

**Titre:** Codage spatio-temporel en treillis pour les canaux à évanouissements : simulations, recherche de codes et évaluation des performances  
Title: Codage spatio-temporel en treillis pour les canaux à évanouissements : simulations, recherche de codes et évaluation des performances

**Auteur:** Guillaume Favre  
Author: Guillaume Favre

**Date:** 2002

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Favre, G. (2002). Codage spatio-temporel en treillis pour les canaux à évanouissements : simulations, recherche de codes et évaluation des performances [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal].  
Citation: Favre, G. (2002). Codage spatio-temporel en treillis pour les canaux à évanouissements : simulations, recherche de codes et évaluation des performances [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal].  
PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7086/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7086/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** David Haccoun  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CODAGE SPATIO-TEMPOREL EN TREILLIS POUR LES CANAUX À  
ÉVANOUISSEMENTS : SIMULATIONS, RECHERCHE DE CODES ET  
ÉVALUATION DES PERFORMANCES

GUILLAUME FAVRE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES (M.Sc.A.)  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)

JUIN 2002



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* Votre référence

ISBN: 0-612-85464-7

*Our file* Notre référence

ISBN: 0-612-85464-7

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

# Canadä

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

CODAGE SPATIO-TEMPOREL EN TREILLIS POUR LES CANAUX À  
ÉVANOUISSEMENTS : SIMULATIONS, RECHERCHE DE CODES ET  
ÉVALUATION DES PERFORMANCES

présenté par: FAVRE Guillaume

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. PIERRE Samuel, Ph.D., président

M. HACCOUN David, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. FORTIER Paul, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

À l'heure d'achever la rédaction de ce mémoire, mes premières pensées vont à ma famille qui n'a cessé de m'encourager tout au long de mes études. Le soutien de tous mes proches aura été à la base de ma réussite en France et au Québec : je leur en serai toujours reconnaissant.

Je tiens par ailleurs à remercier mon directeur de recherche, Dr David Haccoun, pour m'avoir conseillé d'un regard critique tout en me laissant une liberté appréciable dans l'orientation de mon travail. Je lui sais également gré de l'aide financière qu'il m'a accordée. Je n'oublierai pas non plus l'ambiance chaleureuse du laboratoire de télécommunications à laquelle ont particulièrement contribué Christian, Jérôme, Ilham, Khaled, Mehdi et Ronald.

Je remercie aussi Supélec qui m'a permis de tenter outre-atlantique une aventure extrêmement enrichissante sur le plan scolaire et humain.

Je ne pourrais conclure sans saluer tous mes amis de Montréal et de France, et notamment toute la gang du badminton.

## RÉSUMÉ

Dans le domaine actuel des télécommunications sans-fil, l'une des ressources les plus précieuses est la largeur de bande que doivent se partager les multiples opérateurs présents sur le marché. Les techniques de transmission de données sont par conséquent soumises à des contraintes vis-à-vis de l'efficacité spectrale, alors que les débits d'information croissent toujours plus afin d'offrir images, sons et vidéos. Pour une transmission sur un canal à évanouissements de Rayleigh, des atténuations viennent en outre affecter le signal. Face à ces obstacles, l'emploi de la diversité spatiale offerte par les systèmes multi-antennes conjuguée à la diversité temporelle incarnée par le codage correcteur d'erreurs constitue une solution efficace: le codage spatio-temporel (CST).

Notre travail vise à étudier un type de CST particulier : les codes spatio-temporels par modulation codée en treillis (CST-MCT). Après avoir introduit les systèmes de communications numériques et en particulier le codage de canal, une description complète des CST est présentée. Nous traitons ensuite le principe des CST-MCT pour une modulation M-PSK et étudions leurs performances au moyen d'un simulateur. L'influence de divers paramètres est analysée : nombre d'antennes, nombre d'états, ordre de la modulation. Les cas des canaux à évanouissements quasi-statiques et rapides sont envisagés. Une étude du comportement en canal Gaussien est également menée. Puis nous nous intéressons à la recherche de "bons" codes via un algorithme de calcul du gain de codage. Une méthode de recherche systématique de bons CST-MCT est développée. Les meilleurs codes obtenus sont répertoriés et leurs performances évaluées et comparées.

Il ressort de ce travail que le gain offert par l'emploi de plusieurs antennes est énorme, ce qui justifie l'intérêt porté à la diversité spatiale. L'utilisation de codes en treillis associés à une modulation d'ordre élevé offre des perspectives intéressantes en terme d'efficacité spectrale et de gain de codage. La recherche de codes effectuée laisse cependant penser que le gain de codage n'est pas nécessairement un gage de performance. Enfin les meilleurs codes "temporels" semblent être en général de bons CST-MCT.

## ABSTRACT

Bandwidth is currently one of the most precious resources in wireless telecommunications since it must be shared by numerous operators. As a consequence data transmission is limited by spectral constraints whereas rates become larger and larger for applications such as sound or video. In a Rayleigh fading channel signal is also affected by attenuations. A good solution to these obstacles seems to be the association of spatial diversity offered by multiple antennae systems and temporal diversity allowed by coding which is known as space time coding (STC).

Our work focuses on a special case of STC : space time trellis coded modulation codes (STTCMC). After introducing digital communications systems and especially channel coding, CST are completely depicted. Then we deal with the principle of STTCMC for M-PSK modulation. The influence of several parameters on performances is analyzed, such as the number of antennae, the number of states and the order of modulation. Quasi-static and rapid fading channels are treated as well as gaussian channel. Then we consider the search of “good” codes thanks to an algorithm which computes coding gain. A systematic search method is developed. Best codes found are sorted, evaluated and compared.

Through this work we show the huge gain offered by the use of several antennae which confirms the interest in spatial diversity. The combined use of trellis coding and high order modulation allows a good spectral efficiency and coding gain. Nevertheless our code search insinuates that the coding gain is not always a performance indicator. Besides best “time codes” seem to be very good STTCMC in general.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>REMERCIEMENTS . . . . .</b>	<b>iv</b>
<b>RÉSUMÉ . . . . .</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRACT . . . . .</b>	<b>vi</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES . . . . .</b>	<b>vii</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX . . . . .</b>	<b>x</b>
<b>LISTE DES FIGURES . . . . .</b>	<b>xii</b>
<b>LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .</b>	<b>xvi</b>
<b>LISTE DES NOTATIONS . . . . .</b>	<b>xvii</b>
<b>LISTE DES ANNEXES . . . . .</b>	<b>xviii</b>
<b>CHAPITRE 1: INTRODUCTION . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Motivations . . . . .	1
1.2 Organisation du mémoire . . . . .	2
1.3 Contributions . . . . .	3
1.4 Ressources utilisées . . . . .	4
<b>CHAPITRE 2: SYSTÈMES DE COMMUNICATIONS NUMÉRIQUES SANS-FIL . . . . .</b>	<b>5</b>
2.1 Description générale . . . . .	5
2.2 Canal de transmission sans-fil . . . . .	7
2.2.1 Généralités . . . . .	7
2.2.2 Canal radio-mobile à évanouissements de Rayleigh . . . . .	7
2.2.3 Canal Gaussien . . . . .	11
2.3 Conclusion . . . . .	13

<b>CHAPITRE 3: CODAGE DE CANAL . . . . .</b>	<b>14</b>
3.1 Codage de canal discret . . . . .	14
3.1.1 Codage linéaire en bloc . . . . .	15
3.1.2 Codage convolutionnel . . . . .	16
3.2 Modulation numérique . . . . .	25
3.3 Modulation codée en treillis . . . . .	26
3.3.1 Motivations et principe . . . . .	26
3.3.2 Approche retenue dans notre étude . . . . .	28
3.4 Conclusion . . . . .	28
<b>CHAPITRE 4: CODAGE SPATIO-TEMPOREL . . . . .</b>	<b>29</b>
4.1 Techniques de diversité . . . . .	29
4.1.1 Diversité fréquentielle . . . . .	29
4.1.2 Diversité temporelle . . . . .	30
4.1.3 Diversité spatiale . . . . .	30
4.2 Systèmes multi-antennes . . . . .	30
4.2.1 Modèle utilisé . . . . .	30
4.2.2 Capacité d'un système multi-antennes . . . . .	32
4.3 Codage spatio-temporel . . . . .	33
4.3.1 Principe général . . . . .	33
4.3.2 Critères de performance . . . . .	35
4.3.3 CST en blocs . . . . .	38
4.3.4 CST en treillis . . . . .	40
4.4 Conclusion . . . . .	44
<b>CHAPITRE 5: SIMULATIONS DE CST-MCT . . . . .</b>	<b>45</b>
5.1 Description du simulateur . . . . .	45
5.1.1 Modifications apportées au simulateur précédent . . . . .	45
5.1.2 Principe . . . . .	45
5.1.3 Le rapport signal à bruit . . . . .	47
5.2 Simulations pour des évanouissements quasi-statiques . . . . .	49
5.2.1 Influence du nombre de récepteurs . . . . .	49
5.2.2 Influence du nombre d'émetteurs . . . . .	50

5.2.3	Influence du nombre d'états . . . . .	52
5.2.4	Influence de la modulation . . . . .	52
5.2.5	Confrontation des différents codes . . . . .	53
5.3	Simulations pour des évanouissements rapides . . . . .	56
5.3.1	Influence du nombre de récepteurs . . . . .	57
5.3.2	Influence du nombre d'émetteurs . . . . .	57
5.3.3	Influence du nombre d'états . . . . .	58
5.3.4	Influence de la modulation . . . . .	59
5.3.5	Confrontation des codes . . . . .	60
5.4	Simulations pour un canal Gaussien . . . . .	61
5.4.1	Ambiguïté de décodage . . . . .	61
5.4.2	Simulation par distinction des signaux transmis . . . . .	64
5.5	Conclusion . . . . .	66
<b>CHAPITRE 6: RECHERCHE DE BONS CODES CST-MCT .</b>		<b>67</b>
6.1	Calcul du gain de codage . . . . .	67
6.1.1	Théorèmes . . . . .	67
6.1.2	Remarque sur le nombre d'états . . . . .	73
6.1.3	Bornes moyennes . . . . .	73
6.1.4	Implémentation . . . . .	74
6.2	Recherche systématique de CST-MCT . . . . .	75
6.2.1	Recherche du gain de codage maximal . . . . .	75
6.2.2	Recherche de la borne inférieure moyenne maximale . . . . .	76
6.2.3	Résultats en modulation BPSK . . . . .	77
6.2.4	Évaluation des performances des codes trouvés . . . . .	78
6.3	CST-MCT en modulation QPSK et 8PSK . . . . .	79
6.4	Conclusion . . . . .	80
<b>CHAPITRE 7: CONCLUSION . . . . .</b>		<b>81</b>
7.1	Bilan des travaux entrepris . . . . .	81
7.2	Perspectives de recherches futures . . . . .	82
<b>BIBLIOGRAPHIE . . . . .</b>		<b>84</b>

## LISTE DES TABLEAUX

5.1	Table de métriques pour un canal binaire symétrique en quantification douce (3 bits) . . . . .	65
I.1	Liste de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 2, Q = 2, S = 2$ - Gain de codage : $\eta = 4$ . . . . .	88
I.2	Liste de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 2, Q = 3, S = 4$ - Gain de codage : $\eta = \sqrt{48} = 6.93$ . . . . .	89
I.3	Liste de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 2, Q = 4, S = 8$ - Gain de codage : $\eta = \sqrt{80} = 8.94$ . . . . .	90
I.4	Liste de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 2, Q = 5, S = 16$ - Gain de codage : $\eta = \sqrt{128} = 11.31$ . . . . .	92
I.5	Liste de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 2, Q = 6, S = 32$ - Gain de codage : $\eta = \sqrt{192} = 13.8564$ . . . . .	93
I.6	Liste de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 3, Q = 3, S = 4$ - Gain de codage : $\eta = 4$ . . . . .	94
I.7	Liste de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 3, Q = 4, S = 8$ - Gain de codage : $\eta = 256^{\frac{1}{3}} = 6.35$ . . . . .	95
I.8	Liste de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 3, Q = 5, S = 16$ - Gain de codage : $\eta = 8$ (32 premiers codes seulement) . . . . .	97
I.9	Liste de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 3, Q = 6, S = 32$ - Gain de codage : $\eta = 1024^{\frac{1}{3}} = 10.079$ (26 premiers codes seulement)	98
I.10	Liste de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 4, Q = 4, S = 8$ - Gain de codage : $\eta = 4$ (25 premiers codes seulement) . . . . .	100
I.11	Liste de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 4, Q = 5, S = 16$ - Gain de codage : $\eta = 1280^{\frac{1}{4}} = 5.98$ (25 premiers codes seulement) .	101
I.12	Liste de CST-MCT en modulation QPSK - $N_t = 2, Q = 2, S = 8$ - Gain de codage : $\eta = \sqrt{8} = 2.828$ (28 premiers codes seulement) .	103
II.1	Liste de CST-MCT en modulation QPSK - $N_t = 2, Q = 2, S = 4$ .	105
II.2	Liste de CST-MCT en modulation QPSK - $N_t = 2, Q = 3, S = 8$ .	106

II.3	Liste de CST-MCT en modulation QPSK - $N_t = 2, Q = 3, S = 16$ . . . . .	107
II.4	Liste de CST-MCT en modulation QPSK - $N_t = 2, Q = 4, S = 32$ . . . . .	108
II.5	Liste de CST-MCT en modulation QPSK - $N_t = 2, Q = 4, S = 64$ . . . . .	108
II.6	Liste de CST-MCT en modulation 8PSK - $N_t = 2, Q = 2, S = 8$ . . . . .	109
II.7	Liste de CST-MCT en modulation 8PSK - $N_t = 2, Q = 3, S = 16$ . . . . .	110
II.8	Liste de CST-MCT en modulation 8PSK - $N_t = 2, Q = 3, S = 32$ . . . . .	110
II.9	Liste de CST-MCT en modulation QPSK - $N_t = 3, Q = 3, S = 16$ . . . . .	112
II.10	Liste de CST-MCT en modulation QPSK - $N_t = 2$ - évanouissements rapides . . . . .	112
II.11	Liste de CST-MCT en modulation 8PSK - $N_t = 2$ - évanouissements rapides . . . . .	112

## LISTE DES FIGURES

2.1	Schéma d'un système de communications numériques . . . . .	6
2.2	Propagation multi-chemins . . . . .	8
2.3	Effet Doppler . . . . .	9
2.4	Classification des différent types de canaux à évanouissements . . .	10
2.5	Distribution de Rayleigh . . . . .	12
2.6	Enveloppe d'un signal soumis à des évanouissements de Rayleigh . .	12
2.7	Canal Gaussien . . . . .	13
3.1	Schéma général d'un codeur convolutionnel . . . . .	16
3.2	Codeur convolutionnel : $L = 3$ , $R = 1/2$ , $G = [5, 7]$ . . . . .	17
3.3	Arbre associé au code : $G = [5, 7]$ . . . . .	18
3.4	Diagramme d'état associé au code : $G = [5, 7]$ . . . . .	19
3.5	Treillis associé au code : $G = [5, 7]$ . . . . .	20
3.6	Description d'un "papillon" . . . . .	23
3.7	Schéma de l'algorithme CSA [13] . . . . .	24
3.8	Constellation 8PSK . . . . .	26
3.9	Partition d'ensemble pour la constellation 8PSK . . . . .	27
3.10	Principe de la modulation codée en treillis . . . . .	28
4.1	Système multi-antennes . . . . .	31
4.2	Codeur spatio-temporel . . . . .	34
4.3	Décodeur spatio-temporel . . . . .	34
4.4	Gains en diversité et en codage . . . . .	37
4.5	Codage spatio-temporel par blocs . . . . .	39
4.6	Codage spatio-temporel en treillis . . . . .	41
4.7	Transitions issues de l'état 100 pour la matrice $\mathbf{G}$ de l'équation (4.12)	43
4.8	Treillis associé à la matrice $\mathbf{G}$ de l'équation (4.12) . . . . .	43
5.1	Influence du nombre de récepteurs - Code de Tarokh [29] - 2 émetteurs, 8 états, 130 symboles par trame, modulation QPSK, 2 bits/s/Hz, évanouissements quasi-statiques . . . . .	50

5.2	Influence du nombre d'émetteurs - Codes de Blum [38] - 3 récepteurs, 16 états, 130 symboles par trame, modulation BPSK, 1 bits/s/Hz, évanouissements quasi-statiques . . . . .	51
5.3	Influence du nombre d'états - Codes de Chen [7] - 2 émetteurs, 2 récepteurs, 130 symboles par trame, modulation QPSK, 2 bits/s/Hz, évanouissements quasi-statiques . . . . .	53
5.4	Influence de la modulation - 2 émetteurs, 2 récepteurs, 130 symboles par trame, 8 états, évanouissements quasi-statiques . . . . .	54
5.5	Comparaison de différents codes - 2 émetteurs, 2 récepteurs, 8 états, 130 symboles par trame, modulation QPSK, 2 bits/s/Hz, évanouissements quasi-statiques . . . . .	56
5.6	Influence du nombre de récepteurs - Code de Firmanto [9] - 2 émetteurs, 130 symboles par trame, modulation QPSK, 2 bits/s/Hz, évanouissements rapides . . . . .	57
5.7	Influence du nombre d'émetteurs - Codes de Blum [38] - 3 récepteurs, 130 symboles par trame, modulation BPSK, 1 bits/s/Hz, évanouissements rapides . . . . .	58
5.8	Influence du nombre d'états - Codes de Chen [7] - 2 émetteurs, 2 récepteurs, 130 symboles par trame, modulation QPSK, 2 bits/s/Hz, évanouissements rapides . . . . .	59
5.9	Influence du nombre d'états - Codes de Chen [7] - 2 émetteurs, 2 récepteurs, 130 symboles par trame, modulation QPSK, 2 bits/s/Hz, évanouissements rapides et quasi-statiques . . . . .	60
5.10	Influence de la modulation - 2 émetteurs, 2 récepteurs, 130 symboles par trame, 2 bits/s/Hz, évanouissements rapides . . . . .	61
5.11	Comparaison de différents codes - 2 émetteurs, 1 récepteur, 130 symboles par trame, modulation QPSK, 2 bits/s/Hz, évanouissements rapides . . . . .	62
5.12	Système multi-antennes en canal Gaussien . . . . .	63
5.13	Comparaison des performances du code $G = [13, 15, 17]$ pour un canal Gaussien et un canal de Rayleigh - 130 symboles par trame . . . . .	63

5.14 Comparaison des performances du code $G = [13, 15, 17]$ pour un canal Gaussien avec et sans ambiguïté - 130 symboles par trame . . . . .	66
6.1 Événement erreur de longueur minimale associé au code $G = [5, 7]$ . . . . .	68
6.2 Illustration d'un événement erreur non valide . . . . .	74
I.1 Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 2, N_r = 3, S = 2$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	89
I.2 Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 2, N_r = 3, S = 4$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	90
I.3 Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 2, N_r = 3, S = 8$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	91
I.4 Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 2, N_r = 3, S = 16$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	91
I.5 Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 2, N_r = 2, S = 32$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	93
I.6 Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 3, N_r = 3, S = 4$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	96
I.7 Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 3, N_r = 3, S = 8$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	96
I.8 Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 3, N_r = 3, S = 16$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	99
I.9 Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 3, N_r = 3, S = 32$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	99
I.10 Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 4, N_r = 3, S = 8$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	102
I.11 Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK - $N_t = 4, N_r = 3, S = 16$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	102
I.12 Comparaison des performances de CST-MCT en modulation QPSK - $N_t = 2, N_r = 3, S = 4$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	104
II.1 Comparaison des performances de CST-MCT en modulation QPSK - $N_t = 2, N_r = 3, S = 4$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	106

II.2	Comparaison des performances de CST-MCT en modulation QPSK - $N_t = 2, N_r = 3, S = 8$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	107
II.3	Comparaison des performances de CST-MCT en modulation QPSK - $N_t = 2, N_r = 3, S = 16$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	108
II.4	Comparaison des performances de CST-MCT en modulation QPSK - $N_t = 2, N_r = 3, S = 32$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	109
II.5	Comparaison des performances de CST-MCT en modulation 8PSK - $N_t = 2, N_r = 3, S = 8$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	110
II.6	Comparaison des performances de CST-MCT en modulation 8PSK - $N_t = 2, N_r = 3, S = 16$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	111
II.7	Comparaison des performances de CST-MCT en modulation 8PSK - $N_t = 2, N_r = 3, S = 32$ - évanouissements quasi-statiques . . . . .	111

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

ACS	Add Compare Select
ASK	Amplitude Shift Keying
AWGN	Additive White Gaussian Noise
BPSK	Binary Phase Shift Keying
CSA	Compare Add Select
CST	Code Spatio-temporel
CST-MCT	Code Spatio-Temporel par Modulation Codée en Treillis
FSK	Frequency Shift Keying
JPEG	Joint Picture Expert Group
MIMO	Multiple Input Multiple Output
MP3	Motion Picture Expert Group Audio Layer 3
PSK	Phase Shift Keying
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
SNR	Signal to Noise Ratio
UHF-VHF	Ultra High Frequency - Very High Frequency
UMTS	Universal Mobile Telecommunications System

## LISTE DES NOTATIONS

$\oplus$	Addition modulo 2
$E[\cdot]$	Espérance mathématique
$\lfloor \cdot \rfloor$	Fonction partie entière
$\lceil \cdot \rceil$	Fonction plafond
$I_k$	Matrice identité de taille $k \times k$
$\Re(\cdot)$	Partie réelle
$P(A B)$	Probabilité de l'événement A sachant l'événement B
$\dagger$	Trans-conjugaison matricielle
$T$	Transposée
$*$	Conjugué
$N_t$	Nombre d'antennes émettrices
$N_r$	Nombre d'antennes réceptrices
$R$	Nombre de bits rentrés à chaque instant dans le codeur
$S$	Nombre d'états du code
$Q$	Nombre d'instants pris en compte pour le codage
$M$	Nombre de symboles de la constellation (modulation M-PSK)

**LISTE DES ANNEXES**

<b>Annexe I:</b>	<b>Liste de CST-MCT obtenus par recherche systématique . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>Annexe II:</b>	<b>Liste de CST-MCT en modulation QPSK et 8PSK . . . . .</b>	<b>105</b>
II.1	CST-MCT pour évanouissements quasi-statiques . . . . .	105
II.2	CST-MCT pour évanouissements rapides . . . . .	112

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION

#### 1.1 Motivations

En ce début de vingt-et-unième siècle, force est de constater que les moyens de communication font partie intégrante de notre quotidien au point de changer nos modes de vie. Dans de nombreux pays, le nombre de téléphones cellulaires a dépassé le nombre de postes fixes. La révolution de la téléphonie mobile a bien eu lieu et celle de l'Internet mobile ne saurait tarder. Malgré l'essoufflement actuel du domaine des télécommunications, les recherches n'ont en effet jamais cessé en matière de miniaturisation des terminaux, amélioration de la qualité de service, accroissement des débits pour la diffusion d'images et de son.

Malheureusement les contraintes physiques inhérentes aux canaux de communications sans-fil sont toujours bien présentes et limitent les progrès escomptés. Une des ressources les plus précieuses aujourd'hui est la largeur de bande que doivent se partager les différents opérateurs. Ce marché a été considérablement exploité par de nombreux gouvernements lors de la vente aux enchères des licences UMTS alors que cette technologie n'en est qu'à ses balbutiements ! Outre ces considérations financières, le phénomène de propagation multi-chemins dans les canaux radio-mobiles occasionne des atténuations du signal qui sont rédhibitoires dans l'optique d'un accès à Internet, au moment où les puissances de transmission sont de plus en plus réduites. D'immenses progrès ont d'ores et déjà été accomplis en matière de codage (codes turbo par exemple) et de compression de données (normes MP3 pour le son, JPEG pour l'image). En ce qui concerne la transmission des données, l'exploitation de la diversité spatiale au moyen des systèmes multi-antennes présente un formidable potentiel et fait l'objet de nombreuses recherches et publications. Le codage spatio-temporel synthétise en quelque sorte les efforts entrepris dans le domaine de la diversité car il combine les apports de la diversité spatiale, temporelle, voire aussi fréquentielle. De nombreuses techniques relatives au codage spatio-temporel ont été développées ces dernières années par les principaux laboratoires

de recherche en télécommunications et certaines ont déjà été mises en application.

L'objectif de ce mémoire est de présenter en détail l'une de ces techniques, à savoir le codage spatio-temporel par modulation codée en treillis (CST-MCT). Lionel Scremenin a été l'instigateur de ce travail par le biais de son mémoire de maîtrise [22]. Notre étude vise d'une part à généraliser son approche des codes convolutionnels spatio-temporels aux modulations M-PSK. Le simulateur développé va nous permettre d'étudier l'influence de divers paramètres tels que le nombre d'antennes ou l'ordre de la modulation. D'autre part nous nous intéressons à la recherche de CST-MCT. Nous mettons en oeuvre une méthode de recherche systématique et étudions les performances des codes obtenus. Nous répertorions les meilleurs codes trouvés.

## 1.2 Organisation du mémoire

Ce mémoire s'articule de la manière suivante :

- Le chapitre 2 décrit brièvement le principe des systèmes de communications sans-fil en mettant l'accent sur les caractéristiques du canal radio-mobile.
- Le chapitre 3 présente exclusivement le codage de canal. Après un bref survol du codage en bloc, le codage convolutionnel est évoqué plus en détails avant une description de la technique de modulation codée en treillis.
- Le chapitre 4 est consacré au codage spatio-temporel. Après un rappel des principales techniques de diversité, les systèmes multi-antennes sont introduits : le modèle et les notations utilisés sont définis tout en rappelant les principaux résultats relatifs à la capacité. Le codage spatio-temporel proprement dit est ensuite présenté. Les critères de performances associés sont abordés. Enfin on s'intéresse aux 2 principales techniques : codage en bloc puis codage en treillis.
- Le chapitre 5 décrit le simulateur développé pour l'étude des performances des CST-MCT. Les résultats obtenus sont discutés pour 3 cas de figure : évanouissements quasi-statiques, évanouissements rapides et canal Gaussien sans évanouissements.

- Le chapitre 6 relate la mise en oeuvre d'un algorithme de recherche de CST-MCT basé sur des théorèmes établis par R.S. Blum [5]. Les principes théoriques sont explicités puis appliqués dans le cadre d'une recherche de "bons" codes. Les performances des codes obtenus sont évaluées. Les résultats de simulation sont confrontés aux données théoriques afin d'essayer de dégager des facteurs déterminant les performances. Les meilleurs codes "temporels" en modulation BPSK sont également évalués et comparés aux codes trouvés.
- La conclusion fait le bilan du travail entrepris et dresse des perspectives de recherches futures.
- L'annexe I répertorie les codes trouvés par le biais de l'algorithme implémenté et présente les résultats des simulations effectuées dans le cadre de l'évaluation de leurs performances.
- L'annexe II répertorie des codes en modulation QPSK et 8PSK issus de la littérature. Leurs performances sont comparées.

### 1.3 Contributions

Ce travail de recherche a apporté les contributions suivantes :

- Développement d'un simulateur de CST-MCT pour modulation M-PSK. Les cas des canaux à évanouissements quasi-statiques et rapides sont envisagés, ainsi que le canal Gaussien AWGN (Additive White Gaussian Noise).
- Comparaison des résultats obtenus et de ceux figurant dans les publications traitant du même sujet afin de vérifier la validité du simulateur.
- Étude de l'influence de divers paramètres sur les performances : nombre d'antennes, ordre de la modulation, nombre d'états.
- Développement de différentes procédures effectuant respectivement la vérification de la diversité maximale d'un CST-MCT, le calcul de bornes inférieures et supérieures sur le gain de codage et finalement le calcul du gain de codage. Ces procédures sont basées sur les théorèmes établis par R.S Blum.

- Mise en oeuvre d'un programme de recherche systématique de CST-MCT.
- Recherche et classement de "bons" codes en modulation BPSK pour 2, 3, 4 antennes émettrices et 2, 4, 8, 16, 32 états.
- Évaluation des performances des codes trouvés et comparaison avec les meilleurs codes "temporels".
- Comparaison des codes de la littérature en modulation QPSK et 8PSK afin d'établir une hiérarchie des méthodes employées.

#### 1.4 Ressources utilisées

Le développement du simulateur et du programme de recherche de CST-MCT a été réalisé sous environnement Windows<sup>©</sup> à l'aide du logiciel Visual C++<sup>©</sup>. Les courbes de performances ont été tracées grâce au logiciel Matlab<sup>©</sup>. L'ordinateur utilisé était équipé d'un processeur cadencé à 850 MHz avec une mémoire vive de 256 Mo.

## CHAPITRE 2

# SYSTÈMES DE COMMUNICATIONS NUMÉRIQUES SANS-FIL

Ce chapitre présente les bases de la théorie des communications numériques dans le cadre des communications sans-fil en insistant en particulier sur le canal de transmission.

### 2.1 Description générale

D'un point de vue très basique, un système de communications vise à transmettre une information entre un émetteur et un récepteur. Cette information provient d'une source et peut prendre diverses formes : signal électrique, son, lumière. Après avoir été émis, le signal passe au travers d'un canal de transmission (fil, air, fibre optique,...) puis parvient au récepteur. L'objectif du système est de faire en sorte que le récepteur récupère le plus fidèlement possible l'information originale. Or le canal est loin d'être parfait ce qui cause des erreurs de réception plus ou moins importantes. Pendant longtemps les signaux utilisés étaient analogiques, ce qui rendait le système très vulnérable aux perturbations extérieures. Depuis une cinquantaine d'années, on a développé des systèmes basés sur une transmission numérique de l'information. Dans ce type de système, l'information originale est d'abord échantillonnée puis quantifiée afin d'aboutir à une suite de symboles binaires (bits). Les avantages d'un système numérique sont multiples : meilleure immunité au bruit, possibilité de correction d'erreurs, facilité de traitement,... Le schéma d'un système de communications numériques est donné [19] à la figure 2.1. On constate qu'il est organisé symétriquement par rapport au canal de transmission. A chaque opération en amont du canal correspond l'opération inverse en aval. Le codage de source est destiné à éliminer la redondance présente dans la séquence d'information originale. Il compresse les données provenant de la source et délivre une suite de bits. Cet aspect ne sera pas traité dans ce mémoire. Le canal de transmission est, par nature, un milieu analogique. On ne peut donc transmettre tels quels des bits. Il est par conséquent nécessaire de convertir le signal numérique en

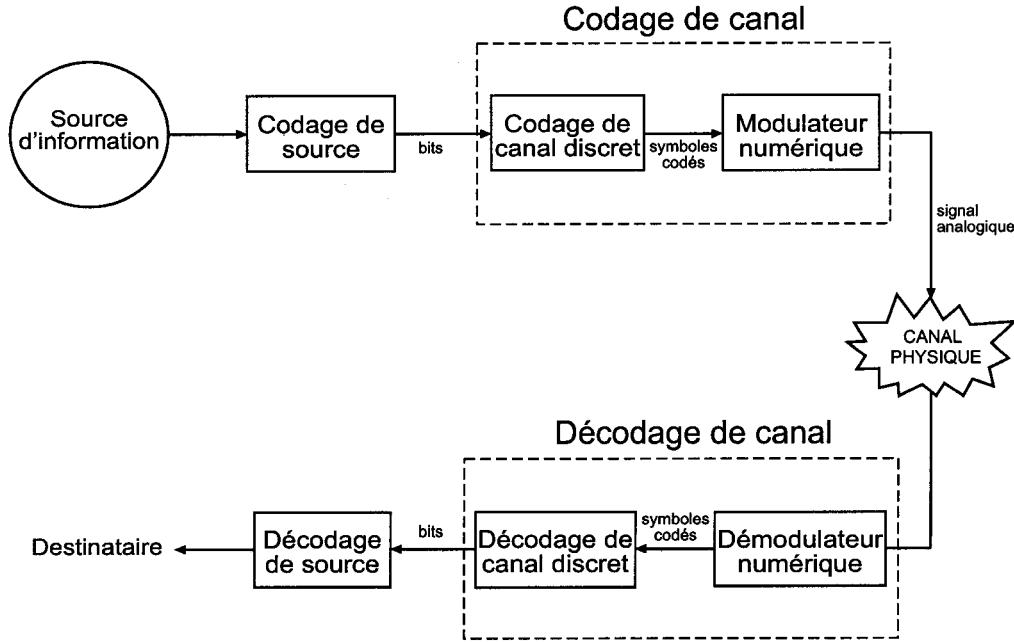


Figure 2.1: Schéma d'un système de communications numériques

signaux analogiques adaptés à la transmission. Cette étape est appelée modulation numérique et fait partie plus généralement du codage de canal. De plus le canal de transmission est loin d'être parfait. Du bruit et des interférences accompagnent le signal reçu, conduisant à des erreurs. Afin d'améliorer la fiabilité de l'information transmise, on introduit de la redondance contrôlée. Ce rôle incombe au codage de canal discret. Les symboles codés obtenus sont alors modulés puis transmis dans le canal. A la réception, le processus inverse intervient. On démodule les signaux reçus. Les symboles codés sont ensuite décodés en une séquence de bits estimés. On reconstruit alors la séquence d'information via le décodage de source et on la transmet finalement au destinataire. Dans la suite de ce chapitre nous allons décrire de manière plus détaillée le canal de transmission. Le codage de canal fera l'objet du chapitre 3.

## 2.2 Canal de transmission sans-fil

### 2.2.1 Généralités

Le canal de transmission est un medium qui transporte le signal d'information entre l'émetteur et le destinataire. En communications sans-fil, plusieurs scénarios peuvent être envisagés pour la propagation : transmission en voie directe, propagation multi-chemins, mobilité de l'émetteur ou du récepteur. Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à deux cas particuliers : le canal à évanouissements de Rayleigh et le canal Gaussien.

### 2.2.2 Canal radio-mobile à évanouissements de Rayleigh

#### 2.2.2.1 Description

Avec l'explosion du marché du téléphone portable, le canal radio-mobile a fait l'objet de nombreuses études dans le but d'améliorer la qualité de la liaison. Le cas considéré ici est la communication par ondes radio entre une station de base fixe et un mobile se déplaçant à l'intérieur de la cellule associée. La plage de fréquences associée est celle des UHF-VHF (30 MHz à 3 GHz). Ce choix de fréquences n'est pas anodin et est justifié par les raisons suivantes :

- L'utilisation de telles fréquences autorise l'emploi d'antennes de faibles dimensions, ce qui est souhaitable pour l'implantation dans des téléphones portables.
- Leur portée est relativement faible. Ceci réduit donc les risques d'interférences.

Ce type de canal est très complexe à analyser car il dépend de nombreux paramètres tels que les mouvements du récepteur, le relief du terrain, la présence d'obstacles. Les principaux phénomènes venant affecter la liaison sont :

- Les effets d'ombrages : la présence d'obstacles sur le trajet base-mobile entraîne des variations du niveau moyen du signal reçu.
- L'atténuation du signal due à la distance.

- La propagation multi-chemins : les réflexions et diffusions multiples par les obstacles proches du mobile (figure 2.2) conduisent à une variation aléatoire du niveau instantané du signal reçu. Les évanouissements qui en résultent apparaissent selon un intervalle de  $\lambda/2$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la porteuse utilisée pour la transmission.
- Le déplacement relatif entre la station de base et le mobile : la fréquence instantanée du signal reçu subit une variation Doppler.
- Le bruit d'origine naturelle (précipitations par exemple) ou humaine (pollution électromagnétique). Une description détaillée des sources de bruit figure dans [22]. Dans ce mémoire on considérera exclusivement le bruit blanc Gaussien additif qui est la représentation habituellement adoptée pour les télécommunications.

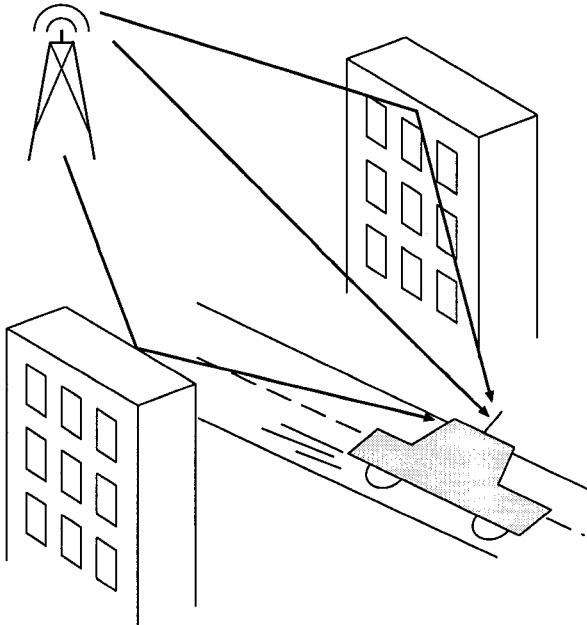


Figure 2.2: Propagation multi-chemins

Nous allons à présent caractériser les différents types d'évanouissements en nous basant sur la description présentée dans [4].

