

**Titre:** Méthode d'équations des sensibilités à l'ordre deux pour des écoulements laminaires  
Title: [Méthode d'équations des sensibilités à l'ordre deux pour des écoulements laminaires](#)

**Auteur:** Jean-Noël Mahieu  
Author: [Jean-Noël Mahieu](#)

**Date:** 2003

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Mahieu, J.-N. (2003). Méthode d'équations des sensibilités à l'ordre deux pour des écoulements laminaires [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal].  
Citation: [PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7136/>](https://publications.polymtl.ca/7136/)

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7136/>  
PolyPublie URL: <https://publications.polymtl.ca/7136/>

**Directeurs de recherche:** Dominique Pelletier, & Jean-Yves Trépanier  
Advisors: [Dominique Pelletier](#), [Jean-Yves Trépanier](#)

**Programme:** Non spécifié  
Program: [Non spécifié](#)

**In compliance with the  
Canadian Privacy Legislation  
some supporting forms  
may have been removed from  
this dissertation.**

**While these forms may be included  
in the document page count,  
their removal does not represent  
any loss of content from the dissertation.**



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MÉTHODE D'ÉQUATIONS DES SENSIBILITÉS À L'ORDRE DEUX  
POUR DES ÉCOULEMENTS LAMINAIRES

JEAN-NOËL MAHIEU

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
AOÛT 2003



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* Votre référence

ISBN: 0-612-86414-6

*Our file* Notre référence

ISBN: 0-612-86414-6

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

# Canadä

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MÉTHODE D'ÉQUATIONS DES SENSIBILITÉS À L'ORDRE DEUX  
POUR DES ÉCOULEMENTS LAMINAIRES

présenté par: MAHIEU Jean-Noël

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. GARON André, Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. TRÉPANIER Jean-Yves, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. REGGIO Marcelo, Ph.D., membre

“Il n'y a point d'art mécanique si petit et si méprisable qui ne puisse fournir quelques observations ou considérations remarquables.” (Leibniz)

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout spécialement mon directeur de recherche, Dominique Pelletier, pour la qualité de son encadrement, sa disponibilité, son soutien, ses encouragements et ses barbecues toujours conviviaux.

Je voudrais ensuite remercier Stéphane Étienne, pour son aide précieuse, sa Honda vigoureuse, son humeur joyeuse et pour m'avoir accompagné sur la côte ouest. Je suis également vivement reconnaissant à tous les membres du labo, Hristina Hristova, pour avoir augmenté le nombre de mes publications, Emmanuel Colin, pour ses blagues et pour m'avoir supporté une année de plus, Simon Painchaud-Ouellet, pour son enseignement du hockey, Dominique Tremblay, pour sa bonne humeur et Pierre Edmond, pour l'ambiance Happy Tree.

Enfin, un petit bibi à Marie, qui est venue me rejoindre pour les six derniers mois...

## RÉSUMÉ

Ce mémoire de maîtrise présente une formulation générale des équations de sensibilités continues permettant de calculer les sensibilités de premier et de second ordre des équations de Navier-Stokes. Pour ces équations, les sensibilités sont par définition les dérivées des variables de l'écoulement par rapport à un paramètre de design. La nouveauté réside dans le développement *au second ordre* par l'approche continue qui consiste à différentier les équations aux dérivées partielles à l'ordre deux puis à les discréteriser pour une résolution numérique. Les conditions limites sont développées dans un premier temps pour les paramètres de valeur.

Les équations d'écoulement et de sensibilités sont résolues par une méthode d'éléments finis adaptative : on présente ici la structure générale du code utilisé, la formulation faible associée aux équations de sensibilité du second ordre ainsi que la façon dont on implante la résolution de ces équations. La méthodologie proposée est vérifiée sur un problème avec solution manufaturée : on choisit une solution analytique suffisamment complexe pour tester la bonne implantation des modifications dans le code. Le problème considéré ici est celui de l'écoulement sur une plaque plane à incidence nulle. Une analyse de convergence est effectuée afin de tester la précision de la solution, la bonne adaptation du maillage, et la précision de l'estimateur d'erreur par rapport auquel se fait le raffinement de maillage.

Le code ainsi testé peut être utilisé avec toute confiance pour calculer les sensibilités du premier et du second ordre de l'écoulement autour d'un profil

NACA0012. Les paramètres considérés sont l'angle d'attaque et le nombre de Reynolds. On effectue alors des analyses de sensibilité et des analyses d'incertitude puis on démontre l'utilité du développement au second ordre par des calculs rapides d'écoulements voisins. On présente également les résultats d'extrapolation sur les coefficients de trainée et de portance afin d'étayer la discussion.

## ABSTRACT

This paper presents a general continuous sensitivity equation method for computing first and second order flow sensitivities for the Navier-Stokes equations. For these equations, flow sensitivities are by definition the derivatives of the flow variables with respect to a design parameter. The new feature here is the expansion to *second order* using the continuous approach, that means we differentiate the flow partial differential equations to second order and then discretize them to obtain a numerical solution. Boundary conditions can be developed for both shape and value parameters. In a first step, applications are restricted to value parameters.

The flow and sensitivity equations are solved by an adaptive finite element method : we present here the general structure of the CFD code, the weak formulation of the second order sensitivity equations, and the way they are implemented in the code. The proposed methodology is verified on a problem with a closed form solution : we choose an analytical solution with sufficiently complex solution structure to test the good implementation of our method. The problem considered is the flow around a flat plate at zero incidence. A grid convergence study is performed in order to test the accuracy of the solution, the good adaptation of the mesh, and the accuracy of the error estimator used for the mesh refinement.

The verified code is then applied to compute first and second order flow sensitivities of an airfoil NACA0012. The parameters of interest are the angle of attack and the Reynolds number. We perform sensitivity and uncertainty

analyses, and then demonstrate the use of sensitivities for fast computation of nearby flows. We also present the results of the extrapolation of the drag and lift coefficient to illustrate the potential of the methodology.

**TABLE DES MATIÈRES**

DÉDICACE . . . . .	iv
REMERCIEMENTS . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	x
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xvi
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xxi
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xxii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE . . . . .	4
1.1 Méthode des sensibilités . . . . .	4
1.1.1 Définition . . . . .	4
1.1.2 Calcul des sensibilités . . . . .	5
1.1.3 Comparaison avec des méthodes concurrentes . . . . .	7
1.2 Applications et utilisations des sensibilités . . . . .	7
1.3 Travaux antérieurs . . . . .	11
1.4 But et objectifs de ce mémoire . . . . .	12

CHAPITRE 2 MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS . . . . .	13
2.1 Équations de Navier-Stokes . . . . .	13
2.2 Équations des sensibilités au premier ordre . . . . .	14
2.2.1 Équations de continuité et de mouvement . . . . .	14
2.2.2 Conditions aux frontières pour les sensibilités de premier ordre . . . . .	16
2.2.2.1 Conditions de Dirichlet . . . . .	17
2.2.2.2 Conditions de Neumann . . . . .	17
2.3 Équations des sensibilités au deuxième ordre . . . . .	18
2.3.1 Équations de continuité et de mouvement . . . . .	20
2.3.2 Conditions aux frontières . . . . .	21
2.3.2.1 Conditions de Dirichlet . . . . .	22
2.3.2.2 Conditions de Neumann . . . . .	22
CHAPITRE 3 RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS . . . . .	24
3.1 Méthode des éléments finis . . . . .	24
3.1.1 Formulation variationnelle . . . . .	25
3.1.2 Discrétisation . . . . .	27
3.1.3 Résolution . . . . .	29
3.2 Implantation du traitement des sensibilités . . . . .	30
3.2.1 Données à l'entrée . . . . .	30
3.2.2 Résolution . . . . .	32
3.3 Estimation d'erreur . . . . .	35
3.4 Difficultés et limites . . . . .	38
3.4.1 Extractions de dérivées . . . . .	38
3.4.1.1 Dérivées dans les équations de mouvement . .	38
3.4.1.2 Dérivées dans les conditions aux frontières .	39

3.4.2	Discontinuités . . . . .	41
CHAPITRE 4 VÉRIFICATION . . . . .		47
4.1	Méthode des Solutions Manufacturées . . . . .	47
4.2	Sillage d'une plaque plane . . . . .	48
4.2.1	Description du problème . . . . .	48
4.2.2	Analyse de convergence . . . . .	53
4.2.3	Analyse de sensibilités . . . . .	57
4.3	Conclusions . . . . .	61
CHAPITRE 5 APPLICATION AU NACA0012 . . . . .		65
5.1	Description du problème . . . . .	65
5.2	Analyse de sensibilités . . . . .	66
5.3	Analyse d'incertitude . . . . .	73
5.4	Calculs de solutions voisines . . . . .	75
5.4.1	Lignes de courant . . . . .	75
5.4.2	Étude des coefficients aérodynamiques . . . . .	81
CONCLUSION . . . . .		89
RÉFÉRENCES . . . . .		91
ANNEXES . . . . .		97

## LISTE DES FIGURES

FIG. 1.1	Matériaux composite . . . . .	4
FIG. 3.1	Élément fini de Crouzeix-Raviart . . . . .	27
FIG. 3.2	Structure de données d'entrée à fournir par l'utilisateur . . . . .	31
FIG. 3.3	Configuration thermique pour un matériau composite . . . . .	41
FIG. 3.4	Solution thermique unidimensionnelle dans un matériau composite . . . . .	42
FIG. 3.5	Problème de conduction dans un matériau composite avec conductivité linéaire par morceaux . . . . .	43
FIG. 3.6	Température dans un matériau composite avec conductivité linéaire par morceaux . . . . .	44
FIG. 3.7	Sensibilités au premier ordre par rapport à $k_1, k_2, k_3$ . . . . .	44
FIG. 3.8	Sensibilités au second ordre $s_T^{k_1 k_1}, s_T^{k_2 k_2}, s_T^{k_3 k_3}$ . . . . .	45
FIG. 4.1	Plaque plane à incidence nulle . . . . .	49
FIG. 4.2	Géometrie et conditions limites . . . . .	50
FIG. 4.3	Trajectoires des erreurs pour l'écoulement . . . . .	54
FIG. 4.4	Trajectoires des erreurs sur les sensibilités à l'ordre 1 . . . . .	55
FIG. 4.5	Trajectoires de l'erreur à l'ordre 2 . . . . .	57
FIG. 4.6	Sensibilités $s_u$ normalisées . . . . .	63
FIG. 4.7	Sensibilités $s_v$ normalisées (échelle $s_u \times 20$ ) . . . . .	64
FIG. 5.1	Maillage final à $\alpha = 3^\circ$ . . . . .	67
FIG. 5.2	Lignes de courant à $\alpha = 3^\circ$ . . . . .	67
FIG. 5.3	Lignes de courant pour les sensibilités par rapport à $\alpha$ à $\alpha = 3^\circ$ . . . . .	68

FIG. 5.4	Lignes de courant pour les sensibilités par rapport à $Re$ à $\alpha = 3^\circ$ . . . . .	69
FIG. 5.5	Sensibilités normalisées de $u$ de premier ordre à $x = 1.5$	70
FIG. 5.6	Sensibilités normalisées de $u$ de second ordre à $x = 1.5$ .	71
FIG. 5.7	Lignes de courant pour les sensibilités de $u$ à l'ordre deux $\psi(s_u^{\alpha\alpha}, s_v^{\alpha\alpha})$ pour un angle d'attaque de $3^\circ$ . . . . .	72
FIG. 5.8	Lignes de courant pour les sensibilités de $u$ à l'ordre deux $\psi(s_u^{ReRe}, s_v^{ReRe})$ pour un angle d'attaque de $3^\circ$ . . . . .	73
FIG. 5.9	Lignes de courant pour les sensibilités de $u$ à l'ordre deux $\psi(s_u^{Re\alpha}, s_v^{Re\alpha})$ pour un angle d'attaque de $3^\circ$ . . . . .	74
FIG. 5.10	Incertitude sur la vitesse $u$ à $x = 0.8c$ pour une incertitude d'entrée $\Delta\alpha = 1\%$ . . . . .	74
FIG. 5.11	$u/u_\infty$ en fonction de $\alpha$ à $x = 0.8c$ pour différentes valeurs de $y$ . . . . .	76
FIG. 5.12	Extrapolation des lignes de courant du champ de vitesse de $0^\circ$ à $3^\circ$ . . . . .	77
FIG. 5.13	Point de décollement - ligne de courant $\psi_0$ (à partir de la solution à $0^\circ$ ) . . . . .	78
FIG. 5.14	Point de décollement - ligne de courant $\psi_0$ (à partir de la solution à $3^\circ$ ) . . . . .	79
FIG. 5.15	Zone de recirculation - Extrapolation de $0^\circ$ . . . . .	80
FIG. 5.16	Zone de recirculation - Extrapolation de $3^\circ$ . . . . .	81
FIG. 5.17	Profil de vitesse $u$ à $x = 0.8c$ . . . . .	82
FIG. 5.18	Extrapolation du coefficient de trainée de $0^\circ$ à $3^\circ$ . . . .	85
FIG. 5.19	Extrapolation du coefficient de portance de $0^\circ$ à $3^\circ$ . . . .	86
FIG. 5.20	Sensibilité à l'ordre 2 du coefficient de portance . . . . .	86

FIG. 5.21	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'attaque	87
FIG. 5.22	Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'attaque	88

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

### Caractères usuels

$a$	paramètre de design
$\mathbf{a}$	vecteur de paramètres de design
$\bar{\mathbf{a}}$	vecteur des valeurs nominales des paramètres
$a_{max}$	valeur maximale du paramètre $a$
$a_{nominal}$	valeur nominale du paramètre $a$
$A^K$	matrice élémentaire
$b$	paramètre de design
$c$	corde du profil NACA0012
$C_D$	coefficient de trainée
$C_f$	coefficient de friction
$C_L$	coefficient de portance
$e$	erreur
$f$	force volumique
$F$	fonction objectif
$\bar{F}$	valeur moyenne de la fonction objectif $F$
$h$	taille élémentaire courante
$J$	fonction objectif
$\mathbf{J}_R$	matrice jacobienne associée à $R$
$k_1, k_2$	conductivités en 2 points
$L$	longueur de la plaque (problème de vérification)
$L$	longueur caractéristique

$n$	nombre de paramètres de sensibilités
$\hat{\mathbf{n}}$	normale à la surface
$p$	pression
$\tilde{Q}$	polynôme
$\mathbf{R}$	résidu
$Re$	nombre de Reynolds
$s_T^a$	sensibilité de la température par rapport à $a$
$S$	matrice des sensibilités
$S^T$	transposée de la matrice des sensibilités
$T$	température
$T_1, T_2$	températures en deux points 1 et 2
$u$	projection du champ de vitesse sur l'axe des abscisses
$\mathbf{u}$	champ de vitesse
$U^K$	vecteur des degrés de libertés
$U_\infty$	vitesse amont
$v$	projection du champ de vitesse sur l'axe des ordonnées
$x$	abscisse
$x_1, x_i, x_2$	abscisses aux points 1, i, 2
$\mathbf{X}$	vecteur des inconnues
$y$	ordonnée

### Lettres grecques

$\alpha$	paramètre de design
----------	---------------------

$\alpha$	angle d'attaque du profil NACA0012
$\alpha$	taux de convergence
$\alpha_0$	angle d'attaque spécifique
$\delta$	petite perturbation
$\Delta$	déterminant de la matrice des sensibilités
$\delta_a$	perturbation du paramètre $a$
$\delta s$	fonction test
$\Delta_a$	amplitude de variation du paramètre $a$
$\gamma$	tenseur taux de déformation
$\Gamma_d$	élément de frontière $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions de Dirichlet
$\Gamma_n$	élément de frontière $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions de Neumann
$\mu$	viscosité dynamique
$\nu$	viscosité cinématique
$\Omega$	domaine de calcul
$\Omega_P$	sous-domaine regroupant les éléments touchant $P$
$\psi$	fonction de courant
$\psi_0$	ligne de courant nul
$\Psi$	fonction d'interpolation
$\rho$	masse volumique
$\sigma_a$	écart-type associé à $a$
$\sigma_F^2$	variance associée à $F$
$\sigma_f$	vecteur des contraintes(projection du tenseur des contraintes sur la normale)
$\hat{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses

## Indices et exposants

<i>a</i>	associé au paramètre $a$ (sensibilité)
<i>est</i>	estimation (pour l'erreur)
<i>exa</i>	exacte
<i>h</i>	solution éléments finis
<i>i</i>	composante,
<i>i</i>	valeur nodale,
<i>i</i>	numéro de paramètre courant
<i>K</i>	élémentaire
<i>max</i>	valeur maximale
<i>nominal</i>	valeur nominale
<i>P</i>	associé au point $P$
<i>T</i>	transposée
$0$	valeur de référence
$0$	valeur nominale
$\infty$	à l'infini
$'$	sensibilité des propriétés physiques
$^{\wedge}$	valeur imposée (condition limite)
$^{\wedge}$	vecteur unitaire
$^{-}$	valeur moyenne
$\sim$	polynôme de projection locale
$\sim$	coordonnée dans le repère incliné

## Symboles

erf	fonction erreur
$\ \cdot\ $	norme
$\partial \cdot / \partial \cdot$	dérivée partielle

## LISTE DES TABLEAUX

TAB. 4.1	Erreurs exacte et estimée pour la vitesse $\mathbf{u}$ . . . . .	54
TAB. 4.2	Erreurs exacte et estimée en sensibilités au premier ordre pour la vitesse $\mathbf{S}$ . . . . .	55
TAB. 4.3	Erreurs exacte et estimée pour les sensibilités à l'ordre 2	56

**LISTE DES ANNEXES**

ANNEXE I	CONDITIONS AUX FRONTIÈRES . . . . .	97
I.1	Ordre 1 . . . . .	97
I.1.1	Dirichlet . . . . .	97
I.1.2	Neumann . . . . .	98
I.2	Ordre 2 . . . . .	98
I.2.1	Dirichlet . . . . .	98
I.2.2	Neumann . . . . .	100
ANNEXE II	PLAQUE PLANE À INCIDENCE NULLE . . . . .	102
II.1	Écoulement . . . . .	102
II.2	Sensibilités ordre 1 . . . . .	105
II.3	Sensibilités ordre 2 . . . . .	108
ANNEXE III	CARACTÉRISTIQUES DU PROFIL NACA0012 . .	115
III.1	Géométrie et coefficient de pression . . . . .	115

## INTRODUCTION

Bien que connues depuis longtemps, les équations de la mécanique des fluides n'ont de solutions exactes que dans des cas très simples et souvent intéressants pour les ingénieurs. Jusque dans les années 80, on effectuait surtout des essais expérimentaux pour valider des designs industriels puis, avec le développement des ressources informatiques, les méthodes numériques permettant des simulations de configurations complexes se sont généralisées, non pour remplacer les méthodes expérimentales, mais pour optimiser leur design. Dans ce cadre, de nombreux codes de calculs se sont développés pour simuler le comportement des fluides dans des dispositifs soumis à un certain nombre de contraintes. Dans la plupart des cas, le logiciel de simulation donne la solution pour une valeur prédéfinie des paramètres de design. Si l'un des ces paramètres change, il faut recommencer le calcul. Ainsi, dans la perspective d'optimisation d'une configuration expérimentale, ou tout simplement pour analyser correctement un phénomène, il est très intéressant de connaître les gradients de la solution par rapport à ces paramètres : les *sensibilités* désignent précisément le taux de variation de la solution par rapport à un paramètre de design et sont ainsi une source d'informations importantes pour l'analyse, le design optimal, le calcul de solutions voisines...

Dans ce projet, on utilise la méthode de l'équation des sensibilités (MES) continues pour évaluer les gradients des variables d'écoulement. La méthode a été assez largement utilisée à l'ordre 1 mais les développements à l'ordre 2 dans le domaine de la mécanique des fluides ont été assez limités. Ce projet présente ainsi l'implantation dans un code éléments finis de la formulation

de l'équation des sensibilités à l'ordre deux. On considère ici uniquement les écoulements laminaires incompressibles en régime stationnaire et, pour commencer, la méthode est développée pour des paramètres de valeurs, c'est-à-dire des paramètres n'ayant aucune influence sur la géométrie du domaine. La formulation est couplée à une méthodologie adaptative afin de contrôler au maximum l'erreur due aux approximations numériques. On utilise ainsi un estimateur d'erreur fondé sur des projections locales ; l'algorithme tient compte des erreurs sur les variables d'écoulement aussi bien que sur les variables de sensibilité, et ce à tous les ordres.

Dans la première partie de ce mémoire, on rappelle brièvement la définition du terme *sensibilité* et on décrit le principe de la méthode qui sera employée. Quelques exemples d'applications sont présentés ainsi que le contexte historique dans lequel ce projet s'inscrit, puis on conclut sur une définition précise des objectifs de cette étude. Dans une deuxième partie, après un rappel du travail effectué par Turgeon à l'ordre 1, on présentera la formulation complète des équations des sensibilités à l'ordre 2 pour des écoulements laminaires, et on donnera les expressions des conditions aux limites associées dans le cas d'un paramètre de valeur. Le chapitre 3 traite de l'implantation de la méthode dans le code éléments finis existant ainsi que des difficultés et limites qui l'accompagnent.

Une fois la description de la méthodologie terminée, il s'agit de vérifier le code ainsi modifié : c'est l'objet du quatrième chapitre qui choisit comme cas test l'écoulement laminaire sur une plaque plane à incidence nulle. Une étude de raffinement de maillage permet de s'assurer de la bonne implantation de la méthode. On peut alors appliquer avec confiance notre méthode à un

cas concret, celui de l'écoulement autour d'un profil de type NACA0012. On démontre alors les avantages de la MES au second ordre grâce à des analyse de sensibilités par rapport au nombre de Reynolds et à l'angle d'attaque ainsi que par des calculs de solutions voisines.

## CHAPITRE 1

### REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

L'objectif de ce chapitre est de présenter la méthode de l'équation des sensibilités (MES) dans un contexte général où l'on va confronter les différentes méthodes concurrentes ainsi que les variantes de la méthode des sensibilités. Nous allons en particulier donner les raisons qui nous ont poussés à développer la MES à l'ordre deux puis nous définirons les objectifs spécifiques de ce projet.

#### 1.1 Méthode des sensibilités

##### 1.1.1 Définition

Ce projet s'appuie en grande partie sur le travail effectué par Turgeon<sup>[1]</sup> à partir du code d'éléments finis adaptatifs développé par Pelletier *et al*<sup>[2,3]</sup>. Comme introduit précédemment, le terme *sensibilité* désigne le taux de variation d'une variable par rapport à un paramètre de design : par exemple, pour un problème simple de conduction de chaleur unidimensionnel dans un matériau composite comme celui présenté sur la figure 1.1, la température est tout simplement une

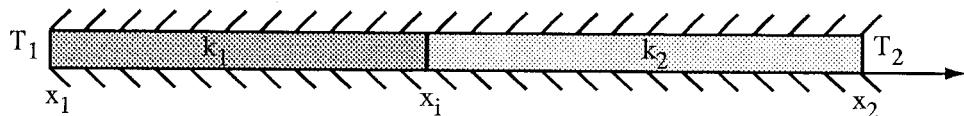


FIG. 1.1 Matériau composite

fonction de  $x$  linéaire par morceaux. Cependant, elle dépend non seulement de l'abscisse  $x$  mais aussi de toutes les paramètres de design du problème : on peut en effet écrire le champ  $T$  sous la forme :

$$T = T(x; T_1, T_2, k_1, k_2, x_1, x_i, x_2) \quad (1.1)$$

Par définition, la sensibilité par rapport l'un de ces paramètres  $a$  s'écrit :

$$\begin{aligned} s_T^a &= \frac{\partial T}{\partial a} \\ a &\in \{T_1, T_2, k_1, k_2, x_1, x_i, x_2\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

La *sensibilité* par rapport à  $a$  décrit donc la façon dont le champ de température va répondre à une perturbation du paramètre  $a$  autour de sa valeur nominale. C'est donc un coefficient qui a une signification physique propre.

### 1.1.2 Calcul des sensibilités

Il existe plusieurs méthodes pour calculer numériquement ces coefficients : discréteriser les équations aux dérivées partielles puis différentier (*sensibilités discrètes*) ou différencier ces équations différentielles puis les discréteriser (*sensibilités continues discrétisées*). La première approche donne les sensibilités exactes du problème discret, c'est-à-dire le taux de variation de la solution discrète par rapport à un paramètre. La deuxième approche donne une approximation des sensibilités exactes, ce qui peut a priori poser problème lors de l'utilisation d'un algorithme d'optimisation. En effet, la dérivée calculée n'est pas une dérivée exacte et le gradient de la fonction objectif peut être opposé au sens de variation de la solution discrète. Cependant, les gradients

obtenus selon les deux techniques convergent tous les deux vers les gradients exacts [4–6] et l'utilisation d'un algorithme d'optimisation robuste fonctionne alors très bien. Dans ce projet, nous utilisons la méthode de l'équation des sensibilités (sensibilités continues discrétisées) pour plusieurs raisons :

- d'abord la simplicité de la différentiation, puisqu'on dérive directement les équations d'écoulement par rapport au paramètre de design. En effet, dans le cas des sensibilités discrètes, la tâche peut se révéler plus ardue : si le maillage varie avec le paramètre, il faut alors exprimer la dépendance du maillage par rapport au paramètre d'étude, puis différentier les termes obtenus, ce qui est une forte contrainte. D'autre part, si on utilise par exemple une technique de stabilisation numérique avec *upwinding*, il faudra différentier les termes de stabilisation, ce qui rend les calculs compliqués, surtout au deuxième ordre. La MES permet d'éviter ces tracas et d'éviter une dépendance artificielle au maillage ou aux techniques de stabilisation. Pour les sensibilités à l'ordre deux, la différentiation des équations se fait de manière exacte, alors que les sensibilités discrètes impliquent un calcul au deuxième ordre à partir d'une solution discrète.
- la souplesse de calcul, puisqu'on sépare la résolution du problème d'écoulement et de celle des sensibilités : le choix de l'adaptation de maillage et du schéma numérique est indépendant pour chaque système (écoulement et sensibilités au premier et au deuxième ordre). Au contraire, dans le cas des sensibilités discrètes, leur obtention dépend directement du choix de discrétisation des variables d'écoulement, ce qui diminue la précision et le contrôle sur le calcul des sensibilités.

On choisit donc la MES pour développer le calcul des coefficients de sensibilités à l'ordre deux.

### 1.1.3 Comparaison avec des méthodes concurrentes

La principale méthode concurrente en optimisation est la méthode des variables adjointes [7–9], qui résout un système par fonctionnelle quel que soit le nombre de paramètres de design (contrairement à la méthode des sensibilités qui doit résoudre un système par paramètre). Par contre si on a plusieurs fonctions objectif à optimiser, la méthode des variables adjointes doit résoudre un système par fonction objectif, alors que la méthode des sensibilité résoud un seul problème par paramètre, quel que soit le nombre de fonctions objectifs.

De plus, les variables adjointes ont une existence confinée au problème d'optimisation spécifique étudié alors que les sensibilités ont une signification physique et servent dans de nombreux autres domaines d'études en CFD. C'est l'objet du paragraphe suivant.

## 1.2 Applications et utilisations des sensibilités

En donnant une évaluation directe des gradients, les sensibilités apportent une information importante pour de nombreuses applications. Nous allons passer quelques-unes d'entre elles en revue :

### (a). Design optimal

Comme cité précédemment, les coefficients de sensibilités peuvent servir en optimisation : par exemple si on cherche à minimiser la fonctionnelle  $J$  définie par :

$$J(\mathbf{u}(\alpha), \mathbf{p}(\alpha); \alpha) \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{u}$  est le champ de vitesse,  $p$  le champ de pression, et  $\alpha$  le paramètre de design (par exemple l'angle d'attaque). La dépendance vis à vis de  $\alpha$  est à la fois explicite et implicite. En utilisant le théorème des fonctions implicites, on peut différentier  $J$  par rapport à  $\alpha$  en écrivant :

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \alpha}}_{s_u^\alpha} + \frac{\partial J}{\partial p} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial \alpha}}_{s_p^\alpha} + \frac{\partial J}{\partial \alpha} \quad (1.4)$$

et on fait ainsi apparaître les sensibilités de la vitesse et de la pression par rapport à  $\alpha$  ( $s_u^\alpha$  et  $s_p^\alpha$ ). Le calcul de ces coefficients par la méthode des sensibilités donne directement des évaluations du gradient de  $J$ .

#### (b). Calcul rapide de solutions voisines

Le principe est simple : on effectue des calculs pour une certaine valeur d'un paramètre de design (l'angle d'attaque  $\alpha_0$  par exemple). On cherche alors à savoir par exemple comment va varier le coefficient de friction  $C_f$  si on modifie l'angle d'attaque. Au lieu de relancer l'ensemble du calcul pour la nouvelle valeur de  $\alpha$ , il suffit d'approximer la nouvelle solution en utilisant la série de Taylor développée à partir du point  $\alpha_0$  :

$$C_f(x; \alpha_0 + \delta\alpha) = C_f(x; \alpha_0) + \underbrace{\frac{\partial C_f}{\partial \alpha}}_{\alpha_0} \Big| \delta\alpha + \underbrace{\frac{\partial^2 C_f}{\partial \alpha^2}}_{\alpha_0} \Big| \frac{\delta\alpha^2}{2} \quad (1.5)$$

La méthode de l'équation des sensibilités au deuxième ordre permet d'extrapoler la solution à l'ordre deux, augmentant ainsi la précision et la fiabilité du résultat (cf chapitre 5).

#### (c). Analyse de sensibilités

La MES permet d'obtenir une cartographie des sensibilités dans tout le domaine de calcul. On peut ainsi identifier clairement les zones sensibles

pour analyser les effets des variations des paramètres de design. L'apport du second ordre n'est pas simplement une étape purement mathématique : les coefficients à l'ordre deux donnent non seulement les variations des sensibilités du premier ordre, mais également ils décrivent les interactions des paramètres les uns sur les autres (par les termes croisés). Les chapitres 4 et 5 donnent des exemples de cette analyse.

