

Titre: La torsion géométrique dans la scoliose idiopathique
Title:

Auteur: Philippe Poncet
Author:

Date: 2001

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Poncet, P. (2001). La torsion géométrique dans la scoliose idiopathique [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/7080/>

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/7080/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Jean Dansereau, & François Trochu
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

INFORMATION TO USERS

This manuscript has been reproduced from the microfilm master. UMI films the text directly from the original or copy submitted. Thus, some thesis and dissertation copies are in typewriter face, while others may be from any type of computer printer.

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted. Broken or indistinct print, colored or poor quality illustrations and photographs, print bleedthrough, substandard margins, and improper alignment can adversely affect reproduction.

In the unlikely event that the author did not send UMI a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if unauthorized copyright material had to be removed, a note will indicate the deletion.

Oversize materials (e.g., maps, drawings, charts) are reproduced by sectioning the original, beginning at the upper left-hand corner and continuing from left to right in equal sections with small overlaps.

ProQuest Information and Learning
300 North Zeeb Road, Ann Arbor, MI 48106-1346 USA
800-521-0600

UMI[®]

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

LA TORSION GÉOMÉTRIQUE DANS LA SCOLIOSE IDIOPATHIQUE

PHILIPPE PONCET
INSTITUT DE GÉNIE BIOMÉDICAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE BIOMÉDICAL)
DÉCEMBRE 2001

© Philippe Poncet, 2001.



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-71315-6

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

LA TORSION GÉOMÉTRIQUE DANS LA SCOLIOSE IDIOPATHIQUE

présentée par: PONCET Philippe

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. MATHIEU Pierre, D.Sc.A., président

M. DANSEREAU Jean, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. TROCHU François, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. CHÉRIET Farida, Ph.D., membre

M. MERCIER Pierre, MD, examinateur externe

REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord remercier mon directeur de recherche et professeur titulaire au département de génie mécanique de l'École Polytechnique de Montréal (ÉPM), le Dr Jean Dansereau, pour m'avoir encadré tout au long de mon projet de recherche. Ses critiques, ses conseils et ses encouragements répétés auront su jusqu'à la toute fin me guider afin de compléter cette interminable démarche.

J'aimerais également exprimer ma reconnaissance à mon codirecteur de recherche, le Dr François Trochu, professeur agrégé au département de génie mécanique de l'École Polytechnique de Montréal, pour son apport scientifique, ainsi qu'au Dr Hubert Labelle, chirurgien-orthopédiste à l'Hôpital Sainte-Justine et professeur au département de chirurgie de la Faculté de médecine de l'Université de Montréal, pour son apport clinique tout au long du projet.

J'aimerais remercier certains étudiants, dont Christiane Labrie (étudiante 1^{er} cycle à l'Université de Montréal) et Éric Marcil (étudiant de 1^{er} cycle en génie mécanique à l'École Polytechnique de Montréal) pour leur collaboration dans certaines parties du projet. Des remerciements doivent être aussi offerts aux associés de recherche Christian Bellefleur (associé de recherche à l'Hôpital Sainte-Justine), Yves Martel (associé de recherche lors du projet Orthobiom de l'Hôpital Sainte-Justine) et Gildas Perrot (associé de recherche à l'Institut de génie biomédical de l'École Polytechnique de Montréal) pour leur contribution scientifique et technique. Je tiens également à remercier Jacob Jaremko pour l'aide qu'il m'a apportée dans la correction grammaticale des articles de cette thèse et ma mère, Marie-Andrée, pour la révision générale de l'orthographe de ce travail. J'aimerais aussi souligner l'appui et la servabilité des secrétaires Diane Giroux et Louise Clément de l'Institut de génie biomédical et remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet de recherche.

Je remercie amicalement mes collègues étudiants et amis pour leur présence, encouragement et support tout au cours de ce projet. Je tiens aussi à remercier chaleureusement mes parents Marie-Andrée et Roger pour leur constante générosité et leur support dans les moments difficiles.

Finalement, je désire exprimer toute ma gratitude à ma conjointe Francys Carolina, pour sa patience et ses encouragements tout au long de cette démarche. Un merci tout spécial à mes deux trésors Gabriella et Samuel pour la joie qu'ils m'apportent.

Ce projet de doctorat a été financé en majeure partie par des bourses du Fonds pour les Chercheurs et l'Aide à la Recherche (FCAR) et du Conseil de la Recherche en Science Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG).

RÉSUMÉ

La scoliose idiopathique est une maladie qui génère des déformations morphologiques tridimensionnelles (3D) complexes de la colonne vertébrale qui généralement évoluent dans le temps. Des études antérieures sur l'évolution des déformations scoliotiques à partir du plan transverse aura permis de mettre en évidence un mécanisme commun de progression des courbures scoliotiques qui s'apparente au concept mathématique de torsion géométrique d'une courbe dans l'espace. Bien que quelques méthodes de mesure de la torsion géométrique ont été développées ou proposées, le phénomène de torsion dans la scoliose n'a jamais été analysé en détail et défini précisément. Cette thèse de doctorat s'intéresse donc au phénomène de torsion géométrique dans la scoliose idiopathique de l'adolescence et pose l'hypothèse que l'aspect morphologique tridimensionnel des déformations scoliotiques peut être représenté par une courbe dans l'espace dont les propriétés intrinsèques de courbure 3D et de torsion géométrique, tel que définie mathématiquement par les équations de Frenet, en permettent la caractérisation et la description. Pour vérifier cette hypothèse, trois nouvelles approches de modélisation curviligne 3D de la colonne scoliotique ont été étudiées. De ces approches, un modèle géométrique représentant le plus fidèlement possible la géométrie tridimensionnelle de la majorité des morphologies scoliotiques a été proposé pour l'évaluation et l'interprétation du paramètre de torsion géométrique. Par la suite, une étude clinique a été réalisée pour évaluer la pertinence du paramètre de torsion géométrique comme indice tridimensionnel des déformations dans la scoliose idiopathique.

Une technique de reconstruction radiographique tridimensionnelle développée à l'École Polytechnique de Montréal et implantée en milieu clinique (Hôpital Sainte-Justine de Montréal) a été utilisée pour reconstruire les sommets inférieurs et supérieurs des pédicules droit et gauche et à partir desquels la position des centroïdes vertébraux, correspondant approximativement au centre du trou vertébral, a été estimée. La première approche de modélisation de la colonne scoliotique est basée sur des segments d'hélices

elliptiques ajustés aux centroïdes vertébraux reconstruits. Cette approche s'est avérée limitée à cause de problèmes d'adéquation, la forme hélicoïdale elliptique ne permettant pas de modéliser toutes les géométries scoliotiques et plus particulièrement les géométries lombaires. De plus, la modélisation segmentaire des géométries lombaire et thoracique a mené à des problèmes de discontinuité et la torsion n'a pas pu être évaluée en tout point de la colonne. Une analyse précise et complète de l'ensemble des déformations scoliotiques en terme du phénomène de torsion géométrique n'était, par conséquent, pas possible.

Pour pallier les limites de modélisation de cette première approche, la représentation mathématique de la colonne vertébrale par des fonctions paramétriques de séries de Fourier lissées par la méthode des moindres carrés a été explorée. Cependant, les méthodes de lissage paramétrique modélisent difficilement les zones de changement de sens de certaines courbes spinales (point d'inflexion 3D). Ceci résulte en la présence de valeurs extrêmes (pics) non-représentatives sur les tracés de torsion. Une méthode de correction a donc été développée et validée sur des données de colonnes scoliotiques simulées et réelles. La technique de correction qui consiste à définir un point d'inflexion 3D dans la zone du pic de torsion, généralement associé à la jonction des scolioses de type thoracique droite-lombaire gauche, s'est avérée avoir peu d'impact sur la précision du modèle géométrique de la colonne (0.27 ± 0.17 mm) lorsque étudiée sur des colonnes scoliotiques simulées. Cette seconde approche de modélisation s'est avérée plus efficace que celle des hélices elliptiques pour représenter les géométries scoliotiques thoraciques et lombaires et permet d'évaluer la torsion en tout point le long de la colonne modélisée évitant ainsi de perdre des informations.

La troisième approche est basée sur une technique d'interpolation plus générale en ce sens qu'elle englobe les méthodes des Spline et des moindres carrés. Elle est plus raffinée que la méthode des séries de Fourier lissées par moindres carrés parce qu'elle y ajoute une fonction de correction, appelé covariance, pour encore mieux représenter la

géométrie de la colonne. La méthode de validation croisée a été utilisée pour sélectionner les fonctions de krigeage (dérives et covariances) qui représentaient le mieux la géométrie simulée de colonnes scoliotiques typiques. La torsion des colonnes simulées a ensuite été estimée à partir de modèles utilisant les meilleures fonctions de krigeage et s'est avérée plus précise ($1.46 \times 10^{-5} \pm 1.18 \times 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$ à $1.2 \times 10^{-5} \pm 7.11 \times 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$) que la torsion mesurée à partir de la méthode des séries de Fourier conventionnelle ($5.25 \times 10^{-3} \pm 3.71 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$), lorsque comparée à la torsion analytique des courbes simulées. Ces résultats démontrent le potentiel de cette approche dans l'évaluation de la torsion ainsi que dans celle d'autres indices de déformations (angle de Cobb, angle du plan de déformation maximum, courbure 3D, etc.). Tout comme d'autres méthodes de lissage paramétrique utilisées dans l'évaluation de la torsion géométrique, le krigeage modélise difficilement les zones d'infexion 3D caractéristiques de certaines colonnes scoliotiques double majeure. Bien que cela n'ai pas été étudié, les succès de la technique de correction utilisée dans la seconde approche sont un signe prometteur pour l'application d'une approche de correction semblable avec le krigeage.

L'application de l'approche des séries de Fourier "corrigée" sur des données réelles de sujets sains et scoliotiques a permis de confirmer le caractère bidirectionnel du phénomène de torsion chez les courbes doubles de type thoracique droite-lombaire gauche et de réaffirmer le caractère faiblement torsionnel (parfois même nul) des zones apicales et fortement torsionnel des extrémités des courbes scoliotiques. Ceci a aussi été constaté dans les résultats de l'approche des hélices elliptiques. L'approche des séries de Fourier aura aussi contribué à fournir des informations additionnelles sur le phénomène de torsion dans la scoliose idiopathique. Ainsi, le phénomène de torsion n'est pas uniquement unidirectionnel chez les courbures simples, mais aussi bidirectionnel. De plus, lorsqu'une courbe scoliotique est associée à un phénomène de torsion opposée, elle correspond à une scoliose combinée dans l'espace avec une courbe du profil sagittal (cyphose ou lordose). Quant aux courbures double thoracique droite-lombaire gauche dont la jonction (plan frontal) coïncide avec une torsion nulle, elles présentent un

phénomène de torsion-contretorsion dont la transition correspond à la superposition dans l'espace de la jonction des courbes scoliotiques et des courbes du profil sagittal.

L'analyse des tracés de torsion aura permis de relever pour la première fois la similitude tridimensionnelle des patrons de courbure idiopathique droit et gauche, l'un étant l'image miroir de l'autre. Cette constatation aura permis de limiter la description des courbes scoliotiques, y compris celles des très rares scolioses lombaire droite et thoracique gauche, à trois principaux patrons de torsion permettant une description à la fois simple et détaillée de l'ensemble des déformations de la colonne scoliotique.

Le système de classification proposé dans cette thèse peut être utilisé pour comparer plus objectivement le résultat des traitements chirurgicaux de courbes tridimensionnellement similaires. Ceci devrait permettre d'assister le chirurgien-orthopédiste dans le choix de l'approche chirurgical, comme celui de la sélection plus adéquate des niveaux de fusion. Les notions mathématiques de courbure et de torsion pourraient aussi être utilisées pour développer un modèle biomécanique simplifié, de type curviligne, capable de simuler la réponse 3D de la colonne à différents systèmes de forces correctrices générées par différentes instrumentations. De plus, l'étude comparative des tracés de torsion obtenus à différents stades de l'évolution des déformations devrait aider à visualiser et à comprendre plus à fond les aspects évolutifs de la scoliose.

L'approche novatrice des séries de Fourier "corrigée", basée sur une technique de correction des pics de torsion, a permis de caractériser l'aspect morphologique tridimensionnel des déformations scoliotiques et de mieux comprendre le phénomène de torsion géométrique dans la scoliose idiopathique. La reconnaissance de patrons de torsion géométrique a également permis de proposer un système de classification novateur qui comprend une description tridimensionnelle et torsionnelle des déformations scoliotiques.

ABSTRACT

Idiopathic scoliosis is a pathology causing complex three-dimensional morphologic deformities of the spine that generally progress in time. Previous studies of the scoliotic deformity through transverse plan have shown that the mechanism of curves progression is similar to the mathematical concept of geometric torsion of a spatial curve. Although a number of methods have been developed or proposed for the evaluation of geometric torsion, the phenomenon of torsion in scoliosis has never been analysed in detail and precisely defined. The intention of this thesis is to study the geometrical torsion phenomenon in scoliosis with the hypothesis that three-dimensional (3-D) scoliotic deformities can be represented by a spatial curve characterized and described from curvature and geometric torsion properties, defined mathematically by Frenet's formulas. To test this hypothesis, three novel approaches of 3-D curvilinear modeling of the spine were investigated. From these, a geometric model that accurately represents the 3-D geometry of common scoliotic deformities was proposed for the evaluation and interpretation of geometric torsion. A clinical study was conducted to evaluate the reliability of geometric torsion as a 3-D index of idiopathic scoliosis deformities.

A radiographical 3-D reconstruction technique developed at Ecole Polytechnique of Montreal and establish in a clinical environment (Montreal Sainte-Justine Hospital) was used to reconstruct left and right pedicles bases and estimate the vertebral centroid location, approximately, the center of the vertebral foramen. The first approach of scoliotic spinal modeling fitted segments of elliptical helices to the 3-D reconstructed thoracic and lumbar vertebral centroids. This method was limited because the elliptical helix was inadequate to model all geometries of scoliotic spine, but more particularly the lumbar geometry. In addition, segment modeling of the lumbar and thoracic geometry led to discontinuity problem and geometric torsion could not be evaluated everywhere on the spinal curve. Precise and complete analysis of the various scoliotic deformities in terms of the geometric torsion phenomenon, therefore, were not possible.

An alternative method was to represent the spine with parametric functions of Fourier series fitted by least square techniques. With parametric smoothing method it is difficult to model 3-D inflexion points (direction change in the curve) found in some spinal curves. This results in non-representative extreme values (spikes) on torsion plots. A corrective method was developed and validated on simulated and clinical scoliotic spine data. The corrective technique is based on the definition of a true 3D inflexion point in the torsion spike area, generally found at the junction of right thoracic-left lumbar curves. This technique was found to have little impact on the accuracy of the geometric model (0.27 ± 0.17 mm) when studied on simulated scoliotic spines. This second approach was more effective than the elliptical helices approach for representing lumbar and thoracic scoliotic geometries and allowed evaluation of torsion at every point along the modeled spine avoiding any lost of information.

The third approach was based on the statistical interpolation method of kriging. This method is more general because it includes Spline and least square methods. It is more refined than the previous least square Fourier series methods, because it involves a corrective function, called covariance, to better fit the spinal shape. Cross-validation tests were used to select the kriging functions (drifts and covariances) that best represent the geometry of simulated typical scoliotic spines. The torsion of the simulated spines was estimated from models using the best kriging functions and was found to be more accurate ($1.46 \times 10^{-5} \pm 1.18 \times 10^{-4}$ mm $^{-1}$ to $1.2 \times 10^{-5} \pm 7.11 \times 10^{-5}$ mm $^{-1}$) than the torsion obtained from simple least square Fourier series method ($5.25 \times 10^{-3} \pm 3.71 \times 10^{-3}$ mm $^{-1}$), when compared with the analytical torsion. These results show the promise of this approach in torsion evaluation as well as in other deformity indices measurement (Cobb angle, plan of maximum deformity, 3D curvature, etc.). Similarly to other smoothing parametric method used for the evaluation of geometric torsion, kriging has difficulty modeling 3-D inflexion zone characteristic of some double major scoliotic spines. Although not investigated here, the correction technique used in the second approach is promising for the application of a similar technique with kriging.

The application of the "corrected" Fourier series approach to real data of healthy and scoliotic subjects verified the bi-directional torsion phenomenon behavior of right thoracic-left lumbar curves and confirmed that the geometric torsion have extreme values at the curve limits (end vertebrae), whereas the torsion is nearly zero at the apexes. This was also observed in the elliptical helices approach results. The Fourier series approach also brought additional information regarding the torsion phenomenon in idiopathic scoliosis. It showed that torsion phenomenon is not only unidirectional but can be bi-directional in single curves. In addition, scoliotic curves subjected to opposite direction torsion, corresponded to a scoliotic and sagittal curve (kyphosis or lordosis) combination. Scoliotic right thoracic-left lumbar curves associated with a zero value of torsion at the junction of the curves, showed "torsion-contortorsion" phenomenon with a torsion direction transition that correspond in 3-D to the superposition of the scoliotic and sagittal curves junction.

Torsion plots analysis revealed for the first time the 3-D similarity of the right and left curve patterns, one being the mirror image of the other. This outcome helped reduce the description of scoliotic curves, including unconsidered curves such as the rare left thoracic and right lumbar scoliosis, to three basic patterns of torsion allowing both a simple and detailed description of a variety of scoliotic spine deformities.

The proposed classification system can be used for the objective evaluation of surgical treatment of three-dimensionally similar curves. This can assist the orthopedic surgeon in surgical procedure selection, such as appropriate fusion level. The mathematical concept of curvature and torsion could also be used to develop simplified biomechanical models to simulate the 3-D response of the spine to various corrective forces systems. In addition, a comparative study of torsion plots obtained at different stages of the deformities evolution should help visualize and understand more deeply the progressive aspects of scoliosis.

The novel approach of Fourier series, including a corrective technique for torsion spikes, allowed characterization of the 3-D morphology of scoliotic deformities. This provided a better understanding of the geometric torsion phenomenon in idiopathic scoliosis. The observation of geometric torsion patterns led to a novel classification system that includes both three-dimensional and torsional descriptions of scoliotic deformities.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	IV
RÉSUMÉ	VI
ABSTRACT	X
TABLE DES MATIÈRES	XIV
LISTE DES ANNEXES	XVII
LISTE DES FIGURES	XVIII
LISTE DES TABLEAUX	XXVI
CHAPITRE 1 - INTRODUCTION ET CADRE DU PROJET	1
CHAPITRE 2 - REVUE DE LA LITTÉRATURE	5
2.1 Résumé de l'anatomie descriptive et fonctionnelle du tronc	5
2.1.1 Rappels d'anatomie	5
2.1.1.1 La colonne vertébrale	5
2.1.1.2 La vertèbre	6
2.1.1.3 La cage thoracique	10
2.1.1.4 Le disque intervertébral	11
2.1.1.5 Les ligaments et les muscles	12
2.1.2 Description fonctionnelle des mouvements de la colonne vertébrale	15
2.2 La colonne vertébrale scoliotique	19
2.2.1 Terminologie	19
2.2.2 Caractéristiques et biomécanique des déformations scoliotiques	20
2.2.3 Méthodes cliniques conventionnelles d'évaluation et de mesure des déformations scoliotiques	25
2.2.3.1 Mesure de la déformation spinale	25
2.2.3.2 Mesure de la rotation vertébrale	27
2.2.3.3 Mesure des déformations gibbositaires	29
2.2.4 Traitements orthopédiques des déformations scoliotiques	30
2.3 Reconstruction et modélisation géométrique 3D de la colonne vertébrale	35

2.3.1 Système d'acquisition de l'image	35
2.3.2 Revue des techniques de reconstruction radiographique multi-vues.....	37
2.3.3 Revue et critique des différents modèles géométriques curvilignes de la colonne vertébrale scoliotique	40
2.3.3.1 Technique conventionnelle d'interpolation et de lissage de courbe	40
2.3.3.2 Technique du krigage	42
2.3.4 Description du modèle géométrique réalisé à l'École Polytechnique et à l'Hôpital Sainte-Justine	45
2.4 Méthodes informatiques d'évaluation et de mesure 2D et 3D des déformations scoliotiques	49
2.4.1 Mesure de la déformation spinale.....	49
2.4.2 Mesure de la rotation vertébrale	54
2.4.3 Mesure de l'asymétrie des côtes.....	58
2.4.4 Mesure de l'asymétrie du tronc	60
2.5 Revue des méthodes d'évaluation de la torsion géométrique	62
2.5.1 Définition mathématique de la torsion géométrique	63
2.5.1.1 Définition d'une courbe dans l'espace	64
2.5.1.2 Définition des équations de Frenet.....	67
2.5.2 Revue et critique des principales méthodes d'évaluation de la torsion géométrique	73
2.6 Revue critique des principales méthodes de classification des déformations scoliotiques	82
CHAPITRE 3 - PROBLÉMATIQUE DU PROJET ET CADRE MÉTHODOLOGIQUE	87
CHAPITRE 4 - MODÉLISATION CURVILIGNE TRIDIMENSIONNELLE DU RACHIS POUR LA MESURE DE LA TORSION GÉOMÉTRIQUE.....	95
4.1 Faisabilité de nouvelles approches de modélisation curviligne 3D.....	95

4.1.1 Modélisation géométrique du rachis scoliotique à l'aide de segments hélicoïdaux.....	97
4.1.2 Modélisation géométrique du rachis à l'aide de la technique des séries de Fourier "corrigée"	103
4.1.2.1 Situation du premier article	104
4.1.2.2 Article #1: «Improved Computation of Geometric Torsion in Curvilinear Representation of Scoliotic Spine».....	105
4.1.3 Modélisation géométrique du rachis à l'aide du krigeage Dual	127
4.1.3.1 Situation du deuxième article.....	127
4.1.3.2 Article #2: «Curvilinear three-dimensional modeling of spinal curves with Dual kriging»	128
4.2 Synthèse du chapitre.....	152
CHAPITRE 5 - CARACTÉRISATION DE LA TORSION GÉOMÉTRIQUE DANS LA SCOLIOSE IDIOPATHIQUE	156
5.1 Application clinique de la méthode des hélices elliptiques.....	156
5.2 Application clinique de la méthode des séries de Fourier "corrigée"	159
5.2.1 Situation du troisième article	159
5.2.2 Article #3: «Geometric Torsion in Idiopathic Scoliosis: Three-Dimensional Analysis and Proposal for a New Classification»	160
5.3 Synthèse du chapitre	183
CHAPITRE 6 - DISCUSSION GÉNÉRALE	186
CHAPITRE 7 - CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS	199
RÉFÉRENCES	204

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I:	Simulation mathématique de rachis normal et scoliotiques.....	225
ANNEXE II:	Modélisation curviline de la colonne vertébrale à l'aide de segments d'hélice elliptique.....	233
ANNEXE III:	Technique de modélisation à l'aide de séries de Fourier.....	243
ANNEXE IV:	Krigeage dual	249
ANNEXE V:	Dérivation de fonctions de krigeage	261

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Présentation schématique du contenu de la thèse.....	4
Figure 2.1 La colonne vertébrale. Vues a) antérieure, b) latérale et c) postérieure (Williams, 1989)	6
Figure 2.2 Vertèbre thoracique typique (adapté de Williams, 1989 et Gray, 1973).....	7
Figure 2.3 Les articulations costo-vertébrales et intervertébrales (Williams, 1989).....	8
Figure 2.4 Vertèbre lombaire typique: a) vue latérale oblique et b) vue transversale oblique (Williams, 1989)	9
Figure 2.5 Cage thoracique (Gray, 1973)	10
Figure 2.6 Vue postérieure d'une côte typique (Williams, 1989)	11
Figure 2.7 Le disque intervertébral (Kapandji, 1970)	12
Figure 2.8 Représentation schématique des ligaments de la colonne vertébrale (White et Panjabi, 1990)	13
Figure 2.9 Représentation schématique des muscles (coupe horizontale) entourant la colonne vertébrale au niveau lombaire (White et Panjabi, 1990)	14
Figure 2.10 Orientation des facettes articulaires des vertèbres lombaires (Kapandji, 1970; White et Panjabi, 1990)	15
Figure 2.11 Mouvement du segment lombaire: a) extension; b) flexion; c) inflexion latérale (Kapandji, 1970).....	16
Figure 2.12 Orientation des facettes articulaires des vertèbres thoraciques (Kapandji, 1970; White et Panjabi, 1990)	17
Figure 2.13 Mouvement du segment thoracique (Kapandji, 1970).....	18
Figure 2.14 Représentation des valeurs maximales des mouvements intervertébraux (White et Panjabi, 1990).....	18
Figure 2.15 Types de scoliose: a) thoracique droite-lombaire gauche; b) thoracique droite; c) thoraco-lombaire droite; d) lombaire gauche (Keim, 1982)	20

Figure 2.16 Sens de la rotation axiale des vertèbres: a) rachis sain en inflexion latérale; b) rachis scoliotique (White et Panjabi, 1990).....	21
Figure 2.17 Gibbosité (Keim, 1982).....	22
Figure 2.18 Évolution, dans le plan transverse, de la vertèbre apicale (AV) relativement à la vertèbre limite supérieure (UEV) pour des courbures scoliotiques majeures a) thoraciques et b) thoracolombaires et lombaires (Asher et Cook, 1995).....	23
Figure 2.19 Schématisation du mouvement de torsion qui anime la déformation scoliotique en région thoracique et lombaire (Graf, 1983).....	24
Figure 2.20 Mesure de l'angle de la courbure par la méthode de Cobb et de Risser-Ferguson (Keim, 1982).....	26
Figure 2.21 Mesure du déjettement (Keim, 1982).....	27
Figure 2.22 Méthodes empiriques de la mesure de la rotation vertébrale: a) Cobb (1948); b) Nash et Moe (1969); c) "torsiomètre" de Perdriole (1979)	28
Figure 2.23 Méthode de mesure de la gibbosité: a) Thulbourne et Gillespie (1976); b) le "scoliomètre" (Dangerfield et coll., 1992).....	29
Figure 2.24 Modes d'application des forces et des moments sur la colonne vertébrale dans les traitements des déformations scoliotiques. (Stokes, 1994)	31
Figure 2.25 Corset de Milwaukee (à gauche) et corset de Boston (à droite) (Roach, 1994).....	32
Figure 2.26 Approche de reconstruction 3D et de modélisation géométrique du rachis et de la cage thoracique	45
Figure 2.27 Appareil de positionnement pour les radiographies multi-vues (tiré de Bellefleur, 1993)	46
Figure 2.28 Repères anatomiques vertébraux identifiés (adaptée de André et coll., 1994)	46
Figure 2.29 Méthode de mesure de la courbure scoliotique par la méthode de Cobb analytique (Stokes et coll., 1987).....	50

Figure 2.30 Schématisation de colonnes vertébrales d'angle de Cobb identique mais de dimensions et de morphologies différentes (Hierholzer et Luxmann, 1982).....	50
Figure 2.31 Définition du plan de courbure maximale (Stokes et coll., 1987).....	52
Figure 2.32 Indices pour la mesure des déformations scoliotiques: a) déviation latérale spinale; b) balance linéaire et angulaire; c) rayon de courbure (Stokes, 1994)	53
Figure 2.33 Schématisation de la mesure de l'angle de Cobb analytique tridimensionnelle (Kanayama et coll., 1996).....	54
Figure 2.34 Angulations vertébrales projetées: a) axiale; b) frontale; c) sagittale (Stokes, 1994)	56
Figure 2.35 Représentation 3D des déformations scoliotiques: a) repères orthogonaux locaux; b) vecteurs rotation (Kojima et Kurokawa, 1992)	58
Figure 2.36 Indices pour la mesure de l'asymétrie de la cage thoracique (Aaro et Dahlborn, 1981a; Dansereau et Stokes, 1988).....	59
Figure 2.37 Illustration de la différence entre: a) la torsion géométrique et b) la torsion mécanique	63
Figure 2.38 Représentation paramétrique d'une courbe dans l'espace (Kreyszig, 1983)	65
Figure 2.39 Définition du rayon de courbure (Schartz et coll., 1960).....	67
Figure 2.40 Trièdre formé par les vecteurs tangent t , normal n et binormal b évalué en deux points de la courbe spatiale (Carmo, 1976)	68
Figure 2.41 Illustration du sens de la torsion d'une hélice circulaire: a) sens anti-horaire; b) sens horaire (Kreyszig, 1983)	70
Figure 2.42 Illustration du sens du paramètre intrinsèque de torsion et d'un point de torsion nulle (Dansereau, 1983)	72
Figure 3.1 Synthèse graphique des différentes étapes méthodologiques du projet	94
Figure 4.1 Système de référence et définition du centroïde vertébral.....	95

Figure 4.2 Vues typiques postéro-antérieure, latérale et apicale de la colonne vertébrale de sujets scoliotiques de types (a) thoracique droit et (b) thoracique droit-lombaire gauche. Les centroides des vertèbres (+) sont reliées linéairement et les segments thoraciques et lombaires sont chacun modélisés par une courbe hélicoïdale elliptique.....	99
Figure 4.3 Tracés typiques de torsion géométrique mesurée sur des colonnes scoliotiques de types (a) thoracique droite et (b) thoracique droite-lombaire gauche (sujets de la Figure 4.2). La torsion dans le segment non-modélisé des deux colonnes scoliotiques a été extrapolée (lignes pointillées).	100
Figure 4.4 Colonne scoliotique de type TDLG modélisée par des séries de Fourier: a) d'ordre 2; b) d'ordre 3; c) d'ordre 5; et d) d'ordre 7	104
Figure 4.5 (a) Posterior-anterior (PA), lateral and magnified apical views of a typical RTLL scoliotic spine smoothed by least-square Fourier series method. (b) Plots of associated 3D curvature and geometric torsion.	111
Figure 4.6 (a) Second derivative parametric functions $x''(t)$, $y''(t)$ and $z''(t)$ of a mathematical scoliotic spinal curve including a "true" 3D inflection point near level T10, and (b) geometric torsion measurement associated with the unperturbed (□) and perturbed (▲) simulated spine.	116
Figure 4.7 Representation of the three geometric parameters κ_{\min} , CZL, and $(\Delta s)_{\min}$ which characterized the "torsion spike" region. (a) Illustration of a typical scoliotic spinal curve, (b) location of 3D curvature minimum $t_{\kappa_{\min}}$ associated with the "torsion spike" detected between vertebral levels T11 and L1, (c) location, on each second derivative parametric curve, of the nearest inflection points t_x , t_y and t_z , from $t_{\kappa_{\min}}$, which define the CZL parameter, and (d) 3D inflection point location t_{3D} that eliminates the "torsion spike" while minimizing the geometric deformation $(\Delta s)_{\min}$ of the spinal curve.	119

- Figure 4.8 (a) PA, lateral and apical views of a typical RTLL reconstructed patient spinal curve and (b) plots of geometric torsion obtained before and after "torsion spike" correction with the elimination technique. The "torsion spike" originally shown between levels T10-T12 was eliminated affecting only locally the general torsion behaviour. A slight change in the shape of the spinal curve is observed on the magnified apical plane in the critical zone.....122
- Figure 4.9 Representation of an ideal analytic spine. The ideal spine is mathematically defined by a parametric representation characterized by a rectilinear frontal and coronal (magnified) views and a lateral view constituted by natural curvatures (kyphosis and lordosis). Function $x(t)$ is represented by a quartic polynomial, $y(t)$ by a constant and $z(t)$ by a linear polynomial. Vertebral centroids are identified by their respective thoracic (T) and lumbar (L) levels.....138
- Figure 4.10 Frontal, lateral and coronal (magnified) views of typical scoliotic curves. The curves are generated from mathematical deformation of the ideal analytic spine (by adding appropriate trigonometric functions to the parametric representation). Three of the most important groups of scoliotic geometries are represented such as RT-LL (a,b,c), RT (d,e) and LTL (f) spines.139
- Figure 4.11 a) Examples of constant, cubic and trigonometric drift patterns, and b) kriging interpolations when combined with the linear covariance functions $K(h) = h$. a) Examples of the best fit of the constant, cubic and trigonometric drift functions to the measured data, which are in this case the y coordinates of the vertebral centroids, and b) examples of kriging interpolations when the linear covariance functions $K(h) = h$ is combined with each previous drift and plotted on a few vertebral levels. As expected, the trigonometric drift pattern provides the best interpolation result.....142

- Figure 4.12 Comparison between typical kriging torsion (◆) and analytical torsion (□) for a RT-LL simulated scoliotic geometry (see Figure 4.10c). Torsion calculation was performed respectively from the three-dimensional kriging Model A and the original parametric representation of the spine. The superposition of both torsion curves reveals the greater accuracy of kriging for the evaluation of geometric torsion.....148
- Figure 4.13 Typical geometric torsion measurement of a simulated RT scoliotic curve (see Figure 4.10d). Torsion was approximated by two different interpolation techniques: dual kriging using Model A (◆) and least squares Fourier series (▲). Results are compared with the analytical geometric torsion of the spine (□).....149
- Figure 5.1 Torsion has two meanings: It is a property of a curve (geometric torsion) and the deformation of a solid structure. (A) In scoliosis, the geometric torsion is related to the amount of helicoidal deformity in the spine, and especially to the pitch of that helix. (B) Mechanical torsion is the relative rotation or vertebral deformations between lines joining similar landmarks on specified vertebrae.166
- Figure 5.2 Visualization of (A) the scoliosis deformity as (B) an elongated helical line uniquely determined by its geometric torsional quantity. The concept of geometric torsion (τ) is illustrated by the moving trihedron formed by the tangential \vec{t} , normal \vec{n} , and binormal \vec{b} vectors. Geometric torsion measures the amount of deviation (divergence) of the curved line from the plane determined by the tangent \vec{t} and normal \vec{n} vectors. The sign of τ is an intrinsic property of the curve. A positive value of torsion indicates a trihedron traveling in a counterclockwise direction (such as shown) and a negative value in a clockwise direction.170
- Figure 5.3 Three distinct torsion curve patterns detected and categorized according to the apex orientation (left or right) and location (thoracic, thoracolumbar

or lumbar). The geometric torsion was evaluated in 62 reconstructed scoliotic spines, comprising 94 idiopathic curves. Patterns of right and left curves are reversed in a mirror fashion, which allowed extrapolation of torsion patterns of the unconsidered left thoracic, left lumbar and right lumbar curves. In Type A curves, the maximum torsion is located in the upper-end vertebrae (UEV) region, whereas in Types B and C curves, this occurs in both the UEV and the lower-end vertebrae (LEV) regions. Generally speaking, minimum values of torsion occur in the apical vertebrae (AV) region. In Type A and C curves, the geometric torsion is unidirectional, whereas Type B curves are subjected to torsion in opposite directions.....173

Figure 5.4 Posteroanterior sagittal and magnified apical views of three right thoracic reconstructed patient spinal curve examples and their corresponding geometric torsion patterns. (A) Type A. (B) Type B. (C) Type C. Although all three spines appear similar in the posteroanterior view, they are three-dimensionally different. They show distinctly different sagittal and apical views and are characterized by different torsion patterns.....176

Figure 5.5 Posteroanterior sagittal and magnified apical views of three right thoracic left lumbar reconstructed patient spinal curve examples and their corresponding geometric torsion patterns. (A) In Type A-A, each curve (T5-T11 and T11-L3) is subjected to opposing torsion, with the point of zero torsion corresponding to the curve junction (T11). (B) In Type B-C, the point of zero torsion is near the thoracic apex (T9). (C) In Type C-B, the torsion is more unidirectional, with the transition occurring at the lumbar curve apex (near L2).....177

Figure 5.6 Posteroanterior sagittal and magnified apical views of a triple thoracic-thoracic-lumbar reconstructed patient spinal curve example. Each scoliotic curve has a definite pattern of torsion that is combined to

describe the spinal deformities, which corresponds here to the geometric torsion pattern of Type C-A-A. The systems of three basic curve patterns can be combined to categorize triple and multiple scoliotic curves.179

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Comparaison de sept modèles géométriques évaluant la torsion géométrique de colonnes scoliotiques	75
Tableau 2.2	Classification des courbures scoliotiques idiopathiques selon la méthode de King et coll. (1983)	83
Tableau 2.3	Classification torsionnelle des scolioses idiopathiques: Comparaison avec la classification de King (Asher et coll., 1999)	85
Tableau 4.1	Segments thoraciques et lombaires des courbures thoraciques droite et thoracique droite-lombaire gauche considérés dans l'étude selon la direction de la torsion.	101
Tableau 4.2	Drift and covariance functions investigated in this study	137
Tableau 4.3	Means and standard deviations (σ) between the cross-validation errors of the seven spinal analytic curves. The parametric representation of each Cartesian spinal coordinate is approximated by each of the eight kriging profiles (drift and covariance combinations). The shaded numbers represent the two best profiles for each coordinate.	146
Tableau 4.4	Absolute mean differences and standard deviations (σ) between the geometric torsion of the seven interpolated simulated curves (100 points each) and their analytical torsion when modeled by the eight three-dimensional kriging models generated.	147
Tableau 4.5	Comparison of errors in coordinates and torsion between least squares Fourier series and kriging interpolation methods. Means and standard deviations (σ) of cross-validation errors as well as absolute mean differences and standard deviation of geometric torsion errors are shown for the least squares Fourier series method. Comparisons are made with results reported in Table 3 and 4 regarding Model H and	

Model A, which respectively comprise Fourier series drift patterns and the best overall kriging profile for each coordinate.....	150
Tableau 5.1 Moyennes et étendues des valeurs de torsion géométrique des courbes thoracique droite (TD).....	157
Tableau 5.2 Moyennes et étendues des valeurs de torsion géométrique des courbes thoracique droite-lombaire gauche (TDLG).....	157
Tableau 5.3 Distribution of torsion patterns among 94 curves classified according to the apex location*	175

CHAPITRE 1 - INTRODUCTION ET CADRE DU PROJET

La scoliose idiopathique est caractérisée par des déformations géométriques et morphologiques tridimensionnelles (3D) de la colonne vertébrale qui généralement évoluent dans le temps. Plusieurs traitements, orthopédiques ou chirurgicaux, ont été développés pour arrêter la progression de la déviation scoliotique et réduire ou corriger sa courbure dans la mesure du possible. Malgré de nombreuses recherches, les causes de cette maladie restent encore inconnues aujourd'hui.

L'évaluation des déformations scoliotiques et leur classification, traditionnellement estimées en deux dimensions (2D) à partir de projections planes de la colonne, comme la radiographie frontale, n'a toujours pas permis de prédire avec précision leur progression et leurs réponses aux traitements. Deux colonnes peuvent apparaître similaires dans le plan radiographique frontal mais différer totalement dans leur morphologie tridimensionnelle. Les mesures 2D ne fournissent donc qu'une simplification de la déformation 3D réelle de la colonne vertébrale scoliotique.

L'apparition des techniques permettant la représentation tridimensionnelle de la colonne vertébrale scoliotique a donné une nouvelle dimension à l'analyse des déformations scoliotiques. Cela aura entre autre permis de se rendre compte que la scoliose, maintenant perçue comme une déformation tridimensionnelle complexe, ne peut plus être caractérisée avec précision par les méthodes cliniques usuelles. Le développement et l'analyse d'indices géométriques tridimensionnels (3D) fournissant des informations 3D concernant la description morphologique des déformations scoliotiques présentent donc un intérêt clinique pour le diagnostic et le pronostic de l'évolution des déformations. Cependant, jusqu'à présent, peu d'efforts ont été consacrés pour décrire la nature 3D des déformations scoliotiques.

Puisque dans l'ensemble, il est plus que probable que la scoliose soit associée à un phénomène de torsion généralisé (Asher et coll., 1999; Asher et Cook, 1995; De Smet et coll., 1983 et 1984; Graf et coll., 1983; Perdriolle et Vidal, 1985 et 1987), il est proposé de mesurer et d'étudier la torsion géométrique (propriété intrinsèque d'une courbe dans l'espace) dans la scoliose, à ne pas confondre avec la torsion mécanique. Bien que quelques méthodes de mesure de cet indice aient été développées ou proposées (Patwardhan et Vanderby, 1981; Hierholzer et Luxmann, 1982; Dansereau, 1983; DeSilva et Yang, 1990; Dansereau et coll., 1993; Ortale et coll., 1993; Kanayama et coll., 1996), le phénomène de torsion dans la scoliose n'a jamais été proprement analysé et précisément défini. C'est donc à partir des techniques de reconstruction stéreoradiographique 3D, développées à l'École Polytechnique de Montréal et utilisées en clinique à l'Hôpital Sainte-Justine (Dansereau et coll., 1990), et en se basant sur la mesure de la torsion géométrique, tel que définie mathématiquement par les équations de Frenet, que les déformations du rachis scoliotique seront caractérisées tridimensionnellement.

Ainsi, la partie modélisation biomécanique de ce projet de doctorat a pour objectif de développer, à l'aide de colonnes scoliotiques simulées mathématiquement, un modèle géométrique représentant le plus fidèlement possible la nature tridimensionnelle du rachis scoliotique et permettant l'évaluation et l'interprétation du paramètre de torsion géométrique. La partie clinique du projet vise à évaluer la pertinence du paramètre de torsion géométrique comme indice tridimensionnel des déformations scoliotiques à partir de données cliniques provenant d'adolescents idiopathiques scoliotiques.

Cette thèse est divisée en sept chapitres (Figure 1.1), et le corps principal est présenté à l'aide de trois articles scientifiques qui ont été publiés ou soumis pour fin de publication. L'introduction et le cadre du projet constituent le Chapitre 1, soit le présent chapitre. La revue de littérature est présentée au Chapitre 2, et est divisée en 7 sections. La première section présente un résumé de l'anatomie descriptive et fonctionnelle du tronc. La seconde section décrit les caractéristiques et la biomécanique des déformations

scoliotiques, les méthodes cliniques conventionnelles de leurs évaluations ainsi que les principaux traitements orthopédiques et chirurgicaux utilisés pour contrôler les déformations. La troisième section débute par une brève revue des systèmes d'acquisitions de l'image et des techniques de reconstruction tridimensionnelle pour se poursuivre avec une revue et critique des modèles géométriques curvilignes et se terminer par une description du modèle géométrique réalisé à l'École Polytechnique de Montréal et à l'Hôpital Sainte-Justine. Dans la quatrième section les méthodes informatiques d'évaluation 2D et 3D des déformations scoliotiques de la colonne vertébrale, de la cage thoracique et de la surface du tronc sont décrites. Les cinquième et sixième sections présentent respectivement une revue et une critique des méthodes d'évaluation de la torsion géométrique et de classification des déformations scoliotiques. Le Chapitre 3 présente la problématique du projet, son cadre méthodologique, la situation et la présentation des articles et une brève synthèse des principaux éléments ressortant du présent travail. Le Chapitre 4 porte sur la modélisation curviligne tridimensionnelle du rachis scoliotique pour la mesure de la torsion géométrique et présente la faisabilité de trois nouvelles approches de modélisation géométrique en l'occurrence: la méthode des segments hélicoïdaux lissés par moindres carrés (Annexe II), la technique des séries de Fourier lissées par moindres carrés corrigée pour la mesure de la torsion géométrique (Article #1) et le krigage dual (Article #2). Le Chapitre 5 porte sur la caractérisation de la torsion géométrique dans la scoliose idiopathique et s'intéresse aux résultats de l'application cliniques des approches des hélices elliptiques (Annexe II) et des séries de Fourier "corrigée" (Article #3). Ce volet clinique consiste à relever des tendances et des patrons du comportement de torsion chez les patients scoliotiques. Les chapitres 4 et 5 se terminent par une synthèse. Finalement, une discussion générale au Chapitre 6 et des conclusions et recommandations cliniques et biomécaniques au Chapitre 7 complètent cette thèse de doctorat.

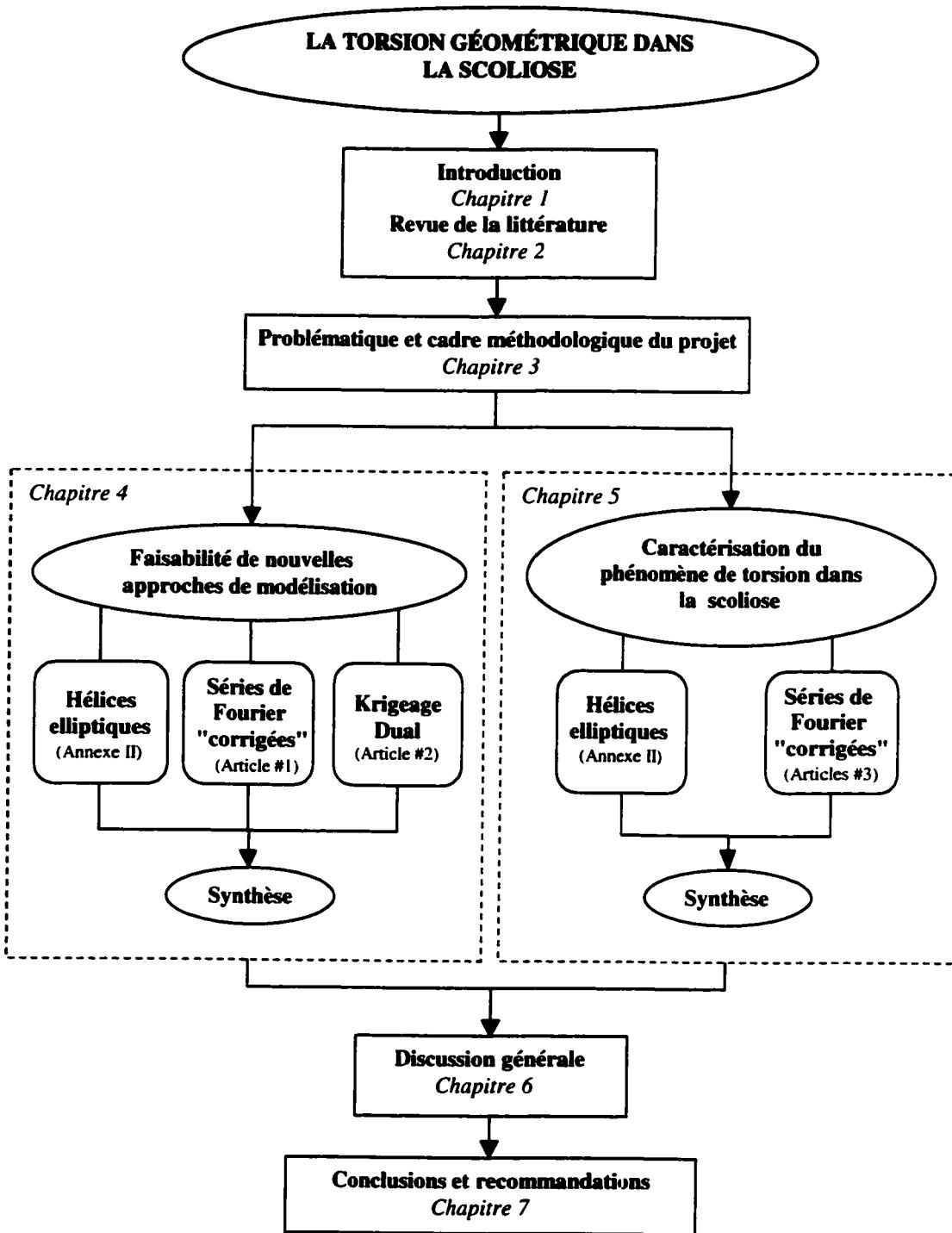


Figure 1.1 Présentation schématique du contenu de la thèse

CHAPITRE 2 - REVUE DE LA LITTÉRATURE

2.1 Résumé de l'anatomie descriptive et fonctionnelle du tronc

Le squelette humain est constitué de trois parties principales: la colonne vertébrale (ou rachis), la cage thoracique et le bassin. Autour de ces différentes composantes on trouve par un grand nombre de tissus biologiques flexibles tel les ligaments, les muscles, les cartilages, les tissus adipeux, les organes internes, ce qui en fait un système anatomique fort complexe. La description de l'anatomie descriptive et fonctionnelle de la colonne vertébrale qui suit est principalement tirée des ouvrages de référence suivants: Kapandji (1970), Gray (1973), Keim (1982), Williams (1989) et White et Panjabi (1990).

2.1.1 Rappels d'anatomie

2.1.1.1 La colonne vertébrale

La colonne vertébrale est la base du squelette humain elle est constituée principalement de 32 à 34 vertèbres séparées par des disques intervertébraux et jointes par des ligaments et retenues par des muscles. La colonne est divisée en vertèbres cervicales, thoraciques, lombaires, sacrées et coccygiennes (Figure 2.1). Le segment cervical est composé de sept vertèbres (C1 à C7) très mobile. Le segment thoracique comporte douze vertèbres (T1 à T12) d'où sont issues les côtes alors que le segment lombaire est formé de cinq vertèbres (L1 à L5) de dimension plus volumineuse. Le sacrum est composé de cinq vertèbres (S1 à S5) fusionnées en un seul os tout comme le coccyx qui toutefois peut comporter de trois à cinq vertèbres. Les courbures de la colonne vertébrale dans sa projection latérale sont au nombre de quatre: la courbure cervicale, thoracique (ou cyphose), lombaire (ou lordose) et pelvienne (ou sacro-coccygienne).

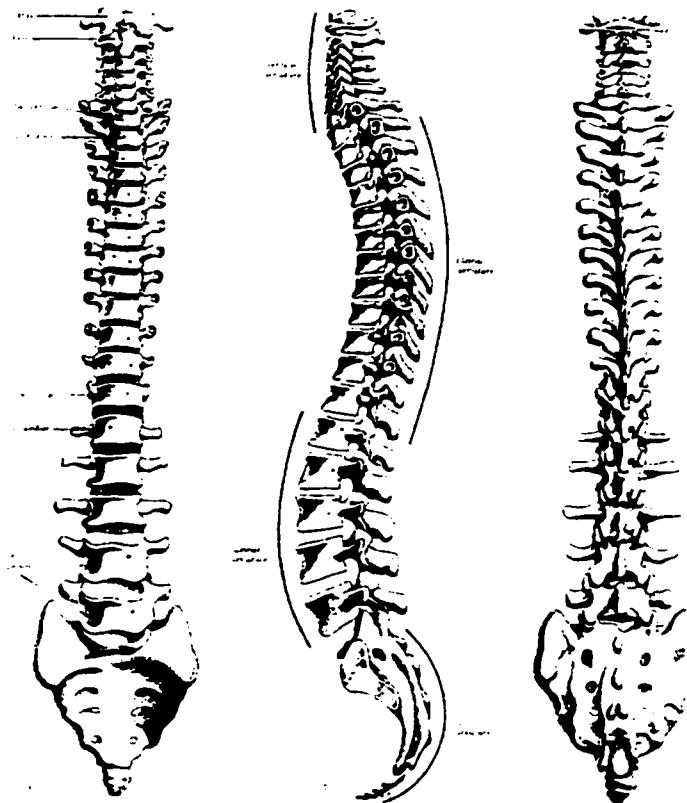


Figure 2.1 La colonne vertébrale. Vues a) antérieure, b) latérale et c) postérieure (Williams, 1989)

2.1.1.2 La vertèbre

La vertèbre (Figure 2.2) est essentiellement constituée d'un corps vertébral situé antérieurement et d'un arc vertébral situé postérieurement prolongé par les apophyses, ensemble, ils circonscrivent le trou vertébral (trou rachidien) occupé par la moelle épinière. Le corps vertébral, de forme cylindrique elliptique, varie en taille, forme et proportion selon la région de la colonne où il se trouve. Il est délimité par deux surfaces: les plateaux supérieur et inférieur. L'arc vertébral est composé d'une partie ventrale plus étroite, les pédicules, et d'une partie dorsale plus large, les lames vertébrales. À leur jonction les apophyses articulaires transverses, supérieure et inférieure se projettent par paires.

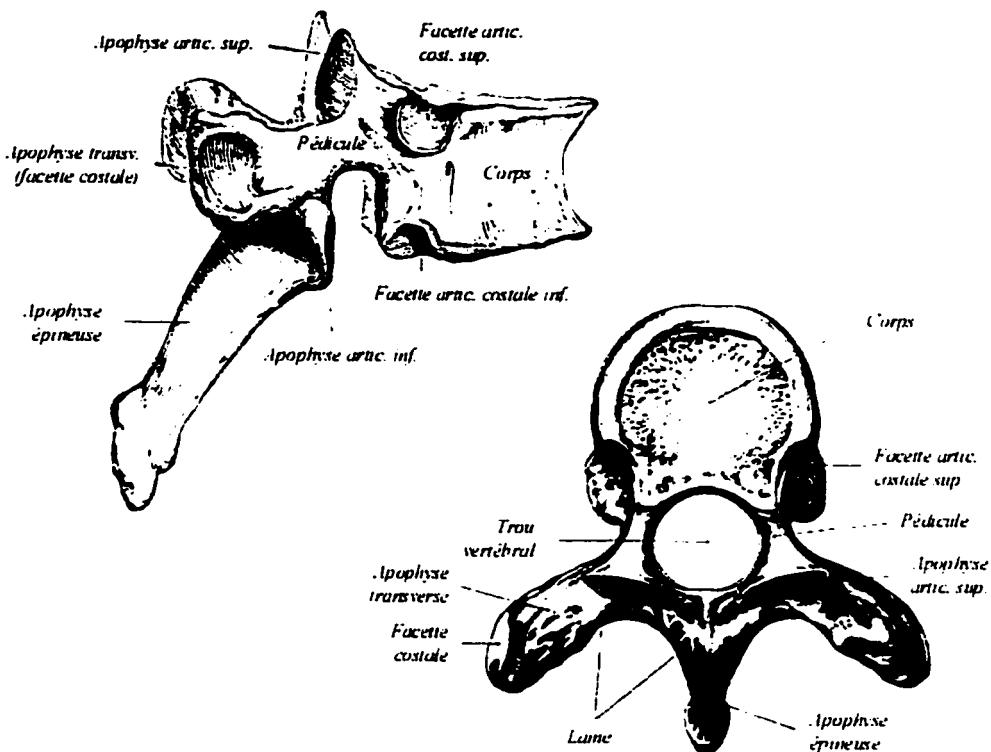


Figure 2.2 Vertèbre thoracique typique (adapté de Williams, 1989 et Gray, 1973)

L'apophyse épineuse se projette postérieurement et varie en dimension, forme et direction. Elle sert de levier pour les muscles, lesquels contrôlent la posture et les mouvements actifs (flexion/extension, flexion latérale et rotation) de la colonne vertébrale. Les apophyses articulaires inférieures (caudales) et supérieures (crâniennes) se projettent à partir de l'arc vertébral, à la jonction pédiculo-lamellaire, pour former l'aspect postérieur du canal rachidien intervertébral. Ces articulations permettent des mouvements limités en amplitude entre les vertèbres bien que leur mobilité puisse varier considérablement selon le niveau vertébral. Les apophyses transverses se projettent latéralement à la jonction pédiculo-lamellaire et agissent comme leviers pour les muscles et les ligaments particulièrement dans les mouvements de rotation et de flexion latérale.

Les douze vertèbres thoraciques croissent en taille de T1 à T12 en raison de l'augmentation du chargement de la tête au sacrum. Typiquement, le corps vertébral de ces vertèbres comporte latéralement deux paires de facettes articulaires costales, l'une supérieure (crânienne) et l'autre inférieure (caudale). Toutes les vertèbres thoraciques sauf les deux ou trois dernières présentent sur la face antérieure de l'extrémité des apophyses transverses une facette articulaire costale qui répond à la tubérosité des côtes adjacentes (Figure 2.3). Les apophyses articulaires supérieures et inférieures sont pourvues, à leur extrémité, de facettes articulaires qui permettent l'articulation de deux vertèbres adjacentes.

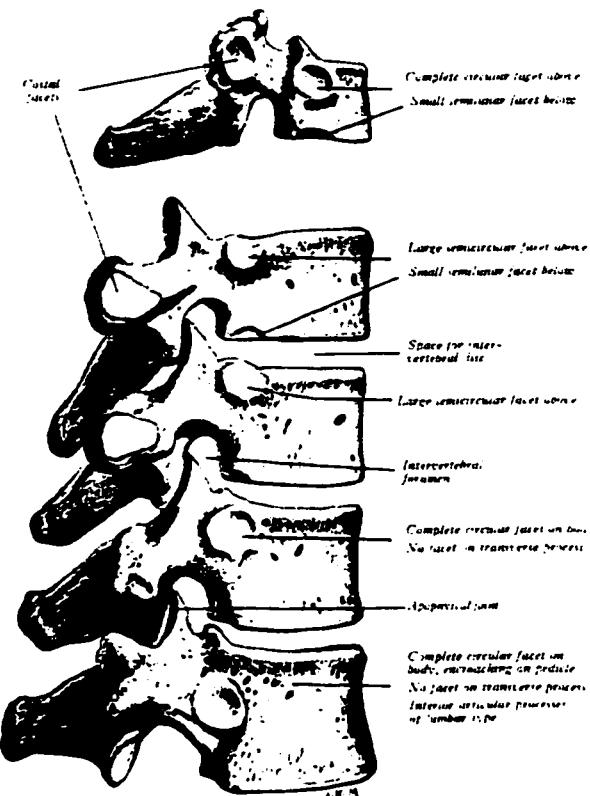


Figure 2.3 Les articulations costovoertébrales et intervertébrales (Williams, 1989)

Les cinq vertèbres lombaires (L1 à L5) se distinguent par leur grande dimension et par l'absence de facettes articulaires costales (Figure 2.4). Le corps vertébral est large et profond. Le canal rachidien est plutôt triangulaire, plus large que celui des vertèbres thoraciques mais plus petit que celui des vertèbres cervicales. Les pédicules sont courts, l'apophyse épineuse est presque horizontale et quadrangulaire et les apophyses transverses sont étroites, longues et effilées. Les apophyses articulaires supérieures et inférieures sont pourvues de facettes articulaires respectivement de géométrie concave et convexe.

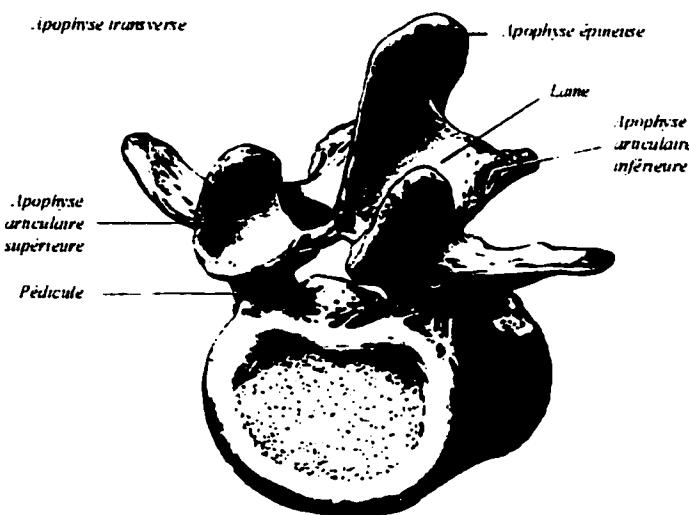
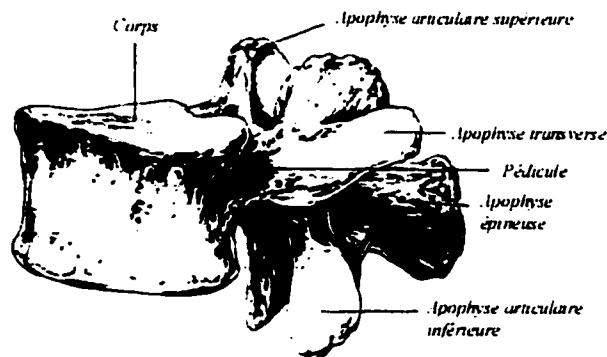


Figure 2.4 Vertèbre lombaire typique: a) vue latérale oblique et b) vue transversale oblique (Williams, 1989)

2.1.1.3 La cage thoracique

La cage thoracique est constituée de douze paires de côtes, des cartilages costaux et du sternum (Figure 2.5). Les extrémités antérieures des sept premières paires de côtes rejoignent le sternum par le biais de cartilages costaux individuels. Les 8^{ème}, 9^{ème} et 10^{ème} côtes s'unissent au cartilage sus-jacent qui se prolonge jusqu'au sternum. Les 11^{ème} et 12^{ème} côtes sont flottantes. L'extrémité postérieure des côtes s'articule avec la vertèbre au niveau de sa tête et de sa tubérosité (Figure 2.6). La tête s'articule avec la vertèbre correspondante et la vertèbre sus-jacente pour composer l'articulation costo-vertébrale. La tête costale est ainsi intimement liée au corps vertébral et seul de faibles mouvements sont possibles. La tubérosité de la côte, quant à elle, s'articule avec l'apophyse transverse de la vertèbre correspondante, formant ainsi l'articulation costo-transverse.

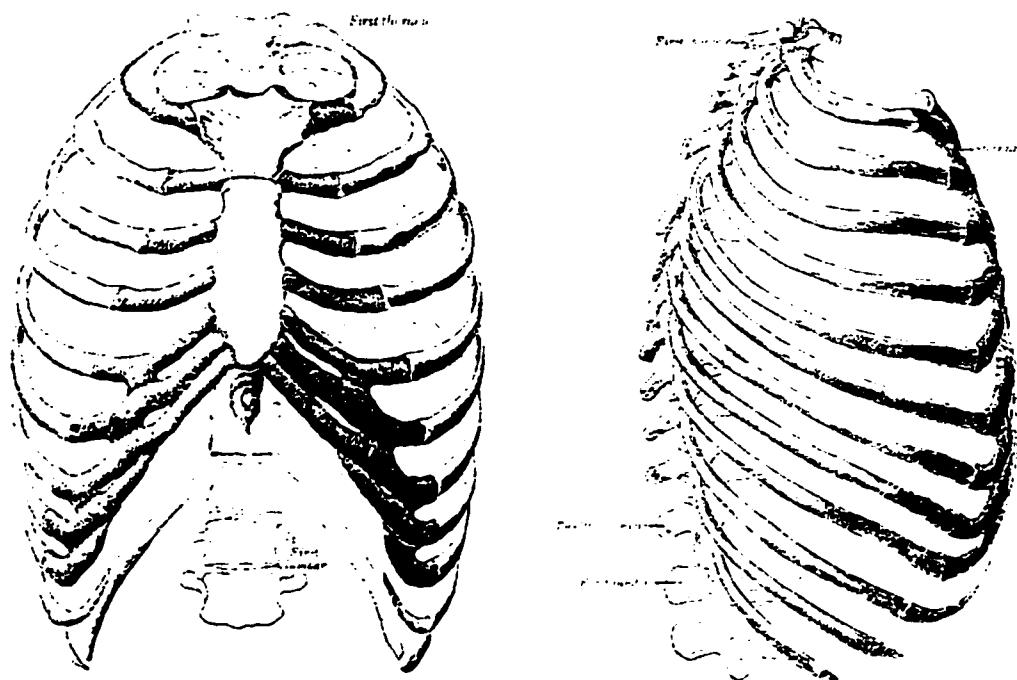


Figure 2.5 Cage thoracique (Gray, 1973)

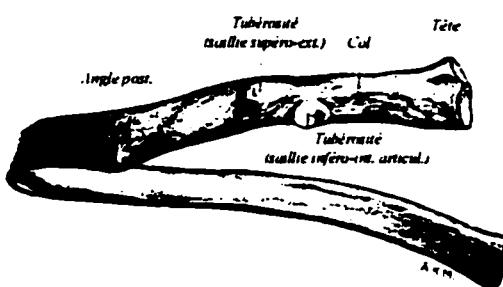


Figure 2.6 Vue postérieure d'une côte typique (Williams, 1989)

Les propriétés de rigidité de la colonne vertébrale et ce pour l'ensemble des mouvements physiologiques (flexion, extension, torsion et inflexion latérale) seraient grandement améliorées par la présence de la cage thoracique. À l'aide d'un modèle mathématique, Andriacchi et coll. (1974) ont trouvé que la présence de la cage thoracique augmenterait la rigidité du rachis en flexion de 30%, en extension de 130%, en torsion de 30% et en inflexion latérale de 40%. Alors que la cage sans le sternum perd son effet de rigidité sur la colonne vertébrale, le retrait d'une ou deux côtes (comme lors de chirurgie de la scoliose) ne semble pas affecter de façon significative les propriétés rigidifiantes de la cage thoracique.

2.1.1.4 Le disque intervertébral

Les disques intervertébraux séparent chaque vertèbre et sont exposés à une variété de forces et de moments. Le disque intervertébral comprend trois composantes distinctes (Figure 2.7): le noyau gélatineux, l'anneau fibreux et les plaques cartilagineuses. Le noyau gélatineux est composé d'un réseau lâche et translucide de minces faisceaux fibreux qui baignent dans une matrice. La dimension des noyaux et leurs capacités d'absorption est plus grande dans les segments lombaire et cervical à cause de leur plus grande flexibilité. L'anneau fibreux est composé de tissus fibreux disposés de la périphérie vers le centre en couches à peu près concentriques. Les fibres d'une même couche sont orientées à 30° par rapport au plan du disque, mais circulent dans des directions opposées dans les deux couches adjacentes. Les plaques cartilagineuses ont

pour rôle de séparer les deux précédents composants des corps vertébraux et permettent l'ancrage des couches formant l'anneau fibreux. Elles servent également à transmettre uniformément la pression sur le noyau. L'agencement de ces structures permet au disque d'agir à titre de "supporteur" de charge de flexion alors qu'il devient "absorbeur" lorsque la colonne vertébrale est en compression. De plus, il résiste à la rotation, à la tension et au cisaillement.

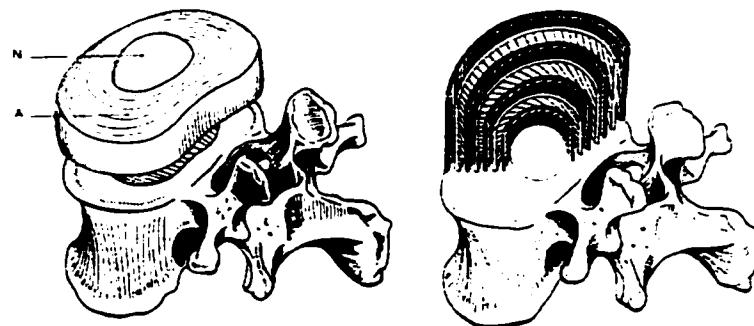


Figure 2.7 Le disque intervertébral (Kapandji, 1970)

2.1.1.5 Les ligaments et les muscles

Les ligaments rachidiens ont pour rôle de connecter les différentes vertèbres entre elles et reprennent les efforts lors de certains mouvements. Les ligaments sont des structures uniaxiales, elles supportent par conséquent plus efficacement les charges appliquées dans le sens des fibres. Elles résistent aisément aux forces de tension mais gauchissent lorsque sujettes à des forces de compression. Les ligaments ont pour fonction de permettre des mouvements physiologiques adéquats tout en maintenant l'attitude posturale entre les vertèbres, avec un minimum de dépense d'énergie musculaire. Ils protègent la moelle épinière en restreignant les mouvements dont les limites sont bien définies et procurent avec les muscles de la stabilité à la colonne vertébrale à l'intérieur de la gamme de mouvements physiologiques. Grâce à leurs capacités viscoélastiques, ils protègent la moelle épinière en absorbant une partie de l'énergie appliquée à la colonne lors de situation traumatique hautement dynamique.

Les ligaments de la colonne vertébrale qui connectent les vertèbres entre elles sont au nombre de sept (Figure 2.8). Les ligaments longitudinaux (ou commun) antérieur et postérieur reposent sur la surface antérieure et postérieure des disques et des corps vertébraux. Ils recouvrent ainsi la colonne vertébrale de l'extrémité cervicale au sacrum. Ces ligaments jouent un rôle important dans les mouvements de flexion-extension. Les ligaments intertransversaires relient deux à deux les apophyses transverses de vertèbres voisines tout en étant connectés aux muscles profonds du dos. Mécaniquement non significatif dans la région lombaire, ils limitent les mouvements de flexions latérales et de rotations intervertébrales dans la région thoracique. Les ligaments capsulaires joignent les apophyses articulaires (supérieure et inférieure) adjacentes et sont généralement orientés perpendiculairement au plan des articulations facettaires. Les ligaments jaunes unissent les lames vertébrales de la seconde vertèbre cervicale à la première vertèbre sacrale. Hautement élastiques, ils peuvent subir de grandes déformations sans se déformer de façon permanente. Ils limitent les mouvements de flexion tout en empêchant la dislocation des vertèbres entre elles. Le ligament surépineux commence dans le *ligamentum nuchae* et longe l'extrémité des apophyses épineuses jusqu'au sacrum. Les ligaments interépineux, situés sous le ligament surépineux, relient les apophyses épineuses adjacentes de la racine à l'apex.

