

**Titre:** Etude du problème géométrique direct des manipulateurs parallèles de topologie STAR  
Title:

**Auteur:** Mamdouh Sayd  
Author:

**Date:** 2003

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Sayd, M. (2003). Etude du problème géométrique direct des manipulateurs parallèles de topologie STAR [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal].  
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7155/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7155/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Luc Baron, & Christian Mascle  
Advisors:

**Programme:** Unspecified  
Program:

In compliance with the  
Canadian Privacy Legislation  
some supporting forms  
may have been removed from  
this dissertation.

While these forms may be included  
in the document page count,  
their removal does not represent  
any loss of content from the dissertation.



UNIVERSITE DE MONTRÉAL

ÉTUDE DU PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE DIRECT DES MANIPULATEURS  
PARALLÈLES DE TOPOLOGIE STAR

MAMDOUH SAYD

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

JUILLET 2003

©Mamdouh Sayd, 2003.



National Library  
of Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

Acquisitions et  
services bibliographiques

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

*ISBN: 0-612-86432-4*

*Our file* *Notre référence*

*ISBN: 0-612-86432-4*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

**Canada**

UNIVERSITE DE MONTRÉAL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

ÉTUDE DU PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE DIRECT DES MANIPULATEURS  
PARALLÈLES DE TOPOLOGIE STAR

présenté par : SAYD Mamdouh

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. MAYER René, Ph.D., président

M. BARON Luc, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. MASCLE Christian, Doctorat ès Sciences., membre et codirecteur de recherche

M. PARIS Henri, Doctorat., membre

## REMERCIEMENTS

Je suis redevable aux professeurs Luc Baron et Christian Mascle qui ont supervisé mes travaux de recherche, pour leur patience durant les longues heures de discussion, leurs suggestions stimulantes, leur excellent encadrement et le soutien permanent qu'ils m'ont apportés durant toute la période de recherche. Je tiens également à leur exprimer ma reconnaissance pour leur aide financière. Je veux aussi remercier mes parents, ma famille pour leur patience et leur encouragement.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente les différentes méthodes de la résolution du problème géométrique direct des manipulateurs parallèles de topologie 3-PRIIR et Star. L'objectif général de ce mémoire est de démontrer, d'une part, que le nombre de solutions du problème géométrique direct pour les manipulateurs Star et 3-PRIIR dépend des paramètres géométriques du manipulateur et, d'autre part, que les Star admettent plus que deux solutions à l'encontre des 3-PRIIR. Le premier chapitre de ce mémoire présente les définitions de base et les notions générales de robotique nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Par la suite, une étude cinématique est présentée sur les manipulateurs de topologie 3-PRIIR. Cette étude comporte la solution du problème géométrique inverse, la détermination des matrices jacobiennes sérielle et parallèle, ainsi que leur utilisation pour la résolution numérique du MGD, la présentation d'une méthode algébrique pour la solution du MGD et, finalement, des exemples numériques. Le chapitre 3 traite d'une étude cinématique de toutes les géométries des manipulateurs de topologie Star. Cette étude contient, la solution du MGI, la détermination des matrices jacobiennes, la formulation des équations mathématiques décrivant le MGD et finalement, des exemples numériques illustrant l'application des matrices jacobiennes pour la résolution du MGD. Le chapitre 4 présente une méthode graphique permettant la solution du MGD, ainsi que des exemples numériques pour la validation de cette méthode. Ces exemples numériques porteront sur plusieurs géométries des manipulateurs de la famille Star.



## ABSTRACT

This thesis presents the different ways to resolve the direct kinematic of the 3-PR1IR and the Star-like topology. The principal goal of this work is to demonstrate that the 3-PR1IR can't have more than two solutions of the DK problem, and also to demonstrate that the Star can have more than two assembly modes. The first chapter of this thesis presents the basic definitions and the general notions of robotic necessary to the understanding of the following chapters. Thereafter, a kinematic study on the 3-PR1IR manipulators is presented. This study includes

- the solution of the inverse kinematic problem;
- the determination of the jacobian matrices;
- the numerical resolution of the DK problem based on the jacobian matrices;
- the algebraic solution of the DK;
- and finally, some numerical examples.

The third chapter contains a kinematic study for all the Star-like topology. It includes the first, second, third and fifth points of the chapter 2. Moreover, it contains an algebraic formulation which describes the mathematical equations of the direct kinematic problem of the Star-like topology. The chapter 4 presents a graphical method to resolve the direct kinematic for all the Star-like topology based on the CAD system CATIAV5R8. We will also resolve some numerical examples from Star manipulators. This method allows us to find all of the solutions and then all of the Star assembly modes

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS.....	iv
RÉSUMÉ.....	v
ABSTRACT.....	vi
TABLE DES MATIÈRES.....	vii
LISTE DES TABLEAUX.....	x
LISTE DES FIGURES.....	xi
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES.....	xiv
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 GÉNÉRALITÉS.....	3
1.1 Définitions.....	3
1.1.1 Chaîne cinématique.....	3
1.1.2 Manipulateur sériel et parallèle.....	5
1.1.3 Degré de liberté.....	7
1.1.4 Modèle géométrique.....	8
1.1.5 Matrices jacobiennes et singularité.....	9
1.1.6 Topologie et paramètres géométriques.....	10
1.1.7 Configuration.....	11
1.1.8 Mode d'assemblage.....	11
1.1.9 Mode opératoire.....	11
1.2 Travaux précédents.....	12

1.2.1 Solution numérique.....	12
1.2.2 Solution polynomiale.....	13
1.2.3 Solution explicite.....	14
1.3 Sujet de recherche.....	15
CHAPITRE 2 MGD DES MANIPULATEURS 3-PRIIR.....	19
2.1 Topologie des manipulateurs 3-PRIIR.....	19
2.2 Paramètres géométriques.....	21
2.3 Modélisation du problème.....	23
2.3.1 Orientation des axes $e_i$ .....	23
2.3.2 Position initiale des curseurs $a_i$ .....	23
2.3.3 Géométrie de l'effecteur $b_i$ .....	24
2.4 Boucle cinématique d'une jambe d'un manipulateur 3-PRIIR.....	26
2.5 Système d'équations du MGD.....	27
2.6 Méthode de résolution.....	28
2.7 Configurations singulières.....	30
2.8 Exemple numérique.....	31
2.9 MGL.....	35
2.10 Matrices jacobiennes.....	36
2.11 Solution du MGD avec l'algorithme de Newton.....	37
2.12 Singularités sérielles.....	39
2.13 Conclusion.....	39

CHAPITRE 3 MGD DES MANIPULATEURS STAR.....	41
3.1 Définition du problème.....	42
3.2 Modélisation du problème.....	43
3.3 MGL.....	45
3.4 Matrices jacobiennes.....	47
3.5 Solution du MGD par algorithme de Newton.....	52
3.6 Conclusion.....	54
CHAPITRE 4 SOLUTION GRAPHIQUE DU MGD DES STAR.....	56
4.1 Méthode 1.....	56
4.2 Méthode 2.....	59
4.3 Simulation cinématique et validation de la méthode graphique.....	60
4.4 Solution du MGD pour un manipulateur Y Star.....	61
4.4.1 Géométrie 1.....	63
4.4.2 Géométrie 2.....	66
4.5 Vérification des résultats.....	74
4.6 Solution du MGD pour un manipulateur Star.....	78
4.7 Erreurs de la méthode 1.....	84
4.8 Avantages et inconvénients des deux méthodes.....	86
CONCLUSION.....	87
RÉFÉRENCES.....	89

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 : Classification des manipulateurs selon la chaîne cinématique et le degré de connectivité.....	5
Tableau 1.2 : Différents types de singularités dans les MPs.....	10
Tableau 2.1 : Solution du MGD et nombre d'itérations pour $MP_1$ en fonction de l'erreur et du point de départ de la boucle.....	38
Tableau 3.1 : Solutions du MGD et nombre d'itérations pour $MP_2$ en fonction de l'erreur et du point de départ de la boucle.....	53
Tableau 4.1 : Huit solutions du MGD dans le cas du $MP_3$ .....	65
Tableau 4.2 : Douze solutions du MGD dans le cas du $MP_4$ .....	67
Tableau 4.3 : Vérification numérique des solutions du MGD dans le cas du $MP_3$ avec la méthode du MGI.....	76
Tableau 4.4 : Vérification numérique des solutions du MGD dans le cas du $MP_4$ avec La méthode du MGI.....	77
Tableau 4.5 : Erreur de la méthode 1 dans le cas du $MP_3$ .....	85

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: Classification des manipulateurs selon la chaîne cinématique.....	4
Figure 1.2: Manipulateur sériel PUMA.....	6
Figure 1.3: Manipulateur parallèle à 6DDLs.....	7
Figure 1.4: Relation entre l'espace articulaire et l'espace des coordonnées.....	8
cartésiennes de l'organe terminal	
Figure 1.5: Manipulateur parallèle Y Star.....	16
Figure 1.6: Manipulateur parallèle 3- <u>PRIIR</u> .....	18
Figure 2.1: Manipulateur parallèle 3- <u>PRIIR</u> et ses composantes principales.....	20
Figure 2.2 : Paramètres géométriques de positionnement initial des curseurs pour les manipulateurs 3- <u>PRIIR</u> .....	21
Figure 2.3 : Paramètres géométriques d'orientation des axes prismatiques de la base des manipulateurs 3- <u>PRIIR</u> .....	22
Figure 2.4 : Paramètres $\gamma_i$ et $\Phi_i$ .....	24
Figure 2.5 : Boucle cinématique d'une jambe d'un manipulateur 3- <u>PRIIR</u> .....	26
Figure 2.6 : Configuration initiale du manipulateur $MP_1$ .....	32
Figure 2.7 : Première solution du MGD pour $MP_1$ .....	33
Figure 2.8 : Deuxième solution du MGD pour $MP_1$ .....	33
Figure 2.9 : Évolution de l'erreur en fonction du nombre d'itérations pour $MP_1$ .....	39
Figure 3.1: Manipulateur parallèle Y Star et ses composantes.....	41
Figure 3.2: Vecteurs $\mathbf{m}_{ip}$ et $\mathbf{m}_{ip\perp}$ .....	50

Figure 3.3: Évolution de l'erreur en fonction du nombre d'itérations pour $MP_2$ .....	54
Figure 4.1: Cercle initial représentant les positions possibles du point $B_i$ : $\Phi_i \in [0$ $2\pi]$ , $\gamma_i = \gamma_{i0}$ .....	57
Figure 4.2: Courbes hélicoïdales à partir des points d'un méridien circulaire.....	58
Figure 4.3 : Surface <i>LOFT</i> entre différentes courbes hélicoïdales .....	58
Figure 4.4 : Surface hélicoïdale à méridien circulaire créée par la fonction de balayage pour un manipulateur Star avec un pas de $140u_d$ et une longueur de jambe $l$ de $100u_d$ .....	59
Figure 4.5 : Table de paramétrage pour les coordonnées des solutions du MGD.....	61
Figure 4.6 : Surfaces $S_{B_i}$ décrites par les points $B_i$ dans le cas du manipulateur $MP_3$ (le pas est grand relativement à la longueur des jambes).....	63
Figure 4.7 : Surfaces $S_{u_i}$ représentant les surfaces décrites par l'origine de l'organe terminal.....	64
Figure 4.8 : Courbes $Cr_{12}$ et $Cr_{13}$ d'intersection des surfaces $S_{u_1}$ avec $S_{u_2}$ et $S_{u_1}$ avec $S_{u_3}$ , ainsi que les points solutions du MGD pour le manipulateur $MP_3$ .....	65
Figure 4.9 : Configuration initiale du manipulateur $MP_4$ .....	66
Figure 4.10 : Solution 1 du MGD du $MP_4$ .....	68
Figure 4.11 : Solution 2 du MGD du $MP_4$ .....	68
Figure 4.12 : Solution 3 du MGD du $MP_4$ .....	69
Figure 4.13 : Solution 4 du MGD du $MP_4$ .....	69

Figure 4.14 : Solution 5 du MGD du $MP_4$ .....	70
Figure 4.15 : Solution 6 du MGD du $MP_4$ .....	70
Figure 4.16 : Solution 7 du MGD du $MP_4$ .....	71
Figure 4.17 : Solution 8 du MGD du $MP_4$ .....	71
Figure 4.18 : Solution 9 du MGD du $MP_4$ .....	72
Figure 4.19 : Solution 10 du MGD du $MP_4$ .....	72
Figure 4.20 : Solution 11 du MGD du $MP_4$ .....	73
Figure 4.21 : Solution 12 du MGD du $MP_4$ .....	73
Figure 4.22 : Vérification numérique des solutions du MGD par le MGI.....	75
Figure 4.23 : Solution 1 du MGD du $MP_5$ .....	80
Figure 4.24 : Solution 2 du MGD du $MP_5$ .....	80
Figure 4.25 : Solution 3 du MGD du $MP_5$ .....	81
Figure 4.26 : Solution 4 du MGD du $MP_5$ .....	81
Figure 4.27 : Solution 5 du MGD du $MP_5$ .....	82
Figure 4.28 : Solution 6 du MGD du $MP_5$ .....	82
Figure 4.29 : Solution 7 du MGD du $MP_5$ .....	83
Figure 4.30 : Solution 8 du MGD du $MP_5$ .....	83



## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

- MS : Manipulateur sériel
- MP : Manipulateur parallèle
- DDLs : Degré de liberté.
- $c_i$  : Degré de connectivité du corps  $i$
- CCs : Coordonnées cartésiennes de l'organe terminal
- CAs : Coordonnées articulaires du manipulateur
- CAAs : Coordonnées articulaires actionnées du manipulateur
- MGD : Modèle géométrique direct
- MGI : Modèle géométrique inverse
- J** : Matrice jacobienne
- $J_S$  : Matrice jacobienne sérielle
- $J_P$  : Matrice jacobienne parallèle
- $E_i$  : Origine du curseur  $i$  (corps 2) dans le cas des 3-PRIIR et celui de l'écrou  $i$   
(corps 3) dans le cas des Star
- $B_i$  : Centre du corps 5
- $A$  : Système d'axes de référence fixé sur la base
- $B$  : Système d'axes fixé sur l'organe terminal
- $\mathbf{p}$  : Vecteur position de l'origine de  $B$  dans  $A$
- $\mathbf{q}_i$  : Vecteur déplacement du curseur  $i$  (corps 2) dans le cas des 3-PRIIR et celui de  
l'écrou  $i$  (corps 3) dans le cas des Star, par rapport à la position initial
- $\mathbf{a}_i$  : Vecteur position de  $A_i$  dans  $A$

$e_i$  : Vecteur orientation de l'axe de la base  $i$

$\theta_i$  : Angle de rotation du moteur  $i$  dans le cas des manipulateurs Star

$m_i$  : Vecteur membrure

$b_i$  : Vecteur position de  $B_i$  par rapport à  $B$

$u_d$  : Unité de mesure de distance

$l_i$  : Longueurs des jambes du manipulateur

$a_i, d_i, v_i$ : Paramètres géométriques de positionnement de la base du manipulateur

$ps_i$  : pas de la vis  $i$  dans le cas des manipulateurs Star

$\alpha_i, \beta_i$  : Paramètres géométriques d'orientation de la base du manipulateur

$\gamma_{i0}, \phi_{i0}$  : Paramètres géométriques de l'organe terminal du manipulateur

$R_x(\theta)$  : Matrice carrée d'ordre  $3 \times 3$  exprimant la rotation autour de l'axe  $x$  par l'angle  $\theta$

$$\text{et s'exprime tel que : } R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$R_y(\theta)$  : Matrice carrée d'ordre  $3 \times 3$  exprimant la rotation autour de l'axe  $y$  par l'angle  $\theta$

$$\text{et s'exprime tel que : } R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$R_z(\theta)$  : Matrice carrée d'ordre  $3 \times 3$  exprimant la rotation autour de l'axe  $z$  par l'angle  $\theta$

$$\text{et s'exprime tel que : } R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}_i$  : Matrice carrée d'ordre  $3 \times 3$  exprimant le passage de  $A_i$  vers  $A$

$\mathbf{i}$  : Vecteur unitaire tel que  $\mathbf{i} = [1 \ 0 \ 0]^T$

$\mathbf{j}$  : Vecteur unitaire tel que  $\mathbf{j} = [0 \ 1 \ 0]^T$

$\mathbf{k}$  : Vecteur unitaire tel que  $\mathbf{k} = [0 \ 0 \ 1]^T$

## INTRODUCTION

La plupart des manipulateurs existant actuellement sont des robots sériels qui sont composés d'une chaîne cinématique ouverte. Ces manipulateurs sont capables d'atteindre un grand espace de travail, mais ne peuvent garantir une grande précision quand à la position et l'orientation de leur organe terminal. En effet, les erreurs de positionnement et d'orientation s'additionnent de la base à l'effecteur. Les manipulateurs sériels présentent aussi l'inconvénient d'un faible rapport charge utile/poids du manipulateur qui est de l'ordre de 1/35 pour les robots électriques [1]. En effet, en plus du poids des membrures, s'ajoute le poids des moteurs qui sont placés au niveau des articulations et qui diminue d'autant la capacité de charge utile possible. Ces manipulateurs présentent aussi des faiblesses au niveau de la rigidité en raison que les membrures supportent le poids des moteurs qui entraîne une déformation en flexion. Les manipulateurs sériels ne devraient donc pas être conçus pour des applications nécessitant une grande vitesse, de grande rigidité ou de grande charge utile. À cet effet, une autre classe de manipulateurs a vu le jour : les manipulateurs parallèles. Ces manipulateurs jouissent d'une grande précision, rigidité et rapport charge utile/poids du manipulateur [2]. En effet, les membrures ne supportent pas le poids des moteurs ce qui améliore la rigidité et la précision. La première architecture des manipulateurs parallèles fut conçue en 1947 par Gough [3,4]. Elle consistait en un manipulateur à 6 degrés de liberté servant à orienter et à positionner une plate forme pour tester des pneus. En 1965, Stewart [5] a conçu indépendamment de Gough un mécanisme semblable actionné par six vérins linéaires et dont le but était de simuler le vol d'un avion. Le problème géométrique direct consiste à déterminer la

position et l'orientation de l'organe terminal connaissant les coordonnées articulaires des actionneurs. Ce problème est en général très compliqué à résoudre pour les manipulateurs parallèles. En effet, la modélisation mathématique mène en général à un système d'équations non linéaire.

Dans ce mémoire, on va s'intéresser à la résolution du modèle géométrique direct pour deux topologies qui sont le 3-PR<sub>I</sub>I<sub>R</sub> et le Star conçu par Hervé [6] dont la topologie est 3-RH<sub>I</sub>I<sub>R</sub>. Le premier chapitre présente les notions et définitions de base de la robotique permettant de comprendre les chapitres suivants. Le second chapitre a pour objectif d'étudier et de résoudre algébriquement le problème géométrique direct de tous les manipulateurs de topologie 3-PR<sub>I</sub>I<sub>R</sub>. Dans le troisième chapitre, ce problème sera étudié pour toutes les géométries des manipulateurs Star. Cette étude comporte une étude cinématique, ainsi qu'une formulation mathématique du modèle géométrique direct. Le quatrième chapitre présente une méthode graphique pour résoudre ce problème pour les Star, ce qui va permettre de déterminer tous les modes d'assemblage. Le chapitre 4 comporte aussi des exemples numériques de certaines géométries de Star venant appuyer les méthodes de résolutions utilisées.

## CHAPITRE 1

### GÉNÉRALITÉS

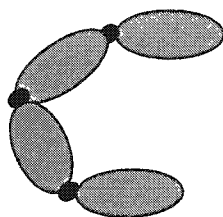
Ce chapitre introduit les notions et définitions de base de robotique permettant la compréhension des chapitres suivants. Il présente aussi l'originalité et l'apport de ce mémoire.

#### 1.1 Définitions

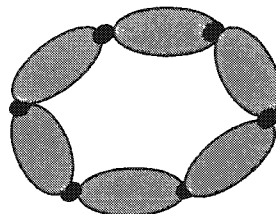
##### 1.1.1 Chaîne cinématique

Une chaîne cinématique est définie comme un système mécanique dans lequel les corps rigides sont unis par des couples cinématiques [7, 8]. Les couples cinématiques peuvent être supérieurs ou inférieurs. Un couple cinématique supérieur permet un contact ponctuel ou linéaire entre deux corps comme par exemple, un cylindre avec un plan. Un couple cinématique inférieur permet un contact surfacique entre deux corps. Il existe six couples cinématiques inférieurs, c'est-à-dire hélicoïdale (H), rotoïde (R), prismatique (P), cylindrique (C), planaire (E) et sphérique (S). Une chaîne cinématique peut être simple ou complexe, ouverte ou fermée. Une chaîne cinématique simple est une chaîne cinématique ne contenant que des corps ayant un degré de connectivité plus petit ou égal à deux. Le degré de connectivité d'un corps est défini comme le nombre de corps qui lui est connecté par des couples cinématiques inférieurs. Il suffit qu'un seul corps d'une chaîne cinématique ait un degré de connectivité supérieur à deux pour que la chaîne entière soit déclarée complexe plutôt que simple. Comme le montre la figure 1.1, les

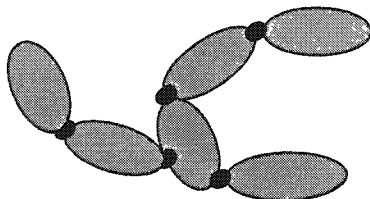
chaînes cinématiques possédant au moins une boucle cinématique fermée sont dites fermées, autrement elles sont ouvertes.



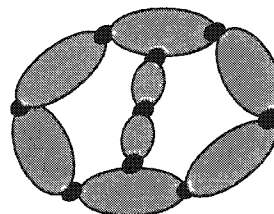
(a) : manipulateur sériel (simple et ouverte)



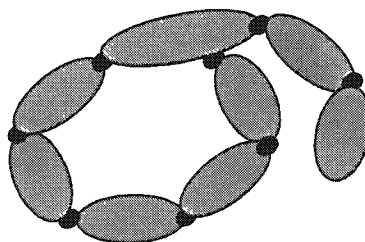
(b) : enchaînement (simple et fermée)



(c) : arborescent (complexe et ouverte)



(d) : manipulateur parallèle (complexe et fermée)



(e) : hybride (complexe et fermée)

Figure 1.1- Classification des manipulateurs selon la chaîne cinématique

### 1.1.2 Manipulateur sériel et parallèle

Un manipulateur est un système mécanique permettant d'accomplir des tâches de manipulation. Le tableau 1.1 présente une classification des manipulateurs selon les différents types de chaîne cinématique et du degré de connectivité de leurs composantes. Ces types de manipulateurs sont aussi indiqués à la figure 1.1. Un manipulateur sériel (MS) se compose d'un ensemble de corps connectés en série par des couples cinématiques inférieurs. Hormis l'effecteur, tous les autres corps du manipulateur ont un degré de connectivité de 2. De nos jours, un grand nombre de designs de MSs sont utilisés dans l'industrie. On peut citer, par exemple, l'industrie automobile où ils effectuent notamment des opérations de soudage, d'assemblage et de manutention. La figure 1.2 illustre le MS PUMA qui possède 6 degrés de liberté.

