

INFORMATION TO USERS

This manuscript has been reproduced from the microfilm master. UMI films the text directly from the original or copy submitted. Thus, some thesis and dissertation copies are in typewriter face, while others may be from any type of computer printer.

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted. Broken or indistinct print, colored or poor quality illustrations and photographs, print bleedthrough, substandard margins, and improper alignment can adversely affect reproduction.

In the unlikely event that the author did not send UMI a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if unauthorized copyright material had to be removed, a note will indicate the deletion.

Oversize materials (e.g., maps, drawings, charts) are reproduced by sectioning the original, beginning at the upper left-hand corner and continuing from left to right in equal sections with small overlaps.

ProQuest Information and Learning
300 North Zeeb Road, Ann Arbor, MI 48106-1346 USA
800-521-0600

UMI[®]

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS ADAPTATIVE POUR LA RÉOLUTION
DES SENSIBILITÉS D'ÉCOULEMENTS

ÉRIC TURGEON
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIE DOCTOR
(GÉNIE MÉCANIQUE)
DÉCEMBRE 2001



**National Library
of Canada**

**Acquisitions and
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

**Bibliothèque nationale
du Canada**

**Acquisitions et
services bibliographiques**

**395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-71322-9

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS ADAPTATIVE POUR LA RÉOLUTION
DES SENSIBILITÉS D'ÉCOULEMENTS

présentée par: TURGEON Éric

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. LAKIS Aouni A., Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GARON André, Ph.D., membre

M. FORTIN André, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche, Monsieur Dominique Pelletier, pour la qualité de son encadrement, sa disponibilité, la pertinence de ses conseils et la confiance qu'il m'a témoignée. Je lui dois une bonne part de ma formation de chercheur, au-delà des connaissances techniques. Ces nombreuses années à le côtoyer ont été très enrichissantes.

Je remercie également Jeff Borggaard, un collaborateur de l'université Virginia Tech en Virginie. Ses idées et connaissances sur les sensibilités ont aidé à orienter ce projet. De plus, son talent de rédaction dans la langue anglaise a permis d'améliorer la qualité de nos publications conjointes.

J'adresse aussi mes remerciements aux membres du groupe de recherche GRMIAO, étudiants et professeurs, qui ont rendu agréable mon séjour ici et avec qui j'ai eu de nombreuses conversations enrichissantes. J'omets de les nommer de peur d'en oublier.

Finalement, je tiens à souligner l'appui financier du conseil de la recherche en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) et du fonds pour la formation de chercheurs et l'aide à la recherche (FCAR) par le biais de bourses d'études.

RÉSUMÉ

Cette thèse traite du calcul de sensibilités en mécanique des fluides. Une sensibilité représente le taux de variation d'une variable par rapport à un paramètre de design. Dans le contexte de la mécanique des fluides, les sensibilités sont les dérivées des variables de l'écoulement par rapport à un paramètre définissant le problème. Les équations permettant le calcul des sensibilités peuvent être développées au niveau continu ou discret. Dans ce travail, on opte pour l'approche continue qui consiste à différentier les équations aux dérivées partielles de l'écoulement par rapport à un paramètre de design pour générer les équations aux dérivées partielles des sensibilités. Ces équations sont ensuite résolues numériquement par une méthode d'éléments finis adaptative.

Le développement tout à fait général des équations aux dérivées partielles des sensibilités constitue un point important de ce travail. Contrairement à ce que l'on retrouve habituellement dans la littérature, on considère ici un paramètre de design quelconque et on admet donc toutes les dépendances possibles et simultanées des variables et coefficients face à ce paramètre. Le résultat net est une équation permettant de traiter n'importe quel paramètre par la spécification des données appropriées.

Le traitement des conditions aux limites suit également une approche tout à fait générale. Plus encore, on unifie le traitement des paramètres de valeur et de forme. Un paramètre de forme affecte la géométrie alors que tous les autres paramètres se classent dans la catégorie valeur. Le développement des conditions aux limites pour un paramètre de forme a la particularité qu'il doit tenir compte de la variation de la position du point d'application de la condition aux limites de l'écoulement. L'approche générale ramène un paramètre de valeur à un cas particulier d'un paramètre de forme général.

Malgré l'effort de généralité, deux situations ne sont pas supportées à cause des complications non résolues qu'elles engendrent. Il s'agit des conditions de Neumann sur une frontière affectée par un paramètre de forme de même que les solutions comportant des discontinuités.

Deux modèles d'écoulement sont considérés. Le premier correspond aux équations de Navier-Stokes en régime laminaire, incluant le transfert de chaleur, la convection naturelle et les fluides à propriétés physiques variables. Le deuxième est le modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard combiné à des lois de paroi et conditions de tangence, jamais traité auparavant par une approche de sensibilités continues. Pour assurer la préservation de la positivité des variables de turbulence, on utilise la formulation en variables logarithmiques qui correspond tout simplement à un changement de variables de calcul. Cette approche offre en plus des avantages au niveau de la robustesse et de la précision numérique.

La résolution des équations aux dérivées partielles des sensibilités se fait par une méthode d'éléments finis insérée dans un code de résolution d'écoulement existant. L'approche de résolution des sensibilités est similaire à celle de l'écoulement, avec quelques ajustements pour profiter de la linéarité des équations des sensibilités. On utilise l'élément de Crouzeix-Raviart, une construction des matrices élémentaires par jacobien numérique et des techniques de stabilisation de type SUPG et GLS, au besoin.

Afin de maximiser la précision numérique tout en limitant les ressources informatiques requises, on applique une méthodologie de remaillage adaptatif. Avec cet algorithme, on génère une séquence de maillages progressivement raffinés et adaptés au problème particulier traité par des concentrations locales d'éléments. La prédiction des tailles élémentaires utilise l'estimation d'erreur obtenue par une technique de projection locale par moindres carrés. La nouveauté ici consiste à ajouter une

estimation d'erreur sur les sensibilités, permettant ainsi d'adapter le maillage non seulement pour l'écoulement mais aussi pour toutes les sensibilités. Il en résulte un contrôle de la qualité des solutions de l'écoulement et des sensibilités qui utilisent en outre le même maillage. Les applications numériques confirment l'excellente performance de cette approche de remaillage adaptatif. Les résultats obtenus sont indépendants du maillage et donc très près de la solution exacte. La méthodologie permet non seulement d'atteindre des niveaux de précision élevés, mais en plus, elle permet d'illustrer la convergence de la solution par rapport au maillage.

La vérification constitue une étape essentielle lorsqu'on utilise des méthodes numériques et particulièrement lorsqu'on développe un nouveau code, comme c'est le cas ici. La résolution de problèmes possédant une solution analytique permet de telles vérifications rigoureuses. Les résultats présentés démontrent le bon fonctionnement du code de calcul de sensibilités. On remarque également que le traitement de paramètres de forme conduit à des solutions moins précises. D'autres vérifications sont omniprésentes dans les diverses applications présentées : on compare l'extrapolation de solutions voisines par les sensibilités au calcul de ces nouvelles solutions. Ceci est équivalent à comparer le présent calcul de sensibilité à une sensibilité obtenue par différence finie.

Les applications numériques couvrent une vaste gamme d'écoulements, de paramètres de design et d'utilisations des sensibilités. On présente un problème de convection naturelle de sirop de maïs et des écoulements dans un canal, autour d'un profil aérodynamique et sur une plaque plane. Les paramètres traités comprennent la vitesse d'entrée ou à l'infini, une condition aux limites en température, la position d'une frontière, des paramètres des propriétés physiques et les coefficients de fermeture du modèle de turbulence et des lois de paroi. On illustre le potentiel et la réussite de l'utilisation des sensibilités pour accomplir efficacement diverses tâches telles que le

design optimal, l'analyse de sensibilité, le calcul rapide de solutions voisines, l'identification de zones sensibles ou de paramètres dominants et l'analyse d'incertitude.

ABSTRACT

This thesis deals with sensitivity computations in fluid dynamics. A sensitivity expresses the influence of a design parameter on a state variable. In the context of fluid dynamics, flow sensitivities are simply the derivatives of the flow variables with respect to a parameter defining the problem. Sensitivity equations are derived by differentiating the flow equations with respect to the design parameter. This could be done at the continuous level (the flow partial differential equations) or at the discrete level (the discretized flow equations). In this thesis, we consider the continuous approach : differentiation of the flow partial differential equations leads to the sensitivity partial differential equations which are then solved for the sensitivities using a finite element method.

Typically, authors develop the sensitivity equations for a specific application or a specific design parameter. Source terms are adjusted each time. Here we develop the sensitivity equations in a general framework : we consider a generic parameter and thus admit all possible simultaneous dependancies of the variables and coefficients on this parameter. The net result is an equation that can treat all possible design parameters. The user specifies proper input data to produce the equation corresponding to the specific parameter he wants to treat.

Boundary conditions are also treated in a general way, for any design parameter. Moreover, the formulation unifies the treatment of value and shape parameters. By definition, a shape parameter influences the geometry, whereas all other parameters belong to the value category. This distinction is necessary because for shape parameters the point of application of the flow boundary condition moves with the parameter. However, the general formulation presented allows for both changes in

the boundary condition value and boundary position. Thus, value parameters are simply treated as particular shape parameters with a zero boundary displacement.

Despite an effort put on the generality of the formulation, two situations are not supported : discontinuities in the solution and Neumann boundary conditions for shape parameters. These involve unresolved complications such as the need to get accurate second derivatives of the flow solution.

Two flow models are considered. We first treat laminar flows modeled by the Navier-Stokes equations including heat transfer, free convection and fluids with variable properties. Turbulent flows are then considered, using the standard $k - \epsilon$ model with wall functions and no-penetration conditions. No publication on the continuous sensitivity equation method for this flow model has been found in the literature. To preserve positivity of turbulence variables, we proceed to a change of dependent variables leading to the formulation in logarithmic variables. This approach offers other advantages such as robustness and increase in numerical accuracy.

A finite element method is used to solve both the flow and sensitivity equations. The sensitivity solution algorithm has been implemented in an existing flow solver, following a very similar structure. However, we take advantage of the linearity of the sensitivity equations. Simulations all use the Crouzeix-Raviart finite element and a numerical jacobian technique to construct elemental matrices. When needed, stabilization techniques such as SUPG or GLS are used.

To maximize numerical accuracy for limited computer resources, we apply an adaptive remeshing algorithm. This strategy produces a sequence of meshes progressively refined and well adapted to the specific solution at hands by local concentration of nodes. Prediction of element sizes uses error estimations obtained by local least-squares projections. The new feature here is that the adaptive algorithm takes into

account both the flow and sensitivity errors, allowing a quality control not only for the flow solution but also for the sensitivity solution. Note that the flow and all sensitivities use the same mesh. Numerical simulations confirm the excellent performance of this adaptive remeshing algorithm. Flow and sensitivity results are grid independent et thus numerically very accurate. Not only does the methodology produce accurate solution, but it also illustrates grid convergence of the results.

Verification is essential when dealing with numerical methods and even more when developing a new code, as is the case here. One way to perform rigorous verifications is to solve a problem possessing a closed-form solution. Results presented for such problems verify the sensitivity code. These results also illustrate that the treatment of shape parameters leads to less accurate sensitivities than for value parameters. Another kind of verification may be found in the thesis : we compare extrapolations of nearby solutions using the sensitivities to the flow solutions computed at the nearby values of the parameters. This is equivalent to comparing our sensitivity computation to a sensitivity computed by a finite difference.

Numerical applications cover a wide range of flows, design parameters and uses of the sensitivities. Flows in a channel, around an aerodynamic airfoil and over a flat plate are presented. We also study free convection of corn syrup. Parameters studied include inlet or free stream velocity, boundary condition on the temperature, boundary position, parameters describing the fluid properties, and closure coefficients of the turbulence model and wall functions. We illustrate the potential and success of using sensitivities to perform efficiently different tasks such as optimal design, sensitivity analysis, fast computation of nearby solutions, identification of dominant parameters or sensitive zones, and uncertainty analysis.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	ix
TABLE DES MATIÈRES	xii
LISTE DES FIGURES	xvii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xxii
LISTE DES TABLEAUX	xxx
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	5
1.1 Introduction	5
1.1.1 Formulations en design optimal	6
1.1.2 Techniques d'optimisation	7
1.2 Différences finies	8
1.3 Méthode des sensibilités	9
1.3.1 Généralités	9
1.3.2 Sensibilités discrètes	11
1.3.3 Sensibilités continues discrétisées	12
1.3.4 Comparaisons	14
1.4 Méthode des variables adjointes	16
1.5 Sensibilités vs variables adjointes	20
1.5.1 Nombre de paramètres et de fonctionnelles	20

1.5.2	Utilisations potentielles	21
1.5.3	Simplicité	23
1.5.4	Problèmes transitoires	23
1.5.5	Conclusion	23
1.6	Optimisation de forme	24
1.7	Utilisations antérieures	26
1.8	Objectifs spécifiques	29

CHAPITRE 2	MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES	30
2.1	Équations de Navier-Stokes	30
2.2	Équations générales des sensibilités (Navier-Stokes)	31
2.3	Conditions aux frontières pour les sensibilités	33
2.3.1	Condition de Dirichlet : paramètre de valeur	34
2.3.2	Condition de Dirichlet : paramètre de forme	35
2.3.3	Condition de Neumann	38
2.4	Méthode des éléments finis	41
2.4.1	Formulation variationnelle	41
2.4.2	Choix de l'élément fini	43
2.4.3	Techniques de stabilisation	44
2.5	Détails d'implantation	44
2.5.1	Données d'entrée	45
2.5.2	Jacobien numérique	46
2.5.3	Méthode de résolution des systèmes d'équations	48
2.5.4	Itérations et reconstructions	48
2.6	Difficultés et limites du projet	50
2.6.1	Présence de dérivées de l'écoulement	50
2.6.2	Discontinuités	52

CHAPITRE 3	MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS POUR	
	LE MODÈLE $k - \epsilon$	55
3.1	Modèle de turbulence $k - \epsilon$	55
3.2	Variables logarithmiques	57
3.3	Conditions aux frontières	59
3.3.1	Introduction	59
3.3.2	Loi de paroi	60
3.3.3	Condition de tangence	62
3.3.4	Conditions aux limites pour k et ϵ	63
3.4	Équations des sensibilités pour le modèle $k - \epsilon$	64
3.5	Sensibilités pour les parois solides	66
3.6	Détails d'implantation	68
3.6.1	Algorithme de résolution	68
3.6.2	Solution initiale	70
3.6.3	Base d'interpolation pour les variables de turbulence	70
3.6.4	Loi de paroi	71
3.6.5	Condition de tangence	72
CHAPITRE 4	ALGORITHME DE REMAILLAGE ADAPTATIF	73
4.1	Généralités	73
4.2	Estimation d'erreur	75
4.2.1	Projection locale	76
4.2.2	Récupération d'un champ global unique	80
4.2.3	Normes de l'erreur	82
4.3	Opérateur de transition	84
4.4	Précédents	87
CHAPITRE 5	APPLICATIONS EN RÉGIME LAMINAIRE	89

5.1	Vérification : couche limite analytique	90
5.1.1	Description du problème	90
5.1.2	Paramètre de valeur	94
5.1.3	Paramètre de forme	96
5.1.4	Améliorations possibles	103
5.1.5	Autres vérifications	105
5.2	Convection naturelle de sirop de maïs	105
5.2.1	Description du problème : écoulement	105
5.2.2	Description du problème : sensibilités	109
5.2.3	Solution de l'écoulement	112
5.2.4	Analyse de sensibilité	114
5.2.5	Analyse d'incertitude	118
5.2.6	Calcul de solutions voisines	123
5.3	Optimisation du transfert de chaleur	127
5.3.1	Description du problème : écoulement	128
5.3.2	Algorithme d'optimisation	131
5.3.3	Description du problème : sensibilités	133
5.3.4	Optimisation à un paramètre	135
5.3.5	Optimisation à trois paramètres	137
5.4	Écoulement autour d'un profil NACA 0012	142
5.4.1	Description du problème	142
5.4.2	Résultats	143
CHAPITRE 6 APPLICATIONS EN RÉGIME TURBULENT		148
6.1	Vérification : couche cisailée analytique	148
6.1.1	Description du problème	148
6.1.2	Résultats	151
6.1.3	Effets de la technique de stabilisation	156

6.1.4	Conclusion	161
6.2	Écoulement sur une plaque plane	163
6.2.1	Description du problème	163
6.2.2	Sensibilité à $\tilde{U}_\infty$	165
6.2.2.1	Prédiction de l'écoulement	165
6.2.2.2	Prédiction des sensibilités	168
6.2.2.3	Extrapolation de solutions voisines	171
6.2.3	Sensibilité aux coefficients de fermeture du modèle $k - \epsilon$	174
6.2.4	Sensibilité aux paramètres des lois de paroi	179
6.2.4.1	Paramètre κ	179
6.2.4.2	Paramètre E	182
6.2.4.3	Paramètre d	182
6.2.5	Comparaison des sensibilités pour l'ensemble des paramètres	186
6.3	Écoulement autour d'un profil NACA 0012	189
6.3.1	Description du problème	189
6.3.2	Solution à $\alpha = 3,59^\circ$	190
6.3.3	Extrapolation cubique	192
6.3.4	Solution à $\alpha = 8^\circ$	194
CONCLUSION		197
RÉFÉRENCES		202
ANNEXES I	MÉTHODES D'ÉLÉMENTS FINIS STABILISÉES POUR LES ÉQUATIONS DES SENSIBILITÉS	220

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Condition de Dirichlet avec paramètre de forme	36
Figure 2.2	Exemple de condition de Dirichlet sur une frontière mobile . .	38
Figure 2.3	Configuration du mur composite	52
Figure 2.4	Solution dans un mur composite	53
Figure 3.1	Couche limite près d'une paroi solide	60
Figure 3.2	Direction d'application du cisaillement	71
Figure 4.1	Algorithme de la méthode adaptative	74
Figure 4.2	Sous-domaine Ω_P utilisé pour les projections locales	76
Figure 4.3	Choix du sous-domaine de projection	77
Figure 4.4	Mise à l'échelle des bases de projection	79
Figure 4.5	Récupération d'un champ global à partir des projections locales	81
Figure 5.1	Description du problème analytique de vérification en régime laminaire	92
Figure 5.2	Couche limite analytique : trajectoires des erreurs pour un paramètre de valeur	95
Figure 5.3	Couche limite analytique : trajectoires des erreurs pour un paramètre de forme	98
Figure 5.4	Couche limite analytique : comparaison des erreurs et des in- dices d'efficacité (paramètres de valeur vs de forme)	99
Figure 5.5	Couche limite analytique : coupe de l'erreur sur s_u à $x = 0,5$.	100
Figure 5.6	Couche limite analytique : coupe de l'erreur sur $\frac{\partial s_u}{\partial y}$ à $x = 0,5$	102
Figure 5.7	Géométrie de la cavité	106
Figure 5.8	Cavité : solution de l'écoulement	113
Figure 5.9	Cavité : maillage final	113
Figure 5.10	Cavité : sensibilités $\ s_u\ $ normalisées	116

Figure 5.11	Cavité : sensibilités s_T normalisées	117
Figure 5.12	Cavité : prédiction de v à $y = 0,4L$	120
Figure 5.13	Cavité : prédiction de v à $y = 0,65L$	121
Figure 5.14	Cavité : prédiction de T à $x = 0$	121
Figure 5.15	Cavité : solution voisine de v à $y = 0,65L$	124
Figure 5.16	Cavité : solution voisine de T à $x = 0$	125
Figure 5.17	Cavité : solution voisine de Nu à la paroi du haut	127
Figure 5.18	Cavité : convergence de $\frac{\partial s_T}{\partial y}$ pour le paramètre h , à la paroi du haut	128
Figure 5.19	Géométrie du canal pour le problème d'optimisation	129
Figure 5.20	Problème d'optimisation : coordonnées d'un point sur la frontière	133
Figure 5.21	Problème d'optimisation : fonction objectif $\mathcal{J}_1$ pour divers angles de la plaque	137
Figure 5.22	Problème d'optimisation : solution de l'écoulement vs des sensibilités	138
Figure 5.23	Problème d'optimisation : isolignes de la température	140
Figure 5.24	Problème d'optimisation : comparaison des flux sur le bloc	141
Figure 5.25	NACA 0012 laminaire : point de séparation (ligne de courant ψ_0)	144
Figure 5.26	NACA 0012 laminaire : recirculation	145
Figure 5.27	NACA 0012 laminaire : u/u_∞ à $x = 0,8c$ et $y = 0,05c$ pour divers angles d'attaque α	146
Figure 5.28	NACA 0012 laminaire : u/u_∞ à $x = 0,8c$ et $y = 0,1c$ pour divers angles d'attaque α	147
Figure 5.29	NACA 0012 laminaire : u/u_∞ à $x = 0,8c$ et $y = 0,15c$ pour divers angles d'attaque α	147
Figure 6.1	Couche cisailée : solution	151

Figure 6.2	Couche cisailée : trajectoires des erreurs pour l'écoulement . .	153
Figure 6.3	Couche cisailée : trajectoires des erreurs pour les sensibilités .	154
Figure 6.4	Couche cisailée : trajectoires des indices d'efficacité pour l'écoulement	155
Figure 6.5	Couche cisailée : trajectoires des indices d'efficacité pour les sensibilités	155
Figure 6.6	Couche cisailée : comparaison des isolignes de s_v entre les formulations Galerkin et GLS	157
Figure 6.7	Couche cisailée : comparaison des isolignes de s_κ entre les formulations Galerkin et GLS	158
Figure 6.8	Couche cisailée : comparaison des maillages entre les formulations Galerkin et GLS — cycles adaptatifs 0 à 2	159
Figure 6.9	Couche cisailée : comparaison des maillages entre les formulations Galerkin et GLS — cycles adaptatifs 3 à 5	160
Figure 6.10	Couche cisailée : comparaison des erreurs sur l'écoulement entre les formulations Galerkin et GLS	161
Figure 6.11	Couche cisailée : comparaison des erreurs sur les sensibilités entre les formulations Galerkin et GLS	162
Figure 6.12	Plaque plane : domaine	163
Figure 6.13	Plaque plane : convergence de C_f avec le maillage	166
Figure 6.14	Plaque plane : convergence de y^+ avec le maillage	167
Figure 6.15	Plaque plane : comparaison de C_f avec les corrélations	168
Figure 6.16	Plaque plane : convergence de C'_f avec le maillage	169
Figure 6.17	Plaque plane : convergence de $y^{+'}$ avec le maillage	170
Figure 6.18	Plaque plane : comparaison de C'_f avec les corrélations	171
Figure 6.19	Plaque plane : extrapolation de C_f à $\tilde{U}_\infty = 0,96$	172
Figure 6.20	Plaque plane : extrapolation de C_f à $\tilde{U}_\infty = 0,8$	173
Figure 6.21	Plaque plane : extrapolation de C_f à $\tilde{U}_\infty = 0,5$	173