(d). **Identification des paramètres dominants**

Dans une démarche de design expérimental, on cherche à déterminer les paramètres d'études ayant les effets les plus importants. Ainsi, en comparant les coefficients de sensibilités (correctement normalisés), on peut sélectionner les paramètres constants pour un design d'expérience optimal, pour lequel les coefficients importants et non corrélés seront retenus. Par exemple, Dowding et Blackwell<sup>[10]</sup> utilise le critère de D-optimalité<sup>[11]</sup> pour déterminer la configuration optimum de leur expérience : il s'agit de maximiser le déterminant de la matrice de sensibilités :

$$\Delta = |\mathbf{S}^T \mathbf{S}| \quad (1.6)$$

où  $\mathbf{S}$  est la matrice de sensibilités de la fonction d'intérêt (par exemple la vitesse  $u$ ) :

$$\mathbf{S}^T = \left[ \frac{\partial u}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial a_n} \right] \quad (a_1, \dots, a_n) = \text{paramètres d'étude} \quad (1.7)$$

(e). **Analyse d'incertitude**

Dans toute expérience, il y a à la fois des incertitudes sur les données expérimentales aussi bien que sur les paramètres d'études. Si on connaît les bornes de variation des paramètres, on peut alors estimer les bornes

de la solution et prédire la plage de variation de la réponse du système de manière simple et efficace grâce à la méthode des sensibilités. On peut considérer par exemple une approche statistique comme celle présentée par Putko *et al* [12] où les paramètres d'étude  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  sont statistiquement indépendants et ont une distribution normale aléatoire autour d'une valeur nominale  $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$  (ce qui constitue une affirmation raisonnable dans le cas de paramètres géométriques sujets à des erreurs de fabrication aléatoires, ou bien dans le cas des propriétés du fluide sujettes à des fluctuations aléatoires). Soit  $\sigma_a = (\sigma_{a_1}, \dots, \sigma_{a_n})$  l'écart-type associé à  $\mathbf{a}$  et soit  $\mathbf{F}$  la fonction cible, on peut alors écrire les valeurs moyennes  $\bar{\mathbf{F}}$  et variances associées  $\sigma_F^2$  au premier et au deuxième ordre :

– premier ordre :

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{a}}) \quad (1.8)$$

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial a_i} \sigma_{a_i} \right)^2}_{s_F^{a_i}} \quad (1.9)$$

– deuxième ordre :

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{a}}) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial a_i \partial a_j} \sigma_{a_i} \sigma_{a_j}}_{s_F^{a_i a_j}} \quad (1.10)$$

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial a_i} \sigma_{a_i} \right)^2}_{s_F^{a_i}} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\left( \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial a_i \partial a_j} \sigma_{a_i} \sigma_{a_j} \right)^2}_{s_F^{a_i a_j}} \quad (1.11)$$

On fait ainsi apparaître les coefficients de sensibilité au premier et au deuxième ordre, qui permettent une évaluation directe des plages de vari-

ation de la solution. Les sensibilités au second ordre permettent une amélioration dans les prédictions de propagation d'incertitude dans un code CFD et augmentent la robustesse des méthodes d'optimisation basée sur les gradients (méthodes à l'ordre deux).

### 1.3 Travaux antérieurs

La méthode des sensibilités a d'abord été développée en mécanique des structures où la voie discrète a été favorisée<sup>[13]</sup>. Puis la méthode s'est développée dans de nombreux domaines : conduction de chaleur transitoire<sup>[10, 14]</sup>, design aérodynamique<sup>[4, 15]</sup>, éléments finis stochastiques<sup>[16]</sup>, calculs d'incertitude et de fiabilité<sup>[17]</sup>, interaction fluide-structure<sup>[18, 19]</sup>, etc.

Les applications plus spécifiques sont nombreuses et on peut trouver une bonne source de référence dans Turgeon<sup>[1]</sup>. Cependant, le couplage entre la MES et une méthode adaptative est relativement rare et se trouve surtout dans les problèmes de mécanique des structures, par exemple chez Bugeda et Olivier<sup>[20]</sup>, Dutta et Ramakrishnan<sup>[21]</sup> et Sienz et Hinton<sup>[22]</sup>. Dans ces références, l'adaptation se fait surtout au niveau de l'ordre 0 (solution). L'adaptation du maillage sur les sensibilités n'apparaît que plus récemment chez Borggaard et Pelletier<sup>[23, 24]</sup> et Stewart<sup>[25]</sup>. En effet, l'adaptation sur les sensibilités permet non seulement d'obtenir un maillage de qualité, mais également de s'assurer de la précision numérique des résultats en sensibilités.

À l'ordre deux, les études sont plus rares et concernent à nouveau principalement la mécanique des structures<sup>[13]</sup>, les problèmes d'élasticité<sup>[26, 27]</sup> et la dynamique des structures<sup>[28]</sup>. On trouve également une approche par la méthode

adjointe dans Taroco<sup>[29]</sup>. Il semble donc que, pour des écoulements laminaires, la méthode de sensibilités à l'ordre deux couplée à une adaptation de maillage n'ait donné lieu à aucune publication, outre celle effectuée dans le cadre de ce projet<sup>[30]</sup>.

#### 1.4 But et objectifs de ce mémoire

Le but général est de développer une méthodologie d'éléments finis pour le calcul des sensibilités à l'ordre 2 d'un écoulement fluide.

Les objectifs liés à ce sujet sont les suivants :

- Développer la forme générale des équations des sensibilités en régime laminaire au deuxième ordre avec propriétés et conditions aux limites variables.
- Implanter la méthode dans le code d'éléments finis existant.
- Vérifier la méthode sur un exemple de solution manufacturée.
- Appliquer la méthodologie sur un exemple concret : le profil NACA0012.
- Démontrer l'usage de la méthode par des analyses de sensibilité et des calculs de solutions voisines.

## CHAPITRE 2

### MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS

Dans ce chapitre, on présente la méthode de l'équation des sensibilités appliquée aux équations de Navier-Stokes dans le cas d'écoulements laminaires incompressibles. Cette méthode de sensibilités au premier ordre a été décrite par Turgeon [1]. Dans les deux premières parties de ce chapitre, nous allons rappeler brièvement les équations régissant les variables d'écoulement et leurs sensibilités au premier ordre, puis, dans une troisième section, nous nous attarderons à une description des équations des sensibilités au second ordre et de leurs conditions limites.

#### 2.1 Équations de Navier-Stokes

On considère donc les écoulements laminaires incompressibles des fluides visqueux en régime permanent, qui sont typiquement régis par le système d'équations suivant :

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] + \mathbf{f} \quad \text{Mouvement} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{Continuité} \quad (2.2)$$

où les variables d'écoulement sont la vitesse  $\mathbf{u}$  de composantes  $(u, v)$  et la pression  $p$  tandis que les propriétés physiques sont la masse volumique  $\rho$  et la

viscosité dynamique  $\mu$ . Le terme  $f$  représente un champ de forces volumiques. Toutes ces grandeurs (variables d'écoulement, propriétés physiques, champs de forces...) peuvent dépendre de manière explicite ou implicite d'un paramètre de design. La formulation des équations de sensibilités va donc tenir compte de toutes ces dépendances.

## 2.2 Équations des sensibilités au premier ordre

### 2.2.1 Équations de continuité et de mouvement

Pour l'analyse de sensibilités, on considère que les variables d'écoulement dépendent non seulement de la géométrie (par les coordonnées  $(x, y)$ ) mais également du paramètre d'étude  $a$ . On écrit donc ces dépendances de la manière suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y; a) \quad (2.3)$$

$$p = p(x, y; a) \quad (2.4)$$

et les sensibilités de ces variables s'écrivent donc :

$$s_u^a = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \quad (2.5)$$

$$s_p = \frac{\partial p}{\partial a} \quad (2.6)$$

Comme décrit précédemment, ces dérivées décrivent la façon dont les champs de vitesse et de pression changent suite à une perturbation du paramètre  $a$ .

Pour calculer ces taux de variation, on utilise la méthode d'équation des sen-

sibilités continue : on différentie le système d'équation (2.1)-(2.2) puis on permute l'ordre des opérations de différentiation. Pour l'équation de continuité, on a :

$$\frac{\partial}{\partial a} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial a}(0) \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \right) = 0 \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{s}_u^a = 0 \quad (2.9)$$

Pour l'équation de mouvement, on différentie (2.1) par rapport à  $a$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \rho'_a \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho s_u^a \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_u^a &= -\nabla s_p^a \\ &+ \nabla \cdot [\mu'_a (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \mu (\nabla s_u^a + (\nabla s_u^a)^T)] + \mathbf{f}'_a \end{aligned} \quad (2.10)$$

où les sensibilités des variables d'écoulement sont écrites à l'aide du symbole  $s$  avec en indice la variable considérée et en exposant le paramètre de sensibilité étudié tandis que les sensibilités des propriétés physiques s'écrivent à l'aide d'un ('), pour les différencier des variables d'écoulement :

$$\mu'_a = \frac{\partial \mu}{\partial a} \quad (2.11)$$

$$\rho'_a = \frac{\partial \rho}{\partial a} \quad (2.12)$$

Le point important ici est le fait qu'on adopte une approche générale, et donc toutes les grandeurs peuvent dépendre simultanément du paramètre  $a$ . Par

exemple, la viscosité  $\mu$  peut avoir une dépendance complexe de la forme :

$$\mu = \mu(u(a), v(a); a) \quad (2.13)$$

et sa sensibilité  $\mu'_a$  s'obtient en appliquant le théorème des fonctions implicites :

$$\begin{aligned} \mu'_a &= \frac{\partial \mu}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial a} \\ &= \frac{\partial \mu}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial u} s_u^a + \frac{\partial \mu}{\partial v} s_v^a \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ainsi, on inclut tous les termes possibles dans la formulation qui est implantée une fois pour toute dans le code.

On peut aussi remarquer que le système (2.9,2.10,2.14) est linéaire, et ce quel que soit le paramètre  $a$  considéré. De plus, on a à résoudre un système d'équations de type (2.9)-(2.10) par paramètre de sensibilité.

### 2.2.2 Conditions aux frontières pour les sensibilités de premier ordre

Comme pour l'écoulement, on ne peut résoudre le système d'équations (2.9)-(2.10) que si l'on impose les conditions frontières adéquates. Pour obtenir ces conditions aux frontières pour les sensibilités, on différentie comme au paragraphe précédent les conditions aux frontières de l'écoulement par rapport au paramètre de sensibilité étudié ( $a$ ).

Les paragraphes suivants traitent les différents cas de conditions aux frontières pour des paramètres de valeur, i.e. des paramètres qui n'influencent pas la

géométrie des frontières du domaine de calcul. Les paramètres de formes ne sont pas traités dans le présent travail pour des raisons qui seront détaillées dans le paragraphe 3.4.1.2.

### 2.2.2.1 Conditions de Dirichlet

Soit par exemple une condition de Dirichlet typique sur la vitesse  $u$  le long de la frontière  $\Gamma_d$  :

$$u = \hat{u} \quad \text{sur } \Gamma_d \quad (2.15)$$

où  $\Gamma_d$  ne dépend pas du paramètre  $a$  (paramètre de valeur). Alors la condition aux frontières pour la sensibilité s'obtient par différentiation de (2.15) par rapport à  $a$  :

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial a} \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow s_u^a = \frac{\partial \hat{u}}{\partial a} \quad \text{sur } \Gamma_d \quad (2.17)$$

On applique le même développement à toutes les conditions de Dirichlet sur  $u$ ,  $v$  et  $p$ .

### 2.2.2.2 Conditions de Neumann

Une démarche équivalente est employée pour calculer les conditions aux frontières de type Neumann pour les sensibilités. Ainsi, si on impose par exemple des

contraintes sur la frontière  $\Gamma_n$  :

$$\boldsymbol{\sigma}_f = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f \quad \text{sur } \Gamma_n \quad (2.18)$$

où la projection du tenseur des contraintes sur la normale  $\mathbf{n}$  s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -p\hat{\mathbf{n}} + \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.19)$$

$$\text{avec } \hat{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) \quad (2.20)$$

On peut alors écrire la condition de Neumann pour les sensibilités au premier ordre en différentiant (2.18) par rapport à  $a$  :

$$\boldsymbol{\sigma}_f^a = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f}{\partial a} \quad (2.21)$$

où la sensibilité des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_f^a$  représente :

$$\boldsymbol{\sigma}_f^a = (2\mu'_a\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + 2\mu\boldsymbol{\gamma}(s_u^a)) \cdot \hat{\mathbf{n}} - s_p^a \hat{\mathbf{n}} \quad (2.22)$$

On peut remarquer que le type de conditions frontières (Dirichlet ou Neumann) pour une frontière donnée  $\Gamma$  est le même pour l'écoulement et les sensibilités. On retrouvera bien sûr cette propriété au second ordre.

### 2.3 Équations des sensibilités au deuxième ordre

Le développement mathématique au deuxième ordre des équations de sensibilités est semblable à celui du premier ordre. Le but est d'obtenir la dérivée seconde des variables d'écoulement par rapport aux paramètres d'étude. Bien

évidemment, dès qu'on a deux paramètres ou plus, on voit apparaître des dérivées croisées, qui représentent l'influence d'un paramètre de design sur la façon dont les variables d'écoulement vont évoluer avec la perturbation d'un second paramètre. Par exemple, si on choisit le couple de paramètre  $(a, b)$ , les variables d'écoulement peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y; a, b) \quad (2.23)$$

$$p = p(x, y; a, b) \quad (2.24)$$

Au premier ordre, on a pour chaque variable deux sensibilités :

$$s_u^a = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \quad \text{et} \quad s_u^b = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b} \quad (2.25)$$

$$s_p^a = \frac{\partial p}{\partial a} \quad \text{et} \quad s_p^b = \frac{\partial p}{\partial b} \quad (2.26)$$

Au deuxième ordre, il nous faut calculer 3 dérivées pour chaque variable :

$$s_u^{aa} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial a^2}, \quad s_u^{bb} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial b^2} \quad \text{et} \quad s_u^{ab} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial a \partial b} \quad (2.27)$$

$$s_p^{aa} = \frac{\partial^2 p}{\partial a^2}, \quad s_p^{bb} = \frac{\partial^2 p}{\partial b^2} \quad \text{et} \quad s_p^{ab} = \frac{\partial^2 p}{\partial a \partial b} \quad (2.28)$$

On doit donc résoudre trois systèmes d'équations à l'ordre 2. Plus généralement, pour  $n$  paramètres de sensibilités, on a  $n$  systèmes à résoudre à l'ordre un et on a  $\frac{n(n+1)}{2}$  systèmes à résoudre à l'ordre 2.

### 2.3.1 Équations de continuité et de mouvement

Prenons le cas général de deux paramètres ( $a, b$ ) distincts. Pour obtenir les termes de sensibilités à l'ordre deux ( $\mathbf{s}_u^{ab}$  et  $s_p^{ab}$ ), on part des équations (2.9)-(2.10) que l'on différentie par rapport au second paramètre ( $b$ ). Pour l'équation de continuité on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} [\nabla \cdot \mathbf{s}_u^a] &= 0 \\ \Downarrow \\ \nabla \cdot \mathbf{s}_u^{ab} &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

et pour l'équation de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} \left[ \begin{array}{l} \rho'_a \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u^a \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u^a = -\nabla s_p^a \\ + \nabla \cdot [\mu'_a (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \mu_a (\nabla \mathbf{s}_u^a + (\nabla \mathbf{s}_u^a)^T)] \end{array} \right] \\ \Downarrow \\ \begin{aligned} \rho \mathbf{s}_u^{ab} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u^{ab} + \nabla s_p^{ab} - \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{s}_u^{ab} + (\nabla \mathbf{s}_u^{ab})^T)) &= \\ - [\rho'_{ab} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho'_a (\mathbf{s}_u^b \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u^b) + \rho'_b (\mathbf{s}_u^a \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u^a) \\ + \rho (\mathbf{s}_u^a \cdot \nabla \mathbf{s}_u^b + \mathbf{s}_u^b \cdot \nabla \mathbf{s}_u^a)] \\ + \nabla \cdot [\mu'_{ab} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \mu'_a (\nabla \mathbf{s}_u^b + (\nabla \mathbf{s}_u^b)^T) + \mu'_b (\nabla \mathbf{s}_u^a + (\nabla \mathbf{s}_u^a)^T)] + \mathbf{f}'_{ab} \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Cette équation peut sembler indigeste à première vue, mais on peut remarquer, comme pour le premier ordre, qu'elle est linéaire, et que son implantation est faite une fois pour toute dans le code. En effet, on inclut dans la formulation tous les termes possibles, en tenant compte des variations de toutes les

grandeur (variables d'écoulement ou propriétés physiques). La résolution de ce système nous donne les sensibilités croisées  $s_u^{ab}$  et  $s_p^{ab}$ . Pour obtenir les sensibilités de second ordre  $s_u^{aa}$ ,  $s_p^{aa}$  et  $s_u^{bb}$ ,  $s_p^{bb}$ , on remplace  $b$  (respectivement  $a$ ) par  $a$  (resp.  $b$ ) dans le système (2.29)-(2.30).

À nouveau, si la viscosité  $\mu$  a une dépendance complexe de la forme :

$$\mu = \mu(u(a, b), v(a, b); a, b) \quad (2.31)$$

alors sa sensibilité à l'ordre 2  $\mu'_{ab}$  s'obtient en appliquant le théorème des fonctions implicites :

$$\begin{aligned} \mu'_{ab} &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial a \partial b} + \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} + \frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} + \frac{\partial u}{\partial a} \left[ \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial \mu}{\partial u} \right) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial b} \right] \\ &\quad + \frac{\partial v}{\partial a} \left[ \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial \mu}{\partial v} \right) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial b} \right] \\ &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial a \partial b} + \frac{\partial \mu}{\partial u} s_u^{ab} + \frac{\partial \mu}{\partial v} s_v^{ab} + s_u^a \left[ \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial \mu}{\partial u} \right) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} s_u^b + \frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} s_v^b \right] \\ &\quad + s_v^a \left[ \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial \mu}{\partial v} \right) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} s_u^b + \frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} s_v^b \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

### 2.3.2 Conditions aux frontières

Pour que le problème mathématique (2.29)-(2.30) soit correctement posé, on doit imposer des conditions aux frontières adéquates. De même que pour l'ordre un, nous allons uniquement traiter le cas des paramètres de valeurs, c'est à dire des paramètres qui n'influencent pas la géométrie du domaine. Les conditions frontières s'obtiennent alors très facilement à partir des conditions frontières obtenues à l'ordre un. À nouveau ici aussi, le type de conditions frontières

(Dirichlet ou Neumann) pour une frontière donnée  $\Gamma$  est le même que pour l'écoulement et les sensibilités d'ordre 1. Dans les paragraphes suivants, nous allons traiter le cas général des conditions de Dirichlet et Neumann à l'ordre 2 en sensibilité pour deux paramètres de sensibilités  $a$  et  $b$  différents.

### 2.3.2.1 Conditions de Dirichlet

Considérons la condition (2.17) obtenue à l'ordre 1 pour le paramètre  $a$  sur  $\Gamma_d$ . On obtient la sensibilité croisée du second ordre de cette condition en différentiant (2.17) par rapport au deuxième paramètre considéré  $b$  :

$$\frac{\partial s_u^a}{\partial b} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial b \partial a} \quad \dots \quad (2.33)$$

$$\Rightarrow s_u^{ab} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial b \partial a} \quad \text{sur } \Gamma_d \quad (2.34)$$

On applique le même développement à toutes les conditions de Dirichlet.

### 2.3.2.2 Conditions de Neumann

On emploie une démarche équivalente pour obtenir les conditions de type Neumann en sensibilités à l'ordre 2. On différentie donc (2.21) par rapport à  $b$  pour obtenir :

$$\sigma_f^{ab} = \frac{\partial^2 \hat{\sigma}_f}{\partial a \partial b} \quad (2.35)$$

où la sensibilités au deuxième ordre des contraintes  $\sigma_f^{ab}$  s'écrit :

$$\sigma_f^{ab} = 2 \left( \mu'_{ab} \gamma(u) + \mu'_a \gamma(s_u^b) + \mu'_b \gamma(s_u^a) + \mu \gamma(s_u^{ab}) \right) \cdot \hat{n} - s_p^{ab} \hat{n} \quad (2.36)$$

Le développement mathématique des équations des sensibilités au second ordre pour des écoulements laminaires incompressibles en régime stationnaire se termine ici. Cependant, l'extension de cette méthode à d'autres régimes d'écoulements n'est pas plus compliquée, tant que les différentes variables satisfont les conditions de régularité adéquates.

## CHAPITRE 3

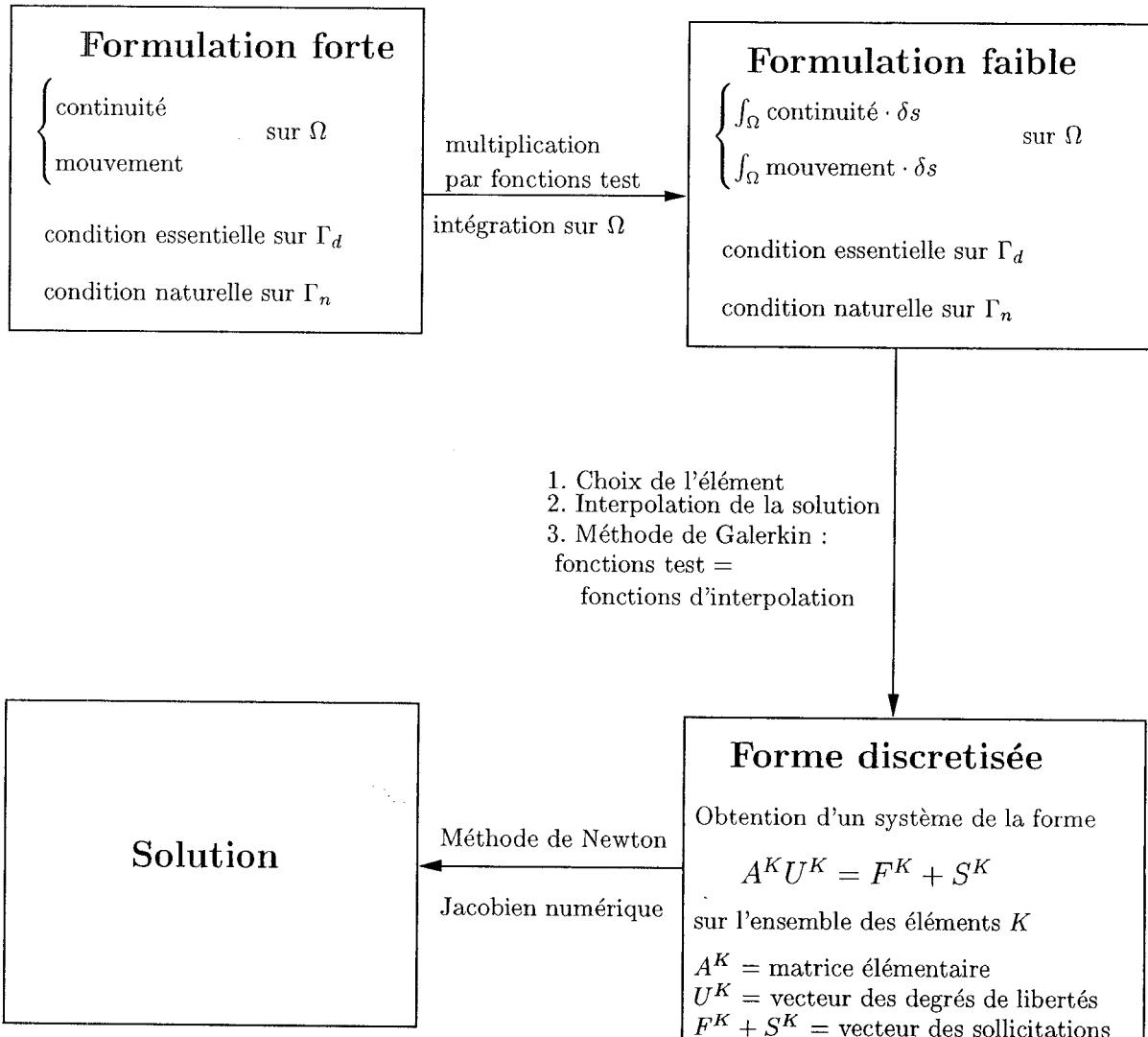
### RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

La résolution des systèmes d'équations présentés dans le paragraphe précédent ne pouvant se faire de manière analytique, on a recourt à un code de calcul numérique pour approximer les variables d'écoulement et leurs sensibilités. Il existe de nombreuses méthodes de résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles (différences finies, volumes finis, éléments finis...). On utilise ici un algorithme d'éléments finis dont la structure est présentée dans les sections suivantes. Le but n'est pas de faire un cours exhaustif sur la méthode des éléments finis mais d'aider le lecteur à comprendre la démarche qui nous a permis une implantation efficace des équations de sensibilités à l'ordre deux.

Ainsi, on présentera brièvement dans un premier temps la formulation variationnelle de nos équations, la discrétisation employée pour la résolution de la forme faible obtenue et le type d'élément utilisé pour cette résolution. On décrira ensuite la méthode d'adaptation de maillage qui s'appuie sur l'information recueillie par un estimateur d'erreur et on s'attachera enfin au détail de l'implantation de l'équation des sensibilités à l'ordre deux. On concluera ce chapitre en évoquant les difficultés rencontrées et les limites de notre méthode.

#### 3.1 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis se décompose en plusieurs étapes :



### 3.1.1 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle des équations d'écoulement et de sensibilités au premier ordre a été décrite par Turgeon<sup>[1]</sup>. On s'attache ici à l'écriture de la formulation variationnelle pour les équations de sensibilités à l'ordre 2. Cette formulation (ou forme faible) s'obtient en multipliant les équations (2.29)-

(2.30) par une fonction test  $\delta s$  et en intégrant par parties tous les termes d'ordre deux (de type diffusion) sur le domaine de calcul  $\Omega$ . Ainsi, la forme faible de l'équation de continuité pour les sensibilités à l'ordre 2 s'écrit :

$$\int_{\Omega} \delta s_p^{ab} \nabla s_u^{ab} d\Omega \quad (3.1)$$

tandis que pour l'équation de mouvement, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\rho s_u^{ab} \cdot \nabla u + \rho u \cdot \nabla s_u^{ab}) \cdot \delta s_u^{ab} d\Omega - \int_{\Omega} s_p^{ab} \nabla \delta s_u^{ab} d\Omega \int_{\Omega} 2\mu \gamma(s_u^{ab}) : \gamma(\delta s_u^{ab}) d\Omega = \\ & - \int_{\Omega} [\rho'_{ab} u \cdot \nabla u + \rho'_a (s_u^b \cdot \nabla u + u \cdot \nabla s_u^b) + \rho'_b (s_u^a \cdot \nabla u + u \cdot \nabla s_u^a) \\ & \quad + \rho (s_u^a \cdot \nabla s_u^b + s_u^b \cdot \nabla s_u^a)] \cdot \delta s_u^{ab} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} [2\mu'_{ab} \gamma(u) + 2\mu'_a \gamma(s_u^b) + 2\mu'_b \gamma(s_u^a)] : \gamma(\delta s_u^{ab}) d\Omega \\ & \quad + \int_{\Omega} f'_{ab} d\Omega + \int_{\Gamma_n} \sigma_f^{ab} \cdot \delta s_u^{ab} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.2)$$

où  $\delta s_p^{ab}$  et  $\delta s_u^{ab}$  sont les fonctions test en pression et en vitesse. On désigne par  $\gamma$  le taux de déformation ( $\gamma(u) = 1/2(\nabla u + (\nabla u)^T)$ ). Dans cette formulation, la frontière garde le même découpage que dans le cas du problème fort, c'est à dire que les conditions essentielles (Dirichlet) sont appliquées sur  $\Gamma_d$  et les conditions naturelles (Neumann) sont celles qui apparaissent sur  $\Gamma_n$  dans l'intégration par partie précédente. On a donc, comme pour l'écoulement et pour les sensibilités à l'ordre 1 :

$$\Gamma_d \cup \Gamma_n = \partial\Omega \quad (3.3)$$

$$\Gamma_d \cap \Gamma_n = \emptyset \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Discrétisation

La suite de la méthode consiste à discréteriser la forme faible obtenue ci-dessus pour obtenir un système matriciel que l'on pourra résoudre par une méthode de Newton.

#### (a). Choix de l'élément

Dans tous les calculs présentés ici, on utilise l'élément fini de Crouzeix-Raviart ( $P_2^+ - P_1$ )<sup>[31]</sup> présenté sur la figure 3.1.

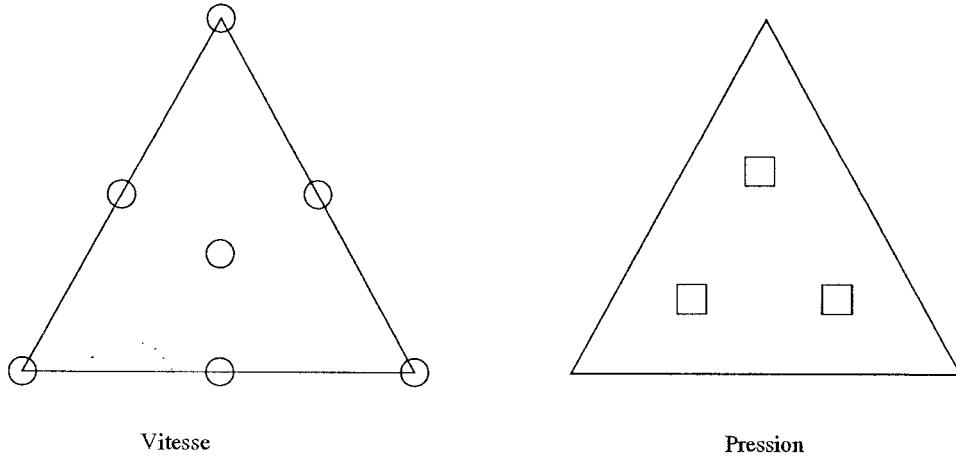


FIG. 3.1 Élément fini de Crouzeix-Raviart

Il s'agit d'un élément quadratique en vitesse enrichi d'une bulle cubique, et linéaire discontinu en pression, et qui vérifie la condition de stabilité de Brezzi-Babuska [32]. Il y a donc 14 degrés de libertés en vitesse et 3 en pression sur chaque élément et cet élément converge à l'ordre deux ( $O(h^2)$ ). Par souci de simplicité dans l'implantation, le même maillage formé pour la résolution du problème à l'ordre zéro est utilisé pour les sensibilités au premier et au second ordre. On utilise une technique de

condensation de la bulle<sup>[33]</sup> et de Lagrangien augmenté<sup>[34]</sup> afin de réduire la taille du système sans nuire à la précision.

