POLYPUBLIE

Modélisation de la caractéristique E-J des supraconducteurs à haute température critique

Frédéric Sirois

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

Date	2002
Type	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis Thèse de doctorat/Ph.D. thesis
URL de PolyPublie PolyPublie URL	https://publications.polymtl.ca/7091/
Conditions d'utilisation Terms of use	© Tous droits réservés / All rights reserved
Référence Citation	Sirois, F. (2002). Modélisation de la caractéristique E-J des supraconducteurs à haute température critique [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/7091/

Détails de la thèse
Thesis details

Directeurs de recherche Advisors	Guy Olivier, & Julian Cave
Programme Program	Non spécifié

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal
https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION DE LA CARACTÉRISTIQUE $E - J$ DES SUPRACONDUCTEURS À HAUTE TEMPÉRATURE CRITIQUE

FRÉDÉRIC SIROIS
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
DÉCEMBRE 2002

© Frédéric Sirois, 2002.

National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisisitons et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence
ISBN: 0-612-80814-9
Our file Notre référence
ISBN: 0-612-80814-9

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou aturement reproduits sans son autorisation.

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

MODÉLISATION DE LA CARACTÉRISTIQUE $E - J$ DES SUPRACONDUCTEURS À HAUTE TEMPÉRATURE CRITIQUE

présentée par: SIROIS Frédéric

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. YELON Arthur, Ph.D., président
M. OLIVIER Guy, Ph.D., membre et directeur de recherche
M. CAVE Julian, Ph.D., membre et codirecteur de recherche
M. DUFOUR Steven, Ph.D., membre
M. REZZOUG Abderrezak, Ph.D., membre

À Catherine, pour m'avoir supporté!

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier les organismes subventionnaires qui m'ont soutenu durant ces années de thèse, soit le CRSNG, par ses programmes ÉS A et ÉS B, et le FCAR, par son programme BMP (Bourses en Milieu de Pratique), qui est venu compléter les derniers mois non couverts par le CRSNG. De plus, je me dois aussi de remercier l'IREQ (Institut de recherche d'Hydro-Québec), qui m'a versé une aide financière complémentaire durant toute la durée de mes travaux, en plus de me fournir un soutien financier pour la participation à des rencontres, formations et conférences de toute envergure (de locales à internationales), ainsi que pour l'achat du matériel requis pour accomplir mes travaux de thèse.

Je tiens aussi à remercier spécialement mes directeurs, en commençant par Julian, que j'ai côtoyé presque au quotidien durant toutes ces années. Malgré nos occasionnelles divergences d'opinions, il m'aura permis d'apprendre beaucoup de choses dans ma discipline, et aussi d'entrer en contact avec beaucoup d'autres chercheurs de la communauté scientifique internationale. En particulier, il m'a donné l'occasion en juin 1999 d'effectuer un stage à l'université de Cambridge, Angleterre, au cours duquel j'ai eu l'occasion d'avoir plusieurs discussions stimulantes avec des chercheurs reconnus, ainsi que des chercheurs post-doctoraux et d'autres étudiants au doctorat. Ce fut une expérience dont je garderai de très bons souvenirs. Merci aussi à Guy, avec qui j'ai eu moins de contacts, mais qui a su être là et me conseiller judicieusement dans les moments importants.

Plus brièvement, mais non sans oublier l'importance de leurs contributions, je tiens à remercier Raymond Roberge, alors chef de Service, pour avoir rendu possible ce projet de collaboration Polytechnique-IREQ tout en m'accueillant à l'IREQ, ainsi que Germain Harbec et Guy Bélanger, qui lui ont succédé, et qui ont su respecter tous les engagements initiaux de cette collaboration. J'adresse un

merci spécial à Guy Bélanger, qui m'a donné tout le soutien nécessaire en fin de parcours dans mes démarches d'obtention d'une nouvelle source de financement, et à Robert Boulé pour avoir approuvé cette avenue.

Je ne pourrais passer sous silence les nombreux conseils de mes deux principaux collègues, Dan Watson et Wen Zhu, avec qui j'ai eu d'innombrables discussions, et qui m'ont particulièrement soutenu dans la partie expérimentale de mon projet, notamment en me fournissant des échantillons. De même, je tiens à remercier la collaboration constante de Raymonde Hubert et Chantale Brunelle, secrétaires administratives, qui ont su venir à bout de toutes les difficultés administratives reliées à mon statut quelque peu irrégulier!

Toujours à l'IREQ, merci à Yves Brissette, qui a été un précieux conseiller en des moments clés. Merci aussi à Patrick Picher, qui est passé par le même processus que moi quelques années auparavant, et qui m'a conseillé à l'occasion. Merci à tout le personnel de la bibliothèque pour sa précieuse collaboration. Merci aussi à Michel Belley, de l'atelier de mécanique, pour la fabrication des diverses pièces mécaniques requises dans mes expérimentations. Merci à Pierre Lacasse, Niko Qako et tous les autres collègues avec qui j'ai passé de si bons moments durant l'heure du midi à la cafétéria. Merci aux nombreux stagiaires qui sont passés dans notre laboratoire, qui ont su partager avec moi leurs différentes habiletés et expertises, et avec qui j'ai passé de bons moments.

Merci à tous les professeurs qui m'ont enseigné à l'École Polytechnique. Les bases apprises dans ces cours m'ont été fort utiles dans la réalisation de mon projet.

Merci à Jan Evetts et Archie Campbell de l'Université de Cambridge, pour m'avoir accueilli dans leurs laboratoires durant un mois, ainsi que fourni l'hébergement au *Christ's College*.

Merci à l'équipe d'*Infolytica Corporation*, qui développe le logiciel *MagNet*®, l'un de mes outils de base. Leur support constant face à nos demandes très spéci-

fiques nous ont permis d'en faire l'un des outils de simulation numérique les plus puissants pour étudier les supraconducteurs. Merci en particulier à Behzad Forghani, qui a été au centre de ce processus, ainsi qu'à Jon Webb, qui a attentivement lu et commenté deux de mes articles scientifiques soumis à *IEEE Transactions on Magnetics.*

Merci à Benoît des Ligneris, étudiant au doctorat à l'Université de Sherbrooke, avec qui j'ai eu beaucoup d'échanges enrichissants, et à qui je dois plusieurs astuces informatiques, dont l'apprentissage de LaTeX, qui m'a permis de rédiger cette thèse très efficacement.

Merci aussi à tous les membres de mon jury pour leur lecture attentive de la thèse et leurs commentaires pertinents qui en ont permis l'amélioration jusqu'à la forme finale. Merci à Sébastien Côté pour la révision orthographique des sections préliminaires à la thèse, de l'introduction et de la conclusion. Merci spécialement à Nathalie Lévesque, commis aux études supérieures au Département de génie électrique, pour avoir activement suivi toutes les étapes du processus de dépôt et ainsi permis de régler l'ensemble des procédures dans un délai plus que raisonnable.

Enfin, merci à tous ceux que je ne nomme pas explicitement, mais qui ont, de près ou de loin, contribué à la réalisation de cette thèse.

En terminant, je tiens à adresser des remerciements spéciaux à des gens dont l'implication dépasse largement le cadre de la thèse. D'abord, je remercie énormément mes parents, qui ont été présents bien avant que je puisse avoir l'idée d'entreprendre un tel projet. Merci pour leur support durant toutes ces années qui m'ont permis de m'y préparer. L'amorce de cette carrière, je la dois en partie à Sarto Morissette, professeur retraité de l'Université de Sherbrooke, qui a su me relayer sa passion pour le domaine de l'électromagnétisme et attirer ma curiosité vers les différents phénomènes qui y sont reliés. Puis, grâce à Léonard Bolduc, chercheur à l'IREQ, j'ai eu la chance en tant que stagiaire de développer grandement mes

aptitudes en recherche. Ses qualités exceptionnelles de mentor m'ont permis d'apprendre énormément. Son appui inconditionnel en toutes circonstances m'a permis d'entreprendre sur une bonne voie ce projet de doctorat. Je lui en suis extrêmement reconnaissant. Cependant, n'eût été du soutien plus que quotidien de ma conjointe, Catherine, il m'aurait été très difficile de mener à terme cette entreprise de longue haleine. Merci, Catherine...

RÉSUMÉ

L'objectif principal de cette thèse est de développer de nouvelles approches de modélisation et de caractérisation de la caractéristique $E - J$ des matériaux supraconducteurs à haute température critique, et d'intégrer ces modèles dans des logiciels de calcul numérique (faits maison ou commerciaux), qui utilisent des méthodes comme les éléments finis ou les différences finies pour calculer des quantités électromagnétiques et/ou thermiques. Ainsi, de nouveaux outils de conception, actuellement presque inexistants, deviendront disponibles aux ingénieurs pour assurer le développement d'appareillages supraconducteurs, diminuant ainsi grandement les coûts de fabrication des prototypes. Cette thèse ne constitue qu'une première étape vers l'élaboration de modèles suffisamment généraux qui pourront éventuellement être utilisés à des fins de conception d'appareillages supraconducteurs destinés aux réseaux électriques, tels que des limiteurs de courants, des transformateurs ainsi que des moteurs/générateurs. À puissance égale, les appareillages supraconducteurs occupent un espace physique beaucoup plus petit que les appareillages traditionnels. Ils ont de plus un rendement supérieur à ces derniers et ils ouvrent de nouvelles possibilités d'exploitation des réseaux électriques.

De façon plus précise, l'approche utilisée ici se veut le plus possible basée sur les principes physiques à la base du comportement électromagnétique des supraconducteurs à haute température critique, tout en gardant un niveau de simplicité suffisant pour minimiser le nombre de paramètres requis. En particulier, les modèles basés sur une distribution statistique de la densité de courant critique sont particulièrement priorisés, et donc intensivement justifiés. Plusieurs formes analytiques nouvelles basées sur des distributions statistiques courantes sont développées. Les formes analytiques sont intéressantes car elles permettent une implémentation directe dans les logiciels de calcul numérique. Tous ces modèles reposent cependant

sur l'hypothèse selon laquelle le modèle de fluage linéaire est valide, mais le formalisme développé peut facilement servir de base au développement de modèles plus complexes. Une synthèse des modèles empiriques conventionnels rencontrés dans la littérature est aussi faite, et ces derniers sont utilisés à plusieurs reprises pour effectuer des comparaisons ou encore des études simples.

Le développement d'applications implique généralement d'optimiser la forme et la quantité de matériau. Lorsqu'on effectue cette tâche à l'aide de logiciels de calcul numérique, cela demande des modèles indépendants de la géométrie (i.e. des modèles locaux), ce qui n'est pas toujours évident à obtenir par la caractérisation expérimentale d'un échantillon. En effet, le champ propre affecte les mesures macroscopiques de façon importante, particulièrement lorsque les matériaux présentent une forte anisotropie en champ magnétique. Ainsi, une méthode numérique de caractérisation pour extraire les paramètres « locaux » à partir de simples mesures $V - I$ en cc dans un champ magnétique est développée. Cette méthode est elle-même basée sur un algorithme « maison » de calcul rapide de la distribution de courant cc (i.e. après toute transitoire ou tout effet de relaxation) sur la section de conducteurs dont la perméabilité magnétique est égale à celle du vide (i.e. $\mu = \mu_0$) et dont la résistivité dépend de la densité de courant, de la densité de flux et de la position. Une discussion sur la nature « locale » des paramètres ainsi extraits est présentée. On peut la résumer en deux hypothèses, qui stipulent que les propriétés locales du matériau caractérisé doivent être considérées comme étant homogènes, et que les quantités locales, telle que la densité de courant, ne représentent pas une moyenne sur un volume caractéristique donné, mais plutôt un comportement effectif, qui englobe un ensemble de comportements microscopiques plus complexes (e.g. les chemins de percolation dans des matériaux granulaires) sans avoir à les traiter explicitement. Le dernier chapitre traite des effets dus au champ propre dans des conducteurs rectangulaires.

Enfin, plusieurs sections de la thèse sont consacrées à la validation des algorithmes et des logiciels de calcul numérique, dont le logiciel *MagNet*®, qui permet l'intégration de modèles de résistivité 3D, anisotropes et dépendants de la densité de courant, de la densité de flux et de la position. La dépendance en température, qui est un cas important en pratique, ne peut pas à l'heure actuelle être traitée par ce logiciel. Par conséquent, nous nous restreignons à des modèles indépendants de la température (i.e. modèles à température constante), mais en contrepartie, nous accordons une grande importance à la dépendance anisotrope en champ magnétique. Il ressort de ces validations que le logiciel *MagNet*® est en mesure de traiter correctement ce type de problème, mais les temps de simulation requis à l'heure actuelle sont beaucoup trop longs.

Soulignons que les mesures en laboratoire ne sont pas un objectif primordial dans cette thèse. Quelques mesures sont tout de même effectuées afin de pouvoir travailler avec des données brutes et afin de valider la méthode de caractérisation locale ainsi que les nouveaux modèles proposés, mais une campagne intensive de mesures plus spécifiques devrait être effectuée afin de valider davantage ces derniers.

ABSTRACT

The main goal of this thesis is the development of new modeling and characterization approaches for the $E - J$ characteristic of high critical temperature superconductors, as well as the integration of these models in numerical calculation softwares (home-made or commercial), using methods such as finite elements or finite differences to compute electromagnetic and/or thermal quantities. New conception tools, which are currently difficult to find, will then become available to engineers to ensure the development of various superconducting devices, reducing greatly the cost of building prototypes. This thesis is only a first step towards more general models, which will be eventually used for the design of superconducting devices intended to serve in the power sector, such as fault current limiters, transformers and motors/generators. For the same output power, superconducting devices occupy less space than conventional technologies. They also have a higher efficiency, and open new ways of network exploitation.

More precisely, the approach proposed here is based as much as possible on the physical principles responsible for the electromagnetic behavior of high temperature superconductors, but is still simple enough to keep the number of required parameters to a reasonable number. In particular, models based on the statistical distribution of the critical current density are preferred among others, thus are greatly justified. Many new analytical forms based on frequent statistical distributions are developed. Analytical forms are interesting since they allow a direct implementation into numerical calculation softwares. All these models lie on the hypothesis that the linear flux flow model is valid, but more complex models can easily be derived based on the formalism developed. A synthesis of empirical models commonly found in the literature is also performed. They are used throughout the thesis for comparison purposes with other models, and to perform simple analyses.

The development of applications often implies the optimization of the shape and of the quantity of material. When this task is done with the assistance of numerical calculation softwares, it requires models that are independent of the geometry (i.e. local models), which are not always obvious to obtain from the experimental characterization of a sample. Indeed, the self-field significantly affects macroscopic measurements, particularly when the field anisotropy is strong. For this reason, a numerical characterization method that extracts the "local" parameters from simple dc $V - I$ measurements in a magnetic field is developed. This method is itself based on a home-made algorithm that quickly computes the dc current distribution (i.e. after all transient or relaxation effects) over the cross-section of conductors whose magnetic permeability is equal to that of void (i.e. $\mu = \mu_0$), and whose resistivity depends on current density, flux density and position. A discussion on the "local" nature of the so-extract parameters is presented. We can summarize it with two hypotheses: the local properties of the characterized material must be considered as homogeneous, and the local quantities, such as the current density, do not represent an average over some characteristic volume, but rather an effective behavior, which includes many complex microscopic phenomena (e.g. percolation paths in granular materials) without having to consider them explicitly. The last chapter deals with the effects of the self-field in rectangular conductors.

Finally, many sections of this work are devoted to the validation of algorithms and numerical calculation softwares. In particular, the *MagNet*® software, which allows the integration of 3D anisotropic resistivity models, exhibiting current density, flux density and position dependences. Temperature dependence, which is an important practical aspect, can not be treated by this software at this time. Hence, we restrict ourselves to models which are independent of temperature (i.e. constant temperature models), but in counterpart, we give a great importance to the anisotropic field dependence. The conclusions from these validations are that

MagNet® is able to treat this type of problem correctly, but the time required to perform a simulation is still much too long.

It is worth mentioning that laboratory measurements are not a primary goal of this thesis. Some measurements are nevertheless done in order to get some raw data to work with, and to validate the local characterization method as well as the new models proposed. But intensive measurement campaigns with specific objectives should follow this work to perform more validations.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iv

REMERCIEMENTS v

RÉSUMÉ ix

ABSTRACT xii

TABLE DES MATIÈRES xv

LISTE DES FIGURES xxiii

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES xxvii

LISTE DES TABLEAUX xxxiii

LISTE DES ANNEXES xxxiv

I Contexte et revue de la littérature 1

INTRODUCTION 2

CHAPITRE 1 PRINCIPES DE BASE EN SUPRACONDUCTIVITÉ 6

1.1 Définitions de base 6

1.2 Matériaux de type I 8

1.3 Matériaux de type II 9

1.4 Constante de Ginzburg-Landau 10

1.5 Réseau de lignes de flux 12

1.6 Force de Lorentz, force d'ancrage et densité de courant critique . . . 12
1.7 Fluage (« flux flow ») et origine de la caractéristique $E-J$ 14
1.8 Supraconducteurs à haute température critique 16

CHAPITRE 2 CARACTÉRISTIQUE $E-J$: DE LA PHYSIQUE AUX MATHÉMATIQUES 19

2.1 Diagramme de phases $B-T$ 19
2.1.1 Phase Meissner 20
2.1.2 Phase amorphe 20
2.1.3 Phase liquide 22
2.1.4 Transition de phase amorphe-liquide 23
2.1.5 Autres phases 24
2.2 Généralisation du diagramme de phases 24
2.3 Densité de courant critique 26
2.3.1 Distribution du courant critique 28
2.3.2 Densité de courant critique vs courant critique 35
2.4 Diagramme de phases $J-B-T$ 39
2.4.1 Surfaces de transition 39
2.4.2 Aspect microscopique de la transition 41
2.4.3 Représentation alternative de $Q(0)$ 43
2.5 Agitation thermique 44
2.5.1 Potentiel d'ancrage et probabilité de saut 44
2.5.2 Influence de l'agitation thermique sur $P(J_c)$ 47
2.5.3 Transition entre les régimes de reptation et de fluage 49
2.6 Transition à l'état normal 50
2.7 Résistivité à l'état normal 51
2.8 Anisotropie de la résistivité 52
2.9 Configuration « force free » 53

2.10 Dépendance en température et en champ (amplitude et angle) . . . 55
2.11 Conclusion . . . 55

CHAPITRE 3 MODÈLES DE LA CARACTÉRISTIQUE $E-J$, DÉPENDANCE EN CHAMP DE LEURS PARAMÈTRES ET SIMULATION NUMÉRIQUE . . . 57

3.1 Modèles de la caractéristique $E-J$ . . . 57
3.1.1 Modèles en loi de puissance et de type percolation . . . 57
3.1.2 Modèle de Bean . . . 59
3.1.3 Modèles basés sur une distribution statistique de J_c . . . 62
3.1.4 Autres modèles . . . 63
3.2 Dépendance en champ de la caractéristiques E–J . . . 63
3.2.1 Dépendance en champ de J_c (modèles *isotropes*) . . . 64
3.2.2 Dépendance en champ de J_c (modèles *anisotropes*) . . . 65
3.2.3 Anisotropie des champs de transition . . . 66
3.2.4 Dépendance en champ de $J_{c_{min}}$ (et $J_{c_{max}}$) . . . 68
3.2.5 Dépendance en champ du paramètre n . . . 69
3.2.6 Dépendance en champ des paramètres de $P(J_c)$ . . . 70
3.2.7 Dépendance en champ de la résistivité de fluage . . . 70
3.3 Simulation numérique . . . 72
3.3.1 Méthode des éléments finis . . . 72
3.3.2 Méthode des « edge elements » . . . 75
3.3.3 Méthode des différences finies . . . 75
3.3.4 Méthodes intégrales . . . 76
3.4 Conclusion . . . 77

II Méthodes numériques: développement et validation 79

CHAPITRE 4 PRÉSENTATION DES CHAPITRES SOUS FORME D'ARTICLES 80

4.1 Vers de nouvelles approches de calcul (chapitres 5 et 6) 80

4.2 Vers de nouvelles approches de caractérisation (chapitre 8) 81

CHAPITRE 5 EFFICIENT EVALUATION OF BIOT-SAVART INTEGRALS FOR CONTINUOUSLY VARYING CURRENT DENSITIES IN 2D 83

5.1 Introduction 84

5.2 Mathematical formulation 85

5.2.1 Problem definition 85

5.2.2 Flux density and potential due to a set of conductors 87

5.2.3 Semi-analytical treatment of a single conductor 88

5.2.3.1 Bilinear current distribution over one element . . . 88

5.2.3.2 Superposition of all elements' contributions 92

5.2.4 Superposition of the contribution of all conductors 97

5.3 Cancellation errors 98

5.3.1 Origin of cancellation errors 98

5.3.2 How to avoid cancellation errors 100

5.3.2.1 General considerations 100

5.3.2.2 Integrals to use with quadrature 101

5.3.2.3 Criteria to use with quadrature 101

5.3.2.4 Application of the Gaussian quadrature 102

5.4 Convergence study 103

5.5 Discussion 105

5.6 Conclusion 108

CHAPITRE 6 2D CALCULATION OF DC CURRENT DISTRIBUTION IN CONDUCTORS WITH NON-LINEAR AND FIELD DEPENDENT RESISTIVITY 110

6.1 Introduction 111

6.2 Current distribution modeling 113

6.3 Flux density calculation 113

6.4 Resistivity modeling 114

6.5 Conductors modeling 115

6.6 Mathematical formulation 116

6.6.1 Definitions 116

6.6.2 Direct formulation for a single group 116

6.6.3 Newton-Raphson formulation for a single group 119

6.6.4 System resolution 121

6.6.5 Iterative algorithm 121

6.7 Examples 123

6.7.1 Non-linear resistivity 124

6.7.2 Inhomogeneous resistivity 126

6.7.3 Anisotropic field dependent resistivity 128

6.7.4 All dependences together 130

6.8 Remarks 135

6.8.1 Restrictions on the resistivity function 135

6.8.2 Current sources versus voltage gradient sources 136

6.8.3 Optimization of field calculation 137

6.8.4 Convergence with strongly field dependent materials 137

6.8.5 Implications of using a point collocation method 138

6.9 Conclusion 139

CHAPITRE 7 VALIDATION EN CA DES LOGICIELS DE CALCUL NUMÉRIQUE 141
7.1 Définition du problème 1D 142
7.2 Formulation mathématique des méthodes numériques 143
7.2.1 Considérations générales 143
7.2.2 Formulation de la méthode semi-analytique en 1D 145
7.2.3 Formulation de la méthode des différences finies en 1D . . . 150
7.3 Validation des méthodes numériques 153
7.3.1 Solution analytique pour une résistivité constante 153
7.3.2 Solution analytique pour une résistivité non linéaire 155
7.4 Solution purement numérique pour une résistivité non linéaire . . . 158
7.5 Discussion 159
7.6 Conclusion 160

III Mesures, modélisation et simulation numérique 162

CHAPITRE 8 DEVELOPMENT OF A NUMERICAL METHOD TO DETERMINE THE LOCAL $E-J$ CHARACTERISTICS OF ANISOTROPIC HTS FROM EXPERIMENTAL $V-I$ CURVES 163
8.1 Introduction 164
8.2 Basic Assumptions 165
8.2.1 Distinction Between Macroscopic and Local Models 165
8.2.2 Definition of Length Scales 166
8.2.3 Modeling Hypotheses 166
8.2.4 Numerical Calculations 167
8.2.5 Experimental Considerations 168
8.3 Description of the Method 168

8.4 Application Examples 170
8.4.1 Hoescht Material 170
8.4.2 AgAu-Bi-2223 Multi-Layer Material 173
8.5 Discussion 174
8.6 Conclusion 176
8.7 Acknowledgements 176

CHAPITRE 9 MESURES $V-I$ ET MODÉLISATION D'UN MATÉRIAU ANISOTROPE À HAUTE TEMPÉRATURE CRITIQUE 177

9.1 Mesures $V-I$ à quatre points 177
9.2 Matériau de ACL (Advanced Ceramics Limited) 178
9.3 Détails expérimentaux 180
9.4 Analyse détaillée des mesures $V-I$ 182
9.4.1 Modèle en loi de puissance (macroscopique) 182
9.4.2 Modèle en loi de puissance (mésoscopique) 184
9.4.3 Modèles basés sur des distributions statistiques de J_c (linéarisées ou non) 186
9.4.4 Modèle basé sur une distribution de Weibull avec ρ_{ff} dépendant de B 190
9.5 Conclusion 194

CHAPITRE 10 ÉTUDE PAR CALCUL NUMÉRIQUE DE L'INFLUENCE DU CHAMP PROPRE, DE L'ANISOTROPIE EFFECTIVE ET DU FACTEUR DE FORME DES CONDUCTEURS RECTANGULAIRES SUR LA CARACTÉRISTIQUE $V-I$ . . 196

10.1 Revue des travaux préalables 197

10.2 Courant critique vs facteur de forme 198
10.3 Courant critique vs champ externe 202
10.4 Compensation expérimentale du champ propre 205
10.5 Distribution de J vs anisotropie et facteur de forme 210
10.6 Caractéristique $E-I$ vs facteur de forme 217
10.7 Conducteurs empilés 217
10.8 Conclusion 219

IV Discussion générale et conclusion **221**

CHAPITRE 11 DISCUSSION GÉNÉRALE 222
11.1 Synthèse des résultats et des hypothèses 222
11.2 Suggestions pour travaux futurs 224

CONCLUSION 226

RÉFÉRENCES 227

LISTE DES FIGURES

FIG. 1.1	Effet Meissner dans une sphère supraconductrice	7
FIG. 1.2	Courbes de magnétisation: type I vs type II	11
FIG. 1.3	État mixte dans un supraconducteur de type II	13
FIG. 1.4	Caractéristique $E - J$ d'un matériau homogène	16
FIG. 1.5	Maille élémentaire d'un cristal d'$YBa_2Cu_3O_7$	18
FIG. 2.1	Configuration 3D des lignes de flux avec et sans ancrage	21
FIG. 2.2	Diagramme de phases schématique $B - T$	25
FIG. 2.3	Caractéristique $E - J$ arrondie d'un matériau réel	27
FIG. 2.4	Fil supraconducteur décomposé en sections élémentaires	29
FIG. 2.5	Caractéristique $V - I$ formée de segments de droites	31
FIG. 2.6	Synthèse: $P(I_c)$, $Q(I)$ et $V(I)$ pour différentes configurations de la distribution du courant critique	34
FIG. 2.7	Percolation de I et définition de j, $\langle j \rangle\big\|_{V_c}$ et J	37
FIG. 2.8	Diagramme de phases schématique $J - B - T$	40
FIG. 2.9	Transition amorphe-liquide à l'échelle microscopique	42
FIG. 2.10	Potentiel en 1D d'une ligne de flux ancrée	45
FIG. 2.11	Effet de l'agitation thermique sur $P(J_c)$ et $Q(J)$	49
FIG. 3.1	Modèle de Bean pour champ appliqué croissant	60
FIG. 3.2	Modèle de Bean pour champ appliqué décroissant	60
FIG. 3.3	Schéma de la dépendance de ρ_{ff} avec B et T	71
FIG. 5.1	Géométrie 2D typique considérée dans l'article	86
FIG. 5.2	Transformation de l'espace $x - y$ vers l'espace $u - v$	90
FIG. 5.3	Interpolation bilinéaire: élément simple vs superposition	90
FIG. 5.4	Numérotation locale et globale des noeuds des éléments	95
FIG. 5.5	Erreur de "cancellation" pour α_4 vs v	99

FIG. 5.6 Géométrie et distribution de courant utilisées pour l'étude de convergence 104
FIG. 5.7 Graphique de B_x et erreur rms le long du contour aa' 104
FIG. 5.8 Graphique de B_x le long du contour bb' 106
FIG. 6.1 Géométrie 2D typique considérée dans l'article 112
FIG. 6.2 Algorithme de calcul de la distribution de courant dc 122
FIG. 6.3 Géométrie des conducteurs utilisées dans les exemples 123
FIG. 6.4 Répartition du courant et gradient de potentiel dans les conducteurs 1 et 2 (exemple A) 125
FIG. 6.5 Distribution de J le long du contour aa' (exemple B) 127
FIG. 6.6 Distribution de J dans les conducteurs 1 et 2 (exemple C) . 129
FIG. 6.7 Graphique de B_x, B_y et ρ le long des contours aa' et bb' dans les conducteurs 1 et 2 (exemple C) 130
FIG. 6.8 Distribution de J dans les conducteurs 1 et 2 (exemple D) . 133
FIG. 6.9 Distribution de J le long des contours aa' et bb' dans les conducteurs 1 et 2 (exemple D) 134
FIG. 6.10 Courbes $V - I$ calculées pour différentes valeurs de champs parallèles et transverses (exemple D) 134
FIG. 6.11 Courbes $V-\theta$ calculées pour $I = 15$ A et $I = 30$ A (exemple D) 135
FIG. 7.1 Géométrie 1D utilisée pour valider les méthodes numériques 143
FIG. 7.2 Profils de J et B pour une résistivité linéaire 154
FIG. 7.3 Profils de J et B pour une résistivité non linéaire 157
FIG. 7.4 Profils de J et B pour une résistivité non linéaire avec dépendance en champ 159
FIG. 8.1 Courbes $V - I$ du matériau de Hoescht 172
FIG. 8.2 Courbes $V - I$ du matériau multi-couches AgAu-Bi-2223 . . 175
FIG. 9.1 Schéma du montage typique d'une mesure $V - I$ 178

FIG. 9.2 Courbes $E - J$ d'un échantillon d'ACL (3.5 mm par 2 mm) 179
FIG. 9.3 Photo d'un échantillon d'ACL (3.5 mm par 2 mm) 181
FIG. 9.4 Grossissement de la partie centrale d'un échantillon d'ACL (3.5 mm par 2 mm) 181
FIG. 9.5 Dépendance de J_c et n avec B et θ pour un échantillon d'ACL (3.5 mm par 2 mm) 183
FIG. 9.6 Dépendance de $J_{c_{min}}$ et J_0 avec B et θ pour un échantillon d'ACL (3.5 mm par 2 mm) 192
FIG. 9.7 Dépendance de $J_{c_{min}}$ et J_0 avec B et θ pour un échantillon d'ACL (3.5 mm par 2 mm) lorsque $\rho_{ff} = k\,B$ 192
FIG. 10.1 Graphique de $I_c(0)$ et $\max(|B|)$ vs (λ, γ) pour $B_{ext} = 0$ mT . 200
FIG. 10.2 Graphique de I_c vs (λ, γ) pour $B_{ext} = 10$ mT 201
FIG. 10.3 Graphique de I_c vs (λ, γ) pour $B_{ext} = 20$ mT 201
FIG. 10.4 Graphique de I_c vs (B_{ext}, λ) pour $\gamma = 1$ 203
FIG. 10.5 Graphique de I_c vs (B_{ext}, λ) pour $\gamma = 8$ 203
FIG. 10.6 Graphique de I_c vs B_{ext} pour trois échantillons de supraconducteurs Ag/Bi-2223 en ruban de différentes épaisseurs mais de même J_{c_0} 204
FIG. 10.7 Schéma du montage expérimental pour compenser le champ propre 206
FIG. 10.8 Graphique de J_c vs B pour un échantillon fictif de 5 mm par 0.2 mm dans différentes conditions 207
FIG. 10.9 Graphique des composantes B_x et B_y du champ propre à la surface d'un échantillon fictif de 5 mm par 0.2 mm avec et sans compensation, pour $B_{ext} = 0$ mT 209
FIG. 10.10 Graphique de $J(x, y)$ sur la section d'un échantillon fictif de 5 mm par 0.2 mm lorsque $B_{ext} = 0$ mT 210

FIG. 10.11 Graphique de $J(x, y)$ sur la section d'un échantillon dont $S = 4$ mm^2 lorsque $B_{ext} = 0$ mT 212
FIG. 10.12 Graphique de $J(x, y)$ sur la section d'un échantillon dont $S = 4$ mm^2 lorsque $B_{ext} = 10$ mT et $\theta = 0°$ 213
FIG. 10.13 Graphique de $J(x, y)$ sur la section d'un échantillon dont $S = 4$ mm^2 lorsque $B_{ext} = 10$ mT et $\theta = 90°$ 214
FIG. 10.14 Graphique de $J(x, y)$ sur la section d'un échantillon dont $S = 4$ mm^2 pour $\theta = 20°$ et B_{ext} variant de 0 à 24 mT . . . 215
FIG. 10.15 Graphique de $J(x, y)$ sur la section d'un échantillon dont $S = 4$ mm^2 pour $B_{ext} = 0$ et $\lambda = 10^{\pm 2}$ 216
FIG. 10.16 Caractéristique $E - I$ pour $\gamma = 1$ (cas isotrope) et différents B_{ext} et λ 218
FIG. 10.17 Caractéristique $E - I$ pour $\gamma = 4$ (cas anisotrope) et différents B_{ext} et λ 218
FIG. IV.1 Photographie du HP 6031A et du Keithley 182 253
FIG. IV.2 Photographie d'un électro-aimant générant 5.42 mT/A . . . 254
FIG. IV.3 Photographie du LakeShore 622 255
FIG. IV.4 Photographie du Gaussmètre FW Bell 615 255

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

Typographie:

⇒ Les variables en italique, e.g. x, indiquent un scalaire ou la norme d'un vecteur, e.g. $B = |\vec{B}|$.

⇒ Le symbole $|\cdot|$ indique la valeur absolue d'un scalaire, e.g. $|x|$ ou la norme d'un vecteur, e.g. $|\vec{B}|$.

⇒ Le symbole $\langle\cdot\rangle$ indique la moyenne d'une variable, e.g. $\langle I_c \rangle$.

⇒ Les variables avec une flèche au-dessus indiquent un vecteur géométrique à 3 composantes, e.g. $\vec{r}$, $\vec{B}$.

⇒ Les variables en gras indiquent une notation matricielle, e.g. $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{X}$.

Abréviations:

1D	Une dimension / Unidimensionnel
2D	Deux dimensions / Bidimensionnel
3D	Trois dimensions / Tridimensionnel
ca	Courant alternatif (en anglais: ac)
cc	Courant continu (en anglais: dc)
$E_B(J)$	Caractéristique $E - J$ basée sur une distribution Beta
$E_G(J)$	Caractéristique $E - J$ basée sur une distribution Gamma
$E_N(J)$	Caractéristique $E - J$ basée sur une distribution normale
$E_W(J)$	Caractéristique $E - J$ basée sur une distribution de Weibull
BSCCO	Composé de Bismuth-Strontium-Calcium-Cuivre-Oxygène
BT_c	Basse température critique
HT_c	Haute température critique
RLF	Réseau de lignes de flux
TAFF	« Thermally assisted flux flow »
YBCO	Composé de Yttrium-Baryum-Cuivre-Oxygène

Notations:

$\alpha_i(u,v)$	Fonctions de base de A_z (élément normalisé, $i = 1,2,3,4$) (sans unité)
$\beta_{x_i}(u,v)$	Fonctions de base de B_x (élément normalisé, $i = 1,2,3,4$) (sans unité)
$\beta_{y_i}(u,v)$	Fonctions de base de B_y (élément normalisé, $i = 1,2,3,4$) (sans unité)
γ	Facteur d'anisotropie intrinsèque ou effectif (sans unité)
$\delta(x)$	Distribution de Dirac (sans unité)
ϵ	Résistivité minimale utilisée dans les calculs numériques ($\Omega \cdot$ m)
η	Coefficient de « viscosité » vu par un vortex en mouvement (kg/s)
θ	Angle de la densité de flux locale (degrés)
θ_{ext}	Angle du champ magnétique externe (degrés)
κ	Paramètre de Ginzburg-Landau (sans unité)
log	Logarithme népérien (base e)
$\log_{10}$	Logarithme en base 10
λ	Profondeur de pénétration des « super-courants » (m) *ou* facteur de forme des conducteurs rectangulaires (sans unité)
λ_L	Profondeur de pénétration de London (m)
ξ	Longueur de cohérence (m) *ou* erreur quadratique ([unités arbitraires]^2)
ρ	Résistivité électrique ($\Omega \cdot$ m)
ρ_{ff}	Résistivité électrique en régime de fluage (« flux flow ») ($\Omega \cdot$ m)
ρ_n	Résistivité électrique à l'état normal ($\Omega \cdot$ m)
σ	Conductivité électrique ($\mho$/m)
Ω	Fréquence d'oscillation caractéristique des vortex (1/s)
a_k	Demi-largeur (en x) de l'élément rectangulaire k (m)
b_k	Demi-hauteur (en y) de l'élément rectangulaire k (m)
$f(x)$	Diagramme de fréquence d'une variable aléatoire x (sans unité) *ou* notation indiquant une fonction de x (unités arbitraires)
$\hat{f}(x)$	Diagramme de fréquence normalisé d'une variable aléatoire x (sans unité)

f_s	Fréquence de saut d'un vortex (1/s)
h	Hauteur d'un conducteur rectangulaire (m)
j	Densité de courant microscopique (A/m^2)
j_c	Densité de courant critique microscopique (A/m^2)
j_i	Densité de courant aux noeuds d'un élément rect. ($i = 1, 2, 3, 4$) (A/m^2)
n	Exposant du modèle $E - J$ en loi de puissance (ou autre) (sans unité)
n_c	Nombre total de conducteurs dans un problème (conducteur)
n_e	Nombre total d'éléments dans un maillage (élément)
n_g	Nombre total de groupes de conducteurs dans un problème (groupe)
n_n	Nombre total de noeuds dans un maillage (noeud)
p	Probabilité de saut d'un vortex (sans unité)
$\vec{r}$	Vecteur de position (m)
t	Temps (s)
u	Coordonnée x normalisée d'un élément rectangulaire (sans unité)
$u(x)$	Fonction échelon unitaire (fonction de Heavyside) (sans unité)
v	Vitesse (m/s) *ou* coordonnée y normalisée d'un élément rectangulaire (sans unité)
w	Largeur d'un conducteur rectangulaire (m)
z	Normalisation de J (voir annexe I) (sans unité)
$\bar{x}_k$	Position du centre de l'élément k (en 1D) (m)
A	Potentiel (magnétique) vecteur $\left(\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m}}\right.$ ou $\left.\mathrm{T \cdot m}\right)$
A_{ext}	Potentiel (magnétique) vecteur externe $\left(\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m}}\right.$ ou $\left.\mathrm{T \cdot m}\right)$
B	Densité de flux (T)
B_a, B_{ext}	Densité de flux externe ($= \mu_0 H_a$) (T)
B_c	Densité de flux critique thermodynamique (T)
B_{c_1}	Première densité de flux critique (matériaux de type II) (T)
B_{c_2}	Seconde densité de flux critique (matériaux de type II) (T)
B_g	Densité de flux d'amorce de la « fusion » du RLF amorphe (T)

B_{g_0}	$= B_g\big\|_{J_{c_{min}}=0}$ (T)
B_m	Densité de flux de « fusion » thermodynamique du RLF régulier (T)
B_{m_0}	$B_m\big\|_{J_{c_{max}}=0}$ (T)
B_{self}	Densité de flux propre (T)
B_T	Densité de flux de transition de phase (T)
B^*	Densité de flux de pleine pénétration dans le modèle de Bean (T)
$B_\parallel$	Composante de B parallèle au plan $a-b$ d'un échantillon ($\theta = 0°$) (T)
$B_\perp$	Composante de B normale au plan $a-b$ d'un échantillon ($\theta = 90°$) (T)
E	Champ électrique (V/m)
E_0	Critère de champ électrique définissant J_c pour un matériau à HT_c (V/m)
$\mathcal{E}_g$	Liste des éléments appartenant à un groupe g de conducteurs (sans unité)
F_L	Force de Lorentz par unité de longueur de vortex (N/m)
F_P	Force d'ancrage moyenne par unité de longueur de vortex (N/m)
$F_{P_{max}}$	Force d'ancrage moyenne max. par unité de longueur de vortex (N/m)
F_v	Force visqueuse par unité de longueur de vortex (N/m)
H	Champ magnétique (A/m)
H_a, H_{ext}	Champ externe (A/m)
H_c	Champ critique thermodynamique (A/m)
H_{c_1}	Premier champ critique (matériaux de type II) (A/m)
H_{c_2}	Second champ critique (matériaux de type II) (A/m)
H_{self}	Champ propre (A/m)
H^*	Champ de pleine pénétration dans le modèle de Bean (A/m)
I	Courant (A)
I_c	Courant critique (A)
$I_{c_{min}}$	Courant critique minimal d'une distribution $P(I_c)$ (A)
$I_{c_{max}}$	Courant critique maximal d'une distribution $P(I_c)$ (A)
I_s	Courant de source (A)

$\mathcal{I}_g$	Courant de la source alimentant le groupe g de conducteurs (A)
J	Densité de courant (A/m^2)
J_0	Paramètre qui s'apparente à la largeur de $P(J_c)$ (A/m^2)
J_c	Densité de courant critique effective (A/m^2)
J_{c0}	$= J_c\big\vert_{\vert\vec{B}\vert=0}$ (A/m^2)
$J_{c_{min}}$	Densité de courant critique minimale d'une distribution $P(J_c)$ (A/m^2)
$J_{c_{max}}$	Densité de courant critique maximale d'une distribution $P(J_c)$ (A/m^2)
J_d	Densité de courant de « dé-pairage » (« depairing » current density) (A/m^2)
J_n	Densité de courant due aux électrons à l'état normal (A/m^2)
J_s	Densité de courant due aux électrons à l'état supraconducteur (A/m^2)
M	Magnétisation (A/m)
$\mathcal{N}_g$	Liste des noeuds appartenant à un groupe g de conducteurs (sans unité)
P	Puissance (W)
$P(x)$	Distribution de probabilité de x (sans unité)
$Q(x)$	Distribution de probabilité cumulée de x (sans unité)
R	Résistance (Ω)
R_{ff}	Résistance en régime de fluage (« flux flow ») (Ω)
S	Section d'un conducteur (m^2)
T	Température (K)
T_c	Température critique (K)
T_g	Température d'amorce de « fusion » du RLF amorphe (K)
T_m	Température de « fusion » thermodynamique du RLF régulier (K)
U	Potentiel d'ancrage (J)
V	Voltage (ou tension) (V) *ou* volume (m^3)
$-\nabla\mathcal{V}_g$	Champ élect. de la source alimentant le groupe g de conducteurs (V/m)

Constantes physiques:

μ_0	Perméabilité magnétique du vide ($4\pi \times 10^{-7}$ H/m)
Φ_0	Unité de densité de flux quantique ($\Phi_0 = hc/2e = 2.07 \times 10^{-15}$ Wb)
c	Vitesse de la lumière (2.997925×10^{8} m/s)
e	Charge de l'électron (en valeur absolue) (1.60219×10^{-19} C)
h	Constante de Planck (6.62620×10^{-34} J $\cdot$ s)
k_B	Constante de Boltzmann (1.380664×10^{-23} J/K)

LISTE DES TABLEAUX

TAB. 6.1 Paramètres numériques et résultats pour l'exemple A 126

TAB. 6.2 Paramètres numériques et résultats pour l'exemple B 127

TAB. 6.3 Paramètres numériques et résultats pour l'exemple C 129

TAB. 6.4 Paramètres numériques et résultats pour l'exemple D 133

TAB. 7.1 Valeurs des paramètres pour la simulation avec résistivité constante 153

TAB. 7.2 Valeurs des paramètres pour la simulation non linéaire avec solution analytique 157

TAB. 7.3 Valeurs des paramètres pour la simulation non linéaire purement numérique 158

TAB. 8.1 Valeurs des paramètres du matériau de Hoescht 171

TAB. 8.2 Valeurs des paramètres du matériau multi-couches AgAu-Bi-2223 174

TAB. 9.1 Valeurs des paramètres du matériau d'ACL 185

LISTE DES ANNEXES

Annexe I **Expressions mathématiques de $P(J_c)$, $Q(J)$ et $E(J)$ pour différentes distributions statistiques de J_c** . . **239**

I.1 Distribution normale (Gaussienne) 239

I.2 Distribution Gamma 240

I.3 Distribution de Weibull 242

I.4 Distribution Beta 243

Annexe II **Fonctions de base pour des éléments rectangulaires bilinéaires** **245**

II.1 Notations 245

II.2 Fonctions de base pour le potentiel vecteur (A_c^k) 246

II.3 Fonctions de base pour la composante x de la densité de flux $(B_{x_c}^k)$ 247

II.4 Fonctions de base pour la composante y de la densité de flux $(B_{y_c}^k)$. 248

Annexe III **Solution analytique en 1D de l'équation de diffusion linéaire pour une excitation sinusoïdale** **249**

III.1 Mise en équations 249

III.2 Solution analytique pour $B(x,t)$ 250

III.3 Détermination des coefficients 250

III.4 Solution analytique pour $J(x,t)$ et $A(x,t)$ 251

Annexe IV **Appareillage expérimental** **253**

Annexe V **Description du logiciel *MagNet*®** **256**

Première partie

Contexte et revue de la littérature

INTRODUCTION

Depuis sa découverte par Kamerlingh Onnes en 1911, la supraconductivité n'a pas cessé de susciter un vif intérêt dans la communauté scientifique, mais ses applications sont demeurées très limitées, principalement en raison du coût élevé de l'hélium liquide (4.2 K), requis pour refroidir les matériaux à leur température de fonctionnement. L'intérêt pour les supraconducteurs a été grandement ravivé en 1986, lorsque Bednorz et Müller ont découvert une nouvelle classe de matériaux supraconducteurs à la température de l'azote liquide (77 K), dont le coût est plus de dix fois moindre que celui de l'hélium liquide. Sur la base de cette nouvelle réalité, il devient envisageable de développer des applications rentables, mais la contrepartie de cette révolution est que les nouveaux matériaux (analogues à des céramiques) sont difficiles à synthétiser et à optimiser, de même qu'à caractériser. Les théories quantiques développées pour l'ancienne génération de matériaux sont désormais en partie inadéquates, et une nouvelle génération de théoriciens s'attaque à ce défi de taille, l'un des plus complexes de la physique moderne.

Néanmoins, avec leurs propriétés actuelles, ces nouveaux matériaux sont tout à fait utilisables dans des applications, particulièrement lorsqu'on a affaire à de forts courants. Ils permettent de réduire les pertes de façon significative. Pour ne citer que les principales applications, mentionnons les électro-aimants de plusieurs Teslas, les limiteurs de courant de court-circuit, ainsi que les moteurs, génératrices et transformateurs de grande puissance. Le domaine de l'électrotechnique est donc particulièrement ciblé. La conception de ces applications implique nécessairement le développement de prototypes, qui sont souvent très coûteux. Afin de minimiser les coûts de développement et le nombre de ces prototypes, il est tout indiqué de suivre la tendance déjà largement répandue dans l'industrie, soit de recourir à la *simulation numérique*, un domaine relativement récent mais voué à un grand avenir.

C'est dans cette optique que la présente thèse a été initialement définie. Il était alors envisagé de développer des modèles empiriques flexibles de la caractéristique $E - J$ des supraconducteurs à haute température critique, d'intégrer ces modèles dans des logiciels de simulation numérique et d'étudier l'influence de la forme de la caractéristique $E - J$ sur les applications que l'on retrouve en électrotechnique. Cependant, la difficulté de caractériser les matériaux, liée au grand nombre de paramètres en jeu ainsi qu'à une plage de conditions d'opération extrêmement large, de même que le temps requis pour maîtriser « l'art » de la simulation numérique, nous ont conduit à reconsidérer les objectifs de base et à restreindre la portée de la thèse principalement aux deux premiers thèmes. Notons que la modélisation recherchée se veut autant que possible « locale », de façon à être directement utilisable avec les équations de Maxwell, et ainsi pouvoir découpler les effets dus aux propriétés du matériau des effets de nature purement géométrique. Ce découplage est particulièrement important lorsque les matériaux présentent une forte anisotropie en champ magnétique. Afin de résumer les contributions originales apportées par la présente thèse, nous passons maintenant en revue chacun des chapitres.

D'abord, le chapitre 1 résume très brièvement la théorie de base sur la supraconductivité. Suit le chapitre 2, qui d'une part détaille les aspects théoriques spécifiques à la caractéristique $E - J$, et d'autre part définit la terminologie et le formalisme mathématique requis pour traiter la caractéristique $E - J$ lorsque celle-ci est basée sur une distribution statistique du courant critique. Le chapitre présente aussi une discussion détaillée sur la nature locale de la caractéristique $E - J$ et les hypothèses sous-jacentes à sa modélisation selon l'approche du présent ouvrage. À la fin du chapitre, plusieurs régimes plus « particuliers » de la caractéristique $E - J$ sont présentés brièvement (transition à l'état normal, configuration « force free », etc...). Cependant, seule la transition du régime parfaitement supraconducteur au régime de fluage est considérée par le formalisme développé dans cet ouvrage. Cette

plage d'opération correspond à celle que l'on peut mesurer le plus facilement (par des mesures $V - I$), alors que les autres régimes nécessitent une expérimentation plus sophistiquée, requérant des ressources matérielles et humaines non directement disponibles dans le laboratoire de l'IREQ.

Le chapitre 3 aborde le point de vue empirique la caractéristique $E - J$, i.e. les différents modèles rencontrés dans la littérature sont passés en revue. De plus, tout modèle, qu'il soit empirique ou dérivé des principes physiques, possède un certain nombre de paramètres, qui eux-mêmes dépendent des conditions expérimentales (température, champ magnétique). Seule la dépendance en champ est étudiée dans la présente thèse, et les différents modèles de dépendance (anisotrope) en champ des paramètres sont aussi passés en revue. C'est à partir du moment où l'on a des modèles à notre disposition qu'on peut aborder la simulation numérique. Ainsi, pour clore le chapitre, un survol des principales méthodes numériques appliquées aux supraconducteurs est présenté.

Le chapitre 4 est très bref et sert à introduire les chapitres 5 à 8, qui sont écrits sous forme d'articles (sauf le chapitre 7). Les deux chapitres subséquents présentent essentiellement les développements mathématiques requis pour la suite des travaux et la validation de logiciels de calcul numérique, l'un commercial, les autres faits maison. Ils contribuent de surcroît à améliorer certaines méthodes numériques appliquées aux supraconducteurs proposées dans la littérature. Plus précisément, le chapitre 5 présente le développement d'une expression analytique pour le champ magnétique et le potentiel vecteur lorsque le courant peut varier de façon continue sur des éléments rectangulaires. Le chapitre 6 se base sur les résultats du chapitre 5 pour développer un algorithme de résolution de la distribution 2D du courant en cc, lorsque la résistivité du matériau considéré présente de la non-linéarité, de la dépendance au champ et des non-homogénéités. La validation des résultats analytiques et des algorithmes est intégrée à même ces deux chapitres.

Le chapitre 7 fait le dernier pas vers la validation des outils de calcul, en validant le fonctionnement en ca du logiciel commercial *MagNet*® (décrit en annexe V). La validation est basée sur la comparaison des résultats de *MagNet*® avec des solutions analytiques et d'autres solutions numériques, toutes basées sur une géométrie 1D. Ce chapitre clôt le développement et la validation des outils mathématiques.

Les deux chapitres qui suivent concernent la caractérisation des matériaux, i.e. la détermination de la valeur numérique des paramètres des modèles à partir de mesures $V - I$. Le chapitre 8 présente une méthode de caractérisation itérative, basée sur les chapitres 5 et 6, qui permet de tenir compte des effets du champ propre, et donc de se rapprocher davantage d'un modèle local. Le principe de base de la méthode est très simple, mais le travail préalable pour arriver à l'implémenter fut passablement long. Le chapitre 9 analyse de façon détaillée certaines mesures effectuées dans notre laboratoire sur un matériau commercial anisotrope, en comparant plusieurs modèles entre eux, ainsi qu'en étudiant la variation de leurs paramètres avec le champ magnétique.

Enfin, basé sur les mesures précédentes, le chapitre 10 étudie l'influence du champ propre pour un conducteur rectangulaire dont on varie le facteur de forme et le degré d'anisotropie effective. On y fait plusieurs constats intéressants.

CHAPITRE 1

PRINCIPES DE BASE EN SUPRACONDUCTIVITÉ

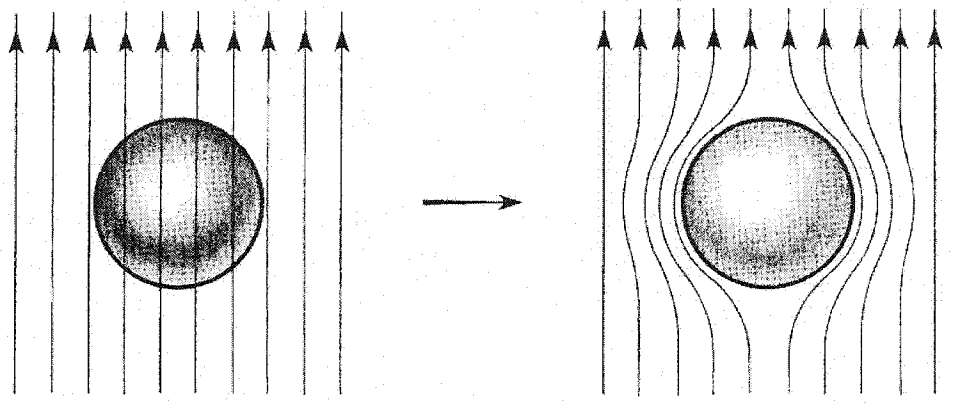
Étant donnée que cette thèse traite intensivement des matériaux supraconducteurs, il importe d'exposer les principes de base et le vocabulaire propre au phénomène de la supraconductivité. Ce chapitre a été rédigée en consultant différents ouvrages de base sur le sujet [1, 2, 3].

1.1 Définitions de base

On appelle supraconductivité la propriété que possèdent certains matériaux à démontrer une absence complète de résistivité électrique pour un courant continu lorsqu'on les porte à une très basse température (inférieure à la **température critique**, notée T_c). Cet état remarquable est l'un des rares phénomènes quantiques observable à l'échelle macroscopique. Il origine du regroupement en paires des électrons dont les quantités de mouvement sont égales en amplitude mais opposées en signe (en absence de champ électrique externe). Ces paires d'électrons sont appelés **paires de Cooper**.

Cette disparition de la résistivité est accompagnée d'une propriété magnétique exceptionnelle, propre à la supraconductivité, soit l'**effet Meissner**, qui consiste en l'exclusion de tout flux magnétique à l'intérieur du matériau à l'état supraconducteur (FIG. 1.1).

Du point de vue électromagnétique, les deux conditions énumérées ci-haut sont essentielles pour que l'on puisse parler de supraconductivité. En d'autres termes, on pourrait dire qu'un matériau supraconducteur est à la fois *parfait conducteur* et *parfaitement diamagnétique.*



Source: C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley & Sons, 1996, p. 337. [3]

FIG. 1.1 – Effet Meissner dans une sphère supraconductrice refroidie dans un champ magnétique uniforme. Dès que la température devient inférieure à la température critique, les lignes de flux sont expulsées de la sphère ($\vec{B} = \vec{0}$). Cette caractéristique magnétique est unique aux supraconducteurs.

Même en dessous de la température critique, un matériau supraconducteur peut être ramené à l'**état normal** (par opposition à l'**état supraconducteur**) lorsqu'on lui applique un champ magnétique suffisamment élevé. Ce champ est appelé **champ critique** et est noté H_c. Ces deux paramètres, T_c et H_c, sont bien sûr reliés thermodynamiquement, de sorte que H_c dépend de la température, et inversement, T_c dépend du champ appliqué.

En plus de ces deux paramètres, un troisième paramètre vient compléter la thermodynamique du phénomène, soit le courant de transport, i.e. un courant imposé par une source externe. Celui-ci génère un champ propre dans le matériau, qui s'ajoute au champ externe appliqué, et contribue donc à réduire à la fois le champ critique et la température critique. On note J_c la **densité de courant critique** qui fait disparaître la supraconductivité dans le matériau. Notons que cette définition sera complétée en cours de route, notamment dans les sections 1.6 et 2.3.

1.2 Matériaux de type I

Un matériau supraconducteur qui présente exactement les comportements décrits précédemment est dit de **type I**. Cet état est thermodynamiquement réversible. Par conséquent, aucune puissance ne peut alors être dissipée dans le matériau.

Au point de vue électromagnétique, il faut ajouter certaines conditions aux équations de Maxwell pour décrire complètement un matériau supraconducteur de type I. D'abord, l'absence de résistivité se traduit par une modification de l'équation constitutive $E-J$, qui s'écrirait normalement $\vec{E} = \rho \vec{J}_s$, avec $\rho = 0$. En effet, même lorsque la résistivité ρ vue par les électrons supraconducteurs est nulle, cela n'empêche pas un champ électrique d'exister. On doit donc réécrire l'équation constitutive sous la forme de la première équation de London, i.e.

$$\frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{E} \,. \tag{1.1}$$

Cette équation traduit bien le fait que la résistivité est nulle, car l'application d'un champ électrique engendre un courant qui croit toujours. De même, un courant cc ($J_s = \textit{constante}$) implique un champ électrique nul ($E = 0$), donc aucune dissipation de puissance ($P = E \cdot J_s = 0$).

D'autre part, le diamagnétisme parfait, qui est généré par un courant de surface s'étendant approximativement sur une profondeur de λ_L (**profondeur de pénétration de London**) et qui repousse le champ appliqué à l'extérieur du matériau, peut être exprimé par la deuxième équation de London:

$$\nabla \times \vec{J}_s = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B} \,. \tag{1.2}$$

Notons que l'on utilise J_s pour identifier que ce sont seulement les « supercourants », i.e. les courants engendrés par les électrons à l'état supraconducteur,

qui sont assujettis aux équations de London, et non les courants « normaux », qui demeurent régis par les équations de Maxwell. Par conséquent, les équations de London ne remplacent pas les équations de Maxwell, mais sont simplement des conditions supplémentaires qui doivent être respectées par les « super-courants » J_s. Les équations de Maxwell s'appliquent alors en considérant la densité de courant totale J comme étant composée de deux parties, i.e. $J = J_n + J_s$, où J_n représente la densité de courant due aux électrons « normaux ». Cette approche est bien sûr empirique, et on y réfère souvent sous le nom de **modèle à deux fluides**.

Il convient de préciser qu'à l'état supraconducteur, ce ne sont pas tous les électrons qui se condensent en paires de Cooper, mais seulement une certaine proportion d'entre eux (sauf au zéro absolu, où ils sont tous condensés). Il existe donc toujours des électrons à l'état normal, assujettis à la résistivité « normale » du matériau. Ces électrons normaux peuvent engendrer, sur application d'un champ électrique, un courant normal dissipatif. Les deux phénomènes sont présents et agissent en parallèle. Ceci implique directement qu'il ne peut y avoir de courant normal (donc aucune dissipation de puissance) en cc, puisque le champ électrique associé au super-courant est nul. Par contre, dès que l'on opère en ca, le champ électrique n'est plus nul, et il commence à y avoir de la dissipation due aux électrons normaux. Cependant, il faut aller à des fréquences très élevées (de l'ordre de 10^{11} Hz [2, p. 39]) pour que le courant normal soit du même ordre de grandeur que le super-courant.

1.3 Matériaux de type II

Plusieurs matériaux ne présentent pas l'effet Meissner jusqu'à leur champ critique H_c, mais laissent pénétrer progressivement les lignes de flux à partir d'un **premier champ critique** $H_{c_1} < H_c$. Le courant de Meissner continue toutefois d'exister en surface. Le matériau entre alors dans un état appelé **état mixte**, et

n'est alors plus parfaitement diamagnétique. Ces matériaux demeurent supraconducteurs jusqu'à un **second champ critique** H_{c_2}, souvent beaucoup plus grand que H_c.

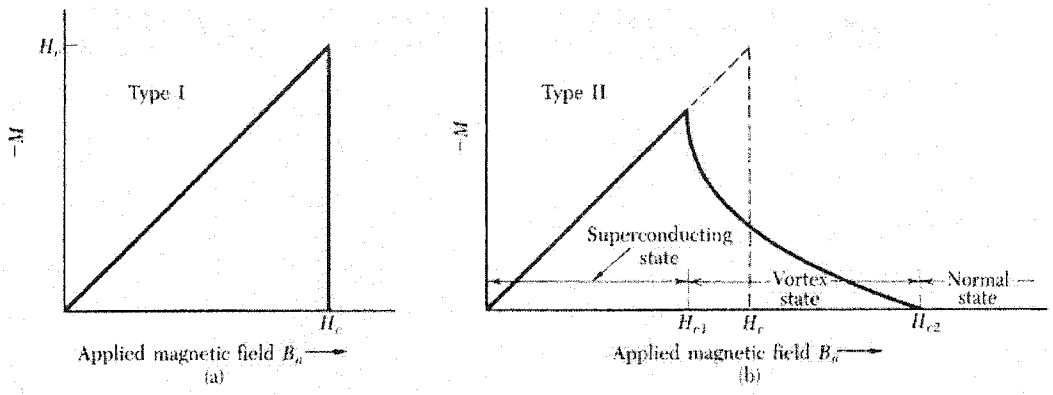
Un matériau présentant ce comportement est dit de **type II**. Étant donné que les matériaux de type II sont supraconducteurs jusqu'à un champ $H_{c_2} \gg H_c$, ils présentent un grand intérêt pour les applications à fort champ. Il s'agit d'ailleurs de la seule classe de matériaux intéressante pour les applications en électrotechnique. Notons que pour un matériau de type II, H_c conserve un sens physique très important. En effet, H_c correspond au **champ critique thermodynamique**, car lorsque l'on calcule l'aire sous la courbe de magnétisation d'un matériau de type II (voir FIG. 1.2), on obtient toujours $\frac{1}{2}\mu_0 H_c^2$ J/m^3, soit l'**énergie de condensation** qui rend possible l'état supraconducteur, et ce, peu importe les valeurs de H_{c_1} et H_{c_2}. La FIG. 1.2 illustre bien la différence entre le comportement magnétique des deux types de matériaux.

1.4 Constante de Ginzburg-Landau

La distinction entre les matériaux de type I et de type II repose sur la comparaison entre deux paramètres qui dépendent de T, soit $\lambda(T)$ et $\xi(T)$, où λ est la **profondeur de pénétration** des courants de surface (comme dans les équations de London, mais selon la théorie microscopique de BCS [4], la valeur numérique de λ est légèrement différente de λ_L), et ξ est appelée **longueur de cohérence**, et représente la portée d'interaction caractéristique des paires d'électrons à l'état supraconducteur, ou encore, l'étendue caractéristique des paires de Cooper. Pour un matériau donné, le ratio

$$\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} \tag{1.3}$$

est appelé paramètre de Ginzburg-Landau. Malgré le fait que $\lambda(T)$ et $\xi(T)$ soient des fonctions de T, leur dépendance fonctionnelle en T sont presque identiques, et



Source: C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley & Sons, 1996, p. 340. [3]

FIG. 1.2 – (a) Courbe de magnétisation d'un supraconducteur de type I, représentant un comportement parfaitement diamagnétique (pente unitaire). (b) Courbe de magnétisation d'un supraconducteur de type II. Entre 0 et H_{c_1}, le matériau est dans la région parfaitement diamagnétique (effet Meissner), et présente alors un comportement de type I. Entre H_{c_1} et H_{c_2}, il y a pénétration progressive de flux dans l'échantillon, et le matériau est alors dans l'état mixte (identifié par « Vortex state »), propre à un matériau de type II. En général, $\mu_0 H_{c_1}$ ne dépasse pas les quelques milliTeslas, alors que $\mu_0 H_{c_2}$ peut prendre des valeurs de l'ordre de 1 à 40 Teslas, selon la température de fonctionnement.

donc κ est pratiquement indépendant de T. C'est pourquoi on appelle κ **constante de Ginzburg-Landau**. Lorsque $\kappa < 1/\sqrt{2}$, on peut montrer que l'énergie de surface à une interface normale-supraconductrice est toujours positive. Pour minimiser son énergie totale, le matériau tend alors à minimiser l'étendue de cette interface, ce qui est rendu possible par l'expulsion complète du champ à l'extérieur du matériau. Il s'agit donc d'un matériau de type I. À l'opposé, lorsque $\kappa > 1/\sqrt{2}$ et que le champ appliqué est supérieur à H_{c_1}, l'énergie de surface à une interface normale-supraconductrice devient négative. Pour minimiser son énergie totale, le matériau tend à maximiser l'étendue de l'interface, ce qui est maintenant énergétiquement favorable. Par conséquent, il tend à laisser pénétrer des lignes de flux, ce qui lui permet de générer de nouvelles interfaces normales-supraconductrices. Il s'agit cette

fois d'un matériau de type II. La relation

$$H_{c_2} = \sqrt{2}\kappa H_c \tag{1.4}$$

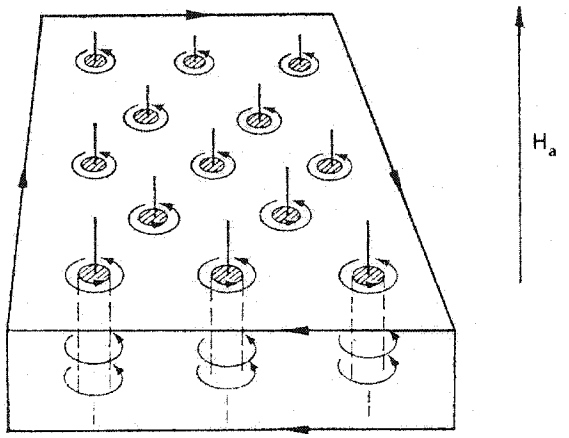
est très utile car elle permet d'obtenir H_{c_2} à partir de κ et H_c.

1.5 Réseau de lignes de flux

Lorsqu'un matériau de type II se retrouve dans l'état mixte, des lignes de flux naissent à sa surface (par nucléation, i.e. par dédoublement d'une interface normale-supraconductrice) et sont admises à l'intérieur un fluxon à la fois. Le **fluxon** est l'unité de flux quantique (notée Φ_0 et égale à $hc/2e = 2.07 \times 10^{-15}$ Wb), soit la plus petite quantité de flux qui puisse exister à l'intérieur d'un matériau supraconducteur. À l'équilibre et en absence de défauts dans le matériau (voir FIG. 1.3), un réseau de lignes de flux quantiques arrangées selon un motif régulier s'organise à l'intérieur de celui-ci. Ce motif régulier est dû au fait que les fluxons se repoussent mutuellement. Pour que le réseau de fluxons soit stable (i.e. équilibre des forces), il faut nécessairement qu'il soit régulier. On peut montrer que le réseau de lignes de flux le plus stable est en général triangulaire [5, 6], tel que schématisé sur la FIG. 1.3. Cette affirmation n'est bien sûr valide que pour un matériau homogène et sans défaut, i.e. un matériau dont les propriétés ne dépendent pas des coordonnées (x, y, z) et qui possède une structure cristalline idéale.

1.6 Force de Lorentz, force d'ancrage et densité de courant critique

Le passage d'un courant dans un matériau de type II dans l'état mixte génère une force sur les fluxons (aussi appelés **vortex**). La force par unité de longueur d'un



Source: E. H. Rhoderick et A. C. Rose-Innes, *Introduction to Superconductivity*, London: Pergamon, 1969, p. 177. [1]

FIG. 1.3 – Schéma d'un matériau supraconducteur de type II ($\kappa > 1/\sqrt{2}$) dans l'état mixte (champ appliqué $H_a > H_{c_1}$). Les flèches qui forment le grand contour représentent le courant diamagnétique créé par l'effet Meissner pour $H_a < H_{c_1}$. Les régions ombragées représentent des zones normales, lesquelles contiennent chacune une ligne de flux quantique (i.e. un fluxon). Les fluxons sont représentés par les lignes droites qui traversent les zones normales. Ces fluxons sont générés par un courant persistant (i.e. des électrons à l'état supraconducteur et circulant sans pertes) qui encercle la région normale, formant un vortex de courant. Pour cette raison, on utilise souvent le terme vortex pour désigner une ligne de flux dans le supraconducteur.

vortex est donnée par la force de Lorentz, définie par le produit vectoriel suivant:

$$\vec{F}_L = \vec{J} \times \vec{\Phi}_0 \,, \tag{1.5}$$

où $\vec{J}$ représente la densité de courant de transport seulement, et n'inclut donc pas les « super-courants » formant le vortex. Leur contribution est implicitement prise en considération par le terme Φ_0 qu'ils contribuent à générer.

En absence de défauts dans le matériau, cette force mettrait immédiatement les vortex en mouvement. Cependant, en pratique, il existe toujours un certain nombre de défauts dans le matériau (dislocations, impuretés, phases secondaires,

joints de grains, etc...). Ceux-ci tendent généralement à nuire au déplacement des vortex, à les retenir en place. On appelle **force d'ancrage moyenne** la force moyenne de réaction exercée par les défauts sur un vortex. Elle est notée F_P (pour « **pinning force** »). Comme il s'agit d'une force de réaction, F_P est un vecteur égal mais opposé à F_L, dont l'amplitude varie de 0 à $F_{P_{max}}$, la **force d'ancrage moyenne maximale**. Tant que $F_L < F_{P_{max}}$, les vortex ne peuvent pas se mettre en mouvement. Nous sommes alors dans un régime d'**ancrage des lignes de flux**, ou « **flux pinning** ». Par contre, lorsque $F_L > F_{P_{max}}$, les défauts ne peuvent plus à eux seuls maintenir les vortex en place, et ceux-ci se mettent alors en mouvement. On appelle ce régime **fluage**, ou « **flux flow** ». Le point d'équilibre $F_L = F_{P_{max}}$ est appelé **état critique**, ou « **critical state** ». La densité de courant requise pour générer l'état critique est appelée **densité de courant critique**, et est notée J_c. C'est la définition qui s'applique pour un matériau de type II.

1.7 Fluage (« flux flow ») et origine de la caractéristique $E-J$

Lorsque les lignes de flux se mettent en mouvement, leur vitesse v n'est limitée que par une **force visqueuse** $F_v = -\eta v$, dont l'origine microscopique est passablement complexe [7]. L'existence de F_v implique qu'il faut effectuer un travail pour maintenir une densité de courant J dans le supraconducteur, i.e. on doit fournir de l'énergie pour déplacer les vortex à vitesse constante contre F_v. Ce travail doit bien sûr être fourni par la source de courant externe, par l'intermédiaire d'un champ électrique [8]

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}\,, \tag{1.6}$$

ce qui implique qu'une tension doit apparaître aux bornes du supraconducteur: *il n'est désormais plus un parfait conducteur!* Il présente alors une certaine caractéristique courant-tension. Plus le courant est élevé, plus la tension croît aux bornes de l'échantillon, jusqu'à un point où les propriétés supraconductrices disparaissent

complètement. Restreignons-nous dans un premier temps à une densité de courant modérée, i.e. bien en-dessous de la transition supra-normale. Si on prend comme exemple un matériau dans lequel la force d'ancrage moyenne par unité de volume est homogène, on observera (à très basse température) une caractéristique $E - J$ similaire à celle de la FIG. 1.4. Le point A correspond à l'état critique, tel que définit ci-haut. À l'état critique, toute augmentation de J au-dessus de J_c cause l'apparition d'un champ électrique

$$E = \rho_{ff}(J - J_c) \,, \tag{1.7}$$

et par le fait même, de pertes. Ce modèle simple, basé sur le concept de fluage, est appelé **modèle de fluage (linéaire)**. Il sert de fondement à beaucoup d'autres développements qui seront introduits dans le chapitre 2.

La transition complète de l'état parfaitement supraconducteur à l'état normal définit une caractéristique $E - J$ qui s'étend sur une plage d'opération (J, H, T) très grande. En fait, il n'est en pas possible à l'heure actuelle de caractériser toute cette plage expérimentalement. D'abord, $\mu_0 H_{c_2}$ est souvent de l'ordre de 10 à 30 T à 77 K, ce qui est bien au-delà des capacités de tout équipement conventionnel de laboratoire. De plus, dans la région où J est très élevé, les mesures causent un échauffement significatif de l'échantillon, ce qui peut conduire à sa destruction. Enfin, à l'autre extrême, lorsque J est très faible, la sensibilité des appareils n'est pas suffisante pour mesurer directement le champ électrique. Le chapitre 2 présente une revue sur l'origine de la forme de la caractéristique $E - J$ pour les supraconducteurs de type II, ce qui englobe tous les matériaux supraconducteurs à haute température critique. Ces derniers sont introduits dans la section suivante en guise de clôture à ce chapitre.

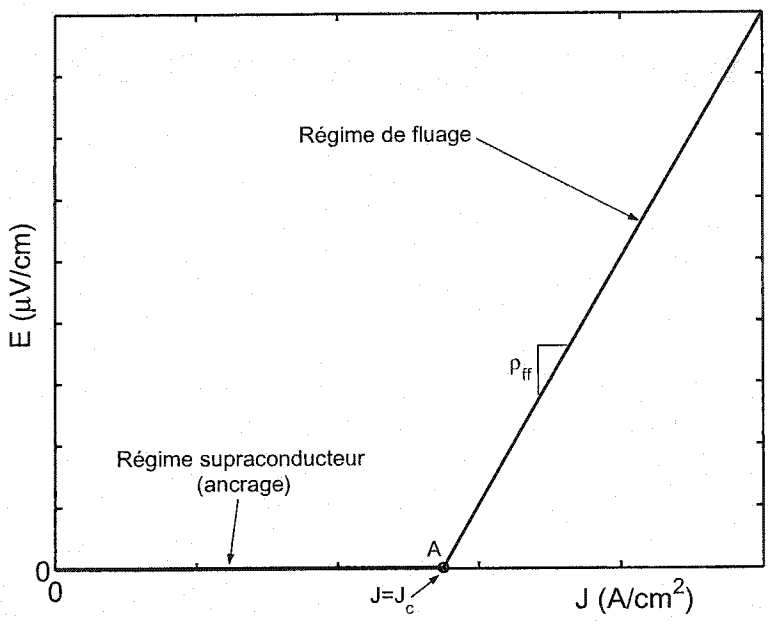


FIG. 1.4 – Caractéristique $E - J$ typique d'un matériau homogène (à $T = 0$), illustrant les conséquences du concept de fluage. Le point A correspond à l'état critique, caractérisé par un courant critique $J = J_c$. Pour $J < J_c$, l'ancrage des lignes de flux maintient le régime supraconducteur. Cependant, dès que $J > J_c$, la caractéristique devient linéaire, avec une pente égale à ρ_{ff}, qui est la **résistivité (différentielle) de fluage** (« **flux flow resistivity** »).

