



Titre: Étude de problèmes de premier passage du processus de Wright-Fisher
Title: Fisher

Auteur: Marouane Chafi
Author:

Date: 2025

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Chafi, M. (2025). Étude de problèmes de premier passage du processus de Wright-Fisher [Master's thesis, Polytechnique Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/71480/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/71480/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Mario Lefebvre
Advisors:

Programme: Maîtrise recherche en mathématiques appliquées
Program:

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Étude de problèmes de premier passage du processus de Wright–Fisher

MAROUANE CHAFI

Département de mathématiques et de génie industriel

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Mathématiques

Décembre 2025

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

Étude de problèmes de premier passage du processus de Wright–Fisher

présenté par **Marouane CHAFI**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Jonathan JALBERT, président

Mario LEFEBVRE, membre et directeur de recherche

Donatien N'DRI, membre

DÉDICACE

À mes parents, pour leur confiance et leurs sacrifices silencieux...

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d’abord à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de mémoire, Monsieur Mario Lefebvre, pour la qualité de son encadrement. Son attention constante à l’évolution de mon travail, sa clarté dans les orientations proposées ainsi que sa grande disponibilité – notamment par des réponses rapides et précises à mes courriels – ont grandement facilité la progression de ce projet.

Je remercie également l’École Polytechnique de Montréal pour le cadre académique stimulant qu’elle m’a offert. Les ressources matérielles mises à disposition, en particulier l’accès à une bibliothèque riche et bien organisée, ont joué un rôle essentiel tout au long de mes recherches.

Je souhaite également adresser mes remerciements à Romain Mrad, avec qui j’ai suivi plusieurs cours. Nos échanges réguliers et notre entraide mutuelle ont constitué un appui précieux dans les moments exigeants du parcours.

À toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire, je témoigne ici ma reconnaissance.

RÉSUMÉ

Ce mémoire porte sur l'analyse des propriétés de passage à la frontière du processus de Wright–Fisher, un processus de diffusion stochastique défini sur l'intervalle $[0, 1]$, dont la dynamique est donnée par une équation différentielle à bruit multiplicatif. Ce type de processus intervient naturellement en génétique des populations, pour modéliser la dérive génétique, mais aussi en finance mathématique, notamment dans l'étude des taux d'intérêt ou de la concentration de richesse.

Le but de ce travail est d'étudier le comportement du processus avant son absorption en 0 ou en 1, en particulier, on calcule l'espérance du temps de premier passage aux bornes, et la surface moyenne balayée par le processus avant ce temps. Pour cela, des outils analytiques de la théorie des diffusions et des équations différentielles sont utilisés.

Le modèle est ensuite complété par l'ajout de sauts aléatoires, survenant à des instants régis par un processus de Poisson. Ces sauts, supposés être uniformes, permettent de mesurer leur influence sur les probabilités d'absorption aux bornes. L'étude se ramène alors à la résolution d'équations intégral-différentielles pour évaluer la probabilité d'atteindre chacune des bornes de l'intervalle.

Dans la dernière partie, des problèmes de commande optimale sont traités dans un contexte stochastique, où l'on cherche à diriger le processus vers une cible en utilisant une commande qui influence sa dynamique. Ce problème, issu des *homing problems*, est posé rigoureusement et résolu analytiquement par des techniques de contrôle optimal (résolution d'équations différentielles non linéaires).

Les résultats obtenus offrent une meilleure compréhension des mécanismes de diffusion avec absorption et sauts, et ouvrent la voie à des généralisations dans des cadres plus complexes, notamment multidimensionnels ou avec contrôle en temps réel.

ABSTRACT

This thesis explores the mathematical analysis of first-passage problems for the Wright–Fisher diffusion, a stochastic process defined on the interval $[0, 1]$ and governed by a square-root type stochastic differential equation. Motivated by its applications in population genetics and mathematical finance, the work aims to characterize the behavior of this process as it evolves toward its boundary states.

The first objective is to compute the expected time until absorption, that is, the first time the process reaches either boundary point. This includes quantifying the average area under the sample paths before absorption. The methods employed rely on solving boundary value problems for associated differential equations.

The second objective is to generalize the model by introducing random jumps occurring at random times, governed by a Poisson process. In this framework, the jump sizes are assumed to follow a uniform distribution, and their impact on the absorption probabilities is analyzed. This formulation naturally leads to integro-differential equations, which are solved under appropriate boundary conditions.

The final part of the thesis investigates optimal control strategies in the context of so-called homing problems, where the goal is to drive the process toward a specific state in an optimal manner. This involves the analysis of nonlinear second-order differential equations and the explicit characterization of optimal feedback controls.

The results contribute to a deeper understanding of boundary behaviors in diffusion–jump processes and provide analytical tools that may be applied in various domains, including quantitative finance, stochastic control, and evolutionary dynamics.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES FIGURES	ix
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	x
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Processus stochastiques	2
1.1.1 Définition formelle	2
1.1.2 Le mouvement brownien	2
1.2 Motivation de l'intégrale stochastique	2
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	8
2.1 Introduction	8
2.2 Rappels sur le modèle de Wright-Fisher	8
2.2.1 Modèle discret	8
2.2.2 Diffusion limite	8
2.3 Problèmes de premier passage	9
2.3.1 Problèmes de premier passage	9
2.3.2 Grandeurs d'intérêt	9
2.4 Principaux résultats et méthodes d'analyse	10
2.4.1 Approche par équations différentielles	10
2.4.2 Cas neutre	10
2.4.3 Cas avec sélection ou mutation	10
2.5 Cas avec sauts	11
2.5.1 Méthodes d'analyse	11
2.6 Extensions et développements récents	11

2.6.1	Méthodes numériques	11
2.6.2	Cadre multi-allélique et populations subdivisées	12
CHAPITRE 3 TEMPS MOYEN DE SORTIE ET AIRE MOYENNE AU PREMIER PASSAGE		13
3.1	Fonction génératrice des moments et équation de Kolmogorov rétrograde . .	13
3.1.1	Extraction des moments du temps de sortie	14
3.1.2	Aire moyenne couverte sur $[0, \tau(x)]$	16
CHAPITRE 4 ÉTUDE DU PROCESSUS DE WRIGHT-FISHER AVEC SAUTS UNIFORMES		19
4.1	Modèle général	19
4.2	Fonction génératrice des moments du temps de sortie	20
4.3	Temps moyen de sortie avec sauts	22
4.4	Probabilité d'extinction :	23
CHAPITRE 5 PROBLÈMES DE RETOUR AU NIVEAU CIBLE POUR LA DIFFUSION DE WRIGHT-FISHER		34
5.1	Modèle commandé et temps de sortie	34
5.2	Fonction de coût et fonction valeur	35
5.3	Équation différentielle pour la fonction valeur et la commande optimale . . .	35
5.4	Résolution dans le cas non linéarisable	37
5.5	Généralisation avec dérive affine et coût terminal	39
CHAPITRE 6 CONCLUSION		44
6.1	Synthèse des travaux	44
6.2	Limitations de la solution proposée	44
6.3	Améliorations futures	45
RÉFÉRENCES		46

LISTE DES FIGURES

Figure 3.1	Temps moyen $m(x)$ pour atteindre les états absorbants 0 ou 1 en fonction de l'état initial $x \in (0, 1)$	16
Figure 3.2	Comportement de la fonction $A(x) = 2(x - 1) \ln(1 - x)$ sur l'intervalle $(0, 1)$	18
Figure 4.1	Comparaison entre $p_1(x)$ (trait plein) donné par (4.22) pour $\lambda = 1$, et $p_0(x) = 1 - x$ (trait pointillé) pour $x \in [0, 1]$	33
Figure 5.1	La fonction de coût $F(x)$ pour $x \in [0, 1]$	39

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

EDS Equation différentielle stochastique

EDO Equation différentielle ordinaire

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Les processus de diffusion occupent une place importante en génétique des populations, en particulier le modèle de Wright–Fisher, qui décrit l’évolution de la fréquence d’un allèle (variante d’un gène) dans une population. Ce mémoire s’intéresse aux problèmes de premier passage, c’est-à-dire au temps nécessaire pour que le processus atteigne pour la première fois un ensemble d’états, pour la version continue du modèle décrite par l’équation différentielle stochastique

$$dX(t) = \sqrt{X(t)(1 - X(t))} dB(t),$$

où $X(t) \in [0, 1]$ représente la fréquence de l’allèle et $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard.

Ce modèle présente un intérêt particulier pour l’étude des temps d’atteinte des états absorbants 0 et 1, qui correspondent respectivement à la perte ou à la fixation de l’allèle dans la population. Plus précisément, on parle de *perte* (ou *extinction*) lorsque la fréquence atteint 0, ce qui signifie que l’allèle disparaît de la population, et de *fixation* lorsque la fréquence atteint 1, c’est-à-dire que l’allèle est présent chez tous les individus.

travail examine trois aspects liés à cette dynamique. D’abord, on s’intéresse au temps moyen d’absorption, noté

$$\omega(x) := \mathbb{E}[\tau(x)],$$

où $\tau(x)$ est le temps (aléatoire) nécessaire pour que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$, démarré en $X_0 = x$, atteigne l’une des bornes 0 ou 1. Cette quantité est ensuite obtenue à partir de l’équation de Kolmogorov rétrograde. Ensuite, une version du modèle intégrant des sauts aléatoires est analysée afin de représenter des perturbations extérieures ponctuelles. Enfin, un problème de commande est étudié : on vise à minimiser le temps moyen avant extinction en agissant sur la dérive. L’analyse repose sur des techniques de calcul stochastique, sur l’étude d’équations intégral-différentielles et sur des arguments issus du contrôle optimal.

Afin de fournir un cadre rigoureux pour l’étude du processus de Wright-Fisher, il est nécessaire d’introduire les notions fondamentales de processus stochastiques et, en particulier, de processus de diffusion. Cette section s’appuie principalement sur l’ouvrage de référence de Bernt Øksendal, *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*, qui propose une introduction claire et progressive aux équations différentielles stochastiques et à leurs applications.

1.1 Processus stochastiques

1.1.1 Définition formelle

Suivant la présentation de Øksendal [1, Chap. 2], un processus stochastique est un objet mathématique utilisé pour modéliser l'évolution d'un système soumis aux fluctuations aléatoires au cours du temps. Intuitivement, on peut le concevoir comme une collection de trajectoires aléatoires représentant, par exemple, le déplacement d'une particule, la valeur d'un actif financier ou la fréquence d'un allèle dans une population.

De manière formelle, un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in T}$ prenant leurs valeurs dans un espace d'états $E \subseteq \mathbb{R}^n$. L'ensemble T , appelé espace des temps, est souvent l'intervalle $[0, \infty)$, mais il peut aussi être défini sur un ensemble différent, par exemple un intervalle fini $[a, b]$ ou un ensemble discret comme $\mathbb{N}$.

Pour chaque instant $t \in T$ fixé, $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une variable aléatoire. Inversement, pour une réalisation $\omega \in \Omega$ fixée, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ représente une **trajectoire** (ou un *chemin*) du processus. On peut ainsi considérer le processus comme une application de deux variables $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$.

1.1.2 Le mouvement brownien

Suivant la présentation de Øksendal [1, Chap. 2], un **mouvement brownien standard** $\{B_t\}_{t \geq 0}$ est un processus stochastique réel satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $B_0 = 0$ presque sûrement ;
2. Les accroissements sont indépendants : pour tout $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les variables $B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes ;
3. Les accroissements sont stationnaires et gaussiens : pour tout $s < t$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$;
4. Les trajectoires $t \mapsto B_t(\omega)$ sont continues presque sûrement.

Dans le cas multidimensionnel, le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ est un vecteur dont les composantes sont des mouvements browniens indépendants.

1.2 Motivation de l'intégrale stochastique

Pour modéliser certains systèmes évolutifs soumis à l'incertitude, on s'intéresse à des équations différentielles contenant un terme de bruit aléatoire. Une forme typique rencontrée dans

de nombreuses applications (en ingénierie, biologie ou finance) est donnée par :

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \text{bruit},$$

où b et σ sont des fonctions déterministes décrivant respectivement la dérive et l'intensité du bruit.

