

In compliance with the  
Canadian Privacy Legislation  
some supporting forms  
may have been removed from  
this dissertation.

While these forms may be included  
in the document page count,  
their removal does not represent  
any loss of content from the dissertation.



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PRÉDICTION DE LA RÉPONSE D'UN SYSTÈME  
SOU MIS À DES FORCES HARMONIQUES OU ALÉATOIRES

JACQUES DESFOSSÉS

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

MAI 2003



National Library  
of Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

Acquisitions et  
services bibliographiques

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file   Votre référence*

*ISBN: 0-612-86393-X*

*Our file   Notre référence*

*ISBN: 0-612-86393-X*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

PRÉDICTION DE LA RÉPONSE D'UN SYSTÈME  
SOUMIS À DES FORCES HARMONIQUES OU ALÉATOIRES

présenté par : DESFOSSÉS Jacques

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. SHIRAZI-ADL Aboulfazl, Ph.D., président

M. LAKIS Aouni A., Ph.D., membre et directeur de recherche

M. TREMBLAY Philippe, B.Ing., membre et directeur de recherche

M. ROUSSELET Jean, Ph.D., membre

**À mes parents, Jocelyne et Gérard, qui m'ont toujours encouragé à persévérer.**

## REMERCIEMENTS

Plusieurs intervenants ont contribué à l'accomplissement de ce projet de maîtrise et tous l'ont fait de façon à simplifier et stimuler mon travail. Toutefois, c'est MAYA technologies en transfert de chaleur que je tiens d'abord à remercier. Cette PME spécialisée, entre autres, dans l'analyse par éléments finis, a consenti à m'accorder ce projet, les délais nécessaires et les fonds demandés afin que je puisse l'accomplir durant ma maîtrise. Aussi, je remercie le CRSNG qui m'a octroyé une bourse à incidence industrielle et m'a, par le fait même, permis de me consacrer entièrement à ce projet.

J'adresse mes plus sincères remerciements à mon directeur de maîtrise, Monsieur Aouni A. Lakis, pour avoir été ouvert et réceptif à toutes les contraintes qu'un projet à incidence industrielle peut faire survenir et pour m'avoir accordé sa confiance et son support.

Je ne remercierai jamais assez Philippe Tremblay, mon superviseur en entreprise, et Louis Donato, ingénieur senior, pour leur support constant et leur apport important à ce projet tant sur le plan technique que moral. Ils ont été pour moi une source de motivation constante.

Un merci particulier à Maude, ma compagne de tous les jours, pour ses suggestions réfléchies et pour son écoute continuelle.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente la théorie et l'application de deux logiciels d'analyse structurale par éléments finis développés pour MAYA technologies en transfert de chaleur. Ces logiciels calculent la réponse de structures déterministes à une excitation harmonique de la base et à des excitations aléatoires stationnaires et *ergodiques*. Ils nécessitent l'apport de données via un fichier usager ainsi que les résultats de l'analyse modale d'un modèle d'éléments finis par l'intermédiaire d'un fichier binaire MSC/NASTRAN. Une approche modale est employée afin de faciliter et d'accélérer les calculs, et l'amortissement est de type modal visqueux.

Le premier logiciel développé calcule la réponse en régime permanent d'une structure faiblement amortie soumise à une accélération harmonique de sa base. Les imprécisions dues à la troncature modale sont diminuées en tenant compte de la flexibilité résiduelle. Les réponses suivantes peuvent être calculées si les vecteurs propres nécessaires sont disponibles dans le fichier binaire :

- déplacements nodaux;
- vitesses nodales;
- accélérations nodales;
- forces nodales;
- forces associées aux conditions frontières (SPC);
- forces associées aux conditions cinématiques (MPC);
- forces élémentaires;
- contraintes élémentaires;
- déformations élémentaires;
- contraintes élémentaires de Von Mises;
- marges de sécurité minimales dans les éléments.

Les calculs ont été validés avec le logiciel MSC/NASTRAN duquel le fichier binaire est obtenu. Ce logiciel simule, entre autres, les tests sinus souvent effectués dans le domaine de l'aérospatiale pour considérer l'effet des excitations ayant de basses fréquences générées au décollage et durant les différentes phases de l'envol.

Le second logiciel développé calcule la valeur efficace (RMS) d'une structure soumise à plusieurs excitations aléatoires stationnaires et *ergodiques*. Ces excitations aléatoires sont fournies par l'utilisateur sous forme de densités spectrales de puissance (DSP) qui peuvent être corrélées entre elles. La densité spectrale de puissance de la réponse calculée pour chaque degré de liberté peut être précise, avec la combinaison quadratique complète (CQC) ou approximative, avec le radical de la somme des carrés (SRSS). Les valeurs efficaces pour les déplacements, vitesses et accélérations aux nœuds sont obtenues en intégrant analytiquement ou numériquement les DSP. Les graphes des différentes DSP peuvent être automatiquement créés et visualisés à l'aide d'une page HTML ou dans Excel. Ce logiciel peut calculer, par exemple, la réponse d'une structure soumise à une excitation acoustique une fois les DSP de l'excitation connues. Il peut aussi être utilisé pour calculer la réponse d'une coque dans un champ de pressions aléatoires.

Ces deux logiciels font partie intégrante d'une série de processeurs d'analyse structurale développés par MAYA pour faciliter le travail des consultants dans ce domaine.

## ABSTRACT

This thesis presents the theoretical background and the application of two finite element structural analysis programs developed for MAYA Heat Transfer Technologies. These programs compute the response of deterministic structures to a harmonic base excitation and to stationary ergodic random excitations. Each software requires input data obtained from a user file as well as some modal analysis results of the finite element model computed by MSC/NASTRAN and stored in the form of a binary file. A modal approach with viscous damping is used.

The first software computes the response of a lightly damped system to a harmonic base acceleration. The inaccuracies related to the truncation of the modal solution are partly corrected using the residual flexibility method. The following responses can be computed if the corresponding eigenvectors are present in the binary file:

- nodal displacements;
- nodal velocities;
- nodal accelerations;
- grid point forces;
- single-point constraint forces;
- multipoint constraint forces;
- element forces;
- element stresses;
- element strains;
- Von Mises stresses;
- minimum margins of safety.

The results were validated with MSC/NASTRAN from which the binary file is obtained. This software can simulate the sinusoidal vibration tests often required in the aerospace industry.

The second software computes the stationary ergodic response of a structure to random excitations. The user specifies these random excitations as power spectral densities (PSD) that can be correlated. The power spectral density of the response can be precise, if computed with the complete quadratic combination method (CQC), or approximate, if computed with the square root of the sum of squares method (SRSS). The root mean square (RMS) values for the nodal displacements, velocities and accelerations are output, for each degree of freedom, after integrating numerically or analytically the corresponding power spectral densities. This software can compute, for example, the response to an acoustic excitation when the nodal power spectral densities of the excitation are known. It can also be used to predict the response of a cylindrical shell to an arbitrary random pressure field.

Both programs are part of a structural analysis toolkit developed by MAYA Heat Transfer Technologies to facilitate the work of engineers working in this domain.

## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                          |        |
|--------------------------------------------------------------------------|--------|
| DÉDICACE .....                                                           | iv     |
| REMERCIEMENTS .....                                                      | v      |
| RÉSUMÉ .....                                                             | vi     |
| ABSTRACT .....                                                           | viii   |
| TABLE DES MATIÈRES .....                                                 | x      |
| LISTE DES ANNEXES .....                                                  | xiii   |
| LISTE DES TABLEAUX .....                                                 | xiv    |
| LISTE DES FIGURES .....                                                  | xv     |
| LISTE DES SYMBOLES .....                                                 | xvi    |
| LISTE DES ABRÉVIATIONS .....                                             | xix    |
| <br>INTRODUCTION .....                                                   | <br>1  |
| <br>CHAPITRE 1 : ÉTAT DES CONNAISSANCES .....                            | <br>6  |
| 1.1 Introduction .....                                                   | 6      |
| 1.2 Excitation harmonique par la base d'un système à plusieurs DDL ..... | 7      |
| 1.2.1 Méthode directe .....                                              | 9      |
| 1.2.2 Analyse par superposition modale .....                             | 12     |
| 1.2.3 Effets de la troncature modale .....                               | 19     |
| 1.3 Excitation aléatoire .....                                           | 22     |
| 1.3.1 Processus aléatoires stationnaires et ergodiques .....             | 24     |
| 1.3.2 Réponse d'un système à plusieurs DDL .....                         | 33     |
| 1.4 Conclusion .....                                                     | 40     |
| <br>CHAPITRE 2 : OBJECTIFS DU PROJET .....                               | <br>41 |
| 2.1 Objectifs généraux .....                                             | 41     |
| 2.2 Hypothèses générales .....                                           | 42     |
| 2.3 Processeur harmonique .....                                          | 42     |
| 2.3.1 Objectifs spécifiques .....                                        | 42     |

|                                               |                                    |    |
|-----------------------------------------------|------------------------------------|----|
| 2.3.2                                         | Hypothèses spécifiques.....        | 44 |
| 2.3.3                                         | Méthodologie .....                 | 45 |
| 2.4                                           | Processeur aléatoire .....         | 46 |
| 2.4.1                                         | Objectifs spécifiques.....         | 46 |
| 2.4.2                                         | Hypothèses spécifiques.....        | 47 |
| 2.4.3                                         | Méthodologie .....                 | 47 |
| CHAPITRE 3 : DÉVELOPPEMENT DES LOGICIELS..... |                                    | 48 |
| 3.1                                           | Processeur harmonique .....        | 48 |
| 3.1.1                                         | Données externes au logiciel ..... | 49 |
| 3.1.2                                         | Calcul de la réponse .....         | 52 |
| 3.1.3                                         | Visualisation des résultats .....  | 58 |
| 3.1.4                                         | Conclusion .....                   | 60 |
| 3.2                                           | Processeur aléatoire .....         | 61 |
| 3.2.1                                         | Données externes au logiciel ..... | 62 |
| 3.2.2                                         | Calcul de la réponse .....         | 63 |
| 3.2.3                                         | Visualisation des résultats .....  | 72 |
| 3.2.4                                         | Conclusion .....                   | 74 |
| CHAPITRE 4 : VALIDATION DES RÉSULTATS .....   |                                    | 75 |
| 4.1                                           | Introduction .....                 | 75 |
| 4.2                                           | Processeur harmonique.....         | 76 |
| 4.2.1                                         | Description du modèle utilisé..... | 76 |
| 4.2.2                                         | Validation des calculs .....       | 77 |
| 4.3                                           | Processeur aléatoire .....         | 83 |
| 4.3.1                                         | Description du modèle utilisé..... | 83 |
| 4.3.2                                         | Validation des calculs .....       | 86 |
| 4.4                                           | Conclusion .....                   | 91 |

|                                              |     |
|----------------------------------------------|-----|
| CHAPITRE 5 : LIMITES DES LOGICIELS.....      | 92  |
| 5.1    Limites du processeur harmonique..... | 92  |
| 5.2    Limites du processeur aléatoire.....  | 93  |
| CONCLUSION.....                              | 95  |
| RÉFÉRENCES.....                              | 99  |
| ANNEXES .....                                | 104 |

## LISTE DES ANNEXES

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| ANNEXE I : FICHIER USAGER DU PROCESSEUR HARMONIQUE .....          | 104 |
| ANNEXE II : FICHIER RÉSULTAT ASCII DU PROCESSEUR HARMONIQUE ..... | 111 |
| ANNEXE III : GRAPHES DES RÉSULTATS DU PROCESSEUR HARMONIQUE.....  | 114 |
| ANNEXE IV : FICHIER USAGER DU PROCESSEUR ALÉATOIRE.....           | 123 |

## LISTE DES TABLEAUX

|                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tableau 2.1 : Résultats élémentaires à calculer pour chaque élément de MSC/NASTRAN..... | 44 |
| Tableau 3.1 : Résultats à requérir dans MSC/NASTRAN pour le processeur harmonique.....  | 50 |
| Tableau 4.1 : Fréquences naturelles de SCISAT-1 .....                                   | 77 |
| Tableau 4.2 : Spécifications de l'analyse de SCISAT-1 .....                             | 78 |
| Tableau 4.3 : Détail des résultats en accélération pour le nœud 10049 (DDL X) .....     | 80 |
| Tableau 4.4 : Sommaire des erreurs relatives pour les résultats nodaux.....             | 81 |
| Tableau 4.5 : Sommaire des erreurs relatives pour les contraintes élémentaires .....    | 81 |
| Tableau 4.6 : Sommaire des erreurs relatives pour les forces élémentaires.....          | 82 |
| Tableau 4.7 : Sommaire des erreurs relatives pour les déformations élémentaires.....    | 82 |
| Tableau 4.8 : Spécifications de la plaque mince.....                                    | 83 |
| Tableau 4.9 : Fréquences naturelles de la plaque en deçà de 1000 Hz.....                | 84 |
| Tableau 4.10 : Densités spectrales des forces d'excitation .....                        | 84 |
| Tableau 4.11 : Densités spectrales croisées relatives à la force A.....                 | 85 |
| Tableau 4.12 : Densités spectrales croisées relatives aux forces B et C .....           | 85 |
| Tableau 4.13: Valeurs efficaces du nœud 1 pour des DSP constantes .....                 | 87 |
| Tableau 4.14 : Valeurs efficaces des nœuds 1,3 et 30.....                               | 89 |

## LISTE DES FIGURES

|                                                                                                  |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 0.1 : Exemple de requêtes pour générer des courbes dans MSC/NASTRAN .....                 | 3  |
| Figure 1.1 : Classification des excitations .....                                                | 6  |
| Figure 1.2 : Processus aléatoire.....                                                            | 24 |
| Figure 1.3 : Fonction de densité de probabilité gaussienne .....                                 | 32 |
| Figure 3.1 : Représentation schématique du fonctionnement du processeur harmonique .....         | 48 |
| Figure 3.2 : Partie du fichier usager pour le processeur harmonique .....                        | 52 |
| Figure 3.3 : Courbe de réponse en fréquence générée par gnuplot.....                             | 60 |
| Figure 3.4 : Fonctionnement du processeur aléatoire.....                                         | 61 |
| Figure 3.5 : Densité spectrale de puissance typique montrant des sommets pointus.....            | 66 |
| Figure 3.6 : Exemple de fichier de résultats du processeur aléatoire .....                       | 72 |
| Figure 3.7 : Page HTML générée par le processeur aléatoire.....                                  | 73 |
| Figure 4.1 : Satellite SCISAT-1 .....                                                            | 76 |
| Figure 4.2 : Modèle d'éléments finis de SCISAT-1 .....                                           | 77 |
| Figure 4.3 : Accélération au nœud 10049 (DDL X).....                                             | 79 |
| Figure 4.4 : Emplacement des forces d'excitation et des conditions frontières de la plaque ..... | 84 |
| Figure 4.5 : DSP au nœud 1 (DDL RX) en déplacement (gauche) et en accélération (droite).....     | 88 |
| Figure 4.6 : Variation de la valeur efficace dans la plaque (DDL Z) .....                        | 90 |

## LISTE DES SYMBOLES

### Symboles mathématiques

|                     |                                                                                      |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $[ \ ]$             | Matrice rectangulaire ou carrée                                                      |
| $\langle \ \rangle$ | Matrice diagonale                                                                    |
| $[ \ ]$             | Matrice ligne                                                                        |
| $\{ \}$             | Matrice colonne                                                                      |
| $[ \ ]^T$           | Matrice transposée                                                                   |
| $[ \ ]^{-1}$        | Matrice inverse                                                                      |
| $[ \ ]^{-T}$        | Inverse transposée : $\left([ \ ]^{-1}\right)^T \equiv \left([ \ ]^{-T}\right)^{-1}$ |
| $\bar{F}$ ou $F^*$  | Complexe conjugué du nombre complexe $F$                                             |

### Symboles latins

|                     |                                                                   |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $[C]$               | Matrice d'amortissement                                           |
| $\langle c \rangle$ | Matrice d'amortissement modal                                     |
| $c_c$               | Facteur d'amortissement critique                                  |
| d.d.l.              | Degrés de liberté du système                                      |
| $\{d\}$             | Degrés de liberté nodaux de la structure dans le domaine physique |
| $\{d_f\}$           | Degrés de liberté aux frontières de la structure                  |

|                     |                                                                           |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $\{d_i\}$           | Degrés de liberté internes de la structure                                |
| $\{F\}$             | Vecteur des forces extérieures appliquées sur la structure                |
| $H_p(\omega)$       | Fonction de transfert du mode $p$                                         |
| $j$                 | Partie imaginaire d'un nombre complexe                                    |
| $[I]$               | Matrice identité                                                          |
| $[K]$               | Matrice de rigidité                                                       |
| $[k]$               | Matrice de rigidité généralisée ou matrice de rigidité modale             |
| $[M]$               | Matrice de masse                                                          |
| $\langle m \rangle$ | Matrice de masse généralisée ou matrice de masse modale                   |
| $\{q\}$             | Degrés de liberté nodaux de la structure dans le domaine modal            |
| $Q$                 | Facteur d'amplification dynamique                                         |
| $R_{ff}(\tau)$      | Fonction d'autocorrélation pour le signal $f(t)$                          |
| $R_{fg}(\tau)$      | Fonction de corrélation croisée entre les signaux $f(t)$ et $g(t)$        |
| $S_{ff}(\omega)$    | Densité spectrale de puissance du signal $f(t)$                           |
| $S_{fg}(\omega)$    | Densité spectrale de puissance croisée entre les signaux $f(t)$ et $g(t)$ |

### Symboles grecs

|                             |                                                                  |
|-----------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $[\Theta]$                  | Matrice des modes rigides géométriques de la structure           |
| $\langle \Lambda_c \rangle$ | Matrice diagonale des valeurs propres de la structure contrainte |
| $[\phi_c]$                  | Matrice des modes propres de la structure contrainte             |

|             |                                                               |
|-------------|---------------------------------------------------------------|
| $[\Gamma]$  | Matrice des facteurs de participation modale                  |
| $\alpha$    | Pente de la DSP pour une échelle log-log                      |
| $\zeta$     | Facteur d'amortissement                                       |
| $\rho_{fg}$ | Coefficient de corrélation entre les signaux $f(t)$ et $g(t)$ |
| $\omega$    | Fréquence angulaire de l'excitation [radians/s]               |
| $\mu_x$     | Moyenne d'un processus aléatoire $x$                          |
| $\sigma_x$  | Variance d'un processus aléatoire $x$                         |
| $\Psi_x$    | Valeur quadratique moyenne d'un processus aléatoire $x$       |
| $\tau$      | Décalage temporel                                             |

## LISTE DES ABRÉVIATIONS

|      |                                                                            |
|------|----------------------------------------------------------------------------|
| CQC  | Combinaison quadratique complète ( <i>Complete Quadratic Combination</i> ) |
| DDL  | Degré de liberté                                                           |
| DMAP | <i>Direct Matrix Abstraction Program</i>                                   |
| DSP  | Densité spectrale de puissance                                             |
| MÉF  | Méthode des éléments finis                                                 |
| RMS  | Valeur efficace ou écart-type ( <i>Root Mean Square</i> )                  |
| RSC  | Radical de la somme des carrés                                             |
| SRSS | <i>Square Root of the Sum of Squares</i>                                   |
| VQM  | Valeur quadratique moyenne                                                 |

## INTRODUCTION

### Généralités

L'analyse vibratoire des structures a connu un essor considérable avec la croissance de l'industrie aérospatiale et la puissance de calcul toujours grandissante des ordinateurs disponibles. Rapidement, les structures dont il était nécessaire de vérifier l'intégrité dynamique furent testées intensivement. Au début, seule une excitation harmonique pouvait être reproduite au moyen d'une table vibrante. Ce n'est que plus tard, avec le perfectionnement des équipements, que les tests aléatoires furent introduits.

Aujourd'hui, le test sinusoïdal reste très utilisé afin de déterminer les résonances d'une structure, pour effectuer des tests de fatigue ou pour induire dans la structure les contraintes représentatives d'une excitation quelconque. On l'utilise même pour corréler les structures avec leur modélisation par éléments finis. Dans l'industrie aérospatiale, il est utilisé pour considérer l'effet des excitations à basses fréquences générées au décollage de même que durant différentes phases de l'envol comme l'arrêt des moteurs et les rafales de vent sur le lanceur. Quant aux tests aléatoires, leurs applications sont diverses et ils servent à simuler différents environnements : tremblements de terre, écoulement d'un gaz ou d'un fluide, vent, vagues, etc. Les tests diffèrent selon l'environnement qu'il faut reproduire. Les tremblements de terre, par exemple, sont simulés au moyen d'une excitation par la base comme pour le test sinusoïdal.

Très souvent, avant d'effectuer un test, un modèle mathématique est créé. Les structures complexes sont fréquemment modélisées et analysées par la méthode des éléments finis. Les différents tests sont ensuite simulés par ordinateur et l'analyse des résultats obtenus permet de mieux comprendre la structure avant même de procéder aux tests réels.

## Définition du projet

Ce mémoire de maîtrise rassemble les connaissances nécessaires à la programmation de deux logiciels d'analyse structurale par éléments finis. Le premier logiciel se limite à une accélération harmonique imposée à la base de la structure tandis que le second est consacré à des excitations aléatoires stationnaires et *ergodiques* en différents points de la structure. Ces logiciels calculent la réponse dynamique d'un modèle d'éléments finis linéaire. Les équations du mouvement d'un tel modèle peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$[M]\{\ddot{d}\} + [C]\{\dot{d}\} + [K]\{d\} = \{F\}$$

où  $[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité alors que  $\{d\}$  est le vecteur des degrés de liberté nodaux du système. Ainsi, si les forces  $\{F\}$  agissant sur le système sont connues, les déplacements peuvent être calculés. Pour ce faire, une approche modale est utilisée avec un amortissement modal visqueux. Les modes de vibration ainsi que les fréquences naturelles de la structure sont considérés connus et sont importés d'un logiciel ayant les capacités de les calculer.

## Contexte du projet

Plusieurs logiciels d'analyse par éléments finis sont aujourd'hui capables de déterminer la réponse de structures soumises à des excitations harmoniques ou aléatoires. Les plus connus sont, entre autres : ANSYS, ABAQUS, ADINA, ALGOR, I-DEAS et NASTRAN. Toutefois, la longue évolution de MSC/NASTRAN, créé à partir de COSMIC/NASTRAN développé par la NASA lors de la conquête de l'espace, lui confère une notoriété indiscutable auprès de la communauté scientifique. Cette section mettra en relief les différents inconvénients de

MSC/NASTRAN pour des analyses de réponse en fréquence et aléatoires et fera ressortir l'avantage de procéder sans ce logiciel une fois l'analyse modale complétée.

D'abord, avec MSC/NASTRAN v70.7, les excitations harmoniques par la base sont effectuées par le biais d'une masse sismique [21]. Il s'agit d'ajouter au modèle une masse au moins  $10^6$  fois plus grande que sa masse totale afin de simuler l'effet du mouvement de la base rigide. Pour obtenir des résultats exacts, une masse infinie serait nécessaire, mais des instabilités numériques lors de l'analyse surviendraient.

Aussi, l'analyste intéressé à obtenir les courbes de réponse en fréquence, pour une excitation harmonique, et les densités spectrales de la réponse, pour des excitations aléatoires, doit spécifier individuellement tous les degrés de liberté qui l'intéresse d'une façon similaire à celle montrée ci-dessous. Cette opération est laborieuse et, très souvent, des programmes informatiques spécifiques sont créés afin d'y remédier.

```
XYPUNCH ACCE PDSF /100(T1)
XYPUNCH ACCE PDSF /100(T2)
XYPUNCH ACCE PDSF /100(T3)
XYPUNCH ACCE PDSF /100(R1)
XYPUNCH ACCE PDSF /100(R2)
XYPUNCH ACCE PDSF /100(R3)
```



Requêtes pour générer les densités spectrales de puissance pour les accélérations au nœud 100. Chaque ligne correspond à un degré de liberté différent.

Figure 0.1 : Exemple de requêtes pour générer des courbes dans MSC/NASTRAN

Dans le même ordre d'idées, l'utilisateur de MSC/NASTRAN ne peut obtenir les contraintes élémentaires de Von Mises maximales [3] engendrées par une excitation harmonique. Ces contraintes sont cependant très importantes lors du design de structures et les analystes doivent les obtenir par d'autres moyens.

Ensuite, les solutions modales de MSC/NASTRAN permettent l'utilisation de la méthode d'accélération modale [20] pour tenir compte de l'effet des modes tronqués. Toutefois, le temps requis par la méthode d'accélération modale augmente très rapidement lorsque le nombre de fréquences d'excitation est élevé. La méthode de la flexibilité résiduelle [27], qui est une alternative beaucoup plus rapide que la méthode d'accélération modale, n'est pas directement disponible aux utilisateurs de MSC/NASTRAN.

De plus, la méthode d'intégration numérique utilisée par MSC/NASTRAN pour les excitations aléatoires est très simple et sa précision dépend directement du nombre de fréquences d'excitation spécifié par l'utilisateur. Les nouvelles méthodes d'intégration analytique développées pour ce type de problèmes par les concepteurs d'ANSYS [4] sont efficaces en plus d'être exactes, mais elles n'ont pas encore été incorporées à MSC/NASTRAN.

Enfin, le logiciel MSC/NASTRAN est si dispendieux que les entreprises qui en ont besoin n'achètent qu'un nombre minimal de licences. Cela dit, le fait de pouvoir procéder à ces analyses dynamiques indépendamment de MSC/NASTRAN en obtenant les mêmes résultats permet assurément de sauver temps et argent.

En somme, posséder des logiciels tirant partie des forces de NASTRAN et améliorant ses désavantages pour des analyses harmoniques et aléatoires constitue un atout de premier plan pour une entreprise qui possède des ressources financières limitées. De tels logiciels permettraient de:

- simuler exactement une excitation harmonique par la base;
- tenir compte efficacement de la troncature modale;
- choisir en groupes les degrés de liberté dont les réponses sont voulues;

- déterminer les contraintes Von Mises causées par une excitation aléatoire;
- calculer exactement, par le biais d'une intégration analytique, les valeurs efficaces de la réponse aléatoire.

### **Contenu du mémoire**

Ce mémoire est divisé en 5 chapitres. Le premier chapitre traite du bagage théorique disponible dans la littérature et applicable au présent projet. Les équations maîtresses y sont dérivées en détail lorsque nécessaire et la connaissance des limites de ces équations permettra de définir plus précisément le projet au chapitre suivant. C'est donc au second chapitre que les objectifs généraux et spécifiques, les hypothèses formulées et la méthodologie employée pour la réalisation de chaque logiciel sont présentés. Le troisième chapitre expose le développement des logiciels et explique précisément les données requises à leur fonctionnement de même que les fichiers résultats obtenus en les exécutant. Le quatrième chapitre donne le détail des modèles utilisés pour valider les calculs ainsi que les résultats obtenus et le cinquième chapitre expose clairement les limites des logiciels.

## CHAPITRE 1

### ÉTAT DES CONNAISSANCES

#### 1.1 Introduction

Il existe deux classes de vibrations : les vibrations libres et les vibrations forcées. Les vibrations libres se produisent lorsqu'un système vibre sous l'action des forces qui lui sont inhérentes et en l'absence de forces extérieures. Les vibrations forcées se produisent lorsque le système est soumis à des forces externes. Ces forces externes représentent le type d'excitation et, comme le démontre la Figure 1.1, elles sont divisées en deux grandes catégories : certaines et aléatoires.

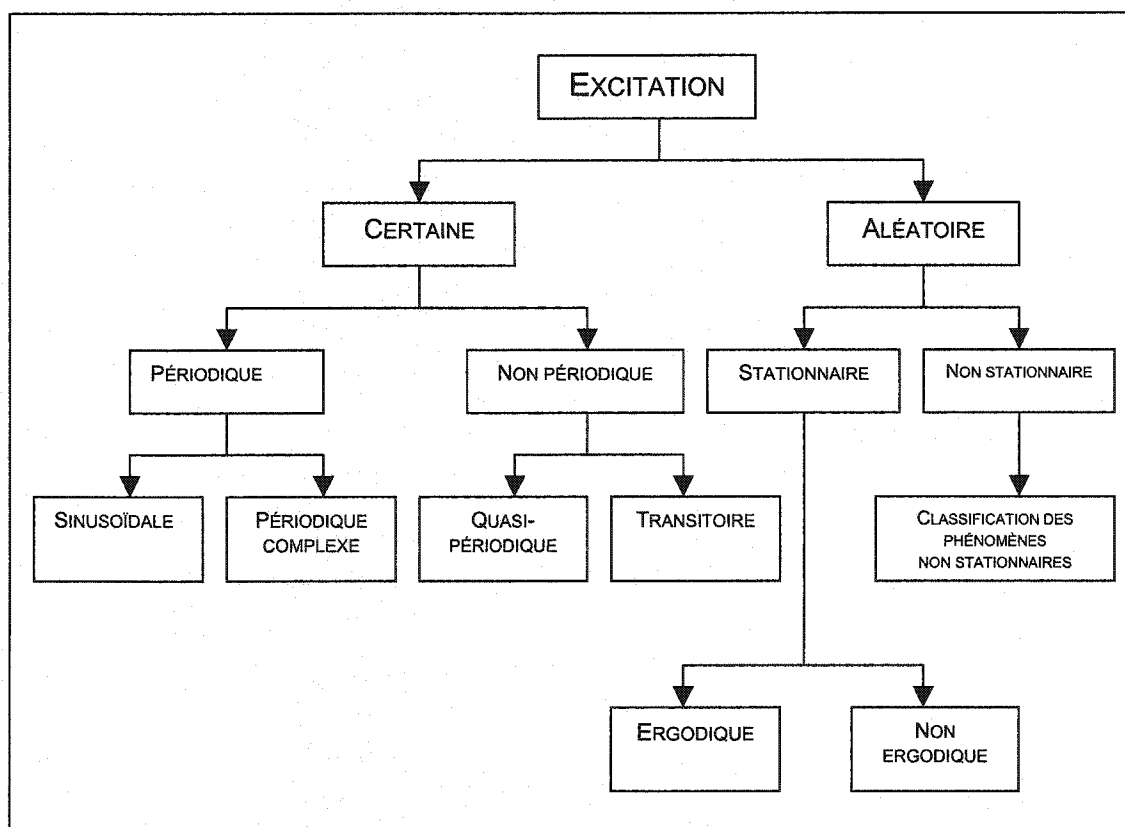


Figure 1.1 : Classification des excitations

Les excitations certaines sont aussi appelées déterministes. Les conditions d'existence de ces excitations sont déterminées et fixées absolument de telle sorte qu'il est possible de les définir à tout instant. L'excitation certaine peut donc être exprimée par une relation mathématique explicite. Il est essentiel de rappeler que lorsqu'une excitation est de nature déterministe, la réponse du système est aussi déterministe. Parmi cette catégorie d'excitations, ce sera l'excitation périodique sinusoïdale qui sera étudiée en premier lieu.

Les excitations aléatoires sont incertaines, car on ne peut les définir dans l'avenir. Leur variation en fonction du temps est régie par une loi statistique. Aussi, une excitation aléatoire peut être stationnaire si ses propriétés statistiques à des temps différents sont identiques. L'excitation stationnaire sera *ergodique* si les propriétés statistiques calculées sur une période donnée pour un seul échantillon sont les mêmes pour tous les échantillons. Un processus *ergodique* est nécessairement stationnaire, mais l'inverse n'est pas obligatoirement vrai. Ce sont les excitations stationnaires *ergodiques* qui seront étudiées en deuxième lieu.

La première partie de ce chapitre présente donc les équations de la réponse d'une structure soumise à une excitation sinusoïdale. Puisque le logiciel créé simule une excitation par la base, le développement des équations sera fait en ce sens. La seconde partie traite de la réponse aléatoire de la structure due à des excitations stationnaires *ergodiques*.

## 1.2 Excitation harmonique par la base d'un système à plusieurs DDL

Les équations du mouvement<sup>1</sup> d'un système à plusieurs degrés de liberté (d.d.l.) peuvent s'écrire de la façon suivante :

---

<sup>1</sup> Afin d'alléger l'écriture des équations, la dépendance temporelle des coordonnées physiques  $\{d(t)\}$  sera implicite. On écrira simplement  $\{d\}$  au lieu de  $\{d(t)\}$ .

$$[M]\{\ddot{d}(t)\} + [C]\{\dot{d}(t)\} + [K]\{d(t)\} = \{F(t)\} \quad (1.1)$$

où :

- $[M]$  est la matrice de masse;
- $[C]$  est la matrice d'amortissement;
- $[K]$  est la matrice de rigidité;
- $\{F(t)\}$  est le vecteur des forces externes agissant sur la structure.