### 2.2.2.2 Étalement du délai

Les différentes composantes reçues suite à la propagation multi-chemins parviennent au récepteur à des instants différents. On définit l'étalement du délai  $\tau$  comme la différence entre le plus grand et le plus petit des délais observés. Ce phénomène est responsable de la dispersion temporelle et de la sélectivité fréquentielle. La bande de cohérence  $B_c$  du canal est définie comme l'inverse de l'étalement du délai. Elle représente la séparation minimale pour laquelle 2 fréquences du signal subissent des atténuations indépendantes. Notons  $B_x$  la largeur de bande du signal. Si  $B_x \gg B_c$ , on dit que le canal est sélectif en fréquence. Sinon les évanouissements sont plats.

### 2.2.2.3 Dispersion fréquentielle Doppler

Lorsqu'un émetteur et un récepteur sont en mouvement relatif à vitesse constante, un décalage fréquentiel affecte le signal reçu. Considérons une porteuse non modulée de fréquence  $f_p$  qui parvient à un mobile  $M$  se déplaçant relativement à l'émetteur avec la vitesse  $\vec{v}$ . Soit  $\phi$  l'angle d'incidence de l'onde (figure 2.3). La fréquence instantanée observée au mobile est alors :  $f_p + f_d$  avec  $f_d = \frac{v}{c} \cos(\phi) f_p$  où  $c$  est la célérité de la lumière et  $f_d$  représente le décalage Doppler.

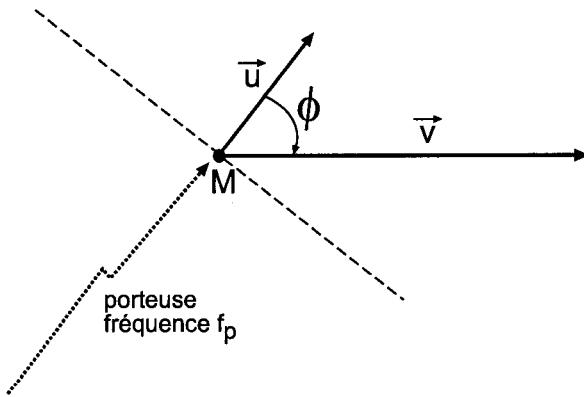


Figure 2.3: Effet Doppler

L'effet Doppler conjugué à la propagation multi-chemins occasionne une dispersion fréquentielle et des évanouissements sélectifs en temps. L'étalement Doppler  $F_d$  est défini comme la différence entre le plus grand et le plus petit

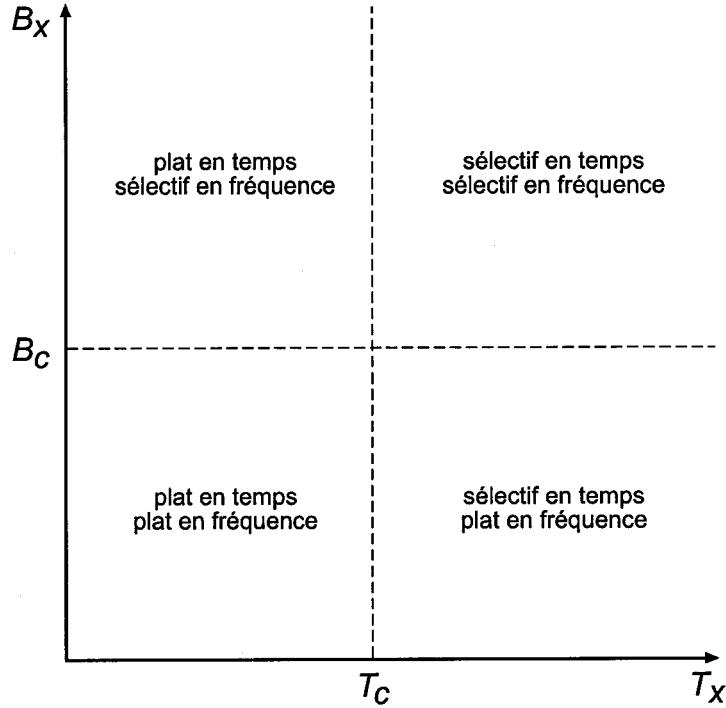


Figure 2.4: Classification des différents types de canaux à évanouissements

des décalages fréquentiels affectant chaque signal reçu. Le temps de cohérence du canal  $T_c$  est l'inverse de l'étalement Doppler. Il représente la durée minimale du signal au delà de laquelle la distorsion est significative. Notons  $T_x$  la durée d'une impulsion transmise. Si  $T_x \gg T_c$ , on dit que le canal est à évanouissements sélectifs en temps. Sinon les évanouissements sont plats.

La figure 2.4 illustre les phénomènes observés en fonction de la largeur de bande et de la durée du signal. En pratique, le canal plat en fréquence et sélectif en temps représente un bon modèle du canal radio-mobile terrestre.

#### 2.2.2.4 Caractéristiques probabilistes du signal reçu

Concrètement, le récepteur s'intéresse au champ électrique  $E(t)$  qui est la superposition des champs résultant de la propagation multi-chemins.

$$E(t) = \sum_{k=1}^N E_k(t) \quad (2.1)$$

Si on utilise la représentation de signal à bande étroite, on obtient

$$E(t) = I(t) \cos(2\pi f_p t) - Q(t) \sin(2\pi f_p t) \quad (2.2)$$

où  $I(t)$  et  $Q(t)$  sont les composantes en phase et en quadrature du signal qui s'expriment également sous forme d'une somme de  $N$  termes. Lorsque  $N$  tend vers l'infini, le théorème de la limite centrale nous autorise à affirmer que ces composantes sont des variables aléatoires Gaussiennes. Une autre écriture de  $E(t)$  est celle basée sur l'enveloppe complexe.

$$E(t) = \Re(\tilde{E}(t) \exp(j2\pi f_p t)) \quad (2.3)$$

où  $\tilde{E}(t)$  désigne l'enveloppe complexe de  $E(t)$ . On a alors

$$\tilde{E}(t) = I(t) + jQ(t) \quad (2.4)$$

$$= \alpha(t) \exp(j\Phi(t)) \quad (2.5)$$

avec

$$\alpha(t) = \sqrt{I^2(t) + Q^2(t)} \quad (2.6)$$

$$\Phi(t) = \arctan\left(\frac{Q(t)}{I(t)}\right) + \frac{\pi}{2}(1 - \text{signe}(I(t))) \quad (2.7)$$

Rice a montré [20] que l'enveloppe d'un signal soumis à des évanouissements a une densité de probabilité régie par une loi de Rayleigh représentée à la figure 2.5. L'expression de la densité de probabilité est donnée par l'équation suivante :

$$p_\alpha(\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sigma^2} \exp(-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}) & \alpha \geq 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Les évanouissements correspondants sont illustrés par la figure 2.6.

### 2.2.3 Canal Gaussien

On décrit plus précisément ce medium par l'acronyme anglais AWGN (Additive White Gaussian Noise). Pour ce type de canal, la transmission entre l'émetteur et

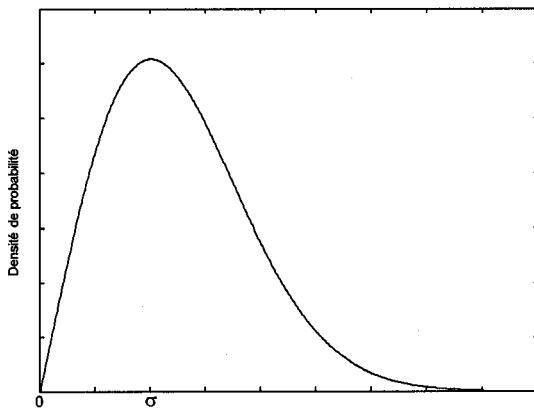


Figure 2.5: Distribution de Rayleigh

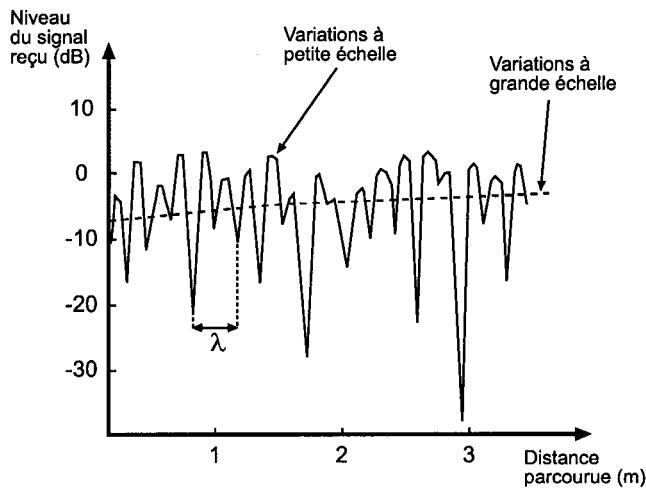


Figure 2.6: Enveloppe d'un signal soumis à des évanouissements de Rayleigh

le récepteur est directe, c'est-à-dire sans phénomène multi-chemins. La liaison est perturbée seulement par la présence de bruit blanc Gaussien additif. Typiquement un tel environnement s'applique aux liaisons satellites (figure 2.7). Le mouvement relatif du mobile par rapport à l'émetteur peut occasionner un léger effet Doppler que nous ne considérerons pas dans notre étude. Nous n'allons pas décrire davantage le canal Gaussien dans la mesure où il ne constitue pas le sujet principal de ce mémoire. Seule la section 5.4 consacrée aux simulations y fera référence.

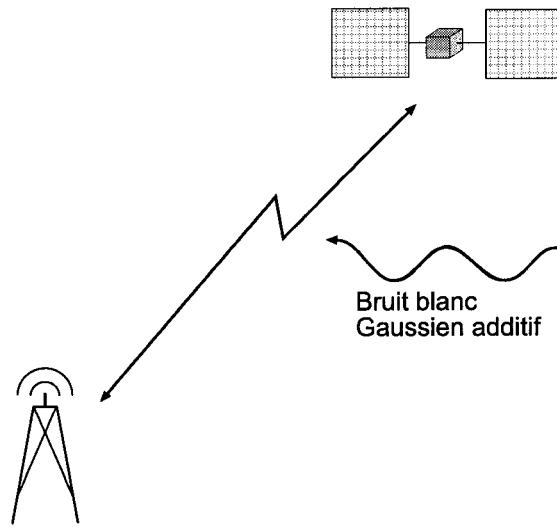


Figure 2.7: Canal Gaussien

### 2.3 Conclusion

Ce chapitre a introduit les systèmes de communications numériques sans-fil en insistant sur la description du canal de transmission et en faisant abstraction du type de signaux transmis. À présent nous allons examiner le codage de canal qui ajoute une redondance contrôlée à l'information originale.

## CHAPITRE 3

### CODAGE DE CANAL

L'objet général du codage de canal est de “préparer” l'information avant sa transmission dans le canal. Cette opération consiste à protéger l'information et à la convertir en un format adapté à la transmission. Nous allons détailler dans ce chapitre les principales techniques utilisées pour le codage de canal discret. Puis nous décrirons la modulation numérique.

#### 3.1 Codage de canal discret

Comme nous l'avons expliqué précédemment, le codage de canal discret a pour but d'ajouter de la redondance à l'information originale afin de la protéger contre les effets du bruit et des interférences lors de la transmission. De manière générale, cette opération consiste à effectuer la transformation suivante : à  $k$  bits d'information on associe  $n$  symboles codés. Le rapport  $R_n = \frac{k}{n}$  est le *taux de codage* et il est nécessairement inférieur à 1. On peut lui faire correspondre un taux de transmission exprimé en bits/s en faisant intervenir l'entropie de la source d'information. Claude Shannon a énoncé en 1948 [23] [24] qu'il était possible de trouver un codage tel que la probabilité d'erreur soit aussi petite que désirée, à condition que le taux de codage ne dépasse pas la *capacité* du canal. Il a démontré que, pour un canal à bruit blanc Gaussien additif, la capacité exprimée en bits/s est donnée par la formule :

$$C = W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{WN_0} \right) \quad (3.1)$$

où  $W$  est la largeur de bande disponible pour la transmission,  $P$  est la puissance moyenne d'émission et  $N_0$  est la densité spectrale de puissance du bruit blanc Gaussien additif affectant le signal. La théorie de Shannon fut le point de départ de très nombreuses recherches dans le domaine du codage. Nous allons à présent nous intéresser aux 2 principales techniques de codage de canal discret.

### 3.1.1 Codage linéaire en bloc

Les premiers travaux consacrés aux codes en bloc datent de la fin des années 40 avec Hamming [14]. Ils furent les premiers codes utilisés car leur implantation est très simple à mettre en oeuvre. Soit  $A$  l'alphabet de représentation de cardinal  $a$  pour les messages issus du codage de source. Un code en bloc est un espace vectoriel constitué de mots de code. Chaque mot de code est formé de  $n$  symboles issus d'un alphabet  $B$  de cardinal  $b$ . Le nombre de vecteurs possibles est donc  $b^n$ . Pour former un code, on peut sélectionner  $a^k$  mots de code tels que :  $a^k < b^n$ . Généralement on utilise des alphabets similaires. On parle alors de code en bloc  $(n, k)$  dont le taux de codage est :  $R_n = k/n$ . Le code obtenu est linéaire si toute combinaison linéaire de 2 mots de code donne un mot de code. L'opération d'encodage se déroule de la manière suivante. Soit  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  le vecteur de bits d'information à encoder. Soit  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  le mot de code correspondant. On l'obtient en effectuant l'opération :

$$\mathbf{c} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G} \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{G}$  est la matrice génératrice du code de dimensions  $(k \times n)$ . A toute matrice génératrice  $\mathbf{G}$  on peut associer une matrice de contrôle  $\mathbf{H}$  de dimensions  $((n-k) \times n)$  telle que :

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{H}^T = 0 \quad (3.3)$$

$\mathbf{H}$  intervient dans le processus de décodage. En effet, si  $\mathbf{c}$  est un mot de code valide, alors il existe un vecteur  $\mathbf{u}$  tel que  $\mathbf{c} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}$ . Dans ce cas :  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{H}^T = 0$ . Cette propriété permet de vérifier facilement si un vecteur reçu  $\mathbf{r}$  est effectivement un mot de code en considérant le *syndrome*  $\mathbf{s}$  défini par  $\mathbf{s} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{H}^T$ .  $\mathbf{s}$  renseigne le récepteur sur la présence d'erreurs de transmission. Si  $\mathbf{s}$  est nul il n'y a pas d'erreur. Sinon il y a une ou plusieurs erreurs de transmission dont la position peut être dans certains cas facilement repérée à la lecture du syndrome.

Nous n'irons pas plus loin dans la description du codage en bloc et invitons le lecteur curieux à se référer à [18] pour davantage de détails.

### 3.1.2 Codage convolutionnel

Le codage en bloc présente un défaut majeur : il oblige le système d'émission à attendre que  $k$  bits soient parvenus au codeur avant de pouvoir délivrer le mot de code correspondant. Pour des applications très sensibles aux délais, cet aspect est rédhibitoire, d'autant plus que  $k$  est élevé. La solution est donc d'envisager un système de codage “continu” pour lequel le flot d'information est quasiment ininterrompu. Le codage convolutionnel autorise une telle approche. Il a été proposé pour la première fois par Elias [8].

#### 3.1.2.1 Principe

Un codeur convolutionnel est décrit à la figure 3.1. Il consiste à passer la séquence d'information à travers un registre à décalage. Le registre se compose de  $L$  cellules de  $k$  bits. Il est relié à  $n$  additionneurs modulo 2. La sortie de chaque additionneur représente un symbole codé.

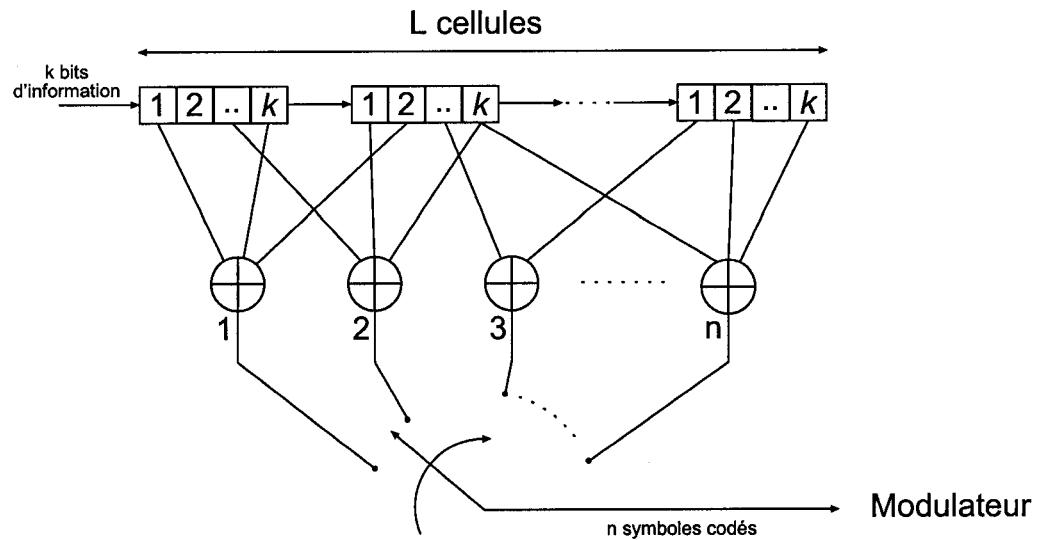


Figure 3.1: Schéma général d'un codeur convolutionnel

$L$  est appelée la *longueur de contrainte* du code. Le taux de codage est ici :  $R_n = \frac{k}{n}$ . En pratique, on rentre généralement un bit d'information à la fois. Ainsi,  $k = 1$  et  $R_n = 1/n$ . La présence ou l'absence de connexion est traduite par des générateurs  $G_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  écrits sous forme octale. Dans la perspective des explications

à venir nous allons utiliser un exemple particulier de code convolutionnel décrit à la figure 3.2. Ce code est défini par les paramètres suivants :  $L = 3$ ,  $R_n = 1/2$ ,  $G = [5, 7]$ . Cela signifie que le registre est composé de 3 cellules reliées à 2 additionneurs. Les générateurs traduisant les connexions correspondantes écrites en notation binaire sont données par les générateurs  $G_1 = [1, 0, 1]$  et  $G_2 = [1, 1, 1]$ . Une manière pratique de calculer les sorties codées d'un code convolutionnel est d'employer une matrice génératrice  $\mathbf{G}$  de dimensions  $(L \times n)$  dont chaque colonne contient un générateur. Pour notre exemple on obtient la matrice suivante :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A l'instant de codage  $t$ , soit  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_L)$  le vecteur des entrées du registre à décalage.  $r_1$  représente le bit d'information rentré et  $r_2, r_3, \dots, r_L$  représentent l'état du codeur constitué par les  $L - 1$  derniers bits rentrés. Le vecteur  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  des sorties codées correspondantes est obtenu par le produit matriciel modulo 2 de  $\mathbf{r}$  par  $\mathbf{G}$  :

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{G} \quad \text{modulo } 2 \quad (3.4)$$

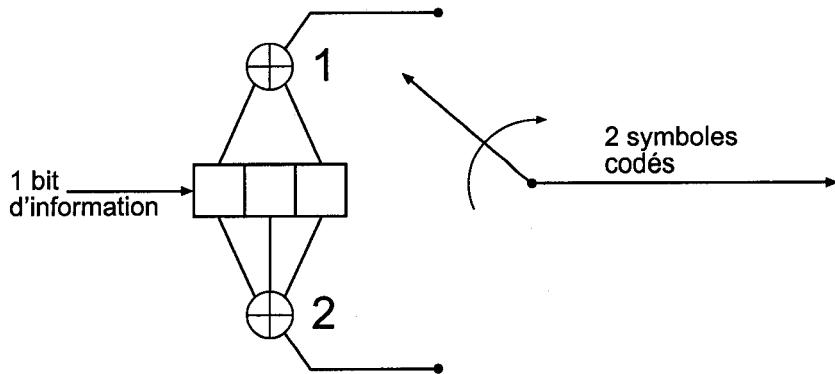


Figure 3.2: Codeur convolutionnel :  $L = 3$ ,  $R = 1/2$ ,  $G = [5, 7]$

Outre la définition par les générateurs ou la matrice génératrice, il existe 3 méthodes de représentation facilitant l'étude d'un code convolutionnel : l'arbre, le diagramme d'état et le treillis. Nous allons les appliquer à l'exemple précédent.

### 3.1.2.2 Représentation en arbre

L'arbre se compose de noeuds et de branches. Dans le cas binaire qui est le plus courant, 2 branches émergent de chaque noeud et portent les  $n$  symboles codés correspondants. Une branche vers le haut correspond à un bit d'entrée à 0 alors qu'une branche vers le bas correspond à un bit d'entrée à 1. La suite de symboles codés correspondant à une séquence d'information est obtenue en parcourant l'arbre selon cette règle. Chaque noeud représente un état du codeur. L'arbre associé au codeur de la figure 3.2 est représenté sur la figure 3.3. En gras, on a tracé le chemin correspondant à la séquence binaire 1011. On obtient ainsi la suite de symboles codés : 11 01 00 10. L'inconvénient d'une telle structure est qu'elle croît exponentiellement avec la taille de la séquence, ce qui la rend difficilement exploitable.

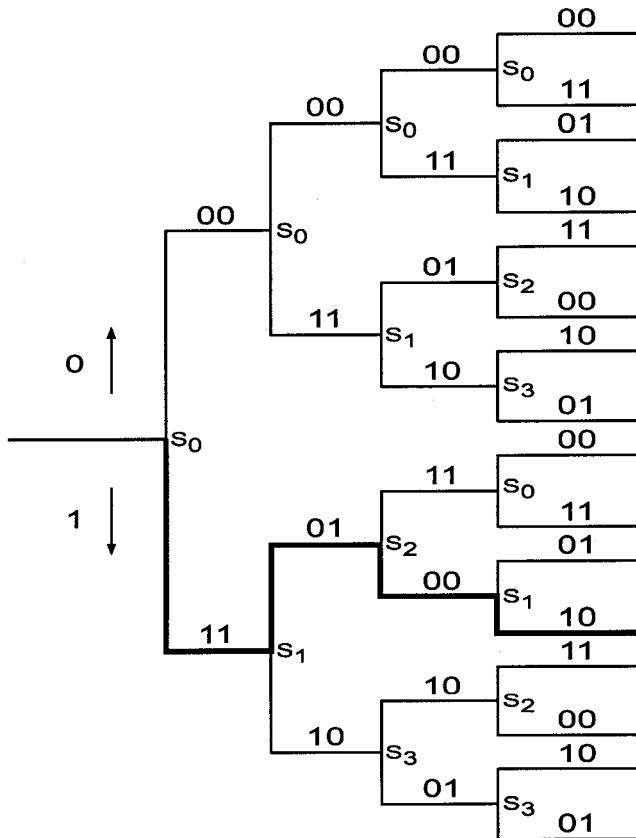


Figure 3.3: Arbre associé au code :  $G = [5, 7]$

### 3.1.2.3 Diagramme d'état

On peut concevoir un codeur convolutionnel comme une machine d'états finis. Il est donc possible de la représenter à l'aide d'un diagramme d'état. La sortie du codeur à un instant est fonction du bit d'information rentré et de l'état du codeur, c'est-à-dire des  $L - 1$  dernières cellules du registre. La figure 3.4 décrit le diagramme d'état associé au codeur de la figure 3.2. La *mémoire* du code est le nombre de bits précédents que le codeur prend en compte dans le processus. Dans notre cas la mémoire est égale à  $L - 1$ .

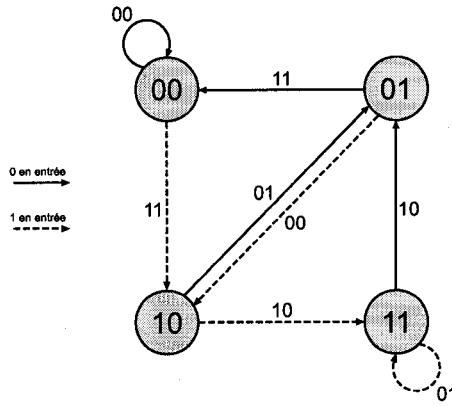


Figure 3.4: Diagramme d'état associé au code :  $G = [5, 7]$

### 3.1.2.4 Treillis d'encodage

Le diagramme d'état s'avère être une représentation très compacte d'un code convolutionnel. L'utilisation de l'arbre est quant à elle peu pratique en raison de la redondance, bien qu'on l'emploie dans le cadre du décodage séquentiel [3]. Le treillis offre l'avantage de fusionner les chemins passant par le même état au même instant, tout en traduisant la progression temporelle du codage. Le treillis associé au code de la figure 3.2 est représenté par la figure 3.5. Il se compose de branches et de noeuds, à l'instar de l'arbre.

Afin de faciliter le décodage, on s'assure que le codeur se trouve dans l'état 0 au début et à la fin du codage. Cette contrainte impose que les  $L - 1$  derniers bits de la trame d'information à coder soit à 0 : ils constituent la “queue” du message.

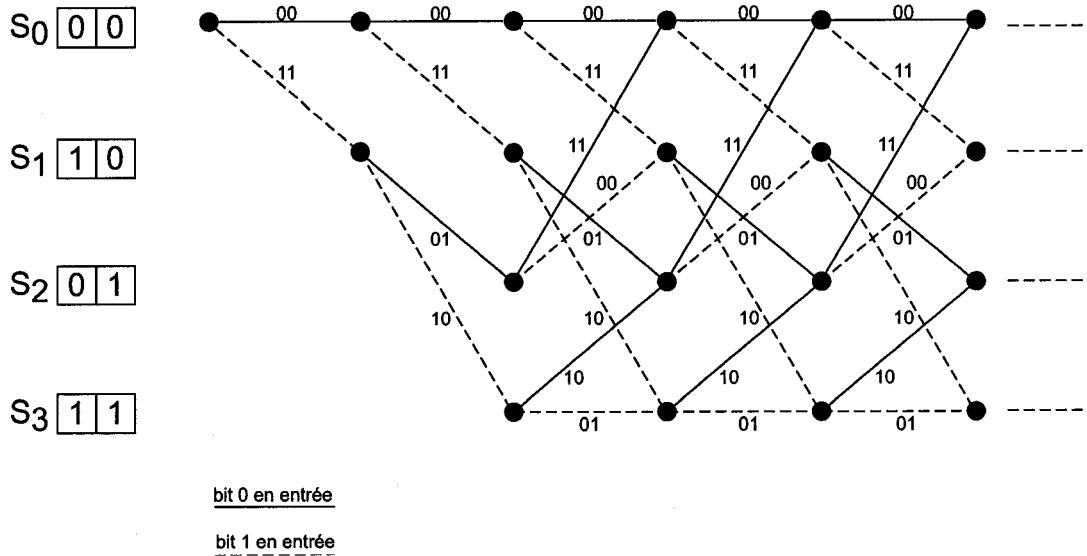


Figure 3.5: Treillis associé au code :  $G = [5, 7]$

À ce stade on peut introduire des notions de distance dont la compréhension est facilitée par l'emploi du treillis :

- La *distance de Hamming* entre 2 mots de code est le nombre de symboles qui diffèrent entre eux.
- La *distance de colonne* d'ordre  $q$   $d_c(q)$  est la distance de Hamming minimale entre 2 mots de codes de longueur de branche  $q$  qui ont leur première branche différente.
- La *distance minimale* correspond à la distance de colonne d'ordre  $q = L$  :

$$d_{min} = d_c(L)$$

- La *distance libre* est la limite de la distance de colonne lorsque  $q$  tend vers l'infini :

$$d_{free} = \lim_{q \rightarrow \infty} d_c(q)$$

En général  $d_{free} \geq d_{min}$ .

### 3.1.2.5 Décodage optimal des codes convolutionnels : Algorithme de Viterbi

Le décodage des codes convolutionnels peut s'opérer en parcourant l'arbre ou le treillis. On distingue 2 techniques : le décodage séquentiel et le décodage de Viterbi. Nous allons nous limiter ici à la description du décodage de Viterbi qui est un algorithme optimal.

Suite à la transmission de la séquence codée par le canal, le récepteur dispose d'une suite de symboles bruités. L'objectif est d'associer à la séquence reçue le chemin le plus vraisemblable dans le treillis. La mesure de vraisemblance est traduite par une métrique calculée de la manière suivante. Soit  $u$  la séquence d'information de longueur  $l$  qui rentre dans le codeur. Soit  $\mathbf{x} = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n}, \dots, x_{l,1}, x_{l,2}, \dots, x_{l,n})$  le mot de code de longueur  $nl$  associé à  $u$ . Soit  $\mathbf{y} = (y_{1,1}, y_{1,2}, \dots, y_{1,n}, \dots, y_{l,1}, y_{l,2}, \dots, y_{l,n})$  la séquence bruitée reçue correspondante. Le décodage à maximum de vraisemblance consiste à déterminer le mot de code  $\mathbf{x}$  ayant le plus de chance d'avoir été transmis à l'instant  $i$ . Ce mot de code vérifie

$$P(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \geq P(\mathbf{x}'|\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \quad (3.5)$$

Sous la condition d'équiprobabilité des mots de code, la règle de Bayes permet d'obtenir l'expression suivante :

$$P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \geq P(\mathbf{y}|\mathbf{x}') \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \quad (3.6)$$

Pour un canal discret sans mémoire, le calcul de ces probabilités conditionnelles est considérablement facilité et ne requiert que la connaissance des probabilités de transition. On a ainsi :

$$P(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^l \prod_{j=1}^n p(y_{i,j}|x_{i,j}) \quad (3.7)$$

On est alors en présence d'une métrique "produit" qui peut être transformée en métrique additive par l'application d'une fonction logarithmique. On obtient :

$$\log(P(\mathbf{y}|\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n \log p(y_{i,j}|x_{i,j}) \quad (3.8)$$

Cette métrique cumulée est au cœur du processus de décodage. On considère le treillis de codage ayant la longueur de la séquence d'information transmise. Pour chaque branche du treillis, on compare les symboles associés aux symboles effectivement reçus et on en tire la métrique correspondante. Le décodage consiste à déterminer un chemin dans le treillis dont la métrique est maximale vis à vis de la séquence reçue. Pour chacun des  $2^{L-1}$  états rencontrés à chaque instant  $i$ , on ne conserve que la branche ayant la plus grande métrique cumulée. L'utilisation de la queue de  $L - 1$  branches au cours de l'encodage garantit l'obtention d'un unique chemin survivant à l'issue du processus. La récupération des bits d'information est immédiate puisqu'à chaque branche du treillis est associé le bit correspondant. On trouve dans [3] une description précise de l'algorithme de Viterbi.

### 3.1.2.6 Performances

Les performances d'un code convolutionnel sont obtenues en établissant la fonction génératrice du code afin de déterminer sa *distribution de poids* (appelée également spectre de distances) : il s'agit de recenser les distances de Hamming et les séquences binaires associées pour tous les chemins qui divergent du chemin zéro à un instant et reconvergent plus tard. Cette recherche se base sur le diagramme d'état du code. La fonction génératrice du code est donnée par l'expression :

$$T(D) = \sum_{l=d_{free}}^{\infty} a_l D^l \quad (3.9)$$

où  $a_l$  désigne le nombre total de chemins incorrects se trouvant à une distance  $l$  du chemin correct. Soit  $P_l$  la probabilité d'un premier événement erreur du décodage de Viterbi dont le chemin associé est à une distance  $l$  du chemin zéro. À l'aide de la borne d'union, on peut montrer que la probabilité d'un premier événement-erreur est bornée comme suit :

$$P(E) < \sum_{l=d_{free}}^{\infty} a_l P_l \quad (3.10)$$

On peut également s'intéresser à la probabilité d'erreur par bit  $P_b$ . Soit  $c_l$  le nombre total de bits d'information "1" sur tous les chemins à une distance  $l$ . Alors

on montre que :

$$P_b < \sum_{l=d_{free}}^{\infty} c_l P_l \quad (3.11)$$

La conclusion essentielle à tirer de ces résultats est que les codes de distance libre maximale sont les meilleurs pour le décodage de Viterbi. Davantage de détails relatifs aux performances des codes convolutionnels figurent dans [3].

### 3.1.2.7 Réduction de la complexité du décodage de Viterbi par la procédure CSA

L'algorithme de Viterbi s'avère très gourmand en calculs, d'autant plus que la longueur de contrainte  $L$  est élevée. En effet, à chaque instant de décodage et pour chaque état du treillis, il faut calculer les 2 métriques associées aux branches convergentes afin de déterminer le chemin survivant. Ceci nécessite donc  $2^{L-1}$  comparaisons ainsi que  $2^L$  additions pour chaque instant de décodage. Cette complexité exponentielle en  $L$  explique pourquoi le décodage de Viterbi n'est efficace que pour des faibles longueurs de contrainte ( $L < 10$ ). Or, pour une certaine catégorie de codes dits doublement complémentaires, la complexité peut être réduite d'un tiers sans perte de performance [13]. Un code doublement complémentaire présente la propriété suivante : chacun des  $n$  additionneurs est relié à la première et à la dernière cellule du registre à décalage. Le code de la figure 3.2 est par exemple doublement complémentaire. On constate alors que les symboles portés par les branches émergeant d'un état du treillis sont complémentaires l'une de l'autre.

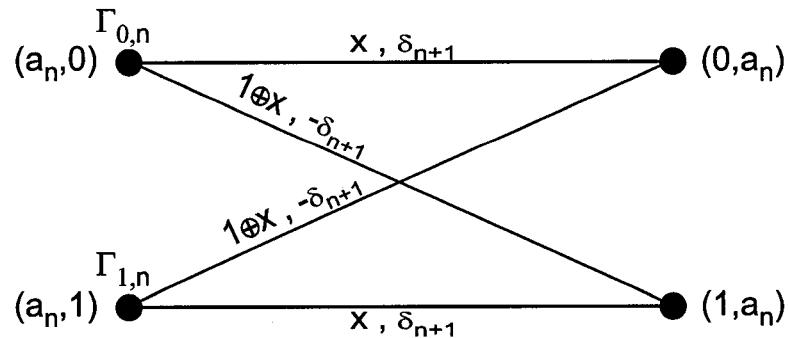


Figure 3.6: Description d'un “papillon”

Cette propriété va faciliter le calcul de la métrique de branche. On peut en effet subdiviser le treillis de codage en sous-treillis élémentaires appelés “papillons”. Ceux-ci présentent l'intérêt suivant : les branches parallèles portent des symboles identiques ; les branches croisées portent également des symboles identiques qui sont les complémentaires de ceux portés par les branches parallèles. La figure 3.6 donne le schéma général d'un “papillon”. Cette complémentarité s'étend aux métriques de branches. On constate alors que pour un papillon, le calcul de la métrique associée à une branche permet d'en déduire les métriques associées aux autres branches : les branches parallèles possèdent une métrique identique qui est l'opposée de la métrique associée aux branches croisées. De plus, l'algorithme d'avancée dans le treillis diffère de la méthode classique (ACS : Add-Compare-Select).

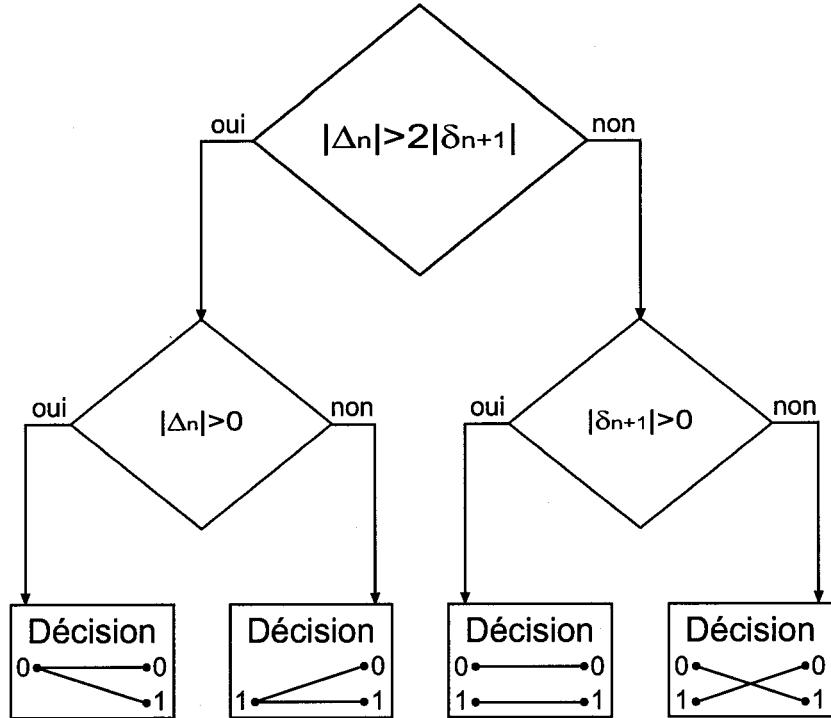


Figure 3.7: Schéma de l'algorithme CSA [13]

Pour un état particulier du treillis, on compare d'abord les métriques globales initiales  $\Gamma_{0,n}$  et  $\Gamma_{1,n}$ . Si leur différence  $\Delta_n = \Gamma_{0,n} - \Gamma_{1,n}$  est trop grande par rapport à la métrique de branche  $\delta_{n+1}$  associée au papillon, on peut considérer que cette métrique ne va pas modifier la métrique globale de matière notable. On pro-

longe alors les chemins issus de l'état dont la métrique est la plus grande. Si au contraire la métrique de branche est susceptible de modifier l'ordre de comparaison des métriques globales, on prolonge un chemin par état. Il s'agit donc d'une procédure Compare-Add-Select (CSA). Le schéma de l'algorithme [13] est détaillé sur la figure 3.7. Il s'agit d'un algorithme optimal, tout comme l'algorithme ACS.