Figure 6.22	Plaque plane : extrapolation de y^+ à $\tilde{U}_\infty = 0,5$	174
Figure 6.23	Plaque plane : maillage final et solution pour la série sur les coefficients de fermeture	175
Figure 6.24	Plaque plane : incertitude sur C_f (due à C_μ , C_1 , C_2 , σ_k et σ_ϵ)	177
Figure 6.25	Plaque plane : solution voisine de C_f pour une variation du paramètre C_2	179
Figure 6.26	Plaque plane : C'_f normalisé pour les paramètres des lois de paroi (d , κ et E)	180
Figure 6.27	Plaque plane : solution voisine de C_f pour une variation du paramètre κ	181
Figure 6.28	Plaque plane : solution voisine de C_f pour une variation du paramètre E	181
Figure 6.29	Plaque plane : solution voisine de C_f pour une variation du paramètre d	183
Figure 6.30	Plaque plane : solution voisine de y^+ pour une variation du paramètre d	184
Figure 6.31	Plaque plane : distribution de k et $\frac{\partial k}{\partial d}d$ sur la frontière de la plaque	184
Figure 6.32	Plaque plane : comparaison de $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $s_u = \frac{\partial u}{\partial d}$ sur la frontière de la plaque	185
Figure 6.33	Plaque plane : C_f et les C'_f normalisés	187
Figure 6.34	Plaque plane : u et les s_u normalisés à $x = 0,5$	188
Figure 6.35	NACA 0012 turbulent : C_p à $\alpha = 3,59^\circ$	190
Figure 6.36	NACA 0012 turbulent : convergence de C_p avec le maillage à $\alpha = 3,59^\circ$	192
Figure 6.37	NACA 0012 turbulent : convergence de C'_p avec le maillage à $\alpha = 3,59^\circ$	193

Figure 6.38	NACA 0012 turbulent : agrandissement du maillage final à $\alpha = 3,59^\circ$	193
Figure 6.39	NACA 0012 turbulent : C_p à $\alpha = 8^\circ$	195
Figure 6.40	NACA 0012 turbulent : lignes de courant des sensibilités à $\alpha = 8^\circ$	196

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Caractères usuels

a	paramètre de design
a_i	i^e paramètre de design
a_0, a_1, a_2	coefficients du modèle de viscosité du sirop de maïs
$\mathbf{a}$	vecteur des paramètres de design
b_0, b_1	coefficients du modèle de conductivité thermique du sirop de maïs
$\mathbf{b}$	vecteur des coefficients du développement polynômial pour la projection locale
c	corde du profil NACA 0012
c_p	chaleur massique à pression constante
c_0, c_1, c_2	coefficients du modèle de c_p du sirop de maïs
C_f	coefficient de friction
C_p	coefficient de pression
C_1, C_2, C_μ	coefficients de fermeture du modèle $k - \epsilon$
d	distance à la paroi imposée
$\mathbf{d}$	vecteur de correction des paramètres de design
e	erreur
e_{cible}	erreur cible
E	paramètre de rugosité (loi de paroi)
f	multiplicateur de Lagrange pour la condition de tangence
$\overline{f}'_\epsilon$	condition naturelle (Neumann) sur s_ϵ
$\overline{f}'_\kappa$	condition naturelle (Neumann) sur s_κ
$\mathbf{f}$	force volumique (terme source dans l'équation de mouvement)
F	fonction objectif
g_k	terme source pour l'équation scalaire modèle

g	accélération gravitationnelle (vecteur)
G	contrainte
$\mathbf{G}$	vecteur des contraintes
h	taille élémentaire courante, hauteur de la zone de sirop de maïs
H	matrice hessienne des dérivées secondes
$\hat{j}$	vecteur unitaire dans la direction de l'axe des y
k	énergie cinétique de la turbulence
L	lagrangien, longueur de référence, largeur de la bande de cuivre (sirop de maïs), largeur du canal (problème d'optimisation)
n_a	nombre de paramètres de design
n_{elem}	nombre d'éléments
n_{s_u}	nombre de fonctions d'interpolation (soit le nombre de noeuds) pour la variable s_u
n_X	nombre de variables (ou de contraintes)
$\hat{n} = (n_x, n_y)$	vecteur unitaire normal
$N_i^{s_u}$	fonctions d'interpolation pour la variable s_u
Nu	nombre de Nusselt
p	pression
P	production de la turbulence, sommet d'un élément du maillage
$\mathbf{P}$	base polynômiale pour la projection locale
Pe_u	nombre de Péclet élémentaire pour la variable u ou s_u
Pr	nombre de Prandtl
q	flux de chaleur

$\bar{q}'$	flux thermique des sensibilités
q_k, q_ϵ	termes sources dans les équations de k et ϵ
q_s	source de chaleur dans l'équation d'énergie
$q_K, q_\mathcal{E}$	termes sources dans les équations de K et $\mathcal{E}$
Q	quantité typique à projeter
R_i	résidu de la i^e équation algébrique
Ra	nombre de Rayleigh
Re	nombre de Reynolds
Re_x	nombre de Reynolds basé sur la position x le long de la plaque
Ri	nombre de Richardson
s_x	sensibilité de la variable (scalaire) x de l'écoulement (par exemple : s_u , s_p et s_K)
s_{u_i}	valeur nodale de s_u
s_u	sensibilité de la vitesse (vecteur)
t	coordonnée curviligne pour paramétrer une frontière
$\hat{\mathbf{t}} = (t_x, t_y)$	vecteur unitaire tangent
$\mathbf{t}_f$	tractions sur les frontières
$\bar{\mathbf{t}}'_f$	tractions des sensibilités
T	température
T_h	température de la plaque chaude
u, v	composantes de la vitesse
u_k	échelle de vitesse basée sur l'énergie cinétique de la turbulence
u_n	vitesse normale
u_t	vitesse tangentielle
u_{**}	vitesse de frottement
u_∞, U_∞	vitesse à l'infini
$\mathbf{u}$	vecteur vitesse

U_r	vitesse de référence
U_1, r, k_0, c_k	coefficients dans les expressions de la couche cisailée analytique turbulente
V	norme de la vitesse
(x, y)	coordonnées cartésiennes
x_0	position de l'interface du mur composite
x_0^-, x_0^+	positions immédiatement à gauche et à droite de l'interface
$\mathbf{X}$	vecteur des variables dépendantes (états)
y	distance à la paroi
y_0	position d'une frontière
y_c^+	limite entre les deux zones de la loi de paroi
z	coordonnée curviligne le long du bloc (problème d'optimisation)

Lettres caligraphiques

$\mathcal{E}$	logarithme naturel de ϵ
$\mathcal{F}$	fonction objectif (fonction de $\mathbf{a}$ seulement)
$\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$	fonctions objectif
$\mathcal{K}$	logarithme naturel de k

Lettres grecques

α	taux de convergence de l'élément fini, angle de la plaque (problème d'optimisation), angle d'attaque du profil NACA 0012
α_k	paramètres de design pour l'équation scalaire modèle
α_u	paramètre de stabilisation pour la variable u ou s_u
β	coefficient de diffusion de l'équation scalaire modèle, coefficient de dilatation thermique

γ	paramètre de similitude pour la couche limite thermique analytique
$\dot{\gamma}$	tenseur du taux de déformation
Γ	frontière
Γ_b	frontière du bloc (problème d'optimisation)
$\Gamma_{f\mathcal{E}}$	portion des frontières $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions de Neumann sur l'équation de $\mathcal{E}$
$\Gamma_{f\mathcal{K}}$	portion des frontières $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions de Neumann sur l'équation de $\mathcal{K}$
Γ_{in}	frontière d'entrée
Γ_{out}	frontière de sortie
Γ_q	portion des frontières $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions de Neumann sur l'équation d'énergie
Γ_t	portion des frontières $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions de Neumann sur l'équation de mouvement
$\Gamma_{\mathcal{T}}$	portion des frontières $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions de Dirichlet sur l'équation d'énergie
Γ_u	portion des frontières $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions de Dirichlet sur l'équation de mouvement
δ	coefficient de pénalisation d'une fonction objectif, perturbation nodale pour le jacobien numérique, intervalle de confiance pour l'optimisation
δ_K	taille élémentaire cible
$\delta_K^{s_u}$	taille élémentaire cible pour la variable s_u
$\delta s_p, \delta s_u, \dots$	fonctions test (pour la sensibilité de la pression, de la vitesse, ...)
Δ	variation ou incertitude (exemple : Δa)
ϵ	taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence
ζ	facteur de réduction de l'erreur imposé

η	paramètre de similitude pour la couche limite analytique
Θ	indice d'efficacité
κ	constante de Kármán
λ	conductivité thermique
λ_e	conductivité thermique effective
μ	viscosité dynamique
μ_e	viscosité effective
μ_t	viscosité turbulente
ξ	variable adjointe
ξ	vecteur des variables adjointes
(ξ, η)	repère local
ρ	masse volumique
$\sigma, \epsilon_0, \mu_{t_0}$	coefficients dans les expressions de la couche cisailée analytique turbulente
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	coefficients de fermeture du modèle $k - \epsilon$
σ_{xx}	contrainte normale dans la direction x
τ	cisaillement sur la plaque plane
τ_u	paramètre de stabilisation pour la variable u ou s_u
τ_w	cisaillement à la proi
ϕ	scalaire
$\hat{\phi}$	solution prescrite (objectif) de ϕ
ϕ_k	sensibilité de ϕ par rapport au paramètre α_k
φ	solution quelconque
ψ_0	ligne de courant correspondant au profil aérodynamique et au point de séparation de la couche limite
Ω	domaine
Ω_e	portion de domaine couverte par l'élément e

Ω_P	sous-domaine de projection
$\partial\Omega$	frontières du domaine

Indices et exposants

c	centre du tourbillon (cavité avec sirop de maïs) centroïde de la plaque (problème d'optimisation)
est	estimation
exa	exacte, vraie
f	sur la frontière
h	solution numérique (éléments finis)
i	composante, valeur nodale
K	élémentaire
max	valeur maximale
min	valeur minimale
nom	valeur nominale
P	associé à un point P
s	échelle
0	valeur de référence, valeur nominale
∞	à l'infini (référence)
T	transposée
$'$	sensibilité (dérivée)
$''$	composante fluctuante
$+$	valeur adimensionnelle (loi de paroi)
$*$	solution obtenue par une projection locale

$\hat{\cdot}$	valeur imposée (condition de Dirichlet), vecteur unitaire
$\bar{\cdot}$	opération de moyenne
$\tilde{\cdot}$	champ global récupéré dans les interpolants de la solution à partir des projections locales, adimensionnel

Symboles

erf	fonction erreur
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire
$\ \cdot \ $	norme
$D \cdot / D \cdot$	dérivée matérielle (particulaire)

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Constantes du modèle $k - \epsilon$	57
Tableau 5.1	Effet de la technique de reconstruction des dérivées sur les frontières	105
Tableau 5.2	Sensibilités des propriétés physiques	110
Tableau 5.3	Problème d'optimisation : coefficients des conditions aux limi- tes des sensibilités	133
Tableau 5.4	Problème d'optimisation : fonctions objectif et leurs gradients à $\alpha = 60^\circ$	136
Tableau 5.5	Séquence d'optimisation à un paramètre	136
Tableau 5.6	Séquence d'optimisation à trois paramètres	139
Tableau 6.1	Couche cisailée : erreurs relatives sur le maillage final	152
Tableau 6.2	Plaque plane : incertitudes attribuées aux coefficients de fer- meture	176
Tableau 6.3	Plaque plane : sensibilités et incertitudes pour C_f à $x = 0,8$ (pour les 5 coefficients de fermeture)	177

INTRODUCTION

L'étude de la mécanique des fluides pour des problèmes d'ingénierie a déjà un long historique. Comme toute bonne science, ses premiers pas ont d'abord été sous forme d'observations expérimentales qui ont éventuellement conduit à l'élaboration de modèles mathématiques. Les études expérimentales combinées à l'expérience accumulée des scientifiques et ingénieurs ont longtemps constitué les fondements des études et conceptions en mécanique des fluides. Les modèles mathématiques, bien que développés depuis de nombreuses années, n'ont pu être mis à plein profit pour des raisons de complexité : il existe en effet bien peu de problèmes qui soient résolubles analytiquement et encore moins qui soient en plus d'intérêt pratique. Ces modèles ont trouvé un second souffle avec l'arrivée de l'ère informatique. On assista alors à l'éclosion d'un nouveau joueur en mécanique des fluides : la simulation numérique. Avec la puissance actuelle des ordinateurs modernes, la mécanique des fluides assistée par ordinateur ou CFD (*Computational Fluid Dynamics*) s'impose non seulement comme une alternative aux études expérimentales, mais aussi comme un outil d'analyse devenu essentiel. On arrive aujourd'hui à résoudre des problèmes très complexes à coûts moindres que l'expérimental. La simulation numérique ne se veut cependant pas un substitut absolu à l'expérimentation, mais un complément efficace.

Les premières études numériques se sont concentrées sur le problème d'analyse, c'est-à-dire la prédiction d'un écoulement pour des conditions de fonctionnement données (géométrie, modèle mathématique, conditions aux frontières,...). Ces méthodes ont maintenant atteint un niveau de maturité considérable. La suite logique, évidemment beaucoup plus récente, est de passer du problème d'analyse au problème de design. Une approche classique et efficace consiste à utiliser les techniques d'optimisation basées sur les gradients. Typiquement, ces techniques requièrent, à une valeur donnée

des paramètres de design, l'évaluation de la fonction objectif à optimiser ainsi que son gradient. La clé est alors de déterminer ces dérivées de la fonction par rapport aux paramètres de design.

Dans ce contexte de design optimal, les *sensibilités* présentent un attrait indéniable. Une sensibilité exprime justement le taux de variation d'une variable de la solution par rapport à un paramètre. Elle peut en outre être utilisée directement pour le calcul du gradient d'une fonction objectif. Cette approche n'est cependant pas la seule possible. En fait, deux approches se sont particulièrement imposées dans cette quête du gradient : les méthodes de variables adjointes et les méthodes de sensibilités. Ces deux techniques sont comparées en détails au chapitre 1.

La méthode retenue pour le présent projet est celle des sensibilités. Ce choix est principalement basé sur la vaste gamme d'utilisations potentielles des sensibilités, outre le design optimal, par comparaison aux variables adjointes. À titre d'exemple, les sensibilités peuvent être utilisées pour du calcul de solutions voisines, de l'analyse d'incertitude, de l'identification de paramètres dominants ou de zones sensibles, etc. Les applications présentées tenteront de couvrir ces diverses possibilités offertes par les sensibilités. Notons enfin que les équations des sensibilités sont formulées dans le continu, soit au niveau des équations aux dérivées partielles, par opposition à une approche discrète. Simplicité et souplesse ont motivé ce choix.

Le projet est donc consacré au calcul de sensibilités en mécanique des fluides, suivant la méthode de l'équation des sensibilités, soit l'approche continue. Les écoulements laminaires et turbulents sont tous deux considérés. Dans le cas turbulent, le modèle $k - \epsilon$ standard avec lois de parois est utilisé. La formulation implantée conserve un maximum de généralité, permettant le traitement de n'importe quel paramètre. Par exemple, il peut s'agir d'un paramètre explicite tel qu'une propriété physique (la viscosité, la masse volumique,...), d'un paramètre entrant dans une

condition aux frontières (la vitesse d'entrée, la température d'une paroi,...), d'un terme source ou d'une charge, d'une quantité contrôlant la forme du domaine, etc. On prend habituellement soin de faire la distinction entre les paramètres de valeur et les paramètres de forme. Cette distinction est nécessaire dans la mesure où leur traitement est différent. On entend par paramètre de *forme* un paramètre qui affecte la géométrie du domaine de calcul. Ce cas exige des considérations particulières. Les autres paramètres sont associés à la catégorie *valeur*. Ici, on adopte une formulation unifiée permettant le traitement de ces deux types de paramètres.

L'utilisation d'une méthode numérique implique la présence d'erreurs de discrétisation. Le calcul de l'écoulement et celui des sensibilités sont entachés d'erreur. L'élimination complète de ces erreurs est impossible, mais on peut à tout le moins les contrôler. Les méthodes adaptatives constituent un outil très puissant en ce sens. Dans ce projet, on utilise une méthode d'éléments finis adaptative utilisant une technique de projection locale pour l'estimation d'erreur. L'algorithme adaptatif tient compte non seulement des erreurs de l'écoulement mais aussi de celles des sensibilités. L'accent est constamment mis sur l'obtention de solutions numériques précises et la démonstration de cette précision par des études systématiques de raffinement de maillage. Des exercices de vérification et de validation tels que suggérés par Roache [1] sont un élément important de la démarche suivie.

La thèse est structurée de la façon suivante. D'abord, au chapitre 1, une revue bibliographique permet d'illustrer les réalisations antérieures et les diverses voies envisageables. En particulier, on y compare les méthodes de variables adjointes et de sensibilités pour justifier le choix de cette dernière. Les avantages et difficultés y sont discutés. Le chapitre 2 traite du cas spécifique de l'application de la méthode des sensibilités aux équations de Navier-Stokes en régime laminaire. Le cas des écoulements turbulents fait l'objet du chapitre suivant. Au chapitre 4, l'algorithme

adaptatif appliqué au calcul de sensibilités est présenté. Des vérifications et applications en régime laminaire (chapitre 5) puis turbulent (chapitre 6) illustrent la grande versatilité des sensibilités et le bon fonctionnement de la méthodologie implantée. Évidemment, le tout se termine par des conclusions et une ouverture vers des travaux futurs.

CHAPITRE 1

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Afin de bien situer la position du projet mené dans l'état actuel des recherches, il s'avère essentiel de débiter par une revue bibliographique. Ce chapitre est principalement axé sur la comparaison entre les deux méthodes rivales les plus populaires en design optimal : le calcul de sensibilités et les méthodes adjointes. On y confronte en outre diverses variantes de ces méthodes, ce qui permet une justification du choix de la méthode retenue, soit la méthode de l'équation des sensibilités. On ouvre aussi une parenthèse sur le cas particulier de l'optimisation de forme qui pose des difficultés particulières. Un recensement d'utilisations antérieures permet ensuite d'identifier des filons exploitables menant à une contribution originale. Finalement, les objectifs spécifiques du projet sont énoncés.

1.1 Introduction

L'optimisation n'est pas le but ultime du présent travail, mais elle constitue une bonne façon de faire ressortir le problème plus général du calcul de sensibilités. Introduisons certaines notations à l'aide d'un problème type en design optimal :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{a} \text{ qui minimise } F(\mathbf{X}; \mathbf{a}) \\ &\text{sujet à } \mathbf{G}(\mathbf{X}; \mathbf{a}) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $\mathbf{X}$ est le vecteur des variables dépendantes (ou variables d'état ou simplement états), $\mathbf{a}$ est le vecteur des paramètres de design (aussi appelés contrôles dans un

contexte de contrôle optimal), F est une fonction objectif (ou fonction coût ou fonctionnelle) à minimiser et $\mathbf{G}$ représente les contraintes (ou équations d'état). Par exemple, dans le cas d'un problème discret en mécanique des fluides, $\mathbf{X}$ représente les valeurs nodales de la pression et de la vitesse et les contraintes $\mathbf{G}$ correspondent à la discrétisation des équations de Navier-Stokes et de continuité. En présence de n_X variables, on compte également n_X contraintes. Ainsi, pour des paramètres de design donnés, la résolution des contraintes $\mathbf{G}$ donne les états $\mathbf{X}$. Afin d'expliciter la dépendance de ces états face aux paramètres de design, on note :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{a}) \quad (1.2)$$

La fonction objectif ne dépend donc que des n_a paramètres de design (même si cette dépendance est en fait implicite) et on utilise la notation suivante :

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = F(\mathbf{X}(\mathbf{a}); \mathbf{a}) \quad (1.3)$$

On peut voir le design optimal comme une forme particulière d'optimisation pour laquelle on a un vecteur réduit de paramètres sur lesquels on peut agir.

Voyons brièvement les diverses formulations utilisées en design optimal de même que les diverses techniques d'optimisation.

1.1.1 Formulations en design optimal

On distingue plusieurs formulations en design optimal. Frank et Shubin [2] les passent en revue. La première formulation consiste à considérer le problème d'optimisation dans son ensemble, avec les contraintes. On résout simultanément les variables dépendantes $\mathbf{X}$ et les paramètres de design $\mathbf{a}$. Le respect des contraintes n'est alors atteint

qu'à la convergence de l'algorithme d'optimisation et non lors d'états intermédiaires. C'est la méthode dite *tout couplé*. Dans la littérature anglaise on parle de méthode *one-shot* ou *all-at-once*.

La deuxième formulation est celle de type boîte noire. Cette approche plus populaire utilise les contraintes $\mathbf{G}(\mathbf{X}; \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ pour déterminer la dépendance implicite de $\mathbf{X}$ par rapport à $\mathbf{a}$. On a ainsi $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{a})$. Le problème d'optimisation se ramène donc à :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{a} \\ &\text{qui minimise } \mathcal{F}(\mathbf{a}) = F(\mathbf{X}(\mathbf{a}); \mathbf{a}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Cette dernière expression ne contient plus de contraintes et les seules variables à résoudre sont $\mathbf{a}$. On calcule séparément les états $\mathbf{X}$ en résolvant les contraintes pour une valeur donnée de $\mathbf{a}$.

La formulation de type boîte noire possède l'avantage de permettre de découpler le code d'optimisation du code d'analyse (qui résout les contraintes). L'implantation est donc plus simple. Avec la formulation *tout couplé*, le code d'analyse n'est pas isolé. Par contre, cette dernière formulation requiert en général un moins grand nombre de résolutions des contraintes, d'où une économie potentiellement significative. C'est le cas des problèmes où les contraintes forment un très gros système dont la résolution constitue l'étape la plus coûteuse. On présentera dans les sections suivantes des exemples de méthodes utilisant ces formulations.

1.1.2 Techniques d'optimisation

On distingue enfin les diverses techniques d'optimisation selon le type d'information qu'elles utilisent afin de converger vers un optimum. Une technique d'ordre zéro

ne nécessite que l'évaluation de la fonction objectif. Cette technique est donc très simple à implanter, mais le prix à payer peut être prohibitif. En effet, elle requiert un très grand nombre d'évaluations des états *i.e.* de résolutions des contraintes. Une technique d'ordre un requiert pour sa part l'évaluation du gradient de la fonction en plus de la fonction elle-même. Cette évaluation de gradient est plus complexe mais globalement on obtient un algorithme plus efficace et surtout moins coûteux en terme de temps de calcul. Enfin, l'étape logique suivante est d'utiliser en plus les dérivées secondes. On parle alors de techniques d'ordre deux, dont la plus connue est la méthode de Newton.

Les algorithmes d'optimisation efficaces (d'ordre un ou deux) utilisent donc au minimum le gradient de la fonction à minimiser. L'intérêt pour des méthodes robustes et efficaces d'estimation de gradient est donc très marqué. Dans les sections suivantes, on présente trois méthodes de calcul du gradient de la fonction objectif : différences finies, méthode des sensibilités et méthode des variables adjointes. Un lecteur intéressé trouvera une présentation et une comparaison des méthodes relativement détaillées dans [3, 4] et moins complètes dans [5, 6].

1.2 Différences finies

La méthode la plus simple à implanter pour déterminer le gradient d'une fonction objectif est d'effectuer une différence finie. On connaît en un point de design donné le vecteur des paramètres $\mathbf{a}$ (dont les composantes sont a_i), les états $\mathbf{X}$ et la fonction F . Les paramètres a_i sont successivement perturbés d'une petite quantité et on recalcule les états associés à ces nouveaux paramètres. Les dérivées partielles $\partial \mathcal{F} / \partial a_i$ peuvent donc être évaluées par une différence finie. Si on désire une différence centrée plus précise, deux perturbations sont nécessaires.

Le charme de cette méthode réside dans son implantation tout simplement triviale. Il s'agit d'une méthode de type boîte noire ne nécessitant aucune modification au code d'analyse. Par contre, elle nécessite n_a résolutions supplémentaires du système des contraintes (et même $2n_a$ avec une différence centrée). Typiquement, la résolution des contraintes (par exemple, une résolution des équations de Navier-Stokes pour un écoulement) est l'étape la plus coûteuse. Il faut donc en minimiser la fréquence d'appel. Ainsi, l'approche par différences finies n'est pas très avantageuse du point de vue du temps de calcul. De plus, le choix de la perturbation n'est pas si simple. Une perturbation trop grande produit des dérivées imprécises alors qu'une perturbation trop faible conduit à des erreurs numériques de troncature dues à la représentation informatique des nombres (nombre fini de décimales).

