



**Titre:** Analyse de sensibilités de transfert de chaleur turbulent  
Title:

**Auteur:** Emmanuel Colin  
Author:

**Date:** 2003

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Colin, E. (2003). Analyse de sensibilités de transfert de chaleur turbulent  
Citation: [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
<https://publications.polymtl.ca/7162/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7162/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Dominique Pelletier  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:



In compliance with the  
Canadian Privacy Legislation  
some supporting forms  
may have been removed from  
this dissertation.

While these forms may be included  
in the document page count,  
their removal does not represent  
any loss of content from the dissertation.







UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ANALYSE DE SENSIBILITÉS DE TRANSFERT DE CHALEUR  
TURBULENT

EMMANUEL COLIN  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
SEPTEMBRE 2003





National Library  
of Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

Acquisitions et  
services bibliographiques

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 0-612-86439-1*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 0-612-86439-1*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

**Canada**



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ANALYSE DE SENSIBILITÉS DE TRANSFERT DE CHALEUR  
TURBULENT

présenté par: COLIN Emmanuel

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. LAKIS Aouni A., Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. CAMARERO Ricardo, Ph.D., membre



## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche, Dominique Pelletier, pour son accueil sympathique, la qualité de son encadrement et sa disponibilité sans faille.

Je tiens également à remercier Stéphane Etienne, chercheur du laboratoire, pour son caractère serviable et enjoué. Son assistance m'a été précieuse tout au long de mes travaux. J'adresse aussi mes remerciements à, dans l'ordre d'apparition au labo, Jean-Noël Mahieu, Hristina Hristova, Simon Painchaud-Ouellet, Dominique Tremblay et Pierre Edmond, pour l'excellente ambiance de travail.



## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente une formulation générale de la méthode des sensibilités appliquée au transfert de chaleur turbulent. Les sensibilités mesurent l'influence d'un paramètre de conception sur la réponse de l'écoulement. Le modèle standard de turbulence  $k - \epsilon$  avec lois de paroi est utilisé pour modéliser la turbulence. Nous traitons le transfert de chaleur turbulent en utilisant une conductivité turbulente. Cette formulation s'applique pour des dépendances complexes de paramètres et s'applique à un large spectre de problèmes. Un modèle d'éléments finis adaptatif est utilisé afin de répondre à la complexité de la turbulence. Après une description détaillée de la formulation, nous menons une vérification minutieuse de la méthodologie sur un problème possédant une solution analytique connue. La méthodologie est ensuite validée pour un problème de convection turbulente le long d'une plaque plane. La méthode des sensibilités est ensuite appliquée au transfert de chaleur turbulent sur une marche descendante et de nouveau le long d'une plaque plane. Nous détaillons plusieurs usages de la méthode des sensibilités : calcul rapide d'écoulements voisins, identification des paramètres de design importants et analyse d'incertitude. Dans le dernier cas, l'information fournie par les sensibilités est mise à profit pour mesurer l'incertitude des variables de réponse du système (vitesse, température, coefficient de friction,...) lorsque l'incertitude des paramètres en entrée est connue. Une particularité importante de la méthode des sensibilités est la possibilité de déterminer la contribution de chaque paramètre dans l'estimation de l'incertitude. Une importance toute particulière est donnée au nombre de Stanton, nombre adimensionnel caractérisant les échanges thermiques aux parois. Le mémoire se termine sur une extension de notre méthode au transfert de chaleur conjugué entre un solide conducteur et un écoulement turbulent.



## ABSTRACT

This thesis presents a general formulation of the continuous sensitivity equation method (SEM) for turbulent heat transfer. Sensitivities characterize the influence of a design parameter on a variable. The standard  $k - \epsilon$  model of turbulence with wall functions is used to model turbulence. Turbulent heat transfer is handled using an eddy conductivity. The formulation accounts for complex parameter dependence and is suitable for a wide range of problems. The complexity of turbulence problems requires the application of a finite element method. In addition to a detailed description of the formulation, we perform careful verification of the methodology on a problem possessing a closed form solution. The methodology is then demonstrated by performing a detailed sensitivity analysis of the turbulent forced convection over a heated flat plate. The SEM is then applied to turbulent heat transfer over a backward facing step and, once again, to the case of the turbulent flow over a heated flat plate. Several uses of SEM are demonstrated : fast computation of nearby flows for a range of parameters, identification of key parameters controlling the flow, and uncertainty analysis. In the latter case, sensitivity information is used to cascade parameter uncertainties through the CFD code to yield uncertainty analysis estimates of the system response (velocity, temperature, skin friction, ...). One important feature of the SEM is its ability to provide detailed information about the uncertainty contribution of each parameter. Details include sensitivity of the Stanton number with respect to the closure coefficients of the  $k - \epsilon$  model and the parameters appearing in the momentum and thermal wall functions. This thesis ends with an extension to conjugated heat transfer between a solid and a turbulent flow.



## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xi
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xiv
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xix
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xx
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1    CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES ET REVUE BIBLIO- GRAPHIQUE . . . . .	3
1.1    Modélisation des écoulements . . . . .	4
1.1.1    Équations et modèle $k - \epsilon$ . . . . .	4
1.1.2    Transfert de chaleur turbulent . . . . .	5
1.2    Résolution numérique . . . . .	7
1.2.1    Méthode des éléments finis et résolution matricielle . . . . .	7
1.2.2    Code utilisé . . . . .	8
1.2.3    Sensibilités . . . . .	9
CHAPITRE 2    ÉQUATIONS ET MÉTHODE DE RÉOLUTION . . . . .	11
2.1    Modélisation mathématique . . . . .	11



2.1.1	Équations moyennes . . . . .	11
2.1.2	Modèle de turbulence $k - \epsilon$ . . . . .	14
2.1.3	Résolution en variables logarithmiques . . . . .	17
2.2	Méthode d'éléments finis . . . . .	20
2.2.1	Éléments utilisés . . . . .	20
2.2.2	Formulation variationnelle . . . . .	22
2.2.3	Méthode d'éléments finis . . . . .	24
2.2.3.1	Discrétisation de la solution . . . . .	24
2.2.3.2	Imposition des conditions aux limites . . . . .	25
2.3	Méthodes des sensibilités . . . . .	26
2.3.1	Définition et utilisations des sensibilités . . . . .	26
2.3.2	Équations générales des sensibilités . . . . .	27
2.3.3	Méthode d'éléments finis pour les sensibilités . . . . .	31
2.3.4	Conditions aux limites pour les sensibilités . . . . .	31
2.3.5	Sensibilités normalisées . . . . .	33
CHAPITRE 3 CONDITIONS AUX FRONTIÈRES POUR LES PAROIS		
	SOLIDES . . . . .	34
3.1	Présentation du problème . . . . .	34
3.2	Loi de paroi en vitesse . . . . .	37
3.2.1	Loi à une échelle de vitesse . . . . .	37
3.2.2	Limitations de la loi de paroi à une échelle de vitesse . . . .	40
3.2.3	Loi à deux échelles de vitesse . . . . .	41
3.3	Implémentation de la loi de paroi en vitesse . . . . .	41
3.3.1	Insertion de la loi de paroi dans le maillage . . . . .	43
3.3.2	Écriture des conditions aux limites . . . . .	44
3.3.3	Algorithme de résolution . . . . .	45
3.4	Loi de paroi thermique . . . . .	47



3.5	Implémentation de la loi de paroi thermique . . . . .	48
3.6	Lois de paroi pour les sensibilités . . . . .	49
CHAPITRE 4 CONSIDÉRATIONS NUMÉRIQUES . . . . .		50
4.1	Stabilisation numérique . . . . .	50
4.1.1	Origine des instabilités . . . . .	50
4.1.2	Méthode SUPG . . . . .	52
4.1.3	Méthode GLS . . . . .	53
4.1.4	Laquelle choisir . . . . .	54
4.2	Adaptativité . . . . .	55
4.2.1	Estimation d'erreur . . . . .	56
4.2.2	Opérateur de transition . . . . .	58
4.2.3	Stratégie d'adaptativité . . . . .	60
4.2.4	Autres contraintes affectant le remaillage . . . . .	60
CHAPITRE 5 VÉRIFICATION ET VALIDATION DE LA MÉTHODE . . . . .		62
5.1	Vérification sur un cas simple : la couche cisailée . . . . .	62
5.1.1	Intérêt de la méthode des solutions manufacturées . . . . .	62
5.1.2	Présentation de la solution analytique . . . . .	63
5.1.3	Présentation de l'expérience numérique . . . . .	65
5.1.4	Étude de la convergence de la solution . . . . .	66
5.1.5	Conclusion . . . . .	68
5.2	Validation de la méthode pour un écoulement turbulent thermique avec loi de paroi : la plaque plane . . . . .	71
5.2.1	Présentation du problème . . . . .	71
5.2.2	Résultats . . . . .	74
5.2.2.1	Convergence de l'écoulement . . . . .	74
5.2.2.2	Convergence de la loi de paroi . . . . .	78
5.2.2.3	Comparaison avec des corrélations . . . . .	81



5.2.2.4	Convergence des sensibilités . . . . .	85
5.2.2.5	Étude des sensibilités classiques . . . . .	86
5.2.2.6	Étude des sensibilités de $C_f$ et $St$ . . . . .	92
5.2.3	Conclusion . . . . .	96
CHAPITRE 6 APPLICATION DE LA MÉTHODE DES SENSIBILITÉS		97
6.1	Analyse d'incertitude . . . . .	97
6.1.1	Présentation de l'analyse d'incertitude . . . . .	97
6.1.2	Marche descendante : un exemple complet . . . . .	100
6.1.3	Résultats . . . . .	109
6.2	Extrapolations de solution . . . . .	118
6.2.1	Sensibilités : un degré supérieur de résolution . . . . .	118
6.2.2	Exemples d'extrapolation : retour sur l'écoulement sur une plaque plane . . . . .	120
CHAPITRE 7 TRANSFERT DE CHALEUR CONJUGUÉ . . . . .		127
7.1	Présentation du problème . . . . .	127
7.2	Interface fluide-solide . . . . .	129
7.3	Vérification de la méthode . . . . .	133
7.4	Écoulement turbulent autour d'une marche descendante avec trans- fert de chaleur . . . . .	138
7.4.1	Présentation du problème . . . . .	138
7.4.2	Analyse des résultats . . . . .	139
CONCLUSION . . . . .		146
RÉFÉRENCES . . . . .		149
ANNEXES . . . . .		154



## LISTE DES FIGURES

FIG. 1.1	Schéma de fonctionnement du code . . . . .	9
FIG. 2.1	Algorithme de résolution . . . . .	18
FIG. 2.2	Élément de Crouzeix-Raviart . . . . .	21
FIG. 2.3	Exemple de sensibilités . . . . .	27
FIG. 2.4	Conditions aux limites pour un paramètre de forme . . . . .	32
FIG. 3.1	Comparaison entre un profil laminaire et un profil turbulent	35
FIG. 3.2	Distribution du rapport $\mu_t/\mu$ . . . . .	36
FIG. 3.3	Distribution de la contrainte de cisaillement $\tau$ . . . . .	38
FIG. 3.4	Loi de paroi universelle pour les écoulements turbulents . . .	40
FIG. 3.5	Zones de validité du modèle $k - \epsilon$ et de la loi de paroi . . .	42
FIG. 3.6	Schéma du maillage à la paroi . . . . .	43
FIG. 3.7	Différence entre domaine maillé et domaine physique . . . .	44
FIG. 3.8	Algorithme pour la loi de paroi en vitesse . . . . .	46
FIG. 3.9	Algorithme pour la loi de paroi en température . . . . .	49
FIG. 4.1	Construction du gradient $\nabla V^*$ . . . . .	57
FIG. 5.1	Géométrie et conditions aux limites pour la couche cisailée	65
FIG. 5.2	Maillage final pour la couche cisailée . . . . .	66
FIG. 5.3	Courbe de convergence pour l'écoulement . . . . .	67
FIG. 5.4	Courbes de convergence pour les sensibilités . . . . .	69
FIG. 5.5	Géométrie et conditions aux limites pour la plaque plane . .	72
FIG. 5.6	Séquence de maillages pour le plaque plane . . . . .	75
FIG. 5.7	Courbes de convergence de l'écoulement le long de la plaque	76
FIG. 5.8	Courbes de convergence de l'écoulement en coupe à $x/L = 0.5$	77
FIG. 5.9	Courbe de convergence de $y^+$ le long de la plaque . . . . .	79
FIG. 5.10	Courbe de convergence des lois de paroi . . . . .	80
FIG. 5.11	Étude du coefficient de friction . . . . .	82



FIG. 5.12	Étude du nombre de Stanton . . . . .	84
FIG. 5.13	Convergence de $S_u^{\infty}$ le long de la loi de paroi . . . . .	85
FIG. 5.14	Convergence et corrélations pour $U_{\infty} \frac{\partial C_f}{\partial U_{\infty}}$ et pour $U_{\infty} \frac{\partial St}{\partial U_{\infty}}$ . . .	87
FIG. 5.15	Sensibilités par rapport aux paramètres de turbulence . . . .	89
FIG. 5.16	Sensibilités par rapport aux paramètres de la loi de paroi . .	90
FIG. 5.17	Sensibilités par rapport aux paramètres thermiques . . . . .	91
FIG. 5.18	Vérification des expressions de $S_T^{T_w}$ et $S_T^{T_{\infty}}$ sur la plaque plane	93
FIG. 5.19	Sensibilités du coefficient de friction $C_f$ . . . . .	94
FIG. 5.20	Sensibilités du nombre de Stanton $St$ . . . . .	95
FIG. 6.1	Calcul de l'incertitude . . . . .	98
FIG. 6.2	Comparaison entre l'incertitude arithmétique et l'incertitude quadratique . . . . .	100
FIG. 6.3	Géométrie et condition aux limites pour la marche descendante	101
FIG. 6.4	Maillage final pour la marche descendante . . . . .	102
FIG. 6.5	Isovaleurs pour la marche descendante . . . . .	103
FIG. 6.6	Distribution de $y^+$ sur les parois . . . . .	104
FIG. 6.7	Distribution de $C_f$ pour les différentes conditions aux limites	105
FIG. 6.8	Distribution des échelles de vitesse de la loi de paroi . . . . .	106
FIG. 6.9	Distributions de $T_w$ et de $T$ en $y = d$ . . . . .	107
FIG. 6.10	Convergence de $St$ et $\lambda \frac{\partial St}{\partial \lambda}$ . . . . .	108
FIG. 6.11	Distribution de $C_f$ . . . . .	110
FIG. 6.12	Sensibilités normalisées pour $C_f$ . . . . .	112
FIG. 6.13	Contributions de chaque paramètres de turbulence à l'incer- titude de $C_f$ . . . . .	113
FIG. 6.14	Distribution de $St$ . . . . .	114
FIG. 6.15	Contributions de chaque paramètres à l'incertitude de $St$ . .	116
FIG. 6.16	Vérification graphique de l'expression de $S_T^{q_w}$ . . . . .	117
FIG. 6.17	Extrapolation de solution . . . . .	119



FIG. 6.18	Influence de $d$ sur $St$ . . . . .	121
FIG. 6.19	Influence de $d$ sur $y^+$ et sur $T^+$ . . . . .	122
FIG. 6.20	Extrapolation cubique . . . . .	124
FIG. 6.21	Extrapolations linéaires pour une dépendance concave . . . .	125
FIG. 7.1	Maillage du fluide et du solide . . . . .	128
FIG. 7.2	Interface entre le fluide et le solide . . . . .	130
FIG. 7.3	Algorithme pour l'interface thermique en régime turbulent .	132
FIG. 7.4	Géométrie et conditions aux limites pour la plaque plane avec transfert de chaleur conjugué . . . . .	134
FIG. 7.5	Distributions de $T_w$ et de $T(y = d)$ avec ou sans transfert conjugué . . . . .	135
FIG. 7.6	Distributions de $St$ avec ou sans transfert conjugué . . . . .	136
FIG. 7.7	Exemple de maillage en toile d'araignée dans le solide . . . .	136
FIG. 7.8	Exemple de maillage amélioré . . . . .	136
FIG. 7.9	Distributions de $c_p \frac{\partial St}{\partial c_p}$ avec ou sans transfert conjugué . . .	137
FIG. 7.10	Géométrie et condition aux limites pour la marche descen- dante avec solide conducteur . . . . .	139
FIG. 7.11	Maillage final pour la marche descendante avec transfert de chaleur conjugué . . . . .	139
FIG. 7.12	Flux de chaleur normal à l'interface pour le cuivre et le pyrex	140
FIG. 7.13	Distributions de $T$ le long de l'interface . . . . .	141
FIG. 7.14	Coupes de température en $x/L = 10$ . . . . .	142
FIG. 7.15	Distributions de $S_T^{qs}$ le long de l'interface . . . . .	143
FIG. 7.16	Distribution de la résistance de contact . . . . .	144
FIG. 7.17	Distribution de la sensibilité de $r$ par rapport à $c_p$ . . . . .	145



## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

### Caractères usuels

$a$	paramètre de design
$a_1, a_2$	coefficient de la loi de paroi thermique
$\mathbf{a}$	vecteur de paramètres de design
$A^+$	constante de Van Driest
$C_\mu, C_1, C_2$	coefficients du modèle de fermeture $k - \epsilon$
$C_f$	coefficient de friction
$c_p$	chaleur massique à pression constante
$d$	distance à la paroi imposée
$e$	erreur
$E$	paramètre de rugosité
$\mathbf{f}$	force volumique
$h$	coefficient de transfert de chaleur, taille élémentaire courante
$H$	distance de référence pour la couche limite
$k$	énergie cinétique de la turbulence
$K$	maille
$L$	distance de référence
$\hat{\mathbf{n}}$	vecteur unitaire normal extérieur à la surface
$N$	nombre d'éléments
$N_u, N_T, \dots$	nombre de noeuds (pour $u, T, \dots$ )
$N_i^u, N_i^T, \dots$	fonctions d'interpolations (pour $u, T, \dots$ )
$P$	pression



$Pr$	nombre de Prandtl
$Pr_t$	nombre de Prandtl turbulent
$q$	flux de chaleur, terme source dans l'équation d'énergie
$q_k, q_\epsilon$	termes sources pour la turbulence
$r$	résistance de contact
$R_u, R_T, \dots$	résidu (pour $u, T, \dots$ )
$\mathbf{R}$	tenseur de Reynolds
$Re$	nombre de Reynolds
$Re_t$	nombre de Reynolds turbulent
$Re_x$	nombre de Reynolds basé sur la position $x$ le long de la plaque
$S_V^a$	sensibilité de la variable $V$ par rapport à $a$
$St$	nombre de Stanton
$t_x, t_y$	composante du vecteur tangent
$\hat{t}$	traction sur les frontières
$T$	température
$u, v, w$	projections du champ de vitesse selon les axes $Ox, Oy$ et $Oz$
$u_k$	vitesse de turbulence du modèle à deux échelle de vitesse
$u_t$	vitesse tangentielle
$u_*$	vitesse de cisaillement du modèle à une échelle de vitesse
$u_*^*$	vitesse de cisaillement du modèle à deux échelles de vitesse
$\mathbf{u}$	champ de vitesse
$U_r$	vitesse de référence
$U_\infty$	vitesse à l'infini
$V$	lettre désignant une variable



$x, y$	abscisse, ordonnée
$x_r$	abscisse du point de stagnation
$x_*$	abscisse adimensionnalisée
$y_c^+$	limite entre les deux zones de la loi de paroi
$y_d^+$	limite de la loi de paroi

### Lettres calligraphiques

$\mathcal{E}$	logarithme naturel de $\epsilon$
$\mathcal{K}$	logarithme naturel de $k$

### Lettres grecques

$\alpha$	paramètre de design
$\beta$	coefficient de la loi de paroi thermique
$\delta$	épaisseur de couche limite, taille élémentaire cible, petite perturbation
$\delta_u, \delta_T$	épaisseur des couches limites hydrodynamique et thermique
$\delta_p, \delta_u, \dots$	fonctions test (pour la pression, la vitesse,...)
$\Delta$	variation ou incertitude
$\epsilon$	taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence
$\dot{\gamma}$	tenseur du taux de déformation
$\Gamma$	frontière du domaine de calcul $\Omega$
$\kappa$	constante de Kármán
$\lambda$	conductivité dynamique
$\lambda_t$	conductivité turbulente



$\mu$	viscosité dynamique
$\mu_t$	viscosité turbulente
$\nu$	viscosité cinématique
$\rho$	masse volumique
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	coefficients du modèle de fermeture $k - \epsilon$
$\tau$	coefficient de friction
$\boldsymbol{\tau}$	tenseur des forces visqueuses
$\psi$	polynôme de Hermite
$\xi$	facteur de réduction de l'erreur
$\Omega$	domaine de calcul

### Indices et exposants

<i>exa</i>	solution exacte
<i>f</i>	du fluide
<i>h</i>	solution éléments finis
<i>i</i>	composante
<i>i, 1, 2, ...</i>	valeur nodale en <i>i, 1, 2, ...</i>
<i>K</i>	élémentaire
<i>min</i>	minimal
<i>s</i>	du solide
<i>w</i>	à la paroi
0	valeur nominale
$\infty$	à l'infini
<i>T</i>	transposée
+	valeur adimensionnelle du modèle de loi de paroi



$*$	projection de la solution éléments finis
$'$	sensibilité des propriétés physiques,
	valeur fluctuante
$-$	valeur moyenne
$\sim$	valeur normalisée,
	récupération de la projection de la solution éléments finis

### Symboles

$\nabla$	opérateur gradient
$\nabla \cdot$	opérateur divergence
$\partial \cdot / \partial \cdot$	dérivée partielle
$D \cdot / D \cdot$	dérivée particulaire
$\  \cdot \ $	norme



## LISTE DES TABLEAUX

TAB. 2.1	Constantes du modèle $k - \epsilon$ de Launder et Spalding . . . . .	16
TAB. 5.1	Indice d'efficacité pour le dernier maillage . . . . .	70
TAB. 6.1	Marche descendante : distances à la paroi . . . . .	101
TAB. 6.2	Incertitudes sur les coefficients de sensibilités . . . . .	109
TAB. 6.3	Incertitude relative des coefficients de sensibilités . . . . .	112



## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	LOIS DE PAROIS POUR LES SENSIBILITÉS . . . . .	154
I.1	Loi de paroi en vitesse . . . . .	154
I.2	Loi de paroi en température . . . . .	155
ANNEXE II	MÉTHODES DE STABILISATION . . . . .	157
II.1	Mouvement . . . . .	157
II.1.1	Galerkin . . . . .	157
II.1.2	SUPG . . . . .	157
II.1.3	GLS . . . . .	158
II.2	Energie . . . . .	158
II.2.1	Galerkin . . . . .	158
II.2.2	SUPG . . . . .	159
II.2.3	GLS . . . . .	159
II.3	Equation de $\mathcal{K}$ . . . . .	159
II.3.1	Galerkin . . . . .	159
II.3.2	SUPG . . . . .	160
II.3.3	GLS . . . . .	160
II.4	Equation de $\mathcal{E}$ . . . . .	161
II.4.1	Galerkin . . . . .	161
II.4.2	SUPG . . . . .	161
II.4.3	GLS . . . . .	162
ANNEXE III	SOLUTION ANALYTIQUE DE LA COUCHE CISAILLÉE	163
III.1	Rappel de la solution exacte . . . . .	163
III.2	Quelques calculs intermédiaires . . . . .	164
III.3	Derivées des différentes grandeurs . . . . .	165



III.4 Sensibilités . . . . .	167
III.4.1 Sensibilités par rapport à $U_1$ . . . . .	167
III.4.2 Sensibilités par rapport à $C_\mu$ . . . . .	170
III.4.3 Sensibilités par rapport à $T_1$ . . . . .	171
III.5 Termes sources pour l'écoulement . . . . .	172
III.6 Termes sources pour les sensibilités . . . . .	172
III.7 Passage au logarithmique . . . . .	174
III.7.1 Ecoulement . . . . .	174
III.7.2 Sensibilités . . . . .	175



## INTRODUCTION

La mécanique des fluides assistée par ordinateur (MFAO) est l'outil incontournable de l'ingénieur désirant mesurer des températures et modéliser des dispositifs chauffants en régime turbulent. Plus en amont, le développement d'une méthode numérique pour la résolution de problèmes de transfert de chaleur turbulent doit à la fois présenter des garanties quant à la qualité des résultats et offrir à l'ingénieur des informations utiles à sa modélisation. Dans le soucis de répondre à ces deux enjeux, ce mémoire présente la combinaison d'une méthode d'équations des sensibilités pour le transfert de chaleur turbulent et d'une méthode d'éléments finis adaptative.

Les sensibilités sont utilisées pour quantifier l'influence d'un paramètre de conception sur l'écoulement ou le champ de température. Ces paramètres contrôlant le système peuvent être les conditions aux limites, les coefficients de fermeture d'un modèle ou encore la géométrie... L'étude des sensibilités nous fournit alors une base d'informations enrichie, utile à la compréhension de problèmes complexes tels que celui du transfert de chaleur turbulent.

La méthode de l'équation des sensibilités a déjà été développée par Turgeon *et al.* [40, 41, 42, 43, 45] pour les écoulements turbulents isothermes et pour le transfert de chaleur laminaire. Le présent mémoire réconcilie ces deux familles d'écoulements et présente une extension du modèle de turbulence  $k - \epsilon$  avec lois de paroi [44, 45] appliquée au transfert de chaleur. De plus, les précédentes étapes de développement du code utilisé [19, 20, 17, 30, 27] nous ont démontré la puissance de l'adaptation de maillage dans le contrôle de la précision des résultats numériques. L'adaptativité est ici utilisée pour contrôler la précision des sensibilités aussi bien que celle de l'écoulement.



La structure du mémoire est la suivante. Le chapitre 1 présente brièvement le cadre de notre étude par des considérations générales portant aussi bien sur la modélisation utilisée que sur la méthode de résolution numérique. Ce chapitre est aussi l'occasion d'une courte revue bibliographique sur les travaux qui ont précédé et permis la présente étude. Les chapitres 2 et 3 traitent le volet mathématique de la modélisation : partant des équations de la mécanique des fluides, nous présentons la méthode des éléments finis, la méthode des sensibilités et la modélisation des lois de paroi en régime turbulent. Le chapitre 4 traite des méthodes de stabilisation numérique et du processus de remaillage adaptatif. Nous y détaillons le processus itératif d'adaptation, du calcul d'erreur jusqu'à l'opérateur de transition. Ce chapitre clot la présentation de la méthode et le chapitre 5 présente deux cas test permettant de vérifier le bon fonctionnement du résolveur et de l'estimation d'erreur. Les chapitres 6 et 7 présentent ensuite les applications de la méthode développée. Le chapitre 6 se penche plus spécialement sur l'utilisation des sensibilités dans les problèmes de transfert de chaleur turbulent, tandis que le chapitre 7 explore le transfert de chaleur conjugué entre un fluide conducteur et un écoulement turbulent. Le tout se termine par une conclusion.



## CHAPITRE 1

### CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Depuis les dernières décennies, les méthodes numériques ont connu une importance croissante en mécanique des fluides. Les premières simulations d'écoulements potentiels, utilisant les différences finies, voient le jour dans les années 60. Dans les années 70 apparaissent les méthodes d'éléments finis et la résolution des équations de Navier-Stokes. La complexité des problèmes augmente : on passe à la 3 - D dans les années 80 et on utilise des maillages adaptatifs dès les années 90. Cependant, des problèmes restent : on ne sait pas simuler la fumée d'une cigarette, l'écoulement d'une rivière, l'écoulement en arrière d'un avion au décollage, etc... Parallèlement à cela se sont développés une foule de codes industriels, tels que FIDAP, Fluent, N3S, Star-CD, codes privilégiant souvent la rapidité de calcul sur la précision du résultat, tout en témoignant du caractère incontournable de l'utilisation des méthodes numériques en mécanique des fluides. On trouvera d'ailleurs sur le site [http ://icemcfd.com/cfd/CFD\\_codes.html](http://icemcfd.com/cfd/CFD_codes.html) une liste de codes industriels.

Le transfert de chaleur turbulent fait partie de ces simulations complexes, ayant une vaste plage d'applications dans l'industrie. Ce chapitre dresse un bref aperçu des aspects de modélisation, ainsi que les principales propriétés du code utilisé. Les détails théoriques seront repris dans les chapitres suivants.



## 1.1 Modélisation des écoulements

La première étape dans la conception d'un code est la modélisation de l'écoulement. Cette section se veut une vue d'ensemble, sous forme de revue bibliographique, sur les équations liées au transfert de chaleur turbulent.

### 1.1.1 Équations et modèle $k - \epsilon$

Le point de départ de notre modélisation est la conservation de la masse, du mouvement et de l'énergie. On utilise alors les équations de Navier-Stokes :

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \nabla \cdot \mu \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) + \mathbf{f} \quad (1.2)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q \quad (1.3)$$

La turbulence pouvant être considérée comme un écoulement de nature tourbillonnaire irrégulier, une approche statistique est utilisée. Ainsi, on sépare l'écoulement entre partie moyenne et partie fluctuante.

On aboutit alors aux équations de Reynolds, mais le nombre d'inconnues a augmenté. Il nous faut alors modéliser la turbulence. Les observations expérimentales concluent à une augmentation de la viscosité efficace des fluides (traînée des bateaux accrues, mélange plus rapide d'un fluide dans l'autre,...), ainsi qu'une augmentation des transferts de chaleur.

A partir de cette idée naissent les modèles dits à *viscosité turbulente*. Les travaux de Prandtl (1925) <sup>[33]</sup> et de Kolmogorov (1941) <sup>[24, 25, 26]</sup>, sur l'étude des vitesses et



des longueurs caractéristiques de la turbulence, amène à une relation entre cette nouvelle viscosité, notée  $\mu_t$ , l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  et son taux de dissipation  $\epsilon$  :

$$\mu_t = \text{constante} \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \quad (1.4)$$

On utilise alors le modèle  $k-\epsilon$  de Launder et Spalding [28], définissant les équations manquant à notre système. Ce modèle atteint cependant ses limites près des parois solides, et demande une nouvelle modélisation, à l'aide de *lois de paroi*.

### 1.1.2 Transfert de chaleur turbulent

Notre sujet est plus particulièrement le transfert de chaleur turbulent. Nous venons de parler de l'augmentation de transfert de chaleur lorsqu'un écoulement laminaire devenait turbulent. L'étude complète de ces écoulements dépasse bien évidemment le cadre de la présente étude, et on trouvera dans les ouvrages de Bejan [3] et de Kays et Crawford [22] tous les détails sur le transfert de chaleur.

Nous ferons de plus une grande simplification en laissant de côté le terme de Boussinesq dans l'équation de mouvement. Ce terme représente la force de gravitation liée au gradient de température vertical, ce que l'on appelle en langage courant la convection naturelle : l'air chaud monte et l'air froid descend ! Négliger ce terme simplifie grandement notre problème. En effet, les gradients de température cessent d'agir sur le champ de vitesse, et le couplage vitesse-température se transforme en un couplage à sens unique : le champ de vitesse influence le champ de température, mais pas l'inverse.

Alors que le coefficient de friction est une donnée d'étude pertinente pour le mouvement, notre principale grandeur pour le transfert de chaleur sera le nombre de



Stanton. Le tableau suivant illustre l'analogie entre les deux :

	MOUVEMENT	ENERGIE
Equations :	Inertie $\sim$ Friction	Convection $\sim$ Conduction
Coefficient :	de friction $\tau$	de transfert de chaleur $h$
Adimensionnalisé :	$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$	$St = \frac{h}{\rho c_p U_\infty}$

où  $h$  est défini de la façon suivante :

$$q_w = h(T_w - T_\infty) \quad (1.5)$$

Ici,  $q_w$  est le flux de chaleur à la paroi,  $T_w$  la température à la paroi et  $T_\infty$  la température loin de la paroi.

Si l'analogie avec le mouvement aide à la compréhension des phénomènes de convection turbulente, il faut pouvoir quantifier les différences d'échelles. Pour cela, revenons aux écoulements laminaires : on peut établir un rapport entre l'épaisseur de couche limite hydrodynamique et thermique grâce au nombre de Prandtl  $Pr$  :

$$\frac{\delta_T}{\delta_u} \sim Pr^\alpha \quad \text{avec} \quad \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \quad (1.6)$$

où

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad (1.7)$$

et où  $\delta_u$  est l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique et  $\delta_T$  l'épaisseur de la couche limite thermique.



Dans le cas turbulent, ce rapport se complique puisque interviennent viscosité et conductivité turbulentes, donnant lieu au concept du nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$ . Nous avons choisi pour ces deux nombres des valeurs de proche de l'unité<sup>[28]</sup>.

## 1.2 Résolution numérique

La modélisation utilisée étant définie, on utilise les mathématiques appliquées, et en particulier les méthodes d'éléments finis, pour résoudre les équations. Cette section introduit la notion de résolution numérique et présente le code utilisé dans son fonctionnement et ses particularités.

### 1.2.1 Méthode des éléments finis et résolution matricielle

On résout le système d'équations avec une méthode d'éléments finis. On trouvera les fondements mathématiques de cette méthode dans les ouvrages de Reddy<sup>[34]</sup>, de Gunzburger<sup>[12]</sup>, et tout spécialement dans celui de Reddy et Gartling<sup>[35]</sup> en ce qui concerne les écoulements de dynamique des fluides et transfert de chaleur.

On maille donc notre domaine en éléments finis pour diviser notre problème en autant de problèmes élémentaires. On utilise alors des fonctions d'interpolations comme base de résolution, ce qui permet de ramener notre problème continu à une résolution matricielle discrète de paramètres de pondérations de ces fonctions d'interpolations.

On arrive donc à une équation de type  $A \cdot x = b$  où la matrice  $A$  est carrée et dont la taille peut atteindre l'ordre de grandeur du Giga-octet, surtout en turbulence où on voit apparaître deux nouvelles variables. La stratégie adoptée est de découpler la turbulence du reste de l'écoulement. Le lien entre ces deux nouveaux systèmes



sont la viscosité turbulente  $\mu_t$  et la conductivité turbulente  $\lambda_t$ .

### 1.2.2 Code utilisé

Le code que l'on utilise pour nos simulations a été développé depuis les 20 dernières années au sein du département de Génie Mécanique de l'École Polytechnique de Montréal et est divisé en trois modules, comme indiqué sur la figure 1.1.

Au début de notre résolution, nous devons créer des fichiers de données initiaux comprenant d'une part la description de l'écoulement, la géométrie, les propriétés physiques du fluide, les conditions aux frontières, les critères de convergence et d'autre part la stratégie d'adaptativité et un canevas initial pour le maillage de fond.

Un cycle itératif se déroule alors de la façon suivante : on crée le maillage à l'aide d'Amiral, on résout à l'aide de Cadyf, puis Adapt calcule les erreurs numériques, extrait les données si besoin, et crée le nouveau canevas de maillage de fond adapté. On peut alors arrêter la simulation ou relancer un nouveau cycle adaptatif.

L'adaptativité a pour but de créer le maillage optimal : ainsi, on démarre souvent avec des maillages très grossiers de quelques centaines de noeuds. Ensuite, plusieurs cycles sont nécessaires à l'obtention d'une solution convergée indépendante du maillage. On verra par la suite que, pour des simulations d'écoulements turbulents, on lance de 4 à 6 cycles adaptatifs pour arriver à des maillages définitifs comprenant entre 50 et 90,000 noeuds.



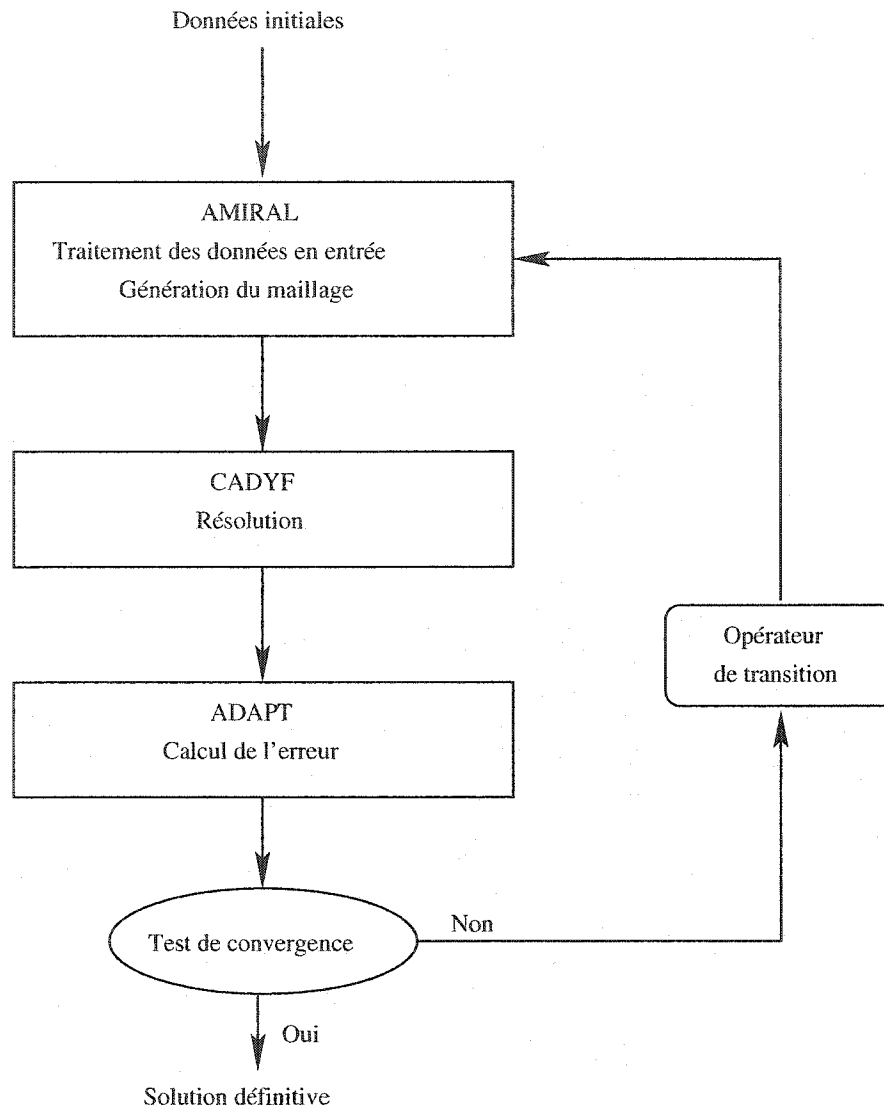


FIG. 1.1 Schéma de fonctionnement du code

### 1.2.3 Sensibilités

L'intérêt de ce code ne se limite pas à l'adaptativité. Son deuxième et principal atout est le calcul des sensibilités. Cette notion a émergé vers la fin des années 70 [11, 13] et se penche sur les interactions entre les paramètres définissant un système et le comportement de ce système, caractérisé par une variable de réponse.



L'idée est alors de calculer le gradient de cette variable de réponse par rapport aux paramètres de design.

Les applications des sensibilités sont nombreuses et on peut établir une liste des utilisations les plus courantes des sensibilités :

- design optimal <sup>[14]</sup>,
- analyse de sensibilités de système <sup>[43]</sup>,
- identification de zones sensibles <sup>[43]</sup>,
- identification de paramètres dominants <sup>[9]</sup>,
- analyse d'incertitude <sup>[7]</sup>,
- calcul rapide de solutions voisines <sup>[43]</sup>.

Ceci laisse entrevoir la richesse de l'étude des sensibilités. Les prochains chapitres traiteront plus en détails du calcul des sensibilités et seront l'occasion d'applications plus concrètes des sensibilités. Nous détaillerons alors leur mode d'emploi au fur et à mesure de nos besoins.



## CHAPITRE 2

### ÉQUATIONS ET MÉTHODE DE RÉOLUTION

Ce chapitre présente la modélisation mathématique du problème ainsi que les détails de la méthode des éléments finis telle que nous l'utilisons. Nous apporterons un soin particulier au caractère thermique du problème. Cette partie se conclut avec l'introduction du calcul des sensibilités.

#### 2.1 Modélisation mathématique

Commençons par examiner la modélisation mathématique. Celle-ci étant à la base de toutes nos préoccupations numériques futures, cette section détaille les étapes nous permettant de passer des équations de Navier-Stokes aux équations que nous utiliserons.

##### 2.1.1 Équations moyennes

Les équations qui modélisent le comportement des fluides incompressibles visqueux turbulents sont les équations de Navier-Stokes. Notre étude ne s'étendant pas aux écoulements transitoires, ces équations prennent la forme suivante :

– équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

– équation de mouvement

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} \quad (2.2)$$



– équation d'énergie

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse,  $\rho$  est la masse volumique,  $P$  est la pression,  $\mathbf{f}$  est une force,  $c_p$  est la chaleur massique,  $T$  est la température,  $\lambda$  est la conductivité dynamique et  $q$  est une source de chaleur. Enfin,  $\boldsymbol{\tau}$  représente le tenseur des forces visqueuses :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (2.4)$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique.

La turbulence consistant en des fluctuations aléatoires des grandeurs caractérisant l'écoulement, nous avons utilisé une approche statistique. Pour cela, écrivons ces grandeurs comme la somme de leur moyenne temporelle (designée par un trait supérieur) et de leur fluctuation (désignée par une apostrophe) :

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$$

$$P = \overline{P} + P'$$

$$T = \overline{T} + T'$$

où les grandeurs moyennes sont définies par :

$$\overline{F} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} F(t) dt$$

Nous pouvons alors insérer ces nouvelles écritures dans nos équations et appliquer à ces dernières l'opérateur de moyenne. L'opérateur de moyenne étant linéaire, le seul problème réside dans les termes non linéaires  $\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  et  $\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T$ . En effet, si



l'on développe ces termes, obtient :

$$\overline{\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}} = \rho \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{R}$$

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \rho c_p \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{T} + \rho c_p \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' T})$$

où  $\mathbf{R}$  est le tenseur de Reynolds (1895) défini comme suit :

$$R_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (2.5)$$

On aboutit alors aux équations moyennes de Reynolds :

– équation de continuité

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.6)$$

– équation de mouvement

$$\rho \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{P} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{R}) + \mathbf{f} \quad (2.7)$$

– équation d'énergie

$$\rho c_p \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{T} = \nabla \cdot (\lambda \nabla \bar{T}) - \rho c_p \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' T}) + q \quad (2.8)$$

Pour les équations de mouvement et d'énergie, la non-linéarité a fait apparaître des termes mixtes de corrélation. Ces termes représentent le problème fondamental de la turbulence. En effet, ce sont de nouvelles inconnues de notre problème : comme nous n'avons pas de nouvelles équations, notre système n'est pas encore fermé.