Deux méthodes peuvent être employées afin de résoudre l'équation (1.1) qui nous permettra de recouvrer la réponse de la structure. La première est appelée « méthode directe » et elle est généralement utilisée pour résoudre les problèmes non linéaires et les problèmes dont l'excitation est susceptible de stimuler un grand nombre de modes de la structure. La seconde méthode est appelée « analyse par superposition modale », car il s'agit de résoudre les équations dans le domaine des modes de vibrations libres de la structure. Ce type de résolution s'applique bien aux excitations harmoniques. La théorie de la méthode directe sera d'abord présentée, car elle facilite la compréhension de l'analyse par superposition modale. Des façons permettant de diminuer les imprécisions dues à la troncature modale seront ensuite présentées.

Plusieurs hypothèses seront émises afin de simplifier le développement des équations. Ces hypothèses demandent que nous soyons en présence d'une structure:

- excitée par une accélération sinusoïdale;
- excitée par la base;
- excitée en un seul nœud;
- faiblement amortie.

### 1.2.1 Méthode directe

Puisque nous sommes intéressés à une excitation par la base en accélération et dans une seule direction à la fois, il est à propos de réécrire l'équation (1.1) en séparant les degrés de liberté aux frontières  $d_f$  des degrés de libertés internes  $d_i$ . Ainsi:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_f \\ d_i \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{if} \\ M_{fi} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_i \\ \ddot{d}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ii} & C_{if} \\ C_{fi} & C_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_i \\ \dot{d}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{if} \\ K_{fi} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_f \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

Il est à noter que les forces appliquées aux nœuds internes sont égales à 0 et que les forces  $\{F_f\}$  sont les forces de réaction jusqu'alors inconnues aux nœuds où l'excitation est appliquée.

En séparant les équations du mouvement associées aux degrés de liberté internes, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{if} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_i \\ \ddot{d}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ii} & C_{if} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_i \\ \dot{d}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{if} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_f \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (1.4)$$

Les déplacements aux nœuds internes peuvent être considérés comme étant la somme des déplacements quasi-statiques et dynamiques. Par conséquent :

$$\{d_i\} = \{d_i^s\} + \{d_i^d\} \quad (1.5)$$

où :

$\{d_i^s\}$  sont les déplacements quasi-statiques;

$\{d_i^d\}$  sont les déplacements dynamiques.

Le vecteur  $\{d_i^s\}$  est dû à l'excitation imposée par la base. Comme ce vecteur ne représente que l'effet du mouvement de corps rigide transmis par la base à l'ensemble de la structure, on peut négliger les déplacements dynamiques ainsi que les termes d'inertie et d'amortissement dans l'équation (1.4). On calcule donc  $\{d_i^s\}$  en employant les relations de l'équilibre statique :

$$[K_u]\{d_i^s\} + [K_f]\{d_f\} = \{0\} \quad (1.6)$$

En résolvant pour  $\{d_i^s\}$  :

$$\{d_i^s\} = -[K_u]^{-1}[K_f]\{d_f\} \quad (1.7)$$

Lorsque  $\{d_f\}$  ne contient que les degrés de libertés frontières en un nœud unique, l'équation (1.7) définit les modes rigides géométriques de la structure. On obtiendra donc :

$$[\Theta_f] = -[K_u]^{-1}[K_f] \quad (1.8)$$

où  $[\Theta_f]$  est la matrice des modes rigides géométriques. Le vecteur  $\{d_i^d\}$  représente les déplacements dynamiques relatifs au nœud frontière. Ainsi, en substituant (1.5) dans (1.4), on obtient :

$$[M_u \quad M_f] \begin{Bmatrix} \ddot{d}_i^s + \ddot{d}_i^d \\ \ddot{d}_f \end{Bmatrix} + [C_u \quad C_f] \begin{Bmatrix} \dot{d}_i^s + \dot{d}_i^d \\ \dot{d}_f \end{Bmatrix} + [K_u \quad K_f] \begin{Bmatrix} d_i^s + d_i^d \\ d_f \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (1.9)$$

La prochaine étape consiste à réécrire l'équation (1.9) en termes des degrés de liberté des déplacements dynamiques qui sont inconnus. En effet, la contribution quasi-statique est connue comme le témoigne l'équation (1.7). Ainsi :

$$[M_{ii}]\{\ddot{d}_i^d\} + [C_{ii}]\{\dot{d}_i^d\} + [K_{ii}]\{d_i^d\} = \{F_{eff}\} \quad (1.10)$$

où  $\{F_{eff}\}$  est une force effective obtenue après manipulation de l'équation (1.9) en tenant compte de la relation (1.6). Cette force effective est définie ci-dessous:

$$\{F_{eff}\} = -[M_{ii}]\{\ddot{d}_i^s\} - [M_{if}]\{\ddot{d}_f\} - [C_{ii}]\{\dot{d}_i^s\} - [C_{if}]\{\dot{d}_f\} \quad (1.11)$$

En y substituant l'équation (1.7), on réécrit les forces effectives comme suit :

$$\{F_{eff}\} = ([M_{ii}][K_{ii}]^{-1}[K_{if}] - [M_{if}])\{\ddot{d}_f\} + ([C_{ii}][K_{ii}]^{-1}[K_{if}] - [C_{if}])\{\dot{d}_f\} \quad (1.12)$$

Puisque nous avons une structure faiblement amortie, les termes d'amortissement sont petits par rapport aux termes d'inertie. Les forces effectives deviennent :

$$\{F_{eff}\} = ([M_{ii}][K_{ii}]^{-1}[K_{if}] - [M_{if}])\{\ddot{d}_f\} \quad (1.13)$$

De plus, on peut montrer que pour une matrice de masses concentrées,  $[M_{if}] = 0$  d'où :

$$\{F_{eff}\} = ([M_{ii}][K_{ii}]^{-1}[K_{if}])\{\ddot{d}_f\} \quad (1.14)$$

Lorsque les forces effectives sont connues, il s'agit de calculer la réponse dynamique du système relativement au nœud frontière fixe, à l'aide de l'équation (1.10). Toutefois, la résolution de cette équation nécessite beaucoup d'efforts, car les équations du mouvement sont couplées et doivent

être résolues simultanément. Une façon souvent employée pour y parvenir nécessite l'intervention des transformées de Laplace.

Enfin, une fois la réponse dynamique calculée, il suffira d'y ajouter la réponse quasi-statique associée aux modes rigides, évaluée par l'équation (1.7). On peut par la suite trouver les forces de réaction en isolant de l'équation (1.3) les équations reliées au terme  $F_f$  comme suit :

$$\begin{bmatrix} M_{ff} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}_i \\ \ddot{d}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ff} & C_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}_i \\ \dot{d}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_f \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

### 1.2.2 Analyse par superposition modale

L'analyse par superposition modale est couramment utilisée en ingénierie, car elle s'applique aisément aux structures dont l'excitation ne stimule que les premiers modes de vibration. L'approche consiste à résoudre les équations du mouvement dans une base composée des modes de vibrations libres du système afin de les découpler. Ces modes sont obtenus en résolvant le problème aux valeurs propres suivant :

$$([K_{ii}] - \omega^2 [M_{ii}]) \{d_i^d\} = \{0\} \quad (1.16)$$

Ce problème aux valeurs propres a été obtenu en négligeant les termes d'amortissement, car nous nous intéressons aux structures faiblement amorties. Quant aux forces effectives, elles sont nulles puisque nous cherchons les vibrations libres du système. Les degrés de liberté frontières étant contraints, les modes de vibration obtenus seront ceux du système contraint. On obtient ainsi la matrice diagonale des valeurs propres  $\langle \Lambda_c \rangle$  ainsi que la matrice des modes de vibrations

libres  $[\Phi_c]$ . Cette dernière étant orthogonale, elle permet d'obtenir les relations données ci-dessous :

$$[\phi_c]^T [M_{ii}] [\phi_c] = \langle m \rangle \quad (1.17)$$

$$[\phi_c]^T [K_{ii}] [\phi_c] = \langle k \rangle \quad (1.18)$$

où :

$[\phi_c]$  est la matrice des modes propres du système contraint;

$\langle m \rangle$  est la matrice diagonale des masses généralisées;

$\langle k \rangle$  est la matrice diagonale des rigidités généralisées.

Si les modes de vibration sont normalisés par rapport à la masse, les équations (1.17) et (1.18) deviennent :

$$[\phi_c]^T [M_{ii}] [\phi_c] = \langle I \rangle \quad (1.19)$$

$$[\phi_c]^T [K_{ii}] [\phi_c] = \langle \Lambda_c \rangle \quad (1.20)$$

où :

$\langle I \rangle$  est la matrice identité;

$\langle \Lambda_c \rangle = \langle \omega_p^2 \rangle$  est la matrice diagonale des valeurs propres du système contraint.

Pour passer du domaine physique au domaine modal, il s'agit d'utiliser la relation suivante :

$$\{d_i^q\} = [\phi_c] \{q\} \quad (1.21)$$

où le vecteur  $\{q\}$  représente les degrés de liberté dans le domaine modal<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Le vecteur des coordonnées modales  $\{q\}$  s'écrit plutôt  $\{q(t)\}$  mais la première écriture est employée afin d'alléger les équations dérivées.

L'équation (1.10) se réécrit, en y substituant (1.21) et en prémultipliant par  $[\phi_c]^T$  :

$$[\phi_c]^T [M_{ii}] [\phi_c] \{\ddot{q}\} + [\phi_c]^T [C_{ii}] [\phi_c] \{\dot{q}\} + [\phi_c]^T [K_{ii}] [\phi_c] \{q\} = [\phi_c]^T \{F_{eff}\} \quad (1.22)$$

Et en y remplaçant les équations (1.19) et (1.20), on obtient :

$$\langle I \rangle \{\ddot{q}\} + [\phi_c]^T [C_{ii}] [\phi_c] \{\dot{q}\} + \langle \Lambda_c \rangle \{q\} = [\phi_c]^T \{F_{eff}\} \quad (1.23)$$

Dans l'équation (1.23), seuls les termes d'amortissement sont encore couplés. Cela est dû au fait que l'amortissement a été négligé dans le problème aux valeurs propres. Toutefois, il existe certaines conditions [13] par rapport à l'amortissement qui nous permettent d'assurer un caractère diagonal à la matrice d'amortissement modal, c'est-à-dire :

$$[\phi_c]^T [C_{ii}] [\phi_c] = \langle c_{pp} \rangle = \langle 2m_p \omega_p \zeta_p \rangle \quad (1.24)$$

avec :

$\zeta_p = c_{pp} / c_c$  est le facteur d'amortissement du mode p;  
 $2m_p \omega_p$  est l'amortissement critique ( $c_c$ ).

L'une de ces conditions est celle de l'amortissement proportionnel, introduite par Rayleigh. Cette condition stipule que la matrice d'amortissement est proportionnelle aux matrices de masse et de rigidité. Ainsi, dans le domaine physique :

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K] \quad (1.25)$$

d'où, dans le domaine modal :

$$\langle c \rangle = a_0 \langle m \rangle + a_1 \langle k \rangle \quad (1.26)$$

Cette loi est simple, mais la détermination des constantes  $a_0$  et  $a_1$  n'est pas évidente pour que l'amortissement soit représenté correctement. Une autre approche, couramment utilisée lors de l'analyse par superposition modale, consiste à ne retenir pour le calcul de la réponse dynamique que les termes diagonaux de la matrice d'amortissement modal. Cette technique est justifiée par l'hypothèse de Basile [13] qui affirme que les équations modales sont découplées si :

- la structure est faiblement amortie;
- les fréquences naturelles de la structure sont bien séparées.

Cette approche est souvent adoptée lorsque le modèle d'éléments finis a été construit en tenant compte de l'amortissement. En pratique, il est difficile d'évaluer avec précision l'amortissement d'une structure complexe. Plusieurs analystes de structures n'incluent pas directement l'amortissement dans leur modèle d'éléments finis et préfèrent utiliser un amortissement modal visqueux global pour la structure à analyser. Des valeurs empiriques de l'amortissement modal sont disponibles aux analystes et peuvent être utilisées pour des structures et des excitations similaires. C'est cette approche qui a été préconisée lors de la conception des programmes. L'amortissement est spécifié par l'utilisateur des logiciels sous forme de facteur d'amplification modale (ou dynamique) défini comme suit :

$$Q_p = \frac{1}{2\zeta_p} \quad (1.27)$$

où :

$Q_p$  est le facteur d'amplification dynamique du mode  $p$ ;

$\zeta_p$  est le facteur d'amortissement du mode  $p$ .

En spécifiant  $Q_p$ , les termes de l'équation (1.24) sont connus et l'équation (1.23) devient :

$$\langle I \rangle \{\ddot{q}\} + \langle c \rangle \{\dot{q}\} + \langle \Lambda_c \rangle \{q\} = [\phi_c]^T \{F_{eff}\} \quad (1.28)$$

Les équations du mouvement étant découplées, il s'agit maintenant de trouver la réponse dynamique pour un mode quelconque «  $p$  », soit d'isoler  $q_p$  pour :

$$\ddot{q}_p + c_{pp}\dot{q}_p + \omega_p^2 q_p = \left\{ [\phi_c]^T \left( [M_{ii}] [K_{ii}]^{-1} [K_{if}] \right) \right\}_p \{\ddot{d}_f\} \quad (1.29)$$

En remplaçant les modes rigides géométriques dans le membre droit de l'équation (1.29), on retrouve:

$$\ddot{q}_p + c_{pp}\dot{q}_p + \omega_p^2 q_p = \left\{ -[\phi_c]^T [M_{ii}] [\Theta_i] \right\}_p \{\ddot{d}_f\} \quad (1.30)$$

En définissant les facteurs de participation modale  $[\Gamma_{if}]$  comme suit :

$$[\Gamma_{if}] = [\phi_c]^T [M_{ii}] [\Theta_{if}] \quad (1.31)$$

on réécrit (1.29) ainsi :

$$\ddot{q}_p + c_{pp}\dot{q}_p + \omega_p^2 q_p = -[\Gamma_{if}]_p \{\ddot{d}_f\} \quad (1.32)$$

avec :

$$c_{pp} = 2m_{pp}\omega_p\zeta_p = \frac{m_{pp}\omega_p}{Q_p} \quad (1.33)$$

On a, étant donné une normalisation par rapport à la masse ( $m_{pp} = 1$ ) :

$$\ddot{q}_p + \frac{\omega_p}{Q_p} \dot{q}_p + \omega_p^2 q_p = -[\Gamma_{ff}]_p \{\ddot{d}_f\} \quad (1.34)$$

Puisque l'excitation est harmonique, elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\{\ddot{d}_f\} = \{\ddot{D}_f\} e^{j\omega t} \quad (1.35)$$

où  $\omega$  est la fréquence angulaire de l'excitation et  $\{\ddot{D}_f\}$  est l'amplitude de l'excitation. La réponse en régime permanent sera aussi harmonique d'où :

$$\begin{aligned} \{q\} &= \{A\} e^{j\omega t} \\ \{\dot{q}\} &= j\omega \{q\} \\ \{\ddot{q}\} &= -\omega^2 \{q\} \end{aligned} \quad (1.36)$$

où  $\{A\}$  contient l'amplitude de la réponse, dans le domaine modal, suite à l'excitation harmonique imposée à la base. On réécrit (1.34) en y remplaçant  $\{\ddot{q}\}$  et  $\{\dot{q}\}$  par leur expression donnée précédemment et pour un mode « p » :

$$-\omega^2 q_p + j\omega \frac{\omega_p}{Q_p} q_p + \omega_p^2 q_p = -[\Gamma_{ff}]_p \{\ddot{d}_f\} \quad (1.37)$$

Et on résout pour  $q_p$  :

$$q_p = \frac{-[\Gamma_{ff}]_p \{\ddot{d}_f\}}{-\omega^2 + j \frac{\omega \omega_p}{Q_p} + \omega_p^2} \quad (1.38)$$

Ainsi, la réponse dynamique totale dans la base modale se retrouve en sommant la réponse de tous les modes, soit :

$$\{q\} = \sum_p q_p \quad (1.39)$$

On retrouve les déplacements dynamiques en substituant (1.38) et (1.39) dans l'équation (1.21) d'où :

$$\{d_i^d\} = [\phi_c] \sum_p \frac{-[\Gamma_{if}]_p \{\ddot{d}_f\}}{-\omega^2 + j \frac{\omega \omega_p}{Q_p} + \omega_p^2} \quad (1.40)$$

En y ajoutant les déplacements quasi-statiques sous la forme des modes rigides géométriques (équation (1.8)), on obtient la relation recherchée pour les déplacements:

$$\boxed{\{d_i\} = \left( \frac{[\Theta_{if}]}{-\omega^2} - \sum_p \frac{\{\phi_c\}_p [\Gamma_{if}]_p}{-\omega^2 + j \frac{\omega \omega_p}{Q_p} + \omega_p^2} \right) \{\ddot{d}_f\}} \quad (1.41)$$

L'équation (1.41) nous donne les déplacements, en régime permanent, dans le domaine physique pour :

- une normalisation par rapport à la masse des modes propres de vibration;
- une matrice de masses concentrées.

### 1.2.3 Effets de la troncature modale

Le nombre de modes de vibration que l'on peut calculer avec l'équation (1.16) est égal au nombre de degrés de liberté non contraints de la structure modélisée. Les structures modélisées par la méthode des éléments finis ont souvent plus de 100 000 degrés de liberté. Elles ont donc un nombre similaire de modes de vibrations calculables. Le temps associé au calcul de la réponse dynamique avec l'équation (1.41) peut devenir excessivement long si tous les modes de la structure sont pris en considération. Heureusement, en pratique, l'excitation n'excite souvent qu'un nombre limité de modes. On peut donc calculer la réponse avec un nombre restreint de modes de vibrations et ainsi sauver un temps de calcul précieux sans pour autant affecter significativement la précision de la réponse calculée. Toutefois, il est reconnu que davantage de modes sont nécessaires pour le calcul des contraintes que pour le calcul des déplacements afin d'obtenir des résultats précis. Ainsi, puisqu'il n'existe pas de règle générale absolue qui assure à l'analyste de structures qu'il utilise suffisamment de modes pour le calcul de la réponse, ce dernier doit souvent utiliser plus de modes que nécessaire. Deux méthodes qui augmentent la précision des résultats pour un nombre fixe de modes à superposer sont présentées aux points suivants. Il s'agit de la méthode d'accélération modale et de la méthode de la flexibilité résiduelle.

#### ***Méthode d'accélération modale***

Lorsque la réponse est calculée en utilisant seulement les  $N_R$  premiers modes à basse fréquence et que  $N_R$  est plus petit que le nombre total de modes  $N$ , l'équation (1.21) se réécrit :

$$\{d_i^d\} = [\phi_c^R] \{q^R\} \quad (1.42)$$

où l'exposant  $R$  indique le nombre de modes à basse fréquence retenus pour la superposition modale. L'équation (1.28) devient :

$$\langle I \rangle \{\ddot{q}^R\} + \langle c \rangle \{\dot{q}^R\} + \langle \Lambda_c^R \rangle \{q^R\} = [\phi_c^R]^T \{F_{eff}\} \quad (1.43)$$

En isolant  $\{q^R\}$  dans l'équation (1.43) et en l'introduisant dans l'équation (1.42), nous obtenons la première forme de la méthode d'accélération modale :

$$\{a_i^d\} = [\phi_c^R] \langle \Lambda_c^R \rangle^{-1} [\phi_c^R]^T \{F_{eff}\} - [\phi_c^R] \langle \Lambda_c^R \rangle^{-1} (\{\ddot{q}^R\} + \langle c \rangle \{\dot{q}^R\}) \quad (1.44)$$

Si le contenu fréquentiel des forces externes est beaucoup plus petit que celui des modes retenus, les termes  $\{\ddot{q}^R\}$  et  $\{\dot{q}^R\}$  tendent vers 0 en vertu de l'équation (1.38). On réécrit l'équation (1.44) en omettant ces termes :

$$\{a_i^d\} = [\phi_c^R] \langle \Lambda_c^R \rangle^{-1} [\phi_c^R]^T \{F_{eff}\} \quad (1.45)$$

C'est donc dire qu'en retenant tous les modes pour la superposition modale, l'équation (1.45) nous donnerait une évaluation très précise de la réponse. Soit :

$$\{a_i^d\} = [\phi_c] \langle \Lambda_c \rangle^{-1} [\phi_c]^T \{F_{eff}\} \quad (1.46)$$

De plus, à partir de la relation suivante :

$$[\Lambda_c] = [\phi_c] [K_{ii}] [\phi_c]^T \quad (1.47)$$

Il peut être démontré que [27]:

$$[K_{ii}]^{-1} = [\phi_c][\Lambda_c]^{-1}[\phi_c]^T \quad (1.48)$$

Et l'équation suivante est obtenue en insérant (1.48) dans (1.46):

$$\{d_i^d\} = [K_{ii}]^{-1} \{F_{eff}\} \quad (1.49)$$

Cette équation nous donne l'expression des déplacements dynamiques des d.d.l. internes suite à une excitation à basse fréquence (quasi-statique) lorsque tous les modes sont conservés. On obtient la deuxième forme de la méthode d'accélération modale en réécrivant (1.44) comme suit :

$$\{d_i^d\} = [K_{ii}]^{-1} \{F_{eff}\} - [\phi_c^R] \langle \Lambda_c^R \rangle^{-1} (\{\ddot{q}^R\} + \langle c \rangle \{\dot{q}^R\}) \quad (1.50)$$

Cette deuxième forme de la méthode d'accélération modale est plus précise que la première, car tous les modes sont conservés dans la première partie du membre droit de l'équation (1.50).

### **Flexibilité résiduelle**

L'expression de la flexibilité résiduelle est obtenue en écrivant différemment l'équation (1.43) soit :

$$\langle I \rangle \{\ddot{q}^R\} + \langle c \rangle \{\dot{q}^R\} = [\phi_c^R]^T \{F_{eff}\} - \langle \Lambda_c^R \rangle \{q^R\} \quad (1.51)$$

En prémultipliant l'équation (1.51) par  $[\phi_c^R] \langle \Lambda_c^R \rangle^{-1}$ , on obtient :

$$[\phi_c^R] \langle \Lambda_c^R \rangle^{-1} (\langle I \rangle \{\ddot{q}^R\} + \langle c \rangle \{\dot{q}^R\}) = [\phi_c^R] \langle \Lambda_c^R \rangle^{-1} [\phi_c^R]^T \{F_{eff}\} - [\phi_c^R] \{q^R\} \quad (1.52)$$

En insérant l'équation (1.52) dans la deuxième forme de la méthode d'accélération modale (1.50) nous obtenons l'expression de la flexibilité résiduelle.

$$\boxed{\{d_i^d\} = [\phi_c^R] \{q^R\} + [K_{ii}]^{-1} \{F_{eff}\} - [\phi_c^R] \langle \Lambda_c^R \rangle^{-1} [\phi_c^R]^T \{F_{eff}\}} \quad (1.53)$$

Le premier terme du membre droit de l'équation (1.53) n'est nul autre que la contribution des modes retenus à la réponse de la structure. Les deux autres termes sont une approximation de la contribution des modes tronqués et représentent la flexibilité résiduelle de la structure. En effet, en appliquant l'équation (1.48), on trouve :

$$[K_{ii}]^{-1} \{F_{eff}\} - [\phi_c^R] \langle \Lambda_c^R \rangle^{-1} [\phi_c^R]^T \{F_{eff}\} = [\phi_c] \langle \Lambda_c \rangle^{-1} [\phi_c]^T \{F_{eff}\} - [\phi_c^R] \langle \Lambda_c^R \rangle^{-1} [\phi_c^R]^T \{F_{eff}\} \quad (1.54)$$

De cette façon, on remarque que la contribution quasi-statique des modes retenus est enlevée de la contribution quasi-statique totale pour tous les modes. Nous obtenons donc la contribution quasi-statique associée aux modes tronqués de la solution.

### 1.3 Excitation aléatoire

Cette section traite de la réponse d'un système soumis à des excitations aléatoires. Nous avons vu à la section 1.2 que lorsque les forces agissant sur le système sont déterministes, sa réponse

l'est aussi. Toutefois, une excitation aléatoire n'est pas déterministe et nous sommes en mesure de nous questionner sur la nature de la réponse due à ce type d'excitation. Pour dériver les équations présentées dans cette section, nous tirerons profit des propriétés statistiques des excitations étudiées. Puisque la réponse de la structure possèdera les mêmes propriétés statistiques que l'excitation, nous serons en mesure de la déterminer. Ici encore, plusieurs hypothèses doivent être respectées afin de simplifier la théorie. Ces hypothèses sont données ci-après et seront expliquées plus en détail lorsqu'elles interviendront dans le développement des équations. Elles stipulent que:

1. Chaque excitation est stationnaire et *ergodique*; les propriétés statistiques telles que la moyenne et la fonction de corrélation pour tous les échantillons de l'excitation sont constantes et égales.
2. La fonction de densité de probabilité de chaque excitation est gaussienne (ou normale) et est complètement définie par sa moyenne et son écart-type. Cette hypothèse est justifiée par le théorème de la limite centrale [26].
3. La moyenne d'une excitation aléatoire est nulle. Cette hypothèse est justifiée par le fait que la moyenne, étant constante, peut représenter la composante statique de la réponse. L'écart-type définit donc complètement la réponse de la structure et il correspond à la valeur efficace de la réponse.
4. Seuls les degrés de liberté internes peuvent être excités. Ainsi, la réponse de la structure n'aura pas de composante pseudo-statique.

Cette section traitera d'abord des processus aléatoires stationnaires et *ergodiques*, car les excitations, donc les réponses, le sont par définition. Les propriétés statistiques qui serviront de

fondement au développement de la réponse aléatoire seront définies. Ces propriétés sont les moyennes temporelles, les moyennes spatiales, les densités spectrales de puissance, la valeur quadratique moyenne, le coefficient de corrélation et la fonction de densité de probabilité de type gaussienne.

### 1.3.1 Processus aléatoires stationnaires et ergodiques

Dans l'introduction de ce chapitre, une brève explication d'un processus aléatoire stationnaire *ergodique* a été donnée. Puisque les excitations aléatoires de même que la réponse sont exclusivement stationnaires et *ergodiques*, il est impératif d'en donner une définition plus rigoureuse et mathématique.

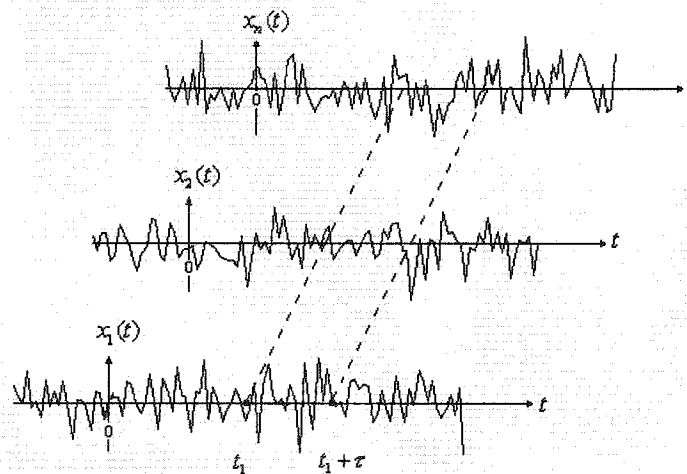


Figure 1.2 : Processus aléatoire

#### **Moyennes dans l'espace**

Considérons plusieurs échantillons d'un processus aléatoire  $x(t)$  montré à la Figure 1.2. Nous avons  $n$  échantillons appelés  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_k(t)$ , ...,  $x_n(t)$ . Si le système possède une régularité

statistique et que l'on donne à chaque échantillon un poids égal, le moyenne en un temps  $t_1$  se calcule de la façon suivante :

$$\mu_x(t_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1) \quad (1.55)$$

La fonction d'*autocorrélation* est une moyenne obtenue en sommant le produit de valeurs instantanées du processus aléatoire  $x(t)$  en deux temps  $t = t_1$  et  $t = t_1 + \tau$  et en divisant le résultat obtenu par le nombre d'échantillons. Son expression mathématique est :

$$R_x(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1) x_k(t_1 + \tau) \quad (1.56)$$

où  $\tau$  est un décalage temporel. La fonction d'*autocorrélation* donne une mesure directe de la dépendance statistique qu'ont les variables  $x_k(t_1)$  et  $x_k(t_1 + \tau)$ .

### **Processus aléatoire stationnaire**

Un processus aléatoire est faiblement stationnaire lorsque sa moyenne dans l'espace et sa fonction d'*autocorrélation* ne dépendent pas du temps auquel ils sont calculés. Cela s'exprime mathématiquement par :

$$\begin{aligned} \mu_x(t_1) &= \mu_x(t_2) = \mu_x(t) = \mu_x \\ R_x(t_1, t_1 + \tau) &= R_x(t_2, t_2 + \tau) = R_x(t, t + \tau) = R_x(\tau) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Donc, la moyenne dans l'espace est constante et la fonction d'*autocorrélation* ne dépend que du décalage temporel  $\tau$ . Lorsque les moyennes de plus haut ordre sont toutes indépendantes du temps auquel elles sont calculées, le processus est dit fortement stationnaire. Dans plusieurs

applications pratiques, le processus peut être dit fortement stationnaire s'il est faiblement stationnaire. Ce cas a été démontré [19] pour le processus aléatoire gaussien qui sera expliqué en détail dans une section à venir. C'est ce type de processus qui nous concerne et c'est pourquoi nous employons simplement le terme stationnaire.

### **Moyennes dans le temps**

Les moyennes d'ensemble décrites précédemment requièrent généralement un grand nombre d'échantillons. Cependant, sous certaines circonstances, il est possible d'obtenir la valeur moyenne et la fonction d'*autocorrélation* pour un processus aléatoire  $x(t)$  en n'utilisant qu'un seul échantillon représentatif. Pour ce faire, il suffit de déterminer les moyennes temporelles. En considérant l'échantillon  $x_k(t)$ , la valeur moyenne temporelle de l'échantillon  $k$  est définie comme :

$$\mu_x(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_k(t) dt \quad (1.58)$$

alors que la fonction d'*autocorrélation* temporelle devient :

$$R_x(k, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_k(t) x_k(t + \tau) dt \quad (1.59)$$

### **Processus aléatoire ergodique**

Si le processus est stationnaire et si la moyenne temporelle de même que la fonction d'*autocorrélation* temporelle sont les mêmes pour tous les échantillons, alors le processus sera *ergodique*. Ainsi, un processus gaussien respectant l'équation (1.57) de même que :

$$\begin{aligned}\mu_x(1) &= \mu_x(2) = \mu_x(k) = \mu_x \\ R_x(1, \tau) &= R_x(2, \tau) = R_x(k, \tau) = R_x(\tau)\end{aligned}\tag{1.60}$$

sera dit *ergodique*. Un fait capital ressort des définitions précédentes : un processus *ergodique* est nécessairement stationnaire, mais l'inverse n'est pas forcément vrai. Le fait que le processus soit *ergodique* permet d'utiliser un seul échantillon pour représenter le processus au lieu d'utiliser l'ensemble des échantillons.

### **Valeur quadratique moyenne**

La valeur quadratique moyenne d'une variable aléatoire procure une mesure de l'énergie de vibration qui lui est associée. On parle souvent de l'intensité du signal aléatoire. Elle se définit comme :

$$\Psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt \tag{1.61}$$

La valeur positive du radical de la valeur quadratique moyenne est connue sous le nom de valeur efficace ou R.M.S. (*Root Mean Square value*). De plus, on constate de par l'équation (1.59) que la valeur quadratique moyenne peut s'évaluer par la fonction d'*autocorrélation* lorsque  $\tau = 0$ .

Donc :

$$R_x(\tau = 0) = \Psi_x^2 \tag{1.62}$$

Il peut être démontré [19] que la valeur quadratique moyenne représente la valeur maximale de la fonction d'*autocorrélation*. Pour un processus *ergodique*, la valeur moyenne  $\mu_x$  est constante et peut être vue comme étant la composante statique de  $x(t)$ . Dans le même ordre d'idées,

$x(t) - \mu_x$  devient la composante dynamique du processus aléatoire. La valeur quadratique moyenne de cette composante dynamique est connue sous le nom de variance et s'exprime comme suit :

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \mu_x]^2 dt \quad (1.63)$$

La valeur positive de la racine carrée de la variance est appelée écart-type. En développant l'équation (1.63) :

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt - 2\mu_x \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt + \mu_x^2 \quad (1.64)$$

et en faisant référence aux équations (1.61) et (1.58), on démontre que :

$$\sigma_x^2 = \Psi_x^2 - \mu_x^2 \quad (1.65)$$

### **Densité spectrale de puissance**

La fonction d'*autocorrélation* procure de l'information concernant une variable aléatoire dans le domaine temporel. La densité spectrale de puissance fournit cette information dans le domaine fréquentiel. Réécrivons la fonction d'*autocorrélation* pour une force aléatoire  $f(t)$  :

$$R_f(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) f(t + \tau) dt \quad (1.66)$$

On obtient, par définition, la densité spectrale de puissance en prenant la transformée de Fourier de  $R_f(\tau)$ . Puisque la transformée de Fourier d'une fonction est :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.67)$$

La densité spectrale de puissance s'exprime donc comme suit :

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (1.68)$$

Et, de façon analogue, puisque la transformée de Fourier inverse est :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.69)$$

La fonction d'autocorrélation peut s'obtenir de la densité spectrale de puissance :

$$R_f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) e^{j\omega \tau} d\omega \quad (1.70)$$

Puisque  $R_f(\tau)$  est une fonction réelle paire de  $\tau$  :

$$R_f(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_f(\omega) \cos(\omega \tau) d\omega \quad (1.71)$$

Ainsi, pour  $\tau = 0$  :

$$R_f(0) = \Psi_f^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_f(\omega) d\omega \quad (1.72)$$

L'équation (1.72) est très utilisée en pratique, car elle permet le calcul de la V.Q.M. lorsque la densité spectrale de puissance est connue.