Tableau 1.1- Classification des manipulateurs selon la chaîne cinématique et le degré de connectivité

chaîne cinématique	ouverte		fermée	
	type	connectivité	type	connectivité
simple $c_{\max} \leq 2$	sériel	$c_i = 1, i = 1,2$ $c_i = 2, i > 2$	enchaînement	$c_i = 2, \forall i$
complexe $c_{\max} \geq 2$	arborescent	$c_{\max} > 2$ sans boucle	parallèle	$c_i > 2, i = 1,2$ $c_i = 2, i > 2$
			hybride	$c_i \geq 2, i = 1, \dots, m$ $c_i \geq 2, i > m$



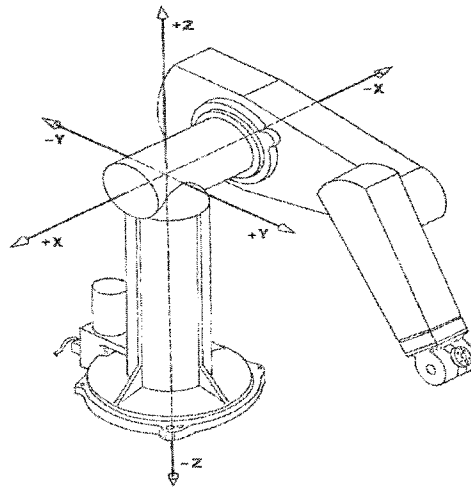


Figure 1.2- Manipulateur sériel PUMA

Un autre type de manipulateur est le manipulateur parallèle (MP). La figure 1.1 montre qu'un MP possède une chaîne cinématique complexe et fermée avec deux corps dont le degré de connectivité est supérieur à 2. Comme le montre aussi la figure 1.3, un MP est composé de deux corps principaux, une base et une plate-forme mobile appelé aussi organe terminal, couplés par des chaînes cinématiques simples que l'on appelle jambes. Une seule articulation par jambe est actionnée, alors que les autres articulations sont passives. Les MPs possèdent des caractéristiques complémentaires aux MSs. Ils peuvent être utilisés dans des situations où les MSs ne peuvent satisfaire aux exigences de l'application. En général, les MPs peuvent supporter une plus grande charge utile et possèdent une meilleure précision que les MSs de masses et grandeurs équivalentes.

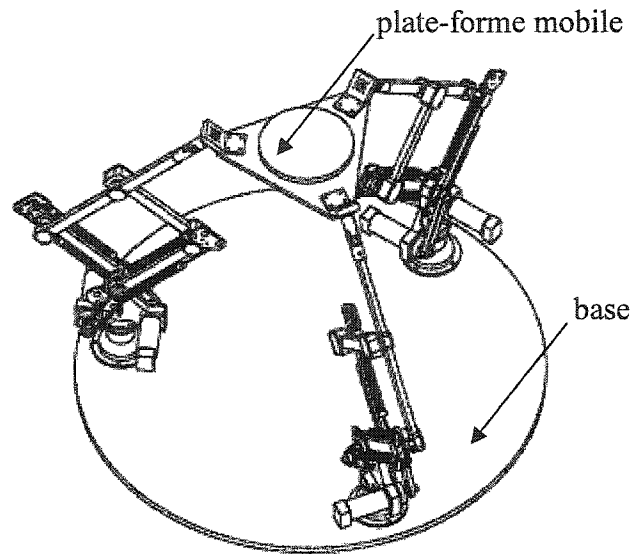


Figure 1.3 - Manipulateur parallèle à 6 DDLs avec trois chaînes

En contrepartie, ces manipulateurs présentent un espace de travail réduit comportant plus de problèmes de singularités. Comme exemple de MPs, on peut citer l'utilisation de la plate-forme de Stewart-Gough dans les simulateurs de vols fabriqués par la compagnie CAE Electronic Inc. de Montréal.

### 1.1.3 Degré de liberté

Un degré de liberté (DDL) exprime la possibilité de positionnement et d'orientation [9].

Pour les MPs, le nombre de DDLs est associé à sa plate forme mobile.

### 1.1.4 Modèle géométrique

Désignons par

$$\mathbf{q} \equiv [q_1 \dots q_m]^T$$

le vecteur des coordonnées articulaires actionnés (CAAs) d'un manipulateur à  $n$  degrés de liberté, ainsi que

$$\mathbf{x} \equiv [x_1 \dots x_n]^T$$

les coordonnées cartésiennes CCs de l'origine de son organe terminal. Le modèle géométrique inverse (MGI), tel que montré à la figure 1.4, consiste à déterminer les CAAs connaissant les CCs. Le modèle géométrique direct (MGD) consiste à déterminer les CCs pour des CAAs connues.

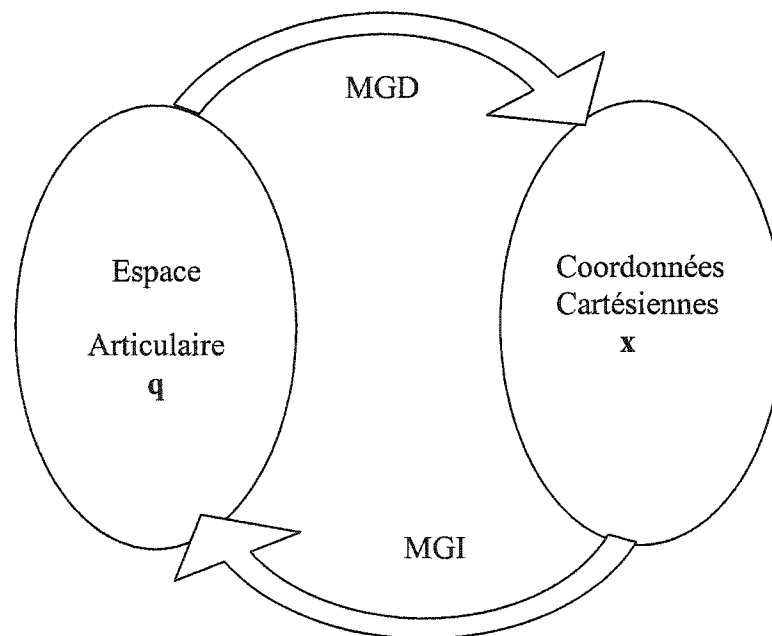


Figure 1.4 : Relation entre l'espace articulaire et l'espace des coordonnées cartésiennes de l'organe terminal

### 1.1.5 Matrices jacobiennes et singularité

La matrice jacobienne exprime la relation entre les vitesses articulaires actionnées  $\dot{\mathbf{q}}$  et le torseur de vitesse  $\dot{\mathbf{x}}$  de l'origine de l'organe terminal. En général, cette relation s'exprime par :

$$\mathbf{J}_p \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_s \dot{\mathbf{q}} \quad (1.1)$$

Où  $\mathbf{J}_p$  est la matrice jacobienne parallèle et  $\mathbf{J}_s$  est la matrice jacobienne sérielle. Dans le cas des MSs,  $\mathbf{J}_p$  est toujours la matrice identité. L'équation 1.1 s'écrit alors :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_s \dot{\mathbf{q}} \quad (1.2)$$

Dans le cas des manipulateurs pleinement parallèles,  $\mathbf{J}_s$  est diagonale et donc inversible si les éléments de la diagonale ne sont pas nuls. Ainsi l'équation 1.1 devient :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_s^{-1} \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{x}} \quad (1.3)$$

Des configurations singulières [10,11] apparaissent lorsque le DDL de l'organe terminal est différent de la dimension de l'espace de travail dans lequel il évolue [12]. Gosselin et Angeles [13] ont montré que les singularités des chaînes cinématiques fermées peuvent

être divisées en trois groupes principaux. Leur méthode est basée sur la détermination des racines du déterminant des deux matrices jacobiniennes sérielle et parallèle. Le tableau 1.2 résume les différents types de singularités dans les MPs.

Tableau 1.2 : Différents types de singularités dans les MPs

Type de singularité	Équation	Caractéristiques
Parallèle	$\text{Det}(\mathbf{J}_p) = 0$	L'organe terminal peut se déplacer tout en fixant les coordonnées articulaires actionnées
Sérielle	$\text{Det}(\mathbf{J}_s) = 0$	L'organe terminal ne peut pas se déplacer même si on change les coordonnées articulaires actionnées
Parallèle/Sérielle	$\text{Det}(\mathbf{J}_p) = 0$ et $\text{Det}(\mathbf{J}_s) = 0$	Il est possible de déplacer l'organe terminal en fixant les coordonnées articulaires actionnées et inversement.
Structurelle		Le MGD admet une infinité de solutions

### 1.1.6 Topologie et paramètres géométriques

Dans ce mémoire, la topologie est la description sous-forme de graphe des structures de chaînes cinématiques d'un manipulateur à l'aide de différents couples cinématiques. La topologie fait abstraction de la géométrie de la chaîne. Les paramètres géométriques décrivent un manipulateur à sa position initiale ainsi que la position et l'orientation de ses couples cinématiques.

### 1.1.7 Configuration

La configuration d'un manipulateur est un vecteur  $\mathbf{q}$  qui contient tous les coordonnées articulaires CAs du manipulateur et qui permet de définir la position et l'orientation de tous les corps le constituant.

### 1.1.8 Mode d'assemblage

La notion du mode d'assemblage est associée aux différentes solutions du MGD. Pour les MSs, il existe toujours une seule solution au MGD et donc un seul mode d'assemblage. Par contre, les MPs peuvent posséder plusieurs modes d'assemblage dépendamment du nombre de solutions du MGD.

### 1.1.9 Mode opératoire

La notion du mode opératoire est associée aux différentes solutions du MGI. Contrairement au MGD, les MSs peuvent avoir plusieurs modes opératoires. À titre d'exemple, un MS plan de topologie RR possède deux modes opératoires. Pour les manipulateurs pleinement parallèles, la matrice jacobienne sérielle est diagonale et chaque élément de la matrice est associé à une jambe. Un mode opératoire correspond aux différentes configurations où les termes  $\mathbf{J}_{s_{ii}}$ <sup>1</sup> gardent le même signe sans s'annuler. Ainsi, un MP ayant  $n$  jambes possède  $2^n$  modes opératoires.

---

<sup>1</sup>  $\mathbf{J}_{s_{ii}}$  représentent les éléments diagonaux de la matrice jacobienne sérielle  $\mathbf{J}_s$

## 1.2 Travaux précédents

Le MGD intervient de manière pratique pour la commande des MPs, comme par exemple dans le cas où le manipulateur évolue sous capteurs dans un environnement inconnu qui va déterminer la trajectoire ou lorsque le manipulateur est utilisé comme capteur d'efforts [14]. La formulation de ce problème conduit à un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues, non linéaires et couplées dont la résolution est en général très difficile. Ce paragraphe présente un survol des différentes méthodes et techniques appliquées pour la résolution du MGD des MPs. On va présenter aussi un aperçu sur les résultats obtenus concernant le MGD pour certains MPs classiques. Il existe trois principales méthodes pour la résolution du MGD pour les MPs : solution numérique, polynomiale et finalement, explicite.

### 1.2.1 Solution numérique

Les chercheurs se sont limités à ce type de solutions pendant une longue période, à cause de la complexité du problème [1, 15, 16]. Bien que les solutions numériques puissent être efficaces sous certaines conditions, elles ne fournissent pas de réponses théoriques telles que le nombre de modes d'assemblage, et elles sont basées sur une connaissance d'un estimé initial de la solution qui peut ne pas être disponible ou conduire à une divergence du processus de résolution. En plus des inconvénients liés aux problèmes d'initialisation et de convergence, on est confronté, avec ce type de solution, au problème du temps de calcul qui empêche son utilisation dans la plupart des applications nécessitant un contrôle en temps réel. Pour contourner cette difficulté, certains chercheurs [17] ont suggéré pour

avoir une solution en temps réel, d'installer des capteurs au niveau de certaines articulations passives sélectionnées afin de réduire la complexité des calculs.

### 1.2.2 Solution polynomiale

À cause des limitations pratiques et théoriques de la solution numérique, plusieurs chercheurs se sont intéressés, depuis la fin des années 80, à la solution polynomiale [18, 19, 20, 21]. Cette dernière consiste à ramener la solution du système de  $n$  équations non linéaires et couplées à celle d'un polynôme mono-variable de degré le plus faible possible. En effet, après la mise en équation du problème géométrique direct, des techniques d'éliminations pourraient permettre l'élimination de  $n-1$  variables des  $n$  variables intervenant dans le système d'équations et par conséquent d'exprimer sous forme d'une seule équation polynomiale dépendante de la seule variable qui n'a pas été éliminée. La détermination des autres variables s'effectue en utilisant les équations des étapes intermédiaires de la solution après avoir solutionner le polynôme obtenu. L'un des avantages de cette approche est qu'elle donne la possibilité de connaître le nombre de modes d'assemblages maximal d'un manipulateur parallèle. Ce nombre dépend du degré du polynôme minimal que l'on peut obtenir. En effet, en théorie des mécanismes, un théorème dû à Freudenstein [22] relatif aux mécanismes plans permet de confirmer que le nombre de modes d'assemblages est fini et que le problème géométrique direct peut être exprimé sous forme d'un polynôme mono-variable. Hunt [23] a montré que ce nombre fini de modes d'assemblage des MPs plans est égal à six. Du côté des manipulateurs parallèles spatiaux, Hunt [23] avait conjecturé qu'il existe au maximum seize solutions



réelles au problème géométrique direct d'une classe de ces manipulateurs ayant une plate forme triangulaire, connue sous le nom de TSSM. Cette conjecture a été confirmée par Merlet [24] qui a montré qu'effectivement, le nombre de modes d'assemblages pour cette classe de manipulateurs est égal à seize. Plusieurs chercheurs se sont alors penchés sur la recherche de la solution polynomiale minimale pour diverses classes de MPs.

### 1.2.3 Solution explicite

La structure géométrique d'un MP peut induire une complexité dans les calculs cinématiques. Dans le cas des MSs à six degrés de liberté, le problème géométrique inverse peut être résolu explicitement si la géométrie du manipulateur sériel est telle que la position et l'orientation de l'organe terminal sont découplées [25]. C'est le cas lorsque les axes des trois dernières articulations s'intersectent. Du côté des manipulateurs parallèles spatiaux à six degrés de liberté, certains chercheurs [26, 27] ont montré que la position de l'organe terminal devient découplée de son orientation si la géométrie du MP est telle que trois des six articulations sur l'organe terminal sont confondues ou en d'autres termes, lorsque les axes de trois segments s'intersectent en un point. C'est l'un des points forts de la dualité série parallèle qui a été exploité. Cependant, l'idée de découplage n'a pu que simplifier la solution polynomiale du problème géométrique direct [26]. Innocenti et Parenti-Castelli [26] ont montré que la solution polynomiale est réduite à deux polynômes. Le premier est d'ordre deux et donne deux solutions possibles pour la position pour l'organe terminal. Le deuxième est un polynôme d'ordre huit qui donne huit configurations possibles pour son orientation. Zhang et Song [27] ont constaté, pour

leur part, que l'idée du découplage est utile et peut être exploitée pour chercher des conditions spéciales pouvant conduire à un problème géométrique direct qui serait plus simple à résoudre. Ils ont alors montré que ce problème peut avoir des solutions explicites si un degré de liberté de rotation est découplé des cinq autres degrés de libertés et que géométriquement, cette condition est satisfaite si cinq articulations sur la plateforme ou sur la base sont alignées. La solution explicite est en fait la solution la plus avantageuse pour les applications en temps réel. Ses avantages sont nombreux. En effet, le fait qu'elle ne fasse appel à aucune résolution numérique, réduit énormément le temps de calcul. Elle peut aussi répondre à la question du nombre de modes d'assemblages. De plus, elle représente un grand intérêt pour la modélisation dynamique des manipulateurs parallèles ainsi que pour l'étude des singularités. Les techniques de calcul dont on dispose actuellement ne permettent pas de résoudre le problème géométrique direct explicitement pour des architectures quelconques de manipulateurs parallèles. Cependant, pour des architectures particulières satisfaisant certaines conditions géométriques, l'obtention d'une solution explicite est possible.

### **1.3 Sujet de recherche**

L'objectif de ce mémoire est l'étude du MGD de toutes les géométries des manipulateurs Star. Ces manipulateurs dérivent du MP Ystar illustré à la figure 1.5 et qui présente la particularité que les axes de ces bases sont coplanaires, s'intersectant en un point et faisant un angle de  $120^\circ$  l'un par rapport à l'autre. Les manipulateurs Star dont les trois axes de la base peuvent avoir n'importe quelle orientation dans l'espace ont tous trois

jambes dont la topologie est identique à celle du Ystar et est constituée des composantes suivantes :

1. un moteur (pièce 1) ;
2. une vis (pièce 2) entraîné en rotation par le moteur;
3. un écrou (pièce 3) en liaison hélicoïdale avec la vis;
4. deux jambes parallèles et de même longueur (pièce 4 et 5) ;
5. un curseur (pièce 6) ; et finalement
6. un organe terminal (pièce 7) en liaison rotoïde avec le curseur.

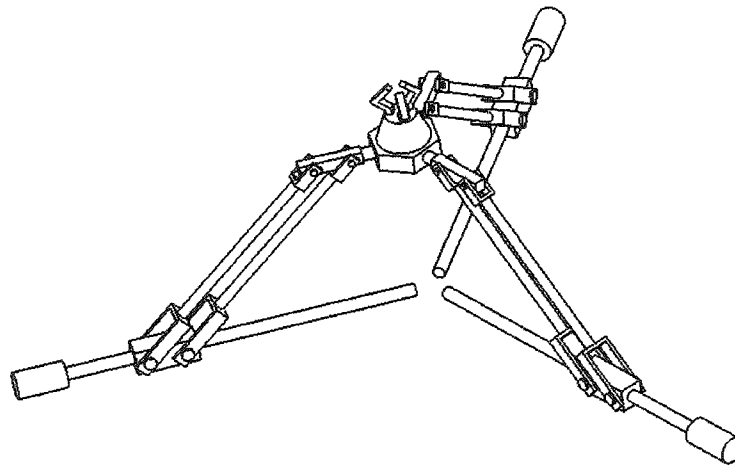


Figure 1.5 : Manipulateur parallèle Y Star

Les deux jambes 4 et 5 forment toujours un parallélogramme. Ceci permet au curseur de rester parallèle à l'écrou. Le centre du curseur décrit un cercle autour du centre de l'écrou. Ainsi, le curseur est dit en liaison prismatique circulaire avec l'écrou notée II. La topologie d'un manipulateur Star est donc 3-RHIIR. Cette topologie permet à chaque

jambe de produire quatre DDLs, soit trois en translation et un en rotation. La liaison rotoïde entre le curseur et l'organe terminal permet à ce dernier de garder une orientation constante. Les Star génèrent donc trois DDLs en translation. Notre but dans ce mémoire est de déterminer l'état de l'organe terminal connaissant les valeurs des rotations des moteurs qui correspondent aux articulations actionnées, et cela pour toutes les géométries des Star. Ce problème n'a jamais été étudié pour les Star à cause de sa complexité. Les recherches qui ont été faites à ce sujet approximaient les Star à une autre classe de manipulateurs qui sont les 3-PRIIR. Cette classe et tel qu'illustré à la figure 1.6, diffère des Star au niveau de la liaison cinématique entre les pièces 3 et 2. En plus, ces recherches ont été restreintes sur une géométrie particulière où les axes des trois bases sont coplanaires faisant un angle de  $120^\circ$  l'un par rapport à l'autre et s'intersectant en un point. À noter que même pour les 3-PRIIR, le MGD n'a jamais été formulé de façon polynomiale ou explicite, ce qui ne permettait pas de déterminer les modes d'assemblage pour cette classe de MPs. Ainsi, on va s'intéresser aussi dans ce mémoire à la résolution du MGD pour les manipulateurs 3-PRIIR. Les objectifs principaux de ce mémoire sont donc les suivants :

- résoudre algébriquement de façon polynomiale et explicite le MGD de toutes les géométries des manipulateurs de topologie 3-PRIIR et démontrer qu'on ne peut avoir plus que deux solutions et deux modes d'assemblage;
- étude et résolution graphique du MGD de toutes les géométries des manipulateurs Star ; et finalement

- montrer que les Star admettent plusieurs solutions au MGD et donc plusieurs modes d'assemblage. Ce nombre dépend de certaines propriétés liées à la géométrie du manipulateur, en l'occurrence, le rapport entre le pas et la longueur de la jambe.

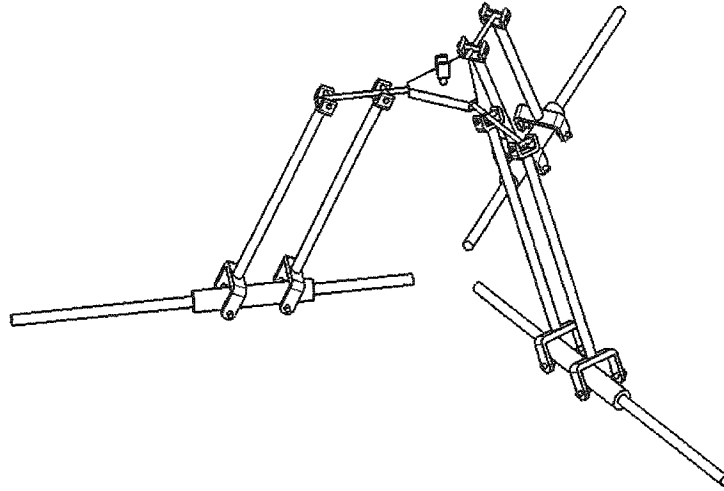


Figure 1.6 : Manipulateur parallèle 3-PRIR

## CHAPITRE 2

### MGD DES MANIPULATEURS 3-PRIR

Ce chapitre présente une méthode algébrique de résolution du problème géométrique direct des manipulateurs parallèles de la classe topologique 3-PRIR. Cette méthode permet de déterminer la position  $\mathbf{p}$  de l'origine de l'organe terminal à partir des déplacements articulaires actionnés  $q_i$  des curseurs le long des axes de la base. Géométriquement, la solution de ce problème équivaut à déterminer les points d'intersection de trois sphères centrées sur les curseurs commandés et décalés selon la géométrie de l'effecteur. Algébriquement, ce problème se ramène à résoudre un système de trois équations quadratiques à trois inconnues, dont il n'existe au plus que deux solutions distinctes. Ces résultats ont été publiés à la conférence IDMME 2001 [28].

#### 2.1 Topologie des manipulateurs 3-PRIR

Les manipulateurs parallèles de topologie 3-PRIR sont composés de trois jambes de topologie identique : soit PRIR. Chaque jambe, et comme le montre la figure 2.1, est constituée des composantes principales suivantes:

- corps 1. la base;
- corps 2. le curseur motorisé en translation par rapport au corps 1;
- corps 3,4. des membrures parallèles dont le rôle est d'assurer un mouvement prismatique circulaire  $\Pi$  du corps 5 par rapport au curseur;
- corps 5. le guide parallèle au curseur;

- corps 6. l'organe terminal.