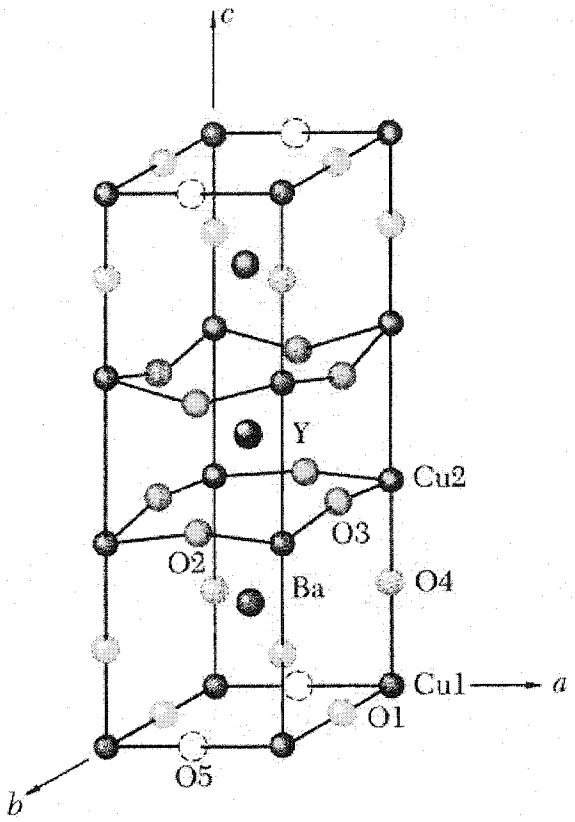
1.8 Supraconducteurs à haute température critique

Les supraconducteurs à **haute température critique**, ci-après notés HT_c, désignent une classe de matériaux supraconducteurs qui ont des températures critiques supérieures à 77 K, soit la température de l'azote liquide. Les travaux menant à la découverte de cette classe de matériaux ont été publiés en 1986 par Bednorz et Müller [9]. Ces travaux leur ont d'ailleurs valu un prix Nobel de physique. Les matériaux supraconducteurs connus auparavant étaient tous dans la catégorie des matériaux à **basse température critique**, ci-après notés BT_c. Ces derniers possèdent des températures critiques typiquement inférieures à 20 K, quoique le record (très récent) soit de 39 K pour le MgB_2 [10].

Les matériaux à HT_c typiques sont des oxydes de type céramiques, les plus connus étant le $Bi_2Sr_2Ca_1Cu_2O_{8+x}$, le $Bi_2Sr_2Ca_1Cu_2O_{8+x}$ et le $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$, où x et δ sont des variations légères de la stoechiométrie de base, qui dépendent du traitement thermique et du dopage. On note généralement en abrégé ces composés **Bi-2212**, **Bi-2223** et **Y-123**. Ils consistent en des couches alternées d'oxyde de cuivre et des consituants (Bismuth, Strontium et Calcium pour le BSCCO; Yttrium et Baryum pour YBCO). Ceci est fondamentalement différent des matériaux à BT_c, qui sont en général des alliages métalliques, comme le NbTi ou le Nb_3Al. De plus, la microstructure des matériaux à HT_c tend naturellement à être granulaire, ce qui en complique grandement l'analyse et la modélisation, particulièrement du point de vue électromagnétique. Notons que tous les supraconducteurs à HT_c sont des matériaux de type II.

Deux caractéristiques principales distinguent les matériaux à HT_c des matériaux à BT_c. D'une part, la température de fonctionnement beaucoup plus élevée des matériaux à HT_c cause l'apparition de phénomènes d'agitation thermique à peu près inobservables chez les matériaux à BT_c. En particulier, la caractéristique $E-J$ des deux classes de matériaux est significativement différente à cause de l'agitation thermique. D'autre part, les matériaux à HT_c présentent une anisotropie marquée au niveau du champ critique, i.e. un champ magnétique parallèle aux plans d'oxyde de cuivre, qui se situent dans le plan cristallographique $a-b$ du matériau, est beaucoup moins influent sur la valeur de la résistivité qu'un même champ magnétique orienté perpendiculairement à ces plans, i.e. selon l'orientation cristallographique c (voir FIG. 1.5). Cette **anisotropie « intrinsèque »** , notée γ (voir définition en page 67), est de l'ordre de 7 pour l'YBCO et 140 pour le BSCCO. L'appellation intrinsèque réfère ici à un matériau monocristallin homogène. En pratique, la granularité des matériaux à HT_c réduit significativement l'anisotropie observée.

Afin d'illustrer l'allure complexe de la structure cristalline des matériaux à HT_c, la maille élémentaire d'un cristal d'$YBa_2Cu_3O_7$ est présentée à la FIG. 1.5.



Source: C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley & Sons, 1996, p. 372. [3]

FIG. 1.5 – Maille élémentaire d'un cristal d'$YBa_2Cu_3O_7$. Les plans contenant les sites identifiés par Cu2, O2 et O3 sont ceux qui contribuent à la conductivité électrique.

CHAPITRE 2

CARACTÉRISTIQUE $E-J$: DE LA PHYSIQUE AUX MATHÉMATIQUES

Ce chapitre constitue une revue sommaire de l'origine physique de la caractéristique $E-J$ des supraconducteurs à HT_c. Les outils mathématiques de base servant à modéliser la caractéristique $E-J$ sont introduits à mesure qu'ils sont requis, de même que les différentes hypothèses concernant la nature des quantités physiques en jeu.

À partir de ce chapitre, nous travaillons en termes de B_c, et non de H_c, car H_c est une notation trop ambiguë découlant des travaux des années soixante. En effet, on utilisait à l'époque le système CGS, dans lequel $B = H + 4\pi M$, et donc $B = H$ en absence de magnétisation M, d'où B et H sont facilement interchangeables. Cependant, dans le système SI, $B = \mu_0 H + M$, et l'équivalence entre B et H en absence de magnétisation ne tient plus. Comme B est une quantité physique plus fondamentale que H, puisqu'elle inclut implicitement la réponse magnétique du matériau, il est plus naturel de travailler avec B.

2.1 Diagramme de phases $B-T$

La forme de la caractéristique $E-J$ des supraconducteurs de type II, ce qui inclut tous les matériaux à HT_c, repose essentiellement sur les propriétés du **réseau de lignes de flux**, ci-après noté RLF. En effet, en présence d'un courant externe, la dissipation ne survient que lorsque les lignes de flux peuvent se mettre en mouvement. Ceci nous conduit naturellement à étudier les différents états, ou phases, dans lesquelles les lignes de flux peuvent se trouver. Dans un premier temps, nous nous limiterons au plan $B-T$. Nous verrons dans des sections ultérieures comment on

peut étendre la notion de diagramme de phases lorsqu'un courant de transport est présent, et lorsque l'on considère la dépendance anisotrope du matériau en fonction de l'orientation de B.

2.1.1 Phase Meissner

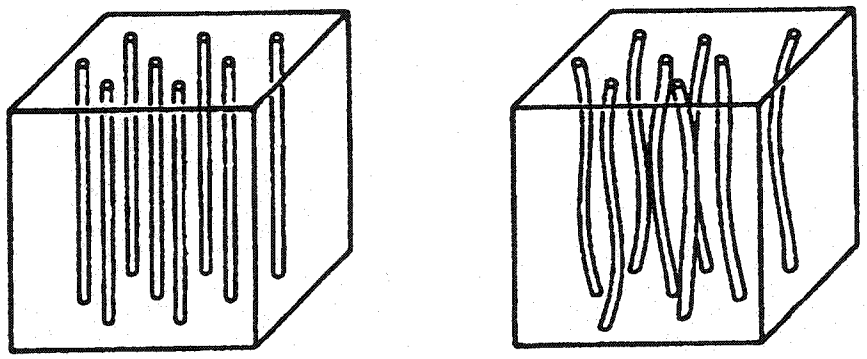
La phase la plus simple et la plus familière est certes l'état Meisner ($B < B_{c_1}$). Cette phase est très simple car aucun vortex n'est présent dans le matériau (diamagnétisme parfait), et il est alors parfaitement supraconducteur. Comme l'état Meissner n'est observable uniquement qu'à faible champ dans les matériaux à HT_c, on n'en tiendra en général pas compte dans la modélisation. En effet, B_{c_1} est typiquement de l'ordre de 1 mT, ce qui est beaucoup plus faible que les champs retrouvés dans les applications où de forts courants sont présents.

2.1.2 Phase amorphe

C'est lors du passage à l'état mixte ($B_{c_1} < B < B_{c_2}$) que la situation se complique. La situation la plus simple est l'organisation des lignes de flux en un réseau régulier, tel que schématisé à la FIG. 1.3. Or, cette configuration régulière du RLF n'est observable que sur des échantillons homogènes et à peu près exempts de défauts. Les matériaux utilisés dans les applications requièrent des défauts afin d'ancrer les lignes de flux, et ainsi réduire la dissipation due à leur déplacement sur application d'un éventuel courant de transport. Notons que les différents sites d'ancrage sont distribués de façon relativement aléatoire, et ils ne sont pas tous de même nature et de même efficacité. C'est l'action collective des sites d'ancrage sur un vortex donné qui permet de le retenir en place [11]. Cette action collective dicte aussi la forme du vortex, i.e. ce dernier risque d'être davantage distordu lorsque l'ancrage est fort. Tout ceci résulte en un certain désordre, ou asymétrie, dans la disposition géométrique des lignes de flux. De façon générale, cette disposition est

tridimensionnelle, ce qui rend son étude très complexe (voir à ce sujet la revue exhaustive de Blatter et al. [12]).

L'analyse détaillée du RLF révèle tout de même un certain ordre à courte portée. L'ordre à courte portée est caractéristique de la matière à l'état amorphe, et donc, par analogie avec l'étude des solides, on appelle cette disposition des lignes de flux **phase amorphe** (« **vortex-glass** »), telle que baptisée par Fisher [13], qui en a proposé l'existence. La phase amorphe n'existe donc qu'en vertu des défauts d'ancrage présents dans le matériau. Sans ancrage, on aurait simplement un RLF régulier, analogue à un solide cristallin. Dans les deux cas, l'analogie avec l'état solide implique une certaine « rigidité » du RLF, i.e. une force exercée sur l'un des vortex du réseau aura un impact sur tous les autres vortex situés dans un certain volume de cohérence autour du vortex en question, ce volume tendant vers la taille de l'échantillon dans le cas d'un réseau régulier. La FIG. 2.1 illustre schématiquement la différence entre un RLF régulier et un RLF amorphe.



Source: G. Blatter et al., "Vortices in high-temperature superconductors", *Rev. Mod. Phys.*, vol. 66, no. 4, 1994, p. 1240. [12]

FIG. 2.1 – Schéma 3D illustrant la disposition des lignes de flux (a) en absence d'ancrage, et (b) en présence d'ancrage. Selon la description donnée dans le texte, le premier cas correspond à un réseau régulier de lignes de flux, alors que le second correspond à une phase amorphe de lignes de flux.

En vertu de la rigidité du RLF amorphe, les lignes de flux peuvent difficilement bouger les unes par rapport aux autres, puisqu'une force exercée sur un vortex (la force de Lorentz due à un courant de transport par exemple) est transmise sur ses voisins par l'intermédiaire de l'interaction répulsive qui existe entre les vortex. Par conséquent, le déplacement d'un vortex dans ce régime implique en fait le déplacement de tout un groupe de vortex (« bundle »), ce qui réduit grandement les probabilités que ce déplacement se produise, car une petite proportion de vortex très fortement ancrés et distordus peut empêcher le mouvement du groupe. On dit que l'on a un **équilibre métastable**. On s'attend donc, dans ce cas, à ce que les pertes dues à un courant de transport soient très faibles, voire nulles.

2.1.3 Phase liquide

Lorsque la température augmente, il arrive un point où l'action combinée de l'agitation thermique et du changement des propriétés d'ancrage rompent l'équilibre métastable qui assure la cohésion de groupe des vortex, rendant tout ancrage inefficace. Les vortex peuvent alors « glisser » beaucoup plus facilement les uns par rapport aux autres. On dit alors que l'on passe à une **phase liquide** (**« vortex-liquid »**). La phase liquide est caractérisée par une grande mobilité des lignes de flux, de façon analogue aux molécules dans un liquide. La rigidité qui caractérisait le RLF amorphe n'existe plus, et les vortex peuvent facilement être mis en mouvement sur application d'une force. La phase liquide est celle qui sera observée jusqu'à la disparition de la supraconductivité, par l'atteinte de T_c ou B_{c_2}.

Même en absence d'ancrage, lorsque les lignes de flux s'organisent en réseau régulier, il existe une phase liquide dans laquelle la rigidité du RLF disparaît. Il n'est pas évident de démontrer que ces phases « solide » et « liquide » sont de nature thermodynamique, car en absence d'ancrage, la phase solide (RLF rigide) et la phase liquide (vortex mobiles) conduisent toutes les deux à un régime dissipatif

de même nature en présence d'un courant de transport, i.e. un fluage des vortex. Les indices expérimentaux menant à la déduction de l'existence d'une transition de phase thermodynamique sont résumés par Tinkham [2, section 9.5.2].

2.1.4 Transition de phase amorphe-liquide

Selon l'interprétation de Worthington et al. [14], dans un cristal idéal, la transition du RLF de l'état solide à l'état liquide s'effectue à une température constante, notée T_m (« melting temperature »). Il s'agit alors d'une transition de phase de premier ordre, i.e. il faut fournir une certaine quantité de chaleur pour réaliser complètement la « fusion » du RLF rigide. Cependant, dès que l'on s'écarte de la situation idéale, i.e. lorsque que le matériau contient des défauts ou inhomogénéités, la transition s'effectue de façon continue entre deux températures, mais la température supérieure demeure T_m. L'apparition d'une largeur de transition découle du fait que, autour des régions non homogènes, qui ne sont que peu ou pas supraconductrices, la phase liquide a tendance à apparaître localement pour $T < T_m$.

Comme on sait qu'il y a toujours des défauts dans les matériaux réels, et que ceux-ci agissent en général comme sites d'ancrage, il y aura, d'une part, toujours présence d'une phase amorphe, et d'autre part, la transition amorphe-liquide sera toujours étendue entre deux températures. Pour cette raison on notera T_g (« glass temperature ») la température inférieure de la transition. La présence de défauts d'ancrage nous procure donc à la fois l'effet positif de gêner le mouvement des vortex, ce qui réduit la dissipation, et l'effet négatif d'abaisser T_g. Les défauts d'ancrage ont donc intérêt à être le plus efficace possible, de façon à rendre négligeable l'augmentation de l'énergie libre (causée par leur présence) devant leur potentiel attractif. Ainsi, la largeur $T_m(B) - T_g(B)$ de la transition amorphe-liquide, pour B donné, dépend directement de la nature et de l'efficacité des défauts d'ancrage. Plus ces derniers sont efficaces, plus T_g se rapproche de T_m, et moins la transition est

large. Dans la littérature, on rencontre aussi l'appellation **ligne d'irréversibilité** (« **irreversibility line** »). Il semble que cette dernière soit une autre façon de parler des frontières $T_g(B)$ et $T_m(B)$ dans le plan $B-T$ [15].

2.1.5 Autres phases

Notons qu'il existe des variantes des phases liquide et amorphe. En fait, le diagramme de phases des supraconducteurs à HT_c n'est pas entièrement compris à ce jour, mais les recherches sur le sujet progressent constamment. L'article récent de Gammel [16] résume brièvement la situation. Toutefois, en vertu des objectifs de la présente thèse, la connaissance générale des phases amorphe et liquide sont suffisantes. Les modèles qui en découlent sont très réalistes, sans être démesurément complexes, comme on le verra dans les sections suivantes. La FIG. 2.2 résume dans le plan $B-T$ l'emplacement des phases qui viennent d'être décrites. Notons que sur cette figure, nous avons identifié les frontières par $B_g(T)$ et $B_m(T)$ plutôt que par $T_g(B)$ et $T_m(B)$, ce qui est strictement équivalent. Nous aurons par la suite fréquemment recours à ces expressions réciproques, selon que l'on travaille à B ou T constant.

2.2 Généralisation du diagramme de phases

On peut généraliser le diagramme de phases de la FIG. 2.2, représenté dans le plan $B-T$, en y ajoutant une autre dimension, soit la densité de courant de transport J. Ces trois quantités influencent à leur manière le comportement des lignes de flux, i.e. T altère les propriétés d'ancrage et augmente aussi la probabilité qu'un vortex ancré « saute » hors de son puits de potentiel (voir section 2.5), J génère une force de Lorentz sur les vortex, et B augmente la densité des vortex, ce qui influence la force par unité de volume pour J et T donnés. Peu importe la nature des vortex (ils peuvent être conventionnels ou encore être en partie générés par un

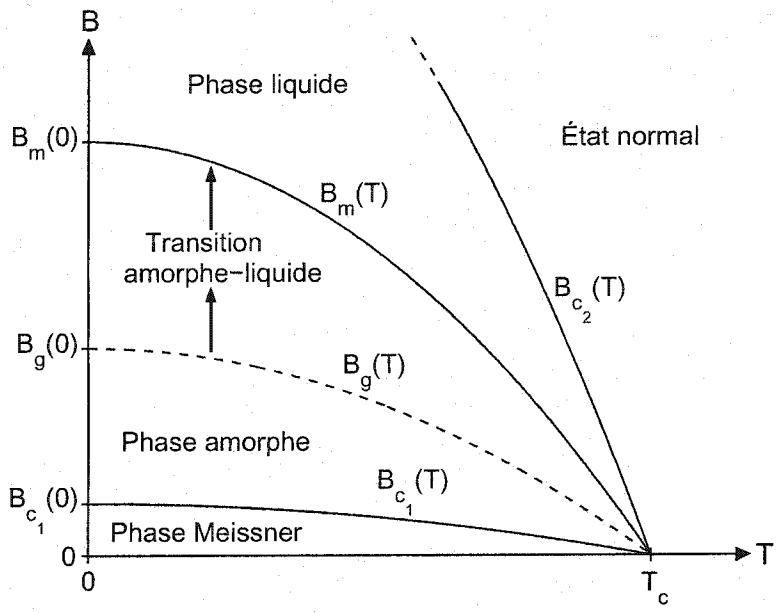


FIG. 2.2 – Schéma du diagramme de phases $B - T$ d'un supraconducteur à HT_c. La région de transition amorphe-liquide n'existe qu'en vertu des défauts présents dans le matériau. La position de la ligne $B_g(T)$ est « contrôlée » par l'aptitude des défauts à agir comme sites d'ancrage pour les vortex. Plus ces derniers sont efficaces, plus $B_g(T)$ se rapproche de $B_m(T)$, agrandissant ainsi la région en phase amorphe. La transition amorphe-liquide illustrée par les flèches correspond ici à une transition à température constante.

courant Josephson dans un lien faible entre deux grains d'un matériau granulaire), ceux-ci transportent toujours un quantum de flux, et c'est leur déplacement qui génère de la dissipation dans le matériau. Éventuellement, l'orientation de B devra aussi être prise en considération dans le diagramme de phases, de façon à représenter les matériaux anisotropes correctement.

Une nuance s'impose cependant. Comme la présence d'un courant représente un phénomène de transport, il ne s'agit plus formellement d'un diagramme de phases thermodynamique, qui sous-entend par définition un système à l'équilibre. Au mieux, on pourra considérer qu'il s'agit d'un équilibre stationnaire, et donc d'un « diagramme de phases stationnaire », lorsque l'on aura un courant cc.

Ceci étant dit, revenons à la transition amorphe-liquide présentée précédemment, et illustrée à la FIG. 2.2. Entre les températures définies par les courbes $T_g(B)$ et $T_m(B)$ (réciproques de $B_g(T)$ et $B_m(T)$), le réseau de ligne de flux amorphe fond progressivement pour se retrouver entièrement en phase liquide à $T_m(B)$. Lorsque l'on ajoute J dans les diagrammes de phase, ce sont maintenant des surfaces ($T_g(B,J)$ et $T_m(B,J)$) plutôt que des courbes qui définissent les frontières entre les différentes phases. Deux constatations surviennent naturellement. D'une part, il ne semble pas évident à priori d'établir un critère qui définira de façon non ambiguë l'emplacement de cette frontière en termes de J. D'autre part, comme J contribue à générer une partie de B, soit la composante de champ propre, il faudra bien réfléchir à la nature de B figurant dans le diagramme de phases, surtout si on se sert du diagramme de phases pour construire des modèles « locaux », pour lesquels on ne peut pas dissocier le champ propre des contributions externes. Il s'agit d'un point central dans la présente thèse, et celui-ci sera repris en détails plusieurs fois. Pour le moment, c'est le premier constat qu'il importe de clarifier. C'est précisément l'objet des deux sections suivantes, qui revoient la notion de **densité de courant critique**, au sens des transitions de phases.

2.3 Densité de courant critique

La notion de densité de courant critique est certainement l'une des notions les plus importantes dans les applications de la supraconductivité à HT_c, mais aussi l'une des plus ambiguës. En effet, la définition donnée à la section 1.6, qui dit que J_c est la densité de courant correspondant à l'état critique, est difficile à mettre en application en pratique, pour deux raisons. La première, commune aux supraconducteurs à BT_c et HT_c, c'est que les matériaux ne sont jamais totalement homogènes. Par conséquent, J_c ne prend pas une valeur précisément définie, comme sur la FIG. 1.4, mais suivra plutôt une certaine distribution statistique $P(J_c)$. Ex-

périmentalement, ceci se traduit par un arrondissement de la caractéristique $E - J$, tel qu'illustré à la FIG. 2.3. Deuxièmement, la température de fonctionnement élevée des supraconducteurs à HT_c rend importante la contribution de l'agitation thermique dans l'équilibre dynamique des vortex. En effet, l'agitation thermique rend probable le mouvement des lignes de flux même en-dessous de l'état critique, i.e. lorsque $F_L < F_P$. Ce phénomène est connu sous le nom de **reptation de flux**

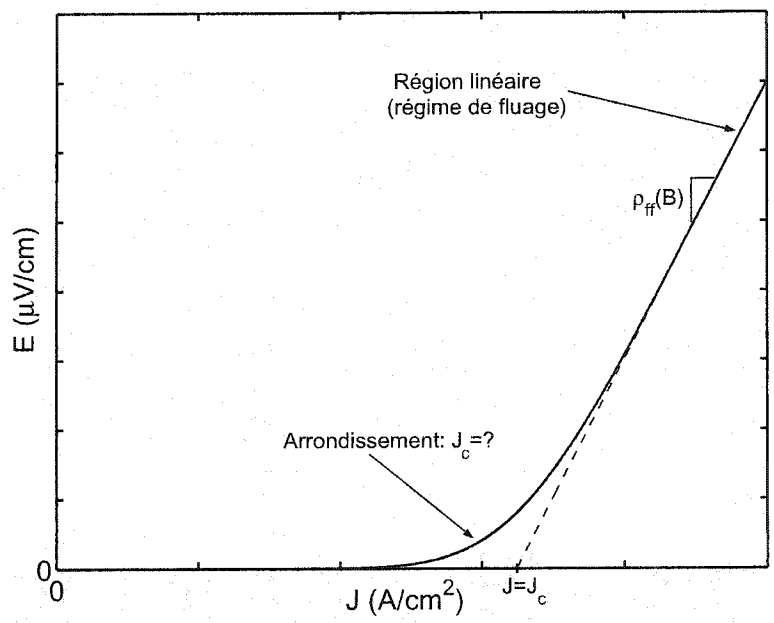


FIG. 2.3 – Caractéristique $E - J$ arrondie typique d'un matériau réel. La ligne en pointillés représente la caractéristique $E - J$ d'un matériau homogène à $T = 0$, ce qui résulte en un état critique « idéal ». À cette température ($T = 0$), la caractéristique arrondie pourrait représenter les conséquence d'une distribution statistique de J_c. Alternativement, la courbe arrondie pourrait aussi représenter les effets de l'agitation thermique pour un matériau homogène à une température $T > 0$. L'effet combiné de la distribution de J_c et de l'agitation thermique donne aussi évidemment une caractéristique $E - J$ arrondie à toute température, incluant $T = 0$. On constate que l'état critique ne survient plus de façon claire, ce qui rend nébuleuse la définition d'un J_c unique. Notons que dans tous les cas, la caractéristique $E - J$ tend vers une région linéaire lorsque J est suffisamment grand. La pente $\rho_{ff}(B)$ est une résistivité différentielle qui dépend de la densité de flux.

(« **flux creep** »). Pour les matériaux à BT_c, il n'est à peu près pas observable, mais pour les matériaux à HT_c, il contribue à arrondir la caractéristique $E - J$. La FIG. 2.3 illustre la caractéristique $E - J$ arrondie typique d'un matériau réel, dans la région qui se situe près de l'état critique « idéal ».

On constate donc que les deux mécanismes contribuent à arrondir la caractéristique $E - J$. Cependant, leurs contributions respectives sont difficiles à dissocier, ce qui rend d'autant plus difficile l'identification d'un J_c physiquement significatif. En fait, différents critères conduiront à différents J_c. Afin d'en arriver à une approche unifiée, nous supposerons dans un premier temps que l'agitation thermique peut être négligée. Nous verrons ultérieurement comment on peut ajouter la contribution thermique à l'approche statistique. Sous cette hypothèse, il ne reste alors que la contribution statistique à traiter, ce qui est l'objet de la section 2.3.1. Dans cette section, plutôt que de traiter J_c (la **densité de courant critique**), nous travaillons avec I_c (le **courant critique**), car un traitement en termes de variables locales implique de faire certaines hypothèses sur les dimensions par rapport auxquelles on fait la moyenne. Par la suite, dans la section 2.3.2, nous revenons en termes des variables locales, en présentant les hypothèses nécessaires.

2.3.1 Distribution du courant critique

Tout au long de cette section, nous supposerons que l'on travaille à B et T constants, et que l'agitation thermique peut être négligée. Sur ces bases, considérons un fil supraconducteur long et non homogène dans lequel on impose un courant I. Décomposons ce fil, de longueur L, en n sections élémentaires de longueur δz, tel qu'illustré à la FIG. 2.4. La tension V au borne de ce fil est donnée par la somme des tensions δV_i de chacune des sections élémentaires, i.e.

$$V = \sum_{i=1}^{n} \delta V_i \ , \tag{2.1}$$

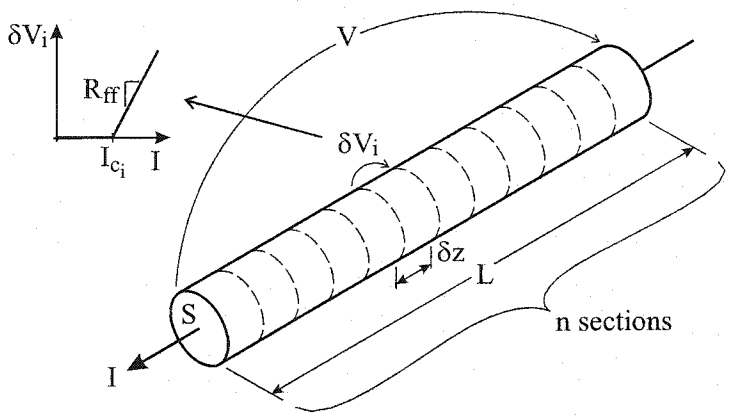


FIG. 2.4 – Schéma d'un fil supraconducteur de longueur L décomposé en n sections élémentaires de longueur δz et de section S. Pour un courant I imposé, la tension totale V à ses bornes est donnée par la somme des tensions δV_i des sections élémentaires. On suppose que le courant circule selon l'axe z positif.

alors que le champ électrique moyen $\langle E \rangle$, est donné par

$$\langle E \rangle = V/L \, . \tag{2.2}$$

Nous noterons par la suite $\langle E \rangle$ tout simplement E, en gardant à l'esprit qu'il s'agit d'un champ moyenné sur la longueur de l'échantillon. Le champ local peut en réalité être beaucoup plus élevé que $\langle E \rangle$.

Plummer et Evetts [17] ont proposé que chacune des sections se comporte de façon statistiquement indépendante et suit le modèle de fluage illustré à la FIG. 1.4. On peut donc associer à chacune d'elle un courant critique I_{c_i}, et l'on considérera dans un premier temps que $\forall i$, $I_{c_i} > 0$. Si on cumule les I_{c_i} sur un diagramme de fréquences $f(I_c)$, on peut construire la distribution de probabilité normalisée

$$\hat{f}(I_c) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(I_c)\,\big|_{I_c > 0}}{n} \, . \tag{2.3}$$

Afin rendre les équations qui suivent plus générales, nous utiliserons la notation $P(I_c)$

pour désigner la distribution statistique normalisée du courant critique. Dans le cas $I_{c_i} > 0 \ \forall i$, il est correct d'écrire $P(I_c) = \hat{f}(I_c)$.

Dans le modèle de fluage (cf section 1.7), que l'on reprend ici en termes de V et I, on sait que pour $I < I_{c_i}$, on a $\delta V_i = 0$, et pour $I > I_{c_i}$, on a $\delta V_i = R_{ff}\,(I - I_{c_i})/n$, où R_{ff} est la résistance de fluage, analogue macroscopique de ρ_{ff}. Il s'agit d'une résistance différentielle, donnée bien sûr par $\delta V_i/(I - I_{c_i})$ (pour $I > I_{c_i}$), et on suppose que R_{ff} est la même pour chacune des n sections (donc R_{ff} est une constante). On peut facilement reconstruire la courbe $V - I$ à partir de ces informations, i.e.

$$V(I) = \sum_{i=1}^{n} \delta V_i = R_{ff} \sum_{I_{c_i} \leq I} \frac{f(I_{c_i})}{n}\,(I - I_{c_i}) = R_{ff} \sum_{I_{c_i} \leq I} \hat{f}(I_{c_i})\,(I - I_{c_i})\ , \qquad (2.4)$$

la sommation se résumant aux sections dont $I_{c_i} \leq I$, car pour toutes les sections dans lesquelles $I_{c_i} > I$, $\delta V_i = 0$. Cette façon de procéder revient à sommer des segments de droites de pente $R_{ff}\hat{f}(I_{c_i})$. La caractéristique $V - I$ que l'on obtient ainsi est donc une courbe formée de segments de droites, tel que l'illustre la FIG. 2.5 pour une distribution de I_c très simple. Lorsque l'on dépasse la fin de la distribution, on revient au cas connu du régime de fluage, de pente différentielle R_{ff}.

Lorsque le nombre de sections considérées est très grand (i.e. $n \to \infty$, $\delta V \to \mathrm{d}V$), on peut approcher la distribution $P(I_c)$ par une distribution continue, et on peut alors réécrire (2.4) comme une intégrale, i.e.

$$V(I) = \int_L \mathrm{d}V = R_{ff} \int_0^I P(I_c) \cdot (I - I_c)\,\mathrm{d}I_c\ . \qquad (2.5)$$

On obtient alors une caractéristique $V - I$ qualitativement similaire à la caractéristique de la FIG. 2.3. Baixeras et Fournet [18] ont constaté que le modèle de fluage, qui mène à (2.5), permet de déduire facilement la forme de la distribution $P(I_c)$ à partir de mesures $V - I$ expérimentales. En effet, si on calcule la dérivée seconde

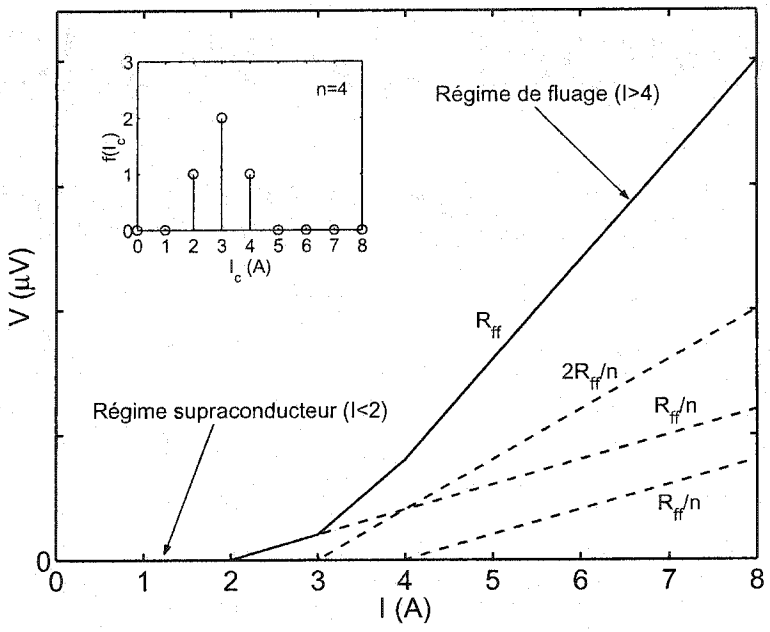


FIG. 2.5 – Caractéristique $V-I$ formée de segments de droites, dans le cas où $n = 4$. Chaque segment de droite élémentaire possède une pente égale à $R_{ff}\, f(I_c)/n$, où R_{ff} est la résistance différentielle en régime de fluage. Les valeurs de courant présentées ici sont purement arbitraires.

de (2.5) (en utilisant la règle de Liebnitz), on trouve

$$\frac{\mathrm{d}^2V(I)}{\mathrm{d}I^2} = R_{ff}\, P(I_c)\ . \tag{2.6}$$

Il s'agit d'un résultat à la fois fort simple et fort utile. Par exemple, on peut effectuer la dérivée numérique d'une courbe $V-I$ expérimentale, puis ensuite identifier $P(I_c)$ à une distribution statistique connue (à l'aide d'une régression non linéaire). Notons que $P(I)$ dépend de B et T, et c'est pourquoi nous avons supposé B et T constants au début de cette section.

À l'instar de la dérivée seconde, la dérivée première de (2.5) possède aussi une

signification très importante. Définissions d'abord la distribution cumulée $Q(I)$, i.e.

$$Q(I) = \int_0^I P(I_c)\,\mathrm{d}I_c\ , \tag{2.7}$$

qui représente la proportion du fil dans laquelle $I_c < I$, ou en d'autres termes, la proportion du fil en régime de fluage pour un courant I donné. Puisque $P(I_c)$ est normalisée, $Q(I)$ varie entre 0 et 1. Maintenant, évaluons la dérivée première, qui est en fait la résistance différentielle $R(I)$, i.e.

$$\frac{\mathrm{d}V(I)}{\mathrm{d}I} = R(I) = R_{ff}\int_0^I P(I_c)\,\mathrm{d}I_c = R_{ff}\,Q(I)\ , \tag{2.8}$$

d'où $\mathrm{d}V(I)/\mathrm{d}I$ est proportionnel à $Q(I)$, donc à la proportion du fil en régime de fluage. Cette constatation nous permet de réécrire (2.5) sous une forme qui ne fait pas intervenir le modèle de fluage explicitement, mais qui est équivalente, i.e.

$$V(I) = R_{ff}\int_0^I Q(I')\,\mathrm{d}I'\ . \tag{2.9}$$

Cette forme nous permet de construire la caractéristique $V - I$ en ne travaillant qu'avec $Q(I)$, généralement facile à obtenir de façon analytique à partir de $P(I_c)$.

Il reste à considérer le cas très important des sections du fil supraconducteur qui ont un courant critique nul. Edelman et Larbalestier [19] ont proposé l'approche suivante afin de généraliser les équations précédentes pour tenir compte de ce cas. En supposant que l'ensemble des sections avec $I_c = 0$ représentent une proportion $Q(0)$ de la longueur totale du fil, on peut ajouter à $P(I_c)$ cette contribution sous forme d'une probabilité localisé en $I_c = 0$, ce qui s'écrit

$$P(I_c) = Q(0)\,\delta(I_c) + \hat{f}(I_c)\ , \tag{2.10}$$

où $\hat{f}(I_c)$ est défini par (2.3) et $\delta(I_c)$ est la distribution de Dirac. En utilisant cette

notation, les équations présentées ci-haut demeurent valides. Précisons cependant que la condition de normalisation ($\int_0^\infty P(I_c)\,\mathrm{d}I_c = 1$) permet de déduire

$$\int_0^\infty \hat{f}(I_c)\,\mathrm{d}I_c = 1 - Q(0)\,, \tag{2.11}$$

et que, selon (2.7), la distribution cumulée $Q(I)$ s'écrit explicitement

$$Q(I) = Q(0) + \int_0^I \hat{f}(I_c)\,\mathrm{d}I_c\,. \tag{2.12}$$

L'origine physique de $Q(0)$ sera clarifiée à la section 2.4.2. Cependant, on peut dès maintenant constater que l'existence de $Q(0)$ permet de distinguer deux régimes très différents. Se rappelant que $\mathrm{d}V(I)/\mathrm{d}I = R(I) = R_{ff}\,Q(I)$, on a $R(I)\,\big|_{I\to 0} = R_{ff}\,Q(0)$. Pour $Q(0) = 0$, la résistance différentielle lorsque $I \to 0$ est donc nulle! Puisque $Q(0) = 0$ correspond aussi à la situation $I_{c_i} > 0\ \forall i$, on en conclut que l'on est dans un régime purement supraconducteur. En d'autres termes, toutes les lignes de flux demeurent ancrées, pour autant que le courant I soit suffisamment faible, disons inférieur à $I_{c_{min}}$. Cependant, si $Q(0) > 0$, même un courant infinitésimal fait apparaître une résistance différentielle $R(I) \neq 0$, et le régime parfaitement supraconducteur n'existe plus.

Enfin, il est intéressant de noter que $\langle I_c \rangle$, la moyenne de I_c d'une distribution, est donnée par

$$\langle I_c \rangle = \int_{I_{c_{min}}}^{I_{c_{max}}} I_c\,P(I_c)\,\mathrm{d}I_c\,, \tag{2.13}$$

où $I_{c_{max}}$ est la plus grande valeur de I_c de la distribution. La valeur de $\langle I_c \rangle$ correspond à l'intersection du prolongement de la caractéristique $V(I)$ linéaire du régime de fluage avec l'axe I. Ceci est illustré à la FIG. 2.6, qui résume bien de façon graphique l'ensemble de cette section.

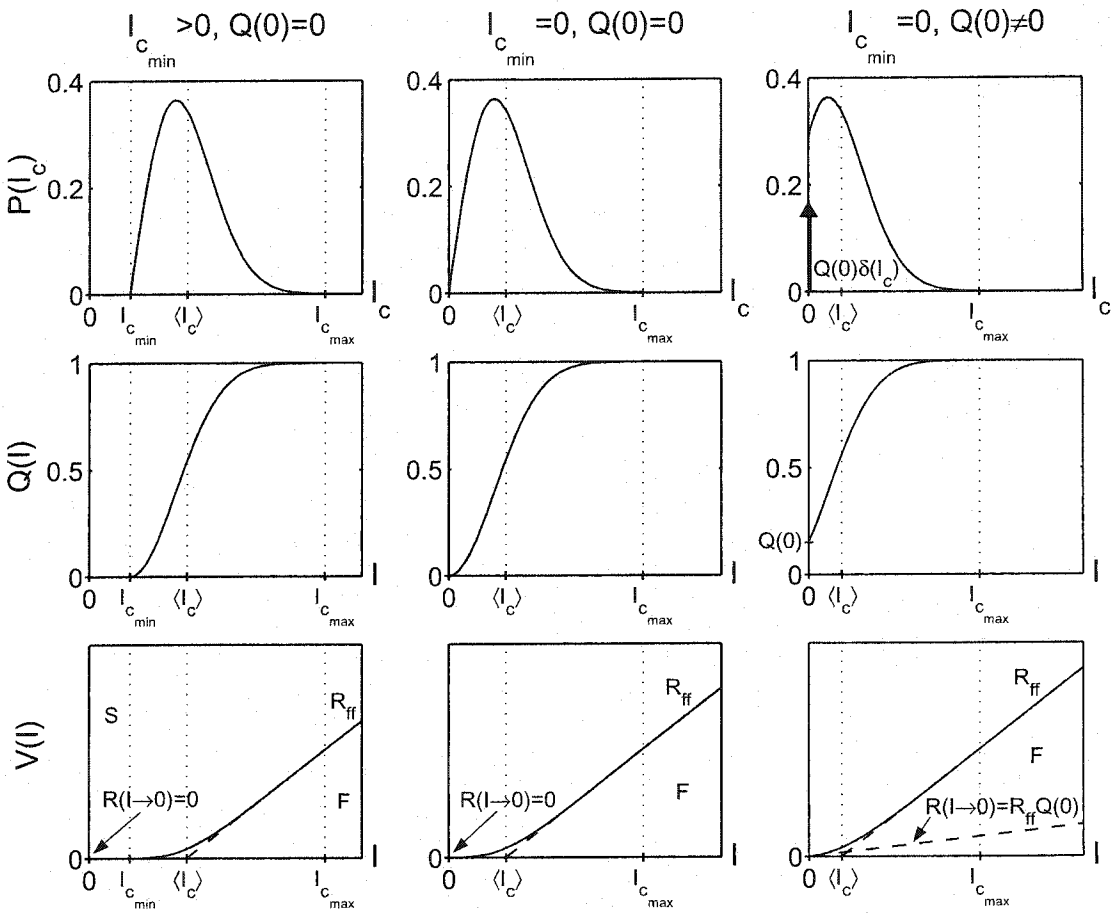


FIG. 2.6 – Synthèse: $P(I_c)$, $Q(I)$ et $V(I)$ pour différentes configurations de la distribution du courant critique. Dans la colonne de gauche, $I_{c_{min}} > 0$ et $Q(0) = 0$ conduisent, pour $I < I_{c_{min}}$, à un régime parfaitement supraconducteur, noté S dans le graphique $V(I)$. Ce régime n'existe pas dans les deux autres colonnes, car $I_{c_{min}} = 0$. La colonne de droite présente le cas $Q(0) \neq 0$, ce qui se traduit par une impulsion de Dirac $Q(0)\,\delta(I_c)$ dans la distribution $P(I_c)$, et une ordonnée à l'origine de valeur $Q(0)$ dans le graphique $Q(I)$. De plus, $Q(0)$ cause l'apparition d'une résistance différentielle non nulle pour $I \longrightarrow 0$, contrairement aux deux premiers cas. La colonne du centre représente le point tournant entre les deux régimes. Dans tous les cas, pour $I > I_{c_{max}}$, on obtient le régime de fluage, de pente différentielle R_{ff}, noté F dans les graphiques $V(I)$. La moyenne de I_c de chaque distribution, notée $\langle I_c \rangle$, est indiquée sur chacun des graphiques. Elle correspond à l'intersection du prolongement de la caractéristique linéaire du régime de fluage avec l'axe I (ou I_c).

2.3.2 Densité de courant critique vs courant critique

Le raisonnement présenté à la section précédente en termes de I_c peut être repris en termes de J_c, en utilisant des hypothèses semblables, axées sur la probabilité de mouvement d'un vortex (ou d'une section de vortex) soumis à l'action collective des sites d'ancrages situés à sa portée. C'est ce qui avait été fait à l'origine par Baixeras et Fournet [18]. Nous ne reprendrons pas ici leur approche, car elle conduit aux mêmes résultats que ci-haut, à quelques détails de notation près. Les équations dérivées précédemment peuvent donc être réutilisées sans problèmes en effectuant les substitutions suivantes: $V \rightarrow E$, $I \rightarrow J$ et $R \rightarrow \rho$.

Nous nous attarderons plutôt à distinguer les différences entre les deux types de distributions, i.e. $P(I_c)$ et $P(J_c)$. Le fait de supposer que $J = I/S$, où S est la section du fil, n'est pas formellement valable. Il s'agit certes d'une bonne approximation, utilisée presque partout dans la littérature, à défaut d'avoir une meilleure approche. Cependant, I_c est influencé par un certain nombre de facteurs **extrinsèques**, qui n'ont rien à voir avec les propriétés **intrinsèques** réelles du matériau. À titre d'exemple, référons-nous à la FIG. 2.4. Le fil illustré pourrait présenter des variations dans la section S_i de chacune de ses subdivisions (« sausaging »). Si le matériau était parfaitement homogène, i.e. si J_c était clairement défini et égal à J_{c0} dans chacune des sections du fil, on aurait $P(J_c) = \delta(J_c - J_{c0})$. Les différents S_i causeraient alors des variations locales de J, et par conséquent I_c suivrait une certaine distribution puisque toutes les sections n'atteindraient pas $J = I/S_i = J_{c0}$ pour la même valeur de I [17]. Cette dispersion de I_c est de nature purement géométrique et n'est pas représentative des propriétés intrinsèques du matériau. Tout autre facteur géométrique qui tendrait à changer la forme « idéale » d'un échantillon — des fissures ou des aspérités, par exemple — causerait ce phénomène. L'effet d'un fissure a été étudié numériquement par Paasi [20].

D'autre part, même lorsque le matériau est exempt de facteurs extrinsèques et que le champ externe $\vec{B}_{ext}$ est uniforme dans l'espace, le champ propre $\vec{B}_{self}$ associé à J génère une densité de flux non uniforme dans le fil, et donc la densité de flux totale, $\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{self}$, est aussi non uniforme. Comme de surcroît $P(J_c)$ dépend de $\vec{B}$, il en résulte une répartition non uniforme de J dans la section du fil. Cette non uniformité de J dépend bien sûr de la géométrie du fil, qui dicte l'allure du champ propre, et elle invalide du même coup la relation simple $J = I/S$.

Afin que les deux paragraphes précédents prennent tout leur sens, la définition-même de J doit être revue. En effet, J est par nature une variable locale, ce qui veut dire par définition une moyenne sur une échelle beaucoup plus petite que les dimensions de la géométrie du problème considéré. Dans les matériaux supraconducteurs granulaires à HT_c, à l'échelle microscopique, le courant local ne suit pas un chemin parallèle au courant global I, mais suit plutôt des chemins de percolation 3D complexes (voir FIG. 2.7(a)), dictés principalement par les liens faibles entre les grains supraconducteurs [21, 22]. Afin de définir un J qui soit « utilisable » en pratique, on pourrait choisir une échelle de moyennage qui permette de ramener la **densité de courant microscopique**, notée j, à une composante approximativement parallèle à I. On aurait alors $J = \langle j \rangle\big|_{V_c}$, où V_c est un volume caractéristique approprié. Dans le cas des supraconducteurs à HT_c granulaires, V_c devrait englober plusieurs grains, tel qu'illustré à la FIG. 2.7(b).

La densité de courant microscopique j est bien sûr influencée par les propriétés intrinsèques microscopiques du matériau, qu'on peut exprimer sous la forme d'une **densité de courant critique microscopique**, notée j_c. La connaissance de $j_c(x, y, z)$, ou à tout le moins de sa distribution statistique $P(j_c)$, devrait donc en principe nous permettre de définir J. Cependant, malgré la simplicité théorique de cette approche, le problème demeure encore trop complexe. Ceci est d'une part dû au fait qu'il est à peu près impossible de déterminer expérimentalement $P(j_c)$, et

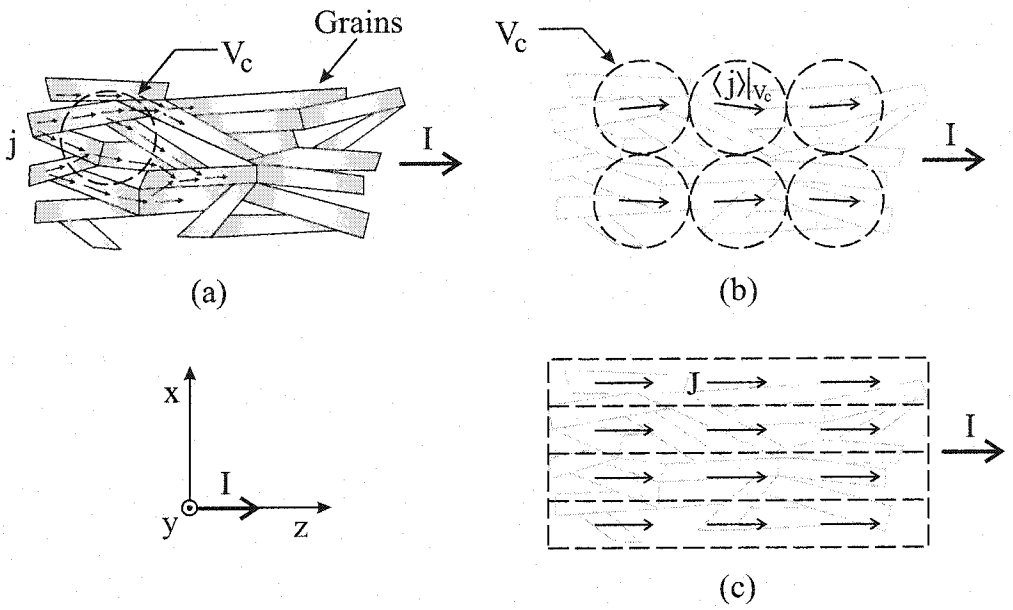


FIG. 2.7 – Percolation de I et définition de j, $\langle j \rangle\big|_{V_c}$ et J. (a) Chemins de percolation schématiques en 2D dans un matériau à HT_c granulaire. La densité de courant microscopique est dénotée j. Le cercle en pointillés illustre le volume caractéristique de moyennage, noté V_c. Notons que ce dernier englobe plusieurs grains (la taille d'un grain est de l'ordre de 1 à 100 microns, selon la direction considérée). (b) Champ de vecteurs représentant un moyennage de j sur V_c, noté $\langle j \rangle\big|_{V_c}$. Le résultat est une densité de courant approximativement parallèle à I. (c) Modélisation du réseau de grains par un empilement de filaments dont les propriétés effectives sont identiques. Le transfert de courant entre les filaments n'est pas interdit, mais il requiert une modélisation des propriétés effectives transverses. Pour un conducteur suffisamment long, J et I deviennent parallèles.

d'autre part, même si cela était possible, cela demanderait une puissance de calcul énorme pour solutionner le problème électromagnétique 3D associé (Adamopoulos et Evetts ont exploré la question pour le cas simple d'une structure de grains en « mur de briques » [23]). Il importe donc d'introduire une simplification supplémentaire, soit une hypothèse d'homogénéité, qui suppose que le comportement macroscopique observé, résultant d'un ensemble de phénomènes microscopiques complexes et non homogènes, peut être reproduit par un matériau dont les pro-

priétés locales « effectives » sont entièrement homogènes. En d'autres termes, on remplace $j_c(x, y, z)$ par $J_c(z)$, J_c étant alors considéré comme une **densité de courant critique effective**, et où z est la direction d'écoulement du courant total I. On interprète alors $P(J_c)$ comme étant la distribution du courant critique effectif le long de l'axe z d'un filament de section $\mathrm{d}S$ portant un courant total $\mathrm{d}I = J\,\mathrm{d}S$, ce qui est exactement l'analogue « local » du fil illustré à la FIG. 2.4. Le conducteur entier est alors modélisé par un assemblage de ces filaments, tel qu'illustré en 2D à la FIG. 2.7(c). Ceci démontre par le fait même la validité des substitutions $V \rightarrow E$, $I \rightarrow J$ et $R \rightarrow \rho$ dans les équations de la section précédente.

Il est important d'insister sur le fait que J_c *n'est pas* la moyenne de j_c sur le volume caractéristique V_c, mais constitue uniquement un modèle équivalent à un grand nombre de facteurs microscopiques complexes qui ne pourraient pas autrement être découplés les uns des autres. *Il semble que ce soit la seule approche qui nous permettre de modéliser de façon simple des objets macroscopiques par le principe de superposition, à partir d'éléments de matériaux dont les propriétés locales (effectives) sont toutes identiques.* Au meilleur de la connaissance de l'auteur, cette interprétation, bien qu'un peu abstraite, est nouvelle. Pour le reste de ce document, il faudra donc interpréter J comme une **densité de courant effective**, et *non* comme $\langle j \rangle\big|_{V_c}$. Il en est de même pour J_c et j_c. Les nuances entre les deux approches seront précisées à la section suivante.

Plusieurs conséquences découlent de ce choix de J_c. D'abord, il devient possible de tenir compte, toujours de façon effective, de la dépendance au champ local $\vec{B}$, qui englobe automatiquement le champ propre, ce qui est impossible avec un modèle macroscopique du type $J = I/S$. Les modèles résultant devraient être passablement indépendant de la géométrie considérée, ce qui est une caractéristique essentielle pour un modèle local. Cependant, les effets extrinsèques, qui influencent inévitablement les mesures $V - I$, se réflèteront aussi dans le modèle effectif. Dans la

mesure où ces derniers perturbent peu le comportement intrinsèque (par exemple, de très faibles variations de la section selon z), le modèle devrait rester passablement indépendant de la géométrie. Par contre, la présence d'une fissure dans un échantillon servant à identifier les paramètres du modèle pourrait grandement fausser ce dernier. Cela fait partie des risques et compromis nécessaires pour modéliser de façon relativement simple des applications macroscopiques. Cette discussion sera reprise au chapitre 8, qui présente un article qui a été écrit dans le cadre de la présente thèse [24]. Pour la suite de cet ouvrage, toutes les variables locales utilisées (i.e. J, B) seront considérées comme des variables locales effectives, maintenant que leur signification est clairement établie.

2.4 Diagramme de phases $J-B-T$

Maintenant que l'on a défini les notions de densité de courant critique et de variables locales dans le contexte de nos travaux, il est possible de poursuivre la discussion entamée à la section 2.2 sur la généralisation du diagramme de phases. L'aspect microscopique de la transition amorphe-liquide est aussi traité dans cette section.

2.4.1 Surfaces de transition

En premier lieu, revenons sur la difficulté soulevée à la section 2.2 de définir des frontières en termes de J. Comme la densité de courant critique J_c est en réalité définie par une distribution $P(J_c)$, le choix des bornes de la distribution, soit $J_{c_{min}}$ et $J_{c_{max}}$, semble tout indiqué pour représenter des frontières physiquement significatives dans le diagramme de phase $J-B-T$. En effet, par analogie avec la discussion précédente, menée en termes de I, on peut affirmer que $J < J_{c_{min}}$ correspond à un régime parfaitement supraconducteur, alors que $J > J_{c_{max}}$ correspond à un régime de fluage (cf FIG. 2.6). Lorsque l'on considère l'évolution de $P(J_c)$ en fonc-

tion de (B,T), cela nous conduit à définir les surfaces $J_{c_{min}}(B,T)$ et $J_{c_{max}}(B,T)$, qui représentent les frontières respectives de ces deux régimes, d'où leur signification physique importante. La FIG. 2.8 illustre schématiquement ce diagramme de phases 3D. Les surfaces correspondant à B_{c_1} et à B_{c_2} ont cependant été omises afin de ne pas alourdir le schéma.

Établissons maintenant le lien avec les phases en tant que telles, en particulier avec le diagramme de phases schématique de la FIG. 2.2. Si on se restreint d'abord au cas $J = 0$, on constate que la FIG. 2.8 se réduit au plan $B - T$, et on retrouve

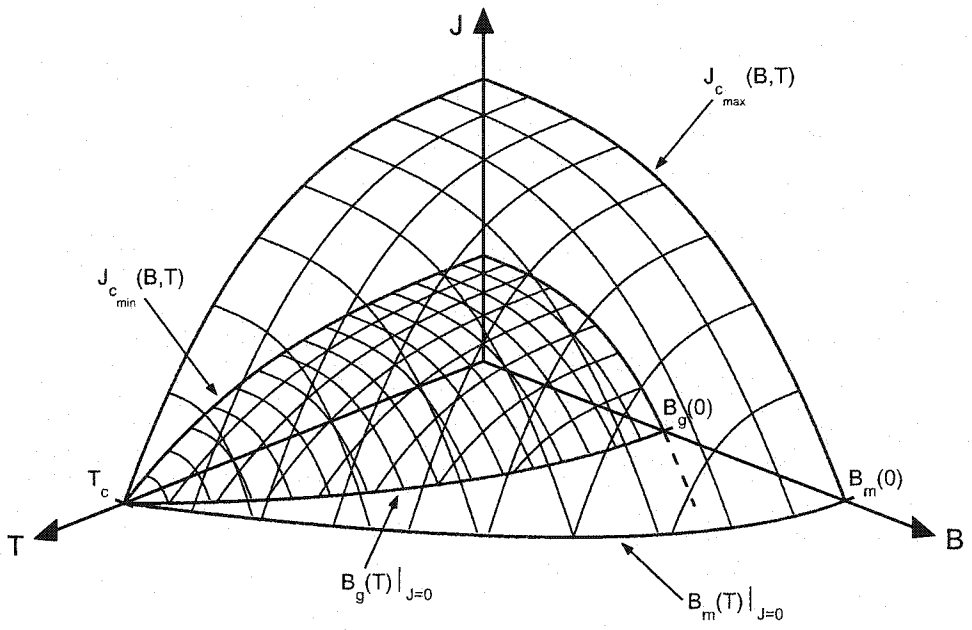


FIG. 2.8 – Schéma du diagramme de phases $J-B-T$ d'un supraconducteur à HT_c. On y distingue clairement les deux surfaces $J_{c_{min}}(B,T)$ et $J_{c_{max}}(B,T)$, qui bornent la distribution $P(J_c)$. Notons que dans le plan $J = 0$, on retrouve le diagramme de phases $B - T$ de la FIG. 2.2. Les quantités d'intérêt ont été répétées pour faciliter la comparaison avec cette dernière. Les surfaces correspondant à B_{c_1} et à B_{c_2} n'ont cependant pas été représentées afin d'alléger le diagramme. La ligne pointillée sous $B_g(0)$ suggère le prolongement de la surface $J_{c_{min}}(B,T)$ dans la région $J < 0$. Voir la section 2.4.3 pour les détails.

le diagramme de phases $B - T$ de la FIG. 2.2. Dans ce cas, on sait que pour $B < B_g(T)\big|_{J=0}$, le RLF est entièrement dans la phase amorphe. On sait aussi que pour $B > B_m(T)\big|_{J=0}$, le RLF est entièrement dans la phase liquide, et qu'entre les deux, nous sommes dans la zone de transition amorphe-liquide, dont la largeur dépend de la nature et de l'efficacité des sites d'ancrages. À partir de ce constat, la généralisation à $J \neq 0$ est directe, et l'interprétation présentée ci-bas suit les travaux de Yamafuji et Kiss [25].

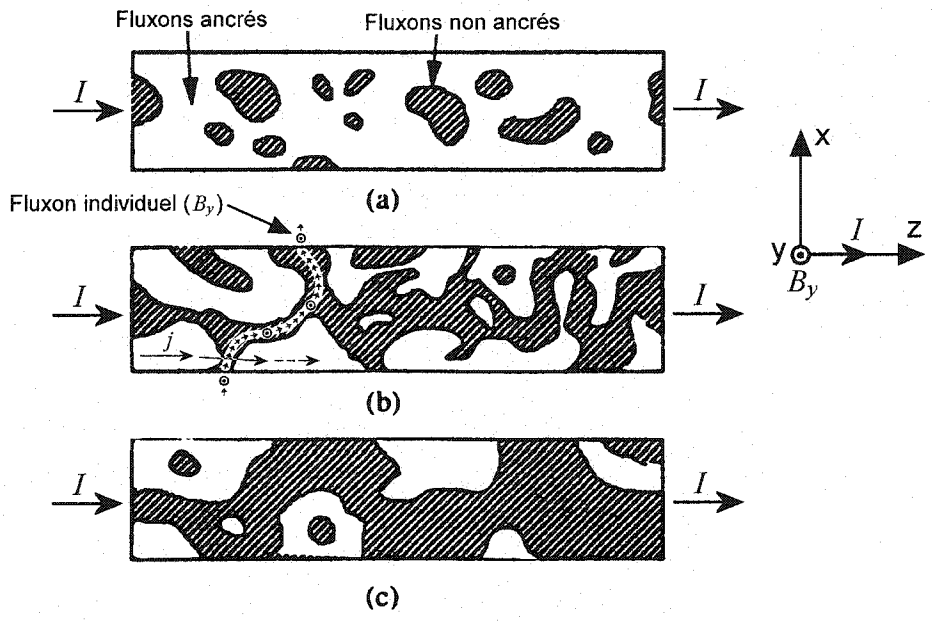
Ces derniers proposent que les points des surfaces $J_{c_{min}}(B,T)$ et $J_{c_{max}}(B,T)$ correspondent à $(J_{c_{min}}, B_g, T_g)$ et $(J_{c_{max}}, B_m, T_m)$. Lorsque le point d'opération (J,B,T) se situe sous la surface $J_{c_{min}}(B,T)$, correspondant à $J < J_{c_{min}}$, les lignes de flux se comportent selon les propriétés de la phase amorphe. À l'opposé, lorsque (J,B,T) se situe au-delà de la surface $(J_{c_{max}}, B_m, T_m)$, correspondant à $J > J_{c_{max}}$, les lignes de flux se comportent selon les propriétés de la phase liquide. Selon les discussions précédentes, ceci implique que le régime parfaitement supraconducteur ($J < J_{c_{min}}$) doit correspondre à la phase amorphe, et que le régime de fluage ($J > J_{c_{max}}$) doit correspondre à la phase liquide. La région entre les deux surfaces correspond à la transition de phase, soit la région où Q varie de 0 à 1, ce qui se traduit par l'arrondissement familier de la caractéristique $E - J$. Il est intéressant de noter au passage que Q pourrait être considéré comme une sorte de paramètre d'ordre effectif décrivant la transition de phase en termes de (J,B,T).

2.4.2 Aspect microscopique de la transition

L'explication précédente est cohérente avec les discussions des sections 2.1.2 et 2.1.3. En effet, dans la phase amorphe, nous avions mentionné que les lignes de flux étaient fortement ancrées en groupes, ce qui les rend très peu mobiles, même sur application d'une force. Ceci se traduit par $J_{c_{min}} > 0$ et $Q(0) = 0$. À l'opposé, les lignes de flux en phase liquide peuvent bouger relativement indépendamment

les unes par rapport aux autres, et même une force très faible peut les mettre en mouvement, d'où $J_{c_{min}} = 0$ et $Q(0) > 0$.

La FIG. 2.9 illustre l'aspect microscopique de la transition. Elle nous permet de constater qu'à l'échelle microscopique, il existe des régions en phase liquide même lorsque $I < I_c$, tel qu'illustré en (a). Cependant, les propriétés parfaitement supraconductrices disparaissent uniquement lorsqu'il apparaît au moins une région



Source: K. Yamafuji et T. Kiss, "A new interpretation of the glass-liquid transition of pinned fluxoids in high-Tc superconductors", *Physica C*, vol. 258, 1996, p. 202. [25]

FIG. 2.9 – Illustration à différentes étapes de l'aspect microscopique de la transition amorphe-liquide dans un fil supraconducteur. Les zones noires représentent des amas de vortex en phase liquide, et les zones blanches des régions en phase amorphe. En (a), tous les amas liquides sont emprisonnés entre des régions amorphes, ce qui empêche tout mouvement net de flux. Le courant I peut circuler de gauche à droite sans pertes. Ce cas correspond à $I < I_{c_{min}}$. En (b), la continuité de la phase amorphe entre la gauche et la droite est tout juste rompue par de minces canaux en phase liquide. Le courant microscopique j doit absolument traverser ces zones liquides, ce qui permet aux vortex situés dans ces canaux de se mettre en mouvement et de générer des pertes. Ce cas correspond à $I \gtrsim I_{c_{min}}$. Enfin, le cas (c) correspond à une transition avancée en phase liquide, avec $I_{c_{min}} < I < I_{c_{max}}$.

liquide qui s'étend sur toute la largeur de l'échantillon (dans la direction transverse au courant I), tel qu'illustré en (b), i.e. lorsque les ligne de flux sont en mesure de se mettre en mouvement et de traverser l'échantillon. Le cas $I = I_{c_{min}}$ correspond à l'ouverture du premier « canal » transverse en phase liquide, aussi appelé canal de percolation de flux. C'est l'apparition d'un canal liquide de la sorte que l'on a modélisé par une région δz en régime de fluage ($I > I_{c_i}$) à la section 2.3.1. On en déduit donc que la transition de phase étendue entre $I_{c_{min}}$ et $I_{c_{max}}$ correspond physiquement à une ouverture progressive de canaux liquides transverses à I [26].

Dans le cas où l'on considère la densité de courant effective J plutôt que I, on peut imaginer que le scénario est le même, en considérant un filament de section $\mathrm{d}S$ plutôt qu'un fil de section S. La proportion du filament en phase liquide est donnée par $Q(I)$. Lorsqu'une géométrie quelconque est constituée d'un assemblage de ces filaments, ce sont les équations de Maxwell (avec leurs conditions aux frontières, tributaires de la géométrie) qui assurent la consistance entre J et B.

2.4.3 Représentation alternative de $Q(0)$

On a vu précédemment que, lorsque B ou T est suffisamment grand, $J_{c_{min}} = 0$ et $Q(0) \geq 0$. Bien que théoriquement correcte, cette formulation est plutôt difficile à manipuler numériquement. Afin d'éviter d'avoir à traiter deux cas topologiquement distincts, soit $J_{c_{min}} = 0$ et $J_{c_{min}} \neq 0$, Edelman et Larbalestier [19] ont proposé que $J_{c_{min}}$ puisse prendre aussi des valeurs négatives, tel que suggéré à la FIG. 2.8, bien que seule la partie $J_c \geq 0$ de $P(J_c)$ soit physiquement significative. Cependant, ceci nous permet de calculer $Q(0)$ facilement, i.e.

$$Q(0) = \int_{-\infty}^{0} P(J_c)\,\mathrm{d}J_c\ . \tag{2.14}$$

Cette approche possède le double avantage de faciliter la normalisation de la distribution et d'éviter un comportement singulier de $J_{c_{min}}$ au voisinage de zéro. Elle

a été employée dans l'annexe I pour dériver les équations $E(J)$ basées sur certaines distributions statistiques bien connues. Kiss et al. [27] ont aussi utilisé cette approche pour définir des surfaces de transitions similaires à celles présentées ci-haut.

2.5 Agitation thermique

Maintenant que les bases sont bien définies, il est important de considérer les effets de l'agitation thermique sur les vortex, ce qui conduit au phénomène de **reptation de flux** introduit précédemment, i.e. la probabilité que les lignes de flux ancrées se mettent en mouvement même lorsque $F_L < F_{P_{max}}$. À cette fin, nous introduisons d'abord la notion de potentiel d'ancrage et de probabilité de « saut » d'un vortex. Ensuite, nous voyons comment les sauts de vortex dus à l'agitation thermique influencent $P(J_c)$. Enfin, nous considérons une approche pour traiter de façon simple l'effet combiné de l'agitation thermique et de la distribution statistique de J_c.

2.5.1 Potentiel d'ancrage et probabilité de saut

Pour déplacer une ligne de flux ancrée, il est nécessaire d'effectuer un certain travail. Il faut donc fournir une quantité d'énergie égale à ce travail, que l'on notera U. Cette énergie U correspond en fait à l'énergie potentielle d'ancrage du vortex, ou **potentiel d'ancrage**. De façon générale, $U = U(\vec{r}, \vec{J}, \vec{B}, T)$. Notons que la force d'ancrage $\vec{F}_P$ est reliée à U par $\vec{F}_P = -\nabla U\big|_{J=0}$. De même, $J_c = \left|F_{P_{max}}\right|/\phi_0 = \max\left|\nabla U\right|_{J=0}/\phi_0$ lorsque $\vec{B} \perp \vec{J}$, dans le cas isotrope.

Pour $\vec{B}$, $\vec{J}$ et T donnés, on peut imaginer de façon imagée que chaque vortex est emprisonné au fond d'un puits de potentiel de hauteur U_0. À cause de l'agitation thermique, les vortex oscillent à une fréquence caractéristique Ω au fond de leur puits de potentiel. En considérant que les vortex sont des objets qui obéissent à une statistique classique, la probabilité qu'un vortex « saute » en dehors de son

puits de potentiel (en un seul « essai ») à cause de l'agitation thermique est donnée par e^{-U_0/k_BT}, où k_B est la constante de Boltzmann. La probabilité totale de saut peut-être obtenue par une sommation vectorielle des probabilités sur toutes les directions de saut possibles.

Afin d'illustrer ces propos, référons-nous à la FIG. 2.10, où l'on considère le cas unidimensionnel par simplicité. Il y a dans ce cas seulement deux directions de saut possibles, soit à gauche (avec une probabilité $p_g = e^{-U_g/k_BT}$), et à droite (avec une probabilité $p_d = e^{-U_d/k_BT}$). La FIG. 2.10(a) représente la situation en absence de courant de transport ($J = 0$). Dans ce cas, la barrière de potentiel est la même à gauche et à droite du puits ($U_g = U_d = U_0$), U_0 étant la profondeur du puits lorsque $J = 0$. Les probabilités que le vortex saute à gauche ou à droite sont égales ($p_g = p_d$), ce qui implique que celui-ci ne cumulera pas de déplacement net suite à un grand nombre de sauts.

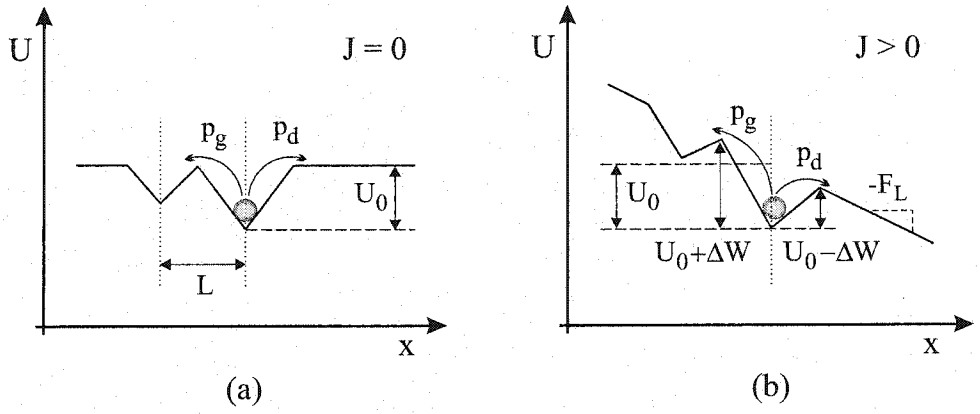


FIG. 2.10 – Potentiel en 1D d'une ligne de flux ancrée, représentée ici à l'aide de l'analogie classique d'une particule au fond d'un puits de profondeur U_0. En (a), $J = 0$, et le profil du potentiel en dehors du puits est plat. En (b), $J > 0$, et la force de Lorentz F_L incline la pente globale du potentiel. Les probabilités de saut à gauche (p_g) et à droite (p_d) du puits dépendent de la hauteur du puits de part et d'autre. Voir le texte pour les détails.

Cependant, si $J > 0$, les vortex subissent une force de Lorentz F_L, ce qui se traduit par une inclinaison de la fonction de potentiel, tel qu'illustré à la FIG. 2.10(b). La forme du puits de potentiel peut également être affectée, selon le détail de la dépendance $U(J)$. Les barrières de potentiel U_g et U_d peuvent approximativement être décrites par $U_g = U_0 + \Delta W$ et $U_d = U_0 - \Delta W$, d'où $p_d - p_g \neq 0$. Il apparaît donc une direction de saut privilégiée, et un flux net de vortex (positif vers la droite) sera observé. De façon explicite, on écrit la fréquence de saut f_s par vortex

$$\begin{aligned} f_s = \Omega\,(p_d - p_g) &= \Omega\,(e^{-(U_0-\Delta W)/k_BT} - e^{-(U_0+\Delta W)/k_BT}) \\ &= 2\,\Omega\,e^{-U_0/k_BT}\,\sinh(\Delta W/k_BT)\;. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Si à chaque saut le vortex avance d'une distance L, sa vitesse moyenne est donnée simplement par $\bar{v} = Lf_s$. Le champ électrique associé est donné par (1.6), i.e. $E = B\bar{v}$ (pour $B \perp \bar{v}$), d'où $E = BLf_s$.

Selon les valeurs relatives de U_0, ΔW et k_BT, on distingue deux régimes très différents. D'abord, lorsque $U_0 \gg k_BT$, (2.15) se réduit à

$$f_s \approx \Omega\,e^{-(U_0-\Delta W)/k_BT}\;. \tag{2.16}$$

C'est le cas de reptation (« creep ») classique, traité par Anderson [28] dès 1962. Anderson avait de plus supposé que $U_0 - \Delta W = k(J_c - J)$, ce qui conduit à une caractéristique $E - J$ exponentielle pour $J < J_c$, i.e. $E \propto e^{kJ/k_BT}$. Il devient donc explicite que les vortex peuvent se mettre en mouvement pour $J < J_c$, et ceci cause un arrondissement de la caractéristique $E - J$, tel qu'illustré à la FIG. 2.3.

