

Titre: Modélisation géométrique appliquée à la génération de maillage
Title: pour un composant de turbine hydraulique

Auteur: Alexandre Gougeon
Author:

Date: 2003

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Gougeon, A. (2003). Modélisation géométrique appliquée à la génération de
Citation: maillage pour un composant de turbine hydraulique [Mémoire de maîtrise, École
Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7251/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/7251/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** François Guibault
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE APPLIQUÉE À LA GÉNÉRATION DE
MALLAGE POUR UN COMPOSANT DE TURBINE HYDRAULIQUE

ALEXANDRE GOUGEON
DÉPARTEMENT DE GÉNIE INFORMATIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE INFORMATIQUE)
DÉCEMBRE 2003



National Library
of Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

Acquisitions et
services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-612-89205-0

Our file Notre référence

ISBN: 0-612-89205-0

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this dissertation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de ce manuscrit.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the dissertation.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE APPLIQUÉE À LA GÉNÉRATION DE
MAILLAGE POUR UN COMPOSANT DE TURBINE HYDRAULIQUE

présenté par: GOUGEON Alexandre

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès science appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. OZELL Benoît, Ph.D., président

M. GUIBAULT François, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. KHACHAN Mohammed, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Je me dois d'abord remercier François Guibault pour son travail de directeur de recherche, et de façon particulière pour son aide avec la rédaction de ce mémoire. Un grand merci également à Benoît Ozell pour avoir servi comme président du jury, et à Mohammed Khachan, membre du jury et source de fréquentes explications et discussions. J'aimerais également remercier les nombreuses autres personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à ce travail : Anas Bentamy pour les explications, Julien Dompierre pour l'aide fournie notamment sur Latex, Andréanne Gougeon pour la relecture du mémoire, ainsi que Paul Labbé, Noa Cantin, Sébastien Laflamme, Yannick Sirois et Christophe Tribes pour l'aide avec l'environnement de travail. Finalement, je souhaite souligner la bourse d'études supérieures octroyée par le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et Génie du Canada (CRSNG), ainsi que le support financier fourni par General Electric Hydro et le CRSNG à travers le projet GMATH.

RÉSUMÉ

L'objet de la recherche est le calcul d'une surface NURBS (*Non-Uniform Rational B-Spline*) $S(u, v)$ qui passe par des courbes de section NURBS $C(u)$ tout en étant la plus régulière (lisse, monotone) possible, la plus compacte possible en terme d'espace mémoire et idéalement dont la paramétrisation est par abscisse curviligne, c'est-à-dire dont la grandeur des dérivées est la plus constante possible. Les courbes, telles que spécifiées par les concepteurs de General Electric, décrivent partiellement la forme d'un composant de turbine hydraulique, dont la surface complète doit être calculée. Ces courbes sont représentées par des NURBS de degré 2 et par morceaux, à la jonction desquels les courbes sont C^0/G^0 ou C^0/G^1 continues (ces jonctions sont appelées points de brisure). Avec les approches classiques d'interpolation, chacun des points de brisure des courbes résulte sur la surface en une ligne de discontinuité de continuité C^0 le long de laquelle la surface oscille (une ligne de discontinuité correspond à la jonction entre deux morceaux de surface). Pour résoudre ce problème, le concept de contrainte est introduit. Une contrainte fait en sorte que les points de brisure 'correspondants' se retrouvent dans la même ligne de discontinuité, qui correspond à une caractéristique de la surface reflétant l'intention du concepteur. L'algorithme qui calcule ces contraintes et qui les incorpore dans l'interpolation est expliqué en détail. Comparativement à l'algorithme classique d'interpolation, l'algorithme proposé améliore la forme des surfaces et réduit leur taille d'un facteur 10 environ, mais dégrade la paramétrisation. Également, une variante des approches les plus répandues pour choisir les paramètres d'interpolation (uniforme, longueur d'arc, centripète) est proposée et testée. Les paramètres d'interpolation sont choisis en fonction du logarithme de la distance moyenne entre les courbes, ce qui tend à produire des surfaces légèrement plus régulières dans la direction de l'interpolation pour l'application industrielle.

ABSTRACT

The main goal of this research project is to compute a Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS) surface $S(u, v)$ that interpolates NURBS curves $C(u)$ and that is as smooth as possible, as compact as possible in terms of memory, and whose parameterization is ideally in terms of arc length, i.e. the derivatives are constant in magnitude. The curves, designed at General Electric, partially describe an hydraulic turbine component whose complete surface must be computed. These curves are represented by piecewise planar NURBS curves of degree 2 containing C^0/G^0 or C^0/G^1 continuous breaking points, at the junction of curves segments. With classical skinning approaches, each curve breaking point causes a surface crease - the line along the junction of two surface patches - of C^0 continuity. This results in surfaces that oscillate in the area of the original curve's breaking points. To address this problem, the concept of constraint is introduced. A constraint groups breaking points from different curves into one crease, which then corresponds to a feature in the surface and reflects the designer's intent. The algorithm that computes the constraints and incorporates them in the skinning process is detailed, and its results are compared with those of classical skinning algorithm on a set of industrial test cases. The proposed algorithm improves resulting surface shape and reduces the number of surface control points by a factor 10, but at the expense of overall surface parameterization quality. Also, the thesis suggests choosing interpolation parameters by a logarithmic function of distance between data points - the average distance between curves in the case of skinning. This variant of the more common methods, uniform, arc length, and centripetal, produces slightly smoother surfaces for the current industrial application.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	xiii
LISTE DES FIGURES	xiv
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xix
LISTE DES ANNEXES	xxii
INTRODUCTION	1
0.1 Contexte industriel	1
0.2 Problématique technologique	5
0.3 Hypothèses de recherche	7
0.4 Suite du document	9
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	10
1.1 Méthodes de représentation des objets	10
1.1.1 Représentation des objets par leur frontière	10
1.1.2 Autres méthodes	11
1.2 Représentation des courbes et surfaces	13
1.2.1 Courbes et surfaces polygonales	13
1.2.2 Courbes et surfaces NURBS	14

1.2.2.1	Courbes NURBS et fonctions de base B-splines .	15
1.2.2.2	Représentation des coniques avec des courbes NURBS	17
1.2.2.3	Surfaces NURBS	18
1.2.3	Courbes et surfaces de Bézier	19
1.2.4	Splines cubiques et interpolation de points	20
1.3	Interpolation de courbes par une surface	22
1.3.1	Méthode spécifique utilisée dans TU	22
1.3.2	Interpolation de courbes NURBS	24
1.3.2.1	Algorithme classique pour rendre les courbes NURBS compatibles	25
1.3.2.2	Insertion de noeud dans une courbe NURBS	26
1.3.2.3	Interpolation des courbes NURBS compatibles . . .	26
1.3.2.4	Spécification de conditions aux extrémités	30
1.3.3	Problèmes à rendre les courbes compatibles	31
1.3.4	Correspondance entre les caractéristiques de différentes courbes	32
1.3.5	Ligne de discontinuité dans les surfaces	34
1.3.6	Remarques sur l'interpolation de courbes compatibles	35
1.4	Qualité des courbes et surfaces	35
1.4.1	Méthodes d'évaluation de la qualité des courbes	37
1.4.1.1	Méthodes visuelles	37
1.4.1.2	Continuité	38
1.4.1.3	Énergie de déformation	39
1.4.1.4	Paramétrisation par abscisse curviligne	40
1.4.2	Méthodes d'évaluation de la qualité des surfaces	41
1.4.2.1	Méthodes visuelles	41
1.4.2.2	Continuité	42
1.4.2.3	Énergie de déformation	43

1.4.2.4	Paramétrisation	46
1.5	Génération de maillage	47
CHAPITRE 2	MÉTHODOLOGIE	51
2.1	Méthodes utilisées pour l'évaluation des surfaces	51
2.1.1	Continuité paramétrique et géométrique	51
2.1.2	Méthodes visuelles	52
2.1.2.1	Visualisation de la grille de contrôle	52
2.1.2.2	Visualisation de la courbure gaussienne	53
2.1.2.3	Visualisation de la courbure le long d'isoparamétriques	54
2.1.2.4	Visualisation de maillage de surface	54
2.1.3	Mesures de régularité sur la grille de contrôle	55
2.1.4	Paramétrisation	58
2.2	Algorithme d'interpolation des courbes développé	60
2.2.1	Définitions	60
2.2.2	Critère utilisé dans l'algorithme	62
2.2.3	Pseudo-code de l'algorithme complet	63
2.2.4	Pseudo-code de l'algorithme de lissage	65
2.3	Algorithme pour rendre les courbes compatibles	66
2.3.1	Calculer la grille de noeuds : idées générales	67
2.3.2	Placer les noeuds doubles des courbes en proportion de la longueur d'arc	68
2.3.3	Diviser les noeuds en partitions	69
2.3.4	Calculer le nombre de contraintes n_c dans chacune des partitions	69
2.3.4.1	Calculer n_p , le nombre de configurations possibles pour les contraintes	70

2.3.5	Sélectionner la configuration optimale	71
2.3.6	Insérer les points libres dans les courbes	71
2.3.7	Calcul du vecteur nodal de la surface	72
2.3.8	Placer les noeuds libres dans la grille de noeuds (lissage) . .	72
2.3.8.1	Méthode d'insertion naïve	73
2.3.8.2	Lissage naïf	73
2.3.8.3	Lissage parabolique	74
2.4	Algorithme d'interpolation des courbes compatibles	77
2.4.1	Méthode logarithmique de choix des paramètres d'interpolation	77
2.4.2	Méthode de choix de la grandeur des dérivées	80
2.5	Validation avec les diffuseurs	82
2.5.1	Construction des courbes de section	83
2.5.2	Diffuseur en six faces mais en trois surfaces	84
2.5.3	Maillages	86
CHAPITRE 3	RÉSULTATS ET ANALYSE	88
3.1	Impact de l'algorithme proposé pour rendre les courbes compatibles	88
3.1.1	Impact des contraintes	88
3.1.1.1	Lignes de discontinuité	89
3.1.1.2	Grille de contrôle	89
3.1.1.3	Courbure gaussienne	91
3.1.1.4	Distance entre les surfaces classique et contrainte .	92
3.1.1.5	Mesure de régularité	93
3.1.1.6	Nombre de points de contrôle	94
3.1.1.7	Continuité géométrique	94
3.1.2	Impact de la méthode d'insertion des points libres	95
3.1.2.1	Lignes de discontinuité	95
3.1.2.2	Grille de contrôle	95

3.1.2.3	Courbure gaussienne	96
3.1.2.4	Mesure de régularité	97
3.2	Impact de l'algorithme proposé pour construire la surface à partir des courbes compatibles	99
3.2.1	Impact de la méthode de choix des paramètres d'interpolation	99
3.2.2	Impact de la méthode de spécification des tangentes	103
3.3	Appréciation générale des surfaces calculées	105
3.3.1	Impact des variation de poids des courbes de section dans l'interpolation	105
3.3.2	Croisement de la grille de contrôle près de l'entrée	107
3.3.3	Forme et convexité de la surface	107
3.4	Validation avec les diffuseurs et impact dans le contexte industriel .	110
3.4.1	Fonctionnement de TU	110
3.4.2	Comparaison de l'approche développée avec TU	111
3.4.2.1	Précision	111
3.4.2.2	Forme	112
3.4.2.3	Paramétrisation	114
3.4.2.4	Taille des modèles	114
3.4.3	Maillages	115
CHAPITRE 4	DISCUSSION	119
4.1	Problème de croisement dans les diffuseurs	120
4.1.1	Surfaces de Bézier par morceaux de degrés $p = 2$ et $q = 5$. .	120
4.1.2	Ajout de points de contrôle dans l'interpolation	121
4.2	Amélioration de la forme générale des surfaces	122
4.2.1	Choix des paramètres d'interpolation avec les méthodes testées	122
4.2.2	Choix des paramètres d'interpolation basée sur la prédiction de la longueur d'arc	123

4.2.3	Choix des paramètres d'interpolation par optimisation . . .	125
4.2.4	Problèmes et limites spécifiques à l'interpolation de courbes par une surface	125
4.2.5	Spécification de la grandeur des dérivées	126
4.3	Continuité des surfaces NURBS interpolant des courbes	127
4.3.1	Rendre les courbes de section C^1	127
4.3.2	Surfaces de Bézier de degré supérieur	128
4.4	Maillages	129
CONCLUSION		131
RÉFÉRENCES		134
ANNEXES		137

LISTE DES TABLEAUX

TAB. 3.1	Effet des trois algorithmes de lissage sur la mesure de régularité des lignes de brisure et de la grille de contrôle, en radians au carré, excluant les cas ne nécessitant pas de lissage, c'est-à-dire ne contenant aucun noeud libre.	98
TAB. 3.2	Mesure de régularité, en $1e-3$ radians carré, dans les deux directions paramétriques et au total pour les diffuseurs sans contraintes, pour les différentes méthodes de choix de paramètres d'interpolation.	102
TAB. 3.3	Mesure de régularité, en $1e-3$ radians carré, dans les deux directions paramétriques et au total pour les diffuseurs avec contraintes, pour les différentes méthodes de choix de paramètres d'interpolation.	102
TAB. 3.4	Nombre de diffuseurs, avec et sans contrainte, pour lesquels chacune des méthodes d'interpolation donne la meilleure mesure de régularité.	103

LISTE DES FIGURES

FIG. 1.1	Quart d'ellipse en NURBS	18
FIG. 1.2	Section dta générique (à gauche) incluant le haut en 'V', et section particulière avec arrondi dans le haut (à droite). . . .	23
FIG. 1.3	Insertion d'un noeud dans une courbe de Bézier de degré $p = 2$ (à gauche) et $p = 3$ (à droite) : les P_i sont les anciens points de contrôle et les Q_i les nouveaux.	26
FIG. 1.4	Grille de contrôle de deux surfaces exemples : plan à gauche et plan dont le point de contrôle $(0, 1, 0)$ a été déplacé en $(0, 1, 1)$	45
FIG. 1.5	Deux surfaces exemples : plan à gauche et plan dont le point de contrôle $(0, 1, 0)$ a été déplacé en $(0, 1, 1)$	45
FIG. 1.6	Deux surfaces exemples : plan à gauche et plan dont le point de contrôle du centre est déplacé de $(0.5, 0.5)$ à $(0.5, 0.75)$. .	46
FIG. 1.7	Convention de noms et d'axes utilisée pour la définition du maillage transfini.	49
FIG. 1.8	Calcul d'un maillage transfini à partir des trois maillages intermédiaires.	50
FIG. 2.1	Représentation vectorielle de la mesure de régularité par dif- férence finie, dans le cas où la distance entre les points est unitaire.	56

FIG. 2.2	Tracé des mesures de régularité en fonction de l'angle selon la différence finie et l'angle au carré.	57
FIG. 2.3	Valeur de mesures d'énergie pour deux triangles : le triangle équilatéral minimise l'énergie.	58
FIG. 2.4	Grille de noeuds composée de noeuds de brisure et de noeuds libres, représentés par des ronds pleins et vides respectivement.	62
FIG. 2.5	Schéma de la grille de noeud qui minimise la mesure de régularité (à gauche), et même résultat mais à l'intérieur des contraintes sur les sections consécutives comportant le même nombre de noeuds (à droite).	68
FIG. 2.6	Définition des partitions des sections dta en vue du calcul des contraintes.	69
FIG. 2.7	Système de coordonnées dans lequel est défini la parabole utilisée pour le lissage.	75
FIG. 2.8	Illustration des conditions géométriques définissant la parabole : les deux points de passage et la tangente.	75
FIG. 2.9	Graphe des quatre fonctions utilisées pour choisir les paramètres d'interpolation.	80
FIG. 2.10	Illustration du diffuseur construit en quatre (à gauche) et une seule surface (à droite).	86

FIG. 2.11	Illustration du maillage construit en fonction de la longueur d'arc en u : à gauche : lignes de discontinuité de la surface ; au centre : construction de lignes iso- v ; à droite : discrétisation des iso- v en fonction de la longueur d'arc.	87
FIG. 3.1	Lignes de discontinuité de surfaces calculées par l'algorithme classique (à gauche) et par l'algorithme développé (à droite). . .	90
FIG. 3.2	Grille de contrôle de surfaces calculées par l'algorithme classique (à gauche) et par l'algorithme développé (à droite). . .	90
FIG. 3.3	Courbure Gaussienne (de -0.01 à 0.01) de surfaces calculées par l'algorithme classique (à gauche) et par l'algorithme développé (à droite).	92
FIG. 3.4	Lignes de discontinuité de la surface contrainte (à gauche) et distance entre les surfaces calculées par les algorithmes classique et développés (à droite).	93
FIG. 3.5	Lignes de discontinuité de surfaces contraintes générées avec les méthodes d'insertion des points libres naïve (à gauche), de lissage naïf (au centre) et de lissage parabolique (à droite). . .	96
FIG. 3.6	Zoom sur les lignes de discontinuité de surfaces contraintes générées avec les méthodes de lissage naïf (à gauche) et de lissage parabolique (à droite).	96
FIG. 3.7	Grille de contrôle de surfaces contraintes générées avec les méthodes d'insertion des points libres naïve (à gauche), de lissage naïf (au centre) et de lissage parabolique (à droite). . .	97

FIG. 3.8	Zoom sur la grille de contrôle de surfaces contraintes générées avec les méthodes d'insertion des points libres naïve (à gauche), de lissage naïf (au centre) et de lissage parabolique (à droite).	97
FIG. 3.9	Courbure gaussienne (de -0.01 à 0.01) de surfaces contraintes générées avec les méthodes d'insertion des points libres naïve (à gauche) et de lissage naïf (à droite).	98
FIG. 3.10	Surface de côté d'un diffuseur calculé avec les méthodes de paramétrisation uniforme (à gauche) et logarithmique (à droite).	100
FIG. 3.11	Grille de contrôle de la surface de côté d'un diffuseur calculé avec les méthodes de paramétrisation uniforme (à gauche) et logarithmique (à droite).	101
FIG. 3.12	Côté d'un diffuseur calculé sans (à gauche) et avec (à droite) dérivées spécifiées (les traits indiquent l'emplacement des seconde et avant-dernière sections).	104
FIG. 3.13	Vue de côté de la grille de contrôle d'un diffuseur ; tangentes spécifiées dans l'espace tridimensionnel (à gauche) et dans l'espace homogène (à droite).	105
FIG. 3.14	Vue de côté d'un diffuseur ; lignes de discontinuité (à gauche) et grille de contrôle (à droite).	106
FIG. 3.15	Gros plan sur un pli dans une surface : grille de contrôle (à gauche) et lignes de discontinuité (à droite).	107

FIG. 3.16	Courbure gaussienne de $-1e-8$ à $1e-8$, surfaces avec et sans contrainte.	109
FIG. 3.17	Courbure de la surface d'un diffuseur le long des lignes iso-u 0, 1/6 et 1/3 (de gauche à droite).	109
FIG. 3.18	Courbure de la surface d'un diffuseur le long des lignes iso-v 0.2, 0.4 et 0.7 (de gauche à droite).	109
FIG. 3.19	Surface de côté d'un diffuseur, telle que produite par TU. . .	111
FIG. 3.20	Surface du haut d'un diffuseur, telle que produite par TU. . .	112
FIG. 3.21	Surfaces de côté d'un diffuseur, telle que produite par TU et <code>dta2pie</code>	113
FIG. 3.22	Maillage transfini calculé sur les faces contraintes du haut et de côté, pour des surfaces contraintes.	115
FIG. 3.23	Maillage calculé à partir de la méthode simple développée, sur les faces du haut et de côté, pour des surfaces contraintes.	116
FIG. 3.24	Maillage structuré dans une géométrie convexe (à gauche) et concave (à droite).	117
FIG. 3.25	Maillage en structuré en 'O' dans une géométrie convexe (à gauche) et concave (à droite).	118

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

CAD	Computer Aided Design
CAGD	Computer Aided Geometric Design
CAO	Conception Assistée par Ordinateur
CERCA	CEntre de Calcul en Recherche Appliqué ou CEnter for Research on Computation and its Applications
CGAO	Conception Géométrique Assistée par Ordinateur
CRSNG	Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et Génie du Canada
CSG	Constructive Solid Geometry
GE	General Electric Hydro
GMATH	Géométrie, Maillage et Adaptation pour les Turbines Hydrauliques ou Geometric Modeling, Mesh Generation and Mesh Adaptation for Hydraulic Turbine Components
NURBS	Non-Uniform Rational B-Spline

Caractères usuels

$C(u)$	Courbe NURBS ;
u	Paramètre et noeud d'une courbe NURBS ;
p	Degré d'une courbe NURBS ;
P	Point de contrôle d'une courbe NURBS ;
w	Poids dans une courbe ou surface NURBS ;
n	Nombre de points de contrôle d'une courbe NURBS ;
U	Vecteur nodal d'une courbe NURBS ;
$S(u, v)$	Surface NURBS ;
u	Paramètre et noeud d'une surface NURBS, dans la première direction paramétrique ;
v	Paramètre et noeud d'une surface NURBS, dans la seconde direction paramétrique ;
p	Degré d'une surface NURBS dans la première direction paramétrique ;
q	Degré d'une surface NURBS dans la seconde direction paramétrique ;
Q	Point de contrôle d'une surface NURBS ;
N	Nombre de points de contrôle d'une surface NURBS dans la première direction paramétrique ;
M	Nombre de points de contrôle dans la seconde direction paramétrique d'une surface ou NURBS ;
U	Vecteur nodal dans la première direction paramétrique d'une surface NURBS ;
V	Vecteur nodal dans la seconde direction paramétrique d'une surface NURBS ;

D	Point de collocation ;
m	Nombre de courbes de section, c'est-à-dire nombre de courbes à interpoler ;
$\{\}$	Vecteur ;
$[]$	Matrice.

Indices

i	Indice des points de contrôle et des noeuds dans les courbes ;
j	Indice des courbes de section ;
k	Indice des noeuds et des points de contrôle des courbes de section une fois rendues compatibles ;
k	Indice des points de contrôle et des noeuds dans la première direction paramétrique dans les surfaces ;
l	Indice des points de contrôle et des noeuds dans la seconde direction paramétrique dans les surfaces ;

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	DÉFINITION DE LA PARABOLE UTILISÉE POUR LE	
	LISSAGE	137

INTRODUCTION

0.1 Contexte industriel

Le projet décrit dans ce mémoire découle d'abord d'une problématique industrielle rencontrée par General Electric Hydro. Cette division de General Electric (GE) conçoit, fabrique et vend des turbines hydrauliques pour des projets hydroélectriques à travers le monde. Étant donné le coût de réalisation de ces projets et la durée de vie des installations, la performance des turbines est cruciale. Pour chaque projet, un design unique est développé en fonction de paramètres spécifiques tels que la hauteur de chute, le débit, le mode d'opération prévu quant au débit, qui peut être constant ou varier selon la demande à l'intérieur d'une plage prédéterminée. Le processus de conception des turbines est itératif : un premier design est produit, sa performance est évaluée, le design est modifié en conséquence, et ainsi de suite. Deux paramètres sont importants pour GE dans ce processus : la performance finale atteinte et les ressources (temps et argent) requises pour y parvenir. Il existe deux façons de faire pour prédire la performance d'une turbine à partir de son design fait sur ordinateur. La première consiste à construire un modèle réduit de la turbine et à procéder à des essais en laboratoire. Le principal désavantage est le temps nécessaire à la construction du prototype et aux tests eux-mêmes. La seconde approche consiste à simuler le fonctionnement de la turbine sur ordinateur, c'est-à-dire à calculer l'écoulement de l'eau dans la turbine. GE utilise actuellement les simulations numériques dans le processus itératif de conception, plus rapides mais potentiellement moins fiables, et les essais en laboratoire pour valider le design final avant de passer à sa réalisation physique.

Le processus de simulation numérique, utilisé dans plusieurs domaines d'application

en ingénierie, comprend au moins des étapes de modélisation, de discrétisation, de résolution des équations ainsi déterminées et d'analyse des résultats. Pour simuler l'écoulement de l'eau dans les turbines, il faut d'abord un modèle du comportement de l'eau (équations de Navier-Stokes décrivant la physique d'un fluide) et un modèle de la géométrie de la turbine. Ensuite, pour être capable d'écrire les équations pour une géométrie particulière, il faut décomposer le volume complexe décrit par le modèle géométrique en une série de volumes de forme plus simple, habituellement tétraédrique ou hexaédrique en trois dimensions, appelés éléments ou mailles. Il s'agit d'obtenir un modèle géométrique discret à partir du modèle géométrique potentiellement continu ; ce processus est appelé discrétisation ou génération de maillage. Les équations peuvent alors être écrites pour chaque élément du maillage, à l'aide de la méthode des volumes finis par exemple. Ces équations sont assemblées en un seul système d'équations qui est résolu à l'aide, par exemple, d'une méthode numérique itérative. Une solution est alors obtenue, définie sur chacun des éléments du maillage par des données sur entre autre la vitesse et la pression du fluide. Le processus peut être plus élaboré et comprendre une rétroaction vers le maillage, qui est utilisé pour calculer et représenter la solution. Un peu de la même façon que la discrétisation d'une surface continue représente celle-ci plus ou moins précisément, une solution représentée sur un maillage peut l'être de façon plus ou moins précise. L'erreur faite en calculant la solution numérique, par rapport à la solution exacte, dépend fortement de cette erreur de représentation. Un processus appelé adaptation de maillage peut donc être utilisé pour ajuster le maillage en fonction de la solution et de la géométrie particulières au problème, dans le but de réduire l'erreur sur la solution et d'améliorer la fiabilité de la simulation numérique. La dernière étape du processus de simulation numérique consiste à analyser la masse d'information que constituent les résultats. À chacune des étapes du processus de simulation numérique correspond un ou plusieurs domaines de recherche actifs.

General Electric fait affaire depuis plusieurs années avec l'École Polytechnique de Montréal pour le développement de logiciels spécifiques pour la modélisation géométrique, la génération de maillage, l'adaptation de maillage et pour l'analyse des résultats, et utilise des logiciels commerciaux pour la résolution des équations. Par rapport aux logiciels commerciaux disponibles, le développement de ces outils vise à automatiser ces étapes du processus de simulation numérique et à améliorer la fiabilité et la précision des calculs de prédiction de performance. Ce travail de recherche et développement est actuellement structuré sous la forme d'un projet nommé GMATH, pour Géométrie, Maillage et Adaptation pour les Turbines Hydrauliques, financé par GE et le CRSNG, le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et Génie du Canada. Le projet GMATH d'une durée de trois ans est réalisé au CERCA, le CEntre de Recherche en Calcul Appliqué affilié à Polytechnique entre autre, par une douzaine d'étudiants et de professionnels de recherche sous la direction de François Guibault. Ce projet fourni à l'École Polytechnique un cadre pour effectuer de la recherche sur ces technologies.

Le projet de maîtrise décrit dans ce mémoire origine d'un besoin spécifique exprimé par GE dans le cadre du projet GMATH pour la construction d'un modèle géométrique de la coquille extérieure d'un composant hydraulique nommé diffuseur, à partir de son design partiel sur ordinateur. Le diffuseur est une sorte de tube qui recueille l'eau à la sortie de la turbine hydraulique dans lequel se trouvent, dans certains cas, des obstacles internes. Le diffuseur est important pour la performance de la turbine car il est conçu de façon à ralentir l'eau de sorte que l'énergie de mouvement de l'eau soit dépensée dans la turbine elle-même et non perdue à la sortie de ce composant, sous forme de tourbillon. La conception de la coquille extérieure du diffuseur revient à concevoir la surface courbe du tube, puisque c'est ce qui caractérise sa forme. Les concepteurs de GE ne spécifient pas la surface complète cependant ; ils spécifient plutôt une série de courbes de section, c'est-à-

dire des coupes du tube. Cette technique est assez répandue pour la conception de composants mécaniques, puisqu'il est plus simple et plus rapide pour le concepteur de procéder ainsi. Une surface peut ensuite être construite à partir de cette information. Pour ce faire, GE utilise depuis plusieurs années un logiciel nommé TU qui a également été développé à l'École Polytechnique de Montréal. Cependant, ce logiciel peut produire des surfaces présentant des oscillations indésirables. De plus, le modèle géométrique final est approximatif et lourd à stocker et à manipuler. Ce dernier point n'est pas à négliger étant donné les opérations subséquentes faites sur le modèle : ajout des obstacles internes, qui implique des calculs d'intersections avec celui-ci, discrétisation et adaptation de maillage. C'est donc l'occasion de définir un projet de recherche consistant essentiellement à calculer cette surface à partir des courbes de section, de façon à :

- Construire un modèle géométrique du diffuseur, dont les surfaces passent exactement par les courbes de section, contrairement aux surfaces polygonales produites par TU, et qui sont plus régulières que celles produites par TU, dans le but de rapprocher le calcul de la performance des résultats expérimentaux ;
- Construire un modèle géométrique plus compact en espace mémoire que celui construit par TU, dans le but d'accélérer les calculs subséquents.

Concrètement, la recherche se fait donc dans le cadre du développement d'un logiciel nommé `dta2pie` qui doit construire un modèle solide complet de la coquille du diffuseur par la représentation des frontières (*Boundary Representation*) basé sur les courbes et surfaces NURBS à partir d'une description donnée des courbes de section. Le programme est écrit en C++, ainsi que les deux bibliothèques développées à Polytechnique sur lequel il est basé : **Pirate** qui permet de représenter et manipuler les entités nécessaires aux simulations numériques (principalement des modèles géométriques, des maillages et des solutions) ainsi que **opgeom**, une

librairie d'opérations géométriques.

0.2 Problématique technologique

L'objet de la recherche est le calcul d'une surface NURBS $S(u, v)$ (*Non-Uniform Rational B-Spline*) qui passe par les courbes de section NURBS $C(u)$ tout en étant la plus régulière (lisse, monotone) possible, la plus compacte possible en terme d'espace mémoire et idéalement dont la paramétrisation est par abscisse curviligne, c'est-à-dire dont la grandeur des dérivées est la plus constante possible. Une courbe NURBS est une courbe paramétrique définie par $C(u) = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(u) w_i}$ où P_i est un point de contrôle dans l'espace, multiplié par le poids w_i et par une fonction de base $N_{i,p}(u)$. Chacune des fonction de base est un polynôme de degré p qui est défini à partir d'un vecteur nodal $U = \{u_1, \dots, u_i, \dots, u_{n+p+1}\}$. Chacune des $N_{i,p}(u)$ est non nulle seulement sur $p + 1$ intervalles nodaux, entre les noeuds u_i et u_{i+p+1} . De la même façon, une surface NURBS est une surface paramétrique définie comme $S(u, v) = \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) w_{k,l} Q_{k,l}}{\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) w_{k,l}}$, avec les points de contrôle $Q_{k,l}$, leur points associés $w_{k,l}$, les vecteurs nodaux $U = \{u_1, \dots, u_k, \dots, u_{N+p+1}\}$ et $V = \{v_1, \dots, v_l, \dots, v_{M+q+1}\}$ déterminant les deux familles de fonctions de base $\forall k = 1..N$ $N_{k,p}(u)$ et $\forall l = 1..M$ $N_{l,q}(v)$ de degrés p et q respectivement. Le problème d'interpolation de courbes NURBS - calcul d'une surface passant par ces courbes - est résolu en deux étapes. D'abord, les courbes $\forall j = 1..m$ $C_j(u)$ doivent être rendues compatibles, c'est-à-dire être toutes définies avec le même degré p , le même nombre de points de contrôle N et le même vecteur nodal $U = \{u_1, \dots, u_k, \dots, u_{N+p+1}\}$. Ainsi, la surface pourra passer exactement par les courbes en prenant dans la direction paramétrique u le même degré, vecteur nodal et des points de contrôle et des poids appropriés. Ensuite, étant donné un degré q , un vecteur nodal V , et des paramètres d'interpolation \bar{v}_j , les points de contrôle et

les poids peuvent être calculés en résolvant N systèmes d'équations linéaires provenant des équations $\forall j = 1..m \ S(u, \bar{v}_j) = C_j(u)$. D'autres équations peuvent être ajoutées, pour spécifier par exemple les dérivées désirées aux extrémités. À noter que des choix arbitraires doivent être faits dans ce processus, en particulier ceux des paramètres d'interpolation et du vecteur nodal, et que cela influence le résultat final. Plusieurs méthodes existent par exemple pour le choix des paramètres d'interpolation, et bien qu'elles donnent généralement des résultats satisfaisants à l'oeil, elles ne sont pas complètement robustes.

Dans le contexte du besoin exprimé par GE, les courbes à interpoler comportent des discontinuités de courbure, et même de tangence dans certains cas. Ces courbes sont formées de segments indépendants, concaténés de façon tangente dans la majorité des cas. Elles sont représentées exactement par des courbes NURBS de degré $p = 2$ comportant des noeuds de multiplicité $p = 2$, ce qui brise les courbes en morceaux indépendants se joignant aux points de discontinuité. Les méthodes 'classiques' d'interpolation rendent les courbes compatibles en incluant dans le vecteur nodal commun tous les noeuds de toutes les courbes. Ce vecteur comporte donc un nombre important de noeuds doubles. Une fois la surface calculée, chacun de ces noeuds doubles correspond à une ligne de discontinuité à travers laquelle la dérivée n'est pas continue. Ces lignes sont alors définies arbitrairement par un algorithme général, sans égard à l'application en cause ni à l'intention du concepteur. De plus, les surfaces ainsi calculées présentent des ondulations indésirables autour des points de discontinuité initiaux. La première idée importante développée dans ce travail de recherche est que les points de discontinuité 'correspondants' dans les courbes doivent appartenir à une même ligne de discontinuité dans la surface finale, c'est-à-dire que leurs noeuds correspondants soient tous fusionnés en un seul noeud dans les courbes compatibles et dans la surface finale. Cette idée de forcer des noeuds à la même valeur est nommée 'contrainte' dans le reste de ce document. Un

algorithme développé calcule automatiquement les contraintes. L'algorithme doit également insérer d'autres noeuds, avec leurs points de contrôle correspondants, dans les courbes qui en contiennent moins pour les rendre compatibles. L'autre idée importante de cet algorithme qui rend les courbes compatibles est qu'il faut insérer avec soin ces points, appelés 'points libres' dans le présent document. En particulier, il faut les placer de façon à ce que la ligne de discontinuité correspondante dans la surface finale soit lisse. La portion de l'algorithme développé qui calcule l'emplacement de ces points est appelé 'lissage parabolique' en raison du placement des points le long d'une parabole. Ensuite, troisième idée importante, une méthode pour le choix des paramètres d'interpolation basée sur une fonction logarithmique est utilisée et comparée aux autres méthodes courantes. Finalement, une méthode simple pour choisir automatiquement la grandeur des dérivées spécifiées aux extrémités, qui vise à obtenir une paramétrisation par abscisse curviligne, est développée et testée.