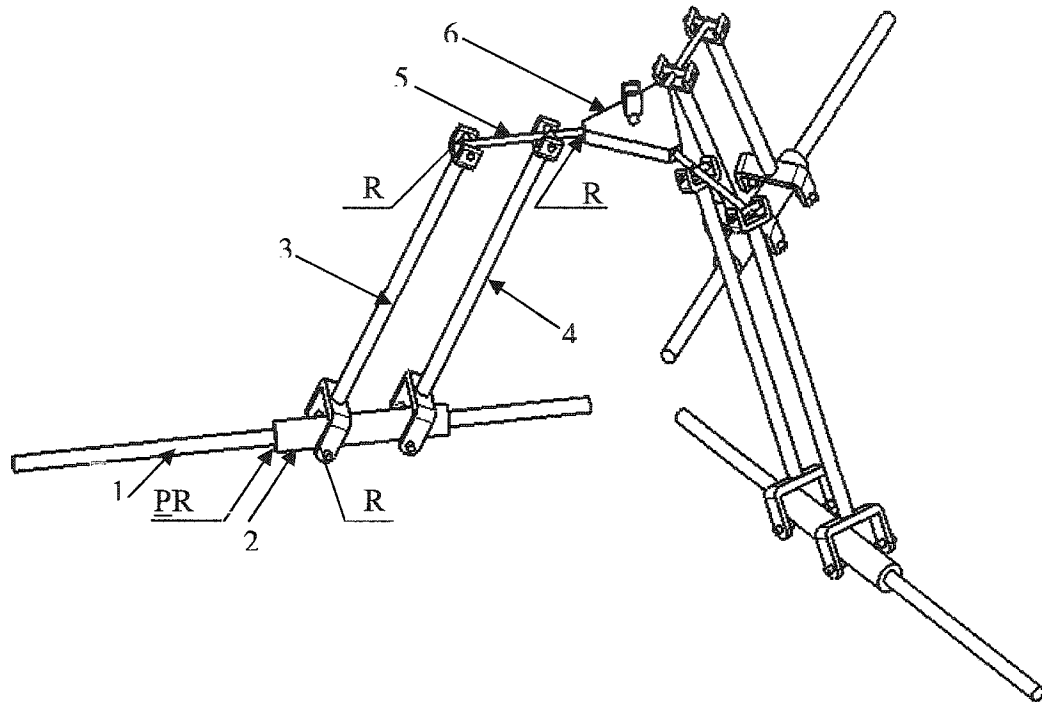


Figure 2.1 : Manipulateur parallèle 3-PRR et ses composantes principales

En déconnectant une jambe, on remarque que cette dernière produit quatre DDLs à l'organe terminal par rapport à la base, soit trois DDLs en translation et un DDL en rotation par rapport à l'axe de la pièce 5. Le degré de liberté en rotation autour de 5 permet de compenser la rotation de la jambe autour de l'axe du corps 1 ce qui permet de maintenir constante l'orientation de l'organe terminal. Les 3-PRR génèrent donc trois DDLs en translation.

## 2.2 Paramètres géométriques

Dans le but d'étudier toutes les géométries des manipulateurs 3-PRIR, on utilisera les paramètres géométriques proposés par Baron et Bernier [29]. On distingue pour la base, les paramètres de positionnement initial des curseurs, les points  $A_i$  à la figure 2.2, et les paramètres d'orientation des axes prismatiques, les vecteurs  $e_i$  à la figure 2.3.

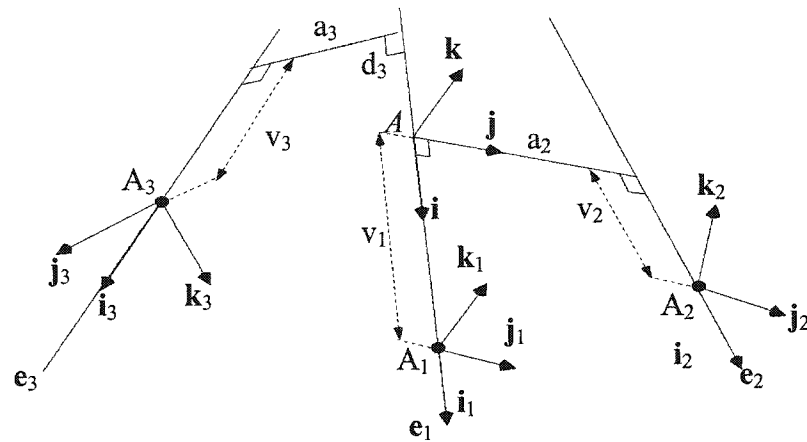


Figure 2.2 : Paramètres géométriques de positionnement initial des curseurs pour les manipulateurs 3-PRIR



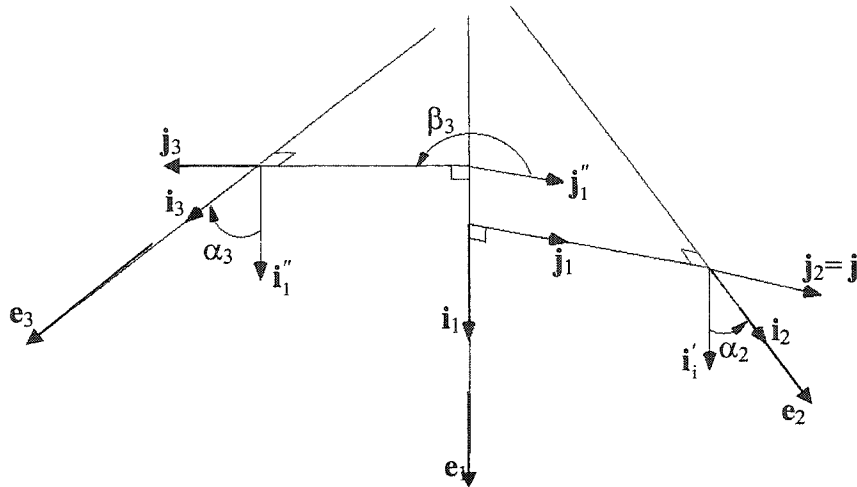


Figure 2.3 : Paramètres géométriques d'orientation des axes prismatiques de la base des manipulateurs 3-PRIR

Ces 6 paramètres géométriques de position ( $v_1, v_2, v_3, a_2, a_3$  et  $d_3$ ) et ces 3 paramètres géométriques d'orientation ( $\alpha_2, \alpha_3$  et  $\beta_3$ ) permettent de décrire 3 axes prismatiques orientés de façon quelconque dans l'espace avec une position initiale quelconque des origines des curseurs le long de ces axes prismatiques. Ces paramètres permettent donc de décrire non seulement les 3-PRIR dont les axes sont coplanaires faisant un angle de  $120^\circ$ , mais aussi toutes les autres géométries de manipulateurs de même topologie. Ces paramètres vont nous servir aussi à décrire toutes les géométries des manipulateurs Star au chapitre 3.

## 2.3 Modélisation du problème

La détermination du vecteur position de l'origine de l'organe terminal  $\mathbf{p}$  requiert la connaissance des vecteurs position des origines des curseurs  $E_i$ . Ces vecteurs se calculent en fonction des orientations des axes prismatiques  $\mathbf{e}_i$ , des déplacements articulaires actionnés  $q_i$  et des vecteurs  $\mathbf{a}_i$  correspondant aux positions initiales des points  $E_i$ .

### 2.3.1 Orientation des axes $\mathbf{e}_i$

L'orientation de chaque axe prismatique du manipulateur est décrit par un vecteur unitaire  $\mathbf{e}_i$  pointant dans la direction positive du déplacement. En utilisant les paramètres géométriques d'orientation  $\alpha_2$ ,  $\beta_3$  et  $\alpha_3$  décrits à la figure 2.3, les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  s'écrivent dans le référentiel  $A$  comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{i} \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{R}_y(\alpha_2)\mathbf{i} \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{R}_x(\beta_3)\mathbf{R}_y(\alpha_3)\mathbf{i} \end{aligned} \quad (2.1)$$

### 2.3.2 Position initiale des curseurs $\mathbf{a}_i$

La position initiale de chaque curseur est décrite par le vecteur position  $\mathbf{a}_i$  du point  $A_i$  dans le référentiel  $A$ . La position initiale réfère à l'instant lorsque l'articulation actionnée est à zéro, c'est à dire  $q_i = 0$ , et que les points  $E_i$  et  $A_i$  sont alors confondus. Lorsque  $q_i$  augmente ( $q_i > 0$ ), le point  $E_i$  s'éloigne de  $A_i$  dans la direction  $\mathbf{e}_i$ . En utilisant les paramètres géométriques de position  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et  $d_3$  décrits à la figure 2.2, ainsi que les paramètres d'orientation, les vecteurs  $\mathbf{a}_i$  s'écrivent dans le référentiel  $A$  comme :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_1 &= v_1 \mathbf{i} \\
 \mathbf{a}_2 &= a_2 \mathbf{j} + \mathbf{R}_y(\alpha_2) v_2 \mathbf{i} \\
 \mathbf{a}_3 &= d_3 \mathbf{i} + \mathbf{R}_x(\beta_3)(a_3 \mathbf{j} + \mathbf{R}_y(\alpha_3) v_3 \mathbf{i})
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

### 2.3.3 Géométrie de l'effecteur $\mathbf{b}_i$

La géométrie de l'organe terminal est complètement définie par les angles  $\gamma_{i0}$  et  $\phi_{i0}$  qui correspondent respectivement aux angles  $\gamma_i$  et  $\phi_i$  à l'état initial.

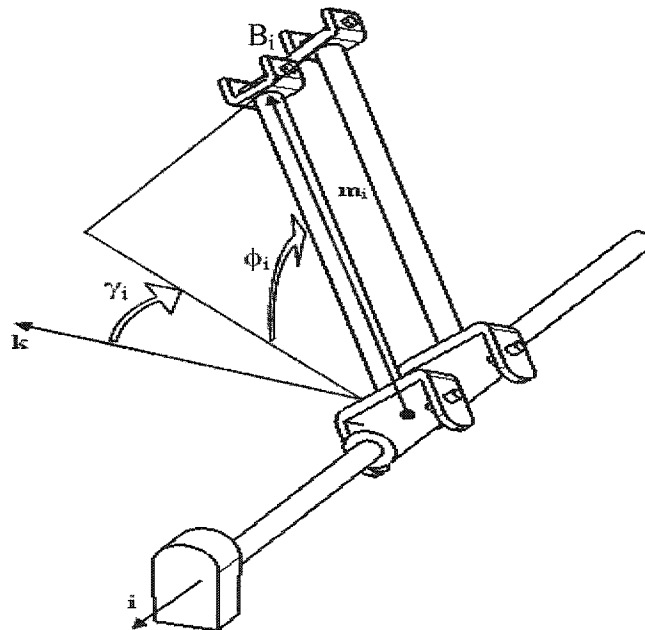


Figure 2.4 : Paramètres  $\gamma_i$  et  $\phi_i$

Les angles  $\gamma_i$  et  $\phi_i$  et tel qu'illustré à la figure 2.4, définissent l'orientation du vecteur membrure  $\mathbf{m}_i$ . Cette façon de décrire la géométrie du manipulateur assure l'existence d'une configuration (configuration initiale) où le manipulateur peut être assemblé.

Les vecteurs  $\mathbf{b}_i$  sont des caractéristiques de la géométrie de l'organe terminal et sont calculés à partir de la configuration initiale du manipulateur. En notant par  $\mathbf{p}_{i0}$  le vecteur position du point  $B_i$  à l'état initial, on peut écrire :

$$\mathbf{p}_{i0} = \mathbf{a}_i + \mathbf{m}_{i0} : i = 1,2,3 \quad (2.3)$$

Tel que  $\mathbf{m}_{i0}$  est le vecteur membrure de la jambe  $i$  à l'état initial du manipulateur et se calcule en fonctions des angles  $\gamma_{i0}$  et  $\phi_{i0}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{10} &= l_1 \mathbf{R}_x(\gamma_{10}) \mathbf{R}_y(\phi_{10}) \mathbf{k} \\ \mathbf{m}_{20} &= l_2 \mathbf{R}_y(\alpha_2) \mathbf{R}_x(\gamma_{20}) \mathbf{R}_y(\phi_{20}) \mathbf{k} \\ \mathbf{m}_{30} &= l_3 \mathbf{R}_x(\beta_3) \mathbf{R}_y(\alpha_3) \mathbf{R}_x(\gamma_{30}) \mathbf{R}_y(\phi_{30}) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.4)$$

On rappelle que  $B_i$  est le centre du corps 5. Voir figure 2.4. L'origine de l'organe terminal est choisie comme le barycentre des points  $B_i$ . Les vecteurs  $\mathbf{b}_i$  se calculent donc directement en fonction de  $\mathbf{p}_i$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= (2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) / 3 \\ \mathbf{b}_2 &= (\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) / 3 \\ \mathbf{b}_3 &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3) / 3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

### 2.4 Boucle cinématique d'une jambe d'un manipulateur 3-PRIR

Chaque jambe du manipulateur décrit une boucle cinématique de  $A$  à  $B$  et passant par le point  $A_i$  sur la base, le point  $E_i$  sur le curseur et le point  $B_i$  sur l'organe terminal. L'équation de fermeture de chaque boucle, voir figure 2.5, s'écrit tel que :

$$\mathbf{a}_i + q_i \mathbf{e}_i + \mathbf{m}_i = \mathbf{p} + \mathbf{b}_i \quad (2.6)$$

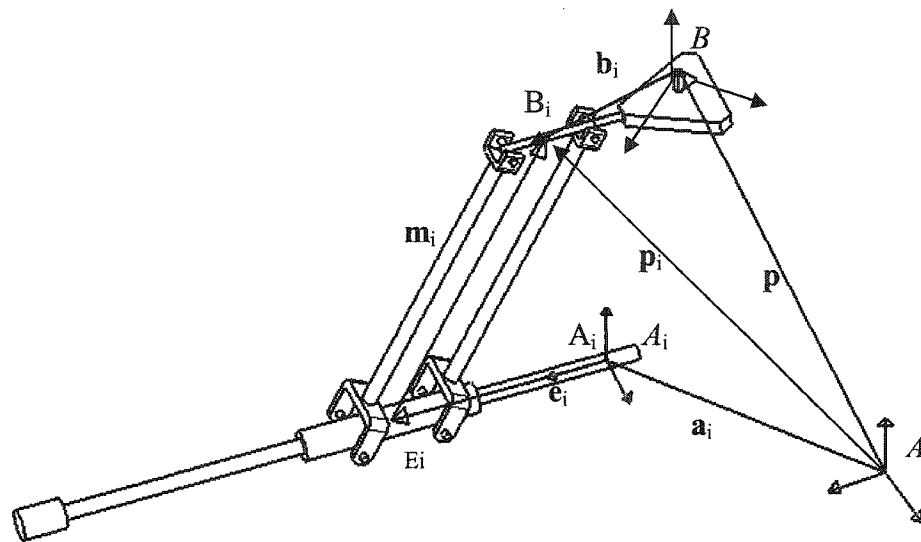


Figure 2.5 : Boucle cinématique d'une jambe d'un manipulateur 3-PRIR

## 2.5 Système d'équations du MGD

Les termes de l'équation (2.6) peuvent être séparés en deux catégories :

- les termes constants  $\mathbf{b}_i$  et  $\mathbf{a}_i$ , à savoir ceux contenant seulement les paramètres géométriques du manipulateur et
- les termes variables  $q_i$ ,  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{m}_i$ , c'est-à-dire ceux pouvant varier en fonction du temps lorsque le manipulateur se déplace.

Parmi les trois termes variables,  $q_i$  est la variable d'entrée, alors que  $\mathbf{p}$  est la variable de sortie. Il n'y a donc à éliminer que le vecteur membrure  $\mathbf{m}_i$  de l'équation (2.6). Une façon de procéder est d'élever au carré cette équation afin d'obtenir le carré de la norme du vecteur  $\mathbf{m}_i$  qui est une constante connue, dénotée  $l_i$ , soit :

$$(\mathbf{p} - (\mathbf{a}_i + q_i \mathbf{e}_i - \mathbf{b}_i))^T (\mathbf{p} - (\mathbf{a}_i + q_i \mathbf{e}_i - \mathbf{b}_i)) = \mathbf{m}_i^T \mathbf{m}_i = l_i^2 \quad (2.7)$$

En définissant  $\mathbf{z}_i$  tel que :

$$\mathbf{z}_i \equiv \mathbf{a}_i + q_i \mathbf{e}_i - \mathbf{b}_i$$

L'équation (2.7) peut être écrite sous la forme :

$$(\mathbf{p} - \mathbf{z}_i)^T (\mathbf{p} - \mathbf{z}_i) = l_i^2 \quad (2.8)$$

Le terme  $\mathbf{z}_i$  regroupe les termes connus dans le cas du MGD et correspond à la position du centre du curseur  $E_i$  décalé de  $-\mathbf{b}_i$ . En écrivant l'équation (2.8) de façon analytique en

fonction des coordonnées  $p_x$ ,  $p_y$  et  $p_z$  de  $\mathbf{p}$ , on obtient un système (2.9) de trois équations quadratiques à trois inconnues  $p_x$ ,  $p_y$  et  $p_z$ .

$$\begin{aligned} (p_x - z_{1x})^2 + (p_y - z_{1y})^2 + (p_z - z_{1z})^2 &= l_1^2 \\ (p_x - z_{2x})^2 + (p_y - z_{2y})^2 + (p_z - z_{2z})^2 &= l_2^2 \\ (p_x - z_{3x})^2 + (p_y - z_{3y})^2 + (p_z - z_{3z})^2 &= l_3^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Chaque équation du système (2.9) correspond à l'équation d'une sphère dont les caractéristiques sont définies en fonctions de la géométrie du manipulateur et des valeurs articulaires actionnées. On conclut donc que la solution du MGD de toutes les géométries des manipulateurs 3-PRIR se ramène à déterminer l'intersection de trois sphères centrées sur les curseurs, décalés de  $-\mathbf{b}_i$ , et dont les rayons correspondent aux longueurs  $l_i$  des jambes du manipulateur. Ce résultat avait été prédit par Tremblay mais seulement dans le cas particulier où les trois axes s'intersectent en un point.

## 2.6 Méthode de résolution

Une façon de résoudre le MGD consiste à transformer le système (2.9) en un système linéaire. Pour ce faire on soustrait la deuxième et la troisième équation de la première. Ce qui conduit au système (2.10) dont les deux premières équations sont linéaires. On note qu'on va se servir dans ce qui suit des coefficients  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, E_1, F_1, E_2, F_2, G$  et  $H$  qui sont définis à l'article publié à la conférence IDMME 2001 [28], dont le but est la simplification des équations. Ces coefficients sont définis tels que :

$$\begin{aligned}
A_1 &\equiv 2(z_{2x} - z_{1x}), B_1 \equiv 2(z_{2y} - z_{1y}), C_1 \equiv 2(z_{2z} - z_{1z}); \\
A_2 &\equiv 2(z_{3x} - z_{1x}), B_2 \equiv 2(z_{3y} - z_{1y}), C_2 \equiv 2(z_{3z} - z_{1z}); \\
D_1 &\equiv l_1^2 - l_2^2 + (z_{2x} - z_{1x})(z_{2x} + z_{1x}) + (z_{2y} - z_{1y})(z_{2y} + z_{1y}) + (z_{2z} - z_{1z})(z_{2z} + z_{1z}); \\
D_2 &\equiv l_1^2 - l_3^2 + (z_{3x} - z_{1x})(z_{3x} + z_{1x}) + (z_{3y} - z_{1y})(z_{3y} + z_{1y}) + (z_{3z} - z_{1z})(z_{3z} + z_{1z}); \\
E_1 &\equiv \frac{B_2 D_1 - B_1 D_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, E_2 \equiv \frac{A_1 D_2 - A_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, F_1 \equiv \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, F_2 \equiv \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}; \\
G &\equiv \frac{2F_1((E_1 - z_{1x}) + F_2(E_2 - z_{1y}) - z_{1z})}{F_1^2 + F_2^2 + 1}, H \equiv \frac{(E_1 - z_{1x})^2 + (E_2 - z_{1y})^2 + z_{1z}^2 - l_1^2}{F_1^2 + F_2^2 + 1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 p_x + B_1 p_y + C_1 p_z &= D_1 \\
A_2 p_x + B_2 p_y + C_2 p_z &= D_2 \\
(p_x - z_{1x})^2 + (p_y - z_{1y})^2 + (p_z - z_{1z})^2 &= l_1^2
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Les deux premières équations de (2.10) permettent d'exprimer linéairement  $p_x$  et  $p_y$  en fonction de  $p_z$  :

$$\begin{aligned}
p_x &= F_1 p_z + E_1 \\
p_y &= F_2 p_z + E_2
\end{aligned} \tag{2.11}$$

En remplaçant les expressions de  $p_x$  et  $p_y$  de (2.11) dans la troisième équation de (2.10), on obtient une équation au second degré à une seule inconnue en  $p_z$  tel que :

$$p_z^2 + G p_z + H = 0 \tag{2.12}$$



Cette équation présente une solution polynomiale et montre que le MGD des manipulateurs 3-PRIR admet :

- deux solutions distinctes si  $G^2 > 4H$  ;
- Une solution double si  $G^2 = 4H$  ;
- Aucune solution réelle si  $G^2 < 4H$ .

Ainsi, et à partir de (2.12) et (2.11), on détermine les deux solutions possibles :

$$\begin{aligned}
 p_{z1} &= \frac{-G + \sqrt{G^2 - 4H}}{2} \\
 p_{x1} &= F_1 p_{z1} + E_1 \\
 p_{y1} &= F_2 p_{z1} + E_2 \\
 \text{et} & \\
 p_{z2} &= \frac{-G - \sqrt{G^2 - 4H}}{2} \\
 p_{x2} &= F_1 p_{z2} + E_1 \\
 p_{y2} &= F_2 p_{z2} + E_2
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

## 2.7 Configurations singulières

La solution du MGD pour les 3-PRIR se ramène à déterminer l'intersection de trois sphères dont le vecteur position du centre est  $\mathbf{a}_i + q_i \mathbf{e}_i - \mathbf{b}_i$  et le rayon est  $l_i$ . Deux des trois sphères peuvent coïncider si le manipulateur possède des jambes de même longueur. Dans ce cas, l'intersection des trois sphères se réduit à l'intersection de deux sphères, ce qui correspond à un contour de cercle. Ceci correspond à des singularités parallèles

puisque'on peut déplacer l'effecteur le long du cercle sans déplacer les articulations. Une condition nécessaire et suffisante pour que deux sphères coïncident est :

$$\mathbf{a}_i + q_i \mathbf{e}_i - \mathbf{b}_i = \mathbf{a}_j + q_j \mathbf{e}_j - \mathbf{b}_j \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

En séparant les termes constants des variables, l'équation (2.14) devient :

$$q_i \mathbf{e}_i - q_j \mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j \quad (2.15)$$

L'équation (2.15) permet le contrôle des déplacements articulaires  $q_i$  pour que le manipulateur ne passe pas par une configuration singulière parallèle.

