

**Titre:** I. Absorption dans les grilles. II. Gestion quotidienne des opérations  
Title: en transport aérien

**Auteur:** Rachid Chérifi  
Author:

**Date:** 2002

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Chérifi, R. (2002). I. Absorption dans les grilles. II. Gestion quotidienne des  
Citation: opérations en transport aérien [Thèse de doctorat, École Polytechnique de  
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7165/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7165/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** François Soumis, & Odile Marcotte  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

In compliance with the  
Canadian Privacy Legislation  
some supporting forms  
may have been removed from  
this dissertation.

While these forms may be included  
in the document page count,  
their removal does not represent  
any loss of content from the dissertation.



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

I. ABSORPTION DANS LES GRILLES  
II. GESTION QUOTIDIENNE DES OPÉRATIONS  
EN TRANSPORT AÉRIEN

RACHID CHÉRIFI  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE  
PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph. D.)  
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)  
MARS 2002



National Library  
of Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

Acquisitons et  
services bibliographiques

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

*ISBN: 0-612-86441-3*

*Our file* *Notre référence*

*ISBN: 0-612-86441-3*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

I. ABSORPTION DANS LES GRILLES  
II. GESTION QUOTIDIENNE DES OPÉRATIONS  
EN TRANSPORT AÉRIEN

présentée par : CHÉRIFI Rachid

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. SMITH Benjamin, T., Ph.D., président de jury

M. SOUMIS François, Ph.D., membre et directeur de recherche

Mme MARCOTTE Odile, Ph.D., membre et codirectrice de recherche

M. HERTZ Alain, Doctorat, membre

M. FINKE Gerd, Ph.D., examinateur externe

*À mes parents et à ma femme*

*À mes frères et sœurs*

*À mes amis*

## REMERCIEMENTS

À François Soumis, mon directeur de recherche, j'exprime toute ma gratitude et ma reconnaissance pour la patience et la générosité avec lesquelles il a su guider mon travail au sein du GERAD.

Je tiens à remercier Mme Odile Marcotte (codirectrice de recherche) pour son soutien et pour son aide dans la correction de la première version de ma thèse ainsi que pour sa collaboration fructueuse dans la partie de ma thèse qui s'est déroulée à Montréal.

Je remercie également Charles Payan, mon directeur de recherche à Grenoble, d'avoir guidé mes premières recherches.

Pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail et pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie du jury, je tiens à remercier messieurs Benjamin Smith (président), Gerd Finke (membre externe), Alain Hertz (membre) ainsi que Philippe Galinier (représentant du doyen).

Je désire remercier tous les membres du GERAD ainsi que ceux de l'ex-LSDD (Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique) de Grenoble, Ismaïl et Sylvain en particulier.



## RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous nous intéressons au problème de l'absorbant minimum d'un graphe. Ce problème consiste à trouver dans un graphe donné un sous-ensemble de nœuds de cardinalité minimale qui doit dominer tous les nœuds du graphe. En d'autres termes, tout nœud du graphe est soit dans ce sous-ensemble soit adjacent à au moins un nœud de ce sous-ensemble. La cardinalité d'un tel ensemble est appelée nombre d'absorption du graphe.

Le problème du nombre d'absorption pour un graphe quelconque est NP-complet. Par contre le même problème reste ouvert pour la grille carrée complète et pour la grille croisée complète. La grille carrée complète ainsi que la grille croisée complète sont définies comme le produit cartésien et tensoriel de deux chaînes, respectivement. La grille carrée complète a été beaucoup étudiée et son nombre d'absorption est connu quand une des deux chaînes est de longueur fixe, 6 nœuds ou moins (16 ou moins, selon un article non publié). Mais on ne dispose que de bornes quand les deux chaînes sont de longueurs quelconques. Ce même nombre n'est connu pour la grille croisée que si l'une des deux chaînes est de longueur 1 ou 2 (un stable dans le premier cas et l'union de deux chaînes disjointes dans le second). Grâce aux recherches décrites dans cette thèse, on connaît maintenant le nombre d'absorption dans les grilles croisées complètes à l'exception de quelques cas que nous donnerons plus tard. De plus, nous établissons une meilleure borne pour le nombre d'absorption quand le graphe est une grille carrée complète.

L'objectif de la première partie de cette thèse est d'étudier le nombre d'absorption de la grille croisée quand l'une des deux chaînes est de longueur  $k$  fixe, pour les petites valeurs de  $k$ . Nous allons en particulier donner le nombre d'absorption pour les grilles

croisées complètes quand une des chaînes est de longueur  $k$  (où  $k$  est compris entre 1 et 9). La démonstration sera basée sur une induction sur le nombre de sommets et sur l'introduction de graphes similaires à la grille croisée qui sont nécessaires à la preuve de certains cas. La preuve du cas général est basée sur une induction sur le nombre de sommets du graphe et quelques résultats concernant les problèmes de quasi-absorption et de déficience que nous introduirons. Nous avons dû concevoir un algorithme de programmation dynamique pour calculer le nombre d'absorption des grilles croisées  $P_k \times P_n$ , où  $k \leq 33$  et  $n \leq 40$ . Ces différentes valeurs constituent notre base d'induction.

La prochaine étape va nous permettre de nous intéresser à la grille carrée qui était notre premier objectif. En effet, on peut remarquer que la démarche de la preuve pour les grilles croisées fonctionne dans le cas des grilles carrées. Malheureusement, quand le nombre de sommets de la chaîne dont la longueur est fixe dépasse quatre, le nombre de cas à étudier augmente d'une manière telle que nous avons du mal à garantir de les avoir tous considérés. La théorie développée pour la démonstration du cas général de la grille croisée nous permettra par la suite d'établir une borne sur le nombre d'absorption de la grille carrée, qui constitue une réponse par l'affirmative à une question posée par Paul Erdős en 1985.

Nous allons nous intéresser aussi dans cette première partie à un problème très connu que Vizing a posé en 1963. Dans ce problème, Vizing a conjecturé que le nombre d'absorption du produit cartésien de deux graphes est supérieur ou égal au produit des nombres d'absorption des deux graphes. Cette conjecture n'a été prouvée que quand l'un ou les deux graphes vérifient certaines propriétés. Nous allons prouver la conjecture de Vizing pour certaines familles de graphes.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous allons nous intéresser au problème de la gestion d'équipages aériens durant le jour d'opération, qui consiste à modifier de manière "efficace" (dans le sens que les modifications n'affectent pas trop les anciens horaires) les horaires des membres d'équipages suite à des perturbations. La difficulté

de notre problème réside dans le fait que nous devons tenir compte d'une contrainte "complexe" au niveau de la résolution des sous-problèmes. Bien sûr cette contrainte a été prise en considération pendant la construction des blocs mensuels, mais à ce niveau, l'utilisateur dispose de beaucoup plus de temps pour la résolution. Donc même une méthode qui n'est pas très "efficace", le "retour arrière" en l'occurrence, peut donner des résultats acceptables. Dans notre cas cependant, les opérations sont en cours et nous ne disposons pas du temps nécessaire. Par conséquent, l'algorithme utilisé pour la planification des blocs mensuels n'est plus d'aucun secours. Cette contrainte "complexe" est appelée 8/24 et est une règle contenue dans l'ensemble des règlements fédéraux régissant l'aviation civile aux États-Unis. Elle se traduit par le fait que dans tout intervalle de vingt-quatre heures, un employé donné ne peut effectuer plus de huit heures de travail, et elle ne se modélise pas comme une contrainte de ressource. Il est donc primordial de trouver un nouvel algorithme (ou de modifier l'ancien algorithme de résolution des sous-problèmes) de telle manière qu'une solution tenant compte de cette contrainte soit produite en un temps raisonnable.

La solution proposée consiste à rajouter deux ressources supplémentaires. La première va contrôler ce que va effectuer le pilote pendant la période opérationnelle en tenant compte de ce qu'il a déjà effectué avant la période opérationnelle. Quant à la seconde, elle va contrôler ce que doit effectuer le pilote pendant la période opérationnelle en tenant compte de ce qui lui reste à effectuer après la partie opérationnelle. Ceci va permettre d'éliminer la procédure de "retour arrière" dans la résolution des plus courts chemins. L'ajout des deux ressources supplémentaires n'engendre pas une augmentation significative du nombre d'étiquettes dans la résolution des plus courts chemins.

La nouvelle méthode, qui utilise sept ressources et tient compte de la contrainte 8/24, prend environ le même temps que l'ancienne méthode, qui utilise cinq ressources et ne tient pas compte de cette contrainte. La nouvelle méthode est donc beaucoup plus efficace que la procédure de "retour arrière", dont le temps est de quatre à cinq fois

plus long que celui de la méthode ne tenant pas compte de la contrainte  $8/24$ .

La première partie de cette thèse s'est faite au Laboratoire Leibniz (Université Joseph Fourier) à Grenoble sous la direction de monsieur C. Payan. La seconde partie, quant à elle, s'est faite au Gerad (École Polytechnique de Montréal) sous la direction de monsieur F. Soumis et de Mme O. Marcotte. Les deux parties de la thèse sont sans grand dénominateur commun à cause des intérêts divergents des deux laboratoires.

# ABSTRACT

In this thesis, we consider the problem of finding in a given graph a dominating set of minimum cardinality. A dominating set is a subset of nodes such that each node of the graph is either in this subset or adjacent to at least one node of this subset. The cardinality of such a set is called the domination number of the graph.

The domination number problem for an arbitrary graph is NP-complete. On the other hand, the same problem remains open for the complete square grid and the complete cross grid. The complete square grid and the complete cross grid are defined as the Cartesian product and the direct product of two chains, respectively. The complete square grid was studied extensively and its domination number is known when one of the two chains has 6 nodes or less (16 or less, according to an unpublished article). But when the two chains are of arbitrary length, we only have some bounds. This same number is not known for complete cross grids except when one of the chains is of length 1 or 2 (an independent set for the first case and a union of two chains in the second case). On account of the work done in this thesis, we know at present the domination number of complete cross grid graphs with the exception of some cases that we will give later. Moreover, we establish a new bound on the domination number of the complete square grid.

The objective of the first part of this thesis is to study the domination number of the cross grid. This is carried out for grids when one of the two chains is of fixed length  $k$ , for small values of  $k$ . In particular, we will give the domination number for the complete cross grid in the case where one of the chains is of length  $k$  (for  $1 \leq k \leq 9$ ). The proof is a proof by induction on the number of nodes and also relies on some results for some cross-grid-like graphs. The general case is established by combining

the known cases and some results related to the quasi-domination problem and the deficiency problem, which we will introduce. Our work required the realization of a dynamic programming algorithm to compute the domination number of the cross grids  $P_k \times P_n$ , where  $k \leq 33$  and  $n \leq 40$ . These values constitute the basis of our argument.

The next stage will enable us to tackle the square grid, which was our first objective. Indeed, one can notice that the method of proof for the cross grids also applies to the square grids. Unfortunately, when the number of nodes of the chain of fixed length exceeds four, the number of cases to consider increases in such a manner that one can hardly guarantee that all cases are considered. The theory developed for the proof of the general case of the cross grid has enabled us to establish a bound on the domination number of the square grid, thus proving in the affirmative a conjecture put forward by Paul Erdős in 1985.

We will also consider in the first part a very well-known problem posed by Vizing in 1963. In this problem, Vizing conjectured that the domination number of the cartesian product of two graphs is greater than or equal to the product of the domination numbers of the two graphs. This conjecture has been proved only when one or both graphs verify specific properties. We will prove this conjecture for certain families of graphs.

In the second part of this thesis, we will consider the problem of the aircrews management during the day of operation. This problem consists of modifying in an “economical” way (in the sense that the modifications have little impact on the old schedules) the schedules of crew members after some disturbances. The difficulty of our problem lies in the fact that we must take into account a difficult constraint in the resolution of the subproblems. Of course, this constraint was taken into account during the construction of the monthly blocks, but at this level, the user has much more time for the resolution. Therefore even a method that is not very efficient, like backtracking, can give acceptable results. In our case, however, the operations are unfolding and we

do not have sufficient time to compute the optimal solution. Consequently, the algorithm used for the monthly blocks is not helpful anymore. This “complex” constraint, called 8/24, is one of the federal rules for civil aviation in the U. S. and means that in any twenty-four-hour interval, a given employee cannot work more than eight hours. This constraint cannot be modeled as a resource constraint. It is of primary importance to find a new algorithm or to modify the old one in order to solve the subproblems, in such a manner that a solution respecting the 8/24 constraint is produced within a reasonable time.

The suggested procedure consists of adding two additional resources. These two resources help in keeping the 8/24 constraint satisfied, by taking into account the number of hours worked by a given pilot in the twenty-four hours preceding the operational period and the number of hours to be worked in the twenty-four hours following the operational period. This will allow us to remove the backtracking procedure in the resolution of the shortest path problems. These two resources do not generate a considerable increase of the number of labels in the resolution of the shortest path problems. Moreover, the time of resolution is essentially the same for the algorithm with the five original resources and for the one with two additional resources. Since the “backtracking” procedure increases the resolution time by a factor of four or five, the new method is much more efficient than the backtracking procedure.

The first part of this thesis has been done at Laboratoire Leibniz (Université Joseph Fourier) in Grenoble under the supervision of Dr. C. Payan. The second part has been done at Gerad (École polytechnique de Montréal) under the supervision of F. Soumis Ph. D. and O. Marcotte Ph. D.. The two parts of this thesis are very different because of the divergent interests of the two laboratories.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>DÉDICACE</b> .....	iv
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	v
<b>RÉSUMÉ</b> .....	vi
<b>ABSTRACT</b> .....	x
<b>TABLE DES MATÈRES</b> .....	xiii
<b>LISTE DES TABLEAUX</b> .....	xviii
<b>LISTE DES FIGURES</b> .....	xix
<b>INTRODUCTION</b> .....	1
<b>TERMINOLOGIE ET DÉFINITIONS DE BASE</b>	
1. Introduction .....	5
2. Notion de graphe .....	5



3. Définitions de base . . . . .	6
4. Quelques types de graphes . . . . .	7
5. Quelques problèmes classiques en théorie des graphes . . . . .	9
6. Complexité . . . . .	9

## **PARTIE 1 : NOMBRE D'ABSORPTION DES GRAPHES DE TYPE GRILLE**

### **CHAPITRE 1 : PRODUITS DE GRAPHES ET ABSORPTION . . . . 12**

1.1. Introduction . . . . .	12
1.2. Produit carré (ou somme cartésienne) . . . . .	12
1.3. Produit croisé (ou produit tensoriel). . . . .	12
1.4. Exemples . . . . .	13
1.5. Absorbants de graphes et absorbants de grilles . . . . .	15
1.5.1. Problèmes et résultats concernant l'absorption dans les graphes . . . . .	18
1.5.2. Produit carré et absorption . . . . .	21

### **CHAPITRE 2 : NOMBRE D'ABSORPTION DES GRILLES**

#### **CROISÉES DE PETITE TAILLE . . . . . 26**

2.1. Introduction. . . . .	26
2.2. Définitions, notations et techniques. . . . .	27

2.3. Idée générale de la preuve . . . . .	29
2.4. Preuves pour $k \leq 5$ et $k = 8$ . . . . .	32
2.5. Preuves pour $k = 6, 7$ et $9$ . . . . .	40
2.6. Conclusion . . . . .	68

### **CHAPITRE 3 : NOMBRE D'ABSORPTION DES GRILLES**

#### **CROISÉES DE GRANDE TAILLE . . . . . 69**

3.1. Introduction . . . . .	69
3.2. Principe de l'algorithme de calcul de $\gamma(P_k \times P_n)$ . . . . .	69
3.3. Algorithme. . . . .	72
3.4. Bornes pour $k = 10, 11$ et $13$ . . . . .	77
3.5. Conclusion . . . . .	85

### **CHAPITRE 4 : NOMBRE D'ABSORPTION DE LA GRILLE**

#### **CROISÉE COMPLÈTE. . . . . 86**

4.1. Introduction . . . . .	86
4.2. Ensembles quasi-absorbants. . . . .	87
4.3. Motif du cavalier . . . . .	89
4.4. Preuve du cas général. . . . .	97
4.5. Description de la fonction $KP_{\min}(C(k+2, n+2))$ . . . . .	99

4.6. Conclusion .....	104
<b>CHAPITRE 5 : BORNES SUR LE NOMBRE D'ABSORPTION DES GRILLES CARRÉES COMPLÈTES.....</b>	<b>106</b>
5.1. Introduction .....	106
5.2. Preuve du théorème .....	107
<b>CHAPITRE 6 : GRAPHES VÉRIFIANT LA CONJECTURE DE VIZING.....</b>	<b>118</b>
6.1. Introduction.....	118
6.2. Bornes sur le nombre d'absorption.....	118
<b>PARTIE 2 : GESTION QUOTIDIENNE DES OPÉRATIONS EN TRANSPORT AÉRIEN</b>	
<b>CHAPITRE 7 : PROBLÉMATIQUE ET BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>123</b>
7.1. Introduction .....	123
7.2. Problème de gestion des horaires des équipages aériens.....	123
7.3. Formulation du problème.....	127
<b>CHAPITRE 8 : PROBLÈMES DE PLUS COURT CHEMIN AVEC CONTRAINTES .....</b>	<b>133</b>
8.1. Introduction .....	133

8.2. Méthodes de résolution classiques de PCCCR . . . . .	134
8.2.1. L'approche par le graphe d'états. . . . .	134
8.2.2. L'approche par programmation dynamique. . . . .	135
8.2.3. L'approche des deux phases . . . . .	137
8.3. Méthodes de résolution proposées . . . . .	140
8.3.1. L'approche de la programmation dynamique. . . . .	140
8.3.2. L'approche par le graphe d'états. . . . .	145
8.4. Résultats de calcul. . . . .	149
<b>CONCLUSION.</b> . . . . .	<b>153</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.</b> . . . . .	<b>157</b>

## Liste des tableaux

1.1 – Nombre d’absorption du produit carré . . . . .	22
2.1 – Nombre d’absorption du produit croisé. . . . .	26
4.1 – Les valeurs de $KP_{\min}(C_1(r_k, r_n))$ et $KP_{\min}(C_2(r_k, r_n))$ . . . . .	95
4.2 – Les motifs de taille minimale de $C_1(r_k, r_n)$ et $C_2(r_k, r_n)$ . . . . .	101
8.1 – Nombre d’étiquettes avec les cinq ressources initiales. . . . .	150
8.2 – Nombre d’étiquettes avec les cinq ressources initiales et les deux ressources supplémentaires. . . . .	151

## Listes des figures

1.1 – Notations $\square$ et $\times$ . . . . .	13
1.2 – Grille carrée $P_3 \square P_4$ et les hypercubes $[K_2]^1, [K_2]^2, [K_2]^3$ , etc . . . . .	14
1.3 – Composantes connexes de $P_5 \times P_n$ . . . . .	15
1.4 – Absorption du sous-graphe. . . . .	18
2.1 – Idée générale de la preuve établissant la borne inférieure. . . . .	29
2.2 – Configurations valides . . . . .	30
2.3 – Construction de l’absorbant de $P_6 \times P_n$ . . . . .	46
2.4 – Construction de l’absorbant de $P_7 \times P_n$ . . . . .	57
2.4’ – Absorbant minimum de $C_1(7, 7)$ . . . . .	58
2.5 – Construction de l’absorbant de $P_9 \times P_n$ . . . . .	67
3.1 – Exemple de projection . . . . .	74
3.2 – Preuve du lemme 3.4.1. . . . .	78
3.3 – Construction d’un absorbant pour $P_{10} \times P_n$ . . . . .	79
3.4 – Cas particuliers de $C_1(10, n)$ . . . . .	80
3.5 – Construction d’un absorbant de $P_{11} \times P_n$ . . . . .	81

3.6 – Cas particuliers pour la composante $C_1(11, n)$ . . . . .	82
3.7 – Construction d’un absorbant de $P_{13} \times P_n$ . . . . .	84
3.8 – Cas particuliers pour la composante $C_1(13, n)$ . . . . .	85
4.1 – Motif du cavalier : $KP(x_0, 0)$ . . . . .	90
4.2 – Partition de la grille croisée, preuve du cas général. . . . .	98
4.3 – Preuve du cas général. . . . .	99
4.4 – Calcul de $KP_{\min}(C(k+2, n+2))$ . . . . .	100
4.5 – Exemple de calcul de $KP_{\min}(C(k+2, n+2))$ . . . . .	102
4.6, 4.7 – Cas particuliers ne vérifiant pas la formule générale . . . . .	103
5.1 – Projection aux coins. . . . .	110
5.2 – Partition de la grille carrée $P_k \square P_n$ en cinq blocs . . . . .	114
5.3 – Partitionnement d’un bloc en bloc de coin et bloc de bord . . . . .	115
7.1 – Structure du problème des opérations quotidiennes. . . . .	126
7.2 – Parties gelées du chemin (au début et à la fin). . . . .	130
8.1 – Calcul des fenêtres de ressources pour les ressources $S'$ et $T'$ . . . . .	141

# INTRODUCTION

Depuis très longtemps, l'homme a été confronté à des problèmes pratiques, qu'il a pu résoudre en les modélisant avec des dessins. On peut modéliser, par exemple, la carte géographique d'un pays par un dessin où on associe un nœud à chaque ville et une arête à chaque route reliant deux villes. Dans beaucoup de situations concrètes comme l'exemple précédent, on dispose d'un ensemble d'objets avec des interrelations entre ces derniers. On pourrait citer comme autres exemples de couples objets-interrelations: des personnes et des machines, qualification d'une personne sur une machine; des antennes de transmission et des centres résidentiels, le fait qu'une antenne puisse transmettre d'un centre résidentiel vers un autre etc.

On appelle le dessin décrit pour l'exemple de la carte géographique un graphe. On définit un graphe non orienté comme étant un ensemble de sommets (ou nœuds) et un ensemble de paires de sommets qu'on appelle arêtes. Dans l'exemple de la carte géographique, on peut mettre des poids sur les sommets et/ou sur les arêtes. Un poids, sur un sommet, peut symboliser le nombre d'habitants par exemple. Un poids, sur une arête, peut symboliser la distance entre deux villes. De plus, on peut ajouter une orientation sur les arêtes pour tenir compte des sens uniques par exemple. On parle dans ce cas de paires ordonnées de sommets qu'on appelle arcs.

Par rapport aux couples objets-interrelations cités plus haut, on pourrait définir le problème qui étant données deux villes, on cherche à trouver un chemin entre les deux villes tout en parcourant la plus petite distance possible, ce problème est appelé le problème du plus court chemin. Dans le cas des personnes et des machines, on peut se proposer de trouver une affectation des personnes aux machines (selon les qualifications) de sorte qu'il y ait le plus de personnes qui travaillent. Ce problème est appelé le problème du couplage maximum où un poids de un est mis sur chaque arête.



Enfin, on peut définir le problème où on doit repérer un ensemble de sites où implanter les antennes qui permettent à la fois de transmettre dans tous les foyers et d'utiliser le nombre minimum d'émetteurs. Dans ce cas un poids de un est mis sur chaque sommet du graphe correspondant. Ce problème est appelé le problème du nombre d'absorption, il consiste à trouver dans un graphe  $G = (V, E)$  (où  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  l'ensemble des arêtes) un sous-ensemble  $A \subseteq V$  tel que tout sommet du graphe soit soit dans  $A$  soit adjacent à au moins un sommet de  $A$ .

Dans le cadre de notre travail, nous allons nous intéresser à des problèmes théoriques du type du dernier problème cité.

Bien que la définition formelle de l'absorption soit connue depuis la fin des années cinquante, ce n'est que vers le milieu des années soixante-dix qu'il a été démontré que le problème de l'absorption pour un graphe quelconque est NP-complet.

Ce résultat a amené les chercheurs à s'intéresser à des familles particulières de graphes qui proviennent d'applications aussi bien théoriques que pratiques, comme les arbres, les grilles, les graphes parfaits, etc., et à donner des formules exactes pour le nombre d'absorption de ces graphes, contrairement aux graphes quelconques pour lesquels on ne peut donner que des bornes qui dépendent en général du nombre de sommets (et/ou d'arêtes) et du degré maximum (et/ou degré minimum) etc..

Considérons le graphe  $G$  dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des paires de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  où  $\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers naturels, et où deux paires  $(i, j)$  et  $(i', j')$  sont reliées si et seulement si  $i = i'$  et  $|j - j'| = 1$  ou  $j = j'$  et  $|i - i'| = 1$ . Ce graphe est appelé grille carrée complète infinie. De la même manière, considérons le graphe  $G$  dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des paires de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  où  $\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers naturels, et où deux paires  $(i, j)$  et  $(i', j')$  sont reliées si et seulement si  $|i - i'| = |j - j'| = 1$ . Ce graphe est appelé grille croisée complète infinie.

Les chercheurs se sont beaucoup intéressés aux grilles carrées ainsi qu'à leur nombre d'absorption. En 1995, le nombre d'absorption n'était connu que pour des grilles carrées dont l'une des chaînes est de longueur fixe (six sommets ou moins). On

disposait aussi de quelques résultats partiels qui donnent une bonne évaluation de ce nombre.

Le fait que toute grille croisée (produit tensoriel de deux chaînes) est un sous-graphe d'une certaine grille carrée et réciproquement nous a amené à étudier le nombre d'absorption pour ces dernières.

Avant d'établir nos résultats, nous commençons par donner les définitions et les résultats de base essentiels à la compréhension du reste du texte. Dans le chapitre I, nous donnons les principaux résultats et définitions propres à notre problème, entre autres, celles des grilles carrées, des grilles croisées et du nombre d'absorption. Nous commençons par établir, dans le chapitre II, nos résultats concernant le nombre d'absorption de la grille croisée quand l'une des deux chaînes est de longueur  $k$  fixe, pour les petites valeurs de  $k$ . Dans le chapitre III, nous présentons un algorithme de programmation dynamique qui nous permet de calculer le nombre d'absorption de grilles croisées complètes pour  $k \leq 33$  et  $n \leq 40$ , ce qui constituera notre base d'induction. En utilisant les cas déjà résolus et quelques résultats concernant les problèmes de la quasi-absorption et de la déficience (que nous introduirons), nous donnons la preuve du cas général dans le chapitre IV.

À l'étape suivante, nous revenons à la grille carrée, qui était notre premier objectif. En effet, on peut remarquer que la démarche de la preuve pour les grilles croisées fonctionne aussi dans le cas des grilles carrées. Malheureusement, quand le nombre de sommets de la chaîne de longueur fixe dépasse quatre, le nombre de cas à étudier augmente d'une manière telle que nous avons du mal à garantir qu'ils ont tous été considérés. La théorie développée pour la démonstration du cas général de la grille croisée nous permettra par la suite d'établir une borne sur le nombre d'absorption de la grille carrée et donc de donner la preuve d'une conjecture posée par Paul Erdős en 1985. Ce travail est présenté dans le chapitre V.

Le travail qui a été fait dans les chapitres 2 à 5 étant un travail de collaboration entre S. Gravier, I. Zighem et moi-même, on peut trouver ces résultats dans les thèses de ces

derniers. On peut trouver les résultats du chapitre 2 à l'exception du théorème 2.5.3 dans la thèse de monsieur Gravier et les résultats des chapitres 2, 3, 4 et 5 dans la thèse de monsieur Zighem (voir [37] et [62]).

Le dernier problème que nous allons étudier dans cette première partie est une conjecture de Vizing. En particulier, nous montrerons que cette conjecture est vérifiée quand les deux graphes sont de degré minimum supérieur ou égal à une certaine valeur. Ceci fera l'objet du chapitre VI.

Dans la seconde partie de la thèse, nous étudions le problème de la gestion d'équipages aériens durant le jour d'opération. Ce problème consiste à modifier de manière "efficace" les horaires des membres d'équipages suite à des perturbations. Ces perturbations peuvent être des absences non prévues, des pannes d'avions, de mauvaises conditions météorologiques, etc.. Les conventions collectives prévoient des coûts supplémentaires pour les compagnies aériennes quand elles perturbent les blocs mensuels de leurs pilotes. Par conséquent, les modifications doivent être réduites autant que possible et doivent être effectuées dans un court laps de temps. La période pendant laquelle on effectue des modifications est appelée période opérationnelle. Cette deuxième partie est constituée des chapitres VII et VIII. Dans le chapitre VII, nous définissons de manière formelle le problème de gestion quotidienne des opérations ainsi que celui du plus court chemin avec contraintes. Nous nous intéresserons de plus près à ce dernier problème. Dans le chapitre VIII, nous exposons les détails des méthodes proposées pour résoudre notre problème.

# TERMINOLOGIE ET DÉFINITIONS DE BASE

## 1. Introduction

Cette section contient les définitions, les théorèmes et les concepts de base de la théorie des graphes. Elle est destinée aux personnes non habituées à la terminologie utilisée tout au long de notre travail. Néanmoins le lecteur peut se référer aux ouvrages Berge[6], Ore[56] et Hedetniemi et Lascar[43] pour plus de détails.

## 2. Notion de graphe

Un **graphe simple** est défini comme étant un couple  $(V(G), E(G))$  (ou  $(V, E)$  lorsqu'il n'y a pas de confusion possible), où  $V(G)$  est un ensemble fini non vide d'éléments appelés **sommets** de  $G$  et  $E(G)$  est un ensemble de paires non ordonnées d'éléments distincts de  $V(G)$  appelées **arêtes** de  $G$ . Les ensembles  $V(G)$  et  $E(G)$  sont appelés respectivement ensemble des sommets et ensemble des arêtes de  $G$ . Un sommet sera représenté par une lettre minuscule de l'alphabet latin, tandis qu'une arête d'extrémités  $u$  et  $v$  sera notée  $uv$  ou  $(u, v)$ . La cardinalité ou bien le nombre d'éléments de  $V(G)$  (respectivement  $E(G)$ ) est généralement notée  $|V(G)|$  ou  $n$  (respectivement  $|E(G)|$  ou  $m$ ), et est appelée l'**ordre** de  $G$  (respectivement la **taille** de  $G$ ).

Un graphe orienté  $G$  est un couple de la forme  $(V(G), A(G))$ , où  $V(G)$  est l'ensemble des sommets et  $A(G) \subseteq V(G) \times V(G)$ . Soit  $(u,v)$  un couple de sommets appartenant à  $A(G)$ . On dit que  $(u, v)$  est un arc de  $G$  et que  $u$  (resp.  $v$ ) est l'extrémité

initiale (resp. finale) de l'arc  $(u, v)$ .

On peut aussi affecter aux sommets et/ou aux arêtes (ou arcs) des poids ou des étiquettes qui exprimeront des distances, des temps ou des coûts. On parlera alors de graphes **pondérés**.

Dans toute la première partie de cette thèse, on ne parlera que de graphes simples et non pondérés. Dans le cas contraire, on le précisera.

### 3. Définitions de base

Deux arêtes sont dites **adjacentes** si elles ont une extrémité commune. Deux sommets  $u$  et  $v$  sont dits **adjacents** dans  $G$  si l'arête  $(u, v)$  appartient à  $E(G)$  ; le terme **voisin** est synonyme de adjacent. Une arête est dite **incidente** à un sommet  $u$  si ce dernier est l'une de ses extrémités. Le **degré** d'un sommet  $u$ , noté  $d_G(u)$  (ou  $d(u)$ ), est égal au nombre d'arêtes incidentes à  $u$ . Le degré minimum et le degré maximum d'un graphe  $G$  sont notés respectivement  $\delta(G)$  et  $\Delta(G)$ .

On appellera **voisinage** d'un sommet  $u$ , et on notera  $N_G(u)$  (ou  $N(u)$ ), l'ensemble des sommets adjacents à  $u$  dans  $G$ . De même, on définit le voisinage d'un sous-ensemble  $A$  de sommets, noté  $N_G(A)$  (ou  $N(A)$ ), comme étant l'ensemble des sommets de  $V \setminus A$  ayant un voisin appartenant à  $A$  dans le graphe  $G$ .

Soit  $v_1, v_2, \dots, v_n$  les sommets d'un graphe  $G$ . On définit la **matrice d'adjacence** ou **matrice associée**  $M(G)$  comme suit : pour toute paire de sommets  $(v_i, v_j)$ ,  $M[v_i, v_j] = 1$  si et seulement si  $v_i$  est adjacent à  $v_j$ .

Deux graphes simples  $G = (V_1, E_1)$  et  $H = (V_2, E_2)$  sont dits **isomorphes** s'il existe une bijection  $f$  qui à chaque sommet de  $G$  associe un sommet de  $H$  et telle que  $(f(u), f(v)) \in E(H)$  si et seulement si  $(u, v) \in E(G)$ .

Dans toute la suite on omettra de spécifier  $G$  pour tous les paramètres déjà définis (sauf dans les cas où il pourrait y avoir confusion).

## 4. Quelques types de graphes

Soit  $G = (V, E)$  un graphe.

### Sous-graphe

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $V$ . Le graphe noté  $G[A]$  ou  $G_A$  dont les sommets sont ceux de  $A$ , et dont les arêtes sont celles de  $G$  ayant les deux extrémités dans  $A$ , est appelé **sous-graphe** de  $G$  induit ou engendré par  $A$ .

### Graphe partiel

Soit  $U$  un sous-ensemble de  $E$ . Le graphe  $H = (V, U)$  dont les sommets sont tous les sommets de  $G$  et dont les arêtes sont celles de  $U$  est appelé **graphe partiel** de  $G$ .

### Graphe complet

Un graphe  $G$  est dit **complet** si et seulement si pour toute paire de sommets distincts  $u$  et  $v$  dans  $V$ , l'arête  $(u, v)$  appartient à  $E$ . Un tel graphe est généralement noté  $K_n$  et appelé une  $n$ -clique,  $n$  étant l'ordre de  $G$ .

### Graphe biparti

Un graphe est **biparti** si l'ensemble de ses sommets  $V$  peut être partitionné en deux sous-ensembles  $V_1$  et  $V_2$ , de telle sorte que deux sommets appartenant au même ensemble ne soient jamais adjacents. Il est en général noté  $G = (V_1, V_2; E)$ .

### Graphe biparti-complet

Un graphe biparti  $G = (V_1, V_2; E)$  est dit **biparti-complet** si pour tout sommet  $v_1$  dans

$V_1$  et tout sommet  $v_2$  dans  $V_2$ , l'arête  $(v_1, v_2)$  appartient à  $E$ . Un graphe biparti-complet tel que  $|V_1| = p$  et  $|V_2| = q$  est noté  $K_{p, q}$ .

### Graphe complémentaire

Le graphe noté  $\overline{G}$  dont l'ensemble des sommets est  $V$  et dont l'ensemble des arêtes est  $(V \times V) \setminus E(G)$  est appelé graphe **complémentaire** de  $G$ .

### Graphe stable

Un graphe  $G$  est dit **stable** s'il n'a aucune arête. C'est en fait le graphe complémentaire d'un graphe complet. De même, un sous-ensemble  $A$  de sommets de  $G$  forme un stable de  $G$  si pour tout couple  $(u, v)$  de sommets appartenant à  $A$ , l'arête  $(u, v)$  n'appartient pas à  $G$ .

### Chaîne de longueur $k$

Une **chaîne** induite de  $G$  est un sous-ensemble de sommets  $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$  tous distincts tel que pour tout  $i = 0, \dots, k-2$ ,  $(u_i, u_{i+1})$  est une arête de  $G$ , et  $(u_i, u_j) \notin E$  si  $j > i + 1$  ou  $j < i - 1$ . Les sommets  $u_0$  et  $u_{k-1}$  sont les extrémités de la chaîne. Une chaîne de longueur  $k$  (c'est-à-dire contenant  $k$  sommets) est généralement notée  $P_k$ .

### Cycle de longueur $k$

Un **cycle** est une chaîne induite de longueur  $k$  telle que les deux extrémités  $u_0$  et  $u_{k-1}$  coïncident.

### Graphe connexe

Un graphe  $G$  est dit **connexe** si pour toute paire de sommets  $\{u, v\}$  il existe une chaîne reliant ces deux sommets.

### **Graphe planaire**

Un graphe est dit **planaire** s'il admet un plongement dans le plan tel que les arêtes n'aient que des sommets en commun.

### **Graphe k-régulier**

Un graphe est dit **k-régulier** si tous ses sommets sont de degré  $k$ .

### **Arbre**

Un **arbre** est un graphe sans cycle et connexe.

## **5. Quelques problèmes classiques en théorie des graphes**

L'un des problèmes les plus connus en théorie des graphes, et qui n'a jamais manqué de succès auprès des chercheurs, est le problème de la **coloration**. Ce problème consiste à trouver, si elle existe, une manière de colorier les sommets d'un graphe en utilisant  $k$  couleurs de tel sorte que deux sommets voisins quelconque du graphe ne soient jamais coloriés avec la même couleur. Le problème du **couplage** dans un graphe est tout aussi connu, mais il est nettement moins "difficile" que celui de la coloration. Ce problème consiste à déterminer un sous-ensemble d'arêtes du graphe de telle sorte que, pour toute paire d'arêtes appartenant au sous-ensemble, l'intersection entre ces arêtes est vide. On pourrait mentionner aussi les problèmes du **cycle Hamiltonien**, du **stable**, de la **clique**, de l'**absorbant**, etc..

## **6. Complexité**

Un problème de décision est un problème auquel il faut répondre par "oui" ou par "non". A chacun des problèmes cités dans la section précédente on peut associer un problème de décision. La réponse au problème de décision associé au problème de la



coloration, par exemple, est “oui” s’il existe une coloration des sommets du graphe avec  $k$  couleurs et “non” dans le cas contraire. On peut donc facilement remarquer que si le problème de décision associé est difficile, le problème originel est au moins aussi difficile. Par un souci de classification des problèmes, la classe des problèmes NP a été introduite. Cette classe contient tous les problèmes de décision tels que si l’on dispose d’une solution, on puisse vérifier en temps polynomial en la taille des données que la réponse est “oui”. Parmi les problèmes de cette classe, on peut trouver des problèmes qui admettent un algorithme de résolution polynomial en la taille des données. Cette sous-classe est appelée P.

Les problèmes NP-complets (ou “difficiles”) ont la propriété suivante : s’il existe un algorithme polynomial pour résoudre l’un d’entre eux, alors il existerait un algorithme polynomial pour résoudre n’importe quel problème appartenant à NP, et donc NP serait identique à P. La question de savoir si P est différent de NP est l’une des questions les plus importantes des mathématiques.

# **PARTIE 1 :**

**NOMBRE D'ABSORPTION**

**DE**

**GRAPHES DE TYPE GRILLE**

# CHAPITRE 1 : PRODUITS DE GRAPHES ET ABSORPTION

## 1.1. Introduction

Dans cette section, on donne les notations et les définitions concernant les produits de graphes, les cas particuliers où ces derniers sont des chaînes et on parlera de grilles. On introduira aussi la définition d'un ensemble absorbant à partir d'un exemple d'application. Ces définitions vont nous servir dans toute la suite de ce travail.

## 1.2. Produit carré (ou somme cartésienne)

Soient  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  deux graphes. Le produit **carré** de  $G$  et  $G'$  est le graphe noté  $G \square G' = (V \times V', E_{ca})$  tel que :

$$[(x, x'), (y, y')] \in E_{ca} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y' \text{ et } (x, y) \in E \\ \text{ou} \\ x = y \text{ et } (x', y') \in E' \end{cases}$$

## 1.3. Produit croisé (ou produit tensoriel)

Soient  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  deux graphes. Le produit **croisé** de  $G$  et  $G'$  est le graphe noté  $G \times G' = (V \times V', E_{cr})$  tel que :

$$[(x, x'), (y, y')] \in E_{cr} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in E \\ \text{et} \\ (x', y') \in E' \end{cases}$$

## 1.4. Exemples

Les termes carré et croisé, ainsi que les notations  $\square$  et  $\times$  ont été utilisés dans un souci d'éviter toute confusion.

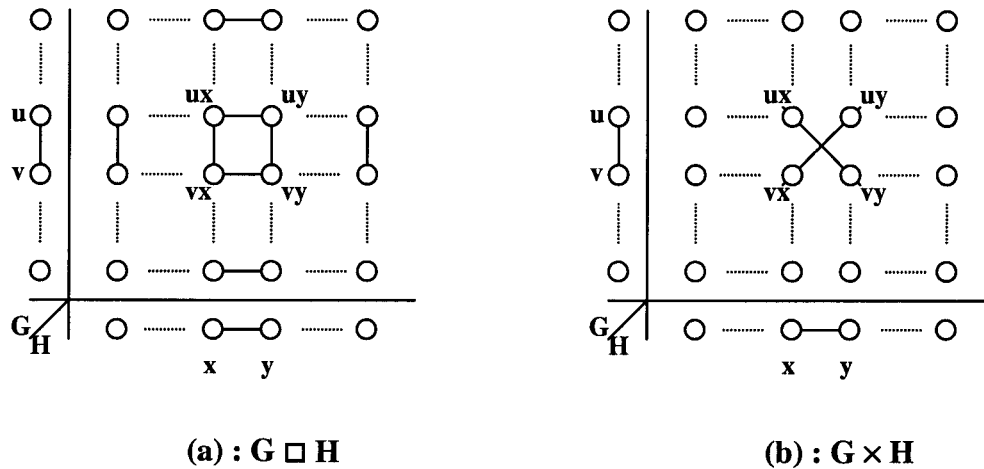
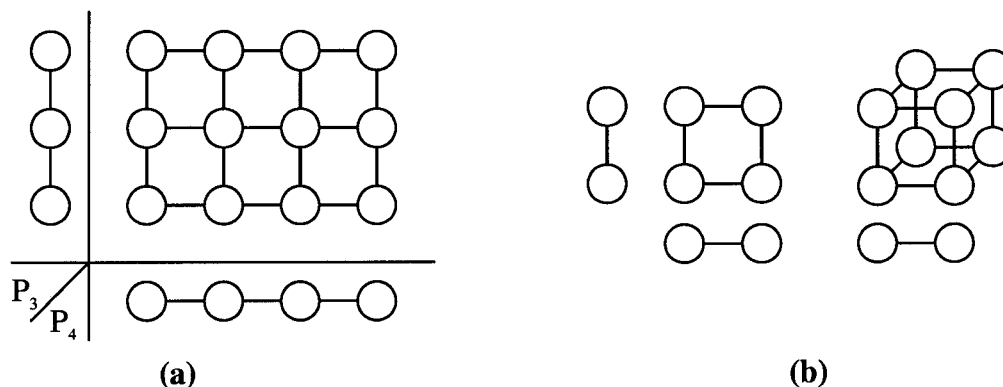


Figure 1.1 - Notations  $\square$  et  $\times$ .

On remarque dans la figure 1.1(a) que le produit carré de  $(u, v)$  par  $(x, y)$  induit un carré dans le graphe résultant, d'où le terme "carré". De même, dans le produit croisé, le produit des deux arêtes  $(u, v)$  et  $(x, y)$  engendre une croix, d'où le terme "croisé" (voir figure 1.1(b)).

Un exemple du produit carré est la grille carrée complète  $P_3 \square P_4$  (voir figure 1.2(a)) où on peut remarquer que chaque "ligne" du graphe produit est isomorphe à  $P_4$  et que chaque "colonne" est isomorphe à  $P_3$ . Un second exemple est l'hypercube de dimension  $n$  (voir figure 1.2(b)) qui est défini comme la puissance nième du produit carré d'une arête.



**Figure 1.2 – Grille carrée  $P_3 \square P_4$  et les hypercubes  $[K_2]^1$ ,  $[K_2]^2$ ,  $[K_2]^3$ , etc..**

Le produit croisé de deux graphes bipartis connexes donne un graphe biparti ayant deux composantes connexes. Plus précisément, si  $(X, Y)$  et  $(X', Y')$  sont les bipartitions des ensembles de sommets de ces deux graphes, alors  $(X \times X', Y \times Y')$  et  $(X \times Y', Y \times X')$  représentent des bipartitions des ensembles de sommets des deux composantes connexes de leur produit croisé. L'opérateur  $\times$ , placé entre deux ensembles, représente le produit cartésien de ces deux ensembles.

On note  $Z_m$  l'ensemble  $\{1, 2, \dots, m\}$ , où  $m$  est un entier positif.

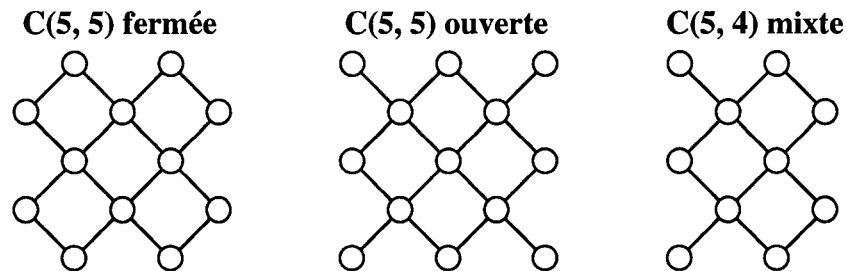
La grille croisée complète de type 1 (resp. de type 2), notée  $C_1(k, n)$  (resp.  $C_2(k, n)$ ), est le graphe ayant pour sommets les  $x_{i,j}$ , où  $(i, j) \in Z_k \times Z_n$  et  $i$  et  $j$  sont de même parité (resp. sont de parité différente), et tel que deux sommets  $x_{i,j}$  et  $x_{i',j'}$  sont adjacents si et seulement si  $|i-i'| = |j-j'| = 1$ . On écrira  $C(k, n)$  lorsque l'indice ne sera pas important.

Soient  $P_k = (x_1, \dots, x_k)$  et  $P_n = (y_1, \dots, y_n)$  deux chaînes. Si on note  $x_{i,j}$  le sommet  $(x_i, y_j)$  du produit croisé  $P_k \times P_n$ , il est facile de voir que le graphe  $P_k \times P_n$  n'est autre que l'union disjointe de  $C_1(k, n)$  et  $C_2(k, n)$ .