0.3 Hypothèses de recherche

Ce travail de recherche vise à développer des algorithmes d'interpolation de courbes NURBS par une surface qui soient aussi génériques que possible, tout en répondant aux besoins exprimés par GE pour la construction de modèles géométriques de diffuseurs, où les courbes de section sont des courbes NURBS brisées, c'est-à-dire constituées de morceaux se connectant de façon non dérivable. La vue adoptée dans ce travail est que les courbes et surfaces NURBS, définies par une expression mathématique, sont caractérisées par leur forme, leur paramétrisation, et leur écriture mathématique. La paramétrisation est la transformation de l'espace paramétrique vers la forme en question, alors que l'écriture mathématique réfère à la façon dont l'expression mathématique définissant une courbe ou une surface est écrite, parmi

l'infinité possible. L'objectif principal est d'obtenir des surfaces de qualité, c'est-à-dire dont les trois caractéristiques énoncées sont de qualité : surfaces dont la forme est la plus régulière possible (lisse, monotone), dont la paramétrisation est idéalement par abscisse curviligne et surfaces représentées de façon la plus compacte possible, c'est-à-dire avec le moins d'espace mémoire possible. Les principales hypothèses de recherche à la base du travail entrepris à cet égard sont les suivantes :

1. La représentation de la surface du diffuseur est plus compacte en terme de mémoire en utilisant les NURBS et la méthode d'interpolation développée basée sur les contraintes que la représentation polygonale produite avec le logiciel TU ;
2. La façon de rendre les courbes compatibles en vue de leur interpolation par une surface influence le résultat obtenu ; en particulier, les contraintes améliorent la forme de la surface et réduisent l'espace mémoire nécessaire pour la représenter, alors que le 'lissage parabolique' rend la surface plus régulière ;
3. La façon de calculer la surface qui passe par les courbes compatibles influence également le résultat final ; en particulier, la méthode d'interpolation dite logarithmique améliore la forme de la surface, tout comme la spécification de dérivées d'orientation et grandeur appropriées aux extrémités.

Pour infirmer ou confirmer les hypothèses, celles-ci sont testées systématiquement sur 25 géométries industrielles provenant de GE avec les critères mentionnés dans ce qui suit. L'espace mémoire occupé est mesuré approximativement, de façon plus commode, par le nombre de points de contrôle fois le nombre de coordonnées. Pour évaluer la qualité de la forme et/ou de la paramétrisation des surfaces calculées, les critères retenus sont la courbure gaussienne, la moyenne des angles au carré sur la grille de points de contrôle, les continuités paramétrique et géométrique, auxquelles s'ajoutent des méthodes visuelles : la visualisation des surfaces, de leur

grille de points de contrôle, des lignes de discontinuité, c'est-à-dire des courbes isoparamétriques délimitant les différents morceaux de surfaces, et finalement de courbure le long de courbes isoparamétriques.

0.4 Suite du document

La suite du mémoire est structurée comme suit : le chapitre 1 présente la revue de la littérature, le chapitre 2 détaille la méthodologie suivie, le chapitre 3 présente les résultats et leur analyse, le chapitre 4 contient la discussion, puis finalement vient la conclusion. Le chapitre 1 explique ce qu'est un modèle solide, justifie le choix des NURBS comme technique de représentation des courbes et surfaces, détaille différentes techniques de construction de surface, dont celle utilisée dans TU, passe en revue les façons d'évaluer la qualité d'une courbe ou d'une surface et aborde brièvement la génération et l'adaptation de maillages. Le chapitre 2 décrit les critères de qualité développés et utilisés dans ce travail et détaille les algorithmes développés pour rendre les courbes compatibles et calculer une surface passant par ces courbes. Le chapitre 3 montre en détail comment chacune des techniques développées, contraintes, lissage parabolique, interpolation logarithmique et choix de la grandeur des dérivées spécifiées dans l'interpolation, améliore la qualité des surfaces par rapport aux critères choisis, montre quelques problèmes persistants ainsi que les tentatives pour générer des maillages sur ces surfaces. Le chapitre 4 discute des limites des NURBS et des algorithmes utilisés et développés, puis des améliorations à apporter le cas échéant. Une brève conclusion clôt le mémoire.

CHAPITRE 1

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Méthodes de représentation des objets

1.1.1 Représentation des objets par leur frontière

La méthode qui est de loin la plus répandue pour représenter la forme d'un objet rigide sur ordinateur, et qui est utilisée dans **Pirate**, est de représenter sa frontière (Mortenson, 1997). Cette méthode est appelée *boundary representation* en anglais ou communément *B-rep*. La représentation frontalière est utilisée entre autre pour les applications en génie telles que la conception géométrique, l'analyse par volumes finis, la fabrication, la robotique et pour les applications en infographie, telles que les jeux vidéos, les films d'animation, la réalité virtuelle et l'imagerie médicale, où il est nécessaire d'avoir la frontière d'un objet pour en faire le rendu graphique. Cette méthode générique permet de représenter une grande variété d'objets, des plus simples aux plus complexes. Une telle description d'un objet comprend deux niveaux : le niveau géométrique, composé de courbes et surfaces habituellement paramétrées pouvant être représentées par différentes techniques, et le niveau topologique, composé dans sa plus simple expression de volumes, faces, arêtes et sommets. La topologie découpe en régions des éléments géométriques, courbes et surfaces, qui décrivent la frontière et les assemble pour former le modèle complet d'un objet. Dans plusieurs systèmes de conception géométrique assistée par ordinateur, dont **Pirate**, un volume a obligatoirement six faces, chacune bornée par exactement quatre arêtes. Chacune des faces est définie sur une région d'une sur-

face, délimitée par quatre courbes dans l'espace paramétrique de celle-ci. Les arêtes sont à leur tour définies sur une portion ou la totalité d'une courbe et comportent deux sommets, eux-mêmes définis sur un point dans l'espace. La topologie est essentielle pour plusieurs applications, parce que seules les frontières peuvent être représentées par des entités géométriques alors que la topologie complète cette description de l'objet par son intérieur. La génération de maillage est à cet égard un bon exemple, puisque le maillage est justement un modèle géométrique discret de l'objet entier, de la frontière et de l'intérieur qu'il faut forcément connaître avant de discrétiser. De même, le fait que les entités géométriques utilisées soient paramétrées, c'est-à-dire que les courbes et les surfaces soient définies comme $C(u) \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $S(u, v) \rightarrow \mathbb{R}^3$ respectivement, permet de se déplacer le long d'une courbe ou sur une surface. Ceci est très utile dans de nombreux algorithmes : évaluation, calcul des dérivées, spécification d'une face sur une portion de surface, génération de maillage.

1.1.2 Autres méthodes

D'autres méthodes existent pour représenter les objets, dont les principales sont :

- la méthode implicite ;
- la méthode 'instances de primitives', traduction libre de *primitive instancing* ;
- la méthode de balayage ;
- la méthode *Constructive Solid Geometry*, ou CSG ;
- les méthodes de décomposition de l'espace (Mortenson, 1997).

D'abord, la méthode implicite représente les objets entiers à l'aide de leur équation implicite ; par exemple, une sphère de rayon r centrée à l'origine est représentée par l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$. Cette méthode permet de déterminer facile-

ment si un point se trouve à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la frontière d'un objet, mais celle-ci, indispensable pour de nombreuses applications, n'est pas immédiatement disponible. Également, la méthode implicite n'a pas la flexibilité requise pour représenter des objets complexes.

La méthode des instances de primitives consiste à représenter des objets simples avec des paramètres. Pour reprendre le même exemple, une sphère serait décrite par son rayon et la position de son centre dans l'espace. La méthode de balayage permet également de former des objets relativement simples à partir d'une courbe fermée dans un plan, appelée profil, par rotation ou encore par extrusion, c'est-à-dire par déplacement le long d'une droite. Les méthodes d'instances de primitives et de balayage produisent des objets qu'il faut traiter de façon particulière, et permettent difficilement le développement d'algorithmes génériques. Elles sont également limitées quant aux objets pouvant être représentés, malgré que ces objets peuvent être utilisés pour en construire des plus complexes, à l'aide de méthodes CSG.

La méthode *Constructive Solid Geometry* consiste à représenter un objet comme un arbre composé d'opérations booléennes aux noeuds et de primitives géométriques aux feuilles. Les opérations booléennes comprennent l'union, l'intersection et la soustraction. Par exemple, un objet en forme de 'L' pourrait être représenté par l'union ou la soustraction de deux hexaèdres. Malgré certaines limites, cette méthode est assez flexible, mais les objets complexes ainsi représentés occupent beaucoup d'espace mémoire et les arbres d'évaluation peuvent devenir lourds. Cette méthode était très utilisée dans les années 1970 et 1980, mais a peu à peu cédé le pas à la représentation des objets par leur frontière. Elle est toujours utilisée par des concepteurs géométriques pour faire une ébauche des objets, qui est ensuite convertie en représentation frontalière pour être raffinée.

Finalement, il existe des méthodes de décomposition de l'espace, basé par exemple sur des arbres (*quadtree* en deux dimensions et *octree* en trois dimensions). En deux dimensions, un espace fini est divisé en quatre quadrants. Pour chacun des quadrants, une des trois possibilités suivantes est stockée en mémoire : soit le quadrant est complètement occupé par l'objet ou une partie de celui-ci, soit il n'est aucunement occupé par l'objet, soit il est occupé en partie par l'objet. Dans ce dernier cas, ce quadrant est divisé à nouveau, d'où la structure en arbre, et ainsi de suite jusqu'à ce que la précision souhaitée soit atteinte. Ces méthodes ne sont pas tellement utilisées, puisqu'elles sont relativement coûteuses en mémoire.

1.2 Représentation des courbes et surfaces

1.2.1 Courbes et surfaces polygonales

Une approche répandue pour représenter les courbes et surfaces est d'utiliser une rangée de points reliés par des segments de droites pour les courbes, et un ensemble de points reliés en polygones, triangles ou quadrilatères, pour les surfaces. Une telle approche représente en fait est une discrétisation des courbes et des surfaces, qui sont à cet égard ni plus ni moins que des maillages. Évidemment, cette approche ne permet pas de représenter exactement des entités géométriques continues. Ces modèles peuvent également devenir lourds, puisqu'un grand nombre de points peut être nécessaire pour représenter précisément une courbe ou une surface complexe. Cette approche est quand même largement utilisée, notamment en infographie, où les surfaces sont habituellement décomposées en triangles avant d'être affichées, ce qui accélère le rendu graphique. Aussi, le logiciel TU produit un modèle polygonal des diffuseurs. Chacune des surfaces est définie par une grille $N \times M$ de points $P_{k,l}$, qui interpolés linéairement forment $N - 1 \times M - 1$ morceaux ou mailles. Chaque

morceau de surface interpole quatre points, comme suit :

$$S(u, v) = (1 - u)(1 - v)P_{1,1} + (1 - u)vP_{1,2} + u(1 - v)P_{2,1} + uvP_{2,2},$$

et la surface complète est paramétrée presque de fait, contrairement aux surfaces formées de triangles. Finalement, les courbes et surfaces polygonales ont l'avantage d'être faciles à manipuler et à connecter ensemble pour former un modèle solide étanche.

1.2.2 Courbes et surfaces NURBS

Une approche moderne et maintenant largement répandue est d'utiliser les NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) parce qu'elles permettent de représenter précisément une grande variété de courbes et surfaces, de manière relativement compacte et aisée à manipuler. Les NURBS sont une généralisation rationnelle des B-splines, développée pour permettre de représenter les coniques, dont les cercles et les ellipses, de façon exacte. Les B-splines sont elles-mêmes une généralisation des courbes de Bézier (voir 1.2.3). Les NURBS, par leur généralité et leur flexibilité, sont devenues le standard de facto de l'industrie de la conception géométrique assistée par ordinateur et sont donc supportées par la librairie **Pirate**.

1.2.2.1 Courbes NURBS et fonctions de base B-splinaires

La définition d'une courbe NURBS est la suivante :

$$C(u) = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(u) w_i}$$

pour $0 \leq u \leq 1$ sans perte de généralité, où les P_i sont des points de contrôle, les w_i leurs poids associés et les $N_{i,p}(u)$ des fonctions de base polynomiales par morceaux de degré p . La notation utilisée est celle de Piegl et Tiller, 1997 à peu de choses près. Les fonctions de base B-splinaires de degré p sont définies récursivement à partir d'un vecteur nodal U comptant $n + p + 1$ noeuds u_i , comme suit :

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u).$$

À noter que dans l'équation précédente, le quotient $0/0$ peut apparaître; il est alors défini comme valant 0. Chaque fonction $N_{i,p}(u)$ pour $p > 0$ est une combinaison linéaire de deux fonctions de degré inférieur, et constitue effectivement une fonction polynomiale par morceaux de degré p . De plus, chaque fonction B-splinaire est non nulle seulement sur $p + 1$ intervalles, soit entre les noeuds u_i et u_{i+p+1} . Comme chaque point de contrôle multiplie une fonction de base, ceux-ci ont une influence locale sur la courbe. Cette propriété est appelé le contrôle local, c'est-à-dire que le déplacement d'un point de contrôle modifie seulement la courbe localement. Les fonctions B-splinaires sont toujours comprises entre 0 et 1, et leur somme est toujours l'unité. Une courbe B-spline, c'est-à-dire sans les poids, est

donc localement une moyenne pondérée de $p + 1$ points de contrôle et est toujours contenue à l'intérieur de l'enveloppe convexe de ces $p + 1$ points de contrôle. De la même façon, la courbe entière est toujours contenue à l'intérieur de l'enveloppe convexe de tous ses points de contrôle. La propriété de l'enveloppe convexe est toujours valide dans le cas rationnel à condition que les poids soient non négatifs, ce qui est presque toujours le cas en pratique. En effet, le dénominateur ramène la courbe à une moyenne pondérée de points puisqu'il constitue la somme des fonctions de base multipliées par les poids, ces mêmes fonctions de base qui forment le numérateur et qui sont multipliées par les points. Les courbes rationnelles ont ces mêmes propriétés, puisque les fonctions de base rationnelles possèdent les mêmes propriétés que les B-splines, à condition que les poids soient positifs. Cela apparaît clairement avec la définition équivalente

$$C(u) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(u) P_i,$$

où

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=1}^n N_{j,p}(u)w_j}.$$

À noter que si tous les poids w_i sont égaux, le dénominateur et les poids du numérateur se simplifient, et la courbe est bel et bien une B-spline. De plus, chacune des fonctions de base, polynomiale ou rationnelle, a un et un seul maximum. Cela fait en sorte que la courbe a la propriété intéressante appelée 'diminution de la variation', c'est-à-dire qu'en deux dimensions une droite n'intersecte pas la courbe plus de fois qu'elle n'intersecte le polygone de contrôle, et qu'en trois dimensions, un plan n'intersecte pas la courbe plus de fois qu'il n'intersecte le polygone de contrôle. À noter que l'expression 'polygone de contrôle' réfère à la ligne brisée qui relie, dans l'ordre, les points de contrôle du premier au dernier. Le terme 'polygone'

est généralement employé en français comme en anglais même si un polygone est à strictement parler une figure plane et fermée, alors qu'une courbe tridimensionnelle n'est pas nécessairement plane et qu'une courbe à représenter n'est généralement pas fermée. Les fonctions de base, polynomiales ou rationnelles, et par le fait même la courbe, sont dérivables indéfiniment entre les noeuds, et $p - k$ fois à un noeud interne de multiplicité k . Les noeuds internes sont l'ensemble des noeuds moins les $p+1$ noeuds à chaque extrémité, et peuvent se répéter p fois au plus. Le plus souvent, les $p+1$ premiers et derniers noeuds sont placés à 0 et 1 respectivement, sans perte de généralité; de cette façon la courbe commence au premier point et se termine au dernier, c'est-à-dire que $C(0) = P_1$ et $C(1) = P_n$. Les NURBS sont définies avec cette restriction dans Piegl et Tiller, 1997, même si les fonctions de base sont bien définies sans elle, en autant que le vecteur nodal soit non décroissant. Autres propriétés intéressantes des courbes NURBS : elles sont numériquement stables et sont invariantes aux transformations affines et projectives, c'est-à-dire que ces transformations peuvent être appliquées à la courbe en l'appliquant à ses points de contrôle.

1.2.2.2 Représentation des coniques avec des courbes NURBS

Finalement, les NURBS permettent de représenter exactement les coniques, contrairement aux B-splines. Celles-ci sont largement répandues dans le domaine de la conception géométrique en génie; par exemple les courbes de section des diffuseurs comprennent des arcs de cercle et d'ellipse. Il s'agit donc d'une caractéristique importante qui justifie l'introduction des poids. De plus, il est simple de modéliser ces formes, comme le montre l'exemple suivant d'un quart d'ellipse représenté par une courbe NURBS. Une courbe de degré $p = 2$ comprenant $n = 3$ points, donc aucun noeud interne, suffit. Pour une ellipse centrée à l'origine et avec ses demi-axes ali-

gnés avec les axes des x et des y , de longueur a et b respectivement, trois points et poids possibles sont : $P_1 = (a, 0, 1)$, $P_2 = (a, b, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $P_3 = (0, b, 1)$. Il est possible de construire des ellipses avec des degrés plus élevés, mais a priori il n'y a pas de bonne raison de faire cela.

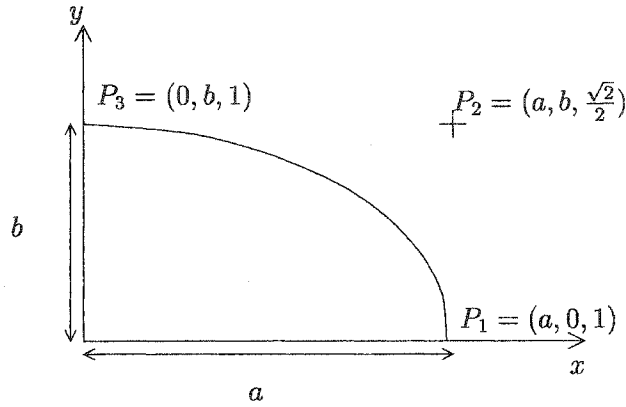


FIG. 1.1 Quart d'ellipse en NURBS

1.2.2.3 Surfaces NURBS

Les surfaces NURBS sont quant à elles définies comme suit :

$$S(u, v) = \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) w_{k,l} Q_{k,l}}{\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) w_{k,l}}$$

pour $0 \leq u, v \leq 1$, où les $Q_{k,l}$ sont des points de contrôle formant une grille de contrôle $N \times M$, les $w_{k,l}$ les poids associés et les $N_{k,p}(u)$ et $N_{l,q}(v)$ sont les fonctions de base B-splines de degré p et q respectivement, définies à partir des vecteurs nodaux U et V comprenant respectivement $N + p + 1$ et $M + q + 1$ noeuds. Les propriétés des surfaces NURBS sont similaires à celles des courbes NURBS, sauf qu'il n'y a pas de propriété de diminution de la variation connue pour les surfaces.

1.2.3 Courbes et surfaces de Bézier

Une autre école de pensée dans le domaine de la conception géométrique assistée par ordinateur préfère les courbes et surfaces de Bézier, rationnelles ou non, aux NURBS et aux B-splines (Mortenson, 1997). Une NURBS sans noeud interne est en fait une Bézier. Le principal problème avec cette approche est que pour modéliser une forme complexe avec un grand nombre n de points de contrôle, la courbe est de degré $n - 1$, donc coûteuse à évaluer et numériquement instable. De plus, la propriété de contrôle local est perdue puisque la courbe est formée d'un seul polynôme ou d'une seule expression dans le cas rationnel. Pour contourner ces inconvénients, il est possible d'utiliser plusieurs courbes de Bézier collées ensemble, formant une courbe de Bézier par morceaux; les degrés $p = 3$ et $p = 5$ semblent les plus utilisés pour ce faire, les points de contrôle étant placés de sorte que la courbe soit dérivable deux fois à la jonction des morceaux. Ces courbes peuvent être vues comme des NURBS pour lesquelles la multiplicité des noeuds est égale au degré au lieu d'être égale à 1. Or, ces noeuds supplémentaires peuvent être retirés, et par le fait même autant de points de contrôle, la courbe étant parfaitement continue à ces endroits. Par conséquent, les courbes de Bézier par morceaux continues à leur jonction sont une représentation équivalente aux NURBS, mais moins efficace que celles-ci, car la continuité entre les morceaux doit être exprimée explicitement par plusieurs points de contrôle placés selon des conditions précises, au lieu d'être incluse dans la définition même des fonctions de base (Piegl et Tiller, 1997). Par exemple, une courbe de Bézier par morceaux de degré $p = 3$ interpolant n points, appelés points de collocation, avec une dérivée spécifiée à chacune des extrémités, est composée minimalement de $n - 1$ segments et comporte donc $3n - 2$ points. Cette courbe C^2 peut être représentée par une B-spline équivalente avec $3n - 2 - 2(n - 2) = n + 2$ points de contrôle en faisant passer la multiplicité des

$n - 2$ noeuds internes de 3 à 1. À noter qu'une B-spline de n points de contrôle peut interpoler n points de collocation ; la différence est qu'avec $n + 2$ points de contrôle, il est possible de spécifier une condition à chacune des extrémités, les dérivées par exemple, exactement comme avec une courbe de Bézier par morceaux. De plus, le fait de poser le problème d'interpolation de points avec des B-splines donne plus de flexibilité puisque les segments de courbe peuvent se terminer ailleurs qu'aux points de collocation. Autre exemple, une courbe de Bézier de degré $p = 5$ composée de $n - 1$ segments se connectant de façon C^2 comprend $5n - 4$ points de contrôle mais peut être représentée par une B-spline avec $5n - 4 - 2(n - 2) = 3n$ points de contrôle. Pour toutes ces raisons, et parce que **Pirate** et la librairie associée **opgeom** sont développés en fonction des NURBS, il est clairement préférable d'utiliser les NURBS pour modéliser des courbes et des surfaces.

1.2.4 Splines cubiques et interpolation de points

Les splines cubiques, équivalentes aux courbes de Bézier, sont largement utilisées pour interpoler des points de collocation (Mortenson, 1997). Une spline cubique $C(t) \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe définie par morceaux par n polynômes de degré $p = 3$ paramétrés par t . Chaque segment $r_k(t)$ d'une spline cubique est défini comme suit :

$$\forall k = 1..n \quad r_k(t) = \sum_{i=0}^3 a_{k,i} (t - t_k)^i, t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

pour des t_k donnés et des coefficients a_k aux composantes (x, y, z) . La notation utilisée et les explications qui suivent sont inspirés de Fortin, 1995. Chaque segment peut donc s'écrire comme une courbe Bézier de degré $p = 3$, et donc toute spline cubique peut s'écrire sous forme de Bézier par morceaux de degré $p = 3$. Malgré

qu'elles soient un peu plus complexes à programmer, les courbes de Bézier sont généralement préférées aux splines cubiques puisqu'elles sont

- plus intuitives : les coordonnées des points de contrôle sont plus significatives que des coefficients des polynômes ;
- plus puissantes : les Bézier peuvent être rationnelles et représenter exactement des coniques ;
- plus compactes : les Bézier nécessitent $3n + 1$ points de contrôle pour représenter n segments, donc $3 \times (3n + 1) = 9n + 3$ coordonnées réelles, contre $3 \times 4n = 12n$ coefficients réels pour n segment de spline cubique ;
- numériquement plus stables (Piegl et Tiller, 1997).

L'interpolation de $n + 1$ points de collocation consiste par conséquent à choisir des t_k (préféablement en fonction de la distance entre les points de collocation) et à calculer les coefficients $a_{k,i}$ à partir des contraintes suivantes :

- chacun des segments doit commencer et terminer sur un point de collocation, c'est-à-dire que $r_k(t_k) = d_k$ et $r_k(t_{k+1}) = d_{k+1}$ pour k de 1 à n , ce qui donne $2n$ équations ;
- à chacun des $n - 1$ points intérieurs, les dérivées premières et deuxièmes doivent être continues, c'est-à-dire que $r'_k(t_{k+1}) = r'_{k+1}(t_{k+1})$ et $r''_k(t_{k+1}) = r''_{k+1}(t_{k+1})$ pour k de 2 à n , ce qui donne $2n - 2$ équations ;
- deux autres équations doivent être ajoutées pour que les $4n$ $a_{k,i}$ soient complètement déterminés ; habituellement des conditions de tangence ou de courbure, associées respectivement aux dérivées première et seconde, sont imposées à chaque extrémité.

Un tel système d'équations linéaires peut être résolu efficacement par une décomposition LU. À noter que ces conditions font ressortir pourquoi les polynômes de

degrés impairs sont presque toujours utilisés pour représenter des courbes ou des surfaces : un polynôme de degré impair comporte un nombre pair de coefficients, et donc un nombre égal de conditions peuvent être imposées à chacune des extrémités des courbes ou surfaces. Par exemple, l'interpolation de $n + 1$ points de collocation par une spline de degré $p = 2$ donnerait $3n$ coefficients, déterminés à partir de $2n$ conditions de passage par les points et $n - 1$ conditions de continuité de dérivée première, donc $3n - 1$ conditions en tout. Il reste un seul degré de liberté pour que le système d'équations soit entièrement déterminé.

1.3 Interpolation de courbes par une surface

L'interpolation de courbes consiste à construire une surface passant exactement par un ensemble de courbes, par opposition à l'approximation qui consiste à calculer une surface passant approximativement par les courbes, souvent à l'intérieur d'une tolérance spécifiée. L'interpolation est la voie choisie dans ce projet, puisque le besoin à son origine est justement de calculer des courbes qui passent exactement par les courbes de section. Cette section décrit la méthode spécifique utilisée dans TU et la méthode générique qui semble la plus répandue.

1.3.1 Méthode spécifique utilisée dans TU

Les courbes de section sont décrites à l'origine dans un format spécifique (*dta*), où elles sont représentées par primitives paramétrées. La section générique est de forme rectangulaire, décrite par la hauteur et la largeur, dont les quatre coins sont arrondis par des quarts d'ellipse, définis par la longueur des deux axes (voir la figure 1.2). Dans certaines sections s'ajoutent soit une dénivellation en forme de 'V' dans le côté du haut, dénivellation entièrement décrite à l'intérieur de la

convention par sa hauteur, soit un arrondi du haut de la section décrit par son rayon. La position dans l'espace de chacune des sections planes est décrite par les coordonnées de son centre et son orientation dans l'espace, pouvant être définie par deux angles (voir Gougeon *et al.*, 2001 pour la description complète et exacte du format **dta**). Cette représentation est compacte mais partielle. De plus, n'est pas facilement manipulable puisqu'elle est non conventionnelle.

La méthode utilisée pour construire une surface à partir des courbes ainsi décrites consiste à construire une courbe dorsale passant par le centre des sections initiales, le long de laquelle chaque point correspond à une section définie par l'interpolation par splines cubiques des paramètres **dta** des sections initiales. Les explications qui suivent sur le détail de la méthode proviennent de Benoît Ozell, qui a développé le logiciel TU.

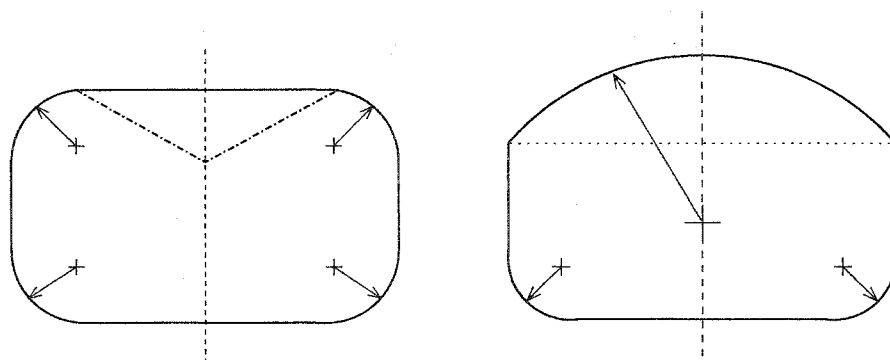


FIG. 1.2 Section **dta** générique (à gauche) incluant le haut en 'V', et section particulière avec arrondi dans le haut (à droite).

La courbe dorsale, passant par le centre de chacune des sections, est une spline cubique. Ses paramètres t_k sont répartis proportionnellement à la racine de la distance entre le centre des sections. La forme des sections intermédiaires est déterminée par l'interpolation par une spline cubique de chacun des paramètres du fichier **dta**, avec les mêmes t_k . L'orientation dans l'espace est donnée par deux angles, également

interpolés avec des splines cubiques. La forme de la surface est ainsi entièrement déterminée. La paramétrisation dans la direction de la dorsale est définie par la paramétrisation des splines cubiques, alors qu'il n'y pas de paramétrisation définie dans la direction des courbes de section. Ce n'est pas un problème, puisqu'une paramétrisation peut être déterminée en fonction de la longueur d'arc. C'est ce qui est fait pour la discrétisation d'ailleurs. Pour évaluer la surface en un point donc, il faut spécifier le paramètre t correspondant à un point sur la dorsale, et une portion de longueur d'arc définie à partir d'un zéro prédéterminé. La section correspondante au paramètre t est construite, et le point calculé d'après la portion de la longueur sur la courbe donnée. Une telle surface interpole exactement les courbes de section, et est représentée de façon compacte. Le principal inconvénient relié à cette façon de calculer la surface est que celle-ci n'est pas représentée par une méthode conventionnelle ; elle doit être discrétisée pour être communiquée sous forme donc conventionnelle, donc représentée par une technique polygonale. À noter que cette façon de faire, c'est-à-dire l'interpolation des paramètres des sections **dta**, respecte les contraintes telles que définies dans ce mémoire.

1.3.2 Interpolation de courbes NURBS

L'approche générique qui semble la plus répandue pour aborder le problème d'interpolation de courbes B-spline ou NURBS est de le poser comme suit : étant données m courbes tridimensionnelles $C_j(u)$, calculer une surface $S(u, v)$ telle que pour des \bar{v}_j à déterminer, $\forall j = 1..m$ $S(u, \bar{v}_j) = C_j(u)$. La solution à ce problème est en deux grandes étapes : d'abord rendre les courbes compatibles, c'est-à-dire les décrire avec le même degré, le même nombre de points de contrôle N et le même vecteur nodal, puis calculer une surface passant par ces courbes compatibles, c'est-à-dire à partir du degré p et du vecteur nodal U des courbes compatibles, choisir un degré

q , un vecteur nodal V , les points de contrôle $Q_{k,l}$ et leurs poids associés $w_{k,l}$. Les explications qui suivent proviennent de Piegl et Tiller, 1997.

1.3.2.1 Algorithme classique pour rendre les courbes NURBS compatibles

Pour rendre les courbes compatibles, il faut d'abord s'assurer qu'elles ont toutes le même degré. En général il n'est pas possible de diminuer le degré d'une courbe sans en changer la forme. Il est par contre possible de représenter une courbe donnée avec une autre de degré plus élevé tout en préservant la forme et la paramétrisation, donc le degré des courbes de degré inférieur est augmenté. Pour une description de l'algorithme d'élévation du degré d'une courbe NURBS, voir Piegl et Tiller, 1997. Ensuite, les courbes doivent être décrites avec un vecteur nodal commun. Il est supposé que les courbes sont définies sur la plage paramétrique $[0, 1]$; dans le cas contraire une transformation linéaire de $[a, b]$ vers $[0, 1]$ peut être effectuée sans modifier la forme des courbes. Il est aussi supposé que les $p + 1$ premiers et derniers noeuds sont à 0 et 1 respectivement. En ce qui concerne les noeuds internes, dans le cas général la seule façon de les harmoniser sans modifier la forme ni la paramétrisation des courbes est de fusionner les vecteurs nodaux des courbes en un vecteur commun contenant les noeuds en provenance de toutes les courbes, et d'insérer tous les noeuds du vecteur nodal commun dans chacune des courbes, sauf les noeuds qui s'y trouvent déjà bien entendu. En effet, toujours dans le cas général, les noeuds ne peuvent ni être enlevés ni être déplacés sans modifier la forme de la courbe.

1.3.2.2 Insertion de noeud dans une courbe NURBS

L'insertion de noeud consiste à ajouter un noeud donné dans le vecteur nodal, et par le fait même une fonction de base et le point de contrôle associé. En fait, l'opération remplace $p - 1$ fonctions de base par p nouvelles fonctions de base, tout à fait équivalentes. Comme illustré à la figure 1.3, l'opération d'ajout d'un noeud consiste à remplacer $p - 1$ points de contrôle par p nouveaux points de contrôle, calculés de façon à ce que la courbe demeure exactement la même, des points de vue géométrique comme paramétrique. Pour la description et les fondements de l'algorithme, voir Piegl et Tiller, 1997.

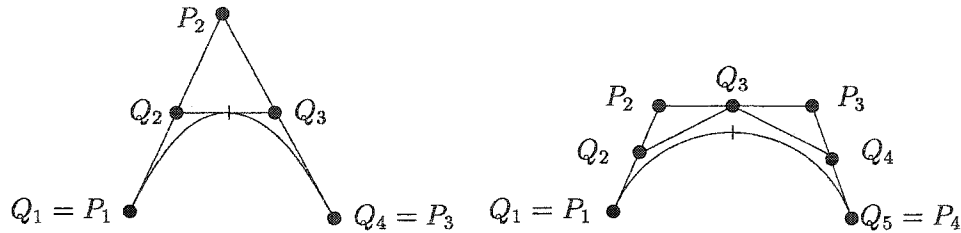


FIG. 1.3 Insertion d'un noeud dans une courbe de Bézier de degré $p = 2$ (à gauche) et $p = 3$ (à droite) : les P_i sont les anciens points de contrôle et les Q_i les nouveaux.

1.3.2.3 Interpolation des courbes NURBS compatibles

Pour interpoler les courbes compatibles, une méthode basée sur l'interpolation des points de collocation appliquée aux points de contrôle des courbes compatibles est présentée dans Piegl et Tiller, 1997. Le problème est posé de telle sorte que

$$\forall j = 1..m \quad S(u, \bar{v}_j) = C_j(u).$$

Pour l'interpolation de courbes polynomiales, cette équation s'écrit, sous forme matricielle pour simplifier la suite, comme suit :

$$\forall j = 1..m \{N_k(u)\}^t [Q_{k,i}] \{N_l(\bar{v}_j)\} = \{N_i(u)\}^t \{P_i\}_j.$$

Les fonctions de base $N_k(u)$ et $N_i(u)$ sont évidemment les mêmes puisque les courbes de section sont compatibles et que la surface prend le même degré et le même vecteur nodal, donc

$$\forall j = 1..m [Q_{k,i}] \{N_l(\bar{v}_j)\} = \{P_i\}_j$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité précédente soit vérifiée dans le cas général. En mots, cette équation signifie que pour chacune des m courbes à interpoler sont définies N équations reliant les points de contrôle de la courbe à ceux de la surface, multipliés par les fonctions de base évaluées en \bar{v}_j . Il apparaît que si les fonctions de base $N_l(v)$ et les \bar{v}_j sont choisis, les points de contrôle des surfaces sont complètement déterminés et peuvent être calculés en regroupant les équations en N systèmes de m équations. En effet, pour chaque colonne k de points de contrôle, il existe m équations linéaires à m inconnues ; comme pour toute valeur de paramètre seulement $p + 1$ fonctions de base sont non nulles, la matrice A de ce système $A\vec{x} = \vec{b}$ possède $p + 1$ coefficients non nuls par rangée. Chacun de ces N systèmes d'équations est résolu pour chacune des coordonnées (x, y, z) . À noter que pour une même surface, la matrice A est identique pour tous les systèmes d'équations puisqu'elle est complètement déterminée par le degré, le vecteur nodal et les \bar{v}_j , qui sont uniques pour la surface. Dans le cas de courbes de section rationnelles, le problème est similaire mais l'équation $\forall j = 1..m S(u, \bar{v}_j) = C_j(u)$

s'écrit comme suit :

$$\forall j = 1..m \frac{\{N_k(u)\}^t [w_{k,l} Q_{k,l}] \{N_l(\bar{v}_j)\}}{\{N_k(u)\}^t [w_{k,l}] \{N_l(\bar{v}_j)\}} = \frac{\{N_i(u)\}^t \{w_i P_i\}_j}{\{N_i(u)\}^t \{w_i\}_j}.$$

Pour assurer que la surface passe par les courbes de section, il faut donc que

$$\forall j = 1..m [w_{k,l} Q_{k,l}] \{N_k(\bar{v}_j)\} = \{w_i P_i\}_j$$

et que

$$\forall j = 1..m [w_{k,l}] \{N_k(\bar{v}_j)\} = \{w_i\}_j.$$

Ces deux systèmes d'équations ne forment en fait qu'un seul système d'équations dans l'espace (wx, wy, wz, w) , appelé espace homogène. Une fois ce système d'équation résolu, la représentation (x, y, z, w) , utilisée dans **Pirate**, peut être retrouvée en divisant les trois premières coordonnées de l'espace homogène par les poids.