## 2.8 Exemple numérique

Comme exemple numérique, on va solutionner le MGD d'un manipulateur Y Star ( $MP_1$ ) dont les paramètres géométriques de la base et de l'effecteur sont donnés par :

$$v_1 = 120u_d, v_2 = 120u_d, a_2 = 0u_d, \alpha_2 = 2\pi/3, v_3 = 100u_d, d_3 = 0u_d, a_3 = 0u_d, \beta_3 = 0,$$

$$\alpha_3 = -2\pi/3, l_1 = 100u_d, l_2 = 100u_d \text{ et } l_3 = 100u_d.$$

On rappelle que  $u_d$  est l'unité de mesure de distance.



Figure 2.6 : Configuration initiale du manipulateur  $MP_1$

Les 6 paramètres géométriques de l'organe terminal sont tel que :

$\gamma_{10} = \gamma_{20} = \gamma_{30} = -\pi/2$ ,  $\phi_{10} = -\pi/4$ ,  $\phi_{20} = -\pi/5$  et  $\phi_{30} = -\pi/3$ . Les déplacements articulaires actionnés des curseurs (données d'entrée) sont égales à  $q_1 = q_2 = q_3 = 20u_d$ . La figure 2.6 illustre le manipulateur  $MP_1$  à son état initial.

La résolution du MGD pour  $MP_1$  donne les deux solutions possibles  $S_1$  et  $S_2$  qui sont :

$S_1 = [0.0018u_d \ 36.0309u_d \ 1.3773u_d]$  et  $S_2 = [-1.4900u_d \ -32.9669u_d \ 14.5287u_d]$ . Ces deux solutions sont illustrées dans les figures 2.7 et 2.8.

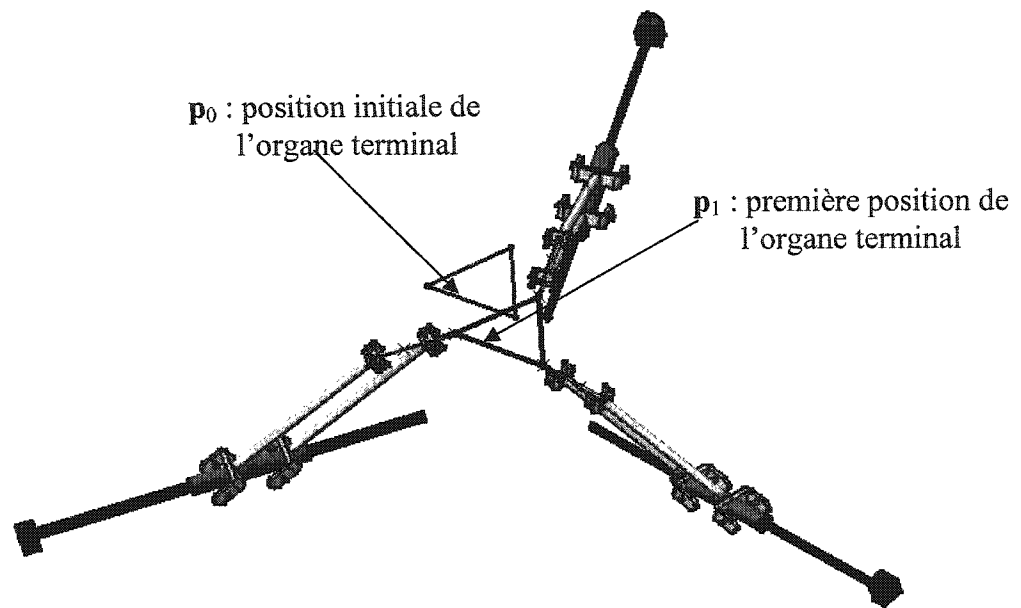


Figure 2.7 : Première solution  $S_1$  du MGD pour  $MP_1$

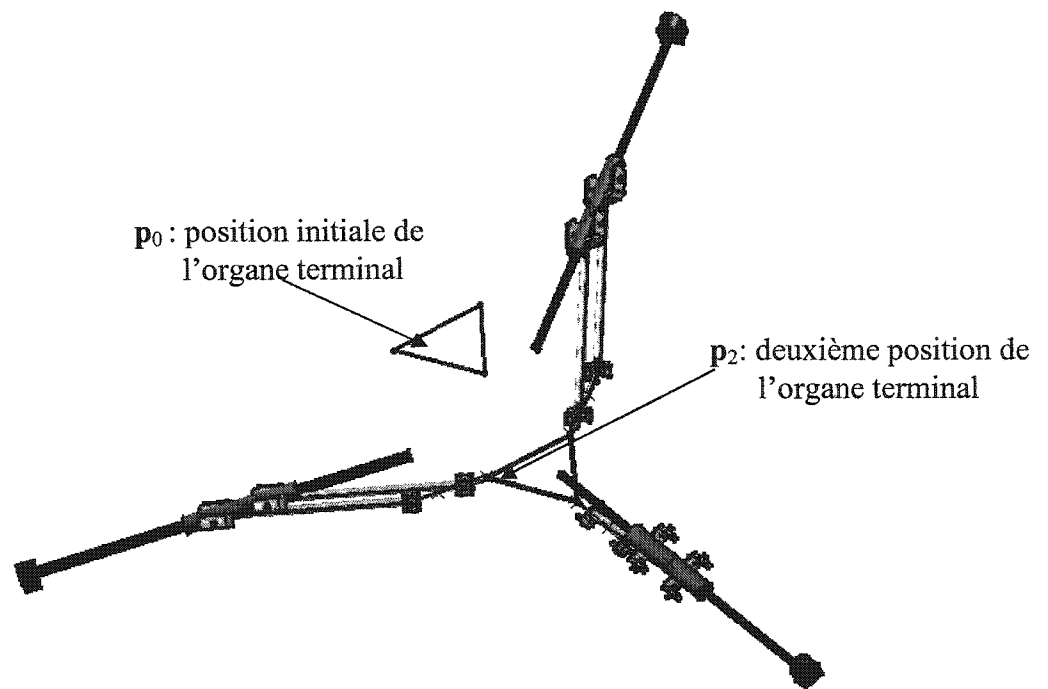


Figure 2.8 : Deuxième solution  $S_2$  du MGD pour  $MP_1$

Une façon de vérifier la validité de ces résultats et de s'assurer que le MGI de ces deux solutions est égal aux déplacements des curseurs, valeurs d'entrée, et qui sont dans le cas étudié égales à  $[20u_d \ 20u_d \ 20u_d]$ . L'application du MGI et dont les équations seront formulées à la section 2.9, donne les résultats suivants :

$$\text{MGI}(S_1) = \begin{bmatrix} 20u_d & 20u_d & 20u_d \\ -165.7213u_d & -174.4836u_d & -151.978u_d \end{bmatrix}$$

$$\text{MGI}(S_2) = \begin{bmatrix} 19.99u_d & 20u_d & 20u_d \\ -162.737u_d & -153.1965u_d & -176.2494u_d \end{bmatrix}$$

On va démontrer dans le paragraphe 2.9.1 que le MGI admet deux solutions pour chaque jambe ce qui donne  $2^3 = 8$  solutions du MGI pour les manipulateurs 3-PRIIR.  $\text{MGI}(S_1)$  et  $\text{MGI}(S_2)$  représentent ces 8 solutions pour  $S_1$  et  $S_2$ . Chaque colonne  $j$  représente les deux solutions du MGI pour la jambe  $j$ . Par exemple pour la jambe 2 ( $j = 2$ ), les solutions du MGI sont  $\begin{bmatrix} 20u_d \\ -174.4836u_d \end{bmatrix}$  pour  $S_1$  et  $\begin{bmatrix} 20u_d \\ -153.196u_d \end{bmatrix}$  pour  $S_2$ . Ces résultats confirment la validité de la méthode de résolution. En effet, pour les deux solutions  $S_1$  et  $S_2$ , une des huit solutions du MGI et qui correspond dans ce cas au premier mode opératoire est égale aux valeurs articulaires  $[20u_d \ 20u_d \ 20u_d]$ . D'après les figures 2.7 et 2.8, on remarque que les trois points de connexion  $B_i$  forment toujours un triangle de même orientation, ce qui confirme la validité de cette méthode de résolution, puisque les manipulateurs 3-PRIIR génèrent un mouvement de translation à orientation fixe de l'organe terminal.

## 2.9 MGI

Le MGI consiste à déterminer les déplacements articulaires actionnés des curseurs  $q_i$  connaissant le vecteur position l'origine de l'organe terminal  $\mathbf{p}$ . Connaissant les longueurs des membrures, on peut écrire :

$$(\mathbf{p} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i - q_i \mathbf{e}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i - q_i \mathbf{e}_i) = l_i^2 \quad (2.16)$$

En définissant  $\mathbf{u}_i$  tel que  $\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i$ , l'équation (2.16) devient une équation polynomiale du second degré dont l'inconnue est  $q_i$  :

$$q_i^2 - 2(\mathbf{u}_i)^T \mathbf{e}_i q_i + (\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i - l_i^2) = 0 \quad (2.17)$$

Ce qui donne les deux solutions possibles du MGI :

$$q_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_i \pm \sqrt{(\mathbf{u}_i^T \mathbf{e}_i)^2 - (\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i - l_i^2)} \quad (2.18)$$

L'équation (2.18) montre que les 3-PRIR admettent deux solutions au MGI pour chaque jambe, ce qui donne  $2^3 = 8$  solutions au MGI et donc 8 modes opératoires pour les manipulateurs 3-PRIR.

## 2.10 Matrices jacobienes

La matrice jacobienne exprime la relation entre les vitesses de l'origine de l'organe terminal  $[\dot{p}_x \ \dot{p}_y \ \dot{p}_z]$  et les vitesses des déplacements articulaires actionnés  $[\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]$ . Les membrures des manipulateurs 3-PRIR ont des longueurs constantes. La dérivé par rapport au temps de l'équation (2.16) donne :

$$(\mathbf{a}_i + q_i \mathbf{e}_i - \mathbf{p} - \mathbf{b}_i)^T \frac{d}{dt} (\mathbf{a}_i + q_i \mathbf{e}_i - \mathbf{p} - \mathbf{b}_i) = 0 \quad (2.19)$$

En annulant tous les termes constants, on obtient l'équation (2.20) exprimant la relation entre  $\dot{\mathbf{p}}$  et  $\dot{\mathbf{q}}$  :

$$\mathbf{m}_i^T \mathbf{e}_i \dot{q}_i - \mathbf{m}_i^T \dot{\mathbf{p}} = 0 \quad (2.20)$$

Ce qui se traduit de façon matricielle par l'équation (2.21).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^T \\ \mathbf{m}_2^T \\ \mathbf{m}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^T \mathbf{e}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_2^T \mathbf{e}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{m}_3^T \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Les matrices jacobienne parallèle  $\mathbf{J}_p$  et sérielle  $\mathbf{J}_s$  sont données donc par :

$$\mathbf{J}_p \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^T \\ \mathbf{m}_2^T \\ \mathbf{m}_3^T \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{J}_s \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^T \mathbf{e}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_2^T \mathbf{e}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{m}_3^T \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

### 2.11 Solution du MGD avec l'algorithme de Newton

La méthode de résolution du MGD se basant sur l'algorithme de Newton permet de minimiser l'écart entre les valeurs des déplacements articulaires actionnés et les solutions du MGI du point solution du MGD. Les différentes étapes de l'algorithme sont les suivantes :

1. Choix du point de départ de la boucle  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$  ;
2. Test si norme  $(\text{MGI}(\mathbf{p}) - \mathbf{q}) < \varepsilon$  alors MGD  $(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$ , sinon aller à 3 ;
3.  $\Delta \mathbf{q} = (\text{MGI}(\mathbf{p}) - \mathbf{q}) / 100$  ;
4.  $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_s \Delta \mathbf{q}$  ;
5.  $\mathbf{p} = \mathbf{p} - \Delta \mathbf{p}$  ;
6. Aller à l'étape 2.

Comme exemple numérique, on va solutionner le MGD pour la même géométrie  $MP_1$  étudiée au paragraphe 2.8.



Le tableau 2.1 regroupe les résultats obtenus en fonction du point de départ de la boucle et de l'erreur exigée.

Tableau 2.1 : Solution du MGD et nombre d'itérations pour  $MP_1$  en fonction de l'erreur et du point de départ de la boucle

Point de départ : $\mathbf{p}_0(u_d)$	$\varepsilon$	MGD ( $u_d$ )	Nombre d'itération : n
[10 50 15]	0.1	[0.0385 36.1057 1.4224]	555
[10 -50 15]	0.1	[-1.4383 -33.0697 14.5337]	541
[10 50 15]	0.01	[0.0055 36.0384 1.3818]	784
[10 -50 15]	0.01	[-1.4848 -32.9772 14.5292]	770

À partir des résultats du tableau 2.1, on conclut que selon le point de départ de la boucle, l'algorithme va converger vers l'une des deux solutions du MGD et que le nombre d'itérations dépend de l'erreur exigée. Ces deux solutions ont été déjà obtenues par la solution explicite à la section 2.8. La figure 2.9 représente l'évolution de l'erreur pour un point de départ de [10 ; 50 ; 15] et pour une erreur de 0.01.

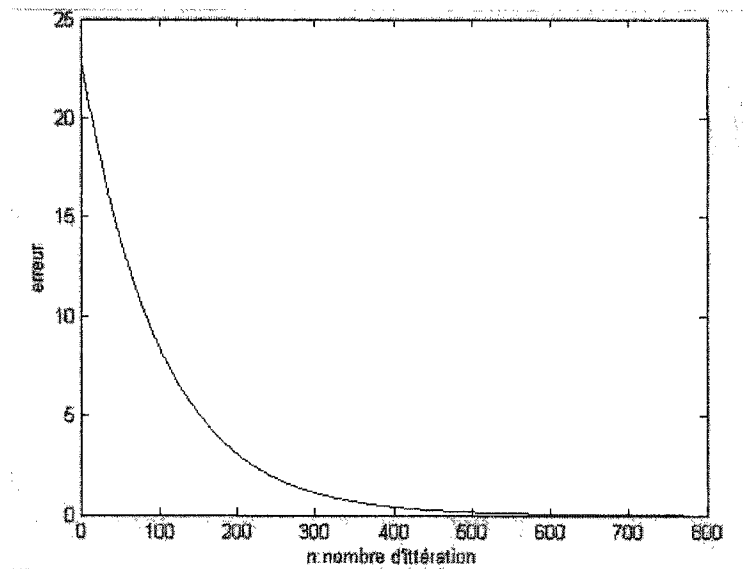


Figure 2.9 : Évolution de l'erreur en fonction du nombre d'itérations pour  $MP_1$

### 2.12 Singularités sérielles :

À partir du tableau 1.1, des singularités sérielles peuvent survenir si l'un des éléments de la matrice jacobienne sérielle est nul. En se basant sur l'expression de la matrice jacobienne sérielle  $J_s$  des manipulateurs 3-PRIIR développée à la section 2.9, on conclut que, géométriquement, ceci correspond à des configurations où l'un des vecteurs membrures  $m_i$  est perpendiculaire à l'axe  $e_i$  de sa base respective.

### 2.13 Conclusion

Dans de ce chapitre, on s'est intéressé à la résolution du MGD de tous les manipulateurs de topologie 3-PRIIR ce qui a permis de conclure les résultats suivants :

- toutes les géométries des manipulateurs 3-PRIIR ne peuvent admettre plus que deux solutions au MGD et donc deux modes d'assemblage au maximum;

- géométriquement, le problème équivaut à résoudre l'intersection de trois sphères dont les centres correspondent aux centres des curseurs décalés par les vecteurs  $-\mathbf{b}_i$ , et dont les longueurs correspondent à celles des jambes;
- algébriquement, le problème se ramène à résoudre un système de trois équations quadratiques à trois inconnues.

En plus, on s'est intéressé à la résolution numérique du MGD par l'algorithme de Newton utilisant les matrices jacobienne sérielle et parallèle. Dans ce chapitre, on a pu aussi formuler des conditions géométriques qui mènent à des configurations singulières de types parallèles ou sérielles.

## CHAPITRE 3

### MGD DES MANIPULATEURS STAR

Ce chapitre présente la modélisation mathématique du problème géométrique direct des manipulateurs parallèles de topologie Star, ainsi que sa validation à l'aide de l'algorithme de Newton. On rappelle que les manipulateurs Star et comme le montre la figure 3.1 se composent de trois jambes. Chacune est constituée des composants suivants :

1. un moteur (pièce 1) fixe sur la base;
2. une vis (pièce 2) entraîné en rotation;
3. un écrou mobile (pièce 3) en liaison hélicoïdale avec la pièce 2;
4. deux membrures parallèles et de même longueur (pièce 4 et 5) ;
5. un curseur (pièce 6) en liaison prismatique circulaire (II) par rapport à l'écrou;
6. un organe terminal en liaison rotoïde par rapport au curseur.

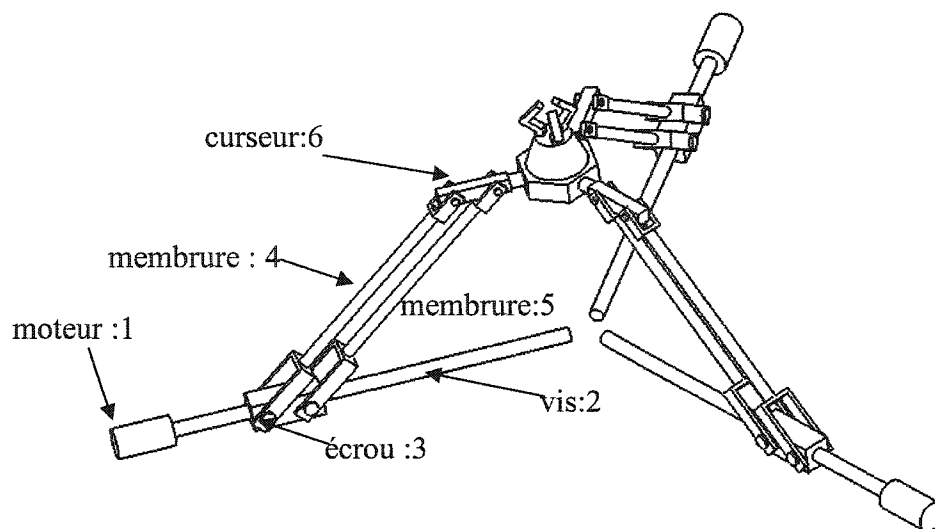


Figure 3.1 : Manipulateur parallèle Y Star et ses composantes

La topologie des manipulateurs Star est donc 3-RHIIIR. Tout comme les manipulateurs 3-PRIIR, les manipulateurs Star génèrent un mouvement de translation à son organe terminal à orientation constante.

### 3.1 Définition du problème

On a vu au chapitre 2 que le MGD des manipulateurs 3-PRIIR revient à déterminer l'intersection de trois sphères et qu'il admet au maximum deux solutions. Dans ce cas, la connaissance des déplacements articulaires actionnés permet de déduire les vecteurs positions des curseurs. Pour les manipulateurs Star, la connaissance des rotations des moteurs qui constituent dans ce cas les valeurs d'entrée ne permet pas directement de déterminer les positions des écrous. Les écrous se déplacent le long de leur vis respective en deux étapes :

- déplacement actif  $q_a$  connu dû à la rotation des moteur;
- déplacement passif  $q_p$  inconnu dû à la rotation des membrures et à cause de la liaison hélicoïdale de l'écrou par rapport à la vis.

Le déplacement total  $q_i$  de l'écrou  $i$  le long de  $e_i$  se calcule donc comme :

$$q_i = q_{ai} + q_{pi} = \frac{(\theta_i + (\gamma_i - \gamma_{i0}))ps_i}{2\pi} \quad (3.1)$$

Où  $\theta_i$  est l'angle de rotation actionné du moteur, articulation R,  $(\gamma_i - \gamma_{i0})$  est la variation angulaire passive de rotation de la jambe  $i$  autour de  $e_i$  dû au déplacement de l'effecteur relativement à un angle initial  $\gamma_{i0}$  et  $ps_i$  est le pas de la vis  $i$  en unité de longueur par tour.

La position des écrous ne peut être déterminée puisqu'elle est fonction de la variable géométrique passive et inconnue  $\gamma_i$ . Ce phénomène complique considérablement la solution du MGD pour les manipulateurs Star.

### 3.2 Modélisation du problème

L'équation (2.6) de fermeture de la boucle cinématique reste valable pour les manipulateurs Star. La résolution du MGD revient à déterminer la position  $\mathbf{p}$  qui satisfait aux trois boucles cinématiques tel que :

$$\mathbf{p} = \mathbf{d}_i + \mathbf{S}_i(\gamma_i, \phi_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i &\equiv \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i \\ \mathbf{S}_i(\gamma_i, \phi_i) &\equiv \frac{(\theta_i + \gamma_i - \gamma_{i0})p s_i}{2\pi} \mathbf{e}_i + l_i \mathbf{R}_i \mathbf{R}_x(\gamma_i) \mathbf{R}_y(\phi_i) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Où ;

$\mathbf{d}_i$  est le vecteur position initial du point  $E_i$ , c'est à dire  $\mathbf{a}_i$ , décalé par  $-\mathbf{b}_i$ .

$\mathbf{S}_i(\gamma_i, \phi_i)$  est la surface décrite par le point  $B_i$ . Cette surface est définie par les paramètres géométriques  $\gamma_i$  et  $\phi_i$  définis à la section 2.3 et illustrés à la figure 2.4.

Rappelons certaines terminologies qui sont déjà définies au début du mémoire dans la partie des notations.

On définit  $\mathbf{R}_i$  comme étant la matrice d'ordre 3\*3 de passage du référentiel global  $A$  vers le référentiel  $A_i$  et s'écrit tel que :

$$\mathbf{R}_i \equiv [\mathbf{i}_{i/A} \quad \mathbf{j}_{i/A} \quad \mathbf{k}_{i/A}]$$

Les deux matrices  $\mathbf{R}_x$  ( $\gamma_i$ ) et  $\mathbf{R}_y$  ( $\phi_i$ ) d'ordre 3\*3 expriment respectivement une transformée de rotation autour des axes  $x$  et  $y$ .

À partir de (3.2) et (3.3), on déduit que le MGD des Star équivaut à résoudre un système nonlinéaire (3.4) de deux équations vectorielles à 6 inconnues  $\gamma_1, \phi_1, \gamma_2, \phi_2, \gamma_3$  et  $\phi_3$ . Géométriquement, le MGD correspond à déterminer l'intersection de trois surfaces hélicoïdales à méridien circulaire. Une des caractéristiques de ces surfaces et qu'elles sont infinies. On peut donc penser que ces surfaces ont plus de possibilités de s'intersecter entre elles, que si on avait trois sphères, le cas des manipulateurs 3-PRIIR. Cette constatation intuitive fera l'objet d'une confirmation ou non au chapitre 4.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 + \mathbf{S}_1(\gamma_1, \phi_1) &= \mathbf{d}_2 + \mathbf{S}_2(\gamma_2, \phi_2) \\ \mathbf{d}_1 + \mathbf{S}_1(\gamma_1, \phi_1) &= \mathbf{d}_3 + \mathbf{S}_3(\gamma_3, \phi_3) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ce système d'équations est complexe et ne peut pas être résolu algébriquement, car les termes  $\gamma_i$  apparaissent linéairement dans les expressions du déplacement passif et nonlinéairement dans le terme exprimant l'orientation des membrures. Le problème peut être approximé si on néglige les déplacements passifs. Cette façon de faire est celle qui a

été adoptée jusqu' à maintenant pour l'étude du Star, et qui considère le Star comme un 3-PRIIR plutôt qu'un 3-RHIIR. Une telle approximation n'est pas souhaitable, puisqu'on n'a pas d'information permettant de négliger les déplacements passifs. En plus, ceci ne va pas permettre de déterminer le nombre des solutions du MGD et donc tous les modes d'assemblage.