1.3 Méthode des sensibilités

On présente dans cette section quelques variantes d'une autre approche permettant l'évaluation des dérivées premières d'une fonction objectif par rapport aux paramètres de design. Il s'agit de la méthode des sensibilités. On y porte une attention particulière puisqu'il s'agit de la méthode retenue pour le présent projet.

1.3.1 Généralités

L'objectif est de déterminer le gradient de la fonction objectif

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = F(\mathbf{X}(\mathbf{a}); \mathbf{a}) \quad (1.5)$$

où les dépendances implicites de $\mathbf{X}$ par rapport à $\mathbf{a}$ sont données par les équations d'état (les contraintes) :

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}; \mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (1.6)$$

On se place donc dans un contexte de méthode de type boîte noire. Pour simplifier, on considère pour l'instant un système discret. Les dérivées premières de la fonction objectif par rapport aux paramètres de design s'obtiennent simplement en différentiant la fonction objectif, selon le théorème des fonctions implicites :

$$\nabla \mathcal{F} = \frac{d\mathcal{F}}{d\mathbf{a}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{a}} \quad (1.7)$$

La notation utilisée est plutôt symbolique que rigoureuse et ce dans le but d'illustrer simplement les opérations et les termes impliqués. Les dérivées explicites $\partial \mathcal{F} / \partial \mathbf{a}$ et $\partial \mathcal{F} / \partial \mathbf{X}$ sont généralement faciles à calculer puisque $\mathcal{F}$ est directement exprimée en termes de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{a}$. Par contre, le terme $d\mathbf{X} / d\mathbf{a}$ est inconnu pour l'instant. On l'appelle *sensibilité* : la dérivée première des états par rapport aux paramètres. Elle exprime comment la solution (états) varie lorsque le paramètre est légèrement perturbé autour de sa valeur courante. Le problème du calcul du gradient d'une fonction objectif est donc transformé en un problème de calcul de sensibilités.

Pour obtenir les sensibilités, il faut générer et résoudre les équations des sensibilités. Ces équations s'obtiennent tout simplement en différentiant les équations d'état par rapport au paramètre considéré. Un dilemme se pose alors dans le cas des équations continues, c'est-à-dire des équations différentielles de dimension infinie (au lieu d'un système discret de dimension finie). La solution exacte s'obtient de la résolution des équations différentielles d'état alors que les sensibilités exactes s'obtiennent des équations différentielles obtenues en différentiant les équations d'état. Or dans les deux cas, il est habituellement impossible de trouver les solutions analytiques, de sorte

qu'on doit utiliser des méthodes numériques et introduire une certaine approximation. Deux choix s'offrent alors pour le positionnement de l'approximation numérique, c'est-à-dire la discrétisation : différentier les équations aux dérivées partielles puis discrétiser ou discrétiser les équations aux dérivées partielles puis différentier. Ces deux possibilités sont traitées dans les deux prochaines sous-sections puis comparées.

1.3.2 Sensibilités discrètes

La première technique de calcul de sensibilités procède d'abord à la discrétisation et à la résolution des équations d'état. Ensuite, on génère les équations discrètes des sensibilités en différentiant les équations d'état discrètes par rapport aux paramètres. La résolution de ce dernier système donne les sensibilités des valeurs nodales des états. On parle alors de sensibilités discrètes. Évidemment, cette approche est la seule envisageable dans le cas d'un problème formulé dans le milieu discret. Ainsi, suivant la notation utilisée jusqu'à présent, les états discrets s'obtiennent de la résolution des équations discrètes (1.6) alors que le système d'équations linéaires des sensibilités s'obtient par différentiation de ces équations d'états :

$$\frac{dG(\mathbf{X}(\mathbf{a}); \mathbf{a})}{d\mathbf{a}} = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{a}} = 0 \quad (1.9)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{a}} = -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{a}} \quad (1.10)$$

Par exemple, pour un système à un seul paramètre a_1 , deux variables X_1 et X_2 et donc deux contraintes G_1 et G_2 , on doit résoudre le système suivant pour les

sensibilités :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial X_1} & \frac{\partial G_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial X_1} & \frac{\partial G_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{dX_1}{da_1} \\ \frac{dX_2}{da_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial G_1}{\partial a_1} \\ -\frac{\partial G_2}{\partial a_1} \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

Lorsque plusieurs paramètres entrent en jeu, on génère un système (1.11) pour chaque paramètre.

1.3.3 Sensibilités continues discrétisées

Une alternative de calcul de sensibilités consiste à développer les équations différentielles des sensibilités en différentiant les équations différentielles d'état (les contraintes) par rapport aux paramètres. On discrétise ensuite (séparément) ces deux systèmes différentiels pour obtenir une solution numérique. On parle ici de sensibilités discrétisées ou de la méthode de l'équation des sensibilités. Quelques références utiles en mécanique des fluides se trouvent dans [7–9]. L'ordre des opérations *différentiation* et *discrétisation* est donc inversé par rapport à la méthode des sensibilités discrètes. Notons que de façon générale, ces opérations ne commutent pas de sorte que les résultats sont différents. Dans le cas très particulier d'un paramètre de valeur, avec maillage indépendant du paramètre et utilisant une méthode d'éléments finis de type Galerkin sans artifice de stabilisation numérique, Burkardt [9] montre que la méthode de l'équation des sensibilités conduit au même système algébrique que celui obtenu avec la méthode des sensibilités discrètes pour les équations de Navier-Stokes. Dans les deux cas, on obtient une approximation des sensibilités exactes.

À titre d'exemple, considérons une équation scalaire de convection-diffusion-réaction

(tirée de [3]) :

$$-\nabla \cdot (\beta \nabla \phi) + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi + \phi^3 = \sum_{k=1}^K \alpha_k g_k(x, y) \quad \text{dans } \Omega \quad (1.12)$$

$$\phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.13)$$

où Γ est la frontière du domaine bidimensionnel Ω . Les fonctions $\beta(x, y)$, $\mathbf{u}(x, y)$ et $g_k(x, y)$ sont supposées connues. La variable dépendante (variable d'état) est ϕ et les paramètres de design sont α_k . L'équation différentielle des sensibilités et les conditions aux frontières associées s'obtiennent en différentiant (1.12) et (1.13) par rapport aux paramètres :

$$-\nabla \cdot (\beta \nabla \phi_k) + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_k + 3\phi^2 \phi_k = g_k \quad \text{dans } \Omega, \quad k = 1, \dots, K \quad (1.14)$$

$$\phi_k = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (1.15)$$

où ϕ_k est la sensibilité de ϕ par rapport à α_k :

$$\phi_k = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_k} \quad (1.16)$$

Il y a une équation différentielle par paramètre.

Dans un contexte d'optimisation, on doit minimiser une fonctionnelle. Prenons comme exemple la fonctionnelle suivante :

$$F = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\phi - \hat{\phi})^2 d\Omega + \frac{\delta}{2} \sum_{k=1}^K (\alpha_k)^2 \quad (1.17)$$

qui exprime l'objectif de s'approcher le plus près possible d'une solution prescrite $\hat{\phi}$. Le second terme est une pénalisation pour éviter des contrôles excessifs. Les

composantes du gradient de $\mathcal{F}$ pour ce problème type sont alors :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_k} = \delta \alpha_k + \int_{\Omega} (\phi - \hat{\phi}) \phi_k d\Omega, \quad k = 1, \dots, K \quad (1.18)$$

1.3.4 Comparaisons

On est maintenant en droit de se demander laquelle des deux options précédentes, sensibilités discrètes ou sensibilités discrétisées, est la plus appropriée dans notre cas. Voyons d'un peu plus près les avantages et inconvénients relatifs de ces méthodes de calcul de sensibilités.

Un premier point est l'interprétation des dérivées (sensibilités) obtenues. Dans les deux cas, on n'obtient pas les sensibilités exactes du problème continu : il faut à un moment ou un autre introduire une certaine forme d'approximation. Les sensibilités discrètes donnent les sensibilités *exactes* du problème discret, soit le taux de variation de la solution discrète par rapport à un paramètre. En ce sens, on dit que les dérivées obtenues sont *consistantes*. Les sensibilités discrétisées donnent pour leur part une approximation des sensibilités exactes. Cependant, ce ne sont pas de *vraies* sensibilités, au sens strict du terme, dans la mesure où elles ne représentent pas la dérivée exacte de quoi que ce soit. Ces dérivées sont dites *inconsistantes*. Un exemple de danger potentiel de cette inconsistance est dans le cadre d'une optimisation utilisant un algorithme sensible aux imprécisions du gradient. Supposons par exemple qu'on obtienne avec les sensibilités un gradient de la fonction objectif de -0.1 alors qu'en fait la solution discrète croît dans cette direction (par exemple, un gradient discret de $+0.1$). L'algorithme d'optimisation, en quête d'un minimum, cherche alors un nouveau point candidat dans la mauvaise direction. Constatant que la fonction objectif est plus élevée à ce nouveau point, peu importe le pas, l'algorithme devra s'arrêter, ne pouvant converger davantage. L'impact de cette lacune

peut être minimisé. En effet, la méthode de l'équation des sensibilités peut fournir des gradients asymptotiquement consistants, c'est-à-dire que les gradients obtenus selon les deux techniques tendent tous les deux vers les gradients exacts [7, 10, 11]. La méthode de l'équation des sensibilités combinée à un algorithme d'optimisation robuste comme BFGS/intervalle de confiance fonctionne alors très bien.

Comme autre point de comparaison, la différentiation des équations par rapport aux paramètres de design est beaucoup plus simple dans le cas des sensibilités discrétisées. Il suffit de différentier l'équation différentielle. Dans le cas discret, cette différentiation peut être beaucoup plus ardue. Par exemple, si le maillage varie avec le paramètre, comme dans le cas d'optimisation de forme, il faut exprimer la dépendance du maillage par rapport à ce paramètre et en plus différentier ces termes. Cette contrainte rend presque impossible l'utilisation de maillages non structurés adaptatifs. L'utilisation de facilitateurs numériques, tel que les techniques de stabilisation avec *upwinding*, constitue un autre exemple de complication pour la différentiation des équations discrètes. Notons que le système d'équations discrètes peut être différentié à la main où en utilisant des outils de différentiation automatique tel que ADIFOR [12, 13], ce qui peut réduire la charge de travail. Ces problèmes de différentiation sont évités avec la méthode de l'équation des sensibilités. D'ailleurs, les sensibilités par rapport au maillage ou aux artifices mathématiques n'ont rien de physique.

Comme dernier point, mentionnons que la méthode de l'équation des sensibilités offre en plus la possibilité d'utiliser des maillages et schémas numériques différents pour la résolution du problème d'analyse et de celui des sensibilités. Cela permet un plus grand contrôle et augmente le potentiel de précision numérique. Dans le cas des sensibilités discrètes, ces dernières découlent directement du choix de la discrétisation des variables d'état.

Globalement, la méthode de l'équation des sensibilités est plus simple et plus économique tout en conservant un potentiel de grande précision. On privilégie donc cette approche, au détriment des sensibilités discrètes. Voyons maintenant son compétiteur : les méthodes adjointes.

1.4 Méthode des variables adjointes

La section précédente s'est penchée sur les méthodes basées sur le calcul des sensibilités. Une autre approche très populaire en optimisation ou pour l'évaluation de la dérivée d'une fonctionnelle est celle utilisant les variables adjointes. Cette dernière méthode fait l'objet de la présente section. On trouvera dans [14–17] des détails théoriques de cette méthode appliquée à la mécanique des fluides. À la section suivante, les méthodes de sensibilités et de variables adjointes seront comparées et confrontées.

L'approche par variables adjointes est une approche de multiplicateurs de Lagrange pour des problèmes d'optimisation sous contraintes. On introduit la variable adjointe (multiplicateur de Lagrange) ξ et on définit le lagrangien

$$L(\mathbf{X}; \mathbf{a}; \xi) = F(\mathbf{X}; \mathbf{a}) - \langle \xi, \mathbf{G}(\mathbf{X}; \mathbf{a}) \rangle \quad (1.19)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente un produit scalaire. Dans le cas discret, il s'agit du produit de deux vecteurs :

$$\xi \cdot \mathbf{G} \text{ ou } \xi^T \mathbf{G} \quad (1.20)$$

alors que dans le cas continu on a plutôt une intégrale :

$$\int_{\Omega} \xi G d\Omega \quad \text{ou} \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{G} d\Omega \quad (1.21)$$

où ξ est une fonction scalaire de (x, y) , ou un vecteur $\boldsymbol{\xi}(x, y)$ s'il y a plusieurs équations différentielles d'état. De façon symbolique, on utilisera la notation générale :

$$L = F - \boldsymbol{\xi} \mathbf{G} \quad (1.22)$$

Tout comme dans le cas des sensibilités, on peut formuler le problème discret avant d'introduire des variables adjointes discrètes ou formuler le problème dans le continu et ne discrétiser qu'à la fin les équations d'état et des variables adjointes.

Le problème d'optimisation consiste maintenant à trouver les états $\mathbf{X}$, les contrôles $\mathbf{a}$ et les variables adjointes $\boldsymbol{\xi}$ qui extrémisent L . Ce nouveau problème d'optimisation ne contient plus de contraintes et $\mathbf{X}$ est considéré indépendant de $\mathbf{a}$. Pour ce faire, on annule les premières variations de L par rapport à $\mathbf{X}$, $\mathbf{a}$ et $\boldsymbol{\xi}$, ce qui donne symboliquement :

Variation par rapport à $\mathbf{X}$: ($\rightarrow$ équations adjointes)

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \boldsymbol{\xi} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \quad (1.23)$$

Variation par rapport à $\mathbf{a}$: ($\rightarrow$ condition d'optimalité)

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{a}} \boldsymbol{\xi} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (1.24)$$

Variation par rapport à $\boldsymbol{\xi}$: ($\rightarrow$ équations d'état)

$$\mathbf{G} = 0 \quad (1.25)$$

Reprenons l'exemple continu de la section 1.3.3. L'annulation des premières variations de L donne, après quelques manipulations (dont des intégrations par parties) :

Équation adjointe :

$$-\nabla \cdot (\beta \nabla \xi) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \xi) + 3\phi^2 \xi = \phi - \hat{\phi} \text{ dans } \Omega \text{ et } \xi = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (1.26)$$

Condition d'optimalité :

$$\delta \alpha_k = - \int_{\Omega} \xi g_k d\Omega, \quad k = 1, \dots, K \quad (1.27)$$

Équation d'état :

$$-\nabla \cdot (\beta \nabla \phi) + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi + \phi^3 = \sum_{k=1}^K \alpha_k g_k(x, y) \text{ dans } \Omega \text{ et } \phi = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (1.28)$$

Les détails du développement se trouvent dans [3]. Rappelons qu'ici la variable d'état est ϕ , les contrôles sont α_k et la variable adjointe est ξ .

La résolution de ce système d'équations peut être abordée de diverses façons. Une résolution simultanée de toutes les équations conduit à une formulation *tout couplé* (*one-shot*) telle que définie à la section 1.1. Une autre approche consiste à résoudre de façon séquentielle ces trois systèmes et à itérer. Le résultat net est alors équivalent à un algorithme d'optimisation de type *steepest descent* qui est plutôt lent [3]. Enfin, on peut résoudre l'équation d'état puis l'équation des variables adjointes et se servir de cette solution pour déterminer le gradient de la fonctionnelle. On applique alors un algorithme d'optimisation efficace identique à celui utilisé avec les sensibilités. Dans le reste de ce chapitre, on considère uniquement cette dernière approche de résolution.

Voyons maintenant comment récupérer le gradient de la fonctionnelle objectif à partir

des variables adjointes. À une étape intermédiaire des itérations, soit à un $\mathbf{a}$ donné, la solution $\mathbf{X}$ des équations d'état (1.25) et la solution $\boldsymbol{\xi}$ des équations adjointes (1.23) sont calculées. En combinant l'expression du gradient de la fonction objectif (tel que développé pour les sensibilités)

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\mathbf{a}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{a}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \quad (1.29)$$

avec la solution des équations adjointes (1.23), on obtient :

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\mathbf{a}} = \boldsymbol{\xi} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{a}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \quad (1.30)$$

Enfin, en utilisant l'équation des sensibilités (1.10) on obtient l'expression finale :

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\mathbf{a}} = -\boldsymbol{\xi} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \quad (1.31)$$

Cette notation est plus appropriée pour la résolution d'un problème discret mais elle convient bien pour expliquer la démarche à suivre dans le cas continu qui est un peu plus complexe. Dans le cas particulier de notre exemple, le gradient de la fonctionnelle s'obtient de l'expression suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_k} = \delta \alpha_k + \int_{\Omega} \xi g_k d\Omega, \quad k = 1, \dots, K \quad (1.32)$$

Notons enfin que tout comme dans le cas des sensibilités, l'ordre de discrétisation et de développement des équations adjointes génère des gradients différents, avec le même problème au niveau de leur consistance.

1.5 Sensibilités vs variables adjointes

On est maintenant en mesure d'évaluer et de comparer les avantages des méthodes de sensibilités et de variables adjointes dans le but de justifier le choix final. La comparaison se concentre principalement sur la méthode de l'équation des sensibilités et la méthode des variables adjointes formulée dans le continu, soit les versions privilégiées ici.

1.5.1 Nombre de paramètres et de fonctionnelles

Dans le cas d'un problème d'optimisation à un seul paramètre, les deux méthodes conduisent à des résolutions similaires. Si on considère par exemple un problème discret, la résolution des états est identique et la résolution des sensibilités ou des variables adjointes est très similaire : dans les deux cas, on obtient un système linéaire de dimension n_X (le nombre d'inconnues du problème d'analyse *i.e.* de valeurs nodales d'état) avec la même matrice à factoriser. Seul le membre de droite diffère. En continu, on obtient aussi des systèmes similaires.

En présence de plusieurs paramètres, la méthode des variables adjointes offre un avantage indéniable. En effet, il n'y a qu'un seul problème adjoint à résoudre, de la taille du problème d'analyse, peu importe le nombre de paramètres mis en jeu. Le contrôle ou le nombre de paramètres de design peut ainsi être enrichi sans grande pénalité. La méthode de l'équation des sensibilités requiert pour sa part une résolution du système des sensibilités pour chaque paramètre. Cet inconvénient peut être contourné en partie si on factorise la matrice une fois pour toutes et qu'on conserve la factorisation. En effet, les systèmes d'équations des sensibilités ont le même membre de gauche et le même type de conditions aux frontières. Seul le membre de droite et

les valeurs spécifiques des conditions aux frontières différent.

À l'opposé, en présence de plusieurs fonctionnelles dont on veut étudier la sensibilité ou déterminer le gradient, la méthode des sensibilités reprend l'avantage. Dans ce cas, il n'y a qu'un seul problème de sensibilités par paramètre peu importe le nombre de fonctionnelles, alors qu'il y a autant de problèmes adjoints que de fonctionnelles. Globalement, le rapport entre le nombre de fonctionnelles et le nombre de paramètres indique laquelle des deux méthodes est plus économique.

1.5.2 Utilisations potentielles

Le point précédent soulève un fait important. Les variables adjointes sont intimement *associées* à la fonctionnelle définissant le problème d'optimisation : elles n'existent que si une fonctionnelle est définie. Les sensibilités ont pour leur part une existence et une signification propres, indépendantes d'une fonctionnelle ou du fait que l'on fasse ou non de l'optimisation. Le résultat net est que les sensibilités offrent une gamme d'applications et d'utilités beaucoup plus variée que les variables adjointes. Par exemple, elles peuvent être utilisées en :

- design optimal ;
- contrôle optimal ;
- analyse de sensibilité de système ;
- calcul rapide de solutions voisines ;
- identification de zones sensibles ;
- identification de paramètres dominants ;
- analyse d'incertitude ;
- éléments finis stochastiques.

Il existe sûrement d'autres applications des sensibilités, mais la liste précédente est suffisante pour démontrer sa très vaste utilité. Voyons plus en détails quelques exemples.

Les sensibilités permettent de prédire une solution voisine d'une solution déjà déterminée, et ce à coût modique (nettement inférieur à une nouvelle résolution complète). La prédiction de toute la distribution de cette solution voisine nécessite une connaissance locale des sensibilités de la solution. Cette information n'est pas disponible avec les variables adjointes qui ne permettent que le calcul du gradient d'une seule quantité définie par une fonctionnelle.

La méthode des sensibilités permet aussi l'étude de l'effet des paramètres sur la solution, permettant l'identification des zones sensibles et des variables importantes. Dans le cas d'un problème à plusieurs paramètres, les sensibilités normalisées (mises à l'échelle) permettent la priorisation des variables de design par ordre d'influence relative. On enrichit ainsi l'information pertinente disponible pour l'ingénieur concepteur ou analyste. La seule connaissance des tendances, sans quantification précise, peut être d'une grande utilité.

Un autre exemple d'utilisation des sensibilités est l'analyse d'incertitude sur le modèle mathématique qui permet d'examiner l'influence de certains coefficients, propriétés physiques ou conditions aux limites incertains. On peut ainsi prédire le changement de réponse dû à un changement de la valeur d'un paramètre et même borner la solution si des bornes d'incertitude sur ces paramètres sont connues. Les éléments finis stochastiques constituent un exemple frappant de cette utilisation des sensibilités dans un contexte d'incertitude statistique. Les problèmes de fiabilité avec probabilité de rupture peuvent aussi être traités.

1.5.3 Simplicité

Le développement des équations différentielles, des conditions aux frontières et du gradient de la fonctionnelle est généralement plus simple avec la méthode de l'équation des sensibilités qu'avec les variables adjointes. Il s'agit d'une simple différentiation. Les développements avec les variables adjointes sont moins triviaux, particulièrement pour le gradient de la fonctionnelle et les conditions aux frontières.

1.5.4 Problèmes transitoires

Les problèmes transitoires ne seront pas considérés dans le présent projet. On se contente ici de mentionner la différence majeure entre les approches avec variables adjointes et avec sensibilités lors du traitement de tels problèmes. Le problème adjoint est défini à rebours, c'est-à-dire qu'on doit spécifier une condition « initiale » au temps final du problème d'analyse et résoudre en remontant le temps [3, 18, 19]. Ainsi, on doit connaître et conserver en mémoire la solution des états à tous les pas de temps pour pouvoir résoudre les variables adjointes. Le coût associé peut être très important. De son côté, l'équation des sensibilités est définie dans le même sens temporel que l'équation des états, de sorte qu'on peut résoudre les deux systèmes parallèlement à chaque pas de temps et ne pas tout mémoriser. Dans une vision à plus long terme d'incorporation de problèmes transitoires, la méthode de l'équation des sensibilités présente à nouveau un avantage sur les variables adjointes.

1.5.5 Conclusion

En conclusion, bien que les deux méthodes présentées soient toutes deux exploitables, on retient la méthode de l'équation des sensibilités. Les principaux arguments qui

ont guidé ce choix sont la simplicité de la méthode et la vaste gamme d'applications potentielles issue de la signification propre des sensibilités. Le projet présenté n'est pas uniquement centré sur l'optimisation, mais plutôt sur les diverses applications des sensibilités.

À titre complémentaire, on discute à la section suivante du cas particulier et plus complexe de l'optimisation avec paramètres de forme.

1.6 Optimisation de forme

Le problème d'optimisation de forme pose des difficultés supplémentaires par rapport au problème avec paramètre de valeur. Dans le cas discret, on a déjà mentionné la complication issue de la sensibilité du maillage. La méthode de l'équation des sensibilités évite ce problème. Voyons d'autres difficultés spécifiques à l'optimisation de forme et le traitement possible.

