens de l'envergure. La condition de continuité  $C^{(2)}$  est exigée par les départements d'aérodynamique et de manufacture. Le nombre de paramètres lié à la description géométrique de l'aile d'avion doit être maintenue aussi minime que possible. Une centaine de paramètres décrivant l'extrados de l'aile est jugée acceptable par le département d'aérodynamique de Bombardier Aéronautique. Cette dernière contrainte est primordiale afin de réduire le temps de calcul dans un cycle de design préliminaire. L'automatisation d'un tel cycle de design fait appel à des techniques d'optimisation dont le coût en temps de calcul machine croît fortement avec le nombre de paramètres ou de variables de design. Le choix du mode de représentation NURBS a été motivé par les résultats obtenus en optimisation aérodynamique de profils d'aile en 2D. Une revue de la littérature pertinente a permis de conforter le choix d'un tel mode de représentation géométrique. Il est proposé dans cette étude d'appliquer les plus récents développements en la matière aux fins d'optimisation aérodynamique des ailes d'avions. Il est au préalable nécessaire de se familiariser avec tous les concepts et la terminologie employés.

### 0.3 Organisation de ce document

Le projet proposé est donc consacré à la modélisation géométrique d'ailes d'avions avec contraintes aux fins d'optimisation aérodynamique. L'utilisation efficace des diverses algorithmes en modélisation géométrique et l'imbrication de ceux-ci dans une boucle d'optimisation aérodynamique constituent l'essence de ce travail. L'exposé qui s'en suit est organisé de la façon suivante. Le chapitre 1 porte sur une présentation de certaines difficultés rencontrées dans la conception aérodynamique d'aile d'avion. L'emphase sera portée sur la difficulté à obtenir des performances aérodynamiques optimales à partir des propriétés intrinsèques de l'écoulement compressible d'air autour de profils d'aile. La nécessité de maîtriser la modélisation géométrique y apparaît. Au chapitre 2 une revue bibliographique ainsi qu'un historique des méthodes de modélisation géométrique est exposé. L'avènement des NURBS comme outil standard de modélisation en *CAO* y est discuté. La visualisation et les critères choisis pour décider de la qualité d'une représentation géométrique d'une surface quelconque sont exposés au chapitre 3. Le chapitre 4 constitue une étape importante de ce travail : on y décrit le tout début du cycle de design qui consiste en la construction d'une aile d'avion aux contraintes géométriques imposées. Cette section introduit de manière plus rigoureuse l'axe central de cette recherche à savoir la modélisation géométrique à l'aide des NURBS des ailes d'avions ainsi que les domaines de recherche qui y sont impliqués tel que décrit au chapitre 5. La manufacturabilité des ailes d'avion se ramène à un problème d'optimisation. L'introduction de cette nouvelle discipline y est décrite ainsi que quelques exemples pertinents d'utilisation. La formulation de l'interaction entre l'aérodynamique et la modélisation géométrique à base de *NURBS*, fait appel aux outils de l'optimisation multi-objectif. Une formulation en un problème d'optimisation multi-objectif a permis d'obtenir les meilleurs résultats, présentés au chapitre 6.

## CHAPITRE 1

### CONCEPTS ET MODÉLISATION EN AÉRONAUTIQUE

#### 1.1 Étapes d'un processus de design en aéronautique

Un processus de design en aéronautique se décompose habituellement en trois phases : le projet de conception (conceptual design), l'avant projet (preliminary design) et la phase de conception détaillée (final detailed conception). La première phase définit la mission à atteindre en termes d'exigences commerciales traditionnelles et détermine une première configuration où des estimations de taille, de volume et de performances sont calculées. Dans la seconde phase, la forme aérodynamique et les éléments structuraux sont modélisés à des fins de calculs de performances poussés. C'est lors de ces deux premières étapes qu'intervient le design aérodynamique. Les surfaces aérodynamiques externes doivent alors être finalisées. Il est par ailleurs souhaitable que la définition finale des surfaces aérodynamiques externes intervienne le plus tôt possible afin de réduire les coûts de développement. Toute modification ultérieure s'avère extrêmement onéreuse en raison du coût élevé de développement lié à ces deux premières étapes du design et dû à leur impact majeur sur toutes les autres disciplines. La dernière phase consiste en la définition complète des éléments structuraux dans les moindres détails incluant le tableau de bord, les systèmes de contrôle, les systèmes électriques et hydrauliques, le train d'atterrissage etc.... Les méthodes de design aérodynamiques utilisent et contribuent au développement des techniques de résolution des écoulements en CFD. Ces techniques comprennent la modélisation physique des écoulements, la modélisation géométrique et les algorithmes de génération de maillage. Un tel processus de design

a pour but d'optimiser les performances aérodynamiques pour différentes configurations de vol. Une illustration d'un tel processus de design est montré sur la figure 1.1. Le nombre de variations possibles dans le design est trop grand pour en permettre une évaluation exhaustive et il est actuellement impossible qu'une solution globale optimale puisse être atteinte sans l'utilisation de procédures automatiques d'optimisation. Il y a un besoin grandissant de méthodes d'optimisations multidisciplinaires (MDO) et ceux-ci ne pourraient être efficaces qu'avec des modèles de haute fidélité dans chaque discipline.

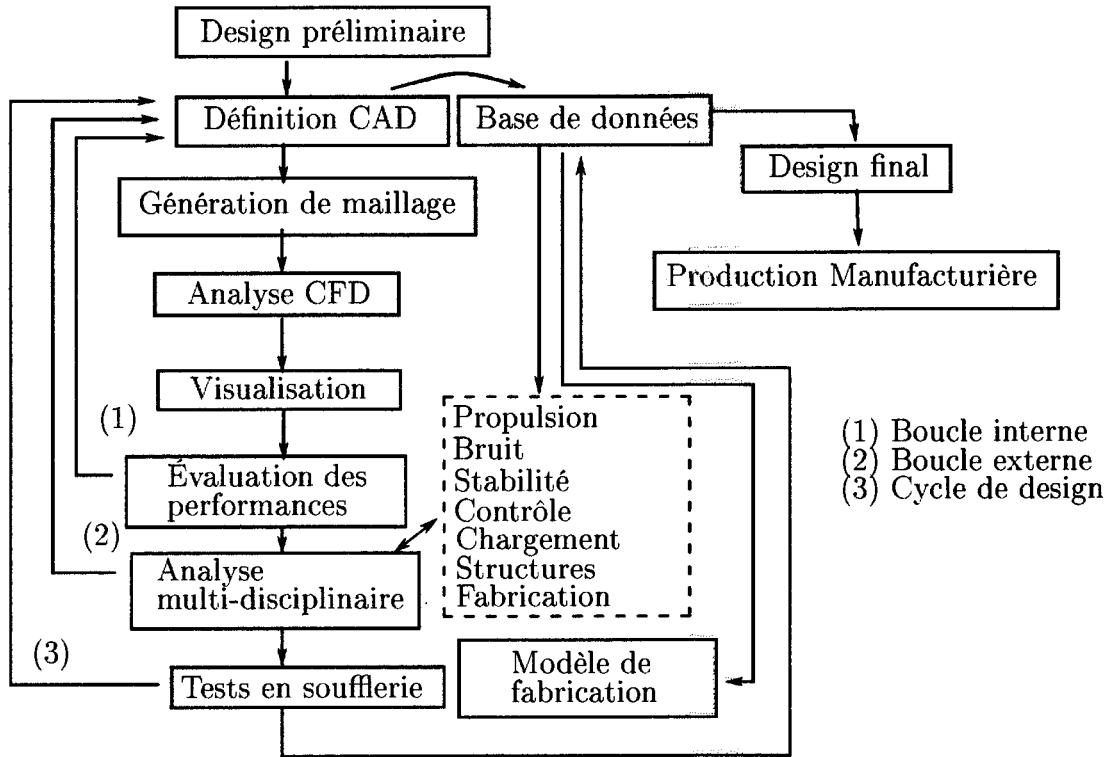


FIGURE 1.1 Processus de design aérodynamique

## 1.2 Calculs des performances aérodynamiques

L'évaluation des performances aérodynamiques est obtenue pour différentes configurations de l'aile, de l'aile et du fuselage, de l'aile et de la nacelle et de l'ensemble aile-fuselage-nacelle. Les évaluations portent sur différents points du design de l'enveloppe de vol (flight enveloppe) tels le point de croisière nominal (nominal cruise point), point de croisière à haute-basse portance, point de montée optimale (climb condition), les points de limite de ballottements ou tremblements (buffet condition et flutter). Les premiers estimés des charges aérodynamiques permettent le design des premiers éléments structuraux qui à leur tour fournissent un premier estimé du poids. La traînée peut alors être minimisée à un nombre de Mach et coefficient de portance donnés, dans une vue de plan fixé, pour un minimum d'épaisseur des sections de l'aile comme contrainte afin de respecter les exigences relatives au volume de carburant et au poids de la structure. Les estimations de performances sont primordiales dans les conditions de vol d'un avion commerciale. Par exemple, le coefficient de traînée d'un long courrier, comme le boeing 747, est de l'ordre de 0.0275 dépendant du coefficient de portance qui est de l'ordre de 0.5. L'erreur doit être de l'ordre de  $\pm \frac{1}{2}\%$ . Le coefficient de traînée doit alors être prédit avec une précision  $\pm 0.0001$ .

## 1.3 Physique de l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion

Au contraire des écoulements des liquides ou des gaz à basse vitesse, les effets de compressibilité de l'air autour d'une aile d'avion sont prépondérants. La théorie de la mécanique des fluides compressibles permet de décrire les phénomènes régissant de tels écoulements. Lorsque les effets de la viscosité et de la conduction thermique sont important, on parle alors d'écoulement visqueux. Ces écoulements s'accom-

pagnent d'effets dissipatifs modifiant l'entropie le long des lignes de courant et sont prédominants dans les régions à larges gradients de vitesse et de température. Dans le cas où les effets de la viscosité, de la conduction thermique et de la diffusion de masse sont négligeable, on parle alors d'écoulement non-visqueux. Les régions en dehors de la couche limite au contact de la surface de l'aile en sont des exemples.

Le calcul de la distribution de pression ainsi que la portance peuvent s'obtenir dans plusieurs cas avec suffisamment de précision avec l'hypothèse d'un écoulement compressible non-visqueux. La composante de la traînée de pression parallèle à la vitesse d'écoulement à l'infini  $V_\infty$  ainsi que la force de traînée de surface nécessite par contre de tenir compte des effets visqueux. La traînée de pression devient non-négligeable lors du décollement de la couche limite bien que la seule présence de l'onde de choc crée sans tenir compte des effets visqueux une composante de traînée appelée traînée d'onde due à la seule augmentation brusque de la pression, et aussi de l'entropie, au travers de celle-ci. La force de traînée de surface dérive de la répartition de la force de cisaillement à la surface de l'aile.

On distingue essentiellement quatre régimes d'écoulement : subsonique ( $M_\infty < 1$ ), transsonique ( $M_\infty \sim 1$ ), supersonique ( $M_\infty > 1$ ) et hypersonique ( $M_\infty \gg 1$ ).  $M_\infty$  est le nombre de Mach à l'infini, rapport de la vitesse d'écoulement à la vitesse du son à l'infini. Particulièrement, le régime d'écoulement transsonique, caractérisé par un nombre de Mach infini  $M_\infty$  compris entre 0.8 et 0.9, est souvent rencontré en vol de croisière à haute altitude des vols commerciaux dont font partie les appareils de Bombardier Aéronautique.

## 1.4 Caractéristiques de l'écoulement transsonique

Lorsque le nombre de Mach à l'infini  $M_\infty$  s'approche de l'unité, il se crée sur l'extrados de l'aile une poche supersonique. Cette poche se termine par une onde de choc où les propriétés de l'écoulement subissent de larges variations de façon discontinues. Lorsque le nombre de Mach à l'infini  $M_\infty$  excède l'unité, l'onde de choc se déplace vers le bord de fuite et une seconde onde de choc apparaît à l'avant. Les deux configurations sont illustrées sur la figure 1.2.

Le régime transsonique ne se met véritablement en place que lorsque le nombre de Mach critique  $M_{cr}$  est atteint, le nombre de Mach critique  $M_{cr}$  correspondant à un nombre de Mach sonique sur une ligne de points de plus basse pression sur l'aile. Le nombre de Mach critique  $M_{cr}$  permet d'identifier pour un profil d'aile la valeur maximale du nombre de Mach à l'infini  $M_\infty$  avant que n'apparaisse la formation de régions supersoniques entraînant la création d'onde de choc. La force de traînée (*drag force*) augmente alors de manière rapide. L'épaisseur des profils d'aile joue alors un rôle important : plus un profil est épais plus le nombre de Mach critique est bas, réduisant les performances de vitesse. Des nombres de Mach  $M_{cr}$  élevés sont donc recherchés.

## 1.5 Modélisation mathématique des écoulements compressibles

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, auxquelles on adjoint l'équation d'état des gaz parfaits et la relation thermodynamique de l'énergie interne, permettent de tenir compte des principaux phénomènes physiques mis en jeu lors de l'analyse des écoulements compressibles non-visqueux. En négligeant la gravité et en supposant un écoulement adiabatique,

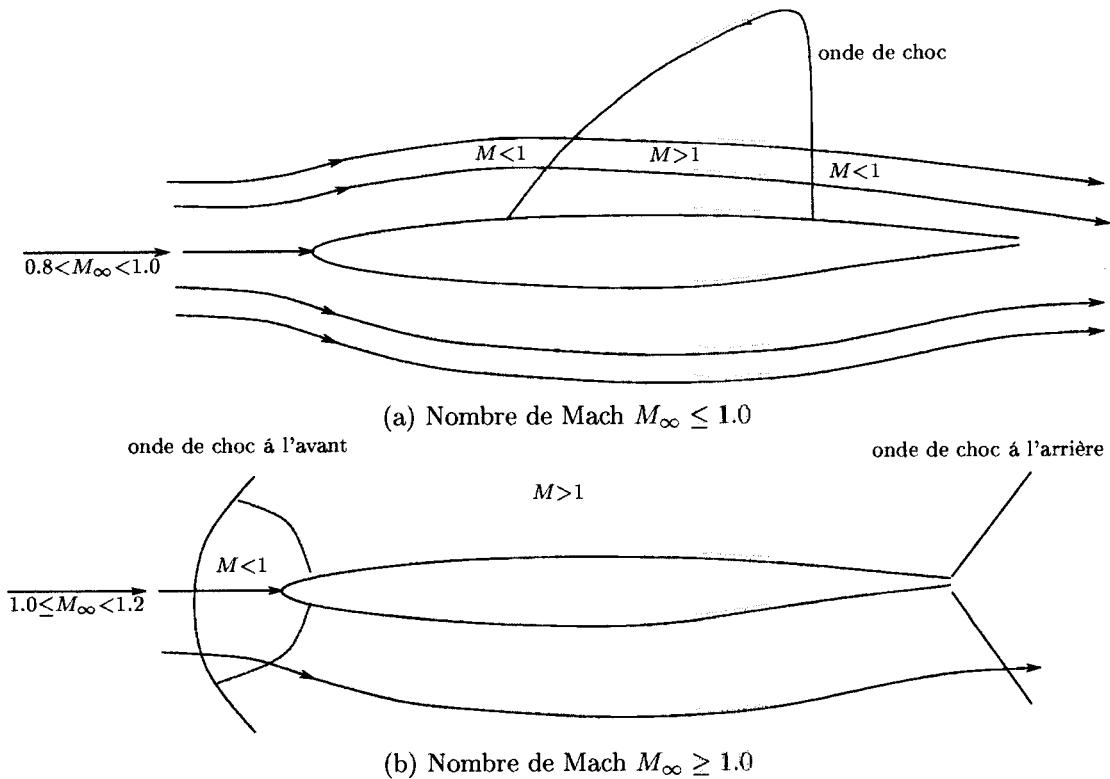


FIGURE 1.2 Illustration de l'écoulement transsonique

on aboutit aux équations d'Euler. La non-linéarité de ce système d'équations a longtemps retardé le développement d'analyses et de calculs théoriques. Des méthodes d'approximation ont alors été développées et la résolution de ces équations a suivi l'évolution des méthodes numériques. On peut citer l'équation au potentiel de vitesse (*full potential equation*) et l'équation au potentiel des petites perturbations (*small perturbation potentiel equation*). Dans cette dernière méthode, on suppose que l'écoulement est irrationnel, isentropique et que la vitesse de l'écoulement à l'infini  $V_\infty$  n'est que faiblement perturbée. Les régimes d'écoulement subsonique et supersonique peuvent ainsi être décrits par une équation aux dérivées partielles elliptique et hyperbolique respectivement. On démontre également sous les hypothèses de cette méthode que l'écoulement transsonique peut être considéré comme

essentiellement isentropique (le gradient d'entropie au travers de l'onde de choc est négligeable) et irrationnel. Cette approximation conduit également à une seule équation (*transonic similarity equation*), qui est par contre non-linéaire dans ce régime. Cependant, ces différentes modélisations mathématiques ne permettent pas de prédire en détails l'interaction de la couche limite avec l'onde de choc. Il est donc nécessaire dans ce cas de résoudre les équations de Navier-Stokes afin d'introduire les effets de la viscosité. La figure 1.3 montre la hiérarchie des différents modèles utilisés en pratique. Une meilleure modélisation physique des phénomènes caractérisant les écoulements compressibles se traduit par des modèles mathématiques non-linéaires dont le coût en temps de calcul croît avec le degré de précision de la modélisation.

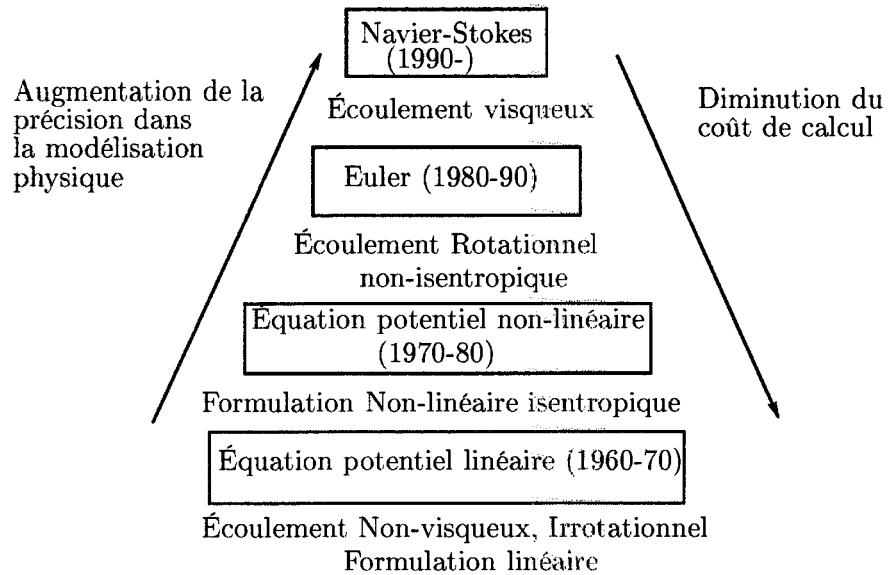


FIGURE 1.3 Hiérarchie des modélisations physiques des écoulements compressibles

## 1.6 Approches de modification des modèles géométriques

La manipulation de la représentation géométrique se fait avec les paramètres contrôlant la forme géométrique ou paramètres de forme. Dans une boucle de design aérodynamique, la formulation se ramène souvent à coupler des algorithmes d'optimisation à ces paramètres de forme. Les méthodes d'optimisation à gradient, ou méthodes d'optimisation d'ordre 1, s'avèrent généralement plus efficaces même lorsque le nombre de variables de design décrivant des configurations complexes devient élevé, nombre pouvant atteindre des centaines jusqu'à des milliers de paramètres. Le bon fonctionnement de ces méthodes d'optimisation requiert des études de sensibilité d'une grande précision. Par exemple, les équations aux sensibilités géométriques sont définies comme les dérivées partielles du modèle géométrique ou des coordonnées d'un point du maillage associé à la surface étudiée par rapport à une variable de design. Le choix du modèle géométrique a alors un énorme impact sur la formulation et l'implémentation du problème d'optimisation. La technique de paramétrisation doit être de plus compatible et suffisamment précise pour les différentes disciplines impliquées. La classification proposée des modèles géométriques utilisés ces vingt dernières années, reposent sur leur faible coût d'implémentation, leur robustesse et leur accessibilité aux calculs des équations aux sensibilités géométriques.

### 1.6.1 Approche vectorielle et approche analytique

Les modifications de la forme géométrique obéissent à l'équation :

$$\bar{R} = \bar{r} + \sum_i \bar{v}_i \bar{U}_i \quad (1.1)$$

$\bar{R}$  est la forme géométrique altérée,  $\bar{r}$  la forme géométrique initiale,  $\bar{v}_i$  le vecteur de variable de design et  $\bar{U}_i$  une base de déformations géométriques construites à partir de formes géométriques connues. Cette méthode, décrite par Leiva et Watson (1998), s'avère être une bonne approche pour des changements de formes géométriques simples. Cependant il est difficile de construire une base de déformations géométriques  $\bar{U}_i$  applicable à toutes les disciplines présentes dans un processus de design aérodynamique. L'approche analytique est similaire à l'approche vectorielle. La forme géométrique initiale peut être modifiée en y additionnant linéairement des fonctions de formes géométriques lisses pondérées par des coefficients (Hicks et Henne (1978)). Les fonctions de formes géométriques sont simplement des formes géométriques bidimensionnelles connus pour leurs performances aérodynamiques. Cette approche ne peut être appliquée pour des géométries complexes.

### 1.6.2 Approche par domaine

Les points d'un maillage surfacique sont reliés à 4 points ou sommets délimitant un domaine (figure 1.4). Le déplacement des 4 sommets entraînent les points à l'intérieur du domaine. Le mouvement de ces points est caractérisé par des coordonnées paramétriques fixes à l'intérieur du domaine. Cette méthode reste limitée à de petites déformations de la géométrie (Leiva et Watson (1998)).

### 1.6.3 Approche par équation aux dérivées partielles

La génération de surface revient à résoudre une équation aux dérivées partielles elliptique (EDP). Bloor et Wilson (1995) ont montré qu'il était ainsi possible de représenter la géométrie externe d'un avion avec peu de variables de design. La méthode a été étendue à une classe de configuration de vol par Smith et al. (1995).

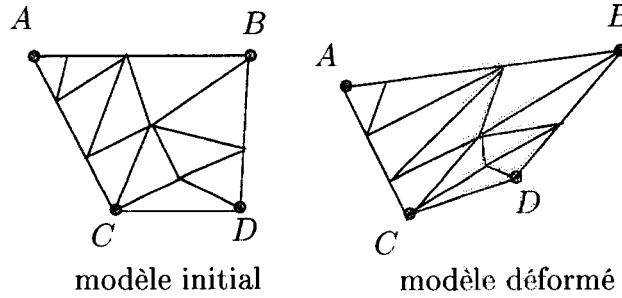


FIGURE 1.4 Définition d'un domaine

Ce modèle ne permet pas de relier de manière simple les paramètres de forme aux variables de design aérodynamiques d'un avion tels le twist, la cambrure et l'épaisseur des profils d'aile. Pour des configurations complexes cette technique devient extrêmement coûteuse en temps de calcul. De même que les deux méthodes précédentes, on ne peut utiliser cette méthode que pour de faibles déformations de la géométrie.

#### 1.6.4 Approche discrète

L'approche discrète consiste à considérer les points frontière d'une géométrie comme variables de design. Cette approche est simple à implémenter et les déformations locales sont limitées par les nombres de variables de design. Il est cependant difficile de maintenir une géométrie lisse et la solution optimale risque fort de ne pas être manufacturable. Pour contrôler la régularité mathématique de la géométrie, Braibant et Fleury (1984) proposent de relier le déplacement des points frontière afin de conserver une géométrie lisse et de fixer des bornes supérieures et inférieures aux variables de design. Le trop grand nombre de variable de design limite l'utilisation de cette approche et peut conduire à des problèmes d'optimisation difficile à résoudre.

### 1.6.5 Approche polynomiale

Cette technique réduit considérablement le nombre de variables de design pour décrire une géométrie. On retrouve sous cette catégorie les courbes et surfaces de Bézier, B-spline et NURBS. Les variables de design sont les coordonnées de points de contrôle dont l'interprétation géométrique est plus naturelle. D'autres propriétés tel la propriété de l'enveloppe convexe sont fort utile à l'imposition de contraintes géométriques. Le calcul des sensibilités de la géométrie par rapport aux variables de design se fait de manière analytique. Il correspond pour les courbes et surfaces de Bézier, B-spline et NURBS aux polynômes de Bernstein, aux fonctions de base B-spline et aux fonctions de base rationnelles NURBS respectivement. Cette approche est limitée dans le cas de géométrie extrêmement complexe où le nombre de variable de design (point de contrôle) devient important et le risque de géométrie non lisse peut apparaître durant un cycle d'optimisation.

### 1.6.6 Modélisation basée sur les caractéristiques ou *Features*

Cette approche s'appuie sur les outils disponibles en modélisation solide (*feature-based solid modeling*) dans les logiciels de CAD/CAM. Les principales méthodes de modélisation solide comprennent trois groupes : les décompositions spatiales, la géométrie constructive solide (CSG) et la modélisation par frontière appartenant aux modèles frontaliers (B-Rep). Dans les décompositions spatiales, les solides sont représentés par une liste de coordonnées des centres de voxels. Les voxels sont des cellules spatiales occupées par le solide. Il faut souligner qu'il n'est pas possible de représenter des objets très complexes. En géométrie constructive solide, les solides sont représentés par des opérations booléennes entre primitives tels union, intersection, et différence. Les primitives sont des objets tridimensionnels comme

le cône, le parallélépipède ou la sphère. La modélisation par frontière consiste à représenter un solide par sa frontière. La frontière est définie par les faces, arêtes et sommets qui sont des entités topologiques. Cette approche en design aérodynamique utilise principalement les deux derniers types de représentations soit la géométrie constructive solide et la modélisation par frontière. La manipulation de ces formes géométriques se fait alors en modifiant la dimensionnalité des éléments topologiques constitutifs de l'objet construit. Le calcul des sensibilités de manière analytique reste cependant extrêmement difficile. De plus, ces méthodes s'intègrent difficilement dans une boucle de design aérodynamique.

#### **1.6.7 Déformations particulières (Free Form Deformation Approach)**

Les modifications des formes géométriques utilisent les algorithmes développés en image de synthèse et en animation 3D. Ces algorithmes s'appliquent à une représentation implicite ou paramétrique. Physiquement, les FFD correspondent à des déformations appliquées à un parallélépipède imaginaire fait de plastique transparent et flexible, et dans lequel se trouve l'objet à déformer. Les objets sont aussi considérés comme flexibles de telle manière à ce qu'ils puissent se déformer en même temps que la boîte qui les entoure. Le modèle géométrique considéré peut ainsi être tordu, fléchi, effilé ou comprimé. Les déformations engendrées maintiennent sa topologie. Dans l'approche des déformations particulières, les déformations sont guidées par des considérations physiques et sont basées sur des opérations de translation, rotation et de changement d'échelle appliquées aux points de contrôle des surfaces paramétriques B-spline ou NURBS par exemple (Lamousin et Waggenspack (1994)). Cependant les variables de design propres à cette méthode n'ont souvent pas d'interprétation directe avec les paramètres de forme de la géométrie ou les variables de design aérodynamiques.

Le tableau suivant, extrait de l'article de Samareh (1999) qui a servi de guide à cette énumération comparative des modèles géométriques, résume les avantages et les inconvénients de ces différentes types de modèles géométriques suivant dix critères d'évaluation.

TABLEAU 1.1 Avantages et inconvénients de différentes types de modèles géométriques utilisées en design aéronautique

Critères/ Approches	Vecto- -rielle	Par domaine	EDP	Discrète	Poly- -nômiale	CAD	Analy- -tique	FFD
compatible	-	+/-	-	-	-	+	-	+
variables aérodynamiques	-	-	+/-	-	-	+/-	+	-
compacte	+	+/-	+	-	+/-	+	+	+/-
lisse	+/-	+	+	-	+	+	+	+
contrôle local	+	+	-	+	+/-	-	+/-	+
sensibilité analytique	+	+	+	+	+	-	+	+
déformation du maillage	+	+	-	+	-	-	+	+
temps d'installation	-	+	-	+	+/-	+/-	+/-	+
réutilisation	+	+	-	+	-	-	+	+
CAD	-	-	-	-	+/-	+	-	+/-

Les symboles  $+/-$ ,  $+$  et  $-$  correspondent respectivement à un critère moyennement, très et non satisfaisant. Les dix critères d'évaluation sont :

1. compatible : la paramétrisation est-elle compatible avec les différentes disciplines impliquées dans une boucle de design aérodynamique ?
2. variables de design aérodynamique : peut-on relier de manière simple les paramètres de formes géométriques aux variables de design aérodynamiques (cambrure, épaisseur, twist et vue de plan) ?
3. compacte : est-ce que le nombre de paramètres de formes est restreint ?
4. lisse : les perturbations de la forme géométrique restent-ils lisses ?
5. contrôle local : les modifications locales sont-elles possibles ?
6. sensibilité analytique : Le calcul des sensibilités peut-il se faire de manière analytique ?

7. déformation du maillage : la paramétrisation permet-elle au maillage d'être déformée ?
8. temps d'installation : une optimisation de la forme géométrique peut-elle être menée rapidement ?
9. réutilisation : peut-on réutiliser un maillage existant ?
10. CAD : la paramétrisation peut-elle être reliée directement à un système CAD ?

#### 1.6.8 Choix du modèle géométrique adapté à cette étude

Il ressort de l'analyse des modèles géométriques qu'il n'existe aucune méthode satisfaisant complètement les dix critères d'évaluation en design aéronautique à l'exception de la méthode des déformations particulières si l'on ne tient pas compte du critère variable de design aérodynamique. Cette méthode se prête mal au design aéronautique en raison du lien non-trivial avec les variables de design aérodynamiques. Si l'on limite nos critères de sélection au temps d'installation et CAD, l'approche polynomiale s'impose pour plusieurs raisons. Le temps d'installation est plus court dans notre cas. Ceci est dû à la disponibilité de la bibliothèque de classes C++ *Pirate* qui permet de lire, d'écrire et d'évaluer des géométries, des maillages et des solutions. En utilisant le concept d'interpolant, les géométries, les maillages, les solutions et les interpolants peuvent s'évaluer. Plus détails se trouvent sur le site web du groupe GRMIAO à l'adresse internet <http://www.polymtl.ca/grmiao/>. La bibliothèque de classes C++ *Pirate* nous a permis d'installer et d'utiliser efficacement des méthodes reliées à la description NURBS de la géométrie. De plus, cette paramétrisation s'intègre naturellement dans le système CATIA employé par les différents départements, dont notamment celui de manufacture de la compagnie Bombardier Aéronautique. Le choix des NURBS a été également influencé par les résultats obtenus dans la représentation géométrique de profils d'ailes d'avion à

l'aide des NURBS, étude réalisée par Lépine (1999). Il a été montré que la paramétrisation NURBS est adaptée à la représentation géométrique de la plupart des profils d'usage courant en aéronautique, et, à l'optimisation aérodynamique.

Cette étude a donc privilégié l'approche polynômiale à base de NURBS qui s'est également avérée efficace pour l'optimisation de profils aérodynamiques en 2D. Ce type de représentation géométrique est détaillé au chapitre suivant consacré à la modélisation géométrique en conception assistée par ordinateur.

## CHAPITRE 2

### MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE EN CAO

#### 2.1 Introduction

Les formes géométriques rencontrées usuellement dans l'industrie peuvent être classifiées en deux catégories : la première, qu'on peut designer comme des formes géométriques de Type I, consiste simplement en l'assemblage de surfaces géométriques élémentaires (tels des plans ou des cylindres) tandis que la seconde, formes géométriques de type II appelées aussi surfaces gauches , fait intervenir des surfaces plus complexes à définir et à visualiser. Les ailes d'avions appartiennent à la seconde catégorie.

Le travail du concepteur consiste à créer, à partir de toute l'information schématisée sur des diagrammes 2D, la géométrie 3D correspondante. Cette méthode est très efficace pour les géométries de Type I. Il est relativement aisé d'interpréter des diagrammes représentant des surfaces régulières et familières. Dans le cas de surfaces de Type II, il est souvent impossible de décrire de manière assez précise toute l'information géométrique avec un nombre restreint de courbes. La forme géométrique entre deux courbes successives varie souvent de manière complexe. De plus, afin d'accomplir un certain nombre de traitements et d'analyses (analyse structurelle, thermique, calculs d'écoulement...) sur la surface de représentation, toute ambiguïté relative à sa définition doit être levée.

La nécessité de descriptions mathématiques des surfaces gauches est initialement apparue en 1951 avec le système APT (décrit dans Yamaguchi (1988)) lors de la numérisation des procédés de fabrication (*Numerical Control Processing Techno-*

*logy*). Les commandes de contrôle des machines (*production information command*) sont générées à partir d'un programme informatique où est décrit le modèle mathématique. Ce domaine de recherche a contribué à l'élaboration d'outils de modélisation géométrique, plus particulièrement de représentation paramétrique des surfaces gauches.

## 2.2 Représentation paramétrique des surfaces gauches

La géométrie vectorielle dans la modélisation mathématique a été introduite par J.C Ferguson en 1960, bien qu'elle fut formulée au siècle précédent. Les points d'une courbe (ou d'une surface) sont repérés par une fonction vectorielle dépendant d'un paramètre  $t$  (deux paramètres  $u, v$  sont généralement utilisés dans le cas d'une surface). Ainsi le vecteur position d'un point  $\mathbf{P}(t)$  appartenant à un segment paramétré en  $t$ , défini par deux points  $\mathbf{P}_0$  et  $\mathbf{P}_1$ , s'écrit :

$$\mathbf{P}(t) = A_0(t)\mathbf{P}_0 + A_1(t)\mathbf{P}_1 \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.1)$$

Les points  $\mathbf{P}_0$  et  $\mathbf{P}_1$  constituent les points contrôle et les fonctions d'une seule variable  $A_0(t)$  et  $A_1(t)$  correspondent à des fonctions d'interpolation (*blending functions*). Un segment de courbe cubique de Ferguson nécessite, en plus de la position des deux points extrémités, les vecteurs tangents en ces points. Par un assemblage successif des différents segments une courbe 3D est ainsi générée. Quatre sommets d'un quadrilatère sont nécessaires pour définir un morceau (*patch*) d'une surface représentée sur la figure 2.1. Les surfaces s'obtiennent également par un assemblage de ces différents morceaux. Les fonctions d'interpolation qui permettent de construire des segments et des morceaux de surface de Ferguson sont les fonctions

d'interpolation d'Hermite qui sont une généralisation des fonctions d'interpolation de Lagrange. Ce sont des polynômes de degré 3 de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{0,0}(\mathbf{t}) &= 2t^3 - 3t^2 + 1 & (2.2) \\
 \mathbf{H}_{0,1}(\mathbf{t}) &= -2t^3 + 3t^2 \\
 \mathbf{H}_{1,0}(\mathbf{t}) &= t^3 - 2t^2 + t \\
 \mathbf{H}_{1,1}(\mathbf{t}) &= t^3 - t^2 \quad 0 \leq t \leq 1
 \end{aligned}$$

L'écriture mathématique d'un morceau de surface de Ferguson  $\mathbf{P}(u, v)$ , à comparer ultérieurement avec la notation NURBS, en utilisant la notation matricielle, est à titre d'exemple :

$$\begin{bmatrix} H_{0,0}(u) \\ H_{0,1}(u) \\ H_{1,0}(u) \\ H_{1,1}(u) \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(0,0) & \mathbf{Q}(0,1) & \mathbf{Q}_v(0,0) & \mathbf{Q}_v(0,1) \\ \mathbf{Q}(1,0) & \mathbf{Q}(1,1) & \mathbf{Q}_v(1,0) & \mathbf{Q}_v(1,1) \\ \mathbf{Q}_u(0,0) & \mathbf{Q}_u(0,1) & 0 & 0 \\ \mathbf{Q}_u(1,0) & \mathbf{Q}_u(1,1) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} H_{0,0}(v) \\ H_{0,1}(v) \\ H_{1,0}(v) \\ H_{1,1}(v) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$0 \leq u, v \leq 1$

S.A. Coons en 1964, puis en 1967, généralise la méthode de Ferguson. Sa description mathématique d'un morceau de surface utilise les vecteurs position des quatre sommets d'un quadrilatère et les dérivées d'ordre supérieur à un de ces vecteurs

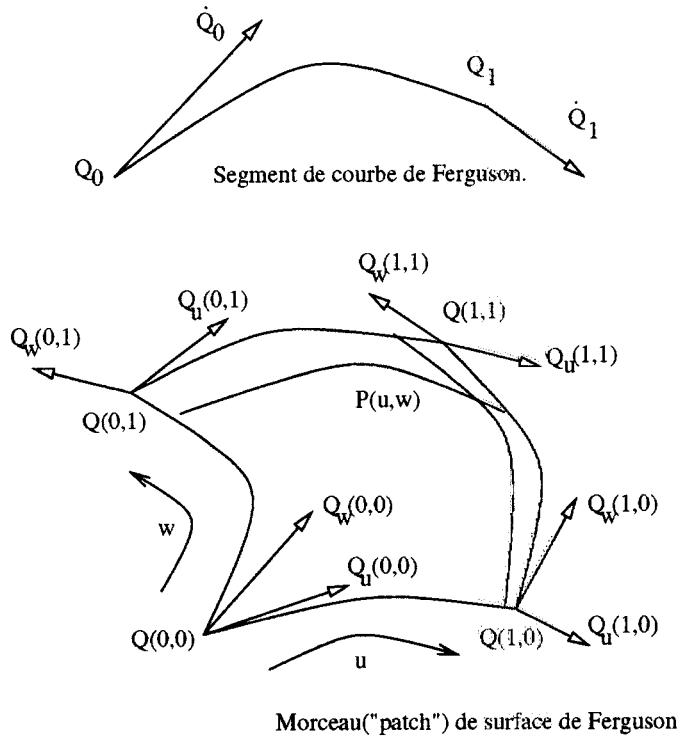


FIGURE 2.1 Segment de courbe et morceau ("patch") de surface de Ferguson

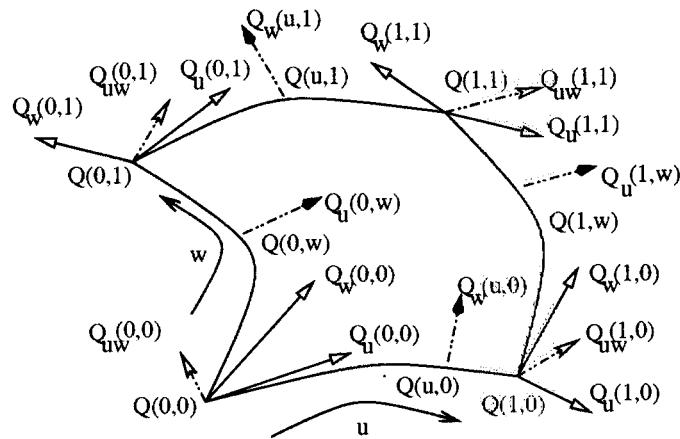


FIGURE 2.2 Morceau ("patch") de surface de Coons

position et des vecteurs position de points appartenant aux quatre courbes frontière par rapport aux deux variables de paramétrisation  $u$  et  $v$ .