L'autre régime intéressant, surtout pour les supraconducteurs à HT_c, se produit lorsque $\Delta W \ll k_BT$. Dans ce cas, (2.15) se réduit à

$$f_s \approx \frac{2\,\Omega\,\Delta W}{k_BT}\,e^{-U_0/k_BT}\;, \tag{2.17}$$

après un développement au premier ordre du terme $\sinh(\Delta W/k_BT)$ en séries de Taylor. On appelle ce régime **TAFF**, acronyme pour « Thermally Assisted Flux Flow », tel que proposé par Kes et al. [29]. Lorsque $\Delta W \propto J$ et que U_0 est indépendant de J, le régime TAFF conduit à une caractéristique $E-J$ *ohmique*, i.e. $E \propto J$, avec une dépendance en température de la forme $\rho = E/J \propto e^{-U_0/k_BT}/k_BT$. Comme $\Delta W \ll k_BT$ et $\Delta W \propto J$, ce cas particulier de la reptation correspond à J très petit, lorsque la force de Lorentz exercée sur les fluxons est très faible.

Selon l'ordre de grandeur de J et la phase du RLF, la forme fonctionnelle de U et son ordre de grandeur peuvent varier passablement. On peut cependant synthétiser la forme de U en deux tendances principales, selon que l'on est en présence d'une phase liquide ou amorphe. Dans la phase liquide, U est donnée par une fonction de la forme $U \approx U_0\left[1 - J/J_c\right]^{\alpha}$, le cas $\alpha = 1$ correspondant à l'hypothèse d'Anderson présentée ci-haut. Lorsque $J \to 0$, le régime TAFF apparaît. Ce dernier est donc caractéristique d'une phase liquide.

Dans la phase amorphe, pour $J \lesssim J_c$, on observe un comportement similaire à la phase liquide. Cependant, pour $J \ll 0$, l'ancrage collectif des lignes de flux conduit à un potentiel d'ancrage radicalement différent, i.e. $U \approx U_0\left[J_c/J\right]^{\mu}$. Ce potentiel tend vers l'infini lorsque J tend vers 0, ce qui implique un ancrage complet de lignes de flux, et cela justifie la présence du régime parfaitement supraconducteur supposé dans les sections précédentes (lorsque $J_{c_{min}} > 0$), même en présence d'agitation thermique. Les exposants α et μ varient selon l'ordre de grandeur de J. Pour un sommaire détaillé des potentiels d'ancrage, voir Blatter et al. [12, annexe XII].

2.5.2 Influence de l'agitation thermique sur $P(J_c)$

La discussion précédente était basée sur le comportement d'un seul vortex dans un puits de potentiel, duquel on peut dériver une densité de courant critique J_c clairement définie. La situation se complexifie rapidement lorsque l'on considère plutôt une distribution $P(J_c)$. En supposant que $P(J_c)$ soit la distribution sans agitation

thermique, chaque valeur de J_c associée à $P(J_c) \neq 0$ correspond à l'apparition du régime de fluage linéaire dans une section δz d'un filament supraconducteur, comme celui illustré à la FIG. 2.4. En présence d'agitation thermique, cette probabilité $P(J_c)$ de fluage pour $J < J_c$ se « diffuse » sur une plage $J_c' \in [0, J_c]$, selon une distribution normalisée $f_{th}(J_c', J_c)$. Sa forme fonctionnelle dépend de la nature des défauts d'ancrage, de B et de T. La distribution $f_{th}(J_c', J_c)$ tend vers $\delta(J - J_c)$ lorsque $U \longrightarrow \infty$, auquel cas la distribution $P'(J_c)$ (qui inclut les effets de l'agitation thermique) tend à vers à $P(J_c)$. Cette opération de « dispersion » est en fait une convolution, et si l'on connaît la forme exacte de $f_{th}(J_c', J_c)$, on calcule facilement la distribution $P'(J_c)$, i.e.

$$P'(J_c) = \int_0^{J_{cmax}} P(J_c')\, f_{th}(J_c', J_c)\, \mathrm{d}J_c' \,. \tag{2.18}$$

Il s'agit d'une variante de l'approche de Yamafuji et Kiss [30]. La FIG. 2.11 illustre à titre d'exemple l'effet de l'agitation thermique sur $P(J_c)$ (une distribution de Weibull avec $J_{c_{min}} > 0$) et $Q(J)$, lorsque $f_{th}(J_c', J_c) = k\, e^{-k(J_c - J_c')}\, u(J_c - J_c')$, avec $k = U_0/k_BT$. On fait le constat intéressant qu'il y a très peu de différence entre $U_0/k_BT = \infty$, correspondant à $P(J_c)$, et $U_0/k_BT = 5$, i.e. ${P_1}'(J_c)$. L'allure générale de ${P_1}'(J_c)$ est à peu près la même que celle de $P(J_c)$, sauf pour $J_c \approx J_{c_{min}}$, où il y a apparition d'une petite queue arrondie. C'est seulement lorsque $U_0 \approx k_BT$, comme dans le troisième cas, que l'on commence à observer une différence significative entre les formes des distributions, ici $P(J_c)$ et ${P_2}'(J_c)$. On constate aussi dans ce cas particulier que $P(J_c)$, qui est une distribution asymétrique, tend à devenir symétrique, voire semblable à une Gaussienne, à cause de l'agitation thermique. Ceci n'est en aucun cas une règle, mais c'est une curiosité qui pourrait être à l'origine de certaines affirmations divergentes sur les formes des distributions retrouvées dans la littérature. Enfin, on remarque que $Q(J)$ reste qualitativement inchangé pour $Q(J) > 0.2$, mis à part que la courbe se rapproche un peu de l'ordonnée.

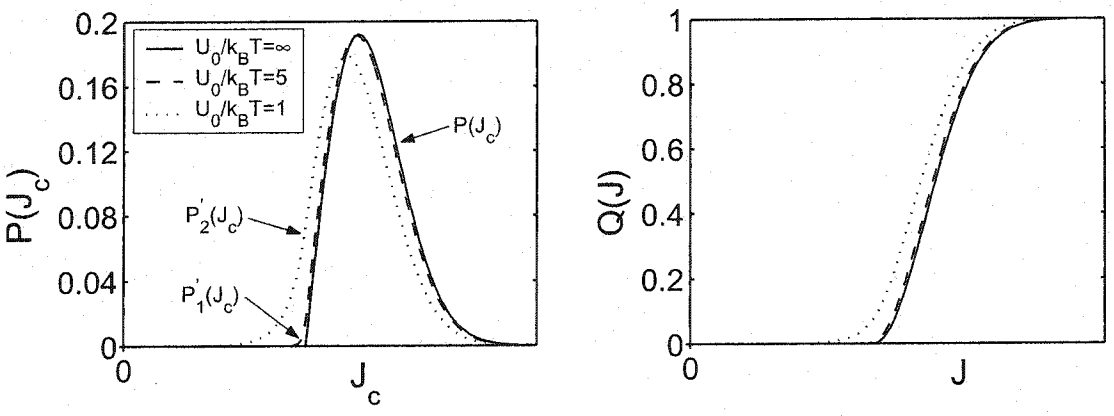


FIG. 2.11 – Effet de l'agitation thermique sur $P(J_c)$ et $Q(J)$. Les trois courbes ont été déterminées à la même température T, mais U_0 a été varié de façon à ce que l'on obtienne les trois ratios indiqués dans la légende.

Les matériaux à HT_c sont en général utilisés dans des conditions où U et k_BT peuvent être du même ordre de grandeur. Par conséquent, le phénomène de reptation ne peut pas être négligé, et nous verrons maintenant comment on peut en tenir compte.

2.5.3 Transition entre les régimes de reptation et de fluage

Bien que nous ayons traité la distribution statistique de J_c et l'agitation thermique séparément, les deux phénomènes ne peuvent pas être observés séparément expérimentalement. Comme les deux phénomènes sont non linéaires et surviennent simultanément dans la région de transition entre les régimes de reptation et de fluage, cela rend difficile toute tentative de séparation effectuée a posteriori. Il faudra donc toujours considérer que $P(J_c)$, lorsque déterminé expérimentalement par la dérivée seconde de la courbe $E-J$, *inclut implicitement* la contribution de l'agitation thermique. Selon la notation de la section précédente, c'est donc $P'(J_c)$ que l'on observera, et non $P(J_c)$. Pour la suite du document, on prendra pour acquis que $P(J_c)$ contient la contribution de l'agitation thermique.

Le commentaire précédent doit cependant être nuancé. Les mesures $V - I$, desquelles on peut extraire la caractéristique $E - J$, sont en général grandement entachées de bruit dans la région $J \lesssim J_{c_{min}}$. Si on tente de surcroît d'effectuer la dérivée seconde numériquement, on risque d'avoir un résultat fort peu fiable. Il faut donc en général recourir à d'autres méthodes de mesure, en particulier des mesures magnétiques, afin de caractériser correctement le régime de reptation, qui devient dominant à très faible J. En d'autres termes, la petite queue qui apparaît pour $J \leq J_{c_{min}}$ dans la distribution $P(J_c)$ contient toute l'information sur le régime de reptation. Si l'on désire élaborer des modèles qui soient valides sur une grande plage d'opération de E, il est important de caractériser cette queue de façon adéquate. Celle-ci contient toute l'information sur la transition entre le régime de reptation et le régime de fluage.

Il n'existe pas de façon simple d'exprimer la transition entre ces deux régimes de façon analytique. En fait, à l'heure actuelle, il n'y a pas de théorie quantitative complète sur le phénomène de reptation de flux, et il faut s'en remettre à des approches empiriques pour « connecter » la caractéristique $E - J$ entre ces deux régimes.

2.6 Transition à l'état normal

À l'opposé du régime de reptation, qui se situe en-dessous du régime de fluage, se trouve le régime de transition à l'état normal, qui se produit à fort courant. Cette transition est gouvernée par un mécanisme très différent de ceux présentés jusqu'à maintenant. D'abord, outre le fait qu'un fort courant peut faire chauffer l'échantillon et le faire passer au-dessus de T_c, il existe une densité de courant maximale J_d au-delà de laquelle une certaine proportion des paires de Cooper sont détruites, même à température constante. Il s'agit de la **densité de courant de « dé-pairage »** (**« depairing » current density**). À très fort champ externe

ou près de T_c, ce phénomène peut survenir avant l'apparition du régime de fluage linéaire, mais en général, il est très difficile d'observer ce régime expérimentalement. Un système sophistiqué d'injection d'impulsions de courant de forte intensité et de courte durée est requis, afin de demeurer à température à peu près constante. Kunchur présente un système du genre, ainsi que des mesures dans la région fort courant [31].

Ce dernier remet de plus en question le concept de fluage linéaire, tel que présenté à la section 1.7. Il semble en effet qu'à fort courant, résultant en un déplacement rapide des vortex, les propriétés d'ancrage dynamiques soit modifiées, et que la force d'ancrage effective tende progressivement vers zéro. Au lieu d'observer un régime de fluage linéaire, on obtient alors une courbe qui tend vers une caractéristique $E - J$ ohmique. Ces observations semblent appuyées par les théories microscopiques récentes [12, 7]. Cependant, comme il manque de données expérimentales dans la région fort courant, et que nous ne sommes pas en mesure d'en effectuer dans nos laboratoires, nous continuerons de prendre pour acquis que le régime de fluage linéaire est correct.

2.7 Résistivité à l'état normal

À l'état normal, les matériaux à HT_c présentent tout de même une résistivité électrique finie, beaucoup plus élevée que les métaux, mais tout de même significative (de l'ordre de 100 à 1000 $\mu\Omega \cdot$ cm, alors que pour le cuivre, c'est 1.724 $\mu\Omega \cdot$ cm, à 300 K dans les deux cas). Formellement, il faudrait toujours traiter la résistivité normale en parallèle au comportement supraconducteur. En pratique, comme il y a souvent plusieurs ordres de grandeur de différence entre la résistivité mesurée dans l'état supraconducteur et la résistivité normale, on peut omettre de la considérer. Cependant, si on traitait le régime fort courant, il faudrait absolument considérer cette dernière.

La résistivité normale varie approximativement linéairement avec la température entre $T \approx 40$ K et $T = 300$ K [32]. Comme on ne peut la mesurer directement lorsque $T < T_c$, on peut utiliser cette propriété pour l'extrapoler à partir de quelques mesures prises à $T > T_c$ [31]. De plus, la résistivité normale est anisotrope, mais elle ne présente pas de variation en fonction du champ magnétique, contrairement à la résistivité à l'état supraconducteur. Les courbes $E - J$ mesurées dans différents champs magnétiques externes se rejoignent donc toutes sur la courbe de résistivité normale à la fin de la transition supraconductrice-normale.

2.8 Anisotropie de la résistivité

Tel que mentionné à la section 1.8, les supraconducteurs à HT_c sont fortement anisotropes. Ceci résulte en deux faits expérimentaux distincts, soit la dépendance de la résistivité avec l'orientation du champ magnétique et avec l'orientation du courant. Le premier cas est traité au chapitre 3, et nous y reviendrons à plusieurs reprises au cours de la thèse. Le second cas n'est traité que dans cette section. Assez peu d'auteurs l'ont étudié, en raison de la difficulté expérimentale à mesurer ρ_c, i.e. la résistivité selon l'axe cristallographique c, qui est plus grande que ρ_a et ρ_b, i.e. la résistivité selon les deux autres axes du matériau. En général, $\rho_a \approx \rho_b$, d'où l'on utilise qu'une seule notation, soit ρ_{ab}. Les auteurs qui ont traité ce problème définissent le ratio d'anisotropie de la résistivité comme étant égal à ρ_c/ρ_{ab} (pour J donné). Notons que cette définition est différente de celle donnée à la page 67, qui consiste plutôt en un ratio des champs de transition. Il semble que les deux valeurs sont toutefois du même ordre de grandeur. Pour le BSCCO granulaire, cette anisotropie est de l'ordre de 4 à 10. Selon Cho et al. [33], il semble que les formes fonctionnelles de $\rho_{ab}(J, \vec{B}, T)$ et $\rho_c(J, \vec{B}, T)$ des matériaux granulaires à HT_c soient quasiment les mêmes, celles-ci ne différant qu'au niveau des ordres de grandeur. Ceci est étonnant, car la nature et l'interaction des vortex et des défauts sont

différentes selon le plan $a-b$ et selon l'axe c. Ceci suggère qu'il existe toujours *et* un courant transverse *et* un courant longitudinal, et donc que le courant suit des chemins de percolation dans toutes les directions. Ceci est causé par le fait que les grains sont relativement mal alignés et mal couplés électriquement.

Afin de modéliser ce comportement de façon simple, certains auteurs ont recours à un tenseur de résistivité [20, 34]. Les résistivités que l'on y retrouve représentent un comportement effectif du matériau, ce qui est tout à fait dans la philosophie de notre approche. Explicitement, on peut écrire

$$\begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} . \tag{2.19}$$

les indices a, b et c étant les axes cristallographiques d'une maille élémentaire du matériau. Il n'y a pas de termes non nuls en dehors de la diagonale principale, dû au fait que les trois axes se coupent à 90° (cf FIG. 1.5). C'est un comportement que l'on peut transposer dans le modèle effectif.

Nous n'utilisons pas cette notation tensorielle dans la présente thèse, car nous travaillons toujours en 2D, dans des situations où le courant circule de façon à ne voir que ρ_{ab}. Cependant, de façon générale, c'est l'approche à suivre pour en arriver à une modélisation 3D complète. Nous ne l'avons pas fait ici pour la simple raison que la fonction décrivant ρ_c est difficile à mesurer expérimentalement, et aussi parce que le temps de calcul requis pour un problème 3D est actuellement trop long.

2.9 Configuration « force free »

Un cas particulièrement intéressant de supraconductivité survient lorsque la champ appliqué est parallèle au courant de transport. Dans ce cas, la force de Lorentz, $\vec{F}_L = \vec{J} \times \vec{\Phi}_0$, est nulle puisque l'angle entre $\vec{\Phi}_0$ et $\vec{J}$ est nul. En principe, un

courant très élevé pourrait être transporté dans cette configuration, appelée « **force free** » . Bien que l'on observe effectivement une augmentation de la capacité à transporter du courant pour les matériaux à BT_c, le champ propre, qui vient se superposer au champ externe, crée une configuration de flux complexe en forme d'hélice, et il apparaît toujours une composante qui donne lieu à une force de Lorentz, d'où le fait que l'amélioration espérée est limitée. Cave [35] a étudié ces mécanismes dans sa thèse de doctorat, pour les matériaux à BT_c. Quelques auteurs se sont abondamment penchés sur la question, entre autres Campbell et Evetts [36] et Clem [37]. Un consensus clair n'a jamais encore été établi quant au mécanismes sous-jacents à ce phénomène, mais tout semble converger vers le fait que les fluxons doivent s'entrecouper afin de demeurer dans une configuration stable.

Dans les matériaux à HT_c granulaires, la situation est encore plus complexe, en raison de leur granularité et de leur structure en couches. L'expérience démontre que l'amélioration de J_c dans cette configuration est à peu près inexistante, vraisemblablement à cause du fait que les grains sont désalignés, ce qui génère des chemins de percolation pour le courant. Ces trajectoires désordonnées font en sorte qu'il existe toujours des zones dans lesquelles J coupe les fluxons avec un angle non nul, d'où l'apparition d'une force de Lorentz et d'une éventuelle dissipation. On constate donc très peu de différences entre les caractéristiques $E - J$ des configurations « force free » et parallèle (i.e. champ externe appliqué dans le plan $a-b$), comme le démontre les mesures de Ramsbottom et al. [38], et Willis et al. [39]. Par contre, pour les matériaux cristallins ou quasi-cristallins (comme les films minces), les deux caractéristiques $E - J$ tendent à se séparer de façon significative, tel que prévu théoriquement. Comme nous sommes surtout concernés par les matériaux granulaires, nous pourrons, du moins en première approche, considérer que la configuration « force free » est équivalente la configuration parallèle (d'un point de vue effectif).

2.10 Dépendance en température et en champ (amplitude et angle)

Les développements précédents supposaient B et T constants. Dans le cas où l'on fait varier l'un ou l'autre, les paramètres décrivant la distribution $P(J_c)$ devront varier convenablement, de façon à bien représenter le comportement du matériau. Dans le cadre de ce projet, nous ne possédons pas d'outils de calcul pour les problèmes thermiques, donc nous ne modélisons pas la dépendance en température. Nous nous concentrons plutôt sur la dépendance en champ magnétique (amplitude et orientation), qui elle-même est un projet assez complexe en soi. Néanmoins, il est possible d'utiliser la relation empirique suivante [27] pour modéliser approximativement la dépendance en température de B_g et B_m, i.e.

$$B_{g,m}(T) \approx B_{g,m}(0)\left(1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right)^n \quad , \tag{2.20}$$

où n est un exposant approprié pour le matériau considéré, et $B_{g,m}(0)$ sont les champs de transition à 0 K (cf FIG. 2.8).

Pour ce qui est de la dépendance en champ, de nombreux modèles sont rencontrés dans la littérature. Ces derniers sont généralement empiriques, i.e. ils ne sont pas basés explicitement sur des principes physiques. Ils sont présentés dans le prochain chapitre, qui passe en revue les différents modèles utilisés pour représenter la caractéristique $E-J$ ainsi que la dépendance en champ ses paramètres. Certains de ces modèles sont très utiles dans le domaine de la simulation numérique.

2.11 Conclusion

Tout en passant en revue les principaux phénomènes physiques qui donnent lieu à la caractéristique $E-J$ des matériaux supraconducteurs à HT_c, nous avons établi dans ce chapitre les bases du formalisme mathématique (hypothèses, définitions et

notations) qui seront utilisées tout au long de la thèse. À ce sujet, les sections 2.1 à 2.5 sont d'une importance capitale, alors que les sections 2.6 à 2.10 ont été incluses pour compléter l'ouvrage, mais ne seront pas développées davantage (sauf la dépendance en champ, que nous étudierons en détails en plusieurs occasions par la suite).

CHAPITRE 3

MODÈLES DE LA CARACTÉRISTIQUE $E-J$, DÉPENDANCE EN CHAMP DE LEURS PARAMÈTRES ET SIMULATION NUMÉRIQUE

Ce chapitre présente dans un premier temps les modèles de la caractéristique $E-J$ couramment utilisés dans la littérature, dont le modèle en loi de puissance. Ensuite, les modèles basés sur des distributions sont introduits, suivis des approches utilisées pour représenter la dépendance en champ (amplitude et angle) des principaux paramètres physiques. Enfin, l'utilisation de ces modèles en simulation numérique est discutée.

3.1 Modèles de la caractéristique $E-J$

3.1.1 Modèles en loi de puissance et de type percolation

Le modèle le plus répandu dans la littérature est certainement le modèle empirique en loi de puissance, qui s'écrit

$$E = E_0 \left(\frac{J}{J_c}\right)^n , \tag{3.1}$$

où J_c est la densité de courant critique, n un exposant approprié, et E_0 un critère de champ électrique qui sert à définir J_c. Lorsqu'on étudie les matériaux à HT_c, la convention est d'utiliser $E_0 = 1\ \mu$V/cm (i.e. $E_0 = 10^{-4}$ V/m) [40], cette valeur étant un bon compromis entre la précision des appareils de mesures et le niveau de bruit présent dans les mesures. Une variante directe de ce modèle consiste à ajouter

un décalage selon l'axe J, i.e.

$$E = E_0 \left(\frac{J - J_{c_{min}}}{J_c} \right)^n , \tag{3.2}$$

où $J_{c_{min}}$ est la densité de courant pour laquelle le champ électrique apparaît dans le matériau, tel que défini au chapitre précédent. On dit que ce modèle est de type percolation car le décalage $J_{c_{min}}$ correspond au premier canal de percolation de flux, tel que décrit à la section 2.4.2.

Ces modèles sont applicables sur quelques décades de champ électrique dans la région de transition reptation-fluage. L'avantage du modèle en loi de puissance est bien sûr sa simplicité analytique. Cependant, les paramètres J_c et n varient avec $\vec{B}$ et T de façon complexe et, lorsque l'on considère une plage d'opération étendue, il ne permet pas de décrire la caractéristique $E - J$ de façon adéquate [27].

Néanmoins, plusieurs tentatives ont été faites pour expliquer l'origine physique de cette loi de puissance. En particulier, si le potentiel d'ancrage est donné par $U(J) = U_0 \log(J/J_c)^n$ (par hypothèse), on retrouve dans le régime de reptation $E \propto e^{-U(J)/k_B T} \propto (J/J_c)^n$, soit précisément une loi de puissance. D'autre part, selon les théories modernes sur les transitions de phases [41], au voisinage de la transition, les différentes quantités physiques observables peuvent être décrites par des lois de puissance universelles, caractérisées par des exposants critiques. C'est l'approche qui a été prise par Fisher et al. [42] et qui conduit au modèle « vortex-glass » (non décrit dans cet ouvrage). Enfin, les approches basées sur une distribution statistique du courant critique se réduisent à un modèle de type percolation (ou en loi de puissance si $J_{c_{min}} \approx 0$) lorsque $J_{c_{min}} \geq 0$ et que l'on travaille avec la forme linéarisée (autour de $J_{c_{min}}$) de la distribution $P(J_c)$, tel que dans les travaux de Okamoto et al. [43]. Ce point sera discuté en détails au chapitre 9.

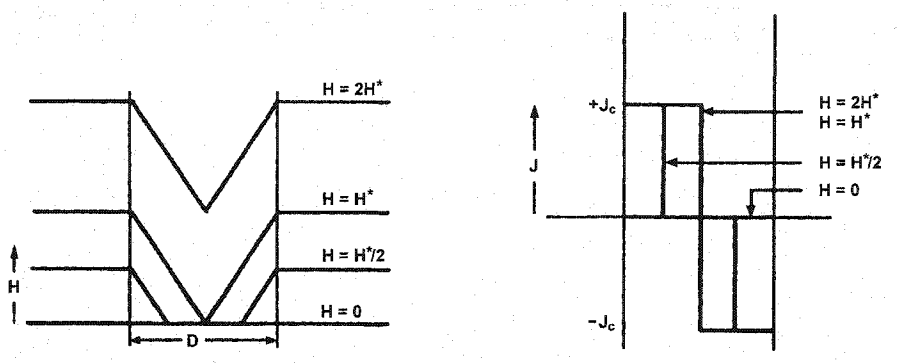
Nous reviendrons fréquemment aux modèles en loi de puissance au cours de cet ouvrage, puisqu'il s'agit d'une référence bien connue. Rhyner [44] y a consacré

un excellent article en 1993. Il y décrit entre autres comment le modèle en loi de puissance permet d'interpoler entre deux régimes fondamentaux limites, soit le cas ohmique, lorsque $n = 1$, et le cas $n \to \infty$, qui n'est rien d'autre que le célèbre **modèle de Bean** [45, 46], aussi appelé **modèle d'état critique**. Comme ce dernier modèle fut un succès pour les supraconducteurs à BT_c et que l'on y fait fréquemment référence dans la littérature, nous lui dédions la prochaine sous-section de ce chapitre.

3.1.2 Modèle de Bean

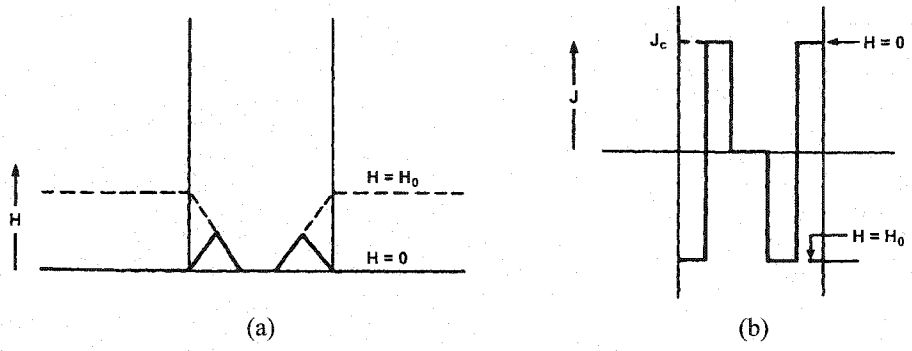
L'énoncé du modèle de Bean stipule qu'il existe une densité de courant macroscopique maximale J_c que le matériau peut transporter de façon persistante, i.e. sans atténuation (donc sans pertes). De surcroît, tout champ électrique, aussi petit soit-il, induira cette densité de courant J_c dans le matériau. Le modèle de base repose sur l'hypothèse que J_c est indépendant de B, ce qui est utile pour illustrer l'approche de façon simple.

Regardons le cas d'une géométrie infinie selon deux dimensions (y et z), mais d'épaisseur D selon l'axe x (i.e. un mur, ou « slab » en anglais). Si on applique un champ externe $\vec{H} = H_y \vec{a}_y$, un courant $\vec{J} = \pm J_c \vec{a}_z$ est induit en surface. Celui-ci masque une partie du champ appliqué, car $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \mathrm{d}H_y/\mathrm{d}x = J_z$. Comme ici $J_z = J_c =$ constante, H_y décroît linéairement à mesure que l'on pénètre dans l'échantillon, jusqu'à ce que $H_y = 0$. À ce point, J_z devient aussi égal à zéro. Ceci est illustré à la FIG. 3.1. On peut y constater que le courant n'occupe alors pas tout le volume de l'échantillon, mais seulement deux régions près de la surface. À mesure que le champ appliqué est augmenté, le front de pénétration du champ avance dans le matériau, de même que les régions dans lesquelles un courant existe. Au point $H = H^* = J_c \frac{D}{2}$, les deux fronts de pénétration se rejoignent, et la distribution du courant ne peut plus changer: le matériau est saturé. Pour $H > H^*$, la valeur de H dépassant H^* s'ajoute donc simplement au profil du champ interne.



Source: C. P. Bean, "Magnetization of high-field superconductors", *Rev. Mod. Phys.*, vol. 36, 1964, p. 32. [46]

FIG. 3.1 – Modèle de Bean pour un champ appliqué croissant pour une géométrie 1D. Les profils de champ magnétique sont illustrés en (a), et la densité de courant en (b). Voir le texte pour les explications.



Source: C. P. Bean, "Magnetization of high-field superconductors", *Rev. Mod. Phys.*, vol. 36, 1964, p. 33. [46]

FIG. 3.2 – Modèle de Bean pour un champ appliqué décroissant pour une géométrie 1D. Les profils de champ magnétique sont illustrés en (a), et la densité de courant en (b). Voir le texte pour les explications.

Il est important de comprendre que tout le phénomène part de la surface et se « diffuse » progressivement vers l'intérieur. Afin d'illustrer ceci, appliquons un champ $H_y = H_0$, puis ramenons ce champ à zéro. La FIG. 3.2 illustre la situation. Dans ce cas, le profil de flux qui existait avant de réduire H_y à 0 ne disparaît pas complètement, car il est figé par les courants persistants. C'est seulement la partie près de la surface qui forme un nouvel état critique. Ce comportement génère des pertes par hystérésis, car il faut fournir de l'énergie pour modifier le profil de flux ainsi figé. Donc, malgré le fait que le courant supraconducteur ne soit pas dissipatif, il existe toujours des pertes dans un supraconducteur de type II soumis à un régime alternatif.

En termes de champ électrique, le modèle de Bean peut s'écrire $E = E_0(J/J_c)^n$, avec $n \to \infty$. En effet, il n'y a que pour $E = 0$ que J peut être égal à 0. Pour tout $E \neq 0$, on a $J = \pm J_c$, ce qui décrit bel et bien le modèle de Bean, tel que constaté par Rhyner [44]. Ceci est important car cela nous permet de traiter le modèle Bean comme un cas limite du problème de diffusion non linéaire. Nous reviendrons sur ce point lors du chapitre 7, qui présente la validation des logiciels de calcul numérique utilisés dans le cadre de cet ouvrage.

Enfin, pour les matériaux à HT_c, le modèle de Bean n'est applicable qu'à basse température, lorsque $U \gg k_B T$, alors que le matériau est dans une phase amorphe. Dans ce cas, lors d'une expérience de magnétisation, le temps de relaxation du champ dans l'échantillon est tellement grand que l'on peut assimiler le profil de flux à un état critique. Il s'agit d'une méthode utile pour déterminer le courant critique à très faible champ électrique. Dans un contexte plus général d'utilisation des matériaux à HT_c, il est préférable d'avoir recours à des modèles plus flexibles (qui peuvent tendre, lorsque cela est pertinent, vers le modèle de Bean), tels que les modèles en loi de puissance, ou encore, les modèles basés sur une distribution statistique de J_c, qui sont l'objet de la prochaine sous-section.

3.1.3 Modèles basés sur une distribution statistique de J_c

Beaucoup plus généraux que les modèles présentés ci-haut, les modèles $E - J$ basés sur une distribution statistique de J_c sont aussi plus solidement justifiés physiquement, surtout si l'on considère que les effets de l'agitation thermique sont inclus dans ceux-ci. Cependant, la manipulation des expressions mathématiques résultant de la double intégration de $P(J_c)$, i.e. les équations (2.7), (2.9) et (2.14), permettant de déterminer $E(J)$, n'est pas une partie de plaisir. Ainsi, peu d'auteurs ont développé des relations explicites pour la caractéristique $E - J$ basée sur une distribution statistique de J_c. Au meilleur de la connaissance de l'auteur, seulement Edelman et Larbalestier [19] l'ont fait pour une distribution normale. Dans la présente thèse, ce travail a été accompli sous une forme légèrement différente, basé sur le formalisme développé au chapitre 2. Quatre distributions statistiques courantes ont été utilisées, soit une distribution normale (2 paramètres), une distribution Gamma (3 paramètres), une distribution de Weibull (3 paramètres) et une distribution Beta (4 paramètres). Les expressions de $P(J_c)$, $Q(J)$ et $E(J)$ pour chacune de ces distributions sont présentées à l'annexe I. Afin d'éviter d'alourdir le texte, nous utiliserons les notations $E_N(J)$, $E_G(J)$, $E_W(J)$ et $E_B(J)$ pour référer à ces différentes caractéristiques $E - J$.

Bien que la distribution normale [17] et la distribution de Weibull [47, 30] soient souvent utilisées dans la littérature, aucune preuve théorique n'a encore montré qu'il s'agisse de formes rigoureusement justifiées. Certains auteurs [48, 49] ont même remarqué que $P(J_c)$ pouvait consister en la somme de deux (ou plus) distributions normales, les différents pics des distributions étant probablement dus à des inhomogénéités locales importantes, voire un endommagement de l'échantillon. Dans notre cas, nous nous en tiendrons à notre hypothèse d'homogénéité, et donc à des distributions conventionnelles à un seul pic. La superposition de plusieurs distributions ne pose aucun problème mathématique, mais augmente significativement le nombre de paramètres décrivant le matériau.

3.1.4 Autres modèles

Il est possible de répertorier d'autre modèles proposés dans des travaux plus spécifiques, chacun de ces modèles étant valide dans un régime donné (i.e. reptation, transition ou fluage). Bien que l'on puisse relativement bien appuyer tous ces modèles expérimentalement, il sont restreints à leur régime. Les modèles basés sur les distributions statistiques qui sont présentés dans cette thèse couvrent une plus large plage de champ électrique, et c'est donc sur ces derniers que nous mettrons l'accent, en relation avec le principal modèle de référence, i.e. le modèle en loi de puissance.

La raison pour laquelle les modèles de matériaux supraconducteurs à HT_c ne se développent pas plus rapidement est qu'il est difficile d'obtenir expérimentalement des mesures cohérentes sur toute la plage $E(\vec{J}, \vec{B}, T)$ pour laquelle le matériau est supraconducteur. Les différentes méthodes utilisées conduisent à des mesures qui ne se « connectent » pas nécessairement bien ensemble entre les différents régimes. Notre laboratoire n'échappe malheureusement pas à la règle, et il faudra souvent se contenter au mieux d'hypothèses ou de mesures indirectes pour vérifier la validité des modèles proposés en dehors de la plage de mesure accessible.

3.2 Dépendance en champ de la caractéristiques *E–J*

Le modèle de Bean est un modèle à un seul paramètre, soit J_c, alors que le modèle en loi de puissance en possède deux, soit J_c et n, et le modèle de type percolation en possède trois, soit J_c, n et $J_{c_{min}}$. Dans tous les cas, J_c apparaît comme paramètre. Dans un premier temps, passons en revue les modèles existant pour modéliser la dépendance en champ de J_c. La dépendance en champ des autres paramètres est beaucoup moins documentée. Ceci sera discuté par la suite.

3.2.1 Dépendance en champ de J_c (modèles *isotropes*)

Il serait lourd de présenter tous les modèles de dépendance en champ de J_c rencontrés dans la littérature. Nous tenterons de synthétiser ces derniers en deux classes principales, soit les modèles de forme inverse, et les modèles de forme exponentielle. La première classe peut s'exprimer sous la forme générale suivante:

$$J_c(B) = \frac{J_{c0}}{\left(1 + \left(\frac{|B|}{B_0}\right)^{\beta}\right)^{\eta}} \,. \tag{3.3}$$

Pour $\beta = 1$ et $\eta = 1$, on retrouve le célèbre modèle de Kim [50], utilisé abondamment pour les supraconducteurs à BT_c. Une variante connue est le modèle d'Urban [51], qui a proposé d'ajouter au modèle de Kim un pré-facteur de la forme $\left(1 - \frac{|B|}{B_{c_2}}\right)$ pour forcer J_c a être nul lorsque $|B| = B_{c_2}$. Une forme un peu plus générale que le modèle de Kim, qui suppose que $\eta = 1$ mais qui laisse β libre, a été utilisé par Müller et al. [52], et très récemment par van der Laan et al. [53], pour modéliser la dépendance à faible champ de matériaux à HT_c. Nous y reviendrons d'ici peu.

La deuxième classe, celle des modèles de forme exponentielle, peut s'écrire comme suit:

$$J_c(B) = J_{c0}\, e^{-(|B|/B_0)^{\alpha}} \,. \tag{3.4}$$

Le cas $\alpha = 1$ correspond au modèle proposé par Fietz et al. [54] pour les matériaux à BT_c. Plusieurs auteurs ont proposé une forme exponentielle de ce type pour modéliser le comportement des matériaux granulaires à HT_c, entre autres Horvat et al. [55] et van der Laan et al. [53].

Ce dernier présente une argumentation fort intéressante qui unit les deux modèles précédents pour le Bi-2223. Il affirme que trois régimes de dépendance en champ existent. D'abord, la région à faible champ, dominée par le champ propre. Ensuite, la région à champ moyen, contrôlée par les liens faibles (régime inter-

grains), i.e. la connectivité entre les grains. Enfin, la région à fort champ, contrôlée par les propriétés d'ancrage intrinsèques des grains (régime intra-grain), qui se manifeste par la présence de liens forts entre certains grains. Le régime de champ propre n'est pas représentatif des propriétés intrinsèques du matériau, et il doit être exclu de la modélisation explicite. Cependant, en se basant sur les deux autres régimes, van der Laan suggère qu'il existe deux types de chemins de percolation pour le courant et propose que l'on peut modéliser ce comportement simplement par la mise en parallèle de ces deux chemins. Pour les liens faibles, il propose une dépendance de la forme (3.3), avec $\eta = 1$, et pour les liens forts, il propose la forme (3.4). Pour la mise en parallèle, les deux contributions au courant critique sont simplement additionnées.

D'autre part, il fait le constat qu'à des températures de l'ordre de l'azote liquide, la contribution inter-grain est très faible. Ceci résulte en apparence en un modèle de type exponentiel, i.e. l'équation (3.4), à laquelle on peut ajouter une faible constante représentant la trace de la descente asymptotique vers 0 de la contribution inter-grain. C'est le modèle que l'on a utilisé au chapitre 8 pour un matériau isotrope fabriqué par la compagnie Hoescht.

On rencontre à l'occasion des auteurs [56] qui tentent de modéliser la dépendance en champ propre de J_c explicitement. Ceci serait correct si on considérait un modèle global, i.e. $I_c(B_{ext})$, mais dans une optique de modèle local, c'est un non sens, car les effets du champ propre sont implicitement pris en considération lors des calculs numériques basés sur le modèle local. En incluant les effets du champ propre a priori, on fausse considérablement le comportement physique simulé.

3.2.2 Dépendance en champ de J_c (modèles *anisotropes*)

Afin de considérer l'effet de l'angle du champ magnétique, on peut tout simplement reprendre les modèles $J_c(B)$ isotropes et ajouter une dépendance angu-

laire à un ou plusieurs de leurs paramètres, de façon à obtenir un modèle de la forme $J_c(B,\theta)$. Une approche plus unificatrice, qui peut parfois conduire au même résultat, est de trouver une loi d'échelle qui permette de ramener sur une même courbe maîtresse $J_c\big(|B|f(\theta)\big)$ tous les points mesurés. Tout au long de cet ouvrage, nous prendrons pour acquis que $\theta = 0°$ correspond à $\vec{B}$ parallèle (noté $B_\parallel$) à l'orientation cristallographique $a-b$, ou du moins à la tendance locale, puisque les grains peuvent être plus ou moins mal alignés. Évidemment, la notation $B_\perp$, qui désigne la composante perpendiculaire au plan $a-b$ (donc parallèle à l'axe c), correspond à $\theta = 90°$.

Une forme fréquemment utilisée est $f(\theta) = \sin\theta$, qui ne considère que la composante transverse du champ. Pour des matériaux fortement anisotropes, cette approximation est probablement justifiable, mais dans le cadre de cette recherche, nous tenterons de développer une formulation plus générale qui permette d'inclure les modèles basés sur des distributions statistiques de J_c. Pour y arriver, il faut introduire d'autres types de modèles qui nous permettront d'interpoler entre les régimes parallèle et transverse. C'est l'objet de la sous-section suivante.

3.2.3 Anisotropie des champs de transition

Appelons champ de transition tout champ B_T correspondant à un changement de phase, e.g. B_g, B_m ou B_{c_2}. Le cas de B_{c_2} a souvent été traité pour les matériaux à BT_c. Par exemple, dans le modèle de Lawrence-Doniach [57], qui considère des couches minces supraconductrices couplées entre elles par un effet Josephson, on obtient une relation quadratique pour l'expression (implicite) de B_T (i.e. B_{c_2} dans ce cas) vs θ, i.e.

$$\left(\frac{B_T(\theta)\,\sin\theta}{B_{T_\perp}}\right)^2 + \left(\frac{B_T(\theta)\,\cos\theta}{B_{T_\parallel}}\right)^2 = 1\,, \tag{3.5}$$

qu'on peut réécrire sous la forme explicite suivante:

$$B_T(\theta) = \frac{B_{T_\parallel}}{\sqrt{\gamma^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta}} \,, \tag{3.6}$$

avec $\gamma = B_{T_\parallel}/B_{T_\perp}$, soit le ratio d'anisotropie intrinsèque (on parle ici de matériau cristallins, et non granulaires). Si les plans sont entièrement isolés les uns des autres (cas d'un film mince), on obtient le résultat (implicite) de Tinkham [58] pour B_T vs θ, i.e.

$$\left(\frac{B_T(\theta)\,|\sin\theta|}{B_{T_\perp}}\right) + \left(\frac{B_T(\theta)\,\cos\theta}{B_{T_\parallel}}\right)^2 = 1 \,. \tag{3.7}$$

La différence avec (3.5) est que le carré du terme $\sin\theta$ n'apparaît plus. On peut aussi écrire cette expression sous forme explicite, i.e.

$$B_T(\theta) = B_{T_\parallel}\left(\frac{\sqrt{\gamma^2 \sin^2\theta + 4\cos^2\theta} - \gamma\,|\sin\theta|}{2\cos^2\theta}\right) \,, \tag{3.8}$$

avec γ définit tel que ci-haut, et $B_T(\theta) = B_{T_\perp}$ lorsque $\cos^2\theta = 0$ (cette limite est singulière).

Ces équations sont basées sur le comportement d'un matériau cristallin. En termes de matériaux à HT_c, le modèle de Lawrence-Doniach s'applique bien à des matériaux dont les plans supraconducteurs sont couplés, comme l'YBCO. On dit de ce dernier qu'il possède un comportement 3D (sur une assez large plage d'opération), et c'est ce qui explique ses propriétés d'ancrage intrinsèques élevées. D'autre part, le modèle de Tinkham s'applique plutôt à des matériau qui ont un comportement 2D, i.e. dont les plans d'oxyde de cuivre sont découplés les uns des autres, comme le BSCCO. C'est principalement la longueur de cohérence qui détermine l'efficacité du couplage entre les plans. L'ordre de grandeur de cette dernière est de $\xi \approx 2.8$ Å pour l'YBCO et $\xi \approx 0.1$ Å pour le BSCCO [2, section 9.2.3].

Malgré le fait que ces modèles ne soient strictement applicables que pour les matériaux cristallins, il sont parfois appliqués tels quels dans la modélisation de matériaux granulaires à HT_c [59], avec un ratio d'anisotropie effectif approprié. D'autre part, Kiss et Okamoto [60] ont proposé une approche qui prend en considération la distribution statistique (Gaussienne) de l'orientation des grains, dans le cadre de l'un ou l'autre des deux modèles ci-haut.

3.2.4 Dépendance en champ de $J_{c_{min}}$ (et $J_{c_{max}}$)

Le paramètre $J_{c_{min}}$ a été défini au chapitre précédent comme le début de la transition amorphe-liquide (pour B et T donnés). De même, $J_{c_{max}}$ correspond à la fin de la transition, i.e. au début du régime de fluage linéaire. Nous savons aussi que le produit $\vec{J} \times \vec{B}$ donne la force par unité de volume exercée sur les vortex. En supposant $J \perp B$, on peut étudier la dépendance des produits $J_{c_{min}}B$ et $J_{c_{max}}B$ en fonction de B. Ceci est couramment rencontré dans la littérature pour des variables macroscopiques ($J = I/S$ et $B = B_{ext}$), et donc le résultat est donc une force d'ancrage macroscopique en fonction du champ externe appliqué. À température constante, on sait qu'il est possible de ramener approximativement sur une seule courbe maîtresse les points expérimentaux. L'expression anisotrope utilisée par Kiss et Okamoto [60] est

$$J_{c_{min}}B = A\Big(B_{g_0}(\theta)\Big)^{\zeta}\left(\frac{B}{B_{g_0}(\theta)}\right)^{\gamma}\left(1-\frac{B}{B_{g_0}(\theta)}\right)^{\delta}, \tag{3.9}$$

où A, ζ, γ et δ sont des paramètres qui dépendent des mécanismes d'ancrage, B est l'amplitude du champ et $B_{g_0} = B_g\big|_{J_{c_{min}}=0}$. La variation de B_{g_0} avec θ pourrait être de la forme (3.6) ou (3.8). L'expression (3.9) peut aussi être utilisée pour $J_{c_{max}}B$, en remplaçant B_{g_0} par $B_{m_0} = B_m\big|_{J_{c_{max}}=0}$. De plus, toujours selon Kiss et Okamoto [60], le produit $J_{c_{min}}B$ dans la région $J_{c_{min}} < 0$ (cf section 2.4.3) suit la

loi d'échelle suivante:

$$J_{c_{min}} B = -A\Big(B_{g_0}(\theta)\Big)^{\zeta} \left|1 - \frac{B}{B_{g_0}(\theta)}\right|^{\delta} . \tag{3.10}$$

On voit que si l'on divise (3.9) par B, on obtient une forme fonctionnelle pour $J_{c_{min}}(B,\theta)$ et $J_{c_{max}}(B,\theta)$. Cependant, l'expression résultante tend vers l'infini lorsque B tend vers 0, ce qui n'est pas physiquement correct. Ce modèle ne permet donc pas de modéliser correctement le comportement de $J_{c_{min}}$ et $J_{c_{max}}$ près de $B = 0$. Cela demeure un bon modèle pour des champs moyens et forts, mais il serait nécessaire le corriger pour traiter des champs faibles.

3.2.5 Dépendance en champ du paramètre n

Le paramètre n des modèles en loi de puissance ou de type percolation est en fait la pente du graphique $\log(V) - \log(I)$, lorsque ce dernier présente une section linéaire. On peut donc définir $n(J)$ de façon générale par l'équation suivante [19]:

$$n = \frac{\mathrm{d}\log(E)}{\mathrm{d}\log(J)} = \frac{\mathrm{d}\log(E)}{\mathrm{d}E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}J}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\log(J)} = \frac{J}{E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}J} = \frac{\rho_{ff}}{\rho}Q(J) , \tag{3.11}$$

où ρ est la résistivité statique ($= E/J$), et ρ_{ff} la résistivité différentielle de fluage, telle que définie précédemment.

Comme il s'agit d'un paramètre relativement arbitraire, il n'y a pas de loi physique qui permette de poser directement une dépendance en B. En général, les auteurs font suivre à n une dépendance en B du même type que celles utilisées pour J_c [61], et cela correspond assez bien aux mesures [62, 63]. Nous proposons cependant au chapitre 9 un nouveau modèle empirique pour $n(B,\theta)$, qui correspond bien aux mesures effectués sur le matériau d'ACL.

3.2.6 Dépendance en champ des paramètres de $P(J_c)$

Tel que mentionné précédemment (cf section 3.1.3), les modèles basés sur des distributions statistiques de J_c n'ont à peu près jamais été traités de façon analytique. Par conséquent, à part $J_{c_{min}}$ et $J_{c_{max}}$, traités précédemment, ainsi que ρ_{ff}, traité dans la prochaine sous-section, aucun modèle de variation de ces paramètres avec B ne se retrouve à l'heure actuelle dans la littérature. Ce sera donc une contribution de cette thèse d'en observer la dépendance, mais il reste un travail expérimental colossal à effectuer avant d'en arriver à des modèles valides sur une large plage d'opération. Toutefois, Yamafuji et Kiss [30] ont effectués des simulations numériques ayant pour but de calculer la variation de la forme de la distribution $P(J_c)$ avec la température. Ces derniers ont alors constaté que l'allure générale de la distribution changeait relativement peu, quoique celle-ci semble s'élargir à mesure que l'on réduit la température. À température constante, on peut raisonnablement supposer un comportement similaire pour la dépendance en champ, mais ceci reste à vérifier.

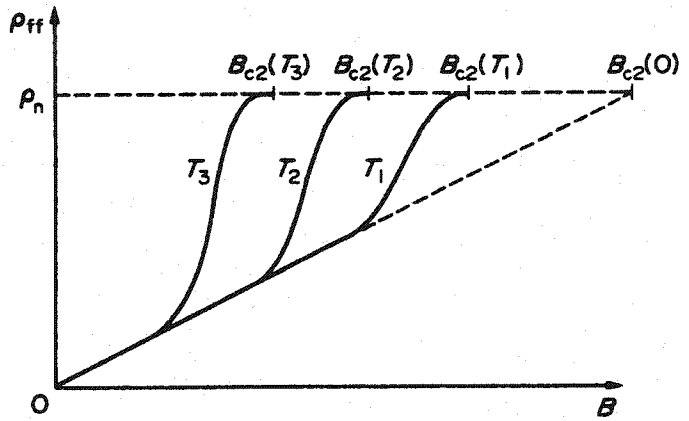
3.2.7 Dépendance en champ de la résistivité de fluage

Mis à part J_c, la résistivité de fluage ρ_{ff} est l'autre paramètre fondamental lorsqu'on se base sur une distribution statistique $P(J_c)$ pour déterminer $E - J$. La mesure de ρ_{ff} n'est cependant pas du tout évidente, en raison des courant élevés requis. Pour les matériaux à BT_c, Kim et al. [64] ont rapportés plusieurs mesures, interprétations (la présence d'un effet paramagnétique, par exemple) et modèles pour $\rho_{ff}(B)$. L'approche la plus simple, qui est connue sous le nom du modèle de Bardeen-Stephen [65], s'écrit

$$\rho_{ff} = \rho_n \frac{B}{B_{c_2}(0)} \,. \tag{3.12}$$

Ce modèle n'est strictement valable qu'à basse température, tel que l'illustre la FIG. 3.3. Cependant, selon les mesures de Kunchur [31], il semble que (3.12) soit applicable même aux matériaux à HT_c à la température de l'azote liquide, pour autant que B soit suffisamment inférieur à $B_{c_2}(T)$. Il faut cependant considérer ce résultat avec prudence car l'interprétation de la résistivité de fluage faite par cet auteur est différente de l'interprétation classique (cf section 2.6). Néanmoins, dans le cadre de cette thèse, nous utilisons le modèle de Bardeen-Stephen, étant donné sa simplicité et l'absence de mesures plus précises. Notons quand même que ρ_{ff} pourrait en principe être déterminé de façon indépendante aux autres paramètres, si l'équipement de laboratoire le permettait, ce qui rendrait d'autant plus fiables les autres paramètres, qui sont obtenus par un lissage non linéaire multi-paramétrique.

Enfin, le modèle de Bardeen-Stephen cause un léger problème au niveau du calcul numérique. En effet, pour $B = 0$, on a $\rho_{ff} = 0$, ce qui implique $\rho = 0$. En



Source: J. E. Evetts, "Resistive transition and flux flow in superconducting materials", in: *Concise Encyclopedia of Magnetic and Superconducting Materials, ed. J. E. Evetts*, Pergamon, 1992, p. 481. [8]

FIG. 3.3 – Schéma de la dépendance de ρ_{ff} avec B et T, avec $0 < T_1 < T_2 < T_3$. À mesure que la température augmente, la plage de champ pour laquelle le modèle de Bardeen-Stephen (3.12) s'applique se rétrécit significativement.

pratique, le champ propre rend $B \neq 0$, ce qui vient régulariser la situation, mais il est possible qu'en un point du matériau, B soit vraiment nul. Notons qu'il y a un autre cas où l'on obtient $\rho = 0$, soit lorsque $J < J_{c_{min}}$. Dans tous les cas, la façon (non physique) de s'en sortir est de toujours ajouter un seuil de résistivité minimale à ρ (i.e. $\rho = \rho(J, B, T) + \epsilon$), de façon à ce que ρ ne soit jamais nul. Il s'agit de choisir ϵ suffisamment petit pour que l'on ne perturbe pas le problème concerné. Une approche plus physique consisterait à limiter J par J_d (la **densité de courant de dé-pairage**, à laquelle les paires de Cooper se brisent) lorsque B et ρ_{ff} sont nuls. Encore mieux serait de modéliser l'effet Meissner, ce qui empêcherait complètement ce cas d'arriver, mais cela s'avère une approche beaucoup trop complexe pour être viable.

3.3 Simulation numérique

Il existe un grand nombre de méthodes numériques. L'objectif de cette section n'est pas de les décrire précisément, mais plutôt de rapporter avec quels modèles de caractéristique $E - J$ d'autres auteurs ont utilisé ces méthodes pour l'étude des supraconducteurs à HT_c. Cependant, pour des fins de clarté, nous séparons tout de même les différentes méthodes en différentes sous-sections .

3.3.1 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est certainement l'une des plus populaire à l'heure actuelle, quoique cet intérêt est relativement récent pour les problèmes d'électromagnétisme [66]. Elle est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle qui donne l'énergie totale du système modélisé, décrit en termes d'équations différentielles. La géométrie du problème en question doit au préalable être discrétisée en éléments géométriques de forme simple, le plus souvent des triangles ou des quadrilatères. On appelle cette géométrie discrétisée un **maillage**. Sur chaque élément, on approxime

la solution par une superposition de différentes **fonctions de base**, dont les coefficients sont les inconnues du problème. Après une systématisation de la notation, on peut regrouper les inconnues dans un seul vecteur $\boldsymbol{X}$, précédé d'une matrice de coefficients $\boldsymbol{M}$, qui découlent de la géométrie et des propriétés des équations du problème. De l'autre côté de l'égalité, un vecteur $\boldsymbol{S}$ contentant les contributions des conditions aux frontières et termes sources apparaît. On aboutit donc à une formulation matricielle du type

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{S} \tag{3.13}$$

Le vecteur X est déterminé soit en factorisant M, soit en utilisant une méthode de solution itérative [67], ce qui est dans certains cas plus rapide qu'une factorisation complète lorsque la matrice est très grande. Notons que dans le cas des méthodes différentielles (i.e. les méthodes basés sur les équations différentielles décrivant le problème), dont la méthode des éléments finis fait partie, la matrice n'est pas pleine, mais seulement les éléments autour de sa diagonale principale sont non nuls. Il faut également spécifier les conditions aux frontières du maillage afin de déterminer une solution aux équations différentielles. Enfin, l'erreur dans la solution dépend d'abord de la pertinence des fonctions de base choisies (souvent des polynômes), puis de la qualité du maillage.

Le principal inconvénient des méthodes différentielles en électromagnétisme est que l'on doit mailler l'air puisque les champs existent jusqu'à l'infini. De plus, on doit généralement solutionner pour le potentiel magnétique (vecteur ou scalaire) et dériver la solution pour obtenir des quantités comme B et J. Ceci implique que des solutions très précises doivent être obtenues afin que les dérivées soient elles aussi suffisamment précises. En pratique, cela signifie d'utiliser des éléments d'ordre 2 ou supérieur.

Pour l'étude des supraconducteurs, plusieurs auteurs ont choisis la méthode des éléments finis. Amemiya a développé des programmes d'éléments finis « maison » [68] pour étudier les pertes ca dans les supraconducteurs à HT_c. Dans tous ses travaux, il utilise une loi de puissance pour modéliser la caractéristique $E - J$. Lorsqu'il modélise la dépendance en champ, il utilise une loi de Kim pour J_c et n [61]. Il utilise aussi une résistivité minimale ϵ pour éviter les instabilités numériques, ce qui est inévitable lorsque ρ peut prendre une valeur nulle (i.e. en $J = 0 \Rightarrow \rho = 0$ pour une loi de puissance).

Toujours pour étudier les pertes ca, Paasi et Lehtonen ont aussi développé des programmes d'éléments finis maisons [69]. Ils utilisent aussi des modèles basés sur une loi de puissance pour la caractéristique $E-J$. Il semble aussi qu'ils aient utilisé un logiciel commercial (*OPERA 2D®*, de *Vector Fields*) pour un problème dont la dépendance en champ anisotrope de J_c et n était prise en considération [70], mais aucun détail sur les modèles utilisés ne figure dans leur article. Avec ce même logiciel, ils proposent une façon de traiter l'anisotropie de la résistivité de façon classique, soit à l'aide d'un simple tenseur de résistivité [20].

Enfin, dans le domaine des propriétés plus fondamentales des matériaux, Baranowski [71] s'est intéressé à l'anisotropie de ρ. Il a étudié par simulation numérique la répartition du courant dans des configurations telles que des joints de grains (pour différents angles) et le transfert du courant d'un contact métallique vers un matériau supraconducteur, le tout en cc. Pour arriver à ses fins, il a développé une importante quantité de programmes faits maison dans l'environnement *Matlab®*. Ses modèles de supraconducteurs étaient cependant basés sur des lois de puissance, à l'instar des auteurs précédents. Les travaux de Baranowski ont été poursuivis par Zeimetz et al. [72], qui ont utilisé, en plus des lois de puissance, des modèles de type percolation.

3.3.2 Méthode des « edge elements »

Une variante de la méthode des éléments finis est la méthode des « edge elements » [73] (à ne pas confondre avec la méthode des éléments frontières, ou « boundary elements », qui n'est pas traitée dans cette thèse). Dans cette dernière, au lieu d'utiliser des fonctions de base scalaires sur les éléments, on utilise plutôt des vecteurs de base sur les arrêtes des éléments. Les principaux avantages de cette méthode sont la possibilité de tenir compte des singularités dans les coins, l'élimination des « spurious modes » (en analyse harmonique), ainsi que la simplicité d'imposer les conditions aux frontières tangentielles (en particulier la loi d'Ampère, qui permet d'imposer un courant dans un conducteur). Il est aussi possible d'utiliser des bases dites hiérarchiques [74] afin de faire coexister des éléments d'ordre différent (i.e. avec un nombre différent de vecteurs de base par élément) sans devoir utiliser d'artifices élaborés, comme dans la méthode des éléments finis conventionnelle.

Le logiciel *MagNet*® (décrit en annexe V), que nous possédons au laboratoire, est basé sur cette méthode. Suite à une demande de notre part, la compagnie a développé un module qui permet de traiter des résistivités non linéaires, anisotropes, non homogènes et dépendantes du champ magnétique, pour des problèmes 3D en cc [75] et en régime transitoire [76]. La validation de ce puissant outil de calcul est présentée aux chapitres 6 et 7.

3.3.3 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies fait aussi partie des méthodes différentielles. Les mêmes remarques générales qu'à la section 3.3.1 s'appliquent donc à elle. Cependant, en raison de sa formulation, la flexibilité du maillage est moins grande que pour les éléments finis, car à moins d'effectuer des transformations sophistiquées, nous sommes restreints à des grilles régulières. Pour cette raison, on l'utilise largement pour des problèmes 1D, puisque le maillage est simple, mais peu pour des

problèmes de dimension supérieure. C'est l'une des méthodes utilisées au chapitre 7 pour effectuer la validation du logiciel *MagNet*®.

3.3.4 Méthodes intégrales

Les méthodes intégrales sont une option moins populaire que les méthodes différentielles, car leur formulation est en général assez complexe et les problèmes non linéaires sont difficiles à traiter [77]. Comme leur nom l'indique, elles sont basées sur des équations intégrales plutôt que différentielles. En fait, dans cette approche, on calcule directement le potentiel à partir de l'intégrale de potentiel, en intégrant sur tout l'espace les termes sources (dont la distribution est l'inconnue du problème), ce qui permet de ne pas avoir à mailler l'air et ne requiert aucune condition aux frontières. En contrepartie, la matrice de calcul est pleine, ce qui peut rendre la solution du problème extrêmement longue, particulièrement pour des maillages très fins. Cette matrice est cependant indépendante de paramètres des matériaux, et ne contient donc que de l'information géométrique sur le problème, d'où il n'est nécessaire de l'inverser qu'une seule fois. Lorsque l'on s'intéresse aux termes sources (e.g. la densité de courant J), c'est une approche intéressante car ces derniers sont obtenus directement comme solution (pas de dérivées du potentiel requises, comme dans les méthodes différentielles).

En supraconductivité, plusieurs auteurs ont utilisé des méthodes intégrales relativement primitives, mais qui fonctionnent assez bien, pour différents problèmes en ca. D'abord, Brandt [78] a initié le bal en proposant une méthode basée sur une grille régulière, représentant un conducteur rectangulaire 2D, qui est soumis à un champ externe alternatif. La densité de courant et le potentiel magnétique sont supposés constant sur chaque élément rectangulaire. Brandt observe la distribution du courant et les profils de flux dans un grand nombre de contextes (reptation, faible signal ca, différents facteurs de forme de conducteurs, etc...). Dans ses travaux, il n'utilise que des modèles en loi de puissance indépendants du champ.

D'autres auteurs ont généralisé la méthode de Brandt pour inclure un courant de transport. D'abord, Yazawa et al. [79] ont inclus la possibilité d'ajouter un courant de transport et une dépendance en champ de J_c, en calculant le champ à partir de la loi de Biot-Savart pour des conducteurs ronds. Cette approche n'est bonne que pour des éléments à peu près carrés. Néanmoins, les résultats de leurs simulations des pertes ca correspondent assez bien à leurs mesures expérimentales. Rhyner [80] présente essentiellement la même généralisation, avec un peu plus de rigueur mathématique, et suggère de plus une façon de profiter de la symétrie du problème pour réduire le temps de calcul. Dans les deux cas, des lois de puissance sont utilisées pour modéliser les supraconducteurs.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue la plupart des modèles courants de la caractéristique $E - J$ ainsi que de la dépendance en champ de leurs principaux paramètres. Il s'agit d'une revue importante sur laquelle nous nous appuierons à l'occasion lors de la modélisation de divers matériaux, au préalable caractérisés expérimentalement par des mesures $V - I$ (chapitres 8 à 10).

La dernière section du chapitre présente les méthodes numériques utilisées par divers auteurs afin d'étudier les matériaux supraconducteurs. Dans tous les cas, et ce malgré la diversité des méthodes numériques utilisées, ces auteurs ont utilisé des lois de puissance pour modéliser les matériaux. Il était donc d'intérêt d'explorer les possibilités offertes par d'autres modèles, en particulier les modèles basés sur des distributions statistiques de J_c (présentés en annexe I). Seulement une première exploration sera présentée dans le cadre de cette thèse (cf chapitre 9), mais si cela s'avère concluant à la suite de travaux futurs, un lien intéressant aura été fait entre le monde de la physique et celui de l'ingénierie.

De plus, mis à part Yazawa, aucun des auteurs mentionnés ci-haut n'a formulé sa méthode numérique de façon à pouvoir considérer explicitement la dépendance en champ des paramètres, contrairement à l'approche prise dans cette thèse, dans laquelle la dépendance en champ est une préoccupation première. Ce sera l'objet des chapitres 5 à 7 de proposer des développements mathématiques appropriés afin d'y parvenir efficacement.

Deuxième partie

Méthodes numériques: développement et validation

CHAPITRE 4

PRÉSENTATION DES CHAPITRES SOUS FORME D'ARTICLES

Ce chapitre a été écrit pour faciliter le lien entre les chapitres conventionnels et les chapitres écrits sous forme d'articles (i.e. les chapitres 5, 6 et 8). Ces articles ont été soumis à différentes revues scientifiques, lesquelles sont identifiées au début de chacun des chapitres en question.

4.1 Vers de nouvelles approches de calcul (chapitres 5 et 6)

Poursuivons la discussion entamée à la section 3.3.4 à propos des méthodes intégrales pour solutionner le problème électromagnétique dans un supraconducteur, i.e. déterminer la densité de courant J et la densité de flux $\vec{B}$. Nous traiterons ces deux problèmes séparément, en commençant par le calcul de $\vec{B}$ lorsque J est supposé connu (chapitre 5), puis ensuite par le calcul de J proprement dit (chapitre 6), en se basant sur les résultats du chapitre 5 lorsque nécessaire. Ces travaux constituent la base de la plupart des développements figurant dans cette thèse. Voyons maintenant plus précisément le contexte qui nous a conduit à suivre cette approche.

D'abord, lorsque l'intégrale de potentiel se résout de façon analytique, comme c'est le cas pour l'équation de Biot-Savart en 2D sur un élément rectangulaire avec J constant, on peut passablement améliorer les approches intégrales présentées à la section 3.3.4. En fait, il devient possible de considérer la variation du potentiel sur les éléments, plutôt que de supposer celui-ci constant. De plus, la solution analytique peut aussi être obtenue lorsque l'on utilise une variation bilinéaire de J sur un élément rectangulaire, ce qui permet d'enrichir grandement la solution. Mais la principale raison pour utiliser les solutions analytiques, c'est que cela nous évite

d'avoir à traiter le comportement singulier du potentiel lorsque l'on calcule ce dernier à l'intérieur ou sur la frontière de l'élément. Le calcul en 2D de la solution analytique pour A (le potentiel) et $\vec{B}$ lorsque l'on considère une variation bilinéaire de J sur des éléments rectangulaires constitue précisément le propos du chapitre 5. Afin de rendre la méthode applicable à des cas réels, l'article présente une façon de relier un grand nombre de points de J et de $\vec{B}$ à l'aide une écriture matricielle compacte. Ceci est requis lorsqu'il y a plusieurs éléments dans le maillage de la géométrie du problème. De cette façon, il est possible de tenir compte du fait que plusieurs conducteurs contribuent à générer le champ.

Une fois que l'on peut relier J et $\vec{B}$ directement grâce à la formulation matricielle, il est possible de passer au calcul de J lui-même, lorsque la résistivité ρ du matériau dépend de J (non-linéarité), $\vec{B}$ (magnéto-résistance) et/ou même de la position $\vec{r}$ (non-homogénéité). Cela devient assez simple, car la principale difficulté associée à ce type de problème est le calcul de $\vec{B}$. Le chapitre 6 présente un algorithme permettant d'arriver à solutionner ce problème en 2D, pour le cas cc. Quatre exemples servant à la validation de l'algorithme sont présentés à la fin de l'article. Un algorithme 1D pour effectuer ce même calcul en ca est décrit au chapitre 7, qui présente la validation des nos outils de calcul numérique en ca. En particulier, ces deux algorithmes de calcul de J (cc et ca) ont servi à effectuer la validation du logiciel *MagNet*®, qui est l'outil de base que l'on envisage utiliser dans le futur (voir annexe V pour une description du logiciel). De plus, la version cc nous a permis d'effectuer certaines simulations qui auraient autrement été extrêmement longues à réaliser avec *MagNet*®, en particulier celles présentées au chapitre 10.

4.2 Vers de nouvelles approches de caractérisation (chapitre 8)

La méthode de calcul de J en cc a servi de base pour mettre sur pied une méthode de caractérisation des paramètres locaux de la résistivité à partir de

courbes $V - I$ expérimentales, tout en considérant le champ propre (chapitre 8). En effet, l'approche présentée dans cet article repose sur le calcul de J en cc dans un échantillon 2D, ce que fait précisément l'algorithme développé au chapitre 6 et introduit ci-haut. Cet échantillon doit au préalable avoir été caractérisé par des mesures $V - I$ dans différentes conditions de champ magnétique. En partant d'un modèle $\rho(J, \vec{B}, \vec{r})$ dont les paramètres sont variables, on calcule pour chaque I expérimental la distribution du courant sur la section (i.e. J) et la tension V associée. De là, on optimise les paramètres de façon à minimiser l'erreur entre les courbes $V - I$ calculées et celles mesurées. Les paramètres optimisés sont considérés comme étant des paramètres locaux effectifs (cf section 2.3.2), ou encore mésoscopiques. Cette méthode est testée sur deux types de matériaux à même l'article, et sur un troisième matériau au chapitre 9. Les résultats nous portent à croire que la précision accrue des paramètres est significative, mais beaucoup d'autres matériaux devront être testés dans différentes conditions expérimentales avant que nous puissions conclure formellement.

CHAPITRE 5

EFFICIENT EVALUATION OF BIOT-SAVART INTEGRALS FOR CONTINUOUSLY VARYING CURRENT DENSITIES IN 2D

Ce chapitre présente le texte intégral d'un article soumis pour publication à *IEEE Trans. Magn.* L'article n'a pas été accepté directement sous cette forme, et une nouvelle version, grandement abrégée, a été écrite et re-soumise en date d'octobre 2002. Néanmoins, comme la première version était beaucoup plus complète, c'est celle-ci qui a été conservée comme chapitre de thèse. La référence à la nouvelle version de l'article est donnée dans les références à la fin de la thèse [81]. Au moment du dépôt final de cette thèse, i.e. décembre 2002, l'éditeur n'avait pas encore envoyé son verdict final.

Abstract

A simple semi-analytical method to compute the flux density and the vector potential generated by a continuously varying current distribution in long straight conductors in a non-magnetic environment has been developed. The current distribution is explicitly built with a set of bilinear rectangular elements, but linear triangular elements could be used as well. The analytical solutions for the vector potential and the flux density of a bilinear rectangular element have been determined, and the resulting equations are given in this paper. The total field is determined by superposing the contribution of each element of a discretized geometry. The complete development that leads to a matrix formulation is presented. The method was developed to support multi-conductor problems. An empirical rule to avoid cancellation errors is also presented. This rule allows the use of rectangular elements with aspect ratios as high as 10^4 with excellent accuracy. Finally, the accuracy of bilinear elements is compared to that of constant elements in a convergence study.

Keywords–Analytical equations, numerical methods, bilinear current distribution, integral equations, vector potential and magnetic flux density.

5.1 Introduction

Magnetic field and potential computation based on the analytic solution of the Biot-Savart integral (valid only in a non magnetic environment) over a specified domain or its equivalent for the potential have been covered extensively in the literature. MacMillan published one of the first 3D analytic solution of this kind for a cube with constant charge density (equivalent to current density, which will be used hereafter) [82, pp. 72–81]. Many other 3D analytic solutions have come later, among them the potential of a plane triangle with constant [83], linear [84] and quadratic [85] current density. A generalization of the previous results for the potential due to constant and linear current densities was published by Wilton et al. [86]. Wilton's approach implies a reduction of the dimensionality of the potential integral using the divergence theorem, which reduces all volume and surface integrals to line integrals. His results are therefore applicable to arbitrary polygonal cross-section geometries. Variants of this approach were used in parallel by Urankar [87], Pissanetzky et al. [88] and Ciric [89] for the derivation of the potential and the magnetic field components due to a 3D constant current density. Recently, Suh [90] published an interesting review on the evaluation of the Biot-Savart integral. His paper presents a more systematic approach than Wilton's one, and concentrates on 3D field components rather than the potential. Analytical equations are given for constant and linear current distributions over polygonal cross-sections or volumes, and a general method for finding higher order solutions is also presented. These equations are very compact since they are expressed as summations over the edges of the geometry.

The current paper addresses the problem of calculating the potential and the field components of infinitely long straight conductors (2D case) carrying an arbitrary continuously varying current distribution. The most natural approach is to discretize the conductor geometry in elements, and use a nodal interpolation to represent the current variation over an element. In all the above 3D developments, only Okon et al. [84, 85] has presented closed form results (for triangular elements) based on first and second order nodal interpolation. Most of the other results that consider a continuously varying current density [86, 90] on polygons are expressed in vector form (i.e. distance and normal vectors are used instead of elements' nodes), which is certainly compact and elegant, but not directly usable in a node-based current distribution solver.

More specifically, this paper presents compact closed form equations for a 2D straight rectangular element of arbitrary aspect ratio, over which the current density is modeled with a bilinear interpolation of the values of the four corner nodes. Next, it is shown how to combine the contribution of each element of each conductor in a single matrix, in order to express the potential and the field components as a simple matrix-vector product, the current density at each node being represented as a single column vector. A section treating cancellation errors then follows, since this is always a concern with analytic solutions. A convergence study is also included to compare the increased accuracy given by the bilinear elements, as compared to constant elements. Finally, miscellaneous points about the method are discussed.

5.2 Mathematical formulation

5.2.1 Problem definition

This paper addresses the case of infinitely long straight conductors (2D problem), having their cross-section in the $x - y$ plane, and in which a current flows

along the z axis. This current is distributed according to the function $J_z(x, y, t)$. The flux density then possesses two components, B_x and B_y, and the magnetic vector potential, which will be used later, has only a z oriented component, A_z (see FIG. 5.1). We suppose the current distribution as known a priori. Algorithms to couple this method to a dc or ac current density solver must be written separately. For the dc case, see [91].

In addition to the previous considerations, it is important to point out that magnetic materials are not allowed in the model, such that $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ holds everywhere. Furthermore, to apply the method, the conductor geometry must be discretized in elements. Only conductors with 90° corners and straight edges can be modeled accurately with the results given in this paper, since these results are for rectangular elements. However, the method is not restricted to rectangular elements. All the developments presented here are applicable to any shape of element (triangular, for instance) with very few changes. The use of triangular elements is

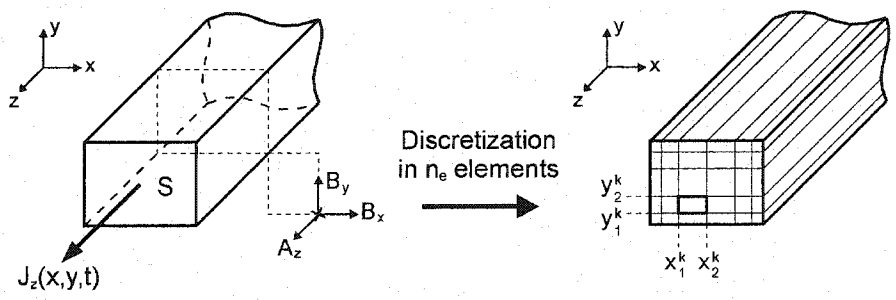


FIG. 5.1 – *Left*: typical 2D conductor geometry considered in this paper. The conductor cross-section S lies in the $x - y$ plane, and the current density exists along the z axis only. The conductor's shape is not restricted to rectangles, but any shape that can be made by superposing rectangular elements. Also shown are the existing components of flux density and magnetic vector potential. *Right*: decomposition of the conductor in n_e rectangular elements. Elements of different sizes are allowed by the method formulation. The superscript k is used to identify the element number.

obviously interesting since it allows complicated conductor geometries to be modeled accurately.

