

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MÉTHODOLOGIE POUR LE CONTRÔLE LONGITUDINAL D'UN AVION
AVEC CONTRAINTES DE QUALITÉS DE MANŒUVRABILITÉ

DAVID ALEXANDRE SAUSSIÉ
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES (M.Sc.A.)
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
AVRIL 2004



National Library
of Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

Acquisitions et
services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-612-91969-2

Our file Notre référence

ISBN: 0-612-91969-2

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this dissertation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de ce manuscrit.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the dissertation.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MÉTHODOLOGIE POUR LE CONTRÔLE LONGITUDINAL D'UN AVION
AVEC CONTRAINTES DE QUALITÉS DE MANŒUVRABILITÉ

présenté par : SAUSSIÉ David Alexandre

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès Sciences Appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. O'SHEA Jules, D.Ing., président

M. SAYDY Lahcen, Ph.D., membre et directeur de recherche

Mme AKHRIF Ouassima, Ph.D., membre et codirectrice de recherche

Mme BOTÉZ Ruxandra, Ph.D., membre

A mon grand-père

REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au Département de Génie Électrique, Section Automation, de l'École Polytechnique de Montréal.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche, M. Lahcen Saydy, grâce à qui j'ai pu effectuer ma Maîtrise dans le laboratoire d'Automation. Que ce soit lors d'entrevues ou durant les cours que j'ai pu suivre avec lui, il a été un modèle de rigueur. Son expérience et ses remarques judicieuses m'ont permis de persévérer surtout quand les résultats se faisaient attendre. Il m'a donné de plus l'opportunité de développer mon goût de l'enseignement via les charges de laboratoires et de cours; je lui en resterai toujours reconnaissant.

Je remercie ensuite ma codirectrice, Mme Ouassima Akhrif, qui m'a donné la chance d'intégrer le projet mené avec *Bombardier Inc.* et ainsi de demeurer dans le domaine de l'aéronautique. J'ai pu profiter de ses compétences théoriques et de son expérience; les nombreuses discussions et ses conseils m'ont permis de mener le projet au mieux.

Je tiens de même à saluer les professeurs du département d'Automation dont j'ai pu suivre les cours, le personnel technique, notamment Marie-Lyne Brisson pour sa disponibilité ainsi que le personnel administratif; toutes ces personnes ont contribué au bon déroulement de ma Maîtrise et de mon échange universitaire.

Je n'oublierai pas non plus mes amis du laboratoire pour leur sympathie, particulièrement Alexandre et Imed avec qui j'ai souvent travaillé, ainsi que mes parents et amis qui, de près comme de loin, m'ont aidé et encouragé aux moments opportuns.

Enfin, je tiens à remercier Mme Caroline Chiappa, professeur à SUPAERO, pour son intérêt constant et pour m'avoir ouvert les portes de l'Automatique.

RÉSUMÉ

L’objectif de ce travail est de proposer une méthodologie pour choisir les gains de deux lois de commande du mode longitudinal d’un avion de *Bombardier Inc.* et ce, tout en satisfaisant les qualités de manœuvrabilité imposées par le constructeur.

La première partie de cette recherche consiste à analyser les données fournies ainsi que les lois de commande. Une étude non exhaustive des qualités de manœuvrabilité permet de familiariser le lecteur avec leur philosophie. Enfin, nous présentons rapidement les Applications Gardiennes qui sont des applications scalaires fonction des gains ou des paramètres incertains; elles nous assurent de trouver des ensembles de gains qui placent les pôles de notre système dans une région donnée du plan complexe.

La seconde partie est consacrée à la mise en place de la méthodologie. Nous expliquons d’abord comment nous réduisons la taille de notre système pour une utilisation plus aisée des Applications Gardiennes. Nous déterminons ensuite les gains qui nous garantissent un certain amortissement pour des pôles particuliers de notre système. Nous poursuivons alors par une autre méthode pour satisfaire les autres qualités de manœuvrabilité. Une interface graphique permet une utilisation plus aisée de la méthodologie et une visualisation instantanée des résultats pour un choix de gains.

L’étude est terminée par une extension possible de la méthodologie pour effectuer un séquençement des gains (“Gain Scheduling”) et concevoir un correcteur robuste face à des variations de masse et/ou de centrage de l’avion.

ABSTRACT

A methodology is given in order to choose the gains of two longitudinal flight controls of a *Bombardier Inc.* aircraft while satisfying the handling qualities fixed by the manufacturer.

The first part of this project consists in analyzing the data and the two flight controls. Then a simple presentation of the handling qualities is made to familiarize the reader with them. Finally, a short introduction to the Guardians Maps is presented: they are scalar maps of gains or uncertain parameters that allow us to find set of values that place poles of our system within a region of the complex plane.

The second part is dedicated to the proposed guidelines. We explain first how to reduce our system to use more efficiently the Guardian Maps. Then we determine the gains that ensure a certain damping for some of the poles. Other handling qualities are fixed by another method. A graphical user interface makes things easier to use the methodology and to view instantly the results for given gains.

The research is closed by an extension of the methodology in order to make Gain Scheduling and to synthesize a robust controller against mass and/or center of gravity variations.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES FIGURES	xii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xvi
LISTE DES TABLEAUX	xviii
LISTE DES ANNEXES	xx
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : PRÉSENTATION DU PROBLÈME	5
1.1 Rappels de dynamique du vol	5
1.2 Analyse de la boucle ouverte	5
1.2.1 Modèle dynamique	5
1.2.2 Actionneur	7
1.2.3 Capteur IRU	10
1.2.4 Manche de contrôle	12
1.3 Lois de commande	14
1.3.1 Loi de commande "classique"	14
1.3.2 Loi de contrôle C^*	15

CHAPITRE 2 : QUALITÉS DE MANŒUVRABILITÉ	18
2.1 Fondements	19
2.1.1 Échelles qualitatives	19
2.1.2 Définitions et spécifications militaires	23
2.2 Les Critères modaux	27
2.2.1 Mode phugoïde	27
2.2.2 Mode Short Period	29
2.2.3 Le critère CAP	29
2.3 Les critères fréquentiels	37
2.3.1 Bandes passantes	37
2.3.2 Retard de phase	39
2.3.3 Limites imposées sur les bandes passantes et le retard de phase	40
2.3.4 Marges de gain et de phase	42
2.4 Les critères temporels	43
2.4.1 Dropback	43
2.4.2 Temps de montée, d'établissement et dépassement	49
CHAPITRE 3 : APPLICATIONS GARDIENNES	52
3.1 Préliminaires mathématiques	53
3.1.1 Produit et somme de Kronecker	53
3.1.2 Produit bialterné	54
3.2 Applications gardiennes et semi-Gardiennes	55
3.2.1 Applications gardiennes	56
3.2.2 Applications semi-gardiennes	56
3.2.3 Corollaire des composantes	57
3.3 Techniques de construction des applications (semi-)gardiennes	57
3.3.1 Domaines avec frontières polynômiques	58
3.3.2 Quelques domaines classiques	62
3.4 Exemples d'applications	65

3.4.1	Synthèse d'un correcteur PI	65
3.4.2	Robustesse d'un contrôleur par retour d'état	68

CHAPITRE 4 : MÉTHODOLOGIE ET RÉGLAGE DE L'AMORTIS-

	SEMENT	71
4.1	Vue d'ensemble	71
4.1.1	Rappel de la problématique	71
4.1.2	Méthodes de réduction	74
4.1.3	Solution proposée	81
4.2	Contrôle de la vitesse de tangage q	83
4.2.1	Fonctions de transfert	83
4.2.2	Réglage de la boucle SAS	84
4.2.3	Réglage de la boucle CAS	87
4.3	Contrôle C^*	88
4.3.1	Fonctions de transfert	89
4.3.2	Réglage de la boucle SAS	91
4.3.3	Réglage de la boucle CAS	91

CHAPITRE 5 : RÉGLAGES DES CRITÈRES FRÉQUENTIELS ET

	DU DROPBACK	94
5.1	Vue d'ensemble	94
5.1.1	Rappel des critères	94
5.1.2	Solution proposée	95
5.2	Réglage des critères fréquentiels	95
5.2.1	Notations préliminaires	96
5.2.2	Bande passante de $\bar{\theta}/\delta_{ref}$ et Retard de phase τ_p	97
5.2.3	Bande passante de $\bar{\gamma}/\delta_{ref}$	102
5.2.4	Marges de phase et de gain	103
5.2.5	Critiques sur la méthode utilisée	104
5.3	Réglage du dropback	106

5.3.1	Détermination de K_{ff} pour un dropback donné	106
5.3.2	Détermination d'une région (K_{ff}, K_i) de dropback	107

CHAPITRE 6 : INTERFACE GRAPHIQUE ET EXEMPLES D'UTILISATION 110

6.1	Module GUI	110
6.1.1	Principe	110
6.1.2	Description du module GUI	110
6.1.3	Description des différentes sections	112
6.2	Exemples d'utilisation	118
6.2.1	Contrôle classique - Cas de Vol 39	119
6.2.2	Contrôle C* - Cas de vol 39	122

CHAPITRE 7 : SÉQUENCEMENT DES GAINS ET ROBUSTESSE 127

7.1	Séquencement des gains	128
7.1.1	Variable de séquencement	128
7.1.2	Méthodologie suggérée	129
7.2	Robustesse	135
7.2.1	Modèles incertains	135
7.2.2	Stratégies proposées	136
7.2.3	Analyse de la robustesse	138
7.2.4	Essai de synthèse robuste	139

CONCLUSION 144

BIBLIOGRAPHIE 146

ANNEXES 149

LISTE DES FIGURES

1.1	Boucle ouverte du mode longitudinal	5
1.2	Enveloppe de vol	6
1.3	Lieu des pôles et zéros de $\bar{\theta}/\delta_e$ (cas 39)	8
1.4	Modélisation de l'actionneur	8
1.5	Diagramme de Bode de l'actionneur	9
1.6	Modélisation du capteur IRU	10
1.7	Diagramme de Bode du capteur	11
1.8	Modélisation du manche	12
1.9	Diagramme de Bode du manche	14
1.10	Contrôle de la vitesse de tangage	16
1.11	Contrôle C*	17
2.1	Échelle d'opinion de Cooper-Harper	20
2.2	Échelle d'opinion pour les oscillations induites par le pilote (PIO) . .	22
2.3	Mise en évidence du mode phugoïde - Réponse à un échelon de δ_e (cas 39 fourni par <i>Bombardier Inc.</i>)	28
2.4	Mise en évidence du mode Short Period - Réponse à un échelon de δ_e (cas 39 fourni par <i>Bombardier Inc.</i>)	30
2.5	Limitations sur la pulsation propre ω_{sp} - Phase de vol A	33
2.6	Limitations sur la pulsation propre ω_{sp} - Phase de vol B	34
2.7	Limitations sur la pulsation propre ω_{sp} - Phase de vol C	35
2.8	Limitations en CAP et en amortissement ζ_{sp} - Phase de vol A	36
2.9	Contrôle de la vitesse de tangage	37
2.10	Contrôle C*	37
2.11	Définition de la bande passante et du retard de phase	38
2.12	Comparaison des bandes passantes et retards de phase	40

2.13	Critère pour ω_{BW_θ} et τ_p	41
2.14	Critère de la bande passante pour ω_{BW_θ} et ω_{BW_γ}	41
2.15	Définition des marges de gain et de phase	43
2.16	Définition du dropback	44
2.17	Réponse en tangage q à une entrée échelon δ_{ref}	50
3.1	Régions stables ou instables	58
3.2	Système rebouclé par un correcteur PI	66
3.3	Domaine Ω à garder	66
3.4	Région gardant le domaine Ω	68
3.5	Région gardant le domaine Ω	69
4.1	Décompte des modes Short Period	73
4.2	Réduction lors d'un Rebouclage par PI	78
4.3	Schéma de contrôle de la vitesse de tangage q	84
4.4	Carte des pôles et des zéros de la boucle ouverte q_{mes}/δ_c du cas 39 . .	85
4.5	Région typique pour une boucle SAS - Contrôle classique	87
4.6	Région typique pour une boucle CAS - Contrôle classique	89
4.7	Schéma de contrôle C*	90
4.8	Région typique pour une boucle SAS - Contrôle C*	92
4.9	Région typique pour une boucle CAS - Contrôle C*	93
5.1	Schéma de contrôle classique et sorties d'intérêt	96
5.2	Schéma de contrôle C* et sorties d'intérêt	97
5.3	Région typique de la bande passante de $\bar{\theta}/\delta_{ref}$	101
5.4	Région typique du retard de phase	102
5.5	Région typique de la bande passante de $\bar{\gamma}/\delta_{ref}$	103
5.6	Région typique des marges de phase et de gain	105
5.7	Exemple de région (K_{ff}, K_i) où le dropback est satisfait	109
6.1	Allure générale du module GUI	111

6.2	Allure réelle du module GUI	111
6.3	Section 1 du module GUI	113
6.4	Section 2 du module GUI	114
6.5	Section 3 du module GUI	115
6.6	Section 4 du module GUI	117
6.7	Synthèse de la boucle SAS - Contrôle de la Vitesse de Tangage	120
6.8	Région typique de la boucle CAS	121
6.9	Réponse à un échelon unitaire δ_{ref} - Contrôle classique (cas 39)	122
6.10	Synthèse de la boucle SAS - Contrôle C*	123
6.11	Région typique de la boucle CAS	124
6.12	Réponse normalisée à un échelon unitaire δ_{ref} - Contrôle C* (cas 39) .	125
7.1	Enveloppe de vol et pressions dynamiques	129
7.2	Premier séquençement	130
7.3	Régions pour la boucle SAS sur les cas de vol 39-46	131
7.4	Surface de dropback nul	133
7.5	Régions pour la Boucle CAS sur les cas de vol 39-46	134
7.6	Réponses temporelles obtenues par séquençement	135
7.7	Répartition des modèles pour m et x_{cg} variables	136
7.8	Analyse de la robustesse pour la condition de vol 40	138
7.9	Synthèse robuste de la boucle SAS pour la condition de vol 40	139
7.10	Région d'amortissement supérieur à 0.7 du CAS pour les cas 40 et dérivés	140
7.11	Région d'amortissement supérieur à 0.6 du CAS pour les cas 40 et dérivés	140
7.12	Région d'amortissement supérieur à 0.5 du CAS pour les cas 40 et dérivés	141
7.13	Région de dropback pour les cas 40 et dérivés	142
7.14	Régions d'Amortissement à 0.6 et 0.5	142
7.15	Réponses temporelles en q et θ pour les cas 40 et dérivés	143
I.1	Définition de l'assiette θ , de l'angle d'incidence α et de la pente γ . .	149

III.1 Qualités de manœuvrabilité pour les cas 39 à 58 après séquencement	
des gains (1)	155
III.2 Qualités de manœuvrabilité pour les cas 39 à 58 après séquencement	
des gains (2)	156

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

Notations:

α	Angle d'incidence.
A	Matrice de $\mathbb{R}^{m \times n}$ ou $\mathbb{C}^{m \times n}$.
$\mathbb{C}^{m \times n}$	Ensemble des matrices complexes de dimension $m \times n$.
$\bar{c}$	Corde aérodynamique moyenne.
C_D	Coefficient aérodynamique de traînée.
C_L	Coefficient aérodynamique de portance.
C_m	Coefficient aérodynamique de moment en tangage.
δ_e	Angle des elevateurs.
δ_t	Commande des gaz.
Drb	Dropback.
g	Accélération gravitationnelle.
γ	Pente.
h	Variation d'altitude.
I_{yy}	Moment d'inertie en tangage.
$\lambda_i(A)$	Valeur Propre de A .
M_G	Marge de gain.
M_φ	Marge de phase.
n_z	Facteur de charge (accélération verticale divisée par g).
$\mathcal{P}_n$	Ensemble des polynômes à coefficients réels de degré n .
q	Vitesse angulaire de tangage.
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $m \times n$.
ρ	Masse volumique de l'air à une altitude donnée (kg.m^{-3}).
s	Variable de Laplace.
$\bar{S}$	Adhérence de S .
∂S	Frontière de S .

$\sigma(A)$	Ensemble des valeurs propres de A (en comptant les multiplicités).
T	Poussée des moteurs.
τ_p	Retard de phase.
θ	Angle d'assiette.
u	Variation de vitesse relative selon l'axe du fuselage.
U_0	Vitesse horizontale à l'équilibre.
V	Vitesse aérodynamique.
w	Variation de vitesse relative verticale.
ω_{sp}	Pulsation propre du mode Short Period.
ω_{ph}	Pulsation propre du mode Phugoïde.
Ω	Sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$, symétrique par rapport à l'axe réel.
ζ_{sp}	Amortissement du mode Short Period.
ζ_{ph}	Amortissement du mode Phugoïde.
$\mathcal{Z}(p)$	Ensemble des zéros du polynôme p (en comptant les multiplicités).

Acronymes:

CAP	Control Anticipate Parameter.
CAS	Control Augmentation System.
GUI	Graphical User Interface.
IRU	Inertial Reference Unit.
PIO	Pilot-Induced Oscillation.
SAS	Stability Augmentation System.

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Pôles de l'actionneur	9
1.2	Zéros de l'actionneur	10
1.3	Pôles du capteur	11
1.4	Zéros du capteur	12
1.5	Pôles du manche	13
1.6	Zéros du manche	13
2.1	Description des niveaux de l'échelle PIO	21
2.2	Classification des avions	24
2.3	Niveau des qualités de vol	26
2.4	Amortissement ζ_{ph} du mode phugoïde	27
2.5	Amortissement ζ_{sp} du mode Short Period	29
2.6	Limitations du CAP	32
2.7	Limitations sur n/α et ω_{sp} pour phases de vol de catégorie C	32
2.8	Limites du dropback pour phases terminales	44
5.1	Limites des critères	95
6.1	Conditions de vol	112
6.2	Réponses Temporelles Disponibles	116
6.3	Qualités de manœuvrabilité	117
I.1	Notations adoptées pour l'équilibre	151
II.1	Exemples pour les 20 premiers cas de vol - Contrôle de la vitesse de tangage	153
II.2	Exemples pour les 20 Premiers cas de vol - Contrôle C*	154

III.1 Qualités de manœuvrabilité pour le contrôle robuste des cas de vol 40	
et dérivés	157

LISTE DES ANNEXES

Annexe I:	Rappels de mécanique du vol	149
Annexe II:	Exemples de résolution sur les 20 premiers cas de vol	152
Annexe III:	Résultats de simulation pour le séquençage des gains et la robustesse	155

INTRODUCTION

Les commandes de vol électriques (“Fly-By-Wire”) désignent les systèmes de pilotage où les commandes du pilote sont automatiquement traitées et envoyées sous forme de signaux électriques aux surfaces de commande. Si dans le domaine de l’aviation civile, le Concorde est le premier avion à intégrer des commandes de vol électriques, il faut attendre l’*A320* pour voir naître le système complet tel que nous le connaissons aujourd’hui.

Initié en 1977, le projet *A320* du consortium européen *Airbus* révolutionne l’aviation civile de l’époque. S’il permet à l’avionneur européen de devenir un incontournable de la scène mondiale, il ouvre surtout une nouvelle ère pour l’aviation commerciale et pour des projets de plus en plus ambitieux ; outre un cockpit entièrement numérisé, il est en effet le premier avion à intégrer complètement des commandes de vol électriques. Fort de son succès, *Airbus* implante le système sur sa famille *A319/320/321* et plus récemment sur les *A330/340*. La réponse de *Boeing Inc.* ne se fait pas attendre et le *B-777* est le premier avion de la firme utilisant cette technologie.

Les commandes de vol électriques permettent tout d’abord de manœuvrer dans des configurations où les marges de stabilité sont faibles ou dans des configurations aérodynamiquement instables sur une partie de l’enveloppe de vol (voire toute l’enveloppe). De telles configurations instables ont bien sûr leurs avantages puisqu’elles peuvent être synonymes de meilleure efficacité aérodynamique ou dans le cas militaire, de furtivité. C’est ainsi le cas du *F-16* et du *Mirage 2000*, premiers avions du genre.

Aussi bien dans le domaine de l’aviation civile que militaire, les commandes de vol électriques permettent de substantielles réductions de masse et de coût. Du point de vue du pilotage, elles assurent une meilleure manœuvrabilité de l’appareil sur toute l’enveloppe de vol. Les avantages et apports sont encore bien plus nombreux et ont permis, entre autres, la naissance du futur très gros porteur de l’aviation civil, l’*A380*.

L'implantation de lois de commande dans les ordinateurs en charge des commandes de vol permettent de modeler le comportement de l'avion et rendre ainsi sa manœuvrabilité bien plus agréable et sécuritaire. C'est à ces lois de commande et à leur conception que nous nous intéressons dans le présent mémoire.

L'expérience acquise au cours des années par les avionneurs a dégagé certaines lois de commande qui se sont particulièrement montrés efficaces. Maintenant considérées comme classiques, par opposition aux nouvelles lois de commande obtenues par des méthodes modernes (Placement de Structure Propre, Synthèse Robuste H_∞ , μ -Analyse et μ -Synthèse), ces lois de commande sont encore massivement utilisées du fait de la bonne connaissance qu'en ont les ingénieurs et de leur immédiate signification physique. Dans [21], Tischler rassemble une série d'articles sur le contrôle des avions en utilisant les méthodes modernes. De même Smith ([18]), parmi d'autres, présente l'utilisation du placement de structures propres dans le cas du contrôle en vol. Mais nous laisserons ces méthodes de côté pour nous consacrer à la mise en place d'une méthodologie basée sur une autre méthode moderne, les applications gardiennes ([15] et [16]).

Dans le cadre du projet mené conjointement avec *Bombardier Inc.*, nous nous proposons de revenir sur deux lois de commande classiques. Les deux contrôles à l'étude sont un contrôle de la vitesse de tangage et une loi de contrôle communément appelée C^* . *Bombardier Inc.* ayant imposé l'utilisation de ces structures, il s'agit de jouer sur les valeurs des gains afin de satisfaire certains critères que l'on appelle Qualités de Manœuvrabilité ("Handling Qualities"). Ces critères portent aussi bien sur les amortissements de certains modes que sur les bandes passantes de fonctions de transfert. Dans [1], le problème a déjà été résolu de différentes manières, notamment par utilisation de fonctions d'optimisation et de placement de pôles. Il s'agit ici de développer une méthode alternative qui utiliserait en partie les applications gardiennes.

L'objectif est triple. Il s'agit dans un premier temps de satisfaire toutes les qualités de manœuvrabilité sur une condition de vol en établissant une méthodologie. Ensuite il faut pouvoir étendre cette méthode à l'ensemble de l'enveloppe de vol afin

de séquencer les gains, c'est-à-dire trouver des fonctions suffisamment simples qui interpoleront les gains en chaque point de vol. Le dernier objectif est de pouvoir synthétiser un contrôleur robuste pour chaque point de vol qui demeurera efficace en cas de variation de la masse ou du centrage de l'appareil. Le projet consiste donc à développer une méthodologie pour choisir de façon efficace ces gains variables afin de satisfaire toutes les contraintes, et en gardant à l'esprit une éventuelle planification de ces gains ("Gain Scheduling") en tout point de l'enveloppe de vol.

Après les premiers essais, il s'est rapidement dégagé une méthodologie dans le choix des gains et dans la façon de procéder. Basée sur une séparation de boucles des structures de commande, la méthode propose de choisir les gains en deux temps. Dans un premier temps, l'utilisateur synthétise la boucle interne appelée SAS ("Stability Augmentation System") en fixant deux gains afin d'augmenter la stabilité et l'amortissement des pôles. Dans un second temps, il règle la boucle externe, CAS ("Control Augmentation System"), en choisissant les trois gains qui vont remplir toutes les qualités de manœuvrabilité. Pour le guider dans ce choix, les Applications Gardiennes ("Guardian Maps") vont lui afficher les régions dans l'espace des paramètres où il sera garanti d'un amortissement minimum pour ses pôles. Une méthode similaire affichera aussi les régions où les critères fréquentiels seront remplis. Nous nous sommes aussi particulièrement penchés sur une formulation théorique d'un des critères, le dropback. La formule obtenue a d'ailleurs permis d'exprimer sa valeur en fonction des gains du système. L'utilisateur a alors à sa disposition tout un ensemble de gains remplissant les contraintes. Cette liberté dans le choix des gains permettra par la suite un séquençement des gains et une robustesse plus aisés.

Le mémoire comporte 7 chapitres. On peut distinguer une première partie (chapitres 1 à 3) où l'on présente le problème de façon détaillée, avec quelques rappels généraux, et où l'on définit les qualités de manœuvrabilité ainsi que les outils théoriques qui vont nous servir à résoudre une partie du problème : les Applications Gardiennes. La seconde partie (chapitres 4 à 7) traitera de la résolution du problème lui-même, et de l'interface graphique (*GUI*) destinée à guider l'utilisateur dans le

choix des gains.

Le chapitre 1 consiste en de brefs rappels d'automatique dans le cadre de la mécanique du vol et d'une présentation détaillée de l'ensemble du problème : système à l'étude, structure des lois de commande, enveloppe de vol.

Le chapitre 2 présente dans un premier temps la "philosophie" des qualités de manœuvrabilité puis les critères que nous allons chercher à satisfaire. On y démontre aussi la formule analytique du dropback que l'on pourra exprimer en fonction des gains du système dans le chapitre 5.

Le chapitre 3 est consacré aux applications gardiennes. Outre quelques résultats théoriques, nous présenterons rapidement les points pratiques essentiels pour notre étude, ainsi que des exemples.

Les chapitres 4 et 5 présentent la méthodologie qui s'est dégagée durant la recherche. Les deux lois de contrôle y sont abordées de façon séparée. Le chapitre 4 s'intéresse particulièrement à l'amortissement des pôles du système, alors que le chapitre 5 est voué aux critères fréquentiels et temporels.

Le chapitre 6 est une présentation de l'interface graphique (GUI) développée pour assister l'ingénieur dans le choix des gains. Des exemples viennent illustrer les possibilités et les performances de l'interface.

Enfin le chapitre 7 se veut une sorte de fenêtre vers les autres utilisations possibles de la méthodologie proposée. En effet, à l'heure où la robustesse et le séquençement des gains sont des sujets incoutournables dans le domaine de l'automatique, nous montrerons comment notre méthode peut répondre en partie à ces besoins. Nous essaierons de trouver des correcteurs robustes à des changements de masses et de centrages de l'avion, et étudierons un éventuel séquençement de nos gains à travers l'enveloppe de vol.

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Dans ce premier chapitre, nous présenterons rapidement les données du problème et ferons les rappels nécessaires pour le lecteur non familier avec la mécanique du vol.

1.1 Rappels de dynamique du vol

L'annexe I contient de brefs rappels sur la mécanique du vol. Y sont présentées les équations de mouvement de l'avion, et en particulier le modèle longitudinal de la dynamique de l'avion. Nous ne donnons dans les annexes que les éléments essentiels ; on pourra se reporter à [4], [8] ou [9] pour de plus amples détails.

1.2 Analyse de la boucle ouverte

Fort de ces quelques rappels, nous présenterons rapidement dans cette section la boucle ouverte de notre système, notamment les différents éléments qui la composent. Elle est constituée classiquement d'un actionneur, du système lui-même, en l'occurrence la dynamique longitudinale de l'avion, et de capteurs (Fig. 1.1).

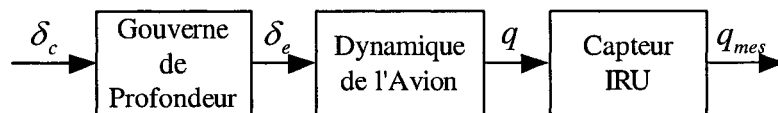


FIG. 1.1 – Boucle ouverte du mode longitudinal

1.2.1 Modèle dynamique

L'étude a été menée sur le mode longitudinal du *Challenger 604* de *Bombardier Inc.* qui a fourni 160 modèles longitudinaux linéaires, résultats de la linéarisation du

système complet autour de différentes conditions de vol. Nous présentons dans cette partie la répartition de ces 160 cas sur l'enveloppe de vol, ainsi que les modèles d'état linéaires fournis.

1.2.1.1 Enveloppe de vol

Chacun des 160 cas de vol donnés correspond à une linéarisation du système complet non linéaire autour d'une position d'équilibre. Il y a en fait 20 conditions de vol (α , Mach et altitude fixés) et pour chaque condition de vol, 8 modèles différents obtenus pour divers centrages et masses de l'avion. La figure 1.2 illustre la répartition des différents cas dans l'enveloppe de vol.

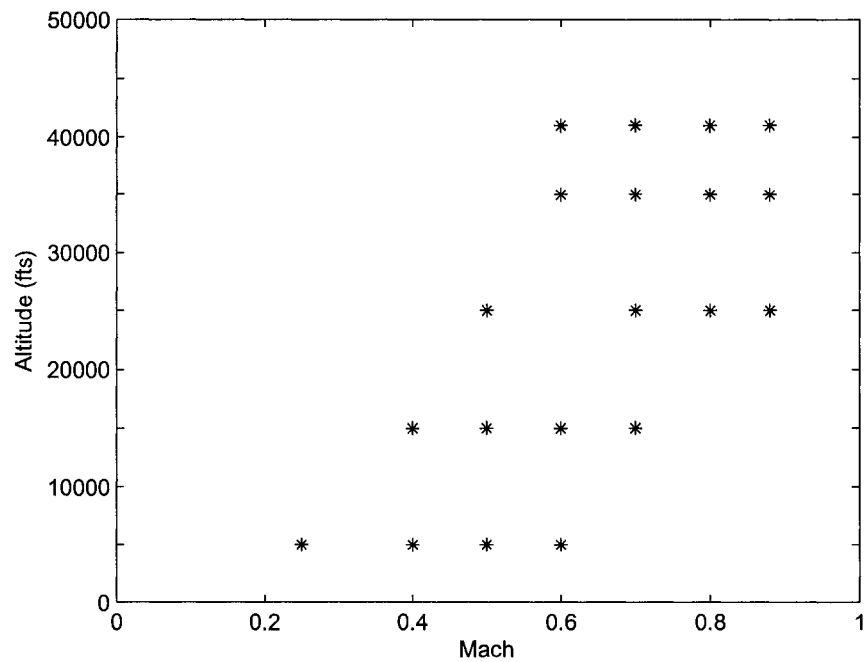


FIG. 1.2 – Enveloppe de vol

1.2.1.2 Analyse des modèles d'état

Les modèles d'état utilisés diffèrent quelque peu de ceux qu'on trouve classiquement dans la littérature, dans le sens où, au lieu de modèles d'état d'ordre 4, nous travaillerons sur des modèles d'état d'ordre 5. En fait, un cinquième état que nous nommerons x_5 , vient s'ajouter pour traduire l'influence du gauchissement négatif de l'empennage ("Tail Washout") sur la dynamique de l'avion. Le modèle d'état est de la forme générique suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta_e \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\delta_e \end{cases} \quad (1.1)$$

où le vecteur d'état est $\mathbf{x} = [u \quad w \quad q \quad \bar{\theta} \quad x_5]^T$ et l'unique commande considérée est δ_e , la variation de position de la gouverne de profondeur. À la demande de *Bombardier Inc.*, on ne considère pas ici la manette des gaz δ_t . Le vecteur de sortie est $\mathbf{y} = [u \quad q \quad \bar{\alpha} \quad n_z]^T$. Ces états et ces sorties sont des variations autour des conditions d'équilibre. La présence d'un cinquième état ne modifie en rien les résultats classiques de répartition des pôles : nous avons toujours un mode Phugoïde et un mode Short Period, qui seront abordés plus en détail dans le chapitre 2. Le cinquième état apporte un pôle réel, stable et rapide. En effet, quels que soient les cas de vol, celui-ci est constamment situé à gauche de la valeur -8.40 . La figure 1.3 montre la répartition la plus classique des pôles et des zéros. C'est en l'occurrence la fonction de transfert $\bar{\theta}/\delta_e$ qui y est représentée.

1.2.2 Actionneur

La modélisation du servo-élevateur (Fig. 1.4) est constituée de deux fonctions de transfert et de deux retards purs. Chacun des deux retards purs est approximé par une fonction de transfert d'ordre 5. Les données étant fournies par *Bombardier Inc.*, on ne s'intéressera pas à la provenance de la modélisation utilisée ; il en sera de même pour les modélisations du capteur IRU et du manche. Le diagramme de Bode de la

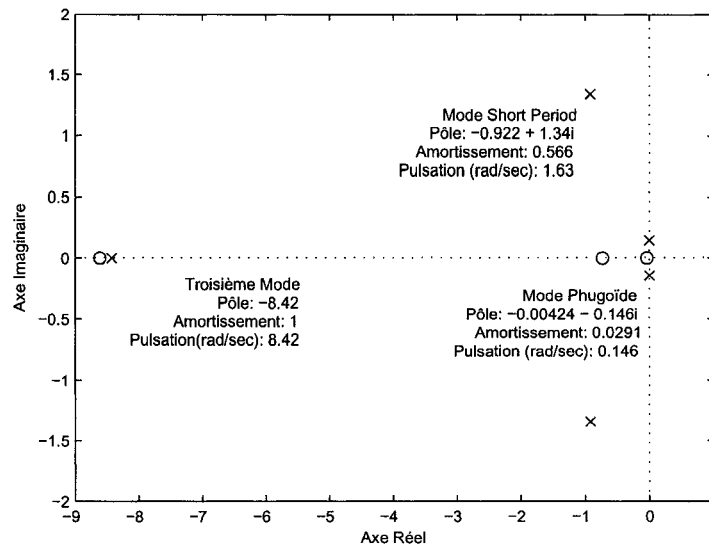


FIG. 1.3 – Lieu des pôles et zéros de $\bar{\theta}/\delta_e$ (cas 39)

figure 1.5 nous montre que dans la bande passante $[0 - 10]$ rad/s, l'actionneur se comporte pratiquement comme un gain pur, voire comme un premier ordre dans la bande passante $[0 - 100]$ rad/s.

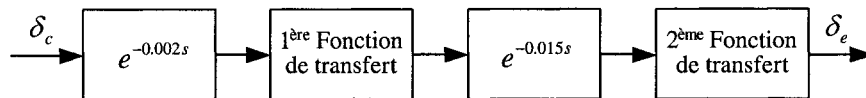


FIG. 1.4 – Modélisation de l'actionneur

Pour donner une idée plus précise et un ordre de grandeur des pôles et des zéros, les tables 1.1 et 1.2 rassemblent leurs valeurs. Outre un pôle à -15.88 , tous les autres pôles du système sont bien plus rapides.

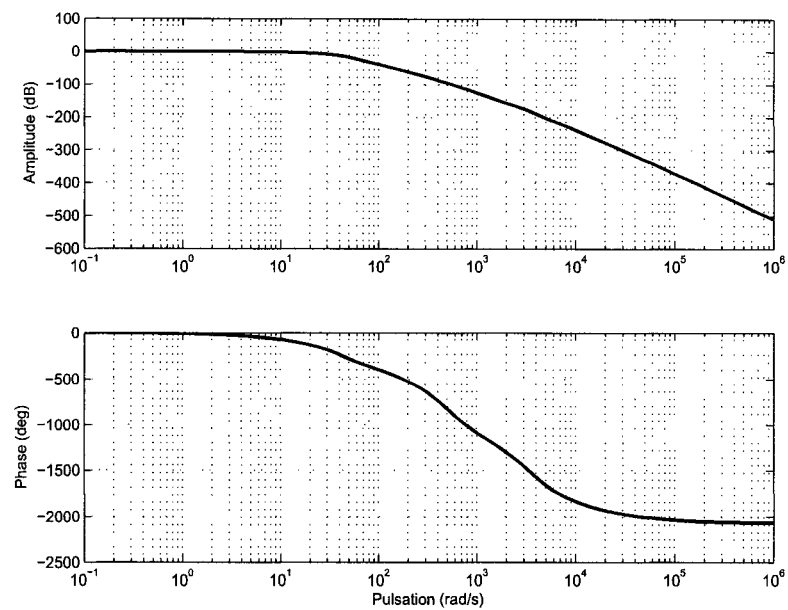


FIG. 1.5 – Diagramme de Bode de l'actionneur

TAB. 1.1 – Pôles de l'actionneur

Eléments	Pôles	Pulsation propre	Amortissement
1 ^{er} Retard pur $e^{-0.002s}$	$-1827.84 \pm 3271.86j$	3747.81	0.48
	$-2850.47 \pm 1605.13j$	3271.34	0.87
	-3143.35	3143.35	1.00
1 ^{ère} F. de T.	$-25.25 \pm 33.36j$	41.78	0.60
2 ^{ème} Retard pur $e^{-0.015s}$	$-243.05 \pm 436.12j$	499.27	0.48
	$-381.30 \pm 213.81j$	437.15	0.87
	-417.96	417.96	1.00
2 ^{ème} F. de T.	-15.88	15.88	1.00
	-45.25	45.25	1.00
	-28940.86	28940.86	1.00

TAB. 1.2 – Zéros de l'actionneur

Eléments	Zéros	Pulsation propre	Amortissement
1 ^{er} Retard pur	$2601.97 \pm 2902.92j$	3898.36	-0.66
$e^{-0.002s}$	$3398.03 \pm 943.32j$	3526.53	-0.96
2 ^{ème} Retard pur	$346.72 \pm 387.15j$	519.72	-0.66
$e^{-0.015s}$	$453.27 \pm 125.24j$	470.52	-0.96

1.2.3 Capteur IRU

A l'instar de l'actionneur, la modélisation des capteurs (Fig. 1.6) est aussi constituée de deux fonctions de transfert et de deux retards purs, toujours approximatés par des fonctions de transfert d'ordre 5. Le diagramme de Bode de la figure 1.7 nous montre que le capteur se comporte pratiquement comme un gain pur dans la bande passante $[0 - 10]$ rad/s.

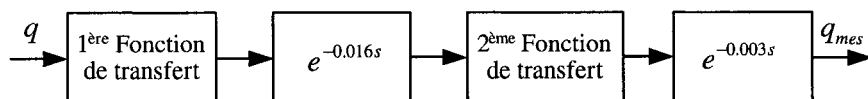


FIG. 1.6 – Modélisation du capteur IRU

Les tables 1.3 et 1.4 listent les pôles et zéros du capteur ; les pôles sont en effet très rapides.

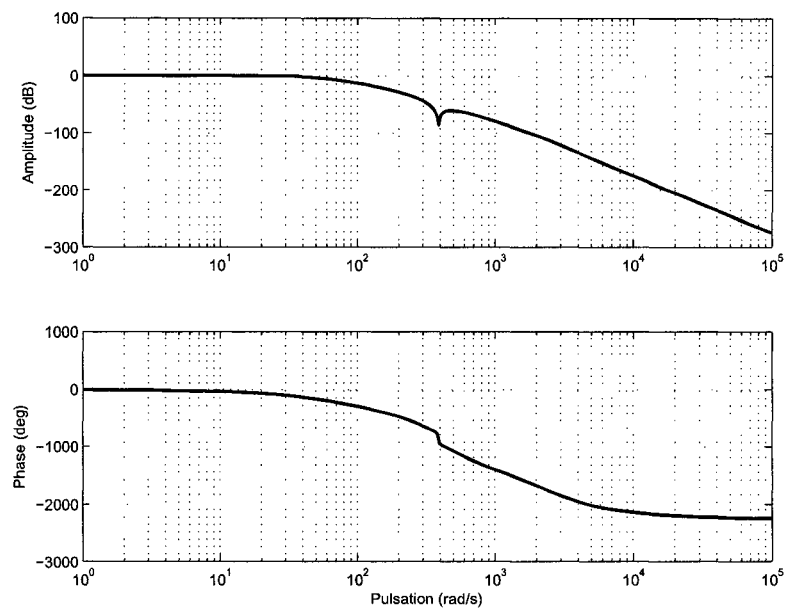


FIG. 1.7 – Diagramme de Bode du capteur

TAB. 1.3 – Pôles du capteur

Eléments	Pôles	Pulsation propre	Amortissement
1 ^{ère} F. de T.	$-35.58 \pm 35.35j$	50.26	0.70
1 ^{er} Retard pur $e^{-0.016s}$	$-228.44 \pm 362.22j$	468.54	0.48
	$-355.99 \pm 200.34j$	408.50	0.87
	-393.62	393.62	1.00
2 ^{ème} F. de T.	$-168.46 \pm 256.54j$	306.91	0.54
	-208.07	208.07	1.00
2 ^{ème} Retard pur $e^{-0.003s}$	$-1211.87 \pm 2173.71j$	2488.71	0.48
	$-1931.56 \pm 1084.58j$	2215.23	0.87
	-2046.44	2046.44	1.00

TAB. 1.4 – Zéros du capteur

Eléments	Zéros	Pulsation propre	Amortissement
1 ^{er} Retard pur	$325.41 \pm 362.25j$	486.95	-0.66
$e^{-0.016s}$	$424.58 \pm 119.64j$	441.11	-0.96
2 ^{ème} F. de T.	$1.85 \pm 387.35j$	387.36	-0.0047
2 ^{ème} Retard pur	$1735.97 \pm 1932.99j$	2598.09	-0.66
$e^{-0.003s}$	$2263.01 \pm 645.33j$	2353.23	-0.96

1.2.4 Manche de contrôle

Nous détaillons ici (Fig. 1.8) la modélisation du manche bien qu'il n'intervienne pas à l'intérieur des deux boucles de contrôle. Il sera néanmoins considéré quand il s'agira de calculer les critères fréquentiels. Comme pour les deux éléments précédents, les retards purs sont approximés par des fonctions de transfert d'ordre 5. La figure 1.9 représente le diagramme de Bode et les tables 1.5 et 1.6 listent les pôles et zéros. Le pôle à -15.23 est le pôle dominant. Le manche se comporte à basse et moyenne fréquence comme un système d'ordre 1.