Néanmoins, ces deux méthodes de description présentent de nombreux problèmes relatifs au contrôle et à la connexion. Les paramètres de contrôle de la forme de ces géométries, ne s'obtiennent pas directement. De plus, la condition de continuité lors de l'assemblage des différents segments de courbe ou morceaux de surface demeure un critère local de continuité. Il est difficile de définir un critère de continuité globale comme par exemple, la condition de lissage qui est une continuité de la courbure. L'utilisation de *splines* permet d'améliorer la courbure des courbes et des surfaces de manière globale. La formulation mathématique des *splines* s'appuie sur un modèle physique. L'énergie de déformation d'une tige flexible attachée à des poids telle que schématisée sur la figure 2.3, est directement proportionnelle à la courbure de la tige. Pour une déformation donnée, la courbe décrite par la *spline* correspond à la courbe la plus lisse globalement. Il n'apparaît de discontinuité qu'aux dérivées supérieures de la courbure aux points d'attache, qui dans le cas le plus général deviennent les données à interpoler ou points d'interpolation. Si chaque segment de la *spline* compris entre deux poids successifs, peut être représenté par une courbe polynomiale, il existe alors une unique série de fonctions d'interpolation polynomiales de degré  $m$ , définies sur une suite d'intervalles contigus  $[u_0; u_1], [u_1; u_2] \dots [u_{n-2}; u_{n-1}], [u_{n-1}; u_n]$  permettant de construire un courbe paramétrée polynomiale. On parle alors de *splines naturelles* en référence à leur propriété de minimisation de l'énergie potentielle de déformation. Pour une distribution de points à interpoler, il existe donc une unique *spline* assurant la continuité de la courbure, passant par ces points. Il s'agit plus spécifiquement d'une interpolation globale. Déplacer un seul de ces points modifie globalement l'allure de la courbe. Indépendamment de la répartition des points à interpoler il peut également apparaître avec cette méthode des boucles (*loop*).

Parallèlement, P. de Casteljau en 1959 et P. Bézier en 1962 développèrent une re-

présentation mathématique des courbes et des surfaces ne s'appuyant que sur la donnée d'un polygone de points de contrôle approximant linéairement la forme géométrique et utilisant les polynômes de Bernstein comme fonctions d'interpolation. Cette méthode présente l'avantage de ne pas nécessiter de données analytiques peu intuitives telles les vecteurs tangents et les vecteurs des dérivées croisées (*twist vectors*) comme dans les formulations précédentes. Cependant la construction de courbes et de surfaces lisses s'accompagne de conditions très contraignantes autour des sommets du polygone de contrôle. Gordon et Riesenfeld généralisent la méthode de construction des surfaces de Coons en utilisant les fonctions d'interpolation B-splines. Un point de la surface est alors une combinaison locale convexe des vecteurs position des sommets du polygone de contrôle contrairement aux surfaces de Bézier et de Casteljau qui sont une combinaison globale convexe. Le déplacement d'un point du polygone de contrôle n'affecte que localement la forme de la courbe ou de la surface. Le contrôle de la forme en est ainsi amélioré. Le problème de connexion se trouve en partie réglé par la propriété intrinsèque de continuité des fonctions de bases B-splines. Par contre, cette description polynomiale B-spline des courbes et des surfaces ne suffit pas à décrire les coniques couramment employées en industrie. Une description rigoureuse et exacte de ces dernières formes est possible à l'aide des fractions polynomiales, dont font partie les NURBS. L'étude de cette dernière classe de formes de représentation des courbes et surfaces fait l'objet des sections suivantes. Le schéma de la figure 2.4 illustre l'évolution des principales formes de représentations des courbes et surfaces paramétriques.

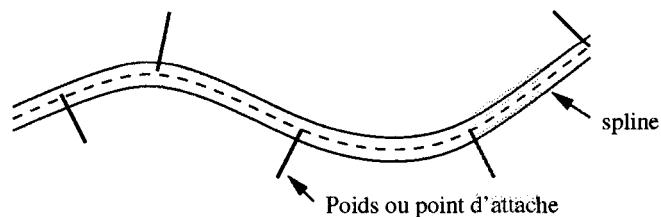


FIGURE 2.3 Schéma d'une *spline* et de ces poids ou points d'attache

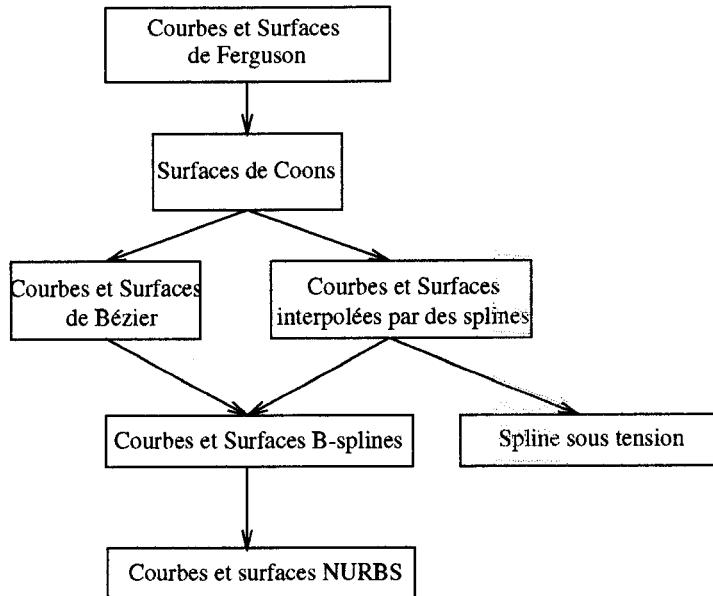


FIGURE 2.4 Développement des méthodes de descriptions mathématiques des courbes et surfaces

## 2.3 Représentation paramétrique utilisant les NURBS.

### 2.3.1 Équations paramétriques et équations implicites

Les deux méthodes les plus couramment utilisées pour représenter des courbes et des surfaces sont les formes paramétriques et les équations implicites. Les équations implicites sont définies par une équation algébrique liant les coordonnées des points de la géométrie. L'exemple le mieux connu est l'équation implicite des coniques contenues dans le plan ( $xy$ ), équation du second degré en  $x$  et en  $y$  :

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2fx + 2gy + c = 0 \quad (2.4)$$

$$a, b, c, f, g, h \in R$$

Les avantages et inconvénients de chacune de ces méthodes ne permet pas à l'une d'elle de surclasser l'autre. Il arrive parfois qu'une combinaison de ces deux méthodes s'avère nécessaire à une modélisation géométrique (Farin (1992)). On peut néanmoins dégager les principales propriétés. Ainsi, une courbe 3D s'obtient aisément en exprimant les coordonnées  $\mathbf{x}(u)$ ,  $\mathbf{y}(u)$ ,  $\mathbf{z}(u)$  d'un point  $\mathbf{P}(u)$  par des fonctions de la variable  $u$ . Dans une représentation non-paramétrique, une courbe 3D est définie par l'intersection de deux surfaces et nécessite donc plus d'informations à stocker et à traiter. De plus, il faut des équations supplémentaires pour définir les bornes ou les frontières d'une géométrie sous forme implicite tandis qu'il n'en faut aucune avec une forme paramétrée. Les bornes du domaine de paramétrisation délimitent la géométrie. Par contre, une géométrie non-bornée (ex : une ligne droite infinie) s'exprime difficilement sous forme paramétrée. Par ailleurs, la paramétrisation introduit un sens de parcours des courbes et des surfaces, orientation liée aux axes réels des paramètres contrairement aux équations implicites. Cette propriété s'avère utile pour sonder ou discréteriser une géométrie par une suite régulière de points. Également, la complexité des opérations ou des manipulations sur la géométrie dépend fortement de la méthode de représentation. Évaluer un point sur une courbe ou surface implicite peut se ramener à résoudre une équation algébrique aux solutions non-triviales. Déterminer si un point appartient ou pas à une courbe ou surface paramétrée fait appel à des processus itératifs onéreux. Finalement, il peut apparaître des anomalies dues à la paramétrisation et non à la géométrie. Ainsi les pôles d'une sphère sont des points critiques bien qu'ils soient identiques à n'importe quels autres points sur la sphère. Il y a une dégénérescence des points de contrôle en ces points. Par delà les particularités de ces méthodes, une forme de représentation géométrique doit satisfaire les propriétés d'invariance par changement de système de coordonnées et par transformation affine. Un objet géométrique est intrinsèquement indépendant du système de coordonnées. Il est donc

nécessaire de rechercher de fonctions d'interpolation aux propriétés adéquates.

### 2.3.2 Propriétés recherchées pour les fonctions d'interpolation ('blending functions')

La modélisation mathématique des surfaces s'apparente à celle des courbes, particulièrement pour les surfaces tensorielles où les fonctions d'interpolation sont le produit des fonctions d'interpolation des courbes. Pour simplifier l'écriture mathématique dans ce paragraphe, les propriétés recherchées sont présentées à partir de la représentation paramétrique d'une courbe  $\mathbf{C}(u)$  :

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n f_i(u) \mathbf{P}_i \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.5)$$

Les points  $\mathbf{P}_i$  sont les points de contrôle.  $f_i(u)$  représente les fonctions d'interpolation ayant comme paramètre  $u$  ou fonctions de base, définies sur une suite de valeurs réelles croissantes (appelées noeuds du vecteur nodal)  $u_0, u_1 \dots u_m$ , et, non-nulles uniquement sur une portion de l'intervalle  $[u_0; u_m]$ . La continuité de la courbe (continuité de la tangente, de la courbure ...) doit être maintenue par ces fonctions et non par la position des points de contrôle  $\mathbf{P}_i$ . Elles doivent permettre de représenter une grande variété de formes géométriques et occuper peu d'espace mémoire dans un ordinateur. Facile à implémenter, le calcul de la position des points et des dérivées par exemple doit être suffisamment exact et insensible à la propagation d'erreur due au calcul en virgule flottante. L'invariance par transformation affine (translation, rotation et homothétie) impose à la somme des valeurs des fonctions

de base évaluées en toute valeur du paramètre  $u$  d'être égale à l'unité :

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{f}_i(\mathbf{u}) = 1, \forall u \in [u_0; u_m] \quad (2.6)$$

Les B-Splines répondent à ces divers critères mathématiques et constituent les fonctions de base servant à définir les fractions polynomiales des NURBS.

### 2.3.3 Fonctions de base B-Splines

#### 2.3.3.1 Définition d'une B-Spline

Les B-splines d'ordre  $p+1$  de la variable  $u$ , notées  $N_i^p(u)$ , sont des polynômes de degré  $p$  définis sur les noeuds du vecteur nodal  $\{0, \underbrace{\dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}$ .

Il existe de nombreuses manières de définir ces fonctions (Curry et Schoenberg (1947), Schoenberg (1946), Ramshaw (1987)). La formulation la mieux adaptée aux implantations des divers algorithmes est la relation de récurrence, développée par Cox (1972) et par Boor (1972), Boor (1978) :

$$\begin{aligned} N_i^p(u) &= \frac{(u - u_i)}{u_{i+p} - u_i} N_i^{p-1}(u) + \frac{(u_{i+p+1} - u)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(u) \\ &N_i^0 = 1, u \in [u_i, u_{i+1}], \\ &0, u \notin [u_i, u_{i+1}] \end{aligned} \quad (2.7)$$

De par cette définition, les fonctions de base  $N_i^p$  possèdent une série de propriétés

qu'on peut énumérer comme suit :

1. Partition de l'unité :  $\sum_{i=0}^n N_i^p(u) = 1 \forall u \in [u_0; u_m]$ ,
2. Positivité :  $N_i^p(u) \geq 0 \forall u \in [u_0; u_m]$  en admettant qu'un seul maximum,
3. Support local :  $N_i^p(u) = 0 \text{ si } u \notin [u_i, u_{i+p+1}]$ ,
4. Continuité :  $N_i^p(u)$  est  $C^\infty$  à l'intérieur de chaque intervalle du vecteur nodal, et  $p-k$  (où  $k$  est la multiplicité du noeud) continûment différentiable à un noeud du vecteur nodal.

Le choix du vecteur nodal permet de construire une grande variété de fonctions de base B-splines. Sa définition est étroitement liée à la paramétrisation. Pour un vecteur nodal uniforme où les noeuds sont équidistants, on parle de paramétrisation uniforme. Le degré  $p$  joue également un rôle essentiel : plus le degré est bas, plus la courbe ou la surface se rapproche de la géométrie définie par les points de contrôle. Le domaine d'influence d'un point de contrôle devient alors plus petit mais la géométrie est de moins en moins régulière ou lisse.

### 2.3.3.2 Dérivées des B-Splines

Les dérivées des B-Splines à l'ordre ( $k$ ) s'obtiennent par la relation récurrente suivante :

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = p \left( \frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}(u)}{u_{i+p} - u_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}(u)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right) \quad (2.8)$$

À l'ordre 1 on obtient par exemple :

$$N_{i,p}^{(1)}(u) = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (2.9)$$

Les fonctions  $N_{i,p}^{(1)}(u)$  sont alors définies sur le vecteur nodal :

$$\left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_p, u_p, \dots, u_{m-p}, \underbrace{1, \dots, 1}_p \right\} \quad (2.10)$$

La figure 2.5 illustre les fonctions de base B-Splines de degré 3 ainsi que leurs dérivées premières dans le cas le plus général. Le vecteur nodal présente des noeuds de multiplicité 1, 2 et 3. Cependant, les courbes engendrées par les fonctions de base B-splines ne peuvent représenter les coniques. Ces dernières nécessitent l'utilisation de fractions polynomiales.

### 2.3.4 Classes de fonctions polynomiales rationnelles

Les fractions polynomiales d'une seule variable permettent de construire les courbes rationnelles. Leur définition est similaire aux fractions polynomiales de deux variables, définissant les surfaces NURBS. Il est donc présenté dans ce paragraphe les fonctions de base rationnelles  $R_{i,j}(u, v)$  associées. Elles s'obtiennent à partir des fonctions de base B-splines de la manière suivante :

$$R_{i,j}(u, v) = \frac{N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \omega_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) \omega_{k,l}} \quad (2.11)$$

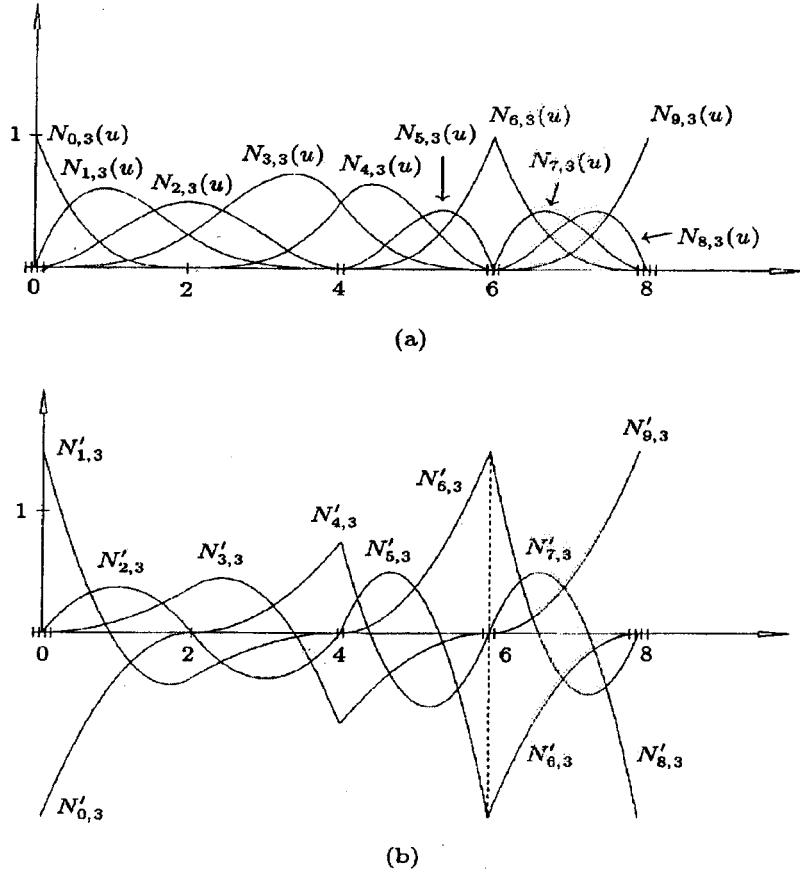


FIGURE 2.5 Fonctions de base B-spline cubiques (a) et leurs dérivées premières (b), figure Fig.2.10 dans *The NURBS book* (Piegl et Tiller (1997))

Les coefficients  $\omega_{i,j}$  prennent une signification importante lors de la définition des surfaces NURBS. Égaux à un on retrouve la définition d'une surface B-spline. Les fonctions  $N_{i,p}(u)$  et  $N_{j,q}(v)$  sont les fonctions de base B-splines définies respectivement sur les vecteurs nodaux :

$$\underbrace{\{0, \dots, 0,}_{p+1} u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}}_{(2.12)}$$

$$\underbrace{\{0, \dots, 0,}_{q+1} v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1}\}}$$

$$r = n + p + 1, s = m + q + 1$$

Les principales propriétés de ces fonctions sont les mêmes que celles des fonctions de base B-splines énumérées brièvement :

1. Positivité :  $R_{i,j}(u, v) \geq 0$  pour tous les  $i, j, u$  et  $v$ .
2. Partition de l'unité :  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) = 1$  pour tous les  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .
3. Support local :  $R_{i,j}(u, v) = 0$  si  $(u, v)$  n'appartient pas au rectangle  $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$ .
4. Sur n'importe quel rectangle de l'espace de paramétrisation  $[u_{i_0}, u_{i_0+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+1})$ , au plus  $(p+1)(q+1)$  fonctions  $R_{i,j}(u, v)$  sont non-nulles, exactement les fonctions  $R_{i,j}(u, v)$  pour  $i_0 - p \leq i \leq i_0$  et  $j_0 - q \leq j \leq j_0$ .

### 2.3.5 Définition d'une surface NURBS

Une surface tensorielle NURBS de degré  $p$  dans la direction de paramétrisation  $u$  et de degré  $q$  dans la direction de paramétrisation  $v$  est une fonction vectorielle de ces deux variables :

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) \mathbf{P}_{i,j} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (2.13)$$

$$R_{i,j}(u, v) = \frac{N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \omega_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) \omega_{k,l}}$$

où les points  $\mathbf{P}_{i,j}$  forment une réseau bidirectionnel de points de contrôle,  $\omega_{i,j}$  leurs poids respectifs,  $N_{i,p}(u)$  et  $N_{j,q}(v)$  sont les fonctions de base B-splines dé-

finies précédemment. Les poids  $\omega_{i,j}$  considérés dans cette formulation sont positifs afin de garder les fonctions rationnelles  $R_{i,j}(u, v)$  positives. Les propriétés des fonctions  $R_{i,j}(u, v)$ , énoncées précédemment, impliquent d'importantes propriétés géométriques des surfaces NURBS :

1. modification locale : si un point de contrôle  $\mathbf{P}_{i,j}$  est déplacé, ou le poids associé  $\omega_{i,j}$  est modifié, seulement une partie de la surface est affectée, la partie délimitée dans l'espace de paramétrisation par  $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$ .
2. propriété de l'enveloppe convexe : pour des valeurs de  $(u, v) \in [u_{i_0}, u_{i_0+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+1})$ , les points de la surface  $\mathbf{S}(u, v)$  appartiennent à l'enveloppe convexe formée par les points de contrôle  $\mathbf{P}_{i,j}$ , pour  $i_0 - p \leq i \leq i_0$  et  $j_0 - q \leq j \leq j_0$ .

Aux propriétés intrinsèques de cette forme de représentation s'ajoutent de multiples avantages. Sa formulation mathématique est commune et flexible. De nombreux algorithmes stables et rapides, tels d'évaluation des positions ou des dérivées, ont pu être établis (Hoschek et Lasser (1993), Bohm (1984)). C'est une généralisation des méthodes de modélisation géométriques déjà existantes. Parmi les inconvénients on compte : la nécessité de stocker de l'information supplémentaire dans certains cas, une paramétrisation qui peut s'avérer difficile à maîtriser et une faiblesse de certaines méthodes quand elles sont appliquées aux NURBS. Ainsi, la représentation d'un cercle à l'aide des NURBS comprend 7 points de contrôle et 10 noeuds là où une représentation traditionnelle ne nécessite que le centre, le rayon et le vecteur normal au plan du cercle. Particulièrement en 3D, la représentation NURBS d'un cercle demande de stocker 38 nombres au lieu de 7 dans la représentation traditionnelle. On peut également citer parmi les méthodes difficiles à mettre en oeuvre dans le formalisme NURBS, l'algorithme d'intersection de surface/surface et la transformation inverse entre l'espace physique et l'espace paramétrique souvent sujette à de l'instabilité numérique. Cependant ces problèmes sont communs à

la plupart des méthodes de modélisation géométrique. Ceci termine ce chapitre sur la modélisation géométrique en *CAO*. Nous verrons au chapitre suivant certaines techniques qui nous seront utiles pour juger de la qualité géométrique des surfaces construites.

## CHAPITRE 3

### TECHNIQUES DE VISUALISATION POUR L'ANALYSE DE SURFACE

#### 3.1 Nécessité de méthodes d'investigation de surface

Les méthodes d'investigation des surfaces trouvent leurs origines dans les technologies CAD/CAM qui nécessitent des surfaces de représentation de haute fidélité comme les surfaces dans l'industrie automobile qui doivent être lisses et présenter des lignes de réflexion esthétiques, ou les coques de navire qui doivent être modélisées par des surfaces d'énergie minimale. Dans l'industrie aéronautique, les caractéristiques de l'écoulement autour de surfaces aérodynamiques dépendent fortement de leurs propriétés et de leur degré de continuité mathématiques. Ces différents exemples illustrent la nécessité de méthodes d'investigation de surface dans un processus de modélisation géométrique. Elles permettent de révéler les imperfections géométriques qui peuvent ne pas être apparentes en utilisant simplement les logiciels de synthèse et d'affichage d'images. La complexité de la forme géométrique des surfaces gauches entraîne souvent l'apparition dans les modèles de représentation d'imperfections géométriques. Il est de plus difficile de les prévoir en amont d'un processus de design géométrique à cause du lien non-trivial avec les paramètres de contrôle de la géométrie. La qualité d'une surface s'analyse, en géométrie différentielle, par la continuité des tangentes et des courbures, la distribution de courbure, la présence de points singuliers et les critères de convexité. Les imperfections géométriques à détecter dépendent alors du contexte. Pour un lissage esthétique, les bosses correspondant à de petites variations de la courbure doivent

être repérées. Pour respecter les contraintes de fabrication des machines à fraiser, les grandes valeurs et variations des rayons de courbure sont à identifier. La visualisation des propriétés intrinsèques d'une surface, comme complément et méthode d'investigation de surface, se révèle alors être un outil efficace pour l'analyse et le design. Avant d'énumérer les méthodes d'investigation de surface, une revue des notions de la géométrie différentielle est exposée.

### 3.2 Notions de géométrie différentielle

On peut trouver dans la littérature de nombreuses introductions à la géométrie différentielle. On se limitera dans cette section à une présentation des définitions pertinentes à cette étude.  $\bar{\sigma}(u, v)$  représente une surface sous forme paramétrique dans un espace réel euclidien  $\mathbb{R}^3$  que l'on supposera au moins deux fois continûment différentiable. Les dérivées vectorielles premières et secondes par rapport aux paramètres  $u$  et  $v$  de la surface paramétrique  $\bar{\sigma}(u, v)$  sont notés  $\bar{\sigma}_u = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial u}$ ,  $\bar{\sigma}_v = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial v}$ ,  $\bar{\sigma}_{uu} = \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial u^2}$ ,  $\bar{\sigma}_{vv} = \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial v^2}$ ,  $\bar{\sigma}_{uv} = \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial v \partial u}$ . Les vecteurs  $\vec{\tau}_1 = \bar{\sigma}_u$  et  $\vec{\tau}_2 = \bar{\sigma}_v$  correspondent respectivement aux vecteurs tangents dans les directions de paramétrisation  $u$  et  $v$ . Le vecteur normal  $\vec{\nu}$  à la surface est engendré par les vecteurs tangents  $\vec{\tau}_1$  et  $\vec{\tau}_2$  (voir la figure 3.1).

Deux grandeurs caractéristiques de la surface  $\bar{\sigma}(u, v)$  déterminent complètement sa forme géométrique : la première forme **F** et la seconde forme **G** fondamentale (définitions extraites de Yamaguchi (1988)). La première forme fondamentale est simplement le double produit scalaire d'un déplacement infinitésimal le long d'une courbe inscrite sur la surface,  $\mathbf{F} = d\bar{\sigma} \cdot d\bar{\sigma}$ . C'est une métrique de la surface permettant de calculer des longueurs, des aires et l'angle entre deux courbes inscrites sur la surface. La seconde forme fondamentale est le produit scalaire d'un déplace-

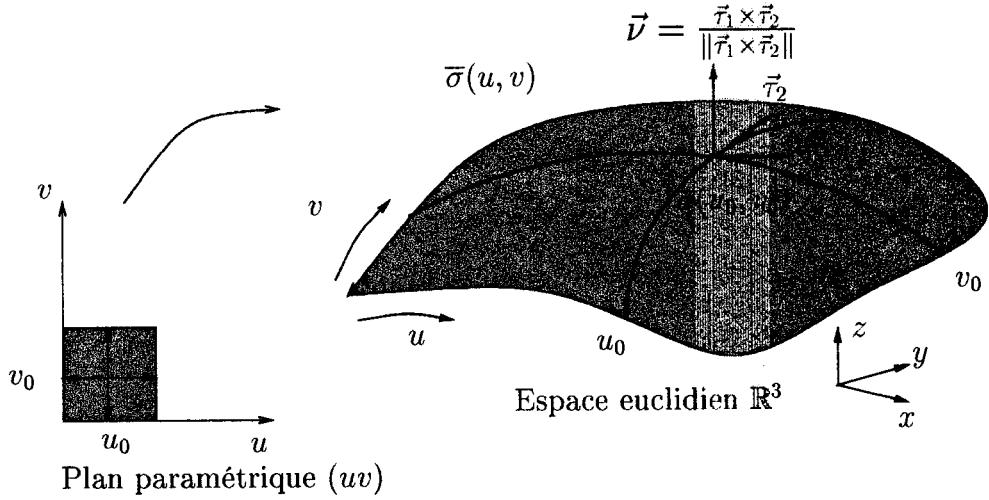


FIGURE 3.1 Surface paramétrique

ment infinitésimal avec une variation infinitésimale du vecteur normale à la surface,  $\mathbf{G} = d\vec{\nu} \cdot d\vec{\sigma}$ . Ces deux grandeurs se déduisent des dérivées vectorielles premières et secondes de la surface  $\vec{\sigma}(u, v)$  et s'écrivent sous forme matricielle :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}_u^2 & \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \\ \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v & \vec{\sigma}_v^2 \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \vec{\nu} \cdot \vec{\sigma}_{uu} & \vec{\nu} \cdot \vec{\sigma}_{uv} \\ \vec{\nu} \cdot \vec{\sigma}_{vu} & \vec{\nu} \cdot \vec{\sigma}_{vv} \end{pmatrix}$$

Un point appartenant à la surface peut être approché par une infinité de courbes inscrites sur la surface  $\vec{\sigma}(u, v)$ . La courbure  $k$  de chacune de ces trajectoires en un point  $\mathbf{P}$ , projetée sur le vecteur normale  $\vec{\nu}$ , est une mesure de la *courbure normale*  $k_n$  de la surface  $\vec{\sigma}(u, v)$ . Une courbe, écrite en notation vectorielle  $\vec{C}(r)$  inscrite sur la surface  $\vec{\sigma}(u, v)$ , est donnée par le chemin parcouru  $\mathcal{L}$  dans le plan paramétrique  $(uv)$ , et est définie par les fonctions  $u(r)$  et  $v(r)$  avec  $r \in [a, b]$ ,  $a$  et  $b$  délimitant les extrémités de la courbe  $\vec{C}(r)$ . Le calcul de la courbure normale  $k_n$  de la surface  $\vec{\sigma}(u, v)$  au point  $\mathbf{P}$  fait intervenir l'expression de la dérivée seconde des courbes

$\tilde{\mathbf{C}}(r)$  sous ces deux formes :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{C}}(r) &= \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}^2 \mathcal{K} \vec{n} \\ &= \bar{\sigma}_{uu} \xi^2 + 2\bar{\sigma}_{uv} \xi \eta + \bar{\sigma}_{vv} \eta^2 + \bar{\sigma}_u \dot{\xi} + \bar{\sigma}_v \dot{\eta}\end{aligned}\quad (3.1)$$

où les vecteurs  $\vec{t}$  et  $\vec{n}$  sont les vecteurs tangent et normal de la courbe  $\tilde{\mathbf{C}}(r)$  au point  $\mathbf{P}$ ,  $\mathcal{K}$  la courbure dans le plan  $(\vec{t}, \vec{n})$ ,  $s$  l'abscisse curviligne (voir la figure 3.2). Les points au dessus des lettres indiquent des dérivations du premier ordre et du second ordre s'effectuant par rapport au paramètre  $r$ .  $\xi$  et  $\eta$  sont les dérivées des paramètres  $u$  et  $v$  de la surface par rapport à  $r$ . Ils représentent les coordonnées du vecteur tangent  $\vec{t}$  dans le plan tangent  $(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)$ .

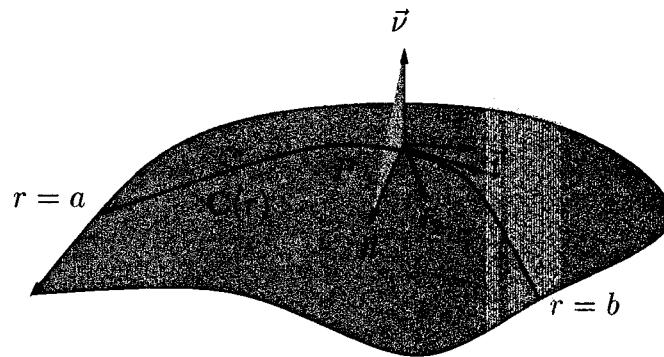


FIGURE 3.2 Vecteurs tangent et normal d'une courbe inscrite sur la surface  $\bar{\sigma}(u, v)$

La projection de ces deux équations sur le vecteur normale  $\vec{\nu}$  conduit à l'équation de second degré :

$$\vec{\nu} \cdot \bar{\sigma}_{uu} \xi^2 + 2\vec{\nu} \cdot \bar{\sigma}_{uv} \xi \eta + \vec{\nu} \cdot \bar{\sigma}_{vv} \eta^2 - k_n (\bar{\sigma}_u^2 + 2\bar{\sigma}_u \cdot \bar{\sigma}_v \xi \eta + \bar{\sigma}_v^2) = 0 \quad (3.2)$$

D'une manière générale, la courbure normale  $k_n$  en un point de la surface  $\bar{\sigma}(u, v)$

varie suivant la direction du vecteur  $\vec{t}$  déterminée par les coordonnées  $(\xi, \eta)$  dans le plan tangent  $(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)$ . Dépendant continûment des deux variables  $\xi$  et  $\eta$ , la courbure normale  $k_n$  admet deux valeurs extrémales  $\mathbf{k}_{min}$  et  $\mathbf{k}_{max}$  appelées *courbures normales principales* suivant deux *directions principales orthogonales*.  $\mathbf{k}_{min}$  et  $\mathbf{k}_{max}$  s'obtiennent en éliminant des deux équations aux dérivées partielles  $\frac{\partial k_n}{\partial \xi} = 0$  et  $\frac{\partial k_n}{\partial \eta} = 0$  :

$$(\vec{\nu} \cdot \vec{\sigma}_{uu} - k_n \vec{\sigma}_u^2) \xi + (\vec{\nu} \cdot \vec{\sigma}_{uv} - k_n \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v) \eta = 0$$

$$(\vec{\nu} \cdot \vec{\sigma}_{uv} - k_n \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v) \xi + (\vec{\nu} \cdot \vec{\sigma}_{vv} - k_n \vec{\sigma}_v^2) \eta = 0$$

les variables  $\xi$  et  $\eta$ , ce qui conduit à une seule équation du second degré :

$$(\vec{\sigma}_u^2 \vec{\sigma}_v^2) k_n^2 - (\vec{\sigma}_u^2 \vec{\nu} \cdot \vec{\sigma}_{vv} + \vec{\sigma}_v^2 \vec{\nu} \cdot \vec{\sigma}_{uu} - 2 \vec{\sigma}_u \cdot \vec{\sigma}_v \vec{\nu} \cdot \vec{\sigma}_{uv}) k_n + \vec{\nu} \cdot \vec{\sigma}_{uu} \vec{\nu} \cdot \vec{\sigma}_{vv} - (\vec{\nu} \cdot \vec{\sigma}_{uv})^2 = 0 \quad (3.3)$$

Le produit des racines  $\mathbf{k}_{min}$  et  $\mathbf{k}_{max}$  de cette équation définit la courbure de Gauss  $\mathbf{K}$  qui est égale au rapport du déterminant de la seconde forme fondamentale  $\mathbf{G}$  sur le déterminant de la première forme fondamentale  $\mathbf{F}$ . La moyenne des racines  $\mathbf{k}_{min}$  et  $\mathbf{k}_{max}$  définit la courbure moyenne  $\mathbf{H}$ . Un cas particulier est à distinguer lorsque la courbure normale  $k_n$  est indépendante de la direction du vecteur  $\vec{t}$  et que les courbures principales sont égales. Les directions normales sont alors indéterminées. Il s'agit d'ombilics (*umbilical point*) de l'un des deux types :

1.  $\mathbf{k}_{min} = \mathbf{k}_{max} = 0$  : point plat. La surface est planaire au voisinage de ce point.
2.  $\mathbf{k}_{min} = \mathbf{k}_{max} = \text{constante}$  : point sphérique. La surface est sphérique au voisinage de ce point.