Il est naturel de vouloir représenter ce bruit par un processus stochastique $\{W_t\}_{t \geq 0}$ satisfaisant certaines propriétés statistiques de base. On souhaiterait que les accroissements $W_{t_2} - W_{t_1}$ soient indépendants pour $t_1 \neq t_2$, que le processus soit stationnaire au sens où la distribution conjointe de $(W_{t_1+h}, \dots, W_{t_k+h})$ soit la même pour tout $h \geq 0$, et que l'espérance soit nulle, c'est-à-dire $\mathbb{E}[W_t] = 0$ pour tout $t \geq 0$.

Cependant, comme l'explique Øksendal [1, Chap. 3], le « bruit idéal » que l'on aimerait insérer dans une équation différentielle — un signal qui, à chaque instant, produirait une fluctuation nouvelle et indépendante — ne peut pas être décrit par un processus stochastique ordinaire $t \mapsto \xi(t)$. En effet, exiger à la fois une indépendance « instant par instant » et une régularité temporelle conduit à une contradiction : un tel signal serait nécessairement trop irrégulier pour être interprété comme une fonction du temps.

L'objet mathématique correspondant existe néanmoins au *sens généralisé* sous le nom de *bruit blanc*. Plutôt que de le définir point par point, on le caractérise par ce qu'il produit lorsqu'on l'intègre sur un intervalle : ces intégrales sont centrées et leurs variances sont proportionnelles à la longueur de l'intervalle. Ce point de vue permet de relier naturellement le bruit blanc au mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$: de manière informelle, le bruit blanc peut être vu comme la « dérivée » de B_t . Comme le formalisme du bruit blanc est plus technique, on préfère travailler directement avec le mouvement brownien

Le mouvement brownien standard $(B_t)_{t \geq 0}$ fournit alors précisément ce cadre : il possède des accroissements indépendants et stationnaires, une espérance nulle, et des trajectoires continues *presque sûrement*, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(t \mapsto B_t \text{ est continue sur } [0, \infty)) = 1.$$

Autrement dit, l'ensemble des réalisations présentant une discontinuité est de probabilité nulle. En remplaçant le terme bruité par $(B_t)_{t \geq 0}$ dans une équation différentielle, on obtient alors une équation différentielle stochastique (EDS) de la forme :

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t,$$

où l'on cherche à définir rigoureusement l'intégrale stochastique $\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$.

Cette intégrale ne peut pas être interprétée comme une intégrale classique, car le mouvement brownien présente des trajectoires trop irrégulières. L'idée d'Itô consiste à définir l'intégrale comme la limite d'une somme discrète inspirée des méthodes d'Euler ; voir, par exemple, Øksendal [1, Chap. 3]. Pour une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$, on considère l'approximation :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sigma(t_j, X_{t_j}) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

Ce choix — consistant à évaluer la fonction σ au début de chaque intervalle — conduit à une construction cohérente et bien définie de l'intégrale stochastique.

Cette intégrale, appelée *intégrale d'Itô*, est un outil fondamental pour l'analyse des processus de diffusion, c'est-à-dire des modèles dynamiques où l'aléa intervient de manière continue à travers un mouvement brownien.

Définition d'un processus de diffusion

La définition suivante est extraite du chapitre 7 de Øksendal [1], consacré aux propriétés fondamentales des diffusions d'Itô.

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien de dimension m , et soient $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables. On considère l'équation différentielle stochastique autonome suivante :

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \quad X_s = x, \quad t \geq s. \quad (1.1)$$

Si cette équation admet une solution forte $(X_t)_{t \geq s}$ unique, alors le processus $\{X_t\}_{t \geq s}$ est appelé une **diffusion d'Itô** (ou **processus de diffusion**).

L'existence et l'unicité de la solution de (1.1) sont assurées si b et σ satisfont la condition de Lipschitz locale suivante :

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

et la condition de croissance linéaire :

$$|b(x)|^2 + |\sigma(x)|^2 \leq K(1 + |x|^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

pour certaines constantes $L, K > 0$.

On note la solution de (1.1) par $X_t^{s,x}$, pour $t \geq s$, et on écrit X_t^x lorsqu'on prend $s = 0$. Sous ces conditions, le processus ainsi défini est homogène en temps, c'est-à-dire que sa dynamique dépend uniquement de l'état actuel X_t , et non du temps t lui-même.

Le terme $b(x)$ est appelé *coefficient de dérive*, et $\sigma(x)$ est appelé *coefficient de diffusion*.

Formule d'Itô

La formule d'Itô constitue un résultat fondamental du calcul stochastique, permettant d'étendre la règle de dérivation des fonctions composées au cadre des diffusions. On reprend ici l'énoncé du théorème 7.1 de Øksendal [1] dans le cas unidimensionnel.

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une diffusion d'Itô solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t,$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard. Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ une fonction deux fois continûment différentiable. Alors, presque sûrement,

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \sigma^2(X_t) dt. \quad (1.4)$$

En substituant l'expression de dX_t , on obtient

$$df(X_t) = \left(b(X_t) f'(X_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(X_t) f''(X_t) \right) dt + \sigma(X_t) f'(X_t) dB_t. \quad (1.5)$$

Générateur infinitésimal d'un processus de diffusion

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une diffusion d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ définie par l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \quad (1.6)$$

où $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est le coefficient de dérive, $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ le coefficient de diffusion, et $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard de dimension m . On suppose que b et σ satisfont les conditions garantissant l'existence d'une solution.

On associe à cette diffusion un opérateur différentiel $\mathcal{A}$, appelé générateur infinitésimal du processus. Il est défini par

$$\mathcal{A}f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x[f(X_t)] - f(x)}{t}, \quad (1.7)$$

pour toute fonction f appartenant à l'ensemble $D_{\mathcal{A}}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles cette limite existe en tout point $x \in \mathbb{R}$.

En appliquant la formule d'Itô à $f(X_t)$ pour $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, on obtient l'expression explicite suivante du générateur :

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n [\sigma(x)\sigma^\top(x)]_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x). \quad (1.8)$$

Ou dans le cas unidimensionnel :

$$\mathcal{A}f(x) = b(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x) \quad (1.9)$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est donc un opérateur différentiel du second ordre, constitué d'un terme de transport (la dérive) et d'un terme diffusif (la matrice de covariance infinitésimale $\sigma\sigma^\top$).

Formule de Dynkin

La formule de Dynkin relie le générateur $\mathcal{A}$ aux espérances des fonctions tests le long de la trajectoire du processus. Pour toute fonction $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ et tout temps d'arrêt τ vérifiant $\mathbb{E}_x[\tau] < \infty$, on a :

$$\mathbb{E}_x[f(X_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^\tau \mathcal{A}f(X_s) ds \right]. \quad (1.10)$$

Cette formule est une conséquence directe de l'application de la formule d'Itô à $f(X_t)$ et de la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. Elle permet notamment de résoudre des problèmes de sortie de domaines, de calcul d'espérance de fonctionnelles, ou encore d'établir des équations vérifiées par des quantités d'intérêt.

Équation rétrograde de Kolmogorov

Finalement, le chapitre 8 du livre de Øksendal [1] introduit l'équation rétrograde de Kolmogorov, qui relie la dynamique d'un processus de diffusion à une équation aux dérivées partielles. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une diffusion d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}$, solution de l'équation stochastique

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t,$$

et soit $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal associé, donné par (1.8).

Soit $f \in C_0^2(\mathbb{R})$. On considère la fonction

$$u(t, x) := \mathbb{E}_x[f(X_t)],$$

qui représente l'espérance de f appliquée à l'état du processus à l'instant t , sachant que $X_0 = x$. Le théorème 8.1.1 de [1] établit que u satisfait à l'équation rétrograde de Kolmogorov suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \mathcal{A}u(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.11)$$

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Introduction

La diffusion de Wright–Fisher est un modèle de référence en génétique des populations pour décrire l'évolution de la fréquence d'un allèle dans une population. Elle s'obtient comme limite continue du modèle de Wright–Fisher en temps discret lorsque la taille de la population tend vers l'infini. Dans ce cadre, la dérive génétique est représentée par le terme de diffusion (fluctuations aléatoires), tandis que les effets systématiques tels que les mutations et la sélection peuvent être modélisés par un terme de dérive. Cette formulation probabiliste permet ainsi d'analyser rigoureusement la dynamique des fréquences alléliques.

L'objectif de ce chapitre est de proposer une *revue synthétique* des travaux portant sur les *problèmes de premier passage* appliqués à cette diffusion. Nous présenterons les concepts essentiels, les principaux résultats théoriques ainsi que certaines applications, en insistant sur les méthodes analytiques et numériques développées dans la littérature.

2.2 Rappels sur le modèle de Wright-Fisher

2.2.1 Modèle discret

Le modèle de Wright–Fisher en temps discret décrit, génération après génération, l'évolution de la proportion d'un allèle dans une population de taille constante N . Dans le cas biallélique, la fréquence de l'allèle d'intérêt à la génération $n + 1$ est obtenue par un échantillonnage binomial à partir de la génération précédente :

$$X_{n+1} \sim \text{Binomial}(N, X_n/N).$$

Lorsque $N \rightarrow \infty$, cette dynamique discrète converge vers un modèle de diffusion continue, qui constitue la base de nombreuses analyses en génétique des populations [2].

2.2.2 Diffusion limite

Lorsque $N \rightarrow \infty$, la chaîne de Markov discrète (pour la fréquence allélique) converge vers une diffusion continue $(X_t)_{t \geq 0}$ sur $[0, 1]$ satisfaisant l'EDS

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t,$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard.

Dans le *modèle de Wright–Fisher de base* (reproduction aléatoire sans forces systématiques), l'évolution moyenne de la fréquence allélique ne présente pas de tendance directionnelle : l'unique mécanisme est la *dérive génétique*. Ceci se traduit par une dérive nulle,

$$\mu(x) = 0,$$

tandis que la variabilité due à l'échantillonnage aléatoire des gamètes impose une intensité de bruit proportionnelle à $x(1 - x)$, soit

$$\sigma(x) = \sqrt{x(1 - x)}.$$

Des extensions du modèle introduisent une dérive $\mu(x) \neq 0$ pour représenter des effets directionnels tels que la sélection et/ou la mutation [1, 3, 4].

2.3 Problèmes de premier passage

2.3.1 Problèmes de premier passage

On s'intéresse au *temps de premier passage*, c'est-à-dire au premier instant où le processus atteint une valeur donnée $a \in [0, 1]$:

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}.$$

Dans le modèle de Wright–Fisher, les cas particuliers $a = 0$ et $a = 1$ admettent une interprétation biologique directe : le premier correspond à la perte (extinction) de l'allèle étudié, tandis que le second correspond à sa fixation dans la population. Ces notions jouent un rôle central en génétique des populations, car elles permettent de quantifier la probabilité de perte ou de fixation, ainsi que la distribution (ou l'espérance) du temps nécessaire pour que l'un de ces événements se produise [2, 5].

2.3.2 Grandeurs d'intérêt

Les études se concentrent sur trois grandeurs clés caractérisant les dynamiques de premier passage. D'abord, la *distribution complète* de l'instant de premier passage T_a , qui décrit la loi des instants où le processus atteint pour la première fois un niveau prescrit. Ensuite, l'*espérance* $\mathbb{E}[T_a]$, indicateur du temps moyen menant à la fixation ou à l'extinction selon le contexte. Enfin, les *probabilités de franchissement d'un seuil avant un autre*, étroitement liées

au problème classique de la ruine du joueur (*gambler's ruin*).

2.4 Principaux résultats et méthodes d'analyse

2.4.1 Approche par équations différentielles

Pour une diffusion unidimensionnelle

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t,$$

les quantités d'intérêt associées au processus (probabilités d'atteinte, temps de premier passage, etc.) peuvent être caractérisées à l'aide de son générateur infinitésimal $\mathcal{A}$, défini pour toute fonction test $f \in C^2$ par

$$\mathcal{A}f(x) = b(x) f'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) f''(x).$$

En particulier, ces quantités s'obtiennent comme solutions de problèmes aux limites pour des équations différentielles ordinaires. Par exemple, le temps moyen d'absorption $\omega(x) = \mathbb{E}_x[\tau]$ est caractérisé comme solution de l'équation de Poisson $\mathcal{A}\omega(x) = -1$ sur $(0, 1)$, avec conditions aux bords $\omega(0) = \omega(1) = 0$ [5, 6].