Une complication se situe au niveau des conditions aux frontières. Prenons comme exemple le cas d'une frontière située à une position variable $y = y_0$, y_0 étant le paramètre considéré. Dans le contexte de la méthode de l'équation des sensibilités, on cherche une condition aux frontières sur la sensibilité ϕ_{y_0} d'une variable d'état ϕ . Supposons par exemple que $\phi = 0$ sur la frontière, peu importe sa position. La dérivée particulière d'un point d'identité fixe sur la paroi est donc nul, soit :

$$\frac{D\phi}{Dy_0} = \frac{\partial\phi}{\partial y_0} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dy_0} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dy_0} = \frac{\partial\phi}{\partial y_0} + \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad (1.33)$$

d'où la condition aux frontières suivante pour la sensibilité :

$$\phi_{y_0}(y_0) \equiv \left. \frac{\partial \phi}{\partial y_0} \right|_{y_0} = - \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y_0} \quad (1.34)$$

La principale conséquence se situe au niveau de la précision de la solution de l'équation des sensibilités. En effet, $\partial \phi / \partial y$ n'est connu que numériquement et sa précision est limitée puisqu'il s'agit d'une dérivée, moins précise qu'une valeur de ϕ par exemple. Une telle imprécision dans les conditions aux frontières se répercute dans tout le domaine. Pire encore, si la condition aux frontières sur l'état ϕ est de type dérivée nulle, alors la condition correspondante pour la sensibilité fait intervenir des dérivées secondes de ϕ .

La variation de la géométrie pose une autre complication au niveau de la différentiation d'intégrales de surface. L'opération de différentiation ne peut être simplement transférée à l'intérieur de l'intégrale. Dans le cas discret utilisant une formulation éléments finis, ces intégrales à différentier sont omniprésentes. Par contre, dans le cas de la méthode de l'équation des sensibilités, ce problème ne se pose pas au niveau de la résolution des sensibilités comme tel, puisqu'il n'y a pas d'intégrale à ce niveau. Le problème fait surface seulement lors du post-traitement, par exemple pour l'évaluation du gradient d'une fonctionnelle (intégrale) en optimisation. Mieux encore, le problème disparaît si cette fonctionnelle n'est pas définie sur tout le domaine, comme par exemple dans le cas d'une intégrale sur une sortie fixe. Le traitement est donc plus simple en continu (méthode de l'équation des sensibilités) qu'en discret.

Deux approches typiques pour traiter ce type de problème à géométrie variable utilisent respectivement le domaine de référence (*domain parameterization method*) et la dérivée matérielle. L'idée générale de l'approche avec domaine de référence est de procéder à un changement de repère et de résoudre le problème dans ce nouveau repère qui est fixe, c'est-à-dire indépendant des paramètres de forme originaux. La

différentiation n'est effectuée qu'après le changement de repère, donc sur une surface d'intégration fixe. Notons qu'il faut être prudent quant à l'interprétation des sensibilités obtenues. Il s'agit de la variation d'une variable par rapport à un paramètre à une position fixe dans le domaine transformé, soit une position variable dans le domaine réel. De son côté, l'approche dérivée matérielle utilise une configuration de référence qui coïncide avec la configuration réelle et impose des variations de forme. Le résultat net peut se ramener à la transformation de la dérivée d'une intégrale sur un domaine variable en la somme d'une intégrale à l'intérieur de laquelle on a fait entrer la dérivée et d'une intégrale de contour. On trouvera plus de détails dans les livres de Kleiber *et al.* [20] et Haug *et al.* [21], de même que les travaux de Tortorelli *et al.* [19, 22] ou ceux plus anciens de Doms [23].

Dans ce projet, on ne considérera pas de fonctionnelles définies sur des régions variables. Notons que cette considération n'est qu'un post-traitement pour un problème d'optimisation particulier et n'affecte en rien le calcul de sensibilités.

1.7 Utilisations antérieures

Afin de déterminer des voies d'étude intéressantes, voyons d'un peu plus près ce qui s'est déjà fait. Les méthodes de sensibilités et de variables adjointes, discrètes ou discrétisées, ont été grandement utilisées pour l'analyse de sensibilité dans divers domaines. La mécanique des solides (structures) constitue une des branches pionnières [20, 21]. Elle a plutôt favorisé la voie discrète. On note aussi des utilisations en conduction de chaleur transitoire [18, 23–28], en design aérodynamique [7, 29–35], en éléments finis stochastiques [36–39] ou autres approches de calcul d'incertitudes ou de fiabilité [40, 41], en optimisation multidisciplinaire [42, 43], en interaction fluides-structures [44], pour ne donner que quelques exemples. Les revues théoriques

et bibliographiques faites dans [45, 46] constituent également une bonne source de références, particulièrement en design aérodynamique.

Parmi les applications plus spécifiques, on retrouve par exemple le contrôle par chauffage/refroidissement [47–49], la conception de batteries thermiques [50], le calcul de solutions voisines (perturbation de l'angle d'attaque d'un profil [51], vol asymétrique d'un avion à partir du vol symétrique moins gourmand en ressources [52]), le calcul des dérivées de stabilité d'un avion ou d'un profil aerodynamique [52, 53], des problèmes avec réactions chimiques [51, 54], l'optimisation des coefficients de fermeture du modèle de turbulence $k - \epsilon$ [55], le contrôle d'instabilités d'un écoulement laminaire pour retarder la transition turbulente [56], le design d'une contraction pour minimiser la perte de charges [57], l'optimisation pour réduire la porosité lors de la solidification d'une pièce d'acier dans un moule [19], le moulage au sable [58], l'identification de paramètres importants (sensibilités normalisées de la solution) [59], l'optimisation de forme pour générer un écoulement prescrit (générer le même l'écoulement en entrée d'un moteur d'avion, mais en utilisant un corps plus compact que le devant complet de cet avion) [8], etc.

Comme on peut le constater, le calcul de sensibilité, tout comme l'utilisation des variables adjointes, n'est pas nouveau en soi. Cependant, il persiste des brèches, des améliorations possibles, des voies de recherche et de contribution originale. Comme premier point, on constate que les formulations utilisées manque habituellement de généralité. Par exemple, les équations de Navier-Stokes sont différenciées pour un paramètre particulier et il faut ajouter au code les termes sources (membres de droite) spécifiques à chaque cas.

Comme autre point, l'incorporation des méthodes adaptatives dans un contexte de calcul de sensibilités est relativement rare. En structures, on note par exemple les travaux de Bugada et Oliver [60], Dutta et Ramakrishnan [61] et Sienz et Hinton [62].

Du côté de la mécanique des fluides, Bugeda et Oñate [63,64], Mohammadi et Pironneau [65], de même que Borggaard et Pelletier [66] ont apporté leur contribution. Dans tous les cas, l'adaptation se faisait au niveau de la solution seulement. Des études plus récentes considérant en plus les sensibilités pour l'adaptation du maillage sont fournis par Borggaard et Pelletier [67,68] et Stewart [69], pour des écoulements cartésiens laminaires et incompressibles. L'importance de procéder ainsi réside dans le fait que les erreurs sur les sensibilités et celles sur les variables de l'écoulement peuvent se trouver dans des zones différentes. Dans les travaux de cette thèse, la méthodologie adaptative est utilisée non seulement pour guider un maillage de qualité, mais également pour effectuer des études rigoureuses de raffinement de maillage permettant la vérification de l'obtention d'une grande précision numérique. Notons enfin les travaux de Buscaglia *et al.* [70] présentant une rare investigation sur l'estimation d'erreur sur une fonctionnelle objectif et son gradient.

Finalement, certains types d'écoulements ont reçu bien peu d'attention : les écoulements de fluides à propriétés variables et les écoulements turbulents. Du côté des propriétés physiques variables, outre en mécanique des solides, on retrouve comme rare cas les travaux de Dowding et Blackwell [71] en conduction de chaleur. Le calcul de sensibilités pour les écoulements turbulents est pour sa part particulièrement récent et presque inexistant avec l'approche de l'équation des sensibilités. En sensibilités discrètes, notons par exemple les travaux très récents de Kim *et al.* [72] et de Ahn *et al.* [73]. Les gens intéressés au domaine connexe des variables adjointes pourront également consulter les travaux de Nielsen et Anderson [74,75] et de Rumsey et Gatski [76], en discret, ou ceux de Sung et Kwon [77] en continu. Les seuls travaux connus en formulation continue des sensibilités sont ceux de Godfrey et Cliff [78] qui ont utilisé trois modèles de turbulence : le modèle algébrique de Baldwin-Lomax, le modèle à une équation de Spalart-Allmaras et le modèle $k - \omega$ à deux équations de Wilcox. Il semble qu'à ce jour aucune publication extérieure au présent projet n'ait

traité la formulation continue des sensibilités pour le modèle $k - \epsilon$ combiné à des lois de paroi.

1.8 Objectifs spécifiques

Les diverses observations faites dans les sections précédentes permettent maintenant de définir plus clairement la portée du projet. Le but général est de développer une méthodologie générale d'éléments finis pour le calcul de sensibilités des écoulements de fluides.

Les objectifs plus spécifiques rattachés à ce but sont :

- développer la forme générale des équations de sensibilités tenant compte des variations possibles de tous les paramètres : les propriétés physiques, les conditions aux limites, les paramètres de forme et les coefficients de fermeture du modèle de turbulence ;
- implanter la méthode de l'équation des sensibilités dans un code d'éléments finis ;
- développer un algorithme d'estimation d'erreur et d'adaptation du maillage tenant compte des sensibilités ;
- démontrer l'usage de la méthode de l'équation des sensibilités sur des problèmes d'analyse de sensibilités, de calcul de solutions voisines, de propagation d'incertitude et d'optimisation ;
- appliquer la méthodologie à divers types de fluides ou d'écoulements : écoulements laminaires et turbulents, fluides à propriétés variables, convection naturelle et transfert de chaleur.

CHAPITRE 2

MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Ce chapitre présente la méthode de l'équation des sensibilités appliquée aux équations de Navier-Stokes modélisant les écoulements laminaires. La première partie traite de la formulation générale des équations de sensibilités et de leurs conditions aux frontières. La deuxième partie se penche sur la méthode de résolution par éléments finis et sur certains détails d'implantation. Enfin, on discute de certaines difficultés numériques. Les écoulements turbulents feront l'objet du chapitre suivant.

2.1 Équations de Navier-Stokes

On considère ici les écoulements permanents, laminaires et incompressibles de fluides visqueux avec transfert de chaleur. Ces écoulements sont modélisés à l'aide des équations de continuité, de Navier-Stokes et d'énergie, avec l'hypothèse de Boussinesq pour le phénomène de convection naturelle :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right] - \rho \mathbf{g} \beta (T - T_0) + \mathbf{f} \quad (2.2)$$

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q_s \quad (2.3)$$

Les variables de l'écoulement sont le vecteur vitesse $\mathbf{u}$ de composantes (u, v) , la pression p et la température T . Les propriétés physiques sont la masse volumique ρ ,

la viscosité dynamique μ , le coefficient de dilatation thermique β , la chaleur massique à pression constante c_p et la conductivité thermique λ . En général, ces propriétés peuvent dépendre des variables de l'écoulement et en particulier de la température. Enfin, $\mathbf{g}$ est le vecteur gravité, T_0 est une température de référence, $\mathbf{f}$ est une force volumique et q_s est une source de chaleur.

2.2 Équations générales des sensibilités (Navier-Stokes)

Les équations de l'écoulement permettent de déterminer la distribution spatiale de $\mathbf{u}$, p et T pour une configuration donnée. En analyse de sensibilité, on considère plutôt que les variables de l'écoulement dépendent non seulement des coordonnées (x, y) mais aussi du paramètre a . On note cette dépendance de la façon suivante :

$$\mathbf{u} = (u, v) = \mathbf{u}(x, y; a) \quad (2.4)$$

$$p = p(x, y; a) \quad (2.5)$$

$$T = T(x, y; a) \quad (2.6)$$

et on définit les sensibilités de ces variables par :

$$\mathbf{s}_u = (s_u, s_v) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \quad (2.7)$$

$$s_p = \frac{\partial p}{\partial a} \quad (2.8)$$

$$s_T = \frac{\partial T}{\partial a} \quad (2.9)$$

Ces dérivées partielles représentent donc le taux de variation de la solution par rapport au paramètre a , à une position (x, y) fixe, l'écoulement étant à l'équilibre (respect des équations aux dérivées partielles pour toute valeur de a).

Les équations des sensibilités s'obtiennent en différentiant les équations aux dérivées partielles d'origine par rapport au paramètre a . Ainsi, pour l'équation de continuité on a :

$$\frac{\partial}{\partial a}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial a}(0) \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \right) = 0 \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{s}_u = 0 \quad (2.12)$$

Le même procédé s'applique aux équations de mouvement et d'énergie. Dans une approche complètement générale, on considère que le paramètre a est quelconque et que toutes les variables et coefficients impliqués peuvent donc en dépendre. La différentiation de (2.2) et (2.3) par rapport à a donne :

$$\begin{aligned} \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u &= -\nabla s_p \\ &+ \nabla \cdot \left[\mu' \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) + \mu \left(\nabla \mathbf{s}_u + (\nabla \mathbf{s}_u)^T \right) \right] \\ &- (\rho' \mathbf{g} \beta + \rho \mathbf{g}' \beta + \rho \mathbf{g} \beta') (T - T_0) - \rho \mathbf{g} \beta (s_T - T'_0) \\ &+ \mathbf{f}' \end{aligned} \quad (2.13)$$

et

$$(\rho' c_p + \rho c'_p) \mathbf{u} \cdot \nabla T + \rho c_p (\mathbf{s}_u \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T) = \nabla \cdot (\lambda' \nabla T + \lambda \nabla s_T) + q'_s \quad (2.14)$$

Par convention, les sensibilités des variables d'écoulement sont représentées par le symbole s alors qu'un « ' » identifie les sensibilités de toutes les autres quantités. Notons aussi que dans le cas d'une étude à plusieurs paramètres, il y a un système d'équations (2.12)–(2.14) pour chaque paramètre.

Pour un fluide à propriétés variables, les sensibilités des propriétés sont variables et il faut en déterminer les expressions. Considérons par exemple un modèle de viscosité avec des dépendances complexes :

$$\mu = \mu(u, v, T; a) \quad (2.15)$$

La sensibilité μ' s'obtient de la différentiation de ce modèle en tenant compte de la dépendance de u , v et T en terme de a . On applique donc une dérivée en chaîne qui donne :

$$\begin{aligned} \mu' &= \frac{\partial \mu}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial a} \\ &= \frac{\partial \mu}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial u} s_u + \frac{\partial \mu}{\partial v} s_v + \frac{\partial \mu}{\partial T} s_T \end{aligned} \quad (2.16)$$

Cette expression est une relation linéaire entre μ' et les sensibilités des variables de calcul s_u , s_v et s_T . Par exemple, si

$$\mu = aT^2 \quad (2.17)$$

alors

$$\mu' = T^2 + 2aTs_T \quad (2.18)$$

Passons maintenant aux conditions aux frontières.

2.3 Conditions aux frontières pour les sensibilités

Le problème de mécanique des fluides modélisé par les équations (2.1) à (2.3) ne devient mathématiquement bien posé que si on lui ajoute des conditions aux frontières

appropriées. Il en est de même pour le problème de sensibilités. La détermination des conditions aux frontières pour les sensibilités suit la même procédure que celle appliquée aux équations aux dérivées partielles : on différencie les conditions aux frontières de l'écoulement par rapport au paramètre de design a .

Les sous-sections suivantes traitent les divers types de conditions aux frontières : Dirichlet et Neumann. Au départ, on distingue les cas avec paramètre de valeur et de forme pour finalement adopter une formulation générale couvrant les deux cas.

2.3.1 Condition de Dirichlet : paramètre de valeur

Soit une condition de Dirichlet typique sur la température :

$$T = \hat{T} \quad \text{sur} \quad \Gamma_T \quad (2.19)$$

où la frontière Γ_T ne dépend pas de a . La condition aux frontières pour la sensibilité de la température s'obtient par différentiation de (2.19) par rapport à a , soit :

$$\frac{\partial T}{\partial a} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial a} \quad (2.20)$$

$$\Rightarrow s_T = \frac{\partial \hat{T}}{\partial a} \quad \text{sur} \quad \Gamma_T \quad (2.21)$$

Par exemple, pour un profil de température imposé donné par :

$$T = ay^2 \quad (2.22)$$

on obtient :

$$s_T = y^2 \quad (2.23)$$

On utilise ici la température comme variable caractéristique, mais les équations développées dans cette section s'appliquent tout autant aux autres variables dépendantes.

2.3.2 Condition de Dirichlet : paramètre de forme

Reprenons la même condition de Dirichlet qu'à la sous-section précédente :

$$T = \hat{T} \quad \text{sur} \quad \Gamma_T \quad (2.24)$$

sauf qu'ici la frontière Γ_T , divisée en portions Γ_{T_i} , se déplace lorsque le paramètre a varie :

$$\Gamma_{T_i} = \{(x_f(t; a), y_f(t; a)) \mid t \in [0, 1]\} \quad (2.25)$$

où (x_f, y_f) sont les coordonnées d'un point de la frontière paramétrisée par t . Pour sa part, la température imposée $\hat{T}$ peut varier le long de la frontière et dépendre de a .

La condition aux limites sur s_T s'obtient alors à l'aide d'une dérivée matérielle qui suit un point frontière d'identité fixe, soit un t constant (voir la figure 2.1) :

$$\frac{DT}{Da} = \frac{D\hat{T}}{Da} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} = \frac{D\hat{T}}{Da} \quad (2.27)$$

$$\Rightarrow \quad s_T = \frac{D\hat{T}}{Da} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} - \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad \text{sur} \quad \Gamma_T \quad (2.28)$$

Les termes $\partial x_f / \partial a$ et $\partial y_f / \partial a$ correspondent au mouvement de la frontière alors que

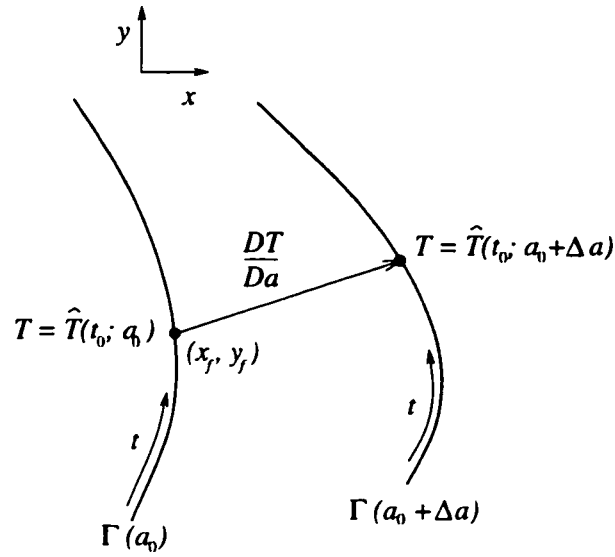


Figure 2.1 Condition de Dirichlet avec paramètre de forme

$D\hat{T}/Da$ correspond à la variation de la valeur de la condition aux limites. Si $\hat{T}$ est connu directement en fonction de t ($\hat{T} = \hat{T}(t; a)$) alors

$$\frac{D\hat{T}}{Da} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial a} \quad (2.29)$$

tandis que si on connaît son expression en terme des coordonnées spatiales ($\hat{T} = \hat{T}(x_f, y_f; a)$) alors on utilisera plutôt :

$$\frac{D\hat{T}}{Da} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial a} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_f} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial y_f} \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad (2.30)$$

On conserve donc le symbolisme général $D\hat{T}/Da$ pour éviter toute ambiguïté.

À titre d'exemple, considérons un canal avec un profil de vitesse parabolique en entrée. Le paramètre a définit la hauteur de la section d'entrée et le débit doit

demeurer constant peu importe la valeur de a . On a alors :

$$x_f = 0 \quad (2.31)$$

$$y_f = at \quad (2.32)$$

$$\hat{u} = \frac{4t(1-t)}{a} \quad (2.33)$$

$$t \in [0, 1] \quad (2.34)$$

Ainsi,

$$\frac{\partial x_f}{\partial a} = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial y_f}{\partial a} = t \quad (2.36)$$

$$\frac{D\hat{u}}{Da} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial a} = -\frac{4t(1-t)}{a^2} \quad (2.37)$$

et on obtient la condition aux limites suivante pour s_u :

$$s_u = -\frac{4t(1-t)}{a^2} - \frac{\partial u}{\partial y} t \quad (2.38)$$

La figure 2.2 illustre cet exemple. Lorsque a augmente, le canal devient plus haut et les vitesses diminuent. La sensibilité s_u considère une position spatiale fixe alors que Du/Da et $D\hat{u}/Da$ suivent un point frontière ($t = cte$).

Globalement, la condition aux limites avec paramètre de forme contient tout simplement des termes supplémentaires par rapport au cas valeur. Dans une optique de formulation générale, l'équation (2.28) est toujours utilisée, peu importe le paramètre considéré. Le traitement d'un paramètre de valeur consiste tout simplement à imposer $\partial x_f/\partial a = \partial y_f/\partial a = 0$. Regardons maintenant du côté des conditions de Neumann.

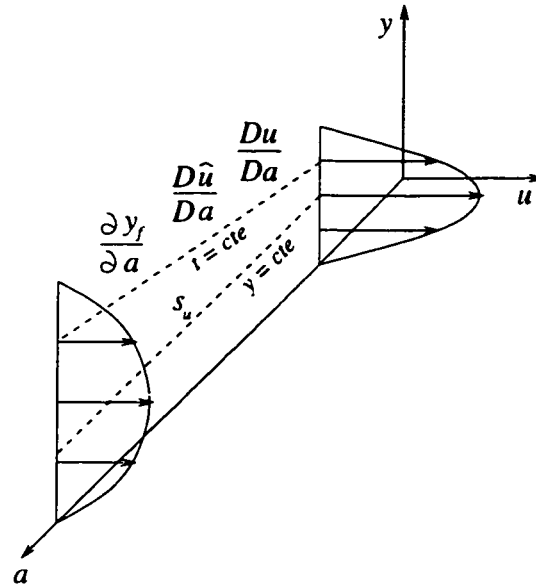


Figure 2.2 Exemple de condition de Dirichlet sur une frontière mobile

2.3.3 Condition de Neumann

À titre d'exemple, considérons l'imposition d'un flux de chaleur $\hat{q}$:

$$q = \hat{q} \quad \text{sur} \quad \Gamma_q \quad (2.39)$$

où par définition

$$q = \lambda \nabla T \cdot \hat{n} \quad (2.40)$$

et $\hat{n} = \hat{n}(t; a)$ est le vecteur unitaire normal à la frontière. La condition correspondante pour les sensibilités s'obtient, dans le cas général d'un paramètre de forme, en appliquant la dérivée matérielle :

$$\frac{Dq}{Da} = \frac{D\hat{q}}{Da} \quad (2.41)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{D\lambda}{Da} \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} + \lambda \frac{D}{Da} (\nabla T) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \lambda \nabla T \cdot \frac{D\hat{\mathbf{n}}}{Da} = \frac{D\hat{q}}{Da} \quad (2.42)$$

ce qui donne en développant :

$$\begin{aligned} & \left(\lambda' + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ & + \lambda \left[\left(\frac{\partial s_T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) n_x + \left(\frac{\partial s_T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) n_y \right] \\ & + \lambda \nabla T \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial a} = \frac{D\hat{q}}{Da} \end{aligned} \quad (2.43)$$

soit finalement :

$$\begin{aligned} \bar{q}' &= \frac{D\hat{q}}{Da} - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ & - \lambda \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) n_x + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) n_y \right] \\ & - \lambda \nabla T \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial a} \end{aligned} \quad (2.44)$$

où $\bar{q}'$ est le flux thermique des sensibilités, donné par :

$$\bar{q}' = (\lambda' \nabla T + \lambda \nabla s_T) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.45)$$

Notons que tous les termes du membre de droite de l'équation (2.44) sont connus une fois l'écoulement résolu. Si le paramètre n'affecte pas cette partie de la frontière, alors cette condition de Neumann se réduit à :

$$\bar{q}' = \frac{D\hat{q}}{Da} = \frac{\partial \hat{q}}{\partial a} \quad (2.46)$$

Les conditions de Neumann pour les équations de mouvement s'obtiennent de la même façon. Soit des tractions imposées $\hat{\mathbf{t}}_f$:

$$\mathbf{t}_f = \hat{\mathbf{t}}_f \quad \text{sur} \quad \Gamma_t \quad (2.47)$$

Les tractions $\mathbf{t}_f$ sont données par l'expression suivante :

$$\mathbf{t}_f = 2\mu\dot{\gamma}(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} - p\hat{\mathbf{n}} \quad (2.48)$$

où le tenseur du taux de déformation $\dot{\gamma}$ est défini par :

$$\dot{\gamma}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (2.49)$$

Dans ce cas, la condition de Neumann correspondante pour les sensibilités est :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{t}}'_f = & \frac{D\hat{\mathbf{t}}_f}{Da} - \left[\frac{\partial}{\partial x} (2\mu\dot{\gamma}(\mathbf{u})) \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial y} (2\mu\dot{\gamma}(\mathbf{u})) \frac{\partial y_f}{\partial a} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ & - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \hat{\mathbf{n}} - 2\mu\dot{\gamma}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial a} - p \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial a} \end{aligned} \quad (2.50)$$

où les tractions $\bar{\mathbf{t}}'_f$ des sensibilités désignent :

$$\bar{\mathbf{t}}'_f = [2\mu'\dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2\mu\dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] \cdot \hat{\mathbf{n}} - s_p \hat{\mathbf{n}} \quad (2.51)$$

Le cas d'un paramètre de valeur se réduit à

$$\bar{\mathbf{t}}'_f = \frac{D\hat{\mathbf{t}}_f}{Da} = \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_f}{\partial a} \quad (2.52)$$

Il est intéressant de constater que le type de condition aux frontières (Dirichlet ou Neumann) du problème de sensibilités est le même que celui du problème

d'écoulement, et ce pour un paramètre de forme ou de valeur. D'autres types de conditions aux frontières telles la condition de périodicité et la condition mixte sont traitées par He *et al.* [79].