5.2.2 Flux density and potential due to a set of conductors

We consider here a set of n_c long straight conductors $(c_1, c_2, \ldots, c_{n_c})$, all parallel to each other and aligned along the z axis. A conductor is defined here as a closed region in space where a current can flow, and which is made of a single conducting material. The current density in the whole space is described by the $J_z(\vec{r}, t)$, with $\vec{r} = (x, y)$. A space and time dependent external field $\vec{B}_{ext}(\vec{r}, t)$ can be added to the self-field generated by the system of conductors. This external field can be applied in any direction lying in the $x-y$ plane, i.e. $\vec{B}_{ext}(\vec{r}, t) = B_{x_{ext}}(\vec{r}, t)\,\hat{\boldsymbol{x}} + B_{y_{ext}}(\vec{r}, t)\,\hat{\boldsymbol{y}}$.

The simplest approach to find an expression for the total flux density $\vec{B}(\vec{r}, t)$ is to derive it from the expression of the vector potential $A_z(\vec{r}, t)$. Explicitly, the vector potential at any point in space due to the distributed current of an infinitely long conductor c_i of cross-section S_i is given by the potential equivalent of the 2D Biot-Savart integral [92, pp. 85–87]:

$$A_{c_i}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \iint_{S_i} J_z(\vec{r}\,', t) \cdot \log\left(\frac{|\vec{r}\,' - r|}{r_0}\right) \mathrm{d}^2\vec{r}\,' \,, \tag{5.1}$$

where $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r}\,' = (x', y')$, r_0 is an arbitrary constant and "log" is the natural logarithm. Hereafter, we use $r_0 = 1$ to make it disappear from (5.1). Equation (5.1) is valid in dc as well as in ac, as long as the displacement current can be neglected.

Considering the (single component) vector potential equivalent $A_{ext}(\vec{r}, t)$ of the external field $\vec{B}_{ext}(\vec{r}, t)$, we can easily determine the total vector potential by superposition, i.e.

$$A_z(\vec{r}, t) = A_{ext}(\vec{r}, t) + \sum_{i=1}^{n_c} A_{c_i}(\vec{r}, t) \,, \tag{5.2}$$

where the summation denotes the contribution of all the conductors c_i, given

by (5.1). In the most common case of an homogeneous external field ($B_{x_{ext}}$ and $B_{y_{ext}}$ independent of $\vec{r}$), we have the useful relationship:

$$A_{ext}(\vec{r},t) = y\,B_{x_{ext}}(t) - x\,B_{y_{ext}}(t)\ . \tag{5.3}$$

More generally, the 2D flux density is related to the vector potential by

$$B_x(\vec{r},t) = \frac{\partial A_z(\vec{r},t)}{\partial y}\ , \tag{5.4}$$

$$B_y(\vec{r},t) = -\frac{\partial A_z(\vec{r},t)}{\partial x}\ . \tag{5.5}$$

If by any means $A_z(\vec{r},t)$ can be expressed or approximated analytically, $B_x(\vec{r},t)$ and $B_y(\vec{r},t)$ will also be determined automatically from (5.4) and (5.5).

In order to alleviate the text, the $(\vec{r},t)$ dependences of the field variables will hereafter be considered as understood, unless required for clarity.

5.2.3 Semi-analytical treatment of a single conductor

We first consider the case of a single conductor c of cross-section S and arbitrary shape, but restricted to 90° corners and flat edges. These conditions are met in FIG. 5.1 for a rectangular conductor. The latter is subdivided in a mesh containing n_e rectangular elements. Elements and nodes must both be numbered and conveniently stored in memory to provide easy access to the data.

5.2.3.1 Bilinear current distribution over one element

Each element is a long rectangular sub-conductor of the same nature and the same local properties as the global conductor. To normalize the forthcoming calculations, we map the element physical (x,y) coordinates into the $u-v$ plane, so that the element's cross-section occupies the domain $-1 < u < 1$ and $-1 < v < 1$.

This mapping, illustrated in FIG. 5.2, is given by

$$u = \frac{x - (x_1^k + x_2^k)/2}{a_k} , \tag{5.6}$$

$$v = \frac{y - (y_1^k + y_2^k)/2}{b_k} . \tag{5.7}$$

To account for the variation of the current density over the element, the current density J_z^k can be represented by a bilinear interpolation function, as shown in FIG. 5.3. The expression of J_z^k for a normalized element can be written as

$$\begin{aligned} J_z^k = \frac{1}{4}\Big[& j_1^k(1+u)(1+v) + j_2^k(1-u)(1+v) \\ & + j_3^k(1-u)(1-v) + j_4^k(1+u)(1-v) \Big] , \end{aligned} \tag{5.8a}$$

or alternatively

$$J_z^k = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & u & v & uv \end{bmatrix} \boldsymbol{S}\, \boldsymbol{j^k} , \tag{5.8b}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{j^k} = \begin{bmatrix} j_1^k \\ j_2^k \\ j_3^k \\ j_4^k \end{bmatrix} ,$$

where the coefficients j_i^k are the current densities at the four corners of the element (see FIG. 5.3), the subscript referring to the quadrant number in the $u-v$ plane.

When we insert this expression for J_z^k in (5.1), we obtain the following integral for the vector potential due to element k of conductor c at any point (x, y):

$$A_c^k = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int_{y_1^k}^{y_2^k} \int_{x_1^k}^{x_2^k} J_z^k \cdot \log\left(\left[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}y' . \tag{5.9}$$

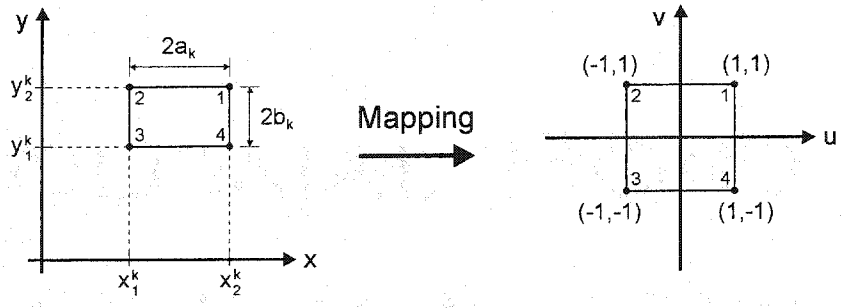


FIG. 5.2 – Mapping of an element in the $u - v$ plane, in order to normalize the integration bounds of (5.9) between -1 and 1 in both u and v. Node numbering follows the quadrant numbering in the $u - v$ plane.

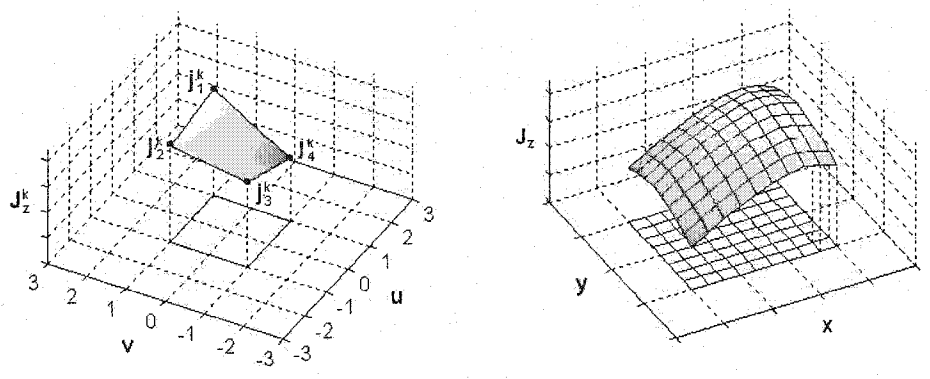


FIG. 5.3 – *Left*: bilinear interpolation function used to approximate the current distribution over an element, as described by (5.8), in the normalized (u, v) coordinates. *Right*: hypothetical current distribution in a rectangular conductor, modeled with many bilinear elements mapped back into the physical (x, y) coordinates.

After the insertion of (5.6) and (5.7) into the right hand-side of (5.9), the integral becomes

$$A_c^k = -\frac{\mu_0 a_k b_k}{4\pi} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{4}\left[1 \quad u' \quad v' \quad u'v'\right] \boldsymbol{S}\, \boldsymbol{j^k} \right. \\ \left. \cdot \log\left[a_k^2(u'-u)^2 + b_k^2(v'-v)^2\right] \right) \mathrm{d}u'\,\mathrm{d}v' \,. \quad (5.10)$$

We rewrite

$$A_c^k = \frac{\mu_0}{16\pi}\,\boldsymbol{\alpha^k}(u,v)\,\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{j^k}\,, \tag{5.11}$$
$$\boldsymbol{\alpha^k}(u,v) = \left[\alpha_1^k(u,v) \quad \alpha_2^k(u,v) \quad \alpha_3^k(u,v) \quad \alpha_4^k(u,v)\right],$$

where the $\alpha_i^k(u,v)$ represent four different integrals that can be written in compact form as

$$\alpha_i^k(u,v) = -a_k b_k \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_i \cdot \log\left[a_k^2(u'-u)^2 + b_k^2(v'-v)^2\right] \mathrm{d}u'\,\mathrm{d}v'\,, \tag{5.12}$$

with $i = 1,2,3,4$ and $f_1 = 1$, $f_2 = u'$, $f_3 = v'$ and $f_4 = u'v'$. Note that the $\boldsymbol{S}$ matrix contains only signs. It will be combined later with the $\alpha_i^k(u,v)$, hereafter called basis functions.

The $\alpha_i^k(u,v)$ integrals can be solved analytically. They were solved with the help of the *Mathematica*® software. The results are given by (II.13) to (II.16) in the Appendix II, and are valid in the whole space (u,v).

To derive the flux density from these analytical equations, we successively apply (5.4) and (5.5) to the expression for A_c^k, that is

$$B_{x_c}^k = \frac{\partial A_c^k}{\partial y} = \frac{\partial A_c^k}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial A_c^k}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial A_c^k}{\partial v}\frac{1}{b_k}\,, \tag{5.13}$$

$$B_{y_c}^k = -\frac{\partial A_c^k}{\partial x} = -\frac{\partial A_c^k}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial A_c^k}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial A_c^k}{\partial u}\frac{1}{a_k}\,. \tag{5.14}$$

We remark that $u = u(x)$ and $v = v(y)$ in the mapping equations (5.6) and (5.7), so the first term of (5.13) and the second term of (5.14) disappear. In addition, we

define

$$\beta_{x_i}^k = \frac{1}{b_k}\frac{\partial \alpha_i^k}{\partial v}\,, \tag{5.15}$$

$$\beta_{y_i}^k = -\frac{1}{a_k}\frac{\partial \alpha_i^k}{\partial u}\,. \tag{5.16}$$

Using (5.11), (5.15) and (5.16), we rewrite (5.13) and (5.14) as

$$B_{x_c}^k = \frac{\mu_0}{16\pi}\,\boldsymbol{\beta_x^k}(u,v)\,\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{j^k}\,, \tag{5.17}$$

$$\boldsymbol{\beta_x^k}(u,v) = \left[\beta_{x_1}^k(u,v) \quad \beta_{x_2}^k(u,v) \quad \beta_{x_3}^k(u,v) \quad \beta_{x_4}^k(u,v)\right],$$

and

$$B_{y_c}^k = \frac{\mu_0}{16\pi}\,\boldsymbol{\beta_y^k}(u,v)\,\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{j^k}\,, \tag{5.18}$$

$$\boldsymbol{\beta_y^k}(u,v) = \left[\beta_{y_1}^k(u,v) \quad \beta_{y_2}^k(u,v) \quad \beta_{y_3}^k(u,v) \quad \beta_{y_4}^k(u,v)\right].$$

The analytical forms of $\beta_{x_i}^k(u,v)$ and $\beta_{y_i}^k(u,v)$ are also given in the Appendix II by (II.17) to (II.24). The reader is invited to pay a particular attention to the two remarks given there. These are not approximations, but well justified procedures that allow an exact evaluation of the basis functions α_i^k, $\beta_{x_i}^k$ and $\beta_{y_i}^k$. For a geometric interpretation of L_i and θ_i, given by (II.5) to (II.12), see [86], [92, pp. 85–87].

5.2.3.2 Superposition of all elements' contributions

Let us recall that we are actually considering a single conductor, labeled c, whose geometry has been divided in n_e rectangular elements. Let us also remark the similar form of (5.11), (5.17) and (5.18). For this reason, the details of the following development will be given only for the vector potential. We define the

element interpolation functions (in vector form) $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{B_x}}^{\boldsymbol{k}}$ and $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{B_y}}^{\boldsymbol{k}}$ as

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{k}}(u,v) = \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{k}}(u,v)\,\boldsymbol{S}\,, \tag{5.19}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{B_x}}^{\boldsymbol{k}}(u,v) = \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}(u,v)\,\boldsymbol{S}\,, \tag{5.20}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{B_y}}^{\boldsymbol{k}}(u,v) = \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{k}}(u,v)\,\boldsymbol{S}\,, \tag{5.21}$$

where all $\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{k}}$ vectors are four element row vectors whose each component is a linear combination of the basis functions α_i^k, $\beta_{x_i}^k$ or $\beta_{y_i}^k$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. For instance, if we consider the (u, v) dependence as understood, we can write

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} \omega_{A_1}^k & \omega_{A_2}^k & \omega_{A_3}^k & \omega_{A_4}^k \end{bmatrix}, \tag{5.22}$$

with

$$\begin{aligned}
\omega_{A_1}^k &= \alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k + \alpha_4^k\,,\\
\omega_{A_2}^k &= \alpha_1^k - \alpha_2^k + \alpha_3^k - \alpha_4^k\,,\\
\omega_{A_3}^k &= \alpha_1^k - \alpha_2^k - \alpha_3^k + \alpha_4^k\,,\\
\omega_{A_4}^k &= \alpha_1^k + \alpha_2^k - \alpha_3^k - \alpha_4^k\,.
\end{aligned}$$

The $\omega_{A_i}^k$ are the interpolation functions associated with element k. Together with the interpolation coefficients j_i^k, they describe the element contribution to the vector potential in the whole space. We rewrite (5.11) as

$$A_c^k = \frac{\mu_0}{16\pi}\,\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{k}}(u,v)\,\boldsymbol{j}^{\boldsymbol{k}}\,, \tag{5.23}$$

The total vector potential A_c due to conductor c is simply the sum of all the n_e

elements' contributions A_c^k, i.e.

$$A_c(x,y) = \sum_{k=1}^{n_e} A_c^k = \frac{\mu_0}{16\pi} \sum_{k=1}^{n_e} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{k}}(u,v)\, \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{k}} \,. \tag{5.24}$$

Note that for a given point (x, y) where we want to compute A_c, the corresponding (u, v) point is different for every element k, as a direct consequence of the mapping equations (5.6) and (5.7). We obtain similar equations for B_{x_c} and B_{y_c}, with (5.20) and (5.21) inserted in (5.17) and (5.18), i.e.

$$B_{x_c}(x,y) = \sum_{k=1}^{n_e} B_{x_c}^k = \frac{\mu_0}{16\pi} \sum_{k=1}^{n_e} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{B_x}}^{\boldsymbol{k}}(u,v)\, \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{k}} \,, \tag{5.25}$$

$$B_{y_c}(x,y) = \sum_{k=1}^{n_e} B_{y_c}^k = \frac{\mu_0}{16\pi} \sum_{k=1}^{n_e} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{B_y}}^{\boldsymbol{k}}(u,v)\, \boldsymbol{j}^{\boldsymbol{k}} \,. \tag{5.26}$$

The last step towards an efficient global relationship between A_c, B_{x_c}, B_{y_c} and the current density J_z of conductor c is to express the current density at each node of the conductor as a single column vector $\boldsymbol{J}$, in a global numbering scheme. If there are n_n nodes in the conductor's mesh, then $\boldsymbol{J}$ will be of length n_n. Thus, for all j_i^k $(i = 1, 2, 3, 4)$ belonging to an element, there will be an associated J_i $(i = 1, 2, \ldots, n_n)$ in the global numbering scheme, as shown in FIG. 5.4. When we perform this substitution in (5.24), for instance, we obtain

$$A_c(x,y) = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \ldots & m_{n_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{n_n} \end{bmatrix} \,, \tag{5.27}$$

where the m_i are the coefficients of the J_i terms after the summation expansion and reorganization. Note that the $\mu_0/16\pi$ factor has been included in the m_i

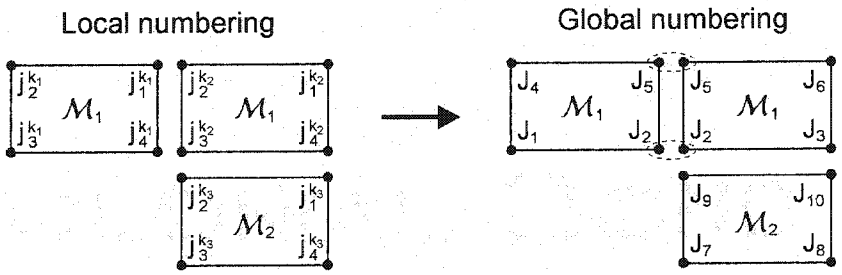


FIG. 5.4 – *Left*: representation of neighboring elements in the local numbering scheme (elements are disjoined for clarity). Elements k_1 and k_2 are made of material $\mathcal{M}_1$, whereas element k_3 is made of material $\mathcal{M}_2$. *Right*: the same elements in the global numbering scheme. Only the coincident nodes corresponding to different materials are given distinct node numbers.

coefficients. This should always be done in order to allow mixed formulation to be used, i.e. different orders and/or types of elements together in the same problem.

The same process must be applied at every point (x_j, y_j) where we need to compute the potential, with $j = 1, 2, \ldots, n_u$. If these potential values are written as a single column vector $\boldsymbol{A_c}$, we end up with a matrix that relates the n_u unknowns $A_c(x_j, y_j)$, to the n_n known J_i terms, i.e.

$$\begin{bmatrix} A_c(x_1, y_1) \\ A_c(x_2, y_2) \\ \vdots \\ A_c(x_{n_u}, y_{n_u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n_n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n_u 1} & m_{n_u 1} & \ldots & m_{n_u n_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{n_n} \end{bmatrix}, \tag{5.28}$$

Defining matrix $\boldsymbol{M_A}$ as

$$\boldsymbol{M_A} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n_n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n_u 1} & m_{n_u 1} & \ldots & m_{n_u n_n} \end{bmatrix}, \tag{5.29}$$

we finally rewrite (5.28) in a very compact form:

$$\boldsymbol{A_c} = \boldsymbol{M_A}\,\boldsymbol{J}\ . \tag{5.30}$$

By exactly the same process, starting from (5.25) and (5.26), and defining two matrices $\boldsymbol{M_{B_x}}$ and $\boldsymbol{M_{B_y}}$ as in (5.29), we obtain the unknown field components due to conductor c:

$$\boldsymbol{B_{x_c}} = \boldsymbol{M_{B_x}}\,\boldsymbol{J}\ , \tag{5.31}$$

$$\boldsymbol{B_{y_c}} = \boldsymbol{M_{B_y}}\,\boldsymbol{J}\ . \tag{5.32}$$

Two important remarks can be made at this stage. First, the process by which these matrices were created is technically similar but conceptually different than the so-called matrix assembly in finite elements. Finite element matrices are indeed the coefficients of the unknowns of a linear system of equations. These unknowns need to be obtained, either by factorizing the matrix or by using an iterative method. In the above formulation, the matrices are the coefficients of the known values. Thus, no matrix inversion is required to obtain the unknowns, which are the field quantities. The number of lines in the matrices only depends on the number of field points one needs to calculate, which is determined by the algorithm used to compute the current density. Thus, generally speaking, it is not required that the number of unknowns n_u equals n_n, the number of known J_i values. In fact, n_u can be less or greater than n_n. However, two matrices are required to represent the two flux density components, and even three if the vector potential is also required, as it is the case in most integral formulation of ac problems [78, 80, 79].

The second remark is general to all integral approaches and concerns the matrices' topology [77]. As it can be seen in (5.29), the matrices are full, as opposed to the very sparse matrices generated by finite elements, thus no computer memory

economy can be made. However, the actual integral matrices contain only geometric information about the problem, and consequently need to be built only once, as long as the mesh is not modified. Thus, resistivity properties of materials will be considered only in the current distribution calculation algorithm [91].

5.2.4 Superposition of the contribution of all conductors

In the last section, a single conductor was considered. In order to build matrices that would consider many conductors, one additional consideration must be taken into account. This condition is that all the conductors made of different materials must be individually discretized in elements, even if they touch one another. In other words, if a conductor made of material $\mathcal{M}_1$ touches another one made of material $\mathcal{M}_2$, as illustrated in FIG. 5.4, all the coincident nodes (the nodes located at the same geometric position) must possess their own number in the global numbering scheme. This is required in order to allow a possible current density discontinuity at the interface of the two materials. Obviously, if the two materials are the same, as it is the case at the interface of two adjacent elements within the same conductor, the current density is necessarily continuous, and no node duplication is required.

Given that all the elements and all the nodes are coherently numbered, which implies the construction of a reference table containing the information about every element (node numbers, material), we simply apply the previous process to obtain matrix expressions relating the unknown field quantities to $\boldsymbol{J}$. Thus, (5.24), (5.25) and (5.26) are still valid, with n_e now representing the total number of elements in the multi-conductor problem. Since the matrices are full, the total amount of memory required will be proportional to the total number of potential and field unknowns times n_n, the total number of nodes in the global numbering scheme. If we consider the presence of an external field, as supposed at the beginning of this

paper, we can finally write down a numerically workable expression for (5.2), i.e.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{ext} + \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{A}}\,\boldsymbol{J}\ , \tag{5.33}$$

where the vector $\boldsymbol{A}_{ext}$ contains the potential values due to the external field at the same points and time steps as the unknowns in vector $\boldsymbol{A}$. The matrix $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{A}}$ now contains the geometric information about all the conductors in the problem. We similarly obtain for the field components

$$\boldsymbol{B}_x = \boldsymbol{B}_{x_{ext}} + \boldsymbol{M}_{B_x}\,\boldsymbol{J}\ , \tag{5.34}$$

$$\boldsymbol{B}_y = \boldsymbol{B}_{y_{ext}} + \boldsymbol{M}_{B_y}\,\boldsymbol{J}\ . \tag{5.35}$$

This concludes the mathematical formulation of the method. The next section deals with practical considerations in evaluating the basis functions.

5.3 Cancellation errors

As developed above, and still restricted to 90° corners and flat edges geometry, the method can in principle give the exact field distribution due to an approximate discretized current distribution. Hence, the error should normally come only from the approximation in the current distribution representation. However, an additional source of errors exists, commonly called cancellation errors. Cancellation errors are caused by the machine finite precision in the evaluation of the analytical basis functions (II.13) to (II.24) (see Appendix II).

5.3.1 Origin of cancellation errors

We remark that (II.13) to (II.24) are all made of two parts: a part containing θ_i terms, and another containing L_i terms. These two parts, when plotted sepa-

rately, happen to be infinitely growing functions of opposite sign, but similar shape (see FIG. 5.5). Their sum should in theory goes to zero as u and v increase (except α_1, which grows logarithmically to infinity), but the discrete representation of numbers used by computers causes this limit to be respected only to the machine precision. This error becomes important at large distances, as it is shown in FIG. 5.5. Note that all the calculations were performed using double precision.

A more detailed investigation shows that the aspect ratio of the elements, defined as

$$\lambda_k = \max\left(\frac{a_k}{b_k}, \frac{b_k}{a_k}\right) , \tag{5.36}$$

influences the distance (in terms of u and v) at which cancellation errors become important. Note that by definition, $\lambda_k \geq 1$. Also, the higher are the orders of u and v in the basis functions, the faster cancellation errors grow. Hence, cancellation errors will occur at larger distances for β_i^k basis functions than for the corresponding α_i^k,

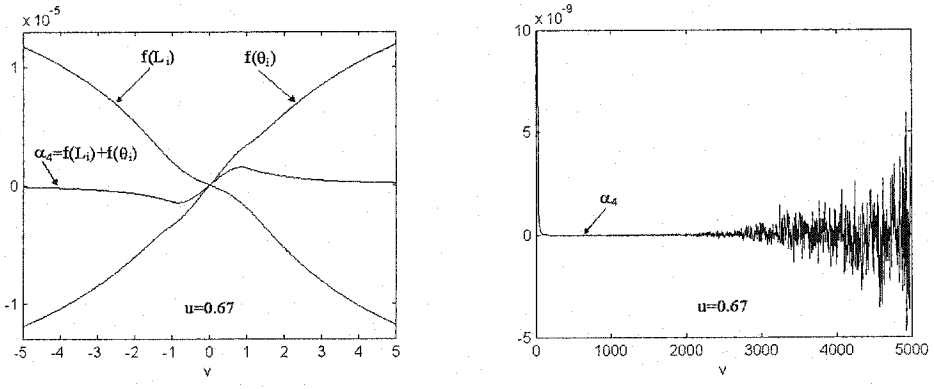


FIG. 5.5 – *Left*: plot against v of the basis function α_4 for $u = 0.67$ and with element parameters $a_k = 3$ mm and $b_k = 1$ mm. The function α_4 is made of two parts, i.e. $f(\theta_i)$ and $f(L_i)$, which grow constantly as v increases. This outlines the fact that α_4 is small in comparison to both $f(\theta_i)$ and $f(L_i)$. *Right*: as v increases, the cancellation error due to the addition of $f(\theta_i)$ and $f(L_i)$ becomes more and more important, preventing α_4 to become zero, as it normally should.

because the former is a spatial derivative of the later, which decreases the maximum order by one. Since α_4^k possesses the u and v terms with the highest orders, it is the critical term to watch.

Due to the complexity of the basis functions and the subtle nature of cancellation errors, it seems difficult to find any analytical rule that would predict their occurrence. However, the next section presents some empirical rules that help to avoid them. These rules were established by observing the cancellation errors for elements of different aspect ratios.

5.3.2 How to avoid cancellation errors

5.3.2.1 General considerations

The simplest approach to avoid cancellation errors is to use numerical integration to evaluate the basis functions α_i^k and β_i^k at large distances, instead of using the analytical forms (II.13) to (II.24). The main reasons for using the analytical forms are that they are quicker to evaluate than the equivalent numerical integrals, and they also implicitly take care of the singularity of the integrand in (5.1), i.e. when $|\vec{r}' - r| = 0$. When this singularity occurs far enough outside the integration domain (defined as $-1 < u < 1$ and $-1 < v < 1$ in the normalized coordinates), which is the case when $u \gg 1$ and $v \gg 1$, the resulting integrand is a smooth function, and the integral can easily be evaluated numerically, using a conventional Gaussian quadrature. Thus, to produce matrix coefficients without cancellation error, we should use (II.13) to (II.24) to determine the basis functions when the singularity is close to the integration domain, and Gaussian quadrature otherwise. The idea of a hybrid formulation was previously suggested by Gyimesi et al. [93], without giving any explicit rule to decide when to change from analytical to numerical evaluation. The next sections suggest such rules and give the details of the quadrature implementation.

5.3.2.2 Integrals to use with quadrature

We already obtained the integrals that define the α_i^k basis functions. They are given by (5.12). In addition, to apply the Gaussian quadrature, we need to derive the integrals that determine the β_i^k basis functions. We simply apply (5.15) and (5.16) to (5.12) to obtain the Biot-Savart integrals, i.e.

$$\beta_{x_i}^k(u,v) = 2a_k b_k \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_i \cdot \frac{b_k(v'-v)}{a_k^2(u'-u)^2 + b_k^2(v'-v)^2}\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}v' \,, \tag{5.37}$$

$$\beta_{y_i}^k(u,v) = -2a_k b_k \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_i \cdot \frac{a_k(u'-u)}{a_k^2(u'-u)^2 + b_k^2(v'-v)^2}\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}v' \,, \tag{5.38}$$

with $i = 1,2,3,4$ and $f_1 = 1$, $f_2 = u'$, $f_3 = v'$ and $f_4 = u'v'$. Note that (5.37) and (5.38) are not well behave integrals when there is a singularity in the integrand, as opposed to (5.12), which never diverges.

5.3.2.3 Criteria to use with quadrature

The following empirical rule determines a region bounded by $-u_{max} < u < u_{max}$, $-v_{max} < v < v_{max}$, outside of which quadrature should be used to evaluate the basis functions. Let us first define

$$d_{max} = \frac{20}{1 + \log_{10}(\lambda_k)} \,, \tag{5.39}$$

where λ_k is the element aspect ratio, as defined by (5.36). We choose u_{max} and v_{max} according to the following cases, i.e.

$$a_k > b_k \;\Rightarrow\; u_{max} = d_{max} \,,\; v_{max} = \lambda_k\, d_{max} \,, \tag{5.40}$$

$$b_k > a_k \;\Rightarrow\; u_{max} = \lambda_k\, d_{max} \,,\; v_{max} = d_{max} \,. \tag{5.41}$$

The quadrature orders q_u and q_v to be used can be selected using another empirical rule, based on the following definitions:

$$q_{high} = 4 + \|\log_{10}(\lambda_k)\| \ , \tag{5.42}$$

$$q_{low} = 4 + \left\|\tfrac{1}{2}\log_{10}(\lambda_k)\right\| \ , \tag{5.43}$$

where $\|x\|$ means to keep the integer part of x. Then,

$$a_k > b_k \ \Rightarrow \ q_u = q_{low} \ , \ q_v = q_{high} \ , \tag{5.44}$$

$$b_k > a_k \ \Rightarrow \ q_u = q_{high} \ , \ q_v = q_{low} \ . \tag{5.45}$$

These two simple rules seem to keep the relative error below 10^{-6}, as long as $\lambda_k < 10^4$. Above this aspect ratio, the accuracy may begin to suffer. However, aspect ratios of this order allow a very broad range of element shapes, and it makes it possible to study the 2D behavior of thin conductors with very good accuracy.

5.3.2.4 Application of the Gaussian quadrature

Finally, whenever $|u| > u_{max}$ or $|v| > v_{max}$, we use Gaussian quadrature to evaluate the integrals (5.12), (5.37) and (5.38), which define all the basis functions. The integrals are then rewritten as summations:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(u',v')\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}v' \approx \sum_{i=1}^{q_u}\sum_{j=1}^{q_v} w_i\, w_j\, f(u_i{}',v_j{}') \ , \tag{5.46}$$

where w_i, w_j are the weights and $u_i{}'$, $v_j{}'$ are the points at which the integrand $f(u',v')$ is evaluated. These values, for a given quadrature order q, can be found in most mathematical handbooks, for instance [94, pp. 459–461].

5.4 Convergence study

In order to appreciate the improved accuracy provided by bilinear (rather than constant) elements, this section presents a simple convergence study. The problem considered is a square conductor of 1 cm^2, carrying a total current of 100 A, which is distributed according to

$$J(x,y) = c\left(1 + x^2y^2\right) \ , \tag{5.47}$$

where c is a coefficient chosen to satisfy the total current requirement. FIG. 5.6 depicts the geometry and the current density function given by (5.47). This current distribution is somewhat similar to a skin effect. The associated flux density was calculated along the contour aa' shown on FIG. 5.6. Because of the symmetry of the problem, B_x and B_y are numerically identical along this contour, thus only B_x is considered next.

The conductor was discretized in a regular grid of n by n elements, where n was varied between 2 and 64. In all cases, the current distribution was approximated both by constant and bilinear representations over each element. Note that for an element k with constant current density j_0^k, instead of (5.23) we must use

$$A_c^k = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\alpha_1^k(u,v)\,j_0^k \ , \tag{5.48}$$

and so on for $B_{x_c}^k$ and $B_{y_c}^k$, with α_1^k successively replaced by $\beta_{x_1}^k$ and $\beta_{y_1}^k$. All the B_x contours so obtained were compared to the solution of the 64 by 64 grid with bilinear variation, considered here as the "true solution". The normalized rms (root mean square) error between the "true solution" and all other solutions are plotted in graphic form in FIG. 5.7. We remark that the error decreases slightly faster for the bilinear representation, and that we gain approximately an order of magnitude

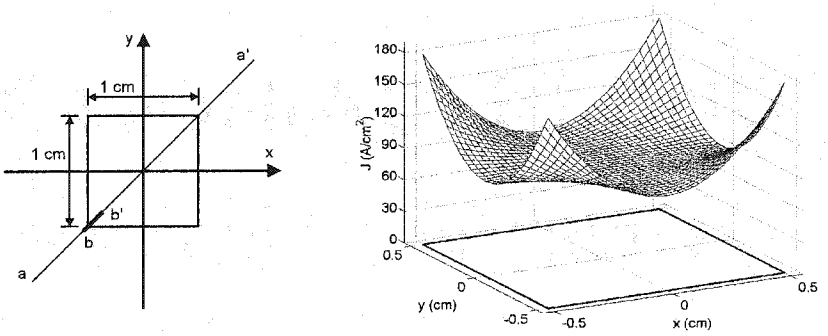


FIG. 5.6 – *Left*: geometry considered for the convergence study: square cross-section conductor. The flux density contour is generated along the aa' line. The bb' line is used to define an enlarged contour near the conductor's bottom-left corner. *Right*: current density in the conductor (36 by 36 grid, bilinear representation), as described by (5.48). The current density is greater at the four corners. The bold line shows the conductor's edges.

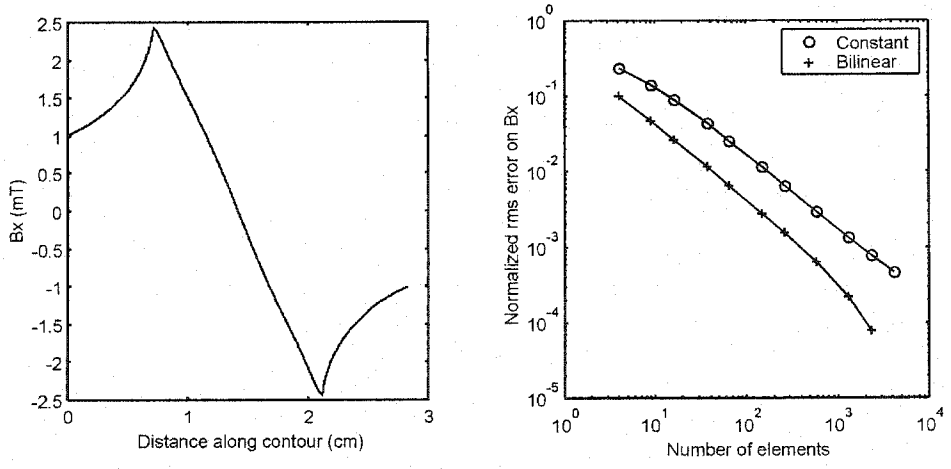


FIG. 5.7 – *Left*: B_x along contour aa'. Distance origin is located at point a. The curve is symmetric and the peaks coincide with the conductor's corners. *Right*: normalized rms error on B_x along contour aa' (i.e. error divided by the maximum value of B_x) for different numbers of elements and two different representations (constant and bilinear) for the current density.

of accuracy when increasing the total number of elements by a factor of 10, thus the error is approximately inversely proportional to the number of elements. There is also an important offset between the error curves for the constant and bilinear representations, which shows than the same accuracy can be achieved with bilinear elements with about 5 times less elements than with constant elements. This represents roughly $5^2 = 25$ times less computer time required to generate the matrices, which is a very important gain. Of course, this is difficult to generalize. Different problems will exhibit different behavior. Examples could easily be found where this gain would be significantly different.

As in all numerical methods that use interpolation functions over a discretized domain, the convergence rate as the number of elements increase depends on the ability of the basis functions to represent true solution. In the current example, the current distribution is given by a constant term, whose contribution to the field is exactly determined by both constant and bilinear elements (α_1^k, $\beta_{x_1}^k$ and $\beta_{y_1}^k$ are associated to a constant current density), and a "bi-quadratic" term, i.e. x^2y^2, which cannot be exactly modeled by either representations. However, a few bilinear elements can approximate this term quite well, and we expect the numerical solution obtained with bilinear elements to converge quickly. FIG. 5.8 presents this case near the bottom-left corner of the conductor, i.e. along contour bb' (see FIG. 5.6). We clearly see how quickly the bilinear representation converges as compared to constant elements.

5.5 Discussion

The idea behind the development of this method was to provide a quick and direct means to obtain the flux density associated to a specified continuously varying current distribution. Indeed, the simple matrix-vector products (5.33), (5.34) and (5.35) directly give $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B_x}$ and $\boldsymbol{B_y}$. This operation lasts typically less than a

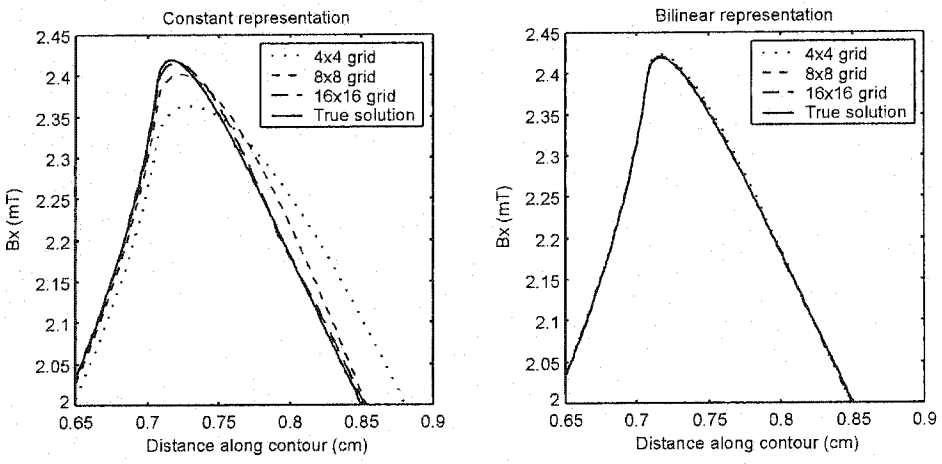


FIG. 5.8 – B_x contours along bb' for different grid sizes and different representations for the current density, i.e. constant elements (*left*) and bilinear elements (*right*). Even a 4 by 4 grid gives a fairly good approximation in the bilinear case, which is far from true for the constant element representation.

second for a 1000 element problem, on a 350 MHz personal computer. This gives a powerful tool to couple with a dc or ac numerical solver for the current density. The method is an interesting alternative to finite elements, which are costly in such open boundary problems because, in addition to the conductors, the surrounding air must be meshed up to some distance from the conductors, where the boundary conditions can be imposed. No boundary conditions are required with integral methods [77].

A possible optimization would be to consider the presence of symmetry in the problem. It could be taken in consideration when building the matrices. This would significantly reduce the problem size. The interested reader may consult [78, 80] to get an idea of what can be done. These authors use a method similar to the current approach, though formally, it consists of an approximation of the constant element representation.

To optimize further, the double integrals (5.12), (5.37) and (5.38) could be converted to single integrals before applying the Gaussian quadrature (see section 5.3.2). This can be done by applying the divergence theorem on the double integrals so that they reduce to contour integrals. The gain in performing a reduction in dimensionality becomes particularly important for high quadrature orders. For more details, see [86, 90].

In order to make the simulations fast, the computer that runs the simulations should have enough RAM to hold all the matrices in memory. For instance, a 1000 element problem requires about 20 MB. Also, the generation of the matrices, if not properly optimized, can take a while. It is recommended to save the matrices once they are built, such that they don't need to be rebuilt every time a simulation is performed. The matrices will remain valid as long as the mesh is not modified.

It is also worth mentioning that the cancellation errors are not likely to occur in any kind of problem. Indeed, since these errors occur at large distances from an element, problems where the conductors are very close to one another, where the aspect ratios of the elements are not very large or where few elements are used are not likely to be affected by cancellation errors.

It is important to add that the process used to generate the matrices is also the same as the one used to generate post-processing data. That is, from a known current distribution, the generation of field contours is easily done by building matrices based on the points of the contours. Thus, when the method is coupled to a current distribution solver, the same core code can be used for pre-processing and post-processing.

A useful remark can be made about the basis functions. As previously mentioned, α_1^k, $\beta_{x_1}^k$ and $\beta_{y_1}^k$ represent the field generated by an element with constant current density. The other basis functions represent current density variations along u, v or uv, which correspond to a zero net current in the element. Thus,

their contribution quickly falls to zero (by Ampere's law), and these basis functions do not contribute to the far field. This implies that the increased accuracy provided by bilinear (or higher order) elements is localized within and close to the regions where a current density exists.

Finally, let us summarize the advantages of using a continuously varying representation for the current density. First, the mesh size required to achieve a given degree of accuracy can significantly be reduced, with the consequence of reducing the matrices' sizes and computation time by the square of this factor. Next, problems where the current density changes rapidly over the cross-section can be approximated quite well. For instances, it could be an eddy current problem where some skin effect is present, or a problem where the resistivity is inhomogeneous over the sample cross-section. Last but not least, since the flux density inside the conductors can be obtained quickly and accurately, it makes the method very suitable for problems containing magneto-resistant materials, such as superconductors, for which the method was initially developed.

5.6 Conclusion

A direct semi-analytical method to compute the flux density and the magnetic vector potential generated by a continuously varying current distribution has been developed. It supports multi-conductor problems. It is simple to implement, and provides solutions very quickly. However, the presence of magnetic materials is not allowed. In this paper, only rectangular elements were treated, which restricts the geometry modeling to be accurate only for conductor shapes with 90° corners and straight edges. However, the method is almost directly applicable to other element shapes. In order to allow any geometry, interpolation functions for linear triangular elements could be used [84, 86, 90]. Some care must be taken to avoid numerical cancellation errors while building the computation matrices. In its current form, the method is an interesting tool to couple with a current distribution solver (dc or ac).

Acknowledgments

The authors gratefully thank J. P. Webb for his careful review of the manuscript and relevant comments to improve it.

CHAPITRE 6

2D CALCULATION OF DC CURRENT DISTRIBUTION IN CONDUCTORS WITH NON-LINEAR AND FIELD DEPENDENT RESISTIVITY

Ce chapitre est le texte intégral d'un article soumis pour publication à *IEEE Trans. Magn.* [91]. Le comité de lecture a exigé plusieurs modifications qui allaient quelque peu à l'encontre de l'idée de base de l'article. Faute de s'entendre, il a été décidé que l'article serait plutôt modifié de façon mineure et soumis à une revue de supraconductivité appliquée. En date du dépôt final de cette thèse, i.e. décembre 2002, cette nouvelle soumission n'avait pas encore été faite.

Abstract

This paper presents a simple iterative point collocation method to calculate the dc current distribution in long straight conductors (2D problem) with non-linear and field dependent resistivity in a non-magnetic environment. An external field can also be applied, which is added to the self-field generated by the current in each conductor. The current distribution is modeled with rectangular bilinear elements, and the self-field associated to this discretized current distribution is determined using a previously derived analytical solution of the Biot-Savart integral for a bilinear element. For a given resistivity, the correct current distribution can be found by performing iterations. All the conductors in a problem can have a different resistivity. The method is particularly suitable for superconductors, for which it was developed, but can also be used for any material whose resistivity exhibits non-linearity, magneto-resistance or inhomogeneity. Four examples are presented to illustrate typical uses of the method.

Keywords–Numerical methods, dc current distribution, non-linear/field dependent resistivity, magneto-resistance, superconductivity.

6.1 Introduction

Engineering applications based on materials with non-linear and field dependent (even inhomogeneous) resistivity are often very difficult to optimize. Fortunately, numerical methods often come to the rescue to help design engineers. However, unlike magnetic materials, non-linear and field dependent resistivities have scarcely been treated in the literature. Only in the last few years it has begun to be considered, especially in the high temperature superconductivity field [78, 80, 79, 68, 70, 95]. This paper is intended to be very general. Hence, it considers a resistivity ρ that is a function of the current density $\vec{J}$, the local flux density $\vec{B}$ and the position $\vec{r}$. The electric field $\vec{E}$ is then obtained from the non-linear field dependent constitutive equation

$$\vec{E} = \rho(\vec{J}, \vec{B}, \vec{r}) \cdot \vec{J} \,. \tag{6.1}$$

In this paper, we consider problems involving many long straight conductors (2D problems), having their cross-section in the $x-y$ plane, and in which a current flows along the z axis. Consequently, only J_z exists, and the flux density possesses only two components, B_x and B_y. A conductor is defined here as a closed region in space that is made of a single conducting material. The dc current distribution in the conductors is determined by the solution of the two coupled Maxwell curl equations (dc conditions):

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left[\rho(\vec{J}, \vec{B}, \vec{r}) \cdot \vec{J}\right] = 0 \,, \tag{6.2}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \,, \tag{6.3}$$

where (6.1) was inserted into (6.2) to obtain its current form. Note that (6.3)

is valid only in a non-magnetic environment, i.e. when the magnetic constitutive equation $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ holds everywhere in the problem space. Hence, no magnetic materials are allowed here.

A method to solve the integral form of (6.3) for a given current distribution $J_z(x, y)$ was previously developed [81]. This method assumes that all the conductors in the problem can be discretized in straight rectangular elements, which restricts us to model accurately only geometries with 90° corners and straight edges. The generalization of the method presented in [81] to triangular elements is possible though, allowing more complex geometries to be modeled. Finally, due the 2D geometry, only E_z need to be considered, and from (6.2), we easily show that it must be a constant. FIG. 6.1 shows a typical acceptable geometry, as well as its discretization in rectangular elements. Note that no mesh is required outside the conductors, since there is no current there, and also because the field is determined from the analytical solution of the Biot-Savart integral.

Based on all these assumptions, a simple point collocation iterative algorithm that computes the dc current distribution satisfying (6.2) was developed, and its formulation is presented in this paper.

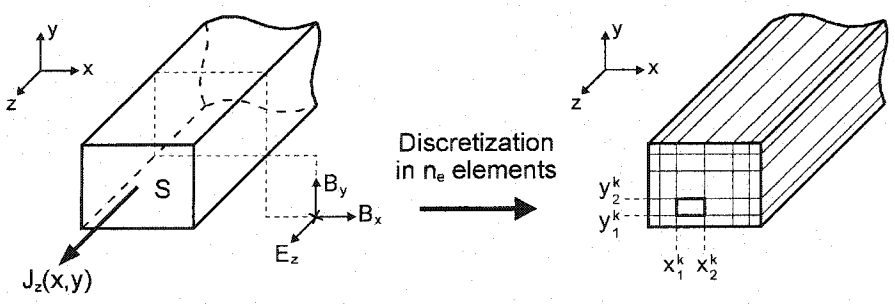


FIG. 6.1 – *Left*: typical 2D conductor geometry considered in this paper. The conductor cross section S lies in the $x-y$ plane, and the current density exists along the z axis only. Existing components of flux density and electric field are shown. *Right*: decomposition of the conductor in n_e rectangular elements. Superscript k is used to identify the element number.

6.2 Current distribution modeling

The field calculation method presented in [81] is based on a discretization of the conductors' geometry in rectangular elements. Each element, located in the (x, y) physical coordinates, can be mapped into a normalized (u, v) coordinate system, as illustrated in FIG. 5.2 (page 90).

Over each element k, the current density J_z^k is modeled as a bilinear interpolation function, written as

$$J_z^k = \frac{1}{4}\Big[\, j_1^k(1+u)(1+v) + j_2^k(1-u)(1+v) + j_3^k(1-u)(1-v) + j_4^k(1+u)(1-v)\,\Big], \tag{6.4}$$

where the coefficients j_i^k $(i = 1, 2, 3, 4)$ are the current densities at the four corners of the element (see FIG. 5.3, page 90), the subscripts referring to the quadrant number in the $u - v$ plane. The global current distribution J_z is built by the superposition of many of these rectangular bilinear elements, mapped back into the $x - y$ plane, as shown in FIG. 5.3.

Finally, each node in the mesh is labeled with a different number. Nodes that are located at the same geometric position but that correspond to two different materials must be defined twice, i.e. they must receive different numbers. Otherwise, a single number is required, and the node can be shared by many elements. This node duplication process is very important since it allows current density discontinuity at the interface of two different materials. Refer to [81] for more details.

6.3 Flux density calculation

If we associate an unknown J_i to each of the n_n numbered nodes in the mesh, we can express the current distribution function $J_z(x, y)$ as a single column vector $\boldsymbol{J}$, containing all the J_i $(i = 1, 2, \ldots, n_n)$. Note that the z subscript has been dropped

to alleviate the vector notation. It was shown in [81] that $B_x(x_j, y_j)$ and $B_y(x_j, y_j)$, where (x_j, y_j) is a point where we need to compute the field, can be directly related to $\boldsymbol{J}$ by a set of coefficients. If there are n_u of these unknown points, we express the flux density components as column vectors $\boldsymbol{B_x}$ and $\boldsymbol{B_y}$ of length n_u. Considering also a possible external field $\boldsymbol{B_{x_{ext}}}$ and $\boldsymbol{B_{y_{ext}}}$, the flux density is then directly obtained from

$$\boldsymbol{B_x} = \boldsymbol{M_{B_x}}\,\boldsymbol{J} + \boldsymbol{B_{x_{ext}}}\ , \tag{6.5}$$

$$\boldsymbol{B_y} = \boldsymbol{M_{B_y}}\,\boldsymbol{J} + \boldsymbol{B_{y_{ext}}}\ . \tag{6.6}$$

The matrices $\boldsymbol{M_{B_x}}$ and $\boldsymbol{M_{B_y}}$ contain only geometric information about all the conductors in the problem. They possess n_u lines and n_n columns. Thus, these simple vector-matrix products directly give the flux density components for a given $\boldsymbol{J}$. The remainder of this paper is devoted to the determination of this $\boldsymbol{J}$, given arbitrary dc conditions.

6.4 Resistivity modeling

The current density $\boldsymbol{J}$ is initially an unknown, as well as the associated flux densities $\boldsymbol{B_x}$ and $\boldsymbol{B_y}$. In fact, only the resistivity properties of the materials and the values of the driving sources are known a priori. This section briefly introduces how 2D resistivity properties can be modeled.

We consider that the material axis coincides with the geometric axis, so we can treat the resistivity ρ as a scalar function rather than as a tensor. Following our introductory remarks, the constant dc electric field is given by the scalar constitutive equation

$$E_z(x, y) = \rho\big(J_z, B_x, B_y, x, y\big) \cdot J(x, y)\ , \tag{6.7}$$

valid for the current 2D geometry. Typically, a function that returns ρ (the local resistivity) is written, to which we pass J_z, B_x ,B_y, x and y as input parameters.

The resistivity can either exhibit an explicit dependence on J_z (non-linearity), on B_x and B_y (anisotropic field dependence, also called magneto-resistance), on (x, y) (inhomogeneity), or all of them together. Examples in section 6.7 consider each one of these cases. The temperature dependence can also be added if the thermal problem is solved in parallel with the electromagnetic problem, as a coupled problem

6.5 Conductors modeling

A multi-conductor problem must be well organized to ensure an efficient numerical solution. The 2D problem can be organized quite easily if one considers all parallel conductors as belonging to the same group. Parallel conductors must necessarily share the same voltage gradient, thus the same electric field since in dc

$$\vec{E} = -\nabla V \ , \tag{6.8}$$

where V is the electric potential. In 2D we rewrite

$$E_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} \ . \tag{6.9}$$

Equation (6.9) shows that if a group of conductors is to be driven by a voltage source, it is the voltage gradient that must be specified, i.e. the voltage per meter of conductor, rather than an absolute voltage value, which is meaningless in 2D. Since E_z is a constant for a given group of conductors, either E_z or $-\nabla V$ can equivalently be imposed.

Parallel conductors may touch without problem. For instances, it could be a core of one material surrounded by a sheath of another material, or simply two separate conductors. In all cases, parallel conductors can be seen as infinite conductors with their imaginary ends tied together with a perfectly conducting plane. See section 6.7 for examples.

Before carrying on further, a list containing the element numbers of all the conductors belonging to a group must be built for each group. Let us note this list $\mathcal{E}_g$, where g is the number of the group considered. Let also n_e represent the total number of elements in the problem, i.e. all the elements of all groups of conductors. Similarly, we build another list, noted $\mathcal{N}_g$, containing the node numbers of all the conductors belonging to group g, and let n_n be the total number of nodes in the problem. Finally, each node must be associated with a material. A simple correspondence table can be used.

6.6 Mathematical formulation

6.6.1 Definitions

Before proceeding with the numerical calculations, some additional definitions are required. First, the total current I_g flowing into group g is given by

$$I_g = \sum_{\forall k \in \mathcal{E}_g} a_k b_k \left(j_1^k + j_2^k + j_3^k + j_4^k \right) , \tag{6.10}$$

where a_k and b_k are the half-width and half-height of the rectangular element k, as defined in FIG. 5.2 (page 90). Equation (6.10) is valid only for this kind of element. However, the algorithm presented below does not depend on the shape of the elements at all. It could be used with any kind of elements, as long as we can derive the associated expression for I_g.

Also, we will write as $\mathcal{I}_g$ and $-\nabla\mathcal{V}_g$ the current and voltage gradient sources' values associated with group g.

6.6.2 Direct formulation for a single group

We chose to use a point collocation method for the simplicity of implementation and the efficiency in terms of computation time. Point collocation methods are

based on a strict respect of the problem equations at all calculation nodes in the domain. To obtain the solution between the nodes, we simply interpolate the values at the nodes. Thus, nothing can be said about the error between the nodes. This is in contrast with a variational formulation, which spreads the error over the whole domain according to some weighting function. The implications of this choice will be discussed in section 6.8. For now, it suffices to say that the interpolation of the solution (the current density at each node) between the nodes, dictated by the use of a point collocation method, is consistent with the representation adopted, i.e. bilinear elements.

This being established, the simplest way to build a complete system of equations is to start from the fact that E_z is constant for a given group g. Thus, for each node $\{a, b\} \in \mathcal{N}_g$ we have

$$E_a = E_b \ , \tag{6.11}$$

where the z subscript is understood to alleviate the text (this will be done in the remainder of the paper, unless required for clarity). From (6.7) we can rewrite (6.11) as

$$\rho_a J_a = \rho_b J_b \ . \tag{6.12}$$

If there are n_g nodes (thus the same number of unknowns) in $\mathcal{N}_g$, we can obtain $n_g - 1$ linearly independent equations from (6.12). For simplicity, we assume that the nodes in list $\mathcal{N}_g$ are numbered from 1 to n_g (otherwise, a correspondence table must be use). To complete the system, we use an equation relating the source to the nodes. For a voltage gradient source, we simply write

$$\rho_{n_g} J_{n_g} = -\nabla \mathcal{V}_g \ . \tag{6.13}$$

For a current source, we must develop summation (6.10), with the j_i^k terms $(i = 1, 2, 3, 4)$ replaced by the corresponding J_i terms $(i = 1, 2, \ldots, n_n)$ in the global

numbering scheme, and we regroup the coefficients of repeated J_i terms. We note these coefficients c_i $(i = 1, 2, \ldots, n_n)$. We end up with an equation containing the current density unknowns at all the nodes belonging to group g, i.e.

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{n_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{n_g} \end{bmatrix} = \mathcal{I}_g \, . \tag{6.14}$$

The $n_g - 1$ equations from (6.12) plus one of the source equations (either (6.13) or (6.14)) can be written in a sparse matrix as follows:

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & -\rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & -\rho_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{n_g-1} & -\rho_{n_g} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{n_g} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n_g-1} & c_{n_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{n_g-1} \\ \ldots \\ J_{n_g} \\ \ldots \\ J_{n_g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \ldots \\ -\nabla \mathcal{V}_g \\ \ldots \\ \mathcal{I}_g \end{bmatrix} , \tag{6.15}$$

where only one of the last two lines must be used to complete the matrix, depending on the type of source driving the group. For groups containing only conductors with linear resistivity, the resolution of (6.15) will lead directly to the solution. However, in the general case of a non-linear resistivity, where ρ is a function of J, the system must be linearized before it can be solved.

6.6.3 Newton-Raphson formulation for a single group

In order to linearize system (6.15), the Newton-Raphson method is used. In the vicinity of point J, with B_x and B_y fixed, we can approximate the electric field as

$$E(J + \Delta J) \approx E(J) + \frac{\partial E}{\partial J} \cdot \Delta J \ . \tag{6.16}$$

Inserting (6.7) into (6.16), we obtain

$$E(J + \Delta J) \approx \rho J + \left(\rho + J \frac{\partial \rho}{\partial J} \right) \cdot \Delta J \ . \tag{6.17}$$

We now rewrite (6.11), enforcing the equality of the electric field at $J + \Delta J$, i.e.

$$E_a(J_a + \Delta J_a) = E_b(J_b + \Delta J_b) \ . \tag{6.18}$$

The solution of the linearized equation (6.18) will give an approximate solution to the problem. When inserting (6.17) into (6.18), we obtain

$$s_a + r_a \cdot \Delta J_a = s_b + r_b \cdot \Delta J_b \tag{6.19}$$

with

$$r_a = \left. \frac{\partial E_a}{\partial J} \right|_{J_a} = \rho_a + J_a \left. \frac{\partial \rho_a}{\partial J} \right|_{J_a} , \tag{6.20}$$

$$s_a = \rho_a J_a \ . \tag{6.21}$$

In this formulation, the source equations now read

$$s_{n_g} + r_{n_g} \cdot \Delta J_{n_g} = -\nabla \mathcal{V}_g \ , \tag{6.22}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta J_1 \\ \Delta J_2 \\ \vdots \\ \Delta J_{n_g} \end{bmatrix} = \mathcal{I}_g - I_g \ , \tag{6.23}$$

where the c_i coefficients are the same as in (6.14), g still identifies the group number and I_g is given by (6.10). The matrix formulation thus becomes

$$\begin{bmatrix} r_1 & -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & -r_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{n_g-1} & -r_{n_g} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{n_g} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n_g-1} & c_{n_g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta J_1 \\ \Delta J_2 \\ \vdots \\ \Delta J_{n_g-1} \\ \dots \\ \Delta J_{n_g} \\ \dots \\ \Delta J_{n_g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 - s_1 \\ s_3 - s_2 \\ \vdots \\ s_{n_g} - s_{n_g-1} \\ \dots \\ -\nabla \mathcal{V}_g - s_{n_g} \\ \dots \\ \mathcal{I}_g - I_g \end{bmatrix} , \tag{6.24a}$$

or in a compact form

$$\boldsymbol{M_g}\, \Delta \boldsymbol{J_g} = \boldsymbol{R_g} \ , \tag{6.24b}$$

where $\boldsymbol{R_g}$ is the residue vector that must tend towards zero as $\Delta \boldsymbol{J_g}$ tends towards zero. The solution of (6.24) will give the increment vector $\Delta \boldsymbol{J_g}$ (to be added to $\boldsymbol{J_g}$) required to satisfy (6.18) at all nodes $a, b \in \mathcal{N}_g$, together with (6.22) or (6.23). Equation (6.24) reduces to (6.15) when all conductors in the group are linear and a null initial condition is used. Note that $\boldsymbol{J_g}$ is a subset of $\boldsymbol{J}$, and it contains only the current densities at the nodes belonging to group g.

6.6.4 System resolution

Equation (6.24) is most efficiently solved by using a conventional Gaussian elimination – back substitution scheme. The Gaussian elimination is used to introduce zeros under the diagonal, and will therefore act only on the last line of the matrix if the group is current driven. It is even not required in the case of a voltage gradient source since there are already zeros everywhere under the diagonal. The back substitution is used to determine the unknowns from n_g to 1. Note that without any reordering of the lines, or equivalently, without a pre-selection of the r_a and r_b that appear on the same line, numerical error may propagate quickly when performing the back substitution. This is more likely to occur when r_a and r_b differ by several orders of magnitude, leading to a badly conditioned matrix. Details can be found in any matrix computation book, for instance [96, chap. 1].

6.6.5 Iterative algorithm

Finally, assuming that the lists $\mathcal{E}_g$ and $\mathcal{N}_g$ have been built for each group g of conductors, and that the $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{B}_x}$ and $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{B}_y}$ matrices have also been already generated, we can devise an iterative algorithm that solves for the current distribution in all the conductors. This algorithm, for the general case of non-linear materials, i.e. the solution of (6.24), is shown in FIG. 6.2. The algorithm only requires that initial current distribution is specified in each conductor. It can be zero everywhere, as long as it does not cause any singular behavior of $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{g}}$. To prevent this, the function describing ρ should not be discontinuous nor become null. Refer to the remarks in section 6.8 for more details on restrictions that apply to the resistivity function.

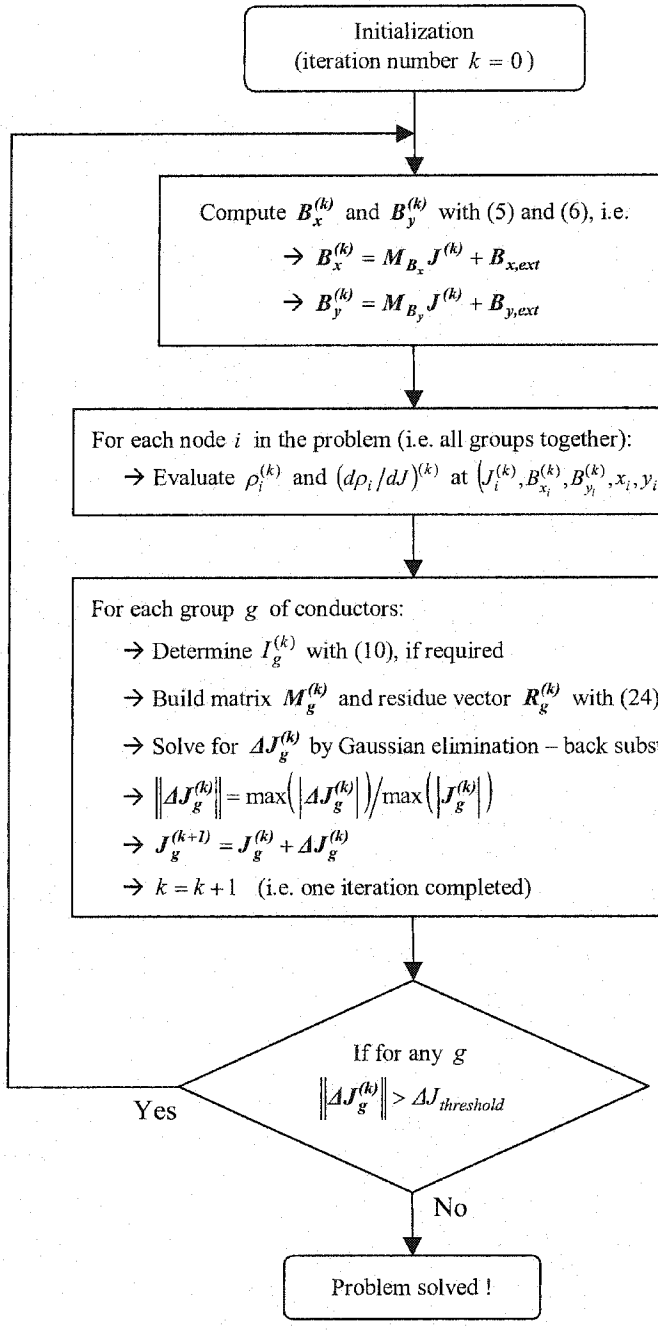


FIG. 6.2 – Iterative algorithm used to solve for the dc current distribution. The notation $^{(k)}$ denotes the k^{th} iteration, $|\cdot|$ denotes the absolute value, $||\cdot||$ denotes the norm and $\Delta J_{threshold}$ is a relative tolerance threshold that determines the end of the iterations.

6.7 Examples

In order to illustrate the capabilities of this algorithm, this section presents four hypothetical examples. The first example treats a purely non-linear problem. The second one deals with a non-homogeneous conductor. The third example demonstrates an anisotropic field dependent problem. Finally, the last problem involves all these dependences at once, considering a hypothetical high temperature superconducting material. FIG. 6.3 illustrates the geometries used for each problem. The implementation of the algorithm was done using *Matlab*®, without using any particular toolbox. Note that some code was compiled in the $\boldsymbol{M}_{B_x}$ and $\boldsymbol{M}_{B_y}$ matrices generation process (pre-processing) to speed up this part of the calculation, which would otherwise require a much longer computation time than the solution process itself.

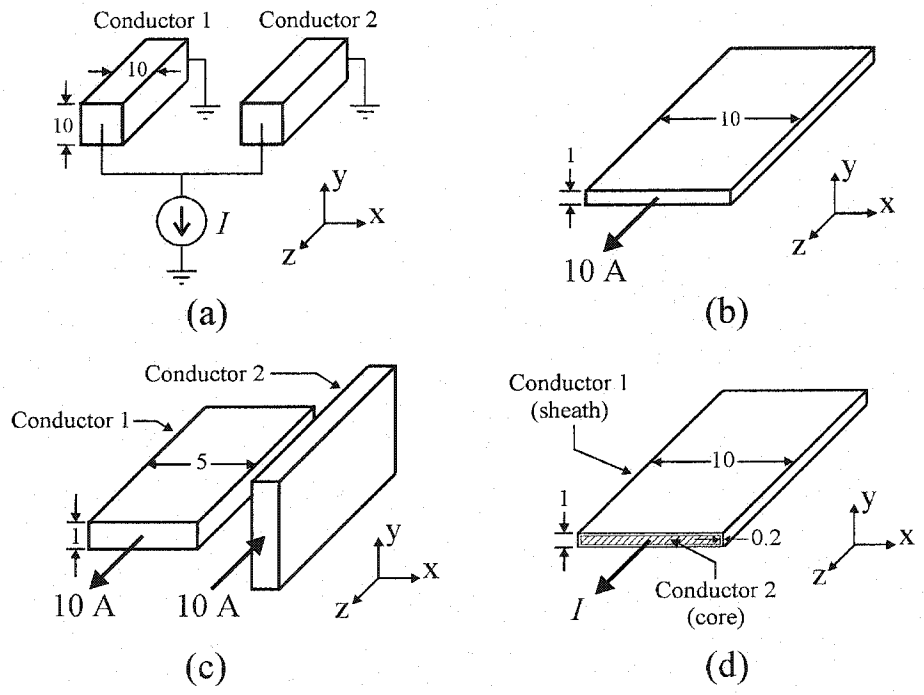


FIG. 6.3 – Illustrations of the conductors' geometries used in the examples below. All dimensions are in mm.

In order to validate the results obtained with the method developed above, we used the *MagNet®* software (from *Infolytica Corporation*). This software uses the finite element method to solve different electromagnetic problems, among them the dc current distribution [75]. With the addition of an optional module, it is capable of treating problems with non-linear inhomogeneous anisotropic and field dependent resistivities in 3D problems. In all cases, the agreement between the results from *MagNet®* and those from the current method was excellent, which indicates that, both ways, the correct solution was found with a very satisfactory level of accuracy. The slight discrepancies are just a matter of the different tolerances and meshes used in each case, and thus they will not be discussed any further. A table containing some relevant numerical details accompanies each example. All problems were solved to a relative tolerance of 10^{-6} using a Pentium III 1 GHz computer. In all cases, the simulations took only a few seconds.

6.7.1 Non-linear resistivity

We consider two parallel conductors of the same cross-section (1 cm^2), sharing a total current imposed by a current source I, as illustrated in FIG. 6.3(a). Conductor 1 is made of a linear resistive material ($\rho_1 = 10^{-4}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$), such that it actually behaves as a resistance of 1 Ω/m. Conductor 2 is made of a non-linear material whose resistivity is defined by

$$\rho_2 = \frac{k}{J} \cdot \log\left(1 + \frac{J}{J_0}\right)\ \Omega \cdot \mathrm{m}\,, \tag{6.25}$$

valid for $J > -J_0$, and where "log" is the natural logarithm. Its derivative is

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial J} = \frac{k}{J}\left[\frac{1}{J + J_0} - \frac{1}{J}\log\left(1 + \frac{J}{J_0}\right)\right]\,. \tag{6.26}$$

Equation (6.25) describes a semiconductor in terms of J. Note that $\rho_2 = k/J_0$ when $J = 0$. For simplicity, we take $k = 100\,\rho_1$ and $J_0 = 1$, thus for $J = 0$, $\rho_2 = 100\,\rho_1$.

We should point out that the current must be uniform over the cross-section of both conductors since there is neither magneto-resistance nor inhomogeneity in the definition of ρ_1 and ρ_2. Therefore, it is not worth looking explicitly at the solution for the current distribution.

This problem was modeled by considering a single group of two conductors since they are in parallel. We solved this problem for different amplitudes of current source I, and examined in output the sharing of the current between the two conductors and the resulting voltage gradient. The results are shown in FIG. 6.4. As we could expect, the "semiconductor-like" conductor takes more and more of the source current as a consequence of the log term in (6.25), thus acting as a parallel current limiting device for conductor 1. This problem is in fact an electrical circuit problem rather than a geometric one, so the results were easy to verify manually. TAB. 6.1 gives the numerical details for this problem.

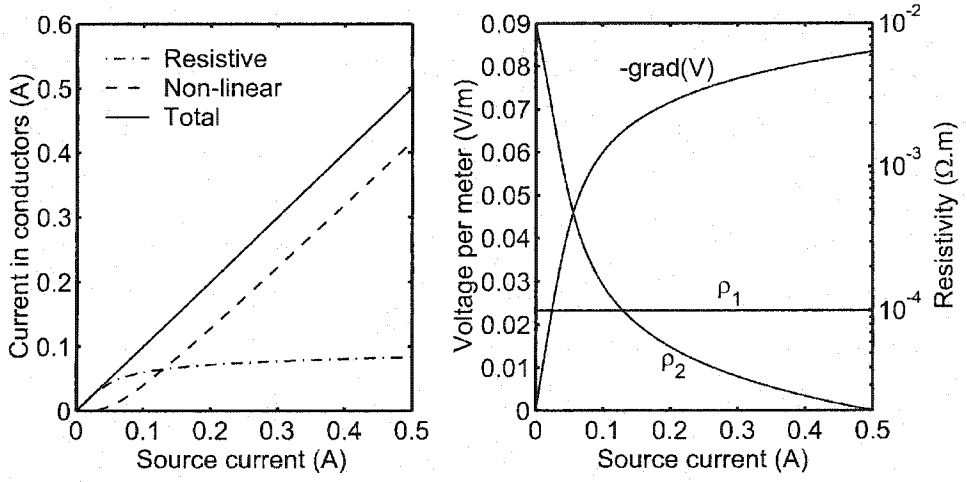


FIG. 6.4 – *Left*: sharing of the current between conductors 1 (resistive) and 2 (non-linear) versus the total source current. We clearly see the current limitation effect in conductor 1, resulting from the non-linear resistivity of conductor 2. *Right*: voltage gradient along the conductors and resistivity of both conductors as the source current is increased.

TAB. 6.1 – Numerical Parameters and Results For Example A

Number of elements:	1 (in each conductor)
Size of elements:	10 mm x 10 mm
Aspect ratio:	1
Pre-processing time:	1 s
Calculation time:	2.7 s (for 100 V-I points)
Number of iterations:	3 to 4 (to relative tol. of 10^{-6})

6.7.2 Inhomogeneous resistivity

We consider a single conductor having a width of 10 mm and a thickness t of 1 mm, in which a current of 10 A is imposed, as illustrated in FIG. 6.3(b). We suppose that, for any reason, the resistivity is lower at the material top and bottom surfaces, and that it is described by

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + k \cdot \exp\left[-\left(\frac{|y|-t/2}{s}\right)^2\right]} \ \Omega \cdot \mathrm{m}\ , \tag{6.27}$$

where ρ is symmetric in y. For convenience, we take $\rho_0 = 1\ \Omega \cdot \mathrm{m}$, $s = 0.2(t/2)$ mm and $k = 0.2$. Since the current distribution is independent of x, we extract the result along the contour line aa', oriented along the y axis. FIG. 6.5 shows the contour definition, as well as the obtained current density and the corresponding resistivity. Other relevant numerical details are shown in TAB. 6.2. In particular, it is worth mentioning that the high aspect ratio of the elements did not affect the accuracy of the solution. See [81] for more details.

The solution shape was easy to expect qualitatively from the resistivity definition (6.27). Nevertheless, it shows that the algorithm can easily account for the inhomogeneity. Note that the voltage gradient can be obtained directly by computing

$$\nabla V = -E_i = -\rho_i J_i \tag{6.28}$$

TAB. 6.2 – Numerical Parameters and Results For Example B

Number of elements:	100 (i.e. 100 lines x 1 column)
Size of elements:	10 mm x 0.01 mm
Aspect ratio:	1000
Pre-processing time:	1.4 s
Calculation time:	0.9 s
Number of iterations:	2 (to relative tol. of 10^{-6})

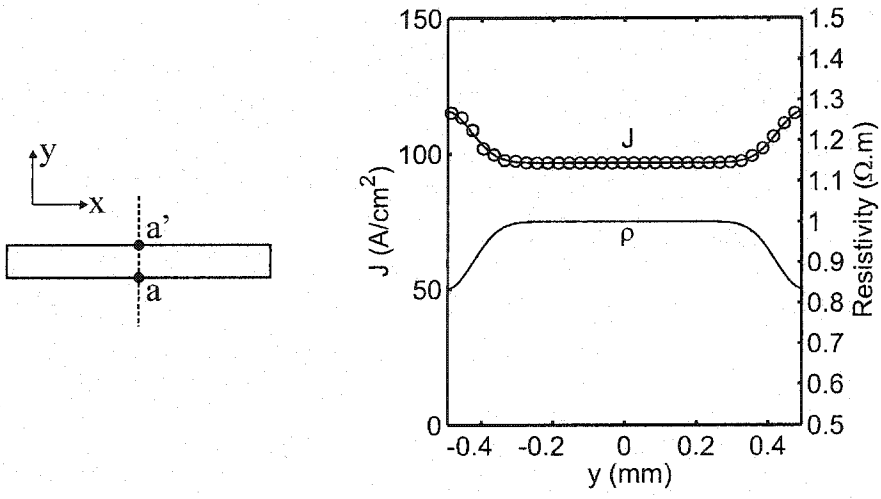


FIG. 6.5 – *Left*: cross-section of the conductor and contour line definition. *Right*: calculated current density and resistivity along the contour line aa'. The circles correspond to the *MagNet*® solution. We easily observe that the lower resistivity at the conductor's top and bottom surfaces results in an increased current density.

at any calculation node i, and the resistance per meter is obtained from

$$\frac{R}{meter} = \frac{-\nabla V}{I} \ \Omega/\mathrm{m} \ . \tag{6.29}$$

It would not be obvious, if not impossible, to determine the dc resistance of an inhomogeneous conductor analytically.