### **Densité spectrale de puissance croisée**

Si nous sommes en présence de plusieurs excitations aléatoires, nous pouvons déterminer leur corrélation croisée. Subséquemment, la corrélation croisée entre deux forces aléatoires  $f(t)$  et  $g(t)$  s'exprime :

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)g(t+\tau)dt \quad (1.73)$$

Ainsi, la densité spectrale de puissance croisée est la transformée de Fourier de la corrélation croisée. Dès lors :

$$S_{fg}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{fg}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.74)$$

Il est aussi possible de démontrer [33] que:

$$S_{fg}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} F^*(\omega)G(\omega) \quad -\infty \leq \omega \leq \infty \quad (1.75)$$

où  $F^*(\omega)$  est le complexe conjugué de la transformée de Fourier de  $f(t)$  et  $G(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $g(t)$ . Il ressort de cette équation que :

$$S_{fg} = S_{gf}^* \quad (1.76)$$

### **Coefficient de corrélation**

Comme le démontre son nom, le coefficient de corrélation nous donne une mesure de la corrélation entre deux excitations. Il nous indique s'il y a une dépendance linéaire entre les excitations. Dans le domaine temporel, il est défini comme suit :

$$\rho_{fg}(\tau) = \frac{R_{fg}(\tau)}{\sqrt{R_{ff}(0)R_{gg}(0)}} = \frac{R_{fg}(\tau)}{\sqrt{\Psi_f^2 \Psi_g^2}} \quad (1.77)$$

Dans le domaine fréquentiel, on obtient [4]:

$$\rho_{fg}(\omega) = \frac{|S_{fg}(\omega)|}{\sqrt{S_f(\omega)S_g(\omega)}} \quad (1.78)$$

Si le coefficient égale  $\pm 1$ , alors les excitations sont complètement corrélées et il existe une dépendance linéaire entre elles. À l'inverse, si le coefficient de corrélation égale 0, les excitations sont dites non corrélées.

### **Distribution gaussienne**

La distribution gaussienne est aussi connue sous le nom de distribution normale. Cette distribution est la plus utilisée en statistiques et c'est en partie dû au fait qu'elle représente bien plusieurs situations de la vie courante. Son utilisation est justifiée par le théorème de la limite centrale qui stipule que si la variable aléatoire est la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes dont aucune ne contribue significativement à la somme, alors la distribution tend vers une distribution normale.

La distribution gaussienne est complètement définie par sa variance et sa moyenne et elle est symétrique par rapport à cette dernière. Sa fonction de densité de probabilité  $p(x)$  s'exprime mathématiquement par l'équation suivante :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (1.79)$$

où :

$\mu_x$  est la moyenne;

$\sigma_x^2$  est la variance.

Cette équation, représentée à la Figure 1.3, représente une famille de fonctions ayant une densité de probabilité gaussienne.

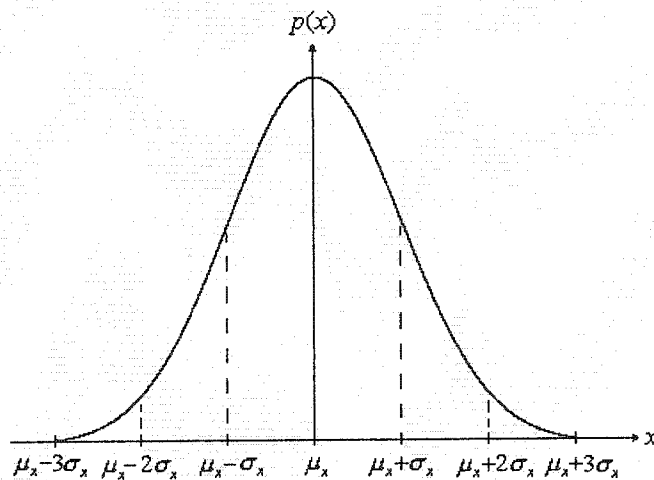


Figure 1.3 : Fonction de densité de probabilité gaussienne

Une des hypothèses mentionnées en début de section nous permet d'adopter une moyenne  $\mu_x = 0$ . La fonction de densité de probabilité peut donc s'exprimer ainsi :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}} \quad (1.80)$$

Elle est donc entièrement définie par sa variance (ou son écart-type). En assumant que les excitations sont gaussiennes, on peut affirmer que la réponse aléatoire le sera aussi. À la section 1.3.2, nous déterminerons la réponse de la structure en terme de sa valeur quadratique moyenne. Puisque nous assumons la moyenne égale à 0, nous déterminerons ainsi, en vertu de l'équation (1.65), la variance (et l'écart-type) de la réponse. Nous connaissons par le fait même la fonction de densité de probabilité de la réponse.

La probabilité  $P$  qu'une réponse aléatoire  $X$  soit comprise dans l'intervalle borné des valeurs  $\pm a$  est l'intégrale sous la courbe de  $p(x)$  sur  $[-a, a]$  soit :

$$P(X \leq a) - P(X \leq -a) = \int_{-a}^a p(x) dx \quad (1.81)$$

L'équation (1.81) sera utilisée pour déterminer la valeur efficace associée à une probabilité.

### 1.3.2 Réponse d'un système à plusieurs DDL

Les équations du mouvement d'un système à plusieurs d.d.l. s'expriment par l'équation (1.1). On peut les formuler dans une base modale avec la relation suivante, similaire à l'équation (1.42) :

$$\{d(t)\} = [\phi_c] \{q(t)\} \quad (1.82)$$

En prémultipliant par  $[\phi_c]^T$ , on trouve:

$$[\phi_c]^T [M] [\phi_c] \{\ddot{q}(t)\} + [\phi_c]^T [C] [\phi_c] \{\dot{q}(t)\} + [\phi_c]^T [K] [\phi_c] \{q(t)\} = [\phi_c]^T \{F(t)\} \quad (1.83)$$

Rappelons que pour une normalisation par rapport à la masse et un amortissement modal, on a :

$$\begin{aligned} [\phi_c]^T [M] [\phi_c] &= \langle I \rangle \\ [\phi_c]^T [K] [\phi_c] &= \langle \Lambda_c \rangle \\ [\phi_c]^T [C] [\phi_c] &= \langle c \rangle \end{aligned} \quad (1.84)$$

Pour un mode particulier « p », l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{q}_p(t) + 2\zeta_p \omega_p \dot{q}_p(t) + \omega_p^2 q_p(t) = \{\phi\}_p^T \{F(t)\} \quad (1.85)$$

où  $\{\phi\}_p^T$  est la transposée du p<sup>ième</sup> mode de vibrations libres. Réécrivons le membre droit de

l'équation (1.85) correspondant à la force généralisée du p<sup>ième</sup> mode comme suit :

$$f_p(t) = \{\phi\}_p^T \{F(t)\} = \sum_{i=1}^n \phi_{ip} F_i(t) \quad (1.86)$$

où  $\phi_{ip}$  est la composante du vecteur propre associée au d.d.l.  $i$  pour le mode  $p$ . On obtient :

$$\ddot{q}_p(t) + 2\zeta_p \omega_p \dot{q}_p(t) + \omega_p^2 q_p(t) = f_p(t) \quad (1.87)$$

Notre objectif est d'obtenir la fonction de corrélation croisée entre les réponses. Afin d'y parvenir, calculons d'abord la transformée de Fourier de  $q_p(t)$  et de  $f_p(t)$ . Avec l'équation (1.67), on trouve :

$$Q_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} q_p(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.88)$$

$$F_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=1}^n \phi_{ip} \int_{-\infty}^{\infty} F_i(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.89)$$

et en rappelant que les dérivées d'ordre  $n$  de la transformée de Fourier d'une fonction  $f(t)$  sont :

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = (j\omega)^n F(\omega) \quad (1.90)$$

on réécrit l'équation (1.87) dans le domaine fréquentiel :

$$Q_p(\omega)(-\omega^2 + j2\zeta_p \omega \omega_p + \omega_p^2) = F_p(\omega) \quad (1.91)$$

On résout pour  $Q_p(\omega)$  :

$$Q_p(\omega) = H_p(\omega) F_p(\omega) \quad (1.92)$$

où :

$$H_p(\omega) = \frac{1}{(\omega_p^2 - \omega^2 + j2\zeta_p \omega \omega_p)} \quad (1.93)$$

est la fonction de transfert du mode «p». Il s'agit maintenant de calculer la fonction de corrélation croisée entre deux réponses aléatoires  $d_r(t)$  et  $d_s(t)$  associées respectivement aux d.d.l.  $r$  et  $s$  du

système. Ces éléments du vecteur des réponses aléatoires sont calculés avec l'équation (1.82) comme suit :

$$d_r(t) = \sum_{j=1}^n \phi_{rj} q_j(t) \quad (1.94)$$

$$d_s(t) = \sum_{k=1}^n \phi_{sk} q_k(t) \quad (1.95)$$

En appliquant l'équation (1.73) :

$$\begin{aligned} R_{d_r d_s}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T d_r(t) d_s(t+\tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{j=1}^n \phi_{rj} q_j(t) \sum_{k=1}^n \phi_{sk} q_k(t+\tau) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \phi_{rj} \phi_{sk} R_{q_j q_k}(\tau) \end{aligned} \quad (1.96)$$

où :

$$R_{q_j q_k}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T q_j(t) q_k(t+\tau) dt \quad (1.97)$$

est la corrélation croisée entre les réponses généralisées  $q_j(t)$  et  $q_k(t)$ . Ce terme peut s'exprimer, selon la relation (1.70), par :

$$R_{q_j q_k}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{q_j q_k}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.98)$$

Développons en utilisant la relation (1.75)

$$R_{q_j q_k}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} Q_j^*(\omega) Q_k(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.99)$$

Les termes  $Q_j^*$  et  $Q_k$  peuvent être exprimés selon l'équation (1.92) pour trouver :

$$\begin{aligned}
 R_{q_j q_k}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} H_j^*(\omega) H_k(\omega) F_j^*(\omega) F_k(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} F_j^*(\omega) F_k(\omega) \right] H_j^*(\omega) H_k(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{f_j f_k}(\omega) H_j^*(\omega) H_k(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega
 \end{aligned} \tag{1.100}$$

avec :

$$S_{f_j f_k}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} F_j^*(\omega) F_k(\omega) \tag{1.101}$$

qui est la densité spectrale croisée entre les excitations généralisées  $f_j(t)$  et  $f_k(t)$ . Toutefois, nous cherchons à exprimer  $S_{f_j f_k}(\omega)$  en termes des excitations  $F_j(t)$  et  $F_k(t)$ . Les deux étant reliées, commençons d'abord par exprimer  $S_{f_j f_k}(\omega)$  comme la transformée de Fourier de  $R_{f_j f_k}(\tau)$ .

$$S_{f_j f_k}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{f_j f_k}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{1.102}$$

En appliquant l'équation (1.73) et en y formulant  $f_j(t)$  et  $f_k(t)$  selon (1.86), mais en utilisant des indices distincts  $l$  et  $m$  pour la double sommation, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 R_{f_j f_k}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_j(t) f_k(t + \tau) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sum_{l=1}^n \phi_{lj} F_l(t) \sum_{m=1}^n \phi_{mk} F_m(t + \tau) dt \\
 &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \phi_{lj} \phi_{mk} R_{F_l F_m}(\tau)
 \end{aligned} \tag{1.103}$$

où  $R_{F_l F_m}(\tau)$  est la corrélation croisée entre les forces aléatoires aux d.d.l.  $l$  et  $m$ . On obtient la densité spectrale croisée recherchée en introduisant (1.103) dans (1.102) :

$$\begin{aligned} S_{f_j f_k}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \phi_{lj} \phi_{mk} R_{F_l F_m}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \phi_{lj} \phi_{mk} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} R_{F_l F_m}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \phi_{lj} \phi_{mk} S_{F_l F_m}(\omega) \end{aligned} \quad (1.104)$$

avec :

$$S_{F_l F_m}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{F_l F_m}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.105)$$

Finalement, on obtient la corrélation croisée entre les réponses aléatoires  $d_r(t)$  et  $d_s(t)$  en introduisant (1.104) et (1.100) dans (1.96) :

$$R_{d_r d_s}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \phi_{rj} \phi_{sk} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \phi_{lj} \phi_{mk} \int_{-\infty}^{\infty} S_{F_l F_m}(\omega) H_j^*(\omega) H_k(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.106)$$

Pour  $s=r$ , on obtient la fonction d'autocorrélation associée à la réponse aléatoire  $d_r(t)$  :

$$R_{d_r d_r}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \phi_{rj} \phi_{rk} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \phi_{lj} \phi_{mk} \int_{-\infty}^{\infty} S_{F_l F_m}(\omega) H_j^*(\omega) H_k(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.107)$$

On trouve la valeur quadratique moyenne en posant  $\tau = 0$  dans l'équation (1.107) pour trouver :

$$\boxed{\Psi_{d_r}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \phi_{rj} \phi_{rk} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \phi_{lj} \phi_{mk} \int_{-\infty}^{\infty} S_{F_l F_m}(\omega) H_j^*(\omega) H_k(\omega) d\omega} \quad (1.108)$$

Par analogie avec l'équation (1.72), on peut écrire :

$$\Psi_{d_r}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{d_r}(\omega) d\omega \quad (1.109)$$

où :

$$S_{d_r}(\omega) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \phi_{rj} \phi_{rk} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \phi_{lj} \phi_{mk} S_{F_l F_m}(\omega) H_j^*(\omega) H_k(\omega) d\omega \quad (1.110)$$

L'équation (1.110) est mieux connue sous le nom de *Complete Quadratic Combination* (CQC). Cette équation tient compte des termes de corrélation croisée entre les modes participant à la réponse et demande beaucoup de temps de calcul à l'ordinateur. C'est pourquoi les termes de corrélation croisée sont souvent négligés. L'erreur introduite par cette simplification est minime lorsque la structure est faiblement amortie et que les fréquences naturelles sont bien séparées. On peut donc réécrire l'équation (1.110) comme suit :

$$S_{d_r}(\omega) = \sum_{j=1}^n \phi_{rj}^2 \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \phi_{lj} \phi_{mj} S_{F_l F_m}(\omega) |H_j(\omega)|^2 d\omega \quad (1.111)$$

pour mener à la formule communément appelée *Square Root of the Sum of Squares* (SRSS). Les formules CQC et SRSS nous permettront de tracer les courbes de densités spectrales de puissance pour chaque degré de liberté du modèle d'éléments finis.

## 1.4 Conclusion

C'est dans ce chapitre que les équations de la réponse d'une structure pour une accélération harmonique de sa base de même que pour des excitations aléatoires aux d.d.l. internes ont été développées. Dans le premier cas, la réponse peut être trouvée pour chaque fréquence d'excitation  $\omega$ . Ces réponses sont des nombres complexes, car elles comprennent une partie réelle et une partie imaginaire. Dans le second cas, nous nous intéressons davantage à la densité spectrale de puissance de la réponse d'un d.d.l. particulier ainsi qu'à sa valeur efficace plutôt qu'à la réponse telle que calculée pour une excitation harmonique. Ces valeurs sont réelles. Après avoir pris connaissance de la théorie de l'analyse vibratoire de structures, il est possible de définir précisément les objectifs généraux de ce projet de recherche de même que les objectifs spécifiques des différents logiciels. La méthodologie à adopter dépend des équations à programmer et c'est pourquoi cette section est présentée après la partie théorique. Le chapitre suivant présente donc en détail les objectifs visés par la conception et la réalisation de ce projet de maîtrise.

## CHAPITRE 2

### OBJECTIFS DU PROJET

Les objectifs du projet sont les guides permettant de mener à bien sa réalisation et il est primordial de les définir clairement dans ce chapitre avant de passer au développement des logiciels. Ils sont divisés en objectifs généraux, s'appliquant à l'ensemble du projet, et en objectifs spécifiques pour chaque logiciel. La connaissance des équations développées au CHAPITRE 1 et des objectifs généraux du projet, présentés ci-après, permet de dresser une liste sommaire des hypothèses à considérer et de décrire la méthodologie à préconiser pour réaliser le projet efficacement.

#### 2.1 Objectifs généraux

L'objectif primaire de ce projet est de développer des logiciels capables de calculer la réponse vibratoire d'une structure linéaire et faiblement amortie modélisée par la méthode des éléments finis. Cette réponse peut être causée par une excitation harmonique à la base de la structure ou par des excitations aléatoires. Les méthodes de calcul employées doivent être efficaces et les logiciels conçus doivent être faciles d'emploi et générer des résultats comparables au logiciel MSC/NASTRAN. Le premier logiciel porte le nom de *processeur harmonique*, car il est dédié à ce type d'excitations. De même, le second logiciel consacré aux excitations aléatoires est appelé *processeur aléatoire*.

## 2.2 Hypothèses générales

Les hypothèses générales concernent la nature de la structure modélisée. Cette dernière :

- est linéaire, car elle doit respecter les principes de superposition et de proportionnalité;
- est déterministe, c'est-à-dire que ses propriétés physiques et ses caractéristiques sont connues, constantes dans le temps et s'expriment mathématiquement;
- est faiblement amortie;
- est modélisée avec une matrice de masses concentrées.

## 2.3 Processeur harmonique

### 2.3.1 Objectifs spécifiques

Les objectifs spécifiques découlent directement des objectifs généraux et sont en quelque sorte des exigences qu'il faut rencontrer pour les satisfaire. Ils sont :

1. Calculer la réponse fréquentielle complexe de la structure pour les résultats suivants :

- déplacements nodaux;
- vitesses nodales;
- accélérations nodales;
- forces nodales;
- forces associées aux conditions frontières (SPC);
- forces associées aux conditions cinématiques (MPC);
- forces élémentaires;

- contraintes élémentaires;
- déformations élémentaires;
- contraintes élémentaires de Von Mises.

Les résultats élémentaires devront être calculés pour les éléments finis de MSC/NASTRAN donnés dans le Tableau 2.1.

2. Calculer, à partir des contraintes élémentaires de Von Mises, les marges de sécurité minimum élémentaires étant donné un facteur de sécurité et une contrainte admissible.
3. Atténuer les imprécisions dues à la troncature modale en ajoutant à la réponse la contribution quasi-statique des modes tronqués calculée avec la méthode de la flexibilité résiduelle.
4. Permettre la consultation des résultats par l'intermédiaire d'un fichier ASCII, d'un fichier EXCEL ou d'un fichier universel I-DEAS de même que la visualisation des graphes de la réponse avec I-DEAS, EXCEL ou d'un navigateur permettant de décoder les pages HTML.

Tableau 2.1 : Résultats élémentaires à calculer pour chaque élément de MSC/NASTRAN

| Élément de<br>MSC/NASTRAN | Contraintes | Contraintes<br>Von Mises | Déformations | Forces |
|---------------------------|-------------|--------------------------|--------------|--------|
| CBAR                      | X           | X                        |              | X      |
| CBEAM                     | X           | X                        |              | X      |
| CBEND                     | X           | X                        |              | X      |
| CBUSH                     | X           | X                        | X            | X      |
| CELAS1                    | X           | X                        |              | X      |
| CELAS2                    | X           | X                        |              | X      |
| CHEXA                     | X           | X                        | X            |        |
| CONROD                    | X           | X                        |              | X      |
| CPENTA                    | X           | X                        | X            |        |
| CQUAD4                    | X           | X                        | X            | X      |
| CQUAD8                    | X           | X                        | X            | X      |
| CQUADR                    | X           | X                        | X            | X      |
| CROD                      | X           | X                        |              | X      |
| CSHEAR                    |             |                          |              | X      |
| CTETRA                    | X           | X                        | X            |        |
| CTRIA3                    | X           | X                        | X            | X      |
| CTRIA6                    | X           | X                        | X            | X      |
| CTUBE                     | X           | X                        |              | X      |

### 2.3.2 Hypothèses spécifiques

Les hypothèses spécifiques proviennent principalement de la dérivation de l'équation (1.41). Elles concernent la nature de l'excitation et exigent que cette dernière soit :

- une accélération sinusoïdale;
- une excitation par la base; celle-ci est de nature rigide afin que ses déplacements soient formulés par des degrés de liberté frontières exprimant les mouvements de corps rigides;
- une excitation en translation;
- une excitation définie pour un seul nœud de la structure.

### 2.3.3 Méthodologie

La méthodologie choisie permettant de calculer la réponse harmonique de la structure est basée sur les équations développées au CHAPITRE 1. Elle est décrite ci-dessous.

1. Soumettre le modèle d'éléments finis au logiciel MSC/NASTRAN pour une analyse des modes de vibrations libres (SOL 103). Cette analyse modale nous fournit, dans un fichier binaire (modèle.op2), les fréquences naturelles de vibration et les modes de vibration associés aux résultats dont nous voulons calculer la réponse dynamique. En incluant au modèle, lors de l'analyse, un DMAP [24] (*Direct Matrix Abstraction Program*) permettant des calculs supplémentaires impliquant ses matrices de masse et de rigidité, on dérive également les modes rigides géométriques, les facteurs de participation modale et la flexibilité résiduelle de la structure.
2. Les données spécifiées par l'utilisateur seront transmises au logiciel par l'intermédiaire d'un fichier usager. Les données essentielles sont : la direction et l'amplitude fréquentielle de l'excitation, les résultats à calculer pour chaque nœud et élément et l'amortissement modal visqueux.
3. Le calcul de la réponse se fera par superposition modale afin d'obtenir les équations du mouvement découplées. Les imprécisions dues à la troncature modale seront en partie corrigées par la méthode de la flexibilité résiduelle.
4. Les résultats seront ensuite générés dans les différents fichiers requis par l'utilisateur.

## **2.4 Processeur aléatoire**

### **2.4.1 Objectifs spécifiques**

Les objectifs spécifiques au processeur aléatoire sont :

1. Calculer la densité spectrale de puissance de la réponse de la structure et sa valeur efficace pour chaque résultat suivant :
  - déplacements nodaux;
  - vitesses nodales;
  - accélérations nodales.
2. Augmenter la précision et la rapidité du calcul de la valeur efficace (RMS) en permettant l'emploi d'une méthode d'intégration analytique de la DSP.
3. Permettre la définition des densités spectrales de puissances selon une échelle log-log.
4. Permettre une définition des densités spectrales croisées de l'excitation avec l'aide d'un coefficient de corrélation.
5. Permettre la consultation des résultats par l'intermédiaire de fichiers ASCII et universels I-DEAS de même que la visualisation des graphes de la DSP avec EXCEL ou un navigateur permettant de décoder les pages HTML.

### 2.4.2 Hypothèses spécifiques

Les hypothèses spécifiques proviennent principalement de la dérivation des équations (1.108) et (1.110). Ces hypothèses concernent la nature des excitations et demandent que ces dernières soient:

- stationnaires et *ergodiques*;
- données sous forme de DSP et de DSP croisée aux nœuds internes de la structure;
- des forces (accélérations).

### 2.4.3 Méthodologie

1. Soumettre le modèle d'éléments finis au logiciel MSC/NASTRAN pour une analyse des modes de vibrations libres (SOL 103). Cette analyse modale nous fournit, dans un fichier binaire (modèle.op2), les fréquences naturelles de vibration et les modes de vibration associés aux résultats dont nous voulons calculer la réponse dynamique.
2. Les données spécifiées par l'utilisateur seront transmises au logiciel par l'intermédiaire d'un fichier usager. Les données essentielles sont : la direction, l'amplitude fréquentielle et le d.d.l. associé à chacune des DSP de l'excitation, les résultats à calculer pour chaque nœud et l'amortissement modal visqueux.
3. Le calcul de la réponse se fera par superposition modale afin d'obtenir des équations du mouvement découplées. Une méthode d'intégration analytique sera employée afin d'augmenter la précision et la rapidité des calculs.
4. Les résultats seront ensuite générés dans les différents fichiers requis par l'utilisateur.

## CHAPITRE 3

### DÉVELOPPEMENT DES LOGICIELS

#### 3.1 Processeur harmonique

La Figure 3.1 illustre le fonctionnement du logiciel. Ce dernier nécessite l'apport de données via un fichier binaire MSC/NASTRAN (Structure.op2) et un fichier défini par l'utilisateur (Structure.inp). Ces fichiers sont externes au logiciel et leur contenu est défini à la section 3.1.1.

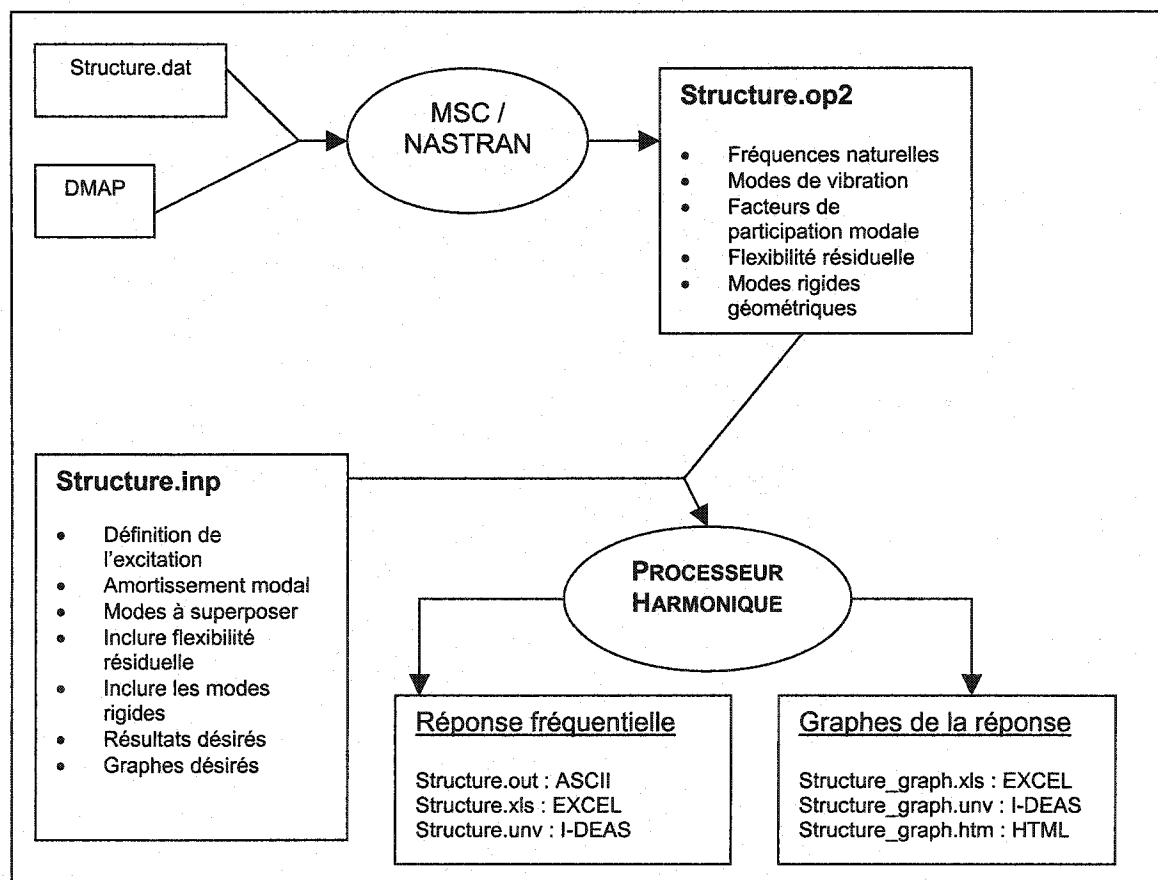


Figure 3.1 : Représentation schématique du fonctionnement du processeur harmonique

Leur extension (lettres après le point) est importante, car elle implique que les données contenues dans ces fichiers sont placées dans un ordre connu. Le mot *Structure* n'est que le nom du modèle et varie d'un modèle à l'autre. Le calcul de la réponse fréquentielle et la visualisation des graphes de la réponse sont respectivement traités aux sections 3.1.2 et 3.1.3.

### 3.1.1 Données externes au logiciel

#### ***Fichier binaire MSC/NASTRAN***

Le fichier binaire MSC/NASTRAN nécessaire au fonctionnement du logiciel provient d'une analyse modale (SOL 103) de la structure à analyser. Un paramètre spécial permet de générer ce fichier qui aura l'extension OP2. Ce paramètre est le suivant:

PARAM,POST,-2

Afin que le logiciel puisse calculer les réponses harmoniques de la structure, l'utilisateur doit, dans son fichier MSC/NASTRAN, demander que les modes de vibrations associés aux résultats voulus soient sauvegardés dans le fichier binaire. Le Tableau 3.1 résume les résultats à demander dans MSC/NASTRAN pour qu'ils soient disponibles au logiciel. Le calcul des modes rigides géométriques, des facteurs de participation modale et de la flexibilité résiduelle, respectivement les équations (1.8), (1.31) et (1.53), nécessite la manipulation des matrices de masse et de rigidité du système. Ces matrices sont calculées par MSC/NASTRAN en ajoutant un DMAP[24] au modèle lors de la solution modale. Ce DMAP génère les matrices demandées et les sauvegarde dans le fichier binaire. Il demande toutefois l'ajout d'une commande supplémentaire dans le fichier du modèle MSC/NASTRAN appelée USET1. Cette commande permet de définir l'ensemble des degrés de liberté de l'excitation. Puisqu'un seul nœud est excité et que seules les

directions X,Y et Z sont possibles, un maximum de trois degrés de liberté feront partie de cet ensemble appelé U2. Il s'agit donc d'ajouter au modèle la ligne suivante :

USET1,U2,123,NOEUD

où :

*USET1* est la commande définissant l'ensemble des d.d.l. de l'excitation;  
 123 sont les d.d.l. correspondant aux directions X,Y et Z;  
*NOEUD* est l'entier correspondant au noeud de l'excitation.

Tableau 3.1 : Résultats à requérir dans MSC/NASTRAN pour le processeur harmonique

| Résultat dans MSC/NASTRAN | Résultat dans le processeur harmonique       |
|---------------------------|----------------------------------------------|
| DISPLACEMENT = ALL        | Déplacements nodaux                          |
|                           | Vitesses nodales                             |
|                           | Accélérations nodales                        |
| GPFORCE = ALL             | Forces nodales                               |
| ELFORCE = ALL             | Forces élémentaires                          |
| SPCFORCE = ALL            | Forces associées aux conditions frontières   |
| MPCFORCE = ALL            | Forces associées aux conditions cinématiques |
| STRAIN = ALL              | Déformations élémentaires                    |
| STRESS = ALL              | Contraintes élémentaires                     |
|                           | Contraintes élémentaires de Von Mises        |

### **Fichier usager**

Le fichier usager est un fichier de forme prédéterminée que l'utilisateur doit écrire afin de communiquer avec le logiciel. Ce fichier permet, entre autres, de définir :

- la direction de l'excitation et son amplitude (accélération) fréquentielle;
- les résultats demandés pour des groupes de nœuds ou d'éléments (Figure 3.2);
- le type de fichier résultat pour les réponses et les graphes;
- les modes à considérer pour la superposition modale;
- si la contribution des modes rigides doit être ajoutée à la réponse;
- si l'effet de la flexibilité résiduelle doit être ajouté à la réponse;
- le facteur d'amplification dynamique (Q) relié à l'amortissement modal visqueux;
- les groupes de nœuds (Figure 3.2);
- les fréquences d'excitation.

La partie du fichier usager permettant de demander les réponses fréquentielles à calculer est illustrée à la Figure 3.2. Cette figure démontre également comment il est facile pour l'utilisateur de définir des groupes d'éléments pour lesquels la réponse doit être calculée. Le lecteur intéressé à connaître spécifiquement comment tous les paramètres mentionnés sont définis est prié de consulter l'ANNEXE I où un exemple complet de fichier usager pour le processeur harmonique est donné. Il est important de mentionner que les lignes comportant le symbole «\$» sont des commentaires et ne sont pas considérées par le logiciel.

