

**In compliance with the
Canadian Privacy Legislation
some supporting forms
may have been removed from
this dissertation.**

**While these forms may be included
in the document page count,
their removal does not represent
any loss of content from the dissertation.**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ANALYSE DE SENSIBILITÉ D'ÉCOULEMENTS INSTATIONNAIRES
VISQUEUX LAMINAIRES

HRISTINA HRISTOVA
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
JUIN 2003



National Library
of Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

Acquisitions et
services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-612-86401-4

Our file Notre référence

ISBN: 0-612-86401-4

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ANALYSE DE SENSIBILITÉ D'ÉCOULEMENTS INSTATIONNAIRES
VISQUEUX LAMINAIRES

présenté par: HRISTOVA Hristina

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BERTRAND François, Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GARON André, Ph.D., membre

à toute ma famille et à Seb

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, M. Dominique Pelletier, pour le temps agréable et instructif que j'ai passé à Montréal. Ses conseils et son soutien ont été grandement appréciés.

Je voudrais aussi remercier Stéphane Étienne pour les réponses à mes nombreuses questions ainsi que tous les autres étudiants pour la bonne ambiance au travail.

RÉSUMÉ

Ce mémoire est consacré au calcul des sensibilités pour des écoulements instationnaires. Une sensibilité représente le taux de variation d'une variable par rapport à un paramètre de design. Deux types d'équations sont considérés: l'équation de conduction non linéaire et les équations de Navier-Stokes pour des fluides visqueux incompressibles, la première servant d'étape préliminaire vers le cas plus complexe de la seconde. Pour les deux types de problèmes, les équations instationnaires pour les sensibilités continues sont développées dans un cas très général permettant ainsi de traiter n'importe quel paramètre de valeur ou de forme. Un modèle d'éléments finis semi-discret est appliqué pour la résolution des équations. Ce modèle utilise des éléments finis pour la discrétisation spatiale et des schémas de différences finies pour l'intégration en temps. Pour la partie temporelle, notre choix s'est arrêté sur le θ -schéma qui nous permet d'avoir un schéma d'intégration en temps de premier ou de deuxième ordre selon la valeur de θ . Pour la discrétisation spatiale, des éléments quadratiques sont utilisés. Nous vérifions le code ainsi construit à l'aide de solutions manufacturées. En particulier, nous vérifions que l'ordre de précision observé correspond à celui prédit par la théorie. Deux applications sont présentées dans la suite. La première est dans le domaine de la conduction non linéaire transitoire. Nous étudions la réponse thermique d'un matériau de propriétés thermiques variables. Les sensibilités aux paramètres définissant les propriétés sont calculées, ainsi que la sensibilité à un paramètre de forme. La seconde application concerne les écoulements instationnaires. Nous calculons l'écoulement autour d'un obstacle carré immergé dans un écoulement pulsé. Dans les deux cas, l'application des sensibilités à l'analyse d'incertitude et au calcul rapide de solutions voisines est présentée.

ABSTRACT

This thesis is devoted to sensitivity analysis of unsteady flows. Sensitivities characterize the influence of a design parameter on state variables. We consider two kinds of equations : the nonlinear heat conduction equation and the Navier-Stokes equations for viscous incompressible flows, the first one serving as a preliminary step towards the more complexe case of the second ones. For the two kinds of problems, the unsteady equations for the continuous sensitivities are developped in a very general form allowing us to deal with any value or shape parameter. A semi-discrete finite element model is applied for the resolution of the equations. This model uses finite elements for space discretization and finite difference schemes for time integration. Concerning time, our choice is the θ -scheme, which allows us to have a time integration scheme of first or second order depending on the value of θ . For space discretization, we use quadratic finite elements. We verify the program obtained by using manufactured solutions. In particular, we verify that the observed convergence rate corresponds to that predicted by theory. Two applications are presented. The first one is in the field of nonlinear transient heat conduction. We study the response of a material with temperature-dependent properties. The sensitivities to the parameters defining the thermal properties are computed as well as the sensitivity to a shape parameter. The second application deals with unsteady flows. We compute the flow past a square obstacle immersed in a oscillating flow. In the two cases, we present the application of sensitivities to uncertainty analysis and to the fast computation of nearby solutions.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES FIGURES	xii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xv
LISTE DES TABLEAUX	xvii
LISTE DES ANNEXES	xviii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS POUR L'ÉQUATION DE CONDUCTION	6
1.1 Équation de conduction	6
1.2 Équation générale des sensibilités en conduction	7
1.3 Conditions limites pour les sensibilités	9
1.3.1 Conditions de Dirichlet	10
1.3.2 Conditions de Neumann	11
CHAPITRE 2 MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES	14

2.1	Équations de Navier-Stokes	14
2.2	Équations générales des sensibilités	17
2.3	Conditions limites pour les sensibilités	18
2.3.1	Conditions de Dirichlet	18
2.3.2	Conditions de Neumann	19
CHAPITRE 3 MÉTHODE DE RÉOLUTION		22
3.1	Méthode des éléments finis	22
3.2	Formulation faible des équations	24
3.2.1	Formulation faible des équations de conduction	24
3.2.2	Formulation faible de l'équation de Navier-Stokes	25
3.3	Discrétisation spatiale	27
3.3.1	Équation de conduction	28
3.3.2	Équation des sensibilités en conduction	28
3.3.3	Équations de Navier-Stokes	29
3.3.4	Équations des sensibilités pour Navier-Stokes	31
3.4	Intégration en temps	31
3.4.1	Intégration des équations de conduction	32
3.4.2	Intégration des équations de Navier-Stokes	33
3.5	Détails d'implantation	34
3.5.1	Choix d'élément fini	35
3.5.2	Normes et erreur	36
CHAPITRE 4 VÉRIFICATION		38
4.1	Méthode des solutions manufacturées	38
4.2	Description des problèmes de vérification	40
4.2.1	Problème de vérification pour la conduction transitoire	40
4.2.2	Problème de vérification pour les écoulements transitoires	41
4.3	Erreurs et convergence – un premier aperçu	44

4.4	Vérification de l'ordre de convergence du solveur	49
CHAPITRE 5 APPLICATION EN CONDUCTION TRANSITOIRE . .		53
5.1	Description du problème	53
5.2	Solution pour la température	55
5.3	Sensibilités	59
5.4	Applications des sensibilités	61
5.4.1	Analyse de sensibilité	61
5.4.2	Analyse d'incertitude	66
5.4.3	Solutions voisines	68
CHAPITRE 6 APPLICATION À DES ÉCOULEMENTS INSTATION- NAIRES		70
6.1	Description du problème	70
6.2	Maillage et pas de temps	72
6.3	Solution pour l'écoulement	74
6.3.1	Lâché tourbillonnaire	75
6.3.2	Pression	77
6.3.3	Transition de l'écoulement	79
6.4	Solution pour les sensibilités	82
6.4.1	Sensibilité de la pression	84
6.4.2	Sensibilité de la vitesse	84
6.5	Application des sensibilités	87
6.5.1	Analyse d'incertitude	87
6.5.2	Calcul de solutions voisines	91
CONCLUSION		96
RÉFÉRENCES		98

ANNEXES	103
-------------------	-----

LISTE DES FIGURES

Figure 3.1	Élément de Crouzeix-Raviart. À droite sont montrés en pointillé les degrés de liberté éliminés au niveau élémentaire	35
Figure 4.1	Problème de vérification pour la conduction : isothermes pour la solution au temps initial $t = 0$ (à gauche) et au temps final $t = 0.25$ (à droite)	41
Figure 4.2	Modèle d'océan : lignes de courant pour $\beta = 0$ à gauche, et pour $\beta \neq 0$ à droite. La ligne en pointillée montre la force de vent F	43
Figure 4.3	Domaine de calcul et conditions limites pour le problème de vérification pour les équations de Navier-Stokes	44
Figure 4.4	Problème de vérification pour Navier-Stokes : norme de l'erreur en fonction du nombre de noeuds. La courbe de pente un correspond au taux de convergence théorique. En haut, résultats avec un schéma en temps de premier ordre; en bas, schéma en temps de deuxième ordre	47
Figure 4.5	Problème de vérification pour Navier-Stokes : norme de l'erreur en fonction du nombre de pas de temps. En haut, résultats avec un schéma en temps de premier ordre; en bas, schéma en temps de deuxième ordre. Les courbes de pentes un et deux correspondent aux taux de convergence théorique . . .	48
Figure 4.6	Problème de vérification pour la conduction : étude de raffinement spatial et temporel	51
Figure 4.7	Problème de vérification pour Navier-Stokes : étude de raffinement spatial et temporel	52
Figure 5.1	Problème de conduction transitoire : design expérimental .	53
Figure 5.2	Problème de conduction transitoire : modèle bidimensionnel	54

Figure 5.3	Problème de conduction transitoire : flux thermique appliqué et évolution de la température pour les cas fini et semi-infini avec des propriétés thermiques variables ou constantes . . .	58
Figure 5.4	Conditions limites pour le paramètre de forme L_f	60
Figure 5.5	Problème de conduction transitoire : sensibilités normalisées et adimensionnées ($T_{max} = 193^\circ C$) pour les paramètres k_1 , k_2 , C_1 et C_2 dans le cas fini	64
Figure 5.6	Problème de conduction transitoire : sensibilités normalisées et adimensionnées ($T_{max} = 196^\circ C$) pour les paramètres k_1 , k_2 , C_1 et C_2 dans le cas semi-infini	65
Figure 5.7	Problème de conduction transitoire : marge d'incertitude sur la température pour $\kappa, \gamma = 1 \pm 0.1$ dans le cas fini	67
Figure 5.8	Problème de conduction transitoire : solution voisine pour $L_f = 0.9$ pour le cas fini	69
Figure 5.9	Problème de conduction transitoire : solution voisine pour $L_f = 0.8$ pour le cas fini	69
Figure 6.1	Définition du domaine de calcul et des conditions limites . .	71
Figure 6.2	Maillage pour le calcul de l'écoulement autour d'un obstacle carré	73
Figure 6.3	Réponse du système en $(x = 2, y = 0)$	75
Figure 6.4	Isovaleurs pour la vorticité durant une période T_α . �� gauche est montré avec un point noir la phase correspondante de la vitesse u	76
Figure 6.5	Isovaleurs pour la pression à $t = 15.0$	79
Figure 6.6	Isovaleurs pour la vorticité à $t = 23, 27, 31, 35$ montrant le développement d'une allée tourbillonnaire derrière l'obstacle	81
Figure 6.7	Réponse pour les sensibilités en $(x = 2.0, y = 0.0)$	83
Figure 6.8	Isovaleurs pour la vitesse et les sensibilités de la vitesse à $t = 10$	85

Figure 6.9	Marge d'incertitude sur les vitesses u et v pour $\alpha = 0.4 \pm 0.02$ ($\Delta\alpha = 5\%$) en deux points de mesure : $(x = 2, y = 0)$ en haut, et $(x = 2, y = -0.7)$ en bas	89
Figure 6.10	Marge d'incertitude sur les vitesses u et v pour $U_0 = 1 \pm 0.02$ ($\Delta U_0 = 2\%$) en deux points de mesure : $(x = 2, y = 0)$ en haut, et $(x = 2, y = -0.7)$ en bas	90
Figure 6.11	Solutions extrapolées pour les vitesses u et v pour $\alpha = 0.42$ ($\Delta\alpha = 5\%$) en deux points de mesure : $(x = 2, y = 0)$ en haut, et $(x = 2, y = -0.7)$ en bas	92
Figure 6.12	Solutions extrapolées pour les vitesses u et v pour $U_0 = 1.02$ ($\Delta U_0 = 2\%$) en deux points de mesure : $(x = 2, y = 0)$ en haut, et $(x = 2, y = -0.7)$ en bas	93
Figure 6.13	Profils extrapolés pour la vitesse v pour $U_0 = 1.02$ ($\Delta U_0 = 2\%$) en trois points de mesure : $x = 2$ (première ligne), $x = 4$ (deuxième ligne) et $x = 6$ (troisième ligne). La colonne à gauche correspond à $t = 15$ et celle de droite, à $t = 17$. . .	95

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

$\mathbf{u} = (u, v)$	vitesse
p	pression
T	température
$\hat{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses
$\hat{\sigma}$	tenseur des contraintes
$\mathbf{f} = (f_x, f_y)$	forces volumiques
q_s	source de chaleur
$\mathbf{U}_f = (U_f, V_f)$	vitesse imposée à la frontière
T_f	température imposée à la frontière
$\mathbf{t} = (t_x, t_y)$	force de traction
$\mathbf{F}^N = (F_x^N, F_y^N)$	force de traction appliquée à la frontière
q	flux thermique
q_a	flux thermique appliqué à la frontière
$\mathbf{U}_0$	condition initiale pour la vitesse
T_0	condition initiale pour la température
μ	viscosité dynamique du fluide
ρ	masse volumique
k	conductivité
c_p	chaleur massique à pression constante
$C = \rho c_p$	chaleur volumétrique à pression constante
a	paramètre de design arbitraire
$\mathbf{S}_u^a$	sensibilité de la vitesse au paramètre a
S_p^a	sensibilité de la pression au paramètre a
S_T^a	sensibilité de la température au paramètre a

μ', ρ', c'_p, k'	dérivées des propriétés physiques par rapport au paramètre a
$\mathbf{f}', q'_s$	termes sources pour les équations des sensibilités
$\mathbf{t}' = (t'_x, t'_y)$	sensibilité de la force de traction
q'_a	sensibilité du flux thermique
Ω	domaine de calcul
$\partial\Omega$	frontière du domaine de calcul
Γ_D	courbes avec condition de Dirichlet
Γ_N	courbes avec condition de Neumann
$\mathbf{n} = (n_x, n_y)$	vecteur normal extérieur au domaine
$\phi_i(\mathbf{x})$	fonctions d'interpolation
$T_i, S_{T_i}, \text{etc.}$	coefficients d'interpolation; valeurs nodales
$\delta T, \delta S_T, \text{etc.}$	fonctions test dans les formulations variationnelles
$T_{ex}, \text{etc.}$	solution exacte pour T
$T_h, \text{etc.}$	solution pour T obtenue par la méthode d'éléments finis
h	taille de l'élément
$\Delta t = t^{n+1} - t^n$	pas de temps
$N_{\Delta t}$	nombre de pas de temps
θ	paramètre du θ -schéma d'intégration en temps
$\frac{d}{da}$	dérivée totale par rapport à a
∇	gradient
$\nabla \cdot$	divergence

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Définition des paramètres pour le modèle d'océan	42
Tableau 4.2	Problème de vérification pour la conduction : définition des maillages et des pas de temps	50
Tableau 4.3	Problème de vérification pour Navier-Stokes : définition des maillages et des pas de temps	50
Tableau 5.1	Définition des paramètres pour le problème de conduction transitoire	56
Tableau 5.2	Étude de raffinement spatial et temporel pour la configura- tion finie	57

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	DISCRÉTISATION SPATIALE DE LA FORMULATION FAIBLE DES ÉQUATIONS DES SENSIBILITÉS POUR NAVIER-STOKES	103
----------	--	-----

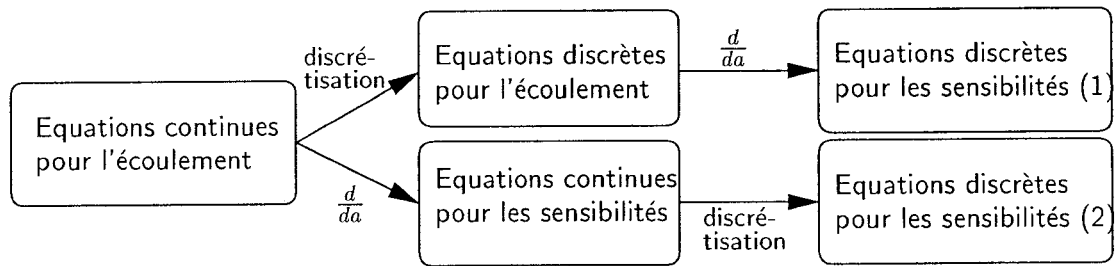
INTRODUCTION

Ce mémoire s'inscrit dans le développement d'un code d'éléments finis adaptatif pour la résolution de problèmes en mécanique des fluides. La méthode des éléments finis est une technique numérique puissante pour la résolution d'équations aux dérivées partielles. Parmi ses avantages sont la capacité de traiter des problèmes définis dans des domaines géométriques complexes et la facilité d'imposer des conditions limites non-homogènes (Gresho ^[9], Reddy ^[24]). Combinés avec une procédure de remaillage adaptatif ^[32], les éléments finis permettent l'obtention de solutions numériques très précises.

Le code d'éléments finis en question a été initialement conçu par Hétu ^[14] pour la résolution d'écoulements visqueux laminaires en coordonnées cartésiennes. Par la suite, des modifications ont été apportées permettant de traiter des écoulements turbulents (Ilinca ^[15]), des problèmes axisymétriques (Turgeon ^[30]), des problèmes avec conduction de chaleur, l'analyse de sensibilité (Turgeon ^[29]). Ce dernier développement constitue une avancée majeure et ouvre la porte vers une étude beaucoup plus approfondie des problèmes considérés.

Une sensibilité traduit l'influence d'un paramètre de design sur les variables d'état. Le paramètre de design peut être une propriété physique, le nombre de Reynolds, un paramètre entrant dans les conditions limites ou les termes sources ou bien un paramètre définissant la géométrie du domaine de calcul. Dans tous les cas, la connaissance de la sensibilité des variables d'état au paramètre nous fournit des informations supplémentaires sur le problème traité. Les sensibilités peuvent être utilisées pour le calcul rapide de solutions voisines, l'analyse d'incertitude, l'identification de zones sensibles et de paramètres dominants et le design optimal.

Le concept des sensibilités n'est pas nouveau en soi. Elles sont utilisées le plus souvent dans des problèmes de design optimal où il est nécessaire de calculer le gradient d'une fonctionnelle définie sur les variables d'état par rapport à un ou plusieurs paramètres de design. On peut classer les méthodes pour le calcul des sensibilités en deux catégories - les méthodes dites continues et les méthodes dites discrètes (voir le schéma ci-dessous).



Dans l'approche des sensibilités discrètes, la différentiation par rapport au paramètre s'effectue au niveau des équations pour l'écoulement discrétisées. Dans l'approche des sensibilités continues, les équations décrivant le problème sont d'abord différenciées par rapport au paramètre et ensuite discrétisées. Le résultat final dans les deux cas est un système d'équations discrètes pour les sensibilités. Tout de même, ces deux systèmes ne sont pas identiques, étant donné que dans le cas général les opérations de différentiation et de discrétisation ne commutent pas.

Chacune de ces approches a ses points forts et ses points faibles ^[17]. Les sensibilités discrètes fournissent des gradients dits consistants c'est-à-dire des gradients qui représentent les dérivées exactes de la solution discrète par rapport au paramètre. Elles sont également plus faciles à implanter numériquement, au moins pour des paramètres de valeur (c'est-à-dire des paramètres qui n'affectent pas la définition de la géométrie du problème). Les sensibilités continues d'autre part, exigent plus d'efforts de programmation et elles ne fournissent qu'une approxima-

tion des sensibilités nodales (discrètes). Leur précision peut être augmentée tout de même en raffinant le maillage. Il est admis qu'asymptotiquement avec les deux approches, continue et discrète, on obtient la même solution. Les avantages des sensibilités continues se situent au niveau du traitement des paramètres de forme ^[19] et des problèmes définis avec une formulation éléments finis stabilisée ^[29]. Elles permettent aussi d'utiliser une méthode de résolution pour les sensibilités différente de celle pour l'écoulement.

On peut également classer les méthodes de calcul des sensibilités en méthodes basées sur la différentiation directe (continues ou discrètes) et méthodes avec variables adjointes (continues ou discrètes) ^[17]. Il existe aussi des outils de différentiation automatique comme ADIFOR ^[2] ou bien à l'aide de variables complexes ^[1, 21].

En ce qui concerne les domaines d'application des sensibilités, ils sont très divers: design optimal de structures et optimisation de forme (Haug et al. ^[13]), conduction nonlinéaire et/ou transitoire (Dems et al. ^[6, 7], Gu et al. ^[10]), design d'expériences (Dowding et al. ^[8]), conception de batteries thermiques (Blackwell et al. ^[3]), interactions fluide-structure (Li ^[20]), éléments finis stochastiques (Kleiber et al. ^[18]), milieux poreux (Tocci ^[28]), contrôle optimal d'écoulements (Gunzburger ^[11, 12]), etc. Dans la plupart de ces travaux, c'est l'approche des sensibilités discrètes qui est appliquée, les sensibilités continues étant peu étudiées et connues à ce jour-ci.

Dans le cadre de ce mémoire nous allons utiliser un code basé sur l'approche continue (Turgeon ^[29]). Une méthode de différentiation directe est appliquée ce qui signifie que les sensibilités sont obtenues comme solution d'une équation aux dérivées partielles. Cette équation est développée dans une forme très générale permettant ainsi de traiter n'importe quel paramètre de design, y compris paramètres de forme.

Le présent projet a deux objectifs principaux. Premièrement, nous voulons élargir le domaine d'application du code d'éléments finis jusqu'à maintenant uniquement stationnaire à des problèmes dépendant du temps. Deux types d'équations sont considérés: l'équation de conduction transitoire et les équations de Navier-Stokes instationnaires pour des écoulements incompressibles visqueux laminaires. Le cas de la conduction est inclus comme une étape préliminaire vers le cas plus complexe des équations de Navier-Stokes. Le deuxième but de ce projet est de développer les équations des sensibilités instationnaires correspondant aux deux types de problèmes mentionnés.

La résolution des équations pour l'écoulement et les sensibilités se fait par une méthode d'éléments finis semi-discrète. Cette méthode utilise des éléments finis pour la discrétisation spatiale des équations et des schémas de différences finies pour leur intégration en temps. Cette approche a été choisie puisqu'elle nous permet d'utiliser le travail effectué précédemment pour les équations stationnaires. En fait, résoudre une équation instationnaire avec la méthode des éléments finis semi-discrète, revient à résoudre à chaque pas de temps une équation stationnaire.

Ce mémoire est construit de la façon suivante. Dans les deux premiers chapitres, nous présentons les équations de conduction et de Navier-Stokes instationnaires dont la résolution fait l'objet de ce projet. Les équations générales des sensibilités sont également développées pour les deux types de problèmes considérés. Le chapitre 3 est dédié à la méthode des éléments finis semi-discrète. Nous décrivons les formes faibles des équations, leur discrétisation spatiale et l'intégration en temps. Dans le chapitre 4, nous vérifions la méthodologie de résolution à l'aide de solutions manufacturées. En particulier, par une étude de raffinement du maillage et du pas de temps, nous nous intéressons à l'ordre de précision observé. Finalement, les deux derniers chapitres sont consacrés à des applications en régime instationnaire. Dans le chapitre 5, une application dans le domaine de la conduction

non linéaire transitoire est présentée. Le deuxième problème, donné au chapitre 6, concerne l'écoulement instationnaire autour d'un obstacle carré immergé dans un écoulement pulsé. Dans les deux cas, une analyse de sensibilité est effectuée et diverses applications des sensibilités sont montrées.

CHAPITRE 1

MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS POUR L'ÉQUATION DE CONDUCTION

Ce chapitre expose la méthode de l'équation des sensibilités dans le cas de l'équation de conduction transitoire. L'étude de cette équation, plus simple que celle de Navier-Stokes, constitue une étape préliminaire avant d'aborder les écoulements transitoires et leurs sensibilités.

1.1 Équation de conduction

On considère un problème de conduction non-linéaire transitoire. Son modèle mathématique est donné par l'équation suivante

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q_s \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1)$$

soignée à la condition initiale

$$T(\mathbf{x}, t = 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.2)$$

et aux conditions limites

$$T(\mathbf{x}, t) = T_f(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (1.3)$$

$$-k \nabla T \cdot \mathbf{n} = q_a(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (1.4)$$

Ici, $T(\mathbf{x}, t)$ est le champ de température, $q_s(\mathbf{x}, t)$ la source de chaleur, ρ , c_p et k sont la masse volumique, la chaleur massique à pression constante et la conductivité

du matériau, dépendant éventuellement de la température. Le domaine de calcul est désigné par Ω . Sa frontière, $\partial\Omega$, est divisé en deux parties, Γ_D et Γ_N , avec des conditions limites de Dirichlet et de Neumann respectivement. Pour que le problème soit bien défini il faut que

$$\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega \quad \text{et} \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset \quad (1.5)$$

Les conditions de Dirichlet, appelées aussi conditions essentielles, fixent la valeur de la température sur le bord du domaine. La température imposée est notée ici T_f . Les conditions de Neumann, appelées aussi conditions naturelles, fixent quant à elles la valeur du flux thermique $q = -k\partial T/\partial \mathbf{n} = -k\nabla T \cdot \mathbf{n}$ appliqué sur la frontière. Le flux appliqué est noté par q_a avec $\mathbf{n}$, la normale extérieure au domaine.

1.2 Équation générale des sensibilités en conduction

L'équation de conduction donne la distribution de la température dans le domaine de calcul et son évolution avec le temps. Lorsque l'on effectue une analyse de sensibilité, la température n'est pas considérée comme fonction uniquement des coordonnées et du temps mais aussi de différents paramètres définissant le problème. Des exemples de tels paramètres sont la température ou le flux appliqué aux frontières, des paramètres définissant la géométrie ou les propriétés physiques, etc. Si on désigne par a un paramètre arbitraire du problème, on a donc

$$T = T(\mathbf{x}, t; a) \quad (1.6)$$

Par définition, la sensibilité de la température est la dérivée de la température par

rapport au paramètre a

$$S_T^a = \frac{\partial T}{\partial a}(\mathbf{x}, t; a) \quad (1.7)$$

Dans la suite on omet le nom du paramètre dans la notation des sensibilités ($S_T^a \equiv S_T$) sauf en cas d'ambiguïté.

Dans ce mémoire, on adopte l'approche des sensibilités continues. Selon cette approche, la sensibilité S_T , tout comme la température, est solution d'une équation aux dérivées partielles. On obtient cette équation en dérivant l'équation de conduction par rapport au paramètre a . On se place dans une situation très générale en supposant que toutes les variables et propriétés dépendent du paramètre, ce qui nous permet de traiter un très large spectre de situations. Ainsi, après dérivation de (1.1), on obtient pour l'équation générale des sensibilités en conduction

$$(\rho'c_p + \rho c_p') \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \frac{\partial S_T}{\partial t} = \nabla \cdot (k' \nabla T + k \nabla S_T) + q'_s \quad \text{dans } \Omega \quad (1.8)$$

Ici, ρ' , c_p' , k' , q'_s désignent les dérivées totales des propriétés physiques et du terme source par rapport au paramètre a . Pour expliquer ce que l'on entend par dérivée totale, prenons l'exemple d'une conductivité k définie par interpolation linéaire entre les valeurs $k(T_1) = k_1$ et $k(T_2) = k_2$

$$k(T) = k_1 \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1} + k_2 \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad (1.9)$$

Dans ce cas, on aura les expressions suivantes pour la dérivée totale k'

- par rapport au paramètre k_1

$$k' = \frac{dk}{dk_1} = \frac{\partial k}{\partial k_1} + \frac{\partial k}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial k_1} = \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1} + \frac{k_2 - k_1}{T_2 - T_1} S_T^{k_1} \quad (1.10)$$

- par rapport au paramètre γ , ne participant pas dans la définition de $k(T)$ mais agissant sur la température

$$k' = \frac{dk}{d\gamma} = \frac{\partial k}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \gamma} = \frac{k_2 - k_1}{T_2 - T_1} S_T^\gamma \quad (1.11)$$

Pour être bien définie, l'équation des sensibilités (1.8) nécessite une condition initiale et des conditions aux frontières. La condition initiale est obtenue en dérivant celle de l'écoulement par rapport au paramètre a

$$S_T(\mathbf{x}, t = 0) = \frac{dT_0}{da}(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.12)$$

Quant aux conditions limites, une attention particulière leur est prêtée dans la section suivante.

1.3 Conditions limites pour les sensibilités

Jusqu'ici nous ne nous sommes pas préoccupé de la nature du paramètre a . On doit tout de même mentionner qu'il existe deux grandes familles de paramètres: les paramètres de valeur et les paramètres de forme. Les paramètres de forme représentent le cas plus général où non seulement les variables et les propriétés physiques mais aussi la définition de la géométrie dépendent du paramètre. Pour les paramètres de valeur, seules les variables et les propriétés physiques sont fonctions du paramètre.

Un des avantages de la méthode des sensibilités continues est qu'elle permet de traiter facilement les deux types de paramètres (ce qui n'est pas le cas de la méthode des sensibilités discrètes par exemple). En fait, l'équation générale des sensibilités (1.8) est la même indépendamment du type de paramètre. Ce qui change, ce sont

les conditions aux frontières. Voyons cela en détails.