2.4.2 Cas neutre

Dans le cas neutre, c'est-à-dire en l'absence de sélection, on a $\mu(x) = 0$ et $\sigma(x) = \sqrt{x(1-x)}$. Les travaux fondateurs de Kimura [7, 8], puis la synthèse présentée dans Crow et Kimura [9], donnent des expressions fermées pour la probabilité de fixation et, dans certains cas, pour l'espérance du temps de fixation.

2.4.3 Cas avec sélection ou mutation

Lorsque la sélection intervient, par exemple avec un terme de dérive de la forme $\mu(x) = sx(1-x)$, l'équation associée devient plus complexe et sa résolution fait apparaître des *fonctions spéciales*, en particulier les fonctions hypergéométriques. Les développements présentés dans Ewens [2] ainsi que dans Crow et Kimura [9] donnent une description détaillée de la construction de ces solutions et de leur interprétation en génétique des populations.

2.5 Cas avec sauts

Les extensions du modèle de Wright–Fisher intégrant des *sauts* sont moins classiques, mais elles ont été étudiées dans plusieurs contextes, notamment pour rendre compte d’événements rares ou extrêmes. Dans ce cadre, la dynamique peut être décrite par une équation de type diffusion avec sauts :

$$dX_t = s X_t(1 - X_t) dt + \sqrt{X_t(1 - X_t)} dW_t + J_t dN_t,$$

où :

- N_t est un processus de Poisson représentant les instants de survenue des sauts ;
- J_t désigne l’amplitude du saut, supposée aléatoire ou déterministe selon le modèle.

De tels modèles permettent de mieux saisir l’effet d’événements ponctuels (majeures mutations, goulots d’étranglement, chocs de type financier) sur la dynamique des fréquences alléliques. Une étude détaillée des temps et lieux de sortie pour un Wright–Fisher avec sauts a notamment été proposée par Lefebvre [10].

2.5.1 Méthodes d’analyse

Plusieurs approches peuvent être mobilisées pour étudier le modèle de Wright–Fisher avec sauts. Une première consiste à établir des équations intégral-différentielles décrivant la dynamique du processus, ce qui permet parfois d’obtenir des résultats analytiques. Cette méthode a été appliquée par Lefebvre [10] pour caractériser les temps et lieux de sortie dans le cas de diffusions de Wright–Fisher avec sauts.

Dans un cadre plus général, la théorie des processus de Lévy fournit un formalisme adapté à l’étude de modèles avec sauts, en particulier via les équations intégral-différentielles. Ces aspects sont développés de manière détaillée dans l’ouvrage de Cont et Tankov [11].

2.6 Extensions et développements récents

2.6.1 Méthodes numériques

Lorsque la complexité du modèle augmente, par exemple avec plusieurs allèles ou une structure spatiale, les approches analytiques ne sont généralement plus applicables. Deux stratégies numériques principales sont alors utilisées.

D’une part, la résolution par *méthodes d’éléments finis* de l’équation aux dérivées partielles associée permet d’obtenir des solutions approchées dans des cadres où les solutions analy-

tiques issues des EDO classiques ne sont plus accessibles. Une telle approche a été mise en œuvre par Jenkins et Song [12].

D'autre part, les *simulations de Monte Carlo* constituent un outil de référence pour estimer numériquement la loi de T_a dans des contextes où la complexité du modèle empêche toute résolution explicite. Navascués et Emerson [13] illustrent cette approche à travers l'étude de l'âge des allèles.

2.6.2 Cadre multi-allélique et populations subdivisées

Lorsque l'on modélise plus de deux allèles, la diffusion de Wright–Fisher se généralise naturellement au simplexe de dimension supérieure. Cette extension accroît la complexité mathématique et rend l'analyse plus délicate. Le cadre théorique de ces généralisations est présenté en détail par Ethier et Kurtz [14] ainsi que par Durrett [3].

Parallèlement, plusieurs travaux appliqués se sont intéressés aux effets de la structuration spatiale des populations, mettant en évidence l'impact de la subdivision et de la migration sur les temps de fixation et la diversité génétique.

CHAPITRE 3 TEMPS MOYEN DE SORTIE ET AIRE MOYENNE AU PREMIER PASSAGE

Dans cette section, nous nous intéressons au comportement d'un processus stochastique à l'intérieur d'un domaine borné, en particulier au temps moyen de sortie ainsi qu'à l'aire moyenne au premier passage. Les résultats analytiques et les courbes présentés sont principalement extraits de l'article [15], rédigé dans le cadre de ce mémoire.

3.1 Fonction génératrice des moments et équation de Kolmogorov rétrograde

Soit $X(t)$ un processus de diffusion évoluant dans l'intervalle $[0, 1]$, et soit $\tau(x)$ le temps aléatoire de sortie du processus depuis une position initiale $x \in (0, 1)$:

$$\tau(x) := \inf\{t \geq 0 \mid X(t) \notin (0, 1), X(0) = x\}. \quad (3.1)$$

On définit la fonction génératrice des moments du temps de sortie $\tau(x)$ par

$$M(x; \alpha) := \mathbb{E}\left[e^{-\alpha \tau(x)}\right], \quad \alpha > 0, \quad (3.2)$$

où α est le paramètre (variable) de transformation, et x désigne la condition initiale du processus.

Cette fonction caractérise les moments de $\tau(x)$ (lorsqu'ils existent) et satisfait une équation différentielle fondamentale, appelée *équation de Kolmogorov rétrograde*. Dans le modèle neutre de Wright–Fisher (sans mutation ni sélection), le processus $X(t)$ est une diffusion sur $[0, 1]$ dont la variance instantanée est proportionnelle à $x(1 - x)$, ce qui conduit au générateur

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2} x(1 - x) f''(x),$$

la fonction $M(\cdot; \alpha)$ vérifie l'équation de Kolmogorov rétrograde

$$\mathcal{L}M(x; \alpha) = \alpha M(x; \alpha), \quad x \in (0, 1), \quad (3.3)$$

avec les conditions limites

$$M(0; \alpha) = M(1; \alpha) = 1.$$

En remplaçant $\mathcal{L}$ par son expression explicite, on obtient

$$\frac{1}{2}x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}M(x;\alpha) = \alpha M(x;\alpha), \quad x \in (0,1). \quad (3.4)$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire du second ordre.

3.1.1 Extraction des moments du temps de sortie

La fonction $M(x;\alpha)$ admet un développement en série de Taylor en α autour de 0 :

$$M(x;\alpha) = \mathbb{E} \left[1 - \alpha\tau(x) + \frac{\alpha^2}{2}\tau^2(x) - \frac{\alpha^3}{6}\tau^3(x) + \dots \right]. \quad (3.5)$$

Par identification terme à terme, on obtient :

$$\left. \frac{d^n}{d\alpha^n} M(x;\alpha) \right|_{\alpha=0} = (-1)^n \mathbb{E} [\tau^n(x)]. \quad (3.6)$$

En particulier, le temps moyen de sortie est donné par :

$$\mathbb{E}[\tau(x)] = - \left. \frac{d}{d\alpha} M(x;\alpha) \right|_{\alpha=0}. \quad (3.7)$$

En dérivant l'équation de Kolmogorov en temps inverse (1.11) par rapport au paramètre α , puis en évaluant à $\alpha = 0$, on obtient une équation différentielle satisfaite par la fonction

$$m(x) := \mathbb{E}[\tau(x)],$$

représentant le temps moyen de sortie à partir du point $x \in (0,1)$. En effet,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{2}x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}M(x;\alpha) \right) \right|_{\alpha=0} &= \left. \frac{d}{d\alpha} (\alpha M(x;\alpha)) \right|_{\alpha=0} \\ \frac{1}{2}x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} \left(\left. \frac{dM(x;\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \right) &= -1, \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2}x(1-x)\frac{d^2m(x)}{dx^2} = -1,$$

soumise aux conditions :

$$m(0) = m(1) = 0.$$

En multipliant par $\frac{2}{x(1-x)}$, on obtient :

$$m''(x) = -\frac{2}{x(1-x)}.$$

Une primitive de $m''(x)$ s'écrit :

$$m'(x) = \int \frac{-2}{x(1-x)} dx = -2 \log x + 2 \log(1-x) + C_1.$$

En intégrant à nouveau :

$$m(x) = -2x \log x + 2(x-1) \log(1-x) + C_1x + C_2.$$

En imposant les conditions limites $m(0) = m(1) = 0$ et en utilisant les limites usuelles¹, on obtient $C_1 = C_2 = 0$. Ainsi, la solution s'écrit :

$$m(x) = -2x \log x + 2(x-1) \log(1-x).$$

Plus généralement, les moments d'ordre supérieur du temps de sortie $\tau(x)$, notés

$$m_k(x) := \mathbb{E}[\tau^k(x)],$$

satisfont aux équations différentielles récursives :

$$\frac{1}{2}x(1-x) \frac{d^2 m_{k+1}(x)}{dx^2} = -(k+1)m_k(x),$$

soumis aux mêmes conditions limites :

$$m_k(0) = m_k(1) = 0.$$

Ces équations peuvent être résolues récursivement en commençant par $m_0(x) \equiv 1$, permettant ainsi la construction explicite des moments successifs $\mathbb{E}[\tau^k(x)]$.

1. On utilise que $x \log x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ et $(1-x) \log(1-x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

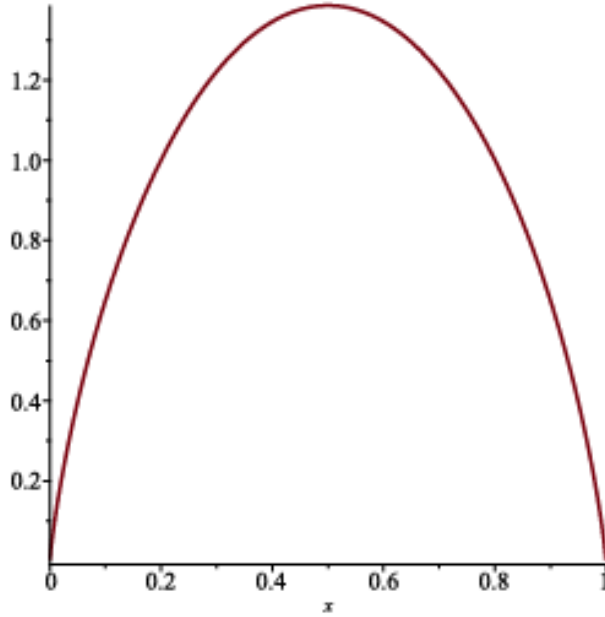


FIGURE 3.1 Temps moyen $m(x)$ pour atteindre les états absorbants 0 ou 1 en fonction de l'état initial $x \in (0, 1)$

3.1.2 Aire moyenne couverte sur $[0, \tau(x)]$

Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ une diffusion à valeurs dans $[0, 1]$, et soit

$$\tau(x) := \inf\{t \geq 0 : X_t \in \{0, 1\}\}$$

le temps d'absorption lorsque $X_0 = x \in (0, 1)$. On définit l'aire moyenne couverte avant absorption par

$$A(x) := \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau(x)} X_t dt \right]. \quad (3.8)$$

Équation différentielle vérifiée par $A(x)$

Dans le cas neutre du modèle de Wright–Fisher, le générateur infinitésimal est

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{1}{2} x(1-x) f''(x).$$

Par la formule de Dynkin (ou, de manière équivalente, par la représentation de Feynman–Kac) appliquée à la fonctionnelle additive $\int_0^{\tau(x)} X_t dt$, on obtient que A est la solution du

problème aux limites

$$\mathcal{A}A(x) = -x, \quad x \in (0, 1), \quad (3.9)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} x(1-x) A''(x) = -x, \quad x \in (0, 1), \quad (3.10)$$

avec les conditions aux bords

$$A(0) = A(1) = 0, \quad (3.11)$$

puisque $\tau(x) = 0$ lorsque $x \in \{0, 1\}$. On renvoie à [16] pour une présentation détaillée de cette dérivation.