### 3.2 Modulation numérique

Après l'étape du codage de canal discret, il est nécessaire de donner aux symboles codés un format compatible avec la transmission sur le canal. La modulation numérique associe à chaque symbole un signal analogique d'énergie finie. De nombreuses techniques de modulation existent [19]. Elles sont souvent le pendant des modulations analogiques classiques. On trouve ainsi les modulations ASK (Amplitude Shift Keying), PSK (Phase Shift Keying) et FSK (Frequency Shift Keying). La modulation QAM (Quadrature Amplitude Modulation) est hybride (amplitude/phase). Le choix d'une modulation particulière est fonction des contraintes du canal telles que l'efficacité spectrale et la puissance requise, ainsi que des performances désirées. Ces modulations sont représentées sous forme de constellations. La dimension de l'espace de représentation dépend de la dimension de la modulation. On se limite généralement à 2 dimensions. Le système le plus simple est la modulation binaire. Elle consiste à associer au symbole 0 un signal  $s_0(t)$  et au symbole 1 un signal  $s_1(t)$ .

Dans ce mémoire nous allons utiliser de manière générale la modulation M-PSK, où  $M$  représente le nombre de signaux de la constellation. En pratique  $M = 2^b$  où  $b$  désigne le nombre de symboles associé à un signal. On utilise couramment :  $M = 2, 4, 8$ . La constellation associée à la modulation 8PSK est représentée sur la figure 3.8.  $E_s$  désigne l'énergie de la constellation. Pour une modulation M-PSK, le signal identifié par le nombre  $k \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$  a pour expression :

$$s_k(t) = \frac{2E_s}{T_s} \exp(j \frac{2k\pi}{M} t) \quad (3.12)$$

où  $T_s$  représente la durée d'un symbole.

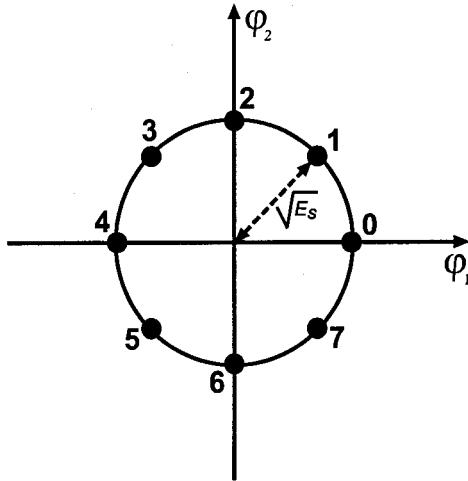


Figure 3.8: Constellation 8PSK

### 3.3 Modulation codée en treillis

#### 3.3.1 Motivations et principe

Comme nous l'avons vu précédemment, le codage de canal discret ajoute de la redondance à l'information originale. Cette protection a cependant un prix à payer en terme de largeur de bande. Par exemple un code convolutionnel de taux  $1/n$  nécessite une expansion de largeur de bande d'un facteur  $n$ . Lorsqu'on dispose d'un canal de largeur de bande limitée, il devient primordial de réduire cette expansion spectrale. Une solution est d'utiliser une modulation d'ordre élevé qui offre une bonne efficacité spectrale (M-PSK, QAM). Le gain spectral se fait alors au détriment de la puissance requise, car la distance entre les symboles de la constellation est réduite. Si les opérations de codage et de modulation sont effectuées de manière indépendante, il est nécessaire d'utiliser des codes très puissants (de longueur de contrainte très grande) pour compenser la perte introduite par la modulation. Ungerboeck a émis en 1982 [31] l'idée d'associer codage et modulation au sein d'une même opération baptisée "modulation codée". Le principe repose sur la maximisation de la distance euclidienne minimale entre les signaux. Cette maximisation s'obtient grâce à une assignation par partition d'ensemble. Elle consiste à subdiviser la constellation de signaux originale en sous-ensembles de manière à maximiser la distance euclidienne entre les signaux. Un exemple est donné pour la

modulation 8PSK à la figure 3.9.

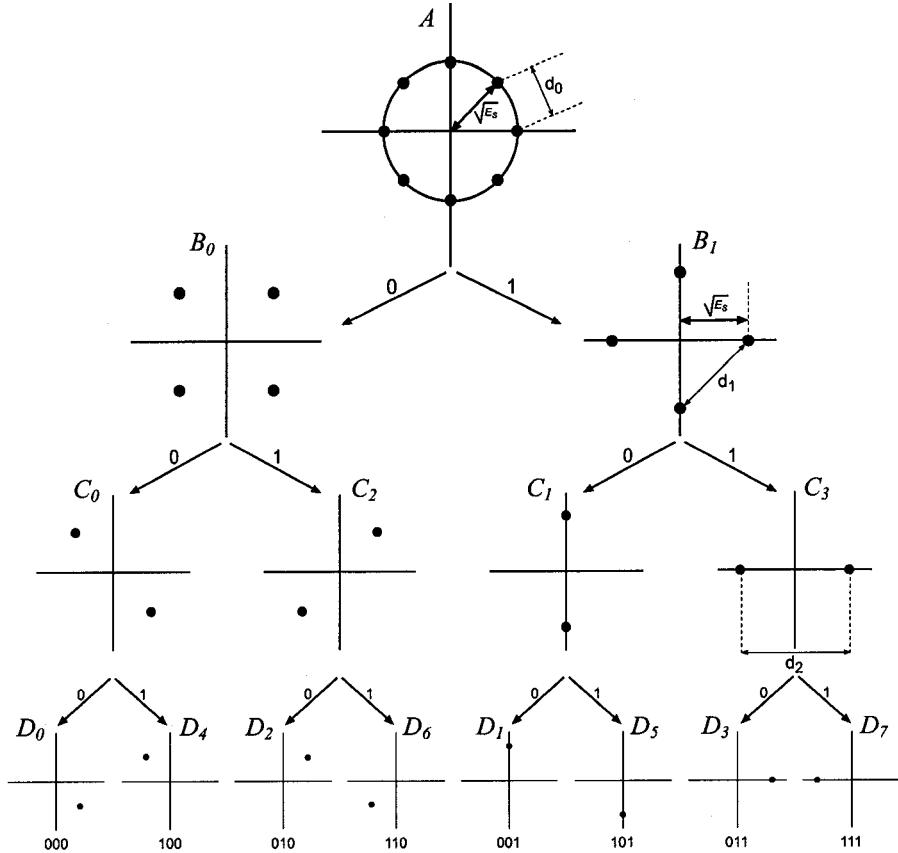


Figure 3.9: Partition d'ensemble pour la constellation 8PSK

Dans la constellation originale notée  $A$ , la distance euclidienne minimale est  $d_0 = \sqrt{(2 - \sqrt{2})E_s}$ . Après partition en deux ensembles  $B_0$  et  $B_1$ , cette distance devient  $d_1 = \sqrt{2E_s}$ . La partition suivante en 4 ensembles  $C_0, C_2, C_1$  et  $C_3$  permet d'obtenir  $d_2 = 2\sqrt{E_s}$ . Chaque partition augmente donc la distance euclidienne minimale. Cette approche nous amène à définir la modulation codée en treillis. Elle consiste à associer l'assignation par partition d'ensemble avec des codes en treillis tels que les codes convolutionnels. Le processus de codage est le suivant. A un instant, les bits d'information à coder sont répartis en 2 groupes :  $k_1$  bits codés et  $k_2$  bits non codés. Les bits codés passent dans un encodeur binaire qui fournit  $n$  symboles codés. Ces symboles sélectionnent un sous-ensemble parmi les  $2^n$  définis par la partition d'ensemble. Les bits non codés viennent alors sélectionner un signal du sous-ensemble parmi les  $2^{k_2}$  disponibles. Le schéma associé à la modulation

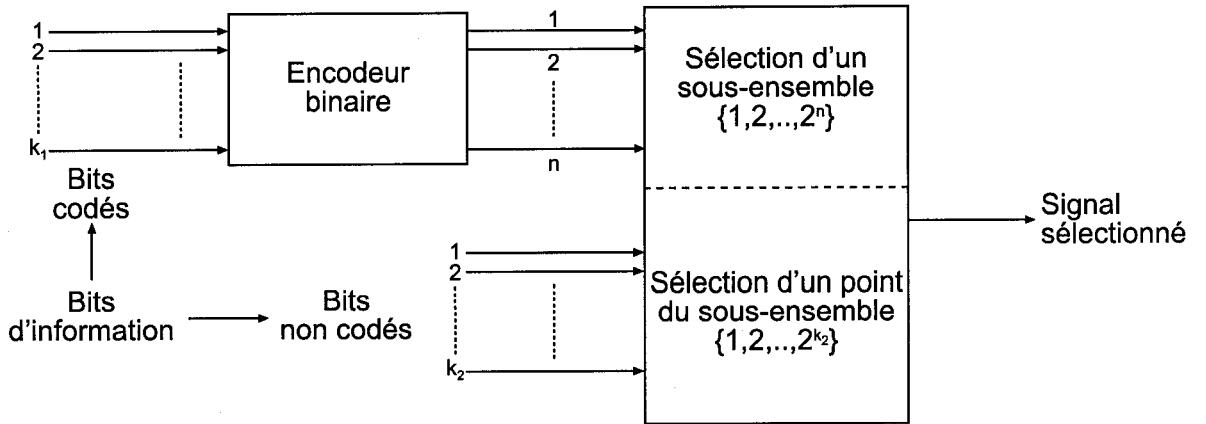


Figure 3.10: Principe de la modulation codée en treillis

codée est représenté sur la figure 3.10.

### 3.3.2 Approche retenue dans notre étude

Nous n'avons pas appliqué directement dans notre étude un processus de partition d'ensembles pour générer le trellis. Nous avons plutôt raisonné à partir d'une matrice génératrice dont les éléments sont issus de la constellation utilisée (par exemple l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3\}$  pour une modulation QPSK). Le codage est alors analogue au codage convolutionnel et consiste à effectuer à chaque instant le produit matriciel du registre d'entrée par la matrice génératrice modulo l'ordre de la modulation . Une description complète du processus d'encodage et de décodage figure dans le chapitre 4. Nous n'allons pas l'aborder ici.

### 3.4 Conclusion

Nous avons survolé tout au long de ce chapitre les principes du codage de canal en mettant l'accent sur les techniques de codage convolutionnel et modulation codée. Il reste à présent à associer le codage et l'utilisation de plusieurs antennes pour aboutir au codage spatio-temporel, comme va le montrer le prochain chapitre.

## CHAPITRE 4

### CODAGE SPATIO-TEMPOREL

Nous avons décrit jusqu'à présent des principes très généraux relatifs au codage de canal. Nous allons maintenant aborder le sujet principal de ce mémoire, à savoir le codage spatio-temporel (CST). Après un rappel des différentes techniques de diversité, nous nous intéresserons aux systèmes multi-antennes puis au codage spatio-temporel associé. Nous aborderons ensuite les critères de performance des CST avant de décrire le principe des CST en blocs et des CST en treillis.

#### 4.1 Techniques de diversité

La notion de diversité est étroitement liée au phénomène multi-chemins évoqué dans le chapitre 2. Comme nous l'avons vu, le signal qui parvient au récepteur est régulièrement soumis à de fortes variations résultant de la transmission multi-chemins. Pour combattre ce phénomène, l'idée est de fournir différentes répliques du signal au récepteur en misant sur le fait que ces répliques ne subiront pas les mêmes atténuations simultanément. Cette notion de diversité est connue depuis très longtemps : les premières expériences sur ce sujet ont eu lieu dès 1927 [19]. On peut répertorier de nombreuses formes de diversité en fonction de la ressource exploitée (temps, fréquence, espace,...). Le choix d'une technique dépend des caractéristiques du canal et des contraintes physiques (nombre d'antennes).

##### 4.1.1 Diversité fréquentielle

La diversité fréquentielle consiste à transmettre le message en utilisant plusieurs fréquences subissant des fluctuations indépendantes. Pour assurer une parfaite décorrélation entre les différentes branches de diversité, il faut que la séparation entre chaque fréquence soit suffisante. On considère en pratique qu'un écart fréquentiel de plusieurs bandes de cohérence est suffisant. Concrètement, si la bande de cohérence est de 500 kHz pour un canal radio-mobile, on gardera une séparation de 1 à 2 MHz entre chaque porteuse utilisée.

#### 4.1.2 Diversité temporelle

Il y a dualité entre diversités temporelle et fréquentielle. Ainsi, la diversité temporelle repose sur la transmission de plusieurs répliques du signal en utilisant le même canal fréquentiel. Cette fois, la contrainte est de conserver une séparation de plusieurs temps de cohérence. Ce type de diversité s'applique donc essentiellement aux transmissions soumises à l'étalement Doppler. On peut aussi assimiler les techniques d'entrelacement à de la diversité temporelle dans la mesure où le mélange des symboles codés vise à remédier aux salves d'erreurs.

#### 4.1.3 Diversité spatiale

La diversité spatiale fut historiquement la première à être expérimentée car elle est relativement simple à implémenter. Elle consiste à employer plusieurs antennes à l'émission et à la réception. On obtient ainsi plusieurs canaux élémentaires sans expansion de largeur de bande. La seule contrainte est de conserver une séparation suffisante entre chaque antenne afin de garantir une parfaite décorrélation entre les signaux. Nous allons décrire plus en détails cette technique dans la section suivante.

### 4.2 Systèmes multi-antennes

Les systèmes multi-antennes ou MIMO (Multiple Input Multiple Output) sont l'application pratique de la diversité spatiale.

#### 4.2.1 Modèle utilisé

Nous allons commencer par décrire le système et préciser les hypothèses relatives aux différentes variables impliquées. Considérons le dispositif de la figure 4.1. Il comprend un émetteur muni de  $N_t$  antennes et un récepteur muni de  $N_r$  antennes. Plaçons nous à l'instant de transmission  $t$ . Chaque canal élémentaire entre l'antenne  $i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, N_t\}$  et l'antenne  $j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N_r\}$  est caractérisé par un coefficient d'atténuation  $\alpha_{ij}(t)$  qui modélise l'atténuation due aux évanouissements. On suppose que les  $\alpha_{ij}$  sont des échantillons indépendants d'une variable aléatoire Gaussienne complexe de moyenne nulle et de variance 0.5 par dimension. L'hypothèse d'indépendance est valide dès lors que la séparation entre chaque antenne est

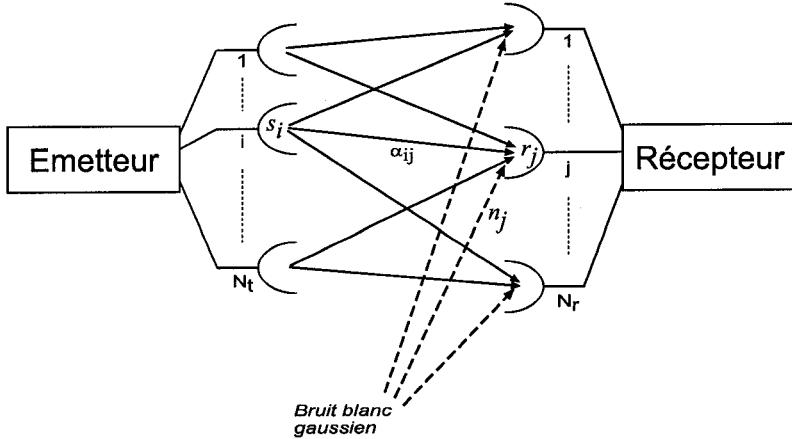


Figure 4.1: Système multi-antennes

supérieure à  $\lambda/2$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la porteuse utilisée pour la transmission. Le signal  $r_j(t)$  reçu à l'antenne  $j$  est la somme des signaux  $s_i(t)$  provenant des  $N_t$  antennes émettrices pondérés par les  $\alpha_{ij}$  à laquelle se rajoute un bruit blanc Gaussien additif  $n_j(t)$ . Les  $n_j$  sont des échantillons indépendants d'une variable aléatoire Gaussienne complexe de moyenne nulle et de variance  $N_0/2$  par dimension.

On a donc :

$$r_j(t) = \sum_{i=1}^{N_t} \alpha_{ij}(t) \cdot s_i(t) + n_j(t) \quad (4.1)$$

Suite aux descriptions du chapitre 2, nous considérons ici un canal radio-mobile caractérisé par des évanouissements plats en fréquences et sélectifs en temps. Ceci nous amène à distinguer 2 types d'évanouissements :

- Les évanouissements quasi-statiques : chaque  $\alpha_{ij}$  est supposé constant pendant la transmission d'une trame d'information.
- Les évanouissements rapides : les  $\alpha_{ij}$  changent à chaque instant.

Cette distinction est très grossière et vise à simplifier le contexte des simulations que nous allons effectuer ultérieurement. Dans la réalité, on a plutôt une situation intermédiaire qui est complexe à analyser. On va supposer en outre que le récepteur est capable de déterminer les coefficients  $\alpha_{ij}$  grâce à l'utilisation de séquences d'entraînement. Cette hypothèse est réaliste dans le cas d'évanouissements quasi-

statiques. Elle l'est beaucoup moins dans le cas d'évanouissements rapides. Nous avons également envisagé le cas du canal Gaussien sans évanouissements qui sera évoqué lors des simulations au chapitre 5.

On considère que la puissance totale d'émission  $P_t$  est constante et indépendante du nombre d'antennes émettrices. Chaque signal  $s_i(t)$  a donc pour puissance :  $P_t/N_t$ . La puissance totale parvenant à chaque antenne réceptrice en l'absence d'évanouissements est alors égale à  $P_t$ .

#### 4.2.2 Capacité d'un système multi-antennes

La capacité des systèmes multi-antennes pourrait faire l'objet d'un mémoire entier. Nous allons nous limiter ici à donner une expression générale de la capacité. On pourra se référer à [11], [30] pour les détails de la démonstration. On peut représenter les coefficients  $\alpha_{ij}$  sous la forme d'une matrice de canal  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1N_r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2N_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{iN_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{N_t 1} & \alpha_{N_t 2} & \dots & \alpha_{N_t j} & \dots & \alpha_{N_t N_r} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

On montre alors que la capacité exprimée sous forme d'efficacité spectrale est donnée par la formule suivante :

$$C = \log_2 \left( \det \left[ \mathbf{I}_{N_r} + \left( \frac{\text{SNR}_{rec}}{N_t} \right) \cdot \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} \right] \right) \text{ bits/s/Hz} \quad (4.3)$$

où  $\text{SNR}_{rec}$  désigne le rapport signal à bruit par antenne réceptrice. La signification de ce paramètre est explicitée dans la section 5.1.3.

Lionel Scremin [22] a étudié plus en détails dans son mémoire la capacité des systèmes multi-antennes. Il s'est notamment intéressé aux variations de l'efficacité spectrale en fonction du SNR et du nombre d'antennes à l'émission et à la réception. On pourra notamment retenir que lorsque  $\mathbf{H} = \mathbf{I}_N$ , c'est-à-dire que  $N_t = N_r = N$

et que les différents canaux de transmission sont orthogonaux, la capacité est :

$$C = N \cdot \log_2 \left( 1 + \left( \frac{\text{SNR}_{rec}}{N} \right) \right) \text{ bits/s/Hz} \quad (4.4)$$

Dans ce cas :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = \frac{\text{SNR}_{rec}}{\ln(2)} \text{ bits/s/Hz} \quad (4.5)$$

La capacité est alors une fonction linéaire du  $\text{SNR}_{rec}$  et non logarithmique comme dans le cas d'une seule antenne. Naturellement l'hypothèse d'orthogonalité des canaux est plutôt utopique mais elle nous donne un aperçu intéressant des performances potentielles des systèmes multi-antennes.

### 4.3 Codage spatio-temporel

Les systèmes multi-antennes peuvent être utilisés tels quels pour des télécommunications sans-fil, c'est-à-dire sans introduire le moindre codage de canal en amont de l'émetteur. On désigne habituellement ce type de systèmes par l'acronyme MIMO (Multiple Input Multiple Output). De nombreuses possibilités ont été envisagées dans [1], [35], [36], [12]. L'idée du codage spatio-temporel est de dépasser le stade de la diversité spatiale en lui associant de la diversité temporelle sous forme de codage correcteur d'erreurs. On espère ainsi bénéficier des avantages des 2 types de diversité.

#### 4.3.1 Principe général

Comme le montre la figure 4.2, un codeur spatio-temporel se compose de 3 organes principaux :

- Un codeur de canal : il ajoute de la redondance à l'information initiale.
- Un répartiteur : il distribue les symboles codés issus du codeur aux différentes antennes.
- Un modulateur sur chaque branche terminale : il associe à tout symbole codé un signal analogique issu d'une constellation qui sera transmis par l'antenne associée.

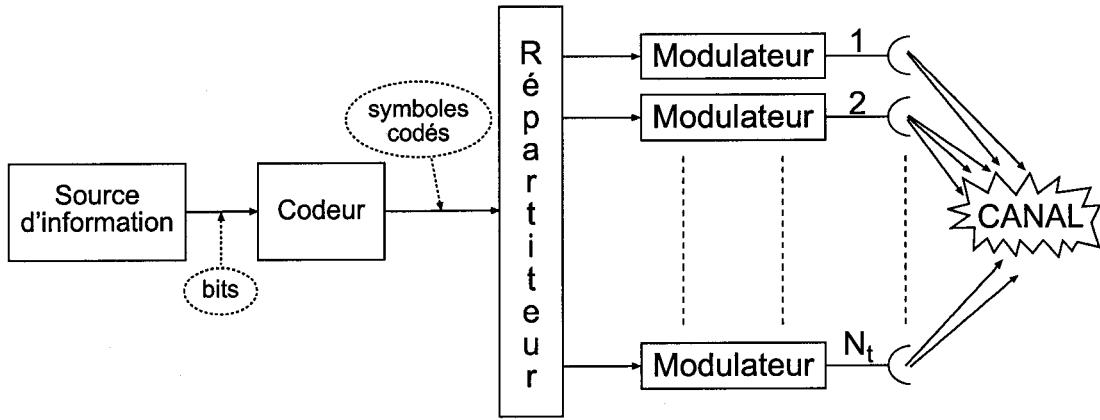


Figure 4.2: Codeur spatio-temporel

On peut remarquer que la modulation pourrait tout aussi bien être effectuée avant la répartition.

Au récepteur, chaque antenne reçoit la somme des signaux issus des  $N_t$  antennes émettrices pondérés par les coefficients  $\alpha_{ij}$  et du bruit blanc Gaussien. Le décodeur considère l'ensemble des  $N_r$  signaux complexes résultants pour déterminer la séquence d'information la plus vraisemblablement transmise. La figure 4.3 décrit le décodage. De manière générale, le décodage consiste à minimiser la métrique :

$$\Delta(t) = \sum_{j=1}^{N_r} \left| r_j(t) - \sum_{i=1}^{N_t} \alpha_{ij} \hat{s}_i(t) \right|^2 \quad (4.6)$$

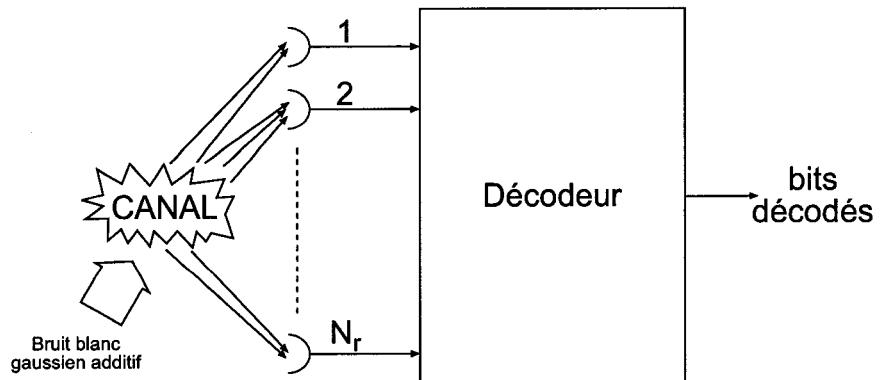


Figure 4.3: Décodeur spatio-temporel

où  $\hat{s}_i(t)$  représente le signal “estimé” transmis par l’antenne émettrice  $i$  à l’instant  $t$ . Il s’agit d’un décodage à maximum de vraisemblance. On peut noter ici qu’aucune quantification du canal n’est envisagée. Le décodeur se base sur les valeurs complexes des signaux reçus ainsi que sur la connaissance du canal et du code utilisé. Examinons à présent les critères de performance théoriques des CST.

#### 4.3.2 Critères de performance

Vahid Tarokh est considéré comme le “père” des CST. Il a en effet été le premier, en collaboration avec d’autres chercheurs, à en donner les principes tout en proposant des critères de performance. Nous nous référerons fréquemment à ses travaux par la suite. Dans [29], il définit des critères qui sont à la base de la recherche de CST.

Considérons la transmission d’une trame de  $N_t l$  symboles codés. Chacune des  $N_t$  antennes émettrices transmet  $l$  symboles de cette trame. Soit  $\mathbf{c}$  le mot de code correspondant de longueur  $N_t \times l$ , avec  $l \gg N_t$ . On a alors :

$$\mathbf{c} = (c_1^1, c_1^2, \dots, c_1^{N_t}, c_2^1, c_2^2, \dots, c_2^{N_t}, \dots, c_l^1, c_l^2, \dots, c_l^{N_t})$$

Supposons que le décodeur fasse une erreur en décidant que le mot  $\mathbf{e} \neq \mathbf{c}$  a été transmis avec :

$$\mathbf{e} = (e_1^1, e_1^2, \dots, e_1^{N_t}, e_2^1, e_2^2, \dots, e_2^{N_t}, \dots, e_l^1, e_l^2, \dots, e_l^{N_t})$$

En prévision des développements suivants, nous allons définir la matrice  $\mathbf{B}(\mathbf{c}, \mathbf{e})$  qui représente le mot de code “différence” entre les versions modulées de  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{e}$ . Soit  $F$  la fonction de modulation qui associe à un symbole codé le signal modulé complexe correspondant. On a alors :

$$\mathbf{B}(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} F(c_1^1) - F(e_1^1) & F(c_2^1) - F(e_2^1) & \dots & F(c_l^1) - F(e_l^1) \\ F(c_1^2) - F(e_1^2) & F(c_2^2) - F(e_2^2) & \dots & F(c_l^2) - F(e_l^2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(c_1^{N_t}) - F(e_1^{N_t}) & F(c_2^{N_t}) - F(e_2^{N_t}) & \dots & F(c_l^{N_t}) - F(e_l^{N_t}) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Posons  $\mathbf{A}(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \mathbf{B}(\mathbf{c}, \mathbf{e}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{c}, \mathbf{e})^\dagger$ .  $\mathbf{A}(\mathbf{c}, \mathbf{e})$  est une matrice hermitienne définie positive qui possède donc des valeurs propres réelles positives. Notons  $r$  le rang de  $\mathbf{A}(\mathbf{c}, \mathbf{e})$  et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  ses valeurs propres non nulles.

Dans [29], différents critères de performance sont établis selon le type d'évanouissements.

#### 4.3.2.1 Évanouissements quasi-statiques

Lorsque les coefficients d'atténuation  $\alpha_{ij}$  sont constants durant une trame de longueur  $l$ , on a la borne supérieure suivante sur la probabilité que le décodeur décide en faveur du mot de code  $\mathbf{e}$  au lieu du mot de code  $\mathbf{c}$  [29] :

$$P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e}) \leq \left( \left( \prod_{i=1}^r \lambda_i \right)^{1/r} \left( \frac{E_s}{4N_t N_0} \right) \right)^{-rN_r} \quad (4.8)$$

Rappelons ici que  $E_s/N_t$  représente l'énergie moyenne de la constellation utilisée et que  $N_0$  représente la variance totale du bruit. On peut alors définir :

- Le *gain en diversité*  $rN_r$  : il détermine la pente de la courbe de performance.
- Le *gain en codage*

$$\left( \prod_{i=1}^r \lambda_i \right)^{1/r}$$

Il détermine le décalage de la courbe de performance par rapport à un système non codé offrant le même gain en diversité.

Ces 2 gains sont illustrés sur la figure 4.4. On peut alors énoncer 2 critères afin de minimiser la probabilité d'erreur par trame [29] :

- Le *critère du rang* : il consiste à maximiser sur l'ensemble des paires de mots de codes distincts le rang  $r$  de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{c}, \mathbf{e})$  qui est également le rang de  $\mathbf{B}(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ . La diversité maximale  $N_t N_r$  est atteinte pour  $r = N_r$ .
- Le *critère du déterminant* : il consiste à maximiser le gain de codage  $(\prod_{i=1}^r \lambda_i)^{1/r}$  sur l'ensemble des paires de mots de code distincts. Lorsque la diversité maximale est déjà atteinte, le critère se ramène à une maximisation du déterminant de la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ , d'où son nom.

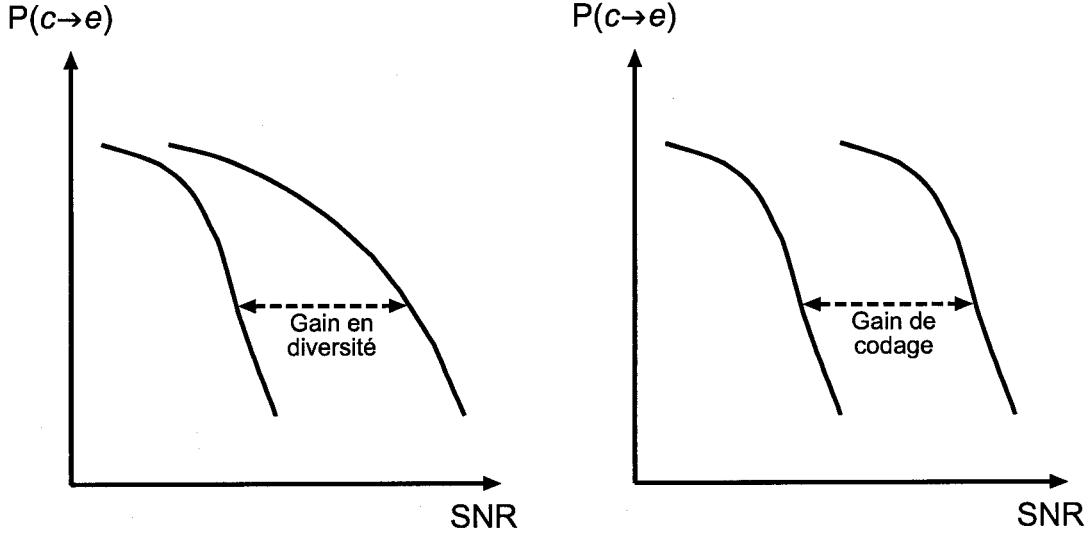


Figure 4.4: Gains en diversité et en codage

Le critère du rang est considéré comme le plus important. Il traduit en effet directement l'apport de la diversité spatiale. Le gain de codage est une notion beaucoup plus générale qui caractérise tout système de codage. Il est par exemple fonction de la longueur de contrainte dans le cas des codes convolutionnels. Dans le cadre de la recherche de bons CST, il est recommandé la plupart du temps de privilégier le critère du rang avant de maximiser le gain de codage. Nous verrons cependant ultérieurement quelques contre-exemples à cette théorie.

#### 4.3.2.2 Évanouissements rapides

On considère à présent que les coefficients  $\alpha_{ij}$  changent à chaque instant. Notons  $\mathbf{c}_t = (c_t^1, c_t^2, \dots, c_t^{N_t})^T$  et  $\mathbf{e}_t = (e_t^1, e_t^2, \dots, e_t^{N_t})^T$  les vecteurs colonnes correspondant aux symboles transmis à l'instant  $t$ ,  $t \in \{1, 2, \dots, l\}$ . Soit  $\nu(\mathbf{c}, \mathbf{e})$  l'ensemble des instants  $t$  tels que  $|\mathbf{F}(\mathbf{c}_t) - \mathbf{F}(\mathbf{e}_t)| \neq 0$ , avec  $\mathbf{F}(\mathbf{c}_t) = (F(c_t^1), F(c_t^2), \dots, F(c_t^{N_t}))^T$ . Soit  $d$  le cardinal de  $\nu(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ . On montre alors [29] que :

$$P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e}) \leq \left( \left( \prod_{t \in \nu(\mathbf{c}, \mathbf{e})} |\mathbf{F}(\mathbf{c}_t) - \mathbf{F}(\mathbf{e}_t)|^2 \right)^{1/d} \left( \frac{E_s}{4N_t N_0} \right) \right)^{-N_r d} \quad (4.9)$$

On peut alors identifier :

- Le *gain en diversité*  $N_r d$  : il détermine la pente de la courbe de performances

- Le *gain de codage*

$$\left( \prod_{t \in \nu(c,e)} |\mathbf{F}(\mathbf{c}_t) - \mathbf{F}(\mathbf{e}_t)|^2 \right)^{1/d}$$

On en déduit les critères de performances suivants [29]:

- Le *critère de la distance* : il consiste à maximiser  $d$ , le nombre de différences entre colonnes distinctes de mots de code parmi l'ensemble des paires de mots de code.
- Le *critère du produit* : il consiste à maximiser le gain de codage sur l'ensemble des paires distinctes de mots de code.

Comme dans le cas quasi-statique, le critère de la distance est à privilégier dans le cadre d'une recherche de codes.

A présent, nous allons examiner plus en détails les techniques de codage et de décodage. A l'instar du codage strictement temporel, on peut distinguer 2 grandes classes de CST : les CST en blocs et les CST en treillis.

#### 4.3.3 CST en blocs

Le principe des CST en blocs par design orthogonal a été introduit dans [27]. On considère une matrice orthogonale  $\mathbf{G}$  de dimensions  $(p \times N_t)$ . Les entrées de  $\mathbf{G}$  sont des combinaisons linéaires des variables  $x_1, x_2, \dots, x_k$  et de leurs valeurs conjuguées. La matrice orthogonale  $\mathbf{G}$  est telle que, pour 2 colonnes  $\mathbf{G}_i$  et  $\mathbf{G}_j$ ,  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, N_t\}$  :  $\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j^* = \mathbf{0}$ . Supposons que la constellation de signaux utilisés pour la transmission possède  $M = 2^b$  signaux. A un instant,  $kb$  bits d'information entrent dans le codeur et viennent sélectionner  $k$  signaux  $s_1, s_2, \dots, s_k$  issus de la constellation. Pour connaître les symboles à transmettre, on remplace dans  $\mathbf{G}$  chaque  $x_i$  par  $s_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . On obtient ainsi une matrice  $\mathbf{C}$  qui a la signification suivante : à l'instant  $t$ ,  $t \in \{1, 2, \dots, p\}$ , le signal  $c_t^j$  est transmis par l'antenne  $j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N_t\}$ . La figure 4.5 récapitule le principe du codage qui est général quelque soit la modulation utilisée.

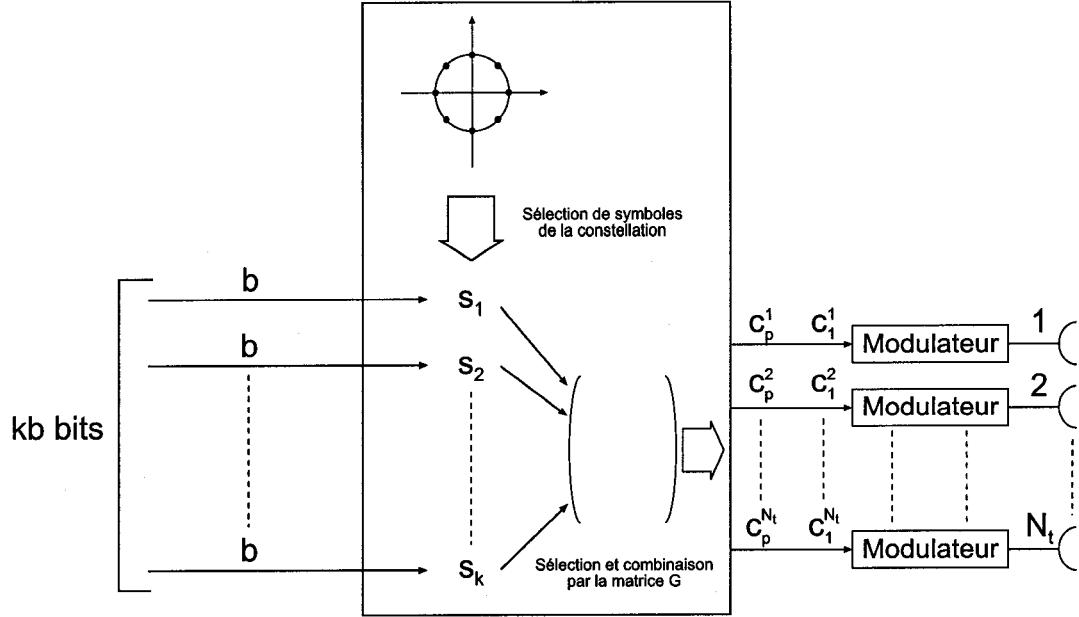


Figure 4.5: Codage spatio-temporel par blocs

L'efficacité spectrale de ce type de codage est au plus  $kb/p$  bits/s/Hz, comme le démontre le corollaire 3.3.1 de [29]. On peut également définir le rapport d'efficacité  $k/p$  (sans unité). Il représente le rapport entre l'efficacité spectrale du codage et l'efficacité maximale potentielle qui est de  $b$  bits/s/Hz. L'exemple suivant est tiré de [27]. Les paramètres sont :  $N_t = 3$ ,  $p = 4$ ,  $k = 3$ .