### 2.1.2 Modèle de turbulence $k - \epsilon$

Revenons au tenseur de Reynolds pour énoncer deux remarques importantes. La première est triviale : le tenseur est symétrique. La deuxième permet d'introduire la définition de l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  :

$$\text{tr}(\mathbf{R}) = -\rho \overline{u'_i u'_i} = -\rho(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) = -2\rho k$$

avec

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

A la lumière de ces considérations, le tenseur de Reynolds peut être modélisé par une viscosité turbulente d'après l'approximation de Boussinesq (1877) :

$$R_{ij} = \mu_t \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.9)$$

où  $\mu_t$  est la viscosité turbulente. La viscosité turbulente n'est pas une propriété du fluide, mais une caractéristique de l'écoulement. Néanmoins, son rôle est le même que celui de la viscosité dynamique.

On peut alors par analogie définir une conductivité turbulente  $\lambda_T$  pour modéliser le terme  $\overline{\mathbf{u}'T}$  de l'équation d'énergie :

$$-\rho c_p \overline{\mathbf{u}'T} = \lambda_T \nabla T \quad (2.10)$$

On peut alors écrire les équations (2.6), (2.7) et (2.8) en incluant ces modifications :

– équation de continuité

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.11)$$



– équation de mouvement

$$\rho \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \bar{P} + \nabla \cdot \left[ (\mu + \mu_t) (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \right] + \mathbf{f} \quad (2.12)$$

– équation d'énergie

$$\rho c_p \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{T} = \nabla \cdot [(\lambda + \lambda_t) \nabla \bar{T}] + q \quad (2.13)$$

Le terme  $\frac{2}{3}\rho k$  étant une contrainte normale, nous l'avons inclus dans le terme de pression. Les nouvelles inconnues de notre problème sont maintenant définies : il s'agit de la viscosité turbulente  $\mu_t$  et de la conductivité turbulente  $\lambda_t$ .

On détermine ces inconnues grâce au modèle  $k-\epsilon$  de Launder et Spalding<sup>[28]</sup>, où  $k$  est l'énergie cinétique de turbulence et  $\epsilon$  est le taux de dissipation de la turbulence défini par :

$$\epsilon = \overline{\nu \nabla \mathbf{u}' : (\nabla \mathbf{u}')^T} \quad (2.14)$$

On calcule alors la viscosité turbulente à l'aide de la relation de Kolmogorov-Prandtl<sup>[2]</sup> :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.15)$$

où  $C_\mu$  est une constante.

En ce qui concerne la conductivité turbulente, elle est reliée à la viscosité turbulente par la relation :

$$\lambda_t = \mu_t \frac{c_p}{\text{Pr}_t} \quad (2.16)$$

où  $\text{Pr}_t$  est le nombre de Prandtl turbulent fixé à

$$\text{Pr}_t = 1 \quad (2.17)$$



Finalement, les inconnues fermant le système sont  $k$  et  $\epsilon$ . On assure la fermeture mathématique du système à l'aide des deux équations aux dérivées partielles du modèle de Launder et Spalding :

– équation de  $k$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_t P - \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_t} + q_k \quad (2.18)$$

– équation de  $\epsilon$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + \rho C_1 C_\mu k P - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} + q_\epsilon \quad (2.19)$$

où

$$P = \nabla \mathbf{u} : \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right)$$

Dans un soucis de clarté, nous omettrons à présent les traits supérieurs pour désigner les valeurs moyennées. Les valeurs des constantes utilisées dans ces équations sont données au tableau 2.1 :

TAB. 2.1 Constantes du modèle  $k - \epsilon$  de Launder et Spalding

$C_\mu$	$C_1$	$C_2$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

On résoud les équations de la turbulence de façon découplée, grâce à l'algorithme suivant [18] :

1. Fournir des valeurs initiales à  $u$ ,  $v$ ,  $T$ ,  $k$  et  $\epsilon$
2. Évaluer la valeur initiale de  $\mu_t$
3. Résolution

3.1. Résoudre les équations de continuité, de mouvement et d'énergie (pour



un  $\mu_t$  donné)

3.2. Résoudre les équations de  $k$  et  $\epsilon$  (pour un  $\mu_t$  et un  $u$  donnés)

3.2.1. Résoudre l'équation de  $k$

3.2.2. Résoudre l'équation de  $\epsilon$

3.2.3. Calculer la nouvelle valeur de  $\mu_t$

3.2.4. Selon un critère d'arrêt, poursuivre les sous-itérations (aller à l'étape (3.2)) ou continuer à (3.3)

3.3. Selon un critère d'arrêt, poursuivre les itérations (aller à l'étape (3)) ou arrêter

La figure 2.1 permet de visualiser l'algorithme. Les petites flèches correspondent aux sous-itérations. On a une boucle principale passant par  $u$ ,  $k$  et  $\epsilon$  et une boucle secondaire sur les variables de turbulence uniquement.

### 2.1.3 Résolution en variables logarithmiques

Les grandeurs de la turbulence  $k$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu_t$  et  $\lambda_t$  sont, par définition, positives. Cependant, rien dans les équations (2.18) et (2.19) n'assure la positivité de ces variables. Ainsi, même si la solution exacte du modèle est nécessairement positive, il se peut que la solution numérique devienne négative. La résolution numérique devient alors critique.

Une solution à ce problème est apportée par Ilinca <sup>[18]</sup> et consiste en une résolution en variables logarithmiques. On effectue le changement de variables suivant :

$$\mathcal{K} = \ln(k)$$

$$\mathcal{E} = \ln(\epsilon)$$



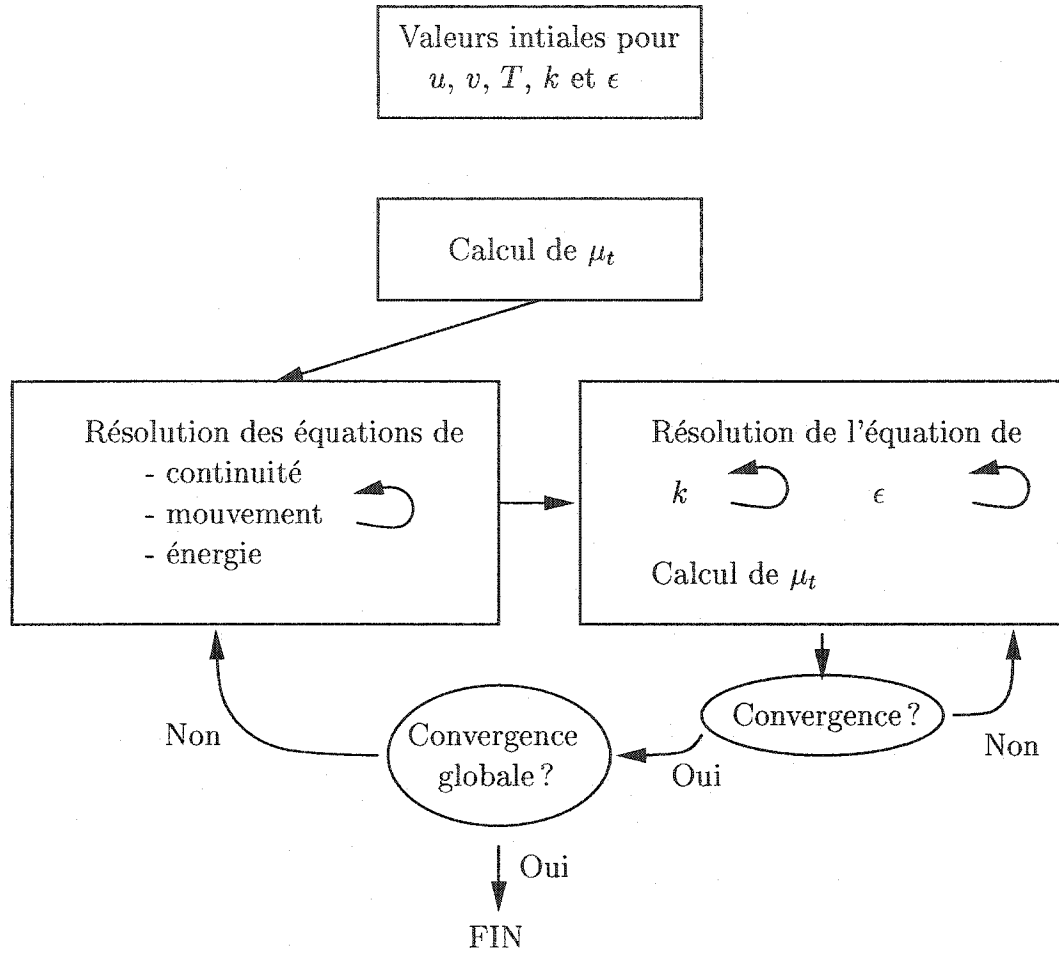


FIG. 2.1 Algorithme de résolution

On résoud alors le système avec ces variables transformées :

– équation de  $\mathcal{K}$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} \quad (2.20)$$

$$+ \mu_t e^{-\kappa} P - \rho^2 C_\mu \frac{e^\kappa}{\mu_t} + q_\kappa$$



– équation de  $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right] + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} \\ + \rho C_1 C_\mu e^{\mathcal{K} - \mathcal{E}} P - C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \mathcal{K}} + q_\mathcal{E} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Les variables  $k$  et  $\epsilon$  sont alors obligatoirement positives, puisqu'elles sont récupérées par le changement de variables inverse :

$$k = \exp(\mathcal{K})$$

$$\epsilon = \exp(\mathcal{E})$$

Enfin, on peut exprimer la viscosité turbulente et la conductivité turbulente à l'aide des ces variables, assurant ainsi leur positivité :

$$\mu_t = \rho C_\mu \exp(2\mathcal{K} - \mathcal{E})$$

$$\lambda_t = \mu_t \frac{c_p}{\text{Pr}_t}$$

Un autre avantage de cette méthode est sa plus grande précision dans la prédiction de la solution. En effet, le changement de variables amène aux trois conséquences suivantes :

- les variations de  $\mathcal{K}$  et de  $\mathcal{E}$  sont plus faibles que celle de  $k$  et de  $\epsilon$ , ce qui permet de travailler sur des maillages plus grossiers,
- les prédictions de  $\mu_t$  et  $\lambda_t$  sont améliorées, ce qui est appréciable dans la résolution des équations de Reynolds moyennées où ces deux grandeurs apparaissent,
- on obtient une meilleure résolution dans les zones d'eaux mortes où les variables de turbulence prennent des valeurs très faibles.

Le modèle mathématique est alors entièrement bouclé de façon robuste. La prochaine section présente la méthode utilisée pour résoudre numériquement ce système.



## 2.2 Méthode d'éléments finis

Les équations développées précédemment ne possèdent pas de solutions analytiques exactes pour une géométrie quelconque. Notre problème présente les trois caractéristiques suivantes :

- les équations aux dérivées partielles sont non linéaires,
- la géométrie sera rarement triviale,
- les conditions aux limites (particulièrement dans le cas turbulent) seront non triviales.

On utilise alors les mathématiques appliquées pour résoudre ces équations. On résout les équations précédentes à l'aide d'une méthode d'éléments finis en utilisant une formulation variationnelle. La méthode des éléments finis permet de générer des solutions approximatives de manière systématique et traite les trois points précédents sans difficulté.

Le but de cette section n'est pas de rentrer dans des considérations théoriques pointues. Le lecteur curieux trouvera tous les détails de la théorie mathématique dans le cours de Fortin *et al.* <sup>[10]</sup>. Cependant, il est nécessaire de développer certains points afin d'expliquer les choix faits dans l'utilisation de la méthode.

### 2.2.1 Éléments utilisés

La première étape est la discrétisation du domaine en éléments. Sur ces éléments, nous devons définir des points, appelés noeuds de calculs : la méthode consiste alors à trouver les valeurs des variables dépendantes  $u$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $k$  et  $\epsilon$  en ces points, et à en déduire une solution sur l'ensemble du domaine.

Pour nos travaux, nous avons utilisé l'élément de Crouzeix-Raviart <sup>[8]</sup>. La figure



2.2 présente la disposition des noeuds de calculs de l'éléments, ainsi que le type d'interpolants associés. On évalue la pression à l'aide d'interpolants linéaires et toutes les autres grandeurs à l'aide d'interpolants quadratiques. De plus, l'interpolation en vitesse est enrichie par une fonction bulle cubique associée au centroïde de l'élément. Cet élément est très populaire pour la simulation d'écoulements incompressibles.

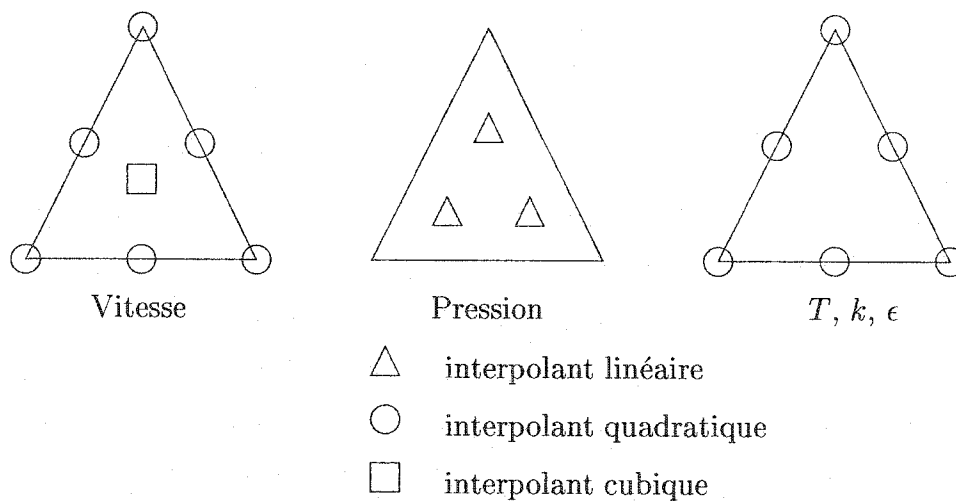


FIG. 2.2 Élément de Crouzeix-Raviart

La popularité de cet élément s'explique par ses 3 avantages majeurs :

- son caractère triangulaire confère à la construction de maillage une souplesse plus grande que si des éléments rectangulaires étaient utilisés,
- il est stable : la solution numérique va bien tendre vers la solution exacte lorsque la taille des éléments tendra vers zéro,
- il est optimal : le nombre et le choix des interpolants constitue un excellent compromis entre un taux de convergence appréciable et une complexité de calcul acceptable.

Nous ne discuterons pas de la stabilité de cet élément dans cet ouvrage : précisons



simplement que cet élément satisfait les conditions de stabilité de Babuska-Brezzi <sup>[10]</sup>. En ce qui concerne la convergence, nous justifierons la pertinence de notre choix dans la sous-section traitant du calcul d'erreur.

C'est sur ce canevas que nous travaillerons désormais. Il s'agit maintenant d'utiliser les mathématiques pour passer de la mécanique des fluides théorique à la mécanique des fluides assistée par ordinateur.

### 2.2.2 Formulation variationnelle

La méthode des éléments finis est basée sur l'utilisation de fonctions tests et de formulation variationnelle. Sans rentrer dans l'analyse fonctionnelle, il est intéressant de développer cette formulation afin de faire le lien entre les équations théoriques développées en début de section et les équations mathématiques dont nous allons nous servir à présent. Les étapes de développement des équations ne seront pas justifiées ici.

Nous commençons par multiplier les équations de Reynolds (2.11), (2.12), (2.13) par, respectivement, les fonctions test  $\delta p$ ,  $\delta \mathbf{u}$  et  $\delta T$ . Nous intégrons ensuite par partie ces équations sur l'ensemble du domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ , ce qui nous donne la formulation variationnelle de notre système :

– Équation de continuité

$$\int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (2.22)$$

– Équation de mouvement

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) d\Omega \\ - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.23)$$



– Équation d'énergie

$$\int_{\Omega} \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T \delta T d\Omega + \int_{\Omega} (\lambda + \lambda_t) \nabla T \cdot \nabla \delta T d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{q} \delta T d\Gamma \quad (2.24)$$

où

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \\ \hat{\mathbf{t}} &= 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} - p \hat{\mathbf{n}} \\ \hat{q} &= (\lambda + \lambda_t) \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

Ces termes ont une signification physique :

- $\dot{\gamma}(\mathbf{u})$  représente le tenseur du taux de déformation,
  - $\hat{\mathbf{t}}$  représente les tractions sur les frontières,
  - $\hat{q}$  représente le flux de chaleur sortant sur les frontières
- et  $\hat{\mathbf{n}}$  est le vecteur unitaire normal extérieur à la frontière.

On applique la même méthode aux équations de turbulence (2.21) et (2.22) en utilisant respectivement les fonctions test  $\delta \mathcal{K}$  et  $\delta \mathcal{E}$  :

– Équation de  $\mathcal{K}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \mu_t e^{-\kappa} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\kappa}}{\mu_t} \right] \delta \mathcal{K} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial n} \delta \mathcal{K} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.25)$$

– Équation de  $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} - \rho C_1 C_{\mu} e^{\kappa - \mathcal{E}} P(\mathbf{u}) + \rho C_2 e^{\mathcal{E} - \kappa} \right] \delta \mathcal{E} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n} \delta \mathcal{E} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.26)$$



### 2.2.3 Méthode d'éléments finis

#### 2.2.3.1 Discrétisation de la solution

La méthode d'éléments finis consiste alors à discretiser cette nouvelle formulation (aussi appelée formulation faible). On écrit les grandeurs du système comme des sommes pondérées de fonctions d'interpolations :

$$\begin{aligned} u_h &= \sum_{i=1}^{N_u} N_i^u u_i, & v_h &= \sum_{i=1}^{N_v} N_i^v v_i, \\ p_h &= \sum_{i=1}^{N_p} N_i^p p_i, & T_h &= \sum_{i=1}^{N_T} N_i^T T_i. \end{aligned} \quad (2.27)$$

où, par exemple pour  $u$ ,  $u_h$  est la solution éléments finis,  $N_u$  le nombre de noeuds,  $N_i^u$  les fonctions d'interpolation et  $u_i$  les valeurs nodales.

Il existe plusieurs méthodes numériques et nous avons choisi la méthode de Galerkin qui prend comme fonctions tests les fonctions d'interpolation de la solution :

$$\begin{aligned} \delta u_i &= N_i^u, & \delta v_i &= N_i^v, \\ \delta p_i &= N_i^p, & \delta T_i &= N_i^T. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Avec cette nouvelle formulation, nous avons changé la nature de notre problème : nos inconnues sont maintenant les valeurs nodales des grandeurs de l'écoulement. En substituant les interpolants, on passe d'un système différentiel à un système matriciel algébrique. Les intégrales sont alors évaluées par quadrature gaussienne.

On peut aussi écrire notre système sous forme de résidus en mettant tous les termes du même côté. Notre but est alors d'annuler ces résidus, ou tout au moins de les faire tendre vers zéro. Nous nous limitons ici au résidu pour les équations



moyennées de Reynolds :

– Équation de continuité

$$R_p = \int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (2.29)$$

– Équation de mouvement

$$\begin{aligned} R_u = \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) d\Omega \\ - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.30)$$

– Équation d'énergie

$$R_T = \int_{\Omega} \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T \delta T d\Omega + \int_{\Omega} (\lambda + \lambda_t) \nabla T \cdot \nabla \delta T d\Omega - \int_{\Gamma} \hat{q} \delta T d\Gamma \quad (2.31)$$

Ce système étant non-linéaire, on le résoud à l'aide de la méthode de Newton.

Lors de la construction de notre système, la pression n'est pas considérée comme une variable dépendante mais comme un multiplicateur de Lagrange. L'équation de continuité constitue la contrainte et on utilise la méthode de Lagrangien augmenté d'Uzawa pour la satisfaire <sup>[32]</sup>. Les degrés de liberté en pression sont ainsi éliminés du système global.

### 2.2.3.2 Imposition des conditions aux limites

Le problème mathématique ne saurait être valide sans l'imposition de conditions aux limites. La nouvelle formulation fait apparaître naturellement le problème des conditions aux frontières : en effet, lors de l'intégration par parties sur le domaine, des termes pariétaux sont créés.

Il existe deux types principaux de conditions aux limites :

– les conditions essentielles (ou conditions de Dirichlet) qui consistent en une im-



position directe des valeurs frontières :

$$u = u_0 \quad \text{ou} \quad T = T_0 \quad \text{sur } \Gamma$$

– les conditions naturelles (ou conditions de Neuman) :

$$\hat{t} = \hat{t}_0 \quad \text{ou} \quad \hat{q} = \hat{q}_0 \quad \text{sur } \Gamma$$

Dans le deuxième cas, on peut immédiatement remplacer les intégrales frontières par leur valeur. Dans le premier cas, on joue sur le choix des fonctions tests : ainsi, un critère dans le choix des fonctions tests est leur annulation en tous les points où des conditions de Dirichlet sont appliquées.

Précisons que, dans le cas d'écoulements turbulents, les conditions aux frontières deviennent plus complexes. Le chapitre suivant traite ce problème.

## 2.3 Méthodes des sensibilités

La connaissance de l'écoulement s'avère parfois insuffisante. Il est donc intéressant de comprendre ce qui se passe lorsqu'on modifie un paramètre de l'écoulement. On introduit alors le concept de sensibilité qui exprime justement le taux de variation de la solution par rapport à un paramètre.

### 2.3.1 Définition et utilisations des sensibilités

Étant donné que nous travaillons dans le continu, on peut définir les sensibilités comme les dérivées des champs de vitesse, de température et de turbulence par rapport aux paramètres contrôlant la réponse du système. Ainsi, si nous nous intéressons à la vitesse horizontale  $u$ , alors sa sensibilité par rapport à un paramètre



$a$  est définie mathématiquement de la façon suivante :

$$S_u^a = \frac{\partial u}{\partial a} \quad (2.32)$$

En pratique, et quand il est évident que l'on parle du paramètre  $a$ , on peut alléger l'écriture et simplement écrire la sensibilité de la façon suivante :  $S_u$ .

Regardons sur un exemple simple les possibilités de calcul de sensibilités. La figure 2.3 montre un problème de conduction dans une tige constituée de deux matériaux différents.

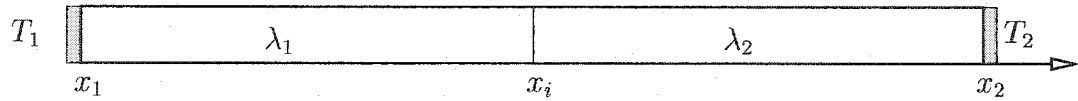


FIG. 2.3 Exemple de sensibilités

La variable intéressante (et unique!) est ici la température et la première étape consiste à lister les paramètres pouvant influencer le champ thermique. Ainsi, on a :

$$T = T(x; T_1, T_2, \lambda_1, \lambda_2, x_1, x_i, x_2)$$

Les sensibilités de  $T$  par rapport à un paramètre  $a$  sont alors :

$$S_T^a = \frac{\partial T}{\partial a}$$

$$a \in \{T_1, T_2, \lambda_1, \lambda_2, x_1, x_i, x_2\}$$

### 2.3.2 Équations générales des sensibilités

Étant donnée la définition mathématique des sensibilités, la question est de savoir quand utiliser de façon pertinente l'opérateur de dérivation. Il existe deux possibilités :



- discrétiser, puis dériver
- dériver, puis discrétiser

Nous avons adopté la deuxième solution, qui nous permet d'éviter les écueils suivants :

- dans le cas de paramètres de forme, qui influent sur la géométrie (cf. sections suivantes), nous n'avons pas à calculer la sensibilité du maillage,
- nous utilisons les mêmes schémas de stabilisation : nous n'avons pas à dériver les termes de stabilisation de l'écoulement pour obtenir ceux des sensibilités (sans être d'ailleurs certains que ce soient les bons),
- on peut modifier le code de l'écoulement indépendamment du code des sensibilités.

On trouvera une discussion plus complète sur ce sujet dans l'ouvrage de Kleiber <sup>[23]</sup>.

Commençons par l'équation de continuité pour laquelle nous détaillerons les étapes de calculs. Notre point de départ est :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

que l'on dérive par rapport au paramètre  $a$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial a} \right) &= 0 \end{aligned}$$

pour arriver à :

$$\frac{\partial S_u}{\partial x} + \frac{\partial S_v}{\partial y} = 0$$

En appliquant cette approche aux équations de Reynolds, on obtient :



– équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_u = 0 \quad (2.33)$$

– équation de mouvement

$$\begin{aligned} \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S}_u = & -\nabla S_p + \mathbf{f}' \\ & + \nabla \cdot \left[ (\mu' + \mu'_t) \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right. \\ & \left. + (\mu + \mu_t) \left( \nabla \mathbf{S}_u + (\nabla \mathbf{S}_u)^T \right) \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

– équation d'énergie

$$\begin{aligned} \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla T + \rho \mathbf{S}_u \cdot \nabla T + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla S_T = & q' \\ & + \nabla \cdot [(\lambda' + \lambda'_t) \nabla T + (\lambda + \lambda_t) \nabla S_T] \end{aligned} \quad (2.35)$$

tandis que les équations des sensibilités des variables de turbulence sont :

– équation de  $S_K$

$$\begin{aligned} \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla K + \rho \mathbf{S}_u \cdot \nabla K + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla S_K = & \\ \nabla \cdot \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla K + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla S_K \right] & \\ + \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla K \cdot \nabla K + 2 \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla K \cdot \nabla S_K & \\ + e^{-K} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P S_K) - \rho e^{\varepsilon - K} \left( 2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + S_K - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) + q'_K & \end{aligned} \quad (2.36)$$



– équation de  $S_{\mathcal{E}}$

$$\begin{aligned}
 & \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla S_{\mathcal{E}} = \\
 & \nabla \cdot \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla S_{\mathcal{E}} \right] \\
 & + \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + 2 \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla S_{\mathcal{E}} \\
 & + \rho C_1 C_{\mu} e^{\kappa - \mathcal{E}} P \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_1}{C_1} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + S_{\mathcal{K}} - S_{\mathcal{E}} + \frac{P'}{P} \right) \\
 & - C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \kappa} \left( \frac{C'_2}{C_2} + \frac{\rho'}{\rho} + S_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{K}} \right) + q'_{\mathcal{E}}
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

avec

$$\begin{aligned}
 S_{\mathcal{K}} &= \frac{S_k}{k} \\
 S_{\mathcal{E}} &= \frac{S_{\epsilon}}{\epsilon} \\
 P' &= 2 \nabla S_u : \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right)
 \end{aligned}$$

On ne parle pas de sensibilités pour les paramètres eux-mêmes. On dénote alors par une prime (') les sensibilités des propriétés physiques que l'on peut évaluer explicitement. On les voit donc écrites dans les équations précédentes sous la forme  $\rho'$ ,  $\mu'$ , ... Ainsi, par exemple :

$$\rho' = \begin{cases} 1 & \text{si } a = \rho \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$



Enfin, la viscosité et la conductivité turbulentes, qui font le lien entre les équations moyennées et les équations de turbulence ont les sensibilités suivantes :

$$\mu'_t = \mu_t \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + 2S_K - S_\varepsilon \right) \quad (2.38)$$

$$\lambda'_t = \lambda_t \left( \frac{c'_p}{c_p} + \frac{\mu'_t}{\mu_t} + \frac{\text{Pr}'_t}{\text{Pr}_t} \right) \quad (2.39)$$

### 2.3.3 Méthode d'éléments finis pour les sensibilités

La méthode d'éléments finis pour les sensibilités est exactement la même que pour l'écoulement. Nous faisons ici le même choix pour l'élément. On applique la même méthode que précédemment pour les sensibilités avec les fonctions tests suivantes :  $\delta S_p$ ,  $\delta S_u$ ,  $\delta S_T$ ,  $\delta S_K$  et  $\delta S_\varepsilon$ .

La résolution dans le cas des sensibilités est beaucoup plus simple, puisque le simple fait de dériver les équations les a rendues linéaires !

### 2.3.4 Conditions aux limites pour les sensibilités

On peut classer en deux familles distinctes les différents paramètres utilisés pour le calcul de sensibilités :

- les paramètres de valeurs, i.e. les propriétés physiques de l'écoulement ou les conditions de Dirichlet aux frontières, tels que  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  dans l'exemple précédent,
- les paramètres de formes, qui modifient la géométrie du problème, tels que  $x_1$ ,  $x_i$  et  $x_2$  dans le même exemple.



Dans le cas des paramètres de valeurs, le calcul des conditions limites est simple :

$$u(x, y; a)|_{x_b, y_b} = u_0(x_b, y_b; a) \rightarrow S_u|_b = \frac{\partial u_0}{\partial a}$$

où l'indice  $b$  désigne la frontière où l'on impose des conditions de Dirichlet.

Pour les paramètres de formes, la géométrie change avec  $a$ , comme le montre la figure 2.4

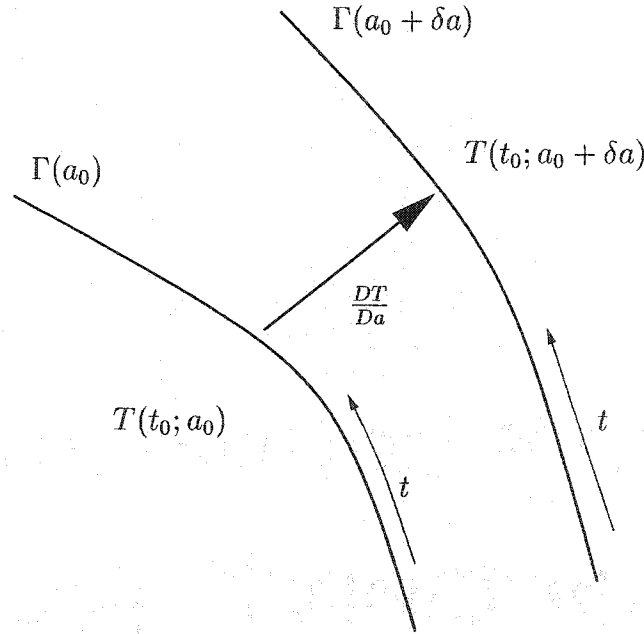


FIG. 2.4 Conditions aux limites pour un paramètre de forme

Le calcul de la condition aux limites pour la sensibilité se complique :

$$\begin{aligned} u(x, y; a)|_{x_b(a), y_b(a)} &= u_0(x_b(a), y_b(a); a) \\ \rightarrow S_u|_b &= -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x_b}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y_b}{\partial a} + \frac{Du_0}{Da} \end{aligned}$$

Notons que nous traiterons dans cet ouvrage uniquement les paramètres de valeurs.



### 2.3.5 Sensibilités normalisées

Les sensibilités calculées ici sont absolues. Afin de pouvoir comparer, par exemple, deux sensibilités, celles-ci doivent être normalisées. On définit la sensibilité normalisée de  $u$  par rapport à un paramètre  $a$  de la façon suivante :

$$\tilde{S}_u^a = a \frac{\partial u}{\partial a} \quad (2.40)$$

Cette sensibilité a alors la même unité que la vitesse.



## CHAPITRE 3

### CONDITIONS AUX FRONTIÈRES POUR LES PAROIS SOLIDES

Nous avons, au chapitre 2, laissé de côté le problème des conditions aux limites pour les parois solides. En effet, le traitement des parois est complexe pour les écoulements turbulents et ce chapitre détaille ce point.

#### 3.1 Présentation du problème

La première observation expérimentale est la différence existant entre le profil de vitesse d'un écoulement laminaire et celui d'un écoulement turbulent le long d'une paroi plane. La figure 3.1 compare ces deux profils adimensionnalisés :  $U_\infty$  représente la vitesse loin de la plaque, tandis que  $\delta$  représente l'épaisseur de couche limite.

On voit sur cette figure que, dans le cas turbulent, le profil de vitesse semble intercepter l'axe des ordonnées. En réalité, la vitesse décroît lentement jusqu'à une très petite distance de la paroi, puis chute brusquement jusqu'à  $u = 0$  en  $y/\delta = 0$ .

Cette constatation porte en elle les germes de notre problème : nous avons de très fort gradients très concentrés près de la paroi. Dans une interprétation laminaire de notre profil turbulent, on peut schématiser notre couche limite comme la superposition d'un fluide très peu visqueux près de la paroi avec un fluide plus visqueux dès que l'on s'éloigne un peu de celle-ci.

Nous avons vu dans les équations moyennées de Navier-Stokes qu'il existait une



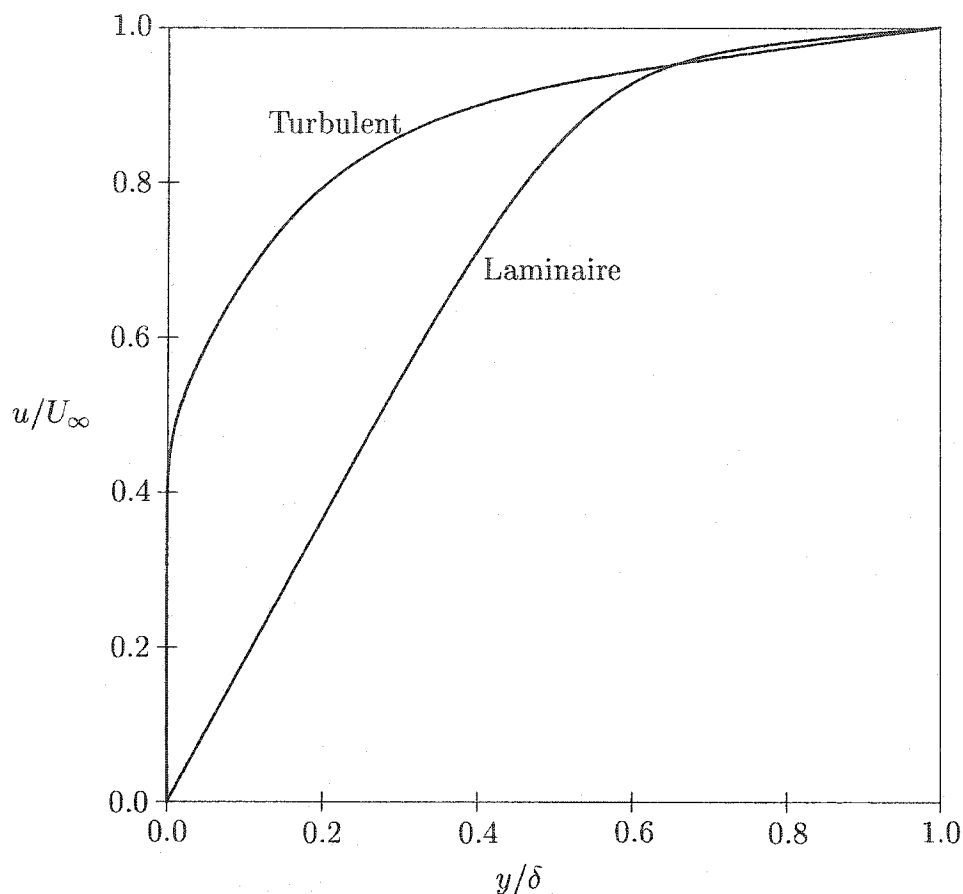


FIG. 3.1 Comparaison entre un profil laminaire et un profil turbulent

viscosité dynamique et une viscosité turbulente. Dans notre modélisation, nous gardons constante la viscosité dynamique  $\mu$ ; il faut donc se pencher sur les fluctuations de la viscosité turbulente  $\mu_t$  à la paroi. La figure 3.2 montre de façon schématique la distribution du rapport des viscosités lorsque l'on s'approche de la paroi.

On voit que la viscosité turbulente  $\mu_t$  augmente lorsque l'on se rapproche de la paroi jusqu'à un maximum, puis chute brutalement vers zéro à la paroi. Nous trouvons alors près de la paroi une zone où la viscosité dynamique prime sur la



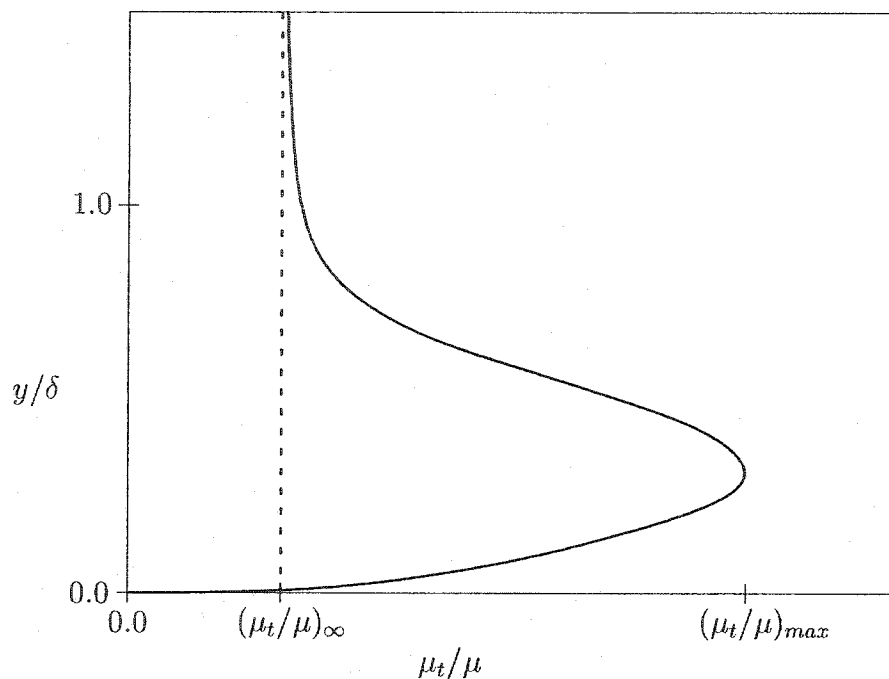


FIG. 3.2 Distribution du rapport  $\mu_t/\mu$

viscosité turbulente :

$$\mu \gg \mu_t \quad \text{pour } y \ll \delta$$

On se trouve donc dans une zone où les effets de la turbulence sont dépassés par les effets laminaires. Nous nommerons cette zone la sous-couche laminaire.

Le modèle numérique de turbulence est-il alors toujours adéquat ? En pratique, le modèle de Launder et Spalding est valable à haut nombre de Reynolds de turbulence. A proximité des parois, lorsque  $\mu_t$  devient trop faible, il nous faut donc modifier notre modélisation.

Une des approches les plus populaires pour modéliser le comportement d'un écoulement turbulent près d'une paroi est l'utilisation de loi de paroi. Les sections suivantes présentent ce modèle, ainsi que sa mise en pratique dans le cadre de la méthode



des éléments finis. De plus, nos remarques sur la vitesse sont aussi valables pour la température et nous décrirons aussi le modèle de loi de paroi en température. Pour alléger les écritures, nous considérons ici comme paroi l'axe des abscisses.

### 3.2 Loi de paroi en vitesse

Notons par  $y_c$  l'épaisseur de la sous-couche laminaire. Nous avons vu, sur les figure 3.1 et 3.2, que cette épaisseur était très faible devant  $\delta$ . La première hypothèse est de considérer la vitesse comme tangente à la paroi dans cette zone. La seconde hypothèse du modèle de loi de paroi est que si la vitesse connaît de forts gradients, la contrainte de cisaillement  $\tau$  reste constante dans cette zone :

$$\tau = (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \approx \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w \neq F(y) \quad \text{pour } 0 < y < y_c \quad (3.1)$$

La figure 3.3 schématise la distribution de la contrainte de cisaillement à partir d'une paroi pour un écoulement turbulent. Ce schéma est exagéré pour les besoins de la démonstration, et on trouvera un exemple de distribution concret sur la figure 5.8.

A partir de cette hypothèse, Launder et Spalding <sup>[28]</sup> présente une première loi de paroi classique.