### 3.3 MGI

Pour les Star, le MGI consiste à déterminer les angles de rotation  $\theta_i$  (valeurs de sortie) des moteurs connaissant le vecteur position de l'origine de l'organe terminal  $\mathbf{p}$  (valeurs d'entrée). On rappelle que le MGI n'est pas le but de ce mémoire. La détermination du MGI va servir pour valider les résultats du MGD ainsi que dans l'algorithme de Newton. Les équations (2.16) à (2.18) restent valables pour les Star. En combinant les équations (2.18) et (3.1), on établit l'expression des angles de rotation  $\theta_i$  des moteurs en fonction de la position de l'origine de l'organe terminal  $\mathbf{p}$ . Les huit solutions possibles du MGI sont données donc par l'équation (3.5).

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \frac{-2\pi(\mathbf{u}_1^T \mathbf{e}_1 \pm \sqrt{\mathbf{u}_1^T \mathbf{e}_1^2 - (\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 - l_1^2)})}{ps_1} - (\gamma_1 - \gamma_{10}) \\ \theta_2 = \frac{-2\pi(\mathbf{u}_2^T \mathbf{e}_2 \pm \sqrt{\mathbf{u}_2^T \mathbf{e}_2^2 - (\mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2 - l_2^2)})}{ps_2} - (\gamma_2 - \gamma_{20}) \\ \theta_3 = \frac{2\pi(\mathbf{u}_3^T \mathbf{e}_3 \pm \sqrt{\mathbf{u}_3^T \mathbf{e}_3^2 - (\mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_3 - l_3^2)})}{ps_3} - (\gamma_3 - \gamma_{30}) \end{array} \right. \quad (3.5)$$



Dans cette équation, apparaissent les termes  $\gamma_i - \gamma_{i0}$  qui correspondent aux déplacements passifs des écrous. Les angles  $\gamma_{i0}$  sont des constantes qui dépendent de la géométrie de l'organe terminal et de son état initial. Les termes  $\gamma_i$  varient en fonction du déplacement du manipulateur et se calculent en fonction du vecteur position de l'origine de l'organe terminal  $\mathbf{p}$ . Comme c'était défini à la section 2.3.3, l'angle  $\gamma_i$  correspond à l'angle entre le vecteur  $\mathbf{m}_{ip}$  et le vecteur constant  $\mathbf{k}_i$ . Où,  $\mathbf{m}_{ip}$  est défini comme la projection du vecteur membrure  $\mathbf{m}_i$  sur le plan perpendiculaire à  $\mathbf{e}_i$  et s'écrit tel que :

$$\mathbf{m}_{ip} \equiv (\mathbf{1} - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T) \mathbf{m}_i$$

Les angles  $\gamma_i$  se calculent donc comme :

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \cos^{(-1)} \frac{\mathbf{k}_i^T \mathbf{m}_{ip}}{\|\mathbf{m}_{ip}\|} \quad \text{si } \mathbf{J}_i^T \mathbf{m}_{ip} < 0 \\ \gamma_i &= -\cos^{(-1)} \frac{\mathbf{k}_i^T \mathbf{m}_{ip}}{\|\mathbf{m}_{ip}\|} \quad \text{si } \mathbf{J}_i^T \mathbf{m}_{ip} > 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

En combinant les équations (3.6) et (2.6), on détermine l'expression explicite de  $\gamma_i$  en fonction de  $\mathbf{u}_i$  défini à une constante vectorielle près de  $\mathbf{p}$ , ( $\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i$ ).

$$\begin{aligned}
\gamma_i &= \cos^{(-1)} \frac{\mathbf{k}_i^T (1 - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T)(\mathbf{u}_i)}{\|(1 - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T)(\mathbf{u}_i)\|} \quad \text{si } \mathbf{J}_i^T (1 - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T)(\mathbf{u}_i) < 0 \\
\gamma_i &= -\cos^{(-1)} \frac{\mathbf{k}_i^T (1 - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T)(\mathbf{u}_i)}{\|(1 - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T)(\mathbf{u}_i)\|} \quad \text{si } \mathbf{J}_i^T (1 - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T)(\mathbf{u}_i) > 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

La fonction  $\cos^{(-1)}$  est définie comme la fonction inverse de la fonction cosinus. À partir de l'équation (3.6), on remarque qu'il existe deux cas pour l'expression de  $\gamma_i$  selon le signe du terme  $\mathbf{J}_i^T \mathbf{m}_{ip}$ . Cela est dû par le fait que la fonction  $\cos^{(-1)}$  est définie de l'intervalle  $[-1 \ 1]$  vers l'intervalle  $[0 \ \pi]$ , alors que l'angle géométrique  $\gamma_i$  peut avoir des valeurs comprises dans l'intervalle  $[0 \ 2\pi]$ .

### 3.4 Matrices jacobiennes

La matrice jacobienne exprime la relation entre les vitesses de l'origine de l'organe terminal  $[\dot{p}_x \ \dot{p}_y \ \dot{p}_z]$  et les rotations des moteurs  $[\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3]$ . Les équations (2.19) et (2.20) exprimant l'invariabilité des longueurs des membrures restent aussi valables pour les Star. En combinant l'une de ces deux équations avec (3.1), on obtient l'équation exprimant la relation entre  $\dot{\mathbf{p}}$ ,  $\dot{\theta}_i$  et  $\dot{\gamma}_i$  tel que :

$$\mathbf{p}_s \mathbf{m}_i^T \mathbf{e}_i (\dot{\gamma}_i + \dot{\theta}_i) - 2\pi \mathbf{m}_i^T \dot{\mathbf{p}} = 0 \tag{3.8}$$

Cette équation peut être réécrite de façon matricielle tel que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^T \\ \mathbf{m}_2^T \\ \mathbf{m}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ps_1 \mathbf{m}_1^T \mathbf{e}_1}{2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ps_2 \mathbf{m}_2^T \mathbf{e}_2}{2\pi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ps_3 \mathbf{m}_3^T \mathbf{e}_3}{2\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1 + \dot{\theta}_1 \\ \dot{\gamma}_2 + \dot{\theta}_2 \\ \dot{\gamma}_3 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Dans l'équation (3.9), apparaissent les angles  $\gamma_i$  qui correspondent aux déplacements passifs. Cependant, il faudra les éliminer pour exprimer une relation directe entre la vitesse de l'organe terminal  $\dot{\mathbf{p}}$  et les vitesses de rotation des moteurs  $\dot{\theta}_i$ . Une façon de faire est d'exprimer les vitesses  $\dot{\gamma}_i$  soit en fonction de  $\dot{\mathbf{p}}$  soit en fonction de  $\dot{\theta}_i$ . Rappelons qu'à partir de l'équation (2.6), le vecteur  $\mathbf{m}_i$  peut s'écrire tel que :

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{p} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i - q_i \mathbf{e}_i$$

En projetant cette égalité sur le plan perpendiculaire à  $\mathbf{e}_i$ , on peut écrire :

$$(\mathbf{1} - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T) \mathbf{m}_i = (\mathbf{1} - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T) (\mathbf{p} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i - q_i \mathbf{e}_i) = (\mathbf{1} - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T) (\mathbf{p} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) \quad (3.10)$$

Le vecteur  $\mathbf{m}_{ip}$  qu'on a déjà défini comme étant la projection de  $\mathbf{m}_i$  sur le plan perpendiculaire à  $\mathbf{e}_i$  s'écrit alors comme :

$$\mathbf{m}_{ip} = (\mathbf{1} - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T)(\mathbf{p} + \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) \quad (3.11)$$

En dérivant l'équation (3.11) par rapport au temps, on détermine la relation entre  $\dot{\mathbf{m}}_{ip}$  et  $\dot{\mathbf{p}}$ , exprimée par l'équation (3.12).

$$\dot{\mathbf{m}}_{ip} = (\mathbf{1} - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T) \dot{\mathbf{p}} \quad (3.12)$$

La dérivée par rapport au temps de  $\mathbf{m}_{ip}$  peut aussi être exprimée par l'équation (3.13).

$$\dot{\mathbf{m}}_{ip} = \dot{\gamma}_i \mathbf{m}_{ip\perp} \quad (3.13)$$

Comme l'illustre la figure 3.2,  $\mathbf{m}_{ip\perp}$  étant le vecteur perpendiculaire à  $\mathbf{m}_{ip}$  appartenant au plan perpendiculaire à  $\mathbf{e}_i$  et est défini tel que :

$$\mathbf{m}_{ip\perp} \equiv \mathbf{j}_i^T \mathbf{m}_{ip} \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_i^T \mathbf{m}_{ip} \mathbf{j}_i$$

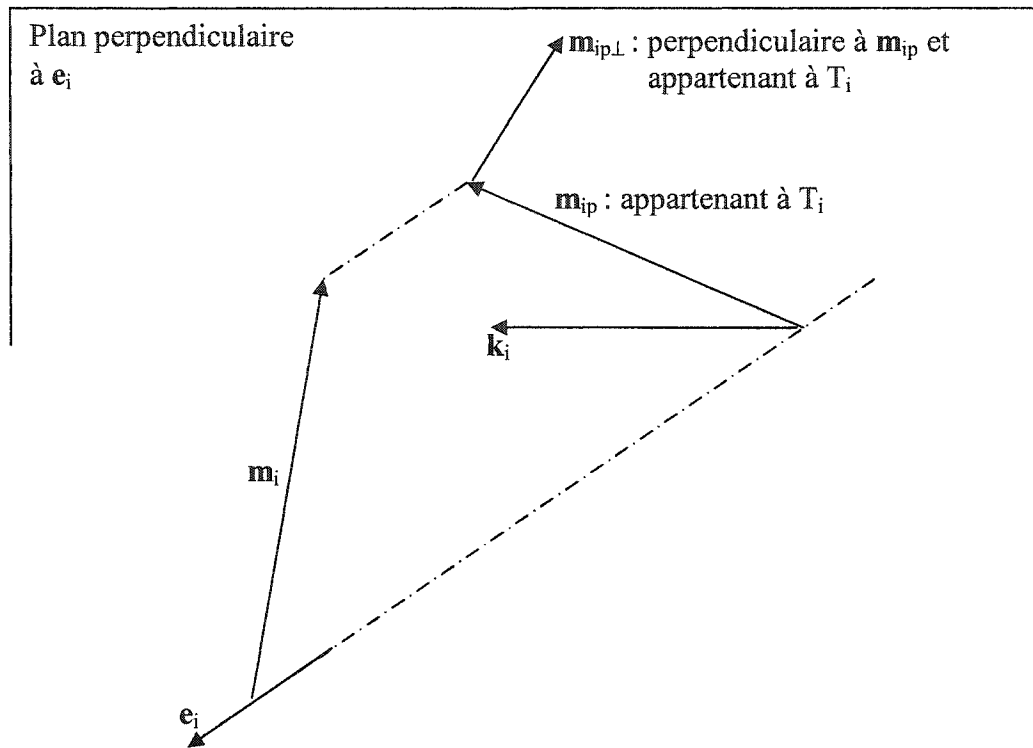


Figure 3.2 : Vecteurs  $\mathbf{m}_{ip}$  et  $\mathbf{m}_{ip\perp}$

En combinant les équations (3.12) et (3.13), on peut écrire :

$$(\mathbf{1} - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T) \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{m}_{ip\perp} \dot{\gamma}_i \quad (3.14)$$

Ainsi, et en projetant l'équation (3.14) sur le vecteur  $\mathbf{j}_i$ , on exprime directement  $\dot{\gamma}_i$  en fonction de  $\dot{\mathbf{p}}$  par l'équation (3.15).

$$\dot{\gamma}_i = \frac{\mathbf{j}_i^T (\mathbf{1} - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T) \dot{\mathbf{p}}}{\mathbf{j}_i^T \mathbf{m}_{ip\perp}} \quad (3.15)$$

En combinant les équations (3.8) et (3.15), on établie une équation liant la vitesse de l'origine de l'organe terminal  $\dot{\mathbf{p}}$  et celles des rotations des moteurs  $\dot{\theta}_i$ .

$$ps_i \mathbf{m}_i^T \mathbf{e}_i \dot{\theta}_i - \left[ \frac{ps_i \mathbf{m}_i^T \mathbf{e}_i}{\mathbf{j}_i^T \mathbf{m}_{ip\perp}} \mathbf{j}_i^T (\mathbf{1} - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T) + 2\pi \mathbf{m}_i^T \right] \dot{\mathbf{p}} = 0 \quad (3.16)$$

L'équation (3.16) peut être écrite sous forme matricielle tel que :

$$\begin{bmatrix} \frac{ps_1 \mathbf{m}_1^T \mathbf{e}_1}{\mathbf{j}_1^T \mathbf{m}_{1p\perp}} \mathbf{j}_1^T (\mathbf{1} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T) + 2\pi \mathbf{m}_1^T \\ \frac{ps_2 \mathbf{m}_2^T \mathbf{e}_2}{\mathbf{j}_2^T \mathbf{m}_{2p\perp}} \mathbf{j}_2^T (\mathbf{1} - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T) + 2\pi \mathbf{m}_2^T \\ \frac{ps_3 \mathbf{m}_3^T \mathbf{e}_3}{\mathbf{j}_3^T \mathbf{m}_{3p\perp}} \mathbf{j}_3^T (\mathbf{1} - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T) + 2\pi \mathbf{m}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ps_1 \mathbf{m}_1^T \mathbf{e}_1 & 0 & 0 \\ 0 & ps_2 \mathbf{m}_2^T \mathbf{e}_2 & 0 \\ 0 & 0 & ps_3 \mathbf{m}_3^T \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Ainsi, et à partir de l'équation (3.17), on détermine Les matrices jacobienne parallèle  $\mathbf{J}_P$  et sérielle  $\mathbf{J}_S$  pour les manipulateurs Star.

$$\mathbf{J}_P \equiv \begin{bmatrix} \frac{ps_1 \mathbf{m}_1^T \mathbf{e}_1}{\mathbf{j}_1^T \mathbf{m}_{1p \perp}} \mathbf{j}_1^T (1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T) + 2\pi \mathbf{m}_1^T \\ \frac{ps_2 \mathbf{m}_2^T \mathbf{e}_2}{\mathbf{j}_2^T \mathbf{m}_{2p \perp}} \mathbf{j}_2^T (1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T) + 2\pi \mathbf{m}_2^T \\ \frac{ps_3 \mathbf{m}_3^T \mathbf{e}_3}{\mathbf{j}_3^T \mathbf{m}_{3p \perp}} \mathbf{j}_3^T (1 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T) + 2\pi \mathbf{m}_3^T \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{J}_S \equiv \begin{bmatrix} ps_1 \mathbf{m}_1^T \mathbf{e}_1 & 0 & 0 \\ 0 & ps_2 \mathbf{m}_2^T \mathbf{e}_2 & 0 \\ 0 & 0 & ps_3 \mathbf{m}_3^T \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

### 3.5 Solution du MGD par algorithme de Newton

Nous présentons ici une solution numérique par la méthode de Newton du MGD du manipulateur Star dans le seul but de vérifier la validité de notre modèle cinématique. Ce problème sera solutionné par une méthode graphique au chapitre 4. L'algorithme de résolution est le même que celui utilisé pour la résolution du MGD pour les manipulateurs 3-PRIIR. Cependant, les matrices jacobiennes sérielle et parallèle prennent les nouvelles formes des manipulateurs Star. Comme exemple numérique, on va solutionner le MGD pour un manipulateur Star : MP<sub>2</sub>, dont les paramètres géométriques de la base sont :

$$v_1=100u_d, v_2=100u_d, a_2=0u_d, \alpha_2=2\pi/3, v_3=100u_d, d_3=0u_d, a_3=0u_d, \beta_3=0, \alpha_3=-2\pi/3, l_1=100u_d, l_2=100u_d, l_3=100u_d, ps_1=140u_d/\text{tour}, ps_2=140u_d/\text{tour}, ps_3=140u_d/\text{tour}.$$

La géométrie de l'organe terminal est définie par les angles  $\gamma_{10}$ ,  $\gamma_{20}$ ,  $\gamma_{30}$ ,  $\phi_{10}$ ,  $\phi_{20}$  et  $\phi_{30}$  prises toutes égales à  $-\pi/4$ . Les trois rotations des moteurs sont prises égales à  $-4$  rad.

Le tableau 3.1 regroupe les résultats obtenus en fonction du point de départ  $\mathbf{p}_0$  de la boucle et de l'erreur exigée.

Tableau 3.1 : Solutions du MGD par algorithme de Newton et nombre d'itérations pour  $MP_2$  en fonction de l'erreur et du point de départ de la boucle

Point de départ $\mathbf{p}_0 (u_d)$	Erreur $\varepsilon$	Solution du MGD $\mathbf{p} (u_d) = [p_x \ p_y \ p_z]$	Nombre d'itération $n$
[20 -50 10]	0.1	[0.6019 -83.5137 0.0965]	298
[20 -50 10]	0.01	[0.0706 -83.7235 -0.0074]	527

Les deux solutions trouvées correspondent à la même configuration de l'effecteur. La différence réside dans la précision exigée. On verra plus tard dans le chapitre 4 et à l'aide d'une méthode graphique, que cette solution est l'une des 12 solutions possibles au MGD pour  $MP_2$ . La figure 3.3 présente l'évolution de l'erreur en fonction du nombre des itérations et montre la convergence de la méthode de Newton.



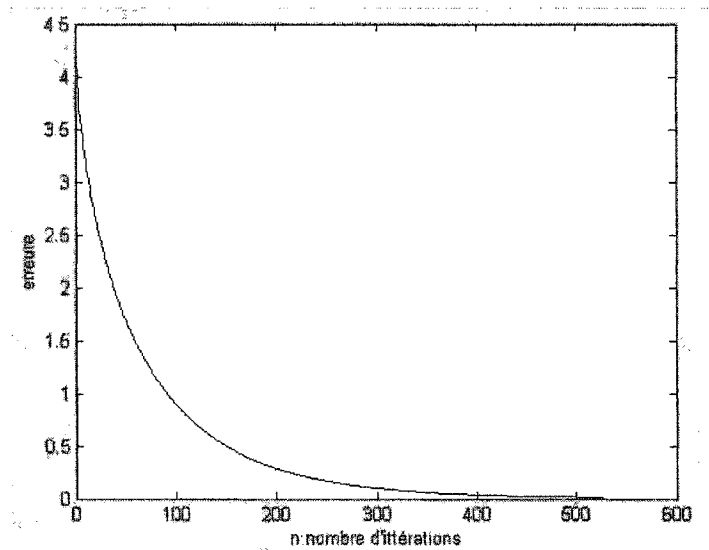


Figure 3.3: Évolution de l'erreur en fonction du nombre d'itérations pour  $MP_2$

### 3.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la modélisation cinématique de tous les manipulateurs de topologie Star. Après la formulation du problème, on a montré que le MGD des Star revient à déterminer l'intersection de trois surfaces hélicoïdales à méridien circulaire. Ceci nous a amené à penser que les Star possèdent plus que deux solutions, puisque ces surfaces sont infinies contrairement aux surfaces finies des manipulateurs 3-PRIIR. On a démontré également que le MGD équivaut à résoudre un système de six équations non linéaires à six inconnues. On a également établi les matrices jacobiennes sérielle et parallèle, ce qui a permis de résoudre numériquement le MGD par la méthode de Newton, et ainsi valider notre modèle cinématique. Suite aux chapitres 2 et 3, on peut conclure que les deux topologies peuvent paraître semblables, mais elles sont tout à fait différentes à cause des joints hélicoïdaux des Star qui produisent des déplacements

passifs qui s'ajoutent à ceux générés par les rotations des moteurs. Le chapitre 4 a pour objectif de présenter une méthode graphique qui se base sur le logiciel CATIA V5R8 et qui permet de déterminer les solutions du MGD pour des manipulateurs Star. Cela va nous permettre de confirmer ou non, que les Star ont plus que deux modes d'assemblage.

## Chapitre 4

### SOLUTION GRAPHIQUE DU MGD DES STAR

Dans ce chapitre, on va présenter deux méthodes graphiques de résolution du MGD des manipulateurs Star. Ces méthodes sont basées sur la détermination de l'intersection de trois surfaces hélicoïdales à méridien circulaire et utilisant CATIA V5 pour les créer. Ces deux méthodes se différencient par la procédure de création de ces surfaces. La première méthode utilise la fonction *loft* qui permet de créer une surface enveloppe à partir de courbes génératrices hélicoïdales. La seconde utilise la fonction *sweep* qui permet de faire un balayage du cercle initiale (méridien) selon une courbe hélicoïdale pour obtenir la surface finale. Pour ce faire, on va utiliser l'atelier *Wireframe and Surface Design* du logiciel CATIA. Dans ce chapitre, on va résoudre le MGD pour des géométries de Star. Les deux premières font partie de la famille Y Star, alors que la troisième est une géométrie générale et présente la particularité que les axes des vis sont perpendiculaires l'un par rapport à l'autre et non coplanaires.

#### 4.1 Méthode 1

La première méthode se base sur la création de plusieurs courbes hélicoïdales qui représentent les courbes génératrices de la surface hélicoïdale à méridien circulaire. Le pas et l'axe de ces courbes correspondent au pas et l'axe de la vis. La procédure générale pour la création de ces surfaces est expliquée aux étapes suivantes.

1. Création du cercle initial, voir figure 4.1, qui correspond aux configurations possibles de la membrure, et tel que :  $\gamma_i = \gamma_{i0}$  et  $\phi_i \in [0, 2\pi]$ ;
2. Discrétisation du cercle en points qui constitueront le départ des courbes hélicoïdales;
3. Création de courbes hélicoïdales à partir de ces points, voir figure 4.2. L'axe et le pas de ces courbes correspondent à ceux de la vis;
4. À l'aide de la fonction *loft*, on crée des surfaces de type interpolation entre chaque courbe et celle qui lui est adjacente, voir figure 4.3. Ces surfaces doivent être par la suite assemblées avec la fonction *join*, pour donner la surface complète.