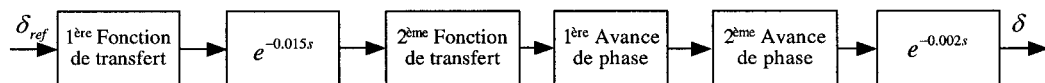


FIG. 1.8 – Modélisation du manche

TAB. 1.5 – Pôles du manche

Eléments	Pôles	Pulsation propre	Amortissement
1 ^{ère} F. de T.	−15.23	15.23	1.00
1 ^{er} Retard pur $e^{-0.015s}$	$-243.05 \pm 436.12j$	499.27	0.48
	$-381.30 \pm 213.81j$	437.15	0.87
	−417.96	417.96	1.00
2 ^{ème} F. de T.	$-110.62 \pm 357.80j$	374.52	0.29
	−283.74	283.74	1.00
Avances de phase	−19.79	19.79	1.00
	−19.79	19.79	1.00
2 ^{ème} Retard pur $e^{-0.002s}$	$-1827.84 \pm 3271.86j$	3747.81	0.48
	$-2850.47 \pm 1605.13j$	3271.34	0.87
	−3143.35	3141.35	1.00

TAB. 1.6 – Zéros du manche

Eléments	Zéros	Pulsation propre	Amortissement
1 ^{er} Retard pur $e^{-0.015s}$	$346.85 \pm 386.62j$	519.41	−0.66
	$453.14 \pm 126.75j$	470.53	−0.96
2 ^{ème} F. de T.	$0.00 \pm 796.43j$	796.43	0.00
Avances de phase	−9.09	9.09	1.00
	−9.09	9.09	1.00
2 ^{ème} Retard pur $e^{-0.002s}$	$2601.97 \pm 2902.92j$	3898.36	−0.66
	$3398.03 \pm 943.32j$	3526.53	−0.96

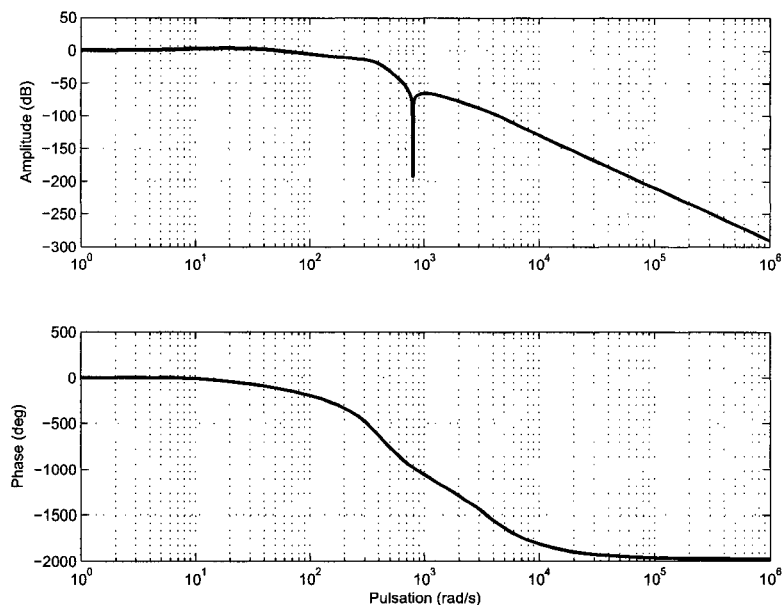


FIG. 1.9 – Diagramme de Bode du manche

1.3 Lois de commande

1.3.1 Loi de commande “classique”

La première loi de commande permet de contrôler la vitesse de tangage q . La boucle de contrôle se scinde en une boucle interne dite SAS et une boucle externe dite CAS (Fig. 1.10). Les acronymes SAS et CAS signifient respectivement “Stability Augmentation System” et “Control Augmentation System”.

La boucle SAS est constituée de deux filtres d’ordre 1 rebouclés, l’un sur le facteur de charge n_z , et l’autre, sur la vitesse de tangage q . Ce dernier filtre (“Wash-Out”) est un filtre passe-haut qui permet d’opérer une action dérivée aux basses fréquences. Le concepteur peut agir sur les gains K_{n_z} et K_q de ces deux filtres.

La boucle CAS est composée d’un correcteur proportionnel intégral (PI) auquel on ajoute un gain “feedforward”. Les trois gains K_p , K_i et K_{ff} sont eux aussi ajustables. Le gain K_{ff} permet surtout de rajouter de la phase au système pour compenser le

déphasage accumulé dans les boucles SAS et CAS.

Nous pouvons donc agir sur les 5 gains $(K_q, K_{n_z}, K_p, K_i, K_{ff})$ afin de remplir notre cahier des charges.

1.3.2 Loi de contrôle C*

La seconde loi de commande à l'étude fait intervenir une sortie qui est une combinaison du facteur de charge n_z et de la vitesse de tangage q ; elle est appelée C* (Fig. 1.11). Il existe dans la littérature des qualités de manœuvrabilité un critère appelé C*, qui lui aussi fait intervenir le facteur de charge et la vitesse de tangage. Néanmoins, ce critère n'a pas constitué une métrique efficace pour être retenu. La loi et le critère sont deux choses bien distinctes. On se reportera à [21] pour plus d'explications.

Cette loi de contrôle a été développée par la NASA lors d'une étude pour la navette spatiale *Space Shuttle* ; elle a été reprise et améliorée par *Airbus*, qui l'a introduit pour la première fois en 1978 sur le *Concorde*.

Dans ce cas-ci, la boucle SAS est constituée du filtre "Wash-Out" qui reboucle sur la vitesse de tangage q , à la différence que nous pouvons à présent agir aussi bien sur le gain K_q que sur le pôle $-z_{wo}$ de ce filtre.

Par ailleurs, le rebouclage du CAS s'effectue à présent sur la sortie combinée C*. C'est une combinaison entre q et n_z pondérée par un facteur β . Le facteur de charge n_z passe au préalable par un filtre passe-bas. Comme dans la loi de commande précédente, le correcteur est un PI augmenté d'un gain "feedforward".

Nous pouvons donc agir sur 4 gains (K_q, K_p, K_i, K_{ff}) et sur le pôle $-z_{wo}$ du filtre.

Après cette brève présentation destinée à mettre en évidence les éléments essentiels du problème, nous allons aborder à présent le chapitre sur les qualités de manœuvrabilité où nous analyserons les critères à satisfaire.

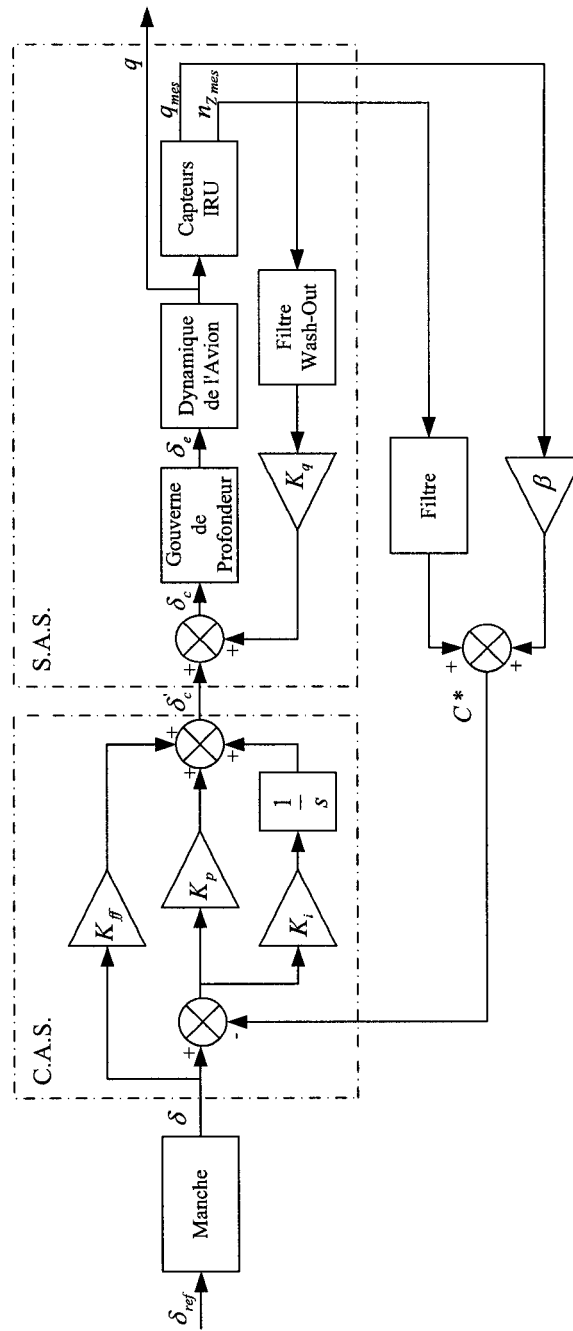


FIG. 1.11 – Contrôle C*

CHAPITRE 2

QUALITÉS DE MANŒUVRABILITÉ

Depuis les frères Wright et le début de l'aviation, les qualités de manœuvrabilité ont toujours été un vaste sujet de recherche et ce n'est pas en vain que les deux pères de l'aviation considéraient que "équilibrer et diriger" un avion, était un des enjeux les plus importants. Depuis l'avènement des commandes de vol électriques et des avions contrôlés électroniquement, il a fallu repousser encore plus loin les limites du domaine et comprendre les nouveaux phénomènes dus aux retards introduits par les éléments électroniques. Citons par exemple peuvent les oscillations induites par le pilote (PIO).

C'est au prix d'innombrables essais en vol qu'ont pu être dégagés ce que l'on nomme les qualités de manœuvrabilité. À partir de critères qualitatifs comme l'opinion du pilote, il a fallu en déduire des critères quantitatifs afin de guider les ingénieurs dans la conception de lois de commande remplissant ces qualités de manœuvrabilité.

Nous traiterons dans une première partie les échelles qualitatives qui ont été utilisées pour recueillir l'opinion du pilote ainsi que des définitions et spécifications militaires. Nous verrons ensuite, dans un second temps, les critères quantitatifs que les ingénieurs ont pu en déduire. Ces critères ont été scindés en trois catégories : critères modaux, fréquentiels et temporels.

2.1 Fondements

Nous allons introduire ici les échelles qualitatives à l'origine des qualités de manœuvrabilité, ainsi que plusieurs définitions militaires destinées à catégoriser les appareils, les phases de vol et les niveaux d'accomplissement des qualités de manœuvrabilité.

2.1.1 Échelles qualitatives

2.1.1.1 Échelle Cooper-Harper et opinion du pilote

Les commentaires d'un pilote sur la façon dont se comporte l'avion en vol sont toujours la meilleure source d'informations. En travaillant avec un large nombre de configurations et de pilotes, il a vite été nécessaire de mettre des échelles en place, ou du moins un système de quantification. Le laboratoire *Cornell Aeronautics* où travaillait Harper, utilisa longtemps sa propre échelle pour évaluer les qualités de vol alors que Cooper de la NASA était à l'origine d'une échelle en 10 points, qui était alors beaucoup plus utilisée de part le monde. Combinant leurs expériences respectives, ils publièrent en 1966 l'échelle Cooper-Harper qui est à présent utilisée universellement (Fig 2.1). Elle fut adoptée en 1970 par l'armée américaine qui s'en servit comme base pour les spécifications militaires américaines des qualités de vol ; on la retrouve dans la référence militaire la plus récente MIL-HDBK-1797 [25].

L'échelle fut établie à partir de notions élémentaires de psychométrie qui consiste en l'évaluation des capacités psychiques d'un individu. Un classement en 10 points peut paraître excessif pour sonder l'opinion d'une personne mais l'échelle Cooper-Harper est un condensé de plusieurs évaluations. C'est en fait une échelle ordinale et non linéaire, dans le sens où l'intervalle entre deux points, ne correspond pas à un degré de dégradation fixe. Autrement dit, c'est une échelle dichotomique où l'on force le pilote à prendre des décisions afin d'établir sa véritable opinion.

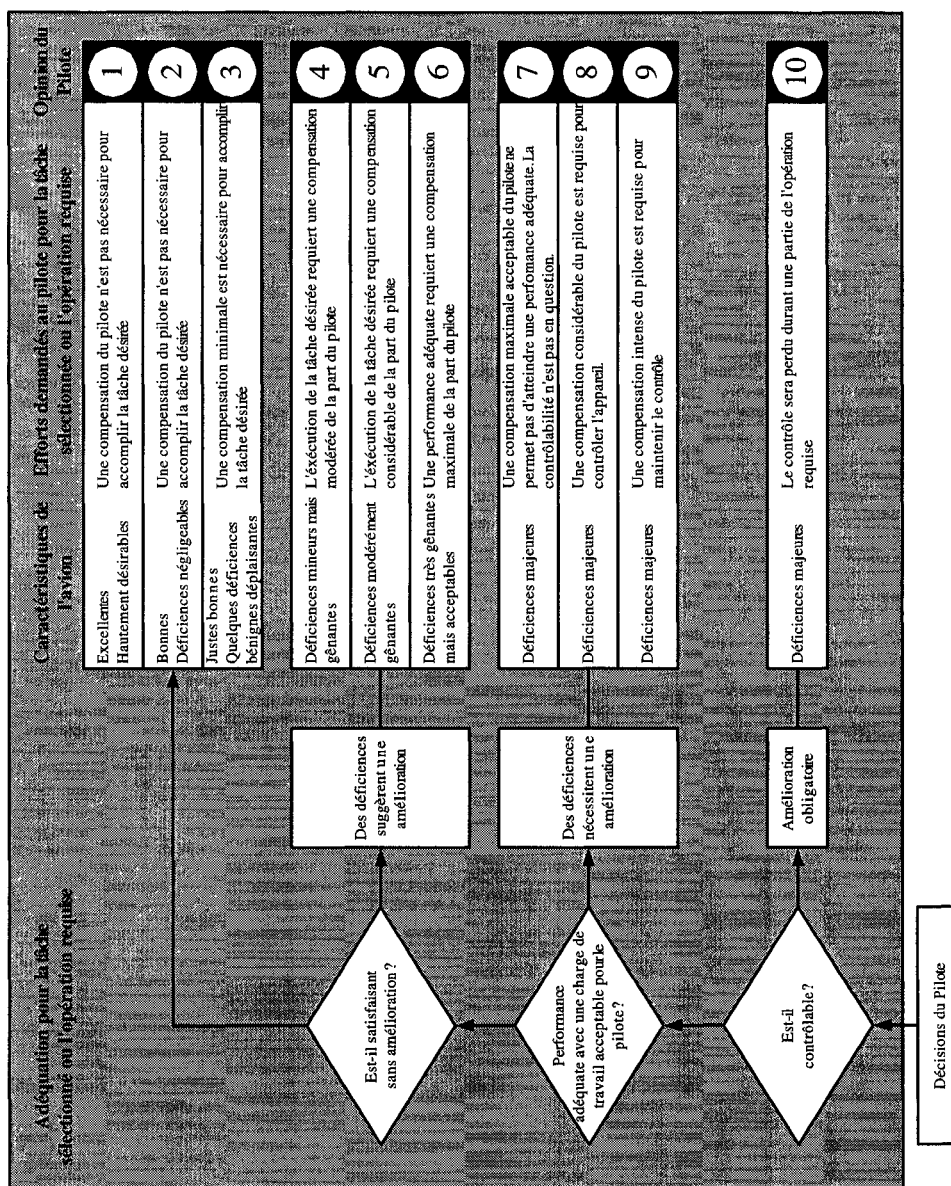


FIG. 2.1 – Échelle d'opinion de Cooper-Harper

2.1.1.2 Oscillations induites par le pilote

Parallèlement à l'échelle Cooper-Harper, il existe une échelle spécialisée (Tab. 2.1 et Fig. 2.2) qui est chargée de traiter les qualités de vol à l'origine des oscillations induites par le pilote ("Pilot-Induced Oscillations" - PIO). Les PIOs sont des oscillations prolongées résultant du couplage entre le pilote et la boucle de commande. En utilisant l'expression "induites par le pilote", les ingénieurs signifient qu'elles disparaissent quand le pilote abandonne le contrôle de l'avion.

TAB. 2.1 – Description des niveaux de l'échelle PIO

<i>Niveau</i>	<i>Description</i>
1	Le pilote n'a pas tendance à induire des oscillations indésirables.
2	Des mouvements indésirables ont tendance à se produire quand le pilote exécute des manœuvres brusques ou un contrôle forcé. La technique du pilote peut prévenir et éliminer ces mouvements.
3	Des mouvements indésirables sont induits aisément quand le pilote exécute des manœuvres brusques ou un contrôle forcé. Ces mouvements peuvent être prévenus ou éliminés seulement, en sacrifiant l'exécution de la tâche ou en imposant un effort considérable au pilote.
4	Des oscillations ont tendance à se développer quand le pilote exécute des manœuvres brusques ou un contrôle forcé. Le pilote doit réduire son effort de commande ou abandonner la tâche à exécuter pour retrouver le contrôle de l'avion.
5	Des oscillations divergentes tendent à se développer quand le pilote exécute des manœuvres brusques ou un contrôle forcé. Le pilote doit ouvrir la boucle de contrôle en relâchant ou en bloquant le manche.
6	Des perturbations dans le contrôle normal du pilote peuvent causer des oscillations divergentes. Le pilote doit ouvrir la boucle de contrôle en relâchant ou en bloquant le manche.

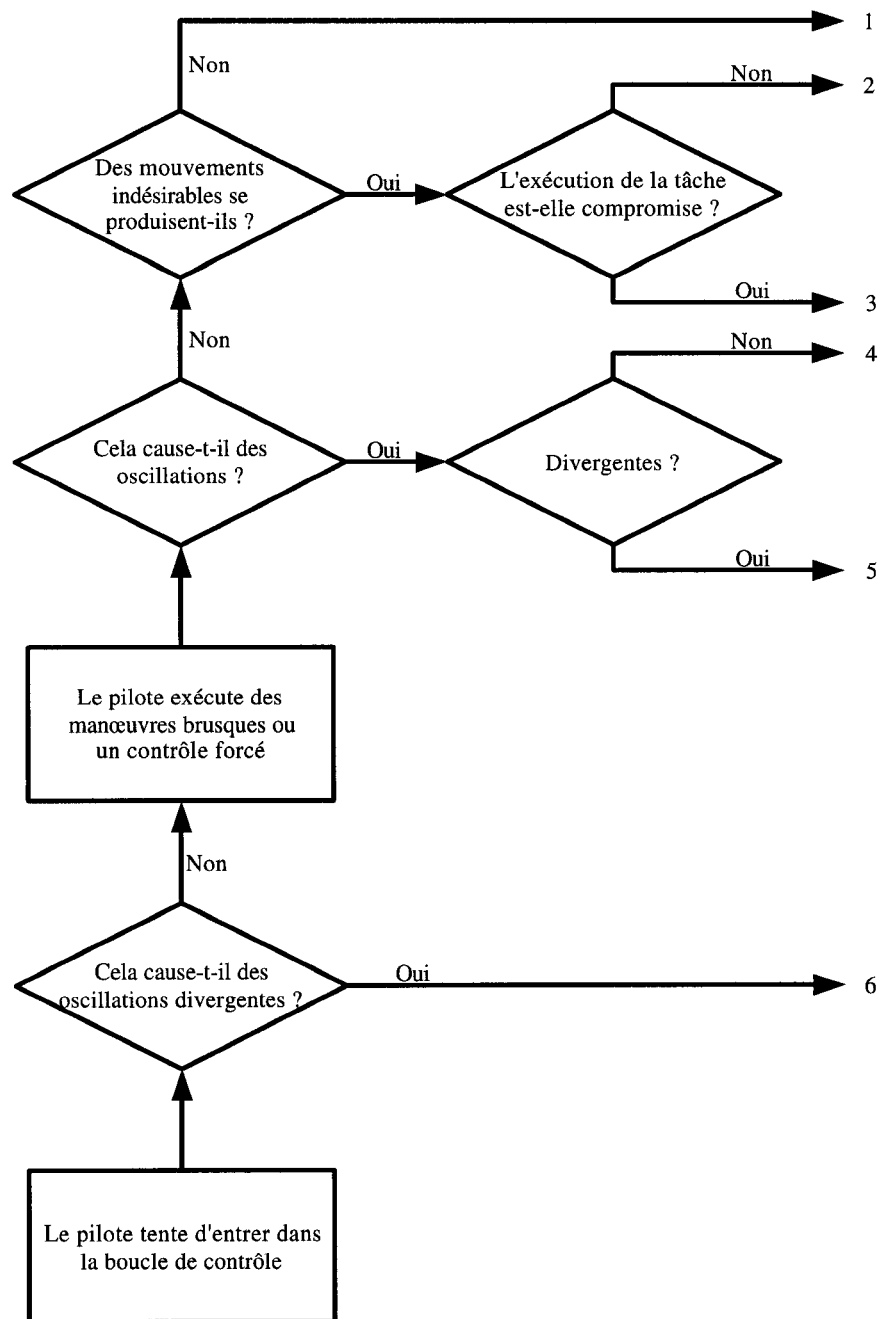


FIG. 2.2 – Échelle d'opinion pour les oscillations induites par le pilote (PIO)

2.1.1.3 Réflexion sur la collecte d'opinions

Même si l'opinion du pilote et l'échelle Cooper-Harper peuvent être dignes de confiance, il n'en demeure pas moins que certaines précautions doivent être prises et un certain recul est de mise.

Ainsi, il ne faut pas oublier que le pilote est avant tout un être humain. Les réactions des pilotes interrogés ne sont pas constantes car leurs performances sont influencées d'un jour à l'autre par la variation de leur état physique (fatigue, maladie, ...) et psychique (stress, soucis, ...), et de leurs relations avec le milieu.

De même, on attend d'un pilote qu'il demeure seulement un pilote. Beaucoup de pilotes sont d'excellents ingénieurs, mais lors des simulations, on exige bien d'eux leur opinion de pilote, et non celle de l'ingénieur qui viendrait conseiller une modification dans la structure de commande. De même, la discipline et l'intégrité sont de mise. Le succès d'une carrière de pilote peut être intimement lié au succès d'un projet, et l'opinion du pilote peut être influencée par les pressions exercées (internes ou externes) pour la réussite du développement.

Enfin, il faut garder à l'esprit que les qualités des pilotes sont loin d'être égales, et un pilote plus compétent éprouvera peut-être moins de difficultés à piloter une configuration peu manœuvrable que le pilote moyen. Il s'agit alors de varier les sujets ainsi que les aptitudes respectives.

2.1.2 Définitions et spécifications militaires

Avant de quantifier les qualités de manœuvrabilité, il a d'abord été nécessaire d'introduire plusieurs classifications. Ces définitions et spécifications sont toutes d'origine militaire.

2.1.2.1 Classification des avions

Selon les spécifications militaires américaines contenues dans MIL-HDBK-1797 [25], on considère qu'un avion appartient à l'une des 4 catégories décrites dans le

tableau 2.2.

TAB. 2.2 – Classification des avions

<i>Classe</i>	<i>Caractéristiques de l'avion</i>
I	Avion léger et petit (Masse maximale $\simeq 5\,000$ kg)
II	Avion de masse moyenne avec manœuvrabilité modérée (Masse comprise entre 5 000 et 30 000 kg)
III	Avion massif avec manœuvrabilité modérée (Masse de $+30\,000$ kg)
IV	Avion de haute manœuvrabilité

2.1.2.2 Phases de vol

Des catégories regroupant les différentes phases de vol ont été établies afin de spécifier séparément les valeurs des qualités de manœuvrabilité. En effet, certaines phases de vol sont plus contraignantes que d'autres et il s'agit alors d'être plus exigeant au niveau des contraintes à remplir. Quelle que soit la mission que doit accomplir un pilote avec son avion, elle peut être divisée en trois catégories. La référence MIL-STD-1797A [24] les définit ainsi :

- la *Catégorie A* inclut les phases de vol non terminales exigeant des manœuvres rapides, une poursuite précise (tracking) ou un contrôle précis de la trajectoire. Les phases de vol contenues dans cette catégorie sont : le combat air-air, l'attaque au sol, le largage d'armes, la reconnaissance, la récupération aérienne, l'avitaillement en vol (receveur), le suivi de terrain, la recherche et le sauvetage maritimes, le vol en formation serrée et le vol acrobatique.

- la *Catégorie B* implique les phases de vol non terminales accomplies par des manœuvres graduelles qui ne requièrent pas de poursuite précise. Néanmoins, une certaine précision dans la trajectoire peut être nécessaire. Sont compris dans cette catégorie : la montée, le vol en croisière, le vol en attente, l'avitaillement en vol

(citerne), la descente et la livraison aérienne.

- la *Catégorie C*, quant à elle, regroupe les phases de vol terminales accomplies par manœuvres graduelles et nécessitant un contrôle très précis de la trajectoire. Elle comprend le décollage, l'atterrissage et les différents types d'approche.

2.1.2.3 Niveaux d'acceptabilité des qualités de vol

Devant la multiplication des échelles d'appréciation, des niveaux d'acceptabilité des qualités de vol ont été mis en place afin d'uniformiser ce qui existait auparavant. Ces niveaux, créés en référence à l'échelle Cooper-Harper, sont au nombre de 3, même si, officieusement, on désigne par Niveau 4 toute caractéristique qui ne remplit pas les exigences du Niveau 3. Ainsi les classements 1, 2 et 3 de l'échelle Cooper-Harper forment le Niveau 1 alors que les classements 4, 5 et 6 désignent le Niveau 2 ; le Niveau 3 est alors composé des classements 7, 8 et 9, laissant le classement 10 pour un éventuel Niveau 4. Ces niveaux indiquent la capacité d'un avion à compléter les missions pour lesquelles il est fait. Le tableau 2.3 résume les définitions de chaque niveau.

L'état normal représente la configuration opérationnelle normale de l'avion en termes, par exemple, de réglages des volets, de masses, d'inerties, etc... Un état défaillant correspond alors à l'état normal modifié par un ou des dysfonctionnements. On distingue aussi des états défaillants spéciaux qui ont peu de chances de se produire mais très difficiles à prédire.

La référence MIL-HDBK-1797 [25] exige que les qualités de vol soient de Niveau 1 dans l'enveloppe de vol opérationnelle de l'avion. En présence de très probables défauts, les qualités de vol doivent demeurer de Niveau 1 ; en revanche, s'il advient des défaillances moins probables, une dégradation des qualités de vol est tolérée. Pour parler de façon statistique, une défaillance arrivant 1 fois sur 100 vols ne doit pas dégrader les qualités de vol en deça du Niveau 2, et une défectuosité se produisant 1 fois sur 10 000 vols doit au plus dégrader les qualités de vol jusqu'au Niveau 3. En présence de turbulences modérées, les qualités de vol peuvent devenir

de Niveau 2, et si ces turbulences sont plus sévères, une dégradation au Niveau 3 est acceptée.

TAB. 2.3 – Niveau des qualités de vol

<i>Niveau</i>	<i>État</i>	<i>Description</i>
1	Satisfaisant	Les qualités de vol sont complètement adéquates pour la phase de vol de la mission considérée. La tâche désirée est réalisable sans plus de compensation de la part du pilote
2	Acceptable	Les qualités de vol sont adéquates pour accomplir la phase de vol de la mission mais cela entraîne une augmentation de la charge de travail du pilote et/ou une dégradation dans l'efficacité de la mission.
3	Contrôlable	Les qualités de vol rendent l'avion contrôlable mais l'efficacité de la mission est gravement dégradée. De plus, la charge de travail imposée au pilote pour accomplir la mission est telle que le pilote approche la limite de ses capacités. Les phases de vol de catégorie A peuvent être accomplies sans risque et celles des catégories B et C complétées.
4	Rattrapable	Les qualités de vol sont telles que le contrôle peut être maintenu assez longtemps pour sortir d'une perturbation. Toutes les phases de vol peuvent être terminées et le pilote peut accomplir une remise des gaz.

2.2 Les Critères modaux

2.2.1 Mode phugoïde

Le mode phugoïde est un mode basse fréquence et oscillant. Il correspond à un échange entre énergie cinétique (vitesse) et énergie potentielle (altitude). Il se manifeste par une oscillation de longue période en assiette θ , en variation de vitesse relative u , en altitude h et en pente γ , alors que l'angle d'attaque α demeure relativement constant. Il est généralement stable mais très mal amorti. La figure 2.3 montre une simulation du cas 39 suite à un échelon négatif de la position de la gouverne de profondeur δ_e .

Les critères concernant ce mode portent sur l'amortissement ζ_{ph} et la pulsation propre ω_{ph} .

TAB. 2.4 – Amortissement ζ_{ph} du mode phugoïde

Niveau 1 :	$\zeta_{ph} \geq 0.04$
Niveau 2 :	$\zeta_{ph} \geq 0.00$
Niveau 3 :	$T_{2_{ph}} \geq 55 \text{ sec}$

$T_{2_{ph}}$ désigne le temps pour doubler l'amplitude de la sortie quand le mode phugoïde est instable (i.e. $\zeta_{ph} < 0$). On a ainsi :

$$T_{2_{ph}} = \frac{-\ln(2)}{\zeta_{ph}\omega_{ph}} \quad (2.1)$$

On souhaite de plus que la pulsation propre ω_{ph} soit comprise entre 0.01 et 1 rad/s, l'essentiel étant que les domaines de fréquence des modes phugoïde et Short Period soient bien séparés.

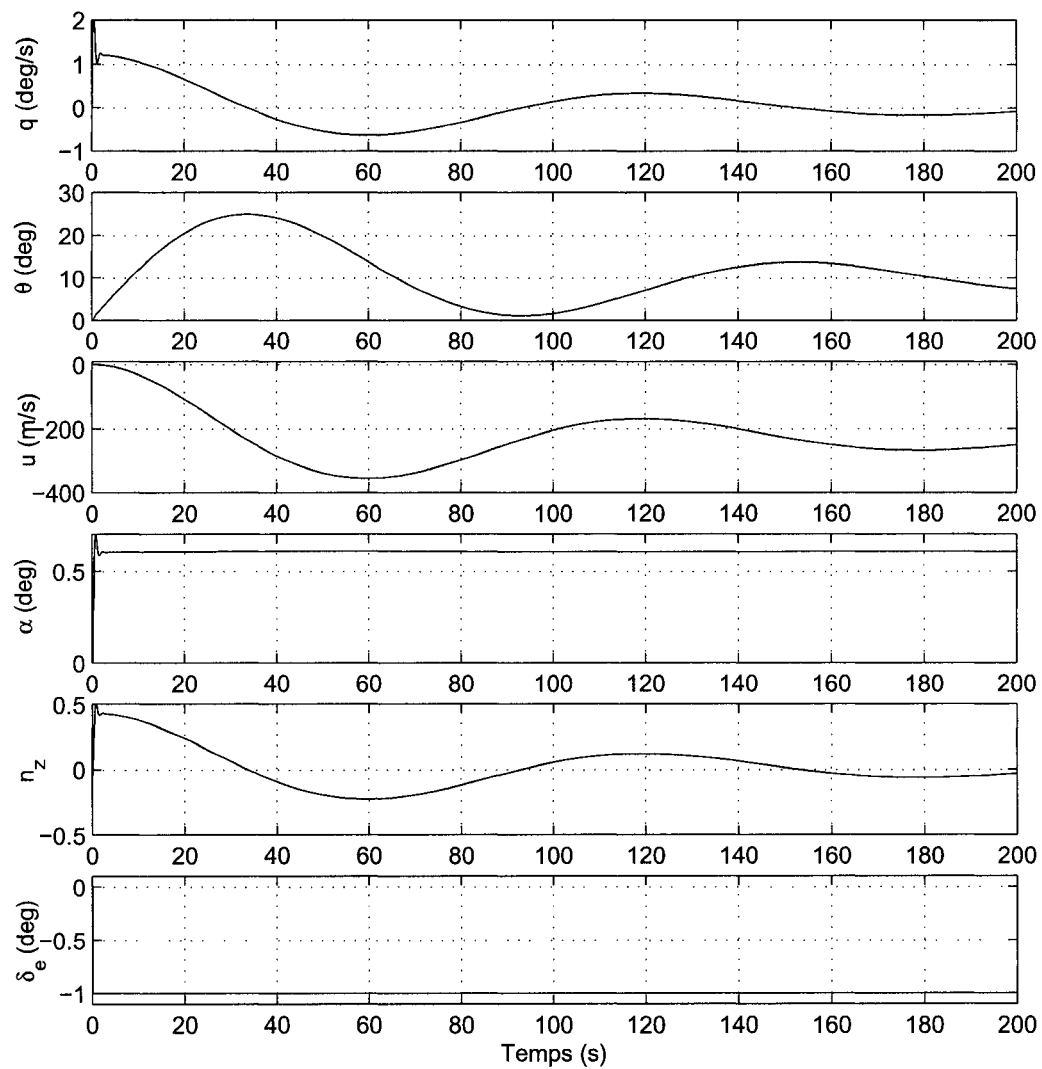


FIG. 2.3 – Mise en évidence du mode phugoïde - Réponse à un échelon de δ_e (cas 39 fourni par *Bombardier Inc.*)

2.2.2 Mode Short Period

Le mode Short Period est le mode naturel rapide de l'avion. Dans le monde francophone, il est aussi communément appelé oscillation d'incidence ; par souci d'unicité et de clarté, nous garderons la dénomination anglophone Short Period. C'est un mode généralement oscillatoire et de moyenne fréquence, qui concerne essentiellement l'angle d'incidence α (ou angle d'attaque), le tangage q et le facteur de charge n_z ; on considère que la variation relative de vitesse u demeure constante et n'est pas véritablement affectée par les oscillations dues au Short Period. La figure 2.4 montre l'effet à court terme d'un échelon négatif de la position de la gouverne de profondeur δ_e .

Les valeurs de l'amortissement ζ_{sp} désirées sont mentionnées dans le tableau 2.5.

TAB. 2.5 – Amortissement ζ_{sp} du mode Short Period

	<i>Phases de vol A et C</i>	<i>Phase de vol B</i>
Niveau 1 :	$0.35 \leq \zeta_{sp} \leq 1.30$	$0.30 \leq \zeta_{sp} \leq 2.00$
Niveau 2 :	$0.25 \leq \zeta_{sp} \leq 2.00$	$0.20 \leq \zeta_{sp} \leq 2.00$
Niveau 3 :	$0.15 \leq \zeta_{sp}$	$0.35 \leq \zeta_{sp}$

2.2.3 Le critère CAP

Si dans le paragraphe précédent, seules des contraintes sur l'amortissement ζ_{sp} du mode Short Period ont été imposées, il n'en demeure pas moins qu'il existe aussi des contraintes sur la pulsation naturelle ω_{sp} . Néanmoins cela ne suffit pas puisque ces contraintes ne considèrent pas l'effet du numérateur. En effet, la capacité du pilote à contrôler le mouvement à court terme de l'avion dépend aussi bien du mode Short Period que du numérateur. L'effet du zéro du numérateur $-1/T_\theta$ a été incorporé dans le critère appelé Paramètre d'Anticipation du Contrôle ("Control Anticipation

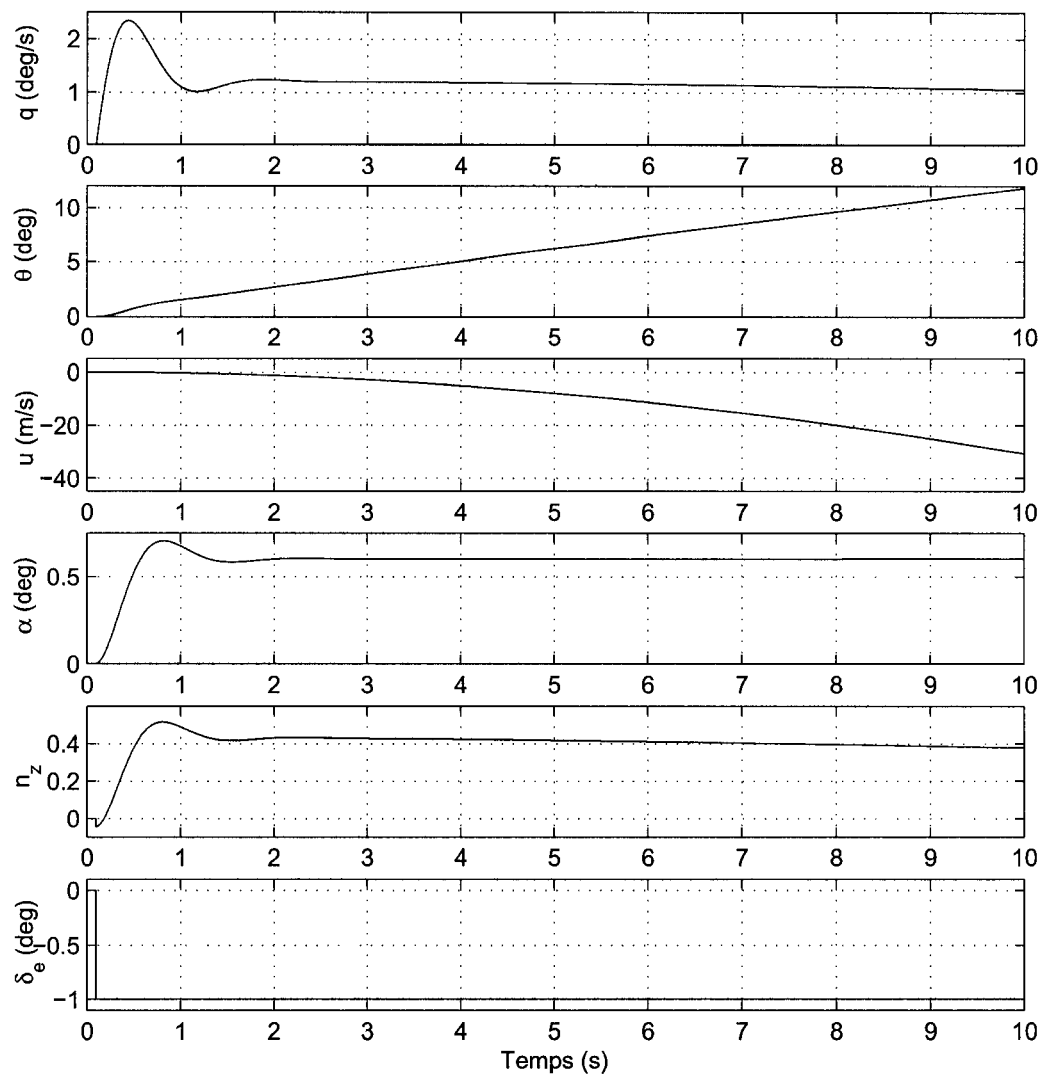


FIG. 2.4 – Mise en évidence du mode Short Period - Réponse à un échelon de δ_e (cas 39 fourni par *Bombardier Inc.*)

Parameter” ou *CAP*), défini de la façon suivante :

$$CAP = \frac{\ddot{\theta}_0}{\Delta n_z} \approx \frac{\omega_{sp}^2}{n_z/\alpha} \approx \frac{\omega_{sp}^2}{\frac{U_0}{g} \frac{1}{T_\theta}} \quad (2.2)$$

Conçu originalement comme le rapport de l’accélération initiale en tangage $\ddot{\theta}_0$ sur la variation finale d’accélération normale Δn_z , on en a vite déduit une bonne approximation liant la pulsation propre ω_{sp} du Short Period et le zéro $-1/T_\theta$ du numérateur. La quantité n_z/α (ou n/z suivant les références) est la sensibilité du facteur de charge à une variation d’incidence. Il s’agit en fait de la quantité $\frac{\Delta n_z}{\Delta \alpha}$. À grande vitesse, ce rapport est grand et à basse vitesse, il est faible.

L’amplitude du CAP donne une bonne indication de la perception que le pilote a des accélérations verticale et en tangage. C’est essentiel à cause du retard entre la commande d’entrée du pilote et l’accélération normale finale.

Lorsque la valeur du CAP est trop faible, l’accélération initiale en tangage est faible comparée à l’accélération normale finale. Ainsi si le pilote met peu de gain sur le manche, il ressentira des efforts par g corrects mais l’accélération en tangage ressentie sera beaucoup trop faible. En voulant augmenter son gain sur la commande pour obtenir une accélération en tangage correcte, il contribuera alors à augmenter les efforts par g et ainsi une accélération normale finale trop forte qui entraînera un dépassement important de la trajectoire désirée.

Si au contraire la valeur du CAP est trop haute, l’accélération initiale en tangage est forte comparée à l’accélération normale finale. Ainsi, le pilote ressent une grande accélération en tangage en entrant sa commande. Voulant alors anticiper sur une accélération normale finale trop importante, il va diminuer le gain de sa commande, voire l’inverser. Mais du fait d’un CAP fort, l’avion restera en réalité en dessous de la trajectoire désirée.

Il s’agit donc de trouver un compromis entre tous ces phénomènes et donc de

limiter la valeur du CAP. Il faut garder à l'esprit la relation 2.2 et notamment le lien avec le zéro $-1/T_\theta$ pour pouvoir exploiter ces limitations.

Les limitations du CAP sont données dans le tableau 2.6. Pour les phases de vol de catégorie C, le tableau 2.7 vient donner des limitations additionnelles sur n/α et ω_{sp} . Tous les tableaux et graphes sont tirés du standard militaire américain MIL-HDBK-1797 [25].

TAB. 2.6 – Limitations du CAP

	<i>Phase de vol A</i>	<i>Phase de vol B</i>	<i>Phase de vol C</i>
Niveau 1 :	$0.28 \leq \text{CAP} \leq 3.6$ ($\omega_{sp} \geq 1.0$)	$0.085 \leq \text{CAP} \leq 3.6$ (Pas de $\omega_{sp_{min}}$)	$0.15 \leq \text{CAP} \leq 3.6$ (Voir TAB 2.7)
Niveau 2 :	$0.15 \leq \text{CAP} \leq 10.0$ ($\omega_{sp} \geq 0.6$)	$0.038 \leq \text{CAP} \leq 10.0$ (Pas de $\omega_{sp_{min}}$)	$0.096 \leq \text{CAP} \leq 10.0$ (Voir TAB 2.7)
Niveau 3 :	$0.15 \leq \text{CAP}$ (Pas de $\omega_{sp_{min}}$)	$0.038 \leq \text{CAP}$ (Pas de $\omega_{sp_{min}}$)	$0.096 \leq \text{CAP}$ (Pas de $\omega_{sp_{min}}$)

TAB. 2.7 – Limitations sur n/α et ω_{sp} pour phases de vol de catégorie C

Classe	Niveau 1		Niveau 2	
	$\omega_{sp_{min}}$ (rad/s)	$(n/\alpha)_{min}$ (g/rad)	$\omega_{sp_{min}}$ (rad/s)	$(n/\alpha)_{min}$ (g/rad)
I,II-C,IV	0.87	2.7	0.6	1.8
II-L,III	0.7	2.0	0.4	1.0

Ces limitations sont illustrées sur les figures 2.5, 2.6 et 2.7. La figure 2.8 montre comment on peut combiner CAP et ζ_{sp} .