(b). **Interpolation de la solution**

L'interpolation découle naturellement de l'élément choisi, et on peut donc écrire la solution sous la forme :

$$s_{u_h}^{ab} = \sum_{i=1}^{n_{s_u^{ab}}} s_{u_i}^{ab} \Phi_i \quad (3.5)$$

$$s_{v_h}^{ab} = \sum_{i=1}^{n_{s_v^{ab}}} s_{v_i}^{ab} \Phi_i \quad (3.6)$$

$$s_{p_h}^{ab} = \sum_{i=1}^{n_{s_p^{ab}}} s_{p_i}^{ab} \Phi_i \quad (3.7)$$

où  $s_{u_h}^{ab}$  est la solution éléments finis,  $n_{s_a^{ab}}$  est le nombre de noeuds de calculs,  $s_{u_i}^{ab}$  sont les valeurs nodales et  $\Phi_i$  les fonctions d'interpolation en vitesse et pression.

(c). **Méthode de Galerkin**

La méthode de Galerkin consiste à choisir comme fonctions test les fonctions d'interpolation de la solution. En d'autres termes, cela revient à choisir :

$$\delta s_{u_i}^{ab} = \Phi_i^u, \quad \delta s_{v_i}^{ab} = \Phi_i^v, \quad \text{et} \quad \delta s_{p_i}^{ab} = \Phi_i^p \quad (3.8)$$

Dans le cas d'écoulements turbulents ou avec forte variation des termes convectifs, la méthode de Galerkin peut conduire à des solutions entachées d'oscillations. Il existe alors des méthodes de stabilisation<sup>[35]</sup> qui ne sont pas envisagées ici, car les écoulements considérés dans ce rapport sont développés en régime laminaire à bas nombre de Reynolds.

### 3.1.3 Résolution

Pour toutes les variables calculées (écoulement et sensibilités), les systèmes algébriques résultants des opérations de discrétisation précédentes sont stockés dans une matrice *bande* avec une architecture en *ligne de ciel* et factorisés par une méthode de décomposition LU. Pour les variables d'écoulement, ce système algébrique est non linéaire et nécessite une résolution itérative. On choisit ici la méthode de Newton : soit  $\epsilon$  un critère d'arrêt et  $N$  le nombre maximal d'itérations ; et soit un système non-linéaire de la forme :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{U} - \mathbf{F} - \mathbf{S} = 0 \quad (3.9)$$

Si  $\mathbf{X}^0$  est une approximation initiale de la solution, on cherche à résoudre le système linéaire :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{R}}(\mathbf{X}^n)\delta\mathbf{X} = -\mathbf{R}(\mathbf{X}^n) \quad (3.10)$$

$$\text{avec } \mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n + \delta\mathbf{X} \quad (3.11)$$

où  $\mathbf{J}_{\mathbf{R}}$  est la matrice jacobienne :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{R}} = \left[ \frac{\partial R_i}{\partial X_j} \right] (\mathbf{X}^n) \quad (3.12)$$

La convergence est atteinte si :

$$\frac{||\delta\mathbf{X}||}{||\mathbf{X}^{n+1}||} < \epsilon \quad \text{et} \quad ||\mathbf{R}(\mathbf{X}^{n+1})|| \leq \epsilon \quad (3.13)$$

Le système (3.10) est dit *en correction* car sa solution donne le vecteur des correction  $\delta\mathbf{X}$ . Le calcul analytique de la matrice jacobienne est souvent

très lourd, surtout en présence de fortes non-linéarités. On choisit donc une linéarisation approximative par différence finie décentrée de type :

$$\frac{\partial R_i}{\partial X_j} \simeq \frac{R_i(X_1^n, \dots, X_j^n + \delta, \dots, X_N^n) - R_i(X_1^n, \dots, X_j^n, \dots, X_N^n)}{\delta} \quad (3.14)$$

où l'on perturbe une à une les valeurs nodales de la solution d'une quantité  $\delta$ . C'est le principe du *Jacobien numérique*.

Ici se termine la description de la structure de résolution des équations de l'écoulement. La section suivante va traiter de l'adaptation de cette structure à la résolution des équations des sensibilités au premier et au second ordre.

### 3.2 Implantation du traitement des sensibilités

Comme nous l'avons décrit au chapitre précédent, pour  $n$  paramètres de sensibilité, on a  $n$  systèmes à résoudre à l'ordre 1 et  $\frac{n(n+1)}{2}$  systèmes à l'ordre 2. Chacun de ces systèmes est résolu indépendamment de la résolution des variables d'écoulement et indépendamment les uns des autres. Cependant, la structure de résolution des équations des sensibilités est quasiment identique à celle utilisée pour l'écoulement. Les paragraphes suivants décrivent plus en détails l'implantation des sensibilités dans le code préexistant.

#### 3.2.1 Données à l'entrée

Les données à l'entrée s'organisent de la même manière que pour l'écoulement. Toutes les grandeurs (variables d'écoulement, propriétés physiques, coefficients...)

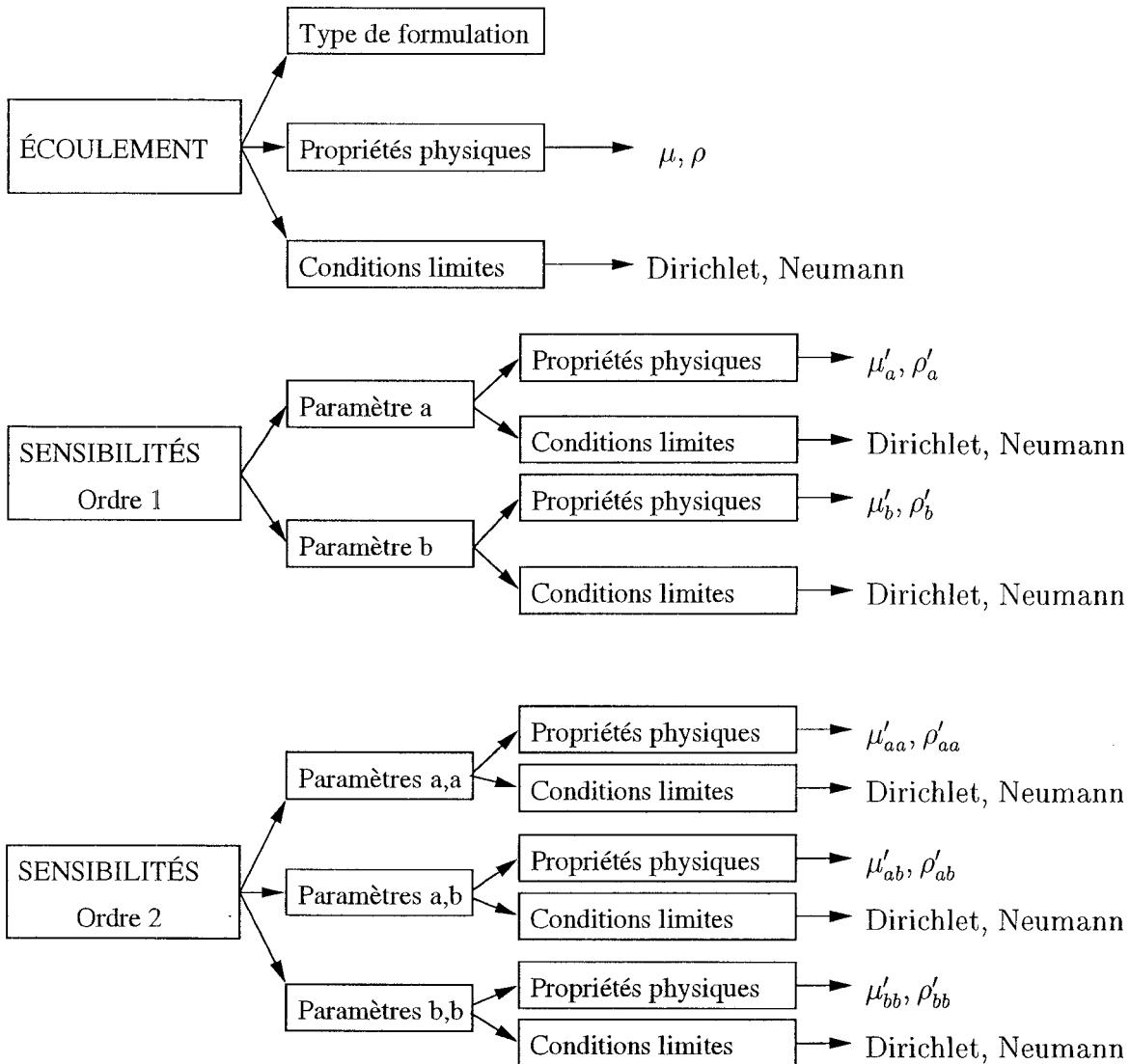


FIG. 3.2 Structure de données d'entrée à fournir par l'utilisateur

sont susceptibles de varier avec le paramètre de sensibilité étudié, et nous avons donc inclus dans la formulation tous les termes possibles. L'usager a ainsi la possibilité de préciser à l'entrée quel type de formulation il choisit (i.e. Galerkin, GLS, ... ). De plus, de la même manière qu'il a fourni les valeurs des propriétés physiques du fluide, il doit fournir les valeurs des sensibilités de ces

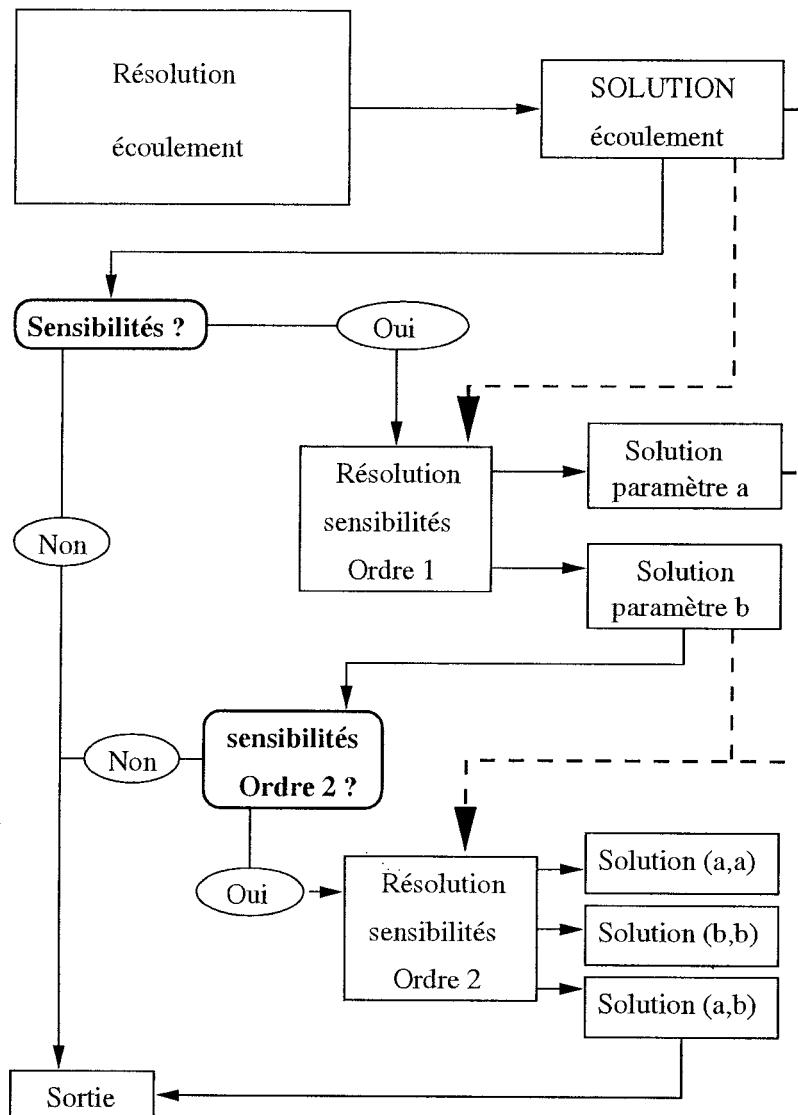
propriétés, et ce pour chaque paramètre. Pour la spécification des conditions aux limites, on ne considère ici que le cas des paramètres de valeur : l'usager doit donc donner au code de calcul les valeurs des dérivées des conditions limites de l'écoulement à l'ordre 1 et à l'ordre 2 (expressions (2.17), (2.21), (2.34) et (2.35) du chapitre 2 ).

Le schéma de la figure 3.2 résume la structure des données à l'entrée pour deux paramètres de sensibilités  $a$  et  $b$ . Au bloc de sensibilités à l'ordre 1 préexistant, on rajoute le bloc de sensibilités à l'ordre 2 : à l'intérieur de ce bloc, on sépare la résolution des 3 systèmes de type (2.29)-(2.30) associés au trois couples de paramètre  $((a, a), (b, b)$  et  $(a, b)$ ). Pour chacun de ces couples, on fournit les dérivées secondes des propriétés physiques et des conditions aux limites.

Une fois les données rentrées, on passe à l'implantation dans le résoluteur.

### 3.2.2 Résolution

Dans la partie de calcul proprement dite, on sépare à nouveau le traitement de l'écoulement de celui des sensibilités grâce à une architecture emboîtée de type :



Pour résoudre les sensibilités à l'ordre un, on récupère la solution de l'écoulement (flèches en pointillés) et pour obtenir la solution à l'ordre 2, il faut récupérer les solutions des sensibilités à l'ordre 1 en plus de celle de l'écoulement.

Pour le calcul proprement dit des systèmes d'équations en sensibilités, il faut noter plusieurs points importants :

(a). linéarité des équations

Comme nous l'avons déjà fait remarquer au paragraphe 2.2.1, les équations des sensibilités sont toujours linéaires, quel que soit le paramètre considéré. La méthode de Newton et le jacobien numérique utilisés pour l'écoulement peuvent alors sembler lourds pour la résolution du problème en sensibilités. Cependant, on a choisi de maintenir la méthode à cause de la simplicité de son implantation. De plus elle garde une énorme souplesse quand à la construction des matrices élémentaires. En effet, dans le cas par exemple d'une viscosité variable, notre méthode permet directement de gérer la répartition des nouveaux termes dans les membres de droite ou de gauche du système algébrique.

La linéarité des équations nous permet cependant d'accélérer le calcul : en effet, la méthode de Newton nécessitait plusieurs itérations pour la résolution d'un système non-linéaire. Pour les sensibilités, une seule itération serait théorique-ment nécessaire pour le système. Cependant, on procède à plusieurs itérations pour vérifier que la convergence est aussi rapide que celle à laquelle on s'attend et que les approximations numériques et les problèmes de conditionnement des matrices ne font pas trop dévier les résultats. De plus, la formulation de type Galerkin entraîne une solution entâchée d'oscillations qui peuvent nuire de manière importante à la qualité des résultats : on se laisse donc la possibilité d'ajouter des techniques de stabilisation (par exemple GLS (*Galerkin Least Square*)<sup>[36]</sup>)

#### (b). Linéarisation par la méthode de Newton

La deuxième remarque concerne la forme linéarisée des équations de sensibilités. En effet, si on regarde plus attentivement la structure des équations, on peut noter qu'elles partageront toutes la même forme linéarisée que celle obtenue pour l'écoulement par la méthode de Newton. Si on rassem-

ble correctement les termes de l'équation (2.10) :

$$\underbrace{\left[ \rho(s_u^a \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla s_u^a) + \nabla s_p^a - \nabla \cdot [\mu(\nabla s_u^a + (\nabla s_u^a)^T)] \right]}_{A_a} = \rho'_a \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot [\mu'_a(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] + \mathbf{f}'_a \quad (3.15)$$

et que l'on compare avec l'équation (2.30) réécrite en rassemblant aussi les termes qui vont contribuer au membre de gauche du système algébrique linéarisé :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left[ \rho(s_u^{ab} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla s_u^{ab}) + \nabla s_p^{ab} - \nabla \cdot (\mu(\nabla s_u^{ab} + (\nabla s_u^{ab})^T)) \right]}_{A_{ab}} = \\ & - [\rho'_{ab} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho'_a(s_u^b \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla s_u^b) + \rho'_b(s_u^a \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla s_u^a) \\ & \quad + \rho(s_u^a \cdot \nabla s_u^b + s_u^b \cdot \nabla s_u^a)] \\ & + \nabla \cdot [\mu'_{ab}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \mu'_a(\nabla s_u^b + (\nabla s_u^b)^T) + \mu'_b(\nabla s_u^a + (\nabla s_u^a)^T)] + \mathbf{f}'_{ab} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Après intégration, discréétisation et linéarisation, les termes  $A_a$  et  $A_{ab}$  des membres de gauches des équations (3.15) et (3.16) conduiront à la même structure matricielle que pour l'écoulement, et ce pour n'importe quel paramètre. Ces similarités de construction simplifient énormément l'implantation des sensibilités à l'ordre 2 dans le code.

### 3.3 Estimation d'erreur

Une fois la solution calculée, le but est de remailler le domaine de manière à réduire l'erreur entre la solution éléments finis et la solution exacte à priori

inconnue. Le post-processeur utilisé ici récupère la solution puis effectue une estimation d'erreur pour identifier les zones où le maillage doit être raffiné. Cet estimateur capte l'erreur numérique liée à la discrétisation et non l'erreur due à la modélisation. Les normes utilisées pour le calcul de l'erreur sont :

- pour la pression :

$$\|p\|^2 = \int_{\Omega} p^2 d\Omega \quad (3.17)$$

- pour la vitesse :

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) d\Omega \quad (3.18)$$

L'estimation de l'erreur se fait suivant une projection locale par moindres carrés telle que décrite par Zhu et Zienkiewicz [37]. Pour chaque sommet P, on définit un sous-domaine  $\Omega_P$  regroupant tous les éléments touchant ce sommet puis on construit sur ce domaine un polynôme  $\tilde{Q}$  de degré supérieur au degré d'interpolation de la solution éléments finis  $Q_h$  et minimisant l'intégrale :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_P} (\tilde{Q} - Q_h)^2 d\Omega \quad (3.19)$$

Par exemple pour la vitesse  $\mathbf{u}$ , on a un interpolant quadratique donc une dérivée linéaire par morceaux et discontinue entre les éléments. On cherche à projeter  $\gamma = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$  et on va donc construire un polynôme  $\tilde{Q}$  d'ordre deux minimisant (3.19). Ainsi, une fois le polynôme construit, les normes des erreurs en vitesse et en pression s'écrivent :

– pour la pression :

$$\|e^p\| = \left( \int_{\Omega_P} (\tilde{p} - p_h) d\omega \right)^{1/2} \quad (3.20)$$

– pour la vitesse :

$$\begin{aligned} \|e^u\| &= \left( \int_{\Omega_P} [(\nabla \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^T) - (\nabla \mathbf{u}_h + (\nabla \mathbf{u}_h)^T)] \right. \\ &\quad \left. : [(\nabla \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^T) - (\nabla \mathbf{u}_h + (\nabla \mathbf{u}_h)^T)] d\Omega \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

La norme de l'erreur  $\|e\|$  est proportionnelle à une puissance  $\alpha$  de la taille  $h$  de l'élément et ces deux grandeurs sont liées au choix de l'interpolant :

$$\|e\| = ch^\alpha \quad (3.22)$$

Dans le cas de l'élément de Crouzeix-Raviart, la convergence est quadratique ( $\alpha = 2$ ) pour toutes les grandeurs.

Le même estimateur est développé pour les sensibilités au premier et au second ordre. L'adaptation de maillage se fait sur les variables d'écoulement et de sensibilités à tous les ordres, pour vérifier les taux de convergence de toutes les grandeurs calculées. On utilise un opérateur de transition<sup>[35]</sup> pour déterminer les caractéristiques du maillage optimal d'après le calcul de l'estimateur d'erreur.

### 3.4 Difficultés et limites

L'implantation des sensibilités à l'ordre 2 ne se fait pas sans difficultés pratiques. Bien que l'idée de la méthode continue de l'équation des sensibilités soit simple dans son principe, le calcul de tous les termes nécessaires à la résolution du système peut poser quelques problèmes. Nous allons notamment voir dans cette section les raisons pour lesquelles nous avons écarté l'étude des paramètres de forme à l'ordre 2 puis nous étudierons le problème de discontinuités dans la solution.

#### 3.4.1 Extractions de dérivées

##### 3.4.1.1 Dérivées dans les équations de mouvement

Les équations (2.10) et (2.30) contiennent des termes où apparaissent des dérivées spatiales du champ de vitesse (termes en  $\nabla \mathbf{u}$ ). Or le champ de vitesse n'est connu que par la résolution numérique du système des équations de l'écoulement, ce qui veut dire qu'on introduit des données numériques approximatives dans la formulation du problème en sensibilités. En augmentant l'ordre de dérivation, on tend encore davantage à augmenter le nombre d'approximations : en effet, l'équation (2.30) fait apparaître les gradients des sensibilités à l'ordre 1 ( $\nabla s_{\mathbf{u}}^a$  et  $\nabla s_{\mathbf{u}}^b$ ). Or si l'interpolant est quadratique, les gradients sont linéaires discontinus. On peut cependant choisir d'enrichir ces dérivées comme on l'a fait pour le calcul de l'erreur (cf section 3.3). En effet, Stewart et Stanley [25, 38] démontrent une amélioration des résultats lorsqu'on remplace les gradients éléments finis par leur reconstruction en utilisant la projection

locale. Dans le présent travail, on laisse la possibilité à l'usager de choisir ou non l'utilisation de ces dérivées enrichies.

### 3.4.1.2 Dérivées dans les conditions aux frontières

Cependant, la source d'erreur la plus importante lors de la résolution des systèmes d'équation provient des conditions aux frontières (cf Grunzburger [39]). On a présenté jusqu'ici l'étude des conditions aux limites dans le cas de paramètres de valeur. Si on considère maintenant un paramètre de forme (c'est-à-dire un paramètre qui intervient dans la géométrie des frontières et/ou du profil), on doit réécrire les conditions aux limites en tenant compte des déplacements des frontières et remplacer les dérivées partielles par des dérivées particulières. Pour des questions de simplicité et de clarté des démonstrations, on va traiter ici le cas de la Température. Le détail du calcul des conditions limites à l'ordre 1 et 2 est présenté en annexe I dans le cas thermique. Ces formules se généralisent bien sûr aux autres variables de l'écoulement.

Si on reprend l'expression (I.5) de la condition aux limites de Dirichlet pour un paramètre de forme, on peut faire apparaître clairement les dérivées premières de variables de l'écoulement :

$$s_T^a = \frac{D\hat{T}}{Da} - \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] \frac{\partial x_f}{\partial a} - \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right] \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad (3.23)$$

À nouveau, si on utilise un interpolant quadratique, on devra utiliser des approximations linéaires discontinues pour les gradients à la frontière. Pour les noeuds situés sur la frontière, on se retrouvera alors avec des valeurs multiples des conditions aux limites, et ces erreurs vont se propager dans tout le

domaine de calcul. Il est donc important de remédier à cela en utilisant la reconstruction des dérivées basée sur la projection locale. Ces dérivées projetées, bien qu'inexactes, sont au moins continues et certainement plus précises que les dérivées éléments finis.

Cependant, si on creuse à nouveau le problème, et que l'on considère maintenant le problème de sensibilités à l'ordre 2, le calcul de l'annexe I nous donne une expression complexe de la condition de Dirichlet pour un paramètre de forme (expression (I.14)) :

$$\begin{aligned}
 s_T^{ab} = & \frac{D^2\hat{T}}{DbDa} - \left( \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) \frac{\partial x_f}{\partial a} \\
 & - \left( \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) \frac{\partial y_f}{\partial a} \\
 & - \frac{\partial T}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 x_f}{\partial b \partial a} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 y_f}{\partial b \partial a} \right) \\
 & - \frac{\partial s_T^a}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial b} - \frac{\partial s_T^a}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial b} \\
 & - \frac{\partial s_T^b}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial b} - \frac{\partial s_T^b}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial b}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Ici, en plus des dérivées premières, on voit apparaître les dérivées seconde des variables de l'écoulement (termes encadrés). Les dérivées seconde obtenues numériquement à partir de la solution éléments finis sont très imprécises et pour pouvoir utiliser ces conditions aux frontières de manière cohérente, il faudrait pouvoir construire une dérivée seconde plus précise, ce qui n'est pas un problème simple. C'est pourquoi nous avons écarté dans ce mémoire l'étude des paramètres de formes pour les sensibilités à l'ordre deux.

### 3.4.2 Discontinuités

La méthode de l'équation des sensibilités continue telle que décrite dans le chapitre précédent suppose que les équations de Navier-Stokes soient différentiables. Or il existe des cas où des discontinuités apparaissent dans l'écoulement (chocks...) et si l'on essaie de différentier les équations de Navier-Stokes (au sens des distributions) on obtient des masses de Dirac au travers de la discontinuité. Le traitement de ces fonctions n'est pas considéré dans ce projet. De plus, même si les variables d'écoulement sont continues, il se peut que leur sensibilités soient discontinues, et on se retrouve alors à l'ordre deux avec le même problème de fonctions masses de Dirac. Par exemple, si on considère le problème unidimensionnel de conduction de chaleur dans un matériau composite comme décrit sur la figure 3.3, la température à l'interface  $x = x_0$  est continue. L'équation

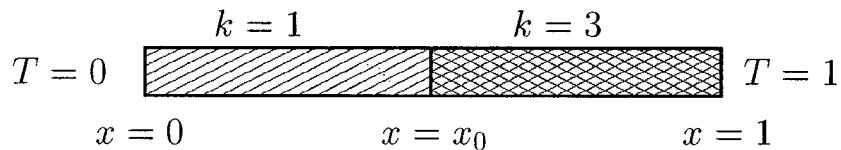


FIG. 3.3 Configuration thermique pour un matériau composite

de conduction régissant le comportement du système dans les deux matériaux est :

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (3.25)$$

La solution exacte de ce problème est :

$$T = \begin{cases} \frac{3x}{1+2x_0} & \text{pour } 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{x+2x_0}{1+2x_0} & \text{pour } x_0 < x \leq 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

tandis que la sensibilité exacte par rapport au paramètre  $x_0$  s'écrit :

$$s_T^{x_0} = \begin{cases} \frac{-6x}{(1+2x_0)^2} & \text{pour } 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{2-2x}{(1+2x_0)^2} & \text{pour } x_0 < x \leq 1 \end{cases} \quad (3.27)$$

La figure 3.4 illustre la solution de ce problème pour  $x = 0.5$ . La sensibilité est discontinue à l'interface. Dans ce cas, on ne peut différentier l'équation de

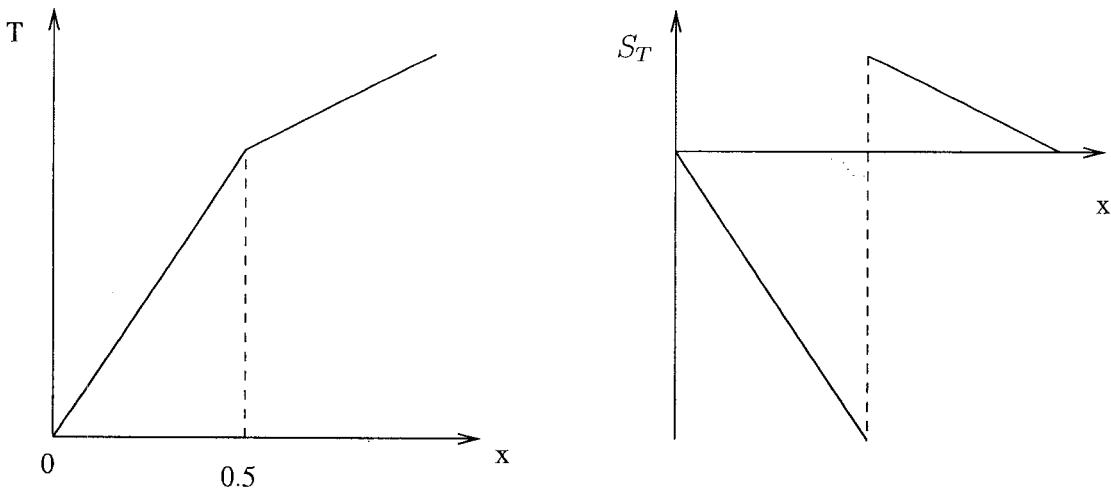


FIG. 3.4 Solution thermique unidimensionnelle dans un matériau composite

conduction sur tout le domaine car la conductivité discontinue entraîne une discontinuité de la sensibilité. Une solution serait de ne pas différentier au travers de l'interface lors du calcul numérique de la solution mais plutôt de séparer le calcul sur deux zones avec des conditions de raccord à l'interface

(continuité du flux et de la température). Cependant, on perd en précision numérique en imposant des conditions de flux constant (de type Neumann) pour cette nouvelle frontière. La projection par moindres carrés pour les noeuds frontières se fera sur un sous ensemble  $\Omega_p$  moins riche car on projettera dans chaque zone séparément.

Le problème peut se compliquer davantage encore à l'ordre deux de telle manière que l'on ait une température et des sensibilités de premier ordre continues alors que les sensibilités de second ordre sont discontinues. C'est par exemple le cas pour la configuration de conduction traité par Dowding et Blackwell [10] : qui considèrent un matériau composite dont la conductivité est une fonction linéaire par morceaux de la température, comme indiqué sur la figure 3.5. La solution en température (cf figure 3.6) est continue et les

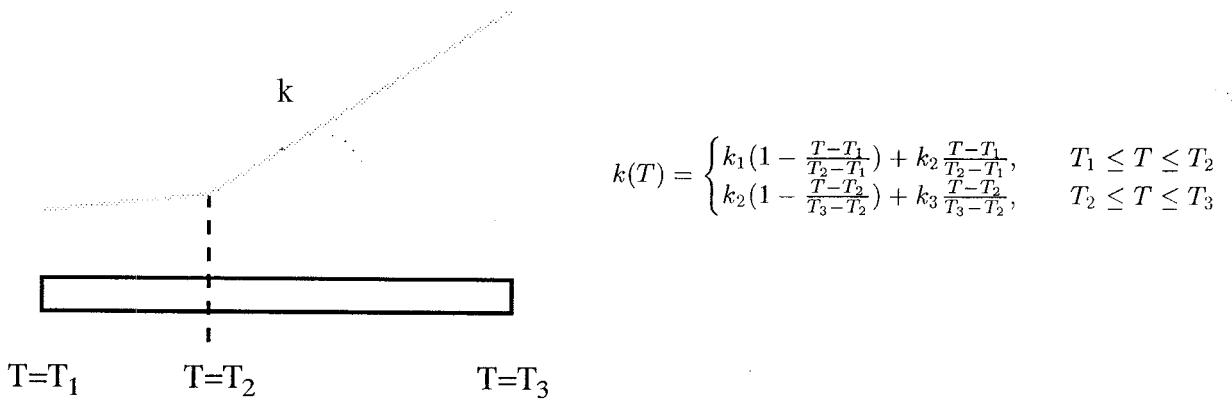


FIG. 3.5 Problème de conduction dans un matériau composite avec conductivité linéaire par morceaux

sensibilités par rapport aux paramètres  $k_1, k_2, k_3$  sont continues à l'ordre 1 (cf figure 3.7) tandis que les sensibilités  $s_T^{k_1 k_1}, s_T^{k_2 k_2}, s_T^{k_3 k_3}$  sont discontinues (cf figure 3.8).