L'aspect du développement mathématique des équations de sensibilités est maintenant terminé. Dans la suite du chapitre, on se penche sur l'aspect numérique : la méthode de résolution, des détails d'implantation, certaines difficultés et finalement les limites associées.

2.4 Méthode des éléments finis

La résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles pour l'écoulement et pour les sensibilités s'effectue à l'aide d'une méthode d'éléments finis. Cette section présente brièvement la formulation variationnelle et la méthode d'éléments finis utilisée, l'emphasis étant mise sur les équations de sensibilités. On glisse aussi un mot sur les techniques de stabilisation.

2.4.1 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle (forme faible) associée aux équations de sensibilités s'obtient en multipliant ces équations par une fonction test et en intégrant sur le domaine de calcul Ω . On procède ensuite à une intégration par parties des termes de diffusion et de pression, ce qui réduit l'ordre des dérivées des sensibilités et fait apparaître les conditions naturelles. Les formes faibles des équations de sensibilités de continuité, de mouvement et d'énergie sont, dans l'ordre :

$$\int_{\Omega} \delta s_p \nabla \cdot \mathbf{s}_u d\Omega = 0 \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [2\mu' \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{s}_u) d\Omega - \int_{\Omega} s_p \nabla \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [(\rho' \mathbf{g} \beta + \rho \mathbf{g}' \beta + \rho \mathbf{g} \beta') (T - T_0) - \rho \mathbf{g} \beta (s_T - T_0')] \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \mathbf{f}' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega - \int_{\Gamma_t} \vec{t}'_f \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [(\rho' c_p + \rho c'_p) \mathbf{u} \cdot \nabla T + \rho c_p (\mathbf{s}_u \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T)] \delta s_T d\Omega \\
& \int_{\Omega} (\lambda' \nabla T + \lambda \nabla s_T) \cdot \nabla \delta s_T d\Omega - \int_{\Omega} q'_s \delta s_T d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q}' \delta s_T d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{2.55}$$

où δs_p , $\delta \mathbf{s}_u$ et δs_T sont les fonctions tests en s_p , $\mathbf{s}_u$ et s_T respectivement.

La frontière $\partial\Omega$ est subdivisée selon le type de condition aux limites qui s'y applique. Ainsi, pour les équations de continuité et de mouvement, on impose des conditions essentielles (Dirichlet) sur Γ_u et des conditions naturelles (Neumann) sur Γ_t avec

$$\Gamma_u \cup \Gamma_t = \partial\Omega \tag{2.56}$$

$$\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset \tag{2.57}$$

De même, pour l'équation d'énergie, on impose des conditions essentielles sur Γ_T et des conditions naturelles sur Γ_q . On retrouve exactement la même division de la frontière pour les sensibilités. En effet, comme on l'a vu à la section 2.3, le type de condition aux limites pour les sensibilités (essentielle ou naturelle) est le même que celui de la condition aux limites d'origine pour l'écoulement.

Notons enfin que les équations (2.54) et (2.55) ont été obtenues en intégrant par parties tous les termes de type diffusion, qu'ils s'agissent de termes de sensibilités ou de variables de l'écoulement. Les conditions naturelles qui en découlent sont sur $\vec{t}'_f$

et $\bar{q}'$, soit les termes qu'on a fait apparaître lors du développement des conditions de Neumann pour les sensibilités (section 2.3.3).

2.4.2 Choix de l'élément fini

La méthode de Galerkin consiste à discrétiser la forme faible et à prendre comme fonctions test les fonctions d'interpolation de la solution :

$$\begin{aligned} s_{u_h} &= \sum_{i=1}^{n_{s_u}} N_i^{s_u} s_{u_i} & s_{v_h} &= \sum_{i=1}^{n_{s_v}} N_i^{s_v} s_{v_i} & s_{p_h} &= \sum_{i=1}^{n_{s_p}} N_i^{s_p} s_{p_i} & s_{T_h} &= \sum_{i=1}^{n_{s_T}} N_i^{s_T} s_{T_i} \\ \delta s_{u_i} &= N_i^{s_u} & \delta s_{v_i} &= N_i^{s_v} & \delta s_{p_i} &= N_i^{s_p} & \delta s_{T_i} &= N_i^{s_T} \end{aligned} \quad (2.58)$$

où, par exemple pour s_u , s_{u_h} est la solution éléments finis, n_{s_u} est le nombre de noeuds (ou de fonctions d'interpolation), $N_i^{s_u}$ sont les fonctions d'interpolation, s_{u_i} sont les valeurs nodales et δs_{u_i} sont les fonctions test.

L'élément fini utilisé dans toutes les simulations présentées dans cette thèse est celui de Crouzeix-Raviart ($P_2^+ - P_1$) [80]. Il s'agit d'un élément quadratique en vitesse (enrichi d'une bulle cubique), quadratique en température et linéaire discontinu en pression. On discrétise les sensibilités et l'écoulement à l'aide du même élément fini et du même maillage. Ceci simplifie la programmation des structures de données et l'extraction des informations de l'écoulement requises par les sensibilités. Il s'agit ici d'un choix et non d'une exigence de la méthode de l'équation des sensibilités (MES). La MES permet en fait une résolution des sensibilités tout à fait indépendante de celle de l'écoulement. On utilise des techniques de condensation de la bulle [81] et de lagrangien augmenté [82] afin de réduire la taille du système d'équations résultant, et ce sans perte de précision.

2.4.3 Techniques de stabilisation

La méthode de Galerkin conduit à des solutions entachées d'oscillations lorsque le terme de convection est dominant. Des problèmes de convergence ont alors tendance à se manifester. Cette situation est particulièrement fréquente lors de simulations d'écoulements en régime turbulent. Pour pallier à ces lacunes de la méthode de Galerkin, de nombreuses méthodes de stabilisation ont été mises au point. Parmi celles-ci on retrouve les méthodes SU (*Streamline Upwind*) [83], SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*) [84] et GLS (*Galerkin Least-Squares*) [85]. Le détail de ces formulations et de leur implantation dans le résolveur de l'écoulement se trouve dans le mémoire de Turgeon [86].

Les premiers essais numériques de calcul de sensibilités en régime turbulent utilisant une formulation de Galerkin souffraient de sérieux problèmes de convergence. Il a fallu se rendre à l'évidence que les équations des sensibilités devaient elles aussi être stabilisées. En première approche, comme les équations des sensibilités sont proches de celles de l'écoulement, les techniques de stabilisation développées pour l'écoulement ont été utilisées directement pour les sensibilités, sans véritable garantie de rendement. En pratique, on a observé une nette amélioration par rapport à la formulation Galerkin standard, mais peut-être une moins bonne performance que pour l'écoulement. Les détails sur les méthodes implantées se trouvent à l'annexe I.

2.5 Détails d'implantation

Dans cette section, on discute de certains détails d'implantation de la méthode de l'équation des sensibilités dans un code d'éléments finis existant.

2.5.1 Données d'entrée

L'organisation des données à fournir au résolveur des sensibilités est à toutes fins pratiques une image de celle des données fournies pour l'écoulement. Par exemple, la résolution de l'écoulement nécessite la connaissance des propriétés physiques du fluide alors que pour la résolution des sensibilités chaque sensibilité de propriété doit être spécifiée. Dans le cas de propriétés variables, une routine usager fournit la description du modèle de viscosité (par exemple). Similairement, une routine usager contenant la différentiation du modèle de viscosité doit être fournie au résolveur de sensibilités. Avec notre approche générale, tous les termes sont déjà présents. Il suffit de les désactiver ou de les activer en spécifiant des valeurs nulles ou non nulles des sensibilités des propriétés physiques. Ceci évite des modifications répétées du code, soit des ajouts de termes particuliers, qui seraient des sources d'erreur potentielles.

La spécification des conditions aux limites pour les équations des sensibilités diffère quelque peu de celle de l'écoulement. Comme on l'a vu à la section 2.3, les conditions aux limites pour les sensibilités dépendent de la solution de l'écoulement. On ne peut donc pas spécifier directement leurs valeurs dans le fichier d'entrée. Ce sont plutôt les coefficients des expressions des conditions aux limites qui sont fournis. Les conditions aux limites sont calculées par le résolveur à une étape intermédiaire entre la résolution de l'écoulement et celle des sensibilités. Ainsi, pour une condition de Dirichlet (équation (2.28)) on spécifie explicitement et *a priori* les coefficients suivants :

$$\frac{D\hat{T}}{Da}, \quad \frac{\partial x_f}{\partial a} \quad \text{et} \quad \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad (2.59)$$

Les coefficients de forme $\partial x_f/\partial a$ et $\partial y_f/\partial a$ sont communs à toutes les variables (u , v , T , etc.), alors qu'on spécifie un coefficient de type $D\hat{T}/Da$ pour chaque variable.

2.5.2 Jacobien numérique

La formulation éléments finis et les conditions aux limites appropriées génèrent des équations algébriques qui sont la discrétisation des équations aux dérivées partielles de l'écoulement et des sensibilités. Pour l'écoulement, ces équations algébriques sont non linéaires et nécessitent une résolution itérative. Pour les résoudre, on peut utiliser une combinaison de méthodes de points fixes et de Newton.

Considérons la i^e équation algébrique d'un système dont le vecteur d'inconnues est $\mathbf{X}$:

$$R_i(\mathbf{X}) = 0 \quad (2.60)$$

À une itération intermédiaire, la solution courante $\mathbf{X}^n$ ne satisfait pas exactement les équations et donc le résidu est non nul :

$$R_i(\mathbf{X}^n) \neq 0 \quad (2.61)$$

On cherche alors une nouvelle solution $\mathbf{X}^{n+1}$ telle que $R_i = 0$. Une approximation linéaire de R_i donne :

$$R_i(\mathbf{X}^{n+1}) = R_i(\mathbf{X}^n + \Delta\mathbf{X}) = R_i(\mathbf{X}^n) + \sum_j \frac{\partial R_i}{\partial X_j}(\mathbf{X}^n) \Delta X_j = 0 \quad (2.62)$$

On parle alors d'une équation linéarisée ou de la méthode de Newton. Le système à résoudre, pour l'ensemble des équations, devient :

$$\left[\frac{\partial R_i}{\partial X_j} \right] \{ \Delta X_j \} = \{ -R_i \} \quad (2.63)$$

Ce système est dit en correction puisque sa solution donne les corrections (ou

incréments) ΔX_j de la solution. Les coefficients de la matrice à construire représentent la dérivée d'un résidu par rapport à une inconnue (dans notre cas, une variable nodale de la solution). L'approche classique consiste à déterminer analytiquement cette matrice, ce qui devient rapidement lourd lorsqu'on est en présence de termes fortement non linéaires (par exemple, un modèle de viscosité complexe). On opte donc plutôt pour une linéarisation approximative, soit par une différence finie :

$$\frac{\partial R_i}{\partial X_j} \simeq \frac{R_i(X_1^n, X_2^n, \dots, X_j^n + \delta, \dots, X_N^n) - R_i(X_1^n, X_2^n, \dots, X_j^n - \delta, \dots, X_N^n)}{2\delta} \quad (2.64)$$

On perturbe donc une à une les valeurs nodales de la solution d'une petite quantité δ et on réévalue le résidu. La construction du système algébrique, incluant le membre de droite, se fait alors uniquement par des appels successifs à une routine de calcul de résidu qui contient la transcription de la forme faible des équations. On dit de cette approche qu'elle utilise un jacobien numérique.

Qu'en est-il pour les sensibilités ? Les équations des sensibilités ont la particularité d'être *toujours* linéaires, peu importe le paramètre de design considéré. Pour un système linéaire, le jacobien numérique perd un peu de son charme. Il demeure cependant intéressant et utile pour les sensibilités à cause de sa simplicité d'implantation. En effet, même si les équations des sensibilités sont linéaires, elles ne sont pas pour autant simples. Par exemple, pour un fluide à viscosité variable, les termes deviennent rapidement nombreux et il n'est pas si simple de bien construire analytiquement les matrices élémentaires. En particulier, il faudrait scinder μ' en morceaux : un terme comme $\partial\mu/\partial a$ contribue au membre de droite du système alors que $\partial\mu/\partial T$ contribue aux coefficients de la matrice du membre de gauche. Il faudrait alors faire du cas par cas ou décomposer *a priori* tous les termes comme μ' pour faire apparaître explicitement les sensibilités des variables de l'écoulement. On verra également au chapitre suivant que l'utilisation d'une loi de paroi conduit rapidement à des équations très

lourdes à imbriquer si on désire isoler analytiquement les coefficients de la matrice et du membre de droite. L'approche par jacobien numérique élimine ces difficultés.

On peut tout de même profiter de la linéarité des équations des sensibilités pour simplifier et accélérer le calcul numérique du jacobien. Ainsi, au lieu de procéder à une différence centrée d'ordre deux comme c'est le cas pour l'écoulement, on utilise plutôt une différence décentrée :

$$\frac{\partial R_i}{\partial X_j} \simeq \frac{R_i(X_1^n, X_2^n, \dots, X_j^n + \delta, \dots, X_N^n) - R_i(\mathbf{X}^n)}{\delta} \quad (2.65)$$

Les équations étant linéaires, la différence décentrée est exacte. Le nombre d'évaluations des résidus passe de trois à deux, ce qui réduit le temps de construction des matrices.

2.5.3 Méthode de résolution des systèmes d'équations

Les systèmes d'équations algébriques de l'écoulement et des sensibilités sont mémorisés suivant une architecture en ligne de ciel et factorisés par une méthode de décomposition LU. Ces structures et algorithmes déjà implantés pour l'écoulement sont donc réutilisés pour les sensibilités.

2.5.4 Itérations et reconstructions

Le système d'équations des sensibilités étant linéaire, une seule itération suffit alors théoriquement pour le résoudre. Malgré tout, on procède à plusieurs itérations, pour assurer la convergence. Typiquement, deux itérations suffisent, la deuxième confirmant la convergence. Plusieurs facteurs ont guidé cette décision. D'abord, c'est une

façon de vérifier l'implantation : on s'attend à une convergence très rapide. Aussi, l'accumulation d'erreurs d'arrondi ou des problèmes de conditionnement peuvent faire dévier légèrement les résultats. Une deuxième itération s'avère donc plus sécuritaire. De plus, la méthode de lagrangien augmenté utilisée étant un algorithme itératif pour satisfaire la conservation de la masse, on ne peut atteindre la convergence en une seule itération, même en arithmétique exacte. Finalement, on conserve la possibilité d'ajouter des techniques de stabilisation quelconques rendant le système non linéaire, ce qui nécessiterait des itérations. On peut toujours limiter la résolution à une seule itération en spécifiant une valeur de un au nombre d'itérations maximal. En régime turbulent, l'algorithme est modifié : on se limite à une seule itération (voir le chapitre suivant).

Dans certaines circonstances, comme avec un paramètre de valeur et une formulation de type Galerkin sans stabilisation, la matrice des systèmes d'équations des sensibilités est la même pour tous les paramètres et correspond à celle obtenue par une linéarisation de l'écoulement par la méthode de Newton. On pourrait alors récupérer la construction et la factorisation de la matrice. Cette approche a été rejetée puisqu'elle repose sur trop d'hypothèses, souvent difficiles à respecter en pratique. Par contre, la réutilisation de la factorisation pour une deuxième itération de résolution des sensibilités pour un paramètre donné serait avantageuse. Cette approche n'a pas été implantée mais pourrait très facilement l'être. La seule condition semble alors être de ne pas introduire de non-linéarités par le biais des termes de stabilisation.

Globalement, le code résout d'abord l'écoulement puis successivement chacun des systèmes de sensibilités (pour chaque paramètre de design). On peut donc considérer plusieurs paramètres dans un même problème.

2.6 Difficultés et limites du projet

Pour clore ce chapitre, on discute de deux difficultés associées à la méthode de l'équation des sensibilités : la présence de dérivées des variables de l'écoulement dans le problème de sensibilités et la présence de discontinuités. On énonce en outre les limites du projet face à ces difficultés.

2.6.1 Présence de dérivées de l'écoulement

Les équations des sensibilités et les conditions aux limites qui leur sont associées contiennent des dérivées des variables de l'écoulement qui ne sont connues qu'approximativement d'une résolution numérique. Le problème de sensibilités contient donc des données imprécises, ou à tout le moins inexactes, avant même d'en aborder la résolution numérique. Examinons un à un les trois cas suivants : dérivées dans les équations aux dérivées partielles, dans les conditions aux frontières de Dirichlet et dans les conditions aux frontières de Neumann.

Stewart et Stanley [69, 87] illustrent l'amélioration obtenue en utilisant des dérivées reconstruites plus précises dans les équations des sensibilités, soit sur le terme

$$\rho s_u \cdot \boxed{\nabla u} \quad (2.66)$$

Deux techniques de projection (locale et globale) pour la reconstruction y sont confrontées. Dans notre contexte de résolution adaptative, une technique de reconstruction de dérivées plus précises basée sur les projections locales existe déjà (voir le chapitre 4). On a donc ajouté l'option d'utiliser ces dérivées enrichies dans les équations des sensibilités. Ce n'est cependant pas la cause d'erreur la plus importante

pour le calcul des sensibilités. D'après Gunzburger [3], la présence de dérivées dans les conditions aux limites cause plus de tort que les dérivées présentes dans les équations aux dérivées partielles.

La condition aux limites de Dirichlet pour un paramètre de forme (équation (2.28)) contient des dérivées premières des variables de l'écoulement :

$$s_T = \frac{D\hat{T}}{Da} - \boxed{\frac{\partial T}{\partial x}} \frac{\partial x_f}{\partial a} - \boxed{\frac{\partial T}{\partial y}} \frac{\partial y_f}{\partial a} \quad (2.67)$$

Comme on ne dispose que d'une approximation numérique de ces dérivées, la condition aux limites est inexacte et cette erreur se propage dans le domaine. En plus, les dérivées numériques sont discontinues aux interfaces entre les éléments ce qui génère des conditions aux limites nodales à valeurs multiples. Typiquement, un problème avec paramètre de forme est donc plus exigeant au point de vue numérique que le cas d'un paramètre de valeur qui contient des conditions aux limites exactes. Pour limiter les inconvénients, les dérivées projetées (qui sont continues en plus d'être plus précises) sont donc toujours utilisées dans les conditions aux frontières.

Les conditions de Neumann sont encore plus corsées : elles font apparaître des dérivées secondes des variables de l'écoulement, qui sont encore moins précises que les dérivées premières. Par exemple, pour l'équation d'énergie on a (équation (2.44)) :

$$\begin{aligned} \bar{q}' = & \frac{D\hat{q}}{Da} - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) \nabla T \cdot \hat{n} - \lambda \nabla T \cdot \frac{\partial \hat{n}}{\partial a} \\ & - \lambda \left[\left(\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) n_x + \left(\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}} \frac{\partial x_f}{\partial a} + \boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} \frac{\partial y_f}{\partial a} \right) n_y \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

L'utilisation satisfaisante d'une telle expression nécessite une technique d'obtention de dérivées secondes suffisamment précises à partir de la solution numérique. De telles études n'ont pas été entreprises dans le présent projet. On se limite donc à des

conditions de Neumann appliquées sur des parois fixes (équations (2.46) et (2.52)).

2.6.2 Discontinuités

En différentiant les équations aux dérivées partielles de l'écoulement, on a implicitement supposé qu'elles *étaient* différentiables. Or dans certaines situations, comme une onde de choc dans un écoulement compressible simulé avec les équations d'Euler, des discontinuités sont présentes dans la solution. On ne peut donc pas différentier à travers ces discontinuités. Les sensibilités résultantes présentent des pics (deltas de Dirac) ce qui cause des problèmes d'ordre numérique. Appel et Gunzburger [88, 89] discutent de ces aspects. Ces cas particuliers ne sont pas traités ici.

Les sensibilités peuvent aussi être discontinues même si la solution de l'écoulement est continue. Prenons l'exemple très simple de la conduction thermique dans un mur composite unidimensionnel (figure 2.3). Le domaine est séparé en deux zones de

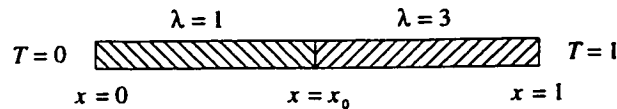


Figure 2.3 Configuration du mur composite

conductivités différentes. La température est continue à l'interface, de même que le flux de chaleur, de sorte que la dérivée de la température y est discontinue. L'équation de conduction utilisée est :

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (2.69)$$

La solution exacte de ce problème est donnée par :

$$T = \begin{cases} \frac{3x}{1+2x_0} & \text{pour } 0 \leq x < x_0 \\ \frac{x+2x_0}{1+2x_0} & \text{pour } x_0 < x \leq 1 \end{cases} \quad (2.70)$$

alors que la sensibilité exacte pour le paramètre x_0 (la position de l'interface) est :

$$s_T = \begin{cases} \frac{-6x}{(1+2x_0)^2} & \text{pour } 0 \leq x < x_0 \\ \frac{2-2x}{(1+2x_0)^2} & \text{pour } x_0 < x \leq 1 \end{cases} \quad (2.71)$$

La figure 2.4 illustre la solution de ce problème pour $x_0 = 0.5$. La sensibilité résultante s_T pour ce paramètre de forme est discontinue à l'interface.