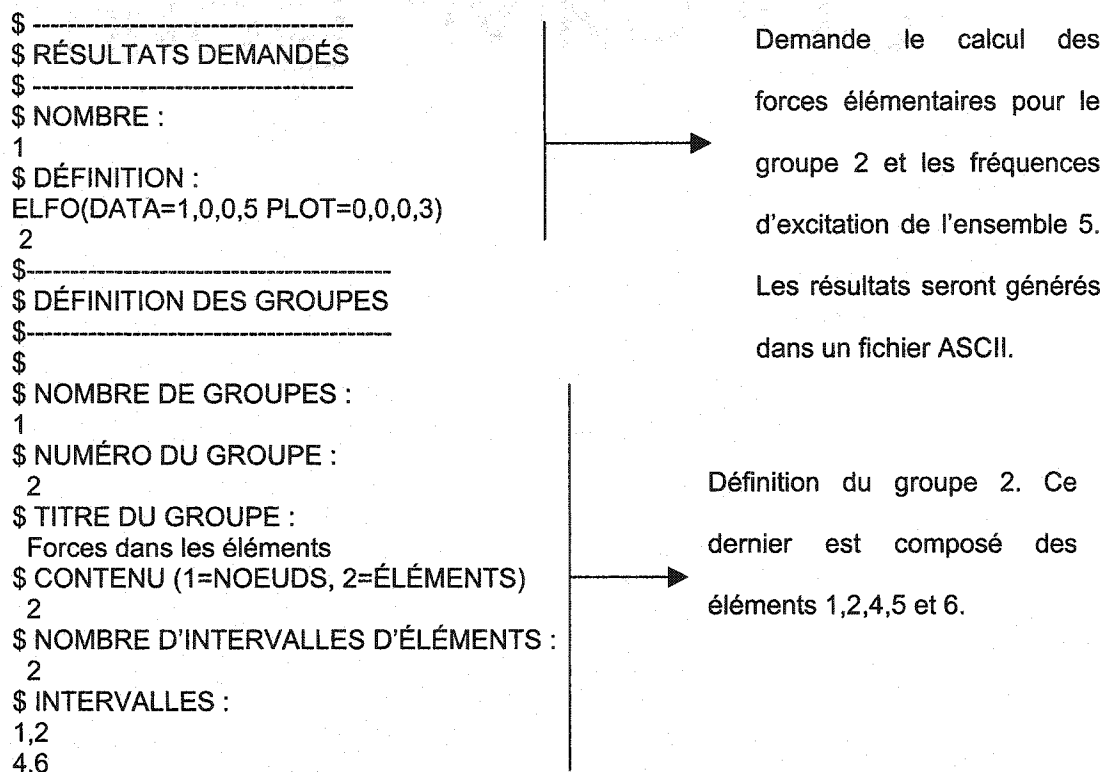


Figure 3.2 : Partie du fichier usager pour le processeur harmonique

### 3.1.2 Calcul de la réponse

L'équation permettant de calculer la réponse d'une structure accélérée harmoniquement à sa base a été dérivée au CHAPITRE 1. Réécrivons ici l'équation (1.41) nous permettant de calculer les déplacements causés par l'excitation à la base :

$$\{d_i\} = \left( \frac{[\Theta_{if}]}{-\omega^2} - \sum_p \frac{\{\phi_c\}_p [\Gamma_{if}]_p}{-\omega^2 + j \frac{\omega \omega_p}{Q_p} + \omega_p^2} \right) \{\ddot{d}_f\}, \quad \omega > 0 \quad (3.1)$$

La réponse est harmonique et, de ce fait, nous sommes en mesure de calculer, avec les vecteurs propres de déplacement, les vitesses et accélérations nodales avec la relation :

$$\begin{aligned}\{\dot{d}_i\} &= j\omega \{d_i\} \\ \{\ddot{d}_i\} &= -\omega^2 \{d_i\}\end{aligned}\quad (3.2)$$

En substituant (3.2) dans (3.1), on trouve pour les vitesses nodales :

$$\{\dot{d}_i\} = \left( \frac{[\Theta_{if}]}{j\omega} + \sum_p \frac{\omega \{\phi_c\}_p [\Gamma_{if}]_p}{j(\omega_p^2 - \omega^2) - \frac{\omega\omega_p}{Q_p}} \right) \{\ddot{d}_f\}, \quad \omega > 0 \quad (3.3)$$

Et pour les accélérations nodales:

$$\{\ddot{d}_i\} = \left( [\Theta_{if}] + \sum_p \frac{\omega^2 \{\phi_c\}_p [\Gamma_{if}]_p}{(\omega_p^2 - \omega^2) + j \frac{\omega\omega_p}{Q_p}} \right) \{\ddot{d}_f\} \quad (3.4)$$

Les réponses calculées en (3.1), (3.3) et (3.4) correspondent aux déplacements, vitesses et accélérations nodales et constituent les résultats primaires que l'on peut calculer, car les vecteurs propres de déplacement proviennent directement du problème aux valeurs propres. En effet, dans MSC/NASTRAN, tous les autres résultats mentionnés à la section 2.3.1 sont dérivés des déplacements et ils seront appelés résultats secondaires. Il s'agit maintenant de montrer que le calcul de la réponse pour les variables secondaires peut s'effectuer avec une équation similaire à l'équation (3.1), mais avec les vecteurs de résultats et les facteurs de participation modale correspondants aux variables secondaires. Le calcul des forces élémentaires servira à démontrer

cette affirmation. Prenons  $\{F_e\}$  comme étant le vecteur des forces élémentaires associées à des déplacements donnés. Ce vecteur s'écrit :

$$\{F_e\} = [T_{fd}] \{d\} \quad (3.5)$$

où  $[T_{fd}]$  est la matrice de transformation permettant d'obtenir les forces à partir des déplacements. En rappelant l'équation (1.82) qui relie les degrés de liberté physiques aux degrés de liberté modaux :

$$\{d\} = [\phi_c] \{q\}$$

où  $[\phi_c]$  est la matrice des modes de vibrations contraints et en l'insérant dans l'équation (3.5), on obtient:

$$\begin{aligned} \{F_e\} &= [T_{fd}] [\phi_c] \{q\} \\ &= [\Psi_c^f] \{q\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

où  $[\Psi_c^f]$  est la matrice des forces élémentaires lorsque les déplacements correspondent aux modes de vibrations contraints. Ce résultat est très important, car il montre que l'analyse modale peut être employée afin de trouver la réponse en fréquence des résultats secondaires. Il s'agit d'utiliser l'équation (3.1) avec les vecteurs de résultats et les facteurs de participation modale associés au résultat secondaire dont nous cherchons la réponse. Notons toutefois que la contribution associée aux déplacements quasi-statiques est nulle et ne doit pas être considérée, car elle ne provoque aucun déplacement relatif entre les nœuds.

### Contribution associée à la flexibilité résiduelle

La flexibilité résiduelle est calculée selon l'équation (1.54) que l'on réécrit:

$$\{d_{res}\} = \left( [K_{ii}]^{-1} - [\phi_c^R] \langle \Lambda_c^R \rangle^{-1} [\phi_c^R]^T \right) \{F_{eff}\} \quad (3.7)$$

Elle représente la contribution quasi-statique des modes tronqués lors de l'analyse modale. Ces modes sont inaccessibles à l'utilisateur du logiciel, car ils ne sont pas dans le fichier binaire. Leur contribution dynamique ne peut donc être calculée. On suppose toutefois que la fréquence d'excitation est beaucoup plus petite que les fréquences naturelles des modes tronqués. Ainsi, la contribution quasi-statique de ces modes représente bien leur comportement. Rappelons aussi que le vecteur des forces effectives est défini à l'équation (1.14) comme :

$$\{F_{eff}\} = \left( [M_{ii}] [K_{ii}]^{-1} [K_{if}] \right) \{\ddot{d}_f\}$$

parce que nous sommes en présence d'une matrice de masses concentrées. Lors de l'analyse modale, l'amplitude de l'excitation est inconnue. La matrice de flexibilité résiduelle  $[d_{if}^{res}]$  calculée par MSC/NASTRAN devra être multipliée par le vecteur de l'excitation au nœud frontière pour obtenir les déplacements résiduels. Cette matrice est obtenue comme suit :

$$[d_{if}^{res}] = \left( [K_{ii}]^{-1} - [\phi_c^R] \langle \Lambda_c^R \rangle^{-1} [\phi_c^R]^T \right) \left( [M_{ii}] [K_{ii}]^{-1} [K_{if}] \right) \quad (3.8)$$

Enfin, on réécrit l'équation (3.1) en tenant compte de la flexibilité résiduelle de la façon suivante :

$$\{d_i\} = \left( \frac{[\Theta_{if}]}{-\omega^2} - \left( \sum_p \frac{\{\phi_c\}_p [\Gamma_{if}]_p}{-\omega^2 + j \frac{\omega \omega_p}{Q_p} + \omega_p^2} \right) + [d_{if}^{res}] \right) \{\ddot{d}_f\} \quad (3.9)$$

On trouve directement l'expression des vitesses et accélérations nodales en se référant à l'équation (3.2). La matrice de flexibilité résiduelle de chaque résultat secondaire est aussi sauvegardée dans le fichier binaire lors de l'analyse modale.

#### **Calcul des marges de sécurité minimum**

Les marges de sécurité dans un matériau donné sont calculées de la façon suivante :

$$M.S.(%) = \left( \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{VM} * F.S.} - 1 \right) * 100 \quad (3.10)$$

où :

$\sigma_{adm}$  est la contrainte admissible dans le matériau;

$\sigma_{VM}$  est la contrainte calculée selon le critère de Von Mises;

F.S. est un facteur de sécurité.

La contrainte admissible de même que le facteur de sécurité sont donnés par l'utilisateur. C'est la contrainte de Von Mises qu'il s'agit de déterminer. Lors d'une analyse statique et pour un état de contraintes tridimensionnel, cette dernière est calculée de la façon suivante :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \quad (3.11)$$

où :

$\sigma_x$  est la contrainte normale à l'axe X;

$\tau_{xy}$  est la contrainte de cisaillement dans le plan perpendiculaire à X et parallèle à Y.

Cependant, nous voulons calculer les marges de sécurité pour une analyse de réponse en fréquence et les contraintes sont complexes; elles varient dans le temps. Chaque contrainte  $\sigma$  ou  $\tau$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma = |\sigma| \sin(\omega t + \phi) \quad (3.12)$$

où :

$|\sigma|$  est le module de la contrainte;

$\omega$  est la fréquence d'excitation;

$\phi$  est le déphasage entre  $\sigma$  et l'axe des réels.

Et en remplaçant (3.12) dans l'équation (3.11) et en élevant au carré, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{VM}^2(\theta) = & |\sigma_x|^2 \sin^2(\theta + \phi_x) + |\sigma_y|^2 \sin^2(\theta + \phi_y) + |\sigma_z|^2 \sin^2(\theta + \phi_z) - \\ & |\sigma_x| |\sigma_y| \sin(\theta + \phi_x) \sin(\theta + \phi_y) - |\sigma_x| |\sigma_z| \sin(\theta + \phi_x) \sin(\theta + \phi_z) - \\ & |\sigma_y| |\sigma_z| \sin(\theta + \phi_y) \sin(\theta + \phi_z) + \\ & 3 \left( |\tau_{xy}|^2 \sin^2(\theta + \phi_{xy}) + |\tau_{xz}|^2 \sin^2(\theta + \phi_{xz}) + |\tau_{yz}|^2 \sin^2(\theta + \phi_{yz}) \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

où :

$\theta = \omega t$ ;

$\phi_x$  est le déphasage associé à  $\sigma_x$ ;

$\phi_{xy}$  est le déphasage associé à  $\tau_{xy}$ .

Pour trouver la marge de sécurité minimum, il s'agit de calculer la contrainte de Von Mises maximale qui est susceptible de se produire sur une période  $\theta = 2\pi$ . Cela peut se faire numériquement, en incrémentant  $\theta$  et en calculant la contrainte de Von Mises à chaque

incrément. Cette méthode s'avère toutefois coûteuse en temps de calcul. La contrainte maximale de Von Mises exacte peut être calculée analytiquement en trouvant les extremums de  $\sigma_{VM}^2$ , c'est-à-dire les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles :

$$\frac{d(\sigma_{VM}^2)}{d\theta} = 0 \quad (3.14)$$

Ces extremums sont donnés dans la référence [3] pour le cas d'un état plan de contraintes. Pour les cas tridimensionnels, on peut démontrer qu'ils satisfont l'équation :

$$\begin{aligned} -\tan(2\theta) = & \frac{|\sigma_x|^2 \sin(2\phi_x) + |\sigma_y|^2 \sin(2\phi_y) + |\sigma_z|^2 \sin(2\phi_z) +}{|\sigma_x|^2 \cos(2\phi_x) + |\sigma_y|^2 \cos(2\phi_y) + |\sigma_z|^2 \cos(2\phi_z) +} \\ & \frac{3 \left[ |\tau_{xy}|^2 \sin(2\phi_{xy}) + |\tau_{xz}|^2 \sin(2\phi_{xz}) + |\tau_{yz}|^2 \sin(2\phi_{yz}) \right] -}{3 \left[ |\tau_{xy}|^2 \cos(2\phi_{xy}) + |\tau_{xz}|^2 \cos(2\phi_{xz}) + |\tau_{yz}|^2 \cos(2\phi_{yz}) \right] -} \\ & \frac{\left[ |\sigma_x| |\sigma_y| \sin(\phi_x + \phi_y) + |\sigma_x| |\sigma_z| \sin(\phi_x + \phi_z) + |\sigma_y| |\sigma_z| \sin(\phi_y + \phi_z) \right]}{\left[ |\sigma_x| |\sigma_y| \cos(\phi_x + \phi_y) + |\sigma_x| |\sigma_z| \cos(\phi_x + \phi_z) + |\sigma_y| |\sigma_z| \cos(\phi_y + \phi_z) \right]} \end{aligned} \quad (3.15)$$

En résolvant l'équation (3.15) et en prenant la valeur de  $\theta$  pour laquelle la contrainte de Von Mises est maximale, on trouve la marge de sécurité minimale.

### 3.1.3 Visualisation des résultats

#### *Fichiers résultats*

La réponse calculée par le logiciel peut être sauvegardée dans des fichiers textes (ASCII), dans des fichiers Excel ou dans des fichiers universels que l'utilisateur peut importer dans I-DEAS. Ces fichiers prennent rapidement des tailles considérables et le lecteur intéressé par le format

d'un fichier texte plus complet doit se référer à l'ANNEXE II pour les réponses en accélération d'un modèle typique. Ces fichiers contiennent :

- un résumé des requêtes de l'utilisateur;
- la réponse (module et phase ou complexe);
- les fréquences d'excitation;
- un sommaire des réponses maximales.

### ***Graphes de la réponse***

Pour bien visualiser les résultats obtenus, l'utilisateur peut se référer aux courbes de réponse en fréquences tracées par gnuplot [37] où à l'aide d'un macro écrit pour Excel. Les graphiques générés avec gnuplot sont ensuite référés par une page HTML permettant à l'utilisateur de choisir rapidement le graphe à examiner. Un exemple de courbe de réponse en fréquence est donné à la Figure 3.3. Ce graphe exprime le module de la réponse en accélération pour le degré de liberté X du nœud 5. On y remarque trois pics situés très près des trois fréquences fondamentales de la structure étudiée.

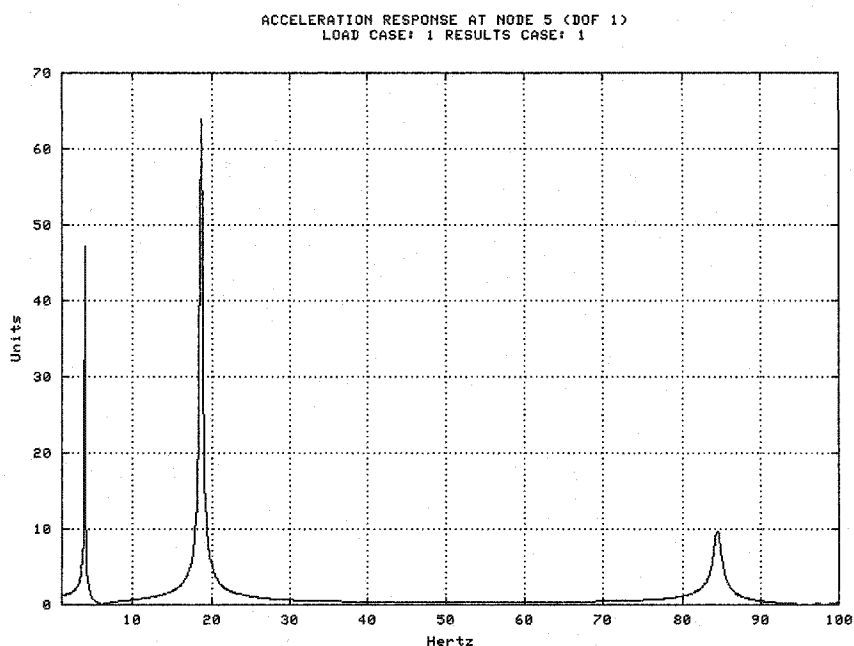


Figure 3.3 : Courbe de réponse en fréquence générée par gnuplot

### 3.1.4 Conclusion

En somme, le processeur harmonique nécessite des données provenant d'un fichier binaire MSC/NASTRAN et d'un fichier usager. Il calcule ensuite la réponse fréquentielle avec le principe de superposition modale. Cette méthode s'applique aussi bien aux résultats primaires (déplacements, vitesses et accélérations nodales) qu'aux résultats secondaires (déformations, contraintes, forces élémentaires, etc.). Le logiciel peut ajouter à la réponse calculée la contribution quasi-statique des modes tronqués avec la méthode de la flexibilité résiduelle. Les contraintes de Von Mises maximales peuvent être calculées de façon analytique et les marges de sécurité générées sont minimales. L'utilisateur consulte les résultats obtenus à l'aide de fichiers ASCII, Excel et universels de même que sous la forme de graphiques créés par Excel ou gnuplot.

### 3.2 Processeur aléatoire

À l'instar du processeur harmonique, le processeur aléatoire nécessite l'apport de données provenant de deux sources distinctes montrées à la Figure 3.4. La première source consiste en un fichier binaire MSC/NASTRAN contenant les résultats d'une solution modale (SOL 103) de la structure à étudier. Le fichier usager est quant à lui écrit par l'utilisateur du logiciel et contient toutes les informations sur l'analyse dynamique à compléter par le processeur. Toutefois, aucun DMAP ne doit être ajouté au modèle lors de la résolution du problème aux valeurs propres par MSC/NASTRAN, car seules les fréquences naturelles de vibration et les modes de vibrations libres sont nécessaires au calcul de la réponse.

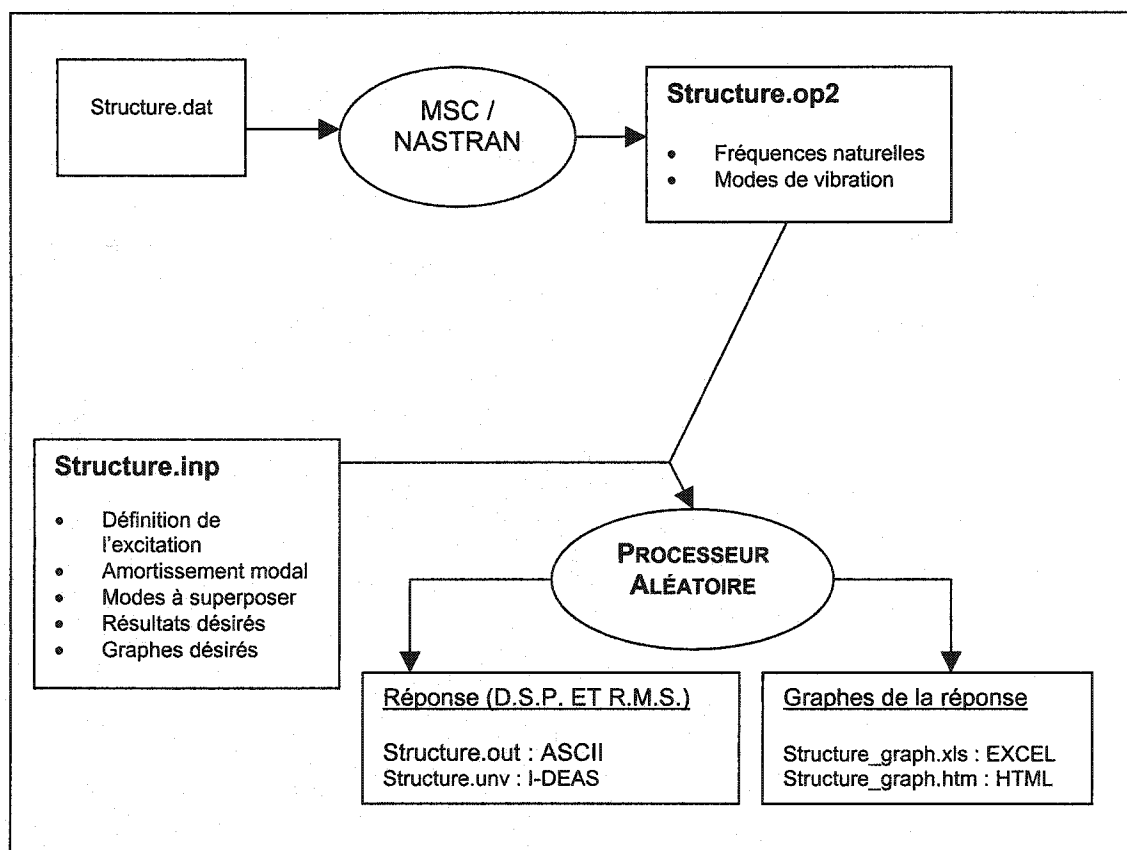


Figure 3.4 : Fonctionnement du processeur aléatoire

### 3.2.1 Données externes au logiciel

#### ***Fichier binaire MSC/NASTRAN***

Le fichier binaire MSC/NASTRAN provient d'une solution modale (SOL 103) de la structure à étudier. Afin d'obtenir ce fichier lors de l'analyse, l'utilisateur doit ajouter une carte paramètre à son modèle. Cette carte est la même que pour le processeur harmonique, soit :

*PARAM,POST,-2*

Avec ce paramètre, un fichier ayant l'extension OP2 sera créé par MSC/NASTRAN lors de l'analyse des modes de vibration de la structure étudiée. De plus, l'utilisateur doit obligatoirement exiger que MSC/NASTRAN génère les modes de vibration associés aux déplacements de la structure avec la requête :

*DISPLACEMENT = ALL*

Ces deux ajouts nous assurent que les vecteurs propres de déplacements et les fréquences naturelles non amorties de la structure seront disponibles dans le fichier binaire.

#### ***Fichier usager***

Le fichier usager de processeur aléatoire nous permet d'obtenir les données manquantes dans le fichier binaire de même que les spécifications de l'analyse à effectuer. Ces données proviennent directement de l'utilisateur du logiciel et doivent être écrites dans le fichier suivant un ordre précis. Ce fichier contient les informations suivantes :

- La définition des excitations. Ces dernières sont spécifiées sous forme de densités spectrales de puissance aux degrés de liberté internes de la structure. Elles peuvent varier en fonction de la fréquence.
- Les résultats demandés pour des groupes de nœuds spécifiques.
- Le type de fichier résultat pour les réponses et les graphes.
- Les modes à considérer pour la superposition modale.
- L'amortissement modal visqueux (facteur d'amplification dynamique Q).
- Les groupes de nœuds.
- La méthode d'intégration de la densité spectrale de puissance de la réponse.
- La probabilité pour laquelle il faut calculer l'écart-type (valeur efficace) de la réponse.

Le lecteur intéressé à connaître spécifiquement comment tous les paramètres mentionnés sont définis est prié de consulter l'ANNEXE IV où un exemple complet de fichier usager pour le processeur aléatoire est donné.

### 3.2.2 Calcul de la réponse

La densité spectrale de la réponse d'un d.d.l.  $r$  est calculée selon l'équation (1.110) que l'on réécrit ici pour un nombre  $q \leq n$  d'excitations nodales aléatoires :

$$S_{d_r d_r}(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \phi_{ri} \phi_{rk} \sum_{l=1}^q \sum_{m=1}^q \phi_{li} \phi_{mk} S_{F_l F_m}(\omega) H_i^*(\omega) H_k(\omega) d\omega \quad (3.16)$$

Il peut être démontré que les DSP de la réponse pour les vitesses et accélérations sont liées aux DSP des déplacements comme suit :

$$\begin{aligned} S_r(\omega) &= \omega^2 S_r(\omega) \\ S_r(\omega) &= \omega^4 S_r(\omega) \end{aligned} \quad (3.17)$$

La valeur quadratique moyenne est quant à elle calculée avec l'équation (1.108) que l'on réécrit ici de deux façons équivalentes :

$$\Psi_{d_r}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \phi_{ri} \phi_{rk} \sum_{l=1}^q \sum_{m=1}^q \phi_{li} \phi_{mk} \int_{-\infty}^{\infty} S_{F_l F_m}(\omega) H_i^*(\omega) H_k(\omega) d\omega \quad (3.18)$$

$$\Psi_{d_r}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \phi_{ri} \phi_{rk} \sum_{l=1}^q \sum_{m=1}^q \phi_{li} \phi_{mk} S_{F_l F_m}(\omega) H_i^*(\omega) H_k(\omega) \right] d\omega \quad (3.19)$$

L'équation (3.18) n'est nulle autre que l'équation (1.108) pour un nombre  $q \leq n$  d'excitations nodales aléatoires. On y remarque que la valeur quadratique moyenne totale est la somme des différentes VQM du degré de liberté  $r$  pour chaque combinaison de mode  $i, k$ . Nous avons donc  $n^2 q^2$  intégrales à calculer. Toutefois, en tenant compte de la symétrie de la DSP démontrée à l'équation (1.76), on diminue ce nombre d'intégrales à  $nq(n+1)(q+1)/2$ . Ce nombre est maximal et il diminue si certaines excitations sont complètement corrélées. C'est cette approche qui sera utilisée pour la méthode d'intégration analytique de la DSP. À l'équation (3.19), on calcule d'abord la densité spectrale de puissance totale de la réponse pour ensuite l'intégrer. Une seule intégrale doit ainsi être calculée et c'est donc cette équation qui sera utilisée par l'algorithme d'intégration numérique.

### ***Intégration numérique***

Pour intégrer la DSP (calculer l'aire sous cette courbe), le logiciel MSC/NASTRAN utilise la méthode des trapèzes qui est en fait la plus simple méthode d'intégration numérique connue. Il s'agit de calculer l'aire sous un polynôme de degré 1 reliant deux points dont la DSP est calculée. Plus les points sont rapprochés, plus l'aire calculée sera précise. L'utilisateur de MSC/NASTRAN doit donc évaluer la DSP en plusieurs points afin d'obtenir une VQM précise. La méthode d'intégration numérique utilisée dans ce projet est la méthode de Romberg qui permet de spécifier un seuil de précision à atteindre lors de l'intégration. Le nombre de DSP à calculer dépend de la précision demandée et est évalué directement par l'algorithme. Cette méthode est très précise, mais plus la précision voulue est grande, plus le temps de calcul est long. L'algorithme d'intégration numérique utilisé provient du livre *Numerical recipes in C* [29]. L'intégration numérique a été ajoutée à ce projet afin de valider les calculs de l'intégration analytique et de démontrer à quel point son application augmente la précision du calcul de la VQM et diminue le temps nécessaire à son obtention. Un autre algorithme d'intégration numérique donné à la référence [28] et privilégié dans des cas semblables [4][15] aurait pu être utilisé et pourra ultérieurement être ajouté au logiciel. Toutefois, les routines de cet algorithme sont écrites en Fortran alors que le logiciel doit être programmé en C. On remarque dans la Figure 3.5 que les DSP de la réponse comportent des sommets pointus. Ces sommets sont souvent très près des fréquences naturelles de la structure. Ainsi, l'intervalle d'intégration a été séparé en plusieurs sous-intervalles délimités par les fréquences naturelles de la structure afin d'éviter que des problèmes d'intégration surviennent. Cela améliore la convergence de la méthode.

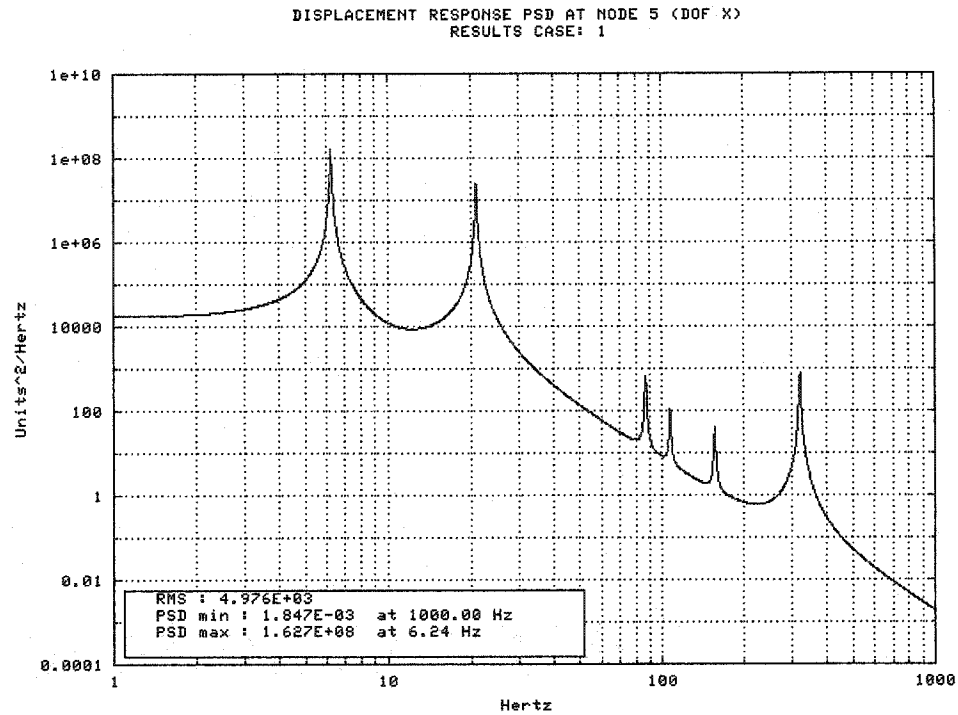


Figure 3.5 : Densité spectrale de puissance typique montrant des sommets pointus

### *Intégration analytique*

La méthode d'intégration analytique de la DSP utilisée pour ce projet a été développée par Chen et Ali [4]. Il s'agit d'évaluer le «<sup>n<sup>ième</sup></sup>» moment spectral suivant obtenu de l'équation (3.18) :

$$\lambda_{n,ik} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n S_{F_i F_n}(\omega) H_i^*(\omega) H_k(\omega) d\omega \quad (3.20)$$

Dans cette équation, le terme  $\omega^n$  nous permettra d'intégrer une DSP polynomiale et de déterminer les vitesses et accélérations nodales. En effet, comme il a été spécifié à l'équation (3.17), ces résultats peuvent être exprimés en fonction des DSP de déplacement. Ainsi, la valeur de

l'exposant  $n$  différera selon le résultat à calculer (0,2 ou 4 respectivement pour les déplacements, vitesses et accélérations). De plus, les DSP de l'excitation sont données sous forme de droites log-log entre deux points a et b. Elles s'expriment toutes de la façon suivante :

$$S_{F_i F_m}(\omega) = \frac{S_{F_i F_m}(\omega_a)}{\omega_a^\alpha} \omega^\alpha \text{ avec } \alpha = \frac{\ln(S_{F_i F_m}(\omega_b)/S_{F_i F_m}(\omega_a))}{\ln(\omega_b/\omega_a)} \quad (3.21)$$

où :

$\alpha$  est la pente de la DSP pour une échelle log-log;  
 $\omega_a \leq \omega \leq \omega_b$  sont les fréquences angulaires frontières.