On commence par transformer l'équation sous une forme plus simple :

$$A''(x) = -\frac{2}{1-x}.$$

En intégrant une première fois, on obtient :

$$A'(x) = 2 \ln(1-x) + C_1,$$

et en intégrant à nouveau :

$$A(x) = 2(x-1) \ln(1-x) + C_1 x + C_2.$$

En appliquant la condition $A(0) = 0$, on obtient $C_2 = 0$. La condition $A(1) = 0$ impose ensuite $C_1 = 0$ afin d'assurer la régularité de la solution à la frontière.

La solution unique vérifiant l'équation différentielle et les conditions aux limites est donc :

$$A(x) = 2(x-1) \ln(1-x), \quad \text{pour } x \in (0, 1). \quad (3.12)$$

Représentation graphique

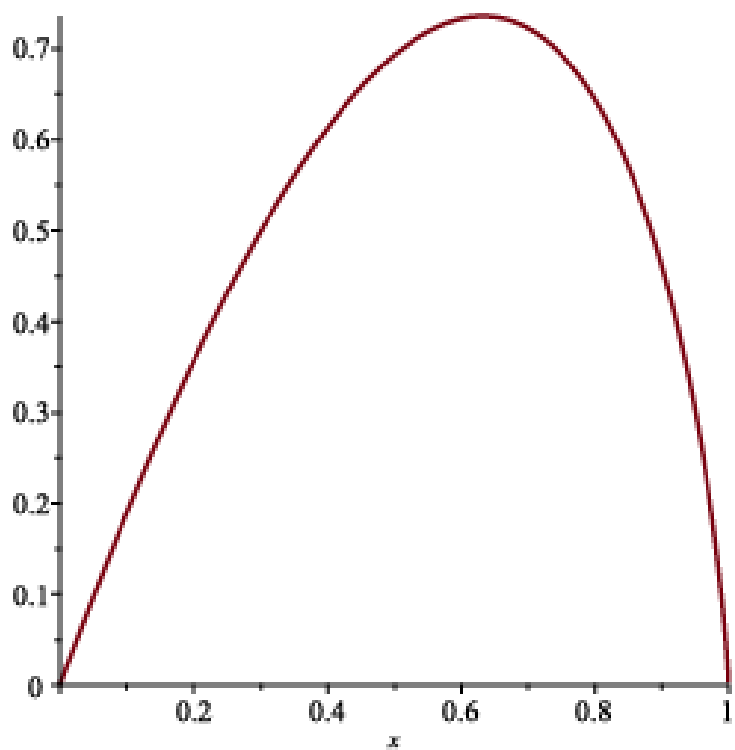


FIGURE 3.2 Comportement de la fonction $A(x) = 2(x-1)\ln(1-x)$ sur l'intervalle $(0, 1)$

CHAPITRE 4 ÉTUDE DU PROCESSUS DE WRIGHT-FISHER AVEC SAUTS UNIFORMES

Dans ce chapitre, nous analysons l'effet de l'introduction de sauts dans un processus de diffusion de type Wright–Fisher. Ces sauts sont gouvernés par un processus de Poisson *homogène dans le temps* et leurs amplitudes sont i.i.d. selon une loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$, ce qui fournit une modélisation volontairement simple de perturbations environnementales exogènes. Les développements théoriques ainsi que les illustrations présentées s'appuient principalement sur l'article de Lefebvre et Chafi [15].

4.1 Modèle général

Nous considérons un processus stochastique à sauts $\{X(t), t \geq 0\}$, défini sur l'intervalle $[0, 1]$ et régi par la dynamique suivante :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sqrt{X(s)(1 - X(s))} dB(s) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (4.1)$$

où $B(t)$ désigne un mouvement brownien standard, $N(t)$ un processus de Poisson homogène de paramètre $\lambda > 0$, et $(Y_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, indépendantes de $B(t)$ et de $N(t)$.

Le terme

$$\int_0^t \sqrt{X(s)(1 - X(s))} dB(s)$$

correspond à une diffusion de type Wright–Fisher. Cette dynamique continue garantit que, en l'absence de perturbation, le processus reste confiné dans l'intervalle $[0, 1]$.

Le processus de Poisson homogène $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ compte le nombre de sauts survenus jusqu'au temps t . Il est défini comme un processus à accroissements indépendants et stationnaires, tel que $N(0) = 0$ presque sûrement, et pour tout $h > 0$, la probabilité d'avoir k sauts pendant l'intervalle $[t, t + h]$ est donnée par la loi de Poisson :

$$\mathbb{P}(N(t + h) - N(t) = k) = \frac{(\lambda h)^k}{k!} e^{-\lambda h}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La composante discrète du processus, représentée par la somme

$$\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

modélise l'effet cumulé des sauts aléatoires. Chaque saut Y_i correspond à une perturbation instantanée de l'état du processus. Ces perturbations sont supposées suivre une loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$, traduisant une symétrie entre les effets positifs et négatifs. La densité de probabilité associée est donnée par :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(y), \quad (4.2)$$

où $\mathbf{1}_{[-1,1]}(y)$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1, 1]$.

Ainsi, le processus $X(t)$ est un exemple de processus de diffusion avec sauts poissoniens, dans lequel l'évolution continue est régulièrement perturbée par des déplacements discrets aléatoires d'amplitude bornée.

4.2 Fonction génératrice des moments du temps de sortie

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la fonction génératrice des moments du temps de sortie :

$$M_1(x; \alpha) := \mathbb{E}_x[e^{\alpha\tau(x)}]. \quad (4.3)$$

Comme dans le cas sans saut, M_1 satisfait à l'équation $\mathcal{L}M_1 = \alpha M_1$ sur $(0, 1)$, où $\mathcal{L}$ désigne le générateur du processus avec sauts.

Dans le cas d'un processus de type Wright–Fisher perturbé par des sauts gouvernés par un processus de Poisson d'intensité λ et d'amplitudes i.i.d. $Y \sim \text{Unif}[-1, 1]$, le générateur s'écrit,

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2} x(1-x) f''(x) + \lambda \left(\mathbb{E}[f(x+Y)] - f(x) \right), \quad x \in (0, 1), \quad (4.4)$$

avec

$$\mathbb{E}[f(x+Y)] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x+y) dy.$$

En particulier, M_1 vérifie l'équation intégrale-différentielle

$$\frac{1}{2} x(1-x) M_1''(x; \alpha) + \lambda \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 M_1(x+y; \alpha) dy - M_1(x; \alpha) \right) = \alpha M_1(x; \alpha), \quad (4.5)$$

voir notamment [17, 18].

Enfin, comme $\tau(x) = 0$ lorsque $x \leq 0$ ou $x \geq 1$, on a la condition au bord

$$M_1(x; \alpha) = 1, \quad x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1. \quad (4.6)$$

Pour simplifier le terme intégral dans (4.5), on remarque que lorsque $x \in (0, 1)$, les bornes de l'intégration peuvent dépasser l'intervalle de définition de M_1 , auquel cas on utilise la condition aux bords. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 M_1(x+y; \alpha) dy &= \int_{-1}^{-x} 1 dy + \int_{-x}^{1-x} M_1(x+y; \alpha) dy + \int_{1-x}^1 1 dy \\ &= 1 - x + \int_0^1 M_1(z; \alpha) dz + x \\ &= 1 + \int_0^1 M_1(z; \alpha) dz \end{aligned}$$

En utilisant la simplification précédente du terme intégral, l'équation intégral-différentielle (4.5) se réécrit, pour $x \in (0, 1)$, sous la forme

$$\frac{1}{2}x(1-x) M_1''(x; \alpha) + \lambda \left(\frac{1}{2} \left(1 + \int_0^1 M_1(z; \alpha) dz \right) - M_1(x; \alpha) \right) = \alpha M_1(x; \alpha). \quad (4.7)$$

En dérivant ensuite (4.7) par rapport à x (le terme $\int_0^1 M_1(z; \alpha) dz$ étant constant en x), on obtient l'EDO d'ordre trois

$$\frac{1}{2}x(1-x)M_1'''(x; \alpha) + \frac{1}{2}(1-2x)M_1''(x; \alpha) = (\alpha + \lambda)M_1'(x; \alpha). \quad (4.8)$$

En posant $u(x) := M_1'(x; \alpha)$, cette équation se ramène à une équation différentielle linéaire d'ordre deux :

$$x(1-x)u''(x) + (1-2x)u'(x) - 2(\alpha + \lambda)u(x) = 0, \quad (4.9)$$

qui est une équation différentielle hypergéométrique classique de la forme :

$$x(1-x)u'' + [c - (a+b+1)x]u' - abu = 0,$$

avec les paramètres :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1 + \sqrt{1 - 8(\alpha + \lambda)}}{2}, \\ b &= \frac{1 - \sqrt{1 - 8(\alpha + \lambda)}}{2}, \\ c &= 1. \end{aligned}$$

4.3 Temps moyen de sortie avec sauts

Afin de déterminer l'équation vérifiée par la fonction du temps moyen de sortie $m(x) := \mathbb{E}[\tau(x)]$, nous utilisons la relation classique liant cette fonction à la dérivée de la fonction génératrice des moments :

$$m(x) = - \left. \frac{d}{d\alpha} M_1(x; \alpha) \right|_{\alpha=0},$$

où $M_1(x; \alpha) := \mathbb{E}[e^{\alpha\tau(x)}]$ satisfait, comme montré précédemment, à l'équation intégral-différentielle :

$$\frac{1}{2}x(1-x)\frac{d^2 M_1(x; \alpha)}{dx^2} + \lambda \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 M_1(x+y; \alpha) dy - M_1(x; \alpha) \right) = \alpha M_1(x; \alpha). \quad (4.10)$$

Nous dérivons les deux membres de cette équation par rapport à α , en intervertissant les dérivées avec les intégrales et les dérivées spatiales, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d}{d\alpha} M_1(x; \alpha) \right) + \lambda \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d}{d\alpha} M_1(x+y; \alpha) dy \right. \\ \left. - \frac{d}{d\alpha} M_1(x; \alpha) \right) = M_1(x; \alpha) + \alpha \frac{d}{d\alpha} M_1(x; \alpha). \end{aligned}$$

En évaluant cette expression en $\alpha = 0$, on utilise que $M_1(x; 0) = 1$, et on obtient :

$$\frac{1}{2}x(1-x)m''(x) + \lambda \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 m(x+y) dy - m(x) \right) = -1,$$

où nous avons multiplié les deux membres par -1 .

Nous en déduisons que la fonction $m(x)$ satisfait à l'équation intégral-différentielle suivante :

$$\frac{1}{2}x(1-x)m''(x) + \lambda \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 m(x+y) dy - m(x) \right) = -1. \quad (4.11)$$

Les conditions aux frontières sont imposées par la définition du temps de sortie, qui s'annule

dès que le processus dépasse les bornes de l'intervalle :

$$m(x) = 0 \quad \text{pour } x \leq 0 \quad \text{et} \quad x \geq 1.$$

Pour $x \in (0, 1)$, on a $m(x + y) = 0$ dès que $x + y \notin [0, 1]$ (puisque $m(u) = 0$ hors de $[0, 1]$). Ainsi,

$$\int_{-1}^1 m(x + y) dy = \int_{-x}^{1-x} m(x + y) dy.$$

En posant $u = x + y$, on obtient immédiatement

$$\int_{-x}^{1-x} m(x + y) dy = \int_0^1 m(u) du,$$

quantité indépendante de x . Par conséquent, en dérivant l'équation intégrale-différentielle vérifiée par $m(x)$ par rapport à x , on retrouve l'équation différentielle suivante :

$$x(1 - x)m'''(x) + (1 - 2x)m''(x) - 2\lambda m'(x) = 0. \quad (4.12)$$

Cette équation est de la forme générale de l'équation hypergéométrique :

$$x(1 - x)u'' + [c - (a + b + 1)x]u' - abu = 0,$$

avec les paramètres identifiés comme suit :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1 + \sqrt{1 - 8\lambda}}{2}, \\ b &= \frac{1 - \sqrt{1 - 8\lambda}}{2}, \\ c &= 1, \end{aligned}$$

où l'inconnue $u(x) = m'(x)$ correspond à la dérivée première de la fonction du temps moyen de sortie.