La  $j^{\text{ième}}$  "colonne"  $X_j$  et la  $i^{\text{ième}}$  "ligne"  $Y_i$  d'une composante  $C(k, n)$  sont définies respectivement comme suit :

$$X_j = \{ x_{i,j} \in V(C(k, n)) \mid i \in Z_k \} \text{ et } Y_i = \{ x_{i,j} \in V(C(k, n)) \mid j \in Z_n \}.$$

Lorsque  $k$  et  $n$  sont impairs, la composante  $C_1(k, n)$  (resp.  $C_2(k, n)$ ) sera dite ouverte (resp. fermée), et nous avons  $|X_1| = \lceil k/2 \rceil = |X_n|$  (resp.  $|X_1| = \lfloor k/2 \rfloor = |X_n|$ ). Si  $k$  est impair et  $n$  pair, les deux composantes sont isomorphes et seront dites alors mixtes (voir figure 1.3). Si  $k$  et  $n$  sont pairs, les deux composantes sont isomorphes.



**Figure 1.3 - Composantes connexes de  $P_5 \times P_n$ .**

Pour tout graphe  $G = (V, E)$  et  $X \subseteq V$ , on note  $N(X)$  le voisinage de  $X$ , c'est-à-dire : l'ensemble de tous les sommets dans  $V \setminus X$  qui sont reliés par au moins une arête à un sommet dans  $X$ . On note  $N[X]$  le voisinage étendu de  $X$ , c'est-à-dire que  $N[X] = N(X) \cup X$ .

### 1.5. Absorbants de graphes et absorbants de grilles

Avant de donner la définition de l'absorption, on donne une application aux réseaux de communication. Un réseau de communication consiste en un ensemble de sites reliés entre eux par des lignes de communication. On veut placer un certain nombre d'émetteurs en des sites de telle sorte que tout site sans émetteur soit relié à au moins un site avec émetteur par une ligne de communication. Pour des raisons économiques évidentes, on veut trouver une solution comportant le nombre minimal d'émetteurs.

Si l'on modélise ce problème à l'aide d'un graphe, on associe au réseau de communication le graphe  $G = (V, E)$ , où l'ensemble de sommets  $V$  représente les sites et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement s'il existe une ligne de communication entre les sites correspondants. Une solution à notre problème est de

trouver un ensemble stable maximal de notre graphe (maximal au sens de l'inclusion, c'est-à-dire qui n'est contenu proprement dans aucun autre stable), ce qui est une solution "facile". Il suffit de choisir un premier sommet et de supprimer ses voisins, de choisir un deuxième sommet et d'éliminer ses voisins dans le graphe restant, et ainsi de suite. Il est plus intéressant de trouver le plus petit stable maximal. Un tel ensemble est appelé noyau. Le problème du noyau est un problème difficile (NP-complet, plus précisément).

L'idéal pour notre problème est de déterminer un ensemble de sommets non nécessairement stable tel que tout sommet à l'extérieur de cet ensemble possède au moins un voisin dans celui-ci. Ceci nous amène à donner la définition suivante.

Un ensemble de sommets  $D$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est un **ensemble absorbant** (ou **dominant**) de  $G$  si tout sommet de  $G$  est soit dans  $D$  soit relié par une arête à au moins un sommet de  $D$ . En d'autres termes  $N[D] = V$ . Le nombre d'absorption  $\gamma(G)$  est la plus petite cardinalité d'un tel ensemble.

La première remarque qu'on peut faire est que le nombre d'absorption est inférieur ou égal à la cardinalité de tout stable maximal, en particulier à celle du plus petit stable maximal (noyau). On verra plus loin que le problème de l'absorbant et celui de l'absorbant stable sont NP-complets pour des graphes quelconques.

Dans leur article de 1990, Hedetniemi et Laskar [43] attribuent l'origine du problème de l'absorption au jeu des échecs qui se jouait en Inde il y a 400 ans. Ce jeu consistait à chercher des ensembles de pièces du jeu qui dominent certaines pièces adverses posées sur l'échiquier ou certains emplacements de l'échiquier.

Mais ce n'est qu'en 1958 et 1962 que Berge [4] et Ore [56] respectivement ont donné une définition mathématique formelle du problème de l'absorption. En 1977, Cockayne et Hedetniemi [15] ont publié un article, où ils font un rappel des résultats et des applications de l'absorption dans les graphes. La parution de cet article a engendré un vif regain d'intérêt pour l'étude du problème de l'absorption, et une multitude de définitions nouvelles qui posent des conditions sur l'absorbant ou qui le généralisent

ont vu le jour. Pour ne citer que deux exemples de ces variations, on peut mentionner celle où le graphe induit par l'ensemble absorbant est astreint à être stable, (ou connexe, ou complet, ou sans sommet isolé, ou une chaîne, ou un cycle, etc.), ou bien celle où les sommets hors de l'ensemble absorbant  $D$  doivent avoir au moins  $k$  voisins dans  $D$ . Dans ce dernier cas on parle de **k-absorption**.

Les applications liées à l'absorption sont très nombreuses, et touchent plusieurs domaines. Le problème de surveillance des sommets d'un réseau par un ensemble de stations radar (voir Berge [5]), le problème de communication dans un réseau (voir Fink, Jacobson, Kinch, Roberts [30]), le problème de **noyau** (i.e. un absorbant qui est en même temps stable) dans un graphe et les "solutions" dans la théorie des jeux (voir Berge [5]), sont des exemples de telles applications.

Le problème du nombre d'absorption dans les graphes en général est NP-complet, ainsi que plusieurs de ses variations (voir Garey et Johnson [34]). Les chercheurs se sont donc intéressés à des classes particulières de graphes. C'est ainsi que Dewdney [27] a montré que le problème de l'absorption était NP-complet même pour les graphes bipartis. La grille aussi bien carrée que croisée est un graphe biparti particulier. La grille carrée a fait l'objet de beaucoup de recherches qui remontent aux années 1800, alors qu'on cherchait à trouver un emplacement optimal des pièces d'un jeu d'échecs (voir Ball [2], deJaenisch [17]). L'étude de la grille est pertinente également pour les problèmes de gestion des réseaux routiers, et des modèles d'interconnexions de processeurs dans les systèmes VLSI à multiprocesseurs (voir Hwang et Briggs [45]).

Ceci a encouragé les chercheurs à étudier certains paramètres pour ces graphes. Ce grand intérêt pour la grille carrée a permis de montrer que trouver le nombre d'absorption d'un sous-graphe arbitraire d'une grille carrée était NP-complet. La preuve en est attribuée par D. S. Johnson [49] à F. T. Leighton. Cependant le même problème pour la grille carrée complète reste ouvert. Par contre, on peut remarquer que la grille croisée (sous-graphe induit d'une certaine grille carrée) a été très peu étudiée.



### 1.5.1. Problèmes et résultats concernant l'absorption dans les graphes

Depuis vingt ans, l'étude du nombre d'absorption a donné un grand nombre de résultats. Ces résultats concernent le nombre d'absorption classique, ainsi que plusieurs paramètres reliés à ce nombre. De par la difficulté du problème, les chercheurs se sont intéressés à certaines classes de graphes et ont établi les paramètres en question pour ces classes en utilisant différentes techniques, entre autres, la programmation dynamique, les bornes, etc.

L'un des problèmes les plus connus concernant l'absorption et qui reste non résolu de nos jours porte sur le nombre d'absorption du produit carré de deux graphes.

Il s'énonce comme suit.

#### Conjecture 1.5.1.1 (Vizing [59])

Pour tout couple de graphes  $G$  et  $H$ ,  $\gamma(G \square H)$  est supérieur ou égal à  $\gamma(G) \cdot \gamma(H)$ . ■

La difficulté majeure du problème de l'absorption provient du fait que l'on ne peut rien dire sur le nombre d'absorption d'un sous-graphe. Par exemple, soit  $G = P_{3n+1}$  une chaîne à  $3n+1$  sommets avec  $n \geq 1$ , soit  $G' = P_{3n+1} \setminus \{v\}$  où  $v$  est une extrémité de  $P_{3n+1}$ , et soit  $G''$  le graphe obtenu en ajoutant un sommet (universel) relié à tous les sommets de  $P_{3n+1}$  (voir figure 1.4).

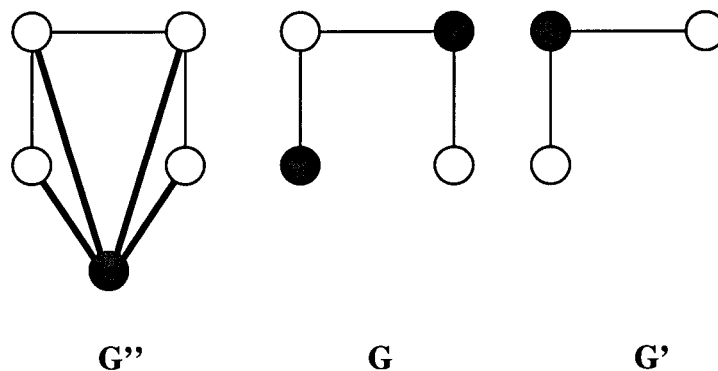


Figure 1.4 - Absorption du sous-graphe.

Alors  $G'$  est un sous-graphe de  $G$  et  $G$  est un sous-graphe de  $G''$ , et on a

$$\gamma(G') < \gamma(G) \text{ et } \gamma(G) > \gamma(G'').$$

On donne ici quelques propriétés et résultats concernant le nombre d'absorption :

- Si  $H = (V, F)$  est un graphe partiel de  $G = (V, E)$  (i.e.  $F \subseteq E$ ), alors  $\gamma(H) \geq \gamma(G)$ .

-  $\gamma(G) \leq \alpha(G)$ , où  $\alpha(G)$  est la taille d'un plus grand stable maximal.

Il est clair qu'un stable maximal est un absorbant.

- On a toujours  $\gamma(G) \leq \chi(\overline{G})$ , où  $\chi(G)$  est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les sommets du graphe  $G$ .

Une coloration de  $\overline{G}$  est une partition en cliques de  $G$ . On peut choisir alors un absorbant en prenant un représentant dans chacune des cliques de la partition.

- Si  $n \geq 2$ , alors en vertu de la propriété précédente  $\gamma(\overline{P_n}) = 2$ .

- Si on note  $n$  le nombre de sommets de  $G$ , alors  $\gamma(G) \leq n + 1 - \chi(G)$ .

Dans une  $\chi(G)$ -coloration de  $G$  on peut supposer que le premier stable est maximal; la taille de ce stable est alors au plus  $n + 1 - \chi(G)$ .

$$- \gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta + 1}.$$

Soit  $D$  un absorbant de  $G$ . Un sommet de  $D$  "absorbe" au plus  $\Delta + 1$  sommets de  $G$ , et on a donc  $(\Delta + 1) \cdot |D| \geq n$ .

$$-\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

En effet, on peut construire un absorbant de cardinalité  $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$  en prenant un sommet sur trois de la chaîne et en vertu de la propriété précédente on obtient l'égalité.

Enfin, nous citons un résultat établissant des bornes sur le nombre d'absorption du produit croisé de deux graphes quelconques. Ce résultat est similaire à un résultat sur le produit carré de deux graphes (voir [57]).

**Théorème 1.5.1.2 ([12])**

Soient  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  deux graphes sans sommets isolés. Alors

$$|V(G)| \cdot \gamma(G') \geq \gamma(G \times G') \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1} \cdot \gamma(G').$$

**Preuve :**

1) Borne supérieure pour  $\gamma(G \times G')$

Soit  $A$  un absorbant minimum de  $G$  et soit  $A' = A \times V(G')$ , avec  $|A'| = |V(G')| \cdot \gamma(G)$ .

$A'$  est un absorbant de  $G \times G'$ . En effet soit  $(x, y)$  un sommet de  $V(G \times G')$  qui n'appartient pas à  $A'$ . Comme  $x$  est absorbé par au moins un sommet de  $A$  dans  $G$ , disons  $a$ , et que  $\delta(G') > 0$ , alors il existe forcément une arête entre le sommet  $(x, y)$  et un sommet  $(a, y')$  de  $A'$ .

Nous concluons que  $\gamma(G \times G') \leq |V(G')| \cdot \gamma(G)$ .

On a aussi par symétrie:  $\gamma(G \times G') \leq |V(G)| \cdot \gamma(G')$ .

## 2) Borne inférieure pour $\gamma(G \times G')$

Soit  $A$  un absorbant minimum du graphe  $G \times G'$ . À tout sommet  $v \in V(G)$  associons  $B(v) = \{v_j \in V(G') : u_{i,j} = v_i \times v_j \in A \text{ et } v_i \in N[v]\}$ .

$B(v)$  est un absorbant de  $G'$ . En effet, soit  $u'$  un sommet quelconque de  $V(G')$ . Le sommet  $(v, u')$  est soit dans  $A$  soit dans  $V(G \times G') \setminus A$ . Dans le premier cas,  $u'$  est dans  $B(v)$  de par la définition de  $B(v)$  et donc il s'absorbe lui-même. Dans le second cas,  $(v, u')$  a au moins une arête le reliant à un sommet de  $A$  ( $A$  est un absorbant de  $G \times G'$ ), disons à  $(v_i, v_j)$ . L'existence de cette arête  $[(v, u'), (v_i, v_j)]$  dans  $G \times G'$  implique l'existence des deux arêtes  $(v, v_i)$  et  $(u', v_j)$  dans  $G$  et  $G'$  respectivement. Par conséquent,  $v_i \in N[v]$  et  $v_j \in B(v)$ .

Donc  $|B(v)| \geq \gamma(G')$ .

Comme chaque sommet  $v$  de  $V(G)$  appartient à  $d(v) + 1$  voisinages étendus de  $G$ , et comme  $d(v) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ , on obtient :

$$|A| \geq \frac{\sum_{v \in V(G)} |B(v)|}{\Delta(G) + 1}.$$

Donc  $\gamma(G \times G') \geq \frac{|V(G)| \cdot \gamma(G')}{\Delta(G) + 1}$ , et par symétrie,  $\gamma(G \times G') \geq \frac{|V(G')| \cdot \gamma(G)}{\Delta(G') + 1}$ . ■

### 1.5.2. Produit carré et absorption

La conjecture de Vizing [59] a été démontrée dans des cas particuliers où l'on connaissait des bornes sur les valeurs de  $\gamma(G)$  et de  $\gamma(G')$ .

**Théorème 1.5.2.1 ([47])**

Soit  $T$  un arbre. Alors pour tout graphe  $G$ ,  $\gamma(G \square T) \geq \gamma(G) \cdot \gamma(T)$  ■

Le résultat le plus significatif sur la conjecture de Vizing est dû à Jaeger et Payan (48) en combinaison avec un résultat de El-Zahar et Pareek [28]. Plus précisément, Jaeger et Payan ont montré que  $\gamma(G) \cdot \gamma(\bar{G}) \leq |V(G)|$  qu'on appelle relation du type Nordhaus Gaddum. Tandis que El-Zahar et Pareek ont montré que  $\gamma(G \square H) \geq \min\{|V(G)|, |V(H)|\}$ .

**Théorème 1.5.2.2 ([48], [28])**

$\gamma(G \square \bar{G}) \geq \gamma(G) \cdot \gamma(\bar{G})$  ■

Les résultats récents ([29], [42], et [9]) sur la conjecture de Vizing, sont basés sur une description de propriétés permettant de valider celle-ci.

Mais le calcul de  $\gamma(G \square G')$  reste en général difficile. La grille en est un exemple. Le meilleur résultat connu est dû à Fisher [31]. Dans le tableau qui suit, on donne le nombre d'absorption de  $P_k \square P_n$  pour  $k$  allant de 1 à 16.

**Tableau 1.1 – Nombre d'absorption du produit carré.**

<b>k</b>	$\gamma(P_k \square P_n)$	<b>Références</b>
<b>1</b>	$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$	<b>[46]</b>
<b>2</b>	$\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$	<b>[46]</b>
<b>3</b>	$\left\lceil \frac{3n+1}{4} \right\rceil$	<b>[46]</b>

4	$\begin{cases} n+1 & \text{si } n = 1, 2, 3, 5, 6 \text{ ou } 9; \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$	[46]
5	$\begin{cases} \left\lceil \frac{6n+4}{5} \right\rceil - 1 & \text{si } n = 2, 3 \text{ ou } 7; \\ \left\lceil \frac{6n+4}{5} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$	[7]
6	$\begin{cases} \left\lceil \frac{10n+4}{7} \right\rceil + 1 & \text{si } n \equiv 3 \pmod{7}, n \neq 3; \\ \left\lceil \frac{10n+4}{7} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$	[7]
7	$\begin{cases} \left\lceil \frac{5n+1}{3} \right\rceil + 1 & \text{si } n = 1; \\ \left\lceil \frac{5n+1}{3} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$	[31]
8	$\begin{cases} \left\lceil \frac{15n+7}{8} \right\rceil - 1 & \text{si } n = 4 \text{ ou } 6; \\ \left\lceil \frac{15n+7}{8} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$	[31]
9	$\begin{cases} \left\lceil \frac{23n+10}{11} \right\rceil - 1 & \text{si } n = 2, 3; \\ \left\lceil \frac{23n+10}{11} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$	[31]
10	$\begin{cases} 16 & \text{si } n = 6, \\ \left\lceil \frac{30n+15}{13} \right\rceil - 1 & \text{si } n = 3, 4, 7, 13, 16 \text{ ou } n \equiv 10 \pmod{13}; \\ \left\lceil \frac{30n+15}{13} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$	[31]
11	$\begin{cases} \left\lceil \frac{38n+22}{15} \right\rceil - 1 & \text{si } n = 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 18, 20, 22, 23; \\ \left\lceil \frac{38n+22}{15} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$	[31]

12	$\begin{cases} \left\lceil \frac{80n + 38}{29} \right\rceil - 1 & \text{si } n = 1, 4, 9; \\ \left\lceil \frac{80n + 38}{29} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$	[31]
13	$\begin{cases} \left\lceil \frac{98n + 54}{33} \right\rceil - 1 & \text{si } n = 2, 3, 4, 7, 10 \text{ ou} \\ & n \equiv 13, 16, 18, 19 \pmod{33}; \\ \left\lceil \frac{98n + 54}{33} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$	[31]
14	$\begin{cases} \left\lceil \frac{35n + 20}{11} \right\rceil - 1 & \text{si } n = 2, 3, 4 \text{ ou} \\ & n \equiv 7 \pmod{11} \text{ excepté } 40; \\ \left\lceil \frac{35n + 20}{11} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$	[31]
15	$\begin{cases} \left\lceil \frac{44n + 28}{13} \right\rceil - 1 & \text{si } n = 1, 2, 3, 4, 6, 8 \text{ ou} \\ & n \equiv 5 \pmod{13} \text{ excepté } n = 18, 44; \\ \left\lceil \frac{44n + 28}{13} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$	[31]
16	$\begin{cases} \left\lceil \frac{18n + 12}{5} \right\rceil - 1 & \text{si } n = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 13; \\ \left\lceil \frac{18n + 12}{5} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$	[31]

Lorsque  $k \geq 17$ , le problème de déterminer  $\gamma(P_k \square P_n)$  reste ouvert. Il a été montré que la détermination du nombre d'absorption d'un sous-graphe quelconque de la grille est NP-complet, alors que la nature de la complexité du problème pour la grille carrée complète  $P_k \square P_n$  n'est pas encore connue (voir [43]). Dans [14], on trouve un encadrement de la valeur de  $\gamma(P_n \square P_n)$ . On doit mentionner aussi un résultat de Klavzar et Seifert [50] qui donne la valeur de  $\gamma(C_k \square C_n)$  pour tout  $k \leq 5$ ,  $C_k$  étant le cycle de  $k$  sommets. Enfin, dans [40], les auteurs donnent certaines valeurs de  $\gamma(C_k \square P_n)$  pour  $k \leq 12$  et  $n \leq 500$ . De même, on donne dans [8] certaines valeurs de  $\gamma(P_k \square P_n)$  pour  $k \leq 10$  et  $n \leq 500$ . Ces résultats sont basés sur la réalisation informatique d'un algorithme

proposé par E.O. Hare, W.R. Hare et S.T. Hedetniemi [41]. Ces résultats partiels ont tous été confirmés par D. Fisher quand il a démontré ses formules pour tout  $n$  et pour tout  $k \leq 16$ .

Le lecteur pourra trouver une riche bibliographie sur le sujet dans [43].



## CHAPITRE 2 : NOMBRE D'ABSORPTION DES GRILLES CROISÉES DE PETITE TAILLE

### 2.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier le nombre d'absorption du produit croisé de deux chaînes, l'une d'entre elles étant de longueur inférieure ou égale à 9. Ces résultats peuvent être résumés dans le tableau qui suit :

**Tableau 2.1 – Nombre d'absorption du produit croisé.**

k	$n_0$	$\gamma(P_k \times P_n)$ avec $n \geq n_0$
1	1	n
2	2	$2 \cdot \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$
3	2	n
4	4	$\begin{cases} n & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ n + 1 & \text{si } n \equiv 1 \text{ ou } 3 \pmod{4} \\ n + 2 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$

5	5	$\begin{cases} 5+6 & \text{si } n = 7, \\ 2 \cdot \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$
6	6	$2 \cdot \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil$
7	2	$\begin{cases} 6+8 & \text{si } n = 7, \\ 2 \cdot \left\lceil \frac{9n+3}{10} \right\rceil & \text{si } n \text{ est pair et} \\ \left\lceil \frac{9n-2}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{9n+8}{10} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$
8	2	$\begin{cases} 2n & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 2n+2 & \text{sinon.} \end{cases}$
9	8	$\begin{cases} 2 \cdot \left\lceil \frac{11n+9}{10} \right\rceil & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \left\lceil \frac{11n+6}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{11n+12}{10} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$

## 2.2. Définitions, notations et techniques

Avant d'établir nos résultats, nous devons donner les techniques et les notations utilisées. Afin de réduire le nombre de cas à considérer, on va utiliser un principe inspiré du résultat suivant :

### **Théorème 2.2.1**

Soit  $D$  un ensemble absorbant d'un graphe  $G = (V, E)$ .  $D$  n'est pas minimum si et seulement si il existe un couple  $(X, Y)$  de sous-ensembles de  $V$  tel que  $X \subseteq D$  avec  $N[X] \subseteq N[Y]$  et  $|X| > |Y|$ .

#### **Preuve :**

Supposons que  $D$  ne soit pas minimum, alors soit  $D'$  un ensemble absorbant minimum, donc  $|D'| < |D|$ . Soit  $X = D$  et  $Y = D'$  alors  $N[X] = N[Y] = V$  et  $|Y| = |D'| < |D| = |X|$ .

Réciproquement, supposons qu'une telle paire  $(X, Y)$  existe. Soit  $D' = Y \cup (D \setminus X)$ . Il est clair que  $D'$  est un ensemble absorbant, et d'après l'hypothèse on a

$|D'| < |D|$ . Ceci montre que  $D$  n'est pas minimum. ■

Étant donné un absorbant  $D$  d'un graphe  $G = (V, E)$ , on appelle **paire de substitution** un couple  $(X, Y)$  de sous-ensembles de  $V$  tel que :

$$\begin{matrix} X \subseteq D \\ Y \subseteq V \end{matrix} \text{ avec } \begin{cases} N[X] \subseteq N[Y] \\ |X| \geq |Y| \end{cases} .$$

Une preuve similaire à celle du théorème 2.2.1 nous donne le principe fondamental suivant.

#### **Principe fondamental**

Soit  $D$  un ensemble absorbant de  $G$  et soit  $(X, Y)$  une paire de substitution. Alors l'ensemble  $D' = (D \setminus X) \cup Y$  est un ensemble absorbant de  $G$  tel que  $|D'| \leq |D|$ . ■

### 2.3. Idée générale de la preuve

Notre objectif principal est de montrer que  $\gamma(C(k, n)) = \psi_k(n)$  pour  $k$  fixe et  $n \geq n_0$ .

L'idée générale de la preuve pour établir la borne inférieure (i.e.  $\gamma(C(k, n)) \geq \psi_k(n)$ ) est par induction sur la cardinalité de l'ensemble des sommets  $V$ . Elle est basée sur la description d'un ensemble absorbant de  $C(k, n)$  sur les premières colonnes pour une fonction appropriée  $\psi_k(n)$ .

Considérons  $G = (V, E)$ . Soient  $D$  un absorbant de  $G$  et  $B$  un sous-ensemble de  $V$ . À partir d'un sous-ensemble  $A \subset (D \cap B)$ , on construit un absorbant  $D'$  de  $V \setminus B$  en y prenant tous les sommets de  $D \cap (V \setminus B)$  et en "projetant" tous les sommets de  $D \cap (B \setminus A)$  dans  $V \setminus B$ . Alors on obtient  $|D| \geq |D'| + |A|$  (voir figure 2.1 ci-dessous). Et on applique l'hypothèse d'induction au sous-graphe induit par  $V \setminus B$  avec l'absorbant  $D'$ . Remarquons que  $A$  peut ne pas être un ensemble absorbant du graphe induit par  $B$ .

Soit  $V$  l'ensemble des sommets de  $C(k, n)$ . On appelle **configuration** un couple  $(A, B)$  de sous-ensembles de sommets de  $V$ , tel que  $N[A] \subseteq B$ . Une configuration  $(A, B)$  est dite **valide** si pour tout sommet  $v$  de  $B$  il existe un sommet  $w$  dans  $V \setminus B$  dont le voisinage étendu contient tous les voisins de  $v$  dans  $V \setminus B$  (i.e.,  $N(v) \cap (V \setminus B) \subseteq N[w]$ ).

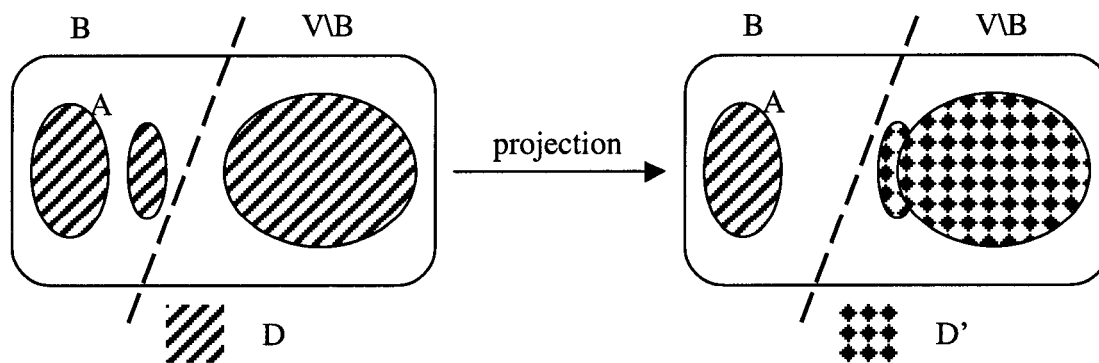
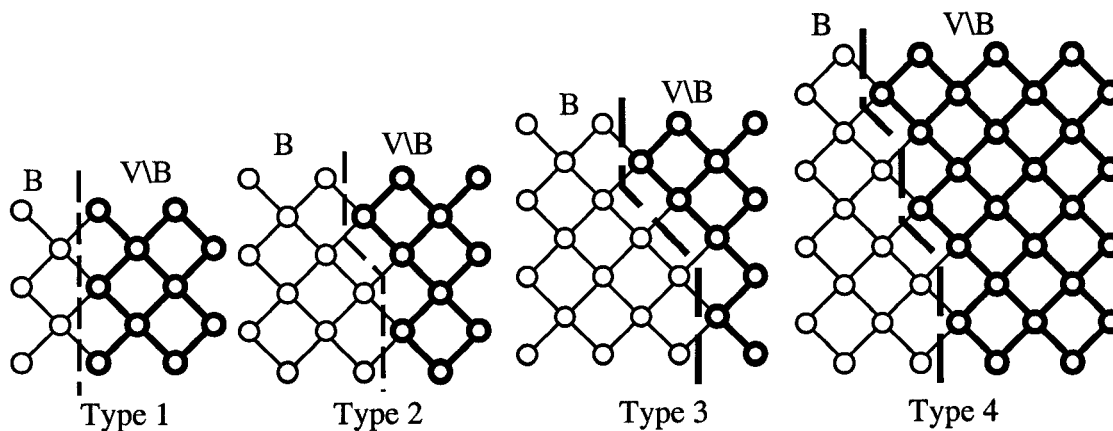


Figure 2.1 – Idée générale de la preuve établissant la borne inférieure.

Sur la figure 2.2, on distingue quatre types de sous-ensembles  $B$  vérifiant la propriété que tout sommet  $v_{i,j}$  de  $B$ ,  $(N(v_{i,j}) \cap (\forall B)) \subseteq \{v_{i-1,j+1}, v_{i+1,j+1}\} \subset N[v_{i,j+2}]$ , et comme le sommet  $v_{i,j+2}$  existe toujours ( $j \leq n-2$ ), alors toute configuration  $(A, B)$  de ce type est valide.

Le type 1 est utilisé dans les preuves pour  $k = 4, 5, 6, 7, 8$  et  $9$ . Le type 2 est utilisé dans la preuve pour  $k = 6$ . Le type 3 est utilisé dans la preuve pour  $k = 7$ . Quant au type 4, il est utilisé dans la preuve pour  $k = 9$ .



**Figure 2.2 – Configurations valides.**

Maintenant, supposons qu'on soit dans un "certain cas". En d'autres termes, supposons que l'on ait une configuration  $(A, B)$  sur les premières colonnes. Soit  $D$  un ensemble absorbant de  $C(k, n)$  tel que  $A \subseteq D$ . On peut associer à  $D$  un ensemble  $D'$ , appelé **ensemble associé ou projeté** de  $D$  par rapport à la configuration  $C = (A, B)$  et défini comme suit.

L'ensemble  $D'$  contient tous les éléments de  $D \cap B$  et pour tout sommet  $v_{i,j}$  dans  $D \cap B$  tel que  $N(v_{i,j}) \cap (\forall B) \neq \emptyset$  (remarquons que  $v_{i,j}$  n'est pas dans  $A$ ) et  $j \leq n-2$ , on met  $v_{i,j+2}$  dans  $D'$ .

$$\boxed{|A| / |V \setminus B|}$$

On appelle cette opération une **projection** et on la note  $(v_{i,j}, v_{i,j+2})$ -projection. Il est clair que  $|D'| + |A| \leq |D|$ .

Si  $D'$  est un ensemble associé à  $D$  par rapport à une configuration valide, alors  $D'$  est un ensemble absorbant du sous-graphe induit par  $V \setminus B$  et on applique donc l'hypothèse d'induction sur  $V \setminus B$ . En construisant la configuration  $(A, B)$ , on choisit  $B$  tel que  $N[A] \subseteq B$  et que  $(A, B)$  soit valide.

Pour construire une configuration  $(A, B)$  sur  $C(k, n)$ , on considère à une étape  $i$  une configuration  $(A_i, B_i)$  et un sommet  $v$  dans  $V \setminus B_i$ . On analyse alors toutes les possibilités pour absorber ce sommet  $v$ . Un sommet est dit **interdit** si tout ensemble absorbant  $D$  contenant ce sommet n'est pas minimum. On exhibera des paires de substitution afin d'interdire certains sommets.

La base d'induction est choisie de telle sorte que pour toute configuration  $(A, B)$  considérée et pour tout sommet  $v_{i,j}$  de  $B$ , on ait  $j + 2 \leq n$ . Pour les premières "petites" valeurs de  $n$ ,  $\gamma(C(k, n))$  est déterminé par énumération exhaustive. Cependant, on peut parfois réduire considérablement le nombre de cas en utilisant les cas décrits dans la preuve générale quand ceux-ci sont applicables, c'est-à-dire en vérifiant si les configurations considérées sont valides pour ces premières valeurs de  $n$ .

Finalement, pour prouver la borne supérieure, c'est à dire que  $\gamma(C(k, n)) \leq \psi_k(n)$ , on exhibera un ensemble absorbant  $D$  de cardinalité  $\psi_k(n)$  pour  $n \geq n_0$ . La description de notre ensemble absorbant est basée sur une partition de  $V(C(k, n))$  en sous-ensembles  $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$  avec  $t \geq 1$ . Puis on donne un ensemble absorbant du graphe induit par  $Q_i$  pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq t$ .

Dans la quatrième section, on donne les preuves pour  $k \leq 5$  et  $k = 8$ . Les preuves pour  $k = 6, 7$  et  $9$  sont données dans la cinquième section.

## 2.4. Preuves pour $k \leq 5$ et $k = 8$

### **Théorème 2.4.1 ([10])**

Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $\gamma_{1, n} = n$ .

**Preuve :**

$P_1 \times P_n$  est un ensemble stable à  $n$  sommets : évident. ■

### **Théorème 2.4.2 ([10])**

Pour tout  $n \geq 2$ , on a  $\gamma_{2, n} = 2 \cdot \lceil n/3 \rceil$ .

**Preuve :**

$P_2 \times P_n$  est l'union de deux chaînes sommet-disjointes de longueur  $n$  : évident. ■

### **Théorème 2.4.3 ([10])**

Pour tout  $n \geq 2$ , on a  $\gamma_{3, n} = n$ .

**Preuve :**

Pour  $n = 2$ , le théorème 2.4.2 donne le résultat. On peut donc supposer que  $n \geq 3$ . Soit  $D$  un ensemble absorbant de  $P_3 \times P_n$ . Pour démontrer que  $|D| \geq n$ , on construit à partir de  $D$  un ensemble absorbant  $D'$  de  $P_3 \times P_n$  tel que  $|D'| \leq |D|$  et  $|D' \cap \{x_{2,j} \mid j \in Z_n\}| = n$ .

Pour absorber le sommet  $x_{2,j}$  n'appartenant pas à  $D$ , sans perte de généralité ( $n \geq 3$ ), on peut supposer que  $x_{3,j-1}$  appartient à  $D$ . Mais pour absorber  $x_{1,j-1}$ , soit  $x_{1,j-1}$ , soit  $x_{2,j-2}$  appartient à  $D$ .

Soit  $D' = (D \cup \{x_{2,j}\}) \setminus \{x_{3,j-1}\}$ . Il est clair que  $D'$  est un ensemble absorbant de  $P_3 \times P_n$  et  $|D'| = |D|$  et de plus  $D'$  contient le sommet  $x_{2,j}$ .

D'autre part, on peut voir que l'ensemble  $D = \{x_{2,j} \mid j \in Z_n\}$  est un ensemble absorbant de  $P_3 \times P_n$  et  $|D| = n$ . ■

#### **Théorème 2.4.4 ([10])**

Pour tout  $n \geq 4$ , on a  $\gamma_{4,n} = \begin{cases} n & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ n + 1 & \text{si } n \equiv 1 \text{ ou } 3 \pmod{4} \\ n + 2 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$ .

#### **Preuve :**

Comme les deux composantes  $C_1(4, n)$  et  $C_2(4, n)$  du graphe  $P_4 \times P_n$  sont isomorphes, il suffit de démontrer que, pour  $n \geq 2$ , la propriété suivante est vérifiée :

$$\gamma(C_1(4, n)) \geq \psi_4(n), \quad (P_4)$$

$$\text{où } \psi_4(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifions d'abord cette propriété pour ce qui va constituer notre base de récurrence. D'après les théorèmes 2.4.2 et 2.4.3,  $(P_4)$  est vraie pour  $n = 2$  et 3.

Supposons maintenant que  $n \geq 4$ , et soit  $D$  un absorbant de  $C_1(4, n)$ .



Pour absorber les sommets de  $X_1$ ,  $D$  doit contenir au moins un sommet dans les deux premières colonnes, et donc  $|D \cap (X_1 \cup X_2)| \geq 1$ .

**1<sup>er</sup> cas :** Si  $|D \cap (X_1 \cup X_2)| = 1$ , alors  $D$  doit contenir le sommet  $x_{2,2}$ . Mais alors pour absorber le sommet  $x_{4,2}$ , l'absorbant  $D$  doit contenir en plus le sommet  $x_{3,3}$ .

On voit que, pour  $n = 4$ , la propriété  $(P_4)$  est vérifiée et, pour  $n = 5$ , on peut aussi le voir puisque  $D$  doit contenir en plus un autre sommet pour absorber les sommets de  $X_5$ .

Donc on peut supposer que  $n \geq 6$ .

Considérons maintenant la configuration  $C = (\{x_{2,2}, x_{3,3}\}, X_1 \cup \dots \cup X_4)$ . Comme  $n \geq 6$ ,  $C$  est valide et donc l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à  $C$ , est un absorbant du sous-graphe induit par l'ensemble des sommets de  $(X_5 \cup \dots \cup X_n)$ , qui est isomorphe à  $C_1(4, n-4)$ .

Donc par hypothèse de récurrence, on a

$$|D| \geq 2 + |D'| \geq 2 + \psi_4(n-4) = \psi_4(n).$$

**2<sup>ième</sup> cas :** Si  $|D \cap (X_1 \cup X_2)| \geq 2$ , alors on peut supposer que  $n \geq 5$ , et donc pour tout  $\{u, v\}$  dans  $D \cap (X_1 \cup X_2)$ , la configuration  $C = (\{u, v\}, (X_1 \cup \dots \cup X_3))$  est valide, et donc l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à  $C$  est un absorbant du sous-graphe induit par l'ensemble des sommets de  $(X_4 \cup \dots \cup X_n)$ , qui est isomorphe à  $C_2(4, n-3)$  et donc à  $C_1(4, n-3)$ .

Donc par hypothèse de récurrence, on a

$$|D| \geq 2 + |D'| \geq 2 + \psi_4(n-3) \geq \psi_4(n),$$

ceci termine la preuve de  $(P_4)$ .

Il reste à montrer que  $\gamma(C_1(4, n)) \leq \psi_4(n)$ . Pour cela nous donnons ci-après un absorbant de  $C_1(4, n)$  de taille  $\psi_4(n)$ .

Soit  $n = 4q + r$ , avec  $q \geq 0$  et  $r = 2, 3, 4, 5$ . La composante  $C_1(4, n)$  peut être partitionnée, de gauche à droite, en  $q$  blocs de quatre colonnes consécutives tous isomorphes à  $C_1(4, 4)$  et un bloc isomorphe à  $C_1(4, r)$ , dont les ensembles absorbants sont respectivement  $D_t = \{x_{2,2+4t}, x_{3,3+4t}\}$  ;  $t = 0, \dots, q-1$ , et  $D_q = \{x_{3,n-1}, x_{2,n}\}$  si  $r = 2$ ,  $D_q = \{x_{2,n-1}, x_{3,n}\}$  si  $r = 3$ ,  $D_q = \{x_{2,n-2}, x_{3,n-1}\}$  si  $r = 4$ , et  $D_q = \{x_{2,n-3}, x_{3,n-2}, x_{2,n-1}\}$  si  $r = 5$ . ■

**Remarque :**

Ce résultat est une conséquence directe du théorème suivant si on remarque que  $P_4$  est isomorphe à  $\overline{P_4}$ .

**Théorème 2.4.5 [38]**

$$\text{Pour tout } n \geq 2 \text{ et } k \geq 4, \text{ on a } \gamma(P_n \times \overline{P_k}) = \begin{cases} n & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ n+1 & \text{si } n \equiv 1 \text{ ou } 3 \pmod{4}, \blacksquare \\ n+2 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Pour  $k = 5$  (resp.  $k = 8$ ), la démonstration est similaire à celle du cas précédent ( $k = 4$ ). On donne un ensemble absorbant de cardinalité  $\psi_5(n)$  (resp.  $\psi_8(n)$ ) pour montrer la borne supérieure  $\gamma(C(5, n)) \leq \psi_5(n)$  (resp.  $\gamma(C(8, n)) \leq \psi_8(n)$ ) et on utilise les techniques décrites précédemment pour démontrer que la fonction  $\psi_5(n)$  (resp.  $\psi_8(n)$ ) est une borne inférieure. C'est-à-dire  $\gamma(C(5, n)) \geq \psi_5(n)$  (**P<sub>5</sub>**) (resp.  $\gamma(C(8, n)) \geq \psi_8(n)$  (**P<sub>8</sub>**)).

**Théorème 2.4.6 ([10])**

$$\text{Pour tout } n \geq 5, \text{ on a } \gamma_{5, n} = \begin{cases} 5+6 & \text{si } n = 7, \\ 2 \cdot \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Preuve :**

Soit  $C(5, n)$  une composante connexe (de type 1 ou 2) de  $P_5 \times P_n$  et soit la fonction

$$\psi_5(n) = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil.$$

**1<sup>ère</sup> partie de la preuve :** Preuve de la borne inférieure.

On doit démontrer, pour  $n \geq 5$ , la propriété suivante.

$$\gamma(C(5, n)) \geq \begin{cases} 5 & \text{si } C(5, n) = C(5, 7), \\ \psi_5(n) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (P_5)$$

D'après les résultats précédents, nous remarquons que les composantes  $C(5, 2)$  et  $C_2(5, 3)$  vérifient la propriété  $(P_5)$ , alors que  $C_1(5, 4)$  ne la vérifie pas, mais elle admet  $\{x_{2,2}, x_{3,3}, x_{4,2}\}$  comme unique absorbant minimum de taille 3.

Supposons maintenant que  $n \geq 5$  et soit  $D$  un absorbant de  $C(5, n)$ .

Si  $C(5, n) = C_1(5, n)$  ( c'est-à-dire une composante ouverte ou mixte), alors pour absorber les sommets pendants  $x_{1,1}$  et  $x_{5,1}$  (qui n'ont pas de voisins en commun), l'absorbant  $D$  doit contenir au moins deux sommets  $u$  et  $v$  dans  $X_1 \cup X_2$ . Et puisque  $n \geq 5$ , la configuration  $C = (\{u, v\}, X_1 \cup X_2 \cup X_3)$  est valide.

Donc l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à la configuration  $C$  est un absorbant du graphe induit par  $X_4 \cup \dots \cup X_n$  qui est isomorphe à  $C_2(5, n-3)$  et nous avons par hypothèse de récurrence

$$|D| \geq 2 + \gamma(C_2(5, 4)) \geq 2 + 3 = 5 \text{ si } n = 7, \text{ et}$$

$$|D| \geq 2 + |D'| \geq 2 + \psi_5(n-3) \geq \left\lceil \frac{6 + 2(n-3) + 2}{3} \right\rceil = \psi_5(n), \text{ sinon.}$$

Si  $C(5, n)$  est une composante  $C_2(5, n)$  fermée, alors pour absorber les sommets de  $X_1$ , on a  $|D \cap (X_1 \cup X_2)| \geq 1$ .

Si  $|D \cap (X_1 \cup X_2)| = 1$ , alors  $D$  doit contenir le sommet  $x_{3,2}$  et pour absorber les sommets  $x_{1,2}$   $x_{5,2}$ , l'absorbant doit avoir deux sommets  $u$  et  $v$  en plus dans les trois premières colonnes de  $C_2(5, n)$ . On remarque que si  $n = 5$ , l'absorbant  $D$  doit contenir un sommet en plus pour absorber les sommets de la dernière colonne  $X_5$  et donc  $(P_5)$  est vérifiée.

Supposons maintenant que  $n \geq 6$ . L'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à la configuration valide  $C = (\{x_{3,2}, u, v\}, X_1 \cup \dots \cup X_4)$  et un absorbant d'un sous-graphe induit isomorphe à  $C_2(5, n-4)$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence à cet ensemble, on aura

$$|D| \geq 3 + |D'| \geq 3 + \psi_5(n-4) = \left\lceil \frac{2n+3}{3} \right\rceil \geq \psi_5(n).$$

Si  $|D \cap (X_1 \cup X_2)| \geq 2$ , alors pour tout  $\{u, v\}$  dans  $D \cap (X_1 \cup X_2)$ , on considère la configuration  $C = (\{u, v\}, X_1 \cup \dots \cup X_3)$  qui comme  $n \geq 5$  est valide. Et donc l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à  $C$  est un absorbant du sous-graphe induit par  $(X_4 \cup \dots \cup X_n)$  qui est isomorphe à une composante  $C_1(5, n-3)$  mixte.

Pour  $n = 7$ , il est facile de voir que si  $D'$  est l'unique absorbant de  $C_1(5, 4)$  (à savoir  $\{x_{2,5}, x_{3,6}, x_{4,5}\}$ ), alors  $D$  vérifie  $|D \cap (X_1 \cup X_2)| \geq \gamma(C_2(5, 3)) = 3$  et donc  $(P_5)$  est vraie. Ainsi, on peut supposer dans ce cas particulier que  $|D'| \geq \psi_5(4) = 4$ .

En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $D$ , on aura

$$|D| \geq 2 + |D'| \geq 2 + \psi_5(n-3) = \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil = \psi_5(n).$$

Ceci complète la preuve de  $(P_5)$ .

**2<sup>ième</sup> partie de la preuve :** Pour établir la borne supérieure, nous allons décrire un absorbant  $D$  de  $P_5 \times P_n$  de taille 11 si  $n = 7$  et de taille  $2 \cdot \psi_5(n)$  si  $n \neq 7$  et  $n \geq 5$ .

L'ensemble  $D = \{x_{2,2}, x_{4,2}, x_{3,3}, x_{2,6}, x_{4,6}, x_{2,1}, x_{5,2}, x_{1,4}, x_{4,5}, x_{5,6}, x_{2,7}\}$  est un absorbant du graphe  $P_5 \times P_7$ .

Si  $n = 3q + r$ , avec  $q \geq 0$ ,  $r = 2, 3$  ou  $4$  et  $n \neq 7$ . Pour un entier  $t$  positif, soit  $D_t = \{x_{1,1+3t}, x_{2,1+3t}, x_{4,2+3t}, x_{5,2+3t}\}$ . Alors l'ensemble  $D = \left( \bigcup_{t=0}^q D_t \right) \cup D'$  ; où  $D'$  est égal à  $\emptyset$  si  $r = 2$ ,  $\{x_{1,n}, x_{2,n}\}$  si  $r = 3$  ou  $\{x_{1,n}, x_{2,n}, x_{4,n-1}, x_{5,n-1}\}$  si  $r = 4$ , est un ensemble absorbant de  $P_5 \times P_n$  de cardinalité  $2 \cdot \psi_5(n)$ .