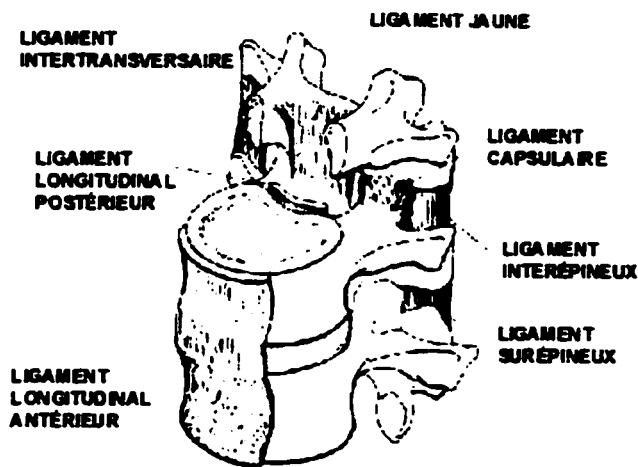


Figure 2.8 Représentation schématique des ligaments de la colonne vertébrale (White et Panjabi, 1990)

Les muscles de la colonne vertébrale (Figure 2.9), à travers leurs activités, génèrent des moments de flexion et de rotation nécessaires aux mouvements de la colonne vertébrale. Plus important encore, ils procurent une stabilité et un soutien à la colonne là où il en existe peu. Ainsi, la colonne avec ses ligaments intacts mais dépourvue de muscles devient une structure extrêmement instable qui ne pourrait supporter une charge de plus de 20 N sans en être affectée de manière permanente.

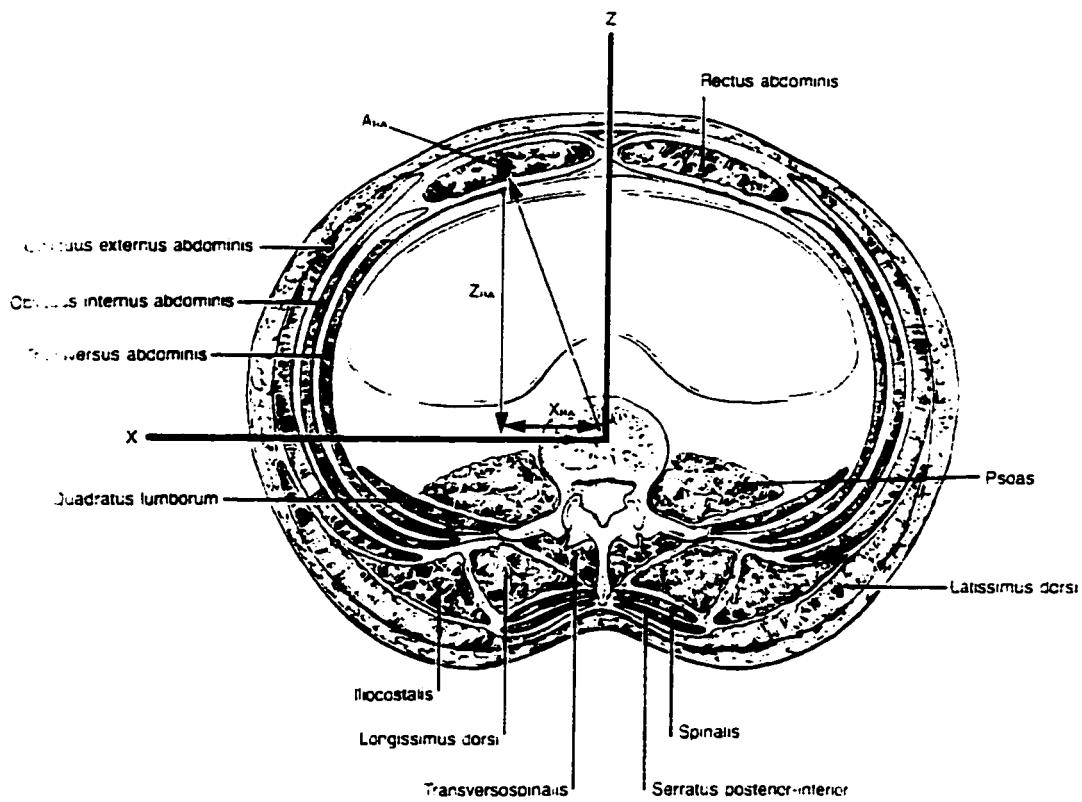


Figure 2.9 Représentation schématique des muscles (coupe horizontale) entourant la colonne vertébrale au niveau lombaire (White et Panjabi, 1990)

2.1.2 Description fonctionnelle des mouvements de la colonne vertébrale

La colonne vertébrale doit sa grande mobilité à l'ensemble des mouvements répartis entre ses vertèbres. Ces mouvements sont cependant limités par la morphologie intrinsèque des vertèbres, l'agencement structural des disques, des ligaments et des muscles ainsi que par la cage thoracique.

L'ensemble des mouvements de la colonne vertébrale dépend donc entre autres de la géométrie et de l'orientation des surfaces articulaires vertébrales. Les surfaces articulaires ne sont pas planes, l'une est concave (facette articulaire supérieure) et l'autre convexe (facette articulaire inférieure). Au niveau lombaire les surfaces articulaires sont orientées presque perpendiculairement au plan transverse et approximativement à 45° par rapport au plan frontal (Figure 2.10). L'angle que fait la surface articulaire avec le plan sagittal quant à lui, augmente de L1-L2 à L5-S1. Le profil des facettes articulaires des vertèbres lombaires correspond alors à un cylindre dont le centre O est localisé postérieurement.

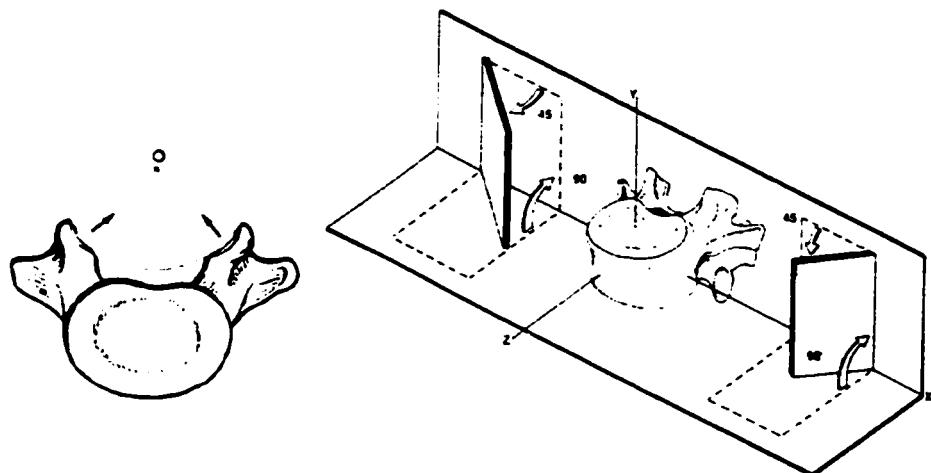


Figure 2.10 Orientation des facettes articulaires des vertèbres lombaires (Kapandji, 1970; White et Panjabi, 1990)

Les surfaces articulaires des vertèbres lombaires permettent des mouvements de flexion-extension et de flexion latérale. Lors de mouvements de flexion (Figure 2.11b) les ligaments des articulations des apophyses articulaires sont complètement tendus tout comme les ligaments jaunes, les ligaments interépineux (2), le ligament surépineux et le ligament longitudinal postérieur limitant ainsi ce dernier. L'extension (Figure 2.11a) est quant à elle limitée par le contact des apophyses articulaires (3) et transverses (4), et par la tension développée dans le ligament longitudinal antérieur. Durant la flexion latérale les apophyses articulaires glissent l'une par rapport à l'autre tel qu'illustré à la Figure 2.11c (8 et 9). Les ligaments (intertransversaire, jaune et capsulaire) du côté opposé au sens du mouvement (6) sont tendus alors que leurs contre parties (7) sont détendus. À cause de l'orientation des facettes articulaires des vertèbres lombaires, le segment lombaire n'est pas fait pour les mouvements de rotation axiale. En plus, la résistance en cisaillement opposée par le disque intervertébral diminue fortement son amplitude.

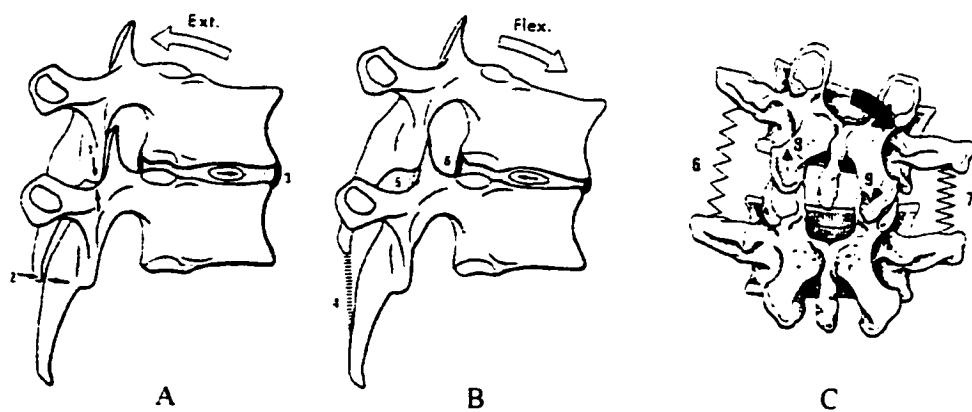


Figure 2.11 Mouvement du segment lombaire: a) extension; b) flexion; c) inflexion latérale (Kapandji, 1970)

Le mécanisme des articulations au niveau thoracique diffère de celui du niveau lombaire car les surfaces articulaires ont une orientation complètement différente (Figure 2.12). Au niveau thoracique, les surfaces articulaires sont plutôt planes et frontales. Le profil aussi cylindrique a pour centre approximatif le centre du corps vertébral.

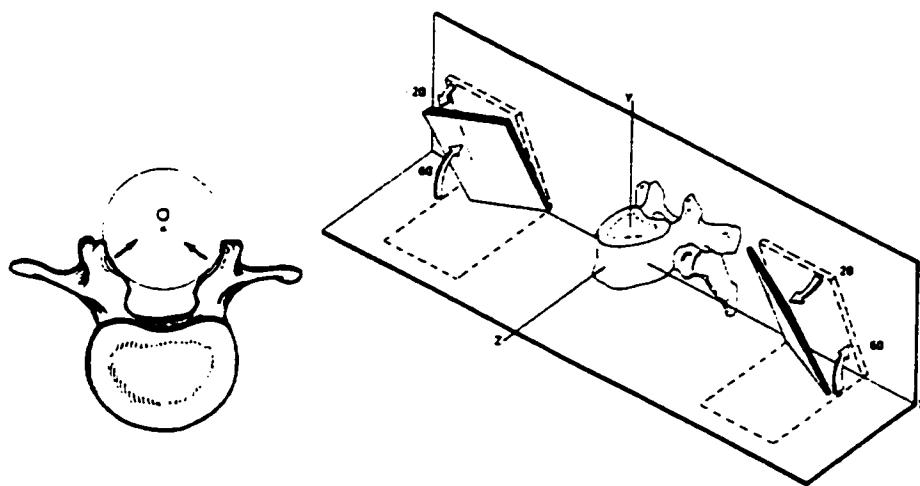


Figure 2.12 Orientation des facettes articulaires des vertèbres thoraciques (Kapandji, 1970; White et Panjabi, 1990)

Les mouvements d'extension (Figure 2.13a) entre vertèbres thoraciques adjacentes sont limités par la rencontre des apophyses articulaires (1), et des apophyses épineuses (2) déjà pratiquement en contact. Le noyau du disque est déporté antérieurement (3). Le ligament longitudinal antérieur est tendu alors que le ligament longitudinal postérieur, le ligament jaune et les ligaments interépineux sont détendus. Lors de mouvements de flexion (Figure 2.13b) l'espace entre les vertèbres s'ouvre postérieurement, les surfaces articulaires des apophyses articulaires glissent l'une sur l'autre et le noyau du disque est déplacé postérieurement (6). La flexion est limitée par la tension qui se développe dans le ligament interépineux (4), le ligament jaune, les ligaments capsulaires (5) et le ligament longitudinal postérieur. Pendant la flexion latérale (Figure 2.13c) les facettes articulaires des apophyses articulaires glissent relativement l'une à l'autre limitant le mouvement par le contact des apophyses articulaires du côté de la direction du mouvement de même que par le ligament jaune et les ligaments intertransversaires du côté opposé. Les mouvements de rotation des vertèbres thoraciques ne sont pas suivis de mouvements de cisaillement du disque comme c'est le cas dans la région lombaire mais sont plutôt limités par la présence du thorax. En effet, la cage thoracique est reliée à la colonne thoracique par le biais d'articulations et joue un rôle d'orientation et de limitation des mouvements de la colonne vertébrale.

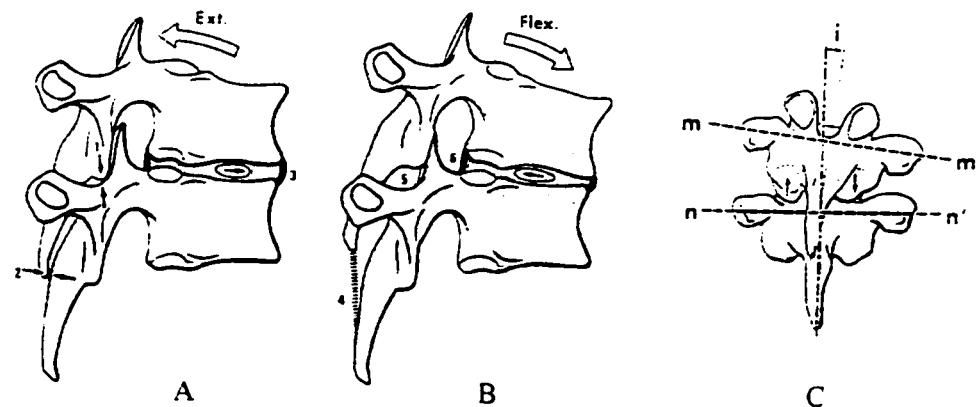


Figure 2.13 Mouvement du segment thoracique (Kapandji, 1970)

La Figure 2.14 présente pour chaque segment fonctionnel (deux vertèbres adjacentes) de la colonne vertébrale l'étendue des valeurs angulaires représentatives des mouvements de flexion-extension, flexion latérale et rotation axiale.

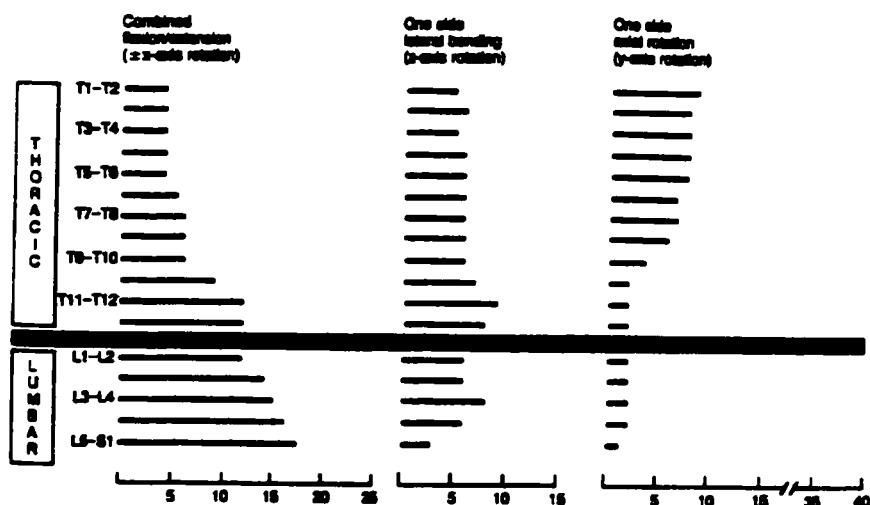


Figure 2.14 Représentation des valeurs maximales des mouvements intervertébraux (White et Panjabi, 1990)

Puisque le présent projet s'intéresse à la caractérisation des déformations de la colonne vertébrale causées par la scoliose, il importe de décrire la biomécanique des déformations scoliotiques.

2.2 La colonne vertébrale scoliotique

La scoliose est caractérisée par des déformations géométriques et morphologiques complexes de la colonne vertébrale et de la cage thoracique. Lorsque légères, ces déformations causent tout d'abord des problèmes d'ordre esthétique, mais lors de l'aggravation de la scoliose, elles peuvent entre autre entraîner des maux de dos. Dans les cas extrêmes, le sujet atteint de scoliose peut éprouver des troubles ambulatoires et voir ses fonctions vitales, comme la respiration, fortement perturbées. Les conséquences parfois dramatiques de la scoliose demandent un dépistage précoce de la maladie et un suivi clinique régulier. Il est en effet très important de bien suivre l'évolution des déformations scoliotiques afin de prendre, au bon moment, les mesures correctrices qui s'imposent. Les traitements prescrits sont alors orthothiques ou chirurgicaux. Ils ont pour objet d'arrêter la progression de la déviation scoliotique et de réduire ou corriger sa courbure dans la mesure du possible.

2.2.1 Terminologie

Selon la cause initiale, les scolioses sont divisées en différents groupes. Les principaux sont la scoliose idiopathique, congénitale et neuromusculaire. La scoliose idiopathique a des origines encore inconnues. Elle se stabilise généralement à maturation osseuse, et constitue 80 à 90% de tous les cas de scoliose touchant neuf fois plus de jeunes filles que de garçons (Pope et coll., 1984). Selon l'âge du patient au moment du diagnostic la scoliose idiopathique sera dite infantile, juvénile, de l'adolescence ou adulte. La scoliose congénitale implique un développement anormal d'une ou plusieurs vertèbres lors de leur formation (Keim, 1982). Quant à la scoliose neuromusculaire, elle est provoquée par un désordre au niveau des muscles de la colonne vertébrale (Keim, 1982). La déformation est progressive et demande souvent une intervention chirurgicale. Le reste du document traitera principalement de la scoliose idiopathique de l'adolescence et plus particulièrement de la déformation des segments thoracique et lombaire.

Traditionnellement, les courbures scoliotiques sont décrites comme étant primaires ou secondaires, ou encore, majeures ou mineures. Moins ambigu, les termes de courbure structurale et compensatoire (ou fonctionnelle) sont maintenant préférés. De façon générale, une courbure structurale est définie comme ayant une rotation fixe lors d'une inflexion latérale et la présence d'une déformation permanente de la vertèbre. La courbure compensatoire a plutôt pour rôle de maintenir l'alignement du corps de sorte que la tête se situe au-dessus du bassin. Les courbures scoliotiques peuvent être simples, doubles ou même triples et sont traditionnellement catégorisées selon l'orientation des courbures (droite ou gauche) et leurs localisations (thoracique, thoraco-lombaire ou lombaire) tel qu'observé dans le plan frontal. Les courbures les plus communes en ordre décroissant d'importance sont: la scoliose double, thoracique, thoraco-lombaire et lombaire (Figure 2.15).

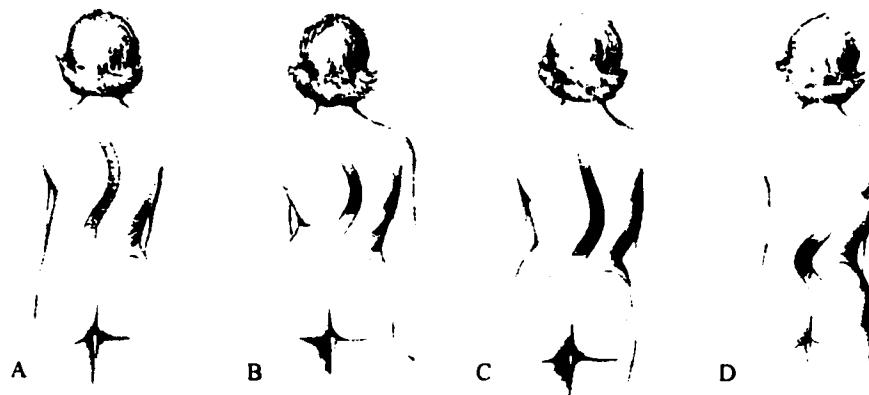


Figure 2.15 Types de scoliose: a) thoracique droite-lombaire gauche; b) thoracique droite; c) thoraco-lombaire droite; d) lombaire gauche (Keim, 1982)

2.2.2 Caractéristiques et biomécanique des déformations scoliotiques

La scoliose est une condition extrêmement complexe car elle implique une déviation latérale de la colonne vertébrale combinée à un phénomène de rotation des vertèbres qui entraîne la déformation des vertèbres elles-mêmes et celle des côtes (gibbosité).

Dans la scoliose, la direction de la rotation axiale relative entre les vertèbres se fait en sens opposé en dessous et au-dessus de l'apex de la courbe afin de restaurer une rotation neutre aux vertèbres limites de la courbure (Roaf, 1958). La colonne normale lors de flexions latérales a tendance à produire une géométrie similaire à celle de la scoliose (Arkin, 1950). Cependant, chez le rachis normal, la rotation axiale engendrée par la flexion latérale entraîne généralement la partie antérieure de la vertèbre vers la concavité de la courbe physiologique (Figure 2.16a). À l'inverse, chez la colonne scoliotique, la rotation axiale est toujours orientée du côté de la convexité de la courbure (Figure 2.16b) (White et Panjabi, 1990). Le simple couplage de la rotation axiale avec la flexion latérale au niveau des articulations vertébrales ne peut donc pas produire une courbe spinale dans laquelle la rotation axiale est maximale à l'apex de la courbe. Ce couplage produira plutôt des rotations maximales vertébrales aux points d'infexion de la courbe (Stokes, 1989). Précisons que l'orientation de la vertèbre est dans le sens de la concavité si la courbure scoliotique est fonctionnelle alors qu'elle est dans le sens de la convexité si la courbure est structurale (Cobb, 1948).

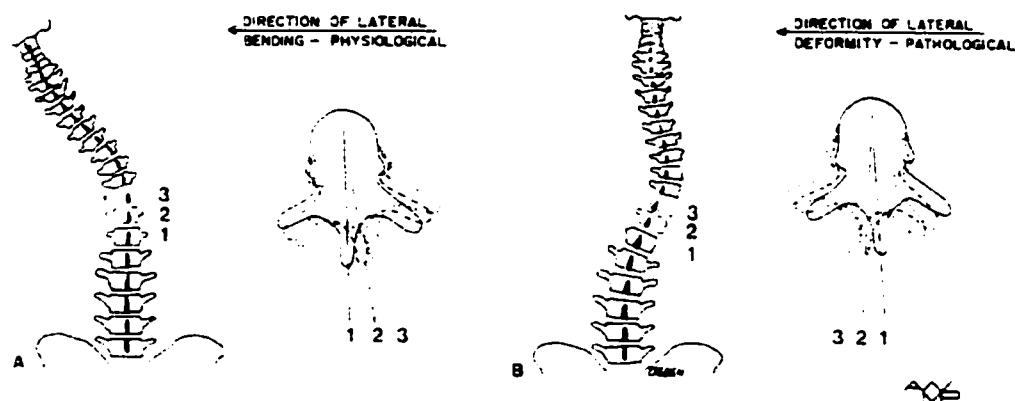


Figure 2.16 Sens de la rotation axiale des vertèbres: a) rachis sain en inflexion latérale; b) rachis scoliotique (White et Panjabi, 1990)

Lorsqu'elle est importante, la déformation scoliotique s'accompagne d'un écrasement des vertèbres et des disques intervertébraux du côté de la concavité de la courbe. Le corps vertébral se cunéiformise, la lame et le pédicule s'épaissent du côté de la convexité et s'amincissent du côté de la concavité et l'apophyse épineuse est déviée dans le sens de la concavité (Figure 2.17b).

À cause de la flexibilité des côtes et des cartilages, la rotation de la vertèbre entraîne la déformation des côtes correspondantes. Cela se traduit par une gibbosité du côté de la convexité (facilement observable lors de mouvement de flexion vers l'avant, Figure 2.17a) et une réduction ou contre-gibbosité du côté de la concavité (Figure 2.17b). Parallèlement, la partie antérieure du thorax réagit à l'enfoncée postérieure, créant la gibbosité antérieure opposée et la déviation du sternum.

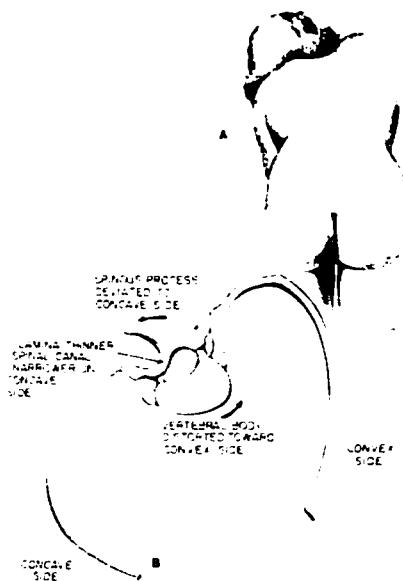


Figure 2.17 Gibbosité (Keim, 1982)

Une scoliose s'accompagne la plupart du temps d'une modification du profil habituel en cyphose thoracique et lordose lombaire, cette modification va, souvent, diminuer la cyphose et la lordose.

L'étude par quelques auteurs (Asher et coll., 1999; Asher et Cook, 1995; De Smet et coll., 1983 et 1984; Graf et coll., 1983; Perdriolle et Vidal, 1985 et 1987) de l'évolution des déformations scoliotiques à partir du plan transverse (vue de dessus) aura permis de mettre en évidence un mécanisme de progression des courbures scoliotiques qu'est celui du mouvement "torsionnel". Ainsi, chez les patients avec courbures progressives, la vertèbre apicale tend à se déplacer latéralement et antéro-postérieurement, comme en arc de cercle, autour de la vertèbre limite supérieure, et la colonne tend à s'effondrer dans la direction du plan mi-coronal à mesure que la déformation scoliotique progresse (Asher et coll., 1995 ; Perdriolle et Vidal, 1987). Par ailleurs, le mouvement torsionnel thoracique ne correspond pas à celui décrit pour la région thoracolombaire et lombaire (Asher et coll., 1995 ; Graf, 1990). En effet, la translation antéro-postérieure tend à se postérioriser chez les courbes scoliotiques lombaires et thoraco-lombaires (Figure 2.18).

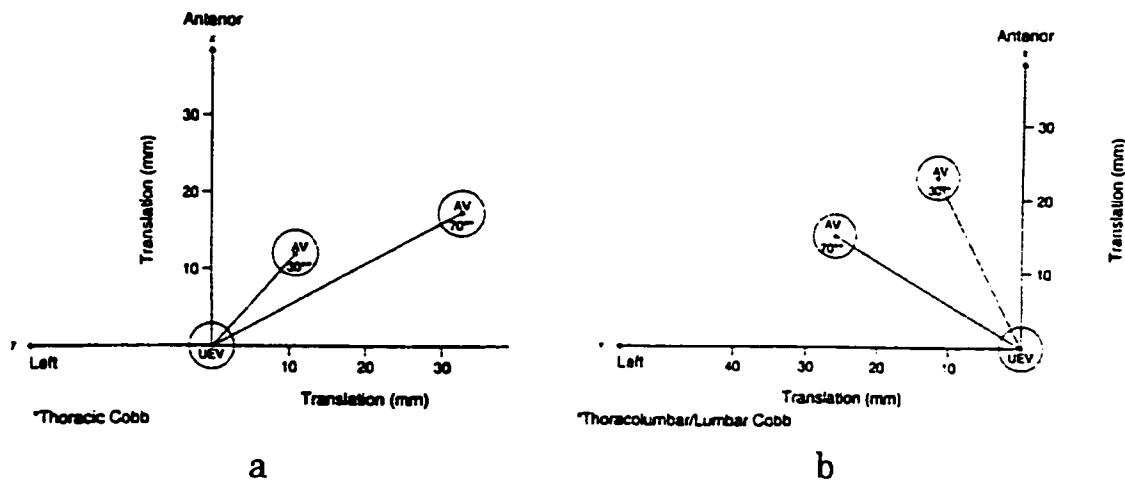


Figure 2.18 Évolution, dans le plan transverse, de la vertèbre apicale (AV) relativement à la vertèbre limite supérieure (UEV) pour des courbures scoliotiques majeures a) thoraciques et b) thoracolombaires et lombaires (Asher et Cook, 1995).

Ces observations sont compatibles avec le concept de déformation torsionnelle géométrique de la ligne spatiale des centres des corps vertébraux décrit et illustré par Graf (1990). Ainsi,

Graf identifie deux types d'évolutions en fonction de la localisation lombaire ou thoracique du processus scoliotique (Figure 2.19). En région thoracique, la ligne se déforme tout d'abord d'arrière en avant avec une petite déviation latérale en arc de cercle. En région lombaire cette ligne se déforme d'abord essentiellement latéralement, puis progressivement vers l'arrière en pivotant. Graf rajoute que ces déformations géométriques de sens opposés sont articulées les unes aux autres en des zones soumises à des efforts torsionnels intenses qu'il appelle, nœuds de jonction. De cette façon, il analyse la déformation scoliotique comme une succession de torsions et contre-torsions.

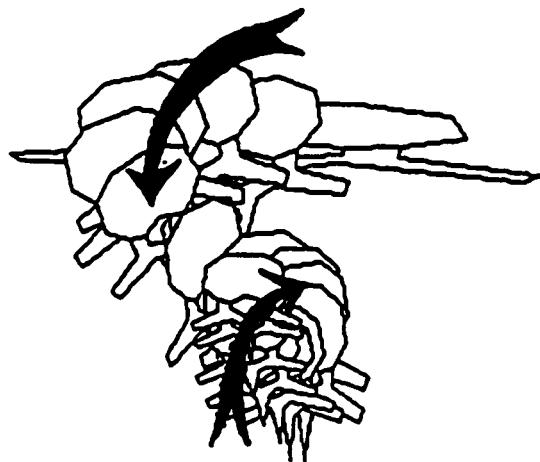


Figure 2.19 Schématisation du mouvement de torsion qui anime la déformation scoliotique en région thoracique et lombaire (Graf, 1983)

Asher et coll. (1995) expliquent cette disparité entre segments thoracique et lombaire par l'asymétrie du mouvement des segments et des muscles dans le plan antero-postérieur, la variété des plans sagittaux normaux, les contraintes de la cage thoracique sur la colonne thoracique et l'absence de tel contrainte au niveau lombaire et les caractéristiques des tissus mous qui diffèrent d'un patient à l'autre.

Enfin, les observations de l'évolution de la déformation scoliotique dans le plan transverse rejoignent les différentes phases observées dans la vue de côté chez certains patients avec détérioration de leur scoliose à savoir l'apparence lordotique initiale de la colonne, suivi du phénomène de dos plat, alors que la région lombaire ne devient cyphotique qu'en fin d'évolution scoliotique (Perdriole et Vidal, 1987 ; Graf, 1990; Asher et Cook, 1995).

2.2.3 Méthodes cliniques conventionnelles d'évaluation et de mesure des déformations scoliotiques

Un des moyens utilisé par les médecins pour étudier la scoliose est la radiographie de la colonne vertébrale, habituellement effectuée dans les plans antéro-postérieur (AP) ou postéro-antérieur (PA) et latérale. La radiographie consiste en une projection bidimensionnelle (2D) de la colonne vertébrale. Des paramètres 2D mesurés directement sur celle-ci permettent de quantifier la sévérité de la courbure scoliotique.

2.2.3.1 Mesure de la déformation spinale

Le degré de déformations des courbures scoliotiques est traditionnellement et généralement mesuré à l'aide de deux méthodes: la méthode de Risser-Ferguson et la méthode de Cobb (Figure 2.20). La méthode de Risser-Ferguson consiste à identifier le centroïde de la vertèbre apicale et ceux des vertèbres limites de la courbure étudiée. Il s'agit ensuite de tracer deux droites reliant le centroïde des vertèbres limites au centroïde de la vertèbre apicale. L'angle mesuré entre ces deux droites donne la mesure de la courbure. La méthode de Cobb (Cobb, 1948), consiste à tracer une première ligne parallèlement au plateau supérieur de la vertèbre la plus inclinée vers la partie concave. Une autre est également tracée à partir du plateau inférieur de la vertèbre la plus basse qui présente la plus grande inclinaison vers la partie concave. Pour chaque ligne tracée une perpendiculaire est tirée. L'angle entre ces deux perpendiculaires donne la mesure de la courbure de la colonne.

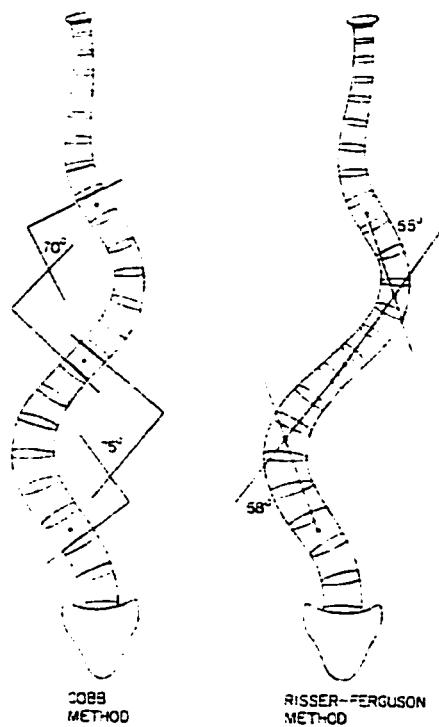


Figure 2.20 Mesure de l'angle de la courbure par la méthode de Cobb et de Risser-Ferguson (Keim, 1982)

La Société de Recherche sur la Scoliose (SRS) a recommandé la mesure de la sévérité de la courbure par la méthode de Cobb plutôt que celle de Ferguson à cause de sa plus grande amplitude et parce qu'elle semble plus sensible aux modifications qui surviennent au cours de la progression et après le traitement des scolioses. Cependant, un nouvel examen des angles de Cobb et Ferguson par Stokes et coll. (1992) a permis de recommander dans les situations où l'angle de Cobb est difficilement mesurable de recourir à la mesure de l'angle de Ferguson (sa multiplication par un facteur de 1.35 donnant l'angle de Cobb "équivalent"). De façon générale ces deux méthodes sont peu reproductibles et pour une même radiographie, différents observateurs vont jusqu'à mesurer des angles de courbures dont l'écart peut aller jusqu'à 8° (Stokes et coll., 1992).

Le déjettement est une mesure de la déviation latérale de la première vertèbre thoracique (T1) par rapport au sacrum. Un fil de plomb (Figure 2.21) ou la mesure directe sur une radiographie PA ou AP est alors utilisée afin d'effectuer cette mesure.



Figure 2.21 Mesure du déjettement (Keim, 1982)

2.2.3.2 Mesure de la rotation vertébrale

Les déformations scoliotiques engendrent une rotation des vertèbres mesurable à partir de radiographie PA ou AP. La technique utilisée est alors empirique ou analytique. La première méthode empirique fut proposée par Cobb (1948) (Figure 2.22a). Une fois le contour du corps vertébral identifié, ce dernier est divisé verticalement en six parties égales. L'angle de rotation est alors évalué de façon qualitative par la position de l'apophyse épineuse relativement aux divisions graduées de 0 à 4+ (voir Figure 2.22a). Cependant, la scoliose engendre des déformations vertébrales postérieures parfois importantes, l'angle mesuré n'est alors pas très représentatif de la rotation vertébrale (Nash et Moe, 1969; Mehta, 1973). Nash et Moe proposèrent en 1969 une méthode semblable mais basée sur la position du pédicule du côté convexe au corps vertébral sur les radiographies AP (Figure

2.22b). Les auteurs proposèrent alors d'associer aux déplacements des pédicules un angle de rotation. Bien que moins sensible aux déformations vertébrales, les résultats de cette méthode se sont avérés peu précis ($\pm 10^\circ$). Mehta (1973) proposa une méthode d'évaluation basée sur la reconnaissance de la position de certains repères anatomiques spécifiques sur les vertèbres (pédicules, apophyse transverse et le trou de conjugaison). Un tableau présentant les différents points anatomiques et leurs caractéristiques d'identification à tous les 15° de rotation (jusqu'à 90°) servait de point de comparaison. Finalement, Perdriole et Vidal (1985) utilisèrent le "torsiomètre" afin d'évaluer qualitativement, sur une échelle de 10° , la rotation vertébrale à partir de l'excentration du pédicule par rapport au corps vertébral (Figure 2.22c). De par sa simplicité, cette méthode est devenue populaire en milieu clinique pour l'évaluation de la rotation vertébrale.

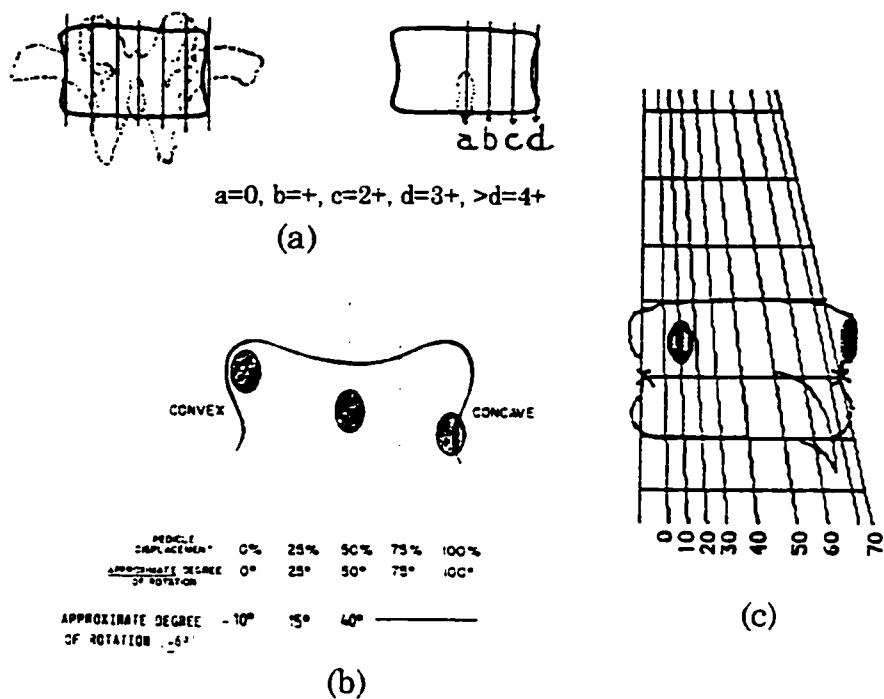


Figure 2.22 Méthodes empiriques de la mesure de la rotation vertébrale: a) Cobb (1948); b) Nash et Moe (1969); c) "torsiomètre" de Perdriole (1979)

2.2.3.3 Mesure des déformations gibbositaires

L'évaluation clinique des déformations de la cage thoracique est le plus souvent limitée à la mesure de la gibbosité. À cet effet, cette dernière s'apprécie plus facilement en antéflexion car cette position exagère la rotation pathologique des vertèbres et fait saillir la gibbosité à son maximum. La dénivellation de la saillie à l'apex de la courbure par rapport à un point symétrique du côté concave est alors mesurée en millimètre. Thulbourne et Gillespie développèrent en 1976 une méthode de mesure de la gibbosité basée sur deux paramètres soient "le gradient de gibbosité" (H/W) et "le gradient de dépression" (D/W) (Figure 2.23a). À partir de méthodes similaires Rippstein (1967) et Moe et coll. (1978) ont aussi caractérisé la gibbosité. Plus simple à utiliser, le "scoliomètre" (un inclinomètre) décrit par Bunnell (1984) est devenu un outil clinique standard qui permet l'évaluation de la rotation du thorax (Figure 2.23b).

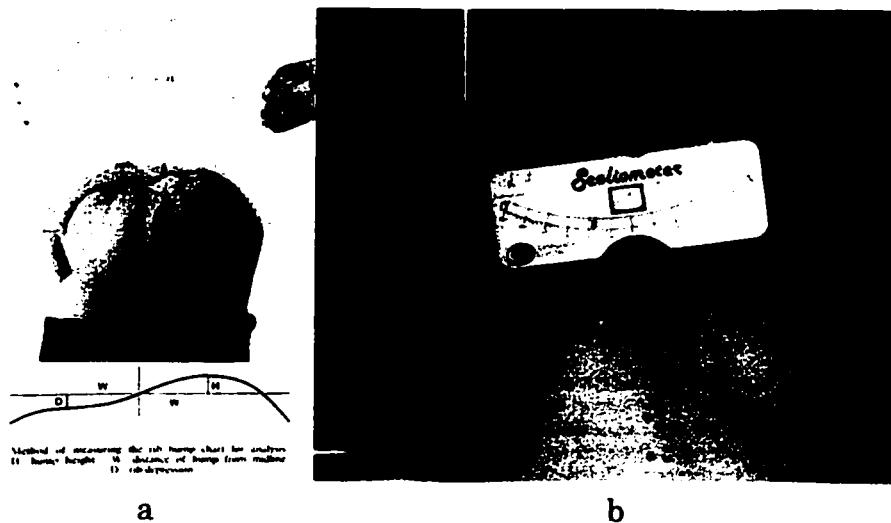


Figure 2.23 Méthode de mesure de la gibbosité: a) Thulbourne et Gillespie (1976); b) le "scoliomètre" (Dangerfield et coll., 1992)

Mehta (1972) développa une méthode basée sur la mesure de l'angle compris entre chacune des côtes de la vertèbre apicale et son axe vertical (RVA), telle que vue sur la radiographie antéro-postérieure. Originalement développée pour mesurer les scolioses infantiles, cette

mesure est aujourd'hui utilisée dans certaines applications scoliotiques comme indices de progression des courbures scoliotiques (Weinstein et Ponseti, 1983; McAlindon et Kruse, 1997).

2.2.4 Traitements orthopédiques des déformations scoliotiques

L'objectif du traitement est de permettre à l'enfant d'atteindre sa maturité en ayant une colonne vertébrale la plus droite, la plus équilibrée et la plus stable possible. Pour une scoliose minime (angle de Cobb compris entre 20° et 40°) diagnostiquée précocement, cet objectif est atteint par un traitement orthotique (port d'un corset pendant quatre à huit ans) qui vise à prévenir l'aggravation de la déformation des courbures pendant les années restantes de la croissance. Dans le cas d'une scoliose plus avancée (angle de Cobb supérieur à 40°) le traitement chirurgical s'impose et les objectifs sont doubles: corriger au maximum la courbure latérale et la rotation déformante, maintenir la correction obtenue pendant toute la croissance de la colonne.

Les décisions relatives aux traitements, qu'ils soient chirurgicaux ou orthotiques, sont généralement faites sur la base de la probabilité que la scoliose progresse. Certains facteurs sont considérés comme ayant une influence sur les risques de progression de la scoliose chez le patient immature. Ainsi les risques de progression sont généralement plus grands si le patient a été diagnostiqué jeune avec un indice de Risser bas. Pour des courbures comparables les chances de progression chez les garçons sont 10 fois moins grande que chez les filles. D'autres facteurs sont reliés aux particularités de la courbure. Ainsi les scolioses structurales doubles ont tendances à progresser plus vite que les scolioses simples ou uniques. En outre, plus la courbure est grande à sa détection, plus importants sont les risques de progression. Un autre facteur, qui, sans aucun doute influence la probabilité de progression des courbures est la perte de cyphose thoracique. On a par le passé pensé qu'une fois la maturité osseuse atteinte la progression des

courbures cessait. Cependant, plusieurs études ont démontré que les courbures continuaient de progresser durant toute la vie (Weinstein, 1994).

Que le traitement des déformations de la colonne vertébrale soit dit conservateur (corset) ou chirurgical, des forces sont appliquées sur la colonne. Dans le cas de la chirurgie, les forces désirées sont généralement appliquées directement sur la colonne. Tel que représenté à la Figure 2.24 la mécanique du traitement peut impliquer des forces horizontales dans le plan coronal (a) et sagittal (c), des forces de distraction (e), des moments de flexion-extension dans le plan coronal (b) et sagittal (d), et des moments dans le plan transverse (f). En pratique, un contrôle précis de l'application des forces est difficile à réaliser.

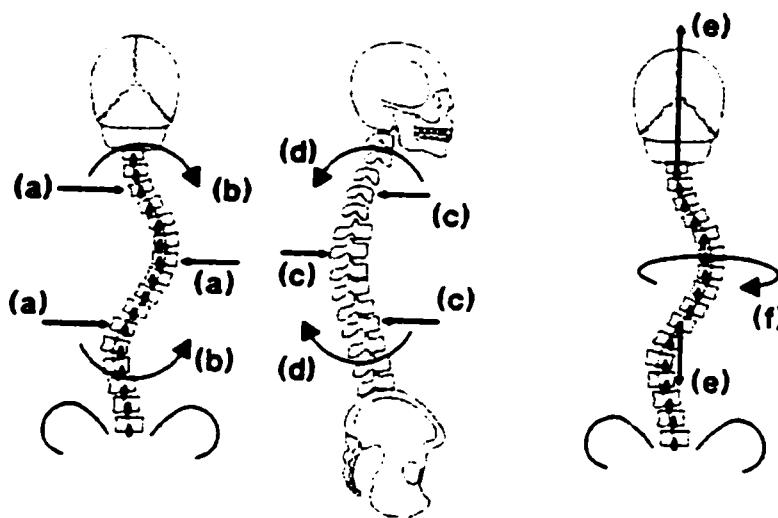


Figure 2.24 Modes d'application des forces et des moments sur la colonne vertébrale dans les traitements des déformations scoliotiques. (Stokes, 1994)

L'apparition des premiers corsets remonte à l'antiquité, déjà autour des années 400 (avant Jésus-Christ), Hippocrate décrivait un appareil qui appliquait par intermittence des forces de distraction et des pressions latérales pour réduire les déformations. Graduellement une variété de recommandations combinant exercices, traction, plâtrage et corsets ont été proposées. Les corsets appliquent des forces directement sur le tronc, mais ils encouragent

le patient à utiliser ses muscles d'une manière bénéfique (théorie passive et active de l'action des corsets), c'est le cas des corsets populaires de Milwaukee et de Boston.

Le corset "Milwaukee" conçu à l'origine par Blount et coll. (1958) est d'abord utilisé régulièrement dans le traitement des scolioses thoraciques, thoracolombaires et lombaires. Par la suite, il sera surtout recommandé pour tenter de contrôler les courbures hautes thoraciques (apex situé au-dessus de la septième vertèbre thoracique). Le corset est normalement porté 23 heures par jour et entraîne une correction active en sollicitant du patient des efforts correcteurs d'elongation, de dérotation et de rééquilibration. Les forces correctrices appliquées latéralement ont quant à elles un effort passif. Malgré son efficacité prouvée, le corset de Milwaukee a été de moins en moins prescrit, des orthèses cosmétiquement plus acceptables ayant fait leur apparition, comme le corset de Boston.



Figure 2.25 Corset de Milwaukee (à gauche) et corset de Boston (à droite)
(Roach, 1994)

Le corset de Boston (Figure 2.25) est utilisé pour traiter les scolioses lombaires, thoracolombaires et thoraciques basses. Le but du corset est de générer des pressions dont l'intention est de produire des couples de dérotation et des forces latérales ou postéro-latérales. Pour ce faire, le corset est ajusté pour appliquer des pressions sur trois zones de contact qui auront été déterminées par observation des radiographies PA et/ou latérale. La correction de la déviation scoliotique est réalisée par les mécanismes de flexion lombaire (hypolordose), de forces passives des 3 points de contacts, de forces passives par le contact de l'ensemble du corset (effet moulant) et de forces actives des muscles pour déplacer le tronc des zones de pression.

Malgré le fait qu'une amélioration immédiate soit notée lorsque l'orthèse est portée, le degré final de courbure s'apparente souvent à celui du pré-traitement. Dans une étude clinique prospective de Labelle et coll. (1992, 1995) sur l'effet 3D du corset de Boston sur la colonne et la cage thoracique on rapporte que le corset produit une correction significative de la courbure spinale dans le plan frontal au détriment d'une réduction de la cyphose thoracique dans le plan sagittal. Il n'aurait aucun effet significatif sur la correction de la rotation de la vertèbre apicale, sur la gibbosité ou sur le débancement frontal.

Lorsque la scoliose est sévère (angle de Cobb supérieur à 40°) et évolutive un traitement chirurgical s'impose pour obtenir une correction adéquate. L'opération consiste alors en la mise en place d'un système de fixation métallique intra-corporel pour réduire l'amplitude de la scoliose. Cependant, le redressement de la colonne ne peut se faire sans réaligner les vertèbres les plus pivotées. Pour ce faire, il est souvent nécessaire de procéder à l'ablation des apophyses épineuses et de toutes autres structures déformées au point de limiter les mouvements intervertébraux. Puis, une greffe osseuse est pratiquée pour fusionner les vertèbres assurant la stabilisation de la colonne. De plus, afin de donner plus de rigidité à l'ensemble, les disques vertébraux sont parfois remplacés eux aussi par des greffes osseuses. Les principales méthodes de correction sont celles de Harrington (White et Pajabi, 1978), de Dwyer (Rainaut, 1984) et de Cotrel-Dubousset (Bradford et coll., 1987).

La méthode de Harrington consiste à introduire une tige métallique extensible dans la partie concave de la courbure. Cette tige est fixée, au moyen de crochets, sur les lamelles des vertèbres situées aux extrémités de la courbure. Étant fixée aux lamelles, la tige impose en plus de la traction une rotation vertébrale contraire à celle produite par la scoliose. Les techniques d'arthrodèses antérieures, dans le traitement des scolioses ont été initiées par Dwyer. L'instrumentation de Dwyer comporte un câble disposé sur la convexité de la courbure grâce à des agrafes amarrées à chaque corps vertébral. La mise en tension du câble rapproche, une à une, chaque vertèbre et la courbe se réduit.

L'analyse tridimensionnelle a permis progressivement, de faire le point sur les traitements proposés pour la scoliose et en particulier sur la qualité des réductions obtenues. Les premières tentatives de réduction chirurgicale tenant compte de la tridimensionnalité de la déformation, ont vu le jour avec la méthode Cotrel-Dubousset. La méthode consiste à fixer, dans le plan PA, une tige semblable à celle d'Harrington, le long du côté concave de la courbure scoliotique. La tige est préalablement pliée afin d'épouser le plus parfaitement possible la forme de la colonne vertébrale. Cette dernière est redressée en appliquant une rotation de 90° sur la tige. Ce mouvement de dérotation, en théorie, ramène les déformations frontales dans le plan sagittal pour reformer les courbures de la cyphose thoracique et de la lordose lombaire.

Globalement, d'excellentes corrections du rachis dans le plan frontal sont notées avec ces instrumentations. Ils ont cependant un taux de succès relativement modeste concernant la dérotation des vertèbres. La tendance actuelle dans les traitements orthotiques et chirurgicaux évolue afin d'essayer de s'attaquer à la nature tridimensionnelle des déformations de la colonne vertébrale.

2.3 Reconstruction et modélisation géométrique 3D de la colonne vertébrale

Les outils dont nous disposons pour représenter la géométrie de la colonne sont de plus en plus puissants. Nous pouvons à l'aide de la numérisation manuelle ou semi-automatique de radiographies biplanaires générer des images tridimensionnelles de la colonne et de la cage thoracique. Des images transversales (coupes tomographiques) du tronc de patients obtenues à l'aide de techniques d'imagerie comme la tomographie axiale et la résonance magnétique permettent de reconstituer une géométrie avec un très grand réalisme. Nous pouvons également à l'aide de systèmes d'imagerie optique documenter la géométrie de la surface du tronc avec une précision et résolution de l'ordre du millimètre. Basé sur ces techniques d'imagerie une variété de modèles ont donc été proposés pour représenter la colonne vertébrale en trois dimensions et ensuite utilisés pour quantifier les déformations et simuler des traitements chirurgicaux et orthotiques à l'aide de modèles biomécaniques.

2.3.1 Système d'acquisition de l'image

Malgré la grande qualité des images obtenues par les techniques de tomographie et de résonance magnétique ces systèmes présentent certaines limites. À cause de l'orientation et de la déformation complexe des vertèbres de la colonne chez les patients scoliotiques on peut émettre des doutes sur la précision quant à la sélection de la localisation et de l'orientation des coupes vertébrales. De plus, ces techniques sont particulièrement lentes et entraînent des erreurs du au mouvement du patient ou à sa respiration. Ainsi, contrairement à la pratique commune, lors de l'examen des scolioses, les tranches sont prises lorsque le patient est en position couché. Comme la géométrie de la colonne dépend entre autre de la posture du patient, la position debout est généralement recommandée (Stokes, 1994). L'analyse de la colonne vertébrale entière requière un nombre important de coupes, si bien que l'utilisation trop fréquente de la tomographie est limitée à cause des risques (cancer, leucémie) que peuvent occasionner l'irradiation (Gregg, 1977; Nash et coll., 1979). Enfin, ces types d'examens ne sont pas disponibles dans tous les hôpitaux à

cause de l'investissement très élevé nécessaire à l'achat de l'équipement et au fonctionnement des appareils.

Les mesures de la géométrie du dos sont obtenues à l'aide de techniques optiques tout à fait non-invasive (Adair et coll., 1977; Moreland et coll., 1981; Laulund et coll., 1982; Frobis et Hierholzer, 1983; Bunnell et coll., 1984; Turner-Smith et coll., 1988; Stokes et coll., 1987; Slupsky et coll., 1992). Elles ont l'avantage de fournir un grand nombre de points de mesure, donc une bonne description de l'asymétrie des surfaces avec une haute précision. En plus, ces systèmes de mesure sont facilement disponibles. Au cours des dernières années on a noté un intérêt grandissant dans l'étude des relations entre l'asymétrie de la surface du dos et les déformations de la colonne vertébrale (Daruwalla et coll., 1985; Weisz et coll., 1988; Turner-Smith et coll., 1988; Stokes et coll., 1988 et 1989a et b; Drerup et Hierholzer, 1996; Theologis et coll., 1997; Goldberg et coll., 2001). Malgré le fait que ces études se soient révélées plutôt encourageantes, on ne connaît toujours pas aujourd'hui avec précision comment la déformation de la colonne se transmet en changements observés à la surface du tronc. En effet, la cage thoracique, la musculature et les tissus contribuent à modifier la relation directe entre la forme du dos et celle de la colonne vertébrale. Enfin, ces systèmes peuvent s'avérer redondants pour les hôpitaux qui possède déjà un appareil radiographique. Bien que ne permettant pas la mesure avec corset, ces systèmes offrent de nombreuses perspectives, en particulier la prise d'empreinte pour la confection de corsets orthopédiques personnalisés (Cottalorda et coll., 1997).

Afin de pouvoir mieux étudier et analyser les caractéristiques tridimensionnelles de la colonne vertébrale, des techniques de reconstruction stéréoradiographique ou biplanaire ont été développées (Kratky, 1975; Brown et coll., 1976; Olsson et coll., 1976; Hindmarsh et coll., 1980; De Smet et coll., 1980; Stokes et coll., 1980 et 1987; Pearcy, 1985; Dansereau et coll., 1990; Plamondon et Gagnon, 1990; Hecquet et coll., 1992; André et coll., 1994). Les méthodes sont basées sur la prise de 2 ou 3 radiographies selon des angles de vue différents (PA 0° et à angle, latérale) nécessitant l'utilisation d'un tube à

rayons-X, déplacé verticalement ou latéralement, ou de deux tubes permettant entre autre la prise de radiographie AP et latérale. Sur chaque radiographie un certain nombre de repères anatomiques vertébraux est identifié (ex.: l'extrémité des apophyses transverses et l'extrémité inférieure des apophyses épineuses, le centre et les extrémités gauches et droites des plateaux vertébraux supérieurs et inférieurs, le sommet et la base des pédicules, les extrémités des facettes articulaires supérieures, etc.). À partir du calibrage de la scène et de relations géométriques simples (triangulation), la reconstruction 3D est effectuée. Chaque vertèbre est ensuite représentée dans l'espace à l'aide de primitives graphiques simples (triangle, cylindre, tétraèdre, etc.) permettant ainsi d'évaluer la position et l'orientation des vertèbres dans l'espace. Cette représentation est ensuite utilisée pour le calcul d'indices géométriques permettant de fournir une description quantitative des déformations scoliotiques.

Les techniques radiographiques multi-vues permettent d'obtenir rapidement une représentation réaliste et précise de la colonne vertébrale à faibles coût et dose de rayons-X (seulement deux radiographies sont nécessaires). De plus les appareils radiographiques sont peu coûteux et disponibles dans tous les hôpitaux. Dans certains cas les approches de modélisation de la colonne vertébrale peuvent tirer profit de la combinaison de techniques d'imagerie médicale (voir exemple, section 2.3.4).

2.3.2 Revue des techniques de reconstruction radiographique multi-vues

Les méthodes radiographiques se divisent en deux grandes classes (Marzan, 1976): les méthodes analogiques et les méthodes analytiques.

Les méthodes analogiques (Hierholzer et Luxmann, 1982; Hindmarsh et coll., 1980; Kratky, 1975) consistent à obtenir, à partir de deux radiographies, une image 3D au moyen du stéréocomparateur. Il est possible ensuite de pointer un repère sur la représentation visuelle 3D et d'enregistrer les coordonnées 2D correspondantes sur les deux images radiographiques. Avec cette méthode les coordonnées numérisées sur les deux radios

correspondent parfaitement. L'image étant vue en 3D le choix de repères anatomiques numérisés est facilité. L'appareil est cependant coûteux et encombrant.

Les méthodes analytiques permettent d'obtenir une représentation 3D d'un objet en utilisant les relations mathématiques qui existent entre cet objet et ses représentations photographiques. L'objet reconstruit est un objet mathématique constitué d'un nombre fini de points dont les coordonnées 3D ont été calculées. Les méthodes analytiques se subdivisent en deux sous-classes (Marchand, 1983): les méthodes explicites et implicites.

Les méthodes explicites (McNeice et coll., 1975; Raso et coll., 1980; Guingand, 1982) sont basées sur des relations géométriques et trigonométriques simples. Cependant, il faut connaître la position et l'orientation 3D des sources ce qui complique la méthode tout en la rendant plus susceptible aux erreurs.

Contrairement aux méthodes explicites, les méthodes implicites (Brown et coll., 1976; De Smet et coll., 1980; Stokes et coll., 1987; Dansereau, 1987 et 1990) ne demandent aucune connaissance exacte de la configuration géométrique de l'installation utilisée. Les paramètres géométriques sont implicitement calculés et la reconstruction est optimisée par un algorithme itératif. Cette méthode utilise un objet de calibrage qui paraît sur les radiographies et sur lequel on connaît avec précision les coordonnées spatiales d'un certains nombre de points.

La méthode du Direct Linear Transformation (DLT) est une technique implicite largement utilisée et documentée (Marzan, 1976; Pearcy, 1985; Wood et Marshall, 1986; Stokes et coll., 1987; Dansereau, 1987 et 1990; Plamondon et Gagnon, 1990). La technique consiste à calculer la position, l'orientation et la distance principale des sources aux moyens de stéréoradiographies d'un objet de calibrage. La géométrie de l'installation est alors obtenue sous forme de 11 paramètres DLT. Avec deux radiographies de l'objet à reconstruire et les 11 paramètres, un algorithme fournit les coordonnées 3D des points numérisés sur les deux

radiographies. En bref, l'algorithme DLT est une procédure linéaire (basée sur les moindres carrés) qui permet de calibrer. Contrairement aux autres méthodes une estimation de l'erreur sur les coordonnées 3D obtenues est fournie (erreur DLT).

L'identification (ou le pointage) des repères anatomiques est manuelle alors que celle des points de l'objet de calibrage (billes) préalable à la reconstruction 3D peut-être manuelle ou partiellement automatisée (semi-automatique). Par ailleurs, il est difficile d'identifier exactement le même point sur les deux radiographies générant ainsi des erreurs lors de la reconstruction. Ceci oblige donc le choix de repères anatomiques facilement identifiables sur les deux radiographies. Bien que le choix des repères anatomiques dans la scoliose ne fassent pas l'unanimité, un consensus semble s'être établi sur les pédicules et les plateaux. En effet, les structures postérieures de la vertèbre (apophyses, facettes, lames) sont sujettes à de grandes déformations scoliotiques pouvant affecter l'évaluation de certains paramètres géométriques comme la rotation vertébrale.

Lors de la procédure de reconstruction, les coordonnées 3D des repères anatomiques sont calculées et un modèle de vertèbre (lui-même obtenu par l'empilement de coupes tomographiques) est ajusté à ces points expérimentaux. Lorsque les repères anatomiques reconstruits sont multiples, la représentation des vertèbres est obtenue en réunissant ces derniers par des droites ou des primitives graphiques (cylindre, prisme, etc.) formant ainsi un volume dans l'espace. Il est alors possible de calculer la position de son centroïde dans l'espace et son orientation linéaire et angulaire.

Les systèmes radiographiques multi-vues ont d'abord été validés en comparant des mesures obtenues avec précision avec le résultat des reconstructions de billes métalliques insérées dans des spécimens cadavériques (Olsson et coll., 1976; Hindmarsh et coll., 1980) ou disposés sur des plaques d'acrylique (Brown et coll., 1976). Les erreurs reportées (± 1 mm) se sont cependant avérées sous évaluées, les structures vertébrales n'apparaissant pas de façon aussi claires que les billes métalliques sur les radiographies (Rab et Chao, 1977).

D'autres techniques de validation (Rab et Chao, 1977; Stokes et coll., 1980 et 1987; Andrée et coll., 1992 et 1994) ont plutôt révélé que les erreurs pouvaient être de l'ordre de 3-15 mm. Ces dernières étant principalement fonction: de la visibilité des repères sur les radiographies qui à leur tour dépendent entre autre des repères anatomiques choisis et de l'angle d'incidence de la prise de vue des radiographies (André et coll., 1992; Aubin et coll., 1997); et de la correspondance entre les repères identifiés sur les différentes vues (Rab et Chao, 1977). La sensibilité du modèle aux erreurs d'interpolation de repères anatomiques, comme les centroïdes vertébraux, diminue avec le nombre de repères reconstruits (Delorme, 1996). En contre partie, les temps d'identification et de calcul sont plus longs.

2.3.3 Revue et critique des différents modèles géométriques curvilignes de la colonne vertébrale scoliotique

Dans le but de corriger les erreurs de reconstruction, la colonne est souvent représentée dans l'espace par une courbe ajustée ou passant près des centroïdes vertébraux qui agissent alors comme points de contrôle. Pour pallier les erreurs de reconstruction tout en représentant la plus grande variété de géométries scoliotiques plusieurs méthodes de modélisation basée sur des techniques d'interpolation et de lissage ont été mises en œuvre et rapportées dans la littérature. La modélisation de l'allure générale de la colonne par une courbe (modèle curviligne de la colonne) joue aussi un rôle important dans l'analyse et l'interprétation des déformations scoliotiques dont elle permet une certaine description (angle de Cobb, longueur de la colonne, courbure 2D et 3D, torsion géométrique, etc.).

2.3.3.1 Technique conventionnelle d'interpolation et de lissage de courbe

Il existe deux approches différentes pour générer une courbe à partir d'une série de données ou de points dans l'espace. La première approche utilise des fonctions d'interpolation qui passent exactement par les points de collocation (ex.: la méthode des polynômes d'interpolation). Si les données sont sujettes aux erreurs, comme c'est généralement le cas pour les données obtenues suite aux reconstructions radiographiques, cette méthode ne

donnera pas des résultats satisfaisants (oscillations de la courbe). La seconde approche, le lissage, implique la détermination d'une fonction d'interpolation qui approxime le mieux le phénomène suggéré par les points, sans toutefois passer nécessairement par ces derniers.

Deux familles de techniques d'interpolation ont principalement été utilisées pour modéliser la géométrie de la colonne vertébrale: la méthode des splines et des moindres carrés (James et coll., 1977; Wolf, 1983; Gerald et Wheatley, 1985). Dans la méthode des moindres carrés les coefficients de la fonction d'interpolation sont déterminés de façon à minimiser la somme de la distance au carré entre la forme analytique du modèle et les points de données (points de contrôle). Cette méthode peut s'avérer problématique lorsque certaines données sont fortement bruitées contrôlant ainsi l'importance de la déviation, ce qui provoque parfois un surlissage. Lorsqu'il est possible d'obtenir une estimation de la précision des données, il est parfois désirable d'associer un "poids" aux données (moindres carrés pondérés). Cela a pour effet d'amener la fonction retenue à passer plus près ou plus loin des données ainsi pondérées. Malheureusement, un tel processus d'interpolation a tendance à surestimer l'influence de points de données voisins (Trochu, 1993). De plus, le choix de la pondération dépend bien souvent de l'expérience et du jugement (James et coll., 1977).

Plusieurs modèles utilisant des fonctions différentes ajustées aux données par la méthode des moindres carrés ont été développés pour modéliser la colonne comme les fonctions polynomiales (Stokes et Gardner-Morse, 1993; Ortale et coll., 1993; Kanayama et coll., 1996), sinusoïdales (Drerup et Hierholzer, 1992), hélicoïdales (Dansereau et coll., 1993) et des séries de Fourier (Stokes et coll., 1987; Dansereau et coll., 1990). L'ajustement par la méthode des moindres carrés d'un polynôme de degré $n-1$ au n points reconstruits fera nécessairement passer la fonction polynomiale par ces derniers. Ceci résulte souvent en une fonction polynomiale qui fluctue considérablement entre les points. Afin de minimiser ces déviations excessives de la fonction polynomiale, le degré du polynôme doit être choisi inférieur au nombre de points utilisés. Cet effet de lissage cependant résulte généralement en une courbe ayant un ajustement inadéquat aux données (James et

coll., 1977). À cause des termes trigonométriques qui la composent, la série de Fourier est très sensible aux données bruitées (qui contiennent des erreurs) et les dérivées d'ordre élevées ont tendance à osciller (James et coll., 1977; Gerald et Wheatley, 1985).

D'autres modèles sont basés sur les fonctions splines, obtenues en minimisant un critère particulier sous un ensemble de contraintes linéaires. Dans cette famille de méthodes, la fonction d'interpolation peut à la fois passer exactement par les points ou en dévier (splines de lissage). Différentes formes ont été utilisées pour modéliser la colonne vertébrale, à savoir les splines cubiques (McNeice et coll., 1975) et les splines quintiques de lissage (Dansereau, 1983). Les fonctions splines sont cependant particulièrement sensibles aux conditions aux frontières (Gerald et Wheatley, 1985) et le degré de dérivation est limité par l'ordre de la fonction polynomiale utilisé (cubique, quintique, etc.).

2.3.3.2 Technique du krigeage

Né au début des années 50, le krigeage tire son origine du génie minier. Il était alors utilisé comme méthode statistique d'évaluation des ressources naturelles. Le nom de krigeage a été donné par Matheron en l'honneur de Krige, le premier à avoir appliqué cette approche pour estimer les réserves d'or dans les mines. Plus tard, la présentation géostatistique du krigeage, sous forme mathématique, permit de définir la méthode comme étant celle du meilleur estimateur linéaire sans biais.

Contrairement au krigeage primal (forme habituelle), qui nécessite la résolution d'un nouveau système d'équations linéaires pour chaque valeur interpolée, le système d'équations du krigeage dual n'a besoin d'être résolue qu'une seule fois. Ceci s'explique par le fait qu'il tient compte en même temps des informations provenant de chaque point de mesure. La théorie du krigeage primal, le passage au système de krigeage dual et la méthode d'interpolation par krigeage dual sont résumés à l'annexe IV et pour lequel le contenu s'inspire fortement des notes du cours "Krigeage en CAO et FAO" (MEC6310) et de l'article "A contouring program based on dual kriging interpolation" (Trochu, 1993).

Le but du krigeage dual est d'estimer une fonction à partir d'observations mesurées à des positions spécifiques. En krigeage, la fonction d'interpolation est interprétée comme étant une fonction aléatoire, se décomposant en la somme de deux autres fonctions: la dérive, représentant la valeur moyenne de la fonction à estimer, et une fluctuation aléatoire, appelée la covariance. La correction apportée par la covariance vient s'ajouter à la dérive pour obliger la fonction à passer par les points de mesure. Il est aussi possible d'obtenir, grâce au krigeage, l'équivalent du lissage en introduisant au système un effet de pépite. La solution interpolée s'éloignera d'autant plus des points de mesure que l'intensité de l'effet de pépite sera grande. À la limite, on retrouve la méthode des moindres carrés avec pour résultat de la fonction d'interpolation, la dérive (valeur moyenne de la fonction). L'effet de pépite permet donc d'introduire des erreurs de mesure dans le modèle d'interpolation.

André et coll. (1996) ont proposé une approche de modélisation de la colonne basée sur le krigeage dual et plus particulièrement sur le contrôle de l'effet de pépite localisé. La technique est basée principalement sur deux algorithmes: un algorithme de validation croisée et un algorithme du contrôle de l'effet de pépite. La validation croisée permet de déterminer pour chaque colonne reconstruite les meilleurs profils de krigeage à associer aux fonctions d'interpolation. Au total vingt profils différents, résultat de la combinaison de 5 dérives (constante, linéaire, quadratique, cubique, trigonométrique) et de 4 covariances (linéaire, gaussienne, cubique, trigonométrique) ont donc été étudiés. Puisque l'effet de pépite est lié à la variance des erreurs de mesure, les reconstructions tridimensionnelles obtenues dans le cadre d'une étude précédente (André et coll., 1994) ont été utilisées pour caractériser la variance des erreurs de reconstructions. Pour éviter des erreurs de lissage, l'amplitude des effets de pépite a été contrôlée de sorte que la position corrigée de chaque centroïde vertébral soit obligatoirement contenue dans un volume de contrôle, déterminé par les erreurs de reconstruction.