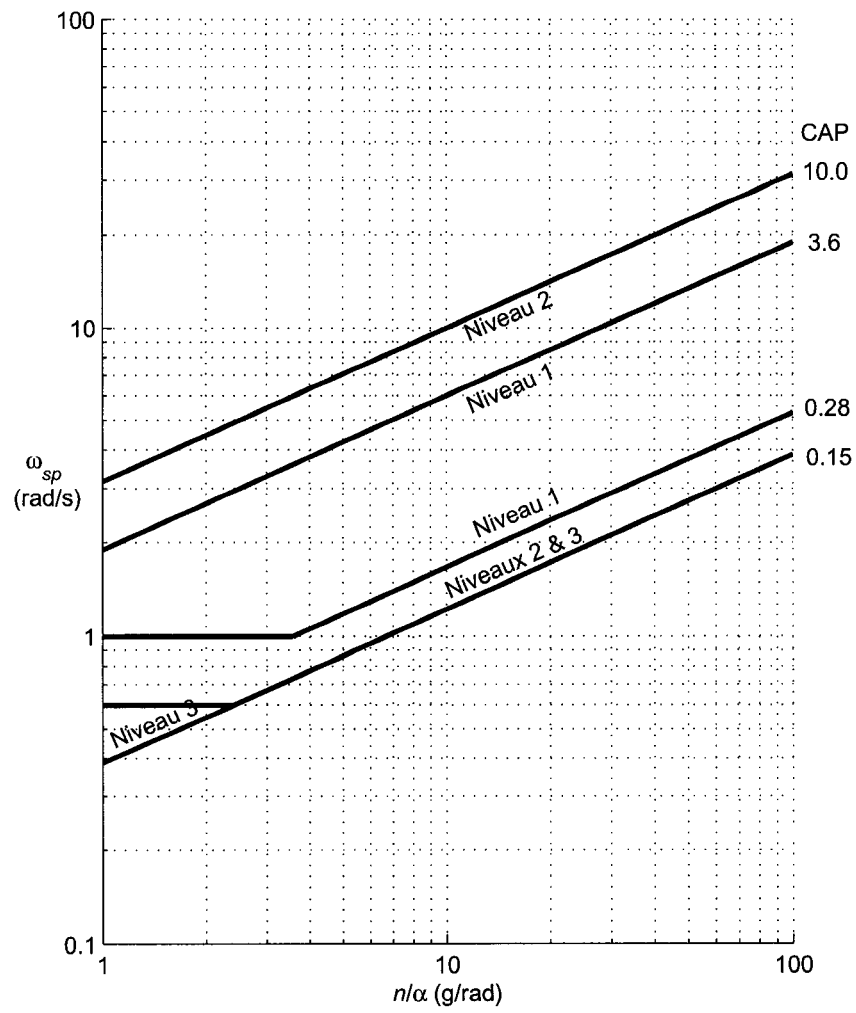


FIG. 2.5 – Limitations sur la pulsation propre ω_{sp} - Phase de vol A

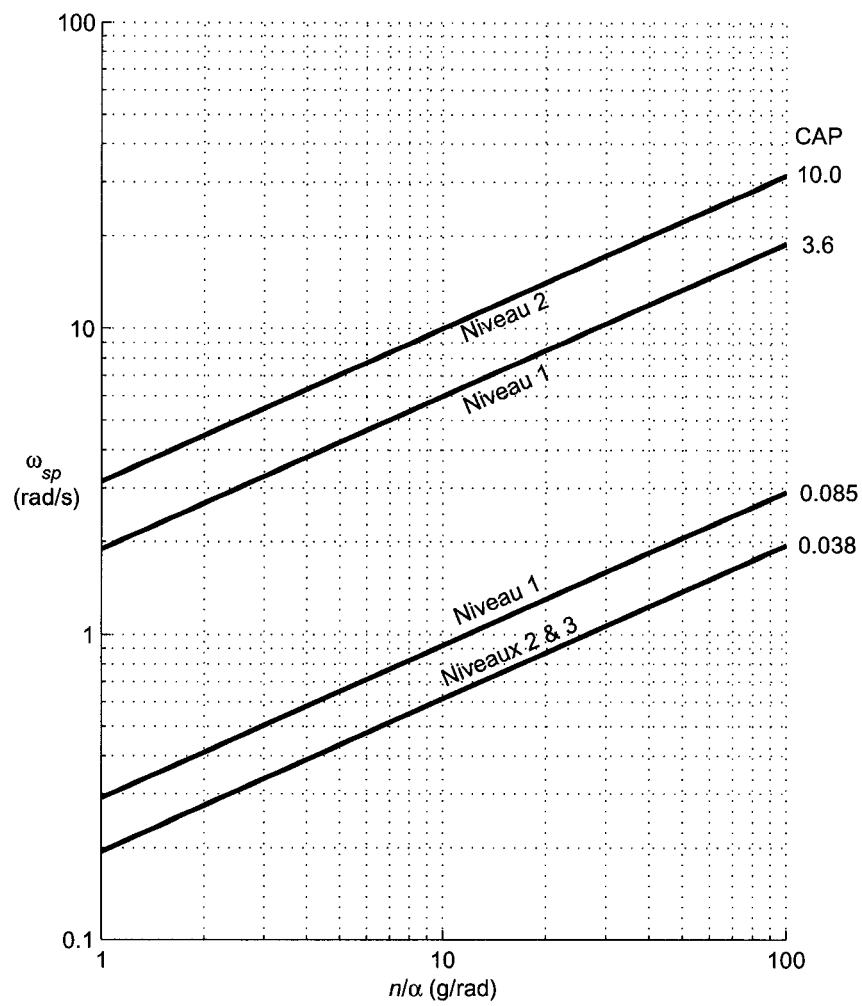


FIG. 2.6 – Limitations sur la pulsation propre ω_{sp} - Phase de vol B

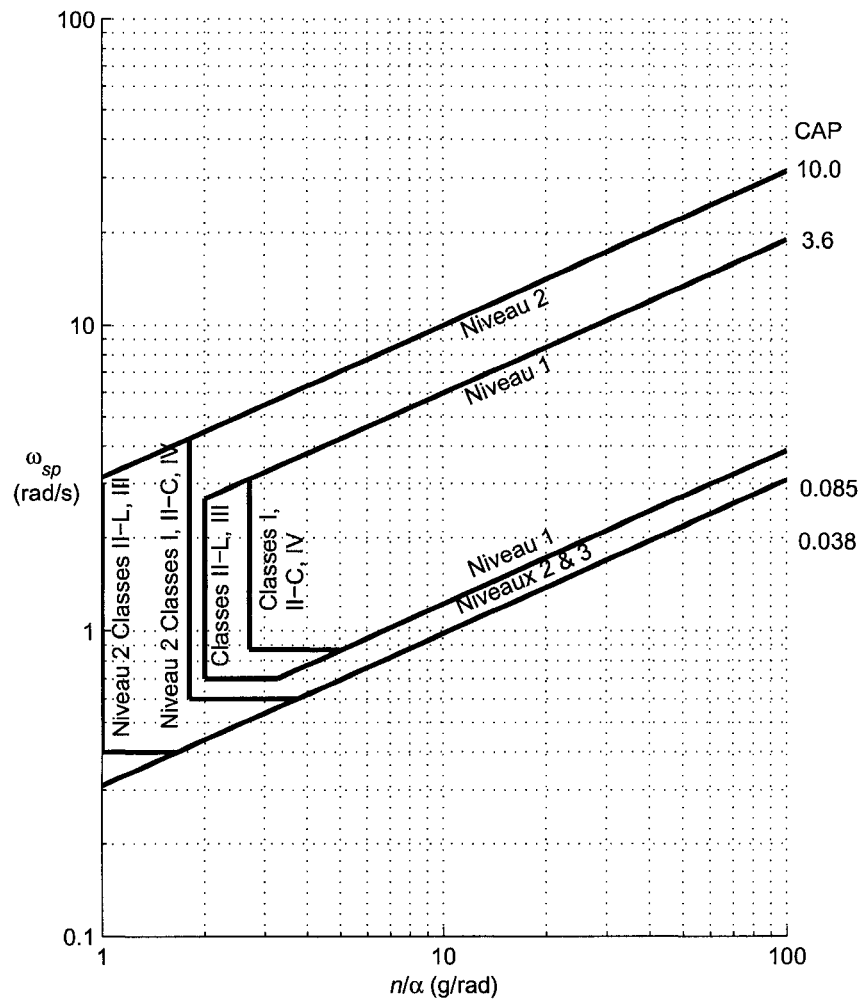


FIG. 2.7 – Limitations sur la pulsation propre ω_{sp} - Phase de vol C

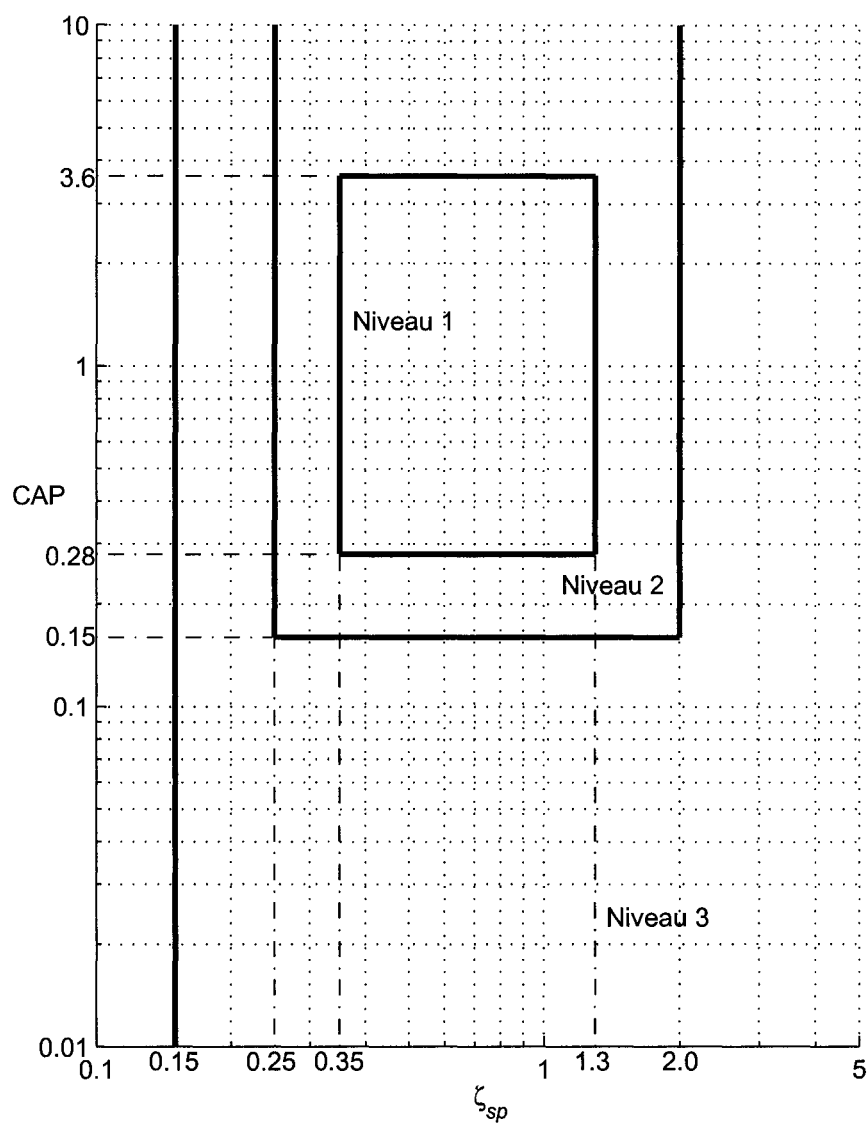


FIG. 2.8 – Limitations en CAP et en amortissement ζ_{sp} - Phase de vol A

$\omega_{BW_{Phase}}$, $\omega_{BW_{Gain}}$ étant la pulsation où le gain a augmenté de 6 dB relativement à la valeur du gain où la phase vaut -180° et $\omega_{BW_{Phase}}$ la pulsation où la phase vaut -135° . La figure 2.11 illustre cela. Dans le cas de la pente, la bande passante (γ -bandwidth) est seulement la pulsation où la phase vaut -135° .

En général, une grande bande passante assure des réponses plus rapides alors qu'une faible bande passante entraîne des réponses lentes.

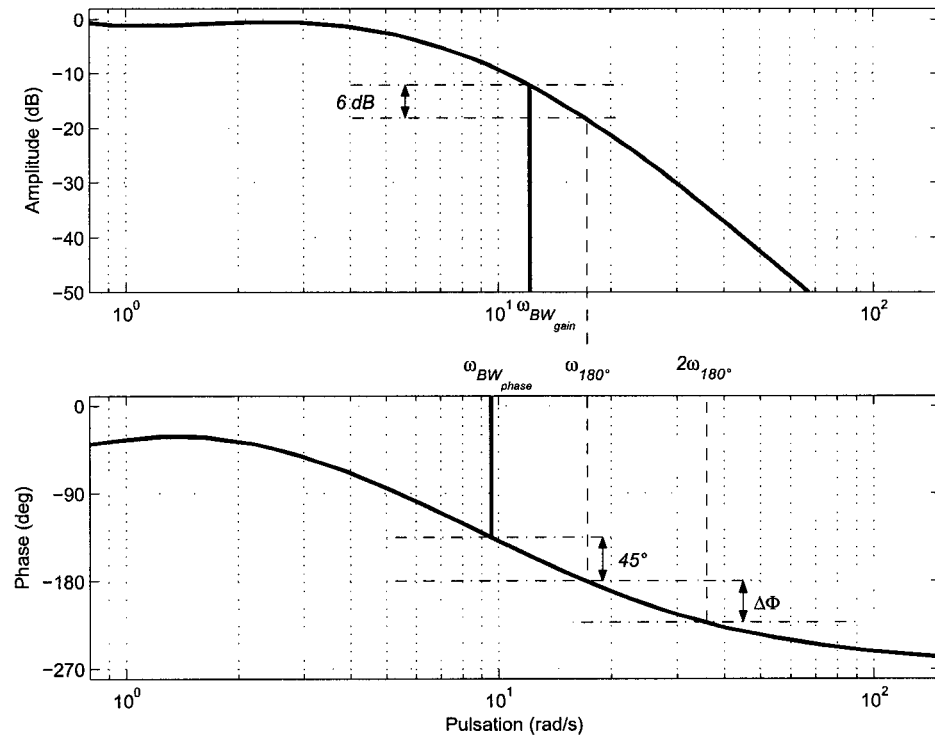


FIG. 2.11 – Définition de la bande passante et du retard de phase

La référence par rapport à la phase de -180° est significative car elle représente une frontière potentielle de stabilité quand le pilote entre dans la boucle de contrôle. Si par exemple, le pilote doit maintenir un contrôle forcé en pente durant des conditions turbulentes, alors trois problèmes reliés peuvent entraver l'efficacité du contrôle.

Tout d'abord pour des fréquences suffisamment élevées, la réponse de l'avion sera

en retard de phase de plus de 180° par rapport à la commande du pilote ; il devra alors appliquer un contrôle en avance pour anticiper le mouvement désiré ou perturbé. De plus, à hautes fréquences, la réponse est beaucoup plus atténuée et le pilote réagira plus fortement sur la commande. En dernier lieu, un retard naturel dans la boucle de rétroaction entre l'erreur en assiette et la commande cyclique du pilote pour corriger cette erreur, peut résulter en un couplage avion-pilote qui produit alors des oscillations très mal amorties et dans le pire des cas, instables. Ce sont les PIOs dont il a été question dans le paragraphe 2.1.1.2. Un des buts des critères portant sur les bandes passantes est d'assurer que les pulsations de ces PIOs demeurent bien en dehors du domaine de fréquences requis pour accomplir des missions de précision. Ainsi une marge de phase de 45° est suffisante pour considérer le pilote comme un gain pur, et supposer que son retard naturel ne menacera pas la stabilité. En ce qui concerne la marge de gain de $6dB$, elle autorise le pilote à augmenter sa commande à hautes fréquences et d'avoir ainsi un contrôle plus agressif, tout en garantissant une certaine marge de stabilité.

2.3.2 Retard de phase

Aux critères sur les bandes passantes, s'ajoute le critère du retard de phase ("Phase Delay"). Il vient en fait compléter les deux précédents dans le sens où il renseigne sur la pente de la courbe de phase au-delà de la pulsation où la phase vaut -180° . Il s'applique à la phase de la fonction de transfert θ/δ_{ref} . Le retard de phase τ_p est défini de la façon suivante :

$$\tau_p = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\Delta\Phi}{2\omega_{180^\circ}} \quad (2.3)$$

où $\Delta\Phi$ est la variation de phase entre ω_{180° et $2\omega_{180^\circ}$. Cela est illustré sur la figure 2.11.

Plus l'atténuation de la phase est grande, plus faible est la bande passante et avec des actionneurs présentant des retards purs, la pente de la phase devient d'autant plus raide, diminuant d'autant plus la bande passante.

De plus, ce critère peut avoir son importance spécialement dans un système d'ordre élevé puisque deux fonctions de transfert peuvent avoir la même bande passante mais des retards de phase complètement distincts. Ainsi dans le cas de la figure 2.12, la configuration *B* est jugée meilleure du fait d'un retard de phase plus faible, bien que les bandes passantes soient identiques.

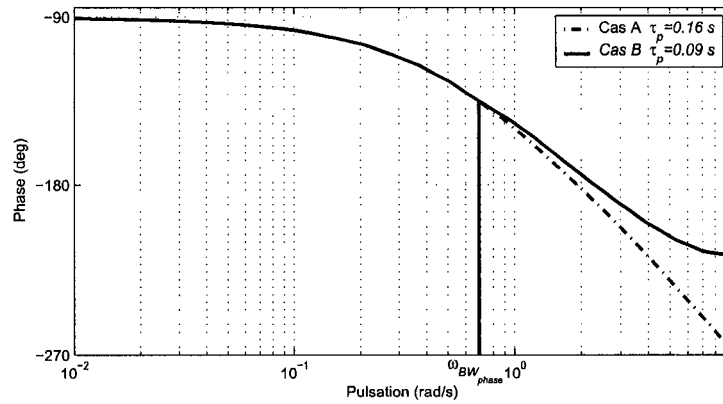
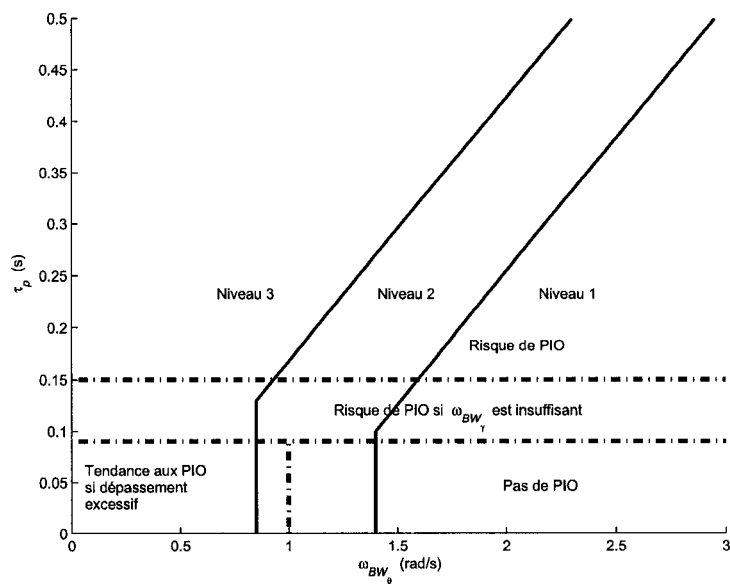
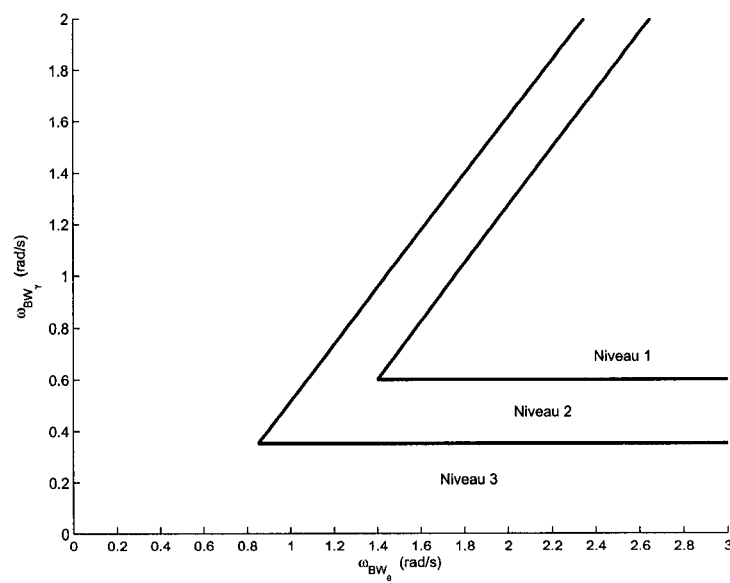


FIG. 2.12 – Comparaison des bandes passantes et retards de phase

2.3.3 Limites imposées sur les bandes passantes et le retard de phase

Les deux paragraphes précédents ayant introduit les critères, voici les limites imposées. La figure 2.13 montre les domaines conjoints entre la bande passante de θ/δ_{ref} et le retard de phase τ_p . Quant à la figure 2.14, on y trouve les zones reliant les bandes passantes de θ/δ_{ref} et γ/δ_{ref} . D'une source bibliographique à l'autre, ces zones varient légèrement ; celles-ci sont tirées du livre de Hodgkinson [7]. Dans notre cas pratique, *Bombardier Inc.* conseille de simplement considérer ω_{BW_θ} supérieur à 1.5 rad/s et ω_{BW_γ} supérieur à 0.6 (rad/s). Pour le retard de phase, il doit être inférieur à 0.2 (s) pour être de niveau 1, voire même idéalement inférieur à 0.14 (s).

FIG. 2.13 – Critère pour ω_{BW_θ} et τ_p FIG. 2.14 – Critère de la bande passante pour ω_{BW_θ} et ω_{BW_γ}

2.3.4 Marges de gain et de phase

Le dernier critère fréquentiel considéré porte sur les marges de gain et de phase. Ces deux marges permettent d'évaluer la robustesse de notre système à des changements de paramètres. Ainsi, les systèmes avec de grandes marges de gain et de phase supporteront de plus grandes variations de paramètres avant de devenir instables.

La marge de gain M_G est la variation de gain nécessaire dans la boucle ouverte à -180° pour déstabiliser la boucle fermée. Elle est exprimée en décibels (dB). Dans la pratique, on détermine la pulsation où la phase vaut -180° , et l'on trouve alors quelle est la valeur de gain en dB correspondante. La marge de gain est l'opposée de la valeur trouvée.

La marge de phase M_ϕ est la variation de phase nécessaire dans la boucle ouverte au gain unité pour rendre la boucle fermée instable. Il suffit de déterminer la pulsation où le gain est unitaire (ou vaut 0 dB), et de voir quel est le déphasage correspondant. La marge de phase est alors la différence entre ce déphasage et -180° . Cela revient à laisser le point -1 à gauche sur le graphe de Nyquist. La figure 2.15 illustre les marges de gain et de phase sur le diagramme de Bode.

En général, on considère qu'une marge de gain de 6 db et qu'une marge de phase de 45° assurent une bonne robustesse. Dans notre problème, on ne se souciera des marges de gain et de phase que lors du rebouclage de la boucle CAS. Notre boucle ouverte sera alors constituée du correcteur PI et de la boucle SAS déjà refermée par des filtres. On se reportera aux figures 2.9 et 2.10 données au début de la section des critères fréquentsiels.

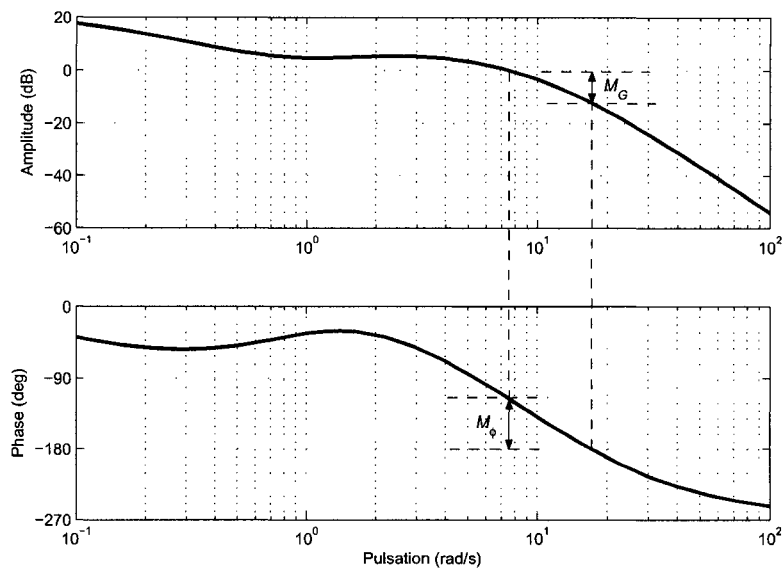


FIG. 2.15 – Définition des marges de gain et de phase

2.4 Les critères temporels

2.4.1 Dropback

Les critères portant sur les bandes passantes ne couvrant pas adéquatement les effets d'une avance de phase excessive, J.C. Gibson [5] propose un critère qui définit un paramètre appelé "Dropback" (nous garderons le terme anglais). Mitchell et Hoh [10] ont défini eux aussi un autre dropback, mais nous nous concentrerons sur la définition de Gibson.

2.4.1.1 Définition du dropback

Le dropback est une mesure à court terme des changements d'assiette θ . Il est calculé en observant la réponse de l'avion en assiette θ suite à une entrée échelon δ_{ref} . On considère en fait la réponse du système réduit, amputé du mode phugoïde (on enlève le mode lent de l'avion). La figure 2.16 illustre le calcul du dropback, noté "Drb"; q_{ss} désigne la valeur en régime permanent de la vitesse de tangage q . Dans

cet exemple, le dropback est positif; il en est de même pour le rapport Drb/q_{ss} . Un dropback excessif entraîne une perte de précision et des mouvements trop brusques dans le contrôle du tangage q .

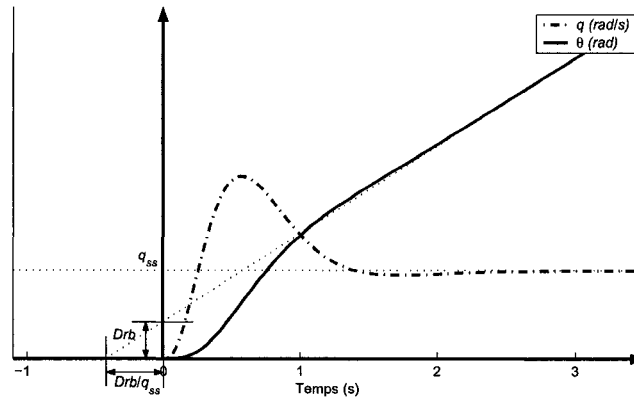


FIG. 2.16 – Définition du dropback

Gibson suggère que le rapport Drb/q_{ss} devrait être inférieur à 0.25 pour une poursuite précise et inférieur à 1.0 pour un atterrissage. *Bombardier Inc.* donne pour sa part les limites suivantes :

TAB. 2.8 – Limites du dropback pour phases terminales

<i>Exigé</i>	<i>Idéal</i>
$-0.2 < Drb/q_{ss} < 0.5$	$0.0 < Drb/q_{ss} < 0.3$

D'un point de vue mathématique, il suffit de connaître l'équation de l'asymptote vers laquelle tend θ pour en déduire aisément le dropback puis le rapport Drb/q_{ss} . Intuitivement, on voit qu'il doit être possible de trouver une formulation théorique du dropback. C'est ce que nous abordons dans le paragraphe suivant.

2.4.1.2 Démonstration et formule du dropback

Prenons donc pour la fonction de transfert $\frac{q}{\delta_{ref}}$ la formulation générale suivante (2.4), qui correspond à la forme que l'on retrouve en réalité après rebouclage. On suppose bien évidemment que tous les pôles sont stables au sens d'Hurwitz.

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = K \frac{\prod_{i=1}^k (1 + T_i s) \prod_{i=1}^l (s^2 + 2\xi_i \phi_i s + \phi_i^2)}{\prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2)} \quad (2.4)$$

La vitesse de tangage q étant la dérivée de l'assiette θ , on a la relation suivante :

$$q(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (2.5)$$

Soit dans le domaine de Laplace :

$$\frac{\theta}{\delta_{ref}} = K \frac{\prod_{i=1}^k (1 + T_i s) \prod_{i=1}^l (s^2 + 2\xi_i \phi_i s + \phi_i^2)}{s \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2)} \quad (2.6)$$

L'application d'un échelon $\delta_{ref}(s) = \frac{\delta_0}{s}$ donne alors :

$$\theta(s) = K\delta_0 \frac{\prod_{i=1}^k (1 + T_i s) \prod_{i=1}^l (s^2 + 2\xi_i \phi_i s + \phi_i^2)}{s^2 \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2)} \quad (2.7)$$

Par décomposition en éléments simples des fractions rationnelles, $\theta(s)$ devient :

$$\theta(s) = K\delta_0 \frac{\prod_{i=1}^k (1 + T_i s) \prod_{i=1}^l (s^2 + 2\xi_i \phi_i s + \phi_i^2)}{s^2 \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (2.8)$$

où

$$Q(s) = \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2) \quad (2.9)$$

et $P(s)$ est un polynôme dont le degré est strictement inférieur à celui de $Q(s)$

Il s'agit donc de déterminer les valeurs de A et B puisqu'elles seront nécessaires pour l'obtention du dropback. Appliquons simplement la technique classique de la limite pour trouver les coefficients.

Déterminons d'abord A .

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \theta(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K\delta_0 \frac{\prod_{i=1}^k (1 + T_i s) \prod_{i=1}^l (s^2 + 2\xi_i \phi_i s + \phi_i^2)}{\prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2)} \quad (2.10)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left(A + sB + s^2 \frac{P(s)}{Q(s)} \right) = A \quad (2.11)$$

D'où

$$A = K\delta_0 \frac{\prod_{i=1}^l \phi_i^2}{\prod_{i=1}^n \omega_i^2} \quad (2.12)$$

B requiert un peu plus de manipulations :

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \left(\theta(s) - \frac{A}{s^2} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(B + s \frac{P(s)}{Q(s)} \right) = B \quad (2.13)$$

Soit à déterminer la limite de $\frac{s^2\theta(s) - A}{s}$ quand $s \rightarrow 0$. Puisque cette limite est finie (elle vaut B), il doit s'opérer une simplification en s , et la fraction rationnelle $s^2\theta(s) - A$ est de la forme $s \frac{R(s)}{Q(s)}$. On aura alors $B = \frac{R(0)}{Q(0)}$. Il suffit alors de déterminer le terme constant du polynôme $R(s)$.

$$s^2\theta(s) - A = K\delta_0 \frac{\prod_{i=1}^k (1 + T_i s) \prod_{i=1}^l (s^2 + 2\xi_i \phi_i s + \phi_i^2)}{\prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2)} - K\delta_0 \frac{\prod_{i=1}^l \phi_i^2}{\prod_{i=1}^n \omega_i^2} \quad (2.14)$$

Soit,

$$sR(s) = K\delta_0 \prod_{i=1}^k (1 + T_i s) \prod_{i=1}^l (s^2 + 2\xi_i \phi_i s + \phi_i^2) - A \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2) \quad (2.15)$$

D'une part,

$$K\delta_0 \prod_{i=1}^k (1 + T_i s) \prod_{i=1}^l (s^2 + 2\xi_i \phi_i s + \phi_i^2) = K\delta_0 \prod_{i=1}^l \phi_i^2 + \quad (2.16)$$

$$+ K\delta_0 \prod_{i=1}^l \phi_i^2 \left(\sum_{j=1}^k T_j + \sum_{j=1}^l 2 \frac{\xi_j}{\phi_j} \right) s + \dots \text{ termes de plus haut degré} \quad (2.17)$$

Et d'autre part,

$$A \prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s) \prod_{i=1}^n (s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2) = A \prod_{i=1}^n \omega_i^2 + A \prod_{i=1}^n \omega_i^2 \left(\sum_{j=1}^m \tau_j + \sum_{j=1}^n 2 \frac{\zeta_j}{\omega_j} \right) s + \dots \text{ termes de plus haut degré} \quad (2.18)$$

Soit avec la valeur de A :

$$\dots = K\delta_0 \prod_{i=1}^l \phi_i^2 + K\delta_0 \prod_{i=1}^l \phi_i^2 \left(\sum_{j=1}^m \tau_j + \sum_{j=1}^n 2 \frac{\zeta_j}{\omega_j} \right) s + \dots \quad (2.19)$$

D'où, d'après (2.15),

$$sR(s) = K\delta_0 \prod_{i=1}^l \phi_i^2 \left(\left(\sum_{j=1}^k T_j + \sum_{j=1}^l 2 \frac{\xi_j}{\phi_j} \right) - \left(\sum_{j=1}^m \tau_j + \sum_{j=1}^n 2 \frac{\zeta_j}{\omega_j} \right) \right) s + \\ + \dots \text{ termes de plus haut degré} \quad (2.20)$$

Ainsi,

$$R(0) = K\delta_0 \prod_{i=1}^l \phi_i^2 \left(\left(\sum_{j=1}^k T_j + \sum_{j=1}^l 2 \frac{\xi_j}{\phi_j} \right) - \left(\sum_{j=1}^m \tau_j + \sum_{j=1}^n 2 \frac{\zeta_j}{\omega_j} \right) \right) \quad (2.21)$$

Et comme $Q(0) = \prod_{i=1}^n \omega_i^2$, on conclut grâce à la définition de A (2.12), que :

$$B = \frac{R(0)}{Q(0)} = A \left(\left(\sum_{j=1}^k T_j + \sum_{j=1}^l 2 \frac{\xi_j}{\phi_j} \right) - \left(\sum_{j=1}^m \tau_j + \sum_{j=1}^n 2 \frac{\zeta_j}{\omega_j} \right) \right) \quad (2.22)$$

Les pôles de la fonction $\frac{q}{\delta_{ref}}$ sont supposés stables donc si nous passons dans le domaine temporel à partir de l'équation 2.8 :

$$\theta(t) = At + B + h(t) \quad (2.23)$$

avec $h(t)$ qui tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Ainsi, $\theta(t)$ tend asymptotiquement vers la droite $At + B$, qui va définir la valeur du dropback. Par définition du dropback, on a alors :

$$Drb = B = A \left(\left(\sum_{j=1}^k T_j + \sum_{j=1}^l 2 \frac{\xi_j}{\phi_j} \right) - \left(\sum_{j=1}^m \tau_j + \sum_{j=1}^n 2 \frac{\zeta_j}{\omega_j} \right) \right) \quad (2.24)$$

Et

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{B}{A} = \left(\sum_{j=1}^k T_j + \sum_{j=1}^l 2 \frac{\xi_j}{\phi_j} \right) - \left(\sum_{j=1}^m \tau_j + \sum_{j=1}^n 2 \frac{\zeta_j}{\omega_j} \right) \quad (2.25)$$

On voit ainsi que le rapport Drb/q_{ss} est indépendant de la valeur de l'échelon

d'entrée ainsi que du gain de la fonction de transfert. Il est alors possible de retrouver une formulation encore plus simple, quand la fonction de transfert n'est pas sous la forme zéros/pôles.

Si l'on reprend la fonction de transfert dont on est partis, on peut la réécrire sous la forme :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = K_s \frac{\prod_{i=1}^k (1 + T_i s) \prod_{i=1}^l (\frac{1}{\phi_i^2} s^2 + 2 \frac{\xi_i}{\phi_i} s + 1)}{\prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s) \prod_{i=1}^n (\frac{1}{\omega_i^2} s^2 + 2 \frac{\zeta_i}{\omega_i} s + 1)} = K_s \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.26)$$

Où K_s désigne le gain statique. Si l'on pose :

$$N(s) = a_{k+2l} s^{k+2l} + \dots + a_1 s + 1 \quad (2.27)$$

$$D(s) = b_{m+2n} s^{m+2n} + \dots + b_1 s + 1 \quad (2.28)$$

Par développement et appariement, il vient de suite que :

$$a_1 = \sum_{j=1}^k T_j + \sum_{j=1}^l 2 \frac{\xi_j}{\phi_j} \quad (2.29)$$

$$b_1 = \sum_{j=1}^m \tau_j + \sum_{j=1}^n 2 \frac{\zeta_j}{\omega_j} \quad (2.30)$$

Ainsi, nous avons plus simplement

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = a_1 - b_1 \quad (2.31)$$

Dans le chapitre 5, l'utilisation de cette formule permettra de mettre en évidence quels sont les gains qui influent réellement sur le dropback.

2.4.2 Temps de montée, d'établissement et dépassement

Les qualités de manœuvrabilité portent pour la plupart sur la réponse à court terme, soit celle du mode Short Period. Afin de compléter les critères précédents, on

définit plusieurs paramètres temporels. La figure 2.17 illustre les différentes grandeurs considérées.

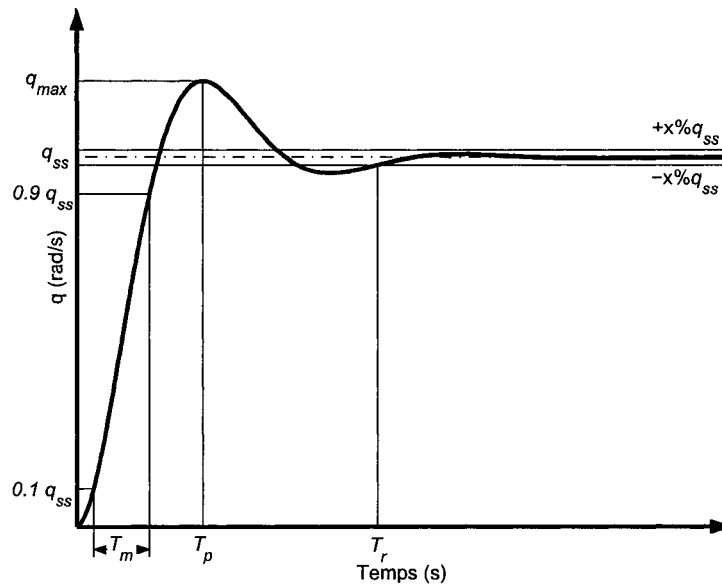


FIG. 2.17 – Réponse en tangage q à une entrée échelon δ_{ref}

Voici les définitions des différents paramètres :

- T_m : Temps de montée calculé entre 10% et 90% de la valeur finale q_{ss} .
- T_p : Temps nécessaire pour atteindre le premier pic ou le maximum de la réponse temporelle. On définit alors le Dépassement (*Overshoot*) comme étant le pourcentage dont la courbe a dépassé la valeur finale q_{ss} .
- T_r : Temps d'établissement ou de réponse. C'est le temps nécessaire pour que la réponse temporelle demeure autour de la valeur finale q_{ss} , à $\pm x\%$ de q_{ss} . On considère en général les temps de réponse à 5% et 1% de la valeur finale. Ici, ce sera celui à 1%.

Les seules contraintes véritablement imposées dans notre cas pratique portent sur le temps de réponse. On désire avoir des réponses temporelles qui se stabilisent

en moins de 3 secondes quand on considère le modèle réduit 3×3 (sans le mode Phugoïde). On veut bien sûr un dépassement relativement faible et un temps de montée adéquat mais il n'y a pas de limites strictes ; cela est laissé à l'appréciation du concepteur.

Comme l'a montré ce chapitre, les qualités de manœuvrabilité demeurent un domaine extrêmement vaste où certains critères sont venus se distinguer et doivent être satisfaits pour obtenir le comportement désiré de l'avion. La recherche dans le domaine doit être intensément poursuivie pour dégager les critères qui comptent vraiment. En effet, au fil des expérimentations, on se rend compte que certains critères, une fois satisfaits, assurent que d'autres critères vont être aussitôt remplis. Il y a donc un travail à effectuer sur cette redondance des critères pour trouver ce que l'on appelle les "Common Handling Qualities", les critères minimaux à satisfaire pour obtenir le comportement désiré. A l'instar d'*Airbus* dont un des arguments de vente est d'assurer le même comportement en vol quel que soit le type d'appareil utilisé, il s'agit de dégager dans l'avenir ce groupement de critères communs.

CHAPITRE 3

APPLICATIONS GARDIENNES

Le présent chapitre vise à donner des notions élémentaires sur ce que sont les applications gardiennes et semi-gardiennes. L'étude de la stabilité généralisée de familles de polynômes ou de matrices a largement été développée après que Kharitonov eut commencé à étudier la stabilité de familles de polynômes réels avec coefficients incertains. Plusieurs ont poursuivi dans cette voie.

Développées par L. Saydy (voir [15] et [16]), les applications gardiennes et semi-gardiennes se présentent alors comme un nouvel outil qui permet de répondre à ce problème de stabilité généralisée. On entend par stabilité généralisée le confinement des valeurs propres d'une matrice ou des racines d'un polynôme à l'intérieur d'un domaine Ω du plan complexe.

Les applications gardiennes sont des fonctions scalaires des paramètres incertains de la famille de matrices ou de polynômes considérée, qui ont la propriété de s'annuler dès que l'on est à la limite de stabilité. On peut alors déterminer des ensembles pour lesquels nous sommes assurés que la famille considérée demeurera stable par rapport à un domaine Ω du plan complexe. Il est ainsi possible de construire des applications gardiennes pour une grande variété de domaines Ω .

Après de brefs rappels mathématiques, nous définirons les applications gardiennes et semi-gardiennes ainsi que la méthode pour les obtenir. Nous terminerons sur des exemples d'application.

3.1 Préliminaires mathématiques

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous introduirons ici deux outils mathématiques qui auront leur importance dans la construction des applications gardiennes : le produit et somme de Kronecker et le produit bialterné.

3.1.1 Produit et somme de Kronecker

Soient A et B deux matrices de dimensions respectives $(n \times p)$ et $(m \times q)$. On appelle produit de Kronecker (ou produit tensoriel), la matrice $C = A \otimes B$ de dimension $(nm \times pq)$, obtenue en remplaçant chaque élément a_{ij} de A par la matrice $a_{ij}B$.

$$C = A \otimes B \tag{3.1}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1p}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2p}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{np}B \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

La somme de Kronecker (ou somme tensorielle) $A \oplus B$ de deux matrices carrées A et B , de dimensions respectives n et m , est la matrice carrée de dimension nm définie par $A \otimes I_m + I_n \otimes B$. Par $A \ominus B$, on désigne la somme de Kronecker $A \oplus (-B)$. On remarquera que ni le produit, ni la somme de Kronecker de deux matrices ne sont commutatifs.

Les produits et sommes de Kronecker présentent de remarquables propriétés quant à leurs valeurs propres. Soient A et B , deux matrices carrées de dimensions respectives n et m . Les valeurs propres de $A \otimes B$ et $A \oplus B$ sont respectivement les nm produits $\lambda_i(A)\lambda_j(B)$ et les nm sommes $\lambda_i(A) + \lambda_j(B)$, selon tous les couples possibles (i, j) , $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. C'est un cas spécial d'un résultat plus général.