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \frac{x_3}{\sqrt{2}} \\ -x_2^* & x_1^* & \frac{x_3}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{-x_1-x_1^*+x_2-x_2^*}{2} \\ \frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & -\frac{x_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{x_2+x_2^*+x_1-x_1^*}{2} \end{pmatrix} \implies x_i = s_i \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \frac{s_3}{\sqrt{2}} \\ -s_2^* & s_1^* & \frac{s_3}{\sqrt{2}} \\ \frac{s_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{s_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{-s_1-s_1^*+s_2-s_2^*}{2} \\ \frac{s_3^*}{\sqrt{2}} & -\frac{s_3^*}{\sqrt{2}} & \frac{s_2+s_2^*+s_1-s_1^*}{2} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Le rapport d'efficacité est ici de  $3/4$ . La plupart des designs définis jusqu'à présent ont un rapport d'efficacité de  $1/2$ , le rapport maximal théorique étant égal à  $1$ . Le décodage exploite l'orthogonalité de la matrice  $\mathbf{G}$ . On peut en effet montrer qu'un simple traitement linéaire au récepteur suffit pour effectuer le décodage à maximum de vraisemblance. L'art de la recherche de bons codes consiste alors à

trouver des matrices orthogonales qui vérifient les critères de performance (essentiellement le critère du rang). Pour plus de détails sur le décodage et le design des CST en blocs, nous invitons le lecteur à consulter [27] et [28].

#### 4.3.4 CST en treillis

Nous allons maintenant aborder le sujet principal de ce mémoire, à savoir les CST basés sur la modulation codée en treillis que l'on identifiera par l'acronyme CST-MCT dans la suite du développement. Tarokh a été l'instigateur des CST-MCT dans [29].

##### 4.3.4.1 Principe

Comme pour les CST en blocs, l'idée est d'associer chaque symbole codé issu du codeur à une antenne émettrice. On considère donc un système de modulation codée en treillis branché à un ensemble d'antennes émettrices. Suite à la remarque de la section 3.3.2, nous rappelons que, pour notre travail, nous avons employé une approche légèrement différente de celle d'Ungerboeck : nous créons en effet le treillis à partir d'une matrice génératrice et non d'un processus de partition d'ensemble. Cette différence va être clarifiée par la description suivante illustrée grâce à la figure 4.6.

A un instant,  $R$  bits d'information parviennent au codeur. Une matrice génératrice  $\mathbf{G}$  prend en compte ces bits ainsi que l'état du codeur pour livrer en sortie  $N_t$  symboles issus de la constellation utilisée. Chaque symbole est modulé afin d'obtenir un signal analogique transmis par l'antenne associée.

Nous allons introduire à ce stade quelques notations nécessaires à la description du processus de codage. Soit  $k$  l'instant discret de l'arrivée des  $R$  bits d'information que l'on va représenter par le vecteur  $\mathbf{u} = (u_k^1, u_k^2, \dots, u_k^R)$ . Soit  $Q$  le nombre d'instants pris en compte par le codeur, à savoir l'instant présent ainsi que les  $Q - 1$  instants précédents qui constituent la "mémoire". On peut assimiler  $Q$  à la longueur de contrainte du code. A l'instant  $k$ , les bits d'information sont rentrés dans un registre à décalage  $\mathbf{r}$  de longueur  $QR$  et complètent ainsi les  $(Q - 1)R$  bits identifiant l'état du codeur. La matrice génératrice  $\mathbf{G}$  est de dimensions  $(QR \times N_t)$ . Ses éléments sont des symboles issus d'une constellation. Dorénavant, nous allons

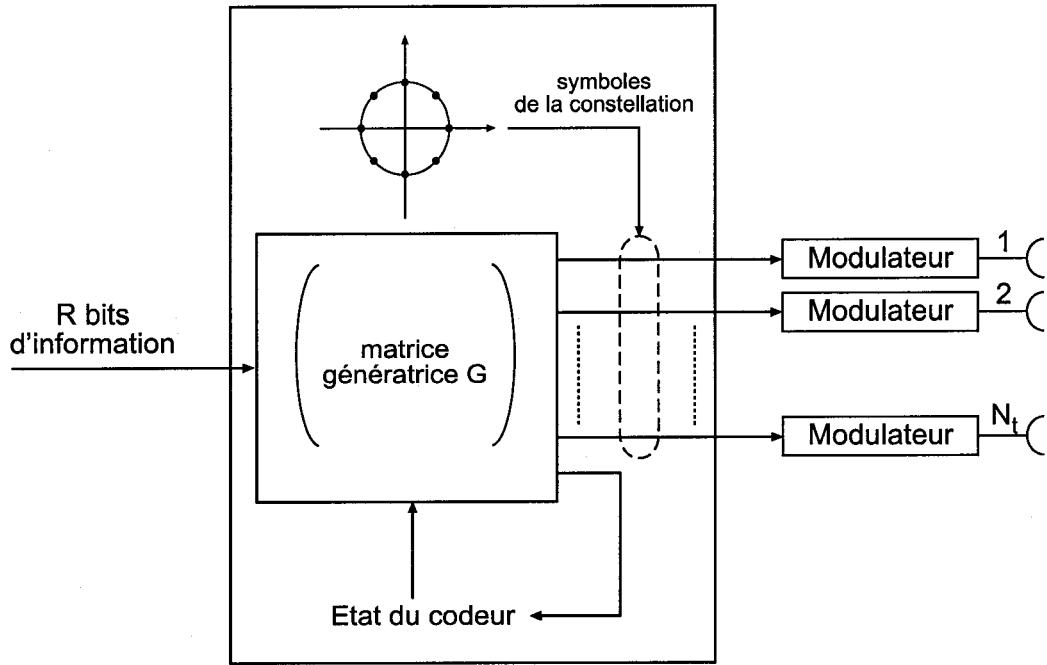


Figure 4.6: Codage spatio-temporel en treillis

uniquement envisager une constellation M-PSK, où  $M = 2^b$  est l'ordre de la modulation. Le vecteur  $\mathbf{s}$  des symboles codés s'obtient en effectuant le produit du contenu du registre  $\mathbf{r}$  par la matrice  $\mathbf{G}$  tel que l'illustre la formule (4.11).

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{G} \quad \text{modulo } M \quad (4.11)$$

avec

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_1^1 & g_1^2 & \dots & g_1^{N_t} \\ g_2^1 & g_2^2 & \dots & g_2^{N_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{QR}^1 & g_{QR}^2 & \dots & g_{QR}^{N_t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = (u_k^R, \dots, u_k^2, u_k^1, u_{k-1}^R, \dots, u_{k-1}^2, u_{k-1}^1, \dots, u_{k-Q+1}^R, \dots, u_{k-Q+1}^2, u_{k-Q+1}^1)$$

$$\mathbf{s} = (s_k^1, s_k^2, \dots, s_k^{N_t})$$

Le produit s'opère modulo  $M$  afin que chaque symbole obtenu appartienne bien

à la constellation. Pour tout  $i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, N_t\}$ , le symbole  $s_k^i$  est modulé puis transmis par l'antenne  $i$ . Parmi les  $R$  bits d'information rentrés,  $u_k^1$  est le bit le plus significatif et  $u_k^R$  le bit le moins significatif. Avec cette hiérarchie, la lecture des transitions et des états du treillis correspondant se fait de droite à gauche. A l'instant  $k + 1$ ,  $R$  bits sont rentrés à la gauche du registre, faisant sortir du même coup les  $R$  bits les plus à droite. Avec cette approche, le nombre d'états du codeur est  $S = 2^{(Q-1)R}$  et ne peut donc être qu'une puissance de  $2^R$ . Il est possible d'obtenir un nombre intermédiaire d'états en mettant certaines lignes de  $\mathbf{G}$  à 0. Si c'est le cas ultérieurement comme dans l'exemple suivant, on ne fera pas figurer ces lignes nulles.

Comme leur nom le fait remarquer, les CST en treillis sont associés à un treillis qui est un outil extrêmement utile, à l'instar du treillis associé aux codes convolutionnels strictement temporels. Il traduit en effet la succession des états du codeur en fonction des bits d'entrée et intervient dans les processus de codage et de décodage. Il caractérise à lui seul le code. Ainsi, Tarokh a construit dans [29] des codes en se basant exclusivement sur des propriétés du treillis. À titre d'exemple, nous allons étudier plus en détails un de ces codes. Ses paramètres sont :  $R = 2$ ,  $Q = 3$ ,  $N_t = 2$ ,  $M = 4$ ,  $S = 8$ . Suite à la remarque précédente, la matrice  $\mathbf{G}$  est de dimensions  $(6 \times 2)$  mais la dernière ligne est mise à 0 afin d'avoir effectivement 8 états. On ne va donc conserver que les 5 premières lignes pour la représentation.

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Le treillis s'obtient très simplement à partir de la matrice génératrice. Il décrit toutes les transitions possibles entre un état et son successeur en fonction des bits d'entrée. On va le représenter en faisant figurer à côté de chaque état initial les symboles codés associés à une transition. La lecture des sorties se fait de gauche à droite et correspond aux transitions lues de haut en bas. Cherchons par exemple le vecteur  $\mathbf{s}$  des sorties codées pour l'état 100 lorsque le vecteur des bits rentrés est

$\mathbf{u} = (1, 1)$ . Le registre associé est  $\mathbf{r} = (1, 1, 0, 0, 1)$  et le vecteur des symboles de sortie est donc  $\mathbf{s} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{G}$  modulo 4. On trouve ainsi :  $\mathbf{s} = (2, 1)$ . L'état successeur correspond aux 3 premiers bits du registre préalablement décalé de  $R = 2$  bits vers la gauche. On obtient ici l'état 011. Les différentes transitions issues de l'état 100 sont représentées à la figure 4.7.

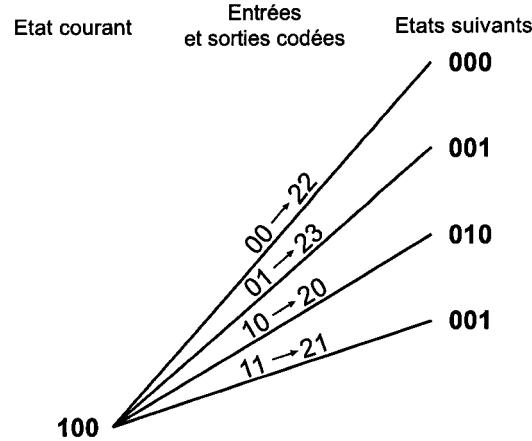


Figure 4.7: Transitions issues de l'état 100 pour la matrice  $\mathbf{G}$  de l'équation (4.12)

En programmant ce principe de construction, on aboutit au treillis de la figure 4.8.

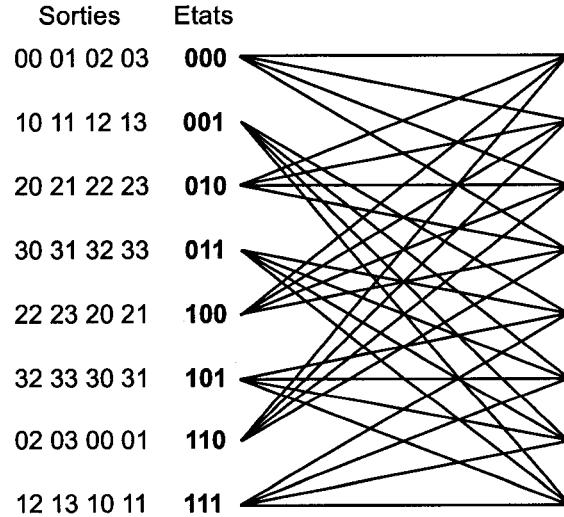


Figure 4.8: Treillis associé à la matrice  $\mathbf{G}$  de l'équation (4.12)

Dans la plupart des cas,  $R$  est égal à  $b$ . On atteint ainsi une efficacité spectrale

d'au plus  $b$  bits/s/Hz (corollaire 3.3.1 dans [29]). Dans notre exemple, on utilise effectivement une modulation QPSK ( $b = 2$ ) avec  $R = 2$ , ce qui nous donne une efficacité spectrale de 2 bits/s/Hz en cas de diversité maximale.

On peut dès maintenant percevoir l'avantage de l'association des systèmes multi-antennes à la modulation codée en treillis. L'emploi de plusieurs antennes émettrices associées à une modulation M-PSK compense en effet l'expansion de largeur de bande inhérente au codage, de telle sorte que les CST-MCT constituent une solution peu gourmande en ressources spectrales tout en offrant un gain de codage substantiel, comme vont le montrer les résultats de simulation.

#### 4.3.4.2 Décodage des CST-MCT

Le principe du décodage repose sur l'algorithme de Viterbi que nous avons brièvement décrit dans le chapitre précédent. Le seul changement à noter concerne le calcul de la métrique. Habituellement le décodage de Viterbi consiste à dégager du treillis un chemin de métrique cumulée maximale. Dans le cas des CST-MCT, on cherche au contraire à minimiser la métrique. On rappelle en effet qu'en l'occurrence la métrique de branche à l'instant  $t$  est :

$$\Delta(t) = \sum_{j=1}^{N_r} \left| r_j(t) - \sum_{i=1}^{N_t} \alpha_{ij}(t) \hat{s}_i(t) \right|^2 \quad (4.13)$$

où  $r_j(t)$  est le signal reçu à l'antenne réceptrice  $j$  et  $\hat{s}_i(t)$  est le signal supposé transmis par l'antenne émettrice  $i$ .

## 4.4 Conclusion

Ce chapitre nous a donné l'occasion de décrire le codage spatio-temporel qui exploite les diversités temporelle et spatiale apportées respectivement par les systèmes multi-antennes et par le codage. Après avoir rappelé les fondements des CST en blocs, nous avons examiné en détail le principe des CST en treillis (CST-MCT) et introduit les notations associées. Il reste à présent à mettre en oeuvre cette technique puis à chercher une méthode fournissant les meilleurs codes vis à vis des critères de performance.

## CHAPITRE 5

### SIMULATIONS DE CST-MCT

Ce chapitre vise à décrire les caractéristiques du simulateur que nous avons développé ainsi qu'à présenter les résultats des simulations entreprises.

#### 5.1 Description du simulateur

##### 5.1.1 Modifications apportées au simulateur précédent

Dans son mémoire [22], Lionel Scremin a rendu compte des simulations qu'il a effectuées, notamment quant à la comparaison des gains apportés par l'utilisation de plusieurs antennes. Son programme présente cependant 2 limitations : il ne traite que la modulation BPSK et ne considère que des variables aléatoires réelles pour le bruit et les coefficients d'atténuation. Notre objectif a été d'apporter une généralisation à des modulations M-PSK afin de pouvoir simuler des codes offrant une meilleure efficacité spectrale. L'introduction de modulations d'ordre élevé nécessitant l'emploi de nombres complexes, il devenait indispensable de développer un programme tenant compte de ce type de nombre. Du coup, il devenait possible de traiter le bruit et les coefficients d'atténuation du canal  $\alpha_{ij}$  comme des variables aléatoires complexes, telles qu'elles sont décrites dans la littérature relative au domaine [29] [5]. Examinons à présent le principe du simulateur.

##### 5.1.2 Principe

Dans sa partie codage et décodage, le simulateur reprend exactement la description des CST-MCT figurant dans le chapitre précédent. Plaçons nous à un SNR par antenne réceptrice particulier. La signification de cette valeur sera explicitée dans la section 5.1.3. On génère aléatoirement un certain nombre de trames d'information. Chaque trame est codée selon la matrice génératrice choisie au départ. On simule alors l'ajout de bruit et la pondération par les coefficients  $\alpha_{ij}$ . Le décodeur prend ensuite en compte les signaux reçus à chaque antenne réceptrice pour livrer une

séquence décodée qui est comparée à la séquence originale. Rappelons que le récepteur connaît les  $\alpha_{ij}$ . Le nombre de bits en erreur est alors comptabilisé. Une trame est considérée en erreur dès que l'un des bits qui la constituent est en erreur. L'utilisateur a la possibilité de modifier les paramètres suivants :

- le nombre de symboles codés par trame et le nombre de trames simulées pour un SNR particulier
- la plage de SNR parcourue par le simulateur selon un incrément à définir (0.5 dB par exemple)
- le nombre d'antennes émettrices  $N_t$  et réceptrices  $N_r$
- la modulation utilisée spécifiée par le nombre de symboles  $M$  et le nombre de bits  $R$  rentrés à chaque instant (par exemple 2 bits pour une modulation QPSK)
- le nombre d'états  $S$  du codeur et la matrice génératrice  $\mathbf{G}$  associée
- le seuil de fiabilité qui détermine le nombre minimal de trames en erreur considéré comme significatif (nous prenons typiquement une valeur de 30)
- le type d'évanouissements (quasi-statiques ou rapides)
- le fichier de résultats

Le fichier de résultats répertorie l'ensemble des paramètres rentrés au départ. De plus, pour chaque SNR considéré, il contient :

- le rapport  $E_b/N_0$  correspondant
- le nombre total de bits en erreur
- la probabilité d'erreur par bit
- le nombre total de trames en erreur
- la probabilité d'erreur par trame

Chaque fichier traduit les performances d'erreur d'un code pour un jeu de paramètres donnés. La comparaison des codes à l'aide d'un graphique est alors facile à mettre en oeuvre et permet d'observer l'influence de chaque paramètre. En pratique nous avons entrepris systématiquement les simulations avec 130 symboles codés par trame, ce qui correspond à la taille adoptée dans les publications. Le nombre de trames simulées par SNR dépend essentiellement de la probabilité d'erreur minimale désirée et du seuil de fiabilité choisi. Nous avons commencé chaque simulation avec 20000 trames par SNR. Cette valeur est ensuite ajustée en fonction des performances obtenues. Ainsi, si la courbe chute très vite avec l'augmentation du SNR, on double le nombre de trames dès qu'un franchissement du seuil est constaté. Ceci garantit a priori l'obtention de courbes traduisant fidèlement le comportement des codes.

### 5.1.3 Le rapport signal à bruit

La plupart des courbes de performance représentent la probabilité d'erreur par trame en fonction du SNR par antenne réceptrice. Il s'agit d'une valeur de référence que l'on préfère au rapport  $E_b/N_0$  rencontré habituellement en télécommunications. Cette habitude a été lancée par Tarokh et la plupart des publications l'ont adoptée. Une référence par rapport à un SNR global au récepteur serait difficile à exploiter car le nombre d'antennes réceptrices interviendrait directement. Or les simulations visent justement à observer entre autres l'influence du nombre d'antennes sur les performances, ce qui nécessite d'employer un rapport signal à bruit indépendant de ce paramètre. Cependant on peut relier le SNR par antenne réceptrice au rapport  $E_b/N_0$  en tenant compte de l'ordre de la modulation utilisée. Rappelons qu'au récepteur  $j$  à l'instant  $t$ , le signal reçu est :

$$r_j(t) = \sum_{i=1}^{N_t} \alpha_{ij}(t)s_i(t) + n_j(t) \quad (5.1)$$

où les  $\alpha_{ij}$  sont des variables aléatoires gaussiennes complexes de moyenne nulle et de variance 0.5 par dimension et les  $n_j$  sont des variables aléatoires gaussiennes complexes de moyenne nulle et de variance  $N_0/2$  par dimension.  $s_i(t)$  est le signal transmis par l'antenne émettrice  $i$  issu d'une constellation M-PSK d'énergie

$E_s/N_t$ , afin de garantir une puissance totale d'émission  $P_t$  indépendante du nombre d'antennes émettrices.

Le SNR par récepteur, noté  $\text{SNR}_{rec}$  est défini comme le rapport entre la puissance utile par symbole reçu  $P_{utile}$  et la puissance du bruit  $P_{bruit}$  parvenant au récepteur. Soit  $T_s$  la durée de chaque symbole M-PSK transmis et  $W$  la largeur de bande associée. Rappelons que les variables aléatoires complexes  $\alpha_{ij}$  ont une variance de 0.5 par dimension, ce qui représente une variance de 1 pour leur module. On a alors :

$$P_{utile} = \sum_{i=1}^{N_t} \frac{E_s}{N_t T_s} E[\alpha_{ij}^2] \quad (5.2)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_t} \frac{E_s}{N_t T_s} \quad (\text{car } E[\alpha_{ij}^2] = 1) \quad (5.3)$$

$$= N_t \cdot \frac{E_s}{N_t T_s} \quad (5.4)$$

$$P_{utile} = \frac{E_s}{T_s} \quad (5.5)$$

et

$$P_{bruit} = N_0 W \quad (5.6)$$

On en déduit ainsi :

$$\text{SNR}_{rec} = \frac{E_s}{N_0 W T_s} \quad (5.7)$$

On va supposer ici que  $WT_s = 1$ .

On obtient donc :

$$\text{SNR}_{rec} = \frac{E_s}{N_0} \quad (5.8)$$

Pour chaque groupe de  $R$  bits d'information rentrant dans le codeur à l'instant  $t$ , un symbole M-PSK modulé est transmis par chaque antenne. On peut donc facilement relier l'énergie par bit  $E_b$  à l'énergie totale transmise :

$$R.E_b = E_s \quad (5.9)$$

En remplaçant dans (5.8), on obtient le résultat suivant :

$$\text{SNR}_{rec} = \frac{RE_b}{N_0} \quad (5.10)$$

La courbe de performance en dB en fonction du rapport  $E_b/N_0$  s'obtient donc par translation de celle basée sur le SNR par récepteur vers la gauche d'un décalage de  $10 \log_{10} R$ . Par exemple pour une modulation QPSK ( $R = 2$ ), on effectue un décalage d'environ 3 dB. Une telle manipulation s'avère utile lorsqu'on désire étudier l'influence du type de modulation sur les performances.

## 5.2 Simulations pour des évanouissements quasi-statiques

Afin de vérifier la validité du programme, nous avons effectué des simulations des différents codes proposés dans la littérature, à savoir ceux de Tarokh [29], Bäro [2], Chen [7], Blum [5], Tao [26] et Zhou [40]. La seule difficulté rencontrée était de comprendre les notations utilisées dans chaque article pour obtenir les matrices génératrices des codes. L'annexe 2 répertorie l'ensemble des codes testés. Le chapitre 6 éclaircira la signification des paramètres  $\eta$ ,  $\bar{\eta}_{inf}$  et  $\bar{\eta}_{sup}$ . Tous ces codes sont associés à une modulation BPSK, QPSK ou 8PSK et offrent donc des efficacités spectrales maximales respectives de 1, 2 et 3 bits/s/Hz.

### 5.2.1 Influence du nombre de récepteurs

Considérons le code de la section 4.3.4.1 proposé par Tarokh. Nous avons simulé ses performances pour 1, 2, 3 et 4 antennes réceptrices. Les courbes obtenues à la figure 5.1 illustrent l'apport colossal de la diversité spatiale à la réception. Considérons par exemple une probabilité d'erreur par trame de  $10^{-2}$ . Le gain apporté par le passage de 1 à 2 récepteurs est de 8 dB ! Au fur et à mesure qu'on augmente  $N_r$ , le gain diminue. Il est de 3.8 dB et de 2.3 dB lorsque  $N_r$  passe respectivement de 2 à 3 et de 3 à 4. Ce phénomène traduit une saturation de la diversité à la réception que Lionel Scremen avait déjà constatée dans son

mémoire. On peut effectivement facilement concevoir que le gain apporté par la diversité ne peut augmenter indéfiniment avec le nombre d'antennes. Dans [32], il est notamment démontré qu'un canal à évanouissements peut être transformé en canal AWGN par augmentation du nombre de branches de diversité.

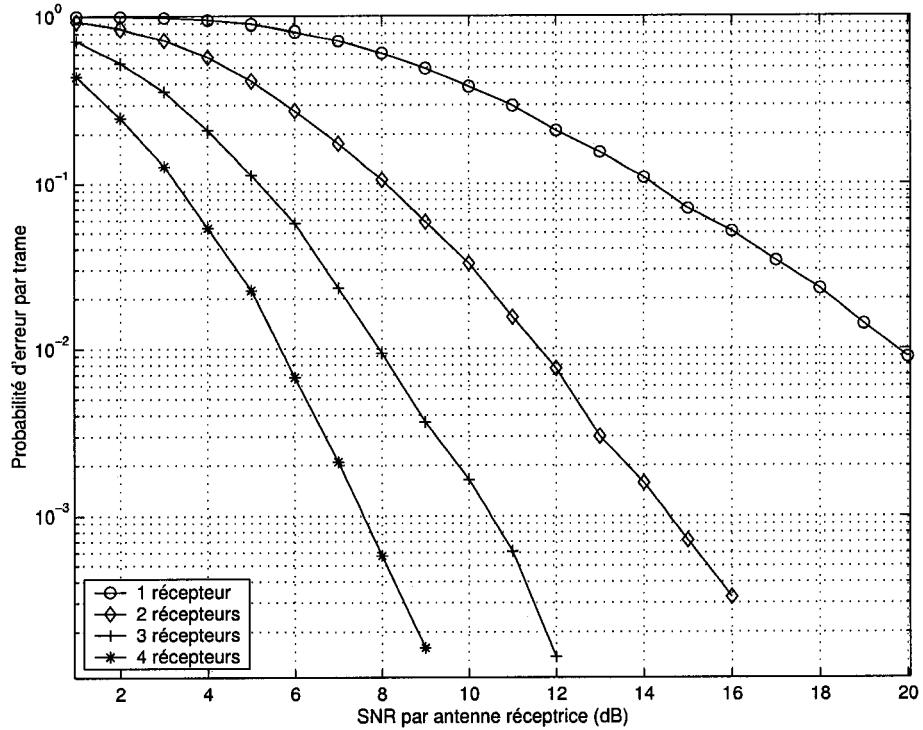


Figure 5.1: Influence du nombre de récepteurs - Code de Tarokh [29] - 2 émetteurs, 8 états, 130 symboles par trame, modulation QPSK, 2 bits/s/Hz, évanouissements quasi-statiques

### 5.2.2 Influence du nombre d'émetteurs

Le nombre d'émetteurs est directement lié au taux de codage, c'est-à-dire à la redondance du code :  $R_n = \frac{1}{N_t}$ . Naturellement, plus  $N_t$  va augmenter, meilleure sera la protection offerte par le code. Afin d'étudier l'impact quantitatif du nombre d'antennes émettrices, nous avons considéré les codes de Blum pour une modulation BPSK. Il s'agit en effet de la seule modulation pour laquelle les meilleurs codes ont été établis avec  $N_t$  variant de 2 à 4. Considérons par exemple le jeu de paramètres suivant :  $N_r = 3$ ,  $Q = 5$ ,  $S = 16$  et  $M = 2$ . Les courbes comparatives de la

figure 5.2 laissent apprécier le gain apporté par la diversité à l'émission. Pour une probabilité d'erreur par trame de  $10^{-3}$ , on gagne 1.5 dB en passant de 2 à 3 émetteurs et 0.7 dB en ajoutant une antenne supplémentaire. On peut en conclure 2 enseignements. D'une part il y a une saturation de la diversité au fur et à mesure qu'on augmente  $N_t$ , à l'instar de la saturation à la réception. D'autre part, les gains potentiels sont beaucoup moins élevés que ceux autorisés par la diversité à la réception. Rappelons que les performances d'un code convolutionnel s'améliorent lorsque son taux de codage diminue pour une longueur de contrainte constante [37]. En l'occurrence on a bien amélioration puisque  $N_t$ , l'inverse du taux de codage, augmente. Cependant cette amélioration est mineure vis à vis du potentiel de la diversité à la réception. On gagnera donc toujours plus à augmenter d'abord le nombre de récepteurs au lieu du nombre d'émetteurs. C'est sans doute la raison pour laquelle la majorité des codes proposés dans les publications se limitent à 2 émetteurs.

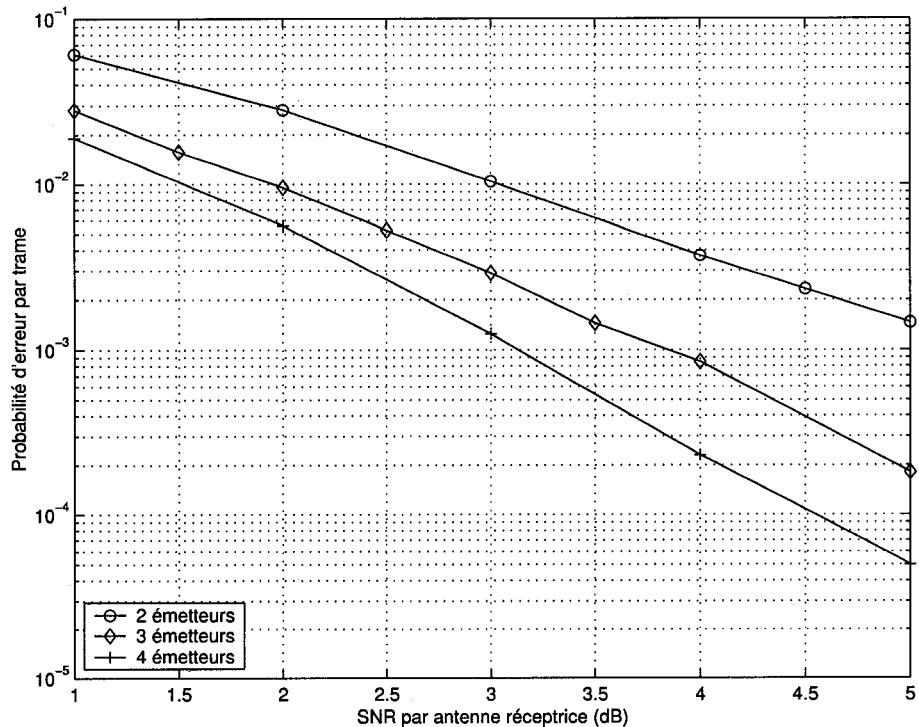


Figure 5.2: Influence du nombre d'émetteurs - Codes de Blum [38] - 3 récepteurs, 16 états, 130 symboles par trame, modulation BPSK, 1 bits/s/Hz, évanouissements quasi-statiques

### 5.2.3 Influence du nombre d'états

En modulation BPSK, le nombre d'états est directement lié à la longueur de contrainte du code. Typiquement, pour un code strictement temporel sans antennes multiples, le gain apporté par une unité de longueur de contrainte est de 0.5 dB. En ce qui concerne les CST-MCT, il est intéressant de vérifier si ce comportement est applicable également. Considérons les codes proposés par Chen en modulation QPSK pour 4, 8, 16, 32 et 64 états avec  $N_t = N_r = 2$ . La comparaison de la figure 5.3 montre que l'augmentation du nombre d'états d'un facteur 2 engendre un gain qui décroît au fur et à mesure que ce nombre d'états est important. Ainsi, pour une probabilité d'erreur par trame de  $10^{-2}$ , le passage de 4 à 8 états offre un gain de 0.8 dB alors qu'une transition de 32 à 64 états occasionne un gain de 0.3 dB. Ce constat s'inscrit directement dans l'interprétation des gains en diversité et en codage évoquée dans la section 4.3.2. Ainsi, le gain apporté par l'augmentation d'une antenne réceptrice supplante largement celui apporté par le doublement du nombre d'états. Ceci vient renforcer l'intérêt à porter au codage spatio-temporel. On peut notamment dégager un avantage considérable en terme de complexité : l'implantation d'une antenne réceptrice supplémentaire pose certes des problèmes matériels mais la complexité du traitement qui l'accompagne est bien moindre que celle résultant d'une augmentation du nombre d'états.

### 5.2.4 Influence de la modulation

Intéressons nous à présent au rôle de la modulation utilisée. Intuitivement, on peut déjà supposer que l'augmentation de l'ordre de la modulation va entraîner une perte en terme de performance due au rapprochement des symboles de la constellation associée, pour  $E_b$  constante. Il reste cependant à quantifier cette perte. La figure 5.4 illustre les performances de différents codes pour  $N_t = N_r = 2$  avec 8 états.

Pour la modulation BPSK, nous avons choisi le meilleur code déterminé par Blum [5]. Pour les modulations QPSK et 8PSK, nous avons opté pour les meilleurs codes de Chen. Il est important ici de tracer les courbes de probabilité d'erreur par trame en fonction du rapport  $E_b/N_0$  et non du SNR par antenne réceptrice qui dépend lui même de l'ordre de la modulation, comme le montre l'expression

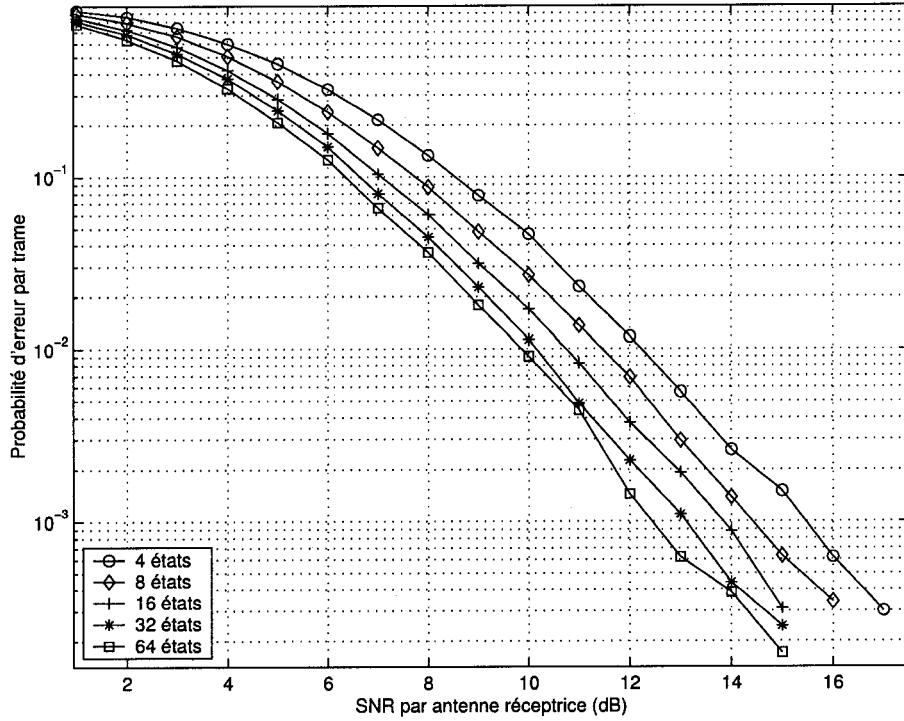


Figure 5.3: Influence du nombre d'états - Codes de Chen [7] - 2 émetteurs, 2 récepteurs, 130 symboles par trame, modulation QPSK, 2 bits/s/Hz, évanouissements quasi-statiques

(5.10). Si l'on considère à nouveau une probabilité d'erreur par trame de  $10^{-2}$ , on constate que le passage de BPSK à QPSK entraîne une perte de 1.6 dB. Le passage de QPSK à 8PSK nécessite quant à lui une augmentation de 1.55 dB. Ces observations confirment la conjecture évoquée précédemment. Cependant cette perte de performance est à relativiser face au gain considérable qu'apporte l'usage d'une modulation d'ordre élevée en terme d'efficacité spectrale. Ainsi la modulation 8PSK nous fait perdre plus de 3 dB par rapport à la modulation BPSK mais autorise néanmoins une réduction de largeur de bande d'un facteur 3 ! Le choix d'une modulation va alors dépendre du coût des ressources dont on dispose : puissance d'émission, largeur de bande, complexité de traitement.