Quatre modes de lissage ont été étudiés et appliqués sur 63 colonnes vertébrales reconstruites de patients scoliotiques. Le quatrième mode de lissage, qui consiste à introduire des effets de pépite localisés initiaux pendant le test de validation croisée puis des effets de pépite localisés contrôlés sur le modèle de krigage retenu, s'est avéré le plus prometteur. La validation de cette technique sur des données de colonnes scoliotiques simulées avec erreurs de reconstructions a permis d'estimer une différence moyenne absolue de 1.85 ± 0.50 mm entre la courbe analytique et les courbes krigées obtenues à partir des données bruitées (i.e., avec erreurs de reconstruction simulées).

Comme pour la plupart des modèles cités à la section précédente, cette approche s'intéresse d'abord à la représentation spatiale de la colonne vertébrale sans nécessairement tenir compte de son impact sur les mesures de sa déformation. Bien que généralement moins sensible aux erreurs de lissage, les mesures bidimensionnelles, (angle de Cobb, déjettement, déviation latérale, etc.) évaluées à partir de projections du modèle spinal dans divers plans (frontal, latéral, de déformation maximale, etc.), simplifient la déformation réelle de la colonne scoliotique (Stokes, 1994). À l'opposé, les indices tridimensionnels plus susceptibles de renfermer des informations nécessaires à la description et à la meilleure compréhension des déformations scoliotiques risquent d'être plus influencés par le choix du modèle (Hierholzer et Luxmann, 1982). À titre d'exemple, la mesure de la torsion géométrique (section 2.5) de la colonne vertébrale demande le calcul de dérivée du troisième ordre ce qui en fait un paramètre très sensible aux erreurs de lissage. La validation d'un modèle géométrique curviligne de la colonne vertébrale ne peut donc être complète si on ne tient pas compte de sa réponse à la mesure et à l'évaluation de la géométrie de la colonne scoliotique.

2.3.4 Description du modèle géométrique réalisé à l'École Polytechnique et à l'Hôpital Sainte-Justine

La technique de reconstruction 3D développée par Dansereau et coll. (1990) a été implantée en milieu clinique (Hôpital Sainte-Justine de Montréal) depuis déjà plusieurs années (Figure 2.26). Cette technique de reconstruction est également à la base de plusieurs projets de recherche en cours à l'École Polytechnique de Montréal. La technique utilise un appareil de positionnement normalisé (Figure 2.27) adapté aux patients scoliotiques ambulants et qui permet le maintien de leur posture lors de la prise des radiographies. Des radiographies successives, de vues postéaux-antérieure (PA) sont réalisées d'abord à incidence de 0° , puis de 20° auquel peut s'ajouter une vue latérale obtenue par une rotation de 90° du patient. L'appareil de positionnement est également muni d'un objet de calibrage rigide constitué de deux plaques d'acryliques (radio-transparentes) parallèles sur lesquelles sont réparties des petites billes métalliques appelées aussi les points de calibrage. L'appareil permet ainsi la prise simultanée de radiographies à la fois de l'objet et du patient. Les coordonnées 3D des billes sont connues précisément (obtenues à l'aide d'une machine à mesurer 3D) et servent de référence pour la reconstruction. Grâce à l'utilisation d'un appareil de radiographie numérique, la numérisation des radiographies est automatique.

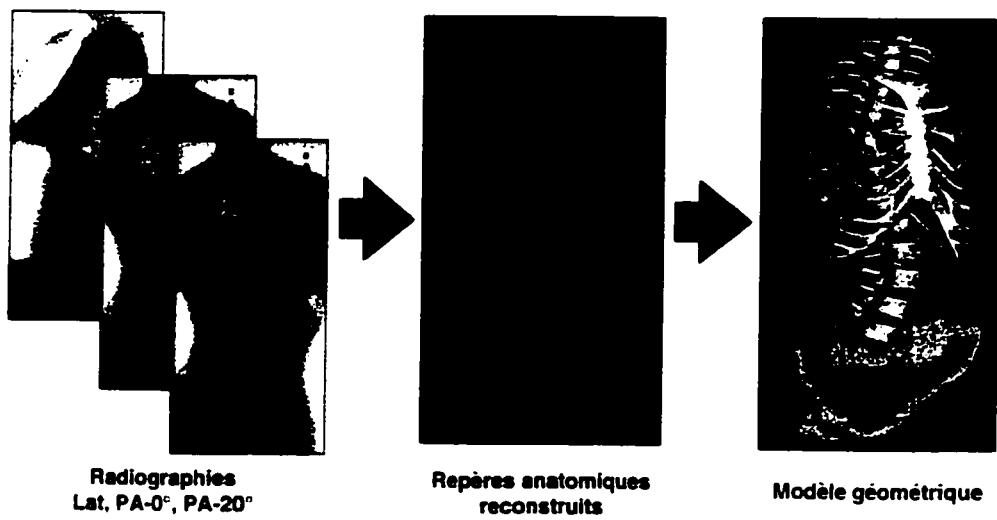


Figure 2.26 Approche de reconstruction 3D et de modélisation géométrique du rachis et de la cage thoracique

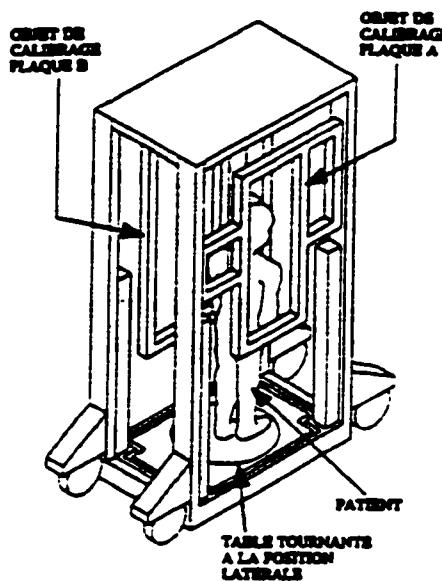


Figure 2.27 Appareil de positionnement pour les radiographies multi-vues
 (tiré de Bellefleur, 1993)

Les coordonnées 2D d'un ensemble de points que l'on veut reconstruire en 3D sont ensuite obtenues à l'aide d'un programme d'identification assisté par ordinateur (NAO). À cause de leurs facilités de localisation, les repères anatomiques (Figure 2.28) que sont la base et le sommet des deux pédicules(1,2,3,4), le centre des plateaux vertébraux supérieurs (5) et inférieurs (6), et une série de points longeant la ligne médiane des côtes, constituent donc les points à reconstruire.

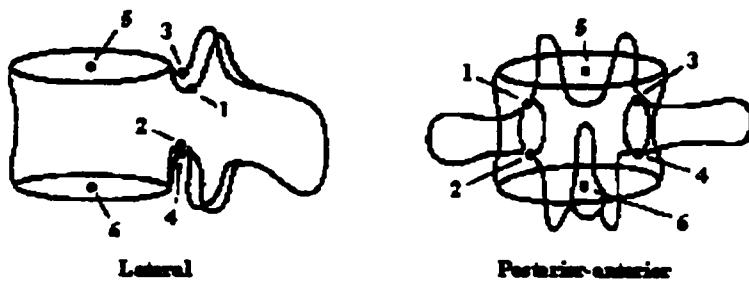


Figure 2.28 Repères anatomiques vertébraux identifiés (adaptée de André et coll., 1994)

Les programmes de reconstruction DLT (Direct Linear Transformation; Marzan, 1976) et DLT modifié pour la reconstruction des côtes (Dansereau et Stokes, 1988) sont ensuite utilisés pour reconstruire l'ensemble des repères anatomiques en 3D.

Les erreurs de reconstruction principalement causées par la difficulté d'identifier les mêmes repères anatomiques sur les différents plans radiographiques (André et coll., 1992) sont corrigées grâce à un module de correction d'abord développé par Papillon (1989) puis amélioré par Lachapelle (1990) et finalement adapté par Petit (1993). Le modèle paramétrique du rachis permet ensuite une représentation graphique filaire des reconstructions 3D en utilisant des primitives graphiques simples (cylindres elliptiques, pyramides, tubes à section elliptique) pour représenter les vertèbres et les côtes. Un second modèle, dit hybride, offre une représentation plus réaliste des structures vertébrales et de la cage thoracique et résulte de la combinaison de la radiographie multi-vues et de la tomographie axiale. La reconstruction 3D par tomographie axiale seriée (de Guise et Martel, 1988) est utilisée pour générer une collection de primitives anatomiques vertébrales basée sur des vertèbres cadavériques (1.1 ± 0.8 mm; Aubin et coll., 1997). Les primitives anatomiques sont ensuite déformées par une technique mathématique d'interpolation et d'extrapolation appelée krigeage de façon à s'ajuster aux repères anatomiques vertébraux reconstruits par multi-vues radiographique (Delorme, 1996). La géométrie du sternum et du bassin ont été traité de la même façon pour compléter le modèle géométrique de type polyédrique tandis que la géométrie des côtes est basée sur un modèle paramétrique.

La colonne vertébrale et la cage thoracique ainsi modélisées peuvent être visualisées sur un terminal graphique sous n'importe quel angle de vue pour fins d'interprétation clinique. Un logiciel d'analyse des géométries obtenues permet le calcul d'indices évaluant différents aspects des déformations scoliotiques: les angles de Cobb analytiques (plan frontal, sagittal, maximale et minimale), l'angulation des plans de déformation maximale et minimale, les rotations vertébrales axiales, frontales et sagittales, la longueur totale 3D de la colonne vertébrale, etc. Alors que la géométrie des côtes est évaluée par des indices tel que: la

rotation postérieure des côtes, l'asymétrie de la courbure postérieure des côtes, l'asymétrie en angulation frontale et sagittale des côtes, l'asymétrie en longueur des côtes, l'asymétrie de la surface incluse (générée par les contours de la côte), etc.

La technique de reconstruction multi-vues radiographique a été appliquée à un spécimen cadavérique de la colonne et comparée aux mesures précises obtenues à l'aide d'une machine de mesure 3D ("Coordinate Measuring Machine") pour fin d'évaluation (Aubin et coll., 1997). Les précisions suivantes ont été reportées selon la combinaison des vues adoptées: 2.1 ± 1.5 mm pour les combinaisons PA0°-LAT et PA0°-PA20°-LAT (notez que les deux vues PA sont nécessaires à la reconstruction tridimensionnelle de la cage thoracique), et 5.6 ± 4.5 mm pour la combinaison PA0°-PA20° (les erreurs les plus importantes ayant été constatées dans la direction postéro-antérieure). Il faut cependant s'attendre à des erreurs plus importantes lorsque la technique est appliquée sur des sujets scoliotiques réels car la clarté des radiographies risque fort d'être altérée par la présence des tissus et la déformation intrinsèque et l'orientation des vertèbres. De façon générale, ces erreurs sont inférieures à celles présentées dans d'autres études utilisant la technologie radiographique conventionnelle (André et coll. 1992, 1994; Rab et Chao, 1977; Stokes et coll., 1987).

Bien que la radiographie numérique ne soit pas encore largement implantée dans les milieux cliniques pour l'évaluation de la scoliose, elle constitue à plusieurs points de vues un atout puisqu'elle permet des prises de vues à moindres doses de rayons-x, en plus de générer des images de meilleure qualité et résolution .

2.4 Méthodes informatiques d'évaluation et de mesure 2D et 3D des déformations scoliotiques

L'utilisation de techniques radiographiques conventionnelles a longtemps contribué à perpétuer l'idée que l'ensemble des déformations scoliotiques n'était qu'une déviation latérale de la colonne vertébrale telle que vue dans le plan frontal. L'apparition des techniques permettant la représentation tridimensionnelle de la colonne vertébrale scoliotique a donné une nouvelle dimension à l'analyse des déformations scoliotiques. Cela aura entre autre permis de se rendre compte que la scoliose, maintenant perçue comme une déformation tridimensionnelle complexe, ne peut plus être caractérisée avec précision par les méthodes cliniques usuelles (section 2.2.3). Les mesures associées à la déformation scoliotique peuvent être divisées en quatre groupes, soit les mesures de la déformation spinale, de la rotation vertébrale, de l'asymétrie des côtes et de l'asymétrie de la surface du tronc.

2.4.1 Mesure de la déformation spinale

L'angle de Cobb analytique (Figure 2.29) est défini comme l'angle formé entre les perpendiculaires aux points d'inflexions de la projection de la ligne médiane de la colonne (i.e., courbe ajustée aux centroïdes vertébraux) dans le plan spécifié (Stokes, 1994). Alors que l'angle de Cobb clinique est à la fois une mesure du degré de la courbure et du degré d'inclinaison et de cunéiformisation des vertèbres limites, l'angle de Cobb analytique n'est qu'une mesure de la courbure. L'angle de Cobb analytique est systématiquement plus élevé que l'angle de Cobb clinique, environ 12% (Stokes et coll., 1987). Cependant ces deux mesures sont fortement corrélées ($r = 0,97$; Stokes et coll., 1987).

Dans le même esprit, l'angle de courbure mesuré par la méthode de Ferguson est défini comme l'angle entre les droites joignant les points d'inflexion de la projection de la ligne médiane de la colonne et le point apical dans le plan spécifié (Stokes, 1994).

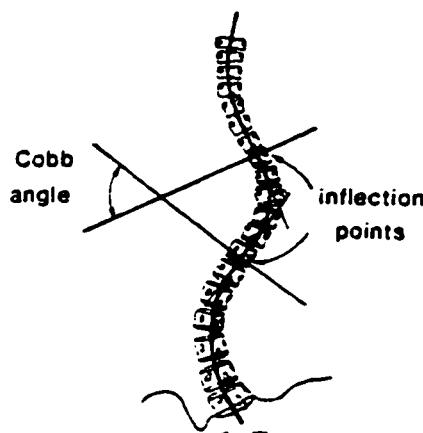


Figure 2.29 Méthode de mesure de la courbure scoliotique par la méthode de Cobb analytique (Stokes et coll., 1987)

Une étude plus approfondie de la mesure de l'angle de Cobb laisse entrevoir certaines limites quant à l'invariance dimensionnelle et morphologique de ce paramètre (Hierholzer et Luxmann, 1982). La Figure 2.30 présente trois colonnes scoliotiques d'angle de courbure (angle de Cobb) équivalent. Les colonnes A et B sont morphologiquement différentes alors que les colonnes A et C sont identiques en forme mais de dimensions différentes. Il est donc évident que l'angle de Cobb est indépendant de la dimension de la colonne ainsi que de sa géométrie.

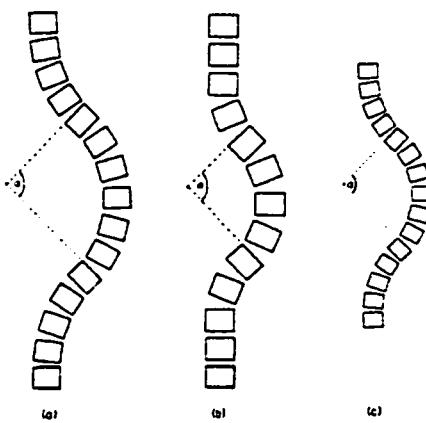


Figure 2.30 Schématisation de colonnes vertébrales d'angle de Cobb identique mais de dimensions et de morphologies différentes (Hierholzer et Luxmann, 1982)

La mesure de l'angle de Cobb dépend de la position du patient relativement à l'appareil de radiographie, du système de référence utilisé pour effectuer la mesure et elle ne décrit que la déformation planaire de la courbure et non tridimensionnelle.

La scoliose étant une déformation 3D, elle affecte également les courbures naturelles (cyphose et lordose) de la colonne vertébrale observée dans le plan latéral. Les méthodes de Cobb et de Ferguson sont donc aussi utilisées pour mesurer les courbes physiologiques en cyphose et en lordose des patients scoliotiques. Cependant, la grande variabilité de ses courbures dans la population normale complique l'association de l'anormalité de ces dernières avec la scoliose (Stokes et coll., 1987).

Afin de mieux visualiser les déformations en 3D, des plans auxiliaires régionaux (plan du meilleur ajustement, plan passant par les vertèbres limites et la vertèbre apicale, plan de projection latérale de la vertèbre apicale, plans de courbure maximale et minimale, etc.) sur lesquels la colonne vertébrale est projetée ont été adoptés et à partir desquels des mesures de courbure sont aussi effectuées (Stokes et coll., 1994; Aubin et coll., 1999). Les différences en amplitude et direction des différents plans de déformation démontrent qu'ils sont souvent très différents, il faut donc être prudent lorsqu'on compare entre eux des résultats obtenus avec ces derniers (Stokes et coll., 1987; Aubin et coll., 1999). Cela indique aussi que la déformation scoliotique ne devrait pas être considérée comme une rotation "en bloc" d'une portion de la colonne vertébrale (Stokes et coll., 1987). Le plan de courbure maximale étant le plus connu, nous nous y attarderons quelque peu.

Le plan de déformation (ou de courbure) maximale (Figure 2.31) correspond au plan vertical associé à une partie de la colonne (généralement la courbure bornée par ses vertèbres limites) qui présente la plus grande mesure de courbure (tel que mesuré par la méthode de Cobb par exemple), lorsque cette partie est projetée dans celui-ci (Stokes, 1994). Selon Stokes et coll. (1987) la rotation du plan de courbure maximale des courbures hautes (apex entre T1 et T9) s'effectue principalement dans le sens anti-horaire

pour les courbes thoracique droite et dans le sens horaire pour les courbes thoracique gauche (Figure 2.31). Dans la région basse de la colonne (apex entre T10 à L5), les caractéristiques du plan de déformation maximale semblent varier selon la localisation de la scoliose dans le plan sagittal (région lordotique ou cyphotique). Ainsi pour les courbes situées dans la région lordotique, la rotation du plan de déformation maximale s'effectue dans le sens anti-horaire dans le cas de scoliose convexe à gauche et dans le sens horaire pour les courbes convexes à droite. L'opposé est observé lorsque les courbes sont situées dans la région cyphotique (i.e. même sens de rotation que pour les courbes hautes). La relation entre l'angle de Cobb et la rotation du plan de déformation maximale s'est révélée très variable particulièrement pour les courbes situées dans la région basse. Probablement à cause de la grande variabilité du degré des courbures dans le plan sagittal.

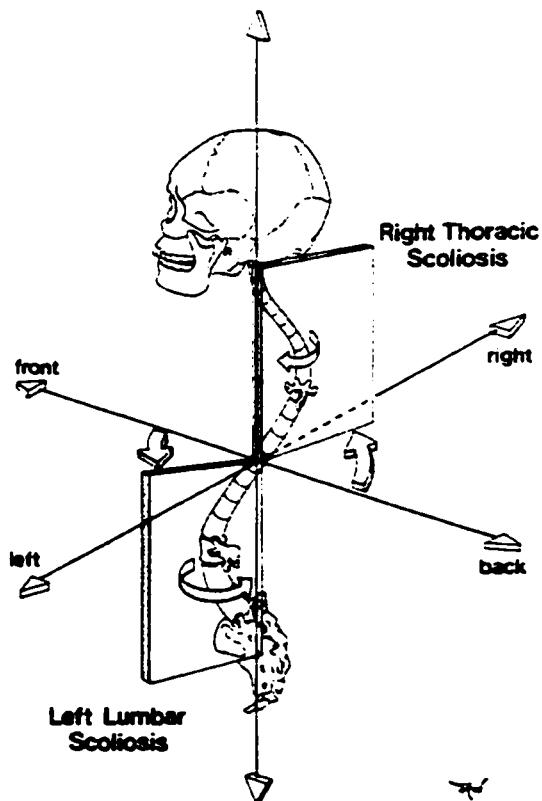


Figure 2.31 Définition du plan de courbure maximale (Stokes et coll., 1987)

Le plan de courbure maximale est attrayant, mais il peut être dangereux comme outil de description de la scoliose puisqu'il ne tient pas compte de la relation de ce plan avec les plans anatomiques des vertèbres (Stokes, 1987). Le plan de symétrie coupant transversalement la vertèbre apicale, n'a pas ce désavantage. À moins de pouvoir prouver que les vertèbres de la courbure scoliotique sont bel et bien alignées dans un même plan, il est difficile de prétendre que des mesures obtenues à partir de la projection de la colonne dans un plan spécifique pourraient entièrement décrire sa déformation.

D'autres concepts 2D (Stokes et coll., 1993; Labelle et coll., 1995) peuvent servir à mesurer les déformations scoliotiques (Figure 2.32) comme la déviation latérale, la balance (déjettement) linéaire et angulaire mesurée dans les plans latéral et sagittal.

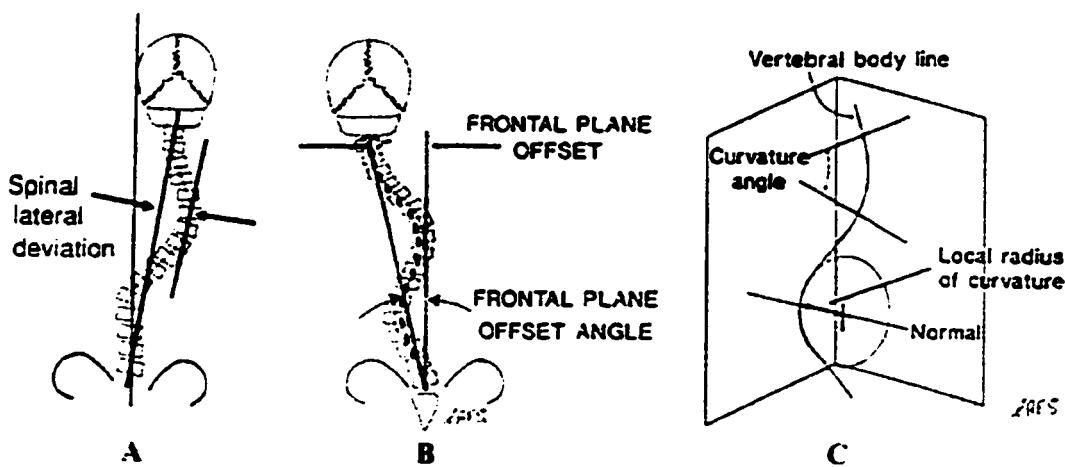


Figure 2.32 Indices pour la mesure des déformations scoliotiques: a) déviation latérale spinale; b) balance linéaire et angulaire; c) rayon de courbure (Stokes, 1994)

Les concepts de mesure 3D des déformations de la colonne sont peu nombreux et s'expliquent entre autre par la complexité tridimensionnelle des déformations scoliotiques. Dans leur étude tridimensionnelle de la configuration de la colonne scoliotique, Kanayama et coll. (1996) définissent la mesure de l'angle de Cobb analytique tridimensionnelle (Figure 2.33). Il s'agit de l'angle dans l'espace formé par les vecteurs normaux à la courbe

spinale 3D évalué aux points correspondants aux points d'inflexions de la projection de la colonne (ligne vertébrale) dans le plan frontal. De façon générale, l'angle de Cobb 3D est plus grand que l'angle de Cobb analytique mesuré dans le plan frontal. Ils en profitent aussi pour redéfinir le plan de courbure maximale en l'associant plutôt au plan de mesure de l'angle de Cobb 3D.

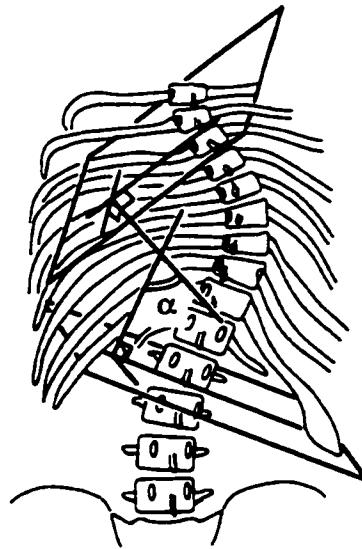


Figure 2.33 Schématisation de la mesure de l'angle de Cobb analytique tridimensionnel (Kanayama et coll., 1996).

2.4.2 Mesure de la rotation vertébrale

Bien que les méthodes empiriques présentées à la section 2.2 se soient avérées cliniquement suffisantes pour déterminer le degré relatif de rotation des vertèbres, d'un point de vue scientifique le besoin d'une plus grande précision a conduit au développement de plusieurs méthodes analytiques. De simples formules qui font intervenir des paramètres mesurés directement sur la radiographie (Fait et Janovec, 1970; Nordvall, 1973; Benson et coll., 1976) sont ensuite utilisées pour calculer la rotation de la vertèbre. Pour tenter d'atténuer les imprécisions causées par la variation morphologique et l'inclinaison frontale de la vertèbre (Benson, 1976), des méthodes basées sur des

mesures faisant intervenir les deux pédicules se sont développées (Matteri et coll., 1976; Coetsier et coll., 1977). Afin d'encore mieux identifier la géométrie de la vertèbre, certaines méthodes utilisent l'identification de repères anatomiques. L'angle de rotation est alors obtenu par une relation géométrique dont certains paramètres sont mesurés directement sur la radiographie et les autres tirés de modèles reconstruits et d'analyses de régression (Bunnell, 1985; Drerup, 1984 et 1985; Stokes, 1986). Une étude menée par Russel et coll. (1990) conclura que la méthode de Stokes est significativement moins précise que celles de Bunnell, Drerup et Koreska, et que la méthode de Bunnell a été préférée aux autres pour ses résultats plus consistants. De façon générale les méthodes basées sur l'ombre du pédicule ont une précision moyenne de l'ordre de 5° et sont plus fiable lorsque les rotations axiales sont inférieures à 40° (Skalli et coll., 1995).

Pour obtenir des valeurs plus précises et une description plus complète de l'orientation des vertèbres, des méthodes utilisent des modèles géométriques de la colonne générés à l'aide de techniques de reconstruction stéréo-radiographique 3D (Olsson et coll., 1976; Brown et coll., 1976; Drerup et Frobin, 1977; Pearcy et Whittle, 1982; Stokes et coll., 1986; Labelle et coll., 1995). Les rotations vertébrales (Figure 2.34) suivant les trois axes orthogonaux (frontal, sagittal et transverse) sont alors déterminées à l'aide de techniques mathématiques de calcul des mouvements intervertébraux dans l'espace (Euler, HMV, vecteurs). Les résultats montrent qu'indépendamment des erreurs dues aux techniques de reconstruction ou à la déformation des vertèbres scoliotiques, les calculs de rotation dépendent du principe de mesure adopté et par conséquent des méthodes qui suivent une procédure mathématique différente donneront des résultats similaires seulement si la combinaison des rotations est inférieure à 10° (Skalli et coll., 1995).

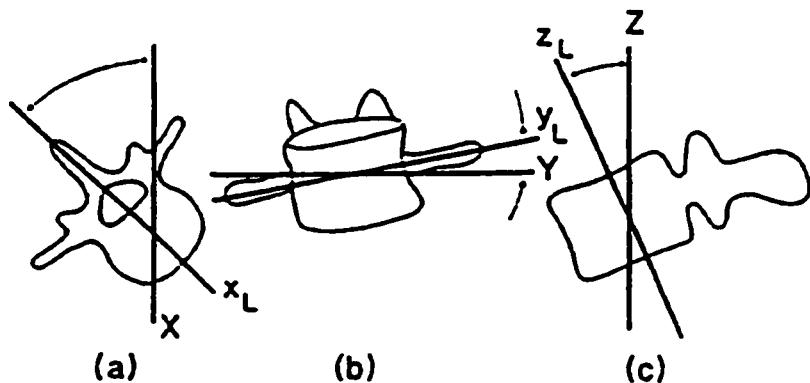


Figure 2.34 Angulations vertébrales projetées: a) axiale; b) frontale; c) sagittale (Stokes, 1994)

L'utilisation de la tomographie axiale assistée par ordinateur pour mesurer la rotation vertébrale a été introduite par Aaro, Dahlborn et Svesson en 1978. Depuis lors, la méthode a été utilisée pour étudier les déformations rotatoires de la vertèbre apicale et de la cage thoracique (Aaro et Dahlborn, 1981a et b; Ecker et coll., 1988; Marchesi et coll., 1992; Ho et coll., 1993; Krismer et col., 1996). Ces méthodes utilisent, sur la coupe obtenue, des points de référence sur la vertèbre d'intérêt et sur la cage thoracique. Différentes mesures de la rotation axiale sont alors relevées. Pour tenir compte des déformations scoliotiques des vertèbres, Shanti et coll. (1992) proposèrent une méthode pour mesurer séparément la rotation du corps vertébral et celle de la région postérieure de la vertèbre. Ils conclurent que les repères choisis étaient fiables pour mesurer la rotation dans la région apicale et moins, près des vertèbres limites supérieure et inférieure et que la différence entre la rotation antérieure et postérieure augmente avec la sévérité de la déformation du corps vertébral. L'utilisation de la tomographie pour la mesure de la rotation axiale des vertèbres n'est valide que si la rotation de la vertèbre dans les autres plans est faible (Skalli et coll., 1995).

D'autres méthodes de mesure de la rotation axiale utilisent des techniques informatiques d'imagerie par résonance magnétique (Birchall et coll., 1997) ou ultrason (Burwell et coll., 1992).

Les rotations vertébrales ne sont pas de vraies mesures 3D puisque les angles sont mesurés à partir de la projection de la vertèbre dans des plans déterminés (frontal, latéral, apicale, etc.). Il s'agit donc d'angles 2D qui définissent l'orientation 3D de la vertèbre et pour lesquels il est nécessaire de faire attention à la séquence avec laquelle ils sont appliqués, surtout pour des angles supérieurs à 10° (Skalli et coll., 1993). Des études (Stokes et coll., 1987; Stokes, 1989) auront toutefois permis de constater que la rotation de la vertèbre apicale se produit dans la même direction que la rotation du plan de courbure maximale pour les courbes lordotiques, mais de direction opposée pour les courbes cyphotiques. La rotation vertébrale évaluée à l'apex de la courbure était aussi plus faible que la rotation du plan de courbure maximale.

Selon Kojima et Kurokawa (1992 a et b), la rotation tridimensionnelle n'est pas une mesure pouvant être représentée par des valeurs scalaires mais plutôt par une matrice. Ils ont donc proposé un nouveau concept de représentation matricielle et vectorielle des déformations 3D de la colonne scoliotique. Chaque rotation dans l'espace est caractérisée par une matrice orthogonale (trois rangés et trois colonnes) qui est représentée par un vecteur dont la direction est donnée par l'axe de rotation, et la longueur par l'angle de rotation autour de cet axe. Pour y arriver, un système d'axe orthogonal local est d'abord défini en chacun des plateaux vertébraux à partir de points de référence mesurés sur ces derniers (Figure 2.35a). Les matrices et vecteurs de rotation sont ensuite calculés entre chaque paire de plateaux vertébraux (Figure 2.35b). Théoriquement, le réarrangement angulaire tridimensionnel d'un segment déformé de la colonne s'obtiendrait par une détorsion de la colonne autour des vecteurs de rotation des extrémités du segment.

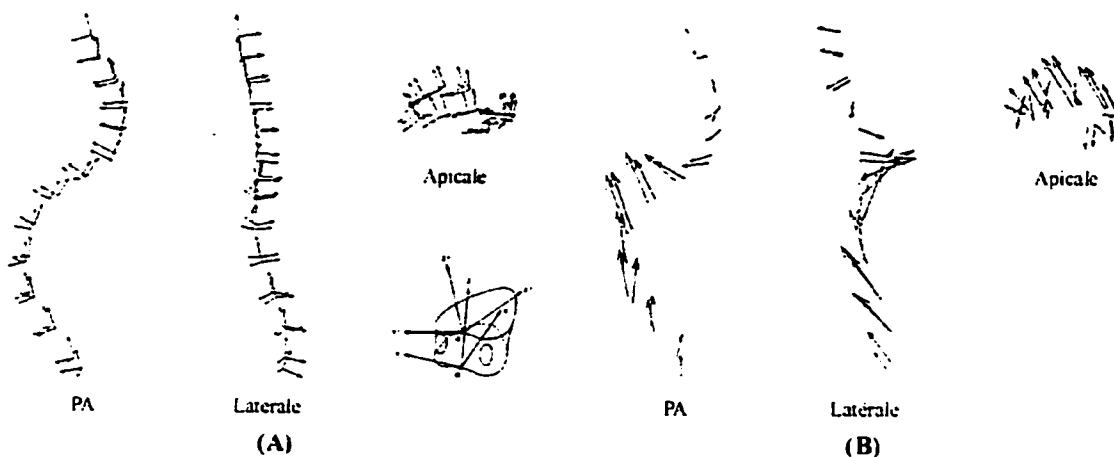


Figure 2.35 Représentation 3D des déformations scoliotiques: a) repères orthogonaux locaux; b) vecteurs rotation (Kojima et Kurokawa, 1992)

2.4.3 Mesure de l'asymétrie des côtes

La reconstruction tridimensionnelle de la cage thoracique obtenue à l'aide de techniques de reconstruction stéréoradiographique (Dansereau et Stokes, 1988) a contribué au développement de nouveaux indices de mesure de la géométrie intrinsèque et extrinsèque des côtes. Les déformations costales extrinsèques sont évaluées à l'aide des angulations frontale et sagittale des côtes (Figure 2.36a), ainsi que par la mesure de la gibbosité (Figure 2.36b). La mesure de la déformation intrinsèque des côtes est obtenue à l'aide d'indices tel que: le rayon de courbure maximum postérieur, la longueur des côtes, les diamètres sagittal et transverse, l'aire circonscrit par la côte lorsque projetée dans le plan d'adéquation maximal, etc. et permet de caractériser l'asymétrie entre le côté gauche et le côté droit (Figure 2.36c). La courbe passant par le centroïde des plans transverses du thorax sert également à caractériser les déformations globales de la cage thoracique (Dansereau et coll., 1993).

Aaro et Dahlborn (1981a et b) furent parmi les premiers à utiliser les techniques de tomographie axiale assistée par ordinateur pour caractériser et étudier les déformations de la cage thoracique. Ils définirent cinq paramètres géométriques à partir de l'image prise au

niveau de l'apex des courbes scoliotiques (Figure 2.36b): l'indice de gibbosité "RHi" ($= (H - D)/W$), l'indice de cypholordose "KLi", donné par le rapport entre le diamètre sagittal et le diamètre transverse, et la distance apex-cage thoracique du côté concave. On rapporte toutefois que les images tomographiques (obtenues en position couchée) exagèrent la distorsion des côtes (Closkey et Schultz, 1997).

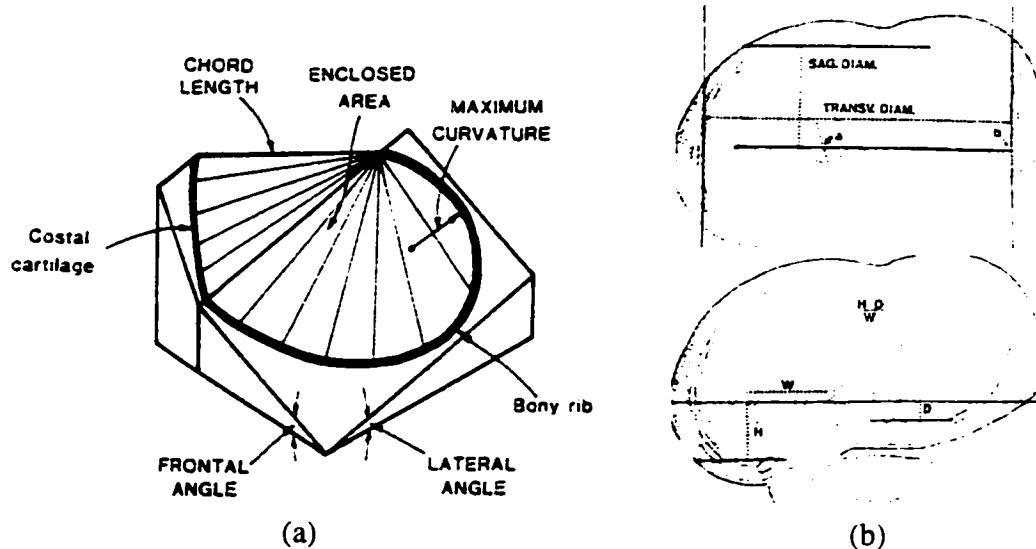


Figure 2.36 Indices pour la mesure de l'asymétrie de la cage thoracique
(Aaro et Dahlborn, 1981a; Dansereau et Stokes, 1988)

Les relations biomécaniques qui existent entre la cage thoracique et la colonne vertébrale sont complexes et le résultat d'études comparatives parfois contradictoires. Stokes (1989) et Agostoni et coll. (1983) ont rapporté de fortes corrélations entre la rotation axiale vertébrale, la rotation de la cage thoracique et la rotation de la surface du dos. Cependant, Thulbourne et Gillespie (1976) n'ont pu établir de relation claire entre la rotation des vertèbres et les mesures de la gibbosité laissant suggérer que la déformation de la cage thoracique ne résulte pas uniquement de la rotation vertébrale. Les résultats d'une étude menée par Closkey et Schultz (1993), basée uniquement sur des simulations, ont révélé que le débordement latéral de la cage thoracique serait bien corrélé avec l'angle de Cobb mais pas avec la rotation axiale vertébrale, et inversement pour la rotation axiale de la cage thoracique.

2.4.4 Mesure de l'asymétrie du tronc

Afin de réduire le plus possible l'utilisation des rayons-x dans la scoliose, l'analyse de la géométrie du tronc et plus particulièrement celle du dos, à l'aide de techniques d'imagerie optique, a soulevé un certain intérêt. Plusieurs techniques optiques ont donc été développées et utilisées pour quantifier l'asymétrie du tronc: la technique des franges de Moiré (Adair et coll., 1977; Moreland et coll., 1981; Laulund et coll., 1982; Daruwalla et coll., 1985); la "rasterstéréographie" (Frobin et Hierholzer, 1982; Stokes et coll., 1988) et l'imagerie au laser (Turner-Smith et coll., 1988; Dawson et coll., 1993; Theologis et coll., 1997; Poncet et coll., 2000).

L'indice d'asymétrie du dos le plus étudié est sûrement la rotation de la surface du dos, aussi décrit comme l'angle de rotation ou d'inclinaison du tronc. Il existe plusieurs méthodes de mesure de cet indice obtenu à partir du tracé du contour du dos, tel qu'observé sur une coupe horizontale du tronc, à savoir: l'angle entre le plan coronal et la ligne de double tangente à la gibbosité des côtes thoraciques droite et gauche ou l'angle entre le plan coronal et la droite tangente à la ligne médiane lombaire (i.e., ligne passant par les apophyses épineuses) (Stokes et Moreland, 1989); l'angle entre le plan coronal et la droite qui s'ajuste le mieux (aux sens des moindres carrés) à la ligne contour du dos dans la région circonscrite par les lignes para-médianes (lignes parallèles à la ligne passant par les apophyses épineuses et situées de part et d'autre de celle-ci) (Turner-Smith et coll., 1988); ou par report direct de la mesure de la gibbosité et de la dépression (Thulbourne et Gillespie, 1976). Il n'est cependant pas clair laquelle de ces méthodes est la plus utile.

Les tentatives pour corrélérer la rotation du tronc aux indices de déformations de la colonne vertébrale (angle de Cobb, rotation axiale vertébrale, déviation latérale, etc.) ne sont pas nouvelles (Thulbourne et Gillespie, 1976; Stokes et Moreland, 1987 et 1989; Turner-Smith et coll., 1988; Stokes et coll., 1988; Stokes, 1989; Duval-Beaupère, 1996, Thometz et coll., 1998). Ces études rapportent des niveaux variables de corrélation selon la méthode utilisée, la position du patient (debout, antéflexion) et le groupe de patients étudiés, plus

particulièrement lorsque ce dernier inclut des patients ayant des rotations vertébrales non-standard (Stokes, 1989). Néanmoins, diverses études ont révélé que l'indice de rotation du tronc était suffisamment bien corrélé à la mesure de l'angle de Cobb ($r = 0.75 - 0.88$) et que cette corrélation n'était que légèrement améliorée lorsque les mesures avaient été obtenues avec le patient en position d'antéflexion ($r = 0.86-0.87$) (Stokes et Moreland, 1987 et 1989 ; Stokes, 1989). Fortement reliée à l'angle de Cobb, la déviation latérale s'est révélée corrélée plutôt bien avec l'indice de rotation du tronc, avec $r = 0.74-0.79$ (Stokes et coll., 1988). Bien qu'intuitivement on aurait pu s'attendre à ce que l'indice de rotation du dos soit fortement relié à la rotation vertébrale, les résultats montrent que ces derniers ne sont que faiblement corrélés, les coefficients de corrélation rapportés variant de non-significatif à $r = 0.77-0.79$ (Stokes et coll., 1988; Stokes, 1989; Thometz et coll., 1998).

Une autre information que l'on tire de la topographie du dos est la ligne passant par l'extrémité des apophyses épineuses. À partir de cette ligne une mesure analogue à celle de l'angle de Cobb peut-être calculée. Cet angle bien que plus petit en grandeur que l'angle de Cobb clinique lui est cependant fortement corrélé, avec un coefficient de corrélation de l'ordre de 0.8 à 0.9 (Letts et coll., 1988; Turner-Smith et coll., 1988; Herzenberg et coll., 1990; Wong et coll., 1997). Jusqu'à ce jour, il s'agit du meilleur indice de scoliose disponible à partir de la surface topographique du dos.

Peu d'études utilisant la géométrie complète de la surface du tronc ont été publiées (Dawson et coll., 1993; Jeremko et coll., 2001). La ligne passant par le centroïde des sections horizontales du tronc est alors utilisée pour obtenir une mesure d'angle analogue à celle de l'angle de Cobb. Les déviations de cette ligne sont cependant minimales même chez les patients dont la déformation spinale est significative. Néanmoins, cet indice corrèle bien avec l'angle de Cobb ($r = 0.69-0.87$) (Dawson et coll., 1993). La méthode d'estimation basée sur l'approche des réseaux de neurones aura permis d'estimer l'angle de Cobb à $\pm 6^\circ$ près chez les deux tiers des patients (Jeremko et coll., 2001). D'autres indices comme la déviation latérale de la ligne centrale du tronc, les asymétries de section et les rotations

relatives des axes principaux des sections du tronc semblent cependant moins bien corréler ($r < 0.5$) (Dawson et coll., 1993; Jeremko et coll., 2001).

L'asymétrie scoliotique de la surface du tronc est la conséquence des effets de déviation et de rotation de la colonne et des vertèbres modifiées par l'effet de la gravité et les propriétés des autres composantes du tronc (muscles, ligaments, tissus, etc.), ce qui rend difficile son étude. Cependant, le développement de nouveau indices combinant plusieurs mesures de l'asymétrie du tronc, comme le POTSI (Suzuki et coll., 1999) et l'utilisation d'outil de reconnaissance de patron non linéaire, tel que les réseaux de neurones (Jeremko et coll., 2001) pourraient s'avérer cliniquement utiles dans l'évaluation des scolioses.

2.5 Revue des méthodes d'évaluation de la torsion géométrique

Les déformations géométriques scoliotiques de la colonne vertébrale ont été décrites par plusieurs auteurs comme ressemblant à des portions d'ellipses dans la vue transverse (Graf, 1990), comme pouvant être représentées par une hélice avec des translations et rotations dans les plans sagittal, coronal et horizontal (Tredwell et coll., 1999), ou encore comme étant similaires à un ou des ressorts déformés (Asher et coll., 1999). De plus, l'observation de la déformation scoliotique dans le plan transverse (Graf et coll.. 1983 et 1990 ; De Smet et coll., 1983 et 1984; Perdriolle et Vidal, 1985 et 1987 ; Asher et coll., 1995 et 1999) aura permis de remarquer que les courbures scoliotiques évoluent avec l'apex se déplaçant selon un arc autour de la vertèbre limite supérieure décrivant en quelque sorte une torsion dans l'espace (voir section 2.2.2). Ces observations sont d'un point de vue mathématique consistantes avec la notion de torsion géométrique, propriété intrinsèque d'une courbe dans l'espace à ne pas confondre avec la notion de torsion mécanique qui caractérise plutôt la rotation relative ou la déformation entre deux objets adjacents.

En effet, contrairement à la torsion mécanique qui peut-être mesurée par un angle et qui produit nécessairement une déformation structurale (par exemple: déformation des

vertèbres), la torsion géométrique caractérise plutôt l'allure générale de la courbe tridimensionnelle passant par les vertèbres. En d'autres mots, il s'agit d'une mesure de la morphologie hélicoïdale de la courbe scoliotique et ne peut être associée à l'évaluation des rotations vertébrales, ni à la mesure des déformations intrinsèques des vertèbres. La Figure 2.37 illustre la différence théorique entre la torsion mécanique et la torsion géométrique.

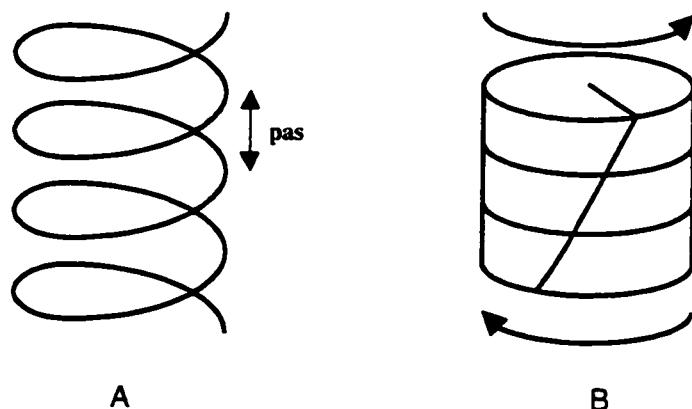


Figure 2.37 Illustration de la différence entre: a) la torsion géométrique et b) la torsion mécanique

Puisqu'il paraît bien exister une corrélation entre l'aspect morphologique tridimensionnel du rachis scoliotique et son évolution, il semble naturel de vouloir étudier le phénomène de torsion géométrique dans la scoliose idiopathique. Bien que quelques méthodes de mesure aient été développées ou proposées (Patwardhan et Vanderby, 1981; Hierholzer et Luxmann, 1982; Dansereau, 1983; DeSilva et Yang, 1990; Dansereau et coll., 1993; Ortale et coll., 1993; Kanayama et coll., 1996), le phénomène de torsion dans la scoliose n'a jamais été proprement analysé et précisément défini.

2.5.1 Définition mathématique de la torsion géométrique

Les principes géométriques qui relèvent de l'algèbre vectorielle sont utilisés pour caractériser une courbe dans l'espace dont les propriétés de forme intrinsèque sont

entièrement décrites par les notions de courbure et torsion et par conséquent peuvent être appliqués à la ligne spatiale passant par les vertèbres thoraciques et lombaires de colonnes scoliotiques.

2.5.1.1 Définition d'une courbe dans l'espace

Un des problèmes de base en géométrie descriptive est de pouvoir définir les quantités géométriques qui permettent de distinguer une forme d'une autre. Par exemple, une droite est strictement déterminée par sa longueur, un cercle par son rayon, un triangle par l'angle de ses côtés, etc. Nous verrons dans les lignes qui suivent que les courbes spatiales sont complètement définies par deux quantités scalaires: la courbure et la torsion. L'étude des courbes dans l'espace est une branche importante des mathématiques et est à la base de la géométrie différentielle.

La description mathématique présentée ici est principalement tirée des ouvrages suivants: Schartz et coll. (1960), Pogorelov (1967), Lipschutz (1969), Carmo (1976), Kreyszig (1983), Weatherburn (1984). Afin de rendre les expressions mathématiques plus concises la représentation à l'aide de vecteurs (représentés ici en caractère gras) a été utilisée.

Les équations d'une courbe C dans l'espace sont souvent représentées sous la forme paramétrique

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad (2.1)$$

où \mathbf{r} est le vecteur position et t le paramètre de cette représentation. La courbe ainsi représentée est appelée une *courbe analytique*. Lorsque exprimé dans le système de coordonnées Cartésien x, y et z sont aussi fonction du même paramètre

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (2.2)$$

pour chaque valeur t_o de la variable réelle t correspond un point sur C ayant la position $r(t_o)$ et les coordonnées $x(t_o)$, $y(t_o)$ et $z(t_o)$. Ainsi la donnée de la courbe C est équivalente à la donnée de la fonction vectorielle $r(t)$ (Figure 2.38).

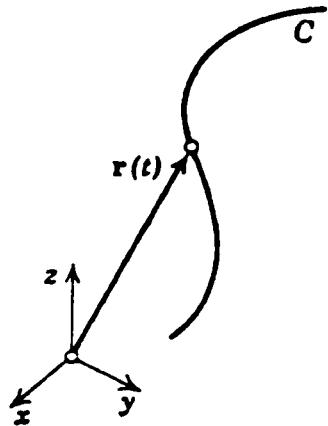


Figure 2.38 Représentation paramétrique d'une courbe dans l'espace (Kreyszig, 1983)

Une courbe plane est une courbe qui repose entièrement dans un plan de l'espace. Lorsqu'une courbe n'est pas une courbe plane, elle est dite tordue, tortueuse ou encore tortillée.

Une courbe est appelée courbe simple si elle ne s'intercepte pas avec elle-même comme c'est le cas pour l'hélice circulaire. Une courbe représentée par $r = r(t)$ est dite courbe analytique régulière si en tout point de la courbe $dr/dt \neq 0$. La portion entre deux points de la courbe est souvent appelée arc de la courbe.

Il est généralement plus commode de choisir comme paramètre la longueur d'arc s de la courbe mesurée à partir d'un point fixe sur C . La direction positive le long de la courbe correspond à l'augmentation algébrique de s .

À titre d'exemple l'hélice circulaire peut être représentée par la fonction vectorielle suivante:

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + (ct)\mathbf{k} \quad (2.3)$$

L'hélice circulaire est une courbe qui s'enroule autour d'un cylindre de rayon a ($x^2 + y^2 = a^2$) dont l'axe est parallèle à l'axe des z .

La longueur d'arc s est communément utilisée comme paramètre dans les représentations paramétriques de courbes. Si C peut être représentée par une fonction vectorielle différentiable et de dérivées continues alors la longueur d'arc compris entre les points a et b de la courbe peut être définie par

$$s(t) = \int_a^b \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} dt \quad (2.4)$$

En choisissant $s = 0$ à $t = 0$ l'intégrale devient

$$s = t\sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.5)$$

Par conséquent, l'équation vectorielle de l'hélice circulaire paramétrisée avec s peut s'écrire de la façon suivante:

$$\mathbf{r} = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{i} + \left(a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{j} + \left(b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{k} \quad (2.6)$$

Par ailleurs, l'approximation de la longueur d'arc par la corde entre les centroïdes des vertèbres s'est avérée justifiée pour le calcul des paramètres intrinsèques de courbure et de torsion associés à la géométrie de la colonne vertébrale scoliotique (Dansereau, 1983).

2.5.1.2 Définition des équations de Frenet

Vecteur tangent, vecteur normal et courbure

Pour simplifier, les dérivées successives de \mathbf{r} par rapport au paramètre de longueur d'arc s seront dénotées $\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''$ et ainsi de suite. Le vecteur tangent unitaire \mathbf{t} à la courbe au point P (Figure 2.39) est donné par

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}' \quad (2.7)$$

et le vecteur tangent pointe dans la direction croissante de la longueur d'arc. Le vecteur \mathbf{t}' exprime alors le taux de changement de la direction de \mathbf{t} et lui est perpendiculaire ($\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' = 0$). On a ainsi

$$\mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n} \quad (2.8)$$

où \mathbf{n} (perpendiculaire à \mathbf{t}) est appelé le vecteur normal principal. La direction de \mathbf{n} est choisie de sorte que κ soit non-négatif. Géométriquement cela implique que \mathbf{n} pointe dans la direction du centre de la courbure (Figure 2.39). Pour une ligne droite $\kappa = 0$ et \mathbf{n} est indéterminé. Le scalaire $\kappa = |\mathbf{t}'|$ au point P est appelé la courbure de la courbe en ce point.

Le rayon de courbure au point P est alors donné par $\rho = 1/\kappa$.

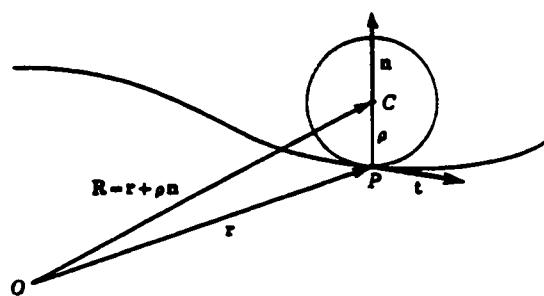


Figure 2.39 Définition du rayon de courbure (Schartz et coll., 1960)

Si nous revenons à notre exemple d'hélice circulaire, nous aurons

$$\kappa = |\mathbf{t}'| = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (2.9)$$

et

$$\mathbf{n} = - \left(\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{i} - \left(\sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{j} \quad (2.10)$$

On constate que le vecteur normal est toujours parallèle au plan formé par les vecteurs \mathbf{i} et \mathbf{j} et est dirigé vers l'origine. La courbure quant à elle est constante.

Le vecteur binormal et la torsion

Le vecteur binormal \mathbf{b} est défini par

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (2.11)$$

De cette définition, nous constatons que les vecteurs unitaires \mathbf{t} , \mathbf{n} et \mathbf{b} forment un système orthogonal direct (i.e. qui vérifie la règle de la main droite, le pouce indiquant l'orientation générale de l'accroissement de la courbe) en tout point de la courbe. Puisque les vecteurs \mathbf{t} , \mathbf{n} et \mathbf{b} changent d'un point à un autre ce système est appelé "a moving trihedral" (Figure 2.40). Le plan déterminé par les vecteurs tangent et normal est appelé le plan osculateur.

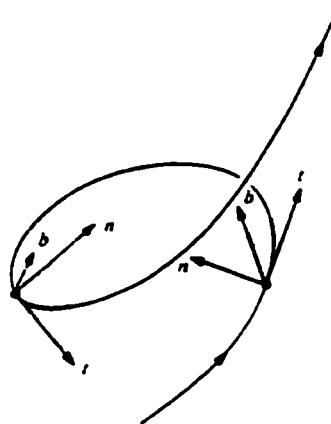


Figure 2.40 Trièdre formé par les vecteurs tangent \mathbf{t} , normal \mathbf{n} et binormal \mathbf{b} évalué en deux points de la courbe spatiale (Carmo, 1976)

Pour introduire la torsion, nous considérons d'abord la dérivée \mathbf{b}' du vecteur unitaire \mathbf{b} . Par définition le vecteur binormal est unitaire (de longueur constante), il s'ensuit donc que \mathbf{b}' qui représente le taux de changement du vecteur \mathbf{b} est perpendiculaire à \mathbf{b} ($\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}' = 0$). En dérivant par rapport à s la relation $\mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0$, nous obtenons

$$\kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}' = 0 \quad (2.12)$$

Le premier terme s'annule car par définition \mathbf{n} est perpendiculaire à \mathbf{b} et on en conclut que \mathbf{b}' est perpendiculaire à \mathbf{t} . Mais puisque \mathbf{b}' est aussi perpendiculaire à \mathbf{b} , il doit forcément être parallèle et donc proportionnel au vecteur \mathbf{n} . On peut alors écrire

$$\mathbf{b}' = \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n} \quad (2.13)$$

où le scalaire τ est appelé la torsion au point P de la courbe. Le signe négatif est conventionnel et indique que la torsion est définie positive lorsque la rotation du vecteur binormal autour du vecteur tangent \mathbf{t} se fait dans le sens \mathbf{n} vers \mathbf{b} , alors que le vecteur binormal se déplace le long de la courbe dans la direction croissante du paramètre s .

À titre d'illustration référons encore à notre hélice circulaire. Le vecteur binormal est donné par

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \mathbf{t} \times \frac{\mathbf{t}'}{\kappa} = \left(\frac{b}{c} \sin \frac{s}{c} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{b}{c} \cos \frac{s}{c} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{a}{c} \right) \mathbf{k} \quad (2.14)$$

où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Pour obtenir la torsion, on dérive \mathbf{b} par rapport à s

$$\mathbf{b}' = \left(\frac{b}{c^2} \cos \frac{s}{c} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{b}{c^2} \sin \frac{s}{c} \right) \mathbf{j} = -\tau \mathbf{n} \quad (2.15)$$

Par conséquent, la torsion τ est

$$\tau = \frac{b}{c^2} \quad (2.16)$$

Le plan formé par les vecteurs tangent et binormal (aussi appelé plan rectificateur) est parallèle en tout temps au vecteur \mathbf{k} de repère orthonormal cartésien.

Tout comme pour la courbure, la torsion d'une hélice circulaire est constante. Si $b>0$, la torsion est positive et l'hélice tourne dans le sens anti-horaire (Figure 2.41a), pour $b<0$, la torsion est positive et l'hélice tourne dans le sens horaire (Figure 2.41b).

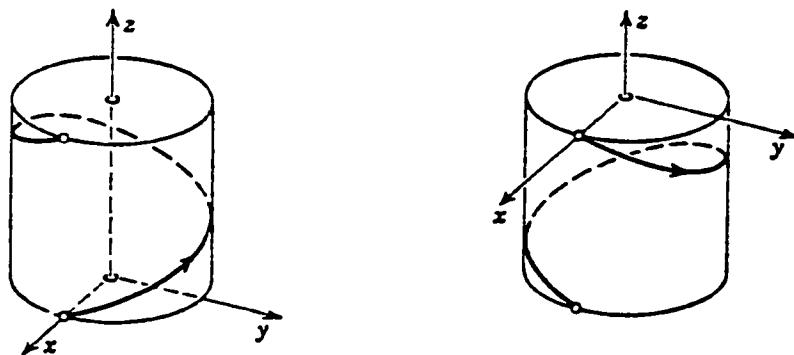


Figure 2.41 Illustration du sens de la torsion d'une hélice circulaire: a) sens anti-horaire; b) sens horaire (Kreyszig, 1983)

Basé sur les équations précédentes, les équations de Frenet (aussi appelées Frenet-Serret) peuvent se définir en ces termes

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa t + \tau b \\ b' &= -\tau n \end{aligned} \quad (2.17)$$

Formules de courbure et de torsion

Lorsque exprimées en fonction des coordonnées cartésiennes tridimensionnelles (x, y, z), les équations de Frenet (développées à partir du vecteur position r représenté comme une fonction de la longueur d'arc) entraînent la formulation suivante pour les paramètres intrinsèques de courbure et de torsion:

$$\kappa = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} \quad (2.18)$$

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2} \begin{bmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Une représentation mathématique plus générale des équations de courbure et de torsion est aussi disponible (Lipschutz, 1969), le vecteur position r est alors fonction du paramètre quelconque t :

$$\kappa = \frac{\sqrt{(\dot{r} \cdot \ddot{r})(\ddot{r} \cdot \ddot{r}) - (\dot{r} \cdot \ddot{r})^2}}{(\dot{r} \cdot \ddot{r})^{3/2}} \quad (2.20)$$

$$\tau = \frac{(\dot{r} \cdot \ddot{r} \cdot \ddot{r})}{(\dot{r} \cdot \ddot{r})(\ddot{r} \cdot \ddot{r}) - (\dot{r} \cdot \ddot{r})^2} \quad (2.21)$$

Un point sur la courbe pour lequel la valeur de la courbure κ est nulle (rayon de courbure ρ infini) est appelé un point d'infexion. Il est facile de prouver (Lipschutz, 1969) que la courbure est égale au taux de changement de la direction de la tangente exprimé en fonction du paramètre s . Par conséquent, si le long d'une courbe la direction du vecteur tangent change rapidement, comme c'est le cas pour une hélice circulaire de petit cercle de base a (on suppose b fixe), la courbure est relativement grande ou si vous préférez, le rayon de courbure est faible. Une courbe analytique est une droite si et seulement si sa courbure κ est nulle en tout point de la courbe.

Comme le sens de n est initialement arbitraire (ici orienté vers le côté concave de la courbe), la courbure peut être soit positive ou négative mais reste de toute évidence invariante. On en conclut que la courbure est une propriété intrinsèque à la courbe.

Le signe de la torsion est indépendant du sens du vecteur normal n et de l'orientation de la courbe (i.e. peut importe si la courbe croît dans le sens positif ou négatif relativement à son système de référence), ce qui fait de la torsion une propriété intrinsèque à la courbe. Puisque le signe de la torsion τ est une propriété intrinsèque, on en conclut que les hélices circulaires de la Figure 2.41 ne sont pas superposables. Contrairement à la courbure, toujours positive, la torsion peut être positive ou négative ou même nulle permettant ainsi une interprétation géométrique relativement au sens dans lequel elle s'applique (Figure 2.42).

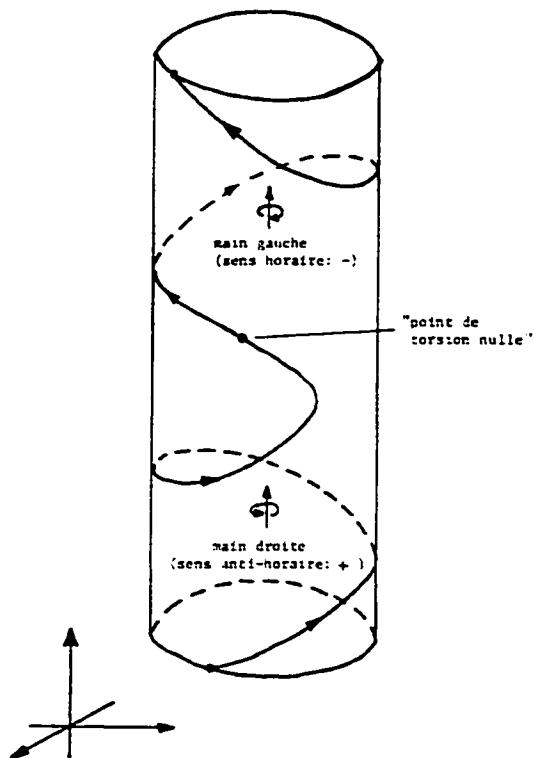


Figure 2.42 Illustration du sens du paramètre intrinsèque de torsion et d'un point de torsion nulle (Dansereau, 1983)

Tout comme la courbure κ est une mesure du taux (ou de la vitesse) de rotation du mouvement giratoire (ou rotatoire) du vecteur tangent, la torsion τ est une mesure du taux (ou de la vitesse) de rotation du mouvement giratoire (ou rotatoire) du vecteur binormal. Il s'agit aussi du taux de rotation du plan osculateur formé par les vecteurs tangent et normal.

La valeur de la torsion (exprimée en mm^{-1}) est donc zéro pour un cercle, zéro pour une ligne droite et maximale lorsque le pas de l'hélice est égal au rayon du cercle de base (voir Annexe VI). Enfin, le vecteur position r choisi pour définir la courbe doit être suffisamment dérivable. C'est-à-dire que la dérivée troisième doit être non-nulle pour que le phénomène de torsion existe.

Il ne fait aucun doute que la torsion est un véritable indice d'évaluation tridimensionnelle des déformations scoliotiques car toute géométrie plane ou bidimensionnelle ne possède pas de torsion. Une colonne vertébrale normale devrait donc avoir une torsion nulle. Ainsi physiquement on peut s'imaginer une déformation scoliotique comme le résultat de la flexion (courbure) et du tortillement (torsion) d'une colonne normale.

2.5.2 Revue et critique des principales méthodes d'évaluation de la torsion géométrique

Le développement des techniques de reconstruction tridimensionnelle (section 2.3) aura permis d'obtenir une représentation graphique et analytique précise de la colonne vertébrale scoliotique. Dès lors, la configuration tridimensionnelle de la colonne vertébrale exprimée mathématiquement par une courbe dans l'espace passant par le centroïde des vertèbres a été exploitée afin d'en étudier les propriétés de forme intrinsèques tel que décrites par la torsion géométrique.

Depuis le début des années 1980, différents modèles d'évaluation du phénomène de torsion dans la scoliose ont été proposés. Ils possèdent tous, cependant, un certain nombre de composantes qui peuvent s'énumérer comme suit :

- i) une technique de reconstruction tridimensionnelle;
- ii) une détermination de certains repères anatomiques;
- iii) une évaluation des centroïdes vertébraux;
- iv) une modélisation mathématique de la ligne passant par les vertèbres;
- v) le calcul et l'analyse de la torsion géométrique (dérivée des équations de Frenet).

La description des modèles d'évaluation de la torsion géométrique de courbes scoliotiques est présentée au Tableau 2.1. Ces modèles sont ceux de Patwardhan et Vanderby (1981), Hierholzer et Luxmann (1982), Dansereau (1983), DeSilva et Yang (1990), Dansereau et coll. (1993), Ortale et coll. (1993) et Kanayama et coll. (1996).

Méthode de reconstruction

L'analyse du Tableau 2.1 permet de constater que la plupart de ces modèles sont basés sur des méthodes de reconstruction utilisant des radiographies. Hierholzer et Luxmann (1982) ont utilisé une méthode analogique, dans laquelle les coordonnées tridimensionnelles sont obtenues directement à partir d'un appareil de numérisation (stéréocomparateur), pour obtenir la géométrie tridimensionnelle de la colonne vertébrale (Hierholzer, 1977). La méthode de reconstruction utilisée par Hierholzer et Luxmann (1982) semble précise (≤ 0.6 mm, Hindmarsh et coll., 1980) mais nécessite cependant l'utilisation d'un appareillage sophistiqué (stéréocomparateur). Les autres modèles stéréoradiographiques s'appuient sur des méthodes analytiques où les coordonnées 3D sont calculées à partir d'équations mathématiques. Ainsi, dans les modèles de Patwardhan et Vanderby (1981), Dansereau (1983) et Kanayama et coll. (1996) la reconstruction des coordonnées tridimensionnelles se fait à partir de deux séries de

Tableau 2.1 Comparaison de sept modèles géométriques évaluant la torsion géométrique de colonnes scoliotiques

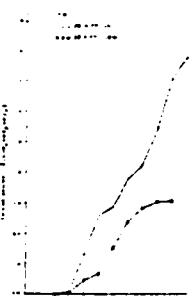
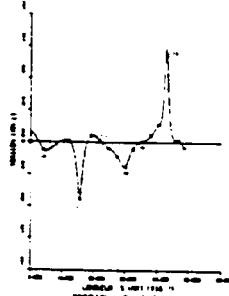
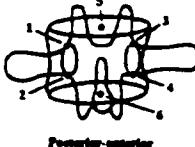
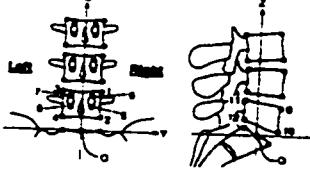
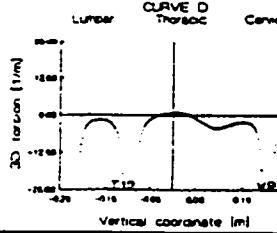
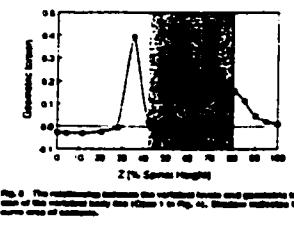
	PATWARDHAN ET VANDERBY (1981)	HIERHOLZER ET LUXMANN (1982)	DANSEREAU (1983)	DE SILVA ET YOUNG (1993)
Technique de reconstruction	biplanaire orthogonale (AP et latérale)	stéréophotogrammétrie analogique (stéréocomparateur)	biplanaire orthogonale (AP et latérale)	coupes transverses obtenues par résonance magnétique
Repères anatomiques	non spécifié	séries de points sur les plateaux	1 point	le contour vertébral de chaque coupe
Évaluation des centroïdes vertébraux	non spécifié	centroïde des plateaux supérieur et inférieur	correspond aux points identifiés reconstruits	le centroïde de la section vertébrale
Modélisation mathématique de la colonne	fonctions splines cubiques tridimensionnelles	ligne tracée en reliant linéairement les centroïdes des plateaux vertébraux	prélliage par fonctions splines cubiques et modélisation par fonctions splines quintiques paramétriques	base normal associée à chaque niveau vertébral
Groupe de patients	aucun	10 patients scoliotiques majoritairement idiopathiques	1 patient représentant un cas typique de déformation scoliotique dans l'ataxie de Friedreich	Aucun
Exemple de graphe de torsion	Aucun			Aucun
Résultats de l'analyse de torsion	Formulation validée sur un exemple de ressort défini par une hélice circulaire (torsion constante)	Les mesures de torsions se sont avérées peu reproducibles et limitées à la précision des reconstructions; Les graphes de courbure doivent être étudiés préalablement afin d'analyser et de comparer correctement les graphes de torsion	Les pics de torsion ne reflètent pas l'allure générale des déformations en torsion associées à la scoliose. Les "vraies" valeurs maximales de torsion correspondent à la région où la cyphose et la scoliose sont combinées dans l'espace	Mesure locale discrète de la torsion

Tableau 2.1 (suite) Comparaison de sept modèles géométriques évaluant la torsion géométrique de colonnes scoliotiques

	DANSEAU ET COLL. (1993)	ORTALE ET COLL. (1993)	KANAYAMA ET COLL. (1996)
Technique de reconstruction	stéréoradiographique (PA 0° et PA 20° verticalement)	optique	numériseur de film (± 0.05 mm) vues PA et latérale
Repères anatomiques	6 points  Pédicules-épines	20 points identifiés à l'aide de disques adhésifs disposés le long des apophyses épineuses	
Évaluation des centroides vertébraux	basée sur le centre mathématique de la base et du sommet des pédicules reconstruits en 3D	la ligne médiane de la colonne est estimée par la courbe passant par les apophyses épineuses	basée sur le centre mathématique des extrémités des corps vertébraux dans les deux vues
Modélisation mathématique de la colonne	modélisation des segments thoracique et lombaire par des segments de courbes hélicoïdales circulaires	polynômes paramétriques ajustés par moindres carrés aux points anatomiques reconstruits	polynômes paramétriques du cinquième degré $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$
Groupe de patients	29 patients scoliotiques (TD et TDLG)	1 sujet féminin de 44 ans (scoliose thoracique droite, cyphoïque et lordotique)	45 colonnes scoliotiques; types T, TL, L et double; Cobb = $29.8 \pm 9.1^\circ$
Exemple de graphique de torsion	pas disponible, torsion constante sur chaque segment modélisé		 Fig. 9. The maximum torsion in vertebral levels and segments for the 45 scoliotic spines used in Fig. 4. Shaded indicates the 2% spine height of the vertebrae.
Résultats de l'analyse de torsion	Torsion unidirectionnelle pour des courbes thoraciques primaires; Torsion de double direction opposée pour les courbes doubles majeures; 50% des déformations thoraciques et 79% des colonnes lombaires présentent un bon ajustement aux hélices circ.	Les pics de torsion représentent la transition entre les colonnes lombaire, thoracique et cervicale et donc ne seraient pas relié à la déformation de la colonne; Les valeurs maximales de torsion correspondent au lieu de superposition de la scoliose et de la cyphose	La torsion est maximale au niveau des vertèbres limites et presque nulle ailleurs; Les courbes scoliotiques seraient alignées dans un plan spécifique sauf au niveau des vertèbres limites

coordonnées bidimensionnelles orthogonales tirées des vues PA (ou AP) et latérale. Ces modèles, par ailleurs, sont plus susceptibles aux erreurs de reconstruction puisque les méthodes proposées dépendent de valeurs constantes relevées physiquement sur les appareils. Le modèle de Dansereau et coll. (1993), basé sur l'algorithme DLT (Marzan 1976), s'avère plus précis puisqu'il est indépendant des mesures physiques qui impliquent le calcul de la position des sources radiologiques (méthode analytique implicite). Cependant, puisque ce modèle utilise uniquement des vues radiographiques postéro-antérieure (0 et 20 degrés par rapport à l'horizontal), des erreurs plus importantes sont rencontrées sur les coordonnées de profondeur (≈ 5 mm; André et coll., 1992). La détermination des repères anatomiques est également fonction de l'identification et de la correspondance de ceux-ci sur les radiographies. Ces erreurs peuvent engendrer une imprécision additionnelle dans le calcul des coordonnées 3D.