Soit p un polynôme complexe de variables x_1 et x_2 , défini de la manière suivante :

$$p(x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^{i+j=N} p_{ij} x_1^i x_2^j, \quad (3.3)$$

et la fonction associée de deux matrices carrées complexes A et B ,

$$P(A, B) = \sum_{i,j=0}^{i+j=N} p_{ij} A^i \otimes B^j. \quad (3.4)$$

Nous avons le lemme suivant donné dans [20] :

Lemme 1 *Les valeurs propres de $P(A, B)$ sont les nm valeurs $p(\lambda_i(A), \lambda_i(B))$ selon tous les couples possibles $(i, j), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.*

3.1.2 Produit bialterné

Soient A et B deux matrices carrées de dimension n et V^n , le $n(n-1)/2$ -tuplet constitué des paires d'entiers $(p, q), p = 2, 3, \dots, n, q = 1, \dots, p-1$, listé lexicalement, c'est-à-dire :

$$V^n = [(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1) \dots, (n, n-1)]. \quad (3.5)$$

Soit V_i^n la $i^{\text{ème}}$ composante de V_n et

$$f((p, q); (r, s)) = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} a_{pr} & a_{ps} \\ b_{qr} & b_{qs} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{pr} & b_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{bmatrix} \right). \quad (3.6)$$

Le produit bialterné de A et B , noté $A \cdot B$ est la matrice carrée C de dimension $n(n-1)/2$ dont les éléments sont donnés par :

$$c_{ij} = f(V_i^n, V_j^n). \quad (3.7)$$

De même que le produit et la somme de Kronecker, le produit bialterné présente

des propriétés intéressantes quant aux valeurs propres. Notons

$$\Psi(A, A) = \sum_{p,q} \psi_{pq} A^p \cdot A^q, \quad (3.8)$$

et les valeurs propres de la matrice A (de dimension n), $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Nous avons alors le lemme suivant établi dans [20] :

Lemme 2 *Les valeurs propres de $\Psi(A, A)$ sont les $n(n-1)/2$ valeurs*

$$\psi(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{1}{2} \sum_{p,q} \psi_{pq} (\lambda_i^p \lambda_j^q + \lambda_i^q \lambda_j^p), \quad i = 2, \dots, n, j = 1, \dots, i-1. \quad (3.9)$$

Prenons un exemple pour illustrer ce lemme. Si A est une matrice 3×3 alors $\sigma(A \cdot A) = \{\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_2 \lambda_3\}$. Dans le cas du produit de Kronecker, on obtient $\sigma(A \otimes A) = \{\lambda_1^2, \lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_2 \lambda_1, \lambda_2^2, \lambda_2 \lambda_3, \lambda_3 \lambda_1, \lambda_3 \lambda_2, \lambda_3^2\}$.

3.2 Applications gardiennes et semi-Gardiennes

Abordons à présent les définitions des applications gardiennes et semi-gardiennes. Avant tout chose, nous noterons $\mathcal{S}$ l'ensemble $\mathcal{S}(\Omega)$, où

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \sigma(A) \subset \Omega\} \quad (3.10)$$

pour les problèmes de stabilité de matrices, et

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{p \in \mathcal{P}_n : \mathcal{Z}(p) \subset \Omega\} \quad (3.11)$$

pour les problèmes inérant à la stabilité des polynômes. L'ensemble Ω est un sous-ensemble ouvert du plan complexe. Les ensembles $\mathcal{S}(\Omega)$ désignent des ensembles de stabilité généralisée.

3.2.1 Applications gardiennes

Définition 1 Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des matrices carrées réelles de dimension n , ou l'ensemble de tous les polynômes de degré n à coefficients réels, et $\mathcal{S}$ un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{X}$. Soit ν une application de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que ν *garde* $\mathcal{S}$, si, pour tout $x \in \bar{\mathcal{S}}$, on a

$$\nu(x) = 0 \iff x \in \partial\mathcal{S}. \quad (3.12)$$

On dit aussi que ν est une *application gardienne* pour $\mathcal{S}$.

La proposition qui suit est utile quand il s'agit de tester la stabilité (généralisée) de familles paramétrées de matrices ou de polynômes relativement à un domaine Ω du plan complexe correspondant à l'ensemble de stabilité désiré. Soit $r = (r_1, \dots, r_k) \in U$, où U est un sous-ensemble connecté de $\mathbb{R}^k$, et $x(r)$ une matrice ou un polynôme de $\mathcal{X}$ dépendant de façon continue du vecteur paramétrique r . Etant donné un sous-ensemble ouvert $\mathcal{S}$ de $\mathcal{X}$, on cherche les conditions minimales pour que $x(r)$ demeure dans $\mathcal{S}$ pour tout $r \in U$.

Proposition 1 Soit l'ensemble $\mathcal{S}$ gardé par l'application gardienne ν et supposons que $x(r_0) \in \mathcal{S}$ pour un $r_0 \in U$. Alors

$$x(r) \in \mathcal{S} \quad \forall r \in U \iff \nu(x(r)) \neq 0 \quad \forall r \in U. \quad (3.13)$$

3.2.2 Applications semi-gardiennes

Définition 2 Soit $\mathcal{S}$ et ν définis précédemment. L'application ν est dite *semi-gardienne* pour $\mathcal{S}$, si, pour tout $x \in \bar{\mathcal{S}}$, on a

$$x \in \partial\mathcal{S} \implies \nu(x) = 0. \quad (3.14)$$

Un élément $x \in \mathcal{S}$ pour lequel $\nu(x) = 0$ est appelé *blind spot* pour $(\nu, \mathcal{S})$.

On établit de même la proposition suivante qui est analogue à la Proposition 1 en considérant cette fois-ci les blind spots.

Proposition 2 *Soit l'ensemble $\mathcal{S}$ semi-gardé par l'application semi-gardienne ν et supposons que $x(r_0) \in \mathcal{S}$ pour un $r_0 \in U$. Alors*

$$x(r) \in \mathcal{S} \quad \forall r \in U \quad \Longleftrightarrow \quad x(r) \in \mathcal{S} \quad \forall r \in U_{cr} \quad (3.15)$$

où

$$U_{cr} = \{r \in U : \nu(x(r)) = 0\}. \quad (3.16)$$

3.2.3 Corollaire des composantes

Corollaire 1 *L'ensemble défini par*

$$\nu(r) = \nu_\Omega(A(r)) = 0 \quad (3.17)$$

divise l'espace des paramètres $\mathbb{R}^k$ en composantes S_i qui sont soit stables, soit instables relativement à Ω . Il suffit de tester un vecteur r_i de chacune des composantes pour savoir si elle est stable ou pas.

Dans l'utilisation que nous ferons des applications gardiennes, nous manipulerons des familles de polynômes dépendant de 2 paramètres à la fois (en l'occurrence des gains). Il suffit alors de tracer dans le plan des paramètres les courbes où l'application s'annule. Cela découpe l'espace en différentes régions ; en testant un seul couple de chaque région, nous saurons si elle est stable ou pas. Un exemple est donné sur la figure 3.1.

3.3 Techniques de construction des applications (semi-)gardiennes

Dans la suite de notre étude, nous allons devoir construire des applications gardiennes et semi-gardiennes afin de garder certaines régions du plan complexe pour satisfaire certaines qualités de manœuvrabilité. Les domaines Ω que nous allons considérer sont relativement simples ; leurs frontières sont données par des équations polynomiales de la forme $\omega(x, y) = 0$, où x et y désignent respectivement les parties réelle

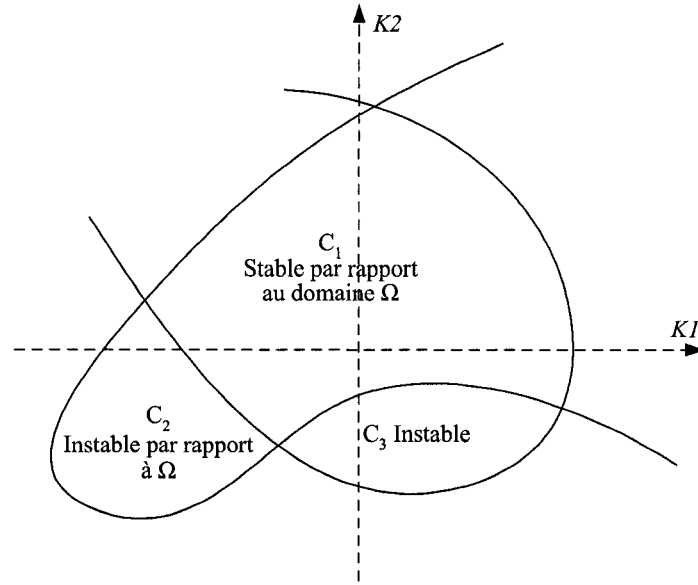


FIG. 3.1 – Régions stables ou instables

et imaginaire. Si dans l'immédiat, l'application gardienne ou semi-gardienne ν trouvée pour un domaine Ω donné, s'applique à des matrices, nous pouvons en déduire immédiatement une application δ pour garder un polynôme p ; ainsi $\delta(p) = \nu(\mathcal{C}(p))$ où $\mathcal{C}(p)$ est la matrice compagne associée à p , est une application gardienne ou semi-gardienne qui garde Ω . Cela aura en effet son importance puisqu'on nous considérons par la suite les dénominateurs de fonctions de transfert.

3.3.1 Domaines avec frontières polynômiques

Voici une façon systématique d'obtenir des applications gardiennes ou semi-gardiennes pour une large classe d'ensembles de stabilité Ω , ceux dont les frontières sont des polynômes de deux variables réelles x et y . Soit Ω donné par :

$$\Omega = \{s = x + jy : \omega(x, y) < 0\} \quad (3.18)$$

où

$$\omega(x, y) = \sum_{k,l=0}^{k+2l=N} \omega_{kl} x^k y^{2l} \quad (3.19)$$

est un polynôme de degré $d(p) = N$. Comme nous nous intéressons à des matrices et polynômes réels, nous ne considérons que des puissances paires de y . Nous associons alors à ω la fonction q de deux variables λ et μ suivante :

$$q(\lambda, \mu) = \omega\left(\frac{\lambda + \mu}{2}, \frac{\lambda - \mu}{2j}\right) \quad (3.20)$$

$$= \sum_{k,l=0}^{k+2l=N} p_{kl} (-1)^l \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2l} (\lambda + \mu)^k (\lambda - \mu)^{2l} \quad (3.21)$$

$$= \sum_{k,l=0}^{k+2l=N} q_{kl} \lambda^k \mu^l \quad (3.22)$$

où les coefficients q_{kl} sont réels.

Ainsi, Ω et $\partial\Omega$ ont les expressions alternatives suivantes :

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : q(\lambda, \bar{\lambda}) < 0\} \quad (3.23)$$

$$\partial\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : q(\lambda, \bar{\lambda}) = 0\} \quad (3.24)$$

Considérons l'application $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ définie par :

$$\mathcal{F}(A) = \sum_{k,l} q_{kl} A^k \otimes A^l. \quad (3.25)$$

Le Lemme 1 implique alors que, avec $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$,

$$\sigma(\mathcal{F}(A)) = \{q(\lambda_i, \lambda_j) : i, j = 1, \dots, n\}. \quad (3.26)$$

Supposons à présent que $A \in \partial\mathcal{S}$, alors au moins une des valeurs propres $\lambda_i \in \partial\Omega$, soit $q(\lambda_i, \bar{\lambda}_i) = 0$. Il s'ensuit alors que la matrice $\mathcal{F}(A)$ est singulière. Nous obtenons les propositions suivantes :

Proposition 3 *Supposons que ν n'est pas identiquement nulle. Alors l'application*

$$\nu : A \mapsto \det \sum_{k,l} q_{k,l} A^k \otimes A^l \quad (3.27)$$

est semi-gardienne pour $\mathcal{S}(\Omega)$.

Proposition 4 *Pour que l'application (3.27) garde $\mathcal{S}_n(\Omega)$, il est suffisant de vérifier que q satisfasse la condition suivante :*

$$q(\lambda, \bar{\lambda}) < 0 \quad \text{et} \quad q(\mu, \bar{\mu}) < 0 \quad \Rightarrow \quad q(\lambda, \mu) \neq 0. \quad (3.28)$$

Quand $n \geq 4$, la condition (3.28) est aussi nécessaire.

Comme dit dans l'introduction de cette section, pour un polynôme p d'ordre n , les précédentes propositions sont toujours valides en considérant la matrice compagne $\mathcal{C}(p)$. Dans ce cas, l'application devient :

$$\nu : p \mapsto \det(\mathcal{F}(\mathcal{C}(p))). \quad (3.29)$$

Il n'en demeure pas moins que pour une matrice de dimension $n \times n$ ou un polynôme d'ordre n , les précédentes applications requièrent le calcul d'un déterminant d'une matrice $n^2 \times n^2$, ce qui devient vite coûteux en temps de calcul. Il existe d'autres formules basées sur le produit bialterné, ce qui implique des matrices de dimensions $n(n-1)/2$.

Considérons l'application $\mathcal{M} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n(n-1)}{2}}$ définie par :

$$\mathcal{M}(A) = \sum_{k,l} q_{kl} A^k \cdot A^l. \quad (3.30)$$

Le Lemme 2 implique alors que, avec $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$,

$$\sigma(\mathcal{M}(A)) = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k,l} q_{kl} (\lambda_i^k \lambda_j^l + \lambda_i^l \lambda_j^k) : i = 2, \dots, n, j = 1, \dots, i-1 \right\}. \quad (3.31)$$

Or, d'après l'équation (3.21), on a :

$$q(\lambda, \mu) = q(\mu, \lambda) = \frac{1}{2} (q(\lambda, \mu) + q(\mu, \lambda)) \quad (3.32)$$

Soit

$$\sigma(\mathcal{M}(A)) = \{q(\lambda_i, \lambda_j) : i = 2, \dots, n, j = 1, \dots, i-1\}. \quad (3.33)$$

Proposition 5 *Supposons que ν n'est pas identiquement nulle.*

1. Si $\partial\Omega \cap \mathbb{R} = \emptyset$, alors l'application

$$\nu : A \mapsto \det \mathcal{M}(A) \quad (3.34)$$

est semi-gardiennne pour $\mathcal{S}(\Omega)$.

2. Soit $\Omega \cap \mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^m [\alpha_i, \beta_i]$ avec $\alpha_1 \leq \beta_1 < \dots < \alpha_m \leq \beta_m$. Notons $\mathcal{P}(A) = \prod_{i=1}^m (A - \alpha_i I) (A - \beta_i I)$ où, par convention, le facteur $(A - \alpha_1 I)$ (resp. $(A - \beta_m I)$) est omis quand α_1 (resp. β_m) vaut $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Alors l'application

$$\nu : A \mapsto \det \mathcal{M}(A) \det \mathcal{P}(A) \quad (3.35)$$

est semi-gardiennne pour $\mathcal{S}(\Omega)$.

Le résultat de la Proposition 4 s'applique aussi aux applications données en Proposition 5. Il n'en demeure pas moins qu'il faut vérifier que la condition (3.28) est vérifiée.

La proposition suivante donne un élément de réponse.

Proposition 6 *Supposons que*

$$q_{kk} \geq 0 \quad \forall k \geq 1, \quad (3.36)$$

$$q_{kl} = 0 \quad \forall k \neq l, kl \neq 0 \quad (3.37)$$

Alors q satisfait la condition (3.28).

Fort de ces résultats, nous pouvons à présent construire les applications gardiennes ou semi-gardiennes qui vont nous être nécessaires pour la suite.

3.3.2 Quelques domaines classiques

Cette section sera consacrée à la construction d'applications gardiennes ou semi-gardiennes de domaines de stabilité dits classiques. Nous appliquerons les résultats présentés dans la section précédente. Nous nous contenterons de présenter ces critères dans le cas de systèmes continus.

3.3.2.1 Stabilité au sens d'Hurwitz

C'est bien évidemment le critère de stabilité par essence, où l'on désire que toutes les pôles du système résident strictement dans le demi-plan gauche ouvert, $\mathbb{C}_-$. Avec les notations précédentes, le domaine Ω se définit simplement de la façon suivante :

$$\Omega = \{s = x + jy : x < 0\} \quad (3.38)$$

D'où

$$\omega(x, y) = x \quad (3.39)$$

Ainsi

$$q(\lambda, \mu) = \frac{\lambda + \mu}{2} \quad (3.40)$$

$$= \frac{1}{2}\lambda^1\mu^0 + \frac{1}{2}\lambda^0\mu^1 \quad (3.41)$$

Et

$$\mathcal{M}(A) = \frac{1}{2}A \cdot I + \frac{1}{2}I \cdot A \quad (3.42)$$

$$= A \cdot I \quad (3.43)$$

Comme $\mathcal{P}(A) = A$ (du fait que $\Omega \cap \mathbb{R} = [-\infty, 0]$), le demi-plan gauche ouvert est gardé par :

$$\nu : A \mapsto \det(A \cdot I) \det A \quad (3.44)$$

3.3.2.2 Marge de stabilité

Ce critère est assez semblable au précédent sauf qu'ici on s'assure d'une certaine marge de stabilité et l'on désire que toutes les valeurs propres aient une partie réelle strictement inférieure à une certaine valeur α (< 0). Le domaine Ω se définit alors de la façon suivante :

$$\Omega = \{s = x + jy : x < \alpha\} \quad (3.45)$$

D'où

$$\omega(x, y) = x - \alpha \quad (3.46)$$

Ainsi

$$q(\lambda, \mu) = \frac{\lambda + \mu}{2} - \alpha \quad (3.47)$$

$$= \frac{1}{2}\lambda^1\mu^0 + \frac{1}{2}\lambda^0\mu^1 - \alpha\lambda^0\mu^0 \quad (3.48)$$

Et

$$\mathcal{M}(A) = \frac{1}{2}A \cdot I + \frac{1}{2}I \cdot A - \alpha I \cdot I \quad (3.49)$$

$$= A \cdot I - \alpha I \cdot I \quad (3.50)$$

On a $\mathcal{P}(A) = A - \alpha I$ (du fait que $\Omega \cap \mathbb{R} = [-\infty, \alpha]$), d'où Ω est gardé par :

$$\nu : A \mapsto \det(A \cdot I - \alpha I \cdot I) \det(A - \alpha I) \quad (3.51)$$

3.3.2.3 Iso-pulsation

Il s'agit ici de garder l'ensemble des valeurs propres à l'intérieur (ou à l'extérieur) d'un cercle dont le rayon est en fait la pulsation propre maximale (ou minimale) que devront avoir les valeurs propres. Posons ω (> 0) cette valeur limite et supposons que l'on veuille garder l'intérieur du cercle. Le domaine Ω se définit alors de la façon suivante :

$$\Omega = \{s = x + jy : x^2 + y^2 < \omega^2\} \quad (3.52)$$

D'où

$$\omega(x, y) = x^2 + y^2 - \omega^2 \quad (3.53)$$

Ainsi

$$q(\lambda, \mu) = \left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda - \mu}{2j}\right)^2 - \omega^2 \quad (3.54)$$

$$= \lambda^1 \mu^1 - \omega^2 \lambda^0 \mu^0 \quad (3.55)$$

Et

$$\mathcal{M}(A) = A \cdot A - \omega^2 I \cdot I \quad (3.56)$$

Ici Ω est le cercle de rayon ω et l'on ne se soucie pas de garder les valeurs propres stables (au sens d'Hurwitz). On a ainsi $\mathcal{P}(A) = (A - \omega I)(A + \omega I)$ (du fait que $\Omega \cap \mathbb{R} = [-\omega, \omega]$), d'où Ω est gardé par :

$$\nu : A \mapsto \det(A \cdot A - \omega^2 I \cdot I) \det(A - \omega I) \det(A + \omega I) \quad (3.57)$$

3.3.2.4 Iso-amortissement

Voici enfin le dernier domaine dit classique qui sera fort utile pour la suite. On désire imposer aux valeurs propres un amortissement minimal ζ . Le domaine Ω est délimité par deux droites passant par l'origine et de pentes $\pm\alpha$ où $\alpha = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$, soit

$y = \pm \alpha x$. Le domaine Ω est alors :

$$\Omega = \{s = x + jy : y^2 - \alpha^2 x^2 < 0\} \quad (3.58)$$

D'où

$$\omega(x, y) = y^2 - \alpha^2 x^2 \quad (3.59)$$

Ainsi

$$q(\lambda, \mu) = \left(\frac{\lambda - \mu}{2j} \right)^2 - \alpha^2 \left(\frac{\lambda + \mu}{2} \right)^2 \quad (3.60)$$

$$= -\frac{\alpha^2 + 1}{4} \lambda^2 \mu^0 - \frac{\alpha^2 + 1}{4} \lambda^0 \mu^2 - \frac{\alpha^2 - 1}{2} \lambda^1 \mu^1 \quad (3.61)$$

Et

$$\mathcal{M}(A) = -\frac{\alpha^2 + 1}{4} A^2 \cdot I - \frac{\alpha^2 + 1}{4} I \cdot A^2 - \frac{\alpha^2 - 1}{2} A \cdot A \quad (3.62)$$

$$= -\frac{\alpha^2 + 1}{2} A^2 \cdot I - \frac{\alpha^2 - 1}{2} A \cdot A \quad (3.63)$$

On a de plus $\mathcal{P}(A) = A$ (du fait que $\Omega \cap \mathbb{R} = [-\infty, 0]$), d'où Ω est gardé par :

$$\nu : A \mapsto \det \left(-\frac{\alpha^2 + 1}{2} A^2 \cdot I - \frac{\alpha^2 - 1}{2} A \cdot A \right) \det(A) \quad (3.64)$$

3.4 Exemples d'applications

3.4.1 Synthèse d'un correcteur PI

Supposons le système de la figure 3.2 où le système est rebouclé par un correcteur PI. On veut déterminer les couples (K_p, K_i) qui nous assurent que les pôles en boucle fermée auront un amortissement ζ minimum de 0.707, une partie réelle α plus petite que -2 et une pulsation maximale ω_m de 10 rad/s. La figure 3.3 représente la région du plan complexe où l'on désire placer les pôles.

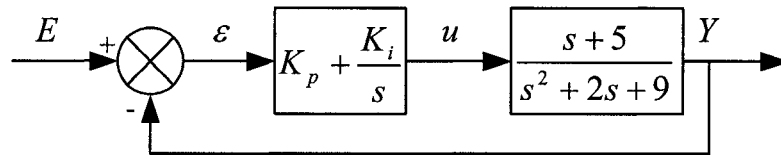
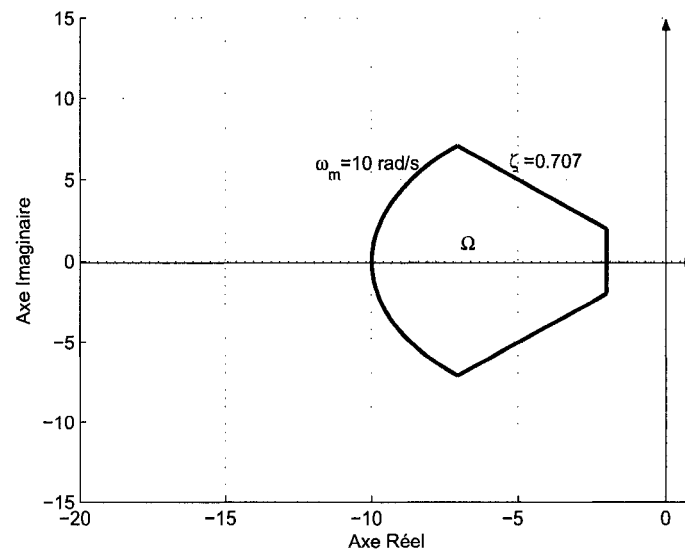


FIG. 3.2 – Système rebouclé par un correcteur PI

FIG. 3.3 – Domaine Ω à garder

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée est alors :

$$D_{BF}(s) = s^3 + (2 + K_p)s^2 + (9 + 5K_p + K_i)s + 5K_i \quad (3.65)$$

Et la matrice compagne équivalente :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5K_i & -(9 + 5K_p + K_i) & -(2 + K_p) \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Le domaine Ω est défini de la façon suivante :

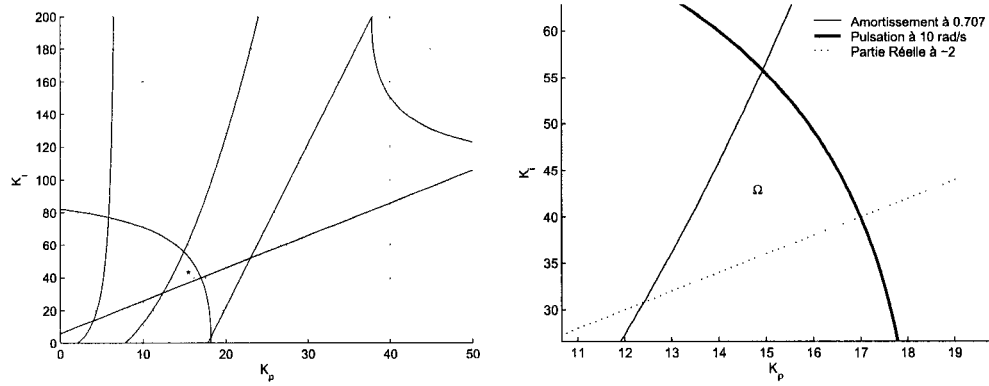
$$\omega(x, y) = (y^2 - \frac{1 - \zeta^2}{\zeta^2}x^2)(x^2 + y^2 - \omega_m^2)(x - \alpha) \quad (3.67)$$

Compte tenu des sections précédentes, l'application gardienne qui va garder le domaine Ω en question est :

$$\nu(A) = \det(-\frac{1}{2\zeta^2}A^2 \cdot I) \det(A \cdot A - \omega_m^2 I \cdot I) \det(A \cdot I - \alpha I \cdot I) \det(A - \alpha I) \det(A + \omega_m I) \quad (3.68)$$

Afin de visualiser les courbes qui annulent l'application gardienne $\nu(K_p, K_i)$, nous utiliserons la fonction `contour` de Matlab qui permet de tracer les lignes de niveau 0. L'utilisation de cette fonction sera expliquée plus tard lors du chapitre 5.

Sur la figure 3.4, nous voyons la région qui satisfait tous les critères à la fois ; tous les couples (K_p, K_i) de cette région nous garantissent de garder les pôles de notre système dans le domaine Ω .

FIG. 3.4 – Région gardant le domaine Ω

3.4.2 Robustesse d'un contrôleur par retour d'état

On considère à présent le problème du pendule inverse monté sur un chariot. Une fois linéarisé autour de la position verticale, le modèle d'état du système est le suivant :

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (3.69)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{M}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{M+m}{M} \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (3.70)$$

On suppose que nominalelement $M = 1$ kg, $m = 1$ kg, $l = 1$ m et $g = 9.81$ m.s⁻². Le retour d'état $u = KX$ avec $K = \begin{bmatrix} 8.5 & 11 & 82 & 23 \end{bmatrix}$ stabilise le système et met les pôles à l'intérieur du cône d'amortissement $\zeta = 0.5$. Nous allons tester la robustesse de notre contrôleur face à des variations dans la longueur l et la masse m de la tige. Le but est quelles que soient les variations de ces paramètres, les pôles demeurent à l'intérieur du cône d'amortissement.

Le système en boucle fermée est alors :

$$\dot{X} = (A + BK)X = A_{BF}X \quad (3.71)$$

Et l'application gardienne qui va garder le cône :

$$\nu(A_{BF}) = \det \left(-\frac{1}{2\zeta^2} A_{BF}^2 \cdot I - \frac{1 - 2\zeta^2}{2\zeta^2} A_{BF} \cdot A_{BF} \right) \det(A_{BF}) \quad (3.72)$$

On obtient alors $\nu(m, l)$ et grâce à la fonction contour on va visualiser les courbes où cette fonction s'annule. La figure 3.5 représente la région que l'on trouve. Pour

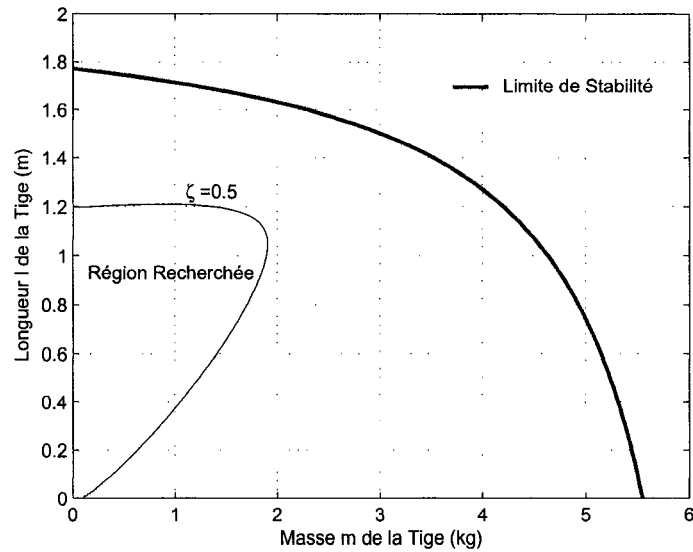


FIG. 3.5 – Région gardant le domaine Ω

tous les couples (m, l) dans cette région, nous avons la garantie que notre retour d'état garde tous les pôles à l'intérieur du cône d'amortissement 0.5. Nous avons tracé aussi la courbe de stabilité ; au-delà de cette courbe, le contrôleur choisi ne peut plus maintenir le système stable.

Fort de ces résultats théoriques, nous allons pouvoir aborder le cœur du problème. Dans notre cas pratique, les applications gardiennes nous serviront à garantir l'amortissement des pôles pour respecter les contraintes sur le mode Short Period.

CHAPITRE 4

MÉTHODOLOGIE ET RÉGLAGE DE L'AMORTISSEMENT

Les deux chapitres à suivre traitent de la résolution du problème, soit mettre en place une méthodologie pour choisir les gains de façon à satisfaire les qualités de manœuvrabilité. Le chapitre 4 porte sur les critères d'amortissement des modes phugoïde et Short Period ; de plus, nous essaierons d'assurer une certaine rapidité au système. Le chapitre 5, quant à lui, traite des autres critères comme les bandes passantes, le retard de phase et le dropback. Les critères sont ainsi séparés car dans le chapitre 4, nous travaillerons sur des systèmes réduits, alors que la résolution des autres critères se fera sur le système complet.

Nous traiterons les deux lois de commande séparément même si la méthodologie varie peu de l'une à l'autre. Nous exposerons dans un premier temps les premières observations et premiers essais qui ont été menés pour résoudre ce critère d'amortissement. C'est en effet après avoir étudié plusieurs méthodes que la démarche suivante a été proposée. Nous étudierons alors son application aux deux lois de commande.

4.1 Vue d'ensemble

4.1.1 Rappel de la problématique

Deux lois de commande sont proposées et il s'agit de choisir judicieusement les valeurs des gains et de certains paramètres afin que le système en boucle fermée remplisse toutes les qualités de manœuvrabilité. Ces deux lois de commande sont les plus communément utilisées de part l'expérience acquise (*Airbus*) et de la signification physique des gains, comparativement aux méthodes modernes dont les contrôleurs sont difficilement retouchables à cause de leur complexité. Dans ce chapitre, nous voulons satisfaire les critères d'amortissement, voire assurer une certaine rapidité au système.

Comme vu dans le chapitre 1, le système complet en boucle ouverte est d'ordre 35 ; il n'est pas nécessaire de travailler directement sur le système complet pour s'assurer que certains pôles du système ont un amortissement minimum, d'autant plus que ce critère porte sur des pôles bien précis, en l'occurrence ceux du mode phugoïde et du mode Short Period. Une réduction du système s'impose donc. La question est de savoir à quel ordre réduire le système. Naïvement, une réduction de la boucle ouverte à l'ordre 4, tenant compte ainsi des deux modes, pourrait suffire. Mais on négligerait d'une part le cinquième pôle du modèle dynamique et certains pôles ou zéros des actionneurs ou capteurs.

À cela vient se greffer un autre problème. Afin de laisser une certaine liberté au concepteur, nous utiliserons les applications gardiennes qui définiront certaines régions dans l'espace des paramètres satisfaisant les critères en question. Il aura ainsi à sa disposition tout un ensemble de gains adéquats. Sauf que dans la pratique, l'utilisateur est limité par les capacités de l'ordinateur. Même en ayant calculé au préalable les applications gardiennes pour certains domaines Ω et pour des systèmes de différents ordres, le temps d'affichage devient extrêmement long quand l'ordre du système augmente. C'est pour cela que nous avons limité à 6 l'ordre des systèmes réduits que nous manipulerons. Au-delà, le temps de calcul est prohibitif. De plus, pour des raisons pratiques d'affichage, le concepteur peut au maximum visualiser des régions en dimension 3, et même en 3 dimensions, la lecture n'est pas aisée ; c'est pour cela que nous nous limiterons à des régions dans le plan, soit deux paramètres simultanés. Cela semble faire beaucoup de contraintes d'entrée de jeu mais au contraire, ce sont ces contraintes qui ont permis la mise en place d'une démarche logique et systématique.

Il reste une dernière chose à préciser quant aux modes naturels de l'avion. En boucle ouverte, les modes phugoïde et Short Period sont parfaitement définis et identifiés. Cela n'est plus forcément le cas dès que l'on reboucle le système avec un correcteur. Outre le fait que ces deux modes peuvent devenir réels (et là n'est pas le problème majeur), il peut apparaître d'autres modes qui auront une influence certaine sur la dynamique à court terme du système. On ne se retrouve plus avec un seul

mode Short Period mais avec possiblement trois modes Short Period dans certains cas. En effet, en rebouclant le système avec des filtres dont les pôles sont dans la bande passante du Short Period, et compte-tenu du cinquième pôle et de l'actionneur, il apparaît alors d'autres paires de pôles complexes conjugués. Leurs pulsations propres étant dans la bande passante du mode Short Period, il convient alors de se soucier de leur amortissement. On procède alors au classement suivant. Il s'agit dans un premier temps d'identifier le mode phugoïde qui, lui, reste unique ; il peut être une paire de pôles complexes conjugués ou être devenu deux pôles réels. Il n'en demeure pas moins que ce sont les deux pôles les plus lents du système. Une fois ceux-ci identifiés, on procède au décompte des modes Short Period. Les paires de pôles complexes conjugués qui suivent sont alors baptisés successivement Short Period 1, Short Period 2, Short Period 3, et ce, jusqu'à une pulsation propre de 15 rad/s. La figure 4.1 illustre cela.

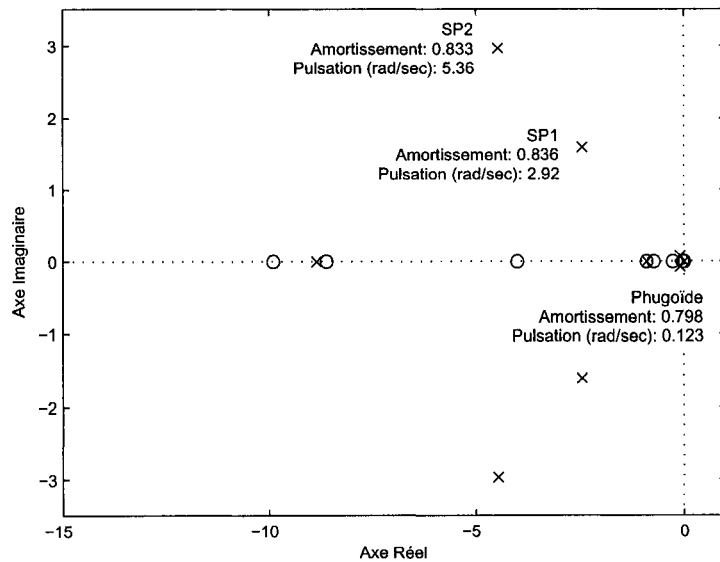


FIG. 4.1 – Décompte des modes Short Period

4.1.2 Méthodes de réduction

Dans l'optique d'utilisation des applications gardiennes (ou toute autre approche d'ailleurs), il s'agit de réduire la boucle ouverte du système. Plusieurs méthodes sont alors à notre disposition mais nous devons différencier une bonne réduction d'une mauvaise. Ainsi, dans ce chapitre-ci, nous désirons garantir un amortissement minimum du mode phugoïde et des modes Short Period, et éventuellement placer ces modes dans certaines bandes de fréquences. Une bonne réduction devra faire en sorte que le placement de pôles obtenu sur le modèle réduit soit conservé dans le modèle complet. Bien évidemment, les pôles que nous aurons placés sur le modèle réduit ne seront pas exactement ceux placés sur le modèle complet, mais il s'agit d'obtenir des réductions qui conserveront au mieux ces résultats.

Lors de la recherche, plusieurs stratégies de réduction ont été abordées. Certaines sont plus classiques dans leur approche (réduction fréquentielle), d'autres plus modernes (réduction modale). De même, il n'est pas forcément plus judicieux de réduire directement la boucle ouverte de notre système, et d'ensuite reboucler avec les correcteurs adéquats. Nous verrons qu'il sera de bon aloi d'effectuer plusieurs réductions successives.

Selon que l'on travaille sur le contrôle de la vitesse de tangage q ou sur le contrôle C^* , les stratégies de réduction ne seront pas les mêmes. Nous les aborderons de façon spécifique dans les sections qui leur sont consacrées. Il en va de même pour les ordres de réduction ; nous expliquerons au moment opportun comment nous les avons choisis. Nous nous attacherons seulement à énumérer les méthodes de réduction utilisées et expliquer pourquoi elles n'ont pas été retenues. Nous terminerons sur la solution retenue, celle qui a donné en l'occurrence les meilleurs résultats.

4.1.2.1 Réduction fréquentielle

La première méthode utilisée est une méthode de réduction fréquentielle. Elle est suggérée par Hodgkinson dans [7]. Supposons une certaine forme de la fonction réduite

de la boucle ouverte, LOES (*Low Order Equivalent System*) :

$$\frac{\theta}{\delta_e} \approx \frac{K_\theta(s + 1/T_{\theta_1})(s + 1/T_{\theta_2})}{(s^2 + 2\zeta_{ph}\omega_{ph}s + \omega_{ph}^2)(s^2 + 2\zeta_{sp}\omega_{sp}s + \omega_{sp}^2)} \quad (4.1)$$

Nous savons que q est la dérivée de cette fonction. On peut prendre une réduction semblable pour la fonction de transfert n_Z/δ_e . Hodgkinson suggère alors de réduire la fonction coût suivante :

$$\sum_{\omega_i} = (Gain_{HOS} - Gain_{LOES})^2 + K(Phase_{HOS} - Phase_{LOES})^2 \quad (4.2)$$

où on somme pour un certain nombre de valeurs discrètes de pulsations dans la bande de pulsations où l'on veut opérer la réduction. Il s'agit en fait d'une minimisation quadratique entre les courbes de gain et de phase du système complet et celles de la fonction réduite. On cherche alors à optimiser les valeurs des paramètres $K_\theta, T_{\theta_1}, T_{\theta_2}, \zeta_{ph}, \omega_{ph}, \zeta_{sp}, \omega_{sp}$. La constante K permet d'introduire une certaine pondération entre gain et phase ; Hodgkinson suggère $K = 0.02$. Sous Matlab, la fonction `lsqcurvefit` remplit cet office, ainsi que la fonction `invfreqs`.

Les résultats obtenus se sont montrés bons lors de la comparaison entre diagrammes de Bode du système complet et du système réduit dans la plage de fréquences considérée. Mais lors du rebouclage par les filtres et le correcteur PI, la réduction s'est avérée mauvaise. En effet, les pôles placés sur le système d'ordre réduit étaient bien différents de ceux obtenus par rebouclage du système complet. Il s'agissait alors de revoir éventuellement la forme de la fonction réduite, rajouter des zéros, augmenter ou réduire son ordre. Cela n'a pas amélioré les résultats lors du rebouclage.

4.1.2.2 Réduction modale

La méthode fréquentielle étant inefficace dans notre cas, nous nous tournons vers des méthodes plus modernes ; les techniques les plus courantes sont la troncature modale, la réduction équilibrée et l'approximation de Hankel. Des fonctions déjà implé-

mentées sous Matlab permettent ces réductions. Nous ne rappellerons pas la théorie sous-jacente à ces méthodes car cela serait inutile, vu qu'elles n'ont pas donné les résultats escomptés.

La fonction `minreal` permet dans un premier temps d'avoir une réalisation minimale de notre système en effectuant les annulations pôles/zéros possibles avec une certaine tolérance ; la fonction `sminreal` éliminent les états qui n'influencent pas la sortie dépendamment de l'entrée considérée.

Une fois une réalisation minimale obtenue avec les fonctions précédentes, la fonction `balreal` en produit une réalisation équilibrée. Elle restitue aussi un vecteur contenant les indices de commandabilité et d'observabilité de chacun des états de la réalisation équilibrée. Si cet indice est faible pour un état donné (relativement aux autres), cet état peut être éliminé.

Vient enfin la fonction `modred` qui permet d'éliminer certaines variables d'états, en l'occurrence celles dont les indices de commandabilité et d'observabilité étaient les plus faibles. On obtient alors notre système réduit avec les variables d'états qui ont été conservées.

Toutes ces fonctions sont déclinées sous d'autres formes avec d'autres algorithmes de résolution. Nous ne les énumérerons pas ici mais la plupart de ces nouvelles fonctions sont disponibles dans l'extension Matlab de μ -Analyse et μ -Synhtèse.

Pour ce qui est des résultats, les réductions donnent de bonnes approximations fréquentielles du système complet, mais le même problème que précédent se pose au niveau du rebouclage. Les résultats des placements de pôles ne sont pas bien conservés lors du passage vers le modèle complet, ou alors, de façon très approximative.

4.1.2.3 Réduction par pseudo-inverse

Rendus à ce stade, nous sommes en droit de nous demander si une méthode va pouvoir fonctionner voire si les autres méthodes ont été bien appliquées. Si l'on reprend le problème dans son ensemble, la première chose à mentionner est que, du fait de l'utilisation des Applications Gardiennes, nous ne pouvons manipuler com-

modément des polynômes d'ordre 7 ou plus. Les temps de calcul et la demande en mémoire seraient trop importants. Bien évidemment, les méthodes précédentes pourraient donner de bons résultats quant au rebouclage si l'on était moins restreint sur l'ordre de la réduction. Néanmoins, s'il faut aller chercher une réduction d'ordre 8 ou 9 pour obtenir de bons résultats, on devrait placer des pôles supplémentaires qui ne font partie ni du mode phugoïde, ni des modes Short Period. Le système rebouclé doit donc être au maximum d'ordre 6.