Ce problème correspond à celui de calculer les points de contrôle de N courbes $C_k(v)$ comportant m points de contrôle Q_j , passant chacune par les points de contrôle d'indice k de chacune des m courbes de section. Pour interpoler des points $D_j = P_{k,j}$, avec k fixé, par une telle courbe, le premier choix à faire est celui du degré à utiliser. Un degré plus élevé rend la courbe plus régulière et augmente le nombre de fois que la courbe est continûment dérivable, mais alourdit l'évaluation. Le choix le plus souvent fait avec les B-spline ou les NURBS est $q = 3$; la courbe est alors dérivable deux fois, donc la tangente et la courbure sont continues, ce qui est généralement suffisant en pratique. Reste maintenant le choix des paramètres d'interpolation \bar{v}_j et du vecteur nodal V . Il existe trois méthodes assez répandues pour choisir les paramètres d'interpolation, qui vont de 0 à 1 :

- méthode uniforme, où les paramètres sont répartis uniformément, c'est-à-dire que $\forall j = 1..m \ \bar{v}_j = \frac{j-1}{m-1}$;
- méthode longueur d'arc, où les paramètres sont proportionnels aux distances entre les points de collocation, c'est-à-dire que $\bar{v}_1 = 0$ et $\forall j = 2..m \ \bar{v}_j = \frac{\sum_{k=2}^j |D_k - D_{k-1}|}{\sum_{k=2}^m |D_k - D_{k-1}|}$;
- méthode centripète, où la distance entre les paramètres est proportionnelle à la racine des distances entre les points de collocation, c'est-à-dire que $\bar{v}_1 = 0$ et $\forall j = 2..m \ \bar{v}_j = \frac{\sum_{k=2}^j \sqrt{|D_k - D_{k-1}|}}{\sum_{k=2}^m \sqrt{|D_k - D_{k-1}|}}$.

À noter que les distances sont calculées dans l'espace homogène.

Selon Piegl et Tiller, 1997, la méthode uniforme n'est pas recommandée, à moins que la répartition des données soit assez uniforme ; dans le cas contraire, elle peut produire des formes erratiques. La méthode longueur d'arc est beaucoup plus appropriée dans le cas général, et devrait habituellement donner des résultats satisfaisants. Elle a aussi l'avantage de donner une assez bonne paramétrisation à la courbe finale. La méthode centripète fonctionne apparemment mieux lorsque les données changent brusquement de direction. Chacune de ces méthodes est testée dans le cadre de ce travail. Quant au vecteur nodal, il est recommandé de le choisir en fonction des paramètres d'interpolation afin de ne pas obtenir un système d'équations singulier. Ainsi, la méthode suggérée est de faire la moyenne de q paramètres d'interpolation, c'est-à-dire que les $q+1$ premiers et derniers noeuds sont à 0 et 1 respectivement et que les autres sont placés comme suit :

$$\forall j = 2..m - q \ v_{j+q} = \frac{1}{q} \sum_{k=j}^{j+q-1} \bar{v}_k.$$

Il est montré que cette façon de faire assure un système d'équations dont la matrice est positive et diagonale avec une demie largeur de bande inférieure à q et donc

numériquement stable et facile à résoudre. Maintenant, dans le cas de l'interpolation de courbes par une surface, les paramètres d'interpolation utilisés sont la moyenne des paramètres d'interpolation calculés sur chacune des rangées de points de contrôle ; les paramètres d'interpolation doivent en effet être les mêmes pour chacune des rangées de point de contrôle des courbes, c'est la façon dont le problème est posé qui l'exige et cela permet à la surface NURBS de passer exactement par les courbes. Les noeuds du vecteur nodal sont calculés à partir de ces paramètres moyens ; de cette façon tous les systèmes d'équations sont bien définis.

1.3.2.4 Spécification de conditions aux extrémités

En plus des points, il est souvent souhaitable de spécifier la tangente à chacune des extrémités. Pour l'interpolation de courbes par une surface, il faut spécifier une tangente pour chaque point de contrôle de la première et/ou dernière courbe, une fois celle-ci rendue compatible. La façon de faire proposée dans Piegl et Tiller, 1997 est en fait de spécifier la ou les dérivées voulues, c'est-à-dire l'équivalent d'un vecteur tangent, incluant sa magnitude. Au système de m équations s'ajoutent donc deux nouvelles équations :

$$-Q_1 + Q_2 = \frac{v_{q+1}}{q} C'(0)$$

et

$$-Q_{m+1} + Q_{m+2} = \frac{1 - v_{m+2}}{q} C'(1)$$

ainsi que deux degrés de liberté, c'est-à-dire deux nouvelles inconnues consistant en deux points de contrôle. Les points de contrôle et les dérivées doivent être exprimés en coordonnées homogènes, (wx, wy, wz, w) , dans le cas rationnel, mais

cela n'est pas mentionné explicitement dans PiegI et Tiller, 1997. Pour le reste, la méthode est très semblable. Les paramètres d'interpolation sont calculés de la même façon, et dans le cas de degré $q \neq 3$ les noeuds internes du vecteur nodal toujours calculés en faisant la moyenne de q paramètres, mais en en incluant un de plus à chaque extrémité (un à 0, l'autre à 1). Par contre, si le degré choisi est $q = 3$, le nombre de paramètres d'interpolation et de noeuds internes est égal ; par conséquent, il suffit de prendre directement comme valeurs de noeuds internes les paramètres d'interpolation. De cette façon, les morceaux de surface commencent et se terminent sur les courbes de section. Il reste à construire le système d'équations et à le résoudre.

1.3.3 Problèmes à rendre les courbes compatibles

La principale limitation reliée à la méthode 'classique' pour rendre les courbes compatibles est la taille des surfaces résultantes (Filip et Ball, 1989, PiegI et Tiller, 2000, PiegI et Tiller, 1996, Park *et al.*, 2000). En effet, si m courbes de section sont définies indépendamment les unes des autres avec n points de contrôle en moyenne, il devrait y avoir de l'ordre de $m \times n$ points de contrôle par courbe une fois les courbes rendues compatibles : les vecteurs nodaux sont fusionnés, et comme les noeuds internes sont tous différents, ou presque, leur nombre explose avec le nombre de courbes de section. La surface finale contient donc de l'ordre de $n \times m^2$ points de contrôle. Par exemple, jusqu'à 40 courbes de section sont utilisées pour définir la surface complexe d'un diffuseur de GE, chacune comprenant une vingtaine de points de contrôle. La surface NURBS construite à partir de ces données aurait 32000 points de contrôle, chaque point comportant quatre coordonnées en nombre réels. Considérant que chaque nombre réel est stocké dans le format de fichier **Pirate** en format texte, avec une douzaine de caractères, eux-mêmes

habituellement représentés sur 8 bits, la surface prendrait $32000 \times 4 \times 12$ octets = 15360000 octets soit pratiquement 1,5 mégaoctet ! En format binaire, c'est-à-dire en mémoire pendant l'exécution d'un programme, les nombres réels sont représentés sur 64 bits ou huit octets, selon selon le standard *double* de la norme IEEE754 (Fortin, 1995), ce qui donne environ un mégaoctet pour la surface de l'exemple. Un autre problème qui peut survenir à la suite de la fusion de vecteurs nodaux est que la distance entre certains noeuds peut être très faible, ce qui peut poser des problèmes numériques dans les algorithmes manipulant la surface (Filip et Ball, 1989).

Dans le cas général, la solution à ces problèmes est de définir directement les courbes sur un vecteur nodal commun comportant le moins de noeuds possible, ou de les redéfinir sur un tel vecteur nodal. Dans ce dernier cas les courbes sont donc approximées, souvent à une tolérance près, plutôt qu'interpolées exactement ; c'est ce qui est fait dans Piegl et Tiller, 2000, Piegl et Tiller, 1996 et Park *et al.*, 2000, dans le but de réduire la taille des surfaces résultantes. Heureusement, dans le cadre du besoin exprimé par GE, les courbes de section sont des courbes de Bézier par morceaux et donc les noeuds internes, de multiplicité égale au degré, peuvent être déplacés sans modifier la géométrie de la courbe ; l'habituel compromis entre la flexibilité avec laquelle les courbes peuvent être définies, le respect de la forme exacte des courbes et la taille de la surface résultante n'a pas à être géré puisqu'il est possible de satisfaire aux trois contraintes, alors qu'il est généralement possible de n'en satisfaire que deux.

1.3.4 Correspondance entre les caractéristiques de différentes courbes

Un autre aspect à considérer dans la façon de rendre les courbes compatibles est l'association des caractéristiques correspondantes sur les courbes. C'est essentielle-

ment le message de l'article Cohen *et al.*, 1997, qui aborde le sujet de façon assez large avec comme applications principales l'interpolation de forme et l'interpolation de courbes de section en surfaces. L'interpolation de forme, appelée *shape blending* ou *in-betweening* en anglais, consiste à créer une série de contours intermédiaires à partir de deux contours plans initiaux, ce qui est équivalent à calculer une surface interpolant linéairement les deux courbes. L'article propose une méthode pour 'aligner' la paramétrisation de deux courbes, c'est-à-dire pour faire en sorte que les caractéristiques correspondantes se trouvent à la même valeur de paramètre, de sorte que les formes intermédiaires ainsi construites contiennent les mêmes caractéristiques correspondantes sans trop les déformer. La méthode repose sur une fonction qui quantifie la correspondance de n'importe quelle paire de points, provenant de chacune des deux courbes discrétisées, à partir de leurs propriétés différentielles. Dans l'article, le produit scalaire des tangentes aux deux points est utilisé. Puis, pour choisir le sous-ensemble de paires de points qui maximise la somme des produits scalaires parmi le très grand nombre de sous-ensembles possibles, un algorithme de programmation dynamique est utilisé. Une fois cette tâche effectuée, les points d'une même paire sont placés à la même valeur de paramètre. Ceci est fait en reparamétrisant une des deux courbes, c'est-à-dire en redéfinissant une des deux courbes $C(u)$ par $C(f(u))$ avec une fonction $f(u)$ appropriée. Cette opération ne change pas la forme de la courbe mais change sa paramétrisation et sa représentation ; aussi, la nouvelle courbe est de degré égal au produit du degré de la courbe $C(u)$ et de la fonction $f(u)$. Les résultats montrés sont assez convaincants, mais les exemples sont limités à l'interpolation linéaire entre deux courbes de Bézier, polynomiales ou rationnelles. Les auteurs précisent que pour interpoler plus de deux courbes avec la méthode qu'ils proposent, il serait possible de prendre une courbe de référence et de changer la paramétrisation des autres en fonction de celle-ci, mais que leur algorithme pourrait alors nécessiter des améliorations. Ils ne

discutent donc pas de la façon de faire passer une surface par plus de deux courbes reparamétrées. Les auteurs mentionnent finalement que d'autres fonctions d'association pourraient être utilisées, par exemple pour faire correspondre des points d'inflexion ou des points de courbure extrême.

Cette approche générale, bien qu'intéressante, n'est pas tout à fait appropriée dans le cadre des besoins de GE. D'abord, un des buts est de produire une surface lisse, donc le critère de correspondance entre les points de discontinuité dans les courbes devrait a priori être basé sur ce but. En pratique, le critère suggéré dans Cohen *et al.*, 1997 ne fonctionnerait pas toujours très bien ; entre autre, comme les points de discontinuité ont souvent des tangentes identiques et/ou des vecteurs de courbure très semblables, il ne pourrait départager adéquatement différentes solutions possibles, du moins pas en considérant seulement les points de discontinuité. Il faudrait alors prendre plus de points, ce qui alourdirait inutilement les calculs.

1.3.5 Ligne de discontinuité dans les surfaces

Les lignes de discontinuité constituent des caractéristiques importantes dans une surface donnée, assez en tout cas pour que plusieurs auteurs y fasse référence. À noter qu'en anglais, l'expression *crest line* et le terme *crease* sont utilisés pour désigner une ligne de discontinuité. La possibilité de représenter des discontinuités est une des caractéristiques retenues dans l'élaboration d'un nouveau modèle pour représenter les courbes et les surfaces : les X-splines (Blanc et Schlick, 1995). Dans Comninos, 2001, les auteurs utilisent pour interpoler des points des surfaces de Bézier plutôt que des B-splines dans le but, entre autre, de contrôler le degré de continuité entre les morceaux dans la surface. Finalement, Farin, 2000 mentionne les lignes de discontinuité comme une avenue intéressante pour de futurs développements. Les B-splines et les NURBS permettent d'ailleurs de les représenter, mais

seulement sur les lignes isoparamétriques correspondantes aux noeuds, c'est-à-dire à la jonction des morceaux de surfaces.

1.3.6 Remarques sur l'interpolation de courbes compatibles

Quelques remarques formulées dans Piegl et Tiller, 1997 sur la méthode d'interpolation 'classique'. Il est difficile d'implanter un algorithme d'interpolation de courbe vraiment robuste. C'est encore plus difficile avec des courbes de section rationnelles : comme l'interpolation est faite dans l'espace homogène, les poids de la surface résultante peuvent varier plus que ce qui est souhaitable, ce qui risque d'affecter la paramétrisation de façon indésirable. De plus, les poids de la surface pourraient être négatifs, ce qui fait perdre aux NURBS la propriété de l'enveloppe convexe et qui n'est pas nécessairement supporté par tous les logiciels utilisant les NURBS. Aussi, l'interpolation de courbes de section continûment dérivables n fois dans l'espace tridimensionnel ne formeront pas en général une surface continûment dérivable n fois dans la direction des courbes, si les courbes ne sont pas aussi continûment dérivables n fois dans l'espace homogène. Pour plus d'explications à ce sujet et un bon exemple, voir Hui, 1999.

1.4 Qualité des courbes et surfaces

Bien que les courbes et surfaces NURBS soient utilisées dans une variété de domaines d'application, il existe un certain nombre de caractéristiques générales habituellement désirées pour celles-ci :

- la qualité d'être régulière, c'est-à-dire lisse et de variation monotone (Zhang *et al.*, 2001, Pigounakis et Kaklis, 1996, Farin, 2000) ;

- une convexité constante (Kaklis et Ginnis, 1996) ;
- la qualité d'être continue, c'est-à-dire dont les dérivées sont continues ;
- une paramétrisation 'adéquate' c'est-à-dire la plus près possible de la paramétrisation par abscisse curviligne (Blanc et Schlick, 1996) ;
- une écriture compacte, c'est-à-dire dans le cas des NURBS, faible nombre de points de contrôle (Farin, 2000, Piegl et Tiller, 2000, Filip et Ball, 1989, Park *et al.*, 2000).

Certains de ces critères réfèrent à la forme des courbes et surfaces, donc à la fidélité du modèle, tandis que d'autres réfèrent à leur paramétrisation et à leur écriture mathématique, donc à l'utilisabilité du modèle. Cette structure semble tout à fait naturelle puisque les courbes et les surfaces B-spline, NURBS ou autres sont effectivement constituées de ces trois choses :

- la forme, qui est un attribut purement géométrique, un dessin, un objet ;
- la paramétrisation, qui est la vitesse de parcours le long de la courbe, vitesse de parcours en tout point de la surface, la transformation de l'espace paramétrique vers la forme en question ;
- l'écriture mathématique, parmi l'infinité possible : par exemple, pour les courbes de Bézier elle consiste en le degré, le vecteur nodal et les points de contrôle, alors que pour la spline équivalente, elle consiste en le degré, le vecteur nodal et les coefficients ; à l'intérieur d'une B-spline des noeuds peuvent être insérés, changeant du même coup la représentation, sans changer la forme ni la représentation.

Pour bien analyser la qualité d'une courbe ou d'une surface, il faut donc analyser ces trois composants. À noter que la forme est un attribut intrinsèque d'un objet comme du modèle de celui-ci, mais pas la paramétrisation ni l'écriture mathématique, qui sont des attributs propres au modèle. La section qui suit détaille ces idées et indique comment évaluer, visuellement et mathématiquement, la qualité des courbes et

surfaces en regard de ces caractéristiques. À noter que malgré que les résultats présentés dans ce mémoire portent sur la qualité des surfaces seulement, les mesures de qualité des courbes sont détaillées étant donné que ces idées sont reprises dans l'algorithme développé et dans certaines mesures de qualité des surfaces, dans celles bien connues autant que dans celles développées dans le cadre de ce travail.

1.4.1 Méthodes d'évaluation de la qualité des courbes

Il existe plusieurs approches pour sonder la qualité d'une courbe : méthodes visuelles pour apprécier la forme, description de la continuité, mesures d'énergie de déformation et appréciation de la paramétrisation. Les principales sont décrites brièvement dans ce qui suit.

1.4.1.1 Méthodes visuelles

La façon la plus intuitive de savoir si une courbe répond au besoin pour lequel elle a été créée est de la visualiser. Cette façon de faire est cependant assez limitée ; le tracé de la courbure donne plus d'information. Ce dernier met en relief de faibles variations de la courbe qui seraient autrement difficiles à détecter et dont l'ampleur serait difficile à évaluer (Poliakoff, 1995, Sapidis et Farin, 1990). La courbure est l'inverse du rayon de courbure du cercle épousant en un point la forme de la courbe. Par exemple, un segment de droite a une courbure nulle alors que son rayon de courbure est infini ; un coin a un rayon de courbure nul mais une courbure infinie. Le vecteur de courbure de la courbe $C(s)$ est définie mathématiquement comme $C''(s)$ (Lipschutz, 1969), s étant une paramétrisation par abscisse curviligne sur $[a, b]$, c'est à dire que $|\frac{dC}{ds}| = 1$. La courbure est la norme du vecteur courbure. Dans le cas général d'une paramétrisation u quelconque, le vecteur courbure est défini

comme suit :

$$\vec{k}(u) = \frac{\vec{C}'(u) \times \vec{C}''(u)}{|\vec{C}'(u)|^3},$$

où \times est le produit vectoriel et où la courbe est dérivée en fonction du paramètre u . Cette formule peut être mieux comprise en l'écrivant ainsi :

$$\vec{k}(u) = \frac{\vec{C}'(u)}{|\vec{C}'(u)|} \times \frac{\vec{C}''(u)}{|\vec{C}'(u)|^2}.$$

La dérivée deuxième est d'abord mise à l'échelle de la paramétrisation, puisque si localement la dérivée en u est k fois la dérivée de la paramétrisation par abscisse curviligne, $C''(ks) = k^2 C''(s)$. Ensuite, seule la composante perpendiculaire à la courbe du vecteur $\frac{\vec{C}''(u)}{|\vec{C}'(u)|^2}$ doit être considérée pour le calcul de la courbure. Cela s'explique par une analogie avec la physique mécanique ; si $C(t)$ décrit la trajectoire d'une particule dans le temps, seule l'accélération dans la direction perpendiculaire au mouvement fait changer la particule de trajectoire ; l'accélération dans la direction parallèle au mouvement change seulement la grandeur de sa vitesse. En pratique cependant, l'approximation $|C''(u)|$ est souvent utilisée, en supposant que la grandeur de la dérivée est à peu près constante le long de la courbe (Zhang *et al.*, 2001).

1.4.1.2 Continuité

Une autre qualité généralement importante pour une courbe est celle d'être continue (Farin, 1982). La continuité paramétrique C^r d'une courbe indique le nombre de fois qu'elle peut être dérivée et donner une dérivée continue. Ceci est une caractéristique importante pour la forme, puisque plus une courbe est continue plus elle est régulière. La continuité est aussi importante pour l'utilisation ultérieure de la

courbe puisque plusieurs algorithmes se servent des dérivées. Autre caractéristique importante quant à la forme ; une courbe est dite de continuité géométrique r ou G^r si la dérivée de degré r est continue en direction, sans l'être nécessairement en norme. Par exemple, une courbe G^1 est une courbe où la direction du vecteur tangent est continue tout au long de la courbe, mais pas nécessairement sa grandeur. Une courbe C^r est automatiquement G^r , sauf que dans le cas où la dérivée d'une courbe est nulle en un point, la courbe serait tout de même visuellement discontinue à ce point. Ce cas particulier de dérivée nulle est normalement à éviter. Par contre, la continuité géométrique n'implique pas nécessairement la continuité paramétrique. À noter que la continuité géométrique est un critère de forme local et non global : une courbe pourrait être représentée par des segments de droite, et donc être localement peu continue tout en étant globalement très régulière, alors qu'une autre courbe, dérivable plusieurs fois et donc localement très continue pourrait présenter de grandes oscillations et être globalement très peu régulière. Une autre caractéristique importante d'une courbe est sa convexité. En deux dimensions, la convexité est définie comme le signe de la courbure (Lipschutz, 1969). En trois dimensions, c'est plus complexe, mais il est possible de projeter la courbe sur des plans et d'analyser la convexité des courbes ainsi construites.

1.4.1.3 Énergie de déformation

Les méthodes d'appréciation des courbes décrites jusqu'ici sont certes importantes et utiles, mais elles ne permettent de comparer la régularité des courbes que de façon limitée et subjective ; des mesures mathématiques ont donc été développées pour ce faire, et l'énergie de déformation (*strain energy*) semble la plus utilisée. L'énergie d'une courbe est simplement définie comme l'intégrale de la courbure au carré, sur toute la courbe (Poliakoff, 1995). Évidemment, plus l'énergie d'une

courbe est faible, plus la courbe est régulière. Ici aussi, la dérivée deuxième est souvent utilisée pour approximer l'énergie (Zhang *et al.*, 2001, Poliakoff, 1995); certains utilisent même la dérivée troisième. Il existe des expressions permettant d'approximer l'énergie d'une courbe de façon plus rapide et facile à évaluer, pour utilisation dans un algorithme par exemple, qui sont basées sur le polygone de contrôle de celle-ci (Farin, 2000). En effet, si le polygone de contrôle est assez régulier, la courbe l'est aussi, en vertu entre autre de la propriété de la diminution de la variation. Un critère tout simple, donné dans Farin, 2000, utilise la somme des différences finies deuxièmes sur les points de contrôle d'une courbe : $\Delta^2 P_i = |\vec{P}_{i+1} - 2\vec{P}_i + \vec{P}_{i-1}|$, avec comme justification que cette expression s'annule pour trois points alignés et situés à égale distance. Contrairement à l'énergie de déformation, une telle méthode dépend non seulement de la forme de la courbe mais aussi de sa représentation.

1.4.1.4 Paramétrisation par abscisse curviligne

Finalement, la paramétrisation d'une courbe est très importante dans une foule d'algorithmes : discrétisation, adaptation de maillage, intersection, projection. Il est donc souhaitable, mais pas absolument nécessaire, que la paramétrisation d'une courbe soit par abscisse curviligne, ou du moins telle que $|C'(u)|$ soit constante sur toute la courbe. Cette définition pratique est utilisée dans le reste du texte, même si elle relâche celle, formelle, provenant de Lipschutz, 1969, qui veut que la grandeur de la dérivée soit non seulement constante en tout point de la courbe mais aussi égale à 1. À noter que dans la littérature consultée, il n'était aucunement fait mention d'une mesure de conformité d'une courbe à une paramétrisation par abscisse curviligne, mais il semble facile d'en définir une au besoin.

1.4.2 Méthodes d'évaluation de la qualité des surfaces

Il existe également plusieurs approches pour sonder la qualité d'une surface, calquées en fait sur celles pour sonder la qualité des courbes : méthodes visuelles pour apprécier la forme, description de la continuité, mesures d'énergie de déformation et appréciation de la paramétrisation. Les principales sont décrites dans ce qui suit.

1.4.2.1 Méthodes visuelles

Comme pour les courbes, la première chose à faire pour savoir si une surface est satisfaisante est de la visualiser. Comme pour les courbes, des techniques plus élaborées existent pour permettre une analyse plus fine, telles que les *highlight lines* et les isophotes. Les *highlight lines* sont produites par la réflexion sur la surface d'une série de sources spéculaires en forme de segments de droites, disposées de façon parallèle dans un plan (Zhang *et al.*, 2001). Chacune des *highlight lines* constitue la réflexion d'une source sur la surface, vue par cette même source (Zhang et Chang, 1998). Elles donnent donc une bonne idée de la régularité de la surface puisqu'elles dépendent de sa normale. Les isophotes sont quant à elles des lignes d'isocourbure sur la surface (Hahmann et Konz, 1998). Qu'est-ce que la courbure d'une surface ? La courbure à proprement parler est un attribut d'une courbe. Pour les surfaces, plusieurs définitions existent, et parmi elles la courbure gaussienne, produit des courbures minimale et maximale, semble un bon choix (Hahmann et Konz, 1998). La courbure minimale (maximale) est la courbure sur la surface dans la direction où elle est minimale (maximale). Le signe de la courbure gaussienne donne donc de l'information sur la convexité de la surface en un point. Une courbure gaussienne positive indique une surface localement convexe ou concave (point elliptique), une courbure gaussienne négative indique des courbures de signes inverses (point hy-

perbolique), et une courbure gaussienne nulle indique que la courbure est nulle soit dans une des deux directions (point parabolique), soit dans les deux (point planaire). C'est une caractéristique intrinsèque de la surface, indépendante de sa représentation, puisqu'elle est définie comme le produit des courbures minimale et maximale, des attributs purement géométriques. Pour plus d'explications sur la façon de calculer la courbure gaussienne, voir Lipschutz, 1969. Une autre méthode largement utilisée consiste à intersecter la surface avec des plans, et de considérer la qualité des courbes ainsi produites.

1.4.2.2 Continuité

Comme pour les courbes, il est possible de caractériser mathématiquement les attributs souhaitables des surfaces, dont la continuité. Il existe plusieurs types de continuité pour les surfaces, les principales étant les continuités paramétrique, géométrique (stricte) et du plan tangent. La continuité paramétrique C^n est définie dans les deux directions paramétriques : une surface est dite C^n en u (en v) si elle est n fois continûment dérivable en u (en v) (Piegl et Tiller, 1997). La continuité géométrique possède plusieurs niveaux différents, mais les termes utilisés varient et les définitions sont parfois contradictoires d'une référence à l'autre. Le niveau G^n le plus sévère exige que la surface soit C^n à une reparamétrisation près (DeRose, 1990, Zheng *et al.*, 2001); autrement dit, les n premières dérivées sont identiques à une constante près, constante qui est la même tout au long de la jonction entre deux morceaux de surfaces, ainsi que pour tous les niveaux de dérivées en cause. Par exemple, une surface plane carrée de degrés $p = q = 1$ avec neuf points de contrôle (3×3) disposés en une grille parfaitement régulière, mais avec les vecteurs nodaux suivants : $U = \{0, 0, 0.5, 1, 1\}$ et $V = \{0, 0, 0.4, 1, 1\}$ serait C^1 en u mais G^1 seulement en v . Cette définition peut être en pratique plus restrictive

que nécessaire. Dans l'exemple de la surface plane, un léger déplacement du point de contrôle du centre donnerait une surface ne répondant à la première définition donnée dans aucune des deux directions, même si géométriquement la surface est bel et bien plane. D'où la définition de la continuité du plan tangent, qui exige que les trois dérivées partielles suivantes soient coplanaires : celle le long de la jonction entre les morceaux de surface et celles dans l'autre direction paramétrique sur chacun des morceaux (Filip et Ball, 1989, Hui, 1999, Tookey et Ball, 1997, Liu, 1990, Farin, 1982). Cette définition est aussi appelée continuité de la normale, puisque la normale est calculée comme le produit vectoriel des dérivées partielles dans chacune des directions paramétriques et correspond à la normale du plan tangent. Des conditions sur les points de contrôle des surfaces existent pour vérifier la continuité de la normale. Si ces conditions ne sont pas remplies, il est assez facile de vérifier et de quantifier la non-conformité d'une surface à la continuité de la normale, en calculant l'angle entre les plans tangents.

1.4.2.3 Énergie de déformation

Le degré de continuité et la convexité sont certes des caractéristiques importantes, mais il est nécessaire d'avoir des outils qui permettent de comparer la forme de surfaces ayant des caractéristiques semblables, en particulier qui permettent de chiffrer la régularité d'une surface. Il est également nécessaire de pouvoir le faire objectivement, plutôt que seulement subjectivement par des techniques de visualisation. La principale méthode pour ce faire est de calculer l'énergie de déformation, ou encore son approximation par des mesures sur la grille de contrôle. L'énergie de

déformation d'une surface est définie, selon Zhang *et al.*, 2001, comme

$$E = \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial u^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial u \partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial v^2} \right)^2 \right] dudv.$$

C'est en fait une approximation de la véritable énergie de déformation d'une surface, dont la formule n'est donnée dans aucune des références consultées, un peu comme la dérivée deuxième d'une courbe sert à approximer l'énergie de celle-ci. C'est une mesure à la fois de la régularité de la géométrie et de la régularité de la paramétrisation. Ceci peut être illustré par un exemple simple : une surface plane carrée de degré $p = q = 2$ définie par une grille parfaitement régulière de 3×3 points de contrôle. L'équation d'une telle surface définie sur $[0, 1] \times [0, 1]$ est $S(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + 0\vec{k}$. L'énergie de cette surface est nulle, puisque les dérivées partielles à partir desquelles elle est calculé sont toutes trois nulles en tout point de la surface. Maintenant, si par exemple le point $(0, 0, 0)$ est placé dans le plan $z = 1$ plutôt que dans le plan $z = 0$ comme les autres, comme illustré aux figures 1.4 et 1.5, la surface se trouve modifiée et s'écrit $S(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (1 - 2u + u^2)(1 - 2v + v^2)\vec{k}$. L'énergie est alors non nulle, puisque qu'elle est la somme au carré des trois dérivées partielles qui sont non nulles dans la direction \vec{k} . L'énergie prend donc en compte la forme de la surface.

L'énergie prend également en compte la paramétrisation comme l'illustre l'exemple suivant. Si le point de contrôle du centre de la surface plane est déplacé en x de 0.5 à 0.75, tel qu'illustré à la figure 1.6, l'équation de la surface devient : $S(u, v) = [u + (u - u^2)(v - v^2)]\vec{i} + v\vec{j}$. La forme ne change pas mais la paramétrisation est différente. Ainsi, les trois dérivées partielles entrant dans le calcul de l'énergie sont non nulles, et par le fait même l'énergie également.

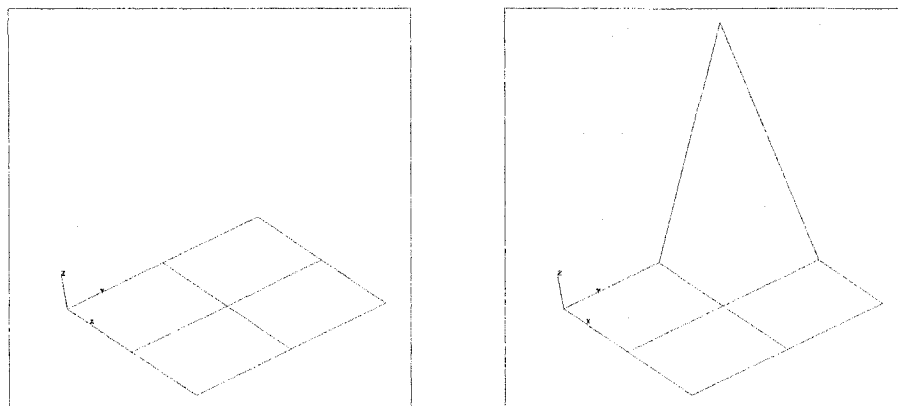


FIG. 1.4 Grille de contrôle de deux surfaces exemples : plan à gauche et plan dont le point de contrôle $(0, 1, 0)$ a été déplacé en $(0, 1, 1)$.

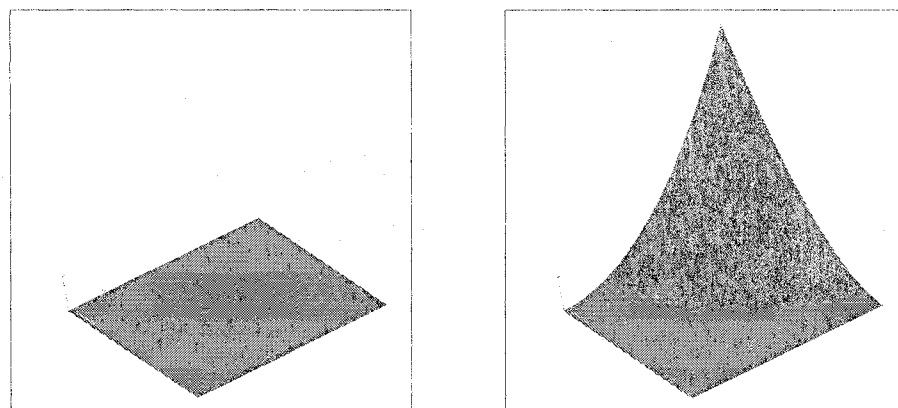


FIG. 1.5 Deux surfaces exemples : plan à gauche et plan dont le point de contrôle $(0, 1, 0)$ a été déplacé en $(0, 1, 1)$.