DeSilva et Yang (1990) proposent plutôt d'utiliser des coupes vertébrales transversales obtenues par résonance magnétique pour modéliser la colonne scoliotique. Cependant, à cause de l'orientation et de la déformation complexe des vertèbres de la colonne chez les patients scoliotiques il est possible émettre des doutes quant à la précision des coupes vertébrales. Ortale et coll. (1993) ont utilisé une méthode stéréophotogrammétrique (deux vues photographiques pratiquement semblables légèrement décalées l'une par rapport à l'autre) et un logiciel développé pour la détection et reconstruction automatique de points anatomiques.

Détermination des repères anatomiques et des centroïdes vertébraux

Les modèles présentés au Tableau 2.1 utilisent plusieurs repères anatomiques par vertèbre à l'exception du modèle de Dansereau (1983) et de Ortale et coll. (1993). Dansereau (1983) mesure directement le centroïde du corps vertébral alors que Ortale et coll. (1993) utilisent des marqueurs externes (disques adhésifs) disposés le long de la colonne vertébrale du sujet pour identifier l'extrémité des apophyses épineuses. Ces dernières, cependant, sont des structures vertébrales qui apparaissent souvent déformées chez les

patients scoliotiques ce qui rend toute mesure imprécise. Moins affectés par les déformations scoliotiques, les plateaux vertébraux et les pédicules constituent un choix plus logique. Ainsi dans le modèle de Dansereau et coll. (1993), le centre des plateaux vertébraux et la base et le sommet des pédicules ont été identifiés. Par ailleurs, seul les repères anatomiques pédiculaires ont été utilisés pour déterminer le centroïde des vertèbres qui ici correspond plus ou moins au centre du trou vertébral. Dans le modèle de Kanayama et coll. (1996) les repères anatomiques identifiés sont les extrémités des corps vertébraux (les quatre coins) tel qu'observé dans les vues radiographiques postéro-antérieure (PA) et latérale ainsi que la limite supérieure et inférieure des pédicules dans la vue PA (voir la figure du Tableau 2.1). Le centre de la vertèbre, ici associé au centroïde du corps vertébral, est estimé très simplement (voir Tableau 2.1) sans avoir recourt aux techniques complexes de reconstruction 3D. DeSilva et Yang (1990) associent le centroïde de la vertèbre au centroïde de la coupe médiane de chaque corps vertébral. Hierholzer et Luxmann (1983) de leur côté identifient une série de points sur le contour des plateaux des corps vertébraux pour ensuite en estimer le centre. L'erreur associée aux coordonnées ainsi déterminées est probablement moins importante que celle des approches précédentes.

Modélisation mathématique

Patwardhan et Vanderby (1981) suggèrent l'utilisation de fonctions splines cubiques tridimensionnelles passant par le centroïde de chaque vertèbre pour modéliser la colonne vertébrale. L'approximation d'une courbe quelconque par une suite de polynômes du troisième degré n'est cependant pas appropriée pour la détermination et l'interpolation précise des dérivées secondes (représentées par des droites) et d'ordre trois (discontinues) et par conséquent pour la mesure du paramètre de torsion. Dans le modèle de Dansereau (1983) le lissage préliminaire des centroïdes vertébraux (splines cubiques de lissage) permet de minimiser les erreurs de reconstruction. La modélisation de la colonne vertébrale par fonctions splines quintiques paramétriques est ensuite effectuée à partir des projections des centroïdes vertébraux corrigés dans les plans antéro-postérieur et latéral.

Le modèle de Dansereau et coll. (1993) est basé sur l'hypothèse voulant que les segments scoliotiques thoraciques et lombaires puissent être modélisés par des segments de courbes hélicoïdales circulaires (hélices). L'évaluation de l'ajustement ou l'adéquation des hélices circulaires aux courbes 3D du rachis indiquent cependant que les géométries hélicoïdales circulaires ne modélisent pas adéquatement toutes les déformations scoliotiques idiopathiques. Ceci s'explique par le fait que la projection d'une hélice circulaire dans les plans frontal et latéral correspond à une même forme et donc au même degré de courbure, ce qui n'est pas le cas dans les déformations scoliotiques où une forte courbure dans le plan frontal peut correspondre à une sévère hypocyphose ou une lordose thoracique dans le plan sagittal. Quant aux modèles de Ortale et coll. (1993) et de Kanayama et coll. (1996), ils paramétrisent la géométrie curviligne de la colonne vertébrale à l'aide de polynômes d'ordre cinq ajustés par moindres carrés aux points anatomiques (respectivement les extrémités des apophyses épineuses et les centroïdes des corps vertébraux) reconstruits en 3D et projetés dans les vues frontale et sagittale.

Dans le modèle de Hierholzer et Luxmann (1982) la ligne médiane (discontinue) de la colonne a été tracée en reliant linéairement les centroïdes des plateaux vertébraux, estimés à partir des mesures stéréoscopiques du pourtour des plateaux. Hierholzer et Luxmann (1983) considèrent une ligne polygonale plutôt qu'une courbe lisse pour mesurer ce qu'ils définissent être le *volume de torsion relatif intégral* (dérivé des équations de Frenet). Le volume de torsion étant le volume du parallélépipède engendré par l'axe longitudinal du corps vertébral (issue des reconstructions radiographiques) de trois vertèbres adjacentes et le *volume de torsion relatif intégral* représente la somme des contributions du volume de torsion le long de la colonne en commençant par la vertèbre L5 jusqu'à la vertèbre à considérer. Bien que le volume de torsion puisse prendre une valeur positive ou négative selon le sens anti-horaire ou horaire de l'hélicité de la colonne, seules les valeurs absolues du volume de torsion furent considérées. De leur côté, DeSilva et Yang (1990) définissent à chaque niveau vertébral un trièdre de Frenet dont l'origine correspond au centroïde de la section du corps vertébral. Le trièdre est

constitué du vecteur normal et des axes principaux de la section vertébrale. L'indice de torsion ainsi développé, la *tortuosité* ("tortuosity"), est une mesure locale mais discrète associée plutôt à la rotation et à la déformation vertébrale qu'à la courbe générale de la colonne.

Calcul et analyse de la torsion

De façon générale, les modèles ont recourt à la formulation des équations de Frenet (tel que présentée à la section 2.5.1) pour quantifier la torsion géométrique, à l'exception des modèles de Hierholzer et Luxmann (1982) et de DeSilva et Yang (1990), pour lesquels les indices géométriques de torsion calculés (respectivement le *volume de torsion relatif intégral* et la *tortuosité*) ne répondent pas à la définition des paramètres intrinsèques de torsion d'une courbe lisse dans l'espace. Dans le modèle de Dansereau et coll. (1993), les équations de Frenet sont par ailleurs beaucoup simplifiées car par définition la torsion est constante en tout point sur une courbe de type hélicoïdale à base circulaire.

Les valeurs maximales de torsion géométrique ont été observées par Kanayama et coll. (1996) au niveau des vertèbres limites des courbes scoliotiques et ce sur la majorité des 45 colonnes scoliotiques de géométries variées étudiées (thoracique, thoraco-lombaire, lombaire et double), la torsion étant presque nulle ailleurs sur les courbes. Cela les a amené à conclure que les courbes scoliotiques sont alignées dans un plan spécifique partout sauf au niveau des vertèbres limites qui tendent à s'écartez de ce dernier. Pour Dansereau (1983) et Ortale et coll. (1993) ces valeurs extrêmes de torsion ne seraient pas toutes reliées aux déformations en torsion associées à la scoliose. En effet, la localisation de ces dernières, lorsque étudiée en parallèle avec le paramètre de courbure 3D intrinsèque, correspond parfois aux lieux où le paramètre de courbure tend vers zéro (ex.: près de L1 et T3 (Dansereau, 1983) et T12 et V.P. (Ortale et coll., 1993) sur les graphes de torsion du Tableau 2.1) représentant alors la transition géométrique de la région concave à la région convexe dans la vue sagittale. Puisque la torsion est fonction de l'inverse de la courbure au carré, cela se traduit par une valeur ayant tendance à croître vers

l'infini d'où l'apparition d'un pic plus ou moins prononcé. Ces pics de torsion ne représentent alors qu'une mesure d'un phénomène géométrique particulier fortement localisé. Quant aux pics de torsion observés aux extrémités de la colonne modélisée (ex.: près de T1 et L5 (Ortale et coll., 1993) sur le graphe de torsion du Tableau 2.1), ils ne seraient pas significatifs car ils correspondent aux derniers points de mesure souvent associés à des erreurs de reconstruction plus grandes. Enfin, les "vraies" valeurs maximales de torsion (ex.: T8 (Dansereau, 1983) sur le graphe de torsion du Tableau 2.1) correspondraient à la région où la cyphose et la scoliose sont combinées dans l'espace (Dansereau, 1983; Ortale et coll., 1993). Ces études comportent toutefois certaines limites. Dansereau (1983) et Ortale et coll. (1993) ont porté leur analyse sur un seul sujet ce qui nous empêche de généraliser les résultats présentés par ces derniers. Quant à Kanayama et coll. (1996), ils auraient dû étudier en parallèle avec les graphes de torsion les graphes de courbure intrinsèque pour ainsi présenter une analyse plus complète et plus juste des graphes de torsion.

Les résultats de la méthode de modélisation par des segments d'hélices circulaires (Dansereau, 1993) auront permis de renforcer l'hypothèse voulant que la scoliose idiopathique se présente comme un phénomène de torsion généralisé. De façon générale, il semble que les courbes thoraciques primaires sont associées à une torsion unidirectionnelle alors que les courbes doubles majeures (ex.: TDLG) présentent une torsion de double direction opposée. Comme par définition la torsion géométrique est constante le long d'un segment hélicoïdal circulaire, le graphe de torsion associé à la modélisation des colonnes lombaire et thoracique à l'aide de segments d'hélices circulaires ne présente pas de pic de torsion. Cependant, il y a un risque de perdre des informations importantes lorsqu'on mesure de façon régionale, plutôt que locale (ponctuelle), la torsion géométrique de colonnes scoliotiques.

2.6 Revue critique des principales méthodes de classification des déformations scoliotiques

Une appréciation complète de la biomécanique de la scoliose est impossible sans une compréhension claire des anomalies associées au développement des différents patrons de courbure. Les patrons de courbures idiopathiques ont été à l'origine catégorisés par Schulthess en 1905 en cinq types cliniques de base selon la localisation de l'apex de la courbure. Par la suite, cette classification des patrons de base des courbures a été clarifiée, révisée et élargie (Ponseti et Friedman, 1950; James, 1954; Scott et Morgan, 1955; Moe et Kettleson, 1970; Goldstein et Waugh, 1973; James et coll., 1977; Cruickshank et coll., 1989). Communément acceptée, la classification des patrons de courbures scoliotiques idiopathiques en sept types majeurs, bien résumée par Winter et Lonstein (1992), a été retenue par la "Scoliosis Research Society": (1) simple thoracique, (2) simple thoraco-lombaire, (3) simple lombaire, (4) double thoracique, (5) thoracique et lombaire combinées, (6) thoracique et thoraco-lombaire combinées, et (7) triple ou plus (voir exemples Figure 2.15).

Dans le but de faciliter la sélection des niveaux de fusion pour la correction chirurgicale des courbures thoraciques, alors très controversée, King et coll. (1983) ont proposé ce qui est devenu le standard de classification des scolioses thoraciques. Ils distinguèrent cinq patrons de courbures scoliotiques idiopathiques basés entre autres sur l'amplitude et le degré de flexibilité des courbures (Tableau 2.2). Lorsque associé à la classification existante des scolioses thoraco-lombaire et lombaire (tel qu'acceptée par la "Scoliosis Research Society"), on obtient la classification des déformations scoliotiques idiopathiques la plus utilisée à ce jour. Deux études récentes ont cependant démontré que la fiabilité de cette méthode de classification était insuffisante (Cumming et coll., 1998; Lenke et coll., 1998). En effet, la reproductibilité intra-observateur moyenne de cette classification a été évaluée à 69-73% alors que la fiabilité inter-observateur moyenne n'était que de 53-55% (Cummings et coll., 1998; Lenke et coll., 1998). L'analyse des coefficients kappa en accord avec la définition d'acceptabilité proposée par Svanholm et

coll. (1989) aura permis de conclure que la fiabilité inter-observateur dans ces études était faible ($\kappa < 0.5$) alors que la fiabilité intra-observateur était acceptable ($0.5 < \kappa < 0.75$). La classification de King ne semble donc pas suffisamment fiable pour décrire les courbes scoliotiques avec précision. Il est donc probable qu'elle ne soit pas d'une grande aide pour guider le choix du traitement.

CURVE PATTERNS		
	Criteria	No. of Patients in the Present Series
Type I	S-shaped curve in which both thoracic curve and lumbar curve cross midline Lumbar curve larger than thoracic curve on standing roentgenogram Flexibility index a negative value (thoracic curve \geq lumbar curve on standing roentgenogram, but more flexible on side-bending)	52 (12.9%)
Type II	S-shaped curve in which thoracic curve and lumbar curve cross midline Thoracic curve \geq lumbar curve Flexibility index ≥ 0	132 (32.6%)
Type III	Thoracic curve in which lumbar curve does not cross midline (so-called overhang)	133 (32.8%)
Type IV	Long thoracic curve in which L5 is centered over sacrum but L4 tilts into long thoracic curve	37 (9.2%)
Type V	Double thoracic curve with T1 tilted into convexity of upper curve Upper curve structural on side-bending	47 (11.6%)
Miscellaneous		4 (1.0%)

Tableau 2.2 Classification des courbures scoliotiques idiopathiques selon la méthode de King et coll. (1983)

Plus récemment, Coonrad et coll., (1998) ont proposé une classification en onze patrons types qui se voulait plus détaillée et plus complète et qui inclut la nomenclature de la classification de King et celle de la "Scoliosis Research Society". La détermination du

patron de courbure dans le plan coronal était alors basée sur la définition, par la "Scoliosis Research Society", de la localisation de la vertèbre apicale. Ils ont été les premiers à relever la similitude entre les patrons de courbure idiopathique droite et gauche du plan coronal, l'un étant l'image miroir de l'autre, et à inclure le très rare patron de courbure thoracique gauche. La fiabilité inter- et intra-observateur de cette classification a été évaluée par ses auteurs à 98.2% et 100%, respectivement.

La classification des courbes scoliotiques et les décisions concernant le traitement sont aussi basées sur les anomalies (ex: cyphose thoracolombaire) relevées sur la radiographie latérale. L'exclusion des observations du plan sagittal est donc une limite importante des classifications de King et coll. (1983) et de Coonrad et coll. (1998). Parallèlement, Cruickshank et coll. (1989) ont développé une technique pour établir qualitativement le profil sagittal à partir de la projection antéropostérieure et ainsi déterminer les patrons de lordose et cyphose dans chacun des six types cliniques de scoliose idiopathique. Les anomalies distinctives du plan sagittal selon le type de scoliose leur aura permis de souligner l'importance biomécanique du profil sagittal de la colonne vertébrale dans le développement des différents patrons de courbures scoliotiques. Une tentative d'élargir la classification de King en incluant des informations provenant du plan sagittal a cependant donné lieu à trop de possibilités et devenait impraticable (Asher et coll., 1988).

Une autre limite de toutes ces classifications est sans contre dit la non-considération de la tridimensionnalité des déformations scoliotiques, un facteur pourtant important sinon essentiel dans le choix du traitement, des niveaux de fusion et de l'approche chirurgicale. Pour tenter d'y remédier Asher et coll. (1999) proposent de visualiser les déformations scoliotiques comme une ou des torsions similaires à un ressort qu'on aurait étiré. Ce concept de torsion permet une description simplifiée des déformations scoliotiques qu'ils associent à une simple, double ou triple torsion. Ils ont donc intégré ce concept dans la classification courante des déformations scoliotiques afin de développer des séquences

d'instrumentation tenant compte de l'aspect tridimensionnel des déformations scoliotiques. Les grandes lignes de la classification proposée par Asher et coll. et sa comparaison avec la classification de la "Scoliosis Research Society" et celle de King sont présentées au Tableau 2.3. La fiabilité de ce système de classification n'a cependant pas encore été démontrée.

Torsional Classification	Scoliosis Research Society and King-Moe Classification	Characteristics
Single torsion		
Thoracic	Short thoracic (King-Moe III) Long thoracic (King-Moe IV)	Apex T8 (average) Apex T10 (average)
Thoracolumbar or lumbar	TL L	L4 tilted 5° or more into thoracic curve Apex T12 body through L1 body L1-L2 disc and/or lower
Double torsion		
Thoracic and thoracolumbar or lumbar	(King-Moe IIA)	Thoracic curve larger (considering Cobb, apex offset, rotation, and stiffness) Thoracolumbar or lumbar apex pedicle medial wall offset to curve convexity and Thoracolumbar or lumbar lower end vertebra tilt 10° or more IIA plus two of the following: Stable vertebra T10 or higher Inflection vertebra T11 or higher
Thoracic and thoracolumbar or lumbar	(King-Moe IIB)	Inflection vertebra offset toward apex of thoracolumbar or lumbar curve Thoracolumbar junction kyphosis Thoracolumbar or lumbar curve larger (considering Cobb, apex offset, rotation, and stiffness)
	(King-Moe I)	T1 tilted into high thoracic curve concavity and convex side shoulder elevated
High thoracic and thoracic	King-Moe V	
Triple torsion	Triple	Meets criteria of King-Moe V and King-Moe IIB or King-Moe V and King-Moe I
Other		

Tableau 2.3 Classification torsionnelle des scolioses idiopathiques: Comparaison avec la classification de King (Asher et coll., 1999)

Malgré des changements marqués depuis les dix dernières années dans les méthodes chirurgicales d'instrumentation, le système de classification de King est demeuré la principale approche de classification des scolioses idiopathiques de l'adolescence. Avec l'arrivée des techniques de fixation segmentaire de la colonne, l'interprétation tridimensionnelle des scolioses est devenue essentielle. La non-considération de la tridimensionnalité des déformations scoliotiques dans la classification de King se réfleter alors dans l'imprécision de cette approche à décrire et classer les courbes scoliotiques. Si à l'origine la classification utilisée pour guider le choix du traitement est plus ou moins fiable car elle ne tient pas compte des aspects 3D des déformations, l'analyse et la comparaison objective des résultats des traitements chirurgicaux sur la base de ce système de classification deviennent difficile ou très limitée.

CHAPITRE 3 - PROBLÉMATIQUE DU PROJET ET CADRE MÉTHODOLOGIQUE

La révision des connaissances anatomiques, biomécaniques et de modélisation, ainsi que les constatations cliniques résultant des études réalisées à l'aide d'indices cliniques ou paramètres géométriques tel que relevées dans la littérature, permet de dégager certains aspects directement reliés à la problématique de ce projet de recherche:

1. Les segments thoracique et lombaire se différencient anatomiquement par leur développement, leur morphologie et leur morphométrie, et biomécaniquement par leur cinématique et leur mécanisme de couplage.
2. L'apparition des techniques permettant la représentation tridimensionnelle de la colonne vertébrale scoliotique, maintenant perçue comme une déformation spatiale 3D complexe, a permis de se rendre compte que la déformation scoliotique ne peut plus être caractérisée avec précision par les méthodes cliniques usuelles.
3. Les résultats des études de corrélation entre des mesures de la déformation de la colonne vertébrale, des vertèbres, de la cage thoracique et de la surface du tronc ont probablement été affectés par le fait que les indices standards (angle de Cobb et rotation vertébrale) de comparaison ne décrivent pas en totalité la déformation scoliotique, d'où la nécessité d'une meilleure définition de la déformation scoliotique réelle.
4. Peu d'efforts ont été consacrés jusqu'à présent pour décrire la géométrie curviligne 3D des déformations scoliotiques.
5. Les déformations géométriques scoliotiques de la colonne vertébrale ont été décrites comme un phénomène de torsion généralisé unidirectionnelle chez les courbures

simples majeures et de directions opposées chez les courbures doubles majeures (torsion-contretorsion).

6. L'étude de l'évolution des déformations scoliotiques à partir du plan transverse (vue de dessus) aura permis de mettre en évidence un mécanisme commun de progression des courbures scoliotiques qui s'apparente au mouvement "torsionnel" d'une courbe hélicoïdale.
7. Le mécanisme de progression torsionnel des scolioses serait consistant avec le concept mathématique voulant que la scoliose évolue comme une torsion géométrique à laquelle peut-être associée une torsion mécanique.
8. Puisqu'il paraît bien exister une corrélation entre l'aspect morphologique tridimensionnel du rachis scoliotique et son évolution, quelques modèles géométriques ont été développés pour représenter la colonne vertébrale comme une courbe dans l'espace passant par le centroïde des vertèbres lombaires et thoraciques dont les propriétés de forme intrinsèques sont entièrement décrites par les notions mathématiques de courbure 3D et de torsion géométrique.
9. L'analyse conjointe des graphes de courbure et de torsion dérivés des équations de Frenet est essentielle pour une interprétation juste des déformations scoliotiques en terme de ses propriétés intrinsèques.
10. Bien que quelques modèles de mesure de la torsion dans la scoliose aient été développés ou proposés, des facteurs tels que: l'imperfection des méthodes de reconstructions de la colonne scoliotique utilisées, l'inadéquation des modèles mathématiques curvilignes proposés et la présence de pics non définis sur les graphes de torsion géométrique ont probablement contribué à dénaturer le comportement de torsion sous-jacent à la colonne scoliotique. Comme résultat, le

phénomène de torsion dans la scoliose n'a jamais été proprement analysé et précisément défini.

11. Les méthodes de classification proposées ne sont pas inclusive de tous les types de scoliose idiopathiques rencontrés et par conséquent ne permettent pas une évaluation d'ensemble de la variété des patrons qui existent.
12. La nécessité de développer un système de classification des scolioses qui tient compte des aspects réels 3D des déformations en opposition à la classification 2D usuelle.
13. Le développement d'un système de classification plus fiable que ceux déjà existant permettrait de comparer objectivement le résultat des traitements de courbe de même nature entre chirurgiens afin de déterminer le traitement idéal et orienter les recherches futures dans le domaine.

Ces considérations amènent à poser l'hypothèse principale et générale de cette thèse:

H1. L'aspect morphologique tridimensionnel des déformations scoliotiques peut être représenté par une courbe dans l'espace dont les propriétés intrinsèques de courbure 3D et de torsion géométrique en permettent la caractérisation et la description.

Pour vérifier cette hypothèse, les objectifs généraux et la méthodologie globale de ce projet consistent à :

Objectif 1 : Proposer un modèle géométrique représentant le plus fidèlement possible la géométrie tridimensionnelle de la majorité des morphologies scoliotiques et

permettant l'évaluation et l'interprétation du paramètre de torsion géométrique.

De façon plus spécifique, cet objectif sera abordé en étudiant la faisabilité de trois nouvelles approches de modélisation curviligne 3D de la colonne scoliotique. La synthèse graphique de cette étape méthodologique du projet est présentée à la Figure 3.1.

Première approche: L'étude de Dansereau et coll. (1993) sur la modélisation de colonnes scoliotiques à l'aide de géométries hélicoïdales circulaires aura permis de déduire les premières bases de l'interprétation du phénomène de torsion associé aux déformations scoliotiques. Cependant, les résultats de cette étude ont révélé que les géométries hélicoïdales circulaires ne modélisent pas adéquatement toutes les déformations scoliotiques idiopathiques. Puisque l'hélice circulaire a par définition une torsion constante, elle ne permet qu'une mesure régionale et donc incomplète du phénomène de torsion dans la scoliose. Afin d'éviter les problèmes d'adéquation géométrique de cette méthode et pour obtenir des valeurs locales plutôt que régionales de la torsion géométrique, il est proposé de développer une approche de modélisation curviligne de la colonne basée sur l'ajustement, par la technique des moindres carrés, de segments hélicoïdaux elliptiques aux centroïdes vertébraux obtenus à partir des données de reconstruction tridimensionnelle. Cette approche sera appliquée sur des données cliniques de sujets scoliotiques afin d'analyser visuellement l'adéquation géométrique de ce modèle de représentation de la colonne scoliotique. La validation de l'approche sera basée sur la représentativité des valeurs de torsion en terme des déformations scoliotiques. Cette approche simple d'évaluation locale du paramètre de torsion devrait permettre de déduire certaines tendances de la torsion dans la scoliose idiopathique. La méthodologie ainsi que les résultats de cette approche sont appuyés par la communication scientifique intitulée «Smoothing Methods for the Measurement of Geometric Torsion on 3-D Reconstructed Scoliotic Spines» (Symposium international sur les déformations scoliotiques 3D, Montréal 1992), dont une copie est présentée à l'annexe II.

Deuxième approche: La série de Fourier est une fonction trigonométrique qui s'adapte bien à la modélisation des courbes scoliotiques souvent de nature quasi-sinusoïdale. De plus, cette fonction est suffisamment dérivable ce qui permet l'application des équations de Frenet pour le calcul de la torsion géométrique. Ajusté par moindres carrés aux centroïdes vertébraux reconstruits, cette fonction compense également pour les erreurs de reconstruction. Contrairement à l'approche segmentaire des hélices elliptiques, l'approche des séries de Fourier permet une évaluation de la torsion en tout point le long de la colonne modélisée évitant ainsi toutes pertes d'information. Cette approche permettra donc de fournir des renseignements additionnels sur l'aspect tridimensionnel des déformations scoliotiques. La nature paramétrique des méthodes numériques de lissage conventionnelles comme celle-ci semble cependant être responsable de la présence de valeurs extrêmes (pics) non-représentatives sur les graphes de torsion, limitant ainsi l'interprétation clinique de la torsion géométrique en terme des déformations scoliotiques. Afin de déterminer si les pics de torsion sont des artefacts numériques ou si au contraire ils contiennent des informations pertinentes à l'analyse des déformations de la colonne vertébrale en torsion, l'origine de ces derniers sera étudiée à l'aide de simulations sur des colonnes simulées analytiquement. Il est ensuite proposé de développer une technique automatique de correction de la mesure de la torsion géométrique à partir de l'analyse de critères de détection des pics de torsion. Cette technique de détection et de correction des faux pics de torsion sera appliquée sur des colonnes simulées et des colonnes reconstruites de sujets scoliotiques et validée si la position corrigée de chaque centroïde vertébral est contenue dans un volume de contrôle, déterminé par les erreurs de reconstructions. L'étude de cette approche est présentée à l'aide d'un premier article: «Improved Computation of Geometric Torsion in Curvilinear Representation of Scoliotic Spine».

Troisième approche: L'approche mathématique du krigeage dual qui, en plus d'englober les cas particuliers des splines et des courbes de Bézier, généralise la technique des moindres carrés, s'est révélée très prometteuse lorsque appliquée à la géométrie de la

colonne scoliotique (André et coll., 1996). Parce qu'elle fait intervenir une fonction de correction (covariance) elle est aussi plus raffinée et sera ainsi utilisée dans le développement d'une troisième approche de mesure du paramètre de torsion. Des fonctions de dérive (quadrique et série de Fourier) et de covariance (Spline-4D) plus sophistiquées que celles utilisées par André et coll. (1996), puisqu'elles permettent l'évaluation de paramètres hautement dérivables (ex: courbure et torsion géométrique), seront étudiées. La performance des différents profils de krigeage (dérive+covariance) sera analysée sur des données de géométries scoliotiques typiques, simulées sans erreurs de reconstruction, à l'aide du test de validation croisée. La combinaison des meilleurs profils pour chaque coordonnée vertébrale (X, Y et Z), permettra de proposer un certain nombre de modèles géométriques 3D. La validation et le choix du meilleur modèle seront effectuées par le biais de la mesure des erreurs du paramètre de torsion obtenues en comparant les valeurs de torsion estimées par chaque modèle avec les valeurs de torsion analytiques des colonnes simulées mathématiquement. Le meilleur et le pire modèle de krigeage seront ensuite comparés avec le modèle des séries de Fourier lissées par moindres carrés. Les détails de la démarche adoptée et les résultats obtenus seront présentés à l'aide d'un deuxième article: «Curvilinear Three-Dimensional Modeling of Spinal Curves with Dual Kriging».

Ce volet modélisation géométrique curviligne de la colonne scoliotique se terminera par une synthèse et sera développé au chapitre suivant.

Objectif 2 : Évaluer la pertinence du paramètre de torsion géométrique comme indice tridimensionnel dans la scoliose idiopathique.

Afin de réaliser cet objectif les résultats de deux études cliniques seront analysés. La synthèse graphique de cette étape méthodologique du projet est présentée à la Figure 3.1.

Études cliniques: Le volet clinique consiste à relever par observations des tendances et des patrons du comportement de la torsion géométrique de patients scoliotiques. Pour y arriver une étude tridimensionnelle des déformations scoliotiques sera basée sur l'analyse d'indices propres au paramètre de torsion (direction ou signe de la torsion, valeurs maximums et minimums, valeurs nulles) en relation avec les caractéristiques géométriques de la colonne scoliotique tel que l'orientation de la courbure, la localisation des vertèbres apicales et limites et l'anormalité des plans de projection de la colonne (frontal, sagittal et transverse). Parce qu'il est plus facile de visualiser dans l'espace la géométrie d'une hélice elliptique que celle d'une fonction de séries de Fourier, et parce que les similarités entre les résultats cliniques de ces deux approches devraient permettre de renforcer les conclusions de cette étape, les approches de modélisation par hélices elliptiques et par séries de Fourier "corrigée" seront appliquées à l'étude clinique de la torsion dans la scoliose idiopathique. Quant à l'approche basée sur le krigeage, son application à la modélisation de colonnes reconstruites (i.e. données avec erreurs de reconstruction) nécessite encore certains développements (introduction d'effet de pépite au système de krigeage pour obtenir l'équivalent du lissage). Les modèles géométriques basés sur les approches des hélices elliptiques et des séries de Fourier "corrigée" seront donc appliqués aux données reconstruites de rachis sains et scoliotiques provenant de la banque de données radiographiques de l'Hôpital Sainte-Justine. La reconnaissance de patrons de torsion géométrique devrait permettre de proposer une nouvelle classification basée sur une description tridimensionnelle des déformations scoliotiques de la colonne par contraste avec la classification conventionnelle qui s'appuie sur la projection de la colonne dans le plan frontal. L'application clinique de l'approche des séries de Fourier "corrigée" est présentée à l'aide d'un troisième article: «Geometric Torsion in Idiopathic Scoliosis: Three-Dimensional Analysis and Proposal for a New Classification».

La méthodologie plus spécifique rattachée à cette étape sera développée dans le chapitre 5 qui s'achève par une synthèse.

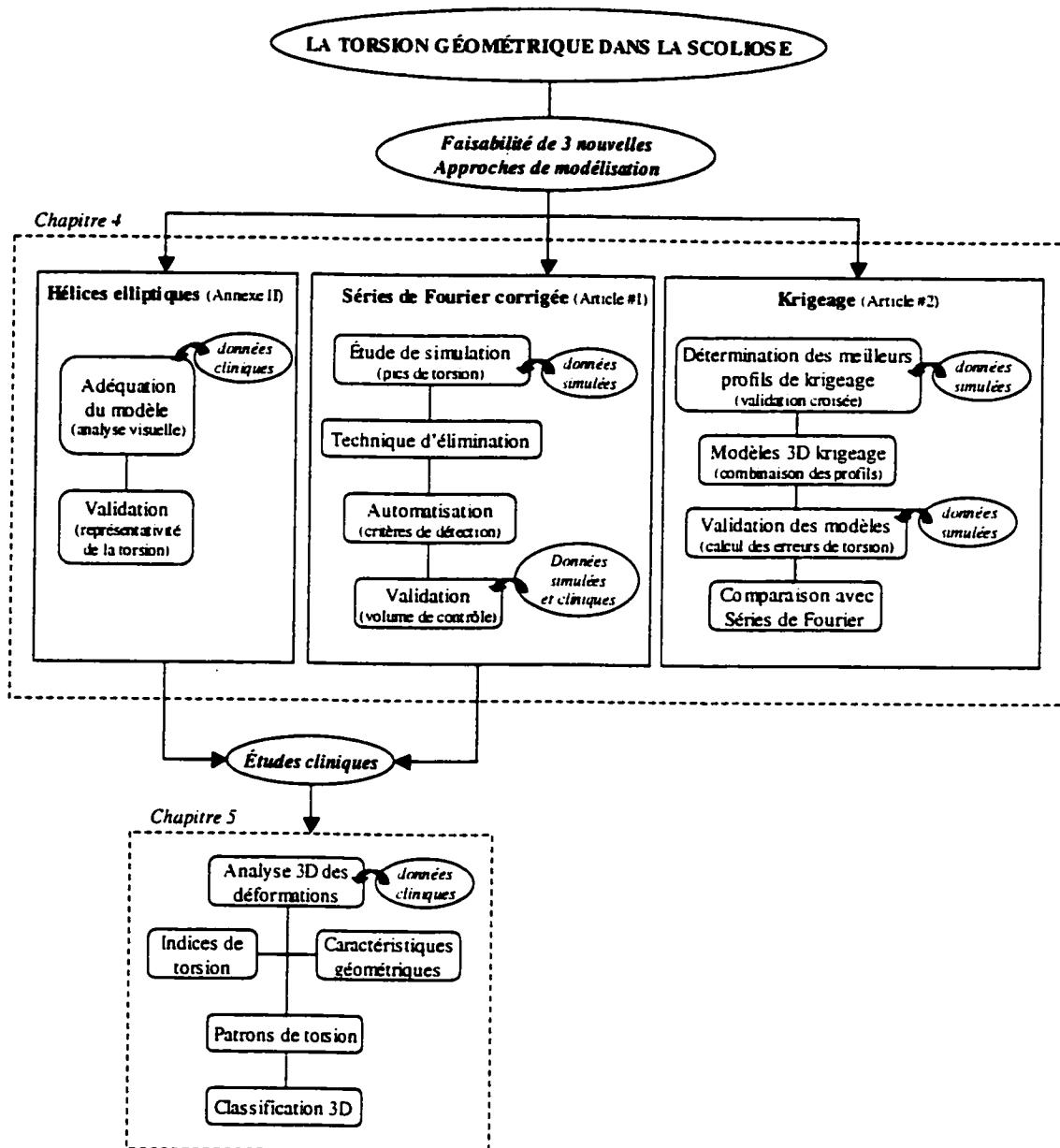


Figure 3.1 Synthèse graphique des différentes étapes méthodologiques du projet

CHAPITRE 4 - MODÉLISATION CURVILIGNE TRIDIMENSIONNELLE DU RACHIS POUR LA MESURE DE LA TORSION GÉOMÉTRIQUE

4.1 Faisabilité de nouvelles approches de modélisation curviligne 3D

Le système de référence utilisé dans ce document est celui proposé par le «Scoliosis Research Society Working Group on 3-D Terminology of Spinal Deformity» (Stokes et coll., 1993) à savoir: l'axe des X représente la direction antérieure, l'axe Y, la direction latérale gauche et l'axe Z, la direction crânienne (Figure 4.1). L'origine de ce système est localisée au centre de la plaque d'acrylique la plus éloignée du tube à rayon x (voir section 2.3.4).

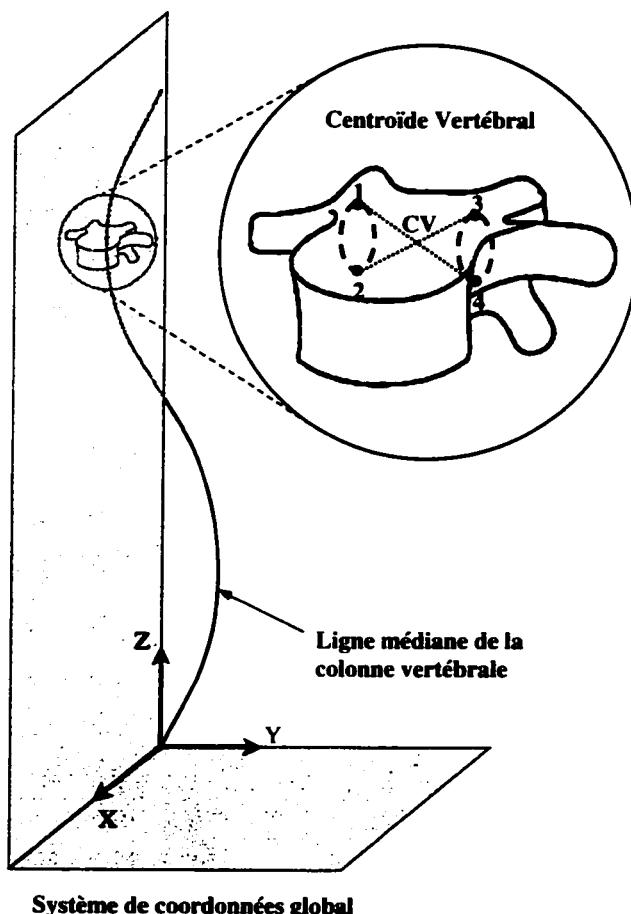


Figure 4.1 Système de référence et définition du centroïde vertébral

La ligne médiane de la colonne, telle que représentée à la Figure 4.1, est définie comme une courbe dans l'espace passant par le centre des corps vertébraux (Stokes, 1994). Puisque les modèles géométriques sont généralement sensibles aux erreurs de reconstruction et que la localisation du centre des plateaux vertébraux est moins précise que celle de la base et du sommet des pédicules (Aubin et col., 1997), ces derniers repères anatomiques ont été préférés pour estimer le centroïde des vertèbres et pour être ensuite utilisés comme points de contrôle lors de la modélisation curviligne de la colonne vertébrale. La localisation tridimensionnelle du centre de la vertèbre a donc été évaluée de la façon suivante (Figure 4.1):

$$\begin{aligned} X_C^n &= \frac{X_1^n + X_2^n + X_3^n + X_4^n}{4} \\ Y_C^n &= \frac{Y_1^n + Y_2^n + Y_3^n + Y_4^n}{4} \\ Z_C^n &= \frac{Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n + Z_4^n}{4} \end{aligned} \quad (4.1)$$

où (X_1^n, Y_1^n, Z_1^n) , (X_2^n, Y_2^n, Z_2^n) , (X_3^n, Y_3^n, Z_3^n) et (X_4^n, Y_4^n, Z_4^n) sont respectivement les coordonnées 3D reconstruites de l'extrémité supérieure des pédicules droit et gauche et de l'extrémité inférieure des pédicules droit et gauche de la $n^{\text{ème}}$ vertèbre et (X_C^n, Y_C^n, Z_C^n) la coordonnée 3D du centre estimé.

Afin de valider l'hypothèse principale de cette thèse, trois nouvelles approches de modélisation de la ligne médiane de la colonne vertébrale ont d'abord été étudiées. Le développement et l'analyse de chaque approche en terme de leur efficacité à représenter les géométries scoliotiques et à en permettre l'évaluation et l'interprétation au sens de la torsion géométrique sont présentés dans les sections suivantes.

4.1.1 Modélisation géométrique du rachis scoliotique à l'aide de segments hélicoïdaux

L'approche de modélisation géométrique de la colonne scoliotique, présentée dans cette section, est inspirée de la méthode de modélisation de Dansereau et coll. (1993) présentée à la section 2.5.2. Les segments lombaires et thoraciques étaient alors modélisés par des segments d'hélices circulaires (Dansereau et coll., 1993). Les résultats de cette étude ont cependant révélé que les géométries hélicoïdales circulaires ne modélisent pas adéquatement toutes les déformations scoliotiques idiopathiques. Par ailleurs, puisque par définition la torsion est constante le long d'un segment hélicoïdale circulaire, il y a un risque de perdre des informations importantes. Afin d'éviter les problèmes d'adéquation géométrique de cette méthode et pour obtenir des valeurs locales plutôt que régionales de la torsion géométrique, la modélisation des segments lombaire et thoracique par des segments de courbes hélicoïdales elliptique a été effectuée.

La méthodologie ainsi que les résultats de cette étude ont été présentés lors du Symposium international sur les déformations scoliotiques 3D qui s'est déroulé à Montréal en juin 1992. Le précis intitulé «Smoothing Methods for the Measurement of Geometric Torsion on 3-D Reconstructed Scoliotic Spines» (Poncet et coll., 1992), dont une copie est présentée à l'annexe II, a été publié dans le livre *International Symposium on 3-D Scoliotic Deformities* aux Éditions de l'École Polytechnique de Montréal et Gustav Fisher Verlag (Allemagne).

Des segments d'hélices elliptiques ont donc été ajustés aux centroïdes des vertèbres reconstruites des segments thoracique et lombaire par une technique de moindres carrés. Pour chaque segment (lombaire et thoracique) une portion d'ellipse est d'abord ajustée aux centroïdes des vertèbres projetées dans la vue de dessus. Le meilleur ajustement linéaire de la hauteur des centroïdes (coordonnées z) est ensuite calculé et la droite résultante enroulée autour du cylindre elliptique virtuel généré par la projection vertical de l'ellipse. Les limites vertébrales permettant une optimisation de l'ajustement de l'hélice

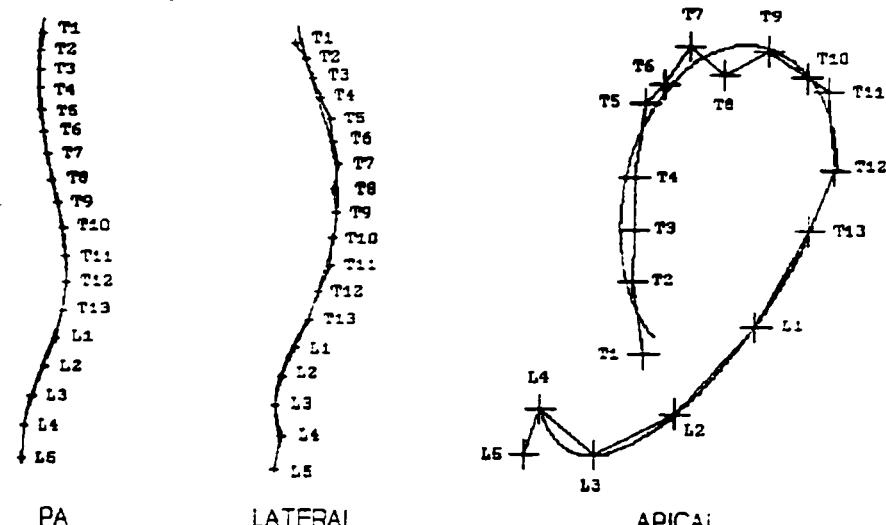
elliptique sont déterminées manuellement pour chaque segment thoracique et lombaire. La formulation générale du calcul de torsion (équation 2.21) présentée à la section 2.5.1.2 est appliquée pour obtenir l'équation réduite pour l'hélice elliptique:

$$\tau = \frac{\frac{abc}{2\pi}}{\left(a^2 \sin^2 t + b^2 \sin^2 t + \frac{c^2}{4\pi^2}\right) \left(a^2 - b^2\right) \sin t \cos t - \left(a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t\right)^2} \quad (4.2)$$

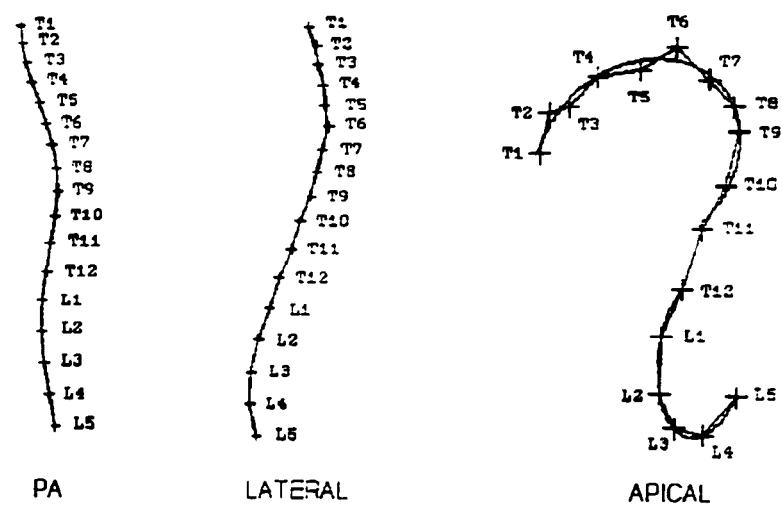
ou a et b sont respectivement les axes majeur et mineur de l'ellipse de base, c le pas de l'hélice et t le paramètre d'incrément. Il est d'usage de représenter t par la longueur d'arc de la courbe mesurée à partir d'un point fixe comme par exemple le centroïde reconstruit de la vertèbre T1. Cette valeur a été approximée ici par la distance linéaire entre les centroïdes vertébraux.

À l'aide des techniques de reconstruction stéréoradiographique 3D développées à l'École Polytechnique de Montréal (section 2.3.4) et utilisées en clinique de scoliose à l'hôpital Sainte-Justine, la position 3D du centroïde de chaque vertèbre de T1 à L5 a été calculée (équation 4.1) pour 20 patients scoliotiques de sexe féminin âgé de 7 à 21 ans. Trois patients avaient une scoliose idiopathique thoracique droite (TD) et 17 autres présentaient des courbes de type thoracique droite-lombaire gauche (TDLG). L'angle de Cobb de ces courbures variait entre 15° et 53°.

Les résultats de l'application de l'approche des hélices elliptiques sur deux exemples types de colonnes reconstruites de patients scoliotiques sont présentés à la Figure 4.2. Les tracés de torsion associés à ces colonnes sont quant à eux présentés à la Figure 4.3.



[a]



(b)

Figure 4.2 Vues typiques postéro-antérieure, latérale et apicale de la colonne vertébrale de sujets scoliotiques de types (a) thoracique droit et (b) thoracique droit-lombaire gauche. Les centroides des vertèbres (+) sont reliées linéairement et les segments thoraciques et lombaires sont chacun modélisés par une courbe hélicoïdale elliptique.

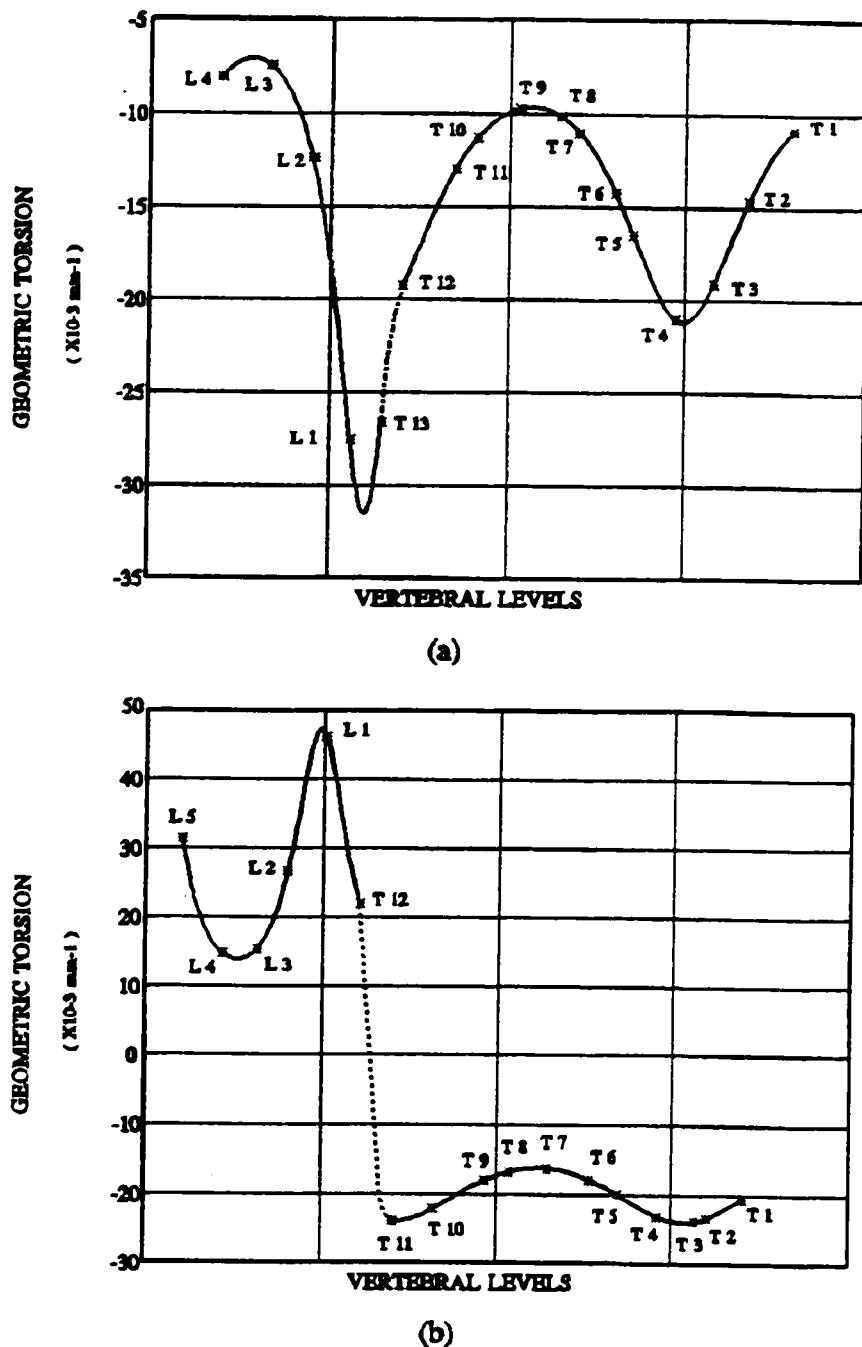


Figure 4.3 Tracés typiques de torsion géométrique mesurée sur des colonnes scoliotiques de types (a) thoracique droite et (b) thoracique droite-lombaire gauche (sujets de la Figure 4.2). La torsion dans le segment non-modélisé des deux colonnes scoliotiques a été extrapolée (lignes pointillées).

Certains segments modélisés ont dû être rejettés parce que l'ajustement de la courbe hélicoïdale elliptique au segment scoliotique n'était visuellement pas adéquat et que par conséquent les valeurs de torsion mesurées n'étaient pas représentatives de la vraie déformation scoliotique. Les segments lombaires de géométries scoliotiques incorporant un dos plat ou une hyperlordose ont particulièrement été difficiles à modéliser. Le Tableau 4.1 présente le nombre de segments thoraciques et lombaires qui ont été considérés dans cette étude pour chacun des types de courbes étudiées (TD et TDLG) en fonction du sens de la torsion du segment.

Tableau 4.1 Segments thoraciques et lombaires des courbures thoraciques droite et thoracique droite-lombaire gauche considérés dans l'étude selon la direction de la torsion.

Courbures	Segments thoraciques		Segments lombaires	
	$\tau < 0$	$\tau > 0$	$\tau < 0$	$\tau > 0$
TD	2/3	0/0	2/3	0/0
TDLG	15/17	0/0	0/2	9/15

La méthode de modélisation à l'aide de portions d'hélices elliptiques semble donc mieux représenter les déformations scoliotiques des segments thoraciques que celles des segments lombaires chez les courbes TDLG. Pour ce qui est des courbes TD, il est difficile de conclure quoi que ce soit, le nombre de sujets étudiés étant très limité. Ainsi, au total, 85% des déformations thoraciques et seulement 55% des colonnes lombaires ont pu être adéquatement modélisées par des hélices elliptiques. Le phénomène de torsion géométrique dans la scoliose thoracique se rapprocherait donc du comportement géométrique torsionnel de l'hélice elliptique.

La modélisation curviligne de colonnes scoliotiques à l'aide d'hélices elliptiques est une méthode simple d'évaluation de la torsion géométrique. Une analyse détaillée des

résultats de torsion en terme de la description tridimensionnelle des déformations scoliotiques devrait donc permettre de relever certaines tendances du comportement de la torsion géométrique dans la scoliose (chapitre 5).

Cette approche présente cependant certaines lacunes comme la discontinuité de la représentation causée par la modélisation indépendante des deux segments spinaux et la difficulté de modéliser certaines morphologies scoliotiques (par exemple celle comprenant un dos plat). Une deuxième approche de modélisation de la colonne vertébrale basée sur la technique des séries de Fourier a donc été explorée. La technique de lissage des séries de Fourier lissées au sens des moindres carrés est implantée et utilisée depuis quelques années à l'Hôpital Sainte-Justine pour modéliser la géométrie curviligne de la colonne et évaluer les déformations scoliotiques. Cette méthode permet à la fois une mesure de la torsion en tout point de la colonne et s'est avéré jusqu'à présent modéliser les courbes scoliotiques de façon suffisamment bonne. Cependant comme plusieurs méthodes de lissage paramétrique (voir section 2.5.2), elle introduit dans les tracés de torsion de colonnes scoliotiques des valeurs extrêmes difficilement interprétables. La section suivante présente donc le développement d'une approche corrective basée sur la technique de modélisation des séries de Fourier lissées par moindres carrés.

Dans le but de mieux analyser et valider les résultats de torsion des prochaines approches de modélisation de la colonne scoliotique, diverses morphologies de colonnes vertébrales ont été simulées mathématiquement. D'abord une morphologie idéale (parfaitement rectiligne dans le plan frontal), puis des morphologies scoliotiques. Comme il est impossible de simuler mathématiquement toutes les morphologies scoliotiques, seul les types les plus fréquemment rencontrés ont été considérés, soit les scolioses: thoracique droite, thoracique droite-lombaire gauche et thoracolombaire gauche. Une étude préliminaire de classification "3D" des courbures scoliotiques, entreprise à l'été 1992 avec la collaboration de Christiane Labrie (sous la direction du médecin orthopédiste Hubert Labelle de l'Hôpital Sainte-Justine), a permis d'établir la sous-classification

suivante: C, S, &, U et D. Cette notation, à l'exception du D pour divers, caractérise la forme de la scoliose, telle qu'observée dans la vue du dessus (ou apicale). L'annexe I présente en détail les caractéristiques morphologiques qui ont permis de diriger la formulation mathématique de la colonne normale et des colonnes scoliotiques simulées: TD-U, TD-C, TDLG-S, TDLG-&, TDLG-C et TLG-C. Ces formulations, au moins dérivables jusqu'à l'ordre 3, permettront le calcul théorique des paramètres de courbure 3D et de torsion géométrique qui pourront ensuite être comparés aux résultats des modèles géométriques.

4.1.2 Modélisation géométrique du rachis à l'aide de la technique des séries de Fourier "corrigée"

La série de Fourier est une fonction trigonométrique qui s'adapte bien aux courbes scoliotiques souvent d'allure sinusoïdale. De plus, cette fonction est suffisamment dérivable ce qui permet l'application des équations de Frenet et donc le calcul de la torsion géométrique. Ajustée par moindres carrés aux centroïdes vertébraux reconstruits, cette fonction réduit l'effet des erreurs de reconstruction. Le développement mathématique de cette technique de lissage est résumé à l'annexe III.

Une analyse de l'influence du choix de l'ordre de la série sur la modélisation de divers types de colonnes reconstruites de patients scoliotiques aura permis de constater le caractère oscillatoire des séries de Fourier en présence de données imparfaites comme le sont les coordonnées reconstruites du centroïde des vertèbres. Tel qu'illustré par l'exemple de la Figure 4.4, si l'ordre est choisi trop faible, l'ajustement de la courbe aux centroïdes vertébraux reconstruits n'est pas optimal (surlissage). Si au contraire l'ordre est trop grand, la courbe a tendance à osciller. Finalement, l'analyse visuelle de quelques cas aura démontrée que la série de Fourier d'ordre 3 (7 termes) est la mieux adaptée pour modéliser les géométries scoliotiques reconstruites avec la technique stéréoradiographique utilisée dans ce projet (section 2.3.4).

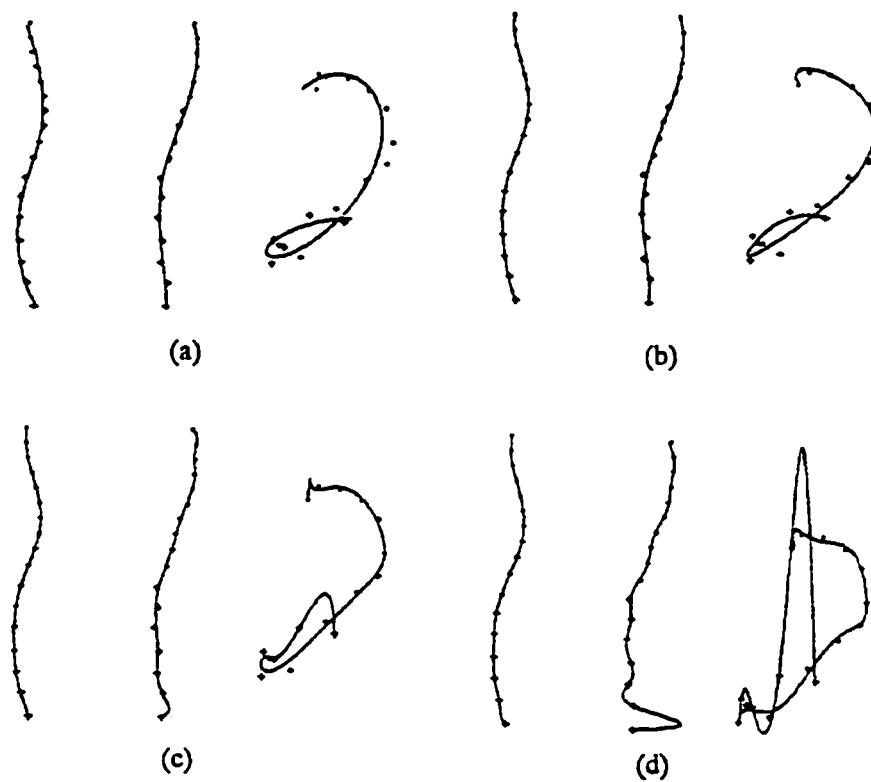


Figure 4.4 Colonne scoliotique de type TDLG modélisée par des séries de Fourier: a) d'ordre 2; b) d'ordre 3; c) d'ordre 5; et d) d'ordre 7

4.1.2.1 Situation du premier article

Plusieurs méthodes de lissage dites paramétriques ont été utilisées pour étudier la représentation intrinsèque de la colonne vertébrale scoliotique par sa courbure et sa torsion géométrique. Cependant, l'interprétation clinique des mesures de torsion, en terme des déformations scoliotiques, s'est avérée limitée à cause de la présence de valeurs extrêmes, soi-disant non significatives sur les tracés de torsion. Ces pics de torsion sont-ils des artefacts numériques ou contiennent-ils des informations pertinentes à l'analyse tridimensionnelle des déformations de la colonne vertébrale en torsion?

Le but de cette étape est donc de mesurer et d'analyser la courbure et la torsion géométrique de colonnes simulées et reconstruites (patients) modélisées à l'aide de séries de Fourier d'ordre 3. Puis, de développer et valider une méthode de correction pour éliminer les valeurs indésirables de torsion.

Cette étude est présentée à la section suivante à l'aide de l'article:

Poncet, P., Dansereau, J. et Labelle, H. (1999) «Improved Computation of Geometric Torsion in Curvilinear Representation of Scoliotic Spine», *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, (soumis).

La contribution du premier auteur à la préparation et rédaction de cet article est d'environ 90%.

4.1.2.2 Article #1: «Improved Computation of Geometric Torsion in Curvilinear Representation of Scoliotic Spine»

IMPROVED COMPUTATION OF GEOMETRIC TORSION IN CURVILINEAR REPRESENTATION OF SCOLIOTIC SPINES

Philippe Poncet^{1,2}, Jean Dansereau^{2,3}, Hubert Labelle²

- 1- Institute of Biomedical Engineering, École Polytechnique,
P.O. Box 6079, Station "Centre-ville", Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada
- 2- Research Center, Sainte-Justine Hospital,
3175 Côte Sainte-Catherine Road, Montréal Québec, H3T 1C5, Canada
- 3- Department of Mechanical Engineering, École Polytechnique,
P.O. Box 6079, Station "Centre-ville", Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada

Short running title:

Improved geometric torsion computation in scoliosis

Correspondence and requests for reprint to:

Philippe Poncet (c/o Dr. Ronald F. Zernicke)
McCaig Center for Joint Injury and Arthritis Research
University of Calgary, Faculty of Medicine, Department of Surgery
3330 Hospital Drive N.W.
Calgary, Alberta, Canada T2N 4N1
E-mail: poncet@ucalgary.ca
Fax number: (403) 270-0617

Abstract

There have been several studies concerning the intrinsic representation of the spinal curve by its 3D curvature and geometric torsion. However, factors such as instrumental imperfections, the parametric nature of smoothing numerical methods and computer roundoff produce large false peaks in the geometric torsion representation of the spine. As a result, the torsion phenomenon in scoliosis has never been properly analysed or precisely defined. In order to correct these *torsion spikes* we developed an interactive method, which depends upon the identification of a critical zone and the imposition of a "true" 3D inflection point such that the change in the local shape of the spinal curve is minimized. Application on 18 reconstructed spinal data sets has demonstrated that our technique can correct geometric torsion artefacts without changing the general shape of the spinal curve. Attempts were made to automate the detection and correction of *torsion spikes*, doing adequate analysis in 71% of cases.

Nomenclature

- \vec{r} = vectorial representation of a 3-D curve
 $x(t), y(t), z(t)$ = parametric representation of Cartesian coordinates
 t = parametric coordinate of a point on a curve (normalized chord length)
 N = number of experimental data points
 a_0, a_n, b_n = Fourier series coefficients
 τ = geometric torsion of a point on a curve (Greek l.c. tau)
 κ = three-dimensional curvature of a point on a curve (Greek l.c. kappa)
 κ_{min} = curvature at the apex of a curvature minima
 $t_{\kappa_{min}}$ = parametric coordinate of κ_{min}
 t_x, t_y, t_z = parametric coordinate of the nearest inflexion point of $t_{\kappa_{min}}$ on $x(t), y(t)$
 and $z(t)$
 t_{3D} = parametric coordinate of an imposed 3-D inflexion point
 CZL = critical zone length (normalized)
 x_i, y_i, z_i = Cartesian coordinates of the uncorrected vertebral centroids
 $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ = Cartesian coordinates of the vertebral centroids corrected by the
 elimination technique
 Δs = Absolute mean 3-D distances between the uncorrected and corrected
 smoothed vertebral centroids
 $(\Delta s)_{min}$ = minimum Δs value associated to an imposed 3-D inflexion point in the
 critical zone
 μ = algebraic mean (Greek l.c. nu)
 σ = standard deviation (Greek l.c. sigma)

Introduction

Scoliosis is a complex deformation process of the spine involving local and global curve shape transformations. However, the underlying deformation mechanisms remain not well understood. Several authors (De Smet et al., 1983; Graf et al., 1983; Perdriolle and Vidal, 1985 and 1987; Asher and Cook, 1995) have attempted to explain the morphological changes in idiopathic scoliosis deformities through study of transverse plane evolution. The theory that scoliosis deformities evolve as a torsion was first proposed by Graf et al. in 1983 followed by Perdriolle and Vidal in 1987. In 1995, this theory was tested by Asher and Cook on common idiopathic scoliosis deformities and had found support. Considering the three-dimensional (3D) nature of scoliosis deformities, analysis of 3D indices that provide pertinent information concerning the torsional description of scoliosis deformities has become of clinical importance.

The complete geometry of the spine can be described by the shape of a curved line that passes through the thoracic and lumbar vertebrae, the position and orientation of the vertebrae about this curve, and the shape of the individual vertebrae. Therefore, there have been several studies regarding the intrinsic representation of the spinal curve by its 3D curvature and geometric torsion (Hierholzer and Luxmann, 1982; Allard et al., 1984; De Silva et al., 1990; Poncet et al., 1992; Dansereau et al., 1993; Ortale et al., 1993; Kanayama et al., 1996; Poncet et al., 1995 and 1996). However, in the process of measuring these quantities, factors such as instrumental imperfections (providing inaccuracies), the parametric nature of smoothing numerical methods and computer roundoff render the measured values inexact. This results in false peaks in the geometric torsion representation of the spine that modify the underlying torsion behaviour and its interpretation. As a result, the torsion phenomenon in scoliosis has never been properly analysed and thus precisely defined.

Our objective is to develop a smoothing method that allows geometric torsion computation without false peaks (that we have termed "*torsion spikes*") and that produces adequate 3D

curvilinear representation of the spinal curve. This paper presents an analysis of *torsion spike* occurrence followed by the development and application of an interactive and automatic corrective technique.

➤ Previous Work

There are many methods to obtain a smooth curve that approximates data points. In studies of scoliosis to date, the curvilinear representation of the spine has been mostly based on models using least-squares techniques where function coefficients are computed so as to minimize the sum of squared distances between the modelled curve and the input data points. Fitted functions included polynomials (Stokes et al., 1993; Ortale et al. 1993; Kanayama et al. 1996), sinusoidal (Drerup & Hierholzer, 1992), Fourier series (Stokes et al., 1987; Dansereau et al., 1990) and helicoidal functions (Poncet et al., 1992; Dansereau et al., 1993). Other models were developed using smoothing techniques such as splines, obtained by minimizing a specific criterion under a set of linear constraints. Different forms were used such as cubic (McNeice et al. 1975) or quintic splines (Dansereau, 1983). These conventional methods are categorized as *global smoothing methods* since they attempt to produce a smooth curve over the entire spine in a single operation.

As reported in the literature (Ortale et al., 1993) and also in studies made by the authors (Dansereau, 1983; Poncet et al., 1995 and 1996), interpretation of the torsion measurement in terms of scoliotic deformities has often become difficult due to the presence of *torsion spikes*. These last were found to appear mostly at the junction of curves in scoliosis with double major curves and at the extremities of the spine in both single and double major scoliotic curves. Furthermore, some spines show more than one false peak. As an example, Figure 4.5 shows a double major right thoracic left lumbar (RTLL) scoliotic curve in its postero-anterior (PA), lateral and magnified apical views, and its related 3D curvature and geometric torsion. Figure 4.5b reveals two unrepresentative zones of torsion measurement in terms of spinal deformities, *torsion spikes* being located at the upper thoracic extremity of the spine and at the junction of the two curves, i.e. T1-T4 and T10-T12 respectively.