1.3.1 Conditions de Dirichlet

Tout comme pour l'équation générale des sensibilités, on obtient la condition limite de Dirichlet pour les sensibilités en dérivant celle de la température par rapport au paramètre a

$$\frac{d}{da}T(\mathbf{x}, t; a) = \frac{d}{da}T_f(\mathbf{x}, t; a) \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (1.13)$$

Pour un paramètre de valeur, la définition de la géométrie, et donc celle des courbes frontières, ne dépend pas du paramètre a . Les dérivées totales de l'expression (1.13) deviennent donc des dérivées partielles. Ainsi, pour un paramètre de valeur la condition limite de Dirichlet est

$$\frac{\partial T}{\partial a}(\mathbf{x}, t; a) \equiv S_T(\mathbf{x}, t; a) = \frac{\partial T_f}{\partial a}(\mathbf{x}, t; a) \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (1.14)$$

Pour un paramètre de forme, par contre, en plus de la variation de la valeur de la condition limite $T_f(\mathbf{x}, t; a)$, il faut tenir compte du fait que la frontière Γ_D elle-même se déplace lorsque le paramètre a varie. Soit la paramétrisation suivante de la frontière Γ_D

$$\Gamma_D = \left\{ \left(x_f(\theta; a), y_f(\theta; a) \right) \mid \theta \in [0; 1] \right\} \quad (1.15)$$

où (x_f, y_f) sont les coordonnées des points appartenant à Γ_D . L'expression (1.13) devient alors

$$\frac{\partial T}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} = \frac{dT_f}{da}(\mathbf{x}, t; a) \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (1.16)$$

ce qui donne pour la condition limite de Dirichlet d'un paramètre de forme

$$\frac{\partial T}{\partial a}(\mathbf{x}, t; a) \equiv S_T(\mathbf{x}, t; a) = \frac{dT_f}{da}(\mathbf{x}, t; a) - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (1.17)$$

Dans l'expression précédente, les termes $\partial x_f/\partial a$ et $\partial y_f/\partial a$ correspondent au déplacement de la frontière alors que le terme dT_f/da , à la variation de la valeur de la condition limite de la température avec a . Ces quantités font partie des données du problème. La particularité principale de la condition de Dirichlet pour un paramètre de forme est la présence des dérivées premières de la température (évaluées sur la frontière), qui sont connues une fois l'équation de conduction résolue. Cependant, l'évaluation de ces dérivées à la frontière du domaine n'est pas une tâche facile ce qui explique une moins bonne performance du solveur pour des paramètres de forme (voir Turgeon ^[29]).

Remarquons aussi que la condition limite pour un paramètre de valeur peut être obtenue à partir de celle pour un paramètre de forme en annulant les déplacements de la frontière ($\partial x_f/\partial a = \partial y_f/\partial a = 0$) ce qui conduit à une mise en œuvre générale de la méthode.

1.3.2 Conditions de Neumann

Pour obtenir les conditions de Neumann pour les sensibilités, on procède de la même façon. Pour un paramètre de valeur, les définitions des courbes Γ_N ainsi que celle de la normale extérieure $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ sont indépendantes de a . Après dérivation de (1.4), on obtient pour un paramètre de valeur

$$\frac{d}{da} \left[-k(\mathbf{x}, t, T; a) \nabla T(\mathbf{x}, t; a) \cdot \mathbf{n} \right] = \frac{d}{da} q_a(\mathbf{x}, t; a) \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (1.18)$$

$$\Rightarrow -k' \nabla T \cdot \mathbf{n} - k \nabla S_T \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial q_a}{\partial a}(\mathbf{x}, t; a) \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (1.19)$$

Le membre de gauche dans (1.19) correspond à la sensibilité du flux de conduction thermique que l'on note q' dans la suite. Notons que la sensibilité du flux q' est différente du flux de conduction des sensibilités $-k \nabla S_T \cdot \mathbf{n}$ dans le cas général où les propriétés physiques sont variables. La formule (1.19) représente la façon consistante d'imposer une condition limite de Neumann pour les sensibilités.

Pour un paramètre de forme, il faut tenir compte dans (1.18) du déplacement de la frontière Γ_N . De nouveau, on introduit une paramétrisation de la courbe

$$\Gamma_N = \left\{ \left(x_f(\theta; a), y_f(\theta; a) \right) \mid \theta \in [0; 1] \right\} \quad (1.20)$$

et on considère que la normale $\mathbf{n}$, elle aussi, peut dépendre du paramètre a . Ainsi on va avoir pour les dérivées totales des deux composantes n_x et n_y

$$\frac{dn_x}{da} = \frac{\partial n_x}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial n_x}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad (1.21)$$

$$\frac{dn_y}{da} = \frac{\partial n_y}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial n_y}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad (1.22)$$

Faisons également une remarque à propos de la conductivité k . Dans une situation véritablement générale, la conductivité peut dépendre directement du paramètre a ainsi qu'indirectement, à travers les coordonnées et la température. Dans ce cas, la dérivée totale de la conductivité sur la frontière Γ_N devient

$$\frac{dk}{da}(\mathbf{x}, t, T; a) = k' + \frac{\partial k}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (1.23)$$

où, comme précédemment,

$$k' = \frac{\partial k}{\partial a} + \frac{\partial k}{\partial T} S_T \quad (1.24)$$

La formule (1.23) nécessite un peu d'explications. Nous avons représenté la dérivée totale dk/da sur la frontière Γ_N comme la somme de la dérivée k' , celle qui participe dans l'équation des sensibilité (1.8), et des termes supplémentaires faisant intervenir les dérivées de la géométrie. La raison pour faire une telle distinction est que tous les termes qui expriment comment le paramètre affecte la géométrie font partie des données du problème et doivent aller dans le membre de droite, tandis que la dérivée de la conductivité k' reste dans le membre de gauche, dans la définition de la sensibilité du flux thermique.

Après ces quelques précisions, on obtient la formule suivante pour la condition de Neumann pour un paramètre de forme à partir de l'expression (1.18)

$$\begin{aligned}
q' \equiv & -k' \nabla T \cdot \mathbf{n} - k \nabla S_T \cdot \mathbf{n} = \frac{dq_a}{da}(\mathbf{x}, t; a) \\
& + \left[\frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} + \frac{\partial k}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \right] \nabla T \cdot \mathbf{n} \\
& + k \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) n_x + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) n_y \right] \\
& + k \left[\frac{\partial T}{\partial x} \frac{dn_x}{da} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dn_y}{da} \right] \quad \text{sur } \Gamma_N
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Ce que l'on remarque tout de suite, c'est que cette fois, en plus des dérivées premières de la température, les dérivées secondes apparaissent également. Leur évaluation à la frontière du domaine est une tâche encore plus difficile que celle de l'évaluation du gradient de la température. Présentement, notre solveur ne possède pas de procédure permettant de récupérer ces dérivées secondes et donc, dans les applications plus loin, nous n'allons pas traiter de problème avec des conditions de Neumann sur des courbes affectées par un paramètre de forme.

CHAPITRE 2

MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Ce chapitre présente le développement de l'équation générale des sensibilités dans le cas d'écoulements incompressible transitoires décrits par les équations de Navier-Stokes.

2.1 Équations de Navier-Stokes

On considère l'écoulement transitoire d'un fluide visqueux et incompressible. On suppose que l'écoulement est isotherme (à température constante) et laminaire (à faible nombre de Reynolds). Les lois physiques régissant ce type d'écoulement sont

- l'équation de continuité qui traduit la conservation de la masse

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1)$$

- l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.2)$$

Ici, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est le champ de vitesse, $p(\mathbf{x}, t)$, le champ de pression, ρ , la masse volumique du fluide (constante pour un fluide incompressible), $\mathbf{f}$, les forces volumiques

et $\hat{\tau}$, le tenseur des contraintes visqueuses. Par définition

$$\hat{\tau} = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (2.3)$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide. Finalement, Ω désigne de nouveau le domaine de calcul. Les deux équations précédentes portent le nom d'équations de Navier-Stokes.

Dans le cadre de ce mémoire, nous allons nous limiter à un système de coordonnées cartésien bidimensionnel. Dans ce système de coordonnées, les équations de Navier-Stokes se décomposent comme suit :

- l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

- l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x \quad (2.5)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + f_y \quad (2.6)$$

avec

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Pour définir complètement le problème, il est nécessaire d'ajouter aux équations (2.4-2.6) une condition initiale pour le champ de vitesse

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.7)$$

et des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann.

Les conditions de Dirichlet portent sur le champ de vitesse. Elles fixent la valeur de la vitesse sur la partie Γ_D du bord du domaine

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_f(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (2.8)$$

Les conditions de Neumann portent, quant à elles, sur le tenseur des contraintes $\hat{\sigma}$ qui représente la somme des contraintes visqueuses $\hat{\tau}$ et des contraintes de compression non-visqueuses créées par la pression p . Par définition

$$\hat{\sigma} = \hat{\tau} - p\mathbb{I} \quad (2.9)$$

où $\mathbb{I}$ désigne le tenseur unité, ici de dimension deux par deux puisqu'on s'intéresse à des écoulements bidimensionnels.

Si on dénote par $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ la normale extérieure au domaine, les conditions de Neumann fixent la valeur des tractions $\mathbf{t} = (t_x, t_y)$ sur la partie Γ_N du bord du domaine

$$\mathbf{t} \equiv \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}^N(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (2.10)$$

ou bien décomposé selon les axes x et y

$$t_x \equiv \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p\right)n_x + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_y = F_x^N \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (2.11)$$

$$t_y \equiv \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x + \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - p\right)n_y = F_y^N \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (2.12)$$

Pour que le problème soit bien défini, il faut qu'une et une seule condition, Dirichlet ou Neumann, soit imposée sur toutes les parties du bord du domaine

$$\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega \quad \text{et} \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset \quad (2.13)$$

2.2 Équations générales des sensibilités

Comme pour la conduction, on obtient les équations des sensibilités en dérivant celles de l'écoulement par rapport à un paramètre arbitraire a . On se place de nouveau dans une situation générale où on considère toutes les dépendances possibles. On note par $\mathbf{S}_u$ et S_p la sensibilité des champs de vitesse et de pression respectivement et par $(')$ les dérivées totales des propriétés physiques et des forces volumiques

$$\mathbf{S}_u = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a}, \quad S_p = \frac{\partial p}{\partial a}, \quad \mu' = \frac{d\mu}{da}, \quad \rho' = \frac{d\rho}{da}, \quad \mathbf{f}' = \frac{d\mathbf{f}}{da}. \quad (2.14)$$

Ainsi, les équations de continuité et de mouvement pour les sensibilités s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_u = 0 \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \rho' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{S}_u}{\partial t} + \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S}_u \\ = -\nabla S_p + \nabla \cdot \left[\mu' (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \mu (\nabla \mathbf{S}_u + \nabla \mathbf{S}_u^T) \right] + \mathbf{f}' \end{aligned} \quad (2.16)$$

La condition initiale pour les sensibilités s'obtient, elle aussi, par dérivation de celle de l'écoulement

$$\mathbf{S}_u(\mathbf{x}, t = 0) = \frac{d\mathbf{U}_0}{da}(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.17)$$

La partie la plus délicate est l'obtention des conditions aux limites pour les sensibilités. Comme nous l'avons déjà montré avec l'exemple de l'équation de conduction, ce sont les conditions aux limites qui font la différence entre un paramètre de valeur et un paramètre de forme.

2.3 Conditions limites pour les sensibilités

2.3.1 Conditions de Dirichlet

Dans le cas plus général d'un paramètre de forme, quand non seulement la vitesse, la pression et les propriétés physiques mais aussi la définition du domaine géométrique dépendent du paramètre a , on obtient les conditions aux limites en tenant compte dans les dérivées totales du déplacement de la frontière Γ_D . Nous allons détailler ici seulement le cas de la condition pour la vitesse en x ; des raisonnements analogues s'appliquent pour la condition en y .

Notre point de départ est donc l'équation (2.8) que l'on dérive par rapport à a

$$\frac{d}{da}u(\mathbf{x}, t; a) = \frac{d}{da}U_f(\mathbf{x}, t; a) \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} = \frac{dU_f}{da}(\mathbf{x}, t; a) \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (2.19)$$

En isolant à gauche le terme correspondant à la sensibilité de la vitesse, on obtient finalement pour les conditions de Dirichlet pour S_u et S_v d'un paramètre de forme

$$S_u(\mathbf{x}, t; a) = \frac{dU_f}{da}(\mathbf{x}, t; a) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (2.20)$$

$$S_v(\mathbf{x}, t; a) = \frac{dV_f}{da}(\mathbf{x}, t; a) - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (2.21)$$

Comme précédemment, les termes $\partial x_f/\partial a$ et $\partial y_f/\partial a$ correspondent au déplacement de la frontière Γ_D et les termes dU_f/da et dV_f/da , à la variation de la condition limite de l'écoulement. Remarquons encore une fois, que pour un paramètre de forme, les dérivées des vitesses sur la frontière du domaine apparaissent dans les conditions aux limites des sensibilités.

Pour un paramètre de valeur, la définition du domaine de calcul ne dépend pas du paramètre et par conséquent, les déplacements $\partial x_f/\partial a$ et $\partial y_f/\partial a$ sont nuls. La condition de Dirichlet pour un paramètre de valeur se simplifie donc à

$$S_u(\mathbf{x}, t; a) = \frac{\partial U_f}{\partial a}(\mathbf{x}, t; a) \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (2.22)$$

$$S_v(\mathbf{x}, t; a) = \frac{\partial V_f}{\partial a}(\mathbf{x}, t; a) \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (2.23)$$

2.3.2 Conditions de Neumann

Pour obtenir la condition de Neumann pour un paramètre de forme, on procède de la même manière qu'avec la condition de Dirichlet – on prend la dérivée totale de la condition de l'écoulement. Ainsi, pour la force de traction dans la direction x , on obtient à partir de (2.11)

$$\frac{d}{da} t_x(\mathbf{x}, t; a) = \frac{d}{da} F_x^N(\mathbf{x}, t; a) \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (2.24)$$

$$\frac{d}{da} \left[\left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \right) n_x + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right] = \frac{dF_x^N}{da}(\mathbf{x}, t; a) \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (2.25)$$

Écrite en détails pour le cas $\mu = \mu(\mathbf{x}, t; a)$, la dernière expression donne

$$\begin{aligned} & \left\{ 2 \left(\mu' + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu \left(\frac{\partial S_u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \right. \\ & \quad \left. - S_p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right\} n_x + \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \right) \frac{dn_x}{da} \\ & \quad + \left(\mu' + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \\ & + \mu \left\{ \frac{\partial S_u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial a} + \frac{\partial S_v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right\} n_y \\ & + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{dn_y}{da} = \frac{dF_x^N}{da}(\mathbf{x}, t; a) \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (2.26) \end{aligned}$$

Dans cette longue expression on peut isoler d'abord la sensibilité de la force de traction dans la direction x que l'on note par t'_x

$$t'_x = \left(2\mu' \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial S_u}{\partial x} - S_p\right) n_x + \mu' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) n_y + \mu \left(\frac{\partial S_u}{\partial y} + \frac{\partial S_v}{\partial x}\right) n_y \quad (2.27)$$

C'est exactement sur t'_x que doit porter la condition de Neumann qui pour un paramètre de forme s'écrit finalement

$$\begin{aligned} t'_x &= \frac{dF_x^N}{da} - \left\{ 2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right\} n_x - \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \\ &\quad - \mu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right\} n_y \\ &\quad - \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \right) \frac{dn_x}{da} - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{dn_y}{da} \quad \text{sur } \Gamma_N \end{aligned} \quad (2.28)$$

Par des raisonnements analogues, on obtient pour la sensibilité de la force de traction dans la direction y

$$t'_y = \mu' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \mu \left(\frac{\partial S_u}{\partial y} + \frac{\partial S_v}{\partial x} \right) n_x + \left(2\mu' \frac{\partial v}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial S_v}{\partial y} - S_p \right) n_y \quad (2.29)$$

et pour la condition de Neumann dans cette direction

$$\begin{aligned} t'_y &= \frac{dF_y^N}{da} - \left\{ 2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right\} n_y - \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x \\ &\quad - \mu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right\} n_x \\ &\quad - \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - p \right) \frac{dn_y}{da} - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{dn_x}{da} \quad \text{sur } \Gamma_N \end{aligned} \quad (2.30)$$

Comme dans le cas de la conduction, des dérivées secondes évaluées à la frontière apparaissent – ici il s’agit de celles des deux vitesses u et v . De plus, le gradient de la pression ainsi que celui de la viscosité, si elle est variable, également évalués à la frontière font partie de la condition limite. Ces quantités, bien que connues une fois l’écoulement résolu, sont difficiles à calculer.

Pour un paramètre de valeur, tous les termes comprenant des dérivées de la géométrie $\partial x_f/\partial a$, $\partial y_f/\partial a$, ainsi que les dérivées de la normale dn_x/da et dn_y/da , s’annulent. Dans ce cas, la condition limite de Neumann devient tout simplement la dérivée de la condition limite de l’écoulement

$$t'_x = \frac{\partial F_x^N}{\partial a}(\mathbf{x}, t; a) \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (2.31)$$

$$t'_y = \frac{\partial F_y^N}{\partial a}(\mathbf{x}, t; a) \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (2.32)$$

Il est intéressant de noter aussi que les sensibilités et l’écoulement ont toujours le même type de conditions limites. Sur les parties de la frontière où une condition de Dirichlet est imposée pour la vitesse, ce sera également une condition de Dirichlet pour les sensibilités, et de même pour les conditions de Neumann. Ceci permet d’utiliser les mêmes structures de données pour l’écoulement et les sensibilités lors de la résolution des équations.

CHAPITRE 3

MÉTHODE DE RÉOLUTION

La résolution des équations instationnaires est effectuée par un modèle d'éléments finis semi-discret. Ce chapitre présente les formulations faibles, la discrétisation spatiale et l'intégration en temps des équations de conduction, de Navier-Stokes et des sensibilités.

3.1 Méthode des éléments finis

Le but principal de ce mémoire est d'élargir le champ d'application du code d'éléments finis développé par Hétu ^[14], Ilinca ^[16] et Turgeon ^[29] pour des équations stationnaires à des problèmes instationnaires. Les étapes principales du code appliqué à une équation stationnaire sont les suivantes :

1. Création du maillage – on divise le domaine de calcul en sous-domaines de forme géométrique simple, des triangles ou des carrés en 2D, que l'on appelle des éléments;
2. Discrétisation – sur chaque élément, on approche les variables dépendantes par une combinaison linéaire de coefficients constants inconnus T_i , S_{T_i} , etc., et des fonctions d'interpolation $\phi_i^T(\mathbf{x})$, $\phi_i^{S_T}(\mathbf{x})$, etc.;
3. Résolution – on résout le système global (c'est-à-dire assemblé pour tous les éléments) d'équations algébriques obtenus de la discrétisation de la formulation faible des équations aux dérivées partielles;

4. Calcul des sensibilités – une fois la température ou l’écoulement obtenus, on procède au calcul des sensibilités, un paramètre à la fois, suivant la même procédure: discrétisation, assemblage et résolution du système global.

Lorsqu’on résout des équations instationnaires, deux possibilités s’offrent à nous. Une première approche consiste à considérer le temps comme une coordonnée supplémentaire et de travailler avec des éléments finis espace-temps, c’est-à-dire des éléments pour lesquelles les fonctions d’interpolation sont fonction des coordonnées spatiales et du temps $\phi_i = \phi_i(\mathbf{x}, t)$. Toute autre difficulté mise à part, cette voie a l’inconvénient de nous éloigner de ce qui a été fait précédemment pour les problèmes stationnaires.

C’est pourquoi dans ce mémoire nous choisissons l’autre approche, celle des éléments finis semi-discrets. Dans ce cas, les fonctions d’interpolation dépendent uniquement des coordonnées spatiales (ce sont les mêmes fonctions $\phi_i(\mathbf{x})$ que pour un problème stationnaire), et la dépendance du temps est transférée aux coefficients d’interpolation. De cette *approximation spatiale* résultent des systèmes élémentaires d’équations différentielles ordinaires pour $\dot{T}_i$, $\dot{S}_{T_i}$, etc. On introduit par la suite une *approximation temporelle*. Elle consiste à approcher les équations différentielles ordinaires par des schémas de différences finies pour obtenir un système global d’équations algébriques pour les coefficients T_i^{n+1} , $S_{T_i}^{n+1}$, etc. (au temps t^{n+1}) en fonction des coefficients aux temps précédents. Ainsi, résoudre une équation instationnaire par la méthode des éléments finis semi-discrète revient à résoudre à chaque pas de temps une équation “stationnaire” dont les inconnues sont les variables au temps t^{n+1} .

Dans les prochaines sections, nous nous penchons plus en détails sur les différentes étapes de la méthode des éléments finis semi-discrète. La section 3.2 est consacrée à la formulation variationnelle des équations de conduction, de Navier-Stokes et des

sensibilités. Dans les sections 3.3 et 3.4, nous présentons les discrétisations spatiale et temporelle des formulations faibles. Finalement, dans la dernière section, nous nous arrêtons sur d'autres points importants comme le choix d'élément fini et la convergence des schémas.

3.2 Formulation faible des équations

3.2.1 Formulation faible des équations de conduction

Le point de départ est l'équation de conduction (1.1). Pour obtenir sa formulation variationnelle, on multiplie l'équation par une fonction test $\delta T(\mathbf{x})$ et on l'intègre sur la surface du domaine Ω

$$\int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \delta T - \int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla T) \delta T - \int_{\Omega} q_s \delta T = 0. \quad (3.1)$$

En effectuant une intégration par parties du deuxième terme, on obtient la formulation variationnelle suivante

$$\int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \delta T + \int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla \delta T - \int_{\Omega} q_s \delta T + \int_{\Gamma_N} (-k \nabla T \cdot \mathbf{n}) \delta T = 0. \quad (3.2)$$

Après le même type de manipulations effectuées cette fois sur l'équation générale des sensibilités en conduction (1.8), on obtient pour sa formulation faible

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho' c_p + \rho c'_p) \frac{\partial T}{\partial t} \delta S_T + \int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial S_T}{\partial t} \delta S_T + \int_{\Omega} (k' \nabla T + k \nabla S_T) \cdot \nabla \delta S_T - \\ \int_{\Omega} q'_s \delta S_T + \int_{\Gamma_N} (-k' \nabla T \cdot \mathbf{n} - k \nabla S_T \cdot \mathbf{n}) \delta S_T = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

On remarque que

- les termes avec les dérivées temporelles sont gardés tels que dans les équations de départ;
- les intégrales de bord qui apparaissent en raison de l'intégration par parties font intervenir le flux thermique $q = -k\nabla T \cdot \mathbf{n}$ et la sensibilité du flux thermique $q' = -k'\nabla T \cdot \mathbf{n} - k\nabla S_T \cdot \mathbf{n}$, qui sont les conditions limites naturelles. Seulement l'intégrale sur la partie Γ_N de la frontière $\partial\Omega$ a été gardée puisque les fonctions test δT sont telles qu'elles s'annulent là où une condition limite de Dirichlet est imposée, $\delta T \in H_{0,\Omega}^1 = (\varphi \in H_\Omega^1 \mid \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_D)$.

3.2.2 Formulation faible de l'équation de Navier-Stokes

Pour obtenir la formulation variationnelle de l'équation de Navier-Stokes et de la continuité, on suit la même démarche. On note les fonctions test pour la vitesse par $\delta \mathbf{u} = (\delta u, \delta v)$, et celles pour la pression par δp . L'intégrale des équations (2.1) et (2.2) sur la surface du domaine donne

$$\int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \delta \mathbf{u} - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \hat{\tau} - \nabla p) \cdot \delta \mathbf{u} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} = 0 \quad (3.4)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta p = 0. \quad (3.5)$$

Dans la première équation, le terme faisant intervenir la gradient de la pression et la divergence du tenseur des contraintes visqueuses peut être intégré par parties. Dans le résultat, l'intégrale de bord de la condition naturelle apparaît

$$\int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \delta \mathbf{u} - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \delta \mathbf{u}) +$$

$$\int_{\Omega} \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) : \frac{1}{2} (\nabla \delta \mathbf{u} + \nabla \delta \mathbf{u}^T) - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} - \int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{u} \cdot (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) = 0. \quad (3.6)$$

Écrites pour le cas bidimensionnel, les formulations faibles (3.5) et (3.6) se résument à trois équations – deux pour la conservation du mouvement (en x et en y) et l'équation de continuité

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial t} \delta u + \int_{\Omega} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta u - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta u}{\partial x} - \\ & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \left\{ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right\} - \int_{\Omega} f_x \delta u - \int_{\Gamma_N} t_x \delta u = 0; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \frac{\partial v}{\partial t} \delta v + \int_{\Omega} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta v - \int_{\Omega} p \frac{\partial \delta v}{\partial x} - \\ & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \left\{ 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right\} - \int_{\Omega} f_y \delta v - \int_{\Gamma_N} t_y \delta v = 0; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta p = 0. \quad (3.9)$$

Des équations analogues peuvent être obtenues pour la formulation variationnelle des équations générales des sensibilités

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho' \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u \right) \delta S_u + \int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial S_u}{\partial t} + \mathbf{S}_u \cdot \nabla u + \mathbf{u} \cdot \nabla S_u \right) \delta S_u + \\ & \int_{\Omega} S_p \frac{\partial \delta S_u}{\partial x} - \int_{\Omega} \mu' \left\{ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta S_u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta S_u}{\partial y} \right\} + \\ & \int_{\Omega} \mu \left\{ 2 \frac{\partial S_u}{\partial x} \frac{\partial \delta S_u}{\partial x} + \left(\frac{\partial S_u}{\partial y} + \frac{\partial S_v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta S_u}{\partial y} \right\} - \int_{\Omega} f'_x \delta S_u - \int_{\Gamma_N} t'_x \delta S_u = 0; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho' \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v \right) \delta S_v + \int_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial S_v}{\partial t} + \mathbf{S}_u \cdot \nabla v + \mathbf{u} \cdot \nabla S_v \right) \delta S_v + \\ & \int_{\Omega} S_p \frac{\partial \delta S_v}{\partial y} - \int_{\Omega} \mu' \left\{ 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \delta S_v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta S_v}{\partial x} \right\} + \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\int_{\Omega} \mu \left\{ 2 \frac{\partial S_v}{\partial y} \frac{\partial \delta S_v}{\partial y} + \left(\frac{\partial S_u}{\partial y} + \frac{\partial S_v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta S_v}{\partial x} \right\} - \int_{\Omega} f'_y \delta S_v - \int_{\Gamma_N} t'_y \delta S_v = 0;$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_u}{\partial x} + \frac{\partial S_v}{\partial y} \right) \delta S_p = 0. \quad (3.12)$$

3.3 Discrétisation spatiale

Comme déjà mentionné, les variables u , v , p , T et leurs sensibilités sont approchées par des combinaisons linéaires de coefficients dépendant du temps et de fonctions d'interpolation ϕ_i . Dans la méthode de Galerkin, les fonctions d'interpolation sont également les fonctions test utilisées dans les formulations faibles. Ainsi, on a pour les variables dépendantes

$$\alpha(\mathbf{x}, t) \sim \alpha_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N^\alpha} \alpha_i(t) \phi_i^\alpha(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \delta \alpha_i = \phi_i^\alpha(\mathbf{x}), \quad (3.13)$$

où $\alpha = u, v, p, T, S_u, S_v, S_p, S_T$. Le nombre de fonctions d'interpolation pour chacune des variables est noté par N^α . L'indice h indique l'approximation éléments finis. En général, on permet d'avoir des fonctions d'interpolation différentes pour une variable et sa sensibilité. En pratique, on utilise les mêmes pour simplicité.

Après ces précisions, on peut procéder à la discrétisation spatiale des formulations faibles, le premier niveau de discrétisation dans la méthode des éléments finis semi-discrète. Pour cela, il suffit de remplacer les variables dépendantes par leurs approximations éléments finis, et les fonctions test, par les fonctions d'interpolation.

3.3.1 Équation de conduction

La discrétisation de la formulation faible (3.2) de l'équation de conduction conduit au système suivant

$$\mathcal{M}(T) \dot{T} + \mathcal{K}(T) T = \mathcal{Q}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \mathcal{M}_{ij} &= \int_{\Omega} \rho c_p \phi_i^T \phi_j^T, \quad \mathcal{K}_{ij} = \int_{\Omega} k \nabla \phi_i^T \cdot \nabla \phi_j^T, \\ \mathcal{Q}_i &= \int_{\Omega} q_s \phi_i^T - \int_{\Gamma_N} q_a \phi_i^T. \end{aligned}$$

Ici, T et $\dot{T}$ sont les vecteurs $\{T_j\}$ et $\{\dot{T}_j\}$ $j = 1, \dots, N^T$, composés des valeurs nodales de T et de $\partial T / \partial t$ respectivement. La matrice $\mathcal{M}$, multipliant les dérivées temporelles $\dot{T}$, est appelée matrice de masse et la matrice $\mathcal{K}$ est celle provenant du terme de diffusion. Les deux peuvent dépendre de la température (si les propriétés thermiques sont variables) auquel cas le système est non linéaire. Finalement, le vecteur de droite $\mathcal{Q}$ regroupe l'intégrale du terme source et des conditions de Neumann (sur la partie Γ_N de la frontière où elles s'appliquent).