La plupart du temps, lorsque la DSP n'est pas constante, la pente  $\alpha$  n'est pas un entier et l'intégrale (3.20) ne peut pas être utilisée directement. Ce problème est contourné en exprimant la DSP sous forme d'un polynôme de degré  $m$  :

$$S_{F_i F_m}(\omega) = \sum_{t=0}^m b_t \omega^t, \quad \omega_a \leq \omega \leq \omega_b \quad (3.22)$$

où  $b_t$  sont les coefficients du polynôme. Il suffit maintenant de trouver une expression analytique à l'intégrale (3.20) pour déterminer la valeur exacte de la VQM. La technique consiste à réécrire  $H_i^*(\omega)H_k(\omega)$  comme une somme d'intégrales que l'on peut résoudre analytiquement en les séparant en fractions partielles. En développant  $H_i^*(\omega)H_k(\omega)$ , on obtient :

$$H_i^*(\omega)H_k(\omega) = \frac{1}{(\omega_i^2 - \omega^2 - j2\zeta_i \omega \omega_i)} \frac{1}{(\omega_k^2 - \omega^2 + j2\zeta_k \omega \omega_k)} \quad (3.23)$$

Puisque nous sommes en présence de deux équations quadratiques au dénominateur, les quatre racines de l'équation sont trouvées en utilisant l'équation suivante :

$$Racines_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.24)$$

avec  $a, b$  et  $c$  les coefficients de  $a\omega^2 + b\omega + c$ . Nous obtenons les racines  $\Omega$  ci-dessous :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} - j\omega_i \zeta_i \\ \Omega_2 &= -\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} - j\omega_i \zeta_i \\ \Omega_3 &= \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} + j\omega_k \zeta_k \\ \Omega_4 &= -\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} + j\omega_k \zeta_k \end{aligned} \quad (3.25)$$

On réécrit l'équation (3.23) de la façon suivante :

$$H_i^*(\omega)H_k(\omega) = \frac{1}{(\omega - \Omega_1)} \frac{1}{(\omega - \Omega_2)} \frac{1}{(\omega - \Omega_3)} \frac{1}{(\omega - \Omega_4)} \quad (3.26)$$

Et on développe en fractions partielles pour obtenir :

$$H_i^*(\omega)H_k(\omega) = \frac{C_1}{(\omega - \Omega_1)} + \frac{C_2}{(\omega - \Omega_2)} + \frac{C_3}{(\omega - \Omega_3)} + \frac{C_4}{(\omega - \Omega_4)} \quad (3.27)$$

où :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{(\Omega_1 - \Omega_2)(\Omega_1 - \Omega_3)(\Omega_1 - \Omega_4)}, & C_2 &= \frac{1}{(\Omega_2 - \Omega_1)(\Omega_2 - \Omega_3)(\Omega_2 - \Omega_4)} \\ C_3 &= \frac{1}{(\Omega_3 - \Omega_1)(\Omega_3 - \Omega_2)(\Omega_3 - \Omega_4)}, & C_4 &= \frac{1}{(\Omega_4 - \Omega_1)(\Omega_4 - \Omega_2)(\Omega_4 - \Omega_3)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

En substituant (3.27) et (3.22) dans l'intégrale (3.20), on trouve :

$$\lambda_{n,ik} = \sum_{t=0}^m b_t \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{t+n} \left( \frac{C_1}{(\omega - \Omega_1)} + \frac{C_2}{(\omega - \Omega_2)} + \frac{C_3}{(\omega - \Omega_3)} + \frac{C_4}{(\omega - \Omega_4)} \right) d\omega \quad (3.29)$$

Sous une forme compacte, l'équation (3.29) s'écrit :

$$\lambda_{n,ik} = \sum_{t=0}^m b_t \sum_{u=1}^4 C_u \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^{t+n}}{(\omega - \Omega_u)} d\omega \quad (3.30)$$

La solution analytique d'une telle intégrale existe et est donnée dans la référence [4] comme étant :

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\omega^m}{(\omega - \Omega)} d\omega = I(\omega_2, \Omega, m) - I(\omega_1, \Omega, m) \quad (3.31)$$

où :

$$I(\omega, \Omega, m) = \Omega^m \ln(\omega - \Omega) + \sum_{k=1}^m \frac{\Omega^{m-k} \omega^k}{k}, \quad m \geq 0 \quad (3.32)$$

### ***Valeur associée à une probabilité***

Il arrive fréquemment que l'utilisateur désire connaître la réponse associée à une probabilité. En vertu de l'équation (1.65), la valeur quadratique moyenne de la réponse égale sa variance lorsque la moyenne égale zéro. Puisque c'est ce cas qui nous concerne, la densité de probabilité de la réponse est complètement définie et s'exprime selon l'équation (1.80) donnée à la section 1.3.2. Le processeur aléatoire est en mesure de déterminer, à partir d'une probabilité donnée par

l'utilisateur, la réponse maximale qu'il est statistiquement possible d'obtenir. Pour ce faire, il faut d'abord considérer la fonction de densité de probabilité standardisée  $p(x)$ , c'est-à-dire pour une moyenne nulle et une variance égale à l'unité. On obtient ainsi la fonction suivante :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3.33)$$

On pourra passer de cette fonction de densité de probabilité standardisée à celle de l'équation (1.80) avec la transformation suivante :

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{X}{\sigma_x} \text{ pour } \mu_x = 0 \quad (3.34)$$

où  $Z$  est la variable normalisée et  $X$  est la valeur recherchée par l'utilisateur. En réécrivant l'équation (1.81) et en y insérant l'équation (3.33), on trouve, à cause de la symétrie de  $p(x)$  :

$$P(Z \in [-z, z]) = \int_{-z}^z p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (3.35)$$

qui définit la probabilité  $P$  qu'une réponse aléatoire  $Z$  soit comprise dans l'intervalle borné par les valeurs  $\pm z$ . C'est cette valeur  $z$  que nous cherchons connaissant  $P(Z \in [-z, z])$ . Le problème consiste à évaluer l'intégrale de l'équation (3.35) qui ne possède pas de solution analytique. Toutefois, des algorithmes disponibles dans les bibliothèques mathématiques de compilateurs C peuvent nous aider. Ainsi, cette intégrale peut être résolue avec la fonction erreur  $\text{erf}(z)$  définie comme suit :

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

$$erf\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx, \text{ pour } t = \frac{x}{\sqrt{2}}$$
(3.36)

pour finalement trouver, en remplaçant la deuxième partie de l'équation (3.36) dans l'équation (3.35):

$$P(Z \in [-z, z]) = erf\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$
(3.37)

On trouve la valeur de  $z$  par une méthode numérique, comme celle de Newton [9] pour ensuite la remplacer dans l'équation (3.34) et trouver  $X$ . Cette valeur  $X$  est la réponse associée à une probabilité donnée. Ainsi, si l'utilisateur demande une probabilité de 68.269%, la valeur de  $z$  sera l'unité et la valeur donnée sera la valeur efficace (RMS) calculée. Cela signifie que dans 68.269% des cas, la réponse de la structure sera plus petite ou égale à la valeur RMS.



### Graphes de la densité spectrale de puissance

Les densités spectrales de puissance peuvent être visualisées par l'intermédiaire d'une page HTML similaire à celle présentée à la Figure 3.7. Cette page contient l'information utile concernant l'analyse et les graphes des DSP de l'excitation, du coefficient de corrélation (si nécessaire) et des DSP de la réponse avec la valeur efficace calculée. La visualisation des courbes de DSP peut s'avérer utile à l'analyste qui désire connaître la bande de fréquences contribuant le plus à la valeur efficace.

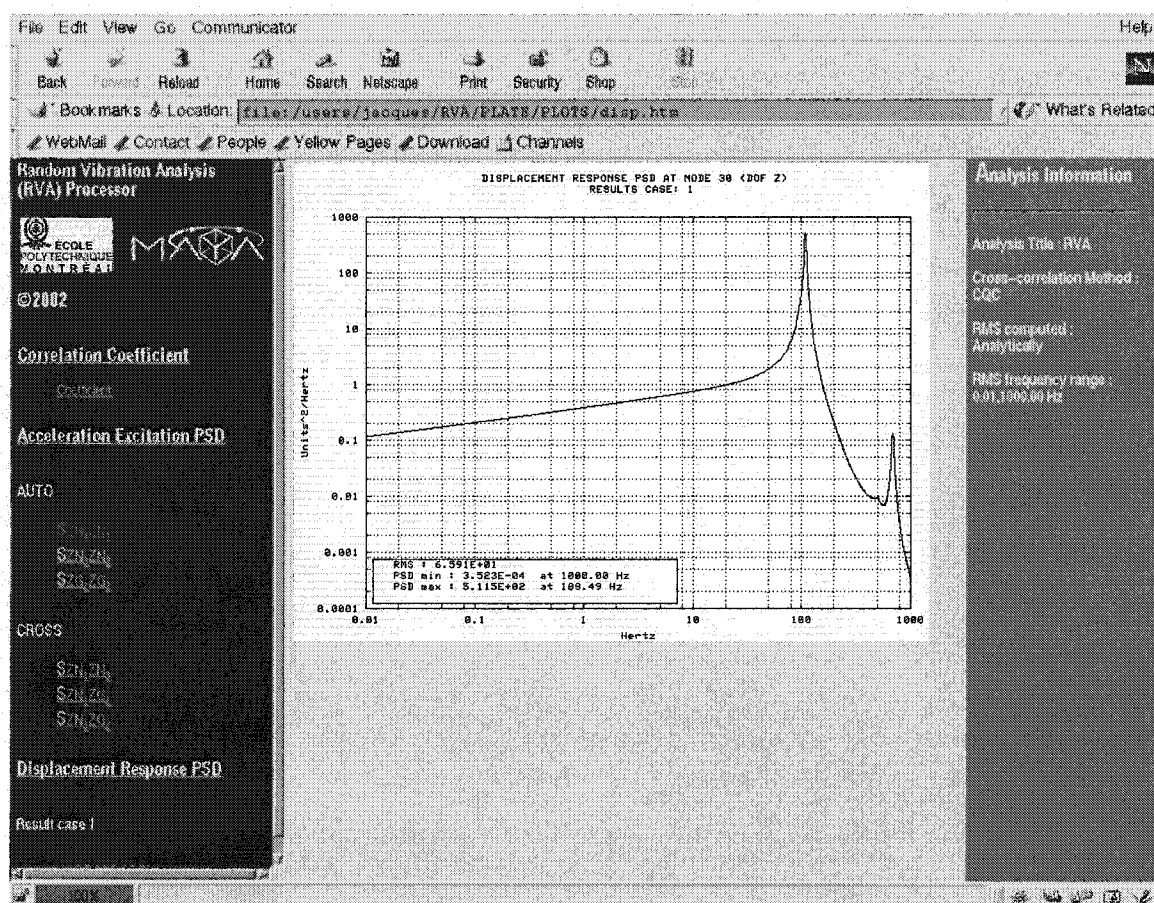


Figure 3.7 : Page HTML générée par le processeur aléatoire

### 3.2.4 Conclusion

Tout comme le processeur harmonique, le processeur aléatoire nécessite l'apport de données via un fichier binaire MSC/NASTRAN et un fichier usager. Toutefois, aucun DMAP ne doit être ajouté à la solution modale de MSC/NASTRAN puisque seuls les modes de vibration et les fréquences naturelles sont nécessaires au calcul de la réponse. Cette dernière est disponible à l'utilisateur sous forme de graphes des densités spectrales de puissance (Excel et HTML) et de valeur efficace de la réponse (ASCII et I-DEAS). Les valeurs efficaces sont obtenues en intégrant numériquement ou analytiquement les DSP de la réponse. L'intégration analytique permet le calcul exact de la valeur efficace lorsque les segments définissant les DSP de l'excitation ont une pente entière. De plus, l'utilisateur peut spécifier une probabilité de façon à ce que le processeur aléatoire génère la réponse qui lui est associée à l'aide de la valeur efficace préalablement trouvée.

## **CHAPITRE 4**

### **VALIDATION DES RÉSULTATS**

#### **4.1 Introduction**

Les logiciels développés dans le cadre de ce projet pourront ultérieurement être utilisés pour l'analyse structurale de véhicules spatiaux. Il est donc primordial que les résultats qu'ils génèrent soient validés et comparés à ceux calculés par d'autres logiciels ayant des capacités équivalentes, voire supérieures. Le logiciel utilisé pour approuver les calculs des processeurs développés est MSC/NASTRAN 2001. Ce logiciel a d'abord été choisi parce qu'il est actuellement le logiciel de référence en analyse structurale. De plus, puisque les processeurs utilisent les résultats d'une solution modale provenant directement de MSC/NASTRAN, nous serons en mesure de vérifier la précision des calculs. En effet, les processeurs et MSC/NASTRAN calculeront la réponse de la structure à partir des mêmes vecteurs propres et fréquences naturelles. Ce chapitre est divisé en deux parties distinctes traitant respectivement du processeur harmonique et du processeur aléatoire. Pour chaque logiciel développé, une présentation complète des modèles d'éléments finis utilisés pour valider les calculs est suivie d'une comparaison des résultats obtenus par le logiciel et MSC/NASTRAN.

## 4.2 Processeur harmonique

### 4.2.1 Description du modèle utilisé

Dans le cas du processeur harmonique, le modèle utilisé est celui du satellite scientifique SCISAT-1<sup>3</sup> montré à la Figure 4.1. Ce satellite scientifique a été développé par l'agence spatiale canadienne conjointement avec plusieurs entreprises canadiennes. MAYA technologies en transfert de chaleur a œuvré à titre de consultant en analyse structurale sur ce projet. Ce satellite a été choisi parce qu'il correspond exactement au type de structures pour lesquelles le logiciel a été développé, c'est-à-dire les structures linéaires faiblement amorties.

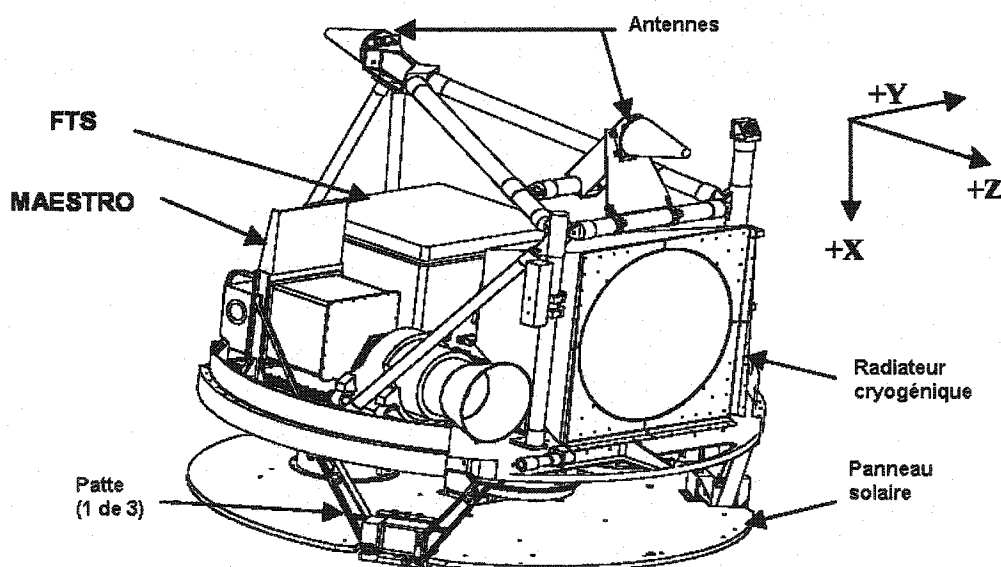


Figure 4.1 : Satellite SCISAT-1

Le modèle d'éléments finis de SCISAT-1 comprend près de 100 000 degrés de liberté, 18 500 nœuds et 21 755 éléments. Il est montré à la Figure 4.2 alors que ses 10 premières fréquences

<sup>3</sup> [http://www.space.gc.ca/csa\\_sectors/space\\_science/atmospheric\\_env/scisat1/default.asp](http://www.space.gc.ca/csa_sectors/space_science/atmospheric_env/scisat1/default.asp)

naturelles sont données au Tableau 4.1. Quelques modifications mineures ont toutefois été apportées au modèle final afin qu'il contienne tous les types d'éléments donnés au Tableau 2.1.



Tableau 4.1 : Fréquences naturelles de SCISAT-1

| Mode | Fréquence naturelle (Hz) |
|------|--------------------------|
| 1    | 4.936                    |
| 2    | 5.644                    |
| 3    | 35.421                   |
| 4    | 36.634                   |
| 5    | 43.480                   |
| 6    | 47.300                   |
| 7    | 49.278                   |
| 8    | 52.860                   |
| 9    | 53.561                   |
| 10   | 57.745                   |

Figure 4.2 : Modèle d'éléments finis de SCISAT-1

#### 4.2.2 Validation des calculs

La réponse dynamique sera validée pour tous les résultats qu'il est possible d'obtenir avec le processeur harmonique. Les nœuds et éléments pour lesquels la réponse a été validée ont été choisis au hasard de même que le degré de liberté utilisé pour la validation. Les spécifications de l'analyse sont résumées au Tableau 4.2.

Tableau 4.2 : Spécifications de l'analyse de SCISAT-1

| Données                                    | Valeurs                                                                                                                              |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Accélération à la base                     | 1 g (où $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ )                                                                                                    |
| Facteur d'amplification dynamique (Q)      | 25                                                                                                                                   |
| Fréquences d'excitation du processeur      | de 0.01 à 100 Hz inclusivement                                                                                                       |
| Fréquences d'excitation de MSC/NASTRAN     | 36 fréquences entre 1 et 100 Hz dont :<br>- 1.0 et 100.0 Hz<br>- 15 fréquences naturelles<br>- $5.0 \cdot i$ Hz où $i=1,2,\dots, 19$ |
| Axe de l'excitation                        | X (Verticalement)                                                                                                                    |
| Modes à superposer                         | 53 premiers modes<br>De 0 à 200 Hz inclusivement                                                                                     |
| Ajout de la contribution des modes rigides | Oui                                                                                                                                  |
| Ajout de la flexibilité résiduelle         | Cas 1 : Non<br>Cas 2 : Oui                                                                                                           |

Les réponses calculées sans la contribution de la flexibilité résiduelle (Cas 1) sont comparées à des analyses MSC/NASTRAN faites avec les spécifications du Tableau 4.2 et avec la méthode de la masse sismique [20] [21]. Puisque tous les paramètres sont identiques, il est possible de vérifier l'exactitude et la fiabilité des calculs. Ensuite, les mêmes analyses sont reprises en incluant la contribution de la flexibilité résiduelle (Cas 2). Pour valider l'exactitude de cette méthode, les résultats sont comparés avec la solution exacte MSC/NASTRAN provenant de la résolution directe des équations du mouvement. Le Tableau 4.3 contient tous les résultats pour la réponse en accélération du degré de liberté X associé au nœud 10049. Ces derniers sont rapportés sur la Figure 4.3. L'erreur relative entre les résultats est obtenue avec l'équation suivante :

$$\text{Erreur(\%)} = \frac{|\text{Valeur calculée} - \text{Valeur de référence}|}{\text{Valeur de référence}} * 100 \quad (4.1)$$

où la valeur calculée provient du processeur harmonique et la valeur de référence est celle de MSC/NASTRAN. Les réponses calculées sont des nombres complexes et c'est l'amplitude des réponses qui est utilisée dans l'équation (4.1). Les moyennes données à la fin du tableau

démontrent que les calculs du processeur sans la flexibilité résiduelle sont identiques à ceux de MSC/NASTRAN. De plus, en ajoutant la contribution de la flexibilité résiduelle, la réponse tend davantage vers la réponse exacte. C'est ce sommaire des moyennes qui est présenté aux pages suivantes, pour les autres résultats à valider, afin d'alléger cette section. Tous les graphes associés aux sommaires sont quant à eux présentés à l'ANNEXE III.

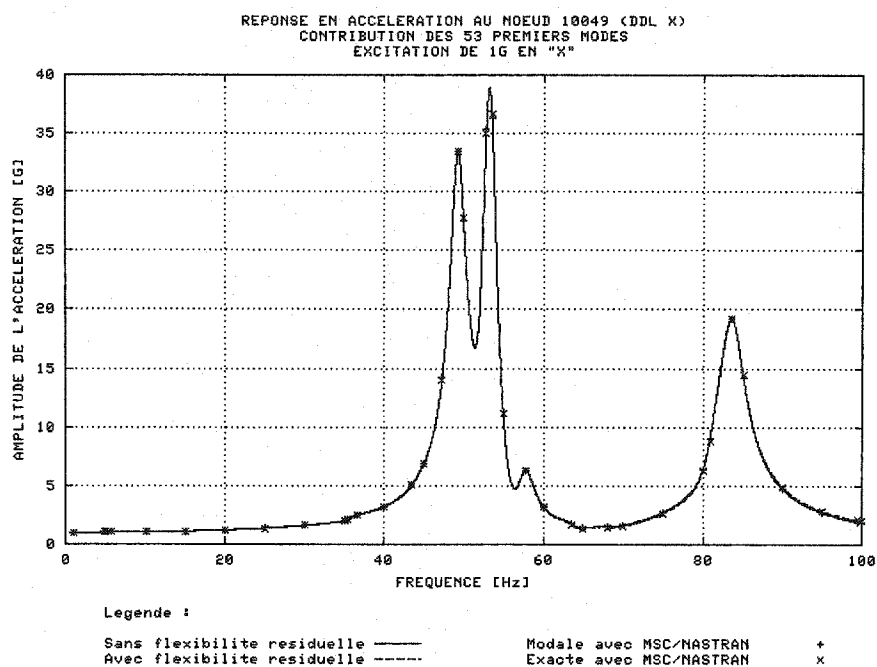


Figure 4.3 : Accélération au nœud 10049 (DDL X)

Tableau 4.3 : Détail des résultats en accélération pour le nœud 10049 (DDL X)

| Fréquence<br>d'excitation | Processeur<br>harmonique |          | MSC / NASTRAN |          | Erreurs relatives (%) |                   |                   |
|---------------------------|--------------------------|----------|---------------|----------|-----------------------|-------------------|-------------------|
|                           | Cas 1                    | Cas 2    | NASTRAN       | Exacte   | Cas 1 /<br>NASTRAN    | Cas 1 /<br>Exacte | Cas 2 /<br>Exacte |
| 1.0000                    | 1.00046                  | 1.00044  | 1.00046       | 1.00044  | 0.0                   | 1.5E-03           | 1.0E-04           |
| 4.9360                    | 1.01120                  | 1.01086  | 1.01120       | 1.01084  | 0.0                   | 3.5E-02           | 1.7E-03           |
| 5.0000                    | 1.01149                  | 1.01115  | 1.01149       | 1.01113  | 1.8E-13               | 3.6E-02           | 1.8E-03           |
| 5.6435                    | 1.01468                  | 1.01424  | 1.01468       | 1.01422  | 1.3E-13               | 4.6E-02           | 2.3E-03           |
| 10.0000                   | 1.04733                  | 1.04594  | 1.04733       | 1.04586  | 0.0                   | 1.4E-01           | 7.4E-03           |
| 15.0000                   | 1.11200                  | 1.10888  | 1.11200       | 1.10868  | 1.1E-10               | 3.0E-01           | 1.8E-02           |
| 20.0000                   | 1.21477                  | 1.20922  | 1.21477       | 1.20882  | 5.3E-10               | 4.9E-01           | 3.3E-02           |
| 25.0000                   | 1.37346                  | 1.36479  | 1.37346       | 1.36402  | 4.5E-09               | 6.9E-01           | 5.6E-02           |
| 30.0000                   | 1.62118                  | 1.60869  | 1.62118       | 1.60730  | 3.2E-08               | 8.6E-01           | 8.6E-02           |
| 35.0000                   | 1.98379                  | 1.96683  | 1.98379       | 1.96373  | 1.5E-04               | 1.0E+00           | 1.6E-01           |
| 35.4205                   | 2.14888                  | 2.13156  | 2.14888       | 2.12567  | 2.2E-04               | 1.1E+00           | 2.8E-01           |
| 36.6341                   | 2.49782                  | 2.47920  | 2.49782       | 2.47469  | 4.8E-05               | 9.3E-01           | 1.8E-01           |
| 40.0000                   | 3.24785                  | 3.22569  | 3.24786       | 3.21859  | 6.1E-05               | 9.1E-01           | 2.2E-01           |
| 43.4800                   | 5.09900                  | 5.07292  | 5.09900       | 5.05240  | 2.2E-07               | 9.2E-01           | 4.1E-01           |
| 45.0000                   | 6.92962                  | 6.90202  | 6.92963       | 6.86906  | 4.3E-05               | 8.8E-01           | 4.8E-01           |
| 47.2960                   | 14.19491                 | 14.16666 | 14.19492      | 14.04122 | 6.4E-05               | 1.1E+00           | 8.9E-01           |
| 49.2784                   | 33.48277                 | 33.48224 | 33.48279      | 33.46207 | 6.0E-05               | 6.2E-02           | 6.0E-02           |
| 50.0000                   | 27.47948                 | 27.49887 | 27.47948      | 27.73984 | 0.0                   | 9.4E-01           | 8.7E-01           |
| 52.8605                   | 35.33529                 | 35.37267 | 35.33528      | 35.02155 | 2.4E-05               | 9.0E-01           | 1.0E+00           |
| 53.5611                   | 36.30277                 | 36.33441 | 36.30276      | 36.68303 | 2.2E-05               | 1.0E+00           | 9.5E-01           |
| 55.0000                   | 10.90646                 | 10.89884 | 10.90646      | 11.13133 | 6.7E-06               | 2.0E+00           | 2.1E+00           |
| 57.7453                   | 6.30108                  | 6.29167  | 6.30107       | 6.29967  | 4.7E-05               | 2.2E-02           | 1.3E-01           |
| 60.0000                   | 3.23204                  | 3.18632  | 3.23204       | 3.21119  | 6.9E-05               | 6.5E-01           | 7.7E-01           |
| 63.5594                   | 1.75309                  | 1.69832  | 1.75309       | 1.70290  | 1.0E-04               | 2.9E+00           | 2.7E-01           |
| 65.0000                   | 1.40003                  | 1.34211  | 1.40003       | 1.33508  | 7.3E-05               | 4.9E+00           | 5.3E-01           |
| 68.0554                   | 1.54292                  | 1.48048  | 1.54292       | 1.47343  | 6.0E-05               | 4.7E+00           | 4.8E-01           |
| 70.0000                   | 1.62421                  | 1.55704  | 1.62421       | 1.54416  | 5.8E-05               | 5.2E+00           | 8.3E-01           |
| 75.0000                   | 2.73651                  | 2.65951  | 2.73651       | 2.63855  | 7.6E-05               | 3.7E+00           | 7.9E-01           |
| 80.0000                   | 6.43417                  | 6.34686  | 6.43416       | 6.25963  | 1.8E-04               | 2.8E+00           | 1.4E+00           |
| 80.8273                   | 9.06181                  | 8.97436  | 9.06185       | 8.83185  | 4.2E-04               | 2.6E+00           | 1.6E+00           |
| 83.5428                   | 19.21901                 | 19.21158 | 19.21901      | 19.21080 | 4.1E-07               | 4.3E-02           | 4.0E-03           |
| 85.0000                   | 14.22857                 | 14.29050 | 14.22857      | 14.43823 | 4.3E-06               | 1.5E+00           | 1.0E+00           |
| 90.0000                   | 4.70072                  | 4.80841  | 4.70072       | 4.84698  | 1.4E-05               | 3.0E+00           | 8.0E-01           |
| 95.0000                   | 2.70547                  | 2.82853  | 2.70547       | 2.85862  | 8.0E-05               | 5.4E+00           | 1.1E+00           |
| 99.4645                   | 1.93340                  | 2.06883  | 1.93340       | 2.10079  | 1.8E-06               | 8.0E+00           | 1.5E+00           |
| 100.0000                  | 1.87034                  | 2.00724  | 1.87034       | 2.03960  | 5.1E-05               | 8.3E+00           | 1.6E+00           |
| MOYENNE                   |                          |          |               |          | 5.38E-05              | 1.89              | 0.572             |

Tableau 4.4 : Sommaire des erreurs relatives pour les résultats nœaux

| Résultat      | Nœud   | Composante | Erreurs relatives (%) |                |                | Amélioration avec la flexibilité résiduelle |
|---------------|--------|------------|-----------------------|----------------|----------------|---------------------------------------------|
|               |        |            | Cas 1 / NASTRAN       | Cas 1 / Exacte | Cas 2 / Exacte |                                             |
| Déplacement   | 123930 | Z          | 3.01E-04              | 0.36           | 0.35           | OUI                                         |
| Vitesse       | 71241  | Y          | 2.13E-03              | 2.57           | 0.460          | OUI                                         |
| Force SPC     | 1      | RY         | 1.53E-03              | 17.87          | 17.87          | NON                                         |
| Force MPC     | 500    | RZ         | 1.70E-04              | 2.09           | 0.50           | OUI                                         |
| Force au nœud | 300    | FX-OF-MPC  | 1.02E-04              | 23.72          | 0.99           | OUI                                         |

Tableau 4.5 : Sommaire des erreurs relatives pour les contraintes élémentaires

| Élément | Numéro | Composante | Erreurs relatives (%) |                |                | Amélioration avec la flexibilité résiduelle |
|---------|--------|------------|-----------------------|----------------|----------------|---------------------------------------------|
|         |        |            | Cas 1 / NASTRAN       | Cas 1 / Exacte | Cas 2 / Exacte |                                             |
| CBAR    | 38400  | AXIAL      | 8.23E-04              | 3166.82        | 5.86           | OUI                                         |
| CBEAM   | 26235  | SA2        | 9.92E-05              | 0.39           | 0.37           | OUI                                         |
| CBEND   | 30623  | SA1        | 4.44E+00              | 58.93          | 15.93          | OUI                                         |
| CBUSH   | 79003  | RY         | 2.50E-04              | 2.01           | 0.50           | OUI                                         |
| CELAS1  | 100    | STRESS     | 2.29E-04              | 9.13           | 0.44           | OUI                                         |
| CELAS2  | 60200  | STRESS     | 9.49E-04              | 11.85          | 0.62           | OUI                                         |
| CHEXA   | 70386  | SX         | 2.50E-04              | 1.03           | 0.41           | OUI                                         |
| CONROD  | 38410  | TORSION    | 2.30E-04              | 0.64           | 0.56           | OUI                                         |
| CPENTA  | 73061  | SZ         | 1.38E-03              | 30.95          | 2.64           | OUI                                         |
| CQUAD4  | 72301  | SY1        | 9.06E-03              | 24.85          | 5.37           | OUI                                         |
| CQUAD8  | 23622  | SY2        | 1.53E-04              | 2.84           | 0.49           | OUI                                         |
| CQUADR  | 76074  | SX1        | 2.84E-03              | 1.62           | 0.53           | OUI                                         |
| CROD    | 38404  | AXIAL      | 2.81E-04              | 2.49           | 0.67           | OUI                                         |
| CTETRA  | 80000  | SZX        | 3.50E-04              | 1.77           | 0.42           | OUI                                         |
| CTRIA3  | 75618  | SY2        | 3.66E-03              | 17.43          | 1.71           | OUI                                         |
| CTRIA6  | 75760  | SY1        | 2.83E-03              | 22.06          | 1.30           | OUI                                         |
| CTUBE   | 38201  | AXIAL      | 8.07E-05              | 0.78           | 0.54           | OUI                                         |

Tableau 4.6 : Sommaire des erreurs relatives pour les forces élémentaires

| Élément | Numéro | Composante | Erreurs relatives (%) |                |                | Amélioration avec la flexibilité résiduelle |
|---------|--------|------------|-----------------------|----------------|----------------|---------------------------------------------|
|         |        |            | Cas 1 / NASTRAN       | Cas 1 / Exacte | Cas 2 / Exacte |                                             |
| CBAR    | 38400  | BM1B       | 4.55E-04              | 2091.35        | 4.86           | OUI                                         |
| CBEAM   | 26235  | SH1A       | 6.84E-05              | 0.54           | 0.40           | OUI                                         |
| CBEND   | 30623  | AXIAL      | 1.01E+00              | 109.24         | 2.02           | OUI                                         |
| CBUSH   | 79003  | MZ         | 4.35E-04              | 4.03           | 0.75           | OUI                                         |
| CELAS1  | 100    | FX         | 2.28E-04              | 9.13           | 0.44           | OUI                                         |
| CELAS2  | 60200  | FX         | 9.52E-04              | 11.85          | 0.62           | OUI                                         |
| CONROD  | 38410  | AXIAL      | 4.87E-04              | 1.94           | 0.56           | OUI                                         |
| CQUAD4  | 72301  | MFXY       | 1.61E-03              | 12.44          | 0.88           | OUI                                         |
| CQUAD8  | 23622  | MFY        | 1.59E-04              | 3.01           | 0.50           | OUI                                         |
| CQUADR  | 76074  | SHY        | 2.98E-03              | 2.06           | 0.56           | OUI                                         |
| CROD    | 38404  | AXIAL      | 2.74E-04              | 2.49           | 0.67           | OUI                                         |
| CSHEAR  | 75579  | F41        | 7.37E-02              | 33.73          | 0.62           | OUI                                         |
| CTRIA3  | 75618  | MFY        | 6.38E-04              | 8.32           | 0.63           | OUI                                         |
| CTRIA6  | 75760  | MFY        | 4.14E-03              | 29.41          | 2.52           | OUI                                         |
| CTUBE   | 38201  | AXIAL      | 7.58E-05              | 0.78           | 0.54           | OUI                                         |

Tableau 4.7 : Sommaire des erreurs relatives pour les déformations élémentaires

| Élément | Numéro | Composante | Erreurs relatives (%) |                |                | Amélioration avec la flexibilité résiduelle |
|---------|--------|------------|-----------------------|----------------|----------------|---------------------------------------------|
|         |        |            | Cas 1 / NASTRAN       | Cas 1 / Exacte | Cas 2 / Exacte |                                             |
| CBUSH   | 79003  | TX         | 4.35E-03              | 11.28          | 0.36           | OUI                                         |
| CHEXA   | 70386  | SYZ        | 3.68E-04              | 5.09           | 0.63           | OUI                                         |
| CPENTA  | 73061  | SZ         | 2.44E-03              | 32.98          | 2.83           | OUI                                         |
| CQUAD4  | 72301  | SXY2       | 1.50E-03              | 9.49           | 0.78           | OUI                                         |
| CQUAD8  | 23622  | SY1        | 1.59E-04              | 3.01           | 0.50           | OUI                                         |
| CQUADR  | 76074  | SX2        | 2.01E-03              | 1.40           | 0.43           | OUI                                         |
| CTETRA  | 80000  | SZX        | 3.50E-04              | 1.77           | 0.42           | OUI                                         |
| CTRIA3  | 75618  | SY2        | 4.19E-03              | 80.19          | 8.56           | OUI                                         |
| CTRIA6  | 75760  | SX2        | 7.67E-03              | 6.88           | 0.98           | OUI                                         |

L'analyse des quatre tableaux précédents révèle que le processeur harmonique calcule, pour tous les résultats nodaux et élémentaires, des réponses similaires à celles de MSC/NASTRAN, car l'erreur relative est toujours plus petite que 0.08%. Il y a toutefois une exception pour les résultats élémentaires. Il s'agit de l'élément CBEND pour lequel les réponses à basses

fréquences (<20Hz) diffèrent beaucoup de la réponse de MSC/NASTRAN augmentant ainsi l'erreur relative globale. De plus, la flexibilité résiduelle augmente à tout coup l'exactitude des résultats par rapport à la solution exacte des équations du mouvement. Il est donc fortement recommandé de recourir à cette méthode lors d'analyses avec le logiciel. Notons que puisque le nœud 1 est le nœud d'excitation (frontière), il est normal que la contribution de la flexibilité résiduelle soit nulle, car elle n'est pas calculée.