Il est dit dans Farin, 2000 qu'il existe plusieurs approximations pour l'énergie d'une surface, mais une seule est donnée : $|\vec{Q}_{k,l} - \vec{Q}_{k+1,l} - \vec{Q}_{k,l+1} + \vec{Q}_{k+1,l+1}|$ qu'il utilise comme expression à minimiser dans un système d'équations surdéterminé servant à la construction d'une surface approximant un grand nombre de points. L'ajout de cette équation tend à produire une surface où les points de contrôle forment quatre à quatre des parallélogrammes, la condition pour que l'expression s'annule. Le lien avec l'énergie n'est pas très clair cependant ; il semble en effet qu'une mesure

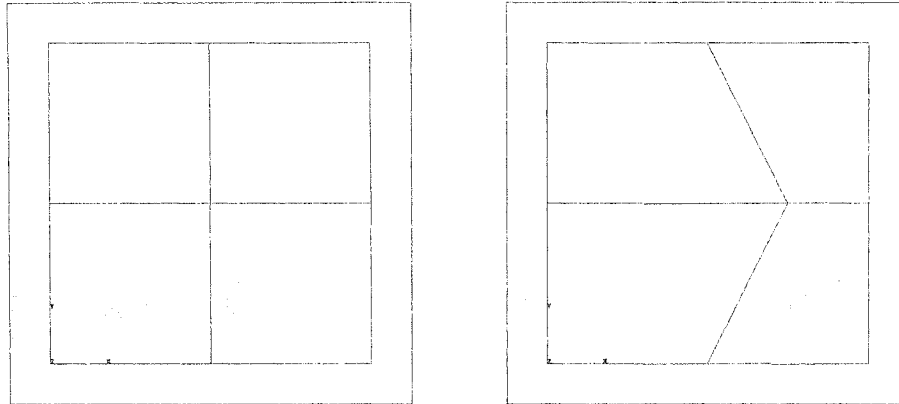


FIG. 1.6 Deux surfaces exemples : plan à gauche et plan dont le point de contrôle du centre est déplacé de $(0.5, 0.5)$ à $(0.5, 0.75)$.

basée sur cette expression soit plus liée à la paramétrisation qu'à la forme de la surface comme telle. Par exemple, une surface interpolant linéairement deux courbes de degré supérieur à 1 ayant chacune un polygone de contrôle en forme de 'Z' annulerait cette expression, sans pour autant que son énergie soit nulle. À l'inverse, en reprenant l'exemple de la surface plane carrée où le point du centre est déplacé sur le plan à l'intérieur de la surface, il est clair que la paramétrisation influence cette mesure, même si la forme ne change pas!

1.4.2.4 Paramétrisation

En terminant, il ne semble pas y avoir pour les surfaces de définition équivalente à la paramétrisation par abscisse curviligne donnée pour les courbes, malgré que cette notion intuitive semble assez répandue. Cette idée est précisée en 2.1.4.

1.5 Génération de maillage

Le calcul de maillages de surface est nécessaire pour l'analyse de qualité de celles-ci, et la génération de maillage est utilisée dans l'analyse des résultats produits par les méthodes de construction de surfaces. L'idée ici est donc de donner une brève introduction au sujet, basée sur Frey et George, 1999. D'abord, les maillages sont définis comme une collection d'éléments; dans l'espace bidimensionnel ou sur une surface dans l'espace tridimensionnel, les éléments sont généralement des triangles ou des quadrilatères, et en trois dimensions ce sont généralement des tétraèdres ou des hexaèdres. Un fichier de maillage comprend essentiellement des points, appelés sommets, et une table de connectivité, qui donne les sommets de chacun des éléments. Le maillage peut être structuré, c'est-à-dire constitué d'un arrangement régulier d'éléments ayant une connectivité implicite, ou non structuré. Un maillage structuré est calculé en discrétisant les entités topologiques en ordre croissant de dimension : les arêtes d'abord, les faces ensuite, puis les volumes.

Discrétiser une arête est très simple, du moins du point de vue conceptuel, puisqu'une arête n'a qu'une seule dimension : il s'agit de répartir le nombre de points voulus le long de celle-ci, avec une concentration donnée. Il n'y a aucune ambiguïté, aucun degré de liberté une fois le nombre de points et la concentration spécifiés. Pour générer un maillage structuré sur une face ou dans un volume par contre, il existe plusieurs méthodes, puisque ces entités comportent plus d'une dimension, deux et trois respectivement. Une des plus utilisées est la méthode transfinie, qui est ici décrite pour une face en deux dimensions. Comme entrée la méthode transfinie pour les faces planes prend les arêtes A_1 et A_3 discrétisées par n paramètres u_i et les arêtes A_2 et A_4 discrétisées par m paramètres v_j . Les paramètres u_i et v_j sont également donnés en entrée. La convention utilisée pour les arêtes est illustrée en 1.7, et les arêtes discrétisées sont notées $\forall i = 1..n A_{1,i}, A_{3,i}$ et $\forall j = 1..m A_{2,j}, A_{4,j}$.

Un maillage transfini $\forall i = 1..n, j = 1..m$ $M_{i,j}$ est calculé à partir de trois maillages intermédiaires, comme suit :

$$M_{i,j} = L_{1,i,j} + L_{2,i,j} - B_{i,j}$$

où L_1 et L_2 interpolent linéairement la discrétisation des arêtes $\forall k = 1..4$ A_k deux à deux, comme suit :

$$L_{1,i,j} = (1 - u_i)A_{2,j} + u_iA_{4,j}$$

$$L_{2,i,j} = (1 - v_j)A_{1,i} + v_jA_{3,i}$$

alors que B interpole de façon bilinéaire les quatre sommets $\forall l = 1, 2, m = 1, 2$ $S_{l,m}$ correspondants (voir 1.7) :

$$B_{i,j} = (1 - u_i)(1 - v_j)S_{1,1} + (1 - u_i)v_jS_{1,2} + u_i(1 - v_j)S_{2,1} + u_iv_jS_{2,2}.$$

Dans le cas d'une surface dans l'espace tridimensionnel, l'interpolation est faite dans l'espace paramétrique de la surface, c'est-à-dire que des points (u, v) sont d'abord calculés, puis la surface est évaluée en ces points pour obtenir le maillage dans l'espace tridimensionnel.

La méthode transfinie est l'équivalent de la méthode d'interpolation de Coons pour construire une surface à partir de quatre courbes dans l'espace (Piegl et Tiller, 1997). La soustraction de la surface bilinéaire ramène le contour du maillage final sur les quatre arêtes ; par exemple, $M_{1,j} = A_{2,j}$ puisque $M_{1,j} = A_{2,j} + L_{2,1,j} - B_{1,j}$ et que $L_{2,1,j}$ et $B_{1,j}$ sont identiques, puisqu'ils interpolent linéairement les deux mêmes points (voir la figure 1.8). Cette méthode est facile et rapide à implanter, et rapide

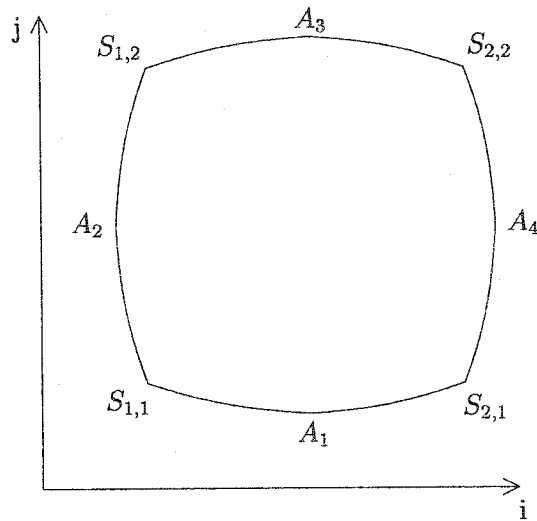


FIG. 1.7 Convention de noms et d'axes utilisée pour la définition du maillage transfini.

à l'exécution. Par contre, elle peut produire des maillages non valides : les lignes de maillage peuvent s'intersecter et les sommets à l'intérieur du maillage peuvent se retrouver à l'extérieur du domaine dans le cas de géométries concaves. Pour lisser les maillages et tenter de régler ces problèmes, plusieurs autres méthodes existent, mais cela sort du cadre de ce mémoire.

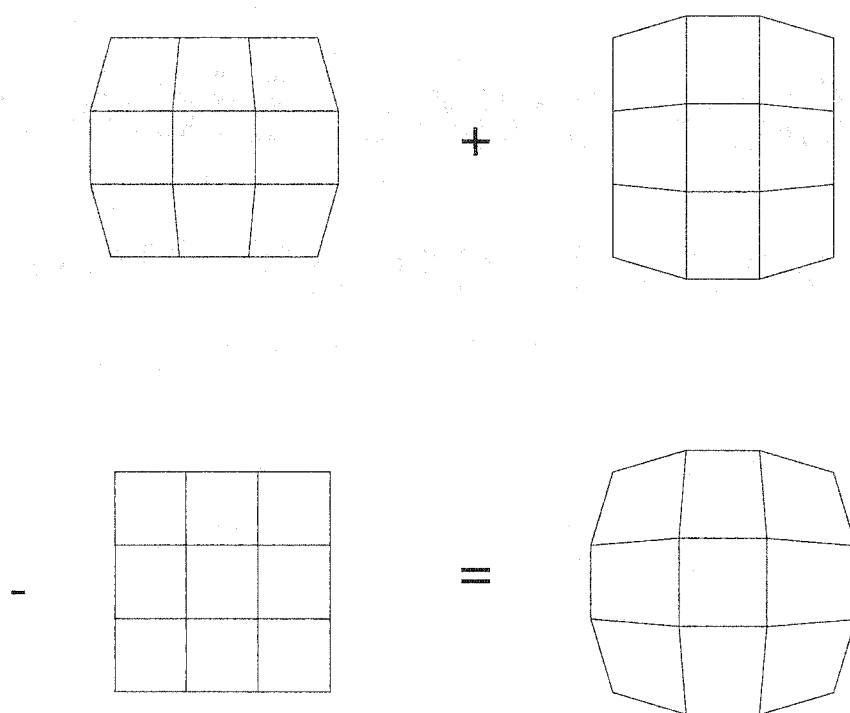


FIG. 1.8 Calcul d'un maillage transfini à partir des trois maillages intermédiaires.

CHAPITRE 2

MÉTHODOLOGIE

Ce travail de recherche vise à développer des algorithmes d'interpolation de courbes NURBS par une surface qui soient aussi génériques que possible, tout en répondant aux besoins exprimés par GE pour la construction de modèles géométriques de diffuseurs, où les courbes de section sont des courbes NURBS brisées. L'objectif principal est d'obtenir des surfaces les plus régulières possibles, les plus compactes possible en terme de nombre de points de contrôle et idéalement dont la paramétrisation est par abscisse curviligne.

2.1 Méthodes utilisées pour l'évaluation des surfaces

L'évaluation de la taille des données est triviale, comme mentionné dans la revue de la littérature. Cependant, les méthodes utilisées pour évaluer la régularité des surfaces et la qualité de leur paramétrisation nécessitent une description plus détaillée.

2.1.1 Continuité paramétrique et géométrique

La première analyse à faire quant à la régularité d'une surface est de quantifier sa continuité. La continuité paramétrique est quantifiée simplement en observant la définition de la surface. La quantification de la continuité géométrique, qui peut être de degré supérieur à la continuité paramétrique, nécessite par contre une analyse

expérimentale. Dans le présent contexte donc, les surfaces sont C^0 continues dans la direction u , mais pourraient également être continues au sens du plan tangent. Pour calculer localement l'angle entre les plans tangents donc, la normale est évaluée à deux points distincts : un situé directement sur la ligne de discontinuité (à (u_k, v_l) , u_k étant un noeud de multiplicité p) et l'autre à $(u_k - \delta u, v_l)$, de façon à ce que les points soient situés dans des intervalles nodaux adjacents, et donc sur des morceaux de surface adjacents et non sur le même morceau de surface.

2.1.2 Méthodes visuelles

Une fois les degrés de continuité paramétrique et géométrique établis, les premières façons de faire pour analyser la régularité des surfaces obtenues sont la visualisation des surfaces dans Vu, un logiciel de visualisation scientifique développé à l'École Polytechnique (Ozell et Pic, 2003). Six techniques de visualisation sont utilisées : la visualisation des lignes de discontinuité, de la surface pleine avec effets de lumière, ainsi que de la grille de contrôle, de la courbure gaussienne, de la courbure le long de courbes isoparamétriques, et de maillages de la surface. Certaines sont décrites en 1.4.2, les autres sont expliquées dans ce qui suit.

2.1.2.1 Visualisation de la grille de contrôle

Cette dernière technique n'est mentionnée explicitement dans aucune des références consultées, bien qu'elle soit utilisée dans quelques unes (dont Piegl et Tiller, 1997, Farin, 2000). C'est une technique simple qui permet de se faire rapidement une bonne idée de la forme de la surface entière, étant donné que ce sont d'abord les points de contrôle qui donnent la forme à la surface. De plus, comme les algorithmes développés dans ce travail servent en grande partie à calculer des points de contrôle,

il est primordial de pouvoir les voir. La visualisation de la grille de contrôle permet d'analyser plus finement les résultats. Comparativement à la visualisation de la surface pleine, elle facilite la détection des replis ou variations indésirables, qui peuvent alors difficilement passer inaperçu puisque la grille de contrôle accentue les variations de la surface, et donne une représentation discrète de celles-ci. La visualisation de la grille de contrôle permet également de se faire une meilleure idée des problèmes pouvant survenir, tel que des replis ou des oscillations, en montrant de façon intuitive comment la surface est spécifiée. Pour utiliser cette technique, il suffit de construire la surface bilinéaire formée par la grille de contrôle d'une surface initiale, puis de visualiser les lignes de discontinuité de cette surface. La visualisation de la grille de contrôle ne remplace pas la visualisation de la surface comme telle ou de ses lignes de discontinuité, mais plutôt la complète, permet d'analyser plus en détail une surface, au travers de sa définition. Cette méthode est aussi valable pour les courbes.

2.1.2.2 Visualisation de la courbure gaussienne

La courbure gaussienne est utilisée pour analyser la courbure locale (voir 1.4.2.1 pour sa définition). Pour visualiser la courbure gaussienne dans l'environnement **Pirate**, la méthode retenue est de calculer un maillage de la surface et de calculer la courbure gaussienne en chaque sommet de celui-ci. Le logiciel Vu permet ensuite de visualiser le maillage, coloré en chaque point selon la valeur de la courbure gaussienne associée et selon la plage de visualisation $[a, b]$ spécifiée. Les valeurs inférieures à la borne a sont affichées de la même couleur que la valeur a et les valeurs supérieures à la borne b sont colorées comme la valeur b . Cela permet de visualiser plus finement les zones d'intérêt, autour de 0 en particulier, mais au prix d'une perte de vue plus générale. Les autres méthodes de visualisation des surfaces

telles que les isophotes et les *highlight lines* semblent plus appropriées pour un concepteur qui travaille directement à modifier une surface, qu'à un concepteur d'algorithme de construction de surface.

2.1.2.3 Visualisation de la courbure le long d'isoparamétriques

La courbure gaussienne telle qu'utilisée donne de l'information sur la convexité de la surface, mais peu sur la régularité de celle-ci. Les valeurs de courbure gaussienne peuvent varier sur une grande plage, alors que seule une échelle est utilisée à la fois, cachant du même coup les variations propres à d'autres échelles. Elle donne aussi une vue indirecte sur la courbure locale d'une surface, puisque c'est le produit de deux courbures; quelles sont ces courbures? Il semble que pour avoir de l'information sur la courbure, il faut la calculer et la visualiser directement. Comme la courbure est un attribut d'une courbe, et qu'une infinité de courbes sont définies par les isoparamétriques et u et v sur les surfaces, il apparaît que c'est une façon commode de sonder la forme de la surface. À noter qu'à un point donné sur la surface, cette méthode ne peut donner la courbure dans deux directions, parmi l'infinité de directions possibles. La méthode utilisée est de tracer un graphe de la courbure; c'est la seule méthode utilisée qui donne vraiment une idée précise de la régularité des surfaces. Par contre, il n'est possible avec cette méthode que de visualiser la courbure le long d'une seule ligne isoparamétrique et non de toute la surface, comme c'est le cas pour la courbure gaussienne.

2.1.2.4 Visualisation de maillage de surface

La visualisation de maillages de surface peut aussi compléter ces méthodes, mais d'une façon différente: il s'agit en quelque sorte d'une définition similaire mais plus

détaillée que celle des lignes de discontinuité sur la surface. Cette approche n'est pas utilisée systématiquement dans ce travail mais plutôt indirectement à travers les tests sur le maillage.

2.1.3 Mesures de régularité sur la grille de contrôle

Pour évaluer et comparer objectivement la régularité des surfaces, un nouveau critère est utilisé : la moyenne des angles au carré sur la grille de contrôle de la surface, appelé mesure de régularité. Cette mesure est définie comme suit, dans chacune des directions paramétriques :

$$E^u = \frac{1}{N(M-2)} \sum_{k=1}^N \sum_{l=2}^{M-1} [\theta_{k,l}^u]^2$$

avec

$$\forall k = 1..N, l = 2..M-1 \quad \theta_{k,l}^u = \angle(Q_{k-1,l}, Q_{k,l}, Q_{k+1,l})$$

et

$$E^v = \frac{1}{(N-2)M} \sum_{k=2}^{N-1} \sum_{l=1}^M [\theta_{k,l}^v]^2$$

avec

$$\forall k = 2..N-1, l = 1..M \quad \theta_{k,l}^v = \angle(Q_{k,l-1}, Q_{k,l}, Q_{k,l+1}).$$

Cette mesure est aussi utilisée pour comparer les résultats des différentes méthodes de choix de paramètres d'interpolation. La mesure consiste en fait en une moyenne de mesures sur les courbes, chacune des courbes correspondant dans les deux cas à la courbe qui passe par les points de contrôle des courbes de section ; dans le premier cas la mesure est basée sur des points par lesquels passeront la dite courbe, tandis

que dans le second cas la mesure est basée sur les points de contrôle eux-mêmes alors disponibles. Elle peut être comprise comme une approximation discrète de l'énergie. La mesure discrète proposée par Farin, 2000, $\Delta^2 P_i = |\vec{P}_{i+1} - 2\vec{P}_i + \vec{P}_{i-1}|^2$, n'est pas utilisée pour deux raisons. D'abord, elle n'est nulle que si les points sont alignés et également distancés. Or, il est clair que la distance entre les points varie dans le cas présent. Ensuite, même si les points sont également distancés, cette mesure est proportionnelle à $\sqrt{2 - 2 \cos \theta}$, θ étant l'angle entre trois points de contrôle consécutifs. En effet

$$|\vec{P}_{i+1} - 2\vec{P}_i + \vec{P}_{i-1}|^2 = |(\vec{P}_{i+1} - \vec{P}_i) - (\vec{P}_i - \vec{P}_{i-1})|^2,$$

ce qui est illustré à la figure 2.1.

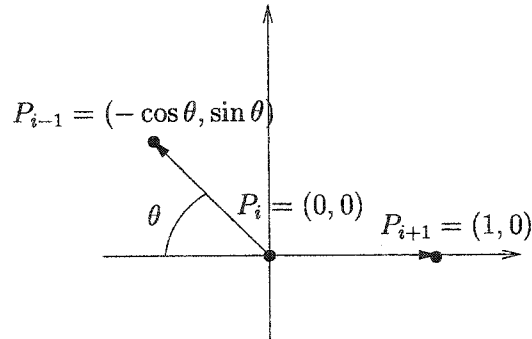


FIG. 2.1 Représentation vectorielle de la mesure de régularité par différence finie, dans le cas où la distance entre les points est unitaire.

Or, le vecteur résultant est pour cet exemple simplifié en deux dimensions où la distance entre les points est 1, est $(1 - \cos \theta, \sin \theta)$, alors la distance au carré est

$$(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 2 - 2 \cos \theta.$$

Cette fonction est illustrée à la figure 2.2.

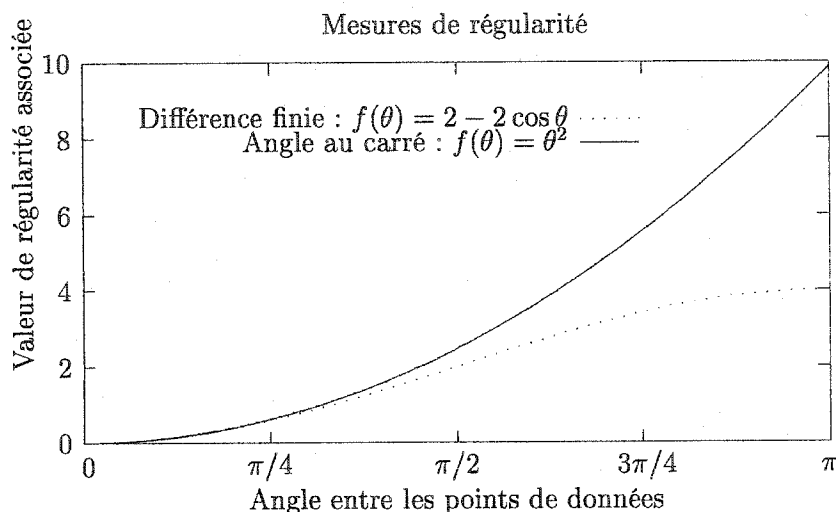


FIG. 2.2 Tracé des mesures de régularité en fonction de l'angle selon la différence finie et l'angle au carré.

Le comportement de cette fonction en fonction de l'angle est inapproprié sur la plage d'intérêt, soit de 0 à π . Le comportement approprié devrait avoir la forme d'une courbe strictement croissante, avec dérivée deuxième plus grande ou égale à zéro. Le choix de l'angle au carré est justifié par l'idée de pénaliser les grands angles, et de tenter de favoriser une répartition d'angles relativement égale partout (voir la figure 2.2). Par exemple, pour une courbe comprenant quatre points, donc deux angles, cette mesure favorise deux angles moyens plutôt que un grand et un petit, comme illustré à la figure 2.3.

De plus, la moyenne des angles au carré a une définition simple et intuitive, est facile et assez rapide à calculer, en plus d'être immédiatement disponible pour évaluer les surfaces, contrairement à l'énergie de déformation. Finalement, cette méthode ouvre la voie à des algorithmes automatiques de détection d'irrégularités dans les courbes et surfaces, basés par exemple sur un angle maximum, qui ont aussi été

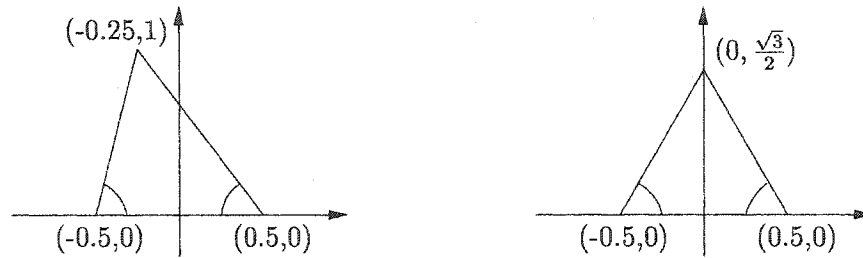


FIG. 2.3 Valeur de mesures d'énergie pour deux triangles : le triangle équilatéral minimise l'énergie.

utilisés dans le cadre de ce travail.

2.1.4 Paramétrisation

La qualité de la paramétrisation d'une surface, bien qu'elle soit une notion intuitive, ne semble pas posséder de définition formelle. Une formalisation possible de la paramétrisation par abscisse curviligne est que, à l'image de la définition d'une paramétrisation par abscisse curviligne donnée pour les courbes, les dérivées partielles en u et v doivent être de grandeur constante. Bien sûr, une telle paramétrisation n'existe pas pour la majorité des surfaces, mêmes planes, en supposant que l'espace paramétrique est rectangulaire $[a, b] \times [c, d]$, comme pour les NURBS. Le cercle est un bon exemple, même si l'espace paramétrique est carré, donc symétrique comme le cercle. Malgré tout, l'expression d'une telle paramétrisation idéale rend possible de mesurer la 'distorsion' d'une paramétrisation, l'écart à la paramétrisation l'idéale. Par exemple, des statistiques sur la longueur des arêtes d'une discrétisation transfinie de la surface pourraient être utilisées comme approximation discrète, telles que l'écart type, les minimum et maximum. De telles mesures sont d'ailleurs utilisées couramment dans la génération et l'adaptation de maillages non structurés. Il est également clair qu'il est impossible d'atteindre pour n'importe

quelle surface discrétisée de façon structurée par des quadrilatères des arêtes toutes de même longueur. Par contre, il semble possible d'atteindre un maillage ayant des longueurs d'arêtes constantes par ligne de maillage, c'est-à-dire que pour les points $\forall i = 1..n, j = 1..m$ $M_{i,j} = (u_{i,j}, v_{i,j})$ que

$$\forall i = 2..n - 1, j = 1..m \quad |M_{i,j} - M_{i-1,j}| = |M_{i+1,j} - M_{i,j}|$$

et

$$\forall i = 1..n, j = 2..m - 1 \quad |M_{i,j} - M_{i,j-1}| = |M_{i,j+1} - M_{i,j}|.$$

Un tel maillage existe vraisemblablement, puisque le calcul d'un tel maillage, une fois les frontières discrétisées de façon uniforme, implique le calcul des deux coordonnées de chacun des $(n-2)(m-2)$ points intérieurs à partir de $2(n-2)(m-2)$ contraintes. Cela définit donc un système de $2(n-2)(m-2)$ équations à autant d'inconnues. Un tel maillage, dans l'hypothèse où il existe effectivement pour n'importe quelle surface, approxime donc d'une certaine façon une paramétrisation où les dérivées partielles en u et v sont constante, mais par ligne iso- v et iso- u seulement, respectivement. C'est donc ce qui doit être idéalement atteint pour les surfaces à construire. L'évaluation de l'atteinte de cet objectif de paramétrisation par abscisse curviligne par lignes isoparamétriques est évalué subjectivement, de plusieurs façons : d'abord visuellement à travers la visualisation des lignes de discontinuité, de la grille de contrôle et d'un maillage transfini uniforme de la surface, ou indirectement à travers l'approximation choisie pour l'énergie. Ces façons de faire, bien que limitées, sont suffisantes pour atteindre le but visé dans le cadre de ce travail.

2.2 Algorithme d'interpolation des courbes développé

Avant d'entrer dans les détails de l'algorithme d'interpolation des courbes développé dans le cadre de ce travail, certaines définitions sont nécessaires. La convention utilisée pour les indices des noeuds et des points de contrôle est la suivante : l'indice i va de 1 à n_j , nombre de noeuds ou de points de contrôle de la courbe $C_j(u)$, alors que l'indice k va de 1 à N , le nombre de noeuds ou de points de contrôle des courbes compatibles qui est aussi celui de la surface dans la direction u .

2.2.1 Définitions

Définition 1 Une *courbe de section* est une courbe décrivant une section d'un objet. Dans le présent travail, ces courbes sont formées de segments de droite et de quarts d'ellipse et reposent dans des plans. Elles sont représentées par des courbes de Bézier rationnelles par morceaux de degré $p = 2$, soient des NURBS avec des noeuds internes de multiplicité $p = 2$.

Définition 2 Un *noeud double* est un noeud interne de multiplicité deux. Dans le présent contexte, c'est un noeud interne de multiplicité $p = 2$ dans une courbe de section $C_j(u)$ du même degré.

Définition 3 Un *noeud de brisure* est un noeud double $u_{i,j}^d$ originalement présent dans les courbes de section.

Définition 4 Un *point de brisure* est un point sur une courbe de section qui correspond à un noeud de brisure, et qui coïncide avec un point de contrôle. Les courbes sont C^0 continues à de tels points.

Définition 5 Une *ligne de discontinuité* est une ligne dans une surface à travers laquelle la surface n'est pas infiniment dérivable. Dans une surface NURBS, une ligne de discontinuité coïncide nécessairement avec une ligne isoparamétrique correspondant à un noeud du vecteur nodal, c'est-à-dire à la jonction entre deux morceaux de surface. Les surfaces sont infiniment dérivables de façon continue à l'intérieur des morceaux de surfaces. Dans le présent travail, les lignes de discontinuité d'intérêt sont C^0 et correspondent à des iso- u .

Définition 6 Une *contrainte* C^0 groupe des noeuds doubles $u_{i,j}^d$ provenant de différentes courbes en un seul noeud double u_k dans la surface. Par le fait même, une seule ligne de discontinuité C^0 passe par l'ensemble des points de brisure associés.

Définition 7 Une *séquence de noeuds* est l'ensemble des noeuds formant le vecteur nodal d'une courbe $C(u)$ ou d'une surface $S(u, v)$. Un ensemble n'admet pas de répétition des éléments, donc les noeuds doubles du vecteur nodal n'apparaissent qu'une seule fois et la séquence de noeuds est strictement croissante.

Définition 8 Un *point libre* est un point de brisure qui doit être inséré dans la courbe $C_j(u)$ pour qu'elle soit compatible avec les autres courbes de section en vue de l'interpolation. Ces points sont dits libres puisqu'ils peuvent être insérés n'importe où à l'intérieur d'un segment de courbe donné, c'est-à-dire entre deux paires de noeuds doubles consécutifs.

Définition 9 Un *noeud libre* est un noeud double $u_{k,j}^f$ qui doit être inséré dans la courbe $C_j(u)$ pour qu'elle soit compatible avec les autres courbes de section en vue de l'interpolation, c'est-à-dire qu'elle soit définie avec le même nombre de noeuds et de points de contrôle. La valeur du noeud inséré est imposée par le vecteur nodal

commun, mais le point de brisure associé peut être inséré à un endroit au choix, à l'intérieur du segment de courbe où se trouve ce noeud. La valeur d'un noeud libre correspond à l'endroit où le point de brisure est inséré. Voir la figure 2.4.

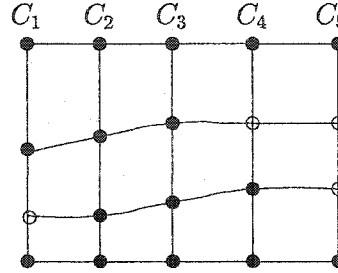


FIG. 2.4 Grille de noeuds composée de noeuds de brisure et de noeuds libres, représentés par des ronds pleins et vides respectivement.

Définition 10 Une *grille de noeuds* est une grille rectangulaire de noeuds $u_{k,j}^g$ sur $k = 1..N, j = 1..m$ comprenant les séquences de noeuds des courbes compatibles. Cela comprend donc les noeuds de brisure et les noeuds libres. Voir la figure 2.4.

Définition 11 Une *partition* est un sous-ensemble de colonnes de la grille de noeuds, c'est-à-dire $u_{k,j}^g$ sur $k = k_1..k_2, j = 1..m$. La division de la grille de noeuds en partitions, basée sur des connaissances liées à l'application spécifique, permet de guider et simplifier grandement le calcul des contraintes.

2.2.2 Critère utilisé dans l'algorithme

La mesure de régularité décrite en 2.1.3 ne peut être utilisée directement dans l'algorithme qui sélectionne les meilleures contraintes, puisqu'à ce moment les points de contrôle de la surface finale ne sont pas encore calculés. Il faut donc se replier sur l'information disponible à ce moment, c'est-à-dire la grille de noeuds et les courbes,

pour mesurer la régularité des lignes de discontinuité. L'idée est de reprendre la moyenne des angles au carré, mais sur les points de passage des lignes de discontinuité sur les courbes, c'est-à-dire sur les points de brisure et les points calculés par l'évaluation des courbes aux noeuds libres. Aussi, la mesure est pertinente seulement dans la direction de l'interpolation. Finalement, seule la somme est calculée, puisque le nombre d'angles est le même pour chacune des contraintes à comparer ; il serait inutile de diviser par le nombre d'angles pour obtenir la moyenne. La mesure est donc définie comme suit :

$$E^d = \sum_{k=1}^N \sum_{j=2}^{m-1} [\theta_{k,j}^d]^2$$

avec

$$\forall k = 1..N, j = 2..m-1 \quad \theta_{k,j}^d = \angle(D_{k-1,j}, D_{k,j}, D_{k+1,j}).$$

Les $D_{k,j}$ représentent les point de passage sur les courbes de section des lignes de discontinuité, d'où le 'd' dans E^d et θ^d .

2.2.3 Pseudo-code de l'algorithme complet

Entrée :

Courbes de section de Bézier rationnelles par morceaux.

Sortie :

Surface interpolant les courbes de section.

Algorithme :

// Rendre les courbes compatibles

Placer les noeuds de brisure des courbes en proportion de la longueur d'arc

Calculer les noeuds de brisure sur chaque courbe (la séquence de noeuds)
 // Calculer la grille de noeuds
 Diviser les noeuds en partitions prédéterminées,
 selon leur position sur les courbes de section
 POUR chacune des partitions FAIRE
 Calculer le nombre de contraintes n_c : c'est le nombre de noeuds
 de brisure (dans la partition) de la courbe de section qui
 en contient le plus (dans la partition)
 // Calculer le nombre de configurations possibles n_p pour les contraintes
 Initialiser n_p à 1
 POUR chacune des courbes de section FAIRE
 SI c'est la première courbe OU la courbe courante
 n'a pas le même nombre de noeuds que la précédente ALORS
 n_p est multiplié par le nombre d'arrangements possibles sur la
 courbe courante comportant n_j noeuds dans la partition,
 c'est-à-dire par $\frac{n_c!}{(n_c - n_j)! n_j!}$, avec n_c le nombre de contraintes
 POUR chacune des n_p configurations possibles FAIRE
 Placer les noeuds de brisure dans la grille de noeuds
 Placer les noeuds libres dans la grille de noeuds, avec le lissage naïf
 Calculer la mesure de régularité des lignes de discontinuité
 SI la mesure est plus faible que la mesure minimale ALORS
 Mémoriser la nouvelle mesure minimale
 Mémoriser la configuration
 // Ici la grille de noeuds est calculée
 Recalculer la grille de noeud pour la configuration optimale,
 avec le lissage parabolique
 Insérer les noeuds libres dans les courbes de section

Calculer le vecteur nodal en u de la surface : moyenne de ceux des courbes
 // Ici les courbes sont compatibles
 // Interpoler les courbes compatibles
 Calculer les paramètres d'interpolation \bar{v}_j
 Calculer le vecteur nodal en v
 Calculer les dérivées imposées aux extrémités
 Calculer les points de contrôle et les poids

2.2.4 Pseudo-code de l'algorithme de lissage

Algorithme : Placer les noeuds libres dans la grille de noeuds

// Calculer les noeuds libres selon le lissage naïf, partition par partition
 POUR chacune des contraintes FAIRE
 Trouver la courbe $C_j(u)$ d'indice minimal j_{min} ayant
 un noeud de brisure dans cette contrainte
 POUR chacune des courbes ayant un indice inférieur à j_{min} ,
 en ordre décroissant FAIRE
 Placer le noeud libre $u_{k,j}^g$ à la même valeur que le noeud sur
 la courbe d'indice supérieur ($u_{k,j+1}^g$)
 SI $u_{k,j}^g$ n'est pas dans l'intervalle $[u_{k,j}^g - \epsilon, u_{k,j}^g + \epsilon]$ ALORS
 Ramener le noeud $u_{k,j}^g$ à la borne la plus proche
 Trouver la dernière courbe $C_j(u)$ ayant un noeud de brisure dans
 cette contrainte
 Procéder de la même façon pour les courbes ayant un indice supérieur
 à la courbe en question
 // Ici le lissage naïf est complété

```

// Calculer les noeuds libres selon le lissage parabolique
POUR chacune des contraintes FAIRE
    Trouver la courbe  $C_j(u)$  d'indice minimal  $j_{min}$  ayant
    un noeud de brisure dans cette contrainte
    Placer "calculer parabole" à VRAI
    POUR chacune des courbes ayant un indice inférieur à  $j_{min}$ ,
    en ordre décroissant FAIRE
        SI "calculer parabole" est à vrai ALORS
            Calculer les paramètres de la parabole
            Placer "calculer parabole" à FAUX
            Calculer le noeud libre d'après la parabole
            SI le noeud libre croise un de ses deux voisins ALORS
                Placer le noeud libre à  $\epsilon$  de ce voisin
                Placer "calculer parabole" à VRAI
    Procéder de la même façon pour les courbes ayant un indice supérieur
    à la courbe en question

```

2.3 Algorithme pour rendre les courbes compatibles

L'algorithme développé pour rendre les courbes de section compatibles en vue de leur interpolation par une surface est expliqué et justifié dans ce qui suit. Les idées générales du calcul de la grille de noeuds, étape cruciale, sont exposées en 2.3.1. Les détails et le reste de l'algorithme sont donnés dans les sous-sections suivantes.