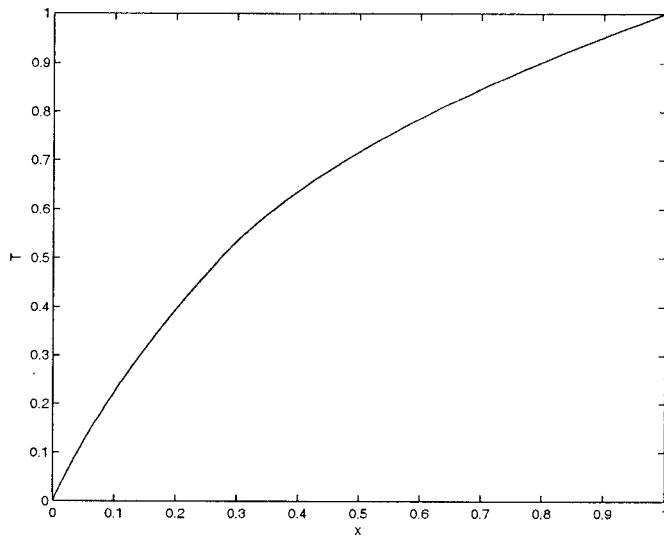


FIG. 3.6 Température dans un matériau composite avec conductivité linéaire par morceaux

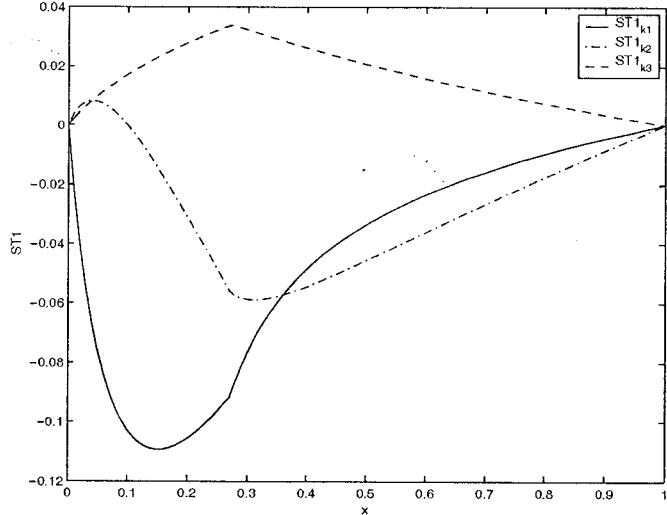


FIG. 3.7 Sensibilités au premier ordre par rapport à  $k_1, k_2, k_3$

Ici encore, si l'on connaît la position de l'interface de discontinuité dans les pentes de la conductivité, on peut artificiellement découper le domaine de

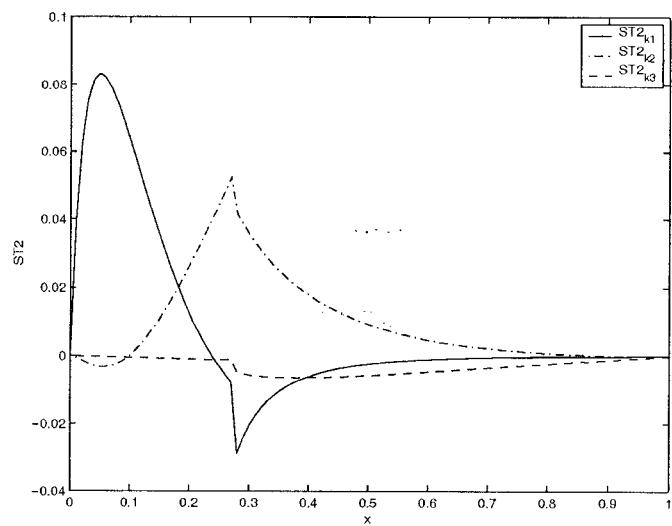


FIG. 3.8 Sensibilités au second ordre  $s_T^{k_1 k_1}$ ,  $s_T^{k_2 k_2}$ ,  $s_T^{k_3 k_3}$

calcul en deux zones avec des conditions de raccord pour capter les discontinuités. Par contre, si on ne connaît pas la position de cet interface, la solution numérique issue de la méthode de l'équation des sensibilités sera fausse et les discontinuités ne seront pas visibles. Appel et Gunzburger<sup>[40]</sup> discutent de ces problèmes de discontinuités dans le contexte d'écoulements compressibles 1-D dans un tube à choc.

Ce chapitre clôture la partie descriptive de la méthode de l'équation des sensibilités au second ordre. Il s'agit maintenant de vérifier la bonne implantation de cette équation dans le code préexistant et de démontrer les avantages de notre méthode.

## CHAPITRE 4

### VÉRIFICATION

#### 4.1 Méthode des Solutions Manufacturées

La vérification d'un code de calcul implique une *évaluation* de l'erreur entre une solution exacte connue et la solution approchée au même problème calculée par le code. Elle implique également une *estimation* d'erreur permettant de s'assurer de la précision du code quant à la résolution d'un problème appliqué spécifique. Ces deux vérifications sont purement numériques et n'ont aucun rapport avec la *Validation* du code, i.e. l'adéquation entre le modèle mathématique et le système physique ou mécanique. Pour déterminer l'exactitude d'un code, on procède à une analyse de convergence systématique sur un problème avec solution typique connue. Ces solutions sont généralement des solutions analytiques exactes dont la structure est suffisamment complexe pour s'assurer que tous les termes de l'équation différentielle ainsi que des équations des sensibilités correspondantes sont traités correctement par le code de calcul. La Méthode des Solutions Manufacturées (MMS) propose une démarche générale pour générer des solutions analytiques adaptées à la vérification précise d'un code de calcul. Cette méthode a été proposée initialement par Steinberg [41] et développée par Pelletier et Roache [42]. De nombreuses études ont permis de tester l'efficacité de cette procédure, qui, bien que très simple, reste cependant très précise. Le principe est le suivant : on choisit une solution continue qui, généralement, ne satisfait pas les équations

gouvernant le phénomène physique, en raison du caractère arbitraire de notre choix. On définit alors des termes sources appropriés pour satisfaire le système d'équations étudié puis on définit les conditions limites correspondantes. Enfin, le tout est analysé au moyen d'une analyse de convergence sur les différents maillage proposés.

La Méthode des Solutions Manufacturées est donc utilisée dans la section suivante pour vérifier l'implantation de l'équation des sensibilités à l'ordre deux pour les écoulements laminaires.

## 4.2 Sillage d'une plaque plane

Cet exemple est consacré à la vérification du code en régime laminaire. Il présente un modèle d'écoulement dans le sillage d'une plaque plane avec incidence nulle comme étudié par Schlichting [43].

### 4.2.1 Description du problème

La configuration est présentée sur la figure 4.1. On considère la distribution de vitesse donnée par l'équation asymptotique suivante :

$$u(x, y) = U_\infty \left( 1 - \frac{0.664}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{x}{L} \right)^{-1/2} e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} \right) \quad (4.1)$$

où  $U_\infty$  est la vitesse en amont,  $L$  la longueur de la plaque,  $\nu = \mu/\rho$  la viscosité cinématique. Dans le cas adimensionnel considéré ici, on choisit une vitesse et

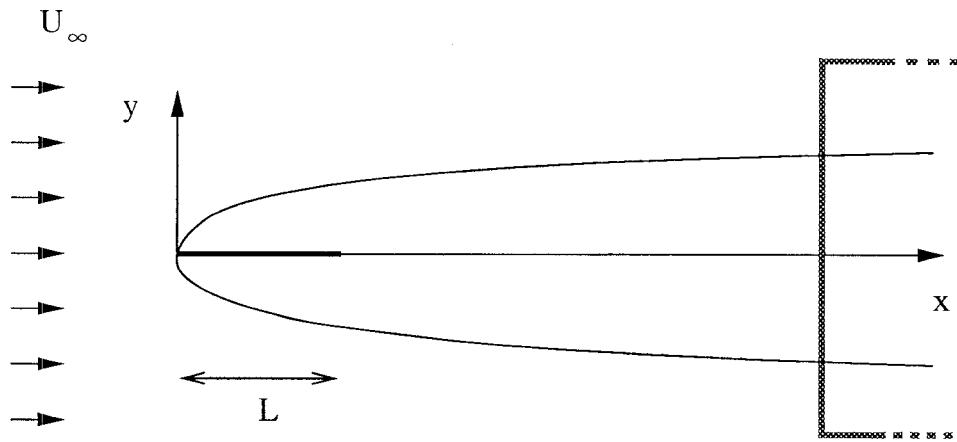


FIG. 4.1 Plaque plane à incidence nulle

une longueur de plaque unitaire. Le nombre de Reynolds est ici :

$$Re = \frac{1}{\nu} = 100$$

Comme affirmé par Schlichting [43], l'équation 4.1 n'est valide qu'à grande distance de la plaque. Cependant, Tollmien [44] a vérifié qu'elle pouvait être utilisée pour  $x > 3L$ . La composante  $v$  le long de l'axe des  $y$  est calculée grâce à l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

d'où

$$v(x, y) = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), dt$$

ce qui conduit à l'équation suivante :

$$v(x, y) = \frac{0.664U_\infty}{2} \sqrt{\frac{L}{\pi}} \left[ -\sqrt{\frac{\pi\nu}{U_\infty}} \frac{1}{x} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{U_\infty}{4\nu}} yx^{-1/2}\right) - x^{-3/2} \left( ye^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} - \sqrt{\frac{\pi x \nu}{U_\infty}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{U_\infty}{4\nu}} yx^{-1/2}\right) \right) \right] \quad (4.2)$$

Pour satisfaire à l'équation de mouvement, il faut ajouter des termes sources artificiels appropriés déterminés en injectant  $u$  et  $v$  dans les équations pour annuler le résidu.

$$f_x = \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.3)$$

$$f_y = \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.4)$$

La géométrie et les conditions aux limites sont présentées sur la figure 4.2.

Pour permettre la conservation de la masse et fixer la pression nulle dans le

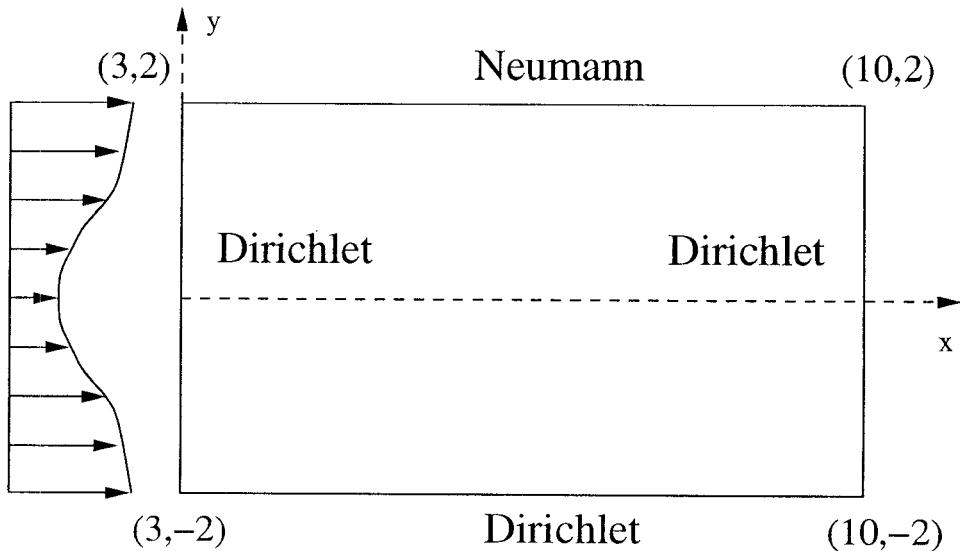


FIG. 4.2 Géométrie et conditions limites

domaine de calcul, on applique une condition de Neumann sur le bord supérieur du domaine. On calcule également les sensibilités par rapport à  $L$  (longueur de la plaque) et  $U_\infty$  (vitesse en amont) en différentiant les expressions (4.1) et (4.2), ce qui donne :

$$S_u^{U_\infty} = 1 - 0.664 \sqrt{\frac{L}{x\pi}} e^{-\left(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}\right)} + 0.664 \frac{U_\infty}{4\nu} \sqrt{\frac{L}{\pi}} y^2 x^{-3/2} e^{-\left(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}\right)} \quad (4.5)$$

$$S_v^{U_\infty} = \frac{0.664}{2} \sqrt{\frac{L}{\pi}} \left[ -x^{-3/2} y e^{-\left(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}\right)} + U_\infty \left( \frac{y^3}{4x^{5/2}\nu} e^{-\left(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}\right)} \right) \right] \quad (4.6)$$

$$S_u^L = -\frac{0.664 U_\infty}{2\sqrt{\pi x L}} e^{-\left(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}\right)} \quad (4.7)$$

$$S_v^L = \frac{0.664 U_\infty}{4\sqrt{\pi L}} \left[ -x^{-3/2} y e^{-\left(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}\right)} \right] \quad (4.8)$$

Ces expressions satisfont aux équations (2.9)-(2.10) à condition d'ajouter à nouveau les termes sources appropriés :

$$S_{fx} = \rho \left( S_u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial S_u}{\partial x} + S_v \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial S_u}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 S_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_u}{\partial y^2} \right) \quad (4.9)$$

$$S_{fy} = \rho \left( S_u \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial S_v}{\partial x} + S_v \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial S_v}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 S_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_v}{\partial y^2} \right) \quad (4.10)$$

Le détail des expressions est présenté en annexe II.

On procède de même à l'ordre 2 en différentiant les expressions 4.5-4.8 pour obtenir les sensibilités de la vitesse par rapport aux paramètres d'étude, ce qui

donne :

$$S_u^{U_\infty U_\infty} = 0.664 \sqrt{\frac{L}{\pi}} \frac{y^2 x^{-3/2}}{4\nu} e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \left[ 1 + U_\infty - \frac{y^2 U_\infty}{4x\nu} \right] \quad (4.11)$$

$$S_v^{U_\infty U_\infty} = 0.664 \sqrt{\frac{L}{\pi}} \frac{y^3 x^{-5/2}}{8\nu} e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \left[ 2 - \frac{U_\infty y^2}{4x\nu} \right] \quad (4.12)$$

$$S_u^{LL} = \frac{0.664 U_\infty}{4\sqrt{\pi x}} L^{-3/2} e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \quad (4.13)$$

$$S_v^{LL} = -\frac{0.664 U_\infty}{8\sqrt{\pi}} L^{-3/2} \left[ -x^{-3/2} y e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \right] \quad (4.14)$$

$$S_u^{LU_\infty} = \frac{0.664}{2\sqrt{\pi x}} L^{-1/2} e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \left[ -1 + \frac{U_\infty y^2}{4x\nu} \right] \quad (4.15)$$

$$S_v^{LU_\infty} = \frac{0.664}{4\sqrt{L\pi}} \left[ -x^{-3/2} y e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} + U_\infty \left( \frac{y^3}{4x^{5/2}\nu} e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \right) \right] \quad (4.16)$$

Ces expressions satisfont aux équations des sensibilités à l'ordre 2 2.29-2.30 si l'on rajoute les termes sources appropriés de la forme :

$$\begin{aligned} S_{fx}^{ab} &= \rho \left( S_u^{ab} \frac{\partial u}{\partial x} + S_u^a \frac{\partial S_u^b}{\partial x} + S_u^b \frac{\partial S_u^a}{\partial x} + u \frac{\partial S_u^{ab}}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + S_v^{ab} \frac{\partial u}{\partial y} + S_v^a \frac{\partial S_u^b}{\partial y} + S_v^b \frac{\partial S_u^a}{\partial y} + v \frac{\partial S_u^{ab}}{\partial y} \right) \\ &\quad - \mu \left( \frac{\partial^2 S_u^{ab}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_u^{ab}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} S_{fy}^{ab} &= \rho \left( S_u^{ab} \frac{\partial v}{\partial x} + S_u^a \frac{\partial S_v^b}{\partial x} + S_u^b \frac{\partial S_v^a}{\partial x} + u \frac{\partial S_v^{ab}}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + S_v^{ab} \frac{\partial v}{\partial y} + S_v^a \frac{\partial S_v^b}{\partial y} + S_v^b \frac{\partial S_v^a}{\partial y} + v \frac{\partial S_v^{ab}}{\partial y} \right) \\ &\quad - \mu \left( \frac{\partial^2 S_v^{ab}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_v^{ab}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

#### 4.2.2 Analyse de convergence

Le tableau 4.1 présente l'évolution des erreurs vraies et estimées des variables d'écoulement avec le raffinement adaptatif du maillage. L'adaptation se fait sur l'écoulement et les sensibilités à tous les ordres. Ces résultats sont présentés également graphiquement sur la figure 4.3 où l'on peut aisément voir la convergence des variables d'écoulement et leurs estimés d'erreur mesurés dans la norme appropriée. L'analyse de convergence permet de démontrer trois points :

- la précision de la solution éléments finis
- la bonne adaptation du maillage
- la précision de l'estimateur d'erreur

Toutes les erreurs décroissent de façon régulière pour atteindre des niveaux très faibles, démontrant ainsi la convergence de la solution numérique vers la solution exacte. D'autre part, au fur et à mesure que le maillage est raffiné, la courbe d'estimation d'erreur se rapproche de la courbe de l'erreur exacte, allant même jusqu'à se confondre avec elle, ce qui montre l'exactitude asymptotique de l'estimateur. Ces remarques s'appliquent également pour les différentes sensibilités étudiées. Les tableaux 4.2 et 4.3 donnent les erreurs exacte et estimée correspondant aux sensibilités d'ordre 1 et 2 respectivement. Les résultats graphiques associés sont présentés sur les figures 4.4 et 4.5. Les écarts entre les courbes sont associés aux écarts entre les normes des solutions. En effet, l'erreur relative est sensiblement la même pour toutes les variables (de l'ordre du centième de pourcent). D'autre part, le taux de décroissance des erreurs est en accord avec le taux de convergence théorique pour l'élément quadratique utilisé. On observe aussi la très bonne performance de l'estimateur d'erreur par la superposition quasiment parfaite des courbes d'erreur exacte et estimée

quel que soit le paramètre considéré.

Ce cas nous permet donc de vérifier l'implantation de l'équation des sensibilités à l'ordre 2 pour les écoulements laminaires ainsi que celle de l'estimateur d'erreur associé.

TAB. 4.1 Erreurs exacte et estimée pour la vitesse  $\mathbf{u}$

Nodes	$\ \mathbf{u}\ _{\text{exa.}}$	$\ \mathbf{u}\ _{\text{est.}}$	$\ \mathbf{P}\ _{\text{exa.}}$	$\ \mathbf{P}\ _{\text{est.}}$
151	4.705E-03	5.277E-03	2.432E-02	1.301E-02
315	2.441E-03	2.377E-03	3.014E-03	2.711E-03
622	9.421E-04	9.813E-04	1.138E-03	1.018E-03
1218	4.211E-04	4.239E-04	4.762E-04	4.400E-04
2492	1.942E-04	1.950E-04	2.416E-04	2.252E-04
5165	8.258E-05	8.267E-05	9.917E-05	9.493E-05
10742	3.466E-05	3.489E-05	4.161E-05	4.007E-05
23258	1.496E-05	1.505E-05	1.776E-05	1.715E-05
51434	6.632E-06	6.667E-06	7.859E-06	7.595E-06

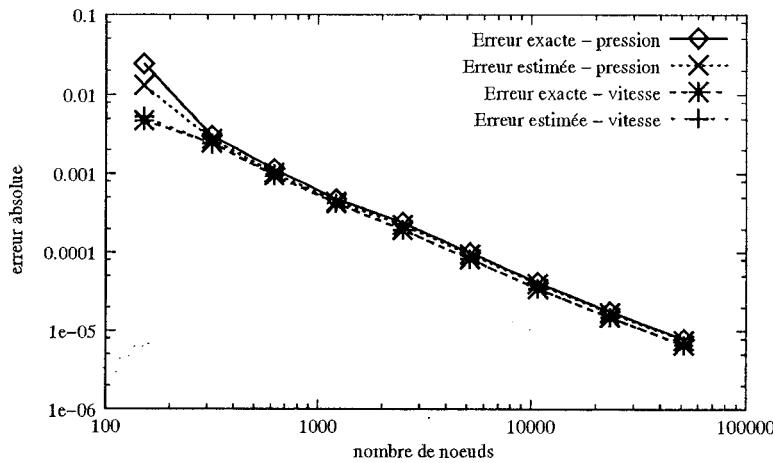


FIG. 4.3 Trajectoires des erreurs pour l'écoulement

TAB. 4.2 Erreurs exacte et estimée en sensibilités au premier ordre pour la vitesse  $\mathbf{S}$

Noeuds	$\  \mathbf{s}_u^L \ _{\text{exa.}}$	$\  \mathbf{s}_u^L \ _{\text{est.}}$	$\  \mathbf{s}_u^{U_\infty} \ _{\text{exa.}}$	$\  \mathbf{s}_u^{U_\infty} \ _{\text{est.}}$
151	2.316E-03	2.722E-03	8.451E-03	8.677E-03
315	1.212E-03	1.210E-03	5.402E-03	4.451E-03
622	4.702E-04	4.906E-04	2.026E-03	2.168E-03
1218	2.104E-04	2.119E-04	9.299E-04	9.346E-04
2492	9.704E-05	9.741E-05	4.361E-04	4.366E-04
5165	4.128E-05	4.132E-05	1.918E-04	1.919E-04
10742	1.733E-05	1.744E-05	8.069E-05	8.114E-05
23258	7.481E-06	7.526E-06	3.404E-05	3.426E-05
51434	3.316E-06	3.333E-06	1.523E-05	1.531E-05

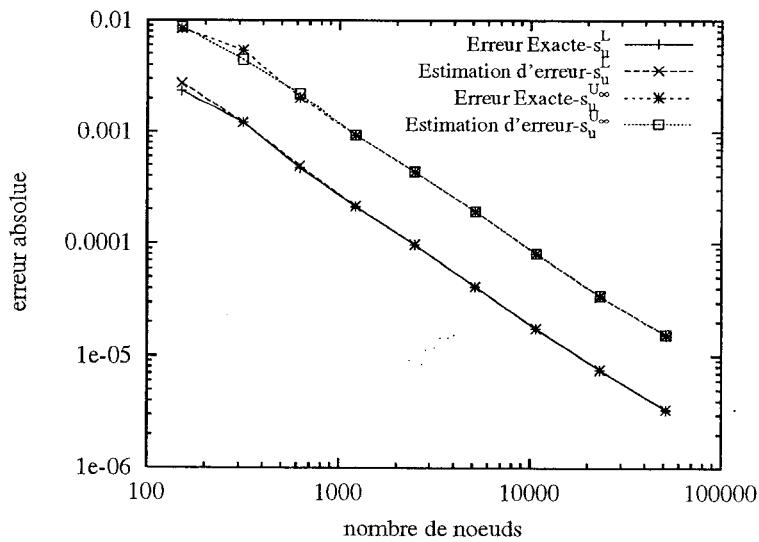


FIG. 4.4 Trajectoires des erreurs sur les sensibilités à l'ordre 1

TAB. 4.3 Erreurs exacte et estimée pour les sensibilités à l'ordre 2

Noeuds	$\  s_u^{LL} \ _{exa.}$	$\  s_u^{LL} \ _{est.}$
151	1.211E-03	1.283E-03
315	6.182E-04	5.839E-04
622	2.361E-04	2.454E-04
1218	1.053E-04	1.060E-04
2492	4.857E-05	4.878E-05
5165	2.065E-05	2.068E-05
10742	8.668E-06	8.725E-06
23258	3.742E-06	3.764E-06
51434	1.658E-06	1.667E-06

Noeuds	$\  s_u^{U_\infty U_\infty} \ _{exa.}$	$\  s_u^{U_\infty U_\infty} \ _{est.}$
151	1.199E-02	5.524E-03
315	8.046E-03	4.729E-03
622	3.570E-03	3.278E-03
1218	1.529E-03	1.540E-03
2492	7.906E-04	7.833E-04
5165	3.653E-04	3.604E-04
10742	1.633E-04	1.624E-04
23258	6.901E-05	6.881E-05
51434	2.978E-05	2.978E-05

Noeuds	$\  s_u^{U_\infty L} \ _{exa.}$	$\  s_u^{U_\infty L} \ _{est.}$
151	4.171E-03	4.532E-03
315	2.648E-03	2.284E-03
622	1.009E-03	1.086E-03
1218	4.647E-04	4.672E-04
2492	2.179E-04	2.181E-04
5165	9.586E-05	9.587E-05
10742	4.033E-05	4.056E-05
23258	1.701E-05	1.713E-05
51434	7.614E-06	7.653E-06

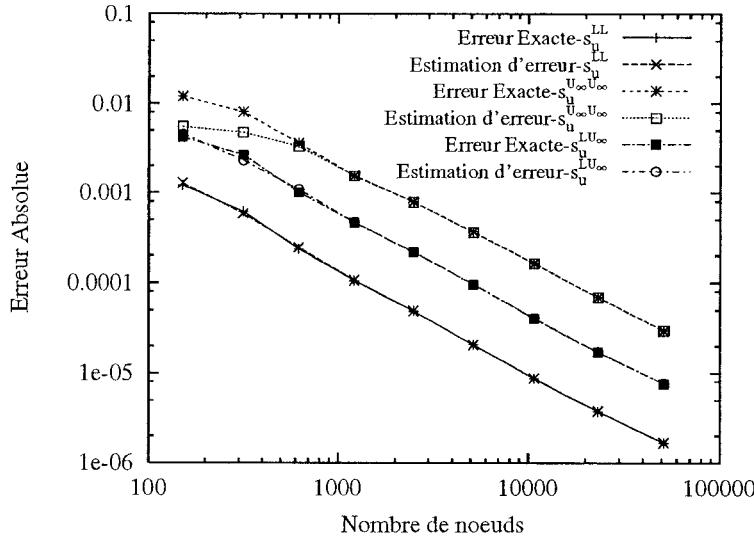


FIG. 4.5 Trajectoires de l'erreur à l'ordre 2

#### 4.2.3 Analyse de sensibilités

Les sensibilités permettent d'étudier directement l'influence d'un paramètre sur la solution. Pour comparer ces différentes influences entre elles, il faut les normaliser par une quantité de référence qui tienne compte de deux caractéristiques :

- la valeur nominale du paramètre  $a_{nominal}$
- l'amplitude de variation  $\Delta a$  du paramètre (ou plage de variation) autour de la valeur nominale

On choisit ici de prendre comme grandeur de normalisation la valeur maximale du paramètre :

$$a_{max} = a_{nominal} + \frac{\Delta a}{2} \quad (4.19)$$

En normalisant les sensibilités de chaque paramètre par la valeur  $a_{max}$  correspondant, on peut alors comparer les effets et les influences de ces paramètres. En effet, on peut écrire le développement de Taylor à l'ordre un de la vitesse  $u$  autour de la valeur  $a$  :

$$u(a + \delta a) = u(a) + \frac{\partial u}{\partial a} \delta a \quad (4.20)$$

$$= u(a) + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial a} a_{max}}_{\substack{\text{sensibilité} \\ \text{normalisée}}} \underbrace{\frac{\delta a}{a_{max}}}_{\substack{\text{perturbation} \\ \text{relative}}} \quad (4.21)$$

Les valeurs nominales et les plages de variation étant toutes unitaires ici, on peut comparer directement les sensibilités les unes par rapport aux autres. Par conséquent, si une sensibilité est  $n$  fois plus élevée qu'une autre, la solution va varier  $n$  fois plus dans le premier cas que dans le second, pour une même variation relative des deux paramètres.

À l'ordre deux, on peut à nouveau écrire le développement de Taylor de  $u$  autour de  $a_{nominal}$  pour normaliser les sensibilités à l'ordre deux :

$$u(a + \delta a) = u(a) + \frac{\partial u}{\partial a} \delta a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} (\delta a)^2 \quad (4.22)$$

$$= u(a) + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial a} a_{max}}_{\substack{\text{sensibilité} \\ \text{normalisée}}} \left( \frac{\delta a}{a_{max}} \right) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} a_{max}^2}_{\substack{\text{perturbation} \\ \text{relative}}} \left( \frac{\delta a}{a_{max}} \right)^2 \quad (4.23)$$

qui se généralise pour un vecteur de paramètres de sensibilités  $(a_1, \dots, a_n)$  :

$$\begin{aligned}
u(a_1 + \delta a_1, \dots, a_n + \delta a_n) &= u(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial a_i} \delta a_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial a_i \partial a_j} \delta a_i \delta a_j \\
&= u(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial u}{\partial a_i} a_i}_{\substack{\text{sensibilité} \\ \text{normalisée}}} \frac{\delta a_i}{a_i} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial a_i \partial a_j} (a_i)_{max} (a_j)_{max}}_{\substack{\text{sensibilité normalisée ordre 2}}} \frac{\delta a_i}{(a_i)_{max}} \frac{\delta a_j}{(a_j)_{max}}
\end{aligned}
\tag{4.24}
\tag{4.25}$$

On peut donc comparer directement les influences des sensibilités normalisées à l'ordre deux entre elles mais pour comparer l'ordre un et l'ordre deux, il faut tenir compte du fait qu'à l'ordre deux on multiplie le coefficient de sensibilité par le carré de la perturbation relative. Les figures 4.6 et 4.7 présentent les distributions des sensibilités normalisées des composantes de vitesse  $u$  et  $v$ .