### 5.2.5 Confrontation des différents codes

Pour des paramètres identiques (nombre d'antennes, nombre d'états, type de modulation), nous avons comparé les différents codes proposés dans la littérature

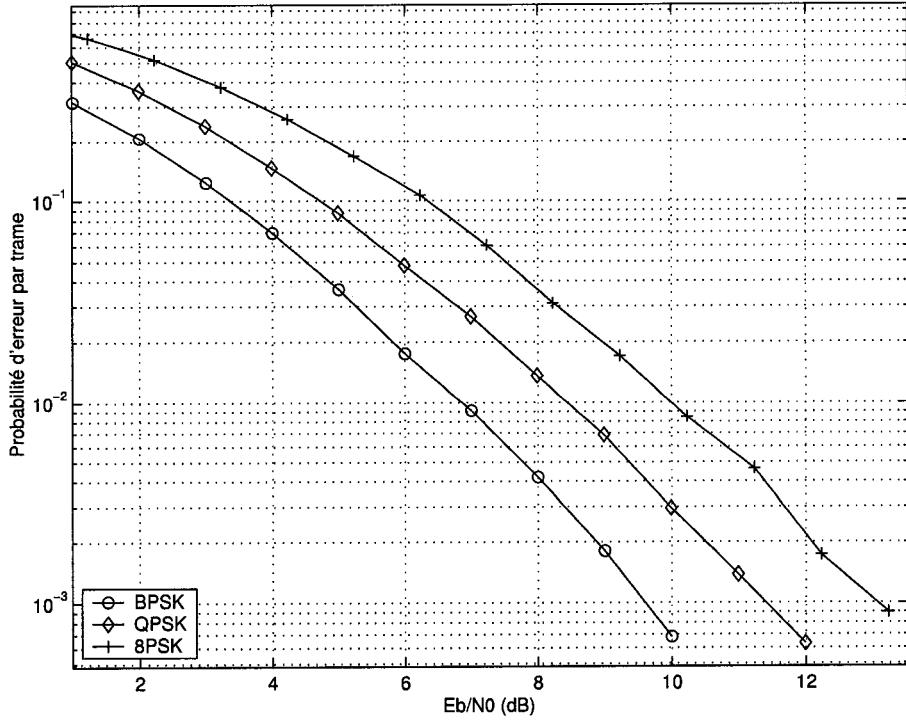


Figure 5.4: Influence de la modulation - 2 émetteurs, 2 récepteurs, 130 symboles par trame, 8 états, évanouissements quasi-statiques

par Bäro [2], Blum [5], Chen [7], Ionescu [15], Tao [26] et Tarokh [29].

### 5.2.5.1 Comparaison des notations

Il est bon de remarquer ici que chaque équipe de recherche emploie ses propres notations pour identifier un code. Afin de simplifier le travail de classement des codes, il nous a paru pratique d'employer la notation matricielle employée par Bäro, Blum, Tao et Chen.

Tarokh a identifié ses codes au moyen de leur treillis. Nous avons donc construit les matrices génératrices correspondantes. Ceci est relativement simple dans la mesure où les codes sont linéaires. Il suffit ainsi de chercher les sorties codées pour un registre d'entrée ne contenant qu'un seul "1" en position  $i$  afin d'obtenir la ligne  $i$  de la matrice génératrice. Il s'agit de la réponse impulsionale du codeur.

Quant à Ionescu, son principe de codage dérive directement de la modulation codée de Ungerboeck [31]. Pour ce faire, il a défini une distance euclidienne entre

codes qui correspond à la trace de  $\mathbf{B}(\mathbf{c}, \mathbf{e})^\dagger \cdot \mathbf{B}(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ , où  $\mathbf{B}(\mathbf{c}, \mathbf{e})$  a été définie par l'équation (4.7). Il a remarqué que le problème de maximisation de la distance entre 2 codes peut être simplifié en considérant des matrices élémentaires de taille  $(2 \times 2)$ . On considère alors une “super-constellation” de matrices classées en groupes selon leurs distances euclidiennes mutuelles. Ces groupes sont appelé “cosets” et peuvent être assimilés aux “subsets” employés par Ungerboeck. Le codage suit alors exactement le principe décrit à la section 3.3.1, à la différence près que 2 instants de transmission sont considérés simultanément. Nous avons développé un programme dédié à la simulation de ce type de système. Il ne traite que des codes en modulation QPSK pour  $N_t = 2$ .

### 5.2.5.2 Comparaison des résultats

Toutes les équipes de recherche n'ont pas traité de manière exhaustive la recherche de codes : plusieurs se sont limitées à la modulation QPSK. Nous allons donc comparer les résultats obtenus pour les paramètres les plus fréquemment utilisés, à savoir :  $N_t = N_r = 2$ ,  $S = 8$ ,  $R = 2$ ,  $M = 4$ . Différents enseignements sont à tirer des courbes de la figure 5.5.

D'abord les codes de Tarokh font figure de borne supérieure : leur courbe de performance est celle qui est la plus haute. Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où Tarokh a privilégié la recherche de codes de diversité maximale sans se préoccuper du gain de codage. Ses codes trouvés “à la main” représentent donc une référence sur laquelle se sont basées les recherches ultérieures. Essayons de classifier les autres codes. On constate que le code de Bäro a quasiment les mêmes performances que celui de Tarokh pour ce jeu de paramètres. Le code de Chen est meilleur que les 2 précédents pour les faibles SNR mais il s'en rapproche pour les SNR élevés. Ensuite on trouve les codes de Blum et Tao dont les courbes sont très proches. Enfin le code de Ionescu sort largement du lot avec un gain de 0.6 dB par rapport aux précédents pour une probabilité d'erreur par trame de  $10^{-2}$ . Il faut cependant être prudent avec ces résultats. Les critères utilisés par les différentes équipes de recherche sont en effet variés. Par exemple, Chen [7] définit un nouveau critère baptisé “critère de la trace” afin de maximiser le gain de codage. Cette règle s'applique lorsque le produit  $N_t N_r$  est relativement élevé (supérieur à 3). De son

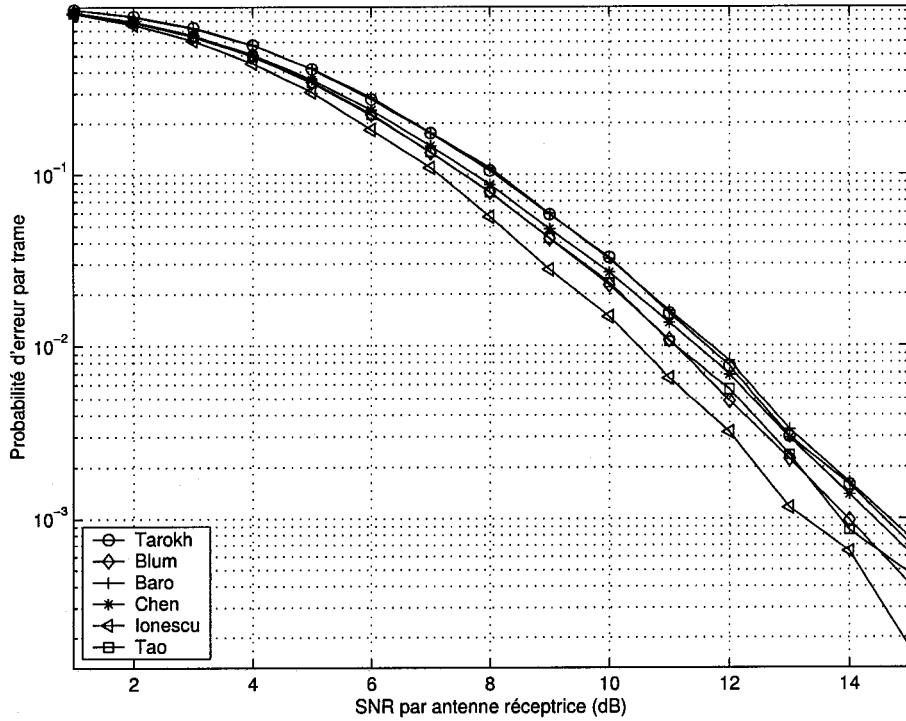


Figure 5.5: Comparaison de différents codes - 2 émetteurs, 2 récepteurs, 8 états, 130 symboles par trame, modulation QPSK, 2 bits/s/Hz, évanouissements quasi-statiques

côté Tao dégage des critères qui dépendent du SNR.

Nous avons en outre confronté les résultats obtenus au moyen de notre simulateur à ceux figurant dans les publications dont nous avons tiré les codes. Il s'avère que les résultats sont identiques, ce qui conforte la validité du simulateur.

### 5.3 Simulations pour des évanouissements rapides

La plupart des publications consacrées aux CST ne traitent souvent que les canaux quasi-statiques. Cependant, de bons codes adaptés aux évanouissements rapides ont été proposés par Firmanto [9]. Rappelons que dans le cas d'évanouissements rapides, la matrice de transfert  $H$  des coefficients  $\alpha_{ij}$  (expression 4.2) change pour chaque symbole transmis. Nous supposons encore ici que le récepteur connaît  $H$ , bien que cette hypothèse soit beaucoup plus discutable que dans la situation quasi-statique. Les résultats obtenus sont donc plutôt idéalisés.

### 5.3.1 Influence du nombre de récepteurs

Examinons le gain apporté par l'augmentation du nombre de récepteurs. Nous avons testé les codes de Firmanto en modulation QPSK pour  $S = 8$  avec  $N_r = 1, 2, 3$  et  $4$ . La figure 5.6 révèle de manière flagrante le gain apporté par la diversité spatiale à la réception.

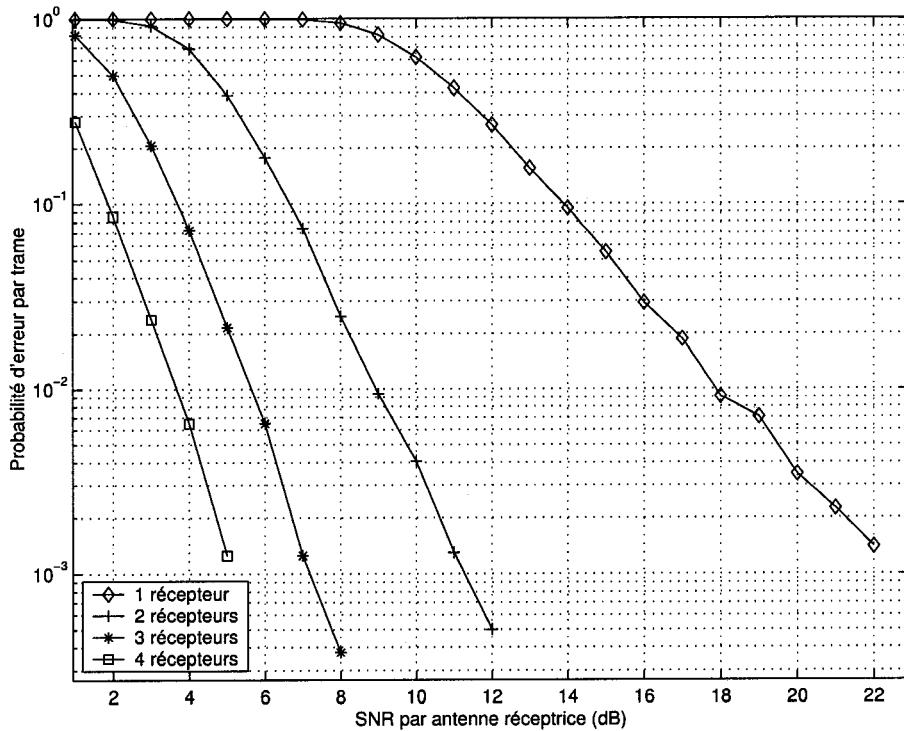


Figure 5.6: Influence du nombre de récepteurs - Code de Firmanto [9] - 2 émetteurs, 130 symboles par trame, modulation QPSK, 2 bits/s/Hz, évanouissements rapides

Pour une probabilité d'erreur par trame de  $10^{-2}$ , le gain apporté par le passage de 1 à 2 récepteurs est de 8.9 dB ! En passant de 2 à 3 puis de 3 à 4, le gain est respectivement de 3.3 dB et 2 dB. L'apport de la diversité spatiale est donc comparable à celui constaté pour des évanouissements quasi-statiques.

### 5.3.2 Influence du nombre d'émetteurs

Nous avons considéré les meilleurs codes de Blum en modulation BPSK pour  $S = 8$  et les avons simulés avec  $N_r = 3$  en faisant varier  $N_t$  de 2 à 4. On constate que

les performances sont très proches et que l'augmentation du nombre d'émetteurs est sans effet, voire préjudiciable. Considérons une probabilité d'erreur de  $10^{-4}$  par exemple. Le passage de 2 à 3 émetteurs entraîne une perte de 0.17 dB tandis que la transition de 3 à 4 émetteurs nécessite 0.16 dB supplémentaires. Ces écarts insignifiants ne peuvent nous permettre de tirer la moindre conclusion. On peut simplement constater que la diversité à l'émission est moins intéressante que la diversité à la réception, ce qui était également le cas en évanouissements quasi-statiques.

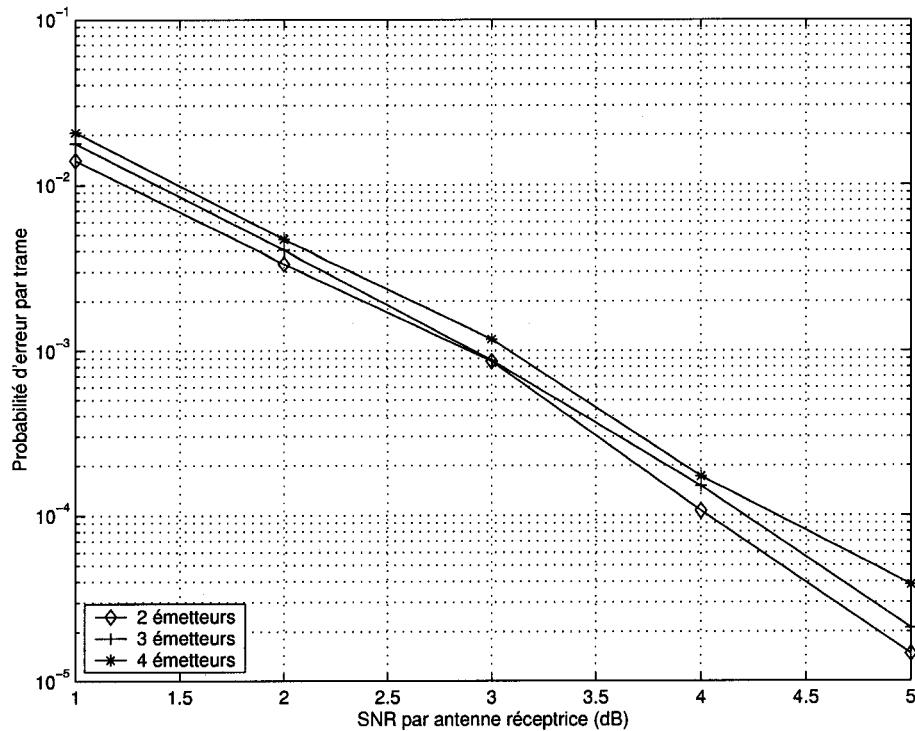


Figure 5.7: Influence du nombre d'émetteurs - Codes de Blum [38] - 3 récepteurs, 130 symboles par trame, modulation BPSK, 1 bits/s/Hz, évanouissements rapides

### 5.3.3 Influence du nombre d'états

Considérons la figure 5.8 qui illustre les résultats de simulation des codes de Chen en modulation QPSK, c'est-à-dire ceux testés dans la section 5.2.3. On remarque que le gain apporté par l'augmentation du nombre d'états est plus significatif que dans le cas d'un canal à évanouissements quasi-statiques. Si l'on se place

à nouveau à une probabilité d'erreur par trame de  $10^{-2}$ , on constate par exemple que le passage de 4 à 8 états offre un gain de 3.5 dB alors qu'il était de 0.8 dB pour des évanouissements quasi-statiques. Ceci est plus clair lorsqu'on superpose les 2 résultats de simulation, comme le montre la figure 5.9.

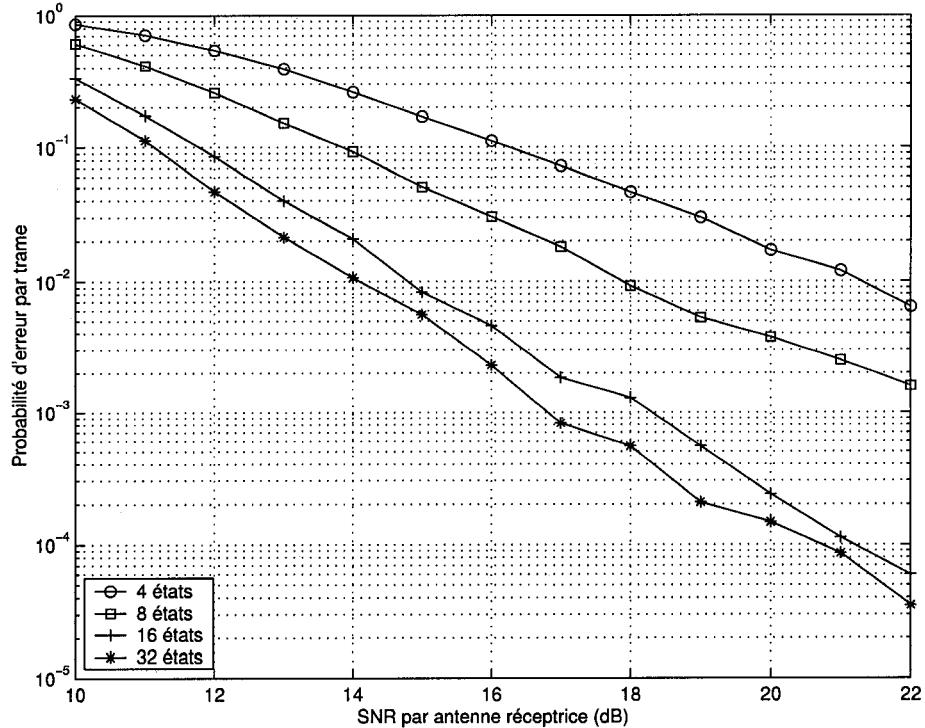


Figure 5.8: Influence du nombre d'états - Codes de Chen [7] - 2 émetteurs, 2 récepteurs, 130 symboles par trame, modulation QPSK, 2 bits/s/Hz, évanouissements rapides

### 5.3.4 Influence de la modulation

Comme dans le cas quasi-statique, nous avons comparé les performances des CST-MCT pour différentes modulation. Nous avons repris le meilleur code de Blum en modulation BPSK et les meilleurs de Chen en modulation QPSK et 8PSK. Les résultats obtenus à la figure 5.10 illustrent à nouveau la perte consécutive à l'augmentation de l'ordre de la modulation. Pour une probabilité d'erreur par trame de  $10^{-2}$ , on perd respectivement 2 dB et 2.2 dB en passant des modulations BPSK à QPSK puis QPSK à 8PSK. Par rapport au cas quasi-statique, la perte est donc

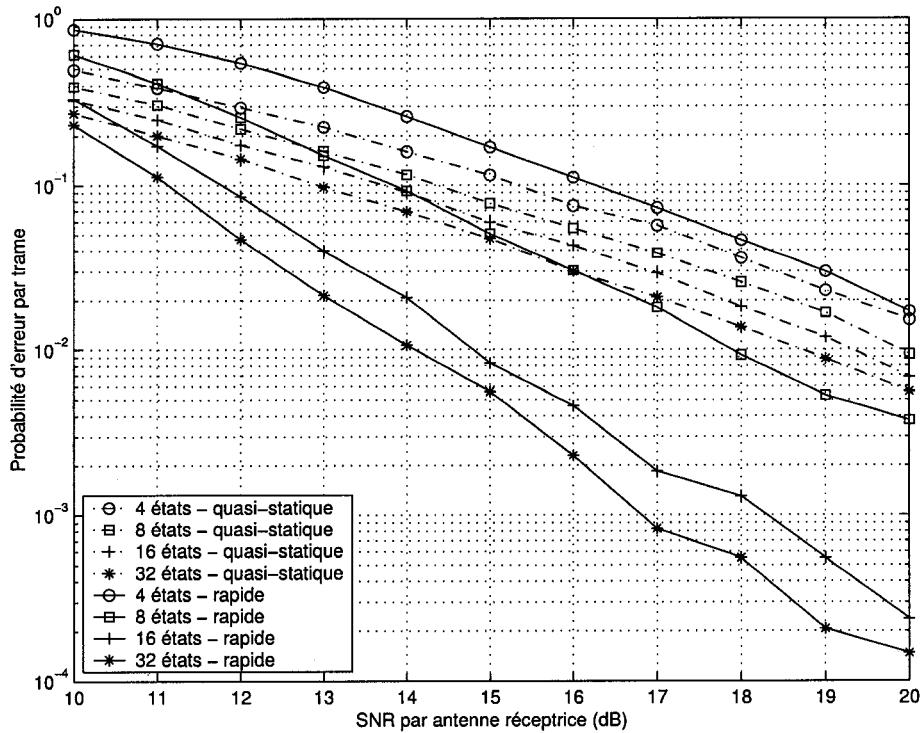


Figure 5.9: Influence du nombre d'états - Codes de Chen [7] - 2 émetteurs, 2 récepteurs, 130 symboles par trame, modulation QPSK, 2 bits/s/Hz, évanouissements rapides et quasi-statiques

légèrement plus grande.

### 5.3.5 Confrontation des codes

Nous avons simulé les codes de Firmanto et les avons confrontés aux meilleurs codes en évanouissements quasi-statiques, en l'occurrence ceux de Chen [7]. Les résultats obtenus à la figure 5.11 sont plutôt surprenants dans la mesure où les meilleurs codes établis pour des évanouissements rapides sont légèrement dominés par les meilleurs codes en évanouissements quasi-statiques. Cette anomalie peut être expliquée par le fait que le récepteur connaisse parfaitement les coefficients d'atténuation, ce qui biaise peut-être la comparaison. Un travail intéressant serait alors de simuler une connaissance imparfaite du canal afin de confirmer ou d'infirmer la tendance observée. Une autre explication pourrait être que les codes de Chen sont également bien, voire mieux adaptés à un canal à évanouissement

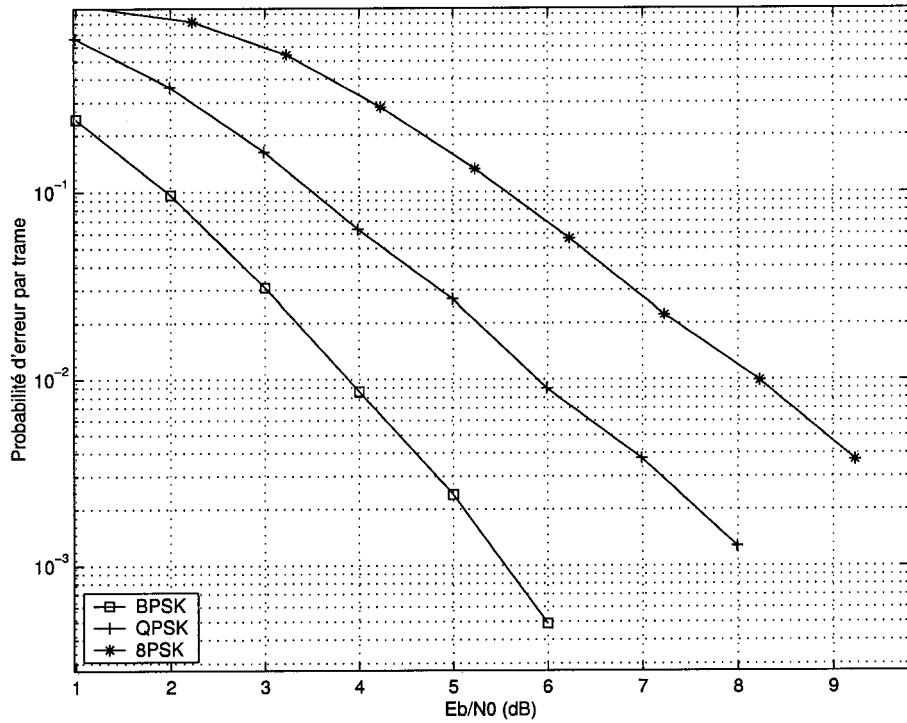


Figure 5.10: Influence de la modulation - 2 émetteurs, 2 récepteurs, 130 symboles par trame, 2 bits/s/Hz, évanouissements rapides

rapides. La question est alors de savoir pourquoi la procédure de recherche de Firmanto n'a pas retenu ces codes.

## 5.4 Simulations pour un canal Gaussien

La modélisation d'un canal Gaussien est relativement simple. Elle consiste à mettre tous les coefficients  $\alpha_{ij}$  à une valeur constante afin de traduire l'absence d'évanouissements dans la transmission entre chaque antenne. La possibilité la plus triviale est de choisir comme constante la valeur 1. La transmission n'est alors affectée que par le bruit Gaussien additif, comme l'illustre la figure 5.12.

### 5.4.1 Ambiguïté de décodage

Initialement nous nous sommes contentés de remplacer tous les coefficients de la matrice de transfert  $\mathbf{H}$  par la valeur "1" sans apporter aucune autre modi-

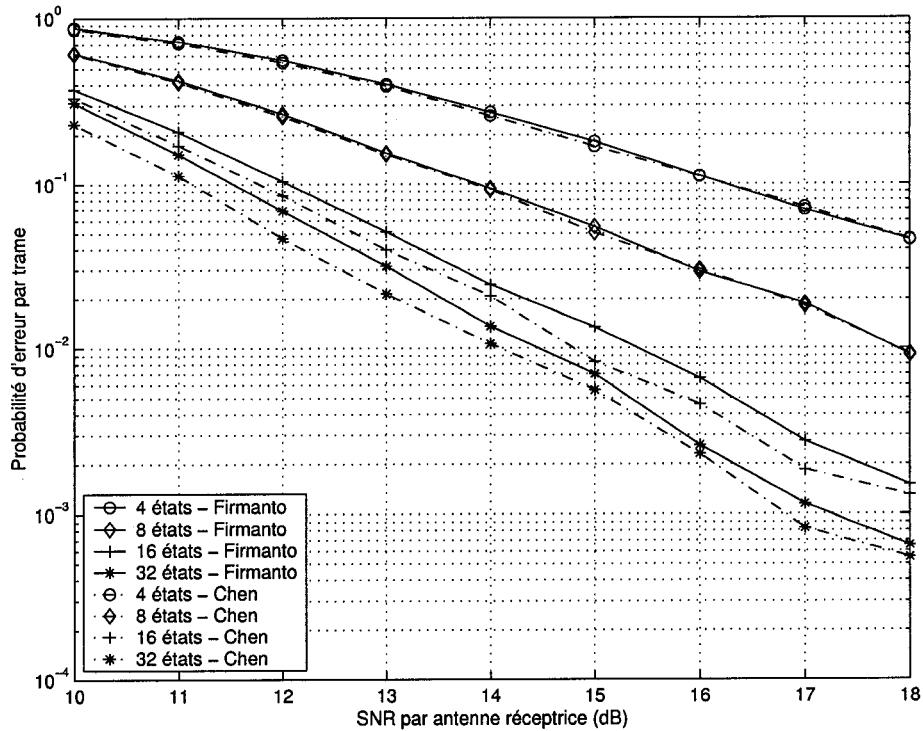


Figure 5.11: Comparaison de différents codes - 2 émetteurs, 1 récepteur, 130 symboles par trame, modulation QPSK, 2 bits/s/Hz, évanouissements rapides

fication au programme. Nous nous sommes alors aperçus que plus le nombre d'antennes émettrices augmente, plus les résultats obtenus se dégradent au point d'être inférieurs à ceux obtenus sur un canal à évanouissements, comme l'illustre la figure 5.13. Pour le code défini par  $G = [13, 15, 17]$ ,  $R = 1$  (modulation BPSK),  $N_t = 3$  et  $S = 8$ , on constate que les résultats en canal de Rayleigh sont meilleurs qu'en canal Gaussien pour les faibles SNR, et ce d'autant plus que le nombre de récepteurs est élevé. Nous avons progressivement saisi la cause de cette incongruité. Référons-nous au calcul de la métrique dans ce cas. Il consiste à déterminer la différence entre le signal reçu à une antenne et le signal estimé pour une branche particulière du treillis en l'absence de bruit. Si on développe cette expression en faisant apparaître le bruit, on obtient :

$$\Delta(t) = \sum_{j=1}^{N_r} \left| \sum_{i=1}^{N_t} s_i(t) + n_j(t) - \sum_{i=1}^{N_t} \hat{s}_i(t) \right|^2 \quad (5.11)$$

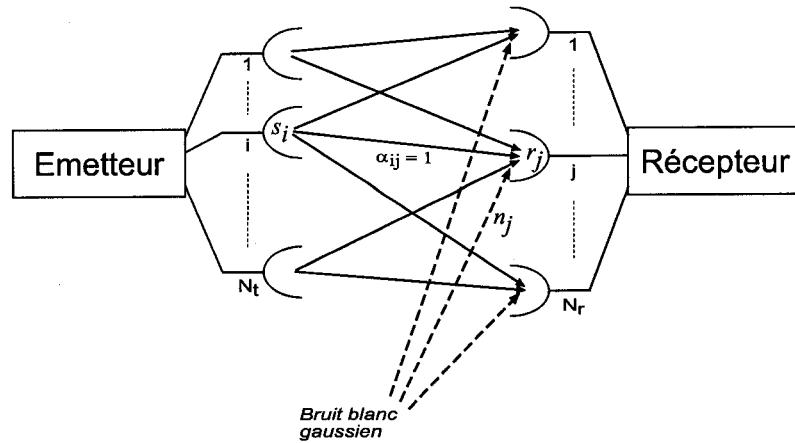


Figure 5.12: Système multi-antennes en canal Gaussien

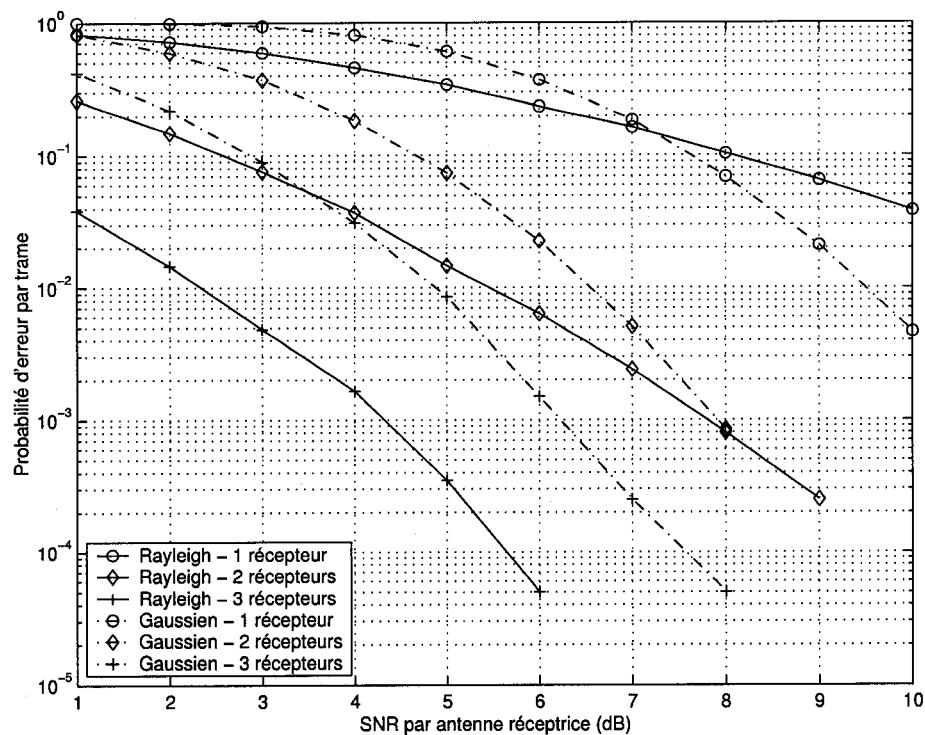


Figure 5.13: Comparaison des performances du code  $G = [13, 15, 17]$  pour un canal Gaussien et un canal de Rayleigh - 130 symboles par trame

Or l'utilisation d'une modulation antipodale (BPSK) entraîne parfois au cours du décodage une annulation de la différence entre la somme des signaux reçus et celle des signaux estimés pour des branches ne correspondant pas à celle du chemin correct. Pour le code utilisé en exemple, on peut ainsi se trouver à un instant de

décodage  $t$  avec :  $s_1(t) = F(0)$ ,  $s_2(t) = F(1)$ ,  $s_3(t) = F(0)$  et  $\hat{s}_1(t) = F(1)$ ,  $\hat{s}_2(t) = F(0)$  et  $\hat{s}_3(t) = F(0)$ . Dans ce cas on obtient :

$$\Delta(t) = \sum_{j=1}^{N_r} n_j(t) \quad (5.12)$$

Cette situation est responsable d'une ambiguïté de décodage qui est d'autant plus grande que  $N_t$  est élevé : le bénéfice de la redondance apportée par le faible taux de codage du code est en effet annulé par l'interférence destructive des symboles reçus. Afin d'apprécier l'intérêt des codes spatio-temporels dans un canal Gaussien, il nous a donc fallu modifier le calcul de la métrique.

#### 5.4.2 Simulation par distinction des signaux transmis

Jusqu'à présent nous avons employé une métrique de branche basée sur la somme des différents signaux parvenant à chaque antenne au récepteur. Cette approche est celle adoptée à l'origine par Tarokh. Pour le canal Gaussien nous avons défini une autre métrique basée sur les symboles reçus en faisant l'hypothèse que le récepteur est capable de distinguer l'origine (c'est-à-dire l'antenne émettrice) des signaux qui lui parviennent. La mise en oeuvre pratique d'un tel système n'est certes pas sans poser de réelles difficultés pratiques. Cependant notre modèle est avant tout destiné à apprécier le potentiel du codage spatio-temporel pour un canal Gaussien et constitue de ce fait un cas extrême qui doit être relativisé. Considérons le détail du calcul de la métrique. Plaçons nous à l'instant  $t$  au récepteur  $j$ . Celui-ci reçoit et distingue les signaux  $(r_1^j(t), r_2^j(t), \dots, r_{N_t}^j(t))$  qui correspondent aux versions bruitées des signaux transmis  $(s_1(t), s_2(t), \dots, s_{N_t}(t))$ . Examinons alors le calcul de la métrique  $\Delta(t)$  pour une branche particulière du treillis portant les symboles modulés  $(\hat{s}_1(t), \hat{s}_2(t), \dots, \hat{s}_{N_t}(t))$ . On a :

$$\Delta(t) = \sum_{j=1}^{N_r} \sum_{i=1}^{N_t} \mu(r_i^j(t), \hat{s}_i(t)) \quad (5.13)$$

où  $\mu(r_i^j(t), \hat{s}_i(t))$  désigne la métrique de symbole entre le symbole reçu  $r_i^j(t)$  et le symbole estimé  $\hat{s}_i(t)$ . Dans notre étude nous avons envisagé 2 cas pour le calcul de

la métrique de symbole :

- Le canal non quantifié : on s'intéresse à la valeur exacte du signal reçu et on évalue son écart par rapport au signal estimé. La métrique de symbole associée est :  $\mu(r_i^j(t), \hat{s}_i(t)) = |r_i^j(t) - \hat{s}_i(t)|^2$
- Le canal quantifié : le signal reçu ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (2 pour une quantification sur 1 bit, 8 pour une quantification sur 3 bits). Une table de métrique fournit la valeur associée à un couple  $(r_i^j(t), \hat{s}_i(t))$ . Par exemple nous avons utilisé la table décrite au tableau 5.1 pour un canal à quantification douce (3 bits). L'objectif est ici de maximiser la métrique, ce qui nécessite une légère modification de l'algorithme de Viterbi utilisé jusqu'à présent.

Tableau 5.1: Table de métriques pour un canal binaire symétrique en quantification douce (3 bits)

$\hat{s}_i(t)$	$r_i^j(t)$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	4	3	2	1	-1	-2	-3	-4	
1	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	

Avec cette approche l'ambiguïté initialement constatée n'existe plus. Les résultats de la figure 5.14 illustrent l'intérêt de la distinction des signaux. Les performances obtenues en l'absence d'ambiguïté sont tracées pour un canal quantifié sur 3 bits ainsi que pour un canal non quantifié. On perçoit ainsi les réelles possibilités du codage spatio-temporel dans un canal Gaussien. La seule ombre au tableau est que l'hypothèse de distinction des signaux est très difficile à mettre en pratique. On pourrait envisager d'introduire un retard au niveau de chaque transmission de manière à identifier sa provenance. Nous n'allons cependant pas poursuivre l'étude du canal Gaussien dans le cadre du mémoire. Ce domaine relativement inexploré jusqu'à présent devrait susciter un intérêt grandissant dans les mois à venir.