Lorsque la courbure de Gauss est strictement positive,  $K > 0$ , le point considéré est appelé *point elliptique*, strictement négative,  $K < 0$ , *point hyperbolique* et nulle *point parabolique*. La courbure de Gauss calculée en un point permet d'identifier le comportement d'une surface au voisinage de ce point. Une courbure de Gauss strictement positive implique que la surface est elliptique (voir la figure 3.3), strictement négative que la surface s'apparente à un col (voir la figure 3.4) et nulle que la surface est de forme cylindrique (voir la figure 3.5). Les surfaces pour lesquels la courbure de Gauss est nulle en tout point sont des surfaces développables. De telles surfaces peuvent être déroulées dans un plan sans présenter de distorsion. On retrouve par exemple sous cette catégorie les cylindres et les cônes (voir la figure 3.5). Les surfaces réglées présentent une direction où la courbure calculée le long de cette direction est nulle. On peut citer les surfaces bilinéaires (voir la figure 3.6). La sphère représente le cas particulier où l'on a une solution double réelle. La courbure de Gauss est constante et correspond à l'inverse au carré du rayon de la sphère (voir la figure 3.7). Tous les points de la sphère sont des ombilics.

### 3.3 Méthodes d'investigation de surface

Les méthodes d'investigation de surface permettent de visualiser les détails d'une surface de représentation, d'en améliorer la perception tridimensionnelle, d'en analyser les propriétés géométriques intrinsèques. Elles servent d'outils pour quantifier le degré de continuité de la courbure ou lissage et vérifier la manufacturabilité. Bien qu'il existe de nombreuses techniques de visualisation identifiant les imperfections géométriques, aucune n'est optimale pour toutes les applications. Les méthodes les plus couramment utilisées sont exposées dans les paragraphes suivants.

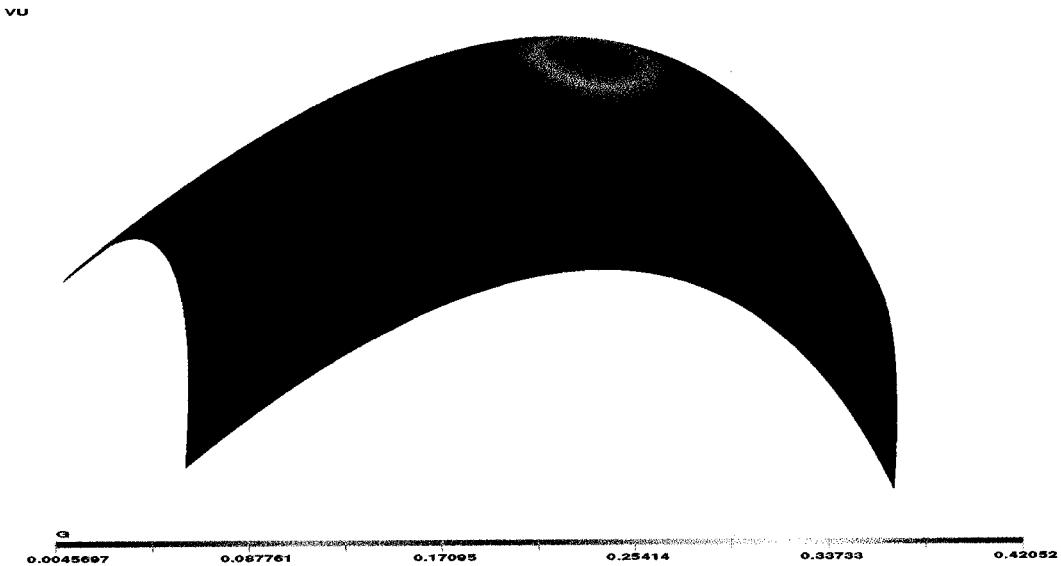


FIGURE 3.3 Courbure de Gauss strictement positive,  $G > 0$ . Au voisinage de chaque point, la surface est *convexe* (*point elliptique*)

### 3.3.1 Lignes Iso

Les lignes Iso visualisent la distribution de quantités scalaires sur une surface. Ce sont des lignes de niveau. Les lignes de contour et paraboliques en sont deux exemples.

#### 3.3.1.1 Lignes de contour

Les lignes de contour sont des courbes inscrites dans des plans parallèles à un plan de référence. Le lecteur peut se référer à l'article de Beck *et al.* (1986) pour de plus amples détails. Elles indiquent les extréums de la coordonnée d'un point d'une surface dans la direction du vecteur normale au plan de référence. Cette méthode permet de détecter visuellement les points critiques d'une surface comme les points-

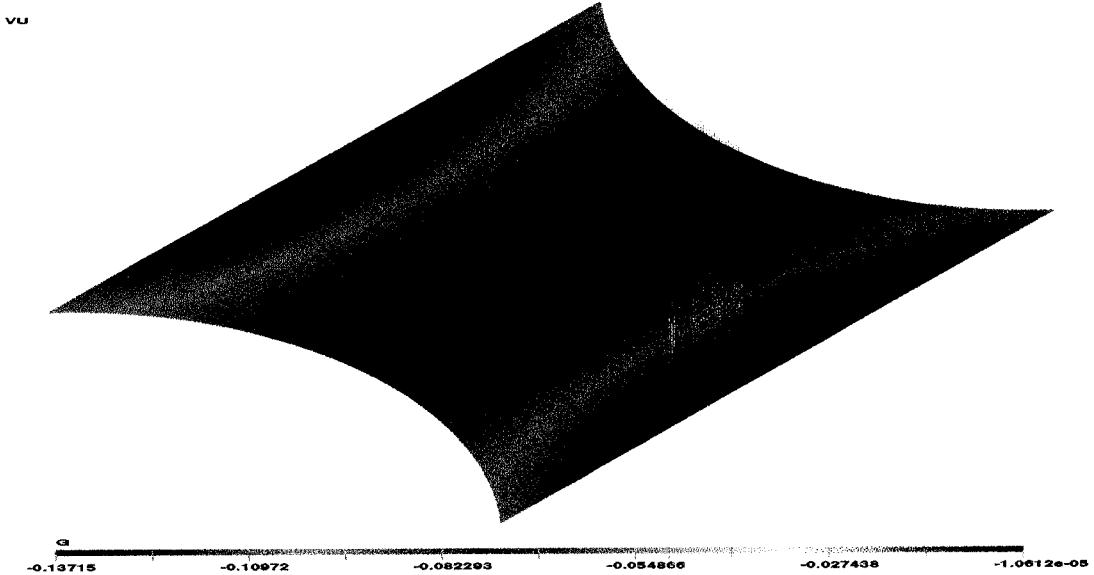


FIGURE 3.4 Courbure de Gauss strictement négative,  $G < 0$ . Au voisinage de chaque point, présence d'un *col* (*point hyperbolique*)

selles qui apparaissent comme des *cols de montagne*. L'inconvénient majeur de cette technique est le coût de calcul excessif (voir la figure 3.8-a).

### 3.3.1.2 Lignes paraboliques

Les lignes paraboliques sont des iso-lignes sur une surface où la courbure de Gauss est nulle. Une définition rigoureuse a été produite par Hilbert et Cohn-Vossen (1952). Elles divisent la surface en régions elliptiques et hyperboliques et reflètent la variation locale de la courbure. Elles permettent ainsi de détecter tout variation non désirée de la courbure de Gauss tel un changement de signe (voir la figure 3.8-b).

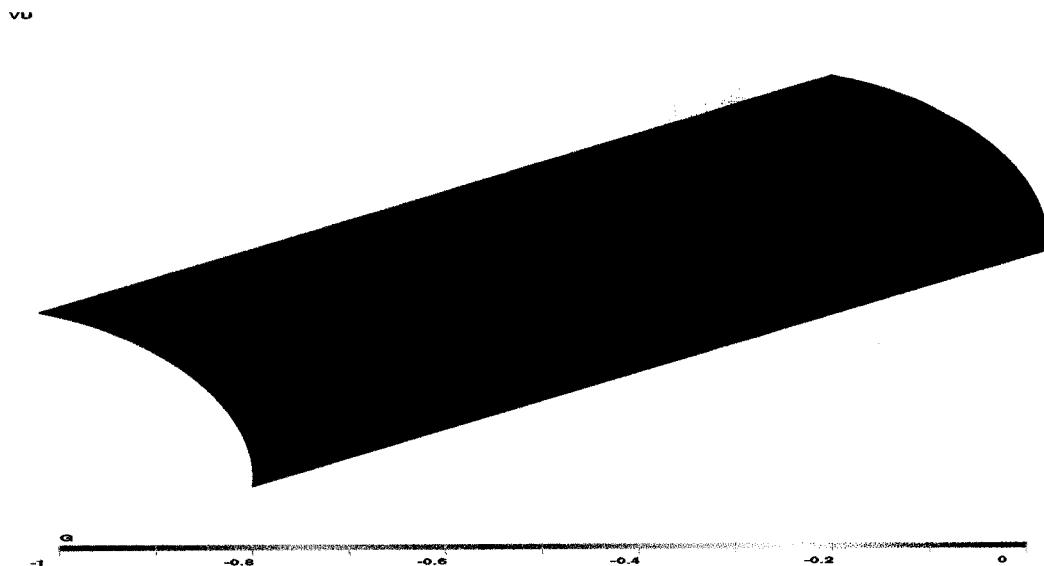


FIGURE 3.5 Courbure de Gauss nulle,  $G = 0$ . Au voisinage de chaque point, la surface est *cylindrique* (*point parabolique*)

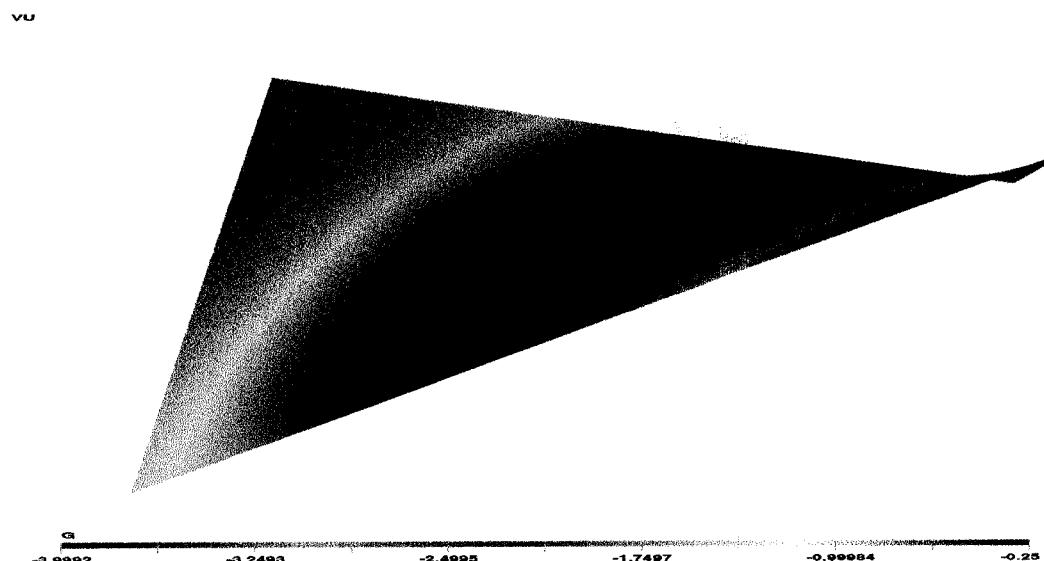


FIGURE 3.6 Courbure de Gauss,  $G \leq 0$ , d'une surface *réglée*

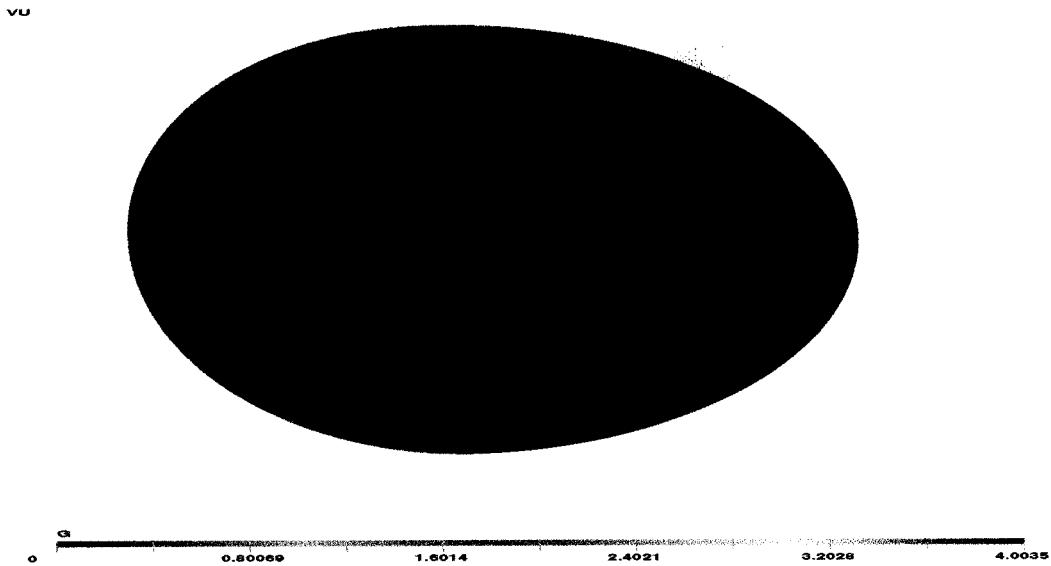


FIGURE 3.7 Courbure de Gauss d'une demi-sphère.  $G = 1/R^2$ , où  $R$  rayon de la demi-sphère

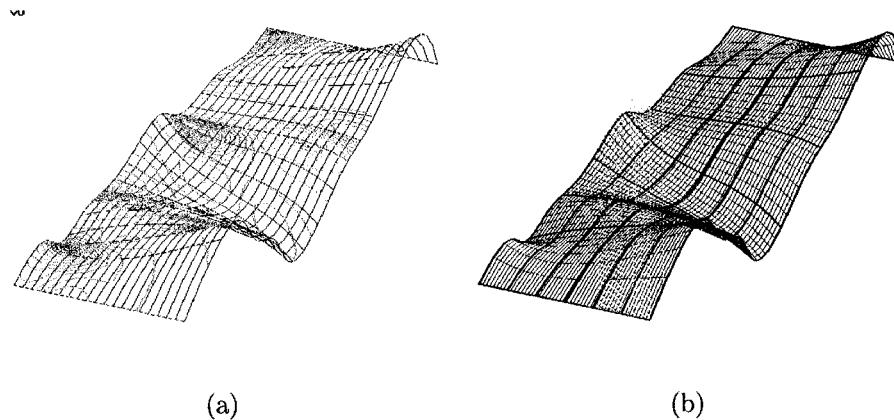


FIGURE 3.8 Lignes de contour de la courbure de Gauss (a) et paraboliques (b)

### 3.3.2 Méthodes de réflexion

Les méthodes de réflexion simulent la réflexion de sources lumineuses linéaires sur une surface. Ces méthodes de réflexion sont efficaces pour visualiser les discontinuités

nuités du premier ordre et du second ordre.

### 3.3.2.1 Lignes de réflexion

Les lignes de réflexion, dont une application est décrite dans l'article de Klass (1980), correspondent à la lumière, provenant de sources lumineuses linéaires et parallèles, renvoyée par la surface. La réflexion est considérée purement spéculaire, les rayons se réfléchissant symétriquement à la normale locale à la surface. La détermination des lignes de réflexion sur la surface se ramène à la résolution de système d'équations non-linéaires. La position du point d'observation  $A$  est un facteur déterminant de l'existence de solutions (voir la figure 3.9-a).

### 3.3.2.2 Lignes de reflet

Les lignes de reflets sont un cas particulier des lignes de réflexion. Une ligne de reflet est définie par la position des points sur la surface où la distance entre la normale à la surface  $\vec{n}$  en ces points et une source lumineuse linéaire, représentée par un segment de droite, est nulle ou inférieure à un rayon (voir la figure 3.9-b). On parle dans ce dernier cas de lignes de reflet par bande. Les lignes de reflet sont calculées indépendamment de la position de l'observateur  $A$ . Un exemple d'algorithme de calcul des lignes de reflet se trouve dans l'article de Beier et Chan (1994).

### 3.3.3 Isophote

Cette méthode constitue un cas particulier des lignes de réflexion. Un faisceau lumineux parallèle éclaire la surface à analyser sous un certain angle. La méthode des isophotes consiste alors à construire les lignes à la luminance constante sur la

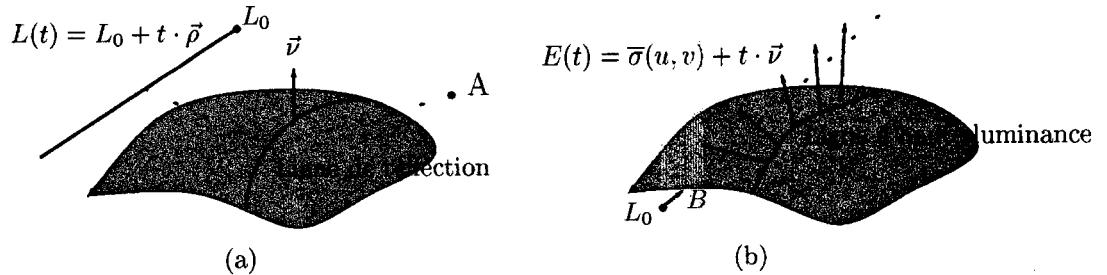


FIGURE 3.9 Lignes de réflexion (a) et de reflet (b)

surface. La luminance en un point de la surface est simplement le produit scalaire entre le vecteur de la direction du faisceau lumineux et la normale à surface  $\vec{\nu}$  en ce point. Les discontinuités de courbure sont repérées par des cassures ou discontinuité du vecteur tangent des isophotes. Le succès de cette méthode est fortement dépendant de la direction du faisceau lumineux.

### 3.3.4 Surfaces offsets généralisées

Une surface offset généralisée est définie par la surface suivante :

$$F(u, v) = \bar{\sigma}(u, v) + sf(k_{min}, k_{max})\vec{\nu} \quad (3.4)$$

$f(k_{min}, k_{max})$  est une fonction scalaire des courbures normales principales dépendant implicitement des paramètres  $u$  et  $v$  et appelée fonction offset. Le choix de la fonction offset dépend du type d'irrégularité ou d'imperfection géométrique à détecter. Les différentes fonctions offsets les plus utilisées (Hagen *et al.* (1995)) sont :

1.  $f = k_{min} * k_{max}$  : test de convexité
2.  $f = \frac{k_{min} + k_{max}}{2}$  : détection de points plats

3.  $f = k_{min}^2 + k_{max}^2$  : degré de continuité mathématique
4.  $f = |k_{min}| + |k_{max}|$  : visualisation de la variation de la courbure
5.  $f = k_{min}$  ou  $f = k_{max}$  : visualisation de la continuité pour des raisons techniques
6.  $f = \frac{1}{k_{min}}$  ou  $\frac{1}{k_{max}}$  : visualisation de discontinuité du second et du troisième ordre
7.  $f = \text{constante}$  : test d'aspect technique

Le traitement spécifique à une discipline des surfaces, comme les techniques de découpage, détermine également le choix de la fonction offset. Ainsi, une surface, qui doit être traitée par un dispositif coupant à tête sphérique, ne doit avoir de rayon de courbure supérieure au rayon de courbure  $R_{coupant}$  de la tête sphérique. La fonction offset dans ce cas particulier est  $\frac{1}{R_{coupant}} - k_{max}$ .

### 3.3.5 Cartographie en couleur

La cartographie en couleur, illustrée par Dill (1981), permet de visualiser des fonctions scalaires sur une surface. À chaque valeur d'une fonction scalaire est associée une couleur. Les couleurs sont utilisées comme une quatrième dimension et montrent quantitativement les variations de la fonction scalaire sur la surface. Usuellement, les couleurs associées à la courbure de Gauss sont rouge pour une valeur positive de la courbure de Gauss, bleue pour une valeur négative et vert pour une valeur nulle. La principale difficulté de cette méthode d'interrogation est le choix d'une échelle des valeurs de la fonction scalaire.

### 3.3.6 Lignes caractéristiques

Les lignes caractéristiques sont des méthodes d'analyse qui comprennent les lignes de courbure et les lignes géodésiques (définies dans Farin (1993)). Les interprétations de ces lignes sont cependant non-intuitives restreignant ainsi leur utilisation.

#### 3.3.6.1 Lignes de courbure

Les lignes de courbure correspondent aux lignes tracées sur une surface pour lesquels en chaque point la direction de la tangente coïncide avec une direction de courbure principale. Elles forment un réseau de lignes orthogonales. L'inconvénient majeur de cette méthode est que les algorithmes de détermination des lignes de courbure près d'ombilics divergent. Les ombilics sont fréquemment rencontrés dans les surfaces gauches.

#### 3.3.6.2 Lignes géodésiques

Le plus court chemin entre deux points d'une surface définit une ligne géodésique ou chemin géodésique. Ces lignes sont caractérisées par une courbure géodésique nulle. La courbure géodésique en un point d'une courbe inscrite sur une surface est simplement la projection de la courbure  $k$  en ce point sur le plan tangent  $(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)$  de la surface. Le tracé de ces lignes s'avèrent utile pour effectuer un déplacement optimal sur une surface. L'étude des chemins géodésiques est fort complexe, nécessite un lourd bagage théorique et numérique et ne se prête pas à des interprétations immédiates.

### 3.4 Visualisation

Il s'avère utile de disposer des outils d'investigation de surface adéquats (Farin (1993)) pour distinguer tout changement ou caractéristique particulière d'une surface de représentation lors d'un processus de design. L'un des critères pour juger de la qualité visuelle d'une représentation géométrique est lié au *fairness*, qui peut se traduire par caractère lisse. Une surface est dite *fair* lorsqu'elle est visuellement plaisante, notion reliée à l'esthétisme. Cependant, le caractère lisse d'une surface n'a pas de définition unique. On peut définir comme lisse une surface qui ne possède pas de bosses, de creux, de zones plates, d'irrégularités surfaciques même très minimes de tout genre. Une autre interprétation de la notion de lisse peut faire référence à la continuité géométrique et paramétrique. Le caractère lisse d'une surface réfléchissante peut également être caractérisée en terme de comportement de lignes de réflexion de la lumière. D'autres critères plus techniques du caractère lisse peuvent être le dépassement d'une valeur limite de courbure imposée par l'outil de fraisage. La diversité de ces définitions fait qu'il n'y a pas de formule mathématique unique permettant de mesurer le caractère lisse d'une surface. Ainsi, pour repérer les principales parties d'une aile d'avion (comprenant les volets et les bords d'attaque représentés par des surfaces réglées et les parties centrales intrados et extrados par des surfaces coniques) la cartographie en couleur de la courbure de Gauss, qui révèle les imperfections locales d'une précision liée à la définition de la géométrie Lounsherry *et al.* (1992), sera utilisée comme outil principal dans la suite de ce travail. Cette méthode d'investigation de surface est la plus adaptée à l'analyse de la surface de représentation de l'aile d'avion. Celle-ci comporte des discontinuités géométriques introduites volontairement tels que les cassures explicitées au chapitre suivant. Les autres méthodes d'investigation de surface révèleraient les détails de cette imperfection géométrique voilant l'aspect visuelle global.

## CHAPITRE 4

### REPRÉSENTATION NURBS D'UNE AILE D'AVION AVEC CONTRAINTE GÉOMÉTRIQUES

#### 4.1 Présentation de la problématique

Une représentation simplifiée d'une aile d'avion telle que manufacturée chez Bombardier Aéronautique est représentée sur la figure 4.1. L'extrados de l'aile se compose uniquement de surfaces réglées dans ce cas-ci. Seul l'intrados comporte une partie *courbe* illustrée par la couleur bleue. L'objectif est de générer de manière systématique de telles surfaces d'ailes d'avion à l'aide d'un modèle de paramétrisation le plus simple possible. Dans la configuration souhaitée, l'extrados présente également une partie *courbe* délimitée par les *longerons* avant et arrière, de forme géométrique approchant une *conique*. Le modèle paramétrique à développer sera à la base de la réalisation d'une méthode d'optimisation du design de l'aile dans le but d'en améliorer l'aérodynamisme. Ainsi, à cette étape du design préliminaire, on doit tenir compte de la nécessité de maintenir le nombre de paramètres (variables de design) assez restreint. La description de l'extrados avec une centaine de paramètres ou moins sera jugée satisfaisante.

#### 4.2 Localisation des différentes contraintes géométriques

La figure 4.2 récapitule les différentes contraintes géométriques requises. Les becs (*slat*), sont des surfaces réglées dans le sens de l'envergure situées autour du bord d'attaque de l'aile. Les parties centrales de l'aile sur l'intrados et sur l'extrados,

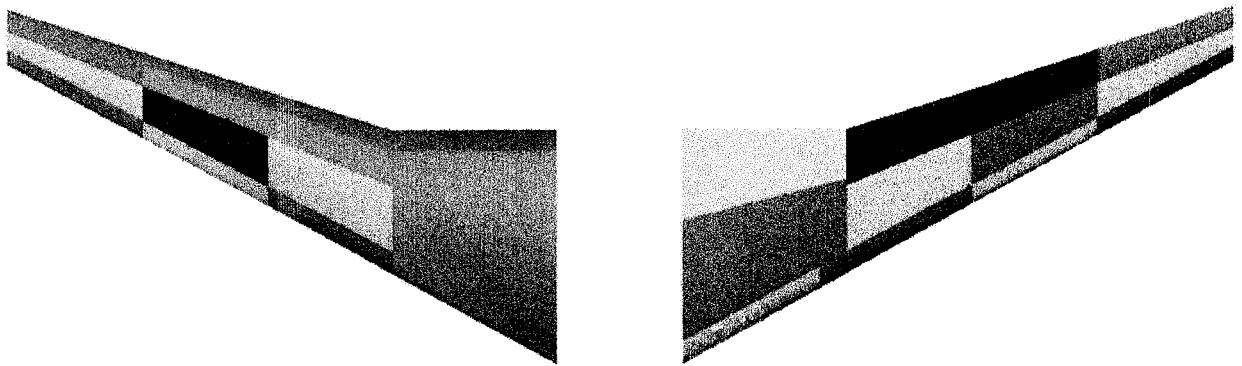


FIGURE 4.1 L'extrados est à droite, l'intrados à gauche

délimitées par les longerons avant et arrière, doivent être préférentiellement décrites par des coniques dans le sens de l'envergure. Les volets (*flaps*), situés au bord de fuite sont également des surfaces réglées dans le sens de l'envergure. Dans le sens de la corde la rencontre de deux volets est matérialisée par une cassure (*break*) qui est en fait une discontinuité du vecteur tangent.

### 4.3 Construction initiale de l'aile

Il est nécessaire de disposer dans une première étape d'un réseau de points de contrôle dérivant d'une description d'aile d'avion sans contrainte. L'implantation des contraintes géométriques s'effectue à partir de ces points de contrôle initiaux. L'information géométrique tridimensionnelle d'une telle aile est décrite simplement par des coupes bidimensionnelles correspondant à des sections de définition ou à des profils d'aile. La description NURBS des profils d'aile permet d'obtenir une représentation d'aile d'avion avec contraintes géométriques par une surface régulière i.e suffisamment continue. Le choix du degré de la surface dans les deux directions

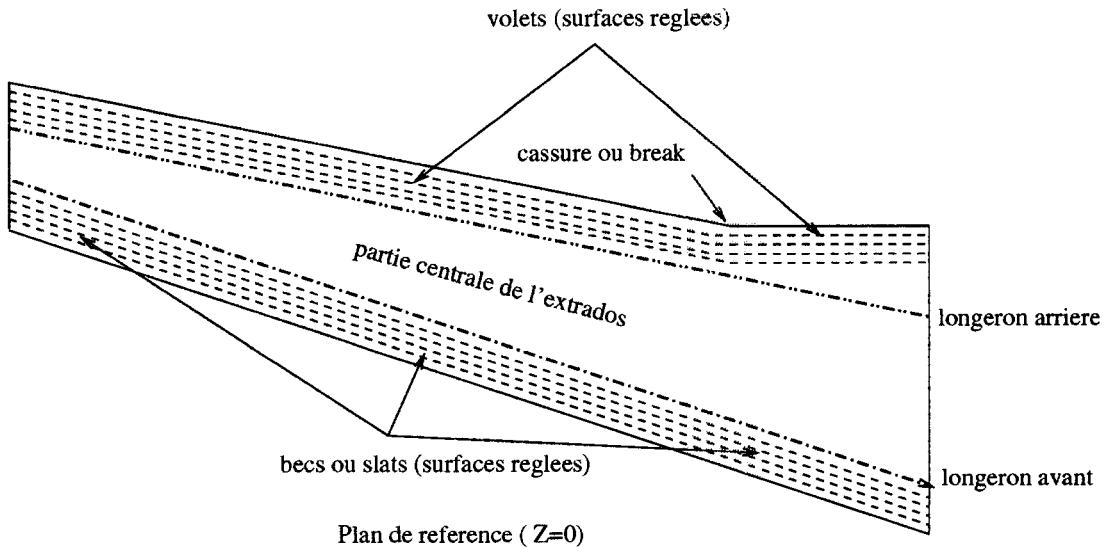


FIGURE 4.2 Localisation des différentes contraintes géométriques

de paramétrisation est guidé par :

1. la nécessité d'obtenir la surface la plus *lisse* possible, i.e sans présence d'oscillation,
2. les conditions de régularité mathématiques adéquates, qui dans ce cas-ci sont la continuité des tangentes et des courbures.

Le degré trois est le degré qui répond le mieux aux exigences précédentes.

L'aile est construite à partir d'un ensemble de points appartenant à des profils 2D dont la position dans le sens de l'envergure, la longueur de la corde (*chord length*) et l'angle de vrillage (*twist angle*) sont des paramètres à imposer. L'algorithme d'interpolation globale s'avère être l'outil le plus adapté pour la création de courbes B-spline initiales à partir de ces points. L'interpolation consistant à construire une courbe passant par un ensemble de points donnés, le choix de ces points se fait de manière à délimiter les différentes parties de l'aile à chaque section de définition : volet intrados, partie centrale intrados, bec, partie centrale extrados et

volet extrados. On décompose alors l'aile en cinq parties tel qu'ilustré sur la figure 4.3.

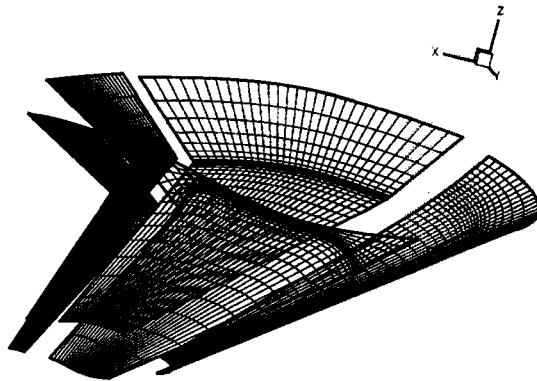


FIGURE 4.3 Les 5 différentes parties de l'aile

Chaque section de définition de l'aile, à une position donnée dans le sens de l'envergure, correspond à un profil 2D qui se divise donc en cinq sous-sections. Pour chacune de ces sous-sections, l'interpolation comprend quatre étapes :

1. lecture des  $m_0$  points définissant chaque sous-section,
2. attribution de paramètres d'interpolation à chacun de ces points suivant la méthode de longueur d'arc,
3.  $m$  points à interpoler sont choisis parmi  $m_0$  points initiaux suivant la courbure,
4. récupération des points de contrôle correspondants.

Quatre points de collocation se sont avérés suffisant pour décrire respectivement les volets intrados et extrados, et la partie centrale de l'aile à l'extrados. La partie centrale de l'aile à l'intrados comprenant un point d'inflection est décomposée en deux sous-sections et est décrite dans sa globalité par huit points de collocation.

Le bord d'attaque à la courbure la plus variée a nécessité six points de collocation. Les ailes sont construites, dans cette étude, à partir de trois sections de définition : une section à l'emplanture (*root section*), une section intermédiaire (*break section ou mid-section*) et une section à l'extrémité de l'aile (*tip section*). Chacune de ces sections est décrite par 26 points de contrôle. Les jonctions entre chaque sous-section d'un même profil sont repérées par une valeur dans le vecteur nodal  $\bar{U}$ , soit les cinq valeurs  $U_5$ ,  $U_9$ ,  $U_{14}$ ,  $U_{19}$  et  $U_{24}$ . La valeur du vecteur nodal  $U_9$  permet de positionner le point d'inflection de la partie centrale de l'intrados créant ainsi une jonction supplémentaire. Le vecteur nodal  $\bar{U}$  comprend alors 6 intervalles qui reflètent la longueur des différentes sous-sections. Le choix des points de collocation à chaque section de définition permettant de reconstruire le vecteur nodal  $\bar{U}$  se ramène à résoudre un système d'équation linéaire où les inconnus sont les paramètres d'interpolation associés à chaque point de collocation. La définition du bord d'attaque nécessite en plus que le point le plus éloigné du bord de fuite soit toujours interpolé. Ceci constraint le choix des autres points de collocation du bec. Un paramètre d'écartement est utilisé pour sélectionner deux autres points symétriques par rapport au bord d'attaque et pour obtenir la meilleure approximation de la forme géométrique du bec. La figure 4.4 illustre la répartition des points de collocation, la position des points de contrôle ainsi que le vecteur nodal  $\bar{U}$  associé à une section de définition de l'aile. Les points de contrôle de ces trois sections de définition servent alors à implanter les différentes contraintes géométriques.

#### 4.4 Limite de l'influence des points de contrôle

L'influence des points de contrôle sur la forme géométrique de la surface de représentation B-spline bi-cubique est locale (cf la propriété de modification locale dans 2.3.5). Cette propriété est exploitée dans le sens de paramétrisation de la corde tout

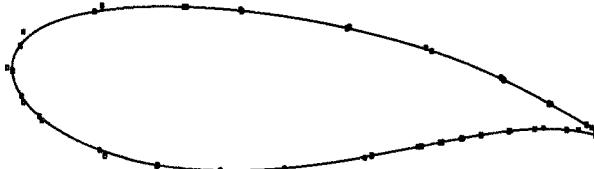


FIGURE 4.4 Répartition type des points de collocation (en bleu) et des points de contrôle (en rouge), ainsi que le vecteur nodal  $\bar{U} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.0512455 \ 0.090465 \ 0.143349 \ 0.209525 \ 0.275549 \ 0.341379 \ 0.395866 \ 0.438937 \ 0.467439 \ 0.489007 \ 0.506421 \ 0.526243 \ 0.552836 \ 0.595193 \ 0.649854 \ 0.716178 \ 0.782473 \ 0.84879 \ 0.902455 \ 0.943482 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ , à une section

au long de l'aile. Le long d'une courbe  $\text{iso}_v$ , un point de contrôle  $P_{i,j}$  ( $j_0-q \leq j \leq j_0$ ) n'a d'influence que sur la partie de la surface décrise par l'intervalle  $[u_i; u_{i+p+1}]$  du vecteur nodal  $\bar{U}$ . Il s'en suit la répartition suivante :

1. de  $u$  égal à zéro jusqu'à une valeur  $U_5 = u_{volet-intrados}$  correspond le volet côté intrados,
2. de  $U_5 = u_{volet-intrados}$  jusqu'à  $U_9 = u_{inflection}$  la partie centrale intérieure intrados,
3. de  $U_9 = u_{inflection}$  jusqu'à  $U_{14} = u_{slat-intrados}$  la partie centrale extérieure intrados,
4. de  $U_{14} = u_{slat-intrados}$  à  $U_{19} = u_{slat-extrados}$  le bec,
5. de  $U_{19} = u_{slat-extrados}$  à  $U_{24} = u_{volet-extrados}$  la partie centrale extrados,
6. de  $U_{24} = u_{volet-extrados}$  à  $u$  égal à l'unité le volet coté extrados.