Sur la figure 4.6, le quatrième maillage adapté est utilisé. Les sensibilités sont symétriques et maximales près de l'axe de symétrie de l'écoulement. On note que les sensibilités d'ordre 1 par rapport à  $L$  et  $U_\infty$  sont de signe opposé, avec une influence beaucoup plus importante pour la vitesse amont  $U_\infty$ . En effet sur le schéma (a), la valeur globale de la sensibilité par rapport à  $U_\infty$  est  $s_u^{U_\infty} = 1$  sauf sur l'axe où on observe une diminution de la sensibilité. Cette valeur globale unitaire est due à la structure mathématique de l'équation (4.1) qui construit  $u$  autour de la valeur  $U_\infty$ . Comme attendu, on observe un élargissement de la distribution de sensibilité dans le sillage de même qu'un amortissement avec l'éloignement de la plaque. Cet amortissement est plus important pour la sensibilité par rapport à  $L$  (cf schéma (b)) : rapidement, la

longueur de la plaque perd son influence sur la structure du sillage. De plus cette influence de  $L$  est confinée autour de l'axe de symétrie (les coefficients de sensibilités par rapport à  $L$  sont plus rapidement proche de zéro quand on s'éloigne de l'axe, par comparaison aux sensibilités faisant intervenir  $U_\infty$ ). Les variations des sensibilités à l'ordre 2 suivent les mêmes comportement qu'à l'ordre un : on peut noter sur le schéma (c) le confinement, l'amortissement et la faiblesse de  $s_u^{LL}$ , qui est positive sur l'axe de symétrie, indiquant qu'une augmentation de  $L$  augmentera la sensibilité de la vitesse par rapport à la longueur de la plaque. On peut remarquer l'importance du terme croisé ( $s_u^{U_\infty L}$ ), montrant l'interaction entre la longueur de la plaque  $L$  et la vitesse en amont  $U_\infty$  : en effet, la vitesse en amont influence les variations du champ de vitesse par rapport à la longueur de la plaque et réciproquement la longueur de la plaque détermine la façon dont le champ de vitesse va varier lorsqu'on parcourt une certaine plage de  $U_\infty$ . Sur l'axe de symétrie, on constate, grâce à l'étude de ce terme croisé, qu'une augmentation de la longueur de la plaque diminue la sensibilité de  $u$  dans le sillage par rapport à la vitesse amont. Dans la zone frontière entre l'écoulement uniforme et le sillage modifié, on observe un léger effet inverse où une augmentation de la longueur de la plaque augmente légèrement  $s_u^{U_\infty}$ . L'étude du schéma (e) montre une influence complexe de la vitesse amont. Sur l'axe de symétrie, on peut remarquer qu'une variation de  $U_\infty$  n'aura aucun effet sur la sensibilité de  $u$  par rapport à la vitesse amont. Par contre, si on augmente  $U_\infty$ , on a tendance à affiner le pic de sensibilité  $s_u^{U_\infty}$ .

Sur la figure 4.7, le cinquième maillage adapté est considéré. L'échelle utilisée est 20 fois plus importante que celle de la figure 4.6 car les sensibilités de  $v$  sont très faibles par rapport à celles de  $u$ . Logiquement, on observe une antisymétrie

pour tous les paramètres ainsi qu'un amortissement et un élargissement de tous les coefficients. En comparant les schéma (a) et (b), on peut remarquer comme pour  $u$  que  $U_\infty$  a une influence plus importante sur  $v$  que  $L$ . L'influence de la longueur de la plaque est très simple : une augmentation de  $L$  va augmenter la valeur absolue de  $v$  de part et d'autre de l'axe. Pour  $U_\infty$  (cf schéma (a)), son influence a une étendue plus large en  $y$  et lorsqu'on augmente  $U_\infty$ , on augmente la valeur absolue de  $v$  le long de l'axe tandis qu'on la diminue plus loin. Autrement dit, on aura des variations de  $v$  plus forte mais dans un espace plus restreint le long de l'axe d'antisymétrie. D'après les schéma (c) et (d), en augmentant  $L$ , on aura tendance à diminuer l'influence de la longueur de la plaque sur  $v$  tout en augmentant les pics de la sensibilité par rapport à la vitesse amont. Le schéma (e) quant à lui nous indique qu'une augmentation de  $U_\infty$  aura tendance à tasser les pics de  $s_v^{U_\infty}$  le long de l'axe et à diminuer l'influence de  $U_\infty$  sur  $v$ .

On constate une énorme richesse d'informations dans l'analyse de sensibilité poussée au second ordre, ce qui aide à la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu et au choix des paramètres pertinents lors de design optimal d'expériences.

### 4.3 Conclusions

Cette solution manufacturée nous a donc permis de vérifier les points suivants :

- la précision du code de calcul par rapport à la solution analytique
- l'adaptation de maillage en fonction des sensibilités au deuxième ordre
- la précision de l'estimateur d'erreur pour tous les paramètres de sensi-

bilités.

Le code ainsi vérifié peut maintenant être appliqué avec confiance à des solutions réelles dont on ne connaît pas la solution analytique.

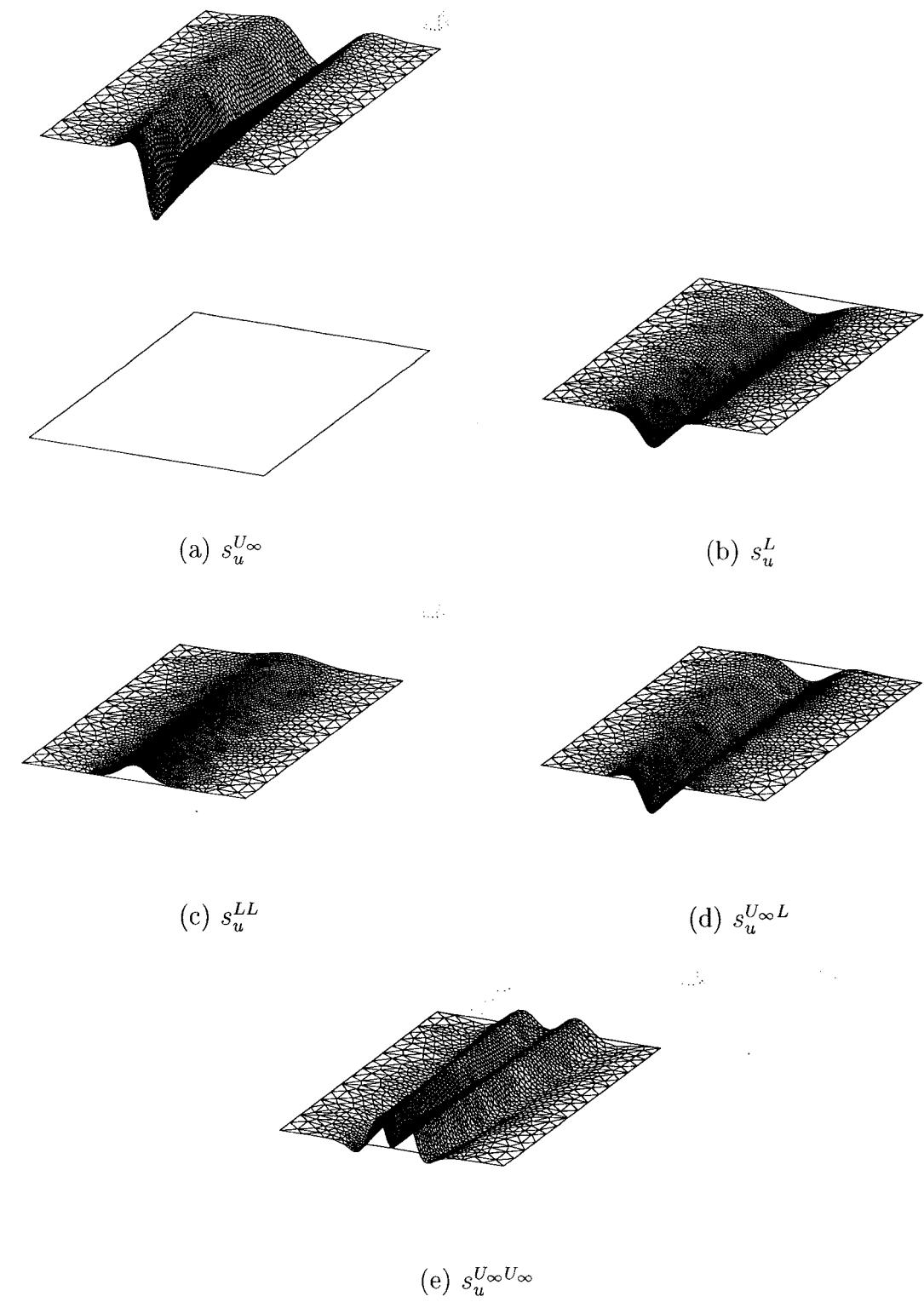


FIG. 4.6 Sensibilités  $s_u$  normalisées

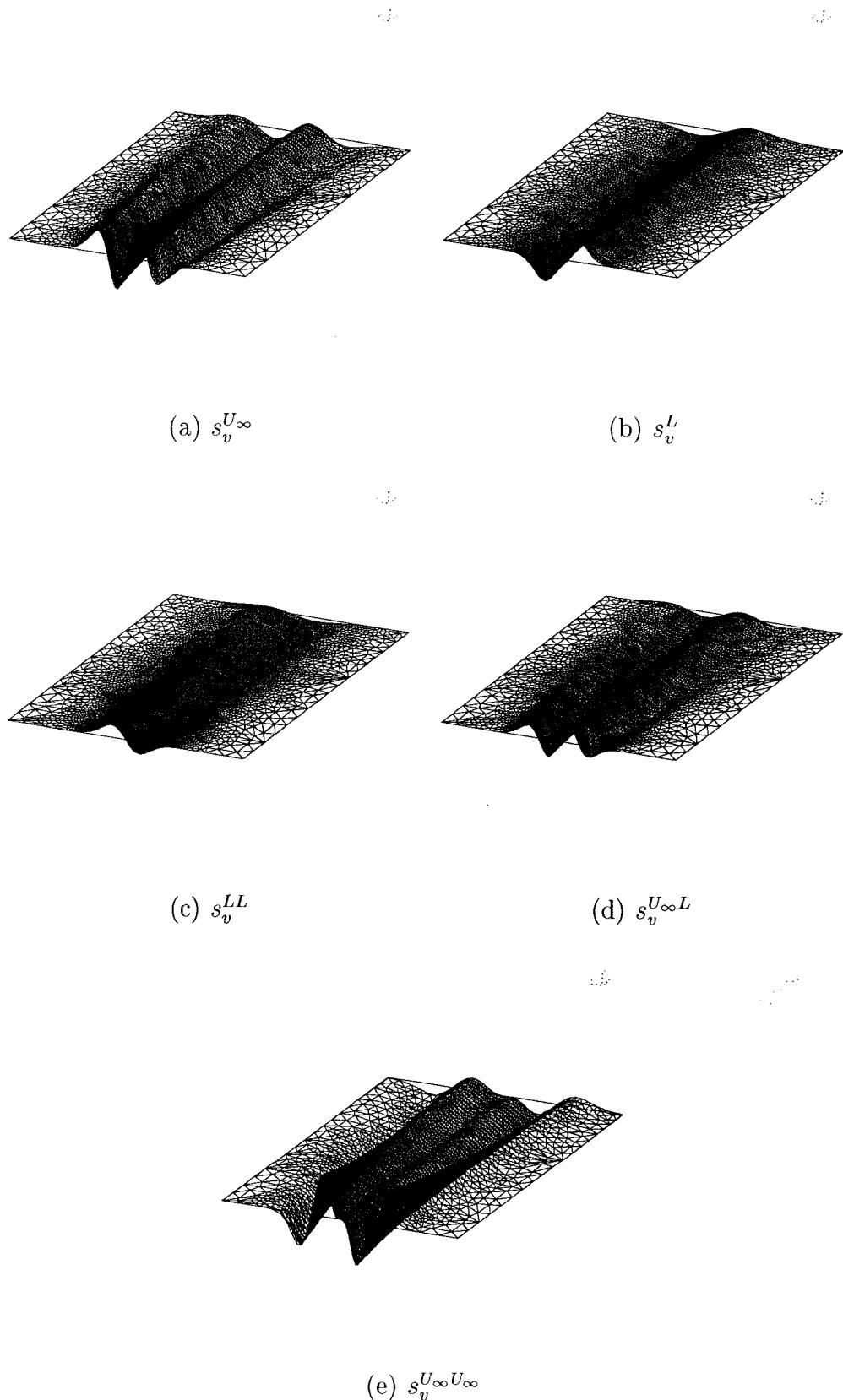


FIG. 4.7 Sensibilités  $s_v$  normalisées (échelle  $s_u \times 20$ )

## CHAPITRE 5

### APPLICATION AU NACA0012

Après avoir validé le code de calcul pour les sensibilités du deuxième ordre, on cherche maintenant à démontrer l'utilité de ces calculs qui peuvent à première vue paraître rébarbatifs. Pour cela nous allons étudier par un calcul de sensibilités au deuxième ordre l'influence de l'angle d'attaque sur l'écoulement laminaire autour d'un profil NACA0012 et notamment les améliorations apportées par l'extrapolation quadratique de solutions voisines pour lesquelles on observe une séparation de couche limite ainsi que l'apparition d'une bulle de recirculation. Les caractéristiques basique du profil NACA0012 sont présentées en annexe III.

#### 5.1 Description du problème

Le domaine de calcul est un rectangle qui s'étend sur 4 cordes en amont et en aval, et 5 cordes au-dessus et en-dessous du profil. L'origine du système de coordonnées est placé au bord d'attaque. La valeur de la corde est choisie unitaire. On considère un écoulement isotherme à un nombre de Reynolds de 2000 basé sur la corde  $c$  du profil et la vitesse  $U_\infty$  en amont à l'infini. Le problème est formulé de façon adimensionnelle et les variations de l'angle d'attaque  $\alpha$  sont obtenue par modification de l'angle de l'écoulement incident, ce qui permet de traiter  $\alpha$  comme paramètre de valeur, donc avec plus de précision et de simplicité. Cette représentation permet de garder un repère

fixe, ce qui facilite également l'interprétation des graphiques aux différents angles d'attaque.

On choisit donc un champ de vitesse en amont de la forme :

$$u = U_\infty \cos \alpha$$

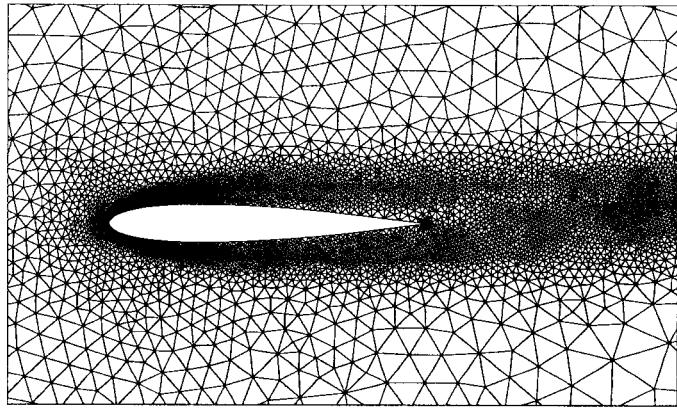
$$v = U_\infty \sin \alpha$$

avec  $U_\infty = 1$ . On impose une condition d'adhérence à la surface du profil ( $u = v = 0$ ). Sur le bord d'entrée et sur le bord inférieur, on impose des conditions de Dirichlet tandis que sur le bord supérieur et sur le bord de sortie, on impose des conditions libres (contraintes nulles). Un maillage adapté typique pour un angle de 3 degrés est présenté sur la figure 5.1. Les lignes de courant correspondant à l'écoulement avec un angle d'incidence de  $\alpha = 3^\circ$  se trouvent sur la figure 5.2. On note comme prévu un raffinement de maillage autour du point de stagnation et du bord de fuite, de même que dans l'écoulement au dessus du profil. Les lignes de courant de la figure 5.2 sont centrées autour de la ligne  $\psi_0$  (fonction de courant nulle) et on observe pour cette configuration à  $3^\circ$  l'apparition de la bulle de recirculation sur l'extrados.

## 5.2 Analyse de sensibilités

On considère ici les deux paramètres de sensibilité suivants :

- l'angle d'attaque  $\alpha$ , ou plus exactement ici l'angle d'incidence de l'écoulement
- le nombre de Reynolds  $Re$ , par l'intermédiaire de la viscosité

FIG. 5.1 Maillage final à  $\alpha = 3^\circ$ FIG. 5.2 Lignes de courant à  $\alpha = 3^\circ$ 

À l'ordre 1, on impose donc sur le profil les conditions limites :

$$s_u^{Re} = s_v^{Re} = s_u^\alpha = s_v^\alpha = 0$$

et à l'entrée, les conditions de Dirichlet s'obtiennent par différentiation des conditions limites pour l'écoulement. Pour le paramètre  $\alpha$ , on a alors :

$$s_u^\alpha = -u_\infty \sin \alpha \quad (5.1)$$

$$s_v^\alpha = u_\infty \cos \alpha \quad (5.2)$$

A l'entrée, les vecteurs “vitesse des sensibilités” sont donc perpendiculaires à ceux de l’écoulement. Sur la figure 5.3 sont représentées quelques lignes de courant du champs de sensibilités pour  $\alpha = 3^\circ$  ( $-0.3 < \psi < 0.3$ , les lignes étant tracées grâce au logiciel VU). Ces lignes sont globalement verticales (car orthogonales aux lignes de courant du champs de vitesse à l’infini) et orientées de bas en haut. On y observe un fort rebroussement sur l’extrados, avec un resserrement des lignes, indiquant qu’une augmentation de  $\alpha$  produira une accélération de l’écoulement sur l’intrados, un ralentissement sur l’extrados ainsi donc qu’un déplacement du point de décollement vers l’amont. Toutes ces informations sont obtenues sans calculs supplémentaires.

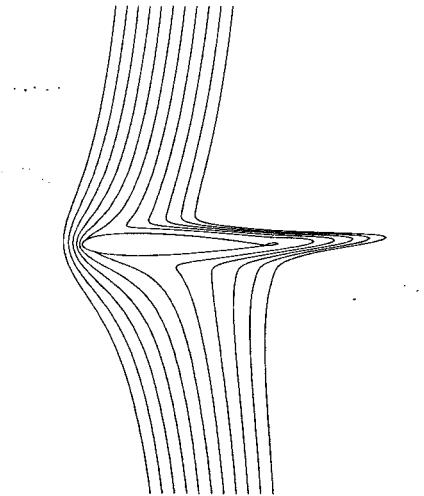


FIG. 5.3 Lignes de courant pour les sensibilités par rapport à  $\alpha$  à  $\alpha = 3^\circ$

Pour le paramètre  $Re$  (Nombre de Reynolds), les conditions de Dirichlet à l’entrée pour les sensibilités sont nulles. On choisit de faire varier  $Re$  par le biais de la viscosité et on obtient les lignes de courant du champ de sensibilités par rapport à  $Re$  (figure 5.4). Loin du profil (à l’extérieur de la couche limite), on remarque que ces lignes de courant dessinent une spirale centrée sur

le profil est orientée vers lui : l'écoulement est quasi-potentiel et lorsqu'on augmente le Reynolds (en diminuant la viscosité), on réduit la taille de la couche limite ; c'est comme si on amincissait le profil, ce qui fait qu'à l'extérieur de la couche limite on observera un ralentissement général de l'écoulement qui aura tendance à retrouver plus rapidement les caractéristiques de la vitesse à l'infini  $U_\infty$ . Dans la couche limite, le phénomène inverse se produit : une augmentation du nombre de Reynolds aura tendance à accélérer l'écoulement sur l'intrados tandis que sur l'extrados, on observera un amincissement de la bulle de recirculation couplée à une accélération dans cette zone.

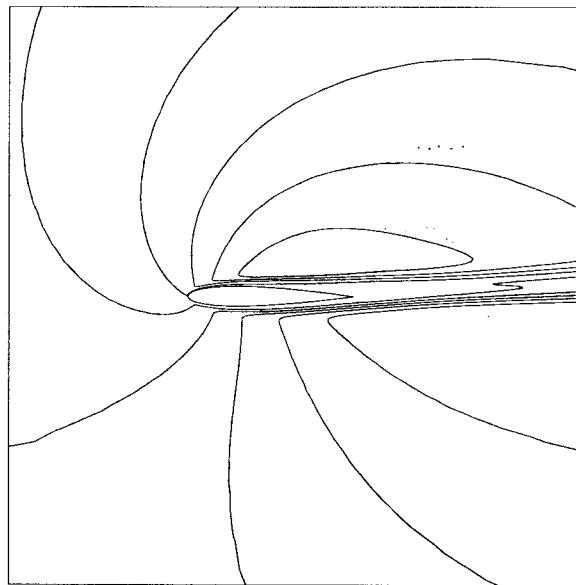


FIG. 5.4 Lignes de courant pour les sensibilités par rapport à  $Re$  à  $\alpha = 3^\circ$

Pour comparer quantitativement les deux paramètres d'étude, il faut normaliser les sensibilités comme décrit dans le paragraphe 4.2.3. En effet, les deux paramètres ont des comportements très différents :  $\alpha$  a une valeur nominale nulle et une petite plage de variation ( $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) tandis que le nombre

de Reynolds  $Re$  a une valeur nominale de 2000 et une grande plage de variation (ici notre modèle s'applique pour  $Re < 10^4$ ). Pour comparer leur influence en tenant compte de ces facteurs, on normalise par la valeur maximale  $\alpha_{max}$  et  $Re_{max}$  comme décrit par la formule (4.19) :

$$\alpha_{max} = \alpha_{nominal} + \frac{\Delta\alpha}{2} = 0 + \frac{\pi}{2} \quad (5.3)$$

$$Re_{max} = Re_{nominal} + \frac{\Delta Re}{2} \approx 10^4 \quad (5.4)$$

Bien entendu, le choix de la plage de variation  $\Delta\alpha$  et  $\Delta Re$  dépend de la physique du problème et des contraintes que l'on choisit d'imposer sur la variation des paramètres. On trace ainsi sur la figure 5.5 les sensibilités d'ordre 1 à une demi-corde en aval du bord de fuite (à  $x = 1.5$ ). Sur cette figure, on peut remarquer que le nombre de Reynolds a une influence plus faible que celle de l'angle d'attaque.

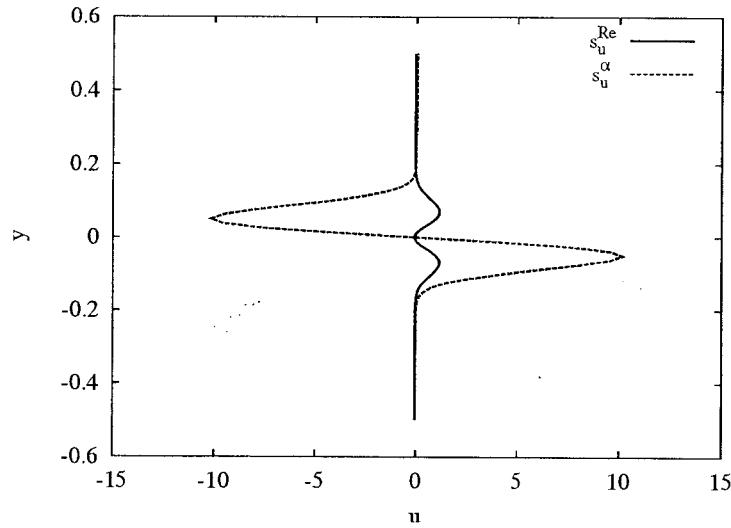


FIG. 5.5 Sensibilités normalisées de  $u$  de premier ordre à  $x = 1.5$

A l'ordre deux, on peut à nouveau tracer les trois sensibilités du second ordre derrière le bord de fuite (figure 5.6). On note à nouveau que le terme quadratique  $s_u^{\alpha\alpha}$  est le plus important des trois. On peut également observer les lignes

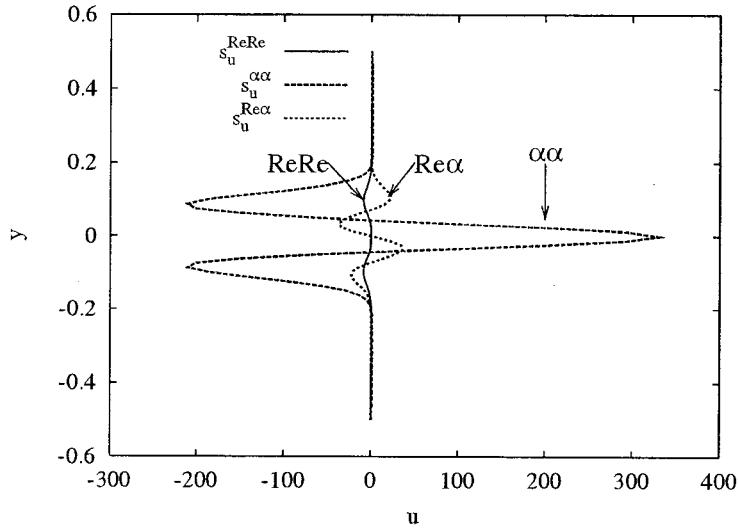


FIG. 5.6 Sensibilités normalisées de  $u$  de second ordre à  $x = 1.5$

de courant correspondant aux sensibilités de la vitesse  $s_u^{\alpha\alpha}$ ,  $s_u^{\alpha Re}$  et  $s_u^{ReRe}$  (figures 5.7 à 5.9). Ces lignes décrivent la façon dont les sensibilités à l'ordre 1 vont varier lorsqu'on perturbe les paramètres. La figure 5.7 montre les lignes de courant du champs de sensibilités à l'ordre deux de la vitesse ( $\psi(s_u^{\alpha\alpha}, s_v^{\alpha\alpha})$ ) : on y remarque une forte sensibilité dans sillage, avec un resserrement le long de la ligne de courant du champ de vitesse  $\psi_0$  (ligne qui émane du bord de fuite). On note aussi que le rebroussement des lignes sur l'extrados est déterminant pour la façon dont la bulle de recirculation va être structurée. Sur la figure 5.8 sont présentées les lignes de courant de sensibilités à l'ordre deux pour le nombre de Reynolds ( $\psi(s_u^{ReRe}, s_v^{ReRe})$ ) à  $\alpha = 3^\circ$ . Le fort rebroussement à la frontière de la couche limite indique qu'une augmentation du Reynolds par diminution de la viscosité va diminuer la sensibilité du champ de vitesse par

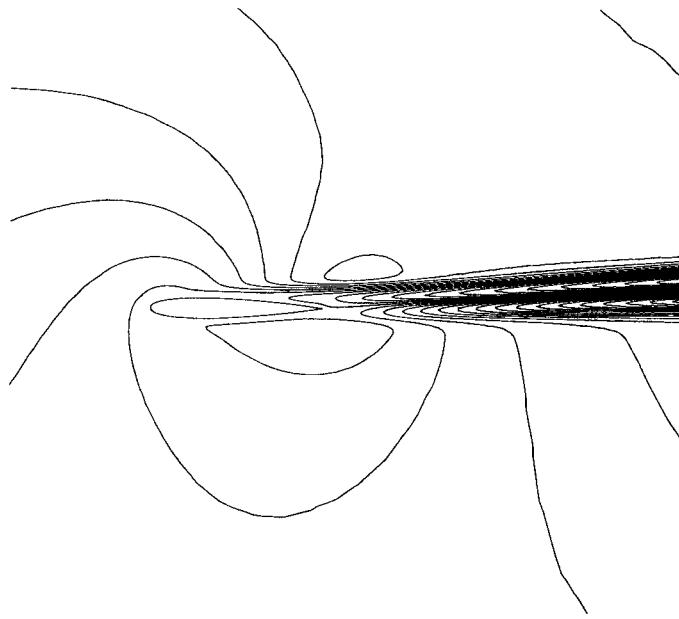


FIG. 5.7 Lignes de courant pour les sensibilités de  $u$  à l'ordre deux  $\psi(s_u^{\alpha\alpha}, s_v^{\alpha\alpha})$  pour un angle d'attaque de  $3^\circ$

rapport à  $Re$  à cet endroit.

Enfin, la figure 5.9 montre l'influence croisée du nombre de Reynolds et de l'angle d'attaque  $\alpha$  : une diminution de la viscosité aura ainsi tendance à amincer la zone de forte influence de l'angle d'attaque et à augmenter la sensibilité du champ de vitesse par rapport à  $\alpha$  dans la couche limite.

Dans la suite de notre étude, nous allons nous concentrer sur le paramètre le plus influent : l'angle d'attaque  $\alpha$ .