3.3.2 Équation des sensibilités en conduction

En discrétisant la formulation faible (3.3) des sensibilités en conduction, on aboutit à un système de structure semblable

$$\mathcal{M}(T) \dot{S}_T + \mathcal{K}(T) S_T + \mathcal{M}'(T, S_T) \dot{T} + \mathcal{K}'(T, S_T) T = \mathcal{Q}', \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \mathcal{M}_{ij} &= \int_{\Omega} \rho c_p \phi_i^{S_T} \phi_j^{S_T}, \quad \mathcal{K}_{ij} = \int_{\Omega} k \nabla \phi_i^{S_T} \cdot \nabla \phi_j^{S_T}, \\ \mathcal{M}'_{ij} &= \int_{\Omega} (\rho' c_p + \rho c'_p) \phi_i^{S_T} \phi_j^T, \quad \mathcal{K}'_{ij} = \int_{\Omega} k' \nabla \phi_i^{S_T} \cdot \nabla \phi_j^T, \end{aligned}$$

$$\mathcal{Q}'_i = \int_{\Omega} q'_s \phi_i^{S_T} - \int_{\Gamma_N} \frac{dq_a}{da} \phi_i^{S_T}.$$

Dans l'équation (3.15), les dépendances des différentes matrices de T et S_T sont écrites explicitement afin de souligner une caractéristique importante des équations des sensibilités : ce sont *toujours* des équations *linéaires*. La raison en est simple. Même si le problème de départ est non linéaire, à cause de la règle de différentiation d'un produit $((ab)' = a'b + ab')$, on se retrouve en fin de compte avec un problème linéaire pour les sensibilités.

3.3.3 Équations de Navier-Stokes

Pour les équations de Navier-Stokes, on discrétise les formulations faibles (3.7)-(3.9) et on écrit le résultat sous forme matricielle, chaque ligne correspondant à une des équations (mouvement en x , mouvement en y , continuité)

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{11} + \mathcal{N}_1 & \mathcal{K}_{12} & \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{K}_{21} & \mathcal{K}_{22} + \mathcal{N}_2 & \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_1^T & \mathcal{C}_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad (\mathcal{M}_1)_{ij} &= \int_{\Omega} \rho \phi_i^u \phi_j^u, \quad (\mathcal{M}_2)_{ij} = \int_{\Omega} \rho \phi_i^v \phi_j^v, \\ (\mathcal{K}_{12})_{ij} &= (\mathcal{K}_{21})_{ji} = \int_{\Omega} \mu \frac{\partial \phi_i^u}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^v}{\partial x}, \\ (\mathcal{K}_{11})_{ij} &= \int_{\Omega} 2\mu \frac{\partial \phi_i^u}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^u}{\partial x} + \mu \frac{\partial \phi_i^u}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^u}{\partial y}, \\ (\mathcal{K}_{22})_{ij} &= \int_{\Omega} 2\mu \frac{\partial \phi_i^v}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^v}{\partial y} + \mu \frac{\partial \phi_i^v}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^v}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{N}_1)_{ij} &= \int_{\Omega} \rho \left(\sum_{k=1}^{N^u} u_k \phi_k^u \right) \frac{\partial \phi_i^u}{\partial x} \phi_j^u + \rho \left(\sum_{k=1}^{N^v} v_k \phi_k^v \right) \frac{\partial \phi_i^u}{\partial y} \phi_j^u, \\
(\mathcal{N}_2)_{ij} &= \int_{\Omega} \rho \left(\sum_{k=1}^{N^u} u_k \phi_k^u \right) \frac{\partial \phi_i^v}{\partial x} \phi_j^v + \rho \left(\sum_{k=1}^{N^v} v_k \phi_k^v \right) \frac{\partial \phi_i^v}{\partial y} \phi_j^v, \\
(\mathcal{C}_1)_i &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i^u}{\partial x} \phi_j^p, \quad (\mathcal{C}_2)_i = - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i^v}{\partial y} \phi_j^p, \\
(\mathcal{F}_1)_i &= \int_{\Omega} f_x \phi_i^u - \int_{\Gamma_N} F_x^N \phi_i^u, \quad (\mathcal{F}_2)_i = \int_{\Omega} f_y \phi_i^v - \int_{\Gamma_N} F_y^N \phi_i^v.
\end{aligned}$$

Ici encore, u, v et p sont les vecteurs composés des valeurs nodales des deux vitesses et de la pression, et $\dot{u}, \dot{v}$ et $\dot{p}$, leur dérivées temporelles.

L'équation de Navier-Stokes nécessite un peu d'attention. D'abord, on note que c'est une équation non linéaire à cause des termes de convection $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$. Si de plus la viscosité est variable, les termes de diffusion $\mathcal{K}_{ij}$ deviennent non linéaires également.

Deuxièmement, il faut mentionner la forme spéciale de la matrice de masse. Les coefficients nuls devant $\dot{p}$ reflètent le fait que la pression n'apparaît pas explicitement dans l'équation de continuité. Il en résulte une matrice de masse singulière qui rend impossible l'utilisation de schémas explicites d'intégration en temps (au moins dans cette formulation du problème).

On peut réécrire le système d'équations obtenu par la discrétisation de la formulation faible des équations de Navier-Stokes de façon similaire à celui obtenu par la discrétisation de l'équation de conduction

$$\mathcal{M} \dot{U} + (\mathcal{K} + \mathcal{N}) U - \mathcal{C} P = \mathcal{F} \quad (3.16)$$

$$-\mathcal{C}^T U = 0, \quad (3.17)$$

où le vecteur U contient les valeurs nodales des deux vitesses et P , celles de la pression. La définition par bloc des matrices $\mathcal{M}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{N}$ et des vecteurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ est celle donnée plus haut.

3.3.4 Équations des sensibilités pour Navier-Stokes

Pour les équations des sensibilités, on va se contenter d'écrire ici uniquement la forme abrégée de leur discrétisation spatiale à la façon de celle de l'écoulement (pour voir l'écriture matricielle ainsi que la définition détaillée de tous les termes, se référer à l'annexe I)

$$\mathcal{M} \dot{S}_U + (\mathcal{K} + \tilde{\mathcal{N}}) S_U - \mathcal{C} S_P + \mathcal{M}' \dot{U} + (\mathcal{K}' + \mathcal{N}') U = \mathcal{F}' \quad (3.18)$$

$$-\mathcal{C}^T S_U = 0 \quad (3.19)$$

La définition des différentes matrices est tout à fait analogue à celle des matrices de l'écoulement; l'utilisation du prime est selon la même logique que dans le cas des sensibilités en conduction. Notons que la matrice provenant du terme de convection pour les sensibilités est linéaire – la vitesse de convection pour les sensibilité est $\mathbf{u}$ et non $\mathbf{S}_u$ (voir les équations (3.10) et (3.11)). Pour souligner cela, nous l'avons notée par $\tilde{\mathcal{N}}$ au lieu de $\mathcal{N}$. Quant à la matrice de masse $\mathcal{M}$, elle est de nouveau singulière et pose le même type de difficultés numériques que dans le cas des équations de Navier-Stokes.

3.4 Intégration en temps

Le résultat des discrétisations spatiales présentées à la section précédente sont des systèmes d'équations différentielles ordinaires pour $\dot{T}$, $\dot{S}_T$, $\dot{U}$ et $\dot{S}_U$. Afin

d'obtenir des équations algébriques, on effectue une approximation temporelle par des schémas de différences finies. Dans le présent travail, nous avons choisi d'utiliser le θ -schéma dont la définition est

$$\dot{y} = f(y) \quad \longrightarrow \quad \frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = \theta f^{n+1} + (1 - \theta)f^n \quad (3.20)$$

Selon les valeurs de θ , on obtient les schémas suivants

- $\theta = 0$: Euler explicite,
- $\theta = 1$: Euler implicite,
- $\theta = 1/2$: Règle du trapèze (Crank-Nicholson).

Les schémas de Euler explicite et implicite sont de premier ordre, et celui de Crank-Nicholson, de deuxième ordre. Ce sont tous des schémas à un pas - c'est-à-dire que pour calculer la solution à l'itération en temps $n + 1$, on a besoin de celle au pas de temps précédent. En ce qui concerne la stabilité, le schéma d'Euler explicite est conditionnellement stable, tandis que les schémas d'Euler implicite et de Crank-Nicholson sont inconditionnellement stables.

3.4.1 Intégration des équations de conduction

L'équation de conduction (3.14) et l'équation pour les sensibilités (3.15) forment un système d'équations ordinaires différentielles pour $\dot{T}$ et $\dot{S}_T$, que l'on résout en deux étapes.

D'abord on intègre en temps l'équation de conduction (3.14) (qui ne dépend pas

des sensibilités)

$$\mathcal{M} \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \theta [-\mathcal{K}^{n+1} T^{n+1} + \mathcal{Q}^{n+1}] + (1 - \theta) [-\mathcal{K}^n T^n + \mathcal{Q}^n] \quad (3.21)$$

Ici, la température au temps précédent est connue. On obtient donc un système d'équations algébriques pour T^{n+1} ($Ax = b$) qui est résolu de la même manière que le système obtenu pour une équation stationnaire. La seule différence est que la matrice de gauche (A) et le membre de droite (b) ne sont pas identiques pour les deux cas.

Une fois la température T^{n+1} obtenue, on peut intégrer l'équation des sensibilités (3.15)

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \frac{S_T^{n+1} - S_T^n}{\Delta t} + \mathcal{M}' \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \\ \theta [-\mathcal{K}^{n+1} S_T^{n+1} - \mathcal{K}'^{n+1} T^{n+1} + \mathcal{Q}'^{n+1}] + (1 - \theta) [-\mathcal{K}^n S_T^n - \mathcal{K}'^n T^n + \mathcal{Q}'^n] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Pour l'équation de conduction, on n'a pas de limitation quant à la valeur de θ à utiliser ($\theta \in [0, 1]$).

3.4.2 Intégration des équations de Navier-Stokes

Pour les équations de Navier-Stokes on procède de la même manière. On intègre premièrement les équations pour l'écoulement (3.16) et (3.17)

- par le schéma d'Euler implicite:

$$\mathcal{M} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = -(\mathcal{K}^{n+1} + \mathcal{N}^{n+1}) U^{n+1} + \mathcal{C}P^{n+1} + \mathcal{F}^{n+1} \quad (3.23)$$

$$-\mathcal{C}^T U^{n+1} = 0 \quad (3.24)$$

- par le schéma de Crank-Nicholson:

$$\mathcal{M} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2} (\mathcal{K}^n + \mathcal{N}^n) U^n - \frac{1}{2} (\mathcal{K}^{n+1} + \mathcal{N}^{n+1}) U^{n+1} + \mathcal{C} \frac{1}{2} (P^n + P^{n+1}) + \frac{1}{2} (\mathcal{F}^n + \mathcal{F}^{n+1}) \quad (3.25)$$

$$-\mathcal{C}^T \frac{1}{2} (U^n + U^{n+1}) = 0 \quad (3.26)$$

Les systèmes algébriques obtenus pour U^{n+1} et P^{n+1} sont résolus de la même manière que pour un cas stationnaire.

Une fois les variables de l'écoulement obtenues, on intègre de façon analogue les équations des sensibilités (3.18) et (3.19) et on résoud le système algébrique résultant.

3.5 Détails d'implantation

Dans les sections précédentes, nous avons pour but de montrer comment la résolution d'une équation instationnaire par la méthode des éléments finis semi-discrète se ramène à la résolution à chaque pas de temps d'une équation "stationnaire". Le gros du travail effectué dans le cadre de ce mémoire consistait donc à modifier le code stationnaire existant de façon qu'une boucle de temps puisse être insérée et que les équations instationnaires puissent être insérées. La résolution à l'intérieur de chaque pas de temps se fait de la même manière que précédemment. Le système algébrique, écrit sous forme résiduelle, est résolu par une méthode itérative (substitution successive ou de Newton), ceci s'appliquant à l'écoulement (ou à la température) et aux sensibilités. Pour la pression, une formulation en lagrangien augmenté ^[22] est utilisée. Des changements ont été apportés pour que le code puisse traiter des conditions limites et des termes sources dépendant du temps.

3.5.1 Choix d'élément fini

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous sommes restreint à utiliser un seul type d'élément, l'élément de Crouzeix-Raviart, appelé encore $P_2^+P_{-1}$ [4, 9]. C'est un élément avec des interpolants quadratiques pour la température, quadratiques enrichis d'une bulle cubique pour la vitesse, et linéaires discontinues pour la pression. Pour les équations de Navier-Stokes, cela donne au total 17 degrés de liberté par élément. Cependant, il est possible de diminuer ce nombre à 13 (12, si la formulation en lagrangien augmenté est utilisée pour la pression) en éliminant au niveau élémentaire quatre des degrés de liberté : les deux vitesses u et v associées au noeud central ainsi que les gradients de la pression [5]. Ceci permet de réduire considérablement la taille du système global à résoudre, et par conséquent le temps de calcul.

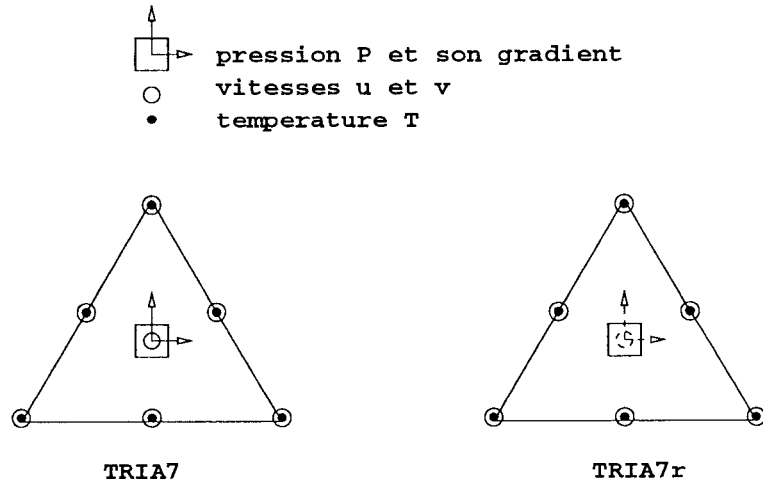


Figure 3.1 Éléments de Crouzeix-Raviart. À droite sont montrés en pointillé les degrés de liberté éliminés au niveau élémentaire

3.5.2 Normes et erreur

La théorie des éléments finis nous dit que, pour un élément avec des interpolants quadratiques, l'ordre de convergence est de deux. Cela signifie que, asymptotiquement lorsque h tend vers 0, l'erreur se comporte comme

$$\|e\| \approx Ch^2. \quad (3.27)$$

Pour la vitesse et la température, qui sont discrétisés par des interpolants quadratiques, on utilise la semi-norme H^1 définie au niveau des dérivées premières, qui elles, sont linéaires et discontinues entre les éléments. Les normes de l'erreur exacte, c'est-à-dire la différence entre la solution exacte et la solution obtenue par la méthode d'éléments finis, sont définies par

$$\|e^u\| = \left(\int_{\Omega} [(\nabla \mathbf{u}_h - \nabla \mathbf{u}_{ex}) + (\nabla \mathbf{u}_h - \nabla \mathbf{u}_{ex})^T] : [(\nabla \mathbf{u}_h - \nabla \mathbf{u}_{ex}) + (\nabla \mathbf{u}_h - \nabla \mathbf{u}_{ex})^T] d\Omega \right)^{1/2} \quad (3.28)$$

$$\|e^T\| = \left(\int_{\Omega} (\nabla T_h - \nabla T_{ex}) \cdot (\nabla T_h - \nabla T_{ex}) d\Omega \right)^{1/2}. \quad (3.29)$$

Pour la pression, qui est linéaire et discontinue entre les éléments, la norme de l'erreur est définie directement sur p (au lieu de sur ∇p); c'est la norme L^2 usuelle

$$\|e^p\| = \left(\int_{\Omega} (p_h - p_{ex})^2 d\Omega \right)^{1/2} \quad (3.30)$$

Des définitions analogues s'appliquent pour les normes de l'erreur en sensibilité.

L'erreur décrite jusqu'ici provient de la discrétisation spatiale. Pour des équations instationnaires, une erreur supplémentaire due à la discrétisation temporelle

s'ajoute

$$\|e(h, \Delta t)\| = C_h h^2 + C_t \Delta t^p. \quad (3.31)$$

où $p = 1$ pour les schémas de premier ordre (Euler implicite ou explicite), et $p = 2$ pour les schémas de deuxième ordre (Crank-Nicholson).

Dans le prochain chapitre, on va comparer ce taux de convergence théorique avec le taux réellement observé.

CHAPITRE 4

VÉRIFICATION

Ce chapitre est consacré à la vérification de l'implantation de la méthode de résolution présentée jusqu'ici. Dans ce but, nous utilisons la méthode des solutions manufacturées. Nous effectuons une étude de raffinement de maillage et de pas de temps et une comparaison entre des schémas d'intégration en temps de premier et de deuxième ordre. Une attention particulière est prêtée à l'aspect instationnaire des équations.

4.1 Méthode des solutions manufacturées

La méthode des solutions manufacturées (MSM) (voir Roache ^[25]) sert à vérifier différents aspects de l'implantation d'un code – la formulation des équations discrétisées, la précision de la procédure de résolution, ainsi que les instructions fournies par l'utilisateur.

L'idée de la MSM est la suivante. On choisit d'abord une solution analytique et on fait de sorte que cette solution satisfasse l'équation à laquelle on s'intéresse. Cela est toujours possible en ajoutant un terme source approprié. Pour que la méthode soit vraiment utile il faut que la solution choisie soit suffisamment riche afin de faire participer le plus de termes possible de l'équation. Ensuite, en faisant une étude de raffinement du maillage, on s'attend à observer une erreur exacte qui diminue et cela avec un taux proche de celui prédit par des considérations théoriques. Tout décalage de cette situation est signe de problème dans l'implantation numérique

et/ou dans la façon dont on se sert du code. La MSM fournit donc une démarche générale qui permet de nous assurer que le code résoud correctement et avec la précision attendue les équations implantées. Elle représente une étape préliminaire et nécessaire avant de s'attaquer à des problèmes réels.

Le solveur utilisé pour nos calculs, et plus particulièrement sa partie dédiée à la résolution des équations stationnaires (de conduction ou de Navier-Stokes), a été soumis à maintes reprises au test des solutions manufacturées [16, 14, 23, 29]. On peut affirmer avec assez grande confiance que la partie spatiale (c'est-à-dire les équations stationnaires) est implantée et résolue correctement. On observe en régime stationnaire un taux de convergence de l'erreur de deux, ce qui est la valeur théorique lorsque des éléments quadratiques et les normes d'erreur décrites dans la section précédente sont utilisés

$$\|e(h)\| = C_h h^2. \quad (4.1)$$

Notre but ici est d'étudier le comportement du solveur lorsque des équations instationnaires sont résolues. Nous présentons d'abord deux solutions manufacturées instationnaires pour l'équation de conduction et de Navier-Stokes respectivement. Ceci nous permet en même temps de montrer la façon de construire des solutions manufacturées. Dans la suite, nous utilisons ces problèmes afin de vérifier si les équations instationnaires sont résolues correctement et d'étudier l'ordre de précision.

4.2 Description des problèmes de vérification

4.2.1 Problème de vérification pour la conduction transitoire

Afin de vérifier notre solveur en ce qui concerne l'implantation de l'équation de conduction transitoire, nous avons construit une solution analytique bidimensionnelle et instationnaire, définie dans un domaine carré de taille un par un

$$T(x, y, t) = \exp \left[-A \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right) \right] \quad (4.2)$$

$$x_0 = R \sin(2\pi t) + x_c \quad (4.3)$$

$$y_0 = R \cos(2\pi t) + y_c \quad (4.4)$$

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1], \quad t \in [0, 0.25].$$

Les propriétés physiques sont constantes : $\rho = 1$, $c_p = 1$, $k = 1$. Les valeurs des divers paramètres participant dans la définition de la température sont

$$A = 10, \quad R = 0.3, \quad x_c = y_c = 0.5 \quad (4.5)$$

La figure 4.1 montre les isothermes de cette solution au temps initial et au temps final.

Pour que l'équation de conduction transitoire soit satisfaite, un terme source calculé à partir de la solution analytique est ajouté :

$$q(x, y, t) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T \quad (4.6)$$

La solution analytique évaluée au temps $t = 0$ est imposée comme condition ini-

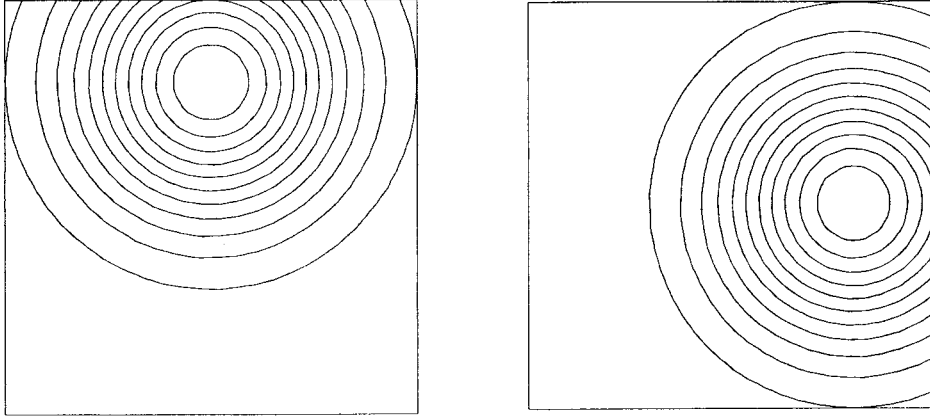


Figure 4.1 Problème de vérification pour la conduction : isothermes pour la solution au temps initial $t = 0$ (à gauche) et au temps final $t = 0.25$ (à droite)

tiale. En ce qui concerne les conditions limites, n'importe quelle combinaison de conditions de Dirichlet et de Neumann peut être appliquée.

Pour les sensibilités, on s'intéresse à deux paramètres de valeur, R et A . Les solutions analytiques, les termes sources ainsi que les conditions limites et initiales pour ces sensibilités sont calculés en dérivant ceux de la température par rapport aux paramètres.

4.2.2 Problème de vérification pour les écoulements transitoires

Le cas de vérification choisi pour tester l'implantation de l'équation de Navier-Stokes transitoire est inspiré du modèle de Stommel pour un océan rectangulaire^[31]. C'est une solution bidimensionnelle dans le plan xy . Les expressions analytiques pour le champ de vitesse (u, v) sont données ci-dessous

$$u(x, y) = \frac{F}{R} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \left[C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} - 1 \right] \quad (4.7)$$

$$v(x, y) = -\frac{b}{\pi} \frac{F}{R} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \left[C_1 k_1 e^{k_1 x} + C_2 k_2 e^{k_2 x} \right], \quad (4.8)$$

avec

$$k_{1,2} = -\frac{D\beta}{2R} \pm \sqrt{\left(\frac{D\beta}{2R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}, \quad (4.9)$$

et

$$C_1 = \frac{1 - e^{k_2\lambda}}{e^{k_1\lambda} - e^{k_2\lambda}}, \quad C_2 = \frac{e^{k_1\lambda} - 1}{e^{k_1\lambda} - e^{k_2\lambda}}. \quad (4.10)$$

La signification ainsi que les valeurs des divers paramètres sont présentées dans le tableau 4.1. Pour des raisons de commodité de calcul et de visualisation, les valeurs des constantes ont été adimensionnalisées avec comme échelle de longueur $L^* = b = 2\pi \times 10^6 m$ et échelle de temps $T^* = 1/\beta L^*$.

Tableau 4.1 Définition des paramètres pour le modèle d'océan

Paramètres	dimensionnels	adimensionnels
latitude, b	$2\pi \times 10^6 m$	1.00
longitude, λ	$10^7 m$	1.59
profondeur, D	$200 m$	3.1831×10^{-5}
force de vent, F	$0.3 \times 10^{-5} m^2 s^{-2}$	1.9249×10^{-11}
coefficient de friction, R	$0.6 \times 10^{-3} m s^{-1}$	1.5198×10^{-6}
effet de Coriolis, β	$10^{-11} m^{-1} s^{-1}$	1.00

La figure 4.2 montre les lignes de courant de la solution dans deux situations différentes. À gauche, une solution symétrique obtenue avec $\beta = 0$ correspondant à un océan avec rotation uniforme. À droite, une solution asymétrique obtenue avec $\beta \neq 0$ pour un océan subissant une rotation non uniforme. Dans ce cas, une concentration des lignes de courant vers l'ouest est observée, phénomène à l'origine des courants marins comme le Gulf Stream et Kuroshio (près du Japon).

Dans le modèle original, il s'agit d'une solution stationnaire. Ici, on a besoin d'une solution instationnaire afin de vérifier la partie transitoire de notre solveur. On a choisi donc de prendre une force de vent dépendante du temps plutôt que constante

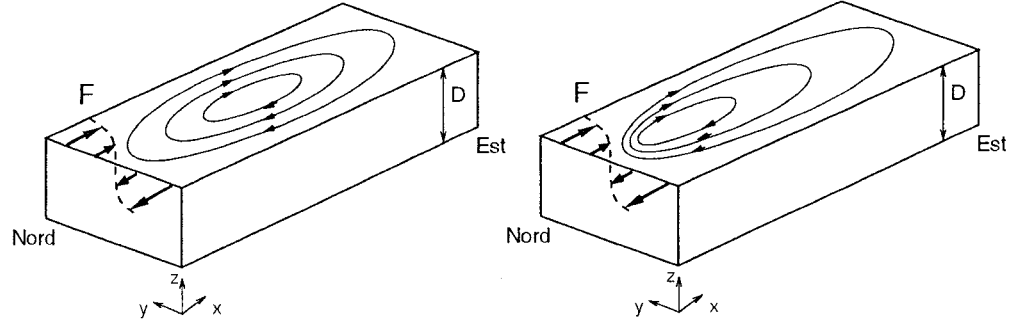


Figure 4.2 Modèle d'océan : lignes de courant pour $\beta = 0$ à gauche, et pour $\beta \neq 0$ à droite. La ligne en pointillée montre la force de vent F

que l'on note dans la suite $\mathcal{F}$ (à la place de F)

$$\mathcal{F} = F \sin(\pi t), \quad t \in [0, 0.25]. \quad (4.11)$$

Puisque la pression n'est pas fixée par le modèle, nous l'avons choisie de façon à pouvoir imposer des conditions limites libres ($F_y^N = 0$) sur les côtés nord et sud du domaine (voir l'équation (2.12))

$$p(x, y) = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -2 \frac{\mathcal{F}}{R} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \left[C_1 k_1 e^{k_1 x} + C_2 k_2 e^{k_2 x} \right]. \quad (4.12)$$

Finalement, puisque le champ de vitesse choisi est à divergence nulle, il ne reste qu'à déterminer des termes sources tels que les équations de Navier-Stokes stationnaires soient satisfaites (avec $\rho = \mu = 1$)

$$f_x(x, y, t) = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta u \quad (4.13)$$

$$f_y(x, y, t) = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \Delta v. \quad (4.14)$$

En ce qui concerne les sensibilités, on s'intéresse à deux paramètres : β , l'effet de Coriolis et R , le coefficient de friction. Ce sont des paramètres de valeur. Les solutions analytiques ainsi que les termes sources et les conditions limites pour l'équation des sensibilités pour ces deux paramètres sont obtenus par simple différentiation de la solution et des termes sources de l'écoulement. Le domaine de calcul et les conditions aux frontières imposées (écoulement et sensibilités) sont présentés à la figure 4.3.

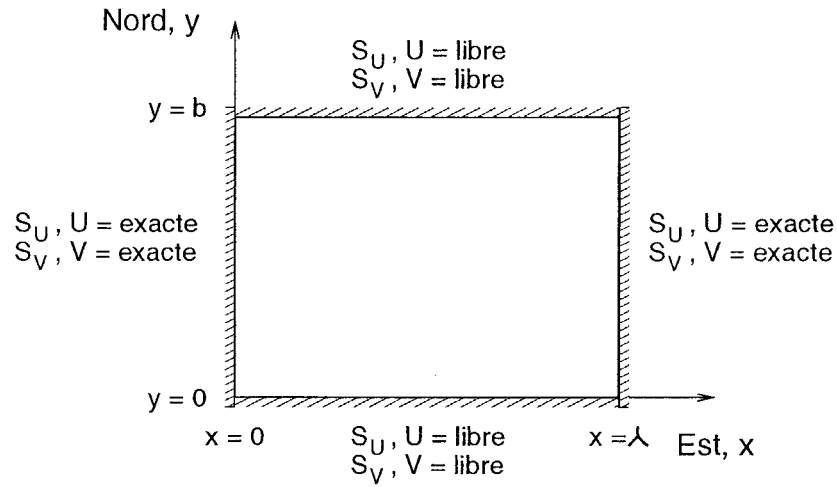


Figure 4.3 Domaine de calcul et conditions limites pour le problème de vérification pour les équations de Navier-Stokes

4.3 Erreurs et convergence – un premier aperçu

Une première idée consiste à faire varier les discrétisations spatiale et temporelle et à observer le comportement de l'erreur exacte. Nous avons donc effectué une série de simulations sur un certain nombre de maillages de plus en plus fins avec un pas de temps fixe. Ensuite, nous avons répété cette série de simulations sur la même famille de maillages en variant le pas de temps.