6.7.3 Anisotropic field dependent resistivity

The next example is by far less obvious to solve. Let us consider two identical conductors of 5 mm by 1 mm carrying an equal but opposite current of 10 A, as indicated in FIG. 6.3(c). We suppose that the two conductors exhibit magneto-resistance to the field component perpendicular to their wide face, which constitutes an anisotropic field dependence. This dependence is assumed to be of the form

$$\rho_1 = \rho_0 \cdot \left(1 + (B_y/B_0)^2\right) \ \Omega \cdot \mathrm{m} \,, \tag{6.30}$$

$$\rho_2 = \rho_0 \cdot \left(1 + (B_x/B_0)^2\right) \ \Omega \cdot \mathrm{m} \,, \tag{6.31}$$

with $\rho_0 = 1\ \Omega \cdot \mathrm{m}$ and $B_0 = 1$ mT for convenience. Equations (6.30) and (6.31) actually represent the same material property, but (6.31) accounts for the rotation of conductor 2.

This problem was modeled using two groups of one conductor, since in this case they are not in parallel. We were interested in determining the current distribution resulting from this anisotropic field dependence. After the simulation, we obtained the current distribution presented in FIG. 6.6. For further validation, FIG. 6.7 shows the relevant flux density components in each conductor, as well as the resistivity. From TAB. 6.3, we see that it took 29 Newton-Raphson iterations to converge to the solution to a relative tolerance of 10^{-6}.

Interestingly, the potential gradients in each conductor are different just because of their geometric disposition, i.e. $|\nabla V_1/\nabla V_2| = 1.326$. Hence the two conductors do not dissipate the same amount of power, despite the fact that they are identical. They are non-linearly coupled in dc via the magneto-resistance.

TAB. 6.3 – Numerical Parameters and Results For Example C

Number of elements:	320 (in each conductor)
Size of elements:	0.625 mm x 0.625 mm
Aspect ratio:	1
Pre-processing time:	5.5 s
Calculation time:	6.6 s
Number of iterations:	29 (to relative tol. of 10^{-6})

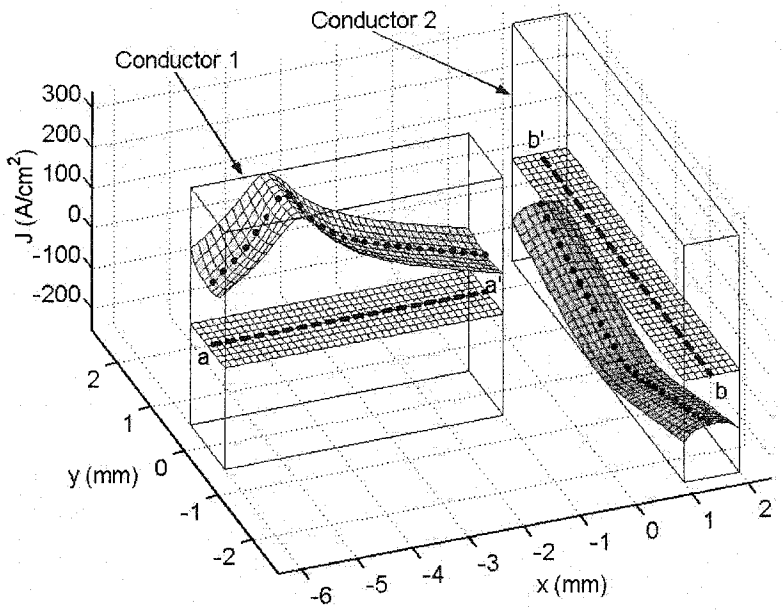


FIG. 6.6 – Current distribution in conductors 1 and 2. The mesh used is shown in the $J = 0$ plane for both conductors. On each mesh there is a bold dotted line that defines the contours aa' and bb'. Along these contours, the *MagNet*® solution was extracted and plotted as black dots, which fit very well on the J surfaces obtained with the current method.

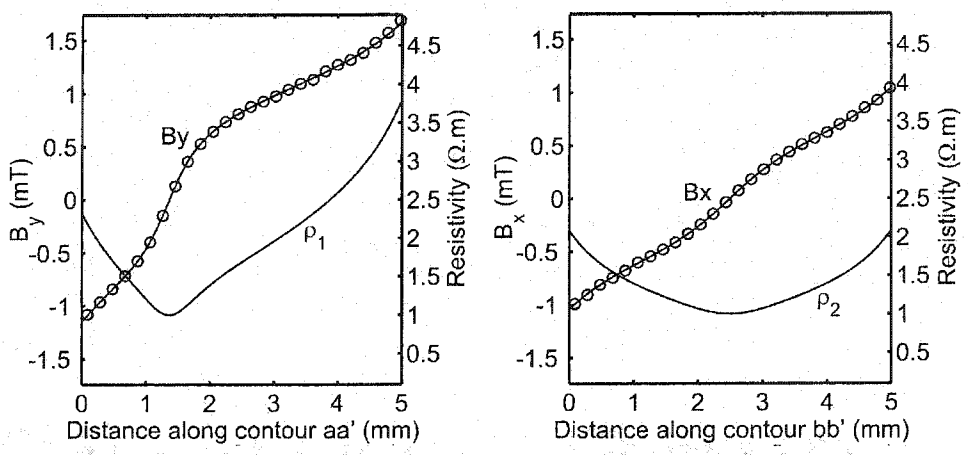


FIG. 6.7 – Plot of the relevant x and y components of the flux density in each conductor along contours aa' (*left*) and bb' (*right*), as defined in FIG. 6.6. The circles indicate the *MagNet*® solution. The correspondence with FIG. 6.6 is straightforward when referring to (6.30) and (6.31).

6.7.4 All dependences together

Let us finally consider a more involved example, i.e. a material whose resistivity exhibits all the previous dependences, i.e. non-linearity, inhomogeneity and anisotropic field dependence. This example is meant to represent the behavior of a realistic high temperature superconductor, whose geometry is illustrated in FIG. 6.3(d), i.e. a superconducting core (conductor 2) surrounded by a silver sheath (conductor 1). In addition to its self-field, it is immersed in an externally applied field. The silver sheath has outer dimensions of 10 mm of width by 1 mm of thickness. The superconducting core is located 0.2 mm away from the sheath edges, and thus has a thickness t of 0.6 mm and a width of 9.6 mm. The critical current

density J_c and the exponent n of the superconductor are described by

$$J_c = J_{c0} \cdot \exp\left(\frac{-|B|}{B_\perp \sin^2\theta + B_\parallel \cos^2\theta}\right) \cdot \left\{1 + k \cdot \exp\left[-\left(\frac{|y| - t/2}{s}\right)^2\right]\right\} \text{ A/m}^2 , \tag{6.32}$$

$$n = 1 + n_0 \cdot \exp\left(\frac{-|B|}{B_0}\right) , \tag{6.33}$$

with

$$|B| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} , \tag{6.34}$$

$$|\theta| = \arctan\left(\frac{B_y}{B_x}\right) . \tag{6.35}$$

We remark that both J_c and n decrease with $|B|$, but only J_c is modeled as being anisotropic. In addition, J_c exhibits a slight y inhomogeneity, being higher near the superconductor's top and bottom surfaces.

The resistivity of the superconductor can be described by

$$\rho_2 = \epsilon + \frac{E_0}{J_c} \cdot \left(\frac{|J|}{J_c}\right)^{n-1} \ \Omega \cdot \text{m} . \tag{6.36}$$

Its derivative is

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial J} = (n-1)\frac{E_0}{J_c^n} \cdot |J|^{n-2} \cdot \text{sign}(J) , \tag{6.37}$$

whereas the resistivity of the silver sheath is constant and taken at 77 K (liquid nitrogen), i.e. $\rho_1 \approx 1.88 \times 10^{-9}\ \Omega \cdot \text{m}$.

Let us use $J_{c0} = 500 \times 10^{-4}$ A/m^2, $B_\perp = 20$ mT, $B_\parallel = 200$ mT, $k = 0.1$, $s = 0.4(t/2)$ mm, $B_0 = 30$ mT, $n_0 = 5$ and $E_0 = 1 \times 10^{-4}$ V/m. This model is based on typical experimental curves, and is strictly valid only for $|J| \lesssim J_{c0}$, which means that the superconductor current must be less than about 30 A for this particular problem. The form of the anisotropic field dependence of J_c was

postulated though, as well as its y dependence. We also set $\epsilon = 10^{-20}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$ to prevent ρ_2 from becoming null as J goes to 0. This value of ϵ must be low enough to be negligible when compared to ρ_2, typically at least 10 orders of magnitude below E_0/J_c. A lower value of ϵ will result in a longer computation time, but a more accurate result for weak values of ρ_2.

This problem is topologically identical to the first example, i.e. two parallel conductors sharing a current that is imposed by a current source. Hence it was modeled using a single group of two conductors. In order to get an idea of how the materials' properties affect the current distribution over the cross-section of the conductors, a simulation with $I = 30$ A, $B_{x_{ext}} = 5$ mT and $B_{y_{ext}} = 10$ mT was run. The resulting current distribution is shown in FIG. 6.8. As it can be seen, it becomes quite unpredictable, and the contribution of each type of dependence becomes difficult to distinguish from one another. The currents in each conductor are $I_1 = 0.58$ A (silver sheath) and $I_2 = 29.42$ A (superconducting core). In FIG. 6.9, the current density along two diagonal contours for the same conditions is plotted, in order to make easier the comparison with the *MagNet*® solution. We remark in TAB. 6.4 that the convergence was reached pretty quickly, i.e. in only 7 Newton-Raphson iterations.

To complete this example, and meanwhile show some of the typical consequences of non-linear anisotropic field dependent resistivity, two interesting cases are considered. First, the $V - I$ curves of this two conductors system are calculated for an externally applied field $|B_{ext}|$ ranging from 0 to 100 mT. The results are shown in FIG. 6.10. We can observe the influence of the non-linearity and the anisotropic field dependence on the macroscopic measurements, i.e. voltages and currents. For instance, with $|B_{ext}| = 100$ mT, and $I = 30$ A, the voltage is 50 times greater when the field is applied parallel to the y axis instead of the x axis. The steady state losses follow the same ratio.

TAB. 6.4 – Numerical Parameters and Results For Example D

	Cond. 1	Cond. 2
Number of elements:	9	600
Size of elements:	variable	0.24 mm x 0.04 mm
Worst aspect ratio:	48	6
Pre-processing time:	5 s	
Calculation time:	3.2 s	
Number of iterations:	7 (to relative tol. of 10^{-6})	

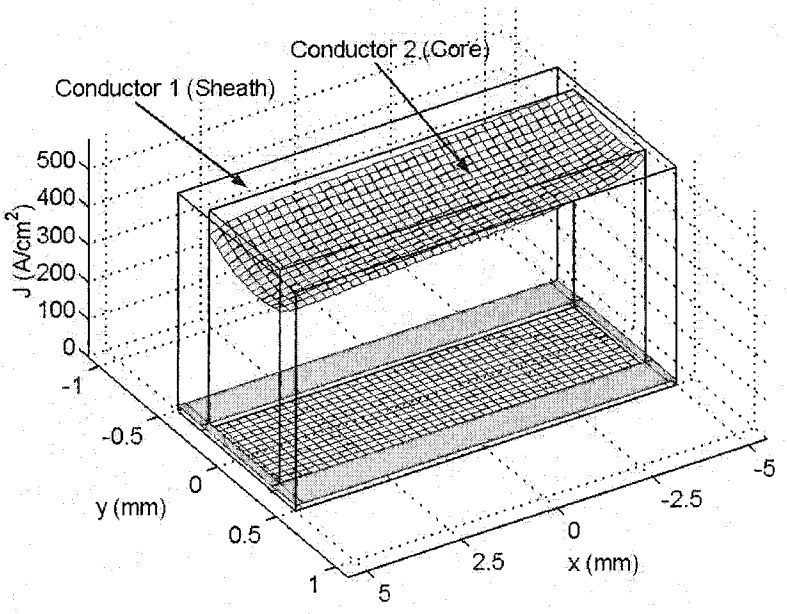


FIG. 6.8 – Current distribution in conductor 1 (silver sheath) and conductor 2 (superconducting core) for an imposed current $I = 30$ A, $B_{x_{ext}} = 5$ mT and $B_{y_{ext}} = 10$ mT. The x and y axes were scaled differently to enhance the visualization.

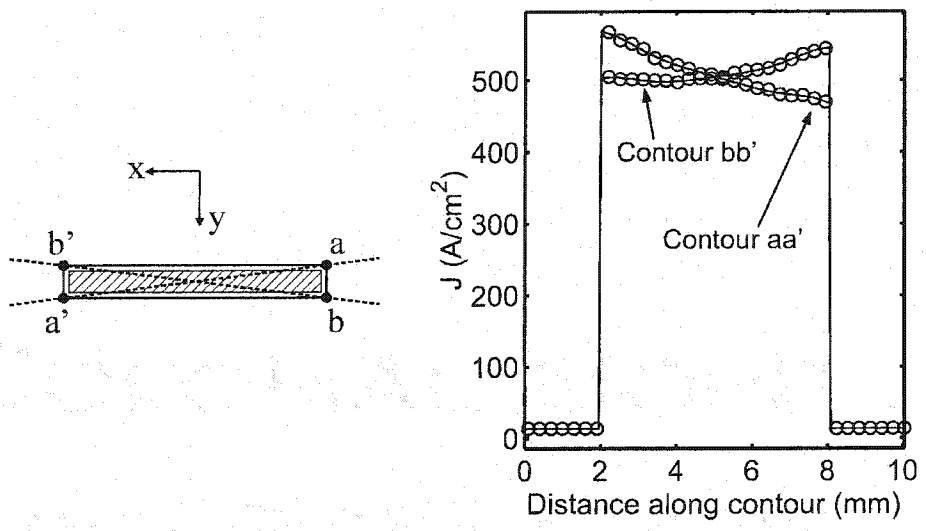


FIG. 6.9 – *Left*: cross-section of the conductors and contour lines definition. The axes were rotated upside down to make the visual correspondence with FIG. 6.8 easier. *Right*: current density and resistivity along the contour lines aa' and bb'. The circles correspond to the *MagNet*® solution.

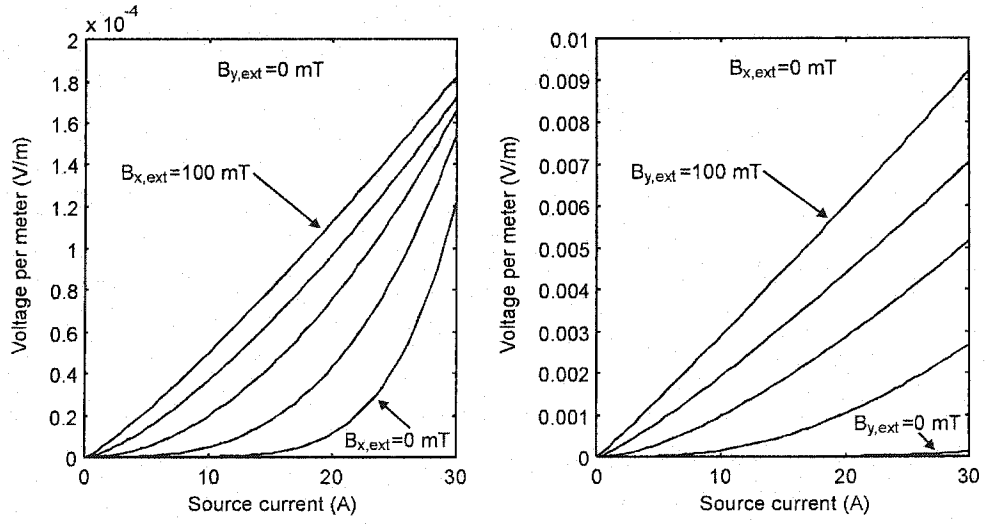


FIG. 6.10 – Calculated $V - I$ curves of the two conductor system of example D when an external field is applied. *Left*: external field parallel to x axis. *Right*: external field parallel to y axis. In both graphics, the $V - I$ curves correspond to $|B_{ext}| = 0$ to 100 mT by steps of 25 mT.

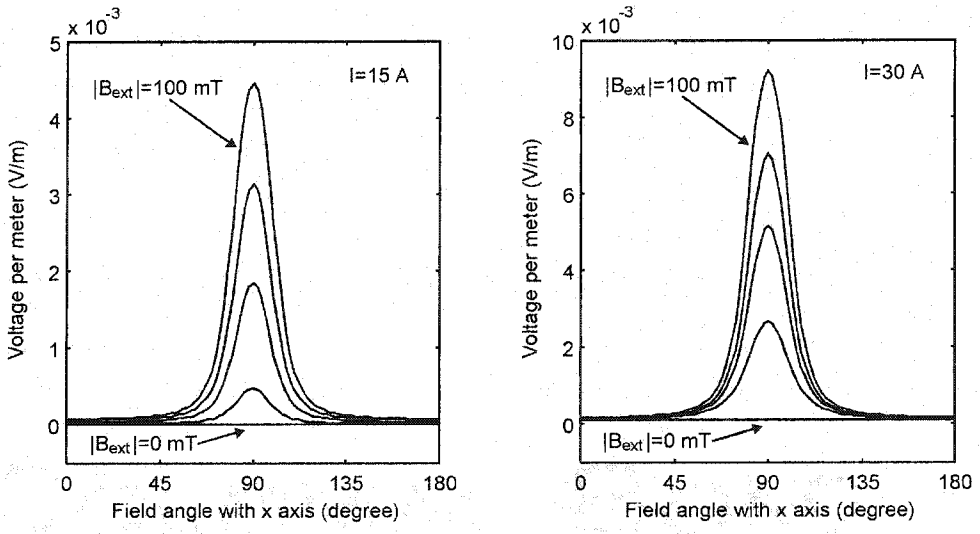


FIG. 6.11 – Voltage per meter along the conductors for a constant source current versus the angle of the external field. *Left*: $I = 15$ A. *Right*: $I = 30$ A. In both graphics, the curves correspond to $|B_{ext}| = 0$ to 100 mT by steps of 25 mT.

The second case emphasizes the anisotropic field dependence. For a given source current I and external field $|B_{ext}|$, we observe the dependence of the voltage gradient on the field angle (0° being parallel to the x axis). The results are shown in FIG. 6.11. Interestingly, we observe that the voltage rises sharply between 45° and 135°, but remains quite low outside this range. This would be the range of angles to avoid in applications using such materials.

These two simple examples reproduce quite well the real behavior of these materials. Real cases will be investigated in forthcoming publications.

6.8 Remarks

6.8.1 Restrictions on the resistivity function

As it was previously mentioned, the resistivity cannot be a discontinuous function of J. If this occur, the problem can be solved anyway, but the discontinuity

would not be represented accurately. In addition, ρ must be a monotonically increasing function of J, otherwise a region of negative resistance would be present, and the solution might not be unique anymore.

The most important restriction though is that ρ must never be equal to zero. The current problem formulation, based on Maxwell equations, is strictly valid only for $\rho > 0$. Otherwise, matrix $\boldsymbol{M_g}$ in (6.24) becomes singular, leading mathematically to an infinite number of solutions. Physically, $\rho = 0$ implies a null power dissipation ($P = \rho J^2 = 0$), and there is indeed an infinite number of ways the current can distribute itself to minimize the total power dissipation, which is null in all cases. In order to consider such cases (which may occur in some circumstances with superconductors), other governing equations must be used in the region where $\rho = 0$, such as the London equations. The current method could be reformulated to account for them.

For most applications or material investigations though, it is sufficient to do as in example D, i.e. use a low enough dummy resistivity, in order to avoid any problem while maintaining a good degree of accuracy. For these cases however, choosing $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$ as the initial condition is generally a very poor choice. It may result in a long simulation time. It is usually better to start with any non-zero value, e.g. a uniform current density satisfying the current source constraint (6.10), or the solution of a previously solved similar problem.

6.8.2 Current sources versus voltage gradient sources

Voltage gradient sources were not demonstrated in this paper. A brief comment on them is worth mentioning though. A problem with voltage gradient sources is much longer to solve than the same problem with current sources. This is especially true when there are field dependent resistivities in the problem. Indeed, when a fixed current is imposed, the self-field is always of the same order of magnitude,

allowing a quick convergence. However, a voltage gradient source does not fix the total current to any value, thus the self-field varies strongly from one iteration to another, as well as the associated field dependent resistivities, resulting in oscillations between high and low currents, until convergence is achieved.

6.8.3 Optimization of field calculation

Since (6.5), (6.6) and (6.7) relate J at a given point (x, y) to the local quantities E_z, B_x and B_y at the same point (x,y) (local model), one must necessarily build the matrices $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{B}_x}$ and $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{B}_y}$ so that the field is calculated at the same points as J, i.e. at the nodes where J is sought. However, only nodes assigned with field dependent materials should be included in the matrices. All other points where the user wants to know the field should not be included in the matrices at this stage to avoid slowing down the solution process, as a result of extra calculations at each iteration. The determination of the field at these points should be done a posteriori, in post-processing operations.

6.8.4 Convergence with strongly field dependent materials

The algorithm was found to fail very rarely. It can handle very strong nonlinearities, as long as the resistivity function is monotonically increasing with J. Problems with materials having resistivities differing by more than ten orders of magnitude were solved without difficulty. However, it was observed that the algorithm might not converge in certain cases of strong field dependence. This can be explained by the fact that the J dependence considered in the Newton-Raphson formulation (section 6.6.3) is not strictly correct, because it neglects the implicit dependence of the local B on the local J. The local B should therefore be also considered in the derivative. Moreover, the local B also implicitly depends on all the current density nodes in the problem, if one refers to the matrix formulations (6.5)

and (6.6). Thus, to solve a stiff magneto-resistant problem, (6.17) should become

$$E_i(\boldsymbol{J}+\Delta\boldsymbol{J}) \approx \rho_i J_i + \left(\rho_i + J_i\frac{\partial\rho_i}{\partial J}\right)\cdot\Delta J_i + \left(\frac{\partial\rho_i}{\partial B_x}\sum_{k=1}^{n_n}\frac{\partial B_{x_i}}{\partial J_k}\cdot\Delta J_k + \frac{\partial\rho_i}{\partial B_y}\sum_{k=1}^{n_n}\frac{\partial B_{y_i}}{\partial J_k}\cdot\Delta J_k\right)\cdot J_i\ , \quad (6.38)$$

evaluated at $(J_i, B_{x_i}, B_{y_i}, x_i, y_i)$, and where the derivatives inside the summations are simply the coefficients of lines i of matrices $\boldsymbol{M_{B_x}}$ and $\boldsymbol{M_{B_y}}$. This has the important consequence of making matrix $\boldsymbol{M_g}$ in (6.24) full, but even worse, it becomes impossible to solve for each group separately, since the consideration of the field requires that we also consider all the current density nodes of the problem at once. Thus $\boldsymbol{M_g}$ becomes a full matrix of size n_n by n_n, with all sources' equations included in it. An iterative solution would then become quicker and more appropriate than a direct solution. Unless convergence problems are encountered, it is not required to use formulation (6.38).

It is important to point out that the "incomplete" formulation derived in section 6.6 only affects the rate of convergence of the algorithm, and not the accuracy of the solution. When the algorithm converges, the correct solution is always found anyway.

A means to avoid the complete formulation would be to start with a less severe field dependence, solve the problem, make the field dependence more severe, then solve again using the previous solution as a starting point. This can be repeated as many times as required.

6.8.5 Implications of using a point collocation method

We could argue for a long time about the accuracy of point collocation methods, e.g. see [66, p. 111 and references therein]. The main advantage of using them is certainly their ease of implementation. However, we must be aware that in general, the

solutions obtained with a point collocation method are different than the ones obtained with a variational formulation. For instance, let us consider the power functional, written as

$$P = \int_{\Omega} \rho(J, B_x, B_y, x, y) J^2 \, \mathrm{d}\Omega \, , \tag{6.39}$$

where P is the total power dissipated in the all conductors and Ω is the domain of integration, which consists in the cross-sections of all the conductors in the problem. If we defined a variational formulation based on the minimization of P, the solution vector $\boldsymbol{J}$ would minimize P. However, our point collocation method does not ensure that P is exactly minimized, simply because its formulation does not impose it explicitly. Instead, it imposes E_z to be a constant. Consequently, the point collocation solution will not exactly minimize P, whereas the variational solution does not guarantee that E_z will be exactly the same everywhere. This just demonstrates once again that in the theory of approximation, the error can be spread in many different ways, but it must be somewhere! In the present case, the derivation of a variational formulation based on the minimization of (6.39) was briefly investigated. It turned out to be less efficient than the point collocation formulation, and was consequently abandoned.

6.9 Conclusion

An iterative point collocation method to calculate the dc current distribution in 2D conductors exhibiting non-linear, field dependent and inhomogeneous resistivity has been developed. The method relies on a previously developed analytical method for the determination of the flux density from the Biot-Savart integral. Hence there is no boundary condition to handle, but the method is restricted to problems without magnetic materials. It supports multi-conductor problems easily.

Each group of parallel conductors can either be driven by a current source or a voltage gradient source and can be treated separately in the matrix formulation, allowing a very efficient resolution. The method is simple to implement, and provides solutions in a few seconds, as demonstrated in the four examples presented in this paper.

Acknowledgments

The authors gratefully thank J. P. Webb for his careful review of the manuscript and relevant comments to improve it.

CHAPITRE 7

VALIDATION EN CA DES LOGICIELS DE CALCUL NUMÉRIQUE

Les deux chapitres précédents décrivaient la validation du calcul en 2D de B et A pour J donné (chapitre 5), ainsi que la validation du calcul en 2D de la distribution cc de J dans un matériau dont la résistivité est non linéaire, dépendante du champ et non homogène (chapitre 6). Dans ce dernier chapitre, nous avons montré que les résultats de *MagNet*® et du logiciel « maison », développé à l'aide de *Matlab*®, concordent très bien, d'où l'on peut dorénavant faire confiance aux deux logiciels pour le cas cc, bien que les modèles utilisés étaient arbitraires.

Le chapitre actuel présente la validation de *MagNet*® et des autres méthodes numériques maisons pour le cas ca. Encore une fois, les modèles utilisés sont arbitraires. Nous reléguons la validation de ces derniers aux chapitres 8, 9 et 10. Afin de simplifier et d'accélérer la démarche, nous nous contentons d'effectuer cette validation pour une géométrie 1D seulement. La géométrie 1D possède des solutions analytiques connues, même pour certains problèmes non linéaires, ce qui permet de s'assurer du bon fonctionnement de l'ensemble des algorithmes de calcul avant d'aborder des problèmes plus complexes en 2D et 3D. Pour les problèmes qui ne possèdent pas de solution analytique, nous comparons les résultats de simulations de deux (ou plusieurs) méthodes numériques.

Du côté des méthodes numériques « maison », nous reprenons la méthode de calcul semi-analytique pour B et A décrite au chapitre 5 pour le cas 1D. De plus, la mise en équation du problème électromagnétique associé est formulée pour prendre en considération la variation temporelle du champ externe et du courant de source. D'autre part, nous utilisons aussi la méthode des différences finies, bien que celle-ci soit plus limitée dans le type de problème considéré (diffusion non linéaire). Elle permet quand même de valider certains résultats.

Dans l'ordre, ce chapitre présente la définition du problème 1D considéré, la formulation mathématique des méthodes numériques (semi-analytique et différences finies), et les tests de validation des méthodes numériques pour des problèmes avec et sans solutions analytiques. Les résultats sont analysés en cours de route, et une dernière section nuance certains points importants relatifs aux méthodes numériques.

7.1 Définition du problème 1D

Une géométrie 1D doit présenter des variations dans une seule direction. Nous choisirons la direction x. La géométrie considérée est un mur infini en y et z, fait d'un matériau conducteur, et situé entre $-x_0 \leq x \leq x_0$, avec x_0 positif et égal à la demi-largeur du mur. Le reste de l'espace est constitué d'air, donc le mur est la seule région de l'espace où il peut y avoir présence d'une densité de courant. Le matériau conducteur possède une perméabilité magnétique égale à μ_0, tout comme l'air. La densité de flux sera supposée orientée en y, et la densité de courant en z, de sorte que J_z positif dans le mur implique B_y positif dans la région $x > 0$. Comme il n'existe qu'une seule composante pour chaque variable de champ, ces dernières seront notées J, B et A pour le reste du chapitre.

Le problème électromagnétique peut être défini de façon générale en considérant la possibilité d'imposer un champ externe uniforme B_{ext}, qui sera appliqué sur les parois du mur, et un courant par unité de hauteur du mur, noté I_s, imposé par une source externe. Les quantités B_{ext} et I_s possèdent une composante ca et une composante cc, i.e.

$$B_{ext}(t) = B_{cc} + B_{ca}(t) \; . \tag{7.1}$$

$$I_s(t) = I_{cc} + I_{ca}(t) \; , \tag{7.2}$$

Notons que I_s est le courant net *total* traversant le plan $x - y$, qui doit être fourni

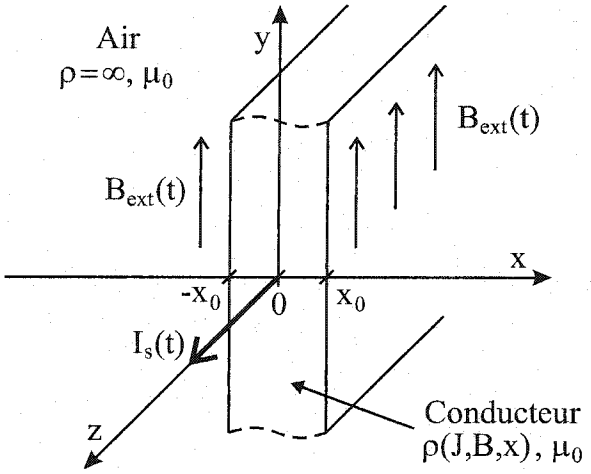


FIG. 7.1 – Géométrie 1D utilisée pour valider les méthodes numériques.

par une source externe, car le courant net *induit* par la variation du champ externe est nul dans une géométrie 1D (ou 2D).

Enfin, le matériau conducteur possède une fonction de résistivité $\rho(J, B, x)$, laquelle doit être continue. Afin de simplifier, nous n'utiliserons qu'un seul matériau à la fois, ce qui n'enlève rien à la généralité de la preuve. Pour des formes d'onde de $I_s(t)$ et $B_{ext}(t)$ données, c'est la fonction de résistivité qui dictera la distribution exacte de J. La FIG. 7.1 illustre schématiquement le problème qui vient d'être décrit.

7.2 Formulation mathématique des méthodes numériques

7.2.1 Considérations générales

Avant de développer chacune des méthodes individuellement, définissons une nomenclature commune. La région $-x_0 \leq x \leq x_0$ peut être représentée par plusieurs segments de droite, appelés éléments, qui se joignent en des noeuds numérotés de gauche à droite. On suppose qu'il y a n_n de ces noeuds, reliant ainsi n_e

segments de droites. On a bien sûr $n_n = n_e + 1$. On supposera que les noeuds sont équidistants, de façon à rendre les développements plus simples.

À chacun des noeuds on associe une inconnue pour la densité de courant (ou pour la densité de flux, selon la méthode utilisée). Les inconnues sont numérotées comme les noeuds et on peut les écrire de façon compacte par un vecteur colonne de longueur n_n au besoin. Les coordonnées des noeuds sont notées x_i (i étant le numéro du noeud). Définissons aussi les quantités utiles suivantes, qui sont liées aux éléments plutôt qu'aux noeuds:

$$\bar{x}_k = \frac{x_{i+1} + x_i}{2} , \tag{7.3}$$

$$a_k = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} , \tag{7.4}$$

où k désigne le numéro de l'élément ($1 \leq k \leq n_e$), $\bar{x}_k$ représente la position du centre de l'élément k, borné par les noeuds x_i et x_{i+1}, et a_k représente la demi-largeur de l'élément k.

Enfin, il est bien connu que la densité de flux à l'extérieur d'une feuille de courant infinie portant un courant de I A/m est donné par

$$B = \pm\frac{\mu_0 I}{2} , \tag{7.5}$$

peu importe la distribution de J dans la feuille. Ceci sera utile dans la section suivante pour déterminer les constantes d'intégration ainsi que les conditions aux frontières. Notons que nous considérons toujours un environnement non magnétique ($\mu = \mu_0$).

7.2.2 Formulation de la méthode semi-analytique en 1D

Considérons que la distribution de courant est représentée par une fonction linéaire sur chacun des éléments. La valeur de la densité de courant entre deux noeuds est obtenue par une simple interpolation linéaire. On peut normaliser les éléments afin qu'ils soient définis entre $-1 \leq u \leq 1$ en utilisant la transformation

$$u(x) = \frac{(x - \bar{x}_k)}{a_k} , \tag{7.6}$$

où k désigne toujours le numéro de l'élément. Ainsi, $-1 \leq u \leq 1$ représente un point à l'intérieur de l'élément k, sur lequel on définit la densité de courant par

$$J^k(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[(1+u)J_{i+1} + (1-u)J_i\right] & \text{pour } -1 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{pour } |u| > 1 \end{cases} , \tag{7.7}$$

où i et $i+1$ correspondent respectivement aux noeuds de gauche et de droite de l'élément k. Notons que $J^k = 0$ pour $|u| > 1$. Pour cet élément normalisé, on calcule facilement la densité de flux et le potentiel vecteur grâce aux équations $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ et $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$, exprimées en 1D et pour les basses fréquences, i.e.

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 J(x) , \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -B(x) , \tag{7.9}$$

qu'on intègre analytiquement. Notons que dans l'intégration de (7.8), la constante d'intégration doit être déterminée à l'aide de (7.5), sachant que $I^k = a_k(J_{i+1} + J_i)$ sur un élément linéaire. De plus, l'intégration de (7.9) doit être effectuée en trois parties, soit pour $u \leq 1$, $-1 \leq u \leq 1$ et $u \geq 1$. Trois constantes d'intégration sont ainsi générées, mais elles sont liées par la continuité de A en $u = \pm 1$, d'où une

seule des trois constantes reste arbitraire, et on peut la poser égale à 0 sans perte de généralité. Après avoir effectué les intégrations, on obtient

$$B^k(u) = \frac{\mu_0 a_k}{4} \begin{cases} \big[(u^2+2u-1)J_{i+1} - (u^2-2u-1)J_i\big] & \text{pour } -1 \leq u \leq 1 \\ 2\big[J_{i+1}+J_i\big]\cdot \text{sign}(u) & \text{pour } |u| > 1 \end{cases}, \tag{7.10}$$

$$A^k(u) = \frac{\mu_0 a_k^2}{12} \begin{cases} \big[(1+6u)J_{i+1} + (5+6u)J_i\big] & \text{pour } u \leq -1 \\ u\big[(3-3u-u^2)J_{i+1} - (3+3u-u^2)J_i\big] & \text{pour } -1 \leq u \leq 1 \\ \big[(5-6u)J_{i+1} + (1-6u)J_i\big] & \text{pour } u \geq 1 \end{cases}. \tag{7.11}$$

En partant de ces équations et du principe de superposition, on peut déterminer facilement B et A en n'importe quel point x de l'espace. En effet, pour un point x donné et un nombre n_e d'éléments, on peut écrire

$$B(x) = B_{ext} + \sum_{k=1}^{n_e} B^k\big(u(x)\big)\ , \tag{7.12}$$

$$A(x) = A_{ext} + \sum_{k=1}^{n_e} A^k\big(u(x)\big)\ , \tag{7.13}$$

avec $u(x)$ donné par (7.6), et $B^k(u)$ et $A^k(u)$ donnés par (7.10) et (7.11). De plus, étant donné que B_{ext} est uniforme, (7.9) nous permet d'écrire

$$A_{ext} = -xB_{ext} \tag{7.14}$$

Puisque $B^k(u)$ et $A^k(u)$ sont fonctions des densités de courants J_i $(1 \leq i \leq n_n)$, les sommations développées de $B(x)$ et $A(x)$ résultent en une somme de termes en J_i, qui peut être réécrite de façon compacte en termes d'un vecteur ligne de

coefficients m_i et d'un vecteur colonne $\boldsymbol{J}$, par exemple pour $B(x)$:

$$B(x) = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_{n_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{n_n} \end{bmatrix} + B_{ext} \ , \tag{7.15}$$

Tel que cela a déjà été fait au chapitre 5, la densité de flux et le potentiel à plusieurs points différents peuvent être exprimés par une formulation matricielle, en considérant une ligne par point. Par exemple, pour déterminer B à chacun des n_n noeuds de la discrétisation du domaine, on aurait

$$\begin{bmatrix} B(x_1) \\ B(x_2) \\ \vdots \\ B(x_{n_n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n_n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n_n1} & m_{n_n2} & \dots & m_{n_nn_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{n_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{ext} \\ B_{ext} \\ \vdots \\ B_{ext} \end{bmatrix} \ , \tag{7.16}$$

ou de façon compacte

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{M_B}\, \boldsymbol{J} + \boldsymbol{B_{ext}} \ , \tag{7.17}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M_A}\, \boldsymbol{J} + \boldsymbol{A_{ext}} \ , \tag{7.18}$$

Ces relations compactes et directes entre $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{A}$ rendent la suite des développements très simple. En effet, en solutionnant le problème électromagnétique pour $\boldsymbol{J}$, on obtient directement $\boldsymbol{B}$, ce qui nous permet d'évaluer la résistivité $\rho(J, B, x)$ sans difficulté et avec précision, car aucune dérivée numérique ou de polynômes n'est requise. De plus, c'est par la matrice $\boldsymbol{M_A}$ qu'on réussira à se débarrasser de $\boldsymbol{A}$ dans les équations électromagnétiques du problème. Explicitement, on a

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla V \ , \tag{7.19}$$

où E est le champ électrique et ∇V est le gradient potentiel électrique. Sachant que $E = \rho(J, B, x)J$, et réécrivant (7.19) sous forme vectorielle avec la notation $E_i = E(x_i)$, on obtient

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_{n_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 J_1 \\ \rho_2 J_2 \\ \vdots \\ \rho_{n_n} J_{n_n} \end{bmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{M_A} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{n_n} \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} A_{ext,1} \\ A_{ext,2} \\ \vdots \\ A_{ext,n_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \\ \vdots \\ \nabla V_{n_n} \end{bmatrix}, \tag{7.20}$$

En 1D (ou 2D), ∇V est constant (i.e. uniforme sur la section) et donc indépendant de x, d'où il se réduit à une seule inconnue, que l'on notera simplement ∇V. De plus, afin de spécifier un courant I_s imposé par une source externe, il faut ajouter une équation supplémentaire, de façon à contraindre le courant net à être égal à ce courant de source. Cette équation s'écrit, en termes de la densité de courant

$$I = \sum_{k=1}^{n_e} I^k = \sum_{k=1}^{n_e} a_k (J_{i+1} + J_i) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{n_n} \end{bmatrix} = I_s \,, \tag{7.21}$$

les c_i provenant du développement de la sommation, comme au chapitre 6. En incluant cette contrainte en courant ainsi que le terme ∇V dans vecteur des inconnues, on peut réécrire (7.20) de façon différente, i.e.

$$-\frac{1}{k_1} \left[\begin{array}{ccc:c} & k_1 \boldsymbol{M_A} & & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ \hdashline k_2 c_1 & k_2 c_2 & \dots \; k_2 c_{n_n} & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \partial J_1/\partial t \\ \partial J_2/\partial t \\ \vdots \\ \partial J_{n_n}/\partial t \\ \hdashline k_1 \nabla V \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \rho_1 J_1 + \partial A_{ext,1}/\partial t \\ \rho_2 J_2 + \partial A_{ext,2}/\partial t \\ \vdots \\ \rho_{n_n} J_{n_n} + \partial A_{ext,n_n}/\partial t \\ \hdashline -\frac{k_2}{k_1} \partial I_s/\partial t \end{array}\right], \tag{7.22}$$

où k_1 et k_2 ne sont que des constantes choisies de façon à mieux conditionner la matrice avant son inversion. Dans ce cas, nous avons utilisé $k_1 = 1/\max(M_{A_{ij}})$ et $k_2 = 1/\max(c_i)$, mais ceci n'est qu'empirique (il existe certainement une meilleure façon de conditionner la matrice). Néanmoins, posons

$$\boldsymbol{M} = -\frac{1}{k_1}\left[\begin{array}{ccc:c} & k_1\boldsymbol{M_A} & & \begin{matrix}1\\1\\\vdots\\1\end{matrix} \\ \hdashline k_2c_1 & k_2c_2 & \dots\ k_2c_{n_n} & 0 \end{array}\right] \quad \text{et} \quad \boldsymbol{U} = \left[\begin{array}{c} \rho_1 J_1 + \partial A_{ext,1}/\partial t \\ \rho_2 J_2 + \partial A_{ext,2}/\partial t \\ \vdots \\ \rho_{n_n} J_{n_n} + \partial A_{ext,n_n}/\partial t \\ \hdashline -\frac{k_2}{k_1}\,\partial I_{ca}/\partial t \end{array}\right] .$$

Remarquons que l'on a remplacé $\frac{\partial I_s}{\partial t}$ par $\frac{\partial I_{ca}}{\partial t}$, puisque $\frac{\partial I_{cc}}{\partial t} = 0$. De plus, posons $\boldsymbol{M_J} = [\boldsymbol{M^{-1}}]_{\{1\dots n_n\},\{1\dots(n_n+1)\}}$ et $\boldsymbol{M_V} = [\boldsymbol{M^{-1}}]_{\{(n_n+1)\},\{1\dots(n_n+1)\}}$, où $\boldsymbol{M^{-1}}$ est l'inverse de la matrice $\boldsymbol{M}$. On peut alors exprimer les inconnues très simplement à l'aide des deux équations suivantes:

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}\right] = \boldsymbol{M_J}\,\boldsymbol{U} \ , \tag{7.23}$$

$$\nabla V = \frac{1}{k_1}\boldsymbol{M_V}\,\boldsymbol{U} \ , \tag{7.24}$$

le vecteur $\left[\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}\right]$ de (7.23) contenant la dérivée temporelle de J à chacun des noeuds du problème (il s'agit donc d'une méthode de collocation par point, tel que discuté dans le chapitre 6). Afin de trouver $\boldsymbol{J}(t)$, il ne reste plus qu'à intégrer numériquement (7.23) à partir d'une condition initiale $\boldsymbol{J}(0)$. Pour ce faire, il s'agit de discrétiser l'intégrale en utilisant les méthodes d'Euler, Runge-Kutta ou autres. Cependant, plutôt que de faire ce travail explicitement, nous avons utilisé des algorithmes de *Matlab*® qui sont spécifiquement conçus pour traiter la forme matricielle (7.23). Ces algorithmes utilisent des pas et des ordres d'intégration variables, ce qui permet de contrôler l'erreur à un niveau spécifié par l'usager. Pour plus d'informations, voir

la documentation de *Matlab*® à propos des fonctions *ode45*, *ode113* et *ode15s*, qui semblent convenir à la plupart des difficultés numériques rencontrées.

Notons que I_{cc} n'apparaît nulle part dans les équation ci-haut. La seule façon de l'imposer est de s'assurer que la condition initiale satisfasse $I(0) = I_s(0) = I_{cc} + I_{ca}(0)$ lorsque l'on évalue (7.21) à $t = 0$. D'autre part, afin de réduire la durée des transitoires, il est préférable que la valeur de B_{ca} soit nulle à $t = 0$.

Cette idée de formulation ca dans le domaine des supraconducteurs a été introduite par Brandt [78] pour un problème 2D. Elle a été étendue par Rhyner [80] et Yazawa [79] au cas d'un courant imposé par une source externe, sans que ces auteurs aient toutefois publiés une formulation précise à cet égard. Dans tous les cas, seulement des éléments possédant une densité de courant constante ont été utilisés. L'idée d'utiliser une densité linéaire (1D) ou bilinéaire (2D) couplée avec cette formulation, de même que l'inclusion de la contrainte en courant directement dans la matrice $\boldsymbol{M}$ est, au meilleur de notre connaissance, une idée originale. La formulation ca pour des éléments rectangulaires bilinéaires (problème 2D) et la généralisation à plusieurs conducteurs est à peu près identique à la formulation 1D présentée ci-haut, et nous ne la répéterons pas dans cet ouvrage.

7.2.3 Formulation de la méthode des différences finies en 1D

Le problème électromagnétique, tel que développé à la section précédente, n'est pas sous sa forme la plus familière. En général, on rencontre plutôt la formulation différentielle de ce problème, qui permet de mettre en évidence l'équation de diffusion non linéaire qui régit le problème électromagnétique. En effet, partons de (7.8) et remplaçons (7.19) par l'équation $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$ en 1D, i.e.

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t} \,. \tag{7.25}$$

Dérivons les deux membres de (7.8) par rapport à x et remplaçons $\frac{\partial E}{\partial x}$ par $\frac{\partial E}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial x}$ dans (7.25). En substituant l'équation (7.8) résultante dans l'équation (7.25) réécrite, on obtient directement

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E}{\partial J}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\,, \tag{7.26}$$

ce qui est bel et bien une équation de diffusion pour B, dont le coefficient de diffusion D est donné par le coefficient de $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$, soit $D = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E}{\partial J}$. Si D est une constante, on a une diffusion linéaire. Dans tous les autres cas (dépendance en J, B ou x), l'équation de diffusion devient non linéaire. Plus la valeur de D est petite, plus la diffusion de B vers l'intérieur des parois est lente. À la limite, $D = 0$ implique une absence de diffusion (paroi étanche), alors que $D \to \infty$ implique une diffusion instantanée. Il est intéressant de noter que le modèle de Bean est une combinaison de ces deux régimes limites, car pour $J < J_c$, on a $\partial E/\partial J = 0 \Rightarrow D = 0$, alors que pour $J > J_c$, on a $\partial E/\partial J = \infty \Rightarrow D = \infty$.

Comme l'équation de diffusion est exprimée en termes de B, c'est donc cette dernière quantité qui sera posée comme inconnue. Nous aurons recours à la différenciation numérique pour déterminer J, requis pour l'évaluation de $\rho(J, B, x)$. De plus, afin de développer une formulation matricielle pour notre problème, il faut dans un premier temps discrétiser la dérivée spatiale dans (7.26). En utilisant la notation $B_i = B(x_i)$, on peut par exemple utiliser une formule de différence centrée conventionnelle d'ordre 1, i.e.

$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial x^2} \approx \frac{B_{i+1} - 2B_i + B_{i-1}}{(\Delta x)^2}\,, \tag{7.27}$$

où Δx est la distance entre les noeuds (équidistants). De plus, la valeur de B aux deux parois du mur peut facilement être déterminée à l'aide de (7.1), (7.2) et (7.5).

On obtient

$$B_1 = B_{cc} + B_{ca}(t) - \frac{\mu_0}{2} I_{cc} - \frac{\mu_0}{2} I_{ca}(t) \,, \tag{7.28}$$

$$B_{n_n} = B_{cc} + B_{ca}(t) + \frac{\mu_0}{2} I_{cc} + \frac{\mu_0}{2} I_{ca}(t) \,. \tag{7.29}$$

Notons que cette façon d'imposer les conditions aux frontières possède l'avantage de fixer directement le courant de source, sans équation auxiliaire. Avec ces deux conditions aux frontières, il ne reste plus que $(n_n - 2)$ inconnues (B_2 à B_{n_n-1}), que l'on peut exprimer sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} \partial B_2/\partial t \\ \partial B_3/\partial t \\ \vdots \\ \partial B_{n_n-1}/\partial t \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_0(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_2}{\partial J} & \frac{\partial E_3}{\partial J} & \cdots & \frac{\partial E_{n_n-1}}{\partial J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n_n} \end{bmatrix}, \tag{7.30}$$

En posant

$$\boldsymbol{M_B} = \frac{1}{\mu_0(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_2}{\partial J} & \frac{\partial E_3}{\partial J} & \cdots & \frac{\partial E_{n_n-1}}{\partial J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_{n_n-1} \end{bmatrix},$$

on obtient finalement

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right] = \boldsymbol{M_B} \begin{bmatrix} B_1 \\ \boldsymbol{B} \\ B_{n_n} \end{bmatrix} \,, \tag{7.31}$$

où B_1 et B_{n_n} sont, rappelons-le, les conditions aux frontières déterminées par (7.28) et (7.29). Comme pour la méthode semi-analytique de la section précédente, nous avons utilisé les fonctions *ode45*, *ode113* et *ode15s* de *Matlab*® pour résoudre l'intégration temporelle et ainsi déterminer $\boldsymbol{B}(t)$, à partir d'une condition initiale $\boldsymbol{B}(0)$. Passons maintenant à la section sur la validation de ces différentes méthodes.

7.3 Validation des méthodes numériques

7.3.1 Solution analytique pour une résistivité constante

Commençons par le cas le plus simple, soit une résistivité constante, ce qui rend linéaire l'équation de diffusion (7.26). Lorsqu'on choisit une excitation sinusoïdale pour $B_{ext}(t)$ et $I_{ca}(t)$ dans (7.1) et (7.2), le problème est facile à solutionner analytiquement. Afin de ne pas alourdir le texte, les développements sont présentés en annexe III, et les expressions résultantes pour $J(x,t)$, $B(x,t)$ et $A(x,t)$ sont données par les équations (III.4), (III.10) et (III.11).

Plusieurs combinaisons de courants/champs ca et cc ont été simulés avec les méthodes numériques, puis comparés avec la solution analytique. Dans tous les cas, toutes les courbes se superposent parfaitement. Afin d'illustrer ceci, nous avons retenu le cas le plus complexe de ces simulations. Il s'agit d'un problème avec composantes ca et cc, à la fois pour B_{ext} et I_s. De plus, I_s est déphasé d'un angle α par rapport à B_{ext}, qui est la référence de phase. Les paramètres relatifs à cette simulation sont présentés dans le TAB. 7.1.

TAB. 7.1 – Valeurs des paramètres pour la simulation avec résistivité constante

Paramètre	Valeur	Unité	Paramètre	Valeur	Unité
x_0	0.5	mm	B_{cc}	10	mT
n_e	201	(sans unité)	$\frac{\mu_0}{2} I_{cc}$ [b]	5	mT
tol [a]	10^{-6}	(sans unité)	B_{ca}	3	mT
ρ	10^{-11}	$\Omega \cdot$ m	$\frac{\mu_0}{2} I_{ca}$ [b]	3	mT
f	60	Hz	α	36	degrés

[a] tol est la tolérance relative utilisée pour l'intégration numérique.
[b] I est exprimé selon (7.5), i.e. en terme du champ généré sur la paroi $x = x_0$.

Afin de laisser s'atténuer le régime transitoire, 10 cycles ont été simulés, mais seulement le dernier a été retenu pour comparer avec la solution analytique, qui décrit uniquement le régime permanent. Comme le montre la FIG. 7.2, toutes les courbes se superposent parfaitement avec la solution analytique, et ce, pour toutes les méthodes numériques utilisées, soit la méthode semi-analytique, la méthode des différences finies et le logiciel *MagNet*® (éléments finis). Notons que dans la méthode semi-analytique, on utilise $\partial I_s/\partial t$ plutôt que I_s, et l'erreur sur l'intégration temporelle peut faire dévier significativement le courant total du courant imposé. Cependant, avec une tolérance relative $tol = 10^{-6}$ sur l'intégration numérique, cette variation de I_s est demeurée de l'ordre de $\frac{1}{1000}$ %, ce qui est largement acceptable. Dans tous les autres cas présentés dans ce chapitre, la variation est demeurée de cet ordre de grandeur, d'où nous n'y reviendrons pas.

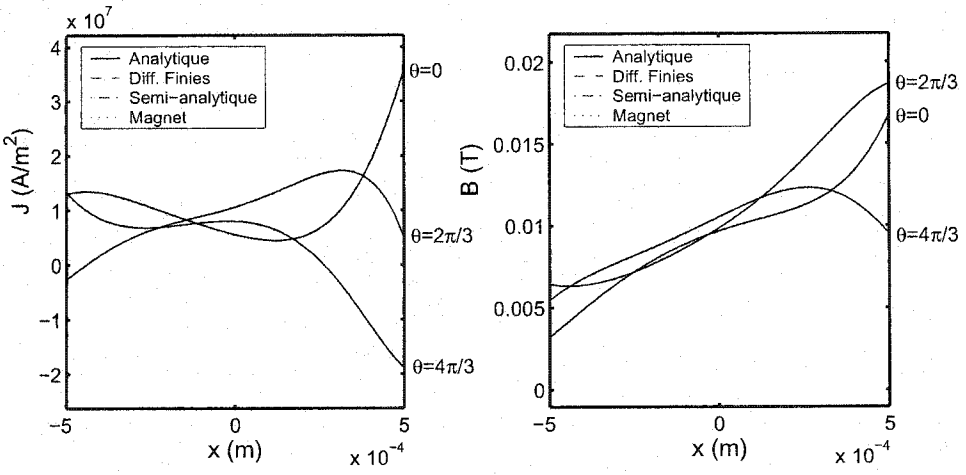


FIG. 7.2 – Profils de J et B pour une résistivité linéaire, observés en régime permanent. Les solutions sont présentées à trois différents temps (relatifs à la phase du sinus du champ externe, i.e. dans l'ordre: $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$). Toutes les courbes se superposent parfaitement les unes sur les autres, d'où on n'en voit qu'une seule. Les durées des simulations sur un Pentium 1000 MHz avec 1.2 GigaOctets de mémoire vive ont été de 20 s (semi-analytique), 16 s (différences finies) et 9 h 24 min (*MagNet*®). Notons toutefois que le pas de temps sur *MagNet*® était plus petit que nécessaire.

7.3.2 Solution analytique pour une résistivité non linéaire

Au meilleur de la connaissance de l'auteur, il n'existe qu'une seule solution analytique (applicable aux supraconducteurs) pour l'équation de diffusion non linéaire (7.26). Cette dernière a été trouvée par Koziol [97]. Elle a déjà été utilisée par Baranowski [71] pour valider ses programmes d'éléments finis maisons. De la même façon, nous l'utilisons ici pour valider nos différentes méthodes numériques.

Koziol s'est précisément intéressé à la géométrie 1D de la FIG. 7.1, i.e. un mur de demi-épaisseur x_0, constitué d'un matériau dont la caractéristique $E - J$ est une loi de puissance $E = E_0 (J/J_c)^n + \epsilon J$. Koziol a ainsi déterminé l'expression analytique de $B(x,t)$ pour le cas d'un échelon de champ d'amplitude B_{cc} appliqué à $t = 0$, avec $\epsilon = 0$ (ϵ est uniquement requis pour la solution numérique). Le développement complet implique plusieurs changements de variables et n'est pas évident à suivre, mais on peut se contenter de citer son résultat, avec les notations adaptées au présent document, i.e.

$$B(x,t) = \begin{cases} B_{cc} \cdot \left(1 - \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{n-1} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n-1} + 1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot y^{1/2} \cdot {}_2F_1\left(\frac{-1}{n-1}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; y\right) \right) & 0 \leq y < 1 \\ 0 & y \geq 1 \end{cases} , \tag{7.32}$$

où $\Gamma(a)$ est la fonction *Gamma* (voir annexe I pour sa définition), ${}_2F_1(a,b;c;y)$ est une fonction hypergéométrique définie par

$${}_2F_1(a,b;c;y) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{y}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{y^2}{2!} + \dots ,$$

et y est relié à x et t par

$$y = \left(1 - \frac{|x|}{x_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{t}{t^*}\right)^{-2/(n+1)} \geq 0 .$$

Le paramètre t^* est défini par

$$t^* = \frac{x_0}{2}\frac{B^*}{E_0}\frac{(n-1)}{n(n+1)}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n-1}+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n-1}+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\frac{B_{cc}}{B^*}\right)^{-(n-1)}, \tag{7.33}$$

avec $B^* = \mu_0 J_c x_0$, soit le champ requis pour que les fronts de pénétration de gauche et de droite se rejoignent au centre de l'échantillon lorsque l'on utilise le modèle de Bean avec J_c comme densité de courant critique (voir section 3.1.2). Il est intéressant de constater que B^* apparaît naturellement dans ce résultat, alors que nous n'avons même pas utilisé le modèle de Bean.

Notons que la solution de Koziol n'est valide que pour $t < t^*$, i.e. le temps requis pour que les fronts de gauche et de droite se rejoignent au centre de l'échantillon. Ceci s'explique par le fait que pour $t > t^*$, les conditions aux frontières utilisées dans ses développements ne sont plus valides. Le paramètre t^* est donc très utile pour estimer le temps de simulation requis.

Enfin, il est possible à partir de (7.8) et (7.32) de dériver l'expression analytique de $J(x,t)$ pour le cas non linéaire. En effet, en appliquant la dérivée en chaîne, i.e. $J = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$, on trouve

$$J(x,t) = \begin{cases} J_c\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n-1}+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n-1}+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\frac{B_{cc}}{B^*}\right)\cdot(1-y)^{1/(n-1)}\cdot\left(\frac{t}{t^*}\right)^{-1/(n+1)} & 0 \le y < 1 \\ 0 & y \ge 1 \end{cases}. \tag{7.34}$$

Tel qu'à la section précédente, des simulations numériques ont été effectuées pour différentes combinaisons de paramètres. Pour $t < t^*$, toutes les courbes obtenues se superposent parfaitement à la solution analytique. Afin d'illustrer ceci, nous avons retenu un cas typique, dont les paramètres sont présentés dans le TAB. 7.2. Les résultats à différents temps sont illustrés à la FIG. 7.3.

TAB. 7.2 – Valeurs des paramètres pour la simulation non linéaire avec solution analytique

Paramètre	Valeur	Unité	Paramètre	Valeur	Unité
x_0	0.5	mm	E_0	10^{-4}	V/m
n_e	201	(sans unité)	J_c	10^7	A/m^2
tol [a]	10^{-6}	(sans unité)	n	4	(sans unité)
B_{cc}	1	mT	ϵ	10^{-20}	(sans unité)

[a] *tol* est la tolérance relative utilisée pour l'intégration numérique.

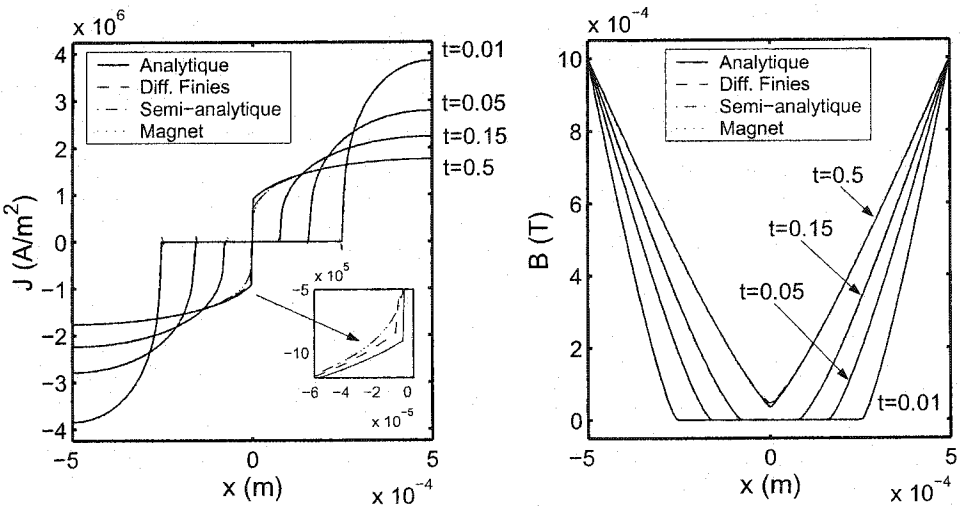


FIG. 7.3 – Profils de J et B pour une résistivité non linéaire, sur application d'un échelon de champ d'amplitude B_{cc}. Jusqu'à $t = t^* = 0.348$ s, toutes les courbes se superposent parfaitement les unes sur les autres, d'où on n'en voit qu'une seule, mis à part les petits pics qui dépassent sur les fronts. Ces derniers résultent du fait que la position des noeuds de calcul ne concorde pas toujours exactement avec la position du front, ce qui introduit un léger dépassement artificiel. Pour $t > t^*$, la solution analytique n'est plus valide. De plus, bien que cela ne soit pas très visible sur le graphique, la méthode des différences finies commence à diverger lorsque les deux fronts se rejoignent. Les durées des simulations sur un Pentium 1000 MHz avec 1.2 GigaOctets de mémoire vive ont été de 2 min 45 s (semi-analytique), 3 min 52 s (différences finies) et 21 h 54 min (*MagNet*®).

7.4 Solution purement numérique pour une résistivité non linéaire

À la lumière des résultats précédents, il semble que les logiciels de calculs numériques soient bien rodés. Nous ferons toutefois une dernière validation, en considérant un problème qui ne possède pas de solution analytique. Nous comparerons alors les différents résultats numériques entre eux.

Le problème retenu est un hybride des deux problèmes précédents, i.e. l'application d'un champ externe qui varie de façon sinusoïdale. Le matériau suit quant à lui un modèle en loi de puissance $E = E_0\big(J/J_c(B)\big)^n + \epsilon J$, avec $J_c(B)$ qui dépend du champ selon une loi de Kim, i.e. $J_c(B) = Jc_0/(1 + |B|/B_0)$. Les valeurs des paramètres utilisés pour la simulation retenue sont présentées dans le TAB. 7.3. Pour des conditions initiales nulles, les profils de J et B pour le premier cycle suivant l'application du champ ont été observés. Notons que la méthode des différences finies n'a pas été utilisée, car cette dernière ne permet pas de tenir compte de la dépendance en champ. La FIG. 7.4 montre que les deux résultats numériques concordent parfaitement.

TAB. 7.3 – Valeurs des paramètres pour la simulation non linéaire purement numérique

Paramètre	Valeur	Unité	Paramètre	Valeur	Unité
x_0	1	mm	E_0	10^{-4}	V/m
n_e	201	(sans unité)	J_c	10^7	A/m^2
tol [a]	10^{-6}	(sans unité)	n	4	(sans unité)
f	60	Hz	B_0	1	mT
B_{ca}	3	mT	ϵ	10^{-20}	(sans unité)

[a] tol est la tolérance relative utilisée pour l'intégration numérique.

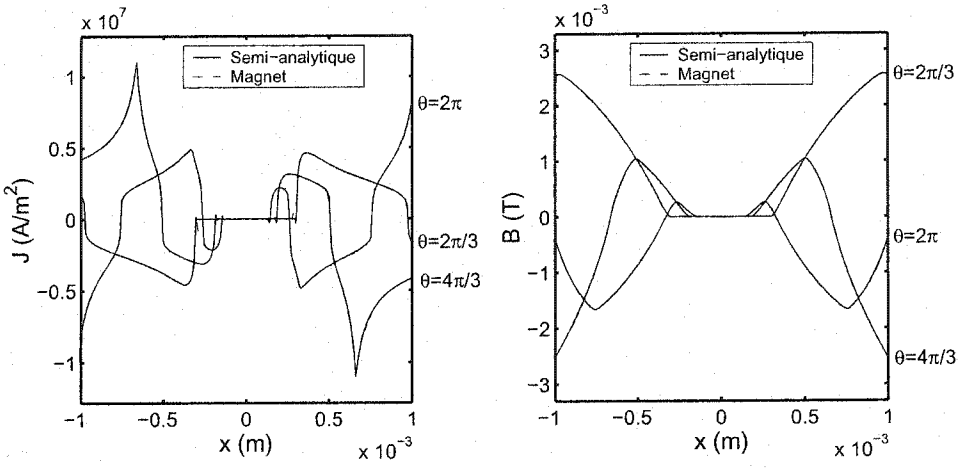


FIG. 7.4 – Profils de J et B pour une résistivité non linéaire avec dépendance en champ, sur application d'un champ externe sinusoïdal d'amplitude crête B_{ca}. Les deux solutions numériques sont présentées à trois différents temps (relatifs à la phase du sinus, i.e. dans l'ordre: $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ et 2π), et on voit qu'ils concordent très bien, d'où on ne voit qu'une seule courbe, mis à part les petits pics près des fronts, pour les mêmes raisons que précédemment. On remarque aussi que les pics de J correspondent au endroits où B passe par 0, ce qui est cohérent avec le modèle de Kim utilisé. Les durées des simulations sur un Pentium 1000 MHz avec 1.2 GigaOctets de mémoire vive ont été de 6 min 30 s (semi-analytique) et 6 h 03 min (*MagNet*®).

7.5 Discussion

L'ensemble des résultats présentés dans les trois dernières sous-sections montre bien que les deux principales méthodes numériques auxquelles l'on s'intéresse dans cet ouvrage, soit la méthode semi-analytique (implémentée dans *Matlab*®) et la méthode des éléments finis (i.e. le logiciel *MagNet*®), donnent des résultats corrects en ca, i.e. pour les régimes transitoires. La méthode des différences finies n'a ici été utilisée que pour des fins de validation en 1D, et elle n'est pas propice à être utilisée pour des géométries compliquées, d'où nous n'y reviendrons pas et nous ne discuterons pas non plus davantage de ses limites, constatées ci-haut.

Revenons maintenant sur certains constats importants. D'abord, les temps de simulation requis pour solutionner un problème avec *MagNet*® sont extrêmement longs comparativement à la méthode semi-analytique. Ceci s'explique par plusieurs facteurs. Le principal est probablement le fait que *MagNet*® utilise un pas de temps fixe (ou variable, mais qui doit être défini au préalable par l'usager), alors que les fonctions *ode45*, *ode113* et *ode15s* de *Matlab*® adaptent le pas de temps selon les besoins du problème. Ceci se traduit par un gain de temps très appréciable. Un autre facteur important est que la méthode semi-analytique utilise une matrice pleine, qui n'est inversée qu'une seule fois (au début), alors que la méthode des éléments finis doit résoudre un système linéaire à chaque pas de temps, ce qui est beaucoup plus long. De plus, *MagNet*® est un outil beaucoup plus général que la méthode semi-analytique, qui est surtout dédiée au type de problème considéré ci-haut. En particulier, toutes le simulations 1D effectuées avec *MagNet*® sont en fait traitées comme des simulations 3D, d'où il y a un grand nombre de noeuds de calculs qui sont redondants, même lorsque l'on optimise le maillage. Par contre, pour une tolérance numérique donnée, *MagNet*® permet d'utiliser moins d'éléments que les autres méthodes numériques présentées ici car on peut utiliser des éléments d'ordre supérieur à 1 (jusqu'à l'ordre 3), ce qui est un type de raffinement qui peut s'avérer très payant s'il est judicieusement utilisé.

7.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons démontré la cohérence des résultats obtenus à l'aide de différentes méthodes numériques ca pour un problème 1D standard. Les deux principales méthodes concernées étaient la méthode semi-analytique développée au début de ce chapitre et le logiciel *MagNet*®. La validation de ce dernier était particulièrement importante, car c'est l'outil principal que l'on envisage utiliser dans le futur afin de poursuivre l'étude des supraconducteurs.

Tous les outils étant maintenant développés et validés, nous passons donc au dernier volet de cet ouvrage, dans lequel ces outils sont utilisés pour des fins d'analyse et de caractérisation des matériaux, en commençant par une méthode de caractérisation qui permet d'extraire les paramètres « locaux » de la résistivité des matériaux à HT_c à partir de courbes $V - I$ (chapitre suivant). Celui-ci est suivi d'un chapitre qui présente des mesures effectuées sur un matériau à HT_c légèrement anisotrope. Puis, le dernier chapitre (chapitre 10) étudie de façon détaillée par simulation numérique l'effet du champ propre sur les mesures $V - I$ dans le cas de conducteurs rectangulaires. Rappelons qu'il était à l'origine prévu de terminer cet ouvrage par une étude du phénomène de diffusion non linéaire à l'intérieur d'un cylindre creux supraconducteur immergé dans un champ magnétique sinusoïdal. Des comparaisons entre des simulations effectuées avec *MagNet*® et des mesures expérimentales auraient permis une bonne validation des modèles proposés. Cependant, des délais de correction de certains problèmes internes de *MagNet*® ont empêché la réalisation de cette étude. Par conséquent, nous ne réutilisons plus *MagNet*® dans la suite de cet ouvrage.

Troisième partie

Mesures, modélisation et simulation numérique

(Voir le chapitre 4 pour la présentation du chapitre 8, écrit sous forme d'article)

CHAPITRE 8

DEVELOPMENT OF A NUMERICAL METHOD TO DETERMINE THE LOCAL $E-J$ CHARACTERISTICS OF ANISOTROPIC HTS FROM EXPERIMENTAL $V-I$ CURVES

Ce chapitre est le texte intégral d'un article écrit pour la conférence *International Cryogenic Materials Conference*, tenue à Madison (WI) en juillet 2002. L'article a été révisé par des pairs avant sa publication dans *Advances in Cryogenic Engineering (Materials).* [24]

Abstract

The values of J used in $E-J$ characteristics of HTS samples in external fields are often approximated by averaging the current over their cross-section. A model that fits these results is said to be macroscopic. Such a model suffers from the fact that it is not strictly local, as the J definition would suggest. Indeed, the macroscopic $E-J$ characteristics consider only the external field, not the local field, which possesses an additional component: the self-field. Thus, errors will occur when applying this model to the different sample geometries and sizes that are being investigated. More convenient would be a true local $E-J$ model that resides in a material library and could be implemented in a numerical electromagnetic analysis software. In order to achieve this goal, a numerical characterization method has been developed to obtain the local $E-J$ characteristics. This method considers the inhomogeneous distribution of the current over the sample cross-section and its associated self-field. The latter is then added to the external field to determine the true local field. Based on these calculations, an iterative non-linear curve fit is executed until self-consistence with the experimental $V-I$ curves is achieved.

The hypotheses that must be satisfied in order to obtain a valid local model are discussed for granular materials and single crystals.

8.1 Introduction

The most conventional way to determine the scalar $E-J$ characteristics of a material is to measure $V-I$ curves of a sample and then take $E = V/d$ and $\langle J \rangle = I/S$, where d is the distance between the voltage contacts and S is the sample cross-section area. When the $V - I$ measurements are performed in different externally applied field of magnitude B_{ext} and angle θ_{ext}, we obtain a family of curves that are characteristic of the field dependence of the material. Different analytical models are used to reproduce the $E - J$ curves, such as power laws [62] or percolation type models [25]. In this paper, such a resistivity model, i.e. $\rho(\langle J \rangle, B_{ext}, \theta_{ext}) = E/\langle J \rangle$, will be said **macroscopic**, as opposed to a **local** model, which should be written as $\rho(J, B, \theta) = E/J$, and where J is the local current density and (B, θ) are the magnitude and angle of the local flux density, which include the self-field contribution, i.e. $\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{self}$. Hence, even when $B_{ext} = 0$, the local field is generally not zero because of the self-field contribution. This causes the critical current density to be "self-limited" in zero applied field. Also, the self-field causes the local field to be inhomogeneous over the sample cross-section, and contributes to both parallel and transverse components of $\vec{B}$, enhancing any anisotropic field dependence of the local critical current density $J_c(B, \theta)$. Consequently, J itself must be somewhat inhomogeneous over the sample cross section, even for a single crystal with homogeneous pinning properties.

When the macroscopic model is used in numerical computation (e.g. flux diffusion, current distribution, ac losses, ...) based on Maxwell equations (thus local field quantities), we expect the results to be erroneous to some extent, since the macroscopic model, which is based on averaged values, is unable to account cor-

rectly for the local variations of J, B and θ. In order to correct that, the current paper proposes a method to refine the macroscopic model obtained from $V-I$ measurements, so that it becomes local, given some basic assumptions. The method has been tested with two different BSCCO materials, and the results are presented here. All the curves in this paper were measured at 77 K, thus no temperature dependence needs to be considered explicitly.

8.2 Basic Assumptions

8.2.1 Distinction Between Macroscopic and Local Models

A macroscopic model represents the overall effects of the intrinsic properties of a sample (such as pinning strength, anisotropy, grain alignment, grain connectivity, secondary phases, etc...) and its extrinsic properties (such as sample shape, which affect the self-field distribution, or sausaging, cracks, etc...). All these contributions are difficult to separate from one another. Formally, macroscopic models should always be treated as $V-I$ or $E-I$ curves, and all associated parameters, e.g. I_c and n for a power law, should depend on I, B_{ext} and θ_{ext}, and not on the local quantities J, B and θ. Macroscopic models are useful to model quickly a given sample geometry. By contrast, a local model is by definition independent of all extrinsic properties, and represents a statistical average of the intrinsic properties over some characteristic dimension. Its parameters now depend on the local quantities J, B and θ. A good local model must allow samples of different sizes and shapes made of the same material to be studied reliably by simulation, giving a way to perform the material optimization of new applications. That way, self-field effects are always considered. This is especially important for anisotropic materials, since a field component of a few milliTeslas (typical of the self-field) oriented parallel to the c-axis of the material can drastically reduce the critical current.