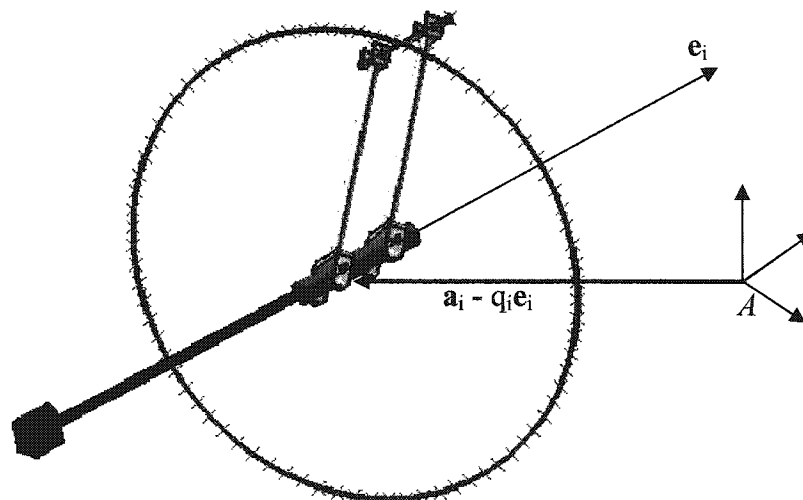


Figure 4.1: Cercle initial représentant les positions possibles du point  $B_i$  :  $\phi_i \in [0, 2\pi]$  et

$$\gamma_i = \gamma_{i0}$$

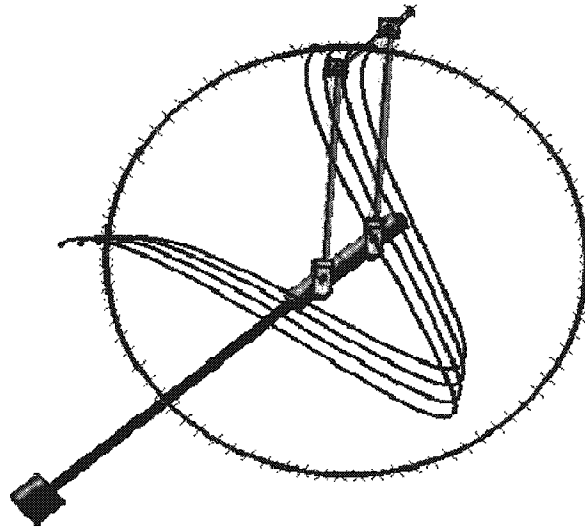


Figure 4.2: Courbes hélicoïdales à partir des points d'un méridien circulaire

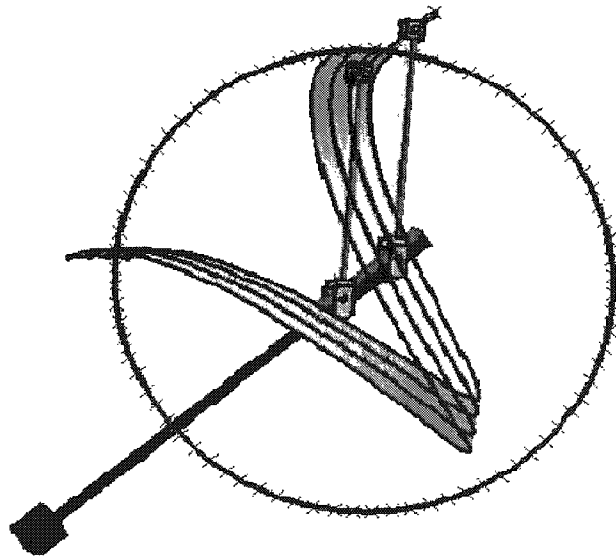


Figure 4.3: Surface loft entre différentes courbes hélicoïdales

## 4.2 Méthode 2

La méthode 2 utilise la fonction *sweep*. Cette fonction permet de faire subir à un profil un mouvement selon une courbe guide. Dans le cas d'une surface hélicoïdale à méridien circulaire, le profil correspond au cercle initial et la courbe guide correspond à une courbe hélicoïdale dont les caractéristiques sont celles de la vis, voir figure 4.4.

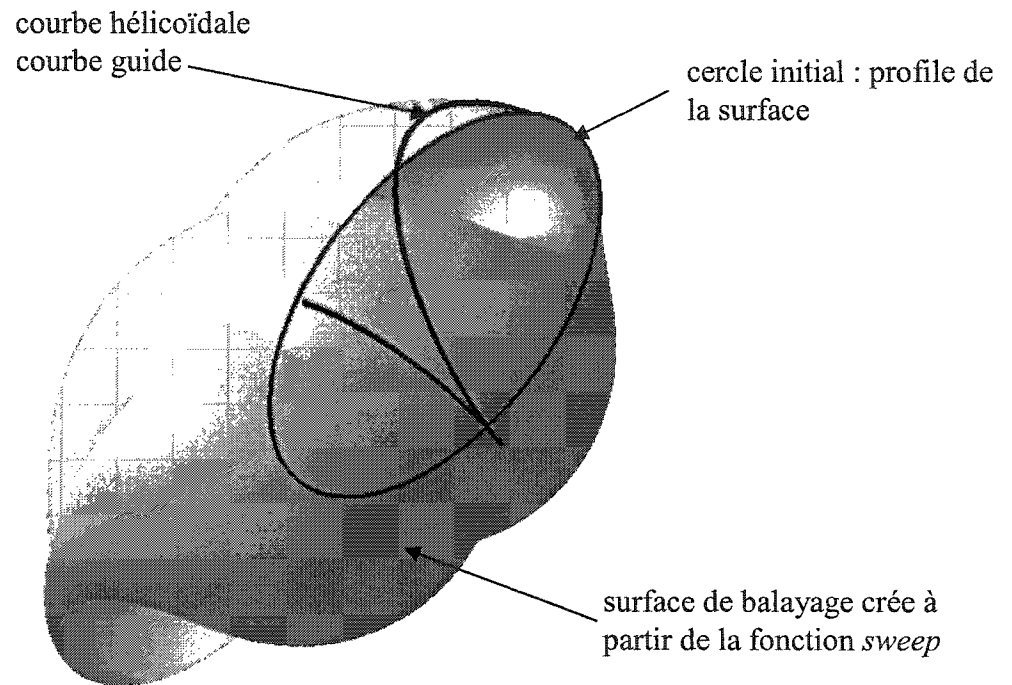


Figure 4.4: Surface hélicoïdale à méridien circulaire créée par la fonction de balayage pour un manipulateur Star avec un pas de  $140u_d$  et une longueur de jambe l de  $100u_d$ .

Pour les mêmes paramètres géométriques, cette surface coïncide avec celle créée avec la méthode 1. La mesure de l'air pour les deux surfaces donne une valeur de  $0.266u_d^2$ .

#### **4.3 Simulation cinématique et validation de la méthode graphique**

La validation des méthodes graphiques utilisées pour résoudre le MGD se base sur l'application du MGI aux différentes solutions ainsi que sur l'utilisation de l'atelier de cinématique et de simulation de mécanismes de CATIA V5R8. L'application du MGI pour toutes les solutions du MGD doit être égale aux valeurs de rotations des moteurs et qui correspondent aux valeurs d'entrée du MGD. D'autre part, et à l'aide de l'atelier de cinématique et de simulation, on doit être en mesure d'assembler le manipulateur dans toutes les solutions trouvées tout en vérifiant que l'organe terminal garde une orientation constante. Afin de pouvoir changer la configuration du manipulateur sans recréer un autre mécanisme, on attribue aux coordonnées de l'organe terminal des paramètres qui correspondent à celles des différentes solutions du MGD. Ceci est possible en créant une *design table*, voir figure 4.5, qu'on peut éditer selon le point solution qu'on veut vérifier.

Design Table Properties

Name : DesignTable.1

Comment : This design table was created by sayd on 11/25/2002

Configurations | Associations

Filter :

Line	Px	Py	Pz
<1>	-14.48mm	76mm	-15.749mm
2	-2.251mm	31.457mm	16.426mm
3	-16.392mm	-2.262mm	-31.491mm
4	15.754mm	-14.486mm	-76.01mm
5	16.469mm	16.43mm	-16.43mm
6	31.481mm	-16.446mm	2.273mm
7	82.538mm	82.814mm	-82.766mm
8	76.029mm	15.673mm	14.507mm
9	66.4298mm	66.4298mm	-66.4298mm

Annotations:

- $p_1$  : position en cours
- $p_8$  : huitième solution
- $p_0$  : position initiale du manipulateur

Buttons: Edit table..., Duplicate data in CATIA model, OK, Apply, Cancel

Figure 4.5: Table de paramétrage pour les coordonnées des solutions du MGD

#### 4.4 Solution du MGD pour un manipulateur Y Star

Dans cette partie, on va étudier deux géométries de manipulateurs Y Star dont la différence réside dans les positions initiales des écrous  $v_i$ , les longueurs  $l_i$  ainsi que les valeurs de rotation des moteurs  $\theta_i$ , représentant les données d'entrée du MGD. Les géométries des deux manipulateurs sont respectivement définies par les 15 paramètres géométriques de la base tel que :



MP<sub>3</sub>:  $v_1 = 20u_d$ ,  $v_2 = 20u_d$ ,  $a_2 = 0u_d$ ,  $\alpha_2 = 2\pi/3$ ,  $v_3 = 20u_d$ ,  $d_3 = 0u_d$ ,  $a_3 = 0u_d$ ,  $\beta_3 = 0$ ,  $\alpha_3 = -2\pi/3$ ,  $l_1 = 10u_d$ ,  $l_2 = 10u_d$ ,  $l_3 = 10u_d$ ,  $ps_1 = 140u_d$ ,  $ps_2 = 140u_d$ ,  $ps_3 = 140u_d$ .

et

MP<sub>4</sub> = MP<sub>2</sub>:  $v_1 = 100u_d$ ,  $v_2 = 100u_d$ ,  $a_2 = 0u_d$ ,  $\alpha_2 = 2\pi/3$ ,  $v_3 = 100u_d$ ,  $d_3 = 0u_d$ ,  $a_3 = 0u_d$ ,  $\beta_3 = 0$ ,  $\alpha_3 = -2\pi/3$ ,  $l_1 = 100u_d$ ,  $l_2 = 100u_d$ ,  $l_3 = 100u_d$ ,  $ps_1 = 140u_d$ ,  $ps_2 = 140u_d$ ,  $ps_3 = 140u_d$ .

Les valeurs des 6 paramètres géométriques de l'organe terminal pour les deux géométries

sont :  $\gamma_{10} = \gamma_{20} = \gamma_{30} = \phi_{10} = \phi_{20} = \phi_{30} = -\pi/4$ .

Les valeurs de rotation des moteurs (valeurs d'entrée) sont égales à :

$\theta_i = -2$  rad;  $i = 1, 2, 3$  pour MP<sub>3</sub>;

$\theta_i = -4$  rad;  $i = 1, 2, 3$  pour MP<sub>4</sub>.

La détermination des solutions du MGD comprend les trois étapes suivantes :

- générer les trois surfaces  $Su_1$ ,  $Su_2$  et  $Su_3$  décrites par chacune des jambes du manipulateur ;
- déterminer les courbes  $Cr_{12}$  et  $Cr_{13}$  qui représentent respectivement l'intersection de  $Su_1$  avec  $Su_2$  et de  $Su_1$  avec  $Su_3$  ;
- déterminer les points d'intersection de  $Cr_{12}$  avec  $Cr_{13}$ . Ces intersections correspondent aux solutions du MGD.

#### 4.4.1 Géométrie 1

La figure 4.6 représente les trois surfaces  $S_{B_i}$  décrites par les points  $B_i$  dans le cas de la géométrie  $MP_3$ . L'origine de l'organe terminal est décalée de chaque point  $B_i$  par  $-\mathbf{b}_i$ . Les surfaces  $S_{u_i}$  de l'origine de l'organe terminal sont donc obtenues par translation des surfaces  $S_{B_i}$  par les grandeurs  $-\mathbf{b}_i$ , voir figure 4.7.

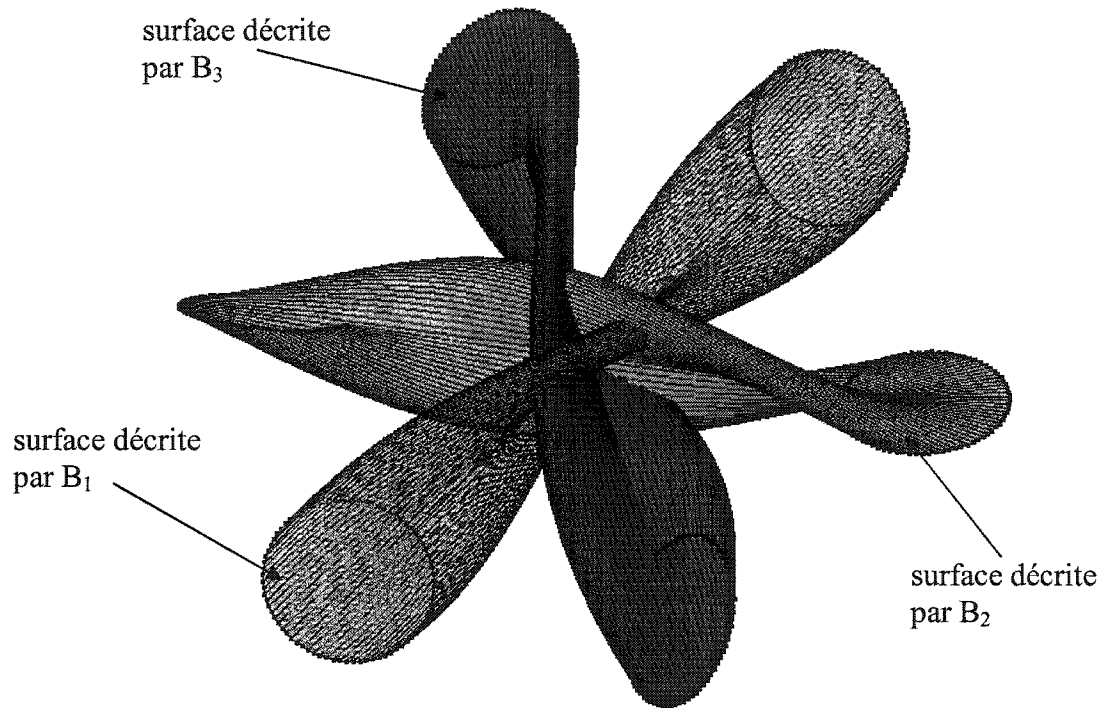


Figure 4.6: Surfaces  $S_{B_i}$  décrites par les points  $B_i$  dans le cas du manipulateur  $MP_3$  (le pas est grand relativement à la longueur des jambes).

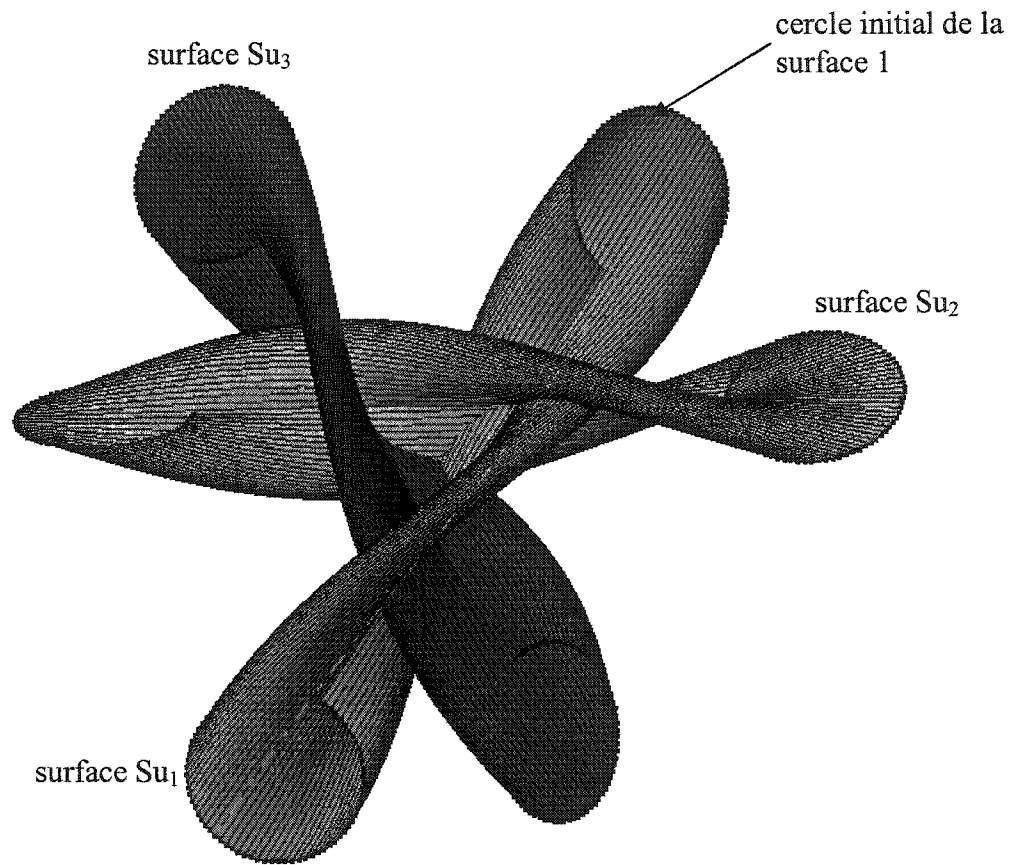


Figure 4.7: Surfaces  $Su_i$  représentant les surfaces décrites par l'origine de l'organe terminal

La génération des surfaces  $Su_i$  permet par la suite de déterminer les courbes  $Cr_{12}$  et  $Cr_{13}$  illustrées à la figure 4.8.

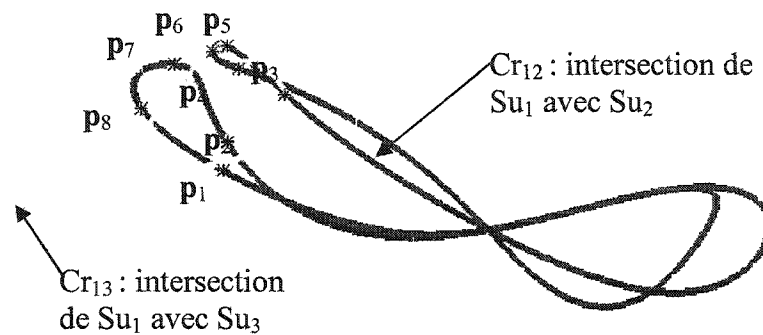


Figure 4.8: Courbes  $Cr_{12}$  et  $Cr_{13}$  d'intersection des surfaces  $Su_1$  avec  $Su_2$  et  $Su_1$  avec  $Su_3$ , ainsi que les points solution du MGD pour le manipulateur  $MP_3$

À la figure 4.8, on peut constater alors que le MGD admet huit solutions dans le cas du  $MP_3$ . La détermination des coordonnées de ces points se fait directement à l'aide du logiciel CATIA en utilisant la fonction de mesure. Le tableau 4.1 regroupe les coordonnées de ces huit solutions.

Tableau 4.1: Huit solutions du MGD dans le cas du  $MP_3$

$\mathbf{p} (u_d)$	Coordonnée selon $x (u_d)$	Coordonnée selon $y (u_d)$	Coordonnée selon $z (u_d)$
$\mathbf{p}_1$	3.143	-5.429	0.645
$\mathbf{p}_2$	1.066	-7.84	1.083
$\mathbf{p}_3$	0	-8.194	0
$\mathbf{p}_4$	0.402	-7.836	-1.474
$\mathbf{p}_5$	-1.024	-5.421	-3.05
$\mathbf{p}_6$	-1.48	-7.837	0.39
$\mathbf{p}_7$	-2.133	-5.429	2.407
$\mathbf{p}_8$	-0.004	-2.988	0.002

#### 4.4.2 Géométrie 2

En suivant la même procédure décrite dans l'exemple précédent, on trouve les douze solutions possibles du MGD dans le cas du  $MP_4$  regroupées dans le tableau 4.2. La configuration initiale est illustrée à la figure 4.9. Les figures 4.10 à 4.21 montrent les différentes solutions du MGD. Noter que pour chaque solution, seul la position de l'organe terminal change pour toujours la même orientation de celui-ci. La douzième solution correspond à celle trouvée avec la méthode de Newton de la section 3.5. Cette correspondance confirme à la fois la validité de la méthode graphique et celle utilisant les matrices jacobiniennes.