4.4 Probabilité d'extinction :

Après avoir étudié la moyenne du temps de sortie, nous nous intéressons désormais à la probabilité que le processus atteigne l'état absorbant 0 avant d'atteindre 1. Plus précisément, on considère la fonction suivante :

$$p_1(x) := \mathbb{P}[X_1(\tau_1(x)) \leq 0], \quad (4.13)$$

où $\tau_1(x)$ est le temps de sortie de l'intervalle $[0, 1]$ par le processus à sauts uniformes, en partant de la position $X_1(0) = x$.

La fonction $p_1(x)$ satisfait à l'équation intégral-différentielle suivante :

$$\frac{1}{2}x(1-x)p_1''(x) + \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 p_1(x+y) dy - p_1(x) = 0, \quad (4.14)$$

avec les conditions limites :

$$p_1(x) = 1 \quad \text{si } x \leq 0, \quad p_1(x) = 0 \quad \text{si } x \geq 1.$$

Le terme intégral peut être décomposé selon la position de $x \in (0, 1)$, en tenant compte du support de p_1 , comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p_1(x+y) dy &= \int_{-x}^{1-x} p_1(x+y) dy + \int_{-1}^{-x} 1 dy + \int_{1-x}^1 0 dy \\ &= \int_{-x}^{1-x} p_1(x+y) dy + (1-x) \\ &= \int_0^1 p_1(z) dz + (1-x) \end{aligned}$$

En reportant cela dans l'équation (4.14), on obtient :

$$\frac{1}{2}x(1-x)p_1''(x) + \frac{\lambda}{2}(1-x) + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 p_1(y) dy = p_1(x). \quad (4.15)$$

On remarque que l'intégrale $\int_0^1 p_1(y) dy$ est une constante. En dérivant (4.15) par rapport à x , on obtient une équation différentielle ordinaire d'ordre trois :

$$\frac{1}{2}x(1-x)p_1^{(3)}(x) + \frac{1}{2}(1-2x)p_1''(x) - \lambda(p_1'(x) + \frac{1}{2}) = 0. \quad (4.16)$$

Cette équation se ramène à une équation différentielle linéaire d'ordre deux en posant $\rho(x) := p_1'(x)$. Celle-ci se résout analytiquement à l'aide de fonctions hypergéométriques, ce qui permettra, par intégration, d'obtenir une expression explicite de $p_1(x)$. La suite de la section se consacre alors à trouver une formule explicite de la probabilité d'extinction p_1 .

Forme analytique de la fonction $p_1(x)$:

La fonction $p_1(x) := \mathbb{P}[X_1(\tau_1(x)) \leq 0]$, définie pour $x \in (0, 1)$, satisfait à l'équation différentielle d'ordre trois suivante :

$$\frac{1}{2}x(1-x)p_1^{(3)}(x) + \frac{1}{2}(1-2x)p_1''(x) - \lambda p_1'(x) = \frac{\lambda}{2}, \quad (4.17)$$

avec les conditions limites :

$$p_1(0) = 1, \quad p_1(1) = 0,$$

auxquelles s'ajoute, par symétrie,

$$p_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Nous procédons à la résolution de l'équation différentielle en la décomposant en une solution particulière et une solution générale de l'équation homogène associée. On vérifie que la fonction $p_p(x) = -\frac{x}{2}$ constitue une solution particulière de l'équation. Il reste donc à déterminer la solution générale $p_h(x)$ de l'équation homogène suivante :

$$\frac{1}{2}x(1-x)p_h^{(3)}(x) + \frac{1}{2}(1-2x)p_h''(x) - \lambda p_h'(x) = 0. \quad (4.18)$$

Tout d'abord, rappelons la définition de la fonction hypergéométrique de Gauss, notée ${}_2F_1(a, b; c; x)$, qui est donnée par la série infinie :

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!},$$

où $(q)_n$ désigne le symbole de Pochhammer défini par :

$$(q)_0 = 1, \quad (q)_n = q(q+1)(q+2) \cdots (q+n-1) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Nous cherchons à déterminer deux solutions indépendantes de l'équation homogène sous la forme :

$$p_h(x) = x^A {}_2F_1(a, b; c; x^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^{A-n},$$

où les paramètres A, a, b, c seront choisis de manière à satisfaire l'équation différentielle (4.18).

Pour alléger les notations, on pose :

$$m_n := \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!},$$

de sorte que la solution proposée s'écrit simplement :

$$p_h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n x^{A-n}.$$

On a tout d'abord les dérivées successives de p_h :

$$\begin{aligned} p'_h(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (A-n) m_n x^{A-(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A-(n-1)) m_{n-1} x^{A-n}, \\ p''_h(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (A-n)(A-(n-1)) m_n x^{A-(n+2)} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (A-(n-1))(A-(n-2)) m_{n-2} x^{A-n}, \\ p'''_h(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (A-n)(A-(n-1))(A-(n-2)) m_n x^{A-(n+3)} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} (A-(n-1))(A-(n-2))(A-(n-3)) m_{n-3} x^{A-n}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour le terme $x(1-x)p'''_h(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} x(1-x)p'''_h(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} (A-(n-1))(A-(n-2))(A-(n-3)) m_{n-3} x^{A-(n-1)} \\ &\quad - \sum_{n=3}^{\infty} (A-(n-1))(A-(n-2))(A-(n-3)) m_{n-3} x^{A-(n-2)} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (A-n)(A-(n-1))(A-(n-2)) m_{n-2} x^{A-n} \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} (A-(n-1))(A-n)(A-(n+1)) m_{n-1} x^{A-n} \\ &= -A(A-1)(A-2)m_0 x^{A-1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (A-n+1)(A-n) \left[(A-n+2)m_{n-2} - (A-n-1)m_{n-1} \right] x^{A-n}. \end{aligned}$$

Pour le terme $(1 - 2x)p_h''(x)$, on a :

$$\begin{aligned}
(1 - 2x)p_h''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} (A - (n - 1))(A - (n - 2)) m_{n-2} x^{A-n} \\
&\quad - \sum_{n=2}^{\infty} 2(A - (n - 1))(A - (n - 2)) m_{n-2} x^{A-(n-1)} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (A - (n - 1))(A - (n - 2)) m_{n-2} x^{A-n} \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} 2(A - n)(A - (n - 1)) m_{n-1} x^{A-n} \\
&= -2A(A - 1)m_0 x^{A-1} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (A - (n - 1)) \left[(A - (n - 2))m_{n-2} - 2(A - n)m_{n-1} \right] x^{A-n}.
\end{aligned}$$

Finalement pour le terme $2\lambda p_h'(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
2\lambda p_h'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\lambda(A - (n - 1)) m_{n-1} x^{A-n} \\
&= 2\lambda A m_0 x^{A-1} + \sum_{n=2}^{\infty} 2\lambda(A - (n - 1)) m_{n-1} x^{A-n}.
\end{aligned}$$

Il faut donc satisfaire la condition de récurrence suivante, valable pour tout $n \geq 2$:

$$(A - n)(A - n + 2)m_{n-2} - (A - n)(A - n - 1)m_{n-1} + (A - n + 2)m_{n-2} - 2(A - n)m_{n-1} = 2\lambda(A - n + 1)m_{n-1}.$$

Cette relation peut être réécrite sous la forme :

$$\left[(A - n)(A - n + 2) + (A - n + 2) \right] m_{n-2} = \left[2\lambda + 2(A - n) + (A - n)(A - n - 1) \right] m_{n-1}.$$

Autrement dit, pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{m_{n-1}}{m_{n-2}} = \frac{(A - n + 2)(A - n + 1)}{2\lambda + (A - n)(A - n + 1)}.$$

En effectuant une translation d'indice, on obtient la relation de récurrence suivante, valable pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{m_{n+1}}{m_n} = \frac{(A - n)(A - n - 1)}{2\lambda + (A - n - 1)(A - n - 2)}.$$

La seconde condition provient de l'annulation du terme de tête (correspondant à x^A) dans

l'équation (4.18) :

$$-A(A-1)(A-2)m_0 - 2A(A-1)m_0 - 2\lambda A m_0 = 0.$$

En factorisant $m_0 \neq 0$, cette condition se réécrit sous la forme :

$$A^2 - A + 2\lambda = 0. \quad (4.19)$$

Choix des paramètres

Posons

$$k = \sqrt{1 - 8\lambda}.$$

Nous allons montrer que les deux quadruples de paramètres (a, b, c, A) suivants satisfont la récurrence obtenue :

$$\left(-\frac{1+k}{2}, \frac{1-k}{2}, 1-k, \frac{1+k}{2}\right), \quad \left(\frac{k-1}{2}, \frac{1+k}{2}, 1+k, \frac{1-k}{2}\right).$$

Rappelons que, dans le cas général, pour une série hypergéométrique de Gauss

$${}_2F_1(a, b; c; x^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n,$$

les coefficients satisfont la relation de récurrence

$$\frac{m_{n+1}}{m_n} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)}.$$

On remarque que, pour les deux quadruples proposés, la seconde condition (4.19) est automatiquement satisfaite. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation (4.19) sont :

$$A = \frac{1 + \sqrt{1 - 8\lambda}}{2} = \frac{1+k}{2}, \quad A = \frac{1 - \sqrt{1 - 8\lambda}}{2} = \frac{1-k}{2}.$$

Nous pouvons donc passer à la vérification de la première condition. Pour le premier qua-

druple, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{m_{n+1}}{m_n} &= \frac{\left(n - \frac{k+1}{2}\right) \left(n + \frac{1-k}{2}\right)}{(n+1-k)(n+1)} \\
 &= \frac{(n-A)(n+1-A)}{(n+1-(2A-1))(n+1)} \\
 &= \frac{(A-n)(A-n-1)}{(n+1)(n+2)-2(n+1)A},
 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $A = \frac{1+k}{2}$.

Il reste à vérifier que :

$$(n+1)(n+2) - 2(n+1)A = 2\lambda + (A-n-1)(A-n-2),$$

ce qui est équivalent à

$$(n+1)(n+2) - 2(n+1)A = 2\lambda + A^2 - (2n+3)A + (n+1)(n+2),$$

puis à

$$A^2 - A + 2\lambda = 0,$$

relation qui est bien vérifiée.

Pour le deuxième quadruple de solutions, on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{m_{n+1}}{m_n} &= \frac{\left(n + \frac{k-1}{2}\right) \left(n + \frac{1+k}{2}\right)}{(n+1+k)(n+1)} \\
 &= \frac{(n-A)(n-(A-1))}{(n+2-2A)(n+1)} \\
 &= \frac{(A-n)(A-n-1)}{(n+2)(n+1)-2A(n+1)}.
 \end{aligned}$$

On retrouve donc exactement la même expression que pour le premier quadruple, ce qui conclut la vérification des conditions et notre démonstration.

Forme de $p(x)$

La fonction $p(x)$ s'écrit alors sous la forme :

$$p(x) = k_1 x^{\frac{1+k}{2}} {}_2F_1\left(\frac{-1-k}{2}, \frac{1-k}{2}; 1-k; x^{-1}\right) + k_2 x^{\frac{1-k}{2}} {}_2F_1\left(\frac{k-1}{2}, \frac{1+k}{2}; 1+k; x^{-1}\right) - \frac{x}{2} + k_3,$$

où k_1 , k_2 et k_3 sont des constantes complexes à déterminer.