#### 3.2.1 Loi à une échelle de vitesse

Nous nous intéressons à un profil de vitesse. Il devient alors pertinent de travailler sur une vitesse plutôt que sur la contrainte de cisaillement. On définit donc la



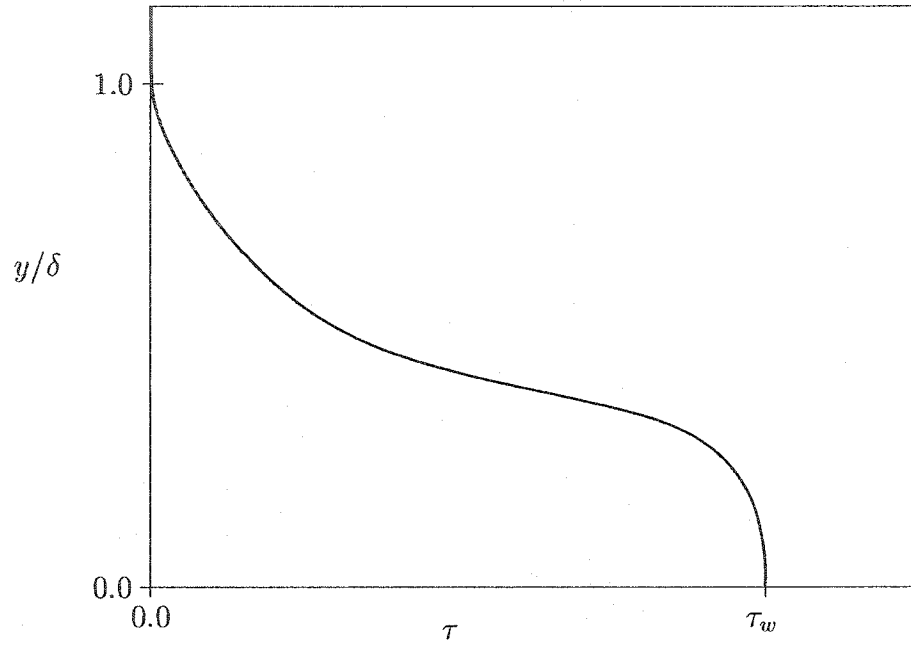


FIG. 3.3 Distribution de la contrainte de cisaillement  $\tau$

vitesse de cisaillement (ou vitesse de friction)  $u_*$  :

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

On peut intégrer l'équation (3.1) pour obtenir :

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu} \quad (3.2)$$

Lauder et Spalding effectuent aussi le changement de variable suivant :

$$u^+ = \frac{u}{u_*} \quad (3.3)$$

$$y^+ = \frac{y u_*}{\nu} \quad (3.4)$$



ce qui nous amène à :

$$u^+ = y^+ \quad \text{pour} \quad 0 < y^+ < y_c^+ \quad (3.5)$$

A l'extérieur de cette zone, on retrouve une turbulence entièrement développée où  $\mu_t > \mu$ . Dans ce cas, la loi de paroi prend une forme logarithmique <sup>[49]</sup> et on montre aisément que :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad \text{pour} \quad y^+ > y_c^+ \quad (3.6)$$

où  $\kappa$  est la constante de Kármán et  $E$  un paramètre de rugosité. Les valeurs habituellement choisies pour ces paramètres sont  $\kappa = 0.42$  et  $E = 9.0$ . Nous ne nous étendrons pas sur l'écriture de cette équation : le lecteur plus curieux trouvera le détail du raisonnement dans la littérature citée en référence <sup>[49]</sup>.

Dans la zone logarithmique, les distributions de  $k$  et de  $\epsilon$  sont données par :

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (3.7)$$

$$\epsilon = \frac{u_*^3}{\kappa y} \quad (3.8)$$

Il nous reste alors à définir l'épaisseur de cette couche laminaire où le profil de vitesse est linéaire. On peut déterminer le point de transition  $y_c^+$  en considérant l'intersection des courbes correspondant aux équations (3.5) et (3.6) et on obtient :

$$y_c^+ \approx 11 \quad (3.9)$$

La figure 3.4 illustre la distribution de vitesse adimensionnalisée liée à la loi de



paroi.

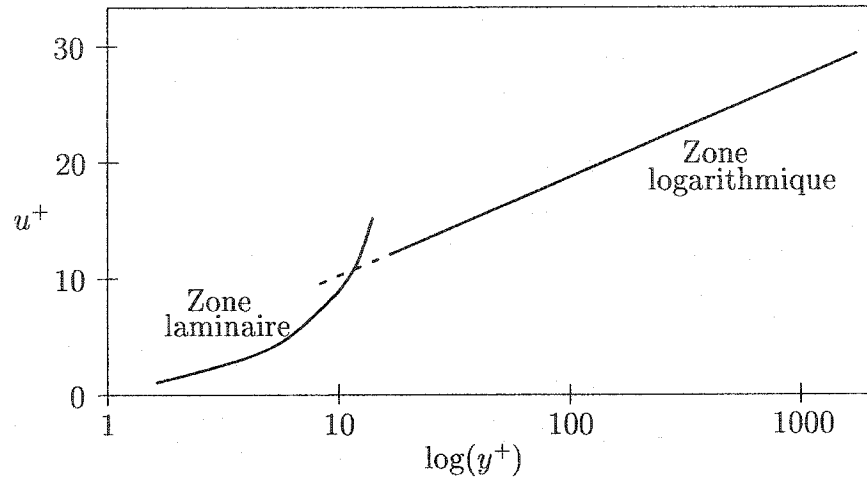


FIG. 3.4 Loi de paroi universelle pour les écoulements turbulents

### 3.2.2 Limitations de la loi de paroi à une échelle de vitesse

Cette loi de paroi à une échelle de vitesse possède cependant d'importantes limitations. Citons un cas où cette loi n'est plus adéquate : pour un écoulement autour d'une marche descendante, on observe un point de stagnation. Autour de ce point, la contrainte de cisaillement prend des valeurs très faibles. Dans notre modèle, cela entraîne  $u_* \approx 0$  et donc  $y^+ \approx 0$  et  $u^+$  tendant vers l'infini. Nous verrons plus tard que la loi de paroi thermique se construit par analogie avec la loi de paroi en vitesse. L'utilisation exclusive de  $u_*$  entraîne alors une mauvaise estimation des flux de chaleurs. Lorsque  $u_* \approx 0$ , on récupère des flux de chaleur quasi-nuls, ce qui va à l'encontre des résultats expérimentaux tels que mentionnés par Chabard *et al.* [5]. Il nous faut alors trouver un modèle décrivant mieux les phénomènes observés.



### 3.2.3 Loi à deux échelles de vitesse

On utilise en réalité une loi à deux échelles de vitesse. Les fluctuations de la vitesse étant responsables en grande partie du transfert thermique <sup>[1]</sup>, on crée une nouvelle échelle de vitesse  $u_k$  pour mieux tenir compte des effets de la turbulence :

$$u_k = \sqrt{\sqrt{C_\mu} k} \quad (3.10)$$

On remplace alors le changement de variable (3.4) par le suivant :

$$y^+ = \frac{y u_k}{\nu} \quad (3.11)$$

On peut alors créer de même l'échelle de vitesse  $u_{**}$  définie de la façon suivante :

$$\tau_w = \rho u_*^2 = \rho u_k u_{**} \quad (3.12)$$

ce qui permet d'écrire la loi de paroi de façon identique en remplaçant le changement de variable (3.3) par le suivant :

$$u^+ = \frac{u}{u_{**}} \quad (3.13)$$

Regardons maintenant comment implémenter cette loi de paroi dans notre résolution numérique.

### 3.3 Implémentation de la loi de paroi en vitesse

Nous venons de voir comment traiter la sous-couche laminaire près de la paroi. Il nous faut maintenant relier cette modélisation à l'aide de loi de paroi à notre



problème : le schéma 3.5 récapitule notre raisonnement. On y voit la zone de validité du modèle  $k - \epsilon$ , ainsi que la zone de validité de la loi de paroi.

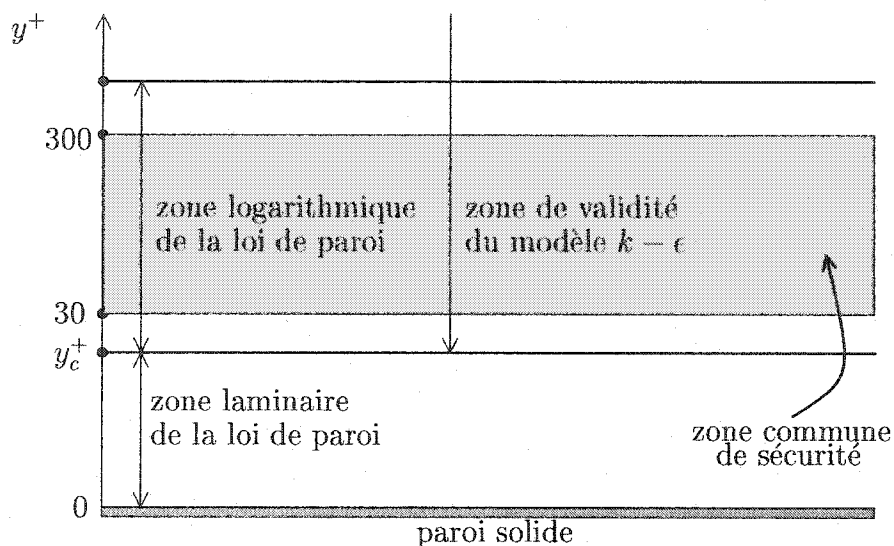


FIG. 3.5 Zones de validité du modèle  $k - \epsilon$  et de la loi de paroi

On peut définir, comme indiqué sur la figure, une zone de validité commune dans laquelle le modèle  $k - \epsilon$  est valide et dans laquelle la loi de paroi fonctionne bien. On s'accorde aujourd'hui pour délimiter cette zone de la sorte :  $30 < y^+ < 300$ .

On définit alors une distance  $d$  à la paroi telle que :

$$30 < y_d^+ = \frac{du_k}{\nu} < 300$$

Il faut alors, pour relier les deux modèles, écrire les conditions aux limites pour les grandeurs du système en  $y = d$ .



### 3.3.1 Insertion de la loi de paroi dans le maillage

La première question, qui est fondamentale, est de savoir si l'on maille la zone modélisée à l'aide de la loi de paroi, définie par :

$$0 < y < d \iff 0 < y^+ < y_d^+$$

Dans notre cas, la réponse est non.

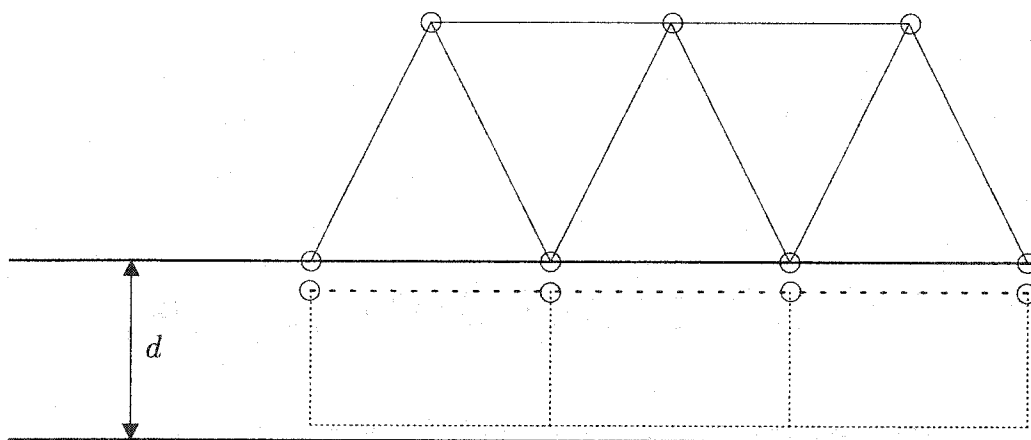


FIG. 3.6 Schéma du maillage à la paroi

Le schéma 3.6 illustre la situation : nous maillons à partir d'une distance  $d$  de la paroi et traitons la zone laminaire comme une frontière extérieure au domaine de calcul. Ce choix présente l'inconvénient de ne pas nous donner la solution de l'écoulement jusqu'à la paroi, quoiqu'on puisse la reconstruire grâce à la loi de paroi. Cependant, mailler dans la zone laminaire pose en pratique des problèmes numériques sérieux, à partir du moment où nous devons tenir compte de la distance  $d$  pour définir la taille des mailles à la paroi. En effet, il arrive souvent que nous ayons besoin de mailles dont la taille est plus faible que  $d$ , ce qui dissymétrise le maillage à la jonction des deux zones, et compromet la convergence. De façon plus



simple, précisons simplement que notre choix, présenté à la figure 3.6, nous évite de nous préoccuper du raffinement du maillage proche de la paroi. On peut donc découper la zone pariétale en éléments de paroi 1-D jouant le rôle d'interface.

### 3.3.2 Écriture des conditions aux limites

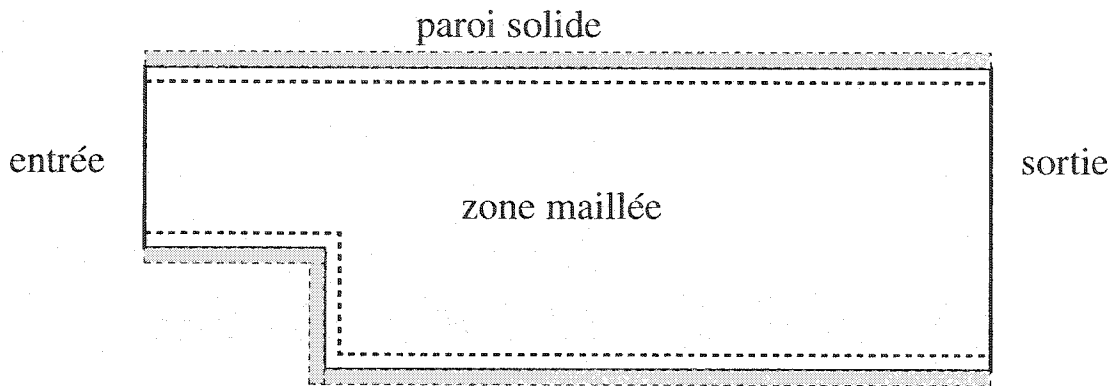


FIG. 3.7 Différence entre domaine maillé et domaine physique

Le problème est donc changé aux points frontières du maillage, puisque celui-ci ne couvre pas entièrement l'écoulement, comme le montre l'exemple de la figure 3.7. La loi de paroi joue en quelque sorte le rôle d'une interface et impose les conditions limites aux frontières du maillage. Revenons aux hypothèses faites dans le modèle de loi de paroi : la vitesse est tangente et le cisaillement est constant dans la direction normale à la paroi. Nous avons donc les conditions aux limites suivantes en vitesse (en  $y = d$ ) :

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.14)$$

$$\tau_w = \rho u_k u_{**} \quad (3.15)$$

La deuxième équation est une condition mixte portant sur le cisaillement et la



vitesse. On peut l'écrire de façon simplifiée sous la forme :

$$(\mu) \frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{\rho u_k}{u^+} \right) u \quad \text{en } y = d$$

Les conditions limites pour les variables de turbulence sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \hat{n}} &= 0 \\ \epsilon &= \frac{u_k^3}{\kappa d} \end{aligned}$$

La condition aux limites de  $\epsilon$  provient de sa distribution définie à l'équation (3.8), appliquée en  $y = d$  avec la nouvelle échelle de vitesse  $u_k$ . Écrivons ces conditions aux limites sous leur forme logarithmique afin de garantir la cohérence de nos équations :

$$\left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \hat{n} = 0 \quad (3.16)$$

$$\mathcal{E} = \ln \left( \frac{u_k^3}{\kappa d} \right) \quad (3.17)$$

Notre problème est donc entièrement défini en ce qui concerne les équations de mouvement et de turbulence. La sous-section suivante conclut ce cheminement en présentant l'algorithme de résolution.

### 3.3.3 Algorithme de résolution

L'algorithme de résolution est présenté sur le schéma 3.8. Rappelons que la loi de paroi est utilisée lors de la résolution de l'équation de mouvement. Le résidu final calculé est alors inséré dans le vecteur des autres résidus calculés dans le domaine.



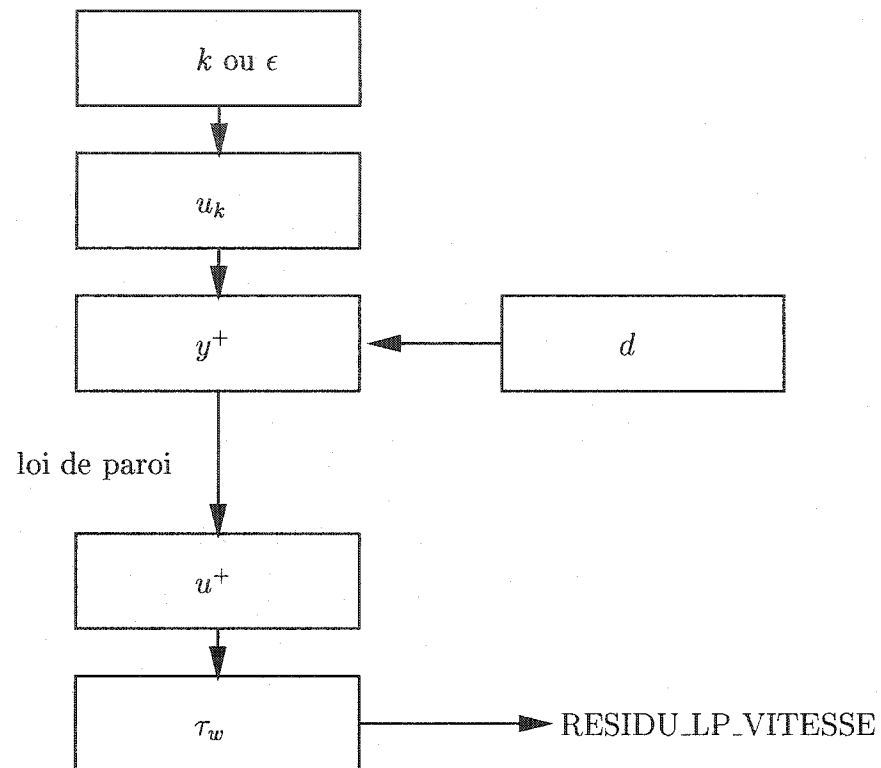


FIG. 3.8 Algorithme pour la loi de paroi en vitesse

Nous voyons que, dans cet algorithme, il nous faut avoir des valeurs initiales pour  $d$  et pour une des deux variables de turbulence. En pratique, on donne une valeur initiale pour  $\epsilon$ , puisque l'on a une condition de Neuman sur  $k$ . Ces choix restent délicats et nécessitent souvent des ajustements en cours de calculs.

On peut sur le modèle de la loi de paroi en vitesse construire le modèle de loi de paroi thermique.



### 3.4 Loi de paroi thermique

Nous suivrons ici le même cheminement que pour la loi de paroi en vitesse. Cette section présente la loi et la suivante explique son implémentation algorithmique.

Les raisons pour lesquelles nous sommes contraints à passer par une loi de paroi thermique sont les suivantes :

- nous ne maillons pas la zone laminaire, ce qui nous oblige à modéliser le comportement de la température dans cette zone
- la température connaît un profil similaire à celui de la vitesse près de la paroi : celle-ci décroît lentement jusqu'à  $y = \delta$ , puis croît brusquement vers  $T = T_w$  pour  $y = 0$

Nous utilisons ici la loi de paroi thermique décrite par Arpaci et Larsen <sup>[1]</sup> :

$$T^+ = \begin{cases} \text{Pr} y^+ & \text{for } y^+ < y_1^+ \\ a_2 - \frac{\text{Pr}_t}{2a_1(y^+)^2} & \text{for } y_1^+ \leq y^+ \leq y_2^+ \\ \frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \ln(y^+) + \beta & \text{for } y_2^+ < y^+ \end{cases} \quad (3.18)$$

avec les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} y_1^+ &= \frac{10}{\text{Pr}^{1/3}} \quad , \quad y_2^+ = \left( \frac{\kappa}{a_1} \right)^{1/2} \quad , \\ a_1 &= 10^{-3} \text{Pr}_t \quad , \quad a_2 = 15 \text{Pr}^{2/3} \quad , \\ \beta &= a_2 - \frac{\text{Pr}_t}{2\kappa} \left[ 1 + \ln \left( \frac{\kappa}{a_1} \right) \right] \end{aligned}$$

où  $T^+$  est la température adimensionnelle définie par le changement de variable suivant :

$$T^+ = \frac{\rho c_p u_k}{q_w} (T_w - T) \quad (3.19)$$



Pour de l'air, le nombre de Prandtl et le nombre de Prandtl turbulent sont fixés respectivement à 0.7 et 1.

### 3.5 Implémentation de la loi de paroi thermique

On voit que cette loi de paroi est très similaire à la précédente. Les vitesses caractéristiques et la définition de  $y^+$  sont les mêmes. De plus, nous avons  $y_2^+ \approx 20.5$ . Notre choix de la distance  $d$  nous amène là-aussi dans la zone logarithmique de la loi de paroi.

La condition aux limites pour la température est alors :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q_w \quad (3.20)$$

Cependant, s'il s'avère parfois plus pratique de travailler avec une température constante donnée à la paroi plutôt qu'avec un flux, alors on utilise la loi de paroi (3.19), écrite sous la forme :

$$q_w = \frac{\rho c_p u_k (T_w - T)}{T^+} \quad (3.21)$$

ce qui nous ramène (comme pour la vitesse) à une condition mixte de Robin en  $y = d$  :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \left( \frac{\rho c_p u_k}{T^+} \right) (T_w - T) \quad (3.22)$$

On obtient, pour conclure, l'algorithme de la figure 3.9.



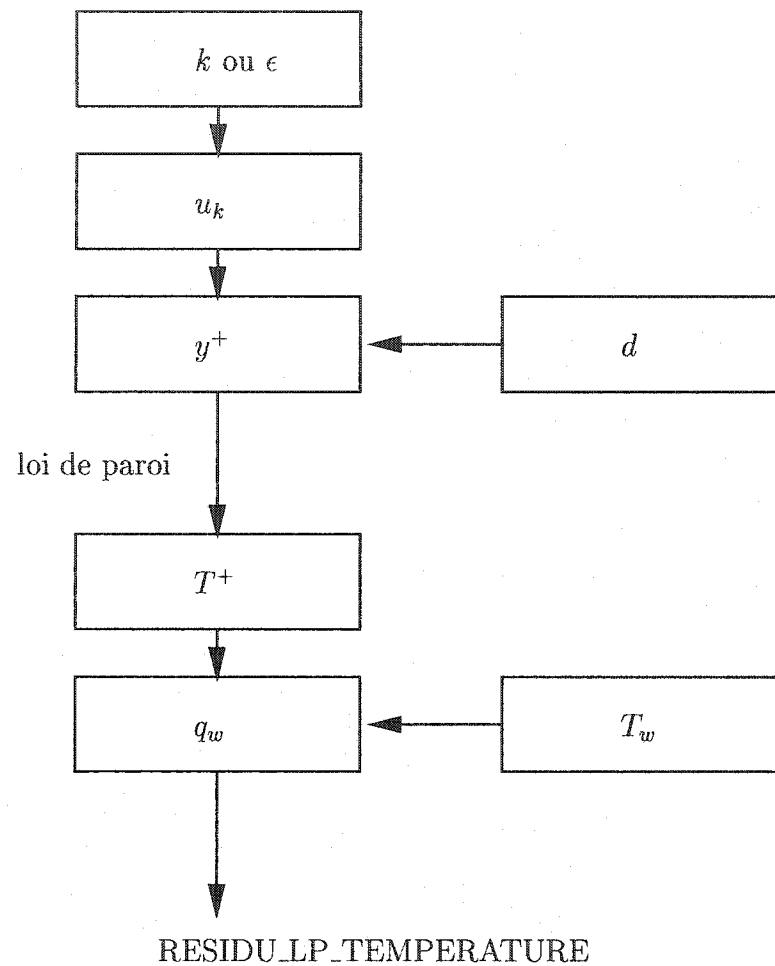


FIG. 3.9 Algorithme pour la loi de paroi en température

### 3.6 Lois de paroi pour les sensibilités

Les lois de paroi en vitesse et en température se dérivent pour donner les lois de parois des sensibilités. On trouvera en annexe l'expression de ces lois car leur calcul ne présentent pas d'intérêt théorique.



## CHAPITRE 4

### CONSIDÉRATIONS NUMÉRIQUES

Notre système numérique est maintenant posé. En effet, en partant des équations théoriques de la mécanique des fluides, nous avons abouti à un système mathématique valide dans toute la géométrie du problème. Ce chapitre se penche maintenant sur les comportements numériques de l'algorithme précédemment.

#### 4.1 Stabilisation numérique

Le passage de la théorie mathématique à la pratique nous fait apparaître un nouveau type de problème : la qualité de notre solution est parfois médiocre, ou, pire encore, la convergence elle-même peut sembler compromise. Notre méthode d'éléments finis demande donc une stabilisation supplémentaire.

##### 4.1.1 Origine des instabilités

Ouvrons une parenthèse mathématique et utilisons les schémas numériques discrets pour comprendre le phénomène. Prenons par exemple l'équation d'énergie, et pour simplifier, considérons le cas particulier uni-dimensionnel, sans source de chaleur, avec une conductivité constante  $\lambda$  :

$$\rho c_p u \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2}$$



Sa discrétisation par éléments finis linéaires est

$$\rho c_p u \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} = \lambda \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (4.1)$$

On y substitue les développements de Taylor suivants :

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= T_i + \Delta x \frac{dT}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3T}{dx^3} \\ T_{i-1} &= T_i - \Delta x \frac{dT}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{d^3T}{dx^3} \end{aligned}$$

pour récupérer l'équation différentielle dont la solution exacte coïncide avec les valeurs nodales de la solution numérique (4.1).

Après substitution dans l'équation (4.1) et quelques manipulations, on obtient :

$$\rho c_p u \frac{dT}{dx} = \left[ \lambda - \frac{(\rho c_p u)^2 \Delta x^2}{6\lambda} \right] \frac{d^2T}{dx^2} \quad (4.2)$$

La conductivité efficace induite est alors :

$$\lambda_E = \lambda - \frac{(\rho c_p u)^2 \Delta x^2}{6\lambda}$$

Le critère de stabilité est alors la positivité de la conductivité efficace, ie. :

$$\lambda^2 \geq \frac{(\rho c_p u)^2 \Delta x^2}{6}$$

On voit que cela peut poser problème pour des nombres de Reynolds turbulents élevés (ce qui est le cas en turbulent) et pour des maillages grossiers. En effet, une valeur négative de  $\lambda_E$  enduit des oscillations non physique dans la solution. Afin



de remédier à cela, nous avons utilisé deux méthodes de stabilisation : la méthode SUPG et la méthode GLS

#### 4.1.2 Méthode SUPG

La première méthode est la méthode SUPG (*Streamline Upwind Petrov Galerkin*) développée par Hughes et Brooks <sup>[15]</sup>. Nous avons vu qu'il était dommageable pour la convergence que la convection l'emporte sur la diffusion. Cette méthode consiste donc à ajouter une diffusion agissant dans le sens de l'écoulement.

Prenons une équation classique de convection-diffusion

$$\mathbf{u} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (\alpha \nabla c) \quad (4.3)$$

où  $\alpha$  est la diffusivité réelle.

La diffusion artificielle *upwind*, agissant dans le sens de l'écoulement, peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\alpha_{\text{artificielle}} = \tau \mathbf{u} \mathbf{u}$$

où  $\tau$  est un coefficient variable déterminé par une analyse théorique.

L'équation (4.3) devient alors :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (\alpha \nabla c + \tau \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla c) \quad (4.4)$$

et l'intégration par éléments finis donne, avec une fonction test  $\delta c$  :

$$\int_{\Omega_e} (\delta c \mathbf{u} \cdot \nabla c + \alpha \nabla c \cdot \nabla \delta c + \tau \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla c \cdot \nabla \delta c) d\Omega_e = 0$$



ce qui peut se ré-écrire sous la forme :

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{u} \cdot \nabla c (\delta c + \tau \mathbf{u} \cdot \nabla \delta c) d\Omega_e + \int_{\Omega_e} (\alpha \nabla c \cdot \nabla \delta c) d\Omega_e = 0 \quad (4.5)$$

L'équation (4.5) porte le nom de formulation SU (*Steamline Upwind*). L'ajout de diffusion artificielle s'est traduit par une modification de la fonction test pour le terme de convection. On se retrouve avec l'équation de base (4.3) traitée avec deux fonctions tests, ce qui peut conduire à des résultats inexacts.

La méthode SUPG poursuit le raisonnement initial à fond et propose une modification de la fonction test pour tous les termes. On arrive alors à la formulation résiduelle suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \mathbf{u} \cdot \nabla c (\delta c + \tau \mathbf{u} \cdot \nabla \delta c) d\Omega_e + \int_{\Omega_e} (\alpha \nabla c \cdot \nabla \delta c) d\Omega_e \\ - \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (\alpha \nabla c) (\tau \mathbf{u} \cdot \nabla \delta c) d\Omega_e = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

On trouvera en annexe les formulations SUPG des équations de l'écoulement.

#### 4.1.3 Méthode GLS

La méthode GLS <sup>[16]</sup> (*Galerkin Least Squares*) intervient directement dans le calcul du résidu. Soit  $R$  le résidu fort d'une équation différentielle et  $w$  la fonction test utilisée par la méthode de Galerkin, on avait la formulation suivante :

$$\int_{\Omega} (Rw) d\Omega = 0 \quad (4.7)$$

que l'on intègre par parties pour obtenir la forme faible.

La méthode GLS repose sur l'idée d'ajouter à la formulation faible de Galerkin la



première variation de la fonctionnelle de moindres carrés :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\tau R^2) d\Omega_e \quad (4.8)$$

soit

$$\delta J = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (R \tau \delta R) d\Omega_e \quad (4.9)$$

où  $\tau$  est là-aussi une fonction de pondération.

On aboutit donc à la formulation résiduelle GLS :

$$\int_{\Omega} (R w) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (R \tau \delta R) d\Omega_e = 0 \quad (4.10)$$

On trouvera aussi les formulations GLS en annexe pour les équations de l'écoulement.

On peut tirer quelques conclusions intéressantes de ces formulations :

- le mouvement stabilise la continuité et le mouvement,
- la continuité stabilise le mouvement.

Cela correspond à une stabilité convective à laquelle s'ajoute une stabilisation en pression.

#### 4.1.4 Laquelle choisir

Le lecteur ayant comparé les deux formulations en annexe aura remarqué la grande ressemblance entre les formulations SUPG et GLS. En effet, on retrouve dans la formulation GLS le terme  $\tau \mathbf{u} \mathbf{u}$  de diffusion artificielle à la base de la formulation SUPG ; et finalement, on peut considérer la formulation GLS comme une formulation SUPG à laquelle on a ajouté un terme supplémentaire constitué du résidu fort multiplié par un coefficient.



En pratique, nous arrivons aux constatations suivantes, appuyées par les travaux de Lacasse *et al.* [27] : la méthode Galerkin amène à des maillages imprécis, devient fragile lorsque le maillage est raffiné, gère difficilement les zones de forts gradients en général et le recollement à loi de paroi en particulier. Il devient alors nécessaire d'utiliser une méthode de stabilisation. *A contrario*, les méthodes SUPG et GLS sont fragiles, et il est parfois périlleux de les utiliser lorsque l'on est trop éloigné de la solution exacte, comme c'est souvent le cas pour le maillage initial et les quelques premiers cycles itératifs.

Comparons pour finir les deux méthodes : la formulation GLS donne des résultats d'une excellente qualité, mais est plus fragile que la formulation SUPG. En pratique, nous avons d'abord essayé la méthode GLS, puis la méthode SUPG en cas de divergence. Cette divergence était principalement causée par les équations de la turbulence, pour lesquelles il est souvent difficile de donner une solution initiale proche de la solution exacte. En effet, l'algorithme demande une estimation initiale de  $\epsilon$  aux frontières solides dont l'évaluation est délicate.

## 4.2 Adaptativité

Comme nous l'avons vu au premier chapitre, la convergence n'est qu'une étape de notre processus de résolution. Il faut entre chaque cycle adapter le maillage, soit pour augmenter le nombre de noeuds, soit pour modifier la concentration des mailles par endroit, soit, le plus souvent, les deux en même temps. La stratégie d'adaptativité repose sur ces deux piliers : l'estimation d'erreur, qui est notre seule donnée sur la pertinence du maillage et l'opérateur de transition, qui, une fois l'erreur connue, pose de façon numérique l'objectif à atteindre pour le prochain maillage.



#### 4.2.1 Estimation d'erreur

Soit  $V$  une variable du système, on notera  $V_h$  la solution éléments finis et  $V_{exa}$  la solution exacte. Nous utiliserons comme norme la semi-norme énergie (norme  $L_2$  des gradients de  $V$ ). L'erreur sur  $V$ , notée  $e^V$  est donc :

$$\begin{aligned} e^V &= \|V_{exa} - V_h\| = \int_{\Omega} \nabla (V_{exa} - V_h) \cdot \nabla (V_{exa} - V_h) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\nabla V_{exa} - \nabla V_h) \cdot (\nabla V_{exa} - \nabla V_h) d\Omega \end{aligned}$$

En pratique, on ne connaît que les gradients de la solution éléments finis et il faut une approximation de  $V_{exa}$  plus précise que  $V_h$ . Sachant que les gradients obtenus par éléments finis sont discontinus et que  $\nabla V_{exa}$  est continu, on peut prévoir qu'un lissage ou une projection de ces gradients nous fournira une assez bonne approximation des gradients exacts.

Notons  $\nabla V^*$  cette estimation de  $\nabla V_{exa}$ . L'idée, proposée par Zienkiewicz et Zhu [50], consiste à projeter le gradient de la solution éléments finis sur une base polynômiale d'un ordre supérieur à celui de  $\nabla V_h$ . Ainsi, pour une solution numérique quadratique, on obtient un gradient  $\nabla V_h$  linéaire par morceaux. On veut donc construire un nouveau gradient  $\nabla V^*$  de la façon suivante :

$$\nabla V^* = P \cdot a \quad (4.11)$$

avec

$$\begin{aligned} P &= \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} \\ a &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}^T \end{aligned}$$



Le schéma de la figure 4.1 illustre la construction d'une telle fonction. On calcule les gradients de  $\nabla V^*$  à l'aide de la solution  $\nabla V_h$  et il reste alors à tracer la courbe tangente à ces gradients. On voit que cette technique met à profit les discontinuités du gradient éléments finis.

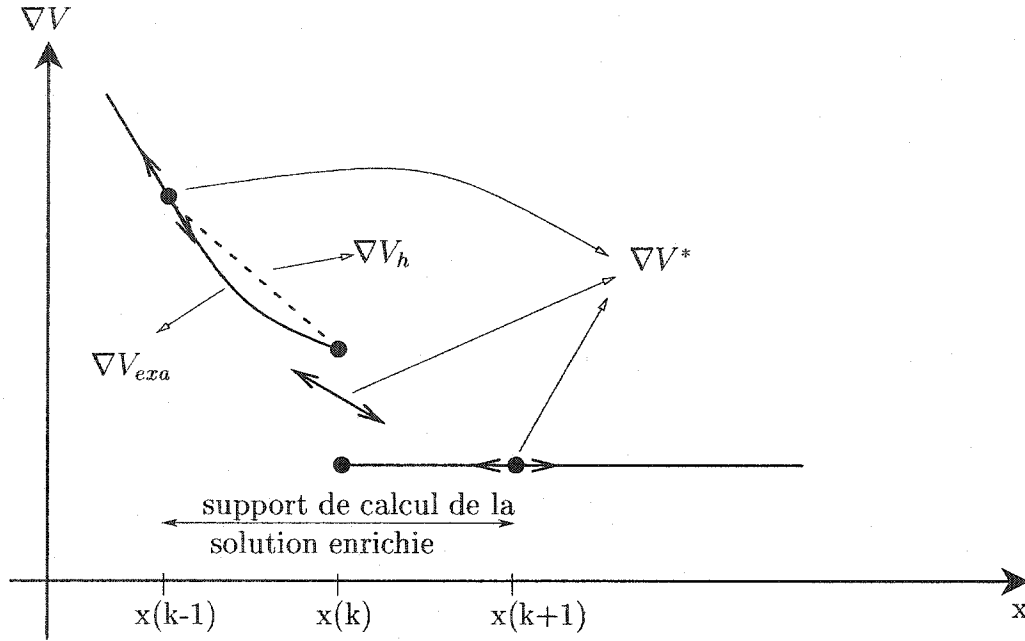


FIG. 4.1 Construction du gradient  $\nabla V^*$

Pour déterminer le vecteur des inconnues  $\mathbf{a}$ , on utilise la méthode des moindres carrés :

$$\min \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} - \nabla V_h)^2 d\Omega_e \quad (4.12)$$

Une fois cette étape de *projection* terminée, on construit à partir de  $\nabla V^*$  une distribution unique  $\nabla \tilde{V}$  : c'est l'étape de *récupération*. On en calcule les valeurs nodales en moyennant les valeurs nodales de projections  $\nabla V^*$  associées deux à deux. On trouvera une explication très complète de tout ce processus dans les travaux de Turgeon [39].



Finalement, on peut calculer l'erreur estimée :

$$e^V = \|\nabla \tilde{V} - \nabla V_h\| \quad (4.13)$$

#### 4.2.2 Opérateur de transition

Nous avons maintenant une estimation de l'erreur partout dans le domaine. Il nous reste à construire un maillage amélioré à partir de cette information : c'est ici qu'apparaît la notion d'opérateur de transition.

Définissons tout d'abord la notion de *maillage optimal* : un maillage optimal est un maillage qui répartit l'erreur de façon égale sur tous les éléments. A partir de cette définition-propriété, l'opérateur de transition a pour but :

1. de répartir uniformément l'erreur globale  $\|e\|_\Omega$  dans le maillage, afin que chaque maille  $K$  renferme la même erreur élémentaire  $\|e\|_K$ ,
2. de cibler la norme de l'erreur souhaitée pour ce nouveau cycle.

On peut immédiatement faire le lien entre erreur globale et erreur élémentaire, en utilisant la définition même de l'erreur :

$$\|e\|_\Omega^2 = \sum_K \|e\|_K^2 \quad (4.14)$$

A chaque cycle, on souhaite réduire l'erreur globale : il nous faut donc relier cette réduction globale à la taille de chaque maille élémentaire. Commençons par définir notre erreur cible :

$$\|e_{cible}\|_\Omega = \xi \|e\|_\Omega \quad (4.15)$$

où  $\xi$  est un facteur de réduction choisi par l'utilisateur.



L'équirépartition de l'erreur permet de relier notre erreur cible globale à notre erreur cible élémentaire. L'équation (4.14) devient alors :

$$\|e_{cible}\|_K = \frac{\|e_{cible}\|_\Omega}{\sqrt{N}} \quad (4.16)$$

où  $N$  est le nombre d'éléments du maillage courant.

Il nous reste à relier erreur élémentaire et taille de l'élément : on utilise l'analyse de l'erreur éléments finis, liée au choix des interpolants <sup>[6]</sup> :

$$\|e\|_K = ch_K^\alpha \quad (4.17)$$

où  $c$  est un coefficient,  $h_K$  la taille de l'élément et  $\alpha$  une puissance dépendant du choix de l'interpolant.

Notons par  $\delta$  la taille idéale de notre élément cible :

$$\|e_{cible}\|_K = c\delta_K^\alpha \quad (4.18)$$

Nous avons alors toutes les informations pour déterminer la nouvelle distribution de la taille des éléments de notre nouveau maillage. En effet, en utilisant les équations (4.17), (4.18), (4.16) et (4.15), on obtient :

$$\delta_K = \left( \frac{\xi \|e\|_\Omega}{\|e\|_K \sqrt{N}} \right)^{1/\alpha} h_K \quad (4.19)$$

L'élément de Crouzeix-Ravart que l'on a choisi est dit *optimal* : les interpolants quadratiques donnent une convergence quadratique de l'erreur. Autrement dit, on a  $\alpha = 2$  pour les différentes grandeurs de notre écoulement, ainsi que leurs sensibilités.



### 4.2.3 Stratégie d'adaptativité

En pratique, nous avons fixé le paramètre  $\xi$  à 0.5, afin de réduire l'erreur par 2 à chaque cycle adaptatif. De plus, nous avons choisi d'adapter le maillage en regard des erreurs sur la vitesse  $U$ , la température  $T$ , les variables de turbulence  $k$  et  $\epsilon$ , ainsi que sur leurs sensibilités le cas échéant.

Ce choix nous fait calculer différentes erreurs pour chaque maille, et afin d'atteindre au moins le but fixé de réduction d'erreur, nous avons toujours pris la taille minimale  $(\delta_K)_{min}$  définie par :

$$(\delta_K)_{min} = \min \{(\delta_K)_U, (\delta_K)_T, (\delta_K)_k, (\delta_K)_\epsilon\}$$

Le principe d'équirépartition s'en trouve affecté, sans gravité, cependant.

### 4.2.4 Autres contraintes affectant le remaillage

Il existe d'autres contraintes pouvant jouer sur la taille des mailles. La première, et la plus brutale, est la limite imposée explicitement par l'utilisateur sur la taille des éléments. Cette imposition viole plus durement le principe d'équirépartition, et demande plus de précautions. Cependant, cette option permet à l'utilisateur d'orienter la convergence quand le besoin s'en fait ressentir : un tel réglage est établi et justifié dans le chapitre 5.

La deuxième contrainte est liée à la géométrie du problème. En effet, des problèmes de maillage peuvent survenir près de frontières courbes ou près d'angles droits. On utilise alors le *coefficient d'extrapolation* : l'adaptation fournit une distribution des tailles des mailles au mailleur. Le mailleur doit alors parfois extrapoler cette distribution pour qu'elle s'insère sans problème dans la géométrie. Ce coefficient



est réglé par défaut à zéro (pas d'extrapolation), mais nous l'avons parfois monté jusqu'à 15% pour des géométries telles que celle d'une marche descendante, ou que celle d'un bord d'attaque rond.



## CHAPITRE 5

### VÉRIFICATION ET VALIDATION DE LA MÉTHODE

#### 5.1 Vérification sur un cas simple : la couche cisillée

Afin de mener une première vérification de la bonne implémentation de la formulation proposée, cette section propose un exemple de la méthode des solutions manufacturées sur une couche cisillée turbulente.

##### 5.1.1 Intérêt de la méthode des solutions manufacturées

Comparer une solution numérique à une solution analytique que l'on a trouvée dans la littérature constitue une vérification irréfutable du bon fonctionnement de notre méthode. Le premier point est évident : il s'agit de vérifier la concordance des solutions obtenues. On peut alors conclure au bon fonctionnement de la formulation et de la méthode. Le second point est de vérifier les performances et de mesurer la précision de notre solveur. Lors du calcul en simultané de la solution numérique et de la solution analytique en fonction du maillage, nous aurons accès aux estimations d'erreurs et aux erreurs elles-mêmes. D'une part, nous pourrions comparer les vitesses de convergence de l'erreur. Lorsque l'erreur estimée décroît à la même vitesse que l'erreur exacte, on a la confirmation que l'adaptation est correcte. D'autre part, on cherche à vérifier que notre estimation de l'erreur estimée est correcte : cet objectif est atteint lorsque les courbes de décroissance de l'erreur et de son estimé tendent l'une vers l'autre lorsque le nombre de noeuds augmente. L'indice d'efficacité, défini comme la ratio de l'estimateur à l'erreur exacte, tend



alors vers 1.