Ceci termine la preuve du théorème. ■

### **Théorème 2.4.7 ([10]):**

Pour tout  $n \geq 2$ , on a  $\gamma_{8,n} = \begin{cases} 2n & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 2n + 2 & \text{si } n \equiv 1, 2 \text{ ou } 3 \pmod{4}. \end{cases}$

### **Preuve :**

Comme les deux composantes connexes de  $P_8 \times P_n$  sont isomorphes, il suffit de démontrer pour  $n \geq 2$  la propriété :

$$\gamma(C_1(8, n)) \geq \psi_8(n), \quad (P_8)$$

$$\text{où } \psi_8(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**1<sup>ère</sup> partie de la preuve :** Preuve de la borne inférieure.

Les résultats précédents montrent que cette propriété est vraie pour  $n = 2, \dots, 5$ .

Supposons maintenant que  $n \geq 6$  et soit  $D$  un absorbant de  $C_1(8, n)$ .

Comme  $|X_1| = 4$  et que chaque sommet de  $X_2$  a au plus deux voisins dans  $X_1$ , on a  $|D \cap (X_1 \cup X_2)| \geq 2$ .

Si  $|D \cap (X_1 \cup X_2)| = 2$ , alors  $D$  doit contenir les sommets  $x_{2,2}$  et  $x_{6,2}$ . Mais alors, pour absorber les sommets  $x_{4,2}$  et  $x_{8,2}$ , l'absorbant  $D$  doit contenir deux sommets en plus ( $u$  et  $v$ ) dans  $X_3$ . On construit maintenant l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à la configuration  $C = (\{u, v, x_{2,2}, x_{6,2}\}, X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4)$ .

Comme  $n \geq 6$ , il est facile de voir que  $C$  est valide et donc  $D'$  est un absorbant d'un sous-graphe induit isomorphe à une composante  $C_1(8, n-4)$ . Par récurrence, on a

$$|D| \geq 4 + |D'| \geq 4 + \psi_8(n-4) = \psi_8(n).$$

Si  $|D \cap (X_1 \cup X_2)| \geq 3$ , alors pour tout  $\{u, v, w\}$  dans  $D \cap (X_1 \cup X_2)$  on considère la configuration  $C = (\{u, v, w\}, X_1 \cup X_2 \cup X_3)$  et  $D'$  l'ensemble associé à  $D$ . Comme  $n \geq 5$ , il est facile de voir que  $C$  est valide et donc  $D'$  est un absorbant d'un sous-graphe induit isomorphe à une composante  $C_2(8, n-3)$  qui est isomorphe à une  $C_1(8, n-3)$ . Par récurrence on a

$$|D| \geq 3 + |D'| \geq 3 + \psi_8(n-3) \geq \psi_8(n) \text{ si } n \equiv 0, 1 \text{ ou } 2 \pmod{4}.$$

Si  $n \equiv 3 \pmod{4}$  et  $n \neq 7$ , en utilisant les mêmes arguments sur les deux dernières colonnes  $X_n$  et  $X_{n-1}$ , on obtient pour toute configuration  $C' = (\{u', v', w'\}, X_n \cup X_{n-1} \cup X_{n-2})$ , l'ensemble  $D''$  associé à  $D'$  par rapport à  $C'$  en utilisant la  $(v_{i,j}, v_{i,j-2})$ -projection à la place de la  $(v_{i,j}, v_{i,j+2})$ -projection. L'ensemble  $D''$  est un absorbant du sous-graphe induit par  $(X_4 \cup \dots \cup X_{n-3})$  qui est isomorphe à une composante  $C_1(8, n-6)$ .

Donc, on a par induction  $|D| \geq 6 + |D'| \geq 6 + \psi_8(n-6) \geq \psi_8(n)$ .

Il reste seulement à démontrer que  $C_1(8, 7)$  vérifie la propriété. Comme chaque sommet de  $Y_2$  absorbe au plus deux sommets dans  $Y_1$ , nous avons pour tout absorbant  $D$  de cette composante  $|D \cap (Y_1 \cup Y_2)| \geq \left\lceil \frac{|Y_1|}{2} \right\rceil = 2$ . D'autre part pour absorber le sous-graphe induit par les cinq dernières lignes qui est isomorphe à une composante  $C_2(5, 7)$ ,  $D$  doit contenir au moins  $\gamma(C_2(5, 7))$  sommets dans  $Y_3 \cup \dots \cup Y_8$ . Ainsi, nous avons

$$\gamma(C_1(8, 7)) \geq 2 + \gamma(C_2(5, 7)) = 8 = \psi_8(7). \text{ D'où } (P_8) \text{ est vraie pour } n = 7.$$

Ceci termine la preuve de  $(P_8)$ .

**2<sup>ème</sup> partie de la preuve :** Description d'un ensemble absorbant de  $C_1(8, n)$  de cardinalité  $\psi_8(n)$ .

Si  $n = 4q + r$ , avec  $q \geq 0$ ,  $r = 2, 3, 4$  ou  $5$ , et soit pour un entier  $t$  positif,  $D_t = \{x_{2,2+4t}, x_{6,2+4t}, x_{3,3+4t}, x_{7,3+4t}\}$ . Alors l'ensemble  $D = \left( \bigcup_{t=0}^{q-1} D_t \right) \cup D'$  ; où  $D'$  est égal à  $\{x_{5,n-1}, x_{7,n-1}, x_{2,n}\}$  si  $r = 2$ ,  $\{x_{2,n-1}, x_{4,n-1}, x_{6,n-1}, x_{8,n-1}\}$  si  $r = 3$ ,  $D_q$  si  $r = 4$  ou  $D_q \cup \{x_{2,n-1}, x_{6,n-1}\}$  si  $r = 5$ , est un absorbant de  $C_1(8, n)$  de cardinalité  $\psi_8(n)$ .

Ceci termine la preuve du théorème. ■

## 2.5. Preuves pour $k = 6, 7$ et $9$

Pour  $k = 6, 7$  ou  $9$ , on ne peut utiliser la récurrence si on utilise des configurations de type 1 (voir figure 2.2). Donc, on doit introduire une nouvelle classe de graphes de grilles qu'on note  $C'(k, n)$  dont on va étudier le nombre d'absorption.

**Théorème 2.5.1 ([10])**

Pour tout  $n \geq 6$ ,  $\gamma_{6,n} = 2 \cdot \lceil 4n/5 \rceil$ .

**Preuve :**

Les deux composantes connexes de  $P_6 \times P_n$  sont isomorphes.

Soit  $C_1(6, n) = (V, E)$  une composante connexe de  $P_6 \times P_n$  et construisons  $C'(6, n) = (V', E')$  où  $V' = V \cup \{x_{2,0}\}$  et  $E' = E \cup \{(x_{2,0}, x_{1,1}), (x_{2,0}, x_{3,1})\}$  (voir type 2 figure 2.2).

On va considérer que le sommet  $x_{2,0}$  appartient à la ligne  $Y_2$  et la nouvelle colonne  $X_0$ . Nous remarquons que le nombre d'absorption de  $C'(6, n)$  vérifie pour tout  $n \geq 2$  l'inégalité suivante.

$$\gamma(C_1(6, n)) \leq \gamma(C'(6, n)) \leq \gamma(C_1(6, n)) + 1 \quad (1)$$

En effet, d'une part, à partir de tout absorbant de  $C'(6, n)$ , l'ensemble projeté obtenu par une éventuelle  $(x_{2,0}, x_{2,2})$ -projection est un absorbant de  $C_1(6, n)$ . D'autre part, pour tout absorbant  $D$  de  $C_1(6, n)$ , l'ensemble  $D \cup \{x_{0,2}\}$  est un absorbant de  $C'(6, n)$ .

**1<sup>ère</sup> partie de la preuve :** Nous voulons montrer, pour  $n \geq 2$ , la propriété suivante.

$$\gamma(G) \geq \begin{cases} \psi_6(n) & \text{si } G = C_1(6, n), \\ \hat{\psi}_6(n) & \text{si } G = C'(6, n). \end{cases} \quad (P_6)$$

où  $\psi_6(n) = \lceil 4n/5 \rceil$  et  $\hat{\psi}_6(n) = \lceil (4n+3)/5 \rceil$ .

Procédons par induction sur le nombre de sommets.



Commençons d'abord par vérifier cette propriété pour certains petits graphes qui constitueront notre base de récurrence. Il est facile de vérifier  $(P_6)$  pour  $n = 2$ , les résultats précédents montrent que  $\gamma(C_1(6, n)) \geq \hat{\psi}_6(n)$ , pour  $n = 3, 4, 5$  et  $8$ . Et d'après l'inégalité (1), nous avons  $\gamma(C'(6, n)) \geq \gamma(C_1(6, n)) \geq \hat{\psi}_6(n) \geq \psi_6(n)$  et donc  $(P_6)$  est vérifiée pour ces valeurs.

**Cas 1 :**  $G = C_1(6, n)$ , avec  $n \geq 6$ .

**Sous cas 1.1 :** il existe un absorbant minimum  $D$  de  $C_1(6, n)$  ayant au moins trois sommets dans  $X_1 \cup X_2$ .

Comme  $n \geq 5$ , alors pour tout  $\{u, v, w\}$  dans  $X_1 \cup X_2$ , la configuration  $C = (\{u, v, w\}, X_1 \cup X_2 \cup X_3)$  est valide et donc l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à  $C$  est un absorbant d'un graphe isomorphe à  $C_2(6, n-3)$  et donc à  $C_1(6, n-3)$ .

$$\text{D'où, par récurrence } |D| \geq 3 + |D'| \geq 3 + \psi_6(n-3) \geq \left\lceil \frac{15 + 4(n-3)}{5} \right\rceil \geq \psi_6(n).$$

**Sous cas 1.2 :** tout absorbant minimum  $D$  de  $C_1(6, n)$  a au plus deux sommets dans  $X_1 \cup X_2$ .

Pour absorber le sommet  $x_{1,1}$ ,  $D$  doit contenir un sommet  $u$  dans  $\{x_{1,1}, x_{2,2}\}$ .

Si  $D$  contient le sommet  $x_{5,1}$ , alors comme  $n \geq 5$ , l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à la configuration  $C = (\{u, x_{5,1}\}, (X_1 \cup X_2 \cup X_3) \setminus \{x_{5,1}\})$  est un absorbant d'un sous-graphe isomorphe à une composante  $C'(6, n-3)$  qui vérifie l'hypothèse de récurrence. D'où

$$|D| \geq 2 + |D'| \geq 2 + \hat{\psi}_6(n-3) = \left\lceil \frac{10 + 4(n-3) + 3}{5} \right\rceil \geq \psi_6(n).$$

Maintenant, on peut supposer que  $x_{5,1}$  est interdit.

**Propriété 1.2.1 :** le sommet  $x_{4,2}$  est interdit.

En effet, dans le cas contraire, soit  $D$  un absorbant minimum contenant ce sommet. Puisque tout absorbant minimum,  $D$  en particulier, contient au plus deux sommets dans  $X_1 \cup X_2$ , pour absorber  $x_{6,2}$ ,  $D$  doit contenir le sommet  $x_{5,3}$ . Soient  $X = \{u, x_{4,2}, x_{5,3}\}$  et  $Y = \{x_{2,2}, x_{5,1}, x_{5,3}\}$ . On remarque que  $(X, Y)$  est une paire de substitution et donc, d'après le principe fondamental, l'ensemble  $D' = (D \setminus X) \cup Y$  est un absorbant minimum contenant le sommet interdit  $x_{5,1}$ . Nous obtenons donc une contradiction. ■

Donc pour absorber  $x_{5,1}$ ,  $D$  contient le sommet  $x_{6,2}$  et  $u = x_{2,2}$  (car sinon, on aura besoin d'un troisième sommet dans  $X_1 \cup X_2$  pour absorber  $x_{3,1}$ ).

**Propriété 1.2.2 :** le sommet  $x_{5,3}$  est interdit.

En effet, soit  $D$  un absorbant minimum contenant le sommet  $x_{5,3}$ . Alors la paire  $(X, Y)$  où  $X = \{x_{6,2}, x_{5,3}\}$  et  $Y = \{x_{5,1}, x_{5,3}\}$  est une paire de substitution. Et puisque le sommet  $x_{5,1}$  est interdit, on obtient comme dans la propriété précédente, une contradiction. Ceci démontre la propriété 1.2.2. ■

Donc, pour absorber le sommet  $x_{4,2}$ ,  $D$  doit contenir le sommet  $x_{3,3}$ . Maintenant, pour absorber les sommets  $x_{6,4}$  et  $x_{1,5}$ , l'absorbant  $D$  doit avoir respectivement un sommet  $v$  dans  $\{x_{6,4}, x_{5,5}\}$  et un sommet  $w$  dans  $\{x_{2,4}, x_{1,5}, x_{2,6}\}$ . Soit  $A = \{x_{2,2}, x_{6,2}, x_{3,3}, u, v\}$ . On remarque que, pour  $n \leq 8$ , la propriété  $(P_6)$  est vérifiée. En effet, puisque tous les sommets de  $A \subseteq D$  sont dans  $(X_1 \cup \dots \cup X_6)$ , on a  $|D| \geq 5 = \psi_6(6)$ . Si  $n = 7$ , on remarque que pour absorber le sommet  $x_{5,7}$ , on aura besoin d'un autre sommet en plus dans  $D$  et donc  $|D| \geq 6 = \psi_6(7)$ . Pour  $n = 8$ , la vérification est déjà faite au début de cette preuve. Ainsi, on peut supposer que  $n \geq 9$  et donc la configuration  $C = (A, (X_1 \cup \dots \cup X_7) \setminus \{x_{5,7}\})$  est valide.

L'application de l'hypothèse de récurrence à l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  qui est un absorbant d'un sous-graphe isomorphe à une  $C'(6, n-7)$  donne

$$|D| \geq 5 + |D'| \geq 5 + \hat{\psi}_6(n-7) = \left\lceil \frac{25 + 4(n-7) + 3}{5} \right\rceil = \psi_6(n).$$

**Cas 2 :**  $G = C'(6, n)$ , avec  $n \geq 6$ .

**Sous cas 2.1 :** il existe un absorbant minimum  $D$  de  $C'(6, n)$  contenant le sommet  $x_{2,0}$ .

Dans ce cas, on construit l'ensemble associé  $D'$  de  $D$  par rapport à la configuration  $C = (\{x_{2,0}\}, N[\{x_{2,0}\}])$ . Comme  $n \geq 3$ , il est facile de voir que  $C$  est valide et donc  $D'$  est un absorbant d'un sous-graphe isomorphe à une composante  $C'(6, n-1)$ .

Donc, par récurrence, on conclut de la manière suivante.

$$|D| \geq 1 + |D'| \geq 1 + \hat{\psi}_6(n-1) = \left\lceil \frac{5 + 4(n-1) + 3}{5} \right\rceil \geq \hat{\psi}_6(n).$$

**Sous cas 2.2 :** le sommet  $x_{2,0}$  est interdit et il existe un absorbant minimum  $D$  de  $C'(6, n)$  contenant le sommet  $x_{3,1}$ .

Pour absorber le sommet  $x_{1,1}$ ,  $D$  doit contenir l'un des sommets de  $\{x_{1,1}, x_{2,2}\}$  et soit  $u$  ce sommet. Pour absorber le sommet  $x_{5,1}$ ,  $D$  doit contenir en plus l'un des sommets de  $\{x_{5,1}, x_{4,2}, x_{6,2}\}$  et soit  $v$  un tel sommet. On construit l'ensemble associé  $D'$  de  $D$  par rapport à la configuration  $C = (\{x_{3,1}, u, v\}, X_0 \cup \dots \cup X_3)$ .

Comme  $n \geq 5$ , il est facile de voir que  $C$  est valide et donc  $D'$  est un absorbant d'un sous-graphe isomorphe à une composante  $C(6, n-3)$ . Donc, on a par récurrence

$$|D| \geq 3 + |D'| \geq 3 + \psi_6(n-3) = \left\lceil \frac{15 + 4(n-3)}{5} \right\rceil = \hat{\psi}_6(n).$$

Ceci achève la preuve du sous cas 2.2.

**Sous cas 2.3 :** les sommets  $x_{2,0}$  et  $x_{3,1}$  sont interdits.

Soit  $D$  un absorbant minimum de  $C'(6, n)$ .

Pour absorber le sommet  $x_{2,0}$ ,  $D$  doit contenir le sommet  $x_{1,1}$ .

**Propriété 2.3.1 :** le sommet  $x_{2,2}$  est interdit.

En effet, dans le cas contraire, la paire  $(X, Y)$  où  $X = \{x_{1,1}, x_{2,2}\}$  et  $Y = \{x_{3,1}, x_{2,2}\}$  est une paire de substitution et donc l'ensemble  $D' = (D \setminus X) \cup Y$  est aussi un absorbant minimum contenant le sommet  $x_{3,1}$ , qui est interdit par hypothèse. Contradiction. ■

Donc pour absorber le sommet  $x_{3,1}$ ,  $D$  doit contenir le sommet  $x_{4,2}$ .

Maintenant, pour absorber le sommet  $x_{6,2}$ ,  $D$  doit contenir un sommet  $u$  dans  $\{x_{6,2}, x_{5,1}, x_{5,3}\}$  et pour absorber  $x_{1,3}$ ,  $D$  doit contenir un autre sommet  $v$  dans  $\{x_{1,3}, x_{2,4}\}$ .

Si  $n = 6$ , on remarque que l'absorbant  $D$  doit contenir en plus des quatre sommets  $x_{1,1}$ ,  $x_{4,2}$ ,  $u$  et  $v$ , au moins deux autres sommets pour absorber les sommets de la dernière colonne  $X_6$ . D'où  $|D| \geq 6 = \hat{\psi}_6(6)$  et  $(P_6)$  est vérifiée dans ce cas.

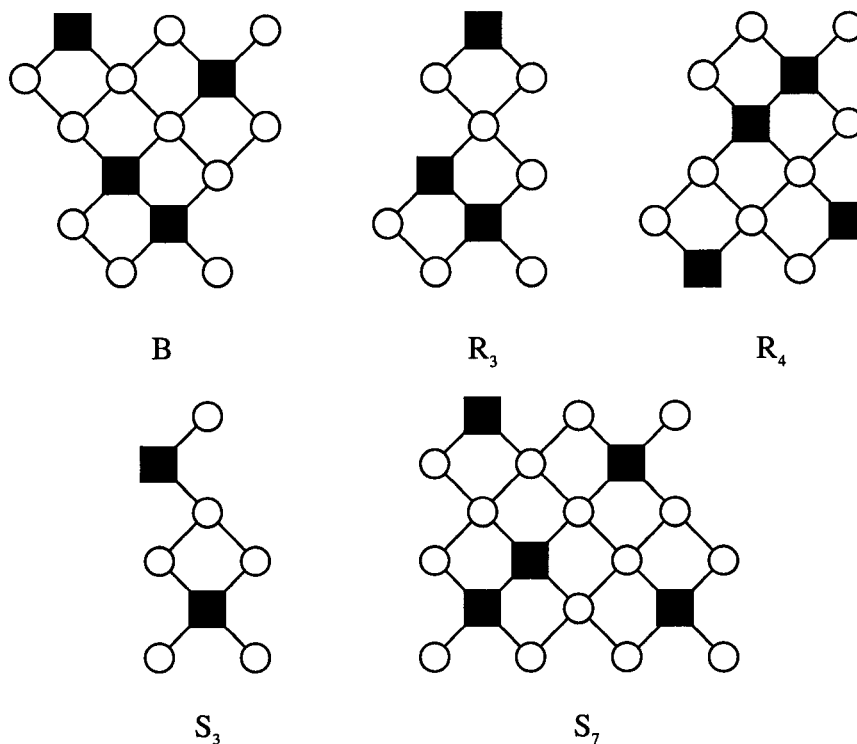
Ainsi, on peut supposer que  $n \geq 7$  et donc la configuration  $C = (\{x_{1,1}, x_{4,2}, u, v\}, (X_0 \cup \dots \cup X_5) \setminus \{x_{5,5}\})$  est valide. L'ensemble  $D'$  associé à  $C$  par rapport à  $D$  est un absorbant d'un sous-graphe isomorphe à  $C'(6, n-5)$  qui vérifie par hypothèse la propriété  $(P_6)$ .

$$D' \text{ où } |D| \geq 4 + |D'| \geq 4 + \hat{\psi}_6(n-5) = \left\lceil \frac{20 + 4(n-5) + 3}{5} \right\rceil = \hat{\psi}_6(n).$$

Ce qui achève la preuve de la propriété  $(P_6)$ .

**2<sup>ème</sup> partie de la preuve :** Il reste à démontrer que, pour tout  $n \geq 6$ , nous avons  $\gamma(C_1(6, n)) \leq \psi_6(n)$ . Pour cela, nous allons donner un absorbant de  $C_1(6, n)$  de cardinalité  $\psi_6(n)$ , pour tout  $n \geq 6$ .

Pour décrire notre absorbant, nous allons utiliser les blocs de la figure 2.3 où les éléments appartenant à l'absorbant sont représentés par des carrés noirs. On donne tout d'abord un absorbant  $Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_t$  de  $C'(6, n)$  de cardinalité  $\psi_6(n)$ , pour certaines congruences de  $n$ . D'après l'inégalité (1), en effectuant, si nécessaire, une  $(x_{2,0}, x_{2,2})$ -projection, on obtient un absorbant de  $C_1(6, n)$ , pour ces même valeurs de  $n$ .



**Figure 2.3 - Construction de l'absorbant minimum de  $P_6 \times P_n$ .**

On va prendre alternativement des blocs isomorphes au graphe B ci-dessus (voir figure 2.3) et on complète l'absorbant par un graphe isomorphe à un reste  $R_i$  selon la congruence de  $n$  :

Si  $n = 5q + r$ , avec  $r = 3$  ou  $4$ , et  $q \geq 0$ , alors le bloc  $Q_i$  est isomorphe à B pour tout  $i = 1, \dots, q-1$ ;  $Q_q$  est isomorphe à  $R_r$ .

On donne maintenant un absorbant  $Q_1 \cup Q_2$  de  $C_1(6, n)$ , pour les autres congruences de  $n$ , en prenant le bloc  $Q_2$  isomorphe à une solution d'une certaine  $C'(6, n-j)$  déjà décrite ci-dessus et  $Q_1$  isomorphe à un  $S_j$  adéquat, présenté dans la figure 2.3.

Si  $n = 5q + r$ , avec  $r = 6$  ou  $7$  et  $q \geq 0$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $S_3$  et  $Q_2$  est un absorbant minimum de  $C'(6, n-3)$ .

Si  $n = 5q + 10$ ,  $q \geq 0$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $S_7$  et  $Q_2$  est un absorbant minimum de  $C'(6, n-7)$ .

Ceci termine la preuve du théorème. ■

### **Théorème 2.5.2 ([10])**

$$\text{Pour tout } n \geq 7 \text{ on a } \gamma_{7, n} = \begin{cases} 6 + 8 & \text{si } n = 7, \\ 2 \cdot \left\lceil \frac{9n + 3}{10} \right\rceil & \text{si } n \text{ est pair et} \\ \left\lceil \frac{9n - 2}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{9n + 8}{10} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

### **Preuve :**

Soit la composante connexe  $C_2(7, n) = (V, E)$  de  $P_7 \times P_n$  et construisons  $C'(7, n) = (V', E')$  où  $V' = V \cup \{x_{2,-1}, x_{1,0}, x_{3,0}\}$  et  $E' = E \cup \{(x_{2,-1}, x_{1,0}), (x_{2,-1}, x_{3,0}), (x_{1,0}, x_{2,1}), (x_{3,0}, x_{2,1}), (x_{3,0}, x_{4,1})\}$  (voir le type 3 dans la figure 2.2).

Considérons que le sommet  $x_{2,-1}$  appartient à la colonne  $X_{-1}$  et les sommets  $x_{1,0}$  et  $x_{3,0}$  à la colonne  $X_0$ .

Nous remarquons que le nombre d'absorption de  $C'(7, n)$  vérifie l'inégalité suivante pour tout  $n \geq 2$ .

$$\gamma(C_2(7, n)) \leq \gamma(C'(7, n)) \leq \gamma(C_2(7, n)) + 1 \quad (2).$$

En effet, il est facile de voir qu'à partir de tout absorbant de  $C'(7, n)$ , l'ensemble obtenu en effectuant si nécessaire les  $(x_{2,-1}, x_{2,1})$ ,  $(x_{1,0}, x_{1,2})$  et  $(x_{3,0}, x_{3,2})$ -projections

est un absorbant de  $C_2(7, n)$  et qu'à partir de tout absorbant  $D$  de  $C_2(7, n)$ , l'ensemble  $D \cup \{x_{2,-1}\}$  est un absorbant de  $C'(7, n)$ .

**1<sup>ère</sup> partie de la preuve :**

Pour une composante  $C_1(7, n)$  ouverte ( $n$  est impair) de  $P_7 \times P_n$ , on considère la fonction suivante.

$$\psi_7^1(n) = \begin{cases} 6 & \text{si } n = 7, \\ \left\lfloor \frac{9n - 2}{10} \right\rfloor & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour une composante  $C_2(7, n)$  fermée ou mixte, on considère la fonction.

$$\psi_7^2(n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{9n + 3}{10} \right\rfloor & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \left\lfloor \frac{9n + 8}{10} \right\rfloor & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Enfin, pour le graphe  $C'(7, n)$ , on considère la fonction suivante.

$$\hat{\psi}_7(n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{9n + 9}{10} \right\rfloor & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \left\lfloor \frac{9n + 14}{10} \right\rfloor & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On veut démontrer que la propriété suivante est vraie, pour tout  $n \geq 2$  :

$$\gamma(G) \geq \begin{cases} \psi_7^1(n) & \text{si } G = C_1(7, n), \\ \psi_7^2(n) & \text{si } G = C_2(7, n) \text{ et} \\ \hat{\psi}_7(n) & \text{si } G = C'(7, n). \end{cases} \quad (P_7).$$

Commençons tout d'abord par vérifier cette propriété pour certains graphes de petite taille qui représenteront notre base de récurrence. D'après les résultats précédents, il est

clair que la propriété  $(P_7)$  est vérifiée pour les composantes  $C_1(7, n)$  telles que  $n = 3$  ou  $5$  ainsi que pour les composantes  $C_2(7, n)$  telles que  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  ou  $8$ . Nous remarquons aussi que  $\psi_7^2(n) = \hat{\psi}_7(n)$  pour  $n = 2$  ou  $5$ . On déduit de l'inégalité (2) que  $\gamma(C'(7, n)) \geq \gamma(C_2(7, n)) = \hat{\psi}_7(n)$  et donc  $(P_7)$  est vérifiée pour  $C'(7, 2)$  et  $C'(7, 5)$ .

Supposons maintenant qu'il existe un contre-exemple  $G$  pour  $(P_7)$  qui contienne un nombre minimal de sommets.

**Cas 1 :** le graphe  $G$  est une composante  $C_1(7, n)$  ouverte pour un  $n \geq 7$ .

**Propriété 1.1 :** un ensemble absorbant minimum  $D$  de  $C_1(7, n)$  contient au plus deux sommets dans  $X_1 \cup X_2$ .

En effet, dans le cas contraire, considérons pour tout sous-ensemble  $\{u, v, w\}$  de  $D \cap (X_1 \cup X_2)$  la configuration  $C = (\{u, v, w\}, X_1 \cup X_2 \cup X_3)$ . Comme  $n \geq 7$ , il est facile de voir que  $C$  est valide et donc l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à  $C$  est un absorbant d'un sous-graphe isomorphe à une composante  $C_2(7, n-3)$  mixte (rappelons que  $n$  est impair dans ce cas).

Ainsi, par minimalité de  $G$ , on a

$$|D| \geq 3 + |D'| \geq 3 + \psi_7^2(n-3) = \left\lceil \frac{30 + 9(n-3) + 3}{10} \right\rceil \geq \psi_7^1(n), \text{ et donc } G \text{ vérifie la}$$

propriété  $(P_7)$ , ce qui entraîne une contradiction. ■

Pour absorber le sommet  $x_{1,1}$ ,  $D$  doit avoir un sommet  $u$  dans  $\{x_{1,1}, x_{2,2}\}$ . De même, pour absorber le sommet  $x_{7,1}$ ,  $D$  doit avoir un sommet  $v$  dans  $\{x_{7,1}, x_{6,2}\}$ . D'après la propriété 1.1, tous les sommets dans  $X_1 \cup X_2$  autres que  $u$  et  $v$  sont interdits et donc, pour absorber le sommet  $x_{4,2}$ ,  $x_{3,3}$  ou  $x_{5,3}$  doit appartenir à  $D$ . Par symétrie, on peut supposer que  $D$  contient  $x_{3,3}$ .



**Propriété 1.2 :** tous les sommets de  $(X_1 \cup \dots \cup X_4) \setminus \{u, v, x_{3,3}\}$  sont interdits.

En effet, supposons que  $D$  contienne un autre sommet  $w$  dans  $X_1 \cup \dots \cup X_4$ . Comme  $n \geq 7$ , alors l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à la configuration valide  $C = (\{u, v, x_{3,3}, w\}, X_1 \cup \dots \cup X_5)$  est un absorbant d'un sous-graphe isomorphe à une composante  $C_2(7, n-5)$  mixte, qui par minimalité de  $G$  vérifie la propriété  $(P_7)$ . Nous concluons que

$$|D| \geq 4 + |D'| \geq 4 + \psi_7^2(n-5) = \left\lceil \frac{40 + 9(n-5) + 3}{10} \right\rceil = \psi_7^1(n).$$

Dans ce cas aussi nous obtenons une contradiction. ■

Ainsi, pour absorber le sommet  $x_{6,4}$ , l'ensemble  $D$  doit contenir un sommet  $w$  dans l'ensemble  $U = \{x_{5,5}, x_{7,5}\}$ . Et pour absorber l'autre sommet de  $U$ ,  $D$  doit contenir un sommet  $y$  en plus dans  $N[U] \cap (X_5 \cup X_6)$ . D'autre part, pour absorber le sommet  $x_{1,5}$ ,  $D$  doit contenir un autre sommet  $z$  dans  $\{x_{1,5}, x_{2,6}\}$ .

Soit maintenant la configuration  $C = (\{u, v, x_{3,3}, w, y, z\}, X_1 \cup \dots \cup X_7)$ . Puisque nous avons  $|D \cap (X_1 \cup \dots \cup X_7)| \geq \psi_7^1(7) = 6$ , on en déduit que  $n \geq 9$  et donc que l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à cette configuration valide  $C$  est un absorbant d'une composante connexe  $C_2(7, n-7)$  mixte, qui par minimalité de  $G$  vérifie la propriété  $(P_7)$ .

$$D' \text{ où } |D| \geq 6 + |D'| \geq 6 + \psi_7^2(n-7) = \left\lceil \frac{60 + 9(n-7) + 3}{10} \right\rceil \geq \psi_7^1(n). \text{ Ceci montre que}$$

le cas 1 ne peut pas se produire.

**Cas 2 :** le graphe  $G$  est une composante  $C_2(7, n)$  fermée ou mixte pour un  $n \geq 7$ .

**Propriété 2.1 :** un ensemble absorbant minimum  $D$  de  $C_2(7, n)$  contient au plus trois sommets dans  $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ .

En effet, dans le cas contraire, considérons pour tout sous-ensemble  $\{u, v, w, y\}$  de  $D \cap (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$  la configuration  $C = (\{u, v, w, y\}, X_1 \cup \dots \cup X_4)$ .

Comme  $n \geq 6$ , il est facile de voir que  $C$  est valide et donc l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à  $C$  est un absorbant d'un sous-graphe isomorphe à une composante  $C_2(7, n-4)$  qui vérifie par minimalité de  $G$  la propriété  $(P_7)$ .

$$D' \text{ où } |D| \geq 4 + |D'| \geq 4 + \psi_7^2(n-4) = \begin{cases} \left\lceil \frac{40 + 9(n-4) + 3}{10} \right\rceil \geq \psi_7^2(n) \text{ si } n \text{ est pair,} \\ \left\lceil \frac{40 + 9(n-4) + 8}{10} \right\rceil \geq \psi_7^2(n) \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Et donc  $G$  vérifie  $(P_7)$ , ce qui entraîne une contradiction. ■

**Propriété 2.2 :** l'un des deux sommets  $x_{3,2}$  ou  $x_{5,2}$  est interdit.

En effet, s'il existe un absorbant minimum  $D$  de  $C_2(7, n)$  contenant ces deux sommets, alors pour absorber les sommets  $x_{1,2}$  et  $x_{7,2}$  (qui n'ont pas de voisins communs),  $D$  doit avoir deux sommets en plus dans  $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ . Ceci contredit la propriété 2.1. ■

Par symétrie, on peut supposer que  $x_{3,2}$  est interdit.

**Propriété 2.3 :** le sommet  $x_{2,1}$  est interdit.

En effet, supposons qu'il existe un absorbant minimum  $D$  de la composante  $C_2(7, n)$  contenant ce sommet. On doit avoir dans  $D$  un sommet  $u$  parmi  $\{x_{4,1}, x_{5,2}\}$  pour absorber le sommet  $x_{4,1}$ , et un autre sommet  $v$  parmi  $\{x_{6,1}, x_{7,2}, x_{6,3}\}$  pour absorber  $x_{7,2}$ .

Considérons maintenant la configuration  $C = (\{x_{2,1}, u, v\}, (X_1 \cup \dots \cup X_4) \setminus \{x_{2,3}, x_{1,4}, x_{3,4}\})$ . Comme  $n \geq 6$ , il est facile de voir que  $C$  est valide, et donc l'ensemble  $D'$

associé à D par rapport à C est un absorbant d'un graphe isomorphe à une composante  $C'(7, n-4)$ .

$$D' \text{ où } |D| \geq 3 + |D'| \geq 3 + \hat{\psi}_7(n-4) = \begin{cases} \left\lceil \frac{30 + 9(n-4) + 9}{10} \right\rceil = \psi_7^2(n) \text{ si } n \text{ est pair,} \\ \left\lceil \frac{30 + 9(n-4) + 14}{10} \right\rceil = \psi_7^2(n) \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ceci contredit le fait que G ne vérifie pas la propriété (P<sub>7</sub>). ■

Donc pour absorber le sommet  $x_{2,1}$ , D doit contenir le sommet  $x_{1,2}$ .

**Propriété 2.4 :** le sommet  $x_{5,2}$  est interdit.

En effet, supposons qu'il existe un absorbant minimum de G contenant ce sommet. Alors cet absorbant doit aussi contenir deux sommets supplémentaires. Un sommet dans  $\{x_{4,1}, x_{2,3}, x_{4,3}\}$  pour absorber  $x_{3,2}$  et un autre dans  $\{x_{6,1}, x_{7,2}, x_{6,3}\}$  pour absorber  $x_{7,2}$ . En somme, avec  $x_{1,2}$ , l'absorbant contient quatre sommets dans les trois premières colonnes, ce qui contredit la propriété 2.1. ■

Nous avons montré finalement que tout absorbant minimum D de G contient forcément (en plus de  $x_{1,2}$ ) le sommet  $x_{4,1}$  pour qu'il soit dominé. Et pour absorber le sommet  $x_{6,1}$ , D doit contenir un sommet u dans  $\{x_{6,1}, x_{7,2}\}$ . D'autre part, pour absorber maintenant les sommets  $x_{4,3}$ ,  $x_{1,4}$  et  $x_{7,4}$ , nous avons besoin de rajouter à D trois sommets supplémentaires v, w et y qui d'après la propriété 2.1 sont respectivement dans  $\{x_{3,4}, x_{5,4}\}$ ,  $\{x_{1,4}, x_{2,5}\}$  et  $\{x_{7,4}, x_{6,5}\}$ .

Soit maintenant la configuration  $C = (\{x_{1,2}, x_{4,1}, u, v, w, y\}, (X_1 \cup \dots \cup X_6))$ . Nous remarquons que  $n \neq 7$ . En effet, dans le cas contraire, pour dominer les sommets de la colonne  $X_7$ , en plus des six sommets de la configuration C, nous aurions besoin d'au moins deux sommets supplémentaires dans D ( car  $x_{2,7}$  et  $x_{6,7}$  n'ont pas de voisins

communs dans  $C_2(7, 7)$ ). Alors  $|D|$  serait supérieur ou égal à  $\psi_7^2(7) = 8$  et ceci contredirait le fait que c'était un contre-exemple pour  $(P_7)$ .

Comme  $n \geq 8$ ,  $C$  est une configuration valide et donc l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à  $C$  est un absorbant d'un sous-graphe isomorphe à une composante  $C_2(7, n-6)$ , qui par minimalité de  $G$  vérifie la propriété  $(P_7)$ .

$$D' \text{ où } |D| \geq 6 + |D'| \geq 6 + \psi_7^2(n-6) = \begin{cases} \left\lceil \frac{60 + 9(n-6) + 3}{10} \right\rceil \geq \psi_7^2(n) \text{ si } n \text{ est pair,} \\ \left\lceil \frac{60 + 9(n-6) + 8}{10} \right\rceil \geq \psi_7^2(n) \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ceci contredit notre hypothèse de départ et montre que le cas 2 ne peut pas se produire.

**Cas 3 :** le graphe  $G$  est une composante  $C'(7, n)$ ,  $n \geq 3$ .

**Propriété 3.1 :** il n'existe aucun absorbant minimum de  $C'(7, n)$  qui contient le sommet  $x_{2,-1}$ .

En effet, supposons que le contraire est vrai et considérons un ensemble absorbant minimum  $D$  contenant le sommet  $x_{2,-1}$ . Soit la configuration  $C = (\{x_{2,-1}\}, N[x_{2,-1}])$ . Comme  $n \geq 2$ ,  $C$  est valide et l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à  $C$  est un absorbant d'une composante  $C_2(7, n)$ , qui par minimalité de  $G$  vérifie la propriété  $(P_7)$ .

D'où la contradiction d'après l'inégalité suivante.

$$|D| \geq 1 + |D'| \geq 1 + \psi_7^2(n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{10 + 9(n) + 3}{10} \right\rceil \geq \hat{\psi}_7(n) \text{ si } n \text{ est pair,} \\ \left\lceil \frac{10 + 9(n) + 8}{10} \right\rceil \geq \hat{\psi}_7(n) \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Donc le sommet  $x_{2,-1}$  est interdit.

**Propriété 3.2 :** le sommet  $x_{3,0}$  est interdit.

En effet, supposons que le contraire est vrai et considérons un ensemble absorbant minimum  $D$  de  $C'(7, n)$  contenant ce sommet. Pour absorber le sommet  $x_{1,0}$ ,  $D$  doit contenir un sommet supplémentaire  $u$  dans  $\{x_{1,0}, x_{2,1}\}$ . Considérons maintenant la configuration  $C = (\{x_{3,0}, u\}, (X_{-1} \cup \dots \cup X_2) \setminus \{x_{6,1}, x_{5,2}, x_{7,2}\})$ .

Il est facile de voir que  $n \neq 3$ . En effet, il suffit de remarquer d'une part, que le sous-graphe de  $C'(7, n)$  induit par l'ensemble de sommets  $A = \{x_{6,1}, x_{5,2}, x_{7,2}, x_{6,3}\}$  est isomorphe à une composante  $C_2(3, 3)$  et d'autre part, qu'il n'existe aucun voisin en commun entre les sommets de  $A$  et de  $x_{2,3}$ . Ainsi, pour absorber tous ces sommets, l'absorbant  $D$  doit contenir, en plus des deux sommets de la configuration  $C$ , au moins trois ( $= 1 + \gamma(C_2(3, 3))$ ) sommets supplémentaires et donc  $|D| \geq \hat{\psi}_7(3) = 5$ .

Comme  $n \geq 4$ ,  $C$  est valide et donc l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à  $C$  est un absorbant d'une composante  $C'(7, n-2)$ , qui par minimalité de  $G$  vérifie la propriété  $(P_7)$ .

D'où la contradiction d'après l'inégalité suivante.

$$|D| \geq 2 + |D'| \geq 2 + \hat{\psi}_7(n-2) = \begin{cases} \left\lceil \frac{20 + 9(n-2) + 9}{10} \right\rceil \geq \hat{\psi}_7(n) \text{ si } n \text{ est pair,} \\ \left\lceil \frac{20 + 9(n-2) + 14}{10} \right\rceil \geq \hat{\psi}_7(n) \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Des propriétés 3.1 et 3.2, on déduit que tout absorbant minimum de  $C'(7, n)$  doit contenir le sommet  $x_{1,0}$  pour dominer le sommet  $x_{2,-1}$ .

**Propriété 3.3 :** les sommets  $x_{2,1}$ ,  $x_{1,2}$  et  $x_{3,2}$  sont interdits.

En effet, supposons que le contraire est vrai et soit  $u$  l'un de ces trois sommets, contenu dans un absorbant minimum de  $C'(7, n)$ . Alors la paire  $(X, Y)$ , où  $X = \{x_{1,0}, u\}$

et  $Y = \{x_{2,-1}, u\}$ , est une paire de substitution. Donc d'après le principe fondamental, l'ensemble  $D' = (D \setminus X) \cup Y$  est aussi un absorbant minimum de  $C'(7, n)$ . Le fait qu'il contienne le sommet  $x_{2,-1}$  contredit la propriété 3.1. ■

D'après la propriété 3.3, et pour absorber les sommets  $x_{3,0}$  et  $x_{1,2}$ ,  $D$  doit contenir respectivement les sommets  $x_{4,1}$  et  $x_{2,3}$ .

**Propriété 3.4 :** les sommets  $x_{6,1}$ ,  $x_{5,2}$ ,  $x_{4,3}$  et  $x_{6,3}$  sont interdits.

En effet, dans le cas contraire, soit  $u$  l'un de ces quatre sommets qui soit contenu dans un absorbant minimum de  $C'(7, n)$ . Alors la paire  $(X, Y)$ , où  $X = \{x_{4,1}, x_{2,3}, u\}$  et  $Y = \{x_{3,0}, x_{2,3}, u\}$ , est une paire de substitution. Donc d'après le principe fondamental, l'ensemble  $D' = (D \setminus X) \cup Y$  est aussi un absorbant minimum de  $C'(7, n)$ . Le fait qu'il contienne le sommet  $x_{3,0}$  contredit la propriété 3.2. ■

Puisque nous avons déjà interdit, d'après les propriétés 3.3 et 3.4, les sommets  $x_{3,2}$ ,  $x_{5,2}$  et  $x_{4,3}$  qui constituent l'ensemble du voisinage étendu de  $x_{4,3}$  dans  $C'(7, 3)$ , on en déduit que le cas  $n = 3$  est absurde et donc  $C'(7, 3)$  vérifie la propriété  $(P_7)$ . D'autre part, l'application des  $(x_{i,4}, x_{i,2})$ -projections, pour  $i = 1, 3, 5$  et  $7$ , à un absorbant minimum de la composante  $C'(7, 4)$  nous permet d'écrire  $\gamma(C'(7, 4)) \geq \gamma(C'(7, 3)) \geq \hat{\psi}_7(3) = \hat{\psi}_7(4) = 5$ . Puisque nous avons déjà montré au début de cette preuve que  $C'(7, 5)$  vérifie la propriété  $(P_7)$ , cela implique que  $n \geq 6$ .

Finalement, d'après ce qui précède, tout absorbant minimum  $D$  de la composante  $C'(7, n)$  contient les sommets  $x_{1,0}$ ,  $x_{4,1}$  et  $x_{2,3}$  et trois sommets supplémentaires, à savoir le sommet  $x_{7,2}$  pour absorber  $x_{6,1}$ , un sommet  $u$  dans  $\{x_{3,4}, x_{5,4}\}$  pour absorber  $x_{4,3}$  et enfin un sommet  $v$  dans  $\{x_{7,4}, x_{6,5}\}$  pour absorber le sommet  $x_{7,4}$ .

Soit maintenant la configuration  $C = (\{x_{1,0}, x_{4,1}, x_{2,3}, x_{7,2}, u, v\}, X_{-1} \cup \dots \cup X_6)$ .

Il est facile de voir que  $n \neq 6$ . Supposons que  $n = 6$ . Alors l'absorbant  $D$  doit contenir, en plus des six sommets de la configuration  $C$ , au moins un sommet supplémentaire pour absorber (entre autres) le sommet  $x_{1,6}$ . Ceci donne  $|D| \geq \hat{\psi}_7(6) = 7$ . De plus, comme la composante fermée  $C_2(7, 7)$  vérifie (d'après le cas 2 déjà étudié) la propriété  $(P_7)$ , on en déduit, en vertu de l'inégalité (2), que  $\gamma(C'(7, 7)) \geq \gamma(C_2(7, 7)) = \psi_7^2(7) = \hat{\psi}_7(7) = 8$  et donc  $n \geq 8$ .

Ainsi, la configuration  $C$  est valide, ce qui implique que l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à  $C$  est un absorbant d'une composante  $C_2(7, n-6)$  qui vérifie la propriété  $(P_7)$  par minimalité de  $G$ .

$$D' \text{ où } |D| \geq 6 + |D'| \geq 6 + \psi_7^2(n-6) = \begin{cases} \left\lceil \frac{60 + 9(n-6) + 3}{10} \right\rceil = \hat{\psi}_7(n) \text{ si } n \text{ est pair,} \\ \left\lceil \frac{60 + 9(n-6) + 8}{10} \right\rceil = \hat{\psi}_7(n) \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Le cas 3 ne peut donc se produire.

**2<sup>ième</sup> partie de la preuve :** Pour compléter la preuve du théorème, nous allons donner, pour  $n \geq 7$ , un ensemble absorbant  $Q_1 \cup Q_2 \dots \cup Q_t$  de la composante  $C_i(7, n)$  (pour  $i=1$  ou  $2$ ) de cardinalité  $\psi_7^i(n)$ ; où chaque bloc  $Q_j$ ;  $j = 1, \dots, t$ , est isomorphe à l'un des blocs de la figure 2.4.