Détermination des constantes k_1, k_2, k_3

Les conditions limites de la fonction p sont :

$$p(1) = 0, \quad p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad p(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} p(x) = 1.$$

1) Condition en $x = 1$

En remplaçant x par 1 dans l'expression de p , on pose

$$G_-(k) := {}_2F_1\left(\frac{-1-k}{2}, \frac{1-k}{2}; 1-k; 1\right) = \frac{\Gamma(1-k)}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)},$$

$$G_+(k) := {}_2F_1\left(\frac{k-1}{2}, \frac{1+k}{2}; 1+k; 1\right) = \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+k}{2}\right)}.$$

Ainsi,

$$k_1 G_-(k) + k_2 G_+(k) + k_3 = \frac{1}{2}.$$

Ici, Γ désigne la fonction gamma d'Euler.

2) Condition en $x = \frac{1}{2}$

Ici $x^{-1} = 2$. On pose

$$\Phi_-(k) := {}_2F_1\left(\frac{-1-k}{2}, \frac{1-k}{2}; 1-k; 2\right), \quad \Phi_+(k) := {}_2F_1\left(\frac{k-1}{2}, \frac{1+k}{2}; 1+k; 2\right).$$

Alors

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = k_1 2^{-\frac{1+k}{2}} \Phi_-(k) + k_2 2^{-\frac{1-k}{2}} \Phi_+(k) - \frac{1}{4} + k_3 = \frac{1}{2},$$

d'où

$$k_1 2^{-\frac{1+k}{2}} \Phi_-(k) + k_2 2^{-\frac{1-k}{2}} \Phi_+(k) + k_3 = \frac{3}{4}.$$

3) Comportement quand $x \rightarrow 0^+$.

Posons $z = x^{-1} \rightarrow +\infty$. Dans $p(x)$, les deux contributions hypergéométriques sont

$$x^{\frac{1+k}{2}} {}_2F_1\left(\frac{-1-k}{2}, \frac{1-k}{2}; 1-k; x^{-1}\right) \quad \text{et} \quad x^{\frac{1-k}{2}} {}_2F_1\left(\frac{k-1}{2}, \frac{1+k}{2}; 1+k; x^{-1}\right).$$

Nous cherchons la limite de chacune lorsque $x \rightarrow 0^+$. Pour ce faire, nous utilisons la formule de connexion au cas résonant d'Abramowitz–Stegun [19, Eq. 15.3.14] et une majoration de la somme infinie qui y apparaît (argument technique que nous n'exposons pas ici). Il s'ensuit que, pour chacun des deux termes, lorsque $x \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} x^{\frac{1+k}{2}} {}_2F_1\left(\frac{-1-k}{2}, \frac{1-k}{2}; 1-k; x^{-1}\right) &= \frac{\Gamma(1-k)}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)} (-1)^{\frac{1+k}{2}} \\ &+ \frac{\Gamma(1-k)}{\Gamma\left(\frac{-1-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)} (-1)^{\frac{k-1}{2}} x \left[\log\left(\frac{1}{x}\right) + 1 - 2\gamma - \psi\left(\frac{1-k}{2}\right) - \psi\left(\frac{1+k}{2}\right) \right] \\ &+ O\left(x^2 \log \frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{\frac{1-k}{2}} {}_2F_1\left(\frac{k-1}{2}, \frac{1+k}{2}; 1+k; x^{-1}\right) &= \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+k}{2}\right)} (-1)^{-\frac{k-1}{2}} \\ &+ \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)} (-1)^{-\frac{k+1}{2}} x \left[\log\left(\frac{1}{x}\right) + 1 - 2\gamma - \psi\left(\frac{1+k}{2}\right) - \psi\left(\frac{1-k}{2}\right) \right] \\ &+ O\left(x^2 \log \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

où ψ désigne la *fonction digamma*, c'est-à-dire la dérivée logarithmique de la fonction gamma :

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Ainsi, lorsque $x \rightarrow 0^+$, on obtient les limites suivantes pour les deux blocs :

$$\begin{aligned} x^{\frac{1+k}{2}} {}_2F_1\left(\frac{-1-k}{2}, \frac{1-k}{2}; 1-k; x^{-1}\right) &\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(1-k)}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)} (-1)^{\frac{1+k}{2}} = C_-(k), \\ x^{\frac{1-k}{2}} {}_2F_1\left(\frac{k-1}{2}, \frac{1+k}{2}; 1+k; x^{-1}\right) &\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+k}{2}\right)} (-1)^{-\frac{k-1}{2}} = C_+(k). \end{aligned}$$

De telle sorte que l'on obtient l'équation suivante :

$$k_1 C_-(k) + k_2 C_+(k) + k_3 = 1.$$

On obtient ainsi le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} k_1 G_-(k) + k_2 G_+(k) + k_3 = \frac{1}{2}, \\ k_1 2^{-\frac{1+k}{2}} \Phi_-(k) + k_2 2^{-\frac{1-k}{2}} \Phi_+(k) + k_3 = \frac{3}{4}, \\ k_1 C_-(k) + k_2 C_+(k) + k_3 = 1. \end{cases} \quad (4.20)$$

Cas particulier $\lambda = 1$

Dans le cas particulier $\lambda = 1$, on fixe $k = i\sqrt{7}$. Les coefficients $G_{\pm}(k)$, $\Phi_{\pm}(k)$ et $C_{\pm}(k)$ sont évalués numériquement à l'aide de MAPLE puis substitués dans le système (4.20). Après arrondi, on obtient le système complexe suivant :

$$\begin{cases} (0,1172 - 0,4437i) k_1 + (0,1172 + 0,4437i) k_2 + k_3 = \frac{1}{2}, \\ (0,0214 - 0,0763i) k_1 + (-4,8670 + 1,3676i) k_2 + k_3 = \frac{3}{4}, \\ (0,0070 + 0,0018i) k_1 + (-28,3158 + 7,4798i) k_2 + k_3 = 1. \end{cases} \quad (4.21)$$

la résolution numérique du système (4.21) conduit aux valeurs approchées

$$k_1 \approx -0,1474 - 0.5246i, \quad k_2 \approx -0,0082 - 0.0023i, \quad k_3 = 0,75.$$

En reportant ces constantes dans l'expression générale de $p(x)$, on obtient une approximation explicite sur l'intervalle $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} p_1(x) \approx & (-0.1474 - 0.5246i) x^{0.5+1.3229i} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}; 1 - i\sqrt{7}; x^{-1}\right) \\ & + (-0.0082 - 0.0023i) x^{0.5-1.3229i} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}; 1 + i\sqrt{7}; x^{-1}\right) \\ & + 0.75 - \frac{x}{2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dans le cas sans sauts ($\lambda = 0$), l'équation différentielle (4.14) se réduit à :

$$\frac{1}{2}x(1-x)p_0''(x) = 0, \quad (4.23)$$

ce qui implique que $p_0''(x) = 0$ pour $x \in (0, 1)$. La solution unique satisfaisant les conditions

$p_0(0) = 1, p_0(1) = 0$, est alors donnée par :

$$p_0(x) = 1 - x.$$

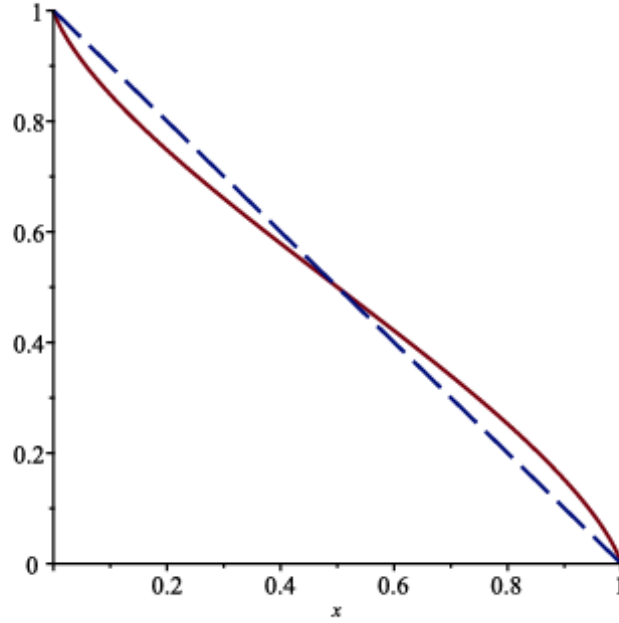


FIGURE 4.1 Comparaison entre $p_1(x)$ (trait plein) donné par (4.22) pour $\lambda = 1$, et $p_0(x) = 1 - x$ (trait pointillé) pour $x \in [0, 1]$.

On observe une perturbation de la probabilité de référence $p_0(x) = 1 - x$. On constate une tendance à moins atteindre 0 lorsque $x > 0,5$, et inversement. Cette asymétrie s'explique par le fait que, lorsqu'on est initialement proche de 1, la probabilité d'effectuer un saut uniforme conduisant immédiatement à une sortie par le haut (au-delà de 1) est plus élevée. De manière similaire, lorsqu'on est proche de 0, la probabilité de sortir rapidement par le bas est également plus importante.

CHAPITRE 5 PROBLÈMES DE RETOUR AU NIVEAU CIBLE POUR LA DIFFUSION DE WRIGHT–FISHER

Dans ce chapitre, nous étudions une version commandée du processus de Wright–Fisher, dans laquelle une loi de commande $u(\cdot)$ intervient directement dans la dynamique stochastique. Plus précisément, on considère le processus $\{X^u(t), t \geq 0\}$ solution de

$$dX^u(t) = b(X^u(t)) u(X^u(t)) dt + \sqrt{X^u(t)[1 - X^u(t)]} dB(t), \quad (5.1)$$

où $u(\cdot)$ est supposée continue et $b(\cdot)$ est une fonction donnée.

Ce cadre permet de modéliser des situations où l'on souhaite *influencer* l'évolution du système jusqu'à la réalisation d'un événement terminal, typiquement la sortie de l'intervalle $(0, 1)$. De tels problèmes sont connus dans la littérature sous le nom de *homing problems*.

L'objectif est alors de déterminer une commande optimale u^* minimisant un coût cumulé jusqu'au temps de sortie $\tau(x)$. On introduit pour cela le fonctionnel

$$J(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau(x)} \left(\frac{1}{2} q(X^u(t)) u^2(X^u(t)) + r(X^u(t)) + \theta \right) dt \right], \quad (5.2)$$

où $q(\cdot) > 0$, $r(\cdot)$ sont des fonctions réelles et $\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Le terme $\frac{1}{2} q(x) u^2$ correspond à une pénalisation quadratique de la commande (coût d'effort), modulée par un poids d'état $q(x) > 0$. Le terme $r(x)$ est un coût de trajectoire (*running cost*) imposé par l'état et permettant d'encoder des régions plus ou moins favorables de $(0, 1)$. Enfin, θ joue le rôle d'un coût constant par unité de temps, introduisant une incitation (si $\theta > 0$) à réduire la durée avant sortie. La commande optimale u^* est alors définie comme une loi de rétroaction minimisant l'espérance de ce coût cumulé jusqu'à $\tau(x)$, pour $X^u(0) = x \in (0, 1)$.

5.1 Modèle commandé et temps de sortie

On considère la version commandée du processus de Wright–Fisher (5.1). On note

$$\tau(x) := \inf\{t \geq 0 : X_t^u \notin (0, 1)\} \quad (5.3)$$

le temps de sortie de l'intervalle ouvert $(0, 1)$.

5.2 Fonction de coût et fonction valeur

Le coût accumulé jusqu'à la sortie est modélisé par

$$J(x; u) = \int_0^{\tau(x)} \left[\frac{1}{2} q(X_t^u) u^2(X_t^u) + r(X_t^u) + \theta \right] dt, \quad (5.4)$$

où $q(\cdot) > 0$ pondère le coût quadratique de la commande, $r(\cdot)$ est un coût d'état et $\theta \in \mathbb{R}$ un paramètre constant. La *fonction valeur* est

$$F(x) := \inf_{u[X_u(t)], 0 \leq t \leq \tau(x)} \mathbb{E}[J(x)], \quad x \in (0, 1), \quad (5.5)$$

avec conditions limites :

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 0, \quad (5.6)$$

qui reflètent l'extinction du coût lorsque le processus a quitté $(0, 1)$.