8.2.2 Definition of Length Scales

Before proceeding any further, it is essential to discuss the relevant length scales that properly define the *local* quantities, in the framework of the present approach. Depending on the material investigated, we use a different characteristic dimension for the averaging of the electromagnetic quantities and materials intrinsic properties. For single crystals, it could be taken as a few vortices spacing. For granular materials, which is the class of all the materials presented in this paper, we assume a characteristic dimension that encompasses a few grains. Since in these materials the current follows percolation paths inside and between the grains in all three dimensions, this averaging scale must result in a single current density component, oriented along the current flow direction. A similar hypothesis has previously been used successfully in magneto-optic imaging to get clearer images of the flux profiles and current distribution [98]. Since such averaging dimensions are small when compared to the sample size (millimeter scale), and large when compared to microscopic phenomena (nanometer scale), we shall qualify our model as being **mesoscopic**, which for granular materials means local on a micrometer scale. See [99] for a more detailed discussion on length scales and averaging.

8.2.3 Modeling Hypotheses

In order to determine an $E - J$ model that possesses a local behavior over the previously defined length scales, we must be able to eliminate the extrinsic factors that affect the $E - J$ characteristics. This can be achieved in good part by using well processed small bulk or layered samples of a few square millimeters of cross-section, delicately cut and polished to obtain a very uniform rectangular cross-section. Inhomogeneities of the intrinsic properties within the sample are much more difficult to control though, and we shall simply suppose that the sample is homogeneous, i.e. the statistical distribution of the intrinsic properties is assumed to

be the same everywhere within the sample. A common example of inhomogeneity is the better grain alignment at the BSCCO and silver interface of a monofilamentary tape than at the center of the BSCCO core [100]. This kind of sample is not likely to be well characterized by the current method.

8.2.4 Numerical Calculations

The core of the method is the numerical calculation of the two dimensional dc current distribution over the sample cross-section, the sample being assumed infinitely long. This results in a single current density component J (oriented along the sample length), which corresponds to the mesoscopic averaging defined previously. The applied field (B_{ext}, θ_{ext}) is assumed homogeneous and perpendicular to J, such that no force-free component is present (in the mesoscopic average sense). Furthermore, because of the dc condition, we assume that the external field has relaxed in the sample. The later hypothesis should be approximately met experimentally as soon as the material enters in the flux creep–flux flow transition region, i.e. when some curvature appears on the $V - I$ curves.

The quick and efficient numerical solution of this problem is not an easy problem in itself, since it involves a non-linear field dependent resistivity. We must therefore be able to compute both J and (B, θ) over the sample cross-section. Many authors have addressed different aspects of this problem in ac [99, 78, 80, 79, 68], but it seems that the dc (i.e. steady state after all relaxation effects) problem has never been treated for HTS. For this reason, we have developed a homemade dc current distribution solver based on a point collocation method and the analytical solution of the Biot-Savart integral for rectangular elements [81, 91]. In this method, the geometry of the sample is first discretized in a grid, and a mesoscopic model is supplied for the resistivity $\rho(J, B, \theta)$. Then, for a given homogeneous external field (B_{ext}, θ_{ext}) and imposed current I, the values of J, B and θ are calculated iteratively every-

where in the grid, as well as the resulting uniform dc electric field E (equivalent to the voltage gradient, i.e. $E = V/d$). Repeating this process many times, we obtain a set of $V - I$ points that reproduce the measured curves. The only degrees of freedom we have on the curves' shape are the numerical parameters entering in the $\rho(J, B, \theta)$ model. Note that since the Biot-Savart integral is used to derive the field, we assume that $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ throughout the material, which is equivalent to the often used approximation $\left|\vec{B}\right| >> B_{c_1}$.

8.2.5 Experimental Considerations

Some experimental conditions should be respected in order to obtain $V - I$ data consistent with the ones calculated numerically. Firstly, the applied field must be as homogeneous as possible in the region where the sample is measured. Secondly, this field should be generated by an air core device in order to agree with Biot-Savart field calculation, only valid in a non-magnetic environment. Thirdly, the sample length must be long enough relative to its width. This ensures a complete current transfer to the bulk of the material, so that the averaging hypothesis, resulting in a single component J, holds. In this case, the self-field is truly 2D, as for the infinitely long straight conductor considered in the numerical calculations. Typically, a factor of 10 allows an accuracy of about 2 % in the field calculation, i.e. a sample with 5 mm by 1 mm of cross-section should be at least 50 mm long; of course, the longer the better. On a long sample, additional voltage taps can be used, which provide richer statistical information about the critical current distribution, and also help to detect large defaults, such as cracks.

8.3 Description of the Method

Given that the preceding assumptions are satisfied, it is quite straightforward to devise a method to determine the numerical parameters of the mesoscopic re-

sistivity model $\rho(J, B, \theta) = E/J$. In order to demonstrate the method, we use a power law model throughout this paper, with the critical current $J_c(B, \theta)$ defined at $E_0 = 1\ \mu$V/cm. The power law model is valid over many decades of electric field, and is written as

$$\rho(J, B, \theta) = \frac{E_0}{J_c(B, \theta)} \left(\frac{J}{J_c(B, \theta)} \right)^{n(B,\theta)-1} . \tag{8.1}$$

For instance, in our first application example (Hoescht material) we use an isotropic model (i.e. no θ dependence) of the form

$$p(B) = p_0 \left(k_p + e^{-B/B_p} \right) , \tag{8.2}$$

where p represents either J_c or n. Both are determined from the experimental $V - I$ curves by first converting them to macroscopic $E(\langle J \rangle, B_{ext})$ curves, then by determining the J_c and n values that fit each curve (for each value of B_{ext}). Next, by performing a non-linear least-squares curve fit with the obtained values, we determine the parameters of equation (8.2). This gives two macroscopic functions, i.e. $J_c(B_{ext})$ and $n(B_{ext})$, which are generally used as the final ones in the literature. In the present method though, they constitute only a first approximation to the mesoscopic functions $J_c(B)$ and $n(B)$. When p also exhibits a θ dependence, the same process is applied, but more parameters are required to account for this new variable in the $J_c(B, \theta)$ and $n(B, \theta)$ functions.

Next we use the experimental values of the current of the $V - I$ curves together with (B_{ext}, θ_{ext}) as input to the current distribution solver, so it can return the calculated voltages V_{calc}, based on the current model and parameters' values. We also define an error function

$$\xi_{abs} = \sum_{i=1}^{n_p} \left[V_{calc} - V \right]^2 \quad \text{or} \quad \xi_{rel} = \sum_{i=1}^{n_p} \left[1 - (V_{calc}/V) \right]^2 \quad (V \neq 0) , \tag{8.3}$$

where n_p is the total number of experimental points. By properly changing the values of the parameters, this function can be minimized (in the least-squares sense), so that we get the best fit between the calculated and measured $V-I$ curves. The parameters that minimize the error function are the parameters of the mesoscopic model sought. We can compare the "quality" of different models by looking at the magnitude of the residual error.

Three important comments must be mentioned at this stage. Firstly, the non-linear curve fit was done using the *Matlab*® command *lsqcurvefit*, available in the Optimization Toolbox. See [101] for more details about the algorithm (Levenberg-Marquardt). Secondly, a fairly long computation time is required in order to perform the minimization, mainly because of the calculation of the current distribution for each experimental point. Indeed, even when properly optimized, this calculation is costly (maximum of a few $V-I$ points per second), and since the error calculation must be repeated for each new minimum guess, it may easily take a few hours. To reduce this time, only a small proportion of the experimental points can be used in first pass, together with a coarse calculation grid (e.g. 5 by 5). In subsequent passes, when we get closer to the minimum, we can increase the number of points and the grid resolution. Thirdly, it is always possible that the minimum found is only a local minimum. This is a risk inherent to any non-linear minimization process. It should be further investigated whether and to what degree this really does occur in the present case.

8.4 Application Examples

8.4.1 Hoescht Material

The first sample was cut from a Hoescht bulk hollow Bi-2212 cylinder, fabricated by the melt casting process. Since this process does not produce significant grain alignment, this material is fairly isotropic, and equation (8.2) was used to

model $J_c(B)$ and $n(B)$. The values of the macroscopic (initial) and mesoscopic (after least-squares minimization) parameters are shown in TAB. 8.1.

It is difficult to compare the relative change of the different parameters because each one affects the resistivity model in a very different way. However, we remark that all the relative changes are important, varying from 14.5 % to 43.9 %. A graphical comparison of the measured and calculated $V - I$ curves is presented in FIG. 8.1. It should be emphasized that the macroscopic parameters give the best possible fit when using equations (8.1) and (8.2) to model the resistivity *without* considering the self-field. FIG. 8.1 (top) illustrates what happens when we regenerate the $V - I$ curves (self-field considered) using the macroscopic parameters. The calculated curves are shifted to the left (on a log-log plot), which is consistent with the fact that the self-field increases the local field, which in turn increases the local resistivity, resulting in a higher electric field for the same value of current density. FIG. 8.1 (bottom) shows how well the mesoscopic parameters correct this. Indeed, calculated and experimental values fit almost perfectly for $V > 5$ μV. Below that threshold, the model used might not hold anymore.

TAB. 8.1 – Values of the Hoescht Material Parameters

Parameter	Macroscopic value	Mesoscopic value	Relative change	Unit
J_{c0}	526	439	−19.8 %	A/cm^2
k_{J_c}	10.2×10^{-3}	7.5×10^{-3}	−36.0 %	(no unit)
B_{J_c}	17.1	20.0	+14.5 %	mT
n_0	5.9	4.1	−43.9 %	(no unit)
k_n	281×10^{-3}	362×10^{-3}	+22.4 %	(no unit)
B_n	21.4	32.6	+34.4 %	mT

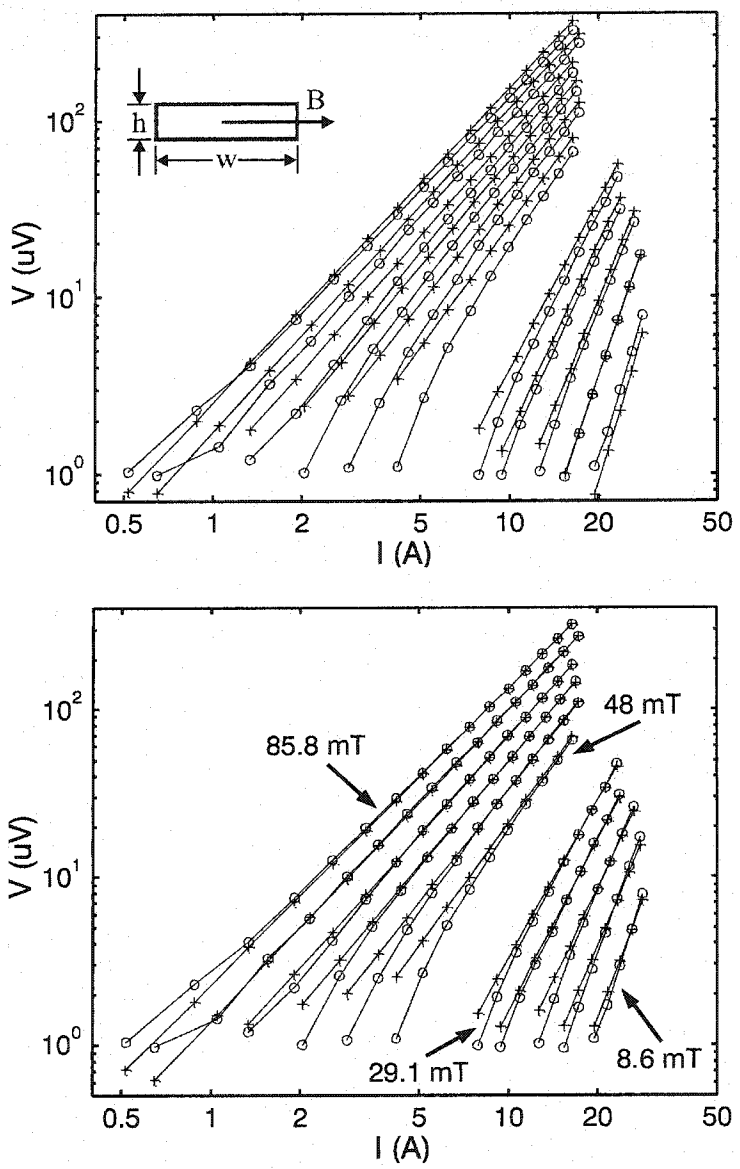


FIG. 8.1 – Measured (∘) and calculated (+) $V - I$ curves (Hoescht material) using the macroscopic parameters (*top*) and mesoscopic parameters (*bottom*). The inset shows the direction of the applied field, and the sample dimensions are $h = 2.15$ mm and $w = 2.90$ mm. Some external field values are indicated.

8.4.2 AgAu-Bi-2223 Multi-Layer Material

The second sample is an AgAu-Bi-2223 multi-layer conductor made in our laboratory. It consists in three layers of Bi-2223 between four layers of AgAu. This sample is not as ideal as the previous one. First, the thickness of the different layers varies significantly along the sample length (sausaging). Moreover, macroscopic cracks might have been produced during the cutting process. It was used anyway, despite the fact that it does not respect all the required basic assumptions. Because of the presence of the metallic layers, the Bi-2223 material is pretty textured, and consequently exhibits field anisotropy. The model used for $J_c(B,\theta)$ and $n(B,\theta)$ is based on measurements in parallel and transverse field. We define the following two functions (modified Kim law [52])

$$p_{\parallel} = \frac{p_0}{1+(B/B_{p_{\parallel}})^{\eta_{\parallel}}} \ (\theta = 0°) \quad \text{and} \quad p_{\perp} = \frac{p_0}{1+(B/B_{\perp})^{\eta_{\perp}}} \ (\theta = 90°)\,, \tag{8.4}$$

where p represents either J_c or n. In order to model the full θ dependence, we simply linearly interpolate between $p_{\parallel}$ and $p_{\perp}$, i.e. $p(B,\theta) = (1-f)\cdot p_{\parallel}(B) + f\cdot p_{\perp}(B)$, with $f = 2|\theta|/\pi$, and θ taken between $-\pi/2$ and $\pi/2$. The values of the macroscopic and mesoscopic parameters are shown in TAB. 8.2.

The relative change of the different parameters is much weaker than in the previous example, varying from 3.4 % to 31.6 %. Also, the quality of the fit obtained is not as good as the previous example. FIG. 8.2 shows the graphic comparison of the measured and calculated $V-I$ curves (using the mesoscopic parameters). The "S-like" shape of the measured curves let us believe that there could be some current transfer phenomena to the inside layers (or to weakly connected regions within the same layer) as the electric field is increased, which would mean that the sample is not long enough (i.e. we do not have the supposed 2D behavior anymore). Added to the other problems mentioned earlier for this sample, it was unlikely that

TAB. 8.2 – Values of the AgAu-Bi-2223 Multi-Layer Material Parameters

Parameter	Macroscopic value	Mesoscopic value	Relative change	Unit
J_{c0}	4500	4660	+3.4 %	A/cm^2
$B_{J_c\parallel}$	87	95	+8.4 %	mT
$B_{J_c\perp}$	12.5	9.5	−31.6 %	mT
$\eta_{J_c\parallel}$	1.05	1.1	+4.5 %	(no unit)
$\eta_{J_c\perp}$	0.9	0.8	−12.5 %	(no unit)
n_0	22	24.5	+10.2 %	(no unit)
$B_{n\parallel}$	53	50	−6.0 %	mT
$B_{n\perp}$	3.5	3.7	−5.4 %	mT
$\eta_{n\parallel}$	0.7	0.73	+4.1 %	(no unit)
$\eta_{n\perp}$	0.34	0.36	+5.6 %	(no unit)

a simple model could have fitted the data points. This experiment should be redone with a sample having a single superconducting layer between two metallic layers.

8.5 Discussion

The examples shown above were based on the restrictive hypothesis that the intrinsic properties were homogeneous over the sample cross-section. In principle, it is possible to include an inhomogeneity function in the resistivity model, but it is not obvious to find a function that corresponds well with the sample behavior. Hence, the method is currently limited to materials that are likely to be fairly homogeneous (still in the mesoscopic sense), such as bulk, layered or single crystal materials. Also, the power law model used in the examples was probably not the best one. Models based on a statistical distribution (Gaussian [19], Weibull [47]) will be investigated in the future. Furthermore, a validation of the mesoscopic model obtained with the present method should be done by comparing measurements and simulations of samples made of the same material but having different sizes and

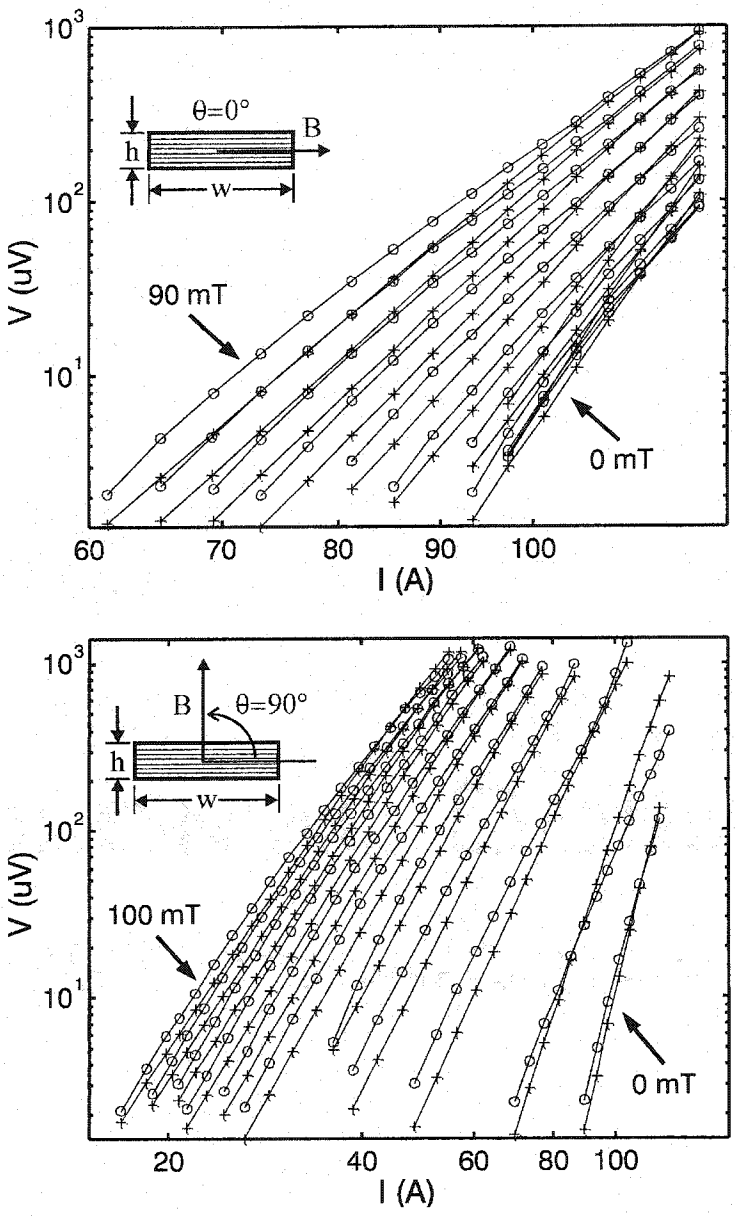


FIG. 8.2 – Measured (∘) and calculated (+) $V-I$ curves (AgAu-Bi-2223 multi-layer material) for the case of a parallel applied field (*top*) and transverse applied field (*bottom*). All calculated values (+) were obtained using the mesoscopic parameters. The sample dimensions are $h = 1.12 \pm 0.06$ mm (3 layers of Bi-2223 of ≈ 0.27, 0.12 and 0.15 mm, and 4 layers of AgAu of ≈ 0.26, 0.11, 0.09 and 0.12 mm) and $w = 5$ mm. The total cross-section area of each material is ≈ 2.69 mm^2 for Bi-2223 and ≈ 2.91 mm^2 for AgAu. The resistivity value of the AgAu alloy measured at 77 K is 5.95 $\mu\Omega \cdot$ cm. The external field values increase by steps of 10 mT.

aspect ratios. This will be a good indicator of how local the model really is, i.e. how the method succeeds to remove geometrical effects from the macroscopic model. It would also be interesting to apply the method to a single crystal material, in order to evaluate the effect of the smaller averaging dimension involved (on the vortex scale).

8.6 Conclusion

A numerical method that allows the determination of the local (mesoscopic) resistivity of HTS has been developed. It is based on the calculation of the inhomogeneous dc current distribution over the sample cross-section due to the self-field. For a given resistivity model $\rho(J, B, \theta)$, $V - I$ curves can be reproduced. A least-squares algorithm is used to adjust values of the numerical parameters of the model so to minimize the error between the calculated and measured curves. This results in a local model, given some basic assumptions are respected. The method was tested with two different materials, but further validation will have to be done in order to make conclusions about its efficiency.

8.7 Acknowledgements

The authors gratefully acknowledge the Institute of Research of Hydro-Québec (IREQ) and the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (N.S.E.R.C.) for their financial support in this project, and M. Belley for the realization of mechanical part of the experimental setup.

CHAPITRE 9

MESURES $V-I$ ET MODÉLISATION D'UN MATÉRIAU ANISOTROPE À HAUTE TEMPÉRATURE CRITIQUE

Ce chapitre présente d'abord brièvement la méthode de mesure pour extraire des courbes $V - I$, puis se dédie par la suite à l'analyse détaillée des mesures effectuées sur un échantillon d'un matériau fabriqué par le procédé CRT. Différents modèles sont utilisés pour reproduire les mesures, et chacun d'eux est discuté de façon détaillée.

9.1 Mesures $V-I$ à quatre points

Une mesure $V - I$ à quatre points est relativement simple à effectuer. Pour un échantillon donné, il s'agit d'y imposer un courant et de mesurer la chute de tension associée à ce courant entre deux bornes de mesure placées *entre* les bornes de courant. Il est très important de ne pas utiliser les bornes de courant pour mesurer la tension car la chute de tension se produisant dans les bornes de courant (due au transfert du courant vers le supraconducteur) est de plusieurs ordres de grandeur supérieure à la chute de tension dans la partie centrale du matériau supraconducteur. Un montage typique est illustré à la FIG. 9.1.

Le montage requis peut différer un peu lorsque l'on a besoin de varier le champ magnétique externe et la température, mais le principe demeure toujours le même. Plus spécifiquement, les appareils utilisés pour effectuer toutes les mesures de la présente thèse sont décrits à l'annexe IV.

La mesure $V - I$ a déjà été traitée de façon théorique à la sous-section 2.3.1. Il y a été mentionné que la caractéristique $V - I$ contient une information statistique importante, soit la distribution de I_c. Pour cette raison, plus il est possible d'aug-

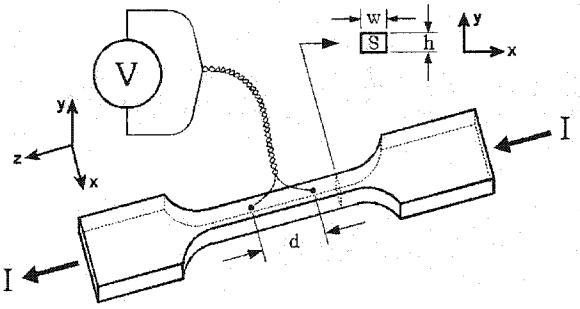


FIG. 9.1 – Schéma du montage typique d'une mesure $V - I$. Lorsque c'est possible, il est préférable de réduire la section centrale de l'échantillon afin de minimiser l'échauffement dans les contacts de courant. La méthode à quatre points est incontournable, car la résistance des contacts est de plusieurs ordres de grandeur supérieure à la résistance entre les deux points de mesure de la tension.

menter la distance entre les contacts de tension, plus la courbe $V - I$ obtenue sera statistiquement riche. Malheureusement, il n'est pas toujours facile de respecter ce critère, car d'une part, les échantillons sont souvent courts, et d'autre part, lorsque l'on applique un champ externe, on ne peut pas générer un champ uniforme sur de grandes longueurs. En pratique, on doit donc souvent limiter la distance entre les contacts de tension entre 1 et 5 cm.

9.2 Matériau de ACL (Advanced Ceramics Limited)

La compagnie britannique ACL produit des supraconducteurs en barres rectangulaires avec contacts (en argent) intégrés. Le procédé de fabrication (procédé CRT [102]) implique l'utilisation de fibres allongées en matériau composite, qui tendent à orienter les grains de Bi-2212 dans une direction préférentielle, ce qui se traduit par une certaine anisotropie du matériau. Des mesures $V - I$ ont été effectuées sur quelques uns de ces échantillons. Les plus petits (des conducteurs rectangulaires de 2 mm par 1 mm) ont tous subi un emballement thermique durant leur première mesure $V - I$, donc aucune information n'a pu être extraite de

ces derniers. Pour réduire ces problèmes, lié à la fragilité des petits échantillons, un échantillon un peu plus gros (3.5 mm par 2 mm) a été utilisé. Nous avons observé le comportement de ce dernier vs les modèles développés précédemment, et les résultats ont été comparés à d'autres résultats similaires se retrouvant dans la littérature. Les prochaines sections détaillent cette expérience, ainsi que l'interprétation des résultats.

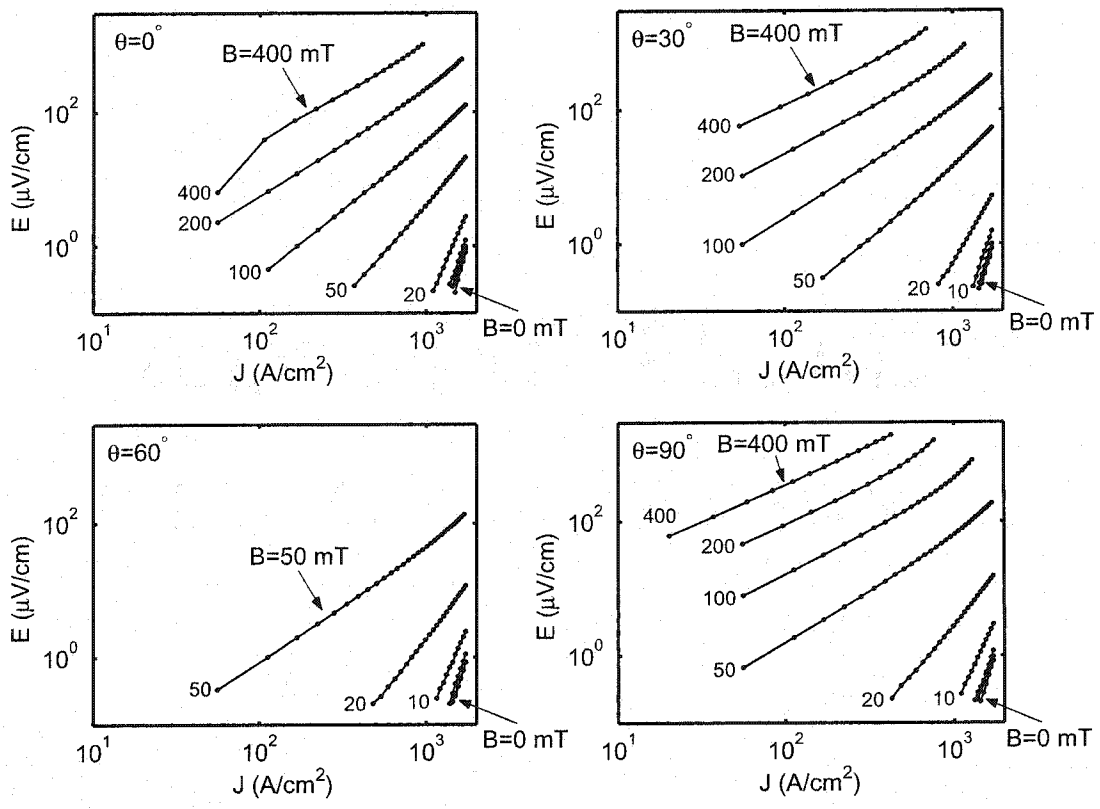


FIG. 9.2 – Courbes $E - J$ d'un échantillon d'ACL (3.5 mm par 2 mm). Les points n'ont été reliés que pour faciliter la visualisation. Chaque courbe correspond à un champ et un angle différent. Les amplitudes de champ utilisées sont: $B = 0$, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 et 400 mT. La courbe la plus élevée de chaque graphique correspond à $B = 400$ mT, sauf pour $\theta = 60°$, où la dernière courbe correspond à $B = 50$ mT, tel que mentionné dans les remarques expérimentales. Notons que ces courbes $E - J$ sont macroscopiques, i.e. $E = V/d$ et $J = \langle J \rangle = I/S$ (cf FIG. 9.1).

9.3 Détails expérimentaux

Le résultat des mesures à 77 K (en log-log) est montré à la FIG. 9.2. Une photo de l'échantillon est montrée à la FIG. 9.3, et un grossissement de la section centrale est montré à la FIG. 9.4. On remarque que l'échantillon a été endommagé (en plein centre) suite à un emballement thermique à un point faible. Heureusement, l'échantillon a eu le temps d'être caractérisé sur une bonne plage d'opération avant de devenir inutilisable. Quelques commentaires s'imposent sur les mesures:

1. Les mesures à $\theta = 90°$ ont été effectuées une journée avant les autres mesures. Bien que l'échantillon n'ait pas été retiré du montage, il est possible que le cycle thermique (azote liquide évaporé) ait quelque peu altéré ses propriétés.
2. La rupture de l'échantillon s'est produite durant la série de mesures à $\theta = 60°$, d'où il manque quelques courbes pour cet angle. Pour les trois autres angles, soit $\theta = 0°$, $\theta = 30°$ et $\theta = 90°$, une mesure $V - I$ a été prise pour $B_{ext} = 0$, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 et 400 mT (dans cet ordre).
3. Les mesures ont toutes été effectuées à champ croissant, i.e. un premier champ était appliqué, puis la mesure $V - I$ était effectuée, puis un second champ, plus fort, était appliqué, puis une nouvelle mesure $V - I$ effectuée, etc...
4. Les mesures à $B_{ext} = 400$ mT ne sont pas très fiables, car le champ a dû être augmenté manuellement alors que la mesure $V - I$ était déjà entamée. Ceci était nécessaire afin d'éviter un échauffement excessif de la bobine qui générait le champ externe.
5. Lorsque le champ propre est de l'ordre de grandeur du champ appliqué, il est possible qu'il reste une certaine configuration de flux emprisonnée dans l'échantillon, celle-ci modifiant le début de la courbe $V - I$ suivante. Par conséquent, les points à très faible E, déjà embrouillés par le bruit de mesure, en sont d'autant moins fiables.

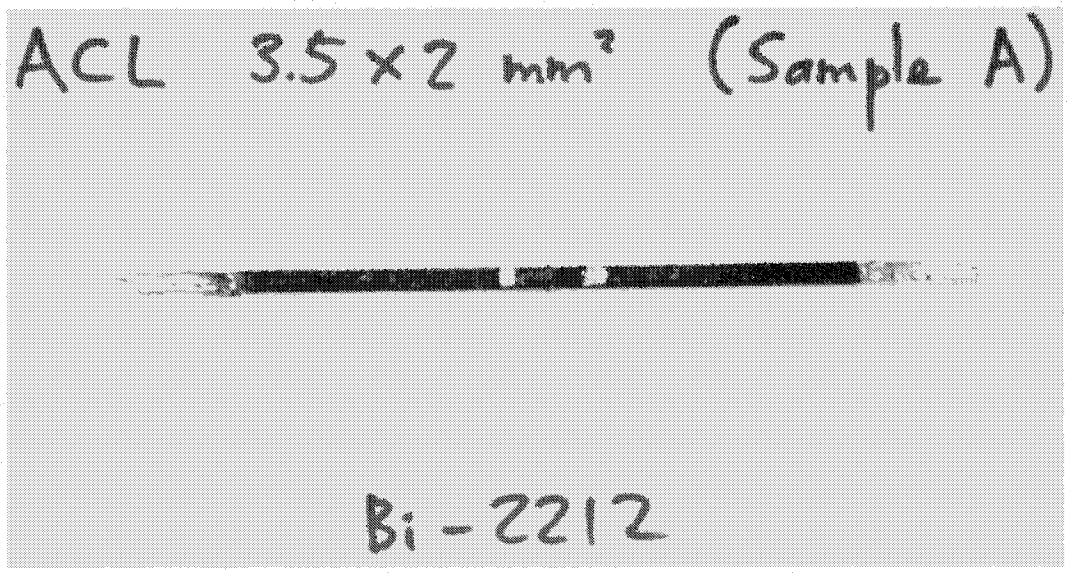


FIG. 9.3 – Photo d'un échantillon d'ACL (3.5 mm par 2 mm). Les dimensions exactes de l'échantillon sont de 3.47 mm par 2.05 mm, et les contacts de voltage sont séparés de 15.05 mm. La résistivité à l'état normal (ρ_n) de ce type de matériau est de l'ordre de 1500 à 1700 $\mu\Omega$.cm, ce qui est assez élevé.

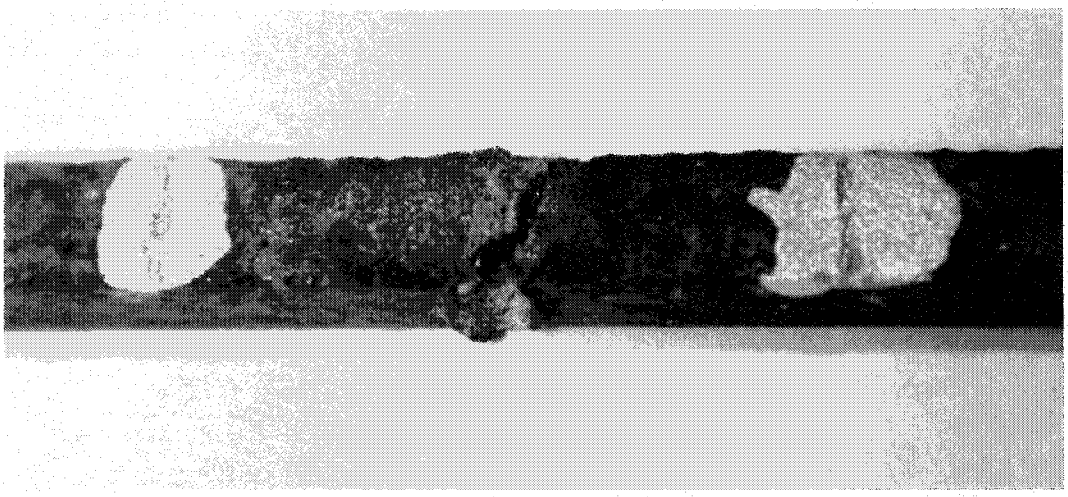


FIG. 9.4 – Grossissement de la partie centrale d'un échantillon d'ACL (3.5 mm par 2 mm). On voit la rupture au centre des deux taches de peinture d'argent, qui ont servi de contacts de tension.

9.4 Analyse détaillée des mesures $V - I$

Les mesures $V - I$ contiennent beaucoup d'informations, mais il faut bien sûr se baser sur un modèle théorique afin que les paramètres physiques que l'on en extrait soient significatifs. Plusieurs modèles ont été présentés au chapitre 3. Nous y référerons régulièrement. Notons que tous les lissages présentés dans ce chapitre ont été effectués sur une échelle log-log, de façon à répartir l'erreur également sur toutes les décades de E. En procédant ainsi, nous obtenons un résultat applicable sur une plus grande plage d'opération.

9.4.1 Modèle en loi de puissance (macroscopique)

Prenons dans un premier temps le modèle en loi de puissance, i.e. $E = E_0(J/J_c)^n$. En choisissant $E_0 = 1\ \mu\text{V/cm}$, il ne reste que deux paramètres libres, soit J_c et n, que l'on obtient par lissage. La dépendance en B et θ de ces deux paramètres est illustrée à la FIG. 9.5.

On peut assez bien reproduire $J_c(B,\theta)$ à l'aide d'un modèle de la forme suivante (voir la FIG. 9.5 pour la valeur numérique des paramètres):

$$J_c(B,\theta) = \frac{J_{c0}}{1 + \left(\frac{|B|}{B_0(\theta)}\right)^{\beta}}\ , \tag{9.1}$$

avec $B_0(\theta) = B_{\|}\, f(\theta)$, et $f(\theta) = (\gamma^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta)^{-1/2}$. On a donc supposé que le paramètre $B_0(\theta)$ suivait le modèle de Lawrence-Doniach (cf section 3.2.3) avec un ratio d'anisotropie effectif γ. Selon van der Laan et al. [53], le fait que cette forme (modèle de type inverse, cf section 3.2.1) décrive très bien à elle seule les courbes $J_c(B)$ signifie que c'est surtout un réseau de liens faibles qui agit, et que la connectivité entre les grains (responsable des liens forts) est presque inexistante. S'il y avait trace significative de liens forts, on devrait observer à tout le moins

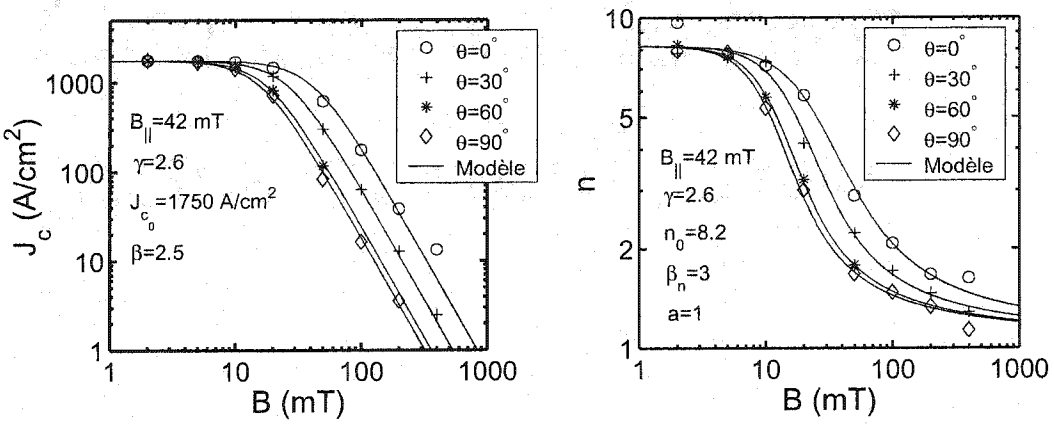


FIG. 9.5 – Dépendance de J_c et n avec B et θ pour un échantillon d'ACL (3.5 mm par 2 mm). Les points expérimentaux y sont montrés, ainsi que les courbes obtenues à l'aide des modèles décrits par (9.1) et (9.2). Notons qu'il s'agit de la dépendance brute, i.e. sans considérer le champ propre. En d'autres termes, il s'agit des paramètres macroscopiques, et non mésoscopiques, selon les termes définis au chapitre 8.

cette même forme, additionnée d'une constante (trace résiduelle de la contribution intra-grains), ce qui n'est pas le cas.

Pour ce qui est de $n(B,\theta)$, la situation est beaucoup moins évidente. Alors que J_c possède un certain sens physique, n est un paramètre plutôt empirique, et sa dépendance anisotrope en champ est assez compliquée. Même si on a mentionné au chapitre 3 que l'on utilise souvent pour $n(B)$ des modèles de la même forme que pour $J_c(B)$, dans le cas anisotrope, cette pratique est assez difficile. Une tentative a été faite pour trouver un modèle empirique $n(B,\theta)$ qui utilise en partie les mêmes paramètres que $J_c(B,\theta)$. Le modèle suivant semble être en assez bon accord avec les mesures du présent échantillon (voir la FIG. 9.5 pour la valeur numérique des paramètres):

$$n(B,\theta) = n_0^{\frac{1}{1+\log\left[1+\left(\frac{|B|}{B_0(\theta)}\right)^{\{\beta_n - af(\theta)\}}\right]}}, \tag{9.2}$$

avec $B_0(\theta)$ et $f(\theta)$ définis tel que pour $J_c(B,\theta)$. Ce modèle, nouveau à notre connaissance, peut sembler assez étrange, mais il présente les deux comportement asymptotique requis, soit $n \to n_0$ lorsque $B \to 0$ et soit $n \to 1$ lorsque $B \to \infty$. Pour être plus formel, il faudrait le corriger pour que $n = 1$ lorsque $B = B_{c_2}$, mais comme notre plage de mesure est très loin de B_{c_2}, cela n'est pas pertinent ici.

Il est intéressant de remarquer que $B_{\|}$ et γ sont les mêmes pour les deux modèles, ce qui suggère une certaine universalité, mais surtout, cela réduit le nombre total de paramètres décrivant la caractéristique $E - J$ à seulement sept, ce qui est relativement peu pour un modèle anisotrope. Nous verrons à la section suivante comment ce modèle se comporte lorsqu'on le raffine afin de déterminer les paramètres mésoscopiques.

9.4.2 Modèle en loi de puissance (mésoscopique)

Avant de regarder explicitement les paramètres mésoscopiques, il est intéressant de constater que l'erreur quadratique totale (sur l'échelle log-log) est de $\xi = 5.77$ lorsque l'on tente de reproduire l'ensemble des courbes $E - J$ à partir de la loi de puissance et des expressions $J_c(B,\theta)$ et $n(B,\theta)$ ci-haut (avec les paramètres macroscopiques), sans considérer le champ propre. Maintenant, si on ajoute le champ propre au champ appliqué et que l'on refait le calcul, on trouve $\xi = 33.86$, soit une erreur significativement plus élevée, d'où le champ propre n'est pas du tout négligeable. Après une optimisation des paramètres en incluant le champ propre, en partant des paramètres macroscopiques comme valeur initiale, on arrive finalement à réduire à nouveau cette erreur à $\xi = 5.81$, ce qui est du même ordre de grandeur que l'erreur avec le modèle macroscopique. Ceci n'est pas fantastique, mais à tout le moins, cela montre que l'on peut compenser un modèle macroscopique pour le rendre plus ou moins mésoscopique, et ainsi tenir compte efficacement du champ propre. Les deux ensembles de paramètres sont comparés dans le TAB. 9.1. En

TAB. 9.1 – Valeurs des paramètres du matériau d'ACL

Paramètre	Valeur macro.	Valeur méso.	Changement relatif	Unité
$B_{\|\|}$	42	31	-35.5 %	mT
γ	2.6	2.39	-8.8 %	(pas d'unité)
J_{c0}	1750	2539	$+31.1$ %	A/cm^2
β	2.5	2.34	-6.8 %	(pas d'unité)
n_0	8.2	8.66	$+5.3$ %	(pas d'unité)
β_n	3	2.72	-10.3 %	(pas d'unité)
a	1	0.91	-9.9 %	(pas d'unité)

particulier, on remarque que J_{c0} et $B_{\|\|}$ varient de façon importante durant l'optimisation, soit par plus de 30 % de la valeur macroscopique. L'augmentation de J_{c0} est due à la sous-estimation que l'on fait de ce paramètre lorsque l'on détermine sa valeur initiale en négligeant le champ propre (i.e. valeur macroscopique). De même, la diminution de $B_{\|\|}$ est certainement aussi causée par l'erreur due au champ propre. Ces deux paramètres sont dominants dans la détermination de la forme de $J_c(B,\theta)$ à faible champ.

La principale limite à cette approche est la façon que l'on a utilisée pour déterminer la forme du modèle. En effet, nous avons utilisé un modèle macroscopique, en espérant que celui-ci pourrait encore très bien s'appliquer lorsque le champ propre serait considéré. Ceci est correct à champ élevé, mais la dépendance pour à faible champ pourrait être très différente de celle supposée. En particulier, cette approche ne permet pas de justifier la présence des plateaux pour J_c et n lorsque $B \to 0$. Dans les faits, pour différents ordres de grandeur de I_c et pour différents matériaux, la nature de l'ancrage n'est pas toujours la même, et les dépendances mésoscopiques en B et θ des paramètres de la caractéristique $E-J$ pourraient alors bien être très différentes.

9.4.3 Modèles basés sur des distributions statistiques de J_c (linéarisées ou non)

Il est très intéressant de regarder le cas des modèles basés sur une distribution statistique de J_c. Afin d'avoir un repère dans la littérature [47, 30], nous utiliserons principalement le modèle basé sur la distribution de Weibull, noté $E_W(J)$ (voir annexe I). Ce sera suffisant pour montrer que la situation est similaire avec les autres types de distributions présentées dans l'annexe I, sauf la distribution normale, qui n'est pas du tout appropriée. Nous y reviendrons à la fin de cette sous-section.

Le modèle $E_W(J)$ dépend de quatre paramètres, soit $J_{c_{min}}$, J_0, n et ρ_{ff}. Chacun de ces paramètres a une signification spécifique, i.e. $J_{c_{min}}$ correspond au début de la distribution, J_0 est représentatif de la largeur de la distribution, n contrôle la forme de la distribution et ρ_{ff} n'intervient que dans l'expression de E pour le mettre à la bonne échelle. Il n'est pas concevable d'essayer d'effectuer arbitrairement un lissage à quatre paramètres, car les mesures ne couvrent pas une assez large plage de J pour extraire $P(J_c)$ au complet. En procédant de la sorte, la valeur des paramètres que l'on obtient est plutôt erratique et ne semble suivre aucune règle précise. À l'instar de Kiss [60], nous supposerons constants ρ_{ff} et n, et observerons comment les deux autres paramètres varient avec B et θ lorsque l'on effectue un lissage. Afin de déterminer les valeurs optimales de ρ_{ff} et n à utiliser, nous avons effectué une série de lissages préliminaires pour minimiser l'erreur lorsque ρ_{ff} et n sont fixés manuellement alors que $J_{c_{min}}$ et J_0 sont libres. Il en a résulté les valeurs optimales $\rho_{ff} \approx 7\ \Omega$.cm et $n = 1.54$. La dépendance en B et θ de $J_{c_{min}}$ et J_0 obtenue pour cette combinaison de ρ_{ff} et n est illustrée à la FIG. 9.6 (page 192). Notons que seulement les courbes de 10 à 200 mT ont été utilisées pour ce lissage, de façon à ne pas considérer la région de champ propre ni les courbes douteuses à 400 mT.

Si comme Yamafuji at al. [30] nous utilisons une distribution de Weibull linéarisée autour de $z = (J - J_{c_{min}})/J_0 = 0$ (i.e. lorsque le terme $e^{-z^n} \approx 1$ dans

l'équation (I.3a), d'où $P_{W_{lin}} \propto z^{n-1}$), et que nous intégrons deux fois $P_{W_{lin}}(J_c)$ afin de déterminer $E_{W_{lin}}(J)$, nous obtenons l'expression suivante:

$$E_{W_{lin}}(J) = \rho_{ff}\frac{J_0}{n+1}\cdot\left[\Big(z(|J|)\Big)^{n+1} - \big(z_0\big)^{n+1}\right]\cdot u\Big(z(|J|)\Big)\cdot \mathrm{sign}(J)\,, \qquad (9.3)$$

où toutes les notations sont définies dans l'annexe I, dans la section sur la distribution de Weibull. Notons que pour $J_{c_{min}} > 0$, $z_0 = 0$ et $E_{W_{lin}}(J)$ se réduit à un modèle de type percolation, i.e. $E = E_0\left(\frac{J-J_{c_{min}}}{J_0}\right)^{n'}$, dans lequel on peut identifier directement $n' = n+1$ et $E_0 = \rho_{ff}J_0/(n+1)$.

Afin de vérifier la validité de cette linéarisation, nous avons de nouveau fixé n et ρ_{ff} et effectué des lissages pour déterminer $J_{c_{min}}$ et J_0. Il en a résulté que les courbes $J_{c_{min}}(B,\theta)$ et $J_0(B,\theta)$ obtenues sont identiques à moins de 1 % à celles présentées à la FIG. 9.6. Ceci implique plusieurs choses, selon le point de vue que l'on adopte. D'abord, en supposant que la distribution de Weibull soit la bonne forme pour $P(J_c)$, ceci démontre que l'hypothèse de linéarisation est respectée sur toute la plage des données expérimentales actuelles. Ceci découle principalement du fait que $J_0 \gg J - J_{c_{min}}$. Cependant, on peut facilement montrer que des distributions statistiques $P(J_c)$ *différentes* d'une distribution de Weibull conduisent aussi au même résultat! Par conséquent, la distribution de Weibull n'est pas automatiquement justifiée par les résultats de Yamafuji at al., ce qui nous oblige à effectuer une analyse plus détaillée pour se convaincre qu'elle pourrait être une distribution adéquate.

Par exemple, pour une distribution Gamma (voir annexe I), notée $P_G(J_c)$, lorsque $(J - J_{c_{min}})/J_0 \ll 1$, i.e. $z \ll 1$, on trouve

$$E_{G_{lin}}(J) = \frac{\rho_{ff}\,J_0}{n(n+1)\Gamma(n)}\cdot\left[\Big(z(|J|)\Big)^{n+1} - \big(z_0\big)^{n+1}\right]\cdot u\Big(z(|J|)\Big)\cdot \mathrm{sign}(J)\,, \quad (9.4)$$

et pour une distribution Beta, notée $P_B(J_c)$, dans les mêmes conditions, on obtient

$$E_{B_{lin}}(J) = \frac{\rho_{ff}\, J_0}{n(n+1)\mathrm{B}(n,m)} \cdot \left[\Big(z(|J|)\Big)^{n+1} - \big(z_0\big)^{n+1} \right] \cdot u\Big(z(|J|)\Big) \cdot \mathrm{sign}(J)\ , \quad (9.5)$$

toutes les notations étant définies dans l'annexe I. Ces deux dernières équations sont exactement similaires à (9.3), et elle peuvent être directement identifiées à un modèle de type percolation lorsque $J_{c_{min}} > 0$. En fait, à valeurs égales de n et ρ_{ff}, ce n'est que le coefficient E_0 du modèle de percolation qui change légèrement, ainsi que la valeur numérique des couples de paramètres $J_{c_{min}}$ et J_0. Les courbes $J_{c_{min}}(B,\theta)$ et $J_0(B,\theta)$ obtenues sont donc très similaires à celles de la FIG. 9.6, et ne sont pas présentées inutilement ici. Lorsque $J_{c_{min}} < 0$, $E(J)$ ne donne plus un modèle de type percolation, mais on arrive aux mêmes conclusions quant à la similitude des paramètres numériques des différents modèles basés sur une distribution statistique de J_c.

Notons que même si l'approche consistant à linéariser $P(J_c)$ se réduit à un modèle de type percolation pour $J_{c_{min}} > 0$, cela n'en demeure pas moins un excellent modèle, d'autant plus que le coefficient E_0 du modèle dépend de $J_0(B,\theta)$, d'où une dépendance implicite $E_0(B,\theta)$. C'est une approche beaucoup plus naturelle et physique que d'utiliser un modèle en loi de puissance, qui présente une dépendance compliquée du paramètre n avec B et θ. À ce sujet, une remarque s'impose sur le paramètre n de $P_W(J_c)$ et celui de la loi de puissance $E = E_0(J/J_c)^n$. Il est clair que n n'a pas du tout le même sens dans les deux cas. En effet, dans le premier cas, on peut poser ce dernier constant et obtenir un excellent modèle, alors que pour une loi de puissance, n dépend toujours de façon importante de B et θ. Kiss et al. [60] ont dérivé les expressions reliant les paramètres J_c et n d'une loi de puissance aux paramètres d'une distribution de Weibull linéarisée. Dans le cas général, l'expression résultante pour J_c est plutôt lourde, et nous ne l'indiquons pas ici. L'expression pour n est donnée par (9.6).

Afin de clore la comparaison entre les différentes distributions statistiques, mentionnons que la plage de validité de la linéarisation n'est pas aussi grande dans tous les cas. En effet, si on écrit explicitement les approximations pour $z \ll 1$ en ne négligeant plus le premier terme de l'expansion en séries, on a $P_W(J_c) \propto z^{n-1} \cdot (1 - z^n)$, $P_G(J_c) \propto z^{n-1} \cdot (1 - z)$ et $P_B(J_c) \propto z^{n-1} \cdot (1 - z)^{m-1}$. Puisque z est inférieur à 1, il est intuitivement clair à partir de ces trois expressions que le comportement $P(J_c) \propto z^{n-1}$ supposé ci-haut sera respecté sur une plus grande plage de z pour une puissance élevée du z entre parenthèses, ou pour m plus faible, dans le cas de $P_B(J_c)$. On peut donc en conclure que $P_{W_{lin}}(J_c)$ sera toujours valide sur une plus grande plage de z que $P_{G_{lin}}(J_c)$, alors que pour $P_{B_{lin}}(J_c)$, cela dépendra de la valeur de m. Comme en pratique on observe une correspondance sur une plage de z étendue, c'est un bon indice pour supposer que la distribution de Weibull est une forme adéquate pour $P(J_c)$, et cela clôt l'analyse détaillée. Malgré la conclusion que l'on en tire, il n'en demeure pas moins qu'il faudrait pouvoir effectuer des mesures sur une plage de z beaucoup plus grande pour pouvoir conclure sur la forme réelle de $P(J_c)$.

En terminant cette section, commentons le cas de la distribution normale, i.e. $P_N(J_c)$. Bien que celle-ci soit utilisée régulièrement dans la littérature [19], elle est fondamentalement incompatible avec l'approche utilisée ici, car la queue négative s'étend jusqu'à $-\infty$, d'où $J_{c_{min}}$ apparaît comme étant toujours négatif. Par conséquent, il est impossible avec un modèle basé sur $P_N(J_c)$ de modéliser le comportement du matériau en phase amorphe, i.e. $J_{c_{min}} > 0$, et la caractéristique $E(J)$ apparaîtra toujours avec une courbure convexe sur un graphique log-log. Pour cette raison, nous ne reviendrons plus sur $P_N(J_c)$ dans la suite de cet ouvrage.

9.4.4 Modèle basé sur une distribution de Weibull avec ρ_{ff} dépendant de B

Dans leurs travaux, Kiss et al. [60] mentionnent que la valeur de ρ_{ff} n'a que peu d'importance sur la qualité du modèle, surtout quand n est suffisamment grand. Cependant, ce qui n'est pas mentionné, c'est que la valeur de ρ_{ff} a une grande importance sur les valeurs de $J_{c_{min}}$ et J_0, qui doivent alors s'ajuster de façon assez compliquée pour compenser toute erreur sur ρ_{ff}. Comme ρ_{ff} contrôle l'échelle de E, il détermine en quelque sorte la région dans laquelle on se situe sur la distribution, et la conséquence de commettre une erreur sur la valeur de ρ_{ff} est que l'on peut facilement se retrouver au mauvais endroit. Lorsque l'on utilise un modèle linéarisé, cette conséquence n'est pas observée, mais dans le cas contraire, elle devient flagrante. Pour une courbe expérimentale donnée, plus on prend ρ_{ff} petit dans le modèle, plus on atteint rapidement la région de fluage (i.e. la fin de la distribution). Même s'il est difficile de déterminer ρ_{ff}, on peut toutefois déterminer une valeur minimale en observant la pente d'une courbe $E - J$ pour le J le plus élevé. La valeur de ρ_{ff} devrait être plus grande ou égale à cette pente, l'égalité survenant lorsque le régime de fluage est atteint.

Bien que l'hypothèse d'avoir ρ_{ff} constant permette d'arriver à des résultats assez cohérents, nous savons très bien que ρ_{ff} varie en fonction de B. Nous tenterons donc dans cette section de faire varier ρ_{ff} avec B. À défaut de connaître ou de pouvoir mesurer cette dépendance, nous utiliserons le modèle de Bardeen-Stephen, décrit par (3.12), dans lequel $\rho_{ff} \propto B$. Nous supposerons un comportement isotrope, i.e. pas de dépendance en θ. Le modèle sera donc simplement $\rho_{ff} = k\,B$. On déterminera la constante k optimale en la posant comme l'un des paramètres du modèle.

Après optimisation, on trouve que l'optimum pour n reste le même, soit $n = 1.54$, et $k = 14$ $\mu\Omega$.cm/T, ce qui semble faible en apparence, car un champ $B \approx 500$ mT

est requis pour atteindre la valeur de 7 $\mu\Omega$.cm, i.e. la valeur optimale de ρ_{ff} lorsque ce dernier est pris constant. Cependant, une mesure sur un autre échantillon (sans champ externe) du même matériau mais plus petit (2 mm par 1 mm) a permis de pousser la caractéristique $E-J$ près de la région de fluage (avant la destruction de celui-ci, qui s'est produite à $I = 115$ A, ou $J \approx 5750$ A/cm^2). La pente $E-J$ à ce point était alors d'environ 0.2 $\mu\Omega$.cm. De plus, le champ propre maximal de l'échantillon d'ACL caractérisé dans ce chapitre, en absence de B_{ext} et pour un courant similaire, est de l'ordre de 10 à 15 mT (cf FIG. 10.1). En prenant $\langle B \rangle \approx B_{self}/2$, on peut alors estimer $\langle \rho_{ff} \rangle = k \langle B \rangle \approx 0.1$ $\mu\Omega$.cm, ce qui est un ordre de grandeur tout à fait compatible avec la mesure ci-haut, d'autant plus que le facteur 2 peut facilement être expliquée par la section plus faible du petit échantillon. Nous considérerons donc que la valeur de k est plausible.

Ceci dit, avec ces valeurs de n et de k, on trouve la dépendance en B et θ de $J_{c_{min}}$ et J_0 présentée à la FIG. 9.7 (rappelons que la FIG. 9.6 représente le même cas lorsque ρ_{ff} ne dépend pas de B). On constate sur cette dernière que $J_{c_{min}}(B,\theta)$ reste à peu près inchangé par rapport au cas ρ_{ff} constant. Par contre, J_0 est changé de façon très importante. D'une part, la valeur maximale atteinte est presque d'un ordre de grandeur inférieure au cas ρ_{ff} constant. D'autre part, la courbe $J_0(B,\theta)$ présente un maximum, en-deça duquel $J_0 \to 0$ lorsque $B \to 0$. Ce comportement est étrange à priori, mais pas physiquement impossible, pour autant que $J_{c_{max}}$, que l'on peut approximer par $J_{c_{min}} + J_0$, soit une fonction décroissante en termes de B et θ (à température constante). Le fait que ce ne soit pas le cas ici implique que pour des valeurs de B_{ext} partant de 0 et allant de 25 à 50 mT, $J_{c_{max}}$ augmente, ce qui repousse le début du régime de fluage à un J plus élevé que lorsque $B_{ext} = 0$! Une telle inconsistance ne semble pas physique, et il faut chercher à l'expliquer. L'explication la plus facile est que la forme utilisée pour $\rho_{ff}(B)$ ne soit pas valide. Néanmoins, le fait que $\rho_{ff} = k\,B$ croisse de façon monotone avec B est un fait qui

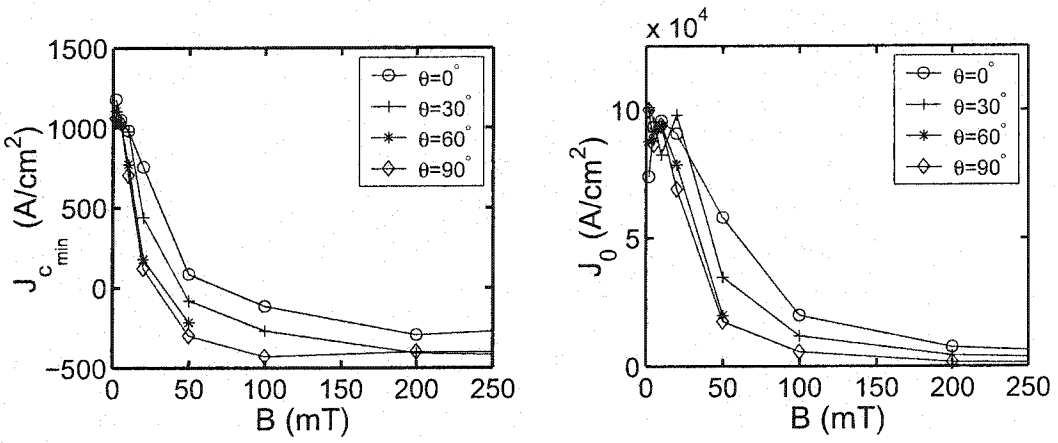


FIG. 9.6 – Dépendance de $J_{c_{min}}$ et J_0 avec B et θ pour un échantillon d'ACL (3.5 mm par 2 mm), pour le modèle basée sur une distribution de Weibull, i.e. $E_W(J)$. Les deux paramètres ($J_{c_{min}}$ et J_0) montrent une dépendance similaire, quoique J_0 semble posséder un plateau plus large que $J_{c_{min}}$ près de $B = 0$. La ligne reliant les points expérimentaux n'est qu'une aide visuelle pour mieux les repérer. Les autres paramètres (constants) du modèle sont $n = 1.54$ et $\rho_{ff} = 7\ \mu\Omega$.cm.

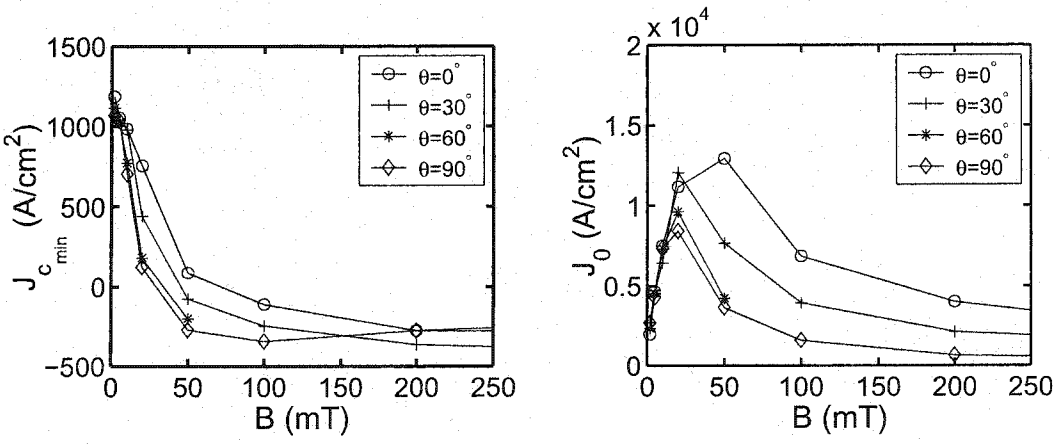


FIG. 9.7 – Dépendance de $J_{c_{min}}$ et J_0 avec B et θ pour un échantillon d'ACL (3.5 mm par 2 mm) lorsque $\rho_{ff} = k\,B$, pour le modèle basée sur une distribution de Weibull, i.e. $E_W(J)$. Le paramètre $J_{c_{min}}$ affiche une dépendance similaire à ci-haut, alors que J_0 présente un maximum et un retour vers 0 lorsque $B \to 0$. La ligne reliant les points expérimentaux n'est qu'une aide visuelle pour mieux les repérer. Les autres paramètres (constants) du modèle sont $n = 1.54$ et $k = 14\ \mu\Omega$.cm/T.

a été vérifié expérimentalement il y a longtemps, notamment par Kim et al. [64]. Il faut donc chercher une autre cause.

L'origine (mathématique) de ce comportement devient claire lorsque l'on réfère à l'expression analytique de $n_{L.P.}$, soit l'exposant du modèle en loi de puissance, en fonction de J_c et E_0 (toujours des paramètres d'une loi de puissance) et les autres paramètres de la distribution de Weibull [60]. Explicitement, on a

$$n_{L.P.} = \frac{\rho_{ff} J_c}{E_0} \left(\frac{J_c - J_{c_{min}}}{J_0} \right)^n \quad . \tag{9.6}$$

Comme $n_{L.P.}$ et J_c sont uniquement déterminés pour E_0 donné, et que $J_{c_{min}}$ demeure sensiblement le même pour ρ_{ff} constant ou proportionnel à B, il ne reste de libre que ρ_{ff} et J_0. Il s'ensuit que l'on peut écrire

$$J_0{}' = J_0 \left(\frac{\rho_{ff}{}'}{\rho_{ff}} \right)^{1/n} \quad . \tag{9.7}$$

Dans notre cas, ρ_{ff} est constant et $\rho_{ff}{}' \propto B$, d'où selon (9.7), $J_0{}' \to 0$ lorsque $B \to 0$, tel qu'observé sur la FIG. 9.7. De la même façon, ceci explique la réduction de l'ordre de grandeur de J_0 lorsque ρ_{ff} varie avec B. Notons que ce phénomène de retour à zéro est une conséquence directe du fait que l'on a négligé le champ propre dans les lissages. En d'autre termes, on a considéré $\rho_{ff}(B_{ext})$ plutôt que $\rho_{ff}(B)$. En considérant le champ propre, il est probable que J_0 saturerait à une certaine valeur pour $B \to 0$. Si l'on pouvait effectuer une recherche des paramètres mésoscopiques, il serait donc probablement justifié de considérer une fonction qui présente un plateau pour $B \to 0$, comme la fonction de type inverse (3.3), que l'on a utilisée a plusieurs reprises jusqu'à maintenant. Cependant, l'ambiguïté $\rho_{ff} = 0$ lorsque $B = 0$ nous empêche de considérer ce problème à l'heure actuelle.

Enfin, pour compléter cette analyse, mentionnons que le fait d'attribuer à ρ une dépendance en B ne contribue pas significativement à améliorer la qualité du

lissage. Ceci découle directement de (9.7), i.e. toute variation de ρ_{ff} est presque entièrement compensée par une variation de J_0 (sous l'hypothèse de n constant, bien sûr). Ainsi, si on regarde l'erreur quadratique en log-log (courbes de 10 à 200 mT seulement) des lissages qui nous ont permis de créer les FIG. 9.6 et 9.7, on trouve respectivement $\xi = 0.2947$ pour le cas ρ_{ff} constant et $\xi = 0.2903$ pour le cas $\rho_{ff} \propto B$, ce qui est essentiellement équivalent[1]. Par contre comme J_0 est très différent dans les deux cas, ceci a pour conséquence de remettre en question l'ordre de grandeur du paramètre J_0 (pour des champs inférieurs à ≈ 500 mT) utilisé par beaucoup d'auteurs japonais, qui supposent tous ρ_{ff} constant.

9.5 Conclusion

L'analyse détaillée présentée dans ce chapitre a permis de montrer plusieurs choses, mais rappelons avant tout qu'un seul échantillon n'est pas statistiquement significatif, mais simplement représentatif d'un comportement plus général, d'où les valeurs numériques des paramètres présentées ici ne sont que des ordres de grandeur qui pourront servir à des comparaison ultérieures.

Ceci étant dit, la principale conclusion que l'on tire de ce chapitre est qu'il est primordial de déterminer le comportement de ρ_{ff} avec B et θ avant toute autre chose, afin de pouvoir poursuivre dans la voie du formalisme développé pour les modèles de la caractéristique $E - J$ basés sur des distributions statistiques. Comme on l'a vu, la valeur de ρ_{ff} influence grandement les autres paramètres du modèle, surtout J_0, apparenté à la largeur de la distribution. De plus, il serait important de vérifier les résultats de Kunchur [31], qui stipulent que ρ_{ff} dépend

[1] Attention de ne pas comparer l'erreur quadratique donnée dans ce paragraphe avec l'erreur quadratique donnée dans la section 9.4.2, car cette dernière est l'erreur sur toutes les courbes après regénération des courbes $E - J$ par un modèle complet avec dépendance en B et θ, alors qu'ici, il ne s'agit que la somme des erreurs des lissages individuels de chacune des courbes, qui ne donne pas la dépendance en B et θ des paramètres, et produit donc une erreur toujours plus faible.

de J. Si tel était le cas, le formalisme développé ici demeurerait valide, mais il faudrait refaire les intégrales en annexe I en considérant $\rho_{ff}(J)$ afin d'obtenir les expressions analytiques correctes pour $E(J)$. Comme la mesure de ρ_{ff} pour de forts J nécessite l'application de fortes et brèves impulsions de courant, un banc de mesure spécial serait requis, ce que nous n'avons pas dans notre laboratoire. Par conséquent, nous reléguerons ces mesures à un prochain projet de recherche.

Enfin, mentionnons qu'un nouveau modèle anisotrope pour $n(B,\theta)$ a été proposé dans la section sur les modèles en loi de puissance. Ce modèle semble applicable pour les matériaux de type CRT, mais il est purement empirique et difficile à justifier théoriquement.

CHAPITRE 10

ÉTUDE PAR CALCUL NUMÉRIQUE DE L'INFLUENCE DU CHAMP PROPRE, DE L'ANISOTROPIE EFFECTIVE ET DU FACTEUR DE FORME DES CONDUCTEURS RECTANGULAIRES SUR LA CARACTÉRISTIQUE $V-I$

Dans les deux chapitres précédents, nous avons vu que le champ propre joue un rôle important dans la détermination de la valeur numérique des paramètres du modèle décrivant la courbe $E-J$ à faible champ externe. Une méthode numérique a même été proposée pour extraire les paramètres mésoscopiques du matériau à partir des mesures $V-I$ (cf chapitre 8).

Dans ce chapitre, nous prenons l'approche contraire, i.e. nous supposons que les paramètres mésoscopiques sont connus à priori, et nous en déduisons par calcul numérique la caractéristique $E-I$ du matériau (équivalente à la caractéristique $V-I$), ou des quantités dérivées de celle-ci. En fait, nous nous attardons surtout à caractériser la variation de I_c, non seulement en fonction du degré d'anisotropie (effective) du matériau, mais aussi en fonction du facteur de forme du conducteur rectangulaire considéré. Nous définissons ici le facteur de forme d'un conducteur rectangulaire par

$$\lambda = w/h \,, \tag{10.1}$$

les quantités w et h étant respectivement sa largeur (selon l'axe x) et sa hauteur (selon l'axe y) (voir FIG. 9.1, page 178). La section du conducteur est bien sûr donnée par $S = wh$. L'axe c des grains du matériau est supposé aligné avec l'axe y (en moyenne), et le plan $a-b$ parallèle au plan $x-z$ (en moyenne). Enfin, afin de faire plus facilement le lien avec l'expérimentation et la littérature, nous définissons I_c dans ce chapitre comme étant le courant correspondant à $E = E_0 = 1\ \mu\mathrm{V/cm}$.

10.1 Revue des travaux préalables

La plupart des travaux traitant du champ propre (B_{self}) dans la littérature présentent des résultats expérimentaux. D'abord, Gherardi et al. [103] présentent une série de graphiques de $I_c(B)$ (basées sur des mesures $V-I$ en cc) concernant des rubans supraconducteurs ayant différents I_c et différents λ. Il ressort de leurs mesures que plus le conducteur est aplati, meilleure est sa caractéristique $I_c(B)$, ce qui est cohérent avec le fait que, pour un courant donné, l'amplitude du champ propre diminue lorsque λ augmente. Ce résultat a été confirmé ultérieurement par une étude expérimentale plus détaillée effectuée par Spreafico et al. [104]. De plus, Gherardi et al. présentent une méthode expérimentale qui permet de compenser en partie le champ propre d'un échantillon en l'entourant par d'autres conducteurs portant des courants appropriés, ce qui permet en retour d'améliorer la précision sur la caractéristique $I_c(B)$ à faible champ. Une méthode similaire mais plus sophistiquée a été élaborée par Adamopoulos et Patapis [105]. Leur article présente quelques calculs numériques en 1D, basés sur une dépendance isotrope de J_c avec B. Nous y reviendrons à la section 10.4. Enfin, il existe une approche tout à fait différente qui consiste à passer par des mesures de pertes ca pour déterminer $I_c(B)$ pour des champs encore plus faibles que ceux accessibles par par des mesures $V-I$ en cc [106].

Parmi les auteurs qui ont effectué des calculs de la distribution du courant en cc, mentionnons Nah et al. [107], qui ont calculé la distribution de J dans un empilement de rubans supraconducteurs. Leurs calculs tiennent compte du champ propre, quoique leur modèle de $J_c(B,\theta)$ est basé sur la caractéristique $I_c(B,\theta)$ macroscopique, déduite de mesures $V-I$. Ils parviennent ainsi à calculer un I_c équivalent pour un ensemble de rubans empilés. Däumling [108] avait aussi déjà effectué brièvement ce type d'étude, mais en se concentrant davantage sur les effets du champ propre d'un ruban seul. Il s'agit d'ailleurs de l'un des premiers auteurs qui a remis

en question l'interprétation de l'expérience de « slicing », dans laquelle un ruban supraconducteur est coupé en plusieurs filaments sur le sens de la longueur et le courant critique est mesuré séparément pour chacun de ces filaments [21]. L'explication traditionnelle stipule que le matériau est mieux texturé près des bords, ce qui devrait lui confèrer un meilleur J_c local. Cependant, Däumling a réussi à reproduire le phénomène par simulation numérique à partir d'un matériau entièrement homogène soumis au seul effet de son champ propre. Ceci indique clairement que le facteur de forme du conducteur joue un rôle non négligeable dans la mesure d'un courant critique à l'aide de courbes $V-I$, et appuie le besoin d'une méthode de caractérisation locale, telle que celle développée dans la présente thèse (cf chapitre 8). L'auteur montre aussi que la redistribution du courant due au champ propre donne un ratio de l'ordre de 2 entre la densité de courant observée au centre du conducteur et celle observée dans les bouts, un résultat que l'on reproduit aisément dans le présent chapitre.

10.2 Courant critique vs facteur de forme

Afin d'utiliser un modèle anisotrope réaliste, nous nous baserons sur les résultats des mesures effectuées sur le matériau d'ACL au chapitre précédent. De plus, nous utiliserons le modèle en loi de puissance, dont les paramètres $J_c(B,\theta)$ et $n(B,\theta)$ sont donnés par les équations (9.1) et (9.2) (voir pages 182 et 183). Prenons comme valeurs numériques pour les paramètres la valeur des paramètres mésoscopiques arrondis (cf TAB. 9.1), i.e. $B_{\|} = 30$ mT, $J_{c_0} = 2500$ A/cm^2, $\beta = 2.5$, $n_0 = 9$, $\beta_n = 3$ et $a = 1$. Le paramètre γ sera variable, de façon à ce que l'on puisse constater l'influence de l'anisotropie effective sur I_c. Soulignons immédiatement les subtilités suivantes dans la notation: $J_c(0)$ signifie $J_c\big|_{B=0} \equiv J_{c_0}$, alors que $I_c(0)$ signifie $I_c\big|_{B_{ext}=0} \neq I_{c_0}$, que l'on définit par $I_{c_0} \equiv J_{c_0}S$. En d'autres termes, I_{c_0} est le courant critique qui existerait en absence de champ propre (jamais observé en

pratique), et $I_c(0)$ est le courant critique observé lorsque l'on considère le champ propre, tel que lors de mesures $V - I$.