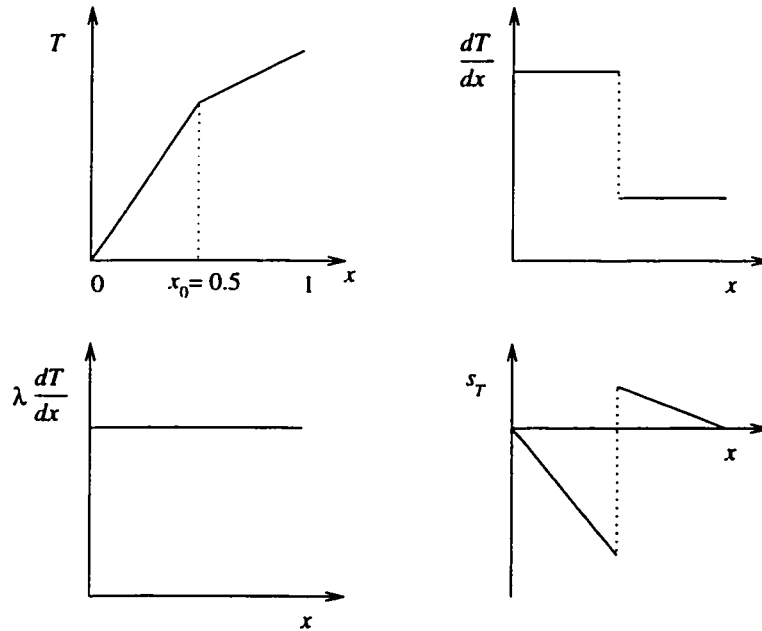


Figure 2.4 Solution dans un mur composite

À cause de la discontinuité de la conductivité, on ne peut pas directement différentier l'équation de conduction (2.69) sur tout le domaine en négligeant la présence et

l'effet de l'interface. Une approche proposée par Pelletier *et al.* [90] considère deux zones distinctes avec leur propre équation différentielle et les conditions de raccord suivantes :

$$T(x_0^-) = T(x_0^+) \quad (2.72)$$

$$\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_0^-} = \lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_0^+} \quad (2.73)$$

où x_0^- et x_0^+ indiquent les points immédiatement à gauche et à droite de x_0 . Pour le problème de sensibilités, on différentie ces conditions de raccord, ce qui donne :

$$s_T(x_0^+) - s_T(x_0^-) = - \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_0^+} + \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_0^-} \quad (2.74)$$

$$\lambda \left. \frac{ds_T}{dx} \right|_{x_0^+} - \lambda \left. \frac{ds_T}{dx} \right|_{x_0^-} = -\lambda \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_{x_0^+} + \lambda \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_{x_0^-} \quad (2.75)$$

La sensibilité s_T est donc discontinue à cause de la discontinuité de dT/dx .

L'implantation de cette approche zones/raccords présente deux difficultés. Premièrement, la condition de raccord de flux pose les mêmes problèmes de précision numérique que les conditions de Neumann. Deuxièmement, il faudrait changer la structure de donnée actuelle qui considère un raccord implicite des zones, ce qui est valide pour la formulation éléments finis du problème de conduction. Ce cas de discontinuité n'est donc pas traité dans le présent projet.

CHAPITRE 3

MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS POUR LE MODÈLE $k - \epsilon$

Ce chapitre présente la méthode de l'équation des sensibilités appliquée au modèle de turbulence $k - \epsilon$ avec lois de paroi, pour des écoulements isothermes et incompressibles. La première partie traite de la modélisation de l'écoulement : le modèle de turbulence, sa formulation en variables logarithmiques et les conditions aux frontières. On développe ensuite les équations générales des sensibilités pour ce modèle. Le chapitre se termine par quelques détails d'implantation de la méthodologie.

3.1 Modèle de turbulence $k - \epsilon$

Les équations de Navier-Stokes en régime transitoire contiennent tous les ingrédients nécessaires au calcul des écoulements turbulents. Cependant, la résolution directe et précise de ces équations est extrêmement gourmande en ressources informatiques, voire inabordable, à cause de l'aspect temporel et de la présence de petites échelles de longueur caractéristiques. Une approche classique pour contourner ce problème consiste à décomposer l'écoulement en un écoulement moyen et des fluctuations. On applique alors un opérateur de moyenne sur les équations, suivi de modélisations. Les détails de ces développements se retrouvent dans plusieurs ouvrages, par exemple le livre de Hinze [91]. Ainsi, les équations moyennes de continuité et de mouvement, en

utilisant l'approximation de Boussinesq, sont les suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot [(\mu + \mu_t) (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] + \mathbf{f} \quad (3.2)$$

Ici, les variables de l'écoulement sont des valeurs moyennes dans le temps (et non des valeurs instantanées fluctuantes) et μ_t est la viscosité turbulente qui traduit l'effet des fluctuations sur l'écoulement moyen. Cette étape supplémentaire de modélisation s'accompagne inévitablement d'une certaine perte au niveau de la physique. La viscosité turbulente n'est pas une propriété physique mais dépend plutôt de l'écoulement et doit à son tour être modélisée. Dans notre cas, μ_t est exprimée en fonction de deux variables de turbulence, soit l'énergie cinétique de la turbulence et son taux de dissipation ϵ :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.3)$$

où C_μ est une constante du modèle et par définition :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i''} \quad (3.4)$$

$$\epsilon = \frac{\mu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} \quad (3.5)$$

où la barre supérieure indique une moyenne et le double prime " identifie la composante fluctuante de la vitesse.

Le système est fermé mathématiquement par l'utilisation du modèle de turbulence $k - \epsilon$ standard de Launder et Spalding [92] qui procure des équations pour k et ϵ . Ces équations de transport écrites sous forme bloc triangulaire inférieur [93] sont les

suivantes :

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_t P - \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_t} + q_k \quad (3.6)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + \rho C_1 C_\mu k P - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} + q_\epsilon \quad (3.7)$$

La production de la turbulence P est définie par :

$$P = \nabla \mathbf{u} : \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (3.8)$$

alors que q_k et q_ϵ sont des termes sources artificiels utilisés pour des exercices de vérification. Les constantes C_1 , C_2 , C_μ , σ_k et σ_ϵ du modèle prennent les valeurs recommandées par Launder et Spalding [92] qui sont données dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 Constantes du modèle $k - \epsilon$

C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ϵ
0,09	1,44	1,92	1,0	1,3

3.2 Variables logarithmiques

Les variables de turbulence k , ϵ et μ_t sont positives par définition. Par contre, une résolution numérique des équations (3.6) et (3.7) peut générer localement des valeurs négatives. En plus d'être non physiques, ces valeurs négatives peuvent causer de graves ennuis au résolveur. Par exemple, un ϵ négatif engendre une viscosité turbulente négative. Les coefficients des termes de diffusion peuvent alors devenir nuls ou négatifs, rendant inopérant un résolveur d'équations à caractère elliptique. Pour éviter de tels problèmes, certains résolveurs imposent une borne inférieure à k et ϵ : si la résolution numérique donne une valeur inférieure à la limite imposée, alors

on remonte cette valeur au niveau plancher. Dans la littérature anglaise on parle de *clipping*. Une telle intervention sur la solution est particulièrement nuisible lorsqu'on veut ensuite faire du calcul de sensibilités.

Une approche plus efficace et plus élégante pour assurer la préservation de la positivité des variables de turbulence consiste à résoudre les équations de turbulence en *variables logarithmiques* [93, 94]. Cette approche procède à un changement de variables dépendantes :

$$\mathcal{K} = \ln(k) \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \ln(\epsilon) \quad (3.9)$$

Les équations de transport de k et ϵ sont réécrites en termes des nouvelles variables $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$ et elles sont résolues ainsi. Les variables de calcul deviennent $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$ alors que les variables d'origine k et ϵ sont récupérées par l'évaluation d'exponentielles des variables de calcul, ce qui assure leur positivité en tout temps. Les équations (3.6) et (3.7) réécrites en termes des variables logarithmiques sont :

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} \\ + \mu_t e^{-\mathcal{K}} P - \rho^2 C_\mu \frac{e^{\mathcal{K}}}{\mu_t} + q_{\mathcal{K}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right] + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} \\ + \rho C_1 C_\mu e^{\mathcal{K}-\mathcal{E}} P - C_2 \rho e^{\mathcal{E}-\mathcal{K}} + q_{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

La viscosité turbulente s'évalue alors de la façon suivante :

$$\mu_t = \rho C_\mu e^{2\mathcal{K}-\mathcal{E}} \quad (3.12)$$

Notons que les équations de transport des variables logarithmiques sont tout à fait

équivalentes aux équations originales de k et ϵ . Le modèle de turbulence est inchangé puisque seules les variables de calcul diffèrent.

La formulation en variables logarithmiques présente d'autres avantages que la préservation de la positivité des quantités de turbulence. Tout d'abord, les distributions de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$ sont en général plus lisses que celles de k et ϵ . L'amplitude des pics est diminuée par le logarithme. La capacité d'obtention de solutions numériques précises en est ainsi accrue. Vu autrement, il est possible d'obtenir des solutions convergées de précision raisonnable sur des maillages plus grossiers. La prédiction de la viscosité turbulente devient elle aussi plus précise, d'où un impact direct sur la solution de l'écoulement moyen.

Le prix à payer pour l'utilisation des variables logarithmiques est l'ajout de termes non linéaires dans les équations : des exponentielles et des produits de dérivées premières. Malgré cela, l'expérience a démontré que la formulation en variables logarithmiques se comporte très bien [86, 93, 95]. On a utilisé cette formulation dans toutes les simulations en régime turbulent présentées dans cette thèse.

3.3 Conditions aux frontières

3.3.1 Introduction

La résolution des équations aux dérivées partielles modélisant les écoulements turbulents nécessite l'imposition de conditions aux frontières sur les diverses variables dépendantes, dont les deux nouvelles : k et ϵ . Ces conditions aux frontières peuvent par exemple être de type Dirichlet ou Neumann, comme dans le cas laminaire. C'est ce qu'on utilise en entrée, en sortie ou sur un axe de symétrie.

Sur les parois solides, des conditions aux limites physiquement réalistes seraient $u = v = k = 0$. Malheureusement, le modèle $k - \epsilon$ standard tel que présenté suppose que l'écoulement est pleinement turbulent, ce qui est faux près des parois solides : la turbulence est amortie et la viscosité moléculaire joue un rôle de premier plan. On ne peut donc pas utiliser ce modèle jusqu'à la paroi et y imposer les conditions aux limites d'adhérence. L'alternative consiste à résoudre seulement dans le coeur de l'écoulement, où le modèle $k - \epsilon$ s'applique, et à substituer la fine zone près des parois solides par une condition aux limites réaliste. C'est l'approche des *lois de paroi*.

3.3.2 Loi de paroi

La figure 3.1 illustre un écoulement turbulent typique près d'une paroi solide. La tranche d'épaisseur d au-dessus de la paroi constitue la zone critique à éliminer puisque le modèle de turbulence n'y est pas valide. On utilise donc un domaine de calcul réduit par rapport au domaine physique, sa frontière étant la ligne pointillée située à une distance d de la paroi réelle. Évidemment, les conditions aux limites applicables sur cette frontière de calcul ne peuvent être celles d'origine, soit l'adhérence. Comme les profils de vitesse près des parois sont généralement de type couche limite, on génère une condition aux limites appropriée en utilisant des modèles qui décrivent la distribution de vitesse dans ces couches limites turbulentes.

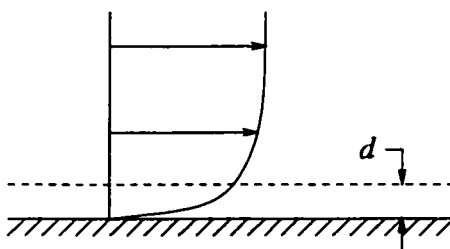


Figure 3.1 Couche limite près d'une paroi solide

La loi de paroi utilisée provient de Launder et Spalding [92] et est décrite suivant une notation plus proche de celle utilisée ici dans [93, 96]. Elle décrit le profil de vitesse universel adimensionnel u^+ tangent à la paroi en fonction de la distance adimensionnelle y^+ normale à la paroi selon les expressions suivantes :

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{pour } y^+ < y_c^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & \text{pour } y^+ \geq y_c^+ \end{cases} \quad (3.13)$$

où κ est la constante de Kármán et E est un paramètre de rugosité. Pour une paroi lisse, on utilise $\kappa = 0,42$ et $E = 9,0$. Ce modèle considère deux zones distinctes, soit la sous-couche laminaire ($y^+ < y_c^+$) et la zone logarithmique ($y^+ \geq y_c^+$). Le point critique y_c^+ séparant les deux zones s'obtient simplement de l'intersection des deux courbes, soit ici $y_c^+ \approx 11$. Par définition, les distance et vitesse adimensionnelles sont données par :

$$y^+ = \frac{\rho y u_k}{\mu} \quad (3.14)$$

$$u^+ = \frac{u_t}{u_{**}} \quad (3.15)$$

où u_t est la vitesse tangentielle et y est la distance normale à la paroi. Deux échelles de vitesse interviennent, soit la vitesse de frottement u_{**} et une échelle de vitesse u_k basée sur l'énergie cinétique de la turbulence k évaluée à la frontière fictive de calcul :

$$u_k = C_\mu^{1/4} k^{1/2} \quad (3.16)$$

Finalement, la condition aux limites résultant de l'utilisation de ce profil de vitesse

universel évalué à $y = d$ est sur le cisaillement τ_w à la frontière du domaine de calcul :

$$\tau_w = \rho u_* u_k \quad (3.17)$$

Il s'agit en fait d'une condition mixte reliant le cisaillement τ_w à la vitesse u_t . On peut obtenir l'expression analytique de cette dépendance $\tau_w = f(u_t)$ en imbriquant les équations (3.13) à (3.17). En pratique, un bon compromis entre la validité du modèle de loi de paroi et du modèle $k - \epsilon$ consiste à positionner la frontière de calcul (choisir d) de façon à obtenir $30 \leq y^+ \leq 300$ [97], la plage inférieure donnant par expérience de meilleurs résultats.

En plus de pallier à l'invalidité du modèle $k - \epsilon$ près de la paroi, l'utilisation d'une loi de paroi évite la résolution numérique d'une zone à forts gradients nécessitant un maillage très raffiné, ce qui permet des gains en termes de ressources informatiques. Par contre, on introduit une autre approximation au niveau de la modélisation. Enfin, l'utilisation de cette loi de paroi requiert la spécification de trois paramètres par paroi, soit κ , E et d .

3.3.3 Condition de tangence

La loi de paroi décrite à la sous-section précédente ne procure qu'une seule condition aux limites pour la résolution des équations de continuité et de mouvement, soit au niveau de la contrainte tangentielle (cisaillement). Pour la résolution d'un problème bidimensionnel, une deuxième condition, associée à la direction normale, est requise. À la paroi réelle, la vitesse normale est nulle (non pénétration). À une distance d (faible) de la paroi, l'écoulement dans la couche limite est à toutes fins pratiques parallèle à la paroi *i.e.* la vitesse normale est très faible. La deuxième condition aux

limites associée à la loi de paroi consiste donc à imposer une vitesse normale nulle :

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.18)$$

Ainsi, il n'y a pas de transfert de masse à travers les frontières associées aux parois.

3.3.4 Conditions aux limites pour k et ϵ

Les variables de turbulence k et ϵ requièrent elles aussi des conditions aux limites. Les frontières correspondant aux parois solides ayant été déplacées, il faut ici aussi ajuster les conditions aux limites qui s'y appliquent. La loi de paroi choisie impose :

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0 \quad (3.19)$$

$$\epsilon = \frac{u_k^3}{\kappa d} \quad (3.20)$$

La forme appropriée de (3.19) pour l'imposition de conditions naturelles en formulation éléments finis est en fait :

$$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.21)$$

Enfin, avec la formulation en variables logarithmiques on utilise plutôt :

$$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.22)$$

$$\mathcal{E} = \ln \left(\frac{u_k^3}{\kappa d} \right) \quad (3.23)$$

Ceci termine la description du modèle de l'écoulement en régime turbulent. Voyons

maintenant la formulation du problème de calcul de sensibilités associée à ce modèle de turbulence.

3.4 Équations des sensibilités pour le modèle $k - \epsilon$

Les équations aux dérivées partielles des sensibilités s'obtiennent, tout comme dans le cas laminaire, par différentiation des équations de l'écoulement par rapport à un paramètre quelconque a . On conserve à nouveau le même degré de généralité dans la formulation, c'est-à-dire qu'on tient compte de toutes les dépendances possibles lors de la différentiation. Ainsi, les équations des sensibilités pour la continuité et le mouvement sont :

$$\nabla \cdot \mathbf{s}_u = 0 \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u = -\nabla s_p \\ & + \nabla \cdot \left[(\mu' + \mu'_t) \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) + (\mu + \mu_t) \left(\nabla \mathbf{s}_u + (\nabla \mathbf{s}_u)^T \right) \right] + \mathbf{f}' \end{aligned} \quad (3.25)$$

La sensibilité de la viscosité turbulente μ'_t s'obtient de la différentiation de (3.3) ou (3.12) :

$$\mu'_t = \mu_t \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + 2 \frac{s_k}{k} - \frac{s_\epsilon}{\epsilon} \right) \quad (3.26)$$

$$= \mu_t \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + 2 s_\kappa - s_\epsilon \right) \quad (3.27)$$

où les sensibilités $s_k = \partial k / \partial a$ et $s_\kappa = \partial \mathcal{K} / \partial a$ sont reliées par la relation suivante :

$$s_\kappa = \frac{s_k}{k} \quad (3.28)$$

et similairement :

$$s_{\mathcal{E}} = \frac{s_{\epsilon}}{\epsilon} \quad (3.29)$$

Finalement, il faut différentier les équations de transport des variables de turbulence.

À titre indicatif, les équations (3.6) et (3.7) deviennent :

$$\begin{aligned} \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla k + \rho s_u \cdot \nabla k + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_k = \nabla \cdot \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla k + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_k \right] \\ + \mu'_t P + \mu_t P' - \rho \epsilon \left(2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + 2 \frac{s_k}{k} - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) + q'_k \end{aligned} \quad (3.30)$$

et

$$\begin{aligned} \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon + \rho s_u \cdot \nabla \epsilon + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_\epsilon = \nabla \cdot \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_\epsilon} - \frac{\mu_t \sigma'_\epsilon}{\sigma_\epsilon^2} \right) \nabla \epsilon + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla s_\epsilon \right] \\ + \rho C_1 C_\mu k P \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_1}{C_1} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + \frac{s_k}{k} + \frac{P'}{P} \right) - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \left(\frac{C'_2}{C_2} + \frac{\rho'}{\rho} + 2 \frac{s_\epsilon}{\epsilon} - \frac{s_k}{k} \right) + q'_\epsilon \end{aligned} \quad (3.31)$$

La formulation en variables logarithmiques utilisée (équations (3.10) et (3.11)) donne plutôt :

$$\begin{aligned} \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho s_u \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}} = \nabla \cdot \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \\ + \left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}} \\ + e^{-\mathcal{K}} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P s_{\mathcal{K}}) - \rho e^{\mathcal{E} - \mathcal{K}} \left(2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + s_{\mathcal{K}} - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) + q'_{\mathcal{K}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

et

$$\begin{aligned}
 \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho s_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}} = & \nabla \cdot \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \\
 & + \left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}} \\
 & + \rho C_1 C_{\mu} e^{\kappa - \mathcal{E}} P \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_1}{C_1} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + s_{\kappa} - s_{\mathcal{E}} + \frac{P'}{P} \right) \\
 & - C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \kappa} \left(\frac{C'_2}{C_2} + \frac{\rho'}{\rho} + s_{\mathcal{E}} - s_{\kappa} \right) + q'_{\mathcal{E}}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

où la sensibilité du terme de production est donnée par :

$$P' = 2 \nabla s_u : \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \tag{3.34}$$

Avec cette formulation générale, il faut donc spécifier les sensibilités des coefficients de fermeture du modèle $k - \epsilon$ (C'_1 , C'_2 , C'_{μ} , σ'_k et σ'_{ϵ}). Pour pouvoir résoudre, il faut aussi spécifier des conditions aux limites. Les conditions classiques de Dirichlet et de Neumann s'obtiennent de la même façon que dans le cas laminaire (section 2.3) alors que les conditions associées aux lois de paroi sont traitées à la section suivante.

3.5 Sensibilités pour les parois solides

Les conditions aux frontières pour les équations des sensibilités s'obtiennent par différentiation des conditions correspondantes de l'écoulement. Pour les parois solides, on différentie donc les lois de paroi par rapport à un paramètre quelconque a . Par contre, on se limite à l'étude de paramètres de valeur étant donné les difficultés numériques associées aux conditions de Neumann pour paramètres de forme (voir le chapitre précédent), et donc à plus forte raison pour une condition mixte comme ici.

La sensibilité du cisaillement à la paroi (équation (3.17)) est donnée par :

$$\tau'_w = \rho' u_k u_{**} + \rho u'_k u_{**} + \rho u_k u'_{**} \quad (3.35)$$

où u'_k et u'_{**} s'obtiennent de la différentiation de (3.16) et (3.15), en variables logarithmiques, soit :

$$u'_k = u_k \left(\frac{1}{4} \frac{C'_\mu}{C_\mu} + \frac{1}{2} s \kappa \right) \quad (3.36)$$

$$u'_{**} = \frac{u'_t}{u^+} - \frac{u_t u^{+'}}{u^{+2}} \quad (3.37)$$

À son tour, $u^{+'}$ provient de (3.13) :

$$u^{+'} = \begin{cases} y^{+'} & \text{pour } y^+ < y_c^+ \\ \frac{1}{\kappa} \left(-u^+ \kappa' + \frac{E'}{E} + \frac{y^{+'}}{y^+} \right) & \text{pour } y^+ \geq y_c^+ \end{cases} \quad (3.38)$$

et par différentiation de (3.14) on obtient :

$$y^{+'} = y^+ \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{d'}{d} + \frac{u'_k}{u_k} - \frac{\mu'}{\mu} \right) \quad (3.39)$$

Finalement, la sensibilité de la vitesse tangentielle

$$u_t = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} = u t_x + v t_y \quad (3.40)$$

est

$$u'_t = \mathbf{s}_u \cdot \hat{\mathbf{t}} = s_u t_x + s_v t_y \quad (3.41)$$

puisque le vecteur unitaire tangent à la frontière $\hat{\mathbf{t}}$ est insensible au paramètre de valeur ($\hat{\mathbf{t}}' = 0$).

Au niveau de la condition de tangence (3.18), on obtient :

$$\mathbf{s}_u \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.42)$$

soit une condition de tangence pour la sensibilité de la vitesse.

Finalement, les conditions aux limites adéquates pour les équations de s_K et $s_\mathcal{E}$ aux parois solides prennent la forme :

$$\left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla K + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_K \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.43)$$

$$s_\mathcal{E} = 3 \frac{u'_k}{u_k} - \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{d'}{d} \quad (3.44)$$

3.6 Détails d'implantation

Pour clore ce chapitre, on donne ici quelques précisions concernant l'implantation du modèle de turbulence présenté et des équations de sensibilités correspondantes.