5.3 Équation différentielle pour la fonction valeur et la commande optimale

Principe d'optimalité de Bellman. Le principe d'optimalité (Bellman [20]) affirme qu'une stratégie optimale est *temporellement cohérente* : après un temps court Δt , la politique qui reste optimale à partir de l'état atteint est la même que celle que l'on choisirait en repartant de cet état. Cette propriété s'exprime à l'aide de la fonction valeur

$$F(x) := \inf_u \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau(x)} \left(\frac{1}{2} q(X_s^u) u^2(X_s^u) + r(X_s^u) + \theta \right) ds \right],$$

qui représente le coût minimal attendu lorsque $X_0^u = x$.

En appliquant le principe d'optimalité sur l'intervalle $[0, \Delta t]$, on scinde le coût total en la somme du coût cumulé sur $[0, \Delta t]$ et du coût optimal résiduel à partir de l'état atteint au temps Δt , à savoir $F(X_{\Delta t}^u)$. On obtient ainsi la relation de programmation dynamique suivante :

$$F(x) = \inf_{u[X_u(t)], 0 \leq t \leq \tau(x)} \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\Delta t} \left(\frac{1}{2} q(X_s^u) u^2(X_s^u) + r(X_s^u) + \theta \right) ds + F(X_{\Delta t}^u) \right], \quad (5.7)$$

où (X_t^u) suit la dynamique (5.1) avec $X_0^u = x$.

On applique le développement d'Itô à $F(X_t^u)$, en supposant F deux fois dérivable par rapport

à x :

$$dF(X_t^u) = F'(X_t^u) dX_t^u + \frac{1}{2} F''(X_t^u) X_t^u (1 - X_t^u) dt.$$

En utilisant la dynamique (5.1) , on obtient :

$$dF(X_t^u) = F'(X_t^u) b(X_t^u) u(X_t^u) dt + F'(X_t^u) \sqrt{X_t^u (1 - X_t^u)} dB_t + \frac{1}{2} x(1 - x) F''(X_t^u) dt.$$

En intégrant de $t = 0$ à $t = \Delta t$ et en supposant $u(\cdot)$ et $b(\cdot)$ continues, avec Δt suffisamment petit, on peut approximer :

$$b(X_s^u) \approx b(x), \quad u(X_s^u) \approx u(x), \quad X_s^u \approx x \quad \text{pour } s \in [0, \Delta t].$$

Ainsi :

$$F(X_{\Delta t}^u) \approx F(x) + F'(x) b(x) u(x) \Delta t + \frac{1}{2} x(1 - x) F''(x) \Delta t + \sqrt{x(1 - x)} \Delta B_t.$$

On remplace cette expansion dans l'équation de Bellman (5.7) :

$$\begin{aligned} F(x) = \inf_{u[X^u(t)], 0 \leq t \leq \Delta t} \mathbb{E} & \left[\int_0^{\Delta t} \left(\frac{1}{2} q(X_s^u) u^2(X_s^u) + r(X_s^u) + \theta \right) ds \right. \\ & + F(x) + F'(x) b(x) u(x) \Delta t \\ & \left. + \frac{1}{2} x(1 - x) F''(x) \Delta t + \sqrt{x(1 - x)} \Delta B_t \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

En utilisant $\mathbb{E}[\Delta B_t] = 0$ et en simplifiant par $F(x)$ des deux côtés, puis en divisant par Δt , on obtient :

$$0 = \inf_{u[X^u(t)], 0 \leq t \leq \Delta t} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \left(\frac{1}{2} q(X_s^u) u^2(X_s^u) + r(X_s^u) + \theta \right) ds + F'(x) b(x) u(x) + \frac{1}{2} x(1 - x) F''(x) \right].$$

Enfin, lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, la moyenne temporelle converge vers sa valeur instantanée :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \left(\frac{1}{2} q(X_s^u) u^2(X_s^u) + r(X_s^u) + \theta \right) ds \longrightarrow \frac{1}{2} q(x) u^2(x) + r(x) + \theta.$$

On obtient ainsi l'équation de programmation dynamique :

$$0 = \inf_{u(x)} \left\{ \frac{1}{2} q(x) u^2(x) + r(x) + \theta + F'(x) b(x) u(x) + \frac{1}{2} x(1 - x) F''(x) \right\}.$$

La minimisation porte sur $u(x)$ car, lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, seule la valeur du contrôle à l'état courant x intervient.

La minimisation par rapport à $u(x)$ donne :

$$u^*(x) = -\frac{b(x)}{q(x)} F'(x). \quad (5.9)$$

En substituant u^* dans l'équation précédente, on arrive à l'EDO non linéaire suivante :

$$\theta + r(x) - \frac{b^2(x)}{2q(x)} [F'(x)]^2 + \frac{1}{2} x(1-x) F''(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (5.10)$$

avec les conditions limites

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad F(1) = 0.$$

5.4 Resolution dans le cas non linéarisable

Whittle [21] a démontré que, si la relation

$$x(1-x) = \delta \frac{b^2(x)}{q(x)} \quad (5.11)$$

est satisfaite pour une constante $\delta > 0$, alors l'équation (5.10) peut être transformée en une équation différentielle ordinaire linéaire en posant

$$\Phi(x) = \exp\left(-\frac{F(x)}{\delta}\right). \quad (5.12)$$

Dans ce cadre, la transformation exponentielle (5.12) élimine le terme quadratique en $F'(x)$, ce qui simplifie considérablement la résolution de l'équation.

Dans la suite, nous considérons un problème pour lequel la variance infinitésimale $x(1-x)$ n'est pas proportionnelle à $b^2(x)/q(x)$. La condition de linéarisation (5.11) n'étant pas vérifiée, la transformation de Whittle ne peut donc pas être appliquée directement.

on se place dans le cas particulier suivant : $\theta = 0$, $r(x) = x$, $q(x) \equiv 1/2$ et $b(x) = \sqrt{x}$. Ces choix définissent un exemple paramétrique concret pour lequel on peut expliciter et comparer les solutions.

Ici, $b^2/q = x$ n'est pas proportionnel à $x(1-x)$, d'où l'impossibilité d'utiliser (5.11). Dans ce

cas, l'équation (5.10) se réduit à

$$x - x [F'(x)]^2 + \frac{1}{2} x(1-x) F''(x) = 0, \quad F(0) = F(1) = 0. \quad (5.13)$$

qu'on peut réécrire en simplifiant par x comme :

$$1 - [F'(x)]^2 + \frac{1}{2} (1-x) F''(x) = 0, \quad F(0) = F(1) = 0. \quad (5.14)$$

En posant

$$y(x) := F'(x),$$

l'équation (5.14) se réécrit sous la forme

$$(1-x) y'(x) = 2(y^2(x) - 1), \quad (5.15)$$

qui est une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

On vérifie que l'ensemble des fonctions

$$y(x) = \operatorname{th}(2 \ln(x-1) + C_1),$$

avec $C_1 \in \mathbb{R}$, est solution de (5.15). En effet, en posant $f(x) := \operatorname{th}(2 \ln(x-1) + C_1)$ et en utilisant la propriété

$$\operatorname{th}'(z) = 1 - \operatorname{th}^2(z),$$

on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{x-1} (1 - f^2(x)), \\ (1-x) f'(x) &= 2(f^2(x) - 1), \end{aligned}$$

ce qui correspond bien à (5.15).

Une primitive implicite de (5.14) est donnée par

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{th}(2 \ln(s-1) + C_1) ds, \quad (5.16)$$

où la constante C_1 est déterminée numériquement (à l'aide de MAPLE) de façon à satisfaire la condition aux limites $F(1) = 0$. On obtient ainsi

$$C_1 \approx 1,53676, \quad F(x) \approx \int_0^x \operatorname{th}(2 \ln(s-1) + 1,53676) ds. \quad (5.17)$$

La commande optimale (5.9) prend alors la forme explicite :

$$u^*(x) \approx -2\sqrt{x} \operatorname{th}(2 \ln(x-1) + 1, 53676), \quad 0 < x < 1. \quad (5.18)$$

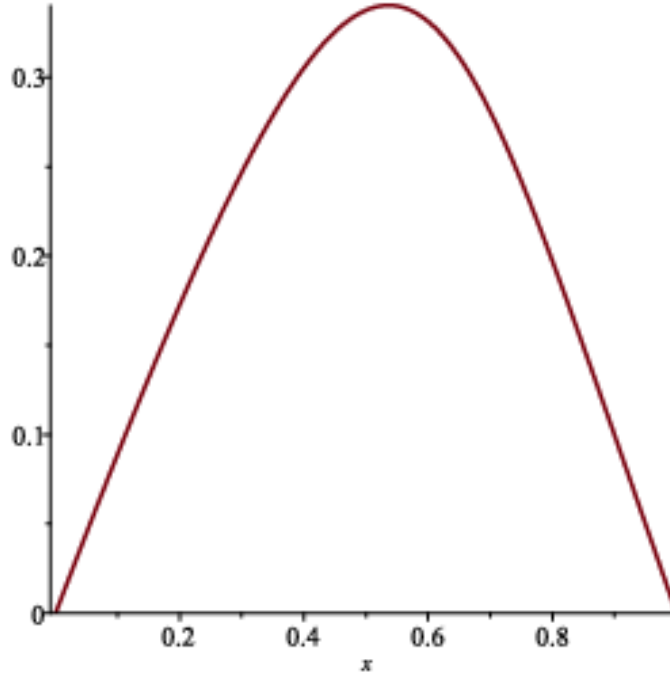


FIGURE 5.1 La fonction de coût $F(x)$ pour $x \in [0, 1]$.

5.5 Généralisation avec dérive affine et coût terminal

Considérons maintenant la diffusion de Wright–Fisher généralisée

$$dX_t = [\gamma_1 X_t(1 - X_t) + \gamma_2 - (\gamma_2 + \gamma_3)X_t] dt + \sqrt{X_t(1 - X_t)} dB_t, \quad (5.19)$$

où $\gamma_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. En reprenant (5.1) avec b, q, r, θ généraux, l'équation différentielle vérifiée par la fonction cout $F(x)$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} 0 = & \theta + r(x) - \frac{b^2(x)}{2q(x)} [F'(x)]^2 \\ & + [\gamma_1 x(1 - x) + \gamma_2 - (\gamma_2 + \gamma_3)x] F'(x) + \frac{1}{2} x(1 - x) F''(x), \end{aligned} \quad (5.20)$$

sur $(0, 1)$, avec $F(0) = 0$ et $F(1)$ fixé par un coût terminal

$$K[X_{\tau(x)}] = \begin{cases} 0, & X_{\tau(x)} = 0, \\ K_0, & X_{\tau(x)} = 1, \end{cases} \quad (5.21)$$

ce qui incite l'optimalité à sortir par l'origine (si $K_0 > 0$).

Cas particulier : $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 1$ et $r(x) = x$, $q \equiv 1$, $b(x) = \sigma\sqrt{x(1-x)}$. Pour $\theta = 0$, l'équation (5.20) se réécrit sous la forme :

$$0 = x - \frac{\sigma^2}{2} x(1-x) [F'(x)]^2 - x^2 F'(x) + \frac{1}{2} x(1-x) F''(x), \quad (5.22)$$

avec les conditions limites :

$$F(0) = 0, \quad F(1) = K_0. \quad (5.23)$$

Linéarisation. Introduisons la fonction auxiliaire

$$\Phi(x) = \exp \left(-\sigma^2 F(x) \right),$$

afin de linéariser (5.22). On calcule alors :

$$\Phi'(x) = -\sigma^2 F'(x) \Phi(x), \quad \Phi''(x) = -\sigma^2 \left(F''(x) - \sigma^2 [F'(x)]^2 \right) \Phi(x).$$

En multipliant (5.22) par $\Phi(x)$ et en remplaçant $F'(x)$ et $F''(x)$ à l'aide des expressions précédentes, on obtient :

$$\frac{1}{2} x(1-x) \left(F''(x) - \sigma^2 [F'(x)]^2 \right) \Phi(x) + x \Phi(x) - x^2 F'(x) \Phi(x) = 0.$$

Cela conduit, après simplification, à l'équation linéaire :

$$-\frac{1}{2\sigma^2} x(1-x) \Phi''(x) + \frac{x^2}{\sigma^2} \Phi'(x) + x \Phi(x) = 0.$$

Equivalente à :

$$\frac{1}{2} (1-x) \Phi''(x) - x \Phi'(x) - \sigma^2 \Phi(x) = 0. \quad (5.24)$$

Cas $\sigma = 1$. Une solution analytique satisfaisant la condition $F(0) = 0$ est donnée par :

$$F(x) = -\ln\left(\frac{1 - e^{2(1-x)}}{(e^2 - 1)(x - 1)}\right). \quad (5.25)$$

Vérification. Posons :

$$y(x) = \frac{1 - e^{2(1-x)}}{x - 1}.$$

Nous allons montrer que y est solution de l'équation différentielle (5.24), ce qui impliquera que F l'est également.