Les applications gardiennes nous permettent de déterminer des régions dans l'espace des gains où, dans notre cas présent, certains pôles auront un certain amortissement ζ . Donc pour un couple de gains choisis à l'intérieur d'une de ces régions, nous sommes assurés d'avoir un certain amortissement. Pour que la réduction soit des plus efficaces, il faut donc que la région obtenue sur l'espace des gains du système réduit soit semblable à celle que l'on obtiendrait sur l'espace des gains du système complet (du moins pour les pôles que nous considérons). Finalement, cela revient au même problème qu'un placement de pôles; si la réduction nous garantit que les pôles placés sur le système réduit sont placés de la même façon sur le système complet, alors les régions obtenues par applications gardiennes se correspondront sur les systèmes réduit et complet.

La méthode de réduction proposée n'a aucun fondement théorique; elle est simplement partie d'une idée intuitive suite à l'observation de lieux des racines. Il se trouve que les résultats obtenus se sont avérés bien meilleurs qu'avec les précédentes méthodes.

Dans notre cas, les structures des correcteurs sont déjà imposées et nous verrons par la suite qu'il est plus pratique de travailler avec deux gains à la fois. La figure 4.2 donne un exemple avec un correcteur PI.

$F(s)$ représente notre système en boucle ouverte (ou éventuellement notre système ayant subi un premier rebouclage). Ce système étant d'ordre élevé, on ne s'intéresse qu'à un certain nombre de pôles, disons 6 dans notre exemple. Il nous faut obtenir une réduction de $F(s)$ où n'apparaîtront que les pôles dignes d'intérêt. On reboucle

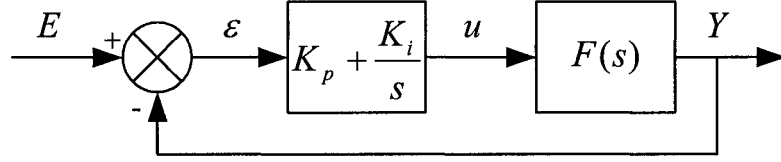


FIG. 4.2 – Réduction lors d'un Rebouclage par PI

$F(s)$ par un correcteur PI dont les gains sont K_p et K_i . L'idée est de choisir un certain nombre de couples (K_p, K_i) et de regarder où sont alors placés les 6 pôles qui nous intéressent. On peut alors former un polynôme d'ordre 6 pour chacun de ces couples (K_p, K_i) . Ils sont au mieux de la forme :

$$D_{K_p, K_i}(s) = s^6 + \alpha_5 s^5 + \alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \quad (4.3)$$

où les α_i dépendent des couples (K_p, K_i) .

Soit $F_{red}(s)$ la réduction de la fonction $F(s)$. Le correcteur étant d'ordre 1, $F_{red}(s)$ sera d'ordre 5.

$$F_{red}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_5 s^5 + b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.4)$$

En boucle fermée, le dénominateur vaut alors :

$$D_{BF}(s) = sD(s) + (K_p s + K_i)N(s) \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} &= (1 + K_p b_5) s^6 + (a_4 + K_p b_4 + K_i b_5) s^5 + (a_3 + K_p b_3 + K_i b_4) s^4 \\ &\quad + (a_2 + K_p b_2 + K_i b_3) s^3 + (a_1 + K_p b_1 + K_i b_2) s^2 \\ &\quad + (a_0 + K_p b_0 + K_i b_1) s + (K_i b_0) \end{aligned} \quad (4.6)$$

On peut alors l'identifier aux polynômes d'ordre 6 obtenus pour chaque couple (K_p, K_i) .

Ainsi pour un couple donné, on cherche à avoir :

$$\frac{D_{BF}(s)}{1 + K_p b_5} = D_{(K_p, K_i)}(s) \quad (4.7)$$

Soit le système suivant à résoudre pour chaque couple (K_p, K_i) :

$$(S) = \begin{cases} a_4 + K_p b_4 + K_i b_5 &= \alpha_5(1 + K_p b_5) \\ a_3 + K_p b_3 + K_i b_4 &= \alpha_4(1 + K_p b_4) \\ a_2 + K_p b_2 + K_i b_3 &= \alpha_3(1 + K_p b_3) \\ a_1 + K_p b_1 + K_i b_2 &= \alpha_2(1 + K_p b_2) \\ a_0 + K_p b_0 + K_i b_1 &= \alpha_1(1 + K_p b_1) \\ K_i b_0 &= \alpha_0(1 + K_p b_0) \end{cases} \quad (4.8)$$

Ainsi, sous forme matricielle, on a pour chaque couple choisi :

$$A_{K_p, K_i} X = B_{K_p, K_i} \quad (4.9)$$

Avec

$$X = \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}^T \quad (4.10)$$

$$A_{K_p, K_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_i - \alpha_5 K_p & K_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 K_p & K_i & K_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\alpha_3 K_p & 0 & K_i & K_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 K_p & 0 & 0 & K_i & K_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 K_p & 0 & 0 & 0 & K_i & K_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_0 K_p & 0 & 0 & 0 & 0 & K_i \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$B_{K_p, K_i} = \begin{bmatrix} \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix}^T \quad (4.12)$$

Ainsi si l'on rassemble tous ces systèmes (pour n couples (K_p, K_i)) qui ont en commun le vecteur d'inconnus X , il nous faut résoudre le système linéaire $AX = B$ suivant

qui est bien sûr sur-déterminé :

$$\begin{bmatrix} A_{(K_p, K_i)_1} \\ A_{(K_p, K_i)_2} \\ \vdots \\ A_{(K_p, K_i)_n} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} B_{(K_p, K_i)_1} \\ B_{(K_p, K_i)_2} \\ \vdots \\ B_{(K_p, K_i)_n} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

La solution de ce système linéaire réside dans l'obtention de la pseudo-inverse de A , notée $A^\dagger$ qui va minimiser au sens des moindres carrés la norme $\|AX - B\|$.

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Alors la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose de A , notée $A^\dagger$ vérifie :

- $AA^\dagger A = A$
- $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$
- $A^\dagger A$ et $AA^\dagger$ sont symétriques

Cette matrice pseudo-inverse peut être calculée d'après le théorème de décomposition en valeurs singulières. Cela présente l'avantage de fournir la solution de norme minimale dans le cas d'un système sous-déterminé et dans le cas d'un système sur-déterminé, la meilleure solution au sens des moindres carrés. La fonction `pinv` de Matlab permet de calculer cette matrice pseudo-inverse. On obtient alors le vecteur solution $X = A^\dagger B$, et donc ainsi les coefficients de la fonction de transfert réduite $F_{red}(s)$.

Sur l'ensemble des cas de vol, cette méthode de réduction a donné des bons résultats. On peut vérifier à posteriori que les réponses fréquentielles en boucle ouverte sont alors similaires dans la bande passante considérée et que les pôles placés en boucle fermée se conservent bien lors du passage du système réduit au système complet. Il faut choisir un certain nombre de couples (K_p, K_i) (voire de triplets ou autres si l'on travaille avec plus de paramètres), mais combien en faut-il et quelles valeurs prendre ? Grâce à des résultats préliminaires, nous avons pu limiter les valeurs des

gains. Rien ne sert d'opérer la réduction avec des gains qui déstabilisent le système. Ensuite, plus on prend de couples, meilleure en est la réduction. Nous avons choisi d'opérer avec au minimum 12 couples et les résultats se sont montrés bons voire très bons sur l'ensemble des 160 cas.

4.1.3 Solution proposée

Au fil des essais et de plusieurs manipulations, il est ressorti une méthodologie qui s'est appliquée aisément aux deux schémas de contrôle. Elle est le fruit de nombreuses observations et découle essentiellement de l'expérimentation. C'est une méthodologie qui en vaut une autre, mais celle-ci s'est montrée assez efficace avec les contraintes imposées. La méthode se décline en trois étapes principales que nous décrirons rapidement ici. Le reste de ce chapitre traitera néanmoins de ce qui a trait aux amortissements des pôles ; le chapitre suivant portera sur les autres qualités de manœuvrabilité.

Pour des raisons pratiques de visualisation, nous ne tracerons que des applications gardiennes où deux paramètres au plus varient, d'où le besoin de scinder le contrôle en différentes boucles. Si nous reprenons rapidement les deux schémas de contrôle, ils sont tous les deux constitués de deux boucles de rétroaction, la boucle SAS et la boucle CAS. Et en fait, ces deux boucles séparent déjà notre problème de façon adéquate. La boucle SAS contient deux paramètres qui varient (suivant le schéma de contrôle) et la boucle CAS en contient pour sa part trois. Néanmoins, nous verrons par la suite que le gain K_f n'affecte pas le dénominateur en boucle fermée, donc, en ce qui concerne notre problème d'amortissement de pôles, seuls les gains K_p et K_i entreront en jeu.

Voici comment s'articulerait la méthodologie :

- **Étape 1** : Dans cette première étape, on s'intéresse au réglage de la boucle interne, la boucle SAS. Son but est d'améliorer la stabilité du système ; par ce

premier rebouclage, on cherche à augmenter l'amortissement des modes Short Period et leur assurer une certaine rapidité. En ce qui concerne le mode phugoidé, on ne s'en soucie pas à ce stade-ci. De même, pour les autres qualités de manœuvrabilité, elles seront satisfaites éventuellement lors de la synthèse de la boucle CAS. La première étape consiste seulement à améliorer les modes naturels de l'avion pour que la seconde étape soit plus aisée. Grâce aux applications gardiennes, on peut déterminer des régions fonction des paramètres des boucles SAS où un certain amortissement sera garanti.

- **Étape 2 :** On règle ici les gains K_p et K_i du correcteur PI. Le réglage va être définitif pour l'amortissement des pôles, vu que le gain K_{ff} ne modifie pas le dénominateur. De même, on va chercher lors de cette étape à satisfaire les autres qualités de manœuvrabilité. En fait, si la première étape est bien réalisée, on peut aisément remplir toutes les qualités de manœuvrabilité (celle du dropback sera traitée ou améliorée par la suite). En fait une remarque importante est qu'en garantissant un bon amortissement aux modes Short Period, on vient automatiquement remplir la plupart des qualités de manœuvrabilité.
- **Étape 3 :** La dernière étape consiste à régler le gain K_{ff} . Ce gain-là est essentiellement destiné à améliorer la valeur du dropback. Ce gain modifie un zéro à basse fréquence et influence essentiellement le dropback vu la formule établie dans le chapitre 2. Bien évidemment, les critères de bandes passantes et autres vont être quelque peu modifiés mais pas de façon significative, laissant les qualités de manœuvrabilité satisfaites dans l'ensemble.

Nous allons poursuivre à présent sur les deux schémas de contrôle en appliquant et détaillant la méthodologie précédente. Comme dit précédemment, ce chapitre n'est consacré qu'à l'amortissement des pôles.

4.2 Contrôle de la vitesse de tangage q

La partie suivante est consacrée au schéma de contrôle de la vitesse de tangage q (Fig. 4.3). Nous allons détailler la méthodologie pour cette configuration-là. Ce cas a déjà été traité dans [1] de plusieurs façons et par différentes techniques modernes. Une des méthodes consistait à trouver pour chaque cas de vol le quintuplet optimal qui minimisait une certaine fonction coût. Ces quintuplets optimaux étaient obtenus par utilisation des algorithmes génétiques ; nous nous en sommes servis comme éléments de départ puisqu'ils donnaient de bons résultats de rebouclage au niveau des qualités de manœuvrabilité.

4.2.1 Fonctions de transfert

Les deux fonctions de transfert de la boucle ouverte qui nous intéressent sont q_{mes}/δ_c et $n_{z_{mes}}/\delta_c$. Nous les noterons de la façon suivante :

$$\frac{q_{mes}}{\delta_c} = \frac{N_1(s)}{D(s)} \quad (4.14)$$

$$\frac{n_{z_{mes}}}{\delta_c} = \frac{N_2(s)}{D(s)} \quad (4.15)$$

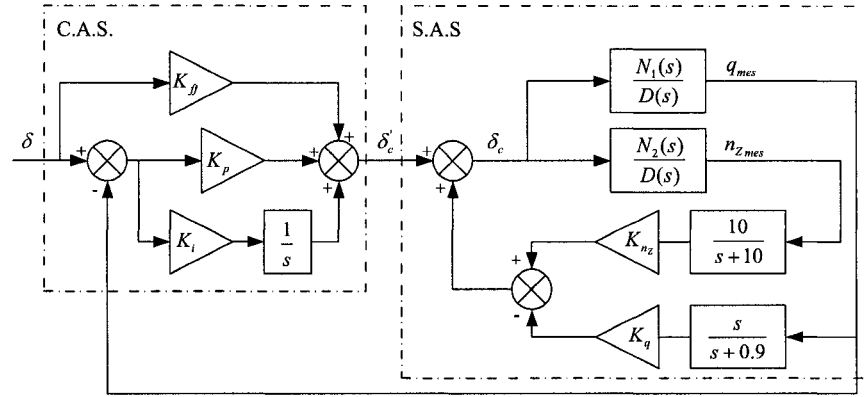
Nous pouvons alors en déduire la fonction de transfert de la boucle SAS :

$$\frac{q_{mes}}{\delta'_c} = \frac{N'(s)}{D'(s)} = \frac{N_1(s + 0.9)(s + 10)}{D(s + 0.9)(s + 10) + K_q N_1 s(s + 10) - 10 K_{n_z} N_2(s + 0.9)} \quad (4.16)$$

Ainsi que la fonction de transfert de la boucle CAS :

$$\frac{q_{mes}}{\delta} = \frac{((K_{ff} + K_p)s + K_i)N'}{sD' + (K_p s + K_i)N'} \quad (4.17)$$

Comme dit précédemment, le gain K_{ff} n'affecte qu'un zéro du système. On peut donc ignorer son action pour ce qui a trait à l'amortissement du système.

FIG. 4.3 – Schéma de contrôle de la vitesse de tangage q

4.2.2 Réglage de la boucle SAS

Nous allons procéder au réglage de la boucle SAS. Le modèle dynamique de l'avion est d'ordre 5 et nous obtenons la boucle SAS avec deux filtres ayant des pôles en -0.9 et -10 . Les gains variables sont alors K_q et K_{n_z} .

La figure 4.4 représente la carte des pôles et des zéros de la boucle ouverte q_{mes}/δ_c du cas 39. Les 4 graphes sont en fait des agrandissements successifs pour montrer la répétition des pôles. Pour la fonction de transfert $n_{z_{mes}}/\delta_c$, seuls les zéros de la dynamique de l'avion diffèreraient. Nous pouvons voir ainsi que les pôles de l'actionneur et du capteur sont en général très rapides comparativement aux 5 pôles du modèle dynamique de l'avion. Seul le pôle -15.88 de l'actionneur demeure assez proche des pôles naturels de l'avion.

Il s'agit alors de savoir à quel ordre nous devons et pouvons réduire notre système. Lors du rebouclage du SAS avec les filtres, nous venons ajouter 2 pôles à notre système, pôles qui sont situés dans la bande passante du mode Short Period. Une étude de divers lieux des racines de différents cas de vol montre qu'il y a une évolution séparée de deux groupements de racines lors du rebouclage : d'un côté, les pôles rapides des capteurs et de l'actionneur et de l'autre côté les pôles constituant la dynamique "moyenne" et lente de la boucle. Ce dernier groupement est constitué

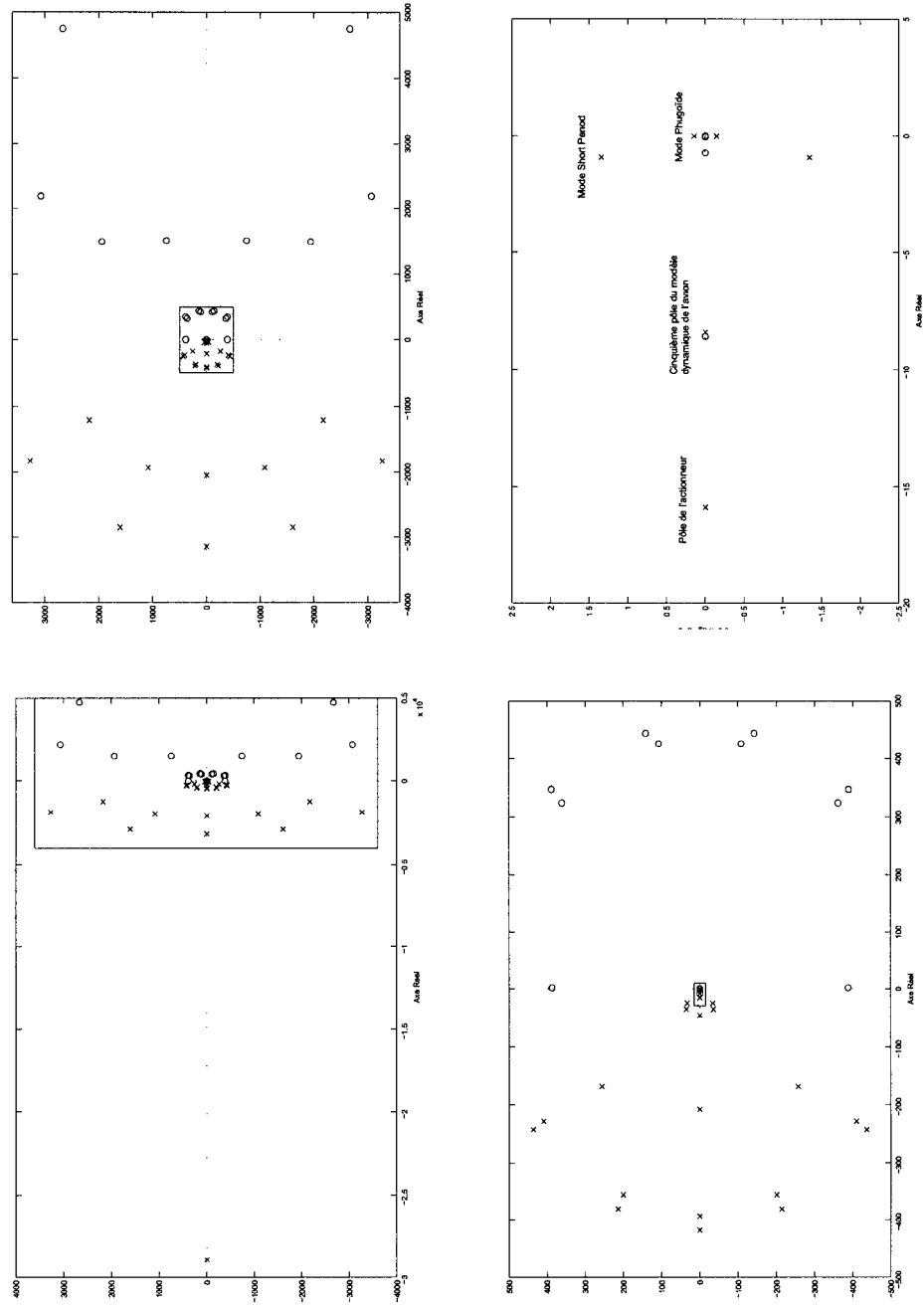


FIG. 4.4 – Carte des pôles et des zéros de la boucle ouverte q_{mes}/δ_c du cas 39

des 5 pôles de l'avion, du pôle le plus lent de l'actionneur en -15.88 et des 2 pôles apportés par les filtres. C'est bien sûr la dynamique de ce groupe de pôles qui nous intéresse puisqu'il constitue le mode phugoïde et le mode Short Period. La boucle SAS, une fois réduite, serait donc d'ordre 8. Or nous nous imposons de travailler avec des fonctions d'ordre 6 au maximum. La dynamique naturelle de l'avion fait que les modes phugoïde et Short Period ont des dynamiques très bien séparées ; il serait donc possible d'obtenir une boucle SAS réduite d'ordre 6 en ôtant le mode phugoïde, soit une réduction de la boucle ouverte à l'ordre 4. Nous conserverions de la boucle ouverte le mode Short Period, le cinquième pôle et le pôle de l'actionneur auxquels viendraient s'ajouter par rebouclage les deux pôles des filtres.

Nous cherchons des réductions de la boucle ouverte de la forme suivante :

$$\left. \frac{q_{mes}}{\delta_c} \right)_{red} = \frac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.18)$$

$$\left. \frac{n_{z_{mes}}}{\delta_c} \right)_{red} = \frac{c_4 s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.19)$$

Nous pouvons alors écrire la fonction de transfert de la boucle SAS donnée par l'équation 4.16 et en extraire le dénominateur qui est d'ordre 6. Ensuite, pour une douzaine de couples (K_q, K_{nz}) avec K_q compris entre 0 et 0.5, et K_{nz} entre 0 et 2.5, on trouve sur le modèle complet de la boucle SAS les valeurs des pôles dont on cherche la réduction. C'est après l'étude de plusieurs cas que nous avons choisi ces valeurs limites pour notre grille de réduction. Il ne reste qu'à identifier les coefficients pour reconstruire le système sur-déterminé que l'on va résoudre par pseudo-inverse.

Comme dit précédemment, nous devons ôter la dynamique du mode phugoïde dans le décompte des pôles pour notre réduction. Il suffit alors de prendre les 8 pôles les plus lents du système, et d'ôter parmi eux la dynamique du mode phugoïde, qui est en général constituée des deux plus lents et peut même être instable lors de ce premier rebouclage. On se retrouve alors avec les 6 pôles qui nous intéressent.

Une fois la réduction obtenue, nous pouvons tracer les applications gardiennes

pour un amortissement donné et/ou une pulsation choisie dans le plan (K_q, K_{n_z}) . Il s'agit en fait d'amortir suffisamment les pôles (au-delà de 0.7 par exemple) et de les placer au-delà d'une certaine pulsation pour assurer une certaine rapidité. Pour préparer la deuxième étape, on s'assurera notamment que le Short Period 3 ait un très fort amortissement, voire qu'il soit scindé en deux pôles réels. Ainsi, il pourra être négligé lors de la deuxième réduction. Nous ne nous soucions pas du mode phugoïde pour l'instant ; nous vérifierons ultérieurement qu'il est stable et suffisamment amorti. Ce sera toujours le cas. La figure 4.5 montre le genre de régions que nous obtenons.

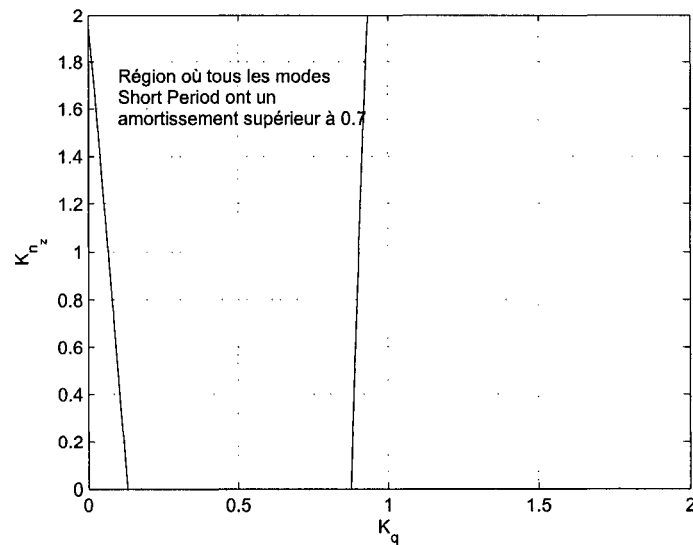


FIG. 4.5 – Région typique pour une boucle SAS - Contrôle classique

4.2.3 Réglage de la boucle CAS

Le réglage de l'amortissement des pôles se termine lors de cette seconde étape avec le contrôleur PI. Nous devons donc prendre une réduction de la boucle SAS pour poursuivre. Lors de l'étape précédente, nous terminions avec une boucle SAS d'ordre 6, soit avec l'action intégratrice du PI, une boucle fermée réduite d'ordre 7. Ce qui pose en effet problème avec notre limite d'ordre 6 imposée. Nous devons de nouveau

opérer une réduction et enlever les pôles qui seraient superflus.

Quand on observe le lieu des racines de la boucle SAS lorsqu'elle est rebouclée par un correcteur PI, on remarque en fait que le Short Period 3 demeure toujours très bien amorti ($\zeta_{sp_3} > 0.95$) et a sa propre évolution sur le lieu des racines ; il ne vient pas en outre interférer sur les modes Short Period 1 et 2. On peut donc décemment le négliger et se contenter de garder une réduction des modes Short Period 1 et 2. Ainsi, il nous suffit de prendre une réduction à l'ordre 4 de la boucle SAS et en rebouclant le PI, on aura une fonction de transfert d'ordre 5.

Nous prenons toujours une réduction de la forme suivante :

$$\left. \frac{q_{mes}}{\delta'_c} \right)_{red} = \frac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.20)$$

Et comme précédemment, on obtient les valeurs des coefficients par pseudo-inverse. Là encore, il y a plusieurs possibilités pour obtenir les valeurs des pôles en boucle fermée. On peut reprendre la réduction SAS précédente, reboucler par différents PIs (différents couples (K_p, K_i)) et ensuite obtenir le système sur-déterminé. Mais les valeurs des pôles obtenues seraient déjà une approximation des véritables valeurs. On reprend donc la boucle ouverte initiale d'ordre 35, on reboucle le SAS avec les valeurs (K_q, K_{n_z}) choisies lors de la précédente étape, on referme la boucle CAS avec différents PIs ; on retire alors les pôles du mode phugoïde. Il suffit ensuite de prendre à chaque fois les 5 pôles les plus lents qui constituent les modes Short Period 1 et 2.

Nous traçons ainsi les régions pour un amortissement donné et pouvons choisir les couples (K_p, K_i) qui vont garantir cet amortissement. Néanmoins, il faudra attendre que les critères fréquentiels soient tracés avant d'effectuer ce choix. La figure 4.6 illustre le genre de région que nous obtenons.

4.3 Contrôle C*

Nous nous intéressons ici au second schéma de contrôle afin de lui appliquer la méthodologie proposée. Les deux étapes vont être sensiblement similaires à celle du

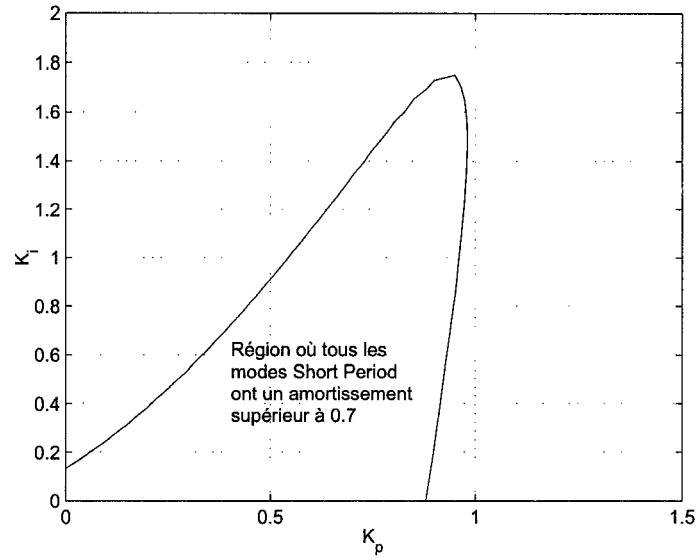


FIG. 4.6 – Région typique pour une boucle CAS - Contrôle classique

contrôle de la vitesse de tangage q . Les réductions sont basées sur l'observation des lieux des racines pour distinguer les groupements de pôles qui évoluent ensemble.

4.3.1 Fonctions de transfert

Nous nous intéressons toujours aux fonctions de transfert q_{mes}/δ_c et $n_{z_{mes}}/\delta_c$ que nous noterons de la façon suivante :

$$\frac{q_{mes}}{\delta_c} = \frac{N_1(s)}{D(s)} \quad (4.21)$$

$$\frac{n_{z_{mes}}}{\delta_c} = \frac{N_2(s)}{D(s)} \quad (4.22)$$

En ce qui concerne la boucle SAS, on ne considère à présent que la sortie q_{mes} . Nous pouvons alors en déduire la fonction de transfert de la boucle SAS. Les paramètres

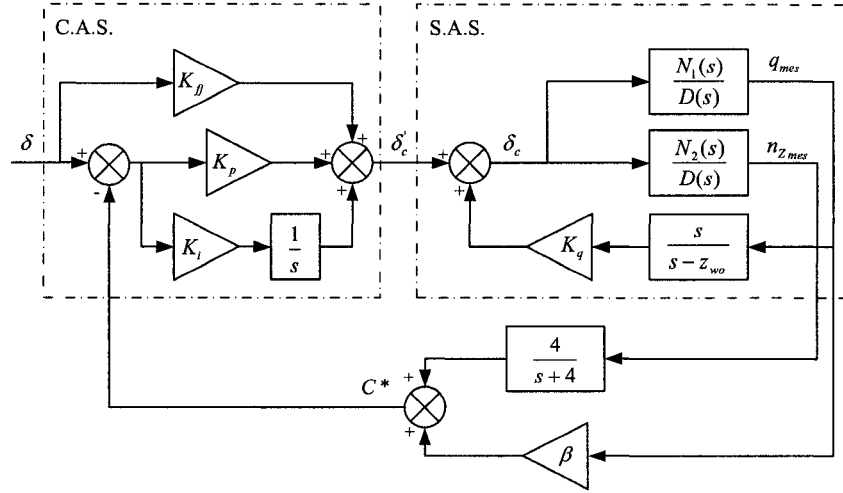


FIG. 4.7 – Schéma de contrôle C*

variables sont ici le gain K_q et le pôle du filtre *Wash-Out*, z_{wo} .

$$\frac{q_{mes}}{\delta'_c} = \frac{N_1(s - z_{wo})}{D(s - z_{wo}) + K_q s N_1} \quad (4.23)$$

Pour la boucle CAS, le rebouclage du PI s'effectue sur une sortie composée C^* déjà évoquée lors du premier chapitre. Voici d'abord la fonction de transfert de cette sortie composée, quand la boucle SAS est fermée :

$$\frac{C^*}{\delta'_c} = \beta \frac{q_{mes}}{\delta'_c} + \frac{4}{s+4} \frac{n_{zmes}}{\delta'_c} \quad (4.24)$$

$$\frac{C^*}{\delta'_c} = \frac{(s - z_{wo})(\beta N_1(s+4) + 4N_2)}{(s+4)(D(s - z_{wo}) + K_q s N_1)} \quad (4.25)$$

Donc une fois que la boucle CAS est refermée, on obtient :

$$\frac{C^*}{\delta} = \frac{(s - z_{wo})((K_{ff} + K_p)s + K_i)(\beta N_1(s+4) + 4N_2)}{s(s+4)(D(s - z_{wo}) + K_q s N_1) + (K_p s + K_i)(s - z_{wo})(\beta N_1(s+4) + 4N_2)} \quad (4.26)$$

Le gain K_{ff} n'affecte toujours qu'un zéro du système.

4.3.2 Réglage de la boucle SAS

Nous allons reprendre la démarche précédente en mettant en évidence les points qui vont changer par rapport à l'autre schéma de contrôle. La boucle SAS est à présent constituée d'un retour sur q_{mes} à travers un filtre *Wash-Out* dont les paramètres variables sont le gain K_q et le pôle z_{wo} .

Nous considérons toujours le même groupement de pôles, soit les 5 pôles de notre modèle dynamique et le pôle lent de l'actionneur en -15.88 auxquels vient s'ajouter le pôle du filtre. Donc si nous prenons une réduction à l'ordre 6 de la boucle ouverte, nous obtiendrons une boucle SAS réduite d'ordre 7. Ce qui est un pôle de trop. Nous allons donc toujours amputer le système de son mode phugoïde et ne réduire que sur les modes Short Period. Soit une réduction de la boucle ouverte à l'ordre 4 et une boucle SAS réduite d'ordre 5. On cherche donc une réduction de la forme :

$$\left(\frac{q_{mes}}{\delta_c} \right)_{red} = \frac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.27)$$

On reprend alors la réduction par pseudo-inverse en rebouclant par différentes valeurs de gain K_q et de pôle z_{wo} du filtre *Wash-Out*. L'expérience a montré qu'il suffisait de choisir des gains compris entre 0 et 1.5 et des pôles compris entre 0 et -5 ; les zones de bon amortissement se situent en effet dans ces limites. On extrait à chaque fois les 5 pôles les plus lents et on reconstitue le système à inverser.

La réduction obtenue, on peut tracer les régions gardant un amortissement et/ou une pulsation. Il s'agit toujours ici d'amortir au mieux les pôles des modes Short Period afin de faciliter la tâche pour la suite. La figure 4.8 montre typiquement le genre de régions que l'on obtient pour un amortissement donné de 0.7.

4.3.3 Réglage de la boucle CAS

On vient une fois de plus fixer l'amortissement des pôles avec la boucle CAS, à la différence que l'on reboucle sur une nouvelle sortie appelée C^* . Il va falloir donc trouver une réduction de cette fonction de transfert sur laquelle on reboucle le

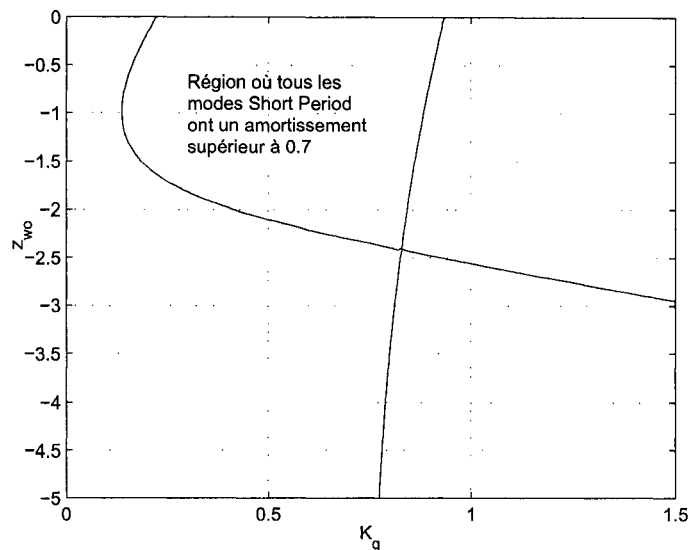


FIG. 4.8 – Région typique pour une boucle SAS - Contrôle C^*

correcteur PI. Notre réduction de la boucle SAS est d'ordre 5 et lorsque l'on constitue la sortie C^* , le filtre $4/(s + 4)$ vient rajouter un ordre supplémentaire. Ensuite, le PI portera le tout à un ordre 7, ce qui est encore trop. Il faut alors observer de nouveau le lieu des racines pour voir si on peut enlever certains pôles de la réduction. En effet, c'est le cas. Parmi notre groupe de pôles d'intérêt, celui correspondant au cinquième pôle initial de notre modèle dynamique demeure le plus rapide et, lors du rebouclage, évolue sur l'axe réel en tendant vers un zéro du système qui lui est proche dans tous les cas de vol. On peut donc ôter ce pôle de notre réduction et chercher une fonction de transfert de la forme :

$$\left. \frac{C^*}{\delta'_c} \right)_{red} = \frac{b_5 s^5 + b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.28)$$

On reboucle alors le système complet avec différents PIs en utilisant les valeurs de K_q et z_{wo} choisies lors du réglage de la boucle SAS. On prend alors dans chaque cas les 8 pôles les plus lents desquels on enlève la dynamique du mode phugoïde. On peut

alors constituer le système à résoudre avec les 6 pôles obtenus pour chaque couple (K_p, K_i) .

Le système résolu, nous pouvons tracer les régions pour un amortissement donné et pouvons choisir les couples (K_p, K_i) qui vont garantir cet amortissement. Mais comme dans le cas du contrôle de la vitesse de tangage q , tant que les critères fréquentiels ne sont pas tracés, on ne peut faire un choix définitif. La figure 4.9 montre le genre de région que l'on obtient.

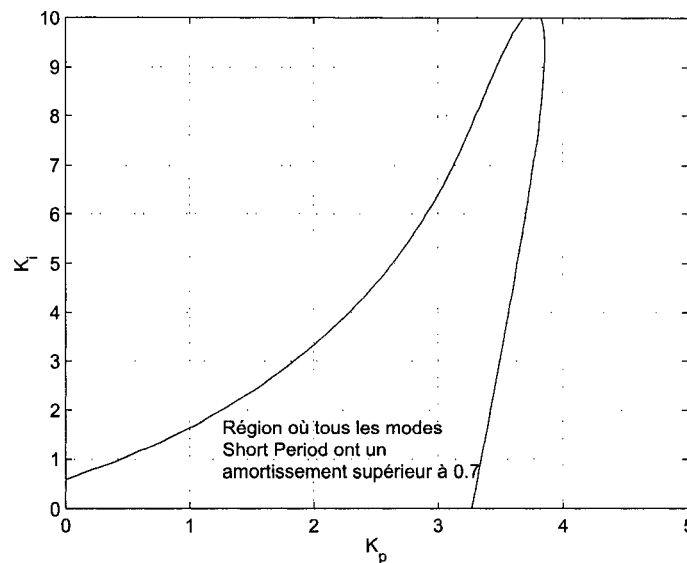


FIG. 4.9 – Région typique pour une boucle CAS - Contrôle C^*

La méthode est donc en place pour régler l'amortissement des pôles. Sur l'ensemble des cas de vol, les réductions se sont avérées très fiables en général. Pour des conditions de vol extrêmes, ou des masses et des centrages importants, elles ont quand même donné des résultats très honnêtes et proches des valeurs réelles. L'aspect rapidité a été un peu négligé ; il suffit de tracer l'application gardienne garantissant une certaine marge ou pulsation pour améliorer cet aspect. L'essentiel est d'avoir ici une réduction fidèle ; on peut ensuite tracer n'importe quelle application gardienne d'intérêt. Nous pouvons à présent poursuivre sur les autres critères.

CHAPITRE 5

RÉGLAGES DES CRITÈRES FRÉQUENTIELS ET DU DROPBACK

Le chapitre précédent s'est intéressé à régler essentiellement les critères modaux sur le mode Short Period et d'assurer une certaine rapidité des pôles. Il s'agit à présent de voir ce qu'il est possible de faire pour les critères fréquentiels et le dropback. L'approche ne va plus se faire par applications gardiennes, et comme dit dans le chapitre précédent, nous ne réglerons ces critères que lors de la synthèse de la boucle CAS. C'est un choix délibéré mais justifié, comme nous allons le voir.

5.1 Vue d'ensemble

5.1.1 Rappel des critères

A la demande de *Bombardier Inc.*, les critères à satisfaire sont les suivants : les bandes passantes de θ/δ_{ref} et γ/δ_{ref} , le retard de phase τ_p , les marges de phase M_φ et de gain M_G de la boucle CAS, et enfin le dropback. Le CAP n'a pas été inclus dans les critères retenus, mais on pourra vérifier sa valeur à posteriori.

Les limites de ces critères (tirées de [7] et [1]) sont disponibles dans le chapitre 2. Nous allons chercher à les satisfaire au niveau 1. L'expérience de *Bombardier* dans le domaine et lors des essais en vol a montré que l'on pouvait être moins stricts sur ces limites, notamment sur la bande passante de γ/δ_{ref} , qui ne dépend plus directement de la bande passante de θ/δ_{ref} , comme cela est montré sur la figure 2.14 du chapitre 2. Il en est de même pour le retard de phase. Les limites retenues sont rassemblées dans le tableau 5.1. En ce qui concerne le retard de phase et le dropback, nous pouvons être moins stricts et considérer que satisfaire $\tau_p \leq 0.2(s)$ est de niveau 1, de même qu'il est suffisant de s'assurer que le dropback est compris entre -0.2 et 0.5 .

TAB. 5.1 – Limites des critères

Bande passante θ/δ_{ref}	$\omega_{BW_\theta} \geq 1.5$ (rad/s)
Bande passante γ/δ_{ref}	$\omega_{BW_\gamma} \geq 0.6$ (rad/s)
Retard de phase	$\tau_p \leq 0.14$ (s)
Marge de gain	$M_G \geq 6$ dB
Marge de phase	$M_\varphi \geq 45^\circ$
Dropback	$0.0 < Drb/q_{ss} < 0.3$

5.1.2 Solution proposée

A l'instar du réglage de l'amortissement des pôles, il ne sert à rien de vouloir satisfaire les critères fréquentiels dès la boucle SAS. Ces critères vont être traités lors de la synthèse de la boucle CAS. Le réglage de la boucle SAS sert à amortir les pôles pour pouvoir faciliter l'étape suivante qu'est le réglage de la boucle CAS. Comme expliqué dans le chapitre 4, le réglage de la boucle CAS se fera en deux temps : une première étape destinée à régler le PI, une seconde, spécifique au gain K_{ff} .

Après plusieurs expérimentations, nous avons pu observer que le gain K_{ff} influençait dans une moindre mesure les valeurs des critères fréquentiels et servait essentiellement pour le Dropback. Pour des questions de visualisation et de temps de calculs, nous ne pouvons afficher que des régions dépendant de deux gains à la fois (à la manière des applications gardiennes). Nous réglerons alors le PI en prenant une valeur fixe pour le gain K_{ff} , par exemple celle donnée par algorithme génétique, et ensuite terminerons sur le réglage de K_{ff} pour ajuster la valeur du dropback.

5.2 Réglage des critères fréquentiels

Contrairement aux critères portant sur l'amortissement de certains pôles, les critères fréquentiels portent sur le système dans son ensemble et mettent en jeu tous

les pôles et les zéros du système. On pourrait bien sûr penser à effectuer des réductions dans le domaine fréquentiel, et tenter de résoudre ces critères sur ces fonctions réduites. Or, même si l'on réduit par exemple notre boucle SAS à un ordre 5, 6 ou 7, on ne peut décemment trouver des formules analytiques explicites pour chacun des critères, où interviendraient les gains K_p , K_i et K_{ff} . Sans formules explicites pour traiter les critères fréquentiels, peu importe l'ordre de notre boucle SAS, cela demandera seulement du temps de calcul et de la mémoire à l'ordinateur. Il s'agit simplement d'optimiser au mieux le nombre de calculs demandés au calculateur. Nous expliquerons ici la démarche utilisée pour chacun des critères et discuterons des performances obtenues. Le but est, pour un gain K_{ff} fixé, d'obtenir des régions du plan (K_p, K_i) qui satisfont ou ne satisfont pas les différents critères fréquentiels. Selon les schémas de contrôle, les formules employées ne seront pas forcément les mêmes. Néanmoins, les démarches sont identiques et nous les traiterons ensemble en distinguant le cas échéant les deux schémas de contrôle.

5.2.1 Notations préliminaires

Dans cette section des réglages des critères fréquentiels, nous utiliserons plusieurs fonctions de transfert. Nous présentons ici toutes les fonctions d'intérêt qui apparaîtront plus loin.