3.6.1 Algorithme de résolution

La résolution de l'écoulement et des variables de turbulence s'effectue de façon partiellement découplée. Le bloc continuité/mouvement est résolu de façon couplée alors que les équations de K et $\mathcal{E}$ sont découplées. On doit donc itérer entre les systèmes. À partir d'une solution initiale, on procède ainsi :

- 1 Résoudre les équations de mouvement et de continuité (pour un μ_t donné)
- 2 Résoudre les équations de K et $\mathcal{E}$ (pour un μ_t et un $\mathbf{u}$ donnés)

2.1 Résoudre l'équation de K

2.2 Résoudre l'équation de $\mathcal{E}$

2.3 Mettre à jour μ_t

2.4 Selon un critère d'arrêt, poursuivre les sous-itérations (aller à l'étape 2)
ou aller à l'étape 3

3 Retourner à l'étape 1 jusqu'à la satisfaction des critères de convergence globale

Le fait d'ajouter des sous-itérations sur les équations de turbulence accélère la convergence globale. On réduit ainsi le nombre de résolutions des vitesses qui est plus coûteux que la résolution des variables de turbulence. Chaque résolution locale (le bloc continuité/mouvement, l'équation de $\mathcal{K}$ ou l'équation de $\mathcal{E}$) est partiellement convergée. Typiquement, on exige une convergence locale de 10^{-3} ou 10^{-4} alors que le critère de convergence globale est plus serré à 10^{-6} . Ces critères de convergence sont basés sur la correction relative de la solution *i.e.* le ratio de la norme de la correction sur la norme de la solution. L'arrêt de la boucle de sous-itérations en $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$ s'effectue pour sa part lorsqu'on atteint un maximum imposé (typiquement 3 à 5 sous-itérations) ou lorsque les corrections relatives sur les variables de turbulence sont inférieures au tier de celles des vitesses. Il est inutile d'atteindre un niveau de convergence très élevé sur les variables de turbulence, pour des vitesses données, si ces vitesses sont de toute façon mal convergées.

Le calcul des sensibilités suit le même algorithme, mais les critères d'arrêt locaux sont différents. Étant donné la linéarité des équations de sensibilités, on effectue une seule itération par résolution locale (étapes 1, 2.1 et 2.2). Les critères d'arrêt des sous-itérations et de convergence globale sont maintenus.

3.6.2 Solution initiale

La solution initiale utilisée pour la résolution de l'écoulement ou des sensibilités peut provenir d'une résolution antérieure (par exemple, sur le maillage précédent dans un algorithme adaptatif) ou être tout simplement nulle, faute de mieux. Dans le cas d'une condition initiale nulle, l'utilisateur doit cependant spécifier des valeurs initiales non nulles pour k et ϵ . Le champ initial de μ_t est donc non nul, ce qui aide au démarrage des itérations. Toutes les autres variables, y compris les sensibilités, sont initialisées à zéro.

Dans le cas d'une solution initiale interpolée dans une solution précédemment obtenue, toutes les variables de l'écoulement sont interpolées. Par contre, les seules sensibilités interpolées sont celles des variables de turbulence. En effet, étant donné la linéarité des équations, il devient inutile de perdre temps et mémoire pour se bâtir une solution de départ en sensibilité de la vitesse. L'interpolation de s_K et s_ϵ est par contre utile pour se donner un bon estimé initial de μ'_t pour la première itération.

3.6.3 Base d'interpolation pour les variables de turbulence

L'élément fini utilisé dans toutes les simulations en régime turbulent est celui de Crouzeix-Raviart présenté au chapitre précédent. Les fonctions d'interpolation des variables de turbulence $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$ sont quadratiques. La viscosité turbulente ne possède pas sa propre base d'interpolation mais est plutôt évaluée directement à partir de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$. Les sensibilités s_K et s_ϵ utilisent la même interpolation quadratique élémentaire.

3.6.4 Loi de paroi

Le calcul de la contribution d'une loi de paroi au système matriciel élémentaire (formulation éléments finis) se fait par jacobien numérique. Il suffit donc de calculer le résidu, sans isoler explicitement les divers coefficients des variables de calcul. Ainsi, plutôt que d'imbriquer analytiquement les équations de la sous-section 3.3.2, on les évalue simplement dans l'ordre, soit :

1. Évaluer u_k avec (3.16)
2. Évaluer y^+ avec (3.14) où $y = d$
3. Évaluer u^+ avec (3.13)
4. Évaluer u_{**} avec (3.15), soit $u_{**} = u_t/u^+$
5. Évaluer τ_w avec (3.17)

On procède de la même façon pour les sensibilités, avec les équations (3.35) à (3.41).

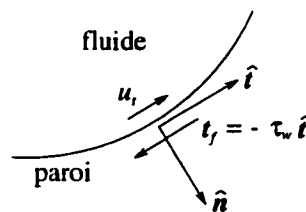


Figure 3.2 Direction d'application du cisaillement

Le cisaillement à la frontière et sa sensibilité sont imposés via les conditions naturelles de la formulation éléments finis. Ces quantités scalaires ont en fait une direction d'application, soit la tangente à la frontière, dans le sens opposé à la vitesse u_t (voir la figure 3.2). Le vecteur de traction imposé comme condition naturelle est alors

$$\mathbf{t}_f = -\tau_w \hat{\mathbf{t}} \quad (3.45)$$

pour l'écoulement et

$$\vec{t}'_f = -\tau'_w \hat{t} \quad (3.46)$$

pour les sensibilités. À cela s'ajoute la condition de tangence.

3.6.5 Condition de tangence

Lorsque la paroi considérée est parfaitement horizontale ou verticale, c'est-à-dire alignée selon l'axe x ou y , on impose la condition de tangence au sens fort, soit $u = 0$ ou $v = 0$. Dans le cas d'une paroi quelconque, on l'impose au sens faible à l'aide de multiplicateurs de Lagrange f . On traite donc cette condition comme une contrainte. En résumé, on ajoute des équations de contraintes :

$$\int_{\Gamma_t} \delta f \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma = 0 \quad (3.47)$$

et une contribution aux conditions naturelles qui s'ajoute à celle de la loi de paroi :

$$\mathbf{t}_f = f \hat{\mathbf{n}} \quad (3.48)$$

La même technique s'applique pour les sensibilités. Le traitement des multiplicateurs se fait comme pour la pression soit par un lagrangien augmenté. Les détails se trouvent dans le mémoire de Turgeon [86].

CHAPITRE 4

ALGORITHME DE REMAILLAGE ADAPTATIF

4.1 Généralités

L'utilisation de méthodes numériques en mécanique des fluides est très répandue. Malheureusement, ces méthodes ne produisent qu'une approximation de la réalité. Les écarts observés entre les prédictions numériques et les observations expérimentales ont deux sources bien distinctes : la modélisation du phénomène physique et la résolution numérique de ce modèle. Roache [1] distingue deux étapes permettant de séparer les deux sources d'erreur : la vérification et la validation. La vérification est associée à la démonstration du bon fonctionnement du code et de la précision numérique des simulations. C'est seulement lorsque cette précision numérique est assurée que l'on peut entreprendre des validations, à savoir la confrontation du modèle avec la physique.

Le contrôle de l'erreur numérique est donc primordial. D'ailleurs, les revues scientifiques exigent de plus en plus la démonstration du niveau de précision des simulations numériques. Les méthodes adaptatives s'avèrent particulièrement efficaces pour accomplir cette tâche. Turgeon et Pelletier [98,99] l'illustrent clairement sur une vaste gamme de problèmes en insistant sur les concepts de vérification et de validation de Roache. La méthodologie employée permet d'effectuer des études systématiques de raffinement de maillage qui produisent des solutions très précises tout en démontrant le niveau de précision obtenu. On obtient en outre des maillages qui sont très bien adaptés à la solution du problème particulier traité.

La figure 4.1 résume l'algorithme adaptatif utilisé dans ce projet. Une boucle d'adaptation comprend les étapes de génération de maillage, de résolution des équations (écoulement et sensibilités) et d'estimation d'erreur menant à de nouvelles caractéristiques du maillage. Cette boucle est répétée jusqu'à la satisfaction d'un critère d'arrêt. Typiquement, on vise une réduction progressive de l'erreur d'un cycle adaptatif à l'autre et ce jusqu'à l'obtention d'une précision désirée ou d'un niveau de raffinement limite.

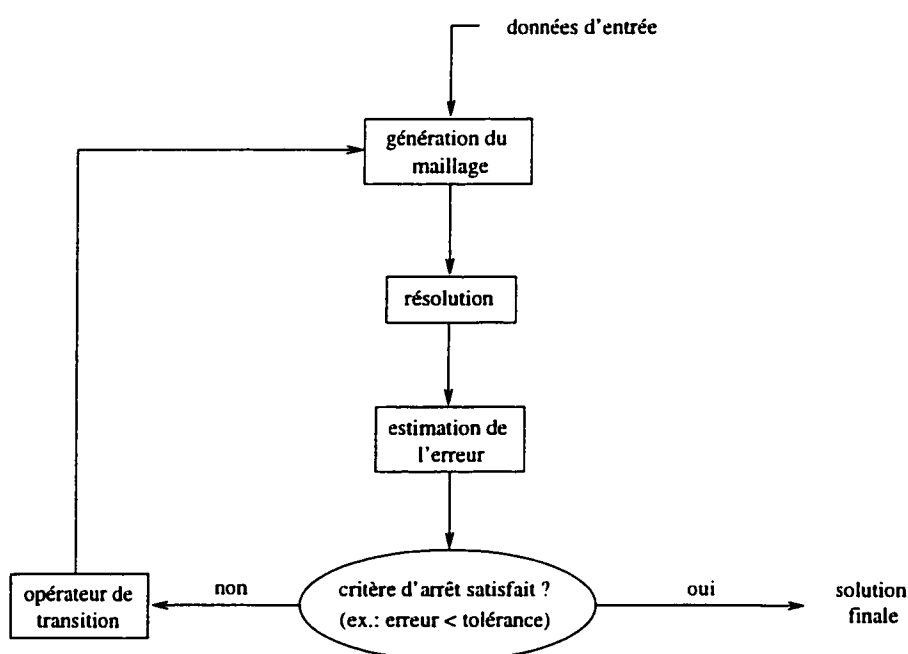


Figure 4.1 Algorithme de la méthode adaptative

Dans les sections suivantes, on examine plus en détails les deux aspects propres à l'adaptation du maillage, soit l'estimation d'erreur et l'opérateur de transition qui génère les caractéristiques du maillage adaptatif suivant. On discute en outre du traitement de problèmes à plusieurs variables, dont les sensibilités, et des diverses normes utilisées. Le tout se termine par un recensement de travaux jumelant méthodes adaptatives et calcul de sensibilités.

4.2 Estimation d'erreur

Considérons une solution numérique quelconque φ_h . L'approximation introduite par la méthode numérique fait en sorte que φ_h est entachée d'une erreur e_{exa}^φ donnée par :

$$e_{exa}^\varphi = \varphi_h - \varphi_{exa} \quad (4.1)$$

où φ_{exa} est la solution exacte de l'équation aux dérivées partielles à résoudre. En pratique, cette vraie erreur est inconnue puisque la solution exacte est elle-même inconnue. Il faut donc tenter de trouver une approximation de l'erreur. Une approche classique consiste à construire une solution $\bar{\varphi}$ qui soit le plus près possible de la solution exacte, de façon à pouvoir estimer l'erreur selon :

$$e_{est}^\varphi = \varphi_h - \bar{\varphi} \quad (4.2)$$

Le niveau de précision de l'estimation d'erreur dépend de la qualité de la méthode utilisée pour générer la solution améliorée $\bar{\varphi}$. La méthode retenue ici est décrite en détails dans la suite de cette section. Mentionnons finalement qu'on définit l'indice d'efficacité Θ comme étant le rapport de l'estimation d'erreur sur l'erreur réelle :

$$\Theta = \frac{\|e_{est}^\varphi\|}{\|e_{exa}^\varphi\|} \quad (4.3)$$

De façon générale, on utilise une norme (identifiée par les doubles barres verticales) plutôt qu'une valeur ponctuelle de l'erreur.

4.2.1 Projection locale

La technique d'estimation d'erreur utilisée dans cette thèse est basée sur la méthode de projection locale par moindres carrés présentée par Zienkiewicz et Zhu [100, 101]. Considérons un champ typique de la solution, soit la température. L'élément fini utilisé est quadratique, de sorte que les dérivées premières de T sont linéaires par morceaux, avec des discontinuités aux interfaces entre les éléments. Or la solution exacte de ∇T est continue (sauf s'il y a une discontinuité dans la conductivité thermique) et plus riche qu'une simple distribution linéaire. L'idée de la projection locale est alors de construire, via une projection par moindres carrés, une distribution plus riche (quadratique) et continue de ∇T en utilisant de l'information locale, soit la solution sur quelques éléments dans un même voisinage. Plus précisément, la projection s'effectue sur un sous-domaine Ω_P composé de l'ensemble des éléments partageant un sommet P du maillage, tel qu'illustré à la figure 4.2. L'utilisation d'une surface de projection plus grande ne serait pas nécessairement avantageuse, comme l'illustre la figure 4.3. Par exemple, remplacer 100 segments linéaires discontinus par une seule courbe de degré deux ne serait vraisemblablement pas plus précis que la solution linéaire par morceaux elle-même. Pour enrichir la solution, il faut projeter de façon plus locale.

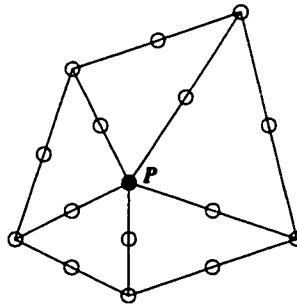


Figure 4.2 Sous-domaine Ω_P utilisé pour les projections locales

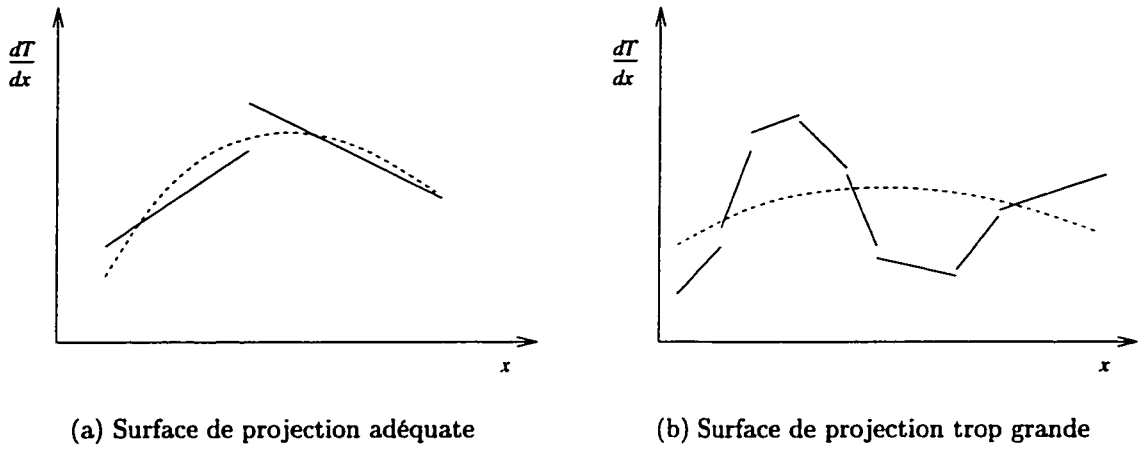


Figure 4.3 Choix du sous-domaine de projection

Voyons comment s'effectue cette projection locale. Soit Q une quantité typique à projeter. Il peut s'agir par exemple de la dérivée de la température $\partial T/\partial x$. On désigne par Q_h la solution numérique (obtenue par éléments finis) et par Q^* la solution enrichie que l'on cherche à déterminer par projection et que l'on représente sous la forme

$$Q^* = P b \quad (4.4)$$

où P est une base polynômiale de degré deux et b contient les coefficients à déterminer :

$$P = [1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2] \quad (4.5)$$

$$b = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6]^T \quad (4.6)$$

On détermine les coefficients b_i par une méthode de moindres carrés sur le

sous-domaine de projection, soit par la minimisation de l'intégrale suivante :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_P} (Q^* - Q_h)^2 d\Omega \quad (4.7)$$

Les dérivées de (4.7) par rapport aux coefficients inconnus doivent s'annuler au minimum, soit :

$$\mathbf{0} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega_P} (\mathbf{P} \mathbf{b} - Q_h)^2 d\Omega \right) \quad (4.8)$$

$$= \int_{\Omega_P} \mathbf{P}^T (\mathbf{P} \mathbf{b} - Q_h) d\Omega \quad (4.9)$$

d'où finalement :

$$\left[\int_{\Omega_P} \mathbf{P}^T \mathbf{P} d\Omega \right] \{\mathbf{b}\} = \left\{ \int_{\Omega_P} \mathbf{P}^T Q_h d\Omega \right\} \quad (4.10)$$

Il s'agit d'un système de 6 équations dont la résolution donne les 6 inconnues b_i et donc le polynôme représentant Q^* sur le sous-domaine. Notons également que si l'on désire projeter plusieurs quantités, par exemple pour estimer l'erreur sur plusieurs variables, la matrice de projection n'a à être construite et décomposée qu'une seule fois pour chaque sous-domaine puisqu'elle est identique pour chaque quantité projetée. Seul le membre de droite varie d'une quantité Q_h à l'autre.

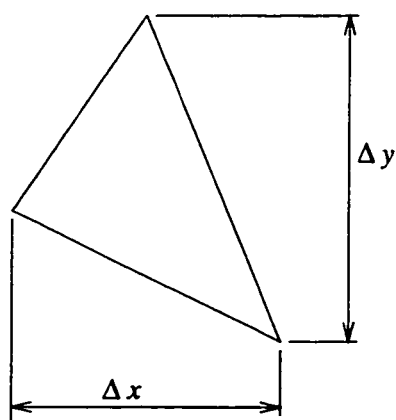
La base polynômiale quadratique $\mathbf{P}$ de Q^* peut être exprimée dans divers repères. Un choix naturel consiste à utiliser directement le système de coordonnées (x, y) de la simulation numérique. Malheureusement, des essais numériques ont révélé une faiblesse de cette approche : dans certaines circonstances, la matrice du système (4.10) est mal conditionnée. Considérons par exemple un sous-domaine de projection centré autour de $(0, 0)$ et ayant une très petite surface. Dans ce cas, les coordonnées (x, y) sont très faibles sur tout le domaine de projection, de sorte que les termes de

$P^T P$ ne sont pas du même ordre de grandeur. À titre d'exemple, on passe de 1 à $x^4 \ll 1$.

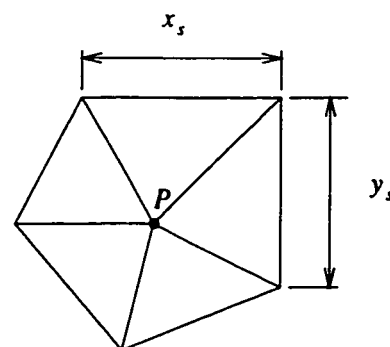
On a donc modifié la base de projection pour améliorer le conditionnement de la matrice de projection. L'idée est de se ramener à un repère local (ξ, η) de telle sorte que ξ et η soient approximativement dans un intervalle $[-1, 1]$ sur le sous-domaine. On utilise ici :

$$\xi = \frac{x - x_P}{x_s} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{y - y_P}{y_s} \quad (4.11)$$

où (x_P, y_P) sont les coordonnées du noeud P autour duquel est construit le sous-domaine. Ce point est donc l'origine du repère (ξ, η) . Les échelles x_s et y_s sont pour leur part déterminées de la façon suivante : on calcule les tailles Δx et Δy de chacun des éléments du sous-domaine (figure 4.4(a)) et on attribue à x_s et y_s les valeurs maximales de ces tailles sur Ω_P (figure 4.4(b)). Les paramètres x_P , y_P , x_s et y_s diffèrent donc d'un sous-domaine à l'autre.



(a) Calcul des tailles d'un élément



(b) Choix des échelles

Figure 4.4 Mise à l'échelle des bases de projection

4.2.2 Récupération d'un champ global unique

La projection locale donne une distribution Q^* définie sur un sous-domaine contenant quelques éléments. On effectue autant de projections qu'il y a de sommets dans le maillage, de sorte qu'on accumule plusieurs distributions quadratiques locales Q^* . Or ces diverses projections se chevauchent. Pour pouvoir estimer l'erreur ponctuelle, une norme d'erreur élémentaire ou encore une norme d'erreur globale, il faut appliquer une méthode systématique pour choisir parmi ces dédoublements. En fait, il s'agit de construire un champ global $\tilde{Q}$ défini sur tout le domaine et de façon unique, en utilisant l'information générée par les projections locales. Une approche simple consiste à définir ce champ $\tilde{Q}$ sur la base d'interpolation du maillage d'éléments finis :

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^n N_i \tilde{Q}_i \quad (4.12)$$

où N_i sont les n fonctions d'interpolation de la discrétisation éléments finis et $\tilde{Q}_i$ sont des valeurs nodales. Dans notre cas, cette base est quadratique par morceaux (par élément), ce qui est compatible avec les projections locales. Cette base donne aussi une distribution unique et continue.

La construction du champ $\tilde{Q}$ se ramène donc à la détermination de valeurs nodales. Aux sommets des triangles, ces valeurs nodales s'obtiennent en évaluant Q^* au noeud P auquel la projection est associée (voir la figure 4.2). Pour les noeuds situés au milieu des arêtes, on prend la moyenne des projections associées aux deux extrémités de l'arête, évaluées au milieu de l'arête.

La figure 4.5 résume les opérations de projection et de récupération d'un champ global sur un problème unidimensionnel. La technique est la même pour un domaine bidimensionnel. Ici on représente trois éléments quadratiques qui ont donc des

dérivées Q_h linéaires et discontinues. On cherche à déterminer les valeurs nodales $\tilde{Q}_i$ sur l'élément du centre. En (a), on illustre la projection locale associée au noeud #1 qui s'effectue sur le sous-domaine couvrant les éléments #1 et #2. De même, la projection sur les éléments #2 et #3 est donnée en (b). Ces projections se chevauchent. En (c), les valeurs nodales pour les noeuds sommets (#1 et #3) s'obtiennent de la projection respective, alors que la valeur du noeud milieu (#2) prend la moyenne des deux projections évaluées à cet endroit. Finalement, on utilise la base d'interpolation quadratique du maillage pour interpoler la dérivée reconstruite $\tilde{Q}$, tel qu'illustré en (d).