Sur la figure 4.5 est représentée l'influence d'une rangée  $j$  dans le sens de l'envergure de points de contrôle suivant le vecteur nodal  $\bar{U}$ . À l'exception de la partie centrale intérieure intrados qui est décrise par l'écartement d'un seul triplet de points de

contrôle, les autres parties centrales de l'aile ont nécessité l'écartement de deux triplets de points de contrôle. Nous verrons dans le prochain chapitre comment l'écart entre les points de contrôle peut être déterminé pour obtenir une surface lisse.

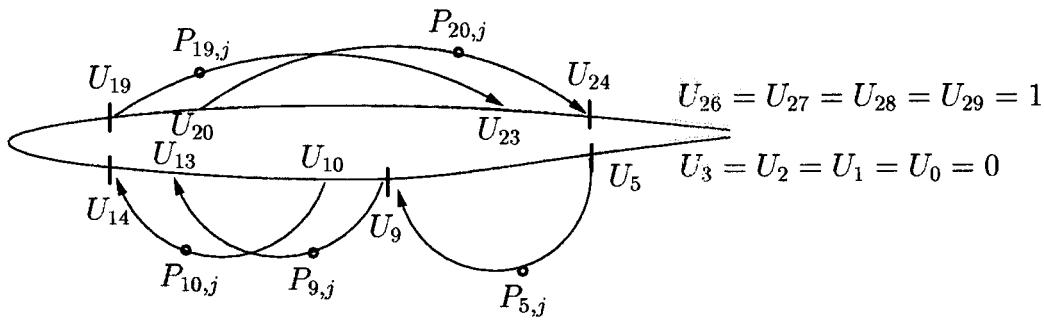


FIGURE 4.5 Limite de l'influence de la rangée  $j$  dans le sens de l'envergure des points de contrôle écartés suivant le vecteur nodal  $\bar{U}$

#### 4.5 Cassures et surfaces réglées

L'imposition de cassures permet simultanément d'obtenir les surfaces réglées décrivant les volets et le bec. Il faut rappeler que toutes les surfaces engendrées dans cette étude sont des surfaces tensorielles (définies au paragraphe 2.3.5). Introduire une discontinuité dans une direction de paramétrisation d'une telle surface entraîne l'apparition d'une ligne de discontinuité dans l'autre direction de paramétrisation. Il s'ensuit que le traitement théorique des cassures s'explique plus naturellement sur des courbes B-spline 3D. La transposition aux surfaces tensorielles est alors immédiate : les points de contrôle des iso-courbes en  $u$  ou en  $v$  d'une telle surface sont distribués de manière similaire. Trois principales propriétés sont invoquées : propriété de l'enveloppe convexe et de la dérivée première des courbes B-splines, et, propriété de la partition unité des fonctions de base B-splines. En définissant

une courbe B-spline  $\mathbf{C}(u)$  par son ordre  $p + 1$  (où  $p$  est le degré choisi égal à trois dans notre étude), par  $n$  son nombre de points de contrôle  $\mathbf{P}_i$  et par  $\bar{U}$  son vecteur nodal, il existe trois manières d'introduire une discontinuité du vecteur tangent :

1. par duplication d'un point de contrôle existant  $\mathbf{P}_i$  jusqu'à ce que sa multiplicité soit égale au degré de la courbe i.e trois,
2. par une duplication d'un point de contrôle existant  $\mathbf{P}_i$  et par insertion double d'un noeud dans le vecteur nodal  $\bar{U}$ ,
3. par une insertion triple d'un noeud dans le vecteur nodal  $\bar{U}$ .

Les résultats de telles opérations sont démontrées dans Bentamy *et al.* (2001). Le traitement théorique des différentes méthodes est exposé de nouveau afin de mettre en évidence le choix judicieux de la méthode employée.

#### 4.5.1 Duplication de points de contrôle

Il s'agit dans cette première méthode de dupliquer un point de contrôle jusqu'à ce que sa multiplicité soit égale au degré de la courbe. Ainsi, sur l'intervalle  $[u_{i+3}; u_{i+4})$  du vecteur nodal  $\bar{U}$ , la courbe  $\mathbf{C}(u)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) = & N_{i+3,3}(u) \mathbf{P}_{i+3} + N_{i+2,3}(u) \mathbf{P}_{i+2} + \\ & + N_{i+1,3}(u) \mathbf{P}_{i+1} + N_{i,3}(u) \mathbf{P}_i. \end{aligned} \quad (4.1)$$

La fonction de base  $N_{i+3,3}(u)$  est définie sur l'intervalle  $[u_{i+3}; u_{i+7})$ . Si la multiplicité du noeud  $u = u_{i+3}$  est égal à un, la fonction de base  $N_{i+3,3}(u)$  est  $\mathbf{C}^{(2)}$ . Ceci implique que  $N_{i+3,3}(u = u_{i+3})$  est égal à zéro. De la propriété de partition de

l'unité sur l'intervalle  $[u_{i+3}; u_{i+4})$  découle :

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^{i+3} N_{j,3}(u) &= N_{i+3,3}(u) + N_{i+2,3}(u) + \\ &+ N_{i+1,3}(u) + N_{i,3}(u) = 1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Il s'en suit que si les points de contrôles  $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i+1}$  et  $\mathbf{P}_{i+2}$  sont confondus, la courbe  $\mathbf{C}(u)$  évaluée au noeud  $u = u_{i+3}$  se réduit à :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u) &= N_{i+2,3}(u) \mathbf{P}_{i+2} + N_{i+1,3}(u) \mathbf{P}_{i+1} + N_{i,3}(u) \mathbf{P}_i \\ &= \underbrace{(N_{i+2,3}(u) + N_{i+1,3}(u) + N_{i,3}(u))}_{=1} \mathbf{P}_i. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Le point de contrôle  $\mathbf{P}_i$  appartient à la courbe. La dérivée première de la courbe  $\mathbf{C}(u)$  est continue bien qu'on ne puisse le détecter visuellement. L'expression de celle-ci dans les intervalles  $[u_{i+1}; u_{i+2})$  et  $[u_{i+2}; u_{i+3})$  est :

$$\mathbf{C}'(u) = N_{i-1,2}(u) \mathbf{Q}_{i-1} + N_{i,2}(u) \mathbf{Q}_i + N_{i+1,2}(u) \mathbf{Q}_{i+1} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{C}'(u) = N_{i,2}(u) \mathbf{Q}_i + N_{i+1,2}(u) \mathbf{Q}_{i+1} + N_{i+2,2}(u) \mathbf{Q}_{i+2} \quad (4.5)$$

$$Q_i = p * \frac{P_{i+1} - P_i}{u_{i+p+1} - u_{i+1}}. \quad (4.6)$$

avec

$$\underbrace{\{0, \dots, 0\}}_p, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_p. \quad (4.7)$$

La limite de ces expressions lorsque  $u$  tend vers  $u_{i+2}$  s'obtient aisément :

$$\lim_{u \rightarrow u_{i+2}} \mathbf{C}'(u) = N_{i,2}(u_{i+2}) \mathbf{Q}_i + N_{i+1,2}(u_{i+2}) \mathbf{Q}_{i+1} \quad (4.8)$$

Le noeud  $u_{i+2}$  étant un noeud interne, les fonctions de base  $N_{i,2}(u)$  et  $N_{i+1,2}(u)$  évaluées en ce noeud sont non-nulles. Si les points de contrôle de la courbe dérivée première  $\mathbf{C}'(u)$ ,  $\mathbf{Q}_i$  et  $\mathbf{Q}_{i+1}$  sont confondus, la limite vectorielle précédente tend continûment vers zéro, toutes les fonctions de bases  $N_{j,2}(u)_{j=i-1 \dots i+2}$  définies en  $u_{i+2}$  étant  $\mathbf{C}^{(2)}$ .  $\mathbf{Q}_i$  et  $\mathbf{Q}_{i+1}$  confondus équivaut aux trois points de contrôle  $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i+1}$  et  $\mathbf{P}_{i+2}$  confondus. Sous forme de postulat cette méthode s'énonce :

Pour obtenir une discontinuité visuelle de la dérivée première d'une courbe B-Spline cubique définie sur le vecteur nodal  $\bar{U}$ , au noeud  $u = u_{i+3}$  de multiplicité un, trois de ces points de contrôle (les points  $\mathbf{P}_i$ ,  $\mathbf{P}_{i+1}$  et  $\mathbf{P}_{i+2}$ ) doivent être confondus. La discontinuité est localisée au point de contrôle  $\mathbf{P}_i$  appartenant à la courbe.

#### 4.5.2 Duplication de points de contrôle et insertion de noeud

Dans cette seconde méthode un point de contrôle et un noeud du vecteur nodal  $\bar{U}$  sont dupliqués jusqu'à ce que leur multiplicité respective soient égale au degré-1 de la courbe. En posant les noeuds du vecteur nodal  $u_{i+2}$  et  $u_{i+3}$  égaux et les points de contrôle  $\mathbf{P}_i$  et  $\mathbf{P}_{i+1}$  confondus, l'équation Eq. (4.3) au noeud  $u_{i+3}$  devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(v) &= N_{i+1,3}(v) \mathbf{P}_{i+1} + N_{i,3}(v) \mathbf{P}_i \\ &= \underbrace{(N_{i+1,3}(v) + N_{i,3}(v))}_{=1} \mathbf{P}_i \end{aligned} \quad (4.9)$$

sachant que  $N_{i+2,3}(u_{i+3}) = N_{i+3,3}(u_{i+3}) = 0$ . De même que précédemment, le point de contrôle  $\mathbf{P}_i$  appartient à la courbe B-spline cubique. L'étude de la dérivée première s'effectue alors sur les intervalles non-nuls  $[u_i; u_{i+1})$  et  $[u_{i+2}; u_{i+3})$  du vecteur nodal de la dérivée première (Eq. 4.7) comprenant un noeud double  $u_{i+1}$  étant égal à  $u_{i+2}$ . Lorsque  $u$  tends vers  $u_{i+2}$ , la dérivée première admet une unique équation :

$$\lim_{u \rightarrow u_{i+2}} \mathbf{C}'(u) = N_{i,2}(u_{i+2}) \mathbf{Q}_i = 3 N_{i,2}(u_{i+2}) \frac{\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i}{u_{i+4} - u_{i+1}}. \quad (4.10)$$

Le noeud  $u_{i+2}$  étant un noeud interne, la fonction de base B-spline  $N_{i,2}(u)$  évaluée en ce noeud a une valeur non nulle. La coïncidence des points de contrôle  $\mathbf{P}_i$  et  $\mathbf{P}_{i+1}$  force l'amplitude de la dérivée première à décroître continûment à zéro étant donné que toutes les fonctions B-Spline  $N_{j,2}(u)_{j=i-2 \dots i+2}$  sont au moins  $C^{(1)}$  au noeud  $u_{i+2}$ . Ce résultat peut s'énoncer de la manière suivante :

Pour obtenir une discontinuité visuelle de la dérivée première d'une courbe B-Spline cubique définie sur le vecteur nodal  $\bar{U}$ , au noeud  $u = u_{i+3}$  de multiplicité deux, les noeuds  $u_{i+3}$  et  $u_{i+2}$  étant égaux, les points de contrôle  $\mathbf{P}_i$  et  $\mathbf{P}_{i+1}$  doivent être confondus. La discontinuité est localisée au point de contrôle  $\mathbf{P}_i$  appartenant à la courbe.

#### 4.5.3 Insertion de noeuds

Dans cette troisième méthode un noeud du vecteur nodal  $\bar{U}$  est inséré jusqu'à que sa multiplicité soit égale au degré de la courbe. Pour une courbe B-spline cubique cette dernière méthode revient à une insertion triple d'un même noeud dans le vecteur

nodal  $\bar{U}$  : soient les noeuds  $u_{i+1}$ ,  $u_{i+2}$  et  $u_{i+3}$  dans l'exemple étudié. Au noeud  $u_{i+3}$  appartenant à l'intervalle  $[u_{i+3}; u_{i+4})$ , l'unique fonction B-spline non nulle est la fonction  $N_{i,3}(u)$ . Par la propriété de partition unité (Eq. (4.2)), la valeur de la fonction B-spline  $N_{i,3}(u)$  est nécessairement égale à 1. La courbe B-spline évaluée au noeud  $u_{i+3}$  vaut alors :

$$\mathbf{C}(u = u_{i+3}) = N_{i,3}(u_{i+3}) \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i. \quad (4.11)$$

Le point de contrôle  $\mathbf{P}_i$  appartient à la courbe comme dans les deux cas précédent. L'évaluation de la dérivée première autour du noeud  $u_{i+2}$  fait intervenir les deux premiers intervalles non nuls limitrophes  $[u_{i-1}; u_i)$  et  $[u_{i+2}; u_{i+3})$  et s'écrit :

$$\mathbf{C}'(u) = N_{i-3,2}(u) \mathbf{Q}_{i-3} + \quad (4.12)$$

$$+ N_{i-2,2}(u) \mathbf{Q}_{i-2} + N_{i-1,2}(u) \mathbf{Q}_{i-1},$$

$$\mathbf{C}'(u) = N_{i,2}(u) \mathbf{Q}_i + N_{i+1,2}(u) \mathbf{Q}_{i+1} + N_{i+2,2}(u) \mathbf{Q}_{i+2}. \quad (4.13)$$

Toutes les fonctions B-spline  $N_{j,2}(u)_{j=i-3 \dots i+2}$  sont identiquement nulles et au moins  $\mathbf{C}^{(0)}$  au noeud  $u_{i+2}$  à l'exception des fonctions B-spline  $N_{i-1,2}$  et  $N_{i,2}$  qui sont  $\mathbf{C}^{(-1)}$ . Les limites à droite  $\mathbf{C}'_{right}(u)$  et à gauche  $\mathbf{C}'_{left}(u)$  de la dérivée première  $\mathbf{C}'(u)$  au noeud  $u_{i+2}$  sont respectivement :

$$\mathbf{C}'_{left}(u_{i+2}) = \lim_{u \rightarrow u_{i+2}^-} \mathbf{C}'(u) = N_{i-1,2}(u_{i+2}) \mathbf{Q}_{i-1}, \quad (4.14)$$

$$C'_{right}(u_{i+2}) = \lim_{u \rightarrow u_{i+2}^+} C'(u) = N_{i,2}(u_{i+2}) \mathbf{Q}_i. \quad (4.15)$$

Ces deux vecteurs tangents sont identiques pour une configuration particulière des points de contrôle  $\mathbf{Q}_i$  et  $\mathbf{Q}_{i-1}$  soit lorsque les points de contrôle  $\mathbf{P}_{i-1}$ ,  $\mathbf{P}_i$  et  $\mathbf{P}_{i+1}$  sont reliés par la relation :

$$\frac{|\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i|}{|u_{i+4} - u_{i+1}|} = \frac{|\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}|}{|u_{i+3} - u_i|}. \quad (4.16)$$

L'algorithme d'insertion triple de noeud, décrit dans Piegl et Tiller (1997) § 5.2., est basé sur ce principe. Excepté ce cas particulier, cette méthode peut s'énoncer :

Pour obtenir une discontinuité visuelle et mathématique de la dérivée première d'une courbe B-spline cubique définie sur le vecteur nodal  $\bar{U}$ , au noeud  $u = u_{i+3}$  il suffit d'égaliser les noeuds  $u_{i+2}$  et  $u_{i+1}$  au noeud  $u = u_{i+3}$ . La discontinuité est localisée au point de contrôle  $\mathbf{P}_i$  appartenant à la courbe.

Ces différentes méthodes sont illustrées sur les figures 4.6 et 4.7. Il est apparu que l'imposition des cassures ne nécessitait qu'une discontinuité visuelle du vecteur tangent. L'approche choisie a donc été la première. Les deux autres méthodes s'avèrent tout aussi efficaces dans un processus de design mais plus difficiles à implémenter. La position de la discontinuité est fixée de manière directe par la position des points de contrôle dans la première méthode. Les deux autres méthodes nécessitent en plus de trouver la valeur optimale du noeud dans le vecteur nodal auquel correspond le point de discontinuité. Le choix d'une paramétrisation adéquate se trouve ainsi lié à l'imposition de cette contrainte. La paramétrisation doit demeurer une mesure globale de la qualité de la représentation géométrique.

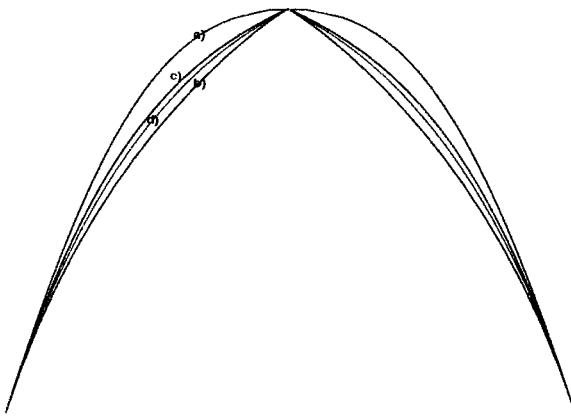


FIGURE 4.6 Courbes B-Spline cubiques définies sur le vecteur nodal : a)  $\bar{U} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.4 \ 0.6 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ , b)  $\bar{U} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$  avec un noeud double et un point de contrôle double, c)  $\bar{U} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 0.5 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$  avec un point de contrôle triple  $P_2 = P_3 = P_4$ , d)  $\bar{U} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$  avec un noeud triple

Il suffit donc de tripler les points de contrôle correspondant à la description des cassures et des becs pour assurer une discontinuité visuelle du vecteur tangent dans le sens de l'envergure. D'autre part, la propriété de l'enveloppe convexe assure que sur chaque intervalle  $[u_i; u_{i+1}]$  du vecteur nodal  $\bar{U}$ , seuls les points de contrôle  $P_{i-p} \dots P_i$  interviennent. Pour obtenir un segment de droite dans l'intervalle  $[u_i; u_{i+1}]$  il suffit alors d'aligner quatre points de contrôle  $P_{i-3} \dots P_i$  dans le cas d'une courbe B-spline cubique  $\mathbf{C}(u)$ . Les sections de définition supportent toujours des cassures à l'exception des deux sections extrêmes, l'une à l'emplanture et la seconde à l'extrémité de l'aile. Ainsi, pour une aile définie à partir de trois sections de définition, deux extrêmes et une intermédiaire, l'imposition d'une cassure sur le volet ou le bec fait apparaître cinq points de contrôle dans le sens de l'envergure, trois points de contrôle y étant confondus. Pour une paramétrisation cubique dans le sens de l'envergure, le vecteur nodal  $\bar{V}$  dans cette direction

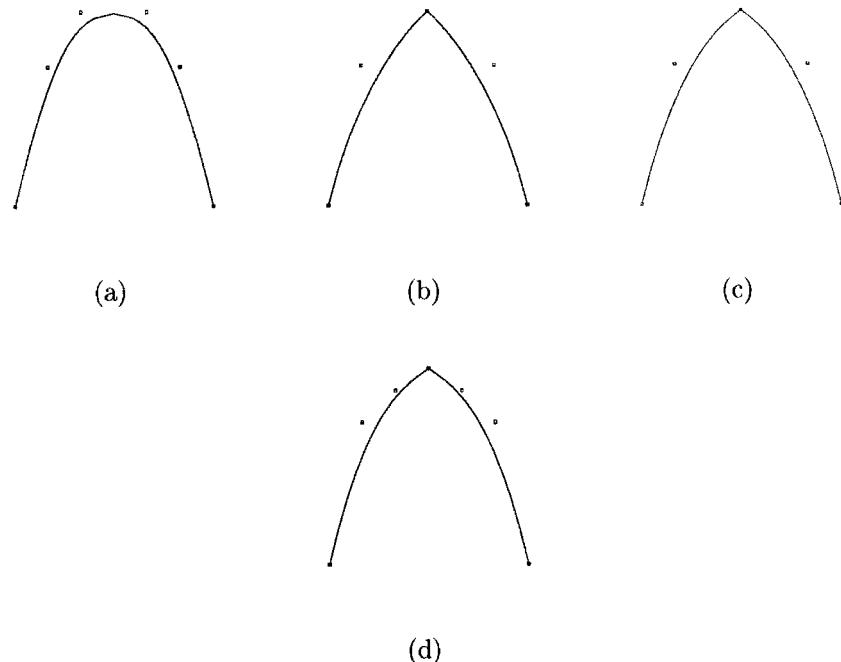


FIGURE 4.7 Points de contrôle associés aux courbes de la figure 4.6

de paramétrisation ne présente que deux intervalles non-nuls internes. À l'intérieur de chacun de ces intervalles il n'y a seulement que deux points de contrôle distincts. C'est ainsi que les différents segments de courbes définissant les volets et les becs se trouvent reliés linéairement. De plus, le choix des points de contrôle de chacune des parties réglées se faisant sur le même critère, la distribution de ces points assure une linéarité entre les points de la surface de l'aile d'une partie réglée, pour un même intervalle de valeurs dans le vecteur nodal  $\bar{U}$  dans la direction de paramétrisation de la corde. Pour une aile comportant deux cassures et deux sections de définition intermédiaires, l'imposition de cassures fait alors apparaître huit points de contrôle dans le sens de l'envergure. Le vecteur nodal  $\bar{V}$  de la surface dans le sens de l'envergure a alors trois intervalles non-nuls internes. De même que précédemment, à l'intérieur de chacun de ces intervalles, il n'y a que deux points

de contrôle distincts. La linéarité est également obtenue implicitement. La figure 4.8 représente la distribution des points de contrôle dans le cas d'une aile à une cassure. Le traitement des parties centrales est expliqué au paragraphe suivant. Sur la figure 4.9 on peut apercevoir la discontinuité du vecteur tangent dans le sens de l'envergure matérialisant les cassures.

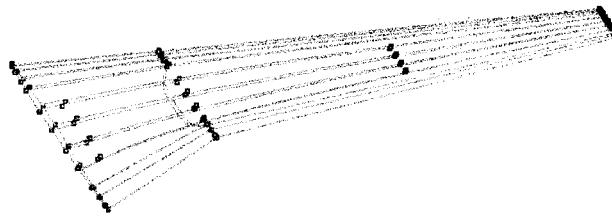


FIGURE 4.8 Points de contrôle d'une aile à une cassure

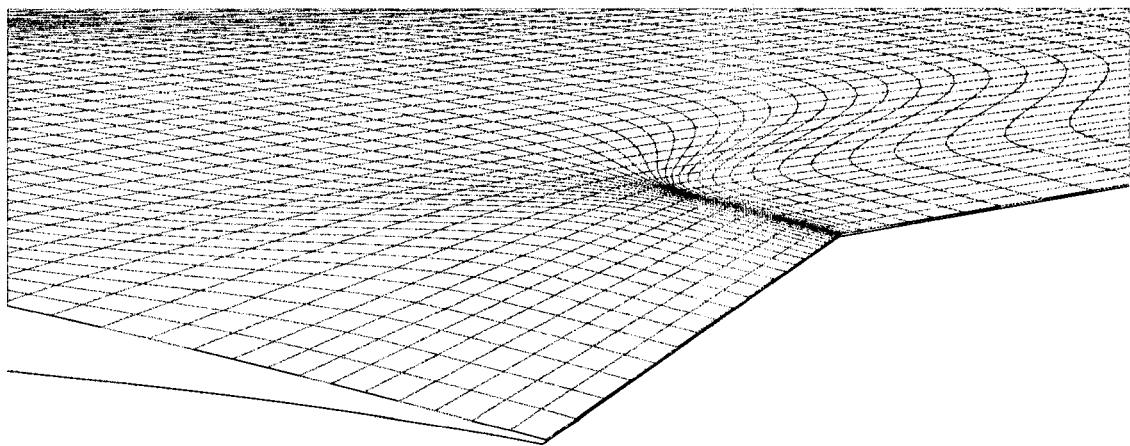


FIGURE 4.9 Visualisation d'une cassure à l'aide d'un maillage cartésien de la surface extérieure de l'aile d'avion

#### 4.6 Introduction de parties coniques

Plusieurs méthodes sont proposées pour introduire la contrainte de courbure des parties centrales de l'aile. Toutes ces méthodes partent d'une aile entièrement réglée dans le sens de l'envergure. La construction d'une telle aile, présentée sur la figure 4.10, s'obtient en triplant tous les points de contrôle de la section supportant la cassure.

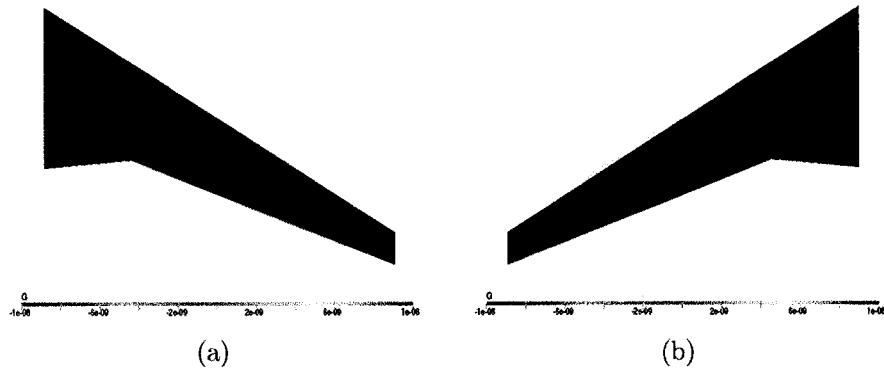


FIGURE 4.10 Courbure de Gauss à l'extrados (a) et à l'intrados (b) d'une aile à une cassure

À partir de ce réseau de points de contrôle initial, deux démarches sont possibles pour contrôler la forme géométrique des parties centrales intrados et extrados de l'aile :

1. une insertion (algorithme d'insertion de noeud dans une surface : algorithme A5.3 Piegl et Tiller (1997)) de points de contrôle entre la section à l'emplanture et la section supportant la cassure nous permet de modifier la forme géométrique de la partie intérieure dans le sens de l'envergure de l'aile sans altérer la forme de la partie extérieure de l'aile toujours dans le sens de l'en-

vergure. De même, une insertion d'une ligne de points de contrôle entre la section supportant la cassure et la section à l'extrémité de l'aile nous permet de modifier la forme géométrique de la partie extérieure de l'aile sans altérer la partie intérieure. Il suffit alors de bouger les points de contrôle de cette nouvelle rangée pour modifier la forme géométrique des parties centrales intérieures et extérieures sur l'extrados et l'intrados.

2. un écartement des points de contrôle triples dont le domaine d'influence coïncide avec les parties centrales intrados et extrados. On se limite à deux possibilités :

- (a) l'écartement des points triples se fait suivant des directions imposées. Il en résulte des modifications concentrées autour du triplet de points de contrôle écartés
- (b) l'écartement est contrôlé par un schéma d'interpolation modifié. Aux trois équations d'interpolation dans le sens de l'envergure, on ajoute deux équations supplémentaires de la dérivée première et seconde d'une conique de référence.

#### 4.6.1 Insertion d'une ligne de points de contrôle

La figure 4.11 schématise le sens de déplacement d'un point de contrôle appartenant à la ligne d'insertion. Le déplacement vertical, orienté vers le bas, d'un point de contrôle est limité à l'intersection avec la ligne directrice où la continuité des tangentes est assurée à cette position relative égale à 1. La position relative égale à 0 correspond à la position initiale du point de contrôle inséré. La visualisation des sections de l'aile ne nécessite pas l'intersection de plans à  $Y$  constant avec l'aile dans ce cas-ci. Les points de contrôle d'une même section de la surface de l'aile appartiennent à des plans parallèles. Les iso-courbes  $v$ , résultant d'une combinai-

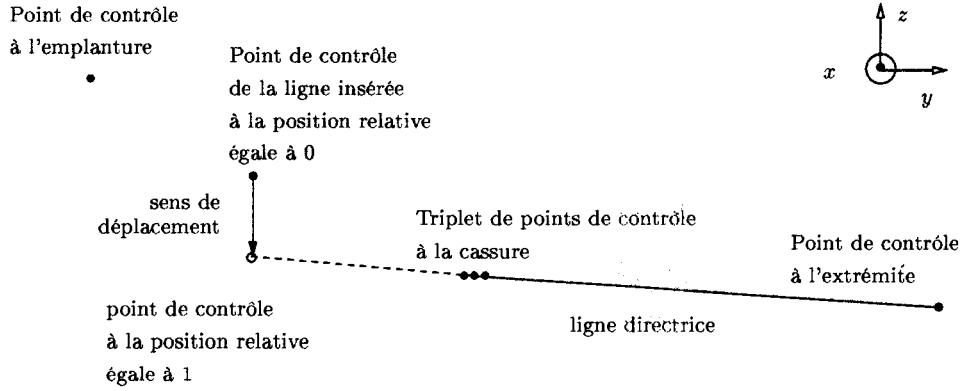


FIGURE 4.11 Description du sens de déplacement d'un point de contrôle de la ligne de points de contrôle insérée

son des coordonnées planaires des points de contrôle, appartiennent également à des plans. Plusieurs de ces iso-courbes sont montrés sur la figure 4.12. La courbe isoparamétrique ( $v = 0, 26$ ), illustrée sur la figure 4.13, permet de voir les déformations maximales engendrées pour différentes valeurs des positions relatives. Il apparaît clairement que pour des valeurs de positions relatives excédant 0.2, il y a apparition de bosses dans les profils de l'aile. L'allure des iso-courbes dans la direction de paramétrisation  $u$  est montrée sur les figures 4.14 et 4.16. Afin d'éviter l'apparition de bosses, on restreint le déplacement vertical d'un point de contrôle inséré, ce qui revient à prendre des valeurs de positions relatives inférieures à 0.2. Les iso-courbes ( $u = 0.72$ ) et ( $u = 0.24$ ), représentées sur les figures 4.15 et 4.17, révèlent les formes linéaires obtenues, éloignées de formes coniques.

Malgré que cette méthode présente l'avantage que la surface reconstruite passe par les trois sections de définition, les déplacements du point de contrôle de la ligne insérée restent très limités. De plus, aucun contrôle sur la courbure des parties centrales dans la direction de l'envergure ne peut être établie de manière directe.

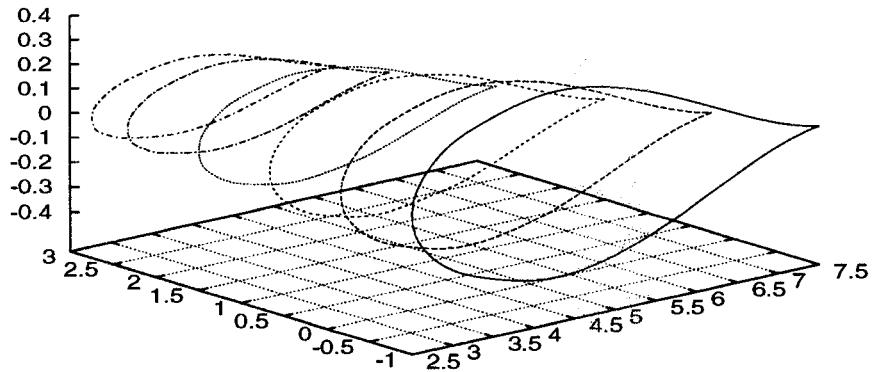


FIGURE 4.12 Coupes suivant des plans à Y constant dans le domaine d'influence des points de contrôle déplacés

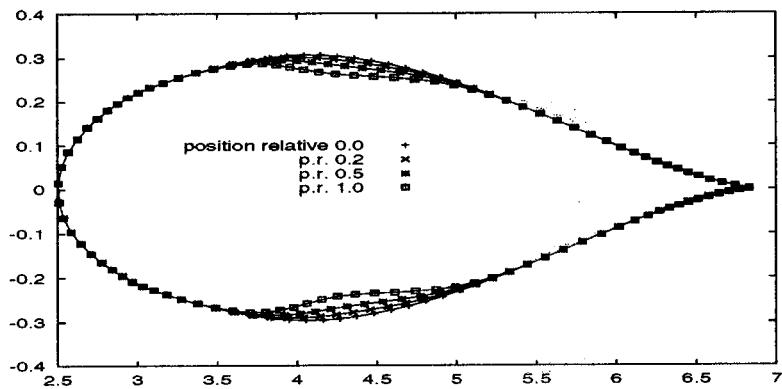


FIGURE 4.13 Courbes isoparamétriques ( $v = 0.26$ ) suivant la valeur de la position relative extrados et intrados

#### 4.6.2 Écartement de points triples suivant des directions imposées

La figure 4.18 schématise le sens de déplacement de deux points de contrôle appartenant à un triplet sur la section supportant la cassure. Les paramètres contrôlant

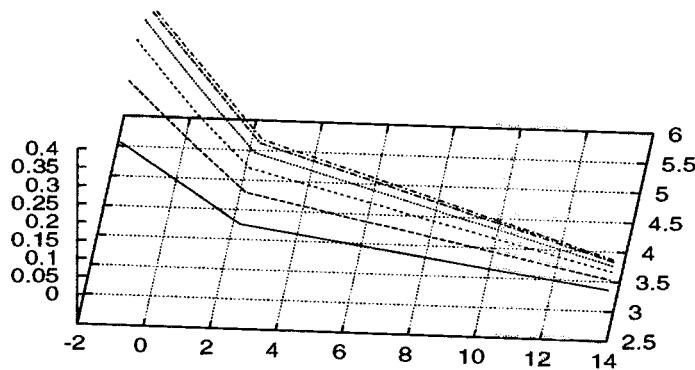


FIGURE 4.14 Courbes iso\_u à l'extrados dans le domaine d'influence du point de contrôle modifié

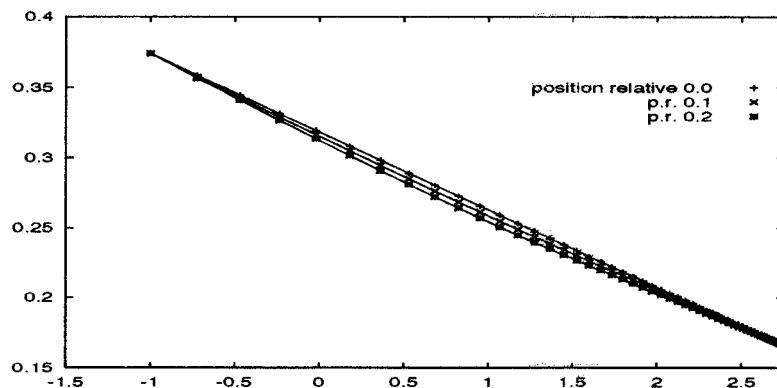


FIGURE 4.15 Courbes isoparamétriques ( $u = 0.72$ ), projetées dans le plan (YZ), pour des valeurs de la position relative extrados ne faisant pas apparaître de bosse

la position finale de deux points de contrôle extrados ou intrados sont les deux facteurs de déplacement intérieur et extérieur ainsi que les rotations intérieures et extérieures. La visualisation des sections de l'aile nécessite l'intersection de plans à

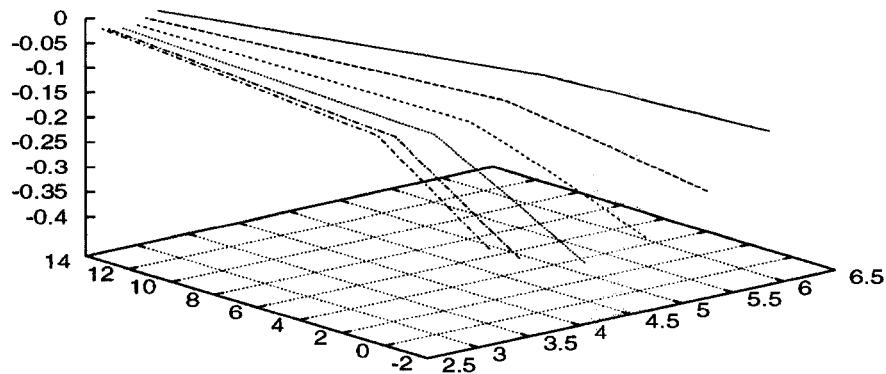


FIGURE 4.16 Courbes iso\_u à l'intrados dans le domaine d'influence du point de contrôle modifié

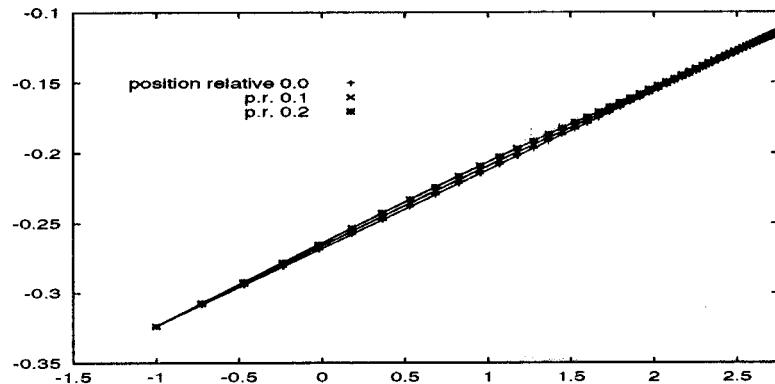


FIGURE 4.17 Courbes isoparamétriques ( $u = 0.24$ ), projetées dans le plan (YZ), pour des valeurs de la position relative intrados ne faisant pas apparaître de bosses

$Y$  constant avec l'aile dans ce cas-ci. Les points de contrôle d'une même section de la surface de l'aile n'appartiennent plus à des plans parallèles. On peut apercevoir sur la courbe isoparamétrique ( $v = 0, 26$ ), illustrée sur la figure 4.19, les déforma-

tions maximales provoquées pour différentes valeurs de position d'écartement. On peut remarquer que l'amplitude des bosses est plus faible qu'avec la méthode précédente. Cependant, les angles de déviation ont dû être maintenus à zéro car il a été difficile d'obtenir des solutions sans bosse. Les iso-courbes ( $u = 0.72$ ) et ( $u = 0.22$ ), représentées sur les figures 4.20 et 4.21, présentent, avec cette méthode, une allure plus courbée plus les valeurs de position d'écartement sont élevées. Cependant, ce type d'écartement n'assure plus que la surface d'aile ainsi modifiée passe par la section supportant la cassure.