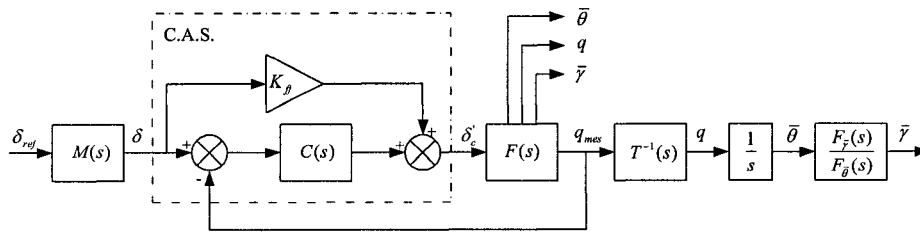


FIG. 5.1 – Schéma de contrôle classique et sorties d'intérêt

On désigne par :

- $M(s) = \frac{\delta}{\delta_{ref}}$ la fonction de transfert du manche.
- $C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$ la fonction de transfert du correcteur Proportionnel Intégral.

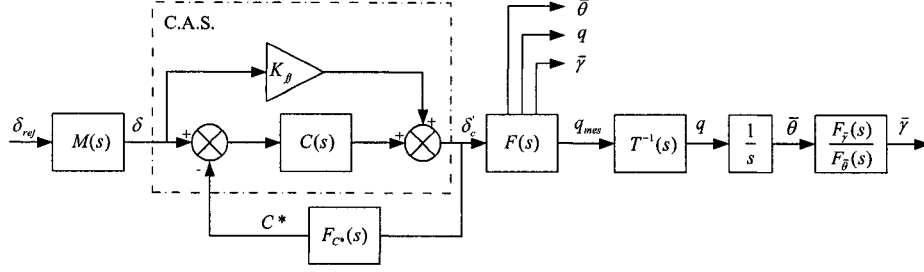


FIG. 5.2 – Schéma de contrôle C* et sorties d'intérêt

- $F(s) = \frac{q_{mes}}{\delta'_c}$ la fonction de transfert de la boucle SAS.
- $F_{C^*}(s) = \frac{\tilde{C}^*}{\delta'_c}$ la fonction de transfert de la boucle SAS entre la sortie composée C^* et δ'_c , entrée de la boucle SAS.
- $T(s) = \frac{q_{mes}}{q}$ la fonction de transfert du capteur IRU.
- $F_{\bar{\theta}}(s) = \frac{\bar{\theta}}{\delta_e}$ la fonction de transfert entre $\bar{\theta}$ et δ_e la commande de l'élèveur.
- $F_{\bar{\gamma}}(s) = \frac{\bar{\gamma}}{\delta_e}$ la fonction de transfert entre $\bar{\gamma}$ et δ_e .

5.2.2 Bande passante de $\bar{\theta}/\delta_{ref}$ et Retard de phase τ_p

Nous allons présenter ici comment traiter le critère de la bande passante de $\bar{\theta}/\delta_{ref}$ et le retard de phase τ_p . Il s'agit surtout de présenter l'algorithme utilisé sans entrer dans les détails techniques.

Avec les notations précédentes et en gardant à l'esprit que $q = \dot{\theta}$, nous avons les relations suivantes :

$$\frac{\bar{\theta}}{\delta_{ref}} = \frac{q_{mes}}{\delta_{ref}} \cdot \frac{\bar{\theta}}{q_{mes}} \quad (5.1)$$

Soit dans le cas du contrôle de la vitesse de tangage

$$\frac{\bar{\theta}}{\delta_{ref}} = F_{BF}(s) = \frac{M(s)(K_{ff} + C(s))F(s)}{(1 + C(s)F(s))(sT(s))} \quad (5.2)$$

Et pour le contrôle C^* :

$$\frac{\bar{\theta}}{\delta_{ref}} = F_{BF}(s) = \frac{M(s)(K_{ff} + C(s))F(s)}{(1 + C(s)F_{C^*}(s))(sT(s))} \quad (5.3)$$

Pour le calcul de la bande passante de $\bar{\theta}/\delta_{ref}$, il y a deux pulsations à trouver : $\omega_{BW_{Phase}}$ et $\omega_{BW_{Gain}}$. On se reportera au chapitre 2 pour leur définition.

L'idée est en fait de trouver tous les correcteurs PIs qui donnent une bande passante $\omega_{BW_{\theta}}$ de 1.5 rad/s pour un gain K_{ff} fixé. Nous obtiendrons alors des régions dans le plan (K_p, K_i) où sur les frontières, nous aurons une bande passante de 1.5 et de part et d'autre, des bandes passantes inférieures ou supérieures. Et à l'instar des applications gardiennes, si dans une région donnée un correcteur PI garantit une bande passante supérieure à 1.5, alors tous les correcteurs de cette région le garantiront.

$\omega_{BW_{Phase}}$ est la pulsation où la phase vaut -135° . Soit :

$$\angle F_{BF}(j\omega_{BW_{Phase}}) = -135^\circ \quad (5.4)$$

Nous allons déterminer les correcteurs qui vont assurer ce résultat à la pulsation limite de 1.5 rad/s.

$$\angle F_{BF}(1.5j) = \angle \frac{M(1.5j)(K_{ff} + C(1.5j))F(1.5j)}{(1 + C(1.5j)F(1.5j))(1.5jT(1.5j))} \quad (5.5)$$

Cela se résume ici au calcul de l'angle d'un nombre complexe. On demande à Matlab de calculer une seule fois les nombres complexes $M(1.5j)$, $F(1.5j)$ et $T(1.5j)$ associés aux différents éléments de la boucle. Il nous reste ensuite à déterminer les correcteurs adéquats. Plusieurs façons de procéder s'offrent à nous mais il faut garder à l'esprit que pour visualiser les résultats, la fonction `contour` de Matlab s'imposera. Étant donnée une fonction $z = f(x, y)$ de deux variables, `contour` permet de tracer les lignes de niveau z_i . Mais Matlab n'étant pas un logiciel de calcul symbolique, il faut rentrer une matrice contenant des valeurs échantillonnées de f selon une grille prédéfinie de valeurs (x_i, y_j) . C'est la fonction `meshgrid` qui se charge de fournir une telle grille.

Il s'agit dans un premier temps de déterminer les valeurs limites de notre grille. L'expérience a montré que les gains K_p et K_i demeuraient en général entre 0 et 3 pour le contrôle de la vitesse de tangage, et entre 0 et 10 pour le contrôle C^* . Nous choisissons alors un certain pas d'échantillonnage en fonction des limites choisies pour les gains ; il faut choisir le pas de façon adéquate pour faire un compromis entre temps de calcul et graphe précis. La grille pourra être réajustée par la suite. La commande suivante génère les deux éléments qui composent la grille :

$$[Kp, Ki] = \text{meshgrid}(0:0.1:3, 0:0.1:3)$$

Kp et Ki sont alors deux matrices de valeurs échantillonnées de K_p et K_i selon la grille demandée. On peut alors construire la matrice des correcteurs PIs pris à la valeur 1.5 rad/s :

$$C = Kp + Ki / (1.5 * j)$$

On obtient une matrice de nombres complexes, réponses des correcteurs échantillonnés. Il suffit alors d'appliquer la formule de la boucle fermée en utilisant cette matrice et les réponses complexes des autres éléments. On retrouve alors une matrice contenant les réponses complexes à 1.5 rad/s de la boucle fermée pour différents correcteurs. Les fonctions `atan2` et `angle` rendent alors une matrice contenant les angles de ces nombres complexes. On peut alors utiliser la fonction `contour` pour tracer la ligne de niveau -135° (en ayant les angles en degrés) et on obtient des régions dont les frontières sont les correcteurs qui assurent exactement une bande passante de 1.5 rad/s.

La définition de $\omega_{BW_{Gain}}$ est donnée dans le chapitre 2. Il s'agit de déterminer la pulsation où la phase vaut -180° , de calculer le gain à cette pulsation et de récupérer finalement la pulsation où ce gain a augmenté de 6 dB. La méthode est ici plus complexe comparativement à la pulsation précédente. Nous allons basiquement nous en remettre à la puissance de calcul de l'ordinateur et des fonctions de Matlab.

Notre but est de toujours déterminer la courbe de correcteurs PIs qui donnent une bande passante de 1.5 rad/s. La fonction `freqresp` prend en argument une fonction

de transfert et un vecteur échantillonné de pulsations ; elle rend un vecteur d'éléments complexes, réponses à chaque pulsation. La fonction `logspace` se charge de fournir un vecteur `W` logarithmiquement échantillonné entre deux pulsations. L'utilisateur peut spécifier le nombre de pulsations discrètes. Les deux pulsations limites sont prises à 1.5 et 20 rad/s. La limite haute de 20 rad/s découle juste de l'expérience, quant à la limite basse, c'est une simple question de logique, vu que nous cherchons seulement la courbe des correcteurs donnant une bande passante à 1.5 rad/s. Nous demandons alors les réponses complexes des trois éléments $M(s)$, $F(s)$ et $T(s)$.

C'est maintenant qu'intervient la capacité de la machine. Nous allons passer en revue à l'aide de deux boucles tous les correcteurs échantillonnés par la grille précédente. La fonction `interp1` prend en argument un vecteur de points `X`, un vecteur `Y`, image de `X` par une fonction f et enfin la valeur `Xi` où on veut interpoler la fonction f . Elle nous rend `Yi` image de `Xi` par f . Plusieurs méthodes d'interpolations sont disponibles ; nous utiliserons celle des splines cubiques. Pour chaque correcteur, la démarche utilisée est la suivante :

- on calcule la réponse complexe du correcteur en question pour le même vecteur de pulsations discrètes `W`,
- on en déduit alors la réponse complexe du système en boucle fermée pour ce vecteur `W` d'où on tire les réponses en gain `G` et en phase `P` du système,
- on utilise `W_180=interp1(P,W,-180)` pour déterminer la pulsation où la phase vaut -180° ,
- ensuite `Gain_180=interp1(W,G,W_180)`, pour connaître le gain à cette pulsation,
- on stocke enfin dans une matrice à l'emplacement adéquat la différence entre `Gain_180` et le gain de la boucle fermée à la pulsation 1.5 rad/s. Si la différence vaut $-6dB$, alors le correcteur en question va donner une bande passante de 1.5 rad/s et si elle est inférieure à $-6dB$, la bande passante du système sera plus grande que 1.5 rad/s et vice-versa,
- on termine par la fonction `contour` qui tracera la ligne de niveau -6 .

Toutes ces étapes prennent beaucoup de temps de calcul et la procédure est assez basique puisqu'on passe en revue tous les correcteurs de la grille. La figure 5.3 montre le genre de régions que nous obtenons ; la première courbe fait état du calcul de $\omega_{BW_{Phase}}$ et la seconde de $\omega_{BW_{Gain}}$. C'est en cliquant sur les différentes régions que l'utilisateur saura laquelle est la bonne ; l'expérience montre que c'est toujours la région entre les deux courbes. Sous un Pentium III à 1.13 GHz avec 384 Mo de RAM, on obtient le tracé en une dizaine de secondes, ce qui est raisonnable.

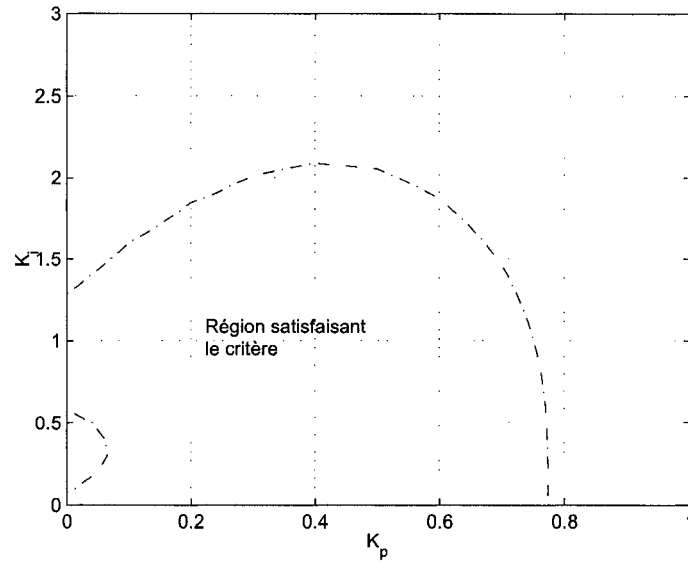


FIG. 5.3 – Région typique de la bande passante de $\bar{\theta}/\delta_{ref}$

Les calculs effectués auparavant vont de nouveau servir pour le critère du retard de phase. En effet, une fois qu'on a calculé la pulsation ω_{180° où la phase vaut -180° , on peut déterminer la phase à la pulsation double par la ligne de commande suivante : `P_2W_180=interp1(W,P,2*W_180)`. On peut calculer alors la valeur du retard de phase et la stocker dans la matrice de données. Il ne reste plus qu'à tracer la ligne de niveau 0.14 pour afficher les courbes. C'est ce qui est illustré sur la figure 5.4. Comme ce critère est jumelé avec celui de la bande passante, le temps de calcul n'est

pas allongé de façon significative.

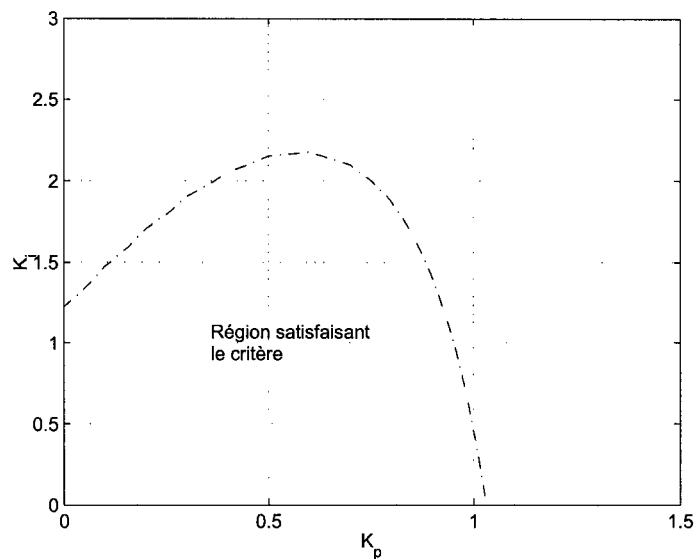


FIG. 5.4 – Région typique du retard de phase

5.2.3 Bande passante de $\bar{\gamma}/\delta_{ref}$

Le calcul de cette bande passante va être similaire à la démarche précédente. Il va même être plus simple vu qu'il suffira de calculer seulement la pulsation où la phase vaut -135° . Comme dit au début du chapitre, ce critère a été simplifié par rapport aux normes données dans [7]. Il suffit de vérifier que ω_{BW_γ} est supérieur à 0.6 rad/s.

Avec les notations précédentes, nous avons les fonctions de transfert suivantes :

$$\frac{\bar{\gamma}}{\delta_{ref}} = \frac{q_{mes}}{\delta_{ref}} \cdot \frac{\bar{\gamma}}{q_{mes}} \quad (5.6)$$

Dans le cas du contrôle de la vitesse de tangage :

$$\frac{\bar{\gamma}}{\delta_{ref}} = \frac{M(s)(K_{ff} + C(s))F(s)F_{\bar{\gamma}}(s)}{(1 + C(s)F(s))(sT(s)F_{\bar{\theta}}(s))} \quad (5.7)$$

Et dans le cas du contrôle C^* :

$$\frac{\bar{\gamma}}{\delta_{ref}} = \frac{M(s)(K_{ff} + C(s))F(s)F_{\bar{\gamma}}(s)}{(1 + C(s)F_{C^*}(s))(sT(s)F_{\bar{\theta}}(s))} \quad (5.8)$$

On applique de nouveau la démarche utilisée pour la bande passante $\bar{\theta}/\delta_{ref}$ quant au calcul de la phase à -135° et la fonction contour donne la région tracée sur la figure 5.5.

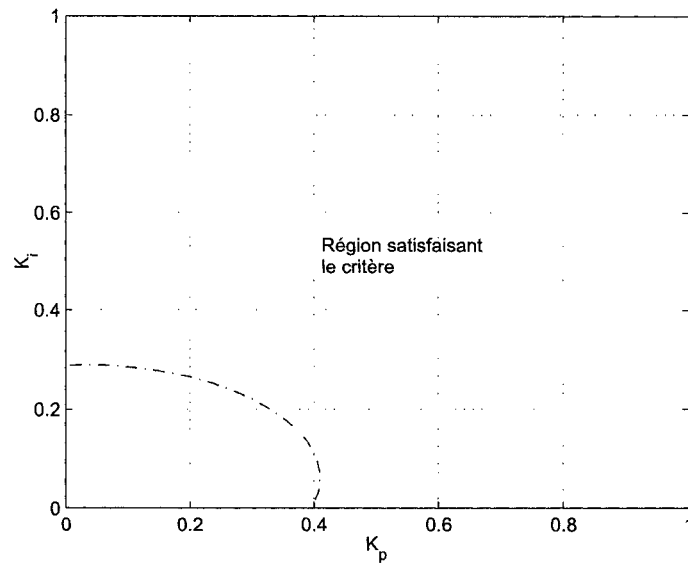


FIG. 5.5 – Région typique de la bande passante de $\bar{\gamma}/\delta_{ref}$

5.2.4 Marges de phase et de gain

Les deux derniers critères fréquentiels seront traités conjointement vu qu'ils font appel aux mêmes fonctions de transfert.

Dans le cas du contrôle de la vitesse de tangage q , la boucle ouverte à considérer est :

$$F_{BO}(s) = C(s)F(s) \quad (5.9)$$

Et pour le contrôle C^* :

$$F_{BO}(s) = C(s)F_{C^*}(s) \quad (5.10)$$

Sous Matlab, la fonction `margin` rend les marges de phase et de gain, mais selon notre façon de procéder, elle serait trop lourde à utiliser. Nous allons donc utiliser à nouveau la fonction `interp1` pour trouver les différentes marges.

On calcule une seule fois la réponse complexe de notre système $F(s)$ ou $F_{C^*}(s)$ avec la fonction `freqresp` pour un vecteur W de pulsations discrètes. On rentre de nouveau dans nos deux boucles pour balayer les valeurs discrètes de K_p et K_i . Voilà la démarche appliquée à chaque fois :

- Pour le correcteur en question, on calcule la réponse complexe de la boucle ouverte $F_{BO}(s)$ d'où on déduit la réponse en gain G et en phase P ,
- l'instruction `W_G_0=interp1(G,W,0)` donne la pulsation où le gain vaut $0dB$,
- et `P_G_0=interp1(W,P,W_G_0)` rend la phase à cette pulsation. On peut alors en déduire la marge de phase et la stocker dans la matrice des correcteurs.
- On procède de même pour la marge de gain. `W_P_180=interp1(P,W,-180)` donne la pulsation où le phase vaut -180° ,
- et `G_W_180=interp1(W,G,W_P_180)` rend le gain à cette pulsation. On stocke alors la marge de gain dans une seconde matrice à l'emplacement du correcteur testé.

On peut alors tracer les lignes de niveau 45° et 6 pour chacune des matrices et obtenir les régions que l'on voit sur la figure 5.6.

5.2.5 Critiques sur la méthode utilisée

On est en droit de se demander si la méthode utilisée est légitime. En effet, nous balayons ici tous les correcteurs d'une région donnée et calculons à chaque fois les critères fréquentiels pour les stocker dans des matrices dont on affichera certains niveaux à l'aide de la fonction `contour`. C'est une façon assez simpliste de procéder et

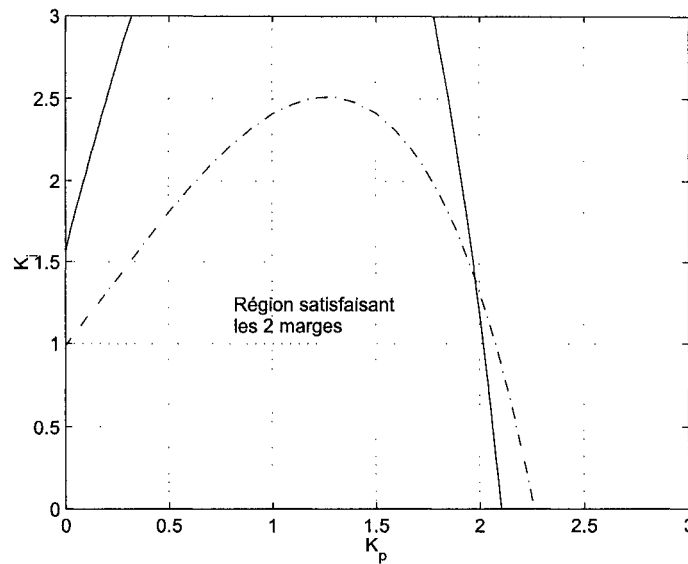


FIG. 5.6 – Région typique des marges de phase et de gain

sûrement une des plus lourdes. Nous avons seulement essayé d'économiser le plus de calculs à l'ordinateur pour ne lui laisser que les calculs essentiels. Sous la configuration utilisée, l'affichage de tous les critères fréquentiels sur un même graphique demande une trentaine de secondes. Ainsi une machine bien plus puissante abaisserait ce temps de calcul. Il faut néanmoins retenir que contrairement aux régions trouvées par applications gardiennes (qui demeurent bonnes tout de même), les régions trouvées par cette méthode sont exactes : les correcteurs des frontières imposent exactement les valeurs limites des critères.

Finalement, si ce n'est qu'une question de capacité de notre calculateur, nous aurions pu procéder de la même façon pour les amortissements des pôles. Mais dans ce cas-là, les temps de calcul augmentent considérablement et comme la méthode du chapitre 4 donne de très bons résultats, il n'est pas nécessaire de vouloir à tout prix les régions exactes pour les amortissements des pôles si cela demande plusieurs minutes pour obtenir les résultats.

Le problème reste alors ouvert pour trouver une méthode pour encore alléger les

calculs ou alors trouver une autre façon de procéder qui soit plus habile. Il faudrait éventuellement analyser les pôles et les zéros et essayer de dégager une façon d'en déduire les valeurs des critères fréquentiels. Pour l'instant, la présente méthodologie donne des résultats exacts dans des temps corrects.

5.3 Réglage du dropback

Une fois les gains K_p et K_i choisis, il reste à fixer la valeur du gain K_{ff} . La formule donnée au chapitre 2 va montrer ici son utilité de deux manières.

5.3.1 Détermination de K_{ff} pour un dropback donné

Supposons que nous ayons choisi les valeurs K'_p et K'_i pour les gains du PI, ainsi que la valeur K'_{ff} . Nous obtenons alors une certaine valeur de dropback Drb' (en supposant $q_{ss} = 1$). Or, d'après la formule (2.25) donnée au chapitre 2, le dropback peut directement s'exprimer en fonction des pôles réels et complexes du système.

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \left(\sum_{j=1}^k T_j + \sum_{j=1}^l 2 \frac{\xi_j}{\phi_j} \right) - \left(\sum_{j=1}^m \tau_j + \sum_{j=1}^n 2 \frac{\zeta_j}{\omega_j} \right) \quad (5.11)$$

Le gain K_{ff} n'apparaît explicitement que dans un seul zéro de la boucle fermée ; on peut alors décomposer le dropback de la façon suivante :

$$Drb = \frac{K_{ff} + K_p}{K_i} + \Sigma(K_p, K_i) \quad (5.12)$$

où $(K_{ff} + K_p)/K_i$ désigne le zéro où intervient K_{ff} et $\Sigma(K_p, K_i)$ désigne la partie du dropback qui ne dépend pas de K_{ff} (les autres pôles et zéros). Ainsi, si le triplet (K'_p, K'_i, K'_{ff}) a été choisi lors de l'étape précédente et connaissant la valeur du

dropback pour ce triplet particulier, on a les relations suivantes :

$$Drb' = \frac{K'_{ff} + K'_p}{K'_i} + \Sigma(K'_p, K'_i) \quad (5.13)$$

$$Drb = \frac{K_{ff} + K'_p}{K'_i} + \Sigma(K'_p, K'_i) \quad (5.14)$$

$$Drb = \frac{K_{ff} + K'_p}{K'_i} + Drb' - \frac{K'_{ff} + K'_p}{K'_i} \quad (5.15)$$

$$Drb = Drb' + \frac{K_{ff} - K'_{ff}}{K'_i} \quad (5.16)$$

Si le choix (K'_p, K'_i) des gains du PI est fixé par l'étape précédente, on peut donc imposer la valeur du dropback et déterminer la valeur de K_{ff} qui satisfait ce dropback.

$$K_{ff} = K'_{ff} + K'_i(Drb - Drb') \quad (5.17)$$

5.3.2 Détermination d'une région (K_{ff}, K_i) de dropback

En poussant plus loin le raisonnement, nous pouvons déterminer une région (K_{ff}, K_i) où le dropback sera satisfait. Cela sera utile lorsque viendra le moment du séquençement des gains dans le chapitre 7.

D'après les équations (5.2) et (5.3), nous avons pour le contrôle de la vitesse de tangage :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{M(s)}{T(s)} \frac{(K_{ff} + C(s))F(s)}{(1 + C(s)F(s))} \quad (5.18)$$

Et pour le contrôle C^* :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{M(s)}{T(s)} \frac{(K_{ff} + C(s))F(s)}{(1 + C(s)F_{C^*}(s))} \quad (5.19)$$

Si on suppose que :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (5.20)$$

Alors nous avons, d'après la formule (2.31) du chapitre 2 :

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0} \quad (5.21)$$

Les coefficients a_0 , a_1 , b_0 et b_1 sont très simples à calculer suivant les notations établies au début du chapitre. Ainsi si l'on note dans le cas du contrôle classique :

$$\frac{M(s)}{T(s)} = \frac{\dots + \alpha_1 s + \alpha_0}{\dots + \beta_1 s + \beta_0} \quad (5.22)$$

$$F(s) = \frac{\dots + n_1 s + n_0}{\dots + d_1 s + d_0} \quad (5.23)$$

On obtient :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{(\dots + \alpha_1 s + \alpha_0)((K_{ff} + K_p)s + K_i)(\dots + n_1 s + n_0)}{(\dots + \beta_1 s + \beta_0)(\dots + d_1 s^2 + d_0 s + (K_p s + K_i)(\dots + n_1 s + n_0))} \quad (5.24)$$

Soit :

$$\frac{q}{\delta_{ref}} = \frac{\dots + (\alpha_0 n_0 K_p + (\alpha_1 n_0 + \alpha_0 n_1) K_i + \alpha_0 n_0 K_{ff}) s + \alpha_0 n_0 K_i}{\dots + (\beta_0 n_0 K_p + (\beta_1 n_0 + \beta_0 n_1) K_i + \beta_0 d_0) s + \beta_0 n_0 K_i} \quad (5.25)$$

D'où, en appliquant la formule (5.21) et après plusieurs simplifications, la formule du dropback devient :

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{K_{ff}}{K_i} - \frac{d_0}{K_i n_0} + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \quad (5.26)$$

On voit alors comment se décompose le dropback dans le cas du contrôle classique. Il faut surtout noter l'absence du gain K_p qui ne modifie donc pas la valeur du dropback. On pourrait même exploiter cette formule plus loin en y introduisant les gains K_q et K_{nz} , et ainsi trouver la valeur du dropback en fonction de tous les gains du système, mais cela ne sera pas traité dans le présent document. Cette formulation se montrerait cependant particulièrement efficace dans le cadre d'une optimisation.

On peut procéder de même pour le dropback dans le cas de la loi C^* en notant :¹

$$F_{C^*}(s) = \frac{\dots + n_1^*s + n_0^*}{\dots + d_1s + d_0} \quad (5.27)$$

On obtient alors :

$$\frac{Drb}{q_{ss}} = \frac{K_{ff}}{K_i} - \frac{d_0}{K_i n_0^*} + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} - \frac{\beta_1}{\beta_0} + \frac{n_1}{n_0} - \frac{n_1^*}{n_0^*} \quad (5.28)$$

Ainsi le gain K_p n'apparaît pas non plus pour la loi de contrôle C^* .

On peut donc à présent imposer une valeur à K_{ff} et déterminer la région (K_p, K_i) où le dropback sera toujours vérifié. On sait que dans le plan (K_p, K_i) , on va obtenir des droites horizontales car le gain K_p n'intervient pas. Il est donc plus intéressant de tracer le critère dans le plan (K_{ff}, K_i) pour nous aider dans le choix des gains. La figure 5.7 illustre cela.

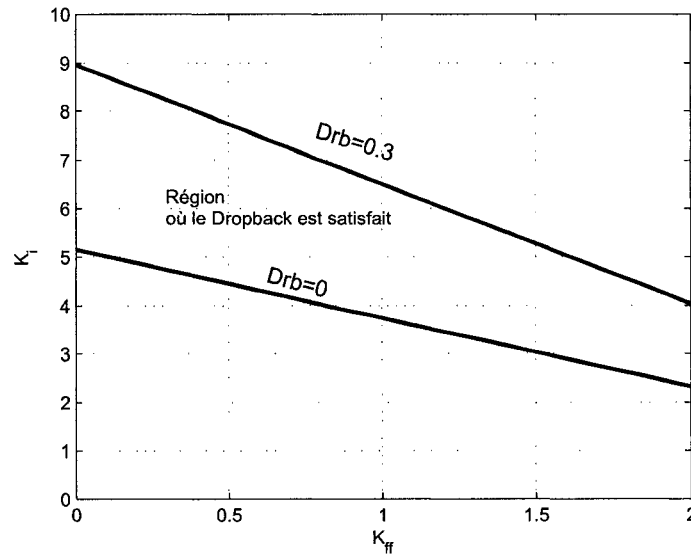


FIG. 5.7 – Exemple de région (K_{ff}, K_i) où le dropback est satisfait

¹Le dénominateur reste bien sûr semblable à celui de $F(s)$; seul le numérateur change.

CHAPITRE 6

INTERFACE GRAPHIQUE ET EXEMPLES D'UTILISATION

Nous avons exposé dans les deux chapitres précédents la méthodologie pour remplir les qualités de manœuvrabilité imposées. Afin de faciliter son emploi, nous avons programmé une interface graphique qui automatise une grande partie des procédures et guidera l'utilisateur dans la synthèse. Le chapitre se scinde en deux parties où, d'une part nous présentons le module graphique et d'autre part nous donnons des exemples d'utilisation.

6.1 Module GUI

6.1.1 Principe

Ce module GUI (Graphical User Interface) a pour principal objectif de fournir à l'utilisateur une interface conviviale et simple d'emploi, qui le guidera dans le choix des gains du contrôleur. Il permet de charger l'un des 160 modèles linéaires longitudinaux de l'avion considéré et d'effectuer le choix des gains selon la méthodologie suggérée. Une partie du module calcule et affiche pour tout nouveau quintuplet de gains, les valeurs des qualités de manœuvrabilité et indique si elles sont satisfaites ou pas. Enfin, les réponses temporelles désirées peuvent être visualisées.

Abordons plus en détails les différentes parties de ce module ainsi que ses fonctionnalités.

6.1.2 Description du module GUI

Le module GUI est divisé en six parties distinctes : les figures 6.1 et 6.2 montrent les allures générale et réelle du module GUI. Chacune des parties a été numérotée par souci de clarté.

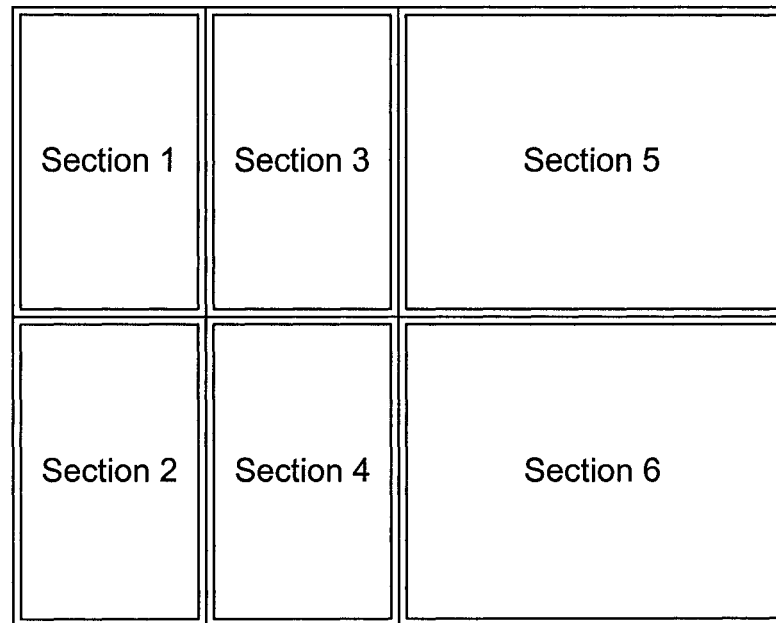


FIG. 6.1 – Allure générale du module GUI

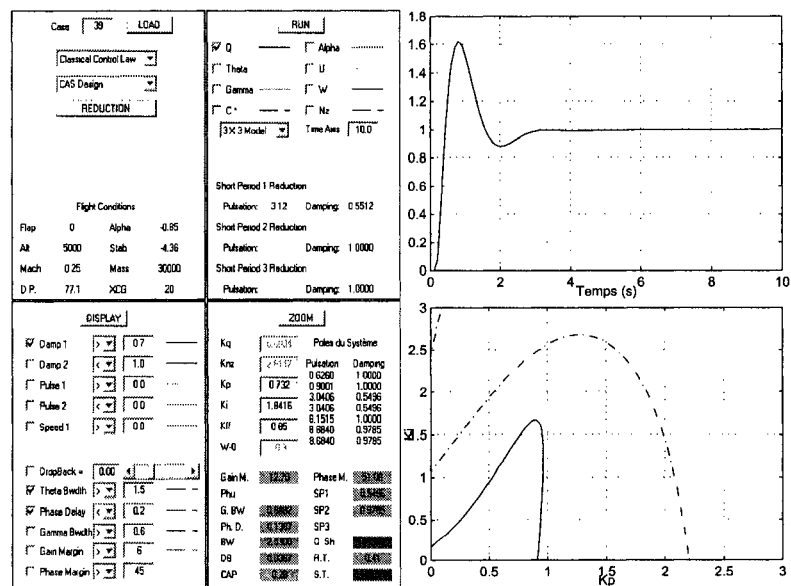


FIG. 6.2 – Allure réelle du module GUI

Voici les fonctions des différentes sections :

- Section 1 : Mise en mémoire du cas de vol désiré et choix de la méthode de contrôle
- Section 2 : Applications gardiennes et critères de performances désirés
- Section 3 : Réponses temporelles désirées
- Section 4 : Choix des gains, affichage des qualités de manœuvrabilité et des pôles du système
- Section 5 : Affichage des réponses temporelles
- Section 6 : Affichage des applications gardiennes et autres régions

6.1.3 Description des différentes sections

6.1.3.1 Section 1

Cette partie est dédiée à la mise en mémoire d'un des 160 cas de vol fournis par *Bombardier Inc.* Un cas de vol se présente de la manière suivante :

- 8 paramètres définissant la condition de vol
- 4 matrices (A, B, C, D)
- un quintuplet de gains ($K_q, K_{n_z}, K_p, K_i, K_{ff}$)

Les 8 paramètres qui servent à définir une condition de vol (en fait, un équilibre) sont affichés dans la section 1 du GUI (Fig. 6.3). Le tableau 6.1 donne leur description.

TAB. 6.1 – Conditions de vol

Flap	Position en degrés des elevateurs	Alpha	Angle d'incidence α en degrés
Alt	Altitude en pieds	Stab	Position du stabilisateur
Mach	Mach de l'avion	Mass	Masse de l'avion en livres
D.P.	Pression dynamique	XCG	Position du centre de gravité

The screenshot shows a GUI window with the following elements:

- A "Case" input field containing the number "39" and a "LOAD" button.
- A dropdown menu currently showing "Classical Control Law".
- A dropdown menu currently showing "CAS Design".
- A "REDUCTION" button.
- A section titled "Flight Conditions" containing a table of parameters.

Flight Conditions			
Flap	0	Alpha	-0.85
Alt	5000	Stab	-4.36
Mach	0.25	Mass	30000
D.P.	77.1	XCG	20

FIG. 6.3 – Section 1 du module GUI

Les 4 matrices (A, B, C, D) sont obtenues par linéarisation du système autour de cette condition de vol.

Enfin, le quintuplet de gains ($K_q, K_{n_z}, K_p, K_i, K_{ff}$) sont les gains optimaux obtenus par algorithme génétique. Ils servent de point de départ pour l'étude et sont affichés dans la section 3 du GUI.

L'utilisateur a 160 cas de vol à sa disposition, numérotés de 39 à 198. Il lui suffit de rentrer le numéro de cas qu'il veut traiter et de presser le bouton **LOAD** pour mettre les données en mémoire, afficher les conditions de vol et les gains donnés par algorithme génétique.

C'est aussi dans cette section que l'utilisateur décide sur quelle loi de contrôle il veut opérer puis sur quelle boucle il veut effectuer la synthèse. Via le premier menu déroulant, l'utilisateur choisit entre "Classical Control Law" pour le contrôle de la vitesse de tangage q et "C* Control Law" pour la loi de contrôle C^* . Le second menu

laisse le choix entre synthèse de la boucle SAS ou de la boucle CAS.

6.1.3.2 Section 2

Cette section (Fig. 6.4) est consacrée aux applications gardiennes et à la définition d'une région Ω de stabilité. La définition de cette région Ω se fait de manière très simple. On peut définir des lignes d'iso-amortissements, ainsi que des courbes d'iso-pulsations

DISPLAY			
☒	Damp 1	>	0.7 ———
☐	Damp 2	<	1.0 ———
☐	Pulse 1	>	0.0
☐	Pulse 2	<	0.0
☐	Speed 1	>	0.0
☐	DropBack =		0.00 []
☒	Theta Bwdth	>	1.5 — — —
☒	Phase Delay	<	0.2 — — —
☐	Gamma Bwdth	>	0.6 — — —
☐	Gain Margin	>	6
☐	Phase Margin	>	45

FIG. 6.4 – Section 2 du module GUI

Afin d'afficher l'application gardienne préservant un amortissement ou une pulsation donné, il suffit de cocher la case correspondant à ce critère, de spécifier la valeur désirée et d'ajuster le signe d'inégalité suivant que l'on veut des propriétés de pôles supérieures ou inférieures à la valeur spécifiée. Une pression sur le bouton **DISPLAY** lance le calcul et affiche le résultat dans la section 6. A chaque critère correspond une couleur.

Il en est de même pour les critères fréquentiels et le Dropback. Lors des synthèses des boucles CAS, l'utilisateur peut spécifier quels critères il veut afficher ainsi que définir éventuellement les nouvelles valeurs limites. Par défaut, ce sont les valeurs

exigées de *Bombardier Inc.*

Pour la suite, lors du choix des gains, un rectangle vert ou rouge vient mettre en évidence la valeur du critère, suivant qu'il est rempli ou pas. Bien évidemment, plusieurs critères de performance peuvent être affichés en même temps, les couleurs les différenciant.

6.1.3.3 Section 3

La section 3 (Fig. 6.5) est dédiée aux réponses temporelles que l'utilisateur désire visualiser. Ce sont les réponses à un échelon unitaire de manche δ_{ref} . Il a de plus le choix entre un modèle linéaire matriciel 3×3 ou 5×5 . Les 8 sorties que l'utilisateur peut tracer sont rassemblées dans le tableau 6.2.

The screenshot shows a software interface for selecting time response outputs. At the top is a 'RUN' button. Below it are checkboxes for 'Q' (checked), 'Alpha', 'Theta', 'U', 'Gamma', 'W', 'C*', and 'Nz'. A dropdown menu is set to '3x3 Model' and a 'Time Axis' field is set to '10.0'. The bottom section displays simulation results for three short periods:

Short Period 1 Reduction	
Pulsation:	3.10 Damping: 0.5138
Short Period 2 Reduction	
Pulsation:	Damping: 1.0000
Short Period 3 Reduction	
Pulsation:	Damping: 1.0000

FIG. 6.5 – Section 3 du module GUI

Il lui suffit seulement de cocher les cases des sorties qui l'intéressent. Plusieurs sorties peuvent donc être visualisées simultanément, sachant que chacune a sa propre couleur. Une pression sur le bouton **RUN** génère alors l'affichage des données. De plus, l'axe des temps peut être modifié; le nouveau temps de simulation doit être rentré dans la case prévue à cet effet.

TAB. 6.2 – Réponses Temporelles Disponibles

Q	Vitesse de tangage q	Alpha	Angle d'incidence α
Theta	Assiette θ de l'avion	V	Vitesse horizontale
Gamma	Pente γ de l'avion	W	Vitesse verticale
C*	Sortie C*	Nz	Accélération Verticale de l'avion

Le choix entre un modèle 5×5 ou 3×3 de l'avion permet de visualiser le comportement de l'avion avec ou sans la dynamique du mode phugoïde. En fait, dans le modèle 3×3 , les variables d'état α et V sont éliminées au moyen de la commande `modred` de Matlab (mise à zéro des variables d'état et de leur dérivée). En effet, ce sont ces deux états qui génèrent le mode Phugoïde. Si le modèle 5×5 permet de visualiser la réponse complète de l'avion, le modèle 3×3 met lui en évidence la réponse rapide de l'avion, soit celle du mode Short Period.

6.1.3.4 Section 4

La partie 4 (Fig. 6.6) est consacrée au choix des gains du correcteur, du pôle du filtre *Wash-Out* et aux qualités de manœuvrabilité.

A tout moment, l'utilisateur peut modifier les valeurs de 5 gains ($K_q, K_{n_z}, K_p, K_i, K_{ff}$), ainsi que la valeur du pôle du filtre. Pour visualiser l'effet du changement, aussi bien sur les réponses temporelles que sur les qualités de manœuvrabilité, il faut de nouveau presser le bouton **RUN**.

Dès qu'un changement est effectué, les qualités de manœuvrabilité sont automatiquement actualisées. Le tableau 6.3 donne la signification de chaque abréviation. Suivant qu'une qualité de manœuvrabilité est satisfaite ou pas, un rectangle vert ou rouge vient mettre en évidence la valeur calculée.