Les figures 4.4 et 4.5 présentent les résultats de tels calculs dans le cas du modèle d'océan avec $\beta = 0$ ¹. Nous avons choisi quatre maillages, notés $M0$, $M1$, $M2$ et $M3$, dont $M0$ est le plus grossier et $M3$, le plus fin; et cinq pas de temps de plus en plus petits. L'erreur exacte pour la vitesse a été évaluée au temps final $t = 0.25$. Pour l'intégration en temps, un schéma de premier ordre (Euler implicite) et un schéma de deuxième ordre (Crank-Nicholson) ont été utilisés.

À première vue, les résultats semblent non concluants. Sur les quatre graphiques on voit souvent des trajectoires d'erreur presque horizontales. Une erreur exacte qui ne diminue pas fait penser que la solution obtenue par le solveur n'est pas correcte. En réalité, une analyse plus attentive montre que le comportement observé est tout à fait normal étant donné que l'on résout des équations instationnaires. Dans ce cas, l'erreur exacte calculée à un temps donné dépend non seulement de la finesse du maillage, mais également du pas de temps et de l'ordre du schéma d'intégration en temps utilisés

$$\|e(h, \Delta t)\| = C_h h^2 + C_t \Delta t^p, \quad (4.15)$$

où $p = 1$ pour un schéma de premier ordre (Euler implicite), et $p = 2$ pour un schéma de deuxième ordre (Crank-Nicholson). C'est exactement le jeu entre la partie spatiale et temporelle de l'erreur qui explique le comportement observé sur les graphiques. Voyons cela de plus près.

La figure 4.4 montre le tracé de la norme de l'erreur en fonction du nombre de noeuds pour les différents pas de temps. On observe que pour les grands pas de temps, l'erreur exacte ne diminue pas (ou seulement légèrement) quand on raffine le maillage. Plus le pas de temps est petit, plus la pente de la trajectoire de l'erreur se rapproche de un, sa valeur théorique². Ce comportement est en accord

¹Des résultats similaires ont été obtenus pour le problème de conduction.

²Étant donné que la taille des éléments est proportionnelle (approximativement) à l'inverse de la racine carrée du nombre de noeuds, une pente de deux lorsque l'erreur est tracée en fonction

complet avec l'expression pour l'erreur totale (4.15) – quand on raffine le maillage en gardant le même pas de temps, la partie spatiale de l'erreur diminue, tandis que la partie temporelle reste inchangée et devient éventuellement dominante. On remarque également que pour le schéma plus précis de Crank-Nicholson, la pente spatiale de un est retrouvée plus vite ($\Delta t \leq 0.025$) que lorsque l'on utilise le schéma de premier ordre ($\Delta t = 0.001$).

La figure 4.5 contient de l'information complémentaire à la figure 4.4. Elle présente la trajectoire de la norme de l'erreur en fonction du nombre de pas de temps. On remarque que la pente temporelle de un pour le schéma d'Euler implicite et de deux, pour Crank-Nicholson est observée seulement pour les maillages les plus fins ($M2$ et $M3$) et pour les pas de temps les plus grands (début des courbes). D'après l'expression (4.15), c'est exactement dans ces conditions que le comportement de l'erreur est dominé par sa partie temporelle. Lorsque le pas de temps diminue ou le maillage est grossier, les courbes deviennent plates – dans ce cas, c'est la partie spatiale de l'erreur qui prend le dessus. Cette tendance qu'ont les trajectoires d'erreur à être horizontales est beaucoup plus claire lorsque le schéma en temps de Crank-Nicholson, plus précis, est utilisé.

La série de simulations présentée jusqu'ici donne des résultats satisfaisants et encourageants quant au comportement du solveur mais ne nous permet pas de conclure de façon décisive que l'ordre de convergence observé correspond aux attentes théoriques. D'autres tests sont effectués à la section suivante.

de la taille des éléments est équivalente à une pente de moins un si c'est le nombre de noeuds qui est pris comme argument.

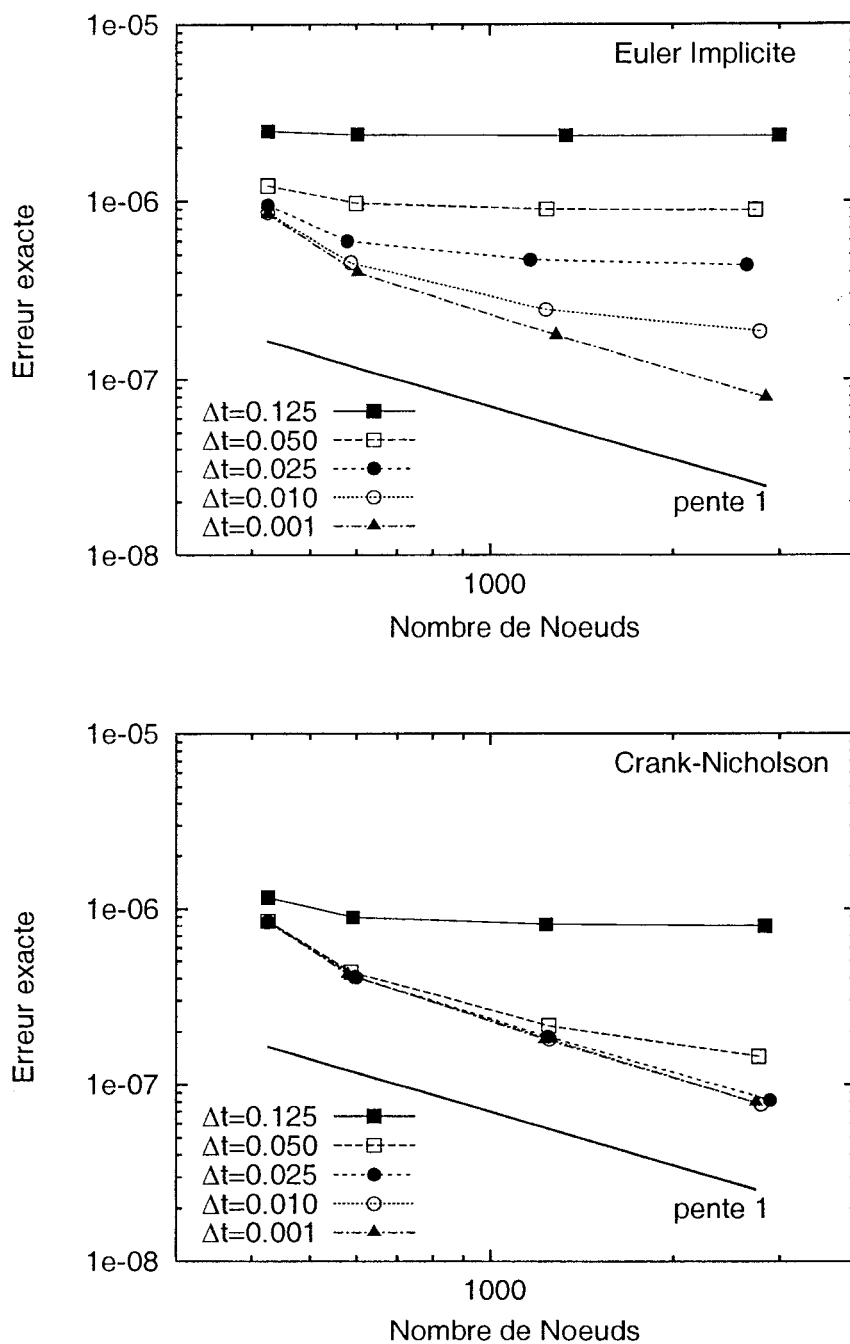


Figure 4.4 Problème de vérification pour Navier-Stokes : norme de l'erreur en fonction du nombre de noeuds. La courbe de pente un correspond au taux de convergence théorique. En haut, résultats avec un schéma en temps de premier ordre; en bas, schéma en temps de deuxième ordre

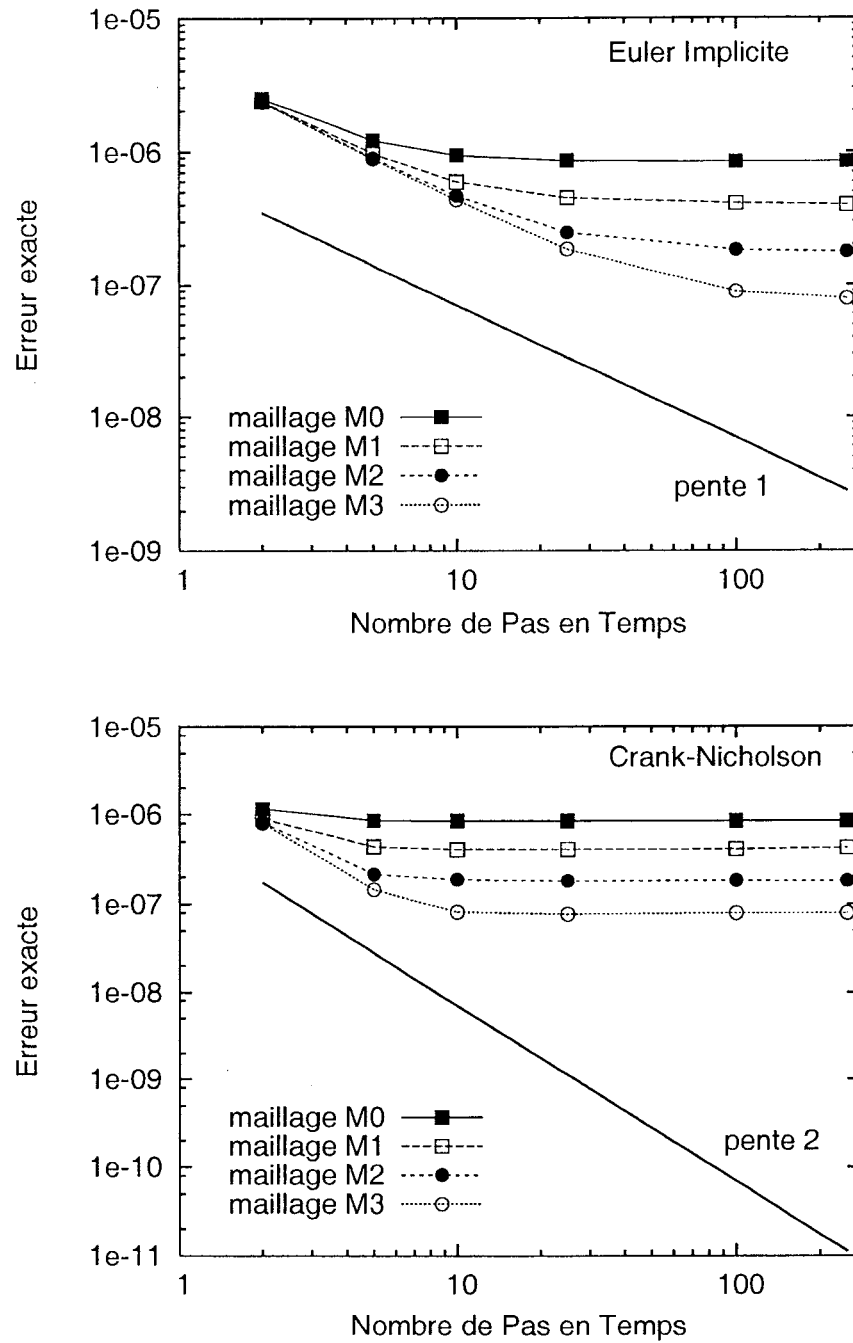


Figure 4.5 Problème de vérification pour Navier-Stokes : norme de l'erreur en fonction du nombre de pas de temps. En haut, résultats avec un schéma en temps de premier ordre; en bas, schéma en temps de deuxième ordre. Les courbes de pentes un et deux correspondent aux taux de convergence théorique

4.4 Vérification de l'ordre de convergence du solveur

Nous avons effectué une deuxième série de simulations, cette fois en sélectionnant avec soin la taille des éléments et le pas de temps, l'idée étant de faire diminuer l'erreur avec un facteur donné pour chacune des simulations.

Lorsque le schéma de Crank-Nicholson est utilisé pour l'intégration en temps, on se retrouve avec un solveur d'ordre deux en espace et en temps. Dans ce cas, si pour chacune des simulations on diminue avec un facteur de deux le pas de temps et la taille des éléments, on devrait observer une erreur exacte qui décroît avec un facteur de quatre

$$\begin{aligned}
 E_1^{\text{CN}}(\Delta t, h) &= C_t^{\text{CN}} \Delta t^2 + C_h^{\text{CN}} h^2 \\
 E_2^{\text{CN}}\left(\frac{\Delta t}{2}, \frac{h}{2}\right) &= C_t^{\text{CN}} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 + C_h^{\text{CN}} \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} E_1^{\text{CN}} \\
 E_3^{\text{CN}}\left(\frac{\Delta t}{4}, \frac{h}{4}\right) &= C_t^{\text{CN}} \left(\frac{\Delta t}{4}\right)^2 + C_h^{\text{CN}} \left(\frac{h}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} E_1^{\text{CN}} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Si, par contre, le schéma d'Euler implicite est utilisé, le solveur devient d'ordre deux en espace et d'ordre un en temps. Dans ce cas, pour voir l'erreur diminuer d'un facteur de quatre, il faut prendre un pas de temps quatre fois plus petit pour chacune des simulations et garder la même séquence de maillages que précédemment

$$\begin{aligned}
 E_1^{\text{EI}}(\Delta t, h) &= C_t^{\text{EI}} \Delta t + C_h^{\text{EI}} h^2 \\
 E_2^{\text{EI}}\left(\frac{\Delta t}{4}, \frac{h}{2}\right) &= C_t^{\text{EI}} \frac{\Delta t}{4} + C_h^{\text{EI}} \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} E_1^{\text{EI}} \\
 E_3^{\text{EI}}\left(\frac{\Delta t}{16}, \frac{h}{4}\right) &= C_t^{\text{EI}} \frac{\Delta t}{16} + C_h^{\text{EI}} \left(\frac{h}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} E_1^{\text{EI}} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Les tableaux 4.2 et 4.3 présentent les détails sur le choix des maillages et des pas de temps pour les deux problèmes de vérification (conduction et Navier-Stokes). Dans les deux cas, les maillages sont réguliers afin de mieux contrôler la taille des éléments. Les résultats des simulations sur ces quatre maillages sont donnés à la figure 4.7 pour le modèle d'océan et à la figure 4.6 pour le problème de conduction. Étant donné que l'ordre de grandeur de la solution pour les variables principales (vitesse, pression ou température) et les sensibilité diffèrent, nous avons tracé les erreurs exactes *relatives*, c'est-à-dire divisées par la norme de la solution.

Tableau 4.2 Problème de vérification pour la conduction : définition des maillages et des pas de temps

	Maillage (Conduction)			Euler Implicite		Crank-Nicholson	
	N_{el}	N_{noeuds}	h	$N_{\Delta t}$	Δt	$N_{\Delta t}$	Δt
1	50	121	0.1633	5	0.05	5	0.05
2	200	441	0.08165	20	0.0125	10	0.025
3	800	1681	0.040825	80	0.003125	20	0.0125
4	3200	6561	0.0204125	320	0.00078125	40	0.00625

Tableau 4.3 Problème de vérification pour Navier-Stokes : définition des maillages et des pas de temps

	Maillage (Océan)			Euler Implicite		Crank-Nicholson	
	N_{el}	N_{noeuds}	h	$N_{\Delta t}$	Δt	$N_{\Delta t}$	Δt
1	48	117	0.2098	5	0.05	5	0.05
2	192	425	0.1049	20	0.0125	10	0.025
3	768	1617	0.05245	80	0.003125	20	0.0125
4	3072	6305	0.026225	320	0.00078125	40	0.00625

Les résultats de ces tests sont tout à fait satisfaisants. Sur les trois graphiques, on voit l'erreur exacte diminuer avec un facteur de quatre, et ceci tant pour le schéma d'Euler implicite que pour le schéma de Crank-Nicholson.

On observe également que les trajectoires des erreurs relatives de l'écoulement et

de la température d'une part, et des sensibilités d'autre part sont très proches l'une de l'autre. Ceci montre qu'on a le même ordre de précision sur toutes les variables.

En conclusion, les simulations effectuées avec les deux problèmes de vérification nous ont permis de montrer que

- les solutions obtenues par le code d'éléments finis sont correctes;
- lorsque les discrétisations spatiale et temporelle sont choisies convenablement, l'erreur exacte diminue avec un taux conforme à la théorie;
- la même précision est observée pour l'écoulement et la température, et leurs sensibilités.

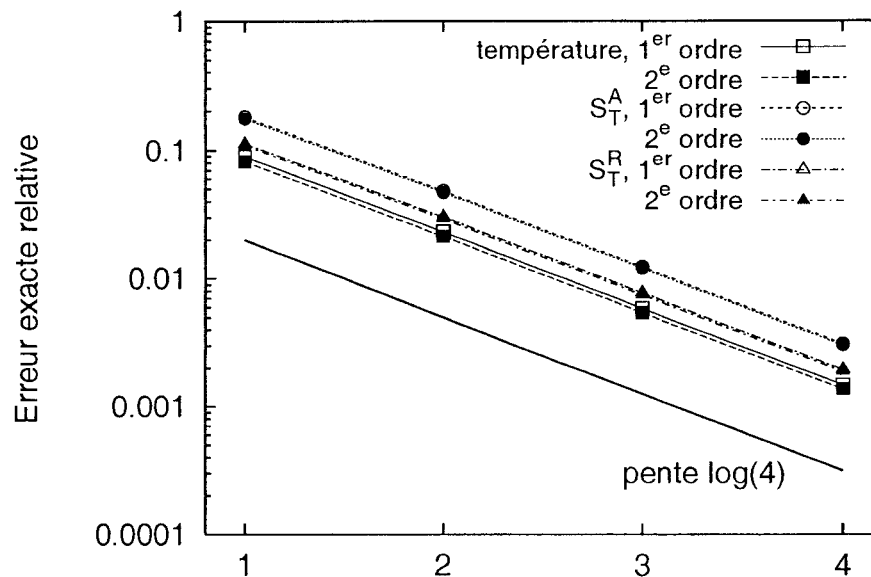


Figure 4.6 Problème de vérification pour la conduction : étude de raffinement spatial et temporel

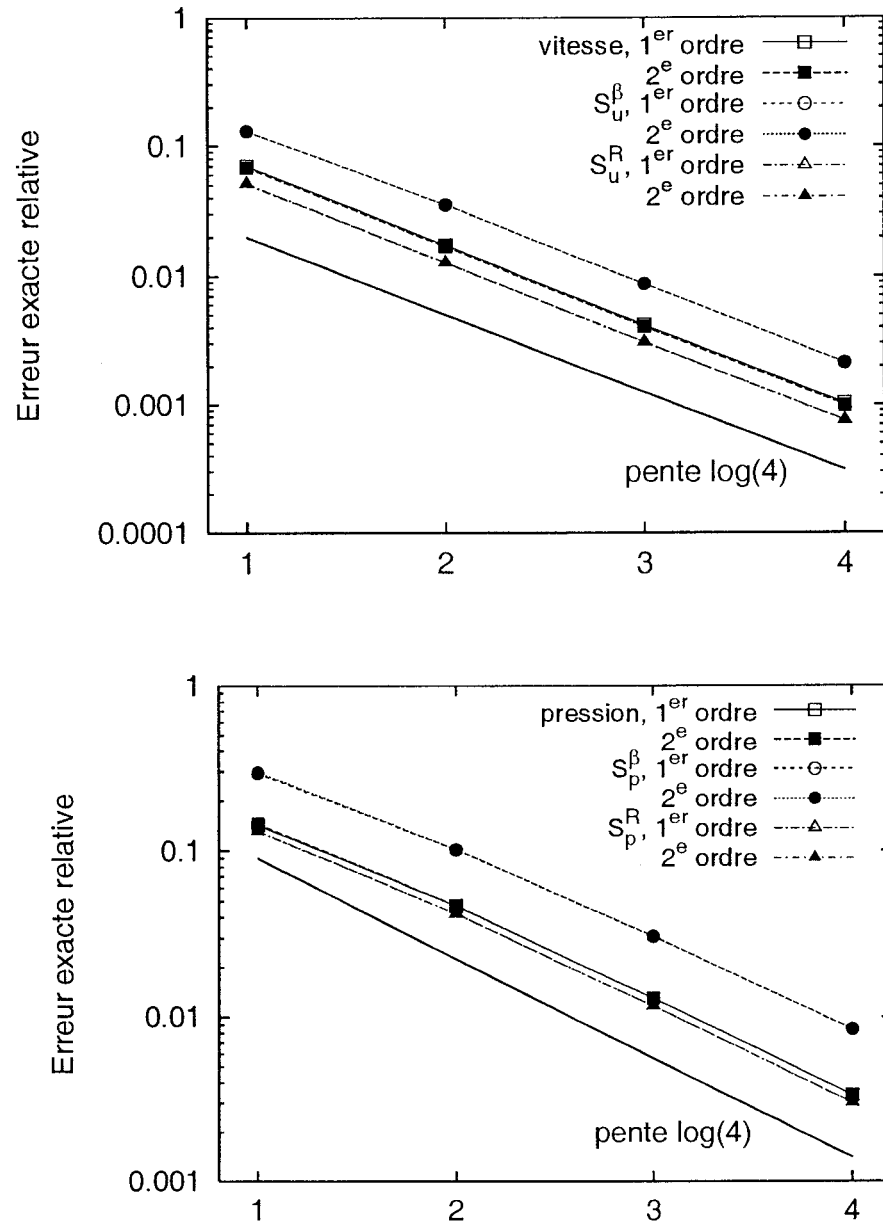


Figure 4.7 Problème de vérification pour Navier-Stokes : étude de raffinement spatial et temporel

CHAPITRE 5

APPLICATION EN CONDUCTION TRANSITOIRE

Dans ce chapitre, nous présentons un problème de conduction non linéaire transitoire. Des sensibilités par rapport à des paramètres de valeur et de forme sont calculées. Nous montrons par la suite différentes utilisations des sensibilités dans l'analyse d'incertitude, le calcul rapide de solutions voisines et l'analyse de sensibilité du système.

5.1 Description du problème

Le problème considéré est une expérience conçue par Dowding et al. ^[8] dont le but est de déterminer la conductivité et la chaleur massique d'un matériau dans le cas où ces propriétés dépendent linéairement de la température. La configuration de l'expérience est montrée à la figure 5.1.

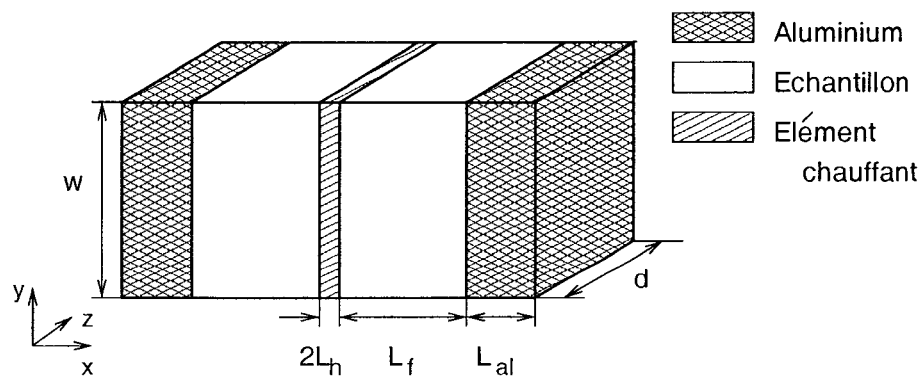


Figure 5.1 Problème de conduction transitoire : design expérimental

Deux échantillons identiques du matériau (dans notre cas, il s'agit d'une mousse de polyuréthane) sont séparés par un élément chauffant. À l'extrémité opposée de chaque échantillon sont posés des blocs d'aluminium dont la fonction est de maintenir une température constante. L'expérience consiste à appliquer un flux thermique à l'aide de l'élément chauffant pendant une certaine période de temps et de mesurer la réaction de l'échantillon pendant et après le chauffage. Connaissant le flux thermique appliqué et en mesurant la température dans l'échantillon, les propriétés physiques du matériau peuvent être déterminées (pour plus de détails, voir Dowding et al. ^[8]). Ici, nous nous concentrons surtout sur la prédiction de la réponse thermique de l'échantillon; les calculs effectués par Dowding et al. nous serviront de référence pour juger de l'exactitude des résultats obtenus.

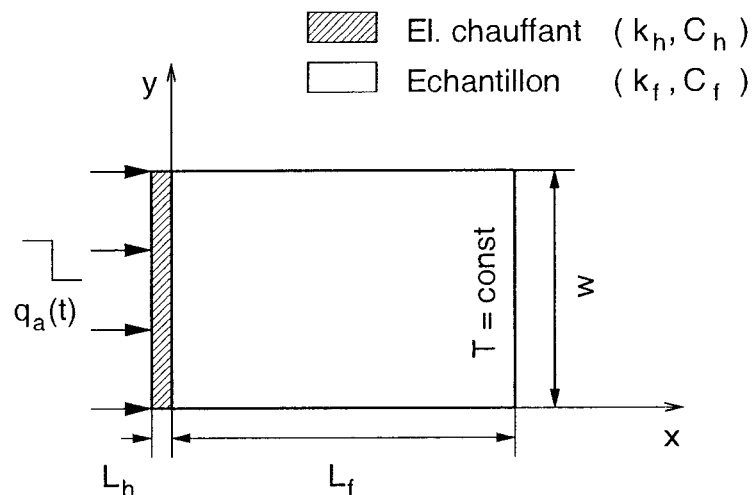


Figure 5.2 Problème de conduction transitoire : modèle bidimensionnel

L'expérience décrite plus haut peut être représentée par un modèle bidimensionnel. On se place dans le plan xy et on suppose que le transfert de chaleur est unidimensionnel (dans la direction x). Le problème étant symétrique, on considère seulement la moitié de la configuration expérimentale, comme montré à la figure 5.2. De plus, le bloc d'aluminium, dont la fonction est de maintenir une température constante,

est remplacé par une condition limite isotherme – la température sur ce côté est fixée à la température initiale de l'échantillon T_0 . Du côté de l'élément chauffant, un flux thermique non nul q_a est appliqué jusqu'au temps t_{stop} . Les deux autres frontières sont adiabatiques.

L'épaisseur de l'élément chauffant est noté par L_h et celle de l'échantillon de mousse par L_f . Les propriétés physiques de l'élément chauffant, sa conductivité k_h et sa chaleur volumétrique ¹ C_h , sont constantes. Celles de la mousse, par contre, dépendent de la température. Elles sont modélisées par interpolation linéaire entre les valeurs $k_1 = k(T_1)$ et $k_2 = k(T_2)$ pour la conductivité k_f , et entre $C_1 = C(T_1)$ et $C_2 = C(T_2)$ pour la chaleur volumétrique C_f , soit

$$k_f(T) = \kappa \left(k_1 \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1} + k_2 \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \right) \quad (5.1)$$

$$C_f(T) = \gamma \left(C_1 \frac{T_2 - T}{T_2 - T_1} + C_2 \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \right) \quad (5.2)$$

avec $\kappa = \gamma = 1$. Les valeurs des autres paramètres sont données dans le tableau 5.1. Comme dans Dowding et al. [8], nous considérons deux configurations différentes, chacune se caractérisant par son épaisseur L_f , son flux appliqué q_a et son temps d'arrêt du chauffage t_{stop} . La configuration avec $L_f = 2.54 \text{ cm}$ est appelée dans la suite cas fini et celle avec $L_f = 34.3 \text{ cm}$, cas semi-infini. Toutes les valeurs ont été adimensionnalisées avec comme échelles k_1 , C_1 , T_2 et L_f^{fini} .

5.2 Solution pour la température

Afin de choisir un maillage et un pas de temps tels que les solutions obtenues soient indépendantes de la discrétisation, nous avons effectué une étude de raffinement.

¹Dans ce problème, à la place de la chaleur thermique à pression constante c_p , nous utilisons la chaleur volumétrique $C = \rho c_p$.

Tableau 5.1 Définition des paramètres pour le problème de conduction transitoire

	Paramètres	dimensionnels	adimensionnels
Propriétés thermiques Élément chauffant	L_h	0.63 mm	0.0248
	k_h	0.1 W/mK	2.0
	C_h	$2.3 \times 10^6 \text{ J/m}^3\text{K}$	5.31178
Propriétés thermiques Échantillon	k_1	0.05 W/mK	1.0
	k_2	0.102 W/mK	2.04
	C_1	$0.43 \times 10^6 \text{ J/m}^3\text{K}$	1.0
	C_2	$1.19 \times 10^6 \text{ J/m}^3\text{K}$	2.75
	T_1	$25 \text{ }^\circ\text{C}$	0.125
	T_2	$200 \text{ }^\circ\text{C}$	1.0
	T_0	$25 \text{ }^\circ\text{C}$	0.125
Cas fini	L_f	2.54 cm	1.0
	q_a	$500 \text{ W/m}^2\text{K}$	1.27
	t_{stop}	$1.5 \times 10^4 \text{ s}$	2.68
Cas semi-infini	L_f	34.3 cm	13.0
	q_a	$450 \text{ W/m}^2\text{K}$	1.143
	t_{stop}	$7.5 \times 10^3 \text{ s}$	1.34

Nous avons comparé les températures maximales atteintes dans deux positions de la configuration finie pour trois maillages et trois pas de temps différents. Le schéma de deuxième ordre de Crank-Nicholson est utilisé pour l'intégration en temps. Les résultats sont résumés dans le tableau 5.2. On remarque que ni le maillage, ni le pas de temps tels que choisis ont un impact significatif sur les températures maximales calculées. On observe quand même une légère variation de T_{max} avec la diminution du pas de temps. Nous avons donc décidé de travailler avec le maillage moyen (641 éléments) et avec un pas de temps adimensionnel de $\Delta t = 0.05$.