Bien que cette méthode offre plus de possibilités aux déplacements des points contrôle, on ne peut relier de manière simple l'allure courbée des solutions obtenues aux propriétés de courbure d'une conique.

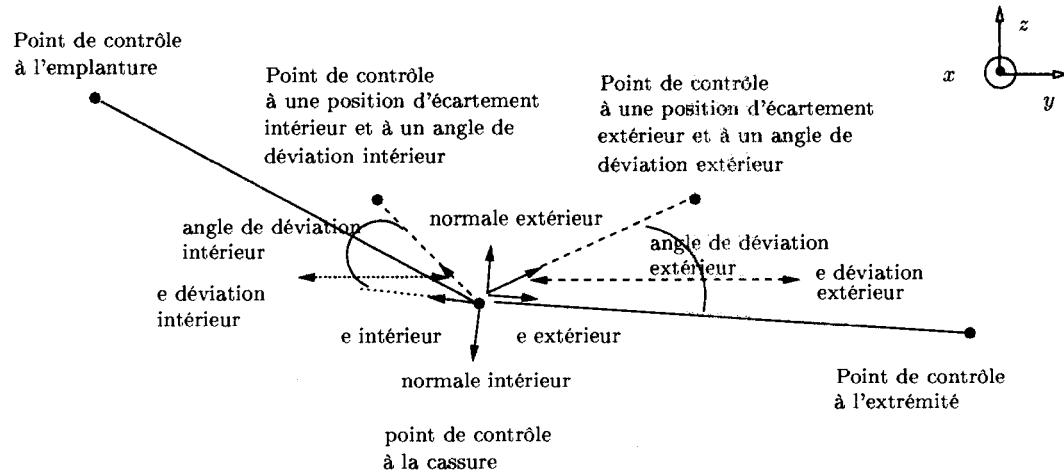


FIGURE 4.18 Description du sens de déplacement de deux points de contrôle

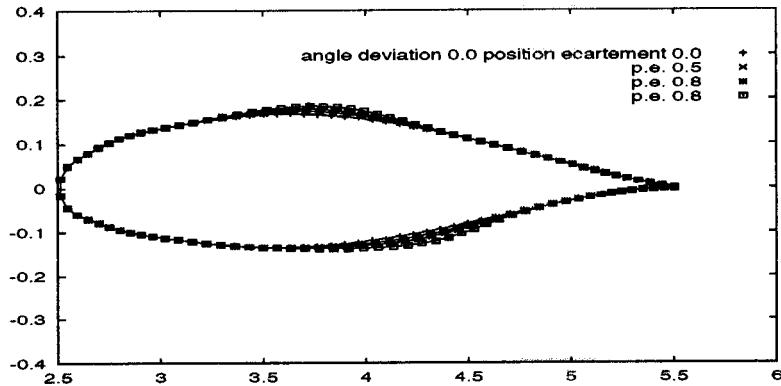


FIGURE 4.19 Intersection entre l'aile et le plan ( $Y = 2.75$ ) pour plusieurs valeurs de l'écartement intérieur et extérieur à l'extrados et à l'intrados. Les angles de déviation sont maintenus à zéro

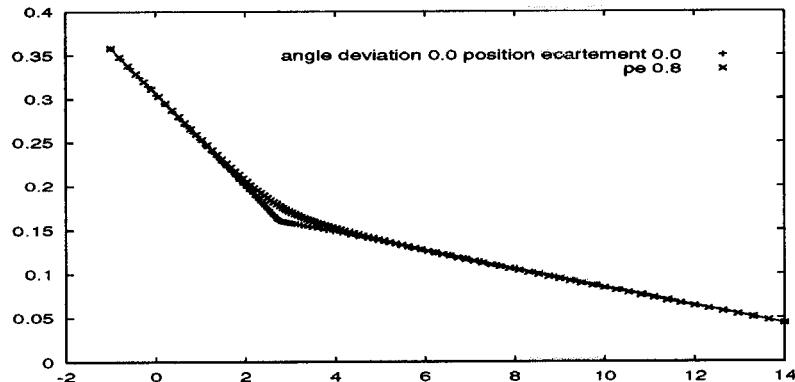


FIGURE 4.20 Courbes iso-paramétriques ( $u = 0.72$ ), projetées dans le plan (YZ), pour des valeurs d'écartements extrêmes à l'extrados ne faisant pas apparaître de bosses

#### 4.6.3 Écartement des points triples à l'aide d'un schéma d'interpolation modifié

En choisissant une surface B-spline tensorielle comme surface de représentation initiale de l'aile, les points de contrôle des sections de définition peuvent être consi-

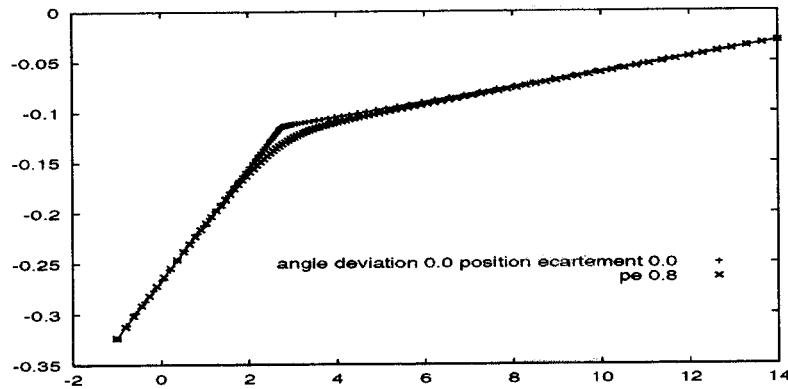


FIGURE 4.21 Courbes iso-paramétriques ( $u = 0.22$ ), projetées dans le plan (YZ), pour des valeurs d'écartements extrêmes à l'intrados ne faisant pas apparaître de bosses

dérés comme des points d'interpolation dans un algorithme d'interpolation global de surface. Les coordonnées de chaque rangée de points de contrôle, dans une direction de paramétrisation donnée, de la surface d'interpolation sont calculées à partir d'une interpolation des points de contrôle dans l'autre direction paramétrique. Cet algorithme se décompose en une première série d'interpolation globale de courbe dans la direction de paramétrisation  $u$  de la corde à partir des points de collocation de la surface. Les points de contrôle résultant se confondent alors aux points de contrôle des sections de définition. Une seconde série d'interpolation globale de courbes s'applique alors aux points de contrôle des sections de définition dans la direction de paramétrisation  $v$  de l'envergure. L'écartement des points triples est alors contrôlé par des équations d'interpolation globales de courbes. Les parties centrales de l'aile devant être décrites par des courbes coniques dans le sens de l'envergure, il faut introduire l'information géométrique pertinente dans le système d'équations du schéma d'interpolation. La première étape consiste à construire un arc conique 3D passant par trois points.

## Arc conique 3D

Il existe de nombreuses manières de définir un arc conique 3D. La méthode la plus commune s'appuie sur l'information géométrique suivante :

1. les deux points des extrémités de l'arc  $a_0$  et  $a_2$ ,
2. les vecteurs tangents aux deux points extrémité  $t_0$  et  $t_2$ ,
3. un point intermédiaire  $a$ .

On construit une courbe rationnelle quadratique interpolant ces trois points avec uniquement trois points de contrôle  $P_0, P_1$  et  $P_2$ . Le vecteur nodal correspondant est simplement  $\bar{U} = \{0 0 0 1 1 1\}$ . Il s'agit d'une courbe rationnelle de Bézier où les fonctions d'interpolation sont les polynômes de Bernstein. On montre que cette forme rationnelle correspond à la description d'une conique dans un repère oblique local formé par le vecteur position du point de contrôle  $P_1$  et les vecteurs  $\vec{L} = \vec{P}_0 - \vec{P}_1$  et  $\vec{T} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$  ( voir la figure 4.22 et section 7.3 dans Piegl et Tiller (1997)).

Un facteur de forme  $k$ , égal à  $\frac{w_0 w_2}{w_1^2}$ , détermine le type de conique où  $w_0$ ,  $w_1$  et  $w_2$  sont les poids des points de contrôle  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  respectivement. Les poids des points de contrôle  $P_0$  et  $P_2$ ,  $w_0$  et  $w_2$  sont généralement fixés à un. On parle alors de paramétrisation normale. Suivant les valeurs du paramètre  $k$  et des solutions de l'équation du dénominateur de la forme rationnelle de Bézier :

$$u_{1,2} = \frac{w_0 - w_1 \pm w_1 \sqrt{1 - k}}{w_0 - 2w_1 + w_2} \quad (4.17)$$

on déduit la classification :

1.  $k > 1$ , il n'existe pas de solutions réelles et de points à l'infini : c'est une ellipse,

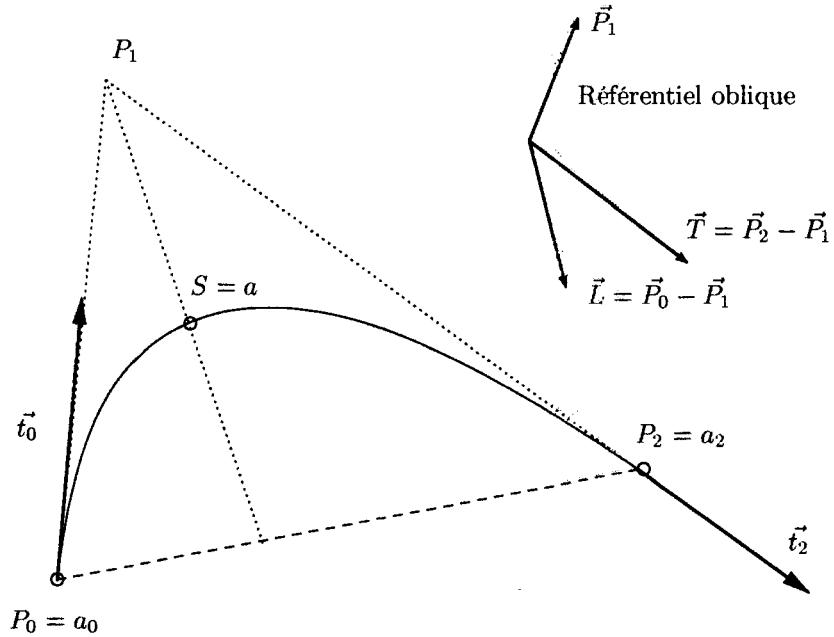


FIGURE 4.22 Conique construite à partir d'une rationnelle quadratique de Bézier à trois points de contrôle

2.  $k = 1$  il y a une solution réelle et un seul point à l'infini : c'est une parabole,
3.  $k < 1$  il y a deux solutions réelles et deux points à l'infini : c'est une hyperbole.

Le poids du point de contrôle  $P_1$  permet alors de générer une multitude d'arcs de courbes coniques passant par les deux points extrémités  $P_0$  et  $P_2$ . On définit le point  $S$  où la courbe rationnelle quadratique définissant une conique suivant  $w_1$  passe pour la valeur  $u_0$  du vecteur nodal. Les points de contrôle  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , le poids  $w_1$  et le point  $S$  sont alors reliés par :

$$P_1 = \frac{S((1 - u_0)^2 + 2u_0(1 - u_0)w_1 + u_0^2) - (1 - u_0)^2 P_0 - u_0^2 P_2}{2u_0(1 - u_0)w_1} \quad (4.18)$$

En fixant le point  $S$ , la position du point de contrôle  $P_1$  est alors déterminée

suivant la valeur du poids  $w_1$ , la position des points de contrôle  $P_0$  et  $P_2$  étant fixée et les valeurs de leurs poids respectifs  $w_0$  et  $w_2$  égales à l'unité. On génère ainsi une famille de courbes quadratiques décrivant une conique passant par trois points préalablement choisis avec  $w_1$  comme variable de design. À partir de trois points de contrôle appartenant aux sections de définition et contrôlant la forme géométrique d'une partie centrale de l'aile, on construit une conique de référence  $C_{initiale}(u)$ .

### Schéma d'interpolation modifié

Ce schéma s'applique à toutes les rangées de points de contrôle dans le sens de l'envergure contrôlant la forme géométrique des parties centrales de l'aile. Le domaine d'influence des points de contrôle d'une surface B-spline bi-cubique dans une direction de paramétrisation est expliqué au paragraphe suivant. La paramétrisation dans le sens de l'envergure ne s'appuie que sur les points de contrôle triple de l'aile initiale. La valeur du paramètre  $v_4$ , du vecteur nodal  $\bar{V} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v_4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}$ , correspond alors à la position relative de la section intermédiaire. Le schéma d'interpolation modifié consiste en cinq équations d'un système d'équations linéaires où les inconnus sont les cinq points de contrôle  $P^0, P^1, P^2, P^3$  et  $P^4$  de la surface B-spline bi-cubique finale. Aux trois équations d'interpolation des points de contrôle des sections de définition  $P_0, P_1$  et  $P_2$  s'ajoute deux équations de la dérivée première  $C_{initiale}(v_4)^{(1)}$  et de la dérivée seconde  $C_{initiale}(v_4)^{(2)}$  évalués en  $u = v_4$  de la conique de référence. Ceci permet d'inclure les propriétés intrinsèques locales d'une conique de référence dans le sens de l'envergure au point de la section intermédiaire. Une reparamétrisation n'altérant pas les propriétés intrinsèques locales de la conique de référence s'avère nécessaire lorsque les vecteurs de la dérivée première  $C_{initiale}(v_4)^{(1)}$  et seconde  $C_{initiale}(v_4)^{(2)}$  provoquent un écartement excessif d'un triplet de points de contrôle. La reparamétrisation introduit une nouvelle variable appelée  $D$ . Dans

le but d'alléger le texte, la reparamétrisation est décrite à l'annexe I. Afin de créer une plus grande variété de courbes tridimensionnelles ayant les propriétés locales d'une conique en l'un de ces points, on introduit également de la torsion définie à l'annexe II. L'introduction de torsion au point de la section intermédiaire est équivalente à une rotation de la dérivée seconde  $C_{initiale}(v_4)^{(2)}$  autour de la dérivée première  $C_{initiale}(v_4)^{(1)}$  suivant un angle de rotation  $\alpha$ , qui apparaît alors comme un nouveau paramètre. Le système d'équations à résoudre s'écrit pour des valeurs des trois nouvelles variables de design  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$  :

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & N_{1,3}(v_4) & N_{2,3}(v_4) & N_{3,3}(v_4) & 0. \\ 0. & N_{1,2}(v_4) & N_{2,2}(v_4) & N_{3,2}(v_4) & 0. \\ 0. & 6. & -12. & 6. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^0 \\ P^1 \\ P^2 \\ P^3 \\ P^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ C_{initiale}^{D,\alpha,w_1}(v_4)^{(1)} \\ C_{initiale}^{D,\alpha,w_1}(v_4)^{(2)} \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

La figure 4.23 illustre la répartition des points de contrôle  $P^0$ ,  $P^1$ ,  $P^2$ ,  $P^3$  et  $P^4$  pour trois variables de design  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$ . Afin de mettre en relief l'efficacité de cette méthode à introduire des formes coniques pour les parties centrales de l'aile d'avion, il n'est présenté sur les figures suivantes des iso-courbes dans la direction de paramétrisation  $u$  que pour des valeurs des paramètres  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$  ne faisant pas apparaître de bosses dans les sections de l'aile. La détermination et les valeurs optimales des paramètres  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$  font l'objet du chapitre suivant. Une mise à l'échelle s'avère nécessaire à l'intrados afin d'apercevoir les différences entre une surface d'aile d'avion réglée et les iso-courbes dans la direction de paramétrisation  $u$ . Les points de contrôles des sections de définition à l'intrados sont proches d'un plan

parallèle au plan ( $XY$ ). Sur la figure 4.24, on peut apercevoir, après agrandissement et projection sur le plan ( $XZ$ ), que l'iso-courbe ( $u = 0.13$ ) à l'intrados passe par la section supportant la cassure. La même remarque s'applique aux figures 4.25 et 4.26 présentant l'iso-courbe ( $u = 0.77$ ) à l'extrados de l'aile dans les deux plans de projection ( $YZ$ ) et ( $XZ$ ). La projection dans le plan ( $XZ$ ) permet de mieux visualiser la forme conique.

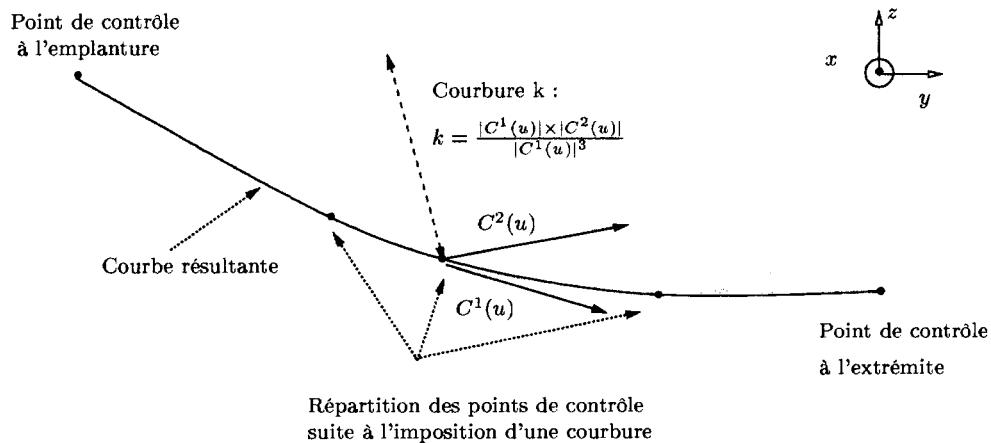


FIGURE 4.23 Répartition des points de contrôle résultant de l'application du schéma d'interpolation modifié

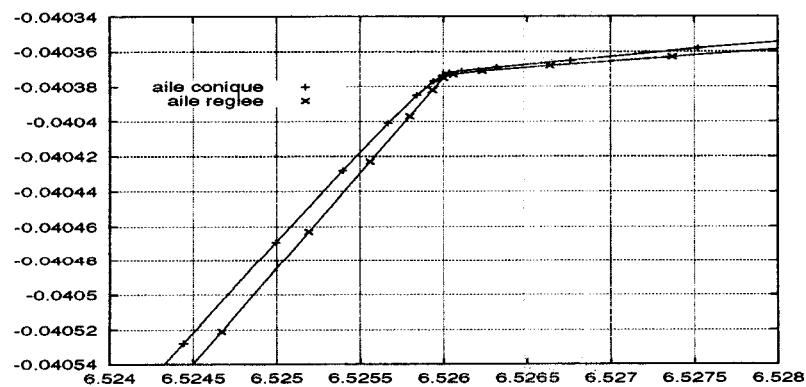


FIGURE 4.24 Courbe iso\_u ( $u = 0.13$ ) à l'intrados projetée dans le plan ( $XZ$ )

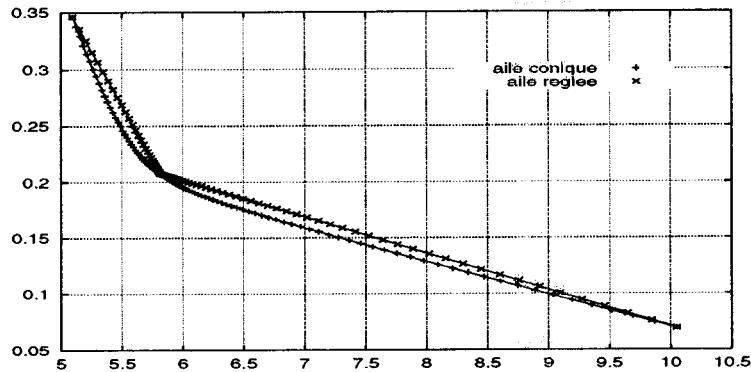


FIGURE 4.25 Courbe iso\_u ( $u = 0.77$ ) à l'extrados projetée dans le plan (XZ)

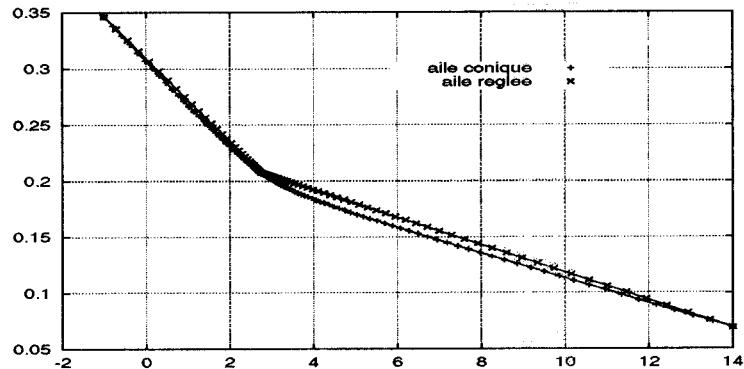


FIGURE 4.26 Courbe iso\_u ( $u = 0.77$ ) à l'extrados projetée dans le plan (YZ)

Cette méthode possède un nombre de variables de design, pour décrire les parties centrales de l'aile, intermédiaire aux deux méthodes précédentes. De plus, ce type d'écartement assure que la surface de l'aile réglée initiale ainsi modifiée passe toujours par la section supportant la cassure et que les parties centrales dans le sens de l'envergure sont décrites par des courbes cubiques s'approchant de coniques. Cette méthode est donc choisie pour l'implantation des parties centrales de formes coniques. Dans la suite de ce document, on adopte la cartographie en couleur pour visualiser la surface de représentation de l'aile.

#### 4.6.4 Qualité de la construction initiale de l'aile

L'imposition des contraintes géométriques lors de la construction initiale de l'aile peut conduire à l'apparition de bosses pour certaines valeurs des paramètres de design  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$ . Les figures 4.27 et 4.28 montrent les inversions de signe de la courbure de Gauss qui peuvent se produire. Les volets et le bec présentent un cas particulier où la courbure de Gauss est nulle. Le choix d'échelle de la courbure de Gauss a été choisi comme la longueur au carré de la tolérance de fabrication qui est de l'ordre de  $10^{-4}m$ . Une visualisation de la courbure de Gauss entre  $-10^{-8}m^{-2}$  et  $10^{-8}m^{-2}$  permet de saisir visuellement les modifications géométriques engendrées par les différentes valeurs des paramètres de design  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$ . Les inversions de signes s'accompagnent d'un changement de courbure suivant les directions de paramétrisation et sont responsables de l'apparition des bosses. Ce type de singularité est inhérent à la méthode utilisée. Pour la construction d'une partie conique centrale s'appuyant indirectement sur trois points d'interpolation définissant cette partie, il existe une infinité de courbes s'approchant localement de coniques au point de la section intermédiaire, repérées par les différentes valeurs permises aux paramètres  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$ . Les parties réglées de l'aile obtenue implicitement par le triplement des points de contrôle à la section intermédiaire ne nécessitent aucun traitement supplémentaire. Les modifications de la surface B-spline bicubique se font alors par l'intermédiaire des variables de design  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$  qui sont au nombre de quinze. Six et neuf variables de design contrôlent respectivement la forme géométrique de la partie centrale extrados et intrados d'une aile à une cassure. Il est donc nécessaire à cette étape de trouver les valeurs optimales de ces quinze variables de design qui maintiennent les contraintes géométriques tout en rencontrant les points de données de la partie centrale de l'aile et n'introduisant pas de bosses.

L'automatisation du choix des variables de design  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$  ne faisant pas appa-

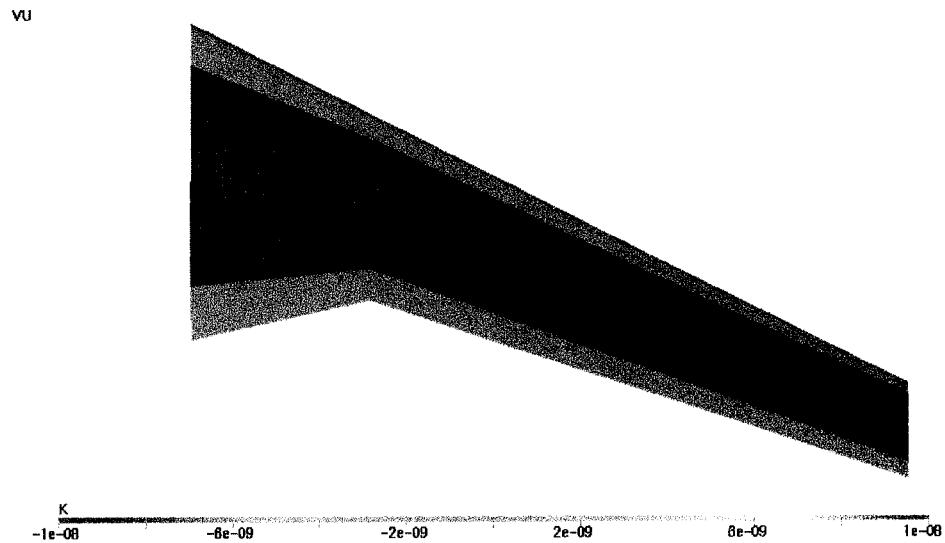


FIGURE 4.27 Extrados de l'aile à une cassure : inversion du signe de la courbure de Gauss pour la partie centrale matérialisé par le changement de couleur (bleu-rouge)

raître de bosse nécessite par contre de recourir à une méthode d'optimisation développée au chapitre suivant. Les algorithmes d'optimisation aérodynamique pourront alors utiliser cette méthode de construction de l'aile à chaque cycle d'optimisation en maintenant les propriétés géométriques désirées.

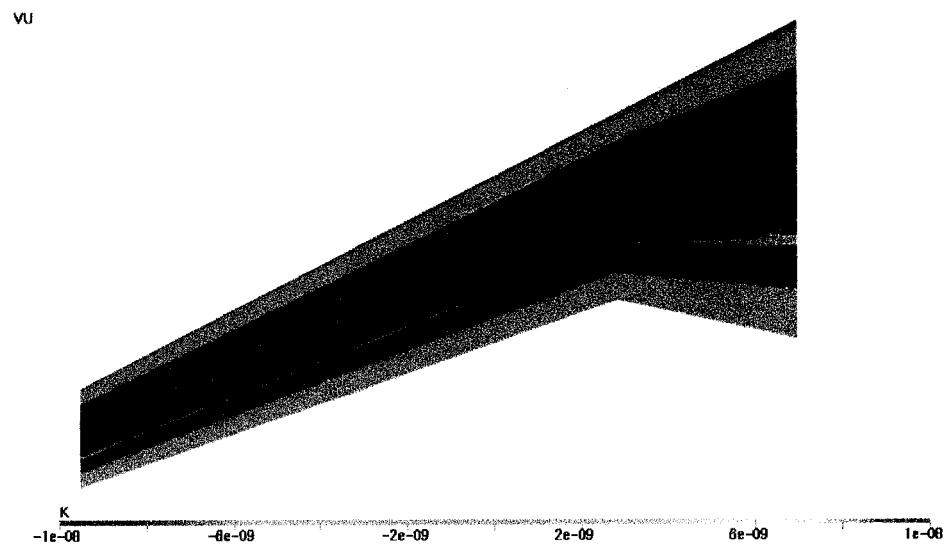


FIGURE 4.28 Intrados de l'aile à une cassure : inversion du signe de la courbure de Gauss pour les parties centrales matérialisées par le changement de couleur (bleu-rouge) au travers d'une même partie centrale

## CHAPITRE 5

### AUTOMATISATION DE LA CONSTRUCTION DE L'AILE AVEC CONTRAINTE GÉOMÉTRIQUES

#### 5.1 Optimisation de la forme géométrique

La bonne qualité d'une représentation géométrique de l'aile doit tenir compte du signe du produit des courbures dans les deux directions de paramétrisation  $k_u$  et  $k_v$ . L'automatisation de la construction de l'aile consiste alors à trouver un critère qui permet de sélectionner les valeurs des paramètres de design  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$  répondant à cette contrainte. La propriété de l'enveloppe convexe permet de déduire la convexité d'une courbe B-spline ou NURBS à partir de ses points de contrôle. Ainsi une courbe B-spline ou NURBS décrite par un réseau de points de contrôle convexe est nécessairement convexe. On ne peut par contre rien conclure si le réseau de points de contrôle d'une courbe B-spline ou NURBS n'est pas convexe. Cette propriété permet ainsi de restreindre la variation du signe de la courbure suivant la forme du réseau de point de contrôle. Cependant il n'existe pas d'équivalent pour les surfaces B-splines ou NURBS (Floater (1994), Prautzsch et Gallager (1992)). La convexité ou la concavité d'une telle surface est impossible à prédire simplement à partir de la forme de son réseau de points de contrôle. Cette difficulté nous impose à trouver l'équivalent d'un critère de convexité améliorant la forme de la représentation géométrique de l'aile.

### 5.1.1 Critères et techniques d'amélioration de la forme d'une représentation géométrique

Le type de singularité qui peut apparaître dans une représentation géométrique comme précédemment, est traité par des méthodes liées au contrôle de la forme géométrique (Au et Yuen (1995), Sanchez-Reyes (1997), Piegl (1989), Farin (1987)) (*shape control*). On parle alors de lissage de courbes ou de surfaces. Dans la littérature, on trouve à ce sujet plus de méthodes développées pour les courbes que pour les surfaces non paramétriques Ferguson (1986), Akima (1970), Carlson et Fritch (1980). L'une des premières études à s'intéresser à l'apparition de singularités, telles des points d'inflection non-désirés, dans une courbe paramétrique a été réalisé par Ferguson et Jones (1984). Cette étude marque la première utilisation d'une méthode d'optimisation avec contraintes afin de contrôler la forme géométrique à partir de l'évaluation de la courbure. Les contraintes correspondent, par exemple, à imposer le déplacement des points de contrôle le long de normales à la surface ou à restreindre, dans l'espace, le déplacement des points de contrôle. Il a été révélé par plusieurs auteurs Ferguson *et al.* (1988), Hoitsma (1996), Kaufman et Klass (1988), Maekawa *et al.* (1996), Sapidis et Farin (1990) que la courbure est la principale grandeur intrinsèque dont le contrôle de la variation est primordial à la qualité d'une représentation géométrique. Dans certains cas (Moreton et Sequin (1992), Moreton (1993), Hohenberger et Reuding (1995)), la fonction objective est simplement une mesure de l'écart entre les valeurs de la courbure en différents points de la géométrie et les valeurs cibles de la courbure à atteindre en ces mêmes points. L'algorithme d'optimisation doit alors converger vers une solution ne s'écartant pas trop de la solution initiale tout en assurant une variation graduelle et continue de la courbure. Ces techniques d'optimisation souffrent du trop grand nombre d'évaluations nécessaires à la convergence. D'autres formulations

(Bloor *et al.* (1995), Lott et Pullin (1988), Sarraga (1998)) s'appuient sur l'analogie qui existe avec l'énergie de déformation d'une plaque fine rectangulaire élastique en théorie de l'élasticité. Soumise à une sollicitation donnée, la plaque se déforme en minimisant l'énergie de déformation. On montre que l'énergie de déformation, pour de petites déformations, en un point de la plaque est une forme quadratique des courbures normales principales de la plaque. Cette minimisation assure également une variation graduelle et continue de la courbure. La fonction objectif est alors une fonctionnelle proportionnelle à l'énergie de déformation qu'on évalue en plusieurs points de la surface. Le nombre d'évaluations est moindre dans ce cas-ci mais reste très sensible aux endroits où est échantillonnée la surface. D'autres méthodes non itératives (Rogers et Fog (1989), Chen *et al.* (1997), Andersson *et al.* (1988)) traduisent les relations de contraintes entre les points de contrôle par des systèmes d'équations non-linéaires. Le lissage résultant est souvent plus prononcé dans une direction de paramétrisation. Ces diverses remarques ont conduit à sélectionner un algorithme de lissage à la fois souple d'implantation et aux propriétés intermédiaires.

### 5.1.2 Algorithme de lissage

Le problème lié au *fairness* se révèle être d'une importance centrale durant ce processus de design. L'algorithme de lissage préconisé dans cette étude appartient aux méthodes dites *variationnelles* qui utilisent certaines énergies ou quantités physiques comme mesure de *fairness*. Pour les surfaces paramétriques, on retrouve souvent des méthodes utilisant :

1. l'énergie de plaques minces (*strain energy*)

$$\int_{\sigma} (k_{min}^2 + k_{max}^2) d\sigma \quad (5.1)$$

$k_{min}$  et  $k_{max}$  étant les courbures principales et  $d\sigma$  l'élément de surface élémentaire dans l'espace physique ;

2. l'énergie de plaques minces approchées

$$\int_{\sigma} (k_{min}^2 + k_{max}^2) dudv \quad (5.2)$$

$dudv$  élément de surface élémentaire dans l'espace paramétrique ;

3. l'énergie de plaques minces linéarisées

$$\int_{\sigma} \left( \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial u^2} \right)^2 + 2 \cdot \left( \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial v \partial u} \right)^2 + \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial v^2} dudv \quad (5.3)$$

$dudv$  élément de surface élémentaire dans l'espace paramétrique.

L'approche commune à ces méthodes consiste à supposer que la surface paramétrique est assez plate et d'en conclure que la métrique sur la surface ne diffère pas beaucoup de celle du plan. Ces énergies servant de mesures de *fairness* peuvent être alors minimisées par une optimisation. Bien que cette supposition ne soit pas réaliste, elle est largement acceptée. Plusieurs auteurs (Farin (1993), Maekawa et Patrikalakis (1994), Farin et Sapidis (1989)) proposent de combiner l'expression de l'énergie de plaques minces approchées avec celle d'une contrainte au sein d'une optimisation afin d'obtenir un design lisse. Cette méthode est de nature globale et s'adapte bien au problème de lissage qui est également une propriété globale d'une surface. La recherche systématique d'une solution optimale est cependant trop coûteuse pour permettre un temps d'exécution acceptable. Ceci est dû au fait que la fonctionnelle de l'énergie de plaques minces approchées dépend non-linéairement des points de contrôle de la surface. L'emploi d'une méthode heuristique d'optimisation s'avère alors justifié. Ce type de méthode d'optimisation est très peu

utilisé en conception assistée par ordinateur. Pourtant leur application est très bien adaptée au problème de lissage. Les différentes représentations géométriques obtenues pour différentes valeurs des paramètres de design  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$  diffèrent par les distributions des valeurs de la courbure de Gauss des parties centrales. L'énergie de plaques minces approchées est alors une bonne mesure pour comparer ces différentes configurations. Le calcul de l'énergie de plaques minces approchées est détaillé à l'annexe III. Les directions des courbures normales principales ne se confondant pas toujours avec les directions de paramétrisation  $u$  et  $v$ , l'énergie de plaques minces approchées doit être pondérée par un terme de contrainte sur le signe du produit de la courbure dans les deux directions de paramétrisation  $u$  et  $v$ . La fonction objective à minimiser s'écrit :

$$\mathcal{F}(\bar{\mathbf{X}}) = \max(k_u \times k_v) \times \frac{\int_{partie \ centrale} (k_{min}^2 + k_{max}^2) dudv}{\int_{partie \ centrale} \max(k_{min}^2 + k_{max}^2) dudv} \quad (5.4)$$

$\mathbf{X}$  est le vecteur des variables de design  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$ , et  $\max(k_u \times k_v)$  représente un terme de contrainte sur le signe du produit des courbures dans les deux directions de paramétrisation  $u$  et  $v$ . Sur la partie centrale de l'extrados de l'aile,  $k_u \times k_v$  doit être de signe négatif. Le terme de contrainte correspondant est la valeur maximale positive en un point de la partie centrale de la surface de l'aile sur l'extrados. Ce terme de contrainte reste inchangé pour la partie centrale extérieure sur l'intrados de l'aile. Le signe du terme de contrainte  $k_u \times k_v$  est cependant inversé pour la partie centrale intérieure sur l'intrados de l'aile. Cette inversion de signe provient de la présence d'un point d'inflexion à l'intrados des sections de définition. Les termes de contrainte,  $\max(k_u \times k_v)$ , sont identiquement nuls pour une aile lisse. Le choix de l'expression de cette fonction coût est guidé par la condition de continuité nécessaire au bon fonctionnement des algorithmes d'optimisation. L'adi-

mensionnalisation de l'énergie de la plaque mince approchée, aux fortes propriétés de continuité mathématique, multipliée aux termes de contraintes  $\max(k_u \times k_v)$  atténue les discontinuités engendrées par ces derniers termes. L'adimensionnalisation permet de tenir compte également de l'ordre de grandeur des termes du produit. La formulation de l'automatisation de la construction de l'aile avec contraintes géométriques en un problème d'optimisation est ainsi complétée.