Soit  $n = 10q + r$ , avec  $q$  et  $r$  deux entiers positifs.

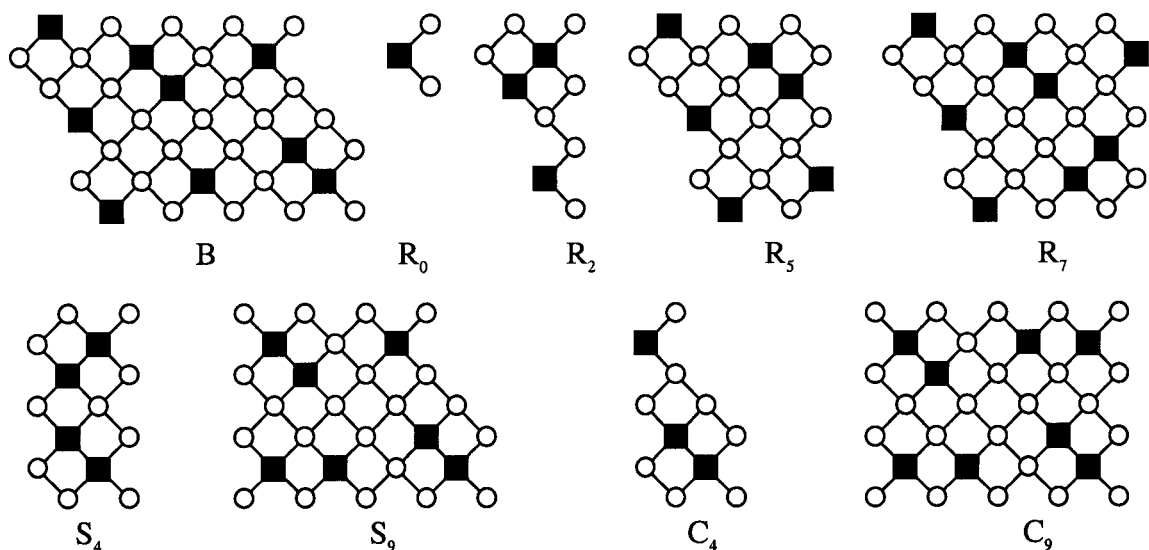
**Cas 1' :** la composante  $C_2(7, n)$  est fermée ou mixte.

Si  $r = 0, 2, 5$  ou  $7$ , alors pour ces congruences de  $n$ , nous avons  $\psi_7^2(n) = \hat{\psi}_7(n)$ . Donc comme dans la preuve de l'inégalité (2), il suffit de donner un absorbant  $Q_1 \cup Q_2 \dots \cup Q_t$  de  $C'(7, n)$  de cardinalité  $\hat{\psi}_7(n)$  et d'en déduire un absorbant de  $C_2(7, n)$  en

effectuant (éventuellement) les projections nécessaires. Pour cela, on prend tous les blocs  $Q_i$  pour  $i = 1, \dots, q$ , isomorphes à  $B$  et on complète par un dernier bloc  $Q_{q+1}$  isomorphe à  $R_r$ .

Si  $r = 4, 6, 9$  ou  $11$ , notre absorbant de  $C_2(7, n)$  est formé d'un premier bloc  $Q_1$  isomorphe à  $S_4$  et d'un second bloc  $Q_2$  isomorphe à la solution  $C'(7, 10q+r-4)$  déjà décrite ci-dessus.

Enfin, si  $r = 8$  ou  $13$ , alors on prend  $Q_1$  isomorphe à  $C_4$  et on complète par  $Q_2$  isomorphe à la solution d'une composante  $C_2(7, 10q+r-4)$  donnée ci-dessus.



**Figure 2.4 - Construction de l'absorbant de  $P_7 \times P_n$ .**

**Cas 2' :** la composante  $C_1(7, n)$  est ouverte.

Si  $r = 9$  ou  $11$ , alors on prend  $Q_1$  isomorphe à  $S_9$  et on complète par  $Q_2$  isomorphe à la solution d'une composante  $C'(7, 10q+r-9)$ .

Si  $r = 13, 15$  ou  $17$ , alors on prend  $Q_1$  isomorphe à  $C_9$  et on complète par  $Q_2$  isomorphe à la solution d'une composante  $C_2(7, 10q+r-9)$ .



Enfin nous remarquons que l'ensemble  $\{x_{2,2}, x_{6,2}, x_{5,3}, x_{3,5}, x_{2,6}, x_{6,6}\}$  est un absorbant de la composante ouverte  $C_1(7, 7)$  (voir figure 2.4').

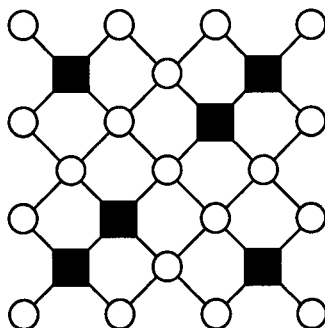


Figure 2.4' – Absorbant minimum de  $C_1(7, 7)$ .

**Théorème 2.5.3 ([10])**

$$\text{Pour tout } n \geq 9, \text{ on a } \gamma_{9,n} = \begin{cases} 2 \cdot \left\lceil \frac{11n+9}{10} \right\rceil & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \left\lceil \frac{11n+6}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{11n+12}{10} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Preuve :**

**1<sup>ère</sup> partie de la preuve :** Pour la composante  $C_1(9, n)$  (ouverte ou mixte) de  $P_9 \times P_n$ , on considère la fonction suivante.

$$\psi_9^1(n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{11n+6}{10} \right\rceil & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \left\lceil \frac{11n+9}{10} \right\rceil & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Et pour une composante  $C_2(9, n)$  fermée, on considère la fonction suivante.

$$\psi_9^2(n) = \left\lceil \frac{11n+12}{10} \right\rceil.$$

À partir d'une composante fermée  $C_2(9, n) = (V, E)$ , on construit un nouveau graphe  $C'(9, n)$  avec comme ensemble de sommets  $V' = V \cup \{x_{2,-1}, x_{1,0}, x_{3,0}, x_{5,0}\}$  et comme ensemble d'arêtes  $E' = E \cup \{(x_{2,-1}, x_{1,0}), (x_{2,-1}, x_{3,0}), (x_{1,0}, x_{2,1}), (x_{3,0}, x_{2,1}), (x_{3,0}, x_{4,1}), (x_{5,0}, x_{4,1}), (x_{5,0}, x_{6,1})\}$ .

Dans ce cas, on considère la fonction suivante.

$$\hat{\Psi}_9(n) = \left\lceil \frac{11n + 18}{10} \right\rceil.$$

On veut d'abord démontrer que la propriété suivante est vraie, pour tout  $n \geq 9$ .

$$\gamma(G) \geq \begin{cases} \Psi_9^1(n) & \text{si } G = C_1(9, n), \\ \Psi_9^2(n) & \text{si } G = C_2(9, n) \text{ fermée et } (P_9) \\ \hat{\Psi}_9(n) & \text{si } G = C'(9, n). \end{cases}$$

Les résultats précédents montrent que cette propriété est vérifiée par les composantes  $C_1(9, n)$  pour  $n = 3, 5, 6$  et  $8$  et  $C_2(9, n)$  pour  $n = 3, 5$  et  $7$ .

Montrons maintenant que le graphe  $C'(9, 3) = (V, E)$  vérifie aussi cette propriété.

Nous remarquons tout d'abord que le sous-graphe  $G$  de  $C'(9, 3)$  induit par l'ensemble de sommets  $V \setminus \{x_{5,0}, x_{8,1}, x_{9,2}, x_{8,3}\}$  est isomorphe au graphe  $C'(7, 3)$  que nous avons introduit dans la preuve du théorème 2.5.3 et dont le nombre d'absorption est, d'après la propriété  $(P_7)$ , au moins égal à 5. Ainsi, en appliquant les  $(x_{5,0}, x_{5,2})$  et  $(x_{i,j}, x_{7,2})$ -projections (pour  $x_{i,j} \in \{x_{8,1}, x_{9,2}, x_{8,3}\}$ ) à un absorbant de  $C'(9, 3)$ , on obtiendra un absorbant de  $G$  et donc nous avons  $\gamma(C'(9, 3)) \geq 5$ .

Supposons maintenant qu'il existe un absorbant minimum  $D$  de  $C'(9, 3)$  de cardinalité  $|D| = 5$ . Il est clair que le sommet  $x_{9,2}$  est interdit (car sinon, pour dominer

les sommets de  $G$ , on aura en somme  $|D| \geq 1 + \gamma(G) \geq 6$ . Et donc pour le dominer,  $D$  doit contenir un sommet  $u$  dans l'ensemble  $U = \{x_{8,1}, x_{8,3}\}$ . De même, pour absorber l'autre sommet de  $U$ , on doit avoir dans  $D$  un autre sommet  $v$  dans  $U \cup \{x_{7,2}\}$ . En considérant maintenant la paire de substitution  $(X, Y)$ , où  $X = \{u, v\}$  et  $Y = \{x_{9,2}, v\}$ , on déduit du principe fondamental qu'il existe un autre absorbant minimum de  $C'(9, 3)$  contenant le sommet interdit  $x_{9,2}$ . Comme nous avons obtenu une contradiction,  $|D| \geq 1 + \gamma(C'(7, 3)) \geq 6 = \hat{\psi}_9(3)$  et donc la composante  $C'(9, 3)$  vérifie la propriété  $(P_9)$ .

Supposons à présent qu'il existe un contre-exemple  $G$  pour  $(P_9)$ . Nous pouvons supposer que le nombre de sommets de  $G$  est minimal.

**Cas 1 :**  $G$  est une composante connexe  $C_1(9, n)$  ouverte ou mixte pour un  $n \geq 9$ .

Il est facile de voir que tout absorbant  $D$  de  $C_1(9, n)$  a au moins trois sommets  $u, v$  et  $w$  dans  $X_1 \cup X_2$ .

Comme  $n \geq 9$ , la configuration  $C = (\{u, v, w\}, X_1 \cup X_2 \cup X_3)$  est valide et l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à cette  $C$  est un absorbant d'un sous-graphe isomorphe à une composante  $C_2(9, n-3)$ .

Si  $n$  est impair, alors  $C_2(9, n-3)$  est une composante mixte isomorphe à  $C_1(9, n-3)$  et donc par minimalité de  $G$  nous avons  $|D| \geq 3 + |D'| \geq 3 + \psi_9^1(n-3) = \left\lceil \frac{30 + 11(n-3) + 9}{10} \right\rceil = \psi_9^1(n)$ .

Si  $n$  est pair, nous avons aussi par minimalité de  $G$  :

$$|D| \geq 3 + |D'| \geq 3 + \psi_9^2(n-3) = \left\lceil \frac{30 + 11(n-3) + 12}{10} \right\rceil = \psi_9^1(n).$$

Dans les deux cas, on obtient donc une contradiction.

**Cas 2 :**  $G$  est une composante connexe  $C_2(9, n)$  fermée pour un  $n \geq 9$ .

**Propriété 2.1 :** tout ensemble absorbant minimum  $D$  de  $C_2(9, n)$  contient au plus quatre sommets dans  $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ .

En effet, dans le cas contraire, soit  $u, v, w, y$  et  $z$  cinq sommets dans  $D \cap (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$  et soit  $D'$  l'ensemble associé à  $D$  par rapport à la configuration valide  $C = (\{u, v, w, y, z\}, X_1 \cup \dots \cup X_4)$ .  $D'$  est un absorbant d'un graphe isomorphe à une composante  $C_2(9, n-4)$  fermée, qui par minimalité de  $G$  vérifie la propriété  $(P_9)$  et donc

$$|D| \geq 5 + |D'| \geq 5 + \psi_9^2(n-4) = \left\lceil \frac{50 + 11(n-4) + 12}{10} \right\rceil \geq \psi_9^2(n). \text{ D'où la contradiction. } \blacksquare$$

**Propriété 2.2 :** un absorbant minimum ne peut pas contenir  $x_{3,2}$  ou  $x_{7,2}$ .

En effet, dans le cas contraire, il existe un ensemble absorbant minimum  $D$  de  $C_2(9, n)$  contenant ces deux sommets. Mais dans ce cas, pour absorber les sommets  $x_{1,2}$ ,  $x_{5,2}$  et  $x_{9,2}$ ,  $D$  doit contenir trois sommets de plus dans  $(X_1 \cup X_2 \cup X_3)$ , ce qui contredit la propriété 2.1.  $\blacksquare$

Donc par symétrie, on peut supposer que le sommet  $x_{7,2}$  est interdit.

**Sous-cas 2.1 :** il existe un ensemble absorbant minimum  $D$  de  $C_2(9, n)$  contenant le sommet  $x_{3,2}$ .

$D$  doit contenir un sommet  $u$  dans  $\{x_{2,1}, x_{1,2}, x_{2,3}\}$  pour absorber le sommet  $x_{1,2}$  et un sommet supplémentaire  $v$  dans  $\{x_{6,1}, x_{5,2}\}$  pour absorber le sommet  $x_{6,1}$ .

**Propriété 2.1.1 :** le sommet  $x_{8,1}$  est interdit.

En effet, supposons que  $D$  contienne  $x_{8,1}$ . Alors puisque  $n \geq 9$ , il est facile de vérifier que la configuration  $C = (\{x_{3,2}, u, v, x_{8,1}\}, (X_1 \cup \dots \cup X_4) \setminus \{x_{8,3}, x_{5,4}, x_{7,4}\})$

$x_{9,4}$  est valide. L'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à cette configuration est un absorbant d'un sous-graphe isomorphe à une composante  $C'(9, n-4)$  qui vérifie par minimalité de  $G$  la propriété  $(P_9)$ , Nous obtenons donc que

$$|D| \geq 4 + |D'| \geq 4 + \hat{\psi}_9(n-4) = \left\lceil \frac{40 + 11(n-4) + 18}{10} \right\rceil \geq \psi_9^2(n),$$

ce qui contredit notre hypothèse. ■

Maintenant, puisque les sommets  $x_{8,1}$  et  $x_{7,2}$  sont interdits,  $D$  doit contenir le sommet  $x_{9,2}$  pour absorber  $x_{8,1}$ .

Puisque l'absorbant  $D$  contient déjà quatre sommets dans l'ensemble  $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ , nous en déduisons, en appliquant la propriété 2.1, que tous les autres sommets de cet ensemble sont interdits. Pour que le sommet  $x_{7,2}$  soit dominé, il faut donc que  $x_{6,1}$  appartienne à  $D$ . Ainsi, pour absorber dans ce cas les sommets  $x_{6,3}$  et  $x_{9,4}$ ,  $D$  doit contenir deux sommets en plus, à savoir  $w$  dans  $\{x_{5,4}, x_{7,4}\}$  et  $y$  dans  $\{x_{8,5}, x_{9,4}\}$  (respectivement).

Considérons maintenant la configuration  $C = (\{x_{3,2}, u, x_{6,1}, x_{9,2}, w, y\}, (X_1 \cup \dots \cup X_6) \setminus \{x_{2,5}, x_{1,6}, x_{3,6}, x_{5,6}\})$ . Comme  $n \geq 9$ , on peut voir que  $C$  est valide. Donc l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à  $C$  est un absorbant d'un graphe isomorphe à une composante de la forme  $C'(7, n-6)$ . D'où par minimalité de  $G$ ,

$$|D| \geq 6 + |D'| \geq 6 + \hat{\psi}_9(n-6) = \left\lceil \frac{60 + 11(n-6) + 18}{10} \right\rceil = \psi_9^2(n).$$

Ceci contredit l'hypothèse que  $G$  ne vérifie pas  $(P_9)$ .

**Sous-cas 2.2 :** le sommet  $x_{3,2}$  est interdit.

Dans ce cas, un absorbant minimum de  $C_2(9, n)$  dénoté  $D$  doit contenir un sommet  $u$  dans  $\{x_{2,1}, x_{1,2}\}$  pour absorber le sommet  $x_{2,1}$  et un sommet supplémentaire  $v$  dans  $\{x_{8,1}, x_{9,2}\}$  pour absorber le sommet  $x_{8,1}$ .

**Propriété 2.2.1 :** les sommets  $x_{4,1}$  et  $x_{6,1}$  sont interdits.

En effet, dans le cas contraire, supposons que  $D$  contienne l'un de ces deux sommets. Par symétrie, on peut supposer que c'est le sommet  $x_{4,1}$ . Mais alors pour absorber  $x_{6,1}$ ,  $D$  doit contenir un sommet de plus, appelé  $w$ , dans  $\{x_{6,1}, x_{5,2}\}$ . Alors la paire  $(X, Y)$ , où  $X = \{x_{4,1}, w\}$  et  $Y = \{x_{3,2}, w\}$ , est une paire de substitution. Le principe fondamental montre que  $(D \setminus X) \cup Y$  est aussi un absorbant minimum de  $C_2(9, n)$ , qui contient le sommet  $x_{3,2}$ . Ceci contredit l'hypothèse que ce sommet est interdit.

A présent, puisque les sommets  $x_{4,1}$  et  $x_{6,1}$  sont interdits,  $D$  doit contenir le sommet  $x_{5,2}$  pour absorber ces deux derniers.

**Propriété 2.2.2 :** les sommets  $x_{2,3}$  et  $x_{8,3}$  sont interdits.

Supposons que  $D$  contienne  $x_{2,3}$ . Alors la paire  $(X, Y)$ , où  $X = \{u, x_{2,3}\}$  et  $Y = \{x_{3,2}, x_{2,3}\}$ , est une paire de substitution. On obtient une contradiction car le sommet  $x_{3,2}$  est supposé être interdit. Par symétrie on voit que  $x_{8,3}$  est aussi interdit.

Soit l'ensemble  $U = \{x_{2,1}, x_{1,2}, x_{4,3}, x_{1,4}, x_{3,4}, x_{2,5}, x_{4,5}\}$ . La propriété suivante est vérifiée.

**Propriété 2.2.3 :** l'absorbant  $D$  doit contenir au moins trois sommets dans l'ensemble  $U$ .

Si  $D$  contient  $x_{4,3}$ , alors il doit contenir un sommet de plus dans  $\{x_{1,4}, x_{2,5}\}$  pour absorber le sommet  $x_{1,4}$ . Comme  $D$  contient le sommet  $u \in \{x_{2,1}, x_{1,2}\}$ ,  $D$  contient au moins trois sommets dans  $U$ .

Maintenant, supposons que  $D$  ne contienne pas  $x_{4,3}$ . Dans ce cas pour absorber  $x_{3,2}$ ,  $u$  doit être identique à  $x_{2,1}$ , et pour absorber  $x_{2,3}$ ,  $D$  doit contenir un sommet supplémentaire  $u'$  dans  $\{x_{1,2}, x_{1,4}, x_{3,4}\}$ . Mais à présent, pour absorber  $\{x_{1,2}, x_{1,4}, x_{3,4}\} \setminus \{u'\}$ ,  $D$  doit contenir un autre sommet dans  $U$ . ■

De même, en considérant l'ensemble  $V = \{x_{8,1}, x_{9,2}, x_{6,3}, x_{9,4}, x_{7,4}, x_{8,5}, x_{6,5}\}$ , on peut affirmer, par symétrie, que  $D$  contient au moins trois sommets dans l'ensemble  $V$ .

Considérons maintenant, pour tout triplet  $\{u, u', u''\}$  dans  $D \cap U$  et tout triplet  $\{v, v', v''\}$  dans  $D \cap V$ , la configuration  $C = (\{x_{5,2}, u, u', u'', v, v', v''\}, X_1 \cup \dots \cup X_6)$ . Comme  $n \geq 9$ ,  $C$  est valide et donc l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à cette configuration est un absorbant d'un sous-graphe isomorphe à une composante  $C_2(9, n-4)$  fermée qui, par minimalité, vérifie  $(P_9)$ . D'où

$$|D| \geq 7 + |D'| \geq 7 + \psi_9^2(n-6) = \left\lceil \frac{70 + 11(n-6) + 12}{10} \right\rceil \geq \psi_9^2(n).$$

Ceci termine la preuve du cas 2.

**Cas 3 :**  $G$  est une composante connexe de la forme  $C'(9, n)$  pour un  $n \geq 5$ .

**Propriété 3.1 :** il n'existe aucun ensemble absorbant minimum de  $C'(9, n)$  contenant le sommet  $x_{2,-1}$ .

En effet, soit  $D$  un absorbant minimum de  $C'(9, n)$  contenant ce sommet. Comme  $n \geq 5$ , la configuration  $C = (\{x_{2,-1}\}, N[x_{2,-1}] \cup x_{5,0})$  est valide et donc l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à cette configuration est un absorbant d'une composante  $C_2(9, n)$  fermée qui, par minimalité de  $G$ , vérifie la propriété  $(P_9)$ . Alors

$$|D| \geq 1 + |D'| \geq 1 + \psi_9^2(n) = \left\lceil \frac{10 + 11(n) + 12}{10} \right\rceil \geq \hat{\psi}_9(n),$$

ce qui contredit l'hypothèse que  $G$  est un contre-exemple. ■

**Propriété 3.2 :** le sommet  $x_{3,0}$  est interdit.

Supposons qu'il existe un absorbant minimum de  $C'(9, n)$  (appelé  $D$ ) contenant ce sommet. Pour dominer les sommets  $x_{1,0}$  et  $x_{5,0}$ , l'absorbant  $D$  doit contenir respectivement un sommet  $u$  dans  $\{x_{1,0}, x_{2,1}\}$  et un sommet  $v$  dans  $\{x_{5,0}, x_{4,1}, x_{6,1}\}$ .

Comme  $n \geq 5$ , la configuration  $C = (\{x_{3,0}, u, v\}, X_{-1} \cup X_0 \cup X_1 \cup X_2)$  est valide et l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à  $C$  est un absorbant d'un sous-graphe isomorphe à une composante  $C_2(9, n-2)$  fermée qui vérifie la propriété  $(P_9)$ . Nous avons alors

$$|D| \geq 3 + |D'| \geq 3 + \psi_9^2(n-2) = \left\lceil \frac{30 + 11(n-2) + 12}{10} \right\rceil \geq \hat{\psi}_9(n).$$

Ceci implique que  $G$  vérifie la propriété  $(P_9)$ , ce qui contredit l'hypothèse. ■

**Propriété 3.3 :** les sommets  $x_{2,1}$ ,  $x_{1,2}$  et  $x_{3,2}$  sont interdits.

En effet, dans le cas contraire, soit  $u$  l'un de ces trois sommets et soit  $D$  un absorbant minimum de  $C'(9, n)$  contenant  $u$ . Alors la paire  $(X, Y)$ , où  $X = \{x_{1,0}, u\}$  et  $Y = \{x_{2,1}, u\}$ , est une paire de substitution. Donc, d'après le principe fondamental, l'ensemble  $(D \setminus X) \cup Y$  est un absorbant minimum de  $C'(9, n)$  contenant le sommet  $x_{2,-1}$ . Ceci contredit la propriété 3.1. ■

La propriété 3.3 implique que pour absorber les sommets  $x_{3,0}$  et  $x_{1,2}$ , un absorbant minimum  $D$  doit contenir (en plus de  $x_{1,0}$ ) les sommets  $x_{4,1}$  et  $x_{2,3}$ , respectivement. De plus, pour absorber les sommets  $x_{6,1}$  et  $x_{9,2}$ ,  $D$  doit contenir au moins deux sommets supplémentaires  $u$  et  $v$  dans  $\{x_{5,0}, x_{6,1}, x_{5,2}, x_{7,2}\}$  et  $\{x_{8,1}, x_{9,2}, x_{8,3}\}$ , respectivement.

Considérons maintenant la configuration  $C = (\{x_{1,0}, x_{4,1}, x_{2,3}, u, v\}, X_{-1} \cup \dots \cup X_4)$ .



Il est clair que  $n$  est différent de 5. En effet, pour absorber les sommets  $x_{5,4}$ ,  $x_{2,5}$  et  $x_{8,5}$  qui, pris deux à deux, n'ont pas de voisins communs dans  $C'(9, 5)$ , l'absorbant  $D$  doit contenir, en plus des cinq sommets de la configuration  $C$ , au moins trois sommets supplémentaires dans leurs voisinages étendus. Ainsi,  $|D| \geq 8 = \hat{\psi}_9(5)$  et  $C'(9, n)$  vérifie donc  $(P_9)$  pour  $n = 5$ .

Comme  $n \geq 7$ , la configuration  $C$  est valide. Donc l'ensemble  $D'$  associé à  $D$  par rapport à  $C$  est un absorbant d'un sous-graphe isomorphe à une composante  $C_2(9, n-4)$  qui, par minimalité de  $G$ , vérifie la propriété  $(P_9)$ . Nous obtenons que

$$|D| \geq 5 + |D'| \geq 5 + \psi_9^2(n-4) = \left\lceil \frac{50 + 11(n-4) + 12}{10} \right\rceil = \hat{\psi}_9(n),$$

ce qui contredit notre hypothèse de départ et prouve la propriété  $(P_9)$ .

**2<sup>ème</sup> partie de la preuve :** pour terminer la preuve du théorème, nous donnons maintenant, pour tout  $n \geq 9$ , des ensembles absorbants de chaque composante de  $P_9 \times P_n$  qui satisfont  $(P_9)$  avec égalité. Dans cette description, chacun des blocs composant ces ensembles absorbants est isomorphe à l'un des blocs représentés à la figure 2.5.

Pour  $n = 10q + r$ , avec  $q$  et  $r$  deux entiers positifs, nous prendrons le premier bloc  $Q_1$  isomorphe à un certain  $S_m$  (selon la congruence de  $n$ ), que nous faisons suivre successivement par des blocs  $Q_i$  (pour  $i = 2, \dots, q+1$ ), tous isomorphes à  $B$ . Nous complétons par un dernier bloc  $Q_{q+2}$  isomorphe à  $R_{r-m}$  (voir figure 2.5).

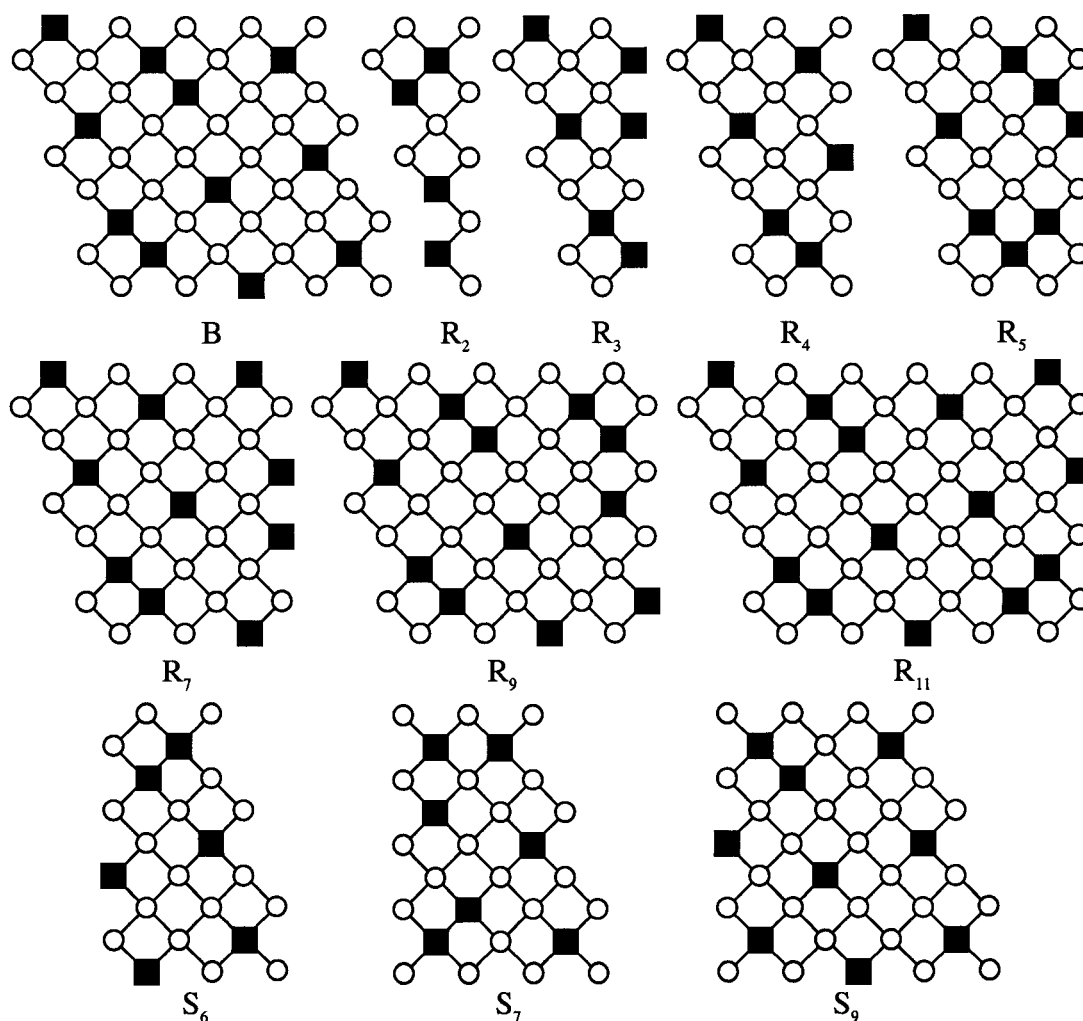


Figure 2.5 - Construction de l'absorbant de  $P_9 \times P_n$

**Cas 1 :** absorbant minimum d'une composante  $C_1(9, n)$ .

Si  $r = 8, 10, 15$  ou  $17$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $S_6$ ,  $Q_i$  (pour  $i = 2, \dots, q+1$ ) est isomorphe à  $B$  et  $Q_{q+2}$  est isomorphe à  $R_{r-6}$ .

Si  $r = 9, 11, 12, 14$  ou  $16$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $S_7$ ,  $Q_i$  (pour  $i = 2, \dots, q+1$ ) est isomorphe à  $B$  et  $Q_{q+2}$  est isomorphe à  $R_{r-7}$ .

Si  $r = 13$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $S_9$ ,  $Q_i$  (pour  $i = 2, \dots, q+1$ ) est isomorphe à  $B$  et  $Q_{q+2}$  est isomorphe à  $R_4$ .

**Cas 2 :** absorbant minimum d'une composante  $C_2(9, n)$  fermée.

Si  $r = 9, 11, 13, 15$  ou  $17$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $S_6$ ,  $Q_i$  (pour  $i = 2, \dots, q+1$ ) est isomorphe à  $B$  et  $Q_{q+2}$  est isomorphe à  $R_{r-6}$ . ■

## 2.6. Conclusion

Notre preuve est algorithmique, basée sur la recherche de paires de substitution. Cette technique peut être appliquée pour le calcul de  $\gamma_{k, n}$  pour tout  $k$  fixé. De plus l'idée de configuration pourrait être utile pour le calcul du nombre d'absorption des grilles carrées complètes, c'est-à-dire les graphes de la forme  $P_k \square P_n$ .

# CHAPITRE 3 : NOMBRE D'ABSORPTION DES GRILLES CROISÉES DE GRANDE TAILLE

## 3.1. Introduction

Dans [41] les auteurs donnent un algorithme de programmation dynamique pour calculer  $\gamma(P_k \square P_n)$  pour  $k$  fixé dont la complexité est en  $O(3^k n)$ . Dans ce qui suit, on montre comment utiliser l'idée générale de cet algorithme en combinaison avec quelques techniques vues dans le chapitre 2 et le principe de la programmation dynamique pour réaliser un algorithme de calcul de  $\gamma(P_k \times P_n)$ ,  $k$  étant un entier fixé. L'implantation de cet algorithme sur un micro-ordinateur permet de calculer ce nombre pour  $k \leq 33$  et  $n \leq 40$ .

## 3.2. Principe de l'algorithme de calcul de $\gamma(P_k \times P_n)$

Avant de présenter notre algorithme nous devons introduire quelques définitions.

Soit  $G$  un graphe simple, et soit  $A$  un sous-ensemble donné de  $V$ . Un **quasi-absorbant** de  $G$  par rapport à  $A$  est un sous-ensemble  $D$  de  $V$  dont le voisinage étendu contient tous les sommets de  $V \setminus A$ . L'ensemble  $A$  est dit l'**extérieur** de  $G$ . Cette notion de quasi-absorption est plus générale que la notion d'absorption car tout absorbant d'un graphe  $G$  est aussi un quasi-absorbant de  $G$  (c'est-à-dire un quasi-absorbant dont le voisinage étendu contient aussi l'ensemble extérieur de  $G$ ).

En particulier, on définit un quasi-absorbant d'une composante connexe  $C(k, n)$  d'une grille croisée complète en prenant pour ensemble extérieur la dernière colonne  $X_n$ .

Soit  $D$  un quasi-absorbant de la grille  $C(k, n)$ . Puisque tous les voisins de  $X_n$  sont dans la colonne  $X_{n-1}$ , on remarque que  $D \setminus X_n$  est un quasi-absorbant de la sous-grille induite par les sommets de  $X_1, \dots, X_{n-1}$  (en prenant  $X_{n-1}$  comme ensemble extérieur). Cela nous permet de définir récursivement la famille des quasi-absorbants des grilles croisées et donc, comme nous le verrons dans la suite, d'établir la formule récursive utilisée dans notre algorithme de programmation dynamique.

Pour tout sous-ensemble (ordonné)  $A$  de  $V(G)$ , on note  $[A]$  un mot dans l'alphabet  $\{0,1,2\}^{|A|}$  en associant au  $i^{\text{ème}}$  élément de  $A$  une lettre  $d_A(i)$  de cet alphabet, dite  $i^{\text{ème}}$  digit de  $[A]$ . Notons  $Z([A])$  le nombre de zéros contenus dans  $[A]$ . On dira que  $[A]$  est compatible avec  $[B]$  si et seulement si  $[A]$  et  $[B]$  satisfont les trois assertions suivantes :

- (i)  $d_B(i) = 2$  implique que  $d_A(i-1) = 0$  ou  $d_A(i+1) = 0$ ,
- (ii)  $d_A(i) = 1$  implique que  $d_B(i-1) = 0$  ou  $d_B(i+1) = 0$  et
- (iii)  $d_A(i) = 2$  implique que  $d_B(i-1) \neq 0$  et  $d_B(i+1) \neq 0$ .

Cette définition trouve sa justification dans le lemme 3.2.1 où on construit un quasi-absorbant d'un  $C(k,n)$  en mettant côte à côte des mots qui doivent vérifier une certaine compatibilité.

On note par  $\mathbf{Comp}([B])$  l'ensemble des mots  $[A]$  compatibles avec  $[B]$ .

À tout sous-ensemble  $S$  de  $V(C(k, n))$ , on associe un  $n$ -uplet  $([X_1] \dots [X_n])_S$ , où

$$d_{X_1}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{i,1} \in S \\ 2 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\text{et pour } j = 2, \dots, n, d_{X_j}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si et seulement si } x_{i,j} \in S \\ 1 & \text{si } x_{i-1,j-1} \in S \text{ ou } x_{i+1,j-1} \in S \text{ et } x_{i,j} \notin S . \\ 2 & \text{si } x_{i-1,j-1} \notin S \text{ et } x_{i+1,j-1} \notin S \text{ et } x_{i,j} \notin S \end{cases}$$

On appelle  $[X_n]$  la **terminaison** de  $S$  dans  $([X_1] \dots [X_n])_S$ . On remarque que la cardinalité de  $S$  est égale à  $\sum_{j=1}^n Z([X_j])$ .

On dit qu'un sous-ensemble de sommets  $D$  de  $V(C(k,n))$  est un ensemble quasi-absorbant de  $C(k, n)$  si et seulement si  $C(k, n-1) \subseteq N[D]$ .

Le lemme suivant est une conséquence de (i) et de la définition de l'ensemble quasi-absorbant.

### Lemme 3.2.1

Un sous-ensemble  $D$  de  $V(C(k, n))$  est un ensemble quasi-absorbant de  $C(k,n)$  si et seulement si le  $n$ -uplet  $([X_1] \dots [X_n])_D$  vérifie :

$$[X_j] \text{ est compatible avec } [X_{j-1}] \text{ pour tout } j = 2, \dots, n. \blacksquare$$

On peut remplacer quasi-absorbant par absorbant dans le lemme précédent et y ajouter la condition que la terminaison  $[X_n]$  soit un mot de l'alphabet  $\{0, 1\}$ .

La fonction objectif  $\text{Opt}([X_j])$  de notre algorithme de programmation dynamique est égale à la cardinalité d'un plus petit ensemble quasi-absorbant  $D$  de  $C(k,j)$  de terminaison  $[X_j]$ . D'après le lemme 3.2.1, cette cardinalité peut être calculée séquentiellement, à partir de quasi-absorbants de plus petite taille, en appliquant la formule réursive suivante :

$$\text{Opt}([X_{m+1}]) = \underset{[X_m] | [X_{m+1}] \in \text{Comp}([X_m])}{\text{Min}} (\text{Opt}([X_m]) + Z([X_{m+1}])) ,$$

où  $\text{Opt}([X_1]) = Z([X_1])$ , pour tout mot  $[X_1]$  dans l'alphabet  $\{0, 2\}$ .

Un plus petit ensemble quasi-absorbant de  $C(k, n+1)$  quand  $n \geq 2$  est de cardinalité  $\gamma(C(k, n))$ , si l'on observe que tout ensemble absorbant de  $C(k, n)$  est un ensemble quasi-absorbant de  $C(k, n+1)$ , et qu'on peut déduire de n'importe quel quasi-absorbant de  $C(k, n+1)$  un ensemble absorbant de  $C(k, n)$  (par "projection" des sommets appartenant à l'absorbant et à la colonne  $X_{n+1}$  dans la colonne  $X_n$ , voir la preuve du lemme 3.4.1). Donc on peut conclure que :

$$\gamma(C(k, n)) = \underset{\text{pour tout } [X_{n+1}]}{\text{Min}} \text{Opt}([X_{n+1}]).$$

### 3.3. Algorithmme

**Fonction Absmin** ( $k, n$  : entiers;  $\text{type} = \{1, 2\}$ )

{ Pour tout  $j = 1$  à  $n$ , la valeur  $\text{Absmin}[j]$  détermine la taille d'un absorbant minimum d'une composante  $C(k, j)$  de la grille croisée complète de  $\text{type} = 1$  ou  $2$  }

**Si**  $\text{type} = 1$  **alors**  $p = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$  **sinon**  $p = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$  **fsi**

$\text{Absmin}[1] = p$  ; { si  $j=1$ ,  $C(k, 1)$  est un stable de cardinalité  $|X_1| = p$  }

**pour tout** mot  $[A]$  **de**  $\{0, 1, 2\}^p$  **faire**

**si**  $[A]$  ne contient aucun digit égal à 1

**alors**  $\text{Prec-Abs}([A]) = Z([A])$  ;

{  $\text{Prec-abs}([A])$  est la taille d'un quasi absorbant minimum de  $(k, 1)$  de terminaison  $[A]$  }

**sinon**  $\text{Prec-Abs}([A]) = +\infty$  ;

**finsi**

**finpour**

**pour j de 2 à n faire** {  $\text{Cour-Abs}([B])$  donnera la valeur d'un quasi-absorbant minimum de  $C(k, j)$  de terminaison  $[A]$ , calculé à partir de toutes les valeurs  $\text{Prec-Abs}([A])$  où  $[A]$  est compatible avec  $[B]$ . }

**pour tout** mot  $[B]$  **de**  $\{0, 1, 2\}^{k-p}$  **faire**

$\text{Cour-Abs}([B]) = +\infty$  ;

**pour tout** mot  $[A]$  **de**  $\{0, 1, 2\}^p$  **faire**

**si** [A] est compatible avec [B] **alors**  
 Cour-Abs([B]) = Min ( Cour-Abs([B]), Prec-Abs([A]) + Z([B]) ) ;  
**finsi**  
**finpour**  
**fpour**  
 Absmin[j] =  $+\infty$  ;  
**pour tout** mot [B] de  $\{0, 1, 2\}^{k-p}$  **faire**  
 { Un absorbant est un quasi absorbant dont la terminaison associée est un  
 mot de l'alphabet  $\{0,1\}$  d'où la recherche d'un minimum dans cet ensemble }  
**si** [B] ne contient aucun digit égal à 2 **alors**  
 Absmin[j] = Min(Absmin[j], Cour-Abs([B])) ;  
**finsi**  
 Prec-Abs([B]) = Cour-Abs([B]) ;  
**finpour**  
 p = k - p ;  
**finpour**  
**fin Absmin.**

Le nombre de mots de longueur  $p = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$  ou  $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$  possibles dans l'alphabet  $\{0,1,2\}$  est inférieur ou égal à  $3^p$ . Chacun de ces mots est compatible avec au plus  $3^{k-p}$  mots. Donc la complexité temporelle de cet algorithme est de l'ordre de  $O(3^k \cdot n)$ . En espace mémoire, l'encombrement est égal au coût de représentation des deux tableaux Prec-Abs et Cour-Abs, c'est-à-dire un coût de l'ordre de  $O(3^{\lceil k/2 \rceil})$ .

Quelques améliorations dans l'implémentation sont possibles:

- **Argument de symétrie** : lorsque k est impair, les deux composantes de  $P_k \times P_n$  présentent une symétrie verticale, et donc si un ensemble est un quasi-absorbant d'une des deux composantes, son symétrique par rapport à l'horizontale en est un aussi. Par



conséquent, si dans notre algorithme, nous avons déjà traité un mot (terminaison d'un certain quasi-absorbant), il n'est plus nécessaire de traiter son symétrique. Ainsi le nombre de mots considérés pour une colonne de  $k$  sommets (en considérant les deux composantes à la fois) passe de  $3^k$  à  $\frac{3^k + 3^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}{2}$ .

• **Argument de projection** : cet argument a déjà été mentionné dans le chapitre précédent. Il permet sous certaines conditions de projeter les sommets du quasi-absorbant d'une colonne  $X_j$  vers la colonne  $X_{j+2}$  afin de ne pas traiter les cas superflus. Il se traduit dans notre algorithme par le fait que nous ne traitons, pour un mot donné, que les mots compatibles améliorant la solution courante (voir figure 3.1). Les sommets étiquetés 0 appartiennent à l'absorbant, les sommets étiquetés 1 sont des sommets absorbés mais n'appartiennent pas à l'absorbant.

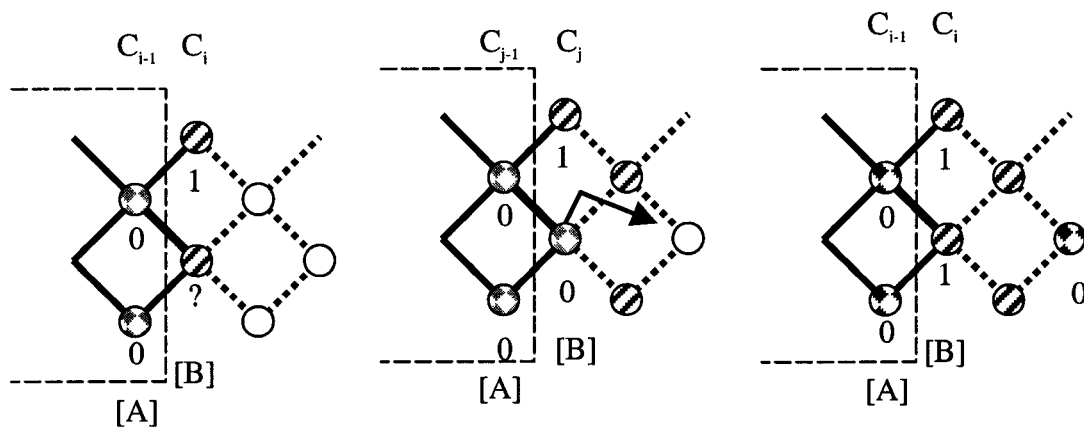


Figure 3.1 – Exemple de projection.

Le cas  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  n'est donc pas traité par notre algorithme Absmin.

• **Argument d'évaluation** : Comme dans les algorithmes classiques de séparation et d'évaluation, on peut éviter d'examiner pour un mot donné, l'ensemble de tous les mots compatibles en considérant une fonction d'évaluation permettant de localiser rapidement une solution optimale. Certaines bornes inférieures du nombre d'absorption (obtenues à partir du lemme 3.4.1) ont été utilisées.

L'implantation de cet algorithme sur un micro-ordinateur (Power Mac 8100/80 32 Mo) a été réalisée par X. Lagroula [52] dans le cadre de son stage de maîtrise en informatique à l'université Joseph Fourier de Grenoble. Cet algorithme nous a permis de calculer  $\gamma(P_{33} \times P_{33})$  en environ 70 heures avec une centaine de mégaoctets de mémoire virtuelle sur le disque dur. Il nous a permis aussi de déduire des expressions simples pour le nombre d'absorption de  $P_k \times P_n$  quand  $k = 9, 10, 11$  et  $13$ ,  $n$  étant inférieur ou égal à 100.

$$\gamma(P_9 \times P_n) = \begin{cases} 2 \cdot \left\lceil \frac{11n+9}{10} \right\rceil & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \left\lceil \frac{11n+6}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{11n+12}{10} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque  $k = 9$ , nous avons pu montrer cette formule pour tout  $n$  (voir chapitre 2).

$$\gamma(P_{10} \times P_n) = \begin{cases} 26 & \text{si } n = 10, \\ 2 \cdot \left\lceil \frac{12n+11}{10} \right\rceil & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 2 \cdot \left\lceil \frac{12n+13}{10} \right\rceil & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$\gamma(P_{11} \times P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{13n+14}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{13n+5}{10} \right\rceil & \text{si } n = 11, 12, 13 \text{ et } 19, \\ \left\lceil \frac{13n+16}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{13n+15}{10} \right\rceil & \text{si } n \equiv 5 \pmod{10}, \\ 2 \cdot \left\lceil \frac{13n+16}{10} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\gamma(P_{13} \times P_n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{3n+3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n+5}{2} \right\rfloor & \text{si } n \equiv 1, 3 \text{ ou } 7 \pmod{10}, \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{3n+4}{2} \right\rfloor & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $k = 10, 11$  et  $13$ , nous allons donner dans la quatrième section des bornes très proches de ces trois dernières formules pour  $n \geq 6$ .