Bien que cette méthode ne soit utilisée ici que sur un unique exemple, elle permet une première vérification efficace. Notons que celle-ci ne nous dispensera pas de mener des séries de tests de convergence sur les exemples qui suivront pour lesquels nous ne disposerons pas de solutions analytiques. Nous soulignons d'ailleurs ici le défaut de cette méthode : il est difficile d'obtenir des solutions manufacturées d'écoulements turbulents.

### 5.1.2 Présentation de la solution analytique

La solution analytique de la couche cisailée nous est fournie par Turgeon *et al.* [45]. Nous y avons ajouté une expression pour la distribution de température afin de bien tester les effets de transfert de chaleur turbulent. La solution est définie par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{U_1 + U_2}{2} - \frac{U_1 - U_2}{2} \operatorname{erf}(\eta) \\
 V &= \frac{U_1 - U_2}{2} \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} B \\
 T &= \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_1 - T_2}{2} \operatorname{erf}(\eta) \\
 p &= 0 \\
 k &= k_0(c_k + B) \\
 \epsilon &= \frac{\epsilon_0}{x}(c_k + B) \\
 \mu_T &= \mu_{T_0}x(c_k + B)
 \end{aligned}$$



où

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{\sigma y}{x} & B &= e^{-\eta^2} \\
 U_1 &= 1 & U_2 &= 0.3 \\
 T_1 &= 0.3 & T_2 &= 1 \\
 \sigma &= 1.5 & \rho &= 1.0 \\
 C_\mu &= 0.09 & \mu &= 10^{-4}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 k_0 &= \frac{343}{75000} U_1 (U_1 - U_2) \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \\
 \epsilon_0 &= \frac{343}{22500} C_\mu U_1 (U_1 - U_2)^2 \frac{\sigma^2}{\pi} \\
 c_k &= \frac{10^{-4}}{k_0} \\
 \mu_{T_0} &= \frac{343}{250000} \rho U_1
 \end{aligned}$$

On insère alors cette solution dans les équations moyennes de Reynolds et on ajoute les termes sources  $\mathbf{f}$ ,  $q$ ,  $q_k$  et  $q_\epsilon$  pour équilibrer les égalités. On trouvera en annexe les expressions de ces termes sources.

Les expressions analytiques des sensibilités sont obtenues par différenciation des expressions précédentes par rapport aux paramètres qui nous intéressent. On trouvera aussi ces expressions, ainsi que les termes sources correspondant en annexe.



### 5.1.3 Présentation de l'expérience numérique

Cet écoulement imite une couche cisailée turbulente thermique. L'absence de loi de paroi simplifie ce problème. Il constitue donc un bon premier pas dans la validation de notre formulation. Le domaine de résolution est défini par le rectangle  $(100, -75) \times (300, 75)$ , ce qui permet évidemment d'éviter la singularité  $x = 0$ . Des conditions de Dirichlet sont appliquées aux frontières du domaine, à l'exception d'une petite portion sur la frontière inférieure où une traction normale nulle est imposée. Ce détail permet de faciliter le respect de la condition de conservation de la masse et améliore la convergence par rapport à un cas où des conditions de Dirichlet seraient appliquées partout sans exception <sup>[17]</sup>. La géométrie, ainsi que les conditions aux frontières sont présentées à la figure 5.1.

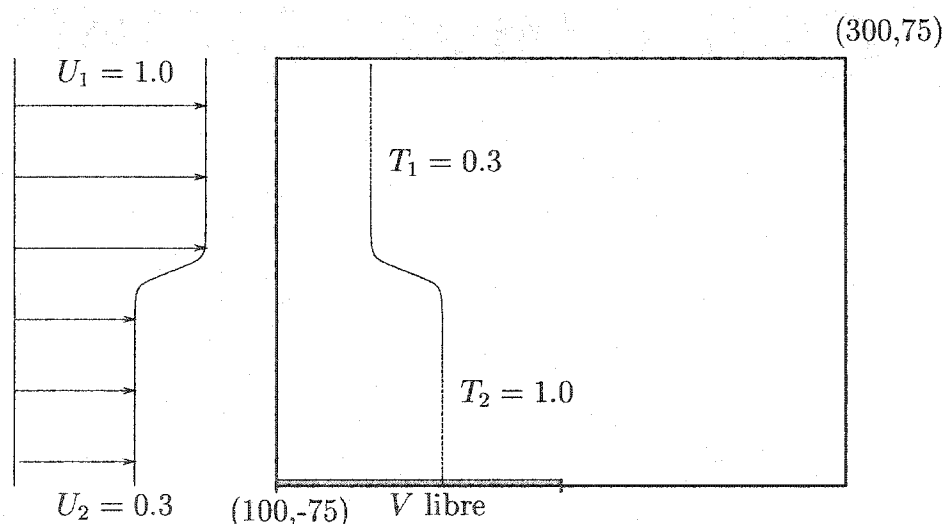


FIG. 5.1 Géométrie et conditions aux limites pour la couche cisailée

Nous utilisons une stabilisation de type GLS pour toutes nos équations (mouvement, continuité, énergie et turbulence). La stratégie de remaillage adaptative est réglée de façon à réduire l'erreur globale d'un facteur 2 à chaque cycle adapta-



tif. Toutes les variables dépendantes, ainsi que leurs sensibilités, contribuent au raffinement du maillage.

#### 5.1.4 Étude de la convergence de la solution

La figure 5.2 montre le maillage final de 75,123 noeuds obtenu après 6 cycles d'adaptation. Notre principal objectif, dans ce paragraphe, n'est pas la solution elle-même, mais le comportement de sa convergence. Nous avons donc tracé, en coordonnées logarithmiques, à la figure 5.3, les courbes de convergence de l'écoulement.

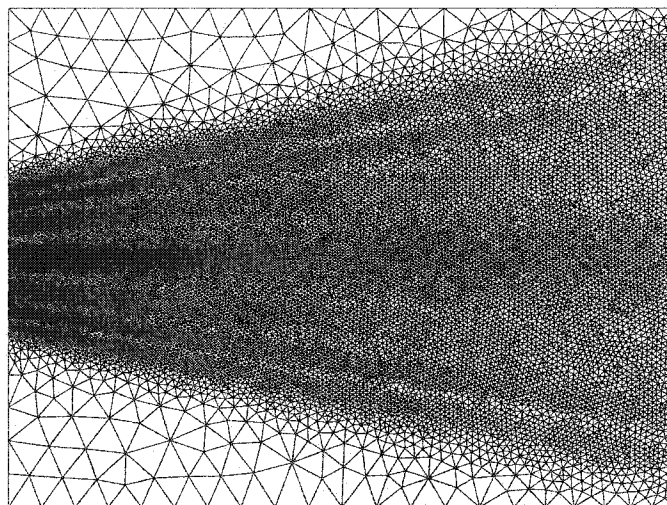


FIG. 5.2 Maillage final pour la couche cisailée

Les deux résultats voulus sont atteints : les courbes d'erreur exacte et d'erreur estimée sont confondues pour les 5 champs de solution et ces erreurs décroissent au bon taux lorsque le nombre de noeuds augmente. On peut mesurer la vitesse de convergence, comme nous l'avons vu précédemment. La pente des courbes  $\log(E)$  vs.  $\log(\text{noeuds})$  est égale à 1 : on a donc une convergence d'ordre 2, ce qui est en parfait accord avec le choix de nos éléments quadratiques, comme nous en avons



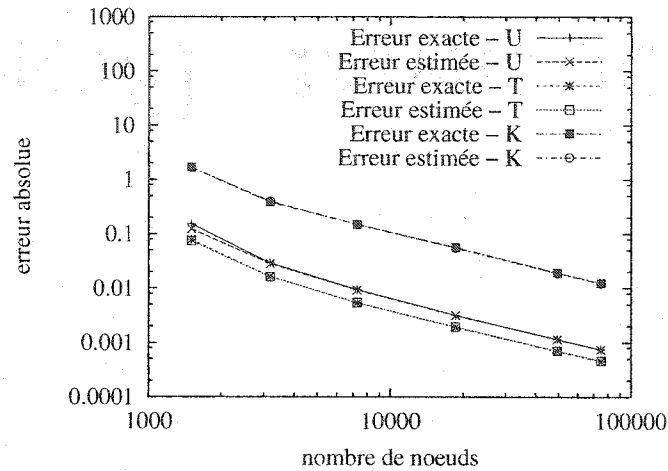
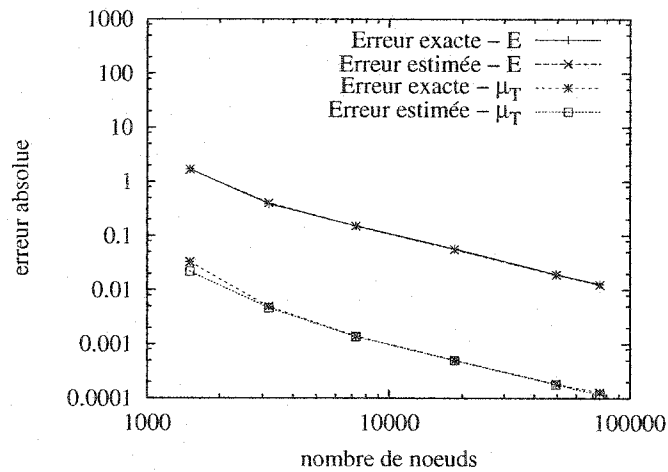
(a)  $u, T, K$ (b)  $\mathcal{E}, \mu_T$ 

FIG. 5.3 Courbe de convergence pour l'écoulement

discuté au chapitre précédent (en effet, pour ces éléments, nous avons vu que le nombre de noeuds était proportionnel au carré de la taille des éléments).

On peut aussi mener une étude en sensibilités sur 3 paramètres :  $U_1$ ,  $C_\mu$  et  $T_1$ .



En effet, ce sont des paramètres apparaissant dans les expressions analytiques et sur lesquels on peut avoir un contrôle. Il s'avère que les sensibilités en  $C_\mu$  sont très faibles, à l'exception de la sensibilité calculée pour  $\epsilon$ , le taux de dissipation de la turbulence. Cela s'explique par le fait que  $C_\mu$  apparait uniquement dans l'expression de  $\epsilon$  dans notre solution manufacturée.

On a vu précédemment que la température était découplée du reste du problème. Elle n'influence donc ni la vitesse ni la turbulence. Nous nous intéressons donc uniquement à la sensibilité de la température  $T$  par rapport à  $T_1$ . Quant à la vitesse, il n'y a ici aucun problème.

Par soucis de clarté dans les figures, nous ne nous sommes cependant penchés que sur les trois sensibilités principales : celle de la vitesse, celle de la température et celle de l'énergie cinétique de turbulence  $k$ . On peut déduire de cette dernière l'allure générale de la sensibilité du taux de dissipation de la turbulence  $\epsilon$  et celle de la viscosité turbulente  $\mu_T$ , qui ont des comportements très similaires.

La figure 5.4 présente les courbes de convergence des sensibilités choisies comme indiqué ci-dessus. On retrouve des résultats semblables à ceux trouvés pour l'écoulement. Comme prévu, on observe pour toutes les sensibilités une convergence quadratique de l'erreur, et un comportement asymptotiquement exact de l'estimation d'erreur.

### 5.1.5 Conclusion

En confirmation des résultats précédents, le tableau 5.1 montre les indices d'efficacité pour l'écoulement et pour les sensibilités obtenus pour le dernier maillage. On obtient des indices d'efficacité proche de 1. L'ensemble de ces résultats permettent de conclure que notre solveur, ainsi que les estimateurs d'erreur, sont fiables et



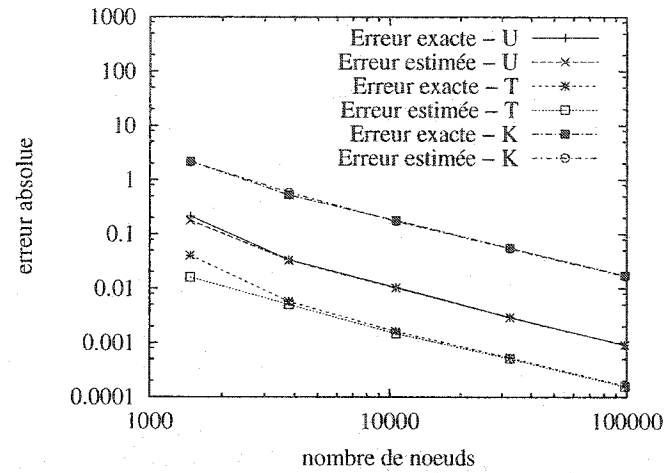
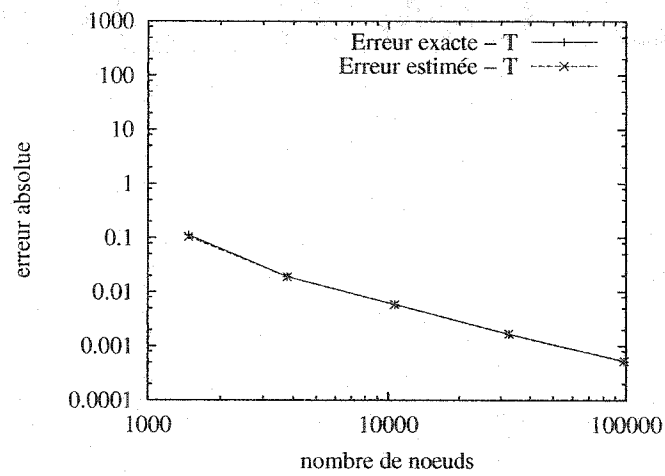
(a) paramètre  $U_1$ (b) paramètre  $T_1$ 

FIG. 5.4 Courbes de convergence pour les sensibilités

précis.



TAB. 5.1 Indice d'efficacité pour le dernier maillage

	$u$	$T$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{E}$
écoulement	0.9988	1.018	0.9792	0.9769
sensibilité en $U_1$	0.9973	0.9604	0.9635	0.9615
sensibilité en $T_1$	-	1.019	-	-



## 5.2 Validation de la méthode pour un écoulement turbulent thermique avec loi de paroi : la plaque plane

Penchons nous maintenant sur un problème plus réaliste : celui d'un écoulement turbulent sur une plaque plane chauffée. Ce problème a déjà été étudié par Lacasse *et al.* [27] en ce qui concerne la turbulence isotherme. De même, Turgeon *et al.* [44] se sont intéressés aux sensibilités de l'écoulement isotherme.

### 5.2.1 Présentation du problème

Nous gardons ici la même configuration, la même géométrie, ainsi que les mêmes conditions aux limites, comme indiqué sur la figure 5.5. Ainsi, nous avons  $k = 1.0 \times 10^{-6}$  et  $\epsilon = 1.8 \times 10^{-8}$  en entrée. Quant à la température, nous avons  $T_\infty = 0$  et  $T_w = 1$ . Nous gardons de même une distance à la paroi  $d = 0.00095L$

Dans leurs travaux, Lacasse *et al.* [27] démontre trois résultats importants pour ce problème :

1. il est nécessaire de donner une épaisseur à la plaque afin de bien avoir un bord d'attaque et donc une production réaliste d'énergie cinétique de turbulence,
2. il est préférable d'avoir un bord d'attaque arrondi afin d'améliorer le comportement des contraintes normales,
3. le nombre de Reynolds doit être élevé.

Par analogie avec le nombre de Reynolds, on définit un nombre de Reynolds turbulent :

$$\text{Re}_t = \frac{\rho U_\infty L}{\mu_t} \quad (5.1)$$



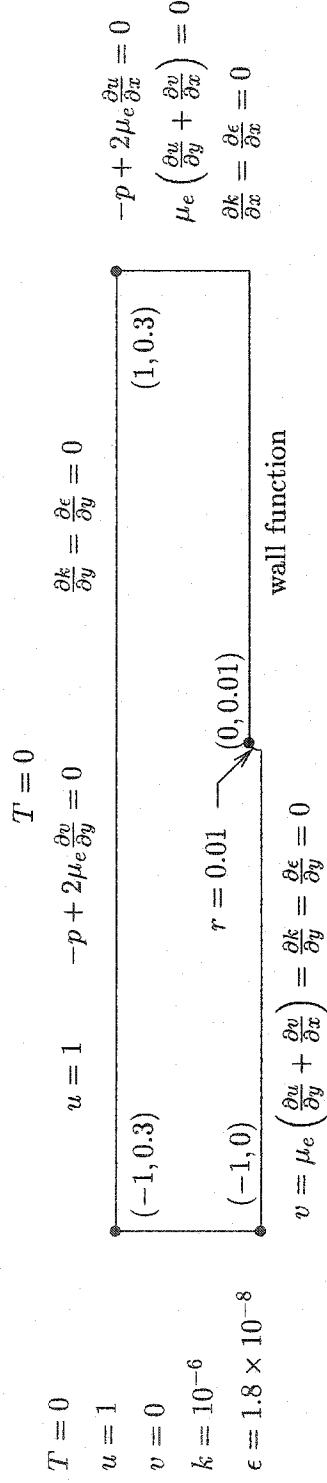


FIG. 5.5 Géométrie et conditions aux limites pour la plaque plane



ce qui nous donne la rapport suivant :

$$\frac{Re}{Re_t} = \frac{\mu}{\mu_t}$$

Nous avons fait les choix suivants :  $Re = 2 \times 10^6$ ,  $Re_t = 2 \times 10^5$ .

L'apparition d'une loi de paroi, et plus particulièrement d'un bord d'attaque, rend plus ardue la convergence des calculs. Une stabilisation GLS est ici trop fragile et instable, et nous lui avons préféré une stabilisation de type SUPG.

De plus, la géométrie du bord d'attaque nous oblige à traiter le cas avec précaution.

Deux défis sont à relever :

1. mailler convenablement près d'une frontière courbe
2. veiller à ce que l'adaptation ne soit pas faussée par le comportement de l'écoulement au bord d'attaque

Le premier problème se règle en choisissant un coefficient d'extrapolation relativement élevé de 25% (cf. chap. 4). En ce qui concerne, le deuxième point, on remarque que le bord d'attaque (zone de forts gradients) nécessite un tel raffinement que l'adaptation ne permet aucune amélioration sur le reste de la géométrie. Le manque de raffinement partout ailleurs sur la plaque engendre une solution de qualité médiocre. Notre stratégie est alors d'aider artificiellement le processus d'adaptation en l'obligeant à traiter toute la géométrie une fois qu'il atteint les limites fixées par l'utilisateur sur le bord d'attaque. Pour cela, nous fixons la taille minimale des mailles de façon à ce que cette taille soit atteinte. La figure 5.6 montre les maillages des différents cycles et illustre parfaitement notre précédent propos : on voit le raffinement de maillage se concentrer au début sur le bord d'attaque (cycle 1), puis partir vers la droite pour finalement traiter toute la plaque (cycles 2, 3 - non représenté - et 4). L'adaptation se termine alors par un raffinement supplémentaire le long de la plaque (cycles 4, 5 -non représenté- et 6). Le maillage



final comporte 62,014 noeuds.

Cette étude porte sur l'écoulement et ses sensibilités à de multiples paramètres. Toutes les grandeurs et leurs sensibilités interviennent ici dans le processus d'adaptation.

### 5.2.2 Résultats

Il n'existe pas de résultats analytiques pour l'écoulement turbulent autour d'une plaque plane. La validation de ce modèle se mène donc en 2 étapes :

1. la vérification de la convergence,
2. la comparaison de nos résultats avec des corrélations expérimentales.

Ces deux étapes sont menées aussi bien pour l'écoulement que pour ses sensibilités.

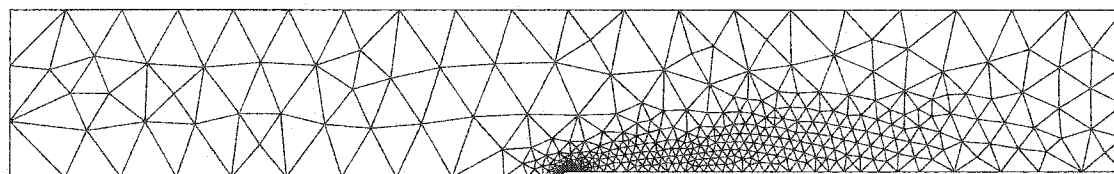
#### 5.2.2.1 Convergence de l'écoulement

La plaque plane étant notre principal centre d'intérêt, la première vérification à mener est celle de la convergence de  $u$ ,  $T$  et  $k$  le long de la plaque. La figure 5.7 montre les courbes de convergence de ces quantités. Comme on peut le voir, les prédictions des cycles 5 et 6 sont quasiment superposées. Ceci indique que la convergence de ces grandeurs est atteinte sur le mur : ces prédictions sont *vérifiées*, au sens de Roache <sup>[36]</sup>.

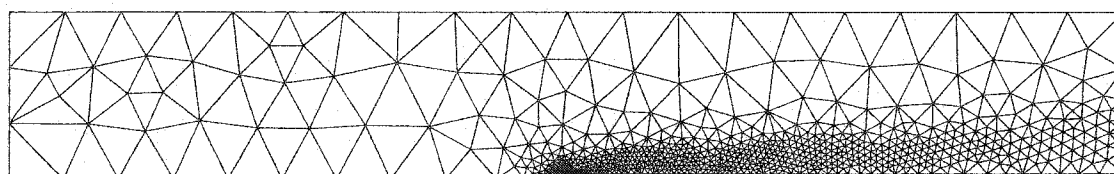
Nous n'avons pas tracé les contraintes le long de la paroi. Cette étude se fera plus tard à l'aide du coefficient de friction que nous déduirons non pas de la dérivée normale de la vitesse tangentielle, mais directement de l'équation de loi de paroi.

Pour que cette étude soit complète, poursuivons dans le sens transversal afin de

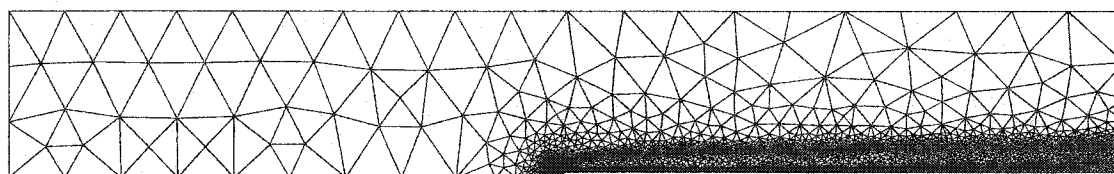




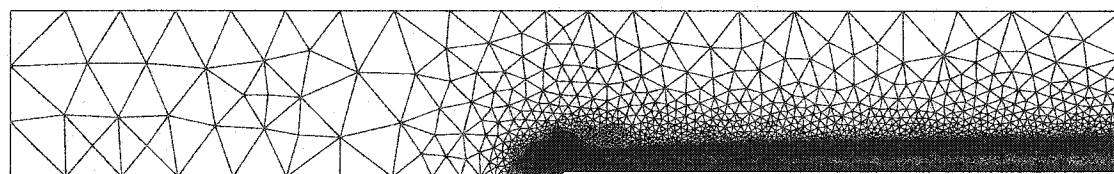
(a) cycle 1



(b) cycle 2



(c) cycle 4



(d) cycle 6

FIG. 5.6 Séquence de maillages pour le plaque plane



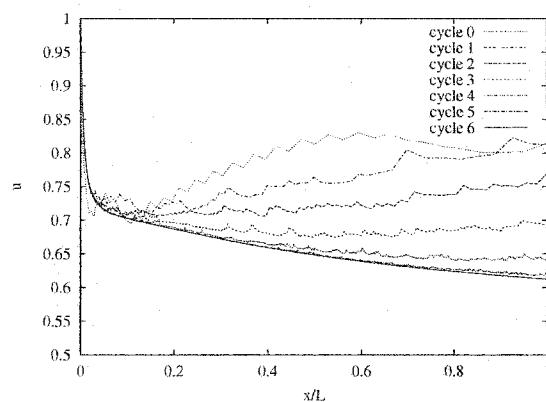
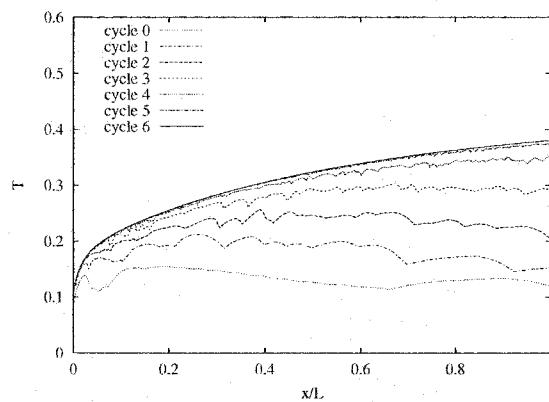
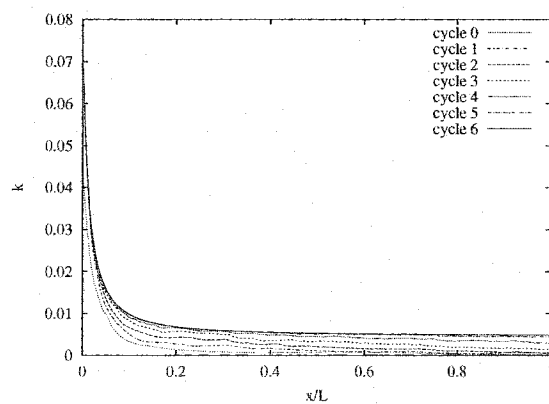
(a)  $u$ (b)  $T$ (c)  $k$ 

FIG. 5.7 Courbes de convergence de l'écoulement le long de la plaque



voir ce qui se passe à partir de  $y = d$ , à l'abscisse  $x/L = 0.5$ . Là-aussi, les courbes de convergence de la figure 5.8 sont satisfaisantes. Ces courbes sont d'ailleurs des agrandissements au voisinage de la paroi : d'une façon générale, la solution converge rapidement hors de la couche limite. Notons toutefois que la convergence du tenseur de Reynolds est de moins bonne qualité : cela était attendu, étant donné que cette grandeur est une dérivée des précédentes.

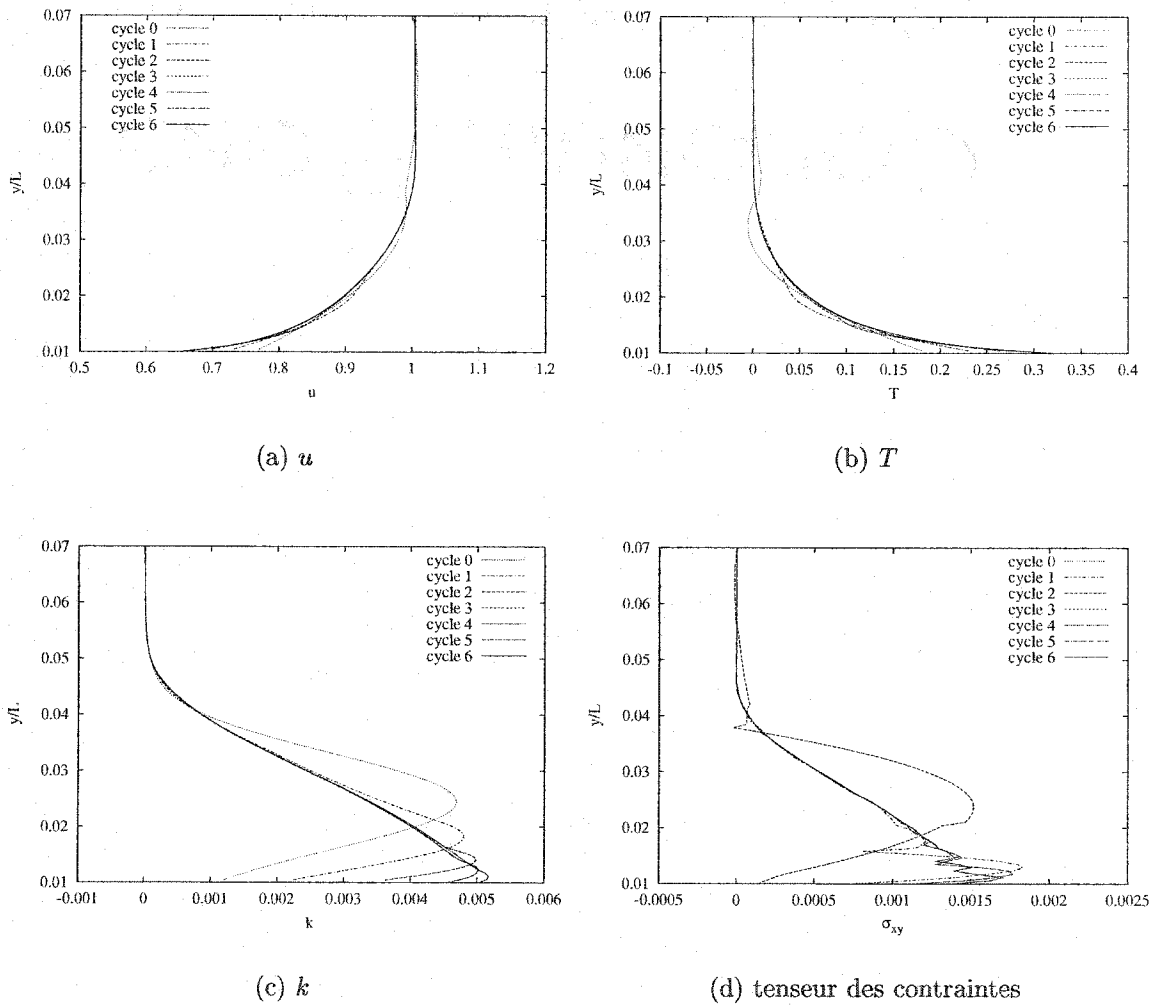


FIG. 5.8 Courbes de convergence de l'écoulement en coupe à  $x/L = 0.5$

Ces figures nous donnent un ordre de grandeur à la distance  $d$  de la paroi : on a



$u \approx 0.65$  et  $T \approx 0.3$ . On se trouve bien en présence de profils turbulents, comme sur la figure 3.1, avec de très forts gradients dans la couche laminaire.

De plus, on remarque que la distribution de  $k$  et celle du tenseur des contraintes ont des allures très similaires et que l'on a  $k \approx 3\sigma$ . On retrouve le comportement d'une couche limite dont la turbulence est en équilibre. On observe le même ratio utilisé par le modèle empirique de Bradshaw *et al.* [4] :

$$\sigma = a_1 \rho k \quad \text{avec } a_1 \approx 0.3 \quad (5.2)$$

#### 5.2.2.2 Convergence de la loi de paroi

Dans la théorie de la couche limite, nous avons signalé que la distance  $d$  fixée par l'utilisateur devait être choisie de façon à ce que les premiers points du maillage se trouve dans la zone logarithmique de la loi de paroi, soit  $y^+$  compris entre 30 et 300 environ. Comme nous l'avons vu précédemment, il est difficile d'évaluer *a priori* et avec précision cette distance  $d$ . Il faut donc maintenant vérifier la justesse de notre choix initial. Pour cela, la figure 5.9 montre les courbes de convergence de  $y^+$  la long de la paroi. La convergence est atteinte au cycle 6 et nous vérifions que la distance  $d$  se trouve bien dans la zone de validité, avec

$$50 < y_d^+ < 200$$

sur plus de 90% de la plaque.

La figure 5.10 permet une vérification plus visuelle : elle montre la convergence en  $x/L = 0.5$  des courbes  $u^+$  vs.  $y^+$  et  $T^+$  vs.  $y^+$ . Cette convergence est atteinte et le résultat final est en bon accord avec les courbes théoriques représentant les lois de paroi en vitesse et en température, ainsi qu'avec la corrélation de Van Driest.



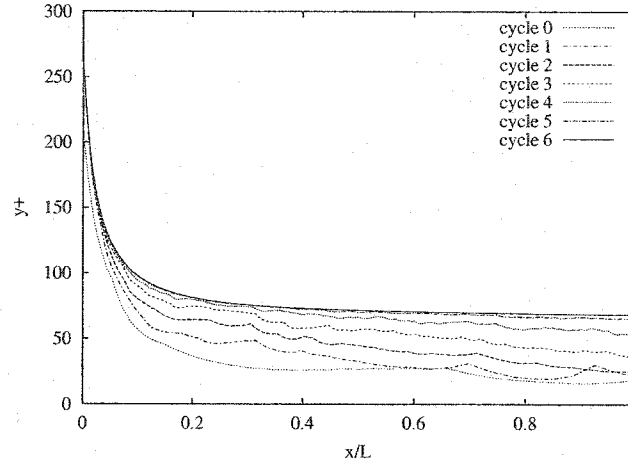


FIG. 5.9 Courbe de convergence de  $y^+$  le long de la plaque

Cette dernière est calculée à partir du modèle de Van Driest<sup>[37]</sup> sur la longueur de mélange, et est définie de la façon suivante :

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\kappa^2(y^+)^2[1 - \exp(-y^+/A^+)]^2}} \quad (5.3)$$

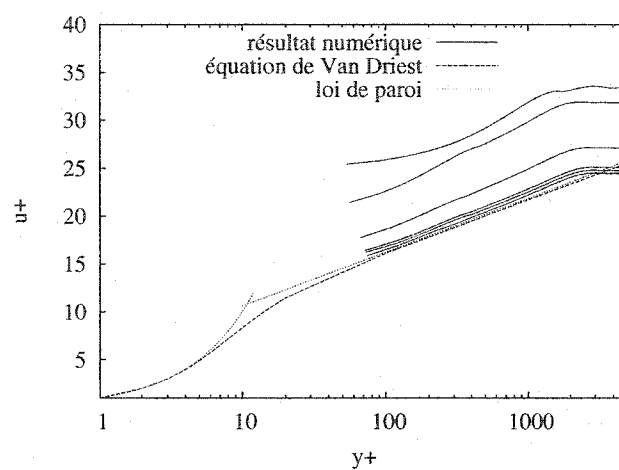
avec

$$A^+ = 25$$

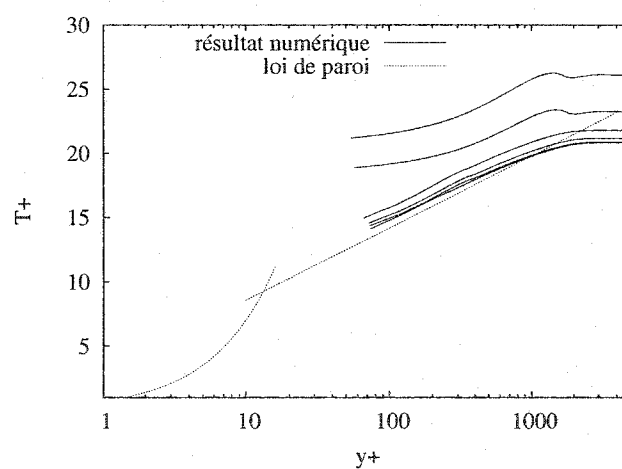
Ce modèle a l'intérêt de présenter une corrélation continue de la loi de paroi de façon très fidèle.

De plus, nous avons maintenant un ordre de grandeur pour la vitesse et la température adimensionnelles des lois de paroi : on a  $u^+ \approx 16$  et  $T^+ \approx 13$  à la paroi, c'est-à-dire à la frontière du maillage.





(a) Loi de paroi en vitesse



(b) Loi de paroi en température

FIG. 5.10 Courbe de convergence des lois de paroi



### 5.2.2.3 Comparaison avec des corrélations

Il existe des corrélations expérimentales pour certaines grandeurs le long de la plaque tirées d'études expérimentales. Il s'agit tout particulièrement du coefficient de friction  $C_f$  et du nombre de Stanton  $St$ . Le premier permet de nous pencher sur les contraintes à la paroi, tandis que le second est plus orienté vers les échanges thermiques à la paroi.

Le coefficient de friction  $C_f$  est défini de la façon suivante :

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (5.4)$$

où  $U_\infty$  est la vitesse de l'écoulement libre. En appliquant les équations de la loi de paroi (3.6), (3.10) et (3.12), on peut calculer  $C_f$  comme suit :

$$C_f = \frac{\rho \kappa u_t u_k}{\ln(Ey^+)} \quad (5.5)$$

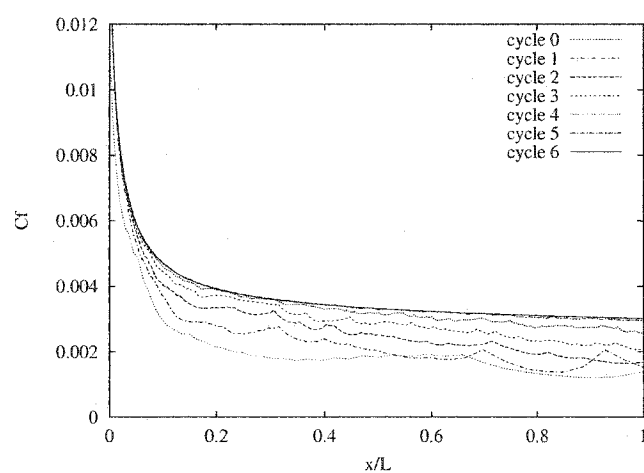
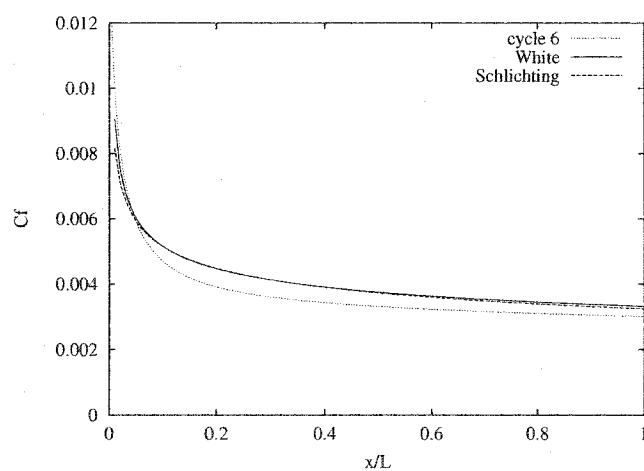
La figure 5.11 montre la convergence du coefficient de friction, ainsi que la comparaison de notre résultat numériques avec les corrélations de Schlichting et de White :

$$C_f = 0.0592 \frac{\tilde{U}_\infty^{1.8}}{(\text{Re}_x)^{0.2}} \quad (\text{Schlichting}^{[38]})$$

$$C_f = \frac{0.455 \tilde{U}_\infty^2}{\ln^2(0.06 \text{Re}_x)} \quad (\text{White}^{[48]})$$

L'accord entre nos prédictions et les corrélations est très acceptable. Nous retrouvons là des résultats comparables à ceux de Lacasse <sup>[27]</sup> et de Turgeon <sup>[44]</sup> .



(a) Convergence de  $C_f$ 

(b) Comparaison avec les corrélations

FIG. 5.11 Étude du coefficient de friction



Passons maintenant à l'étude du nombre de Stanton. Celui-ci peut être défini de la façon suivante :

$$St = \frac{q_w x}{\lambda(T_w - T_\infty)Re_x Pr} \quad (5.6)$$

Ce nombre mesure donc le rapport du flux de chaleur normal à la paroi sur le taux de transfert de chaleur convectif à la paroi. Il s'agit donc ici de nous pencher sur le caractère thermique de l'écoulement. Ce nombre est calculé numériquement en utilisant l'équation (3.21) :

$$St = \frac{u_k(T_w - T)}{T^+(T_w - T_\infty)\bar{U}_\infty} \quad (5.7)$$

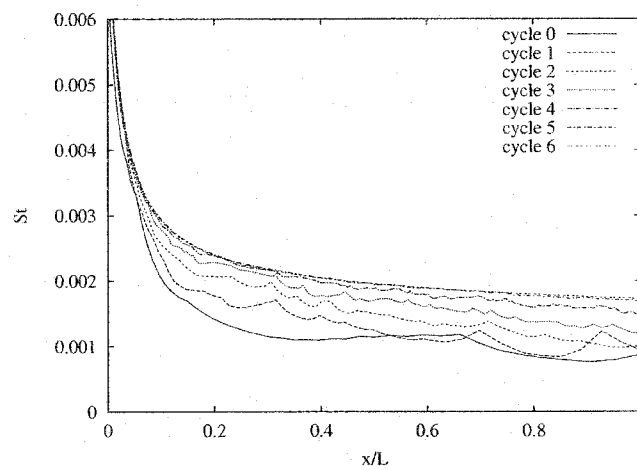
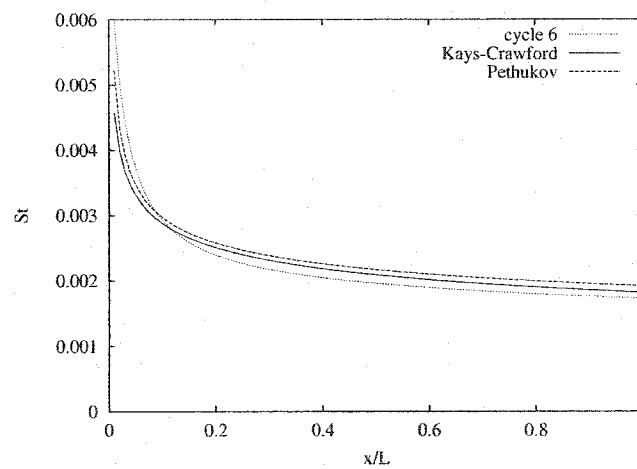
Il existe d'ailleurs un lien entre le coefficient de friction et le nombre de Stanton, donné par Kays et Crawford [22] :

$$St = \frac{C_f/2}{\sqrt{C_f/2}(13.2Pr - 0.95) + 0.85} \quad (5.8)$$

Il n'est donc pas étonnant de retrouver sur la figure 5.12 un comportement du Stanton analogue à celui du  $C_f$ . Cette remarque rejoint celles du premier chapitre sur les analogies entre forces de friction et transfert de chaleur. Une fois encore, le nombre de Prandtl fait le lien entre quantité de mouvement et chaleur. De même, cette relation servira à nouveau lors de l'étude des sensibilités de ces grandeurs.