L'intervalle de simulation est fixé à 4.5 ($2.5 \times 10^4 \text{ s}$ temps dimensionnel) pour le cas fini, et à 1.8 ($1 \times 10^4 \text{ s}$), pour le cas semi-infini. Pour chacune des configurations, nous visualisons l'évolution de la température en deux points de mesure: directement sur l'élément chauffant, en $x = 0.0$; et à l'intérieur de l'échantillon, en $x = 0.5$ pour le cas fini et en $x = 1.0$ pour le cas semi-infini. Les résultats des simulations sont

Tableau 5.2 Étude de raffinement spatial et temporel pour la configuration finie

Nombre d'éléments	Δt	$T_{max}(x = 0.0)$	$T_{max}(x = 0.5)$
387	0.1	0.93938	0.58930
641	0.1	0.93938	0.58931
1680	0.1	0.93938	0.58931
641	0.05	0.93942	0.58913
641	0.025	0.93947	0.58909

donnés à la figure 5.3.

Lorsque $L_f = 2.54 \text{ cm}$ (haut de la figure 5.3), on observe une augmentation progressive de la température durant le chauffage et un refroidissement assez rapide une fois le flux thermique arrêté aux deux points de mesure. Donc, l'échantillon réagit comme un corps fini – chaque changement du flux appliqué provoque une réponse thermique dans tout le domaine. Pour la configuration avec $L_f = 34.2 \text{ cm}$ (bas de la figure 5.3), le comportement de l'échantillon est différent. L'arrêt du chauffage a un impact sur la réponse thermique près de l'élément chauffant, mais aucun plus loin dans le domaine où la température continue d'augmenter. La mousse réagit donc comme un corps thermique infini dans ce cas.

Il est intéressant de comparer la réponse thermique obtenue dans le cas de propriétés physiques variant linéairement avec la température et celle d'un système dont les propriétés physiques sont constantes. Nous avons donc résolu l'équation de conduction (linéaire) avec des propriétés constantes pour la mousse en choisissant $k_f = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ et $C_f = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$. Les résultats de ces simulations sont donnés de nouveau à la figure 5.3. On observe que l'évolution de la température dans les deux cas est très semblable. La seule différence majeure est que, lorsque les propriétés physiques sont constantes, la température dans le domaine est moins élevée.

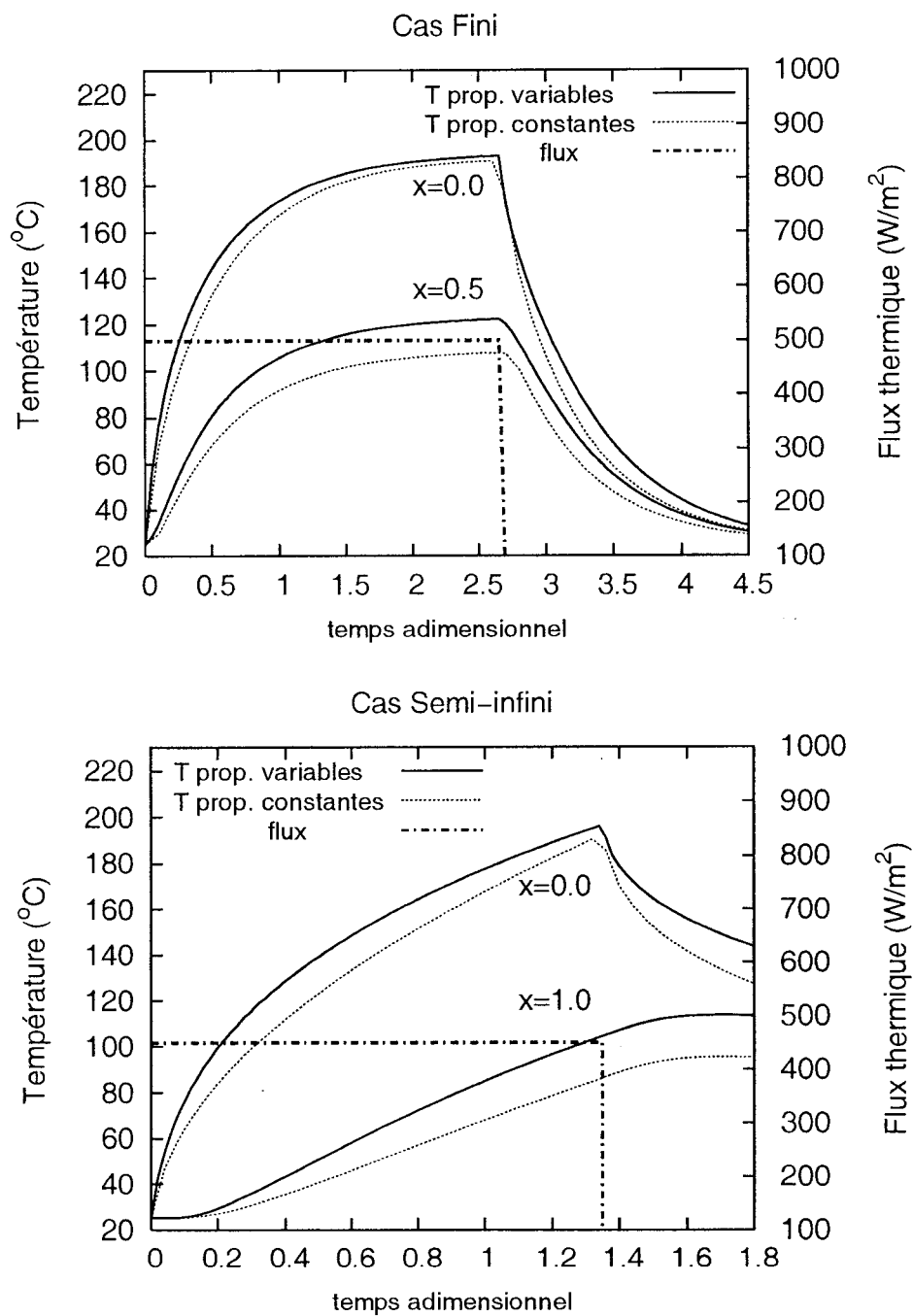


Figure 5.3 Problème de conduction transitoire : flux thermique appliqué et évolution de la température pour les cas fini et semi-infini avec des propriétés thermiques variables ou constantes

Finalement, mentionnons qu'en guise de validation, nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus avec le code de volumes finis de Dowding et al. Dans les deux cas (fini et semi-infini), la réponse thermique du système que nous avons obtenue est la même que celle rapportée par Dowding et al. [8].

5.3 Sensibilités

En ce qui concerne les sensibilités, nous avons effectué deux séries de calculs. En premier lieu, nous nous sommes intéressé aux quatre paramètres de valeur k_1 , k_2 , C_1 et C_2 participant à la définition des propriétés physiques de l'échantillon de mousse (Dowding et al. considèrent les mêmes paramètres). L'évolution temporelle de ces quatre sensibilités dans les configurations finie et semi-infinie est donnée aux figures 5.5 et 5.6. Nos résultats, encore une fois, sont identiques à ceux de l'article de Dowding et al. Nous allons analyser plus en détails ces calculs dans la sous-section sur l'analyse de sensibilité.

Deuxièmement, nous nous sommes intéressé à trois autres paramètres (cette fois-ci, dans la configuration finie uniquement). D'abord, nous avons considéré κ et γ , les deux constantes caractérisant les propriétés thermiques de la mousse (voir équations (5.1) et (5.2)). Les sensibilités par rapport à ces paramètres peuvent nous fournir, comme nous allons le voir un peu plus loin, de l'information sur les plages d'incertitude de la réponse thermique de l'échantillon. La troisième sensibilité calculée est celle de l'épaisseur de la mousse L_f . Puisque L_f participe dans la définition du domaine de calcul, il s'agit d'un paramètre de forme. Le calcul de cette sensibilité ne pose cependant aucune difficulté – l'aisance avec laquelle les sensibilités de forme peuvent être calculées est un des grands avantages de notre solveur. Le seul point délicat est la condition limite sur la courbe $x = L_f$. Sur cette courbe, la dérivée de la géométrie n'est pas nulle : $\partial x_f / \partial L_f = 1$; et donc la

dérivée de la température évaluée à la frontière fait partie de la condition limite pour la sensibilité $S_T^{L_f}$ (voir la figure 5.4).

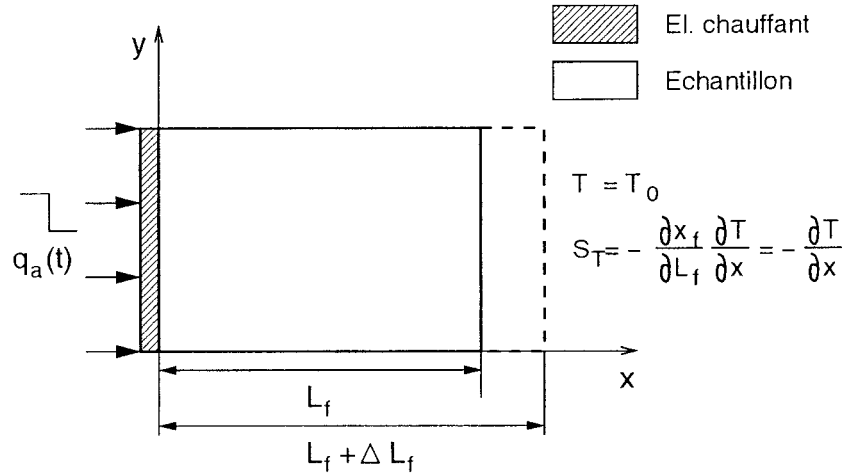


Figure 5.4 Conditions limites pour le paramètre de forme L_f

Pour être précis, il faut mentionner qu'il existe encore deux courbes sur lesquelles une des dérivées de la géométrie n'est pas nulle. Il s'agit des deux courbes avec condition adiabatique. On peut paramétrer ces courbes avec $x_f = L_f \theta$, $\theta \in [0, 1]$, et $y_f = \text{const}$ (0 ou w) et dans ce cas on voit bien que la dérivée $\partial x_f / \partial L_f$ n'est pas nulle. Tout de même, à cause des particularités du problème, la condition limite pour la sensibilité ne pose pas de problème – elle est adiabatique, tout comme celle pour la température. Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire l'expression générale pour une condition limite de Neumann d'un paramètre de forme (1.25), en tenant compte que dans notre cas particulier on a $q_a = 0$, $\partial y_f / \partial L_f = 0$ et $dn_x / dL_f = dn_y / dL_f = 0$. On obtient donc

$$q' = \frac{\partial k}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} \right) \left[\frac{\partial T}{\partial x} \underbrace{n_x}_0 + \frac{\partial T}{\partial y} \underbrace{n_y}_0 \right] + k \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial a} \right) \underbrace{n_x}_0 + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} \right) \underbrace{n_y}_0 \right] = 0$$

Ces simplifications ont été possibles grâce au fait que le problème considéré est unidimensionnel et que les dérivées par rapport à y sont identiquement nulles.

On a utilisé aussi le fait que les normales pour les deux courbes en question sont constantes et valent $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$.

5.4 Applications des sensibilités

Après ces quelques détails techniques, nous nous arrêtons plus en détails dans les prochaines sous-sections sur des exemples d'utilisations des sensibilités.

5.4.1 Analyse de sensibilité

Par définition, une sensibilité traduit l'influence d'un paramètre sur la solution. Une application naturelle des sensibilités est donc l'identification de zones sensibles et de paramètres dominants. En d'autres termes l'analyse de sensibilité sert à caractériser le comportement du système. Afin de déterminer lequel des paramètres a le plus d'influence sur la solution du problème, il est nécessaire de comparer les différentes sensibilités entre elles. Dans ce cas, on utilise les dites *sensibilités normalisées*, c'est-à-dire multipliées par la valeur nominale de leur paramètre

$$S_{T,nom}^a = S_T^a a_{nom} = \frac{\partial T}{\partial a} a_{nom} \quad (5.3)$$

Cette manipulation a pour effet de donner aux différentes sensibilités les mêmes unités (celle de la variable traitée), ce qui les rend comparables entre elles. Dans notre cas, les sensibilités normalisées ont des unités de température. De plus, sur les figures 5.5 et 5.6, elles ont été adimensionnées par la température maximale atteinte dans l'échantillon, soit $T_{max} = 193^\circ C$ pour le cas fini et $T_{max} = 196^\circ C$ pour le cas semi-infini. Ainsi, même des sensibilités obtenues pour des configurations de calcul différentes (cas fini et semi-infini), et donc avec des plages de variation de la

température différentes, peuvent être comparées entre elles.

Pour voir plus clairement quelle est la signification des sensibilités normalisées, on peut se servir du développement de Taylor au premier ordre (puisque'on travaille avec des sensibilités de premier ordre) autour de la valeur nominale du paramètre

$$\Delta T \equiv T(\mathbf{x}, t; a_{nom} + \Delta a) - T(\mathbf{x}, t; a_{nom}) = \frac{\partial T}{\partial a}(\mathbf{x}, t; a_{nom}) \Delta a + O(\Delta a^2) \quad (5.4)$$

soit, pour de petites perturbations,

$$\underbrace{\frac{\Delta T}{T_{max}}}_{\text{variation relative}} = \underbrace{\frac{1}{T_{max}} \frac{\partial T}{\partial a} a_{nom}}_{\text{sensibilité normalisée}} \times \underbrace{\frac{\Delta a}{a_{nom}}}_{\text{perturbation relative}} \quad (5.5)$$

On interprète cette formule de la façon suivante : pour un même pourcentage de variation des paramètres, plus la sensibilité normalisée est grande, plus la variation relative de la température induite par une perturbation du paramètre est importante.

L'analyse de sensibilité peut être utilisée comme une étape préliminaire dans la conception d'expériences pour déterminer les propriétés thermiques d'un matériau. Une exigence essentielle pour une telle expérience est de choisir une configuration dans laquelle les sensibilités sont grandes et non corrélées.

En comparant les configurations finie et semi-infinie (figures 5.5 et 5.6), on remarque que les amplitudes pour les quatre paramètres sont plus importantes dans le cas fini. Cela signifie que lorsque l'épaisseur L_f est petite, la réponse thermique du système est beaucoup plus sensible aux constantes du modèle linéaire utilisé pour les propriétés physiques, ce qui est à retenir. Également, en comparant les deux points de mesures ($x = 0$ et $x = 0.5$) dans le cas fini, on voit que la zone près de l'élément chauffant ($x = 0$) est beaucoup plus sensible.

Une autre observation concerne la forme des courbes dans les deux configurations. Dans le cas semi-infini, l'arrêt du flux thermique n'a presque pas d'impact sur les sensibilités. De plus, elles semblent corrélées – elles ont, deux à deux, des formes semblables, surtout en $x = 0.0$. Pour le cas fini, les quatre courbes ont une forme assez différente les unes des autres et changent de tendance brusquement lorsque le flux est arrêté. Les sensibilités par rapport à C_1 et C_2 , par exemple, changent de signe aux deux points de mesures. Ceci montre qu'avec la configuration finie on peut obtenir beaucoup plus d'informations sur le comportement du matériau que dans le cas semi-infini. On aura également tout intérêt à mesurer la température près de l'élément chauffant sur une configuration de type "fini".

Ainsi, l'analyse de sensibilité permet d'obtenir une première impression et des indications utiles sur la configuration à choisir pour cette expérience. Une analyse plus approfondie comme dans Dowding et al. ^[8] est nécessaire afin de trouver les conditions optimales pour le design expérimental.

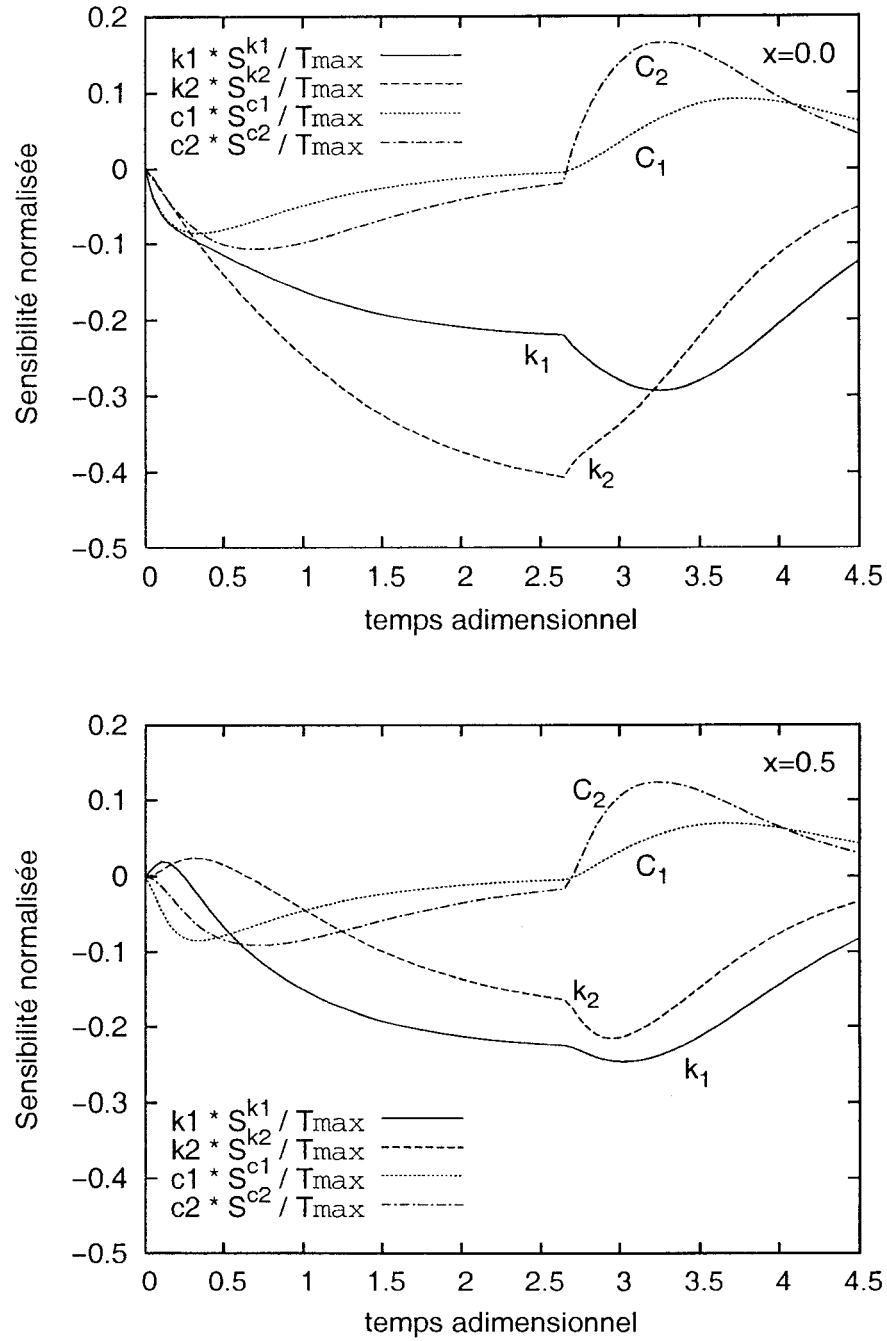


Figure 5.5 Problème de conduction transitoire : sensibilités normalisées et adimensionnées ($T_{max} = 193^\circ C$) pour les paramètres k_1 , k_2 , C_1 et C_2 dans le cas fini

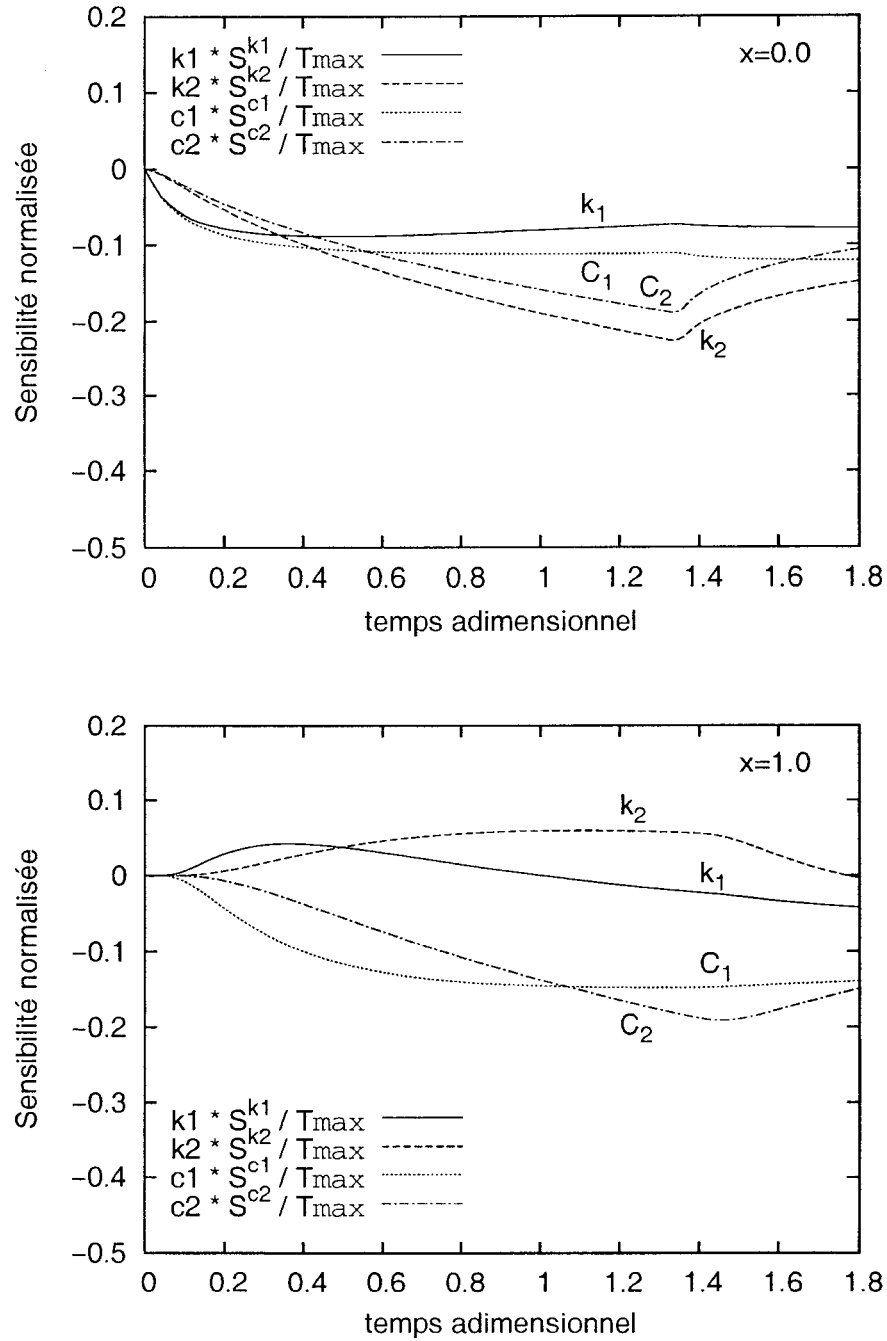


Figure 5.6 Problème de conduction transitoire : sensibilités normalisées et adimensionnées ($T_{max} = 196^\circ C$) pour les paramètres k_1 , k_2 , C_1 et C_2 dans le cas semi-infini

5.4.2 Analyse d'incertitude

En pratique, les valeurs des paramètres participant dans la définition d'un problème ne sont pas connues exactement mais avec une certaine marge d'incertitude. Il est donc important de savoir dans quelle plage varie la réponse du système lorsque un ou plusieurs des paramètres sont incertains. La réponse à cette question est donnée par l'analyse d'incertitude.

Supposons que la température T dépend de plusieurs paramètres a_i , $i = 1 \dots n$ que l'on regroupe dans le vecteur $\mathbf{a}$. En se basant sur le développement de Taylor, on obtient pour la variation de la température ΔT

$$\Delta T = T(\mathbf{x}, t; \mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}) - T(\mathbf{x}, t; \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial a_i}(\mathbf{x}, t; \mathbf{a}) \Delta a_i + O(\|\Delta \mathbf{a}\|^2) \quad (5.6)$$

où on peut négliger les termes d'ordre supérieur si les perturbations Δa_i sont petites. En prenant la valeur absolue de part et d'autre on obtient une approximation de ΔT au premier ordre

$$|\Delta T| \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial T}{\partial a_i}(\mathbf{x}, t; \mathbf{a}) \right| |\Delta a_i| = \sum_{i=1}^n \left| S_T^{a_i}(\mathbf{x}, t; \mathbf{a}) \right| |\Delta a_i| \quad (5.7)$$

Ainsi, si les paramètres sont connus avec une marge d'incertitude $a_i^* \pm \Delta a_i^*$, la réponse du système varie dans la plage $T(\mathbf{x}, t; \mathbf{a}^*) \pm \Delta T^*$ avec

$$\Delta T^* = \sum_{i=1}^n \left| S_T^{a_i}(\mathbf{x}, t; \mathbf{a}^*) \right| \Delta a_i^* \quad (5.8)$$

Dans la dernière expression, on a omis les valeurs absolues pour ΔT^* et Δa_i^* étant donné que ces deux incertitudes sont positives ($a_i^* \pm \Delta a_i^*$ et $T(\mathbf{x}, t; \mathbf{a}^*) \pm \Delta T^*$).

Voyons un exemple. Lors de la définition des propriétés thermiques de la mousse de

polyuréthane, nous avons introduit les paramètres κ et γ avec valeur nominale un. Supposons que la conductivité et la capacité volumétrique peuvent être connues à 10% près. Cela signifie une plage d'incertitude de 10% sur κ et γ , c'est-à-dire $\Delta\kappa = \Delta\gamma = 0.1$. Pour obtenir la marge de variation pour la réponse thermique du système, il suffit de remplacer ces valeurs dans la formule (5.8)

$$\Delta T = 0.1 |S_T^\kappa(\mathbf{x}, t)| + 0.1 |S_T^\gamma(\mathbf{x}, t)| \quad (5.9)$$

où $S_T^\kappa(\mathbf{x}, t)$ et $S_T^\gamma(\mathbf{x}, t)$ sont obtenues par la simulation.

La figure 5.7 montre la température $T(t)$ avec sa marge d'incertitude. On remarque que la bande d'incertitude est plus serrée au point de mesure $x = 0.5$, là où la réponse du système est moins sensible.

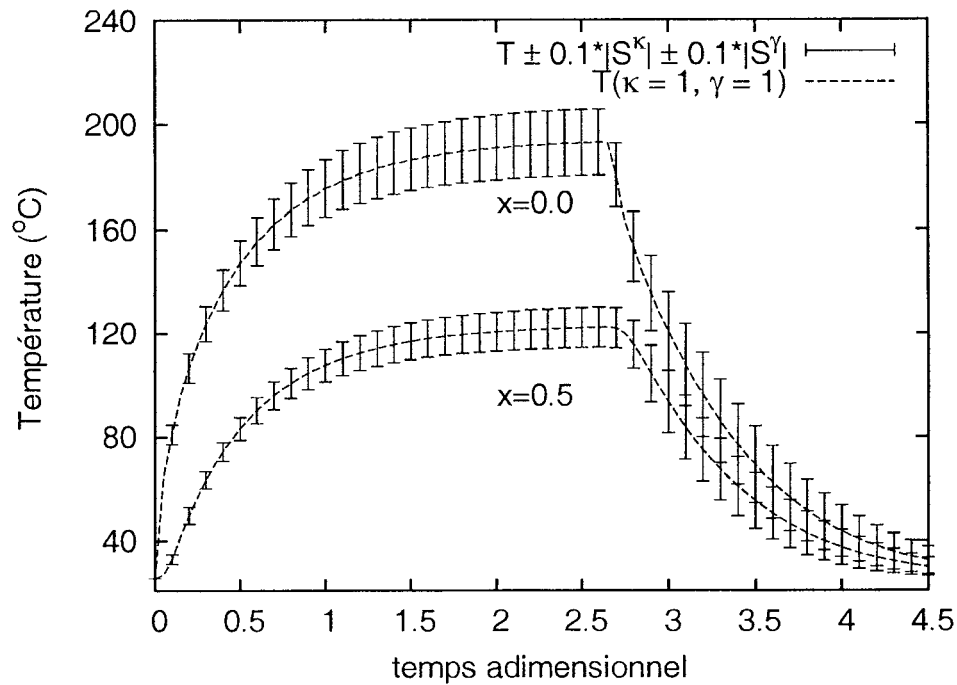


Figure 5.7 Problème de conduction transitoire : marge d'incertitude sur la température pour $\kappa, \gamma = 1 \pm 0.1$ dans le cas fini

5.4.3 Solutions voisines

Une autre application des sensibilités est le calcul rapide de solutions voisines. Le point de départ est de nouveau la série de Taylor à l'ordre un

$$T(\mathbf{x}, t; \mathbf{a}^* + \Delta \mathbf{a}) \approx T(\mathbf{x}, t; \mathbf{a}^*) + \sum_{i=1}^n S_T^{a_i}(\mathbf{x}, t; \mathbf{a}^*) \Delta a_i \quad (5.10)$$

Ainsi, si on connaît la solution pour la température et les sensibilités pour une valeur du paramètre a^* , on peut obtenir par extrapolation linéaire la solution voisine pour $a = a^* + \Delta a$. Les perturbations admissibles (1%, 5% ou plus) avec lesquelles on peut obtenir des solutions voisines “correctes” dépend beaucoup de la nature du problème. Si la température dépend linéairement en a , il suffit de calculer T et S_T^a pour une seule valeur du paramètre, pour connaître par extrapolation linéaire la solution pour n'importe quelle valeur de a . Par contre, si T dépend de façon non linéaire du paramètre, la plage dans laquelle on peut appliquer avec succès l'extrapolation linéaire sera plus petite. Pour plus de précision dans ces cas, on peut utiliser une extrapolation de plus haut degré, en évaluant la solution pour plusieurs valeurs du paramètre, ou bien en utilisant des sensibilités d'ordre deux.