## 5.2 Algorithmes d'optimisation

### 5.2.1 Formulation d'un problème d'optimisation

La littérature abonde sur les méthodes d'optimisation (un exposé détaillé se trouve dans les ouvrages de Vanderplaats (1984), Vanderplaats (1992)). Leur formulation est étroitement liée à la discipline étudiée. Dans le cas le plus général, un problème d'optimisation revient à minimiser (ou maximiser) une fonction scalaire ou une fonctionnelle, que l'on nomme fonction objectif  $\mathcal{F}$ , de plusieurs variables réelles  $x_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ), appelées aussi, dans le présent contexte, les variables de design. Les variables de design peuvent être indépendantes ou dépendantes. Lorsque les variables de design ne sont soumises à aucune relation de dépendance, on parle alors d'optimisation sans contrainte. Dans le cas contraire, cas qui définit une optimisation avec contrainte(s), les relations de dépendance constituent les équations de contraintes, qui, sous forme d'inégalité, sont regroupées dans le vecteur  $\mathcal{G}$  et, sous forme d'égalité, dans le vecteur  $\mathcal{H}$ , définis dans l'équation 5.5 suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } \mathcal{F}(\bar{\mathbf{X}}) \text{ sujet } \\ & \mathcal{G}_j(\bar{\mathbf{X}}) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_k(\bar{\mathbf{X}}) &= 0 \quad k = 1, 2, \dots, l \\ x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.5)$$

Les variables de design  $x_i$  forment le vecteur de variables de design  $\bar{\mathbf{X}}$ . La dernière équation délimite la région de l'espace de design où doit être recherché le minimum (ou maximum) de la fonction objectif  $\mathcal{F}(\bar{\mathbf{X}})$ . Les contraintes d'égalité et d'inégalité sont supposées être suffisamment continues et lisses, c'est-à-dire continûment différentiables. La fonction  $\mathcal{F}(\bar{\mathbf{X}})$  ainsi que les contraintes d'égalité et d'inégalité peuvent dépendre explicitement ou implicitement des variables de design. Dans le cas explicite, on dispose alors d'équations analytiques et le calcul des dérivées, ou sensibilités, de la fonction objectif en fonction des variables de design, peut être évalué exactement. Dans le cas implicite, cas qui représente la majorité des applications en ingénierie, on a recours aux dérivées numériques, ce qui peut augmenter considérablement le temps de calcul. De plus, la fonction coût et les équations des contraintes sont souvent des équations non-linéaires dont les effets sont à prendre en considération.

Il est nécessaire de choisir une méthode d'optimisation adaptée à l'automatisation de la représentation NURBS de l'aile avec contraintes géométriques. Dans cette étude, une optimisation sans contrainte est privilégiée, formulation plus facile et moins coûteuse à implémenter. De plus, la réduction du coût de calcul provient du faible nombre de variable de design avec lequel l'aile d'avion est représentée, soient quinze variables de design pour les parties centrales. Ainsi, à chaque étape du processus de design aérodynamique, une surface de représentation de l'aile incluant au mieux les contraintes géométriques est transmise à l'optimiseur aérodynamique. Au paragraphe suivant, l'optimiseur utilisé est présenté.

### 5.2.2 Choix de l'optimiseur

La fonction objectif  $\mathcal{F}(\bar{X})$  a un grand impact sur l'algorithme d'optimisation à choisir. De plus, elle peut présenter plusieurs minima locaux entravant la recherche du minimum global. Les diverses techniques d'optimisation se distinguent par le type d'information qu'elles utilisent. Les techniques d'ordre zéro ne nécessitent que l'évaluation de la fonction objectif. Ces méthodes sont relativement coûteuses en temps de calcul. Les techniques d'ordre un emploient le gradient de la fonction coût  $\nabla \mathcal{F}(\bar{X})$  en plus de cette dernière. On retrouve sous cette catégorie la méthode de plus grande pente (*Steepest Descent Method*) et la méthode du gradient conjugué (*Conjugate Gradient Method*). Ces méthodes ne sont pas aussi efficaces que les techniques d'optimisation d'ordre deux utilisant en plus les informations contenues dans la dérivée seconde de la fonction objectif. On peut citer la méthode la plus connue qui est la méthode de Newton et la méthode quasi-Newton. Mais ces méthodes sont souvent limitées aux fonctions unimodales (ayant un seul minimum ou maximum) car ces algorithmes ont tendance à s'arrêter sur le premier minimum local trouvé. Pour les fonctions multinodales (ayant plusieurs minima ou maxima), à grands nombres de variables de design, les algorithmes stochastiques, composées des méthodes heuristiques et évolutionnistes, se distinguent des meilleures techniques d'optimisation précédentes par leurs relatives habiletés à s'approcher d'un extremum global. Ces méthodes dites semi-aléatoires ne font pas un examen systématique de toutes les possibilités à chaque étape, et leur recherche est guidée soit par une probabilité d'acceptation d'un état (dans le cas du recuit simulé), soit par le maintien d'un ensemble de points potentiels (dans le cas des algorithmes évolutionnistes dont le plus connu est l'algorithme génétique). À chaque configuration du vecteur de design ou possibilité correspond un état qui est caractérisé par la valeur de la fonction objectif. L'automatisation de la construction de l'aile s'est

faite à l'aide de l'algorithme du recuit simulé. Dans le cas qui nous intéresse, les différents états ou configurations de l'aile se différencient par des valeurs d'énergies de plaques minces approchées dont les minima reflètent des surfaces de représentation géométrique de l'aile lisses. Toutes ces solutions sont acceptables d'un point de vue manufacturier. La distribution de ces états ne laisse cependant aucun indice quant au choix approprié d'un point de départ pour une optimisation. Pour palier à ce phénomène, les méthodes d'ordre un ou d'ordre deux nécessitent de recourir à plusieurs optimisations en partant de différents points afin d'obtenir un optimum local satisfaisant les contraintes manufacturières. Le choix arbitraire de ces points initiaux constitue un obstacle à l'automatisation de la construction de l'aile. C'est pourquoi on a recours à une méthode de recherche globale. De plus, la recherche d'un optimum global à l'aide du recuit simulé permet de trouver la plus grande déviation permissible de la distribution des épaisseurs par rapport à la distribution linéaire à la limite de l'apparition de singularités telles les bosses assurant une épaisseur minimale des sections de l'aile. Une présentation de l'algorithme et des paramètres du recuit simulé est disponible à l'annexe IV.

### 5.2.3 Résultats de l'automatisation de la construction de l'aile

Un exemple de construction d'aile d'avion avec contraintes géométriques et comportant des bosses a été présenté sur les figures 4.27 et 4.28. En utilisant la méthode du recuit simulé, le choix des paramètres  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$  peut être optimisé. Les résultats obtenus en terme de la courbure de Gauss sont illustrés aux figures 5.1 et 5.2. Les valeurs des différents paramètres de design  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$  sont des valeurs optimales qui minimisent la fonction coût définie par l'équation (5.4). On remarque sur les figures 5.1 et 5.2 que l'aile ainsi générée ne contient pas de bosses. Les tableaux 5.1, 5.2 et 5.3 montrent des exemples typiques de convergence de l'optimiseur en

Itération	$w_1$	$\alpha$	$D$	Fonction coût(Eq. 5.4)
0	10.20	0.0	1.0	$5.6622 \times 10^{-2}$
1	-	-	-	$9.9112 \times 10^{-7}$
2	-	-	-	$1.3664 \times 10^{-7}$
3	48.20	1.36	12.38	<b><math>4.2757 \times 10^{-10}</math></b>

TABLEAU 5.1 Évolution typique de la fonction coût pour la partie centrale intérieure intrados. Le nombre de variable de design est 3. En gras, la meilleure surface de représentation satisfaisant les critères de courbure pour cette partie

fonction du nombre d’itérations pour les trois parties centrales de l’aile, appelées respectivement partie centrale intérieure intrados, partie centrale extérieure intrados et partie centrale extrados. Ces différents tableaux fournissent si ce n’est que pour des critères de comparaison, une indication quantitative de l’automatisation de la construction d’une aile d’avion avec contraintes géométriques. Il faut noter que cette automatisation s’effectue en fixant des bornes aux paramètres de design  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$ .  $\alpha$  est naturellement borné par l’intervalle  $[0; 2\pi]$ . Les bornes des deux autres paramètres de design  $w_1$  et  $D$  sont fixées de manière arbitraire. Une information géométrique portant sur les limites des valeurs de la courbure à atteindre au niveau de la section intermédiaire, dans la direction de paramétrisation  $v$ , serait requise. Les bornes des paramètres de design  $w_1$  et  $D$  seraient alors fixées de manière plus appropriées.

Nous rappelons cependant que la construction de la géométrie ne constitue qu’une des disciplines dont il faut tenir compte et que l’objectif principal est l’optimisation aérodynamique. Le chapitre suivant introduit des méthodes mathématiques applicables à ce type de problème multidisciplinaire.

Itération	$w_1$		$\alpha$		$D$		Fonction coût (Eq. 5.4)
0	1.0	1.0	0.0	0.0	1.0	1.0	$3.3533 \times 10^{-3}$
1	-	-	-	-	-	-	$1.7427 \times 10^{-4}$
2	-	-	-	-	-	-	$8.1933 \times 10^{-8}$
3	-	-	-	-	-	-	$2.5101 \times 10^{-5}$
4	-	-	-	-	-	-	$2.9519 \times 10^{-4}$
5	-	-	-	-	-	-	$6.7383 \times 10^{-8}$
6	-	-	-	-	-	-	$5.6354 \times 10^{-8}$
7	-	-	-	-	-	-	$2.8766 \times 10^{-8}$
8	7.75	8.76	1.28	6.01	9.47	2.63	<b><math>1.4290 \times 10^{-10}</math></b>

TABLEAU 5.2 Évolution typique de la fonction coût pour la partie centrale extérieure intrados. Le nombre de variable de design est 6. En gras, la meilleure surface de représentation satisfaisant les critères de courbure pour cette partie

Itération	$w_1$		$\alpha$		$D$		Fonction coût (Eq. 5.4)
0	1.0	1.0	0.0	0.0	1.0	1.0	$6.6362 \times 10^{-3}$
1	-	-	-	-	-	-	$2.1226 \times 10^{-4}$
2	-	-	-	-	-	-	$4.5628 \times 10^{-5}$
3	-	-	-	-	-	-	$3.5942 \times 10^{-5}$
4	-	-	-	-	-	-	$1.2717 \times 10^{-4}$
5	-	-	-	-	-	-	$6.7461 \times 10^{-4}$
6	7.81	4.04	3.06	4.86	9.42	9.13	<b><math>3.6900 \times 10^{-11}</math></b>

TABLEAU 5.3 Évolution typique de la fonction coût pour la partie centrale extrados. Le nombre de variable de design est 6. En gras, la meilleure surface de représentation satisfaisant les critères de courbure pour cette partie

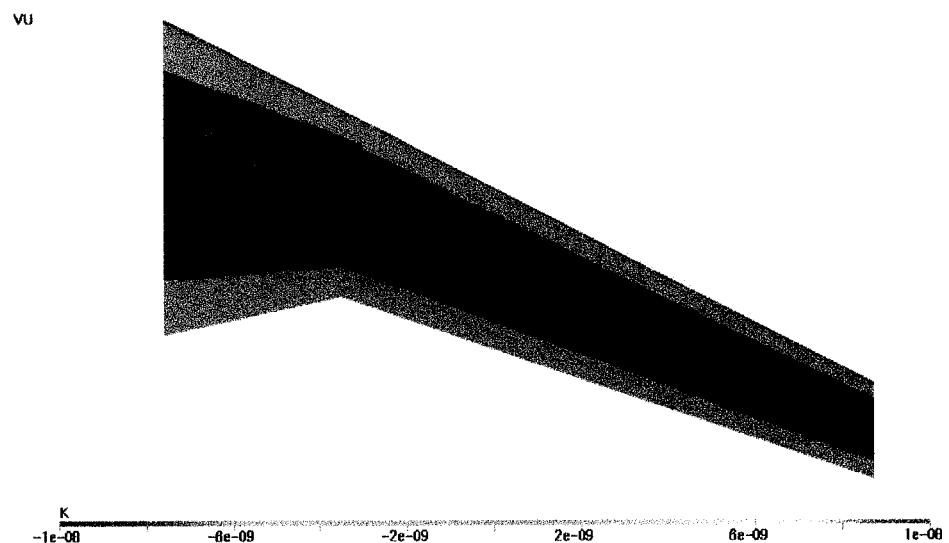


FIGURE 5.1 Extrados de l'aile à une cassure : une courbure de Gauss nulle pour les parties réglées (coloration verte) et négative pour les parties de forme hyperbolique (coloration bleue)

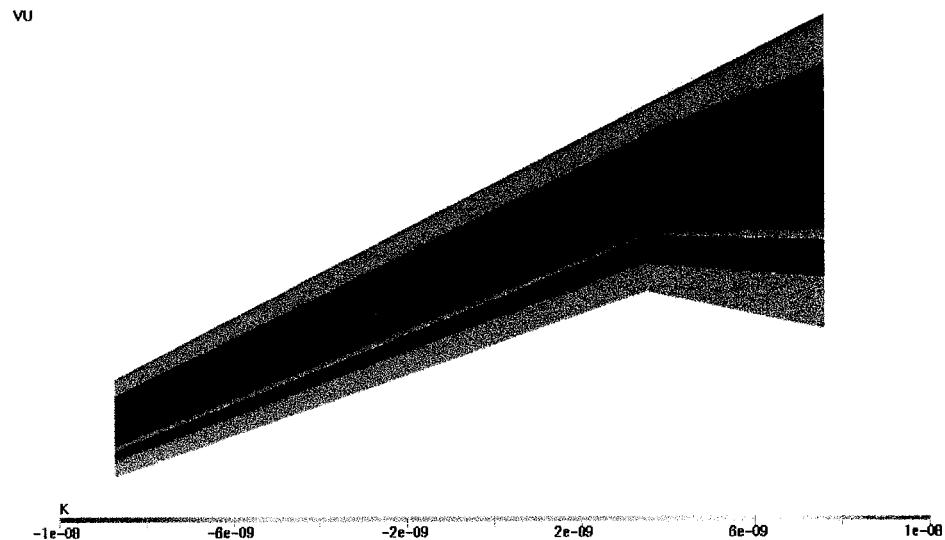


FIGURE 5.2 Intrados de l'aile à une cassure : une courbure de Gauss nulle pour les parties réglées (coloration verte), négative pour les parties de forme hyperbolique (coloration bleue) et positive pour les parties de forme elliptique (coloration rouge)

## CHAPITRE 6

### CONTEXTE DE DESIGN OPTIMAL

La construction d'une surface de représentation géométrique d'une aile 3D, avec contraintes géométriques utilisant les *NURBS*, s'appuie sur les points de contrôle de trois sections de définition et des variables de design géométriques  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$ . Les modifications de la surface de représentation résultante se font donc soit par la manipulation des points de contrôle et des poids qui sont associés aux trois sections de définition, soit par les variables de design géométriques  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$ . Ces modifications sont motivées par les améliorations spécifiques à apporter à une discipline dont le calcul des grandeurs interagit avec la définition de la géométrie. On peut citer, par exemple en aérodynamique, l'augmentation du coefficient de portance  $C_L$  ou la réduction du coefficient de traînée  $C_D$ , coefficients obtenus par la résolution numérique de l'écoulement autour d'une aile d'avion. D'autre part, la manufacturabilité d'une aile d'avion est reliée aux propriétés intrinsèques de la représentation géométrique : certaines parties étant préférablement coniques ou d'autres ayant une courbure nulle dans une direction donnée. Du fait de la non linéarité qui existe entre ces différentes grandeurs et les points de contrôle des trois sections de définition et les variables de design géométriques  $w_1$ ,  $D$  et  $\alpha$ , et, devant le grand nombre de degrés de liberté que présente la surface de représentation de l'aile, la recherche d'un design optimal tant du point de vue aérodynamique que de la manufacturabilité, se ramène à nouveau à un problème d'optimisation ou plus précisément à un problème d'optimisation multiobjectif (ou en utilisant les abréviations anglaises *MOO* pour *Multi-Objective Optimisation*).

Le but essentiel de cette dernière partie est d'évaluer la représentation géométrique développée de l'aile avec contraintes géométriques dans une perspective de design aérodynamique. Pour ce faire, la formulation d'optimisation aérodynamique avec des courbes de  $C_p$  cibles a été choisie. Cette méthode, plus connue sous le nom de méthode de design inverse, consiste à définir des courbes de  $C_p$  idéale dont on cherche les profils correspondant. L'écoulement autour de l'aile est simulé à l'aide du résolueur d'écoulement bidimensionnel BGK, lancé en cinq stations de l'aile. Ce programme résout les équations des petites perturbations avec une correction pour tenir compte de l'effet de la couche limite. La théorie des équations des petites perturbations n'est valide que dans l'hypothèse d'écoulements à faibles incidences. L'article de Bauer *et al.* (1977) fournit de plus amples détails sur les caractéristiques du résolueur BGK. Ce solveur, à la précision limitée notamment pour le calcul du coefficient de traînée  $C_D$ , permet néanmoins de dégager les grandes tendances pour améliorer les performances aérodynamiques. Cependant, son bon fonctionnement impose que la courbure des profils de l'aile soit très régulière. En satisfaisant cette condition, le temps nécessaire de résolution d'un écoulement est alors de l'ordre de la seconde sur une station de travail SGI.

La restriction sur la régularité des courbures des profils confine la recherche d'une meilleure solution aérodynamique à de très faibles modifications de la représentation géométrique initiale. De plus, le contexte typique auquel les ingénieurs font face est celui de l'amélioration d'une aile déjà performante pour en optimiser les performances. On peut donc de ce fait, favoriser l'utilisation d'un optimiseur à gradient en optimisation aérodynamique. Comme les méthodes d'optimisation à gradient ne garantissent pas l'obtention d'un extremum global, il faut partir d'une représentation géométrique initiale de l'aile suffisamment proche de ce que l'on souhaite obtenir. Cette condition est remplie en prenant comme point de départ pour l'optimisation aérodynamique, une aile manufacturable.

La validation du modèle de représentation géométrique n'est pas dépendante de la précision de calcul du résolueur d'écoulement qu'il soit bidimensionnel ou tridimensionnel. La rapidité de la résolution de l'écoulement avec BGK a motivé son utilisation. De plus, ce logiciel CFD génère automatiquement le maillage qu'il adapte pour assurer la convergence des résultats. Ce solveur a été utilisé pendant des décennies. Les solveurs potentiels dont fait partie BGK, continuent d'être employés aujourd'hui. Bien que l'utilisation d'un résolueur d'écoulement bidimensionnel constitue une approximation grossière de la simulation de l'écoulement tridimensionnel, cette approximation permet tout de même d'évaluer les performances de la méthode de représentation géométrique de l'aile avec contraintes géométriques.

## 6.1 Description de la méthode de validation

### 6.1.1 Construction initiale de l'aile

L'application au design aérodynamique nécessite donc la construction d'une aile initiale aux performances aérodynamiques assez proche de ce que l'on souhaite obtenir. Les angles de vrillage de l'aile ont donc été choisies de telle sorte que l'amplitude des ondes de choc sur l'extrados de l'aile initiale soit assez faible et que les valeurs respectent l'hypothèse d'écoulements à faibles incidences. Il est ainsi plus aisément de modifier les caractéristiques des courbes de  $C_p$  aux différentes stations de l'aile. Le choix de la méthode de design inverse est alors pleinement justifié dans ce contexte. Cette procédure évite de partir d'un point de l'espace de design trop éloigné de la solution à atteindre. La convergence de l'optimiseur à gradient s'en trouve ainsi aidée. Il a été choisi comme profils initiaux des trois sections de définition de l'aile, le profil transsonique RAE2822. Le vrillage de l'aile a été fixé à +3 degrés à l'emplanture (*root section*), à +0.25 degré à la section

intermédiaire (*break section ou mid-section*) et à 0. degré à la section à l'extrémité de l'aile (*tip section*). Les autres paramètres (la flèche, l'envergure, les cordes et les centres de vrillage des trois sections de définition) dans la vue de plan, nous ont été fournis par le département d'aérodynamique avancé de Bombardier Aéronautique. L'automatisation de la construction de l'aile, développée au chapitre précédent, permet d'obtenir une représentation tridimensionnelle initiale de l'aile satisfaisant les contraintes géométriques. Pour un nombre de Mach à l'infini  $M_\infty$  de 0.74 et un nombre de Reynolds  $Re$  de  $6.510^6$ , la résolution des écoulements bidimensionnels en cinq stations de l'aile, à l'aide du résolueur BGK, montre la présence d'ondes de choc sur l'extrados. Les amplitudes de ces ondes de chocs sont plus grandes plus les sections sont proches de l'implanture. La figure 6.1 montre l'allure des courbes de  $C_p$  calculées avec le résolueur BGK aux cinq stations de l'aile ainsi que la courbure de Gauss de l'aile initiale satisfaisant les contraintes géométriques.

### 6.1.2 Paramètres d'optimisation et objectifs aérodynamiques

Afin d'améliorer les performances aérodynamiques de l'aile initiale, on se fixe comme objectif d'annihiler les ondes de chocs sur l'extrados de l'aile tout en maintenant le même coefficient de portance  $C_L$  et les contraintes géométriques. La limite de l'influence des points de contrôle des sections de définition permet d'identifier les points de contrôle affectant les courbes de  $C_p$  sur l'extrados de l'aile. On limite ainsi la complexité du problème en n'utilisant comme variables de design que les coordonnées  $y$  des points de contrôle situés sur l'extrados, au nombre de 9 par section de définition. Ces paramètres permettent de modifier sensiblement les profils des stations de l'aile sur l'extrados. Cette zone est très influente aérodynamiquement par la présence des ondes de choc en régime transsonique. Une diminution de l'amplitude des ondes de choc, à coefficient de portance  $C_L$  constant, implique un

VU

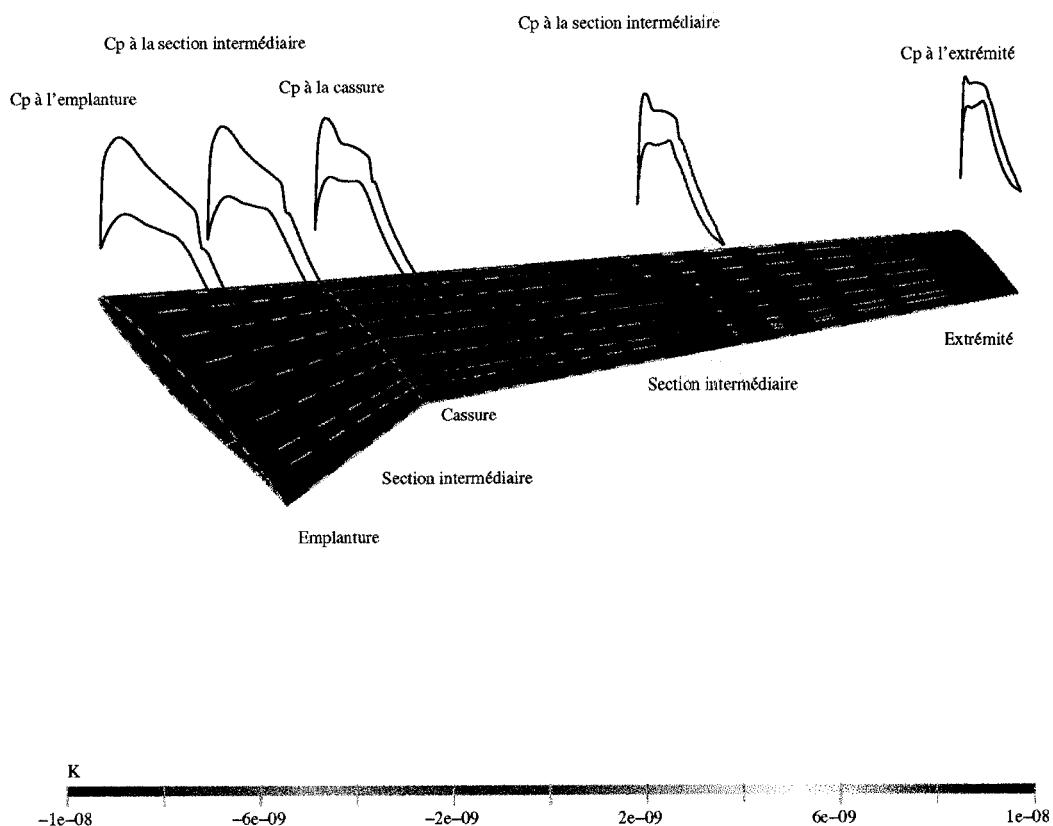


FIGURE 6.1 Positionnement des cinq stations de l'aile initiale avec les courbes de  $C_p$  correspondantes. Courbure de Gauss nulle pour les parties réglées (coloration verte) et négative pour la partie de forme hyperbolique (coloration bleue)

coefficient de traînée  $C_D$  plus faible. Ceci se traduit par une plus faible consommation de carburant, donnée essentielle des conditions de vol d'un avion commercial. À une section de définition de l'aile, la courbe de  $C_p$  cible correspondante a été ob-

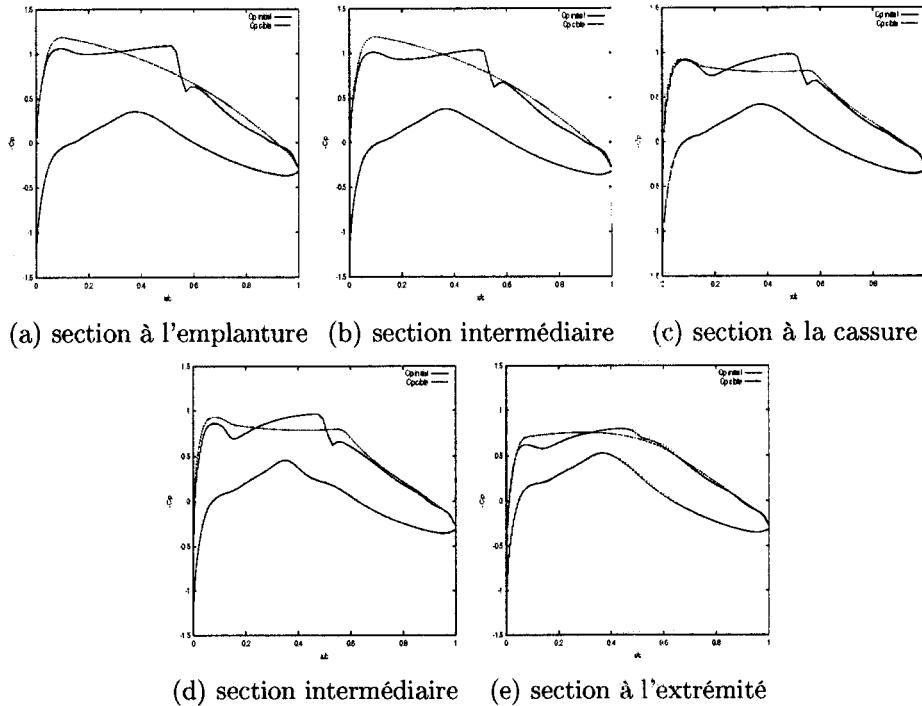


FIGURE 6.2 Courbes de  $C_p$  initiales et cibles aux cinq stations de l'aile initiale. La coordonnée  $x$  est normalisée avec la corde. Les coefficients de portance sont : a)  $C_L = 0.7028$ , b)  $C_L = 0.6529$ , c)  $C_L = 0.5700$ , d)  $C_L = 0.5128$ , e)  $C_L = 0.3923$

tenue en réduisant l'angle de vrillage et le nombre de Mach  $M_\infty$  jusqu'à ce que la résolution de l'écoulement avec BGK ne présente plus d'onde de choc et conserve l'aire sous la courbe de  $C_p$  initiale. Les sections intermédiaires ont nécessité par contre le jeu des deux angles de vrillage des sections de définition limitrophes. La conservation de l'aire sous les courbes de  $C_p$  garantit la constance du coefficient de portance  $C_L$ . Les courbes de  $C_p$  cibles ainsi construites sont d'assez bonne qualité et pourraient refléter des cas réels. Les courbes de  $C_p$  initiales et cibles aux cinq stations de l'aile initiale sont reproduites dans les plans des écoulements bidimensionnels sur la figure 6.2.

### 6.1.3 Fonction coût globale $\vec{\mathcal{F}}(\bar{X})$

La fonction coût globale  $\mathcal{F}$ , adaptée à ce problème de design inverse, fait appel aux techniques d'optimisation multiobjectif. En notation vectorielle, la fonction coût global  $\vec{\mathcal{F}}(\bar{X})$  se compose de :

$$\vec{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix}$$

où la fonction coût locale  $f_i$ , ( $1 \leq i \leq 5$ ), à chaque station de l'aile, s'obtient à partir du tracé des courbes de  $C_p$  et des courbes de  $C_p$  cible. Le calcul de la somme des aires de triangles contigus formés à partir de points de discréétisation de deux courbes de  $C_p$  suffit à définir une mesure de l'écart. Le but est de revenir à un problème d'optimisation monobjectif dont il existe de nombreuses méthodes de résolution. Cependant la notion d'optimalité en optimisation monobjectif est à remplacer par les conditions d'optimalité au sens de *Pareto*. Un point de l'espace de design  $X^*$  est dit optimal au sens de *Pareto* s'il n'existe pas d'autre point  $X$  tel que  $\vec{\mathcal{F}}(\bar{X}) \leq \vec{\mathcal{F}}(\bar{X}^*)$  (l'inégalité s'applique aux composantes  $f_i$  de chaque vecteur). Les points de l'espace de design  $X^*$  *Pareto* optimaux forment le front de *Pareto*. Ce concept d'optimalité sous-entend que l'on ne peut pas améliorer une fonction objectif locale  $f_i$  sans détériorer au moins une autre fonction objectif locale  $f_j$ , ( $1 \leq i, j \leq 5$ ). On peut simplement exprimer le fait qu'une solution est préférable à une autre car il n'existe pas de solutions meilleures que toutes les autres. La performance d'une reformulation en optimisation monobjectif, d'après plusieurs auteurs Stadler (1988), Messac *et al.* (2000a), Athan et Papalambros (1996), est alors tributaire de la prise en compte des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

au sens de *Pareto*.

#### 6.1.4 Expressions analytiques de la fonction coût $\mathcal{F}(\bar{X})$

Les reformulations en optimisation monobjectif utilisées dans cette validation appartiennent aux méthodes dites scalaires. Ces méthodes consistent à prendre chacune des fonctions objectif locales  $f_i$ , à leur appliquer un coefficient de pondération et à prendre la racine  $k$ ème de la somme de ces éléments élevés à une certaine puissance  $k$ . Afin de tenir compte des différents ordres de grandeur de la somme précédente, une normalisation a été appliquée à chacune des fonctions objectif locales  $f_i$  comme suit :

$$f_i^{trans} = \frac{f_i(\bar{X}) - f_i^o}{f_i^{max} - f_i^o} \quad (6.1)$$

où  $f_i^o$  et  $f_i^{max}$  représentent respectivement la valeur optimale souhaitée et la valeur maximale  $f_i^{max}$ . Cette dernière valeur est généralement la valeur initiale de la fonction objectif locale initiale. Cette transformation des fonctions objectif locales  $f_i$  est décrite par Koski et Silvennoinen (1987) comme l'approche la plus robuste en optimisation multiobjectif. Trois méthodes scalaires ont été testées :

– la méthode de la moyenne pondérée :

$$\mathcal{F}(\bar{X}) = \sum_{i=1}^5 \left\{ \lambda_i f_i^{trans} \right\} \quad (6.2)$$

– la méthode du *min-max* augmentée :

$$\mathcal{F}(\bar{X}) = \max_i \left\{ \lambda_i f_i^{trans} \right\} + \rho \sum_{i=1}^5 \lambda_i f_i^{trans} \quad (10^{-4} \leq \rho \leq 10^{-2}) \quad (6.3)$$

- la méthode de la distance absolue à un objectif de référence  $f_i^o$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) :

$$\mathcal{F}(\bar{X}) = \left\{ \sum_{i=1}^5 [\lambda_i^2 (f_i^{trans})^2] \right\}^{1/2} \quad (6.4)$$

Les termes  $\lambda_i$  correspondent à des coefficients de pondération qui permettent d'accorder plus d'importance à une fonction objectif locale  $f_i$ . Les cinq stations de l'aile étant d'une importance équivalente, les termes  $\lambda_i$  ont été fixés à l'unité.

### 6.1.5 Choix de l'optimiseur à gradient

Nous nous sommes particulièrement intéressés à une méthode du deuxième ordre, la méthode quasi-Newton. Cette méthode s'est révélée efficace dans l'optimisation aérodynamique de profils 2D étudiés par Lépine (1999). La méthode quasi-Newton est un algorithme itératif qui à partir d'un point  $\mathbf{X}_0$  initial dans l'espace de design suffisamment proche du minimum recherché passe à la  $k^{ieme}$  itération du point  $\mathbf{X}_k$  au point  $\mathbf{X}_{k+1}$  par la relation :

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \beta_k \mathbf{S}_k \quad (6.5)$$

où le vecteur  $\mathbf{S}_k$  désigne le vecteur direction de recherche et  $\beta_k$  un scalaire définissant la distance à parcourir le long de cette direction de recherche. Le vecteur direction de recherche  $\mathbf{S}_k$  s'obtient par :

$$\mathbf{S}_k = -\mathbf{H}_k^{-1} \cdot [\nabla \mathcal{F}(\bar{X}_k) - \nabla \mathcal{F}(\bar{X}_{k-1})] \quad (6.6)$$

La matrice  $\mathbf{H}_k$ , matrice des dérivées secondees que l'on nomme aussi matrice hessienne, est cependant coûteuse en temps de calcul. Les dérivées n'étant pas connues de manière analytique, le calcul de la matrice hessienne nécessite  $n^2$  évaluations de la fonction coût  $\mathcal{F}(\bar{X})$ , si  $n$  est le nombre de variables de design. On utilise plutôt une approximation de la matrice hessienne, approximation connue sous le nom de méthode BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno), qui met à jour la matrice d'approximation à chaque itération  $k$  de la manière suivante :

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{\mathbf{Y}_k \otimes \mathbf{Y}_k}{\mathbf{Y}_k \cdot \mathbf{S}_k} - \frac{\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{S}_k \otimes \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{S}_k}{\mathbf{S}_k \cdot \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{S}_k} \quad (6.7)$$

où  $\mathbf{Y}_k = \nabla \mathcal{F}(\bar{X}_{k+1}) - \nabla \mathcal{F}(\bar{X}_k)$ . Cette méthode assure l'existence du vecteur  $\mathbf{S}_k$  en maintenant la matrice d'approximation symétrique définie positive, condition nécessaire pour que la matrice  $\mathbf{H}_k$  soit inversible. Pour débuter les itérations, il suffit de choisir la matrice identité. La fonction coût  $\mathcal{F}(\bar{X})$  ne dépend plus alors que du paramètre  $\beta$  le long de la direction définie par le vecteur  $\mathbf{S}_k$  ainsi calculé. Une interpolation quadratique de la fonction  $\mathcal{F}(\beta)$  permet d'obtenir un minimum au voisinage du point  $X_k$ . Cette dernière étape diffère de celle utilisée dans l'étude de Lépine (1999) qui a privilégiée la règle d'Armijo. L'optimiseur s'arrête lorsque les variations de la fonction  $\mathcal{F}(\beta)$  deviennent inférieures à une valeur fixée par un critère de convergence absolu.