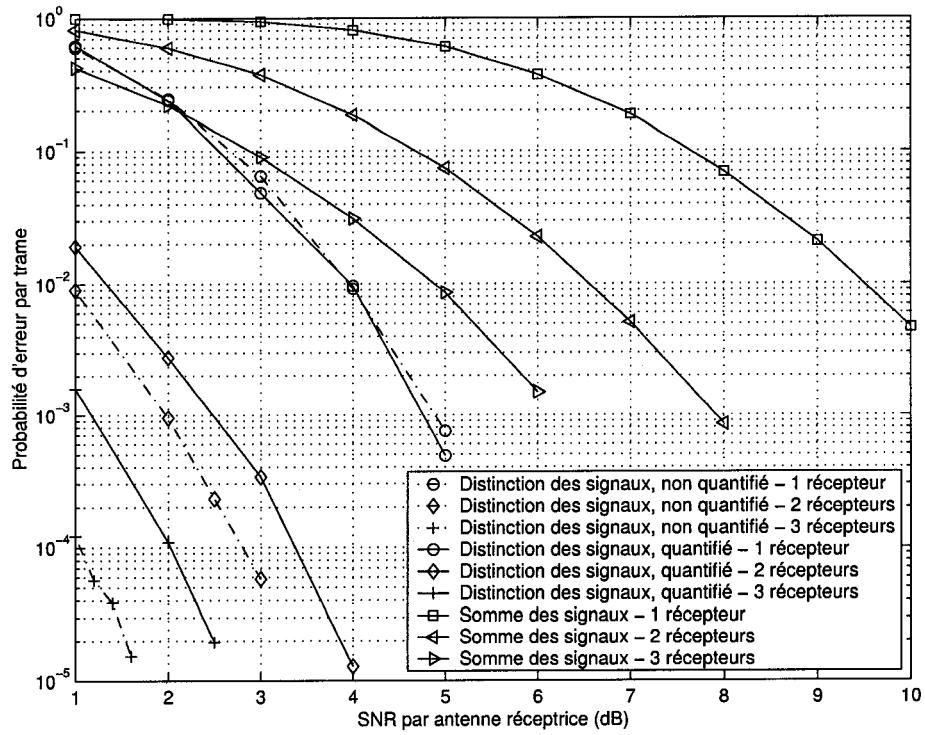


Figure 5.14: Comparaison des performances du code  $G = [13, 15, 17]$  pour un canal Gaussien avec et sans ambiguïté - 130 symboles par trame

## 5.5 Conclusion

Ce chapitre nous a donné l'occasion de présenter les résultats de notre simulateur. Les performances obtenues révèlent le potentiel énorme du codage spatio-temporel par modulation codée en treillis. La diversité spatiale couplée à l'utilisation de modulations d'ordre élevé offre de nombreux avantages en terme de gain de codage et d'économie de largeur de bande, quel que soit le type d'évanouissements (quasi-statiques ou rapides). Les performances des CST-MCT en canal Gaussien semblent également prometteuses mais nécessitent un approfondissement quant à la procédure de transmission. En outre la confrontation de nos résultats à ceux des différentes publications appuie la validité de notre simulateur. Nous disposons ainsi d'un outil essentiel dans l'optique d'une évaluation des performances de CST-MCT. Notre prochaine étape va être à présent la recherche de bons codes.

## CHAPITRE 6

### RECHERCHE DE BONS CODES CST-MCT

Après avoir décrit le principe du codage spatio-temporel et analysé les résultats obtenus, nous allons maintenant nous intéresser à la recherche de CST en treillis. Ce domaine fait actuellement l'objet d'une grande effervescence dans les milieux de recherche. Chacun développe une méthode et prétend avoir trouvé le meilleur code. Notre objectif sera plutôt de comprendre la démarche associée à la recherche de codes à travers l'application d'un algorithme particulier. Nous tenons à préciser que cette section prend uniquement en considération des CST-MCT dans le cadre d'un canal à évanouissements quasi-statiques.

#### 6.1 Calcul du gain de codage

Comme nous l'avons vu, Tarokh a jeté les bases des CST-MCT et a fourni quelques exemples de codes. Sa méthode de construction était plutôt expérimentale et privilégiait le critère de la diversité maximale sans s'intéresser au gain de codage. De nombreux articles [2] [5] [7] [9] [15] [17] [38] [40] ont récemment proposé des CST-MCT dont les performances surpassent de loin celles des codes de Tarokh. Blum [5] a proposé une méthode permettant de calculer le gain de codage. Nous allons nous baser sur ses travaux.

##### 6.1.1 Théorèmes

Blum a établi dans [5] 6 théorèmes utiles pour la recherche de CST-MCT en modulation M-PSK. Les théorèmes 1, 2 et 3 définissent des conditions nécessaires et suffisantes à la diversité maximale d'un CST-MCT. Comme Blum le fait remarquer, la recherche de la diversité maximale et du gain de codage peuvent être regroupées. Les théorèmes 4 et 5 permettent ainsi de calculer des bornes inférieure et supérieure sur le gain de codage tout en vérifiant les conditions relatives à la diversité maximale. Le théorème 6 est un algorithme exploitant les théorèmes précédents pour trouver le gain de codage exact. Nous allons reprendre ces 3 derniers théorèmes en

les généralisant à des événements erreur de longueur quelconque.

Introduisons d'abord les notations intervenant dans l'énoncé des théorèmes.  $\mathbf{G}$  est la matrice génératrice du code de dimensions  $(QR \times N_t)$ . Pour  $i \in \{1, 2, \dots, N_t\}$ , soit  $\mathbf{G}_i$  la  $i$ -ème colonne de  $\mathbf{G}$ . On définit la fonction de modulation  $z(x) = \exp(j\frac{2\pi x}{M})$  ainsi que la fonction  $z_1(x) = 1 - z(x)$ . La méthode de calcul du gain de codage se base sur un principe très général employé dans la recherche de codes convolutionnels. Il consiste à considérer dans le treillis de codage des chemins correspondant à des événements erreur : ces chemins coïncident avec le chemin associé au mot de code nul jusqu'à un temps  $t_1$  qui marque une divergence. Au temps  $t_2$ , il y a reconvergence des 2 chemins. On prend comme référence le mot de code nul pour des raisons de simplicité et de linéarité. On envisage ici tous les événement erreur potentiels de longueur donnée. Dans notre cas, la longueur minimale d'un événement erreur correspond à  $Q$ . La figure 6.1 illustre cette notion pour le code  $G = [5, 7]$  en modulation BPSK. Dans ce cas la longueur minimale d'un événement erreur est  $Q = 3$ , c'est-à-dire la longueur de contrainte.

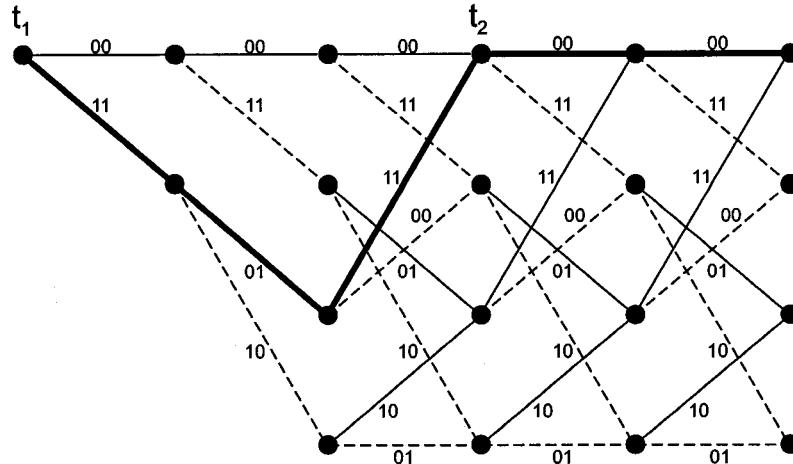


Figure 6.1: Événement erreur de longueur minimale associé au code  $G = [5, 7]$

On peut en outre considérer des événements erreur de longueur plus élevée. Nous allons noter  $I$  la longueur de l'événement erreur considéré, exprimée en nombre de branches du treillis. Son utilité va apparaître dans l'énoncé des théorèmes suivants.

### Théorème 1 [5]

Soit  $\hat{d}$  un mot binaire de longueur  $R\lceil I/2 \rceil$ . Soit  $\hat{b}$  un mot binaire de longueur  $R\lfloor I/2 \rfloor$ . Soit  $d(p)$  le résultat du décalage de  $p$  bits de gauche à droite de  $\hat{d}$  dans un registre de longueur  $QR$  initialement nul. Soit  $b(p)$  le résultat du décalage de  $p$  bits de droite à gauche de  $\hat{b}$  dans un registre de longueur  $QR$  initialement nul. Soit  $\hat{d}_s$  un mot binaire de longueur  $(Q - 1 + \lceil I/2 \rceil)R$ . Soit  $\hat{b}_s$  un mot binaire de longueur  $(Q - 1 + \lfloor I/2 \rfloor)R$ . Soit  $d_s(p)$  le résultat du décalage de  $p$  bits de gauche à droite de  $\hat{d}_s$  dans un registre de longueur  $QR$  initialement nul. Soit  $b_s(p)$  le résultat du décalage de  $p$  bits de gauche à droite de  $\hat{b}_s$  dans un registre de longueur  $QR$  initialement nul. Une condition suffisante pour qu'un code spatio-temporel défini par sa matrice génératrice  $\mathbf{G}$  possède un gain maximal en diversité  $N_t N_r$  est que  $Q \geq N_t$  et que la matrice  $\mathbf{B} =$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} z(d_s(QR)G_1)z_1(d(R)G_1) & \dots & z(d_s(QR)G_{N_t})z_1(d(R)G_{N_t}) \\ z(d_s((Q+1)R)G_1)z_1(d(2R)G_1) & \dots & z(d_s(QR+R)G_{N_t})z_1(d(2R)G_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z(d_s((Q+\lceil I/2 \rceil-1)R)G_1)z_1(d(R\lceil I/2 \rceil)G_1) & \dots & z(d_s((Q+\lceil I/2 \rceil-1)R)G_{N_t})z_1(d(R\lceil I/2 \rceil)G_{N_t}) \\ z(b_s((Q+\lfloor I/2 \rfloor-1)R)G_1)z_1(b(R\lfloor I/2 \rfloor)G_1) & \dots & z(b_s((Q+\lfloor I/2 \rfloor-1)R)G_{N_t})z_1(b(R\lfloor I/2 \rfloor)G_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z(b_s((Q+1)R)G_1)z_1(b(2R)G_1) & \dots & z(b_s(QR+R)G_{N_t})z_1(b(2R)G_{N_t}) \\ z(b_s(QR)G_1)z_1(b(R)G_1) & \dots & z(b_s(QR)G_{N_t})z_1(b(R)G_{N_t}) \end{array} \right)$$

soit de rang  $N_t$  pour toutes les valeurs possibles de  $\hat{d}_s, \hat{b}_s$  et pour toutes les valeurs de  $\hat{d}$  et  $\hat{b}$  telles que chacun des  $1 + \lfloor (\frac{I-Q+1}{2}) \rfloor$  groupes de  $R$  bits les plus à droite de  $\hat{d}$  et chacun des  $\lceil (\frac{I-Q+1}{2}) \rceil$  groupes de  $R$  bits les plus à gauche de  $\hat{b}$  contienne au moins un bit “1”.

Le gain de codage du CST-MCT correspondant est borné inférieurement par le minimum de  $|\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B}|^{1/N_t}$  calculé pour toutes les valeurs de  $\hat{d}_s, \hat{b}_s, \hat{d}$  et  $\hat{b}$  considérées précédemment. On notera cette borne  $\eta_{inf}(I)$ .

### Démonstration

Nous n'allons pas décrire ici la démonstration en détail. Le lecteur pourra se référer à [5] pour davantage de précisions.

Le principe du théorème se réfère aux critères de performances énoncés dans la section 4.3.2 et notamment à la matrice “différence”  $\mathbf{B}(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ . Considérons un

événement erreur particulier de longueur  $I$  que l'on peut représenter à l'aide de 2 vecteurs  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{e}$ . À un instant  $k$ , la différence entre les versions modulées des 2 mots de code est :

$$\begin{aligned} & (z(c_k^1) - z(e_k^1), \dots, z(c_k^{N_t}) - z(e_k^{N_t})) \\ &= (z(\mathbf{r} \cdot \mathbf{G}_1)(1 - \exp \frac{j2\pi \Delta_r \cdot \mathbf{G}_1}{M}), \dots, z(\mathbf{r} \cdot \mathbf{G}_{N_t})(1 - \exp \frac{j2\pi \Delta_r \cdot \mathbf{G}_{N_t}}{M})) \\ &= (z(\mathbf{r} \cdot \mathbf{G}_1)z_1(\Delta_r \cdot \mathbf{G}_1)), \dots, z(\mathbf{r} \cdot \mathbf{G}_{N_t})z_1(\Delta_r \cdot \mathbf{G}_{N_t})) \end{aligned}$$

avec

$$(c_k^1, \dots, c_k^{N_t}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{G}$$

et

$$(e_k^1, \dots, e_k^{N_t}) = (\mathbf{r} + \Delta_r) \cdot \mathbf{G}$$

$\Delta_r$  représente la différence entre les 2 séquences d'information responsable de la divergence. Une première condition pour assurer la diversité maximale est que la séquence d'erreur inclue au moins  $N_t$  vecteurs non nuls parmi  $(c_k^1 - e_k^1, \dots, c_k^{N_t} - e_k^{N_t})$  pour  $t_1 \leq k \leq t_2$ . Or, la plus petite séquence divergente et reconvergente est de longueur  $Q$ . Par conséquent on a nécessairement :  $Q \geq N_t$ . Dans ce cas, on peut sélectionner  $N_t$  instants dans la séquence divergente et tester si la matrice partielle des différences entre mots de code est de rang  $N_t$ . Plus généralement, on peut effectuer ce test pour  $I$  instants, avec  $I \geq N_t$ , comme l'illustre la matrice  $\mathbf{B}$ . Le théorème 1 considère le début et la fin d'une séquence divergente ayant au moins une longueur  $I$ . C'est pour cette raison qu'on utilise 4 registres afin de simuler toutes les possibilités pour les entrées  $\mathbf{r}$  et  $\Delta_r$ . Ainsi, le décalage des registres  $\hat{d}$  et  $\hat{d}_s$  simule le déroulement temporel du codage pour les  $\lceil I/2 \rceil$  premiers instants alors que le décalage des registres  $\hat{b}$  et  $\hat{b}_s$  simule le déroulement du codage pour les  $\lfloor I/2 \rfloor$  derniers instants. 2 registres sont employés à chaque instant :  $\hat{d}_s$  et  $\hat{b}_s$  prennent toutes les valeurs possibles pour la séquence "référence"  $\mathbf{r}$  alors que  $\hat{d}$  et  $\hat{b}$  prennent toutes les valeurs possibles admissibles pour la séquence "différence"  $\Delta_r$ . On parle ici de valeur admissible car il faut que le registre simule effectivement une séquence d'erreur de longueur voulue. Ainsi, pour  $\hat{d}$ , chacun des  $1 + \lfloor (\frac{I-Q+1}{2}) \rfloor$  groupes de  $R$  bits les plus à droite doit contenir au moins un bit "1", afin de garantir une longueur d'erreur d'au moins  $I$ . Si la matrice  $\mathbf{B}$  est de rang  $N_t$  pour toute combinaison des

registres, alors le code offre une diversité maximale  $N_t N_r$ .

Examinons à présent le gain de codage  $\eta$ . Si la diversité maximale est atteinte, on a, d'après le critère du déterminant [29] et la remarque de la section 4.3.2 :

$$\eta = \min_{\mathbf{c}, \mathbf{e}} \left\{ \left| \sum_{k=1}^l (c_k^1 - e_k^1, \dots, c_k^{N_t} - e_k^{N_t})^H (c_k^1 - e_k^1, \dots, c_k^{N_t} - e_k^{N_t}) \right|^{1/N_t} \right\} \quad (6.1)$$

On remarque que chaque terme  $D_k = (c_k^1 - e_k^1, \dots, c_k^{N_t} - e_k^{N_t})^H (c_k^1 - e_k^1, \dots, c_k^{N_t} - e_k^{N_t})$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, l\}$ , est une matrice hermitienne définie positive. Au moyen d'un lemme démontré dans [5], on aboutit au résultat suivant :

$$\left| \sum_{k=1}^l D_k \right| \geq \left| \sum_{k=1}^{l-1} D_k \right|$$

Par conséquent, le fait de ne considérer que les  $\lceil I/2 \rceil$  premiers et  $\lfloor I/2 \rfloor$  derniers instants d'un événement erreur de longueur  $I$  va obligatoirement faire décroître le déterminant de l'expression (6.1). Le minimum des  $|\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B}|$  calculé pour toute combinaison des registres constitue donc une borne inférieure sur le gain de codage. ◇

## Théorème 2

Soit  $\hat{d}$  un mot binaire de longueur  $(I-Q+1)R$ . Soit  $d(p)$  le résultat du décalage de  $p$  bits de gauche à droite de  $\hat{d}$ , complété au préalable de  $(Q-1)R$  zéros à gauche, dans un registre de longueur  $QR$  initialement nul. Soit  $\hat{d}_s$  un mot binaire de longueur  $(Q+I-1)R$ . Soit  $d_s(p)$  le résultat du décalage de  $p$  bits de gauche à droite de  $\hat{d}_s$  dans un registre de longueur  $QR$  initialement nul. Une condition nécessaire pour qu'un code spatio-temporel défini par sa matrice génératrice  $\mathbf{G}$  possède un gain maximal en diversité  $N_t N_r$  est que  $Q \geq N_t$  et que la matrice  $\mathbf{B} =$

$$\begin{pmatrix} z(d_s(QR)G_1)z_1(d(R)G_1) & \dots & z(d_s(QR)G_{N_t})z_1(d(R)G_{N_t}) \\ z(d_s((Q+1)R)G_1)z_1(d(2R)G_1) & \dots & z(d_s(QR+R)G_{N_t})z_1(d(2R)G_{N_t}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z(d_s((Q+I-1)R)G_1)z_1(d(IR)G_1) & \dots & z(d_s((Q+I-1)R)G_{N_t})z_1(d(IR)G_{N_t}) \end{pmatrix}$$

soit de rang  $N_t$  pour toutes les valeurs possibles de  $\hat{d}_s$  et pour toutes les valeurs de  $\hat{d}$  telles que chaque groupe de  $R$  bits de  $\hat{d}$  contienne au moins un bit 1.

*Le gain de codage du CST-MCT correspondant est borné supérieurement par le minimum de  $|\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B}|^{1/N_t}$  calculé pour toutes les valeurs de  $\hat{d}_s$  et de  $\hat{d}$  considérées précédemment. On notera cette borne  $\eta_{sup}(I)$ .*

### Démonstration

Le principe de ce théorème est très proche de celui du théorème 1. La démonstration est donc similaire, excepté le fait qu'on considère cette fois de bout en bout un événement erreur de longueur  $I$ . La séquence de divergence débute à un instant  $t_1$  et se termine à un instant  $t_2 = t_1 + I$ . On emploie alors non plus 4 mais seulement 2 registres  $\hat{d}$  et  $\hat{d}_s$  qui représentent respectivement la séquence “différence” et la séquence “référence”. La diversité maximale implique alors nécessairement que la matrice  $\mathbf{B}$  soit de rang  $N_t$  pour toutes les valeurs possibles des registres. Il faut veiller ici à ce que chaque groupe de  $R$  bits de  $\hat{d}$  contienne au moins un bit “1” pour garantir un événement erreur de longueur  $I$ .

Le gain de codage est à nouveau donné par l'expression (6.1). Il s'agit d'un minimum calculé sur tous les mots de code  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{e}$ . En particulier, ce gain est inférieur ou égal à la valeur correspondant à un événement erreur de longueur  $I$ . Par conséquent, le minimum de  $|\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B}|$  sur l'ensemble des valeurs des registres associés à une longueur minimale d'erreur  $I$  est une borne supérieure sur le gain de codage.◊

### Théorème 3 (Calcul du gain de codage exact)

*Soit  $\eta_{sup}$  une borne supérieure sur le gain de codage  $\eta$ . On peut prendre par exemple  $\eta_{sup} = \eta_{sup}(Q)$ .*

*Si  $\exists I > Q$ ,  $\eta_{inf}(I) \geq \eta_{sup}$ , alors :*

$$\eta = \min\{\eta_{sup}(Q), \eta_{sup}(Q+1), \dots, \eta_{sup}(I-1)\} \quad (6.2)$$

*Si  $\eta_{inf}(Q) = \eta_{sup}(Q)$  alors  $\eta = \eta_{sup}(Q)$*

### Démonstration

Si  $I > Q$  et  $\eta_{inf}(I) \geq \eta_{sup}$ , alors le gain de codage minimum ne peut pas être issu d'un événement erreur de longueur supérieure ou égale à  $I$  puisque n'importe lequel

de ces événements produira un gain supérieur à  $\eta_{inf}(I)$ . Par conséquent, le gain de codage doit être le minimum des bornes supérieures calculées pour des longueurs  $Q, Q+1, \dots, I-1$ . De plus, on a  $\eta_{inf}(Q) \leq \eta \leq \eta_{sup}(Q)$ . Donc, si  $\eta_{inf}(Q) = \eta_{sup}(Q)$ , on en déduit que les 2 bornes sont égales au gain exact.♦

### 6.1.2 Remarque sur le nombre d'états

Comme nous l'avions signalé à la section 4.3.4, le nombre d'états du code est généralement  $S = 2^{(Q-1)R}$ . Ceci restreint le nombre d'états disponibles. Cependant on peut obtenir un nombre d'états intermédiaire en forçant les dernières lignes de la matrice  $G$  à 0. Il faut tenir compte de ces lignes nulles dans les théorèmes précédents. Nous avons vu que le mot binaire  $\hat{d}$  du théorème 3 doit posséder au moins un bit “1” dans chacun de ses  $(I-Q+1)$  groupes de  $R$  bits. En outre, il faut veiller à ce que le groupe le plus à droite soit valide de façon à avoir effectivement un événement erreur de longueur  $I$ . Pour illustrer cette idée, prenons un exemple concret avec les paramètres suivants :  $S = 8, Q = 3, R = 2, I = 3$ . On s'intéresse donc à un événement erreur de longueur 3 dans le théorème 2. Le mot  $\hat{d}$  est alors de longueur 2 et est décalé de  $p$  bits dans un registre de longueur 6 pour constituer  $d(p)$ . Un produit  $d(6)\mathbf{G}$  non valide est illustré à la figure 6.2. Le bit “1” n'est pas pris en compte car il se trouve à la position de la ligne nulle. L'événement erreur est donc raccourci à une longueur de 2 au lieu de 3, ce qui biaise le calcul de la borne supérieure. Il faut donc s'assurer que le groupe de  $R$  bits le plus à droite possède au moins un bit “1” à une position ne correspondant pas à une ligne nulle de  $\mathbf{G}$ .

### 6.1.3 Bornes moyennes

Dans [5], Blum introduit des notions de bornes inférieure et supérieure moyennes afin de faciliter la distinction entre les codes de même gain. Nous allons expliciter la signification de ces bornes moyennes. Le principe étant le même pour les 2 bornes, nous allons nous limiter à décrire le calcul de la borne supérieure moyenne. Considérons une longueur d'événement erreur  $I$  pour un code particulier. D'après la section 6.1.1, la borne supérieure sur le gain de codage  $\eta_{sup}(I)$  correspond au minimum de  $|\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B}|^{1/N_t}$  calculé sur toutes les valeurs possibles des registres d'entrée  $\hat{d}_s$

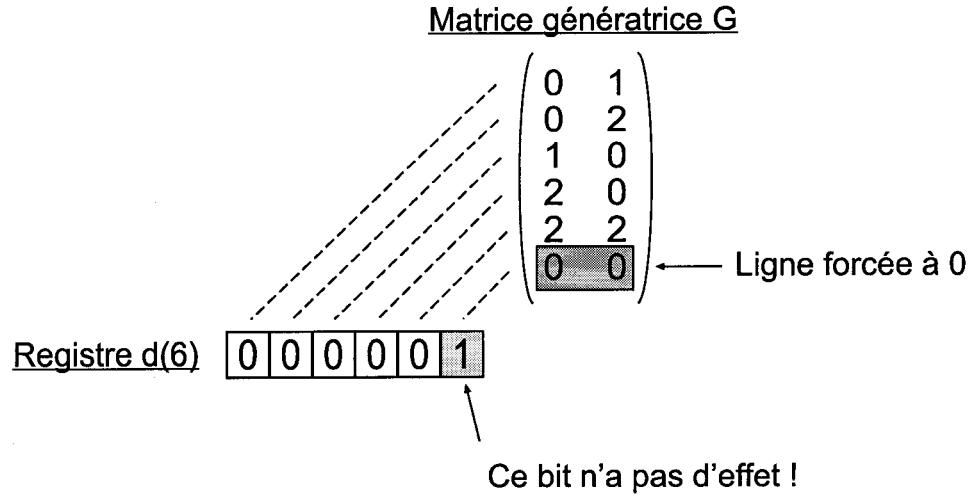


Figure 6.2: Illustration d'un événement erreur non valide

et de  $\hat{d}$ . La borne supérieure moyenne  $\bar{\eta}_{sup}(I)$  est obtenue en faisant la moyenne de toutes les valeurs de  $|\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B}|^{1/N_t}$  rencontrées au cours du calcul de la borne supérieure. Autrement dit, si on pose  $N_p$  le nombre de combinaisons possibles des registres d'entrée et  $A_k$  la valeur de  $|\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B}|^{1/N_t}$  calculée pour la possibilité  $k$ , on a :

$$\bar{\eta}_{sup}(I) = \frac{1}{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} A_k \quad (6.3)$$

Le calcul de la borne inférieure moyenne  $\bar{\eta}_{inf}(I)$  reprend le même schéma, excepté le fait que les registres et  $|\mathbf{B}^\dagger \mathbf{B}|^{1/N_t}$  sont différents.

#### 6.1.4 Implémentation

Nous avons développé un programme qui s'inspire directement des théorèmes précédents. Plusieurs fonctionnalités sont disponibles :

- Vérification de la diversité maximale d'un code
- Calcul du gain de codage  $\eta$
- Calcul des bornes  $\eta_{sup}(I)$ ,  $\eta_{inf}(I)$ ,  $\bar{\eta}_{sup}(I)$  et  $\bar{\eta}_{inf}(I)$

Grâce à ces outils nous espérons pouvoir mener à bien une recherche de codes.

## 6.2 Recherche systématique de CST-MCT

Notre objectif a été de trouver les meilleurs codes existants pour un jeu de paramètres ( $N_t, Q, S, M, R$ ) donnés. Deux méthodes de recherche ont été développées dans cette perspective.

### 6.2.1 Recherche du gain de codage maximal

Notre première démarche a été de chercher les codes qui offrent à la fois une diversité et un gain de codage maximaux. Cette méthode est systématique dans la mesure où elle considère tous les codes possibles. Elle s'articule ainsi :

#### 1. *Initialisation*

Le gain maximal  $\eta_{max}$  est fixé à 0. Le nombre de codes à tester est calculé et est égal à  $M^{N_t QR}$ . Un fichier est créé pour répertorier les codes de gain maximal.

#### 2. *Premier test*

Pour un code donné, on vérifie d'abord s'il n'a pas été déjà considéré auparavant. En effet, les propriétés d'un code (diversité, gain) ne changent pas si on permute les colonnes de sa matrice génératrice. Si le code est “inédit”, on passe à l'étape suivante.

#### 3. *Second test*

D'après le théorème 3, le gain de codage correspond au minimum de  $\{\eta_{sup}(Q), \eta_{sup}(Q+1), \dots, \eta_{sup}(I-1)\}$ , où  $I$  est la première longueur d'erreur pour laquelle  $\eta_{inf}(I) \geq \eta_{sup}(I)$ . On en déduit que si  $\eta_{sup}(Q) < \eta_{max}$ , alors  $\eta < \eta_{max}$ . Par conséquent un tel code peut être écarté de la recherche. En parallèle on peut tester si la condition nécessaire de diversité maximale n'est pas contredite. Si l'une des matrices  $\mathbf{B}$  testées n'est pas de rang maximal  $N_t$ , alors la diversité maximale n'est pas atteinte et on peut également rejeter le code.

#### 4. *Calcul du gain*

Si un code valide les 2 tests précédents, on lance le calcul du gain de codage

exact. Il s'agit de la partie la plus lourde en calcul. Il est donc judicieux de ne la mener à terme que si toutes les conditions sont réunies. Ainsi, lors de la recherche de la longueur d'erreur  $I$  pour laquelle  $\eta_{inf}(I) \geq \eta_{sup}(I)$ , si l'une des bornes supérieures  $\eta_{sup}(L)$ ,  $L \in \{Q + 1, \dots, I\}$  est inférieure à  $\eta_{max}$ , on peut interrompre le calcul et écarter le code. Si malgré tout la procédure est accomplie, on est sûr que le code est de gain maximal. Si ce gain est strictement supérieur à  $\eta_{max}$ , on efface le fichier répertoriant les codes et on y rentre le nouveau. Si le gain est égal au gain maximal, on rentre le code dans le fichier à la suite des codes précédents. Chaque code présent dans le fichier est accompagné de ses paramètres : le gain  $\eta$  et les bornes moyennes  $\bar{\eta}_{inf}(Q)$ ,  $\bar{\eta}_{sup}(Q)$ ,  $\bar{\eta}_{inf}(Q + 1)$ ,  $\bar{\eta}_{sup}(Q + 1)$ . L'intérêt de ces paramètres sera explicité ultérieurement.

### 6.2.2 Recherche de la borne inférieure moyenne maximale

La conjecture de Blum est qu'un code ayant de meilleures bornes moyennes qu'un autre code de même gain se comporte mieux. Nous avons imaginé de pousser ce raisonnement plus loin en mettant en oeuvre une recherche des codes offrant les meilleures bornes moyennes. Nous avons porté plus particulièrement notre intérêt sur la borne moyenne inférieure. Le programme que nous avons développé recherche les codes pour lesquels  $\bar{\eta}_{inf}(Q)$  est maximal avec  $\bar{\eta}_{inf}(Q) \leq \bar{\eta}_{sup}(Q)$ . Il est important de remarquer ici que la borne supérieure moyenne peut être inférieure à la borne inférieure moyenne. Ceci provient justement du fait de l'utilisation de moyennes qui donnent une "tendance" de comportement, sans nécessairement respecter une relation d'ordre particulière.

La procédure de recherche reprend un grand nombre d'étapes déjà vues à la section 6.2.1. Nous allons donc la décrire plus succinctement :

#### 1. *Initialisation*

Le borne inférieure moyenne maximale  $\bar{\eta}_{inf}^{max}(Q)$  est fixée à 0. Le nombre de codes à tester est calculé et un fichier de résultats créé.

#### 2. *Premier test*

On vérifie si le code n'a pas été déjà considéré via une permutation des

colonnes.

### 3. Second test

On teste si la condition nécessaire de diversité maximale n'est pas contredite.

### 4. Troisième test

Si  $\bar{\eta}_{inf}(Q) > \bar{\eta}_{inf}^{max}(Q)$  et  $\bar{\eta}_{inf}(Q) \leq \bar{\eta}_{sup}(Q)$ , on calcule le gain de codage  $\eta$  ainsi que les bornes  $\bar{\eta}_{inf}(Q+1)$  et  $\bar{\eta}_{sup}(Q+1)$ . On efface le fichier de résultats et on y rentre le code trouvé avec ses paramètres. Si  $\bar{\eta}_{inf}(Q) = \bar{\eta}_{inf}^{max}(Q)$  et  $\bar{\eta}_{inf}(Q) \leq \bar{\eta}_{sup}(Q)$ , on rentre le code et ses paramètres dans le fichier à la suite des codes précédents.

Là aussi notre méthode est systématique mais moins coûteuse en calculs. En effet le calcul du gain de codage est effectué seulement s'il s'avère que la borne  $\bar{\eta}_{inf}(Q)$  est maximale.

#### 6.2.3 Résultats en modulation BPSK

Les procédures décrites précédemment sont relativement lourdes en calculs : certaines durent plus d'une semaine ! Nous les avons principalement appliquées à la recherche de CST-MCT en modulation BPSK pour  $N_t = 2, 3, 4$  et  $S = 4, 8, 16, 32$ . L'annexe I répertorie les codes trouvés. Chaque tableau fournit, pour un jeu de paramètres donnés, la liste des codes de gain de codage  $\eta$  maximal. Les générateurs sont écrits sous forme octale. Le classement a été fait de la manière suivante. On liste d'abord les codes par ordre décroissant selon  $\bar{\eta}_{inf}(Q)$ . La distinction entre codes possédant la même borne se fait ensuite, toujours de manière décroissante, selon respectivement  $\bar{\eta}_{sup}(Q)$ ,  $\bar{\eta}_{inf}(Q+1)$  et  $\bar{\eta}_{sup}(Q+1)$ . Les ou les codes de borne inférieure moyenne maximale sont inclus en fin de tableau, dans l'éventualité où leur gain de codage ne serait pas maximal. En outre nous avons fait figurer les meilleurs codes "temporels", c'est-à-dire ceux de distance libre maximale. Le gain de codage et les bornes moyennes ont également été calculés pour ces codes. On constate que plus  $N_t$  augmente, plus le nombre de codes de gain maximal est important. Par exemple, pour  $N_t = 4$  et  $S = 8$ , 840 codes sont de gain maximal. Il nous est bien sûr impossible de tous les faire figurer dans un tableau. Nous n'avons donc retenu que les 30 "premiers" codes au sens de la borne moyenne.

#### 6.2.4 Évaluation des performances des codes trouvés

Après avoir mis en oeuvre nos procédures de recherche de CST-MCT, il a fallu simuler les codes obtenus afin de comparer leurs performances. L'annexe I fait figurer à la suite de chaque tableau de résultats les courbes de performances associées. Plusieurs enseignements sont à tirer de ces graphiques. D'abord on constate que les courbes ont toutes la même pente, ce qui traduit un même gain en diversité. En revanche des codes ayant le même gain de codage présentent des performances très différentes, bien que ce gain soit maximal. Prenons par exemple les CST-MCT en modulation BPSK pour  $N_t = 3$ ,  $N_r = 3$  et  $S = 8$ . Pour une probabilité d'erreur par trame de  $10^{-2}$ , l'écart entre le meilleur code ( $G = [13, 15, 17]$ ) et le moins bon ( $G = [3, 5, 14]$ ) est de 1.9 dB. Un autre résultat surprenant est que le meilleur code n'a pas le gain de codage maximal : le code  $G = [13, 15, 17]$  a un gain  $\eta = 5.04$  alors que le gain maximal est de 6.35. En revanche ses bornes moyennes  $\bar{\eta}_{inf}(Q)$  et  $\bar{\eta}_{sup}(Q)$  dépassent largement celles des codes de gain maximal. Ceci nous laisse penser que le gain maximal n'est pas nécessairement une garantie de performance. Les bornes moyennes fournissent quant à elles une tendance sur le comportement. On constate ainsi que les 3 premiers codes du tableau I.7 se retrouvent également dans le trio de tête lors des simulations derrière le code  $G = [13, 15, 17]$ . Malheureusement ce comportement ne peut pas être généralisé car certaines anomalies subsistent. Ainsi pour  $N_t = 2$ ,  $N_r = 3$  et  $S = 16$ , le dernier code du tableau I.4 défini par  $G = [13, 36]$  se trouve dans le groupe des meilleurs codes en terme de performance. D'autres facteurs sont donc certainement à prendre en compte pour ébaucher un classement des meilleurs codes. En ce qui concerne les bornes  $\bar{\eta}_{inf}(Q + 1)$  et  $\bar{\eta}_{sup}(Q + 1)$ , leur intérêt semble être de pouvoir départager des codes dont les bornes  $\bar{\eta}_{inf}(Q)$  et  $\bar{\eta}_{sup}(Q)$  sont identiques. Considérons par exemple les codes  $G = [5, 6, 7]$  et  $G = [3, 6, 7]$  du tableau I.6. Pour les 2 codes, on a  $\bar{\eta}_{inf}(3) = 4.54$  et  $\bar{\eta}_{sup}(3) = 5.08$ . Par contre le code  $G = [5, 6, 7]$  a de meilleures bornes  $\bar{\eta}_{inf}(4)$  et  $\bar{\eta}_{sup}(4)$ . Lorsqu'on examine les performances illustrées à la figure I.6, on constate que le code  $G = [5, 6, 7]$  est légèrement meilleur de 0.3 dB.

Arrêtons nous un instant sur les meilleurs codes "temporels", c'est-à-dire ceux dont la distance libre est maximale. Lionel Scremin a déterminé [22] de tels codes offrant tous une diversité maximale mais sans se préoccuper de leur gain de codage.

Il s'avère que ces codes sont également de très bons codes spatio-temporels dans la très grande majorité des cas. Et, chose curieuse, ces codes ont souvent la meilleure borne inférieure moyenne  $\bar{\eta}_{inf}(Q)$  sans pour autant présenter le meilleur gain de codage. Ceci vient corroborer la nuance apportée précédemment quant à l'intérêt du gain de codage et laisse vraisemblablement présager un lien entre les bornes moyennes et le spectre de distances d'un code. Cependant, dans 2 cas, le meilleur code "temporel" n'est pas de diversité maximale et ses gains de codage ne peuvent donc être calculés. Il s'agit des codes  $G = [5, 7, 7]$  et  $G = [13, 15, 15, 17]$  dont les performances respectives sont illustrées aux figures I.6 et I.7. On perçoit bien sur les graphiques la diversité non maximale, caractérisée par une pente plus douce de la courbe de performance. Une distance libre maximale n'implique donc pas forcément une diversité maximale.