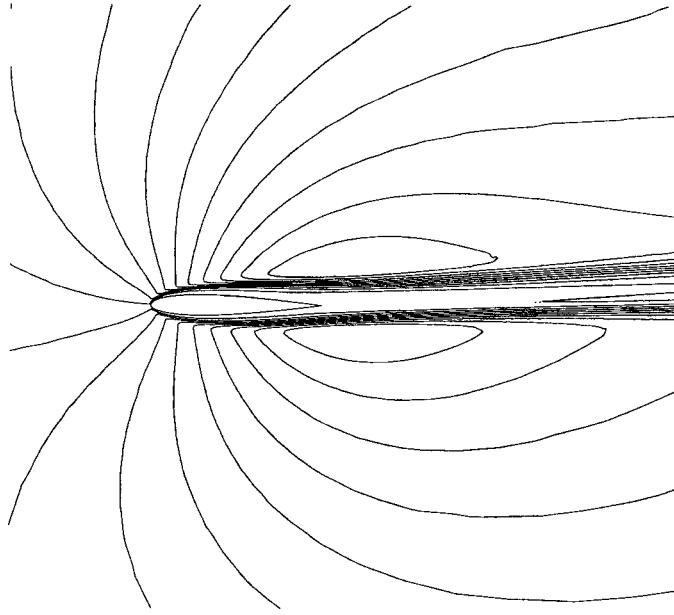


FIG. 5.8 Lignes de courant pour les sensibilités de  $u$  à l'ordre deux  $\psi(s_u^{ReRe}, s_v^{ReRe})$  pour un angle d'attaque de  $3^\circ$

### 5.3 Analyse d'incertitude

Comme introduit dans le paragraphe 1.2, il existe dans toute expérience une incertitude sur les données à l'entrée et sur les paramètres d'étude. Les sensibilités à l'ordre deux permettent d'estimer de manière réaliste les marges de variation de la solution en fonction des données d'incertitude à l'entrée. Sur la figure 5.10, on considère une erreur sur l'angle d'attaque de  $1\%$  ( $\alpha = 3^\circ \pm 1\%$ ) et on présente l'incertitude correspondante sur la vitesse  $u$  le long de  $y$  à  $80\%$  de la corde. Cette incertitude est calculée à partir des sensibilités au premier et au second ordre comme développé dans l'équation (1.11). On peut noter que l'incertitude est plus grande dans la zone de recirculation alors qu'elle est quasiment nulle loin du profil. La connaissance de ces bornes de variation est utile pour prédire la propagation de l'incertitude dans le code et pour

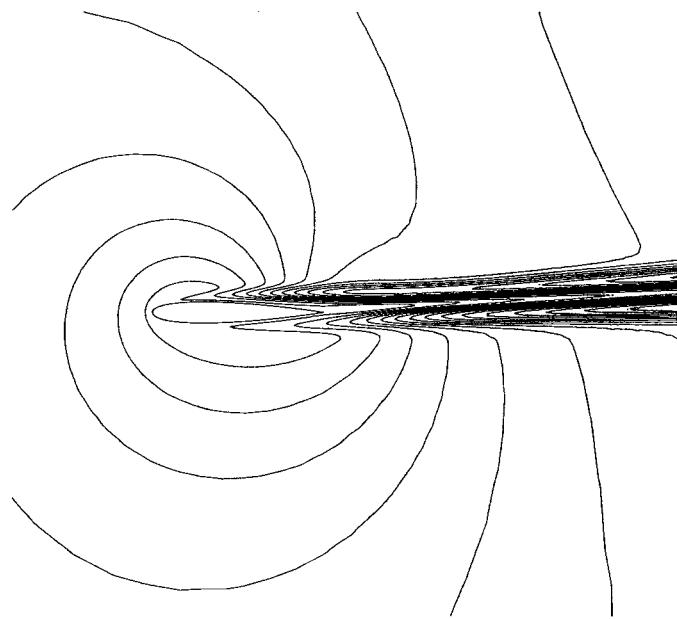


FIG. 5.9 Lignes de courant pour les sensibilités de  $u$  à l'ordre deux  $\psi(s_u^{Re\alpha}, s_v^{Re\alpha})$  pour un angle d'attaque de  $3^\circ$

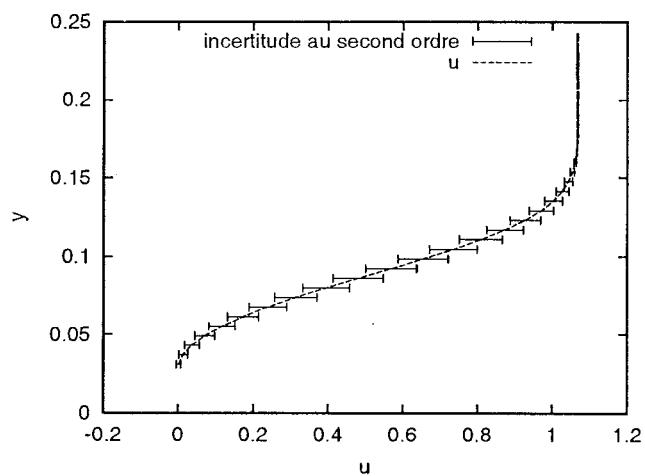


FIG. 5.10 Incertitude sur la vitesse  $u$  à  $x = 0.8c$  pour une incertitude d'entrée  $\Delta\alpha = 1\%$

augmenter la robustesse des méthodes d'optimisation basée sur les calculs de gradient.

## 5.4 Calculs de solutions voisines

À mesure que l'angle d'attaque augmente, on peut observer une séparation de la couche limite sur l'extrados. Dans cette section, nous allons considérer plus particulièrement cette zone de séparation de la couche limite ainsi que la bulle de recirculation correspondante.

### 5.4.1 Lignes de courant

Comme le décrit Turgeon *et al.* [45], une extrapolation linéaire à partir de la solution symétrique à  $\alpha = 0^\circ$  permet de prédire de manière précise la position du point de décollement sur l'extrados mais ne permet pas une reconstruction fiable de la bulle de recirculation. En effet, la figure 5.11 montre l'apparition de fortes non-linéarités en  $\alpha$  dans la composante horizontale de la vitesse à mesure que l'on s'éloigne du profil ( $x = \text{constante} = 0.8c$  et  $y = 0.05c; 0.1c; 0.15c$ ). À  $y = 0.05c$ ,  $u$  varie de manière quasi linéaire en fonction de  $\alpha$  tandis qu'à  $y = 0.15c$ , les variations ne sont plus du tout linéaires. Grâce aux sensibilités d'ordre deux, on récupère les termes quadratiques, ce qui permet une prédiction plus précise des zones de non-linéarités. La figure 5.12 résume la démarche employée : on part de la solution à  $0^\circ$  et on ajoute les termes linéaires et quadratiques de la série de Taylor pour extraire à  $3^\circ$

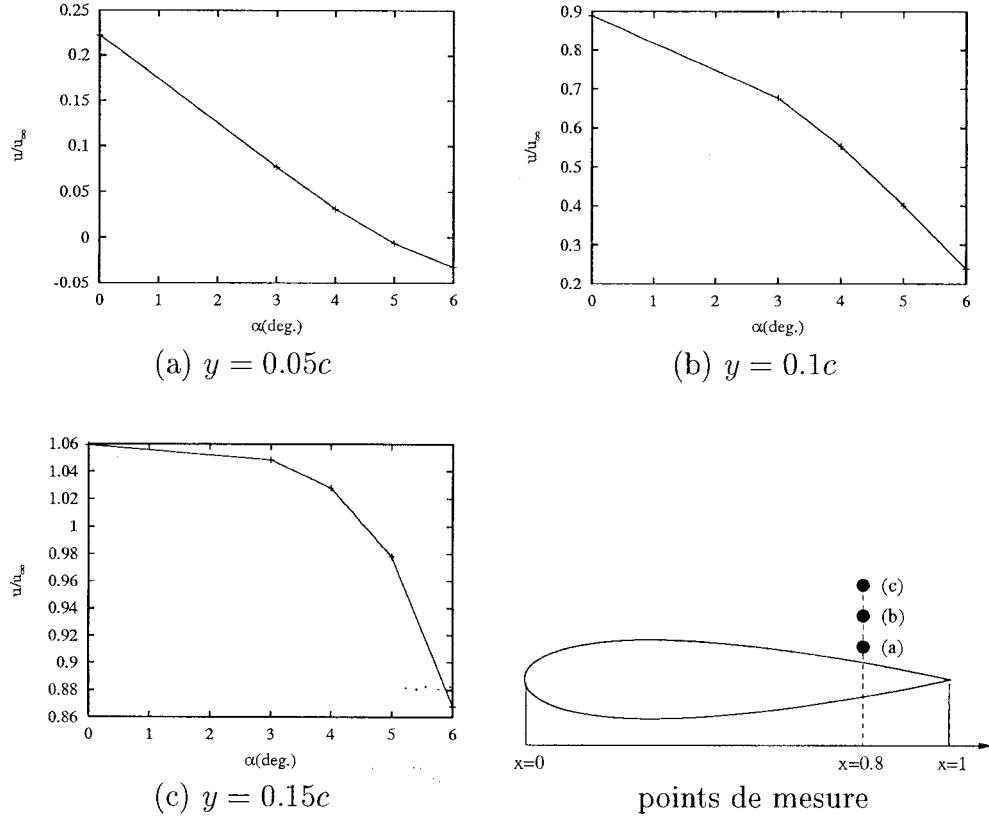


FIG. 5.11  $u/u_\infty$  en fonction de  $\alpha$  à  $x = 0.8c$  pour différentes valeurs de  $y$

selon la formule suivante :

$$\psi(u, v)|_{\alpha_0 + \delta\alpha} = \psi(u, v)|_{\alpha_0} + \delta\alpha \psi(s_u^\alpha, s_v^\alpha)|_{\alpha_0} + \frac{\delta\alpha^2}{2} \psi(s_u^{\alpha\alpha}, s_v^{\alpha\alpha})|_{\alpha_0} \quad (5.5)$$

où  $\alpha_0 = 0^\circ$  et  $\delta\alpha = 3^\circ$ .

Pour séparer les effets des termes du premier et du second ordre, on étudie plus particulièrement la ligne de courant  $\psi_0$  : les figures 5.13 et 5.14 tracent  $\psi_0$  pour différents angles d'attaque. Cette ligne comprend le profil, le point de stagnation et le point de décollement. Si ce dernier est situé sur le bord de fuite, l'écoulement est dit attaché.

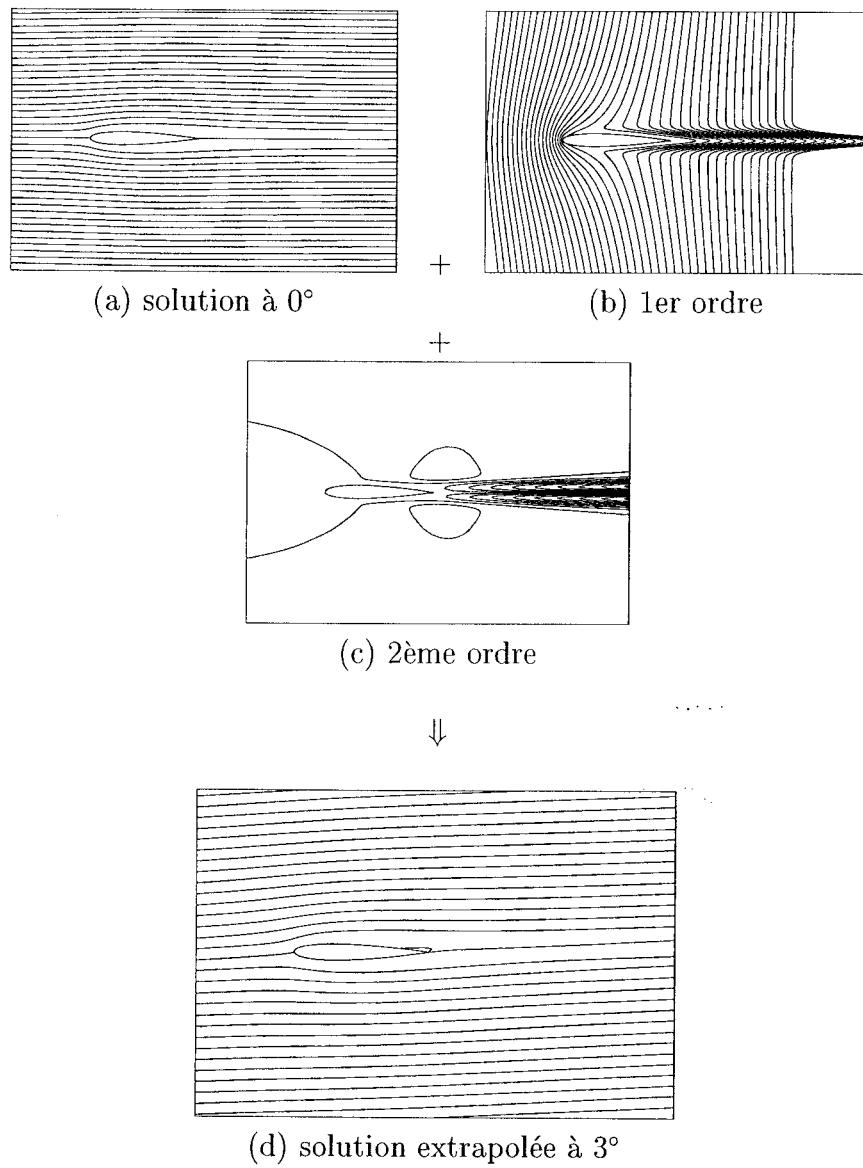


FIG. 5.12 Extrapolation des lignes de courant du champ de vitesse de  $0^\circ$  à  $3^\circ$

Sur la figure 5.13, on compare les solutions obtenues par extrapolation à l'ordre un et deux à partir de la solution à  $0^\circ$ . La première colonne rassemble les extrapolations au premier ordre à 3,4,5 et 6 degrés à partir de  $0^\circ$ , la deuxième présente les extrapolations au second ordre à 3,4,5 et 6 degrés à partir de  $0^\circ$  tandis que la dernière colonne présente les solutions recalculées

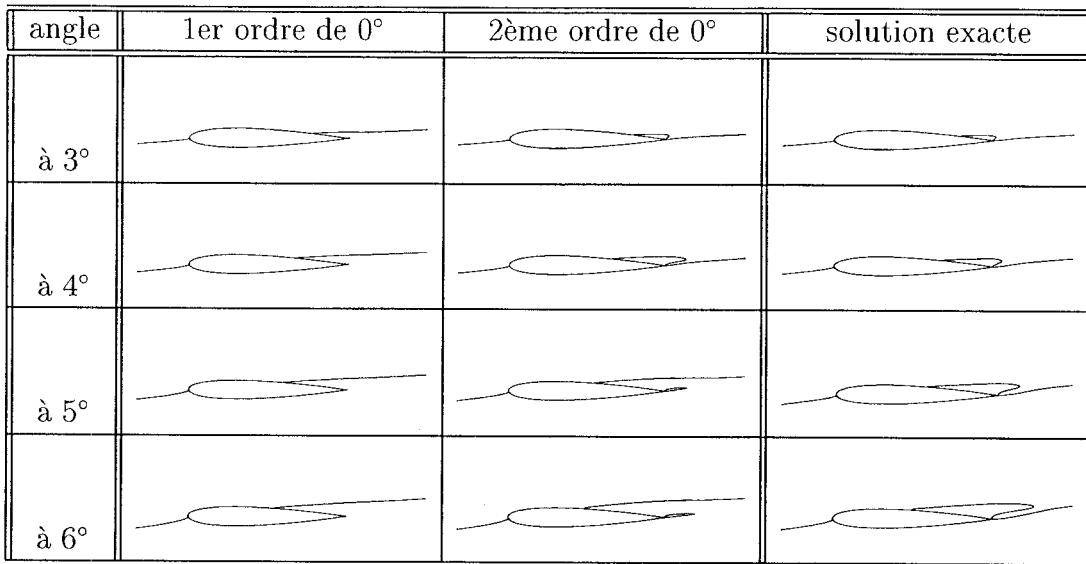


FIG. 5.13 Point de décollement - ligne de courant  $\psi_0$  (à partir de la solution à  $0^\circ$ )

par le code éléments finis à 3, 4, 5 et 6 degrés. Alors que la solution à  $0^\circ$  est symétrique et attachée, on observe un décollement des solutions à 3,4,5 et 6 degrés. Les extrapolations d'ordre un prédisent correctement la position du point de décollement tandis que celles à l'ordre deux prédisent en plus la forme de la bulle de recirculation, lorsque les variations d'angle restent inférieure à  $3^\circ$ . Ces résultats sont remarquables, compte tenu de la forte variation d'angle ( $\Delta\alpha = 3^\circ$ ). Les sensibilités d'ordre deux permettent donc d'obtenir une solution voisine de manière rapide et précise. Pour  $\alpha > 3^\circ$ , les prédictions d'ordre deux, bien que nettement meilleures que celles d'ordre un, restent cependant imprécises quant à la reconstruction de la zone de recirculation.

La figure 5.14 présente les extrapolations à partir de la solution à  $3^\circ$ . À nouveau, les résultats sont excellents tant que la variation d'angle reste inférieure à 3 degrés. De plus, alors que l'ordre un ne permet pas de retrouver la solution symétrique à  $0^\circ$  à partir de la solution à  $3^\circ$ , l'ordre deux donne un résultat

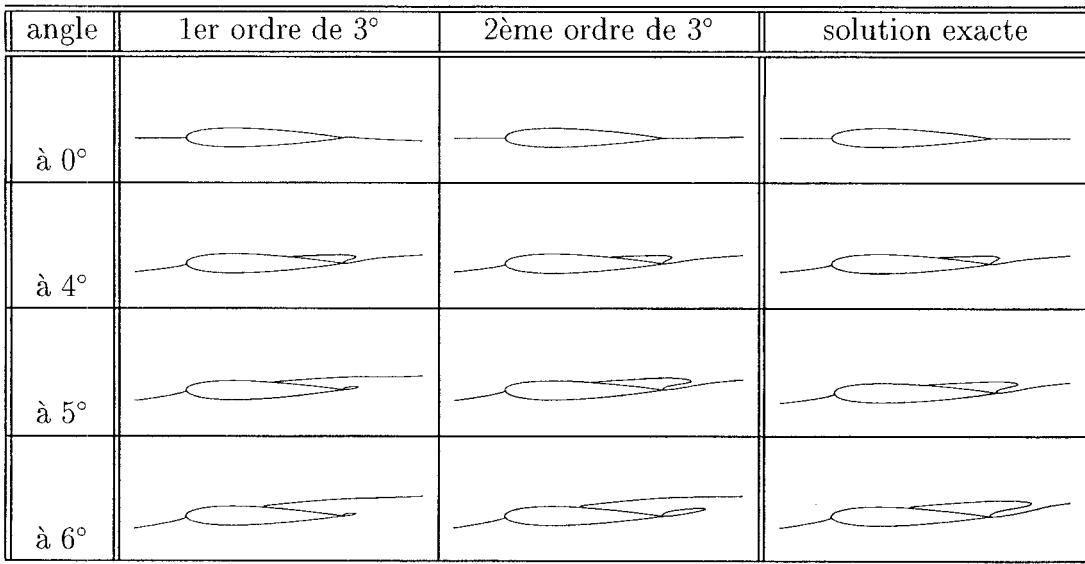


FIG. 5.14 Point de décollement - ligne de courant  $\psi_0$  (à partir de la solution à 3°)

quasiment parfait.

Pour souligner encore davantage les améliorations de l'extrapolation quadratique dans la zone de recirculation, on étudie de manière plus détaillée la structure des lignes de courant autour du bord de fuite. Les figures 5.15 et 5.16 comparent les lignes de courant calculées aux extrapolations d'ordre un et deux dans la bulle de recirculation : pour de faibles perturbations de  $\alpha$ , on observe donc une très bonne extrapolation tandis que la précision se dégrade pour  $\alpha > 3^\circ$ . On note ici l'extraordinaire qualité des extrapolations d'ordre deux de 0 à 3 degrés ainsi que celles de 3 à 4 et 5 degrés. La série quadratique permet également de retrouver la solution à incidence nulle à partir de la solution à 3° de manière beaucoup plus précise. Les sensibilités d'ordre deux permettent donc de prédire un changement important de comportement à un coût très faible tout en gardant une bonne fiabilité. Pour encore souligner davantage les progrès indéniables des prédictions du second ordre, on peut tracer

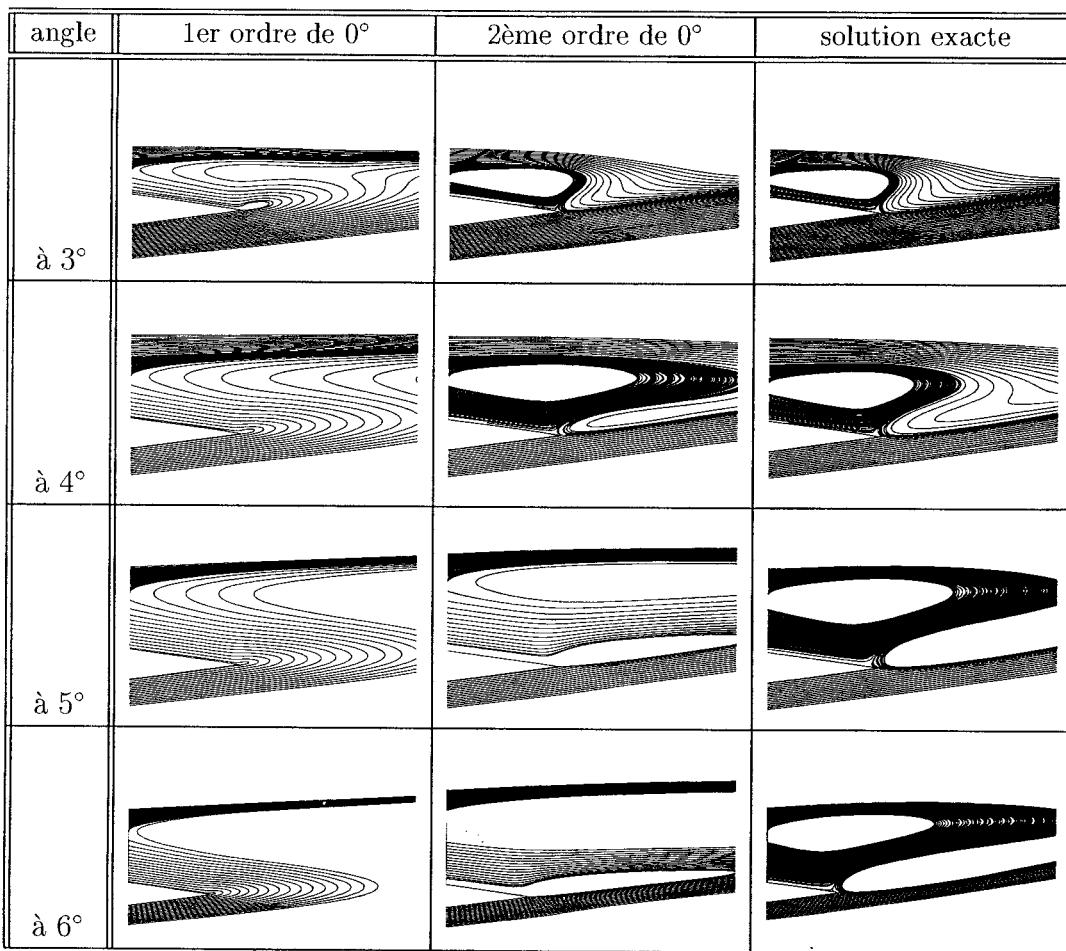


FIG. 5.15 Zone de recirculation - Extrapolation de  $0^\circ$

un profil de vitesse près du bord de fuite et faire l'extrapolation de ce profil de  $3^\circ$  à  $5^\circ$ . Les résultats de cette extrapolation sont présentés sur la figure 5.17. À nouveau, on constate une nette amélioration de la prédition grâce aux sensibilités de second ordre par rapport à l'extrapolation au premier ordre avec une légère détérioration cependant dans la zone de transition vers l'écoulement uniforme non perturbé. Quant au profil dans la bulle de recirculation, le résultat de l'extrapolation est de très bonne qualité.

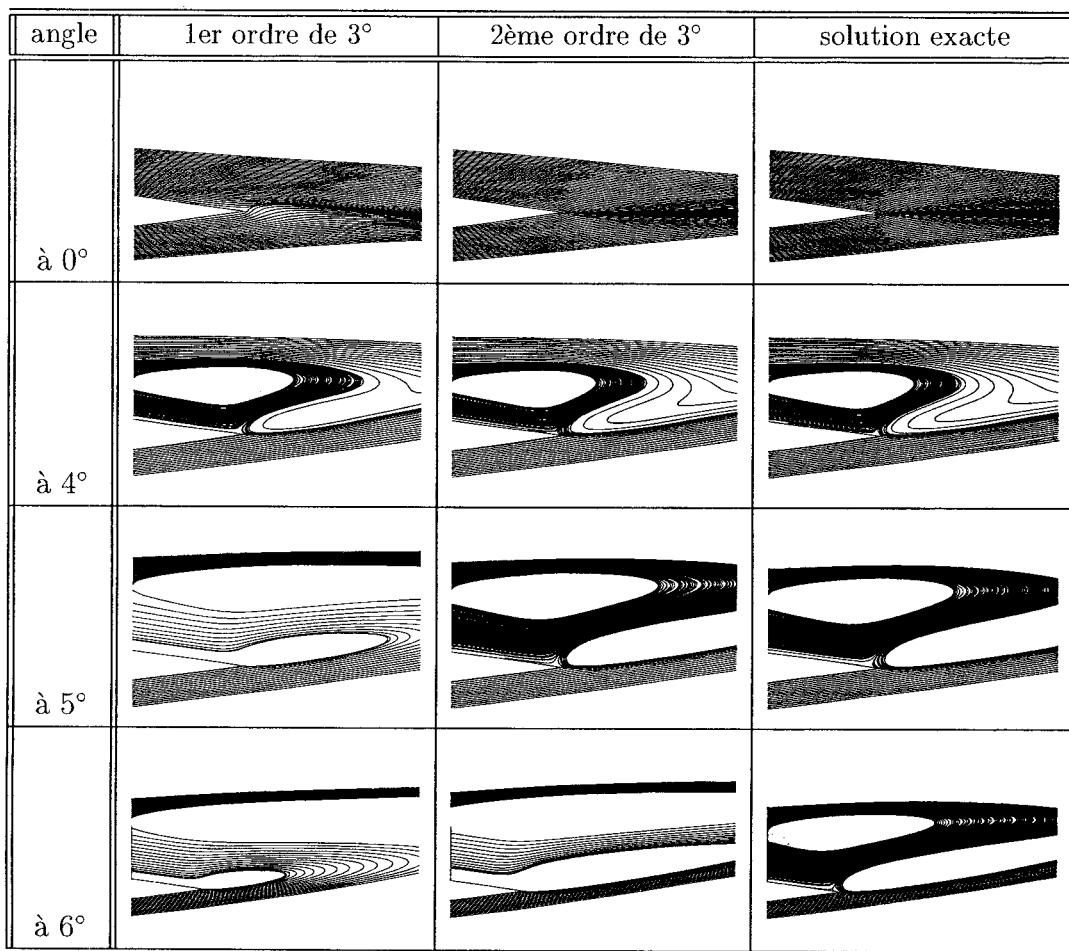
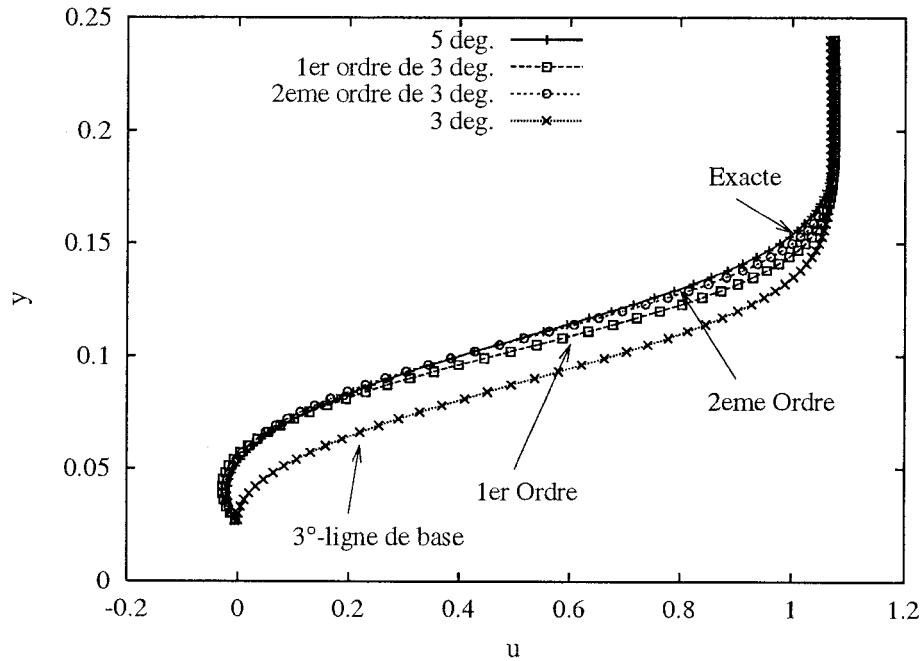


FIG. 5.16 Zone de recirculation - Extrapolation de 3°

#### 5.4.2 Étude des coefficients aérodynamiques

Dans cette section, nous allons montrer les limites de l'extrapolation au second ordre en calculant les coefficients de portance et de trainée du profil NACA0012. La force totale appliquée sur un corps est donnée par :

$$\mathbf{F} = \int_C \mathbf{T} dl = \int_C (-p\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dl \quad (5.6)$$

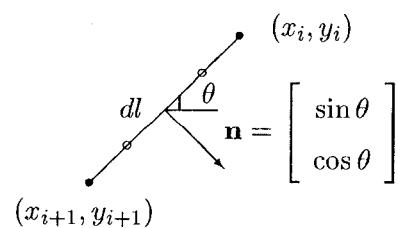
FIG. 5.17 Profil de vitesse  $u$  à  $x = 0.8c$ 

où  $\mathbf{T}$  représente les efforts,  $\boldsymbol{\tau}$  le tenseur des contraintes visqueuses,  $\mathbf{n}$  la normale unitaire sortante;  $C$  la frontière. Ainsi, la projection de (5.6) le long des axes  $x$  et  $y$  peut s'écrire :

$$F_x = \int_C (-pn_x + \tau_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y) dl \quad (5.7)$$

$$F_y = \int_C (-pn_y + \tau_{yy}n_y + \tau_{yx}n_x) dl \quad (5.8)$$

avec la géométrie suivante :



Ainsi,

$$dx = dl \cos \theta = -n_y dl$$

$$dy = dl \sin \theta = n_x dl$$

et donc

$$F_x = \int_{y_1}^{y_N} (-p + \tau_{xx}) dy - \int_{x_1}^{x_N} \tau_{xy} dx \quad (5.9)$$

$$F_y = \int_{x_1}^{x_N} (p - \tau_{yy}) dx + \int_{y_1}^{y_N} \tau_{xy} dy \quad (5.10)$$

Finalement, les coefficients de trainée et de portance peuvent s'écrire :

$$\dots \quad C_L \equiv \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L} \quad \text{et} \quad C_D \equiv \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L} \quad (5.11)$$

Pour trouver ce que valent ces coefficients lorsque  $\alpha \neq 0$ , on calcule d'abord  $\tilde{\mathbf{F}} = (\tilde{F}_x, \tilde{F}_y)$  dans le repère incliné :

$$\tilde{F}_x = F_x \cos \alpha + F_y \sin \alpha \quad (5.12)$$

$$\tilde{F}_y = F_y \cos \alpha - F_x \sin \alpha \quad (5.13)$$

Les coefficients aérodynamiques pour  $\alpha \neq 0$  sont ensuite donnés par :

$$C_L = \frac{\tilde{F}_y}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L} \quad \text{et} \quad C_D = \frac{\tilde{F}_x}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L} \quad (5.14)$$