Tout d'abord, on réécrit :

$$(x - 1)y(x) = 1 - e^{2(1-x)}.$$

En dérivant des deux côtés, on obtient :

$$(x - 1)y'(x) + y(x) = 2e^{2(1-x)}.$$

En dérivant une seconde fois, il vient :

$$(x - 1)y''(x) + 2y'(x) = -4e^{2(1-x)}.$$

Or, d'après l'expression précédente de $(x - 1)y'(x) + y(x)$, on a :

$$-4e^{2(1-x)} = -2(y(x) + (x - 1)y'(x)).$$

Ainsi :

$$(x - 1)y''(x) + 2y'(x) = -2y(x) - 2(x - 1)y'(x).$$

En réarrangeant les termes, on obtient l'équation :

$$(x - 1)y''(x) + 2xy'(x) + 2y(x) = 0,$$

ce qui est équivalent à :

$$\frac{1}{2}x(1 - x)y''(x) - x^2y'(x) - xy(x) = 0.$$

Cela correspond bien à (5.24). Comme l'ensemble des solutions de (5.24) forme un espace vectoriel, la fonction :

$$g(x) = \frac{y(x)}{e^2 - 1}$$

est également une solution.

Lien avec F . Par définition (5.25), $F(x) = -\ln(g(x))$, donc F est aussi solution de (5.22). Enfin, on vérifie la condition initiale :

$$F(0) = -\ln\left(\frac{y(0)}{e^2 - 1}\right) = -\ln\left(\frac{e^2 - 1}{e^2 - 1}\right) = -\ln(1) = 0.$$

La condition $F(0) = 0$ est donc satisfaite. En effectuant un développement limité de $1 - e^{2(1-x)}$ autour de $x = 1$, on obtient :

$$1 - e^{2(1-x)} = 2(x - 1) + o(x - 1),$$

ce qui implique que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{2(1-x)}}{x - 1} = 2.$$

Ainsi, d'après (5.25) :

$$F(1) = -\ln(2) + \ln(e^2 - 1) \approx 1,161.$$

Par conséquent, le choix :

$$K_0 = -\ln(2) + \ln(e^2 - 1)$$

dans (5.23) rend l'expression (5.25) compatible avec la condition $F(1) = K_0$.

La commande optimale correspondant s'exprime donc sous la forme :

$$u^*(x) = \frac{2xe^{2-2x} - 1 - e^{2-2x}}{e^{2-2x} - 1} \sqrt{\frac{x}{1-x}}, \quad 0 < x < 1, \quad (5.26)$$

ce qui découle directement de l'expression générale (5.9) appliquée au cas particulier étudié.

Cas $\sigma = \sqrt{2}$. On va résoudre l'équation différentielle (5.24), qui pour ce cas particulier s'écrit

$$\frac{1}{2}(1-x)\Phi''(x) - x\Phi'(x) - 2\Phi(x) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (5.27)$$

On vérifie facilement que la fonction

$$\phi_1(x) = e^{-2x}$$

est solution de (5.27). En effet :

$$\frac{1}{2}(1-x)\phi_1''(x) - x\phi_1'(x) - 2\phi_1(x) = 2(1-x)e^{-2x} + 2xe^{-2x} - 2e^{-2x} = 0.$$

Pour obtenir une seconde solution indépendante, procédons à une *réduction d'ordre*. En divisant (5.27) par $\frac{1}{2}(1-x)$, on obtient la forme standard

$$\Phi''(x) - \frac{2x}{1-x}\Phi'(x) - \frac{4}{1-x}\Phi(x) = 0,$$

avec

$$P(x) = -\frac{2x}{1-x}.$$

La formule de réduction d'ordre donne

$$\phi_2(x) = \phi_1(x) \int \frac{e^{-\int P(s) ds}}{\phi_1(u)^2} du = e^{-2x} \int_0^x \frac{e^{2u}}{(1-u)^2} du,$$

.

Ainsi, la solution générale de (5.27) s'écrit

$$\Phi(x) = e^{-2x} \left(c_1 + c_2 \int_0^x \frac{e^{2u}}{(1-u)^2} du \right).$$

En rappelant que $F(x) = -\frac{1}{2} \log \Phi(x)$, on obtient

$$F(x) = x - \frac{1}{2} \log \left(c_1 + c_2 \int_0^x \frac{e^{2u}}{(1-u)^2} du \right).$$

En imposant les conditions limites $F(0) = 0$ et $F(1) = K_0 = 1$, on constate que la solution particulière

$$F(x) = x$$

est obtenue en choisissant $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$.

Dans ce cas, la commande optimale correspondante est donnée par

$$u^*(x) = -\sqrt{2x(1-x)}, \quad 0 < x < 1.$$

CHAPITRE 6 CONCLUSION

6.1 Synthèse des travaux

Dans ce mémoire, nous avons étudié différents problèmes de premier passage associés au processus de Wright–Fisher, modèle de référence en génétique des populations, employé aussi dans certains contextes financiers.

Au Chapitre 3, nous avons considéré le cas de la diffusion pure. Dans ce cadre, il est possible d’obtenir des résultats analytiques explicites, en particulier pour l’espérance du temps de sortie et pour l’aire moyenne couverte jusqu’au premier passage. Ces quantités s’obtiennent à partir de l’équation de Kolmogorov rétrograde et se ramènent à la résolution d’équations différentielles ordinaires.

Au Chapitre 4, nous avons introduit des sauts uniformes dans le modèle de Wright–Fisher afin de mieux représenter des phénomènes rapides et discontinus, analogues aux variations brusques observées sur les marchés financiers ou dans d’autres systèmes soumis à des chocs soudains. Comme nous l’avons vu, cette extension se traduit par la transformation d’équations différentielles ordinaires en équations intégro-différentielles, transformant ainsi la nature de l’équation analytique du problème. Pourtant, nous avons réussi à obtenir des solutions analytiques pour un certain nombre de quantités d’intérêt, y compris la probabilité d’extinction.

Enfin, au Chapitre 5, nous avons étudié des problèmes de type homing dans une version commandée du processus de Wright–Fisher. L’objectif était de déterminer la fonction valeur et la commande optimale minimisant une fonction de coût donnée. Ces quantités satisfont une équation différentielle non linéaire du second ordre, qui peut, dans certains cas particuliers, être linéarisée, permettant ainsi l’obtention de solutions explicites.

6.2 Limitations de la solution proposée

Les résultats présentés sont fondés sur plusieurs hypothèses restrictives qui limitent la portée des conclusions obtenues. D’une part, la distribution des sauts a été considérée uniquement dans des cas spécifiques, comme les sauts uniformes, ce qui limite la généralité du modèle. Une extension à d’autres lois de sauts (exponentielles, gaussiennes ou à queue lourde, par exemple) permettrait de mieux capturer la diversité des phénomènes réels. D’autre part, la recherche de solutions analytiques exactes n’est possible que dans certaines configurations présentant une structure mathématique particulière. Dans des situations plus complexes, les

solutions fermées deviennent inaccessibles et l'analyse doit reposer sur des approximations asymptotiques ou des méthodes numériques.

6.3 Améliorations futures

Cette étude ouvre la voie à plusieurs prolongements. Une première approche méthodologique consisterait à étudier d'autres lois de sauts, notamment la loi exponentielle, fréquemment utilisée dans la modélisation des processus de sauts-diffusions. Une autre approche possible serait de recourir à des méthodes numériques plus avancées, telles que les éléments finis, les schémas stochastiques ou les techniques de Monte Carlo adaptatif, afin d'analyser des situations où une solution analytique explicite ne peut être obtenue. En outre, l'extension du modèle à des cadres multidimensionnels ou à des problèmes de contrôle stochastique plus généraux pourrait ouvrir de nouvelles perspectives, aussi bien pour l'étude des dynamiques en génétique des populations que pour les applications en finance mathématique.

RÉFÉRENCES

- [1] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*, 5^e éd. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2003.
- [2] W. J. Ewens, *Mathematical Population Genetics : I. Theoretical Introduction*, 2^e éd., ser. Interdisciplinary Applied Mathematics. New York : Springer, 2004, vol. 27.
- [3] R. Durrett, *Probability Models for DNA Sequence Evolution*, 2^e éd., ser. Probability and Its Applications. New York : Springer, 2008.
- [4] A. Etheridge, *Some Mathematical Models from Population Genetics : École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXIX-2009*, ser. Lecture Notes in Mathematics. Berlin Heidelberg : Springer, 2011, vol. 2012.
- [5] S. Karlin et H. M. Taylor, *A Second Course in Stochastic Processes*. New York : Academic Press, 1981.
- [6] C. W. Gardiner, *Stochastic Methods : A Handbook for the Natural and Social Sciences*, 4^e éd., ser. Springer Series in Synergetics. Berlin Heidelberg : Springer, 2009.
- [7] M. Kimura, “Solution of a process of random genetic drift with a continuous model,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 41, n^o. 3, p. 144–150, 1955.
- [8] —, “Diffusion models in population genetics,” *Journal of Applied Probability*, vol. 1, n^o. 2, p. 177–232, 1964.
- [9] J. F. Crow et M. Kimura, *An Introduction to Population Genetics Theory*. New York : Harper & Row, 1970.
- [10] M. Lefebvre, “Exit times and places for a wright–fisher process with jumps,” *Methodology and Computing in Applied Probability*, vol. 19, n^o. 1, p. 7–21, 2017.
- [11] R. Cont et P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, ser. Financial Mathematics Series. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [12] P. A. Jenkins et Y. S. Song, “The effect of recurrent mutation on the frequency spectrum of a segregating site and the age of an allele,” *Theoretical Population Biology*, vol. 78, n^o. 2, p. 81–92, 2010.
- [13] M. Navascués et B. C. Emerson, “Estimating the age of alleles : Use of coalescent theory and the infinite-sites model,” *Genetics*, vol. 181, n^o. 1, p. 361–374, 2009.
- [14] S. N. Ethier et T. G. Kurtz, *Markov Processes : Characterization and Convergence*. New York : Wiley, 1986.

- [15] M. Lefebvre et M. Chafi, “Exit times and places for a wright–fisher process with and without jumps,” *Methodology and Computing in Applied Probability*, vol. 26, n^o. 1, p. 1–23, 2024.
- [16] M. Abundo, “On the first-passage area of a one-dimensional jump diffusion process,” *Methodology and Computing in Applied Probability*, vol. 15, n^o. 1, p. 85–103, 2013.
- [17] S. G. Kou et H. Wang, “First passage times of a jump diffusion process,” *Advances in Applied Probability*, vol. 35, n^o. 2, p. 504–531, 2003.
- [18] M. Lefebvre, “Exact solutions to first-passage problems for jump diffusion processes,” *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics*, vol. 72, p. 81–95, 2024.
- [19] M. Abramowitz et I. A. Stegun, édit., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, ser. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series. Washington, D.C. : U.S. Government Printing Office, 1964, vol. 55, reprinted by Dover Publications, New York, 1965. See §15.3, eqs. 15.3.10–15.3.14.
- [20] R. Bellman, *Dynamic Programming*. Princeton : Princeton University Press, 1957.
- [21] P. Whittle, *Optimization over Time, Vol. I*. Chichester : Wiley, 1982.