ZOOM			
Kq	0.0004	Poles du Système	
Knz	2.8147	Pulsation	Damping
Kp	0.7167	0.6342	1.0000
Ki	1.9328	0.9001	1.0000
Kff	0.8	3.0343	0.5124
W-D	-0.9	3.0343	0.5124
		8.2195	1.0000
		8.8407	0.9763
		8.8407	0.9763
Gain M.	12.63	Phase M.	49.74
Phu		SP1	0.5124
G. BW	0.9701	SP2	0.9763
Ph. D.	0.1398	SP3	
BW	2.4242	O. Sh.	
DB	0.0123	R. T.	
CAP		S. T.	2.93

FIG. 6.6 – Section 4 du module GUI

TAB. 6.3 – Qualités de manœuvrabilité

Gain M.	Marge de Gain
Phu	Amortissement du mode Phugoïde
G.BW.	Bande passante de $\bar{\gamma}/\delta_e$
Ph.D.	Retard de Phase (Phase Delay)
BW	Bande passante de $\bar{\theta}/\delta_e$
DB	Dropback
CAP	Control Anticipate Parameter
Phase M.	Marge de Phase
SP1	Amortissement du mode Short Period 1
SP2	Amortissement du mode Short Period 2
SP3	Amortissement du mode Short Period 3
O. Sh.	Dépassement (Over Shoot)
R.T.	Temps de Montée (Rise Time)
S.T.	Temps d'établissement (Settle Time)

6.1.3.5 Section 5

Cette section est chargée d'afficher les réponses temporelles qui ont été choisies dans la section 3. En abscisse, nous avons bien évidemment le temps en seconde. Toutes les réponses temporelles s'affichent sur le même graphe, leur couleur les différenciant.

6.1.3.6 Section 6

La dernière section affiche les applications gardiennes ainsi que les autres critères. La section 6 est une zone active dans le sens où un clic de souris actualise les valeurs des gains en jeu. Ainsi par défaut, nous avons K_p sur l'axe des abscisses et K_i sur l'axe des ordonnées. En cliquant à n'importe quel endroit du graphe, les valeurs de K_p et K_i sont actualisées dans la section 4. Par la suite, toutes les réponses temporelles et qualités de manœuvrabilité sont automatiquement recalculées et affichées. Cela équivaut donc à presser le bouton **RUN**. Ainsi l'utilisateur peut cliquer n'importe où et vérifier instantanément l'effet des nouveaux gains. De même, il peut déterminer la zone où tous les critères de la section 2 sont remplis dès que tous les rectangles affichés sont verts.

6.2 Exemples d'utilisation

Nous allons dans la section suivante présenter deux cas d'utilisation, l'un pour le contrôle de la vitesse de tangage q , l'autre pour le contrôle C^* . Nous nous contentons du premier cas de vol. Dans l'Annexe II, sont répertoriées les valeurs choisies pour les 20 premiers cas de vol nominaux.

Lors de la mise en place de la méthodologie, nous n'avons pas véritablement traité le temps de réponse et le dépassement. D'une part, ces critères ne sont pas véritablement imposés par *Bombardier Inc.* si ce n'est d'avoir un temps de réponse et un dépassement raisonnables, et d'autre part ils ne sont pas évidents à exprimer en fonction des paramètres du système dès que l'on a plusieurs pôles et plusieurs zéros. Nous donnons

ici des conseils pour essayer de remplir ces deux critères supplémentaires dans une certaine mesure.

6.2.1 Contrôle classique - Cas de Vol 39

Voici d'abord un exemple sur la loi de contrôle dite classique.

6.2.1.1 Synthèse de la boucle SAS

La synthèse de la boucle SAS est essentielle car c'est d'elle que dépendra les performances de la boucle CAS. Nous pouvons faire plusieurs remarques à son sujet. Parmi les 2 paramètres au choix, K_{n_z} et K_q , le second ne joue pas un rôle déterminant, voire même plutôt néfaste. En effet si l'on augmente K_q , la pulsation propre du mode Short Period 1 diminue, ralentissant ainsi notre boucle SAS. De plus pour de hautes pressions dynamiques, c'est l'amortissement qui diminue rapidement. On peut donc discuter de l'intérêt de ce filtre dans la boucle SAS. Pour appuyer cette constatation, on peut alléguer que tous les quintuplets optimaux donnés par algorithme génétique avaient des valeurs de K_q extrêmement faibles, voire presque nulles. Il faudrait envisager de modifier le pôle du filtre pour améliorer son effet. On prendra néanmoins des valeurs très faibles de K_q . Il s'agit donc de se concentrer sur K_{n_z} .

Le but majeur de la boucle SAS est d'assurer une certaine stabilité et d'augmenter l'amortissement des pôles. Néanmoins, en automatique, tout est question de compromis. Ainsi, amortir fortement les pôles de la boucle SAS va permettre d'augmenter les zones de fort amortissement sur la boucle CAS (on entend par fort amortissement, un amortissement supérieur à 0.9) mais va ralentir notre système d'autant et diminuer le choix des gains de la boucle CAS qui vont donner de bons temps de réponse. Il s'agit donc de ne pas avoir un amortissement excessif de la boucle SAS.

À basse pression dynamique, on choisira K_{n_z} grand ce qui amortira fortement les pôles et donnera de bons résultats pour la boucle CAS. À haute pression, on prendra K_{n_z} faible pour avoir un amortissement autour de 0.7 (ou plus) avec une pulsation propre la plus haute possible. Une éventuelle explication serait qu'à basse pression

dynamique, le facteur de charge n_z est faible d'où un plus grand gain nécessaire pour faire valoir son effet alors qu'à haute pression, sa valeur est plus grande, d'où un gain K_{n_z} moindre.

La figure 6.7 illustre pour les 4 premières conditions de vol comment on choisirait K_{n_z} . K_q demeurerait très petit voire nul.

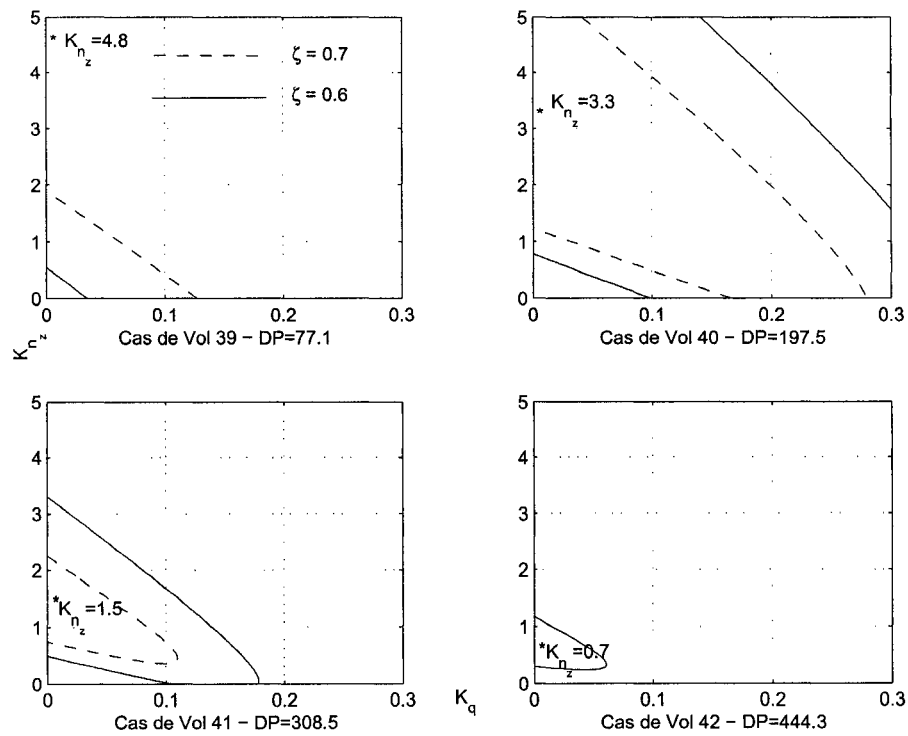


FIG. 6.7 – Synthèse de la boucle SAS - Contrôle de la Vitesse de Tangage

6.2.1.2 Synthèse de la boucle CAS

Une fois le choix de K_q et K_{n_z} effectué, il nous reste à procéder à la synthèse de la boucle CAS. Il suffit de demander au GUI le tracé de tous les critères fréquentiels, et des amortissements à 0.6 et 0.7 pour se donner un point de repère. Dans le cas 39, on obtiendrait la région de la figure 6.8. Pour les autres conditions de vol, le genre

de région obtenue serait similaire mais à des échelles différentes. La zone d'intérêt est la région hachurée. A l'intérieur, tous les critères fréquentiels sont satisfaits et l'amortissement est en l'occurrence supérieur à 0.7.

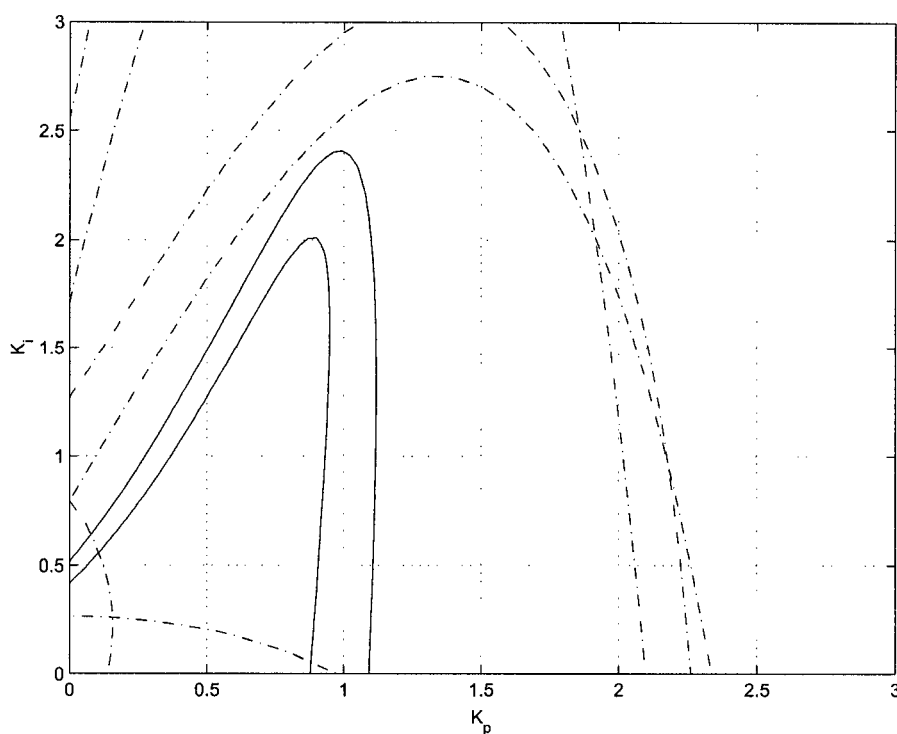


FIG. 6.8 – Région typique de la boucle CAS

Donc en cliquant à l'intérieur de cette zone, nous sommes assurés de satisfaire tous les critères fréquentiels et modaux. Restent à voir le dropback et le temps de réponse. La façon empirique de procéder est d'essayer d'avoir un temps de réponse assez petit, quitte à sortir de la zone d'amortissement à 0.7. Ensuite, on coche la case dropback et on fixe sa valeur (de bons résultats sont obtenus en fixant le dropback à 0). Ensuite on presse **RUN**, le dropback s'ajuste à la valeur désirée. On constate alors que les valeurs des qualités de manœuvrabilité n'ont pas beaucoup bougé et que le temps de réponse demeure adéquat.

Pour le choix $K_q = 0.0005$, $K_{n_z} = 4.8$, $K_p = 0.71$, $K_i = 1.4$, $K_{ff} = 0.52$, on obtient la réponse de la figure 6.9. On se reportera à l'Annexe II quant aux quintuplets choisis pour le contrôle classique sur les 20 premiers cas de vol.

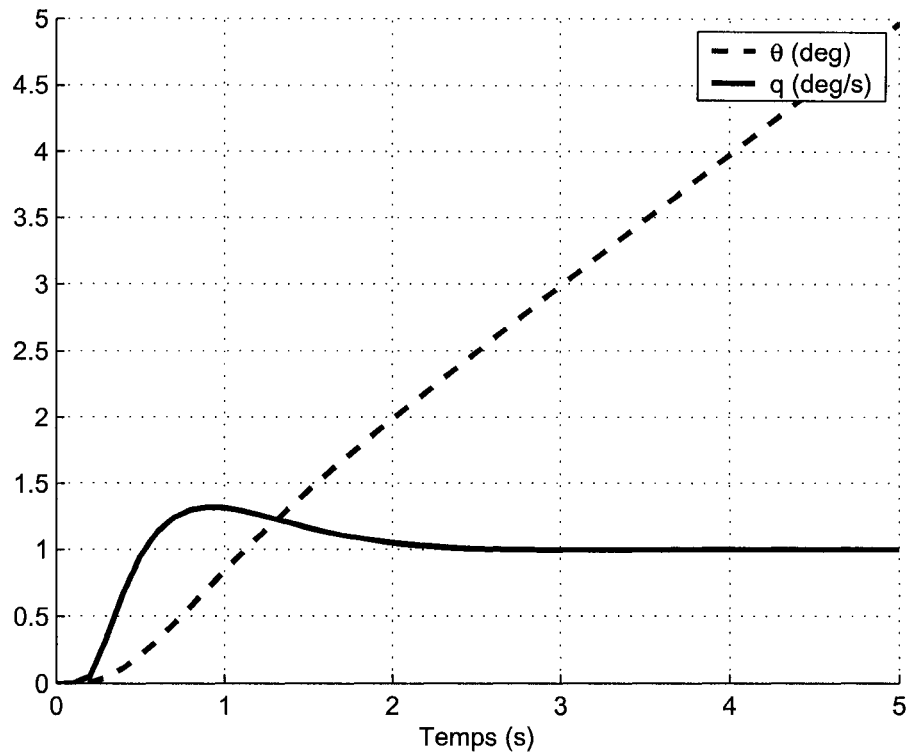


FIG. 6.9 – Réponse à un échelon unitaire δ_{ref} - Contrôle classique (cas 39)

6.2.2 Contrôle C* - Cas de vol 39

Nous poursuivons à présent en considérant la loi de contrôle C*.

6.2.2.1 Synthèse de la Boucle SAS

Comme précédemment, la boucle SAS va servir essentiellement à amortir les pôles de notre système, en l'occurrence ceux du mode Short Period. La figure 6.10 illustre

sur les 4 premières conditions de vol comment on choisirait K_q et le pôle du filtre *Wash Out*. On remarque sur tous les cas de vol, la boucle dessinée par la région d'amortissement à 0.7 ; l'intérieur de la boucle (hachuré) garantit que tous les pôles ont un amortissement au-delà de 0.7. On peut observer un déplacement de cette boucle lorsque la pression dynamique augmente.

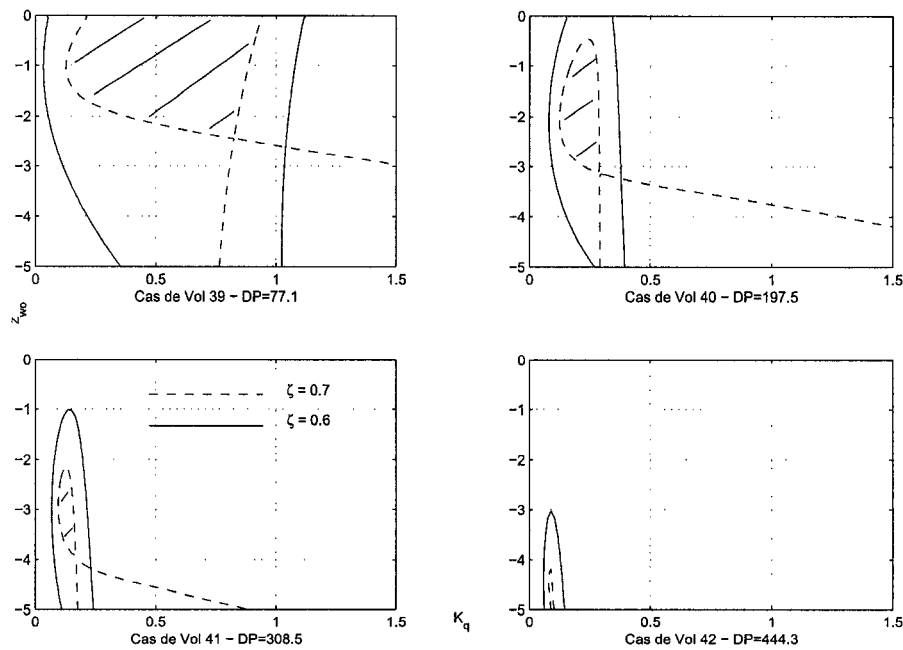


FIG. 6.10 – Synthèse de la boucle SAS - Contrôle C*

6.2.2.2 Synthèse de la Boucle CAS

Lorsque les valeurs du gain et du pôle sont choisies, on peut procéder à la synthèse de la boucle CAS. Comme dans le contrôle de la vitesse de tangage, on choisit de tracer les zones d'amortissements à 0.6 et 0.7, ainsi que tous les autres critères fréquentiels. On obtient typiquement le genre de régions de la figure 6.11. Le domaine hachuré représente la région remplissant tous les critères autres que celui du dropback. Pour les autres cas de vol, les régions seraient similaires mais à des échelles différentes. En

effet, quand la pression dynamique augmente, on remarque que ces régions rétrécissent et gagnent des valeurs faibles de gains, comme dans le cas du contrôle de la vitesse de tangage.

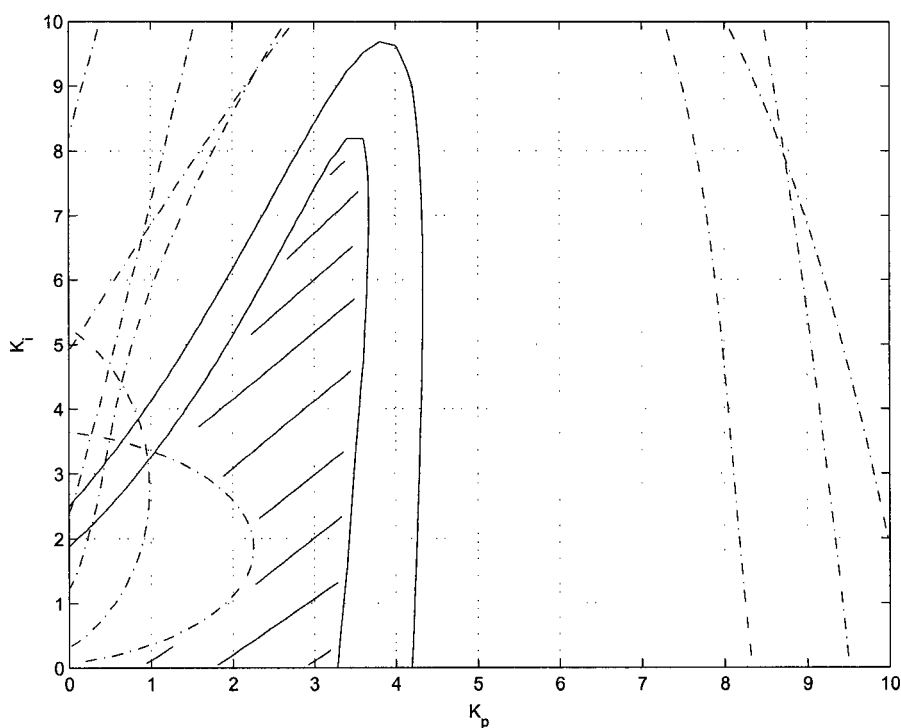


FIG. 6.11 – Région typique de la boucle CAS

L'effet du gain K_{ff} est similaire au contrôle classique. Dans une certaine mesure, augmenter ce gain diminue le temps de réponse mais accroît le dépassement. Il s'agit de l'ajuster pour satisfaire les derniers critères temporels et le dropback, si ce n'est déjà fait.

Pour le choix $K_q = 0.29$, $z_{wo} = -0.975$, $K_p = 2.79$, $K_i = 4.54$, $K_{ff} = 0.43$, on obtient la réponse de la figure 6.12. On a volontairement normaliser la réponse en tangage q pour avoir un régime permanent unitaire. On se reportera à l'Annexe II pour les quintuplets choisis pour les 20 premiers cas de vol.

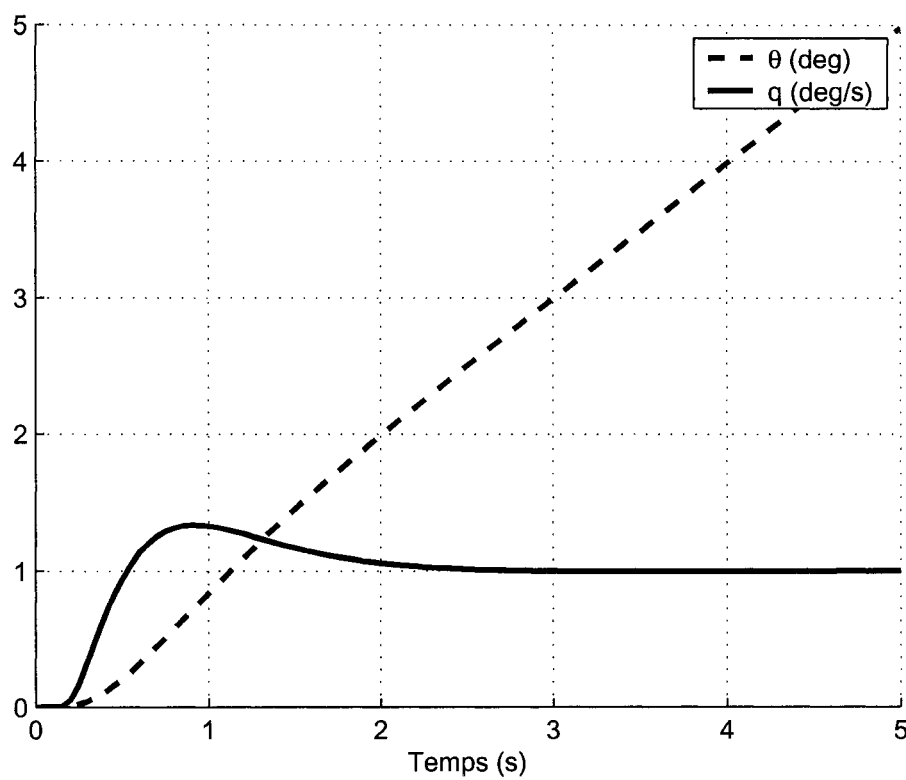


FIG. 6.12 – Réponse normalisée à un échelon unitaire δ_{ref} - Contrôle C^* (cas 39)

Dans l'ensemble des cas, la démarche a permis de trouver des quintuplets qui satisfaisaient à chaque fois toutes les qualités de manœuvrabilité. Il reste encore des améliorations à apporter au module GUI mais il est tout à fait fonctionnel et performant en l'état actuel. Dans le prochain et dernier chapitre, nous allons essayer d'utiliser la méthode dans le cadre d'un contrôle robuste et dans l'optique d'un séquençement des gains.

CHAPITRE 7

SÉQUENCEMENT DES GAINS ET ROBUSTESSE

La méthodologie présentée dans les deux chapitres précédents permet donc pour un cas de vol donné de trouver des valeurs de gains pour satisfaire toutes les qualités de manœuvrabilité. Deux aspects sont maintenant à considérer : la robustesse et le séquençement des gains.

Pour chaque condition de vol, nous avons 8 modèles du mode longitudinal pour différents centrages et masses de l'avion. Les cas 39 à 58 sont les 20 cas nominaux ; chacun de ces 20 cas est décliné suivant 7 autres versions où la masse et le centrage sont modifiés. Le but d'un contrôleur robuste est d'assurer que les critères de performance vont toujours être satisfaits, même si on modifie la masse ou le centrage de l'appareil. Il s'agit de trouver des valeurs de gains qui vont assurer cela.

En ce qui concerne le séquençement des gains, le problème se situe entre les 20 conditions de vol. Pour un gain particulier, par exemple K_p , nous avons 20 valeurs différentes qui correspondent chacune à une condition de vol. Nous aimerions en fait trouver une courbe simple, fonction d'un ou deux paramètres caractéristiques de la condition de vol, qui passerait par ces 20 valeurs.

Nous proposons ici une utilisation de la méthodologie précédente pour éventuellement trouver des contrôleurs robustes et un séquençement possible des gains. Les interprétations seront essentiellement graphiques. Il s'agit simplement de donner des pistes et de constater que cela est effectivement possible. Cette partie mériterait à elle seule un mémoire complet.

7.1 Séquencement des gains

Comme dit dans l'introduction, pour séquencer nos gains, il nous faut trouver une fonction qui passera par toutes ces valeurs, et qui dépendra d'un ou deux paramètres spécifiques de la condition de vol.

7.1.1 Variable de séquencement

Une condition de vol, en l'occurrence un équilibre, est définie par une altitude, un nombre de Mach et une incidence. On pourrait ainsi essayer de trouver une fonction dépendant du Mach et de l'altitude, et qui associerait la bonne valeur de gain. Mais trouver une fonction de deux variables ne serait pas ici la chose la plus aisée. Chaque condition de vol peut être aussi définie par la pression dynamique ; ainsi des cas de vol qui ont une même pression dynamique mais des altitudes et des Machs différents présentent néanmoins des propriétés similaires, et donc vont donner des valeurs de gains pratiquement semblables. La pression dynamique semble donc être une bonne candidate pour opérer le séquencement des gains.

Si l'on reprend l'enveloppe de vol du chapitre 1, la figure 7.1 illustre la valeur de la pression dynamique à chaque point de vol.

De même, en reprenant les valeurs trouvées dans le chapitre 6, on peut éventuellement procéder à une première interpolation qui nous donne une idée des fonctions à employer (Fig. 7.2). L'extension *Curve Fitting* de **Matlab** permet de trouver des fonctions qui vont approximer au mieux l'allure suggérée par les valeurs choisies précédemment.

On peut voir que pour les gains K_q , K_p , K_i et le pôle z_{wo} , les approximations sont relativement bonnes. En revanche, pour le gain K_{ff} , la répartition des points ne laisse pas présager d'une courbe simple pouvant interpoler au mieux toutes les valeurs.

En ce qui concerne les 3 gains, les fonctions utilisées sont de la forme $y(p) = a/p + b$, où p désigne la pression dynamique et, a et b , sont les constantes à déterminer. Pour le pôle du filtre, c'est une approximation linéaire $y = ap + b$. Nous avons pris d'abord

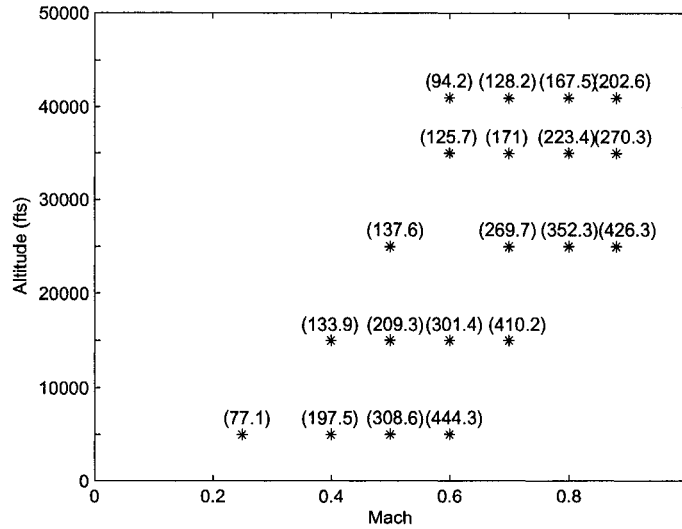


FIG. 7.1 – Enveloppe de vol et pressions dynamiques

les fonctions données dans [1] mais par la suite, nous verrons que d'autres fonctions se prêteront mieux à l'interpolation, notamment l'exponentielle.

Si l'on impose des gains selon ces approximations, il sera éventuellement possible de trouver une courbe pour le gain K_{ff} qui ira au mieux.

7.1.2 Méthodologie suggérée

Nous allons poursuivre sur les 20 cas de vol nominaux de 39 à 58. Nous nous intéressons ici à la loi de contrôle C^* . Selon la méthodologie proposée, nous réglons d'abord la boucle SAS, en plaçant les pôles du mode Short Period avec un amortissement supérieur à 0.7. La figure 7.3 montre les régions que nous obtenons sur les 8 premières conditions de vol.

On peut voir que les régions ont une allure similaire, avec toutefois, un décalage et un rétrécissement de la boucle au fur et à mesure que la pression dynamique augmente. L'intérieur de la boucle correspond à un amortissement supérieur à 0.7. On pourrait ainsi faire passer une courbe à travers ces boucles pour séquencer notre

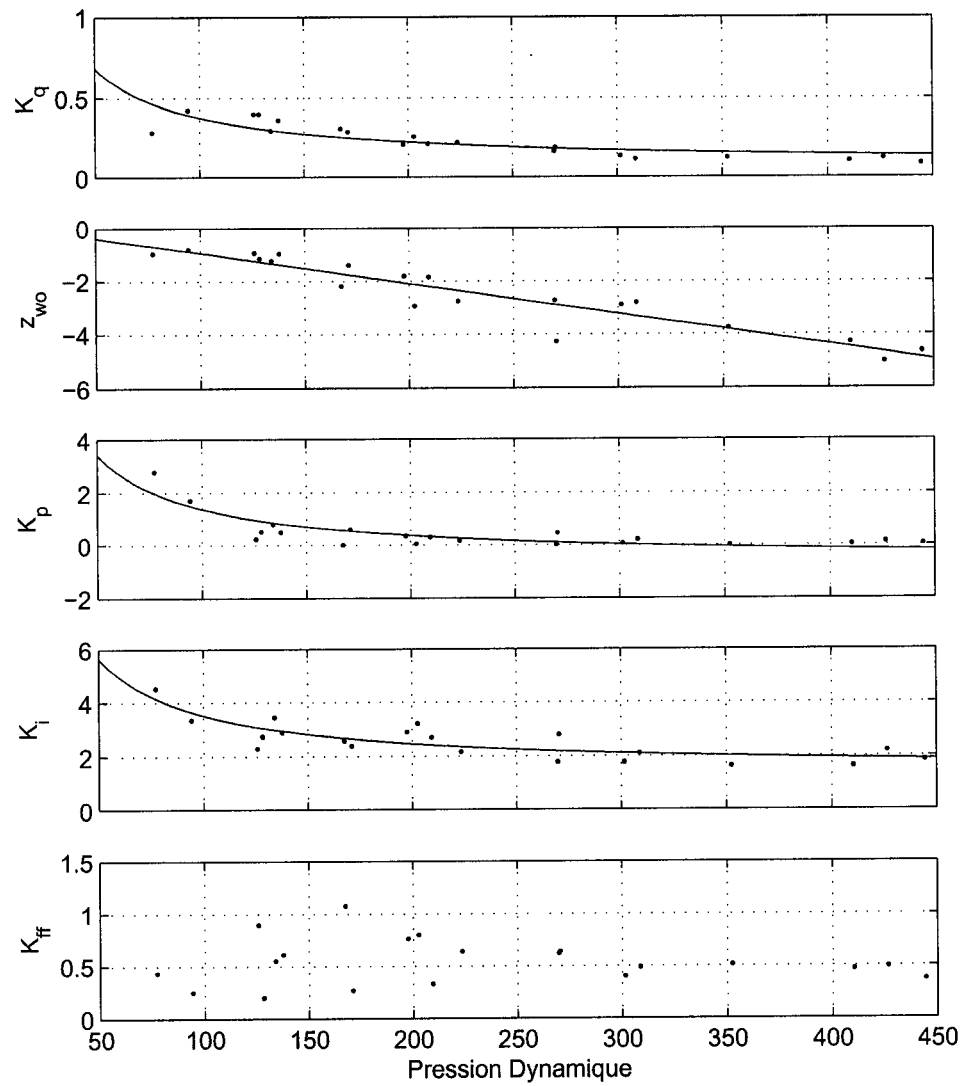


FIG. 7.2 – Premier séquençement

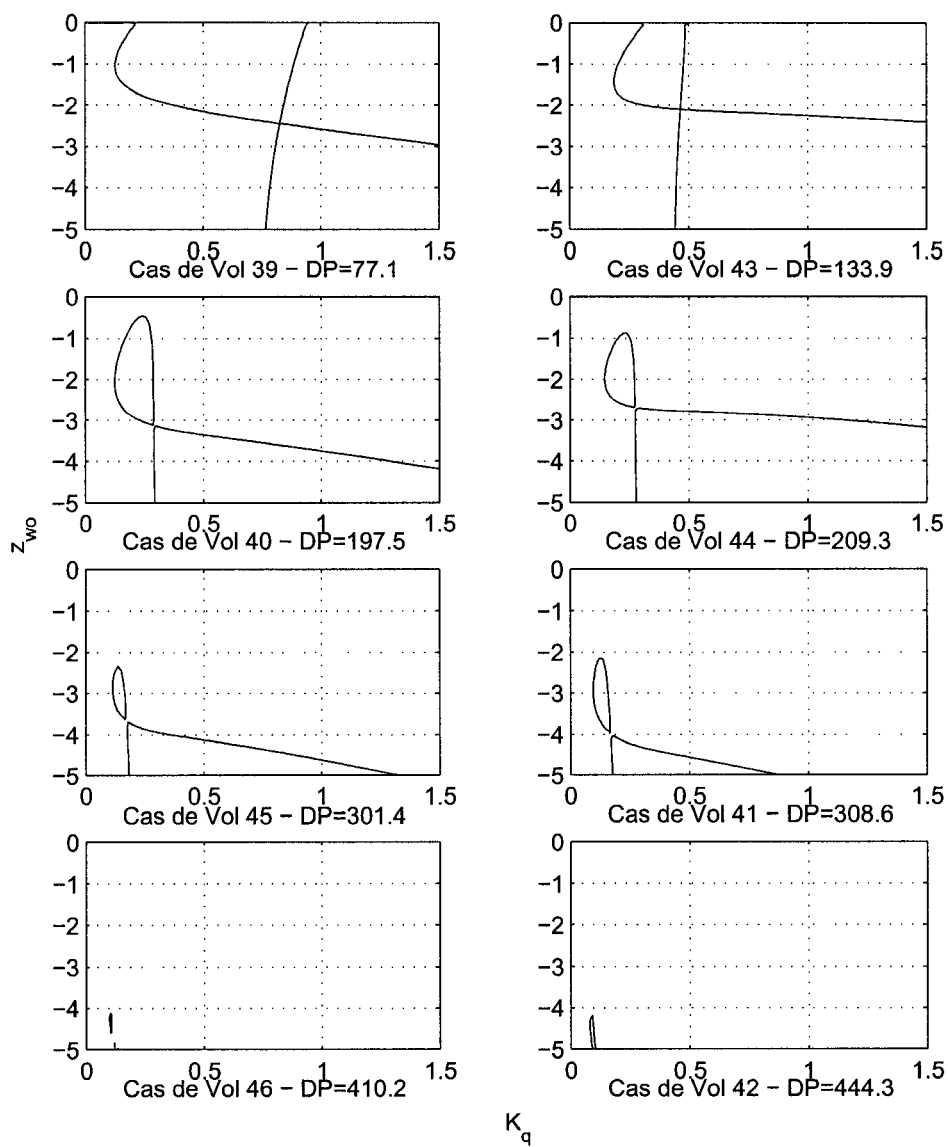


FIG. 7.3 – Régions pour la boucle SAS sur les cas de vol 39-46

gain K_q et notre pôle $-z_{wo}$ grâce à l'aide d'une approche par optimisation. De plus, à basse pression dynamique, la « boucle » est relativement grande, et donc le choix plus large ; néanmoins, certains couples de gains à l'intérieur de la boucle doivent être plus efficaces que d'autres pour la suite. Cependant, nous ne donnons ici que des indications ; voici les courbes trouvées après quelques essais. Nous avons utilisé une fonction avec exponentielle pour le gain K_q car l'approximation en était meilleure.

Ainsi par exemple :

$$K_q = 0.7391e^{-0.006303p} + 0.02921 \quad (7.1)$$

$$z_{wo} = -0.01026p + 0.03885 \quad (7.2)$$

Nous pouvons ensuite synthétiser la boucle CAS, en mettant un effort particulier pour le K_{ff} afin de le séquencer. Dans [1], la forme $K_{ff} = a/p + b$ est suggérée pour ce gain. Nous allons cependant voir s'il est possible de trouver mieux. Comme vu dans le chapitre 5, nous pouvons utiliser la formule du dropback fonction de K_i et K_{ff} . Sur la figure 7.4, nous avons tracé les droites de dropback nul selon la pression dynamique. La surface tracée est là pour donner une meilleure visibilité. On peut voir que la tendance générale est que les gains K_i et K_{ff} diminuent quand la pression dynamique augmente.

En respectant cela, nous avons pris quelques valeurs de K_{ff} pour certaines pressions dynamiques et la forme retenue est la suivante :

$$K_{ff} = \frac{349400}{p^3} + 0.1826 \quad (7.3)$$

On peut à présent se concentrer sur le choix de K_p et K_i . Nous savons que les amortissements des pôles sont indépendants de K_{ff} et si l'on observe la figure 7.5, on voit de même qu'il faut prendre des gains K_p et K_i de plus en plus faibles quand la pression dynamique augmente (trait continu). La ligne pointillé désigne la région

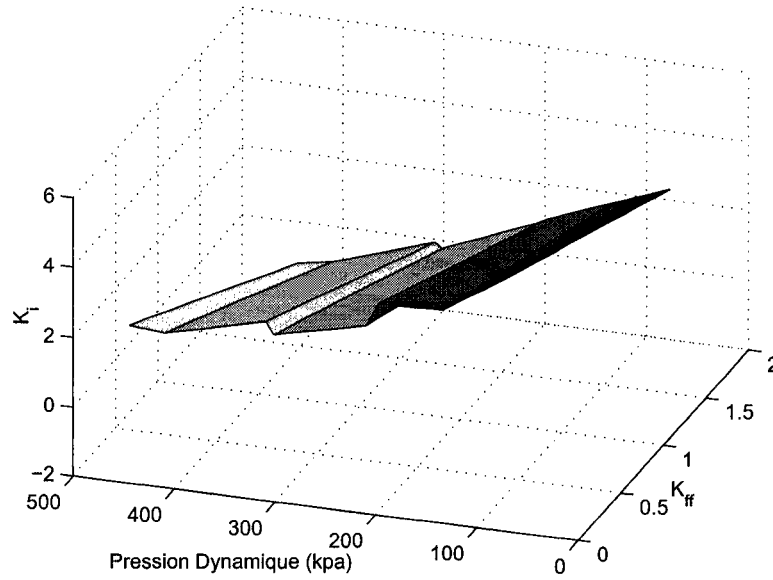


FIG. 7.4 – Surface de dropback nul

où le critère de la bande passante est rempli ; ces régions ne sont valables que pour la valeur de K_{ff} séquencée auparavant. L'étoile désigne la région où les deux critères sont remplis. Nous n'avons pas tracé les autres critères par souci de clarté ; on vérifiera par la suite que tous les critères sont remplis.

Nous avons ensuite choisi pour chacune de ces régions des couples (K_p, K_i) qui donnaient de bons résultats et ensuite interpolé ces valeurs. Voici, par exemple, les fonctions trouvées :

$$K_p = \frac{1184000}{p^3} + 0.1383 \quad (7.4)$$

$$K_i = 2.331e^{-0.003285} + 1.798 \quad (7.5)$$

L'utilisation d'une exponentielle a été une fois de plus préférée. La figure 7.6 montre d'une part, les allures des réponses temporelles obtenues en 3 dimensions suivant la valeur de la pression dynamique et d'autre part, la superposition de toutes ces courbes.

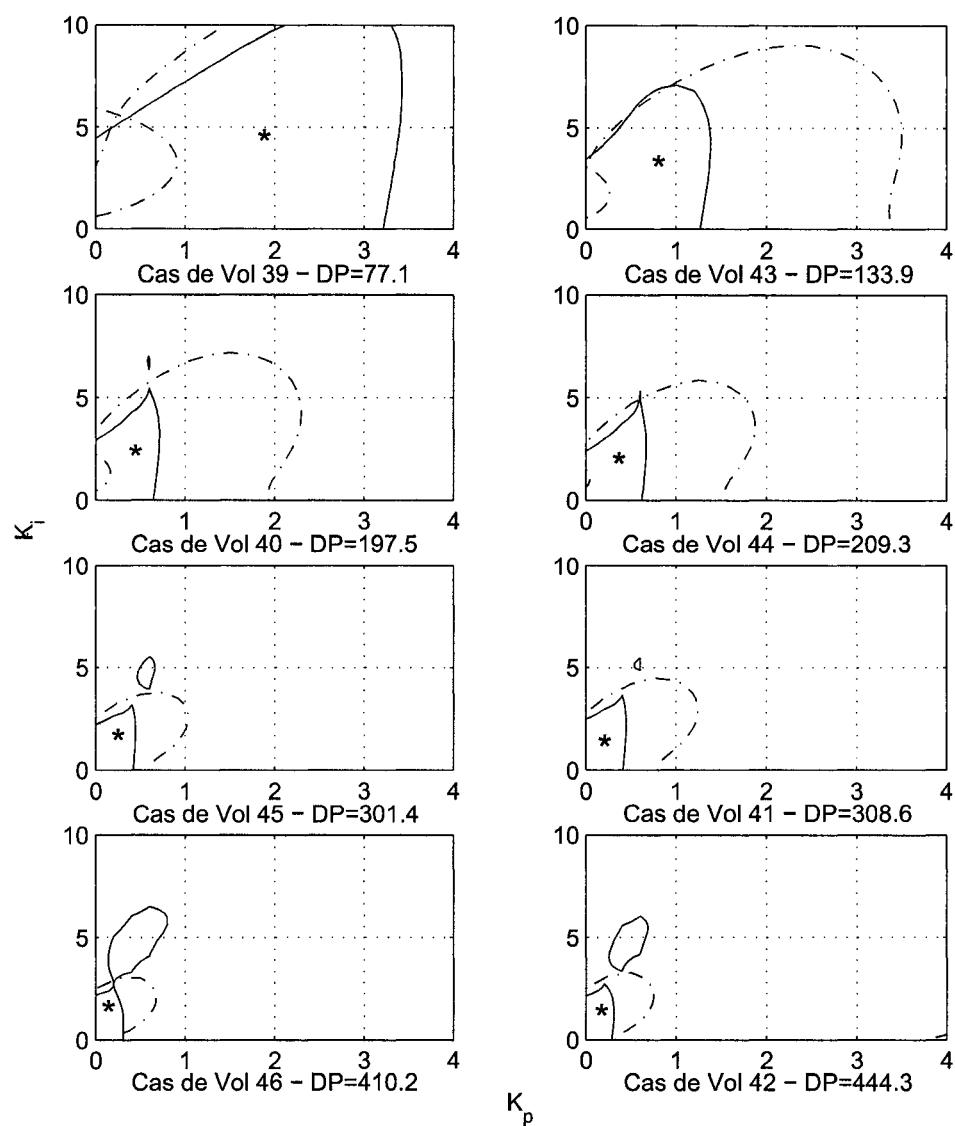


FIG. 7.5 – Régions pour la Boucle CAS sur les cas de vol 39-46

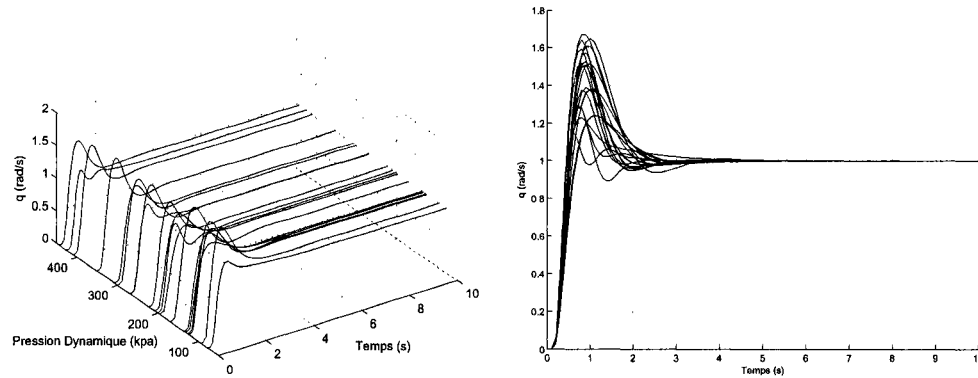


FIG. 7.6 – Réponses temporelles obtenues par séquençement

En annexe III, sont disponibles tous les résultats quant aux qualités de manœuvrabilité et les réponses en tangage q et en assiette θ .