### 4.3 Processeur aléatoire

#### 4.3.1 Description du modèle utilisé

Le modèle d'éléments finis utilisé pour valider les calculs du processeur aléatoire est celui d'une plaque mince encastrée à l'une de ses extrémités. La plaque est modélisée avec 40 éléments quadrilatéraux CQUAD4 ayant 6 d.d.l. par nœud. Ainsi, le modèle d'éléments finis comprend 55 nœuds et 330 degrés de liberté. Les dimensions et les propriétés physiques de la plaque sont données au Tableau 4.8 alors que les fréquences naturelles en deçà de 1000 Hz sont données au Tableau 4.9.

Tableau 4.8 : Spécifications de la plaque mince

| Donnée                 | Valeur                       |
|------------------------|------------------------------|
| Longueur               | $a = 0.125 \text{ m}$        |
| Largeur                | $b = 0.05 \text{ m}$         |
| Épaisseur              | $t = 0.002 \text{ m}$        |
| Module d'Young         | $E = 207 \text{ Gpa}$        |
| Coefficient de Poisson | $\nu = 0.29$                 |
| Densité                | $\rho = 7820 \text{ kg/m}^3$ |
| Amortissement modal    | $Q = 20.0$                   |

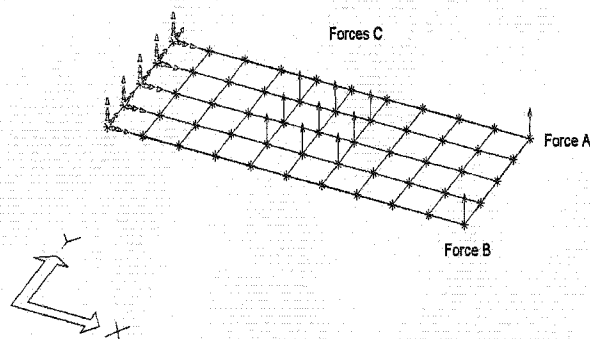


Tableau 4.9 : Fréquences naturelles  
de la plaque en deçà de 1000 Hz

| Mode | Fréquence naturelle (Hz) |
|------|--------------------------|
| 1    | 108.4857                 |
| 2    | 563.5635                 |
| 3    | 685.1730                 |

Figure 4.4 : Emplacement des forces d'excitation et des conditions frontières de la plaque

Les forces aléatoires agissant sur la plaque lui sont perpendiculaire (axe +Z) et sont montrées à la Figure 4.4. On y retrouve deux forces nodales aux coins libres de la plaque (Force A et Force B) de même qu'un groupe de forces nodales (Forces C) au centre de la plaque. Les tableaux qui suivent contiennent les densités spectrales utilisées pour valider le modèle.

Tableau 4.10 : Densités spectrales des forces d'excitation

| Fréquence (Hz) | Force A ( $N^2/Hz$ ) | Force B ( $N^2/Hz$ ) | Forces C ( $N^2/Hz$ ) |
|----------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| 0.01           | 1.25E+06             | 2.50E+07             | 5.00E+06              |
| 50.0           | N/D*                 | 1.25E+08             | 5.00E+07              |
| 100.0          | N/D*                 | N/D*                 | 5.00E+07              |
| 200.0          | 3.00E+08             | N/D*                 | N/D*                  |
| 500.0          | 3.00E+08             | 1.25E+08             | 5.00E+06              |
| 1000.0         | 2.50E+06             | 5.00E+06             | 5.00E+06              |

\*N/D : Non disponible, interpolé sur une échelle LOG-LOG par le logiciel

Tableau 4.11 : Densités spectrales croisées relatives à la force A

| Fréquence<br>(Hz) | Force A / Force B |            |                            | Force A / Forces C |            |                            |
|-------------------|-------------------|------------|----------------------------|--------------------|------------|----------------------------|
|                   | Réel              | Imaginaire | Coefficient<br>corrélation | Réel               | Imaginaire | Coefficient<br>corrélation |
| 0.01              | 2.50E+06          | 1.25E+06   | 0.50                       | 7.50E+05           | 1.00E+06   | 0.50                       |
| 50.0              | 6.00E+07          | 8.00E+07   | 0.81                       | 3.00E+07           | 1.00E+07   | 0.38                       |
| 100.0             | 9.00E+07          | 1.00E+08   | 0.84                       | 4.00E+07           | 3.00E+07   | 0.49                       |
| 200.0             | 1.25E+08          | 1.20E+08   | 0.89                       | 4.00E+07           | 3.00E+07   | 0.67                       |
| 500.0             | 6.00E+07          | 7.50E+07   | 0.50                       | 1.00E+07           | 1.00E+07   | 0.37                       |
| 1000.0            | 1.00E+06          | 1.50E+06   | 0.51                       | 1.50E+06           | 1.00E+06   | 0.51                       |

Tableau 4.12 : Densités spectrales croisées relatives aux forces B et C

| Fréquence<br>(Hz) | Force B / Forces C |            |                            | Forces C / Forces C (croisée) |            |                            |
|-------------------|--------------------|------------|----------------------------|-------------------------------|------------|----------------------------|
|                   | Réel               | Imaginaire | Coefficient<br>corrélation | Réel                          | Imaginaire | Coefficient<br>corrélation |
| 0.01              | 6.00E+06           | 3.00E+06   | 0.60                       | 5.00E+06                      | 0.0        | 1.0                        |
| 50.0              | 4.00E+07           | 1.00E+07   | 0.55                       | 5.00E+07                      | 0.0        | 1.0                        |
| 100.0             | 4.00E+07           | 2.00E+07   | 0.57                       | 5.00E+07                      | 0.0        | 1.0                        |
| 200.0             | 3.00E+07           | 2.00E+07   | 0.75                       | N/D                           | 0.0        | 1.0                        |
| 500.0             | 1.50E+07           | 1.00E+07   | 0.72                       | 5.00E+06                      | 0.0        | 1.0                        |
| 1000.0            | 1.50E+06           | 1.00E+06   | 0.36                       | 5.00E+06                      | 0.0        | 1.0                        |

Le groupe de forces nodales (Forces C) représente une pression aléatoire complètement corrélée. Les densités spectrales croisées de ces forces ont été choisies de telle sorte qu'elles ne contiennent aucune composante imaginaire afin de tester la partie du logiciel utilisant le coefficient de corrélation. Ce dernier est calculé selon l'équation (1.78).

#### 4.3.2 Validation des calculs

##### *Densités spectrales constantes*

Les premières analyses ont été effectuées afin de vérifier l'exactitude la méthode d'intégration analytique. Afin d'obtenir des valeurs efficaces exactes, il s'agit d'utiliser des DSP ayant des pentes entières. Ainsi, les DSP utilisées sont celles correspondant à la fréquence de 1000 Hz dans les Tableau 4.10 à Tableau 4.12. Les valeurs efficaces significatives (non nulles) de la réponse, données au Tableau 4.13, ont été calculées pour les différents d.d.l. du nœud 1 du modèle d'éléments finis. Ce nœud correspond au point d'application de la Force A. Deux analyses (de 0 à 1000 Hz) ont été faites avec le processeur. La première emploie l'intégration numérique alors que la seconde l'intégration analytique. Toutefois, puisque les valeurs efficaces calculées avec l'intégration numérique sont identiques à celles calculées avec l'intégration analytique, elles ne font pas partie du Tableau 4.13. Cela montre déjà que la méthode d'intégration analytique donne d'excellents résultats. Notons que le temps de calcul a été de 37 minutes pour l'intégration numérique (pour une précision de  $1 \cdot 10^{-7}$ ) alors qu'il a été de 20 secondes pour l'intégration analytique. Les valeurs analytiques ont été comparées à celles obtenues par MSC/NASTRAN. De plus, près de 45 000 fréquences d'excitation ont été utilisées par MSC/NASTRAN afin de s'assurer de la précision de la valeur efficace calculée. En effet, puisque ce logiciel utilise la méthode des trapèzes pour intégrer les DSP, il est primordial d'utiliser suffisamment de points (fréquences d'excitation) sur la DSP pour minimiser les imprécisions reliées à l'emploi de cette méthode.

Tableau 4.13: Valeurs efficaces du nœud 1 pour des DSP constantes

| Type         | DDL | MSC/NASTRAN | ANALYTIQUE | Erreur relative (%) |
|--------------|-----|-------------|------------|---------------------|
| Déplacement  | Z   | 4.4953E+01  | 4.4995E+01 | 0.094               |
|              | RX  | 6.9686E+01  | 6.9887E+01 | 0.288               |
|              | RY  | 5.2288E+02  | 5.2404E+02 | 0.222               |
| Vitesse      | Z   | 3.5370E+04  | 3.5374E+04 | 0.012               |
|              | RX  | 2.4243E+05  | 2.4353E+05 | 0.450               |
|              | RY  | 7.5201E+05  | 7.5272E+05 | 0.095               |
| Accélération | Z   | 7.8348E+07  | 7.8266E+07 | 0.106               |
|              | RX  | 8.7010E+08  | 8.7521E+08 | 0.583               |
|              | RY  | 2.9140E+09  | 2.9157E+09 | 0.058               |

L'analyse du Tableau 4.13 démontre que, pour le nœud 1, les erreurs relatives ne dépassent pas 0.6%. De plus, les erreurs sont plus grandes pour les accélérations. Aussi, puisque les résultats numériques sont semblables aux résultats analytiques, ces différences ne sont pas liées à la méthode d'intégration, mais plutôt aux calculs des DSP de la réponse. Pour démontrer ce fait, les DSP de la réponse en déplacement et en accélération au nœud 1 (DDL RX) sont données à la Figure 4.5 pour le processeur et pour MSC/NASTRAN. On remarque que les DSP se superposent sur tout le domaine sauf dans les environs des 1er et 3e modes de vibration. Pour la valeur efficace du déplacement, cela a moins d'influence, car la valeur de la DSP est petite dans ces régions. Pour les accélérations, la valeur de la DSP est plus grande et c'est cela qui augmente l'erreur relative. Il appert que cette différence dans le calcul de la DSP provient de MSC/NASTRAN, car un calcul sur MATHCAD 2000 avec les mêmes données mène à une valeur efficace identique à celle du processeur, soit  $8.7521 \cdot 10^8$ .

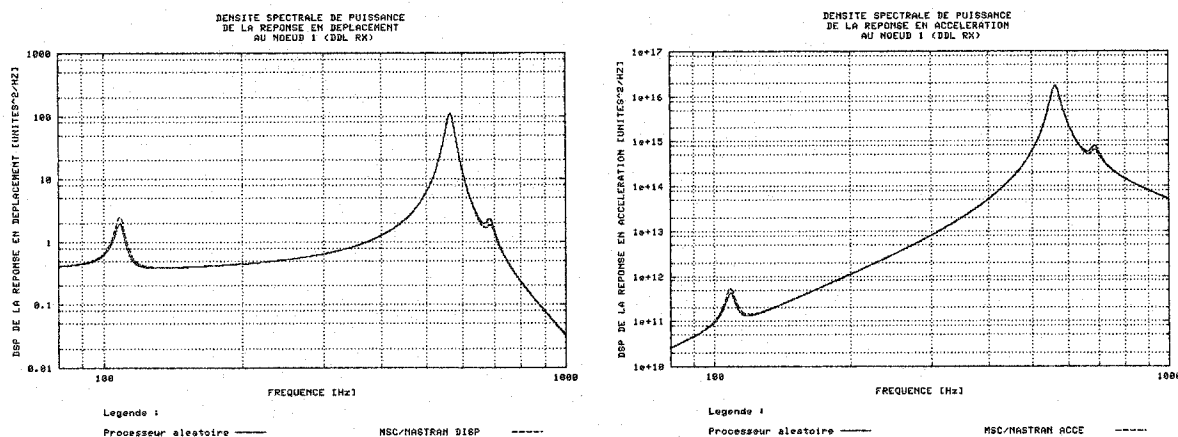


Figure 4.5 : DSP au nœud 1 (DDL RX) en déplacement (gauche) et en accélération (droite)

### Densités spectrales variables

La valeur efficace de la réponse, donnée au Tableau 4.14, a été calculée pour différents d.d.l. aux nœuds 1, 3 et 30 du modèle d'éléments finis. Ces nœuds correspondent respectivement aux points d'application des Forces A et B et au centre de la plaque. Comme à la section précédente, deux analyses (de 0 à 1000 Hz) ont été faites avec le processeur. La première emploie l'intégration numérique alors que la seconde l'intégration analytique. Ces valeurs ont été comparées à celles obtenues par MSC/NASTRAN.

Tableau 4.14 : Valeurs efficaces des nœuds 1,3 et 30

| Type         | Nœud | DDL | Valeur efficace [0-1000] Hz |                         |            | Erreurs relatives (%) |              |               |
|--------------|------|-----|-----------------------------|-------------------------|------------|-----------------------|--------------|---------------|
|              |      |     | MSC /<br>NASTRAN            | Numérique               | Analytique | MSC/<br>Num.          | MSC/<br>Ana. | Num./<br>Ana. |
| Déplacement  | 1    | Z   | 1.9434 <sup>E</sup> +02     | 1.9475 <sup>E</sup> +02 | 1.9485E+02 | 0.210                 | 0.261        | 0.051         |
|              | 3    | Z   | 1.9469 <sup>E</sup> +02     | 1.9463 <sup>E</sup> +02 | 1.9473E+02 | 0.033                 | 0.018        | 0.051         |
|              | 30   | Z   | 6.5991 <sup>E</sup> +01     | 6.5880 <sup>E</sup> +01 | 6.5912E+01 | 0.168                 | 0.119        | 0.049         |
| Vitesse      | 1    | RX  | 1.2533 <sup>E</sup> +06     | 1.2560 <sup>E</sup> +06 | 1.2584E+06 | 0.212                 | 0.404        | 0.191         |
|              | 3    | RX  | 1.2557 <sup>E</sup> +06     | 1.2532 <sup>E</sup> +06 | 1.2562E+06 | 0.204                 | 0.041        | 0.246         |
|              | 30   | RX  | 7.9559 <sup>E</sup> +05     | 7.9558 <sup>E</sup> +05 | 7.9708E+05 | 0.002                 | 0.186        | 0.188         |
| Accélération | 1    | RY  | 3.0728 <sup>E</sup> +09     | 3.0670 <sup>E</sup> +09 | 3.0459E+09 | 0.192                 | 0.877        | 0.687         |
|              | 3    | RY  | 3.0369 <sup>E</sup> +09     | 3.0613 <sup>E</sup> +09 | 3.0397E+09 | 0.797                 | 0.091        | 0.707         |
|              | 30   | RY  | 9.1568 <sup>E</sup> +08     | 9.2727 <sup>E</sup> +08 | 9.2927E+08 | 1.250                 | 1.483        | 0.215         |

Il est capital d'examiner les résultats du Tableau 4.14 avec discernement en se rappelant qu'aucune des méthodes utilisées pour calculer la valeur efficace ne donne de résultats exacts. Même la méthode d'intégration analytique n'est qu'une approximation de la solution exacte étant donné que les DSP de l'excitation n'ont pas toutes des pentes entières. Puisque nous cherchons des résultats s'approchant de ceux de MSC/NASTRAN, c'est cette valeur qui est employée comme valeur de référence pour le calcul de l'erreur relative. On remarque ainsi que les valeurs efficaces calculées par le processeur sont très précises pour les deux méthodes d'intégration. Toutefois, la méthode analytique est plus avantageuse, car pour la précision demandée lors de l'intégration numérique ( $10^{-7}$ ), elle était vingt fois plus rapide. Les résultats en accélération au nœud 30 sont cependant moins précis. Les imprécisions par rapport à MSC/NASTRAN ont été discutées à la section précédente et sont aussi la cause de différences mineures dans les courbes de DSP. Toutefois, la différence accrue entre l'intégration analytique et numérique doit

être expliquée. Lors de l'intégration analytique pour les accélérations, il a fallu diminuer le degré du polynôme utilisé pour représenter les DSP afin d'éviter les instabilités numériques. Cela diminue la précision de la méthode pour les accélérations versus les vitesses et déplacements. En effet, en vertu de l'équation (3.17), il faut ajouter quatre au degré du polynôme que l'on intègre avec l'équation (3.32) pour obtenir les accélérations au lieu des déplacements. Cette erreur peut être diminuée si on interpole le polynôme sur de plus petites bandes de fréquences. Par conséquent, le temps de calcul augmente considérablement.

Enfin, les DSP peuvent être visualisées avec I-DEAS par l'intermédiaire d'un fichier universel. Pour le cas présent, la Figure 4.6 montre la variation de la valeur efficace en Z pour tous les nœuds de la plaque.

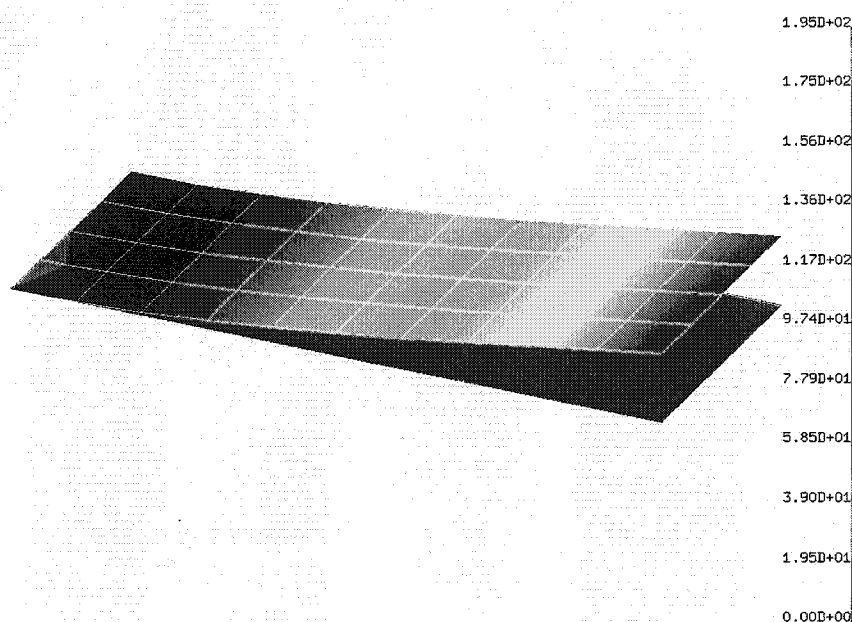


Figure 4.6 : Variation de la valeur efficace dans la plaque (DDL Z)

#### 4.4 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de montrer la similitude entre les résultats générés par les logiciels programmés et le logiciel de référence MSC/NASTRAN.

En ce qui concerne le processeur harmonique, les résultats ont été validés avec le modèle d'éléments finis du satellite SCISAT-1 pour tous les résultats nodaux et élémentaires. Pour une analyse similaire avec MSC/NASTRAN, les réponses calculées sont exactes à 99.92% à l'exception des résultats concernant l'élément CBEND pour lequel l'erreur grimpe à près de 5% dans le cas des contraintes élémentaires. Cette erreur nécessite une investigation plus rigoureuse et peut être attribuée au DMAP, aux routines stockant les vecteurs propres de cet élément ou à MSC/NASTRAN. Aussi, l'ajout de la contribution de la flexibilité résiduelle améliore toujours la réponse calculée, surtout dans le cas des forces, contraintes et déformations élémentaires. Il est donc recommandé d'ajouter cette contribution lors d'analyses ultérieures.

Quant au processeur aléatoire, les résultats ont été validés avec le modèle d'une plaque mince encastrée à l'une de ses extrémités. Les analyses ont montré que l'intégration analytique donne des résultats exacts pour des DSP constantes et des résultats similaires à l'intégration numérique pour les déplacements et vitesses. Pour les accélérations, l'intégration analytique est moins précise, car le degré du polynôme d'interpolation des DSP de l'excitation est inférieur. Dans tous les cas, les valeurs efficaces calculées diffèrent de la solution de MSC/NASTRAN d'au plus 1.5%. De plus, la méthode d'intégration analytique était au moins vingt fois plus rapide. Cette méthode perd de la rapidité d'exécution lorsque les DSP de l'excitation se compliquent. Enfin, les DSP calculées par le processeur peuvent parfois différer sensiblement de celles obtenues avec MSC/NASTRAN. Cette différence pourrait être attribuée au fait que les valeurs propres et vecteurs propres obtenues du fichier binaire sont des nombres en «simple précision».

## **CHAPITRE 5**

### **LIMITES DES LOGICIELS**

Les logiciels développés dans le cadre de ce projet de maîtrise ont certaines limitations découlant principalement des hypothèses de départ et des simplifications adoptées lors de la réalisation du projet. Les limites associées au type de structure à analyser sont communes aux deux logiciels et seront données en prémisses aux limites particulières de chaque processeur. Elles sont :

- le modèle d'éléments finis doit être linéaire.;
- la structure modélisée ne doit contenir aucun amortissement physique. L'amortissement utilisé est de type modal visqueux et il est précisé par l'utilisateur des logiciels sous forme de facteur d'amplification dynamique ( $Q$ ).

#### **5.1 Limites du processeur harmonique**

En ce qui a trait au processeur harmonique, plusieurs limitations proviennent de la nature de l'excitation. La structure doit être :

- excitée avec une accélération sinusoïdale;
- excitée par la base;
- excitée en un seul nœud;
- excitée en translation. Le DMAP ne calcule pas les modes rigides géométriques en rotation et les facteurs de participation modale qui leurs sont associés.

La dérivation de l'équation de réponse en fréquence a été faite en supposant que :

- La matrice de masse du modèle est une matrice de masses concentrées. Ainsi, le paramètre COUPMASS ( $> 0$ ) permettant une matrice de masses non diagonale ne doit pas être présent dans le modèle MSC/NASTRAN. Si tel est le cas, les facteurs de participation modale seront erronés.
- La réponse à calculer est la réponse en régime permanent.
- Tous les modes du fichier binaire contribuent à la réponse lorsque la flexibilité résiduelle est ajoutée.

Enfin, la réponse fréquentielle associée aux résultats élémentaires est limitée aux éléments du Tableau 2.1 Toutefois, pour les résultats nodaux, elle peut être obtenue pour tous les nœuds du modèle.

## 5.2 Limites du processeur aléatoire

Le processeur aléatoire possède aussi quelques restrictions quant aux excitations. Ces dernières doivent être :

- stationnaires et *ergodiques*;
- données sous forme de DSP et de DSP croisées aux nœuds internes de la structure dans une échelle logarithmique en  $x$  et  $y$ ;
- des forces (accélérations).

Aussi, un coefficient de corrélation peut être spécifié pour définir globalement la corrélation croisée entre les densités spectrales croisées non spécifiées. Ce coefficient :

- est situé dans l'intervalle  $[-1,1]$ ;
- est spécifié dans une échelle linéaire-logarithmique;
- calcule une DSP croisée réelle.

Enfin, le processeur aléatoire ne permet qu'une seule excitation aléatoire par d.d.l.; il ne traite pas les excitations multiples au même nœud ayant la même direction.

## CONCLUSION

Ce mémoire contient la théorie nécessaire à la programmation de logiciels d'analyse vibratoire de structures faiblement amorties modélisées avec la méthode des éléments finis. Cette théorie a été développée et appliquée aux analyses vibratoires causées par des excitations harmoniques de la base ou des excitations aléatoires stationnaires et *ergodiques* aux nœuds internes de la structure. Les objectifs principaux de ce projet de maîtrise étaient de faciliter ce type d'analyse à l'utilisateur de MSC/NASTRAN. Ce faisant, les résultats générés devaient être similaires à ce dernier logiciel. Les logiciels conçus nécessitent l'apport de données provenant de deux sources distinctes. La première est un fichier binaire MSC/NASTRAN contenant les informations modales de la structure à analyser. La seconde est un fichier usager contenant tous les paramètres de l'analyse. Ces paramètres sont spécifiés selon un ordre spécifique, ce qui rend le logiciel très convivial.

Les principales améliorations par rapport à MSC/NASTRAN sont, pour le logiciel calculant la réponse fréquentielle :

- des fichiers résultats faciles à lire contenant le sommaire des réponses maximums;
- l'ajout de la contribution de la flexibilité résiduelle;
- la création de graphes de la réponse fréquentielle pour EXCEL, I-DEAS et HTML;
- le calcul des marges de sécurité minimums;
- la possibilité d'obtenir les forces aux nœuds; ce résultat n'est pas implémenté dans MSC/NASTRAN pour les analyses de réponse fréquentielle.

En ce qui a trait au logiciel d'analyse aléatoire, les améliorations sont :

- La possibilité d'employer une méthode exacte (CQC) ou approximative (SRSS) lors du calcul des DSP. La méthode approximative n'est pas disponible avec MSC/NASTRAN, mais elle est beaucoup plus rapide et donne de bons résultats si les fréquences naturelles sont bien séparées et l'amortissement est petit.
- L'utilisation d'un coefficient de corrélation global.
- La possibilité de définir les DSP sous forme de groupes de nœuds.
- L'implantation de méthodes d'intégration plus précises, notamment l'intégration analytique qui donne des résultats exacts si les DSP de l'excitation ont des pentes entières.
- La possibilité de visualiser les valeurs efficaces dans I-DEAS.
- La création de graphes des DSP qui peuvent être consultés à l'aide d'une page HTML ou dans Excel.

En ce qui concerne l'exactitude des calculs effectués par les logiciels, la validation des résultats présentée au CHAPITRE 4 démontre que, pour le processeur harmonique :

- l'erreur relative entre les résultats du processeur et MSC/NASTRAN ne dépasse jamais 0.1%, sauf pour l'élément CBEND;
- la flexibilité résiduelle améliore considérablement la précision des calculs par rapport à la solution exacte, surtout dans le cas des forces, contraintes et déformations élémentaires;

Et, pour le processeur aléatoire :

- l'erreur relative entre les résultats du processeur et MSC/NASTRAN pour la valeur efficace dépasse rarement 1%;
- la méthode d'intégration analytique est beaucoup plus rapide que MSC/NASTRAN et que l'intégration numérique;
- l'intégration analytique donne des résultats similaires à l'intégration numérique, même lorsque les pentes des DSP de l'excitation ne sont pas entières.

## PERSPECTIVES

Ultérieurement, les logiciels développés pourraient être perfectionnés pour satisfaire davantage aux besoins de l'analyste en structure. Ces améliorations touchent aussi bien l'aspect mathématique que l'aspect esthétique. Ainsi, les améliorations qui pourraient être apportées aux deux logiciels sont :

- une interface graphique permettant de créer automatiquement le fichier usager;
- supporter davantage de résultats et d'éléments;
- utiliser les données modales de modèles provenant d'une autre source que MSC/NASTRAN. Ces sources pourraient être ANSYS, ABAQUS et I-DEAS.

Le processeur harmonique pourrait être plus général au sens qu'il pourrait traiter aussi des forces harmoniques qui ne sont pas imposées à la base. Inversement, le processeur aléatoire devrait aussi être en mesure de traiter les forces aléatoires imposées à la base. De plus, il serait utile de modifier la théorie de façon à considérer l'effet de la flexibilité résiduelle dans un environnement aléatoire. Ensuite, des méthodes d'intégration numérique adaptatives, plus performantes,

pourraient être implémentées afin de permettre à l'utilisateur d'obtenir une précision remarquable avec des DSP compliquées. Enfin, une amélioration de premier plan serait de permettre à l'utilisateur de donner les DSP de l'excitation pour des pressions aléatoires sur les éléments en plus des forces nodales.

## RÉFÉRENCES

- [1] BAZERGUI, A., BUI-QUOC, T., BIRON, A. MCINTYRE, G., et LABERGE, C., *Résistance des matériaux*, Montmagny 2<sup>e</sup> édition, Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, 595 p., 1993
- [2] BLEVINS, R.D., *Formulas for natural frequency and mode shape*, Krieger publishing company, 492 p., 1984
- [3] CHARRON, F., DONATO, L., FONTAINE, M., Exact Calculation of Minimum Margin of Safety for Frequency Response Analysis Stress Results Using Yielding or Failure Theories, The MSC 1993 World Users' Conf. Proc., Paper No. 5, May, 1993.
- [4] CHEN, M-T., ALI, A., « An Efficient and Robust Integration Technique for Applied Random Vibration Analysis », *Computers & structures*, vol. 66, no. 6, 785-798, 1998
- [5] CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., *Dynamics of structures*, New-York, McGraw-Hill, 634 p., 1975
- [6] COOK, R.D., MALKUS, D.S., PLESHA, M.E., *Concepts and applications of finite element Analysis*, third edition, John Wiley & Sons, 630 p., 1989
- [7] DER KIUREGHIAN, A., « Structural Response to Stationary Excitation », *Journal of Engineering Mechanics.*, ASCE vol.106 (EM6), 1195-1213, 1980

- [8] DER KIUREGHIAN, A., NAKAMURA, Y., « CQC Modal Combination Rule for High-frequency Modes », *Earthquake engineering and structural dynamics*, vol. 22, p. 943-956, 1993
- [9] FORTIN, A., *Analyse numérique pour ingénieurs*, Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, 448 p., 1995
- [10] HANSTEEN, O.E., BELL, D., « On the Accuracy of Mode Superposition Analysis in Structural Dynamics », *Earthquake engineering and structural dynamics*, vol. 7, p. 405-411, 1979
- [11] HARICHANDRAN, R. S., « Random Vibration Under Propagating Excitation: Closed-form Solutions », *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, vol. 118, no. 3, 575-585, 1992
- [12] HARICHANDRAN, R. S., « An Efficient, Adaptive Algorithm for Large-scale Random Vibration Analysis », *Earthquake engineering and structural dynamics*, vol. 22, 151-165, 1993
- [13] IMBERT, J.F., *Analyse des structures par éléments finis*, Cépaduès-Éditions, 3e édition, Toulouse, 506 p., 1991
- [14] JIAHAO, L., « A Fast CQC Algorithm of DSP Matrices for Random Seismic Responses », *Computers & structures*, vol. 44, no. 3, 683-687, 1992
- [15] JUBINVILLE, F., *Calcul de la réponse d'une structure soumise à une excitation aléatoire*, Thèse de Maîtrise, Université de Sherbrooke, décembre 2000

- [16] LAKIS, A.A., PAIDOUSSIS, M.P., « Dynamic Analysis of Axially Non-uniform Thin Cylindrical Shells », *Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 14, no. 1, 49-71, 1972
- [17] LAKIS, A.A., PAIDOUSSIS, M.P., « Prediction of the Response of a Cylindrical Shell to Arbitrary or Boundary-layer Induced Random Pressure Fields », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 25, no. 1, 1-27, 1972
- [18] LIN, J., ZHAO, Y., ZHANG, Y., « Accurate and Highly Efficient Algorithms for Structural Stationary/non-stationary Random Responses », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, no. 191, 103-111, 2001
- [19] MEIROVITCH, L., *Elements of vibration analysis*, McGraw Hill, 560 p., 1986
- [20] MSC/NASTRAN Version 70, *Advanced Dynamic Analysis User's Guide*, The MacNeal-Schwendler Corporation, 317 p., 1997
- [21] MSC/NASTRAN Version 69, *Basic Dynamic Analysis User's Guide*, The MacNeal-Schwendler Corporation, 1997
- [22] MSC/NASTRAN, *Quick Reference Guide version 70.5*, The MacNeal-Schwendler Corporation, 1281 p., 1998
- [23] MSC/NASTRAN 2001, *Quick Reference Guide*, The MacNeal-Schwendler Software Corporation, 1577 p., 2001

- [24] MSC/NASTRAN, *DMAP Module Dictionary version 68*, The MacNeal-Schwendler Corporation, 386 p., 1994
- [25] MUSCIANO, C., KENNEDY, B., *HTML The definitive guide*, O'Reilly & Associates, Inc., 385 p., 1996
- [26] OSTLE, B., TURNER, K.V., HICKS, C.R., MCEL RATH, G.W., *Engineering statistics the industrial experience*, Duxbury Press, Wadsworth Publishing company, 568 p., 1996
- [27] PETYT, M., *Introduction to finite element vibration analysis*, Cambridge University Press, United Kingdom, 558 p., 1990
- [28] PIESENS, R., DONCKER-KAPENGA, E., UBERHUBER, C.W. and KAHANER, D.K., *Quadpack, A Subroutine Package for Automatic Integration*, Spriger-Verlag, 1983
- [29] PRESS, W.H., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T., FLANNERY, B.P., *Numerical recipes in C the art of scientific computing*, Second edition, Cambridge University Press, 994 p., <http://www.nr.com>, 1992
- [30] RAO, S.S., *Mechanical vibrations*, 3<sup>rd</sup> edition, New-York, Addison-Wesley, 912 p., 1995
- [31] SPANOS, P-T. D., « Spectral Moments Calculation of Linear System Output », *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, 901-903, December 1983.
- [32] SPANOS, P-T. D., « An Approach to Calculating Random Vibration Integrals », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, 409-413, June 1987

- [33] THOMSON, W.T., DAHLEH, M.D., *Theory of vibration with applications*, Fifth edition, Upper Saddle River, Prentice Hall, 524 p., 1998
  
- [34] TOKUDA, N., MITIKAMI, S., SAKATA, Y., *Accuracy of Vibration Analysis for Thin Cylindrical Shell*, Ishikawajima\_Harima Heavy Industries Co., LTD., 28 p.
  