### 6.3 CST-MCT en modulation QPSK et 8PSK

Nous avons mené une recherche relativement complète de CST-MCT en modulation BPSK. Par contre nous avons seulement abordé la recherche en modulation QPSK pour  $N_t = 2$  et  $S = 4$ . Le tableau correspondant figure dans l'annexe I ainsi que les courbes d'évaluation des performances. Nous n'avons pas testé tous les codes trouvés mais on peut constater que les résultats sont très proches : pour une probabilité d'erreur par trame de  $10^{-2}$ , l'écart entre les codes extrêmes est inférieur à 0.4 dB. Ceci confirme les très faibles différences en terme de bornes moyennes. Tous les codes présentés possèdent en effet les mêmes bornes excepté la borne  $\bar{\eta}_{inf}(3)$  pour laquelle 2 valeurs sont possibles : 5.515 ou 5.501. Le cas de la modulation 8PSK n'a quant à lui pas du tout été envisagé. Ceci est essentiellement dû à la complexité énorme de la recherche systématique pour des modulations d'ordre élevé. Prenons par exemple la recherche de CST-MCT en modulation 8PSK pour  $N_t = 2$  et  $S = 8$ . Le nombre de codes à tester s'élève à  $8^{12} = 68719476736$  ! Ceci nécessiterait un temps considérable dont nous n'avons malheureusement pas disposé avant la fin de notre travail. Nous nous sommes donc limités à évaluer les performances des codes issus de la littérature. Les tableaux de l'annexe II répertorient l'ensemble des codes trouvés par Tarokh [29], Bäro [2], Blum [5], Chen [7] et Tao [26]. Nous avons fait figurer les gains de codage et les bornes moyennes dans les cas pour lesquels

le calcul n'était pas trop long. Les courbes de performance associées figurent à la suite de chaque tableau afin de comparer les codes. Les simulations ont été effectuées avec  $N_t = 2$  et  $N_r = 3$ . Le code à 3 émetteurs de Blum en modulation QPSK étant le seul disponible, nous ne l'avons pas simulé. Il ressort de ces courbes que la hiérarchie entrevue dans la section 5.2.5 est confirmée par la considération des gains de codage et des bornes moyennes. On constate que le classement par ordre décroissant selon la borne  $\bar{\eta}_{inf}(Q)$  est conforme aux performances obtenues. Ainsi, pour  $N_t = 2$ ,  $Q = 3$  et  $S = 16$  en modulation QPSK, la figure II.3 atteste que le code de Blum est le meilleur, suivi de ceux de Tao, Chen, Bäro et Tarokh. Le tableau II.3 confirme ce classement, si l'on se fie à la borne  $\bar{\eta}_{inf}(3)$ . En outre notre conclusion relative à l'intérêt limité du gain de codage est confortée : le code de Chen dont le gain n'est que de 2.83 domine largement le code de Tarokh qui possède pourtant un gain de 3.46. Il semblerait donc que l'heuristique ébauchée dans la section précédente s'applique parfaitement dans le cas de la modulation QPSK.

#### 6.4 Conclusion

Grâce à des théorèmes permettant de calculer le gain de codage, nous avons mis en oeuvre une procédure de recherche de CST-MCT. 2 méthodes ont été développées dans cette perspective : l'une recherche les codes de gain de codage maximal alors que l'autre privilégie les codes de borne inférieure moyenne  $\bar{\eta}_{inf}(Q)$  maximale. Les simulations des codes trouvés montrent qu'un écart de performance substantiel peut exister entre 2 codes de même gain de codage. La borne  $\bar{\eta}_{inf}(Q)$  semble être un facteur important pour départager les codes, et pourrait même supplanter le gain de codage. Mais certaines anomalies dans les simulations laissent penser que d'autres paramètres interviennent dans la mesure de la performance. En outre, les meilleurs codes convolutionnels "temporels" s'avèrent être en général de très bons CST-MCT, à condition qu'ils offrent une diversité maximale.

## CHAPITRE 7

### CONCLUSION

#### 7.1 Bilan des travaux entrepris

Le travail relaté dans ce mémoire s'inscrit dans le prolongement de la prospection de Lionel Scremen relative au codage spatio-temporel.

Nous avons d'abord amélioré le simulateur initial en introduisant l'emploi de variables complexes dans le cadre d'une généralisation à des modulations M-PSK. Nous avons ainsi disposé d'un outil conforme aux principes des CST-MCT énoncés dans les publications scientifiques. Nous avons pu par la suite mener une étude détaillée des performances des codes en fonction de différents paramètres : nombre de récepteurs, nombre d'émetteurs, nombre d'états, ordre de la modulation. Les cas des canaux à évanouissements quasi-statiques et rapides ont été envisagés. Les résultats obtenus ont révélé le formidable potentiel des CST-MCT, notamment quant à la diversité à la réception. En outre la validité de notre simulateur a été confortée par des résultats comparables à ceux de la littérature. La transmission via un canal gaussien sans évanouissements a été également abordée et a remis en cause notre modèle de transmission responsable d'interférences destructive au récepteur. Une solution idéalisée basée sur une distinction des signaux a été testée et nous a permis de percevoir les énormes possibilités des CST-MCT sur ce type de canal.

Nous avons ensuite porté notre intérêt sur la recherche de CST-MCT pour un canal à évanouissements quasi-statiques. Nous avons pour ce faire développé une procédure de calcul du gain de codage et de vérification de la diversité maximale d'un code. La méthode adoptée s'est inspirée de théorèmes établis par R. S. Blum. Puis nous nous sommes lancés dans la recherche systématique de CST-MCT via 2 approches : l'une cherchant les codes de gain de codage et de diversité maximales, l'autre se focalisant sur les codes offrant la meilleure borne moyenne inférieure tout

en respectant le critère de diversité maximale. Notre recherche s'est consacrée essentiellement aux codes en modulation BPSK pour des raisons de complexité moindre. Les meilleurs codes trouvés ont été répertoriés et simulés afin d'évaluer leurs performances. Nous n'avons pu tirer de conclusion définitive des résultats obtenus, excepté le fait qu'un gain de codage maximal n'est pas gage de performance optimale. Une tendance de comportement basée sur les bornes moyennes a été dégagée mais n'a pu aboutir à une règle générale. Nous avons pu en outre constater que les meilleurs codes convolutionnels "temporels" sont généralement de très bons CST-MCT. La comparaison des codes de la littérature en modulation BPSK et QPSK dégage quant à elle une hiérarchie qu'il serait bon de confirmer via un calcul des gains de codage et des bornes moyennes.

## 7.2 Perspectives de recherches futures

Notre travail a répondu à certaines de nos interrogations sur les CST-MCT mais en a également fait naître de nouvelles :

- **Le cas du canal Gaussien**

Nous pensions a priori que le canal gaussien ne serait qu'une simplification du canal à évanouissements. Nous avons du malheureusement nous rendre à l'évidence que cette situation n'est pas triviale et qu'elle soulève de nombreux problèmes. Nous avons certes pu mesurer le potentiel des CST-MCT sur ce type de canal mais au prix d'une modélisation utopiste trop éloignée d'une situation pratique. Il serait intéressant de poursuivre l'exploration de la piste Gaussienne via une approche plus réaliste en introduisant par exemple une interférence contrôlée entre les signaux parvenant au récepteur.

- **Poursuite de la recherche de CST-MCT**

Le programme que nous avons développé se prête bien à la recherche de codes en modulation BPSK. Cependant les quelques tentatives que nous avons effectuées en modulation QPSK ou 8PSK nous ont fait prendre conscience de la complexité énorme d'une approche systématique. Il existe des outils de simplification tels que

l'uniformité géométrique [10] que nous n'avons pas mis en oeuvre. En outre la technique de CST-MCT à instants multiples introduite dans [17] semble prometteuse, tout comme l'approche de Ionescu [15] que nous avons seulement abordée. Un travail conséquent reste donc à accomplir dans le domaine de la recherche de CST-MCT.

- **Association avec des techniques de décodage itératif**

Plusieurs publications ont déjà exposé des travaux relatifs aux CST turbo qui allient la diversité spatiale à la technique de codage turbo [25] [39]. Le potentiel des codes doublement orthogonaux développés à l'École Polytechnique de Montréal [6] pourrait également susciter une association avec des systèmes multi-antennes. Enfin les CST en blocs constituent une autre piste de recherche très sérieuse. La concaténation de CST en blocs et de codes en treillis traditionnels semblerait offrir en effet [21] des performances dépassant celles des meilleurs CST-MCT.

Les recherches consacrées au codage spatio-temporel sont donc loin d'être terminées et devraient trouver très prochainement, si ce n'est déjà le cas, des débouchés dans l'industrie des télécommunications sans-fil. Il serait en effet dommage de limiter au domaine expérimental une technique au potentiel si prometteur.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Alamouti, S.M. (1998). "A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, pp. 1451-1458.
- [2] Bäro, S., Bauch, G. et Hansmann, A. (2000). "Improved Codes for Space-Time Trellis-Coded Modulation", *IEEE Communications Letters*, vol. 4, pp. 20-22.
- [3] Bhargava, V. K., Haccoun D., Matyas, R. et Nuspl, R. (1981). *Digital Communications by Satellite : Modulation, Multiple Access and Coding*, John Wiley and Sons, New York.
- [4] Biglieri, E., Caire, G. et Taricco, G. (2000). "Coding for the Fading Channel: a Survey", *Signal Processing*, vol. 80, pp. 1135-1148.
- [5] Blum, R.S (1999). "Analytical Tools for the Design of Space-Time Convolutional Codes", *Conference on Information Science and Systems*.
- [6] Cardinal, C., Haccoun, D., Gagnon, F. et Batani, N. (1999). "Turbo Decoding Using Convolutional Self Doubly Orthogonal Codes", *Proceedings of ICC'99*, pp. 113-117.
- [7] Chen, Z., Yuan, J. et Vucetic, B. (2001). "An Improved Spcae-Time Trellis Coded Modulation Scheme on Slow Rayleigh Fading Channels", *ICC 2001*, vol. 4, pp. 1110-1116.
- [8] Elias, P. (1955). "Error-free Coding", *IRE Transactions on Information Theory*, vol. PGIT-4, pp. 29-37.
- [9] Firmanto, W., Vucetic, B. et Yuan, J. (2001). "Space-Time TCM with Improved Performance on Fast fading Channels", *IEEE Communications Letters*, vol. 5, pp. 154-156.
- [10] Forney, Jr., G.D. (1991). "Geometrically Uniform Codes", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 37, pp. 1241-1260.

- [11] Foschini, G.J. et Gans, M.J. (1998). "On Limits Of Wireless Communications in a Fading Environment when Using Multiple Antennas", *Wireless Personal Communications*, vol. 6, pp. 311-335.
- [12] Foschini, G. J. (1996). "Layered Space-Time Codes for Wireless Communication in a Fading Environment when Using Multiple Antennas", *Bell Labs Technical Journal*, pp. 41-58.
- [13] Haccoun, D., Caron, M. et Nabli, M. (1999). "Complexity Reduction of The Viterbi Algorithm Using Doubly Complementary Convolutional Codes", in *IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing*, pp. 408-411.
- [14] Hamming, R. W.(1950). "Error Detecting and Error Correcting Codes", *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 29, pp. 147-160.
- [15] Ionescu, D. M., Mukkavilli, K. K., Yan, Z. et Lilleberg, J. (2001). "Improved 8- and 16-State Space-Time Codes for 4PSK with Two Transmit Antennas", *IEEE Communications Letters*, vol. 5, pp. 301-303.
- [16] Jakes, W.C. (1974). *Microwave Mobile Communications*, Wiley-Interscience, New-York.
- [17] Lin, X. et Blum R. S. (2001). "Systematic Design of Space-Time Codes Employing Multiple Trellis Coded Modulation", soumis à *IEEE Transactions on Communications*.
- [18] Lin, S. et Costello, D. J. Jr (1983). *Error Control Coding : Fundamentals and Applications*, Prentice-Hall.
- [19] Proakis, J. (1995). *Digital Communications*, Third Edition, McGraw-Hill, New York.
- [20] Rice, S. O. (1948). "Statistical Properties of a Sine Wave Plus Random Noise", *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pp. 109-157.
- [21] Sandhu, S., Heath, R. et Paulraj, A. (2001). "Space-Time Block Codes versus Space-Time Trellis Codes", *ICC 2001*, vol. 4, pp. 1132-1136.

- [22] Scremin, L. (2000). "Codage spatio-temporel pour les systèmes multi-antennes de communications sans-fil", Mémoire de Maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.
- [23] Shannon, C. E. (1948). "A Mathematical Theory of Communication", *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pp. 379-423.
- [24] Shannon, C. E. (1948). "A Mathematical Theory of Communication", *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pp. 623-656.
- [25] Su, H-J. et Geraniotis, E. (2001). "Space-Time Turbo Codes with Full Antenna Diversity", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, pp. 47-57.
- [26] Tao, M. et Cheng, R. S. (2001). "Improved Design Criteria and New Trellis Codes for Space-Time Coded Modulation in Slow Flat Fading Channels", *IEEE Communications Letters*, vol. 5, pp. 313-315.
- [27] Tarokh, V., Jafarkhani H. et Calderbank, A.R. (1999). "Space-Time Block Codes from Orthogonal Designs", *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 45, pp. 1456-1467.
- [28] Tarokh, V., Jafarkhani H. et Calderbank, A.R. (1999). "Space-Time Block Coding for Wireless Communications : Performance Results", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 17, pp. 451-460.
- [29] Tarokh. V., Seshadri N. et Calderbank, A.R (1998). "Space-Time Codes for High Data Rate Wireless Communication : Performance Criterion and Code Construction", *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 44, pp. 744-765.
- [30] Telatar, I.E. (1995). "Capacity of multi-antenna Gaussian channels", Technical Report, AT&T Bell Labs.
- [31] Ungerboeck, G. (1982). "Channel Coding with Multilevel/Phase Signals", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp. 55-67.
- [32] Ventura-Traveset, J., Caire, G., Biglieri, E. et Taricco, G. (1997). "Impact of Diversity Reception on Fading Channels with Coded Modulation - Part

- I: Coherent Detection”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 45, pp. 563-572.
- [33] Viterbi, A.J. (1967). “Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-13, pp. 260-269.
- [34] Viterbi, A.J. (1971). “Convolutional Codes and their Performance in Communication Systems”, *IEEE Trans. Commun. Tech.*, vol. COM-19, pp. 751-772.
- [35] Wittneben A. (1993). “A New Bandwidth Efficient Transmit Antenna Modulation Diversity Scheme for Linear Digital Modulation”, *Proc. IEEE'ICC*, pp. 1630-1634.
- [36] Wolniansky, P.W., Foschini, G.J. , Golden, G.D. et Valenzuela, R.A (1999). “V-BLAST : An Architecture for Realizing Very High Data Rates Over the Rich Scattering Wireless Channel”, Technical Report, Bell Laboratories.
- [37] Wozencraft, J.M. et Jacobs, I.M. (1965). *Principles of Communication Engineering*, Wiley, New York.
- [38] Yan Q. et Blum R. S. (2000). “Optimum Space-Time Convolutional Codes”, *Wireless Communications and Networking Conference*.
- [39] Youjian, L., Fitz, M.P. et Takeshita, O.Y. (2000). “QPSK Space-Time Turbo Codes”, *ICC 2001*, vol. 1, pp. 292-296.
- [40] Zhou, G., Wang. Y., Zhang, Z. et Chugg, K. M. (2001). “On Space-Time Convolutional Codes for PSK modulation”, soumis à *ICC 2001*.

## Annexe I

### Liste de CST-MCT obtenus par recherche systématique

Ces codes ont été trouvés grâce à la méthode décrite dans la section 6.2. Ils offrent tous une diversité maximale. Leur gain de codage est également maximal. Le classement est établi par ordre décroissant selon les bornes inférieure et supérieure moyenne. Les codes offrant la meilleure borne moyenne  $\bar{\eta}_{inf}(Q)$  ainsi que les meilleurs codes “temporels” sont également répertoriés. Pour la modulation BPSK on emploie la notation octale. Toutes les simulations ont été effectuées pour des évanouissements quasi-statiques.

Légende :

\* . \* : code ayant la meilleure borne moyenne inférieure  $\bar{\eta}_{inf}(Q)$ .

◊ . ◊ : meilleur code “temporel”

ND : borne non déterminée (si diversité non maximale)

Tableau I.1: Liste de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 2$ ,  $Q = 2$ ,  $S = 2$  - Gain de codage :  $\eta = 4$

Générateurs en octal	$\bar{\eta}_{inf}(2)$	$\bar{\eta}_{sup}(2)$	$\bar{\eta}_{inf}(3)$	$\bar{\eta}_{sup}(3)$
*1,2*	4	4	6.93	6.93
*1,3*	4	4	6.93	6.93
*2,3*	4	4	6.93	6.93

Tableau I.2: Liste de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 2$ ,  $Q = 3$ ,  $S = 4$  - Gain de codage :  $\eta = \sqrt{48} = 6.93$

Générateurs en octal	$\bar{\eta}_{inf}(3)$	$\bar{\eta}_{sup}(3)$	$\bar{\eta}_{inf}(4)$	$\bar{\eta}_{sup}(4)$
3,5	7.33	6.93	10.06	9.66
5,6	6.29	6.93	9.30	9.66
3,6	6.29	6.93	8.47	8
Meilleur code temporel $\diamond * 5, 7 * \diamond$ $\eta = \sqrt{32} = 5.66$	7.73	7.73	10.06	9.66

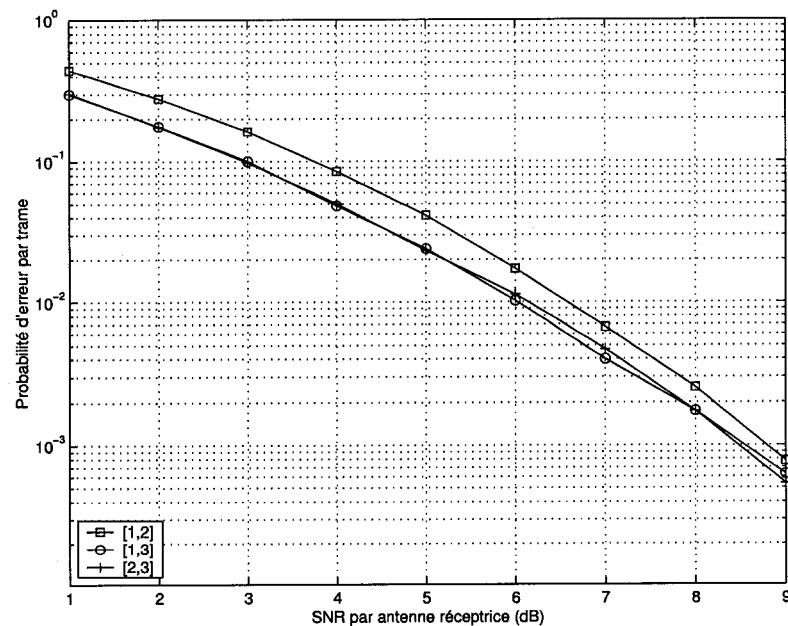


Figure I.1: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 2$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 2$  - évanouissements quasi-statiques

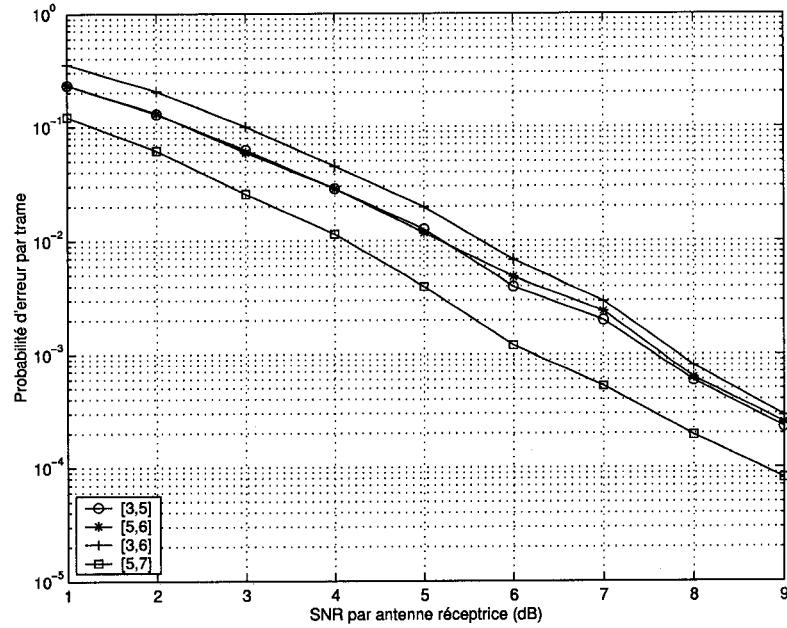


Figure I.2: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 2$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 4$  - évanouissements quasi-statiques

Tableau I.3: Liste de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 2$ ,  $Q = 4$ ,  $S = 8$  - Gain de codage :  $\eta = \sqrt{80} = 8.94$

Générateurs en octal	$\bar{\eta}_{inf}(4)$	$\bar{\eta}_{sup}(4)$	$\bar{\eta}_{inf}(5)$	$\bar{\eta}_{sup}(5)$
*13,15*	10.06	10.47	12.02	14.26
13,16	9.5	10.47	11.43	10.58
7,15	9.5	10.47	9.95	10.58
5,13	9.5	8.94	13.28	14.26
12,15	9.5	8.94	11.57	14.26
5,16	9.09	8.94	11.07	10.58
7,12	9.09	8.94	10.65	10.58
6,13	8.89	8.94	10.10	10.58
6,15	8.89	8.94	9.33	10.58
Meilleur code temporel ◊15, 17◊ $\eta = \sqrt{48} = 6.93$	9.7	11.68	10.06	9.66

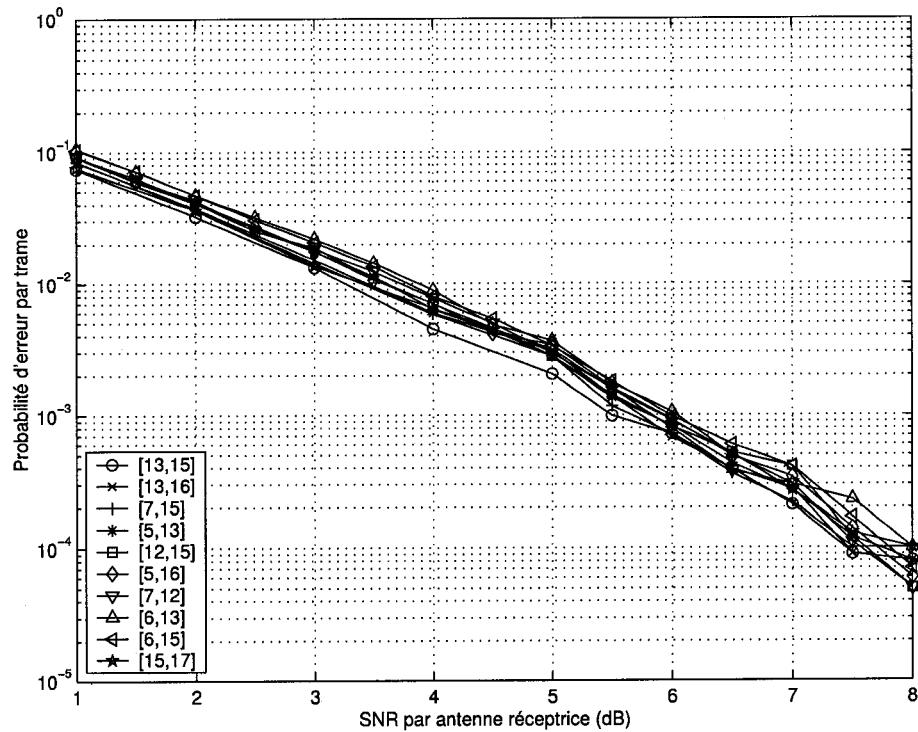


Figure I.3: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 2$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 8$  - évanouissements quasi-statiques

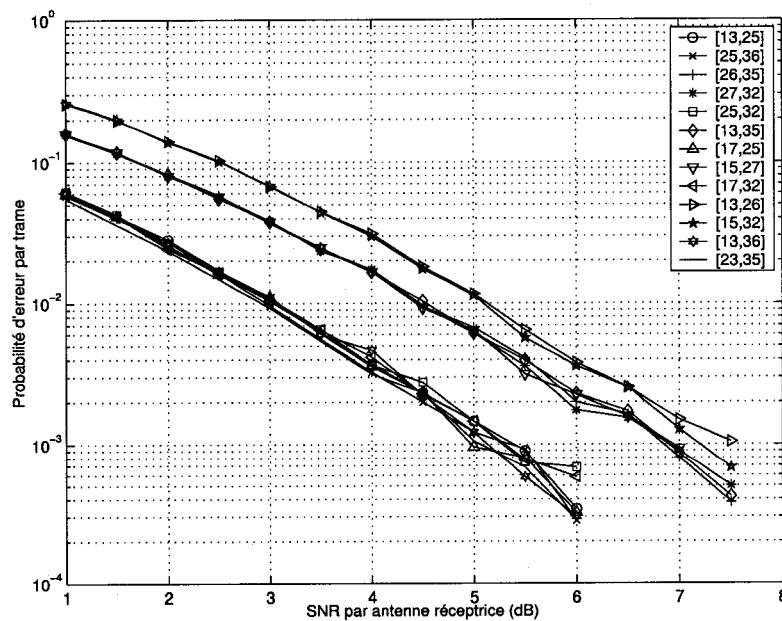


Figure I.4: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 2$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 16$  - évanouissements quasi-statiques

Tableau I.4: Liste de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 2$ ,  $Q = 5$ ,  $S = 16$  -  
Gain de codage :  $\eta = \sqrt{128} = 11.31$

Générateurs en octal	$\bar{\eta}_{inf}(5)$	$\bar{\eta}_{sup}(5)$	$\bar{\eta}_{inf}(6)$	$\bar{\eta}_{sup}(6)$
13,25	11.61	11.31	15.31	17.71
25,36	11.50	12.59	13.33	12.59
26,35	11.49	12.59	13.63	14.93
27,32	11.49	12.59	13.14	14.93
25,32	11.49	11.31	13.36	17.71
13,35	11.38	12.59	13.72	14.93
17,25	11.38	12.59	13.06	12.59
15,27	11.38	12.59	13.05	14.93
17,32	11.10	12.59	11.22	11.31
13,26	11.10	11.31	14.75	14.93
15,32	11.10	11.31	11.46	14.93
13,36	10.86	12.59	13.08	11.31
Meilleur code temporel ◊ * 23, 35 * ◊ $\eta = \sqrt{112} = 10.58$	12.13	12.59	14.09	14.26

Tableau I.5: Liste de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 2$ ,  $Q = 6$ ,  $S = 32$  -  
Gain de codage :  $\eta = \sqrt{192} = 13.8564$

Générateurs en octal	$\bar{\eta}_{inf}(6)$	$\bar{\eta}_{sup}(6)$	$\bar{\eta}_{inf}(7)$	$\bar{\eta}_{sup}(7)$
27,55	13.59	14.93	17.41	18.26
55,72	13.59	14.93	15.52	18.26
27,71	13.39	14.93	15.61	14.93
56,71	13.39	14.93	15.61	14.93
47,72	13.39	14.93	15.18	14.93
35,47	13.39	14.93	15.17	14.93
27,56	13.1	14.93	16.79	14.93
35,72	13.1	14.93	13.4	14.93
27,72	12.7	14.93	14.74	15.49
Meilleur code temporel $\diamond 53, 75 \diamond$ $\eta = \sqrt{176} = 13.2665$	14.1811	16.39	16.30	18.26
Meilleure borne moyenne $*43,75*$ $\eta = \sqrt{112} = 10.583$	14.1827	14.38	16.14	14.26

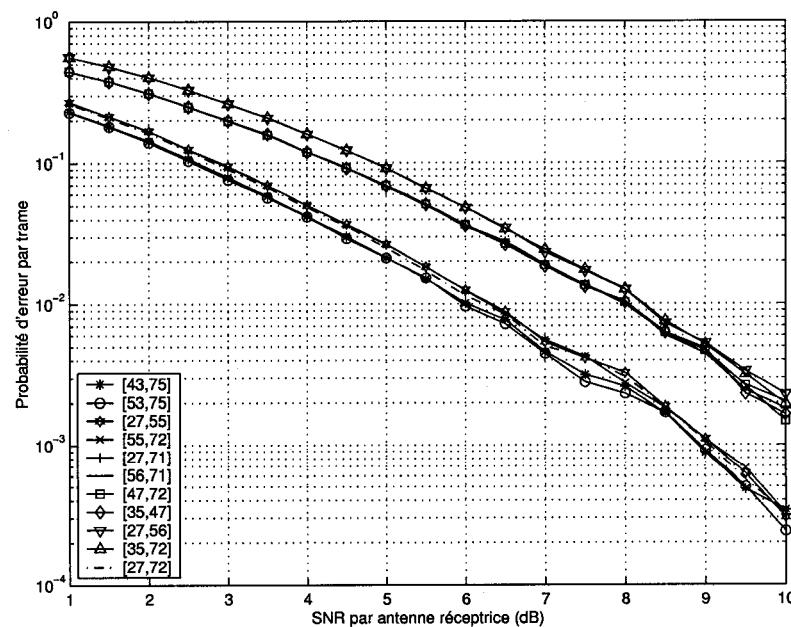


Figure I.5: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 2$ ,  $N_r = 2$ ,  $S = 32$  - évanouissements quasi-statiques

Tableau I.6: Liste de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 3$ ,  $Q = 3$ ,  $S = 4$  -  
Gain de codage :  $\eta = 4$

Générateurs en octal	$\bar{\eta}_{inf}(3)$	$\bar{\eta}_{sup}(3)$	$\bar{\eta}_{inf}(4)$	$\bar{\eta}_{sup}(4)$
*3,5,7*	5.08	5.08	7.69	7.05
5,6,7	4.54	5.08	7.16	7.05
3,6,7	4.54	5.08	6.81	6.35
3,4,5	4.54	4	7.16	7.05
4,5,7	4.54	4	7.16	7.05
2,3,5	4	4	7.16	7.05
2,4,5	4	4	6.88	7.05
2,5,6	4	4	6.88	7.05
4,5,6	4	4	6.88	7.05
2,3,7	4	4	6.81	6.35
2,3,4	4	4	6.53	6.35
2,3,6	4	4	6.53	6.35
2,4,7	4	4	6.53	6.35
2,6,7	4	4	6.53	6.35
3,4,6	4	4	6.53	6.35
4,6,7	4	4	6.53	6.35
1,2,5	4	4	6.41	7.05
1,3,5	4	4	6.41	7.05
1,5,6	4	4	6.41	7.05
1,5,7	4	4	6.41	7.05
1,2,4	4	4	6.06	6.35
1,2,6	4	4	6.06	6.35
1,2,7	4	4	6.06	6.35
1,3,4	4	4	6.06	6.35
1,3,6	4	4	6.06	6.35
1,3,7	4	4	6.06	6.35
1,4,6	4	4	6.06	6.35
1,4,7	4	4	6.06	6.35
Meilleur code temporel ◊5,7,7◊ Diversité non maximale	ND	ND	ND	ND

Tableau I.7: Liste de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 3$ ,  $Q = 4$ ,  $S = 8$  - Gain de codage :  $\eta = 256^{\frac{1}{3}} = 6.35$

Générateurs en octal	$\bar{\eta}_{inf}(4)$	$\bar{\eta}_{sup}(4)$	$\bar{\eta}_{inf}(5)$	$\bar{\eta}_{sup}(5)$
11,12,17	7.65	7.05	10.54	9.75
5,11,17	7.65	7.05	10.47	9.75
5,11,12	7.45	6.35	11.11	12.16
5,6,11	6.97	6.35	9.32	9.4
6,11,12	6.97	6.35	8.93	9.4
5,6,17	6.96	7.05	8.88	8.45
6,12,17	6.96	7.05	8.55	8.45
5,6,12	6.70	6.35	8.73	9.4
3,11,17	6.28	7.05	9.27	7.94
3,12,17	6.28	7.05	9.15	7.94
5,14,17	6.28	7.05	7.82	7.94
11,14,17	6.28	7.05	7.82	7.94
3,5,11	6.25	6.35	9.74	9.56
3,5,12	6.25	6.35	9.7	9.75
3,6,11	6.25	6.35	8.78	8.45
3,6,12	6.25	6.35	8.33	8.45
5,12,14	6.25	6.35	8.19	9.75
11,12,14	6.25	6.35	8.19	9.56
5,6,14	6.25	6.35	7.62	8.45
6,11,14	6.25	6.35	7.62	8.45
3,5,17	6.14	7.05	8.95	7.94
3,6,17	6.14	7.05	8.2	7.27
12,14,17	6.14	7.05	7.53	7.94
6,14,17	6.14	7.05	7.11	7.27
3,5,14	5.73	6.35	7.82	7.94
3,11,14	5.73	6.35	7.82	7.94
3,12,14	5.73	6.35	7.53	7.94
3,6,14	5.73	6.35	7.11	7.27
Meilleur code temporel $\diamond * 13, 15, 17 * \diamond$ $\eta = 128^{\frac{1}{3}} = 5.04$	7.79	9.02	9.69	9.40

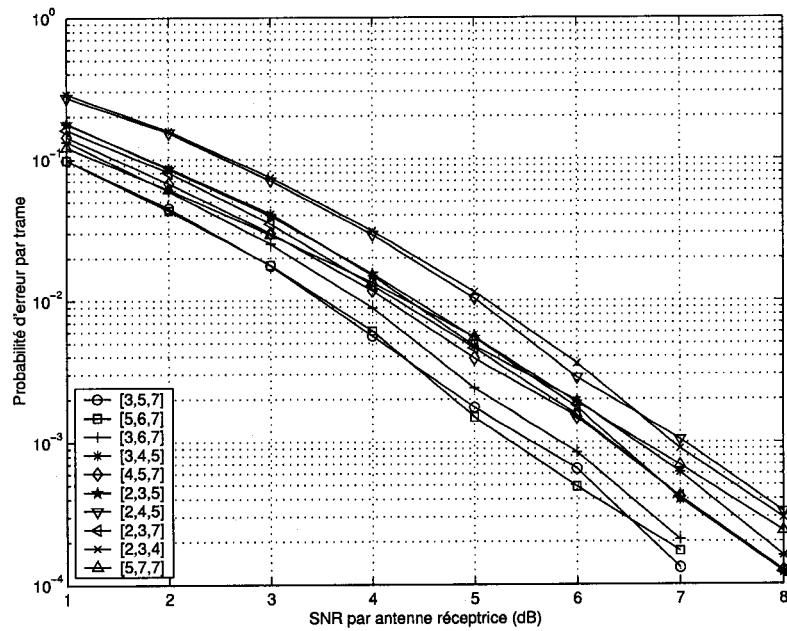


Figure I.6: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 3$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 4$  - évanouissements quasi-statiques

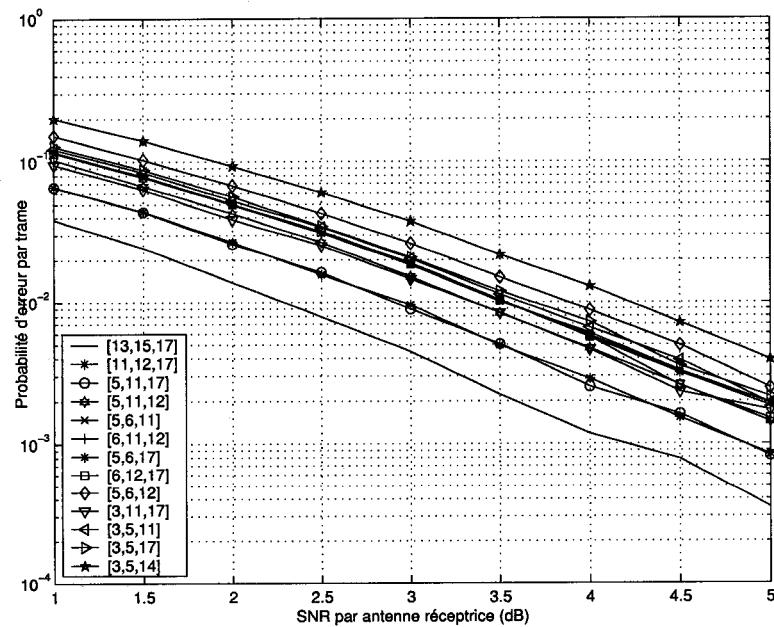


Figure I.7: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 3$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 8$  - évanouissements quasi-statiques

Tableau I.8: Liste de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 3$ ,  $Q = 5$ ,  $S = 16$  -  
Gain de codage :  $\eta = 8$  (32 premiers codes seulement)