Si on note  $r_k$  (respectivement  $r_n$ ) le reste de la division euclidienne de  $k$  (respectivement  $n$ ) par  $10$ , on définit  $\xi(k, n)$  de la manière suivante.

$$\xi(k, n) = \begin{cases} 2 \cdot \left\lfloor \frac{(k+2)(n+2)}{10} \right\rfloor - 2 & \text{si } (r_k, r_n) \text{ ou } (r_n, r_k) \in \{(0, 3), (0, 4), (2, 3), \\ & (2, 6), (3, 4), (3, 6)\} \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{(k+2)(n+2)}{10} \right\rfloor - 1 & \text{si } (r_k, r_n) = (3, 3) \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{(k+2)(n+2)}{10} \right\rfloor + 1 & \text{si } (r_k, r_n) \text{ ou } (r_n, r_k) \in \{(1, 1), (5, 5), (7, 9)\} \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{(k+2)(n+2)}{10} \right\rfloor & \text{sinon} \end{cases}$$

Et on peut déduire une formule unique pour  $n \leq 40$  et  $k \in \{12, 14, 15, \dots, 33\}$

$$\gamma(P_k \times P_n) = \begin{cases} 56 & \text{si } k = n = 15, \\ 71 & \text{si } k = n = 17, \\ 78 & \text{si } k = 17 \text{ et } n = 19, \\ \xi(k, n) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (FG)$$

Dans le chapitre 4, on montrera que cette dernière formule est vraie dans le cas général, i.e.  $k = 12$  ou  $k \geq 14$ , et  $n \geq k$ .

### 3.4. Bornes pour $k = 10, 11$ et $13$

Dans cette section, on donne des bornes du nombre d'absorption, plus ou moins proches de l'optimum, selon qu'on est dans le cas où  $k = 10, 11$  ou  $13$  et  $n \geq n_0$ . Ces bornes sont plus ou moins proches des formules déduites à partir des valeurs données par l'algorithme de la section précédente.

#### Lemme 3.4.1

Soit  $C(k, n)$  une composante connexe de  $P_k \times P_n$ , et considérons la partition suivante : soient  $G_1 = C(k_1, n)$  le graphe induit par les lignes  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{k_1}$ ,  $G_2 = C(k_2, n)$  le graphe induit par les lignes  $Y_{k_1+3}, Y_{k_1+4}, \dots, Y_k$ , avec  $k_1, k_2 \geq 2$  et  $k_1 + k_2 + 2 = k$ . On a

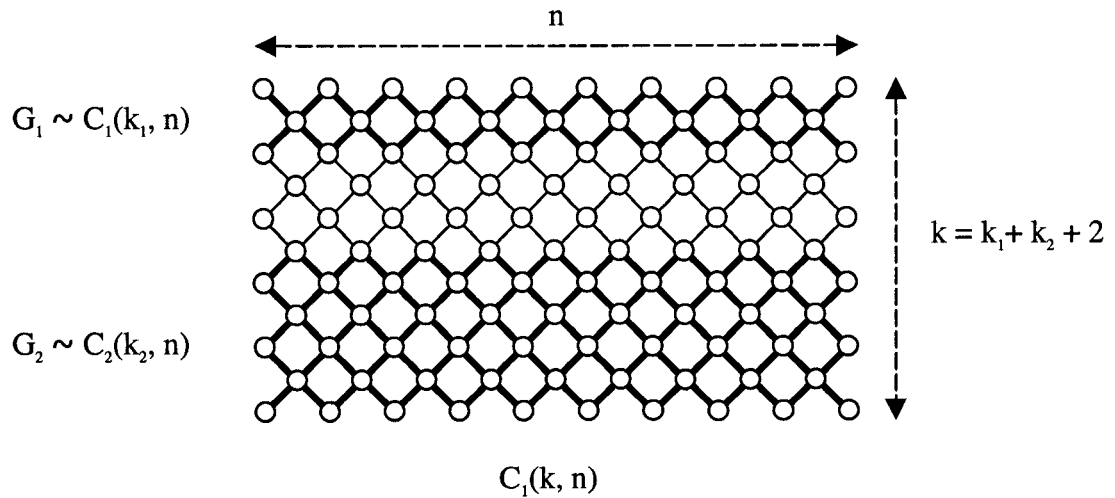
$$\gamma(C(k, n)) \geq \gamma(G_1) + \gamma(G_2).$$

**Preuve :**

Soit  $D$  un ensemble absorbant minimum de  $C(k, n)$  et soient  $U_1 = V(G_1) \cup Y_{k_1+1}$  et  $U_2 = Y_{k_1+2} \cup V(G_2)$ . Tous les sommets de  $D$  qui peuvent absorber un sommet de  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) ne peuvent être en dehors de  $U_1$  (resp.  $U_2$ ) (voir figure 3.2).

Soit  $D' = (D \cap V(G_1)) \cup \{x_{k_1-1,j} \mid x_{k_1+1,j} \in D\}$ . Puisque  $k_1 \geq 2$ , il est facile de vérifier que  $D'$  est un ensemble absorbant de  $G_1$ . Donc  $|D \cap U_1| \geq |D'| \geq \gamma(G_1)$ . De manière similaire, si on définit  $D'' = (D \cap V(G_2)) \cup \{x_{k_1+4,j} \mid x_{k_1+2,j} \in D\}$ , il est facile de vérifier que  $D''$  est un ensemble absorbant de  $G_2$  puisque  $k_2 \geq 2$  et  $k_1 + k_2 + 2 = k$ . Donc  $|D \cap U_2| \geq |D''| \geq \gamma(G_2)$ . D'où

$$\gamma(C(k, n)) \geq |D'| + |D''| \geq \gamma(G_1) + \gamma(G_2). \blacksquare$$



**Figure 3.2 - Preuve du lemme 3.4.1.**

Soit **ROT** la rotation d'angle  $\pi$  dans le plan.

**Théorème 3.4.2 ([10])**

$$\text{Pour } n \geq 10, \text{ on a } 2 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 \cdot \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil \leq \gamma(P_{10} \times P_n) \leq \begin{cases} 2 \cdot \left\lceil \frac{12n+11}{10} \right\rceil & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 2 \cdot \left\lceil \frac{12n+13}{10} \right\rceil & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

**Preuve :**

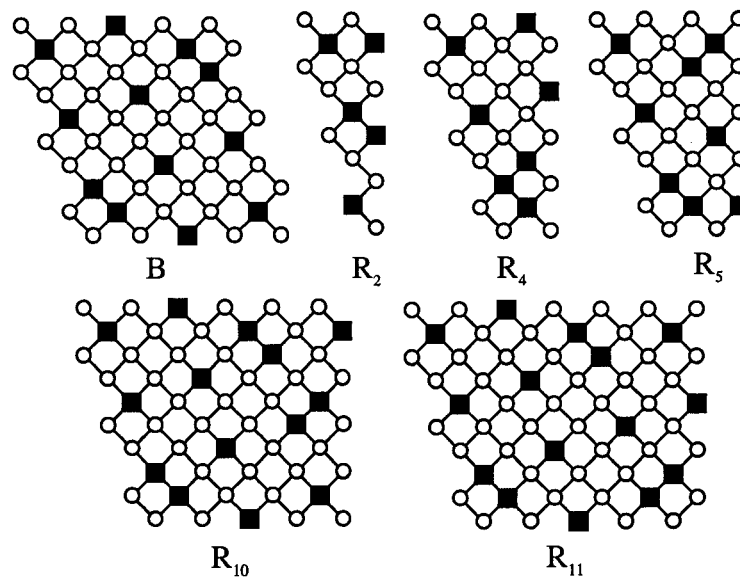
En appliquant le lemme 3.4.1 à la composante  $C_1(10, n)$  de  $P_{10} \times P_n$ , en prenant  $k_1 = 5$  et  $k_2 = 3$ , les sous-graphes induits  $G_1$  et  $G_2$  sont isomorphes à  $C_1(5, n)$  et  $C_2(3, n)$  respectivement, et donc nous avons :  $\gamma(C_1(10, n)) \geq \gamma(C_1(5, n)) + \gamma(C_2(3, n))$ . Ainsi d'après le théorème 2.4.3 et le théorème 2.4.6, on obtient pour  $n \geq 8$ ,  $\gamma(C_1(10, n)) \geq \left\lceil \frac{2n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ . Et puisque dans  $P_{10} \times P_n$  la composante  $C_2(10, n)$  est isomorphe à la composante  $C_1(10, n)$ , on en déduit alors la borne inférieure.

La borne supérieure est donnée par la cardinalité des ensembles absorbants des

composantes  $C_1(10, n)$  ou de  $C_2(10, n)$  décrites ci-dessous.

Pour compléter la liste des blocs composant notre ensemble absorbant de  $Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_t$ , nous considérerons en plus des blocs  $R_i$  représentés dans la figure 3.3, les blocs  $ROT(R_i)$ .

Soit  $n = 10q + r$ , avec  $r$  et  $q$  deux entiers positifs.



**Figure 3.3 - Construction d'un absorbant pour  $P_{10} \times P_n$ .**

Si  $r = 10, 11$  ou  $16$  alors notre absorbant de la composante  $C_1(10, n)$  est formé d'un bloc  $Q_1$  isomorphe à  $ROT(R_4)$ , que nous faisons suivre alternativement par  $q$  blocs  $Q_i$  tous isomorphe à  $B$  pour  $i = 2, \dots, q+1$ . Et enfin, on complète par  $Q_{q+2}$  qui est isomorphe à  $R_4, R_5$  ou  $R_{10}$  respectivement.

Si  $r = 9$  ou  $12$ , alors on donne un absorbant d'une composante  $C_2(10, n)$  en prenant  $Q_1$  isomorphe à  $ROT(R_5)$ ,  $Q_i$  est isomorphe à  $B$  pour  $i = 2, \dots, q+1$  et  $Q_{q+2}$  est isomorphe à  $R_2$  ou  $R_5$  respectivement.

Si  $r = 15, 17, 18, 23$  ou  $24$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $ROT(R_{11})$ ,  $Q_i$  est isomorphe à

B pour  $i = 2, \dots, q+1$  et  $Q_{q+2}$  est isomorphe à  $R_2, R_4, R_5, R_{10}$  ou  $R_{11}$  respectivement, ce qui donne un absorbant de  $C_2(10, n)$ .

Donnons un exemple de calcul en prenant  $n = 10q+10$  qui est pair. On aura donc 7 éléments de l'absorbant dans  $ROT(R_4)$ ,  $12q$  éléments dans les  $q$  blocs isomorphes au bloc B et 7 autres éléments dans le dernier bloc isomorphe à  $R_4$ . Cela fait  $12q + 14$  éléments dans l'absorbant de  $C_1(10, n)$  et donc  $2(12q+14)$  dans  $P_{10} \times P_n$ . Maintenant, si on calcule la cardinalité de l'absorbant à partir de la formule, on obtient :

$$2 \cdot \left\lceil \frac{12(10q+10)+11}{10} \right\rceil = 2 \cdot \left\lceil 12q + \frac{131}{10} \right\rceil = 2 \cdot (12q+14).$$

Nous terminons la description de nos ensembles absorbants de  $C(10, n)$  en donnant deux absorbants particuliers pour  $n = 10$  et  $14$  respectivement (voir figure 3.4). ■

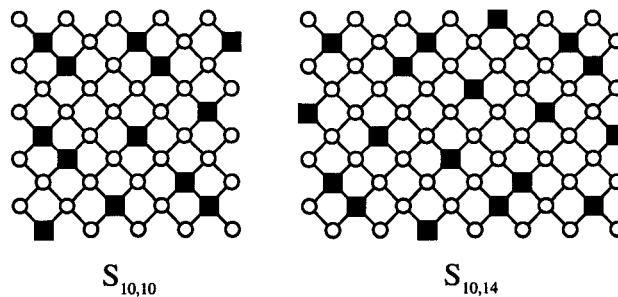


Figure 3.4 - Cas particuliers de  $C_1(10, n)$ .

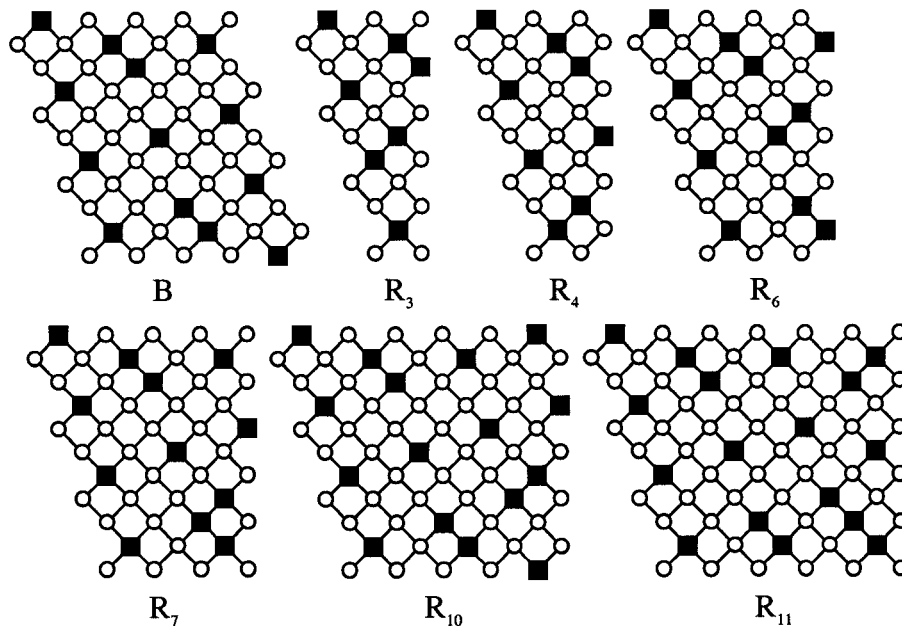
### Théorème 3.4.3 ([10])

$$\text{Pour tout } n \geq 10 \text{ on a : } n + 2 \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil \leq \gamma(P_{11} \times P_n) \leq \begin{cases} 2 \cdot \left\lceil \frac{13n+16}{10} \right\rceil - 1 & \text{si } n \equiv 5 \pmod{10}, \\ 2 \cdot \left\lceil \frac{13n+16}{10} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Preuve :**

Comme dans la preuve du premier cas, en prenant  $k_1 = 3$  et  $k_2 = 6$ , le lemme 3.4.1 donne pour les composantes  $C_1(11, n)$  et  $C_2(11, n)$  deux inégalités dont la somme est  $\gamma(P_{11} \times P_n) \geq \gamma(P_3 \times P_n) + \gamma(P_6 \times P_n)$ . Et donc d'après le théorème 2.4.3 et le théorème 2.5.1, on obtient pour  $n \geq 6$ ,  $\gamma(P_{11} \times P_n) \geq n + 2 \left\lceil \frac{4n}{5} \right\rceil$ .

La borne supérieure est donnée par la cardinalité des ensembles absorbants  $Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_t$  de  $C_1(11, n)$  et de  $C_2(11, n)$ , en prenant chaque bloc  $Q_i$  isomorphe à  $R_j$  ou à  $\text{ROT}(R_j)$ , où  $R_j$  est l'un des blocs illustrés à la figure 3.5.



**Figure 3.5 - Construction d'un absorbant de  $P_{11} \times P_n$ .**

Soit  $n = 10q + r$ , avec  $r$  et  $q$  deux entiers positifs.

**Cas 1 :** absorbant d'une composante  $C_2(11, n)$ .

Si  $r = 11, 13, 14, 17$  ou  $18$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $\text{ROT}(R_4)$ ,  $Q_i$  est isomorphe à  $B$



pour  $i = 2, \dots, q+1$  et  $Q_{q+2}$  est isomorphe à  $R_4, R_6, R_7, R_{10}$  ou  $R_{11}$  respectivement.

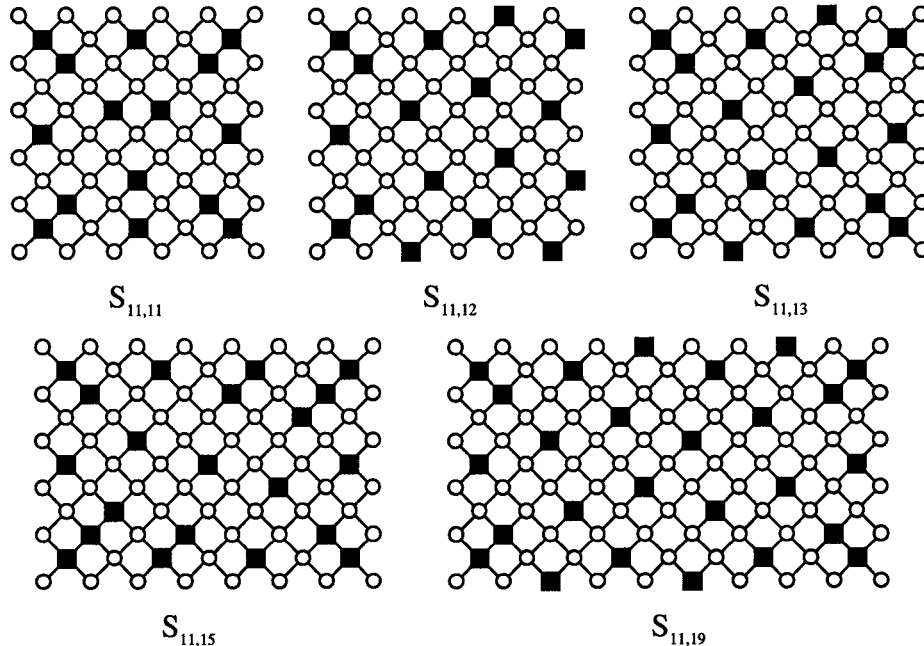
Si  $r = 12, 15, 16, 19$  ou  $20$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $ROT(R_6)$ ,  $Q_i$  est isomorphe à  $B$  pour  $i = 2, \dots, q+1$  et  $Q_{q+2}$  est isomorphe à  $R_3, R_6, R_7, R_{10}$  ou  $R_{11}$  respectivement.

**Cas 2 :** absorbants d'une composante  $C_1(11, n)$  ouverte.

Si  $r = 13, 17$  ou  $21$  alors  $Q_1$  est isomorphe à  $ROT(R_7)$ ,  $Q_i$  est isomorphe à  $B$  pour  $i = 2, \dots, q+1$  et on complète par  $Q_{q+2}$  qui est isomorphe à  $R_3, R_7$  ou  $R_{11}$  respectivement.

Si  $r = 9$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $ROT(R_3)$ ,  $Q_i$  est isomorphe à  $B$  pour  $i = 2, \dots, q+1$  et  $Q_{q+2}$  est isomorphe à  $R_3$ .

Si  $r = 25$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $ROT(R_{11})$ ,  $Q_i$  est isomorphe à  $B$  pour  $i = 2, \dots, q+1$  et  $Q_{q+2}$  est isomorphe à  $R_{11}$ .



**Figure 3.6 - Cas particuliers pour la composante  $C_1(11, n)$ .**

Nous terminons la description de nos ensembles absorbants (minimum d'après notre

algorithmique) de  $C(11, n)$  en donnant cinq absorbants particuliers pour  $n = 11, 12, 13, 15$  et  $19$  (voir figure 3.6 ci-dessus). ■

### **Théorème 3.4.4 ([10])**

Pour tout  $n \geq 2$ , on a

$$\left. \begin{array}{l} 3n \\ 3n + 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \text{sinon.} \end{array} \leq \gamma(P_{13} \times P_n) \leq \begin{cases} 3n + 5 & \text{si } n \equiv 5 \text{ ou } 9 \pmod{10}, \\ 3n + 4 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### **Preuve :**

Dans ce dernier cas, on applique le lemme 3.4.1 à  $C_1(13, n)$  et  $C_2(13, n)$ , en prenant dans les deux cas  $k_1 = 3$  et  $k_2 = 8$ . Ceci donne deux inégalités dont la somme est  $\gamma(P_{13} \times P_n) \geq \gamma(P_3 \times P_n) + \gamma(P_8 \times P_n)$ . Et d'après le théorème 2.4.3 et le théorème 2.4.7, on obtient  $\gamma(P_n \times P_{13}) \geq \begin{cases} n + 2n & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ n + 2n + 2 & \text{sinon.} \end{cases}$

La borne supérieure est donnée par la somme des cardinalités des ensembles absorbants  $Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_t$  de  $C_1(13, n)$  et de  $C_2(13, n)$ , en prenant chaque bloc  $Q_i$  isomorphe à  $B$ , à  $R_j$  ou à  $\text{ROT}(R_j)$ , où  $R_j$  est l'un des blocs illustrés à la figure 3.7.

Soit  $n = 10q + r$ , avec  $r$  et  $q$  deux entiers positifs.

**Cas 1 :** absorbants d'une composante  $C_1(13, n)$ .

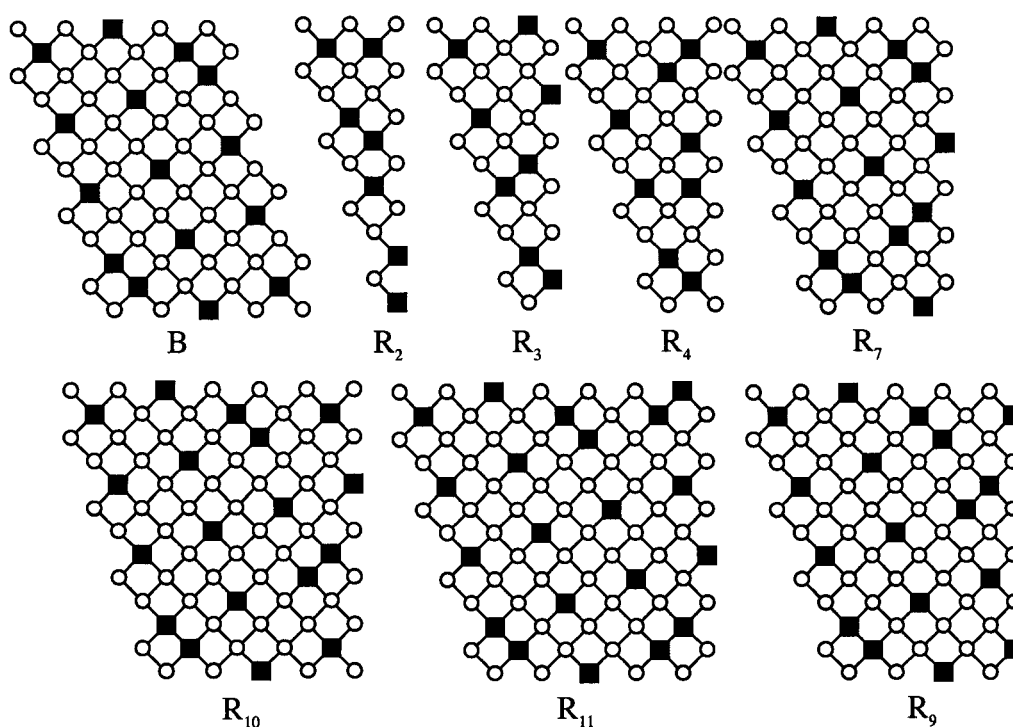
Si  $r = 9, 10, 11, 14, 16, 17$  ou  $18$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $\text{ROT}(R_4)$ ,  $Q_i$  est isomorphe à  $B$  pour  $i = 2, \dots, q+1$  et  $Q_{q+2}$  est isomorphe à  $R_2, R_3, R_4, R_7, R_9, R_{10}$  ou  $R_{11}$  respectivement.

Si  $r = 15, 22$  ou  $23$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $\text{ROT}(R_{10})$ ,  $Q_i$  est isomorphe à  $B$  pour  $i = 2, \dots, q+1$  et  $Q_{q+2}$  est isomorphe à  $R_2, R_9$  ou  $R_{10}$  respectivement.

**Cas 2 :** absorbants d'une composante  $C_2(13, n)$  fermée.

Si  $r = 13, 17, 19$  ou  $21$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $ROT(R_7)$ ,  $Q_i$  est isomorphe à  $B$  pour  $i = 2, \dots, q+1$  et  $Q_{q+2}$  est isomorphe à  $R_3, R_7, R_9$  ou  $R_{11}$  respectivement.

Si  $r = 15$ , alors  $Q_1$  est isomorphe à  $ROT(R_9)$ ,  $Q_i$  est isomorphe à  $B$  pour  $i = 2, \dots, q+1$  et  $Q_{q+2}$  est isomorphe à  $R_3$ .



**Figure 3.7 - Construction d'un absorbant de  $P_{13} \times P_n$ .**

Nous terminons la description de nos ensembles absorbants en donnant deux absorbants (minimums d'après notre algorithme) de  $C_1(13, n)$  pour  $n = 12$  et  $13$  (voir figure 3.8 ci-dessous).

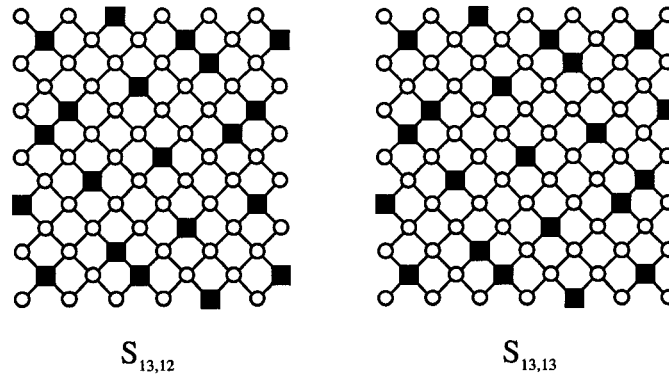


Figure 3.8 - Cas particuliers pour la composante  $C_1(13, n)$ .

Finalement nous pouvons vérifier que chaque ensemble absorbant est de cardinalité inférieure ou égale à  $\begin{cases} 3n + 5 & \text{si } n \equiv 5 \text{ ou } 9 \pmod{10}, \\ 3n + 4 & \text{sinon.} \end{cases}$  ■

### 3.5. Conclusion

Dans le chapitre 4, nous allons démontrer la formule  $(F_G)$  dans le cas général. Les quelques cas où  $\gamma(P_k \times P_n)$  n'est pas connu sont les cas tels que  $k = 10, 11$  et  $13$ . La technique utilisée pour établir  $\gamma(P_k \times P_n)$  quand  $k \leq 9$  reste valable, sauf qu'on aurait beaucoup plus de cas à étudier. Néanmoins, les théorèmes 3.4.3 et 3.4.4 montrent que notre absorbant est à au plus cinq sommets de l'optimum pour tout  $n$ .

# CHAPITRE 4 : NOMBRE D'ABSORPTION DE LA GRILLE CROISÉE COMPLÈTE

## 4.1. Introduction

Le nombre d'absorption du produit carré de deux chaînes  $P_k \square P_n$  (appelée la grille complète) a été beaucoup étudié, mais seulement quelques cas ont été établis quand  $k$  est fixé, c'est-à-dire les cas où  $k = 1$  à  $6$  et pour tout  $n$  (voir [7], [8] et [46]) et  $k = 7, \dots, 16$  (voir [31]). Dans [50] le nombre d'absorption du produit carré de deux cycles  $C_k \square C_n$  a été résolu pour  $k = 1$  à  $5$  et pour tout  $n$ . Ce travail a été motivé par le fait que le problème de décision de l'existence d'un ensemble absorbant de taille  $k$  dans un sous-graphe arbitraire de la grille complète est NP-complet. Par contre, le problème qui consiste à déterminer  $\gamma(P_k \square P_n)$  reste ouvert.

D'un autre côté, les chercheurs ne se sont pas beaucoup intéressés au produit croisé de deux graphes, à part le résultat paru dans [38] pour  $\overline{P}_k \times P_n$  ainsi qu'un résultat infirmant une conjecture similaire à celle de Vizing pour le produit croisé (voir [51]).

Dans le chapitre 2, on donne le nombre d'absorption de  $P_k \times P_n$  pour  $k \leq 9$ , qui est un sous-graphe de la grille complète. Dans le chapitre 3, nous donnons de "bonnes" bornes pour  $\gamma(P_{10} \times P_n)$ ,  $\gamma(P_{11} \times P_n)$  et  $\gamma(P_{13} \times P_n)$ , ainsi qu'une formule unique ( $F_G$ ) exprimant  $\gamma(P_k \times P_n)$  pour  $k = 12$  ou  $14 \leq k \leq 33$  et  $k \leq n \leq 40$ .

Dans ce chapitre, nous allons montrer que cette dernière est valable pour toutes les valeurs de  $k$  et  $n$ .

## 4.2. Ensembles quasi-absorbants

Dans la suite, on considère des quasi-absorbants de la grille  $C(k,n)$  en prenant comme ensemble extérieur l'ensemble  $Y_1 \cup Y_k \cup X_1 \cup X_n$ , dit **bord** de  $C(k,n)$ . On définit aussi ‘l'intérieur’ de  $C(k,n)$ , noté  $\text{Int}(C(k,n))$ , l'ensemble des sommets  $x_{i,j}$  de  $C(k,n)$  tels que  $2 \leq i \leq k-1$  et  $2 \leq j \leq n-1$ . C'est-à-dire,  $(Y_2 \cup \dots \cup Y_{k-1}) \cap (X_2 \cup \dots \cup X_{n-1})$ . Ceci constitue exactement le complémentaire du bord par rapport à l'ensemble des sommets. On appelle **sous-grille**  $C(p,q)$  de  $C(k,n)$  la grille induite par l'intersection des sommets de  $p$  lignes consécutives et de  $q$  colonnes consécutives de  $C(k,n)$ .

### Propriété 4.2.1

Soit  $C(k+2,n+2)$  une composante connexe de  $P_{k+2} \times P_{n+2}$ .  $C(k+2,n+2)$  est une composante connexe ouverte (resp. fermée ou mixte) si et seulement si la sous-grille induite par  $\text{Int}(C(k+2,n+2))$  est isomorphe à une composante connexe  $C(k,n)$  ouverte (resp. fermée ou mixte).

### Preuve :

Puisque la parité des deux paramètres reste inchangée dans  $C(k+2,n+2)$  et  $C(k,n)$ , il suffit de montrer que ces deux composantes sont de même type (1 ou 2). Considérons l'application bijective  $f: \text{Int}(C(k+2,n+2)) \rightarrow V(C(k,n))$  qui associe au sommet  $v_{ij}$  le sommet  $v_{i+1,j+1}$ . Cette application définit un isomorphisme de la sous grille induite par l'intérieur de  $C(k+2,n+2)$  dans la grille  $C(k,n)$ . En effet, d'une part, d'après la définition de la grille croisée, nous avons, pour tous sommets  $x_{i,j}$  et  $x_{i',j'}$  adjacents dans la sous-grille induite, l'égalité  $|i-i'| = |j-j'| = 1$  qu'on peut écrire  $|(i-1)-(i'-1)| = |(j-1)-(j'-1)| = 1$  et donc

leurs sommets images  $f(x_{i,j})$  et  $f(x_{r,j'})$  sont aussi adjacents dans la grille  $C(k,n)$ . D'autre part, si  $i$  et  $j$  sont de même parité ou bien sont de parité différente, alors il en est de même pour  $i-1$  et  $j-1$ . ■

D'après la définition de l'intérieur d'une composante  $C(k,n)$  et la propriété 4.2.1, nous avons le lemme suivant.

#### **Lemme 4.2.2**

Un ensemble absorbant du sous-graphe induit par l'intérieur de  $C(k,n)$  est un ensemble quasi-absorbant de  $C(k,n)$ . ■

On peut donner aussi le lemme suivant, pour  $k$  et  $n$  deux entiers tels que  $k \geq 4$  et  $n \geq 4$ .

#### **Lemme 4.2.3**

Si  $D$  est un ensemble quasi-absorbant de  $C(k,n)$ , alors il existe un ensemble absorbant  $D'$  de  $C(k-2,n-2)$  de même type, avec  $|D'| \leq |D|$ .

**Preuve :**

En effet, soit  $\Pi_m : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{2, \dots, m-1\}$ ,  $m \geq 4$ , une application définie comme

$$\text{suit : } \Pi_m(i) = \begin{cases} 3 & \text{si } i = 1, \\ m - 2 & \text{si } i = m, \\ i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $D' = \{v_{\Pi_k(i)}, v_{\Pi_n(j)} \mid x_{i,j} \in D\}$ . Alors il est clair que  $D'$  absorbe  $\text{Int}(C(k,n))$  et  $|D'| \leq |D|$ . ■

Si on note  $\tilde{\gamma}(C(k,n))$  la cardinalité d'un plus petit quasi-absorbant de  $C(k,n)$ , alors, d'après les lemmes 4.2.2 et 4.2.3, nous avons.

### **Théorème 4.2.4 ([10])**

Pour toutes composantes connexes  $C(k+2,n+2)$  et  $C(k,n)$  de même type, avec  $k \geq 2$  et  $n \geq 2$ , nous avons :  $\gamma(C(k,n)) = \tilde{\gamma}(C(k+2,n+2))$ . ■

Soit  $C(p,q)$  une sous-grille de  $C(k,n)$  et soit  $D$  un ensemble quasi-absorbant de  $C(k,n)$ . On observe que le sous-ensemble  $V(C(p,q)) \cap D$  est un ensemble quasi-absorbant de  $C(p,q)$ . D'où, l'obtention de la propriété suivante.

### **Propriété 4.2.5 (propriété d'additivité de $\tilde{\gamma}$ )**

Pour toute partition  $\{C_1, C_2, \dots, C_t\}$  de  $C(k,n)$  en  $t$  sous-grilles deux à deux disjointes, on a  $\tilde{\gamma}(C(k,n)) \geq \sum_{i=1}^t \tilde{\gamma}(C_i)$ . ■

Cette propriété montre que l'on peut obtenir une borne inférieure sur le nombre  $\tilde{\gamma}(C(k,n))$  et donc sur  $\gamma(C(k-2,n-2))$ . C'est ce qui justifie l'étude des quasi-absorbants.

## **4.3. Motif du cavalier.**

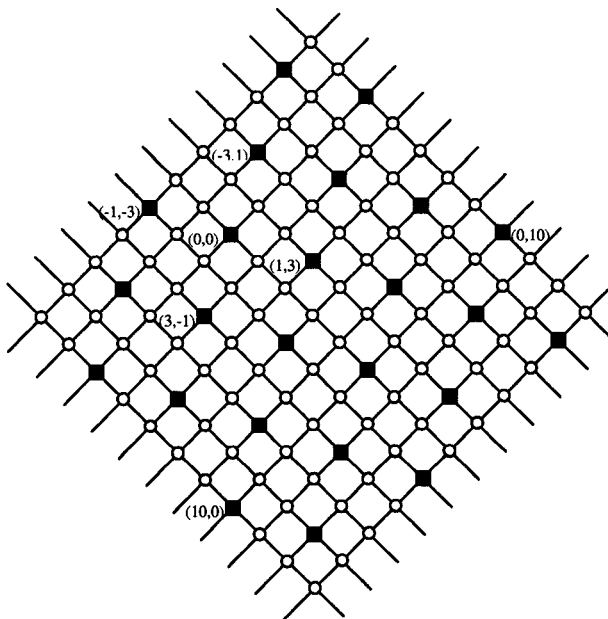
Soit  $x_{i,j}$  un sommet de  $C(k,n)$ . Le motif du cavalier centré en  $x_{i,j}$ , noté  $KP(x_{i,j})$  (voir figure 4.1), est un sous-ensemble de sommets défini comme suit.

Un sommet  $x_{p,q}$  de  $C(k,n)$  appartient à  $KP(x_{i,j})$  si et seulement s'il existe deux entiers  $a$  et  $b$  tels que  $(p,q) = (i,j) + a(1,3) + b(-3,1) \pmod K$ .

**Remarque 1:** On déduit de la définition ci-dessus, que les motifs du cavalier  $KP(x_{i,j})$  et  $KP(x_{p,q})$  sont identiques pour tous  $(i,j)$  et  $(p,q)$  vérifiant cette dernière. On peut donc désigner leurs centre parmi toutes les paires de coordonnées des sommets appartenant à ces motifs (voir ci dessous le motif  $KP(x_{0,0})$ ).



Dans cette définition, on aurait pu parler de l'autre motif du cavalier de  $C(k,n)$ , noté  $KP'(x_{ij})$ , en remplaçant dans l'équation (K) les pas  $(1,3)$  et  $(-3,1)$  par  $(3,1)$  et  $(1,-3)$ . Mais on peut éviter cela en remarquant que par symétrie, le motif engendré correspond exactement au premier.



**Figure 4.1 : Motif du cavalier  $KP(x_{0,0})$ .**

En effet, considérons  $\mathfrak{S} : V(P_k \times P_n) \rightarrow V(P_k \times P_n)$  l'isomorphisme de graphes qui associe au sommet  $x_{ij}$  le sommet  $x_{ji}$  (image symétrique par rapport à la première bissectrice). Il est alors facile de constater que l'image par  $\mathfrak{S}$  d'une composante  $C_t(k,n)$  (de type  $t = 1$  ou  $2$ ) n'est autre que la composante  $C_t(n,k)$ . Et donc, pour tout couple  $(i,j)$ , le motif du cavalier  $KP'(x_{ij})$  d'une  $C_t(k,n)$  correspond exactement au motif  $KP(x_{ji})$  de  $C_t(n,k)$ .

Notons  $KPmin(C_t(k,n))$  la cardinalité d'un plus petit motif du cavalier parmi tous les  $KP(x_{ij})$  de  $C_t(k,n)$  et de  $C_t(n,k)$ .

On peut déduire de la définition de  $KP(x_{ij})$  la propriété suivante.

### Propriété 4.3.1 (propriété du cavalier)

Soient  $k$  et  $n$  deux entiers supérieurs ou égaux à 10 et  $x_{i,j}$  un sommet de  $C(k+2, n+2)$ . Alors on a les deux assertions suivantes :

(i) Pour tout  $p$  et  $t$  tels que  $1 \leq p \leq k$  et  $1 \leq t \leq n-9$ ,  $|\text{KP}(x_{i,j}) \cap Y_p \cap (X_t \cup \dots \cup X_{t+9})|$  est égal à 1.

(ii) Pour tout  $q$  et  $s$  tels que  $1 \leq q \leq n$  et  $1 \leq s \leq k-9$ ,  $|\text{KP}(x_{i,j}) \cap X_q \cap (Y_s \cup \dots \cup Y_{s+9})|$  est égal à 1. ■

Cette propriété nous permet d'évaluer facilement la cardinalité d'un motif du cavalier. En effet, notons  $\bar{r}$  le reste de la division euclidienne d'un entier  $r$  par 10. Nous avons alors la propriété suivante.

### Propriété 4.3.2

Soit  $\text{KP}(x_{i,j})$  un motif du cavalier de  $C(k, n)$ . Alors on a

$$(i) \text{ Pour tout } p \text{ tel que } 1 \leq p \leq k, |\text{KP}(x_{i,j}) \cap Y_p| = \left\lceil \frac{n - (j + 3 \cdot (p - i) - 1)}{10} \right\rceil.$$

$$(ii) \text{ Pour tout } q \text{ tel que } 1 \leq q \leq n, |\text{KP}(x_{i,j}) \cap X_q| = \left\lceil \frac{k - (i - 3 \cdot (q - j) - 1)}{10} \right\rceil.$$

### Preuve :

Par définition du motif du cavalier, on déduit des égalités

$$(p, j + 3 \cdot (p - i)) = (i, j) + (p - i) \cdot (1, 3) \text{ et}$$

$$(i - 3 \cdot (q - j), q) = (i, j) + (q - j) \cdot (-3, 1),$$

que les sommets  $x_{p, j+3(p-i)}$  et  $x_{i-3(q-j), q}$ , respectivement de la  $p^{\text{ième}}$  ligne et de la  $q^{\text{ième}}$  colonne de

$C(k,n)$ , appartiennent à  $KP(x_{ij})$ . Donc, il suffit de voir, d'après la propriété 4.3.1, que  $x_{p, \overline{j+3(p-i)}}$  et  $x_{\overline{i+3(q-j)}, q}$  en sont les premiers à partir de la gauche dans la  $p^{\text{ième}}$  ligne et à partir du haut dans la  $q^{\text{ième}}$  colonne respectivement. ■

Soit maintenant  $C(\infty, \infty)$  la grille infinie et soit  $KP^\infty(x_{ij})$  le motif du cavalier de cette grille centré en  $x_{ij}$ . Alors on a le lemme suivant :

### Lemme 4.3.3

Soit  $x_{ij}$  dans  $\text{Int}(C(k,n))$ . Alors toute restriction de  $KP^\infty(x_{ij})$  à la grille  $C(k,n)$  (c'est-à-dire  $KP^\infty(x_{ij}) \cap C(k,n)$ ) qu'on note  $KP(x_{ij})$  est un quasi-absorbant de  $C(k,n)$ .

### Preuve :

Supposons dans le cas contraire que  $KP(x_{ij})$  n'est pas un quasi-absorbant de  $C(k,n)$  (nous avons nécessairement  $k \geq 3$  et  $n \geq 3$  car sinon tout sous-ensemble de  $V(C(k,n))$  est un quasi-absorbant de  $C(k,n)$ ). Alors il existe au moins un sommet appartenant à  $\text{Int}(C(k,n))$  qui n'est pas absorbé par  $KP(x_{ij})$ . On choisit un tel sommet  $x_{u,v}$  qui soit le plus proche de  $x_{ij}$  (en termes de nombre de sommets de la chaîne joignant  $x_{u,v}$  à  $x_{ij}$ ). Un tel sommet a zéro voisin dans  $\text{Int}(C(k,n))$  (dans le cas où  $k = 3$  ou  $n = 3$ ), un voisin dans  $\text{Int}(C(k,n))$  (dans le cas où  $x_{u,v}$  est adjacent à un sommet pendant), deux voisins dans  $\text{Int}(C(k,n))$  (dans le cas où  $x_{u,v} \in (X_2 \cup X_{n-1} \cup Y_2 \cup Y_{k-1})$  avec  $x_{u,v}$  non adjacent à un sommet pendant) ou quatre voisins dans  $\text{Int}(C(k,n))$  (dans le cas où  $x_{u,v} \notin (X_2 \cup X_{n-1} \cup Y_2 \cup Y_{k-1})$ ).

**Cas 1 :**  $|N(x_{u,v}) \cap \text{Int}(C(k,n))| = 0$ . Par symétrie, on peut supposer que  $k = 3$  et que  $v > j$ . Si  $n = 5$ , alors  $u = i = 2$  et  $v = j+2$ . D'après la définition du motif du cavalier, le sommet  $x_{i+1, j+3} = x_{u+1, v+1}$  ( $a = 1$  et  $b = 0$ ) appartient à  $KP(x_{ij})$ , mais comme ce dernier est adjacent à  $x_{u,v}$  on obtient une contradiction. Si  $n > 5$  et qu'on ne soit pas dans le cas de figure précédent, c'est-à-dire  $v \neq j+2$ . De la même manière que précédemment, on peut supposer que  $v > j$ . Comme  $x_{u,v}$  est le sommet non absorbé le plus proche de  $x_{ij}$ , alors

$x_{u,v-2}$  est absorbé par  $KP(x_{i,j})$ . Ceci implique que au moins l'un des cinq sommets  $x_{u-1,v-3}$ ,  $x_{u-1,v-2}$ ,  $x_{u-1,v-1}$  ou  $x_{u+1,v-1} \in KP(x_{i,j})$ . Si c'est l'un des trois premiers sommets, on obtient une contradiction en appliquant la définition du cavalier. Sinon, la contradiction est obtenue de suite, car les deux derniers sommets sont adjacents à  $x_{u,v}$ .

**Cas 2 :**  $|N(x_{u,v}) \cap \text{Int}(C(k,n))| > 0$ . Dans ce cas aussi on peut supposer que  $v > j$ . On peut affirmer à présent qu'au moins un sommet dans  $(N(x_{u,v}) \cap \text{Int}(C(k,n)))$  (par exemple un voisin plus proche de  $x_{i,j}$  que  $x_{u,v}$ ) est absorbé par  $KP(x_{i,j})$ . On peut supposer que  $x_{u-1,v+1}$  soit un tel sommet. Puisque le sommet  $x_{u-1,v+1}$  est absorbé, l'un des ces trois voisins  $x_{u,v+2}$ ,  $x_{u-2,v}$  ou  $x_{u-2,v+2}$  appartient forcément à  $KP(x_{i,j})$ . D'après la définition du motif du cavalier, on déduit des égalités:

$$(u+1,v-1) = (u-2,v) - (-3,1),$$

$$(u+1,v+1) = (u-2,v+2) - (-3,1),$$

$$(u-1,v-1) = (u,v+2) - (1,3),$$

que l'un des sommets  $x_{u+1,v-1}$ ,  $x_{u+1,v+1}$  ou  $x_{u-1,v-1}$  qui sont des voisins de  $x_{u,v}$  appartient à  $KP(x_{i,j})$  et donc à  $KP(x_{i,j})$  puisque  $x_{u,v}$  est un sommet appartenant à  $\text{Int}(C(k,n))$ . Nous obtenons donc une contradiction. ■

Soit  $x_{i,j}$  un sommet de l'intérieur de  $C(k,n)$ . Puisque  $x_{i,j}$  doit être absorbé par un quasi-absorbant de  $C(k,n)$ , on en déduit du lemme précédent qu'un motif du cavalier de  $C(k,n)$  est soit de type  $KP(x_{i,j})$  (c'est-à-dire centré en  $x_{i,j}$ ) soit de type  $KP(x_{i\pm 1,j\pm 1})$  (c'est-à-dire centré en les coordonnées de l'un de ses quatre voisins dans  $C(k,n)$ ), partitionnant ainsi totalement l'ensemble des sommets de  $C(k,n)$ . Pour décrire ces cinq motifs, nous pouvons prendre à la place de  $x_{i,j}$  le sommet  $x_{0,0}$  ou  $x_{0,1}$  selon que  $C(k,n)$  soit de type 1 ou 2 respectivement.