## 6.2 Organigramme du schéma d'échange de données

La modélisation mathématique de cette boucle de design aérodynamique est schématisée par l'assemblage de modules sur la figure 6.3. L'échange de données entre les différents codes informatiques (codes de la modélisation géométrique, de l'algo-

rithme heuristique du recuit simulé et du résoluteur d'écoulement BGK) s'effectue par l'intermédiaire de fichiers d'entrée et de sortie. Cet organigramme sert à la définition d'un problème d'optimisation de design au logiciel commercial *iSIGHT* utilisé dans cette étude. Ce logiciel a permis d'essayer plusieurs techniques d'optimisation sans avoir à redéfinir à nouveau le problème d'optimisation grâce à une interface intelligible et imagée. On s'affranchit ainsi de la difficulté organisationnelle de plusieurs codes informatiques.

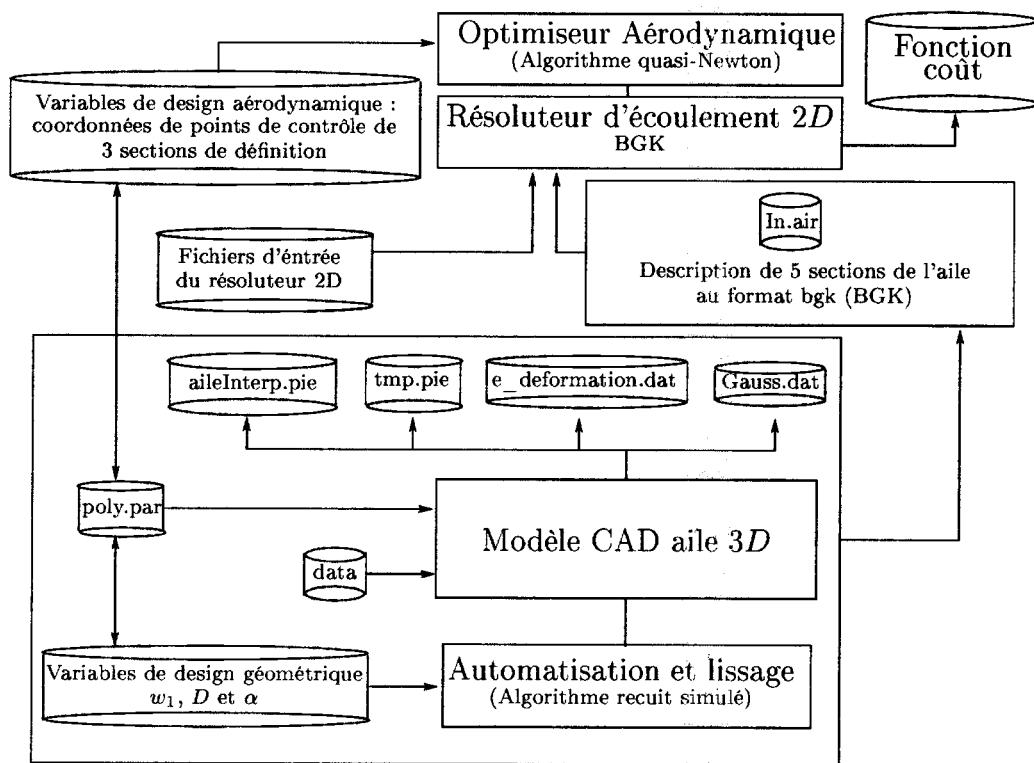


FIGURE 6.3 Organigramme des échanges de données entre les programmes de construction géométrique de l'aile, d'automatisation de la construction géométrique, du résoluteur d'écoulement BGK et de l'optimiseur aérodynamique

### 6.3 Effet du pas de différenciation et du bruit numérique dans l'évaluation du gradient de la fonction objectif $\mathcal{F}(\bar{X})$

La dépendance implicite de la fonction objectif  $\mathcal{F}(\bar{X})$  par rapport aux variables de design nécessite le recours aux dérivées numériques pour approximer les composantes du gradient  $\nabla\mathcal{F}(\bar{X})$ . Les dérivées numériques, utilisées par l'optimiseur aérodynamique, sont évaluée à l'aide du schéma de différence finie décentrée à droite. Une composante  $j$  du gradient  $\nabla\mathcal{F}(\bar{X})$  est approximée par un développement de Taylor au voisinage de la coordonnée  $x_j$  du point  $\bar{X}$  par :

$$\nabla\mathcal{F}_j(\bar{X}) = \frac{\mathcal{F}(\bar{X} + h_j \bar{e}_j) - \mathcal{F}(\bar{X})}{h_j} - \frac{\mathcal{F}''(\bar{X} + \theta h_j \bar{e}_j)}{2} h_j \quad (6.8)$$

où  $h_j$  est le pas d'incrémentation absolue et  $\bar{e}_j$  le vecteur  $j$  d'un repère cartésien. Le premier terme à droite de l'équation constitue l'approximation de la composante  $j$  du vecteur  $\nabla\mathcal{F}(\bar{X})$ , et, le second terme, l'erreur de troncature du développement de Taylor. En assumant que la fonction  $\mathcal{F}(\bar{X})$  est deux fois continûment dérivable, on montre que l'erreur de troncature du développement de Taylor est  $O(h_j)$ . L'erreur de l'approximation d'une composante  $j$  du vecteur  $\nabla\mathcal{F}(\bar{X})$  ne peut s'éliminer simplement en faisant tendre le pas de discrépance vers zéro. Le calcul arithmétique en double précision fixe un seuil  $h_0$  pour le pas de discrépance absolue  $h_j$  au-delà duquel les points  $\bar{X} + h_j \bar{e}_j$  et  $\bar{X}$  sont confondues. On montre que la valeur du seuil  $h_0$  est liée à la précision  $\epsilon$  de la machine par la relation :

$$h_0 = \frac{\epsilon |\bar{X}_j|}{2} \quad (6.9)$$

Il en découle qu'il existe une limite absolue à la précision du calcul des composantes du gradient  $\nabla \mathcal{F}(\bar{X})$ . Une restriction plus sévère sur le pas de différenciation  $h_j$  provient de l'évaluation même de la fonction coût  $\mathcal{F}(\bar{X})$ . La valeur calculée, notée  $\tilde{\mathcal{F}}(\bar{X})$ , diffère de la valeur supposée exacte de  $\mathcal{F}(\bar{X})$  par un terme d'erreur  $e(\bar{X})$  fortement discontinu que l'on nomme bruit numérique. Le calcul de  $\mathcal{F}(\bar{X})$  sur ordinateur fait intervenir des opérandes qui possèdent un nombre limité de chiffres significatifs. Au fur et à mesure du déroulement du code de calcul de  $\mathcal{F}(\bar{X})$ , il y a une dégradation progressive de la précision des nombres manipulés. Les accumulations d'erreurs d'arrondies conduisent à l'imprécision  $e(\bar{X})$  sur la valeur de  $\mathcal{F}(\bar{X})$ . Il est communément admis que l'amplitude du bruit numérique  $e(\bar{X})$  est inférieure à  $C\epsilon |\mathcal{F}(\bar{X})|$ ,  $C$  réel. L'erreur totale sur l'évaluation d'une composante  $j$  du gradient  $\nabla \mathcal{F}(\bar{X})$  s'exprime alors par la différence :

$$\nabla \mathcal{F}(\bar{X}) - \nabla \tilde{\mathcal{F}}(\bar{X}) = -\frac{\mathcal{F}''(\bar{X} + \theta h_j \bar{e}_j)}{2} h_j - \frac{e(\bar{X} + \theta h_j \bar{e}_j) - e(\bar{X})}{h_j} \quad (6.10)$$

En notant les réels  $M_1 = |\mathcal{F}(\bar{X})|$  et  $M_2 = |\mathcal{F}''(\bar{X})|$ , l'erreur totale commise sur l'approximation de la composante  $j$  du gradient  $\nabla \mathcal{F}(\bar{X})$  est donc majorée par :

$$\frac{M_2 h_j}{2} + \frac{2C\epsilon M_1}{h_j} \quad (6.11)$$

On peut déduire de cette relation un pas de différenciation absolu optimal  $h_{optimal}$  minimisant l'erreur totale :

$$h_{optimal} = 2\sqrt{\frac{CM_1}{M_2}}\sqrt{\epsilon} \quad (6.12)$$

Les coefficients  $M_2$  et  $C$  n'étant pas connus, on cherche, dans la pratique par tâtonnement, un pas de différenciation relatif  $h_r$  proportionnel à  $\sqrt{\epsilon} |x_j|$  qui stabilise la valeur des composantes  $j$  du gradient  $\nabla \mathcal{F}(\bar{X})$ . Toutes les optimisations aérodynamiques ont ainsi été effectuées avec un pas de différenciation relatif  $h_r$  égal à  $10^{-3}$ .

## 6.4 Performances des reformulations monobjectif et limite de convergence

### 6.4.1 Calcul des fonctions objectif locales $f^{max}$ et $f^o$

La normalisation des fonctions objectif locales  $f_i$ , ( $1 \leq i \leq 5$ ), requiert le calcul des fonctions objectif locales  $f^{max}$  et  $f^o$ . Les fonctions objectif locales  $f^{max}$  correspondent à la valeur initiale des fonctions objectifs locales  $f$ . L'écoulement sur l'extrados de chaque station de l'aile a ensuite été optimisé afin de rencontrer au mieux la distribution de pression cible fixée. Le tableau 6.1 résume les coûts de calculs nécessaires à l'optimisation aérodynamique, avec la méthode d'optimisation quasi-Newton, à chaque station de l'aile. Les sections de définition ont nécessité le déplacement vertical de 9 points de contrôle sur l'extrados pour atteindre leurs objectifs de pression respectifs. Les sections intermédiaires ont par contre exigé la modification des coordonnées  $y$  des 18 points de contrôle sur l'extrados des sections de définition limitrophes. Les déplacements des points de contrôle des sections de définition ont une influence directe sur la forme géométrique des profils de ces sections. Cependant, l'amplitude des modifications géométriques, engendrées par ces déplacements, sur les sections intermédiaires de la surface de représentation NURBS de l'aile, s'atténue lorsqu'on s'écarte des sections de définition dans la direction de paramétrisation  $v$ . Pour 9 et 18 variables de design, l'optimiseur converge

en une quinzaine et une vingtaine d’itérations respectivement. On constate qu’il en est de même pour les évaluations des fonctions coût locales  $f$ , variant de 288 à 678 évaluations suivant 9 ou 18 variables de design. La figure 6.4 représente les distributions de pression respectives aux cinq stations. Les solutions obtenues sont assez proche des courbes de  $C_p$  cibles. Les écarts qui subsistent entre les courbes de  $C_p$  cibles et finales sont attribuables aux points suivants :

- la courbe de  $C_p$  cible, obtenue à un nombre de Mach à l’infini  $M_\infty$  inférieur à 0.74, n’assure pas l’existence d’une solution à un nombre de Mach à l’infini  $M_\infty$  égale à 0.74. La possibilité d’un problème mal posé fait partie de la difficulté d’une formulation en design inverse.
- la forte non-linéarité d’une fonction coût objectif locale  $f$  par rapport aux déplacements des points de contrôle entraîne l’existence de multiples minima locaux. L’optimiseur à gradient tend à converger vers le premier minimum local trouvé.
- la limite de précision de la méthode de calcul de l’aire comprise entre deux courbes de pression est une autre source de bruit numérique dans l’évaluation d’une fonction coût objectif locale  $f$  fixant ainsi un plancher à la convergence.

Toutes les imprécisions accumulées détériorent la qualité des solutions obtenues. Néanmoins, le calcul des fonctions objectif locales  $f^{max}$  et  $f^o$  sert à l’évaluation des performances des reformulations monobjectif.

#### 6.4.2 Optimisation aérodynamique des trois sections de définition

Afin d’évaluer les reformulations monobjectif, en terme de coût de calcul et de critère de convergence, on étudie le cas où l’on optimise aérodynamiquement et simultanément les trois sections de définition. La fonction coût  $\mathcal{F}(\bar{X})$ , en notation

TABLEAU 6.1 Coût de calcul des solutions aérodynamiques en design inverse des cinq stations de l'aile, calculées séparément, et, valeurs des fonctions coût locales  $f^{max}$  et  $f^o$

Section numéro	Nombre d'itération	Nombre d'évaluation	$f^{max} \times 10^2$	$f^o \times 10^2$
1 (emplanture)	13	335	9.47021	<b>2.69645</b>
2 (intermédiaire)	32	678	9.29077	<b>2.65212</b>
3 (cassure)	14	288	6.86628	<b>1.36408</b>
4 (intermédiaire)	23	479	8.47904	<b>1.84082</b>
5 (extrémité)	15	304	4.62507	<b>1.10856</b>

vectorielle, s'écrit dans ce cas :

$$\vec{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \\ f_5 \end{pmatrix}$$

Les fonctions coût locales  $f_1$ ,  $f_3$  et  $f_5$  sont découplées. Elles possèdent leurs propres variables de design qui sont les coordonnées  $y$  des points de contrôle des sections de définition correspondantes. Cet exemple atypique permet d'illustrer numériquement et simplement le fonctionnement des méthodes d'optimisations multiobjectif. Le tableau 6.2 résume les coûts de calculs nécessaires à l'optimisation aérodynamique, avec la méthode d'optimisation quasi-Newton, aux trois sections de définition de l'aile. Le tableau 6.3 rend compte des améliorations apportées aux fonctions coût locales  $f_1$ ,  $f_3$  et  $f_5$ . Toutes les méthodes de reformulation monobjectif présentent approximativement le même nombre d'itérations à la convergence.

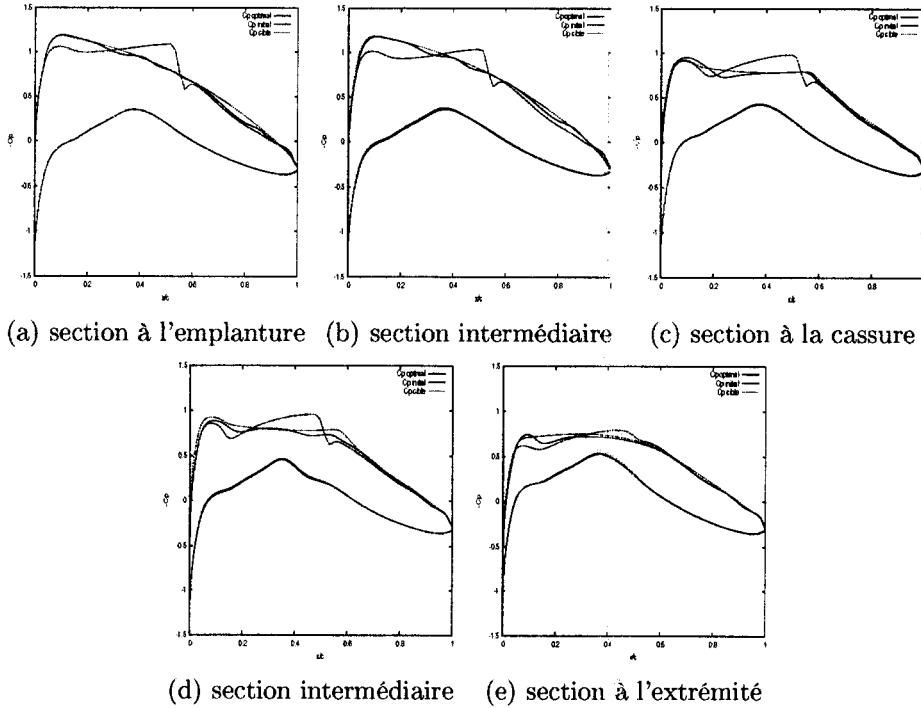


FIGURE 6.4 Courbes de  $C_p$  initiales, cibles et finales aux cinq stations de l'aile, optimisées individuellement. La coordonnée  $x$  est normalisée avec la corde. Les coefficients de portance finaux sont : a)  $C_L = 0.7079$ , b)  $C_L = 0.6892$ , c)  $C_L = 0.5418$ , d)  $C_L = 0.5049$ , e)  $C_L = 0.3794$

Le nombre d'évaluations de la fonction coût  $\mathcal{F}(\bar{X})$  n'est cependant pas un bon indicateur de performance. C'est la méthode de la distance absolue à un objectif de référence  $f^o$ , parmi les plus coûteuses en terme d'évaluations, qui permet de diminuer de manière significative la fonction coût  $\mathcal{F}(\bar{X})$ . Le design initial a été amélioré de plus de 94%. L'influence des coefficients de pondération, dans la méthode de la moyenne pondérée, sur la solution n'a pas de répercussions évidentes. Afin d'améliorer la solution, plusieurs auteurs Messac *et al.* (2000a), Athan et Papalambros (1996), suggèrent de faire varier ces coefficients. Cependant, rien ne garantit l'obtention d'une solution acceptable. Les sections de l'aile étant d'une importance équivalente, cette méthode n'est pas adaptée à l'optimisation aérodynamique.

namique. Les fonctions coût locales ont été améliorées d'au plus 58%. Les chocs sur l'extrados des trois sections de définition n'ont été que faiblement atténus. La méthode du *min-max* augmentée est plus efficace, théoriquement, de fournir une solution *Pareto* optimale par rapport à la méthode de la moyenne pondérée. Cette reformulation monobjectif a, en contre partie, un risque élevé d'introduire des discontinuités dans les dérivées de la fonction  $\mathcal{F}(\bar{X})$ . Ceci se produit lorsque que deux fonctions objectif locales  $f$ , ou plus, sont du même ordre de grandeur en un point  $\bar{X}$  de l'espace de design. Les améliorations apportées à une fonction coût locale  $f_i$ , sont ainsi perdues lorsque l'on fait varier le paramètre  $\rho$ . Aucune règle ne semble se dégager quant à l'amélioration des trois fonctions coût objectif locales  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ . Les chocs sur l'extrados des trois sections de définition ont été légèrement plus atténus localement qu'avec la méthode de la moyenne pondérée. Les résultats de la méthode de la distance absolue à un objectif de référence  $f^o$  ont confirmés son efficacité à trouver des solutions *Pareto* optimales. Il faut noter que ces solutions sont, néanmoins, de moins bonne qualité que les solutions reportées au tableau 6.1. Cette dernière méthode sera donc utilisée dans l'optimisation aérodynamique de l'aile avec contraintes géométriques.

#### 6.4.3 Optimisation aérodynamique de l'aile avec contraintes géométriques

Le tableau 6.4 reporte les résultats obtenus pour une optimisation aérodynamique aux cinq stations de l'aile. La valeur de la fonction coût est passée de 2.23 à 0.47 en 21 itérations et 1125 évaluations de la fonction coût  $\mathcal{F}(\bar{X})$ . La figure 6.5 illustre la convergence de la solution aux courbes de  $C_p$  objectif des cinq stations de l'aile. On peut y observer que, pour les sections au centre de l'aile, les courbes  $C_p$  sont très proches des courbes de  $C_p$  objectif. Aux sections à l'emplanture et

TABLEAU 6.2 Coût de calcul de diverses stratégies de reformulation monobjectif et valeurs de la fonction coût  $\mathcal{F}(\bar{X})$  initiales et finales. Seules les trois sections de définition ont été optimisées aérodynamiquement

Reformulation monobjectif	Nombre d'itération	Nombre d'évaluation	$\mathcal{F}(\bar{X}) \times 10^2$ initial	$\mathcal{F}(\bar{X}) \times 10^2$ final
moyenne	15	726	7.71121	4.31662
min-max ( $\rho = 0.01$ )	10	950	2.31336	1.22246
min-max ( $\rho = 0.001$ )	12	993	6.86280	3.09287
min-max ( $\rho = 0.0001$ )	16	1596	2.31336	1.45103
distance absolue	15	1346	<b>173.2050</b>	<b>9.73555</b>

TABLEAU 6.3 Valeurs comparatives des fonctions coût locales  $f$  initiales et finales, des trois sections de définition, pour les diverses stratégies de reformulation monobjectif testées

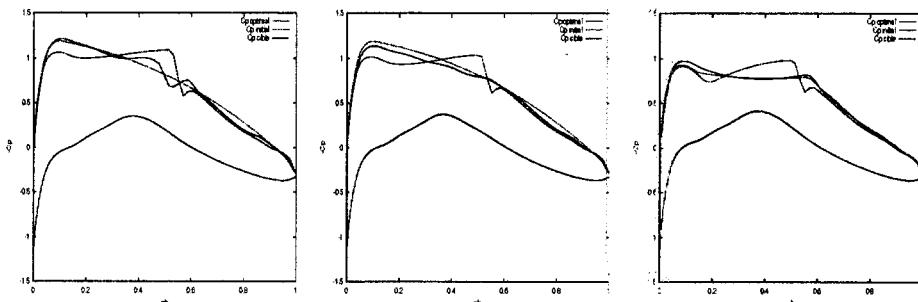
Reformulation monobjectif	$f_1 \times 10^2$ initial et final		$f_3 \times 10^2$ initial et final		$f_5 \times 10^2$ initial et final	
moyenne	9.4702	5.5120	6.8662	3.7118	4.6250	3.5650
min-max ( $\rho = 0.01$ )	9.4702	5.3024	6.8662	2.6280	4.6250	4.2991
min-max ( $\rho = 0.001$ )	9.4702	3.0295	6.8662	3.0664	4.6250	2.7003
min-max ( $\rho = 0.0001$ )	9.4702	5.9431	6.8662	4.7276	4.6250	3.6019
distance absolue	<b>9.4702</b>	<b>2.9066</b>	<b>6.8662</b>	<b>1.7988</b>	<b>4.6250</b>	<b>1.3621</b>

à l'extrémité, les courbes  $C_p$  calculées ne collent pas parfaitement aux courbes de  $C_p$  cibles. Les erreurs d'imprécision dues au bruit numérique deviennent de plus en plus importantes avec le nombre de fonctions coût locales croissant. La qualité des solutions dépend également fortement du point de référence. Le point de référence, dans l'espace des fonctions objectifs locales  $f_i$ , ( $1 \leq i \leq 5$ ), admet comme

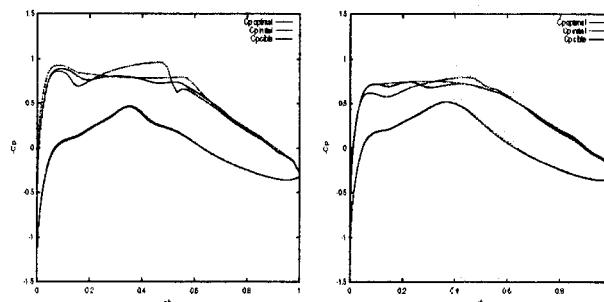
coordonnées  $(f_1^o, f_2^o, f_3^o, f_4^o, f_5^o)$ . Dans cet espace, on définit la surface de compromis comme l'ensemble des valeurs des fonctions coût locales  $f_i$  réalisables,  $(1 \leq i \leq 5)$ . Le front de *Pareto* est localisé sur une partie du bord de la surface de compromis. La méthode de la distance absolue à un objectif de référence  $f^o$  ne permet pas de trouver des points  $\bar{X}$  de l'espace de design dans des non-convexités de la surface de compromis. On note cependant que l'amélioration des solutions obtenues aux sections à l'emplanture et à l'extrémité détériore la qualité des solutions aux trois autres sections intérieures de l'aile. Ceci correspond à la définition d'un point du front Pareto. On ne peut émettre d'hypothèse sur la nature de la convexité de la surface de compromis mais on peut conclure que la méthode de la distance absolue à un objectif de référence  $f^o$  a convergé dans cet exemple à un point de front de Pareto. Des modifications appropriées doivent être apportées aux fonctions objectif locales  $f^o$  afin d'améliorer la qualité de toutes les solutions. Ceci revient à redéfinir des courbes de pression cible répondant à des critères plus spécifiques aux aérodynamiciens contournant les difficultés inhérentes à cette méthode. Cette étape dépasse le cadre de cette validation, qui a, néanmoins, montré que l'amélioration des performances aérodynamiques de l'aile d'avion s'est effectuée en maintenant les contraintes géométriques imposées. La figure 6.6 montre la conservation des propriétés intrinsèques de la surface de représentation NURBS de l'aile d'avion ainsi que les courbes  $C_p$  optimales au cinq stations de l'aile.

TABLEAU 6.4 Valeurs des fonctions coût locales  $f_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ), et, de la fonction coût  $\mathcal{F}(\bar{X})$

Itération	$f_1 \times 10^2$	$f_2 \times 10^2$	$f_3 \times 10^2$	$f_4 \times 10^2$	$f_5 \times 10^2$	$\mathcal{F}(\bar{X})$
0	9.47021	9.29077	6.86628	8.47904	4.62507	2.236053
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
21	<b>3.89408</b>	<b>4.70970</b>	<b>2.08677</b>	<b>3.58435</b>	<b>1.53439</b>	<b>0.471186</b>



(a) section à l'implanture (b) section intermédiaire (c) section à la cassure



(d) section intermédiaire (e) section à l'extrémité

FIGURE 6.5 Courbes de  $C_p$  initiales, cibles et finales aux cinq stations de l'aile optimisée. La coordonnée  $x$  est normalisée avec la corde. Les coefficients de portance sont : a)  $C_L = 0.7121$ , b)  $C_L = 0.6645$ , c)  $C_L = 0.5719$ , d)  $C_L = 0.5114$ , e)  $C_L = 0.4028$

VU

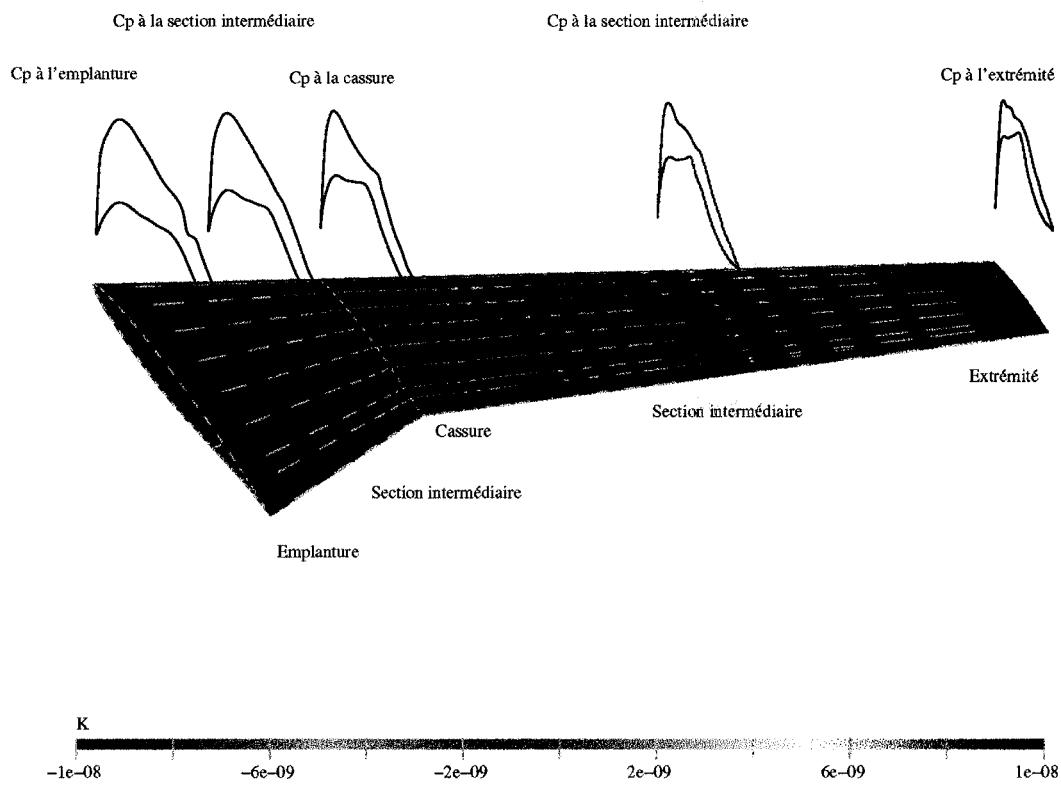


FIGURE 6.6 Positionnement des cinq stations de l'aile optimisée avec les courbes de  $C_p$  correspondantes. Courbure de Gauss nulle pour les parties réglées (coloration verte) et négative pour la partie de forme hyperbolique (coloration bleue)

## CONCLUSION

L'objectif principal de cette étude a été la mise au point d'une technique de représentation géométrique d'une aile d'avion telle que manufacturée chez Bombardier Aéronautique. La description géométrique, respectant les exigences manufacturières d'une aile d'avion, est destinée à des fins d'ingénierie pour le calcul de performances aérodynamiques telles la minimisation de la traînée à portance constante, la maximisation de la finesse . . . , et, celles-ci pour différentes conditions de vol.

Les exigences de fabrication d'une aile d'avion telles que formulées par le département de manufacture de Bombardier ont été respectées par le mode de représentation géométrique à l'aide des NURBS. Les contraintes de fabrication se résument en la représentation d'une surface tridimensionnelle comprenant des parties réglées correspondant au bord d'attaque et au bord de fuite, et, une partie centrale s'approchant de conique dans le sens de l'envergure. La condition de continuité  $C^{(2)}$  a également été obtenue. Le nombre de paramètres lié à la description géométrique de l'aile d'avion a été réduit pour satisfaire le nombre de paramètres décrivant l'extrados de l'aile tel que formulé par le département d'aérodynamique de Bombardier Aéronautique. Ce travail a montré qu'une utilisation efficace et judicieuse du mode de représentation NURBS permet de répondre à des problèmes d'ingénierie complexes rencontrés par l'industrie aéronautique. La validation de tout cet exemple de processus de design préliminaire a été observée dans le cas d'une optimisation aérodynamique.

Les processus de design en aéronautique nous ont fait constater que l'amélioration des performances aérodynamiques d'une aile d'avion ne peut être achevée sans l'utilisation de procédures automatiques d'optimisation. La réduction du temps de calcul excessif de ces dernières procédures nous oblige à limiter le nombre de

variable de design dans la description géométrique. C'est ainsi que la définition de la géométrie de l'aile s'est faite avec un nombre minimal de paramètres. Une aile, de forme *conique* en ses parties centrales et sous forme de surfaces réglées en son bord d'attaque et ses volets, avec une cassure et un bec, comprend 130 points de contrôle. L'extrados de l'aile est décrit par 87 variables potentielles de design, nombre inférieur à la centaine de paramètres jugée acceptable par le département d'aérodynamique avancé de Bombardier Aéronautique.

Le choix de la méthode de représentation géométrique a été influencé initialement par les résultats obtenus dans la représentation géométrique de profils d'ailes d'avion à l'aide des NURBS, étude réalisée par Lépine (1999). Il a ainsi été montré que la paramétrisation NURBS est adaptée à la représentation géométrique de la plupart des profils d'usage courant en aéronautique, et, à l'optimisation aérodynamique. Une revue des méthodes de représentation géométrique utilisées en conception assistée par ordinateur a également montré l'efficacité des NURBS pour le problème étudié. De plus, la disponibilité de la bibliothèque de classes *Pirate* a permis d'installer et d'utiliser efficacement des méthodes reliées à la description NURBS. Une faiblesse de ce mode de représentation est par contre apparue. En effet, les méthodes de paramétrisation les plus reconnues (longueur d'arc, logarithmique ...) ne permettent de délimiter l'influence que d'un nombre restreint de points de contrôle, à l'intérieur d'une même partie de l'aile. L'écartement de points de contrôle triple étant appliquée à des rangées bien déterminées, la longueur des cassures et des becs ne peuvent ainsi être fixées de manière exacte.

Les conditions de régularité sur la courbure, dans les deux directions de paramétrisation  $u$  et  $v$ , de la représentation tridimensionnelle de l'aile ont également été observées. Une méthode d'investigation de surface, appropriée pour juger de la qualité visuelle de la représentation géométrique, la cartographie en couleur, a

été établie pour rendre compte de toute irrégularité dans la continuité des courbures. La cartographie en couleur s'est avérée extrêmement efficace pour détecter toute apparition de bosse. Le choix d'une échelle de visualisation, qui constitue la principale difficulté de cette technique d'investigation de surface, a été trouvé en s'appuyant sur la longueur de tolérance de fabrication. La courbure de Gauss représentée entre  $[-1.e - 08; 1.e - 08]$ , permet de distinguer les différentes parties de l'aile aux propriétés de courbure distinctes.

L'automatisation de la construction de l'aile s'est ramenée à un problème d'optimisation où la fonction objectif s'est construite avec l'analogie de l'énergie de plaques minces approchées. Cette approche, communément employée pour le lisage de surface, a donné des résultats satisfaisants. Une application plus restrictive sur les valeurs de la courbure, dans la direction de paramétrisation  $v$ , à la section supportant la cassure, peut être envisagée. L'algorithme du recuit simulé a permis de générer une aile lisse, qui dans ce contexte correspond aux exigences manufacturières, en des temps très courts de l'ordre de la trentaine de secondes. La convergence rapide de cet algorithme connaît d'ailleurs un regain d'intérêt pour les applications en ingénierie.

Afin de juger de la robustesse de la méthodologie développée pour la représentation géométrique de l'aile, un problème académique de design inverse a été étudié. Il est apparu que ce modèle géométrique se prête aisément à l'optimisation aérodynamique. La qualité des résultats obtenus, interprétée dans le cadre de l'optimisation multiobjective, montre l'aptitude de ce modèle à maintenir les contraintes géométriques durant une boucle d'optimisation aérodynamique. Les calculs envisagés devraient être prometteurs quant à l'extension de ce travail à une description géométrique plus complète d'un avion. L'approche multidisciplinaire devrait également permettre l'imbrication de la structure à long terme.

## RÉFÉRENCES

- AKIMA, H. (1970). A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures. *JACM*, 17, 589–602.
- ANDERSSON, E. ET AL. (1988). Automatic construction of surfaces with prescribed shape. *Computer Aided Design*.
- ATHAN, T. ET PAPALAMBROS, P. (1996). A note on weighted criteria methods for compromise solutions in multi-objective optimization. *Engineering Optimization*, 27, 155–176.
- AU, C. ET YUEN, M. (1995). Unified approach to NURBS curve shape modification. *Computer Aided Design*, 27, 85–93.
- BAUER, F., GARABEDIAN, P. ET KORIN, D. (1977). *Supercritical Wing Section III*. Springer-Verlag, Berlin.
- BECK, J., FAROUKI, R. ET HINDS, J. (1986). Surface analysis methods. *IEEE CG Appl.*, 6, 19–35.
- BEIER, K.-P. ET CHAN, Y. (1994). Highlight-line algorithm for realtime surface quality assessment. *CAD*, 26, 268–277.
- BENTAMY, A., TRÉPANIER, J.-Y., GUIBAULT, F. ET VALLET, M.-G. (2001). Construction of a constrained NURBS surface for wing geometrical representation. *Proceeding of 48th Annual Conference CASI*.
- BLOOR, M. ET WILSON, M. (1995). Efficient parametrization of generic aircraft geometry. *Journal of Aircraft*, 32, 1269–1275.