2.3.1 Calculer la grille de noeuds : idées générales

Le calcul de la grille de noeuds consiste à calculer le regroupement des noeuds de brisure, c'est-à-dire les contraintes, ainsi que l'emplacement d'insertion des points libres, donné par les noeuds libres. La méthode développée ici est complètement automatique; elle a été ajustée pour bien fonctionner dans le contexte des diffuseurs, même si les idées sous-jacentes sont assez générales. Il n'est d'ailleurs pas évident d'automatiser un tel algorithme dans un cas général, puisque celui-ci tente de deviner, jusqu'à un certain point, l'intention du concepteur.

L'algorithme développé repose sur l'idée que les lignes de discontinuité dans les surfaces doivent être lisses. L'algorithme tente donc de grouper les noeuds de brisure de façon à réduire la mesure de régularité, expliquée et justifiée en 2.2.2, et en plaçant les noeuds libres suivant une parabole de façon assurer une régularité dans les lignes de discontinuité. Certaines restrictions s'imposent cependant. D'abord, de par la définition des surfaces NURBS, les lignes de discontinuité sont des lignes isoparamétriques sur les surfaces et donc ne peuvent se croiser. En d'autres mots, les contraintes doivent être définies de façon à ce que les courbes compatibles soient valides, c'est-à-dire que leur vecteur nodal soit croissant. Une autre restriction, nécessaire pour obtenir un résultat satisfaisant dans certains cas tests sans toutefois nuire aux autres est imposée : si un groupe de courbes de section consécutives ont le même nombre de points de brisure dans la partition en cause, ces points de brisure correspondent respectivement aux mêmes contraintes. Par exemple, dans le cas où deux séries de points de brisure convergent pour n'en former qu'une seule, par expérience il est nettement préférable que tous les points de brisure seuls sur leur courbe de section se trouvent dans la même contrainte (voir figure 2.5). Autrement dit, s'il existe une série de courbes avec deux points de brisure suivie immédiatement par une autre série en contenant une seule, tous les points

de brisure sur les courbes en contenant un seul doivent être placés dans la même contrainte. La restriction imposée est nécessaire car la mesure de régularité serait minimisée par une solution qui ressemblerait à ceci : tous les points de brisure des courbes d'indice pair sont dans une contrainte et ceux des courbes d'indice impair sont dans l'autre, de sorte que le morceau de surface entre les lignes de discontinuité est très mince et dans bien des cas forme un repli dans la surface (voir figure 2.5). La restriction imposée améliore grandement ces problèmes et réduit le nombre de possibilités à tester dans l'algorithme. À noter que dans un contexte plus général, il faudrait probablement raffiner cette restriction et l'appliquer seulement en deçà d'une certaine distance entre les points de brisure, distance mesurée dans l'espace paramétrique des courbes.

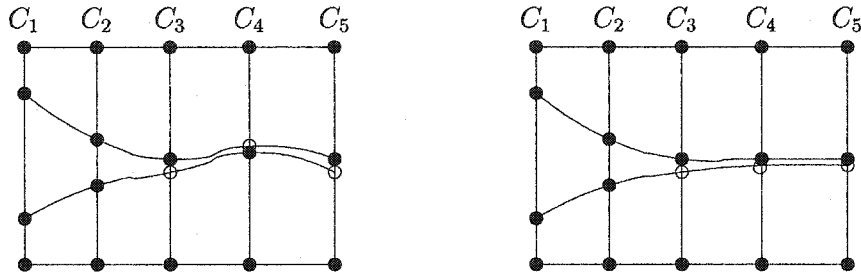


FIG. 2.5 Schéma de la grille de noeud qui minimise la mesure de régularité (à gauche), et même résultat mais à l'intérieur des contraintes sur les sections consécutives comportant le même nombre de noeuds (à droite).

2.3.2 Placer les noeuds doubles des courbes en proportion de la longueur d'arc

Cette étape préparatoire consiste à placer les noeuds de brisure $u_{i,j}^d$ tels que

$$u_{i,j}^d = \frac{\int_0^{u_{i,j}^d} C_j(u) du}{\int_0^1 C_j(u) du}.$$

Cela devrait faire en sorte que la paramétrisation des courbes est environ par abscisse curviligne. Cette étape est nécessaire pour le lissage ultérieur : le calcul de la position des noeuds libres est fait en fonction de la longueur d'arc sur les courbes, à partir de la valeur des noeuds de brisure.

2.3.3 Diviser les noeuds en partitions

Les noeuds de brisure des courbes de section sont préalablement regroupés en un certain nombre de partitions pour guider et simplifier le calcul des contraintes. Ces groupements préalables sont faits automatiquement en fonction de connaissances privilégiées liées à l'application de l'algorithme aux diffuseurs, qui sont encodées comme montré à la figure 2.6. À noter qu'avec ces informations, seules les contraintes sur les côtés des diffuseurs ne sont pas déjà complètement spécifiées.

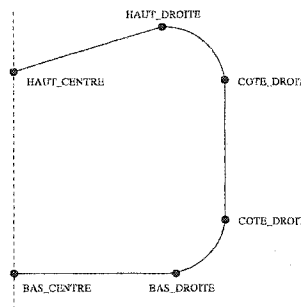


FIG. 2.6 Définition des partitions des sections **dta** en vue du calcul des contraintes.

2.3.4 Calculer le nombre de contraintes n_c dans chacune des partitions

Pour une partition donnée, le nombre de contraintes est le nombre de noeuds de brisure de la courbe de section qui en contient le plus (toujours à l'intérieur de la partition). C'est le nombre minimal admissible de contraintes, puisque chacun

des noeuds de brisure doit se trouver dans une contrainte. Pour l'application de l'algorithme aux diffuseurs, ce nombre est également suffisant pour obtenir de bons résultats.

2.3.4.1 Calculer n_p , le nombre de configurations possibles pour les contraintes

Sur chacune des courbes de section, n_j noeuds doivent être placés en n_c contraintes. Les noeuds doivent être placés en ordre croissant ; il s'agit donc de placer les $n_c - n_j$ 'trous' ou noeuds libres parmi les n_c contraintes, les 'trous' étant non distinguables entre eux. Pour ce faire, $\frac{n_c!}{(n_c - n_j)!n_j!}$ possibilités existent sur chacune des m courbes. Cela peut sembler prohibitif puisque typiquement un diffuseur contient de 20 à 40 courbes de section et deux lignes de discontinuité par partitions. Cependant, la majorité des courbes contiennent dans une même zone soit aucun soit deux points de discontinuité, laissant une seule possibilité pour la définition des contraintes. Seulement quelques sections contiennent un seul point de brisure, laissant deux possibilités. De plus, une restriction est imposée à l'effet que si un groupe de courbes de section consécutives ont le même nombre de points de brisure dans la partition en cause, alors ces points de brisure correspondent respectivement aux mêmes contraintes. Cela réduit grandement le nombre de possibilités à considérer, puisque pour les diffuseurs les courbes de section consécutives ont très souvent le même nombre de noeuds de brisure. Pour calculer le nombre de possibilités à tester, il faut donc calculer celui de la première courbe, et par la suite l'augmenter seulement lorsque deux courbes consécutives ne comportent pas le même nombre de noeuds de brisure (voir 2.2.3). Cette façon de calculer est également à la base de l'association entre les entiers de 1 à n_p aux n_p configurations possibles, qui permet de les parcourir aisément.

2.3.5 Sélectionner la configuration optimale

Pour sélectionner la configuration optimale, l'algorithme les teste toutes. Cela signifie que pour chacune des n_p configurations possibles, l'algorithme place les noeuds de brisure, puis les noeuds libres par lissage. Ensuite, la mesure de régularité est calculée sur la grille de noeuds ainsi formée. Le fait d'avoir calculé l'emplacement des noeuds libres permet que la grille de noeuds soit complète, et de tenir compte de la forme de l'ensemble des lignes de discontinuité, plutôt que seulement des régions où se trouvent des noeuds de brisure. L'entier associé à la meilleure configuration est gardé en mémoire, pour que celle-ci puisse être reconstruite dans la grille de noeuds, nécessaire pour insérer les noeuds et les points libres.

2.3.6 Insérer les points libres dans les courbes

Pour insérer les points libres dans les courbes de section, il suffit d'insérer dans chacune des courbes là où les valeurs de noeuds libres calculées. L'insertion d'un noeud de multiplicité p coupe le segment de courbe dans lequel il est inséré en deux; un point de contrôle est placé sur la courbe, à l'endroit correspondant à l'évaluation de la courbe au noeud inséré, et en remplaçant et/ou ajoutant $p - 1$ points de contrôle dans chacun des nouveaux segments. L'opération ajoute au total p points de contrôle. Comme les noeuds de brisure des courbes sont inchangés (voir 2.3.2), et les courbes sont approximativement paramétrées en fonction de la longueur d'arc, les points insérés sont situés dans le bon segment de la courbe et environ à l'endroit voulu. C'est cette opération qui modifie les courbes en fonction des contraintes, qui concrétise celles-ci.

2.3.7 Calcul du vecteur nodal de la surface

Rendre les courbes compatibles signifie habituellement redéfinir les courbes sur le même vecteur nodal, mais dans ce cas comme tous les noeuds sont de multiplicité $p = 2$ ce n'est pas nécessaire : il suffit qu'elles aient le même nombre de points de contrôle et qu'un vecteur soit choisi pour la surface. En effet, les noeuds doubles des courbes n'ont pas besoin d'être changés puisque les informations requises pour le calcul de la surface sont les points de contrôle de chacune des courbes et un vecteur nodal pour la surface. Ce dernier est calculé en faisant la moyenne des vecteurs nodaux des courbes de section. Les noeuds des courbes étant placés proportionnellement à la longueur d'arc, les noeuds de la surface sont placés de façon à produire, en moyenne, une paramétrisation par abscisse curviligne. Bien sûr, comme la valeur des noeuds des courbes peut varier, et varie d'ailleurs grandement dans le cas des diffuseurs, la paramétrisation de la surface résultante peut être loin de la paramétrisation idéale.

2.3.8 Placer les noeuds libres dans la grille de noeuds (lissage)

Trois méthodes sont présentées ici : méthode naïve, méthode de lissage naïf et méthode de lissage parabolique. La première méthode, simpliste, n'est pas utilisée. La seconde méthode, nommée lissage naïf, moins élaborée que la troisième mais plus facile et plus rapide à calculer, est utilisée dans le calcul des noeuds libres dans l'algorithme qui calcule la meilleure configuration pour les noeuds de brisure. Un calcul très précis n'est pas vraiment nécessaire dans ce cas. La méthode de lissage parabolique est finalement employée pour calculer la position finale des noeuds libres, de façon à produire des lignes de discontinuité raisonnablement lisses.

2.3.8.1 Méthode d'insertion naïve

La méthode la plus simple pour l'insertion des points libres est certainement de les insérer à la valeur moyenne des noeuds de brisure associés. Cette méthode naïve n'est cependant pas adéquate, les lignes de discontinuité pouvant présenter une transition brutale entre les noeuds de brisure et les noeuds libres. Il faut en effet que le calcul des noeuds libres prennent en compte le noeud de brisure le plus proche.

2.3.8.2 Lissage naïf

Une seconde méthode simple, qui est nommée 'lissage naïf' dans ce document, consiste à placer les noeuds libres à la valeur du noeud de brisure le plus près, sauf si cela viole la restriction de non croisement, auquel cas les noeuds libres sont placés à un δ donné de la ligne de discontinuité croisée, δ étant mesuré dans l'espace paramétrique. Par exemple, pour un diffuseur, les quelques premières sections contiennent typiquement des noeuds libres, les sections plus au centre contiennent des noeuds de brisure, et parfois quelques sections à la sortie du diffuseur contiennent également des noeuds libres. Ainsi, le long d'une ligne de discontinuité, les quelques premières sections comportent des noeuds libres placés à la valeur du premier noeud de brisure, les sections suivantes comportent des noeuds de brisure, puis, s'il y a lieu, les quelques dernières sections comportent des noeuds libres placés à la valeur du dernier noeud de brisure. Cette façon de faire constitue une nette amélioration par rapport à la première technique utilisée, puisqu'elle redresse considérablement les lignes de discontinuité de la surface finale. Cependant, celles-ci peuvent encore comporter une discontinuité dans la direction v , des dérivées cette fois. De plus, l'incorporation de points placés le long d'une ligne droite peut résulter à l'inter-

potation en un polygone de contrôle oscillant de part et d'autre de celle-ci. Cette technique est donc utilisée seulement dans le placement des noeuds libres à l'intérieur de l'algorithme de calcul de la meilleure configuration. Pour le calcul final de la grille de noeuds, le lissage parabolique est utilisé.

2.3.8.3 Lissage parabolique

Une troisième méthode, nommée 'lissage parabolique' dans ce document, qui consiste à placer les noeuds le long d'une parabole, est finalement utilisée. Ici encore, l'idée de base est très générale mais les détails sont reliés à l'application visée. Pour minimiser la mesure de régularité, il suffirait de placer les noeuds libres le long d'une droite passant par les deux premiers (derniers) noeuds de brisure. Cependant, une telle façon de faire entrerait plus souvent qu'autrement en conflit avec la première restriction, celle de non croisement des lignes de discontinuité, et ne donnerait pas nécessairement la forme souhaitée. Et encore une fois, l'interpolation de points disposés le long d'une ligne droite, parmi un ensemble plus grand de points, peut donner des mauvais résultats. Il semble donc qu'il faille choisir une fonction qui suive cette droite près des noeuds de brisure et qui se redresse plus loin ; autrement dit, la dérivée de la fonction doit être environ égale à une fonction passant par les noeuds de brisure près de ceux-ci, et être nulle plus loin. Mathématiquement donc, une fonction de lissage devrait respecter trois conditions géométriques :

- elle devrait passer par le premier (dernier) noeud de brisure ;
- elle devrait avoir en ce point la même pente (dérivée) que la droite reliant les deux premiers (derniers) noeuds de brisure ;
- elle devrait aboutir à un point u présélectionné en $v = 0$ ($v = 1$) sans jamais déborder ce point, de façon à assurer qu'il n'y a pas de croisement entre les rangées de noeuds doubles, donc entre les lignes de discontinuité, en supposant

que le point en question soit bien choisi.

La fonction choisie pour ce faire est une parabole ouverte vers l'extrémité de la surface, puisqu'elle semble la fonction la plus simple qui remplisse ces critères. La parabole est définie selon les axes t et s , t pour la distance moyenne entre les courbes de section et la coordonnée s correspondant à la paramétrisation par abscisse curviligne des courbes (voir la figure 2.7).

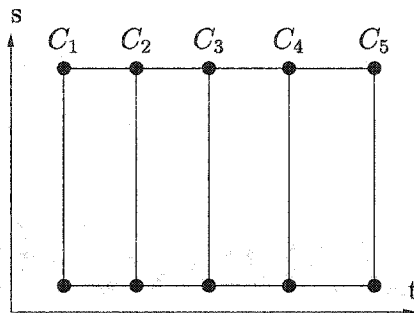


FIG. 2.7 Système de coordonnées dans lequel est défini la parabole utilisée pour le lissage.

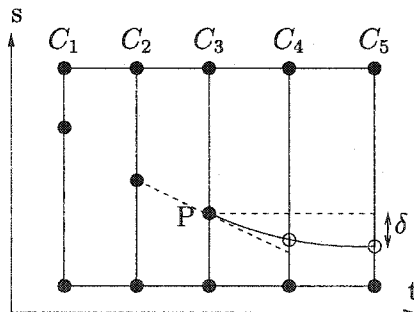


FIG. 2.8 Illustration des conditions géométriques définissant la parabole : les deux points de passage et la tangente.

Les calculs des paramètres de la parabole en fonction des contraintes données sont présentés à l'annexe I. Les deux premières conditions géométriques pour la parabole, soit le point de passage et la dérivée au noeud de brisure sont déjà connus. Il en est autrement de la position du point extrémité qui doit être choisie avec soin

de façon à donner un bon résultat. La distance dans la direction u entre les deux bouts du morceau de parabole est nommée δ dans ce qui suit, comme illustré sur la figure 2.8. Ce δ ne doit pas être trop grand ; il est d'abord posé que pour que la ligne de discontinuité ne s'écarte pas trop des noeuds de brisure, δ est limité par la moitié du δ qui serait obtenu en prolongeant la droite passant par les deux premiers (derniers) noeuds de brisure. Ensuite, la ligne de discontinuité ne devrait pas s'écarter trop de celle produite par le lissage naïf ; une limite arbitraire de 0.03 est fixée en fonction de l'expérience avec l'application des diffuseurs. Finalement, pour éviter les croisements de lignes de discontinuité, δ est limité par la demi-distance avec le noeud double de la courbe d'indice inférieur ou supérieur, selon le cas, moins un epsilon donné (la valeur $1e - 6$ est utilisée). Le sens de parcours n'a généralement pas d'impact puisque les noeuds utilisés pour calculer le δ sont des noeuds de brisure, sauf si les paramètres de la parabole doivent être recalculés à cause d'un croisement (ce qui arrive rarement). Cette façon de faire n'est pas parfaite, puisqu'elle peut ne pas prendre plein avantage de l'espace disponible pour une parabole ; par exemple, ce serait le cas avec des noeuds de brisure tels que montré à la figure 2.5 ; la parabole pourrait prendre tout l'espace entre les deux contraintes mais avec l'algorithme utilisé elle n'en prendra que la moitié. Malgré tout, cette façon de faire est globalement assez satisfaisante. Une limite similaire est également posée pour éviter aux noeuds libres de déborder le domaine paramétrique de la surface.

L'algorithme de calcul des noeuds libres procède contrainte par contrainte, en commençant par la courbe la plus près des noeuds de brisure. En effet, il faut vérifier qu'il n'y a pas de croisement créé par le placement de noeud libre effectué, auquel cas il faut placer le noeud libre ailleurs que sur la parabole et en recalculer une nouvelle, c'est-à-dire recalculer δ et les paramètres associés. Ce cas de figure survient pour quelques diffuseurs, lorsque deux lignes de discontinuité qui convergent

ne finissent pas sur la même courbe de section. Pour les deux méthodes de lissage, dans le rare cas où des noeuds libres se trouvent entre deux séries de noeuds de brisure, ces noeuds libres sont calculés par interpolation linéaire à partir des noeuds de brisure de part et d'autre de ceux-ci.

2.4 Algorithme d'interpolation des courbes compatibles

Il reste à construire la surface courbe du diffuseur, surface NURBS de degré $q = 3$ dans la direction de l'interpolation, à partir des courbes compatibles, du vecteur nodal U calculé précédemment et de directions tangentes spécifiées aux deux extrémités. La méthode générale utilisée est une variation de la méthode classique détaillée en 1.3.2 utilisant une méthode logarithmique pour choisir les paramètres d'interpolation, incluant une technique simple développée pour déterminer automatiquement la grandeur des dérivées spécifiées comme conditions aux extrémités dans l'interpolation. Les détails sont donnés dans ce qui suit.

2.4.1 Méthode logarithmique de choix des paramètres d'interpolation

La méthode logarithmique consiste à placer les paramètres d'interpolation \bar{v}_j de sorte que la distance entre ceux-ci soit proportionnelle à $\log(1 + d)$, c'est à dire que $\bar{v}_1 = 0$ et

$$\forall j = 2..m \quad \bar{v}_j = \frac{\sum_{k=2}^j \log(1 + |D_k - D_{k-1}|)}{\sum_{k=2}^m \log(1 + |D_k - D_{k-1}|)}.$$

Les distances sont calculées dans l'espace homogène. Cette méthode a été proposée par Mohammed Khachan, chercheur à l'École Polytechnique. Bien qu'il ne semble pas y avoir de justification hautement scientifique pour cette méthode, il ne semble pas y en avoir non plus pour les méthodes uniforme et centripète, pourtant ci-

tée dans Piegl et Tiller, 1997. La méthode de longueur d'arc cherche au moins à produire une paramétrisation par abscisse curviligne dans la direction de l'interpolation, malgré sa prédiction simpliste de la longueur d'arc entre deux points ou deux courbes à interpoler. Bref, toutes ces méthodes sont quelque peu arbitraires, et ne cherchent pas à optimiser un critère de qualité défini. L'idée de la méthode logarithmique est basée sur l'expérience avec différentes applications et sur deux observations. La première, qui semble être à la base des méthodes longueur d'arc et centripète aussi, est que pour une courbe interpolant des points, la longueur de corde entre deux points de collocation augmente en fonction de la distance entre leurs paramètres d'interpolation correspondants. L'hypothèse s'applique dans le cas de l'interpolation de courbes par une surface, à partir de la distance entre les courbes de section et de la longueur de corde de courbes isoparamétriques sur la surface. Cette hypothèse est intuitive, raisonnable et semble concorder avec l'expérience même si dans la littérature consultée il n'est aucunement fait mention d'étude expérimentale à ce sujet. Dans le cas où la longueur de corde est trop courte entre deux points de collocation, la courbe a tendance à être trop aplatie dans cette zone, c'est-à-dire trop proche du segment de droite reliant les deux points, alors qu'elle a tendance à être bombée dans les intervalles voisins, c'est-à-dire qu'elle a tendance à être trop loin du segment de droite reliant les deux points de collocation correspondants à l'intervalle. Une telle courbe n'est pas très régulière, et sa courbure n'est pas répartie uniformément. Dans le cas où la longueur de corde est trop longue entre deux points de collocation, la courbe tend à être trop bombée ou même à présenter une boucle. Ce phénomène s'explique ou s'illustre par l'analogie suivante : un objet doit passer par n points en n instants différents. L'objet ne peut accélérer ou freiner instantanément. Donc, si il doit parcourir une grande distance en peu de temps entre deux points, il a au second point une grande vitesse (dérivée de la courbe). Si il doit ensuite relier un troisième point près du second dans un temps

relativement éloigné, l'objet ne peut freiner assez rapidement, alors il doit effectuer un trop long trajet avant de passer par le troisième point, ce qui se traduit par une trajectoire trop large ou même une boucle. La seconde observation est que, d'après l'expérience et les observations de Mohammed Khachan du moins, souvent avec la méthode centripète la longueur de la courbe est trop grande entre les points de collocation rapprochés, alors que avec la méthode de la longueur d'arc, la longueur de la courbe est trop grande entre les points éloignés. La méthode logarithmique améliore ces deux problèmes (voir figure 2.9), puisque la courbe de la méthode logarithmique se trouve entre celle des méthodes longueur d'arc et centripète, dans la plage où la distance entre les points est suffisamment petite du moins. En effet, après un certain point la courbe logarithmique repasse sous la courbe centripète, car

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\log(1+d)}{\sqrt{d}} = 0.$$

À noter que la courbe de la méthode centripète se trouve elle-même entre celles des méthodes uniforme et longueur d'arc. À noter également que sur la figure 2.9 la fonction logarithmique est multipliée par $\frac{1}{\log 2}$ pour qu'elle passe comme les trois autres par le point (1, 1), ce qui permet de comparer visuellement les courbes.

La méthode logarithmique possède trois caractéristiques importantes que les trois autres méthodes possèdent également. D'abord, la courbe passe par le point (0, 0), grâce à l'ajout du '1' dans $\log(1+d)$. Ensuite, la fonction $\log(1+d)$ est strictement croissante, c'est à dire que sa dérivée est strictement positive pour toute distance d strictement positive. Aussi, la méthode est invariante sous des transformations affines (translation, rotation, symétrie) (Filip et Ball, 1989), c'est à dire que des points de collocation pourraient être interpolés puis transformés de façon affine, ou l'inverse, et le résultat serait le même, puisque la distance d entre les points ne change pas sous une transformation affine. Finalement, le calcul des paramètres

d'interpolation est simple et assez rapide. Cependant, comme la méthode centripète, la méthode n'est pas invariante sous homothétie. Il serait relativement facile de remédier à ce problème cependant, en divisant par exemple toutes les distances entre les points par la plus grande d'entre elles, de sorte que la méthode donnerait des résultats plus réguliers. De plus, les distances pourraient être multipliées par un facteur k choisi de façon à ce que tous les cas tests utilisent la même portion de la fonction sélectionnée pour son comportement 'approprié'. Pour les diffuseurs, les distances entre les courbes à interpoler sont généralement inférieures à 1. Dernière remarque, la base choisie pour le logarithme n'influence pas les paramètres d'interpolation puisque $\log_c(1+d) = \frac{\log_b(1+d)}{\log_b(c)}$ et que les paramètres sont mis à l'échelle sur $[0, 1]$ pour que la courbe ou la surface résultante soit définie sur cette plage paramétrique.

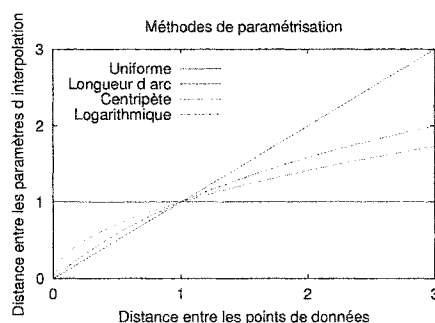


FIG. 2.9 Graphe des quatre fonctions utilisées pour choisir les paramètres d'interpolation.

2.4.2 Méthode de choix de la grandeur des dérivées

Il est nécessaire de spécifier des tangentes dans la construction de la surface courbe du diffuseur; dans les requis de GE pour les diffuseurs, la direction de la surface à l'entrée de celui-ci doit avoir un angle bien précis. Également, la spécification de tangentes 'appropriées' peut améliorer la qualité de la surface résultante. La

façon de faire proposée dans Piegl et Tiller, 1997 pour l'interpolation de points de collocation par une courbe est de spécifier la dérivée voulue à chaque extrémité. Rien n'est précisé pour l'interpolation de courbes de section par une surface, avec la technique décrite en 1.3.2, mais il est clair qu'une dérivée doit être spécifiée pour chacun des points de contrôle de la première et dernière courbe. En effet, les points de contrôle de la surface sont calculés colonne par colonne, en interpolant par une courbe $C_k(v)$ chacune des colonnes de points de contrôle $\forall j = 1..N$ $P_{k,j}$ des courbes de section compatibles. Comment déterminer ces dérivées ? La dérivée a deux composantes : une direction et une grandeur. À l'entrée du diffuseur, la direction des dérivées est calculée à chaque point, à partir des spécifications. À la sortie du diffuseur, rien ne dicte ainsi le choix d'une direction. La direction qui apparaît alors la plus naturelle et la moins arbitraire est celle définie en chaque point de contrôle de la dernière courbe par le vecteur reliant le point correspondant à l'avant dernière courbe, le tout défini dans l'espace homogène. En fait, il faut prendre la direction inverse puisque la paramétrisation de la surface augmente avec l'index des courbes de section.

Maintenant, comment choisir la grandeur des dérivées ? Quel est son impact sur la forme et la paramétrisation de la courbe ou surface résultante ? La paramétrisation est en fait synonyme de dérivée, alors l'imposition de la dérivée en un point définit la paramétrisation en ce point. Comment déterminer donc la paramétrisation adéquate à chaque extrémité d'une courbe ou surface ? Bien que selon toute vraisemblance cette problématique revienne constamment dans les algorithmes d'interpolation, les documents consultés pour ce travail ne discutent malheureusement pas de cette question. Malgré tout, la méthode proposée ici existe vraisemblablement déjà quelque part. L'approche retenue dans ce travail est de viser à obtenir une paramétrisation par abscisse curviligne environ, faute d'autres repères. Il semble donc que pour obtenir une grandeur 'sensée' pour la dérivée il faille diviser la dis-

tance à parcourir entre les deux premières sections par la distance entre les deux premiers paramètres, c'est-à-dire poser $|C'_k(0)| = \frac{|P_{k,3} - P_{k,1}|}{\bar{v}_2}$, en sachant que $\bar{v}_1 = 0$. À noter que cette équation comme celles qui suivent doivent être lues dans l'espace homogène. À moins que celle-ci ne soit une localement droite, la courbe parcourra plus de distance que ce qui est supposé par cette simple formule. En principe il faudrait introduire un facteur de correction, mais, dans le cas présent, cela est négligé, entre autre puisque la courbure à la sortie du diffuseur est assez faible. Quant à la forme, en remplaçant $C'_k(0) = \frac{P_{k,3} - P_{k,1}}{\bar{v}_2}$ dans l'équation $Q_{k,2} - Q_{k,1} = \frac{w_2 v_{q+2}}{w_1 q} C'_k(0)$, il ressort que $Q_{k,2} - Q_{k,1} = \frac{w_2 v_{q+2}}{w_1 \bar{v}_2 q} (P_{k,3} - P_{k,1})$ (à noter que $P_{k,1} = Q_{k,1}$). Or, dans le cas présent, c'est-à-dire avec l'interpolation de degré $q = 3$, $v_{q+2} = \bar{v}_2$. Il semble vraisemblable dans le cas présent comme en général que $\frac{w_2}{w_1} \approx 1$. Avec cette hypothèse, il apparaît que $Q_{k,2} - Q_{k,1} \approx \frac{1}{3} (P_{k,3} - P_{k,1})$, et cela semble parfaitement raisonnable. La distance $|Q_{k,2} - Q_{k,1}|$ doit être plus petite que $|P_{k,3} - P_{k,1}|$, de façon significative, de l'ordre de 30% au moins, pour ne pas perturber la courbe passé le point $P_{k,3}$. De la même façon, la distance $|Q_{k,2} - Q_{k,1}|$ ne doit pas être trop petite, moins de 10% de $|P_{k,3} - P_{k,1}|$ par exemple, sinon son influence sur la courbe serait trop faible. La valeur proposée de $\frac{1}{3}$ semble donc bien placée dans cette plage de proportion admissible quant à la forme. La façon de faire proposée qui vise une paramétrisation par abscisse curviligne apparaît générique et devrait également s'appliquer pour d'autres degrés.

2.5 Validation avec les diffuseurs

Les algorithmes développés sont incorporés dans le projet **dta2pie**, programme qui construit un modèle solide d'un diffuseur à partir d'un fichier d'entrée de format spécialisé nommé **dta** (Gougeon *et al.*, 2001) qui décrit les courbes de section et qui écrit le résultat dans un fichier de format **pie**, le format de la librairie **Pirate**

(Guibault *et al.*, 1997, Guibault et Ozell, 2002). C'est dans ce cadre, dont les aspects importants sont décrits dans ce qui suit, que les algorithmes sont également testés.

2.5.1 Construction des courbes de section

Les courbes de section sont décrites à l'origine dans un format spécifique (*dta*), où elles sont représentées par instance de primitives paramétrées. Pour être interpolées avec la méthode développée, les sections *dta*, constituées de quarts d'ellipse et de segments de droite, doivent d'abord être représentées sous forme de courbes NURBS. Il est expliqué précédemment (1.2.2) comment construire un quart d'ellipse, et maintenant il est expliqué comment construire d'un segment de droite de degré $p = 2$, de même degré que les segments d'ellipse. Les points de début et de fin sont les mêmes que ceux servant à définir les ellipses adjacentes, avec les mêmes poids. Il suffit d'ajouter un troisième point entre les deux. Pour obtenir une bonne paramétrisation, le point doit être placé exactement au milieu (voir les explications et exemples données en 1.4.2). Les deux points extrêmes de la droite ont le même poids, et donc le point milieu devrait également avoir ce poids, comme l'illustre l'exemple qui suit. N'importe quelle courbe NURBS de degré $p = 2$ ayant les points de contrôle $(0, 1)$, $(0.5, 1 + \delta)$ et $(1, 1)$, donnerait un segment de droite dont la paramétrisation est symétrique. Cependant, elle n'est pas par abscisse curviligne pour toute valeur de δ puisque $C(u) = \frac{(0, 0.5 + 0.5\delta, 1) \cdot (1 - 2u + u^2, 2u - 2u^2, u^2)}{(1, 1 + \delta, 1) \cdot (1 - 2u + u^2, 2u - 2u^2, u^2)}$, et en développant, $C(u) = \frac{u + \delta(u + u^2)}{1 + 2\delta(u - u^2)}$. La solution est donc de poser $\delta = 0$, pour obtenir $C(u) = u$, un segment de droite bien paramétré. Une fois le degré, les points et les poids définis pour chaque segment de la courbe, il reste à déterminer les noeuds internes, de multiplicité $p = 2$. Il est souhaitable qu'ils soient placés à une valeur de paramètre correspondant à la longueur d'arc parcourue jusqu'à eux, divisée par la longueur d'arc totale de la courbe, et ce peu importe l'algorithme d'interpolation

utilisé.

2.5.2 Diffuseur en six faces mais en trois surfaces

Le besoin exprimé par GE est que les faces soient découpées de telle sorte que les arêtes passent, sur chacune des courbes de section, par les endroits qui coupent les diagonales du rectangle dans lequel la section est inscrite, tel que représenté schématiquement à la figure 2.10. Le diffuseur est construit en trois surfaces NURBS découpées en six faces : les surfaces d'entrée et de sortie forment une face chacune, alors que la surface courbe du diffuseur est représentée par une seule surface NURBS, qui est découpée en quatre faces. Cette approche permet que le modèle solide soit étanche et que les faces se connectent de façon continue au sens du plan tangent lorsque la dérivée de toutes les courbes de section est continue. Dans les cas où la dérivée des courbes de section n'est pas continue, cette solution n'est d'aucun secours et il n'existe aucune garantie quant à la convexité du modèle géométrique. Il est souhaitable que les faces se connectent de façon étanche et convexe, car le fait que deux faces se connectent de façon concave risque de causer dans les maillages des éléments concaves en trois dimensions et donc non valides. Si les faces se connectent de façon continue au sens du plan tangent, elles forment un volume convexe, et par conséquent le maillage ne devrait contenir que des éléments convexes, donc valides.