Pour le design expérimental considéré ici, nous avons extrapolé les solutions pour une épaisseur de l'échantillon $L_f = 0.9$ et $L_f = 0.8$ à partir de la solution pour $L_f = 1$. Pour vérifier si les solutions voisines obtenues sont correctes, nous avons également calculé les vraies solutions pour $L_f = 0.9$ et $L_f = 0.8$. Les résultats sont donnés aux figures 5.8 et 5.9. Pour $L_f = 0.9$, c'est-à-dire une perturbation de 10%, la solution extrapolée se superpose à la vraie solution, ce qui indique que la dépendance $T(L_f)$ doit être essentiellement linéaire dans cette plage. Pour $L_f = 0.8$, par contre, des écarts importants sont observés ce qui veut dire que l'extrapolation linéaire n'est plus valide.

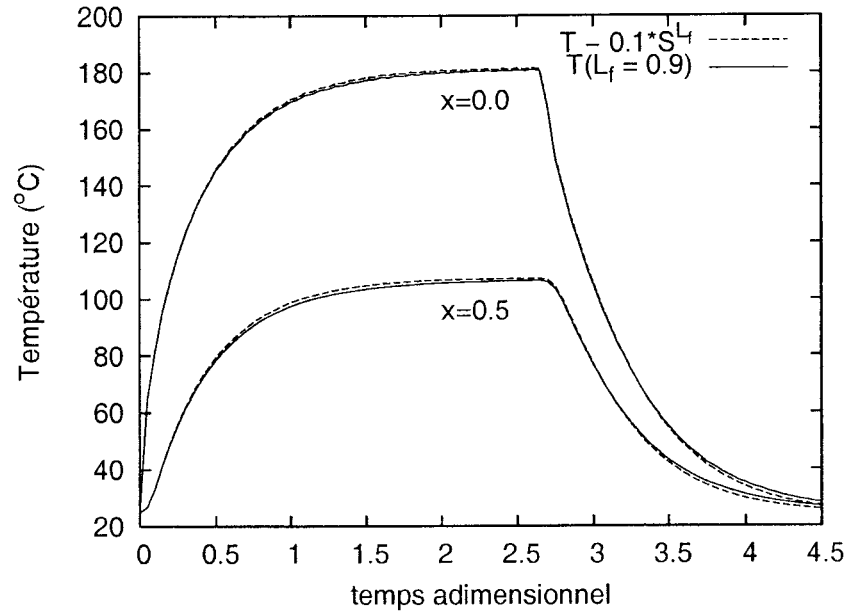


Figure 5.8 Problème de conduction transitoire : solution voisine pour $L_f = 0.9$ pour le cas fini

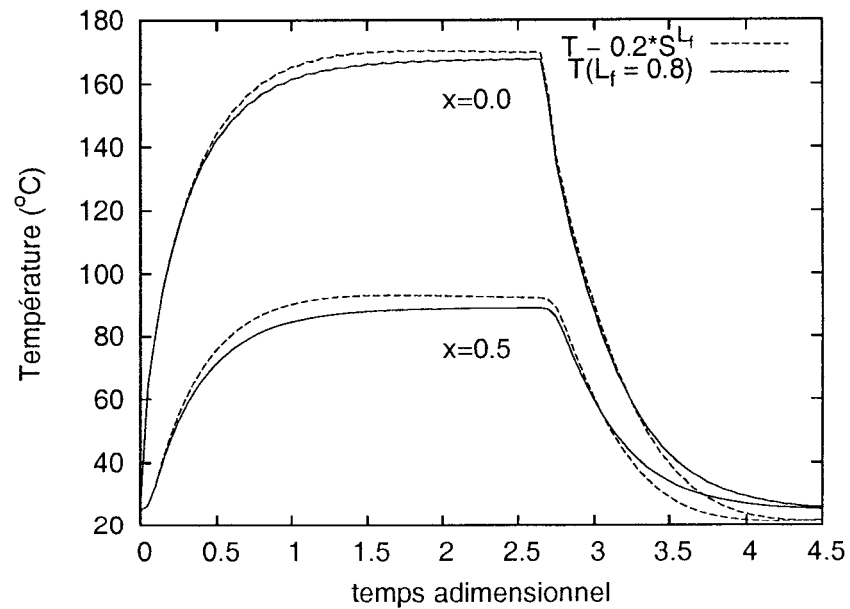


Figure 5.9 Problème de conduction transitoire : solution voisine pour $L_f = 0.8$ pour le cas fini

CHAPITRE 6

APPLICATION À DES ÉCOULEMENTS INSTATIONNAIRES

Ce chapitre présente une application de l'analyse de sensibilité aux équations de Navier-Stokes instationnaires. Nous nous intéressons à l'écoulement obtenu quand un obstacle carré est immergé dans un écoulement pulsé. Nous calculons par la suite la sensibilité aux paramètres définissant la pulsation.

6.1 Description du problème

On considère un obstacle carré, appelé aussi dans la littérature cylindre carré, de côté $d = 1$. La longueur d sera utilisée dans la suite comme échelle pour exprimer toutes les autres distances.

La configuration de calcul est donnée à la figure 6.1. Les dimensions du domaine ont une grande influence sur les résultats et doivent par conséquent être choisies avec soin. Une étude assez complète sur le sujet, dans le cas de cylindre carré à bas nombre de Reynolds (exactement le cas qui nous intéresse), a été effectuée par Sohankar et al. ^[26]. En se basant sur leur résultats, nous avons choisi $H = 13$ pour la hauteur du domaine, $X_u = 6$ pour la distance en amont de l'obstacle et $X_d = 15$ pour la distance en aval de l'obstacle. Bien que non optimales, ces valeurs nous ont semblées raisonnables. Prendre un domaine de calcul plus grand aurait augmenté considérablement le temps de calcul sans pour autant changer véritablement les résultats.

À l'entrée, un écoulement pulsé de moyenne U_0 , d'amplitude α et de période T_α est

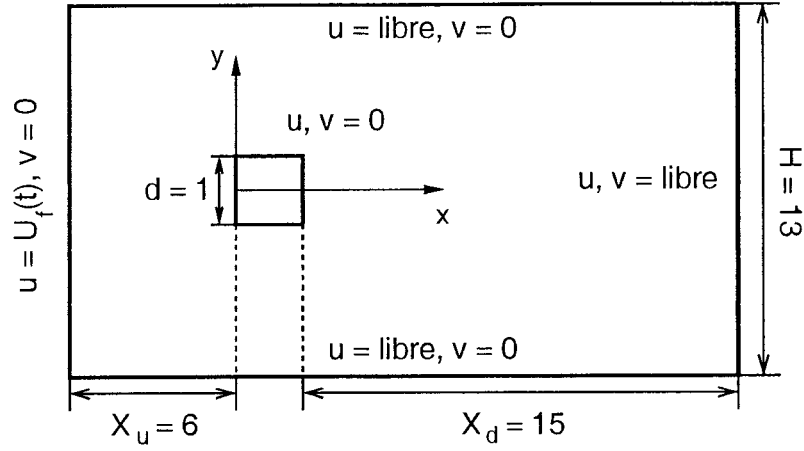


Figure 6.1 Définition du domaine de calcul et des conditions limites

imposé

$$U_f(t) = U_0 \left(1 + \alpha \sin \frac{2\pi t}{T_\alpha} \right) \quad (6.1)$$

avec

$$U_0 = 1, \quad \alpha = 0.4, \quad T_\alpha = 4. \quad (6.2)$$

Sur les frontières du haut et du bas, des conditions limites de symétrie sont appliquées. Sur l'obstacle, les vitesses sont mises à zéro, et à la sortie, une condition limite libre est imposée.

Comme déjà mentionné, la longueur du côté de l'obstacle est utilisé comme échelle de distance. Comme échelle de vitesse, on prend la vitesse moyenne à l'entrée U_0 , ce qui donne une adimensionnalisation du temps par d/U_0 . Le nombre de Reynolds, quant à lui, est défini comme $Re = \rho U_0 d / \mu$. Pour nos calculs, nous avons choisi $Re = 100$ avec $\rho = 1$ et $\mu = 0.01$.

En ce qui concerne les sensibilités, nous nous intéressons aux trois paramètres "naturels" de ce problème c'est-à-dire U_0 , α et T_α définissant la pulsation de

l'écoulement à l'entrée. Ce sont tous des paramètres de valeur. Leurs conditions limites sont identiques à celles de l'écoulement sur toutes les frontières à l'exception de l'entrée où on a

$$S_u^{U_0}(t) = \frac{\partial U_f}{\partial U_0} = 1 + \alpha \sin \frac{2\pi t}{T_\alpha} \quad (6.3)$$

$$S_u^\alpha(t) = \frac{\partial U_f}{\partial \alpha} = U_0 \sin \frac{2\pi t}{T_\alpha} \quad (6.4)$$

$$S_u^{T_\alpha}(t) = \frac{\partial U_f}{\partial T_\alpha} = U_0 \alpha \left(-\frac{2\pi t}{T_\alpha^2} \right) \cos \frac{2\pi t}{T_\alpha} \quad (6.5)$$

Un dernier point important, concerne les conditions initiales. Nous avons décidé d'initialiser le calcul instationnaire de l'écoulement avec la solution stationnaire obtenue pour $Re = 100$. De même, la condition initiale pour la sensibilité au paramètre U_0 est la solution obtenue pour cette sensibilité en régime stationnaire. Quant aux deux autres paramètres α et T_α , leurs conditions initiales sont nulles étant donné que ces sensibilités n'ont pas d'équivalent en régime stationnaire. Ce choix a sa signification physique – on considère que l'écoulement initialement stationnaire devient pulsé à partir d'un certain moment. Du point de vue numérique, le problème ainsi défini est bien posé étant donné que les champs initiaux de vitesse et de sensibilités de la vitesse sont à divergence nulle.

6.2 Maillage et pas de temps

L'importance d'un maillage bien adapté au problème résolu est indiscutable. De plus, quand plusieurs variables (écoulement et sensibilités) sont calculées avec la même discrétisation, il est important que le maillage soit adapté à chacune d'entre elles [29]. Avec le solveur utilisé, il est possible d'obtenir un tel maillage en régime stationnaire à l'aide du remaillage adaptatif. En régime instationnaire,

nous n'avons pas cette possibilité pour le moment, la difficulté étant qu'un maillage adapté devrait évoluer avec le temps pour suivre le développement de la solution.

Nous avons donc décidé d'utiliser pour notre calcul instationnaire un maillage adapté à l'écoulement stationnaire. Ce dernier a approximativement la même structure que celle de l'écoulement transitoire moyenné. Ainsi, on a un maillage qui respecte en général les caractéristiques de l'écoulement (voir la figure 6.2). Il est raffiné sur le bord d'attaque de l'obstacle (surtout autour des coins) et dans le sillage et il est plus grossier dans le reste du domaine. Ceci nous permet d'épargner sur le temps de calcul – si on avait construit manuellement la décomposition du domaine en éléments, on aurait abouti très probablement à un nombre d'éléments beaucoup plus important. Notons que le maillage donné à la figure 6.2 est adapté aussi à la sensibilité au paramètre U_0 mais pas à celles des paramètres α et T_α puisqu'elles sont nulles en régime stationnaire.

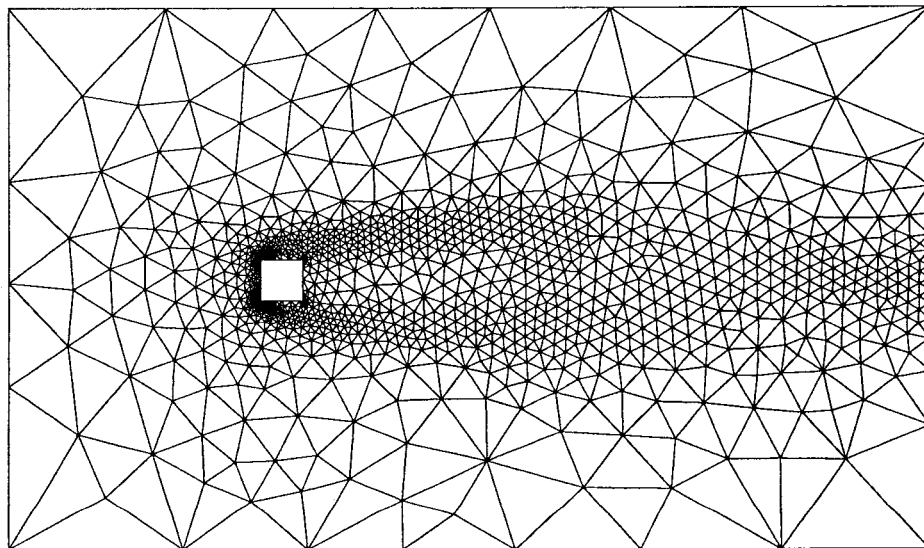


Figure 6.2 Maillage pour le calcul de l'écoulement autour d'un obstacle carré

En ce qui concerne l'intégration en temps, nous avons utilisé le schéma de pre-

mier ordre et inconditionnellement stable d'Euler implicite. Ce schéma est souvent préféré pour les équations de Navier-Stokes devant le schéma plus précis de Crank-Nicholson ^[9]. Le pas de temps a été choisi comme $\Delta t = 0.025$, valeur encore une fois tirée des études de Sohankar et al. ^[26] La période de l'écoulement étant $T_\alpha = 4$, on obtient 160 pas de temps par période, nombre largement suffisant.

6.3 Solution pour l'écoulement

Comme déjà mentionné plus haut, au temps $t = 0$, on initialise l'écoulement avec la solution stationnaire obtenu pour $Re = 100$. En imposant une condition oscillante pour $t > 0$, on s'attend à voir l'écoulement changer. En particulier, un lâché tourbillonnaire forcé par la pulsation à l'entrée devrait apparaître. C'est exactement ce que nous observons dans la simulation. La figure 6.3 montre en parallèle la vitesse appliquée à l'entrée et la réponse dans le sillage de l'obstacle. Le signal est montré pendant six périodes T_α , commençant au temps $t = 0$. Le point de mesure ($x = 2, y = 0$) se trouve à une unité de longueur derrière l'obstacle à sa mi-hauteur. La vitesse v dans cette position est nulle, ce qui indique que l'écoulement est symétrique. La vitesse longitudinale et la pression par contre, oscillent avec une période imposée par la pulsation à l'entrée. La pression p est décalée de phase à $\pi/2$ par rapport à la vitesse d'entrée. La vitesse u , quant à elle, est en phase et son oscillation correspond aux tourbillons relâchés derrière l'obstacle.

Nous nous arrêtons plus en détails sur chacune de ces observations dans les prochaines sous-sections.

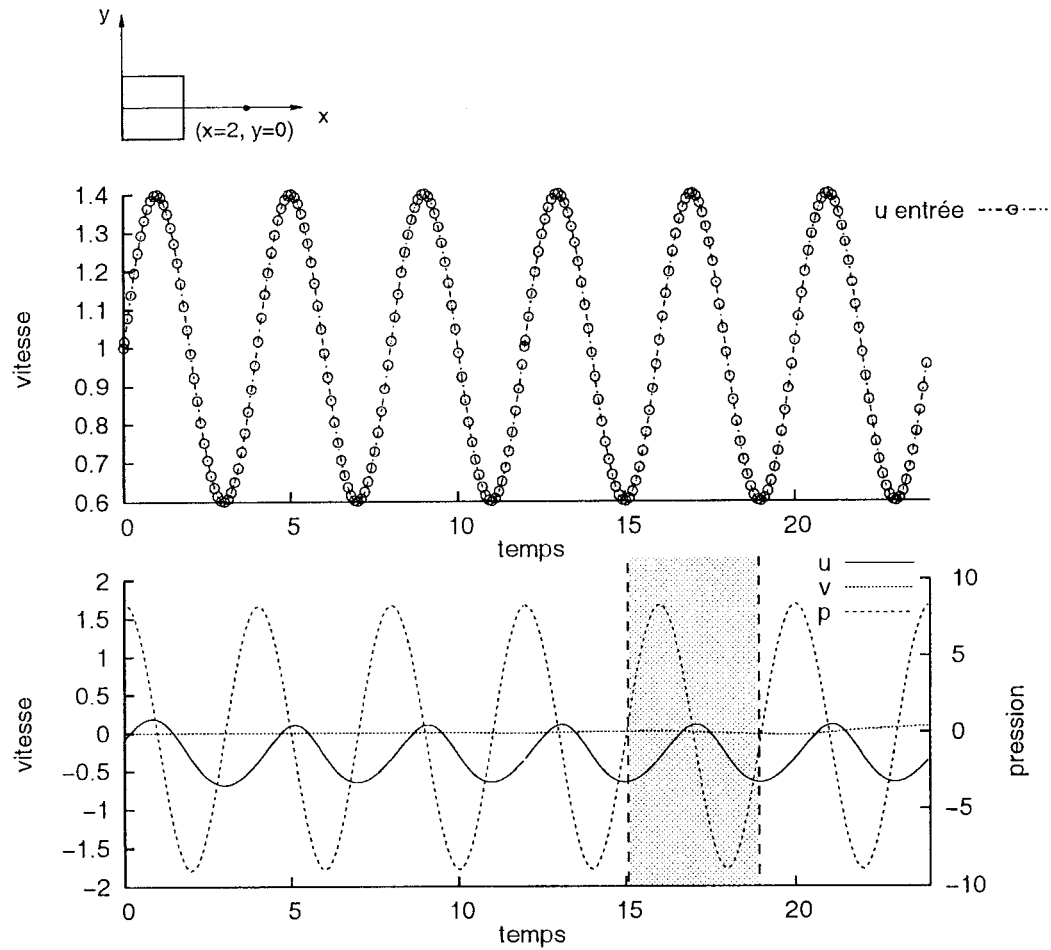


Figure 6.3 Réponse du système en $(x = 2, y = 0)$

6.3.1 Lâché tourbillonnaire

Pour mieux voir les tourbillons relâchés derrière l'obstacle, nous avons présenté à la figure 6.4 les contours d'isovorticité pendant une période T_α (celle montrée en gris sur la figure 6.3) à tous les huitièmes de période. Huit images sont données au total, la neuvième étant identique (près du carré) à la première. Sur cette séquence, on voit clairement les deux tourbillons qui se forment pendant la phase ascendante de la pulsation et qui sont relâchés à son maximum. Pendant la phase descendante,

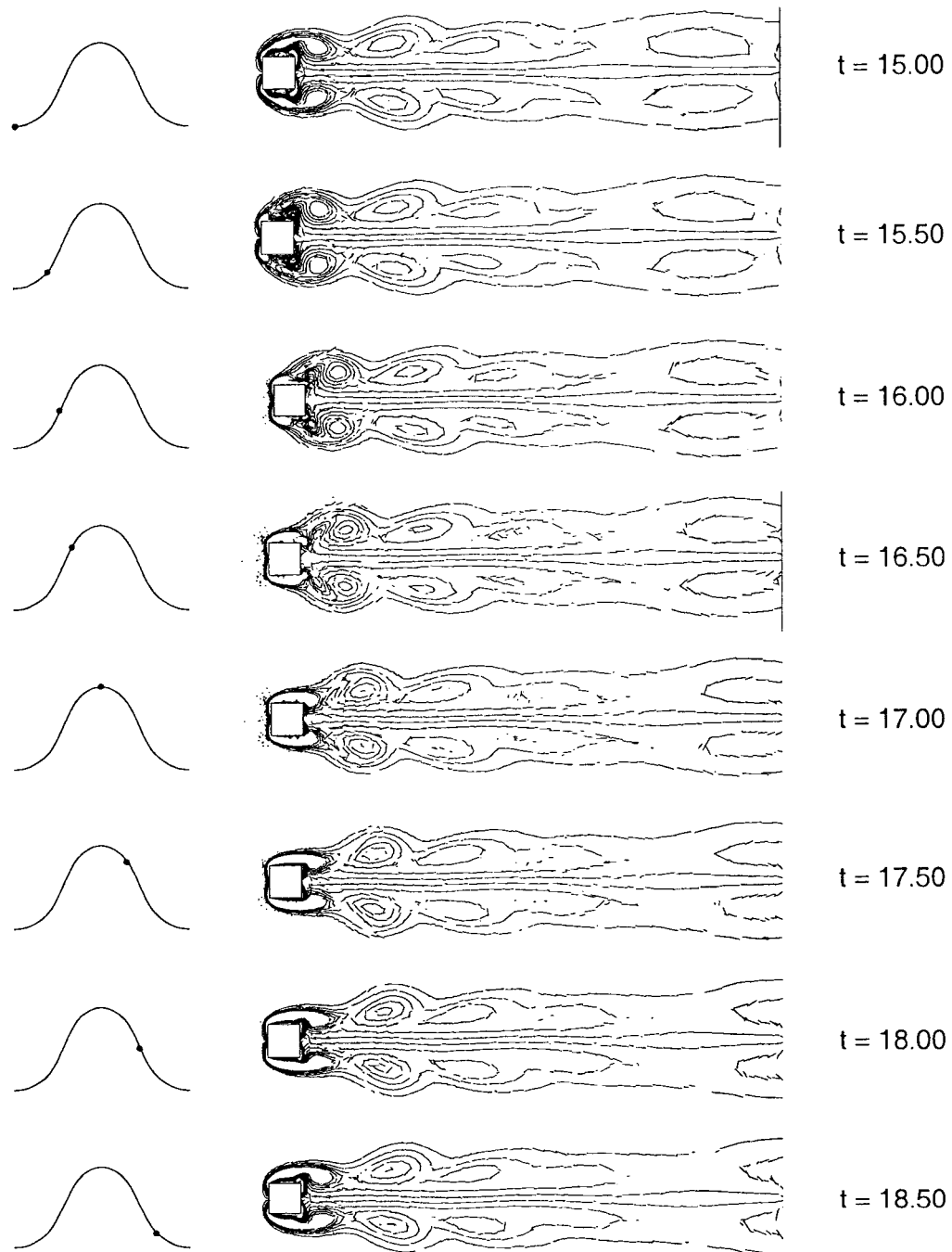


Figure 6.4 Isovaleurs pour la vorticité durant une période T_α . À gauche est montré avec un point noir la phase correspondante de la vitesse u

les tourbillons sont transportés plus loin dans le sillage tandis que les deux tourbillons de la période suivante commencent à apparaître. Notons aussi que, durant toute la séquence présentée ici, l'écoulement reste symétrique – les lignes d'isovorticité sur l'axe de l'obstacle (là où la vorticité change de signe) sont droites sur toutes les images. Le phénomène dominant à ce stade est donc le lâché tourbillonnaire provoqué par la pulsation de l'écoulement. Comme nous allons le voir un peu plus loin, cela n'est pas toujours le cas.

6.3.2 Pression

Revenons à la figure 6.3 où on avait noté que la pression oscille avec une période imposée par la condition d'entrée mais avec une phase décalée de $\pi/2$. Si on visualise les lignes de pression constante, on remarque qu'elles ont une allure différente de celle qu'elles auraient en régime stationnaire. La figure 6.5 montre ces lignes au temps $t = 15$, correspondant au minimum de la pulsation d'entrée. À l'exception de la zone près du carré, les contours d'isopression sont des lignes verticales également espacées, ce qui indique que la pression est linéaire en x . Ceci est vrai peu importe à quel instant on se place durant la période de pulsation.

On peut expliquer ce comportement en se basant sur le bilan de l'énergie cinétique. On obtient ce dernier en multipliant l'équation de conservation du mouvement (2.2) par la vitesse $\mathbf{u}$ et en l'intégrant sur le domaine de calcul

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) + \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\tau}} : \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \quad (6.6)$$

La pression intervient dans la dernière équation à travers le tenseur des contraintes $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. Puisqu'ici on cherche à trouver une explication pour le comportement global de la pression, on se place loin du carré, là où l'influence de l'obstacle sur l'écoulement

est négligeable. Dans cette zone, le gradient de la vitesse est nul et il en est de même pour le terme correspondant au travail des forces visqueuses. En ce qui concerne l'intégrale de bord, à cause des conditions limites appliquées (u libre, $v = 0$ ou u, v libre), elle est nulle sur toutes les frontières sauf sur l'entrée. En prenant en compte que, dans le problème traité, il n'y pas de forces de volume, l'équation de bilan devient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} = \int_{\text{entrée}} u t_x \quad (6.7)$$

On peut calculer le terme de gauche en sachant que, loin de l'obstacle, la vitesse est égale à la vitesse de pulsation U_f

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} \approx \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{U_f^2}{2} \text{surf}(\Omega) \right) = \rho U_f \frac{\partial U_f}{\partial t} \text{surf}(\Omega) \quad (6.8)$$

De l'autre côté, on rend explicite le terme intégré sur l'entrée, qui ne fait intervenir finalement que la condition d'entrée et la pression

$$u t_x = U_f \left(2\mu \frac{\partial U_f}{\partial x} - p \right) n_x = U_f p \quad (6.9)$$

Ainsi, on obtient pour le comportement de la pression loin de l'obstacle dans un écoulement pulsant

$$p \approx x \rho \frac{\partial U_f}{\partial t} = x \rho \alpha U_0 \frac{2\pi}{T_\alpha} \left(\cos \frac{2\pi t}{T_\alpha} \right) \quad (6.10)$$

La dernière formule explique pourquoi la pression est décalée par rapport à la pulsation de l'écoulement. Elle justifie aussi les contours d'isopression verticales et également espacées, qui sont observées à la figure 6.5.

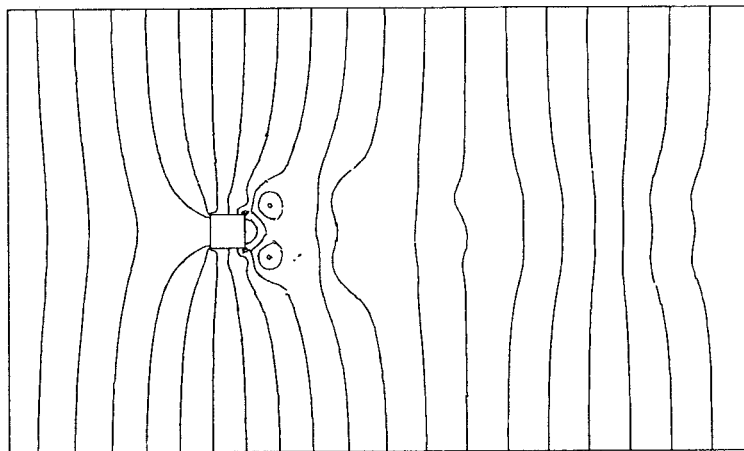


Figure 6.5 Isovaleurs pour la pression à $t = 15.0$

6.3.3 Transition de l'écoulement

Si on revient de nouveau à la figure 6.3, un détail visible sur cette image mais que nous avons passé sous silence lors de nos premiers commentaires, est que la vitesse v ne reste pas nulle jusqu'à la fin de la simulation. Durant la dernière période, on voit bien que, tout en restant faible, elle commence à osciller elle aussi et qu'au temps final $t = 24$, elle est légèrement positive. Ceci indique que l'écoulement n'est plus symétrique et qu'il est peut-être en train de subir une transition de régime.

Afin de voir quelle sera son évolution, nous avons continué les calculs pendant trois périodes supplémentaires. La figure 6.6 donne les contours d'isovorticité vers la fin du premier calcul ($t = 23$) et durant les trois périodes supplémentaires ($t = 27, 31, 35$).