On utilise la même méthode pour trouver les sensibilités de premier ordre de

ces coefficients. Comme

$$\begin{aligned}\tilde{F}_x^\alpha &\equiv \frac{\partial \tilde{F}_x}{\partial \alpha} = F_x^\alpha \cos \alpha + F_y^\alpha \sin \alpha - F_x \sin \alpha + F_y \cos \alpha \\ \tilde{F}_y^\alpha &\equiv \frac{\partial \tilde{F}_y}{\partial \alpha} = F_y^\alpha \cos \alpha - F_x^\alpha \sin \alpha - F_y \sin \alpha - F_x \cos \alpha\end{aligned}$$

avec

$$F_x^\alpha = \int_{y_1}^{y_N} (-S_p^\alpha + S_{\tau_{xx}}^\alpha) dy - \int_{x_1}^{x_N} S_{\tau_{xy}}^\alpha dx \quad (5.15)$$

$$F_y^\alpha = \int_{x_1}^{x_N} (S_p^\alpha - S_{\tau_{yy}}^\alpha) dx + \int_{y_1}^{y_N} S_{\tau_{xy}}^\alpha dy \quad (5.16)$$

les sensibilités sont alors :

$$S_{C_L}^\alpha \equiv \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = \frac{\tilde{F}_y^\alpha}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 L} \quad (5.17)$$

$$S_{C_D}^\alpha \equiv \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} = \frac{\tilde{F}_x^\alpha}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 L} \quad (5.18)$$

Enfin au second ordre, on calcule d'abord

$$\begin{aligned}\tilde{F}_x^{\alpha\alpha} &\equiv \frac{\partial^2 \tilde{F}_x}{\partial \alpha^2} = F_x^{\alpha\alpha} \cos \alpha - 2F_x^\alpha \sin \alpha + F_y^{\alpha\alpha} \sin \alpha \\ &\quad + 2F_y^\alpha \cos \alpha - F_x \cos \alpha - F_y \sin \alpha\end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}_y^{\alpha\alpha} &\equiv \frac{\partial^2 \tilde{F}_y}{\partial \alpha^2} = F_y^{\alpha\alpha} \cos \alpha - F_x^{\alpha\alpha} \sin \alpha - 2F_y^\alpha \sin \alpha \\ &\quad - 2F_x^\alpha \cos \alpha - F_y \cos \alpha + F_x \sin \alpha\end{aligned} \quad (5.20)$$

avec

$$F_x^{\alpha\alpha} = \int_{y_1}^{y_N} (-S_p^{\alpha\alpha} + S_{\tau_{xx}}^{\alpha\alpha}) dy - \int_{x_1}^{x_N} S_{\tau_{xy}}^{\alpha\alpha} dx$$

$$F_y^{\alpha\alpha} = \int_{x_1}^{x_N} (S_p^{\alpha\alpha} - S_{\tau_{yy}}^{\alpha\alpha}) dx + \int_{y_1}^{y_N} S_{\tau_{xy}}^{\alpha\alpha} dy$$

Les résultats de l'étude de convergence de maillage sont présentés sur les fig-

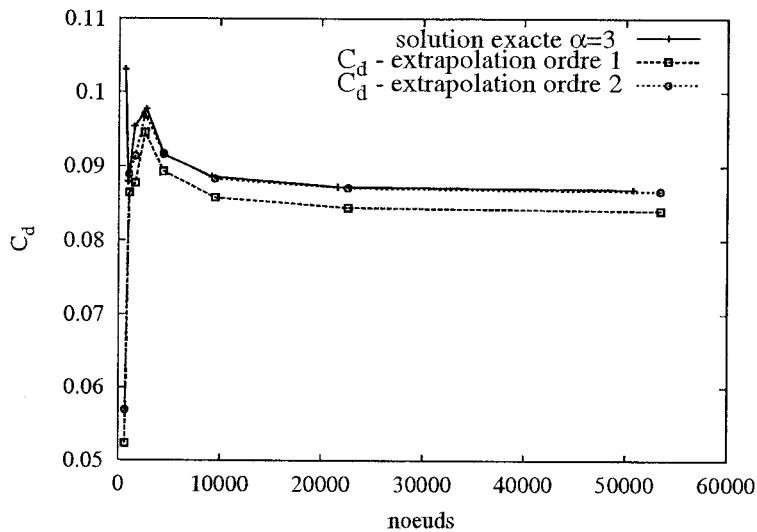


FIG. 5.18 Extrapolation du coefficient de trainée de  $0^\circ$  à  $3^\circ$

ures 5.18 et 5.19. Ces figures tracent les coefficients de trainée et de portance à  $\alpha = 3^\circ$  en fonction du nombre de noeuds ainsi que les extrapolations de ces coefficients de 0 à 3 degrés. Pour le coefficient de trainée, on peut observer que l'extrapolation de second ordre est plus précise que celle du premier ordre. Cependant, pour le coefficient de portance, les calculs du second ordre donnent des résultats quasiment équivalents à ceux du premier ordre et restent sensiblement différents de la solution calculée à  $3^\circ$ . En effet, dans notre cas, la sensibilité de deuxième ordre de la portance est nulle (cf figure 5.20 ) car le champ de sensibilité de pression d'ordre deux est symétrique. De plus la courbe de portance en fonction de l'angle d'attaque est quasiment linéaire lorsque  $\alpha$  est petit, et l'extrapolation du premier ordre suffit à obtenir une approximation précise. En effet, en traçant le coefficient de portance en fonction de l'angle d'attaque (figure 5.21), on constate que la courbe est quasiment une

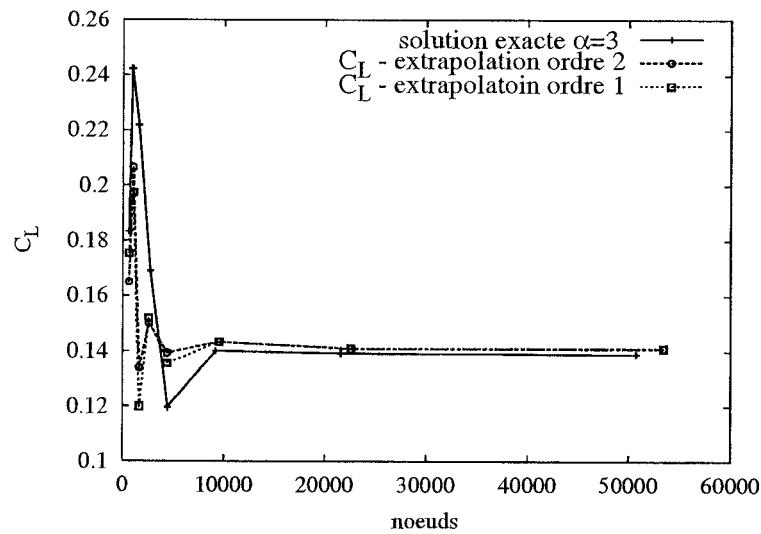


FIG. 5.19 Extrapolation du coefficient de portance de  $0^\circ$  à  $3^\circ$

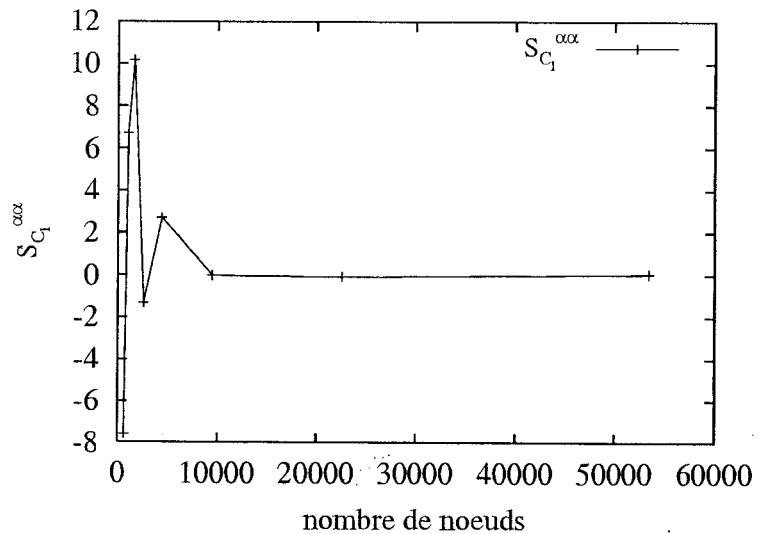


FIG. 5.20 Sensibilité à l'ordre 2 du coefficient de portance

droite au début et qu'elle dévie progressivement. De plus, l'extrapolation du premier et du second ordre à partir de  $0^\circ$  donne deux droites superposées à cause de la quasi nullité de la sensibilité d'ordre deux. Cependant, en partant

de la solution à 3 degrés (où le phénomène de recirculation est déjà développé), on obtient à l'ordre deux une courbe de  $C_L$  proche de la courbe exacte. Pour améliorer encore la qualité de l'extrapolation, on aurait besoin des termes d'ordre supérieur. Si on trace le coefficient de trainée en fonction de  $\alpha$  (cf

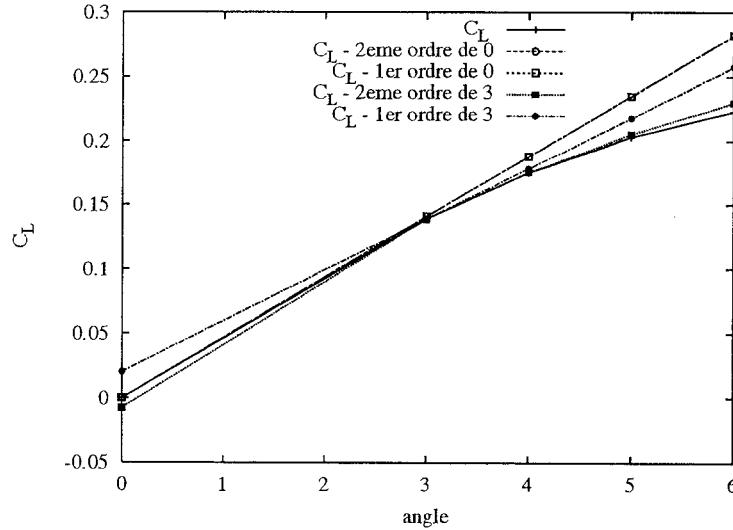


FIG. 5.21 Coefficient de portance en fonction de l'angle d'attaque

figure 5.22), on observe comme pour la portance que l'extrapolation d'ordre deux à partir de la solution à  $3^\circ$  est meilleure qu'à partir de la solution à  $0^\circ$ . Bien sûr, comme la traînée ne dépend pas linéairement de l'angle d'attaque, l'extrapolation de premier ordre est très mauvaise.

Si on compare avec les résultats théoriques ou semi-empirique de la littérature, on peut trouver des approximations de la pente de la courbe  $C_L = f(\alpha)$ . Par exemple, Raymer<sup>[46]</sup> donne une formule dans le cas subsonique compressible où la pente est de l'ordre de  $\pi/2$ . Si on compare avec les résultats obtenus ici, on trouve pour une approximation linéaire jusqu'à  $\alpha = 4^\circ$  une pente de l'ordre de 2.3. Cette différence, faible, vient du fait que le nombre de Reynolds

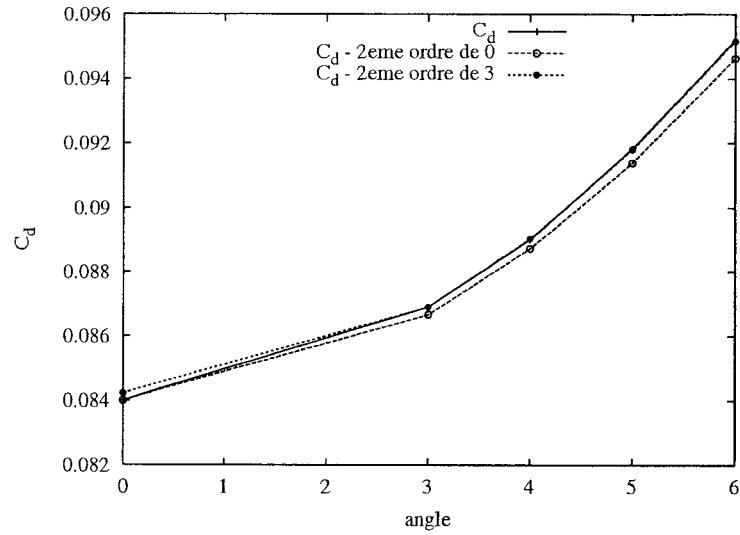


FIG. 5.22 Coefficient de trainée en fonction de l'angle d'attaque

utilisé ici est très faible et que les effets visqueux ont tendance à changer les caractéristiques du profil.

## CONCLUSION

Le but de ce mémoire était de développer une méthodologie d'éléments finis pour le calcul des sensibilités du second ordre d'un écoulement fluide. À cette fin, on a employé la Méthode de l'Équation des Sensibilités (MES) qui, pour chaque paramètre de design, différentie dans le domaine continu les équations de Navier-Stokes. On a ainsi développé la forme générale des équations des sensibilités en régime laminaire au deuxième ordre avec des propriétés et conditions aux limites variables, puis on a implanté cette méthode dans le code d'éléments finis existant. Un algorithme de remaillage adaptatif a été utilisé afin de contrôler l'erreur numérique. L'adaptation se fait sur toutes les variables d'écoulement et de sensibilités. L'ensemble de l'implantation est vérifié sur un problème avec solution analytique en utilisant la méthode des solutions manufaturées. Cette vérification a permis de démontrer le bon fonctionnement du résoluteur et de l'estimateur d'erreur en régime laminaire.

Une fois vérifié, le code est appliqué à un exemple concret d'écoulement autour d'un profil NACA0012. On a procédé à des analyses de sensibilités, des calculs d'incertitude et de solutions voisines afin de démontrer les avantages de la méthode développée au second ordre. On a ainsi noté une nette amélioration des prédictions de l'écoulement à un angle d'attaque de  $3^\circ$  à partir de la solution à  $0^\circ$ . L'ordre 2 permet non seulement de prévoir la position du point de séparation de la couche limite, mais également la structure de la bulle de recirculation qui apparaît quand on augmente l'angle d'incidence. Des calculs de solution voisine ont également été fait sur les coefficients de trainée et de portance, montrant les limites d'une extrapolation quadratique dans le cas

d'une dépendance quasi-linéaire.

La méthode a donc été appliquée avec succès sur des écoulement laminaires incompressibles pour des paramètres de valeur. Il reste à valider la méthode dans les cas turbulents avec ou sans transfert de chaleur, ce qui ne pose pas de problème pratique important. Là où la difficulté réside est dans l'élargissement aux paramètres de forme, comme évoqué au paragraphe 3.4.1.2. En effet, il s'agit de trouver une méthode numérique suffisamment précise pour l'extrac-tion des dérivées secondees aux frontières.

## RÉFÉRENCES

- [1] É. Turgeon. *Méthode d'éléments finis adaptative pour la résolution des sensibilités d'écoulements.* Thèse de Doctorat, École Polytechnique de Montréal, 2001.
- [2] D. Pelletier et F. Ilinca. Adaptive remeshing for the  $k - \epsilon$  model of turbulence. *AIAA Journal*, 35(4) :640–646, 1997.
- [3] D. Pelletier. Adaptive finite element computations of complex flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 31 :189–202, 1999.
- [4] J. Borggaard et J. Burns. A pde sensitivity equation method for optimal aerodynamic design. *J. Comput. Phys.*, 136 :366–384, 1997.
- [5] J.T. Borggaard. *The Sensitivity Equation Method for Optimal Design.* Thèse de Doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 1994.
- [6] J. Borggaard et J. Burns. Asymptotically consistant gradients in optimal design. *Multidisciplinary Design Optimization : state of the art*, pages 303–314, 1997.
- [7] M.D. Gunzburger, L.S. Hou, et T.P Svobodny. Analysis and finite element approximation of optimal control problems for the stationnary navier-stokes equations with distributed and neumann controls. *Math. Comp.*, 57(195) :123–151, 1991.
- [8] M.D. Gunzburger, L.S. Hou, et T.P Svobodny. Analysis and finite element approximation of optimal control problems for the stationnary navier-stokes equations with dirichlet controls. *Math. Model. Numer. Anal.*, 25(6) :711–748, 1991.

- [9] M.D. Gunzburger et L.S. Hou. Finite-dimensional approximation of a class of constrained nonlinear optimal control problems. *SIAM J. Control Optim.*, 34(3) :1001–1043, 1996.
- [10] K. J. Dowding et B. F. Blackwell. Sensitivity analysis for nonlinear heat conduction. *Journal of Heat Transfer*, 123, 2001.
- [11] J.V. Beck et K. Arnold. *Parameter Estimation in Engineering and Science*. Wiley, NY, 1977.
- [12] M.M. Putko, P.A. Newman, A.C. Taylor, et L.L. Green. Approach for uncertainty propagation and robust design in cfd using sensitivity derivatives. Dans *15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Anaheim, CA, Jun. 2001. AIAA Paper 2001-2528.
- [13] E.J. Haug, K.K Choi, et V. Komkov. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press, 1986.
- [14] K. Dems. Sensitivity analysis in thermal problems-i : Variation of material parameters within a fixed domain. *Journal of Therm. Stresses*, 9 :303–324, 1986.
- [15] J.C. Newman, A.C. Taylor, R.W. Barnwell, P.A. Newman, et G.J.-W. Hou. Overview of sensitivity analysis and shape optimization for complex aerodynamic configuration. *J. Aircr.*, 36(1) :87–96, 1999.
- [16] T.D. Fadale. *Uncertainty Analysis usind Stochastic Finite Elements*. Thèse de Doctorat, University of Washington, 1993.
- [17] J.L.T. Santos, A. Siemaszko, S. Gollwitzer, et R. Rackwitz. Continuum sensitivity method of reliability-based structural design and optimization. *Mech. Struct. Mach.*, 23(4) :497–520, 1995.
- [18] H. Moller et E. Lund. Shape sensitivity analysis of strongly coupled fluid-structure interaction problems. Dans *8th AIAA/NASA/USAF/ISSMO*

*Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, Long Beach, CA, 2000. AIAA Paper 2000-4823.

- [19] S. Etienne et D. Pelletier. Adaptive solution of some steady state fluid-structures interaction problems. Dans *11th Annual Conference of the CFD Society of Canada*, Vancouver , BC, 2003.
- [20] G. Bugeda et J. Olivier. A general methodology for structural shape optimization problems using automatic adaptive remeshing. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 36 :3161–3185, 1993.
- [21] A. Dutta et C.V. Ramakrishnan. Accurate computation of design sensitivities for structures under transient dynamic loads using time marching scheme. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 41 :977–999, 1998.
- [22] J. Sienz et E. Hinton. Reliable structural optimization with error estimation , adaptivity and robust sensitivity analysis. *Comput. and Structures*, 64 :31–63, 1997.
- [23] J. Borggaard et D. Pelletier. Optimal shape design in forced convection using adaptive finite elements. Dans *36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, Jan. 1998. AIAA Paper 98-0908.
- [24] J. Borggaard et D. Pelletier. Observation in adaptive refinement strategies for optimal design. Dans J. Borggaard, J. Burns, E. Cliff, et S. Schreck, éditeurs, *Computational Methods for Optimal Design and Control*, pages 59–76. Birkhäuser, 1998.
- [25] D.L. Stewart. *Numerical Methods for Accurate Computation of Design Sensitivities*. Thèse de Doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 1998.

- [26] C.-J. Chen et K.K. Choi. A continuum approach for second order shape sensitivity design sensitivity of elastic solids with loaded boundaries. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 38 :2979–3004, 1995.
- [27] E. Kita, Y. Kataoka, et N. Kamiya. First- and second-order design sensitivity analysis scheme based on trefftz method. *Journal of Mechanical Design*, 121 :84–91, 1999.
- [28] S. Park, R.K. Kapania, et S.J. Kim. Nonlinear transient response and second-order sensitivity using time finite element method. *AIAA Journal*, 37 :613–622, 1999.
- [29] E. Taroco, G.C. Buscaglia, et R.A. Feijóo. Second-order shape sensitivity analysis for nonlinear problems. *Structural Optimization*, 15 :101–113, 1998.
- [30] J.-N. Mahieu, D. Pelletier, et J. Borggaard. A second-order sensitivity equation method for laminar flows. Dans *CASI 9th Aerodynamics Symposium*, Montreal, QC, Avr. 2003.
- [31] M. Crouzeix et P.A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving stationary stokes equations. *R.A.I.R.O.*, 7(R-3) :33–76, 1993.
- [32] A. Fortin et A. Garon. *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. Ecole Polytechnique de Montréal, Montréal, QC, 2000.
- [33] C. Cuvelier, A. Segal, et A.A. Van Steenhoven. *Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations*. D. Reidel Publishing Company, 1986.
- [34] D. Pelletier et A. Fortin. Are fem solutions of incompressible flows really incompressible ? (or how simple flows can cause headaches). *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 9(1) :99–112, 1989.

- [35] É. Turgeon. Application d'une méthode d'éléments finis adaptative à des écoulements axisymétriques. Master's thesis, École Polytechnique de Montréal, 1997.
- [36] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, et G. M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73 :173–189, 1989.
- [37] O. C. Zienkiewicz et J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 :1331–1364, 1992.
- [38] L.G. Stanley et D.L. Stewart. A comparison of local and global projections in design sensitivity computations. Dans J. Borggaard, J. Burns, E. Cliff, et S. Schreck, éditeurs, *Computational Methods for Optimal Design and Control*, pages 361–373. Birkhäuser, 1998.
- [39] M.D. Grunzburger. Three lectures on flow optimization. *Applied Mathematics Report Number AM97-8*, 1997.
- [40] J.R. Appel et M.D. Gunzburger. Difficulties in sensitivity calculations for flows with discontinuities. *AIAA Journal*, 35(5) :842–848, 1997.
- [41] S. Steinberg et P.J. Roache. Symbolic manipulation and computational fluid dynamics. *Journal of Computational Physics*, 57(2) :251–284, Jan. 1985.
- [42] D. Pelletier et P.J. Roache. Cfd code verification and the method of manufactured solution. Dans *Proceedings of the 10th Annual Conference of the CFD Society of Canada*, Windsor, Ontario, Canada, Jun. 2002.
- [43] H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, 7th edition, 1979.

- [44] W. Tollmien. Grenzschichten. Dans *Handbuch der Exper. Physik*, volume IV(I), pages 241–287, 1931.
- [45] É. Turgeon, D. Pelletier, et J. Borggaard. Computation of airfoil flow derivatives using a continuous sensitivity equation method. Dans *8th CASI Aerodynamics Symposium*, Toronto, Canada, Avr. 2001.
- [46] D.P. Raymer. *Aircraft Design : A Conceptual Approach*. AIAA Education Series, 1999.
- [47] I.H. Abbott et A.E. Von Doenhoff. *Theory of wing sections*. Dover Publications, 1959.

## ANNEXE I

### CONDITIONS AUX FRONTIÈRES

Cette annexe présente un exemple d'écriture des conditions aux frontières à l'ordre 1 et 2 en sensibilités pour le cas d'une grandeur telle que la température  $T$ . Les conditions aux limites pour l'écoulement à l'ordre 0 s'écrivent :

$$T = \hat{T} \quad \text{sur } \Gamma_d \tag{I.1}$$

$$q = \hat{q} \quad \text{sur } \Gamma_n \tag{I.2}$$

avec

$$q = \lambda \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{I.3}$$

#### I.1 Ordre 1

##### I.1.1 Dirichlet

Pour un paramètre de valeur, la condition s'écrit :

$$s_T = \frac{\partial \hat{T}}{\partial a} \tag{I.4}$$

Pour un paramètre de forme, la condition s'écrit :

$$s_T = \frac{D\hat{T}}{Da} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad (\text{I.5})$$

### I.1.2 Neumann

Le cas général (=forme : pour valeur, il suffit de supprimer les dérivées spatiales dues au mouvement de la frontière) s'écrit :

$$\begin{aligned} q' &= \frac{D\hat{q}}{Da} - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \nabla T \cdot \hat{n} \\ &\quad - \lambda \left[ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \cdot n_x + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \cdot n_y \right] \\ &\quad - \lambda \nabla T \cdot \frac{\partial \hat{n}}{\partial a} \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

## I.2 Ordre 2

### I.2.1 Dirichlet

valeur-valeur :

$$s_T^{ab} = \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial b \partial a} \quad (\text{I.7})$$

Forme-valeur :

$$s_T^{ab} = \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial b \partial a} - \frac{\partial^2 T}{\partial b \partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} - \frac{\partial^2 T}{\partial b \partial b} \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad (\text{I.8})$$

$$= \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial b \partial a} - \frac{\partial s_T^b}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} - \frac{\partial s_T^b}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad (\text{I.9})$$

Forme-forme :

$$\frac{Ds_T^a}{Db} = \frac{D\hat{s}_T^a}{Db} \quad (\text{I.10})$$

$$\frac{\partial s_T^a}{\partial b} + \frac{\partial s_T^a}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial s_T^a}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial b} = \frac{D\hat{s}_T^a}{Db} \quad (\text{I.11})$$

d'où

$$s_T^{ab} = \frac{D}{Db} \left( \frac{D\hat{T}}{Da} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) - \frac{\partial s_T^a}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial b} - \frac{\partial s_T^a}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial b} \quad (\text{I.12})$$

$$= \frac{D^2 \hat{T}}{Db Da} - \frac{D}{Db} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial x_f}{\partial a} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{D}{Db} \left( \frac{\partial x_f}{\partial a} \right) - \frac{D}{Db} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\partial y_f}{\partial a} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{D}{Db} \left( \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \\ - \frac{\partial s_T^a}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial b} - \frac{\partial s_T^a}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial b} \quad (\text{I.13})$$

$$s_T^{ab} = \frac{D^2 \hat{T}}{Db Da} - \left( \frac{\partial^2 T}{\partial b \partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) \frac{\partial x_f}{\partial a} \quad (\text{I.14}) \\ - \left( \frac{\partial^2 T}{\partial b \partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) \frac{\partial y_f}{\partial a} \\ - \frac{\partial T}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 x_f}{\partial b \partial a} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 y_f}{\partial b \partial a} \right) \\ - \frac{\partial s_T^a}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial b} - \frac{\partial s_T^a}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial b}$$

### I.2.2 Neumann

On pose ici :

$$\lambda' = \frac{\partial \lambda}{\partial a}$$

La condition sur la frontière  $\Gamma_q$  s'écrit alors :

$$\frac{Dq'}{Db} = \frac{D\hat{q}'}{Db}$$

Si on développe d'abord le membre de gauche, on a :

$$\begin{aligned} \frac{Dq'}{Db} &= \frac{D\lambda'}{Db} \nabla T \cdot \hat{n} + \lambda' \frac{D}{Db} (\nabla T) \cdot \hat{n} + \lambda' \nabla T \cdot \frac{D\hat{n}}{Db} + \frac{D\lambda}{Db} \nabla s_T^a \cdot \hat{n} \\ &\quad + \lambda \frac{D}{Db} (\nabla s_T^a) \cdot \hat{n} + \lambda \nabla s_T^a T \cdot \frac{D\hat{n}}{Db} \\ &= \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial b \partial a} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial a} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial a} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) \nabla T \cdot \hat{n} \\ &\quad + \frac{\partial \lambda}{\partial a} \left[ \left( \frac{\partial s_T^b}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) n_x \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial s_T^b}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) n_y \right] \\ &\quad + \frac{\partial \lambda}{\partial a} \nabla T \cdot \frac{\partial \hat{n}}{\partial b} \\ &\quad + \left( \frac{\partial \lambda}{\partial b} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) \nabla s_T^a \cdot \hat{n} \\ &\quad + \lambda \left[ \left( \frac{\partial s_T^{ab}}{\partial x} + \frac{\partial^2 s_T^a}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial^2 s_T^a}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) n_x \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial s_T^{ab}}{\partial y} + \frac{\partial^2 s_T^a}{\partial x \partial y} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial^2 s_T^a}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) n_y \right] \\ &\quad + \lambda \nabla s_T^a \frac{\partial \hat{n}}{\partial b} \end{aligned}$$

Puis si on développe le membre de droite :

$$\begin{aligned}
 \frac{D\hat{q}'}{Db} &= \frac{D^2\hat{q}}{DbDa} - \frac{D}{Db} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \nabla T \cdot \hat{n} \\
 &\quad - \left( \frac{\partial\lambda}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \frac{D}{Db} (\nabla T) \cdot \hat{n} \\
 &\quad - \left( \frac{\partial\lambda}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \nabla T \cdot \frac{D\hat{n}}{Db} \\
 &\quad - \frac{D\lambda}{Db} \left[ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \cdot n_x + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \cdot n_y \right] \\
 &\quad - \lambda \left[ \frac{D}{Db} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \cdot n_x + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \frac{\partial n_x}{\partial b} \right] \\
 &\quad - \lambda \left[ \frac{D}{Db} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \cdot n_y + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \frac{\partial n_y}{\partial b} \right] \\
 &\quad - \frac{D\lambda}{Db} \nabla T \cdot \frac{\partial \hat{n}}{\partial a} - \lambda \frac{D}{Db} (\nabla T) \cdot \frac{\partial \hat{n}}{\partial a} - \lambda \nabla T \cdot \frac{D}{Db} \left( \frac{\partial \hat{n}}{\partial a} \right)
 \end{aligned}$$

On peut reconnaître dans le membre de gauche le développement de  $s_q^{ab}$  :

$$\begin{aligned}
 s_q^{ab} &= \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial b \partial a} \nabla T + \frac{\partial \lambda}{\partial a} \nabla s_T^b + \lambda \nabla s_T^{ab} \right) \cdot \hat{n} \\
 &= \frac{D\hat{q}'}{Db} - \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial a} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial a} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) \nabla T \cdot \hat{n} \\
 &\quad - \frac{\partial \lambda}{\partial a} \left[ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) \cdot n_x + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) \cdot n_y \right] \\
 &\quad - \frac{\partial \lambda}{\partial a} \nabla T \cdot \frac{\partial \hat{n}}{\partial b} \\
 &\quad - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) \nabla s_T^a \cdot \hat{n} \\
 &\quad - \lambda \left[ \left( \frac{\partial^2 s_T^a}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial^2 s_T^a}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) \cdot n_x + \left( \frac{\partial^2 s_T^a}{\partial x \partial y} \frac{\partial x_f}{\partial b} + \frac{\partial^2 s_T^a}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial b} \right) \cdot n_y \right] \\
 &\quad - \lambda \nabla s_T^a \frac{\partial \hat{n}}{\partial b}
 \end{aligned}$$

## ANNEXE II

### PLAQUE PLANE À INCIDENCE NULLE

On détaille dans cette annexe les expressions utilisée pour le calcul de l'écoulement et des sensibilités associées pour l'exemple de vérification du chapitre 4.