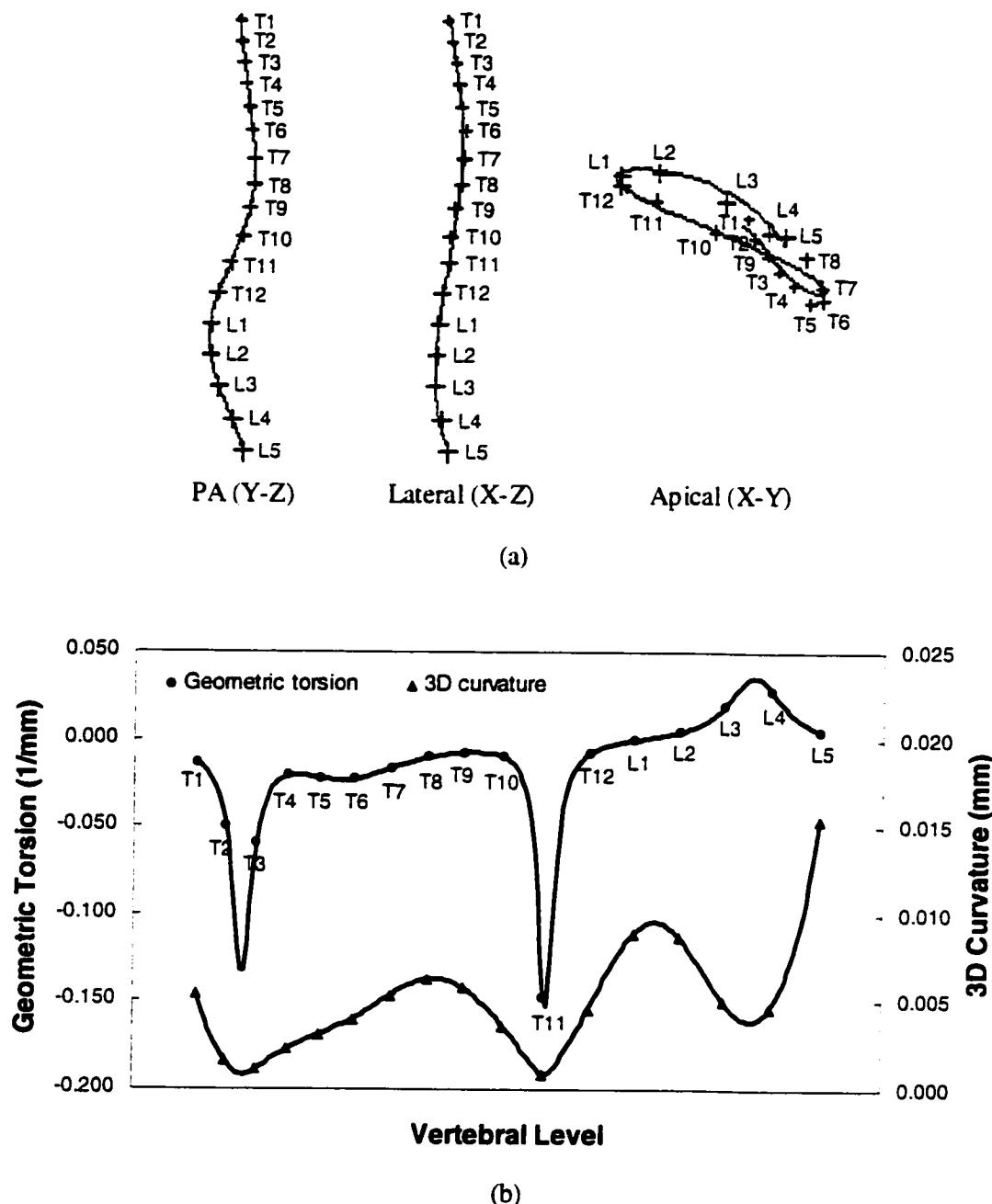


Figure 4.5 (a) Posterior-anterior (PA), lateral and magnified apical views of a typical RTLL scoliotic spine smoothed by least-square Fourier series method. **(b)** Plots of associated 3D curvature and geometric torsion.

To avoid these problems, modelling of the spinal shape by segments of circular and elliptical helices was undertaken (Dansereau et al, 1993; Poncet et al., 1992). We found that most double major right thoracic left lumbar scoliotic curves are subjected to torsion in opposite directions, clearly shown in the apical view (Figure 4.5a) by the right-handed curve pattern of the thoracic segment and the left-handed curve pattern of the lumbar segment. This general behaviour (torsion and countertorsion) has been well described by Graf (1990) and reported by others (Perdriolle and Vidal, 1985; Asher and Cook; 1995). Our studies also showed that local and global shape characteristics of the spine can be recognized from curvature and torsion measurements. This was also supported by Hierholzer and Luxmann (1982) when they fitted 3D polygons to the vertebral body axis to compute intrinsic indices such as surface curvature and torsion volume. The modelling method using circular and elliptical helix segments, however, has some limitations such as discontinuity caused by sequential modelling of the thoracic and lumbar segments as well as inability to fit all types of scoliotic shapes.

Alternative methods depend upon the identification of particular data points that cause the curve to respond poorly and the application of specific criteria to locally improve the curve (Wagner et al., 1995). In this context, the objectives of this paper are to present: 1) an analysis of *torsion spikes* occurrence using spinal curve simulation, 2) the development and validation of a *torsion spikes* elimination technique that minimized the change in the local shape of the curve, and 3) an automatic method for the detection and correction of “*torsion spikes*”.

Material and Method

➤ General Approach

In this study, 18 patients with adolescent idiopathic scoliosis were recruited during scoliosis clinics at Sainte-Justine Hospital (Montreal, Canada). All subjects showed a double major RTLL scoliotic curve. The group included patients aged from 10 to 15 years and was

composed of 16 females. The average Cobb angle for all curves was $35^\circ \pm 25^\circ$. Three-dimensional representations of scoliotic spines were obtained from multi-view radiographic 3D reconstruction techniques developed at École Polytechnique of Montreal (Dansereau et al., 1990). The spinal geometric representation was built using the DLT method (Marzan, 1976) which, in our case, combines and reconstructs in 3D six anatomical landmarks per vertebra (superior and inferior bases of both pedicles and endplate centres) digitized on the following different x-ray views: the lateral view (LAT), the conventional posterior-anterior view (PA0°) and the 20° angled down PA view (PA20°). The reconstruction accuracy of this technique was found to be 2.1 ± 1.5 mm when applied on a cadaveric spine specimen (Aubin et al., 1997). The difficulty of identifying exactly the same anatomical landmarks on the different x-ray views was reported to be the principal cause of errors.

Vertebral Centroid Definition. The three-dimensional location of the vertebral centroid of each thoracic and lumbar vertebra was estimated as the mean of the four reconstructed coordinates of bases of pedicles. The configuration of the scoliotic spine was then expressed mathematically as a smoothed spatial curve using vertebral centroid coordinates as input data points.

Spinal Curve Representation. Let $\vec{r}(t)$ be a continuously differentiable parametric representation of a three-dimensional spinal curve developed in a Cartesian coordinate system in such a way that X, Y and Z axis represent respectively the anterior, left and cranial directions of the spine (global coordinate system adopted by the Scoliosis Research Society, 1994):

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (4.3)$$

where \vec{i} , \vec{j} and \vec{k} are the fundamental orthogonal triad associated with that coordinate system. Each coordinate of the spinal curve is expressed as a function of the arc length t of the spine, approximated with the normalized chord length ($0 \leq t \leq 1$) between the vertebral

centroids. Functions $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$ were estimated by Fourier series fitted to the N data point by the least-squares method. Series of order three, which involves seven terms, were used as a compromise. Fourier series with more terms led to oscillations in the presence of noisy data, whereas use of fewer terms gave over-smooth curves that less accurately fit the given data. As an example, the third-order Fourier series interpolation function $x(t)$ is given by the expression:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^3 a_n \cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^3 b_n \sin(n\pi t) \quad (4.4)$$

Coefficients a_0 , a_n and b_n were determined for a best fit of the function to the reconstructed x coordinates of the N data points.

The least-squares procedure can be expressed in the form of a matrix equation to simplify the generation of the 7 linear algebraic equations (James, 1977). Considering that Equation 4.3 can be written in the general form below:

$$x(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_7 f_7(t) \quad (4.5)$$

the unknown coefficients c_1 to c_7 , corresponding to the seven degrees of freedom of this model, were determined by solving the following system of linear equations:

$$\{c\} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \{x\} \quad (4.6)$$

where $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_7(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \dots & f_7(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(t_N) & f_2(t_N) & \dots & f_7(t_N) \end{bmatrix}$, $\{c\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_7 \end{Bmatrix}$ and $\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix}$

Since matrix \mathbf{F} depends only on parameter t (common to x , y and z coordinates), Fourier series coefficients associated to the parametric functions $y(t)$ and $z(t)$ were obtained simply by substituting the x coordinates vector $\{x\}$ by respectively, the $\{y\}$ and $\{z\}$ vectors. Figure 4.5a shows a typical reconstructed scoliotic spine smoothed using least square Fourier series.

Curve Intrinsic Properties. Frenet's formulas were used to calculate the three-dimensional curvature κ and geometric torsion τ , which describe the local intrinsic properties of a curve $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (Lipshutz, 1969; Kreysig, 1983):

$$\kappa = \frac{[(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})(\ddot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}) - (\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}})^2]^{1/2}}{(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^{3/2}} \quad (4.7)$$

$$\tau = \frac{\ddot{\vec{r}}\vec{r}\ddot{\vec{r}}}{\kappa^2} = \frac{\dot{\vec{r}}(\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})}{(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})(\ddot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}) - (\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}})^2} \quad (4.8)$$

➤ Simulation Study

Simulation of a double major scoliotic spine including a "true" 3D inflexion point was obtained using the following parametric representation: $x(t) = 20 \sin(2\pi t)$, $y(t) = -20 \cos(3\pi t)$, and $z(s) = 200 - 400t$. Thoracic and lumbar vertebral centroids were localized on the curve proportionally to their height (Scoles et al., 1988). Each parametric curve shows an inflexion point (direction change) that coincides with the same t value (near T10). In other words, the parametric curves $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$ have a zero second derivative occurring at the same t value, such as shown in Figure 4.6a, which define mathematically a "true" 3D inflexion point. As expected, torsion values change smoothly across the inflexion point and no *torsion spike* was observed on the geometric torsion curve pattern (Figure 4.6b, □). However, when the data point corresponding to the 3D inflexion point was moved to a new location, by slightly modifying its y coordinate, a *torsion spike* appeared (Figure 4.6b, ▲).

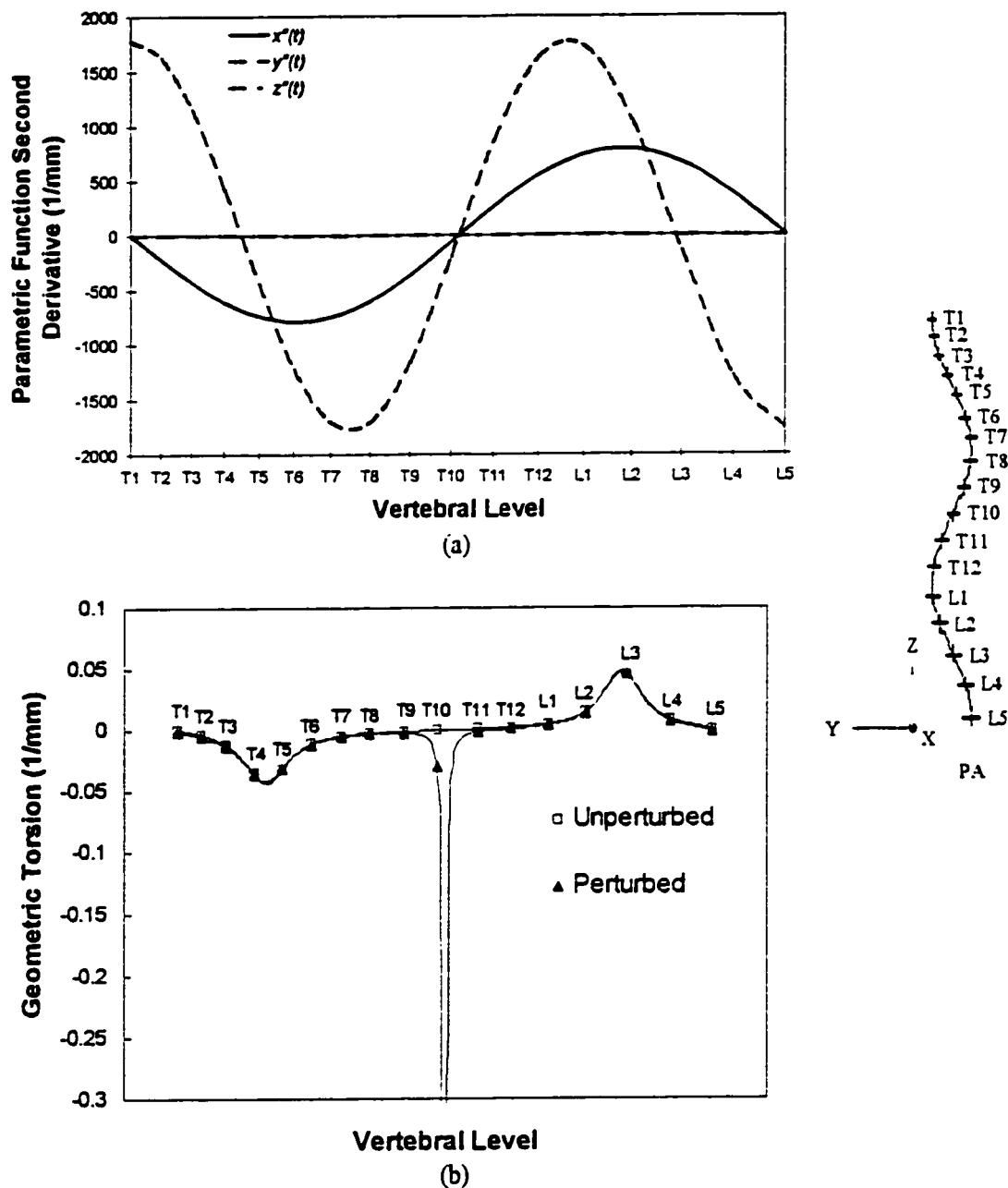


Figure 4.6 (a) Second derivative parametric functions $x''(t)$, $y''(t)$ and $z''(t)$ of a mathematical scoliotic spinal curve including a "true" 3D inflection point near level T10, and (b) geometric torsion measurement associated with the unperturbed (□) and perturbed (▲) simulated spine.

To study the geometric torsion sensitivity in the *torsion spike* region, some perturbations (small displacements of vertebral centroids) were simulated on reconstructed scoliotic spine to locally modify the shape of the curvilinear 3D modelling and consequently relocate the inflection point on each parametric curve. We found that increasing the distance between parametric function inflection points in the critical zone causes an enlargement of the *torsion spike* as well as a significant change in the shape of the curve. Conversely, a reduction of this distance produces a narrowing of the spike without visually modifying the spinal shape.

A point on a curve where the 3D curvature is zero is by definition a 3D inflection point and correspond with a 3D direction change such as observed at the junction of most double major curves. Therefore, the rapid change observed in the geometric torsion graph of that particular region cannot be representative of the real scoliotic deformity but shows a numerical artifact. This lead us to the assumption that the *torsion spike* correction could be obtained by making coincide the parametric inflection points in the critical zone, thus generating a "true" 3D inflection point.

➤ Elimination Technique

The elimination technique consists firstly of the application of the least squares Fourier series method to fit a three-dimensional curve based on the reconstructed vertebral centroid coordinates (Figure 4.7a). This mathematically defines the 3D curve that passes through the vertebrae with a preliminary parametric representation $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$. Equation 4.5 is then used to calculate the 3D curvature of the spinal model (Figure 4.7b). Location of curvature minima $t_{k_{\min}}$ in the *torsion spike* area is obtained by finding the minimum slope values associated with the 3D curvature graph. Then on each parametric curves, $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$, the nearest inflection point from $t_{k_{\min}}$ is detected (Figure 4.7c). The segment of the spine that includes the inflection points t_x , t_y and t_z is defined as the critical zone and its length as the normalized critical zone length (*CZL* in Figure 4.7a and c). A 3D inflection point t_{3D} , is imposed in this zone by setting to zero its second derivative:

$$\frac{d^2 x(t_{3D})}{dt^2} = \frac{d^2 y(t_{3D})}{dt^2} = \frac{d^2 z(t_{3D})}{dt^2} = 0 \quad (4.9)$$

This condition appears as an additional constraint in the linear systems of equation to be solved (Equation 4.5). The spine is smoothed again taking the new constraint into account. The absolute mean distance Δs between the N original vertebral centroids (x_i, y_i, z_i) and smoothed centroids $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$, is then calculated as follows:

$$\Delta s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(\bar{x}_i - x_i)^2 + (\bar{y}_i - y_i)^2 + (\bar{z}_i - z_i)^2} \quad (4.10)$$

Iteratively a new 3D inflection point is imposed in the critical zone in order to converge to the position (t_{3D}) that minimizes the change in the shape of the spinal curve $(\Delta s)_{\min}$, such as shown in Figure 4.7d. Frenet's formulas are then applied to the resulting spinal curve representation to measure its geometric torsion.

➤ Automation Criteria

Particular geometric characteristics of *torsion spikes* was observed and can help developing specific criteria for their detection. By definition, a small curvature value involves a large geometric torsion value ($\tau \propto 1/\kappa^2$). Minima of curvature curves can thus be associated with absolute values of torsion maxima (Figure 4.5b). Corresponding 3D curvature values κ_{\min} (Figure 4.7b) can then be considered as a first indication of the potential presence of a *torsion spike*. Since *torsion spikes* arise from the non-coincidence of a common inflection point (i.e. zero second derivative) on parametric curves $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$, their proximity (CZL) can be a second indication. In addition, correction of *torsion spikes* should have a small effect on the general shape of the modelled scoliotic spine. In other words, the smaller the value $(\Delta s)_{\min}$, the more likely the torsion peak is to be a false peak.

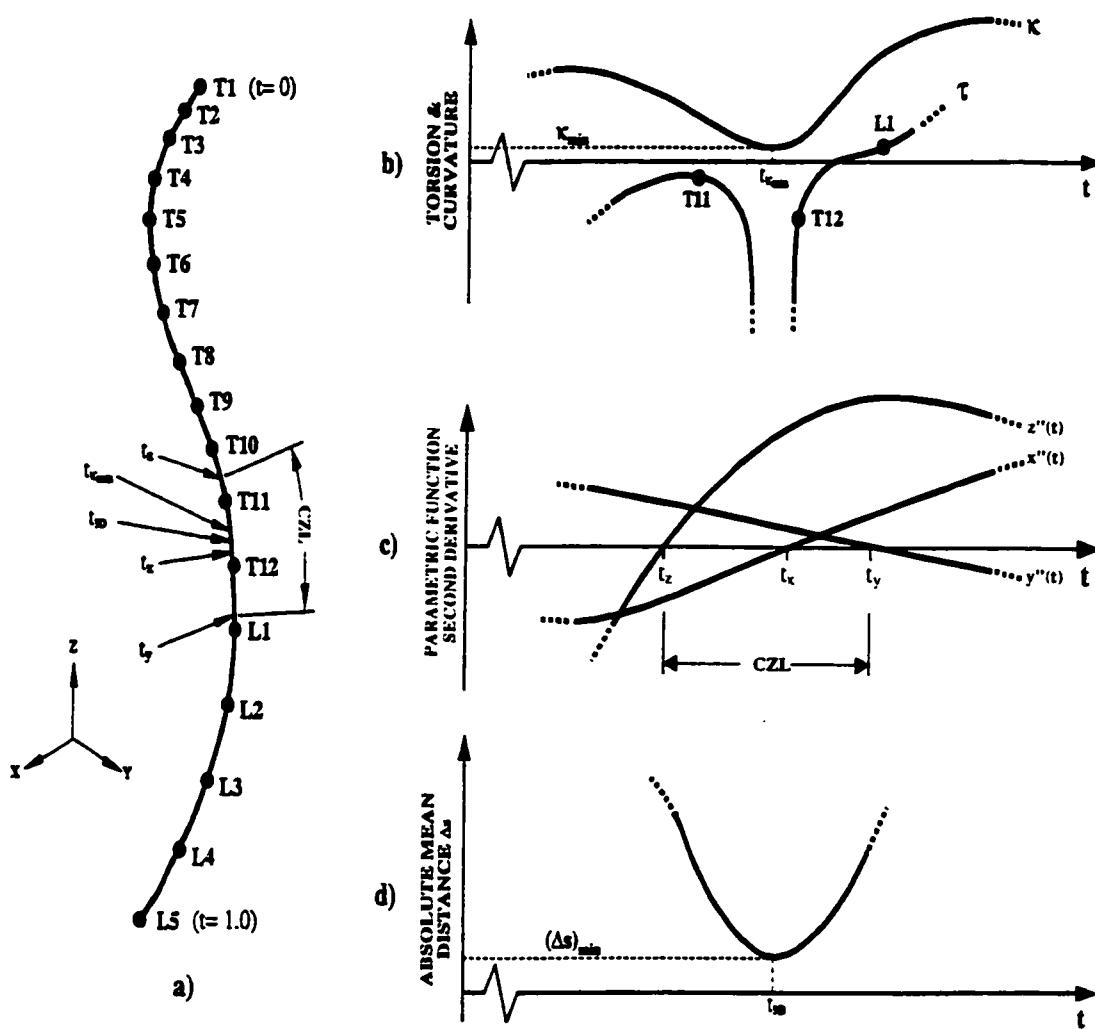


Figure 4.7 Representation of the three geometric parameters κ_{\min} , CZL, and $(\Delta s)_{\min}$ which characterized the "torsion spike" region. (a) Illustration of a typical scoliotic spinal curve, (b) location of 3D curvature minimum $t_{\kappa_{\min}}$ associated with the "torsion spike" detected between vertebral levels T11 and L1, (c) location, on each second derivative parametric curve, of the nearest inflection points t_x , t_y and t_z , from $t_{\kappa_{\min}}$, which define the CZL parameter, and (d) 3D inflection point location t_{3D} that eliminates the "torsion spike" while minimizing the geometric deformation $(\Delta s)_{\min}$ of the spinal curve.

In order to define values of parameters (κ_{\min} , CZL , $(\Delta s)_{\min}$) that could be used for automatic *torsion spike* detection, analytical spinal curves containing implicit *torsion spikes* were used to evaluate typical mean μ and standard deviation σ values of these parameters. To do so, three typical shapes of scoliotic spines were generated mathematically: two right thoracic left lumbar (RTLL) curves and one right thoracic (RT) curve. In order to recreate experimental data points, reconstruction errors were simulated randomly on all vertebral centroid coordinates. Random noise was applied ten times on each vertebral centroid coordinates up to ± 3.6 mm (2.1 ± 1.6 mm, corresponding to the mean error of the 3D reconstruction technique plus one standard deviation, as reported by Aubin et al., 1997). This approach allowed generating thirty "noisy" curves simulating thirty reconstructed scoliotic spines with their typical reconstruction errors. Considering that computed values of κ_{\min} , CZL and $(\Delta s)_{\min}$ should be normally distributed, all values should be within 3 standard deviations (3σ) of μ . Therefore, if values of all geometric parameters of a potential critical zone are included in range $[0, \mu + 3\sigma]$, *torsion spike* detection is confirmed. Conversely, if one or more parameter(s) do not respect these conditions, the studied region is assumed well modelled and therefore will not be corrected.

> Validation Methods and Applications

Interactive Elimination Technique. Based on the knowledge acquired in *torsion spikes* analysis, a preliminary visual study of the original torsion curves associated to the 18 reconstructed scoliotic spines revealed that 4 (22%) of them were free of *torsion spike*. Therefore, the interactive elimination technique was applied on the 14 other spinal data sets. Since corrections must not modify the general shape of the spine, the technique was validated if the euclidean distances between all initial reconstructed vertebral centroids and corrected ones were lower or equal than the estimated 3D reconstructed error plus the value of one standard deviation (i.e. ≤ 3.6 mm). In other words, the corrected vertebral centroids may be included in a sphere of radius equal to 3.6 mm, called "control volume", centred on each reconstructed (initial) vertebral centroid. In addition, geometric torsion graphs were

compared before and after correction to study the localized effect of the new elimination technique.

Automatic Elimination Technique. Validation of the automatic technique was firstly based on a series of six 3D analytical parametric curves representing the most typical scoliotic spines: three RTLL curves, two RT curves and one right thoracolumbar (RTL) curve. In order to determine whether the new technique can also analyze correctly curves free of numerical torsion instabilities, only three of them contained an implicit *torsion spike*. Reconstruction errors were simulated ten times on the coordinates of each vertebral centroid (up to $\pm 3.6\text{mm}$), resulting in a set of sixty analytical spinal data points among which thirty were found to show a false peak following visual torsion plots examination. The automatic *torsion spike* elimination technique was applied on each set of simulated spinal data points. Geometric torsion measurements were compared with torsion values associated to the initial analytical spines (without noise) to evaluate the efficiency of the technique in the detection and elimination of *torsion spikes*. Validation was based on the previously described "control volume" criterion and by visual inspection of the torsion graphs obtained before and after the application of the automatic elimination technique. The technique was then applied on the 18 reconstructed spinal data sets.

Results

➤ Interactive Elimination Technique

The interactive technique was applied on the 14 reconstructed spines on which a false peak was observed. As an example, Figure 4.8 shows typical plots of geometric torsion obtained before and after correction of a reconstructed RTLL patient spine that contains a *torsion spike* with no real physical meaning in the low thoracic vertebral segment T10 to T12. The localized effect of the elimination technique on torsion plots can be appreciated in Figure 4.8b. In addition, the overall 3D shape of the spinal deformity was not much affected by the

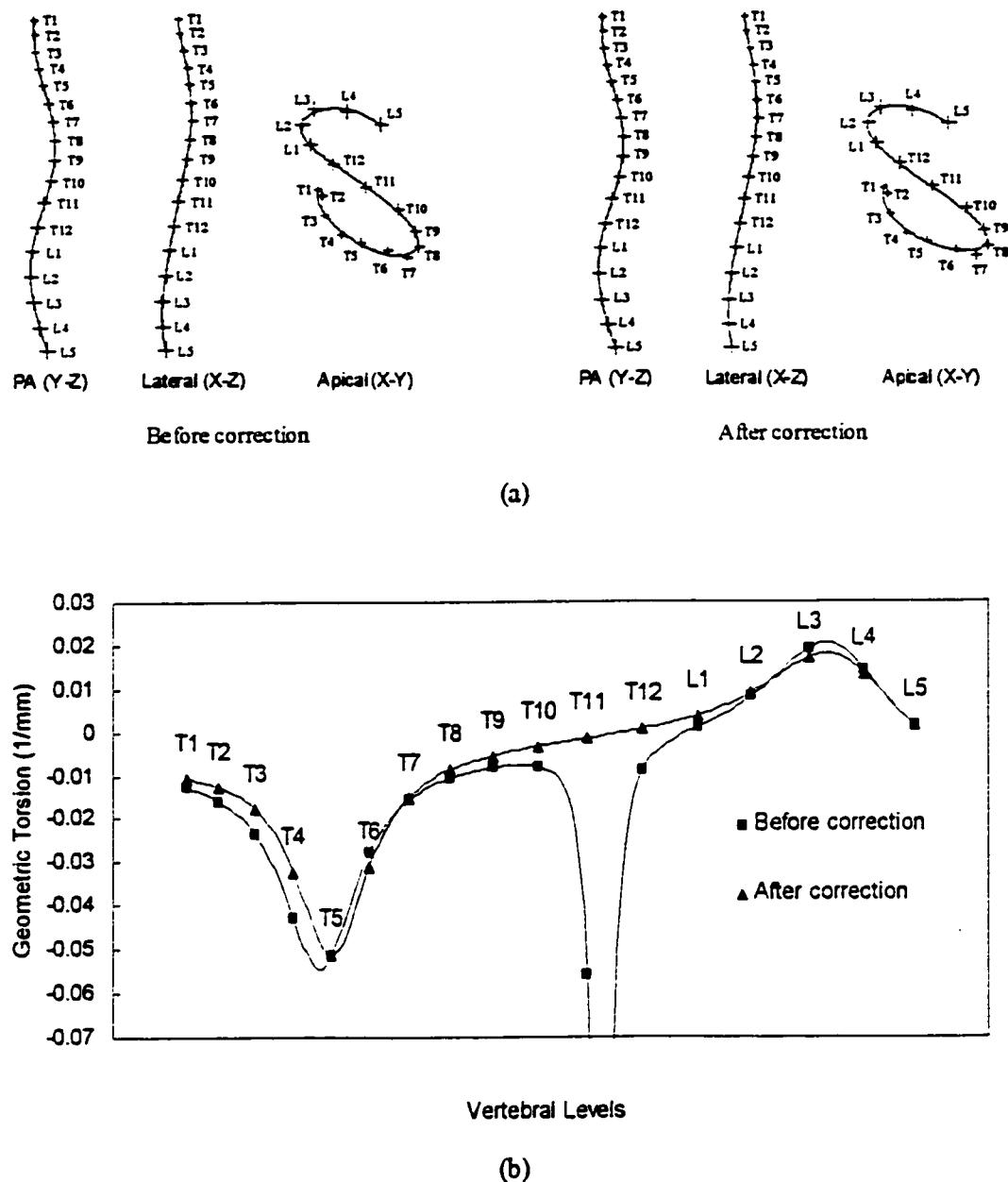


Figure 4.8 (a) PA, lateral and apical views of a typical RTLL reconstructed patient spinal curve and (b) plots of geometric torsion obtained before and after "torsion spike" correction with the elimination technique. The "torsion spike" originally shown between levels T10-T12 was eliminated affecting only locally the general torsion behaviour. A slight change in the shape of the spinal curve is observed on the magnified apical plane in the critical zone.

correction. Only slight geometrical change can be seen on apical plane between anatomical levels T10 and T12 (Figure 4.8a). Analysis of the resulting curvilinear representation of the spine revealed that all relocated vertebral centroids were included in the defined "control volume" (sphere of 3.6 mm radius).

➤ Automatic Elimination Technique

Means and standard deviations of the geometric parameters measured on the thirty simulated spines containing implicit *torsion spikes* were the following: $\bar{\kappa}_{\min} = 0.00025 \pm 0.00019 \text{ mm}^{-1}$, $\bar{CZL} = 0.030 \pm 0.018$, and $\bar{(\Delta s)}_{\min} = 0.27 \pm 0.17 \text{ mm}$.

Therefore, the limits of each geometric parameter that characterized *torsion spikes* were fixed at $\kappa_{\min} \leq 8.25 \times 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$, $CZL \leq 0.084$, and $(\Delta s)_{\min} \leq 7.84 \times 10^{-1} \text{ mm}$ (i.e. $\mu + 3\sigma$), which should statistically contain 100% of the cases. These geometric criteria were then implemented in the computer program in order to detect *torsion spikes* automatically.

When applied on the sixty simulated "noisy" spines (containing 30 *torsion spikes* curves), the computer program detected 172 three-dimensional curvature minima ($t_{\kappa_{\min}}$), as potential zones of *torsion spike* for further analysis. Among those zones, thirty suited the specified geometric criteria and thus were corrected. A visual comparison of geometric torsion measurements obtained before and after the application of the automatic elimination technique confirms that the thirty simulated *torsion spikes* on the "noisy" curves correspond exactly to the thirty detected critical zones. The "control volume" criterion was respected for all corrected spinal curves.

The automatic elimination technique was then applied on the 18 reconstructed scoliotic spines. The algorithm detected 49 potential zones of *torsion spikes* (3D curvature minima) among which 35 (71%) were appropriately analyzed (i.e. corrected when required), including two automatic *torsion spikes* correction that suited the "control volume" criterion. A visual comparison of torsion curves obtained before and after

correction revealed that six entire spines were properly analyzed by the algorithm: the four spines originally free of *torsion spikes* and two of the fourteen spines showing a geometric torsion graph with a *torsion spike*. Consequently, fourteen real *torsion spikes* were not detected and corrected by the algorithm, although initially detected as potential zone of *torsion spike*. The algorithm did not remove well-defined peaks of torsion, which suggests that the imposed geometric criteria were probably too strict. Trials were made to extend manually the criteria limits but difficulty arose in these trials with the removal of well-defined torsion peaks. Because of the sensitivity of the torsion spike zone (Figure 4.7b), perturbations of the spine by slightly modifying vertebral centroid coordinates should lead to unstable torsion measurement in that zone, whereas the torsion should remain unchanged in the other regions. This approach could help to detect which torsion peaks have real physical meaning in the spine as opposed to the torsion spike representing rather a mathematical artefact near 3-D inflection point where 3-D curvature approaches zero.

Discussion

The interactive correction technique allowed to correct all (i.e., 100%) visually detectable *torsion spikes* when applied on a group of 18 reconstructed scoliotic spines. The slightly lower success (71%) obtained with the automatic elimination technique can be explained, first by the fact that simulated scoliotic spines represent a small sample of the great variety of existing scoliotic shapes. To better define the contribution and the limits of each geometric parameter K_{\min} , CZL and $(\Delta s)_{\min}$, to the description of *torsion spikes*, application of the corrective technique on a larger reconstructed scoliotic spine population should be anticipated. Furthermore, reconstruction errors evaluated by Aubin et al. (1997) were found using 17 vertebrae (T1 to L5) of a dry cadaveric human spine free of soft tissues. Since these last generally contribute to the poor visibility of landmarks on radiographs, their identification is often more difficult on real living subjects and consequently involves a loss of accuracy in their reconstruction. This means that the "control volume" criterion was

probably too severe when the automatic elimination technique was performed on real subjects data.

As reported by previous studies (Dansereau, 1983; Ortale et al., 1993), in some cases, geometric torsion evaluated at the extremities of the spine was found to be not representative as these values correspond to the last data points. Large errors at the extremities could be compensated with improved modeling, which could consist in specifying the change in the curve at both ends of the spine either by reconstructing cervical and sacral vertebrae or by defining end conditions mathematically. This should eliminate "naturally" the false torsion peaks observed in these areas.

When applied in scoliosis the geometric torsion is defined as a local geometric property of the curvilinear spinal representation without specific relation with the vertebrae themselves. A complete description of the spinal deformity should also include a description of the vertebrae position and orientation about this curve as well as a description of the shape of the individual vertebrae.

Conclusion

In order to correct *torsion spikes* produced by 3D reconstruction technique (inaccurate data), independent parametric smoothing ($x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$) of conventional methods and computer roundoff an alternative method based on the imposition of 3D inflection points was developed. This method depends upon the identification of particular zones that cause the curve to respond poorly to geometric torsion evaluation, and the application of specific criteria to locally improve the spinal curve representation. Application of an interactive correction approach on reconstructed spinal data with unsatisfactory geometric torsion measurements showed that all scoliotic curvilinear representations can be corrected, producing more reliable geometric torsion values, without changing the overall shape of the spine. On the other hand, the development of an automatic detection, based on three

descriptive parameters κ_{\min} , CZL and $(\Delta s)_{\min}$, and correction technique of *torsion spikes* had showed some limitations, applying appropriate analysis in 71% of cases. Possible solutions to improve the automation of *torsion spike* detection are to evaluate the descriptive parameters on real clinical data of scoliotic spines rather than simulated data, and to exploit the sensitivity or instability of torsion measurement associated to 3-D inflection zones to help in the detection of *torsion spikes*.

However, to apply the actual technique for clinical evaluation and follow up of scoliotic patients, it is suggested to use first the automatic algorithm and then to confirm the results by using the interactive approach. In that way, the methods presented in this paper allow to correct adequately all scoliotic curves representation for torsion evaluation. All this provides the foundation to start studying the relevance of geometric torsion as a 3D index of scoliosis.

4.1.3 Modélisation géométrique du rachis à l'aide du krigeage Dual

4.1.3.1 Situation du deuxième article

Le krigeage, une méthode d'interpolation statistique non conventionnelle qui incorpore comme cas particulier la méthode des séries de Fourier lissées par moindres carrés, propose une formulation plus raffinée permettant de présumer d'une approximation plus juste de la géométrie de la colonne scoliotique. Une application préliminaire de la technique du krigeage à la modélisation curviligne de colonnes scoliotiques s'est avérée prometteuse dans une étude présentée par André et col. (1996). Cependant, la quantité importante de tests et calculs nécessaires pour déterminer le profil de krigeage (dérive, covariance et effet de pépite) le plus adéquat pour chaque patient, la non-uniformité des modèles obtenus d'un cas à l'autre et la présence de certains comportements inadéquats, nous fait opter pour une approche plus globale où le même modèle de krigeage serait toujours utilisé.

Le but de la présente étape est donc d'étudier, à partir de géométries de colonnes scoliotiques simulées analytiquement (annexe II), la faisabilité de la technique d'interpolation du krigeage dans la modélisation curviligne de la colonne et plus particulièrement, la possibilité de modéliser adéquatement la plupart des morphologies scoliotiques à l'aide d'un modèle général de krigeage.

Pour évaluer correctement l'indice de torsion géométrique les fonctions krigées doivent être suffisamment dérивables, au moins jusqu'à l'ordre trois. Les dérives de types constant, linéaire et quadratique de même que la covariance de type linéaire, tel qu'utilisés par André et coll. (1996) ne conviennent pas à l'étude de l'évaluation de la torsion. Pour ces raisons des dérives mieux adaptées ont été étudiées (quadrique et série de Fourier) et la covariance de type spline-4D ajoutée à celles de types cubique, trigonométrique et gaussienne. La formulation mathématique de ces fonctions de covariance et le résultat de leurs dérivations jusqu'à l'ordre trois, nécessaire au calcul de la torsion géométrique, est présenté à l'annexe V.

Pour fin de comparaison la technique du krigeage sera confrontée à celle des séries de Fourier ajustées par moindres carrés tel que présenté à l'annexe III, c'est-à-dire sans la correction des pics de torsion. Bien que pouvant être associé aux erreurs de reconstruction, l'effet de pépite est aussi influencé par le modèle de krigeage auquel il sera introduit. Pour ne pas avoir à faire intervenir la notion d'effets de pépite ou de lissage, des courbes analytiques (annexe I) simulées sans erreurs de reconstruction ont été utilisées.

Les détails de la démarche adoptée et les résultats obtenus sont présentés à l'aide de l'article suivant:

Poncet, P., Trochu, F. et Dansereau, J. (1999) «Curvilinear Three-Dimensional Modeling of Spinal Curves with Dual Kriging», *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 2(4), 295-308.

La contribution du premier auteur à la préparation et rédaction de cet article est d'environ 90%.

4.1.3.2 Article #2: «Curvilinear three-dimensional modeling of spinal curves with Dual kriging»

CURVILINEAR THREE-DIMENSIONAL MODELING OF SPINAL CURVES WITH DUAL KRIGING

Philippe Poncet^{1,3}, François Trochu², Jean Dansereau^{2,3}

- 1- Institute of Biomedical Engineering, École Polytechnique,
P.O. Box 6079, Station "Centre-ville", Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada
- 2- Department of Mechanical Engineering, École Polytechnique,
P.O. Box 6079, Station "Centre-ville", Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada
- 3- Research Center, Sainte-Justine Hospital,
3175 Côte Sainte-Catherine Road, Montréal, Québec, H3T 1C5, Canada

Correspondence and requests for reprint to:

Philippe Poncet (c/o Dr. Ronald F. Zernicke)
McCaig Centre for Joint Injury and Arthritis Research
Faculty of Medicine, Department of Surgery
3330 Hospital Drive N.W.
Calgary, Alberta, Canada T2N 4N1
E-mail: poncet@ucalgary.ca
Fax number: (403) 270-0617

Abstract

In spinal deformation studies, three-dimensional reconstruction of the spine is frequently represented as a curve in space fitted to the vertebral centroids. Conventional interpolation techniques such as splines, Bezier and least squares method are limited since they cannot precisely describe the great variety of spinal morphologies. This article presents a more general technique called dual kriging, which includes two mathematical constituents (drift and covariance) to better adjust the interpolated functions to spinal deformity. The cross-validation technique was used to compare the parametric representations of spinal curves with different combinations of drift and covariance functions. Model validation was performed from a series of analytic curves reflecting typical scoliotic spines. Calculation of geometric torsion, a sensitive parameter, was done to evaluate the accuracy of kriging models. The best model showed an absolute mean difference of 1.2×10^{-5} ($\pm 7.1 \times 10^{-5}$) mm $^{-1}$ between the analytical and estimated geometric torsions compared to 5.25×10^{-3} ($\pm 3.7 \times 10^{-2}$) mm $^{-1}$ for the commonly used least-squares Fourier series method, a significant improvement in spinal torsion evaluation.

Nomenclature

- X = spatial coordinates of a data point
 N = number of experimental data points on a curve
 t = parametric coordinate of a point on a curve
 U = random function
 D = drift function
 a_l = unknown coefficients of the drift function
 p_l = basis functions of the drift
 M = number of basis functions of the drift
 C = covariance function
 b_j = unknown coefficients of the covariance function
 K = generalized covariance associated with each data point
 h = Euclidian distance between two data points
 x_a, y_a, z_a = Cartesian coordinates of a point of a spinal analytic curve
 x_k, y_k, z_k = Cartesian coordinates of a point of a kriging interpolated curve
 E_x, E_y, E_z = mean quadratic residual errors of curve Cartesian coordinates
 E_x^s, E_y^s, E_z^s = mean quadratic residual errors of each spinal analytic curve coordinates
 $\bar{E}_x, \bar{E}_y, \bar{E}_z$ = global mean of E_x^s, E_y^s , and E_z^s
 \vec{r} = vectorial representation of a curve
 κ = three-dimensional curvature of a point of a curve (Greek l.c. kappa)
 τ = geometric torsion of a point of a curve (Greek l.c. tau)
 σ = standard deviation (Greek l.c. sigma)

Introduction

➤ Review of literature

In fundamental research projects and clinical evaluations, human spine deformation is studied with the use of an appropriate three-dimensional reconstruction technique. Since many years, a variety of stereoradiographic techniques, based on two or more radiographs taken at different angles, have been proposed in order to represent the spine in three dimensions (Kratky, 1975; McNeice et coll., 1975; Brown et coll., 1976; Hindmarsh et coll., 1980; DeSmet et coll., 1983; Stokes, 1985; Dansereau et coll., 1990b; Hecquet et coll., 1992). Actual errors of several millimeters have been reported on such three-dimensional reconstructions of the spine mainly due to the difficulty to identify exactly the same landmarks on all radiographs (André et coll., 1992).

In order to better understand the etiology of scoliosis, three-dimensional reconstructions of scoliotic spine are frequently represented as a curve in space fitted or smoothed to the vertebral centroids. A mathematical representation of the spinal curve is also calculated from which geometrical indices (Cobb angle, curvature, geometric torsion, etc.) describing spinal deformations and presenting clinical interest can be obtained. Mainly two families of interpolation techniques have been used to model the curvilinear shape of scoliotic spines: splines and least squares methods.

In least squares method, function coefficients are computed so as to minimize the sum of squared distances between the model and the data points. Different models or functions have been implemented such as polynomials (Stokes et coll., 1993), sine functions (Drerup et Hierholzer, 1992a et 1992b) and Fourier series (Dansereau et coll., 1990b; Stokes et coll., 1987). The quality of the interpolation is usually improved by increasing the degree of the polynomials used. However, when applied to ill-distributed data points, oscillations may occur with higher order polynomials. Similarly, Fourier series with numerous terms tend to oscillate, while a reduction of terms increases the level of smoothness (data points are

overweighed). Furthermore, even if trigonometric terms are indefinitely differentiable, geometric indices calculated from high order derivatives may oscillate greatly.

A spline interpolant is obtained by minimizing a specific criterion under a set of linear constraints. Since splines may not be as oscillatory as single polynomials, different forms were used to model scoliotic spines such as cubic (McNeice et coll., 1975) or quintic splines (Dansereau, 1983). However, spline functions are very sensitive to boundary conditions and the order of derivatives is limited by the degree of the polynomial used to construct the spline function. So an appropriate method, allowing better fit to the data points and computation of higher derivatives in order to evaluate curvature and torsion indices, still remains to be defined.

Kriging, a statistical interpolation method, appears as a more general and powerful formulation. In fact, conventional interpolation techniques use a unique function to approximate the general shape suggested by the data points. Since it exists a great variety of scoliotic morphologies, these simple mathematical functions are not sufficient to describe precisely the whole spinal deformities. This results generally in a rough modeling of the scoliotic spine. On the contrary, a kriging interpolant is decomposed into the sum of two mathematical constituents: the drift and the covariance. The drift acts as a rough preliminary modeling of the spine, while the added covariance term will provide the fine adjustment of the interpolated function necessary to model the spinal deformity. Moreover, in the general use of conventional interpolation techniques, each parametric function of the spinal representation $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$ (which are developed here in a Cartesian coordinate system) is approximated by the same mathematical expression. In reality, the graph generated by each coordinate x , y and z of the spine in function of parameter t (which is associated with the Euclidean chord length of the curve) is not similar and thus should not be estimated by the same expression. One original feature of our approach consists of using a different mathematical expression for each dimension. This can be easily achieved thanks to the great flexibility of the kriging technique. This results in a refined and precise curvilinear modeling

of scoliotic spines. If the quality of the fit is improved, less variations will be involved in the interpolated model. Consequently, less variations will result in the measurement of the descriptive geometric parameters, hence improving their clinical reliability. In fact, measurement inaccuracies could involve a wrong analysis and misinterpretation of the phenomena associated with scoliosis.

A preliminary application of the kriging technique for the smoothing of three-dimensional reconstructions of the human spine has been made by the authors (André et coll., 1996), and showed promising results. However, since the intrinsic representation of a curve is based on the computation of higher derivatives of the curve, more appropriate drift and covariance functions for the calculation of parameters regarding the geometrical curvature and torsion of the spine in scoliosis need to be investigated.

Kriging originated from Mining Engineering (Krige, 1951) and is now commonly used as a statistical technique to evaluate natural resources. Further mathematical development of kriging in geostatistics has demonstrated that the method constructs the best linear unbiased estimator of a random function. This includes spline interpolation as a particular case, as well as least squares method in a limit case (Matheron, 1980; Trochu, 1993). Kriging is now increasingly used in many areas. In this article, it will be used as an interpolator. The general method of kriging is reported in Trochu (1993) with a particular application to contouring. The present article introduces three-dimensional parametric kriging with an application to spinal deformities for different drift and covariance combinations. Cross-validation is used to select the best drift and covariance.

In kriging, the equivalent of smoothing is obtained by the so-called nugget effect, a term coming from Mining Engineering where kriging was first applied to estimate gold deposits. This notion allows the smoothing of data containing measurement errors such as three-dimensional reconstructed spinal data points. However, the nugget effects to be imposed to the kriging system depend on the type of interpolating functions selected. The main purpose

of this article is then to define a three-dimensional kriging model that best fits, describes and characterizes the majority of scoliotic morphologies. Kriging models will be validated against a series of analytic curves without measurement errors representing typical scoliotic spines. Since least squares Fourier series method is presently used in the spinal stereoradiographic reconstruction technique developed at École Polytechnique of Montreal and used at Sainte-Justine Hospital (Dansereau et coll., 1990), a comparison of this approach with dual kriging will also be undertaken in the present article.

➤ Mathematical description of dual kriging

A complete derivation of the dual kriging equations can be found in Trochu (1993), but the main steps are summarized as follow. Dual kriging permits to construct an approximate function $U(X)$ of a multi-dimensional variable $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ from a finite number of measurements u_i at locations X_i for $1 \leq i \leq N$. The random function $U(X)$ is decomposed into the sum of two terms

$$U(X) = D(X) + C(X) \quad (4.11)$$

where $D(X)$ represents the average value of the estimated function, called drift, and $C(X)$ is an error term or random fluctuation, called covariance. The drift is usually represented by polynomial functions

$$D(X) = \sum_{i=1}^M a_i p_i(X) \quad (4.12)$$

where $p_i(X)$ are M basis functions and a_i unknown coefficients. By adding the correction provided by the fluctuation $C(X)$ to the drift, the function is constrained to honor all the data points. $C(X)$ is constructed to depend linearly on N free parameters b_j , $1 \leq j \leq N$, weighted by correction functions $K(h_j)$, called generalized covariance, depending only on the Euclidian distance $h_j = |X - X_j|$

$$C(X) = \sum_{j=1}^N b_j K_j(h) \quad (4.13)$$

Consequently, the basic dual kriging model, also called "kriging profile", can be written as follows:

$$U(X) = \sum_{l=1}^M a_l p_l(X) + \sum_{j=1}^N b_j K(|X - x_j|) \quad (4.14)$$

where its form is entirely defined by the type of drift and covariance chosen (examples are given at Table 4.2). The $M+N$ degrees of freedom a_l and b_j of this model will be determined by solving a system of $M+N$ linear equations called the kriging system. The first N equations specify that the interpolation passes through the data points and the M additional equations, called unbiased conditions, mean that the drift represents the average value of the phenomenon. A symmetric system of $M+N$ linear equations is then obtained:

$$\begin{bmatrix} & p_1(x_1) & \cdots & p_l(x_1) & \cdots & p_M(x_1) \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K(|x_i - x_j|) & p_1(x_i) & \cdots & p_l(x_i) & \cdots & p_M(x_i) \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & p_1(x_N) & \cdots & p_l(x_N) & \cdots & p_M(x_N) \\ \hline - & - & - & - & - & + \\ p_1(x_1) & \cdots & p_1(x_j) & \cdots & p_1(x_N) & | 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & | & & \\ p_l(x_1) & \cdots & p_l(x_j) & \cdots & p_l(x_N) & | \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & | & & \\ p_M(x_1) & \cdots & p_M(x_j) & \cdots & p_M(x_N) & | 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_N \\ \hline - \\ a_1 \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ a_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_N \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

The kriging system gives the coefficients of the interpolating model which permit the evaluation of interpolated values everywhere in the geometric domain. It is also possible to obtain with kriging the equivalent of smoothing by introducing a nugget effect in system (4.15). A constant is added to the first N diagonal terms of the kriging matrix. The interpolated solution is allowed to move further away from the data points as the nugget intensity increases. At the same time, it becomes smoother.

Tableau 4.2 Drift and covariance functions investigated in this study

Two drift functions $D(X)$	Four covariance functions $K(h)$
<i>Quartic</i> $\sum_{l=1}^5 a_l t^{(l-1)}$	<i>Cubic</i> $1 - 3h^2 + 2h^3$
<i>Fourier Series</i> $a_1 + \sum_{l=2}^5 [a_{2(l-1)} \cos((l-1)\pi t) + a_{2l-1} \sin((l-1)\pi t)]$	<i>Spline 4D</i> $h^4 \left(\frac{1}{2} \ln(h^2) \right)$ <i>Trigonometric</i> $\sin(2\pi h)$ <i>Gaussian</i> $\exp(-h^2)$

Material and methods

➤ Definition of spinal analytic curves

In order to validate different kriging models, several spinal morphologies were defined analytically. First an ideal spine, a two-dimensional geometry, and then scoliotic morphologies resulting from a three-dimensional deformation of the spine were generated. Traditionally, scoliotic spines are classified according to the type of curve observed in the posterior-anterior view (PA). The curve can be single or double, oriented to the left or to the right and the apex can be localized on the thoracic (between T2 and T11), thoracolumbar (between T12 and L1) or lumbar (between L2 and L4) vertebral levels (Perdriole, 1979). However, the great majority of scoliotic spines belong to the following groups: right thoracic (RT), right thoracic-left lumbar (RT-LL) and left thoraco-lumbar (LTL) scoliosis (Pope et coll., 1984).

The ideal spine is characterized as rectilinear from a frontal view and consists of natural curvatures, called kyphosis at the thoracic level and lordosis at the lumbar level. In order to define mathematically an ideal spine, a parametric representation was developed in a Cartesian coordinate system, $x_a = f_1(t)$, $y_a = f_2(t)$ and $z_a = f_3(t)$, in such a way that x -, y - and z -axes represent, respectively, the anterior, left and cranial directions of the spine

(global coordinate system adopted by the Scoliosis Research Society, 1994). For sake of simplicity, functions were estimated by polynomial equations adapted to the geometry. Therefore, x coordinates were represented by a constant term, y coordinates by a linear form and z coordinates by a quartic form. Finally, thoracic and lumbar vertebral centroids were localized on the parametric curve proportionally to their vertebral body height (Scholes et coll., 1988). Figure 4.9 presents the posterior-anterior, lateral and the 5 times magnified coronal views of a simulated ideal spine approximating the mean spinal dimensions of a 15 years old adolescent. In order to simulate scoliotic curves, the ideal spine was deformed by adding to the parametric equations appropriate trigonometric functions to generate the desired scoliotic morphologies. Figure 4.10 shows six different and typical analytic scoliotic spines. Therefore, each analytical curve is mathematically defined by a parametric representation and then physically exists. The 17 discrete points located along the analytical curves and corresponding to the vertebral centroids are used as data points in the interpolation techniques.

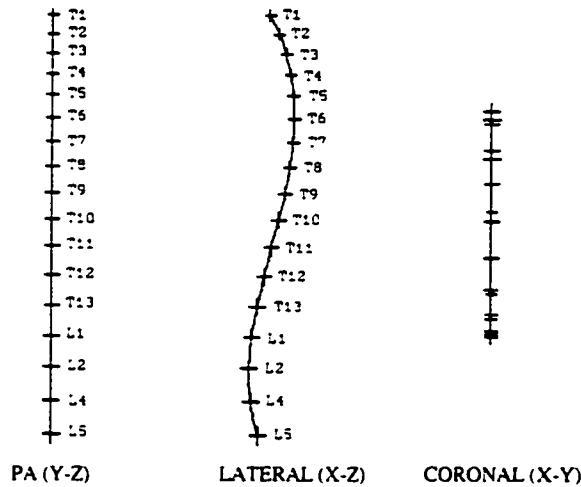


Figure 4.9 Representation of an ideal analytic spine. The ideal spine is mathematically defined by a parametric representation characterized by a rectilinear frontal and coronal (magnified) views and a lateral view constituted by natural curvatures (kyphosis and lordosis). Function $x(t)$ is represented by a quartic polynomial, $y(t)$ by a constant and $z(t)$ by a linear polynomial. Vertebral centroids are identified by their respective thoracic (T) and lumbar (L) levels.

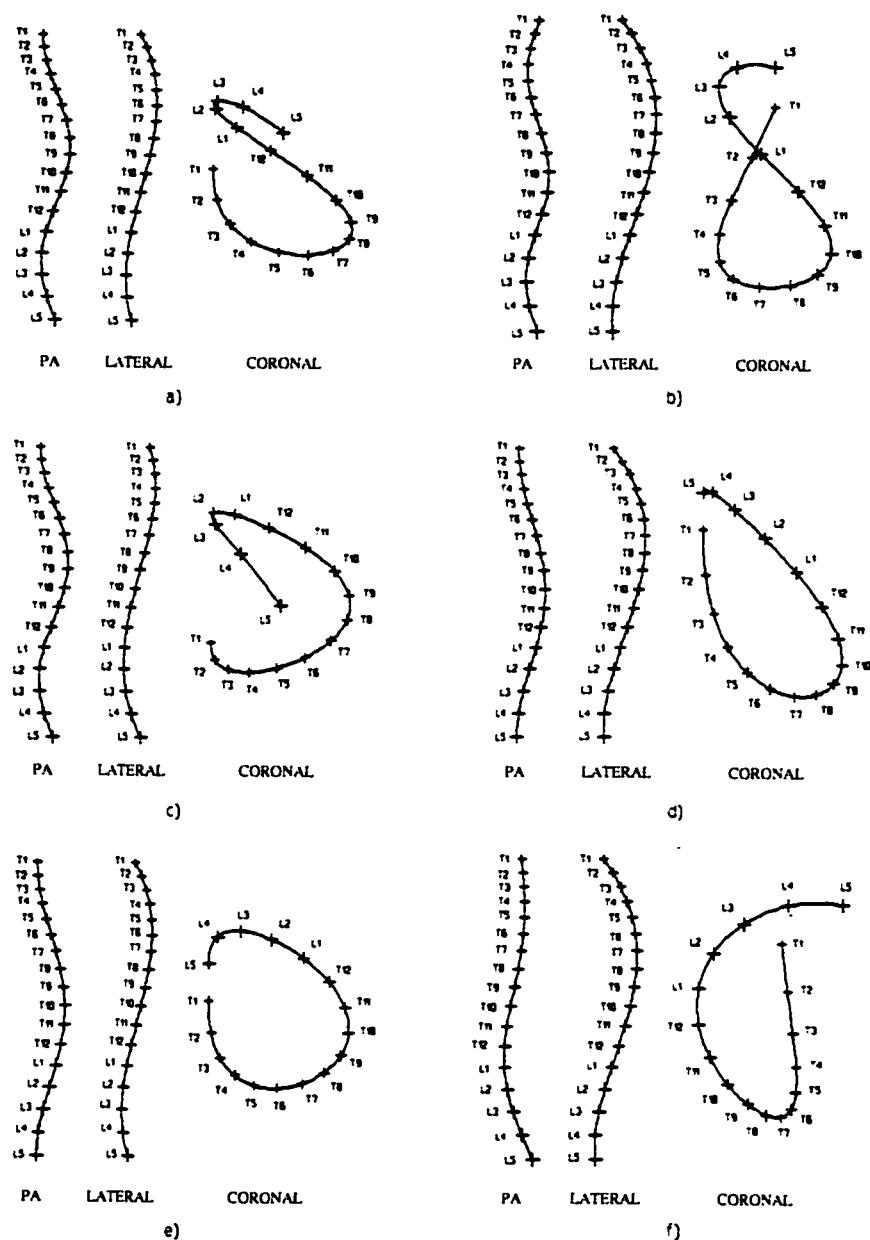


Figure 4.10 Frontal, lateral and coronal (magnified) views of typical scoliotic curves. The curves are generated from mathematical deformation of the ideal analytic spine (by adding appropriate trigonometric functions to the parametric representation). Three of the most important groups of scoliotic geometries are represented such as RT-LL (a,b,c), RT (d,e) and LTL (f) spines.

➤ **Determination of the best kriging profiles by cross-validation**

Kriging can be applied to interpolate three-dimensional curves such as spinal shapes. Each coordinate is expressed as a function of a parameter t associated with the Euclidean chord length of the curve, $x_k = g_1(t)$, $y_k = g_2(t)$ and $z_k = g_3(t)$. Moreover, each parametric function is entirely defined by its own kriging profile (drift and covariance functions) and will be constructed for each coordinate by parametric kriging. As an example, the kriging system is presented here for $x_k(t)$, the procedure being basically the same for $y_k(t)$ and $z_k(t)$. The interpolation function $x_k(t)$ is given by the following general dual kriging model

$$x_k(t) = \sum_{l=1}^M a_l p_l(t) + \sum_{j=1}^N b_j K(|t - t_j|) \quad (4.16)$$

where t , the normalized observation position ($0 \leq t \leq 1$), is associated to each vertebral centroid. The unknown coefficients a_l and b_j are given by the following solution of the kriging system

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc|c|c} & & & & & & | & p_1(t_1) & \cdots & p_l(t_1) & \cdots & p_M(t_1) & | & b_1 & | x_1 \\ & & & & & & | & \vdots & & \vdots & & \vdots & | & \vdots & | \vdots \\ K(|t - t_j|) & & & & & & | & p_1(t_i) & \cdots & p_l(t_i) & \cdots & p_M(t_i) & | & b_i & | x_i \\ & & & & & & | & \vdots & & \vdots & & \vdots & | & \vdots & | \vdots \\ & & & & & & | & p_1(t_N) & \cdots & p_l(t_N) & \cdots & p_M(t_N) & | & b_N & | x_N \\ \hline - & - & - & - & - & - & | & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & | & a_1 & | 0 \\ p_1(t_1) & \cdots & p_1(t_i) & \cdots & p_1(t_N) & | & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & | & a_l & | 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \ddots & & \vdots & | & \vdots & | \vdots \\ p_l(t_1) & \cdots & p_l(t_i) & \cdots & p_l(t_N) & | & \vdots & & \ddots & & \vdots & | & a_l & | 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \ddots & & \vdots & | & \vdots & | \vdots \\ p_M(t_1) & \cdots & p_M(t_i) & \cdots & p_M(t_N) & | & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & | & a_M & | 0 \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ a_1 \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ a_M \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} - \\ - \\ - \\ - \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \quad (4.17)$$

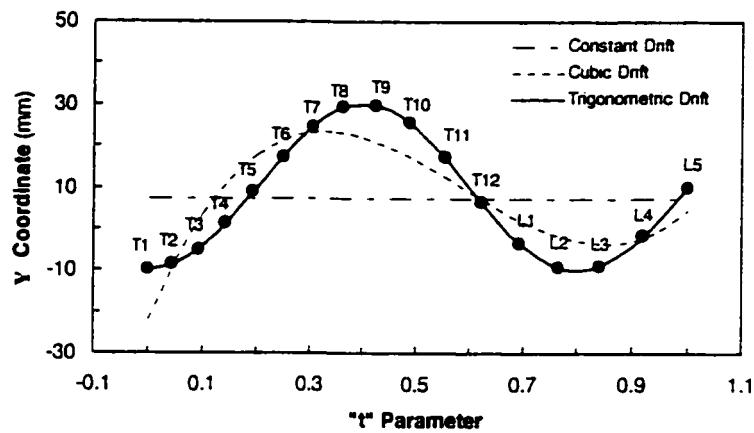
The choice of the drift function is arbitrary. However, the more the drift is close to the real phenomenon, the better are the kriging interpolation results. Figure 4.11a illustrates three different types of drift (constant, cubic and trigonometric), which may represent the average

behaviour of a variable, for example $y(t)$, the y coordinate of a scoliotic spine. The covariance, called correction term, is adjusted in kriging in order to pass exactly through all the given data points and thus better approximate scoliotic shapes. Figure 4.11b shows examples of kriging interpolants for a linear covariance ($K(h) = h$) which is combined with each previous type of drift. In order to better distinguish between the resulting kriging curves, they are presented on a few vertebral levels only (L1 to L4). It can be observed that kriging results in a better interpolation when the drift is close to the real phenomenon. This figure illustrates also the variety of shapes that can be generated by kriging.

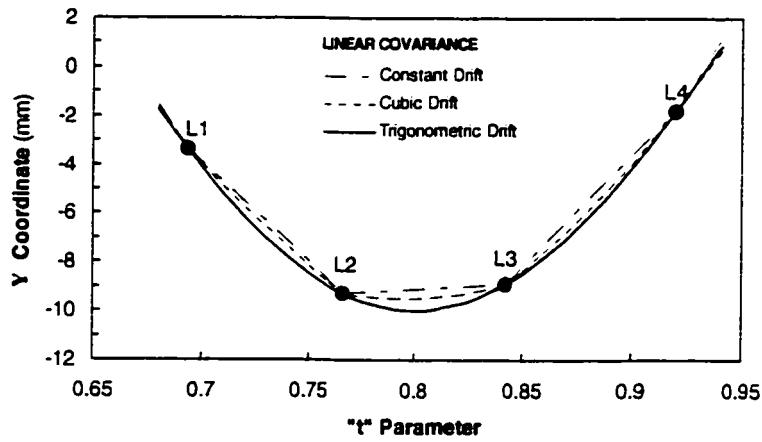
The drift and covariance functions must allow a high degree of differentiability for an appropriate evaluation of geometric parameters such as curvature or torsion (that requires a C^3 continuity to be calculated). Based on the foregoing, two drifts and four generalized covariances as presented in Table 4.2 were investigated in this study. Since analytic spines were simulated mathematically, they are free from measurement errors and thus, the use of a nugget effect will not be necessary here.

By combining each drift with different generalized covariances eight kriging profiles were defined and tested. In order to determine the profile that yields the best fit to experimental data, a cross-validation approach was used. This technique consists of removing one by one each data point (t_i, x_i) from the set of N samples. The same kriging model is then applied to each one of the N new sample sets formed by the remaining $N-1$ data points. For each sample set, a new interpolation model is obtained and the interpolated value x_i^* is evaluated at the previously removed point (t_i, x_i) . The mean quadratic error is then calculated as follows:

$$E_x = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N [x_i - x_i^*]^2 \right]^{1/2} \quad (4.18)$$



a)



b)

Figure 4.11 a) Examples of constant, cubic and trigonometric drift patterns, and b) kriging interpolations when combined with the linear covariance functions $K(h) = h$. a) Examples of the best fit of the constant, cubic and trigonometric drift functions to the measured data, which are in this case the y coordinates of the vertebral centroids, and b) examples of kriging interpolations when the linear covariance functions $K(h) = h$ is combined with each previous drift and plotted on a few vertebral levels. As expected, the trigonometric drift pattern provides the best interpolation result.

The best kriging profile for the studied phenomenon will be the one giving the smallest error E_x . Thus, the best three-dimensional kriging model for a particular spine will be given by the interpolation functions $x_k(t)$, $y_k(t)$ and $z_k(t)$ defined respectively by the profiles associated to the smallest errors E_x , E_y and E_z . Since the purpose of this study is to retain a single three-dimensional kriging model that fits as well all spinal geometries, the global performances of each kriging profile were analyzed. Therefore, the profiles that allow the smallest global errors \bar{E}_x will be those that generally better model the x coordinates of the seven analytic spines (i.e. including the ideal spine).

$$\bar{E}_x = \frac{1}{7} \sum_{s=1}^7 E_x^s \quad (4.19)$$

In a similar manner, the best kriging profiles for the y and z spinal coordinates will be given by the profiles associated respectively to the smallest global errors \bar{E}_y and \bar{E}_z .

➤ Validation of kriging models by evaluation of geometric torsion

The study of curves in space by means of calculus is one topic of differential geometry. Let \vec{r} be a continuously differentiable parametric representation of a three-dimensional curve

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (4.20)$$

Frenet has mathematically developed some specific parameters describing local intrinsic properties of a curve such as curvature κ and geometric torsion τ (Lipschutz, 1969; Kreyszig, 1983).

$$\kappa = \frac{[(\dot{r} \cdot \dot{r})(\ddot{r} \cdot \ddot{r}) - (\dot{r} \cdot \ddot{r})^2]^{1/2}}{(\dot{r} \cdot \dot{r})^{3/2}} \quad (4.21)$$

$$\tau = \frac{\dot{r} \ddot{r} \ddot{r}}{\kappa^2} = \frac{\dot{r}(\ddot{r} \times \ddot{r})}{(\dot{r} \cdot \dot{r})(\ddot{r} \cdot \ddot{r}) - (\dot{r} \cdot \ddot{r})^2} \quad (4.22)$$

Since geometric torsion requires calculation of high degree derivatives (up to the third degree), it is greatly sensitive to modeling errors. This parameter was retained to validate the mathematical accuracy of the curvilinear modeling of the spine.

By combining the best kriging profiles retained for each coordinate, three-dimensional kriging models can be generated. Each of them has been used to model analytic spines. In each case, with the use of Frenet's formulas, the geometric torsion was first estimated based on the interpolation model $x_k(t)$, $y_k(t)$ and $z_k(t)$ selected and then precisely calculated from the parametric representation of each analytic spine. The accuracy of the kriged models was evaluated by comparing the absolute mean errors and standard deviations of torsion calculated at 100 equidistant locations for the seven kriged and analytical spines.

➤ Comparison with least squares Fourier series modeling

The sinusoidal shape of scoliotic curves in frontal and lateral views has motivated the implementation of Fourier series functions in spinal stereoradiographic reconstruction techniques as developed at École Polytechnique of Montreal (Dansereau et coll, 1990) and used in scoliosis clinics at Sainte-Justine Hospital. This formulation easily allows the computation of higher derivatives and thus permits specific calculation of three-dimensional curvature and geometric torsion. When fitted to the vertebral centroids by least squares method, this mathematical representation of the reconstructed spine minimizes the influence of measurement errors.

In order to confirm the interest of the dual kriging technique for scoliosis evaluation, it was compared with the least squares Fourier series method. Consequently, the same calculations have been performed when approximating the parametric representation of the spine $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$ by Fourier series. The global cross-validation errors \bar{E}_x , \bar{E}_y and \bar{E}_z , and the accuracy of geometric torsion measurements were then evaluated for the same analytic curves.

Result and discussion

➢ Cross-validation results

Mean and standard deviations between cross-validation errors of the seven analytic spines are presented in Table 4.3 for the eight different kriging profiles studied. Because the generation of analytic scoliotic curves was obtained only by modifying the original functions $x_a(t)$ and $y_a(t)$ of the ideal spine, the z coordinates were identical for all the analytic spinal curves. Consequently, for a particular kriging profile, the same cross-validation error E_z was evaluated for each spinal function $z_a(t)$ estimated. This explains the zero standard deviation values in the \bar{E}_z column. Furthermore, the small standard deviation values observed in the second half of the \bar{E}_x column means that Fourier series drift, even if it is less accurate than a quartic drift, gives a more consistent approximation of the general form of the parametric function $x_a(t)$.