- BLOOR, M. I. G., WILSON, M. G. ET HAGEN, H. (1995). The smoothing properties of variational schemes for surface design. *Computer Aided Geometric Design*.
- BOHM, W. (1984). A survey of curve and surface methods. *Computer Aided Geometric Design*.
- BOOR, C. D. (1972). On calculating with b-splines. *Jour. Approx. Theory*.
- BOOR, C. D. (1978). *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag.
- BRAIBANT, V. ET FLEURY, C. (1984). Shape optimal design using b-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 44, 247-267.
- BÉZIER, P. (1972). *Numerical Control, Mathematics and Applications*. Wiley.
- CARLSON, R. ET FRITCH, F. (1980). Monotone cubic spline interpolation. *SIAM J. Numerical Analysis*.
- CHEN, Y., BEIER, K.-P. ET PAPAGEORGIOU, D. (1997). Direct highlight line modification on nurbs surfaces. *Computer Aided Geometric Design*.
- COX, M. G. (1972). The numerical evaluation of b-splines. *Jour. Inst. Math. Applic.*
- CULLERS, M. (1984). Aircraft configuration optimization including optimized flight profiles. Rapport technique CP-2327 pp 395-412, NASA. Proc. Symp. on Recent Experiences in Multidisciplinary Analysis and Optimization.
- CURRY, H. ET SCHOENBERG, I. (1947). On spline distributions and their limits : the polya distribution functions,abstract 380t. *Bull. Amer Math. Soc.*

- DILL, J. (1981). An application of color graphics to the display of surface curvature. *Computer Graphics*, 15, 153–161.
- FARIN, G., éditeur (1987). *Geometric Modelling : Algorithms and New Trends*, SIAM, Philadelphia, PA, chapitre Shape control of curves and surfaces through constrained optimization.
- FARIN, G. (1992). From conics to NURBS : A tutorial and survey. *IEEE Computer Graphics and Applications*.
- FARIN, G. (1993). *Curves and Surfaces for Computer Aided Design, A Practical Guide*. Academic Press.
- FARIN, G. ET SAPIDIS, N. (1989). Curvature and the fairness of curves and surfaces. *IEEE CG Appl.*, 9, 52–57.
- FERGUSON, D. (1986). Construction of curves and surfaces using numerical optimization techniques. *Computer Aided Design*.
- FERGUSON, D., FRANK, P. D. ET JONES, A. (1988). Surface shape control using constrained optimization on the b-spline representation. *Computer Aided Geometric Design*.
- FERGUSON, D. ET JONES, A. (1984). Parametric curve fitting with shape control. Rapport technique, Boeing Computer Services.
- FLOATER, M. (1994). A weak condition for the convexity of tensor-product bézier and b-spline surfaces. *Adv. Comput. Math.*, 2, 67–80.
- HAGEN, H., HAHMANN, S. ET SCHREIBER, T. (1995). Visualization of curvature behavior of free-form curves and surfaces. *CAD*.

- HECKMAN, R. ET LENGAUER, T. (1995). A simulated annealing approach to the nesting problem in the textile manufacturing industry. *Annals of Operations Research*, 57, 103–133. J. C. Baltzar AG Science Publishers, Amsterdam.
- HICKS, R. ET HENNE, P. (1978). Wing design by numerical optimization. *Journal of Aircraft*, 15, 407–412.
- HILBERT, D. ET COHN-VOSSEN, S. (1952). *Geometry and the imagination*, Chelsea Publishing Compagny.
- HOHENBERGER, W. ET REUDING, T. (1995). Smoothing rational b-spline curves using the weights in an optimization procedure. *Computer Aided Geometric Design*.
- HOITSMA, D. (1996). A note on surface inflections. *Computer Aided Geometric Design*, 13, 89–93.
- HOSCHEK, J. ET LASSE, D. (1993). *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A.K. Peters Wellesley, Massachusetts.
- INGBER, A. L. (1989). Very fast simulated re-annealing. *Mathematical Computer Modelling*, 12, 967–973.
- INGBER, A. L. (1993). Simulated annealing : Practice versus theory. *Mathematical Computer Modelling*, 18, 29–57.
- INGBER, A. L. (1996). Adaptive simulated annealing (asa) : Lessons learned. *Control and Cybernetics*, 25, 33–54.
- KAUFMAN, E. ET KLASS, R. (1988). Smoothing surfaces using reflection lines for families of splines. *Computer Aided Design*.

- KIRKPATRICK, S. ET AL (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 671–680.
- KLASS, R. (1980). Corrections of local irregularities using reflection lines. *CAD*, 12, 73–77.
- KORAS, G. ET KAKLIS, P. (1999). Convexity conditions for parametric tensor-product b-spline surfaces. *Advances in Computational Mathematics*, 10, 291–309. J.C. Baltzer AG, Science Publishers.
- KOSKI, J. ET SILVENNOINEN, R. (1987). Norm methods and partial weighting in multicriterion optimization of structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, 1101–1121.
- LAMOUSIN, H. ET WAGGENSPACK, W. (1994). Nurbs-based free-form deformation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 14, 95–108.
- LEIVA, J. ET WATSON, B. (1998). Automatic generation of basis vectors for sahpe optimization in the genesis program. *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference Proceedings*.
- LÉPINE, J. (1999). *Optimisation de la représentation de profils d'ailes pour application au design aérodynamique, Mémoire de maîtrise*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.
- LOTT, N. J. ET PULLIN, D. (1988). Method for fairing b-spline surfaces. *Computer Aided Design*.
- LOUNSBERRY, M., MANN, S. ET DEROSE, T. (1992). Parametric surface interpolation. *IEEE Computer Graphics and Applications*.

- MAEKAWA, T. ET PATRIKALAKIS, M. (1994). Interrogation of differential geometry properties for design and manufacture. *Visual Computer*, 10, 216–237.
- MAEKAWA, T., WOLTER, F.-E. ET PATRIKALAKIS, N. (1996). Umbilics and lines of curvature for shape. *Computer Aided Geometric Design*.
- MESSAC, A., SUKAM, C. ET MELACHRINOUDIS, E. (2000a). Aggregate objective functions and pareto frontiers : Required relationships and practical implications. *Optimization and Engineering*, 1, 171–188.
- MORETON, H. ET SEQUIN, C. (1992). Functional optimization for fair surface design. *ACM Comput. Graphics*.
- MORETON, H. P. (1993). *Minimum curvature variation curves, networks, and surfaces for fair free-form shape design*. Thèse de doctorat, Computer Science Division, University of California.
- PIEGL, L. (1989). Modifying the shape of rational b-splines.part1 :curves. *Computer Aided Design*.
- PIEGL, L. ET TILLER, W. (1997). *The NURBS book*. Springer.
- PRAUTZSCH, H. ET GALLAGER, T. (1992). Is there a geometric variation diminishing property for b-spline or bézier surfaces ? *Computer Aided Geometric Design*, 9, 119–124.
- RAMSHAW, L. (1987). Blossoming : A connect-the-dots approach to splines, report 19. Rapport technique, Digital Systems Research Center.
- REUTHER, J. J. (1999). Constrained multipoint aerodynamic shape optimization using an adjoint formulation and parallel computers, part i. *Journal of Aircraft*.

- ROGERS, D. ET FOG, N. (1989). Constrained b-spline curve and surface fitting. *Computer Aided Design*.
- SAMAREH, J. A. (1998). Geometry modeling and grid generation for design and optimization. ICASE/LaRC/NSF/ARO, éditeur, *WORKSHOP ON COMPUTATIONAL AEROSCIENCES IN THE 21st CENTURY*. Hampton, Virginia.
- SAMAREH, J. A. (1999). A survey of shape parameterization techniques. *Langley International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*. Willimasburg, VA.
- SANCHEZ-REYES, J. (1997). A simple technique for NURBS shape modification. *IEEE Computer Graphics and Applications*.
- SAPIDIS, N. ET FARIN, G. (1990). Automatic fairing algorithm for b-spline curves. *Computer Aided Design*.
- SARRAGA, R. F. (1998). Recent methods for surface shape optimization. *Computer Aided Geometric Design*.
- SCHOENBERG, I. J. (1946). Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math.*
- SMITH, R. ET AL. (1995). Rapid airplane parametric input design. AIAA, éditeur, *AIAA 12th Computational Fluid Dynamics Conference*. 452-462.
- STADLER, W. (1988). *Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences*. Stadler, W. (ed.), New York : Plenum Press. Fundamentals of Multi-criteria Optimization.
- TRÉPANIER, J.-Y., LÉPINE, J. ET PÉPIN, F. (2000). An optimized geometric

representation for wing profiles using NURBS. *Canadian Aeronautics and Space Journal.*

VALLET, M.-G. (1999). Représentation géométrique d'ailes d'avions pour en optimiser le design aérodynamique. Rapport technique, Bombardier-Cerca.

VANDERPLAATS, G. (1984). *Numerical optimization techniques for engineering design with application.* Series in mechanical engineering. McGraw-Hill.

VANDERPLAATS, G. (1992). *Mathematical Programming Methods for constrained Optimization : Primal Method*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 370 L'Enfant Promenade, SW, Washington, DC, vol. 150 de *Progress In Astronautics and Aeronautics*, chapitre 3. Georgia institute of technology édition, 29–49.

YAMAGUCHI, F. (1988). *Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design.* Springer-Verlag.

## ANNEXE I

### Algorithme de reparamétrisation

La reparamétrisation utilisée dans la construction de l'aile est une reparamétrisation linéaire appliquée à la conique de référence  $C_{initial}(u)$ . La courbe  $C_{initial}(u)$  est une courbe B-spline ayant comme vecteur nodal le vecteur nodal  $U$  de la surface B-spline de l'aile. La définition présentée dans cette annexe se limite aux courbes B-spline. L'étude plus détaillée des courbes et surfaces *NURBS* est exposée dans le livre de Piegl et Tiller (1997), au chapitre 6 (pages 241-265). Les coordonnées  $x, y, z$  d'un point  $P$  appartenant à la courbe conique de référence  $C_{initial}(u)$  sont reliées par la relation :

$$C_{initial}(u) = (x(u), y(u), z(u)) \quad u \in [0, 1] \quad (I.1)$$

En faisant varier continûment le paramètre  $u$  de zéro à 1, la trace des points  $P$  de la courbe  $C_{initial}(u)$  définit une sens de parcours unique. La reparamétrisation consiste à opérer un changement de variable, du paramètre  $u$  à la variable  $s \in [a, b]$  par une transformation  $u = f(s)$ . La fonction  $f(s)$  doit être strictement croissante sur l'intervalle  $[a, b]$ . Le sens de parcours de la courbe  $C_{initial}(u)$  est ainsi préservée lorsque la nouvelle variable  $s$  parcourt l'intervalle  $[a, b]$ . La régularité mathématique de la fonction  $f(s)$  implique  $f(a) = 0$  et  $f(b) = 1$ . La courbe  $C_{initial}(u)$  reparamétrisée, notée  $C_{reparam}(s)$ , s'écrit :

$$C_{reparam}(s) = C_{initial}(f(s)) = (x(f(s)), y(f(s)), z(f(s))) \quad (I.2)$$

Les deux courbes  $C_{initial}(u)$  et  $C_{reparam}(s)$  sont géométriquement identiques mais leur paramétrisation est différente. Le parcours des deux courbes  $C_{initial}(u)$  et  $C_{reparam}(s)$  se fait à des vitesses et à des accélérations différentes. Les relations entre les vecteurs tangents  $C'_{reparam}(s)$  et  $C'_{initial}(u)$ , et les vecteurs de courbure  $C''_{reparam}(s)$  et  $C''_{initial}(u)$  s'obtiennent naturellement en appliquant la dérivée en chaîne d'ordre un et deux à la courbe  $C_{reparam}(s)$  :

$$C'(s) = C'(u)f'(s) \quad C''(s) = C'(u)f''(s) + C''(u)(f'(s))^2$$

Dans le cas d'une reparamétrisation linéaire,  $f''(s) = 0$ , les vecteurs tangents et de courbure des deux courbes  $C_{initial}(u)$  et  $C_{reparam}(s)$  en un point  $P$  conservent la même direction et ne diffèrent que par leurs modules.

## ANNEXE II

### Calcul de la rotation du vecteur de la dérivée seconde $C_{initial}(v_4)^{(2)}$ autour de la dérivée première $C_{initial}(v_4)^{(1)}$

Les définitions sont reprises du manuel du cours IF-430 intitulé Infographie et CAO par Objets.

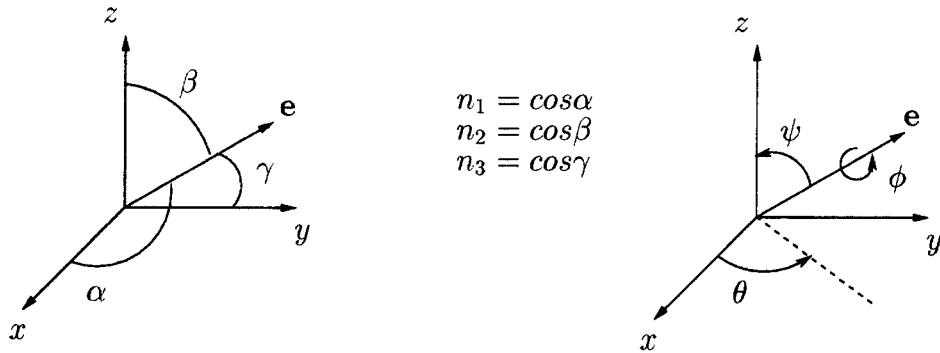
#### II.1 Rotation autour d'un axe arbitraire

La rotation est toujours définie autour d'un axe passant par l'origine. Pour un axe passant par le point  $P = [T_x, T_y, T_z, 1]$  (en coordonnées homogènes), on déplace l'origine au point  $P$  par une translation pour procéder par la suite à une rotation autour de l'axe. On termine en ramenant le point  $P$  à sa position initiale. En notation matricielle on obtient :

$$(x', y', z', 1) = (x, y, z, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -T_x & -T_y & -T_z & 1 \end{pmatrix} (R) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $(R)$  représente une rotation autour d'un axe défini par le vecteur position  $\mathbf{e}$  ayant les cosinus directeurs  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  définis à la figure II.1. La rotation autour de l'axe de vecteur position  $\mathbf{e}$  peut se décomposer suivant les étapes :

1. alignement du vecteur position  $\mathbf{e}$  sur l'axe des  $z$ , effectué par une rotation autour de l'axe des  $z$  d'un angle  $-\theta$  suivi d'une rotation autour de l'axe des

FIGURE II.1 Rotation autour de l'axe de vecteur position  $\mathbf{e}$ 

$y$  d'un angle  $-\psi$

2. rotation d'un angle  $\phi$  autour de l'axe des  $z$
3. repositionnement du vecteur position  $\mathbf{e}$  à sa position initiale en effectuant les deux rotations de l'alignement sur l'axe des  $z$  en sens inverse

On exprime la rotation autour de l'axe de vecteur position  $\mathbf{e}$  d'un angle  $\phi$  par le produit des matrices de transformation :

$$R_{\mathbf{e}}(\phi) = R_z(-\theta) \cdot R_y(-\psi) \cdot R_z(\phi) \cdot R_y^{-1}(-\psi) \cdot R_z^{-1}(-\theta) \quad (\text{II.1})$$

où

$$R_z(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_y(-\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_y^{-1}(-\psi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$R_z^{-1}(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## II.2 Exemple de rotation du vecteur de la dérivée seconde $C_{initiale}(v_4)^{(2)}$ autour de la dérivée première $C_{initiale}(v_4)^{(1)}$

On déplace l'origine au point de contrôle de la section intermédiaire où l'écartement du triplet de point de contrôle a lieu. L'axe de rotation est défini par le vecteur de la dérivée première  $C_{initiale}(v_4)^{(1)}$  normalisé. On applique la rotation d'un angle  $\phi$ , autour de ce dernier axe, au point  $P_{extrmit}$  correspondant à l'extrémité du vecteur de la dérivée seconde  $C_{initiale}(v_4)^{(2)}$ . La transformation se termine en repositionnant l'origine à sa position initiale. Les nouvelles coordonnées  $(x', y', z')$  du point  $P_{extrmit}$  permettent de reconstruire le vecteur de la dérivée seconde  $C_{initiale}(v_4)^{(2)}$ . La figure II.2 illustre un exemple de rotation, d'un angle  $\phi$  égale à 90 degré, du vecteur de la dérivée seconde  $C_{initiale}(v_4)^{(2)}$  autour de l'axe passant par le vecteur de la dérivée première  $C_{initiale}(v_4)^{(1)}$  d'une courbe B-spline quadratique. Le vecteur résultant de cette transformation est noté  $C_{final}(v_4)^{(2)}$ .

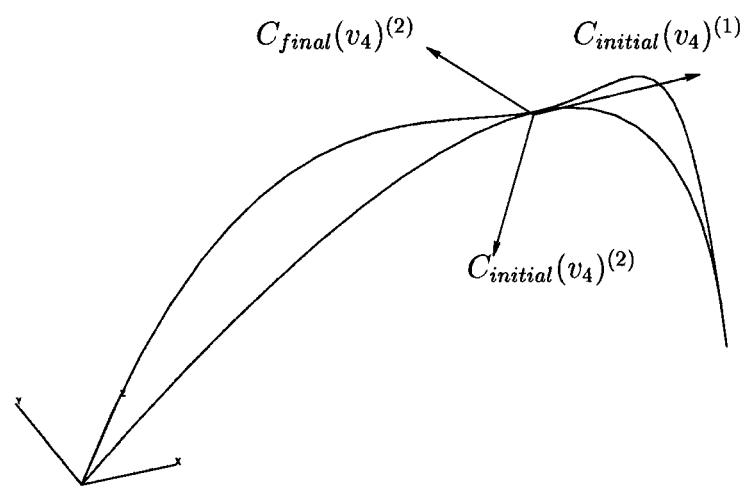


FIGURE II.2 Rotation d'un angle  $\phi$  de 90 degré, du vecteur de la dérivée seconde d'une courbe B-spline quadratique autour du vecteur de la dérivée première

## ANNEXE III

### Calcul de l'énergie de plaques minces approchées

#### III.1 Calcul de l'énergie de plaques minces approchées

L'énergie de plaques minces approchées est définie par l'intégrale suivante :

$$\int_{\sigma} (k_{min}^2 + k_{max}^2) dudv \quad (\text{III.1})$$

$dudv$  représente l'élément de surface élémentaire dans l'espace paramétrique. Le calcul de l'énergie de plaques minces approchées s'effectue pour les trois parties centrales de l'aile (les parties centrales intrados intérieure et extérieure et la partie centrale extrados) délimitées, dans le sens de la corde, respectivement par les intervalles  $[U_5, U_9]$ ,  $[U_9, U_{14}]$  et  $[U_{19}, U_{24}]$ , et, délimitées dans le sens de l'envergure par l'intervalle  $[0, 1]$ . On suppose que la fonction  $f(u, v) = (k_{min}^2 + k_{max}^2)$  est intégrable au sens de Riemann. On subdivise chaque domaine d'intégration en  $n$  parties rectangulaires par des droites parallèles à l'axe des  $u$  et à l'axe des  $v$  dans l'espace paramétrique  $(uv)$  comme indiqué sur la figure III.1.

L'intégrale de l'énergie de plaques minces approchées est alors approximée pour chaque partie centrale par :

$$\int_{\sigma} (k_{min}^2 + k_{max}^2) dudv = \sum_i \sum_j f(u_i, v_j) \Delta u \Delta v \quad (\text{III.2})$$

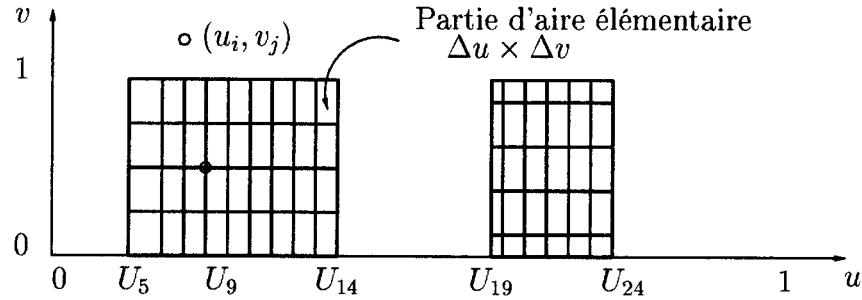


FIGURE III.1 Discrétisation de l'espace paramétrique, pour les trois parties centrales de l'aile, en typiquement  $n = 2500$  parties d'aires élémentaires  $\Delta u \Delta v$

Pour chaque domaine d'intégration rectangulaire, la valeur de la fonction  $f(u_i, v_j)$  est pondérée d'un facteur égal à  $\frac{1}{4}$  sur les 4 sommets du domaine rectangulaire, et, d'un facteur égal à  $\frac{1}{2}$  sur les points appartenant aux arêtes frontière du domaine rectangulaire, dans la double sommation précédente.

### III.2 Mesure de *fairness*

On combine l'expression de l'énergie de plaques minces approchées avec un terme de contrainte géométrique afin d'obtenir une mesure qualitative du caractère lisse de la surface d'aile. Le signe du produit de la courbure dans les deux directions de paramétrisation  $k_u \times k_v$  doit être constant en un point appartenant à une partie centrale de l'aile : négatif pour les parties centrales de l'intrados extérieur et extados, et, positif pour la partie centrale de l'intrados intérieur. Lorsque le signe du produit  $k_u \times k_v$  n'est pas respecté pour certaines valeurs de design, le terme de contrainte corresponds alors à la valeur maximale du produit  $k_u \times k_v$ . Les valeurs typiques pour une représentation de l'aile satisfaisant les contraintes géométriques sont :

TABLEAU III.1 Partie centrale intrados intérieure

$E$	$E/E_{max}$	$k_u \times k_v$	$k_u \times k_v \times E/E_{max}$
9.65438	0.00604187	$9.21606e - 10$	$5.56823e - 12$

TABLEAU III.2 Partie centrale intrados extérieure

$E$	$E/E_{max}$	$k_u \times k_v$	$k_u \times k_v \times E/E_{max}$
8.36475	0.00133593	$6.04711e - 08$	$8.07851e - 11$

TABLEAU III.3 Partie centrale extrados

$E$	$E/E_{max}$	$k_u \times k_v$	$k_u \times k_v \times E/E_{max}$
19.3024	0.00137675	$2.67795e - 09$	$3.68685e - 12$

## ANNEXE IV

### Algorithme du recuit simulé

L'algorithme du recuit simulé est basé sur la distribution de Boltzmann des états d'énergie d'un système à une température donné. La température joue le rôle d'un des paramètres de contrôle en analogie avec son interprétation physique dans les processus de refroidissement et de réchauffement en métallurgie. À hautes températures, les molécules ont une plus grande mobilité et peuvent occuper plusieurs configurations même non stables correspondant à des états d'énergie élevés. Au fur et à mesure que la température descend, la structure des molécules se fige peu à peu pour être définitivement bloquée dans une configuration quelconque. Un nouveau réchauffement (recuit) permet de déformer cette configuration si l'état d'énergie est encore trop élevé avant de rebaisser de nouveau la température. Le processus de refroidissement doit être très lent afin de permettre au système de se stabiliser dans un état stable à énergie minimale. En effet, si la température décroît trop rapidement, la recherche s'arrête sans avoir eu le temps de converger vers un quelconque changement. Dans ce dernier cas, on atteint ce qu'on appelle des états métastables, états caractérisés par un ordre moléculaire à courte portée.

### Fonction de probabilité de Boltzmann

L'algorithme du recuit simulé utilise des fonctions analogues à la fonction de probabilité de Boltzmann (fonction de distribution de Boltzmann des états d'énergie) pour effectuer des déplacements dans l'espace de design. La fonction de probabilité de Boltzmann, notée  $\Pi_i$ , mesure la probabilité de trouver un système dans

une configuration  $C_i$  d'énergie  $E(C_i)$ , à une certaine température  $T$  donnée, dans l'espace de configurations  $U$  équivalent à l'espace de design et elle est définie par :

$$\Pi_i = \frac{\exp \frac{-E(C_i)}{k_b T}}{\sum_{j \in U} \exp \frac{-E(C_j)}{k_b T}} \quad (\text{IV.1})$$

$k_b$  correspond à la constante de Boltzmann. Dans cette expression, le facteur  $k_b T$  montre que lorsque la température est très élevée, tous les états sont à peu près équiprobables, c'est-à-dire un grand nombre de configurations sont accessibles. Au contraire quand la température est basse, les états à haute énergie deviennent peu probables par rapport à ceux de faible énergie. Cette fonction de probabilité a son équivalent dans un problème d'optimisation où l'état d'énergie du système est remplacé par la valeur de la fonction objectif. L'application du principe de la fonction de probabilité de Boltzmann à un problème de minimisation implique que le processus de recherche peut être assimilé à un processus de recuit comme en métallurgie. Quand on chauffe un métal à une température très élevée, le métal devient liquide et peut occuper toutes les configurations possibles ou états d'énergie. Quand la température décroît, le métal va se figer peu à peu dans une configuration dans laquelle il est de plus en plus difficile à déformer (le métal est dit refroidi). A moins de le réchauffer (recuit), le métal ne peut être retravaillé de nouveau pour lui donner la forme désirée. L'algorithme de recuit simulé reconstitue ce processus en combinant dans l'algorithme les mécanismes de refroidissement et de recuit (figure IV.1).

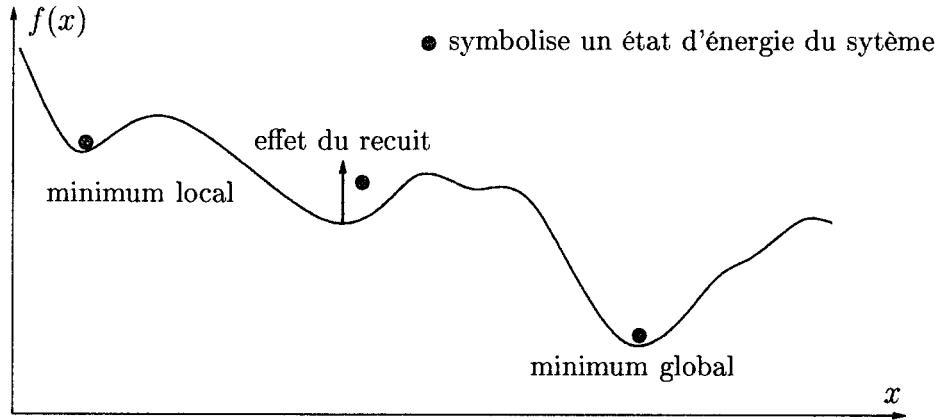


FIGURE IV.1 Parcours dans l'espace de design avec le recuit simulé. Le principe de *recuit* se traduit par une augmentation du niveau d'énergie, permettant de sortir des minima locaux

### Fonctionnement de l'algorithme du recuit simulé

La marche aléatoire dans l'espace de design, qu'on peut définir par une variable aléatoire  $x_i$ , admet comme fonction de densité de probabilité d'état la fonction notée  $g(\mathbf{X})$ . Les fonctions  $g(\mathbf{X})$  sont généralement de la forme :

- la fonction de distribution gaussienne :

$$g(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi T)^{-\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^2}{2T}\right) \quad (\text{IV.2})$$

- la fonction de distribution de Cauchy :

$$g(\mathbf{X}) = \frac{T}{((\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^2 + T^2)^{\frac{(n+1)}{2}}} \quad (\text{IV.3})$$

- la fonction de distribution utilisée dans la version du recuit simulé *adaptée*,

version utilisée dans l'automatisation de la construction :

$$g(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2(|x^i| + T_i) \ln(1 + \frac{1}{T_i})} \quad (\text{IV.4})$$

où  $n$  représente la dimension de l'espace de design,  $T$  un paramètre analogue à la température dans la distribution de Boltzmann,  $\mathbf{X}_0$  un point arbitraire de l'espace de design,  $x_i$  une variable aléatoire correspondant au  $i^{me}$  élément du vecteur de design  $\mathbf{X}$  et  $T_i$  un paramètre de température associé à la variable  $x_i$ . La variable aléatoire  $x_i$  est générée à partir d'une seconde variable aléatoire  $\zeta_i$  de loi de distribution uniforme par la relation :

$$x_i = \operatorname{sgn}(\zeta_i - \frac{1}{2}) T_i [(1 + \frac{1}{T_i})^{|2\zeta_i - 1|} - 1], \zeta_i \in [0, 1] \quad (\text{IV.5})$$

$\operatorname{sgn}$  représente la fonction signe. À de hautes valeurs de température  $T$ , ces lois de probabilité tendent vers la loi de distribution uniforme. Tous les points de l'espace de design ont la même probabilité d'être visités à partir d'un point de design initial  $\mathbf{X}_0$ . Au fur et à mesure que la température baisse, l'écart à la loi de distribution uniforme augmente. Il devient de moins en moins probable d'explorer des points de design éloignés d'un point de design initial  $\mathbf{X}_0$ . Ceci confère alors un caractère de recherche local à l'algorithme autour des points de design ayant effectivement améliorés la fonction coût. La fonction de distribution de la version du recuit simulé *adaptée* permet de tenir compte des différentes sensibilités de chaque composante du vecteur de design  $\mathbf{X}$ . Le choix de ces fonctions de densité de probabilité d'état  $g(\mathbf{X})$  provient de la nécessité d'explorer tout l'espace de design lorsque le paramètre de température  $T$  décroît. On peut montrer de manière heuristique que pour une loi de décroissance en température  $T$  adéquate, la probabilité de ne pas visiter

un point quelconque de l'espace de design  $\mathbf{X}$  tend vers zéro. Prenons l'exemple de la fonction de densité de probabilité d'état de Cauchy et définissons une loi de décroissance en température quasi-linéaire,  $T(K) = \frac{T_0}{k}$  où  $k$  est un réel strictement positif. La probabilité qu'un point quelconque de l'espace de design ne soit pas visité pour des temps successifs quasi-continus repérés par l'indice  $k$  est :

$$\prod_k (1 - g_k) \lim_{k \rightarrow \infty} = 0 \quad (\text{IV.6})$$

ce qui est équivalent à :

$$\sum_{k_0}^{\infty} g_k = \infty \quad (\text{IV.7})$$

La démonstration de la dernière égalité s'obtient simplement en remplaçant l'expression de la loi de décroissance en température dans l'expression de la fonction de densité de probabilité d'état de Cauchy :

$$\sum_k g_k \approx \frac{T_0}{\mathbf{X}^{n+1}} \sum_{k_0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \quad (\text{IV.8})$$

La loi de probabilité de Boltzmann tend vers la loi de probabilité uniforme sur les minimums des états d'énergie, lorsque la température  $T_k$  tend vers zéro. Lorsque la température  $T_k$  est constante, l'état le plus probable apparaît plus souvent et on obtient alors l'équilibre statistique à cette température selon le principe d'ergodicité en physique statistique. Ces deux propriétés sont reproduites par la simulation d'une chaîne de Markov homogène admettant comme matrice de transition une des précédentes fonctions de densité de probabilité d'états  $g(\mathbf{X})$  et comme loi stationnaire la loi de probabilité de Boltzmann. Une chaîne de Markov est l'ensemble des états finis aléatoires constitué d'une suite des probabilités associées à chaque

configuration visitée à la température  $T_k$ . La recherche d'un minimum à une température  $T_k$  s'effectue donc en réitérant la chaîne de Markov. Le nombre d'itérations à cette température  $T_k$  est déterminé par la longueur de la chaîne de Markov qui correspond à peu près au nombre de configurations testées pour atteindre un état d'équilibre statistique à cette température  $T_k$ . Les lois de décroissance en température les plus couramment rencontrées dans la littérature sont les fonctions linéaires, discrètes ou exponentielles, décrites au tableau suivant :

Types	Fonctions	Paramètres
Linéaire	$T_{k+1} = \alpha \times T_k$	$\alpha \leq 1$ (courant 0.8 à 0.95)
Discrète	$T_{k+1} = T_k - \Delta T$	$\Delta T > 0$ à la descente $\Delta T < 0$ au recuit
Exponentielle	$T_{k+1} = T_k \exp\left(\frac{-\lambda T_k}{\sigma_k}\right)$ où $0 \leq \frac{T_{k+1}}{T_k} \leq 1$	$\sigma_k$ écart-type des valeurs de $\mathcal{F}$ acceptées à la température $T_k$ $\lambda$ paramètre de réglage

TABLEAU IV.1 Les lois de décroissance de température les plus utilisées

La plus utilisée est la loi linéaire, qui permet d'avoir une décroissance ni trop rapide (discrète) ni trop lente (exponentielle). La décroissance exponentielle permet de tenir compte de l'état précédent par l'utilisation de l'écart type des coûts obtenus sous le palier de température précédent. Au début de la recherche, presque toutes les configurations sont acceptées. Comme ces configurations peuvent être très dispersées dans l'espace de recherche, l'écart type peut être alors relativement grand et donc la température décroît plus ou moins lentement selon la valeur donnée au paramètre  $\lambda$ . La décroissance est donc dynamique et adaptative. Avec la

fonction discrète, la décroissance est indépendante de la valeur de l'état précédent du système et dépend uniquement de la valeur de la différence  $\Delta T$ . La variation de température se fait donc par palier suivant la fonction de décroissance utilisée.

### Caractéristiques de l'algorithme du recuit simulé

Dans l'algorithme de recuit simulé, la probabilité de Boltzmann n'est pas directement appliquée, mais le critère de Metropolis est utilisé. Le critère de Metropolis permet de décider si une nouvelle configuration générée présente une variation de la fonction objectif acceptable, et de sortir des minima locaux quand le critère d'arrêt n'est pas encore atteint. Le critère de Metropolis permet de décider après chaque passage d'une configuration  $C_i$  à une configuration  $C_j$ , de l'acceptation ou non de la variation de la fonction de objectif selon la probabilité  $p(C_i, C_j)$  définie par :

$$p(C_i, C_j) = e^{\frac{-\Delta \mathcal{F}}{T}} \quad (\text{IV.9})$$

Lorsque la variation  $\Delta \mathcal{F}$  est inférieure ou égale à zéro, l'exponentielle est supérieure ou égale à 1, la nouvelle configuration doit être acceptée, et on lui affecte alors la probabilité maximale de 1. Si  $\Delta \mathcal{F}$  est strictement positive, on compare  $p(C_i, C_j)$  à un nombre aléatoire  $r \in [0, 1[$  :

1. Si  $r < p(C_i, C_j)$  la configuration  $C_j$  est acceptée ,
2. sinon elle est rejetée et on essaie une autre configuration

Les configurations entraînant une forte augmentation la fonction  $\mathcal{F}$  sont donc moins probables pour une température donnée  $T$ , d'autant moins que la température est faible. Au début de l'algorithme, le facteur  $T$  est élevé, la probabilité  $p(C_i, C_j)$  est proche de l'unité et presque toutes les variations de la fonction  $\mathcal{F}$  sont acceptables.

Au contraire, quand  $T$  diminue, les remontées sont de plus en plus difficiles et seules de très faibles variations peuvent être acceptées. Si une configuration est rejetée, le système essaie d'en trouver une autre, sinon elle est acceptée et la recherche continue avec celle-ci jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint.

La loi selon laquelle la température décroît est déterminante pour l'efficacité de l'algorithme. Le système doit pouvoir tester le maximum de configurations à une température donnée pour augmenter la probabilité d'obtenir le minimum global. Le changement de température de  $T_k$  vers  $T_{k+1}$  est déterminé par le moment où l'on a détecté l'équilibre statistique (ou l'état de quasi-équilibre) à la température  $T_k$ .

Le choix de la température initiale  $T_0$  est également important dans le bon déroulement de l'algorithme. Sachant que les températures élevées favorisent le désordre, la valeur de la température initiale doit être choisie élevée. Elle est déterminée, sinon fixée arbitrairement, lors d'une phase de pré-traitement avec une exploration initiale partielle de l'espace de configurations. D'après Kirkpatrick et al (1983), la température initiale  $T_0$  doit être choisie de sorte que la probabilité d'acceptation de la plus mauvaise solution soit environ de 80% (i.e.  $Pr = 0.8$ ). En fixant l'accroissement maximal acceptable de la fonction objectif, noté  $\Delta g$ , dans l'expression de  $p(C_i, C_j)$ , on déduit la valeur de la température initiale  $T_0$  :

$$T_0 = \frac{\Delta g}{\ln(P_r)} \quad (\text{IV.10})$$

Une autre relation similaire peut être déduite de la probabilité de Boltzmann selon l'application. D'après Heckman et Lengauer (1995), on génère aléatoirement un certain nombre de configurations initiales. On calcule la température initiale  $T_0$  de

façon à pouvoir accepter dans la suite de l'algorithme, les configurations dont le coût est  $3 \times \sigma$  fois moins bon que la valeur moyenne des coûts connus, avec  $\sigma$  l'écart type du nombre de valeurs initiales de la fonction coût. La probabilité d'acceptation  $Pr$  est réglée à 0.01 pour avoir une température initiale suffisamment élevée :

$$T_0 = \frac{-3 \times \sigma}{\ln(P_r)} \quad (\text{IV.11})$$

En résumé, le recuit simulé fonctionne en deux étapes :

1. recherche de minima à température fixée avec la chaîne de Markov
2. diminution par étape de la température

Nous avons utilisé le logiciel d'optimisation de Lester Ingber d'acronyme **ASA** pour *ADAPTIVE SIMULATED ANNEALING* pour l'automatisation de la construction de l'aile avec contraintes géométriques. La version la plus récente de ce logiciel peut être téléchargée à l'adresse <http://www.ingber.com/>. Une description détaillée de tous les paramètres est fournie également dans un manuel d'utilisation. Ce logiciel a fait l'objet de nombreuses publications dont les principaux articles sont Ingber (1989), Ingber (1993), Ingber (1996).