Générateurs en octal	$\bar{\eta}_{inf}(5)$	$\bar{\eta}_{sup}(5)$	$\bar{\eta}_{inf}(6)$	$\bar{\eta}_{sup}(6)$
13,23,25	10.07	9.46	13.52	14.62
13,21,27	10.07	9	13.72	12.94
11,23,25	10.07	8.58	13.71	14.86
23,32,35	10	10.18	11.58	12.94
23,26,31	10	9.46	12.72	13.14
21,26,33	10	9	12.77	13.14
23,25,36	9.997	10.18	12.52	11.9
23,25,32	9.997	9.46	12.61	14.66
21,27,32	9.997	9	12.6	13.14
23,26,35	9.99	10.18	12.64	13.14
23,31,36	9.99	10.18	11.53	10.33
22,27,31	9.99	9	12.77	13.14
22,25,33	9.99	9	12.71	15.07
13,23,35	9.94	10.18	12.57	12.94
13,27,31	9.93	10.18	12.72	12.94
15,23,31	9.93	9.46	11.58	13.14
11,25,33	9.93	9	12.7	15.07
25,31,36	9.93	10.18	11.4	11.24
21,32,35	9.93	9	11.67	12.94
17,23,31	9.924	10.18	11.57	10.33
11,23,35	9.924	9	12.72	13.14
15,21,33	9.924	9	11.58	13.14
13,25,31	9.92	9.46	12.7	14.66
13,21,35	9.92	9	12.71	13.14
21,26,35	9.9	9	12.6	12.94
22,25,31	9.9	8.58	12.8	14.86
13,21,26	9.88	8.58	13.42	13.14
13,22,25	9.88	8.58	13.4	14.86
15,31,36	9.82	10.18	10.39	10.33
13,23,26	9.82	9.46	13.28	13.14
13,22,27	9.82	9	13.29	13.14
11,22,25	9.82	8	13.48	14.88
Meilleur code temporel $\diamond * 25, 33, 37 * \diamond$ $\eta = 256^{\frac{1}{3}} = 6.35$	10.12	11.86	11.84	11.24

Tableau I.9: Liste de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 3$ ,  $Q = 6$ ,  $S = 32$  -  
Gain de codage :  $\eta = 1024^{\frac{1}{3}} = 10.079$  (26 premiers codes seulement)

Générateurs en octal	$\bar{\eta}_{inf}(6)$	$\bar{\eta}_{sup}(6)$	$\bar{\eta}_{inf}(7)$	$\bar{\eta}_{sup}(7)$
27,43,55	12.246	11.974	15.781	15.419
55,61,72	12.246	11.974	13.788	15.419
23,47,51	12.246	11.124	15.783	15.419
45,62,71	12.246	11.124	13.743	15.419
23,47,71	12.157	11.974	14.868	13.720
47,62,71	12.157	11.974	13.684	13.720
33,47,61	12.151	11.974	13.623	13.720
43,66,71	12.151	11.974	13.501	13.720
47,52,61	12.151	11.124	14.785	15.599
25,43,71	12.151	11.124	14.709	15.599
27,55,61	12.150	11.974	14.919	15.419
27,45,71	12.150	11.974	14.727	15.419
43,55,72	12.150	11.974	14.655	15.419
47,51,72	12.150	11.974	14.634	15.419
27,53,61	12.149	11.974	14.858	15.419
43,65,72	12.149	11.974	13.535	15.419
47,52,71	12.148	11.974	14.781	15.192
25,47,71	12.148	11.974	14.739	15.192
43,56,71	12.140	11.974	14.757	13.801
27,43,71	12.140	11.974	14.742	13.801
47,61,72	12.140	11.974	13.676	13.801
35,47,61	12.140	11.974	13.632	13.801
46,53,61	12.140	11.124	14.723	15.558
31,43,65	12.140	11.124	13.617	15.558
45,56,63	12.061	11.974	14.858	15.558
35,51,63	12.061	11.974	13.396	15.558
Meilleur code temporel $\diamond 47, 53, 75 \diamond$ $\eta = 832^{\frac{1}{3}} = 9.40534$	12.42	13.87	15.08	15.42
Meilleure borne moyenne $*55,61,73*$ $\eta = 832^{\frac{1}{3}} = 9.40534$	12.44	12.57	14.06	15.42

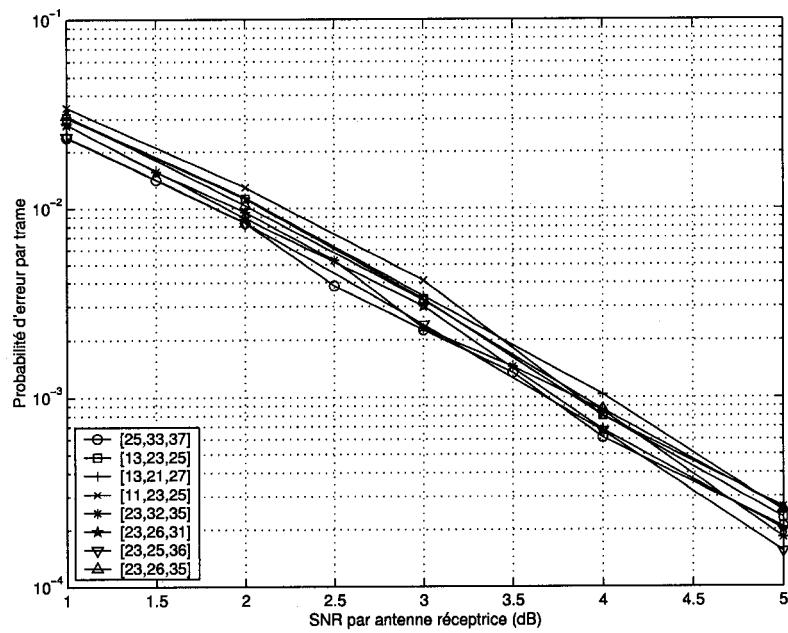


Figure I.8: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 3$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 16$  - évanouissements quasi-statiques

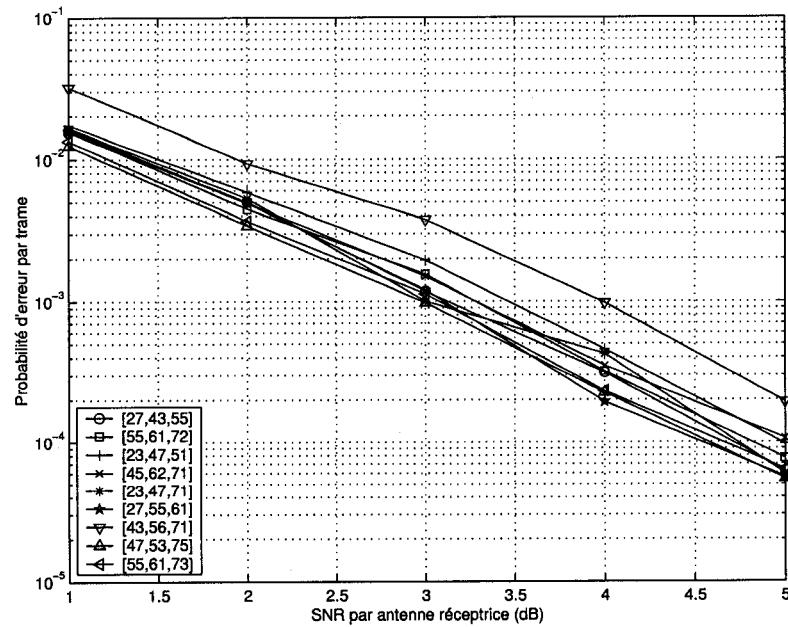


Figure I.9: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 3$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 32$  - évanouissements quasi-statiques

Tableau I.10: Liste de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 4$ ,  $Q = 4$ ,  $S = 8$  - Gain de codage :  $\eta = 4$  (25 premiers codes seulement)

Générateurs en octal	$\bar{\eta}_{inf}(4)$	$\bar{\eta}_{sup}(4)$	$\bar{\eta}_{inf}(5)$	$\bar{\eta}_{sup}(5)$
*5,7,12,16*	5.97	5.97	7.97	7.83
5,7,13,17	5.49	6.22	7.89	7.19
12,15,16,17	5.49	6.22	7.21	7.19
11,12,13,16	5.49	4.73	8.66	8.51
5,7,11,15	5.49	4.73	7.94	8.51
5,13,15,17	5.41	5.72	8.16	8.34
12,13,15,17	5.41	5.72	8.05	8.34
5,11,13,17	5.41	5.22	8.71	8.37
11,12,15,17	5.41	5.22	8.14	8.37
11,13,15,16	5.41	5.22	8.13	8.29
11,13,16,17	5.41	5.22	7.96	6.95
7,11,13,15	5.41	5.22	7.85	8.29
7,11,15,17	5.41	5.22	7.53	6.95
7,13,15,16	5.33	6.34	7.42	7.55
7,11,12,17	5.33	5.22	7.84	6.95
5,11,16,17	5.33	5.22	7.82	6.95
5,12,13,15	5.33	4.98	8.49	9.96
7,13,15,17	5.28	6.25	7.39	6.95
13,15,16,17	5.28	6.25	7.29	6.95
7,11,13,17	5.28	5.76	7.77	6.75
11,15,16,17	5.28	5.76	7.24	6.75
11,12,13,17	5.28	4.73	8.78	8.37
11,12,13,15	5.28	4.73	8.62	10.31
5,11,13,15	5.28	4.73	8.6	10.31
5,11,15,17	5.28	4.73	8.03	8.37
Meilleur code temporel ◊13, 15, 15, 17◊ Diversité non maximale	ND	ND	ND	ND

Tableau I.11: Liste de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 4$ ,  $Q = 5$ ,  $S = 16$  -  
Gain de codage :  $\eta = 1280^{\frac{1}{4}} = 5.98$  (25 premiers codes seulement)

Générateurs en octal	$\bar{\eta}_{inf}(5)$	$\bar{\eta}_{sup}(5)$	$\bar{\eta}_{inf}(6)$	$\bar{\eta}_{sup}(6)$
21,27,33,36	8.113	8.37	10.52	9.46
11,21,27,33	8.107	6.95	11.15	11.16
22,27,33,35	8.103	8.29	10.47	11.28
17,21,33,35	8.092	8.37	9.83	9.46
11,22,27,35	8.027	7.55	11.11	11.33
17,33,35,36	8.0132	10.14	9.02	8.51
11,21,22,27	8.0127	6.38	11.56	11.04
21,33,35,36	8.011	8.37	9.42	9.12
17,21,27,35	8.01	8.34	10.21	9.14
21,27,35,36	7.997	8.34	10.25	9.14
21,22,33,35	7.995	6.95	10.5	11.16
11,27,33,35	7.971	8.29	10.56	11.28
21,22,27,33	7.967	6.75	11.16	11.22
11,21,27,35	7.965	6.95	11.08	11.02
27,33,35,36	7.934	10.31	9.53	9.46
17,27,33,35	7.933	10.31	9.63	9.46
21,22,27,35	7.931	6.95	11.11	11.02
11,21,33,36	7.923	6.95	10.29	9.46
11,17,22,36	7.912	7.83	9.96	8.51
11,21,33,35	7.908	6.75	10.47	11.22
22,33,35,36	7.902	8.51	9.32	9.12
11,17,21,35	7.872	7.19	10.15	9.28
17,27,35,36	7.867	9.96	9.5	8.31
17,27,33,36	7.858	10.14	9.64	8.51
21,22,27,36	7.841	7.19	10.83	9.28
Meilleur code temporel $\diamond 25, 27, 33, 37 \diamond$ $\eta = 512^{\frac{1}{4}} = 4.76$	8.04	9.97	10.52	9.82
Meilleure borne moyenne $*23, 25, 27, 35*$ $\eta = 512^{\frac{1}{4}} = 4.76$	8.13	8.23	11.38	12.42

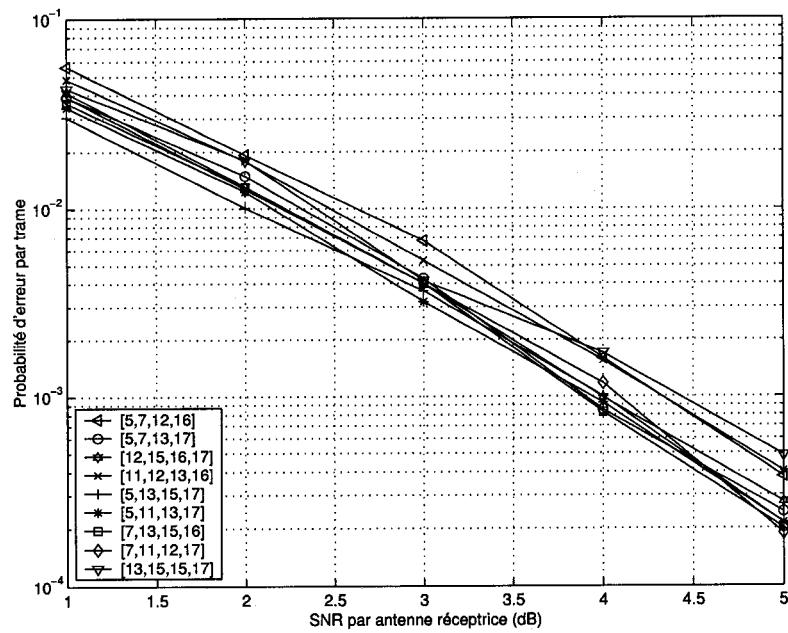


Figure I.10: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 4$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 8$  - évanouissements quasi-statiques

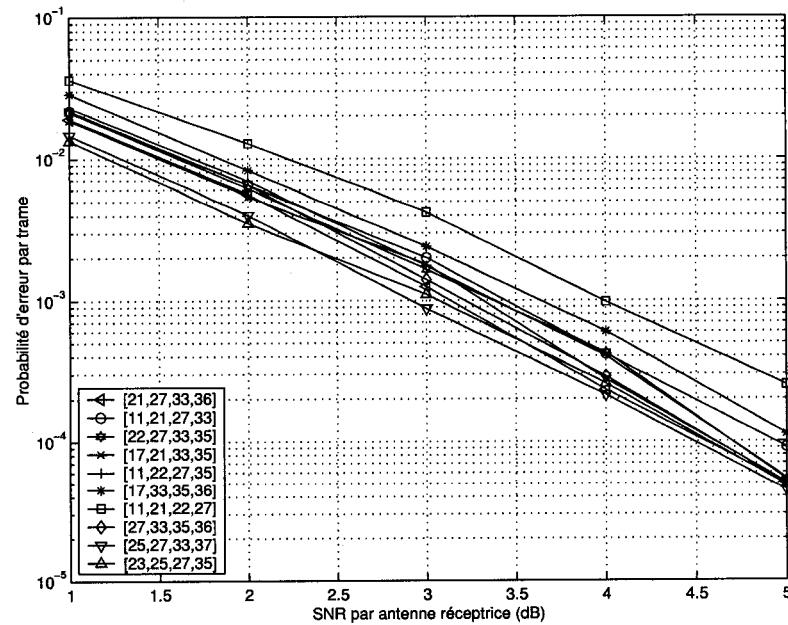


Figure I.11: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation BPSK -  $N_t = 4$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 16$  - évanouissements quasi-statiques

Tableau I.12: Liste de CST-MCT en modulation QPSK -  $N_t = 2$ ,  $Q = 2$ ,  $S = 8$  - Gain de codage :  $\eta = \sqrt{8} = 2.828$  (28 premiers codes seulement)

Générateurs	$\bar{\eta}_{inf}(2)$	$\bar{\eta}_{sup}(2)$	$\bar{\eta}_{inf}(3)$	$\bar{\eta}_{sup}(3)$	$\bar{\eta}_{inf}(4)$	$\bar{\eta}_{sup}(4)$
3220,3302	3.542	3.802	5.515	5.434	7.376	7.408
2302,3320	3.542	3.802	5.515	5.434	7.376	7.408
2122,3220	3.542	3.802	5.515	5.434	7.376	7.408
2102,3222	3.542	3.802	5.515	5.434	7.376	7.408
1222,2302	3.542	3.802	5.515	5.434	7.376	7.408
1222,2102	3.542	3.802	5.515	5.434	7.376	7.408
1220,2322	3.542	3.802	5.515	5.434	7.376	7.408
1220,2122	3.542	3.802	5.515	5.434	7.376	7.408
1122,3202	3.542	3.802	5.515	5.434	7.376	7.408
1122,2320	3.542	3.802	5.515	5.434	7.376	7.408
1122,2120	3.542	3.802	5.515	5.434	7.376	7.408
1122,1202	3.542	3.802	5.515	5.434	7.376	7.408
1120,2302	3.542	3.802	5.515	5.434	7.376	7.408
1102,3220	3.542	3.802	5.515	5.434	7.376	7.408
2032,2221	3.542	3.802	5.501	5.434	7.376	7.408
2023,2211	3.542	3.802	5.501	5.434	7.376	7.408
2021,2211	3.542	3.802	5.501	5.434	7.376	7.408
2012,2223	3.542	3.802	5.501	5.434	7.376	7.408
2012,2221	3.542	3.802	5.501	5.434	7.376	7.408
0233,2032	3.542	3.802	5.501	5.434	7.376	7.408
0232,2211	3.542	3.802	5.501	5.434	7.376	7.408
0223,2212	3.542	3.802	5.501	5.434	7.376	7.408
0223,2033	3.542	3.802	5.501	5.434	7.376	7.408
0223,2011	3.542	3.802	5.501	5.434	7.376	7.408
0221,2232	3.542	3.802	5.501	5.434	7.376	7.408
0221,2212	3.542	3.802	5.501	5.434	7.376	7.408
0212,2211	3.542	3.802	5.501	5.434	7.376	7.408
0211,2032	3.542	3.802	5.501	5.434	7.376	7.408

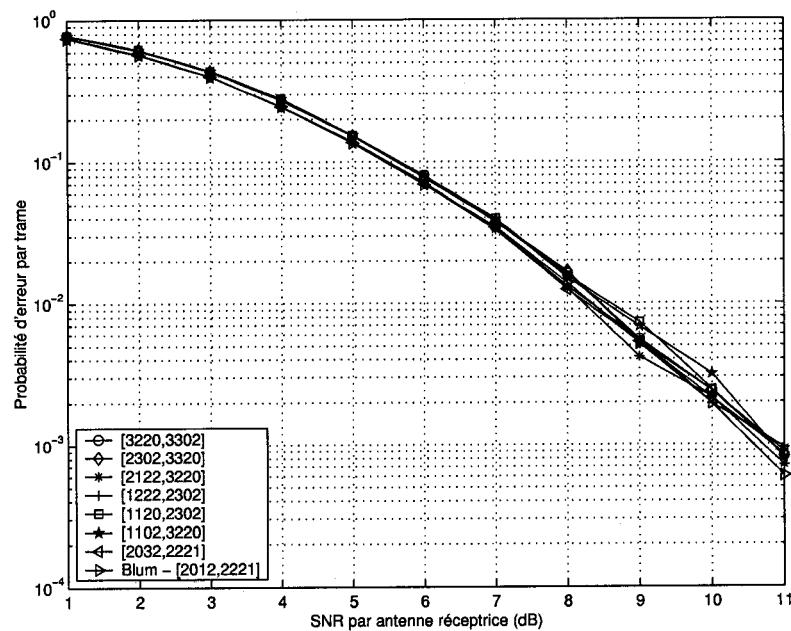


Figure I.12: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation QPSK -  $N_t = 2$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 4$  - évanouissements quasi-statiques

## Annexe II

### Liste de CST-MCT en modulation QPSK et 8PSK

Ces tableaux répertorient l'ensemble des codes issus des publications consacrées aux CST-MCT que nous avons simulés pour des modulations QPSK et 8PSK. Chaque code est identifié par sa matrice génératrice. Les codes de Ionescu n'y figurent pas car notre notation matricielle ne se prête pas à leur cas. Le classement est effectué par ordre décroissant selon la borne  $\bar{\eta}_{inf}(Q)$ . Lorsque le calcul d'un gain ou d'une borne n'a pu être mené à terme, l'indication "ND" est utilisée.

#### II.1 CST-MCT pour évanouissements quasi-statiques

Tableau II.1: Liste de CST-MCT en modulation QPSK -  $N_t = 2$ ,  $Q = 2$ ,  $S = 4$

Source	$G^T$	$\eta$	$\bar{\eta}_{inf}(2)$	$\bar{\eta}_{sup}(2)$	$\bar{\eta}_{inf}(3)$	$\bar{\eta}_{sup}(3)$
Chen [7]	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	2	3.58	3.30	5.66	5.73
Tao [26]	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	2	3.58	3.30	5.66	5.73
Blum [5]	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	2.83	3.54	3.80	5.50	5.43
Tarokh [29]	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	2.59	2.67	4.60	4.66
Bäro [2]	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	2.83	2.26	2.83	4.79	4.81

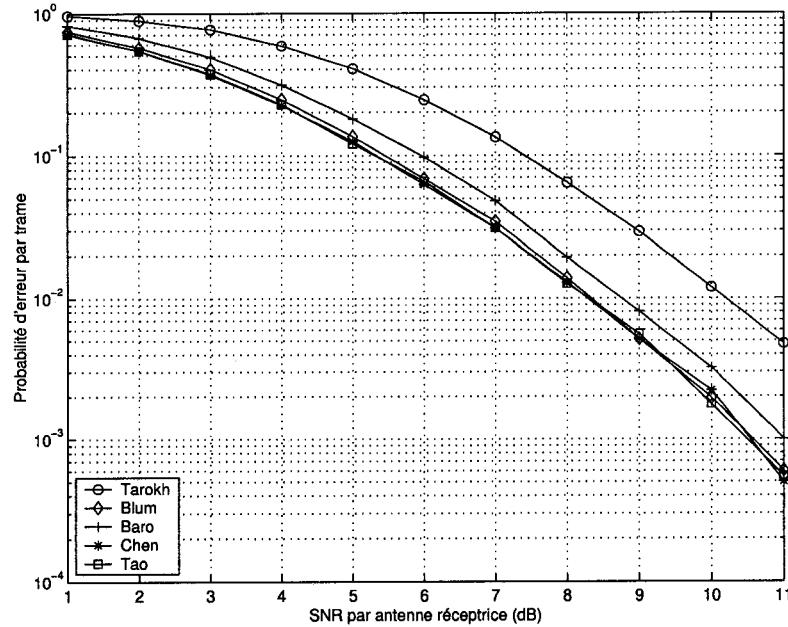


Figure II.1: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation QPSK -  $N_t = 2$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 4$  - évanouissements quasi-statiques

Tableau II.2: Liste de CST-MCT en modulation QPSK -  $N_t = 2$ ,  $Q = 3$ ,  $S = 8$

Source	$G^T$	$\eta$	$\bar{\eta}_{inf}(3)$	$\bar{\eta}_{sup}(3)$	$\bar{\eta}_{inf}(4)$	$\bar{\eta}_{sup}(4)$
Blum [5]	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	4	6.61	6.86	7.56	7.62
Bäro [2]	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	3.46	6.07	5.16	7.91	7.80
Tao [26]	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	4	5.95	5.96	6.99	7.03
Tarokh [29]	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	3.46	5.16	4.47	6.72	6.57
Chen [7]	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	2.82	4.81	5.16	6.47	5.98

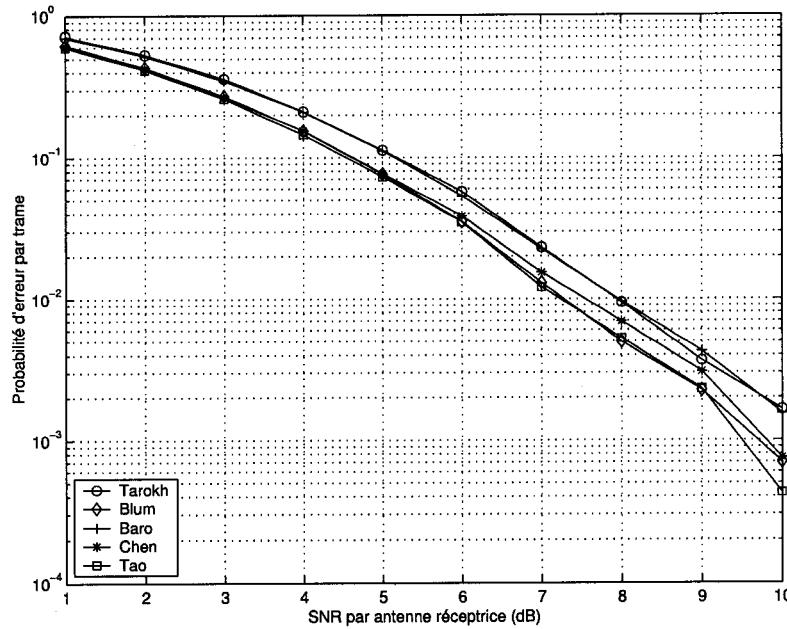


Figure II.2: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation QPSK -  $N_t = 2$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 8$  - évanouissements quasi-statiques

Tableau II.3: Liste de CST-MCT en modulation QPSK -  $N_t = 2$ ,  $Q = 3$ ,  $S = 16$

Source	$G^T$	$\eta$	$\bar{\eta}_{inf}(3)$	$\bar{\eta}_{sup}(3)$	$\bar{\eta}_{inf}(4)$	$\bar{\eta}_{sup}(4)$
Blum [5]	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	5.66	5.76	6.44	7.70	7.43
Tao [26]	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	5.66	5.76	5.66	8.04	8.35
Chen [7]	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	2.83	5.65	5.98	7.57	7.69
Bäro [2]	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	4.47	5.63	6.76	7.40	7.54
Tarokh [29]	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	3.46	5.05	5.60	6.93	6.75

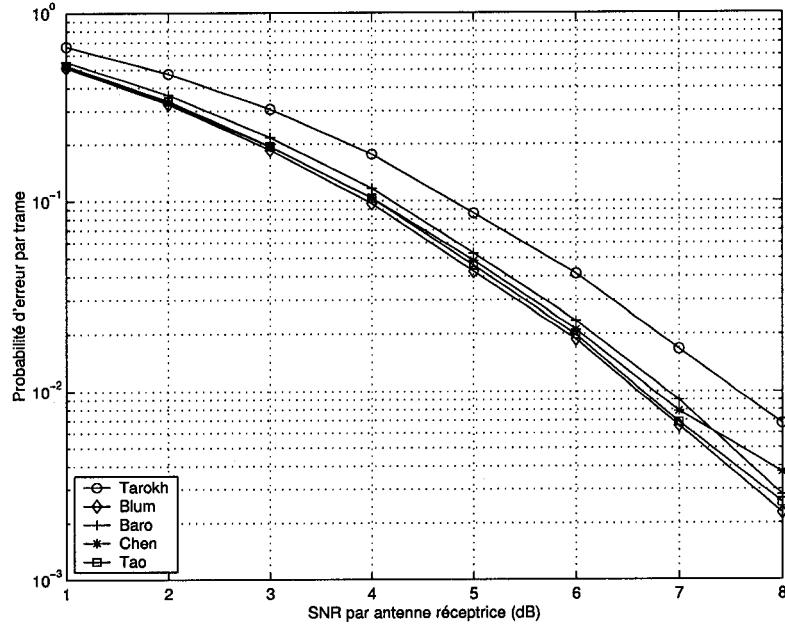


Figure II.3: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation QPSK -  $N_t = 2$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 16$  - évanouissements quasi-statiques

Tableau II.4: Liste de CST-MCT en modulation QPSK -  $N_t = 2$ ,  $Q = 4$ ,  $S = 32$

Source	$G^T$	$\eta$	$\bar{\eta}_{inf}(4)$	$\bar{\eta}_{sup}(4)$	$\bar{\eta}_{inf}(5)$	$\bar{\eta}_{sup}(5)$
Blum [5]	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	ND	6.92	9.78	ND	ND
Tarokh [29]	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	ND	6.86	7.54	ND	ND
Chen [7]	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	ND	6.70	8.31	ND	ND

Tableau II.5: Liste de CST-MCT en modulation QPSK -  $N_t = 2$ ,  $Q = 4$ ,  $S = 64$

Source	$G^T$	$\eta$	$\bar{\eta}_{inf}(4)$	$\bar{\eta}_{sup}(4)$	$\bar{\eta}_{inf}(5)$	$\bar{\eta}_{sup}(5)$
Chen [7]	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	ND	ND	ND	ND	ND

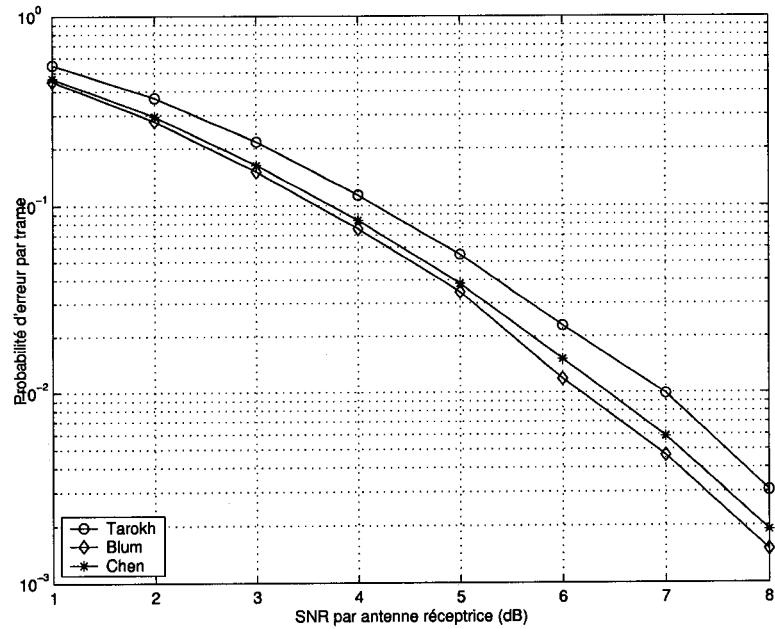


Figure II.4: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation QPSK -  $N_t = 2$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 32$  - évanouissements quasi-statiques

Tableau II.6: Liste de CST-MCT en modulation 8PSK -  $N_t = 2$ ,  $Q = 2$ ,  $S = 8$

Source	$G^T$	$\eta$	$\bar{\eta}_{inf}(2)$	$\bar{\eta}_{sup}(2)$	$\bar{\eta}_{inf}(3)$	$\bar{\eta}_{sup}(3)$
Chen [7]	$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	1.41	2.95	2.86	5.05	5.07
Tao [26]	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 4 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$	ND	2.47	2.51	4.62	4.61
Tarokh [29]	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1.41	2.06	1.95	4.62	4.61

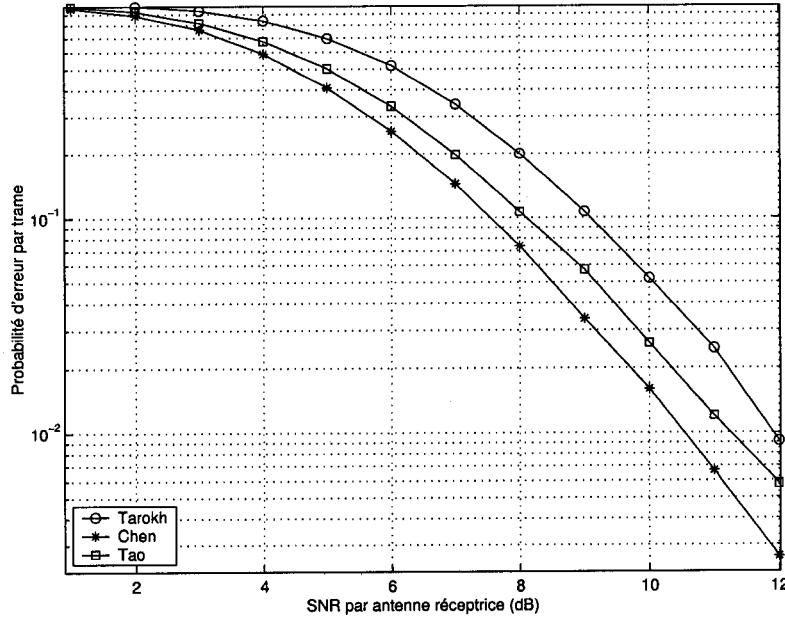


Figure II.5: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation 8PSK -  $N_t = 2$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 8$  - évanouissements quasi-statiques

Tableau II.7: Liste de CST-MCT en modulation 8PSK -  $N_t = 2$ ,  $Q = 3$ ,  $S = 16$

Source	$G^T$	$\eta$	$\bar{\eta}_{inf}(3)$	$\bar{\eta}_{sup}(3)$	$\bar{\eta}_{inf}(4)$	$\bar{\eta}_{sup}(4)$
Tarokh [29]	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	ND	ND	ND	ND	ND
Chen [7]	$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 7 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	ND	ND	ND	ND	ND

Tableau II.8: Liste de CST-MCT en modulation 8PSK -  $N_t = 2$ ,  $Q = 3$ ,  $S = 32$

Source	$G^T$	$\eta$	$\bar{\eta}_{inf}(3)$	$\bar{\eta}_{sup}(3)$	$\bar{\eta}_{inf}(4)$	$\bar{\eta}_{sup}(4)$
Tarokh [29]	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$	ND	ND	ND	ND	ND
Chen [7]	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$	ND	ND	ND	ND	ND

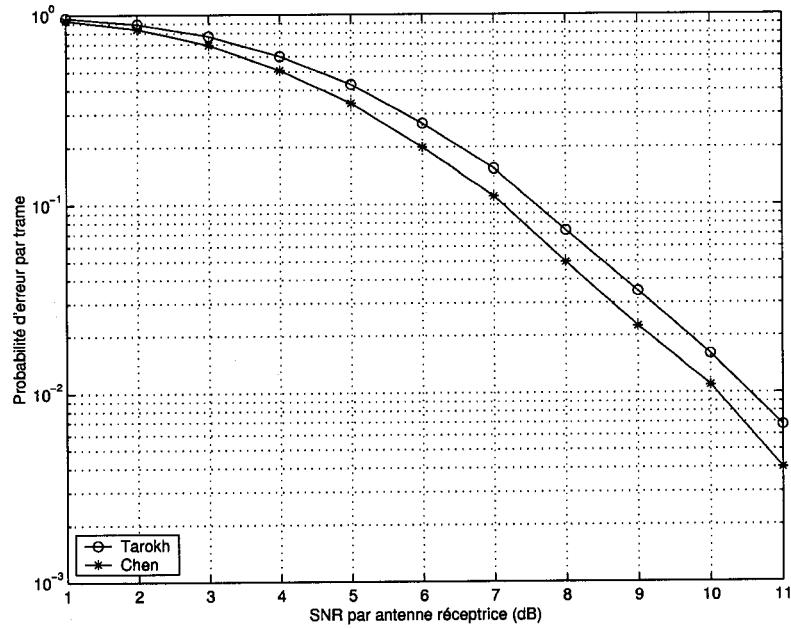


Figure II.6: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation 8PSK -  $N_t = 2$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 16$  - évanouissements quasi-statiques

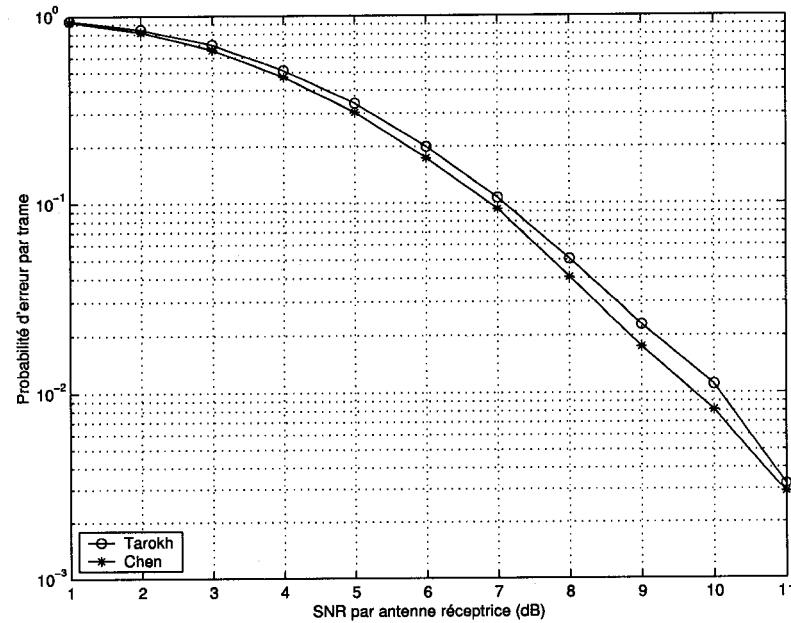


Figure II.7: Comparaison des performances de CST-MCT en modulation 8PSK -  $N_t = 2$ ,  $N_r = 3$ ,  $S = 32$  - évanouissements quasi-statiques

Tableau II.9: Liste de CST-MCT en modulation QPSK -  $N_t = 3$ ,  $Q = 3$ ,  $S = 16$ 

Source	$G^T$	$\eta$	$\bar{\eta}_{inf}(3)$	$\bar{\eta}_{sup}(3)$	$\bar{\eta}_{inf}(4)$	$\bar{\eta}_{sup}(4)$
Blum [5]	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	3.17	3.91	4.72	6.03	5.96

## II.2 CST-MCT pour évanouissements rapides

Nous avons réuni ici les codes proposés par Firmanto dans [9].

Tableau II.10: Liste de CST-MCT en modulation QPSK -  $N_t = 2$  - évanouissements rapides

Nombre d'états $S$	Q	$G^T$
4	2	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
8	3	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
16	3	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
32	4	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Tableau II.11: Liste de CST-MCT en modulation 8PSK -  $N_t = 2$  - évanouissements rapides

Nombre d'états $S$	Q	$G^T$
8	2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
16	3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
32	3	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$