Maintenant, prenons un échantillon de section $S = 4$ mm^2, mais de facteur de forme λ arbitraire. À partir des paramètres ci-haut, on détermine $I_{c_0} = J_{c_0} S = 2500$ A/cm^2 $\times$ 0.04 cm^2 $= 100$ A, ce qui nous donne une borne supérieure pour I_c. À titre de première simulation, nous observons la variation de I_c avec λ et γ. Les résultats pour $10^{-5} \leq \lambda \leq 10^5$, $B_{ext} = 0$, 10 et 20 mT et $\gamma = 1, 2, 4, 8$ sont présentés aux FIG. 10.1 à 10.3. Tous les calculs numériques sont basés sur l'algorithme de calcul de la distribution du courant en cc développé dans le cadre de la présente thèse, aux chapitres 5 et 6.

On remarque sur l'ensemble des FIG. 10.1 à 10.3 que l'on a une symétrie par rapport à $\lambda = 10^0$, ce qui est surprenant a priori, car pour $\lambda = 10^{\pm a}$ (a étant une constante arbitraire), le champ propre est très différent, et l'axe c est respectivement parallèle et perpendiculaire au côté plat du conducteur. L'interaction entre ces deux effets n'est pas triviale. Nous reviendrons sur ce fait ultérieurement (cf section 10.5), mais nous en tirerons avantage pour simplifier l'analyse, en n'étudiant que les cas $\lambda \geq 10^0$ (i.e. $\lambda \geq 1$) dans les simulations à venir. D'ailleurs, ce sont surtout ces cas qui sont réalistes, car selon les procédés de fabrication actuels, l'axe c du matériau se retrouve toujours perpendiculaire au côté plat du conducteur.

La FIG. 10.1 ($B_{ext} = 0$ mT) nous démontre clairement la relation entre le champ propre, le facteur de forme et l'anisotropie. En effet, même pour $\gamma = 1$ (cas isotrope), il existe une certaine réduction de I_c due au champ propre, celle-ci étant surtout remarquable dans la région $10^{-1} \leq \lambda \leq 10^1$, là où ce dernier est de plus grande amplitude. La présence d'anisotropie amplifie cette réduction de I_c et étend la plage de λ sur laquelle on l'observe. Cependant, dans tous les cas, lorsque λ est suffisamment grand (donc pour max($|B|$) suffisamment petit), $I_c \to I_{c_0}$ (= 100 A dans le cas présent). D'autre part, la réduction de max($|B|$)

avec γ est une conséquence directe de la réduction de I_c avec γ, car l'amplitude maximale de $|B|$ est directement proportionnelle au courant, ici $I = I_c(0)$, circulant dans le conducteur (loi d'Ampère), et ne dépend que faiblement de la distribution exacte $J(x, y)$ du courant. Pour des valeurs de γ plus grandes, les calculs numériques requièrent une grille de calcul fine, dû à la variation abrupte de J le long de l'axe $B_y = 0$, et c'est pourquoi nous nous sommes limités à $\gamma \leq 8$. Un exemple avec $\gamma = 64$ est toutefois présenté à la section 10.5.

Aux FIG. 10.2 et FIG. 10.3, un champ externe a été superposé au champ propre. À la FIG. 10.2, ce champ externe est de 10 mT, soit de l'ordre de grandeur du champ propre maximal, alors qu'à la FIG. 10.3, le champ externe est de 20 mT, soit de l'ordre de deux fois le champ propre maximal. Dans les deux cas, pour $\theta = 0°$, le comportement de I_c vs λ est semblable au cas $B_{ext} = 0$ mT (cf FIG. 10.1), mis à part le fait que $I_c|_{\lambda\to\infty} < I_{c_0}$. La grandeur de cette réduction de I_c ne semble cependant

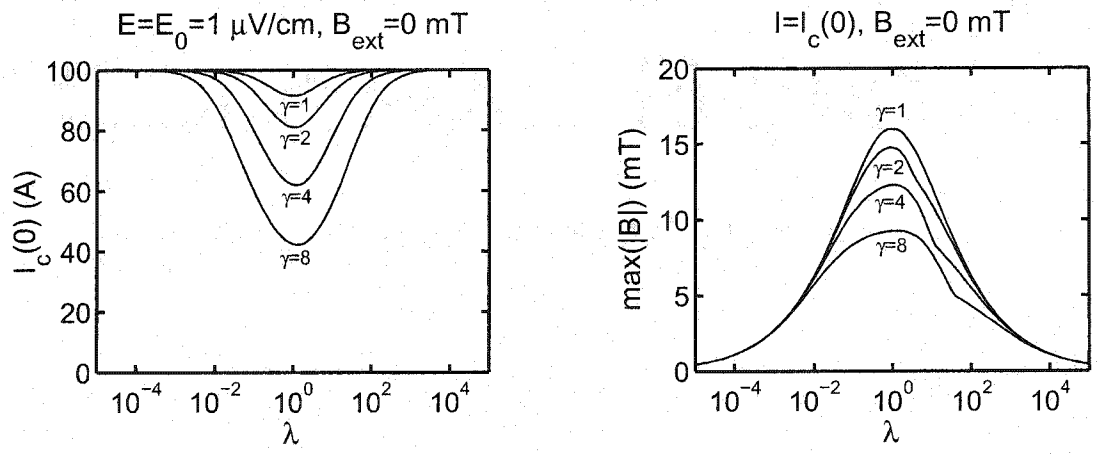


FIG. 10.1 – Graphiques de $I_c(0)$ (*gauche*) et $\max(|B|)$ (*droite*) vs (λ, γ) pour $B_{ext} = 0$ mT (i.e. champ propre uniquement). On remarque que même dans le cas isotrope ($\gamma = 1$), il existe une certaine réduction de I_c due au champ propre. La discontinuité dans le graphique de $\max(|B|)$ est d'origine purement numérique, et découle simplement de la résolution du maillage.

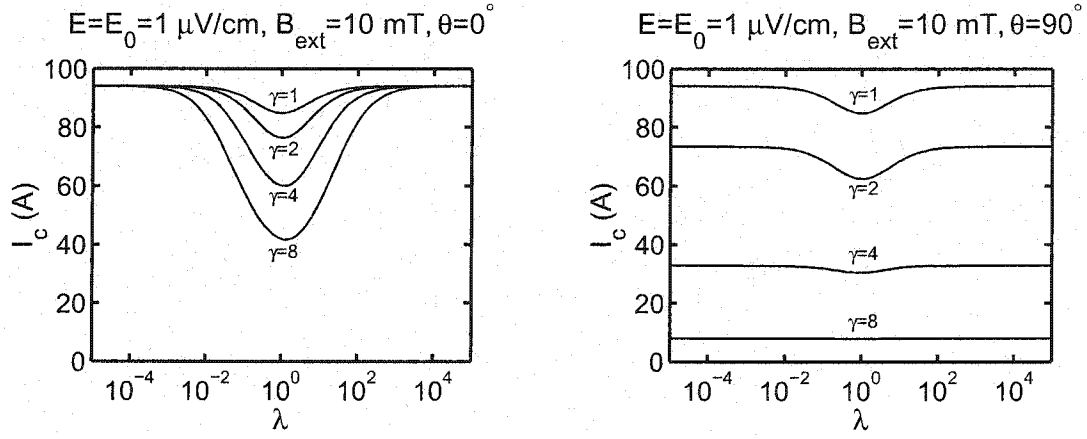


FIG. 10.2 – Graphique de I_c vs (λ, γ) pour $B_{ext} = 10$ mT (de l'ordre de grandeur du champ propre). *Gauche*: B_{ext} parallèle l'axe x ($\theta = 0°$). *Droite*: B_{ext} parallèle l'axe y ($\theta = 90°$). Dans le cas $\theta = 0°$, la réduction de I_c observée est très similaire à celle du cas $B_{ext} = 0$ mT (figure précédente), mis à part une petite translation vers le bas. Toute les courbes continuent de converger vers $I_c(B_{ext}) = SJ_c(B_{ext})$ pour λ suffisamment grand. Cependant, pour $\theta = 90°$, la détérioration est frappante. Toutes les asymptotes en λ sont clairement découplées.

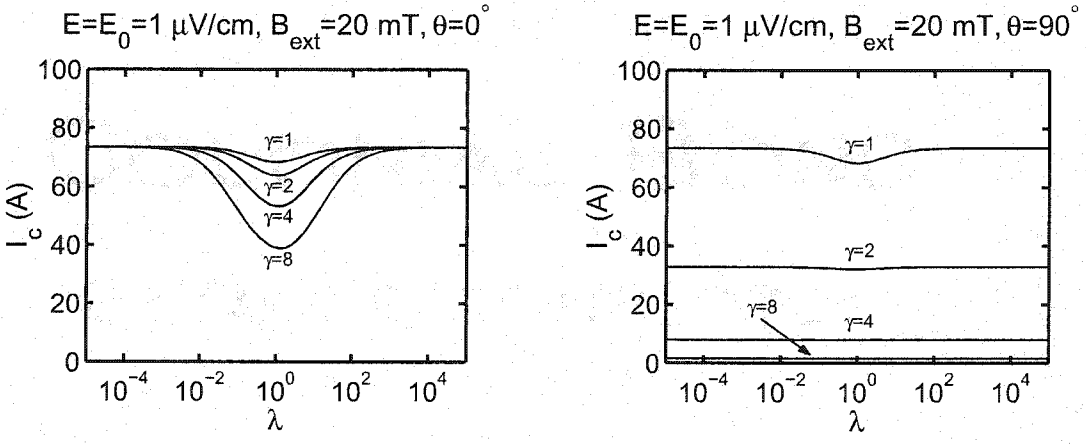


FIG. 10.3 – Graphique de I_c vs (λ, γ) pour $B_{ext} = 20$ mT (de l'ordre de deux fois le champ propre). *Gauche*: B_{ext} parallèle l'axe x ($\theta = 0°$). *Droite*: B_{ext} parallèle l'axe y ($\theta = 90°$). Les mêmes constatations qu'à la figure précédente s'appliquent. On note une détérioration encore plus forte de I_c, mais il est intéressant de constater que les asymptotes en λ pour le cas $\theta = 0°$ continuent de demeurer confondues.

pas influencée par γ, contrairement au cas $\theta = 90°$, où cette fois le décalage dépend grandement de γ. Ceci s'explique par le fait que, dans le modèle utilisé, γ affecte uniquement la valeur des paramètres lorsque $\theta > 0$ (cf équation (9.1), page 182), et le faible champ parallèle suffit à empêcher l'existence de composantes de champ propre alignées selon $\theta = 90°$. En d'autres termes, on retrouve le résultat bien connu qu'à mesure que γ augmente, le matériau devient de plus en plus sensible à un champ parallèle à l'axe c.

Un commentaire s'impose sur l'effet de la section S et de la grandeur de J_{c_0} sur les courbes précédentes. Plus la valeur de ces deux dernières est petite, plus I_c est petit (tous les autres paramètres étant inchangés), mais ceci est aussi vrai pour $\max(|B|)$. Il en résulte que la réduction relative de I_c (due au champ propre) est de moins en moins prononcée (à mesure que S ou J_{c_0} diminue), ce qui se traduit visuellement par un creux de I_c de moins en moins prononcé en $\lambda = 10^0$. À la limite, pour S et/ou J_c très petits, on aurait $I_c \to I_{c_0}$ sur toute la plage de λ.

10.3 Courant critique vs champ externe

Afin de poursuivre cette analyse et de pouvoir comparer les résultats obtenus avec certains résultats expérimentaux, nous reproduisons maintenant par calcul numérique les courbes $I_c(B_{ext})$ pour différents λ et γ. Les résultats pour un cas isotrope et un cas anisotrope sont présentés aux FIG. 10.4 et 10.5. Pour faciliter la comparaison avec les résultats de Gherardi et al. [103], présentés à la FIG. 10.6, toutes les courbes ont été normalisées par $I_c(0)$, de façon à faire coïncider tous les plateaux pour $B_{ext} \to 0$.

Comme on l'a vu à la section précédente, plus λ tend vers 1, plus l'effet du champ propre est important. Ceci ce traduit ici par un allongement du plateau de $I_c(B_{ext})/I_c(0)$, mais une diminution de $I_c(0)$. L'allongement du plateau n'est cependant pas constaté (ou à peu près imperceptible) en absence d'anisotropie

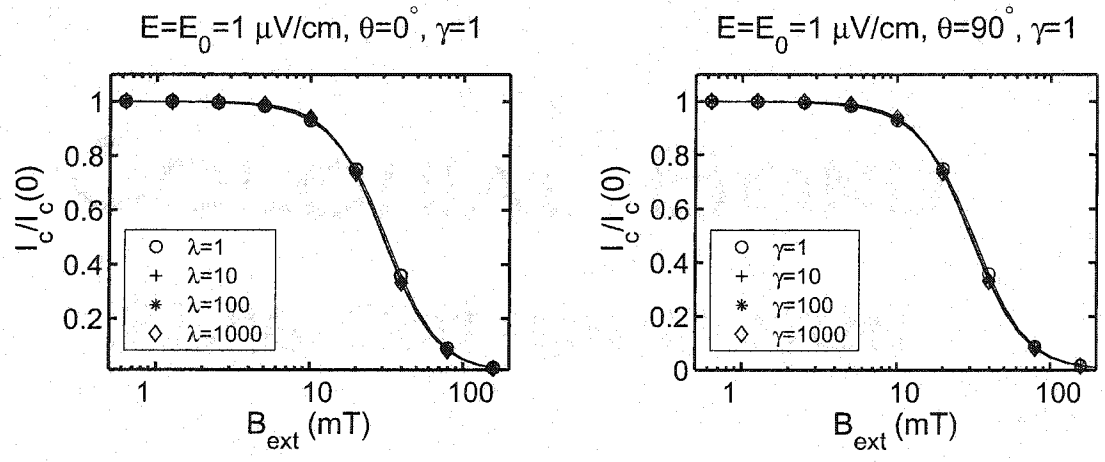


FIG. 10.4 – Graphique de I_c vs (B_{ext}, λ) pour $\gamma = 1$ (cas isotrope). *Gauche*: B_{ext} parallèle l'axe x ($\theta = 0°$). *Droite*: B_{ext} parallèle l'axe y ($\theta = 90°$). Les plateaux sont essentiellement de la même longueur, et les deux graphiques à peu près identiques. Il ne faut cependant pas oublier qu'il s'agit d'un graphique normalisé par $I_c(0)$, et que ce dernier diminue à mesure $\lambda \rightarrow = 1$.

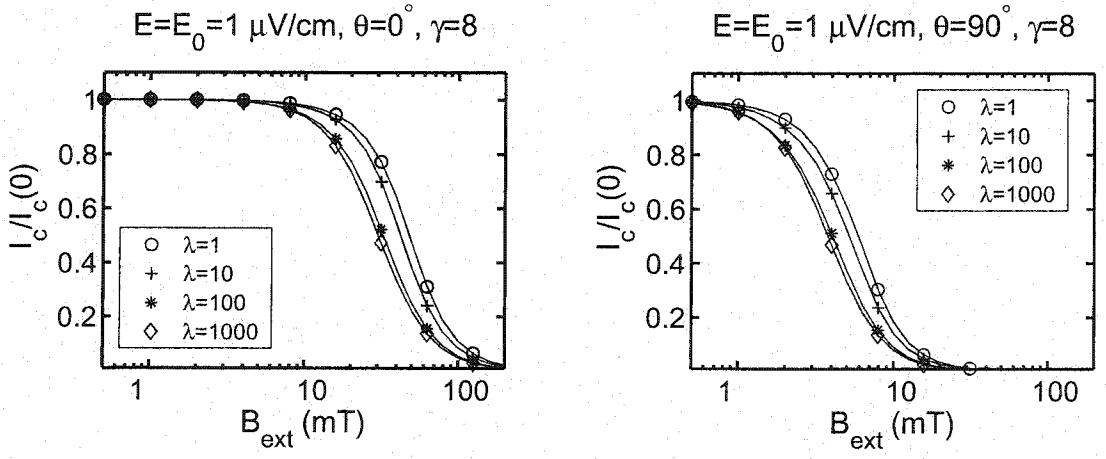
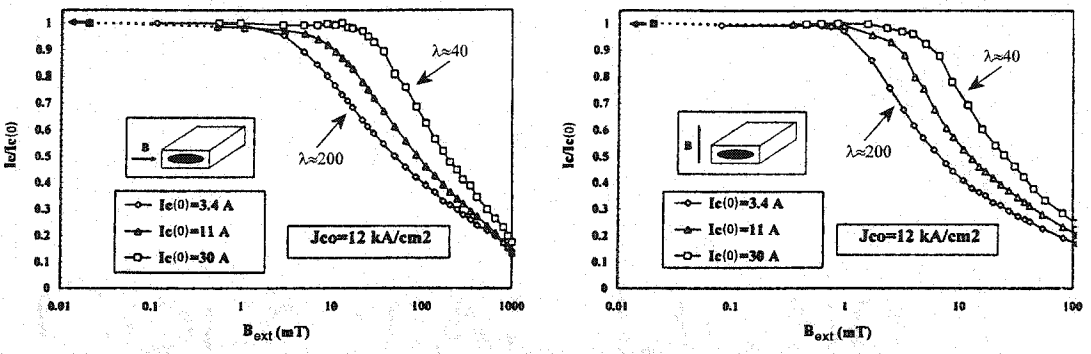


FIG. 10.5 – Graphique de I_c vs (B_{ext}, λ) pour $\gamma = 8$ (cas anisotrope). *Gauche*: B_{ext} parallèle l'axe x ($\theta = 0°$). *Droite*: B_{ext} parallèle l'axe y ($\theta = 90°$). Les débuts des plateaux peuvent être visualisés de façon distincte, ce qui met en évidence l'effet d'une anisotropie effective $\gamma > 1$ (comparer avec FIG. 10.4). La variation dans la longueur du plateau est surtout marquée pour $\lambda \leq 100$.



Source: L. Gherardi et al., "Critical current versus field behavior in Ag/BSCCO-2223 tapes with different critical currents", *Materials Science and Engineering B*, vol. 39, 1996, pp. 66-70. [103]

FIG. 10.6 – Graphique de I_c vs B_{ext} pour trois échantillons de supraconducteurs Ag/Bi-2223 en ruban de différentes épaisseurs mais approximativement de même J_{c0}. *Gauche*: B_{ext} parallèle l'axe x ($\theta = 0°$). *Droite*: B_{ext} parallèle l'axe y ($\theta = 90°$). Les échantillons avaient tous 3 mm de largeur et entre 15 et 70 μm d'épaisseur, d'où des facteurs de forme variant entre 40 et 200.

intrinsèque (cf FIG. 10.4). Par contre, dans le cas anisotrope (ici $\gamma = 8$), on voit clairement que les plateaux sont de longueurs différentes (cf FIG. 10.5). De plus, on a une réduction importante de la valeur de B_{ext} à laquelle le plateau commence à descendre.

Toute les observations précédentes sont compatibles dans une certaine mesure avec les résultats expérimentaux de Gherardi et al. [103], présentés à la FIG. 10.6. On constate d'une part un allongement marqué du plateau pour l'échantillon le plus épais (i.e. ayant le plus petit λ), ce qui témoigne d'une anisotropie, tel qu'observé aux FIG. 10.4 et 10.5. D'autre part, une meilleure preuve encore d'anisotropie est la réduction drastique (d'un facteur 10) de la valeur de B à laquelle se terminent les plateaux lorsqu'on passe du cas $\theta = 0°$ au cas $\theta = 90°$.

Il y a aussi certaines différences entre les simulations et l'expérience. Plusieurs facteurs permettent de les expliquer. D'abord, le matériau utilisé par Gherardi et al. est du Ag/Bi-2223, vs un modèle de Bi-2212, d'où la différence d'un ordre de grandeur sur l'échelle de B_{ext}, ce qui n'empêche pas l'accord qualitatif d'être assez bon.

D'autre part, les λ des échantillons utilisés ne couvrent pas une plage très large ($40 \lesssim \lambda \lesssim 200$). Pour ces valeurs de λ, les plateaux observés devraient théoriquement être plus rapprochés. Cependant, les auteurs comparent des échantillons dont les J_{c_0} sont présumés être les mêmes, mais leur calcul de J_{c_0} est basé sur $I_c(0)$ (i.e. $J_{c_0} \approx I_c(0)/S$), d'où une première source d'erreur. De plus, plus les échantillons sont plats (i.e. plus λ est grand), plus γ risque d'être élevé d'un échantillon à l'autre (meilleur alignement des grains dû à un plus grand nombre de pressages), ce qui tend à séparer davantage les courbes, comme on l'observe effectivement. Enfin, la géométrie du noyau supraconducteur dans les échantillons utilisés est davantage ellipsoïdique que rectangulaire, ce qui peut changer quelque peu la forme des courbes en réponse au champ propre et à un champ externe.

10.4 Compensation expérimentale du champ propre

Dans le même ordre d'idées qu'à la section précédente, nous nous intéressons maintenant à étudier par simulation numérique une méthode expérimentale proposée par Adamopoulos et Patapis [105], qui permet d'annuler en partie le champ propre et de tirer directement la caractéristique $J_c(B)$ à partir de mesures $V - I$, rendant ainsi la caractérisation pratiquement indépendante de la forme de l'échantillon. Comme nous le verrons, cette annulation du champ propre n'est évidemment pas complète, mais selon le modèle utilisé pour les calculs, elle apparaît être d'une efficacité surprenante.

La méthode est fort simple: pour un conducteur donné que l'on veut caractériser, il s'agit de disposer à ses côtés deux conducteurs en cuivre de même section, portant chacun un courant égal au courant I circulant dans le conducteur testé. Ce montage est illustrée à la FIG. 10.7. La largeur de l'ensemble est donc d'environ trois fois la largeur du conducteur central. On suppose un espacement de 0.2 mm entre chaque conducteur pour assurer l'isolation électrique, soit la distance utilisée

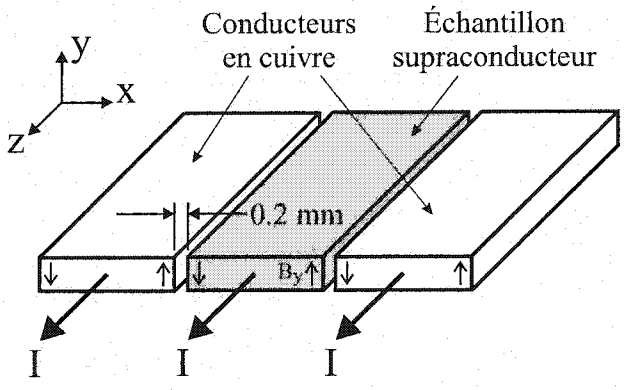


FIG. 10.7 – Schéma du montage expérimental pour compenser le champ propre, tel que proposé par Adamopoulos et Patapis [105]. L'espacement de 0.2 mm ne sert qu'à assurer l'isolation électrique entre les trois conducteurs, qui portent tous le même courant I. Les flèches sur les bords des conducteurs symbolisent la composante B_y du champ propre due à chacun des conducteurs pris individuellement (donc avant superposition).

dans l'expérience d'Adamopoulos et Patapis. Cette configuration permet de réduire la composante de champ propre qui est parallèle à l'axe c du matériau, i.e. la plus dommageable pour des matériaux anisotropes. Le principe est que les champs propres de chacun des conducteurs se superposent, et comme ces derniers portent tous le même courant, les composantes dont $\theta = 90°$ (correspondant ici B_y) sont à peu près égales mais de sens opposés entre deux côtés adjacents des conducteurs, d'où une réduction globale de B_y. C'est ce qu'on appellera ici la compensation du champ propre.

La simulation pour le cas compensé est assez difficile à réaliser car elle requiert d'imposer à la fois un courant dans les conducteurs en cuivre et un champ électrique ($E = E_0 = 1\ \mu$V/cm) dans le conducteur central, ce qui permet d'imposer $I = I_c$. Comme le courant dans le conducteur central varie durant la recherche de I_c, le courant de compensation (qui doit lui être égal) varie aussi, et le problème diverge facilement. Nous avons tout de même réussi à le solutionner en utilisant un algo-

rithme de recherche incrémentale, qui augmente petit à petit le courant imposé jusqu'à l'atteinte de E_0 dans le conducteur central. Comme ce procédé est très long et requiert une assistance humaine constante (environ une journée de travail), nous n'avons considéré qu'un seul cas, soit un conducteur rectangulaire de 5 mm par 0.2 mm (i.e. $\lambda = 25$), et d'anisotropie effective $\gamma = 8$. La section est donc de 1 mm^2, soit le quart de la section utilisée dans les calculs précédents. Le modèle $E(J)$ utilisé est toujours le même que celui utilisé dans les sections précédentes de ce chapitre. Le résultat de l'ensemble des simulations est présenté à la FIG. 10.8.

En observant cette dernière, on voit que la compensation permet de se rapprocher de façon surprenante de la caractéristique locale. Cependant, ce n'est que pour $B \approx 12$ mT que les courbes commencent à se confondre, ce qui représente

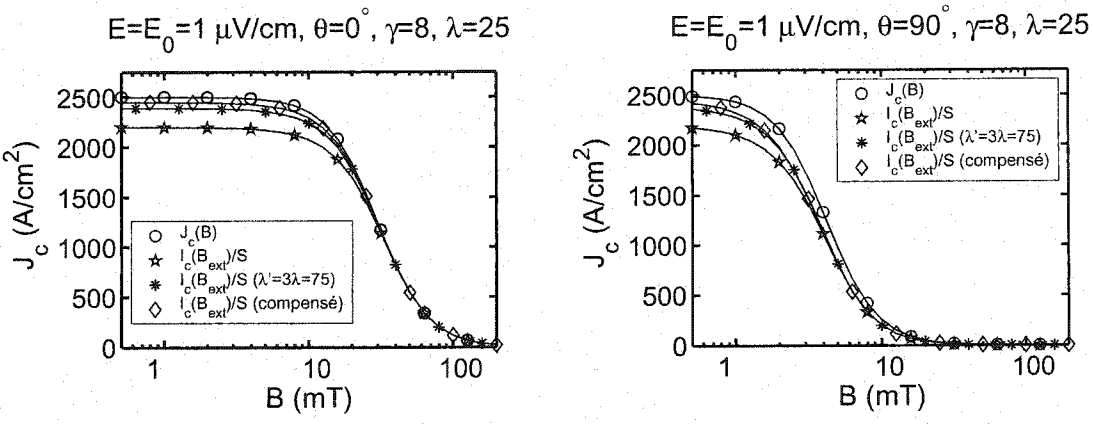


FIG. 10.8 – Graphique de J_c vs B pour un échantillon fictif de 5 mm par 0.2 mm dans différentes conditions. *Gauche*: B_{ext} parallèle l'axe x ($\theta = 0°$). *Droite*: B_{ext} parallèle l'axe y ($\theta = 90°$). La courbe $J_c(B)$ ($\circ$) est la véritable caractéristique locale, selon le modèle $E(J)$ utilisé. Les autres courbes correspondent respectivement à $I_c(B_{ext})/S$ ($\star$) sans aucune compensation, $I_c(B_{ext})/S$ ($*$) lorsque l'échantillon garde la même section mais que $\lambda' = 3\lambda = 75$ (voir explications dans le texte) et $I_c(B_{ext})/S$ ($\diamond$) lorsque l'on utilise la méthode d'Adamopoulos et Patapis [105] pour compenser le champ propre.

environ 4 fois le champ propre maximal ($\max(|B|) \approx 3.7$ mT, cf FIG. 10.9). Dans le cas $\theta = 90°$, ceci résulte en un écart entre les courbes qui est observable sur toute la plage d'intérêt de $J_c(B)$.

Comme le même courant $I = I_c$ circule dans les trois conducteurs et que ces derniers ont tous la même section, $\langle J \rangle = I_c/S$ est le même partout, et on peut donc considérer cette approche comme une façon d'augmenter artificiellement le facteur de forme du conducteur mesuré. Nous avons vu précédemment que le fait d'augmenter λ est bénéfique pour $I_c(0)$, car l'amplitude maximale du champ propre est alors réduite. C'est pour vérifier ce fait que nous avons simulé un cas pour lequel $\lambda' = 3\lambda = 75$, le facteur 3 provenant du fait qu'avec la compensation, il y a trois conducteurs de même largeur côtes à côtes. Ce cas est représenté par la courbe marquée d'une astérisque ($*$) sur la FIG. 10.8, et on voit qu'il se rapproche en effet du cas avec compensation, marqué par les losanges ($\diamond$), qui demeure tout de même une meilleure approximation de $J_c(B)$. On peut probablement attribuer ceci au fait que J est uniforme dans les conducteurs de compensation, qui sont en cuivre, alors que J est libre de se redistribuer dans le conducteur dont $\lambda' = 75$.

La FIG. 10.9 présente les contours de B_x et B_y du champ propre à la surface de l'échantillon supraconducteur, avec et sans compensation, pour $B_{ext} = 0$ mT. On peut y voir que, conformément à nos attentes, la composante B_y est réduite significativement (par un facteur de l'ordre de 2 à 3). Cet ordre de grandeur dépend bien sûr fortement de λ et γ. À l'opposé de B_y, la composante B_x est légèrement amplifiée. Il est inévitable avec cette configuration d'amplifier l'une des composantes lorsque l'on réduit l'autre. Il s'agit donc de viser à réduire celle qui cause le plus de tort à la caractéristique $J_c(B)$. Dans tous les cas, l'effet global de la compensation est de rendre plus uniforme les deux composantes de champ propre.

Ce type de simulation avait déjà été effectué par Baranowski [71] à l'aide de la méthode des éléments finis. Cependant, ce dernier avait supposé J uniforme sur la section de l'échantillon, et avait négligé la dépendance de J_c avec B, d'où

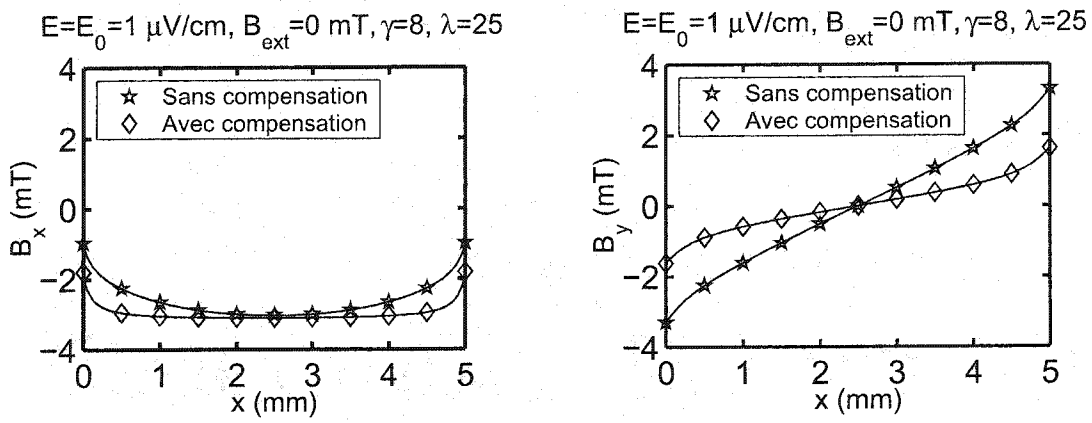


FIG. 10.9 – Graphique des composantes B_x (*gauche*) et B_y (*droite*) du champ propre à la surface d'un échantillon fictif de 5 mm par 0.2 mm avec compensation ($\diamond$) et sans compensation ($\star$), pour $B_{ext} = 0$ mT. Les symboles correspondent aux mêmes conditions que les courbes de la FIG. 10.8. Dans l'ensemble, on voit que le champ est plus uniforme dans le cas compensé, significativement atténué en B_y et légèrement amplifié en B_x.

l'impossibilité de déterminer l'influence de l'anisotropie. Plus précisément, pour $B_{ext} = 0$, il avait imposé $J = I_c(0)/S$ dans chacun de ses conducteurs, et avait observé les profils de champ résultant avec et sans compensation. Les résultats qu'il a obtenus sont difficiles à comparer avec les résultats présents, d'autant plus que les échantillons simulés ne sont pas de mêmes dimensions ($\lambda \approx 7$ dans son cas, vs $\lambda = 25$ ici). Cependant, il obtient des courbes qualitativement similaires, ce qui donne une bonne validation de l'ensemble de nos résultats. Il semble que la variation de J_c avec B et la redistribution du courant sur la section change assez peu l'aspect qualitatif du résultat global.

Enfin, afin de constater l'effet de la compensation du champ propre sur la distribution du courant, nous présentons à la FIG. 10.10 les graphiques de $J(x, y)$ sur la section de l'échantillon. On y constate clairement que la compensation du champ propre permet d'uniformiser la distribution du courant, en faisant tendre J davantage vers $J_c(0)$ que dans le cas non compensé. C'est bien sûr près des bords

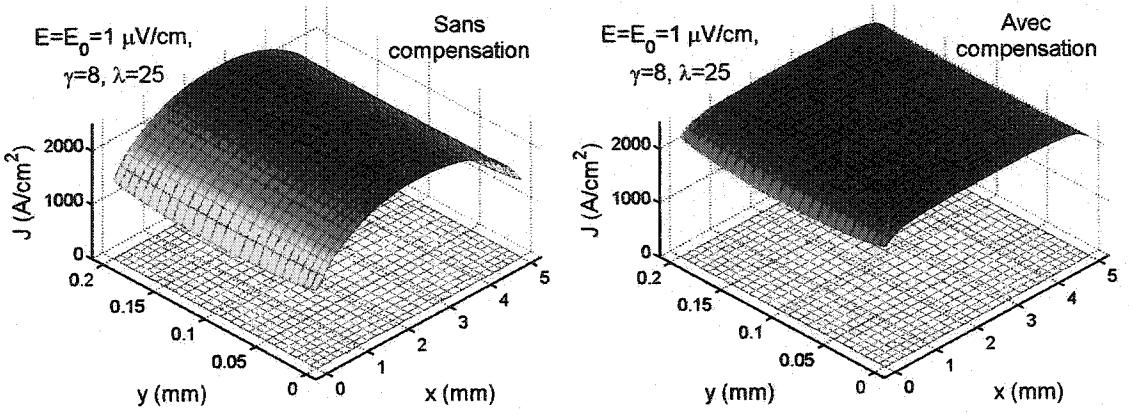


FIG. 10.10 – Graphique de $J(x, y)$ sur la section d'un échantillon fictif de 5 mm par 0.2 mm lorsque $B_{ext} = 0$ mT, $\gamma = 8$ et $\lambda = 25$. On voit clairement que la compensation permet d'uniformiser J sur la section. Attention! Les échelles en x et y sont différentes, question d'améliorer la visibilité du graphique.

de l'échantillon que la variation de J est la plus marquée, là où le champ propre est le plus grand. Ceci nous conduit à la section suivante, qui s'intéresse explicitement à la distribution de J pour différents γ et λ.

10.5 Distribution de J vs anisotropie et facteur de forme

Cette section, qui est davantage visuelle que descriptive, permet de mieux comprendre intuitivement l'origine la variation de I_c avec γ et λ, tel qu'observé aux FIG. 10.1 à 10.3. Nous utiliserons donc les mêmes conditions de simulation, soit l'imposition de $I = I_c$ (i.e. $E = E_0 = 1$ μV/cm), $B_{ext} = 0$ ou 10 mT, et $\theta = 0$ ou 90°.

Le premier cas est présenté à la FIG. 10.11. Il s'agit de la distribution de courant en l'absence de champ externe, donc seul le champ propre influence la distribution du courant sur la section. La colonne de gauche nous montre l'effet d'augmenter l'anisotropie tout en gardant λ constant et égal à 1. Le cas $\gamma = 1$ montre que la redistribution du courant est faible dans un matériau isotrope, mais déjà pour $\gamma = 8$,

ce qui est de l'ordre du raisonnable pour un matériau granulaire de la famille BSCCO (Nakamura et al. [59] utilisent $\gamma = 5$, ce qui est cohérent avec d'autres mesures effectuées par Kiss et Okamoto [60], où $\gamma \approx 6$), on observe une variation d'un facteur 5 entre le courant maximal au centre du conducteur et le courant minimal. Cette variation résulte en une réduction de I_c de l'ordre de 60 % par rapport à I_{c_0} (cf FIG. 10.1). Enfin, à titre de curiosité, nous avons aussi simulé le cas $\gamma = 64$, ce qui se rapproche d'un matériau cristallin massif de BSCCO (un cristal de BSCCO possède une anisotropie intrinsèque de l'ordre de 140 [2, section 9.3.1]). On voit que dans ce cas, il n'y a que le centre qui arrive à porter un courant signicatif, soit le lieu où $B_y \approx 0$ mT (i.e. la composante parallèle à l'axe c), et donc un matériau cristallin n'a pas du tout intérêt à être utilisé sous forme d'un conducteur massif, mais plutôt en couche mince.

La colonne de droite de la FIG. 10.11 poursuit avec le cas $\gamma = 8$ en augmentant λ d'une décade à chaque étape. Il est intéressant de voir comment la distribution du courant change de façon marquée à mesure que l'échantillon s'aplatit. Nous savons de par les sections précédentes que ceci est causé par la réduction progressive de l'amplitude du champ propre, surtout de la composante perpendiculaire au côté plat (i.e. B_y) vers le centre de l'échantillon. On remarque toutefois qu'il subsiste toujours une variation abrupte de J dans les bouts de l'échantillon, même pour $\lambda = 1000$.

La FIG. 10.12 présente les mêmes cas que la FIG. 10.11, mais lorsqu'un champ $B_{ext} = 10$ mT est appliqué sur l'échantillon à un angle $\theta = 0°$. On constate que ce champ a peu d'influence sur l'ensemble des cas présentés, ce qui est cohérent avec la FIG. 10.2 (gauche). Cependant, lorsque ce même B_{ext} est appliqué à $\theta = 90°$, on obtient une situation radicalement différente dès que $\lambda > 1$. Celle-ci est illustrée à la FIG. 10.13. Dans ce cas, I_c tombe en chute libre, tel que nous l'avions constaté à la FIG. 10.2 (droite).

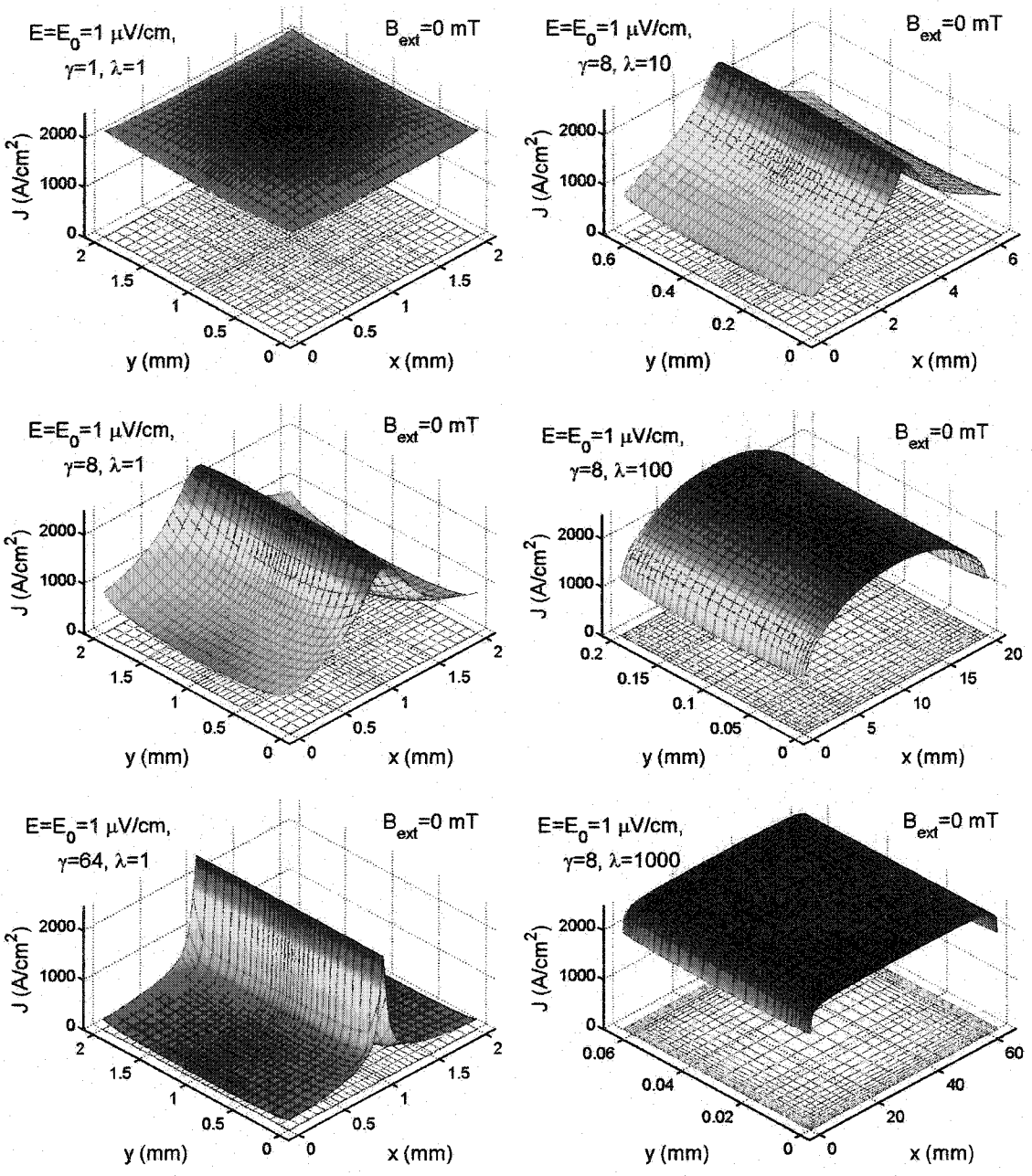


FIG. 10.11 – Graphique de $J(x, y)$ sur la section d'un échantillon dont $S = 4$ mm^2 lorsque $B_{ext} = 0$ mT, pour différents γ et λ. Attention! Les échelles en x et y sont parfois différentes, afin d'améliorer la visibilité du graphique. Il est intéressant d'observer cette figure en relation avec la FIG. 10.1. Voir le texte pour les commentaires.

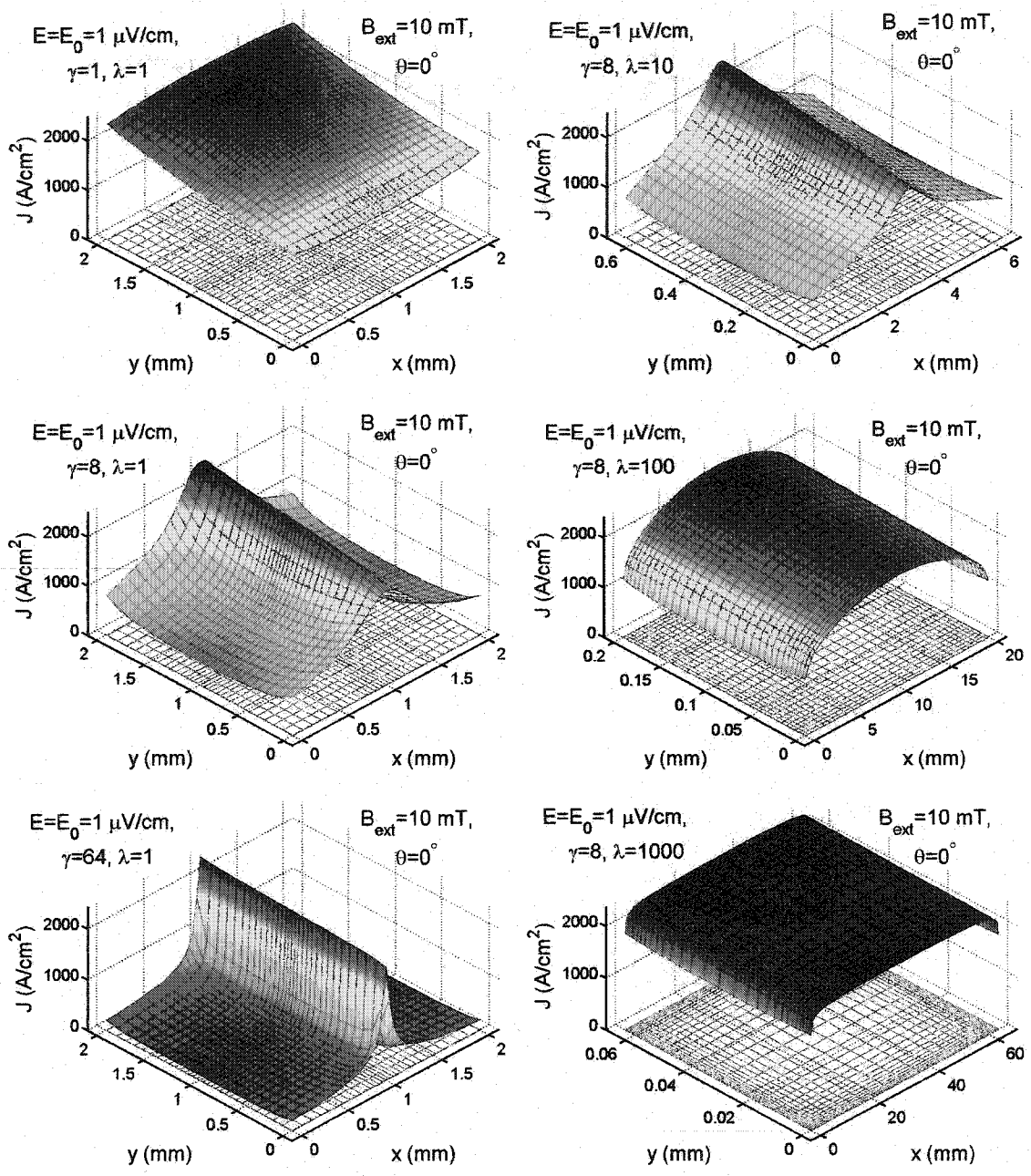


FIG. 10.12 – Graphique de $J(x, y)$ sur la section d'un échantillon dont $S = 4$ mm^2 lorsque $B_{ext} = 10$ mT et $\theta = 0°$, pour différents γ et λ. Attention! Les échelles en x et y sont parfois différentes, afin d'améliorer la visibilité du graphique. Il est intéressant d'observer cette figure en relation avec la FIG. 10.2 (gauche). Voir le texte pour les commentaires.

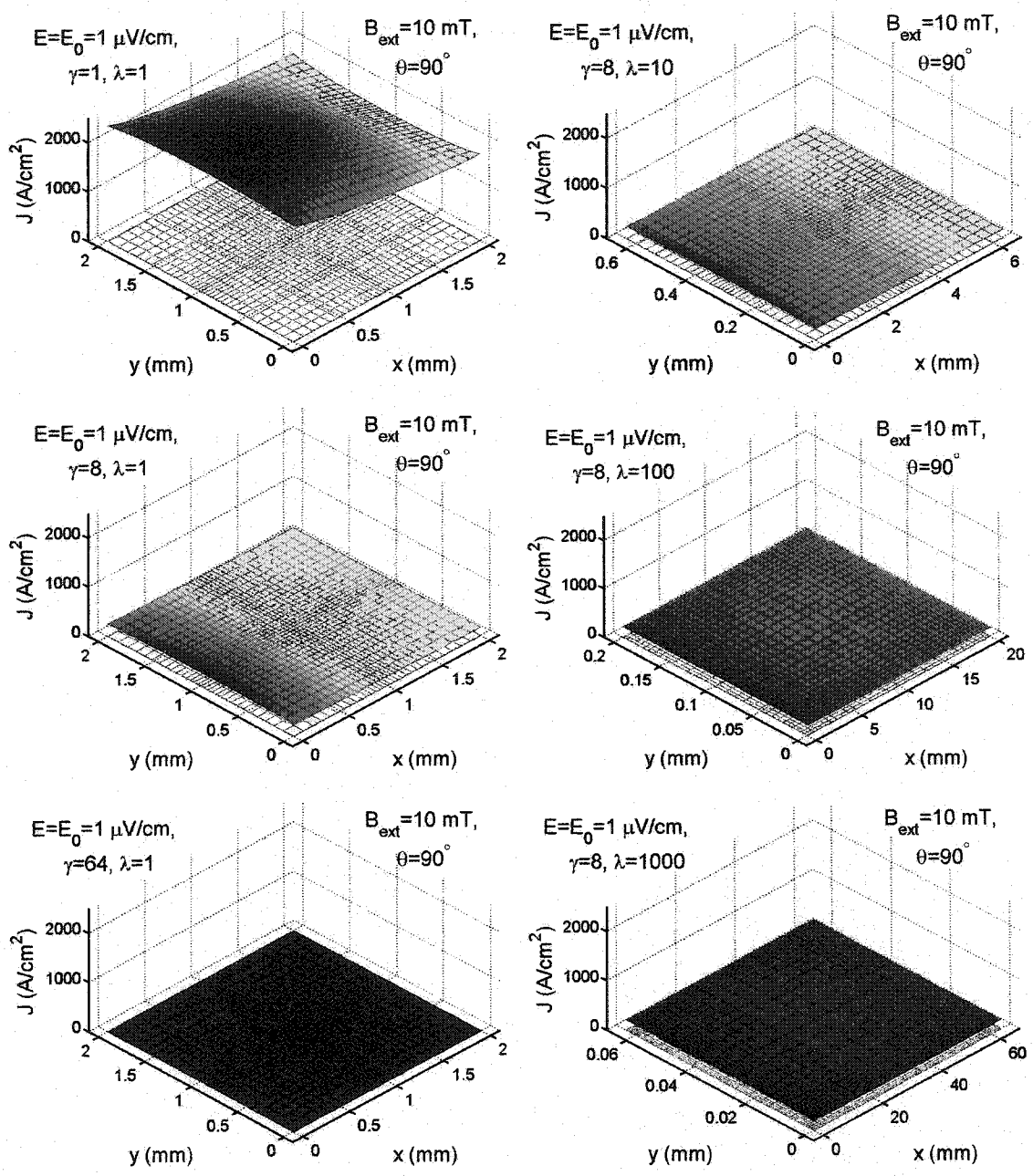


FIG. 10.13 – Graphique de $J(x, y)$ sur la section d'un échantillon dont $S = 4$ mm^2 lorsque $B_{ext} = 10$ mT et $\theta = 90°$, pour différents γ et λ. Attention! Les échelles en x et y sont parfois différentes, afin d'améliorer la visibilité du graphique. Il est intéressant d'observer cette figure en relation avec la FIG. 10.2 (droite). Voir le texte pour les commentaires.

À la lumière de ces résultats, nous pouvons mieux nous représenter un fait qui se déduit intuitivement mais se calcule difficilement, à savoir que tant que B_{ext} ne dépasse pas significativement l'ordre de grandeur de B_{self}, il existe toujours une partie du matériau dans laquelle les deux contributions s'annulent et une autre dans laquelle elles s'additionnent. Ceci résulte en un pic dans la distribution de J, près du point où B est nul. Cependant, dès que le point $B = 0$ mT ne se situe plus dans le matériau, $J(x, y)$ tend rapidement s'uniformiser, et c'est le champ externe qui devient dominant. Un exemple de cette situation est illustré à la FIG. 10.14, dans le cas $\gamma = 3$, $\lambda = 1$, $\theta = 20°$ et B_{ext} variant de 0 à 24 mT.

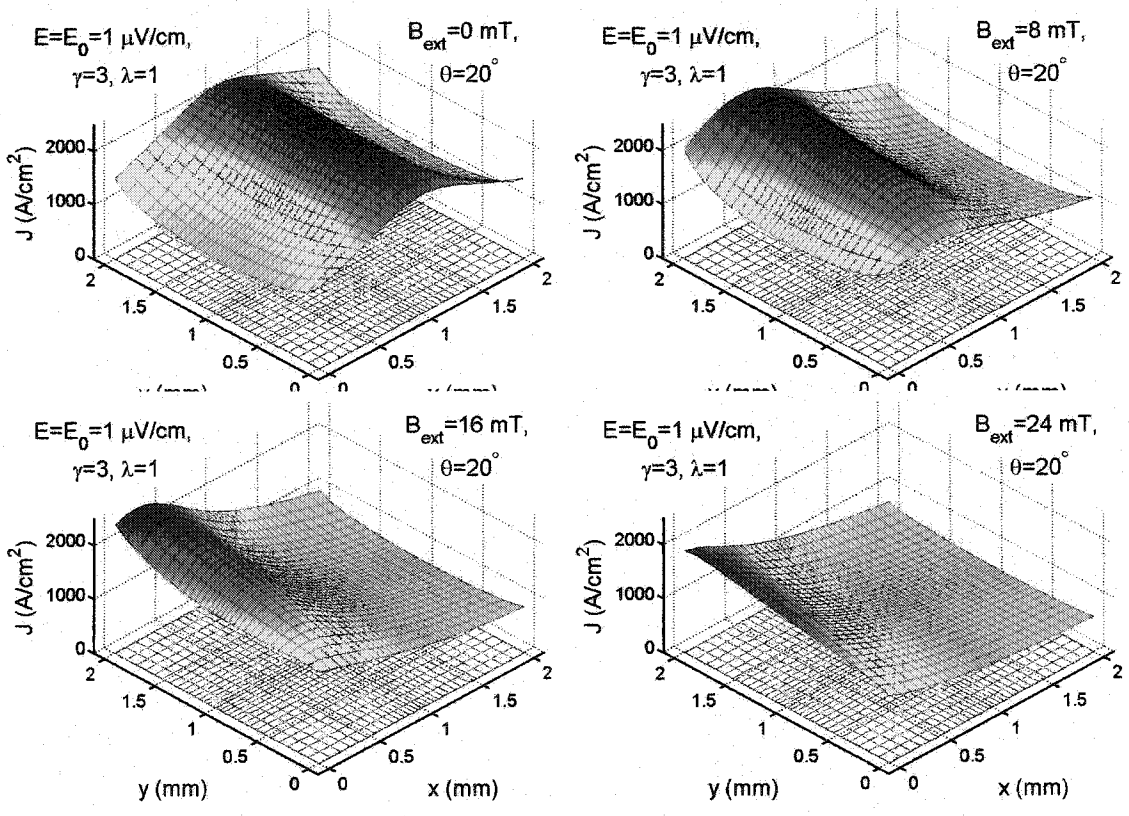


FIG. 10.14 – Graphique de $J(x, y)$ sur la section d'un échantillon dont $S = 4$ mm^2 pour $\gamma = 3$, $\lambda = 1$, $\theta = 20°$ et B_{ext} variant de 0 à 24 mT. Cet exemple représente typiquement le comportement du matériau d'ACL mesuré au chapitre précédent.

Enfin, il est d'intéressant de jeter un coup d'oeil à l'apparente symétrie que l'on observe en $\log(\lambda)$ sur les FIG. 10.1 à 10.3. Il n'y a aucune raison a priori pour que deux échantillons supraconducteurs dont les propriétés sont anisotropes et qui dont $\lambda = 10^{\pm a}$ présentent le même I_c. Lorsque l'on regarde en détail la distribution de J dans chacun des cas, on se rend d'ailleurs bien compte que cette dernière est très différente dans les deux cas. Pour s'en convaincre, nous présentons à la FIG. 10.15 un exemple pour $B_{ext} = 0$ mT, $\gamma = 6$ et $\lambda = 10^{\pm 2}$. On y constate clairement la différence entre les deux $J(x, y)$, ce qui résulte en un $I_c(0)$ légèrement différent dans les deux cas. Néanmoins, compte tenu de la complexité de la caractéristique $E - J$, il demeure assez surprenant que la différence soit aussi minime sur toute la plage de λ et γ observée. Il semble que le facteur dominant ce phénomène soit la réduction de l'amplitude du champ propre avec l'augmentation de $|\log(\gamma)|$. En somme, cette petite simulation nous permet de nous convaincre que la symétrie n'est pas parfaite, même si elle le semble à première vue. Dans la prochaine section, nous jetterons un coup d'oeil à la caractéristique $E - I$ dans le même contexte.

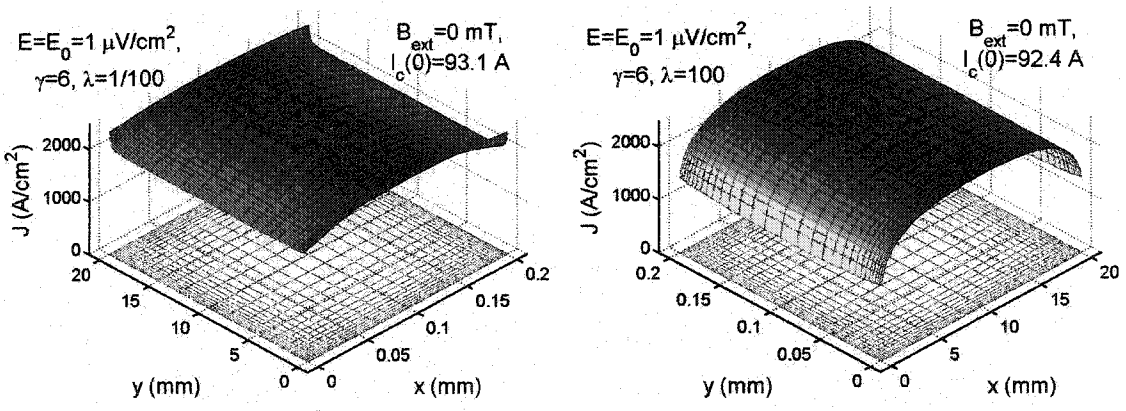


FIG. 10.15 – Graphique de $J(x, y)$ sur la section d'un échantillon dont $S = 4$ mm^2 pour $B_{ext} = 0$, $\gamma = 6$ et $\lambda = 10^{\pm 2}$. Attention! Les échelles en x et y sont différentes, afin d'améliorer la visibilité du graphique. Pour un même critère de champ électrique E_0, on voit que $I_c(0)$ diffère légèrement dans les deux cas.

10.6 Caractéristique $E-I$ vs facteur de forme

Nous terminons cette série de simulations en regardant brièvement l'effet de λ et γ sur la caractéristique $E-I$. Pour ce faire, nous poursuivons avec le même modèle que précédemment (voir section 10.2 pour la description). Nous nous limitons aux cas $\gamma = 1$ et $\gamma = 4$, de même qu'à $\lambda = 1$ et $\lambda = 10^{\pm 3}$. Les résultats de ces simulations sont présentés aux FIG. 10.16 et 10.17.

On y remarque d'une part que les courbes pour $\lambda = 10^{\pm 3}$ (marquées respectivement par $\circ$ et $+$) sont toujours superposées, ce qui suggère que la symétrie observée pour $\lambda = 10^{\pm a}$ est valide sur une bonne plage de E. D'autre part, les écarts que l'on observe entre les courbes $\lambda = 1$ et $\lambda = 10^{\pm 3}$ pour $I > 100$ A et $B_{ext} \geq 20$ mT ne sont pas nécessairement significatifs, car on s'éloigne passablement de la région de validité du modèle en loi de puissance, soit la région près de $E = E_0$, marquée par des pointillés. Le même commentaire est valable pour la courbure prononcée de la courbe dont $B_{ext} = 0$ mT, $\lambda = 1$ et $\gamma = 4$. Maintenant, si on concentre nos observations près de la ligne $E = E_0$ (i.e. près de I_c, tel que définit dans ce chapitre), on voit qu'un écart entre les courbes $E-I$ (pour un même $B_{ext} < B_{self}$) est toujours présent, même dans le cas isotrope, qui présente toutefois l'écart le plus faible.

10.7 Conducteurs empilés

Il est intéressant de remarquer que les résultats des sections précédentes, qui ne concernent qu'un seul conducteur, sont presque directement généralisables au cas de plusieurs conducteurs empilés, tel qu'étudié par Nah et al. [107], ou de façon quelque peu différente par Lehtonen et al. [109] pour un électro-aimant. En effet, lorsque l'on travaille en termes de J, le fait d'empiler plusieurs conducteurs revient à considérer un seul gros conducteur dont le facteur de forme est donnée par le ratio

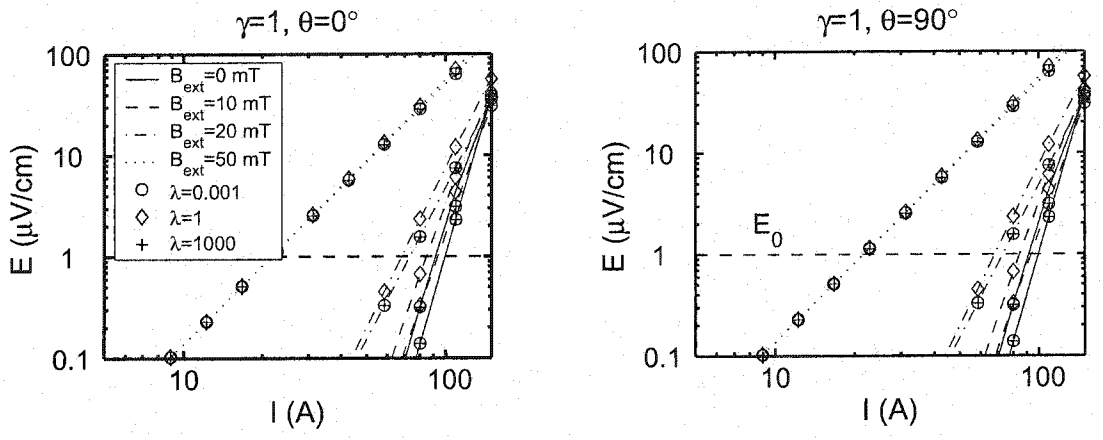


FIG. 10.16 – Caractéristique $E-I$ pour $\gamma = 1$ (cas isotrope) et différents B_{ext} et λ. *Gauche*: B_{ext} parallèle l'axe x ($\theta = 0°$). *Droite*: B_{ext} parallèle l'axe y ($\theta = 90°$). La même légende s'applique aux deux graphiques. La ligne horizontale en pointillés correspond à $E = E_0 = 1$ μV/cm. Les deux graphiques sont identiques puisqu'il s'agit du cas isotrope. Néanmoins, on observe une caractéristique $E - I$ différente pour les cas $\lambda = 1$ et $\lambda = 10^{\pm 3}$ à faible champ externe.

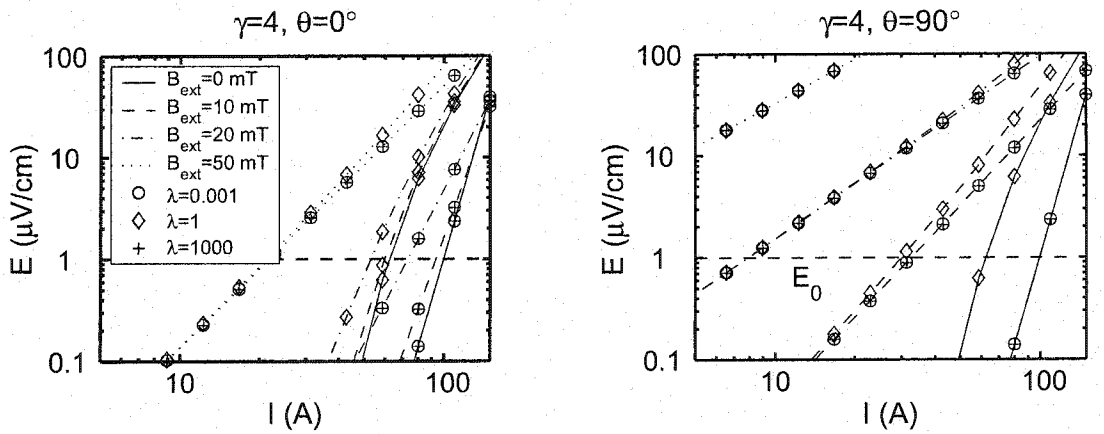


FIG. 10.17 – Caractéristique $E - I$ pour $\gamma = 4$ (cas anisotrope) et différents B_{ext} et λ. *Gauche*: B_{ext} parallèle l'axe x ($\theta = 0°$). *Droite*: B_{ext} parallèle l'axe y ($\theta = 90°$). La même légende s'applique aux deux graphiques. La ligne horizontale en pointillés correspond à $E = E_0 = 1$ μV/cm. La séparation (due à λ) des caractéristiques $E-I$ à faible champ externe est significativement amplifiée par rapport au cas isotrope ci-haut.

de la hauteur sur la largeur de l'empilement. Comme le même courant circule dans chaque conducteur, on peut considérer J comme étant uniforme ($= I/S$), calculer le champ propre $B_{self}(x, y)$ de l'empilement, et trouver le E résultant en sommant les E locaux de chacun des conducteurs. Dans cette optique, il est souvent adéquat d'utiliser les paramètres macroscopiques, car le champ généré par l'empilement est souvent de plusieurs ordres de grandeur supérieur au champ propre d'un seul conducteur. C'est l'approche la plus couramment rencontrée dans la littérature.

10.8 Conclusion

L'étude de la dépendance en champ de la résistivité présentée dans ce chapitre a une importance capitale, car J_c diminue rapidement avec B, et l'anisotropie de la dépendance rend cette variation difficile à prévoir intuitivement. Il est fondamental de bien en comprendre les implications lorsque la forme des conducteurs doit être variée pour des fins d'optimisation. Le cas des conducteurs rectangulaires, que l'on a traité en détails pour une grande plage de facteurs de formes λ, nous a permis de nous faire une idée générale de ces implications. Nous les résumons ci-après.

Premièrement, si l'on s'intéresse uniquement à transporter du courant, un conducteur plat est meilleur qu'un conducteur carré. Le conducteur carré constitue en fait la plus mauvaise utilisation du matériau que l'on puisse faire d'un conducteur individuel. Cependant, pour des conducteurs empilés, comme dans un électro-aimant, tout dépend de la forme globale de l'empilement. Il faut de plus s'organiser pour que le champ généré par l'empilement soit le plus possible parallèle au plan $a - b$ du matériau constituant les conducteurs.

Deuxièmement, pour une meilleure caractérisation locale expérimentale, il faut soit de très petits échantillons, soit des échantillons très plats, ce qui a pour effet dans les deux cas de réduire les effets dus au champ propre. Malheureusement, il n'est pas facile de varier à volonté la grosseur des échantillons, et de plus, lorsque

ceux-ci sont trop petits, il sont souvent fragiles et difficiles à manipuler. D'autre part, les échantillons plats ($\lambda \geq 10^2$) sont obtenus à la suite d'une série de procédés mécaniques et de traitement thermiques, ce qui leur confère des propriétés souvent très différentes des matériaux de type massif ($\lambda \leq 10^1$), d'où on ne peut faire de comparaison valable entre les modèles mésoscopiques obtenus. Les approches expérimentales visant à compenser le champ propre demeurent donc toujours pertinentes, surtout lorsque J_{c_0} et/ou S sont grands.

Enfin, les résultats présentés dans ce chapitre permettent d'avoir une idée de l'ordre de grandeur de la correction à apporter à J_{c_0}, lorsque ce dernier est déterminé à partir de $I_c(0)$, afin de bâtir un modèle local, mais il faut pour cela être en mesure de déterminer γ. Une façon de le faire est de regarder les courbes $I_c(B_{ext})/I_c(0)$ (avec l'axe B_{ext} sur une échelle log), pour $\theta = 0°$ et $90°$, et de calculer le ratio des valeurs de B_{ext} correspondant à la fin des deux plateaux. La correction à apporter à J_{c_0} peut varier grandement selon la valeur de γ, typiquement d'un facteur 1 à 3, tel que le démontre la FIG. 10.1.

Bien sûr, la forme détaillée des courbes obtenues ici par calcul dépend du modèle de matériau utilisé, mais il est plausible que les résultats nous donnent avec une bonne fiabilité les grandes lignes du comportement général. Pour cette raison, il ne nous a pas semblé nécessaire de refaire les mêmes simulations avec un autre modèle à ce stade-ci, car tous les modèles se ressemblent autour de I_c.

Cependant, il serait d'intérêt de refaire le même type d'étude à partir de modèles basés sur des distributions de J_c, dès qu'une étude suffisamment détaillée sur $\rho_{ff}(J, B, \theta)$ aura été effectuée. Les résultats macroscopiques devraient être similaires, car le modèle en loi de puissance est bon autour de I_c. Cependant, la distribution détaillée du courant pourrait possiblement être assez différente, en particulier lorsque $B \to 0$, car alors ρ_{ff} tend aussi vers 0. Ceci cause une nette ambiguïté dans cette région du modèle, ambiguïté qui devra éventuellement être levée.

Quatrième partie

Discussion générale et conclusion

CHAPITRE 11

DISCUSSION GÉNÉRALE

11.1 Synthèse des résultats et des hypothèses

Les travaux effectués dans le cadre de cette thèse ont apporté divers outils nouveaux pour l'étude des matériaux supraconducteurs à HT_c ainsi que de leurs applications. Du côté calcul numérique, une méthode permettant de calculer rapidement et efficacement la distribution du courant cc (i.e. après toute transitoire ou effet de relaxation) a été développée. Celle-ci s'applique à des conducteurs discrétisés en éléments rectangulaires, sur lesquels la densité de courant varie de façon bilinéaire, dont la perméabilité magnétique est égale à celle du vide (i.e. $\mu = \mu_0$), et dont la résistivité dépend de la densité de courant, du champ magnétique et de la position, comme c'est le cas pour les matériaux supraconducteurs à HT_c. De plus, la formulation d'un algorithme ca basé sur la même approche a permis de valider l'aptitude du logiciel *MagNet*® (un logiciel commercial de simulation numérique pour les problèmes électromagnétiques) à traiter ce type de problèmes, bien que la durée des simulations soit démesurément longue à l'heure actuelle. Néanmoins, il semble que, pour la première fois, la porte soit ouverte à la simulation de problèmes 3D (cc ou ca), dont la résistivité peut présenter les dépendances énumérées ci-haut, en plus d'être anisotrope.

Comme la simulation numérique de problèmes électromagnétiques implique la résolution des équations de Maxwell, qui utilisent des propriétés locales de matériaux, le point central de cette thèse était d'obtenir des modèles locaux de la résistivité. C'est ce qui a justifié le développement d'une méthode de caractérisation locale de la résistivité (donc de la caractéristique $E - J$) des matériaux à HT_c, basée sur l'algorithme rapide de calcul de la distribution de courant cc mentionné

ci-haut. Rappelons toutefois les deux principales hypothèses sous-jacentes à cette méthode, soit que l'on considère les propriétés locales du matériau comme étant homogènes, et que les propriétés ainsi extraites ne sont pas des propriétés locales, dans le sens d'une moyenne sur un volume caractéristique, mais plutôt des propriétés locales *effectives*, qui englobent un ensemble d'interactions complexes dues à la nature généralement granulaire des matériaux à HT_c. Cette simplification est fondamentale dans une approche de modélisation qui vise éventuellement le développement et/ou l'optimisation d'applications en électrotechnique. Notons que le désir de connaître les propriétés locales des matériaux nous conduit naturellement à nous intéresser aux régimes à faibles champs externes, i.e. lorsque le champ propre affecte significativement la distribution du courant sur la section d'un échantillon, et c'est pourquoi un chapitre entier a été consacré à ce sujet.

Rappelons que cette thèse ne se voulait pas un ouvrage où les mesures étaient prépondérantes, mais plutôt une contribution aux outils mathématiques actuellement manquant pour pouvoir étudier les supraconducteurs par simulation numérique de façon fiable. C'est pourquoi les efforts ont surtout été déployés pour développer un formalisme mathématique appuyé sur des bases physiques, permettant de modéliser la caractéristique $E - J$, ainsi que sa dépendance anisotrope en champ magnétique, de façon compacte à l'aide d'expressions analytiques. Ainsi, plusieurs formes analytiques nouvelles ont été empiriquement suggérées pour les modèles basés sur une distribution statistique de la densité de courant critique. Toutes reposent cependant sur l'hypothèse que le modèle de fluage linéaire est valide. Ces expressions analytiques permettent d'intégrer facilement les modèles dans des algorithmes de calcul numérique.

11.2 Suggestions pour travaux futurs

Ces travaux ouvrent bien sûr la porte à beaucoup d'autres avenues. D'abord, du côté calcul numérique, il serait primordial d'optimiser le temps de calcul requis par *MagNet*® pour effectuer des simulations. De plus, il serait pertinent d'étendre la méthode de calcul de la distribution du courant en 2D développée dans cette thèse à des éléments triangulaires, ce qui est assez facile en soi, et de coupler cette dernière à un algorithme d'adaptation du maillage, afin de pouvoir positionner les points où le champ est nul toujours sur un noeud du maillage. Ceci améliorerait grandement la précision des résultats.

D'autre part, bien que l'on a partiellement démontré que l'on pouvait améliorer le modèle macroscopique pour en faire un modèle local (mésoscopique), donc séparer les effets intrinsèques et géométriques, il reste encore beaucoup de validation expérimentale à faire, à la fois en caractérisation, afin de déterminer de meilleurs modèles locaux, et en mesures de validation diverses. En particulier, au niveau de la caractérisation, il serait primordial de caractériser la résistivité de fluage (ρ_{ff}) en terme de la densité de courant, du champ et de la température, sur une grande plage d'opération, ce qui nécessiterait d'abord la conception d'un banc de mesure $V-I$ à fort courant pulsé, pour éviter la dissipation excessive. Ainsi, il serait possible de mesurer ρ_{ff} sur une bien plus grande plage d'opération que celle considérée dans cet ouvrage. La campagne de mesures qui s'ensuivrait pourrait facilement constituer une thèse en soi. Ce n'est qu'après une campagne de mesures de cette envergure que l'on pourrait conclure avec une bonne assurance si le modèle local mésoscopique, tel que défini dans cet ouvrage, se révèle valide sur une plage d'opération étendue.