On remarque que l'écoulement devient fortement asymétrique. En plus du lâché tourbillonnaire causé par la pulsation, une allée de Von Karman se développe. En fait, à $Re = 100$ le sillage de l'obstacle carré est instable ($Re_{cr} = 51$ selon Sohankar

et al. ^[26]) et une allée tourbillonnaire se serait développée même si l'écoulement ambiant était uniforme et stationnaire. Donc, l'entrée pulsante ne fait que déclencher ce phénomène. Le développement de l'écoulement dans la suite dépend du rapport entre la période T_α de la pulsation forcée et la période de l'oscillation naturelle. Pour voir quel sera l'état périodique final atteint par le système (s'il en existe un), il faudrait effectuer une simulation beaucoup plus longue que celle montrée à la figure 6.6. Notre but ici en continuant le calcul était plutôt de trouver une explication pour le comportement de la vitesse transversale. Ceci nous servira également lors de l'analyse des sensibilités.

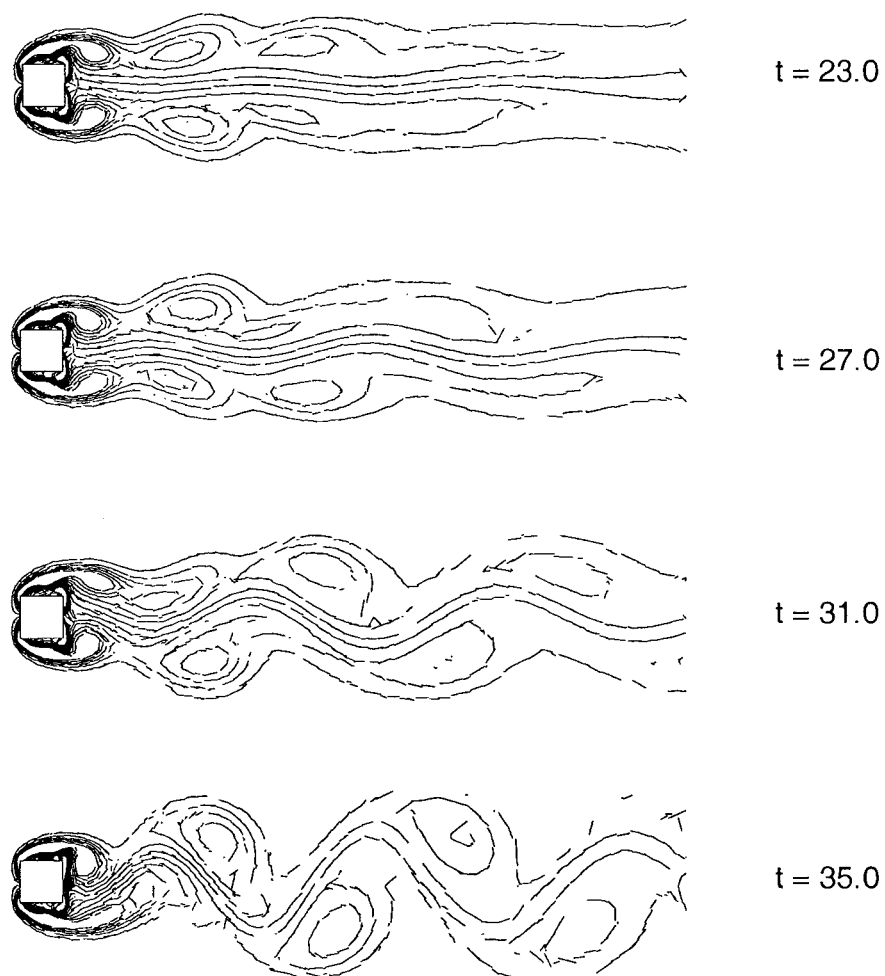


Figure 6.6 Isovaleurs pour la vorticité    $t = 23, 27, 31, 35$ montrant le développement d'une allée tourbillonnaire derrière l'obstacle

6.4 Solution pour les sensibilités

Dans cette section, nous présentons les résultats pour la sensibilité de l'écoulement aux trois paramètres α , T_α et U_0 . La figure 6.7 donne le signal temporel pour ces trois sensibilités au même point de mesure ($x = 2, y = 0$) que pour l'écoulement. Plusieurs observations s'imposent:

1. Tout comme pour l'écoulement, on observe un comportement périodique pour les sensibilités S_u et S_p aux trois paramètres. La période d'oscillation est celle de l'écoulement pulsé, T_α ;
2. Pour les paramètres α et U_0 , la première période semble être une période de réajustement. Le vrai comportement périodique commence plus tard;
3. Les sensibilités $S_u^{T_\alpha}$ et $S_p^{T_\alpha}$, à la différence des autres, croissent en amplitude. Ceci n'est pas étonnant étant donné que, pour cette sensibilité, nous avons imposé à l'entrée une condition limite qui dépend directement du temps ($S_u^{T_\alpha} = (-2\pi t U_0 \alpha / T_\alpha^2) \cos \frac{2\pi t}{T_\alpha}$);
4. Le fait le plus marquant dans la réponse des sensibilité est sans doute le comportement de la sensibilité de la vitesse v . Pour les trois paramètres (mais surtout pour U_0), elle devient très vite importante – déjà à la troisième, quatrième période. Pour le paramètre U_0 , à la fin de la simulation, elle est même plus grande que la sensibilité de la vitesse u . Nous avons déjà observé ce changement de comportement dans l'écoulement. Cependant, avec les sensibilités, il arrive plus tôt et il est beaucoup plus marqué. Nous allons analyser la signification de ce phénomène et ses implications plus loin.
5. Notons que les sensibilités à la figure 6.7 ne sont pas normalisées. Pour pouvoir les comparer entre elles, il faudrait les multiplier par la valeur nominale

de leur paramètre. Par exemple, les sensibilités S_u^α et $S_u^{U_0}$ varient dans la même plage. Cependant, comme $\alpha = 0.4$ et $U_0 = 1$, le paramètre U_0 a, pour une perturbation relative égale, plus d'influence sur l'écoulement que le paramètre α .

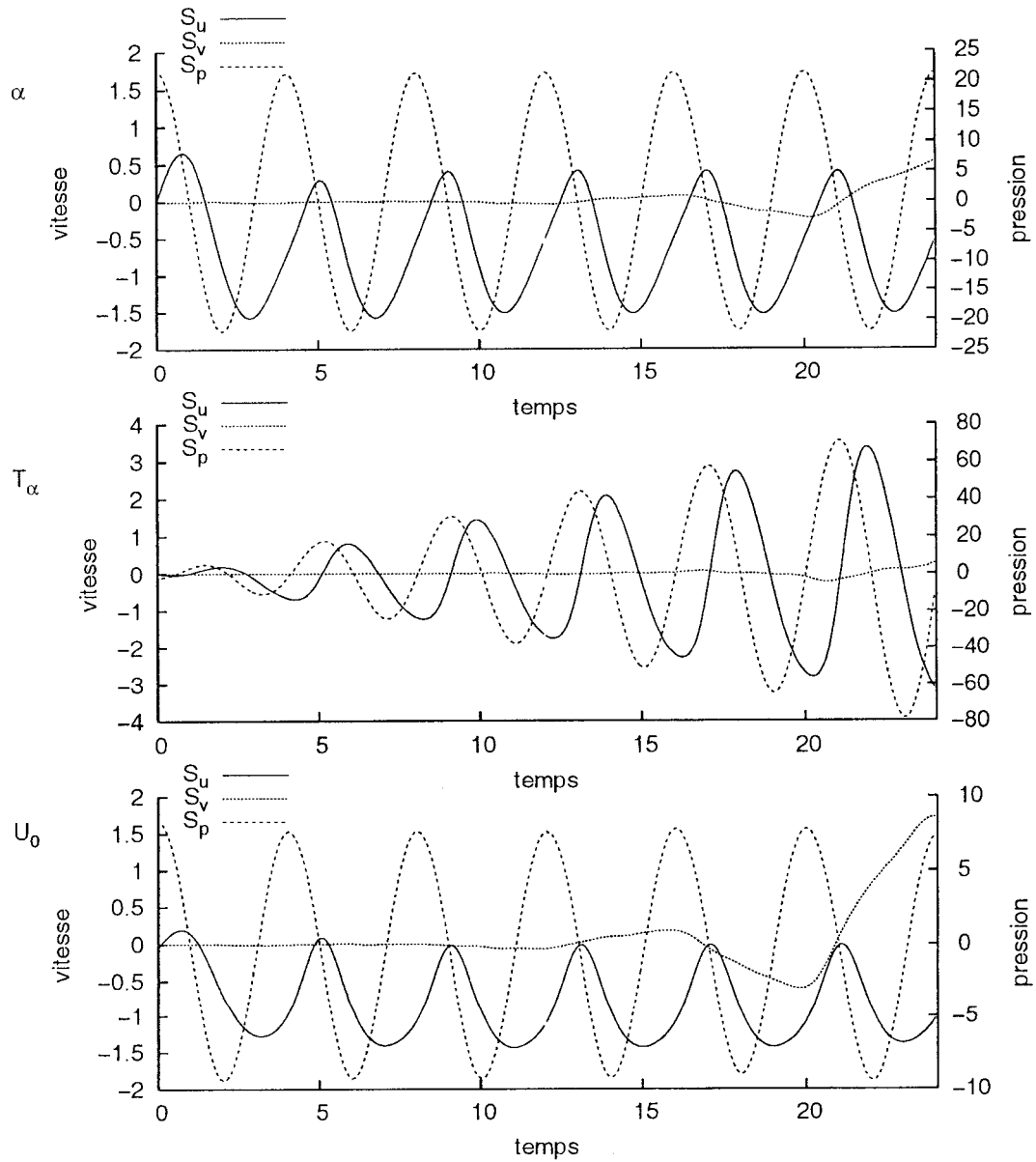


Figure 6.7 Réponse pour les sensibilités en $(x = 2.0, y = 0.0)$

6.4.1 Sensibilité de la pression

Le comportement de la sensibilité de la pression peut être expliqué de la même manière que nous l'avons fait pour l'écoulement. Toutefois, au lieu de développer l'équivalent du bilan de l'énergie cinétique pour les sensibilités, on peut tout simplement différentier l'expression déjà obtenue pour l'écoulement (formule (6.10)). Ainsi, on obtient que S_p^α et $S_p^{U_0}$ ont un comportement semblable à la pression p à un facteur près

$$S_p^\alpha = \frac{\partial p}{\partial \alpha} \approx x \rho U_0 \frac{2\pi}{T_\alpha} \left(\cos \frac{2\pi t}{T_\alpha} \right) \quad (6.11)$$

$$S_p^{U_0} = \frac{\partial p}{\partial U_0} \approx x \rho \alpha \frac{2\pi}{T_\alpha} \left(\cos \frac{2\pi t}{T_\alpha} \right) \quad (6.12)$$

La sensibilité $S_p^{T_\alpha}$ a un comportement différent. Puisque dans ce cas il faut dériver par rapport au paramètre T_α , une somme de cosinus et de sinus apparaît, ce qui explique pourquoi la sensibilité $S_p^{T_\alpha}$ est décalée par rapport aux deux autres sensibilités de la pression (voir la figure 6.7)

$$S_p^{T_\alpha} = \frac{\partial p}{\partial T_\alpha} \approx x \rho \alpha U_0 \frac{2\pi}{T_\alpha^2} \left(\frac{2\pi t}{T_\alpha} \sin \frac{2\pi t}{T_\alpha} - \cos \frac{2\pi t}{T_\alpha} \right) \quad (6.13)$$

En particulier, on voit que cette sensibilité a une amplitude d'oscillation croissante à cause de la présence de t devant le sinus.

6.4.2 Sensibilité de la vitesse

Sur la figure 6.7 nous avons montré l'évolution avec le temps des sensibilités de la vitesse en un point. Il est également intéressant de voir leur distribution spatiale. Nous donnons donc à la figure 6.8 les contours de valeur constante pour les vitesses u et v et leurs sensibilités aux trois paramètres α , T_α et U_0 . Les contours correspon-

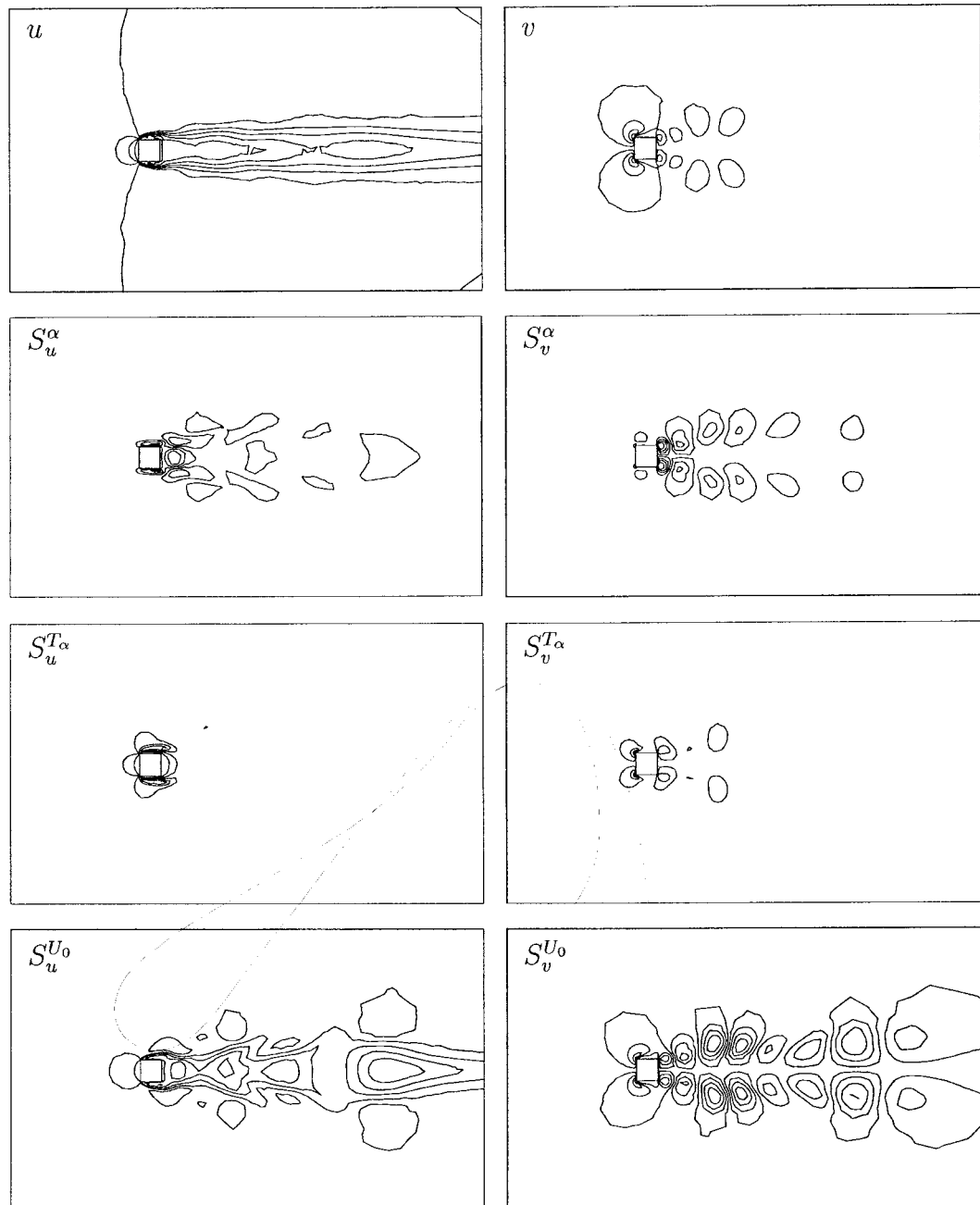


Figure 6.8 Isovaleurs pour la vitesse et les sensibilités de la vitesse à $t = 10$

dant à dix valeurs entre le minimum et le maximum pour chacune des variables sont tracés. Le temps de la figure est $t = 10$, ce qui nous situe (selon la figure 6.7) dans la période où les sensibilités S_v sont presque nulles.

On observe que dans ce cas (à $t = 10$) les solutions pour l'écoulement et pour les sensibilités sont symétriques.

Parmi les trois paramètres, la sensibilité à U_0 a la structure la plus "riche". Changer la valeur de ce paramètre revient à modifier le nombre de Reynolds de l'écoulement. Les contours de $S_v^{U_0}$ représentent des îlots de valeurs positive ou négative en alternance (malheureusement, on n'a pas pu montrer cela sur les graphiques). On reconnaît dans leur structure les tourbillons de l'écoulement. Une augmentation de U_0 (c'est-à-dire du nombre de Reynolds) fait augmenter leur intensité en rapprochant en même temps les tourbillons vers la ligne centrale du sillage (l'épaisseur du sillage diminue).

On remarque également que les sensibilités aux paramètres U_0 et α ont une structure semblable dans le sens où pour les deux paramètres, l'effet d'une perturbation est ressenti surtout dans le sillage en aval de l'obstacle. Ceci est normal étant donné que ces deux paramètres contrôlent la vitesse de l'écoulement – U_0 , la valeur moyenne et α , l'amplitude d'oscillation de l'écoulement amont.

Finalement, la distribution de la sensibilité au paramètre T_α est différente des deux autres. Ce paramètre a beaucoup plus d'influence sur l'écoulement dans la zone proche autour de l'obstacle que dans son sillage.

6.5 Application des sensibilités

Comme avec l'équation de conduction, nous pouvons nous servir des sensibilités pour faire une analyse d'incertitude ou pour calculer des solutions voisines. Nous allons nous limiter dans cette section à étudier l'effet de deux des trois paramètres présentés jusqu'ici, notamment la vitesse moyenne U_0 et l'amplitude de l'oscillation α .

6.5.1 Analyse d'incertitude

À titre d'exemple on suppose que la vitesse U_0 est connue avec une marge d'incertitude de 2%, et l'amplitude de pulsation α , avec une marge d'incertitude de 5%. Pour savoir dans quelle plage varie la solution pour l'écoulement dans ce cas, il suffit d'utiliser le développement de Taylor au premier ordre comme nous l'avons fait avec la température. Tout de même, à la différence de ce qui a été fait précédemment, ici nous allons varier les paramètres un à la fois. Ainsi, on obtient pour les estimation des marges d'incertitude sur les vitesses :

- pour $\alpha = 0.4 \pm 5\% \alpha = 0.4 \pm 0.02$,

$$u(\mathbf{x}, t) \in u(\mathbf{x}, t; \alpha = 0.4) \pm \Delta u, \quad \Delta u = 0.02 \times |S_u^\alpha| \quad (6.14)$$

$$v(\mathbf{x}, t) \in v(\mathbf{x}, t; \alpha = 0.4) \pm \Delta v, \quad \Delta v = 0.02 \times |S_v^\alpha|; \quad (6.15)$$

- pour $U_0 = 1 \pm 2\% U_0 = 1 \pm 0.02$,

$$u(\mathbf{x}, t) \in u(\mathbf{x}, t; U_0 = 1) \pm \Delta u, \quad \Delta u = 0.02 \times |S_u^{U_0}| \quad (6.16)$$

$$v(\mathbf{x}, t) \in v(\mathbf{x}, t; U_0 = 1) \pm \Delta v, \quad \Delta v = 0.02 \times |S_v^{U_0}|. \quad (6.17)$$

Les figures 6.9 et 6.10 montrent ces résultats en deux points de mesure. D'abord, le point $(x = 2, y = 0)$, qui se trouve sur l'axe de symétrie de l'obstacle. Nous avons décidé d'utiliser également un deuxième point $(x = 2, y = -0.7)$, déplacé verticalement par rapport au premier, afin de pouvoir mieux juger de la marge d'incertitude sur la vitesse v (qui n'est pas nulle en ce point). Notons aussi, qu'à la différence des résultats présentés précédemment, aux figures 6.9 et 6.10 le signal est montré jusqu'au temps $t = 36$ (pendant neuf périodes T_α au lieu de six). Notre but est de voir ce qui arrive avec les prédictions des sensibilités quand l'écoulement subit une transition et ne se trouve plus dans un état périodique établi.

On observe que jusqu'au temps $t = 20$ (et même plus loin pour la vitesse u), les plages de variation des vitesses dues à l'incertitude sur n'importe quel des deux paramètres, sont très serrées. Ceci correspond à l'intervalle de temps où le comportement de l'écoulement est périodique et dicté par la pulsation de l'écoulement à l'entrée.

Après $t = 20$, les plages de variation s'élargissent, ce qui indique que l'écoulement devient plus sensible. Cette augmentation d'incertitude sur les vitesses est modérée pour le paramètre α et beaucoup plus forte pour U_0 , ce qui montre que l'écoulement devient très sensible à ce paramètre. Pour $t > 30$, les plages de variation de la vitesse pour une incertitude de 2% sur U_0 sont même telles que l'on peut se demander jusqu'à quel point elles sont représentatives du vrai comportement du système.

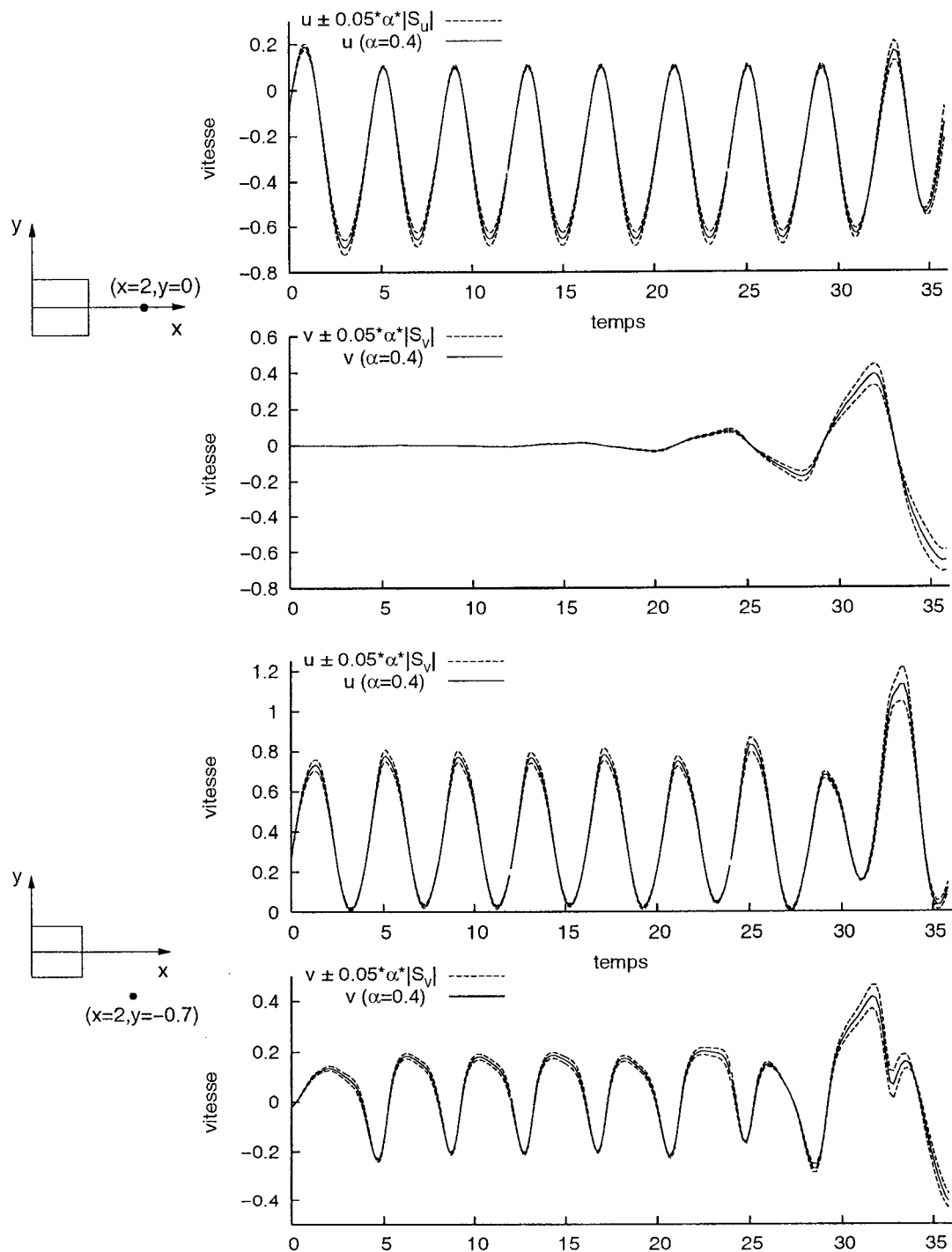


Figure 6.9 Marge d'incertitude sur les vitesses u et v pour $\alpha = 0.4 \pm 0.02$ ($\Delta\alpha = 5\%$) en deux points de mesure : $(x=2, y=0)$ en haut, et $(x=2, y=-0.7)$ en bas

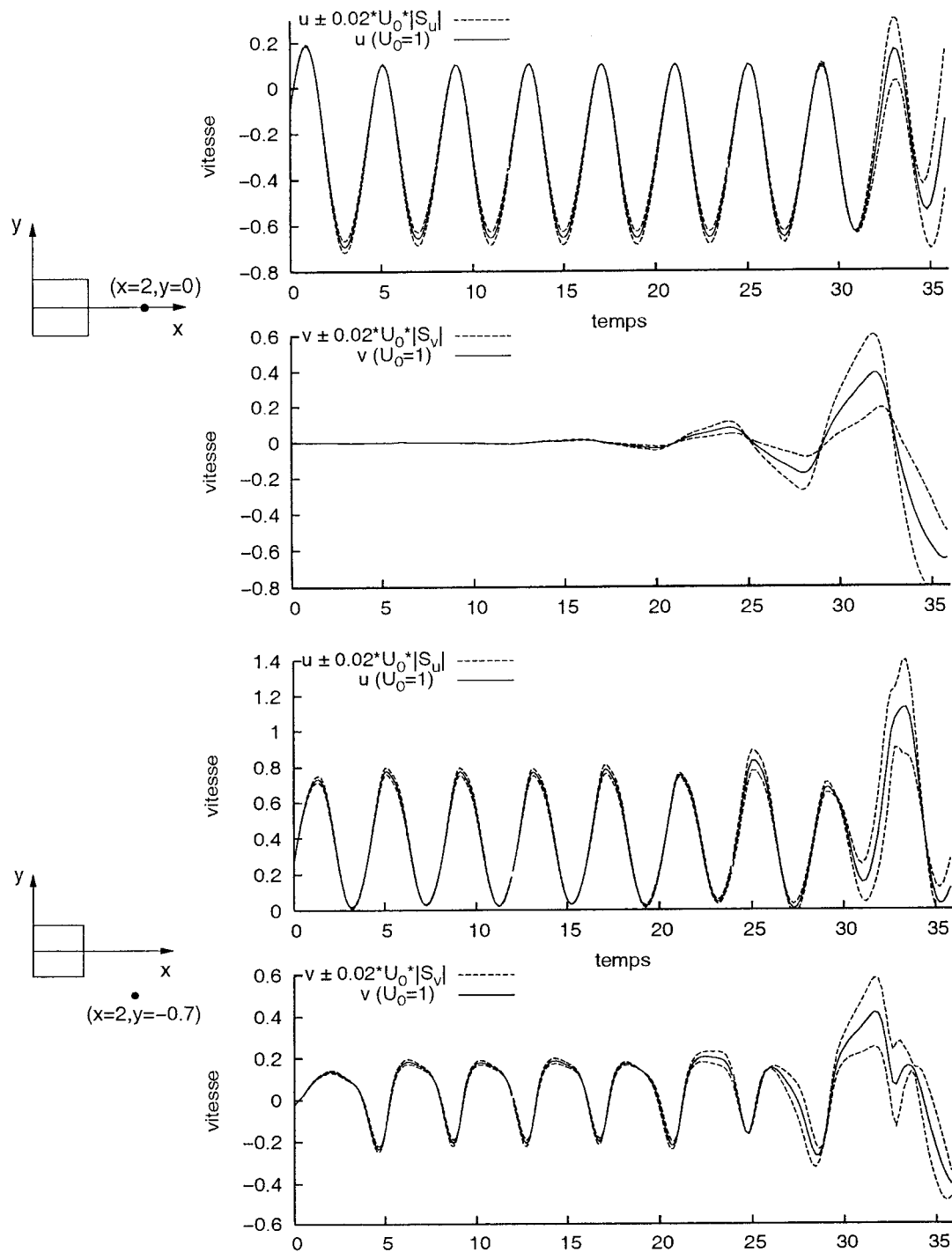


Figure 6.10 Marge d'incertitude sur les vitesses u et v pour $U_0 = 1 \pm 0.02$ ($\Delta U_0 = 2\%$) en deux points de mesure : $(x = 2, y = 0)$ en haut, et $(x = 2, y = -0.7)$ en bas

6.5.2 Calcul de solutions voisines

Afin de répondre à la question posée à la fin de la section précédente, nous avons extrapolé les solutions voisines correspondant à une vitesse moyenne U_0 augmentée de 2% ($U_0 = 1.02$), et à une amplitude d'oscillation α augmentée de 5% ($\alpha = 0.42$). Ces extrapolations à l'aide des sensibilités sont comparées aux vraies solutions pour ces valeurs des paramètres aux figures 6.11 et 6.12. De nouveau, les résultats aux deux points de mesure ($x = 2, y = 0$) et ($x = 2, y = -0.7$) sont montrés pendant neuf périodes T_α .