7.2 Robustesse

Nous allons à présent nous intéresser au problème de la robustesse. Un contrôleur établi pour une condition de vol doit demeurer robuste à une certaine variation de la masse et du centrage de l'avion, c'est-à-dire toujours satisfaire les qualités de manœuvrabilité.

7.2.1 Modèles incertains

Comme dit dans l'introduction, les incertitudes considérées sont la masse m et le centrage x_{cg} de l'avion. La figure 7.7 montre la répartition des 8 couples (masse/centrage) pour une condition de vol.

Nous allons donc chercher des modèles de chaque condition de vol paramétrés par la masse m et le centrage x_{cg} de l'avion. Nous allons cependant normaliser ces grandeurs pour simplifier les choses. Ainsi, nous avons $m \in [\underline{m}, \overline{m}]$ et $x_{cg} \in [\underline{x}_{cg}, \overline{x}_{cg}]$. On peut alors écrire $m = \underline{m} + \delta_m(\overline{m} - \underline{m})$ $x_{cg} = \underline{x}_{cg} + \delta_{x_{cg}}(\overline{x}_{cg} - \underline{x}_{cg})$ où δ_m et $\delta_{x_{cg}}$ appartiennent à $[0, 1]$.

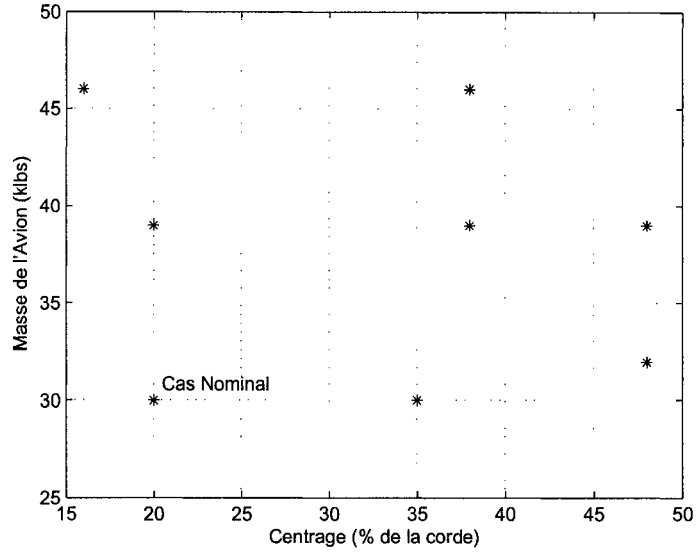


FIG. 7.7 – Répartition des modèles pour m et x_{cg} variables

Avec ces notations, nous allons déterminer des modèles incertains. Comme nous n'avons que des formulations numériques, nous interpolons les modèles de vol pour les paramétrer. On pourrait ainsi trouver des modèles matriciels incertains, mais ce serait beaucoup de calculs pour rien, puisque nous rebouclons sur deux fonctions de transfert particulières q/δ_e et n_z/δ_e . Nous allons simplement interpoler ces deux fonctions de transfert.

Comme nous prévoyons d'utiliser les applications gardiennes pour tester la robustesse des amortissements des pôles, il faut en plus trouver des modélisations incertaines réduites. Des algorithmes d'optimisation disponibles sous **MATLAB** et la méthode de réduction jusqu'alors employée, nous permettent de trouver cela.

7.2.2 Stratégies proposées

Deux méthodologies peuvent être employées pour tenter de résoudre ce problème. La première consisterait plutôt en une analyse de la robustesse d'un contrôleur alors que la seconde serait une synthèse d'un tel contrôleur.

Supposons d'abord que nous ayons établi un contrôleur pour une condition de vol donnée et que nous souhaitions le tester face à une variation de la masse et du centrage. A l'instar de l'exemple de la section 3.4.2, nous pourrions trouver des modèles d'état (ou des fonctions de transfert) paramétrés et reboucler avec le correcteur à tester. Ensuite grâce aux applications gardiennes, nous pourrions déterminer pour quelles variations de masse et de centrage, le contrôleur reste efficace. Seulement, cela suppose de connaître une région du plan complexe où toutes les qualités de manœuvrabilité sont satisfaites, ce que nous n'avons pas ! En effet, nous utilisons les applications gardiennes essentiellement pour garder des amortissements et pour l'instant, les critères fréquentiels sont traités d'une autre façon. Nous pourrions donc vérifier par ce moyen que la robustesse n'est effective que par rapport aux amortissements des pôles. Nous illustrerons néanmoins cette approche, en attendant l'éventuelle découverte d'une zone plus précise du plan complexe qu'il faudrait garder.

La seconde méthode serait plus assimilable à une synthèse de contrôleur robuste. Il suffit de reprendre la méthodologie donnée dans le chapitre 6, sauf qu'au lieu d'afficher les régions pour un seul cas de vol, nous allons superposer les régions des 8 cas de vol qui correspondent à la même condition de vol. La superposition des graphes fera apparaître dans le meilleur des cas des zones communes où nous saurons qu'en prenant des gains dans ces régions-là, nous satisferons simultanément le (ou les) critère(s) pour les 8 cas de vol. Ainsi, nous pouvons chercher à satisfaire la plupart des qualités de manœuvrabilité (le dropback restera un cas à part). Néanmoins, il demeure une très grosse faille dans cette méthode. En effet, nous affichons simultanément 8 cas de vol mais pour des valeurs discrètes de masse et de centrage. Rien n'assure que pour d'autres valeurs de masse ou de centrage intermédiaires le contrôleur demeurera robuste. Il suffit en effet que, pour une autre valeur, la région affichée ne présente aucune portion commune avec le cas nominal pour que le contrôleur ne soit plus robuste. Cependant, nous supposerons que pour les valeurs intermédiaires, le contrôleur demeure robuste afin d'illustrer cette méthode.

7.2.3 Analyse de la robustesse

Nous faisons appel ici aux applications gardiennes pour analyser la robustesse d'un contrôleur donné par rapport aux amortissements des modes Short Period.

Supposons que nous ayons un modèle paramétré par la masse et le centrage. Nous pouvons refermer la boucle et en extraire le dénominateur $p_{\delta_m, \delta_{cg}}(s)$. Nous cherchons alors dans quelle mesure ce correcteur nous permettra de garder les amortissements de nos pôles supérieurs à 0.7. La figure 7.8 montre la robustesse du contrôleur du cas de vol 40 (donnée en Annexe II) pour la loi de contrôle C*. La ligne d'amortissement 0.35 a été rajoutée car selon la norme, c'est la limite conseillée pour l'amortissement.

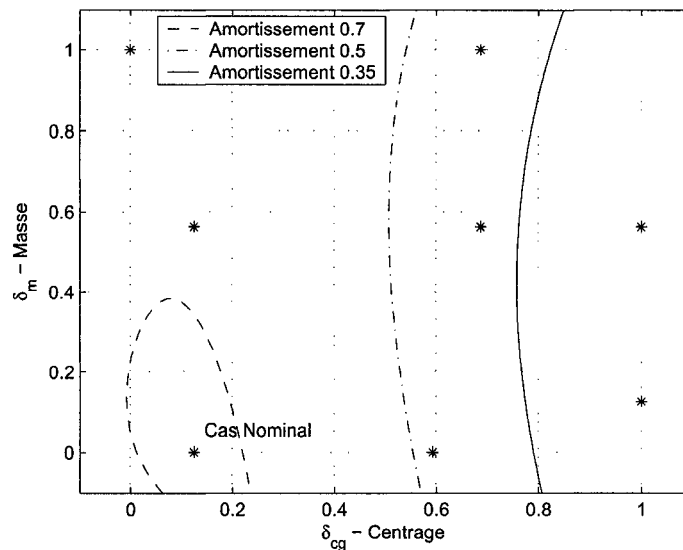


FIG. 7.8 – Analyse de la robustesse pour la condition de vol 40

On peut ainsi voir que ce correcteur nous garantit d'avoir des pôles avec un amortissement supérieur à 0.35 pour 6 cas de vol. Les deux cas de vol avec le centrage le plus élevé ne satisfont pas la condition. Nous allons cependant essayer d'améliorer les performances dans la section suivante qui propose une méthode pour synthétiser un contrôleur robuste.

7.2.4 Essai de synthèse robuste

Nous allons à présent procéder à l'illustration de la seconde méthode sur les cas de vol 40 et autres modulo 20.

La figure 7.9 est la superposition des zones d'amortissement à 0.7 du cas de vol 40 et de ses dérivés. Il y a ainsi une zone commune à toutes ces régions. Prendre un couple dans cette région-là, équivaut à s'assurer que les amortissements des pôles seront tous supérieurs à 0.7 pour tous les cas. Même s'il doit exister un choix optimal, nous allons prendre au hasard un couple dans cette région et poursuivre sur la synthèse de la boucle CAS. Le couple choisi est $(K_q, z_{wo}) = (0.25, -2)$

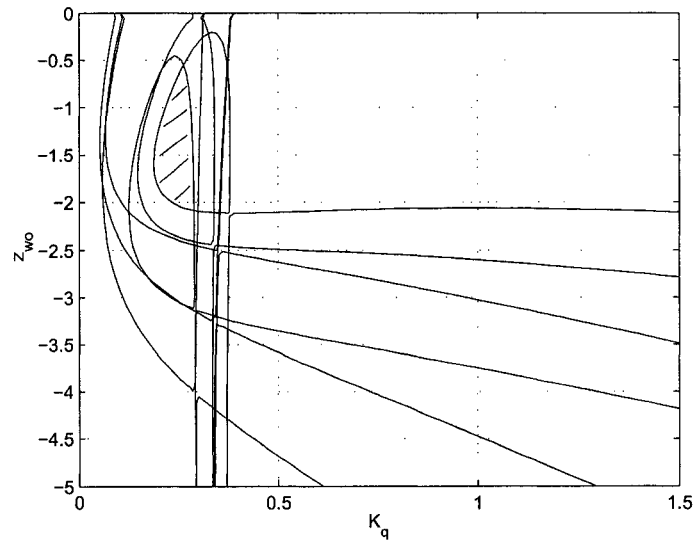


FIG. 7.9 – Synthèse robuste de la boucle SAS pour la condition de vol 40

Il s'agit à présent de choisir la boucle CAS. Les figures 7.10, 7.11 et 7.12 illustrent respectivement la superposition des lignes d'amortissement 0.7, 0.6 et 0.5 . Bien évidemment, la région hachurée (K_p, K_i) augmente dès que l'on devient moins exigeant sur les amortissements.

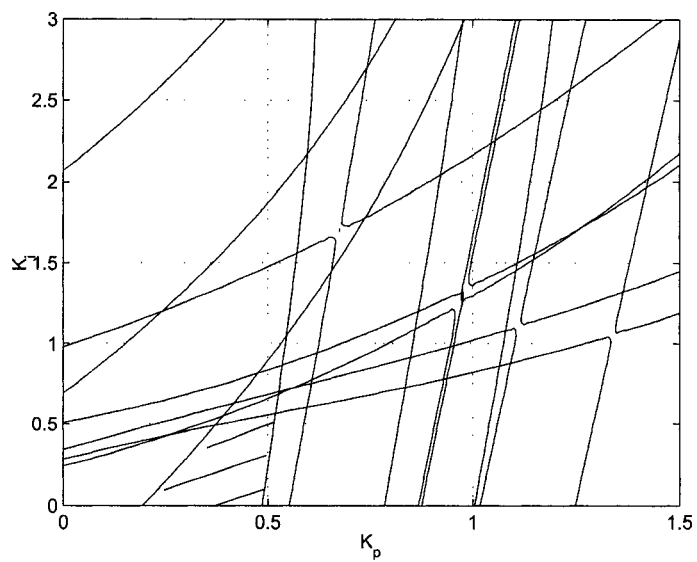


FIG. 7.10 – Région d'amortissement supérieur à 0.7 du CAS pour les cas 40 et dérivés

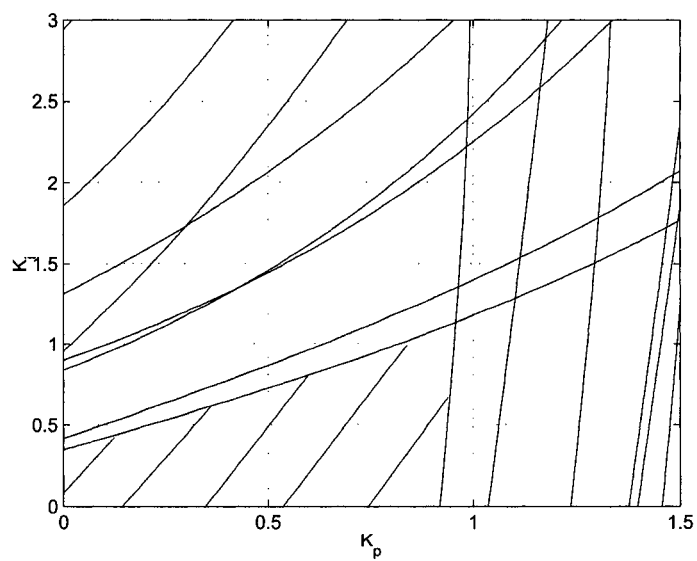


FIG. 7.11 – Région d'amortissement supérieur à 0.6 du CAS pour les cas 40 et dérivés

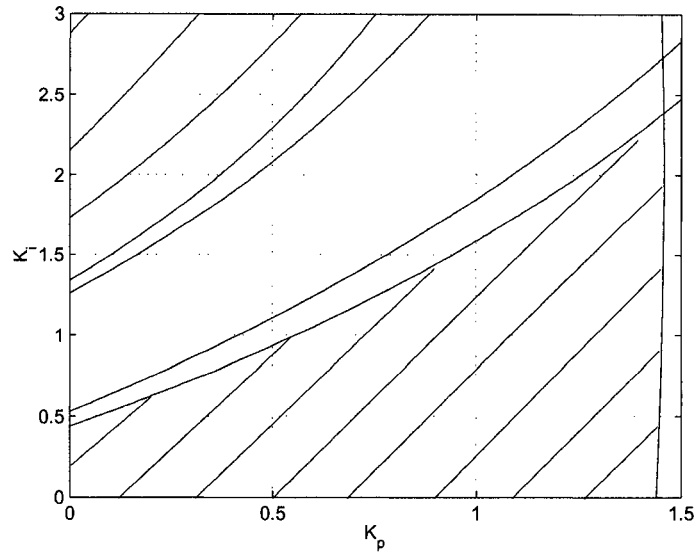


FIG. 7.12 – Région d'amortissement supérieur à 0.5 du CAS pour les cas 40 et dérivés

Nous n'avons pas tracé tous les autres critères fréquentiels, d'une part pour ne pas surcharger les graphiques et d'autre part car leurs valeurs sont liés au choix du gain K_{ff} . Même si le choix semble assez large, le dropback va venir drastiquement limiter les possibilités. En effet après expérimentation et utilisation de la formule (5.28) du dropback établie au chapitre 5, pour le choix de la boucle SAS pris précédemment, on ne peut trouver de gains K_i et K_{ff} (le dropback est indépendant de K_p) qui donneront un dropback dans les limites imposées par *Bombardier Inc.* pour tous les cas.

Nous ignorons pour la suite les deux cas extrêmes où le centrage est de 48% afin de poursuivre. La figure 7.13 illustre la région (K_{ff}, K_i) possible pour satisfaire le dropback dans les 6 autres cas et la figure 7.14, les zones (K_p, K_i) pour un amortissement de 0.6 et de 0.5. Nous pouvons ainsi voir (Fig. 7.13) que le gain K_i est limité par deux valeurs. Elles ont été reportées sur la figure 7.14, réduisant ainsi les régions (K_p, K_i) possibles (zones hachurées plus finement). Ainsi, si l'on veut garder tous les pôles avec un amortissement supérieur à 0.6 la zone est assez réduite.

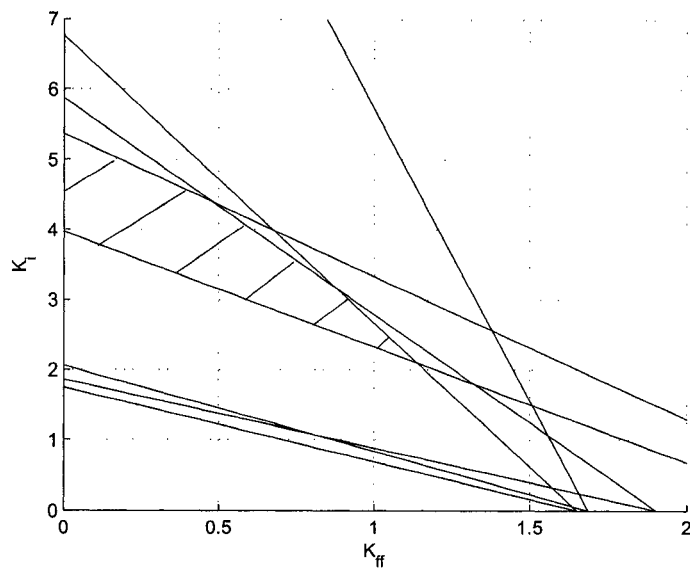


FIG. 7.13 – Région de dropback pour les cas 40 et dérivés

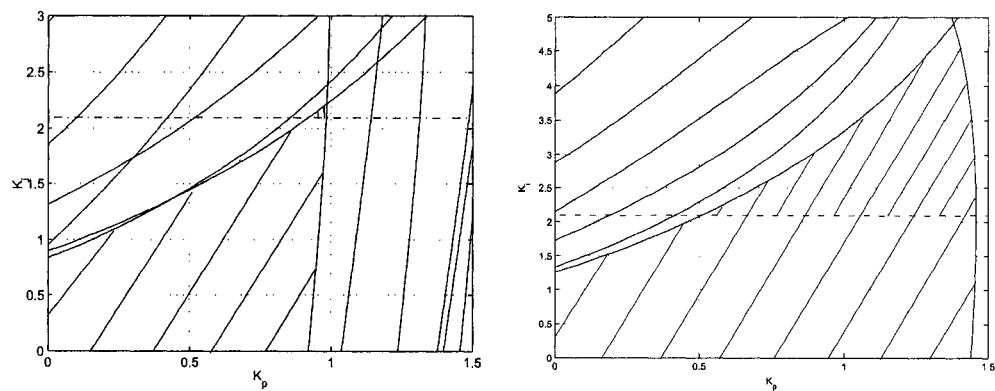


FIG. 7.14 – Régions d'Amortissement à 0.6 et 0.5

Dès ce moment, on peut choisir le triplet (K_p, K_i, K_{ff}) pour satisfaire ces 2 critères, et vérifier que les autres sont satisfaits. L'idéal serait de laisser un algorithme d'optimisation choisir le meilleur triplet dans les limites que nous avons imposées. La figure 7.15 correspond au choix $(K_p, K_i, K_{ff}) = (0.8, 3, 0.8)$; nous avons choisi de maintenir l'amortissement des pôles au-delà de 0.5 . On peut remarquer que le dépassement est assez excessif (limite de 40% conseillée) et que le temps de réponse à 1% peut dépasser 3 secondes. Néanmoins, ces critères sont secondaires comparés aux critères fréquentiels, d'amortissement et de dropback. Les qualités de manœuvrabilité sont disponibles en annexe III.

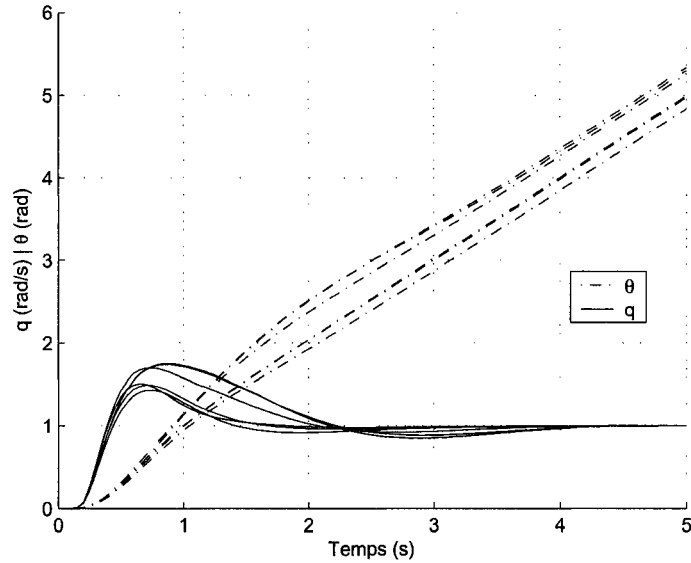


FIG. 7.15 – Réponses temporelles en q et θ pour les cas 40 et dérivés

Pour conclure sur ce dernier chapitre, nous dirons que la méthodologie s'est avérée efficace dans la recherche du séquençement des gains et de la robustesse. Néanmoins, l'utilisation d'algorithmes d'optimisation permettrait d'améliorer encore ces résultats. De plus, on pourrait essayer d'obtenir un séquençement robuste en combinant les deux approches. Le champ reste ouvert.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons présenté une méthodologie pour choisir les gains de deux lois de commande du mode longitudinal d'un avion de *Bombardier Inc.* et ce, de façon à satisfaire certaines qualités de manœuvrabilité.

La recherche s'est scindée en deux étapes : nous avons dans un premier temps analysé les lois de commande et fourni une étude complète de la boucle ouverte et des différents éléments qui la composent. Nous avons ensuite présenté la philosophie des qualités de manœuvrabilité ainsi que les critères couramment retenus pour obtenir un bon contrôle sur le mode longitudinal de l'avion. Nous avons terminé sur une brève présentation des applications gardiennes et de leur utilité dans notre présent problème.

Dans une seconde partie, nous avons proposé une méthodologie basée sur les applications gardiennes pour trouver des ensembles de gains qui nous garantissent un certain amortissement. La méthode s'est alors poursuivie pour satisfaire les autres qualités de manœuvrabilité. Nous avons parallèlement implémenté sous Matlab une interface graphique GUI pour une utilisation plus facile de la méthodologie proposée.

Enfin nous avons conclu sur une ouverture potentielle de la démarche, à savoir le séquençement des gains et la robustesse des contrôleurs face à des variations de masse et de centrage de l'avion.

Nous pouvons affirmer que la problématique a été résolue dans une majeure partie. En effet, la méthodologie permet, pour un cas de vol donné, de trouver rapidement des valeurs de gains qui vont satisfaire toutes les qualités de manœuvrabilité. De plus, le résultat est valide sur le système d'ordre élevé, et pas seulement sur une réduction. Reste à voir si cela est toujours aussi bon sur le système non linéaire. La formulation théorique du dropback a été établie dans ce mémoire et pourrait être utilisée en considérant tous les gains à la fois. De même, le module GUI pourrait être plus développé pour accueillir n'importe quelles données d'avion.

On peut rester aussi quelque peu sceptique sur la méthode de réduction utilisée mais il faut avouer qu'elle a donné de bons résultats. De même pour le calcul des qualités de manœuvrabilité, autres que l'amortissement, on s'en remet beaucoup à la puissance de calcul de l'ordinateur. Il faudrait alors voir s'il n'y aurait pas d'autres façon de procéder.

Le premier enjeu reste néanmoins les qualités de manœuvrabilité. Il y a tout un travail à faire pour définir les critères à remplir, ainsi que leurs limites éventuelles. Les méthodes modernes permettent d'obtenir des contrôleurs qui vont les satisfaire tout en assurant robustesse et séquencement. L'inconvénient est que les contrôleurs obtenus sont d'ordre très élevé et il est difficile de les retoucher lors des essais en vol. La volonté de maintenir une structure simple est une bonne chose en soi puisqu'on peut aller plus facilement identifier les effets de chacun des gains. La méthode présentée se prête bien à ce genre de manipulation. Il faudrait néanmoins poursuivre sur une extension dans le choix des gains. En effet, on impose de choisir les gains deux par deux selon les boucles, et d'ensuite terminer sur le gain K_{ff} . Nous restreignons en fait l'ensemble de gains adéquats et laissons de côté d'autres valeurs possibles.

Enfin, même si la robustesse et le séquencement des gains n'ont pas pu être complètement réglés, les résultats préliminaires laissent entrevoir de bonnes perspectives pour la suite.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Akhrif, O. et al. *Design of Practical Flight Control Systems for Commercial Aircraft Using Modern Control Techniques*, Technical Report CRD 215465-98, 1998.
- [2] Barmish, B. Ross. *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan Publishing Company, 1994.
- [3] Collison, R.P.G. *Introduction to Avionics*, Chapman & Hall, 1996.
- [4] Etkin, B. and Reid, L.D. *Dynamics of Flight : stability and control*, John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [5] Gibson, J.C. *The Definition, Understanding and Design of Aircraft Handling Qualities*, Delft University Press, 1997
- [6] Hancock, G.J. *An Introduction to the Flight Dynamics of Rigid Aeroplanes*, Ellis Horwood Limited, 1995.
- [7] Hodgkinson, J. *Aircraft Handling Qualities*, AIAA Education Series, 1999.
- [8] McLean, D. *Automatic Flight Control Systems*, Prentice Hall International (UK) Ltd., 1990.
- [9] McRuer, D., Ashkenas, I. and Dunstan, G. *Aircraft Dynamics and Automatic Control*, Princeton University Press, 1973.
- [10] Mitchell, D.G. and Hoh, R.H. "Low-order approaches to high-order systems : problems and promises", *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, pp. 482-489, 1988.1982
- [11] Moir, I. and Seabridge, A. *Civil Avionics Systems*, AIAA Education Series, 2003.
- [12] Ortega, J.M. *Matrix Theory*, Plenum Press, 1987.
- [13] Roskan, J. *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls Part I*, DARcorporation, 1995.

- [14] Roskan, J. *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls Part II*, DARcorporation, 1995.
- [15] Saydy, L., Tits, A.L. and Abed, E.H. "Robust Stability of Linear Systems Relative to Guarded Domains", *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, Austin, TX, pp. 544-551, 1988.
- [16] Saydy, L., Tits, A.L. and Abed, E.H. "Guardian Maps and the Generalized Stability of Parametrized Families of Matrices and Polynomials", *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 3, pp. 345-371, 1990.
- [17] Saydy, L., Akhrif, O. and Zhu, G. "Handling Quality Characterization of Flight System Controller Gains", *Conference on Electronics, Circuits and Systems*, Vol 2, pp. 721-724, 2000.
- [18] Smith, P.R. "Use of Eigenstructure Assignment in VATOL Aircraft Control Law Design", *Technical report FS 1009 RAE*, Feb 1991.
- [19] Sobel, K.M., Shapiro, E.Y. "A Design Methodology for Pitch Pointing Flight Control Systems", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 8, Mar-Apr 1985.
- [20] Stéphanos, C. "Sur une extension du calcul des substitutions linéaires", *J. Math. Pures Appl.*, vol. 6, pp. 73-128, 1900.
- [21] Tischler, M.B. *Advances in Aircraft Flight Control*, Taylor & Francis, 1996.
- [22] Tischler, M.B., Colbourne, J.D., Morel, M.R., Biezd, D.J., Levine, W.S., and Moldoveanu, V. *CONDUIT - A New Multidisciplinary Integration Environment for Flight Control Development*, NASA Technical Memorandum 112203, USAAT-COM Technical report 97-A-009, June 1997.
- [23] US Departement of Defense, *Flying Qualities of Piloted Airplanes*, MIL-F-8785C, Washington D.C. : Government Printing Office, 1980.
- [24] US Departement of Defense, *Flying Qualities of Piloted Aircraft*, MIL-STD-1797A, Washington D.C. : Government Printing Office, 1990.

- [25] US Departement of Defense, *Flying Qualities of Piloted Aircraft*, MIL-HDBK-1797, Washington D.C. : Government Printing Office, 1997.

Annexe I

Rappels de mécanique du vol

L'annexe suivante a pour but de préciser les équations relatives au mouvement longitudinal de l'avion. Nous n'avons pas jugé nécessaire de reprendre toutes les équations de la mécanique du vol.

Notations relatives au modèle longitudinal

Nous précisons ici les grandeurs caractéristiques du mouvement longitudinal. la figure I.1 rappelle les angles, ainsi que le vecteur vitesse $\vec{V}$ du vol longitudinal.

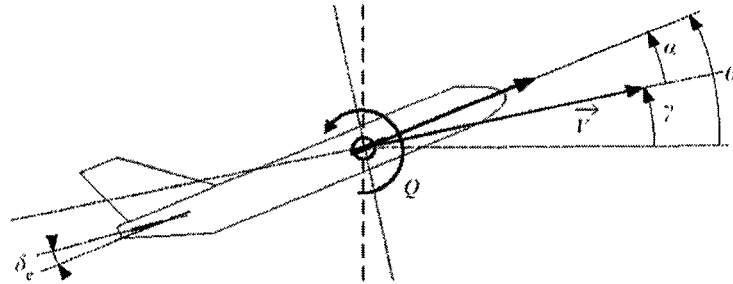


FIG. I.1 – Définition de l'assiette θ , de l'angle d'incidence α et de la pente γ

On rappelle ici l'expression des efforts aérodynamiques relatifs au mouvement longitudinal :

- Force de Traînée : $F_{x_a} = -\frac{1}{2}\rho S V^2 C_D$
- Force de Portance : $F_{z_a} = -\frac{1}{2}\rho S V^2 C_L$
- Moment de Tangage : $F_{z_a} = \frac{1}{2}\rho S V^2 \bar{c} C_m$

Modèle Longitudinal

Les équations de la mécanique du vol nous donne alors les relations suivantes pour le mouvement longitudinal :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} m\dot{V} & = & -\frac{1}{2}\rho SV^2 C_D + T - mg \sin \gamma \\ -mV\dot{\gamma} & = & -\frac{1}{2}\rho SV^2 C_L + mg \cos \gamma \\ I_{yy}\dot{Q} & = & \frac{1}{2}\rho SV^2 \bar{c} C_m \\ \dot{\alpha} + \dot{\gamma} & = & Q \end{array} \right. \quad (\text{I.1})$$

La première équation est l'équation de propulsion, et la deuxième l'équation de sustentation. On suppose que la poussée $\vec{T}$ est portée par l'axe longitudinal du fuselage de l'avion. La troisième équation est l'équation de moment en tangage. On suppose de même que la poussée $\vec{T}$ passe par le centre de gravité G , et donc qu'elle ne provoque pas de moment.

L'équation cinématique de vitesse de tangage exprime la relation entre les vitesses angulaires $\dot{\gamma}$, $\dot{\alpha}$ et $Q = \dot{\theta}$.

Linéarisation autour de l'équilibre

Définition d'un Equilibre

Avant de linéariser notre système, nous devons définir un point d'équilibre, ou point de vol. Le tableau I.1 rassemble les notations utilisées.

TAB. I.1 – Notations adoptées pour l'équilibre

Variable d'état	Valeur à l'équilibre	Petite variation
V	V_e	$u = \frac{V-V_e}{V_e}$
γ	γ_e	$\bar{\gamma}$
α	α_e	$\bar{\alpha}$
Q	$Q_e = 0$	q
$\mathbf{X}$	$\mathbf{X}_e$	$\bar{\mathbf{x}}$
$\boldsymbol{\delta}$	$\boldsymbol{\delta}_{eq}$	$\bar{\boldsymbol{\delta}}$

avec pour vecteur d'état $\mathbf{X} = [V \ \gamma \ \alpha \ Q]^T$ et pour vecteur des commandes $\boldsymbol{\delta} = [\delta_e \ \delta_t]^T$: δ_e est la commande de l'élève et δ_t la commande des gaz.

Modèle d'état

On linéarise alors les équations autour du point d'équilibre défini et on obtient un modèle d'état de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = A\bar{\mathbf{x}} + B\bar{\boldsymbol{\delta}} \\ \mathbf{y} = C\bar{\mathbf{x}} + D\bar{\boldsymbol{\delta}} \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

où A est une matrice 4×4 et B une matrice 4×2 . Les matrices C et D dépendent des sorties que l'on veut observer. On se reportera aux références [4], [8] ou [9] pour une présentation complète.

Le modèle *Bombardier Inc.*

Le modèle dynamique donné par *Bombardier Inc.* est un modèle d'ordre 5. Il y a en fait un cinquième état et donc une cinquième équation qui viennent s'ajouter au modèle classique présenté. Les résultats classiques restent néanmoins en vigueur.

Annexe II

Exemples de résolution sur les 20 premiers cas de vol

Nous présentons dans cette annexe les quintuplets choisis pour les 20 premiers cas de vol numérotés de 39 à 58 par défaut. Ce sont les 20 cas nominaux. Les quintuplets trouvés assurent tous de satisfaire les qualités de manœuvrabilité.

TAB. II.1 – Exemples pour les 20 premiers cas de vol - Contrôle de la vitesse de tangage

Cas de Vol	K_q	K_{n_z}	K_p	K_i	K_{ff}	DP
39	0.0005	4.8	0.71	1.4	0.52	77.1
40	0.0005	2.9	0.18	1.0	0.45	197.5
41	0.0005	1.5	0.022	0.44	0.52	308.6
42	0.0017	0.72	0.018	0.43	0.5	444.3
43	0.003	3.6	0.43	0.47	0.66	133.9
44	0.0029	2.7	0.166	0.97	0.4	209.3
45	0.0017	1.6	0.024	0.6	0.45	301.4
46	0.0004	0.74	0.0145	0.43	0.55	410.2
47	0.0039	3.6	0.451	1.05	0.66	137.6
48	0.0016	1.53	0.029	0.58	0.59	269.7
49	0.0016	0.86	0.0794	0.49	0.62	352.3
50	0.0004	0.51	0.0052	0.10	1.027	426.3
51	0.0036	3.71	0.39	0.44	0.60	125.7
52	0.0029	2.58	0.25	0.64	0.51	171
53	0.0029	1.48	0.16	0.57	0.8	223.4
54	0.0023	1.237	0.0337	0.52	0.94	270.3
55	0.0023	4.17	0.81	1.677	0.7286	94.2
56	0.0062	3.28	0.57	1.38	0.59	128.2
57	0.0023	2.58	0.22	0.80	0.98	167.5
58	0.0023	2.63	0.179	0.44	1.51	202.6

TAB. II.2 – Exemples pour les 20 Premiers cas de vol - Contrôle C*

Cas de Vol	K_q	<i>Wash Out</i>	K_p	K_i	K_{ff}	DP
39	0.2857	-0.9754	2.789	4.54	0.4328	77.1
40	0.2083	-1.81	0.3638	2.91	0.7613	197.5
41	0.1150	-2.7952	0.22	2.12	0.4875	308.6
42	0.0873	-4.6317	0.0716	1.86	0.3698	444.3
43	0.2950	-1.2377	0.82	3.47	0.55	133.9
44	0.2117	-1.84	0.32	2.7	0.33	209.3
45	0.135	-2.89	0.0775	1.79	0.40	301.4
46	0.1038	-4.29	0.047	1.6439	0.47	410.2
47	0.3617	-0.9754	0.509	2.89	0.6111	137.6
48	0.165	-2.72	0.0210	1.796	0.62	269.7
49	0.1237	-3.75	0.0151	1.6479	0.513	352.3
50	0.1217	-5	0.1398	2.21	0.4939	426.3
51	0.4017	-0.9426	0.2556	2.3115	0.8962	125.7
52	0.2883	-1.4	0.61	2.4	0.27	171
53	0.2183	-2.74	0.19	2.17	0.64	223.4
54	0.1883	-4.27	0.466	2.8	0.6391	270.3
55	0.425	-0.8115	1.72	3.37	0.25	94.2
56	0.4017	-1.1557	0.52	2.75	0.20	128.2
57	0.3083	-2.1885	0.02	2.5754	1.0751	167.5
58	0.2582	-2.93	0.06	3.24	0.80	202.6

Annexe III

Résultats de simulation pour le séquençement des gains et la robustesse

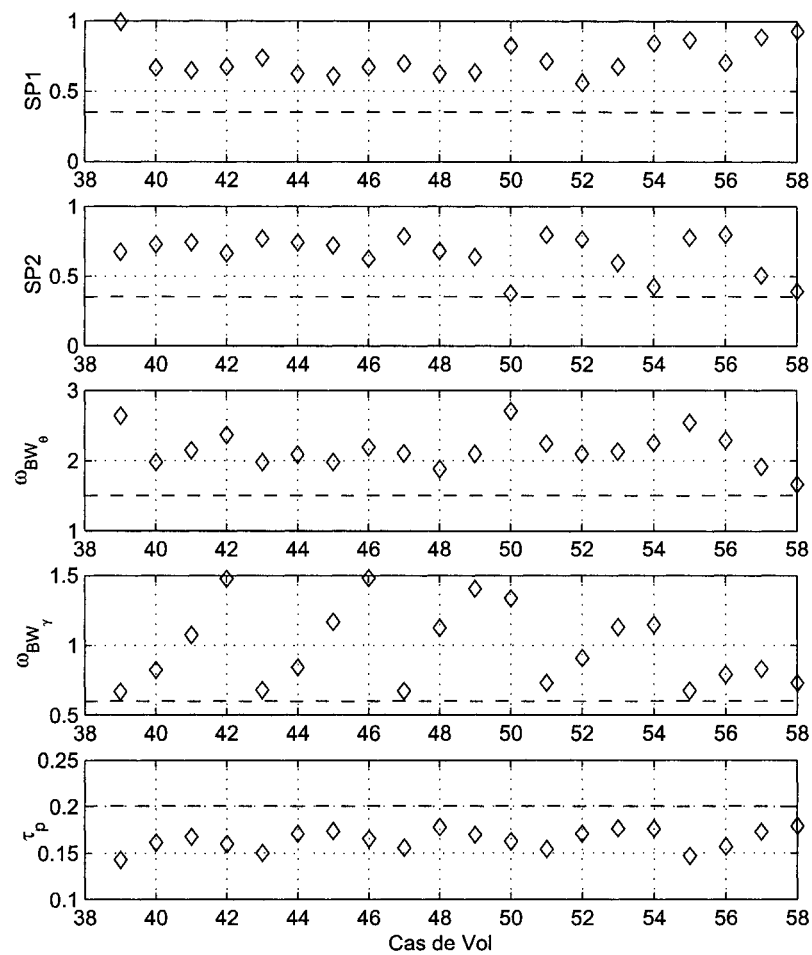


FIG. III.1 – Qualités de manœuvrabilité pour les cas 39 à 58 après séquençement des gains (1)

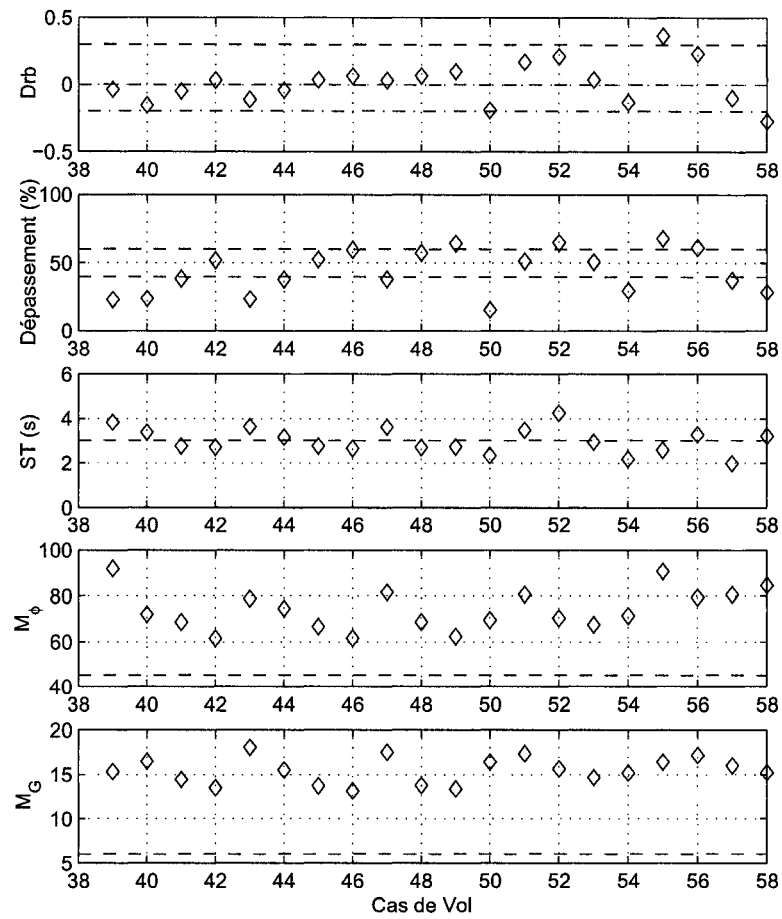


FIG. III.2 – Qualités de manœuvrabilité pour les cas 39 à 58 après séquençement des gains (2)

TAB. III.1 – Qualités de manœuvrabilité pour le contrôle robuste des cas de vol 40 et dérivés

Cas de vol	40	60	80	100	120	140
SP1	0.96	0.55	0.69	0.47	0.69	0.50
SP2	0.53	0.61	0.66	0.70	0.73	0.70
ω_{BW_θ}	2.22	2.64	2.77	2.27	2.67	2.30
ω_{BW_γ}	1.00	1.28	0.92	1.16	0.73	1.04
τ_p	.15	0.14	0.14	0.13	0.14	0.13
Drb	0.03	0.33	0.00	0.46	-0.19	0.47
Osh	48.78	71.73	49.43	79.58	41.71	77.40
ST	3.20	3.78	3.38	5.58	5.01	5.49
M_G	15.25	15.64	16.35	16.51	16.92	16.49
M_φ	82.09	61.25	88.35	55.59	96.87	61.15