D'abord, pour que deux faces se rejoignent de façon étanche, c'est-à-dire C^0 , il faut soit qu'elles soient définies sur la même surface avec une courbe paramétrique de découpage commune, ou qu'elles soient définies sur deux surfaces qui se joignent de façon C^0 , autrement dit qui partagent une courbe à leur jonction (à $u = 1$ et $u = 0$ dans le cas présent). Or, pour ce faire, les deux surfaces doivent avoir le même degré q , le même vecteur nodal V et les mêmes points de contrôle le long

de leur frontière commune, ou qu'elles aient subi des transformation d'écriture n'affectant pas la forme ni la paramétrisation (insertions de noeuds, élévation de degré). Ensuite, pour que deux faces se connectent de façon continue au sens du plan tangent, elles doivent soit être définies sur une même surface C^1 le long d'une courbe paramétrique de découpage commune, soit elles sont définies sur deux surfaces distinctes mais continues au sens du plan tangent. Ou encore, les surfaces doivent satisfaire à un critère plus sévère, tel que la C^1 continuité. Pour qu'une surface interpolant des courbes soit C^1 , il faut d'abord que les courbes de section interpolées soient elles-mêmes C^1 , ce qui est possible à atteindre pour plusieurs diffuseurs mais pas pour tous. En effet, pour plusieurs diffuseurs, les courbes de section sont naturellement C^1 aux endroits où il faut découper et donc il est possible de faire en sorte que la surface soit C^1 , du moins le long des arêtes (il est expliqué comment plus loin dans cette sous-section). Par contre, certains diffuseurs ont des sections rectangulaires, donc C^0 , et c'est précisément sur les coins que la frontière entre les faces est définie. À cause de ces coins, des noeuds doubles sont insérés dans chacune des courbes de section à l'endroit correspondant à la séparation entre les faces; les courbes de section sont donc sauf exception C^0 puisque pour rendre les courbes compatibles en vue de l'interpolation le noeud double inséré doit être remplacé par le noeud de valeur commune. La surface finale interpolant ces courbes est par conséquent C^0 , puisqu'il n'est pas possible dans le cas général de faire en sorte que l'interpolation de courbes G^1 mais C^0 produise des surfaces continues au sens du plan tangent.

La solution retenue de construire la surface courbe du diffuseur en une seule surface NURBS implique que les courbes de section soient interpolées d'abord et que la surface soit ensuite découpée en quatre faces. Cette approche est implantée en construisant des courbes de section qui font un tour et demi, ou 3π , en calculant la surface les interpolant, puis en découpant cette surface en faces. Les courbes

sont aisément construites par demi-tour, c'est-à-dire par bout couvrant un angle de π , parce qu'elles sont symétriques par rapport à un axe vertical. Il n'est pas possible de produire une surface C^1 aux endroits sensibles si la courbe construite ne couvre pas plus de 2π ; en effet, la surface ne serait pas continue à la jonction du début et de la fin (les courbes de section, une fois reparamétrées pour satisfaire les contraintes, seraient seulement C^0). La façon de faire la plus simple semble donc de construire trois demi-tours; le principal inconvénient est la redondance de certaines informations, ce qui augmente la taille du modèle de 50%. Les cinq courbes paramétriques nécessaires pour délimiter les quatre faces sur la surface sont chacune calculées par interpolation de points dans l'espace paramétrique de la surface qui correspondent, sur chacune des courbes de section, à l'endroit où les diagonales du rectangle dans lequel la section est inscrite intersecte celle-ci.

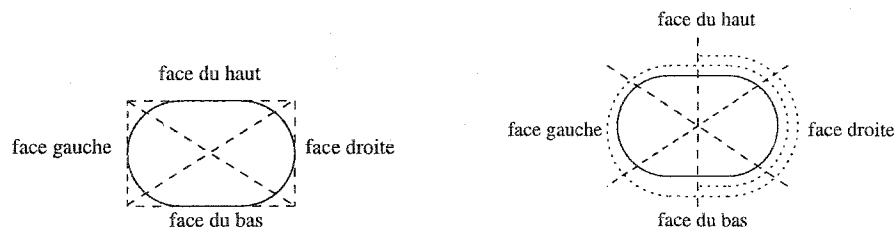


FIG. 2.10 Illustration du diffuseur construit en quatre (à gauche) et une seule surface (à droite).

2.5.3 Maillages

Dans le but de mailler les faces produites à l'aide d'une méthode simple, une tentative a été faite, et elle est expliquée dans ce qui suit. La méthode est basée sur le fait que les surfaces contraintes sont loin d'être paramétrées par abscisse curviligne en u , mais qu'elles le sont à peu près en v . Autrement dit, la grandeur des dérivées en v est environ constante, mais pas celle des dérivées en u . L'idée est donc de relier deux à deux par des droites, dans l'espace paramétrique de la surface,

les points de deux arêtes discrétisées opposées. La paire d'arête choisie est celle qui donne des droites environ parallèles. Pour les diffuseurs, ce sont des droites reliant deux points ayant environ la même coordonnée v . Puis, chacune de ces droites, décrivant une courbe sur la surface, est discrétisée de façon à produire un maillage uniforme sur la surface, ou encore réparti selon une loi de concentration donnée (voir figure 2.11). Cette façon de faire est simple de concept, et facile et rapide à implanter.

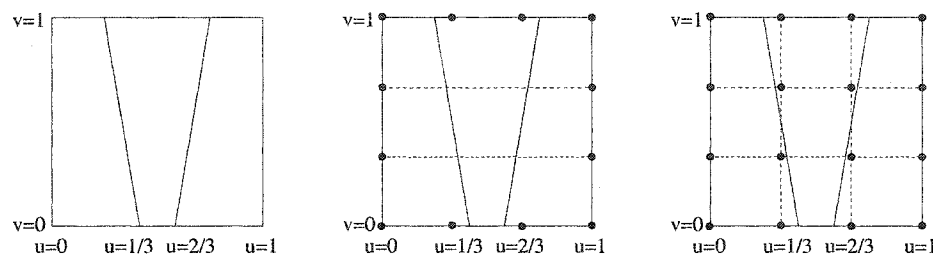


FIG. 2.11 Illustration du maillage construit en fonction de la longueur d'arc en u : à gauche : lignes de discontinuité de la surface ; au centre : construction de lignes iso- v ; à droite : discrétisation des iso- v en fonction de la longueur d'arc.

CHAPITRE 3

RÉSULTATS ET ANALYSE

Dans ce chapitre, l'impact de l'algorithme d'interpolation développé est montré et analysé en détail, à l'aide des critères de qualité choisis. D'abord, chaque aspect de l'algorithme développé est justifié en montrant son effet isolé (sections 3.1 et 3.2). Ensuite, une analyse générale de la qualité des résultats finaux obtenus est présentée (3.3), et finalement l'impact de l'algorithme dans le contexte du besoin industriel est détaillé (3.4).

3.1 Impact de l'algorithme proposé pour rendre les courbes compatibles

3.1.1 Impact des contraintes

Par rapport à l'algorithme d'interpolation classique, l'introduction des contraintes dans l'interpolation améliore la forme et la taille des surfaces, dégrade la paramétrisation et améliore la continuité entre les morceaux de surfaces séparés par une ligne de discontinuité, en plus de réduire le nombre de lignes de discontinuité. Il est montré dans ce qui suit que pour l'ensemble des cas tests, les contraintes augmentent la mesure de régularité (reliée ici à la paramétrisation), réduisent la taille des surfaces (donc le nombre de lignes de discontinuité) et ne réduisent de près de moitié la discontinuité de la connexion entre les morceaux de surfaces séparés par une ligne de discontinuité, telle que mesurée le long de celles-ci par des angles entre les normales des morceaux de surface. Mais d'abord, l'impact visuel des contraintes

sur la forme des lignes de discontinuité, sur la grille de contrôle et sur la courbure gaussienne est illustré pour un diffuseur donné, de même que sur la distance entre les surfaces contrainte et classique.

3.1.1.1 Lignes de discontinuité

La figure 3.1 montre les lignes de discontinuité de la surface du haut d'un diffuseur, construite à partir de l'algorithme classique et à partir de l'algorithme développé. À noter que sur cette image le diffuseur est construit en quatre surfaces, calculées à partir des courbes de section également représentées par quatre courbes NURBS. Une image de la surface complète du diffuseur constituerait vraisemblablement un amas de lignes dont il serait difficile de distinguer quoique ce soit. Il faut donc une image d'une portion seulement de la surface, d'où l'idée de montrer une surface sur quatre. Le lissage naïf est utilisé et aucune tangente n'est spécifiée. En examinant la figure 3.1, il est clair que les lignes de discontinuité de la surface classique sont environ parallèles et correspondent environ à une paramétrisation par abscisse curviligne. À l'inverse, les lignes de discontinuité de la surface calculée avec contraintes suivent les points de brisure sur les courbes, et indiquent une paramétrisation qui s'éloigne significativement d'une paramétrisation par abscisse curviligne. Il est clair que le nombre de lignes de discontinuités et de morceaux de surfaces est beaucoup moindre dans la surface calculée avec l'algorithme des contraintes que dans celle calculée avec l'algorithme classique.

3.1.1.2 Grille de contrôle

La figure 3.2 montre les grilles de contrôle des mêmes surfaces (celles montrées à la figure 3.1). Les points de contrôle sont relativement nombreux et arrangés de façon

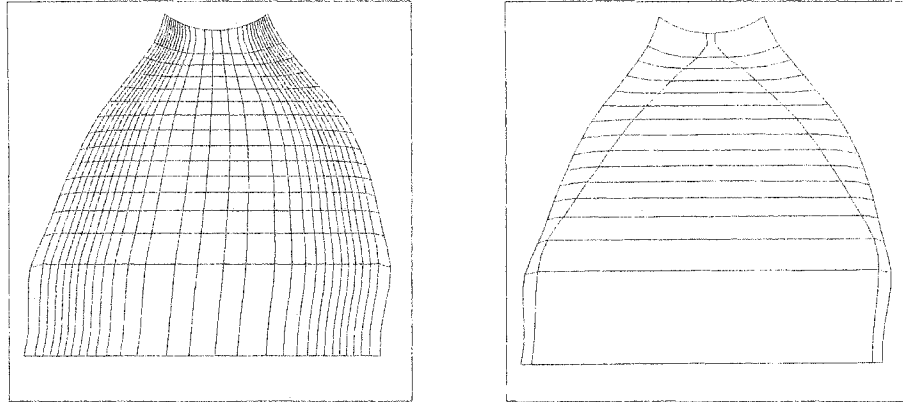


FIG. 3.1 Lignes de discontinuité de surfaces calculées par l'algorithme classique (à gauche) et par l'algorithme développé (à droite).

approximativement parallèle pour la surface construite avec l'algorithme classique, alors qu'ils sont relativement peu nombreux et qu'ils suivent en rangées les points de brisure des courbes de section dans la surface construite avec l'algorithme des contraintes. Les points de contrôle déterminent la forme des lignes de discontinuité iso- u des surfaces, montrées à la figure 3.1.

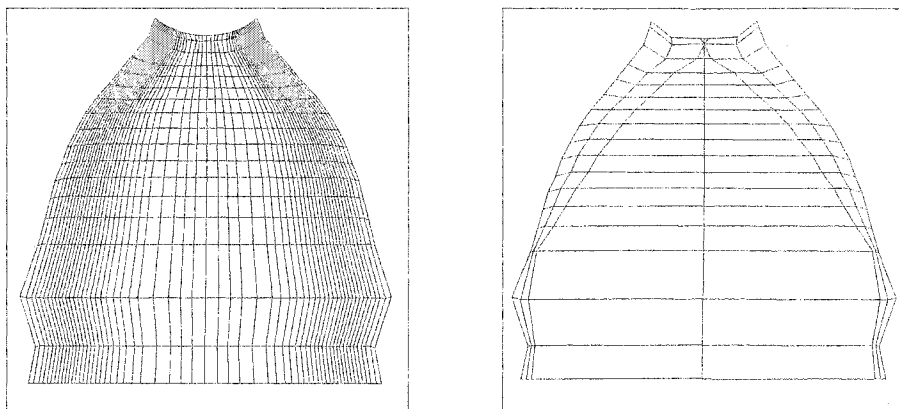


FIG. 3.2 Grille de contrôle de surfaces calculées par l'algorithme classique (à gauche) et par l'algorithme développé (à droite).

3.1.1.3 Courbure gaussienne

La figure 3.3 montre la courbure gaussienne des deux mêmes surfaces. La couleur bleu indique une courbure gaussienne négative, la couleur verte une courbure gaussienne nulle et la couleur rouge une courbure gaussienne positive. Cette figure, ainsi que la grande majorité des figures de ce mémoire illustrant des courbures gaussiennes, ne montre qu'une partie du spectre des valeurs de courbure gaussienne, soit de -0,01 à 0,01. La courbure gaussienne varie pour les surfaces des diffuseurs dans des plages de l'ordre de -1 ou -10 jusqu'à 1 ou 10. La visualisation de la plage entière de la courbure gaussienne donne certainement de l'information pertinente sur la surface dans son ensemble, mais n'atteint pas le but présent de mettre en relief des variations moins importantes autour des lignes de discontinuité. La figure 3.3 montre à gauche la courbure d'une surface calculée à partir de l'algorithme classique et à droite la courbure d'une surface calculée à partir de l'algorithme développé. Il apparaît clairement que dans le premier cas, la surface présente des changements de convexité indésirables. Ces oscillations sont d'autant plus indésirables qu'elles ne sont pas du tout suggérées par les courbes de section. La surface à droite présente par contre une courbure plus unie, sans variations locales brusques, dont le signe change seulement à travers les lignes de discontinuité, sauf exception ; la courbure reflète une surface plus régulière. Toujours sur la figure 3.3, les variations éliminées par l'utilisation des contraintes semblent être de l'ordre de $2 \times 0,01 = 0,02$. En réalité, selon quatre cas tests étudiés plus en détail, ces variations sont plus importantes : de l'ordre de 0,1 à 0,4 pour les surfaces du bas et du haut et jusqu'à 6 pour les surfaces des côtés. Qu'est-ce que ces nombres signifient concrètement, à l'échelle du modèle géométrique des diffuseurs par exemple ? D'abord, les dimensions d'un diffuseur sont de l'ordre de 1 à 10 (très approximativement $5 \times 3 \times 1,5$ unités de longueur). Comme la courbure gaussienne est le produit des courbures minimum et

maximum, la plus grande de ces courbures (en valeur absolue) est au moins égale à la racine carrée de la courbure gaussienne. Si la courbure gaussienne en un point est 6, soit le maximum observé, alors la courbure dans la direction où elle est la plus forte est d'au moins 2,5, ce qui correspond à un rayon de courbure d'au plus 0,4. Les variations de courbure éliminées avec l'algorithme développé semblent donc significatives, compte tenu des dimensions des diffuseurs. À noter qu'il serait assez facile de calculer les courbures minimales et maximales elles-mêmes ; l'objectif ici est plutôt de tenter d'interpréter les valeurs de courbure gaussienne obtenues.

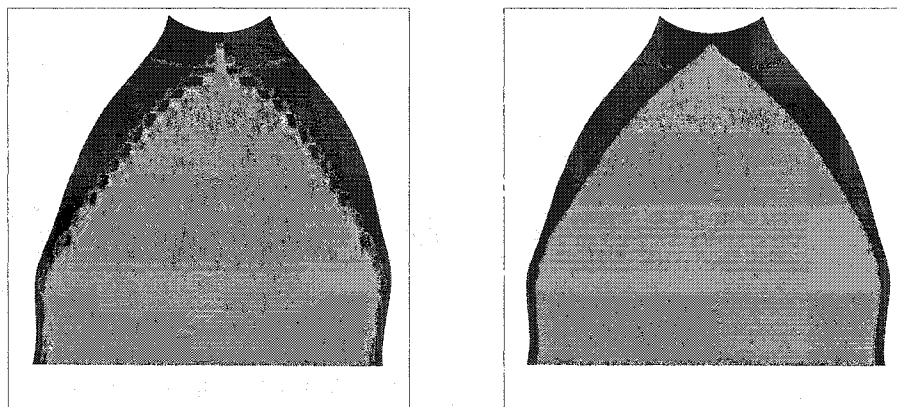


FIG. 3.3 Courbure Gaussienne (de -0.01 à 0.01) de surfaces calculées par l'algorithme classique (à gauche) et par l'algorithme développé (à droite).

3.1.1.4 Distance entre les surfaces classique et contrainte

La figure 3.4 montre à gauche les lignes de discontinuité de la surface contrainte et à droite la distance entre les surfaces classique et contrainte, pour un diffuseur différent de celui utilisé aux figures 3.1, 3.2 et 3.3. La distance est calculée à partir d'un maillage transfini de 100 points par 100 points sur la surface classique, dont les points sont projetés sur la surface contrainte. Le bleu indique une distance nulle et le rouge la distance la plus élevée. Il ressort que la distance entre les deux

surfaces est très faible, sauf autour des lignes de discontinuité, le long desquelles la distance varie de nulle vis-à-vis les sections originales (non montrées sur la figure) à des maximums locaux, entre les courbes de section. Autrement dit, la forme des surfaces est similaire, sauf entre les courbes de section le long des lignes de discontinuité, tel qu'attendu et suggéré par l'analyse de la courbure gaussienne. La distance maximale dans les cas tests étudiés plus en détail est d'environ 0,004, ce qui semble significatif sans être énorme.

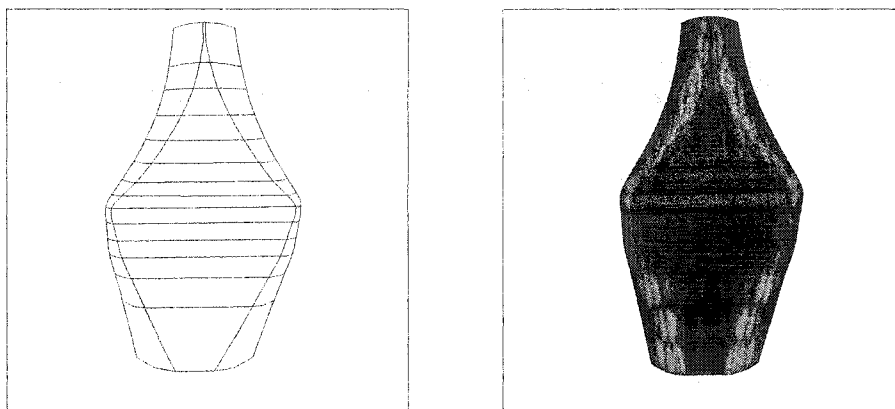


FIG. 3.4 Lignes de discontinuité de la surface contrainte (à gauche) et distance entre les surfaces calculées par les algorithmes classique et développés (à droite).

3.1.1.5 Mesure de régularité

Les contraintes augmentent la mesure de régularité E^v , soit dans la direction de l'interpolation, d'un facteur 2,5 environ. Cela indique une dégradation de la paramétrisation et non un changement important dans la forme des surfaces qui est, dans l'ensemble, très semblable. Tel qu'illustré précédemment, la mesure de régularité E^u , dans la direction des sections initiales, est quant à elle augmentée d'un facteur 7,5 environ. Dans ce cas, la variation provient vraisemblablement de la diminution considérable du nombre de points de contrôle dans la direction des sections.

Les variations totales d'angles, a priori semblables pour les deux surfaces, sont réparties en moins de points de contrôle, augmentant par le fait même la moyenne. Cette mesure ne permet donc pas de dire si le fait d'utiliser les contraintes améliore ou détériore la forme et/ou la paramétrisation dans la direction paramétrique u . L'énergie de déformation serait plus appropriée à cet effet.

3.1.1.6 Nombre de points de contrôle

Le nombre de points de contrôle est réduit en moyenne sur les cas tests disponibles par un facteur 10,2. La réduction varie selon les cas tests d'un facteur 5,0 à 17,3. Le nombre de lignes de discontinuité est réduit dans des proportions semblables, puisque les surfaces construites comportent $2n + 3$ rangées de points de contrôle en u pour n lignes de discontinuité. Le nombre de noeuds est par le fait même aussi réduit de façon importante.

3.1.1.7 Continuité géométrique

Les angles mesurés avec lesquels se connectent les morceaux de surfaces séparés par une ligne de discontinuité qui serait idéalement G^1 (et donc excluant celles qui doivent être G^0) sont en pratique négligeables dans le cas classique, et sont réduits presque de moitié avec l'algorithme développé. En effet, pour 100 angles calculés le long de chacune des lignes de discontinuité des surfaces de l'ensemble des cas tests, la moyenne est de 0,047 degrés dans le cas classique et de 0,027 dans le cas avec contraintes, alors que la moyenne du pire angle mesuré sur chacune des lignes de discontinuité est de 0,41 et 0,24, respectivement. Ces mesures excluent toutefois, pour le cas des surfaces calculées avec les contraintes, les quelques cas tests dégénérés (voir 3.3.2). La méthode des contraintes améliore donc légèrement

la continuité pour les cas testés. À noter que les angles observés sont bien dus à une discontinuité dans les surfaces, et non à la méthode de mesure employée. En effet, appliquée à un endroit où la surface est continue, cette méthode indique un angle très faible, de l'ordre de $1e-10$ degrés.

3.1.2 Impact de la méthode d'insertion des points libres

La méthode d'insertion des points libres a un impact non négligeable sur la forme et la paramétrisation des surfaces construites. Dans ce qui suit, l'effet des trois approches présentées - insertion naïve, lissage naïf et lissage parabolique - est illustré sur un diffuseur donné par la visualisation des lignes de discontinuité, de la grille de contrôle et de la courbure gaussienne. Puis, l'effet sur la mesure de régularité est donné sur l'ensemble des cas tests.

3.1.2.1 Lignes de discontinuité

Sur la figure 3.5, il est clair que l'insertion naïve, à gauche, des points de contrôle libres est inappropriée, puisque les lignes de discontinuité changent brusquement de direction dans le haut du diffuseur. Toujours sur la figure 3.5, il est aussi clair que le lissage naïf, au centre, constitue à ce chapitre une amélioration significative. Finalement, l'image de droite illustre que le lissage parabolique tend à redresser les lignes de discontinuité; cela est plus clair sur la figure 3.6.

3.1.2.2 Grille de contrôle

Les figures 3.7 et 3.8 montrent la grille de contrôle de surfaces générées avec les trois méthodes d'insertion des points de contrôle libres. Avec l'insertion naïve, sur

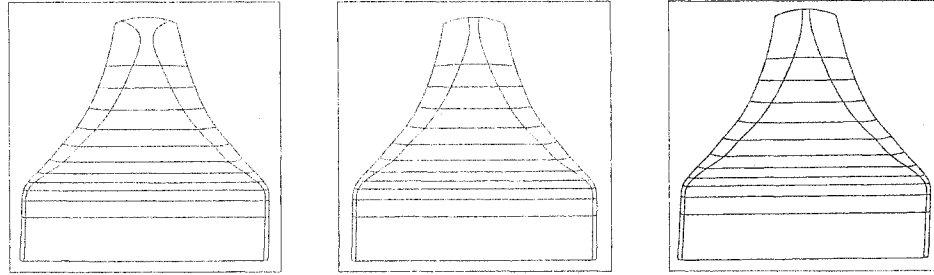


FIG. 3.5 Lignes de discontinuité de surfaces contraintes générées avec les méthodes d'insertion des points libres naïve (à gauche), de lissage naïf (au centre) et de lissage parabolique (à droite).

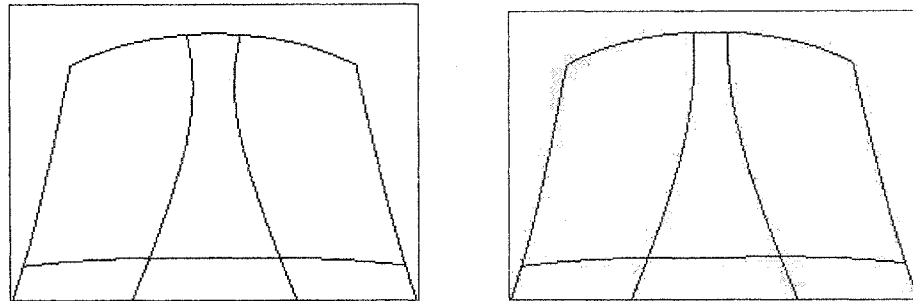


FIG. 3.6 Zoom sur les lignes de discontinuité de surfaces contraintes générées avec les méthodes de lissage naïf (à gauche) et de lissage parabolique (à droite).

l'image de gauche, près de l'entrée la grille de contrôle se croise et varie brusquement. L'image du centre montre que le lissage naïf améliore beaucoup ce problème, du moins dans ce cas, puisque la grille de contrôle est beaucoup plus régulière. L'image de droite illustre finalement que le lissage parabolique améliore davantage la régularité de la grille de contrôle.

3.1.2.3 Courbure gaussienne

La figure 3.9 devrait convaincre les sceptiques que la méthode d'insertion de noeuds a un impact significatif sur la forme de la surface. L'image de gauche montre

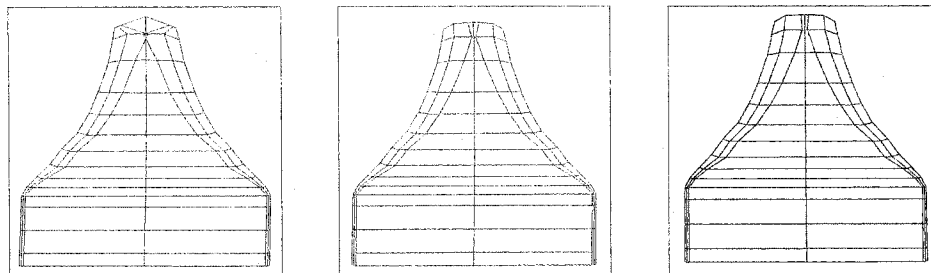


FIG. 3.7 Grille de contrôle de surfaces contraintes générées avec les méthodes d'insertion des points libres naïve (à gauche), de lissage naïf (au centre) et de lissage parabolique (à droite).

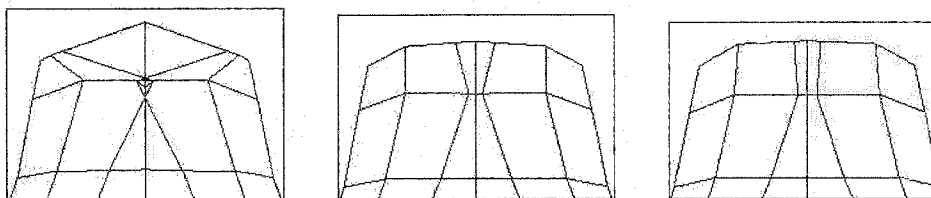


FIG. 3.8 Zoom sur la grille de contrôle de surfaces contraintes générées avec les méthodes d'insertion des points libres naïve (à gauche), de lissage naïf (au centre) et de lissage parabolique (à droite).

des variations indésirables de la courbure gaussienne d'une surface calculée avec l'insertion naïve dans la zone où la grille de contrôle varie brusquement, alors que l'image de droite montre une surface calculée avec l'insertion naïve qui ne présente pas ces variations arbitraires et non impliquées par les courbes originales. Le résultat du lissage parabolique n'est pas montré sur la figure 3.9 puisque la différence avec la méthode de lissage naïve n'est pas apparente.

3.1.2.4 Mesure de régularité

Finalement, sur l'ensemble des cas tests, l'effet sur la mesure de régularité sur les points de passage de la ligne de discontinuité (points de brisure et points libres) et sur la moyenne des angles au carré dans la grille de contrôle est montré au tableau

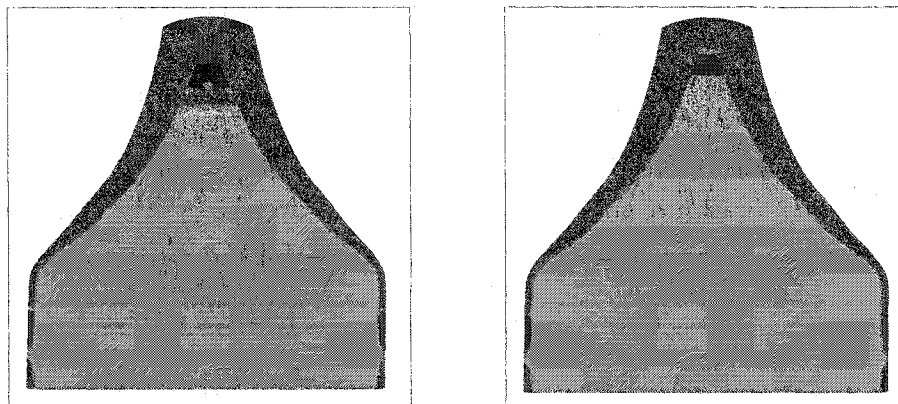


FIG. 3.9 Courbure gaussienne (de -0.01 à 0.01) de surfaces contraintes générées avec les méthodes d'insertion des points libres naïve (à gauche) et de lissage naïf (à droite).

3.1.

TAB. 3.1 Effet des trois algorithmes de lissage sur la mesure de régularité des lignes de brisure et de la grille de contrôle, en radians au carré, excluant les cas ne nécessitant pas de lissage, c'est-à-dire ne contenant aucun noeud libre.

Méthode de lissage	Mesure de régularité des points libres et de brisure sur les courbes	Mesure de régularité sur la surface calculée ($\times 10^{-3}$)
Sans lissage	1,53	21,8
Lissage naïf	0,315	7,30
Lis. parabolique	0,301	5,86

Cela tend à confirmer les observations faites sur l'exemple complet donné : le lissage naïf améliore significativement la régularité des lignes de discontinuité et de la grille de contrôle, de facteurs cinq et trois environ, et par rapport à celui-ci le lissage parabolique l'améliore davantage mais de façon plus modeste, de 4% et 20% environ. L'idée du lissage parabolique est de disposer les points à interpoler de façon plus régulière, dans l'espoir que cela se reflète sur la grille de contrôle en abaissant la mesure de régularité. Le lissage consiste à disposer les points à

interpoler le long d'une parabole dans l'espace (t, s) , t pour la distance entre le centre des sections, et s pour l'abscisse curviligne sur les courbes de section ; voir 2.3.8.3. Or, rien ne garanti que cela réduit la mesure de régularité sur la grille de contrôle : la parabole agit sur les points de passage des lignes de discontinuité (les points libres) et non directement sur la grille de contrôle, et les angles de la mesure de régularité sont calculés en trois dimensions et non dans cet espace (t, s) . Il y a quand même amélioration pour tous les modèles de diffuseurs testés sauf un. L'amélioration d'environ 4% obtenue par l'algorithme de lissage parabolique par rapport au lissage naïf pour la mesure de régularité E^d entre les points de brisure et les points libres (ou les points de passage des lignes de discontinuité sur les courbes) résulte en une amélioration plus substantielle d'environ 20% quant à la mesure de régularité dans la grille de contrôle. Tout cela alors que la mesure est calculée sur l'ensemble de la grille de contrôle, alors que le lissage, agissant sur une petite portion des points à interpoler, semble pouvoir influencer réellement seulement une petite portion de la grille de contrôle. Globalement donc, cet algorithme fonctionne assez bien pour l'ensemble des cas tests, autant pour de petits que des grands nombres de sections comportant des noeuds libres (de un à une vingtaine), pour des lignes de discontinuité convergeant ou divergeant, vers l'entrée comme vers la sortie du diffuseur.

3.2 Impact de l'algorithme proposé pour construire la surface à partir des courbes compatibles

3.2.1 Impact de la méthode de choix des paramètres d'interpolation

La méthode logarithmique proposée pour le choix des paramètres, par rapport aux trois autres méthodes proposées dans Piegl et Tiller, 1997, améliore en moyenne

légèrement la mesure de régularité dans la direction u , mais la détériore légèrement dans la direction v . En moyenne, la somme dans les deux directions de la mesure de régularité est plus petite avec par la méthode centripète. Ces résultats sont présentés dans les tableaux 3.2 et 3.3, ainsi que les ratios au meilleur résultat, question de faciliter les comparaisons. Il apparaît d'abord clairement que la méthode uniforme ne donne pas des bons résultats dans la direction v , celle de l'interpolation. Cela s'explique simplement par le fait que les données ne sont pas réparties uniformément, et confirme ce qui est dit dans Piegl et Tiller, 1997. Les figures 3.10 et 3.11 montrent un exemple de diffuseur où les données ne sont pas réparties uniformément et pour lequel la méthode uniforme donne un mauvais résultat. À noter que pour les surfaces montrées sur cette figure, la différence de la mesure de régularité est d'un facteur de 4,5 environ, ce qui illustre que cette mesure punit sévèrement les replis dans le polygone de contrôle, comme souhaité.

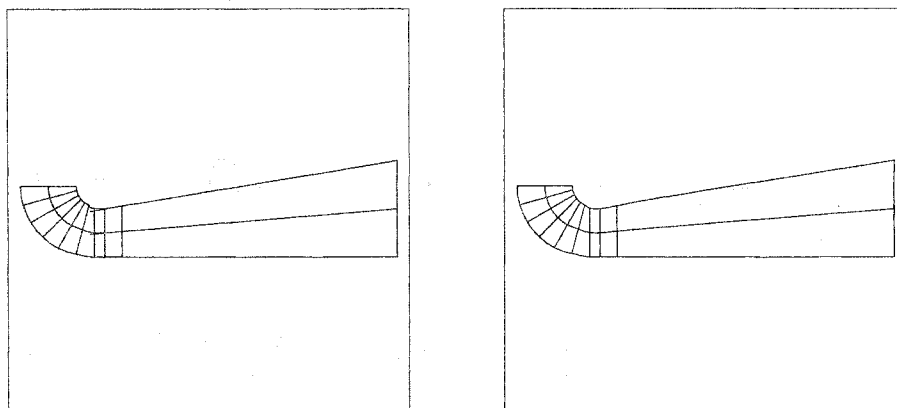


FIG. 3.10 Surface de côté d'un diffuseur calculé avec les méthodes de paramétrisation uniforme (à gauche) et logarithmique (à droite).

Ensuite, la méthode logarithmique donne des résultats légèrement meilleurs que les deux autres méthodes pour l'interpolation dans la direction v en considérant la mesure choisie, en moyenne d'environ de 1,2% et 0,2% dans le cas classique, et de 0,3% et 0,6% dans le cas avec les contraintes. Est-ce que ces différences sont signi-

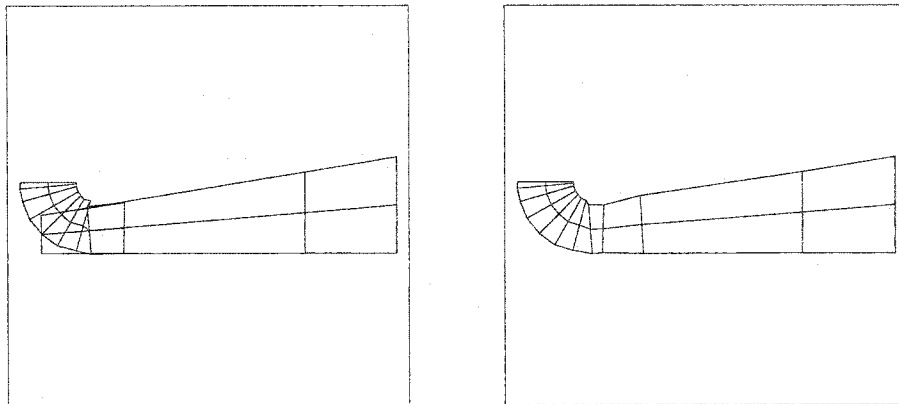


FIG. 3.11 Grille de contrôle de la surface de côté d'un diffuseur calculé avec les méthodes de paramétrisation uniforme (à gauche) et logarithmique (à droite).

ficatives ? D'abord, elles ne sont généralement pas visible à l'oeil nu. Par contre, la différence de 4% dans la mesure de régularité entre le lissage parabolique par rapport au lissage naïf est légèrement visible à l'oeil nu, ces variations provenant de certaines régions des surfaces seulement. Dans le cas des méthodes de choix des paramètres, les différences sont un peu moins grandes, mais elles sont vraisemblablement réparties plus ou moins également sur l'ensemble de la surface. Elles semblent donc significatives même si elles sont faibles. Pour la mesure de régularité dans la direction paramétrique u , la meilleure méthode semble être la méthode uniforme, mais elle est inutilisable de façon systématique à cause de ses résultats parfois erratiques en v . Parmi les trois autres méthodes, la méthode centripète est légèrement meilleure que les deux autres, suivie dans l'ordre par la méthode logarithmique et la méthode longueur d'arc. Au total, la méthode centripète donne les meilleurs résultats sur les diffuseurs testés, suivie de près par les méthodes logarithmique et longueur d'arc. La méthode uniforme donne en moyenne des résultats significativement moins bons. Les écarts sont généralement plus marqués entre les méthodes de choix des paramètres d'interpolation dans l'algorithme sans

contrainte.