Ainsi, si on pose  $I_1 = \{(0,0), (\pm 1, \pm 1)\}$  et  $I_2 = \{(0,1), (\pm 1, 1 \pm 1)\}$ , on a

$KPmin(C_t(k,n)) = KPmin(C_t(n,k)) = \text{Min } |KP(x_{c,d})|$ , sur tous les  $KP(x_{c,d})$  de  $C_t(k,n)$  ou de  $C_t(n,k)$  ;  $(c,d) \in I_t$ .

D'après la propriété 4.3.2, la cardinalité d'un motif  $KP(x_{c,d})$  de  $C_t(k,n)$  (resp.  $C_t(n,k)$ ) est donné par la somme  $\sum_{p=1}^k \left\lceil \frac{n - (3p + s)}{10} \right\rceil$  (resp.  $\sum_{p=1}^n \left\lceil \frac{k - (3p + s)}{10} \right\rceil$ ), où  $s = -3 \cdot c + d - 1$ .

D'où le lemme suivant

#### Lemme 4.3.4

Soit  $C_t(k,n)$  une composante de type  $t = 1$  (resp. 2). Alors on a

$$KPMin(C_t(k,n)) = \text{Min}_{s \in I} \left\{ \sum_{p=1}^k \left\lceil \frac{n - (3p + s)}{10} \right\rceil, \sum_{p=1}^n \left\lceil \frac{k - (3p + s)}{10} \right\rceil \right\}, \text{ où l'ensemble } I = \{1, 3, 5,$$

7, 9\} (resp. \{0, 2, 4, 6, 8\}). ■

**Exemple :** On a  $KPmin(C_1(4,8)) = \text{Min}\{3, 4; 4, 3; 3, 3; 3, 2; 3, 4\} = 2$ . Donc  $KP(x_{1,1})$  d'une  $C_1(8,4)$  est l'unique motif de cardinalité minimum. Cela correspond à choisir pour la composante  $C_1(4,8)$  le motif  $KP'(x_{1,-1})$ .

**Remarque 2:** Puisque les deux composantes  $C_1(k,n)$  et  $C_2(k,n)$  sont isomorphes si  $k$  ou  $n$  est pair, on en déduit que dans ce cas, les motifs de plus petite cardinalité de ces composantes ont la même cardinalité. Plus précisément, en considérant l'isomorphisme de graphes qui associe à un sommet  $x_{ij}$  de  $C_1(k,n)$  le sommet  $x_{k+1-ij}$  (resp.  $x_{i,n+1-j}$ ) de  $C_2(k,n)$ , il est facile de voir que, pour tout couple  $(i,j)$ , le motif  $KP(x_{ij})$  de  $C_1(k,n)$  correspond exactement au motif  $KP'(x_{k+1-ij})$  (resp.  $KP'(x_{i,n+1-j})$ ) de  $C_2(k,n)$  et inversement.

On réduit la détermination d'un ensemble motif du cavalier  $KP(x_{ij})$  de cardinalité  $KPmin(C(k,n))$  à un nombre fini de cas. Soit  $k = 10 \cdot q_k + r_k$  et  $n = 10 \cdot q_n + r_n$ , où  $r_k$  (resp.  $r_n$ ) est le reste de la division euclidienne de  $k$  (resp.  $n$ ) par 10. Considérons la partition suivante de  $C(k,n)$  :

$$B_1 = (X_1 \cup \dots \cup X_{r_n}) \cap (Y_1 \cup \dots \cup Y_{r_k}),$$

$$B_2 = (X_{r_n+1} \cup \dots \cup X_n) \cap (Y_1 \cup \dots \cup Y_{r_k}) \text{ et}$$

$$B_3 = (X_1 \cup \dots \cup X_n) \cap (Y_{r_k+1} \cup \dots \cup Y_k).$$

Observons que le sous-graphe induit par  $B_1$  (resp.  $B_2$  et  $B_3$ ) est isomorphe à  $C(r_k, r_n)$  de même type que  $C(k, n)$  (resp.  $C(r_k, 10 \cdot q_n)$  et  $C(10 \cdot q_k, n)$ ). Il est facile de voir en appliquant la propriété 4.3.1, que tout motif du cavalier de  $C(k, n)$  contient exactement  $q_k \cdot n + q_n \cdot r_k$  sommets dans  $B_2 \cup B_3$ . Donc l'ensemble  $KP(x_{i,j}) \cap B_1$  est un motif (centré également en  $x_{i,j}$ ) du sous-graphe induit par  $B_1$  de cardinalité  $KPmin(C(r_k, r_n))$ . D'où,

$$KPmin(C(10 \cdot q_k + r_k, 10 \cdot q_n + r_n)) = 10 \cdot q_k \cdot q_n + q_k \cdot r_n + q_n \cdot r_k + KPmin(C(r_k, r_n)).$$

Dans le tableau 4.1, nous avons calculé, en fonction de  $r_k$  et  $r_n$  et du type de la composante  $C(r_k, r_n)$ , toutes les valeurs de  $KPmin(C(r_k, r_n))$ . On peut vérifier aisément que ces valeurs peuvent être exprimées par une formule unique.

**Tableau 4.1. Les valeurs de  $KPmin(C_1(r_k, r_n)) \mid KPmin(C_2(r_k, r_n))$ .**

$r_k \setminus r_n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1 0
2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1 0	1	1	1	2	2	2
4	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3
5	0	0	0	1	1	1 2	2	3	3	4

6	0	0	0	1	2	2	3	4	4	5
7	0	0	1	2	2	3	4	5 4	5	6
8	0	0	1	2	2	3	4	5	6	7
9	0	1 0	1	2	3	4	5	6	7	8

$$KPmin(C_t(r_k, r_n)) = \left\lfloor \frac{r_k \cdot r_n}{10} \right\rfloor + Cst(C_t(r_k, r_n)) ; \text{Où } Cst(C_t(r_k, r_n)) \text{ est définie comme suit}$$

$$Cst(C_t(r_k, r_n)) = \begin{cases} -1 \text{ si } (r_k, r_n) \text{ ou } (r_n, r_k) \in \{(2,5), (2,6), (4,5), (4,8), (5,6), (5,8)\}, \\ -1 \text{ si } t = 1 \text{ et } (r_k, r_n) = (5,5), \\ +1 \text{ si } t = 1 \text{ et } (r_k, r_n) \text{ ou } (r_n, r_k) \in \{(1,9), (3,3), (7,7)\}, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$\text{D'où, } KPmin(C_t(k,n)) = 10 \cdot q_k \cdot q_n + q_k \cdot r_n + q_n \cdot r_k + \left\lfloor \frac{r_k \cdot r_n}{10} \right\rfloor + Cst(C(r_k, r_n))$$

$$= \left\lfloor \frac{k \cdot n}{10} \right\rfloor + Cst(C(r_k, r_n)).$$

On remarque que cette formule correspond exactement à l'expression  $\xi(k,n)$  déduite de notre algorithme au chapitre précédent. En effet, nous avons l'égalité :

$$KPmin(C_1(k+2, n+2)) + KPmin(C_2(k+2, n+2)) = \xi(k,n).$$

#### 4.4. Preuve du cas général.

##### Théorème 4.4.1 ([10])

Pour  $k = 12, n \geq 12$  ou  $k \geq 14$  et  $n \geq 14$ , exception faite pour  $(k,n)$  dans  $\{(15,15), (17,17), (17,19), (19,17)\}$ , la relation suivante est vérifiée :

$$\gamma(C(k,n)) = \text{KPmin}(C(k+2,n+2)).$$

##### Preuve :

D'après les deux premières sections, on obtient que :

$$\gamma(C(k,n)) = \tilde{\gamma}(C(k+2,n+2)) \leq \text{KPmin}(C(k+2,n+2)).$$

On montre comment on réduit à un nombre fini de cas la preuve que  $\text{KPmin}(C(k+2,n+2))$  est une borne inférieure. Soit  $k = 20 \cdot q_k + r_k$  et  $n = 20 \cdot q_n + r_n$  avec  $r_k = 12$  ou  $14 \leq r_k \leq 33$  et  $r_n = 12$  ou  $14 \leq r_n \leq 33$  et considérons la partition suivante de  $C(k+2,n+2)$  (voir figure 4.2).

$Q_{1,1}$  est le sous-graphe de  $C(k+2,n+2)$  induit par les sommets de :

$$(X_1 \cup \dots \cup X_{r_n+2}) \cap (Y_1 \cup \dots \cup Y_{r_k+2}).$$

pour  $s = 2, \dots, q_n+1$ ,  $Q_{1,s}$  est le sous-graphe de  $C(k+2,n+2)$  induit par les sommets de :

$$(Y_1 \cup \dots \cup Y_{r_k+2}) \cap (X_{r_n+3+20(s-2)} \cup \dots \cup X_{r_n+2+20(s-1)}).$$

pour  $h = 2, \dots, q_k+1$ ,  $Q_{h,1}$  est le sous-graphe de  $C(k+2,n+2)$  induit par les sommets de :

$$(X_1 \cup \dots \cup X_{r_n+2}) \cap (Y_{r_k+3+20(h-2)} \cup \dots \cup Y_{r_k+2+20(h-1)}).$$

pour  $h = 2, \dots, q_k+1$  et  $s = 2, \dots, q_n+1$ ,  $Q_{h,s}$  est le sous-graphe de  $C(k+2,n+2)$  induit par les sommets de :



$$(Y_{r_k+3+20(h-2)} \cup \dots \cup Y_{r_k+2+20(h-1)}) \cap (X_{r_n+3+20(s-2)} \cup \dots \cup X_{r_n+2+20(s-1)}).$$

Observons que  $Q_{1,1}$  est isomorphe à  $C(r_k+2, r_n+2)$ , que pour tout  $s$  et pour tout  $h$ ,  $Q_{1,s}$  et  $Q_{h,1}$  sont isomorphes à  $C(r_k+2, 20)$  et  $C(20, r_n+2)$  respectivement et que  $Q_{h,s}$  est isomorphe à  $C(20, 20)$ . De plus, remarquons que  $Q_{1,1}$  est de même type que  $C(k+2, n+2)$ .

Si  $(r_k, r_n) \in \{(15, 15), (17, 17), (17, 19), (19, 17)\}$ , alors (voir figure 4.3) soit  $Q_{1,1}$  le sous-graphe de  $C(k+2, n+2)$  induit par  $(X_1 \cup \dots \cup X_{r_n+2+20}) \cap (Y_1 \cup \dots \cup Y_{r_k+2})$  et pour  $s = 2, \dots, q_n$  soit  $Q_{1,s}$  le sous-graphe de  $C(k+2, n+2)$  induit par  $(Y_1 \cup \dots \cup Y_{r_k+2}) \cap (X_{r_n+3+20+20(s-2)} \cup \dots \cup X_{r_n+2+20+20(s-1)})$ .

Dans ce cas  $Q_{1,1}$  est isomorphe à  $C(r_k+2, r_n+2+20)$  et  $Q_{1,1}$  est ouverte (resp. fermée, mixte) si et seulement si  $C(k+2, n+2)$  est ouverte (resp. fermée, mixte).

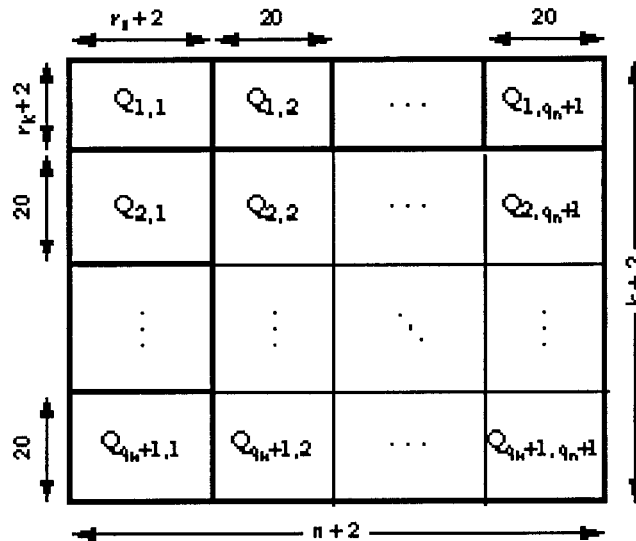
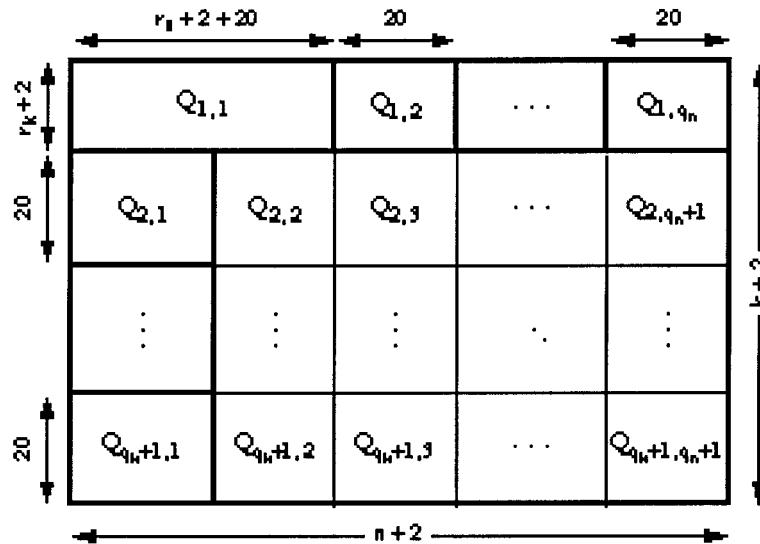


Figure 4.2. Partition de la grille croisée (preuve du cas général).



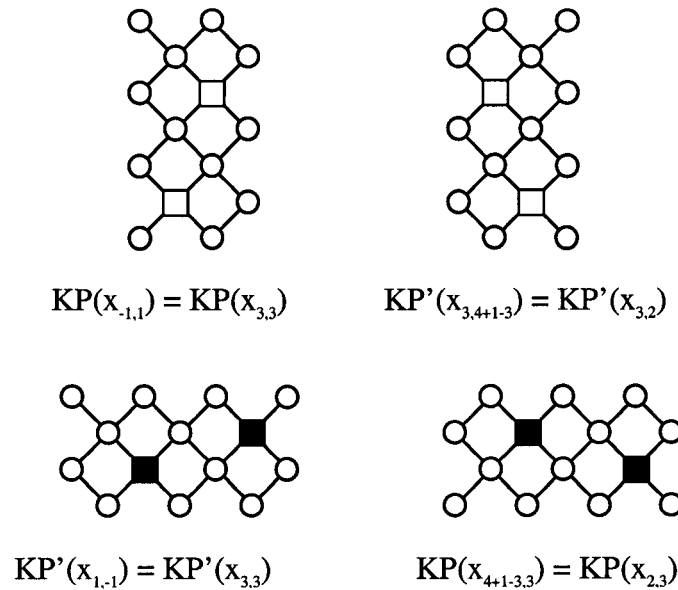
**Figure 4.3 - Preuve du le cas général.**

Donc, pour tout couple  $(i,j)$ , le sous-graphe  $Q_{i,j}$  est isomorphe à un  $C(p+2,q+2)$  pour un couple d'entiers  $(p,q)$ . Soit  $D$  un ensemble quasi-absorbant de  $C(k+2,n+2)$ . La restriction de  $D$  à  $Q_{i,j}$  est un quasi-absorbant dont la cardinalité est supérieure ou égale à  $\tilde{\gamma}(C(p+2,q+2)) = \gamma(C(p,q))$  (d'après la propriété 4.2.4). Comme on a pu calculer dans le chapitre 2 le nombre d'absorption de  $C(p,q)$  pour  $p \leq 33$  et  $q \leq 40$ , on peut vérifier aisément que  $\gamma(C(p,q)) = \text{KPmin}(C(p+2,q+2))$ . Donc, d'après les propriétés 4.2.4 et 4.2.5., on peut vérifier que :  $\gamma(C(k,n)) = \tilde{\gamma}(C(k+2,n+2)) \geq \sum_{h,s} \tilde{\gamma}(Q_{h,s}) = \text{KPmin}(C(k+2,n+2))$ , pour tout couple  $(k,n) \neq (15,15), (17,17), (17,19)$  et  $(19,17)$ . ■

#### 4.5. Description de la fonction $\text{KPmin}(C(k+2,n+2))$

Soient  $r_k$  le reste de la division Euclidienne de  $k$  par 10 et  $r_n$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par 10. Nous avons déjà vu dans la section précédente qu'il était suffisant de décrire les motifs  $\text{KP}(x_{i,j})$  de  $C(r_k,r_n)$  dont les cardinalités sont données au tableau 4.1. Pour ce faire, nous allons désigner dans chaque cas le couple  $(i,j)$  (voir

tableau 4.2).



**Figure 4.4.** Calcul de  $KPmin(C(k+2, n+2))$ .

**Remarque 3 :** En lisant le tableau 4.2, si le couple  $(i,j)$  est associé à  $C_2(r_k, r_n)$  alors que  $i$  et  $j$  sont de même parité, cela correspond en fait au motif  $KP'(x_{k+1-i,j})$  ou  $KP'(x_{i,n+1-j})$  de cette composante (voir remarque 2). Par exemple, pour  $(r_k, r_n) = (4,7)$  (resp.  $(7,4)$ ), le couple  $(1,-1)$  (resp.  $(-1,1)$ ) correspond à la fois au motif  $KP'(x_{1,-1})$  de  $C_1(4,7)$  et à  $KP(x_{4+1-1,-1})$  de  $C_2(4,7)$  (resp.  $KP(x_{-1,1})$  de  $C_1(7,4)$  et  $KP'(x_{-1,4+1-1})$  de  $C_2(7,4)$ ) (voir figure 4.4).

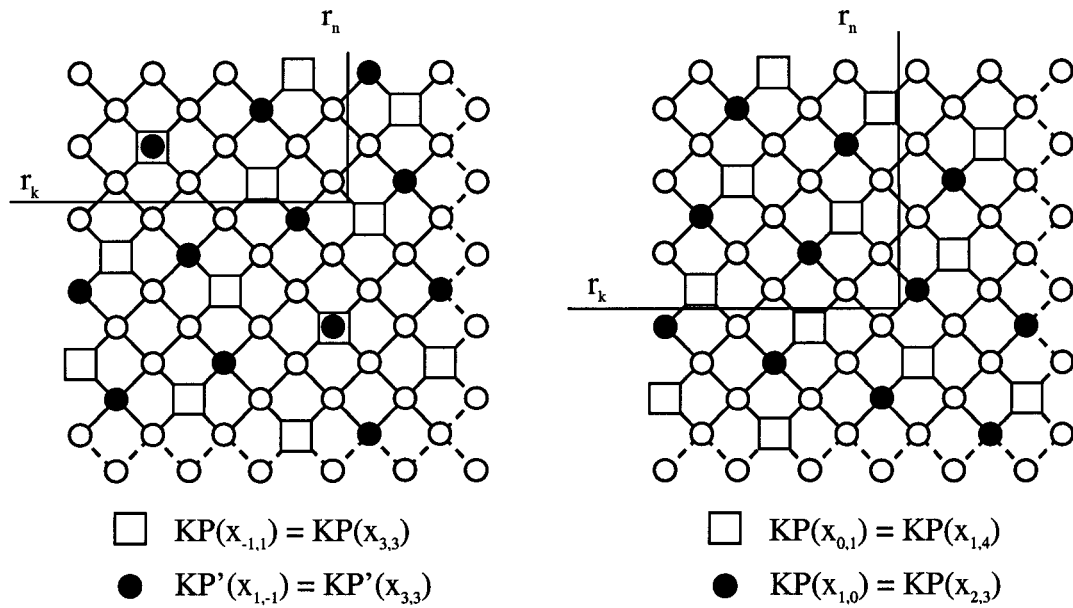
Pour une composante  $C_1(k,n)$ , le nombre  $KPmin(C_1(k,n))$  peut être évalué, pour tout  $k$  et  $n$ , à partir des cardinalités de  $KP(x_{1,-1})$  ou de  $KP'(x_{1,-1})$  de  $C_1(k,n)$  (notés  $x_{-1,1}$ ,  $x_{0,1}$  ou  $x'_{1,-1}$ ) décrits ci-dessous.

Tableau 4.2. Les motifs de taille minimum de  $\frac{C_1(r_k, r_n)}{C_2(r_k, r_n)}$ .

$r_k \setminus r_n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X'_{1,-1}}{X_{0,1}}$	$X'_{1,-1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$
2	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$
3	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$
4	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X'_{1,-1}$	$X'_{1,-1}$	$X_{-1,1}$
5	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$
6	$X_{-1,1}$	$X'_{1,-1}$	$X'_{1,-1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$
7	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$
8	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$	$X_{-1,1}$
9	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X'_{1,-1}$	$X'_{1,-1}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$	$X_{-1,1}$	$\frac{X_{-1,1}}{X_{0,1}}$

**Exemple :** pour  $k = 10 \cdot q_k + 4$  et  $n = 10 \cdot q_n + 8$ ,  $|KP'(x_{1,-1}) \cap B_{11}| = 2 = \lfloor 4 \cdot 8 / 10 \rfloor - 1$ .

D'où,  $KP'(x_{1,-1})$  de  $C_1(k,n)$  (ou bien  $KP(x_{-1,1})$  de  $C_1(n,k)$ ) est dans ce cas un motif de taille minimum (voir figure 4.4).



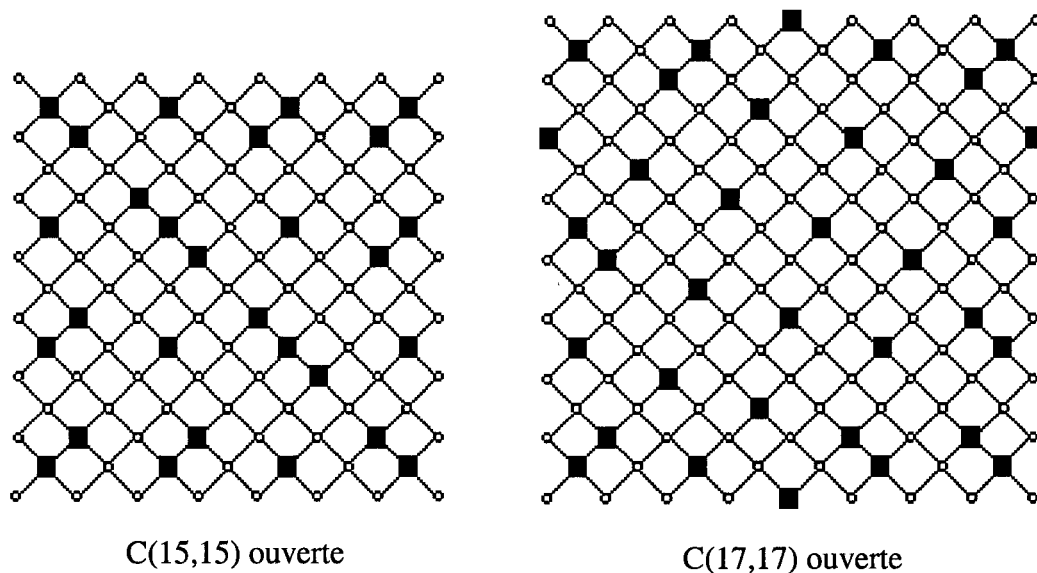
**Figure 4.5. Exemple de calcul de  $KPmin(C(k+2, n+2))$ .**

Pour une composante  $C_2(k,n)$ , le nombre  $KPmin(C_2(k,n))$  peut être évalué, pour tout  $k$  et  $n$ , à partir des cardinalités de  $KP(x_{0,1})$  ou de  $KP(x_{1,0})$  de  $C_2(k,n)$  décrits ci-contre.

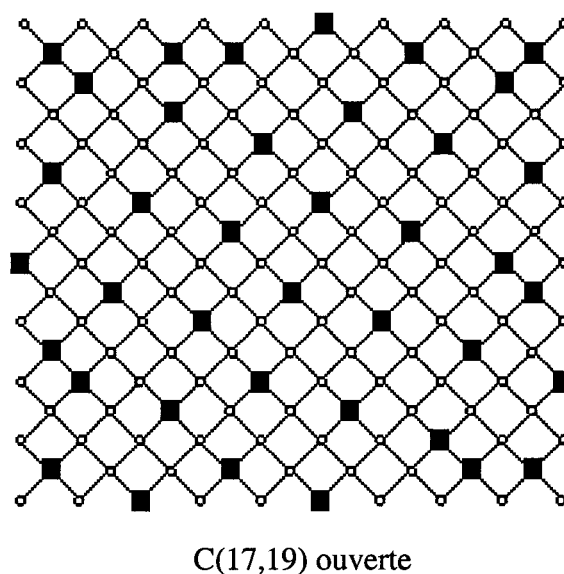
**Exemple :** pour  $k = 10 \cdot q_k + 7$  et  $n = 10 \cdot q_n + 7$ ,  $|KP(x_{1,0}) \cap B_1| = 4 = \lfloor 7 \cdot 7 / 10 \rfloor - 1$ .

D'où,  $KP(x_{1,0})$  de  $C_2(k,n)$  est dans ce cas un motif de taille minimum (voir figure 4.5).

Pour terminer l'étude de  $\gamma(C(k,n))$ , on décrit des ensembles absorbants minimums pour des  $C(k,n)$  ouvertes pour les quelques "petites valeurs spéciales" ((15,15), (17,17) et (17,19)) de  $(k,n)$ .



**Figure 4.6 Cas particuliers ne vérifiant pas la formule générale.**



**Figure 4.7. Cas particuliers ne vérifiant pas la formule générale.**

Pour ces ensembles, la cardinalité calculée par l'algorithme du chapitre 3 est égale à  $KP_{\min}(C(k,n)) - 1$  (voir figure 4.7). Dans le cas où les composantes connexes  $C(k,n)$  sont fermées, cet algorithme montre que  $\gamma(P_k \times P_n)$  est égal à  $KP_{\min}(C(k+2,n+2))$  et la

description des absorbants minimums est donnée au début de cette section. ■

En résumé, nous avons montré que pour  $k = 12$  ou  $k \geq 14$  et pour tout  $n \geq k$ ,

$$\gamma(P_k \times P_n) = \begin{cases} 56 & \text{si } k = n = 15, \\ 71 & \text{si } k = n = 17, \\ 78 & \text{si } k = 17 \text{ et } n = 19, \\ \xi(k, n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{où, } \xi(k, n) = \begin{cases} 2 \cdot \left\lfloor \frac{(k+2)(n+2)}{10} \right\rfloor - 2 & \text{si } (r_k, r_n) \text{ ou } (r_n, r_k) \in \{(0, 3), (0, 4), (2, 3), \\ & (2, 6), (3, 4), (3, 6)\} \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{(k+2)(n+2)}{10} \right\rfloor - 1 & \text{si } (r_k, r_n) = (3, 3) \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{(k+2)(n+2)}{10} \right\rfloor + 1 & \text{si } (r_k, r_n) \text{ ou } (r_n, r_k) \in \{(1, 1), (5, 5), (7, 9)\} \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{(k+2)(n+2)}{10} \right\rfloor & \text{sinon} \end{cases}$$

## 4.6. Conclusion

Pour compléter l'étude de la grille croisée, il serait intéressant d'établir les trois cas restants, en l'occurrence  $k = 10, 11$  et  $13$ .

Le plus petit motif du cavalier appliqué à la grille  $P_k \square P_n$  a une cardinalité de  $\left\lfloor \frac{(k+2)(n+2)}{5} \right\rfloor - 4$ . D'autre part la grille carrée est similaire à une composante  $C(k, n)$  de la grille croisée. Il est donc raisonnable de proposer la conjecture suivante :

**Conjecture**

Pour  $k$  et  $n$  suffisamment “grands”, on a  $\gamma(P_k \square P_n) = \left\lfloor \frac{(k+2)(n+2)}{5} \right\rfloor - 4$ .

En utilisant les techniques vues dans le chapitre 3 dans un algorithme qui calcule le nombre d'absorption de la grille carrée, les premières valeurs pour lesquelles la conjecture est vérifiée sont  $k = 16$  et  $16 \leq n \leq 50$ .



# CHAPITRE 5 : BORNES SUR LE NOMBRE D'ABSORPTION DES GRILLES CARRÉES COMPLÈTES

## 5.1. Introduction

Dans un article de Cockayne et al. [14], les auteurs donnent des bornes inférieures et supérieures pour le nombre d'absorption de la grille carrée  $P_n \square P_n$ , d'ordre  $n^2$ . Plus précisément, ils donnent une formule en fonction de  $n$ .

Le nombre d'absorption du produit cartésien de deux chaînes  $P_k \square P_n$  (appelée grille complète  $G_{k,n}$ ) a été beaucoup étudié. D. S. Johnson attribue la preuve (non publiée) de la NP-complétude de la version décisionnelle du problème de l'absorption dans une sous-grille quelconque à F. T. Leighton. Rappelons que ce problème est le suivant : "étant donné un graphe  $G$  et un entier  $k$ , existe-t-il un ensemble absorbant de  $G$  de taille plus petite ou égale à  $k$  ?". Pourtant, la complexité du problème de déterminer  $\gamma(P_k \square P_n)$  n'est toujours pas connue. Seuls quelques cas particuliers ont été élucidés quand  $k \leq 16$  (voir [46], [7] et [31]).

Dans [14], les auteurs donnent les bornes suivantes pour tout  $n \geq 8$  :

$$\frac{n^2 + n - 3}{5} \leq \gamma(P_n \square P_n) \leq \left\lfloor \frac{n^2 + 4n - 20}{5} \right\rfloor.$$

Dans ce même article, les auteurs citent deux questions posées par Paul Erdős.

1) Peut-on améliorer la borne inférieure de  $\frac{n^2}{5} + \frac{n}{5}$  à  $\frac{n^2}{5} + \frac{n}{2}$  ?

2) Que peut-on dire des grilles complètes à trois dimensions ?

Dans la prochaine section, nous prouvons le théorème suivant.

**Théorème 5.1.1 ([11]) :**

Pour tout  $n \geq k \geq 14$ , on a :

$$\left\lceil \frac{kn + \frac{5}{4}(k+n) - 16}{5} \right\rceil \leq \gamma(P_k \square P_n) \leq \left\lfloor \frac{(k+2) \cdot (n+2)}{5} \right\rfloor - 4.$$

Quand  $k = n \geq 14$ , le théorème donne une réponse positive à la première question de Paul Erdős. Pour la seconde question, le lecteur peut trouver dans [39] la valeur asymptotique du nombre d'absorption des grilles complètes de dimension  $d$  ( $d \geq 2$ ).

## 5.2. Preuve du théorème

La preuve du théorème est basée sur deux lemmes. Le premier lemme consiste à établir la borne supérieure en construisant un absorbant de  $P_k \square P_n$  dont la cardinalité est égale à celle d'un motif du cavalier dans la grille  $P_{k+2} \square P_{n+2}$  privé de quatre sommets. Un tel motif  $KP(x_{i,j})$  centré en un sommet  $x_{i,j}$  est défini de manière similaire à celui de la grille croisée dans le chapitre 4 et contient tous les sommets  $x_{p,q}$  tels que :

$$(p,q) = (i,j) + a(2,1) + b(-1,2); (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad (K')$$

**Remarque :** on peut déduire une propriété similaire à celle du motif associé à la grille croisée, selon laquelle deux sommets de  $KP(x_{i,j})$  consécutifs dans une ligne (resp. une colonne) sont à une distance cinq l'un de l'autre.

**Lemme 5.2.1**

Pour tous  $k$  et  $n \geq 8$ , on a  $\gamma(P_k \square P_n) \leq \left\lfloor \frac{(k+2)(n+2)}{5} \right\rfloor - 4$ .

**Preuve :**

Montrons d'abord qu'il existe un motif du cavalier  $D$  de la grille carrée  $P_{k+2} \square P_{n+2}$  de cardinalité  $\left\lfloor \frac{(k+2)(n+2)}{5} \right\rfloor$  (voir lemme 1 dans [39]).

En effet, d'une part, d'après la remarque précédente on déduit que tout motif d'une grille carrée complète de taille  $(k+2) \times 5 \cdot (n+2)$  contient  $(k+2) \cdot (n+2)$  sommets. d'autre part, cette grille contient comme sous-graphes induits 5 grilles à sommets disjoints toutes isomorphes à  $P_{k+2} \square P_{n+2}$ . Donc au moins une restriction du motif (de départ) à ces grilles (qui définit aussi un motif du cavalier) vérifie la propriété demandée.

L'ensemble  $D$  est un quasi-absorbant de  $P_{k+2} \square P_{n+2}$  par rapport à l'ensemble extérieur formé des sommets des premières et dernières lignes et colonnes de cette grille. Comme pour la grille croisée, on obtient un absorbant  $D'$  du graphe induit par l'intérieur de  $P_{k+2} \square P_{n+2}$  (qui est isomorphe à la grille  $P_k \square P_n$ ) avec  $|D'| = |D|$ , défini comme étant l'ensemble projeté de  $D$  par les  $(x_{i,j}, x_{\Pi_{k+2}(i), \Pi_{n+2}(j)})$ -projections, où  $\Pi_m : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{2, \dots, m-1\}$  est l'application qui associe à  $i$  la valeur  $\Pi_m(i)$  telle que :

$$\Pi_m(i) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = 1, \\ m-1 & \text{si } i = m, \\ i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Modifions maintenant cette projection afin d'obtenir un autre projeté  $D''$  avec un sommet de moins que  $D'$  sur chacun des quatre coins de la grille, ce qui vérifie l'énoncé du théorème. Pour cela, considérons (selon la position du centre du motif) les cinq cas suivants (voir figure 5.1).

**Cas 1 :** le sommet  $x_{1,1}$  appartient à  $D$ .

Il suffit de ne pas projeter ce sommet, qui n'absorbe rien dans  $\text{Int}(P_{k+2} \square P_{n+2})$ .

**Cas 2 :** le sommet  $x_{1,2}$  appartient à  $D$ .

On projette  $x_{4,1}$  sur  $x_{3,2}$  et on peut se passer du sommet  $x_{1,2}$ .

**Cas 3 :** le sommet  $x_{1,3}$  appartient à  $D$ .

On projette  $x_{2,1}$  sur  $x_{2,2}$  et on peut se passer du sommet  $x_{1,3}$ .

**Cas 4 :** le sommet  $x_{1,4}$  appartient à  $D$ .

On projette  $x_{5,1}$  sur  $x_{4,2}$  et  $x_{2,2}$  sur  $x_{2,3}$  et on peut se passer du sommet  $x_{1,4}$ .

**Cas 5 :** le sommet  $x_{1,5}$  appartient à  $D$ .

On projette  $x_{3,1}$  sur  $x_{3,2}$  et  $x_{2,3}$  sur  $x_{2,4}$  et on peut se passer du sommet  $x_{1,5}$ .

Par symétrie, cet argument peut être répété à chaque coin de la grille carrée complète puisque  $k+2$  et  $n+2$  sont supérieurs ou égaux à 10. Par conséquent, on a obtenu un absorbant  $D'$  de  $P_k \square P_n$  à partir de  $D$  tel que  $|D'| = \left\lfloor \frac{(k+2)(n+2)}{5} \right\rfloor - 4$ .

Ceci termine la démonstration. ■

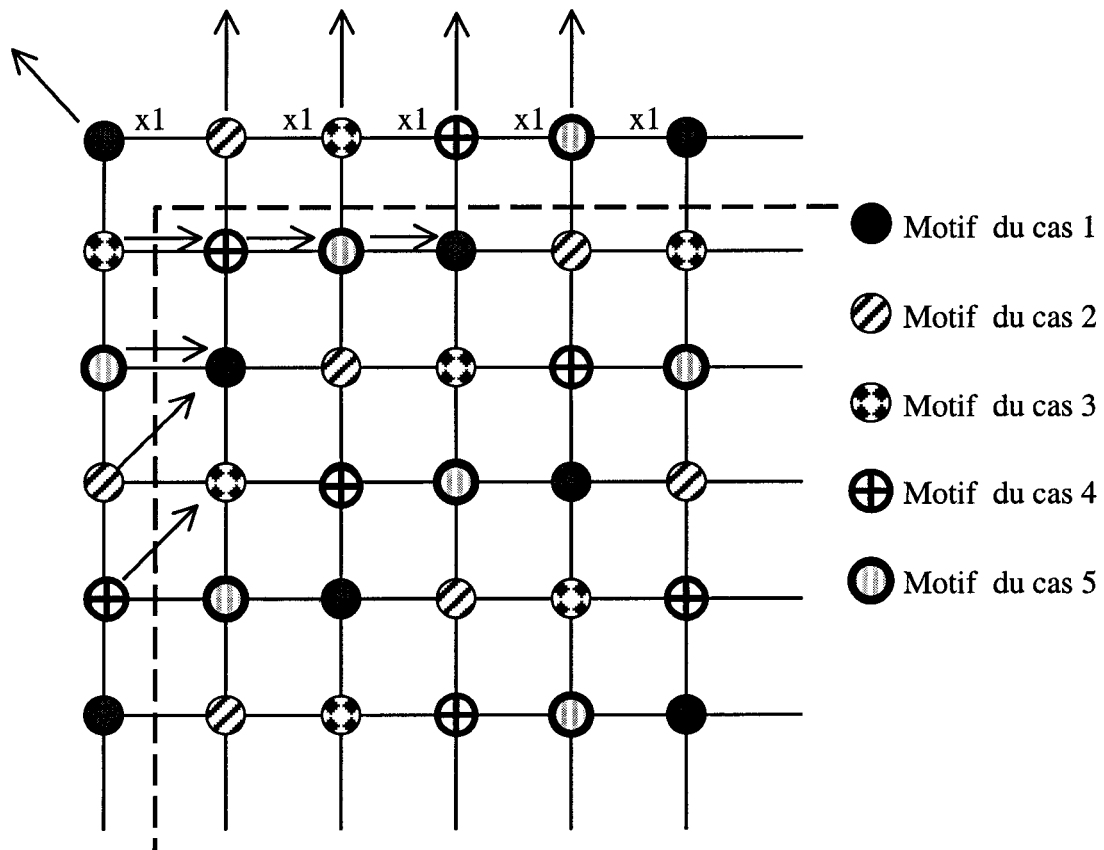


Figure 5.1 – Projection aux coins.

Cette démonstration est très similaire à celle donnée dans [14] pour la grille carrée complète avec  $k = n$ .

Nous avons implanté l'algorithme de E. O. Hare, S. T. Hedetniemi et W. R. Hare [41], calculant le nombre d'absorption d'une grille carrée afin de tester la qualité de cette borne. Nous avons trouvé que la borne est atteinte pour  $k = 16$  et  $n = 14, \dots, 50$ . D'autre part, le similitude des grilles croisées et carrées et le fait que cette borne à une valeur asymptotique correspondant à ce nombre pour la grille carrée infinie (voir [46] et [39]), nous ont poussé à poser, pour  $k$  et  $n$  suffisamment grands (peut être  $k$  et  $n \geq 16$ ), la conjecture vue à la fin du chapitre précédent..

Nous avons appris récemment que cette même conjecture à été déjà posé par D. C. Fisher.

Le second lemme s'énonce comme suit :

### Lemme 5.2.3

Pour tout  $n$  et tout  $k$  tels que  $n \geq k \geq 14$ , on a  $\gamma(P_k \square P_n) \geq \left\lceil \frac{kn + \frac{5}{4}(k+n) - 16}{5} \right\rceil$ .

La preuve du lemme 5.2.2 nécessite un raffinement de la technique utilisée dans [14]. Avant de donner la preuve, on doit introduire la notion de déficience et quelques résultats s'y rapportant.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe de degré maximum  $\Delta(G)$  et soit  $D$  un sous-ensemble de  $V$ . La **redondance** d'un sommet  $x$  est définie comme étant égale à  $|N[x] \cap D| - 1$  (i.e. le nombre de fois que le sommet  $x$  est absorbé en plus). La **déficience en degré** d'un sommet  $x$  appartenant à  $D$  est égale à  $\Delta(G) - d(x)$ . Finalement, la **déficience** d'un sommet  $x$  est définie de la manière suivante :

$$F_D(x) = \begin{cases} \Delta(G) - d(x) + |N[x] \cap D| - 1 & \text{si } x \in D, \\ |N[x] \cap D| - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que si un sommet n'est pas absorbé, sa déficience est égale à  $-1$ .

On définit la **déficience absolue**, notée  $F_D^*(x)$ , par  $F_D^*(x) = \text{Max}\{F_D(x), 0\}$ .

Enfin, on pose, pour tout  $X \subseteq V$ ,  $F_D(X) = \sum_{x \in X} F_D(x)$  et  $F_D^*(X) = \sum_{x \in X} F_D^*(x)$ .

**Lemme 5.2.4 ([11])**

Pour tout graphe  $G = (V, E)$  et pour tout sous-ensemble  $D$  de  $V(G)$ , on a

$$|D| = \frac{|V| + F_D(V)}{\Delta(G) + 1}. \text{ De plus, } D \text{ est un absorbant de } G \text{ si et seulement si } F_D(x) = F_D^*(x)$$

pour tout  $x$  dans  $D$ .

**Preuve :**

Soit  $\Delta(G)$  le degré maximum de  $G$ . Donnons une charge de  $\Delta(G) + 1$  à tout sommet de  $D$ . Donc la charge totale de  $G$  est de  $(\Delta(G) + 1) \cdot |D|$ .

Maintenant, on va redistribuer la charge suivant la règle suivante :

Tout sommet dans  $D$  envoie une unité de sa charge à chacun de ses voisins.

Tout sommet  $x$  de  $V(G)$  reçoit une charge de  $|N(x) \cap D|$ . Chaque sommet  $x$  dans  $D$  conserve une charge de  $\Delta(G) + 1 - d(x)$ .

$$\begin{aligned} \text{Donc, } (\Delta(G) + 1) \cdot |D| &= \sum_{x \notin D} (|N(x) \cap D|) + \sum_{x \in D} (|N(x) \cap D| + \Delta(G) + 1 - d(x)) \\ &= |V \setminus D| + \sum_{x \notin D} (|N(x) \cap D| - 1) + |D| + \sum_{x \in D} (|N(x) \cap D| + \Delta(G) - d(x)) \\ &= |V| + F_D(V). \end{aligned}$$

La seconde affirmation est évidente. ■

En d'autres termes, le théorème précédent veut dire que pour trouver un absorbant de taille minimum, il suffit de chercher un ensemble de sommets absorbant de déficience positive minimum et le fait de minorer cette dernière revient à minorer le nombre d'absorption.

**Lemme 5.2.5**

Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $D$  un ensemble absorbant de  $G$ . Pour toute partition

$\{D_1, \dots, D_r\}$  de  $D$ , on a  $F_D(V) \geq \sum_{i=1}^r F_{D_i}(N[D_i])$ .

**Preuve :**

Pour tout  $i = 1, \dots, r$ , soit  $\Delta_i$  le degré maximum du sous-graphe induit par  $N[D_i]$ . Puisque  $\{D_1, \dots, D_r\}$  est une partition de  $D$ ,  $|D|$  est égal à  $\sum_{i=1}^r |D_i|$ , et puisque  $D$  est un ensemble absorbant de  $G$  on a,  $|V| \leq \sum_{i=1}^r |N[D_i]|$ . Maintenant par le lemme 5.2.4 et en remarquant que  $D_i$  est un absorbant de  $N[D_i]$ , on obtient :

$$\frac{|V| + F_D(V)}{\Delta + 1} = |D| = \sum_{i=1}^r \frac{|N[D_i]| + F_{D_i}(N[D_i])}{\Delta_i + 1} \geq \frac{|V| + \sum_{i=1}^r F_{D_i}(N[D_i])}{\Delta + 1}. \quad \blacksquare$$

Une preuve analogue nous donne le lemme suivant pour la déficience absolue:

**Lemme 5.2.6**

Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $D$  un ensemble absorbant de  $G$ . Pour tout sous-ensemble

$X$  de  $V$  et pour toute partition  $\{D_1, \dots, D_r\}$  de  $D$ , on a  $F_D^*(X) \geq \sum_{i=1}^r F_{D_i}^*(X)$ .  $\blacksquare$

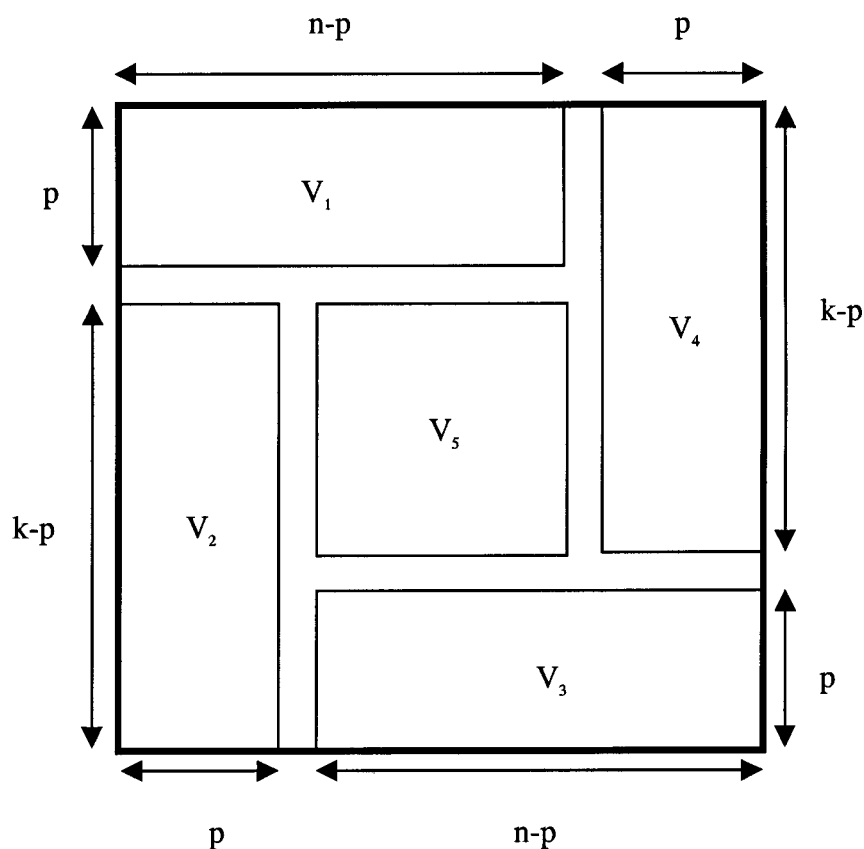
Construisant maintenant une partition de la grille carrée  $P_k \square P_n$  en cinq blocs formés des sous-ensembles de sommets suivant (voir figure 5.2).