Ici aussi, la convergence est atteinte et l'accord avec les prédictions est bon. Nous vérifions donc ici que le volet thermique du problème n'ajoute aucune difficulté supplémentaire à la convergence.



(a) Convergence de  $St$ 

(b) Comparaison avec les corrélations

FIG. 5.12 Étude du nombre de Stanton



#### 5.2.2.4 Convergence des sensibilités

Il existe trois familles de paramètres intéressants pour une analyse de sensibilités :

- les paramètres de fermeture du modèle de turbulence  $C_\mu$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_k$  et  $\sigma_\epsilon$
- les paramètres intervenant dans la loi de paroi en vitesse  $\kappa$ ,  $E$  et  $d$
- les paramètres intervenant dans la loi de paroi en température  $c_p$ ,  $\lambda$  et  $T_w$

Il serait fastidieux et inutile de présenter les résultats de convergence de chacune de ces sensibilités. Pour l'étude préliminaire de la convergence, nous utiliserons un autre paramètre : la vitesse de référence  $U_\infty$  dont l'intérêt pour notre étude est d'intervenir dans l'écriture des corrélations pour  $C_f$  et  $St$ . Nous nous intéresserons donc à toutes ces sensibilités.

La figure 5.13 montre la convergence des sensibilités par rapport à  $U_\infty$  de la vitesse de glissement le long de la paroi  $u$  tandis que la figure 5.14 montre la convergence des sensibilités du coefficient de friction  $C_f$  et du Stanton  $St$  toujours par rapport à  $U_\infty$ . Cette figure présente aussi les comparaisons avec les corrélations.

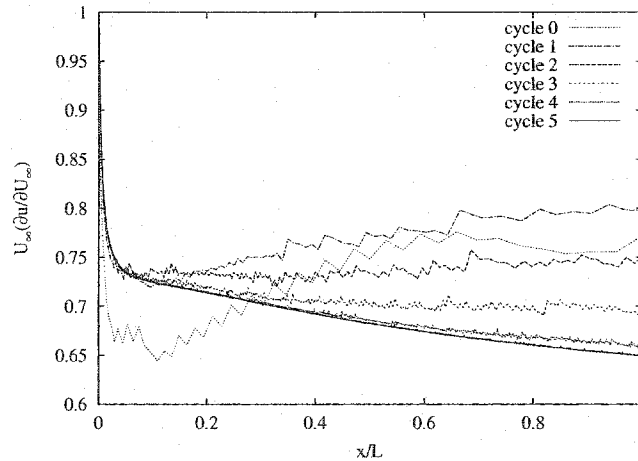


FIG. 5.13 Convergence de  $S_u^{U_\infty}$  le long de la loi de paroi



Les sensibilités de  $C_f$  et de  $St$  par rapport à  $U_\infty$  sont définies de la façon suivante :

$$C'_f = \frac{\partial C_f}{\partial \tilde{U}_\infty} = \frac{\tau'}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$$

$$St' = \frac{\partial St}{\partial \tilde{U}_\infty}$$

Les corrélations pour les sensibilités sont obtenues en dérivant les corrélations précédentes pour l'écoulement par rapport à  $U_\infty$  :

$$C'_f = \frac{1.6C_f}{\tilde{U}_\infty} \quad (\text{Schlichting}) \quad (5.9)$$

$$C'_f = \frac{2C_f}{\tilde{U}_\infty} \left[ 1 - \frac{1}{\ln(0.06\text{Re}_x)} \right] \quad (\text{White}) \quad (5.10)$$

$$St' = \frac{1.6St}{\tilde{U}_\infty} \quad (\text{Kays-Crawford}) \quad (5.11)$$

$$St' = \frac{2St}{\tilde{U}_\infty} \left[ 1 - \frac{1}{\ln(0.06\text{Re}_x)} \right] \quad (\text{Pethukov}) \quad (5.12)$$

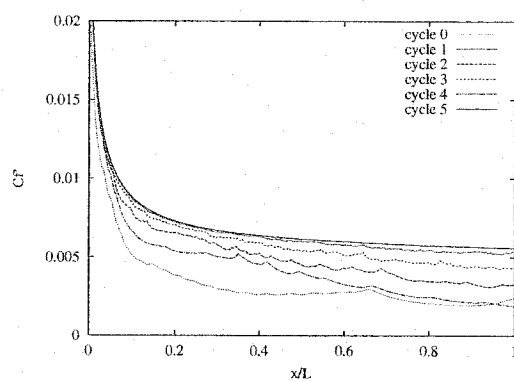
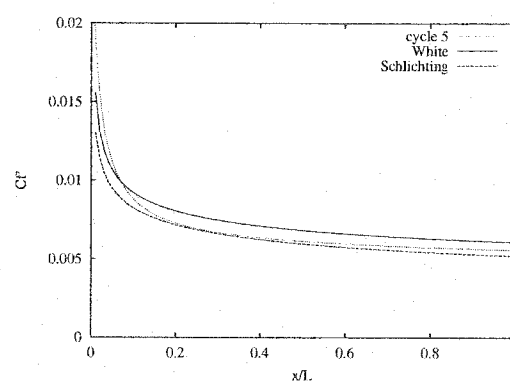
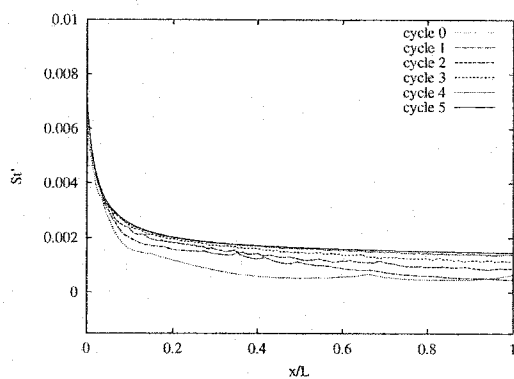
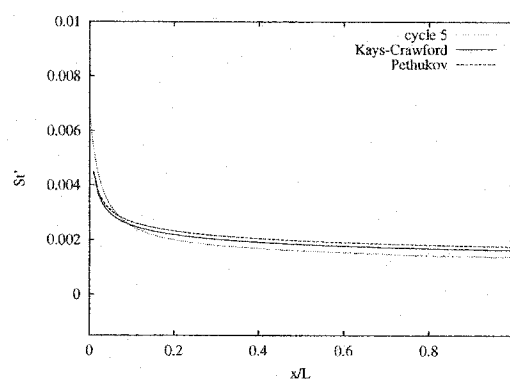
Nous validons ainsi notre modèle pour les sensibilités aussi bien que pour l'écoulement : notre solution converge correctement vers la solution attendue.

Précisons que toutes les sensibilités montrées ici sont des sensibilités normalisées, tel que défini à la section 2.3.5 ; cependant, afin d'alléger les notations, nous les écrirons, par exemple pour la vitesse,  $S_u^{U_\infty}$  et non  $U_\infty S_u^{U_\infty}$ .

#### 5.2.2.5 Étude des sensibilités classiques

On peut maintenant étudier l'influence des différents paramètres sur les grandeurs caractéristiques de l'écoulement. Les figures 5.15, 5.16 et 5.17 résument ces in-



(a) convergence de  $U_\infty \frac{\partial C_f}{\partial U_\infty}$ (b) correlations pour  $U_\infty \frac{\partial C_f}{\partial U_\infty}$ (c) convergence de  $U_\infty \frac{\partial St}{\partial U_\infty}$ (d) correlations pour  $U_\infty \frac{\partial St}{\partial U_\infty}$ FIG. 5.14 Convergence et corrélations pour  $U_\infty \frac{\partial C_f}{\partial U_\infty}$  et pour  $U_\infty \frac{\partial St}{\partial U_\infty}$



fluences. Comme nous l'avons vu précédemment, la température n'affecte ni la vitesse, ni la turbulence : cela explique le fait que les courbes de sensibilités en température de ces grandeurs soient confondues avec l'axe des abscisses.

On voit sur la figure 5.15 que les paramètres de turbulence les plus influents sont  $C_1$  et  $C_2$ . Pour les paramètres de loi de paroi,  $\kappa$  est sans équivoque la paramètre le plus influent.

On peut noter deux résultats intéressants pour les sensibilités par rapport aux paramètres thermiques. D'une part, la sensibilité de  $T$  par rapport au coefficient de chaleur massique  $c_p$  est opposée à celle de  $T$  par rapport à la conductivité dynamique  $\lambda$ . Ce résultat était prévisible : en effet, nous avons

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad (5.13)$$

nous indiquant que ces paramètres ont des effets contraires (ie. une augmentation de  $c_p$  est équivalente à une diminution de  $\lambda$ ). D'autre part, en nous penchant sur  $T_w$ , qui est par ailleurs le paramètre le plus influent, et en comparant la figure 5.17 et la courbe de convergence de  $T$  de la figure 5.7, on s'aperçoit que les courbes de  $T$  et de  $T_w \frac{\partial T}{\partial T_w}$  sont superposées. En relançant le calcul plusieurs fois avec des valeurs différentes pour  $T_\infty$  et  $T_w$ , nous en arrivons à l'équation suivante :

$$S_T^{T_w} = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (5.14)$$

Un résultat analogue est établi pour la sensibilité de  $T$  en  $T_\infty$  :

$$S_T^{T_\infty} = \frac{T_w - T}{T_w - T_\infty} \quad (5.15)$$

On remarque d'ailleurs que la somme de ces deux sensibilités est égale à 1. En d'autres termes, on remarque que :



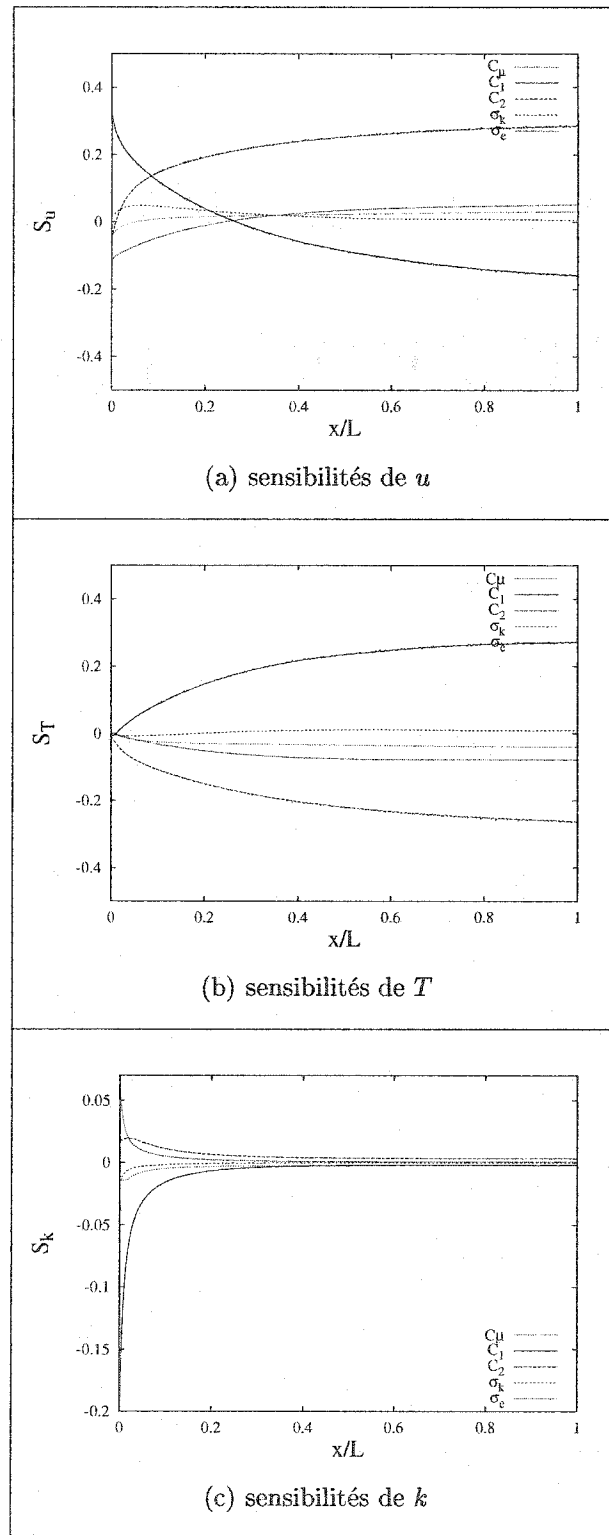


FIG. 5.15 Sensibilités par rapport aux paramètres de turbulence



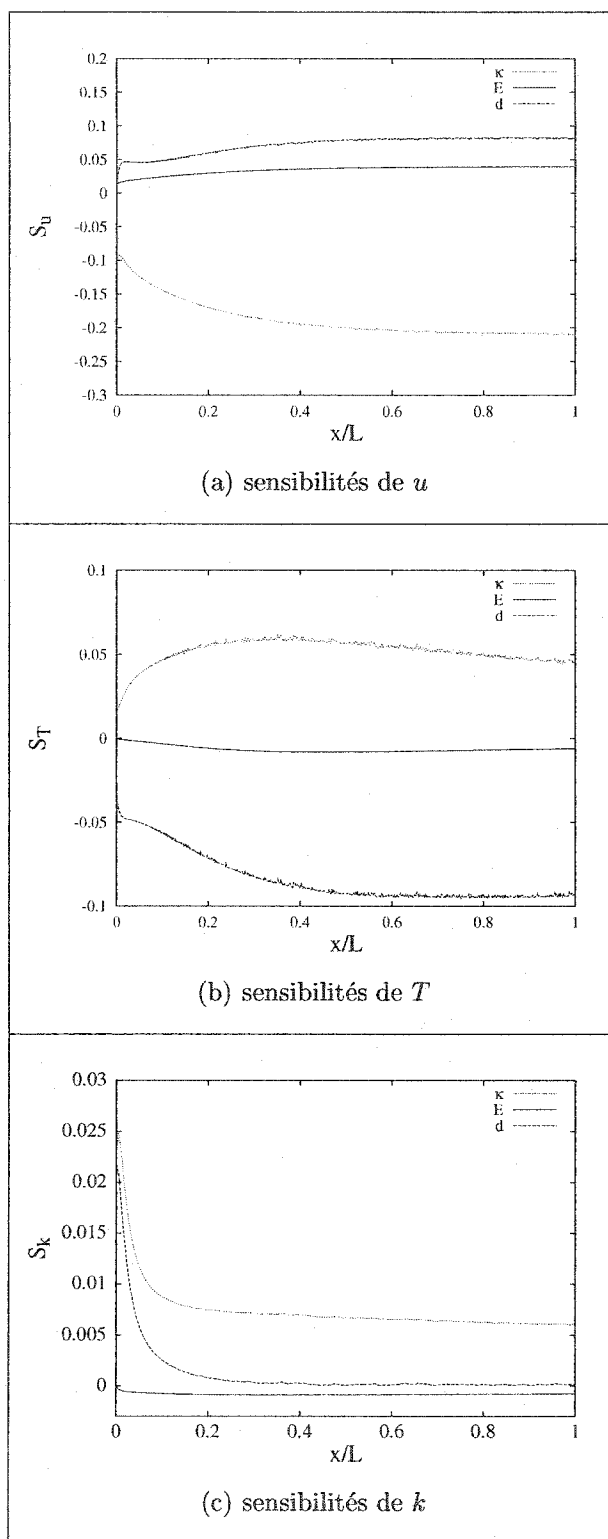


FIG. 5.16 Sensibilités par rapport aux paramètres de la loi de paroi



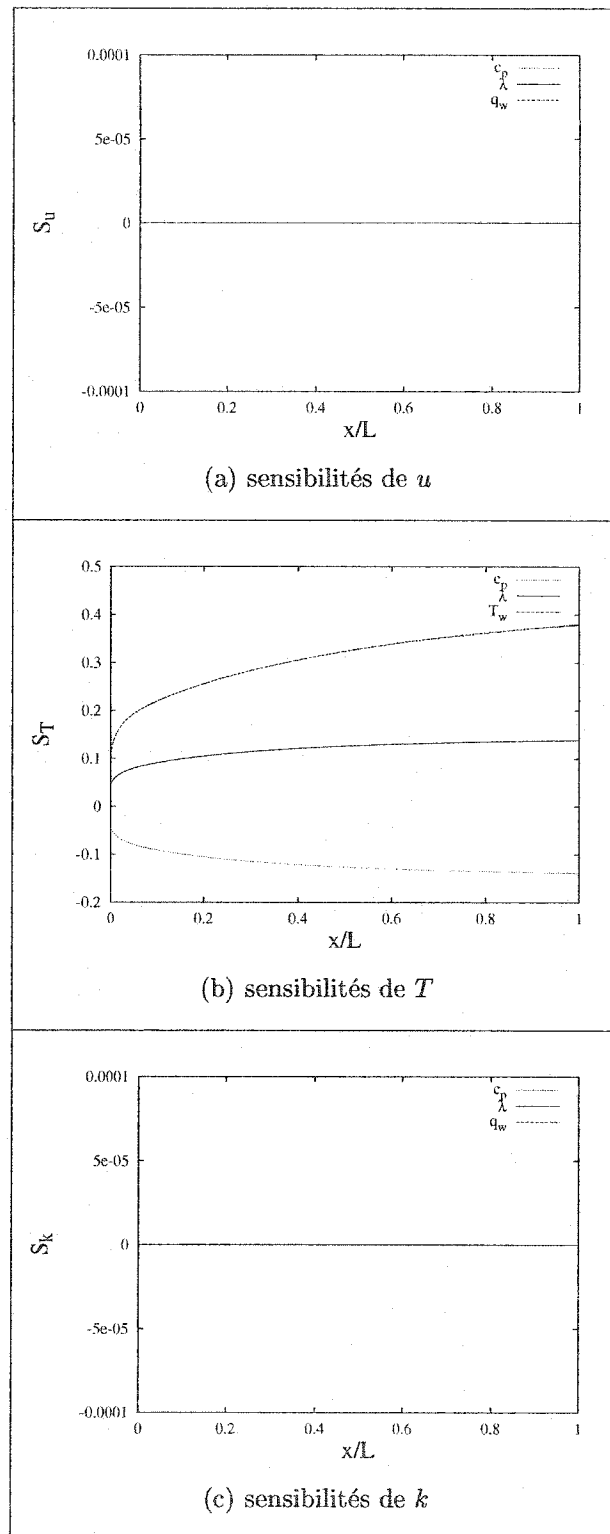


FIG. 5.17 Sensibilités par rapport aux paramètres thermiques



- ces sensibilités sont linéaires en  $T$ ,
- la sensibilité en  $T_w$  (respectivement  $T_\infty$ ) est bien égale à 1 à la paroi (respectivement à l'infini) et nulle à l'infini (respectivement à la paroi),
- augmenter d'autant les deux températures revient à effectuer une augmentation uniforme de la température dans le domaine.

Dans le cas présent, ces résultats s'expliquent d'une part par le caractère linéaire de l'équation d'énergie :

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla [(\lambda + \lambda_t) \nabla T]$$

et d'autre part par l'application de condition aux limites constantes à la paroi et à l'infini. En effet, l'équation d'énergie peut s'écrire sous une forme matricielle, que l'on dérive pour obtenir l'équation de la sensibilité. A partir de cette équation, nous déterminons la dépendance linéaire de  $S_T^{T_w}$  en  $T$ . L'application des conditions aux limites amène à l'équation (5.14).

La figure 5.18 illustre nos précédents propos : ces résultats ont été obtenus pour  $T_\infty = 1.2$  et  $T_w = 3.5$ .

#### 5.2.2.6 Étude des sensibilités de $C_f$ et $St$

Les figures 5.19 et 5.20 montrent les influences des différents paramètres sur le coefficient de friction et le nombre de Stanton.

On trouve des tendances très similaires pour  $C_f$  et  $St$  en ce qui concerne les sensibilités par rapport aux paramètres de turbulence et par rapport aux paramètres de la loi de paroi. Ceci est en parfait accord avec l'équation 5.8 donnée par Kays et Crawford. En effet, si on dérive cette équation par rapport à un de ces paramètres, on obtient alors des allures semblables pour  $C_f$  et  $St$ . Encore une fois, on trouve



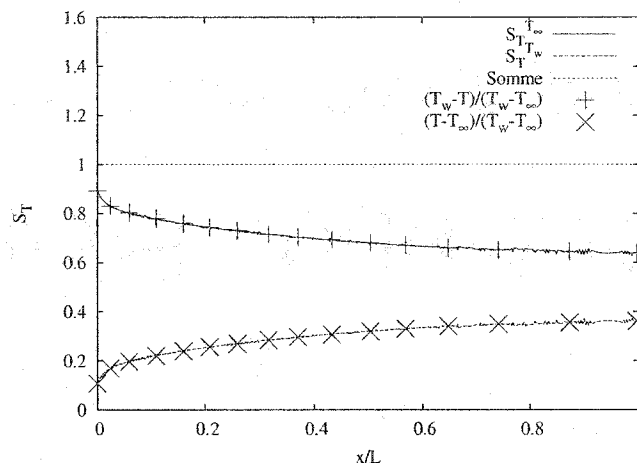


FIG. 5.18 Vérification des expressions de  $S_T^{T_w}$  et  $S_T^{T_\infty}$  sur la plaque plane

que  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\kappa$  sont les paramètres les plus influents.

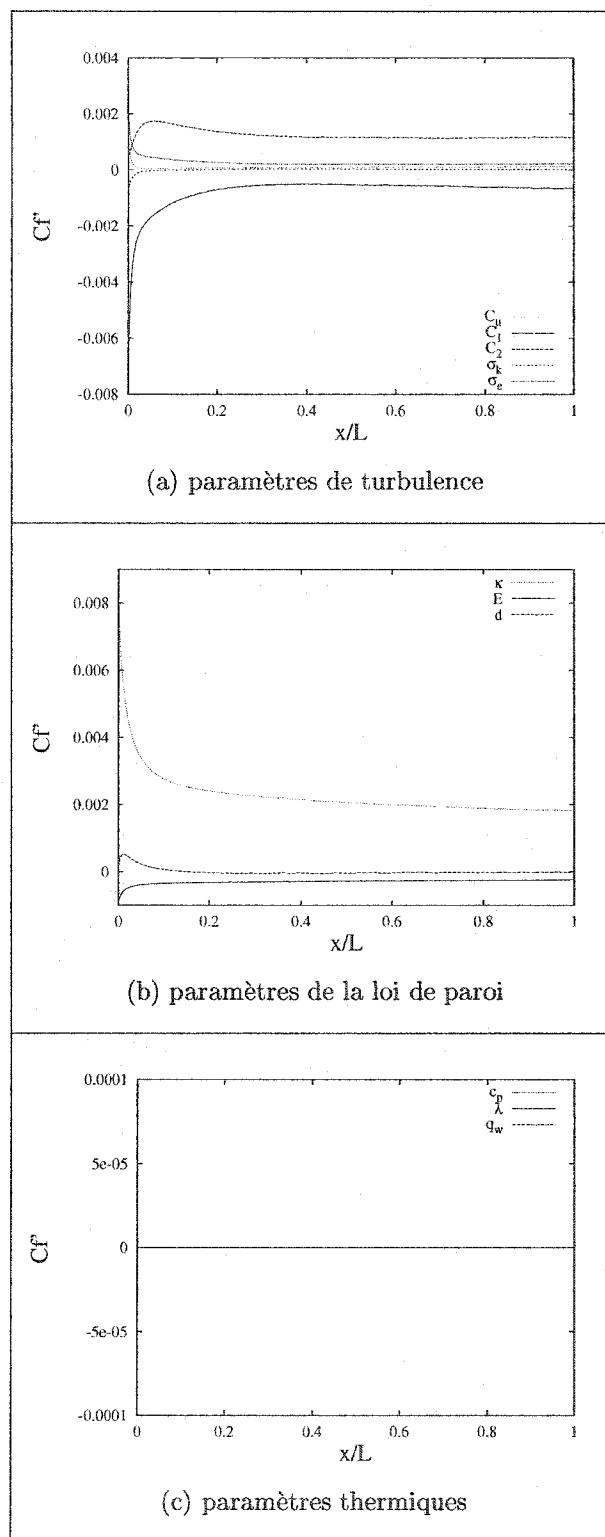
Passons maintenant aux paramètres thermiques. On retrouve des résultats précédents, à savoir que ces paramètres n'influencent pas le coefficient de friction qui ne dépend pas de la température et que  $c_p$  et  $\lambda$  ont des effets opposés. La nouveauté réside dans le fait que le nombre de Stanton est insensible aux variations de  $T_w$ . Pour comprendre ce phénomène, dérivons l'expression du Stanton (5.7) par rapport à  $T_w$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial St}{\partial T_w} &= St \left( \frac{1 - S_T^{T-w}}{T_w - T} - \frac{1}{T_w - T_\infty} \right) \\ &= \frac{St}{T_w - T} \left( \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} - S_T^{T_w} \right) \end{aligned}$$

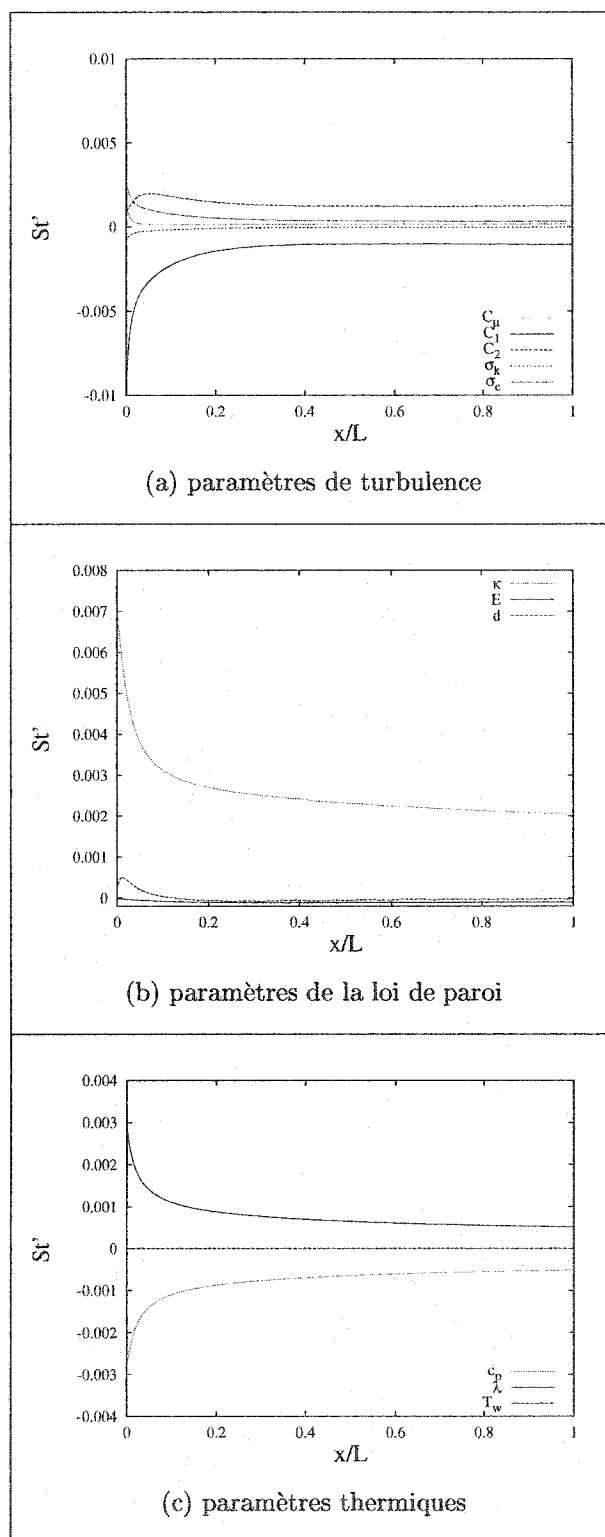
En utilisant l'équation 5.14, on annule le terme entre parenthèses et on arrive au résultat suivant : le rapport des échanges de chaleur pariétaux est constant quelle que soit la température  $T_w$ .

Notons que l'équation 5.15 implique le même résultat pour la sensibilité du nombre



FIG. 5.19 Sensibilités du coefficient de friction  $C_f$



FIG. 5.20 Sensibilités du nombre de Stanton  $St$



de Stanton par rapport à la température  $T_\infty$  :

$$\frac{\partial St}{\partial T_\infty} = 0 \quad (5.16)$$

### 5.2.3 Conclusion

Cette partie débute notre étude et nous livre trois résultats fondamentaux :

- nous avons vérifié que notre solveur était efficace et précis tant pour des variables simples que pour des variables complexes et ce aussi bien pour l'écoulement que pour ses sensibilités.
- l'apport de la facette thermique n'ajoute ici aucune difficulté supplémentaire, même si ce résultat ne s'appliquera plus lors de transferts de chaleur conjugués.
- nous avons déjà établi une classification des paramètres les plus influents sur les grandeurs étudiées.

Cette étude méthodique est donc la pierre d'angle de notre recherche : nous pouvons maintenant nous lancer dans des applications pratiques ou dans des extensions de ces problèmes au transfert de chaleur conjugué.



## CHAPITRE 6

### APPLICATION DE LA MÉTHODE DES SENSIBILITÉS

La méthode venant d'être vérifiée, nous pouvons maintenant nous lancer dans des applications de la méthode des sensibilités aux écoulements turbulents avec transfert de chaleur. Ce chapitre se penche sur deux applications : l'analyse d'incertitude et l'extrapolation de solution.

#### 6.1 Analyse d'incertitude

Cette partie est consacrée à l'analyse d'incertitude sur nos solutions. Nous définissons tout d'abord cette incertitude avant de montrer quelques exemples d'applications pour un écoulement confiné sur une marche descendante.

##### 6.1.1 Présentation de l'analyse d'incertitude

Le principe de l'analyse d'incertitude est de quantifier l'incertitude de la variable de réponse d'un système. Cette incertitude provient de l'incertitude initiale sur les paramètres d'entrée du système. C'est sur la relation entre ces incertitudes que les sensibilités s'avèrent utiles.

Nous baserons cette présentation sur le traitement complet d'un exemple. Considérons, par exemple, la température  $T$  dans le fluide. Supposons que la distribution de la température dépende d'un vecteur de paramètres  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  décrivant la géométrie, les conditions aux limites, les propriétés du fluide ou le



modèle d'écoulement utilisé. Nous pouvons alors noter  $\Delta \mathbf{a}$  l'incertitude sur le vecteur des paramètres et  $\Delta T$  l'incertitude sur la température. Le schéma 6.1 décrit notre problème.

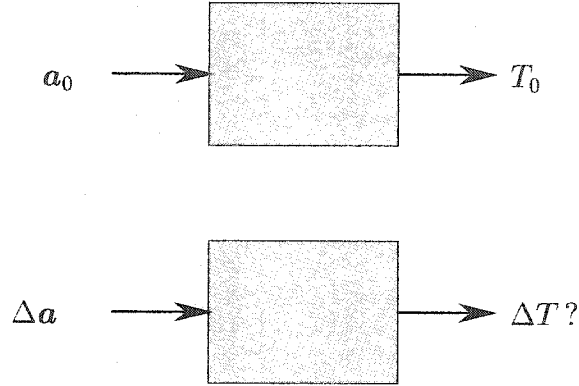


FIG. 6.1 Calcul de l'incertitude

En faisant l'hypothèse que l'incertitude initiale est faible par rapport à la valeur nominale des paramètres en entrée,

$$\forall i, \quad \Delta a_i \ll |a_i| \quad (6.1)$$

nous pouvons approximer l'expression de la température au point  $(x, y)$  à l'aide d'un développement de Taylor au premier ordre :

$$T(x, y; \mathbf{a}_0 + \Delta \mathbf{a}) \approx T(x, y; \mathbf{a}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial a_i}(x, y; \mathbf{a}_0) \Delta a_i \quad (6.2)$$

Nous voyons alors apparaître le rôle des sensibilités de  $T$  par rapport aux paramètres  $a_i$  :

$$T(x, y; \mathbf{a}_0 + \Delta \mathbf{a}) \approx T(x, y; \mathbf{a}_0) + \sum_{i=1}^n S_T^{a_i}(x, y; \mathbf{a}_0) \Delta a_i \quad (6.3)$$

L'incertitude de réponse est alors le maximum d'amplitude de la réponse lorsque



l'on fait varier les paramètres sur toute leur plage d'incertitude :

$$2\Delta T = \max |T(\mathbf{a}_1) - T(\mathbf{a}_2)| \quad \forall (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \in [\mathbf{a}_0 - \Delta \mathbf{a}; \mathbf{a}_0 + \Delta \mathbf{a}] \quad (6.4)$$

Dans l'hypothèse de petites incertitudes initiales, on peut considérer que ce maximum est atteint pour les bornes de la plages d'incertitude :

$$\Delta T = |T(\mathbf{a}_0) - T(\mathbf{a}_0 + \Delta \mathbf{a})| \quad (6.5)$$

On peut alors utiliser notre développement de l'équation (6.3) pour finalement aboutir à l'expression de l'incertitude de réponse :

$$\Delta T \approx \sum_{i=1}^n |S_u^{a_i}(x, y; \mathbf{a}_0)| \Delta a_i \quad (6.6)$$

De la même manière, on peut aussi définir une incertitude quadratique (ou RMS) :

$$\Delta T \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n |S_T^{a_i}(x, y; \mathbf{a})|^2 \Delta a_i^2} \quad (6.7)$$

Cependant, le passage au quadratique ne constitue pas un progrès significatif et ne fait qu'alourdir le calcul d'incertitude. En effet, nous avons vu précédemment que seuls un ou deux paramètres étaient véritablement influents : dans ce cas, les moyennes arithmétiques et quadratiques sont très proches. La figure 6.2 montre un exemple de comparaison entre ces deux calculs : la différence n'est même pas visible. Il s'agit ici de l'incertitude de la composante horizontale de la vitesse  $u$  le long de la plaque à  $y = d$  calculée à partir des incertitudes sur les paramètres thermiques.



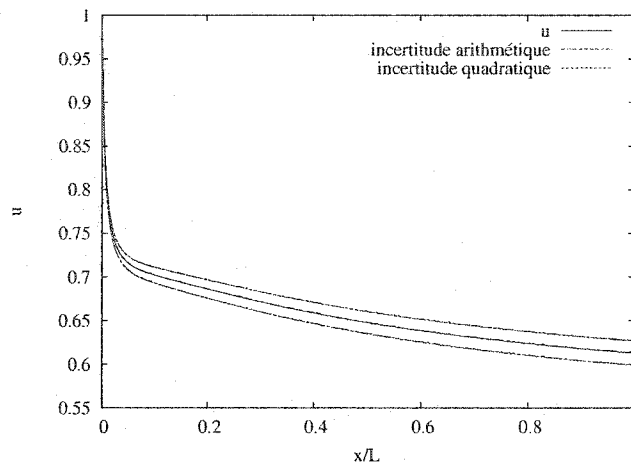


FIG. 6.2 Comparaison entre l'incertitude arithmétique et l'incertitude quadratique

Restons tout de même attentif par la suite à l'utilisation du terme d'incertitude. En effet, nous nous intéressons ici à une incertitude liée au manque de précision initial des différents paramètres. Cette incertitude ne doit bien-sûr pas être confondue à une incertitude expérimentale (!), mais surtout doit être bien différenciée de l'incertitude numérique, fixée par l'utilisateur et servant de limite de convergence au calculateur. Cette dernière est de toute façon fixée à une valeur très faible d'un ordre de grandeur bien inférieur à l'incertitude qui nous préoccupera à présent.

### 6.1.2 Marche descendante : un exemple complet

Abandonnons un instant le calcul d'incertitude afin de présenter l'écoulement qui va nous servir d'exemple. Il s'agit ici d'un écoulement autour d'une marche descendante, étudiée expérimentalement par Vogel *et al* <sup>[47]</sup>. Nous avons gardé la même géométrie, représentée sur la figure 6.3.



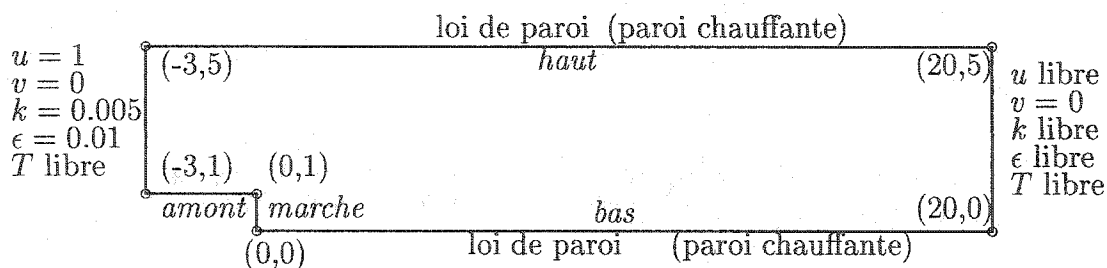


FIG. 6.3 Géométrie et condition aux limites pour la marche descendante

TAB. 6.1 Marche descendante : distances à la paroi

paroi	distance $d$
amont	0.08
marche	0.1
bas	0.05
haut	0.1

Ce problème a de même été étudié pour une géométrie aux dimensions différentes et sans la composante thermique par Turgeon *et al* <sup>[44]</sup>. Pour cette simulation adimensionnelle, le nombre de Reynolds a été fixé à  $Re = 28000$ . On applique des conditions de Dirichlet constante en entrée :  $u = 1$ ,  $v = 0$ ,  $T = 0$ ,  $k = 0.005$  et  $\epsilon = 0.01$ . En sortie, on impose une contrainte normale nulle et les dérivées normales de  $T$ ,  $k$  et  $\epsilon$  sont elles-aussi fixées à zéro. On utilise des lois de parois à deux échelles de vitesse pour les autres parois solides, en fixant les distances  $d$  tel qu'indiqué dans le tableau 6.1. Enfin, on impose un flux constant  $q_w = 1$  sur la paroi du bas et on considère que les autres parois sont adiabatiques.

Nous utilisons les mêmes paramètres que précédemment pour l'étude des sensibilités, à savoir : les 5 paramètres de turbulence ( $C_\mu$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_k$  et  $\sigma_\epsilon$ ); les 3 coefficients thermiques ( $c_p$ ,  $\lambda$  et  $q_w$ ) et les 3 coefficients de loi de paroi ( $d$ ,  $\kappa$  et  $E$ ).

Avant de commencer l'analyse d'incertitude proprement dite, vérifions la bonne convergence de notre solution. Les figures 6.4 et 6.5 montrent le maillage final



adapté et quelques isovaleurs de l'écoulement. Le maillage final est obtenu après 4 cycles adaptatifs et comprend 75,000 noeuds.

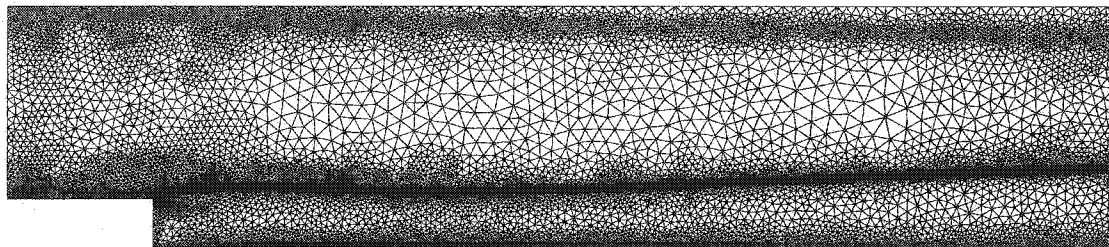


FIG. 6.4 Maillage final pour la marche descendante

On trouve un niveau de raffinement élevé près du coin d'expansion, dans la couche cisailée et près des murs du bas et du haut. Un tel degré de raffinement s'explique par la méthode de réduction d'erreur utilisée, et correspond à de forts gradients dans la solution. On voit que le raffinement sur la paroi du bas est principalement dû aux gradients de  $u$  et  $T$ . De même,  $\mathcal{K}$  et sa sensibilité  $S_{\mathcal{K}}$  (ici par rapport à  $C_{\mu}$ ) montrent un front très serré le long de la paroi du haut et dans la couche cisailée. Les résultats pour  $u$  et  $\mathcal{K}$  sont similaires à ceux obtenus par Turgeon *et al.* [44]. Dans notre exemple, le raffinement est cependant plus précis et les problèmes liés à la pauvreté du raffinement ont disparu.

Comme nous l'avons vu précédemment, un des premiers résultats à vérifier est la bonne convergence et le bon ordre de grandeur de  $y^+$ . En effet, rappelons encore une fois que, pour que le modèle de loi de paroi soit valide, il faut que  $y^+$  soit compris entre 30 et 300 environ. La figure 6.6 montre la convergence et la distribution de  $y^+$  pour chaque paroi du domaine. Nous voyons que la convergence est rapidement atteinte et que l'ordre de grandeur de  $y^+$  est toujours compris entre 50 et 100, c'est-à-dire dans la zone de validité de la loi de paroi. Seul le coin de la marche pose problème, puisque la valeur de  $y^+$  explose lorsque l'on s'en approche.