TAB. 3.2 Mesure de régularité, en 10^{-3} radians carré, dans les deux directions paramétriques et au total pour les diffuseurs sans contraintes, pour les différentes méthodes de choix de paramètres d'interpolation.

Méthode de choix de paramètres	E^u		E^v		$E^u + E^v$	
	Valeurs	Ratios	Valeurs	Ratios	Valeurs	Ratios
Uniforme	2,52	1,0006	7,77	2,87	10,29	1,96
Longueur d'arc	2,81	1,12	2,74	1,012	5,55	1,059
Centripète	2,52	1	2,72	1,0019	5,24	1
Logarithmique	2,68	1,064	2,71	1	5,39	1,029

TAB. 3.3 Mesure de régularité, en 10^{-3} radians carré, dans les deux directions paramétriques et au total pour les diffuseurs avec contraintes, pour les différentes méthodes de choix de paramètres d'interpolation.

Méthode de choix de paramètres	E^u		E^v		$E^u + E^v$	
	Valeurs	Ratios	Valeurs	Ratios	Valeurs	Ratios
Uniforme	19,54	1	13,96	2,07	33,51	1,26
Longueur d'arc	20,25	1,036	6,80	1,0060	27,05	1,0146
Centripète	19,87	1,017	6,79	1,0034	26,66	1
Logarithmique	20,11	1,029	6,76	1	26,87	1,0079

Le tableau 3.4 montre pour combien de diffuseurs chacune des méthodes donne la mesure de régularité la plus faible, dans chacune des directions paramétriques et au total. Ces chiffres sont à prendre avec un grain de sel puisque les différences sont parfois minimes, parfois grandes, mais tout de même ils donnent une certaine indication du bénéfice pouvant être apporté par la méthode logarithmique. Dans la direction v , la méthode logarithmique donne le meilleur résultat dans presque trois cas sur cinq. Les méthodes centripète et longueur d'arc fonctionnent chacune mieux que les autres dans un cas sur cinq environ alors que la méthode uniforme ne fonctionne mieux que les autres que pour peu de diffuseurs. Ces résultats ressemblent

à ceux présentés au tableau 3.3. Dans la direction u , la méthode uniforme semble encore donner les meilleurs résultats, la méthode logarithmique étant la pire. Au total, il n'y a pas de tendance vraiment marquante, même si la méthode centripète semble mieux fonctionner.

TAB. 3.4 Nombre de diffuseurs, avec et sans contrainte, pour lesquels chacune des méthodes d'interpolation donne la meilleure mesure de régularité.

Méthode de choix de paramètres	E^u		E^v		$E^u + E^v$	
	Algo classique	Algo proposé	Algo classique	Algo proposé	Algo classique	Algo proposé
Uniforme	16	16	1	2	4	10
Longueur d'arc	1	7	4	4	0	5
Centripète	9	0	7	5	19	5
Logarithmique	0	3	14	15	3	6

3.2.2 Impact de la méthode de spécification des tangentes

Les outils utilisés jusqu'ici dans l'analyse des résultats ne sont malheureusement pas d'un grand secours dans l'analyse de l'impact de la spécification de tangentes. En particulier, la mesure de régularité n'est pas une bonne mesure à cet effet, puisque le nombre de points de contrôle n'est pas le même avec l'ajout de conditions de tangence. Une autre approche envisageable, et d'ailleurs utilisée dans le cadre de ce travail pour détecter automatiquement les replis dans les surfaces lors du développement, est de compiler le nombre d'angles dans la grille de contrôle dépassant une certaine limite sur l'ensemble des cas tests. Cette technique ne donne toutefois pas de résultats concluant pour les modèles géométriques finaux : avec ou sans tangentes imposées, avec ou sans contraintes, aucun angle ne dépasse l'angle limite choisi de $\frac{\pi}{4}$. Choisir un angle plus petit ne donnerait pas nécessairement des résultats significatifs. Deux éléments peuvent cependant être montrés par un exemple.

D'abord, les seconde et avant-dernière rangées de points de contrôle sont situées à des endroits qui semblent raisonnables par rapport au reste de la grille de points de contrôle, ainsi que par rapport aux seconde et avant-dernière sections, c'est-à-dire à $\frac{1}{3}$ environ entre les deux premières et dernières sections, tel que prévu par la théorie (voir figure 3.12, sur laquelle la position des seconde et avant-dernière sections est indiquée). Ensuite, certains problèmes évidents à l'oeil peuvent survenir si des tangentes ne sont pas utilisées, comme l'illustre la figure 3.12. De tels problèmes ne surviennent heureusement que dans peu de cas tests. Ces résultats ne prouvent en rien que la méthode proposée pour le calcul de la grandeur donne systématiquement de meilleurs résultats, mais cela illustre au moins qu'elle fonctionne correctement. Il ne faudrait pas conclure non plus que la méthode permettant de choisir la direction de la tangente en fonction des deux premiers ou derniers points de collocation est adéquate dans le cas général, surtout étant donné que les diffuseurs sont relativement plats à la sortie, là où de telles tangentes sont spécifiées.

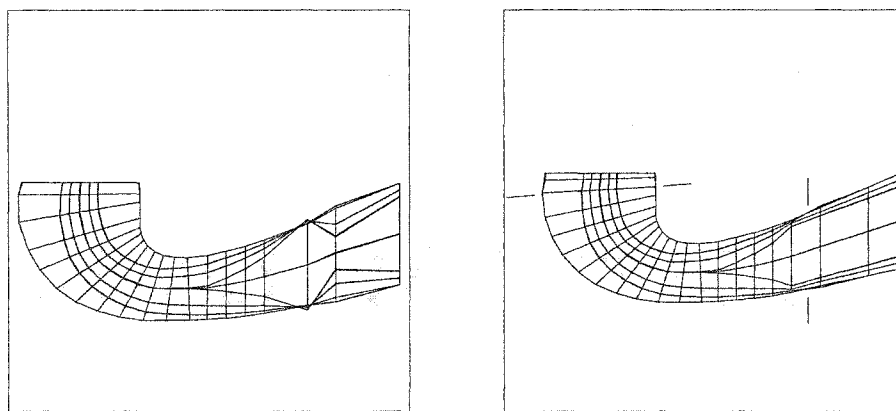


FIG. 3.12 Côté d'un diffuseur calculé sans (à gauche) et avec (à droite) dérivées spécifiées (les traits indiquent l'emplacement des seconde et avant-dernière sections).

Finalement, les tangentes doivent bel et bien être spécifiées dans l'espace homogène puisque l'interpolation se fait dans cet espace. La figure 3.13 illustre que la

spécification de dérivées dans l'espace (x, y, z, w) peut produire des surface dont la grille de contrôle a une forme erratique, surtout près des extrémités, c'est-à-dire là où les dérivées ont vraisemblablement le plus d'influence.

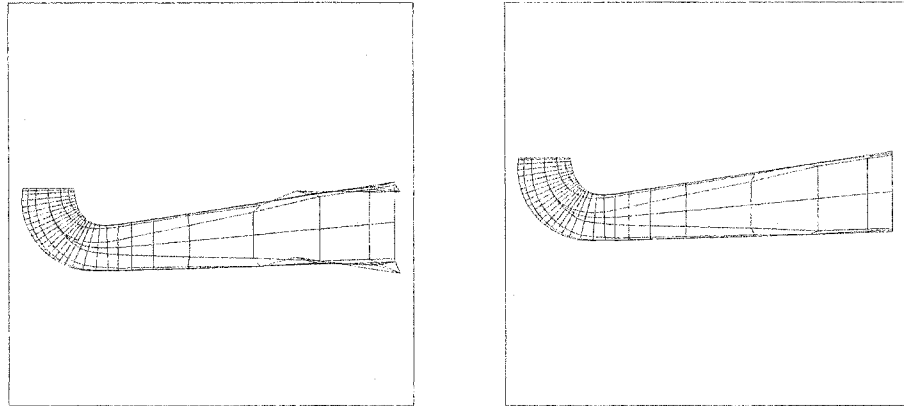


FIG. 3.13 Vue de côté de la grille de contrôle d'un diffuseur ; tangentes spécifiées dans l'espace tridimensionnel (à gauche) et dans l'espace homogène (à droite).

3.3 Appréciation générale des surfaces calculées

Jusqu'à maintenant, les résultats présentés justifient des aspects bien précis de l'algorithme développé en illustrant et quantifiant les améliorations qui en découlent. Mais qu'en est-il du résultat final ? Quelques problèmes sont toujours présents et certains aspects demeurent à améliorer, comme montré et expliqué dans ce qui suit.

3.3.1 Impact des variation de poids des courbes de section dans l'interpolation

Les poids compliquent l'interpolation et peuvent altérer la paramétrisation, comme discuté en 1.3.2 et 1.3.3. Pour les cas tests utilisés cependant, cela ne semble pas

avoir posé de graves problèmes ; les poids de la surface résultante sont toujours positifs et varient raisonnablement, c'est-à-dire de 0,5 à 1,25 au maximum, mais habituellement de 0,7 à 1,1. De plus, la paramétrisation ne semble pas significativement perturbée par les poids ; voir la figure 3.14 pour des lignes de discontinuité bien droites et l'image de gauche de la figure 3.23 pour un maillage régulier. Par contre, les variations brusques de poids dans les courbes de section ont un impact direct et local sur la forme de la grille de contrôle des surfaces résultantes, dont les rangées sont autrement presque exactement situées dans des plans, tel qu'illustré sur la figure 3.14. D'ailleurs, si l'interpolation est faite en trois dimensions, en mettant au préalable les poids des courbes de section à 1, les rangées de points de contrôle sont à toute fin pratique situées dans des plans (les courbes de section sont planes).

Finalement, l'image de gauche de la figure 3.14 montre des lignes de discontinuité sur une surface résultante, qui sont toutes situées dans des plans, du moins à l'oeil. Cela suggère que la surface passe exactement par les courbes de section aux paramètres d'interpolation choisis, ce qui, vérification faite, est bien le cas.

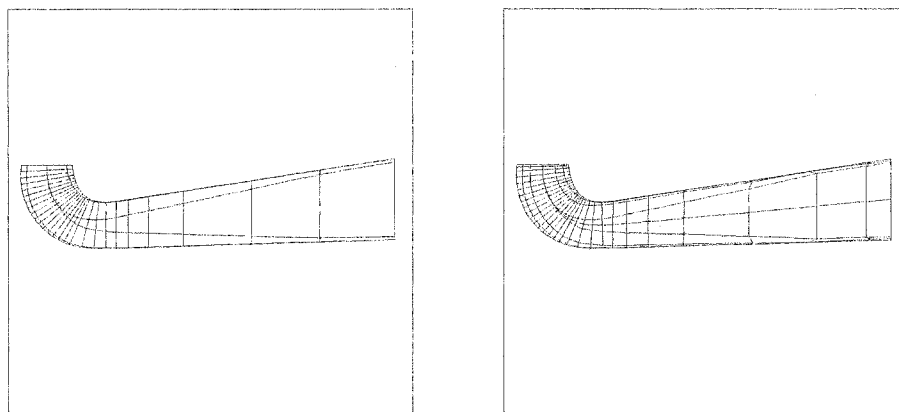


FIG. 3.14 Vue de côté d'un diffuseur ; lignes de discontinuité (à gauche) et grille de contrôle (à droite).

3.3.2 Croisement de la grille de contrôle près de l'entrée

La figure 3.15 illustre un problème qui persiste dans certains cas tests : près de l'entrée du diffuseur, alors que les points de discontinuité sur les courbes convergent rapidement d'une section à l'autre, puis se redressent pour ne pas s'intersecter grâce au lissage, les lignes de discontinuité et la grille de contrôle peuvent s'intersecter, créant un repli dans la surface. La continuité de la surface est alors désastreuse, et bien que les replis soient relativement petit, ils sont environ de l'ordre de grandeur d'une maille ; ils peuvent donc perturber localement le maillage de façon significative et indésirable. À noter que ce problème est présent seulement dans les surfaces calculées avec des contraintes. Des solutions potentielles sont proposées au chapitre 4.

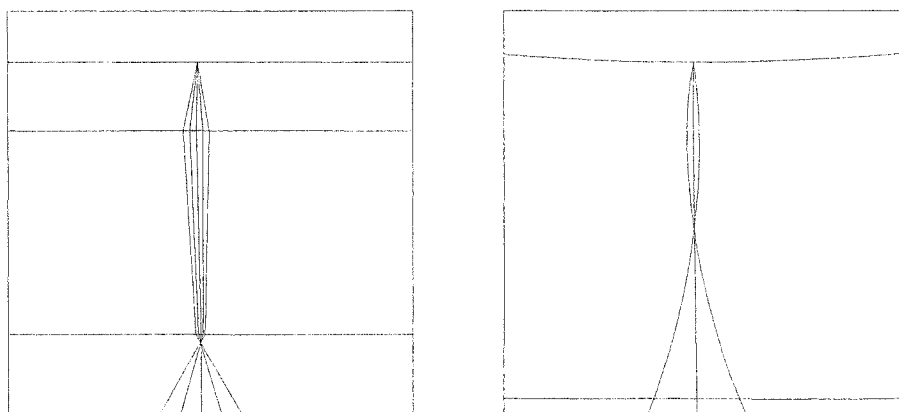


FIG. 3.15 Gros plan sur un pli dans une surface : grille de contrôle (à gauche) et lignes de discontinuité (à droite).

3.3.3 Forme et convexité de la surface

Un autre aspect crucial de la qualité des surfaces n'est considéré jusqu'ici que par comparaison et non dans l'absolu : la forme et la convexité des surfaces finales. Des

critères basés sur les angles du polygone de contrôle, ou même sur l'énergie des surfaces sont certes utiles pour comparer les résultats de méthodes de construction de surfaces, mais ne sont pas d'un grand secours pour déterminer si la forme finale est satisfaisante ou non. Parmi les outils facilement disponibles et/ou utilisés dans le reste de ce travail, la visualisation de la courbure gaussienne sur une surface et la visualisation de la courbure le long d'isoparamétriques sur celle-ci peuvent aider à déterminer à quel point le résultat final est satisfaisant ou non.

La figure 3.16 montre la courbure gaussienne de deux surfaces, l'une calculée avec l'algorithme classique et l'autre calculée avec l'algorithme développé. La plage choisie pour la visualisation de la courbure est de $-1e-8$ à $1e-8$, telle qu'utilisée par Anas Bentamy sur des ailes d'avion dans sa thèse de doctorat (Bentamy, 2003). La précision de construction des diffuseurs n'est pas nécessairement aussi grande que celle des ailes d'avion, mais il semble raisonnable de prendre une plage de cet ordre de grandeur comme niveau de finition requis pour une application exigeante. Sur les surfaces des diffuseurs la courbure gaussienne change de signe à de nombreux endroits, indiquant des changements de convexité, et ce même sur la surface calculée avec les contraintes. Les surfaces présentent, dans certaines régions, plusieurs zones plus ou moins grandes de courbure positive, alternant avec des zones négatives. Dans d'autres régions, peu de telles zones sont présentes, mais leur frontières peuvent être irrégulières.

Les figures 3.17 et 3.18 montrent le tracé de la courbure le long de lignes isoparamétriques en u et v , respectivement. Elles sont jugées représentatives des tracés de courbure pour l'ensemble des diffuseurs. La figure 3.17 montre clairement que la forme des surfaces est loin d'être parfaite. La courbure le long des lignes isoparamétriques considérée oscille presque partout, et de façon très importante en certains endroits. La figure 3.17 montre la courbure le long d'isoparamétriques v ,

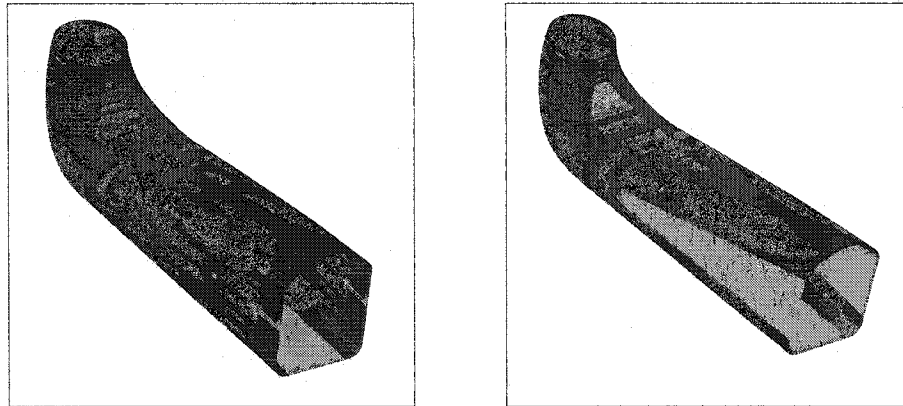


FIG. 3.16 Courbure gaussienne de $-1e-8$ à $1e-8$, surfaces avec et sans contrainte.

c'est-à-dire dans la direction des courbes de section. La courbure devrait donc être très près de celle des courbes de section, c'est-à-dire être très continue, mais morceau par morceau. C'est généralement le cas, malgré certaines variations brusques et vraisemblablement indésirables, telle que celle au centre de l'image du centre.

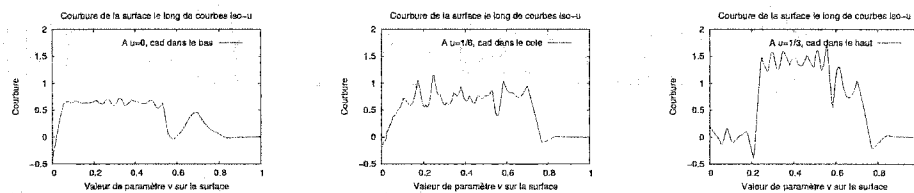


FIG. 3.17 Courbure de la surface d'un diffuseur le long des lignes iso-u 0, 1/6 et 1/3 (de gauche à droite).

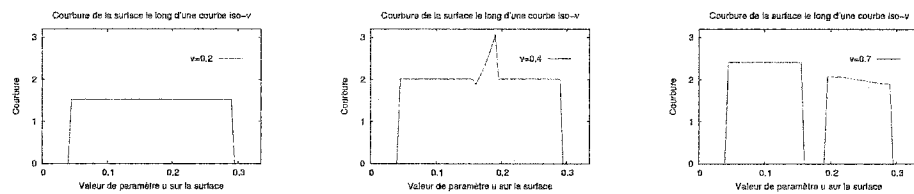


FIG. 3.18 Courbure de la surface d'un diffuseur le long des lignes iso-v 0.2, 0.4 et 0.7 (de gauche à droite).

Quelle est la cause des irrégularités dans les surfaces construites? Comme les sur-

faces finales obtenues dépendent de deux choses, soient des sections initiales et de la méthode de construction, la cause se trouve dans un ou l'autre, ou un peu dans les deux. Cette question très intéressante n'a malheureusement pu être approfondie dans le cadre de ce travail.

3.4 Validation avec les diffuseurs et impact dans le contexte industriel

3.4.1 Fonctionnement de TU

Tel qu'expliqué en 1.3.1, TU calcule les surfaces en interpolant par spline cubique les paramètres **dta** des sections, puis les discrétise et écrit le résultat, un maillage. Le modèle géométrique comme tel qui est construit ne s'écrit pas dans une forme conventionnelle, B-spline ou autre. La sortie de TU est une discrétisation du modèle géométrique interne des surfaces, et non le modèle lui-même. Pour calculer la discrétisation, un nombre de points est spécifié le long de la dorsale et dans la direction des sections. Les points sont répartis le plus uniformément possible le long de la dorsale, tout en incluant comme points de la discrétisation le centre des sections initiales. Une loi de concentration peut aussi être spécifiée. Il suffit alors de discrétiser les sections correspondant aux points sur la dorsale, en fonction du nombre de points et de la loi de concentration spécifiés. Le résultat est une grille $n \times m$ de points, soit une discrétisation, un maillage de la surface. La surface polygonale passe donc par les courbes de section seulement à un nombre fini de points. Si un maillage est calculé à partir de cette surface, que ce soit par génération ou par adaptation, les points du nouveau maillage peuvent ne plus se trouver sur la surface initiale ; le nouveau maillage approxime donc ce qui était déjà une approximation. À noter que TU et **dta2pie** permettent aussi d'interpoler linéairement les sections, puisque certains diffuseurs sont ainsi construits. Les figures 3.19 et 3.20

montrent les surfaces bien paramétrées produites par TU.

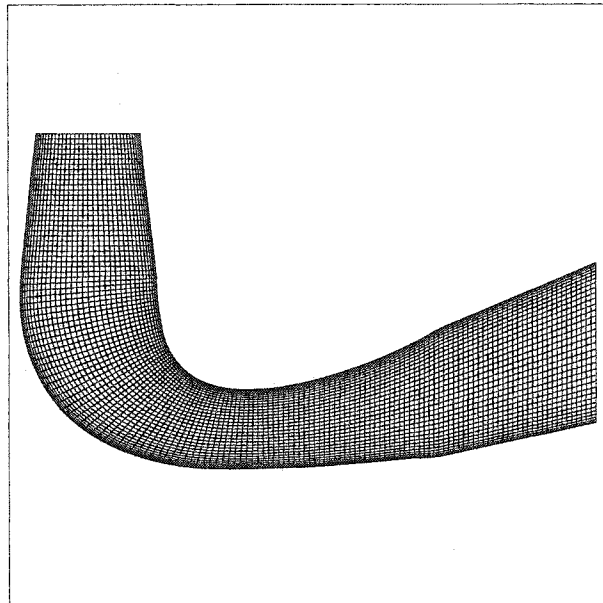


FIG. 3.19 Surface de côté d'un diffuseur, telle que produite par TU.

3.4.2 Comparaison de l'approche développée avec TU

3.4.2.1 Précision

Les surfaces calculées par TU ne passent pas exactement par les courbes de section parce que la représentation polygonale des surfaces ne permet pas à celles-ci de passer exactement par des courbes de section non linéaires. Par contre, avec le nombre de points utilisés, l'approximation est précise : pour la section à l'entrée, en forme de cercle, 4 fois 36 segments de droite sont typiquement utilisés, c'est-à-dire 36 pour chacune des quatre arêtes. En supposant que les points sont répartis uniformément sur le cercle, chacun des segments représente un arc de cercle de 2,5 degrés ($\frac{360}{4 \times 36}$), et donc la distance maximale entre les deux est de $(1 - \cos(\frac{2,5}{2}))r =$

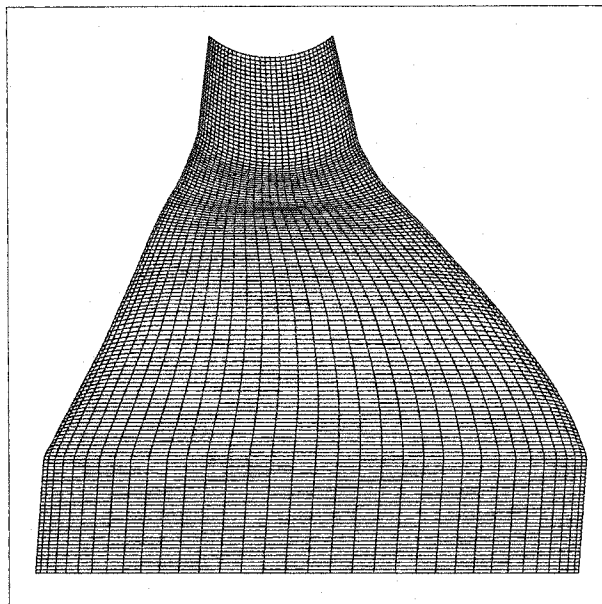


FIG. 3.20 Surface du haut d'un diffuseur, telle que produite par TU.

$0,00024r$, soit environ $\frac{1}{4000}$ du rayon.

3.4.2.2 Forme

La figure 3.21 montre une bosse dans le modèle d'un diffuseur calculé par TU, alors que celui calculé par `dta2pie` est plus régulier. À noter cependant que ce problème ne survient que dans un seul cas test, et que certains problèmes demeurent dans `dta2pie`, tel que montré en 3.3.2. Globalement, il n'est cependant pas possible de comparer, avec les méthodes immédiatement disponibles, la régularité des surfaces produites par les deux méthodes. Premièrement, aucun algorithme de maillage approprié n'est immédiatement disponible (voir la prochaine sous-section, 3.4.3), et il n'est pas garanti que le calcul d'une surface continue à partir d'une surface polygonale n'introduirait pas assez d'erreur pour enlever la signification de toute comparaison, quoique cela pourrait constituer une piste intéressante. Il faudrait

donc comparer des surfaces polygonales avec des surfaces NURBS, ce qui ne semble pas trivial non plus. La mesure des angles dans le polygone de contrôle n'est pas utile ici, étant donné que le nombre de points de contrôle diffère grandement dans les deux cas. La courbure gaussienne n'est pas d'un grand secours non plus, puisque la courbure d'une surface polygonale est nulle à l'intérieur des morceaux de surface, et infinie à leur jonction. La courbure gaussienne pourrait cependant inspirer des mesures de comparaison basées sur la convexité, pour les surfaces polygonales en particulier. Les mesures d'énergie ne sont pas d'un grand secours non plus, du moins dans leur forme conventionnelle. En fait, elles mesureraient plus la paramétrisation que la forme. Il est vraisemblablement possible toutefois d'approximer la courbure et d'en faire le tracé, ou de tracer une sorte de courbure gaussienne discrète, mais malheureusement ces aspects ne sont pas explorés dans le cadre de ce travail. Finalement, la distance entre les surfaces serait relativement facile à calculer, mais cela montrerait seulement l'ampleur de la différence entre les deux, sans possibilité de savoir laquelle est la meilleure et de combien. La visualisation superposée des surfaces provenant de TU et de dta2pie suggère que globalement, la forme est très semblable.

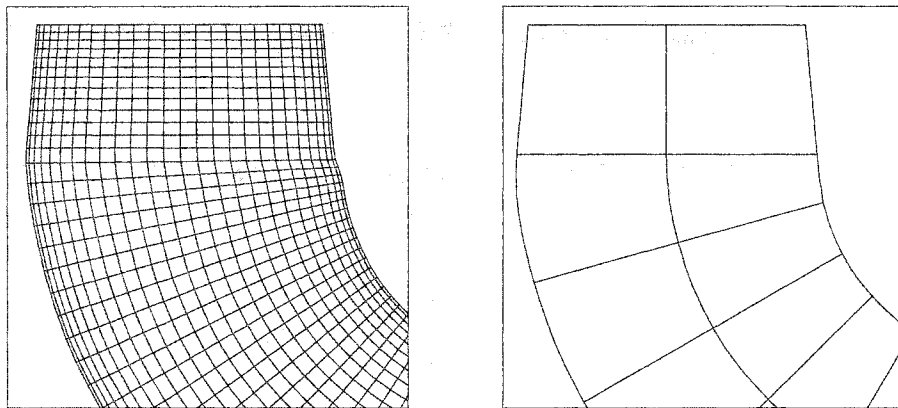


FIG. 3.21 Surfaces de côté d'un diffuseur, telle que produite par TU et dta2pie

3.4.2.3 Paramétrisation

Il est clair sur les figures 3.19 et 3.20 que la paramétrisation des surfaces calculées par TU est adéquate, contrairement à celles calculées par la méthode développée (voir 3.1). Puisque les surfaces calculées par TU sont en fait des maillages, les points se doivent d'être bien répartis.

3.4.2.4 Taille des modèles

Les surfaces polygonales telles que calculées par TU semblent typiquement être représentées par 36 par 150 points; du moins c'est l'ordre de grandeur. Au total, donc, un tel modèle utilise $4 \times 36 \times 150 = 21600$ points, à trois coordonnées chacun, pour 64800 nombres réels. Dans le cas de la méthode classique d'interpolation de courbes NURBS, selon les hypothèses posées en 1.3.3, représenter un diffuseur avec une surface NURBS ainsi calculée peut prendre jusqu'à 32000 points, à quatre coordonnées chacun pour 128000 coordonnées. En moyenne, environ 10000 points sont utilisés, pour 40000 coordonnées en nombres réels, soit un peu moins que dans le cas de TU. Par contre, dans le cas de la méthode développée, le modèle peut être représenté avec environ 950 points en moyenne, soit 3800 nombres réels. L'utilisation des NURBS pour représenter les surfaces, et la technique d'interpolation développée permettent donc de réduire la taille du modèle géométrique de façon substantielle, soit d'un facteur de 10 à 20, par rapport au modèle polygonal utilisé dans TU.

3.4.3 Maillages

L'idée à l'origine du développement de `dt2pie` était de permettre la génération d'un maillage structuré d'hexaèdres dans le diffuseur, donc d'abord un maillage structuré de quadrilatères sur les faces. Les maillages ou surfaces polygonales produits par TU 3.20 et 3.19 sont très réguliers, très uniforme, tout comme ceux produits par la méthode transfinie (détaillée en 1.5) à partir de faces définies sur les surfaces NURBS calculées à partir de l'algorithme classique (non montré). Sur les faces définies sur les surfaces contraintes par contre, comme la paramétrisation est loin d'être par abscisse curviligne, un maillage calculé par la méthode transfinie est loin d'être uniforme puisque les longueurs d'arêtes varient beaucoup sur une même ligne de maillage, comme le montre la figure 3.22.

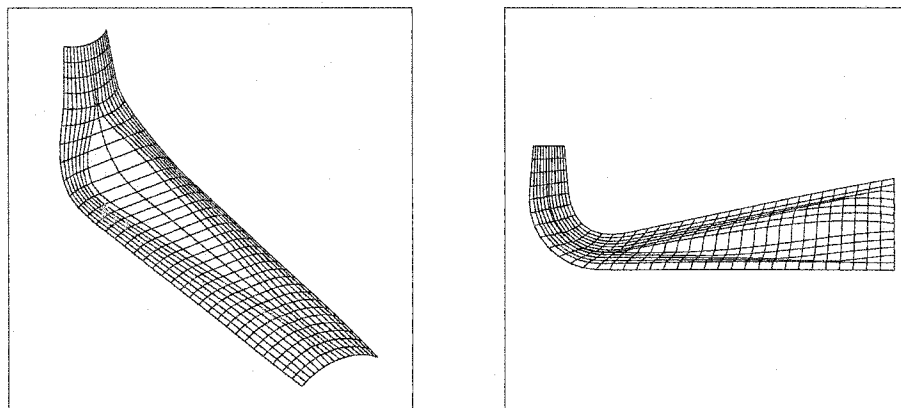


FIG. 3.22 Maillage transfini calculé sur les faces contraintes du haut et de côté, pour des surfaces contraintes.

La méthode de maillage développée et expliquée en 2.5.3 donne de meilleurs résultats pour les faces du haut et du bas, mais pas pour celles des côtés (figure 3.23). La méthode développée suppose en effet que les lignes reliant les points des arêtes discrétisées dans la direction choisie ont une forme appropriée, et placent le long de celles-ci les points selon la loi de concentration spécifiée. C'est le cas pour les faces

du haut et du bas des diffuseurs, mais pas pour les faces des côtés, à cause de la forme en coude ; les lignes de maillages désirées ne sont alors plus nécessairement des iso- v , qui elles, sont droites puisqu'elles suivent assez la définition des courbes de section. Ces lignes peuvent donc changer de direction brusquement à travers les lignes de discontinuité, qui sont en effet des lignes de discontinuité importante quant à la paramétrisation. Cela produit des maillages erratiques. Une solution satisfaisante n'a donc pas été atteinte en ce qui concerne le maillage.

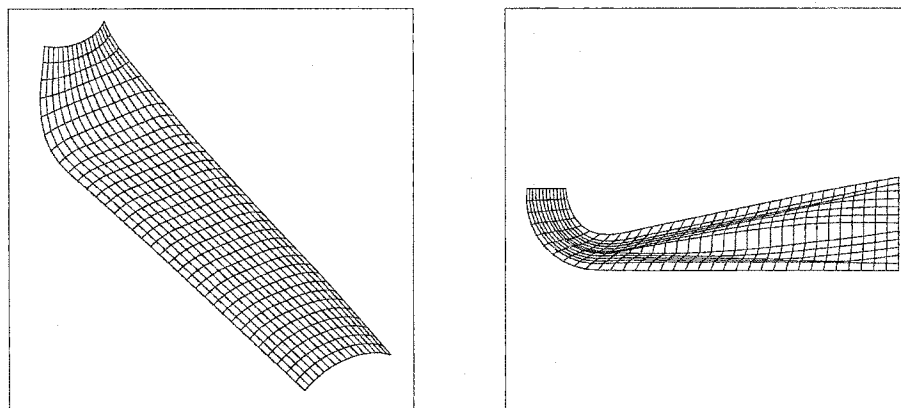


FIG. 3.23 Maillage calculé à partir de la méthode simple développée, sur les faces du haut et de côté, pour des surfaces contraintes.

L'autre problème associé aux maillages qui survient avec l'utilisation des surfaces NURBS est que le modèle géométrique peut être concave et donc, après discrétisation, comporter des mailles concaves en trois dimensions, ce qui est inutilisable par les méthodes d'éléments finis et de volumes finis. Ce problème est illustré schématiquement à la figure 3.24. Ainsi, les maillages produits à partir des surfaces NURBS calculées avec l'algorithme classique comportaient pour certains diffuseurs, d'après le logiciel de calculs numériques *tascflow*, quelques mailles concaves, voire quelques dizaines ou même centaines. Le fait de construire les surfaces NURBS en un seul morceau élimine ce problème pour les cas tests disponibles, même si les surfaces ne sont pas parfaitement continues au sens du plan tangent, puisque les

courbes de section compatibles sont C^0 .