Un sous-ensemble  $V_1$  (resp.  $V_2, V_3, V_4$ ) constitué des sommets appartenant aux  $p$  premières lignes (respectivement premières colonnes, dernières lignes, dernières colonnes) et aux  $n-p$  premières colonnes (respectivement dernières lignes, dernières colonnes et premières lignes), où  $p \leq \frac{\text{Min}\{k, n\}}{2}$ , formant les quatre blocs des coins et



un dernier sous-ensemble, noté  $V_5$ , comprenant le reste des sommets et formant un cinquième bloc au milieu de la grille.

Soit  $D$  un absorbant de  $P_k \square P_n$ . On pose  $D_i = D \cap V_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Chaque ensemble  $D_i$  constitue en fait un quasi-absorbant de la sous-grille induite par les sommets de  $V_i$ . Les ensembles extérieurs sont formés des sommets ayant au moins un voisin appartenant aux autres blocs.



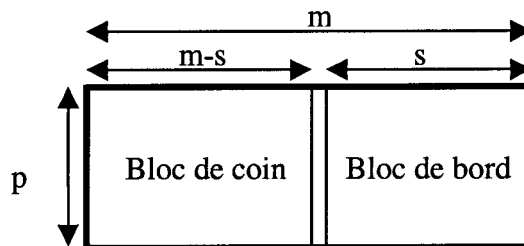
**Figure 5.2 - Partition de la grille carrée  $P_k \square P_n$  en cinq blocs.**

En remarquant que  $F_{D_i}^*(V) = \sum_{j=1}^r F_{D_i}^*(V_j) \geq F_{D_i}^*(V_i)$  pour tout  $i = 1, \dots, 5$  et utilisant

le lemme 5.2.6 on obtient la propriété suivante.

**Propriété 5.2.7.**  $F_D^*(V) \geq \sum_{i=1}^r F_{D_i}^*(V_i)$  ■

À présent, il est facile de calculer une borne inférieure sur la déficience absolue si on peut trouver pour chaque bloc de coin un quasi-absorbant de déficience absolue minimum. Ceci est fait en partitionnant un bloc de coin de taille  $p \times m$  en deux blocs : un bloc de même type de taille  $p \times (m-s)$  et un autre bloc qu'on peut appeler bloc de bord de taille  $p \times s$  (voir figure 5.3).



**Figure 5.3** Partitionnement d'un bloc en bloc de coin et bloc de bord.

Si on appelle  $F_c(m)$  (resp.  $F_b(m)$ ) la déficience absolue minimum d'un quasi-absorbant d'un bloc de coin (resp. de bord) de taille  $p \times m$ , le lemme 5.2.6 nous permet d'écrire le corollaire suivant,

**Corollaire 5.2.8.**

Quels que soient les entiers positifs  $p$ ,  $m$  et  $s$  avec  $m \geq s$ ,  $F_c(m) \geq F_c(m-s) + F_b(s)$ . ■

À partir de là, on peut obtenir facilement la borne obtenue par Cockayne et al. dans [14]. En fait, le résultat est un plus général puisqu'on n'exige pas que  $k$  soit égal à  $n$ .

**Théorème 5.2.9**

Pour tous  $k$  et  $n \geq 4$ , on a  $\gamma(P_k \square P_n) \geq \left\lceil \frac{k \cdot n + (\frac{1}{2}) \cdot (k+n) - 3}{5} \right\rceil$ .

**Preuve :**

Nous montrons tout d'abord l'inégalité suivante :  $Fc_2(m+4) \geq Fc_2(m) + 1$ , pour tout  $m \geq 1$ . Il suffit d'après le corollaire 5.2.8 de montrer que  $Fb_2(4)$  est supérieure ou égale à 1. Considérons donc un quasi-absorbant  $A$  de déficience absolue minimum d'un bloc de bord de taille  $2 \times 4$ . On peut supposer que l'on est sur le bord de la première ligne et que les quatre sommets du bord sont  $x_{1,i}, x_{1,i+1}, x_{1,i+2}, x_{1,i+3}$  où  $x_{1,i+1}$  et  $x_{1,i+2}$  constituent l'intérieur de ce bloc. Si  $A$  contient un sommet du bord alors  $Fb_2(4) \geq 1$  car le sommet n'est pas de degré maximum. Maintenant, si  $A$  ne contient aucun sommet de bord, alors pour absorber les sommets  $x_{1,i+1}$  et  $x_{1,i+2}$   $A$  doit contenir les deux sommets  $x_{2,i+1}$  et  $x_{2,i+2}$  sur la deuxième ligne. D'où une déficience d'au moins deux.

Il est facile de voir que le sommet de degré 2 d'un bloc de coin ne peut être absorbé que par un sommet de bord, donc on peut en déduire que  $Fc_2(1) \geq 0$  et  $Fc_2(4) \geq Fc_2(3) \geq Fc_2(2) \geq 1$ . Et on peut conclure que  $Fc_2(m) \geq \left\lfloor \frac{m-1}{4} \right\rfloor$ .

Ainsi, si on considère un absorbant minimum  $D$  de  $P_k \square P_n$  et si on considère la partition de la figure 5.2 en prenant  $p = 2$ , la propriété 5.2.7 permet d'écrire  $F_D^*(V) \geq 2 \left( \left\lfloor \frac{(k-2)-1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(n-2)-1}{4} \right\rfloor \right) \geq \frac{(k+n)}{2} - 3$ , pour tous  $k$  et  $n$  plus grands ou égaux à quatre. Enfin, le lemme 5.2.4 permet de conclure. ■

**Preuve du lemme 5.2.3 :**

En utilisant un algorithme de programmation dynamique qui cherche un quasi-absorbant de déficience absolue minimum, on a pu montrer que  $Fb_7(24) \geq 15$ , de plus on a pu vérifier que pour tout  $m = 2, \dots, 25$   $Fc_7(m) \geq \left\lfloor \frac{(15m+9)}{24} \right\rfloor$ . Donc d'après le corollaire 5.2.8 cette inégalité est vraie pour tout  $m$ . Si on considère à présent un absorbant  $D$  minimum de  $P_k \square P_n$ , la propriété 5.2.7 permet d'écrire  $F_D^*(V) \geq$

$$2\left(\left\lceil \frac{15(k-7)-9}{24} \right\rceil + \left\lceil \frac{15(n-7)-9}{24} \right\rceil\right) \geq \frac{5(k+n)}{4} - 16. \text{ Ceci termine la démonstration du}$$

lemme 5.2.3 et donc celle du théorème 5.1.1. ■

# CHAPITRE 6 : GRAPHES VÉRIFIANT LA CONJECTURE DE VIZING

## 6.1. Introduction

L'un des problèmes les plus connus en ce qui concerne le problème de l'absorption est une conjecture que Vizing a posée en 1963, qui est toujours non résolue de nos jours et qui s'énonce comme suit.

### Conjecture 6.1.1 (Vizing)

Quels que soient les graphes  $G$  et  $H$ ,  $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$ .

Cette conjecture a été démontrée quand l'un des graphes  $G$  ou  $H$  appartient à une famille particulière de graphes, par exemple, si  $G$  est un arbre, un cycle, etc., ou si un graphe ou les deux graphes satisfont une certaine propriété. De plus, si  $H = \overline{G}$  ou  $G$  est tel que  $\overline{G}$  est 3-colorable, la conjecture est vérifiée.

## 6.2. Bornes sur le nombre d'absorption

Beaucoup de recherches ont été menées pour trouver des bornes supérieures ou des bornes inférieures sur le nombre d'absorption. Ceci témoigne de la difficulté à trouver un absorbant minimal dans un graphe quelconque  $G$ . L'un des premiers résultats est celui de Ore [56].

**Théorème 6.2.1 (Ore)**

Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$  sans sommets isolés, alors  $\gamma(G) \leq n/2$ . ■

Payan et Xuong ont par la suite donné une caractérisation des graphes dont le nombre d'absorption est égal à  $n/2$ . Nous citons maintenant un résultat très naturel car un sommet donné ne peut absorber plus de  $\Delta(G)+1$  sommets. Ce résultat a déjà été cité dans le chapitre 1 et il s'énonce :

**Théorème 6.2.2**

Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$  ayant comme degré maximum  $\Delta(G)$ , alors

$$\gamma(G) \geq n/(\Delta(G)+1). \blacksquare$$

Considérons à présent  $G_1$  un graphe de degré minimum  $\delta_1$  avec  $|V(G_1)| = n_1$  et  $G_2$  un graphe de degré minimum  $\delta_2$  avec  $|V(G_2)| = n_2$ .

On peut dire par le théorème 6.2.2 que  $\gamma(G_1 \square G_2) \geq n_1 \cdot n_2 / (\Delta(G_1) + \Delta(G_2) + 1)$  et par le théorème 6.2.1 que  $n_1 \cdot n_2 / 4 \geq \gamma(G_1) \gamma(G_2)$ . Donc  $\gamma(G_1 \square G_2) \geq \gamma(G_1) \gamma(G_2)$  dans le cas où  $(\Delta(G_1) + \Delta(G_2) + 1) \leq 4$ . Ceci prouve la conjecture de Vizing lorsque  $\Delta(G_1) = 1$  et  $\Delta(G_2) = 2$ ,  $\Delta(G_1) = 2$  et  $\Delta(G_2) = 1$  ou  $\Delta(G_1) = 1$  et  $\Delta(G_2) = 1$ . Remarquons que si  $\Delta(G) = 1$  et si le graphe  $G$  a 3 sommets ou plus, le graphe est constitué de sommets isolés et/ou d'arêtes isolées.

Il existe un autre résultat qui améliore la borne inférieure sur le nombre d'absorption d'un graphe. Ce résultat est dû à Lovász [54] et permet de prouver la conjecture de Vizing pour une famille de graphe plus grande. Il s'énonce comme suit.

**Théorème 6.2.3 (Lovász[54])**

Si  $G$  est un graphe d'ordre  $n$  ayant comme degré minimum  $\delta > 1$ , alors  $\gamma(G) \leq n \frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$ . ■

Grâce à ce dernier résultat, on peut écrire  $n_1 n_2 \frac{(1+\ln(\delta_1+1))(1+\ln(\delta_2+1))}{(\delta_1+1)(\delta_2+1)} \geq \gamma(G_1)\gamma(G_2)$ . Dans ce cas, la conjecture de Vizing est vérifiée si l'on a :

$$1/(\Delta(G_1)+\Delta(G_2)+1) \geq \frac{(1+\ln(\delta_1+1))(1+\ln(\delta_2+1))}{(\delta_1+1)(\delta_2+1)}.$$

Dans un souci de simplification, on va supposer que les deux graphes sont  $\delta$ -réguliers. En remplaçant  $\Delta(G_1)$ ,  $\Delta(G_2)$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  par  $\delta$ , on obtient l'inégalité suivante :

$$(2\delta+1) \frac{(1+\ln(\delta+1))^2}{(\delta+1)^2} \leq 1 \quad (1)$$

où le membre de gauche est une fonction décroissante de  $\delta$ . Cette dernière inégalité n'est vérifiée que si  $\delta$  est supérieur ou égal à 46.

Nous présentons à présent deux résultats de Clark, Shekhtman, Suen et Fisher[13] donnant une borne inférieure améliorée pour le nombre d'absorption de graphes de degré minimum  $\delta$  ainsi que pour des graphes  $\delta$ -réguliers.

**Théorème 6.2.5 (Clark et al.)**

Pour tout graphe  $G$  ayant  $n$  sommets et de degré minimum  $\delta$  on a  $\gamma(G) \leq nS_\delta$ , où

$$S_\delta = 1 - \prod_{i=1}^{\delta+1} \frac{i\delta}{1+i\delta}. \quad \blacksquare$$

**Théorème 6.2.6 (Clark et al.)**

Pour tout graphe  $\delta$ -régulier  $G$  ayant  $n$  sommets, on a  $\gamma(G) \leq nT_\delta$ ,

$$\text{où } T_\delta = 1 - \frac{\delta - 1 + \frac{1}{\delta^2 + 1}}{\prod_{i=1}^{\delta-1} \left(1 + \frac{\delta+1}{i\delta}\right)}. \blacksquare$$

Cette nouvelle borne va nous permettre d'élargir la classe de graphes vérifiant la conjecture de Vizing en prouvant la proposition suivante :

**Proposition 6.2.4**

Soit  $G$  et  $H$  deux graphes  $\delta$ -réguliers tels que  $\delta \geq 27$ . Alors  $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$ .

**Preuve :**

Pour prouver la proposition 6.2.4, on peut utiliser l'un ou l'autre des théorèmes 6.2.5 ou 6.2.6. En utilisant le théorème 6.2.6,  $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$  si

$$1/(\delta + \delta + 1) \geq \left(1 - \frac{\delta - 1 + \frac{1}{\delta^2 + 1}}{\prod_{i=1}^{\delta-1} \left(1 + \frac{\delta+1}{i\delta}\right)}\right)^2, \text{ ou } (2\delta + 1) \left(1 - \frac{\delta - 1 + \frac{1}{\delta^2 + 1}}{\prod_{i=1}^{\delta-1} \left(1 + \frac{\delta+1}{i\delta}\right)}\right)^2 \leq 1 \quad (2)$$

où le membre de gauche est une fonction décroissante de  $\delta$ . L'inégalité (2) est vérifiée si  $\delta$  est supérieur ou égal à 27. ■

Notre résultat aurait été plus significatif s'il confirmait la validité de la conjecture pour tous les graphes réguliers. Cependant, il est quand même un résultat intéressant puisqu'il valide la conjecture de Vizing pour une famille infinie de graphes.



# **PARTIE 2 :**

**GESTION QUOTIDIENNE**

**DES OPÉRATIONS**

**EN TRANSPORT AÉRIEN**

# CHAPITRE 7 : PROBLÉMATIQUE ET BIBLIOGRAPHIE

## 7.1. Introduction

Dans cette partie de la thèse, nous étudions le problème de gestion d'équipages aériens durant le jour d'opération. Ce problème consiste à modifier de manière "efficace" les horaires des membres d'équipages suite à des perturbations. Ces perturbations peuvent être des absences non prévues, des pannes d'avions, de mauvaises conditions météorologiques, etc. Les conventions collectives prévoient des coûts supplémentaires pour les compagnies aériennes quand elles perturbent les blocs mensuels de leurs pilotes. Par conséquent, les modifications doivent être réduites autant que possible et ne doivent pas durer trop longtemps. Cette période de temps où on s'autorise à faire des modifications est appelée période opérationnelle. En général, la période opérationnelle ne dépasse pas vingt-quatre heures.

## 7.2. Problème de gestion des horaires des équipages aériens

Les problèmes de planification et de gestion des opérations d'une compagnie aérienne ont fait l'objet de beaucoup de recherche ces dernières décennies. Parmi ces problèmes, on citera le **problème de fabrication des rotations**, le **problème de fabrication des horaires personnalisés** et le **problème de réparation des horaires des membres d'équipages durant le jour d'opération**. La rémunération des membres d'équipages représente un coût majeur pour les compagnies aériennes. Par conséquent, la rentabilité de ces compagnies est directement liée à la qualité de la solution donnée à ces problèmes.

Un **segment de vol** représente un vol sans escales entre deux villes. Un **service de vol** est une combinaison de segments de vol, de **connexions** et de **temps d'attente** formant un jour de travail **légal**. Une **rotation** est une séquence de services de vol, séparés par des périodes de repos. Une rotation est effectuée par un équipage partant et retournant à la même ville qui est appelée la **base**. Toute rotation doit être construite en respectant les règles de la convention collective et les lois régissant le transport aérien dans un pays donné. Le problème de fabrication des rotations consiste à construire un ensemble de rotations qui couvrent à coût minimal un ensemble donné de segments de vol (un seul type d'avion est considéré). Les membres d'équipages ne sont pas considérés individuellement dans ce problème.

Ce problème est généralement modélisé comme un problème de partitionnement ou de couverture. La difficulté de résolution de ce type de problèmes provient du fait qu'il existe un très grand nombre de rotations. C'est pour cela que les premières approches consistaient à engendrer de manière heuristique un ensemble restreint de rotations légales et à trouver ensuite une solution entière au problème de couverture utilisant ces rotations (voir [1], [36], [44], etc.). D'autres chercheurs ont intégré des générateurs heuristiques dans des processus de génération de colonnes pour résoudre ce genre de problèmes (voir [53], [16], [61], etc.). Enfin, Desaulniers et al. [19] ont développé un processus de génération de colonnes dans lequel les rotations sont générées en résolvant un problème de plus court chemin avec des variables de ressources. Cette approche a l'avantage de pouvoir générer toutes les rotations qui satisfont les règles de la convention collective.

Quant au problème de fabrication des horaires pour les membres d'équipages, il consiste à affecter des rotations et des périodes de repos pour chaque membre tout en prenant en considération les activités déjà affectées, comme les périodes de formation, les vacances, etc. Une telle séquence est appelée **bloc mensuel**. Comme pour les rotations, les blocs mensuels doivent obéir à plusieurs règles de la convention collective ainsi qu'à l'expertise des différents membres d'équipages. Plusieurs approches ont également été développées pour ce problème selon la politique appliquée

dans la compagnie considérée. Mais en général, on peut les classer en trois approches : la première approche consiste à construire les blocs mensuels indépendamment des employés. Ensuite, chaque employé fait son choix parmi les blocs disponibles, et finalement, les blocs sont affectés aux employés en tenant compte d'un système de priorités propre à chaque compagnie aérienne. La deuxième approche construit un bloc mensuel pour chaque employé en tenant compte de la spécialisation et des activités déjà affectées à ce dernier et considère un système de poids. Ces poids représentent les préférences des employés et on cherche à maximiser la somme de ces préférences. La troisième approche est similaire à la seconde, mais elle utilise en plus ce qu'on appelle des règles d'ancienneté. Donc cette approche va construire, pour un employé donné, un bloc mensuel qui maximise sa satisfaction, après avoir construit les blocs mensuels de tous les employés qui sont plus "anciens" que lui (consulter [35], [32], [55] et [33]).

Un problème de gestion d'équipages aériens durant le jour d'opération a été résolu par Stojković, Soumis et Desrosiers [58]. Le problème en question consiste à réparer les blocs mensuels obtenus après la résolution du problème de fabrication des horaires, suite à des perturbations, comme des absences non planifiées, le changement d'un type d'avion, des annulations, etc. Ce problème est formulé comme un problème de multiflots non linéaire, en nombres entiers, avec des variables de ressources, où un membre d'équipage donné est considéré comme une commodité. Ce problème est résolu de façon optimale en utilisant un processus de génération de colonnes en combinaison avec un algorithme de séparation et d'évaluation progressive, où le problème maître est défini comme étant un problème de partitionnement et les sous-problèmes comme des problèmes de plus court chemin sur un graphe avec des contraintes de ressources.

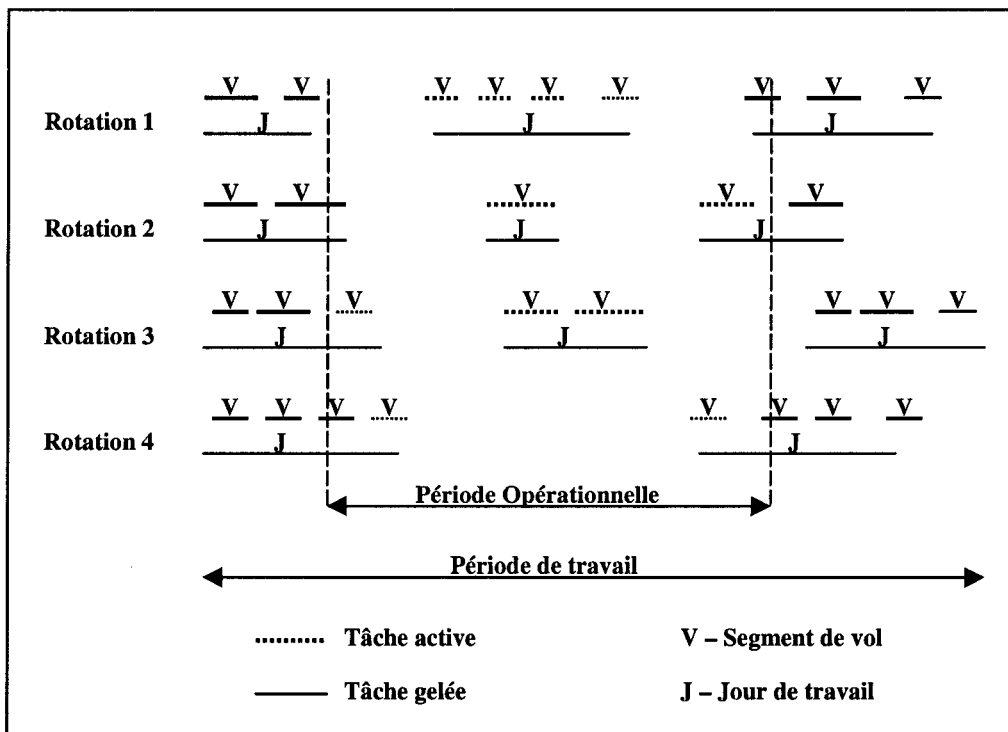


Figure 7.1 Structure du problème des opérations quotidiennes.

La méthode préconisée par Stojković et al. comporte trois étapes. La première étape consiste à choisir la période d'opération (c'est-à-dire l'intervalle de temps où on se permet de changer l'emploi du temps des membres d'équipages), qui dépend du volume des perturbations et du temps disponible pour produire la solution. La deuxième étape permet de déterminer l'ensemble des membres d'équipages susceptible de voir leurs horaires modifiés. Dans la troisième étape on détermine la période de travail en fonction de la période d'opération et de l'ensemble des candidats. La figure 7.1 ci-dessus, tirée de Stojković et al. [58], donne une idée de la structure du problème.

En effet, Stojković et al. considèrent tous les segments de vol qui sont entièrement dans la période opérationnelle comme tâches actives, c'est-à-dire des tâches qu'on peut réaffecter à n'importe quel autre membre d'équipage. Par contre, tous les segments de vol entièrement ou partiellement hors de la période opérationnelle doivent rester inchangés, donc être affectés au même membre d'équipage. Ces segments de vol sont appelés tâches gelées.

Les trois problèmes cités au début de ce chapitre ont une structure commune et consistent tous à trouver un horaire réalisable pour un ensemble de commodités de façon à couvrir un ensemble de tâches. De même, ces problèmes peuvent être définis sur une structure de réseau espace-temps. Cette structure commune a permis à Desaulniers et al. [18] de proposer une formulation unifiée pour tous ces problèmes et une approche de résolution basée sur un processus de génération de colonnes en combinaison avec un processus de séparation et d'évaluation progressive.

Dans ces problèmes, les colonnes sont engendrées en résolvant dans un réseau un problème de plus court chemin avec contraintes. Le réseau en question est construit de telle sorte que les chemins engendrés satisfont une partie des contraintes de la convention collective ; une autre partie de ces contraintes peut être modélisée sous forme de ressources qui se prêtent bien à la résolution par programmation dynamique. De plus, pour certaines compagnies aériennes (en particulier les compagnies américaines), il existe des contraintes "complexes" qui peuvent être satisfaites en parcourant à reculons les chemins partiels durant la résolution des problèmes de plus courts chemins.

### 7.3. Formulation du problème

Le **problème de plus court chemin avec contraintes** consiste à trouver un chemin de coût minimal, vérifiant certaines contraintes, entre deux nœuds dans un réseau. Lorsque ces contraintes peuvent être modélisées comme des contraintes de ressources, on parlera de **problème de plus court chemin avec contraintes de ressources** (PPCCR). Dans ce type de problème, on aura pour chaque ressource ce qu'on peut appeler une **fenêtre de ressource**, c'est-à-dire une borne inférieure et une borne supérieure sur la ressource à chaque nœud du réseau. On suppose aussi que l'utilisation d'un arc du réseau implique la consommation d'une ou de plusieurs ressources et que l'accumulation de chaque ressource à chaque nœud doit satisfaire la fenêtre de ressource. Le problème consistera à trouver un plus court chemin entre deux nœuds.

Considérons un réseau orienté acyclique  $G = (V, A)$ , avec  $n (= |V|)$  sommets,  $v_1, \dots, v_n$ , ordonnés de manière topologique et  $m (= |A|)$  arcs, où  $v_1$  représente la source et  $v_n$  le puits. Un ensemble  $R$  de ressources à valeurs discrètes est associé à  $G$ .

À chaque arc  $(v_i, v_j) \in A$  on associe un coût d'utilisation  $c_{ij}$  comprenant le coût inter-tâches  $(i, j)$  et le coût de la tâche  $j$ , et un vecteur de consommation ou d'utilisation de ressources  $t_{ij} = (t_{ij}^1, t_{ij}^2, t_{ij}^3, \dots, t_{ij}^{|\mathbf{R}|})$ . À chaque sommet  $v_i$  sont associés deux vecteurs,  $a_i = (a_i^1, a_i^2, a_i^3, \dots, a_i^{|\mathbf{R}|})$  et  $b_i = (b_i^1, b_i^2, b_i^3, \dots, b_i^{|\mathbf{R}|})$ , correspondant respectivement aux seuils inférieurs et supérieurs des fenêtres de ressources, et une durée  $s_i = f_i - d_i$  où  $d_i$  et  $f_i$  représentent la date de début et de fin de service respectivement. Un arc  $(v_i, v_j)$  appartient à  $A$  si et seulement si l'exécution de la tâche  $i$  avec un vecteur de ressources à la borne inférieure de sa fenêtre de ressource permet d'exécuter la tâche  $j$  sans dépasser la borne supérieure de sa fenêtre de ressources. En d'autres termes, tous les arcs  $(v_i, v_j)$  doivent respecter la condition suivante :

$$a_i^r + t_{ij}^r \leq b_j^r, \quad \forall r \in R.$$

Un chemin  $v_1$ - $v_i$  réalisable sera caractérisé par un vecteur de ressources initial  $T_1$ , un vecteur de variables de ressources au nœud  $v_i$  :  $T_i = (T_i^1, T_i^2, T_i^3, \dots, T_i^{|\mathbf{R}|})$  et un coût  $c_i$ . La traversée d'un arc  $(v_i, v_j)$  implique un coût  $c_{ij}$  et la consommation d'une ou de plusieurs ressources  $t_{i,j}^r$ , donc  $c_i$  va être augmenté de  $c_{ij}$  et  $T_i^r$  de  $t_{i,j}^r$  pour tout  $r$  dans  $R$ . S'il existe une ressource  $r$  pour laquelle  $T_i^r + t_{i,j}^r > b_j^r$ , le chemin ne sera pas réalisable. Dans le cas contraire, le chemin sera réalisable avec un vecteur de ressources  $T_j$  au sommet  $v_j$  tel que  $T_j^r = \max\{a_j^r, T_i^r + t_{i,j}^r\}$  pour tout  $r$ . Cette fonction est appelée fonction d'extension ou de prolongation.

Toutes ces notations nous permettent de formuler le problème du plus court chemin avec contraintes de ressources (PPCCR) de la manière suivante, où  $X_{ij}$  représente la variable de flot binaire sur l'arc  $(v_i, v_j)$ .

$$\text{Minimiser } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} X_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s.c } \sum_j X_{ij} - \sum_j X_{ji} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = 1, \\ 0 & , \text{ si } i = 2, 3, \dots, n-1, \\ -1 & , \text{ si } i = n, \end{cases} \quad (2)$$

$$X_{ij}(T_i^r + t_{ij}^r - T_j^r) \leq 0, \quad \forall r \in R, \forall (i, j) \in A \quad (3)$$

$$a_i^r \leq T_i^r \leq b_i^r, \quad \forall r \in R, \forall i \in V \quad (4)$$

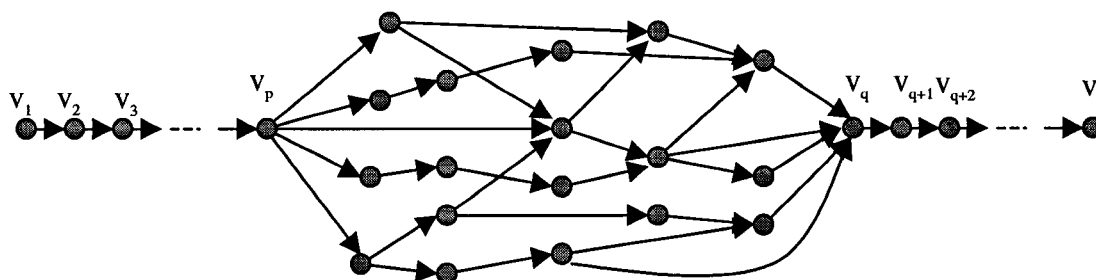
$$X_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A \quad (5)$$

La fonction objectif (1) revient à minimiser le coût total du chemin. Les contraintes (2) expriment la conservation de flot sur le graphe  $G$ . Les contraintes (3) expriment les compatibilités entre les variables de flot et les variables de ressources et les contraintes (4) expriment les fenêtres de ressources sur les sommets du graphe. Enfin, la positivité des variables de flot est garantie par la contrainte (5).

Dans le problème du jour d'opération, on dispose déjà d'un plus court chemin pour chaque pilote. Ces chemins ont été construits lors de la résolution du problème de fabrication des horaires personnalisés. Quand des perturbations se produisent, chaque pilote a déjà effectué une partie de son chemin (c'est-à-dire une partie de ses segments de vols), et comme on ne veut pas trop perturber son chemin à venir, on se contentera, si possible, de modifier ses affectations pour la journée suivante seulement. Ceci revient à supposer que l'on dispose d'une partie initiale du plus court chemin  $v_1 - v_p$  (contenant les vols déjà réalisés par le pilote) et une partie finale  $v_q - v_n$  (contenant les vols qui ne seront pas touchés par les modifications et que le pilote va réaliser plus tard) (voir figure 7.2), et que ces deux parties vérifient toutes les contraintes. Dans la partie qui se situe entre  $v_p$  et  $v_q$  on va mettre tous les vols de tous les pilotes



susceptibles de voir leurs emplois du temps changés. Cette partie est appelée période opérationnelle.



**Figure 7.2 Parties gelées du chemin (au début et à la fin).**

Donc le problème revient à trouver un plus court chemin  $v_1-v_n$  réalisable et de coût minimal, ayant comme vecteur de ressources initial  $T_1$ , ou à montrer qu'un tel chemin n'existe pas.

Les problèmes de gestion d'équipages aériens durant le jour d'opération doivent être résolus très rapidement. Dans ce contexte, le traitement des contraintes complexes en parcourant à reculons les chemins durant la résolution des problèmes de plus courts chemins nécessite trop de temps. Pour ce problème, une contrainte "complexe" est la contrainte " $C_1/C_2$ ". Cette contrainte signifie qu'un membre d'équipage donné ne peut effectuer plus de  $C_1$  heures de vol dans un intervalle quelconque de  $C_2$  heures consécutives. Il existe aussi d'autres variantes de cette contrainte qui permettent à un membre d'équipage de dépasser cette limite  $C_1$  à la condition que la période de repos qui suit ou qui précède soit suffisamment longue.

Cette contrainte revient à dire que si pour un chemin partiel  $P = v_k-v_k$  d'un chemin  $v_1-v_n$  on a  $\sum_{v_i \in P} s_i > C_1$  et  $f_k - d_k \leq C_2$  alors le chemin est non-réalisable. Et on peut la

modéliser de la manière suivante où  $\Pi$  dénote l'ensemble de tous les chemins partiels  $v_k-v_k$  inclus dans un chemin  $v_1-v_n$  tels que  $f_k - d_k \leq C_2$  :

$$\sum_{v_i \in P} s_i \sum_j X_{i,j} \leq C_1, \quad \forall P \in \Pi \quad (6)$$

La contrainte (6) oblige tous les chemins partiels à vérifier la contrainte “ $C_1/C_2$ ”.

La modélisation d'une telle contrainte comme la ressource qui compte le nombre d'heures pendant lesquelles travaille un employé donné ne permet pas de bien définir la fonction de prolongation. En d'autres termes, il faut garder beaucoup d'information pour satisfaire la contrainte (d'où le coût trop élevé de la méthode du retour arrière).

Pour le problème de construction des blocs mensuels (planification), la contrainte  $C_1/C_2$  est traitée par une méthode heuristique avec retour arrière. Par contre, Stojković et al., n'ont pas considéré cette contrainte pour le problème du jour d'opération.

La méthode du retour arrière se traduit par le fait que dès que l'on ajoute un arc  $(v_i, v_j)$  à un chemin, on fait un retour en arrière pour vérifier si tous les chemins arrivant en  $v_j$  satisfont la contrainte de  $C_1/C_2$ . Cette opération de retour arrière est heuristique dans la mesure où elle se fait après la dominance pour les autres ressources. La dominance, qui sera définie au chapitre 8, rejette effectivement une portion des chemins qui auraient pu être réalisables et possiblement optimaux. Cette méthode permet néanmoins de trouver une solution réalisable assez bonne car peu de chemins sont rejetés.

À part le fait que cette opération soit heuristique, elle a un deuxième inconvénient qui n'est pas moins important que la qualité de la solution trouvée. Cet inconvénient est le temps d'exécution très important entraîné par cette opération.

Cette contrainte est encore plus complexe pour la gestion des équipages durant le jour d'opération que pour la planification, car des tâches sont déjà assignées à chaque employé pour la journée juste avant le jour d'opération et pour la journée juste après le jour d'opération. Par conséquent, en plus du retour arrière, il faut vérifier à la fin de la

période opérationnelle que le chemin est compatible avec la suite des tâches gelées. Ces deux traitements induisent un plus grand taux de rejet et donc nous éloignent davantage de l'optimum. Il faudra donc innover pour faciliter le traitement de cette contrainte.

Le problème du plus court chemin avec contraintes est un problème qui a été beaucoup étudié. Ce dernier apparaît souvent comme un sous-problème dans les algorithmes de génération de colonnes (voir [22] et [23]). Dans beaucoup de cas, heureusement, les contraintes peuvent être prises en compte en construisant le réseau ou en les modélisant comme des contraintes de ressources [21].

Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre le problème du plus court chemin avec contraintes. Parmi celles-ci, on peut citer la relaxation lagrangienne combinée avec une procédure d'évaluation et de séparation progressive (voir [3]), un algorithme classique de plus court chemin (si on peut faire en sorte que les contraintes soient satisfaites par construction du graphe de tous les états), la programmation dynamique (si les contraintes se modélisent comme des contraintes de ressources avec une fonction de prolongation non-décroissante, voir [21] [24], [25] et [26]) et la méthode des deux phases qui s'applique dans les mêmes conditions que la programmation dynamique (voir [60]).

En ce qui nous concerne, nous allons essayer de tenir compte de la contrainte " $C_1/C_2$ " (dans notre cas, "8/24") dans la recherche du plus court chemin sans pour autant faire du "retour arrière" pour vérifier que les chemins partiels sont valides pour cette contrainte. Nous allons faire ceci dans le cas où le problème de gestion d'équipages aériens est le problème de gestion quotidienne des opérations.

# CHAPITRE 8 : PROBLÈMES DE PLUS COURT CHEMIN AVEC CONTRAINTES

## 8.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons dans un premier temps présenter les méthodes classiques de résolution du problème du plus court chemin avec contraintes de ressource (PCCCR). Nous donnerons aussi la méthode utilisée actuellement pour satisfaire une contrainte de type " $C_1/C_2$ " lorsqu'elle est présente. Dans un deuxième temps, nous introduirons les méthodes que nous avons proposées pour la résolution d'un problème de plus court chemin avec contraintes de ressources, en plus d'une contrainte " $C_1/C_2$ " telle que définie dans le chapitre précédent. Deux algorithmes pseudo-polynomiaux sont proposés. Le premier est un algorithme de programmation dynamique où la contrainte " $C_1/C_2$ " est modélisée sous la forme de deux ressources qu'on pourrait appeler "avant" et "arrière" respectivement. Le second algorithme est ce qu'on peut appeler une combinaison de l'approche du graphe d'états, de la programmation dynamique et de la méthode des deux phases (voir [60]) qui utilise les deux ressources du premier pour construire un graphe d'états.

Dans la suite, nous remplacerons " $C_1/C_2$ " par "8/24" puisque c'est cette contrainte que nous devons satisfaire lors de la fabrication des horaires personnalisés pour les grandes compagnies aériennes américaines.

## 8.2. Méthodes classiques de résolution de PCCCR

Le problème du plus court chemin avec contraintes de ressources a été introduit par Desrochers [20] comme une généralisation multi-dimensionnelle du problème du plus court chemin avec fenêtres de temps défini quant à lui par Desrosiers, Pelletier & Soumis [25]. La formulation (1)-(5) donnée dans le chapitre précédent n'est autre que celle du problème du plus court chemin avec contraintes de ressources. Ce problème est résolu de manière efficace par plusieurs approches que nous allons résumer dans ce qui suit.

### 8.2.1. L'approche par le graphe d'états

La formulation qui suit est tirée de la thèse de T. Vovor [60], mais l'approche en elle-même a été citée dans plusieurs travaux, Desrosiers et al. par exemple (voir [24]). Cette approche consiste à générer explicitement le graphe  $G' = (S, E)$  de tous les états possibles des sous-chemins réalisables en provenance de la source en supposant que les vecteurs de ressources sont entiers. En d'autres termes, on remplace un sommet  $v_i$  du graphe initial  $G = (V, A)$  par un ensemble de sommets  $S_i$  de la manière suivante.

À chaque vecteur de ressource  $T_i$  correspondant à un chemin aboutissant à  $v_i$  à partir de la source  $v_1$ , on associe un sommet  $s_i$ . L'arc  $(s_i, s_j)$  est dans  $E$  si et seulement si  $T_j^r$  est inférieur à  $b_j^r$  et  $T_j^r = \max(a_j^r, T_i^r + t_{ij}^r)$  pour tout  $r$  dans  $R$ , où  $T_i$  et  $T_j$  sont les vecteurs de consommation de ressources associés à  $s_i$  et  $s_j$  respectivement. L'ensemble de tous les arcs  $(s_i, s_j)$  dans  $E$ , associés à un arc  $(v_i, v_j)$  dans  $A$  donné, sera noté  $E_{ij}$ . Le coût de l'arc  $(s_i, s_j)$  est égal à  $c_{ij}$ . Un sommet supplémentaire  $s_{n+1}$  (puits) est ajouté à  $S$ , et des arcs de la forme  $(s_n, s_{n+1})$  (pour  $s_n$  dans  $S_n$ ) sont ajoutés à  $E$ .

L'ensemble des chemins dans le graphe d'états ainsi défini correspond à l'ensemble de tous les chemins satisfaisant l'ensemble des contraintes de ressources dans le graphe initial. On peut alors utiliser un algorithme classique de plus court chemin sur ce graphe d'états pour trouver un plus court chemin.

Le graphe résultant  $G'$  peut être généré par les formules récurrentes suivantes :

$$S_1 = \{s_1\},$$

$$S_j = \{s_j : T_j^r = \max(a_j^r, T_i^r + t_{ij}^r), T_i^r + t_{ij}^r \leq b_j^r, \forall r \in R ; s_i \in S_i, (v_i, v_j) \in A\},$$

$$E_{ij} = \{(s_i, s_j) : T_j^r = \max(a_j^r, T_i^r + t_{ij}^r), T_i^r + t_{ij}^r \leq b_j^r, \forall r \in R ; s_i \in S_i, s_j \in S_j\},$$

$$E_{n,n+1} = \{(s_n, s_{n+1}) : s_n \in S_n\},$$

La longueur du chemin optimal est alors donnée en calculant  $c_{n+1}$  par la récurrence suivante, dans l'ordre croissant des indices de  $s_j$ .

$$c_1 = 0, c_j = \min \{c_i + c_{ij} : (s_i, s_j) \in E\}$$

Pour tout  $v_i \in V$ , soit  $L_i = \prod_{r \in R} (b_i^r - a_i^r + 1)$  et soit  $D = \sum_{v_i \in V} L_i$ . Si on dispose les

sommets  $s_i \in S_i$  par ordre lexicographique des vecteurs de ressource  $T_i$  associés, la complexité de cette approche est en  $O(D |R|)$ .

### 8.2.2. L'approche par programmation dynamique

Contrairement à l'approche par le graphe d'états, l'approche par programmation dynamique (voir Vovor [60]) ne construit pas un réseau étendu dont la taille est très grande mais plutôt un ensemble d'étiquettes à chaque nœud du réseau, ce qui va permettre de résoudre le problème sur le graphe initial  $G$ .

Associons donc à chaque chemin  $v_1$ - $v_i$  satisfaisant les fenêtres de ressources une **étiquette**  $(T_i, C_i)$  où  $T_i$  et  $C_i$  représentent respectivement le vecteur de consommation de ressources au nœud  $v_i$  et le coût du chemin. Remarquons qu'il peut exister plusieurs chemins allant de  $v_1$  à  $v_i$ , donc l'étiquette sera exceptionnellement notée  $(T_{ik}, C_{ik})$  pour indiquer les caractéristiques du chemin  $k$ . Mais l'indice  $k$  sera omis lorsque le contexte est évident.

Si nous dénotons par  $F_i$  l'ensemble de toutes les paires  $(T_i, C_i)$  représentant la consommation de ressources et le coût des chemins aboutissant à  $v_i$ , le plus court chemin de  $v_1$  à  $v_i$  peut être calculé en résolvant la récurrence suivante.

$$F_1 = \{(T_1, 0)\},$$

$$F_j = \{(T_j, C_j) : C_j = \min\{C_i + c_{ij} : T_i + t_{ij} \leq b_j, T_j = \max\{a_j, T_i + t_{ij}\}, (T_i, C_i) \in F_i, (v_i, v_j) \in A\}\}.$$

Le coût optimal est donné par la formule suivante :

$$\text{Min}\{C_n : (T_n, C_n) \in F_n\}.$$

Il existe d'autres méthodes de programmation dynamique qui résolvent plus efficacement le problème du PCCCR (voir [24] et [20]) en utilisant les concepts de dominance, d'étiquette efficace et de chemin efficace.

### Définition 8.2.2.1

Soient  $(T_{i1}, C_{i1})$  et  $(T_{i2}, C_{i2})$  deux étiquettes associées à des chemins différents allant de  $v_1$  à  $v_i$ . On dira que l'étiquette  $(T_{i1}, C_{i1})$  domine l'étiquette  $(T_{i2}, C_{i2})$  si et seulement si  $(T_{i2}, C_{i2}) - (T_{i1}, C_{i1}) \geq (0, 0)$ .

### Définition 8.2.2.2

Une étiquette  $(T_i, C_i)$  est dite efficace s'il n'existe pas d'autre étiquette qui la domine au nœud  $v_i$ . Un chemin  $v_1$ - $v_i$  sera dit efficace si l'étiquette qui lui est associée est efficace.

Il est évident que cette relation de dominance n'est pas un ordre total et qu'on peut donc avoir plusieurs étiquettes efficaces à un même nœud. Par contre, cet ordre partiel nous permet de dire qu'un chemin efficace  $P_i$  d'étiquette  $(T_{ip}, C_{ip})$  est le plus court

chemin parmi tous les chemins  $Q_i$  de  $v_1$  à  $v_i$  dont les vecteurs de ressources satisfont  $T_{iq}^r \leq T_{ip}^r$  pour tout  $r$ .

Ainsi, on peut modifier l'algorithme de programmation dynamique vu précédemment de telle sorte que seules les étiquettes efficaces (ou non dominées) soient considérées.

Plusieurs implantations sont possibles pour les algorithmes utilisant ce genre de technique (voir [20]). La complexité de ces algorithmes dépend donc du type d'implantation utilisé. Elle dépend entre autres de la procédure qui sélectionne les étiquettes efficaces et des structures de données utilisées pour conserver les étiquettes efficaces.

Pour tout  $v_i \in V$ , soit  $L_i = \prod_{r \in R} (b_i^r - a_i^r + 1)$ ,  $D = \sum_{v_i \in V} L_i$  et  $M = \max_{v_i \in V} \{ L_i \}$ , où  $M$

représente le nombre maximum d'états à un nœud. Selon l'implantation réalisée, la complexité peut être en  $O(D^2 |R|)$ ,  $O(D |R| \cdot (n \log M + M))$ ,  $O(D(n \log M + (\log M)^{|R|-2}))$  (voir Desrochers [20]).

Les nombres d'opérations observés en pratique sont de beaucoup inférieurs à ces bornes, puisque le nombre d'étiquettes présentes au nœud  $i$  est en général de beaucoup inférieur à  $L_i$ .

### 8.2.3. L'approche des deux phases

Cette dernière approche, tirée de Vovor [60], ne diffère pas beaucoup dans sa conception de la seconde, à part que dans celle-là, on résout le problème en deux étapes. Elle consiste dans une première phase à assurer la réalisabilité en utilisant une récurrence "en arrière" pour caractériser la consommation de ressources des sous-chemins dont le prolongement pourrait donner un chemin  $v_1-v_n$  réalisable. Dans une deuxième phase, on utilise une récurrence "en avant" pour trouver le chemin de coût minimal dans le graphe obtenu à la fin de la première phase.