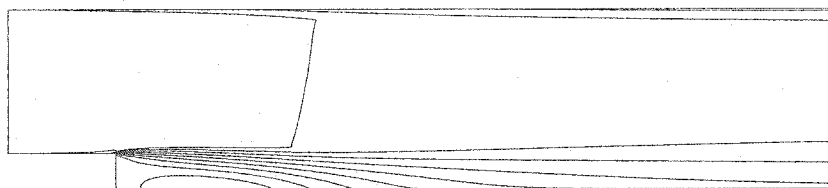
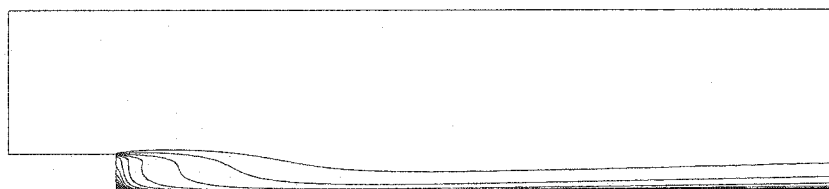
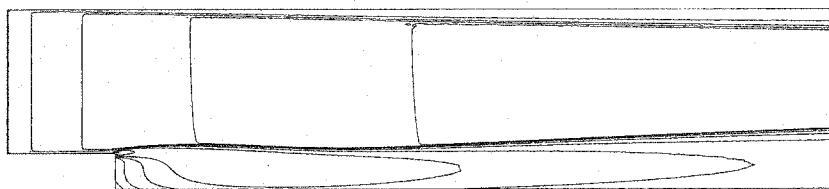
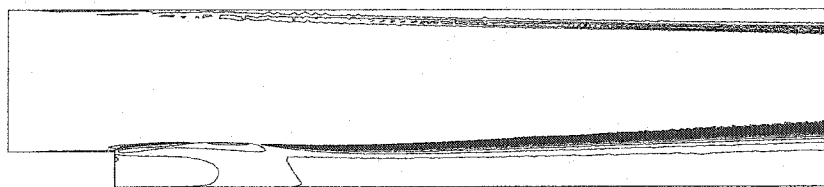
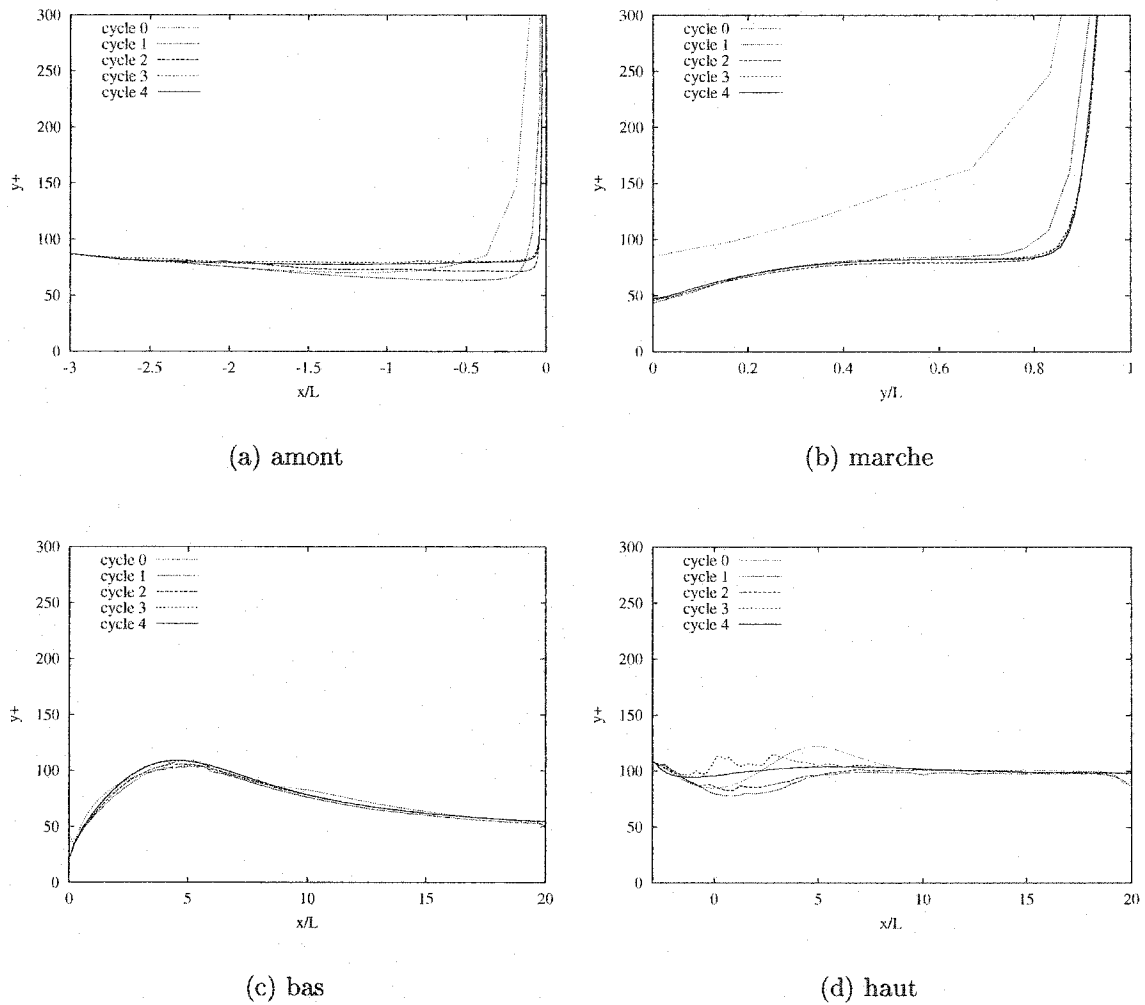
(a)  $u$ (b)  $T$ (c)  $K$ (d)  $\frac{\partial K}{\partial C_\mu}$ 

FIG. 6.5 Isovaleurs pour la marche descendante



FIG. 6.6 Distribution de  $y^+$  sur les parois

Ce résultat est facilement explicable : nous avons imposé une condition limite incorrecte au coin de la marche. En effet, le coin est l'endroit où la condition frontière de la paroi amont ( $u$  libre,  $v = 0$ ) rencontre celle de la paroi verticale de la marche ( $u = 0$ ,  $v$  libre), imposant ainsi  $u = v = 0$  (ie. une mauvaise contrainte de cisaillement). Deux autres solutions s'offraient à nous : la première était d'imposer une formulation faible des conditions aux limites afin de laisser la vitesse libre au coin, la seconde était d'imposer  $u = \text{libre}$  et  $v = 0$  au coin.



Cependant, les trois méthodes donnent le même résultat. La figure 6.7 montre la distribution du coefficient de friction sur la paroi du bas : les distributions sont semblables. Notre méthode a l'avantage d'être plus rapide et moins coûteuse en espace mémoire.

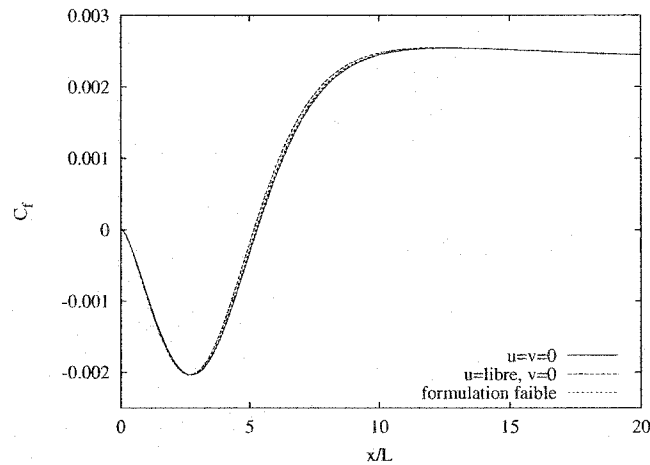


FIG. 6.7 Distribution de  $C_f$  pour les différentes conditions aux limites

Comme nous l'avons signalé, une des caractéristiques principales de cet écoulement est la présence d'un point de stagnation. Il est pertinent de se pencher sur les échelles de vitesse. La figure (6.8) présente les distributions de  $u_{**}$  et de  $u_k$  sur la paroi du bas. On voit que la vitesse  $u_{**}$  caractérise la friction et, de négative, devient positive au point de stagnation. De même, la vitesse  $u_k$  caractérise la turbulence : elle reste strictement positive et connaît un maximum un peu avant le point de stagnation.

De plus, nous avons cette fois imposé un flux de chaleur à la paroi  $q_w$  constant. Nous pouvons déterminer la température à la paroi à l'aide de l'équation suivante :

$$T_w = T(y = d) + \frac{q_w T^+}{\rho c_p u_k} \quad (6.8)$$



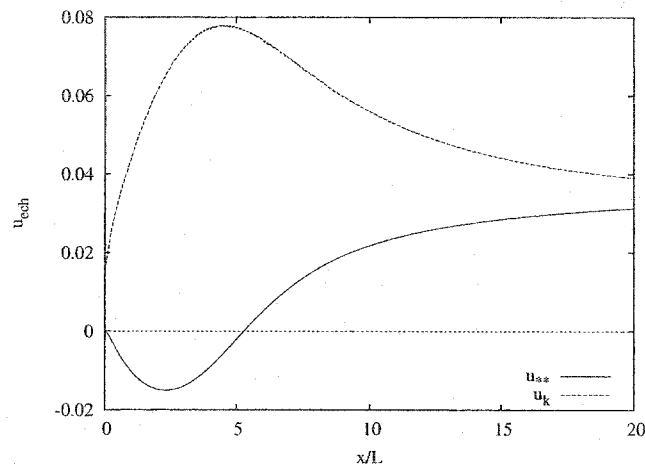


FIG. 6.8 Distribution des échelles de vitesse de la loi de paroi

La figure (6.9) montre les distributions de température à la paroi et pour  $y = d$ . La température  $T_w$  varie le long de la paroi et on voit que les minima de ces deux distributions ne coïcident pas et que le champ de température près de la paroi n'est pas affecté par la présence du point de stagnation. Choisir un flux unitaire nous donne de grandes valeurs de la température. Cependant, notre étude est adimensionnelle, et on pourrait se ramener à des températures proche de l'unité en utilisant une règle de proportionnalité.

Cette partie préliminaire ne serait pas complète sans une étude de convergence de l'écoulement et des sensibilités. La figure 6.10 présente les courbes de convergence de  $St$  et d'une des ses sensibilités  $\lambda \frac{\partial St}{\partial \lambda}$ . Ces quantités convergent correctement lors de l'adaptation. Nous obtenons ici un résultat important : l'incertitude est indépendante du maillage. En effet, notre maillage est uniforme le long de la paroi du bas et ne présente aucun degré de raffinement supplémentaire là où l'incertitude de  $St$  par rapport à la conductivité  $\lambda$  atteint son maximum.



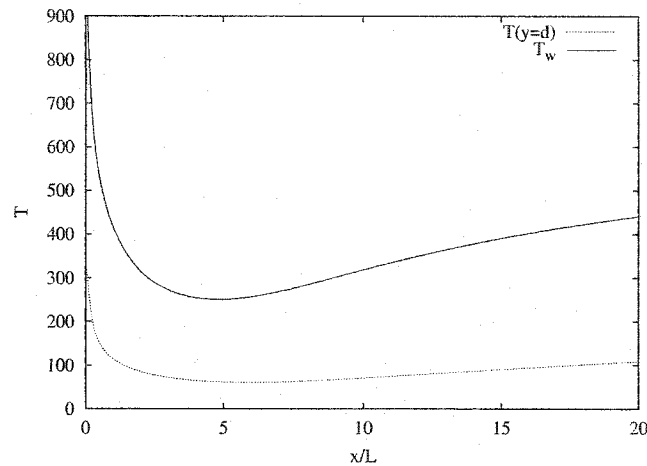


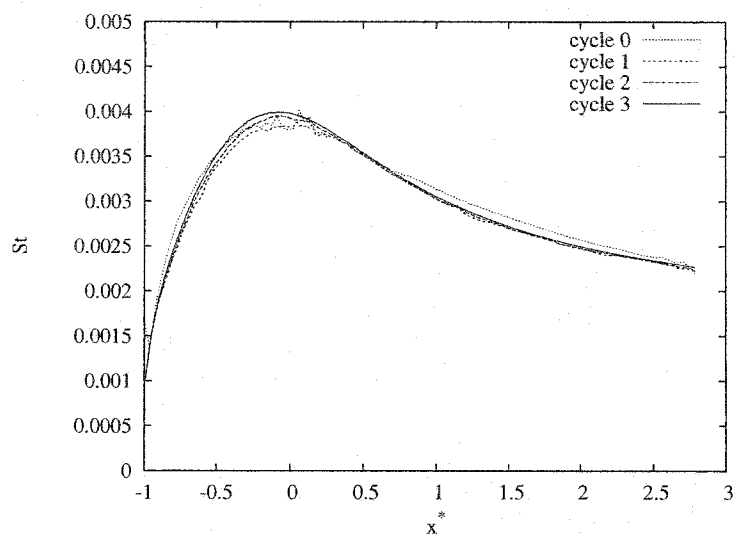
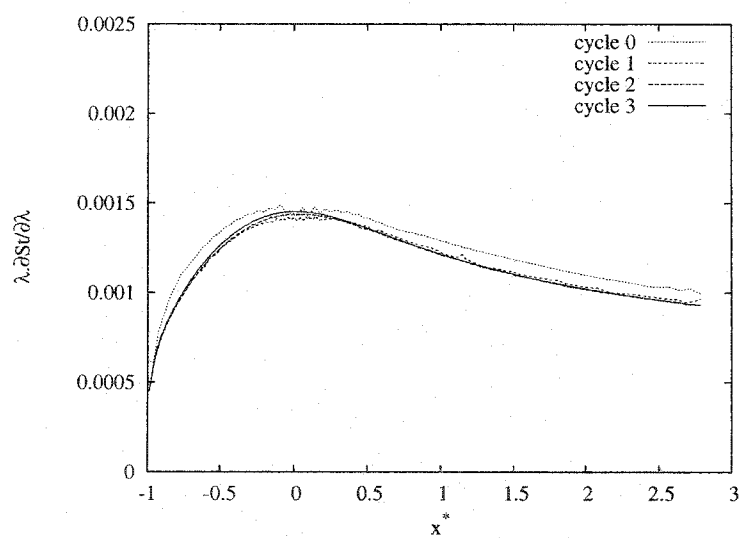
FIG. 6.9 Distributions de  $T_w$  et de  $T$  en  $y = d$

Notre étude tournera ici aussi autour de l'étude du coefficient de friction  $C_f$  et du nombre de Stanton  $St$ . Comme le flux thermique pariétal est constant, on peut substituer l'expression de  $T_w$  (6.8) dans la définition du nombre de Stanton (5.7) donnée au chapitre précédent pour obtenir :

$$St = \frac{q_w}{\rho c_p U_\infty (T - T_\infty) + \left( \frac{q_w U_\infty}{u_k} \right) T^+} \quad (6.9)$$

Dans le cas présent, tous les phénomènes intéressants apparaissent sur la paroi du bas ; c'est donc sur cette paroi que nous étudierons les distributions de ces grandeurs. Nous comparerons nos résultats aux résultats expérimentaux obtenus par Vogel *et al.* [47].



(a)  $St$ (b)  $\lambda \frac{\partial St}{\partial \lambda}$ FIG. 6.10 Convergence de  $St$  et  $\lambda \frac{\partial St}{\partial \lambda}$



TAB. 6.2 Incertitudes sur les coefficients de sensibilités

$\Delta C_\mu$	$\Delta C_1$	$\Delta C_2$	$\Delta \sigma_k$	$\Delta \sigma_e$
0.005	0.005	0.005	0.05	0.05

$\Delta c_p$	$\Delta \lambda$	$\Delta d$	$\Delta \kappa$	$\Delta E$
0.05	$5 \times 10^{-6}$	0.005	0.005	0.05

### 6.1.3 Résultats

Nous pouvons maintenant utiliser les informations données par les sensibilités pour mener une analyse d'incertitude. Comme nous l'avons vu dans la partie théorique, nos coefficients ne sont pas connus avec exactitude et il n'est pas évident de quantifier leur véritable incertitude. Une bonne approximation est de considérer que ces coefficients sont précis à une demi-unité de leur dernier chiffre significatif. Le tableau 6.2 résume ces incertitudes pour les coefficients jouant un rôle dans la présente étude. Précisons enfin que ces incertitudes sont probablement sous-estimées. Ainsi, Jones et Launder <sup>[21]</sup> suggère dans leur travaux de prendre  $C_1 = 1.55$  et  $C_2 = 2$  au lieu de 1.44 et 1.92, ce qui peut se traduire en des incertitudes plus élevées que celles considérées ici. Cependant, cette étude illustre bien comment les sensibilités peuvent être utilisées pour mener une analyse d'incertitude.

Afin d'illustrer le rôle des sensibilités dans l'analyse d'incertitude, la figure 6.11 montre la prédiction du coefficient de friction sur la paroi du bas. Cette figure inclut la bande d'incertitude calculée par rapport aux coefficients de turbulence et les mesures expérimentales, donné avec une incertitude expérimentale égale à 0.00015 (ie. 5% de l'ordre de grandeur).

Ces résultats sont tracés le long de l'axe adimensionnalisé  $Ox^*$ , où  $x^*$  est défini



par :

$$x^* = \frac{x - x_r}{x_r} \quad (6.10)$$

et représente la longueur de réattachement (ie. la distance entre la marche et le point de recollement). Cette longueur et sa précision ne sont pas discutées ici ; les détails de son calcul sont donnés par Turgeon *et al.* [46]. Dans notre cas, on trouve :

$$x_r = 5.28 \pm 0.02 \quad (6.11)$$

L'épaisseur de la couche limite au point de séparation a été déterminée par Ignat *et al.* [17] et est de l'ordre de  $\delta/H = 0.4$ . Nous comparerons donc nos résultats numériques pour le coefficient de friction avec les valeurs expérimentales mesurées par Vogel *et al.* [47] pour  $\delta/H = 1.1$ , c'est-à-dire la condition expérimentale la plus proche avec les conditions résultant de la simulation.

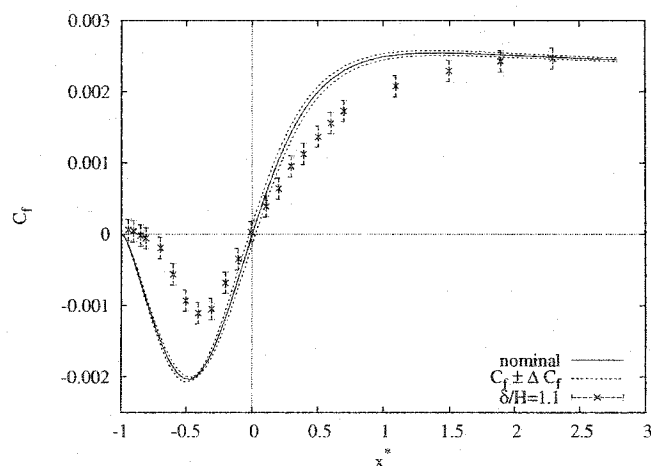


FIG. 6.11 Distribution de  $C_f$ .

La qualité des prédictions n'est visiblement pas très bonne, même si l'on considère les incertitudes. En effet, la bande d'incertitude ne se superpose pas aux points expérimentaux (qui contiennent eux-aussi leur part d'incertitude). Ainsi, on voit



que les incertitudes initiales sur les valeurs des coefficients n'explique pas les différences observées entre résultats numériques et mesures expérimentales. La médiocrité de ce résultat peut être expliquée tout d'abord par la différence entre les simulations : en effet, la différence non négligeable entre les épaisseurs de couche limite témoigne du caractère disparate de ces simulations. Cependant, c'est surtout le modèle  $k - \epsilon$  qu'il faut remettre en question : ce modèle à deux échelles de vitesse reste trop simple pour bien quantifier le coefficient de friction en présence d'un point de stagnation.

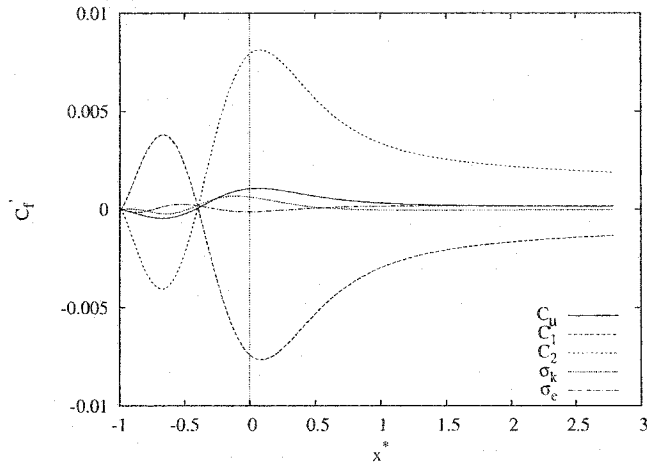
On peut aussi remarquer sur cette première étude la faible épaisseur de la bande d'incertitude pour  $C_f$  : les incertitudes initiales faibles et la petitesse des sensibilités entraînent ici une faible incertitude finale.

Néanmoins, on retrouve la même tendance pour les deux résultats. En particulier, on retrouve dans les deux cas un coefficient de friction négatif avant le point de recollement  $x^*$  puis positif ensuite. Il était, en effet, attendu que le coefficient de friction  $C_f$  et la composante horizontale de la vitesse  $u$  aient le même signe.

La deuxième partie de l'analyse d'incertitude est l'identification des paramètres dominants. La figure 6.12 compare les sensibilités normalisées. Nous voyons que  $C_1$  et  $C_2$  sont les paramètres les plus influents, comme dans le cas précédent de la plaque plane, sur le coefficient de friction. Là encore, ils ont des effets très similaires, bien que de signes opposés.

C'est ici qu'il nous faut rester prudent : ce résultat ne peut être utilisé pour comparer les effets des différentes incertitudes calculées précédemment. Rappelons les



FIG. 6.12 Sensibilités normalisées pour  $C_f$ .

définitions suivantes dans un but comparatif cette fois :

$$\text{sensibilité normalisée : } \alpha_i \frac{\partial C_f}{\partial \alpha_i}$$

$$\text{contributions à l'incertitude : } \Delta \alpha_i \left| \frac{\partial C_f}{\partial \alpha_i} \right|$$

Ainsi, les incertitudes pour chaque coefficient étaient des incertitudes absolues, et donc non proportionnelles à ces coefficients, comme indiqué dans le tableau 6.3.

TAB. 6.3 Incertitude relative des coefficients de sensibilités

$\frac{\Delta C_\mu}{C_\mu}$	$\frac{\Delta C_1}{C_1}$	$\frac{\Delta C_2}{C_2}$	$\frac{\Delta \sigma_k}{\sigma_k}$	$\frac{\Delta \sigma_e}{\sigma_e}$
5.5%	0.35%	0.26%	5.0%	3.8%

Ainsi, la figure 6.13 montre les contributions des 5 paramètres de turbulence à l'incertitude globale. Cette fois, c'est  $C_\mu$  qui joue le rôle majeur, puisque les incer-



titudes relatives pour  $C_1$  et  $C_2$  sont très faibles. Ces incertitudes sont bien positives, puisque l'opérateur de valeur absolue intervient dans leur définition. Nous voyons que les maxima de ces incertitudes se situent non loin du point de recollement.

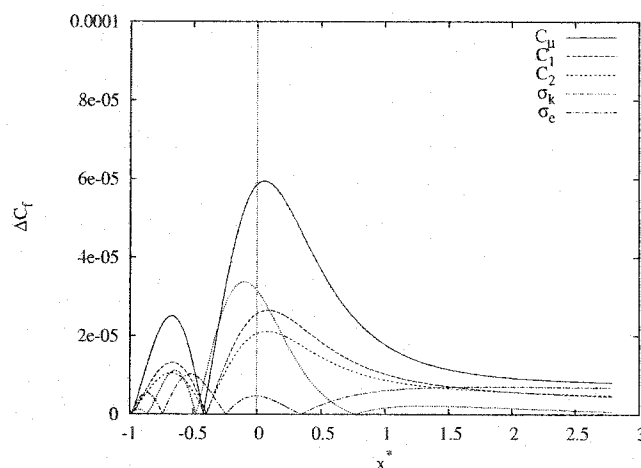
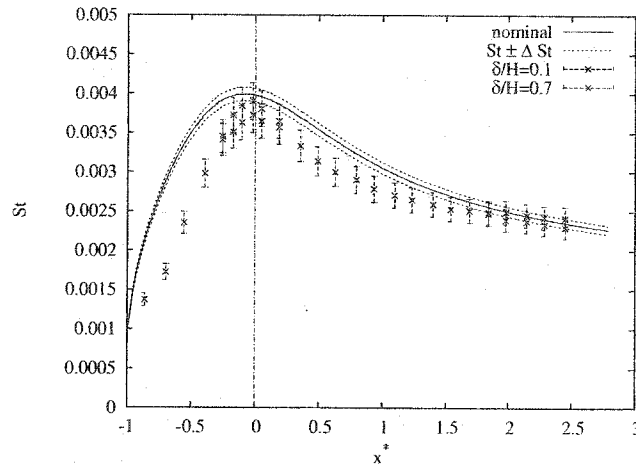


FIG. 6.13 Contributions de chaque paramètres de turbulence à l'incertitude de  $C_f$

Menons maintenant une étude plus approfondie pour le nombre de Stanton. La figure 6.14 présente la distribution du nombre de Stanton sur la paroi du bas et inclut la borne d'incertitude calculée par rapport aux coefficients de turbulence. Ici, nous avons comparé nos résultats correspondant à un cas où  $\delta/H = 0.4$  avec deux séries de valeurs expérimentales mesurées pour des simulations où  $\delta/H = 0.19$  et  $\delta/H = 0.7$ . Ces valeurs sont fournies par Vogel *et al.* [47] avec une précision expérimentale égale à 0.00025 (ie. 6% de l'ordre de grandeur).

Cette fois, les résultats correspondent de façon acceptable. En effet, on trouve un maximum pour le Stanton coïncidant pour l'expérience et pour la simulation numérique et la différence des ordres de grandeurs ne dépasse pas 11%. On remarque que ce maximum n'est pas situé au point de stagnation, mais plutôt légèrement en amont.



FIG. 6.14 Distribution de  $St$ .

On voit que l'utilisation d'une loi de paroi à deux échelles de vitesse nous permet une bonne estimation des grandeurs thermiques. En effet,  $St$  est évalué à l'aide de la vitesse  $u_k$  qui ne s'annule pas au point de stagnation. Contrairement au cas précédent de la plaque plane, on ne retrouve plus les mêmes allures de courbes pour  $C_f$  et  $St$ . La figure (6.8) permet d'expliquer ces comportements : on retrouve les mêmes allures de courbes d'une part pour  $C_f$  et  $u_{**}$  et d'autre part pour  $St$  et  $u_k$ . C'est donc l'échelle de vitesse  $u_k$  caractérisant la turbulence qui permet aussi de caractériser les échanges thermiques. On peut alors formuler les analogies suivantes :

$C_f \sim u_{**}$	friction
$St \sim u_k$	transfert de chaleur

En utilisant les incertitudes données dans la table 6.2, nous pouvons étudier la contribution de chaque paramètre à l'incertitude du nombre de Stanton. La figure 6.15 compare ces influences. Remarquons en passant que la valeur de  $\left| \frac{\partial St}{\partial E} \right| \Delta E$



est si faible qu'elle est à peine visible.

Là encore, le nombre de Stanton n'est pas influencé par les variations de la condition aux limites en température sur la paroi du bas et on a :

$$\frac{\partial St}{\partial q_w} = 0$$

En effet, si on retourne à la sensibilité de la température  $T$  par rapport au flux imposé, la figure (6.16) nous montre que :

$$S_T^{q_w} = \frac{\partial T}{\partial q_w} = \frac{T - T_\infty}{q_w}$$

On peut développer l'expression de la sensibilité du nombre de Stanton donnée par l'équation (6.9) par rapport au flux de chaleur  $q_w$  :

$$\frac{\partial St}{\partial q_w} = \frac{St}{q_w} - \frac{St^2}{q_w} \left( \rho c_p U_\infty \frac{\partial T}{\partial q_w} + \frac{U_\infty T^+}{u_k} \right) \quad (6.12)$$

Si on insert l'expression de  $S_T^{q_w}$  dans cette équation, on obtient alors :

$$\frac{\partial St}{\partial q_w} = \frac{St}{q_w} - \frac{St^2}{q_w} \left( \frac{1}{St} \right) = 0 \quad (6.13)$$

L'étude de la figure 6.15 nous indique que les paramètres les plus influents sont  $C_\mu$ ,  $c_p$  et  $\kappa$ . On remarque que les maxima d'incertitudes pour le nombre de Stanton ne se situe pas au point de rattachement, mais plutôt en amont. Seules les sensibilités du Stanton par rapport aux paramètres thermiques connaissent des maxima coïncidants avec le point de recollement.

Les sensibilités nous permettent donc de mener une étude d'incertitude complète,



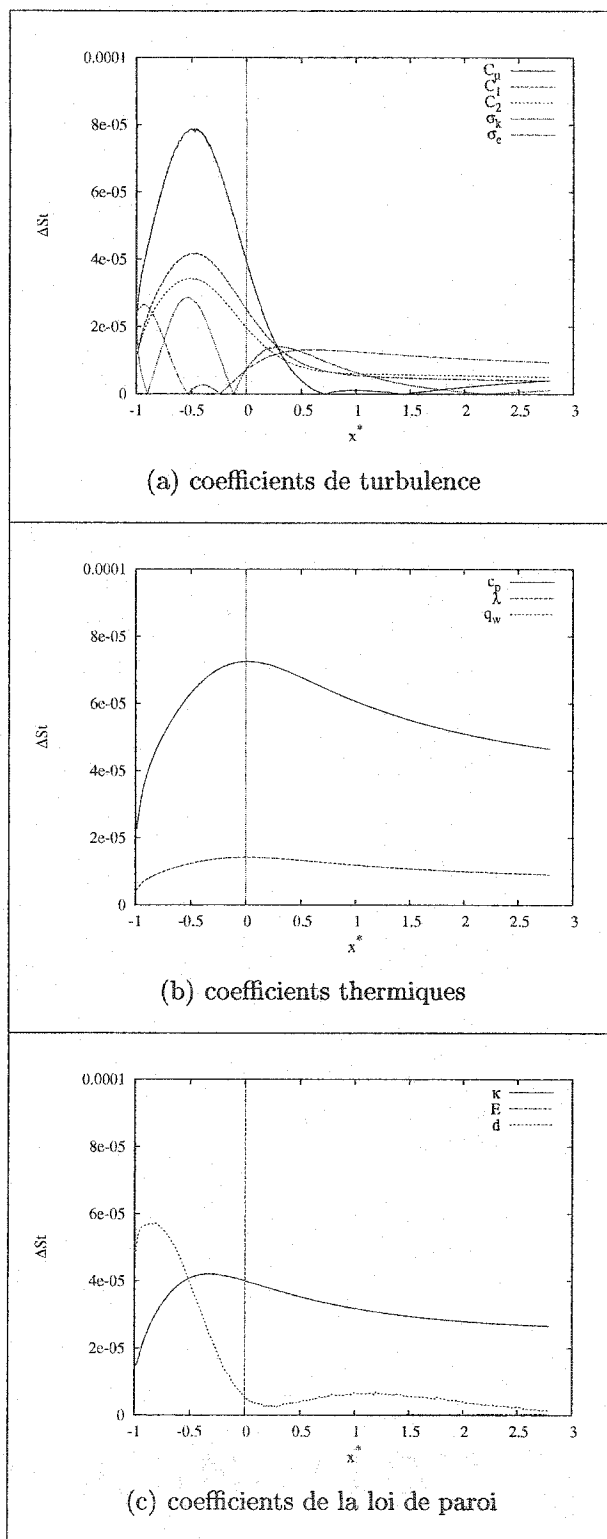


FIG. 6.15 Contributions de chaque paramètres à l'incertitude de  $St$ .



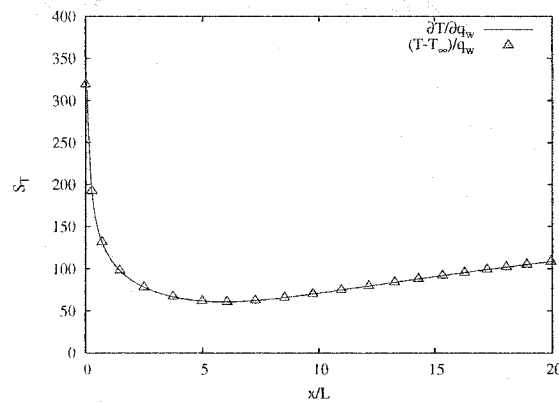


FIG. 6.16 V rication graphique de l'expression de  $S_T^{qw}$

c'est-  dire de quantifier l'incertitude globale d'une grandeur et de déterminer l'ordre d'influence des différents paramètres. Le choix des incertitudes initiales des paramètres reste la responsabilité de l'utilisateur. On voit ici que ces incertitudes restent relativement faibles.

Comme dans le cas de la plaque plane, le nombre de Stanton est indépendant du choix de la condition aux limites en température.



## 6.2 Extrapolations de solution

Le développement en série de Taylor peut aussi être utilisé pour construire une extrapolation de notre solution. L'intérêt est de connaître le comportement de notre écoulement pour une faible variation d'un ou plusieurs des paramètres initiaux.

### 6.2.1 Sensibilités : un degré supérieur de résolution

Comme à la section précédente, nous pouvons écrire, dans le cas de petites perturbations, le développement de Taylor à l'ordre 1 de la solution. Considérons de nouveau la température  $T$  dans un écoulement fluide :

$$T(x, y; a + \delta a) = T(x, y; a) + \frac{\partial T}{\partial a}(x, y; a)\delta a \quad (6.14)$$

Cette fois, notre but est de prédire sans recalculer cette nouvelle solution perturbée. Ainsi, nous évitons de relancer le calcul une seconde fois : il nous suffit de connaître l'écoulement et ses sensibilités pour obtenir le comportement de notre solution dans une petite plage de perturbations. Nous atteignons donc un degré supérieur de résolution, tout en économisant du temps de calcul. Le schéma 6.17 décrit notre problème.

De plus, l'extrapolation de solution nous permet d'arriver à deux types de conclusions :

- nous pouvons vérifier si un paramètre joue un rôle dominant, ou encore si nous sommes près d'une valeur critique de ce paramètre,
- nous pouvons déterminer si la dépendance d'une grandeur par rapport à un paramètre est linéaire.

En effet, dans le cas d'une dépendance linéaire, il n'existe pas de termes d'ordres



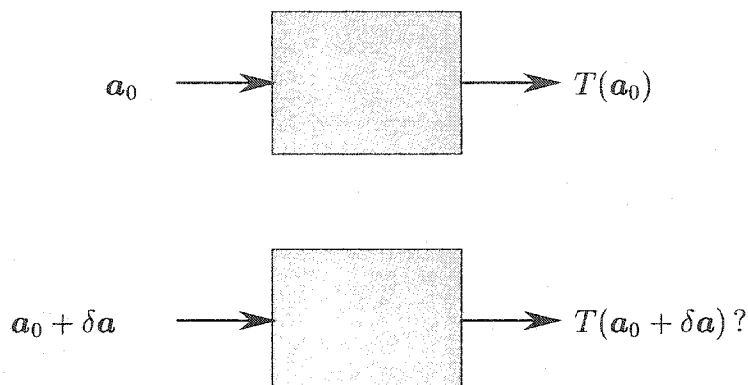


FIG. 6.17 Extrapolation de solution

supérieurs dans le développement de Taylor et l'équation (6.14) reste valide pour de plus fortes perturbations. Ainsi, lorsqu'on lance deux calculs pour deux valeurs de  $a$  différentes, si le premier calcul et l'extrapolation du deuxième donnent exactement le même résultat, on peut conclure que la dépendance est linéaire.

On peut aller encore plus loin et réaliser une extrapolation cubique dans le cas de fortes non-linéarités. Nous avons alors besoin de deux solutions : par exemple, nous lançons un calcul avec  $a = a_1$  et un autre avec  $a = a_2$ . Nous disposons des valeurs de  $T$  et  $\frac{\partial T}{\partial a}$  en  $a_1$  et  $a_2$ . On utilise alors les polynômes de Hermite :

$$T(x, y, t) = T(x, y, a_1)\psi_1(\xi) + \frac{\partial T}{\partial a}(x, y; a_1)\psi_2(\xi) \\ + T(x, y, a_2)\psi_3(\xi) + \frac{\partial T}{\partial a}(x, y; a_2)\psi_4(\xi)$$



avec

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi)$$

$$\psi_2(\xi) = \frac{h}{8}(1 - \xi^2)(1 - \xi)$$

$$\psi_3(\xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi)$$

$$\psi_4(\xi) = \frac{h}{8}(-1 + \xi^2)(1 + \xi)$$

$$h = a_2 - a_1$$

$$\xi = -1 + 2 \left( \frac{t - a_1}{a_2 - a_1} \right)$$

Nous avons ici une bien meilleure précision même si le coût de calcul augmente. Remarquons que les extrapolations par rapport à plusieurs paramètres sont aussi possibles. La méthode à suivre étant exactement la même, nous restreignons notre étude au cas où un seul paramètre varie.

### 6.2.2 Exemples d'extrapolation : retour sur l'écoulement sur une plaque plane

Retournons au problème de la plaque plane. Nous avons vu dans les chapitres précédents que le paramètre  $d$  était particulièrement intéressant à étudier : même si son influence semble négligeable sur le coefficient de friction ou sur le nombre de Stanton, sa valeur ne peut pas être déterminée de façon générale et reste la responsabilité de l'utilisateur. Il n'existe pas de recette pour déterminer la bonne valeur de ce paramètre. On ne peut que vérifier *a posteriori* que notre choix est correct. Il faut même attendre plusieurs cycles adaptatifs pour mesurer précisément la justesse de  $d$ .



Commençons cette étude par une vérification. Nos résultats précédents avaient été calculés avec une distance  $d = 0.00095L$  et nous lançons ici un nouveau calcul avec  $d = 0.0006L$ . Nous prenons  $d = 0.00095$  comme cible de notre extrapolation ayant pour base la valeur  $d = 0.0006L$ , ce qui revient à écrire :

$$d = 0.0006L \quad \text{et} \quad \delta d = +0.00035L$$

Nous vérifions que le nombre de Stanton demeure inchangé sur la figure 6.18, comme nous l'avions conclu à partir de la figure 5.20.

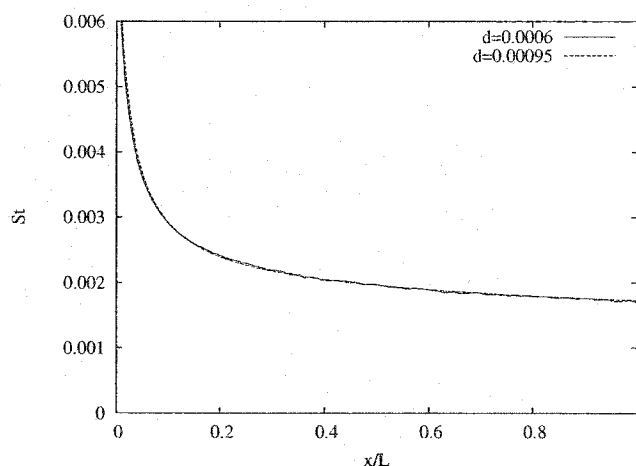
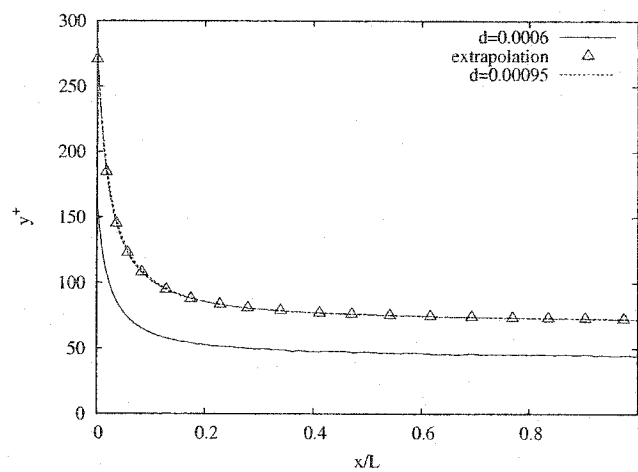
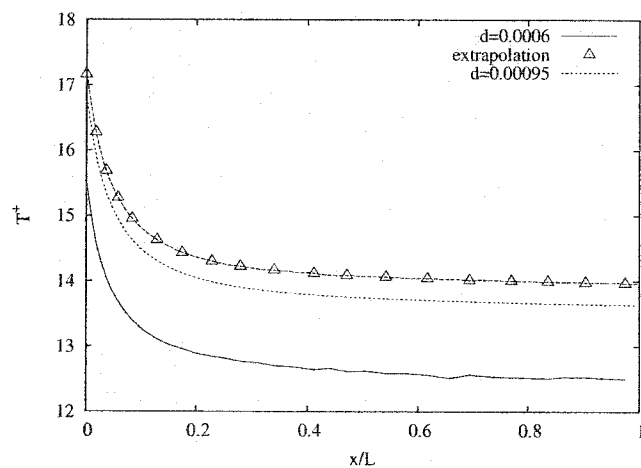


FIG. 6.18 Influence de  $d$  sur  $St$ .

La figure 6.19 montre l'influence de  $d$  sur  $y^+$  et  $T^+$ . La distance  $y^+$  reste dans son domaine de validité sur toute la longueur de la plaque plane. On voit que l'extrapolation est vraiment très précise, indiquant que  $y^+$  est quasiment linéaire en  $d$ . Ce résultat est en parfait accord avec l'équation (3.11). En revanche,  $T^+$  et  $d$  ne semble pas être linéairement liés : là-encore, on trouve l'explication dans l'équation (3.18), qui montre la dépendance logarithmique de  $T^+$  en  $d$ .