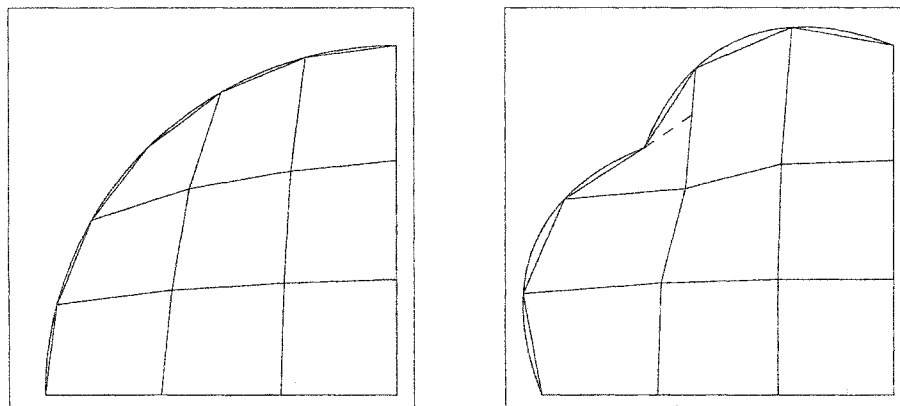


FIG. 3.24 Maillage structuré dans une géométrie convexe (à gauche) et concave (à droite).

La véritable solution à ce problème semble être de construire un maillage dit en 'O', comme représenté schématiquement à la figure 3.25. Il s'agit d'un maillage multi-blocs structuré. Calculer un maillage structuré dans une géométrie complexe en considérant le volume à mailler comme un carré ou un cube topologique peut résulter en un mauvais maillage si le domaine s'y prête mal. Outre l'alternative d'utiliser un maillage non-structuré, il est possible de subdiviser un domaine à mailler de forme quelconque en un ensemble de sous-domaines, formant autant de carrés ou cubes topologiques, et de générer un maillage structuré à l'intérieur de chacun de ces sous-domaines. Le résultat est un maillage structuré par zones, potentiellement de meilleure qualité. Cette façon de faire est d'ailleurs utilisée pour les diffuseurs. Cette technique permet aussi de contrôler l'orientation du maillage, importante pour la précision des calculs, par exemple en faisant une zone près de la coquille extérieure. Cette façon de faire permettrait également de contourner le fait que le modèle géométrique NURBS des diffuseurs peut ne pas être convexe, comme il le devrait.

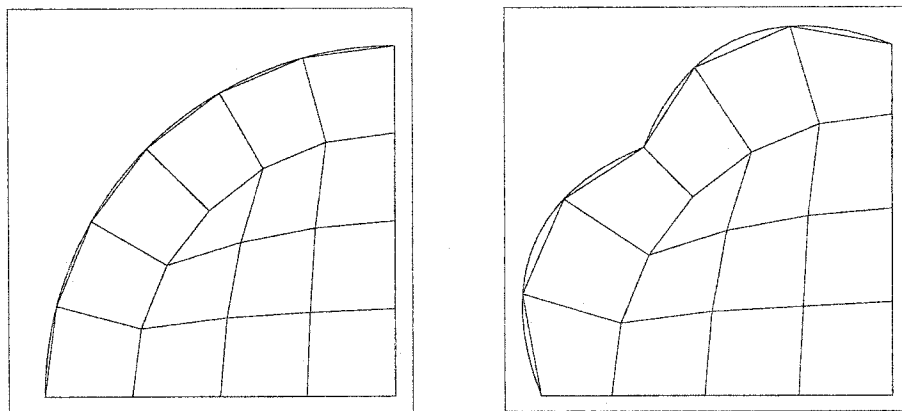


FIG. 3.25 Maillage en structuré en 'O' dans une géométrie convexe (à gauche) et concave (à droite).

CHAPITRE 4

DISCUSSION

Le besoin exprimé par General Electric à la source du projet est de construire un modèle géométrique d'un diffuseur, une représentation de la réalité. C'est l'objet même de la conception géométrique assistée par ordinateur, comme de tout travail de modélisation d'ailleurs. Or il s'agit bien de cela : un modèle, avec ses hypothèses sous-jacentes, ses simplifications et ses limites. En effet, il semble impossible que toute surface réelle corresponde exactement, à l'échelle macroscopique, à une surface B-spline ou NURBS de degré 3. Toutefois, ces techniques permettent de construire des représentations bien assez près de la réalité pour qu'elles soient utiles. Cela fait ressortir une qualité importante d'un modèle : sa fidélité, c'est-à-dire l'exactitude avec lequel il représente la réalité. La fidélité du modèle produit est donc un des critères avec lequel les algorithmes présentés dans ce mémoire sont évalués. Aussi, comme les modèles calculés sont des modèles informatiques, la taille du modèle en terme d'espace mémoire est un paramètre également considéré dans ce travail. Finalement, outre la fidélité et la taille du modèle, celui-ci doit être globalement utilisable, il doit répondre au besoin pour lequel il a été développé.

La façon dont un problème est posé sous-tend également des hypothèses, et peut également introduire des contraintes ou causer des distorsions qui ne sont pas présentes dans la réalité. C'est le cas du problème d'interpolation de courbes par une surface, où le modèle résultant peut être inapte à bien représenter certaines formes. La discussion porte donc sur la façon dont est posé le problème d'interpolation de courbes, les limites des approches utilisées et des améliorations possibles, les difficultés de représenter les diffuseurs de façon parfaitement continue avec les

NURBS et finalement des difficultés engendrés par l'utilisation de l'algorithme d'interpolation développé au contexte des diffuseurs de GE, pour la génération de maillage notamment.

4.1 Problème de croisement dans les diffuseurs

Les problèmes de croisement, tel que décrit en 3.3.2, est causé par le fait que les lignes de discontinuité doivent changer de direction brusquement pour passer par les points de collocation, mais n'ont pas suffisamment de flexibilité pour le faire de façon suffisamment graduelle et régulière, sans déborder trop les points de collocation et rester loin des autres lignes de discontinuité. Il semble y avoir deux solutions à ce problème, les deux ajoutant en fait de la souplesse à la façon dont est posé le problème d'interpolation : utiliser pour interpoler les points de brisure des courbes de Bézier par morceaux de degré $q = 5$ et C^2 en v , ou incorporer localement un ou plusieurs points de contrôle supplémentaires dans l'interpolation avec une courbe NURBS.

4.1.1 Surfaces de Bézier par morceaux de degrés $p = 2$ et $q = 5$

L'utilisation d'une courbe de Bézier de degré $p = 5$ dérivable deux fois pour interpoler les points de brisure donne certainement plus de flexibilité qu'une B-spline de degré $p = 5$ ou autre. En effet, les deux points au milieu de chacun des segments de Bézier, comportant six points, peuvent être bougés sans rompre ni les conditions de passage par les points ni les conditions de raccord. C'est là un avantage certain, qui permettrait par exemple d'optimiser la courbe après une première interpolation. La surface serait une Bézier par morceaux de degrés $p = 2$ et $q = 5$, et donc de représentation moins compacte que la B-spline équivalente d'un facteur $\frac{5}{3}$ (voir 1.2.3), et

d'évaluation plus lente en raison du plus grand nombre de points et de l'utilisation d'un degré plus élevé. De plus, la flexibilité supplémentaire peut vraisemblablement être obtenue aussi en interpolant les points de collocation avec une B-spline contenant plus de n points de contrôle dans la direction de l'interpolation ; par exemple, avec $2n$ points de contrôle l'interpolation serait probablement plus flexible, et la surface finale représentée à moindre coût. L'approche des surfaces de Bézier par morceaux, bien que valable, ne semble pas la voie à privilégier.

4.1.2 Ajout de points de contrôle dans l'interpolation

Le problème d'interpolation de points par une courbe B-spline est habituellement posé comme suit : pour n points de collocation, choisir le degré, puis les valeurs de paramètres où la courbe passera par les points, puis le vecteur nodal ; finalement, calculer les points de contrôle. L'hypothèse sous-jacente à cette formulation générale du problème est qu'une courbe de forme satisfaisante peut être calculée à l'intérieur des contraintes données, qui d'ailleurs sont introduites de façon complètement artificielle et n'ont rien à voir avec la réalité à modéliser. Or, cette hypothèse, bien que raisonnable, n'est pas nécessairement vérifiée pour les surfaces contraintes des diffuseurs. C'est pourquoi il semble qu'une solution possible soit d'ajouter un ou plusieurs degrés de liberté en ajoutant un ou plusieurs points de contrôle aux endroits appropriés, et en arrangeant les paramètres d'interpolation et le vecteur nodal en conséquence. Cela donnerait pour le calcul des points de contrôle un système d'équation linéaires sous-déterminé, donc comportant une infinité de solutions. Il faudrait alors développer des critères pour choisir une solution adéquate. Cela serait un projet très intéressant et permettrait vraisemblablement de régler le problème de croisement en ajoutant des points, donc de la flexibilité, seulement là où nécessaire, contrairement à l'approche avec les courbes de Bézier

par morceaux qui en ajoute partout.

4.2 Amélioration de la forme générale des surfaces

Il semble certain que la forme des surfaces calculées peut être améliorée, et pour ce faire, la méthode d'interpolation utilisée doit être elle aussi améliorée. Par exemple, les irrégularités persistantes dans la courbure gaussienne des surfaces pourraient certainement être atténuées, voire même éliminées, avec une méthode d'interpolation des courbes de section plus élaborée. En particulier, les méthodes de choix des paramètres pour l'interpolation demeurent arbitraires ; une méthode basée sur une prédiction raffinée de la longueur d'arc donnerait une meilleure paramétrisation et potentiellement une meilleure forme aux courbes et surfaces interpolant des points de collocation et des courbes de section, respectivement. Ou encore, le problème pourrait être posé comme un problème d'optimisation de mesures de qualité prédéfinies (énergie, convexité ou autre). Finalement, le fait que les courbes de section doivent constituer des lignes isoparamétriques dans les surfaces les interpolant restreint quelque peu l'algorithme classique d'interpolation.

4.2.1 Choix des paramètres d'interpolation avec les méthodes testées

La conclusion principale pouvant être tirée du tableau 3.4 est qu'aucune méthode testée ne donne systématiquement de meilleurs résultats que les autres, du moins selon le critère retenu ; la méthode donnant les meilleurs résultats change d'un cas test à l'autre. Par conséquent, il n'existe vraisemblablement pas de fonction permettant de choisir de façon optimale les paramètres d'interpolation seulement en fonction des distances entre les points de collocation. Malgré tout, faute de mieux il faut bien en choisir une ; parmi l'infinité qui pourraient être proposées,

quatre ont été testées. Parmi ces quatre méthodes, il semble que pour l'interpolation de points par une courbe, qui correspondant aux résultats pour la direction v , la méthode logarithmique donne sur les géométries testées les meilleurs résultats quant à la forme. À noter qu'aucune mesure n'a été prise sur la paramétrisation. Cette méthode n'est pas plus compliquée à mettre en oeuvre que la méthode centripète, elle devrait donc a priori être utilisée. Évidemment, pour plus de fiabilité il serait possible de les essayer toutes les quatre et de ne retenir que le 'meilleur' résultat. Pour l'interpolation de courbes de section par une surface, il semble que la méthode centripète soit la plus équilibrée et la plus fiable. Ces résultats sont par contre à prendre avec un grain de sel étant donné que seulement 25 géométries ont été testées, et qu'elles se ressemblent entre elles. Il n'est pas dit que pour des objets de forme différente cela demeurerait vrai, surtout que les résultats pour les différentes méthodes n'ont que de faibles écarts, sauf peut-être pour la méthode uniforme, qui de toute façon ne devrait en aucun cas être utilisée de façon systématique. Finalement, tous les tests sont effectués à partir d'un seul critère ; bien qu'il semble valable, plusieurs autres pourraient être utilisés : énergie de déformation, critères de convexité, paramétrisation, nombre d'angles du polygone ou de la grille de contrôle supérieurs à un certain seuil, etc.

4.2.2 Choix des paramètres d'interpolation basée sur la prédiction de la longueur d'arc

La méthode de choix des paramètres d'interpolation dite de la longueur d'arc, telle qu'utilisée dans ce travail, est plutôt une méthode basée sur la distance entre les points, qui approxime la longueur d'arc de la future courbe (pour l'interpolation de points). Sa principale justification est que en choisissant ainsi les paramètres, la courbe devrait avoir une bonne paramétrisation, c'est-à-dire que la longueur

d'arc entre deux points de collocation devrait être environ proportionnelle à la distance entre ces points, impliquant que la dérivée, ou la longueur d'arc divisée par la distance entre les paramètres, soit constante en grandeur. Or, une bonne prédiction devrait prendre en compte la disposition des points dans l'espace, c'est à dire non seulement la distance entre ces points mais aussi les angles entre ces points. L'hypothèse est la même que pour le choix de la grandeur des dérivées dans l'interpolation (voir 2.4.2) : il faut viser à avoir une paramétrisation par abscisse curviligne et alors la forme sera également de bonne qualité. Outre l'exemple des tangentes, le meilleur argument qui supporte cette hypothèse est un commentaire donné dans Piegler et Tiller, 1997 à l'effet que la méthode de choix des paramètres en fonction de la longueur d'arc fonctionne bien en général, sauf quand les points de collocation prennent un tournant brusque ; c'est alors la méthode centripète qui semble fonctionner le mieux, c'est-à-dire quand la distance entre les points et la longueur d'arc sur une courbe régulière les interpolant sont le moins proportionnel. Aussi, la méthode centripète augmente, par rapport à la méthode longueur d'arc, la distance entre les paramètres d'interpolation qui correspondent à des points rapprochés. Or, il semble raisonnable de penser que les changements de direction brusques surviennent presque toujours alors que les points ou courbes à interpoler sont rapprochés, puisque les concepteurs doivent spécifier plus d'information aux endroits où la géométrie est plus courbée. Cela expliquerait le succès de la méthode centripète lorsque les points de collocation prennent un tournant brusque. L'expérience présente avec les diffuseurs et la méthode logarithmique semble également le confirmer. Quoiqu'il en soit, l'idée de choisir les paramètres proportionnellement à la longueur de courbe estimée entre ces points est en fait un raffinement de l'idée à la base de la méthode la plus répandue, la méthode longueur d'arc ou de distance entre les points de collocation. Une telle méthode constituerait en quelque sorte une extension de la méthode longueur d'arc plus répandue. La méthode longueur

d'arc raffinée correspond à l'optimal dans le cas de l'interpolation linéaire, puisque contrairement à plusieurs autres méthodes elle donne une paramétrisation par abscisse curviligne, ce qui indique que c'est une méthode qui serait vraisemblablement applicable peu importe le degré choisi pour l'interpolation. La principale question est de savoir comment estimer les longueurs d'arc à partir de la disposition des points, à partir non seulement des distances mais aussi des angles. Est-il possible de bien prédire la longueur de corde par une telle méthode, simple et directe, ou une optimisation est-elle nécessaire ? Il apparaît très intéressant de développer et de tester ces idées.

4.2.3 Choix des paramètres d'interpolation par optimisation

Si la méthode simple proposée en 4.2.2 ne fonctionne pas de façon satisfaisante, bien qu'elle devrait améliorer les choses, alors il semble que pour véritablement obtenir des surfaces régulières il faille utiliser des algorithmes d'optimisation. Plusieurs fonctions coût pourraient alors être utilisées : mesures de qualité, l'énergie, etc. La méthode pourrait inclure des contraintes, par exemple sur la convexité. Pour avoir la flexibilité nécessaire, il est possible qu'il faille encore une fois utiliser plus de points de contrôle que le strict minimum.

4.2.4 Problèmes et limites spécifiques à l'interpolation de courbes par une surface

En supposant qu'il existe une méthode optimale et connue pour le choix des paramètres d'interpolation de points par une courbe, le problème ne serait pas complètement résolu dans le cas de l'interpolation de courbes par une surface, puisque les paramètres choisis par une méthode donnée sont généralement différents pour

chacune des colonnes de points de contrôle de courbes de section. Or, le problème d'interpolation est posé de façon à ce que les courbes de section correspondent à des courbes isoparamétriques sur la surface. Il ne semble pas possible qu'il en soit autrement d'ailleurs, en utilisant des surfaces tensorielles tout en interpolant exactement les courbes; pour s'en convaincre, il suffit d'écrire les équations pour un cas simple (exemple : 3 courbes de degré $p = 2$ comportant chacune 3 points de contrôle, interpolées par une surface de degrés $p = q = 2$). Cela vient restreindre les possibilités de l'interpolation de courbes par une surface, et pourrait limiter un algorithme d'optimisation quant au résultat optimal atteint. Il faut donc choisir un seul paramètre d'interpolation pour chacune des courbes de section, à moins d'approximer les courbes plutôt que de les interpoler (ne serait ce qu'en échantillonnant les courbes et en calculant une surface passant par ces points), ou encore d'utiliser des méthodes de construction et de représentation de surfaces non conventionnelle, comme fait dans Filip et Ball, 1989. Pour choisir les paramètres donc, la solution classique est d'en faire la moyenne, mais est-ce la meilleure solution? Serait-il préférable de prendre la moyenne du minimum et du maximum seulement, pour minimiser les 'distorsions'? Ce sujet semble intéressant, il faudrait voir la littérature sur le sujet.

4.2.5 Spécification de la grandeur des dérivées

Il serait intéressant d'étudier systématiquement cet aspect, la méthode proposée étant manifestement limitée. Possiblement cela existe déjà dans la littérature. Quoiqu'il en soit, il semble qu'une fois la direction spécifiée, la grandeur pourrait et devrait être déterminée automatiquement, en tant que partie intégrante du processus d'interpolation de points par une courbe ou de courbes par une surface.

4.3 Continuité des surfaces NURBS interpolant des courbes

Comme mentionné en 1.3.2 et vérifié expérimentalement en 3.1.1, l'interpolation de courbes de section C^n dans l'espace tridimensionnel ne produit en général une surface C^n dans la direction des courbes seulement si les courbes de section sont aussi C^n dans l'espace homogène, c'est-à-dire l'espace (wx, wy, wz, w) . Il est cependant possible de transformer les courbes de section G^1 en courbes C^1 , puis de calculer à partir de ces courbes une surface vraiment C^1 , mais au prix d'efforts supplémentaires considérables et d'une paramétrisation encore dégradée. Pour les diffuseurs comprenant également des courbes de section G^0 , il est possible en utilisant des surfaces de Bézier par morceaux de degrés $p \times q$ suffisamment élevés de construire une surface C^1 entre les courbes de section C^1 , mais au prix d'une surface plus lourde à stocker et à évaluer.

4.3.1 Rendre les courbes de section C^1

Cette solution permettrait à tous les diffuseurs ne comportant que des courbes de section G^1 , c'est-à-dire ne contenant pas de courbes de section G^0 , d'être C^1 . Selon Piegl et Tiller, 1997, il est en effet possible de transformer toute courbe NURBS $C(u)$ qui est C^{r+s} continue une fois projetée dans l'espace tridimensionnel mais seulement C^r continue dans l'espace homogène, en une courbe réellement C^{r+s} continue en la reparamétrisant par une fonction $f(u)$ telle que $C(f(u))$ est $r+s$ fois dérivable. Cette technique permet de changer les poids aux extrémités, la grandeur des dérivées premières (mais pas leur direction), et la grandeur et la direction des dérivées d'ordre supérieur. À noter que les courbes reparamétrées seront toujours des NURBS ou des B-splines, à condition que $f(u)$ soit un polynôme, et qu'elles seront de degré pq , avec p le degré original de la courbe et q le degré de la repara-

métrisation $f(u)$. Il n'existe pas cependant, selon Piegl et Tiller, 1997, de méthode systématique pour calculer la fonction $f(u)$.

Pour les diffuseurs comportant seulement des courbes de section G^1 , ces courbes sont généralement seulement G^0 dans l'espace homogène. Est-il possible de rendre les courbes de section C^1 dans l'espace tridimensionnel tout en rendant les courbes compatibles? Dans le cas de l'algorithme classique, il suffit d'ajuster les noeuds doubles et/ou les poids des points de contrôle de chacune des section et de les rendre compatibles avec l'algorithme classique. Dans le cas de l'algorithme avec contraintes, les noeuds doubles correspondants doivent être placés aux mêmes valeurs, donc il faut modifier les poids pour rendre les courbes compatibles et C^1 dans l'espace tridimensionnel. Ensuite, il est possible de les reparamétriser pour les rendre C^1 dans l'espace homogène, ce qui revient encore à modifier les poids, de sorte qu'ils forment une 'courbe' $w(u)$ qui soit C^1 continue. La paramétrisation finale des courbes de section ainsi modifiées et rendues compatibles serait vraisemblablement davantage dégradée, potentiellement de façon significative dans les cas avec contraintes. De plus, les poids pourraient varier significativement, ce qui pourrait causer des problèmes à l'interpolation (1.3.2).

4.3.2 Surfaces de Bézier de degré supérieur

L'utilisation de surfaces de Bézier par morceaux de degrés p et q suffisamment élevés permettrait de construire une surface C^1 pour tous les diffuseurs, sauf entre les courbes de section qui sont G^0 . Évidemment, les courbes de section doivent au préalable être rendues compatibles et C^1 . L'idée est de construire une surface de Bézier à l'intérieur de chacune des 'cases' du réseau de courbes formé par les courbes de section et les courbes des lignes de discontinuité dans les surfaces, construites comme des courbes de Bézier par morceaux de degré $q = 5$. L'article Gordon, 1969

montre, à travers un cas général dont les surfaces de Bézier sont un cas particulier, qu'une surface par morceaux de degrés impairs $2p - 1 \times 2q - 1$ peut être $p - 1$ et $q - 1$ fois continue (à noter ici le contraste avec les B-spline et les NURBS). Donc une surface de Bézier par morceaux de degrés 3×5 peut être comme souhaité C^1 et C^2 en u et en v , respectivement, si les points de contrôle sont arrangés de façon à respecter les conditions de raccord. Sauf que le fait de rendre les courbes de section compatibles avec l'algorithme des contraintes et C^1 élève vraisemblablement le degré à au moins $p = 4$, puisque les courbes initiales sont de degré 2 et sont vraisemblablement reparamétrisée par une fonction de degré 2 au moins ; la surface de Bézier par morceaux devrait donc être de degrés 4 par 5 au moins.

4.4 Maillages

Comme montré en 3.4.3, il reste encore du travail à faire pour pouvoir discrétiser les modèles géométriques des diffuseurs, tels que calculés à partir des algorithmes d'interpolation développés. Une solution possible consiste à reparamétriser les surfaces, c'est-à-dire à calculer $f(s, t) \rightarrow (u, v)$ telle que à la manière suggérée en 2.1.4 la grandeur des dérivées partielles de $S(f(s, t))$ soit constante selon les lignes isoparamétriques (dérivée partielle en u (v) constante le long des iso- v (iso- u)). Calculer un maillage consiste à résoudre une version discrète de ce problème. Cela revient à répartir la longueur des arêtes du maillage de façon constante sur chacune des lignes de maillage. Par analyse des degrés de liberté, il devrait toujours exister une solution à ce problème, une fois que les arêtes sont discrétisées. Évidemment, il faudrait être capable de calculer la solution correcte, ce qui semble faisable avec un maillage de départ potable et un algorithme itératif approprié, de sorte que le maillage converge. Reste aussi à savoir si cela donnerait de bons résultats.

Malgré tout, dans un cas comme dans l'autre, les lignes de discontinuité, caractéristiques des surfaces, seraient ignorées par le maillage, ce qui viendrait en partie contrebalancer l'effet positif des contraintes. Pour que le maillage rende bien les lignes de discontinuité, il faudrait non pas utiliser un maillage structuré de quadrilatère mais vraisemblablement un maillage non-structuré de triangles. Or, plusieurs facteurs autres que géométriques entrent dans les décisions sur le maillage, autres facteurs qui pèsent probablement beaucoup plus lourd.

Finalement, la paramétrisation des surfaces contraintes est telle que la magnitude d'une dérivée le long d'une iso- v peut varier grandement. Cela rend la surface plus difficile à mailler dans l'espace paramétrique.

CONCLUSION

Les algorithmes développés pour l'interpolation des courbes de section des diffuseurs, ainsi que les tests effectués sur les géométries industrielles disponibles, permettent de confirmer complètement les deux premières hypothèses énoncées et la troisième en grande partie. En effet :

1. La représentation de la surface du diffuseur est considérablement plus compacte en utilisant les NURBS et la méthode d'interpolation développée basée sur les contraintes que la représentation polygonale produite avec le logiciel TU;
2. La façon de rendre les courbes compatibles en vue de leur interpolation par une surface influence clairement le résultat obtenu; en particulier, les contraintes améliorent la forme de la surface telle que sondée par la courbure gaussienne et réduisent significativement la taille de sa représentation, alors que le 'lissage parabolique' rend la surface plus régulière, tel que mesuré par la régularité de la grille de contrôle de celle-ci;
3. La façon de calculer la surface qui passe par les courbes compatibles influence aussi clairement le résultat final, même si ce n'est pas toujours aussi facile à mesurer; en particulier, la méthode d'interpolation dite logarithmique améliore la forme de la surface (seulement dans la direction de l'interpolation toutefois, tel que mesuré par la régularité de la grille de contrôle), tout comme la spécification de dérivées d'orientation et grandeur appropriées aux extrémités qui tend à stabiliser la forme de la grille de contrôle et par le fait même celle de la surface.

Ce travail a permis de développer une approche générique pour rendre les courbes compatibles, les contraintes, qui permet d'améliorer la forme des surfaces les interpolant. Toutefois, les détails de la définition des contraintes demeurent au moins en partie reliés à l'application envisagée. De plus, l'approche développée supposait des courbes par morceaux. Néanmoins, l'algorithme des contraintes pourrait vraisemblablement améliorer l'interpolation de courbes de divers degrés (pas seulement $p = 2$), par des surfaces de divers degrés dans la direction de l'interpolation, dont des surfaces interpolant linéairement les courbes de section. Ce travail a aussi permis d'illustrer que l'interpolation de courbes compatibles demeure un problème auquel il n'y a pas de solution simple qui donne une surface de forme vraiment régulière, tel que mentionné dans Piegl et Tiller, 1997 et Filip et Ball, 1989.

Pour General Electric, l'approche développée représente certainement un progrès, même si tous les tests permettant d'évaluer l'impact de la nouvelle approche n'ont pas été faits, et qu'il reste du travail à faire avant de pouvoir utiliser les nouveaux modèles géométriques. Le projet a permis de :

- Construire un modèle géométrique du diffuseur dont les surfaces passent exactement par les courbes de section et qui sont localement plus continues (régulières) que les surfaces polygonales produites par TU ;
- Construire un modèle géométrique plus compact que celui construit par TU, malgré qu'il n'a pas encore été déterminé si cela permet d'accélérer les calculs subséquents.

Cependant, il n'a malheureusement pas été déterminé si les nouvelles surfaces sont globalement plus régulières que celles produites par TU, faute de temps. Certaines améliorations apparaissent nécessaires. Il n'a pas été testé non plus si ces nouvelles surfaces rapprochent le calcul de la performance des résultats expérimentaux ni si elles permettent d'accélérer ces calculs, puisque cela ne faisait pas partie comme

tel du projet de maîtrise. De plus, pour que les modèles calculés par l'approche développée soient utilisables, il faut encore implanter ou développer une façon de les discrétiser adéquatement en vue de la résolution d'équation aux dérivées partielles.

RÉFÉRENCES

- BENTAMY, A. (2003). *Modélisation géométrique par NURBS pour le design aérodynamique des ailes d'avion*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Campus de l'Université de Montréal, 2900 boul. Édouard-Montpetit, École Polytechnique, 2500 Chemin de Polytechnique, Montréal (Québec), H3T 1J4.
- BLANC, C. et SCHLICK, C. (1995). X-splines : A spline model designed for the end-user. *Proceedings of SIGGRAPH 95*. ACM SIGGRAPH / Addison Wesley, Los Angeles, California, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, 377–386. ISBN 0-201-84776-0.
- BLANC, C. et SCHLICK, C. (1996). Accurate parameterization of conics by NURBS. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 64–71.
- COHEN, S., GERSHON, E. et BAR-YEHUDA, R. (1997). Matching of freeform curves. *Computer-Aided Design*, 29, 369–378.
- COMNINOS, P. (2001). An interpolating piecewise bicubic surface with shape parameters. *Computers & Graphics*, 25, 463–481. ISSN 0097-8493.
- DEROSE, T. D. (1990). Necessary and sufficient conditions for tangent plane continuity of bézier surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 7, 165–179.
- FARIN, G. (1982). A construction for visual c^1 continuity of polynomial surface patches. *Computers Graphics and Image Processing*, 20, 272–282.
- FARIN, G. (2000). Shape. www.asu.edu.
- FILIP, D. J. et BALL, T. W. (1989). Procedurally representing lofted surfaces. *IEEE Computer Graphics & Applications*, 9, 27–33.
- FORTIN, A. (1995). *Analyse numérique pour ingénieurs*. Presses internationales de Polytechnique, Montréal.

- FREY, P. J. et GEORGE, P.-L. (1999). *Maillages. Applications aux éléments finis*. Hermès, Paris.
- GORDON, W. J. (1969). Spline-blended surface interpolation through curve networks. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 18, 931–952. Communicated by Birkhoff, Garrett.
- GOUGEON, A., GUIBAULT, F. et VU, T. (2001). Description of the dta format and dta2pie application. Rapport technique, CERCA.
- GUIBAULT, F., LABBÉ, P., OZELL, B., DOMPIERRE, J. et CAMARERO, R. (1997). Manuel de l'utilisateur : Bibliothèque de classes Pirate. Rapport technique, École Polytechnique de Montréal.
- GUIBAULT, F. et OZELL, B. (2002). Description du format de fichier de Pirate. Rapport technique, École Polytechnique de Montréal.
- HAHMANN, S. et KONZ, S. (1998). Knot-removal surface fairing using search strategies. *Computer-aided Design*, 30, 131–138.
- HUI, K. (1999). Shape blending of curves and surfaces with geometric continuity. *Computer-aided Design*, 31, 819–828.
- KAKLIS, P. et GINNIS, A. (1996). Sectional-curvature preserving skinning surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 13, 601–619. ISSN 0167-8396.
- LIPSCHUTZ, S. (1969). *Schaum's Outline Differential geometry*. McGraw-Hill.
- LIU, D. (1990). GC^1 continuity conditions between two adjacent rational Bezier surface patches. *Computer Aided Geometric Design*, 7, 151–163.
- MORTENSON, M. E. (1997). *Geometric Modeling, second edition*. John Wiley & Sons Inc.
- OZELL, B. et PIC, C. (2003). Documentation sur Vu. <http://www3.sympatico.ca/chantal.pic/vu/fra/index.html>. (Site consulté le 19 décembre 2003).

PARK, H., KIM, K. et LEE, S.-C. (2000). A method for approximate NURBS curve compatibility based on multiple curve refitting. *Computer-Aided Design*, 32, 237–252. ISSN 0010-4485.

PIEGL, L. et TILLER, W. (1996). Algorithm for approximate NURBS skinning. *Computer-Aided Design*, 28, 699–706.

PIEGL, L. et TILLER, W. (1997). *The NURBS Book*. Springer-Verlag.

PIEGL, L. A. et TILLER, W. (2000). Reducing control points in surface interpolation. *IEEE Computer Graphics & Applications*, 20, 70–74. ISSN 0272-1716.

PIGOUNAKIS, K. G. et KAKLIS, P. D. (1996). Convexity-preserving fairing. *Computer-aided Design*, 28, 981–994.

POLIAKOFF, J. F. (1995). An improved algorithm for automatic fairing of non-uniform parametric cubic splines. *Computer-aided Design*, 28, 59–66.

SAPIDIS, N. et FARIN, G. (1990). Automatic fairing algorithm for b-splines curves. *Computer Aided Design*, 22, 121–129.

TOOKEY, R. et BALL, A. (1997). Approximate g^1 continuous interpolation of a rectangular network of rational cubic curves. *Computer Aided Design*, 28, 1007–1016.

ZHANG, C. et CHANG, F. F. (1998). Removing local irregularities of nurbs surfaces by modifying highlight lines. *Computer-aided Design*, 30, 923–930.

ZHANG, C., ZHANG, P. et CHANG, F. F. (2001). Fairing spline curves and surfaces by minimizing energy. *Computer-Aided Design*, 33, 913–923.

ZHENG, J., WANG, G. et LIANG, Y. (2001). GC^n continuity conditions for adjacent rational parametric surfaces. *Computer-Aided Design*, 33, 913–923.

ANNEXE I

Définition de la parabole utilisée pour le lissage

Deux paraboles sont en fait utilisées pour le lissage : une au début et une à la fin. Une seule est définie ici, correspondant à la figure 2.8, l'autre étant semblable. La parabole 'du début' pour le lissage parabolique est définie dans l'espace (t, s) (voir 2.3.8.3), comme suit :

$$S(t) = K_1 \sqrt{-t + K_2} + K_3. \quad (\text{I.1})$$

La dérivée de cette fonction est la suivante :

$$S'(t) = \frac{-K_1}{2\sqrt{-t + K_2}}. \quad (\text{I.2})$$

La notation utilisée pour écrire les trois conditions géométriques définies pour la parabole est la suivante :

- S_d et S_f pour les valeurs au début et à la fin de la parabole ;
- t_d et t_f pour les valeurs au début et à la fin de la parabole ;
- S'_f pour la tangente à la fin de la parabole.

Les conditions comme telles s'écrivent donc mathématiquement comme suit ;

la condition de passage au début :

$$K_1 \sqrt{-t_d + K_2} + K_3 = S_d; \quad (I.3)$$

la condition de passage à la fin :

$$K_1 \sqrt{-t_f + K_2} + K_3 = S_f; \quad (I.4)$$

et la condition de tangence au début :

$$\frac{-K_1}{2\sqrt{-t_f + K_2}} = S'_f. \quad (I.5)$$

Il faut isoler les paramètres K_1 , K_2 et K_3 .

D'abord, les équations I.3 et I.4 sont réécrites :

$$K_1^2(-t_d + K_2) = (S_d - K_3)^2 \quad (I.6)$$

et

$$K_1^2(-t_f + K_2) = (S_f - K_3)^2. \quad (I.7)$$

Puis, elles sont soustraites et K_1^2 est isolé :

$$K_1^2 = -\frac{S_d^2 - 2S_dK_3 - S_f^2 + 2S_fK_3}{t_d - t_f}. \quad (I.8)$$

Ce résultat est mis de côté pour l'instant. Les équations I.4 et I.5 sont réécrites :

$$\sqrt{-t_f + K_2} = \frac{S_f - K_3}{K_1} \quad (I.9)$$

et

$$\sqrt{-t_f + K_2} = \frac{-K_1}{2S'_f}. \quad (I.10)$$

En égalant ces deux équations sont égalées et K_1^2 est isolé :

$$K_1^2 = -2S'_f(S_f - K_3). \quad (\text{I.11})$$

En égalant les équations I.8 et I.11 il est possible d'isoler K_3 :

$$K_3 = \frac{2S'_f S_f (t_d - t_f) - S_d^2 + S_f^2}{2(-S_d + S_f + S'_f(t_d - t_f))}. \quad (\text{I.12})$$

À partir du moment où K_3 est isolé, K_1 est isolé à partir de l'équation I.11 (le signe vient de l'équation I.5, de par le signe de S'_f) :

$$K_1 = -\frac{S'_f}{|S'_f|} \sqrt{-2S'_f(S_f - K_3)}. \quad (\text{I.13})$$

Une fois que K_1 est calculé, K_2 l'est à partir de l'équation I.5 :

$$K_2 = \left(\frac{K_1}{2S'_f} \right)^2 + t_f. \quad (\text{I.14})$$