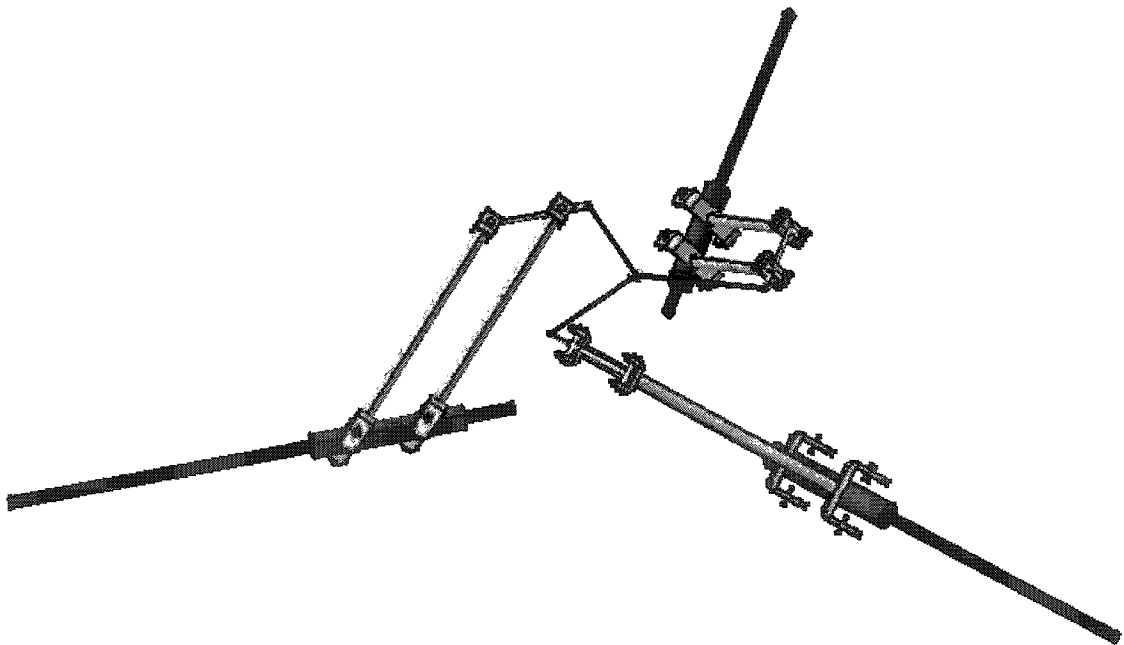


Figure 4.9: Configuration initiale du manipulateur  $MP_4$

Tableau 4.2 : Les douze solutions du MGD dans le cas du  $MP_4$ 

$\mathbf{p}(u_d)$	$p_x(u_d)$	$p_y(u_d)$	$p_z(u_d)$
$\mathbf{p}_1$	8.0150	43.8520	-65.5570
$\mathbf{p}_2$	-7.1760	17.6380	-62.3750
$\mathbf{p}_3$	-34.6600	44.5030	-16.5620
$\mathbf{p}_4$	0.0690	72.3290	0.0520
$\mathbf{p}_5$	31.7670	44.4650	-21.7240
$\mathbf{p}_6$	52.8330	43.7350	39.6540
$\mathbf{p}_7$	3.0270	44.3210	38.4120
$\mathbf{p}_8$	57.6660	17.5710	24.9280
$\mathbf{p}_9$	-60.7220	43.6030	25.9880
$\mathbf{p}_{10}$	-50.4070	17.5780	37.4510
$\mathbf{p}_{11}$	0.0360	-30.0820	0.0850
$\mathbf{p}_{12}$	0.0700	-83.6670	0.0360



Figure 4.10: Solution 1 du MGD du  $MP_4$

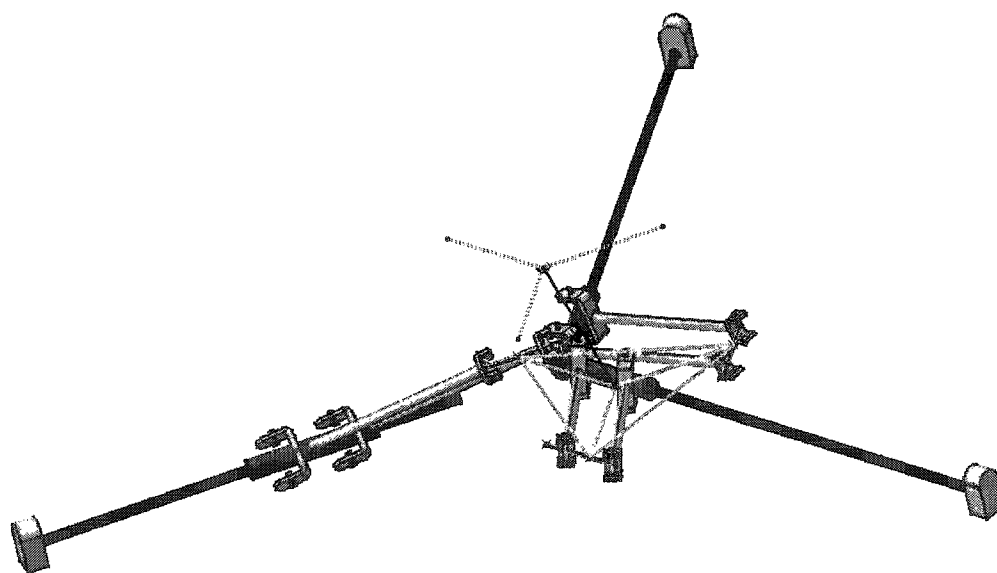


Figure 4.11: Solution 2 du MGD du  $MP_4$

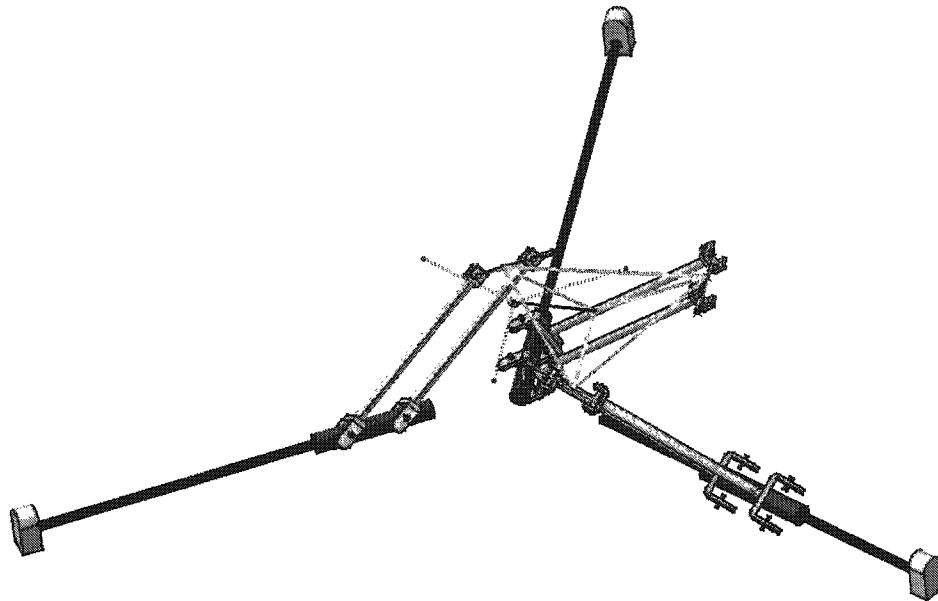


Figure 4.12: Solution 3 du MGD du  $MP_4$

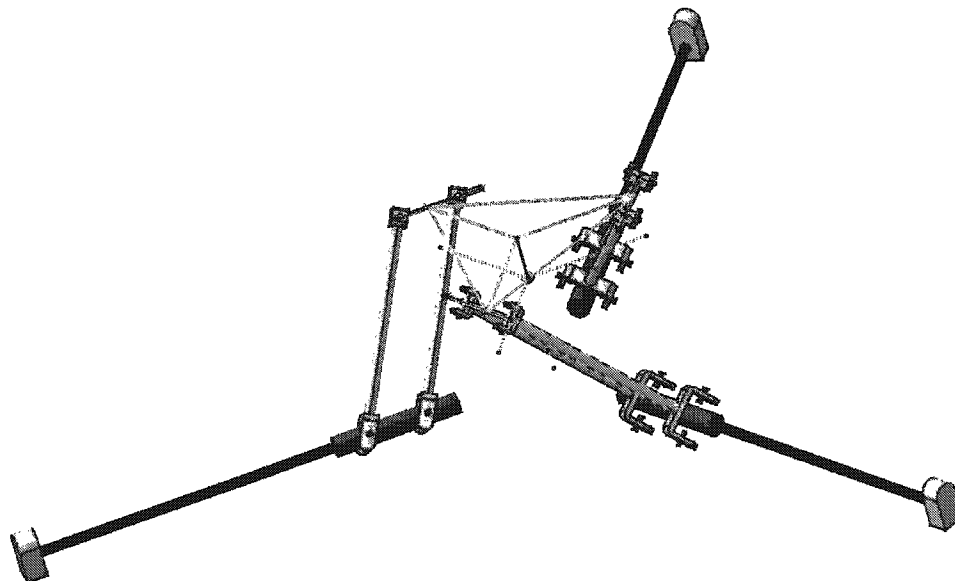


Figure 4.13: Solution 4 du MGD du  $MP_4$



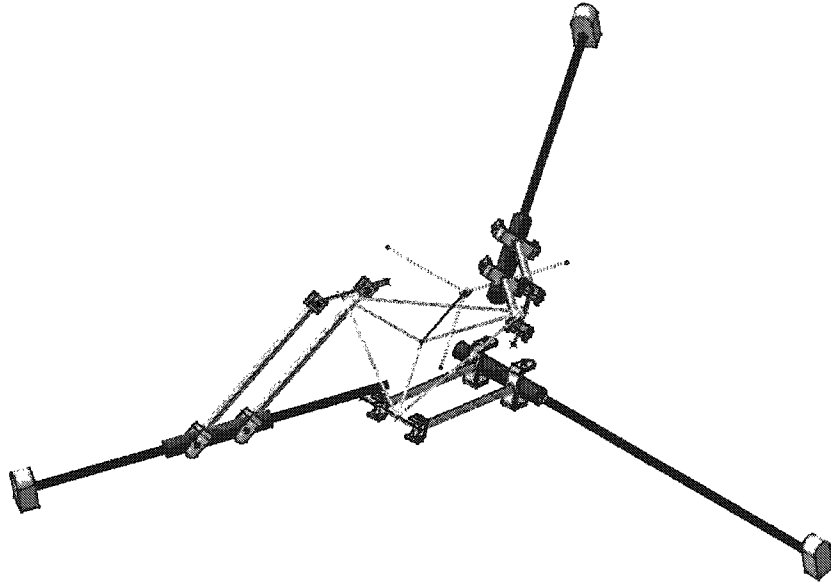


Figure 4.14: Solution 5 du MGD du  $MP_4$

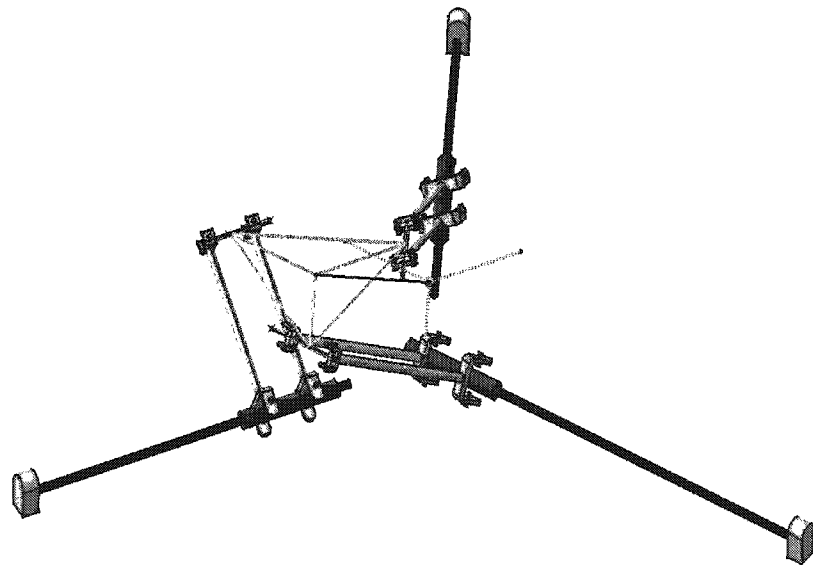


Figure 4.15: Solution 6 du MGD du  $MP_4$

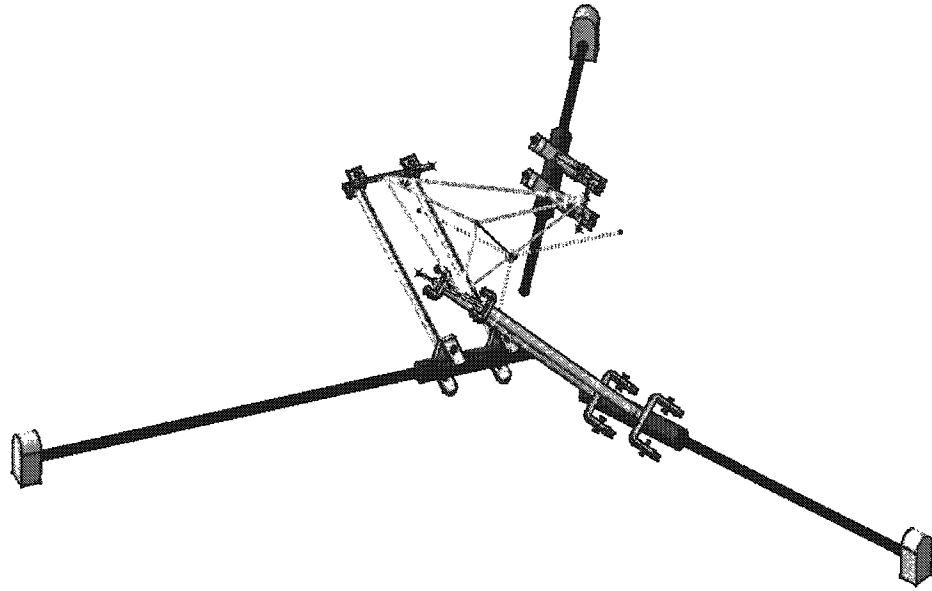


Figure 4.16: Solution 7 du MGD du  $MP_4$



Figure 4.17: Solution 8 du MGD du  $MP_4$

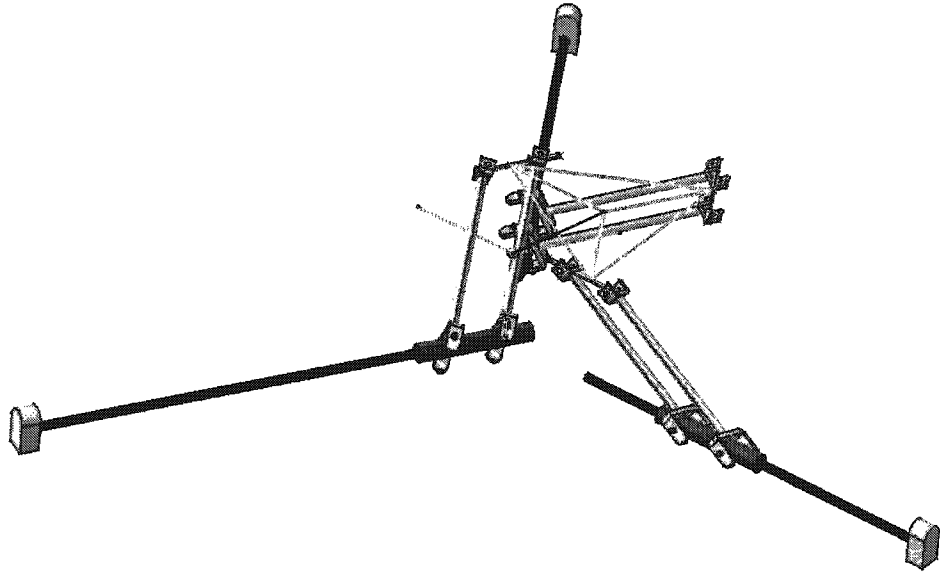


Figure 4.18: Solution 9 du MGD du  $MP_4$

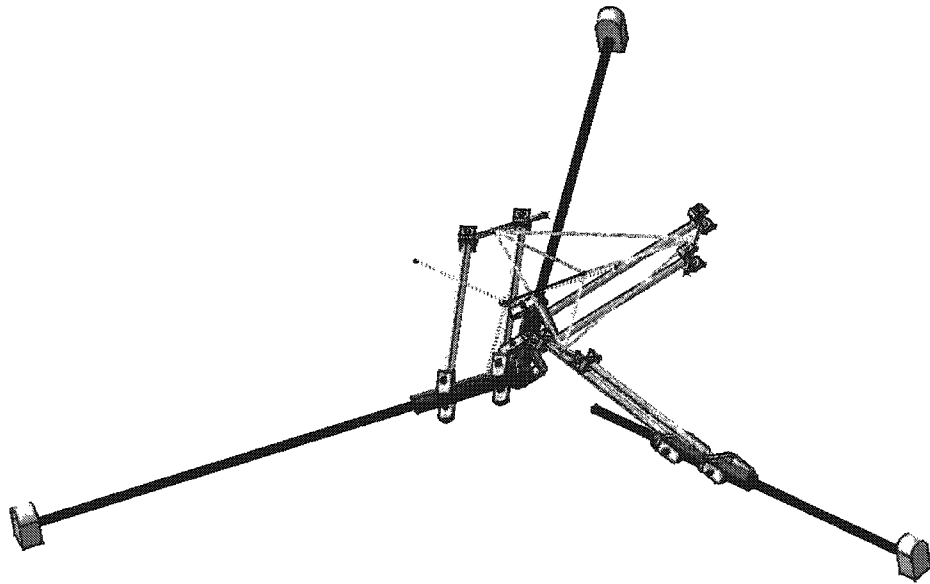


Figure 4.19: Solution 10 du MGD du  $MP_4$

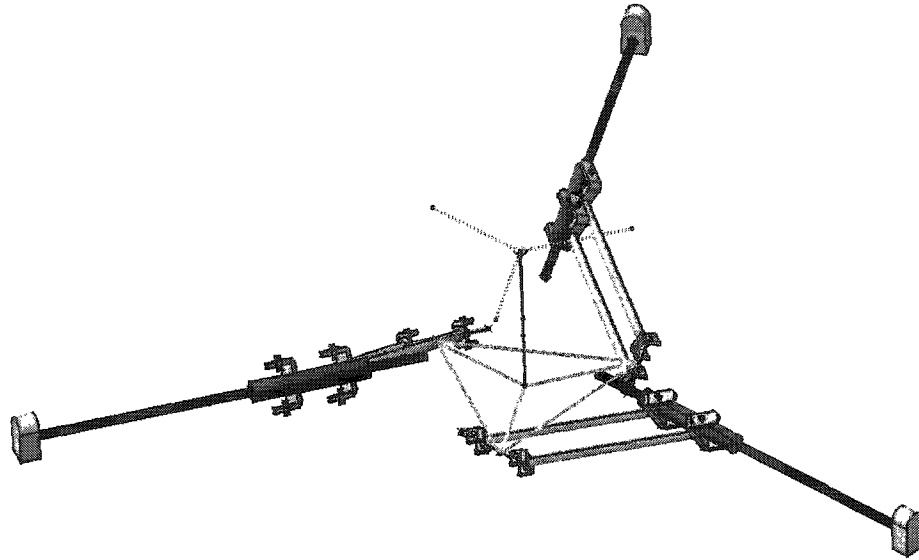


Figure 4.20: Solution11 du MGD du  $MP_4$

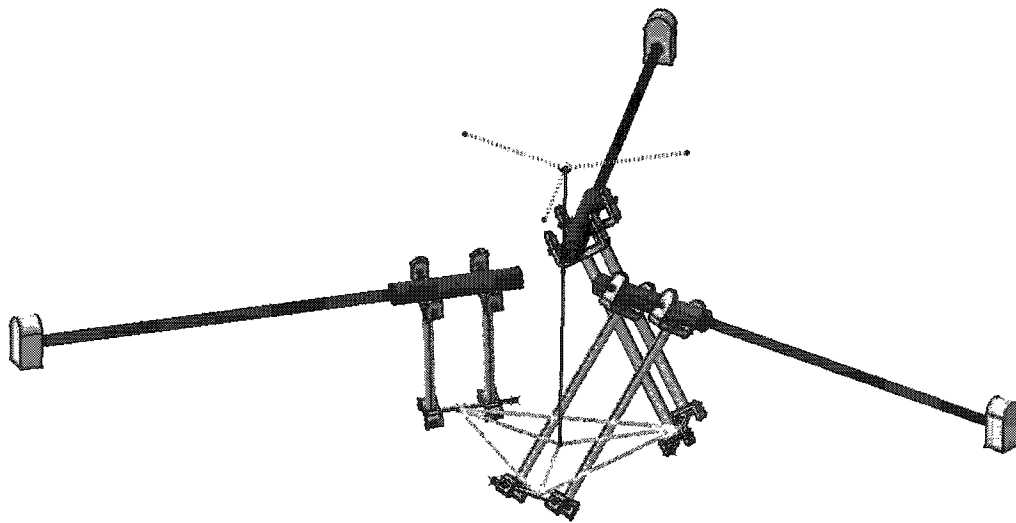


Figure 4.21: Solution12 du MGD du  $MP_4$

#### 4.5 Vérification des résultats

L'équation (3.5) montre que pour une position  $\mathbf{p}$  donnée de l'origine de l'organe terminal, la valeur de rotation du moteur  $i$ , c'est à dire  $\theta_i$ , admet deux solutions possibles. Une condition nécessaire et suffisante pour valider la méthode utilisée dans la résolution du MGD est de s'assurer que l'une des solutions du MGI des points  $\mathbf{p}$  est égal à  $[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]$  (valeurs d'entrée du MGD) ce qui correspond dans notre exemple à  $[-2 \text{ rad} \ -2 \text{ rad} \ -2 \text{ rad}]$  pour  $MP_3$  et  $[-4 \text{ rad} \ -4 \text{ rad} \ -4 \text{ rad}]$  pour  $MP_4$ . La figure 4.22 explique la méthode de validation numérique utilisant le MGI.

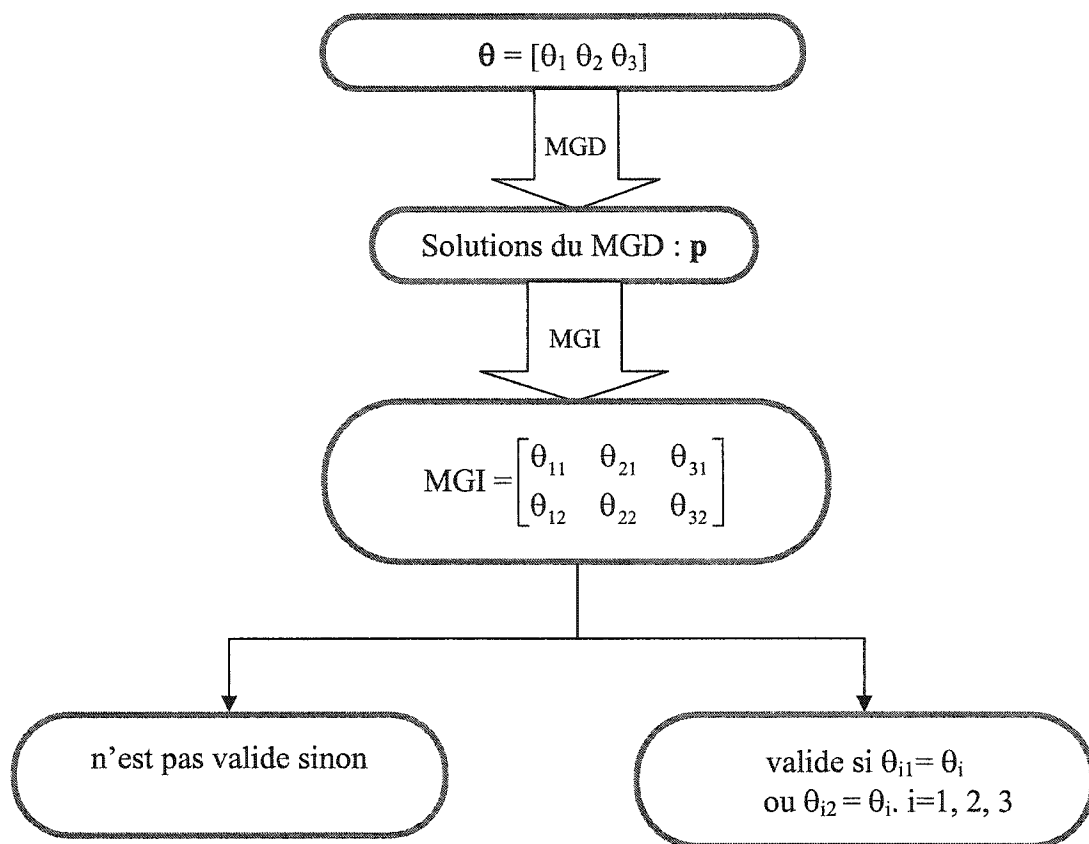


Figure 4.22: Vérification numérique des solutions du MGD par le MGI

Les tableaux 4.3 et 4.4 regroupent respectivement les solutions du MGI pour les différentes solutions du MGD dans le cas de  $\text{MP}_3$  et  $\text{MP}_4$ .