The x and z spinal coordinates are better described by the quartic drift contrary to the y coordinate where both quartic and Fourier series seem to be far away from the real phenomenon. The z coordinates were linear for all simulated curves, so it is unsurprising that the essentially quartic drift functions replicate the coordinates well. The x coordinates were produced from a combination of polynomial (quartic) and trigonometric functions, which explains the appropriateness of quartic drift functions. The y coordinates were obtained by adding a constant term to trigonometric functions. Fourier series drift functions, however, do not show a clear improvement compared to quartic drift functions as would have been normally expected. Generally speaking, adding Gaussian covariance greatly improves the resulting kriging function except for the z coordinates when it is combined with the quartic drift (see Profile 4, Table 4.3). The Gaussian covariance results in a “normal” distribution so that the position of faraway points has much less effect than the nearby points, which is intuitively realistic. For the other covariances, no matter with which drift they are combined, the error magnitude is quite similar. But, a general trend is observed: spline 4D covariance gives a better result than cubic covariance, which is, in turn,

better than trigonometric covariance. This result appears surprising since coordinates were partly produced from trigonometric functions.

Tableau 4.3 Means and standard deviations (σ) between the cross-validation errors of the seven spinal analytic curves. The parametric representation of each Cartesian spinal coordinate is approximated by each of the eight kriging profiles (drift and covariance combinations). The shaded numbers represent the two best profiles for each coordinate.

Profile	Drift	Covariance	\bar{E}_x [mm] (σ)	\bar{E}_y [mm] (σ)	\bar{E}_z [mm] (σ)
1	Quartic	Cubic	1.88×10^{-3} (1.75×10^{-3})	0.327 (0.279)	3.14×10^{-7} (0.0)
2	Quartic	Spline 4D	1.58×10^{-3} (1.48×10^{-3})	0.241 (0.199)	2.90×10^{-7} (0.0)
3	Quartic	Trigonometric	2.66×10^{-3} (2.49×10^{-3})	0.509 (0.439)	3.33×10^{-7} (0.0)
4	Quartic	Gaussian	7.63×10^{-6} (4.67×10^{-7})	1.78×10^{-4} (2.42×10^{-4})	3.65×10^{-5} (0.0)
5	Fourier series	Cubic	0.368 (6.08×10^{-8})	0.112 (0.140)	0.718 (0.0)
6	Fourier series	Spline 4D	0.115 (2.32×10^{-8})	0.0943 (0.133)	0.220 (0.0)
7	Fourier series	Trigonometric	0.452 (4.56×10^{-8})	0.167 (0.205)	0.891 (0.0)
8	Fourier series	Gaussian	1.66×10^{-4} (7.73×10^{-7})	5.35×10^{-4} (1.02×10^{-3})	8.65×10^{-6} (0.0)

In order to better analyze the results of Table 4.3, a statistical study was realized. A one way variance analysis with 95 percent confidence intervals has demonstrated, for each Cartesian coordinate, that results were not significantly different. However, for the remaining part of the project, only the two best kriging profiles were retained for each coordinate (shaded numbers in Table 4.3).

➤ Kriging models validation

The combination of previously retained kriging profiles has permitted to generate eight different curvilinear three-dimensional models of the spine such as presented in Table 4.4 (starting from the best to the worst combination). For each three-dimensional model, the absolute mean differences and standard deviations between the geometric torsion of the seven analytical and kriged spines have also been reported.

Tableau 4.4 Absolute mean differences and standard deviations (σ) between the geometric torsion of the seven interpolated simulated curves (100 points each) and their analytical torsion when modeled by the eight three-dimensional kriging models generated.

3D Model	Kriging Profile			Geometric Torsion Error [mm ⁻¹]	
	$x_k(t)$	$y_k(t)$	$z_k(t)$	Mean Difference	σ
A	4	4	2	1.20×10^{-5}	7.11×10^{-5}
B	4	4	1	1.20×10^{-5}	7.11×10^{-5}
C	8	4	2	1.22×10^{-5}	7.13×10^{-5}
D	8	4	1	1.22×10^{-5}	7.13×10^{-5}
E	4	8	2	1.44×10^{-5}	1.17×10^{-4}
F	4	8	1	1.44×10^{-5}	1.17×10^{-4}
G	8	8	2	1.46×10^{-5}	1.18×10^{-4}
H	8	8	1	1.46×10^{-5}	1.18×10^{-4}

Generally speaking, all models provide a great accuracy in torsion evaluation and thus confirm the usefulness of cross-validation. Moreover, torsion results are totally consistent

with those of previous section (Table 4.3), i.e., the kriging profiles selected by cross-validation (with smallest \bar{E}_x , \bar{E}_y , and \bar{E}_z errors) yield the best geometric torsion measurements and vice versa. Figure 4.12 shows typical results for one of the analytic curve by comparing kriged and analytical torsions along the spine. Superposition of the torsion curves demonstrates the accuracy of the three-dimensional kriging model used i.e. Model A (see Table 4.4).

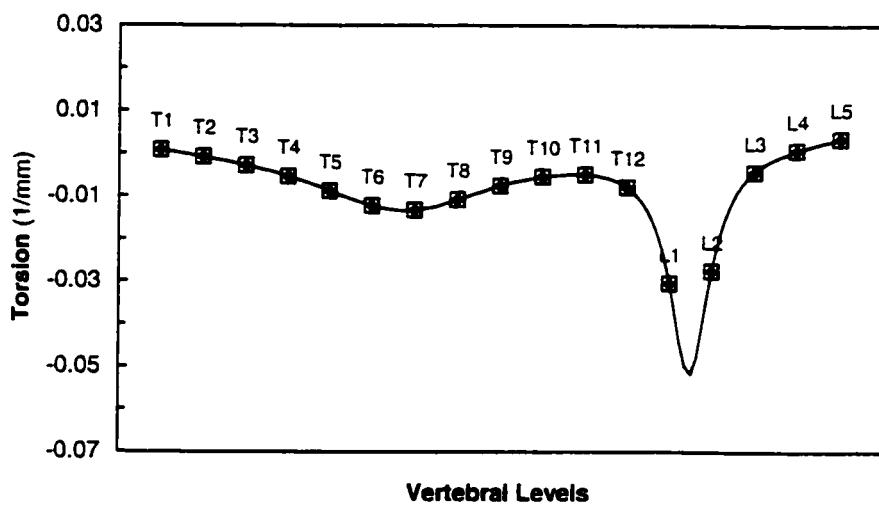


Figure 4.12 Comparison between typical kriging torsion (◆) and analytical torsion (□) for a RT-LL simulated scoliotic geometry (see Figure 4.10c). Torsion calculation was performed respectively from the three-dimensional kriging Model A and the original parametric representation of the spine. The superposition of both torsion curves reveals the greater accuracy of kriging for the evaluation of geometric torsion.

➤ Comparison between methods

Mean and standard deviations between cross-validation errors \bar{E}_x , \bar{E}_y and \bar{E}_z of the analytical spines when modeled by least squares Fourier series method are listed in Table 4.5. The comparison of these results with those reported in Table 4.3 and, particularly,

with those associated with models using a Fourier series drift pattern, such as Model H, reveals how much curvilinear modeling of the spine is improved by introducing the covariance function.

Figure 4.13 presents, for a RT analytical scoliotic curve (see Figure 4.10d) modeled with both interpolation techniques, the estimated geometric torsion results compared with the original geometric torsion of the analytical spine. Superposition of analytic and kriged torsion curves is still observed. A significant improvement of the torsion mean error is also noted, passing from 0.00212 mm^{-1} ($\sigma = 0.00173 \text{ mm}^{-1}$) with Fourier series functions to $2.92 \times 10^{-7} \text{ mm}^{-1}$ ($\sigma = 6.83 \times 10^{-7} \text{ mm}^{-1}$) by kriging with Model A. As shown in Table 4.5, when evaluated on the whole analytic spinal curves, the global torsion mean error is greatly reduced. Results obtained with analytic curves are encouraging and prove the interest of dual kriging as a spinal reconstruction technique for calculation of clinical geometric indices in scoliosis.

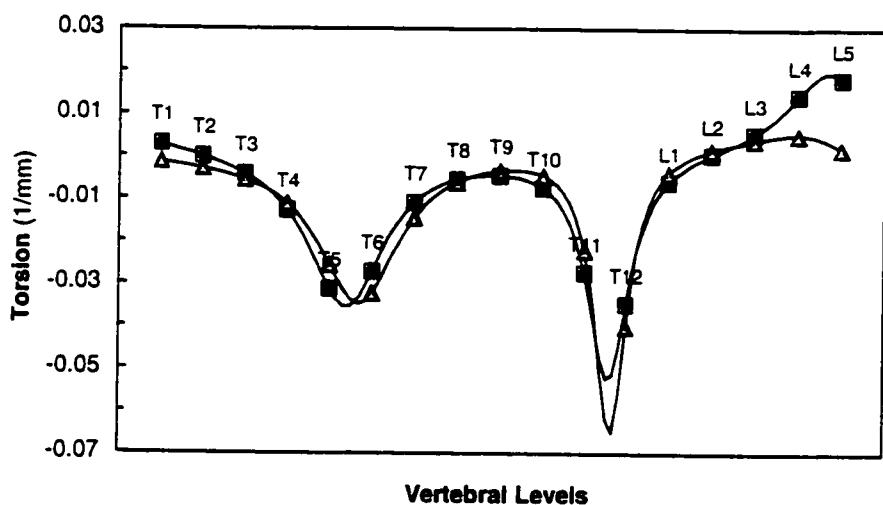


Figure 4.13 Typical geometric torsion measurement of a simulated RT scoliotic curve (see Figure 4.10d). Torsion was approximated by two different interpolation techniques: dual kriging using Model A (◆) and least squares Fourier series (▲). Results are compared with the analytical geometric torsion of the spine (□)

Tableau 4.5 Comparison of errors in coordinates and torsion between least squares Fourier series and kriging interpolation methods. Means and standard deviations (σ) of cross-validation errors as well as absolute mean differences and standard deviation of geometric torsion errors are shown for the least squares Fourier series method. Comparisons are made with results reported in Table 3 and 4 regarding Model II and Model A, which respectively comprise Fourier series drift patterns and the best overall kriging profile for each coordinate.

	Least squares Fourier series	Model H	Model A
Errors in Coordinates:			
\bar{E}_x (σ) [mm]	0.226 (7.63×10^{-8})	1.66×10^{-4} (7.73×10^{-7})	7.63×10^{-6} (4.67×10^{-7})
\bar{E}_y (σ) [mm]	0.0118 (0.0308)	5.35×10^{-4} (1.02×10^{-3})	1.78×10^{-4} (2.42×10^{-4})
\bar{E}_z (σ) [mm]	0.413 (0.0)	3.14×10^{-7} (0.0)	2.90×10^{-7} (0.0)
Errors in Geometric Torsion:			
Mean differences [mm $^{-1}$]	0.00525	1.46×10^{-5}	1.20×10^{-5}
Standard deviation [mm $^{-1}$]	0.00371	1.18×10^{-4}	7.11×10^{-5}

Conclusion

In this article, dual kriging was applied to the parametric representation of analytical three-dimensional spinal curves. Parametric functions $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$ have been constructed for each coordinate by parametric kriging. For each coordinate, the best drift and covariance functions have been selected by cross-validation in order to determine the best curvilinear three-dimensional models of spinal analytic curves. Calculation of geometric torsion was then performed based on the mathematical representation of the spinal curve. Results obtained with analytic curves have demonstrated the efficiency of cross-validation analysis to compare the performances of kriging models and to allow a reliable model selection. Moreover, comparison with least squares Fourier series method has revealed the greater accuracy of kriging for the calculation of clinical geometric indices of the spine in scoliosis.

The use of this kriging approach allows to point out mathematical functions that best describe scoliotic deformity. This most refined and precise curvilinear modeling of the scoliotic spine will improve the clinical reliability of computed clinical indices such as the Cobb angle, the orientation of plane of maximum deformity, as well as descriptive geometric parameters using higher derivative components such as three-dimensional curvature and geometric torsion. More accurate spinal deformity information can then be provided to clinicians and researchers.

Now that we have identified the kriging mathematical model characterizing precisely scoliotic shapes, it will be possible in a further work to undertake the estimation of nugget effects in order to control and modulate the exact amount of smoothing necessary to compensate reconstruction errors and to yield optimal results. This step will allow the application of a single kriging model on three-dimensional reconstruction of patient spinal shapes containing measurement errors. Finally, a clinical study on scoliotic subjects will validate the clinical evaluation of the torsion phenomenon to study orthopaedic treatment effects and evolution of spinal deformity.

4.2 Synthèse du chapitre

Dans ce chapitre, la faisabilité de trois nouvelles approches de modélisation de la géométrie curviligne de colonnes scoliotiques a été étudiée. La première étude aura permis de faire ressortir que l'approche de modélisation par des segments d'hélices elliptiques est mieux adaptée à la mesure de la torsion géométrique que celle des hélices circulaires, mais que tout comme les hélices circulaires (section 2.5.2), elles ne modélisent pas adéquatement toutes les déformations scoliotiques en particulier les déformations lombaires. Malgré cela, l'analyse des tracés de torsion des géométries scoliotiques adéquatement modélisées par cette approche, devrait permettre de constater certaines tendances de la torsion dans la scoliose idiopathique.

Pour pallier les limites de modélisation de cette première approche, la représentation mathématique de la colonne vertébrale par des fonctions de séries de Fourier lissées par la méthode des moindres carrés, a été explorée. Parce que les méthodes de lissage paramétrique modélisent difficilement les zones de changement de sens de certaines courbes spinale (inflexion 3D) une méthode de correction a été étudiée et validée sur des données de colonnes scoliotiques simulées et réelles. La technique de correction qui consiste à définir un point d'inflexion 3D dans la zone du pic de torsion, généralement associée à la jonction des scolioses de type thoracique droite-lombaire gauche, s'est avérée avoir peu d'impact sur le modèle géométrique de la colonne (0.27 ± 0.17 mm) lorsque étudiée sur des colonnes scoliotiques simulées avec erreurs de reconstruction. La méthode de correction s'est avérée fiable à 100% si on complète la correction semi-automatique (71%) des pics de torsion à l'aide de l'approche interactive. Cette approche de modélisation s'est avérée plus adéquate que celle des hélices elliptiques pour représenter les géométries scoliotiques thoraciques et lombaires. De plus, elle permet d'évaluer la torsion en tout point le long de la colonne modélisée évitant ainsi de perdre des informations. L'application de cette approche sur une grande variété de géométries scoliotiques permettra d'étudier la pertinence du paramètre de torsion géométrique comme indice tridimensionnel des déformations scoliotiques.

Le krigeage, une technique d'interpolation plus générale, en ce sens qu'elle englobe la méthode des séries de Fourier lissées par moindres carrés, et aussi plus raffinée, parce qu'elle fait intervenir une fonction de correction (covariance), a été utilisée dans le développement d'une troisième approche d'évaluation de la torsion. Les résultats de l'application de cette approche, sur des données de colonne scoliotiques simulées sans erreur de reconstruction, auront fait ressortir l'utilité du test de validation croisée dans la sélection des meilleures fonctions de krigeage (dérives et covariances). Les évaluations de la torsion à partir des modèles 3D développés en combinant ensemble les meilleures fonctions de krigeage se sont avérées tous plus précises ($1.46 \times 10^{-5} \pm 1.18 \times 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$ à $1.2 \times 10^{-5} \pm 7.11 \times 10^{-5} \text{ mm}^{-1}$) que les résultats de la méthode des séries de Fourier conventionnelle ($5.25 \times 10^{-3} \pm 3.71 \times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$) lorsque comparés à la torsion analytique des courbes simulées. Ces résultats démontrent le potentiel de cette approche dans l'évaluation de la torsion, ainsi que dans celle d'autres indices de déformations (angle de Cobb, angle du plan de déformation maximum, courbure 3D, etc.)

Le but de cette étude était de retenir un modèle de krigeage capable de modéliser adéquatement la plupart des géométries scoliotiques pour pouvoir étudier le phénomène de torsion dans la scoliose à partir de ce modèle. L'application de ce dernier sur des données réelles de colonnes reconstruites présente cependant un nouveau défi. En effet, pour obtenir l'équivalent du lissage, des effets de pépite doivent être introduits dans le système de krigeage (annexe IV). L'effet de pépite est généralement associé aux erreurs de mesure qui se manifestent sous l'aspect d'erreurs de reconstruction dans les données vertébrales de patients scoliotiques. Ces erreurs ne pouvant être calculées précisément pour chaque vertèbre de chaque patient, il est difficile d'estimer des effets de pépite localisés (i.e. pour chacune des coordonnées (x_i, y_i, z_i) des centroïdes vertébraux de la colonne étudiée). Quant à l'imposition d'effets de pépite globaux appliqués sur l'ensemble des niveaux vertébraux, elle constitue selon André et coll. (1996) une limitation majeure qui se manifeste par des erreurs de lissage, c'est-à-dire, correction non nécessaire des niveaux vertébraux bien reconstruits ou correction insuffisante des niveaux moins bien reconstruits. Ces

derniers ont donc développé une approche permettant de contrôler le degré de lissage de sorte que la position corrigée de chaque centroïde vertébral soit contenue dans un volume de contrôle, déterminé préalablement par une étude des erreurs de reconstructions. La validation de cette technique sur des données de colonnes scoliotiques simulées avec erreurs de reconstructions a permis d'estimer une différence moyenne absolue de 1.85 ± 0.50 mm entre la courbe analytique et les courbes krigées obtenues à partir des données bruitées (i.e., avec erreurs de reconstruction simulées). Les résultats de cette étude sont très encourageants puisque la technique de reconstruction radiographique sur laquelle est basée l'étude de André et coll. (1996) était encore moins précise que celle utilisée dans cette thèse (i.e., respectivement 5.6 ± 4.5 mm et 2.1 ± 1.5 mm selon Aubin et coll., 1997). De plus, les fonctions de dérive (quadrique et série de Fourier) et de covariance (Spline-4D) utilisées dans le développement des modèles de krigage de la section 4.1.3 sont plus sophistiquées que celles utilisées par André et coll. (1996) puisqu'elles permettent l'évaluation de paramètres hautement dérivables (ex: courbure et torsion géométrique).

Tout comme les autres méthodes de lissage paramétrique, utilisées dans l'évaluation de la torsion géométrique, le krigage paramétrique modélise difficilement les zones d'infexion 3D caractéristiques de certaines colonnes scoliotiques doubles majeures. Cette limite se manifeste par la présence de valeurs extrêmes indésirables sur les tracés de torsion. Par ailleurs, les succès de la correction de ces dernières (imposition d'un point d'infexion dans la zone instable de torsion) dans l'application de la modélisation par séries de Fourier est un signe prometteur pour l'application d'une approche de correction semblable avec le krigage.

L'objectif principal de ce chapitre était de proposer un modèle géométrique représentant le plus fidèlement possible la géométrie tridimensionnelle de la majorité des morphologies scoliotiques, tout en permettant une évaluation et une interprétation juste du paramètre de torsion géométrique. Les résultats obtenus, avec l'approche des séries de Fourier "corrigée", permettent de dire que ce dernier a été atteint. Toutefois, parce qu'il

est plus facile de visualiser dans l'espace la géométrie d'une hélice elliptique que celle d'une fonction de séries de Fourier d'ordre 3, et parce que les similarités entre les résultats cliniques de ces deux approches devraient permettre de renforcer les conclusions de l'étude présentée dans cette thèse, les approches de modélisation par hélices elliptiques et par séries de Fourier "corrigée" seront utilisées pour passer à l'étape clinique du présent projet. Quant à l'approche basée sur le krigeage, elle nécessite encore certains développements avant d'être applicable à la modélisation de colonnes scoliotiques de sujets réels.

Grâce aux données cliniques disponibles à l'hôpital Sainte-Justine, les deux approches retenues pourront être appliquées à la modélisation d'un grand nombre de géométries scoliotiques. Le prochain chapitre s'intéresse aux résultats cliniques et présente une analyse tridimensionnelle des déformations scoliotiques en terme du paramètre de torsion géométrique. Cette étude vise à étudier la pertinence de ce dernier comme indice clinique tridimensionnel des déformations scoliotiques.

CHAPITRE 5 - CARACTÉRISATION DE LA TORSION GÉOMÉTRIQUE DANS LA SCOLIOSE IDIOPATHIQUE

Le but du présent chapitre est de caractériser le phénomène de torsion mesuré, au sens des déformations scoliotiques, par le biais d'une évaluation clinique. Plus particulièrement, cette évaluation clinique se veut une analyse tridimensionnelle approfondie des déformations scoliotiques en terme du paramètre intrinsèque de torsion géométrique mesuré par l'approche des hélices elliptiques et des séries de Fourier "corrigée". Afin d'étudier la pertinence du paramètre de torsion dans l'analyse tridimensionnelle des déformations scoliotiques, un certain nombre d'indices reliés aux graphiques de torsion a été proposé. Ainsi, le sens de la torsion (signe), les valeurs minimales et maximales de torsion, les changements de direction (valeurs nulles de torsion) ont été relevés et étudiés en corrélation avec les caractéristiques géométriques de la colonne scoliotique tel qu'observées non pas seulement dans les vues conventionnelles coronale et sagittale, mais aussi dans la vue de dessus, rendue disponible grâce aux techniques tridimensionnelles de reconstructions.

5.1 Application clinique de la méthode des hélices elliptiques

Les résultats de l'analyse de la torsion géométrique évaluée chez un groupe de 20 patients scoliotiques (3 TD et 17 TDLG) à l'aide de la méthode des hélices elliptiques ont été présentés lors du Symposium international sur les déformations scoliotiques (annexe II). Deux cas typiques de colonnes scoliotiques TD et TDLG modélisées à l'aide d'hélices elliptiques ainsi que leur tracés de torsion ont été présentés respectivement aux Figure 4.2 et Figure 4.3 de la section 4.1.1. Les valeurs maximums et minimums de torsion observées dans les segments vertébraux des colonnes scoliotiques TD et TDLG étudiées ont été compilées et sont présentées aux Tableau 5.1 et Tableau 5.2.

Tableau 5.1 Moyennes et étendues des valeurs de torsion géométrique des courbes thoracique droite (TD).

Segment vertébral	Maximum de torsion ($\times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$)		Minimum de torsion ($\times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$)	
	moyenne	étendue	moyenne	étendue
Thoracique (T6 to T9)	-31.1	-31.1	-9.69	-9.69
Lombaire (L1 to L4)	-29.32	-27.15 à -31.50	-9.53	-7.09 à -11.97

Tableau 5.2 Moyennes et étendues des valeurs de torsion géométrique des courbes thoracique droite-lombaire gauche (TDLG).

Segment vertébral	Maximum de torsion ($\times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$)		Minimum de torsion ($\times 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$)	
	moyenne	étendue	moyenne	étendue
Haut thoracique (T2 to T8)	-44.67	-18.69 à -40.16	-12.57	-50.50 à -22.09
Bas thoracique (T9 to T11)	-31.64	-11.44 à -85.11		
Haut lombaire (T12 to L2)	71.90	36.23 à 107.57	8.66	3.06 à 14.40
Bas lombaire (L3 to L4)	33.79	33.79		

D'après l'analyse des Tableau 5.1 et Tableau 5.2, la scoliose idiopathique serait belle et bien associée à un phénomène de torsion unidirectionnelle dans le cas des courbes thoraciques primaires (ex: Figure 4.2a et Figure 4.3a) et de double direction opposée chez les courbes doubles majeures de type thoracique droite-lombaire gauche (ex: Figure 4.2b et Figure 4.3b). Ces résultats viennent supporter les suppositions de plusieurs auteurs et

cliniciens qui ont qualitativement décrit le segment thoracique comme étant en torsion et le segment lombaire en contretorsion, et vont aussi dans le sens des résultats obtenus avec l'approche des hélices circulaires (Dansereau et coll., 1993).

Il ressort également de cette analyse que les maximums sur les tracés de torsion correspondent à des changements d'orientation (points d'inflexions) de la colonne modélisée, tel qu'observés dans les projections frontale et sagittale et donc serait associé aux vertèbres limites des scolioses et des courbures sagittales (cyphose et lordose). Quant aux valeurs minimales de torsion, elles sont localisées près ou à l'apex (vertèbre apicale) des courbures scoliotiques. Ces résultats sont en accord avec ceux d'autres études exposées à la section 2.5.2 (Dansereau, 1983; Ortale et coll., 1993; Kanayama et coll., 1996).

À cause des problèmes de discontinuités (modélisation séparée des segments lombaire et thoracique) la mesure de la torsion géométrique à la jonction des courbes scoliotiques thoracique et lombaire n'a pas été possible et, par conséquent, cette zone n'a pu être analysée jusqu'à présent. Malgré cela, l'analyse des tracés de torsion laisse penser que pour la majorité des courbes de type thoracique droite-lombaire gauche, les déformations 3D du rachis passeraient par un point de torsion nulle dans la région thoraco-lombaire (Figure 4.3b).

D'autres limites de cette première étude clinique concernent le nombre de sujets recrutés, une vingtaine, et les morphologies scoliotiques étudiées soient les types thoracique droit et thoracique droit-lombaire gauche parce que les plus fréquemment rencontrés. Les résultats de cette première approche de modélisation auront néanmoins permis de jeter les premières bases de l'interprétation du phénomène de torsion géométrique dans la scoliose. Cependant, pour valider ces résultats et approfondir l'analyse du phénomène de torsion géométrique dans la scoliose, une approche plus raffinée et plus précise comme

celle des séries de Fourier "corrigée" sera appliquée sur un plus grand nombre de cas, de géométrie variée.

5.2 Application clinique de la méthode des séries de Fourier "corrigée"

5.2.1 Situation du troisième article

L'étude de faisabilité présentée au chapitre précédent (section 4.1.2) a permis de déterminer la cause des instabilités numériques rencontrées dans les tracés de torsion et démontrer qu'il était possible de les corriger avec succès permettant pour la première fois une évaluation plus juste du phénomène de torsion dans la scoliose. Cette deuxième évaluation clinique permettra donc de valider les résultats de l'analyse tridimensionnelle des déformations scoliotiques de l'étape précédente à l'aide du modèle plus raffiné des séries de Fourier "corrigée". Cette étape fournira aussi des informations additionnelles sur l'aspect tridimensionnel des déformations scoliotiques.

Tel qu'exposé à la section 2.6, les systèmes de classification jouent un rôle important sinon crucial puisqu'ils sont utilisés par les spécialistes de la scoliose pour guider leur diagnostique et le choix du traitement. Cependant, le système courant de classification (King) des scolioses idiopathiques de l'adolescence n'est pas suffisamment fiable et ne décrit pas les courbes scoliotiques avec précision. Cette étape proposera une méthode de classification tenant compte de la variété des patrons de scoliose et de l'aspect tridimensionnel et torsionnel de la colonne scoliotique.

Puisque l'analyse géométrique en terme de torsion est limitée aux propriétés intrinsèques de la courbe modélisant la colonne vertébrale, certains aspects de la description conventionnelle des scolioses ne sont pas inclus dans l'analyse que l'on peut tirer de ce paramètre. On peut donc s'attendre à ce que les corrélations entre certains indices cliniques et la torsion géométrique ne soient pas évidentes. De plus, les indices utilisés comme point de comparaison sont souvent imparfaits. Par exemple, l'angle de Cobb n'est

pas unique à la courbe (limitée au plan dans lequel il est mesuré) et la rotation vertébrale est difficile à mesurer avec précision à partir des radiographies. Il devient alors d'autant plus pertinent de classifier les courbes scoliotiques en 3D avant d'étudier les relations entre les indices de torsion géométrique et les indices standards de description des déformations scoliotiques.

L'application clinique de l'approche des séries de Fourier "corrigée" est présentée dans l'article ci-dessous:

Poncet, P., Dansereau, J. et Labelle, H. (2001) «Geometric Torsion in Idiopathic Scoliosis: Three-Dimensional Analysis and Proposal for a New Classification», *Spine*, 26(20): 2235-2243.

La contribution du premier auteur à la préparation et rédaction de cet article est d'environ 90%.

5.2.2 Article #3: «Geometric Torsion in Idiopathic Scoliosis: Three-Dimensional Analysis and Proposal for a New Classification»

GEOMETRIC TORSION IN IDIOPATHIC SCOLIOSIS: THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS AND PROPOSAL FOR A NEW CLASSIFICATION

Philippe Poncet, MSc,^{1,3}, Jean Dansereau, PhD,^{2,3}, Hubert Labelle, MD,³

- 1- Biomedical Engineering Institute, École Polytechnique,
P.O. Box 6079, Station "Centre-ville", Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada
- 2- Department of Mechanical Engineering, École Polytechnique,
P.O. Box 6079, Station "Centre-ville", Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada
- 3- Research Center, Sainte-Justine Hospital,
3175 Côte Sainte-Catherine Road, Montréal Québec, H3T 1C5, Canada

Correspondence and requests for reprint to:

Philippe Poncet (c/o Dr. Ronald F. Zernicke)
McCaig Centre for Joint Injury and Arthritis Research
Faculty of Medicine, Department of Surgery
3330 Hospital Drive N.W.
Calgary, Alberta, Canada T2N 4N1
E-mail: philippe@mccraig.ucalgary.ca
Tel. number: (403) 220-7727
Fax number: (403) 270-0611

Acknowledgments:

This research was funded by the Natural Sciences and Engineering Research of Canada (NSERC) and the Fonds pour la Formation de Chercheurs et l'Aide à la Recherche du Québec (FCAR).

Short running title: Geometric torsion in scoliosis

Abstract

Study Design. Three-dimensionally reconstructed spines of 62 subjects with idiopathic scoliosis were reviewed for three-dimensional pattern classification, based on the measurement of geometric torsion.

Objectives. To evaluate the relevance of geometric torsion as a three-dimensional index of scoliosis, and to develop a three-dimensional classification of deformity for idiopathic scoliosis as opposed to the actual classifications based on two-dimensional frontal views.

Summary of Background Data. Attempts have been made to measure the geometric torsional shape of scoliotic curves represented curvilinearly. However, the geometric torsion phenomenon has never been properly analyzed and thus has never been precisely defined.

Methods. Standardized stereoradiographs of 62 patients with idiopathic scoliosis were obtained and used to generate three-dimensional reconstructions. A continuous parametric form of the curved line that passes through the vertebrae was created by least square fitting of Fourier series functions. Frenet's formulas then were used to calculate the geometric torsion.

Results. Analysis of geometric torsion associated with 94 major scoliotic curves allowed three basic categories of torsion curve patterns to be identified. Scoliotic spines with multiple major curves are described by a combination of basic torsion patterns, one for each curve.

Conclusion. A three-dimensional analysis of the spine in terms of geometric torsion has defined three distinct patterns of torsion in a group of scoliotic curves. Geometric torsion had extreme values at the levels of upper and lower vertebrae, but zero or nearly zero values at the levels of the apexes. The torsional phenomenon can be unidirectional or bi-directional in both single and double major curves.

Mini Abstract

Three-dimensional reconstructions of the spine of 62 subjects with idiopathic scoliosis were reviewed for three-dimensional pattern classification. Analysis of the geometric torsion associated with 94 major scoliotic curves allowed identification of three basic torsion curve pattern categories. We believe that this classification could reduce the confusion in scoliosis curve pattern recognition.

Key Points

- Geometric torsion is an intrinsic property of a curved line and can be used to characterize the 3D shape of scoliotic spine.
- Three-dimensional analysis of the spine in terms of geometric torsion demonstrated the 3D similarity between right and left curve patterns and led to the distinction of three basic patterns of torsion in a group scoliotic curves.
- Geometric torsion had extreme values at the levels of upper and lower vertebrae, and zero or nearly zero values at the levels of the apexes.
- The torsional phenomenon can be unidirectional or bidirectional in both single and double major curves.
- Scoliotic spine classification in terms of geometric torsion, a true 3D measurement, shows promise for reducing confusion in scoliosis curve pattern recognition.

Introduction

Idiopathic scoliosis, a disorder that generates a complex three-dimensional (3D) deformation of the spine, generally increases with time. Many treatments have been developed to stop or reduce progression of this spinal deformity. The etiology of idiopathic scoliosis remains unknown, despite extensive research.

Scoliotic deformity traditionally is measured and classified in two dimensions (2D) using standing anteroposterior (AP) or posteroanterior (PA) radiographs. Two-dimensional measurements can provide only a simplification of the real 3D spinal deformity. Different spinal shapes can produce the same 2D view in a particular projection. Using 3D measures in clinical practice and research may bring significant benefits: a more accurate description of the deformity that can lead to more effective treatment planning, a better understanding of deformation mechanisms that may allow the development of more appropriate treatments for scoliosis correction, and a more accurate evaluation of the effect produced by a specific treatment.

During the past 30 years, numerous methods have been developed to represent the spine in three dimensions and to perform 3D measurements. The recent development of new spinal instrumentation devices has modified the surgical treatment of scoliosis by allowing 3D correction of deformities. It became evident that the proposed 2D classifications of scoliotic curves are incomplete. Because of the 3D nature of scoliosis, curve patterns should be evaluated directly in three dimensions.

The purpose of the current study was to evaluate the relevance of geometric torsion as a 3D index of scoliosis. The specific aim was to develop a 3D classification of scoliotic deformities as opposed to the usual classifications based on the frontal plane projection of the spine. The working hypothesis was that the 3D deformity of idiopathic scoliosis could be characterized by recognizable patterns of geometric torsion.

➤ **Background**

Several authors have attempted to explain the morphological changes in idiopathic scoliosis deformities through study of transverse plane evolution (De Smet et al., 1983; Graf et al., 1983; Perdriolle et Vidal, 1985 et 1987; Asher et Cook, 1995). The theory that scoliosis deformities evolve as a torsion was first proposed by Graf et al. in 1983 followed by Perdriolle and Vidal in 1987. In 1995, this theory was supported by the results of a study by Asher and Cook on all common idiopathic scoliotic deformities. Considering the 3D nature of scoliosis deformities, analysis of 3D indexes that provides pertinent information on the torsional description of scoliosis deformities has assumed clinical importance.

Three-dimensional representations of scoliotic spines are generally obtained by multiview radiographic 3D reconstruction techniques. A curved line that passes through the thoracic and lumbar vertebra centroid often is used to describe the general shape of the spine. Attempts, therefore, have been made to measure the geometric torsional shape of scoliotic curves (Patwardhan and vanderby, 1976; Hierholzer and Lüxmann, 1982; Allard et al., 1984; DeSilva et al., 1990 and 1994; Poncet et al., 1992 et 1996; Dansereau et al., 1993; Ortale et al., 1993; Kanayama et al., 1996). There also have been propositions to develop a biomechanical model expressed in terms of geometric torsion that could be used to simulate the 3D response of the spine to any corrective forces (DeSilva et al., 1990 and 1994; Patwardhan and vanderby, 1976).

In contrast to mechanical torsion, which produces a structural deformation of the vertebrae themselves that can be measured by an angle (Dubousset, 1994; Stokes, 1994), geometric torsion is a property of a helical line without specific relation to the rotation and deformation of the vertebrae themselves. Figure 5.1 graphically represents the theoretical difference between geometric torsion and mechanical torsion. Mechanical torsion of the vertebral column, which has been implicated in scoliosis since the early 1900's, therefore, completely differs in concept from the geometric torsion of the curved line that passes through the vertebrae.

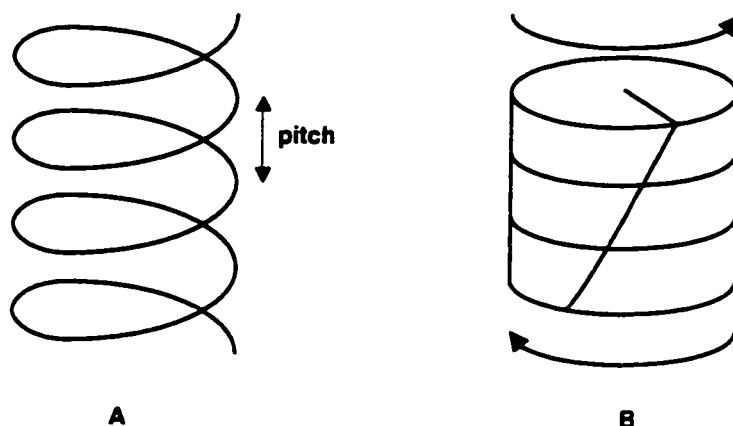


Figure 5.1 Torsion has two meanings: It is a property of a curve (geometric torsion) and the deformation of a solid structure. (A) In scoliosis, the geometric torsion is related to the amount of helicoidal deformity in the spine, and especially to the pitch of that helix. (B) Mechanical torsion is the relative rotation or vertebral deformations between lines joining similar landmarks on specified vertebrae.

Smoothing techniques usually are the most satisfactory means for fitting a curve to experimental data points that contain measurement errors (e.g., reconstructed vertebrae centroids). Smoothing techniques use an approximating function that graphs as a smooth curve with the general shape suggested by the data values, but generally without passing exactly through all of the data points. Spline and least squares techniques, the most frequent methods used in curve fitting, have been used to model the curvilinear shape of scoliotic spines (James et al., 1977; Wolf, 1983; Gerald et Wheatley, 1985).

Some models based on the least square fit of circular (Dansereau et al., 1993) and elliptical helices (Poncet et al., 1992) as well as parametric polynomial (Ortale et al., 1993; Kanayama et al., 1996) and trigonometric (Poncet et al., 1993) functions have been used to represent the configuration of scoliotic spines. In the family of least squares methods, function coefficients are computed to minimize the sum of squared distances between the input

data points and the function used to fit a curve to these points. The function form generally is suggested by the general appearance of the plotted data. The most popular forms are polynomial (e.g., linear, quadratic), exponential, and trigonometric series functions (e.g., Fourier series).

Other models have been developed that use fitting techniques such as smoothing splines (Dansereau et al., 1983) to model the entire curve shape of scoliotic spines. In the family of spline methods, the interpolating function will either match the n data points (nodes) exactly or allow some deviations (smoothing splines). A spline approximation is piecewise polynomial approximation. This means that the function interval is partitioned into $n-1$ subintervals with common nodes. Each subinterval of that partition is represented by a polynomial. The smoothing spline is obtained by weighting the data points, which governs the amplitudes of the permitted deviations of the curve from the data points.

However, for many modeled spinal curves, interpretation of torsional phenomena becomes almost impossible because of nonrepresentative torsion values. These appear as a spike on the geometric torsion curves (Dansereau, 1983; Ortale et al., 1993; Poncet et al., 1996). Although modeling of the spinal shape by segments of circular and elliptical helices minimized spike appearance, the resulting models have limitations such as curve discontinuity caused by sequential modelling of the thoracic and lumbar segments as well as inability to fit all types of scoliotic shapes. Consequently, the geometric torsion phenomenon has never been analyzed properly and thus precisely defined. To overcome this drawback, a corrective approach for the evaluation of geometric torsion has been developed and validated by the authors (Poncet et al., 1996). In summary, it involves in the eliminating the nonrepresentative torsion spikes while minimizing the original geometric model deformity. To the authors' knowledge, this is the first method that allows a reliable evaluation of geometric torsion at any point along the spine in scoliosis.

Idiopathic curve patterns were first classified in 1905 by Schulthess into five basic clinical types according to the location of the apex of the curve. Subsequently, this basic curve pattern classification was clarified, revised and enlarged (Ponseti and Friedman, 1950; James, 1954; Scott and Morgan, 1955; Moe and Kettleson, 1970; Goldstein and Waugh, 1973; James et al., 1977; Cruickshank et al., 1989). Commonly accepted idiopathic basic curve patterns fall into seven types: 1) single thoracic, 2) single thoracolumbar, 3) single lumbar, 4) double thoracic, 5) double thoracic and lumbar, 6) double thoracic and thoracolumbar, and 7) triple or more curve patterns.

A subdivision of the basic curve types was proposed in 1983 and revised in 1994 by King et al. to facilitate the selection of the fusion areas (King et al., 1983; King, 1994). The curves were subdivided on the basis of their configuration, magnitude and degree of flexibility. However, similar studies conducted by two different groups lately have shown that the King system has a poor intraobserver and interobserver reliability (Cummings et al., 1998; Lenke et al., 1998). More recently, Coonrad et al. (1998) produced a classification comprising 11 pattern types based on the Scoliosis Research Society definitions of coronal pattern determination according to the location of the apical vertebra. The nomenclature of the King patterns and the seven aforementioned types were incorporated in this more comprehensive classification. However, the exclusion of sagittal and 3D deformity considerations still remains the limitation of these studies.

➤ Geometric Torsion Definition

To determine torsional curve patterns, it is essential to summarize how geometric torsion is defined. If Figure 5.2b is considered a mathematical representation of the curved line that passes through the vertebrae of a scoliotic spine (Figure 5.2a), then at each point on the curve, three orthogonal (perpendicular to each other) unit vectors have been associated: the tangent \vec{t} , the normal \vec{n} and the binormal \vec{b} vectors. As shown in Figure 5.2b, they form a trihedron that can be visualized as traveling along the curve. The geometric torsion τ (expressed in mm^{-1}) was developed mathematically by Frenet and measures the arc rate of

binormal vector \bar{b} turning (Kreysig, 1983; Lipschutz, 1969). In other words, the geometric torsion at a point on the curve is the rate of rotation of the plane formed by the tangent \bar{t} and normal \bar{n} vectors. In comparison, a spring at rest has a relatively larger torsion (*i.e.*, a most rapidly changing binormal direction) than when it is stretched, until the spring becomes a straight line at the limit of stretch. A curve is uniquely determined by its torsion, allowing one curve to be distinguished from another. For the sake of simplicity, a spinal curve can be conceived as a straight wire wound around a solid cylinder (Figure 5.2b). This would be a curve of constant geometric torsion, whereas scoliosis curves have variable torsion, as that of a straight wire wound around a solid cone with a constantly changing diameter.

The geometric torsion is a true 3D measurement. In fact, a straight line or any 2D geometry such as a circle or a planar curve has zero torsion, with \bar{b} is constant along the curve. Because a normal spine is assumed to lie entirely in the sagittal plane, its representation is a plane curve without torsion. The sign of the torsion has a geometric interpretation: A positive value indicates a trihedron moving in a counterclockwise direction, as in Figure 5.2b, and a negative value is associated with a trihedron moving in a clockwise direction. Local zeros of torsion are associated with a direction change of the moving trihedron along the spinal curve. When applied to scoliosis, the geometric torsion is defined as a local geometric property of the 3D curved line passing through thoracic and lumbar vertebrae that measures the amount of helicoidal deviation of the vertebrae, without specific relation to the rotation and deformation of the vertebrae themselves. By developing a torsional classification that addresses scoliosis as a 3D deformity, the concept of scoliosis deformity could be simplified.

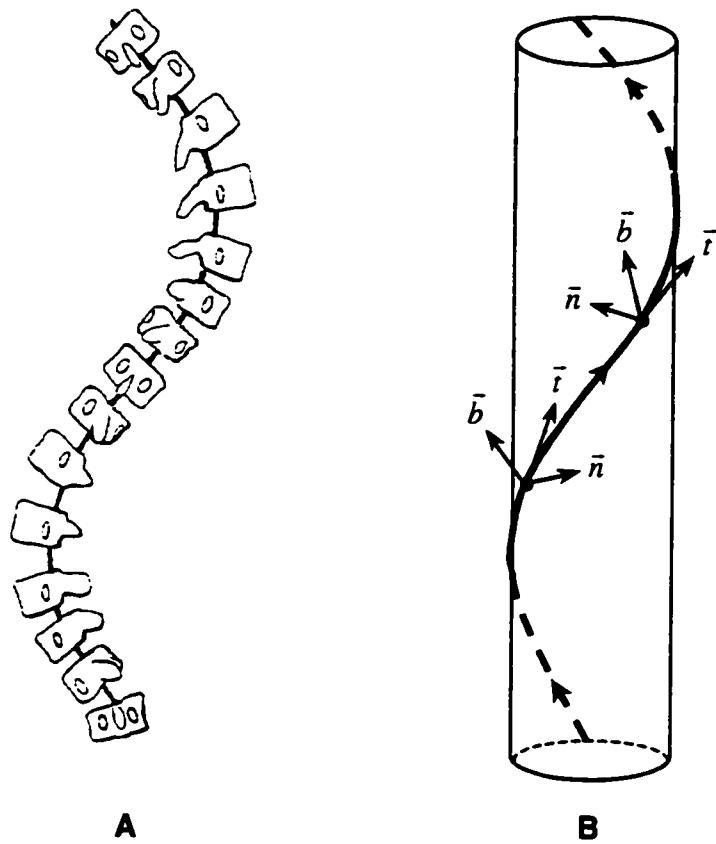


Figure 5.2 Visualization of (A) the scoliosis deformity as (B) an elongated helical line uniquely determined by its geometric torsional quantity. The concept of geometric torsion (τ) is illustrated by the moving trihedron formed by the tangential \bar{t} , normal \bar{n} , and binormal \bar{b} vectors. Geometric torsion measures the amount of deviation (divergence) of the curved line from the plane determined by the tangent \bar{t} and normal \bar{n} vectors. The sign of τ is an intrinsic property of the curve. A positive value of torsion indicates a trihedron traveling in a counterclockwise direction (such as shown) and a negative value in a clockwise direction.

Materials

In the current study, personalized 3D reconstructions of scoliotic spines were obtained from a technique developed by the authors' group (Dansereau et al., 1990) and routinely used at the scoliosis clinic of their hospital. The geometric model is built using the direct linear transformation method (Marzan, 1976) and applied to six anatomic landmarks per vertebra (superior and inferior bases of both pedicles and endplate centers) digitized on posteroanterior and lateral radiographs views. Findings show that the reconstruction accuracy of this technique is 2.1 ± 1.5 mm (Aubin et al., 1997). The main source of error is the difficulty in identifying exactly the same landmarks on all radiographs. A continuous parametric form of the spatial curve through the vertebrae has been obtained by least square fitting Fourier series functions to obtain a geometric model.

To study patterns of torsion in scoliotic subjects, two different groups were studied. First, a control group made up of five healthy normal subjects (Cobb angle $< 5^\circ$) was randomly selected as the reference group. Second, a group of 62 patients with adolescent idiopathic scoliosis were recruited at the authors' hospital. Inclusion criteria required that the patients manifest a scoliotic deformity with a documented Cobb angle progression of more than 5° within the preceding 6 months for which brace or surgical treatment was recommended by one of the orthopedic surgeons at the scoliosis clinic. All patients with other significant medical or surgical conditions were excluded. Of the eligible patients, 32 had a double major right thoracic-left lumbar (RTLL) scoliotic curve, 13 had a major right thoracic curve (RT), 12 had a major left thoracolumbar curves (LTL), and 5 had a right thoracolumbar curve (RTL). The patients had a mean age of 14 years (range, 8-18 years) and mean Cobb angles of 40° (range, 18-71°).

Methods

Standardized stereoradiographs were obtained for each recruited subject and used to reconstruct specific anatomic landmarks of T1 to L5 vertebrae in 3D according to a previously described technique (Dansereau et al., 1990). The 3D location of the centroid of each thoracic and lumbar vertebra was computed as the mean of the four bases of pedicles. By fitting a 3D curve through vertebral centroids using a least square Fourier series method, a mathematical parametric description was obtained for each individual shape of the 62 reconstructed scoliotic spines. Frenet's formulas then were used to calculate the geometric torsion τ . Torsion spikes were detected and corrected by the application of the elimination technique (Poncet et al., 1996).

Qualitative visual analysis of the torsion curves in terms of minimum and maximum values of torsion, local zero values, and torsion direction was performed. These values were used to verify a correlation between the curves and geometric characteristics of the spine observed in the frontal, sagittal and apical views such as curve orientation, apical and end vertebrae location, and sagittal profile abnormalities. Each curve was classified so a general pattern could be identified.

Results

➤ Geometric Torsion in Normal Spines

In a previous section it was mentioned that normal spines are planar, and thus, according to the definition, have no torsion. In reality, the ideal spine does not exist, but values of geometric torsion in the control group were small. In all cases the maximum absolute values of torsion were found to be less than 0.02 mm^{-1} . In the scoliotic group, maximum values of torsion ranged from 0.024 to 0.084 mm^{-1} . Geometric torsion in normal spines is much less than in scoliotic spines.

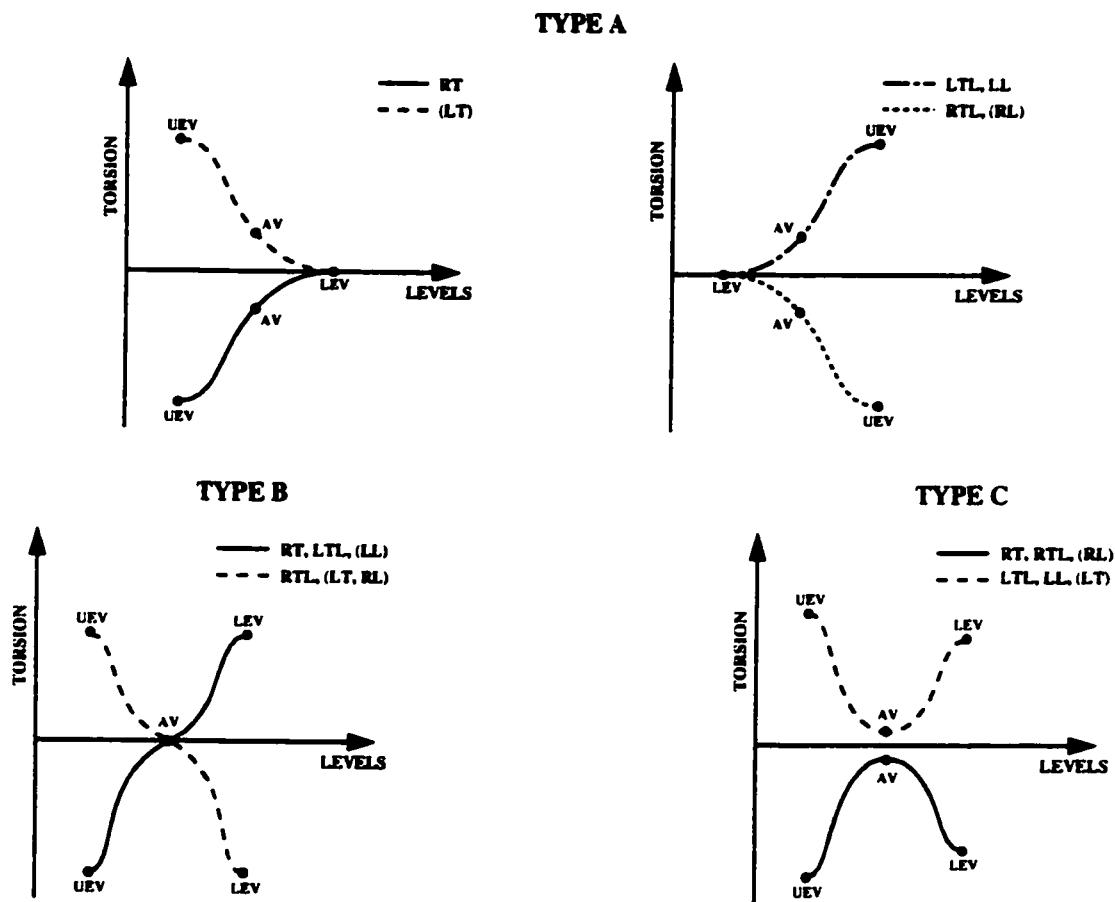


Figure 5.3 Three distinct torsion curve patterns detected and categorized according to the apex orientation (left or right) and location (thoracic, thoracolumbar or lumbar). The geometric torsion was evaluated in 62 reconstructed scoliotic spines, comprising 94 idiopathic curves. Patterns of right and left curves are reversed in a mirror fashion, which allowed extrapolation of torsion patterns of the unconsidered left thoracic, left lumbar and right lumbar curves. In Type A curves, the maximum torsion is located in the upper-end vertebrae (UEV) region, whereas in Types B and C curves, this occurs in both the UEV and the lower-end vertebrae (LEV) regions. Generally speaking, minimum values of torsion occur in the apical vertebrae (AV) region. In Type A and C curves, the geometric torsion is unidirectional, whereas Type B curves are subjected to torsion in opposite directions.

➤ Scoliotic Curve Classification

Of the 62 subjects recruited, 32 manifested a double major curve and 30 a single major curve, for a total of 94 curves classified in three categories as follows: 45 thoracic, 15 thoracolumbar and 34 lumbar curves. Analysis of the geometric torsion associated with the 94 curves showed three distinct patterns of torsion that the authors have named Types A, B and C. Figure 5.3 illustrates these patterns according to the curve orientation and localization. Depending on whether the apex is oriented to the left or to the right, the associated pattern simply is reversed in a mirror fashion. Curves of different levels and opposite side orientations (*e.g.*, right thoracic and left lumbar curves) also were found to show the same pattern as Type B. Indeed, their 3D shapes were similar, but not oriented in the same way in space. This could make them appear different when presented using the conventional coronal, sagittal and apical views. The classification of infrequent left thoracic and right lumbar curves in Figure 5.3 (see parenthesis) has been extrapolated because these curves were not considered in this study. Nevertheless, their classification was supported by observations we made afterward.

In Type A curves, the pattern can be interpreted as if an unique torsional force was applied at an extremity of the curve while the other extremity was fixed ($\tau = 0$), with maximum torsion located in the end vertebrae region and disappearing in the opposite end vertebrae region. In Type B, the segments above and below the apex present a torsion behavior of opposite direction, with torsion maximum in the end vertebrae region. This suggests that the end vertebra regions were subjected to two torsional forces acting in opposite direction and vanishing in the apex zone. Type C curves can be described as being submitted to two torsional forces acting in the same direction and applied at each extremity of the curve, reaching maximum values in the end vertebrae region and minimum values at the apex as if it was nearly fixed. Table 5.3 summarizes the distribution of torsion patterns according to the curve location.

Tableau 5.3 Distribution of torsion patterns among 94 curves classified according to the apex location*

Curve Classification	Type A	Type B	Type C
	n (%)	n (%)	n (%)
Thoracic	28 (30)	14 (15)	3 (3)
Thoracolumbar	7 (7.5)	5 (5.5)	3 (3)
Lumbar	22 (23)	—	12 (13)

*The values are given as the number of curves, with the percentage in parenthesis.

➤ Scoliotic Spine Classification

Generally speaking, in single major scoliotic curves, the geometric torsion pattern is described by one of the three types. Figure 5.4 shows three right thoracic curves, all apparently similar in posteroanterior view, but characterized respectively by pattern Types A, B and C. Pattern Types A and C have been noticed previously in primary thoracic curves by the authors (Poncet et al., 1992; Dansereau et al., 1993), and depicted as a unidirectional torsion phenomenon. However, the current study showed that primary curves also could be subjected to torsion in the opposite direction (Type B curves). These three main types of torsion patterns were found to show distinctly different sagittal profiles in single scoliotic curves. Single thoracic and lumbar Type A curves demonstrated mainly a normal sagittal profile, as opposed to Types B and C, which showed, respectively, long kyphotic and lordotic segments in thoracic scoliosis and the converse in lumbar scoliosis. Single thoracolumbar curves showed different degrees of sagittal profile abnormalities, no matter the type of associated torsion pattern.

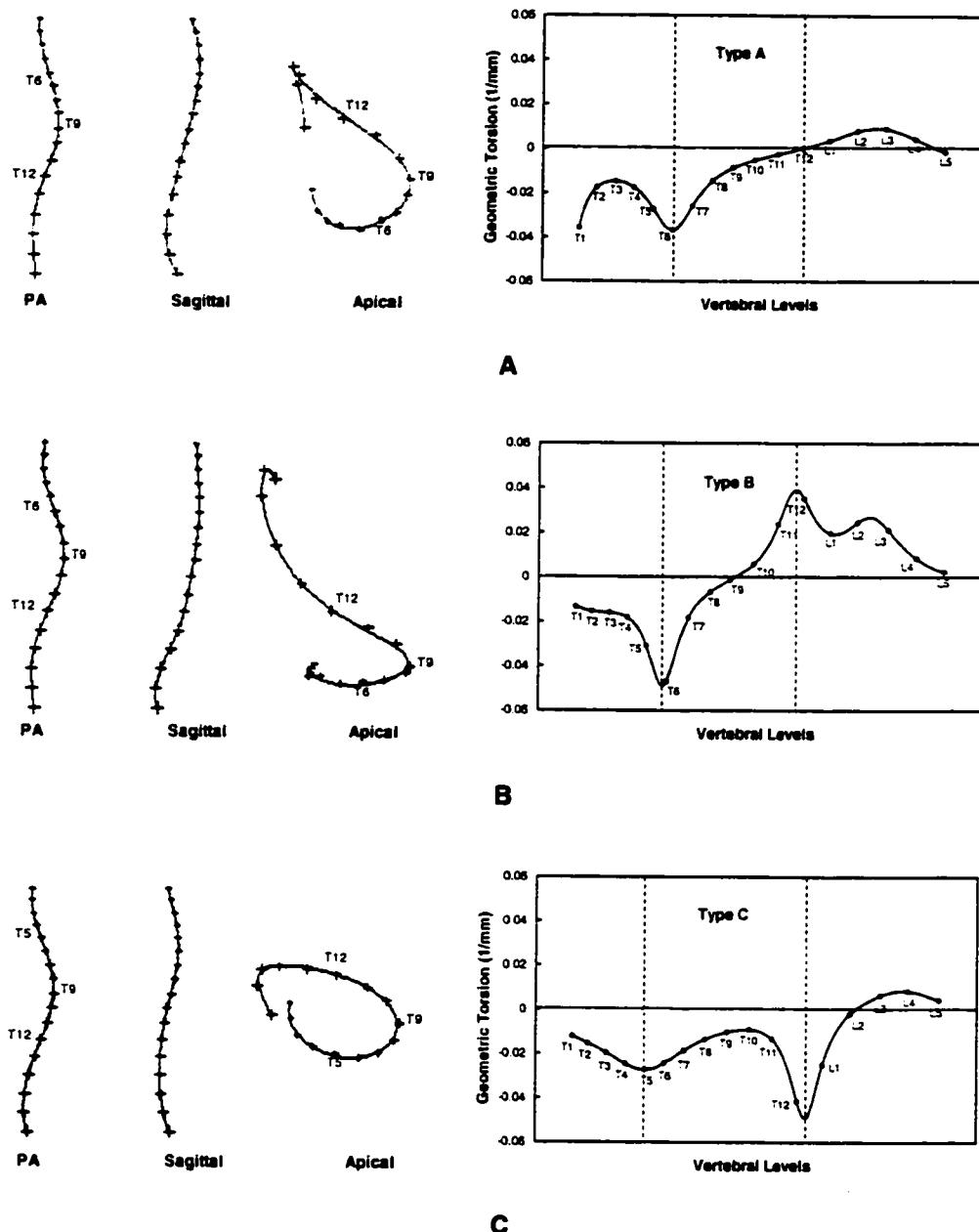
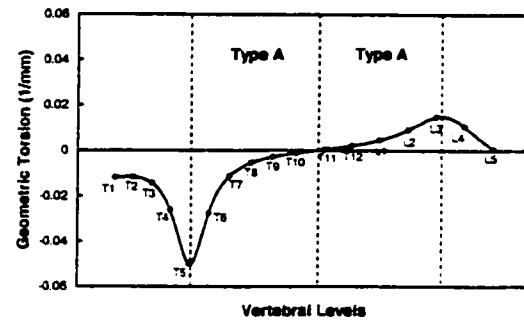
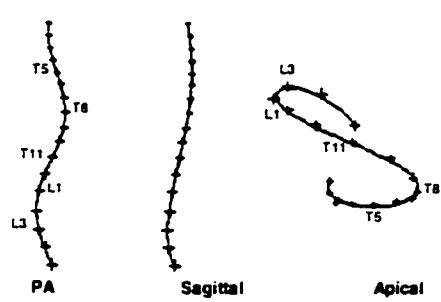
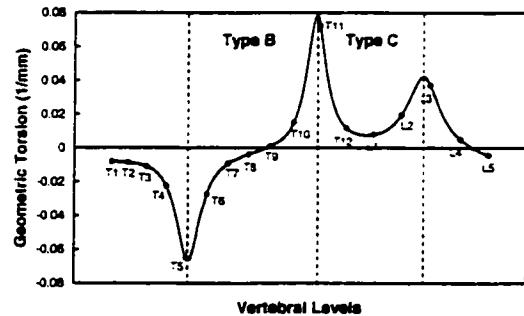
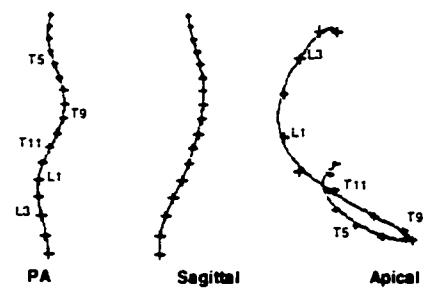


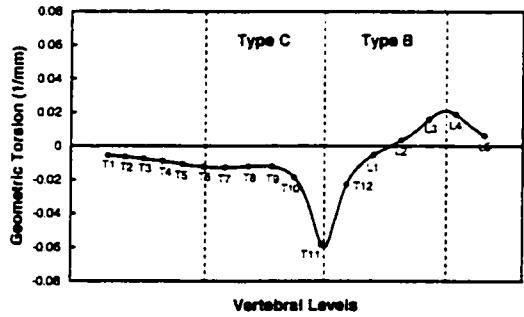
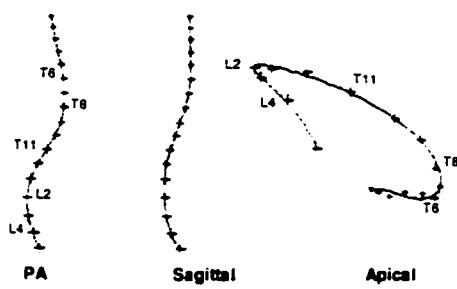
Figure 5.4 Posteroanterior sagittal and magnified apical views of three right thoracic reconstructed patient spinal curve examples and their corresponding geometric torsion patterns. (A) Type A. (B) Type B. (C) Type C. Although all three spines appear similar in the posteroanterior view, they are three-dimensionally different. They show distinctly different sagittal and apical views and are characterized by different torsion patterns.



A



B



C

Figure 5.5 Posteroanterior sagittal and magnified apical views of three right thoracic left lumbar reconstructed patient spinal curve examples and their corresponding geometric torsion patterns. (A) In Type A-A, each curve (T5-T11 and T11-L3) is subjected to opposing torsion, with the point of zero torsion corresponding to the curve junction (T11). (B) In Type B-C, the point of zero

torsion is near the thoracic apex (T9). (C) In Type C-B, the torsion is more unidirectional, with the transition occurring at the lumbar curve apex (near L2).

In double major scoliotic curves, the geometric torsion pattern is described by a combination of two types, one for each curve. Of the 32 RTLL curves studied, 20 manifested a combined torsion pattern of Type A-A, 11 of Type B-C and one of Type C-B. As an example, Figure 5.5 illustrates the torsion patterns of three double major curves (RTLL) that appear similar in the frontal plane, but are quite different in their 3D shapes.

The pattern of Type A-A, shown in Figure 5.5a, presents zero torsion, which corresponds with the junction of the thoracic and lumbar curves near T11. The zones on both sides of the inflection point are subjected to torsion in opposite directions. The left and right deviations are associated, respectively, with positive and negative values of torsion. The apical view clearly shows that the thoracic segment describes a right-handed curve, whereas the lumbar segment describes a left-handed curve. Maximum torsion occurs at the opposite extremities of the curves, and the apexes are associated with small values of torsion. This combined pattern of torsion and countertorsion was well described by Graf in 1990 and reported later by other authors (Poncet et al., 1992; Dansereau et al., 1993; Asher and Cook, 1995) for most double major scoliotic curves.

The Type B-C pattern (Figure 5.5b) generally is associated with an increase in the normal thoracic kyphosis (see sagittal view). The transition through zero torsion corresponds to a 3D inflection point located at or slightly (two anatomic levels at the most) below the thoracic curve apex. Once again, the spine is associated with a torsion deformity in opposite direction, but in this case the transition is located at or near the thoracic apex. Maximum torsion lies at the end vertebrae and minimum torsion at the curve apexes.

The type C-B pattern appeared in only one of the 32 RTLL scoliotic spines studied. This type of spinal curve is discernible from others by an increase in the normal lumbar lordosis.

This involves a unidirectional torsion on nearly the totality of the spine, which is confirmed by the quasi-elliptical representation of the spine in the apical view (Figure 5.5c), the torsion direction change occurring only at or slightly (one or two anatomic levels) below the lumbar curve apex.

In the current study, the high thoracic curves of triple scoliotic curves were excluded because they are generally difficult to classify. However, observations disclosed a definite pattern of torsion, as in the other curves. As an example, Figure 5.6 shows a triple thoracic-thoracic-lumbar curve and its associated geometric torsion, which was classified as of Type C-A-A. The curve pattern classification in terms of geometric torsion appears to allow the identification of this group of curves that frequently are wrongly classified as double major curves.

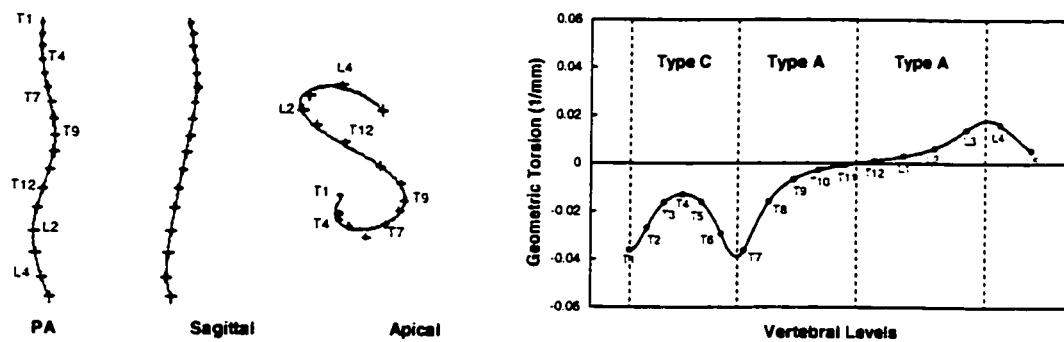


Figure 5.6 Posteroanterior sagittal and magnified apical views of a triple thoracic-thoracic-lumbar reconstructed patient spinal curve example. Each scoliotic curve has a definite pattern of torsion that is combined to describe the spinal deformities, which corresponds here to the geometric torsion pattern of Type C-A-A. The systems of three basic curve patterns can be combined to categorize triple and multiple scoliotic curves.

Discussion

This 3D analysis showed that curve limits are subjected to high geometric torsion, as compared with the apexes. This allows the definition of 3D curve limits for the segmental study of scoliotic spines. It also suggests that the torsion phenomenon originates from these zones and develops to affect the natural stability of the spine.

In single curves, the global torsion phenomenon can be unidirectional or bidirectional. This last observation was never established before and could provide a simple explanation for unsatisfactory results from spinal instrumentation. This study coupled with earlier studies (Poncet et al., 1992; Dansereau et al., 1993) confirms that in most RTLL double major curves, the global torsion phenomenon associated with the scoliotic deformity occurs in opposite directions. Transition zones ($\tau = 0$) were found to be located at the 3D junction of the two curves or in one of the apical zones. The unidirectional torsion behavior of one double curve studied was unexpected and needs to be corroborated with more cases.

Although the existence of right and left mirror images was reported previously by Coonrad et al. (1998) in a coronal curve pattern classification, the current study went further by showing that the nature of the mirror image is of 3D consideration. This study is the first to consider the 3D similarity between right and left curve patterns. This similarity allowed the extrapolation of torsion patterns associated with primarily unconsidered curves such as the rare left thoracic and right lumbar curves in single and double major curves, and pattern types not observed in this study, such as the left lumbar Type B curve.

As reported by some authors (Cruickshank et al., 1989; Coonrad et al., 1998) and observed in this study, the consideration of the sagittal profile is of great importance. Indeed, curves with a similar frontal profile but a different sagittal shape will tend to

show a different torsion pattern types. However, curves with dissimilar frontal and sagittal profiles but similar 3D shape will produce the same torsion pattern. This demonstrates the relevance of the geometric torsion parameter in the 3D description of scoliotic spines.

The system of three fundamental curve pattern types (Type A, B and C), which can be combined to categorize various scoliotic deformities, simplifies curve classification considerably. The authors believe that this classification could eliminate the confusion in scoliotic curve pattern recognition and identification for communication regarding scoliosis and treatment decisions. However, to demonstrate the validity and reliability of the proposed 3D classification, a larger database including unfamiliar curve patterns as well as triple and multiple curves patterns should be investigated. This also will make it possible to list the combined pattern types encountered in all scoliotic spines.