- [35] TSAI, H.C., « Modal Superposition Method for Dynamic Analysis of Structures Excited by Prescribed Support Displacements », *Computers & Structures*, vol. 66, no.5, 675-683, 1998
  
- [36] WHITE, P. H., « Cross Correlation in Structural Systems: Dispersion and Nondispersion Waves », *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 45, no.5, 1118-1128, 1969
  
- [37] WILLIAMS, T., KELLEY, C., RUSSELL, L., KOTZ, D., CAMPBELL, J., ELBER, G. WOO, A., *gnuplot*, version 3.7, <http://www.gnuplot.info/>, 1999
  
- [38] YANG, C., *Random vibration of structures*, John Wiley & Sons, 295 p., 1986



```

$ EXCITATION AXIS (X,Y,Z) IF A NASTRAN CS IS USED
$-----
Y
$
$ BASE ACCELERATION SCALE FACTOR
$-----
1.0
$
$ BASE ACCELERATION DEFINITION:
$   o FIRST LINE : NUMBER OF SEGMENTS
$   o EACH SUBSEQUENT LINE IS A SEGMENT DEFINED AS:
$     FREQ1,BACC1,FREQ2,BACC2
$-----
1
0.01,1.0,500.0,1.0
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$   OUTPUT REQUESTS   $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$ NUMBER OF RESULTS REQUESTED
$-----
6
$ DEFINITION OF RESULTS :
$
$ RESULT REQUEST FOR ...
$
$   o DISPLACEMENTS      : DISP
$   o VELOCITIES         : VELO
$   o ACCELERATION       : ACCE
$
$ RES (DATA=OUT,UNV,XLS,FREQSET PLOT=HTML,UNV,XLS,FREQSET COMP=COMP
$   SF=SF OVLY=OVLY)
$
$ RESULT REQUEST FOR ...
$
$   o SPC FORCES          : SPCF
$   o MPC FORCES          : MPCF
$   o GRID POINT FORCES: GPFO
$   o ELEMENT FORCES      : ELFO
$   o ELEMENT STRESSES    : STRE
$   o ELEMENT STRAINS     : STRA
$   o MARGINS OF SAFETY: MSFY
$
$ RES (DATA=OUT,UNV,XLS,FREQSET PLOT=HTML,UNV,XLS,FREQSET)
$
$ -----
$
$ WHERE : o OUT,UNV,XLS,HTML ARE FLAGS (0=OFF 1=ON)
$         o FREQSET REFERS TO THE FREQUENCY SET DEFINED LATER
$         o COMP ARE THE COMPONENTS TO CONSIDER (ROT, TRN,
$           ALL=ROT+TRN)
$         o SF IS THE SCALE FACTOR (RESULT = RESULT/SF)
$         o OVLY ALLOWS OVERLA OF CURVES IN PLOTS (Y OR N)

```

```

$
$ NEXT LINE REPRESENTS ALL NODES/ELEMENTS IF "ALL" OR COMA-SEPARATED
$ GROUPS
$-----
$
ACCE(DATA=1,0,0,5 PLOT=0,0,0,3 COMP=ALL SF=1.0 OVLY=N)
  1
STRE(DATA=0,0,0,5 PLOT=0,1,0,3)
  2
ELFO(DATA=1,0,0,5 PLOT=0,0,0,3)
  2
GPFO(DATA=1,0,0,5 PLOT=0,0,0,3)
  1
SPCF(DATA=1,0,0,5 PLOT=0,0,0,3)
  1
MSFY(DATA=1,0,0,5 PLOT=0,0,0,3)
  1
$
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$ FREQUENCY DEFINITION $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$ MODES TO BE SUPERPOSED IN THE ANALYSIS
$ ALL = ALL MODES IN OP2 FILE
$ 1 = SPECIFY FREQUENCY RANGE THAT INCLUDE THE
$     NATURAL FREQUENCIES OF MODES TO SUM
$ 2 = SPECIFY MODE RANGE
$-----
ALL
$
$ NUMBER OF RANGES ( IGNORED IF ALL)
$-----
$
1
$
$ RANGES (IGNORED WHEN ALL, BUT NUMBER OF LINES
$     MUST BE CONSISTENT WITH NUMBER OF RANGES)
$-----
$
1,999999
$
$ INCLUDE RIGID BODY MODES (0=OFF OR 1=ON)
$-----
1
$
$ INCLUDE RESIDUAL FLEXIBILITY (0=OFF OR 1=ON)
$-----
1
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$ DAMPING DEFINITION $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$

```

```
$ FIRST LINE: NUMBER OF SEGMENTS  
$ EACH SUBSEQUENT LINE IS A SEGMENT DEFINED AS:  
$   FREQ, Q  
$-----  
2  
1.0,100.0  
400.0,100.0  
$  
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$  
$ STRESS CASE DEFINITION IF RESULT IS MSFY $  
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$  
$  
$ NUMBER OF STRESS CASES (SKIP TO SENSITIVITY IF <=0)  
$-----  
1  
$  
$ STRESS CASE ID  
$-----  
1  
$  
$ STRESS CASE TITLE  
$-----  
MY FIRST STRESS CASE  
$  
$ ELEMENT GROUPS NUMBER FOR MSFY  
$-----  
2  
$  
$ FAILURE CRITERIA  
$-----  
YIELD  
$  
$ SAFETY FACTOR, FILTER, ALLOWABLE STRESS, PRINT OPTION  
1.5,1.0E+1,50000,2  
$  
$  
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$  
$ SENSITIVITY DEFINITIONS IF RESULT IS SENS $  
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$  
$  
$ NUMBER OF SENSITIVITY DEFINITIONS  
0  
$  
$ ** USE 0 SINCE SENSITIVITY IS NOT PART OF THIS PROJECT **  
$  
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$  
$ GROUPS DEFINITION $  
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$  
$  
$  
$NUMBER OF GROUPS  
$-----  
2  
$GROUP LABEL
```

```

$-----
1
$TITLE
$-----
ACCELERATIONS
$
$CONTENTS OF GROUP (1=NODES, 2=ELEMENTS)
$-----
1
$NUMBER OF RANGES TO FOLLOW
$-----
1
$RANGES
$-----
1,1
$
$GROUP LABEL
$-----
2
$TITLE
$-----
STRESSES
$
$CONTENTS OF GROUP (1=NODES, 2=ELEMENTS)
$-----
2
$NUMBER OF RANGES TO FOLLOW
$-----
1
$RANGES
$-----
100,104
$
$
$ FREQUENCY SETS DEFINITION $
$
$ TOTAL NUMBER OF FREQUENCY SETS DEFINED
$-----
$
2
$
$
$ 1st FREQUENCY SET $
$
$ FREQUENCY SET ID
$-----
3
$
$ NAME
$-----
FREQUENCY SET NUMBER 3
$

```

```

$ FREQUENCY RANGE OF INTEREST
$ MIN,MAX "OR" NONE
$-----
1,100
$
$ NATURAL FREQUENCIES USED AS EXCITATION FREQUENCIES
$
$ ALL = ALL MODES IN OP2 FILES
$ 1 = SPECIFY FREQUENCY RANGES THAT INCLUDE NATURAL FREQUENCIES TO
$   CONSIDER
$ 2 = SPECIFY MODES, USING MODE RANGES, THAT CORRESPOND TO NATURAL
$   FREQ. TO CONSIDER
$-----
1
$
$ NUMBER OF RANGES
$-----
2
$
$ RANGES (FREQUENCY / MODE)
$-----
20.0,50.0
50.0,200.0
$
$ INTERMEDIATE FREQUENCY OPTION
$-----
$
$ 1 = FREQ1
$ 2 = FREQ2
$ 3 = FREQ3
$
1
$
$ NUMBER OF FREQUENCY INTERVALS (FREQ 1)
$ NUMBER OF LOG INTERVALS (FREQ 2)
$ NUMBER OF FREQUENCIES PER RANGE (FREQ3)
$-----
$
100
$
$ CLUSTER (FREQ3)
$-----
$
1
$
$ TYPE (FREQ3) (0 = LINEAR, 1 = LOG)
$-----
$
0
$
$ NUMBER OF ADDITIONAL FREQUENCIES TO CONSIDER "OR" NONE
$-----
$
3

```

```

$
$ ADDITIONAL FREQUENCIES TO CONSIDER ( ONE PER LINE )
$-----
26.0
27.0
125.0
$
$ DEFINITION OF FREQUENCY SET 5 IS SKIPPED

...

$
$$$$$$$$$$$$$ END OF FREQUENCY SETS $$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$ REAL DATA FILTER ( 0 = OFF, 1 = ON)
$
0
$
$ REAL DATA VALUE
$
1E-15
$
$
$ THE OUTPUT OPTIONS (OUT) ARE:
$ (RI) -> FOR REAL AND IMAGINARY COMPONENTS
$ (MP) -> FOR MAGNITUDE AND PHASE COMPONENTS
$ (MO) -> FOR MAGNITUDE ONLY
$ ANY OTHER(OUT) LEADS TO RI
RI
$
$ THE LEVEL OF DETAIL IS DEFINED AS FOLLOWS:
$ (1) HIGH -> OUTPUT COMPLETE DATA FOR ALL GROUPS
$ (2) MEDIUM -> OUTPUT ONLY MAXIMUMS FOR ALL GROUPS, EXCITATION
$ FREQUENCIES, RESULTS CASES
$ (3) LOW -> OUTPUT ONLY MAXIMUM FOR RESULT CASES
1
$ SORT OPTION 0=SORT1 : PER FREQUENCY, OUTPUT ALL NODES/ELEMENT
$ 1=SORT2 : PER ELEMENT/NODE OUTPUT ALL FREQUENCY RESPONSES
$
0
$$$$$$$$$$$$$$$$$
$ END OF FILE $
$$$$$$$$$$$$$$$$$

```

## ANNEXE II

## FICHER RÉSULTAT ASCII DU PROCESSEUR HARMONIQUE

SINE PROCESSOR DETAILED FILE

[illegible]

Release Beta 1.0 LMS Copy  
Maya Heat Transfer Technologies  
All Rights Reserved  
<http://www.mayahtt.com>  
e-mail: [support@mayahtt.com](mailto:support@mayahtt.com)

```

Version ID      :      Beta 1.0 LMS Copy
Run Date       :      26-Sep-02              Start time    :      14:06:05
Title          :      "R" SHAPE MODEL WITH BEAMS

```

```
Load case      : 1
Results case   : 1
Reference      : ABSOLUTE

Output Option  : Real / Imaginary
Sort Option    : SORT1-> Output per Excitation Frequency
```

Frequency Set  
ID : 5  
Name: Freq set number 5

EXCITATION FREQUENCY: 6.236315E+00 HZ

## SUMMARY OF MAXIMUM ACCELERATION RESPONSES

| Component | Node ID | Type | Group | T1           | T2           |
|-----------|---------|------|-------|--------------|--------------|
| T1        | 5       | G    | 1     | 1.061269E+00 | 9.707698E-02 |

|    |   |   |   |              |              |
|----|---|---|---|--------------|--------------|
| T2 | 5 | G | 1 | 1.061269E+00 | 9.707698E-02 |
| T3 | 5 | G | 1 | 1.061269E+00 | 9.707698E-02 |

## ACCELERATION VECTOR

| Node ID | Type | Group | T1           | T2           |
|---------|------|-------|--------------|--------------|
| 1       | G    | 1     | 1.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 2       | G    | 1     | 1.044347E+00 | 8.506272E-04 |
| 3       | G    | 1     | 1.060947E+00 | 1.699388E-03 |
| 4       | G    | 1     | 1.060947E+00 | 3.987280E-02 |
| 5       | G    | 1     | 1.061269E+00 | 9.707698E-02 |

---

EXCITATION FREQUENCY: 2.099121E+01 HZ

---

## SUMMARY OF MAXIMUM ACCELERATION RESPONSES

| Component | Node ID | Type | Group | T1           | T2           |
|-----------|---------|------|-------|--------------|--------------|
| T1        | 5       | G    | 1     | 4.420798E-01 | 9.718847E-01 |
| T2        | 5       | G    | 1     | 4.420798E-01 | 9.718847E-01 |
| T3        | 5       | G    | 1     | 4.420798E-01 | 9.718847E-01 |

## ACCELERATION VECTOR

| Node ID | Type | Group | T1           | T2           |
|---------|------|-------|--------------|--------------|
| 1       | G    | 1     | 1.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 2       | G    | 1     | 8.675346E-01 | 5.982418E-05 |
| 3       | G    | 1     | 4.433701E-01 | 2.425577E-04 |
| 4       | G    | 1     | 4.433701E-01 | 4.902817E-01 |
| 5       | G    | 1     | 4.420798E-01 | 9.718847E-01 |

---

EXCITATION FREQUENCY: 8.681541E+01 HZ

---

## SUMMARY OF MAXIMUM ACCELERATION RESPONSES

| Component | Node ID | Type | Group | T1            | T2            |
|-----------|---------|------|-------|---------------|---------------|
| T1        | 2       | G    | 1     | 6.260543E-01  | -1.156041E-01 |
| T2        | 4       | G    | 1     | -2.607046E-01 | -4.227333E-01 |
| T3        | 5       | G    | 1     | -2.813100E-01 | -3.276081E-02 |

## ACCELERATION VECTOR

| Node ID | Type | Group | T1            | T2            |
|---------|------|-------|---------------|---------------|
| 1       | G    | 1     | 1.000000E+00  | 0.000000E+00  |
| 2       | G    | 1     | 6.260543E-01  | -1.156041E-01 |
| 3       | G    | 1     | -2.607046E-01 | -2.017367E-01 |
| 4       | G    | 1     | -2.607046E-01 | -4.227333E-01 |
| 5       | G    | 1     | -2.813100E-01 | -3.276081E-02 |

## SUMMARY OF RESULT CASE MAXIMUM RESPONSES

| Frequency    | Component | Node ID | Type | Group | T1            | T2    |
|--------------|-----------|---------|------|-------|---------------|-------|
| 2.099121E+01 | T1        | 5       | G    | 1     | 4.420798E-01  | . . . |
| 2.099121E+01 | T2        | 5       | G    | 1     | 4.420798E-01  | . . . |
| 8.681541E+01 | T3        | 5       | G    | 1     | -2.813100E-01 | . . . |

---

## ANNEXE III

## GRAPHES DES RÉSULTATS DU PROCESSEUR HARMONIQUE

## Résultats nodaux

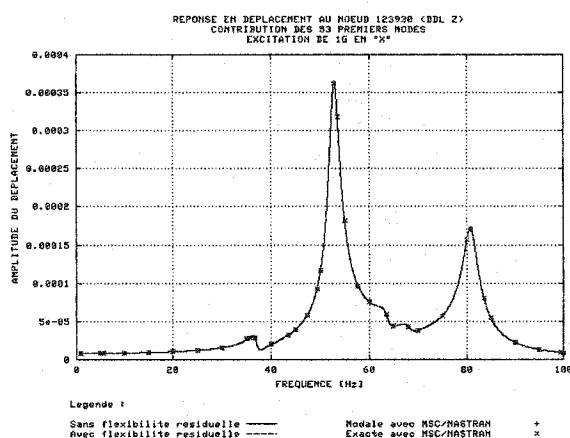


Figure III.1 : Déplacement au nœud 123930 (DDL Z)

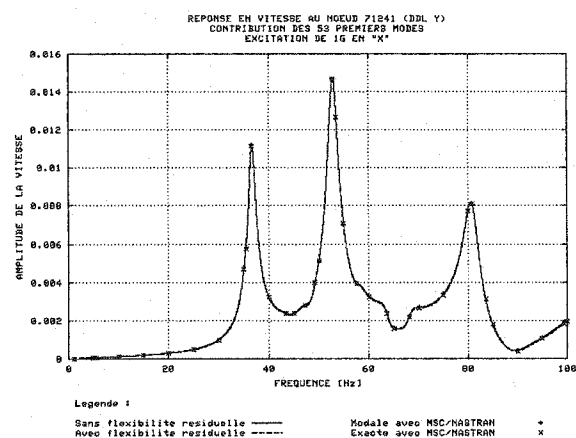


Figure III.2 : Vitesse au nœud 71241 (DDL Y)

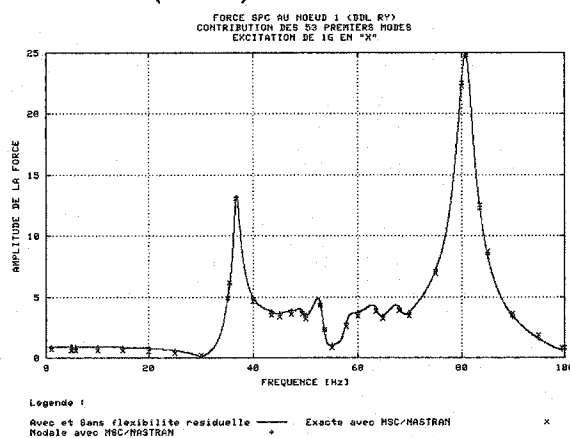


Figure III.3 : Force SPC au nœud 1 (RY)

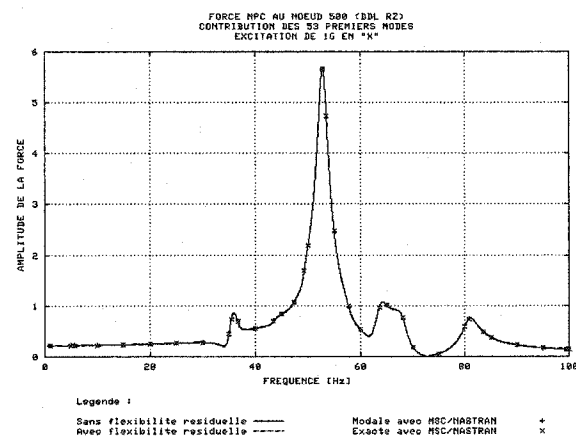


Figure III.4 : Force MPC au nœud 500 (RZ)

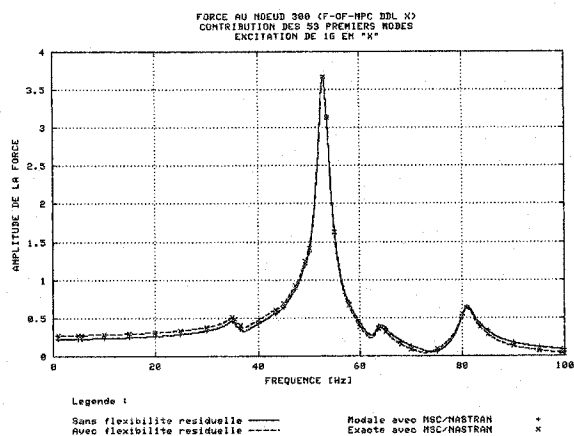


Figure III.5 : Force des MPC au nœud 300  
(DDL X)

### Contraintes élémentaires

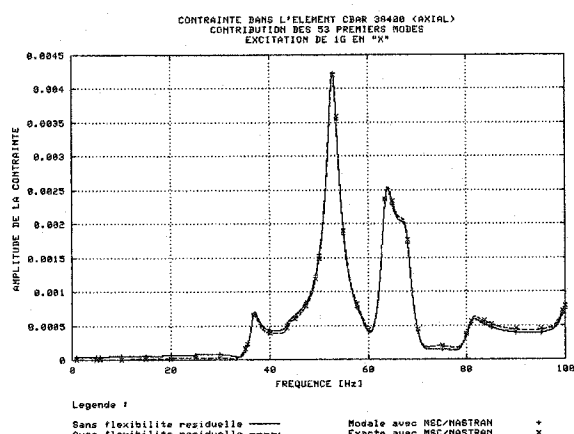


Figure III.6 : Élément CBAR 38400 (AXIAL)

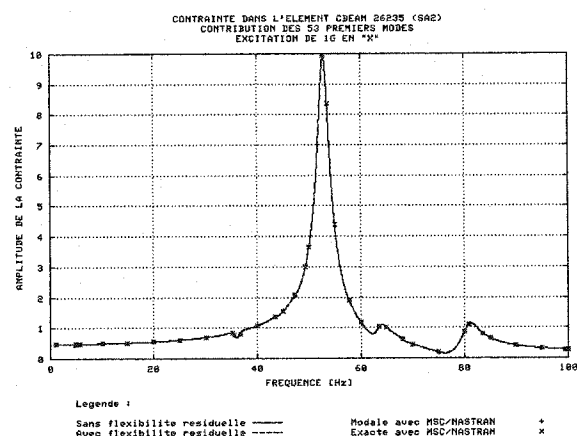


Figure III.7 : Élément CBEAM 26235 (SA2)

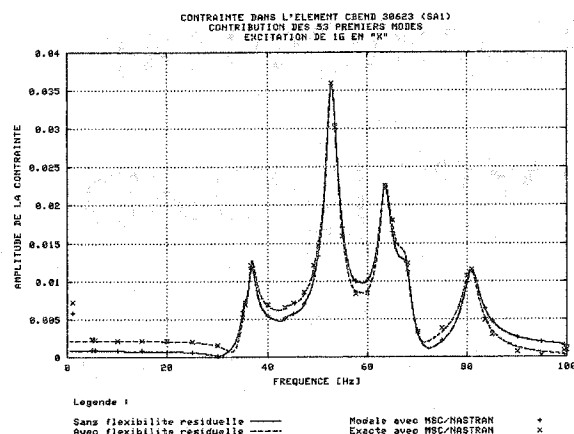


Figure III.8 : Élément CBEND 30623 (SA1)

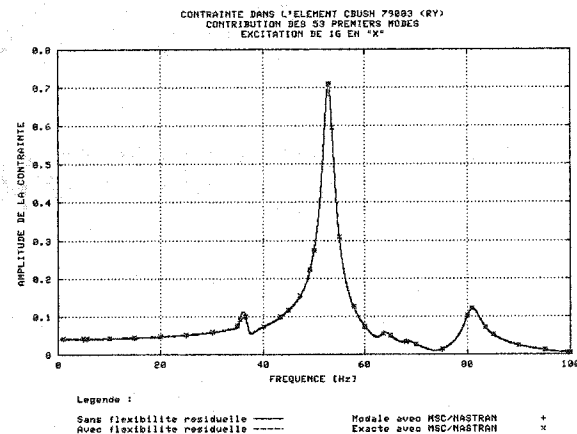


Figure III.9 : Élément CBUSH 79003 (RY)

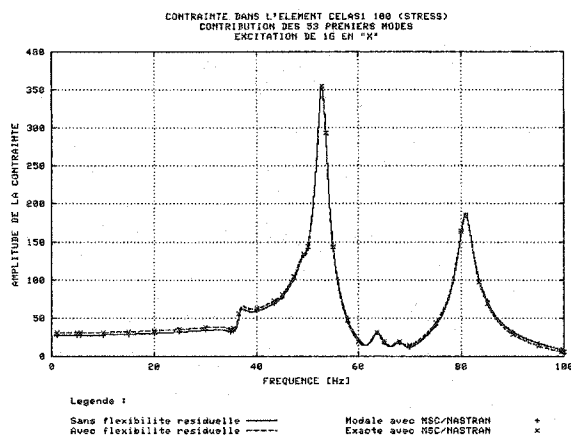


Figure III.10 : Élément CELAS1 100 (SX)

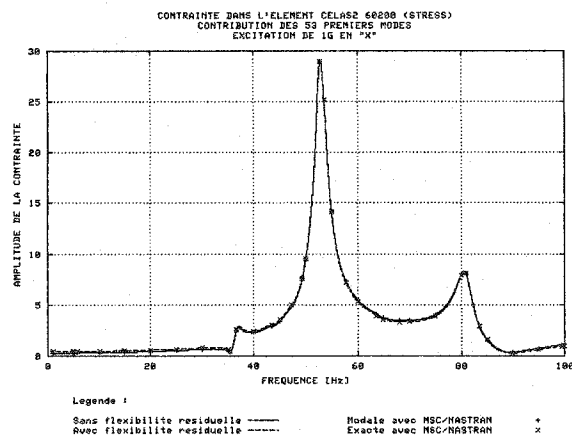


Figure III.11 : Élément CELAS2 60200 (SX)

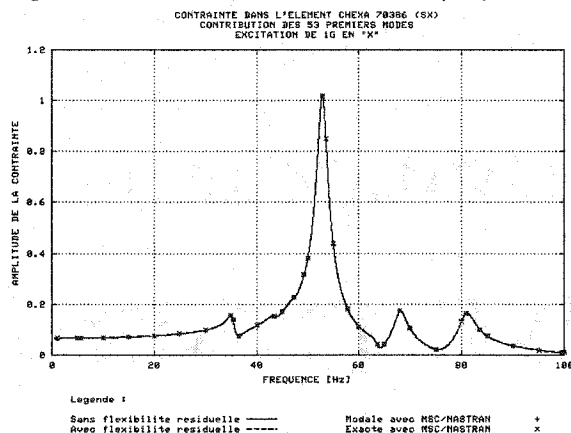


Figure III.12 : Élément CHEXA 70386 (SX)

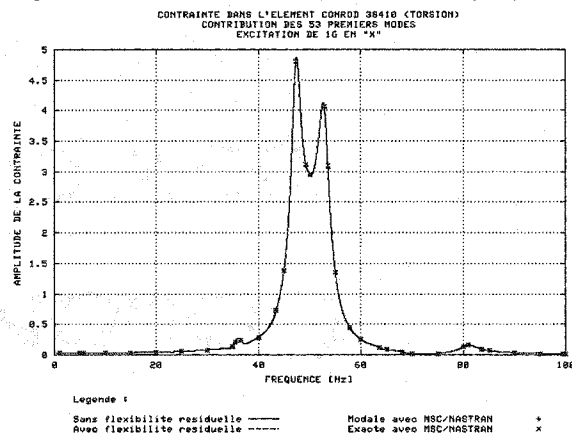


Figure III.13 : Élément CONROD 38410 (T)

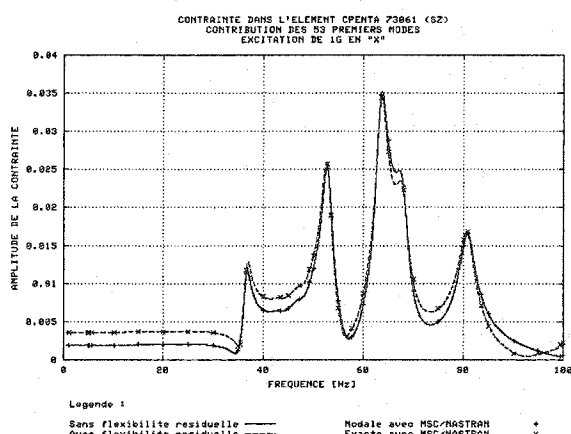


Figure III.14 : Élément CPENTA 73061 (SZ)

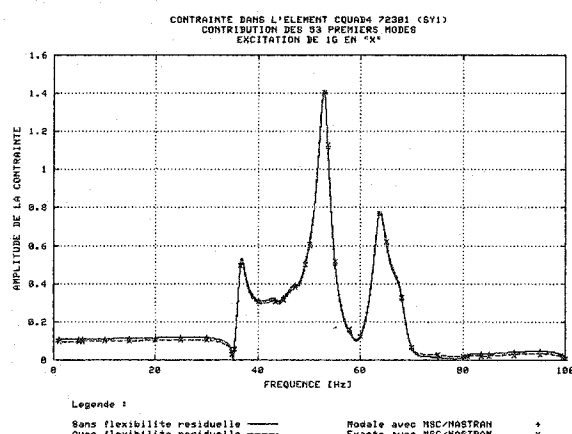


Figure III.15 : Élément CQUAD4 72301 (SY1)

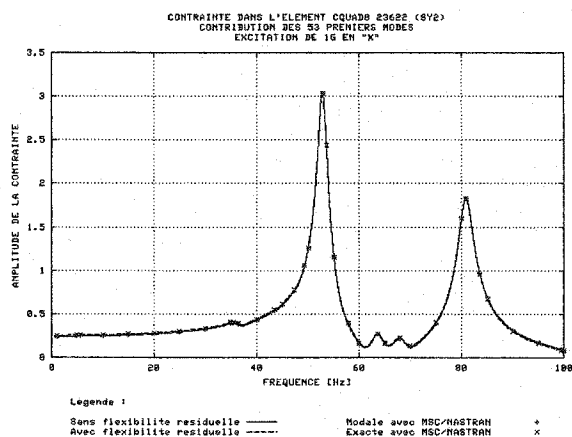


Figure III.16 : Élément CQUAD8 23622 (SY2)

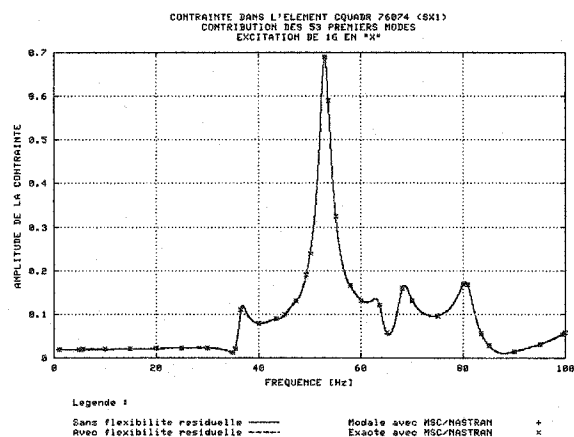


Figure III.17 : Élément CQUAD8 76074 (SX1)

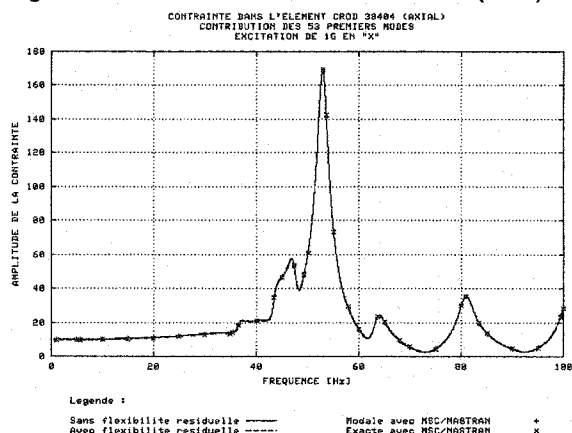


Figure III.18 : Élément CROD 38404 (AXIAL)

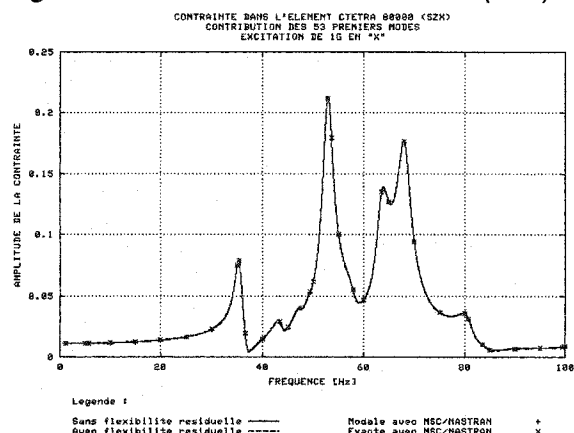


Figure III.19 : Élément CTETRA 80000 (SZX)

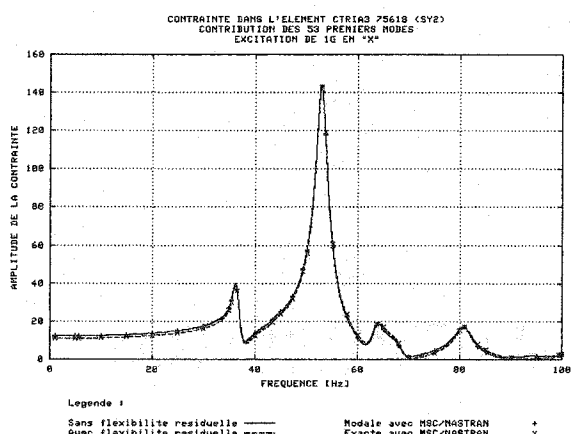


Figure III.20 : Élément CTRIA3 75618 (SY2)