Tableau 4.3: Vérification numérique des solutions du MGD dans le cas du  $MP_3$  avec la méthode du MGI

<b>p</b>	<b>MGI (p) (rad)</b>		
<b>p<sub>1</sub></b>	-1.4485 -2.0066	-1.6531 -2.0096	-2.0067 -2.7398
<b>p<sub>2</sub></b>	-1.9103 -2.0214	-1.9991 -2.2768	-2.0027 -2.4607
<b>p<sub>3</sub></b>	-1.9998 -2.2515	-1.9998 -2.2515	-1.9998 -2.2515
<b>p<sub>4</sub></b>	-2.0031 -2.4622	-1.9088 -2.0212	-1.9987 -2.2762
<b>p<sub>5</sub></b>	-2.0074 -2.7410	-1.4473 -2.0066	-1.6521 -2.0075
<b>p<sub>6</sub></b>	-1.9990 -2.2760	-2.0034 -2.4626	-1.9093 -2.0204
<b>p<sub>7</sub></b>	-1.6534 -2.0086	-2.0079 -2.7411	-1.4482 -2.0064
<b>p<sub>8</sub></b>	-1.2767 -2.0062	-1.2769 -2.0067	-1.2763 -2.0058

Tableau 4.4: Vérification numérique des solutions du MGD dans le cas du  $MP_4$  avec la méthode du MGI

<b>p</b>	MGI ( <b>p</b> ) (rad)
<b>p<sub>1</sub></b>	2.2851 -0.9013 -3.9981
	-5.6600 -1.3709 -8.3268
<b>p<sub>2</sub></b>	2.2842 1.7200 -3.9912
	-6.4809 -4.0049 -8.0550
<b>p<sub>3</sub></b>	-0.8596 2.2812 -2.6877
	-8.3164 -5.3461 -4.0282
<b>p<sub>4</sub></b>	-0.8552 -0.8608 -0.8501
	-5.1255 -5.1328 -5.1333
<b>p<sub>5</sub></b>	2.2856 -2.7061 -0.8580
	-5.3432 -4.0163 -8.3197
<b>p<sub>6</sub></b>	-0.8184 -4.0004 2.2848
	-1.4494 -8.3258 -5.6651
<b>p<sub>7</sub></b>	-2.6942 -0.8619 2.2900
	-4.0225 -8.3281 -5.3485
<b>p<sub>8</sub></b>	1.7252 -3.9969 2.2844
	-4.0062 -8.0502 -6.4815
<b>p<sub>9</sub></b>	-3.9993 2.2855 -0.7527
	-8.3270 -5.6703 -1.5139
<b>p<sub>10</sub></b>	-3.9941 2.2840 1.7239
	-8.0515 -6.4820 -4.0073
<b>p<sub>11</sub></b>	-0.8558 -0.8597 -0.8519
	-8.1405 -8.1497 -8.1454
<b>p<sub>12</sub></b>	-3.9878 -3.9945 -3.9807
	-5.9873 -5.9927 -6.0031



À partir des résultats des tableaux 4.3 et 4.4, on peut dire que la méthode utilisée est bien validée puisque pour toutes les solutions du MGD, il existe un mode opératoire qui coïncide avec les valeurs imposées de rotations des moteurs. En prenant à titre d'exemple la solution  $p_5$  dans le cas de  $MP_3$ , on trouve comme solutions possibles aux MGI les valeurs  $\begin{bmatrix} -2.0074 \text{ rad} & -1.4473 \text{ rad} & -1.6521 \text{ rad} \\ -2.7410 \text{ rad} & -2.0066 \text{ rad} & -2.0075 \text{ rad} \end{bmatrix}$ . Les solutions qui coïncident avec  $[-2\text{rad } -2\text{rad } -2\text{rad}]$  sont donc le vecteur  $[\theta_{11} \theta_{22} \theta_{32}]$ , ce qui correspond au premier mode opératoire pour la première jambe et au deuxième mode opératoire pour les jambes 2 et 3. Les écarts sont dus aux erreurs de génération des surfaces et aux erreurs de mesure des solutions par CATIA.

#### 4.6 Solution du MGD pour un manipulateur Star

La plupart des travaux précédents ont porté seulement sur les manipulateurs Y Star où les axes des trois vis sont coplanaires et forment un angle de 120 degrés l'un par rapport à l'autre. Dans la première partie de ce mémoire, on a montré que tous les manipulateurs 3-PRIIR admettent au maximum 2 solutions du MGD, puisque pour toutes les géométries, ce problème revient à déterminer l'intersection de trois sphères. La partie qui vient a pour but de compléter l'étude faite sur les deux géométries d'un manipulateur Y Star et d'étendre les résultats pour des géométries où les axes des vis ne sont pas coplanaires. Le fait que le MGD revienne à déterminer l'intersection de trois surfaces hélicoïdales à méridien circulaire fait que la méthode reste toujours valable puisque la topologie est identique à celle des Star. Dans cette partie, on va s'intéresser à résoudre le MGD d'un

manipulateurs Star, noté  $MP_5$  qui présente une configuration où les axes forment un angle de  $90^\circ$  l'un par rapport à l'autre et non coplanaires.

Les paramètres géométriques de la base et de l'effecteur décrivant  $MP_5$  sont :

$$v_1 = 20u_d, v_2 = 20u_d, a_2 = 0u_d, \alpha_2 = \pi/2, v_3 = 20u_d, d_3 = 0u_d, a_3 = 0u_d, \beta_3 = \pi/2, \alpha_3 = \pi/2,$$

$$l_1 = 10u_d, l_2 = 10u_d, l_3 = 10u_d, ps_1 = 140u_d/\text{tour}, ps_2 = 140u_d/\text{tour}, ps_3 = 140u_d/\text{tour}.$$

Les paramètres de l'organe terminal sont :  $\gamma_{10} = -3\pi/4, \gamma_{20} = -\pi/4, \gamma_{30} = \pi/4$  et

$\phi_{10} = \phi_{20} = \phi_{30} = -\pi/4$ . Les angles de rotation des moteurs  $\theta_i$  sont pris égaux à  $[-4 \text{ rad } -4 \text{ rad } -4 \text{ rad}]$ .

Ainsi, les vecteurs  $e_i$  et  $a_i$  se calculent directement selon :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{i}; \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}; \mathbf{e}_3 = \mathbf{k} \\ \mathbf{a}_1 &= v_1 \mathbf{i}; \mathbf{a}_2 = v_2 \mathbf{j}; \mathbf{a}_3 = v_3 \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.1)$$

En suivant la même procédure de résolution décrite à la section 4.4, on détermine les 13 solutions du MGD du  $MP_5$  dont 8 sont illustrées. Les cinq autres solutions n'ont pas été présentées vu que leurs configurations sont semblables à celles illustrées aux figures 4.23 à 4.30.



Figure 4.23: Solution 1 du MGD du  $MP_5$



Figure 4.24: Solution 2 du MGD du  $MP_5$



Figure 4.25: Solution 3 du MGD du  $MP_5$



Figure 4.26: Solution 4 du MGD du  $MP_5$

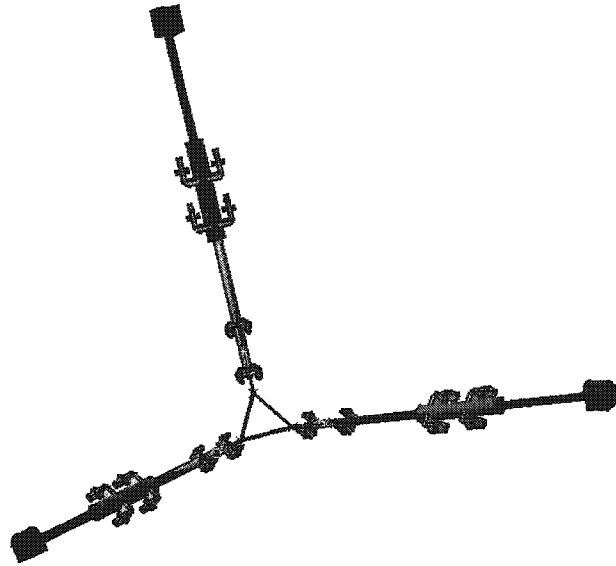


Figure 4.27: Solution 5 du MGD du  $MP_5$



Figure 4.28: Solution 6 du MGD du  $MP_5$

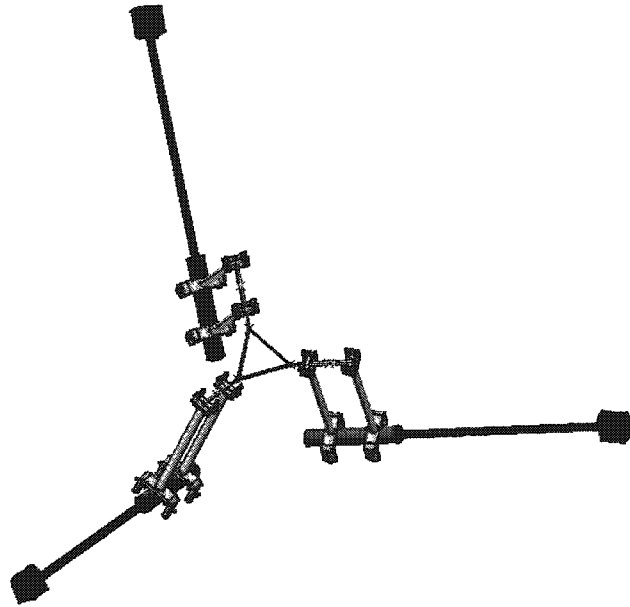


Figure 4.29: Solution 7 du MGD du  $MP_5$

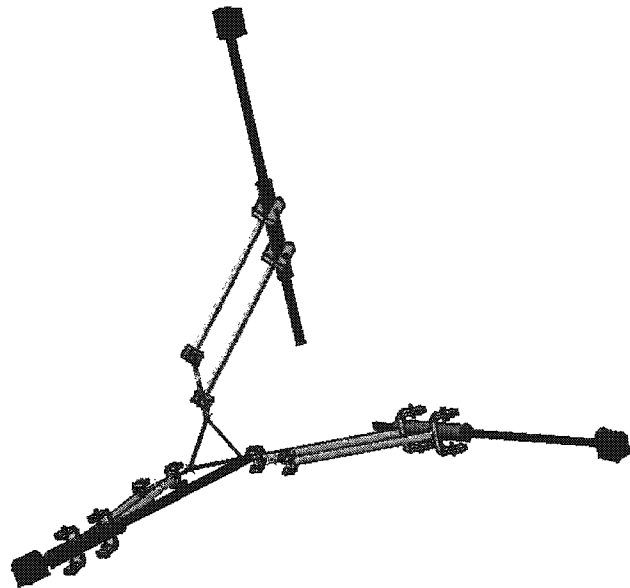


Figure 4.30: Solution 8 du MGD du  $MP_5$

#### 4.7 Erreurs de la méthode 1

La solution du MGD pour les Star revient à déterminer l'intersection de trois surfaces hélicoïdales à méridien circulaire. Selon la méthode 1, ces surfaces ont été approximées par une série d'interpolations entre des courbes hélicoïdales. Ceci va donc entraîner des erreurs dans les solutions du MGD, puisque ces surfaces ne vont pas correspondre exactement aux surfaces décrites par les équations (3.2). Cependant ces erreurs peuvent être minimisées en augmentant le nombre de points qui discrétisent le méridien initial. Une façon d'évaluer la précision de la méthode graphique consiste à comparer le MGI des différentes solutions par rapport aux valeurs d'entrée  $\theta_i$  qui correspondent aux rotations des moteurs. Comme exemple numérique, on va prendre les résultats du manipulateur  $MP_3$  pour lequel on a trouvé 8 solutions au MGD.

Tableau 4.5 : Erreur de la méthode 1 dans le cas du  $MP_3$ 

<b>p</b>	<b>MGI (p) (rad)</b>			<b>erreur (rad)</b>		
				$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$	$\Delta\theta_3$
<b>p<sub>1</sub></b>	-1.4485 -2.0066	-1.6531 -2.0096	-2.0067 -2.7398	0.006	0.010	0.007
<b>p<sub>2</sub></b>	-1.9103 -2.0214	-1.9991 -2.2768	-2.0027 -2.4607	0.021	0.001	0.003
<b>p<sub>3</sub></b>	-1.9998 -2.2515	-1.9998 -2.2515	-1.9998 -2.2515	0.001	0.001	0.001
<b>p<sub>4</sub></b>	-2.0031 -2.4622	-1.9088 -2.0212	-1.9987 -2.2762	0.003	0.021	0.002
<b>p<sub>5</sub></b>	-2.0074 -2.7410	-1.4473 -2.0066	-1.6521 -2.0075	0.007	0.007	0.007
<b>p<sub>6</sub></b>	-1.9990 -2.2760	-2.0034 -2.4626	-1.9093 -2.0204	0.001	0.003	0.020
<b>p<sub>7</sub></b>	-1.6534 -2.0086	-2.0079 -2.7411	-1.4482 -2.0064	0.008	0.008	0.006
<b>p<sub>8</sub></b>	-1.2767 -2.0062	-1.2769 -2.0067	-1.2763 -2.0058	0.006	0.007	0.006

D'après les résultats du tableau 4.5, on conclut que la méthode 1 donne des résultats proches de résultats théoriques. En moyenne, pour des valeurs d'entrée de  $-2\text{rad}$ , on obtient des erreurs de l'ordre de  $0.005\text{ rad}$ . Ces résultats ont été obtenus avec 80 points de discrétisation sur le méridien circulaire initial et peuvent être encore améliorés en augmentant le nombre de ces points et donc le nombre de courbes hélicoïdales qui approximent la surface finale.



#### 4.8 Avantages et inconvénients des deux méthodes

Les deux méthodes que nous avons utilisées pour la résolution du MGD pour les manipulateurs Star diffèrent par la façon de créer les surfaces. La première utilise une série de courbes hélicoïdales intermédiaires pour en créer une surface d'interpolation avec la fonction *loft* de CATIA V5. La précision de cette méthode est proportionnelle au nombre de points qui discrétisent le méridien initial. Ainsi, plus on augmente le nombre de courbes hélicoïdales intermédiaires, plus, on s'approche de la vraie surface générée par l'origine de l'organe terminal. L'avantage de cette méthode, est qu'elle permet de créer une surface hélicoïdale à méridien circulaire quelque soit le rapport entre le pas de la vis et la longueur de la jambe. Cependant, elle présente l'inconvénient qu'elle nécessite plusieurs étapes pour construire ces surfaces. La deuxième méthode utilise la fonction *sweep* de CATIA V5 pour faire un balayage du méridien initial selon une courbe hélicoïdale, et donc, créer la surface globale. D'après les essais qu'on a faits, cette méthode ne donne pas les vrais surfaces dans le cas où le rapport pas de la vis/longueur de la jambe est grand. Dans ce cas, au lieu de tourner le cercle autour de l'axe de la vis et de le déplacer d'une quantité proportionnelle à cette rotation (liaison hélicoïdale), il va se translater selon la courbe hélicoïdale en gardant la même orientation. Cette méthode n'est pas conçue dans ce cas. L'avantage de cette méthode est qu'elle requiert moins d'étapes et qu'elle donne les vraies surfaces puisqu'on n'introduit aucune approximation.

## CONCLUSION

Dans ce travail, on s'est intéressé à la modélisation et à la résolution du modèle géométrique direct de toutes les géométries des manipulateurs de topologie 3-PRIIR et Star. Les deux topologies génèrent un mouvement de translation à l'effecteur à orientation constante. D'autre part, elles sont relativement semblables au niveau de leurs composantes mécaniques et de leur transmission du mouvement. À cause des joints hélicoïdaux du Star, le modèle cinématique change complètement pour le MGD ainsi que pour le MGI. En effet, on a vu que géométriquement, le MGD pour les 3-PRIIR équivaut à trouver l'intersection de trois sphères. Les paramètres de ces trois sphères s'expriment en fonction des paramètres géométriques du manipulateur. Ce résultat a permis de déduire que toutes les géométries des manipulateurs 3-PRIIR ne peuvent avoir plus que deux modes d'assemblage. On a démontré également que, algébriquement, le MGD revient à résoudre un système de trois équations quadratiques à trois inconnues. En ce qui concerne la résolution du MGD des manipulateurs Star, on a montré que contrairement aux 3-PRIIR, la connaissance des valeurs articulaires ne permet pas directement de connaître la position des curseurs (joints hélicoïdaux) et par conséquent la position de l'organe terminal, à cause des déplacements passifs des jambes. Après une formulation mathématique du problème, on a déduit que le MGD équivaut à trouver l'intersection de trois surfaces hélicoïdales à méridien circulaire et que, algébriquement, ce problème revient à résoudre un système non linéaire de six équations à six inconnues. Une des propriétés de ces surfaces est qu'elles sont des surfaces infinies, ce qui nous a amené à réfléchir sur la possibilité que les Star possèdent plus que deux solutions au MGD. Cette

constatation intuitive a été confirmée en étudiant quelques géométries des manipulateurs Star. Pour deux manipulateurs de topologie Y Star, on a trouvé respectivement 8 et 12 solutions au problème géométrique direct. Pour un manipulateur Star, pour lequel les axes des vis sont perpendiculaire l'un par rapport à l'autre et non coplanaires, ce sont 13 solutions qui s'avèrent possibles. Ce résultat présente une originalité scientifique. En effet, les Star ont été considérés comme des 3-PRIIR ce qui menait à croire qu'ils n'admettaient pas plus que deux solutions au MGD et donc deux modes d'assemblage. Les différentes solutions ont été obtenues à l'aide du logiciel CATIA qui dispose d'un atelier de conception surfacique (*wireframe and surfaces design*) et capable de déterminer des intersections entre des surfaces et des courbes. Tous les résultats obtenus ont été validés numériquement en utilisant le MGI, et géométriquement, en assemblant le manipulateur en utilisant les deux ateliers d'assemblage (*assembly design*) et celui de la simulation des mécanismes (*kinematic design*). Dans ce mémoire, on s'est également intéressé à l'utilisation de la matrice jacobienne pour la résolution numérique du MGD et aussi pour la validation des méthodes graphiques. Pour les manipulateurs Star, à cause des déplacements passifs, les matrices jacobienne sériele et parallèle prennent une forme différente des 3-PRIIR. Dans ce mémoire, on a présenté deux méthodes graphiques qui permettent la résolution du MGD pour les Star. La première se base sur la discrétisation du méridien initial en une série de points qui vont constituer le départ des courbes hélicoïdales. Le nombre de ces points influe sur la précision de cette méthode. En effet, plus, on augmente ce nombre, plus on s'approche des surfaces réelles. Ceci nous mène à penser sur la possibilité de résoudre numériquement le problème en linéarisation

le système d'équations du MGD. Cette façon de faire permet d'avoir une idée sur la précision des résultats.

**REFERENCES**

- [1] MERLET, J.P., 1987. Parallel Manipulators, *Theory, Design, Kinematics, Dynamics and Control*, Rapport Technique N° 646, INRIA, France.
- [2] PASSOLUNGI, S., 1988. *Modélisation dynamique des robots parallèles*, Rapport interne, INRIA, France.
- [3] GOUGH, V.E., 1956-57. Contribution to Discussion to papers on research in Automobile Stability and Control and in Tyre Performance, by Cornell Staff, *Proceedings of Auto. Div. Instn mech. Engrs*, 392.
- [4] GOUGH, V.E. and Whitehall, S.G., 1962. Universal Tyre Test Machine, *Proceedings of the Ninth International Technical Congress F.I.S.I.T.A*, Institution of Mechanical Engineers.
- [5] STEWART, D., 1965, A Platform with six degrees of freedom, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 180, No. 5, pp. 371-378.

- [6] HERVÉ, J.M., 1991. *Dispositif pour le déplacement en translation spatiale d'un élément dans l'espace, en particulier pour robot mécanique*, French Patent, No. 9100286, European Patent No. 91403521.7, December 1991.
- [7] ANGELES, J. et Kecskeméthy, A. 1995. *Kinematic and dynamics of multi-body systems*, Springer-Verlag, pp. 86-95.
- [8] BARON, L. 1998. *Contributions to the estimation of rigid-body motion under sensor redundancy*, *Thèse de doctorat*, Université McGill, Canada, 200 pages.
- [9] BARON, L. 1991. *Éléments de robots*, École Polytechnique de Montréal, Canada, 70 pages.
- [10] SUGIMOTO, K., Duffy, J., 1982. Application of Linear Algebra To Screw Systems, *Mechanism and Machin Theory*, Vol. 17, No. 1, pp. 73-83.
- [11] HUNT, K.H., 1987. Special Configurations of Robot-Arms Via Screw Theory, Available End-Effector Displacement, *Robotica*, Vol. 5, pp. 17-22.

- [12] CHABLAT, D., 1998. *Domaines d'unicité et parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles*, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, France.
- [13] GOSSELIN, C.M., Angeles, J., 1990. Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 3, pp. 281-290.
- [14] MERLET, J.P., 1990. *Les robots parallèles, Traité des nouvelles technologies*, Série Robotique, Editions HERMES, France.
- [15] GOSSELIN, C.M., 1988. *Kinematic analysis, Optimization and Programming of Parallel robotic manipulators*, Ph.D. thesis, McGill University, Montréal, Québec, Canada.
- [16] DIEUDONNE, J.E., Parrish, R.V., Bardusch, R.E., 1972. *An Actuator Extension Transformation for a Motion Simulator and an Inverse Transformation Applying Newton-Raphson's Method*, NASA Technical Report TN D-7067.

- [17] SHI, X., Fenton, R.G., 1991. Forward Kinematic Solution of a General 6 Dof Stewart Platform on Three Point Position Data, *Proceeding of the Eighth World Congress on The Theory of Machines and Mechanisms*, Prague, Czechoslovakia, pp. 1015-1018.
- [18] CHARENTUS, S. et Renaud, M., 1999. *Modeling and control of a modular, redundant robot manipulator*, Rapport Technique, LAAS, Toulouse, France.
- [19] MERLET, J.P., 1989. *Parallel manipulators, Modes d'assemblage et cinématique directe sous forme polynomiale*, Rapport de recherche INRIA No. 1135, France.
- [20] GRIFFIS, M et Duffy, J., 1989. A forward displacement analysis of a class of Stewart platforms, *Journal of robotics Systems*, Vol. 6, No. 6, pp. 703-720.
- [21] NANUA, P., Waldrom, K.J., 1989. Direct Kinematic Solution of a Stewart Platform, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 4, pp. 438-444.



- [22] FREUDENSTEIN, F., 1962. On the Variety of Motions Generated by Mechanisms, *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 84, pp. 156-160.
- [23] HUNT, K.H., 1983. Structural Kinematics of in-parallel actuated robot arms, *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation Design*, Vol. 105, No. 4, pp. 705-712.
- [24] MERLET, J.P, 1989. *Parallel Manipulators, Modes d'assemblage et cinématique directe sous forme polynomiale*, Rapport de recherché, INRIA, France.
- [25] PIEPER, D., 1968. *The Kinematic of Manipulators Under Computer Control*, Ph.D. Thesis, Stanford University.
- [26] INNOCENTI, C. et Parenti-Castelli, V., 1991. Direct Kinematics of the 6-4 fully parallel manipulator with position and orientation uncoupled, *Proceedings of The European Robotics and Intelligent Systems Conference*, Corfù, Greece.

- [27] ZHANG, C., Song, S.M., 1991. Forward Kinematics of a Class of a Parallel (Stewart) Platforms with Closed-form Solutions, *Proceedings of The IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, California.
- [28] SAYD, M., Baron, L., Mascle, C., 2002. Problème géométrique direct des manipulateurs parallèles de topologie 3-PRPcR, *IDMME, 4<sup>ème</sup> Conférence internationale sur la conception et la fabrication intégrées en mécanique, IFMA*, Clermont- Ferrand, France.
- [29] BARON, L., Bernier, G., 2001. The Design of Parallel Manipulator of STAR Topology Under Isotropic Constraint, *ASME Design Automation Conference*, Pittsburgh, USA, pp. 9-12.