#### II.1 Écoulement

La vitesse est décrite par :

$$u(x, y) = U_\infty \left( 1 - \frac{0.664}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{x}{L} \right)^{-1/2} e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} \right) \quad (\text{II.1})$$

$$v(x, y) = \frac{0.664U_\infty}{2} \sqrt{\frac{L}{\pi}} \left[ -\sqrt{\frac{\pi\nu}{U_\infty}} \frac{1}{x} \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{U_\infty}{4\nu}} yx^{-1/2} \right) \right. \\ \left. - x^{-3/2} \left( ye^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} - \sqrt{\frac{\pi x\nu}{U_\infty}} \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{U_\infty}{4\nu}} yx^{-1/2} \right) \right) \right] \quad (\text{II.2})$$

On pose maintenant :

$$B = \frac{0.664U_\infty\sqrt{L/\pi}}{2} \quad (\text{II.3})$$

$$C = \sqrt{\frac{\pi\nu}{U_\infty}} \quad (\text{II.4})$$

$$BB = \frac{0.664U_\infty}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{II.5})$$

$$A = e^{-\frac{y^2U_\infty}{4x\nu}} \quad (\text{II.6})$$

$$A_x = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{y^2U_\infty}{4\nu x^2} e^{-\frac{y^2U_\infty}{4x\nu}} \quad (\text{II.7})$$

$$A_{xx} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{y^2U_\infty}{4\nu} \left( x^{-2} \frac{y^2U_\infty}{4\nu x^2} e^{-\frac{y^2U_\infty}{4x\nu}} - 2x^{-3} e^{-\frac{y^2U_\infty}{4x\nu}} \right) \quad (\text{II.8})$$

$$A_y = \frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{2yU_\infty}{4x\nu} e^{-\frac{y^2U_\infty}{4x\nu}} \quad (\text{II.9})$$

on écrit alors les différentes dérivées :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -B \left( -x^{-3/2} e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} + \frac{U_\infty}{2\nu} y^2 x^{-5/2} e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} \right) \quad (\text{II.10})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{BU_\infty}{\nu} y x^{-3/2} e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -B \left( \frac{3}{2} x^{-5/2} e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} - \frac{3U_\infty}{2\nu} x^{-7/2} y^2 e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} + \frac{U_\infty^2}{8\nu^2} x^{-9/2} y^4 e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} \right) \quad (\text{II.12})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{BU_\infty}{\nu} x^{-3/2} \left( e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} + y \left( -\frac{2yU_\infty}{4x\nu} e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} \right) \right) \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = B \left( \frac{3}{2} y x^{-5/2} e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} - y x^{-3/2} A_x \right) \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = B \left( -x^{-3/2} e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} + \frac{U_\infty}{2\nu} y^2 x^{-5/2} e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} \right) \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = B \left( -\frac{15}{4} y x^{-7/2} e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} + \frac{3}{2} y x^{-5/2} A_x - y \left( -\frac{3}{2} x^{-5/2} A_x + x^{-3/2} A_{xx} \right) \right) \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = B \left( -x^{-3/2} A_y + \frac{U_\infty}{2\nu} x^{-5/2} \left( 2y e^{-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}} + y^2 A_y \right) \right) \quad (\text{II.17})$$

$$(\text{II.18})$$

On peut alors calculer les termes sources :

$$f_x = \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.19})$$

$$f_y = \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.20})$$

## II.2 Sensibilités ordre 1

À l'ordre 1, on sépare les calculs par paramètre : pour  $L$  :

$$S_u^L = -\frac{0.664U_\infty}{2\sqrt{\pi x L}} e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \quad (\text{II.21})$$

$$S_v^L = \frac{0.664U_\infty}{4\sqrt{\pi L}} \left[ -x^{-3/2} y e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \right] \quad (\text{II.22})$$

$$\frac{\partial S_u^L}{\partial x} = -BB(\frac{1}{2}l^{-1/2}) \left( -\frac{1}{2}x^{-3/2}A + x^{-1/2}A_x \right) \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{\partial^2 S_u^L}{\partial x^2} = -\frac{BB}{4}l^{-1/2} \left( \frac{3}{2}x^{-5/2}A - \frac{3U_\infty}{2\nu}x^{-7/2}y^2A + \frac{U_\infty^2}{8\nu^2}x^{-9/2}y^4A \right) \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{\partial S_u^L}{\partial y} = \frac{BBU_\infty}{4\nu}l^{-1/2}x^{-3/2}yA \quad (\text{II.25})$$

$$\frac{\partial^2 S_u^L}{\partial y^2} = \frac{BBU_\infty}{4\nu}l^{-1/2}x^{-3/2}(A + yA_y) \quad (\text{II.26})$$

$$\frac{\partial S_v^L}{\partial x} = \frac{BB}{4}l^{-1/2} \left( \frac{3}{2}yx^{-5/2}A - yx^{-3/2}A_x \right) \quad (\text{II.27})$$

$$\frac{\partial^2 S_v^L}{\partial x^2} = \frac{BB}{4}l^{-1/2} \left( -\frac{15}{4}yx^{-7/2}A + \frac{3}{2}yx^{-5/2}A_x - y \left( -\frac{3}{2}x^{-5/2}A_x + x^{-3/2}A_{xx} \right) \right) \quad (\text{II.28})$$

$$\frac{\partial S_v^L}{\partial y} = \frac{BB}{4}l^{-1/2} \left( -x^{-3/2}A + \frac{U_\infty}{2\nu}y^2x^{-5/2}A \right) \quad (\text{II.29})$$

$$\frac{\partial^2 S_v^L}{\partial y^2} = \frac{BB}{4}l^{-1/2} \left( -x^{-3/2}A_y + \frac{U_\infty}{2\nu}x^{-5/2}(2yA + y^2A_y) \right) \quad (\text{II.30})$$

$$(\text{II.31})$$

Pour le paramètre  $U_\infty$ , on introduit les expressions suivantes :

$$A^{U_\infty} = \frac{\partial A}{\partial U_\infty} = -\frac{y^2}{4x\nu} A \quad (\text{II.32})$$

$$A_x^{U_\infty} = \frac{\partial A^{U_\infty}}{\partial x} = \frac{y^2}{4x^2\nu} A + \frac{y^2}{4x^2\nu} U_\infty A^{U_\infty} \quad (\text{II.33})$$

$$A_y^{U_\infty} = \frac{\partial A^{U_\infty}}{\partial y} = -\frac{y}{2x\nu} (U_\infty A^{U_\infty} + A) \quad (\text{II.34})$$

$$A_{xx}^{U_\infty} = \frac{\partial^2 A^{U_\infty}}{\partial x^2} = \frac{y^2}{4\nu} \left( \frac{A_x}{x^2} - 2x^{-3} A + U_\infty \left( \frac{A_x^{U_\infty}}{x^2} - 2x^{-3} A^{U_\infty} \right) \right) \quad (\text{II.35})$$

$$A^{U_\infty U_\infty} = \frac{\partial^2 A}{\partial U_\infty^2} = -\frac{y^2}{4x\nu} A^{U_\infty} \quad (\text{II.36})$$

$$A_y^{U_\infty U_\infty} = \frac{\partial A^{U_\infty U_\infty}}{\partial y} = -\frac{2y}{4x\nu} (U_\infty A^{U_\infty U_\infty} + 2A^{U_\infty}) \quad (\text{II.37})$$

$$A_x^{U_\infty U_\infty} = \frac{\partial A^{U_\infty U_\infty}}{\partial x} = \frac{y^2}{4x^2\nu} A^{U_\infty} + \frac{y^2}{4x^2\nu} (U_\infty A^{U_\infty U_\infty} + A^{U_\infty}) \quad (\text{II.38})$$

$$A_{xx}^{U_\infty U_\infty} = \frac{\partial^2 A^{U_\infty U_\infty}}{\partial x^2} \quad (\text{II.39})$$

$$= \frac{y^2}{4\nu} \left( \frac{A_x^{U_\infty}}{x^2} - 2x^{-3} A^{U_\infty} + \frac{A_x^{U_\infty}}{x^2} - 2x^{-3} A^{U_\infty} \right. \\ \left. + U_\infty \left( \frac{A_x^{U_\infty U_\infty}}{x^2} - 2x^{-3} A^{U_\infty U_\infty} \right) \right) \quad (\text{II.40})$$

ce qui donne les dérivées :

$$S_u^{U_\infty} = 1 - 0.664 \sqrt{\frac{L}{x\pi}} e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} + 0.664 \frac{U_\infty}{4\nu} \sqrt{\frac{L}{\pi}} y^2 x^{-3/2} e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \quad (\text{II.41})$$

$$S_v^{U_\infty} = \frac{0.664}{2} \sqrt{\frac{L}{\pi}} \left[ -x^{-3/2} y e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} + U_\infty \left( \frac{y^3}{4x^{5/2}\nu} e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \right) \right] \quad (\text{II.42})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_u^{U_\infty}}{\partial x} = & -\frac{0.664}{2} \sqrt{\frac{l}{\pi}} \left[ -x^{-3/2} A + \frac{U_\infty}{2\nu} y^2 x^{-5/2} A \right. \\ & \left. + U_\infty \left( -x^{-3/2} A^{U_\infty} + \frac{y^2 x^{-5/2}}{2\nu} (U_\infty A^{U_\infty} + A) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_u^{U_\infty}}{\partial x^2} = & -\frac{0.664}{2} \sqrt{\frac{l}{\pi}} \left[ \frac{3}{2} x^{-5/2} A - \frac{3}{2\nu} U_\infty x^{-7/2} y^2 A + \frac{U_\infty^2}{8\nu^2} x^{-9/2} y^4 A \right. \\ & + U_\infty \left( \frac{3}{2} x^{-5/2} A^{U_\infty} - \frac{3}{2\nu} x^{-7/2} y^2 (U_\infty A^{U_\infty} + A) \right. \\ & \left. \left. + x^{-9/2} \frac{y^4}{8\nu^2} (U_\infty^2 A^{U_\infty} + 2U_\infty A) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

$$\frac{\partial S_u^{U_\infty}}{\partial y} = \frac{0.664}{2\nu} \sqrt{\frac{l}{\pi}} y x^{-3/2} (2U_\infty A + U_\infty^2 A^{U_\infty}) \quad (\text{II.45})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_u^{U_\infty}}{\partial y^2} = & \frac{0.664}{2\nu} \sqrt{\frac{l}{\pi}} x^{-3/2} \left[ 2U_\infty \left( A + y \left( -\frac{2yU_\infty}{4x\nu} A \right) \right) \right. \\ & \left. + U_\infty^2 \left( A^{U_\infty} - \frac{y^2}{2x\nu} (U_\infty A^{U_\infty} + A) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_v^{U_\infty}}{\partial x} = & \frac{0.664}{2} \sqrt{\frac{l}{\pi}} \left( \frac{3}{2} y x^{-5/2} A - y x^{-3/2} A_x \right. \\ & \left. + U_\infty \left( \frac{3}{2} y x^{-5/2} A^{U_\infty} - y x^{-3/2} A_x^{U_\infty} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_v^{U_\infty}}{\partial x^2} = & \frac{0.664}{2} \sqrt{\frac{l}{\pi}} \left[ -\frac{15}{4} y x^{-7/2} A + \frac{3}{2} y x^{-5/2} A_x - y \left( -\frac{3}{2} x^{-5/2} A_x + x^{-3/2} A_{xx} \right) \right. \\ & \left. + U_\infty \left( -\frac{15}{4} y x^{-7/2} A^{U_\infty} + 3 y x^{-5/2} A_x^{U_\infty} - y x^{-3/2} A_{xx}^{U_\infty} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_v^{U_\infty}}{\partial y} &= \frac{0.664}{2} \sqrt{\frac{l}{\pi}} \left[ -x^{-3/2} A + \frac{U_\infty}{2\nu} y^2 x^{-5/2} A \right. \\ &\quad \left. + U_\infty \left( -x^{-3/2} A^{U_\infty} + \frac{y^2 x^{-5/2}}{2\nu} (U_\infty A^{U_\infty} + A) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_v^{U_\infty}}{\partial y^2} &= \frac{0.664}{2} \sqrt{\frac{l}{\pi}} \left[ -x^{-3/2} A_y + \frac{U_\infty}{2\nu} x^{-5/2} (2yA + y^2 A_y) \right. \\ &\quad \left. + U_\infty \left( -x^{-3/2} A_y^{U_\infty} + \frac{x^{-5/2}}{2\nu} (2yA + y^2 A_y + U_\infty (2yA^{U_\infty} + y^2 A_y^{U_\infty})) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

Ce qui donne les termes sources :

$$S_{f_x} = \rho \left( S_u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial S_u}{\partial x} + S_v \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial S_u}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 S_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.51})$$

$$S_{f_y} = \rho \left( S_u \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial S_v}{\partial x} + S_v \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial S_v}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 S_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.52})$$

### II.3 Sensibilités ordre 2

À l'ordre 2, on recalcule à nouveau les dérivées des sensibilités de second ordre :

$$S_u^{U_\infty U_\infty} = 0.664 \sqrt{\frac{L}{\pi}} \frac{y^2 x^{-3/2}}{4\nu} e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \left[ 1 + U_\infty - \frac{y^2 U_\infty}{4x\nu} \right] \quad (\text{II.53})$$

$$S_v^{U_\infty U_\infty} = 0.664 \sqrt{\frac{L}{\pi}} \frac{y^3 x^{-5/2}}{8\nu} e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \left[ 2 - \frac{U_\infty y^2}{4x\nu} \right] \quad (\text{II.54})$$

$$S_u^{LL} = \frac{0.664 U_\infty}{4\sqrt{\pi x}} L^{-3/2} e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \quad (\text{II.55})$$

$$S_v^{LL} = -\frac{0.664 U_\infty}{8\sqrt{\pi}} L^{-3/2} \left[ -x^{-3/2} y e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \right] \quad (\text{II.56})$$

$$S_u^{LU_\infty} = \frac{0.664}{2\sqrt{\pi x}} L^{-1/2} e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \left[ -1 + \frac{U_\infty y^2}{4x\nu} \right] \quad (\text{II.57})$$

$$S_v^{LU_\infty} = \frac{0.664}{4\sqrt{L\pi}} \left[ -x^{-3/2} y e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} + U_\infty \left( \frac{y^3}{4x^{5/2}\nu} e^{-(\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu})} \right) \right] \quad (\text{II.58})$$

On raisonne à nouveau par couple de paramètres : pour  $LL$  :

$$\frac{\partial S_u^{LL}}{\partial x} = BB\left(\frac{1}{4}l^{-3/2}\right)\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}A + x^{-1/2}A_x\right) \quad (\text{II.59})$$

$$\frac{\partial^2 S_u^{LL}}{\partial x^2} = \frac{BB}{8}l^{-3/2}\left(\frac{3}{2}x^{-5/2}A - \frac{3U_\infty}{2\nu}x^{-7/2}y^2A + \frac{U_\infty^2}{8\nu^2}x^{-9/2}y^4A\right) \quad (\text{II.60})$$

$$\frac{\partial S_u^{LL}}{\partial y} = -\frac{BBU_\infty}{8\nu}l^{-3/2}x^{-3/2}yA \quad (\text{II.61})$$

$$\frac{\partial^2 S_u^{LL}}{\partial y^2} = -\frac{BBU_\infty}{8\nu}l^{-3/2}x^{-3/2}(A + yA_y) \quad (\text{II.62})$$

$$\frac{\partial S_v^{LL}}{\partial x} = -\frac{BB}{8}l^{-3/2}\left(\frac{3}{2}yx^{-5/2}A - yx^{-3/2}A_x\right) \quad (\text{II.63})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_v^{LL}}{\partial x^2} = & -\frac{BB}{8}l^{-3/2}\left(-\frac{15}{4}yx^{-7/2}A + \frac{3}{2}yx^{-5/2}A_x\right. \\ & \left.- y\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}A_x + x^{-3/2}A_{xx}\right)\right) \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

$$\frac{\partial S_v^{LL}}{\partial y} = -\frac{BB}{8}l^{-3/2}\left(-x^{-3/2}A + \frac{U_\infty}{2\nu}y^2x^{-5/2}A\right) \quad (\text{II.65})$$

$$\frac{\partial^2 S_v^{LL}}{\partial y^2} = -\frac{BB}{8}l^{-3/2}\left(-x^{-3/2}A_y + \frac{U_\infty}{2\nu}x^{-5/2}(2yA + y^2 * A_y)\right) \quad (\text{II.66})$$

$$(\text{II.67})$$

Pour  $U_\infty L$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_u^{LU_\infty}}{\partial x} = & -\frac{0.664}{4\sqrt{\pi}} l^{-1/2} \left[ -x^{-3/2} A + \frac{U_\infty}{2\nu} y^2 x^{-5/2} A \right. \\ & \left. + U_\infty \left( -x^{-3/2} A^{U_\infty} + \frac{y^2 x^{-5/2}}{2\nu} (U_\infty A^{U_\infty} + A) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.68})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_u^{LU_\infty}}{\partial x^2} = & -\frac{0.664}{4\sqrt{\pi}} l^{-1/2} \left[ \frac{3}{2} x^{-5/2} A - \frac{3U_\infty}{2\nu} x^{-7/2} y^2 A + \frac{U_\infty^2}{8\nu^2} x^{-9/2} y^4 A \right. \\ & + U_\infty \left( \frac{3}{2} x^{-5/2} A^{U_\infty} - \frac{3}{2\nu} x^{-7/2} y^2 (U_\infty A^{U_\infty} + A) \right. \\ & \left. \left. + \frac{x^{-9/2} y^4}{8\nu^2} (U_\infty^2 A^{U_\infty} + 2U_\infty A) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

$$\frac{\partial S_u^{LU_\infty}}{\partial y} = \frac{0.664}{4\nu\sqrt{\pi}} l^{-1/2} y x^{-3/2} (2U_\infty A + U_\infty^2 A^{U_\infty}) \quad (\text{II.70})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_u^{LU_\infty}}{\partial y^2} = & \frac{0.664}{4\nu\sqrt{\pi}} l^{-1/2} x^{-3/2} \left( 2U_\infty (A + y(-\frac{2yU_\infty}{4x\nu} A)) \right. \\ & \left. + U_\infty^2 (A^{U_\infty} - \frac{2y^2}{4x\nu} (U_\infty A^{U_\infty} + A)) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.71})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_v^{LU_\infty}}{\partial x} = & \frac{0.664}{4\sqrt{\pi}} l^{-1/2} \left( \frac{3}{2} y x^{-5/2} A - y x^{-3/2} A_x \right. \\ & \left. + U_\infty \left( \frac{3}{2} y x^{-5/2} A^{U_\infty} - y x^{-3/2} A_x^{U_\infty} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_v^{LU_\infty}}{\partial x^2} = & \frac{0.664}{4\sqrt{\pi}} l^{-1/2} \left[ -\frac{15}{4} y x^{-7/2} A + \frac{3}{2} y x^{-5/2} A_x - y(-\frac{3}{2} x^{-5/2} A_x + x^{-3/2} A_{xx}) \right. \\ & \left. + U_\infty \left( -\frac{15}{4} y x^{-7/2} A^{U_\infty} + 3 y x^{-5/2} A_x^{U_\infty} - y x^{-3/2} A_{xx}^{U_\infty} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_v^{LU_\infty}}{\partial y} = & \frac{0.664}{4\sqrt{\pi}} l^{-1/2} \left[ -x^{-3/2} A + \frac{U_\infty}{2\nu} y^2 x^{-5/2} A \right. \\ & \left. + U_\infty \left( -x^{-3/2} A^{U_\infty} + \frac{y^2 x^{-5/2}}{2\nu} (U_\infty A^{U_\infty} + A) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.74})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_v^{LU_\infty}}{\partial y^2} = & \frac{0.664}{4\sqrt{\pi}} l^{-1/2} \left[ -x^{-3/2} A_y + \frac{U_\infty}{2\nu} x^{-5/2} (2yA + y^2 A_y) \right. \\ & \left. + U_\infty \left( -x^{-3/2} A_y^{U_\infty} + \frac{x^{-5/2}}{2\nu} (2yA + y^2 A_y + U_\infty (2yA^{U_\infty} + y^2 A_y^{U_\infty})) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

et enfin pour  $U_\infty U_\infty$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_u^{U_\infty U_\infty}}{\partial x} = & -\frac{0.664}{2} \sqrt{L/\pi} \left[ -x^{-3/2} A^{U_\infty} + \frac{y^2 x^{-5/2}}{2\nu} (U_\infty A^{U_\infty} + A) - x^{-3/2} A^{U_\infty} \right. \\ & + \frac{y^2 x^{-5/2}}{2\nu} (U_\infty A^{U_\infty} + A) + U_\infty (-x^{-3/2} A^{U_\infty U_\infty} \\ & \left. + \frac{y^2}{2\nu} x^{-5/2} (U_\infty A^{U_\infty U_\infty} + 2A^{U_\infty})) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.76})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_u^{U_\infty U_\infty}}{\partial x^2} = & -\frac{0.664}{2} \sqrt{L/\pi} \left[ \frac{3}{2} x^{-5/2} A^{U_\infty} - \frac{3}{2\nu} x^{-7/2} y^2 (U_\infty A^{U_\infty} + A) \right. \\ & + \frac{x^{-9/2} y^4}{8\nu^2} x^{-9/2} y^4 (U_\infty^2 A^{U_\infty} + 2U_\infty A) + \frac{3}{2} x^{-5/2} A^{U_\infty} \\ & - \frac{3}{2\nu} x^{-7/2} y^2 (U_\infty A^{U_\infty} + A) \\ & + \frac{x^{-9/2} y^4}{8\nu^2} (U_\infty^2 A^{U_\infty} + 2U_\infty A) \\ & + U_\infty \left( \frac{3}{2} x^{-5/2} A^{U_\infty U_\infty} - \frac{3}{2\nu} x^{-7/2} y^2 (U_\infty A^{U_\infty U_\infty} + 2A^{U_\infty}) \right. \\ & \left. \left. + \frac{x^{-9/2} y^4}{8\nu^2} (U_\infty^2 A^{U_\infty U_\infty} + 2U_\infty A^{U_\infty} + 2(U_\infty A^{U_\infty} + A)) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.77})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_u^{U_\infty U_\infty}}{\partial y} = & \frac{0.664}{2\nu} \sqrt{L/\pi} y x^{-3/2} (2(U_\infty A^{U_\infty} + A) + U_\infty^2 A^{U_\infty U_\infty} + 2U_\infty A^{U_\infty}) \end{aligned} \quad (\text{II.78})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_u^{U_\infty U_\infty}}{\partial y^2} = & \frac{0.664}{2\nu} \sqrt{L/\pi} x^{-3/2} \left[ 2U_\infty (A^{U_\infty} - \frac{y^2}{2x\nu} (U_\infty A^{U_\infty} + A)) \right. \\ & + 2(A + y(-\frac{2yU_\infty}{4x\nu} A)) + 2U_\infty (A^{U_\infty} - \frac{2y^2}{4x\nu} (U_\infty A^{U_\infty} + A)) \\ & \left. + U_\infty^2 (A^{U_\infty U_\infty} - \frac{y^2}{2x\nu} (U_\infty A^{U_\infty U_\infty} + 2A^{U_\infty})) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.79})$$

$$\frac{\partial S_v^{U_\infty U_\infty}}{\partial x} = \frac{0.664}{2} \sqrt{L/\pi} \left[ \frac{3}{2} yx^{-5/2} A^{U_\infty} - yx^{-3/2} A_x^{U_\infty} + \frac{3}{2} yx^{-5/2} A^{U_\infty} - yx^{-3/2} A_x^{U_\infty} \right. \\ \left. + U_\infty \left( \frac{3}{2} yx^{-5/2} A^{U_\infty U_\infty} - yx^{-3/2} A_x^{U_\infty U_\infty} \right) \right] \quad (\text{II.80})$$

$$\frac{\partial^2 S_v^{U_\infty U_\infty}}{\partial x^2} = \frac{0.664}{2} \sqrt{L/\pi} \left[ -\frac{15}{4} yx^{-7/2} A^{U_\infty} + \frac{3}{2} yx^{-5/2} A_x^{U_\infty} \right. \\ \left. - y \left( -\frac{3}{2} x^{-5/2} A_x^{U_\infty} + x^{-3/2} A_{xx}^{U_\infty} \right) \right. \\ \left. - \frac{15}{4} yx^{-7/2} A^{U_\infty} + 3yx^{-5/2} A_x^{U_\infty} - yx^{-3/2} A_{xx}^{U_\infty} \right. \\ \left. + U_\infty \left( -\frac{15}{4} yx^{-7/2} A^{U_\infty U_\infty} + 3yx^{-5/2} A_x^{U_\infty U_\infty} - yx^{-3/2} A_{xx}^{U_\infty U_\infty} \right) \right] \quad (\text{II.81})$$

$$\frac{\partial S_v^{U_\infty U_\infty}}{\partial y} = \frac{0.664}{2} \sqrt{L/\pi} \left[ -x^{-3/2} A^{U_\infty} + \frac{y^2 x^{-5/2}}{2\nu} (U_\infty A^{U_\infty} + A) - x^{-3/2} A^{U_\infty} \right. \\ \left. + \frac{y^2 x^{-5/2}}{2\nu} (U_\infty A^{U_\infty} + A) \right. \\ \left. + U_\infty \left( -x^{-3/2} A^{U_\infty U_\infty} + \frac{y^2}{2\nu} x^{-5/2} (U_\infty A^{U_\infty U_\infty} + 2A^{U_\infty}) \right) \right] \quad (\text{II.82})$$

$$\frac{\partial^2 S_v^{U_\infty U_\infty}}{\partial y^2} = \frac{0.664}{2} \sqrt{L/\pi} \left[ -x^{-3/2} A_y^{U_\infty} + \frac{x^{-5/2}}{2\nu} (2yA + y^2 A_y) \right. \\ \left. + U_\infty (2yA^{U_\infty} + y^2 A_y^{U_\infty}) \right. \\ \left. - x^{-3/2} A_y^{U_\infty} + \frac{x^{-5/2}}{2\nu} (2yA + y^2 A_y + U_\infty (2yA^{U_\infty} + y^2 A_y^{U_\infty})) \right. \\ \left. + U_\infty (-x^{-3/2} A_y^{U_\infty U_\infty} \right. \\ \left. + \frac{x^{-5/2}}{2\nu} (2yA^{U_\infty} + y^2 A_y^{U_\infty} + 2yA^{U_\infty} + y^2 A_y^{U_\infty} + U_\infty (2yA^{U_\infty U_\infty} \right. \\ \left. + y^2 A_y^{U_\infty U_\infty}))) \right] \quad (\text{II.83})$$

Ce qui nous permet de calculer les termes sources :

$$\begin{aligned} S_{f_x}^{ab} = & \rho \left( S_u^{ab} \frac{\partial u}{\partial x} + S_u^a \frac{\partial S_u^b}{\partial x} + S_u^b \frac{\partial S_u^a}{\partial x} + u \frac{\partial S_u^{ab}}{\partial x} \right. \\ & \left. + S_v^{ab} \frac{\partial u}{\partial y} + S_v^a \frac{\partial S_v^b}{\partial y} + S_v^b \frac{\partial S_v^a}{\partial y} + v \frac{\partial S_v^{ab}}{\partial y} \right) \\ & - \mu \left( \frac{\partial^2 S_u^{ab}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_u^{ab}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.84})$$

$$\begin{aligned} S_{f_y}^{ab} = & \rho \left( S_u^{ab} \frac{\partial v}{\partial x} + S_u^a \frac{\partial S_v^b}{\partial x} + S_u^b \frac{\partial S_v^a}{\partial x} + u \frac{\partial S_v^{ab}}{\partial x} \right. \\ & \left. + S_v^{ab} \frac{\partial v}{\partial y} + S_v^a \frac{\partial S_v^b}{\partial y} + S_v^b \frac{\partial S_v^a}{\partial y} + v \frac{\partial S_v^{ab}}{\partial y} \right) \\ & - \mu \left( \frac{\partial^2 S_v^{ab}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_v^{ab}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.85})$$

### ANNEXE III

#### CARACTÉRISTIQUES DU PROFIL NACA0012

Les données numériques sont extraites de Abbott et Doenhoff<sup>[47]</sup>

##### III.1 Géométrie et coefficient de pression

Le tableau III.1 présente les caractéristiques géométriques et le coefficient de pression local. Ces données sont présentées graphiquement sur la figure III.1. Dans le tableau,  $v$  représente la vitesse locale sur la surface du profil symétrique à une portance nulle,  $U_\infty$  est la vitesse amont,  $c$  est la corde.

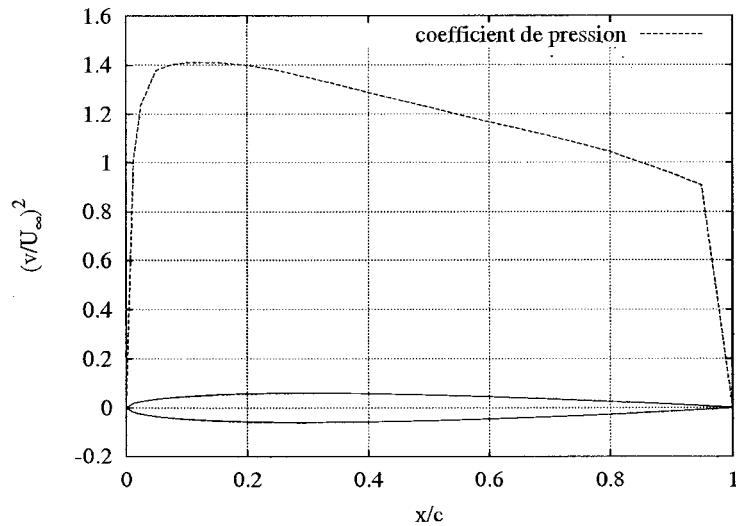


FIG. III.1 Coefficient de pression le long du profil NACA0012

TAB. III.1 Caractéristiques du NACA 0012

$x(\%c)$	$y(\%c)$	$(v/U_\infty)^2$
0	0	0
1.25	1.894	1.010
2.5	2.615	1.241
5.0	3.555	1.378
7.5	4.200	1.402
10	4.683	1.411
15	5.345	1.411
20	5.737	1.399
25	5.941	1.378
30	6.002	1.350
40	5.803	1.288
50	5.294	1.228
60	4.563	1.166
70	3.664	1.109
80	2.623	1.044
90	1.448	0.956
95	0.807	0.906
100	0.126	0