In light of the observations described in this section, a spinal shape analysis in term of geometric torsion could produce tangible clinical benefits. Indeed, failure of curve correction may reflect mechanically undesirable placement of internal instrumentation, mainly resulting from an unclear description of the 3D geometry of scoliotic spines. Use of the proposed classification to compare the results of surgery on similar should allow a better evaluation of response to treatment, and thus assisting in the choice of more appropriate fusion levels and surgical approach. Moreover, the analysis of distinctive evolution torsion patterns could enable the prediction of curve progression. Ultimately, this should lead to a better understanding of the mechanisms that produce scoliotic deformity, thus leading to the development of more appropriate treatments for scoliosis correction.

Conclusion

Because of the 3D nature of scoliosis, measurements of scoliotic deformity and classifications of curve patterns based on the posteroanterior or anteroposterior radiograph

have not yet enabled accurate prediction of progression or response to treatment. In this report, the authors propose a new method of classification for describing the 3D shape of a scoliotic curve. A 3D shape analysis of scoliotic spines in term of geometric torsion has shown that three distinct patterns of torsion are observed in single and double major scoliotic curves, that curve limits are subjected to high geometric torsion values as opposed to the apexes, that the torsion phenomenon can be unidirectional or bidirectional in both single and double major curves, and that transition zones ($\tau = 0$) are located at the junction of the two curves in double major curves or in the apical zone in single and double major curves. These results show the relevance of the geometric torsion parameter in the spatial distinction of scoliotic morphologies that goes beyond the frontal plane projection of the spine.

A larger series of patients including all types of adolescent idiopathic scoliosis needs to be investigated in order to demonstrate the validity of the proposed method of classification, and to allow the recognition and identification of the various torsional scoliotic spinal patterns.

The authors' knowledge, their method is the first numerical classification that describes the 3D characteristics of scoliotic spinal curves. This study also is the first to describe the 3D mirror image pattern of right and left curves. Moreover, the use of geometric torsion avoids any individual variation or error in categorizing idiopathic scoliotic curves because it does not appeal to the observer's judgement. A potential application for this shape analysis in terms of geometric torsion certainly is the evaluation of treatment.

5.3 Synthèse du chapitre

Dans ce chapitre, deux approches de modélisation de la colonne scoliotique développées au chapitre 4 ont été appliquées sur des données vertébrales reconstruites de patients scoliotiques dans le but d'évaluer la pertinence du paramètre de torsion géométrique comme indice tridimensionnel dans la scoliose idiopathique.

L'approche des séries de Fourier aura permis de confirmer le caractère bidirectionnel du phénomène de torsion chez les courbes doubles de type thoracique droite-lombaire gauche et de réaffirmer le caractère faiblement torsionnel (parfois même nul) des zones apicales et fortement torsionnel des extrémités des courbes scoliotiques et vient ainsi appuyer les résultats de la première étude clinique basée sur l'approche des hélices elliptiques. L'application clinique de l'approche des séries de Fourier "corrigée" aura aussi contribué à fournir des informations additionnelles sur le phénomène de torsion dans la scoliose idiopathique. Ainsi, le phénomène de torsion n'est pas uniquement unidirectionnel chez les courbures simples, mais aussi bidirectionnel (Type B) ce qui pourrait expliquer les résultats insatisfaisants de l'instrumentation de certaines colonnes scoliotiques. De plus, lorsqu'une courbe scoliotique est associée à un phénomène de torsion opposée, elle correspond à une scoliose combinée dans l'espace avec une courbe du profil sagittal (cyphose ou lordose). Quant aux courbures doubles thoracique droite-lombaire gauche dont la jonction (plan frontal) coïncide avec une torsion nulle (Type A-A), elle présentent un phénomène de torsion-contretorsion dont la transition correspond à la superposition dans l'espace de la jonction des courbes scoliotiques et des courbes du profil sagittal (cyphose et lordose). Cette particularité géométrique s'exprime dans la vue apicale par le familier profil en "S" de la colonne.

La comparaison des tracés de torsion aura permis de révéler, pour la première fois, la similitude tridimensionnelle des patrons de courbure idiopathique droit et gauche, l'un étant l'image miroir de l'autre. Cette observation aura permis de limiter la description des courbes scoliotiques, y compris celles des très rares scolioses lombaire droite et

thoracique gauche, à trois principaux patrons de torsion. Puisque chaque courbure scoliotique correspond à un patron, les colonnes à courbures multiples (double, triple, etc.) sont représentées par une combinaison de patrons (deux, trois, etc.) permettant une description à la fois simple et détaillée de l'ensemble des déformations de la colonne scoliotique. La présence d'une seconde scoliose compensatrice à l'extrémité thoracique supérieure a aussi été mise en évidence chez certains patients suite à l'examen des graphiques de torsion. Parce qu'il ne fait pas intervenir le jugement de l'observateur, le paramètre de torsion n'est pas affecté par les variations entre individu ou les erreurs dans la catégorisation des courbes scoliotiques. Le système de classification proposé devrait permettre de comparer plus objectivement le résultat des traitements orthopédiques de courbe de même nature et ainsi aider les médecins à déterminer le traitement tridimensionnel approprié.

L'analyse tridimensionnelle aura permis de constater qu'il existe une variation de types de déformations largement supérieure à ce qu'il est possible de constater sur les radiographies de face et que les combinaisons de déformations de face et de profil sont bien exprimées par la vue de dessus. Cet aspect tridimensionnel distinctif de chaque scoliose est bien souligné par le caractère propre et unique des tracés de torsion. Certains aspects de la description conventionnelle des scolioses sont aussi inclus dans l'analyse que l'on peut tirer des tracés de torsion comme la distinction entre les courbures orientées à droite ou à gauche.

La torsion s'avère un instrument clinique utile puisqu'elle permet d'observer très précisément des déformations qu'il serait difficile d'évaluer qualitativement par l'examen de radiographies. De plus, la torsion fournit des renseignements indispensables pour apprécier les aspects tridimensionnels d'une scoliose. Les résultats des deux études cliniques présentées dans ce chapitre vérifient donc l'hypothèse principale de ce projet de recherche et on peut affirmer que l'aspect morphologique tridimensionnel des déformations scoliotiques peut-être représenté par une courbe dans l'espace, dont les

propriétés intrinsèques de torsion géométrique permettent de caractériser et de décrire les déformations scoliotiques.

CHAPITRE 6 - DISCUSSION GÉNÉRALE

Dans le but de proposer un modèle géométrique représentant le plus fidèlement possible la géométrie de la majorité des morphologies scoliotiques (premier objectif de cette thèse) la faisabilité de trois nouvelles approches de modélisations de la colonne permettant l'évaluation du paramètre intrinsèque de torsion géométrique a été étudiée au chapitre 4. Afin d'évaluer la pertinence du paramètre de torsion comme indice des déformations tridimensionnelles et torsionnelles dans la scoliose idiopathique (deuxième objectif de cette thèse), les résultats de deux études cliniques ont été présentés et analysés au chapitre 5.

La modélisation segmentaire de la colonne lombaire et thoracique par des hélices elliptiques s'est avérée limitée à cause de problèmes d'adéquation touchant plus particulièrement la géométrie lombaire et de problèmes de discontinuité ne permettant pas une analyse précise et complète des déformations scoliotiques en terme du phénomène de torsion géométrique. Malgré cela, l'évaluation clinique par cette approche sur 20 sujets scoliotiques (section 5.1) aura permis de tirer certaines tendances et ainsi enrichir la définition de la torsion dans la scoliose.

L'approche des séries de Fourier "corrigée" se distingue de l'approche précédente et de celles répertoriées dans la littérature à plusieurs niveaux. D'abord la méthode de lissage développée permet de calculer localement les paramètres intrinsèques de courbure et de torsion dont l'évaluation est effectuée sur l'ensemble de la colonne, (500 points) et d'étudier leurs tracés, en relation avec les déformations observées non pas seulement dans les vues frontale et sagittale, comme présenté dans la littérature, mais aussi dans la vue du dessus, rendu possible grâce aux techniques de reconstruction radiographique tridimensionnelle. L'analyse conjointe des paramètres intrinsèques de courbure et de torsion géométrique a permis de préciser pour la première fois la nature des instabilités numériques observées sur les tracés de torsion. Une méthode de correction a ainsi pu être

proposée et validée sur des géométries de colonnes scoliotiques simulées mathématiquement ainsi que sur 18 cas réels de sujets scoliotiques, permettant pour la première fois une évaluation plus juste du phénomène de torsion dans la scoliose idiopathique. L'approche ainsi développée a ensuite été évaluée sur des données cliniques réelles de 5 sujets sains et de 62 sujets scoliotiques de morphologies variées. Cette étude clinique a été réalisée à l'aide d'indices tridimensionnelles intrinsèques globaux (sens de torsion) et locaux (valeurs minimums, maximums et nulles de courbure et de torsion). Ces évaluations auront permis de proposer pour la première fois un système de classification qui tient compte de l'aspect tridimensionnel et torsionnel des déformations scoliotiques.

Même si la technique du krigage a déjà été appliquée à la modélisation de colonnes vertébrales scoliotiques (André et coll., 1996), c'est la première fois qu'elle est utilisée dans l'évaluation de la torsion géométrique. Dans ce sens, de nouvelles fonctions de krigage (covariances et dérives) dérivables au moins jusqu'à l'ordre trois ont été proposées et appliquées sur des colonnes scoliotiques simulées mathématiquement sans erreurs de reconstructions. Le test de validation croisée s'est révélé particulièrement efficace et consistant dans l'analyse de différents profils de krigage permettant de suggérer huit modèles tridimensionnels presque tous aussi performants les uns que les autres. Leur comparaison avec le modèle des séries de Fourier lissées par la méthode des moindres carrés a permis de révéler la grande précision du krigage dans la modélisation de géométries scoliotiques simulées et dans l'évaluation de paramètre géométrique faisant intervenir des dérivées d'ordre supérieur (torsion et courbure géométrique). Plus raffinés parce qu'ils incorporent comme cas particulier la méthode des moindres carrés auquel une correction (covariance) est apportée, les modèles de krigage pourraient améliorer la précision et donc la fiabilité de certaines mesures cliniques (ex : angle de Cobb, orientation du plan de déformation maximum, etc.). De plus, les succès de l'application de l'approche des séries de Fourier "corrigée" et les résultats encourageant de l'étude de André et coll., (1996) portant sur le contrôle des effets de pépites sont des

signes prometteurs pour l'application d'une approche d'évaluation de la torsion fondée sur le krigeage. Cette méthode de lissage mérite donc de faire l'objet d'une étude plus approfondie d'une part pour vérifier son efficacité sur des données cliniques, et d'autre part afin de proposer des améliorations en vue d'optimiser la modélisation géométrique de la colonne.

Les différentes réalisations de ce travail auront d'abord permis d'étudier l'hypothèse technique de cette thèse, soit d'établir si l'aspect morphologique tridimensionnel des déformations scoliotiques peut-être représenté au moyen d'une courbe dans l'espace. On retrouve dans la littérature différentes approches pour évaluer la torsion géométrique de courbes modélisant la colonne vertébrale scoliotique (section 2.5.2). Les aspects techniques rattachés à ces approches de modélisation (technique de reconstruction 3D, choix des repères anatomique reconstruits, évaluation des centroïdes vertébraux, technique de lissage) peuvent cependant avoir une influence sur la fiabilité de la mesure de la torsion et par conséquent sur l'interprétation des résultats.

Les modèles développés dans cette thèse sont fondés sur une technique de reconstruction radiographique tridimensionnelle implantée en milieu clinique (Hôpital Sainte-Justine de Montréal) depuis déjà plusieurs années. Grâce à l'utilisation d'un appareil de radiographie numérique, la numérisation des radiographies est automatique. En plus de générer des images numériques pour réaliser des reconstructions adéquates, elle permet des prises de vues à moindres doses de rayons-x. La précision des reconstructions évaluée à 2.1 ± 1.5 mm (Aubin et coll., 1997) pour la combinaison des vues radiographiques (PA0°-PA20°-LAT) adoptées dans cette thèse est supérieure à celles présentées dans d'autres études utilisant une technologie radiographique similaire. Les repères anatomiques vertébraux reconstruits sont ensuite utilisés pour estimer le centroïde de chaque vertèbre.

Dans cette thèse, de même que dans une autre étude présentée à la section 2.5.2 (Dansereau et coll., 1993), le centroïde vertébral correspond approximativement au centre du trou vertébral estimé par la moyenne arithmétique des coordonnées des sommets inférieurs et supérieurs des pédicules droit et gauche. Moins affectés par les déformations scoliotiques, les pédicules sont aussi parmi les plus précis à reconstruire en 3D (Aubin et coll., 1997). D'autres définitions du centroïde vertébral sont aussi valables comme le centre des corps vertébraux (Hierholzer et Luxmann, 1982; Dansereau, 1983; Desilva et Young, 1993; Kanayama et coll., 1996), estimé par exemple à partir des reconstructions du centre ou du pourtour des plateaux vertébraux supérieur et inférieur, ou encore le centre géométrique de la vertèbre, estimé par la moyenne arithmétique des coordonnées de plusieurs repères anatomiques (ex: le centre des plateaux vertébraux et le sommet des pédicules). Les centroïdes vertébraux ainsi reconstruits sont alors utilisés comme points de contrôle lors de la modélisation géométrique curviligne de la colonne.

Les modèles géométriques de représentation paramétrique de la colonne par une courbe ajustée aux centroïdes vertébraux présentés dans cette thèse, ont été développés par rapport au paramètre de la longueur de la corde. L'approximation de la longueur d'arc de la courbe par la longueur de corde entre les centroïdes des vertèbres s'est cependant avérée avoir peu d'influence sur le calcul du paramètre intrinsèque de courbure et de torsion dans une autre étude (Dansereau, 1983) et semble donc justifiée.

Tel que rapporté dans la littérature (Dansereau, 1983; Ortale et coll., 1993), l'analyse des tracés de torsion de certains modèles géométriques paramétriques a été rendue difficile à cause de la présence de valeurs extrêmes (pics) de torsion jugées non-représentatives aux extrémités de la colonne et dans la région thoraco-lombaire. L'analyse conjointe des tracés de courbure 3D et de torsion géométrique de 18 colonnes scoliotiques thoracique droite-lombaire gauche modélisées à l'aide de séries de Fourier, lissées par moindres carrés (section 4.1.2.2), aura cependant permis d'associer certains de ces pics à un phénomène géométrique localisé fortement sensible à la mesure de la torsion

géométrique. Ce phénomène correspond à un changement tridimensionnel du sens de la courbe (inflexion 3D) représentant la colonne scoliotique, difficilement modélisée par les méthodes paramétriques de lissage (ex: Splines, moindres carrés, krigeage). Il se manifeste sur les tracés de torsion par une instabilité numérique (présence de pics) à la jonction des courbures scoliotiques. Une méthode de correction fondée sur l'imposition d'un vrai point d'inflexion 3D a donc été proposée et validée à la section 4.1.2.2 (article #1) sur des données de colonnes scoliotiques simulées et réelles. Les modifications engendrées par la correction des pics de torsion sur la composante géométrique du modèle original (i.e., avant correction) se sont avérées relativement faibles (0.27 ± 0.17 mm) lorsque comparées aux erreurs associées à la technique de reconstruction 3D (2.1 ± 1.5 mm). Quant aux pics de torsion relevés aux extrémités de la colonne, ils correspondent aux derniers points de mesure souvent mal reconstruits. Aussi observés, dans cette thèse, sur les tracés de torsion de quelques cas cliniques, ces pics pourraient probablement être corrigés "naturellement" en compensant les erreurs de reconstruction aux extrémités de la colonne par la reconstruction des niveaux vertébraux sacrés et cervicaux ou encore par l'ajout de conditions limites appropriées au modèle mathématique.

Les sources d'erreurs les plus susceptibles d'affecter la mesure de torsion seraient donc plutôt extrinsèques aux méthodes de lissage, comme le choix de la définition du centroïde de la vertèbre et les erreurs associées à la technique de reconstruction 3D. L'influence de ces aspects techniques sur la mesure de la torsion n'a cependant jamais été étudiée jusqu'à présent et permettrait de définir plus précisément les limites de l'approche d'évaluation de la torsion utilisée de même que la sensibilité du paramètre de torsion. La fiabilité de cette mesure pourra ensuite être comparé à celle des mesures cliniques standards (angle de Cobb, rotation vertébrale axiale, etc.).

L'application des approches des hélices elliptiques et des séries de Fourier "corrigée" sur des données réelles de sujets sains et scoliotiques (chapitre 5) aura permis de révéler

plusieurs aspects cliniques de la mesure de la torsion en vérifiant ainsi que les propriétés intrinsèques de la torsion géométrique permettent la caractérisation et la description des aspects morphologiques tridimensionnels des déformations scoliotiques (hypothèse clinique).

Les instabilités numériques de torsion ou "pics" de torsion, tel que décrit dans la littérature (Dansereau, 1983; Ortale et coll., 1993), ne représentent donc pas seulement la transition géométrique (point d'infexion) des régions concave à convexe dans le plan sagittal (Ortale et coll., 1993), mais coïncident aussi avec la transition des courbures scoliotiques dans le plan frontal. Loin d'être non significatives, ces zones instables à la mesure de la torsion reflètent un aspect géométrique tridimensionnel particulier des déformations observées chez plusieurs colonnes scoliotiques thoracique droite-lombaire gauche.

L'analyse tridimensionnelle des déformations scoliotiques en terme des indices intrinsèques de torsion a permis de constater que les colonnes normales ne sont pas parfaites (i.e., rectiligne dans le plan frontal), mais que les valeurs de torsion associées ($-0.02 \leq \tau \leq 0.02 \text{ mm}^{-1}$) étaient moins importantes que celles mesurées chez les courbes scoliotiques. De façon générale, les extrémités (vertèbres limites) des courbures scoliotiques correspondent à des zones fortement torsionnelles alors qu'au contraire, les zones apicales sont caractérisées par un comportement faiblement torsionnel. Ces observations vont dans le sens de celles rapportées par Kanayama et coll. (1996) lors de l'analyse des tracés de torsion de 45 sujets scoliotiques.

Les zones de changement de sens de la torsion (zéros de torsion) ont été observées dans la région apicale de certaines courbures scoliotiques et à la jonction de certaines courbes double majeures thoracique droite-lombaire gauche. Dans le premier cas le segment supérieur et le segment inférieur à l'apex présentent des torsions de directions opposées qui s'annulent dans la zone apicale. Ce comportement particulier a pu être associé à la

superposition dans l'espace d'une scoliose et d'une courbe sagittale (cyphose ou lordose). Cette observation va à l'encontre de celle d'autres auteurs (Dansereau, 1983; Ortale et coll., 1993) qui associerent plutôt ce comportement à des valeurs maximales de torsion. Cette contradiction résulte probablement du fait que les études en question étaient limitées par des observations faites sur un seul sujet scoliotique. En effet, d'un point de vue mathématique, la courbure 3D (paramètre intrinsèque à la courbe) peut-être interprétée comme étant la contribution des courbures 2D de la colonne dans les vues postéro-antérieure et sagittale. La superposition dans l'espace d'une scoliose et d'une cyphose correspond alors sur les tracés de courbure 3D à des valeurs maximums. Puisque la torsion est inversement proportionnelle à la courbure 3D (Équation 2.19, section 2.5.1.2), ce type de déformation scoliotique aura plutôt tendance à être associé à des valeurs faibles de torsion, voire même nulles.

L'autre zone associée au changement de sens de la torsion correspond à un changement tridimensionnel de la direction de la colonne qui se reflète à la fois sur les vues postéro-antérieure, latérale et apicale (zone d'infexion 2D commune). L'identification de ces zones est extrêmement importante puisqu'elles correspondent à la jonction tridimensionnelle de plusieurs courbures doubles majeures thoracique droite-lombaire gauche. Ces constatations rejoignent les remarques de Graf (1983) qui rapportait suite à l'analyse empirique de la vue de dessus que les déformations scoliotiques lombaires et thoraciques ressemblent à des mouvements de torsion de sens opposés (torsion et contre-torsion). En effet, ce comportement est bien exprimé par la vue du dessus de ce type de colonnes, montrant le segment thoracique tournant dans le sens horaire et le segment lombaire dans le sens anti-horaire.

L'analyse du sens (signe) de la torsion aura permis de confirmer que le phénomène de torsion est principalement bidirectionnel chez les courbes doubles majeures, mais qu'il peut être unidirectionnel ou bidirectionnel chez les courbes scoliotiques simples. Cette

dernière constatation n'a jamais été établie avant et pourrait fournir une explication dans le cas de résultats chirurgicaux moins satisfaisants.

L'analyse des patrons de torsion en terme des déformations scoliotiques dirigées à droite et à gauche a permis pour la première fois de reconnaître l'existence de la similarité tridimensionnelle des scolioses à droite et à gauche. En effet, les patrons de torsion des déformations scoliotiques des courbures à gauche se sont révélés être l'image miroir des patrons de déformations scoliotiques des courbures à droite. Cette caractéristique est importante puisqu'elle a permis d'extrapoler les patrons de torsion de déformations scoliotiques plus rares comme les scolioses thoraciques à gauche et lombaire à droite et ainsi limiter à trois types majeurs la classification des courbures scoliotiques. Dans les courbures de Type A, tout se passe comme si le segment scoliotique était soumis à une déformation en torsion maximale à une extrémité de la courbe qui va en s'atténuant plus on se rapproche de l'autre extrémité. Dans les courbures de Type B, la déformation en torsion des segments supérieur et inférieur à l'apex se fait en sens inverse pour se rencontrer dans la zone apicale. Les courbures de Type C présentent deux déformations en torsion de même sens, mais d'amplitudes différentes qui originent des extrémités de la courbe. À partir de ces trois patrons distincts un certain nombre de déformations scoliotiques de courbures majeures simples et doubles ont pu être décrites. Bien que non étudiées dans cette thèse parce que rarement rapportés et classifiés, d'autres types de déformations scoliotiques existent comme les courbures multiples triple et quadruple. L'évaluation de la torsion géométrique sur un plus grand nombre de sujets ainsi que son extension à d'autres configurations de scolioses devrait permettre de valider et compléter la description et la classification tridimensionnelle et torsionnelle des déformations scoliotiques.

L'apparition de techniques permettant la représentation tridimensionnelle de la colonne vertébrale scoliotique a donné une nouvelle dimension à l'analyse des déformations scoliotiques. Cela aura entre autre permis de faire le point sur les traitements proposés

pour la scoliose et en particulier sur la qualité des réductions obtenues. Des traitements fondés principalement sur la correction biomécanique de la colonne vertébrale se sont multipliés dans le but principal de corriger les anomalies anatomiques mesurées en se souciant de plus en plus de l'aspect 3D de la correction. Il semble donc logique que le système de classification encourage l'analyse tridimensionnelle et fournisse des informations additionnelles sur la façon de classifier les déformations scoliotiques en 3D. Malgré des changements marqués depuis les dix dernières années dans les méthodes d'instrumentation chirurgicale le système de classification de King est demeuré la principale source de classification des scolioses idiopathiques de l'adolescence. Des études ont cependant démontré que ce système n'est pas suffisamment fiable pour décrire les courbes scoliotiques avec précision. Une analyse appropriée des résultats des traitements chirurgicaux n'est possible que si la classification à l'origine utilisée pour guider le choix du traitement et de la procédure chirurgicale est fiable. Puisque la mesure de la torsion n'est pas affectée par des variations entre individus ou des erreurs de catégorisation, la classification des scolioses en terme du paramètre intrinsèque de torsion devrait permettre de comparer plus objectivement le résultat des traitements. En effet, les échecs dans la correction des courbures reflètent souvent un placement indésirable de l'instrumentation résultant principalement de la description imprécise de la géométrie 3D des déformations scoliotiques. L'application de la classification proposée dans cette thèse pour comparer des résultats chirurgicaux de courbes tridimensionnellement similaires devrait permettre une meilleure évaluation de la réponse aux traitements et ainsi assister le chirurgien-orthopédiste dans le choix de l'approche chirurgicale comme celui de la sélection plus adéquate des niveaux de fusion.

L'analyse géométrique en terme de torsion est limitée aux propriétés intrinsèques de la colonne vertébrale. Ainsi par exemple, deux courbes identiques mais orientées différemment dans l'espace vont présenter un tracé de torsion identique, mais peuvent paraître différentes lorsque projetées dans le même plan. Puisque la description conventionnelle des scolioses dépend de l'orientation de la colonne relativement au plan

frontal et sagittal, la torsion ne peut théoriquement différencier les courbures spinales que sont la cyphose, la lordose et la scoliose. Ceci pourrait expliquer le comportement de torsion unidirectionnel observé chez un cas (3%) de scoliose double majeure, tel que rapporté dans l'étude clinique de la section 5.2 (article #3). La géométrie 3D de cette scoliose double majeure serait comparable à celle d'une scoliose simple majeure, caractérisée par un patron de torsion unidirectionnel, mais orientée différemment dans l'espace.

L'analyse géométrique de la courbure et de la torsion intrinsèque de la colonne représentée par une courbe passant par le centroïde des vertèbres a permis de dévoiler un aspect des déformations scoliotiques. Une description complète des déformations devrait aussi tenir compte de la position et de l'orientation des vertèbres par rapport à cette courbe ainsi que de la déformation intrinsèque de chaque vertèbre. Bien que la mesure de la courbure et de la torsion ne soit pas directement associée à l'évaluation des rotations vertébrales, ni à la mesure des déformations intrinsèques des vertèbres, certains aspects morphologiques de la description conventionnelle des déformations scoliotiques vertébrales semblent présents dans l'analyse que l'on peut tirer de leurs tracés. En effet, la rotation différentielle inter-vertébrale s'accentue progressivement plus on se rapproche des extrémités des courbures (i.e., des vertèbres limites), ce qui implique une orientation des vertèbres et un agencement spatial bien illustré par la vue de dessus. Au contraire, la région apicale se caractérise comme une zone où la rotation inter-vertébrale est quasiment nulle, se traduisant par une plus grande continuité relative entre les vertèbres. En ce sens, la torsion géométrique semble bel et bien une mesure du degré d'agencement des vertèbres en partie associée à la rotation vertébrale. L'inclinaison entre les vertèbres est maximale dans la zone apicale, alors qu'elle diminue pour devenir nulle plus on se rapproche des extrémités de la courbure. Plus l'inclinaison relative est grande, plus le rayon de courbure de la zone apicale sera faible et plus la courbure géométrique associée sera grande. Au contraire, aux extrémités des courbes cette caractéristique morphologique se traduit par un segment vertébral plus rectiligne et donc associé à une courbure

géométrique plus faible. La zone d'inclinaison vertébrale relative maximale correspond aussi à la zone où les vertèbres sont généralement les plus déformées. Le changement de sens de rotation des vertèbres qui caractérise la zone apicale, ainsi que la jonction de deux courbures scoliotiques sont également compatibles avec le changement de sens de la torsion qui a été observé chez plusieurs sujets scoliotiques. Ces constatations laissent entrevoir qu'il pourrait exister des liens entre la torsion géométrique et certains indices cliniques (ex: angle de Cobb, rotation axiale, orientation du plan de déformations maximales, etc.). Une étude de corrélation permettrait d'investiguer plus à fond ces relations.

Les méthodes d'évaluation des déformations scoliotiques développées dans cette thèse présentent plusieurs applications cliniques potentielles comme l'étude du comportement de la colonne vertébrale lorsque soumise à un traitement orthotique ou chirurgical. Les résultats de ces derniers seraient alors exprimés en terme des changements mesurés avant, pendant, et après le traitement, à l'aide de l'indice de torsion géométrique. Ces résultats pourraient permettre d'évaluer l'envergure de la correction, les effets secondaires du traitement sur la géométrie de la colonne et son comportement dans le temps. Des études statistiques pourraient ensuite être menées afin de comparer les résultats des différents traitements entre eux. Ceci devrait permettre de mieux comprendre les mécanismes de chaque traitement et ainsi prévenir les déformations secondaires rencontrées, qui ne vont pas nécessairement dans le sens des corrections désirées. De cette façon, il sera possible, selon la nature des déformations scoliotiques, d'orienter le médecin dans son choix du traitement et de fournir des recommandations qui conduiront à la mise au point de meilleurs traitements.

Les déformations scoliotiques n'évoluent pas toutes à la même vitesse ni dans le même sens. C'est pourquoi, il est difficile de prédire l'état futur des courbes scoliotiques d'un patient, ce qui pourtant permettrait d'orienter convenablement le choix et la procédure des traitements. Le médecin est alors souvent confronté au dilemme suivant: poursuivre

le traitement orthétique sans savoir s'il saura stabiliser ou non la progression des déformations, ou passer au traitement chirurgical plus traumatisant, mais dont la correction est assurée. Dans le but de sélectionner convenablement les patients qu'il faut traiter, il est impératif de pouvoir prédire la progression des courbes scoliotiques dans le temps. Quelques auteurs (De Smet et coll., 1983; Perdriole et Vidal, 1985 et 1987; Graf, 1990; Asher et Cook, 1995) ont donc tenté d'expliquer les changements morphologiques des déformations scoliotiques idiopathiques à l'aide d'observations faites dans la vue de dessus. Ainsi en théorie, l'évolution des déformations scoliotiques se compareraient à un mouvement en torsion dans l'espace. Puisqu'il paraît exister une corrélation entre l'aspect morphologique tridimensionnel du rachis scoliotique et son évolution, l'étude comparative des tracés de torsion obtenus à différents stades de l'évolution des déformations devrait aider à visualiser et à comprendre plus à fond les aspects évolutifs de la scoliose. Certaines observations faites lors de cette thèse laissent déjà entrevoir que cet indice pourrait s'avérer bénéfique dans l'étude de l'évolution des scolioses. Ainsi, par exemple, le développement probable d'une seconde scoliose compensatrice à l'extrémité thoracique supérieure a pu être mis en évidence à l'examen de certains graphiques de torsion. Le paramètre de torsion pourrait donc s'avérer un outil utile dans l'analyse de l'évolution et de la prédiction des déformations scoliotiques permettant ainsi de porter un pronostic clinique plus éclairé.

Des modèles biomécaniques simplifiés de type curviligne décrivant la déformation de la colonne ont été développés ou proposés comme modalité pour arrêter et corriger la scoliose (Andriacchi et coll., 1976; Patwardhan et Vanderby, 1981; De Giorgi et coll., 1990; Aubin et coll., 1993; DeSilva et coll., 1994). Les notions mathématiques de courbure (directement proportionnelle au moment de flexion) et de torsion (directement proportionnelle au moment de torsion) peuvent alors être utilisées pour développer les équations différentielles gouvernant le déplacement d'une courbe dans l'espace sujette à des chargements extérieurs (Patwardhan et Vanderby, 1981; DeSilva et coll., 1994). La solution de ce système permettrait de déterminer les forces et moments qui doivent être

appliqués de manière à redonner à la colonne vertébrale une configuration normale dans les plans frontal et sagittal (DeSilva et coll., 1994). Un tel modèle mathématique pourrait donc être utilisé pour simuler la réponse tridimensionnelle de la colonne à tous systèmes de forces correctrices générées par différentes instrumentations (Patwardhan et Vanderby, 1981).

En comparaison aux diverses méthodes de mesure de la torsion géométrique répertoriée, l'approche novatrice des séries de Fourier "corrigée", fondée sur une première technique de correction des pics de torsion, a fourni un outil d'analyse complémentaire et pertinent pour la caractérisation de l'aspect morphologique tridimensionnel des déformations scoliotiques et l'étude du phénomène de torsion géométrique dans la scoliose idiopathique. L'investigation 3D des déformations scoliotiques en terme de la torsion géométrique a conduit à une évaluation plus complète des déformations scoliotiques et une meilleure compréhension du phénomène de torsion dans la scoliose. De plus, l'outil de modélisation et d'évaluation des déformations développé a permis la reconnaissance de patrons de torsion géométrique et de proposer, pour la première fois, un système de classification fondé sur une description tridimensionnelle et torsionnelle des déformations scoliotiques contribuant ainsi à réduire la confusion dans la reconnaissance et l'identification des patrons de courbures scoliotiques.

CHAPITRE 7 - CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

L'hypothèse principale de cette thèse visait à vérifier si l'aspect morphologique tridimensionnel des déformations scoliotiques peut être représenté par une courbe dans l'espace dont les propriétés intrinsèques de torsion géométrique en permettent la caractérisation et la description. La vérification de cette hypothèse a été réalisée en deux étapes: une étude de faisabilité de nouvelles approches de modélisation de la géométrie de la colonne vertébrale scoliotique et une étude clinique. Ce chapitre présente les conclusions et recommandations en lien avec la vérification de cette hypothèse. Dans un premier temps, les principales réalisations associées à cette thèse sont:

1. Le développement d'une première approche de mesure de la torsion géométrique fondée sur la modélisation des segments lombaire et thoracique de la colonne à l'aide de segments hélicoïdaux elliptiques ajustés par la méthode des moindres carrés aux centroïdes vertébraux reconstruits.
2. La validation de cette première approche de modélisation géométrique et de son utilisation pour évaluer le paramètre de torsion à partir des données cliniques de sujets scoliotiques.
3. Le développement d'une deuxième approche de mesure fondée sur la modélisation de la colonne à l'aide de séries de Fourier lissées par les moindres carrés. Cette approche permet de corriger les instabilités numériques de torsion observées sur certains tracés de torsion pour une mesure et une interprétation plus juste de ce phénomène.

4. La validation de cette deuxième approche de mesure sur des données de colonne scoliotiques simulées mathématiquement sans erreurs de reconstruction ainsi que sur des données de sujets réels.
5. Le développement d'une troisième approche de mesure du paramètre de torsion fondée sur la technique du krigeage et appliquée sur des données de géométries scoliotiques typiques simulées sans erreurs de reconstruction. La méthode de validation croisée a été utilisée pour étudier la performance de différentes fonctions de krigeage (dérives et covariances) et proposer de meilleurs modèles géométriques 3D. Les modèles ont été validés en mesurant le paramètre de torsion et en comparant avec le modèle géométrique des séries de Fourier lissées par les moindres carrés.
6. Une étude clinique reposant sur l'analyse de la torsion de 20 colonnes de sujets scoliotiques modélisées par l'approche des hélices elliptiques et de 62 colonnes scoliotiques modélisées à l'aide de l'approche des séries de Fourier "corrigée" a été réalisée afin de vérifier la pertinence du paramètre de torsion géométrique dans la scoliose idiopathique de l'adolescence.
7. Le développement d'un système de classification tridimensionnelle et torsionnelle des déformations scoliotiques.

L'étude de faisabilité des trois approches de représentation de la colonne scoliotique a révélé certaines faiblesses dans la modélisation de la méthode de représentation segmentaire de la colonne par des hélices elliptiques en limitant à certaines déformations scoliotiques son utilisation pour l'étude du phénomène de torsion. L'approche des séries de Fourier "corrigée" se distingue des différentes approches répertoriées dans la littérature, principalement par la correction des instabilités numériques (pics) de torsion dont la nature a été mieux définie. Elle permet ainsi une évaluation plus juste et plus

complète du paramètre intrinsèque de torsion dans la scoliose. L'approche reposant sur le krigeage propose un modèle plus raffiné pour représenter la colonne scoliotique que celui des séries de Fourier "corrigée", entraînant une évaluation plus précise de la mesure de la torsion. Ce dernier résultat est encourageant pour l'application d'une approche semblable à celle des séries de Fourier "corrigée" mais fondée sur le krigeage. En rapport avec les approches étudiées et suite aux différents résultats présentés dans cette thèse, les recommandations suivantes peuvent être formulées:

- 1) Étudier la sensibilité du paramètre de torsion aux erreurs extrinsèques aux méthodes de lissage (erreurs de reconstruction, définition du centroïde vertébrale, etc.) pour identifier plus précisément les limites de cette mesure et comparer sa fiabilité avec celle d'indices cliniques conventionnels.
- 2) Poursuivre la caractérisation des pics de torsion afin d'automatiser la détection et la correction des instabilités numériques en général.
- 3) Poursuivre le développement et l'adaptation d'un modèle de représentation de la colonne scoliotique à l'aide du krigeage.

L'étude clinique se distingue des autres études répertoriées dans la littérature par le nombre et la variété des sujets évalués. Elle a démontré que le phénomène de torsion géométrique existe dans la scoliose et qu'il se présente comme une entité de déformation tridimensionnelle bien identifiable. En particulier, il a été trouvé que le phénomène de torsion géométrique dans la scoliose est bidirectionnel chez les courbes majeures doubles et unidirectionnel ou bidirectionnel chez les courbes majeures simples, que les courbures scoliotiques dirigées à droite sont tridimensionnellement similaires à celles dirigées à gauche (image miroir des patrons de torsion), et que la classification des courbures scoliotiques peut être réduite à trois types majeurs de patrons de torsion. Ces résultats montrent que le développement de la scoliose est un phénomène complexe qui ne peut

être ramené à la notion seule de torsion mécanique. Suite aux réponses originales apportées par cette étude de la torsion dans la scoliose, les recommandations suivantes peuvent être formulées pour la suite des travaux:

- 4) Étendre l'étude clinique de la torsion à d'autres configurations de scoliose afin de compléter et valider le système de classification proposé, ainsi que pour améliorer la compréhension du phénomène de torsion dans la scoliose.
- 5) Investiguer les relations qui existent entre les indices de torsion géométrique (sens de la torsion, zéros, etc.) et les indices cliniques standards.

L'atteinte des objectifs de ce projet de doctorat ouvre la voie à une nouvelle façon d'étudier les déformations scoliotiques. Elle contribue également à réduire la confusion dans la reconnaissance et l'identification des patrons de courbures scoliotiques. L'approche d'évaluation de déformation, développée dans le cadre de ce projet, est appelée à s'améliorer au fur et à mesure de son utilisation et des raffinements qui lui seront apportés. Cette approche est ainsi amenée à fournir aux cliniciens et aux chercheurs un nouvel outil d'analyse qui permettra:

- 1) la poursuite de l'analyse tridimensionnelle des scolioses en vue de mieux comprendre les mécanismes de déformations scoliotiques;
- 2) la reconsideration et l'amélioration des systèmes de classification existants des déformations scoliotiques pour mieux guider le choix et la procédure des traitements.
- 3) de réaliser des études sur le comportement de la colonne vertébrale soumise à un traitement orthotique ou chirurgical en vue de mieux comprendre les mécanismes de chaque traitement et ainsi proposer des améliorations aux concepts existants.

- 4) d'étudier sur la progression des déformations scoliotiques en vue de comprendre plus à fond les aspects évolutifs de la scoliose.

Pour terminer, il serait possible d'appliquer les méthodes développées dans cette étude chez des sujets atteints d'autres types de scolioses, telles que celles d'origine neuromusculaire ou congénitale, afin de comprendre encore plus en profondeur les caractéristiques géométriques 3D de ces déformations.

RÉFÉRENCES

- AARO, S. et DAHLBORN, M. (1981). Estimation of vertebral rotation and the spinal and rib cage deformity in scoliosis by computer tomography. *Spine*, 6(5), 461-467.
- ADAIR, I.V., VAN WIJK, M.C. et ARMSTRONG, G.W.D. (1977). Moire topography in scoliosis screening. *Clinical Orthopaedics*, 129, 165-171.
- AGOSTONI, S., TAGLIAVORO, G., FABRIS, D., MOMMANO, S. et FERRARO, C. (1983). Relation between changes of rib cage circumference and lung volume. *J. Appl. Physiol.*, 20, 1179,1186.
- ALLARD, P., DANSEREAU, J., DUHAIME, M. et GEOFFROY, G. (1984). Scoliosis assessment in Friedreich's Ataxia by means of intrinsic parameters. *The Canadian Journal of Neurological Sciences*, 11(4 Suppl.), 582-587.
- ANDRE, B., DANSEREAU, J. et LABELLE, H. (1992). Effect of radiographic landmark identification errors on the accuracy of three-dimensional reconstruction of the human spine. *Medical & Biological Engineering & Computing*, 30, 569-575.
- ANDRE, B., DANSEREAU, J. et LABELLE, H. (1994). Optimized vertical stereo base radiographic setup for the clinical three-dimensional reconstruction of the human spine. *J Biomech.*, 27, 1023-1035.
- ANDRE, B., TROCHU, F. et DANSEREAU, J. (1996). Approach for the smoothing of three-dimensional reconstructions of the human spine using dual kriging interpolation. *Medical & Biological Engineering & Computing*, 34, 185-191.

ANDRIACHI, T.P., SCHULTZ, A.B., BELYTSCHKO, T.B. et GALANTE, J.O. (1974). A model for studies of mechanical interactions between the human spine and rib cage. J. Biomechanics, 7, 497-507.

ANDRIACHI, T.P., SCHULTZ, A.B., BELYTSCHKO, T.B. et DEWALD, R.L. (1976). Milwaukee brace correction of idiopathic scoliosis, A biomechanical analysis and a retrospective study. J. Bone Joint Surg., 58A, 808-815.

ARKIN, A. (1950). The mechanism of rotation in combination with lateral deviation in the normal spine. Journal of Biomechanics [Am], 32, 180-188.

ASHER, M.A. et BURTON, D.C. (1999). A concept of idiopathic deformities as imperfect torsion(s). Clinical Orthopaedics and Related Research, 364, 11-25.

ASHER, M.A. et COOK, L.T. (1995). The transverse plane evolution of the most common adolescent idiopathic scoliosis deformities. A cross-sectional study of 181 patients. Spine, 20(12), 1386-1391.

AUBIN, C.-E., DANSEREAU, J. et LABELLE, H. (1993). Simulation biomécanique de l'effet du corset de Boston sur un modèle de la colonne vertébrale et du thorax scoliotiques. Ann Ch, 47 (9), 881-887.

AUBIN, C.-E., DANSEREAU, J., PARENT, F., LABELLE, H. et DE GUISE, J.A. (1997). Morphometric evaluations of personalised 3D reconstructions and geometric models of the human spine. Medical & Biological Engineering & Computing, 35(6), 611-618.

- AUBIN, C.-E., LOBEAU, D., LABELLE, H., MAQUIGHEN-GODILLON, A.P., LeBLANC, R. et DANSEREAU, J.(1999). Planes of maximum deformity in the scoliosis spine. Research into Spinal Deformities 2. Studies in Health Technology and Informatics (IOS Press), 59, 45-48.
- BENSON, D.R., SCHULTZ, A.B. et DEWALD, R.L. (1976). Roentgenographic Evaluation of Vertebral Rotation, J. Bone Joint Surg., 58A, 1125-1129.
- BIRCHALL, D., HUGHES, D.G., HINDLE, J., ROBINSON, L. et WILLIAMSON, J.B. (1997). Measurement of vertebral rotation in adolescent idiopathic scoliosis using three-dimensional Magnetic Resonance Imaging. Spine, 22(20), 2403-2407.
- BLOUNT W. et SCHMIDT A.(1958), Making the Milwaukee brace, J Bone Joint Surg., 40, 526-528,624.
- BRADFORD, D.S., LONSTEIN, J.E., MOE, J.H., OGILVIE J.W. et WINTER R.B. (1987). Moe's textbook of scoliosis and other spinal deformities, 2nd ed. Philadelphia: W.B. Saunders.
- BROWN, R.H., BURSYEIN, A.H., NASH, C.L. et SCHOCK, C.C. (1976). Spinal analysis using a three-dimensional radiographs technique. Journal of Biomechanics, 9, 355-365.
- BUNNELL, W.P. (1984). An objective criterion for scoliosis screening, J. Bone Joint Surg., 66A, 1381-1387.
- BUNNELL, W.P. (1985). Vertebral rotation: Simple method of measurement on routine radiographs. Orthop Trans., 9, 114.

BURWELL, R.G., KIRBY, A.S., AUJLA, R.K., KIRK, E.L., PRATT, R.K., BAILEY, M.A., WEBB, J.K., MOULTON, A. et GALLIMORE, S.J. (1999). Evaluation of vertebral rotation by ultrasound for the early detection of adolescent idiopathic scoliosis. Research into Spinal Deformities 2, I.A.F. Stokes (Éd.), IOS Press, 73-75.

CARMO, M.P. (1976). Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 16-26.

CLOSKEY, R.F. et SCHULTZ, A.B. (1997). Rib Cage Deformities in Scoliosis: Spine Morphology, Rib Cage Stiffness, and Tomography Imaging, Journal of Orthopaedic Research, 11, 730-737.

COBB, J.R. (1948). Outline for the study of the scoliosis. Instructional course lectures, W.P. Blount Ed., American Academy of Orthopaedic Surgeons, vol. V, Ann Arbor J Edwards Publisher inc., 261-275.

COETSIER, M., VERCAUTEREN, M. et MOERMAN, P., (1977). A new radiographic method for measuring vertebral rotation in scoliosis. Acta Orthop. Belg., 43, 598-605.

COONRAD, R.W., MURRELL, G.A.C., MOTLEY, G., LYITTLE, E. et HEY, L.A. (1998). A logical coronal pattern classification of 2,000 consecutive idiopathic scoliosis cases based on the scoliosis research society defined apical vertebra. Spine, 23(12), 1380-1391.

COTTALORDA, J., KOHLER, R., GARIN, C., et LECANTE, P. (1997). Traitement orthopédique de la scoliose: nouvelle technique de prise d'empreinte par procédé optique. Arch. Pédiatr., 4, 464-467.

CRUICKSHANK, J.L., KOIKE, M. et DICKSON, R.A. (1989). Curve patterns in idiopathic scoliosis. A clinical and radiographic study. Journal of Bone & Joint Surgery - British Volume, 71(2), 259-263.

CUMMINGS, R.J., LOVELESS, E.A., CAMPBELL, J., SAMELSON, S. et MAZUR, J.M. (1998). Interobserver reliability and intraobserver reproducibility of the system of King et al. for the classification of Adolescent Idiopathic Scoliosis. The Journal of Bone and Joint Surgery, 80-A(8), 1107-1111.

DANGERFIELD, P.H., SCUTT, D., DORGAN, J.C., LI, Y., PEARSON, J.D. et BRODIE, D.A. (1992). The effect of body position on the three-dimensional surface deformity of scoliosis. International Symposium on 3-D Scoliotic Deformities (Éditions de l'École Polytechnique de Montréal and Gustav Fisher Verlag), 139-145.

DANSEREAU, J. (1983). Détermination des paramètres intrinsèques de courbure et de torsion d'un modèle tridimensionnel de la colonne vertébrale scoliotique. Mémoire de maîtrise es sciences appliquées, École Polytechnique de Montréal, Québec.

DANSEREAU, J. et STOKES, I.A.F. (1988). Measurements of the three-dimensional shape of the rib cage, J. Biomechanics, 21, 893-901.

DANSEREAU, J., BEAUCHAMP, A., DE GUISE, J. et LABELLE, H. (1990a). Three-dimensional reconstruction of the spine and the rib cage from stereoradiographic and imaging techniques. 16th Conference of the Canadian Society of Mechanical Engineering, Toronto, Canada, 2, 61-64.

DANSEREAU, J., LABELLE, H. et BELLEFLEUR, C. (1993). Mesure de la torsion géométrique des colonnes vertébrales scoliotiques reconstruites. Minerva Orthop. Traumatol., 44, 529-531.

DANSEREAU, J., PAPILLON, B. et LABELLE, H. (1990b). Development of a personalized parametric model of three-dimensional reconstructed scoliotic spine. Proceedings of the Canadian Society for Biomechanics Sixth Biennial Conference, Quebec, Canada, 71-72.

DARUWALLA, J.S. et BALASUBRAMANIAM, P.P. (1985). Moire topography in scoliosis: Its accuracy in detecting the site and size of the curve. Journal of Bone & Joint Surgery, 67B, 211-213.

DAWSON, E.G., KROPF, M.A., PURCELL, G., KABO, J.M., KANIM, L.E.A. et BURT, C. (1993). Optoelectronic evaluation of trunk deformity in scoliosis. Spine, 18(3), 326-331.

DeGIORGI, G., GENTILE, A., MANTRIOTA, G. et GAFORIO, G. (1990). Analisi, con programma agli elementi finiti, delle spinte correttive sviluppate dai corsetti nella scoliosi lombare. Riv. Int. T.O.I.- Técnica Ortopédica Internacional, 3.

DE GUISE J.A et MARTEL Y. (1988). 3-D biomedical modelling merging image processing and computer aided design, IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, 10th annual international conference, New Orleans, USA, 426-427.

DE SMET, A.A., ASHER, M.A., COOK, L.T., GOIN, J.E., SCHEUCH, H.G. et ORRICK, J.M. (1984). Three-dimensional analysis of right thoracic idiopathic scoliosis. Spine, 9(4), 377-381.

DE SMET, A.A., TARLTON, M.A., COOK, L.T., BERRIDGE, A.S. et ASHER, M.A. (1983). The top view for analysis of scoliosis progression. Radiology, 147(2), 369-372.

DELORME, S. (1996). Etude de la modélisation par krigage géométrique tridimensionnel des vertèbres saines et scoliotiques. Mémoire de Maîtrise, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal, Québec.

DeSILVA, C.N. et DE SILVA, S.P. (1994). A nonlinear biomechanical model for idiopathic scoliosis. Third International Symposium on 3D Analysis of Human Movement, Stockholm, Sweden, 97-98.

DeSILVA, C.N. et YANG, K.H. (1990). Precise description of a scoliotic spine. 14th Annual Meeting of the American Society of Biomechanics, Miami, Florida, 219-220.

DRERUP, B. (1984). Principles of measurement of vertebral rotation from frontal projections of the pedicles. Journal of Biomechanics, 17(12), 923-935.

DRERUP, B. (1985). Improvements in measuring vertebral rotation from frontal projections of the pedicles. Journal of Biomechanics, 18, 369-378.

DRERUP, B. et FROBIN, W. (1977). Objective measurements from 90° radiographs. Orthopaedic Engineering. (Edited by Harris, J.D.) F.S. Moore, London.

DRERUP, B. et HIERHOLZER, E. (1992a). Evaluation of frontal radiographs of scoliotic spines - Part I: Measurement of position and orientation of vertebrae and assessment of clinical shape parameters. Journal of Biomechanics, 25, 1357-1362.

DRERUP, B. et HIERHOLZER, E. (1992b). Evaluation of frontal radiographs of scoliotic spines - Part II: Relation between lateral deviation, lateral tilt and axial rotation of vertebrae. Journal of Biomechanics, 25, 1443-1450.

- DRERUP, B. et HIERHOLZER, E. (1996). Assessment of scoliotic deformity from back shape asymmetry using an improved mathematical model. Clin Biomech, 11(7), 376-383.
- DUBOUSSET, J. (1994). Three-dimensional analysis of the scoliotic deformity. The pediatric spine: Principle and practice. In Weinstein S.L. (ed), vol. 1, chap. 22, Raven Press, New York.
- DUVAL-BEAUPERE, G. (1996). Threshold values for supine and standing Cobb angles and rib hump measurements: prognostic factors for scoliosis. European Spine Journal, 5, 79-84.
- ECKER, M.L., BETZ, R.R. et al. (1988). Computer tomography evaluation of C-D instrumentation in idiopathic scoliosis. Spine, 13, 1141-1144.
- FAIT, M. et JANOVEC, M. (1970). Establishing of the Rotation Angle in the Vertebra. Scripta Medica, 43, 207-215.
- FARIN, G., REIN, G., SAPIDIS, N. et WORSEY, A. (1987). Fairing cubic B-spline curves. Comput. Aided Geom. Des., 1(1-2), 91-104.
- FROBIN, W. et HIERHOLZER, E. (1982). Analysis of human back shape using surface curvatures. Journal of Biomechanics, 15, 379-390.
- FROBIN, W. et HIERHOLZER, E. (1983). Rasterstereography: a photogrammetric method for measurement of body surfaces. Journal of Biological Photography, 51(1), 11-17.
- GERALD, C.F. et WHEATLEY, P.O. (1985). Applied Numerical Analysis. Addison-Wesley, Reading, Mass., USA, 3ème éd, 198-206.

GOLDBERG, C.J., KALISZER, M. et MOORE, D.P. (2001). Surface topography, cobb angles and cosmetic change in scoliosis. Spine, 26(4), E55-E63.

GOLDSTEIN, L.A. et WAUGH, T.R. (1973). Classification and terminology of scoliosis. Clinical Orthopaedics & Related Research, 93, 10-22.

GRAF, H. (1990). Analyse tridimensionnelle de la scoliose. France, 48 pages.

GRAF, H., HECQUET, J. et DUBOUSSET, J. (1983). Approche tridimensionnelle de déformations rachidiennes: application à l'étude du pronostic des scolioses infantiles. Revue de Chirurgie Orthopédique et Réparatrice de l'Appareil Moteur, 69(5), 407-416.

GRAY, H. (1973). Gray's anatomy: Anatomy of the human body, 29ème éd., édité par Charles Mayo Goss, Lea & Febiger, Philadelphia, 1448 pages.

GREGG, E.C. (1977). Radiation risks with diagnostic x-rays. Radiology, 123, 447-453.

GUINGAND, M. (1982). Modélisation spatiale de la colonne vertébrale humaine in vivo à partir de deux de ses radiographies: application à la scoliose. Thèse de Docteur Ingénieur, École Central de Lyon, France.

HECQUET, J., LEGAYE, J. et SANTIN., J.-J. (1992). Logiciel «Rachis 91TM». International Symposium on 3-D Scoliotic Deformities (ed. J. Dansereau), Gustav Fisher Verlag Publishers, 26-33.

HERZENBERG, J.E., WAANDERS, N.A., CLOSKEY, R.F., SCHULTZ, A.B. et HENSINGER, R.N. (1990). Cobb angle vs spinous process angle in adolescent idiopathic scoliosis: the relationship of the anterior and posterior deformities. Spine, 15(9), 874-879.

HIERHOLZER, E. et LUXMANN, G. (1982). Three-dimensional shape analysis of the scoliotic spine using invariant shape parameters. Journal of Biomechanics, 15, 583-598.

HINDMARSH, J., LARSSON, J. et MATTSSON, O. (1980). Analysis of changes in the scoliotic spine using a three-dimensional radiographic technique. Journal of Biomechanics, 12, 279-290.

HO, E.K.W., CHAN, F.L. et LEONG, J.C.Y. (1993). New methods of measuring vertebral rotation from computed tomographic scans. Spine, 18(9), 1173-1177.

INAMI, K., SUZUKI, N., ONO, T., YAMASHITA, Y., KOHNO, K. et MORISUE, H. (1999). Analysis of posterior trunk symmetry index (POTSI) in Scoliosis. Part 2. Research into Spinal Deformities 2. Studies in Health Technology and Informatics (IOS Press), 59, 85-88.

JAMES, J.I.P. (1954). Idiopathic scoliosis. The prognosis, diagnosis and operative indications related to curve patterns and age of onset. Journal of Bone & Joint Surgery, 36-B, 36-49.

JAMES, M.L., SMITH, G.M. et WOLFORD, J.C. (1977). Applied numerical methods for digital computation with FORTRAN and CSMP (Second Edition. Harper & Row ed.), 283-312.

JEFFRIES, B.F., TARTON, M., DEVYER, S.J. et BROWER, A.C. (1980). Computerized measurement and analysis of scoliosis. Pediatric Radiology, 134(2), 381-385.

JEREMKO, J., PONCET, P., RONSKY, J., HARDER., J., DANSEREAU, J., LABELLE, H. et ZERNICKE, R.F. (2001). Estimation of spinal deformity in scoliosis from torso surface cross-sections. Spine (in Press).

KANAYAMA, M., TADANO, S., KANEDA, K., UKAI, T. et ABUMI, K. (1996). A mathematical expression of three-dimensional configuration of the scoliotic spine. Journal of Biomechanical Engineering, 118(2), 247-252.

KAPANDJI, I. A. (1970). The Physiology of the joints, vol. 3, 2^{ème} éd., Churchill Livingstone, Edinburgh and London.

KEIM, H. A., (1982). The adolescent spine, 2^{ème} éd., Springer, New York, USA.

KING, H.A. (1994). Analysis of treatment of Type II idiopathic scoliosis. Orthopedic Clinics of North America, 25, 225-237.

KING, H.A., MOE, J.H. et BRADFORD, D.S. (1983). The selection of fusion levels in thoracic idiopathic scoliosis. Journal of Bone & Joint Surgery, 65-A(9), 1302-1313.

KJELLANDER, J.A.P. (1983). Smoothing of cubic parametric splines. Comput.-Aided Des., 15(3), 175-179.

KOJIMA, T. et KUROKAWA, T. (1992). Quantification of three-dimensional deformity of idiopathic scoliosis. Spine, 17(3S), S22-S29.

KOJIMA, T. et KUROKAWA, T. (1992). Rotation vector, a new method for representation of three-dimensional deformity in scoliosis. Spine, 17(11), 1296-1303.

KRATKY, V. (1975). Analytical photogrammetry in scoliosis. Photogrammetria, 31, 195-210.

KREYSIG, E. (1983). Advanced engineering mathematics, Fifth Edition, John Wiley & Sons ed., New York, Chap. 8, 375-378.

KRIGE, D. G. (1951). A statistical approach to some basic mine evaluation problems on the Witwatersrand. Journal of Chemical & Metallic Mining of the Society of South Africa, 52, 119-139.

KRISMER, M., STERZINGER, W., HAID, C., FRISCHHUT, B. et BAUER, R. (1996). Axial rotation measurement of scoliosis vertebrae by means of computed tomography scans. Spine, 21(5), 576-581.

LABELLE, H., DANSEREAU, J., BELLEFLEUR, C. et POITRAS, B. (1992). Étude 3-D de l'effet immédiat du corset de Boston sur la colonne lombaire scoliotique, Ann Chir, 46, 814-820.

LABELLE, H., DANSEREAU, J., BELLEFLEUR, C. et POITRAS, B. (1995) Three-dimensional effect of the Boston brace on the thoracic spine and rib cage, Spine, 21, 59-64.

LACHAPELLE, J. (1990). Correction et validation d'un modèle paramétrique de la colonne vertébrale scoliotique. Projet de fin d'études, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.

LAULUND, T., SOBJERG, J.O. et HORLYCK, E. (1982). Moire topography in school screening for structural scoliosis. Acta orthopaedica Scandinavica, 53, 765-768.

LENKE, L.G., BETZ, R.R., BRIDWELL, K.H., CLEMENTS, D.H., HARMS, J., LOWE, T.G. et SHUFFLEBARGER, H.L. (1998). Intraobserver and interobserver reliability of the classification of thoracic adolescent idiopathic scoliosis. Journal of Bone and Joint Surgery, 80-A(8), 1097-1106.

LETTS, M., QUANBURY, A., GOUW, G., KOLSUN, W. et LETTS, E. (1988). Computerized ultrasonic digitization in the measurement of spinal curvature. Spine, 13(10), 1106-1110.

LIPSCHUTZ, M.M. (1969). Schaum's outline of theory and problems of differential geometry, Fourteenth Edition, McGraw-Hill ed.. New-York, chap. 4, 61-79.

MARCHAND, F. (1983). Développement d'un système de stéréo-cinéphotogrammétrie pour une analyse bilatérale de la démarche. Mémoire de Maîtrise, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal, Québec.

MARCHESI, D.G., TRANSFERLD, E.E., BRADFORD, D.S. et HEITHOFF, K.B. (1992). Changes in vertebral rotation after Harrington and Luque instrumentation for idiopathic scoliosis. Spine, 17, 775-780.

MARZAN, G.T. (1976). Rational design for close-range photogrammetry. Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, USA.

MATHERON, G. (1980). Splines et krigage: leur équivalence formelle. Report N-667, Centre de géostatistiques, École des Mines de Paris, France.

MATTERI, R.E., POPE, M.H. et FRYMOYER, J.W. (1976). A biplane radiographic method of determining vertebral rotation in postmortem specimens. Clin Orthop, 116, 95-98.

McNEICE, G., KORSEKA, J. et RASO, J. (1975). Spatial description of the spine in scoliosis. Advance in Engineering. ASME Winter Annual Meeting, Houston, 76-86.

MEHTA, M.H. (1972). The rib-vertebra angle in the early diagnosis between resolving and progressive infantile scoliosis. J Bone Joint Surg, 54B, 230-243.

MEHTA, M.H. (1973). Radiographic estimation of vertebral rotation in scoliosis. J Bone Joint Surg, 55, 513-520.

MOE, J.H. et KETTLESON, D.N. (1970). Idiopathic scoliosis. Analysis of curve patterns and the preliminary results of Milwaukee-brace treatment in 169 patients. Journal of Bone & Joint Surgery, 52-A, 1509-1533.

MOE, J.H., WINTER, R.B., BRADFORD, D.S. et LONSTEIN, J.E. (1978). Scoliosis and other spinal deformities. Philadelphia, WB Saunders, 15-18.

MORELAND, M.S., POPE, M.H., WILDER, D.G., STOKES, I. et FRYMOYER, J.W. (1981). Moire fringe topography of the human body. Medical Instrumentation, 15(2), 129-132.

NASH, C.L. et MOE, J.H. (1969). A study of Vertebral Rotation. J. Bone Jt. Surg.. 51A, 223-229.

NASH, C.L., GREGG, E.C., BROWN, R.H. et PILLAI, K. (1979). Risks of exposure to x-rays in patients undergoing long-term treatment for scoliosis. Journal of Bone & Joint Surgery, 61-A, 371-374.

NORDVALL, A. (1973). Studies in Idiopathic Scoliosis Relevant to Etiology, Conservative and Operative Treatment, Acta Ortop. Scand. (Suppl.), 150, 91-94.

OLLSON, T.H., SELVIK, G. et WILLNER, S. (1976) Kinematics of spinal fusion, Invest. Radiol., 11, 202-209.

ORTALE, R.L., ORTALE, J.R., MORAES, M.A.A. et BRENZIKOFER, R. (1993). Detection of 3D spinal curvature and torsion. XIVth Congress of the International Society of Biomechanics, Paris, France, 988-989.

PAPILLON, B., (1989). Amélioration de la modélisation de la colonne vertébrale sur Acrospin. Rapport de projet d'été, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal. Québec.

PATWARDHAN, A.G. et VANDERBY, R. (1981). A three-dimensional large displacement, continuum model of a human spine. Proceeding of the American Society of Mechanical Engineering, Washington, D.C., U.S.A., 33-35.

PEARCY, M.J. (1985). Stereo radiography of lumbar spine motion. Acta Orthop Scand (suppl), 56, 1-45.

PEARCY, M.J. et WHITTLE, M.W. (1982). Movements of the lumbar spine measured by three-dimensional X-ray analysis. Journal of Biomedical Engineering, 4(2), 107-112.

PERDRIOLLE, R. (1979). La scoliose: son étude tridimensionnelle, Maloine, Paris.

PERDRIOLLE, R. et VIDAL, J. (1985). Thoracic idiopathic scoliosis curve evolution and prognosis. Spine, 10(9), 785-791.

PERDRIOLLE, R. et VIDAL, J. (1987). Morphology of scoliosis: three-dimensional evolution. Orthopaedics, 10(6), 909-915.

PETIT, Y., (1993) Programme de correction et de spécification des données de personalisation, Rapport interne, Département de génie mécanique, École Polytechnique de Montréal, 20 pages.

PLAMONDON A. et GAGNON M. (1990) Evaluation of Euler's angles with a least squares method for the study of lumbar spine motion, J Biomed. Eng., 12, 143-149.

POGORELOV, A.V. (1967). Differential geometry. Part one: Theory of curves. P. Noordhoff N.V., Groningen, The Netherlands, chap. I à III, 1-64.

PONCET, P., DANSEREAU, J. et LABELLE, H. (1999). Geometric torsion in idiopathic scoliosis: a first 3D analysis and a proposal to a new classification. Research into Spinal Deformities 2. Studies in Health Technology and Informatics (IOS Press), 59, 122-125.

PONCET, P., DANSEREAU, J. et TROCHU, F. (1995). Elimination of numerical torsion instability on smoothed scoliotic spinal curve. Three Dimensional Analysis of Spinal Deformities. Studies in Health Technology and Informatics (IOS Press), 15, 127-132.

PONCET, P., DANSEREAU, J. et TROCHU, F. (1996). Correction of geometric torsion measurement associated to the scoliotic spinal shape. Annual Meeting of the Canadian Orthopaedic Research Society, Quebec.

PONCET, P., DANSEREAU, J., BELLEFLEUR, C. et LABELLE, H. (1992). Smoothing methods for the measurement of geometric torsion on 3-D reconstructed scoliotic spines. International Symposium on 3-D Scoliotic Deformities (Éditions de l'École Polytechnique de Montréal and Gustav Fisher Verlag), 273-281.

PONCET, P., DELORME, S., RONSKY, J.L., DANSEREAU, J., CLYNCH, G., HARDER, J., DEWAR, R.D., LABELLE, H., GU, P-H. et ZERNICKE, R.F. (2000). Reconstruction of laser-scanned 3D torso topography and stereoradiographical spine and rib-cage geometry in scoliosis. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, 4, 59-75.

PONCET, P., TROCHU, F. et DANSEREAU, J. (1999). Curvilinear three-dimensional modeling of spinal curves with Dual Kriging. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, 2, 295-308.

PONSETI, I.V. et FRIEDMAN, B. (1950). Prognosis in idiopathic scoliosis. Journal of Bone & Joint Surgery, 32-A, 381-95.

POPE, M., STOKES, I.A.F. et MORELAND, M. (1984). The biomechanics of scoliosis in critical reviews. Biomedical Engineering, 11, 157-188.

RAB, G.T. et CHAO, E.Y. (1977) Verification of roentgenographic landmarks in the lumbar spine. Spine, 2, 287-293.

RIPPSTEIN, J. (1967). Deux nouveaux instruments pour l'examen clinique des scolioses. Acta orthopaedica Belgica, 33, 595-597.

ROACH, J.W. (1994). Adolescent idiopathic scoliosis: Nonsurgical treatment. The pediatric spine: Principle and practice. In Weinstein S.L. (ed), vol. 1, chap. 23, Raven Press, New York.

ROAF, R. (1958). Rotation movement of the spine with special reference to scoliosis. Journal of Bone Joint & Surgery [Br], 40, 312-332.

RUSSEL, G.G., RASO, V.J., HILL, D. et McIVOR, J. (1990). A comparison of four computerized methods for measuring vertebral rotation. Spine, 15(1), 24-27.

SCHULTHESS, W (1905). Die pathologie und therapie der rückgratsverkrümmungen. Handbuch der orthopädischen chirurgie, edited by G Joachimsthal, Vol. 1, Part 2. Jena:Gustav Fisher, 1905.

SCHWARTZ, M., GREEN, S. et RUTLEDGE, W.A. (1960). Vector Analysis with Applications to Geometry and Physics, Harper & brothers, New-York, chap. 8, 240-250.

SCOLES, P.V., LINTON, A.E., LATIMER, B., LEVY, M.E. et DIGIOVANNI, B.F. (1988). Vertebral body and posterior element morphology: The normal spine in middle life. Spine, 13, 1082-1086.

SCOTT, J.C. et MORGAN, T.H. (1955). Natural history and prognosis of infantile idiopathic scoliosis. Journal of Bone Joint & Surgery, 37B, 400.

SKALLI, W., LAVASTE, F. et DESCRISES, J-L (1995). Quantification of three-dimensional vertebral rotations in scoliosis: what are the true values?. Spine, 20(5), 546-553.

SLUPSKY, S.H., DURDLE, N.G., RASO, V.J. et PETERSON, A.E. (1992). A video digitizer for analysis of trunk deformity in scoliosis. Journal of Biomedical Engineering, 14, 405-408.

STOKES, I.A.F. (1985). Biplanar radiography for measurement of spinal shape and motion. Automedica, 6, 37-49.

- STOKES, I.A.F. (1989). Axial rotation component of thoracic scoliosis. Journal of Orthopaedic Research, 7, 702-708.
- STOKES, I.A.F. (1994). Spinal biomechanics. The pediatric spine: Principle and practice. In Weinstein S.L. (ed), vol. 1, chap.3, Raven Press, New York.
- STOKES, I.A.F. et GARDNER-MORSE, M. (1993). Cross-sectional and longitudinal study of spinal curvature and rotation. International Symposium on 3-D Scoliotic Deformities (ed. J. Dansereau), Gustav Fisher Verlag Publishers, 206-210.
- STOKES, I.A.F. et MORELAN, M.S. (1989). Concordance of back surface asymmetry and spine shape in idiopathic scoliosis. Spine, 14(1), 73-78.
- STOKES, I.A.F. et MORELAN, M.S. (1989). Measurement of the shape of the surface of the back in patients with scoliosis. Journal of Bone & Joint Surgery, 69A(2), 203-211.
- STOKES, I.A.F., ARMSTRONG, J.G. et MORELAND, M.S. (1988). Spinal deformity and back surface asymmetry in idiopathic scoliosis. Journal of Orthopaedic Research, 6, 129-137.
- STOKES, I.A.F., BIGALOW, L.C. et MORELAN, M.S. (1987). Three-dimensional spinal curvature in idiopathic scoliosis. Journal of Orthopaedic Research, 5, 102-113.
- STOKES, I.A.F., BIGALOW, L.C. et MORELAND, M.S. (1986). Measurement of axial rotation of vertebrae in scoliosis. Spine, 11, 213-218.
- STOKES, I.A.F., MEDLICOTT P.A et WILDER D.G. (1980). Measurement of movement in painful intervertebral joints, Med. & Biol. Eng. & Comput., 18, 694-700.