C'est dans ce cas qu'une extrapolation cubique donne de meilleurs résultats. Nous



(a)  $y^+$ (b)  $T^+$ FIG. 6.19 Influence de  $d$  sur  $y^+$  et sur  $T^+$ 

avons donc lancé un nouveau calcul avec une nouvelle valeur cible  $d = 0.0013L$ , ce qui se trouve être la moyenne arithmétique des deux précédentes valeurs utilisées. Ce choix a été motivé par un soucis de simplification : on peut alors utiliser les



deux premières solutions pour nos calculs :

$$a = d$$

$$a_1 = 0.0006$$

$$a_2 = 0.0013$$

$$a_{cible} = 0.00095$$

ce qui nous amène à :

$$h = a_2 - a_1 = 0.0007$$

$$\xi = -1 + 2 \left( \frac{1 - a_1}{a_2 - a_1} \right) = 0$$

Les polynômes de Hermite prennent les valeurs suivantes :

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{2}$$

$$\psi_2(\xi) = \frac{0.0007}{8}$$

$$\psi_3(\xi) = \frac{1}{2}$$

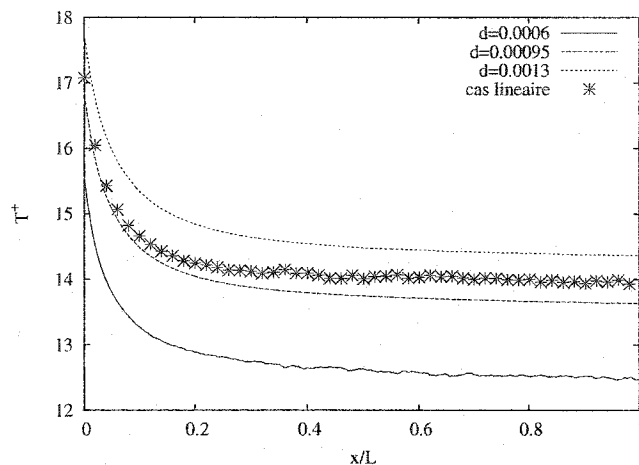
$$\psi_4(\xi) = -\frac{0.0007}{8}$$

On écrit enfin l'extrapolation cubique :

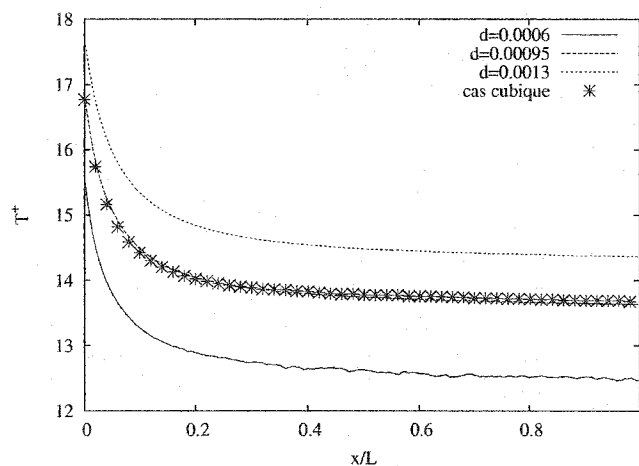
$$T^+(d_{cible}) = \frac{T^+(a_1) + T^+(a_2)}{2} + \frac{0.0007}{8} \left( \frac{\partial T^+}{\partial d}(a_1) - \frac{\partial T^+}{\partial d}(a_2) \right)$$

La figure 6.20 montre l'influence de  $d$  sur  $T^+$  dans le cas d'une extrapolation cubique. La première figure montre le résultat obtenu en faisant la moyenne des deux extrapolations linéaires : celle partant de  $d = 0.0006$  et celle partant de





(a) moyenne des extrapolations linéaires



(b) extrapolation cubique

FIG. 6.20 Extrapolation cubique

$d = 0.0013$ . La dépendance de  $T^+$  en  $d$  étant logarithmique (et donc concave), l'extrapolation partant de  $d = 0.0013$  est meilleure que celle partant de  $d = 0.0006$ , comme le montre la figure 6.21. Néanmoins, dans le cas général, il peut être difficile de savoir *a priori* quelle extrapolation sera la meilleure et il est alors cohérent de



présenter leur moyenne. Cette moyenne est donnée par l'équation suivante :

$$T^+(d_{cible}) = \frac{T^+(a_1) + T^+(a_2)}{2} + \frac{0.0007}{4} \left( \frac{\partial T^+}{\partial d}(a_1) - \frac{\partial T^+}{\partial d}(a_2) \right)$$

Le résultat obtenu n'est cependant pas acceptable (manque de précision) et l'extrapolation cubique, présentée sur la deuxième figure, nous livre un résultat de bien meilleure qualité. Gardons en vue que ce résultat est tout de même deux fois plus coûteux qu'une extrapolation linéaire simple.

Cet exemple d'extrapolation cubique ne doit cependant pas voiler l'efficacité des extrapolations linéaires. En effet, nous nous sommes placés volontairement dans un cas de forte perturbation du paramètre  $d$  (environ 50%). L'extrapolation linéaire reste un outil puissant pour des perturbations plus faibles.

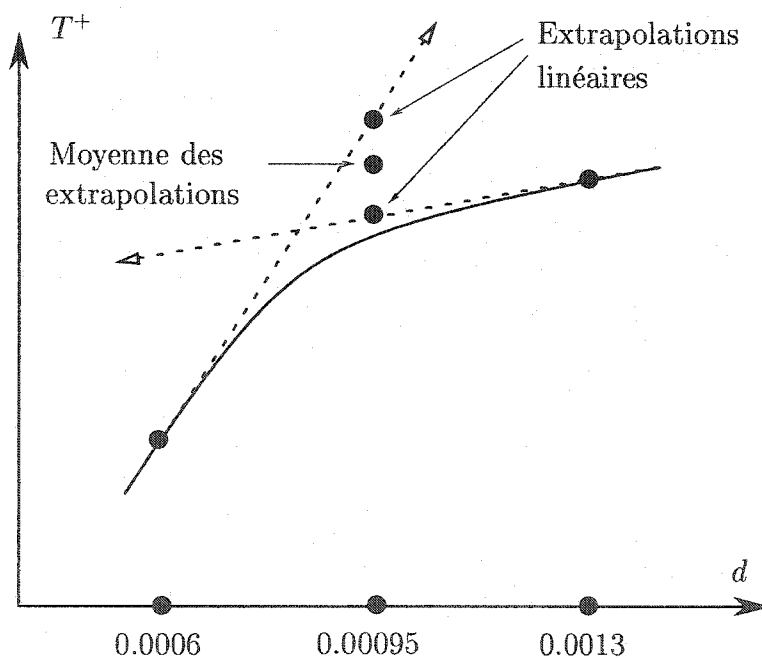


FIG. 6.21 Extrapolations linéaires pour une dépendance concave



Nous voyons ici les deux applications de base des extrapolations permises par l'étude des sensibilités :

- connaître le comportement de notre solution lorsqu'un paramètre est légèrement perturbé sans avoir à relancer un calcul fastidieux
- avoir une information qualitative sur l'influence d'un paramètre (linéarité ou non) s'ajoutant à l'information quantitative délivrée par une étude de sensibilités classique.

Dans le cas de très fortes non-linéarités, il serait intéressant de calculer les sensibilités d'ordre 2 afin d'obtenir un développement de Taylor du second ordre plus précis. Cette partie est en développement dans le code et le lecteur plus curieux peut parcourir les travaux de Mahieu *et al.* <sup>[29]</sup>.



## CHAPITRE 7

### TRANSFERT DE CHALEUR CONJUGUÉ

Nous avons étudié dans les chapitres précédents des problèmes où soit la température à la paroi, soit le flux normal à la paroi étaient imposés. Ce chapitre propose d'explorer le transfert de chaleur conjugué entre un solide conducteur de chaleur et un fluide turbulent. Dans ce cas, on ne connaît ni  $T_w$  ni  $q_w$ , et on doit écrire les relations thermiques à l'interface fluide-solide. En turbulent, cette étape doit être traitée avec précaution puisque la zone fluide en contact avec le solide n'est pas maillée, comme l'indique la figure 7.1. Nous débuterons ce chapitre par une présentation plus complète du problème et une proposition de solution théorique avec la création d'une interface de contact. Ce chapitre se termine par une validation de la méthode nouvellement créée et par une application sur un écoulement confiné sur une marche descendante en contact avec un solide conducteur de chaleur.

#### 7.1 Présentation du problème

On indicera par un  $s$  les grandeurs du solide et par un  $f$  les grandeurs du fluide. Les équations d'énergie pour les deux zones sont alors :

– dans le fluide :

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot [(\lambda_f + (\lambda_f)_t) \nabla T] + q_f$$

– dans le solide :

$$0 = \nabla \cdot [\lambda_s \nabla T] + q_s$$



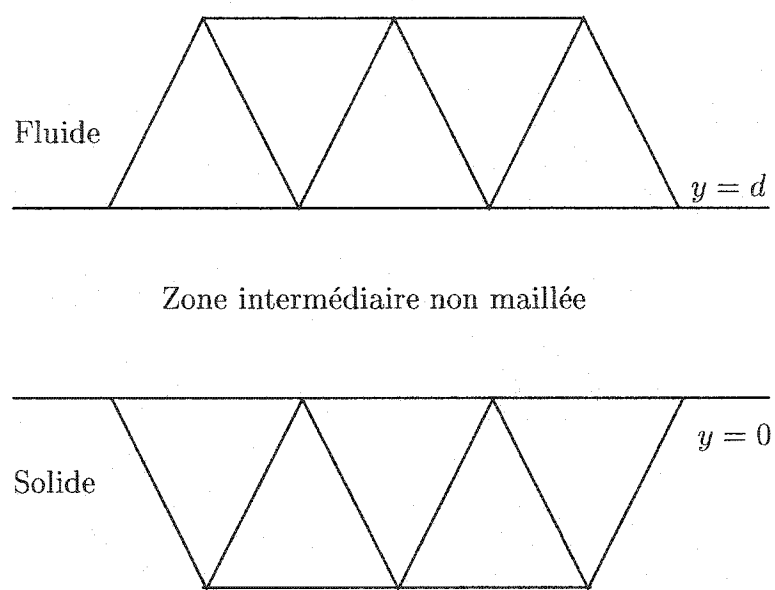


FIG. 7.1 Maillage du fluide et du solide



Et les conditions d'interfaces entre les deux zones sont en  $y = 0$  :

$$\begin{aligned} T_f &= T_s \\ \lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial \hat{n}} &= \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial \hat{n}} \end{aligned}$$

ce qui peut se ré-écrire avec nos anciennes notations

$$T_w = T_s \quad (7.1)$$

$$q_w = \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial \hat{n}} \quad (7.2)$$

Mais, comme nous l'avons dit en introduction, la zone  $0 < y < d$  n'étant pas maillée, il nous faut écrire des relations entre ce qui se passe à la frontière pour le solide et ce qui se passe en  $y = d$  pour le fluide.

## 7.2 Interface fluide-solide

Le cas d'interface entre un solide et un fluide a déjà été étudié par Pelletier *et al.* <sup>[31]</sup> afin de simuler des résistances de contact. Nous nous trouvons ici dans un cas analogue, puisqu'il nous faut modéliser un saut de température dans le maillage. La figure 7.2 montre le schéma de notre interface entre solide et fluide.

On peut alors introduire la notion de résistance de contact  $r$  :

$$\lambda_s \left. \frac{\partial T_s}{\partial \hat{n}} \right|_{y=0} = r (T_s(y=0) - T_f(y=d)) = \lambda_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial \hat{n}} \right|_{y=d}$$

On peut là-aussi ré-écrire cette équation avec les notations utilisées pour modéliser



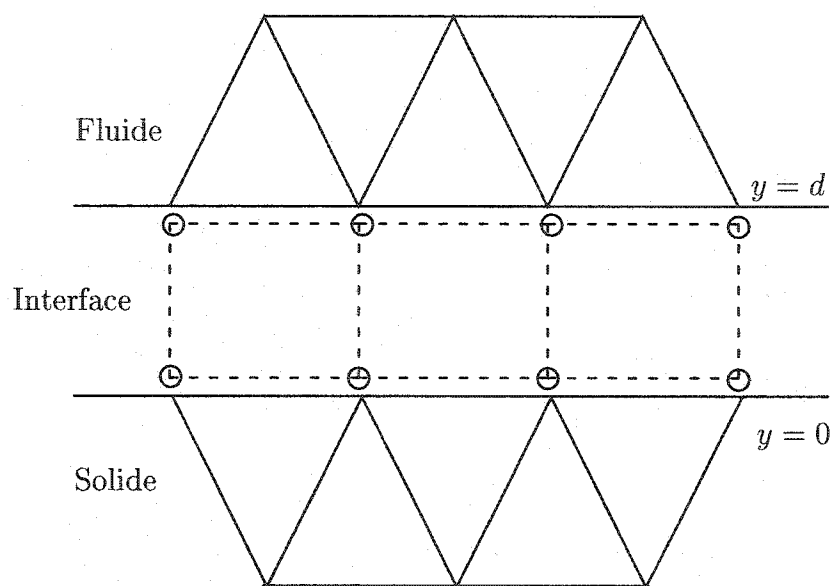


FIG. 7.2 Interface entre le fluide et le solide



la loi de paroi :

$$\lambda_s \left. \frac{\partial T_s}{\partial \hat{n}} \right|_{y=0} = r (T_w - T_f(y=d)) = q_w \quad (7.3)$$

On voit alors apparaître la température à la paroi ainsi que le flux de chaleur normal à la paroi. Il nous reste à déterminer l'expression de la résistance  $r$ . Pour cela, on utilise la loi de paroi (3.21) reliant  $T_w$  et  $q_w$  définie précédemment :

$$q_w = \frac{\rho c_p u_k (T_w - T)}{T^+}$$

En insérant cette expression dans la condition d'interface (7.3), on obtient :

$$r = \frac{\rho c_p u_k}{T^+} \quad (7.4)$$

On vient donc de conjuguer interface thermique et loi de paroi thermique. La loi de paroi thermique est alors calculée automatiquement et l'algorithme 3.9 est remplacé par l'algorithme proposé à la figure 7.3. La loi de paroi thermique n'apparaît plus alors qu'implicitement dans le calcul de la résistance thermique  $r$ . Nous appellerons à présent *transfert de chaleur conjugué* le transfert de chaleur via l'interface entre l'écoulement turbulent et le solide conducteur.

On remarque que la résistance thermique est indépendante du champ de température et n'est fonction que du champ de turbulence. De même, cette résistance est reliée au coefficient de transfert de chaleur  $h$  défini au premier chapitre, et on a :

$$r(T_w - T) = h(T_w - T_\infty)$$



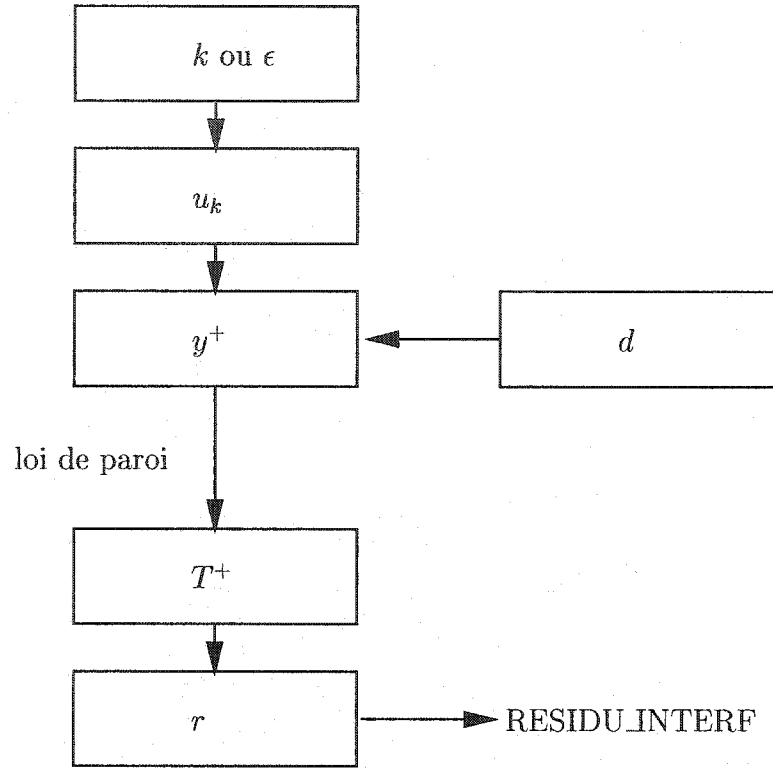


FIG. 7.3 Algorithme pour l'interface thermique en régime turbulent

Le nombre de Stanton prend alors la forme suivante :

$$St = \frac{r(T_w - T)}{\rho c_p U_\infty (T_w - T_\infty)}$$

On peut appliquer cette méthode au calcul de sensibilités en dérivant la relation d'interface (7.3) par rapport à un paramètre de design. On obtient alors :

$$\begin{aligned} r'(T_w - T_f(y = d)) + r(S_{T_w} - S_{T_f}(y = d)) &= q'_w \\ &= \left( \lambda'_s \frac{\partial T_s}{\partial \hat{n}} + \lambda_s \frac{\partial S_{T_s}}{\partial \hat{n}} \right) (y = 0) \end{aligned} \quad (7.5)$$



où la sensibilité de la résistance  $r'$  est obtenue par différenciation de l'expression de  $r$  (7.4) :

$$r' = r \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{c_p'}{c_p} + \frac{u_k'}{u_k} - \frac{(T^+)'}{T^+} \right) \quad (7.6)$$

La prochaine section reprend notre cas favori d'un écoulement autour d'une plaque plane pour mener une première vérification de notre méthode.

### 7.3 Vérification de la méthode

Nous reprenons donc notre cas de plaque plane, mais nous considérons cette fois la plaque comme un solide chauffé à sa base. La figure 7.4 montre notre nouvelle géométrie, ainsi que les conditions appliquées aux limites.

Notre but est ici de vérifier que l'implémentation de l'interface thermique n'a pas modifié la modélisation de la loi de paroi. Nous avons donc choisi un solide très conducteur afin d'obtenir une température à l'interface proche de 1 du côté solide, et afin de pouvoir alors vérifier que nous obtenons bien la même distribution de température et du nombre de Stanton en  $y = d$ .

Nous avons choisi le cuivre comme conducteur solide. En effet, nous avons alors une des plus grandes conductivités que l'on puisse avoir pour un solide, à savoir :

$$\lambda_s = 0.85$$

Notons qu'il s'agit de conductivités adimensionnelles.



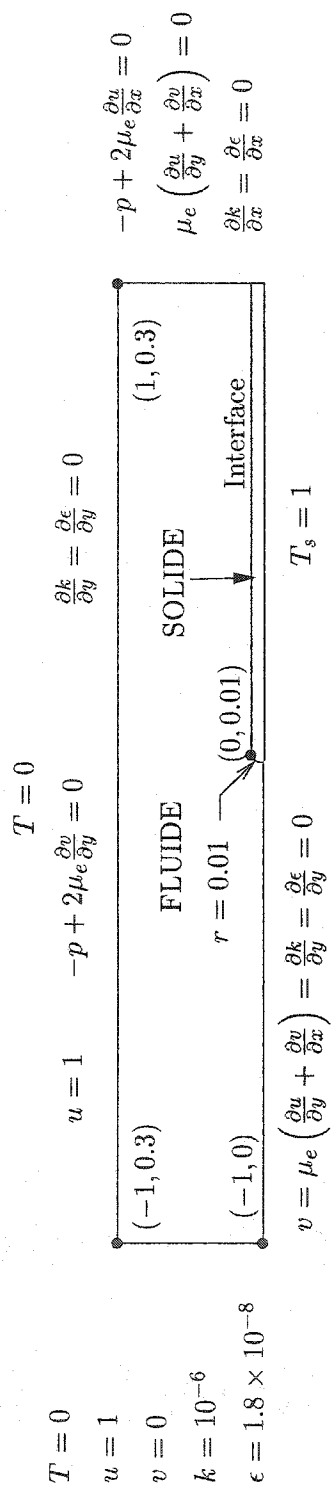


FIG. 7.4 Géométrie et conditions aux limites pour la plaque plane avec transfert de chaleur conjugué



La figure 7.5 compare les distributions de la température pariétale  $T_w$  et de la température  $T(y = d)$  de notre cas et du cas précédent de plaque plane. On voit que les distributions se superposent comme prévu. De même, les distributions du nombre de Stanton, présentées à la figure 7.6, sont elles-aussi semblables. La modification de l'algorithme n'engendre donc aucune baisse de qualité dans nos solutions. Notons que la distribution de la résistance thermique d'interface est semblable à celle du Stanton à une constante multiplicative près (ici, cette constante est même égale à 1).

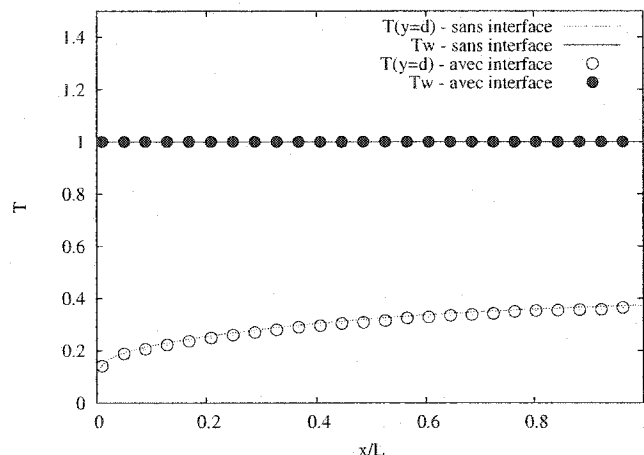


FIG. 7.5 Distributions de  $T_w$  et de  $T(y = d)$  avec ou sans transfert conjugué

Néanmoins, le traitement de la partie solide pourra créer un problème. En effet, le maillage est très raffiné à l'interface du côté du fluide à cause de la turbulence tandis que le problème de conduction de chaleur dans le solide ne demande pas un maillage très fin. On arrive alors au type de maillage présenté à la figure 7.7. On se retrouve alors avec des maillages en toile d'araignée, qui causent des problèmes de convergence. Pour remédier à ce problème, nous avons imposé une borne supérieure à la taille des mailles dans le solide. Cela se révèle efficace et peu coûteux puisque la plaque est fine (500 mailles supplémentaires sont créées). On obtient alors un



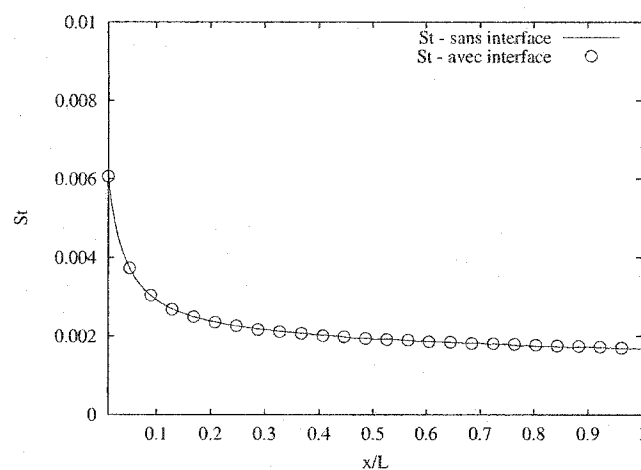


FIG. 7.6 Distributions de  $St$  avec ou sans transfert conjugué

maillage semblable à celui présenté à la figure 7.8.

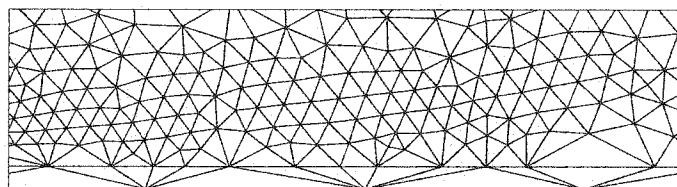


FIG. 7.7 Exemple de maillage en toile d'araignée dans le solide

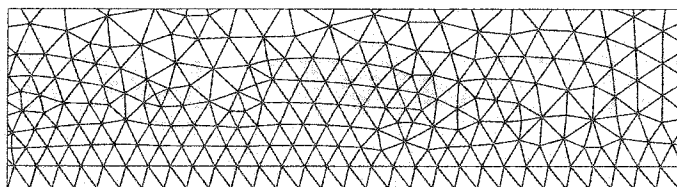


FIG. 7.8 Exemple de maillage amélioré



Terminons cette vérification par une étude des sensibilités. En reprenant le nombre de Stanton, on retrouve les résultats obtenus aux chapitres précédents. Ainsi, la température  $T_s$  n'influence pas non plus le nombre de Stanton. La figure 7.9 montre les distributions de  $c_p \frac{\partial St}{\partial c_p}$  de notre cas et du cas précédent de plaque plane : les courbes se superposent comme prévu.

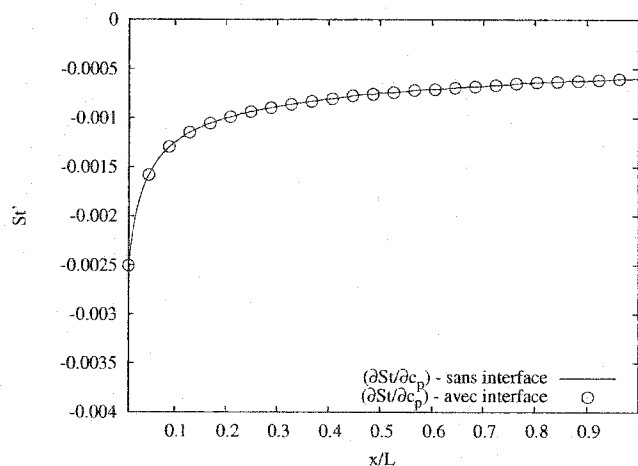


FIG. 7.9 Distributions de  $c_p \frac{\partial St}{\partial c_p}$  avec ou sans transfert conjugué

On vérifie ainsi la méthode de transfert de chaleur conjugué. Cependant, la plaque est trop fine pour que la conduction de chaleur soit intéressante à étudier. En effet, l'expérience reproduite en utilisant un solide isolant, comme le pyrex ( $\lambda_s = 0.003$ ) donne les mêmes distributions de température. Afin de produire une application intéressante, nous avons choisi un exemple où le solide est plus volumineux et où le rapport de la conductivité du solide sur celle du fluide ne soit pas aussi faible.



## 7.4 Ecoulement turbulent autour d'une marche descendante avec transfert de chaleur

Nous reprenons ici le cas de notre marche descendante. Ici, nous n'imposons plus un flux thermique pariétal constant le long de la paroi du bas, mais nous considérons, collée à cette paroi, une section solide conductrice épaisse. L'écoulement turbulent possède alors ces qualités :

- on considère un solide plus épais que précédemment, afin de visualiser avec précision la conduction,
- la conductivité du fluide peut être choisie plus faible, puisque l'écoulement devient turbulent pour des nombres de Reynolds plus faible :  $Re = 28000$  au lieu de  $2 \times 10^6$  pour la plaque plane.

### 7.4.1 Présentation du problème

On reprend les conditions la géométrie et les conditions aux limites précédentes. La figure 7.10 présente le nouveau domaine d'étude. Nous imposons un flux thermique pariétal unitaire sur la paroi inférieure du solide. Nous avons lancé ce cas pour deux matériaux différents :

- le cuivre, très conducteur :  $\lambda_s = 0.85$ ,
- le pyrex, très isolant :  $\lambda_s = 0.003$ .

Nous utilisons pour l'étude de sensibilité les paramètres apparaissant dans la loi d'interface thermique : la condition de Neumann en température imposée sur la paroi inférieure du solide  $q_s$ , la conductivité du solide  $\lambda_s$  et la chaleur massique du fluide  $c_p$ . Ce dernier paramètre est tout particulièrement intéressant puisqu'il apparaît dans l'expression de la résistance thermique.



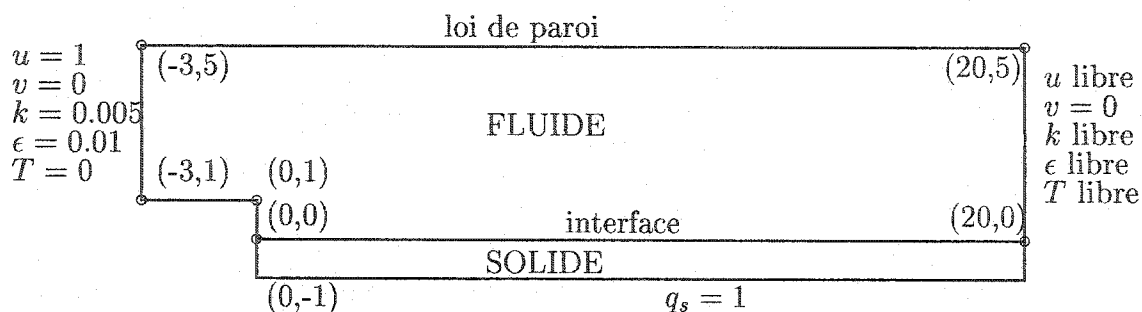


FIG. 7.10 Géométrie et condition aux limites pour la marche descendante avec solide conducteur

La figure 7.11 montre le maillage final. Celui-ci est obtenu après 3 cycles itératifs et comprend 31,108 noeuds.

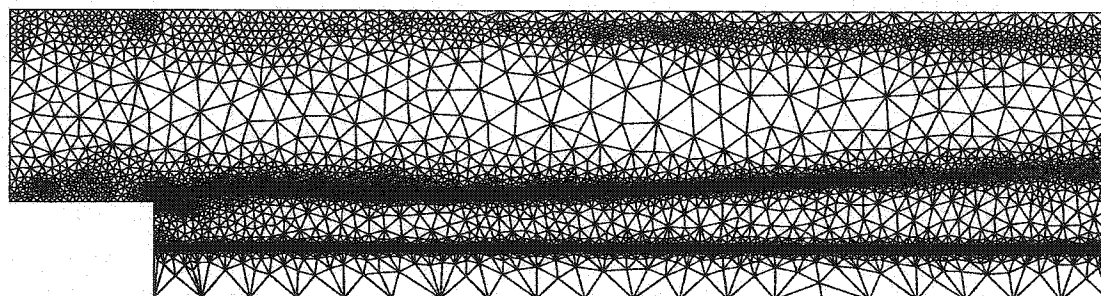


FIG. 7.11 Maillage final pour la marche descendante avec transfert de chaleur conjugué

#### 7.4.2 Analyse des résultats

En premier lieu, nous pouvons vérifier que le flux de chaleur est bien conservé. La figure 7.12 montre le flux  $q_w$  à l'interface pour le cuivre et le fluide. Nous avons de plus tracé le flux constant  $q_s$  pour visualiser la conservation. On voit que les intégrales des trois courbes sont bien égales, comme le prédit la loi de conservation du flux thermique. On note la différence de comportements entre un matériau



conducteur et un matériau isolant : le flux à l'interface reste constant dans le cas du pyrex.

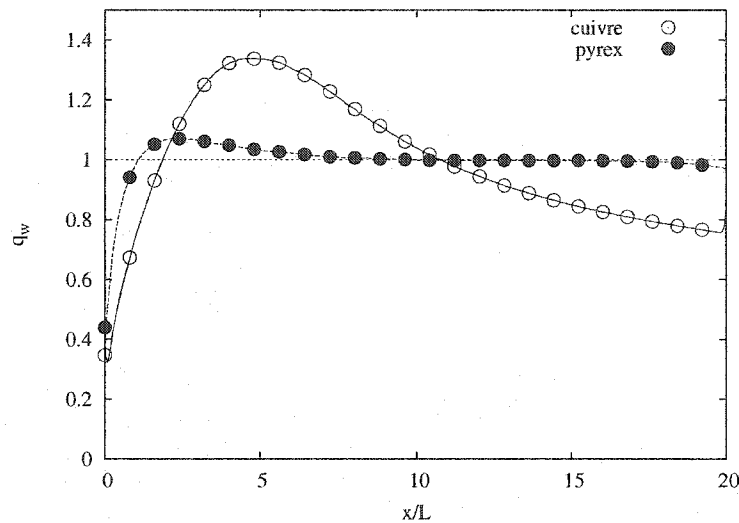
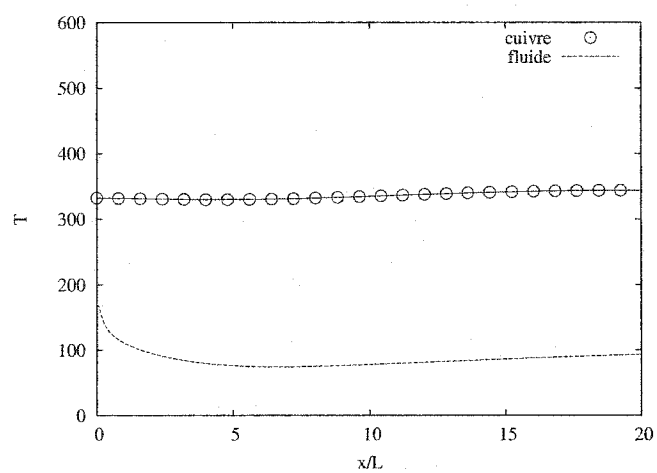


FIG. 7.12 Flux de chaleur normal à l'interface pour le cuivre et le pyrex

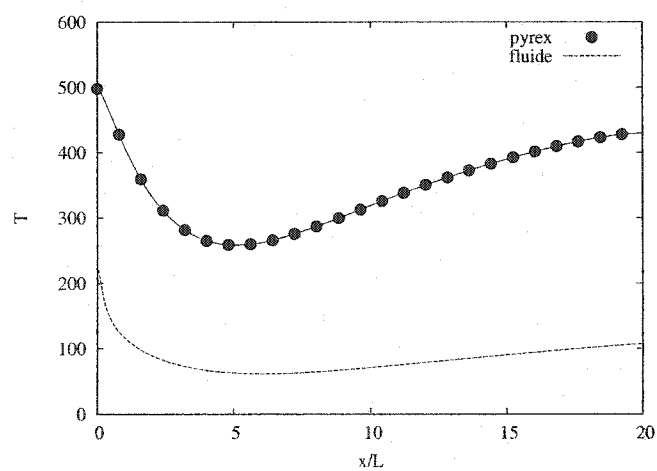
Ainsi, le cas du pyrex est très similaire au cas classique de la marche descendante sans transfert de chaleur étudiée au chapitre 6. On vérifie sur la figure 7.13 que la distribution de température à l'interface est quasi-identique dans le cas du pyrex et dans le cas classique. En revanche, dans le cas du cuivre, on trouve une distribution de température quasi-constante dans le solide à l'interface. On pourrait comparer le cas du cuivre à un cas de marche descendante sans transfert de chaleur conjugué avec une condition de Dirichlet appliquée sur la paroi du bas.

Le comportement des deux solides se visualise plus clairement sur la coupe de température en  $x/L = 10$  de la figure 7.14. Cette figure montre bien le saut de température à l'interface. Si la taille du saut lui-même varie peu entre le cuivre et le pyrex, on voit que la distribution dans le cuivre est constante, tandis que la distribution dans le pyrex est à tendance linéaire et la température double entre





(a) cuivre



(b) pyrex

FIG. 7.13 Distributions de  $T$  le long de l'interface



l'interface et la paroi du bas.

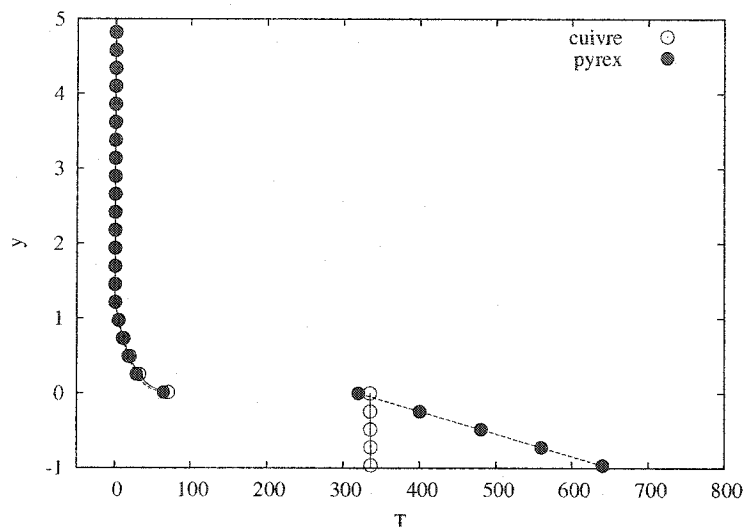


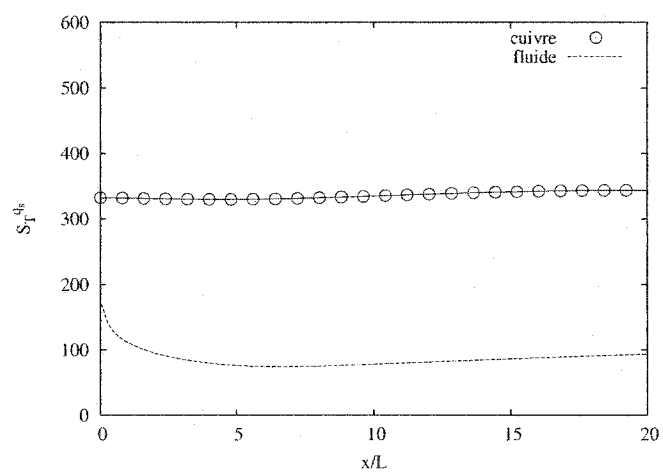
FIG. 7.14 Coupes de température en  $x/L = 10$

La figure 7.15 montre la distribution de la sensibilité de la température par rapport au flux  $q_s$ . Ces distributions se superposent à celle de la température (cf. fig. 7.13). On retrouve le résultat des chapitres précédents reliant la température et sa sensibilité par rapport à  $q_s$ .

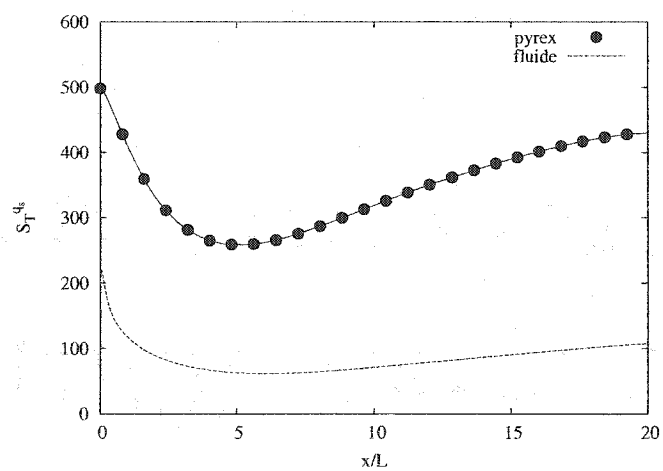
Nous terminons cette section par l'étude de la résistance thermique. La figure 7.16 montre la distribution de  $r$  le long de l'interface pour les deux matériaux. Cette distribution est insensible au choix du matériau, comme nous l'avons montré précédemment dans la section théorique. On retrouve un comportement proche de celui du Stanton calculé dans le cas de la marche descendante sans transfert de chaleur au chapitre précédent.

Une étude de sensibilité nous montre que cette résistance n'est pas sensible aux variations de  $q_s$  et de  $\lambda_s$ . En effet, nous avons vu que  $r$  ne dépendait que des





(a) cuivre



(b) pyrex

FIG. 7.15 Distributions de  $S_T^{qs}$  le long de l'interface



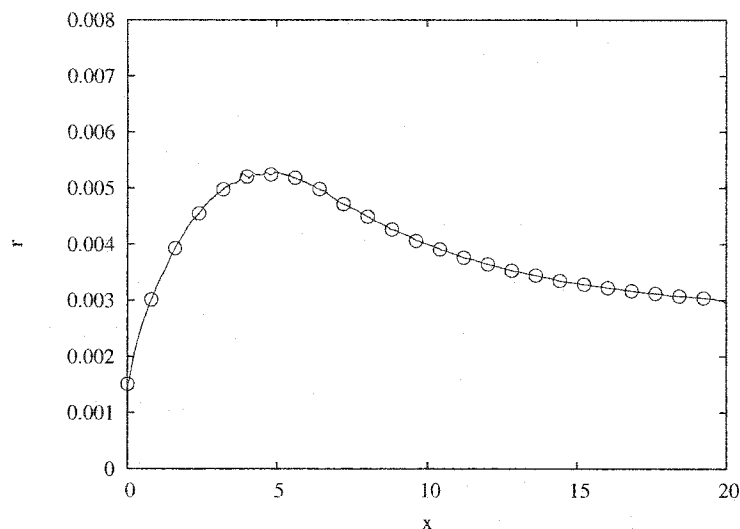


FIG. 7.16 Distribution de la résistance de contact

variables de la turbulence. En revanche,  $c_p$  influence la valeur de la résistance thermique, et nous retrouvons là-aussi sur la figure 7.17 un comportement de la sensibilité de  $r$  très proche de celui de la sensibilité du nombre de Stanton calculée au chapitre précédent.

Nous avons donc implémenté avec succès le transfert de chaleur conjugué entre un écoulement turbulent et un solide conducteur de chaleur. Cet ajout complète notre étude du transfert de chaleur turbulent et élargit notre spectre d'applications vers des cas plus réalistes incluant la rôle des solides dans les simulations.