On voit que, comme on pouvait s'attendre, les solutions extrapolées, pour α et pour U_0 , sont très proches, même superposées aux vraies solutions pendant l'intervalle où le comportement du système est dicté par l'écoulement pulsé ($5 < t < 25$). Pendant la période de transition, les solutions voisines obtenues pour le paramètre α s'éloignent légèrement des vraies solutions mais leur forme est en général bien approchée.

En ce qui concerne le paramètre U_0 , le comportement des vitesses, et surtout celui de la vitesse v , est assez mal prédit. Ceci montre que l'extrapolation linéaire qui fonctionne très bien pendant les premières périodes de la simulation, n'est plus valide lorsque l'écoulement devient asymétrique. La sensibilité au paramètre U_0 perd donc un peu de sa capacité de prédire le comportement de l'écoulement pour des petites perturbations. Toutefois, une autre propriété intéressante de cette sensibilité mérite d'être retenue. Il s'agit du fait que le changement dans le comportement de la sensibilité $S_v^{U_0}$ (à la figure 6.7) est advenu beaucoup plus tôt et de façon beaucoup plus marquée que dans l'écoulement. Cette sensibilité semble prédire la transition dans l'écoulement vers un état asymétrique avec allée de Von Karman.

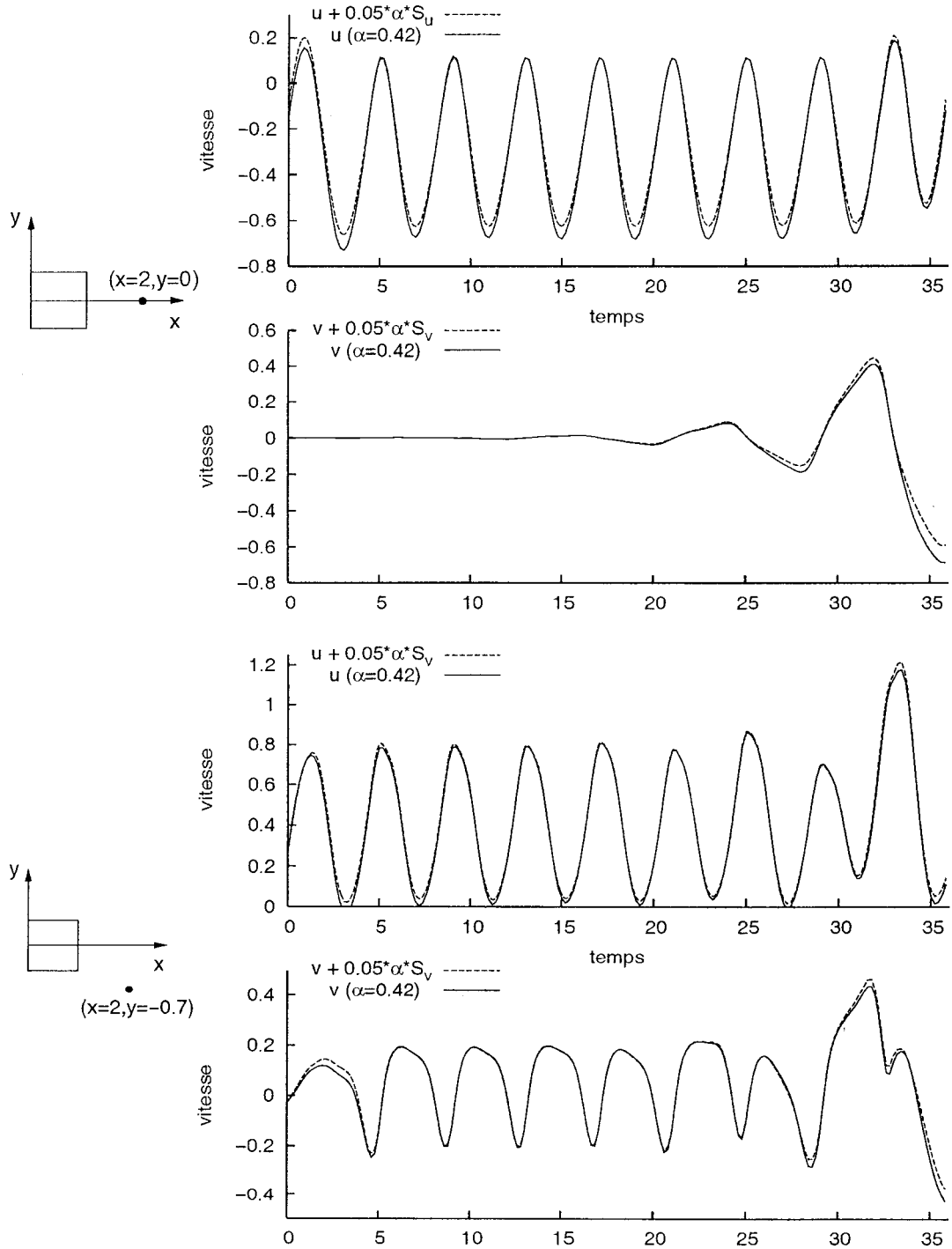


Figure 6.11 Solutions extrapolées pour les vitesses u et v pour $\alpha = 0.42$ ($\Delta\alpha = 5\%$) en deux points de mesure : $(x=2, y=0)$ en haut, et $(x=2, y=-0.7)$ en bas

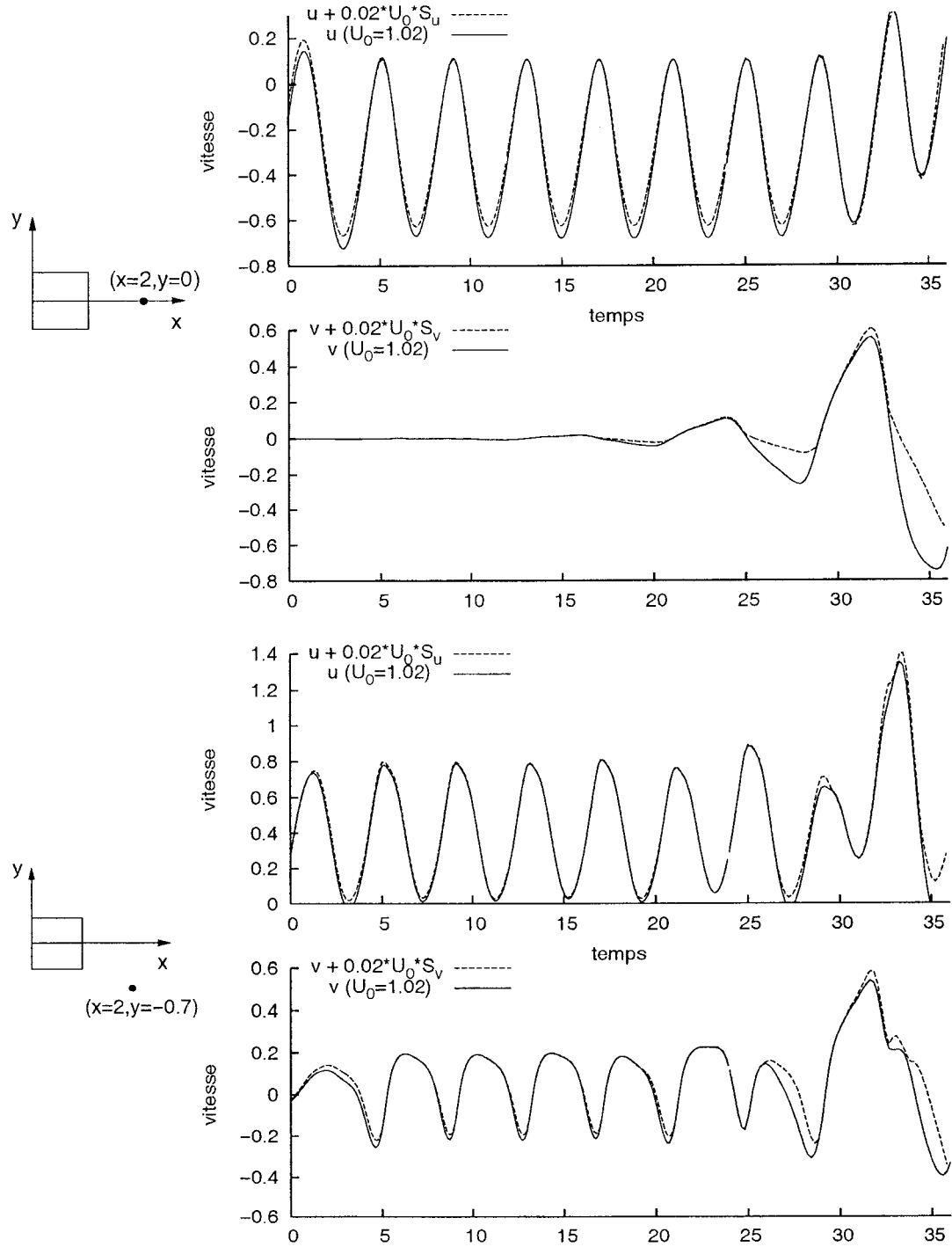


Figure 6.12 Solutions extrapolées pour les vitesses u et v pour $U_0 = 1.02$ ($\Delta U_0 = 2\%$) en deux points de mesure : $(x = 2, y = 0)$ en haut, et $(x = 2, y = -0.7)$ en bas

Jusqu'ici nous avons présenté uniquement des solutions voisines en un point en fonction du temps.

Il est possible également d'extrapoler des profils de vitesse à un temps donné. La figure 6.13 donne les solutions voisines pour les profils de la vitesse transversale v en trois positions : $x = 2, 4, 6$. Ces solutions sont obtenues à l'aide de la sensibilité $S_v^{U_0}$ pour la même perturbation de U_0 que précédemment ($\Delta U_0 = 2\%$). Nous montrons en parallèle les solutions voisines à deux temps différents : en $t_1 = 15$, qui correspond à un minimum de la pulsation à l'entrée, et en $t_3 = 17$, qui correspond à un maximum de la pulsation. On remarque qu'en général, les solutions extrapolées au temps t_3 sont meilleures (c'est-à-dire plus proches des vraies solutions) qu'au temps t_1 . Ceci confirme une autre observation que nous pouvions faire lors de l'analyse d'incertitude – sur la figure 6.10, on voit que les marges d'incertitude sur la vitesse sont plus importantes quand la vitesse u est dans son minimum. En ce qui concerne la position en x des profils, on note que plus on s'éloigne de l'obstacle, plus la solution voisine diffère de la vraie solution. Ceci peut être tout de même attribué à la taille insuffisante du domaine de calcul.

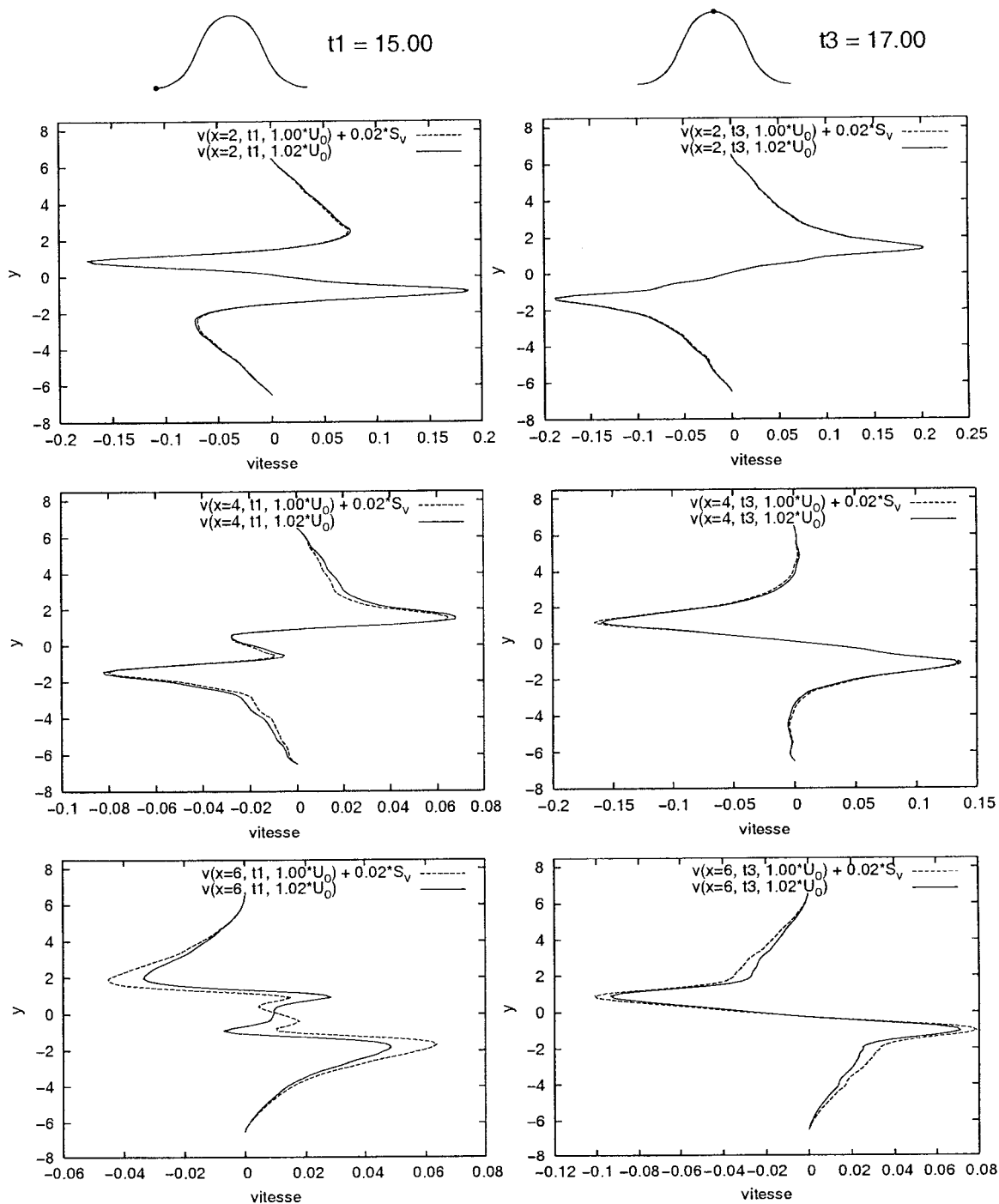


Figure 6.13 Profils extrapolés pour la vitesse v pour $U_0 = 1.02$ ($\Delta U_0 = 2\%$) en trois points de mesure : $x = 2$ (première ligne), $x = 4$ (deuxième ligne) et $x = 6$ (troisième ligne). La colonne à gauche correspond à $t = 15$ et celle de droite, à $t = 17$

CONCLUSION

En conclusion de ce mémoire, nous pouvons affirmer que les deux objectifs principaux posés au début ont été atteints. D'abord, nous avons développé les équations générales des sensibilités pour des problèmes de conduction et d'écoulements visqueux laminaires dépendant du temps. Pour cela, nous avons suivi l'approche des sensibilités continues, selon laquelle les équations pour les variables d'état (conduction ou Navier-Stokes) sont différenciées par rapport au paramètre de design avant d'être discrétisées. Cette approche a l'avantage de traiter avec la même aisance des paramètres de valeur et de forme.

Ensuite, nous avons implanté la résolution des ces équations instationnaires par la méthode des éléments finis semi-discrète. Pour la discrétisation spatiale, nous avons utilisé des éléments finis quadratiques. Pour la discrétisation temporelle, notre choix s'est arrêté sur le θ -schéma, qui nous permet d'avoir un schéma d'intégration en temps de premier ou de deuxième ordre selon la valeur de θ . En ce qui concerne la résolution des systèmes d'équations algébriques, les techniques déjà implantées pour la résolution des équations stationnaires ont été utilisées.

Le code ainsi construit a été vérifié sur des problèmes avec des solutions analytiques. En effectuant un raffinement du maillage et du pas de temps synchronisé, nous avons montré que l'ordre de précision observé est en accord avec la théorie. Pour des éléments quadratiques, l'erreur diminue asymptotiquement en h^2 , l'erreur temporelle est de premier ou de deuxième ordre en Δt selon le schéma d'intégration utilisé.

Deux applications en régime instationnaire ont été présentées dans la suite. La première étudiait la réponse thermique d'un matériau dont les propriétés physiques

dépendent linéairement de la température. La seconde, concernait l'écoulement instationnaire autour d'un obstacle carré immergé dans un écoulement pulsé. Dans les deux cas, une analyse des sensibilités a été effectuée.

La contribution scientifique du présent mémoire se situe premièrement dans l'extension à des problèmes dépendant du temps du code d'éléments finis de Hétu ^[14], Ilinca ^[15] et Turgeon ^[29] jusqu'ici stationnaire. Deuxièmement, nous avons fait un premier pas dans l'analyse de sensibilité pour des écoulements instationnaires. Des études plus approfondies peuvent montrer d'autres applications intéressantes et pertinentes de cet outil. En ce qui concerne les améliorations possibles du code, l'utilisation d'un schéma d'intégration en temps plus précis pour les équations de l'écoulement est souhaitable. Une adaptation du maillage à la solution instationnaire (écoulement et sensibilités) serait aussi très utile. Quant aux applications, une suite logique de ce mémoire est l'application des sensibilités pour le contrôle d'écoulements.

RÉFÉRENCES

- [1] ANDERSON W. K., NIELSEN E., Sensitivity Analysis for Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes Using Complex Variables, *AIAA Journal*, vol. 39(1), 56-63, January (2001)
- [2] BISCHOF C., CARLE A., CORLISS G., GRIENWANK A., HOVELAND P., ADIFOR : Generating Derivative Codes from Fortran Programs, *Scientific Programming*, vol. 1(1), 11-29 (1992)
- [3] BLACKWELL B. F., DOWDING K. J., COCHRAN R. J., DOBRANICH D., Utilization of Sensitivity Coefficients to Guide the Design of a Thermal Battery, in *Proceedings of 1998 ASME/IMECE*, Anaheim CA, USA, vol. 361-5, 73-82 (1998)
- [4] CROUZEIX M., RAVIART P. A., Conforming and Nonconforming Finite Element Methods for Solving the Stationary Stokes Equations, *R. A. I. R. O.*, vol. 7 (R-3), 33-76 (1973)
- [5] CUVELIER C., SEGAL A., VAN STEENHOVEN A. A., *Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations*, D. Reidel Publishing Company (1986)
- [6] DEMS K., ROUSSELET B., Sensitivity Analysis for Transient Heat Conduction in a Solid Body - Part I: External Boundary Modification, *Structural Optimization*, vol.17, 36-45 (1999)
- [7] DEMS K., ROUSSELET B., Sensitivity Analysis for Transient Heat Conduction in a Solid Body - Part II: Interface Modification, *Structural Optimization*, vol.17, 46-54 (1999)

- [8] DOWDING K. J., BLACKWELL B. F., Sensitivity Analysis for Nonlinear Heat Conduction, *Journal of Heat Transfer*, vol. 123, February (2001)
- [9] GRESHO P. M., SANI R. L., *Incompressible Flows and the Finite Element Method*, John Wiley and Sons, vol. 1 et 2 (1998)
- [10] GU Y. X., CHEN B. S., ZHANG H. W., GRANDHI R. V., A Sensitivity Analysis Method for Linear and Nonlinear Transient Heat Conduction with Precise Time Integration, *Struct Multidisc Optim*, vol. 24, 23-37 (2002)
- [11] GUNZBURGER M., Sensitivities in computational methods for optimal flow control, *Computational Methods for Optimal Design and Control*, Birkhauser, Boston, 197-236 (1998)
- [12] GUNZBURGER M. , HOU L., SVOBODNY T., *Optimal control and optimization of viscous, incompressible flows*, Incompressible Computational Fluid Dynamics: Trends and Advances, Cambridge, 109-150 (1992)
- [13] HAUG E. J., CHOI K. K., KOMKOV V., *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 177, Academic Press (1986)
- [14] HÉTU J.-F., *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements visqueux incompressibles*, Thèse de Doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada (1991)
- [15] ILINCA F., *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements turbulents*, Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada (1995)

- [16] ILINCA F., *Application d'une méthode d'éléments finis adaptative à des écoulements visqueux*, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada (1993)
- [17] KLEIBER M., *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics : Theory and Finite Element Computations*, in collaboration with H. Antúnez, T. D. Hien, P. Kowalczyk, John Wiley and Sons (1997)
- [18] KLEIBER M., HIEN T. D., *The Stochastic Finite Element Method : Basic Perturbation Technique and Computer Implementation*, John Wiley and Sons (1992)
- [19] KLEIBER M., SLUZALEC A., Material Derivative and Control Volume Approaches to Shape Sensitivity Analysis of Nonlinear Transient Thermal Problems, *Structural Optimization*, vol. 11, 56-63 (1996)
- [20] LI X., *A Variational Finite Element Method for Fully-coupled Nonlinear Fluid-Solid Interaction*, Thèse de doctorat, Carnegie Mellon University, Pittsburgh PA, USA (1995)
- [21] MARTINS J. R. R. A., KROO I. M., ALONSO J. J., An Automated Method For Sensitivity Analysis Using Complex Variables, *AIAA-2000-0689* (2000)
- [22] PELLETIER D., FORTIN A., Are FEM solutions of incompressible flows really incompressible? (or how simple flows can cause headaches), *Inter. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 9(1), 99-112 (1989)
- [23] PELLETIER D., ROACHE P. J., CFD Code Verification and the Method of Manufactured Solutions, *10th Annual Conference of the CFD Society of Canada*, June 9-11, Windsor, Canada (2002)

- [24] REDDY J. N., GARTLING D. K., *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, CRC Press (1994)
- [25] ROACHE P. J., *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*, Hermosa publishers, Albuquerque, New Mexico (1998)
- [26] SOHANKAR A., NORBERG C., DAVIDSON L., Low-Reynolds-Number Flow Around a Square Cylinder at Incidence: Study of Blockage, Onset of Vortex Shedding and Outlet Boundary Condition, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 26, 39-56 (1998)
- [27] SOHANKAR A., NORBERG C., DAVIDSON L., Numerical Simulation of Flow Past a Square Cylinder, *3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference*, July 18-23, San Francisco, USA (1998)
- [28] TOCCI M.D., Sensitivity Analysis of Large-scale Time Dependent PDEs, *Applied Numerical Mathematics*, vol. 37, 109-125 (2001)
- [29] TURGEON E., *Méthode d'éléments finis adaptative pour la résolution des sensibilités d'écoulements*, Thèse de Doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada (2001)
- [30] TURGEON E., *Application d'une méthode d'éléments finis adaptative à des écoulements axisymétriques*, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada (1997)
- [31] VON SCHWIND J. J., *Geophysical Fluid Dynamics for Oceanographers*, Prentice-Hall Inc., NJ (1980)

- [32] WU J., ZHU J. Z., SZMELTER J., ZIENKIEWICZ O. C., Error Estimation and Adaptivity in Navier-Stokes Incompressible Flows, *Computational Mechanics*, vol. 6, 259-270 (1990)
- [33] ZDRAVKOVICH M. M., *Flow Around Circular Cylinders, vol 1 : fundamentals*, Oxford University Press (1997)
- [34] ZDRAVKOVICH M. M., *Flow Around Circular Cylinders, vol 2 : applications*, Oxford University Press (2003)

ANNEXE I

**DISCRÉTISATION SPATIALE DE LA FORMULATION FAIBLE
DES ÉQUATIONS DES SENSIBILITÉS POUR NAVIER-STOKES**

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{S}_u \\ \dot{S}_v \\ \dot{S}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{11} + \tilde{\mathcal{N}}_1 & \mathcal{K}_{12} & \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{K}_{21} & \mathcal{K}_{22} + \tilde{\mathcal{N}}_2 & \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_1^T & \mathcal{C}_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_u \\ S_v \\ S_p \end{bmatrix} + \\
 \begin{bmatrix} \mathcal{M}'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{K}'_{11} + \mathcal{N}'_1 & \mathcal{K}'_{12} & 0 \\ \mathcal{K}'_{21} & \mathcal{K}'_{22} + \mathcal{N}'_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}'_1 \\ \mathcal{F}'_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{M}_1)_{ij} &= \int_{\Omega} \rho \phi_i^{S_u} \phi_j^{S_u}, \quad (\mathcal{M}_2)_{ij} = \int_{\Omega} \rho \phi_i^{S_v} \phi_j^{S_v}, \\
 (\mathcal{M}'_1)_{ij} &= \int_{\Omega} \rho' \phi_i^{S_u} \phi_j^u, \quad (\mathcal{M}'_2)_{ij} = \int_{\Omega} \rho' \phi_i^{S_v} \phi_j^v, \\
 (\mathcal{K}_{12})_{ij} &= (\mathcal{K}_{21})_{ij} = \int_{\Omega} \mu \frac{\partial \phi_i^{S_u}}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^{S_v}}{\partial x}, \\
 (\mathcal{K}_{11})_{ij} &= \int_{\Omega} 2\mu \frac{\partial \phi_i^{S_u}}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^{S_u}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \phi_i^{S_u}}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^{S_u}}{\partial y}, \\
 (\mathcal{K}_{22})_{ij} &= \int_{\Omega} 2\mu \frac{\partial \phi_i^{S_v}}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^{S_v}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \phi_i^{S_v}}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^{S_v}}{\partial x}, \\
 (\mathcal{K}'_{12})_{ij} &= \int_{\Omega} \mu' \frac{\partial \phi_i^{S_u}}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^v}{\partial x}, \quad (\mathcal{K}'_{21})_{ij} = \int_{\Omega} \mu' \frac{\partial \phi_i^{S_v}}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^u}{\partial y}, \\
 (\mathcal{K}'_{11})_{ij} &= \int_{\Omega} 2\mu' \frac{\partial \phi_i^{S_u}}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^u}{\partial x} + \mu' \frac{\partial \phi_i^{S_u}}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^u}{\partial y}, \\
 (\mathcal{K}'_{22})_{ij} &= \int_{\Omega} 2\mu' \frac{\partial \phi_i^{S_v}}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^v}{\partial y} + \mu' \frac{\partial \phi_i^{S_v}}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^v}{\partial x},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathcal{N}}_1)_{ij} &= \int_{\Omega} \rho \left(\sum_{k=1}^{N^u} u_k \phi_k^u \right) \frac{\partial \phi_i^{S_u}}{\partial x} \phi_j^{S_u} + \rho \left(\sum_{k=1}^{N^v} v_k \phi_k^v \right) \frac{\partial \phi_i^{S_u}}{\partial y} \phi_j^{S_u} , \\
(\tilde{\mathcal{N}}_2)_{ij} &= \int_{\Omega} \rho \left(\sum_{k=1}^{N^u} u_k \phi_k^u \right) \frac{\partial \phi_i^{S_v}}{\partial x} \phi_j^{S_v} + \rho \left(\sum_{k=1}^{N^v} v_k \phi_k^v \right) \frac{\partial \phi_i^{S_v}}{\partial y} \phi_j^{S_v} , \\
(\mathcal{N}'_1)_{ij} &= \int_{\Omega} \left(\rho' \left(\sum_{k=1}^{N^u} u_k \phi_k^u \right) + \rho \left(\sum_{k=1}^{N^{S_u}} S_{u_k} \phi_k^{S_u} \right) \right) \frac{\partial \phi_i^u}{\partial x} \phi_j^{S_u} + \\
&\quad \left(\rho' \left(\sum_{k=1}^{N^v} v_k \phi_k^v \right) + \rho \left(\sum_{k=1}^{N^{S_v}} S_{v_k} \phi_k^{S_v} \right) \right) \frac{\partial \phi_i^u}{\partial y} \phi_j^{S_u} , \\
(\mathcal{N}'_2)_{ij} &= \int_{\Omega} \left(\rho' \left(\sum_{k=1}^{N^u} u_k \phi_k^u \right) + \rho \left(\sum_{k=1}^{N^{S_u}} S_{u_k} \phi_k^{S_u} \right) \right) \frac{\partial \phi_i^v}{\partial x} \phi_j^{S_v} + \\
&\quad \left(\rho' \left(\sum_{k=1}^{N^v} v_k \phi_k^v \right) + \rho \left(\sum_{k=1}^{N^{S_v}} S_{v_k} \phi_k^{S_v} \right) \right) \frac{\partial \phi_i^v}{\partial y} \phi_j^{S_v} , \\
(\mathcal{C}_1)_i &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i^{S_u}}{\partial x} \phi_j^{S_p} , \quad (\mathcal{C}_2)_i = - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i^{S_v}}{\partial y} \phi_j^{S_p} , \\
(\mathcal{F}'_1)_i &= \int_{\Omega} f'_x \phi_i^{S_u} - \int_{\Gamma_N} \frac{dF_x^N}{da} \phi_i^{S_u} , \quad (\mathcal{F}'_2)_i = \int_{\Omega} f'_y \phi_i^{S_v} - \int_{\Gamma_N} \frac{dF_y^N}{da} \phi_i^{S_v} .
\end{aligned}$$