### Phase 1

Pour chaque arc  $(v_i, v_j)$  dans  $A$ , on définit un ensemble  $U_{ij}$ , par ordre décroissant des indices des sommets  $v_i$ , et pour chaque sommet  $v_i$  appartenant à  $V$ , on définit l'ensemble  $U_i$  comme suit :

$$U_{ij} = \{T_i \in \mathbb{Z}^{|\mathcal{R}|} : a_i^r \leq T_i^r \leq b_i^r, r \in \mathcal{R}, T_j = \max(a_j, T_i + t_{ij}), T_i + t_{ij} \leq b_j, T_j \in U_j \text{ si } v_j \neq v_n\}.$$

$$U_i = \bigcup_{(v_i, v_j) \in A} U_{ij}.$$

#### Proposition 8.2.3.1 (Vovor [60])

Soit  $(v_i, v_j)$  un arc appartenant à  $A$ . Un chemin  $v_1-v_i$  réalisable avec un vecteur de ressources  $T_i$  en  $v_i$  peut être inclus dans chemin  $v_1-v_n$  réalisable et passant par l'arc  $(v_i, v_j)$  si et seulement si  $T_i \in U_{ij}$ .

Pour chaque sommet  $v_j$ , on sélectionne dans tous les ensembles  $U_{ij}$  associés à  $v_j$ , les vecteurs correspondants aux chemins  $v_1-v_n$  qui passent par  $v_j$ . L'ensemble de ces vecteurs sera noté  $D_j$ . De la même manière, pour chaque vecteur  $T_j$  dans  $D_j$  on détermine l'ensemble  $R(T_j)$  des vecteurs de consommation de ressource  $T_i$  qui ont servi au calcul de  $T_j$ . Ce calcul se fait par récurrence.

$$D_1 = U_1$$

$$D_j = \{T_j : T_j = \max(a_j, T_i + t_{ij}), T_i \in U_{ij} \cap D_i, (v_i, v_j) \in A\}$$

$$R(T_j) = \{T_i : T_j = \max(a_j, T_i + t_{ij}), T_i \in U_{ij} \cap D_i, (v_i, v_j) \in A\}$$

**Proposition 8.2.3.2 (Vovor [60])**

Étant donné un arc  $(v_i, v_j) \in A$ , il existe un chemin  $v_i-v_n$  réalisable passant par l'arc  $(v_i, v_j)$ , avec pour vecteurs de consommation de ressources  $T_i$  et  $T_j$  si et seulement si  $T_j \in D_j$  et  $T_i \in R(T_j)$ .

**Phase 2**

À présent, on va chercher le chemin optimal dans le réseau construit dans la phase précédente, où  $c(T_i)$  est le coût du chemin arrivant en  $v_i$  ayant comme vecteur de ressources  $T_i$ , comme suit

$T_i$  dénote  $\max(a_i, T_0)$ .

$c(T_i) = 0$  si  $T_i \in D_i$ .      Sinon FIN.

$c(T'_i) = +\infty$  pour tout  $T'_i \in D_i \setminus \{T_i\}$

Soit  $i^*$  tel que  $T_{i^*} = \operatorname{argmin}\{c(T_i) + c_{ij} : T_i \in R(T_j)\}$

$c(T_j) = c(T_{i^*}) + c_{i^*j}$  et  $p(T_j) = v_{i^*}$ ,  $T_j \in D_j$ ,  $v_j \in V - \{v_1\}$

Le chemin optimal peut se reconstruire en utilisant les pointeurs. Par exemple,  $p(T_n^*)$ , où  $T_n^*$  est égal à  $\operatorname{argmin}\{c(T_n) : T_n \in D_n\}$ , dénote le prédécesseur de  $T_n$  dans le chemin optimal.

Dans sa thèse, Vovor considère un problème plus général avec des fenêtres sur les arcs et des fenêtres et des valeurs de mise à jour sur les sommets. L'auteur donne une complexité meilleure que celles des autres méthodes, mais il dit ensuite que la complexité donnée par les auteurs des autres méthodes a été surévaluée. La complexité de cette dernière méthode est d'environ  $O(D^2 |R|)$  où  $D$  est définie comme précédemment.

Les trois méthodes que nous venons de décrire fonctionnent lorsque les contraintes se modélisent en ressources avec des fonctions de prolongation non-décroissantes. Malheureusement, ce n'est pas le cas pour la contrainte "8/24" dont nous avons parlé au chapitre précédent. Dans les algorithmes utilisés présentement, cette contrainte est satisfaite par retour arrière au cours de la recherche des plus courts chemins pour le problème de planification.

### **8.3. Méthodes de résolution proposées**

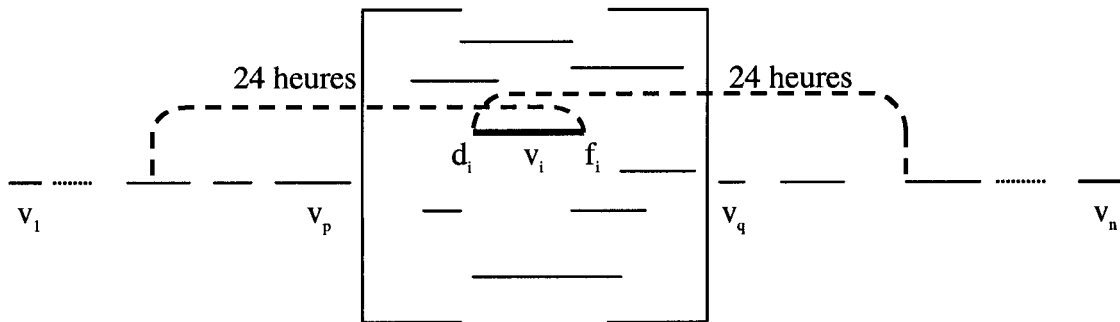
#### **8.3.1. L'approche par programmation dynamique**

L'approche de la programmation dynamique consiste à créer plusieurs ressources pour modéliser la contrainte "8/24". Comme, pour la majorité des compagnies aérienne, au plus  $k$  vols peuvent être affectés à un pilote donné pendant un intervalle de 24 heures (où  $5 \leq k \leq 10$ ), la contrainte peut être modélisée en créant  $2k$  ressources, deux pour chaque vol  $v_i$ . La première mesure le temps de vol dans l'intervalle de 24 heures qui précède la fin de  $v_i$  et la deuxième mesure le temps de vol dans l'intervalle qui suit le début de  $v_i$ .

L'ajout de nouvelles ressources au problème peut engendrer une forte augmentation du nombre d'étiquettes durant la résolution par programmation dynamique, ce qui ralentit considérablement l'exécution. Il faut donc trouver une méthode qui utilise le moins de ressources possible. Nous présentons dans ce qui suit une méthode qui n'utilise que deux ressources.

##### **8.3.1.1. Description du modèle**

Considérons les deux sommets  $v_p$  et  $v_q$  représentant respectivement le dernier segment de vol dans la partie gelée avant la période opérationnelle et le premier segment de vol dans la partie gelée après la période opérationnelle (voir figure 8.1).



**Figure 8.1 Calcul des fenêtres de ressources pour les ressources S' et T'**

Soit  $S'_i$  la ressource représentant le nombre d'heures de travail d'un membre d'équipage donné depuis la fin du vol  $v_p$  jusqu'à la fin du vol  $v_i$ .

Pour chaque nœud (ou vol)  $v_i$  de la partie opérationnelle ( $p < i < q$ ), on associe à  $S'$  la fenêtre de ressource  $[a_i, b_i] = [0, 8 - x_i]$ , où  $x_i$  est le nombre d'heures de vol effectuées par un membre d'équipage donné durant les dernières vingt-quatre heures précédant  $f_i$  (l'heure de fin du vol du nœud  $v_i$ ) dans la partie gelée du chemin précédant la période d'opération. À tout autre nœud du réseau on associe la fenêtre  $[a_i, b_i] = [0, 8]$ .

Soient  $(v_i, v_j)$  un arc du réseau et  $s_j = f_j - d_j$  le temps de vol associé à  $v_j$ . Le nouveau vecteur de consommation de ressource est  $t_{ij} = (t_{ij}^1, t_{ij}^2, t_{ij}^3, \dots, t_{ij}^{|R|}, t_{ij}^{|R|+1})$  où :

$$t_{ij}^{|R|+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq j \leq p \text{ ou } q \leq j \leq n \\ s_j & \text{si } p < j < q \end{cases}. \text{ La ressource } S' \text{ est initialisée à } 0 \text{ au nœud } v_1.$$

La borne supérieure sur la fenêtre de ressource du vol  $v_i$  qui appartient à la période opérationnelle donne le nombre maximum d'heures qu'un employé donné peut effectuer à partir du début de la période opérationnelle et jusqu'à la fin du vol en question, sachant qu'il a déjà effectué  $x_i$  heures de vol dans la partie gelée précédant la période opérationnelle.

Donc si on considère un chemin réalisable  $v_1 - v_i$  où  $S_i'$  dénote la valeur de la ressource  $S'$  associée à ce chemin, l'ajout d'un arc  $(v_i, v_j)$  à ce chemin est toujours possible si  $v_j$  n'est pas dans la partie opérationnelle puisque la consommation est nulle (on suppose bien sûr que les contraintes sur les autres ressources sont satisfaites). Dans le cas où  $v_j$  appartient à la période opérationnelle, la consommation est de  $s_j$  et le chemin  $v_1 - v_j$  sera réalisable si on a

$$S_i' + s_j \leq 8 - x_j.$$

Cette condition signifie que le temps de vol effectué dans la fenêtre  $[f_j-24, f_j]$  (composé des  $x_j$  heures dans la partie gelée précédant la période opérationnelle, des  $S_i'$  heures depuis le début de la période opérationnelle et des  $s_j$  heures du vol correspondant au nœud  $v_j$ ) est inférieur ou égal à huit heures.

En résumé, cette première ressource nous assure que la contrainte de 8/24 est satisfaite pour tout chemin  $v_1 - v_i$  avec  $i \leq q$  où les intervalles de 24 heures se terminent en  $f_i$ .

Nous définissons à présent une autre ressource  $T'$ . Avant de donner la définition de cette ressource, nous décrivons les fenêtres sur les nœuds et la consommation sur les arcs.

À chaque nœud (ou vol)  $v_i$  de la partie opérationnelle ( $p < i < q$ ), nous associons pour  $T'$  la fenêtre de ressource  $[a_i, b_i] = [y_i', 8]$ , où  $y_i'$  est le nombre d'heures de vol à effectuer par un membre d'équipage donné durant les prochaines vingt-quatre heures à partir de  $d_i$  (l'heure du début du vol représenté par  $v_i$ ) dans la partie gelée du chemin suivant la période d'opération. À tout autre nœud du réseau on associe la fenêtre  $[a_i, b_i] = [0, 8]$ .

Soit  $(v_i, v_j)$  un arc du réseau. Le nouveau vecteur de consommation de ressources est  $t_{ij} = (t_{ij}^1, t_{ij}^2, t_{ij}^3, \dots, t_{ij}^{|R|}, t_{ij}^{|R|+1}, t_{ij}^{|R|+2})$ , où  $t_{ij}^{|R|+2}$  est égal à  $\begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq j \leq p \text{ ou } q \leq j \leq n \\ s_j & \text{si } p < j < q \end{cases}$ .

La longueur de la fenêtre de ressource du vol  $v_i$  appartenant à la période opérationnelle donne le nombre maximum d'heures qu'un employé donné peut effectuer à partir du début du vol en question et jusqu'à la fin de la période opérationnelle, sachant qu'il aura à effectuer  $y_i$  heures de vol dans la partie gelée suivant la période opérationnelle.

Soit  $P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  un chemin et soit  $Q = [v_i, \dots, v_n]$  le sous chemin de  $P$  dont les sommets appartiennent à la partie opérationnelle. La fonction de prolongation de la ressource est comme suit.

$$T_1' = 0$$

$$\text{et pour tout } i \text{ allant de } 2 \text{ à } n : T_i' = \max \begin{cases} T_{i-1}' + t_{i-1,i}^{|R|+2} \\ y_i + t_{i-1,i}^{|R|+2} \end{cases}$$

Nous définissons maintenant les  $F^k$ , des variables associées à un chemin qui permettent d'exprimer la contrainte 8/24. Nous allons aussi établir une relation entre les variables  $F^k$  et  $T'$  pour montrer que la ressource  $T'$  assure la satisfaction de la contrainte 8/24.

Pour des sommets  $v_i$  et  $v_k$  du chemin appartenant à la période opérationnelle,  $F_i^k$  dénote  $y_i + \sum_{j=i}^k s_j$  et représente la somme du temps de vol dans la fenêtre  $[d_i, d_i+24]$  qui est sur le chemin de  $v_i$  jusqu'à  $v_k$  et du temps de vol dans la partie gelée suivant la période opérationnelle. Si  $F_i^k$  est au plus 8 pour un chemin donné, alors la contrainte 8/24 commençant en  $d_i$  n'est pas encore violée.

$$\text{Posons } F^k = \max_{i=t, \dots, k} F_i^k.$$

La contrainte 8/24 est satisfaite, pour les intervalles de vingt-quatre heures débutant dans la période opérationnelle, si  $F^r \leq 8$ , ou bien, de manière équivalente, si  $F_i^r \leq 8$  pour tout  $i$  allant de  $t$  à  $r$ , puisque  $F^r = \max_{i=t, \dots, r} F_i^r$ .

Cette contrainte 8/24 est aussi satisfaite si, pour les intervalles de vingt-quatre heures débutant dans la période opérationnelle,  $F_i^k \leq 8$  pour tout  $i$  allant de  $t$  à  $r$  et pour tout  $k$  allant de  $t$  à  $r$ . Cette dernière condition permet l'élimination, le plus tôt possible, des chemins qui ne peuvent pas satisfaire la contrainte 8/24.

### **Théorème 8.3.1.1.1**

Soit  $Q = [v_1, \dots, v_k]$  un chemin aboutissant à un sommet de la période opérationnelle.

Supposons que  $T_t' \leq 8$  pour tout  $t \leq \bullet \leq k$ . Alors  $T_k' = F^k$ .

**Preuve :**

$$F^t = y_t + s_t = T_t' \text{ et}$$

$F^k$  se calcule itérativement le long d'un chemin avec la même fonction de prolongation que celle de  $T'$ .

En effet, par définition de  $F^k$ , on a les égalité suivantes.

$$\begin{aligned} F^k &= \max_{i=1, \dots, k} F_i^k = \max_{F_k^k} \left\{ \left( \max_{i=1, \dots, k-1} F_i^k \right) \right\} = \max_{F_k^k} \left\{ \left( \max_{i=1, \dots, k-1} F_i^{k-1} + s_k \right) \right\} \\ &= \max_{F_k^k} \left\{ \left( \max_{i=1, \dots, k-1} F_i^{k-1} \right) + s_k \right\} = \max_{F_k^k} \left\{ F^{k-1} + s_k \right\} = \max_{F_k^k} \left\{ T_{k-1}' + s_k \right\} = T_k'. \blacksquare \end{aligned}$$

### 8.3.1.2. Algorithme

On peut appliquer un algorithme classique de plus court chemin avec contraintes de ressources (incluant les nouvelles ressources  $S'$  et  $T'$ ) pour trouver un chemin optimal de  $v_1$  à  $v_n$ .

Soit  $T_i = (T_i^1, T_i^2, T_i^3, \dots, T_i^{|R|}, S_i', T_i')$  et  $T_1$  le vecteur de ressources initial. À tout  $v_j$  appartenant à  $V$  est associé l'ensemble des paires formées par les coûts des chemins  $v_1-v_j$  réalisables et les vecteurs de ressource associés.

La longueur du chemin optimal est donnée par la formule

$$\min\{C_n : (T_n, C_n) \text{ est une paire correspondant à un chemin } v_1-v_n\}.$$

### 8.3.2. L'approche par le graphe d'états

Dans cette approche, on distingue deux variantes. La première consiste à générer un graphe d'états pour les deux ressources décrites précédemment et à appliquer ensuite un algorithme de programmation dynamique avec toutes les ressources restantes sur le graphe obtenu. La seconde consiste à générer un graphe d'états pour une seule ressource, disons la première, et à vérifier que la contrainte "8/24" est satisfaite pour les portions de chemins commençant pendant la partie opérationnelle. Cette vérification est équivalente à l'application de la deuxième ressource. De là, on peut appliquer un algorithme de programmation dynamique sur le graphe obtenu comme précédemment. L'avantage de la première variante réside dans le fait que lorsqu'on applique l'algorithme de plus court chemin avec ressources, seulement  $|R|$  ressources sont présentes et le nombre d'étiquettes n'augmente pas. Par contre, le nombre d'états peut être très grand. La deuxième variante pallie un peu à cet inconvénient dans le sens que pour cette dernière on construit un graphe d'états avec une seule ressource au lieu de deux.



### 8.3.2.1. Première variante

Comme annoncé précédemment, nous allons générer le graphe  $G' = (X, E)$  de tous les états possibles des sous-chemins réalisables en provenance de la source pour les deux nouvelles ressources  $S'$  et  $T'$ . Ceci nous permet de nous débarrasser de la contrainte (6) et d'appliquer un algorithme de programmation dynamique pour résoudre le problème restant, qui est un problème classique de plus court chemin avec ressources.

De la même manière que pour la programmation dynamique, on procède en deux étapes.

#### Première étape

La première étape est identique à celle de l'approche par programmation dynamique et comporte en plus la procédure suivante qui construit le graphe d'états pour les deux ressources  $S'$  et  $T'$

#### Génération du graphe d'états pour $S'$ et $T'$

À chaque paire de ressources  $(S_i', T_i')$  correspondant à un chemin aboutissant à  $v_i$ , on associe un sommet  $s_i \in X$ . L'ensemble de tous les sommets  $s_i \in X$  associés à un sommet  $v_i \in V$  sera noté  $X_i$ . L'arc  $(s_i, s_j)$  appartient à  $E$  si et seulement si  $S_j' \leq b_j^{S'}$ ,  $S_j' = \max(a_j^{S'}, S_i' + f_j - d_j)$ ,  $T_j' \leq b_j^{T'}$  et  $T_j' = \max(a_j^{T'}, T_i' + f_j - d_j)$  où  $(S_i', T_i')$  et  $(S_j', T_j')$  sont les paires de ressources de  $S'$  et  $T'$  associées à  $s_i$  et  $s_j$  respectivement. L'ensemble de tous les arcs  $(s_i, s_j)$  appartenant à  $E$ , associés à un arc  $(v_i, v_j)$  donné, sera noté  $E_{ij}$ . Le coût sur l'arc  $(s_i, s_j)$  est égal à  $c_{ij}$ . Des arcs  $(s_n, s_{n+1})$  (pour  $s_n$  dans  $X_n$ ) sont ajoutés à  $E$ .

Le graphe résultant  $G$  peut être généré par les formules récurrentes suivantes.

$$X_1 = \{s_1\},$$

$$X_j = \{s_j : S_j' \leq b_j^{S'}, S_j' = \max(a_j^{S'}, S_i' + t_{ij}^{S'}) \text{ et } T_j' \leq b_j^{T'}, T_j' = \max(a_j^{T'}, T_i' + t_{ij}^{T'})\},$$

$$s_i \in X_i, (v_i, v_j) \in A\}$$

$$E_{ij} = \{(s_i, s_j) : S_j' = \max(a_j^{S'}, S_i' + t_{ij}^{S'}), S_i' + t_{ij}^{S'} \leq b_j^{S'} \text{ et } T_j' = \max(a_j^{T'}, T_i' + t_{ij}^{T'}),$$

$$T_i' + t_{ij}^{T'} \leq b_j^{T'}, s_i \in X_i, s_j \in X_j\}$$

$$E_{n,n+1} = \{(s_n, s_{n+1}) : s_n \in X_n\}$$

### Deuxième étape

À partir de là, on aura tous les chemins dans le graphe d'états de  $v_1$  à  $v_n$ . Tous ces chemins satisfont les contraintes de ressources  $S'$  et  $T'$ . À présent, on peut appliquer un algorithme classique de plus court chemin avec  $|R|$  ressources au graphe d'états.

#### 8.3.2.2. Deuxième variante

Dans cette seconde variante, on génère le graphe d'états  $G' = (X, E)$  pour une seule ressource au lieu de deux, disons  $S'$ . Ensuite, par un retour arrière, on élimine parmi tous les chemins arrivant en  $v_q$  ceux qui ne satisfont pas la contrainte (6). Le graphe obtenu est beaucoup plus petit que celui construit dans la première variante. À partir de là, on peut appliquer un algorithme de programmation dynamique pour résoudre un problème de plus court chemin avec  $|R|$  ressources.

Toujours de la même manière que pour la programmation dynamique, on procède en deux étapes

### Première étape

La première étape est identique à celle de l'approche par programmation dynamique, et comporte en plus la procédure suivante qui construit le graphe d'états pour la ressource  $S'$

### Génération du graphe d'états pour S'

À chaque valeur de la ressource  $S_i'$  correspondant à un chemin aboutissant à  $v_i$ , on associe un sommet  $s_i$ . L'ensemble de tous les sommets  $s_i \in X$  associés à un sommet  $v_i \in V$  sera noté  $X_i$ . L'arc  $(s_i, s_j)$  appartient à  $E$  si et seulement si  $S_j' \leq b_j^{S'}$ ,  $S_j' = \max(a_j^{S'}, S_i' + t_{ij}^{S'})$  où  $S_i'$  et  $S_j'$  sont les valeurs de la ressource  $S'$  associés à  $s_i$  et  $s_j$  respectivement. L'ensemble de tous les arcs  $(s_i, s_j)$  appartenant à  $E$  associés à un arc  $(v_i, v_j)$  donné, sera noté  $E_{ij}$ . Le coût sur l'arc  $(s_i, s_j)$  est égal à  $c_{ij}$ . Des arcs  $(s_n, s_{n+1})$  (pour  $s_n$  dans  $X_n$ ) sont ajoutés à  $E$ .

Le graphe résultant  $G$  peut être généré par les formules récurrentes suivantes.

$$X_1 = \{s_1 : S' = 0\}$$

$$X_j = \{s_j : S_j' \leq b_j^{S'}, S_j' = \max(a_j^{S'}, S_i' + t_{ij}^{S'}), s_i \in X_i, (v_i, v_j) \in A\}$$

$$E_{ij} = \{(s_i, s_j) : S_j' = \max(a_j^{S'}, S_i' + t_{ij}^{S'}), S_i' + t_{ij}^{S'} \leq b_j^{S'}, s_i \in X_i, s_j \in X_j\}$$

$$E_{n,n+1} = \{(s_n, s_{n+1}) : s_n \in X_n\}$$

### Deuxième étape

On a maintenant tous les chemins de  $v_1$  à  $v_q$  dans le graphe d'états. Tous ces chemins satisfont la contrainte de ressource pour  $S'$ . Il reste maintenant à choisir, par un retour arrière, les chemins qui après avoir été reliés au chemin qui va de  $v_q$  à  $v_n$  satisfont la contrainte de ressource pour  $T'$ . Une fois que les autres chemins ont été éliminés, on peut utiliser un algorithme classique de programmation dynamique pour la résolution du problème de plus court chemin avec  $|R|$  contraintes de ressources.

## 8.4. Résultats de calcul

Comme seule la compagnie Air Canada fait la collecte des données pour le problème de la gestion quotidienne des équipages aériens, nous avons été en quelque sorte obligés de travailler avec les données de cette dernière compagnie, même si la contrainte “8/24” n’apparaît ni dans la convention collective, ni dans les règlements fédéraux de l’aviation civile au Canada. Nous avons donc implanté notre algorithme de programmation dynamique à ces données en ajoutant la contrainte “8/24” de manière artificielle.

Pour évaluer l’efficacité de notre méthode pour la résolution du problème de gestion d’équipages aériens durant le jour d’opération, nous avons considéré un problème de taille réelle où la période opérationnelle contient 99 vols actifs, avec 36 pilotes disponibles. Nous utilisons pour la résolution un algorithme de génération de colonnes où le problème maître est un problème de couverture et les sous-problèmes sont des problèmes de plus courts chemins avec cinq ressources. Nous avons résolu, dans un premier temps, ce problème sans introduire nos deux ressources supplémentaires dans les sous-problèmes et nous avons compté les étiquettes générées pour un réseau donné correspondant à un pilote (voir tableau 8.1).

Dans les tableaux 8.1 et 8.2, la première colonne représente le numéro du nœud de l’arbre de branchement, la deuxième colonne représente le numéro d’itération de GenCol, la troisième donne le nombre d’étiquettes générées par l’algorithme de programmation dynamique qui résout le problème de plus court chemin avant application de la dominance, la quatrième donne le nombre d’étiquettes après application de la dominance, la cinquième représente le taux de rejet des étiquettes induit par l’application de la dominance et la dernière colonne donne le nombre d’étiquettes de coût négatif au puits (c’est-à-dire les colonnes qu’on va introduire dans le problème maître).

**Tableau 8.1 : Nombre d'étiquettes avec les cinq ressources initiales**

Nœud	Itération	NbEtAvDom	NbEtApDom	%Rejet	NbEtNegPuit
0	2	4428	2582	41	38
0	3	7160	4992	30	466
0	4	6234	4180	32	217
0	5	5933	3825	35	147
0	6	5450	3553	34	127
0	7	5524	3639	34	94
0	8	6026	3982	33	57
0	9	6000	3885	35	32
0	10	5924	3802	35	15
0	11	5825	3705	36	4
0	12	5989	3820	36	4
0	13	5723	3630	36	5
0	14	5816	3709	36	1
0	15	5753	3654	36	0
1	17	5661	3565	37	0

Dans un second temps, nous avons incorporé nos deux ressources pour satisfaire la contrainte "8/24", nous avons résolu ce nouveau problème où les sous-problèmes sont des plus courts chemins avec sept ressources et nous avons compté les étiquettes générées dans ce cas (voir tableau 8.2). Ceci nous a permis de constater que l'introduction des deux nouvelles ressources ne fait pas augmenter de manière sensible le nombre d'étiquettes. De plus, le temps d'exécution qui était de vingt secondes est passé à vingt et une secondes environ.

Comme expliqué précédemment, le retour arrière revient à vérifier qu'un chemin arrivant en un sommet donné satisfait la contrainte "8/24" chaque fois que l'on ajoute un arc au chemin considéré. Cette procédure requiert un temps de calcul considérable et multiplie par un facteur de trois à cinq le temps nécessaire à la résolution. Notre algorithme vérifie la contrainte "8/24" en parcourant les chemins et nous n'avons pas besoin de faire des retours arrière. La conclusion à tirer de nos résultats est que

l'algorithme proposé, où nous avons ajouté deux nouvelles ressources, est beaucoup plus efficace que la procédure de retour arrière.

**Tableau 8.2 : Nombre d'étiquettes avec les cinq ressources initiales + les deux ressources supplémentaires**

Nœud	Itération	NbEtAvDom	NbEtApDom	%Rejet	NbEtNegPuit
0	2	4378	2568	41	38
0	3	7289	5192	28	491
0	4	6094	4177	31	211
0	5	5937	4000	32	183
0	6	5545	3674	33	125
0	7	5328	3482	34	89
0	8	6161	4172	32	73
0	9	6002	3890	35	22
0	10	6175	3981	35	4
0	11	5885	3791	35	1
0	12	5853	3776	35	0
0	14	5765	3702	35	1
1	15	5766	3702	35	0
2	17	5671	3619	36	0

Étant donné que le premier algorithme donne d'excellents résultats, nous nous sommes posé la question de l'intérêt de l'implantation du deuxième algorithme, qui consiste à construire le graphe d'états pour nos deux nouvelles ressources et à appliquer un algorithme de programmation dynamique avec les cinq anciennes ressources. Pour répondre à cette question, nous avons décidé d'utiliser le premier algorithme comme outil pour évaluer la taille du graphe d'états. Nous avons donc supprimé les cinq anciennes ressources, nous avons ajouté les deux nouvelles ressources, puis nous avons appliqué notre algorithme à ce nouveau problème. Le nombre d'étiquettes générées par cet algorithme pour chaque sommet du graphe initial correspond au nombre d'états associés à ce sommet dans le graphe d'états. La somme totale de ces nombres (14862) donne le nombre total de sommets du graphe d'états.

Comme on dispose de 36 réseaux (un pour chaque pilote), le nombre de sommets d'un réseau donné est en moyenne de  $14862/36 \approx 412$  sommets.

L'application d'un algorithme de programmation dynamique, pour satisfaire les cinq anciennes contraintes de ressources, nécessiterait un temps d'exécution beaucoup plus important sur le graphe d'états que sur le graphe initial, puisque le nombre de nœuds du graphe d'états est deux fois plus grand que celui du graphe initial. L'ordre du graphe initial étant égal à 198.

Chaque étiquette provenant du nœud  $i$  dans le graphe initial (sans la contrainte "8/24") se retrouve sur chaque état associé au nœud  $i$  pendant la résolution du plus court chemin avec les cinq ressources restantes. Le nombre total de ces étiquettes est donc beaucoup plus grand dans le graphe d'états que dans le graphe initial. Nous avons donc décidé de ne pas réaliser l'implantation de ce deuxième algorithme.

# CONCLUSION

Nous avons étudié dans la première partie de cette thèse le problème de l'absorbant de taille minimale dans un graphe. En particulier, nous résolvons le problème de l'absorbant minimum quand le graphe est une grille croisée complète et nous établissons une borne inférieure sur le nombre d'absorption quand le graphe est une grille carrée complète. Cette preuve constitue une réponse par l'affirmative à un problème posé, il y a près d'une vingtaine d'années. De plus, nous donnons une preuve de la conjecture de Vizing en ce qui concerne le nombre d'absorption du produit cartésien de deux graphes quand ces graphes sont réguliers et de degré suffisamment grand. Dans la seconde partie de la thèse, nous étudions le problème du plus court chemin avec contraintes. Nous proposons une manière de formuler une contrainte "difficile" avec des ressources pour enfin ramener le problème à un problème de plus court chemin avec ressources. Ce dernier peut être résolu par des algorithmes pseudo-polynomiaux de programmation dynamique.

Le problème du nombre d'absorption de la grille carrée complète a suscité l'intérêt d'un grand nombre de chercheurs. C'est un problème qui de nos jours reste ouvert dans le cas général. Dans notre travail, nous nous sommes intéressés à ce même problème pour les grilles croisées complètes, qui sont très semblables aux grilles carrées. Pour atteindre notre but, nous avons décomposé notre travail en trois étapes regroupées en trois chapitres : 2, 3 et 4.

Nous avons établi au chapitre 2 les résultats donnant l'absorbant de taille minimale pour les grilles croisées complètes quand l'une des chaînes est de longueur fixe  $k$ , inférieure ou égale à neuf. Toutes les preuves sont basées sur une induction sur le nombre de sommets du graphe combinée à certains résultats préliminaires qui simplifient les démonstrations. L'originalité des preuves provient



du fait que nous avons introduit, pour certains cas, de nouveaux graphes semblables aux grilles croisées complètes que nous utilisons pour permettre le fonctionnement de l'induction.

La preuve du cas général, c'est-à-dire pour une grille dont les longueurs des chaînes sont arbitraires, se fait aussi par induction, ce qui nécessite une base de récurrence. Nous avons donc adapté dans le chapitre 3 un algorithme de programmation dynamique qui calcule le nombre d'absorption de la grille carrée complète, au calcul du nombre d'absorption de la grille croisée complète en rajoutant certaines améliorations. Cet algorithme nous a permis de calculer le nombre d'absorption du produit croisé de deux chaînes pour  $k \leq 33$  et  $n \leq 40$ . L'ajout de ces améliorations à l'algorithme initial nous a permis aussi de calculer le nombre d'absorption du produit carré de deux chaînes quand  $k = 16$  et  $16 \leq n \leq 50$  alors qu'il était très difficile, avec les mêmes moyens informatiques, de dépasser  $k = 10$  sans ces améliorations.

En introduisant la notion de quasi-absorption, nous avons pu donner dans le chapitre 4 une formule générale pour toute grille croisée complète, quelles que soient les valeurs de  $k \geq 12$ , pour  $n = 12$  ou  $n \geq 14$ , ce qui constitue le résultat principal de cette première partie. Nous avons posé par la même occasion une conjecture sur le nombre d'absorption de la grille carrée complète que notre algorithme satisfait à partir de  $k = 16$  et  $n = 16$ .

Dans le chapitre 5, nous avons introduit la notion de déficience d'un sous-ensemble donné de sommets dans un graphe et nous avons montré que les deux problèmes : "trouver un absorbant de taille minimale" et "trouver un absorbant de déficience minimale dans un graphe" étaient équivalents. Cette notion de déficience combinée à certains résultats établis aux chapitres 3 et 4 nous a permis de répondre par l'affirmative à une question posée par Paul Erdős en 1983 concernant l'amélioration de la borne inférieure pour le nombre d'absorption de la grille carrée complète.

Enfin, dans le chapitre 6, nous étudions la conjecture de Vizing. Nous avons réussi à prouver cette dernière quand les graphes sont réguliers et de degré suffisamment grand.

Dans la seconde partie de la thèse, c'est-à-dire les chapitres 7 et 8, nous avons étudié le problème du plus court chemin avec contraintes. Dans la majorité des cas, ces problèmes sont résolus par des algorithmes de programmation dynamique quand les contraintes se modélisent comme des contraintes de ressources. Malheureusement, parmi les contraintes que nous devions satisfaire, nous avons la contrainte qu'un pilote donné ne pouvait effectuer plus de huit heures de vol dans n'importe quel intervalle de vingt-quatre heures. Cette contrainte est difficile à gérer car elle ne peut être formulée comme une ressource représentant le nombre d'heures de vol durant les dernières vingt-quatre heures du fait qu'elle n'est pas non décroissante. Elle était donc satisfaite auparavant par une procédure de retour arrière très coûteuse en temps. La solution que nous avons proposée est de modéliser cette contrainte par l'ajout de deux ressources, qui elles, sont non décroissantes. Ceci nous a permis de formuler le problème comme un problème de plus court chemin avec ressources pour lequel il existe des algorithmes pseudo polynomiaux de programmation dynamique très efficaces.

Nous avons donc proposé deux algorithmes pour résoudre le problème. Le premier est un algorithme de programmation dynamique où nous rajoutons nos deux ressources. Le deuxième consiste à construire le graphe d'états satisfaisant nos deux ressources supplémentaires, puis à appliquer un algorithme de programmation dynamique pour résoudre le problème initial sur le nouveau graphe. Après l'implantation du premier algorithme, nous avons remarqué que les deux ressources supplémentaires ne faisaient pas augmenter de façon significative le nombre d'étiquettes par rapport au nombre d'étiquettes sans ces deux ressources. Nous avons constaté aussi que le temps de résolution restait sensiblement le même. Grâce à cette implantation nous avons pu évaluer la taille du graphe d'états pour nos deux ressources supplémentaires en supprimant les autres ressources et en comptant le nombre d'étiquettes engendrées par cet

algorithme. La taille du graphe d'états s'il avait été construit aurait été d'environ deux fois la taille du graphe initial. Nous avons ainsi décidé de ne pas implanter le second algorithme qui n'aurait pas pu donner de meilleurs résultats que le premier.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANBIL, R., GELMAN, E., PATTY, B. et TANGA, R. (1991). Recent advances in crew pairing optimization at American Airlines, *Interfaces*, vol. 21, pp. 62-74.
- [2] BALL ROUSE, W. W. (1892). Mathematical recreations and problems of past and present times, *MacMillan*, London.
- [3] BEASLEY, J. E. et CHRISTOFIDES, N. (1989). An algorithm for the resource constrained shortest path problem, *Networks*, 19, pp. 379-394.
- [4] BERGE, C. (1958). The theory of graphs and its applications, *Dunod*, Paris.
- [5] BERGE, C. (1973). Graphs and Hypergraphs, *North-Holland*, Amsterdam.
- [6] BERGE, C. (1983). Graphes, *Gauthier-Villars*, Paris.
- [7] CHANG, T. Y. et CLARK, W. E. (1993). The domination numbers of the  $5 \times n$  and the  $6 \times n$  grid graphs, *Journal of Graph Theory*, vol. 17, n° 1, pp. 81-107.
- [8] CHANG, T. Y., CLARK, W. E. et HARE, E. O. (1994). Domination numbers of complete grid graphs, *Ars Combinatoria*, vol. 38, pp. 97-111.

- [9] CHEN, G., PIOTROWSKI, W. et SHREVE, W. (1996). A Partition approach to Vizing's conjecture, *Journal of Graph Theory*, vol. 21, n° 1, pp. 103-111.
- [10] CHERIFI, R., GRAVIER, S., LAGRAULA, X., PAYAN, C. et ZIGHEM, I. (1999). Domination number of the cross product of paths, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 94, pp. 101-139.
- [11] CHERIFI, R., GRAVIER, S. et ZIGHEM, I. (2001). Bounds on domination number of complete grid graphs, *Ars Combinatoria*, vol. 60, pp. 407-311.
- [12] CHERIFI, R. et PAYAN, C. (1995). Absorption dans les produits de graphes, Séminaire Grenoble-Lausanne, France.
- [13] CLARK, W. E., SHEKHTMAN, B., SUEN, S. et FISHER, D. C. (1996). Upper bounds for the domination number of graphs, (preprint).
- [14] COCKAYNE, E. J., HARE, E. O., Hedetniemi, S. T. et Wimer, T. V. (1985). Bounds for the domination number of grid graphs, *Congressus Numerantium*, vol. 47, pp. 217-228.
- [15] COCKAYNE, E. J. et HEDETNIEMI, S. T. (1977). Towards a theory of domination in graphs, *Networks*, vol. 7, pp. 247-261.
- [16] CRAINIC, T. G. et ROUSSEAU, J. M. (1987). The Column generation principle and the airline crew scheduling problem, *INFOR*, vol. 25, pp. 136-151.

- [17] De Jaenisch, C. F. (1862). Application de l'analyse mathématique au jeu des échecs, Petrograd.
- [18] Desaulniers, G., Desrosiers, J., Gamache, M. et Soumis, F. (1997). Crew scheduling in air transportation, *Les Cahiers du GERAD*.
- [19] DESAULNIERS, G., DESROSIERS, J., DUMAS, Y., MARC, S., RIOUX, B., SOLOMON, M. M. et SOUMIS, F. (1997). Crew pairing at Air France, *European Journal of Operational Research*, vol. 97, pp. 245-259.
- [20] DESROCHERS, M. (1986). La fabrication d'horaires de travail pour les conducteurs d'autobus par une méthode de génération de colonnes, Thèse de doctorat, Université de Montréal, Montréal.
- [21] DESROCHERS, M. (1988). An algorithm for the shortest path problem with resource constraints, *Les Cahiers du GERAD*, G-88-27, École des Hautes Études Commerciales, Montréal.
- [22] DESROCHERS, M. et SOUMIS, F. (1988). A generalized permanent labelling algorithm for the shortest path problem with time windows, *INFOR*, vol. 26, pp. 191-212.
- [23] DESROCHERS, M. et SOUMIS, F. (1988). A reoptimization algorithm for the shortest path problem with time windows. *European Journal of Operational Research*, vol. 35, pp. 242-254.
- [24] DESROSIERS, J., DUMAS, Y., SOLOMON, M. M. et SOUMIS, F. (1994). Time constrained routing and scheduling, *Handbooks in*

*Operations Research and Management Science*, vol. 8 on Network Routing, M. O. Ball et al. (éditeurs), Elsevier Science B. V., pp. 35-139.

- [25] DESROSIERS, J., PELLETIER, P. et SOUMIS, F. (1983). Plus court chemin avec contraintes d'horaires, *RAIRO*, vol. 17, pp. 357-377.
- [26] DESROSIERS, J., SOUMIS, F. et DESROCHERS, M. (1984). Routing with time windows by column generation, *Networks*, vol. 14, pp. 545-565.
- [27] DEWDNEY, A. K. (1981). Fast Turing reductions between problems in NP, *Report 71*, University of Western Ontario.
- [28] EL-ZAHAR, M. et PAREEK, C. M. (1991). Domination number of products of graphs, *Ars Combinatoria*, vol. 31, pp. 223-227.
- [29] FAUDREE, R. J. et SCHELP, R. H. (1990). The domination number for the product of graphs, *Congressus Numerantium*, vol. 79, pp. 29-33.
- [30] FINK, J. F., JACOBSON, M. S., KINCH, L. F. et ROBERTS, J. (1990). The boundage number of a graph, *Discrete Math.*, vol. 86, pp. 47-57.
- [31] FISHER, D.C. (1993). The domination number of complete grid graphs, (preprint).
- [32] GAMACHE, M. et SOUMIS, F. (1997). A method for optimally solving the rostering problem, *Operations Research in Airline Industry*, sous presse.

- [33] GAMACHE, M., SOUMIS, F., VILLENEUVE, D., DESROSIERS, J. et GÉLINAS, E. (1997). The preferential bidding system at Air Canada, *Transportation Science*, sous presse.
- [34] GAREY, M. R. et JOHNSON, D.S. (1979). Computers and intractability: A Guide to the theory of NP-completeness, *Freeman*, New York.
- [35] GLANERT, W. A. (1984). Timetable approach to the assignment of pilots to rotations, *1984 AGIFORS Symposium Proceedings*, vol 24, pp. 369-391.
- [36] GRAVES, G. W., McBRIDE, R. D., GERSHKOFF, I., ANDERSON, D. et MAHIDHARA, D. (1993). Flight crew scheduling, *Management Science*, vol 39, pp. 736-745.
- [37] GRAVIER, S. (1995). Coloration et produits de graphes, thèse de doctorat, Lab. LEIBNIZ-IMAG, Univ. J. Fourier, Grenoble.
- [38] GRAVIER, S. et KHELLADI, A. (1995). On the domination number of cross products of graphs, *Discrete Math.*, vol. 145, pp. 273-277.
- [39] GRAVIER, S. et MOLLARD, M. (1997). On domination numbers of cartesian products of paths, *Discrete Math.*, vol. 80, pp. 247-250.
- [40] HARE, E. O. et HARE, W. R. (1993). Domination in graphs similar to grid graphs, *Congressus Numerantium*, vol. 97, pp. 143-154.



- [41] HARE, E. O., HEDETNIEMI, S. T. et HARE, W. R. (1986). Algorithms for computing the domination number of  $k \times n$  complete grid graphs, *Congressus Numerantium*, vol. 55, pp. 81-92.
- [42] HARTNELL, B. L. et RALL, D. F. (1991). On Vizing's conjecture, *Congressus Numerantium*, vol. 82, pp. 87-96.
- [43] HEDETNIEMI, S. T. et LASCAR, R. C. (1990). Topics on domination, *Discrete Math.*, vol. 86.
- [44] HOFFMAN, K. L. et PADBERG, M. (1993). Solving airline crew scheduling problems by branch-and-cut, *Management Science*, vol. 39, pp. 657-682.
- [45] HWANG, K. et BRIGGS, F. A. (1984). Computer architecture and parallel processing, *McGraw-Hill*.
- [46] JACOBSON, M. S. et KINCH, L. F. (1983). On the domination number of products of graphs : I, *Ars Combinatoria*, vol. 18, pp. 33-44.
- [47] JACOBSON, M. S. et KINCH, L. F. (1986). On the domination of the products of graphs : II, Trees, *Journal of Graph Theory*, vol. 10, pp. 97-106.
- [48] JAEGER, F. et PAYAN, C. (1972). Relation du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple, *C. R. Acad. Sc. Paris, Série A*, vol. 274, pp. 728-730.

- [49] JOHNSON, D. S. (1985). The NP-completeness column : An ongoing guide, *J. Algorithms*, vol. 6, pp. 434-451.
- [50] KLAVZAR, S. et SEIFTER, N. (1995). Dominating cartesian products of cycles, *Discrete Applied Math.*, vol. 59, pp. 129-136.
- [51] KLAVZAR, S. et ZMAREK, B. (1996). On a Vizing-like conjecture for direct product graphs, manuscript.
- [52] LAGRAULA, X. (1996). Mémoire de maîtrise en informatique, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- [53] LAVOIE, S., MINOUX, M. et ODIER, E. (1988). A new approach to crew pairing problems by column generation and application to air transport, *European Journal of Operational Research*, vol. 35, pp. 45-58.
- [54] LOVÀSZ, L. (1975). On the ratio of optimal and integral fractional covers, *Discrete Math.*, vol 13, pp. 383-390.
- [55] MOORE, R., EVANS, J. et NGO, H. (1978). Computerized tailored blocking, *1978 AGIFORS Symposium Proceedings*, vol. 18, pp. 343-361.
- [56] ORE, O. (1962). Theory of graphs, *Am. Math. Soc. Colloq. Publ.*, 38, Providence, RI.
- [57] PAYAN, C. (1976). Sur quelques problèmes de couvertures et de couplages en combinatoire, thèse de doctorat, Univ. J. Fourier, Grenoble.

- [58] STOJKOVIC, M., SOUMIS, F. et DESROSIERS, J. (1997). The operational airline crew scheduling problem, *Transportation Science*, sous presse.
- [59] VIZING, V. G. (1963). The cartesian product of graphs, *Vyc. Sis.* vol. 9, pp. 30-43.
- [60] VOVOR, T. (1997). Problèmes de chemins bicritères ou avec des contraintes de ressources : algorithmes et applications, thèse de Ph. D., École Polytechnique de Montréal, Montréal.
- [61] WEDELIN, D. (1995). An algorithm for large scale 0-1 integer programming with applications to airline crew scheduling, *Annals of Operations Research*, vol. 57, pp. 283-301.
- [62] ZIGHEM, I. (1998). Étude d'invariants de graphes planaires, thèse de doctorat, Lab. LEIBNIZ-IMAG, Univ. J. Fourier, Grenoble.