- STOKES, I.A.F., SHUMA-HARTSWICK, D. et MORELAND, M.S. (1988). Spine and back shape changes in scoliosis. Acta Orthopaedica Scandinavica, 59(2), 128-33.
- SUZUKI, N., INAMI, K., ONO, T., KOHNO, K. et ASHER, M.A. (1999). Analysis of posterior trunk symmetry index (POTSI) in Scoliosis. Part 1. Research into Spinal Deformities 2. Studies in Health Technology and Informatics (IOS Press), 59, 81-84.
- THEOLOGIS, T., FAIRBANK, J., TURNER-SMITH, A. et PANTASOPOULOS, T. (1997). Early detection of progression in adolescent idiopathic scoliosis by measurement of changes in back shape with the Integrated Shape Imaging System scanner. Spine, 22, 1223-1228.
- THOMETZ, J., LIU, X.C. et LYON, R. (1999). Axial rotation in idiopathic scoliosis: a comparison of the Perdriolle, Scoliometer and Quantec Spinal Image System. Research into Spinal Deformities 2. Studies in Health Technology and Informatics (IOS Press), 59, 329-333.
- THULBOURNE, T. et GILLESPIE, R. (1976). The rib hump in idiopathic scoliosis: measurement, analysis and response to treatment. The Journal of Bone and Joint Surgery, 58-B(1), 64-71.
- TROCHU, F. (1993). A contouring program based on dual kriging interpolation. Engineering with Computers, 9, 160-177.
- TURNER-SMITH, A.R., HARRIS, J.D., HOUGHTON, G.R. et JEFFERSON, R.J. (1988). A method for analysis of back shape in scoliosis. Journal of Biomechanics, 21(6), 497-509.
- WAGNER, P.H., LUO, X. et STELSON, K.A. (1995). Smoothing curvature and torsion with spring splines. Comput.-Aided Des., 27(8), 615-626.

WEATHERBURN, C.E. (1984). Differential geometry of three dimensions. Cambridge University Press, England, Chap. I, 11-32.

WEINSTEIN, S.L. (1994). Adolescent idiopathic scoliosis: Prevalence and natural history. The pediatric spine: Principle and practice. In Weinstein S.L. (ed), vol. 1, chap. 21, Raven Press, New York.

WEINSTEIN, S.L. et PONSETI, I.V. (1983). Curve progression in idiopathic scoliosis: Long-term follow-up. J. Bone Joint Surg., 65, 447.

WEISZ, I., JEFFERSON, R.J., TURNER-SMITH, A.R., HOUGHTON, G.R. et HARRIS, J.D. (1988). ISIS Scanning: A useful assessment technique in the management of scoliosis. Spine, 13(4), 405-408.

WHITE, A.A. et PANJABI, M.M. (1990). Clinical biomechanics of the spine, 2^{ème} éd., Lippincott, Philadelphia, 722 pages.

WILLIAMS, P.L. (1989). Gray's Anatomy, 37^{ème} éd., Churchill Livingstone, Edinburgh, 1598 pages.

WOLF, P.R. (1983). Elements of Photogrammetry. McGraw Hill, New York, 564-575.

WONG, H.K., BALASUBRAMANIAM, P., RAJAN, U. et CHANG, S.Y. (1997). Direct spinal curvature digitization in scoliosis screening – a comparative study with moire contourgraphy. Journal of Spinal Disorder, 10(3), 185-192.

ANNEXE I

SIMULATION MATHÉMATIQUE DE RACHIS NORMAL ET SCOLIOTIQUES

Pour valider les différentes méthodes d'évaluations, diverses morphologies de colonnes vertébrales ont été simulées mathématiquement: une colonne idéale, caractérisée par sa géométrie 2D, puis six colonnes scoliotiques résultant de la déformation tridimensionnelle mathématique de la colonne idéale. Ces colonnes scoliotiques sont généralement classifiées selon les types de courbures observées dans la vue postéroantérieure (PA). On arrive ainsi à catégoriser les scolioses selon les quatre grandes classes suivantes: scoliose thoracique droite (TD), thoracique droite-lombaire gauche (TDLG), thoraco-lombaire gauche (TLG) et lombaire gauche (LG). Les deux types les plus fréquemment rencontrés étant sans contredit les scolioses dites TD et TDLG. Une étude préliminaire de classification 3D des courbes scoliotiques entreprise à l'été 92 par Christiane Labrie (sous la direction du médecin orthopédiste Hubert Labelle de l'Hôpital Sainte-Justine) et basée sur l'analyse des vues PA, latérales et apicales de patients a mené à la sous classification suivante: C, S, &, U et D. Cette notation, à l'exception du D pour divers, caractérise la forme de la scoliose, tel qu'observé dans la vue apicale. Comme il est impossible de simuler mathématiquement toutes les morphologies scoliotiques, nous nous limiterons aux géométries les plus fréquemment rencontrées, c'est-à-dire les scolioses de types: TD-U, TD-C, TDLG-S, TDLG-&, TDLG-C et TLG-C. Étant donné sa rareté, la scoliose de type LG ne sera pas simulée. Le but de cette section est donc de présenter la simulation mathématique d'un rachis idéal, puis celle des morphologies rachidiennes scoliotiques les plus souvent observées. Par ailleurs, ces formulations mathématiques doivent être suffisamment dérivables (jusqu'à l'ordre 3) pour permettre le calcul des paramètres de courbure 3D et de torsion géométrique.

I.1 Colonne idéale

Le rachis idéal est défini comme une géométrie bi-dimensionnelle, caractérisé par une vue frontale rectiligne et une vue latérale constituée des courbures naturelles de la colonne vertébrale soient, la cyphose et la lordose. Afin de mathématiser cette géométrie, une illustration de la vue latérale d'une colonne vertébrale normale a été utilisée. Puis, la position approximative (x,z) du centroïde des corps vertébraux thoraciques et lombaires a été identifiée et numérisée. La coordonnée y a été fixée constante partout pour respecter l'allure rectiligne du rachis idéal dans la vue frontale. Un facteur d'échelle a ensuite été appliqué sur l'ensemble des coordonnées (x,y,z) ainsi reconstruites pour obtenir les dimensions rachitiques moyennes d'un adolescent de 15 ans. L'allure sinusoïdale de la vue latérale (plan XZ) et rectiligne des vues frontale (plan YZ) et apicale (plan XY) permettent de mathématiser très simplement le rachis idéal. Un ajustement par moindres carrés de fonctions polynomiales à conduit au système d'équations paramétriques suivant:

$$\begin{cases} x(t) = 184.8 + 227.72t - 596.45t^2 + 331.57t^3 + 26.463t^4 \\ y(t) = 10.0 \\ z(t) = 218.25 - 417.32t \end{cases} \quad (I.1)$$

où t , la longueur d'arc normalisée, a été approximée par la distance linéaire normalisée entre les centroïdes vertébraux et mesuré à partir de la vertèbre T1 ($t = 0$), jusqu'à la vertèbre L5 ($t = 1$).

Basé sur une étude morphologique de la hauteur des corps vertébraux thoracique et lombaire (Scoles et col., 1988), les coordonnées finales (x,y,z) des centroïdes vertébraux ont été redéfinies pour correspondre aux fonctions paramétriques. Les vues PA, latérale et apicale du rachis idéal sont présentées à la Figure I.1.

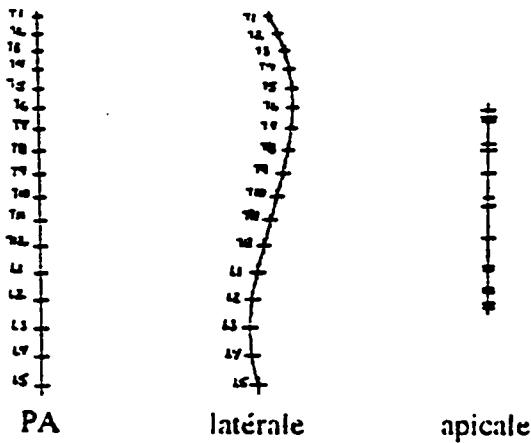


Figure I.1 Vues PA, latérale et apicale du rachis idéal simulé

I.2 Colonnes scoliotiques typiques

Afin de simuler les courbes scoliotiques, nous avons déformé mathématiquement le rachis idéal présenté à la section précédente. Pour ce faire nous avons perturbé les équations du système paramétrique (A.1) en leur additionnant des fonctions mathématiques suffisamment dérivables. Ainsi des fonctions mathématiques de forme exponentielle, logarithmique, trigonométrique et polynomiale ont été à tour de rôle essayées jusqu'à ce que le modèle mathématique ait généré la morphologie scoliotique recherchée.

I.2.1 Scoliose thoracique droite-lombaire gauche (TDLG)

Géométrie la plus souvent observée, la scoliose TDLG se caractérise par une double déviation latérale. La première déviation est orientée à droite et située dans le segment thoracique alors que la seconde est orientée à gauche et située dans le segment lombaire. Les sommets de déformation thoracique et lombaire sont respectivement situés autour des niveaux vertébraux T8-T9 et L2-L3. Bien que les amplitudes de ces sommets (observés dans la vue frontale) puissent être différentes, elles seront considérées identiques pour simplifier la mathématisation de ce type de scoliose. Les morphologies les plus répandues

selon notre classification sont, dans l'ordre décroissant, les scolioses dites TDLG-S, TDLG-& et TDLG-C.

TDLG-S: On constate chez les patients ainsi classifier que les courbures naturelles de la vue latérale (cyphose et lordose) sont peu déformées si bien que combinées aux déviations latérales de la vue frontale, la colonne s'apparente à la lettre S dans la vue apicale (Figure I.1).

$$\begin{cases} x(t) = 184.8 + 227.72t - 596.45t^2 + 331.57t^3 + 26.463t^4 \\ y(t) = 10.0 - 20\cos(2.5\pi t) \\ z(t) = 218.25 - 417.32t \end{cases} \quad (I.2)$$

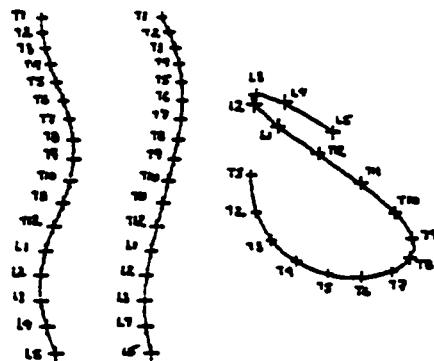


Figure I.2 Vues PA, latérale et apicale du rachis scoliotique TDLG-S simulé

TDLG-&: Cette géométrie est caractérisée par la formation d'une déviation latérale supplémentaire à gauche dans le segment haut thoracique (T3-T4), dont l'amplitude est généralement plus faible que les autres. Comme pour la sous-classe précédente, les courbures naturelles sont peu affectées. La vue apicale résultante s'apparente au caractère & inversé (Figure I.3).

$$\begin{cases} x(t) = 184.8 + 227.72t - 596.45t^2 + 331.57t^3 + 26.463t^4 + 30\sin(\pi t) \\ y(t) = 10.0 - 15\sin(3\pi t) \\ z(t) = 218.25 - 417.32t \end{cases} \quad (I.3)$$

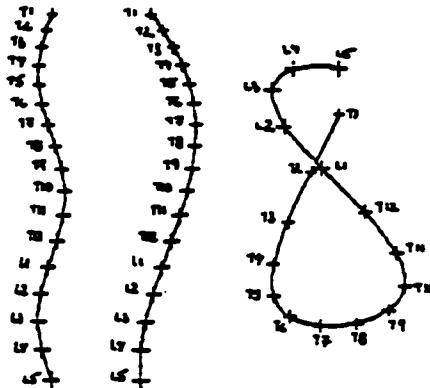


Figure I.3 Vues PA, latérale et apicale du rachis scoliotique TDLG-& simulé

TDLG-C: Presque toujours associé à un phénomène d'hyperlordose (lordose se poursuivant dans la région thoracique, généralement autour de T7), cette morphologie se traduit dans la vue apicale par une géométrie ayant l'allure d'un C inversé (Figure I.4).

$$\begin{cases} x(t) = 184.8 + 227.72t - 596.45t^2 + 331.57t^3 + 26.463t^4 - 30\sin(\pi t) \\ y(t) = 10.0 - 20\cos(2.5\pi t) \\ z(t) = 218.25 - 417.32t \end{cases} \quad (I.4)$$

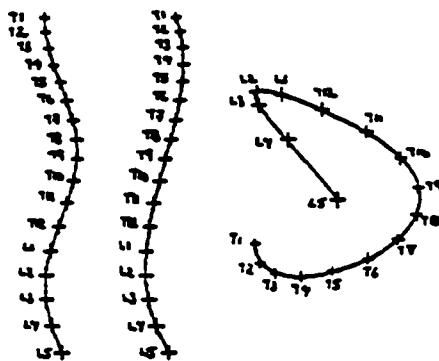


Figure I.4 Vues PA, latérale et apicale du rachis scoliotique TDLG-C simulé

I.2.2 Scoliose thoracique à droite (TD)

Géométrie caractérisée par une déviation latérale à droite au niveau thoracique. De plus, le sommet de déformation thoracique est généralement situé au environ de la vertèbre T9. Les sous-classes TD-U et TD-C sont par ailleurs les plus importantes.

TD-U: Cette sous classe est caractérisé par des patients hypocypotique dont la cyphose prend fin dans le segment haut lombaire (L2). Ceci se traduit dans la vue apicale par une géométrie en forme de U plus ou moins inclinée vers la gauche (Figure I.5).

$$\begin{cases} x(t) = 184.8 + 227.72t - 596.45t^2 + 331.57t^3 + 26.463t^4 + 30\sin(\pi t) \\ y(t) = 10.0 - 20\cos(2\pi t) \\ z(t) = 218.25 - 417.32t \end{cases} \quad (I.5)$$

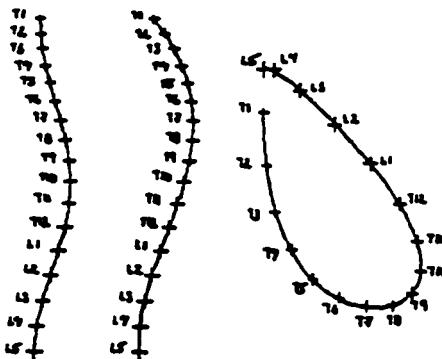


Figure I.5 Vues PA, latérale et apicale du rachis scoliotique TD-U simulé

TD-C: Contrairement à la sous classe précédente, les courbures naturelles observées dans la vue latérale (cyphose et lordose) sont peu affectées donnant à la vue apicale l'aspect d'un C renversé (Figure I.6).

$$\begin{cases} x(t) = 184.8 + 227.72t - 596.45t^2 + 331.57t^3 + 26.463t^4 \\ y(t) = 10.0 - 20\cos(2\pi t) \\ z(t) = 218.25 - 417.32t \end{cases} \quad (I.6)$$

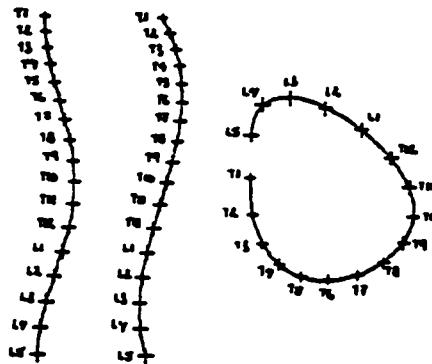


Figure I.6: Vues PA, latérale et apicale du rachis scoliotique TD-C simulé

I.2.3 Scoliose thoraco-lombaire à gauche (TLG)

Géométrie caractérisée, dans la vue frontale, par une déviation latérale à gauche au niveau thoraco-lombaire et un segment thoracique presque rectiligne. Quant au sommet de déformation on le retrouve généralement autour des niveaux vertébraux T12-L1. Ce type de scoliose est beaucoup moins répandue que les deux autres types (TDLG et TD), par conséquent seul la sous-classe TLG-C sera simulée.

TLG-C: Cette morphologie comme l'indique sa notation se traduit dans la vue apicale par une géométrie s'apparentant à un C. Une vue latérale laissant paraître des courbes naturelles (cyphose et lordose) peu déformées combinée à l'unique déviation de la vue frontale explique ce résultat (Figure I.7).

$$\begin{cases} x(t) = 184.8 + 227.72t - 596.45t^2 + 331.57t^3 + 26.463t^4 + 30\sin(\pi t) \\ y(t) = 10.0 - 40\sin(1.8\pi t) - 40\sin(1.5\pi t) \\ z(t) = 218.25 - 417.32t \end{cases} \quad (I.7)$$

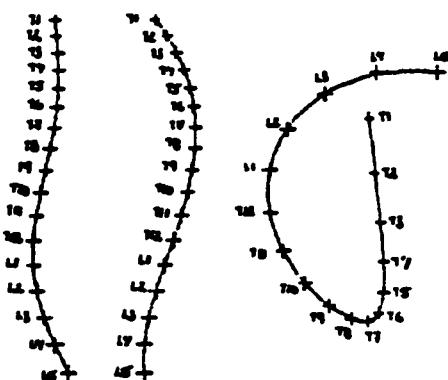


Figure I.7: Vues PA, latérale et apicale du rachis scoliotique TLG-C simulé

ANNEXE II

MODÉLISATION CURVILIGNE DE LA COLONNE VERTÉBRALE À L'AIDE DE SEGMENTS D'HÉLICE ELLIPTIQUE

II.1 Contexte de la communication scientifique

Une approche de modélisation curviligne de la colonne basée sur l'ajustement par la technique des moindres carrés de segments hélicoïdaux elliptiques aux centroïdes vertébraux obtenus à partir des données de reconstruction tridimensionnelle a été développée afin d'éviter les problèmes d'adéquation géométrique de la méthode des hélices circulaires (Dansereau et coll., 1993) et pour obtenir des valeurs locales plutôt que régionales de la torsion géométrique. Cette approche simple d'évaluation locale du paramètre de torsion a permis de déduire certaines tendances de la torsion dans la scoliose idiopathique.

La méthodologie ainsi que les résultats de cette étude ont été présentés lors du Symposium international sur les déformations scoliotiques 3D qui s'est déroulé à Montréal en juin 1992. Le détail de cette étude est décrit dans la communication suivante:

Poncet, P., Dansereau, J., Bellefleur, C. et Labelle, H. (1992). Smoothing methods for the measurement of geometric torsion on 3-D reconstructed scoliotic spines. *International Symposium on 3-D Scoliotic Deformities* (Éditions de l'École Polytechnique de Montréal and Gustav Fisher Verlag), 273-281.

La contribution du premier auteur à la préparation et à la rédaction de cette communication scientifique est de 85%

II.2 Communication scientifique: «Smoothing methods for the measurement of geometric torsion on 3-D reconstructed scoliotic spines»

SMOOTHING METHODS FOR THE MEASUREMENT OF GEOMETRIC TORSION ON 3-D RECONSTRUCTED SCOLIOTIC SPINES

Philippe Poncet¹, Jean Dansereau^{1,2}, Christian Bellefleur¹, Hubert Labelle²

1. Dept. of Mech. Eng., École Polytechnique, P.O. Box 6079, Station "A", Montréal, QC, Canada, H3C 3A7
2. Hôpital Sainte-Justine, 3175, Côte Sainte-Catherine, Montréal, QC, Canada, H3T 1C4

Abstract

From a 3-D point of view, the development of a torsion parameter may provide pertinent information concerning the morphological description of scoliotic deformities. The modelling of the spinal shape by elliptical helices allowed the establishment of a method to evaluate local measurement of geometric torsion for scoliotic spine. This new measurement method revealed that: (1) idiopathic scoliosis is a torsion phenomenon with only one direction in primary thoracic (RT) curves and two opposite directions in double major (RT-LL) curves; (2) for RT-LL curves, a point of no torsion is located in the region of the floating ribs; (3) maximum geometric torsion is found close or at the inflection points for high thoracic and lumbar segments; and (4) minimum geometric torsion is found close or at the apex of the curves. This preliminary study shows a simple method to evaluate local measurement of geometric torsion, but also his limitations.

1. INTRODUCTION

For many years, it has been recognized that idiopathic scoliosis is a three-dimensional (3-D) deformity described by some authors as a "generalized torsion phenomenon" (Graf, 1983; Perdriolle, 1985, etc.). However, this "torsion" has never been precisely defined and today there is still no adequate method of measurement available, although some proposals have been made (Patwardan and Vanderby, 1976; Hierholzer and Luxmann, 1982; De Silva and Yang, 1990). From a 3-D point of view, the development of a torsion parameter may provide pertinent information concerning the morphological description of scoliotic deformities. This parameter may also present clinical interest for diagnosis and/or prognosis of the spinal deformity evolution. This paper presents a method which allows the measurement of geometric torsion as defined mathematically by Frenet's formulas and is based on the assumption that the thoracic and lumbar scoliotic spines can be modelled as segments of elliptical helices.

2. DEFINITIONS

2.1 Geometric torsion vs mechanical torsion

In contrast to mechanical torsion which can be measured by an angle and which produces a structural deformation (as vertebral wedging or distortion of posterior elements), geometric torsion characterizes the general shape of the 3-D curve passing through thoracic and lumbar vertebrae. Figure 1 graphically represents the theoretical difference between geometric torsion and mechanical torsion.

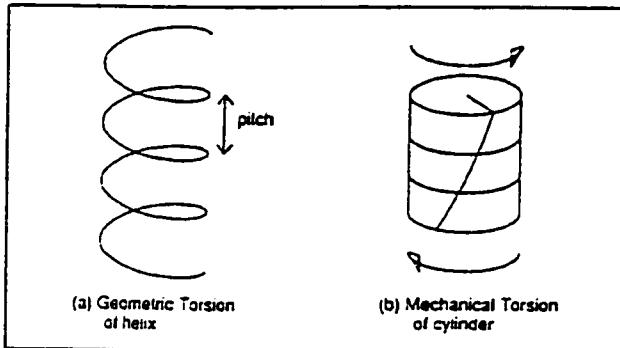


Figure 1 Schematic difference between (a) geometric torsion and (b) mechanical torsion

From the above figure, it can be shown that the geometric torsion does not correspond to the measurement of vertebral axial rotation or to the measurement of intrinsic vertebral deformation.

2.2 Mathematical definition

The definition of geometric torsion is derived from vectorial algebra. In fact, it can be defined, at a specific location on a 3-D curve, as the rate of divergence of this curve from the osculating plane which is formed by the tangent and normal vectors at the evaluation point (figure 2). Consequently, with respect to Frenet's formulas, it is possible to evaluate the geometric torsion at any location on a 3-D curve.

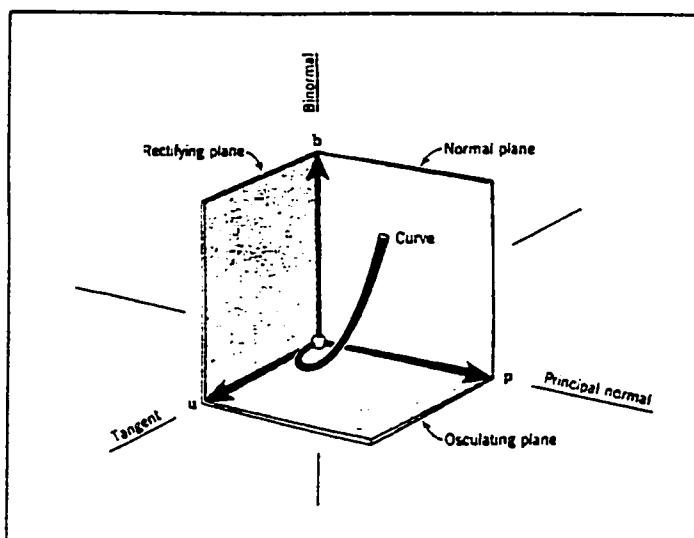


Figure 2 Graphical representation of vectors and planes which mathematically define the geometric characteristics of a 3-D curve

The geometric torsion is a true 3-D measurement. In fact, a straight line or any bi-dimensional geometry like a circle or a planar curve have a torsion value equal to zero. Consequently, a "normal" spine should have a torsion value equal to zero. One of the simplest geometries on which geometric torsion can be evaluated is the circular helix. For this geometry, Frenet's formulas are quite simplified because the torsion (τ) is constant at any location on the curve:

$$\tau = \frac{c}{a^2 + b^2} \quad (1)$$

where "c" is the pitch of the helix and "a" the radius of its basic circle. For a circular helix, maximum geometric torsion occurs when $a = c$.

Torsion values (expressed in mm^{-1}) can be positive or negative. A positive value indicates a torsion in the counterclockwise direction "right handed screwing" (figure 3a) and a negative value is associated with a torsion in the clockwise direction "left handed screwing" (figure 3b).

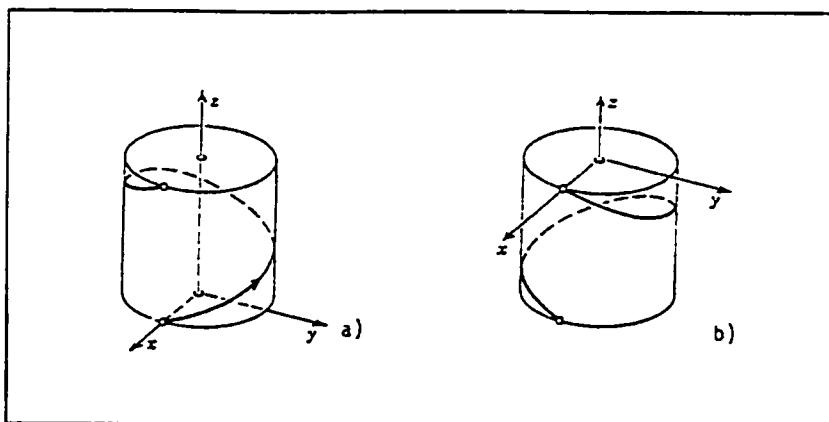


Figure 3 Examples of (a) right handed circular helix (torsion in counterclockwise direction); (b) left handed circular helix (torsion in clockwise direction)

In the case of an elliptical helix, the resulting torsion equation derived from Frenet's formulas describes more adequately scoliotic deformities because torsion values vary all along the 3-D curve. The geometric torsion (τ) of an elliptical helix is defined by the following equation:

$$\tau = \frac{\frac{abc}{2\pi}}{\left(a^2 \sin^2 t + b^2 \sin^2 t + \frac{c^2}{4\pi^2} \right) (a^2 - b^2) \sin t \cos t - (a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t)^2} \quad (2)$$

where "a" and "b" are respectively the major and minor axis of its basic ellipse, "c" the pitch of the helix and "t" the incremental parameter along the curve.

3. PRELIMINARY MODELLING METHODS FOR GEOMETRIC TORSION EVALUATION

Based on spinal 3-D reconstructions obtained from our stereoradiographic technique (Dansereau et al., 1990), the centroid of each thoracic and lumbar vertebra can be calculated. From this information, a 3-D scoliotic curve is mathematically defined using an appropriate smoothing technique. Frenet's formulas are then used to obtain quantitative values of geometric torsion. Based on this approach, thoracic and lumbar scoliotic spines of 40 patients have been modelled as segments of circular helices, fitted by least square technique.

In the majority of right thoracic and left lumbar curves (RT-LL), results confirmed the existence of a 3-D inflection point in the thoraco-lumbar region. Furthermore, this 3-D inflection point is associated with a point of no torsion. Unfortunately, a circular helicoidal shape cannot adequately model all idiopathic scoliotic deformities. This can be explained by the fact that projections of a circular helix in frontal and sagittal planes correspond to the same shape and consequently to the same amount of curvature. In addition, sequential modelling of the thoracic and lumbar segments involves smoothing discontinuity of the whole scoliotic spine.

To avoid these problems and obtain local measurement of geometric torsion at each vertebral level (and not a regional measurement as done by circular helices method), conventional parametric smoothing methods (least square Fourier series, smoothing Spline, B-Spline, etc.) have been applied to model scoliotic thoracic and lumbar spines. These methods generate a continuous 3-D curve with independent smoothing functions: $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$, where t is the common parameter. Because of this independent smoothing characteristic of the parametric form, the second derivatives (curvatures) of the above functions are not zero for the same corresponding t value at the thoraco-lumbar junction (for RT-LL scoliosis) implying that conventional parametric methods cannot define a real 3-D inflection point. Consequently, torsion values calculated around the inflection point are not valid.

Based on the assumption that thoracic and lumbar scoliotic spines can be more adequately modelled as segments of elliptical helices, a new method was developed. The following sections present this method as well as results of local measurement of geometric torsion.

4. MATERIAL AND METHODS

From spinal stereoradiographic reconstruction techniques, developed at École Polytechnique de Montréal and used in scoliosis clinics at Sainte-Justine Hospital (Dansereau et coll., 1990), the 3-D location of the centroid of each vertebra from T1 to L5 was computed for 20 female patients aged between 7 and 21 years old with idiopathic scoliosis. There were 3 right thoracic (RT) curves and 17 right thoracic and left lumbar (RT-LL) curves with a range Cobb angle from 15 to 53°.

An elliptical helix curve was fitted to these centroids by a least square technique on each thoracic and lumbar curve segment. This technique works as follow. From the top view (XZ plane), a partial ellipse curve is first fitted on each specific segment. Afterwards, the best linear fit of the "y" centroid coordinates is computed and the resulting line is wrap around the virtual elliptical cylinder generated by the vertical projection of the ellipse. For each curve, vertebral levels necessary for optimizing the best fit of the helices were determined manually. Finally geometric torsion is evaluated using equation (2).

5. RESULTS AND DISCUSSION

5.1 Torsion direction evaluation

For the 3 RT curves, all thoracic and lumbar segments showed negative torsion (torsion in clockwise direction). For the 17 RT-LL curves all thoracic segments had negative torsion and all lumbar segments had positive torsion (torsion in counterclockwise direction) except for 2 lumbar curves which showed a severe flat back and an accentuated hyperlordosis. These results indicate that, in the majority of RT-LL curves, 3-D deformity passes through a point of no torsion located at the level of the floating ribs and confirm the clinical suspicion of many authors who have qualitatively described the thoracic segment as being in torsion and the lumbar segment in "countertorsion". These results are in accordance with those already obtained (concerning the torsion direction) by a similar study, based on the same cases, where scoliotic spines were modelled by circular helices (Dansereau et al., 1991).

5.2 Adequateness of modelling

The elliptical helix modelling method does not allow to fit adequately all thoracic and/or lumbar segments of the different scoliotic spinal shapes. Thus, some modelled sections or parts of the spine were rejected because they were considered as having no significant geometric torsion values. Table 1 shows, for RT and RT-LL curves and according to the sign of the computed torsion, the number of thoracic and lumbar segments which were included into the study.

Table 1 Modelled thoracic and lumbar segments for RT and RT-LL curves included into the study according to the direction

curves	Thoracic segments		Lumbar segments	
	$\tau < 0$	$\tau > 0$	$\tau < 0$	$\tau > 0$
RT	2/3	0/0	2/3	0/0
RT-LL	15/17	0/0	0/2	9/15

In this table, it can be noted that lumbar segments of negative torsion for both flat back and hyperlordosis RT-LL curves were not considered for the analysis. Furthermore, it can be observed that the modelling method seems to better fit the thoracic segments than the lumbar segments for RT-LL curves. For RT scoliotic curves, it is not possible to end up with a conclusion because of the limited number of subjects.

5.3 Graphical and numerical results

Figures 4a and 4b show frontal, lateral and apical views of typical RT and RT-LL curves with and without countertorsion of the lumbar segment respectively. Their corresponding torsion plots are presented in figures 5a and 5b.

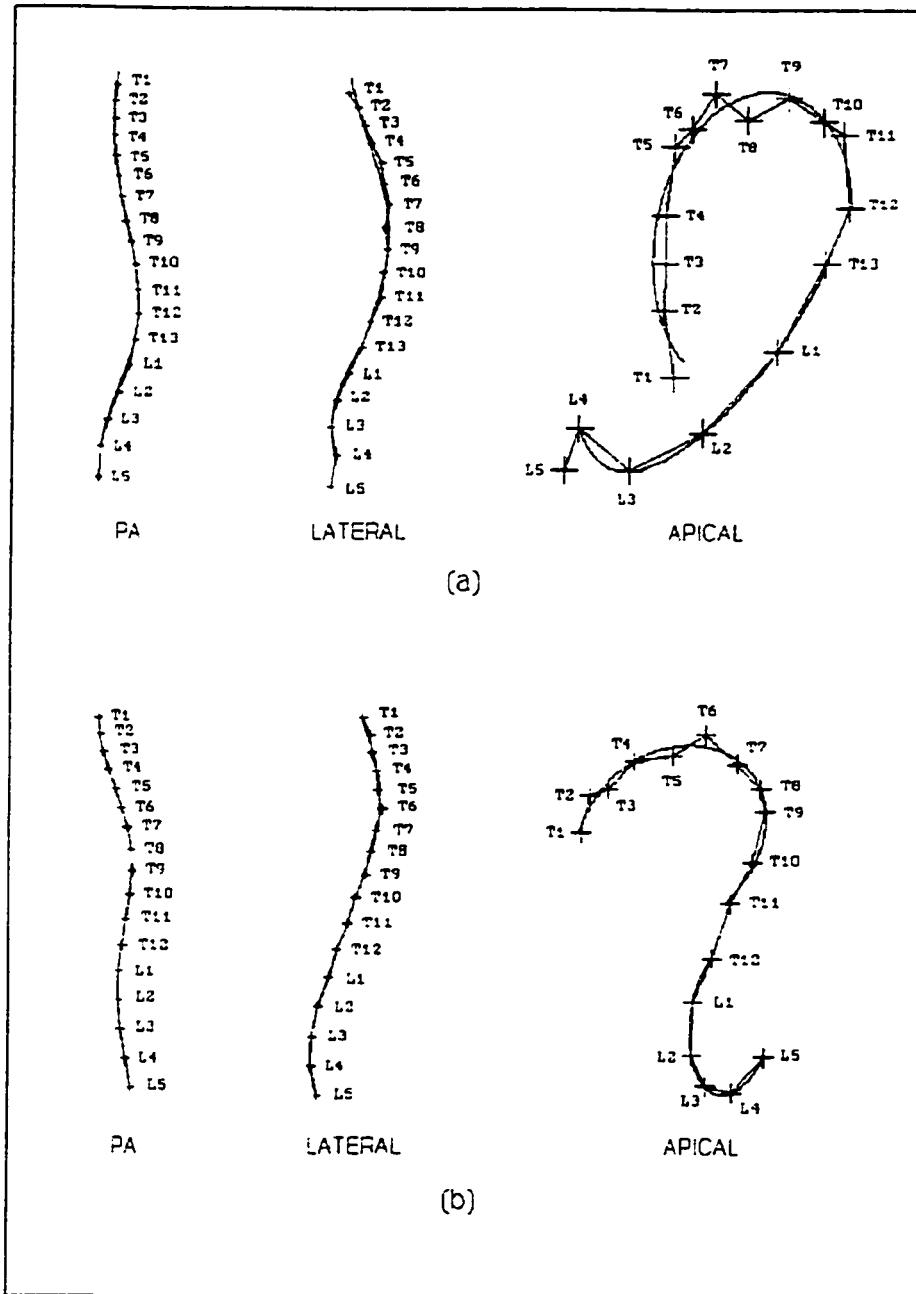


Figure 4 Frontal, lateral and apical views of typical (a) RT; and (b) RT-LL curves. The solid linear lines represent the direct connections between the vertebral centroids while the two continuous curves represent the shapes of the spine as modelled by elliptical helix curves

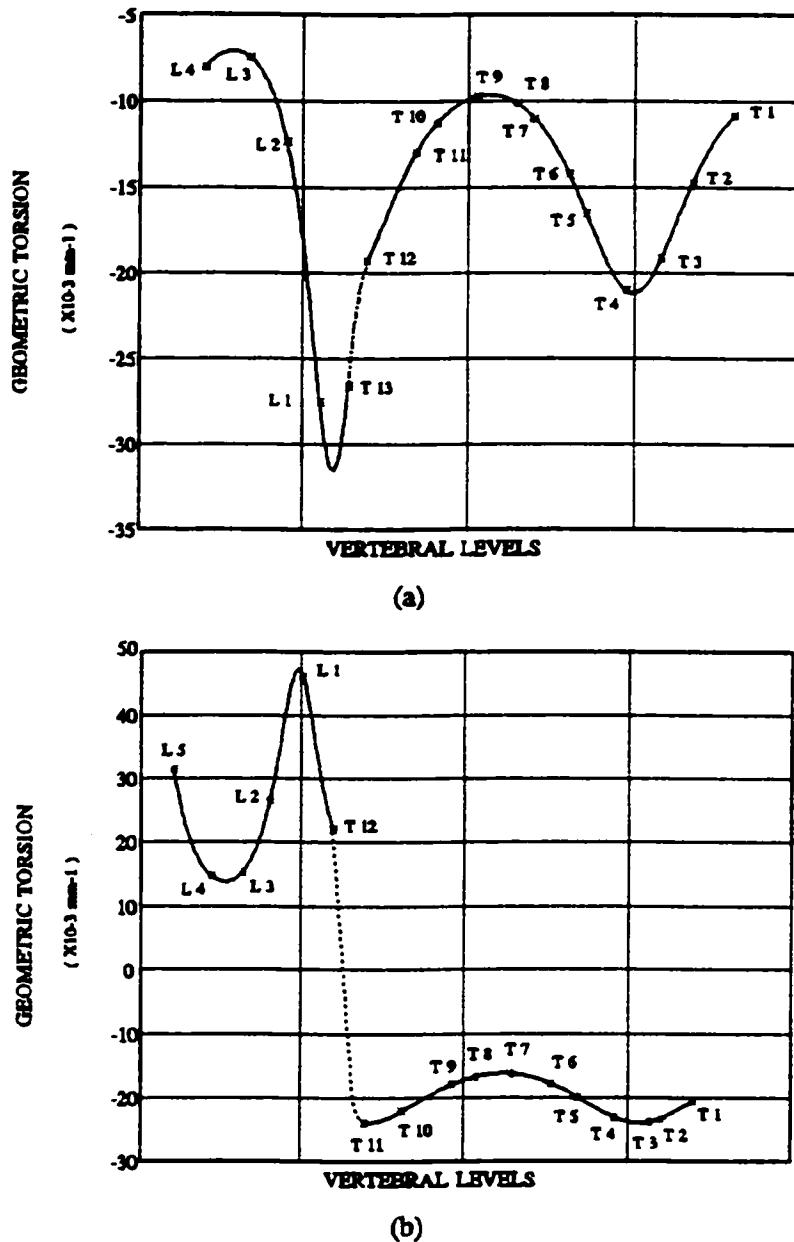


Figure 5 Plots of geometric torsion for typical (a) RT; and (b) RTLL curves. The dotted line has been drawn by hand in order to approximate the non modelled section or part of the scoliotic spine

These graphical results show that typical RT-LL curve passes through a point of no torsion located at the level of the floating ribs while typical RT curve is associated with geometric torsion in the same direction (negative).

Tables 2 and 3 contain mean and range values of minimum and maximum geometric torsion of thoracic and lumbar segments for RT and RT-LL scoliotic curves.

Table 2 Range and mean values of geometric torsion for RT curves

Spine segments	maximum torsion ($\times 10^3$ mm $^{-1}$)		minimum torsion ($\times 10^3$ mm $^{-1}$)	
	mean	range	mean	range
thoracic (T6 to T9)	-31.1	-31.1	-9.69	-9.69
lumbar (L1 to L4)	-29.32	-27.15 to -31.50	-9.53	-7.09 to -11.97

Table 3 Range and mean values of geometric torsion for RT-LL curves

Spine levels	maximum torsion ($\times 10^3$ mm $^{-1}$)		minimum torsion ($\times 10^3$ mm $^{-1}$)	
	mean	range	mean	range
high thoracic (T2 to T8)	-44.67	-18.69 to -40.16	-12.57	-50.50 to -22.09
low thoracic (T9 to T11)	-31.64	-11.44 to -85.11		
high lumbar (T12 to L2)	71.90	36.23 to 107.57	8.66	3.06 to 14.40
low lumbar (L3 to L4)	33.79	33.79		

From these tables it can be observed that for both RT and RT-LL scoliotic curves absolute maximum torsion values on the thoracic and lumbar segments were always associated with an inflection point. Furthermore, for RT curves, this point is located at the thoraco-lumbar junction or its vicinity. These results can also be observed on typical cases presented on figures 4 and 5. Absolute minimum torsion values had been found, for the majority of thoracic segments, close or at the kyphosis apex. For lumbar segments, geometric torsion was minimum at the lordosis apex and/or at the lumbar scoliosis apex.

For RT scoliotic curves, mean maximum and mean minimum geometric torsion ratio is approximately 3 for thoracic and lumbar segments. For RT-LL curves, lumbar segments have a higher torsion ratio (more than 8) while thoracic segments have a similar ratio than the RT curves.

CONCLUSION

The modelling of the spinal shape by elliptical helices allowed the establishment of a simple method to evaluate local measurement of geometric torsion for scoliotic spine. The development and the application of this new measurement method revealed that:

- idiopathic scoliosis is a torsion phenomenon with only one direction in primary thoracic (RT) curves and two opposite directions in double major (RT-LL) curves;
- for RT-LL curves, a point of no torsion is located in the region of the floating ribs;
- maximum geometric torsion is found close or at the inflection points for high thoracic and lumbar segments;
- minimum geometric torsion is found close or at the apex of the curves.

However, this new geometric torsion measurement method had some limitations such as independent modelling of thoracic and lumbar segments (creating discontinuity around the thoraco-lumbar segment) and the non adequateness modelling of any thoracic or lumbar shapes. Consequently, a "real" 3-D smoothing technique capable of modelling adequately any scoliotic shape and allowing an accurate local measurement of geometric torsion still remains to be defined. Kriging, a mathematical statistical interpolation smoothing method, now in development, shows interesting characteristics. This method permits conventional smoothing approaches such as splines or least squares techniques. It also allows the possibility of implicit smoothing ($f(x,y,z) = 0$) of the scoliotic spine, avoiding parametric modelling problems.

ACKNOWLEDGEMENTS

This research was founded by CRSNG, FCAR and PRNDS.

REFERENCES

- DANSEREAU, J., BEAUCHAMP, A., DE GUISE, J., LABELLE, H. "Three-Dimensional Reconstruction of the Spine and the Rib Cage Stereoradiographic and Imaging Techniques", *Société Canadienne de Génie Mécanique*, Vol. 2, p. 61-64, 1990.
- DE SILVA, C.N., YANG, K.H., "Precise Description of a scoliotic Spine", *14th Annual Meeting of the American Society of Biomechanics*, Miami, Florida, p. 219-220, 1990.
- GRAF, H., HECQUET, J., DUBOUSSET, J., "Approche tridimensionnelle de déformations rachidiennes: application à l'étude du pronostic des scolioses infantiles", *Rev. chir. orthop.*, 69:407-416, 1983.
- HIERHOLZER, E., LUXMANN, G., "Three-Dimensional Shape Analysis of the Scoliotic spine using Invariant Shape Parameters", *J. of Biomechanics*, 15:583-598, 1982.
- PATWARDHAN, A.G., VANDERBY, R., "A Three-Dimensional Large Displacement, Continuum Model of a Human Spine", *Proc. of the American Society of Mechanical Engineering*, Washington, D.C., U.S.A., p. 33-35, 1976.
- PERDRIOLLE, R., VIDAL, J., "Thoracic Idiopathic scoliosis curve Evolution and Prognosis", *Spine*, 10:785-791, 1985.
- DANSEREAU, J., LABELLE, H., BELLEFLEUR, C., "Measurement of Geometric Torsion on the Three-Dimensional Shape of Reconstructed Scoliotic Spines", *7th International Congress on Correl-Dubousset Instrumentation*, Münster, Germany, 1991.

ANNEXE III

TECHNIQUE DE MODÉLISATION À L'AIDE DE SÉRIES DE FOURIER

Soit $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ les fonctions paramétriques qui définissent la colonne vertébrale à modéliser où le paramètre t est choisi fonction de la distance entre les N points de mesure, c'est-à-dire les N centroïdes vertébraux reconstruits:

$$t_{i+l} = t_i + \sqrt{(x_{i+l} - x_i)^2 + (y_{i+l} - y_i)^2 + (z_{i+l} - z_i)^2} \quad (III.1)$$

$1 \leq i \leq N-1, t_1 = 0.$

Chaque fonction est alors estimée par une série de Fourier ajustée aux données reconstruites par la méthode des moindres carrés. Ainsi, par exemple, $x(t)$ sera défini mathématiquement par

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \quad (III.2)$$

où l est la longueur euclidienne de la colonne (t_N). Les coefficients a_i et b_i sont alors déterminés de manière à obtenir la courbe qui s'ajuste le mieux aux points de mesure (x_i, t_i) .

Pour simplifier le développement qui suit, l'équation III.2 est réécrite sous la forme suivante:

$$x(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_m f_m(t). \quad (III.3)$$

A chaque coordonnée x_i connue est alors associée une équation de la même forme, soit

$$x_i = c_1 f_1(t_i) + c_2 f_2(t_i) + \dots + c_m f_m(t_i) \quad (III.4)$$

ce qui conduit au système linéaire d'équations suivant

$$x(t) = \sum_{k=1}^m c_k f_k(t_i) , \quad 1 \leq i \leq N . \quad (\text{III.5})$$

Soit maintenant r_i , le résidu des moindres carrés, donné par la différence entre la coordonnée reconstruite x_i et la valeur estimée par la relation III.4

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m c_k f_k(t_1) - x_1 = r_1 \\ \sum_{k=1}^m c_k f_k(t_2) - x_2 = r_2 \\ \dots \\ \sum_{k=1}^m c_k f_k(t_N) - x_N = r_N \end{array} \right. . \quad (\text{III.6})$$

Lorsque la courbe passe par un point de mesure, le résidu qui lui est associé est nul. En d'autres mots, plus les résidus seront faibles, meilleur sera l'ajustement. Il s'agit alors de déterminer la valeur des coefficients c_1, c_2, \dots, c_m pour laquelle la somme des carrés des résidus est minimale:

$$\sum_{i=1}^N r_i^2 = \text{minimum} . \quad (\text{III.7})$$

Puisque r_i est fonction de c_1, c_2, \dots, c_N , ceci s'obtient lorsque

$$\sum_{i=1}^N r_i \frac{\partial r_i}{\partial c_k} = 0 , \quad 1 \leq k \leq m \quad (\text{III.8})$$

Ce qui, sous forme matricielle, s'exprime par

$$[r_1 \ r_2 \ \dots \ r_N] \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial c_1} & \frac{\partial r_1}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial r_1}{\partial c_m} \\ \frac{\partial r_2}{\partial c_1} & \frac{\partial r_2}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial r_2}{\partial c_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial r_N}{\partial c_1} & \frac{\partial r_N}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial r_N}{\partial c_m} \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (\text{III.9})$$

De plus, en dérivant partiellement par rapport aux coefficients c_1, c_2, \dots, c_N les équations du système V.6, l'expression générale suivante est obtenue

$$\frac{\partial r_i}{\partial c_k} = f_k(t_i), \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq m \end{matrix} \quad (\text{III.10})$$

L'équation V.9 peut alors se réécrire comme suit

$$[r_1 \ r_2 \ \dots \ r_N] F = [0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (\text{III.11})$$

où

$$F = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_m(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \dots & f_m(t_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(t_N) & f_2(t_N) & \dots & f_m(t_N) \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

L'utilisation de la notation $[r_1 \ r_2 \ \dots \ r_N] = R$ jumelée à la transposition de l'équation III.11 permet d'obtenir

$$[R \ F]^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T. \quad (\text{III.13})$$

Puisque $[RF]^T = F^T R^T$ et que $[0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ est un vecteur colonne l'équation III.13 prend alors la forme

$$F^T \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

où

$$F^T = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_1(t_2) & \dots & f_1(t_N) \\ f_2(t_1) & f_2(t_2) & \dots & f_2(t_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_m(t_1) & f_m(t_2) & \dots & f_m(t_N) \end{bmatrix}. \quad (\text{III.15})$$

Si maintenant l'équation III.6, est écrite sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^m c_k f_k(t_1) \\ \sum_{k=1}^m c_k f_k(t_2) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m c_k f_k(t_N) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

sa substitution dans la relation III.14 se traduit alors comme suit

$$F^T \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^m c_k f_k(t_1) \\ \sum_{k=1}^m c_k f_k(t_2) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m c_k f_k(t_N) \end{Bmatrix} = F^T \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} \quad (\text{III.17})$$

Puisque

$$\begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^m c_k f_k(t_1) \\ \sum_{k=1}^m c_k f_k(t_2) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m c_k f_k(t_N) \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{Bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

l'équation matricielle III.17 devient

$$F^T F \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{Bmatrix} = F^T \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

où encore plus simplement

$$F^T F \{c\} = F^T \{x\}. \quad (\text{III.20})$$

En pré-multippliant chaque côté de l'équation par $(F^T F)^{-1}$ et en simplifiant, il en résulte la formulation suivante:

$$\{c\} = (F^T F)^{-1} F^T \{x\}. \quad (\text{III.21})$$

Ce système est ensuite résolu par élimination de Gauss pour obtenir les valeurs de c_1, c_2, \dots, c_m qui donneront le meilleur ajustement de la courbe aux données reconstruites. La matrice F étant fonction seulement du paramètre t (commun aux trois coordonnées cartésiennes) les coefficients définissant les séries de Fourier associées aux équations paramétrique $y(t)$ et $z(t)$ s'obtiennent simplement en remplaçant le vecteur de droite $\{x\}$, dans la relation III.21, par les vecteurs $\{y\}$ et $\{z\}$ respectivement.

ANNEXE IV

KRIGEAGE DUAL

La première section de cette annexe présente une dérivation des équations de base du krigage et leur lien avec le krigage dual. Dans la deuxième section, une méthode d'interpolation basée sur le krigage dual est décrite. Les développements qui suivent sont fortement inspirés des notes du cours MEC6310 «Krigage en CAO et FAO» et de Trochu (1993).

IV.1 Théorie du krigage dual

- ***La fonction à estimer***

La fonction à estimer $U(X)$ est interprétée comme étant une fonction aléatoire. Elle se décompose, en la sommation de deux fonctions

$$U(X) = a(X) + b(X) \quad (\text{IV.1})$$

où $a(X)$ représente la valeur moyenne de la fonction à estimer appelée *dérive* et $b(X)$ la fluctuation par rapport à cette valeur moyenne. De plus cette fluctuation aléatoire $b(X)$ est centrée. Les espérances mathématiques des fonctions $U(X)$ et $b(X)$ s'expriment donc comme suit:

$$\begin{aligned} E[U(X)] &= a(X) \\ E[b(X)] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

On cherche ainsi à estimer la fonction aléatoire $U(X)$ par une combinaison linéaire des variables aléatoires $U(x_i)$ aux points d'observations x_i , $1 \leq i \leq N$

$$u^*(X) = \sum_{i=1}^N \lambda_i U(x_i). \quad (\text{IV.3})$$

- **Condition de non-biais**

On veut que l'équation d'estimation IV.3 soit sans biais, c'est-à-dire que la valeur estimée $u^*(X)$ soit identique à $U(X)$. On aura alors

$$E[U(X)] = \sum_{i=1}^N \lambda_i E[U(x_i)]. \quad (\text{IV.4})$$

Posons la fonction à estimer égale à sa moyenne $U(X) = a(X)$. L'expression IV.3 devient alors

$$a(X) = \sum_{i=1}^N \lambda_i a(x_i). \quad (\text{IV.5})$$

Puisque cette dernière équation doit être satisfaite, quel que soit le choix de la dérive $a(X)$, les conditions de non-biais seront données par

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i p_i(x_i) = p_l(X), \quad l \leq l \leq M \quad (\text{IV.6})$$

où $p_l(X)$, représente les M fonctions de base de la dérive.

- **Erreur d'estimation**

En considérant, l'espérance mathématique du carré de l'erreur d'estimation, on obtient:

$$E[U(X) - \sum_{i=1}^N \lambda_i U(X_i)]^2 = E[U(X)]^2 - \sum_{i=1}^N 2 \lambda_i E[U(X), U(X_i)] + \sum_{i,j=1}^N \lambda_i \lambda_j E[U(X_i), U(X_j)] \quad (\text{IV.7})$$

On doit alors choisir les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ de manière à minimiser l'espérance mathématique du carré de l'erreur d'estimation tout en respectant les conditions de non-biais IV.6. Il s'agit donc d'un problème de minimisation sous contrainte dont la solution est solution du système linéaire de $N+M$ équations et $N+M$ inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_N, \mu_1, \dots, \mu_N$ (les coefficients μ_l , $1 \leq l \leq M$ étant utilisés comme multiplicateurs de Lagrange de contraintes):

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j E[U(X_i), U(X_j)] + \sum_{l=1}^M \mu_l p_l(X_i) = E[U(X), U(X_i)], \quad 1 \leq i \leq N \quad (\text{IV.8})$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j p_l(X_j) = p_l, \quad 1 \leq l \leq M$$

L'espérance mathématique du carré de l'erreur d'estimation étant toujours positive, il existe une solution unique au système de krigeage IV.8.

- **Fonction de covariance**

Pour résoudre le système linéaire IV.8, il faut définir l'espérance mathématique du produit des variables aléatoires $E[U(X_i), U(X_j)]$, aussi appelée covariance. Il est donc nécessaire

d'introduire ici l'hypothèse intrinsèque à savoir que la covariance entre les variables aléatoires $U(X_i)$ et $U(X_j)$ dépend de la distance euclidienne h entre les points X_i et X_j

$$E[U(X_i)U(X_j)] = K(|X_i - X_j|) = K_{ij} \quad (\text{IV.9})$$

$$E[U(X)U(X_j)] = K(|X - X_j|) = K_j$$

On obtient ainsi un interpolateur de krigeage différent pour chaque fonction de covariance $K(h)$ admissible.

- **Passage au système du krigeage dual**

On peut réécrire le système d'équation linéaire de krigeage IV.8 sous forme matricielle en tenant compte des notations IV.9:

$$\left[\begin{array}{ccccc} & p_1(X_1) & \cdots & p_1(X_i) & \cdots & p_M(X_1) \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{ij} & & p_1(X_i) & \cdots & p_i(X_i) & \cdots & p_M(X_i) \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & p_1(X_N) & \cdots & p_i(X_N) & \cdots & p_M(X_N) \\ \hline p_1(X_1) & \cdots & p_1(X_i) & \cdots & p_1(X_N) & | & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ p_i(X_1) & \cdots & p_i(X_i) & \cdots & p_i(X_N) & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & | & & & \vdots \\ p_M(X_1) & \cdots & p_M(X_i) & \cdots & p_M(X_N) & | & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_N \\ \hline \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \\ \mu_M \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} K_1 \\ \vdots \\ K_i \\ \vdots \\ K_N \\ \hline p_1(X) \\ \vdots \\ p_i(X) \\ \vdots \\ p_M(X) \end{array} \right]$$

(IV.10)

ou encore en inversant la matrice

$$\begin{bmatrix} \lambda_I \\ \vdots \\ \lambda_N \\ - \\ \mu_I \\ \vdots \\ \mu_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & \\ & U & & & & V & \\ & & & & & & \\ - & - & - & + & - & - & - \\ & & & & & & \\ & V^T & & & W & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_I \\ \vdots \\ K_N \\ - \\ p_I(X) \\ \vdots \\ p_M(X) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

En substituant les N premières équations du système matriciel précédent dans l'expression d'estimation IV.3, on obtient

$$u^*(X) = \{u_I \ \dots \ u_N\} \cdot U \cdot \begin{bmatrix} K_I \\ \vdots \\ K_N \end{bmatrix} + \{u_I \ \dots \ u_N\} \cdot V \cdot \begin{bmatrix} p_I(X) \\ \vdots \\ p_N(X) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

La matrice de covariance $[K_{ij}]$ étant symétrique, la matrice $[U]$, son inverse, le sera aussi. Par conséquent, on peut poser

$$\begin{aligned} \{u_I \ \dots \ u_N\} \cdot U &= \{b_I \ \dots \ b_N\} \\ \{u_I \ \dots \ u_N\} \cdot V^T &= \{a_I \ \dots \ a_M\} \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

et l'expression d'estimation devient

$$u^*(X) = \sum_{l=1}^M a_l p_l(X) + \sum_{j=1}^N b_j K(|X - X_j|) \quad (\text{IV.14})$$

En combinant les équations IV.13 en un seul système d'équations, on obtient

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \\ - \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & | & A \\ - & - & + & - & - & - \\ & & & | & & \\ & & & V^T & | & B \\ & & & - & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ - \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.15})$$

Les matrices A et B étant arbitraires, on choisira $A=V$ et $B=W$. On retrouve ainsi la matrice de krigeage inverse du système d'équations IV.11

$$\begin{bmatrix} K_{ij} & | & p_i(X_j) \\ - & - & + & - & - & - \\ & & & | & & \\ p_i(X_j) & | & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \\ - \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ - \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.16})$$

Ce système d'équations linéaires constitue, avec le modèle d'interpolation IV.14, la formulation duale du krigeage.

IV.2 Méthode d'interpolation par krigeage dual

Pour simplifier la présentation de cette méthode d'interpolation, X est utilisé pour représenter la position d'un point de mesure indépendamment de sa dimension géométrique. De sorte qu'en 1D, 2D ou 3D on aura respectivement $X=x$, $X=(x,y)$, $X=(x,y,z)$.

Le but du krigeage dual est donc d'estimer une fonction $u(X)$ à partir des observations u_i mesurées aux positions spécifiques X_i , $1 \leq i \leq N$, tel que

$$u(X_i) = u_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (\text{IV.17})$$

En krigeage, la fonction $u(X)$ est interprétée comme étant une fonction aléatoire, se décomposant en la somme de deux autres fonctions

$$u(X) = a(X) + b(X) \quad (\text{IV.18})$$

où $a(X)$ est la valeur moyenne de la fonction à estimer et appelé la *dérive*, et $b(X)$ une fluctuation aléatoire appelée la *covariance*. De façon générale la *dérive* se définit par

$$a(X) = \sum_{l=1}^M a_l p_l(X) \quad (\text{IV.19})$$

où $p_l(X)$ représente les M fonctions de base et a_l les M coefficients associés. La correction apportée par la fluctuation $b(X)$ vient s'ajouter à la dérive pour obliger la fonction à passer par les points de mesure. Puisque chaque point de mesure fournit des informations spécifiques sur le phénomène étudié, il est naturel de supposer la fluctuation $b(X)$ dépendante de l'observation au point X_j . Ainsi, $b(X)$ est construit de manière à dépendre

linéairement des N degrés de liberté b_j , $1 \leq j \leq N$, pondérés par les fonctions de correction $g_j(X)$ associées à chaque point de mesure:

$$b(X) = \sum_{j=1}^N b_j g_j(X). \quad (\text{IV.20})$$

L'introduction de fonctions de correction qui dépendent uniquement de la distance euclidienne entre le point de contrôle (X, U) et les points de mesure (X_j, U_j) , se traduit par

$$g_j(X) = K(|X - X_j|) = K(h), \quad 1 \leq j \leq N \quad (\text{IV.21})$$

où $K(h)$ est une fonction appelée *covariance généralisée*. Par conséquent, le modèle de base du krigeage dual s'écrit comme suit

$$u(X) = \sum_{l=1}^M a_l p_l(X) + \sum_{j=1}^N b_j K(|X - X_j|) \quad (\text{IV.22})$$

Selon les propriétés de $K(h)$, l'interpolation sera continue et/ou différentiable et par définition passera par les points de mesure.

Les $M+N$ degrés de liberté a_l , $1 \leq l \leq M$, et b_j , $1 \leq j \leq N$, du modèle de base du krigeage dual sont résolus par un système de $M+N$ équations linéaires appelées *système de krigeage*. Les N premières équations consistent à écrire que le modèle passe par les points de mesure et les M équations supplémentaires, appelées aussi conditions de non-biais, expriment le fait que la dérive représente la valeur moyenne du phénomène. Un système symétrique constitué de $M+N$ équations linéaires est ainsi obtenu:

$$\begin{bmatrix}
 K(|X_i - X_j|) & \begin{bmatrix} p_1(X_1) & \cdots & p_i(X_1) & \cdots & p_M(X_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_1(X_i) & \cdots & p_i(X_i) & \cdots & p_M(X_i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_1(X_N) & \cdots & p_i(X_N) & \cdots & p_M(X_N) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_i \\ b_N \\ \vdots \\ a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_1 \\ u_i \\ u_N \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} p_1(X_1) & \cdots & p_1(X_j) & \cdots & p_1(X_N) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_i(X_1) & \cdots & p_i(X_j) & \cdots & p_i(X_N) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_M(X_1) & \cdots & p_M(X_j) & \cdots & p_M(X_N) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_i \\ u_N \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

La solution du *système de krigeage* donne donc les coefficients du modèle d'interpolation permettant d'évaluer une valeur interpolée n'importe où dans le domaine de définition.

À titre d'exemple, le système linéaire du krigeage dual 1D ($X=x$) pour une covariance généralisée $K(h)$ et une dérive linéaire s'écrit:

$$\begin{bmatrix}
 K(|x_i - x_j|) & \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & x_N \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & + & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N & | & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} - \\ a_1 \\ \vdots \\ a_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} - \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \quad (\text{IV.24})$$

La fonction d'interpolation est alors donnée par

$$u(x) = a_1 + a_2 x + \sum_{j=1}^N b_j K(h_j) \quad (\text{IV.25})$$

où h_j est la distance euclidienne entre le point de contrôle (x, u) et chaque point de mesure (x_j, u_j) , c'est-à-dire:

$$h_j = |x - x_j|. \quad (\text{IV.26})$$

La généralisation pour un cas multidimensionnel est simple, il suffit d'ajouter à la dérive le terme correspondant à chaque dimension supplémentaire. Ceci se traduit par une colonne et une ligne de plus dans la matrice de krigeage, et un terme de plus dans le vecteur des coefficients. Ainsi, par exemple, en 3D deux colonnes et deux lignes additionnelles, constituées principalement des coordonnées y et z des points de mesure, sont ajoutées à la matrice de krigeage 1D du système d'équations IV.24 et les termes supplémentaires a_3 et a_4 , servent à compléter le vecteur des coefficients. Le système de krigeage dual 3D pour une dérive linéaire et une covariance généralisée $K(h)$ est alors donné par l'expression matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ K(|x_i - x_j|) & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & x_N & y_N & z_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_N & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

et la fonction d'interpolation

$$u(x, y, z) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + \sum_{j=1}^N b_j K(h_j) \quad (\text{IV.28})$$

où h_j est maintenant la distance euclidienne 3D

$$h_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2}. \quad (\text{IV.29})$$

Il est aussi possible d'obtenir, grâce au krigeage, l'équivalent du lissage en introduisant au système un *effet de pépite*. Ainsi, une constante P est ajoutée au N premiers termes de la diagonale de la matrice de krigeage, de façon à perturber l'équation correspondante. La solution interpolée s'éloignera d'autant plus des points de mesure que l'intensité de l'effet de pépite sera grande. À la limite, on retrouve la méthode des moindres carrés avec pour résultat de la fonction d'interpolation, *la dérive* (valeur moyenne de la fonction). L'*effet de pépite* permet donc d'introduire des erreurs de mesure dans le modèle d'interpolation. Habituellement, la valeur de P est choisie proportionnelle à la variance de l'erreur.

La notion de *distance d'influence "d"*, a été introduite au krigeage par François Trochu en 1985, modifiant par le fait même le calcul des covariances généralisées $K(h)$. Par définition, la distance (h) entre tous les points de mesure est considérée dans l'évaluation de la fonction d'interpolation. Cependant, en supposant que les points de mesure éloignés n'ont aucune influence sur le phénomène, localement, il est possible de négliger certaines distances. En d'autres mots, un point de mesure X_i situé loin de X_j ($h = |X_i - X_j| \geq d$) n'aurait aucune influence sur la fonction d'interpolation $u(X)$ ($K_{ij}(h)=0$). La matrice de krigeage prend alors la forme d'une matrice bande plutôt que celle d'une matrice pleine. Ceci réduit considérablement le nombre d'opérations mathématiques nécessaire à la résolution du système de krigeage, particulièrement lorsque le nombre de points de mesure est grand.

Puisque la distance d'influence à un effet sur l'allure générale de la fonction d'interpolation, sa valeur doit être choisie soigneusement. Si la distance d'influence est trop petite, la précision des résultats peut devenir inacceptable. En effet, lorsque la distance d'influence diminue, la fonction d'interpolation tend à osciller jusqu'à ce qu'elle devienne dénouée de tout sens. À la limite, la fonction d'interpolation tend vers sa valeur moyenne (*la dérive*) sur tout le domaine, sauf aux points de mesure (par où elle passe), donnant ainsi lieu à une fonction tout à fait irrégulière. Cependant, il n'y a pas de différence significative lorsque d est inférieure à une certaine valeur seuil.

ANNEXE V

DÉRIVATION DE FONCTIONS DE KRIGEAGE

Les lignes qui suivent présentent les résultats de dérivation pour les trois covariances généralisées étudiées:

Cubique:

$$K(h) = 1 - 3h^2 + 2h^3 \quad (\text{V.1})$$

$$K'(h) = 6hh'(h-1) \quad (\text{V.2})$$

$$K''(h) = 6\{ hh'(h-1) + (h')^2(2h-1) \} \quad (\text{V.3})$$

$$K'''(h) = 6\{ hh''(h-1) + 3h''h(2h-1) + 2(h')^3 \} \quad (\text{V.4})$$

Spline-4D:

$$K(h) = h^4(0.5 \ln(h^2)) \quad (\text{V.5})$$

$$K'(h) = h^3h'(4 \ln(h) + 1) \quad (\text{V.6})$$

$$K''(h) = h^2\{ (3(h')^2 + h''h)(4 \ln(h) + 1) + 4(h')^2 \} \quad (\text{V.7})$$

$$K'''(h) = h\{ (6(h')^3 + 9h'h'' + h^2h'')(4 \ln(h) + 1) + (20(h')^3 + 12h'h'') \} \quad (\text{V.8})$$

Trigonométrique:

$$K(h) = \sin(2\pi h) \quad (\text{V.9})$$

$$K'(h) = 2\pi \cos(2\pi h)h' \quad (\text{V.10})$$

$$K''(h) = 2\pi\{ h''\cos(2\pi h) - 2\pi(h')^2\sin(2\pi h) \} \quad (\text{V.11})$$

$$K'''(h) = 2\pi\{ (h'' - 4(h')^2)\cos(2\pi h) - 6\pi h'h''\sin(2\pi h) \} \quad (\text{V.12})$$

Gaussienne:

$$K(h) = e^{-h^2} \quad (\text{V.13})$$

$$K'(h) = -2h' h e^{-h^2} \quad (\text{V.14})$$

$$K''(h) = 2e^{-h^2} \{ (h')^2 (2h^2 - 1) - h'' h \} \quad (\text{V.15})$$

$$K'''(h) = 2e^{-h^2} \{ (-2h'h((h')^2 (2h^2 - 1) - h''h) + 2h'h''(2h^2 - 1) + 4h(h')^3 - h'h'' - h''h \} \quad (\text{V.16})$$

Dans le cas du krigeage géométrique 1D, ces relations sont largement simplifiées puisque h est défini comme suit:

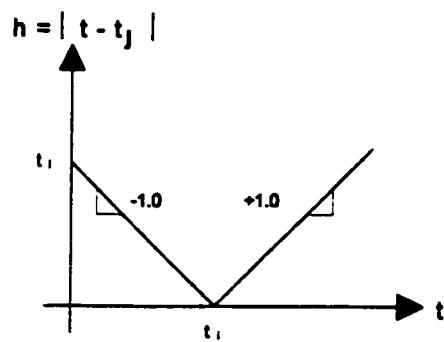


Figure V.1

Par conséquent,

$$h' = \begin{cases} -1 & 0 \leq t \leq t_j \\ +1 & t_j \leq t \leq l \end{cases} \quad (\text{V.17})$$

sauf pour les cas limites où

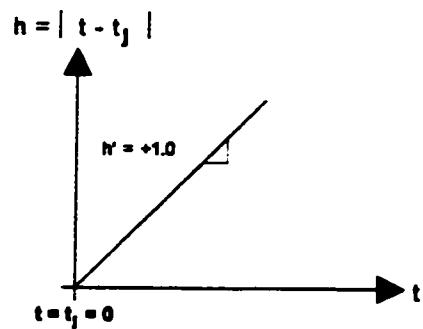


Figure V.2

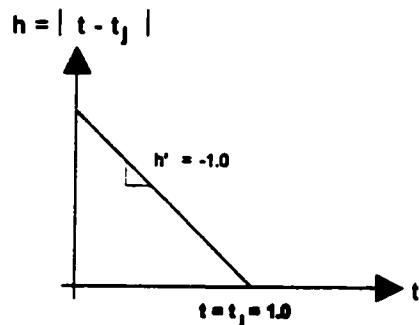


Figure V.3

Finalement on a $h'' = h''' = 0$.