C'est donc somme toute un défi de caractérisation qui nous attend, essentiel à maîtriser avant d'en arriver à optimiser par simulation numérique des applications utilisant des matériaux supraconducteurs à HT_c, e.g. en changeant la disposition géométrique ou les dimensions de ce dernier. Il va sans dire que des progrès impor-

tants devront être accomplis en parallèle au niveau de la mise en forme des matériaux, afin que les changements virtuels effectués dans les logiciels soit réalisables en pratique! De plus, la reproductibilité des matériaux devra aussi être améliorée et stabilisée, si l'on veut en arriver à bâtir des librairies fiables de modèles numériques de matériaux supraconducteurs à HT_c.

CONCLUSION

De façon générale, les deux objectifs de cette thèse ont été atteints. Ces derniers étaient de développer des modèles empiriques flexibles de la caractéristique $E - J$ (résistivité) des supraconducteurs à haute température critique, et d'intégrer ces modèles dans des logiciels de calcul numérique. Les modèles sont tous de forme analytique, ce qui en facilite l'intégration dans les logiciels. La validité des résultats obtenus à l'aide de ces derniers a été minutieusement vérifiée. Quelques mesures ont également été effectuées, afin de pouvoir évaluer le réalisme des modèles et l'efficacité d'une méthode originale de caractérisation des paramètres locaux de la résistivité, en particulier la dépendance anisotrope de la résistivité avec le champ magnétique.

Cependant, il reste un travail considérable à accomplir afin de rendre ces travaux accessibles aux ingénieurs d'application. La plage de mesure accessible de la caractéristique $E - J$ est encore trop restreinte, les algorithmes de calculs sont trop lents et la reproductibilité des matériaux est difficile à réaliser à faible coût. Tout cela a pour effet de réduire la fiabilité des prédictions basées sur des simulations. Néanmoins, c'est une voie qui continuera inévitablement d'être explorée dans le futur. Cette thèse, espérons-le, aura permis d'effectuer un petit bout de chemin dans cette direction.

RÉFÉRENCES

[1] E. H. Rhoderick and A. C. Rose-Innes, *Introduction to Superconductivity*, London: Pergamon, 1969, 228 p.

[2] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, McGraw-Hill, 1996, 454 p.

[3] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley & Sons, 1996, 673 p.

[4] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, "Theory of superconductivity", *Phys. Rev.*, vol. 108, no. 5, 1957, pp. 1175–1204.

[5] A. A. Abrikosov, "On the magnetic properties of superconductors of the second group", *Soviet Physics JETP*, vol. 5, no. 6, 1957, pp. 1174–1181.

[6] W. H. Kleiner, L. M. Roth, and S. H. Autler, "Bulk solution of Ginzburg-Landau equations for type II superconductors: upper critical field region", *Phys. Rev.*, vol. 133, no. 5A, 1964, p. A1226–A1227.

[7] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov, "Vortex motion in superconductors", in: *Nonequilibrium Superconductivity, ed. D. N. Langenberg and A. I. Larkin*, vol. 12, North-Holland, Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1986, pp. 493–542.

[8] J. E. Evetts, "Resistive transition and flux flow in superconducting materials", in: *Concise Encyclopedia of Magnetic and Superconducting Materials, ed. J. E. Evetts*, Pergamon, 1992, pp. 478–485.

[9] J. G. Bednorz and K. A. Muller, "Possible high Tc superconductivity in the Ba-La-Cu-O system", *Z. Phys. B*, vol. 64, 1986, pp. 189–193.

[10] J. Nagamatsu, N. Nakagawa, T. Muranaka, Y. Zenitani, and J. Akimitsu, "Superconductivity at 39 K in magnesium diboride", *Nature*, vol. 410, 2001, pp. 63–64.

[11] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov, "Pinning in type II superconductors", *Journal of Low Temperature Physics*, vol. 34, no. 3–4, 1979, pp. 409–428.

[12] G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, "Vortices in high-temperature superconductors", *Rev. Mod. Phys.*, vol. 66, no. 4, 1994, pp. 1125–1388.

[13] M. P. A. Fisher, "Vortex-glass superconductivity: a possible new phase in bulk high-Tc oxides", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 62, no. 12, 1989, pp. 1415–1418.

[14] T. K. Worthington, M. P. A. Fisher, D. A. Huse, J. Toner, A. D. Marwick, T. Zabel, C. A. Feild, and F. Holtzberg, "Observation of separate vortex-melting and vortex-glass transitions in defect-enhanced YBa2Cu3O7 single crystals", *Phys. Rev. B*, vol. 46, no. 18, 1992, pp. 11854–11861.

[15] T. Matsushita, A. Matsuda, and K. Yanagi, "Irreversibility line and flux pinning properties in high-temperature superconductors", *Physica C*, vol. 213, 1993, pp. 477–482.

[16] P. Gammel, "Condensed-matter physics: why vortices matter", *Nature*, vol. 411, 2001, pp. 434–435.

[17] C. J. G. Plummer and J. E. Evetts, "Dependence of the shape of the resistive transition on composite inhomogeneity in multifilamentary wires", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 23, no. 2, 1987, pp. 1179–1182.

[18] J. Baixeras and G. Fournet, "Pertes par déplacement de vortex dans un supraconducteur de type II non idéal", *J. Phys. Chem. Solids*, vol. 28, 1967, pp. 1541–1547.

[19] H. S. Edelman and D. C. Larbalestier, "Resistive transitions and the origin of the n value in superconductors with a Gaussian critical-current distribution", *J. Appl. Phys.*, vol. 74, no. 5, 1993, pp. 3312–3315.

[20] J. Paasi and A. Korpela, "Influence of microcracks and anisotropic conductivity on critical current and exponent n in silver-sheathed HTS tapes", *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 9, no. 2, 1999, pp. 2215–2218.

[21] D. C. Larbalestier, X. Y. Cai, Y. Feng, H. Edelman, A. Umezawa, G. N. Riley Jr., and W. L. Carter, "Position-sensitive measurements of the local critical current density in Ag sheathed high-temperature superconductor (Bi,Pb)2Sr2Ca2Cu3Oy tapes", *Physica C*, vol. 221, 1994, pp. 299–303.

[22] A. D. Caplin, L. F. Cohen, M. N. Cuthbert, M. Dhalle, D. Lacey, G. K. Perkins, and J. V. Thomas, "Critical currents in conductors - exploring the limiting mechanisms", *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 5, no. 2, 1995, pp. 1864–1869.

[23] N. Adamopoulos and J. E. Evetts, "A model for the V-I characteristics in brick-wall-like structures", *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 3, no. 1, 1993, pp. 1257–1260.

[24] F. Sirois, D. R. Watson, W. Zhu, and J. R. Cave, "Development of a numerical method to determine the local E-J characteristics of anisotropic HTS from experimental V-I curves", in: *Advances in Cryogenic Engineering (Materials)*, vol. 48, New-York: American Institute of Physics, 2002, p. 1118-1125.

[25] K. Yamafuji and T. Kiss, "A new interpretation of the glass-liquid transition of pinned fluxoids in high-Tc superconductors", *Physica C*, vol. 258, 1996, pp. 197–212.

[26] J. E. Evetts, M. J. Hogg, B. A. Glowacki, N. A. Rutter, and V. N. Tsaneva, "Current percolation and the V-I transition in YBa2Cu3O7 bicrystals and granular coated conductors", *Supercond. Sci. Technol.*, vol. 12, 1999, pp. 1050–1053.

[27] T. Kiss, T. Nakamura, K. Hasegawa, M. Inoue, H. Okamoto, K. Funaki, M. Takeo, K. Yamafuji, and F. Irie,"Nonlinear resistance in high Tc supercon-

ductors as a function of bias current density, temperature and magnetic field", *Proceedings of the 17th International Cryogenic Engineering Conference, Edited by D. Dew-Hugues, R.G. Scurlock and J. H. P. Watson* (Bournemouth, UK, 14-17 July 1998), Bristol: Institute of Physics Publishing, 1998, pp. 427–430.

[28] P. W. Anderson, "Theory of flux creep in hard superconductors", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 9, no. 7, 1962, pp. 309–311.

[29] P. H. Kes, J. Aarts, J. van den Berg, C. J. van der Beek, and J. A. Mydosh, "Thermally assisted flux flow at small driving forces", *Supercond. Sci. Technol.*, vol. 1, 1989, pp. 242–248.

[30] K. Yamafuji and T. Kiss, "Current-voltage characteristics near the glass-liquid transition in high-Tc superconductors", *Physica C*, vol. 290, 1997, pp. 9–22.

[31] M. N. Kunchur, "Novel transport behavior found in the dissipative regime of superconductors", *Mod. Phys. Lett. B*, vol. 9, no. 7, 1995, pp. 399–426.

[32] N. L. Wang, K. Q. Ruan, L. M. Yang, C. Y. Wang, L. Z. Cao, and Z. J. Chen, "Nonlinear temperature dependence of resistivity in Bi2Sr2CuOy crystals", *Phys. Rev. B*, vol. 48, no. 18, 1993, pp. 14005–14008.

[33] J. H. Cho, M. P. Maley, J. O. Willis, J. Y. Coulter, L. N. Bulaevskii, P. Haldar, and L. R. Motowildo, "Determination of the superconducting current path in Bi2223/Ag tapes", *Appl. Phys. Lett.*, vol. 62, no. 22, 1994, pp. 3030–3032.

[34] M. A. Megahed and S. M. El-Ghazaly, "Analysis of anisotropic conductors on anisotropic substrates", *IEEE MTT-S Digest*, 1995, pp. 353–356.

[35] J. R. Cave, *Complex flux configurations in a type II superconductor*, Ph. D. thesis: University of Cambridge (U. K.), 1978, 198 p.

[36] A. M. Campbell and J. E. Evetts, *Critical Currents in Superconductors*, London: Taylor & Francis, 1972, 243 p.

[37] J. R. Clem, "Transport currents and force-free current flow", in: *Concise Encyclopedia of Magnetic and Superconducting Materials, ed. J. E. Evetts*, Pergamon, 1992, pp. 478–485.

[38] H. D. Ramsbottom, D. W. A. Willen, R. Nadi, W. Zhu, A. Paquette, and J. R. Cave,"Study of V-I curves and transport current for Ag sheathed Bi-2223 tapes", *2nd Canadian Workshop on Applied Superconductivity* (Ottawa, August 1996).

[39] J. O. Willis, T. G. Holesinger, J. Y. Coulter, and M. P. Maley, "Magnetic field orientation dependence of Jc in Bi-2212 round wires", *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 7, no. 2, 1997, pp. 2022–2025.

[40] G. E. Marsh and A. M. Wolsky, "DC behavior of ceramic superconductors: the E vs. J curve", in: *AC losses in high-temperature superconductors and the importance of these losses to the future use of HTS in the power sector*, report done for the International Energy Agency, May 2000, pp. 18–25 in Section II.

[41] C. Ngo and H. Ngo, *Physique statistique*, Paris: Masson, 1995, 358 p.

[42] D. S. Fisher, M. P. A. Fisher, and D. A. Huse, "Thermal fluctuations, quenched disorder, phase transitions, and transport in type-II superconductors", *Phys. Rev. B*, vol. 43, no. 1, 1991, pp. 130–159.

[43] H. Okamoto, F. Irie, T. Kiss, M. Inoue, and M. Kanazawa, "Pinning characteristics of Bi-2223 and Bi-2212 wires with consideration of Jc distribution", *Supercond. Sci. Technol.*, vol. 12, 1999, pp. 1102–1105.

[44] J. Rhyner, "Magnetic properties and AC-losses of superconductors with power law current-voltage characteristics", *Physica C*, vol. 212, 1993, pp. 292–300.

[45] C. P. Bean, "Magnetization of hard superconductors", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 8, no. 6, 1962, pp. 250–253.

[46] C. P. Bean, "Magnetization of high-field superconductors", *Rev. Mod. Phys.*, vol. 36, 1964, pp. 31–39.

[47] F. Irie, Y. Tsujioka, and T. Chiba, "Characteristics of critical current distributions for oxide superconductors estimated from V-I characteristics using Weibull function", *Supercond. Sci. Technol.*, vol. 5, 1992, p. S379–S382.

[48] W. H. Warnes and D. C. Larbalestier, "Determination of the average critical current from measurements of the extended resistive transition", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 23, no. 2, 1987, pp. 1183–1187.

[49] A. de Santis, G. Grimaldi, U. Gambardella, S. Pace, V. Boffa, G. Celentano, F. Fabbri, V. Galluzzi, L. Muzzi, and T. Petrisor, "Voltage current analysis in YBa2Cu3O7-d/CeO2/NiO/Ni89V11 structure", *Physica C*, vol. 354, 2001, pp. 223–226.

[50] Y. B. Kim, C. F. Hempstead, and A. R. Strnad, "Magnetization and critical supercurrents", *Phys. Rev.*, vol. 129, no. 2, 1963, pp. 528–535.

[51] E. W. Urban, "Flux flow and a new critical-current formula", *J. Appl. Phys.*, vol. 42, no. 1, 1971, pp. 115–128.

[52] K.-H. Muller, D. N. Matthews, and R. Driver, "Critical current density of ceramic high-temperature superconductor in a low magnetic field", *Physica C*, vol. 191, 1992, pp. 339–346.

[53] D. C. van der Laan, H. N. J. van Eck, B. ten Haken, J. Schwartz, and H. H. J. ten Kate, "Temperature and magnetic field dependence of the critical current of Bi2Sr2Ca2Cu3Ox tape conductors", *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 11, no. 1, 2001, pp. 3345–3348.

[54] W. A. Fietz, M. R. Beasley, J. Silcox, and W. W. Webb, "Magnetization of superconducting Nb-25%Zr wire", *Phys. Rev.*, vol. 136, no. 2A, 1964, p. A335–A345.

[55] J. Horvat, S. X. Dou, H. K. Liu, and R. Bhasale,"Critical currents at elevated fields in Ag/BSCCO tapes", *Proceedings of the 8th International Workshop on Critical Currents in Superconductors* (Kitakyushu, Japan, 27-29 May, 1996), World Scientific Publishing Co., 1996, pp. 447–450.

[56] S.-I. Kobayashi, T. Kaneko, T. Kato, K. Hayashi, and K. Sato,"Limits to the magnetic field dependencies of transport critical currents for silver-sheathed bi-2223 superconducting tape", *Proceedings of the 8th International Workshop on Critical Currents in Superconductors* (Kitakyushu, Japan, 27-29 May, 1996), World Scientific Publishing Co., 1996, pp. 471–474.

[57] W. E. Lawrence and S. Doniach,"Theory of layer structure superconductors", *Proceedings of the 12th International Conference on Low Temperature Physics* (Kyoto, 1970), Tokyo: Keigaku, 1971, pp. 361–362.

[58] M. Tinkham, "Effect of fluxoid quantization on transitions of superconducting films", *Phys. Rev.*, vol. 129, no. 6, 1963, pp. 2413–2422.

[59] T. Nakamura, S. Tsuchiya, A. Fujio, T. Hoshino, and I. Muta, "Influence of magnetic field and magnetic anisotropy on the quench characteristics of Bi-2223/Ag multifilamentary tapes", *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 11, no. 1, 2001, pp. 3341–3344.

[60] T. Kiss and H. Okamoto, "Anisotropic current transport properties and their scaling in multifilamentary Bi-2223 Ag-sheathed tapes", *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 11, no. 1, 2001, pp. 3900–3903.

[61] N. Amemiya and N. Banno, "FEM analysis of ac losses in multifilamentary HTS tapes with various twist pitch and matrix conductivity", in: *Advances in Cryogenic Engineering (Materials)*, vol. 46, 2000, pp. 631–638.

[62] W. Paul and J. P. Meier, "Inductive measurements of voltage-current characteristics between 10-12 V/cm and 10-2 V/cm in rings of Bi2212 ceramics", *Physica C*, vol. 205, 1993, pp. 240–246.

[63] O. A. Shevchenko, J. J. Rabbers, A. Godeke, B. ten Haken, and H. H. J. ten Kate, "AC loss in a high-temperature superconducting coil", *Physica C*, vol. 310, 1998, pp. 106–110.

[64] Y. B. Kim, C. F. Hempstead, and A. R. Strnad, "Flux-flow resistance in type-II superconductors", *Phys. Rev.*, vol. 139, no. 4A, 1965, p. A1163–A1172.

[65] J. Bardeen and M. J. Stephen, "Theory of the motion of vortices in superconductors", *Phys. Rev. A*, vol. 140, 1965, pp. 1197–1207.

[66] P. P. Silvester and R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge [England]: Cambridge University Press, 1997, 494 p.

[67] O. Axelsson and V. A. Barker, *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*, London: Academic Press Inc., 1984, 434 p.

[68] N. Amemiya, S.-I. Murasawa, N. Banno, and K. Miyamoto, "Numerical modelings of superconducting wires for AC loss calculations", *Physica C*, vol. 310, 1998, pp. 16–29.

[69] J. Paasi and M. Lahtinen, "Computational comparison of AC losses in different kinds of HTS composite conductors", *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 7, no. 2, 1997, pp. 322–325.

[70] J. Paasi, J. Lehtonen, M. Lahtinen, and L. Kettunen, "Computation of AC losses in high-temperature superconductors", *Physica C*, vol. 310, 1998, pp. 62–66.

[71] R. P. Baranowski, *Numerical Modelling of Current Transfer in Nonlinear Anisotropic Conductive Media*, Ph. D. thesis: University of Cambridge, 1999, 143 p.

[72] B. Zeimetz, R. P. Baranowski, and J. E. Evetts, "Finite element calculations of local current distribution in anisotropic superconductors in external and

self magnetic field", *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 11, no. 1, 2001, pp. 3355–3358.

[73] J. P. Webb, "Edge elements and what they can do for you", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 2, 1993, pp. 1460–1465.

[74] J. P. Webb and B. Forghani, "Hierarchal scalar and vector tetrahedra", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 2, 1993, pp. 1495–1498.

[75] J. P. Webb and B. Forghani, "DC current distribution and magnetic fields using the T-Omega edge-element method", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, no. 3, 1995, pp. 1444–1447.

[76] J. P. Webb and B. Forghani, "T-Omega method using hierarchal edge elements", *IEE Proc.-Sci. Meas. Technol.*, vol. 142, no. 2, 1995, pp. 133–141.

[77] C. A. Brebbia, *The Boundary Element Method for Engineers*, New-York: Wiley, 1978, 189 p.

[78] E. H. Brandt, "Superconductors of finite thickness in a perpendicular applied field: strips and slabs", *Phys. Rev. B*, vol. 54, no. 6, 1996, pp. 4246–4264.

[79] T. Yazawa, J.-J. Rabbers, B. ten Haken, H. H. J. ten Kate, and Y. Yamada, "Numerical calculation of current density distributions in high temperature superconducting tapes with finite thickness in self field and external field", *Physica C*, vol. 310, 1998, pp. 36–41.

[80] J. Rhyner, "Calculation of AC losses in HTSC wires with arbitrary current voltage characteristics", *Physica C*, vol. 310, 1998, pp. 42–47.

[81] F. Sirois and J. R. Cave, "Analytical expressions for the flux density and the vector potential due to a bilinear variation of the current density on a 2D rectangular element", *IEEE Trans. Magn.*, soumis pour publication.

[82] W. D. MacMillan, *The Theory of the potential*, New York: Dover Publications, 1958, 469 p.

[83] S. M. Rao, A. W. Glisson, D. R. Wilton, and B. S. Vidula, "A simple numerical solution procedure for statics problems involving arbitrary-shaped surfaces", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 27, no. 5, 1979, pp. 604–607.

[84] E. E. Okon and R. F. Harrington, "The potential integral for a linear source distribution over a triangular domain", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, 1982, pp. 1821–1828.

[85] E. E. Okon, "Potential integrals associated with quadratic distributions in a triangular domain", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, 1985, pp. 197–209.

[86] D. R. Wilton, S. M. Rao, A. W. Glisson, D. H. Schaubert, O. M. Al-Bundak, and C. M. Butler, "Potentials integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 32, no. 3, 1984, pp. 276–281.

[87] L. K. Urankar, "Vector potential and magnetic field of current-carrying circular finite arc segment in analytical form-part V: polygon cross section", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 26, no. 3, 1990, pp. 1171–1180.

[88] S. Pissanetzky and Y. Xiang, "Analytical expressions for the magnetic field of practical coils", *COMPEL*, vol. 9, no. 2, 1990, pp. 117–121.

[89] I. R. Ciric, "Formulas for the magnetic field of polygonal cross section current coils", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, no. 2, 1992, pp. 1064–1067.

[90] J.-C. Suh, "The evaluation of the Biot-Savart integral", *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 37, 2000, pp. 375–395.

[91] F. Sirois and J. R. Cave, "2D calculation of dc current distribution in conductors with non-linear and field dependent resistivity", *IEEE Trans. Magn.*, soumis pour publication.

[92] K. J. Binns and P. J. Lawrenson, *Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems*, Oxford: Pergamon Press, 1973, 324 p.

[93] M. Gyimesi, D. Lavers, T. Pawlak, and D. Ostergaard, "Biot-Savart integration for bars and arcs", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 6, 1993, pp. 2389–2391.

[94] W. H. Beyer, *CRC Standard Mathematical Tables*, Boca Raton (Florida): CRC Press, 1984, 615 p.

[95] N. Nibbio, "Nonlinear conductivity computation using FLUX2D, applied to high temperature supercondutive tapes", *Flux Magazine*, no. 28, December 1998, p. 14.

[96] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, New-York: Academic Press, 1980, 414 p.

[97] Z. Koziol and P. F. de Chatel, "Non-linear diffusion equation and relaxation processes in solids", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, no. 2, 1994, pp. 1169–1171.

[98] A. E. Pashitski, A. E. Pashitski, A. Polyanskii, A. Gurevich, J. A. Parrell, and D. C. Larbalestier, "Magnetic granularity, percolation and preferential current flow in a silver-sheated Bi1.8Pb0.4Sr2Ca2Cu3O8+x tape", *Physica C*, vol. 246, 1995, pp. 133–144.

[99] J. Paasi and M. Lahtinen, "AC losses in high-temperature superconductors: revisiting the fundamentals of the loss modelling", *Physica C*, vol. 310, 1998, pp. 57–61.

[100] D. R. Watson, F. Sirois, W. Zhu, and J. R. Cave, "Modelling of current transfer and self field effects in composite HTS conductors", in: *Advances in Cryogenic Engineering (Materials)*, vol. 46, 2000, pp. 535–542.

[101] T. Coleman, M. A. Branch, and A. Grace, *Optimization Toolbox*, third edition, The Mathworks, Inc., 1999, 305 p.

[102] D. R. Watson, M. Chen, and J. E. Evetts, "The fabrication of composite reaction textured Bi2Sr2CaCu2O8+d superconductors", *Supercond. Sci. Technol.*, vol. 8, no. 5, 1995, pp. 311–316.

[103] L. Gherardi, P. Caracino, G. Coletta, and S. Spreafico, "Critical current versus field behavior in Ag/BSCCO-2223 tapes with different critical currents", *Materials Science and Engineering B*, vol. 39, 1996, pp. 66–70.

[104] S. Spreafico, L. Gherardi, S. Fleshler, D. Tatelbaum, J. Leone, D. Yu, and G. Snitchler, "The effect of self-field on current capacity in Bi-2223 composite strands", *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 9, no. 2, 1999, pp. 2159–2162.

[105] N. Adamopoulos and S. K. Patapis, "Accurate determination of the critical state in anisotropic superconductors from transport measurements", *Phys. Rev. B*, vol. 57, no. 9, 1998, pp. 5055–5058.

[106] L. Gherardi, D. Bettinelli, S. Spreafico, and F. Gomory, "Estimation, of Jc(B) dependence from self-field alternating current (AC) losses measured on Bi-2223/Ag tapes", *Physica C*, vol. 310, 1998, pp. 52–56.

[107] W. Nah, J. Kang, S. Choi, I.-H. Park, J. Joo, Y.-K. Kwon, S.-S. Oh, K.-S. Ryu, J. Paasi, and J. Lehtonen, "Numerical calculation of critical current in Bi-2223 stacked tapes", *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 11, no. 1, 2001, pp. 3908–3911.

[108] M. Daumling, "Spatial distribution of transport current in low and self field in BSCCO tapes", *IEEE Trans. Appl. Superconduct.*, vol. 7, no. 2, 1997, pp. 1335–1338.

[109] J. Lehtonen, J. Paasi, J. Pitel, and P. Kovac, "Magnetization losses in magnets wound from anisotropic HTS tape conductors", *Physica C*, vol. 336, 2000, pp. 261–270.

Annexe I

Expressions mathématiques de $P(J_c)$, $Q(J)$ et $E(J)$ pour différentes distributions statistiques de J_c

Remarque: Les expressions mathématiques développées ci-dessous sont basées sur l'approche présentée à la section 2.4.3, qui permet à J_c de prendre des valeurs négatives, ce qui évite d'avoir à traiter une impulsion de Dirac en $J = 0$. Le résultat est bien sûr strictement équivalent à celui qu'on aurait obtenu en considérant une impulsion de Dirac $Q(0)\delta(J_c)$ dans l'expression de $P(J_c)$. Tous les paramètres qui déterminent $P(J_c)$, $Q(J)$ et $E(J)$ sont indépendant de J, mais peuvent être des fonctions de $\vec{r}$, $\vec{B}$ ou T.

I.1 Distribution normale (Gaussienne)

Paramètres:	Moyenne $\Rightarrow \mu = \langle J_c \rangle$	$(\mu \geq 0)$	(unités de J)
	Écart-type $\Rightarrow \sigma = \left(\langle J_c^2 \rangle - \mu^2 \right)^{1/2}$	$(\sigma \geq 0)$	(unités de J)
	Résistivité de fluage $\Rightarrow \rho_{ff}$	$(\rho_{ff} > 0)$	(unités de E/J)

Équations:

$$P_N(J_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-z^2}, \quad \text{avec } z = z(J_c)\,, \tag{I.1a}$$

$$Q_N(J) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\Big(z(|J|)\Big)\right], \tag{I.1b}$$

$$E_N(J) = \rho_{ff}\,\sigma \cdot \Bigg[\sigma \cdot \Big(P_N(|J|) - P_N(0)\Big) + \sqrt{2}\left(z(|J|)\,Q_N(|J|) - z(0)\,Q_N(0)\right) \Bigg] \cdot \operatorname{sign}(J)\,, \tag{I.1c}$$

où $z(J) = \dfrac{J - \mu}{\sqrt{2}\,\sigma}$ et $\operatorname{erf}(z)$ est la fonction d'erreur bien connue, i.e. $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$.

I.2 Distribution Gamma

Paramètres:			
	$J_{c_{min}}$	$(-\infty < J_{c_{min}} < \infty)$	(unités de J)
	J_0	$(J_0 > 0)$	(unités de J)
	n	$(n > 0)$	(sans unités)
	ρ_{ff}	$(\rho_{ff} > 0)$	(unités de E/J)

Équations:

$$P_G(J_c) = \frac{1}{J_0\Gamma(n)}\, z^{n-1}\, e^{-z}\, u(z)\,, \quad \text{avec } z = z(J_c)\,, \tag{I.2a}$$

$$Q_G(J) = \frac{\gamma\Big(n, z(|J|)\Big)}{\gamma(n)} \cdot u\Big(z(|J|)\Big) = \left[1 - \frac{\Gamma\Big(n, z(|J|)\Big)}{\Gamma(n)}\right] \cdot u\Big(z(|J|)\Big)\,, \tag{I.2b}$$

$$E_G(J) = \rho_{ff} J_0 \cdot \Big[z(|J|) \cdot \Big(Q_G(|J|) + J_0 P_G(|J|)\Big) - z_0 \cdot \Big(Q_G(0) + J_0 P_G(0)\Big) - n \cdot \Big(Q_G(|J|) - Q_G(0)\Big)\Big] \cdot u\Big(z(|J|)\Big) \cdot \mathrm{sign}(J)\,, \tag{I.2c}$$

où $z(J) = \dfrac{J - J_{c_{min}}}{J_0}$, $z_0 = \begin{cases} |J_{c_{min}}|/J_0 & \text{si } J_{c_{min}} < 0\,, \\ 0 & \text{si } J_{c_{min}} \geq 0\,, \end{cases}$ et $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\,, \\ 1 & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$

La moyenne μ et l'écart-type σ de $P_G(J_c)$ sont donnés par

$$\mu = J_0 \cdot n + J_{c_{min}}\,,$$
$$\sigma = J_0 \cdot n^{1/2}\,.$$

Les notations $\gamma(n, z)$ et $\Gamma(n, z)$ sont deux représentations différentes de la fonction *Gamma* incomplète. Elles sont définies ici par

$$\gamma(n, z) = \int_0^z x^{n-1}\, e^{-x}\, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \Gamma(n, z) = \int_z^\infty x^{n-1}\, e^{-x}\, \mathrm{d}x\,,$$

avec $n > 0$ et $z \geq 0$. Dans le cas $z < 0$, même si la fonction *Gamma* est théorique-

ment définie, on évitera bien des difficultés numériques en posant $\gamma(n, z < 0) = 0$ et $\Gamma(n, z < 0) = \Gamma(n)$. Les identités suivantes ont été utilisées dans les calculs pour obtenir les résultats présentés dans cette annexe:

$$\gamma(n+1,z) = n\gamma(n,z) - z^n\, e^{-z} \quad ; \quad \Gamma(n+1,z) = n\Gamma(n,z) + z^n\, e^{-z}\,,$$
$$\gamma(n,z) = \Gamma(n) - \Gamma(n,z) \quad ; \quad \Gamma(n,z) = \gamma(n) - \gamma(n,z)\,,$$

où $\gamma(n)$ et $\Gamma(n)$ représentent la fonction *Gamma* complète, i.e. $\gamma(n) = \Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-x} \mathrm{d}x$. La correspondance avec les fonctions incomplètes est directe, i.e. $\gamma(n) \equiv \gamma(n, \infty)$ et $\Gamma(n) \equiv \Gamma(n, 0)$. À partir des identités, on tire directement les deux relations fort utiles suivantes:

$$\gamma(n+1) = n\gamma(n) = n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$$

et

$$\gamma(n, z_1) - \gamma(n, z_2) = \Gamma(n, z_2) - \Gamma(n, z_1)\,.$$

Remarque: L'ordre des paramètres de la fonction *Gamma* incomplète n'est pas universel. De plus, celle-ci peut être définie de façons relativement différentes selon le logiciel utilisé. Il est important de vérifier ces détails avant d'utiliser telles quelles les équations présentées dans cette annexe. Une bonne façon de faire consiste à tester les identités.

I.3 Distribution de Weibull

Paramètres:			
	$J_{c_{min}}$	$(-\infty < J_{c_{min}} < \infty)$	(unités de J)
	J_0	$(J_0 > 0)$	(unités de J)
	n	$(n > 0)$	(sans unités)
	ρ_{ff}	$(\rho_{ff} > 0)$	(unités de E/J)

Équations:

$$P_W(J_c) = \frac{n}{J_0}\, z^{n-1}\, e^{-z^n}\, u(z)\,, \quad \text{avec } z = z(J_c)\,, \tag{I.3a}$$

$$Q_W(J) = \left[1 - e^{-\left(z(|J|)\right)^n}\right] \cdot u\Big(z(|J|)\Big)\,, \tag{I.3b}$$

$$E_W(J) = \rho_{ff}\frac{J_0}{n} \cdot \left[\Gamma\left(\tfrac{1}{n}, \left(z(|J|)\right)^n\right) - \Gamma\left(\tfrac{1}{n}, z_0^n\right) + n \cdot \Big(z(|J|) - z_0\Big)\right] \cdot u\Big(z(|J|)\Big) \cdot \mathrm{sign}(J)\,, \tag{I.3c}$$

ou encore

$$E_W(J) = \rho_{ff}\frac{J_0}{n} \cdot \left[\gamma\left(\tfrac{1}{n}, z_0^n\right) - \gamma\left(\tfrac{1}{n}, \left(z(|J|)\right)^n\right) + n \cdot \Big(z(|J|) - z_0\Big)\right] \cdot u\Big(z(|J|)\Big) \cdot \mathrm{sign}(J)\,,$$

où $z(J) = \dfrac{J - J_{c_{min}}}{J_0}$, $z_0 = \begin{cases} |J_{c_{min}}|/J_0 & \text{si } J_{c_{min}} < 0\,, \\ 0 & \text{si } J_{c_{min}} \geq 0\,, \end{cases}$ et $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\,, \\ 1 & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$

La moyenne μ et l'écart-type σ de $P_W(J_c)$ sont donnés par

$$\mu = J_0 \cdot \Gamma\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) + J_{c_{min}}\,,$$

$$\sigma = J_0 \cdot \left(\Gamma\left(1 + \tfrac{2}{n}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)\right]^2\right)^{1/2}.$$

Les définitions de $\gamma(n, z)$ et $\Gamma(n, z)$ sont les mêmes qu'à la section précédente.

I.4 Distribution Beta

Paramètres:			
	$J_{c_{min}}$	$(-\infty < J_{c_{min}} \leq J_{c_{max}})$	(unités de J)
	$J_{c_{max}}$	$(J_{c_{min}} \leq J_{c_{max}} < \infty)$	(unités de J)
	n	$(n > 0)$	(sans unités)
	m	$(m > 0)$	(sans unités)
	ρ_{ff}	$(\rho_{ff} > 0)$	(unités de E/J)

Équations:

$$P_B(J_c) = \frac{z^{n-1}\,(1-z)^{m-1}}{J_0\,\mathrm{B}(n,m)}\,u(z)\,u(1-z)\,, \quad \text{avec } z = z(J_c)\,, \tag{I.4a}$$

$$Q_B(J) = \frac{\mathrm{B}\Big(n, m, z(|J|)\Big)}{\mathrm{B}(n,m)} \cdot u\Big(z(|J|)\Big)\,, \tag{I.4b}$$

$$E_B(J) = \rho_{ff}\,J_0 \cdot \Bigg[\bigg(z(|J|) - \frac{n}{n+m}\bigg)Q_B(|J|) - \bigg(z_0 - \frac{n}{n+m}\bigg)Q_B(0) + \frac{J_0}{n+m}\Big(z(|J|)\cdot\Big(1-z(|J|)\Big)P_B(|J|) - z_0\Big(1-z_0\Big)P_B(0)\Big)\Bigg] \cdot u\Big(z(|J|)\Big)\cdot \mathrm{sign}(J)\,, \tag{I.4c}$$

où $J_0 = J_{c_{max}} - J_{c_{min}}$, $z(J) = \dfrac{J - J_{c_{min}}}{J_0}$, $z_0 = \begin{cases} |J_{c_{min}}|/J_0 & \text{si } J_{c_{min}} < 0\,, \\ 0 & \text{si } J_{c_{min}} \geq 0\,, \end{cases}$ et

$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\,, \\ 1 & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$

La moyenne μ et l'écart-type σ de $P_B(J_c)$ sont donnés par

$$\mu = J_0 \cdot \left(\frac{n}{n+m}\right) + J_{c_{min}}\,,$$

$$\sigma = J_0 \cdot \left(\frac{(nm)^{1/2}}{(n+m)(n+m+1)^{1/2}}\right).$$

La notation $\mathrm{B}(n, m, z)$ représente la fonction *Beta* incomplète, définie ici par

$$\mathrm{B}(n, m, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0\,, \\ \int_0^z x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,\mathrm{d}x & \text{si } 0 \leq z \leq 1\,, \\ \mathrm{B}(n, m) & \text{si } z > 1\,. \end{cases}$$

La notation $\mathrm{B}(n, m)$ représente la fonction *Beta* complète, qui correspond au cas $z = 1$, d'où $\mathrm{B}(n, m) \equiv \mathrm{B}(n, m, 1)$. De plus, les identités suivantes ont été utilisées dans les présents calculs:

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(n, m, z) &= \mathrm{B}(n+1, m, z) + \mathrm{B}(n, m+1, z)\,, \\ \mathrm{B}(n+1, m, z) &= \frac{n\,\mathrm{B}(n, m+1, z) - z^n(1-z)^m}{m}\,, \\ \mathrm{B}(n, m+1, z) &= \frac{m\,\mathrm{B}(n+1, m, z) + z^n(1-z)^m}{n}\,. \end{aligned}$$

Elles nous permettent de déduire la relation suivante:

$$\mathrm{B}(n+1, m, z) = \frac{n\,\mathrm{B}(n, m, z) - z^n(1-z)^m}{n+m}\,,$$

très utile pour arriver à la forme finale de $E_B(J)$, i.e. (I.4c).

Remarque: L'ordre des paramètres de la fonction *Beta* incomplète n'est pas universel. De plus, celle-ci peut être définie de façons relativement différentes selon le logiciel utilisé. Il est important de vérifier ces détails avant d'utiliser telles quelles les équations présentées dans cette annexe. Une bonne façon de faire consiste à tester les identités.

Annexe II

Fonctions de base pour des éléments rectangulaires bilinéaires

II.1 Notations

$$u_- = a_k(u-1) \qquad \text{(II.1)}$$

$$u_+ = a_k(u+1) \qquad \text{(II.2)}$$

$$v_- = b_k(v-1) \qquad \text{(II.3)}$$

$$v_+ = b_k(v+1) \qquad \text{(II.4)}$$

$$L_1 = \log\left(u_-^2 + v_-^2\right)^* \qquad \text{(II.5)}$$

$$L_2 = \log\left(u_+^2 + v_-^2\right)^* \qquad \text{(II.6)}$$

$$L_3 = \log\left(u_+^2 + v_+^2\right)^* \qquad \text{(II.7)}$$

$$L_4 = \log\left(u_-^2 + v_+^2\right)^* \qquad \text{(II.8)}$$

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{u_+}{v_-}\right) - \arctan\left(\frac{u_-}{v_-}\right)^{**} \qquad \text{(II.9)}$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{u_-}{v_+}\right) - \arctan\left(\frac{u_+}{v_+}\right)^{**} \qquad \text{(II.10)}$$

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{v_+}{u_-}\right) - \arctan\left(\frac{v_-}{u_-}\right)^{**} \qquad \text{(II.11)}$$

$$\theta_4 = \arctan\left(\frac{v_-}{u_+}\right) - \arctan\left(\frac{v_+}{u_+}\right)^{**} \qquad \text{(II.12)}$$

**Remarque 1* – La valeur de L_i diverge lorsque l'argument du logarithme tend vers 0. Cependant, dans toutes les équations ci-haut, on peut vérifier que les coefficients des logarithmes qui ont un argument nul sont nuls eux aussi. Par conséquent, la limite du produit tend vers 0. Afin d'éviter des problèmes numériques, on peut en toute sécurité poser $L_i = 0$ à chaque fois que l'argument d'un logarithme est nul.

***Remarque 2* – Lorsque le dénominateur d'une arctangente est nul, le résultat doit être $\pm\pi/2$. Cependant, un procédé numérique pourrait produire une erreur de division par zéro. Encore un fois, on remarque que dans toutes les équations ci-haut, le terme de dénominateur nul se retrouve aussi comme coefficient du terme θ_i correspondant. Par conséquent, le produit global est nul, et il n'est pas requis d'évaluer θ_i explicitement. On peut simplement poser $\theta_i = 0$ afin d'être certain que sa valeur ne soit pas indéterminée.

II.2 Fonctions de base pour le potentiel vecteur (A_c^k)

$$\alpha_1^k(u,v) = 12a_kb_k + \Big[v_-^2\theta_1 + v_+^2\theta_2\Big] + \Big[u_-^2\theta_3 + u_+^2\theta_4\Big] - \Big[u_-v_-L_1 - u_+v_-L_2 + u_+v_+L_3 - u_-v_+L_4\Big] \quad \text{(II.13)}$$

$$\alpha_2^k(u,v) = u\Big[\frac{8}{3}a_kb_k + v_-^2\theta_1 + v_+^2\theta_2\Big] + \frac{1}{3}\Big[u_-^2(u+2)\theta_3 + u_+^2(u-2)\theta_4\Big] + \frac{1}{6a_k}\Big[v_+\big(v_+^2 - 3u_+u_-\big)(L_3 - L_4) + v_-\big(v_-^2 - 3u_+u_-\big)(L_1 - L_2)\Big] \quad \text{(II.14)}$$

$$\alpha_3^k(u,v) = v\Big[\frac{8}{3}a_kb_k + u_-^2\theta_3 + u_+^2\theta_4\Big] + \frac{1}{3}\Big[v_-^2(v+2)\theta_1 + v_+^2(v-2)\theta_2\Big] + \frac{1}{6b_k}\Big[u_+\big(u_+^2 - 3v_+v_-\big)(L_3 - L_2) + u_-\big(u_-^2 - 3v_+v_-\big)(L_1 - L_4)\Big] \quad \text{(II.15)}$$

$$\alpha_4^k(u,v) = -uv\Big[\frac{2}{3}a_kb_k\Big] + \frac{u}{3}\Big[v_-^2(v+2)\theta_1 + v_+^2(v-2)\theta_2\Big] + \frac{v}{3}\Big[u_-^2(u+2)\theta_3 + u_+^2(u-2)\theta_4\Big] + \frac{1}{24a_k}\Big[v_+^3(v-3)(L_3 - L_4) + v_-^3(v+3)(L_1 - L_2)\Big] + \frac{1}{24b_k}\Big[u_+^3(u-3)(L_3 - L_2) + u_-^3(u+3)(L_1 - L_4)\Big] - \frac{1}{4a_kb_k}\Big[u_+u_-v_+v_-(L_1 - L_2 + L_3 - L_4)\Big] \quad \text{(II.16)}$$

II.3 Fonctions de base pour la composante x de la densité de flux ($B^k_{x_c}$)

$$\beta^k_{x_1}(u,v) = 2\Big[v_-\theta_1 + v_+\theta_2\Big] - \Big[u_+(L_3 - L_2) + u_-(L_1 - L_4)\Big] \tag{II.17}$$

$$\begin{aligned}\beta^k_{x_2}(u,v) = {} & 2u\Big[v_-\theta_1 + v_+\theta_2\Big] \\ & + \frac{1}{2a_k}\Big[\big(v_+^2 - u_+u_-\big)(L_3 - L_4) + \big(v_-^2 - u_+u_-\big)(L_1 - L_2)\Big]\end{aligned} \tag{II.18}$$

$$\begin{aligned}\beta^k_{x_3}(u,v) = {} & 4a_k + \frac{1}{b_k}\Big[v_+v_-(\theta_1 + \theta_2) + u_-^2\theta_3 + u_+^2\theta_4\Big] \\ & - v\Big[u_+(L_3 - L_2) + u_-(L_1 - L_4)\Big]\end{aligned} \tag{II.19}$$

$$\begin{aligned}\beta^k_{x_4}(u,v) = {} & -u\Big[\frac{4}{3}a_k\Big] + \frac{1}{3b_k}\Big[3uv_+v_-(\theta_1 + \theta_2) + u_-^2(u+2)\theta_3 + u_+^2(u-2)\theta_4\Big] \\ & - \frac{1}{2a_k}\Big[vu_+u_-(L_1 - L_2 + L_3 - L_4)\Big] \\ & + \frac{1}{6a_k}\Big[v_+^2(v-2)(L_3 - L_4) + v_-^2(v+2)(L_1 - L_2)\Big]\end{aligned} \tag{II.20}$$

II.4 Fonctions de base pour la composante y de la densité de flux ($B^k_{y_c}$)

$$\beta^k_{y_1}(u,v) = -2\Big[u_-\theta_3 + u_+\theta_4\Big] + \Big[v_+(L_3 - L_4) + v_-(L_1 - L_2)\Big] \tag{II.21}$$

$$\beta^k_{y_2}(u,v) = -4b_k - \frac{1}{a_k}\Big[u_+u_-(\theta_3+\theta_4) + v_-^2\theta_1 + v_+^2\theta_2\Big] + u\Big[v_+(L_3 - L_4) + v_-(L_1 - L_2)\Big] \tag{II.22}$$

$$\beta^k_{y_3}(u,v) = -2v\Big[u_-\theta_3 + u_+\theta_4\Big] - \frac{1}{2b_k}\Big[\big(u_+^2 - v_+v_-\big)(L_3 - L_2) + \big(u_-^2 - v_+v_-\big)(L_1 - L_4)\Big] \tag{II.23}$$

$$\beta^k_{y_4}(u,v) = v\Big[\frac{4}{3}b_k\Big] - \frac{1}{3a_k}\Big[3vu_+u_-(\theta_3+\theta_4) + v_-^2(v+2)\theta_1 + v_+^2(v-2)\theta_2\Big] + \frac{1}{2b_k}\Big[uv_+v_-(L_1 - L_2 + L_3 - L_4)\Big] - \frac{1}{6b_k}\Big[u_+^2(u-2)(L_3 - L_2) + u_-^2(u+2)(L_1 - L_4)\Big] \tag{II.24}$$

Annexe III

Solution analytique en 1D de l'équation de diffusion linéaire pour une excitation sinusoïdale

III.1 Mise en équations

Lorsque la résistivité ρ est une constante, l'équation de diffusion (7.26) devient une équation différentielle linéaire qui peut alors s'écrire

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\rho}{\mu_0}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \, . \tag{III.1}$$

Considérons la solution de cette équation pour la géométrie illustrée à la FIG. 7.1, et les équations de sources (7.1) et (7.2), dans lesquelles on impose une excitation sinusoïdale pour la partie ca. Nous prendrons le champ externe B_{ext} comme référence de phase. Le courant de source I_s pourra, de façon générale, être déphasé d'un angle α par rapport à la phase de B_{ext}. Explicitement, on peut écrire

$$B_{ext}(t) = B_{cc} + B_{ca}(t) = B_{cc} + B_{ca}\sin(\omega t) \, , \tag{III.2}$$

$$I_s(t) = I_{cc} + I_{ca}(t) = I_{cc} + I_{ca}\sin(\omega t + \alpha) \, , \tag{III.3}$$

B_{ca} et I_{ca} représentant les valeurs crêtes des composantes alternatives, et $\omega = 2\pi f$, f étant la fréquence de la source alternative (on suppose la même fréquence pour les parties ca de B_{ext} et I_s).

III.2 Solution analytique pour $B(x,t)$

Sous ces conditions, l'équation de diffusion peut facilement être résolue de façon analytique. Définissons au préalable quelques quantités utiles, i.e.

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu_0}} \quad \text{et} \quad \phi = \frac{2x_0}{\delta} \ ,$$

δ étant bien connu comme étant la profondeur de pénétration, et ϕ correspond à un déphasage, qui dépend de la largeur $2x_0$ du mur par rapport à δ.

La solution générale pour le régime permanent de (III.1), soumise aux excitations (III.2) et (III.3), s'écrit directement

$$\begin{aligned} B(x,t) = e^{-\frac{x+x_0}{\delta}} \left[b_1 \cos\left(\omega t - \frac{x+x_0}{\delta}\right) + b_2 \sin\left(\omega t - \frac{x+x_0}{\delta}\right)\right] \\ + e^{\frac{x-x_0}{\delta}} \left[b_3 \cos\left(\omega t + \frac{x-x_0}{\delta}\right) + b_4 \sin\left(\omega t + \frac{x-x_0}{\delta}\right)\right] \\ + \left(\frac{\mu_0 I_{cc}}{2x_0}\right) x + B_{cc} \ , \end{aligned} \tag{III.4}$$

les coefficients b_1, b_2, b_3 et b_4 dépendant des conditions aux frontières initiales.

III.3 Détermination des coefficients

Les coefficients b_1, b_2, b_3 et b_4 se calculent facilement en évaluant $B(\pm x_0, 0)$ et $\left.\frac{\partial B}{\partial t}\right|_{\substack{x=\pm x_0 \\ t=0}}$, soit les conditions aux frontières sur les deux parois à $t = 0$. La contribution de B_{ext} est donnée directement par (III.2). Pour déterminer la contribution en champ de I_s sur les parois du mur, il faut utiliser la loi d'Ampère, i.e.

$$B = \pm\frac{\mu_0 I_s}{2} \ , \tag{III.5}$$

en plus de (III.3). On construit ainsi 4 équations qui s'écrivent, sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & e^{-\phi}\cos\phi & -e^{-\phi}\sin\phi \\ 0 & 1 & e^{-\phi}\sin\phi & e^{-\phi}\cos\phi \\ e^{-\phi}\cos\phi & -e^{-\phi}\sin\phi & 1 & 0 \\ e^{-\phi}\sin\phi & e^{-\phi}\cos\phi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\mu_0 I_{ca}\sin\alpha \\ B_{ca} & -\frac{1}{2}\mu_0 I_{ca}\cos\alpha \\ 0 & +\frac{1}{2}\mu_0 I_{ca}\sin\alpha \\ B_{ca} & +\frac{1}{2}\mu_0 I_{ca}\cos\alpha \end{bmatrix} . \tag{III.6}$$

Il n'y a qu'à inverser la matrice pour déterminer les coefficients. On trouve:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & c_1 & s_1 \\ s_2 & c_2 & -s_1 & c_1 \\ c_1 & s_1 & c_2 & -s_2 \\ -s_1 & c_1 & s_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\mu_0 I_{ca}\sin\alpha \\ B_{ca} & -\frac{1}{2}\mu_0 I_{ca}\cos\alpha \\ 0 & +\frac{1}{2}\mu_0 I_{ca}\sin\alpha \\ B_{ca} & +\frac{1}{2}\mu_0 I_{ca}\cos\alpha \end{bmatrix} , \tag{III.7}$$

avec

$$c_1 = (e^{-2\phi} - 1)\, e^{-\phi}\cos\phi \,, \qquad s_1 = (e^{-2\phi} + 1)\, e^{-\phi}\sin\phi \,,$$
$$c_2 = 1 - e^{-2\phi}\cos 2\phi \,, \qquad s_2 = e^{-2\phi}\sin 2\phi \,,$$

et

$$\Delta = 1 + e^{-2\phi}\left(e^{-2\phi} - 2\cos 2\phi\right) .$$

III.4 Solution analytique pour $J(x,t)$ et $A(x,t)$

La solution analytique de $J(x,t)$ et $A(x,t)$ est facile à déterminer à partir de (III.4), i.e. la solution générale pour $B(x,t)$, et des équations (7.8) et (7.9), réécrites ainsi:

$$J(x,t) = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B}{\partial x} \,, \tag{III.8}$$

$$A(x,t) = -\int B(x,t)\,\mathrm{d}x + c(t), \tag{III.9}$$

$c(t)$ étant une constante d'intégration que l'on peut poser égale à 0 sans inquiétude. On obtient alors deux équations de la même forme que (III.4), i.e.

$$\begin{aligned} J(x,t) = e^{-\frac{x+x_0}{\delta}} &\left[j_1 \cos\left(\omega t - \frac{x+x_0}{\delta}\right) + j_2 \sin\left(\omega t - \frac{x+x_0}{\delta}\right)\right] \\ &+ e^{\frac{x-x_0}{\delta}} \left[j_3 \cos\left(\omega t + \frac{x-x_0}{\delta}\right) + j_4 \sin\left(\omega t + \frac{x-x_0}{\delta}\right)\right] + \frac{I_{cc}}{2x_0}\,, \end{aligned} \tag{III.10}$$

$$\begin{aligned} A(x,t) = e^{-\frac{x+x_0}{\delta}} &\left[a_1 \cos\left(\omega t - \frac{x+x_0}{\delta}\right) + a_2 \sin\left(\omega t - \frac{x+x_0}{\delta}\right)\right] \\ &+ e^{\frac{x-x_0}{\delta}} \left[a_3 \cos\left(\omega t + \frac{x-x_0}{\delta}\right) + a_4 \sin\left(\omega t + \frac{x-x_0}{\delta}\right)\right] \\ &- \left(\frac{\mu_0 I_{cc}}{4x_0}\right) x^2 - (B_{cc})\, x\,, \end{aligned} \tag{III.11}$$

dans lesquelles les coefficients j_1, j_2, j_3 et j_4, ainsi que a_1, a_2, a_3 et a_4, sont reliés à b_1, b_2, b_3 et b_4 par

$$\begin{aligned} j_1 &= -\frac{1}{\delta\mu_0}(b_2 + b_1)\,, & j_3 &= \frac{1}{\delta\mu_0}(b_4 + b_3)\,, \\ j_2 &= -\frac{1}{\delta\mu_0}(b_2 - b_1)\,, & j_4 &= \frac{1}{\delta\mu_0}(b_4 - b_3)\,, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\delta}{2}(b_2 - b_1)\,, & a_3 &= \frac{\delta}{2}(b_4 - b_3)\,, \\ a_2 &= \frac{\delta}{2}(b_2 + b_1)\,, & a_4 &= -\frac{\delta}{2}(b_4 + b_3)\,. \end{aligned}$$

Ces équations sont très utiles pour valider les différentes méthodes numériques, qui solutionnent tantôt pour J, tantôt pour B, tantôt pour A.

Annexe IV

Appareillage expérimental

L'appareillage expérimental de base utilisé pour effectuer les mesures $V - I$ consiste en une source de courant HP 6031A et un nanovoltmètre Keithley 182 (cf FIG. IV.1). Pour les mesures dans un champ externe, un électro-aimant fait maison a été utilisé (cf FIG. IV.2), alimenté par une source de courant LakeShore 622 (cf FIG. IV.3). Enfin, pour mesurer la densité de flux générée par l'électro-aimant, un Gaussmètre FW Bell 615 a été utilisé (cf FIG. IV.4). Quelques détails techniques relatifs à chacun de ces appareils sont donnés sous la figure correspondante.

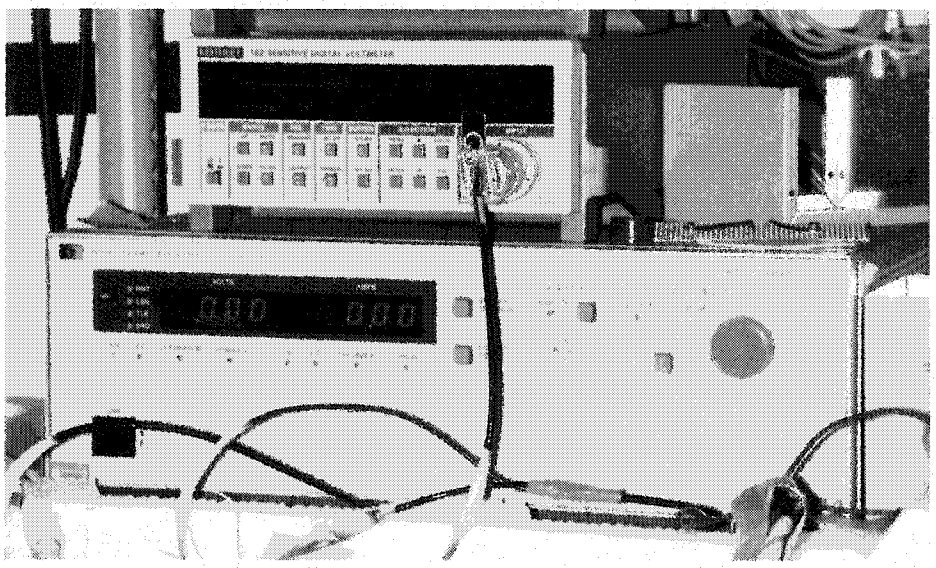


FIG. IV.1 – Photographie du HP 6031A « System Power Supply » et du Keithley 182 « Sensitive Digital Voltmeter ». Le HP 6031A donne un courant de sortie cc de 0 à 120 A, une tension maximale de 20 V et une puissance maximale de 1000 W. Le Keithley 182 peut mesurer des nanovolts, mais pour des mesures $V - I$ de supraconducteurs, les mesures ne commencent à être exemptes de bruit qu'à partir d'environ 0.1 μV.

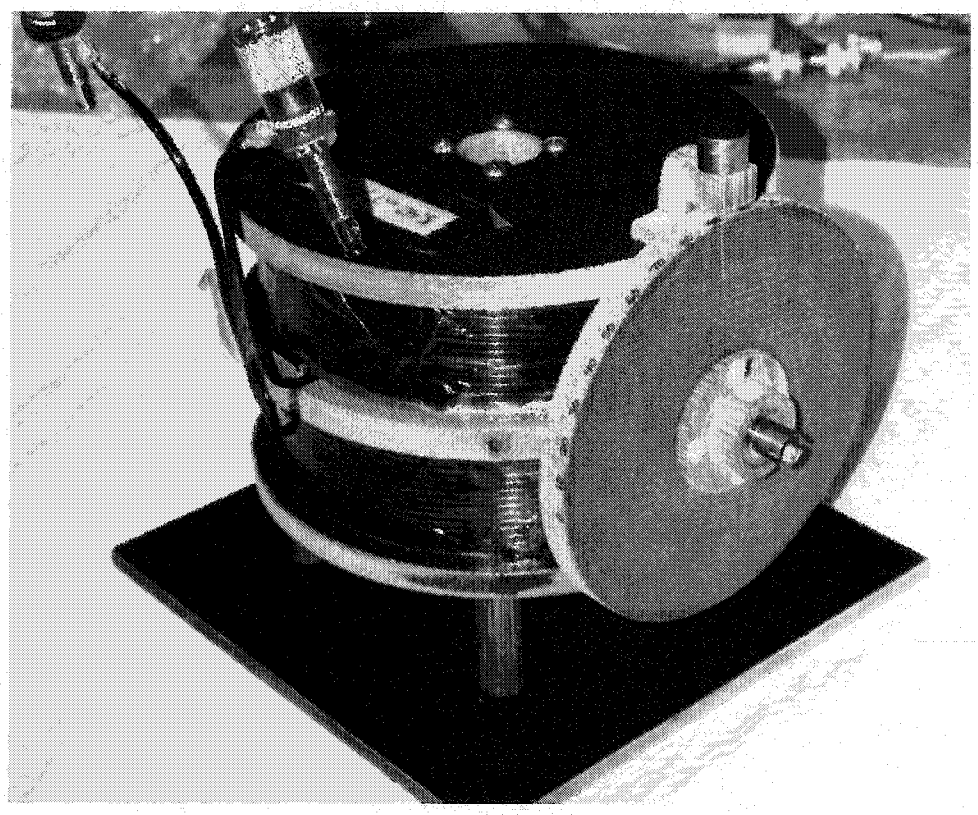


FIG. IV.2 – Photographie d'un électro-aimant « maison » générant 5.42 mT/A. Cet électro-aimant est construit sur le principe d'une paire d'Helmholtz, i.e. deux bobines séparées d'une certaine distance. Ceci permet d'une part de générer un champ uniforme à environ 1 % sur un volume de 1.5 cm^3, et d'autre part de laisser l'espacement requis pour insérer un petit échantillon au centre. Ce dernier est d'abord fixé sur un porté échantillon en phénolique (non-montré ici), et glissé dans le tube en cuivre que l'on voit à droite de la photo, au centre de la roue. Cette dernière sert à tourner l'échantillon dans le champ magnétique. Toutes les parties constituantes de l'électro-aimant sont faites de matériaux non magnétiques (cuivre, laiton, phénolique, plastique). Il peut générer jusqu'à 400 mT pour une courte durée (moins de 2 minutes) lorsqu'il est immergé dans l'azote liquide.

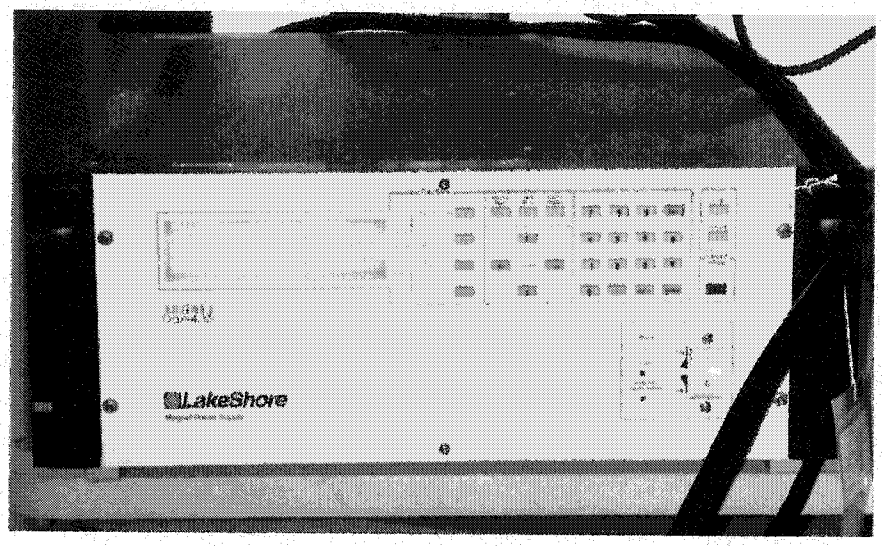


FIG. IV.3 – Photographie du LakeShore 622 « Magnet Power Supply ». Le LakeShore 622 donne un courant de sortie cc de 0 à 100 A, mais la puissance de sortie est limitée à 1000 W. Il est possible de brancher une sonde de Hall à l'appareil pour asservir la sortie à un niveau donné de densité de flux. Il s'agit d'un appareil construit pour alimenter des charges inductives, et sa sortie en courant est très régulière (moins de 0.1 % d'oscillations).

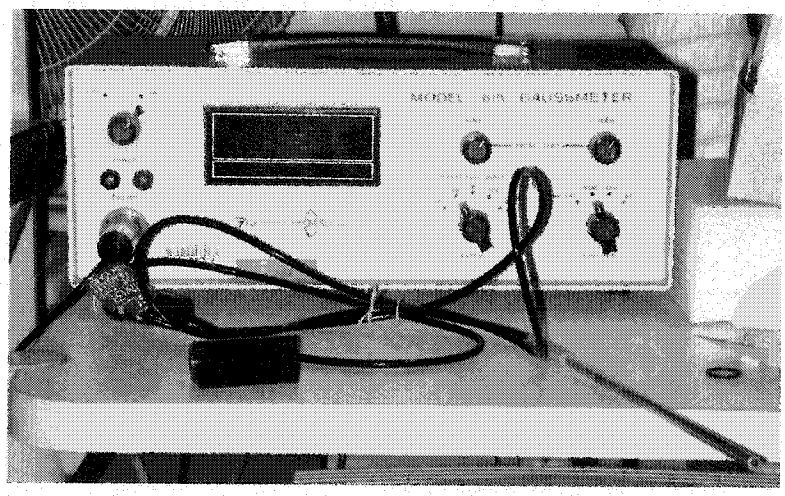


FIG. IV.4 – Photographie du Gaussmètre FW Bell 615, avec une sonde de Hall axiale (coin inférieur droit). Ce Gaussmètre permet de mesurer des champs de l'ordre de quelques μT jusqu'à une dizaine de T, avec une précision d'environ 1 %.

Annexe V

Description du logiciel *MagNet*®

Le logiciel *MagNet*®, développé par *Infolytica Corporation*, une compagnie basée à Montréal (Canada), est conçu pour résoudre des problèmes de champs électromagnétiques pour des géométries 2D ou 3D complexes par la méthode des éléments finis (plus formellement, il s'agit de la méthode des « edge elements », introduite à la section 3.3.2 en page 75 de cette thèse). Le logiciel de base permet de traiter des problèmes linéaires, bien sûr, de même que des problèmes magnétiques non linéaires, isotropes ou anisotropes. Une extension que l'on peut acheter à part permet de traiter aussi des problèmes dont la résistivité est non linéaire, anisotrope, dépendante du champ et non homogène. Celle-ci doit être définie par l'usager dans un fichier *C++* qui est par la suite compilé pour générer un fichier *dll* utilisé par *MagNet*®. La compilation se fait dans l'environnement *Microsoft Visual C++*, donc il faut aussi acheter ce compilateur.

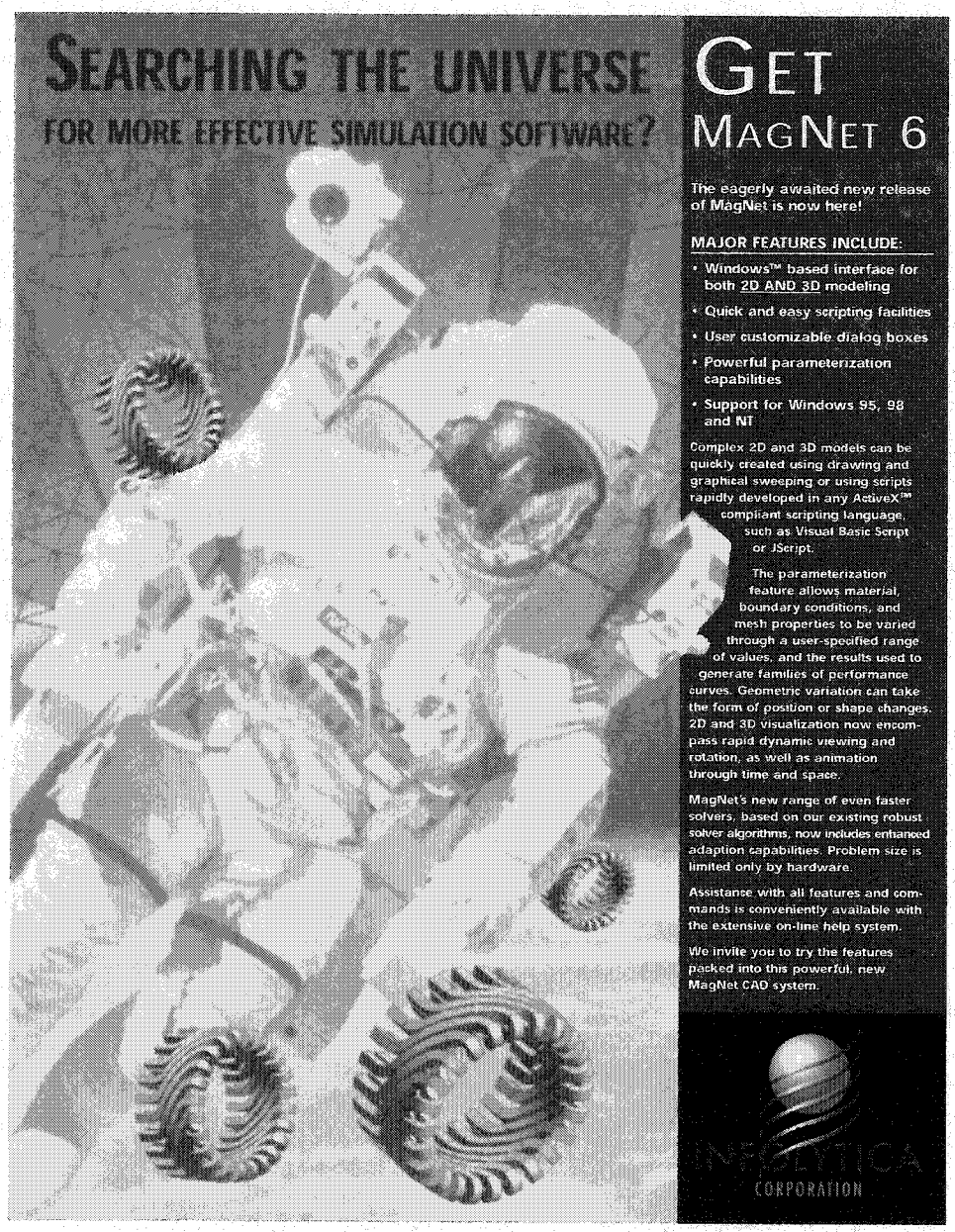
Plusieurs types de problèmes peuvent être traités, soit des problèmes statiques, transitoires ou d'analyse harmonique. Chaque type de problème requiert l'achat du moteur de calcul correspondant. Il existe aussi d'autres produits pour les problèmes électrostatiques, micro-ondes et thermiques. Depuis l'avènement de la version 6 de *MagNet*®, une interface graphique élaborée rend son utilisation assez conviviale, bien qu'une utilisation correcte de ce dernier demande un long apprentissage et une connaissance de base en méthodes numériques.

Mis à part les moteurs de calcul, le logiciel permet d'effectuer toutes les étapes préalables à la simulation, soit la modélisation géométrique, le maillage et l'imposition des conditions aux frontières, ainsi que le traitement des résultats (i.e. « post-processing »). Bien sûr, à ce niveau, il ne peut pas rivaliser avec des logiciels spé-

cialisés dans chacun de ces domaines, mais pour des géométries qui ne sont pas trop complexes, il est en général autonome. Dans le cas de géométries complexes, on peut importer ces dernières à partir de logiciels spécialisés en modélisation géométrique, mais le maillage doit absolument être généré ensuite par *MagNet®*. De même, on peut exporter les résultats de simulation pour les traiter à l'aide d'autres logiciels plus appropriés.

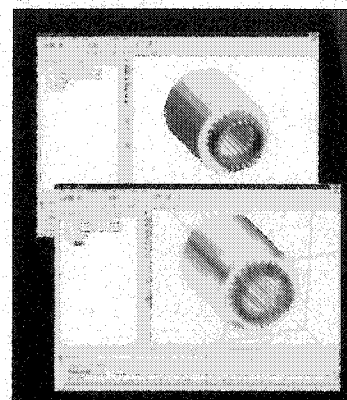
Enfin, *MagNet®* est entièrement reconfigurable par programmation (module de « scripting »), d'où il est relativement facile d'automatiser un processus complet de simulation, i.e. de l'étape de modélisation géométrique jusqu'au traitement des résultats. Le langage qui permet d'accomplir cette tâche est le VBS (*Visual Basic Scripting*), un standard établi par *Microsoft*.

La plus récente brochure publicitaire du logiciel en date du dépôt de cette thèse (décembre 2002) a été intégrée à cette annexe. Pour davantage d'information sur le logiciel, il est possible de consulter le site web d'*Infolytica Corporation*, dont l'adresse est indiquée à la fin de cette brochure.


SEARCHING THE UNIVERSE
FOR MORE EFFECTIVE SIMULATION SOFTWARE?
GET
MAGNET 6
The eagerly awaited new release of MagNet is now here!
MAJOR FEATURES INCLUDE:
• Windows™ based interface for both 2D AND 3D modeling
• Quick and easy scripting facilities
• User customizable dialog boxes
• Powerful parameterization capabilities
• Support for Windows 95, 98 and NT
Complex 2D and 3D models can be quickly created using drawing and graphical sweeping or using scripts rapidly developed in any ActiveX™ compliant scripting language, such as Visual Basic Script or JScript.
The parameterization feature allows material, boundary conditions, and mesh properties to be varied through a user-specified range of values, and the results used to generate families of performance curves. Geometric variation can take the form of position or shape changes. 2D and 3D visualization now encompass rapid dynamic viewing and rotation, as well as animation through time and space.
MagNet's new range of even faster solvers, based on our existing robust solver algorithms, now includes enhanced adaption capabilities. Problem size is limited only by hardware.
Assistance with all features and commands is conveniently available with the extensive on-line help system.
We invite you to try the features packed into this powerful, new MagNet CAD system.
INFOLYTICA
CORPORATION

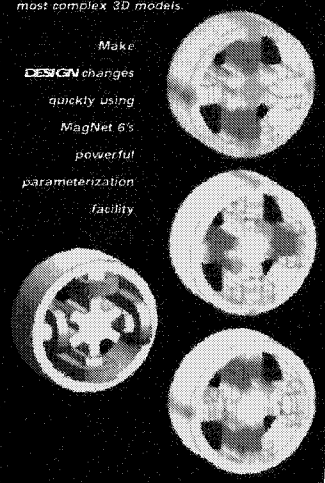
INFOLYTICA CORPORATION

INTRODUCES THE NEXT GENERATION OF SIMULATION SOFTWARE



MagNet 6 provides state-of-the-art visualization capabilities to help the user quickly build and test even the most complex 3D models.

Make ***DESIGN*** *changes quickly using MagNet 6's powerful parameterization facility*



INFOLYTICA CORPORATION

MAGNET 6

THE NEW FEA PACKAGE FROM INFOLYTICA OFFERS THE FOLLOWING ADVANCED FEATURES:

- New intuitive interface for **2D & 3D** simulation
- New powerful parameterization for "what if" analysis.
- New scripting package to enable customization and automation of your designs.
- Communication with any application on your desktop that supports OLE Automation, such as Microsoft Word®, Microsoft Excel®, MATLAB or Mathcad.
- H-adaption or p-adaption, or a combination, to improve mesh accuracy.
- 3D solid and extrusion modeling.
- The fastest and most accurate simulations available.
- Solvers for magnetostatic, time-harmonic, or transient with motion analysis.

SUPPORT:

Our support is legendary, we have proved it since 1978! Just ask any of the thousands of engineers who have used our software worldwide!

Our engineering staff averages over 15 years of experience in solving electromagnetics simulation problems. No one else in the industry can match this level of expertise!

We will assist you in evaluating simulation software. Most importantly we will continue to work with you AFTER you have purchased our product.

INFOLYTICA: THE E-M SPECIALISTS

FOR MORE INFORMATION CALL US TODAY!

USA AND INTERNATIONAL:

Max Zinger
Sales & Marketing Manager
Tel: (514) 849-8752 ext. 270
Fax: (514)849-4239
Support: (514) 849-8752 ext. 299
email: max@infolytica.com
Infolytica Corp.,
300 Leo Pariseau, Suite 2222
P.O. Box 1144, Montréal, Canada
H2W 2P4

EUROPE:

Barbara Allsworth
Commercial Manager
Tel: +44 (0) 1235 833 288
Fax: +44 (0) 1235 833 141
Support: (514) 849-8752 ext. 299
email: info_ltd@compuserve.com
Infolytica Ltd.,
68 Milton Park,
Abingdon, Oxon
OX14 4RX, UK

www.infolytica.com