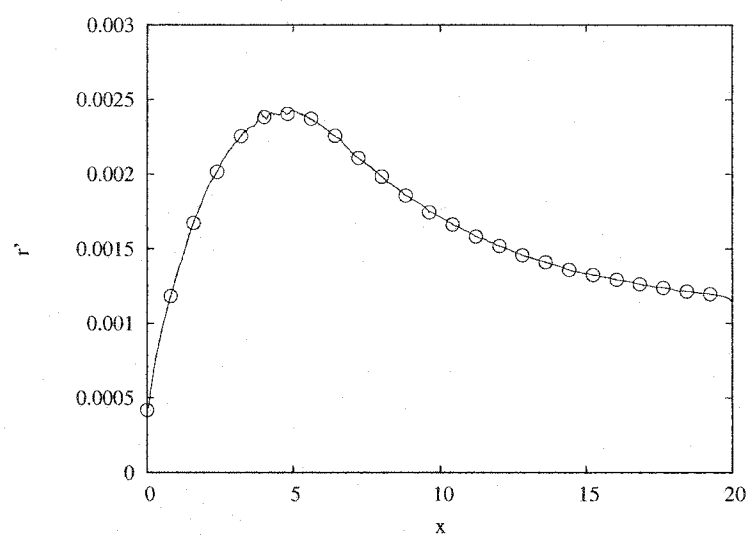


FIG. 7.17 Distribution de la sensibilité de  $r$  par rapport à  $c_p$



## CONCLUSION

Le but de ce projet était d'étendre au transfert de chaleur une méthodologie adaptative permettant de résoudre des écoulements turbulents incompressibles. Nous avons utilisé un modèle  $k-\epsilon$  couplé à des lois de paroi pour traiter la turbulence. La méthodologie et son implémentation ont été vérifiées sur un problème simple dont la solution exacte était connue. Les résultats obtenus montrent que la stratégie de remaillage adaptatif s'avère robuste. Ce dernier a permis d'obtenir des solutions convergées précises et indépendantes du maillage tant pour l'écoulement que pour ses sensibilités. Les résultats nous ont aussi montré que l'estimateur d'erreur était très performant : l'erreur estimée converge rapidement vers l'erreur exacte. Nous avons alors pu conclure que l'adaptation du maillage menait à des solutions précises et fiables pour l'écoulement ainsi que pour ses sensibilités.

Nous avons ensuite appliqué notre méthodologie au transfert de chaleur turbulent le long d'une plaque plane. Les distributions calculées du coefficient de friction, du nombre de Stanton et de leurs sensibilités par rapport à la vitesse à l'infini ont été comparées, après vérification de leur convergence, à des corrélations déjà éprouvées : l'accord acceptable entre calculs et corrélations a terminé de notre validation.

Nous appuyant sur ces bases, nous nous sommes penchés sur l'application la plus naturelle de la méthode des sensibilités, à savoir l'identification des paramètres les plus influents sur les distributions du coefficient de friction et du nombre de Stanton. Cette étude a été menée pour un large spectre de paramètres : les 5 paramètres de fermeture du modèle de turbulence ( $C_\mu$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_k$  et  $\sigma_\epsilon$ ), les 3 paramètres apparaissant dans la loi de paroi dynamique ( $\kappa$ ,  $E$ , et  $d$ ) et les 3 paramètres apparaissant dans la loi de paroi thermique ( $q_w$ ,  $c_p$  et  $\lambda$ ). Les résultats



indiquent que les paramètres dominants sont  $\kappa$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .

Afin d'élargir notre spectre de cas tests, nous avons complété la simulation de l'écoulement turbulent sur une marche descendante avec transfert de chaleur et de ses sensibilités par rapport aux paramètres déjà cités. Cet exemple riche a été mis à profit pour mener, à l'aide des sensibilités, une étude d'estimation de l'incertitude sur des grandeurs telles que le coefficient de friction et le nombre de Stanton. Nous avons aussi montré que la méthode permet de décomposer cette incertitude en contributions causées par chaque paramètre. Cette décomposition nous fournit alors une information quantitative pour le raffinement du modèle.

Nous sommes revenus au problème de la plaque plane pour étudier l'influence du paramètre  $d$  dans la loi de paroi. L'information provenant des sensibilités a été utilisée pour prédire rapidement des estimations des solutions voisines. Nous avons utilisé deux méthodes pour extrapoler notre solution : le développement de Taylor à l'ordre 1 utilisant les données de l'écoulement et ses sensibilités pour une valeur du paramètre, ou l'interpolation d'Hermite utilisant les données de l'écoulement et ses sensibilités pour deux valeurs du paramètre. Dans tous les cas, ces prédictions rapides sont comparées à la complète simulation de l'écoulement modifié.

Une fois notre méthodologie rodée, nous avons alors étendu notre approche au transfert de chaleur turbulent conjugué. Après la vérification de notre implémentation dans le code de ce nouveau module, nous avons lancé des applications similaires aux précédentes pour lesquelles, cette fois, on incluait dans la simulation le comportement du solide conducteur. L'étude des sensibilités nous montre en particulier que la chaleur massique est le seul paramètre thermique influençant la résistance thermique.

Le transfert de chaleur conjugué n'est cependant qu'une étape dans le recherche



de réalisme dans les simulations d'écoulements et inclure la vitesse de la paroi en transfert de chaleur turbulent me semble être dans la continuité de ce projet.



## RÉFÉRENCES

- [1] ARPACI, V. et LARSEN, P., *Convection Heat Transfer*, Prenctice-Hall, 1984
- [2] ARPACI, V., *Microscales of Turbulence : Heat and Mass Transfer Correlations*, Gordon and Breach Publishing Group, 1997
- [3] BEJAN, A., *Convection Heat Transfer*, 1984, A Wiley-Interscience Publication
- [4] BRADSHAW, P., FERRISS, D.H. et ATWELL, N.P., *Calculation of boundary layer development using the turbulence energy equation*, J. Fluid Mech., 1967, vol. 28, pages 539-616
- [5] CHABARD, J.P., *Projet N3S de mécanique des fluides - Manuel théorique de la version 3*, 1991, Rapport EDF HE-41/91.30B
- [6] CIARLET, P.G., *The Finite Elements Method for Elliptic Problems*, North Holland, 1978
- [7] COLEMAN, H.W. et STEELE, W.G., *Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers* John Wiley & son, 2e edition, 1999
- [8] CROUZEIX, M. et RAVIART, P., *Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations*, R.A.I.R.O., 1973, vol. 3, pages 77-104
- [9] DOWDING, K.J. et BLACKWELL, B.F., *Sensitivity Analysis for Nonlinear Heat Conduction*, Journal of Heat Transfer, vol. 123, Février 2001
- [10] FORTIN, A. et GARON A., *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*, Notes du cours MTH6207, 1997, École Polytechnique de Montréal, Canada
- [11] FRANK, P.M., *Introduction to System Sensitivity Theory*, Academic Press, 1978



- [12] GUNZBURGER, M.D., *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows : A guide to Theory, Practice and Algorithms*, Computer Science & Scientific Computing, 1989, Academic Press
- [13] HAFTKA, R.T., *Techniques for thermal sensitivity analysis*, Int.J.Numer.Methods.Eng., 1981
- [14] HAUG, E.J., CHOI, K.K. et KOMKOV, V., *Design Sensitivity of Structural Systems*, Academic Press, 1986
- [15] HUGHES, T.J.R. et BROOKS, A., *A Multi-dimensionnal Upwind Scheme with no Crosswind Diffusion*, Dans T.J.R. Hughes (ed.), *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, ASME, 1979
- [16] HUGHES, T.J.R., FRANCA, L.P. et HULBERT, G.M., *A new Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics : VIII. The Galerkin/Least-Squares Method for Advective-Diffusive Equations*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1989, vol. 73, pages 173-189
- [17] IGNAT, L., PELLETIER, D. et ILINCA, F., *Adaptive Computation of Turbulent Forced Convection*, Numerical Heat Transfer, Part A, 1998, vol. 34, pages 847-871
- [18] ILINCA, F., *Méthode d'éléments finis adaptative pour les écoulements turbulents*, Thèse de doctorat, 1995, École Polytechnique de Montréal, Canada
- [19] ILINCA, F. et PELLETIER, D., *Positivity Preservation and Adaptive Solution for the  $k - \epsilon$  Model of Turbulence*, AIAA Journal, Vol.36, pages 44-51, 1998
- [20] ILINCA, F., PELLETIER, D. et IGNAT, L., *Adaptive Finite Element Solution of Compressible Turbulent Flows*, AIAA Journal, Vol.36, pages 2187-2194, 1998



- [21] JONES, W.P. et LAUNDER, B.E., *The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 15, 1972, pages 301-413
- [22] KAYS, W.M. et CRAWFORD, M.E. *Convective Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, 1993, 3ème édition, New York
- [23] KLEIBER, M., *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics* John Wiley & son, 1997
- [24] KOLMOGOROV, A.N., *The local structure in incompressible viscous fluids for very large Reynolds number*, C.R.Acad.Sci. USSR, 1941
- [25] KOLMOGOROV, A.N., *On degeneration decay of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid*, C.R.Acad.Sci. USSR, 1941
- [26] KOLMOGOROV, A.N., *Dissipation of energy in locally isotropic turbulence*, C.R.Acad.Sci. USSR, 1941
- [27] LACASSE, D., TURGEON, É. et PELLETIER, D., *On the Judicious Use of the  $k - \epsilon$  Model, Wall Functions and Adaptivity*, 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, Janvier 2001, AIAA Paper 2001-0882
- [28] LAUNDER, B.E. et SPALDING, J., *The Numerical Computations of Turbulent Flows*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 1974, vol.3, pages 269-289
- [29] MAHIEU, J-N., PELLETIER, D., TREPANIER, J-Y et BORGGAARD, J., *Second order Sensitivity and uncertainty analysis for laminar airfoil flows*, 42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, Janvier 2004
- [30] PELLETIER, D., *Adaptive Finite Element Computations of Complex Flows* International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 31, pages 189-202, 1999
- [31] PELLETIER, D., BORGGAARD, J. et HETU, J.F., *A Continuous Sensitivity Equation Method for Conduction and Phase Change Problems* 38th AIAA Ae-



- rospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, Janvier 2000, AIAA Paper 2000-0881
- [32] PELLETIER, D., *Mécanique des fluides assistées par ordinateur*, Notes du cours MEC4200, 2002, École Polytechnique de Montréal, Canada
  - [33] PRANDTL, L., *Essentials of Fluid Dynamics*, Blackie & Son, Londres, 1969
  - [34] REDDY, J.N., *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1993, 2è édition
  - [35] REDDY, J.N. et GARTLING, D., *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, 1994, CRC Press, Inc.
  - [36] ROACHE, P.J., *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*, Hermosa publishers, 1998, Albuquerque, NM
  - [37] SCHETZ, J.A., *Boundary Layer Analysis*, Prentice Hall, 1993
  - [38] SCHLICHTING, H., *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, 1979, 7è édition
  - [39] TURGEON, É., *Application d'une méthode d'éléments finis adaptative pour les écoulements axisymétriques*, Mémoire de Maîtrise, 1997, École Polytechnique de Montréal, Canada
  - [40] TURGEON, É., PELLETIER, D. et BORGGAARD, J., *A Continuous Sensitivity Equation Approach to Optimal Design in Mixed Convection*, Proceedings of the 8th Annual Conference of the Computational Fluid Dynamics Society of Canada, Montréal, Canada, Juin 2001, Vol. 2, pages 697-704
  - [41] TURGEON, É., PELLETIER, D. et BORGGAARD, J., *A General Continuous Sensitivity Equation Formulation for Complex Flows*, 8th AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Long Beach, CA, Septembre 2000, AIAA Paper 2000-4732
  - [42] TURGEON, É., PELLETIER, D. et BORGGAARD, J., *A Continuous Sensitivity Equation Method for Flows with Temperature Dependant Properties*,



- 8th AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Long Beach, CA, Septembre 2000, AIAA Paper 2000-4821
- [43] TURGEON, É., PELLETIER, D. et BORGGAARD, J., *Sensitivity and Uncertainty Analysis for Variable Property Flows*, 39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, Janvier 2001, AIAA Paper 2001-0139
- [44] TURGEON, É., PELLETIER, D. et BORGGAARD, J., *Application of a Sensitivity Equation Method to the  $k - \epsilon$  Model of Turbulence*, 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Anaheim, CA, Juin 2001, AIAA Paper 2001-2534
- [45] TURGEON, É., PELLETIER, D. et BORGGAARD, J., *A General Continuous Sensitivity Equation Formulation for the  $k - \epsilon$  Model of Turbulence*, 31st AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Anaheim, CA, Juin 2001, AIAA Paper 2001-3000
- [46] TURGEON, É., PELLETIER, D. et ETIENNE, S., *Sensitivity and Uncertainty Analysis for Turbulent Flows* 40th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, Janvier 2002, AIAA Paper 2002-0985
- [47] VOGEL, J.C. et EATON, J.K., *Heat Transfer and Fluid Mechanics Measurements in the Turbulent Reattaching Flow behind a Backward-facing Step*, Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, CA, Août 1984
- [48] WHITE, F.M., *Viscous Flow*, McGraw-Hill, 1974
- [49] WILCOX, D.C., *Turbulence modeling for CFD*, 1993, DCW Industries, Inc., California
- [50] ZIENKIEWICZ, O.C. et ZHU, J.Z., *The Superconvergent Patch Recovery and a posteriori Error Estimates. Part I : The recovery Technique*, Int. J. for Num. Methods in Eng., 1992, vol. 33, pages 1331-1364



## ANNEXE I

## LOIS DE PAROIS POUR LES SENSIBILITÉS

## I.1 Loi de paroi en vitesse

Comme pour les équations, les conditions aux limites pour les sensibilités pour une paroi solide sont obtenues par différenciation implicite de la loi de paroi en vitesse.

Ainsi, les conditions aux limites sont :

$$s_u \cdot \hat{n} = 0 \quad (\text{I.1})$$

$$\tau'_w = \rho' u_k u_{**} + \rho u'_k u_{**} + \rho u_k u'_{**} \quad (\text{I.2})$$

$$\left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \cdot \hat{n} = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$s_{\mathcal{E}} = 3 \frac{u'_k}{u_k} - \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{d'}{d} \quad (\text{I.4})$$

Les sensibilités  $u'_k$  et  $u'_{**}$  sont obtenues par différenciation :

$$u'_{**} = \frac{u'_t}{u^+} - \frac{u_t u^{+'}}{u^{+2}}$$

$$u'_k = u_k \left( \frac{1}{4} \frac{C'_\mu}{C_\mu} + \frac{1}{2} s_{\mathcal{K}} \right)$$

où, en différenciant l'équation (3.6),

$$u^{+'} = \begin{cases} y^{+'} & \text{for } y^+ < y_c^+ \\ \frac{1}{\kappa} \left( -u^+ \kappa' + \frac{E'}{E} + \frac{y^{+'}}{y^+} \right) & \text{for } y^+ \geq y_c^+ \end{cases}$$



et, en différenciant l'équation (3.11),

$$y^{+'} = y^+ \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{d'}{d} + \frac{u'_k}{u_k} - \frac{\mu'}{\mu} \right).$$

Finalement, pour la composante tangentielle de la vitesse,

$$u_t = u t_x + v t_y$$

nous obtenons :

$$u'_t = s_u t_x + s_v t_y.$$

Nous considérons ici des parois fixes, ce qui permet d'annuler  $t'_x$  et  $t'_y$ . La distance  $d$  peut varier; mais nous la considérons comme un paramètre de valeur et à ce titre, indépendante de la position réelle de la paroi.

## I.2 Loi de paroi en température

En ce qui concerne la loi de paroi en température, on peut déduire de l'équation (3.20) la condition aux limites suivante pour la sensibilité de  $T$  :

$$\frac{\partial s_T}{\partial n} = 0$$

où la sensibilité du flux de chaleur effectif  $q_w$  est donnée par :

$$\begin{aligned} q'_w = & \frac{\rho' c_p u_k (T_w - T)}{T^+} + \frac{\rho c'_p u_k (T_w - T)}{T^+} \\ & + \frac{\rho c_p u'_k (T_w - T)}{T^+} + \frac{\rho c_p u_k (T'_w - S_T)}{T^+} \\ & - \frac{\rho c_p u_k (T_w - T) T^{+'}}{(T^+)^2}. \end{aligned}$$



La sensibilité  $u'_k$  est obtenue comme on l'a vu dans la section précédente. La sensibilité  $(T^+)'$  apparaissant dans l'expression est obtenue après différenciation des équations (3.18) :

$$T^{+'} = \begin{cases} \text{Pr}y^{+'} + \text{Pr}'y^+ & \text{for } y^+ < y_1^+ \\ a'_2 - \frac{\text{Pr}_t}{2a_1(y^+)^2} \left( \frac{\text{Pr}'}{\text{Pr}} - \frac{a'_1}{a_1} - \frac{2y^{+'}}{y^+} \right) & \text{for } y_1^+ < y^+ < y_2^+ \\ \frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \left( \frac{\text{Pr}'_t}{\text{Pr}_t} \ln y^+ - \frac{\kappa'}{\kappa} \ln y^+ + \frac{y^{+'}}{y^+} \right) + \beta' & \text{for } y_2^+ \leq y^+ \end{cases}$$

où

$$y^{+'} = y^+ \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{d'}{d} + \frac{u'_k}{u_k} - \frac{\mu'}{\mu} \right)$$

$$\text{Pr}' = \text{Pr} \left( \frac{c'_p}{c_p} + \frac{\mu'}{\mu} - \frac{\lambda'}{\lambda} \right)$$

et où les dérivées des constantes sont :

$$a'_1 = 10^{-3}\text{Pr}'_t$$

$$a'_2 = 10\text{Pr}'\text{Pr}^{-1/3}$$

$$\beta' = a'_2 - \left( \frac{\text{Pr}'_t\kappa - \text{Pr}_t\kappa'}{2\kappa^2} \right) \left[ 1 + \ln \left( \frac{\kappa}{a_1} \right) \right]$$

$$- \frac{\text{Pr}_ta_1}{2\kappa^2} \cdot \frac{\kappa'a_1 - \kappa a'_1}{a_1^2}$$



## ANNEXE II

## MÉTHODES DE STABILISATION

## II.1 Mouvement

## II.1.1 Galerkin

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma
\end{aligned} \tag{II.1}$$

## II.1.2 SUPG

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u})] - \rho \mathbf{f}) \cdot (\tau_u \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}) d\Omega_e \\
& = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma
\end{aligned} \tag{II.2}$$



### II.1.3 GLS

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \quad (\text{II.3}) \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u})] - \rho \mathbf{f}) \cdot \tau_u(\mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}) d\Omega_e \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \nabla \cdot \mathbf{u} \tau_p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_e = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta p d\Omega \quad (\text{II.4}) \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u})] - \rho \mathbf{f}) \cdot \tau_u \nabla \delta p d\Omega_e = 0
\end{aligned}$$

## II.2 Energie

### II.2.1 Galerkin

$$\int_{\Omega} \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T \delta T d\Omega + \int_{\Omega} (\lambda + \lambda_t) \nabla T \cdot \nabla \delta T d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{q} \delta T d\Gamma \quad (\text{II.5})$$



### II.2.2 SUPG

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T \delta T d\Omega + \int_{\Omega} (\lambda + \lambda_t) \nabla T \cdot \nabla \delta T d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot [(\lambda + \lambda_t) \nabla T]) (\tau_T \mathbf{u} \cdot \nabla \delta T) d\Omega_e = \int_{\Gamma} \hat{q} \delta T d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

### II.2.3 GLS

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T \delta T d\Omega + \int_{\Omega} (\lambda + \lambda_t) \nabla T \cdot \nabla \delta T d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot [(\lambda + \lambda_t) \nabla T]) \tau_T (\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla \delta T - \nabla \cdot [(\lambda + \lambda_t) \nabla \delta T]) d\Omega_e \\ & = \int_{\Gamma} \hat{q} \delta T d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

## II.3 Equation de $\mathcal{K}$

### II.3.1 Galerkin

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \mu_t e^{-\mathcal{K}} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\mathcal{K}}}{\mu_t} \right] \delta \mathcal{K} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial n} \delta \mathcal{K} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$



## II.3.2 SUPG

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \mu_t e^{-\kappa} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\kappa}}{\mu_t} \right] \delta \mathcal{K} d\Omega \\
& \quad + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} - \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} \right. \\
& \quad \left. - \mu_t e^{-\kappa} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\kappa}}{\mu_t} \right\} \tau_{\mathcal{K}} \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} d\Omega_e \\
& = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial n} \delta \mathcal{K} d\Gamma \tag{II.9}
\end{aligned}$$

## II.3.3 GLS

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \mu_t e^{-\kappa} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\kappa}}{\mu_t} \right] \delta \mathcal{K} d\Omega \\
& \quad + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} - \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \mu_t e^{-\kappa} P(\mathbf{u}) \right. \\
& \quad \left. + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\kappa}}{\mu_t} \right\} \tau_{\mathcal{K}} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} + \mu_t e^{-\kappa} P(\mathbf{u}) \delta \mathcal{K} + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\kappa}}{\mu_t} \delta \mathcal{K} \right\} d\Omega_e \\
& = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial n} \delta \mathcal{K} d\Gamma \tag{II.10}
\end{aligned}$$



## II.4 Equation de $\mathcal{E}$

### II.4.1 Galerkin

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} - \rho C_1 C_\mu e^{\kappa - \mathcal{E}} P(\mathbf{u}) + \rho C_2 e^{\mathcal{E} - \kappa} \right] \delta \mathcal{E} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n} \delta \mathcal{E} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

### II.4.2 SUPG

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} - \rho C_1 C_\mu e^{\kappa - \mathcal{E}} P(\mathbf{u}) + \rho C_2 e^{\mathcal{E} - \kappa} \right] \delta \mathcal{E} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} d\Omega \\ + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} - \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right] - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} \right. \\ \left. - \rho C_1 C_\mu e^{\kappa - \mathcal{E}} P(\mathbf{u}) + \rho C_2 e^{\mathcal{E} - \kappa} \right\} \tau_\epsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} d\Omega_e \\ = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n} \delta \mathcal{E} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$



## II.4.3 GLS

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} - \rho C_1 C_\mu e^{\kappa - \epsilon} P(\mathbf{u}) + \rho C_2 e^{\epsilon - \kappa} \right] \delta \mathcal{E} d\Omega \\
& \quad + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} - \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right] - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho C_2 e^{\epsilon - \kappa} \right. \\
& \quad \left. - \rho C_1 C_\mu e^{\kappa - \epsilon} P(\mathbf{u}) \right\} \tau_\epsilon \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} + \rho C_1 C_\mu e^{\kappa - \epsilon} P(\mathbf{u}) \delta \mathcal{E} + \rho C_2 e^{\epsilon - \kappa} \delta \mathcal{E} \right\} d\Omega_e \\
& \quad = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n} \delta \mathcal{E} d\Gamma \tag{II.13}
\end{aligned}$$



## ANNEXE III

## SOLUTION ANALYTIQUE DE LA COUCHE CISAILLÉE

## III.1 Rappel de la solution exacte

$$U = \frac{U_1 + U_2}{2} - \frac{U_1 - U_2}{2} \operatorname{erf}(\eta)$$

$$V = \frac{U_1 - U_2}{2} \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} B$$

$$P = 0$$

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_1 - T_2}{2} \operatorname{erf}(\eta)$$

$$k = k_0(c_k + B)$$

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{x}(c_k + B)$$

$$\mu_T = \mu_{T_0} x(c_k + B)$$

où

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\eta}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

$$\eta = \frac{\sigma y}{x}$$

$$B = e^{-\eta^2}$$



$$\begin{aligned}
k_0 &= \frac{343}{75000} U_1 (U_1 - U_2) \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \\
\epsilon_0 &= \frac{343}{22500} C_\mu U_1 (U_1 - U_2)^2 \frac{\sigma^2}{\pi} \\
c_k &= \frac{10^{-4}}{k_0} \\
\mu_{T_0} &= \frac{343}{250000} \rho U_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_1 &= 1 & U_2 &= 0.3 \\
T_1 &= 1 & T_2 &= 0.3 \\
\rho &= 1.0 & \mu &= 10^{-4} \\
C_\mu &= 0.09 & \sigma &= 13.5
\end{aligned}$$

### III.2 Quelques calculs intermédiaires

$$\begin{aligned}
\eta_{,x} &= -\frac{\eta}{x} & \eta_{,y} &= \frac{\eta}{y} \\
\eta_{,xx} &= \frac{2\eta}{x^2} & \eta_{,yy} &= 0
\end{aligned}$$



$$\hat{\epsilon}_0 = \epsilon_0 * c_k = \frac{75000}{22500} 10^{-4} (U_1 - U_2) \frac{C_{\mu\sigma}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\hat{\mu}_{T_0} = \mu_{T_0} * c_k = \frac{75000}{250000} \frac{\rho\sqrt{\pi}}{\sigma} \frac{10^{-4}}{U_1 - U_2}$$

$$k = 10^{-4} + c_k B$$

$$\epsilon = \frac{\hat{\epsilon}_0 + \epsilon_0 B}{x}$$

$$\mu_T = x(\hat{\mu}_{T_0} + \mu_{T_0} B)$$

### III.3 Dérivées des différentes grandeurs

$$U_{,x} = -(U_1 - U_2) \frac{B}{\sqrt{\pi}} \eta_{,x}$$

$$U_{,y} = -(U_1 - U_2) \frac{B}{\sqrt{\pi}} \eta_{,y}$$

$$U_{,xx} = -\frac{U_1 - U_2}{\sqrt{\pi}} (-2\eta\eta_{,x}^2 + \eta_{,xx}) B$$

$$U_{,yy} = -\frac{U_1 - U_2}{\sqrt{\pi}} (-2\eta\eta_{,y}^2 + \eta_{,yy}) B$$



$$V_{,x} = -(U_1 - U_2) \frac{\eta B}{\sigma \sqrt{\pi}} \eta_{,x}$$

$$V_{,y} = -(U_1 - U_2) \frac{\eta B}{\sigma \sqrt{\pi}} \eta_{,y}$$

$$V_{,xx} = -(U_1 - U_2) \frac{B}{\sigma \sqrt{\pi}} (\eta_{,x}^2 (1 - 2\eta^2) + \eta \eta_{,xx})$$

$$V_{,yy} = -(U_1 - U_2) \frac{B}{\sigma \sqrt{\pi}} (\eta_{,y}^2 (1 - 2\eta^2) + \eta \eta_{,yy})$$

$$T_{,x} = -(T_1 - T_2) \frac{B}{\sqrt{\pi}} \eta_{,x}$$

$$T_{,y} = -(T_1 - T_2) \frac{B}{\sqrt{\pi}} \eta_{,y}$$

$$T_{,xx} = -\frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} (-2\eta \eta_{,x}^2 + \eta_{,xx}) B$$

$$T_{,yy} = -\frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} (-2\eta \eta_{,y}^2 + \eta_{,yy}) B$$

$$k_{,x} = -2k_0 \eta \eta_{,x} B$$

$$k_{,y} = -2k_0 \eta \eta_{,y} B$$

$$k_{,xx} = -2k_0 (\eta_{,x}^2 (1 - 2\eta^2) + \eta \eta_{,xx}) B$$

$$k_{,yy} = -2k_0 (\eta_{,y}^2 (1 - 2\eta^2) + \eta \eta_{,yy}) B$$



$$\begin{aligned}
\epsilon_{,x} &= \frac{-2\epsilon_0\eta\eta_{,x}B}{x} - \frac{\epsilon}{x} \\
\epsilon_{,y} &= \frac{-2\epsilon_0\eta\eta_{,y}B}{x} \\
\epsilon_{,xx} &= -2\epsilon_0 \left( \eta_{,x}^2 (1 - 2\eta^2) + \eta\eta_{,xx} \right) \frac{B}{x} - 2 \frac{\epsilon_{,x}}{x} \\
\epsilon_{,yy} &= -2\epsilon_0 \left( \eta_{,y}^2 (1 - 2\eta^2) + \eta\eta_{,yy} \right) \frac{B}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mu_T)_{,x} &= \frac{-2\mu_{T_0}\eta\eta_{,x}B}{x} + \frac{\mu_T}{x} \\
(\mu_T)_{,y} &= \frac{-2\mu_{T_0}\eta\eta_{,y}B}{x}
\end{aligned}$$

### III.4 Sensibilités

#### III.4.1 Sensibilités par rapport à $U_1$

$$\begin{aligned}
S_U^{U_1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{erf}(\eta) \\
(S_U^{U_1})_{,x} &= -\frac{B}{\sqrt{\pi}}\eta_{,x} \\
(S_U^{U_1})_{,y} &= -\frac{B}{\sqrt{\pi}}\eta_{,y} \\
(S_U^{U_1})_{,xx} &= -\frac{B}{\sqrt{\pi}} \left( -2\eta\eta_{,x}^2 + \eta_{,xx} \right) \\
(S_U^{U_1})_{,yy} &= -\frac{B}{\sqrt{\pi}} \left( -2\eta\eta_{,y}^2 + \eta_{,yy} \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
S_V^{U_1} &= \frac{B}{2\sigma\sqrt{\pi}} \\
(S_V^{U_1})_{,x} &= -\frac{\eta\eta_{,x}B}{\sigma\sqrt{\pi}} \\
(S_V^{U_1})_{,y} &= -\frac{\eta\eta_{,y}B}{\sigma\sqrt{\pi}} \\
(S_V^{U_1})_{,xx} &= -\frac{B}{\sigma\sqrt{\pi}} (\eta_{,x}^2(1-2\eta^2) + \eta\eta_{,xx}) \\
(S_V^{U_1})_{,yy} &= -\frac{B}{\sigma\sqrt{\pi}} (\eta_{,y}^2(1-2\eta^2) + \eta\eta_{,yy})
\end{aligned}$$

Les sensibilités de la température  $T$  sont nulles :

$$\begin{aligned}
S_T^{U_1} &= 0 \\
(S_T^{U_1})_{,x} &= 0 \\
(S_T^{U_1})_{,y} &= 0 \\
(S_T^{U_1})_{,xx} &= 0 \\
(S_T^{U_1})_{,yy} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_k^{U_1} &= S_{k_0}^{U_1} B \\
(S_k^{U_1})_{,x} &= -2S_{k_0}^{U_1} \eta\eta_{,x} B \\
(S_k^{U_1})_{,y} &= -2S_{k_0}^{U_1} \eta\eta_{,y} B \\
(S_k^{U_1})_{,xx} &= -2S_{k_0}^{U_1} (\eta_{,x}^2(1-2\eta^2) + \eta\eta_{,xx}) B \\
(S_k^{U_1})_{,yy} &= -2S_{k_0}^{U_1} (\eta_{,y}^2(1-2\eta^2) + \eta\eta_{,yy}) B
\end{aligned}$$



où

$$S_{k_0}^{U_1} = \frac{343}{75000} (2U_1 - U_2) \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$\begin{aligned} S_{\epsilon}^{U_1} &= \frac{S_{\epsilon_0}^{U_1} + S_{\epsilon_0}^{U_1} B}{x} \\ (S_{\epsilon}^{U_1})_{,x} &= \frac{-2S_{\epsilon_0}^{U_1} \eta \eta_{,x} B}{x} - \frac{S_{\epsilon}^{U_1}}{x} \\ (S_{\epsilon}^{U_1})_{,y} &= \frac{-2S_{\epsilon_0}^{U_1} \eta \eta_{,y} B}{x} \\ (S_{\epsilon}^{U_1})_{,xx} &= -2S_{\epsilon_0}^{U_1} (\eta_{,x}^2 (1 - 2\eta^2) + \eta \eta_{,xx}) \frac{B}{x} - 2 \frac{(S_{\epsilon}^{U_1})_{,x}}{x} \\ (S_{\epsilon}^{U_1})_{,yy} &= -2S_{\epsilon_0}^{U_1} (\eta_{,y}^2 (1 - 2\eta^2) + \eta \eta_{,yy}) \frac{B}{x} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} S_{\epsilon_0}^{U_1} &= \frac{10^{-3} C_{\mu} \sigma}{3\sqrt{\pi}} \\ S_{\epsilon_0}^{U_1} &= \frac{343}{22500} C_{\mu} (3U_1 - U_2)(U_1 - U_2) \frac{\sigma^2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\mu_T}^{U_1} &= x(S_{\mu_{T_0}}^{U_1} + S_{\mu_{T_0}}^{U_1} B) \\ (S_{\mu_T}^{U_1})_{,x} &= \frac{-2S_{\mu_{T_0}}^{U_1} \eta \eta_{,x} B}{x} + \frac{S_{\mu_T}^{U_1}}{x} \\ (S_{\mu_T}^{U_1})_{,y} &= \frac{-2S_{\mu_{T_0}}^{U_1} \eta \eta_{,y} B}{x} \end{aligned}$$



où

$$S_{\mu_{T_0}}^{U_1} = -\frac{\mu_{T_0}}{U_1 - U_2}$$

$$S_{\mu_{T_0}}^{U_1} = \frac{\mu_{T_0}}{U_1}$$

### III.4.2 Sensibilités par rapport à $C_\mu$

Toutes les sensibilités par rapport à  $C_\mu$  sont nulles, exceptées celles du taux de dissipation de la turbulence  $\epsilon$  :

$$S_\epsilon^{C_\mu} = \frac{S_{\epsilon_0}^{C_\mu} + S_{\epsilon_0}^{C_\mu} B}{x}$$

$$(S_\epsilon^{C_\mu})_{,x} = \frac{-2S_{\epsilon_0}^{C_\mu} \eta \eta_{,x} B}{x} - \frac{S_\epsilon^{C_\mu}}{x}$$

$$(S_\epsilon^{C_\mu})_{,y} = \frac{-2S_{\epsilon_0}^{C_\mu} \eta \eta_{,y} B}{x}$$

$$(S_\epsilon^{C_\mu})_{,xx} = -2S_{\epsilon_0}^{C_\mu} (\eta_{,x}^2 (1 - 2\eta^2) + \eta \eta_{,xx}) \frac{B}{x} - 2 \frac{(S_\epsilon^{C_\mu})_{,x}}{x}$$

$$(S_\epsilon^{C_\mu})_{,yy} = -2S_{\epsilon_0}^{C_\mu} (\eta_{,y}^2 (1 - 2\eta^2) + \eta \eta_{,yy}) \frac{B}{x}$$

où

$$S_{\epsilon_0}^{C_\mu} = \frac{\hat{\epsilon}_0}{C_\mu}$$

$$S_{\epsilon_0}^{C_\mu} = \frac{\epsilon_0}{C_\mu}$$



### III.4.3 Sensibilités par rapport à $T_1$

Toutes les sensibilités par rapport à  $T_1$  sont nulles, exceptées celles de la température  $T$  :

$$\begin{aligned}
 S_T^{T_1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}(\eta) \\
 (S_T^{T_1})_{,x} &= -\frac{B}{\sqrt{\pi}} \eta_{,x} \\
 (S_T^{T_1})_{,y} &= -\frac{B}{\sqrt{\pi}} \eta_{,y} \\
 (S_T^{T_1})_{,xx} &= -\frac{B}{\sqrt{\pi}} (-2\eta \eta_{,x}^2 + \eta_{,xx}) \\
 (S_T^{T_1})_{,yy} &= -\frac{B}{\sqrt{\pi}} (-2\eta \eta_{,y}^2 + \eta_{,yy})
 \end{aligned}$$



### III.5 Termes sources pour l'écoulement

$$\begin{aligned}
q_u &= p_{,x} + \rho(uu_{,x} + vu_{,y}) - (\mu + \mu_T)(u_{,xx} + u_{,yy}) \\
&\quad - 2(\mu_T)_{,x}u_{,x} - (\mu_T)_{,y}(u_{,y} + v_{,x}) \\
q_v &= p_{,y} + \rho(uv_{,x} + vv_{,y}) - (\mu + \mu_T)(v_{,xx} + v_{,yy}) \\
&\quad - 2(\mu_T)_{,y}v_{,y} - (\mu_T)_{,x}(u_{,y} + v_{,x}) \\
q_T &= \rho C_p(uT_{,x} + vT_{,y}) - (\lambda + \lambda_T)(T_{,xx} + T_{,yy}) \\
&\quad - (\lambda_T)_{,x}T_{,x} - (\lambda_T)_{,y}T_{,y} \\
q_k &= \rho(uk_{,x} + vk_{,y}) - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}\right)(k_{,xx} + k_{,yy}) \\
&\quad - \frac{1}{\sigma_k}((\mu_T)_{,x}k_{,x} + (\mu_T)_{,y}k_{,y}) + \rho\epsilon - \mu_T[(u_{,y} + v_{,x})^2 + 2(u_{,x}^2 + v_{,y}^2)] \\
q_\epsilon &= \rho(u\epsilon_{,x} + v\epsilon_{,y}) - \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon}\right)(\epsilon_{,xx} + \epsilon_{,yy}) \\
&\quad - \frac{1}{\sigma_\epsilon}((\mu_T)_{,x}\epsilon_{,x} + (\mu_T)_{,y}\epsilon_{,y}) + \frac{C_2\rho\epsilon^2}{k} - \frac{C_1\epsilon\mu_T}{k}[(u_{,y} + v_{,x})^2 + 2(u_{,x}^2 + v_{,y}^2)]
\end{aligned}$$

### III.6 Termes sources pour les sensibilités

$$\begin{aligned}
S_{q_u} &= Sp_{,x} + \rho(S_u u_{,x} + S_v u_{,y} + u(S_u)_{,x} + v(S_u)_{,y}) \\
&\quad - (S_\mu + S_{\mu_T})(u_{,xx} + u_{,yy}) - (\mu + \mu_T)((S_u)_{,xx} + (S_u)_{,yy}) \\
&\quad - 2(S_{\mu_T})_{,x}u_{,x} - 2(\mu_T)_{,x}(S_u)_{,x} \\
&\quad - (S(\mu_T))_{,y}(u_{,y} + v_{,x}) - (\mu_T)_{,y}((S_u)_{,y} + (S_v)_{,x})
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
S_{qv} &= Sp_{,y} + \rho(S_v u_{,x} + S_v v_{,y} + v(S_u)_{,x} + v(S_v)_{,y}) \\
&\quad - (S_\mu + S_{\mu_T})(u_{,xx} + u_{,yy}) - (\mu + \mu_T)((S_u)_{,xx} + (S_u)_{,yy}) \\
&\quad - 2(S_{\mu_T})_{,y} u_{,y} - 2(\mu_T)_{,y} (S_u)_{,y} \\
&\quad - (S(\mu_T))_{,x} (u_{,y} + v_{,x}) - (\mu_T)_{,x} ((S_u)_{,y} + (S_v)_{,x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{qT} &= \rho C_p (S_u T_{,x} + u(S_T)_{,x} + S_v T_{,y} + v(S_T)_{,y}) - S_{\lambda_T} (T_{,xx} + T_{,yy}) \\
&\quad - (\lambda + \lambda_T)((S_T)_{,xx} + (S_T)_{,yy}) \\
&\quad - (S_{\lambda_T})_{,x} T_{,x} - (\lambda_T)_{,x} (S_T)_{,x} - (S_{\lambda_T})_{,y} T_{,y} - (\lambda_T)_{,y} (S_T)_{,y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{qk} &= \rho(S_u k_{,x} + S_v k_{,y} + u(S_k)_{,x} + v(S_k)_{,y}) \\
&\quad - \frac{S_{\mu_T}}{\sigma_k} (k_{,xx} + k_{,yy}) - \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) ((S_k)_{,xx} + (S_k)_{,yy}) \\
&\quad - \frac{1}{\sigma_k} ((S_{\mu_T})_{,x} k_{,x} + (S_{\mu_T})_{,y} k_{,y} + (\mu_T)_{,x} (S_k)_{,x} + (\mu_T)_{,y} (S_k)_{,y}) \\
&\quad + \rho S_\epsilon - S_{\mu_T} [(u_{,y} + v_{,x})^2 + 2(u_{,x}^2 + v_{,y}^2)] \\
&\quad - \mu_T [2(u_{,y} + v_{,x})((S_u)_{,y} + (S_v)_{,x}) + 4(u_{,x}(S_u)_{,x} + v_{,y}(S_v)_{,y})]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
S_{q_\epsilon} &= \rho(S_u \epsilon_{,x} + S_v \epsilon_{,y} + u(S_\epsilon)_{,x} + v(S_\epsilon)_{,y}) \\
&\quad - \frac{S_{\mu_T}}{\sigma_\epsilon} (\epsilon_{,xx} + \epsilon_{,yy}) - \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\epsilon} \right) ((S_\epsilon)_{,xx} + (S_\epsilon)_{,yy}) \\
&\quad - \frac{1}{\sigma_\epsilon} ((S_{\mu_T})_{,x} \epsilon_{,x} + (S_{\mu_T})_{,y} \epsilon_{,y} + (\mu_T)_{,x} (S_\epsilon)_{,x} + (\mu_T)_{,y} (S_\epsilon)_{,y}) \\
&\quad + \rho C_2 \left( \frac{2\epsilon S_\epsilon}{k} - \frac{\epsilon^2 S_k}{k^2} \right) \\
&\quad - C_1 \left( \frac{S_\epsilon \mu_T}{k} + \frac{\epsilon S_{\mu_T}}{k} - \frac{\epsilon \mu_T S_k}{k^2} \right) [(u_{,y} + v_{,x})^2 + 2(u_{,x}^2 + v_{,y}^2)] \\
&\quad - \frac{C_1 \epsilon \mu_T}{k} [2(u_{,y} + v_{,x})((S_u)_{,y} + (S_v)_{,x}) + 4(u_{,x}(S_u)_{,x} + v_{,y}(S_v)_{,y})]
\end{aligned}$$

### III.7 Passage au logarithmique

#### III.7.1 Ecoulement

$$K = \log(k)$$

$$K_{,x} = \frac{k_{,x}}{k}$$

$$K_{,y} = \frac{k_{,y}}{k}$$



### III.7.2 Sensibilités

$$\begin{aligned}
 S_K &= \frac{S_k}{k} \\
 (S_K)_{,x} &= \frac{(S_k)_{,x}}{k} - \frac{S_k k_{,x}}{k^2} \\
 (S_K)_{,y} &= \frac{(S_k)_{,y}}{k} - \frac{S_k k_{,y}}{k^2}
 \end{aligned}$$