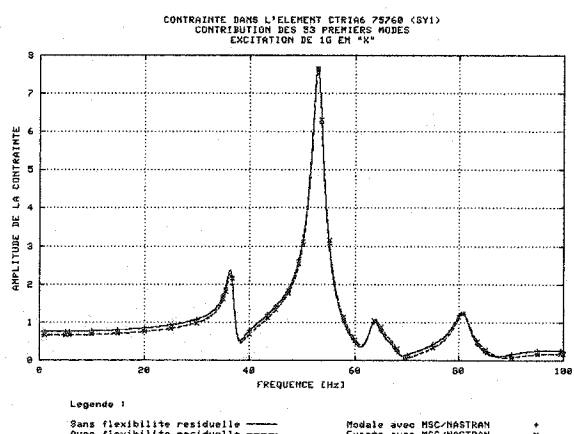


Figure III.21 : Élément CTRIA6 75760 (SY1)

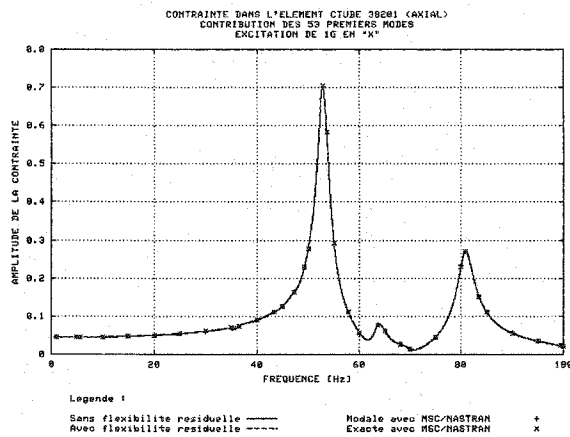


Figure III.22 : Élément CTUBE 38201 (AXIAL)

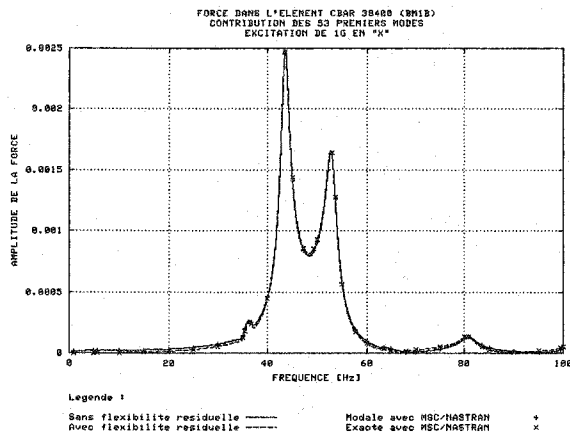
**Forces élémentaires**

Figure III.23 : Élément CBAR 38400 (BM1B)

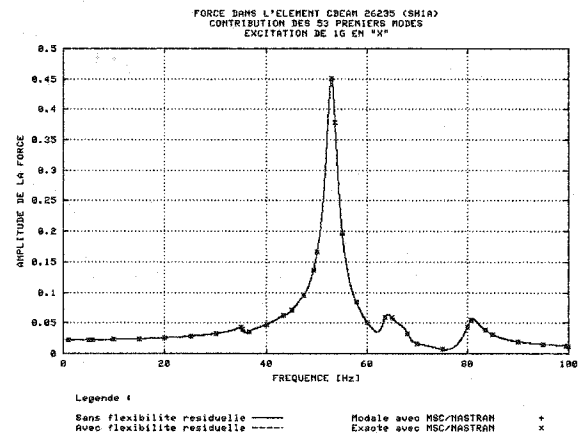


Figure III.24 : Élément CBEAM 26235 (SH1A)

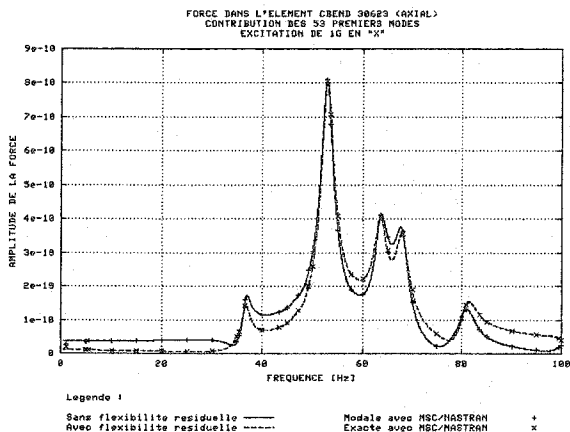


Figure III.25 : Élément CBEND 30623 (AXIAL)

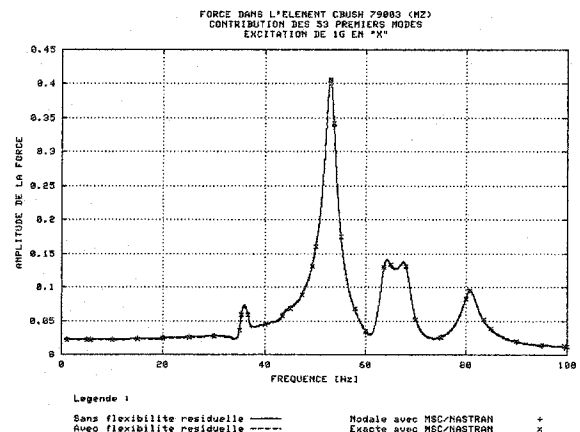


Figure III.26 : Élément CBUSH 79003 (MZ)

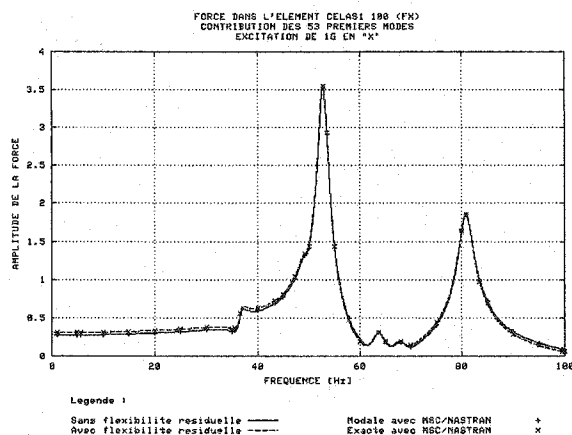


Figure III.27 : Élément CELAS1 100 (FX)

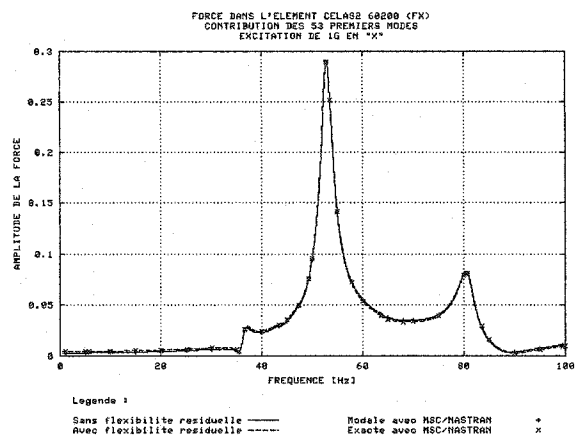


Figure III.28 : Élément CELAS2 60200 (FX)

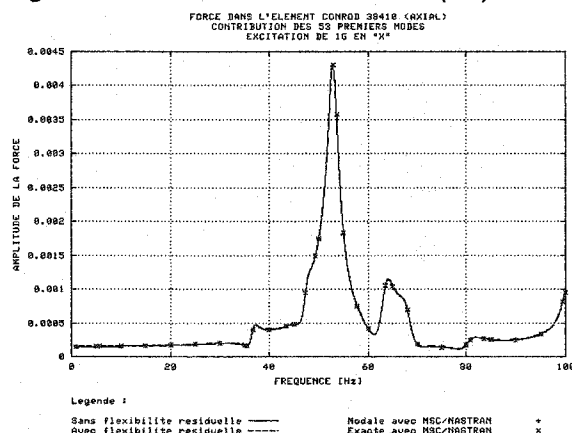


Figure III.29 : Élément CONROD 38410 (AXIAL)

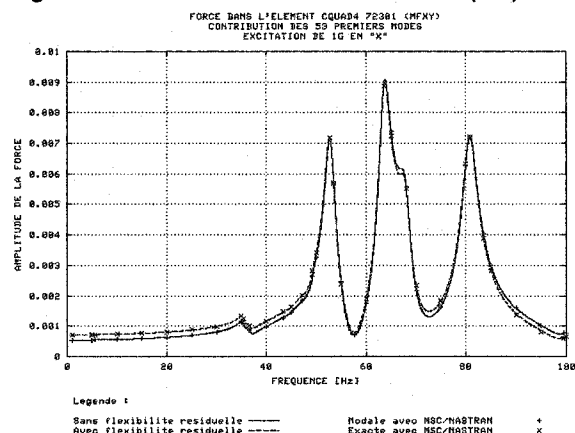


Figure III.30 : Élément CQUAD4 72301 (MFXY)

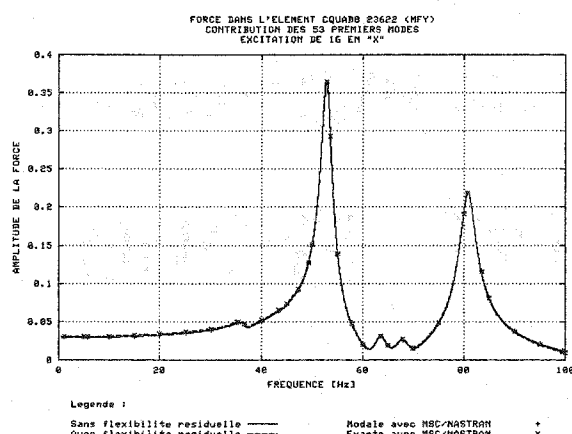


Figure III.31 : Élément CQUAD8 23622 (MFY)

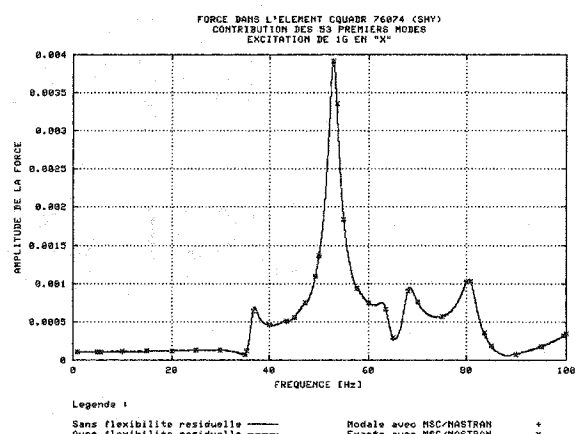


Figure III.32 : Élément CQUADR 76074 (SHY)

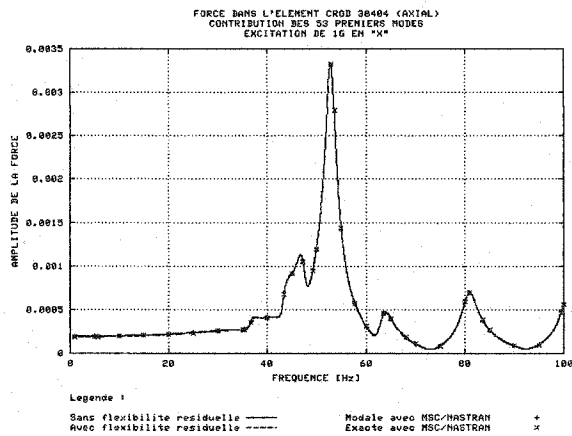


Figure III.33 : Élément CROD 38404 (AXIAL)

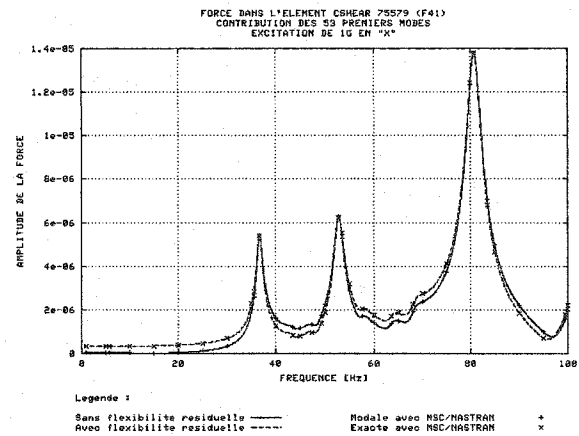


Figure III.34 : Élément CSHEAR 75579 (F41)

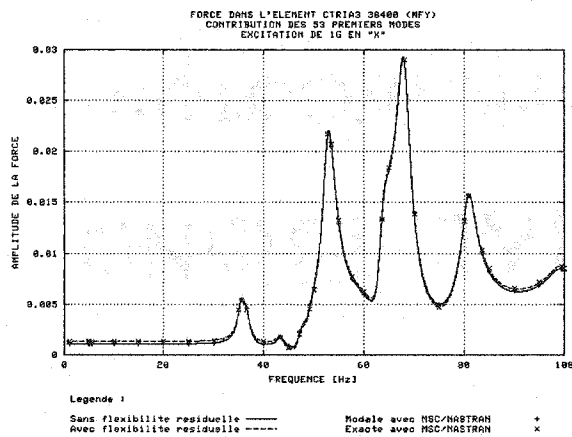


Figure III.35 : Élément CTRIA3 75618 (MFY)

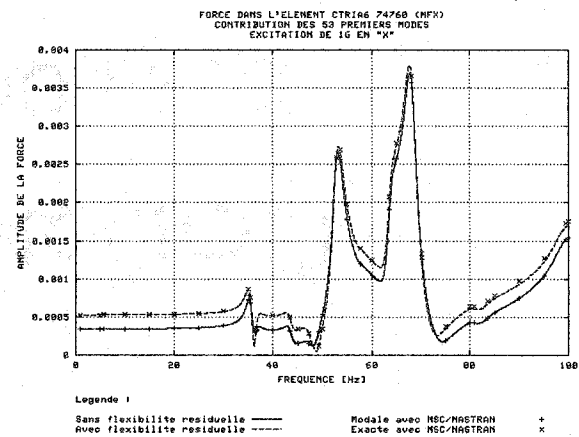


Figure III.36 : Élément CTRIA6 75760 (MFX)

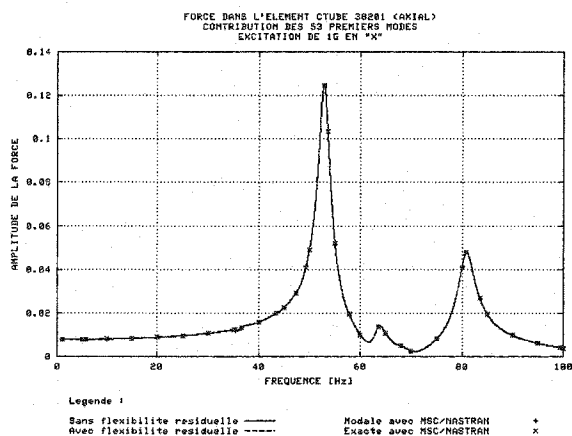


Figure III.37 : Élément CTUBE 38201 (AXIAL)

## Déformations élémentaires

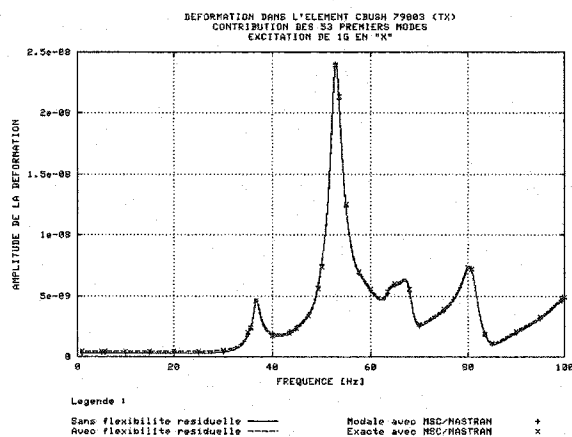


Figure III.38 : Élément CBUSH 79003 (TX)

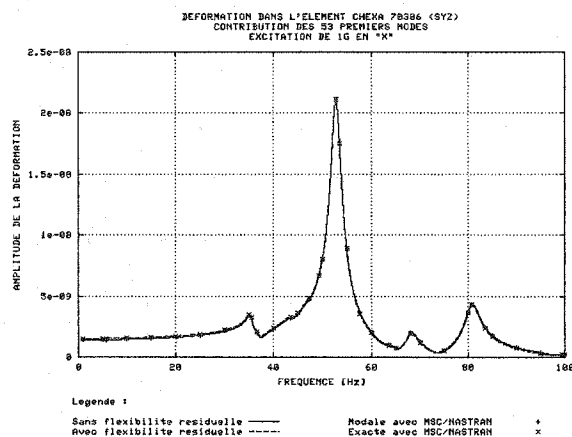


Figure III.39 : Élément CHEXA 70386 (SY2)

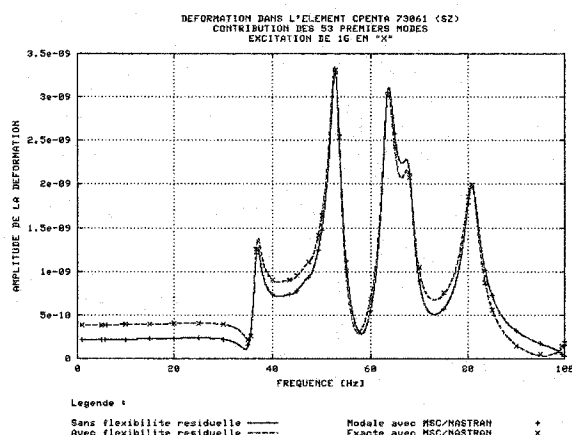


Figure III.40 : Élément CPENTA 73061 (SY2)

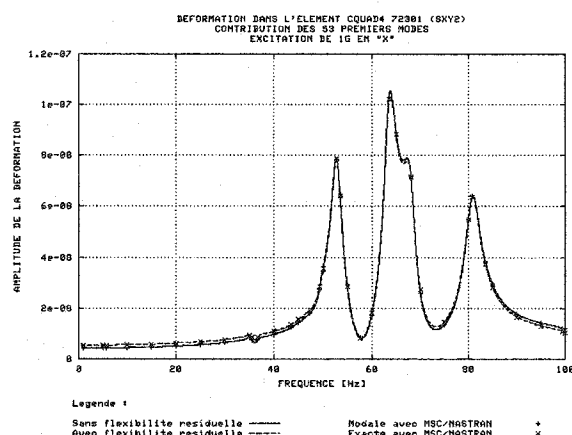


Figure III.41 : Élément CQUAD4 72301 (SXY2)

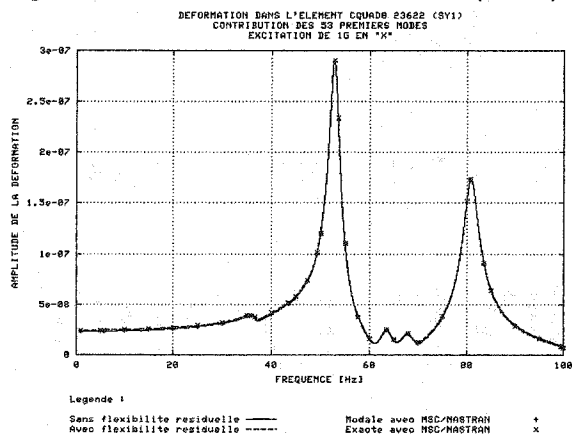


Figure III.42 : Élément CQUAD8 23622 (SY1)

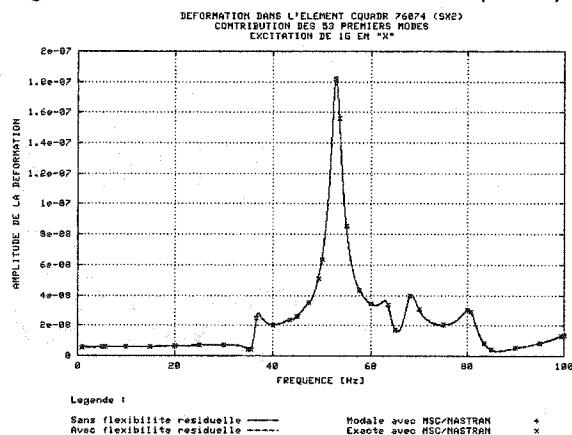


Figure III.43 : Élément CQUADR 76074 (SX2)

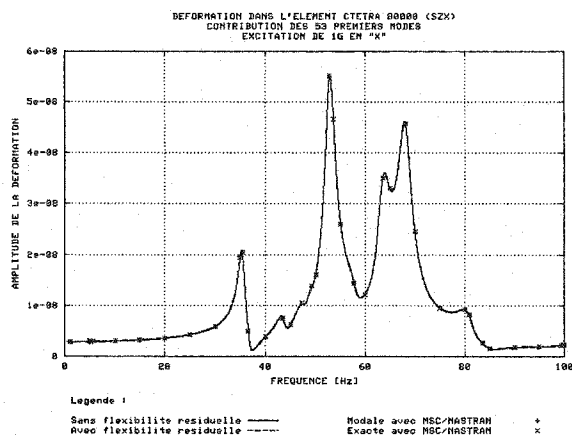


Figure III.44 : Élément CTETRA 80000 (SZX)

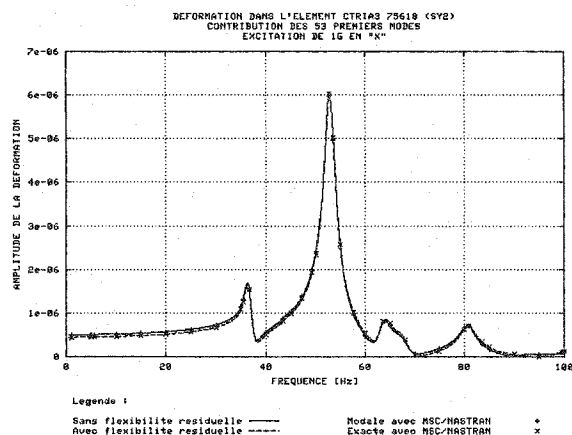


Figure III.45 : Élément CTRIA3 75618 (SY2)

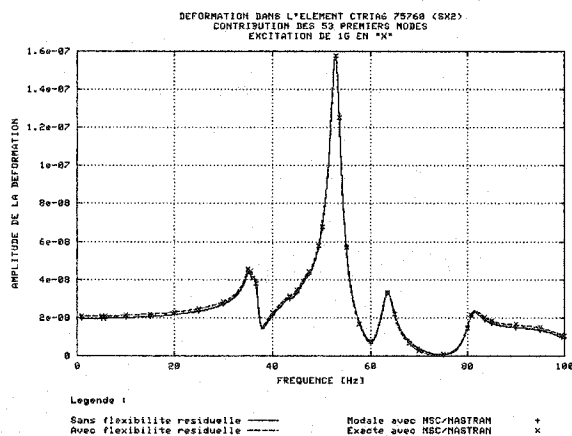


Figure III.46 : Élément CTRIA6 75760 (SX2)

## ANNEXE IV

## FICHER USAGER DU PROCESSEUR ALÉATOIRE

```

$-----
$ RANDOM VIBRATION ANALYSIS INPUT FILE
$-----
$
$          . . . . .
$      *       *       *
$    ,   *     *     ,
$  *   *   *   *   *   *   *
$ **    **   * *   * *   * *   *
$ * *   * *   *   *   *   *   *
$ *   *   *   *   *   *   *   *
$ *       * *   *   *   *   *   *
$ *       * *   *   *   *   *   *
$
$                                R V A
$                                P R O C E S S O R
$                                f o r M S C / N A S T R A N
$
$ Release Beta 1.0 LMS Copy
$ Maya Heat Transfer Technologies
$ All Rights Reserved
$ http://www.mayahtt.com
$ e-mail: support@mayahtt.com
$-----
$ ANALYSIS TITLE (80 CHARS)
$-----
RVA PROCESSOR - PLATE VALIDATION MODEL
$
$ FREQUENCY BANDWITH FOR R.M.S COMPUTATION
$   o LFREQ, HFREQ [HZ]
$-----
0.01,1000.0
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$ FREQUENCY DEFINITION $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$ NUMBER OF MODES FOR THE ANALYSIS
$ ALL = ALL MODES IN OP2 FILE
$ 1 = SPECIFY NUMBER OF MODES (LMODES)
$ 2 = SPECIFY FREQUENCY RANGE (LFREQ,HFREQ)
$ 3 = SINGLE RANGE OF MODES
$-----
ALL
$
$ MODE SPECIFICATION (IGNORED IF ALL)
$-----

```

```

$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$ DAMPING DEFINITION $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$ DAMPING TYPE (G, CRIT OR Q)
$  o Q = 1/G = 1/(2*CRIT)
$-----
Q
$ NUMBER OF SEGMENTS
$-----
2
$   FREQ [HZ], DAMPING
$-----
0.0,20.0
1000.0,20.0
$
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$ ANALYSIS PARAMETERS  $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$ CROSS-CORRELATION TERM CONTRIBUTION
$ 1 = PRECISE -> CQC (COMPLETE QUADRATIC COMBINATION) MAX:1000 AUTO-PSD
$ 2 = APPROXIMATE -> SRSS (SQUARE ROOT OF THE SUM OF SQUARES)
$-----
1
$ METHOD TO ESTIMATE PEAK/RMS RATIO
$ 1 = USER-DEFINED RATIO (SIGMA)
$ 2 = CONFIDENCE LEVEL (PERCENT)
$-----
1
$
$   PEAK/RMS RATIO DATA
$-----
1.0
$
$ INTEGRATION SCHEME
$ 1 = ANALYTICAL
$ 2 = NUMERICAL (ROMBERG)
$-----
1
$
$ NUMERICAL INTEGRATION TOLERANCE
$-----
1.0
$
$ REAL DATA FILTER (0 = OFF, 1 = ON)
$-----
1
$
$ REAL DATA VALUE
$-----
1E-10

```

```

$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$   OUTPUT REQUEST   $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$ NUMBER OF RESULTS REQUESTED
1
$ DEFINITION OF RESULTS
$   o PEAK: OUT, UNV, XLS
$   o PSD:  HTML, UNV, XLS
$   o COMP: X, Y, Z, TRN, ROT, ALL
$   o SF:   SCALE FACTOR = RMS/SF
$   o OVLY: Y or N (OVERLAY FOR GRAPHS)
$-----
DISP(PEAK=1,0,0 PSD=1,0,0 COMP=ALL SF=1.0 OVLY=N)
$
$ NODE GROUPS TO PROCESS (COMA SEPARATED)
$   o ALL for all nodes (no groups)
$   o End line by a coma to continue
$     on the next line
$-----
1
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$ EXCITATION DEFINITION $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$ PSD EXCITATION TYPE (AT LEAST FIRST LETTER)
$   o [A] CCELERATION (OR FORCE)
$   o [V] ELOCITY
$   o [D] ISPLACEMENT
$-----
ACCE
$
$
$
$ PSD SCALE FACTOR
$-----
1.0
$
$ USE OVERALL CORRELATION COEFFICIENT FOR CROSS-PSD
$   o N or Y
$   --- IF N, THE GIVEN COEFFICIENTS WILL BE IGNORED
$       AND NON DEFINED CROSS-PSD WILL BE SET TO 0
$   --- USE ONLY IF CROSS-PSD ARE ALL REAL VALUES
$       FOR CORRECT RESULTS
$-----
Y
$ OVERALL CORRELATION COEFFICIENT
$ -1 <= COEFFICIENT <= 1
$   o 1 OR -1 IS FULLY CORRELATED
$   o 0 IS NON-CORRELATED
$
$ NUMBER OF POINTS TO FOLLOW

```

```

$  o LOG-LIN SCALE (>= 2 POINTS)
$  o MUST BE FLAT FOR ANALYTICAL INTEGRATION
$  o  $S_{12} = \text{Coef} * (S_{11} * S_{22})^{0.5}$ 
$-----
2
$  FREQ, COEFFICIENT
$-----
0.01, 1.0
1000.0, 1.0
$
$  NUMBER OF P.S.D TO PROCESS
$-----
6
$
$
$  =====
$  PSD DEFINITION
$  =====
$  Slm(f) WHERE l = EXCITED LOAD SET (NODE OR NODE GROUP)
$                m = APPLIED LOAD SET (NODE OR NODE GROUP)
$
$  DEFINITION (DEF)
$    o AUTO for AUTO-PSD
$    o CROSS for CROSS-PSD
$  TYPE
$    o N = PSD AT NODE
$    o G = PSD FOR NODE GROUP
$  DIR = X, Y, Z
$  NUM = NUMBER OF POINTS TO FOLLOW (MAXIMUM 1000)
$
$  -- DEF = AUTO
$  => AUTO, TYPE, ID, DIR, NUM
$      F1, PSD1
$      ...
$      FN, PSDN
$
$  -- DEF = CROSS
$  => CROSS, TYPE1, L, DIR, TYPE2, M, DIR, NUM
$      F1, PSD1 REAL[, PSD1 IMAGINARY]  <-- OPTIONAL []
$      ...
$      FN, PSDN
$
$  NOTES:  o CROSS-PSD IGNORE IMPLIED AUTO-PSD FOR GROUPS
$          o CROSS-PSD BYPASSES CORRELATION COEFFICIENT
$          o REMEMBER THAT Slm=Sml*
$          o THE PSDs MUST BE GIVEN IN A LOG-LOG SCALE
$          o THE FREQUENCIES MUST BE IN ASCENDING ORDER
$          o NO ZERO "0" ENTRY IS ACCEPTED
$          o INTERPOLATION IS DONE ON BOTH PARTS, NOT
$            ON THE COMPLEX NUMBER ITSELF
$          o ONLY CROSS-PSD CAN HAVE IMAGINARY PARTS
$          o IMAGINARY PARTS ARE ALL ZERO OR ALL > 0
$            FOR A GIVEN CROSS-PSD
$

```

```

$-----
$
$ AUTO PSD
$
$ NODE 1
$
AUTO,N,1,Z,4
  0.01,1.25E+6
  200.0,3.0E+8
  500.0,3.0E+8
  1000.0,2.5E+6
$
$ NODE 3
$
AUTO,N,3,Z,4
  0.01,2.5E+7
  100.0,1.25E+8
  500.0,1.25E+8
  1000.0,5.0E+6
$
$ CENTER GROUP
$
AUTO,G,2,Z,5
  0.01,5.0E+6
  50.0,5.0E+7
  100.0,5.0E+7
  500.0,5.0E+6
  1000.0,5.0E+6
$
$ CROSS PSD (BYPASS THE OVERALL CORR. COEFFICIENT)
$
CROSS,N,1,Z,N,3,Z,6
  0.01,2.5E+6,1.25E+6
  50.0,6.0E+7,8.0E+7
  100.0,9.0E+7,1.0E+8
  200.0,1.25E+8,1.20E+8
  500.0,6.0E+7,7.50E+7
  1000.0,1.0E+6,1.5E+6
$
CROSS,N,1,Z,G,2,Z,6
  0.01,7.5E+5,1.0E+6
  50.0,3.0E+7,1.0E+7
  100.0,4.0E+7,3.0E+7
  200.0,4.0E+7,3.0E+7
  500.0,1.0E+7,1.0E+7
  1000.0,1.5E+6,1.0E+6
$
CROSS,N,3,Z,G,2,Z,6
  0.01,6.0E+6,3.0E+6
  50.0,4.0E+7,1.0E+7
  100.0,4.0E+7,2.0E+7
  200.0,3.0E+7,2.0E+7
  500.0,1.5E+7,1.0E+7
  1000.0,1.5E+6,1.0E+6

```

```

$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$  GROUP DEFINITION  $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$
$NUMBER OF GROUPS
$-----
2
$GROUP ID
$-----
1
$ GROUP TITLE (80 CHARS)
$-----
TRANSLATIONAL DISPLACEMENTS
$
$NUMBER OF RANGES TO FOLLOW
$-----
3
$RANGES
$ o IF SINGLE NODE, NO COMA
$-----
1
3
30
$GROUP ID
$-----
2
$ GROUP TITLE (80 CHARS)
$-----
CENTER
$
$NUMBER OF RANGES TO FOLLOW
$-----
3
$RANGES
$ o IF SINGLE NODE, NO COMA
$-----
29,31
35,37
47,49
$
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$ XY PLOTTING OPTIONS $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$
$ FREQUENCY BANDWIDTH
$-----
0.01,1000.0
$
$
$ INTERMEDIATE FREQUENCY OPTION

```

[illegible]