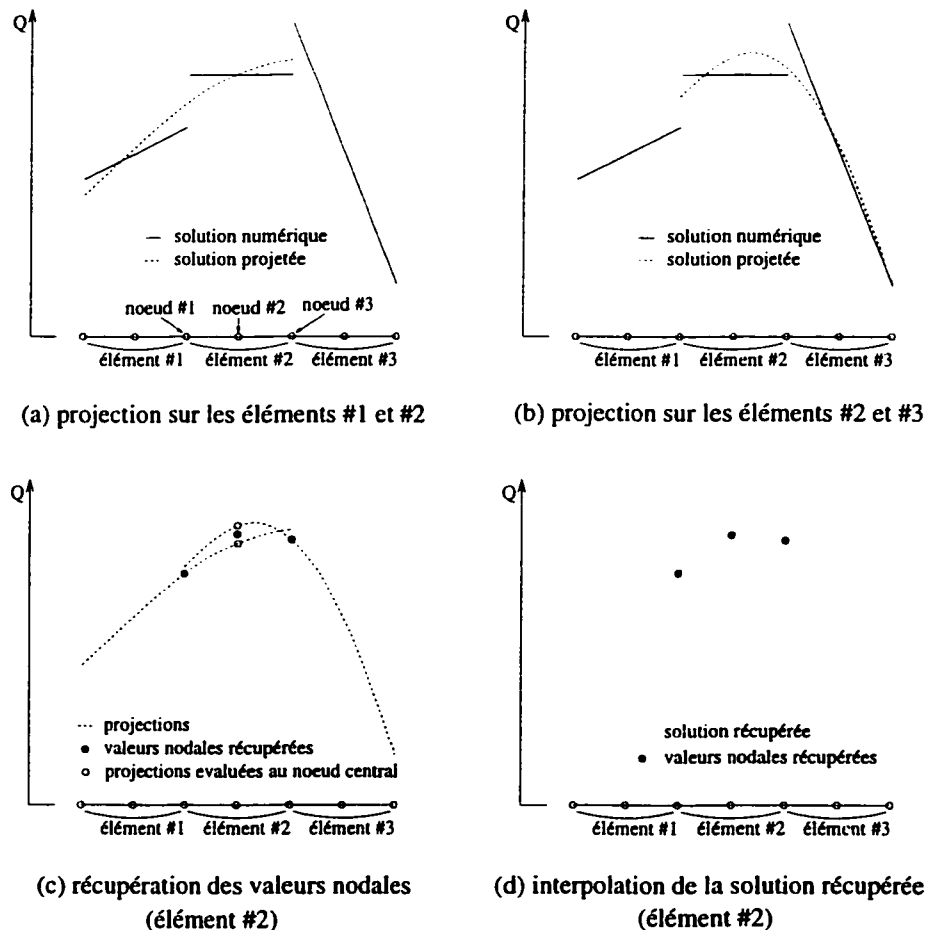


Figure 4.5 Récupération d'un champ global à partir des projections locales

4.2.3 Normes de l'erreur

La reconstruction d'un champ global enrichi $\tilde{Q}$ avait un but bien précis : estimer l'erreur de la solution numérique. On peut faire de l'estimation ponctuelle, mais dans le contexte de remaillage adaptatif on recherche plutôt une mesure élémentaire ou même globale, d'où la nécessité de se définir des normes. Considérons par exemple le vecteur vitesse $\mathbf{u}$ discrétisé par un élément quadratique. L'estimation d'erreur se fait au niveau de ses dérivées qui sont linéaires et discontinues. La norme de la solution en vitesse est définie par :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) d\Omega} \quad (4.13)$$

ou pour alléger l'écriture :

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) d\Omega \quad (4.14)$$

alors que pour la norme de l'erreur estimée on remplace $\nabla \mathbf{u}$ par l'erreur $\nabla \mathbf{u}_h - \widetilde{\nabla \mathbf{u}}$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}^u\|^2 = \int_{\Omega} & \left((\nabla \mathbf{u}_h - \widetilde{\nabla \mathbf{u}}) + (\nabla \mathbf{u}_h - \widetilde{\nabla \mathbf{u}})^T \right) \\ & : \left((\nabla \mathbf{u}_h - \widetilde{\nabla \mathbf{u}}) + (\nabla \mathbf{u}_h - \widetilde{\nabla \mathbf{u}})^T \right) d\Omega \end{aligned} \quad (4.15)$$

De même, on obtient les normes de la solution et de l'erreur pour la sensibilité de la vitesse en remplaçant $\mathbf{u}$ par $\mathbf{s}_u$:

$$\|\mathbf{s}_u\|^2 = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{s}_u + (\nabla \mathbf{s}_u)^T) : (\nabla \mathbf{s}_u + (\nabla \mathbf{s}_u)^T) d\Omega \quad (4.16)$$

et $\nabla \mathbf{u}_h - \widetilde{\nabla \mathbf{u}}$ par $\nabla \mathbf{s}_{u_h} - \widetilde{\nabla \mathbf{s}_u}$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}^{s_u}\|^2 = \int_{\Omega} & \left(\left(\nabla \mathbf{s}_{u_h} - \widetilde{\nabla \mathbf{s}_u} \right) + \left(\nabla \mathbf{s}_{u_h} - \widetilde{\nabla \mathbf{s}_u} \right)^T \right) \\ & : \left(\left(\nabla \mathbf{s}_{u_h} - \widetilde{\nabla \mathbf{s}_u} \right) + \left(\nabla \mathbf{s}_{u_h} - \widetilde{\nabla \mathbf{s}_u} \right)^T \right) d\Omega \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pour ce qui est de la température et des variables logarithmiques de turbulence, qui sont toutes quadratiques par élément, on utilise les normes suivantes qui font intervenir les dérivées premières :

$$\|T\|^2 = \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla T \, d\Omega \quad (4.18)$$

$$\|\mathcal{K}\|^2 = \int_{\Omega} \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} \, d\Omega \quad (4.19)$$

$$\|\mathcal{E}\|^2 = \int_{\Omega} \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} \, d\Omega \quad (4.20)$$

Évidemment, les normes pour l'erreur et les sensibilités s'obtiennent en remplaçant les gradients de la solution par les erreurs et sensibilités correspondantes.

La pression est traitée différemment. Comme son interpolation est linéaire et discontinue entre les éléments, on la projette directement au lieu de son gradient. La norme utilisée est alors la norme usuelle $L^2(\Omega)$:

$$\|p\|^2 = \int_{\Omega} p^2 \, d\Omega \quad (4.21)$$

Finalement, la viscosité turbulente dépend directement de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$ sans avoir sa propre base d'interpolation. Dans ce cas on utilise tout de même la norme suivante :

$$\|\mu_t\|^2 = \int_{\Omega} \nabla \mu_t \cdot \nabla \mu_t \, d\Omega \quad (4.22)$$

Pour la construction de $\widetilde{\nabla\mu_t}$ on utilise les gradients reconstruits $\widetilde{\nabla\mathcal{K}}$ et $\widetilde{\nabla\mathcal{E}}$ sans projeter $\nabla\mu_t$ directement.

4.3 Opérateur de transition

La dernière étape dans la boucle de remaillage adaptatif (figure 4.1) consiste à déterminer les caractéristiques (tailles élémentaires) que devra avoir le maillage suivant. L'opérateur de transition effectue cette tâche en utilisant les caractéristiques du maillage courant, les estimations d'erreur et les spécifications de l'utilisateur concernant l'erreur cible.

De façon générale, considérons une norme d'erreur globale typique $\|e\|_\Omega$ dont la valeur provient des contributions élémentaires $\|e\|_K$, plus précisément :

$$\|e\|_\Omega^2 = \sum_{K=1}^{n_{elem}} \|e\|_K^2 \quad (4.23)$$

où n_{elem} est le nombre d'éléments du maillage courant. On désire réduire progressivement cette erreur d'un cycle adaptatif à l'autre. L'erreur cible sur le maillage suivant est donc une fraction ζ (imposée par l'utilisateur) de l'erreur sur le maillage courant :

$$\|e_{cible}\|_\Omega = \zeta \|e\|_\Omega \quad (4.24)$$

À cela s'ajoute un critère d'optimalité : répartir l'erreur également entre les éléments. L'erreur élémentaire cible est alors :

$$\|e_{cible}\|_K = cte = \frac{\|e_{cible}\|_\Omega}{\sqrt{n_{elem}}} \quad (4.25)$$

L'erreur élémentaire doit maintenant être reliée à la taille de cet élément. L'estimation *a priori* de l'erreur et le taux de convergence asymptotique de l'élément fini stipulent que

$$\|e\| = ch^\alpha \quad (4.26)$$

où c est une constante, h est la taille des éléments et α est le taux de convergence qui dépend de l'élément fini utilisé et de la norme considérée. L'erreur est donc proportionnelle à une puissance de la taille. Dans notre cas, l'élément de Crouzeix-Raviart conduit à $\alpha = 2$ pour toutes les normes présentées. On utilise également cette valeur pour la norme en μ_t même si on ne connaît pas formellement l'ordre de convergence de cette norme. Ainsi, sur le maillage courant on a :

$$\|e\|_K = ch_K^\alpha \quad (4.27)$$

alors que sur le maillage cible on veut :

$$\|e_{cible}\|_K = c\delta_K^\alpha \quad (4.28)$$

La taille δ_K que devront avoir les éléments situés dans la zone de l'élément courant K s'obtient en combinant les équations (4.24) à (4.28), ce qui donne :

$$\delta_K = \left(\frac{\zeta \|e\|_\Omega}{\|e\|_K \sqrt{n_{elem}}} \right)^{1/\alpha} h_K \quad (4.29)$$

L'application de cet opérateur de transition sur tous les éléments du maillage génère une distribution spatiale de la taille élémentaire cible définie sur le domaine entier. En pratique, cette fonction constante par morceaux est lissée pour obtenir une distribution continue à fournir au mailleur. Le lissage se fait par le calcul de valeurs

nodales via de simples moyennes des valeurs des éléments voisins. Le mailleur peut ensuite interpoler dans ce champ de taille.

L'opérateur de transition présenté ne considérait qu'une seule norme de l'erreur. Or la résolution d'un écoulement turbulent et/ou de sa sensibilité fait intervenir plusieurs variables. Adapter le maillage en utilisant une seule norme, et donc une seule variable, n'est pas souhaitable dans ce contexte. En effet, un maillage bien adapté au champ de vitesse (par exemple) n'est pas nécessairement bien adapté pour s_K . Idéalement, on désire contrôler simultanément la précision numérique de plusieurs variables. La stratégie adoptée ici consiste à calculer séparément les tailles élémentaires prédites pour chacune des normes impliquées. Par exemple, sur l'élément K , l'erreur en pression commande δ_K^p alors que pour $\mathcal{K}$ on obtient plutôt $\delta_K^\mathcal{K}$. Parmi l'ensemble des tailles prédites sur un élément donné, on sélectionne la plus restrictive, soit la plus petite :

$$\delta_K = \min\{\delta_K^p, \delta_K^u, \delta_K^\mathcal{K}, \delta_K^{s_u}, \dots\} \quad (4.30)$$

La distribution de taille finale (un champ unique) est donc une combinaison des exigences des différentes variables. Rappelons qu'on utilise le même maillage pour l'écoulement et pour les sensibilités.

Typiquement, l'adaptation du maillage considère toutes les normes qui font intervenir les variables impliquées. Par exemple, en régime turbulent, on adapte le maillage pour u , p , $\mathcal{K}$, $\mathcal{E}$ et μ_t . Bien que μ_t soit une fonction directe de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$, on utilise son estimation d'erreur pour la prédiction de tailles puisque sa distribution peut être fort différente de celles de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$. Étant donné que μ_t intervient directement dans l'équation de mouvement, il devient important de contrôler son erreur pour améliorer la qualité de la solution en vitesse. De même, les sensibilités des variables de l'écoulement sont aussi prises en compte dans la prédiction de taille pour un

problème de calcul de sensibilités. Encore une fois, un maillage bien adapté pour la solution n'est pas nécessairement bien adapté pour les sensibilités. Par souci de contrôle, l'implantation du module d'adaptation est telle que l'utilisateur doit spécifier les normes qu'il désire faire intervenir.

Notons enfin qu'en appliquant un opérateur de minimum sur diverses distributions de taille pour générer une distribution unique, on s'éloigne quelque peu du principe d'équirépartition de l'erreur. En fait, il est impossible d'équirépartir simultanément l'erreur sur plusieurs normes. Mais le plus important est qu'on arrive à contrôler la qualité de la solution pour toutes les variables.

4.4 Précédents

Bien que les études de sensibilités soient déjà relativement répandues, peu d'auteurs ont employé des stratégies adaptatives. En structures, on note par exemple les travaux de Bugada et Oliver [60], Dutta et Ramakrishnan [61] et Sienz et Hinton [62]. Du côté de la mécanique des fluides, Bugada et Oñate [63,64] de même que Borggaard et Pelletier [66] ont apporté leur contribution. Dans tous les cas, l'adaptation se faisait au niveau de la solution seulement. Des études récentes considérant en plus les sensibilités pour l'adaptation sont fournies par Borggaard *et al.* [67,68] et par Stanley [69], mais leurs études se limitent à des écoulements bidimensionnels cartésiens laminaires et incompressibles.

En optimisation, les sensibilités sont utilisées pour déterminer le gradient d'une fonctionnelle objectif. Par conséquent, ce gradient est entaché d'erreurs numériques, tout comme la fonctionnelle elle-même. Une estimation d'erreur sur cette fonctionnelle et son gradient fournirait des renseignements fort utiles. Buscaglia *et al.* [70] présentent

une rare investigation sur cet aspect. Leur étude ne porte cependant que sur des problèmes linéaires (équation de Poisson en élasticité linéaire).

La méthodologie adaptative présentée a déjà été utilisée avec succès pour la simulation d'écoulements en régime laminaire [102, 103], en régime turbulent [94, 104–108], avec transfert de chaleur [109–113] et compressibles [114, 115]. Il s'agissait donc ici de modifier un outil d'estimation d'erreur et d'adaptation existant et non d'en créer un de toutes pièces. Plus spécifiquement, les contributions du présent projet sont au niveau de l'ajout de la mise à l'échelle pour les projections locales et de l'ajout du calcul d'erreur sur les variables de sensibilités, avec le changement correspondant sur la structure de données.

CHAPITRE 5

APPLICATIONS EN RÉGIME LAMINAIRE

Les chapitres précédents ont abordé les aspects théoriques et d'implantation de la méthode de l'équation des sensibilités. On passe maintenant à des applications numériques de la méthodologie en régime laminaire. Premièrement, on considère un problème possédant une solution analytique fabriquée de toutes pièces. L'écoulement considéré s'apparente à une couche limite sur une plaque plane. Ici, on adopte la stratégie de Roache [1] qui consiste à vérifier le code avant de passer à des applications ou validations. Le deuxième cas étudié est un problème de convection naturelle de sirop de maïs dans une enceinte fermée. Les propriétés de ce fluide varient fortement avec la température. La troisième application est un problème d'optimisation : on désire maximiser l'extraction de chaleur d'un bloc chaud dans une canalisation. Finalement, on calcule la sensibilité d'un écoulement autour d'un profil NACA 0012 par rapport à l'angle d'attaque pour extrapoler la solution à des angles voisins. On couvre donc une vaste gamme de problèmes tout en illustrant diverses utilisations possibles des sensibilités telles que le calcul de solutions voisines, l'analyse de sensibilité, l'analyse d'incertitude et l'optimisation. Des applications en régime turbulent seront présentées au chapitre suivant.

5.1 Vérification : couche limite analytique

5.1.1 Description du problème

Ce premier exemple est consacré à la vérification du code en régime laminaire avec transfert de chaleur en convection mixte, selon la méthode des solutions manufacturées [1]. On construit la solution analytique artificielle suivante :

$$u = U_0 (1 - e^{-\eta}) \quad (5.1)$$

$$v = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_0 x}} [1 - (1 + \eta) e^{-\eta}] \quad (5.2)$$

$$p = x - 0,1 \quad (5.3)$$

$$T = \Delta T e^{-\gamma} + T_0 \quad (5.4)$$

où :

$$\eta = (y - y_0) \sqrt{\frac{\rho U_0}{\mu x}} \quad (5.5)$$

$$\gamma = \text{Pr}^n \eta = \left(\frac{\mu c_p}{\lambda} \right)^n (y - y_0) \sqrt{\frac{\rho U_0}{\mu x}} \quad (5.6)$$

Cette solution reproduit les caractéristiques d'une couche limite sur une plaque plane.

La forme adimensionnelle suivante des équations aux dérivées partielles est adéquate

pour ce régime :

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.7)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^T \right) \right] - \text{Ri} \tilde{T} \hat{\mathbf{g}} \quad (5.8)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{T} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla \tilde{T} \right) \quad (5.9)$$

Ici, le tilde identifie les variables adimensionnelles et les nombres de Reynolds, Prandtl et Richardson sont définis par :

$$\text{Re} = \frac{\rho U_0 L}{\mu} \quad (5.10)$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (5.11)$$

$$\text{Ri} = \frac{g \beta \Delta T L}{U_0^2} \quad (5.12)$$

Pour se ramener à une solution adimensionnelle, on choisit donc les valeurs suivantes pour les divers paramètres de la solution analytique et des équations aux dérivées partielles :

$$\begin{array}{lll} U_0 = 1 & \rho = 1 & T_0 = 0 \\ \Delta T = 1 & c_p = 1 & \mathbf{g} = -\hat{\mathbf{j}} \\ \mu = \frac{1}{\text{Re}} & \lambda = \frac{1}{\text{Re Pr}} & \beta = \text{Ri} \\ n = 1/3 & y_0 = 0 & \end{array} \quad (5.13)$$

avec les nombres de Reynolds, Prandtl et Richardson suivants :

$$\text{Re} = 100 \quad \text{Pr} = 0,7 \quad \text{Ri} = 0,5 \quad (5.14)$$

La géométrie est pour sa part adimensionnalisée sur la longueur caractéristique L et

ses dimensions sont donc de l'ordre de l'unité.

Ces expressions analytiques satisfont l'équation de continuité (2.1). Par contre, pour qu'elles satisfassent les équations de mouvement (2.2) et d'énergie (2.3), il faut ajouter des termes sources artificiels appropriés f et q_s . On détermine ces derniers en injectant la solution construite dans les équations et en annulant le résidu.

La figure 5.1 illustre la géométrie et les conditions aux limites pour ce cas test. Notons que pour cette configuration nominale, $y_0 = 0$. Sur la paroi (en bas) la vitesse est nulle et la température unitaire, alors qu'à l'infini T tend vers 0 et u vers 1. Des conditions de Dirichlet sont imposées partout sauf sur une petite portion de la frontière de gauche, vers le haut, où l'on impose une contrainte normale nulle (ce qui n'est pas exact mais suffisamment vrai pour nos besoins). Ceci est nécessaire pour permettre la conservation de la masse et fixer un niveau de pression.

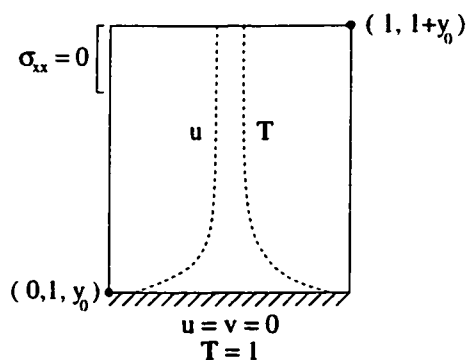


Figure 5.1 Description du problème analytique de vérification en régime laminaire

Au calcul d'écoulement s'ajoute, évidemment, un calcul de sensibilité. Ici, le paramètre considéré est la position de la paroi solide, y_0 . La solution exacte des sensibilités s'obtient en différentiant la solution exacte de l'écoulement par rapport au paramètre

y_0 , ce qui donne :

$$s_u = U_0 e^{-\eta \eta'} \quad (5.15)$$

$$s_v = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_0 x}} \eta e^{-\eta \eta'} \quad (5.16)$$

$$s_p = 0 \quad (5.17)$$

$$s_T = -\Delta T e^{-\gamma \gamma'} \quad (5.18)$$

où :

$$\eta' = -\sqrt{\frac{\rho U_0}{\mu x}} \quad (5.19)$$

$$\gamma' = -\left(\frac{\mu c_p}{\lambda}\right)^n \sqrt{\frac{\rho U_0}{\mu x}} \quad (5.20)$$

À nouveau, ces expressions satisfont les équations aux dérivées partielles des sensibilités (2.12)–(2.14) si on ajoute des termes sources appropriés f' et q'_s . Comme il s'agit d'un paramètre de forme et qu'en plus on connaît la solution exacte, on peut faire les simulations soit comme un paramètre de forme, soit comme un paramètre de valeur (en imposant les conditions aux limites exactes plutôt qu'en utilisant les dérivées de la solution de l'écoulement). On va ainsi vérifier successivement l'implantation des paramètres de valeur et de forme et comparer leur performance.

5.1.2 Paramètre de valeur

Dans un premier temps, on résout ce problème en considérant que le paramètre est de type valeur en imposant les conditions de Dirichlet exactes suivantes :

$$s_u = U_0 e^{-\eta \eta'} \quad (5.21)$$

$$s_v = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_0 x}} \eta e^{-\eta \eta'} \quad (5.22)$$

$$s_T = -\Delta T e^{-\gamma \gamma'} \quad (5.23)$$

Pour ce faire, on spécifie les valeurs suivantes des coefficients de la forme générale des conditions aux limites (équation (2.28)), avec $a = y_0$:

$$\frac{D\hat{u}}{Dy_0} = U_0 e^{-\eta \eta'} \quad (5.24)$$

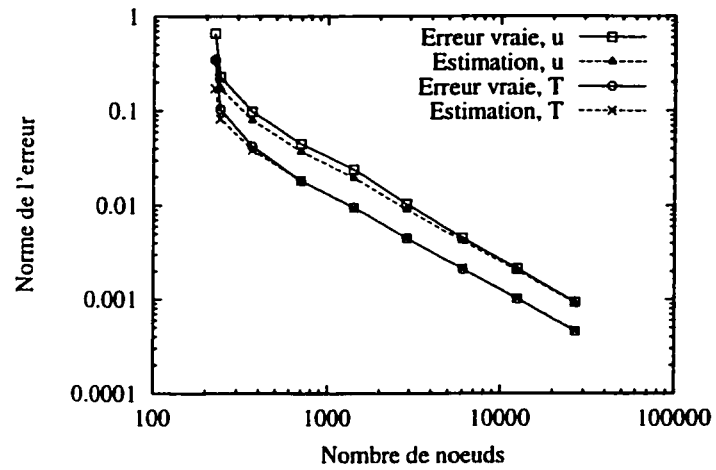
$$\frac{D\hat{v}}{Dy_0} = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_0 x}} \eta e^{-\eta \eta'} \quad (5.25)$$

$$\frac{D\hat{T}}{Dy_0} = -\Delta T e^{-\gamma \gamma'} \quad (5.26)$$

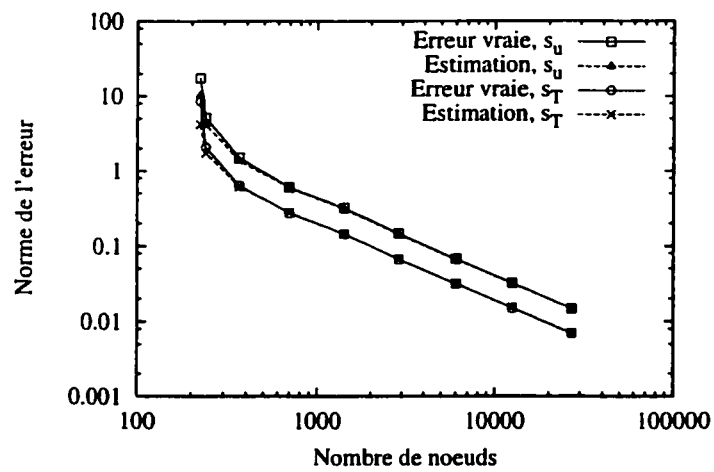
$$\frac{\partial x_f}{\partial y_0} = \frac{\partial y_f}{\partial y_0} = 0 \quad (5.27)$$

Enfin, la condition de Neumann ($\sigma_{xx} = 0$) de l'écoulement devient, pour les sensibilités, une condition de Neumann nulle : $\sigma'_{xx} = 0$.

La figure 5.2 présente l'évolution des normes de l'erreur avec le raffinement adaptatif du maillage. Les erreurs vraies sont comparées aux estimations obtenues par la technique de projection locale, et ce pour les variables u , T , s_u et s_T . Comme on peut le constater, toutes les erreurs décroissent de façon régulière pour atteindre de très faibles niveaux. La solution numérique converge donc vers la solution exacte des équations aux dérivées partielles, tant pour l'écoulement que pour les sensibilités.



(a) Écoulement



(b) Sensibilités

Figure 5.2 Couche limite analytique : trajectoires des erreurs pour un paramètre de valeur

Pour donner une meilleure idée du niveau de précision, mentionnons que l'erreur relative (ratio de la norme de l'erreur sur la norme de la solution) est d'environ 0,02% sur toutes les variables. Les sensibilités sont donc aussi précises que l'écoulement, contrairement à ce que peut laisser croire le niveau d'erreur absolu plus élevé. En conclusion, on peut affirmer que l'implantation est *vérifiée* en ce sens que le code résout correctement les équations qu'il est sensé résoudre.

Le taux de décroissance des erreurs à la figure 5.2 est en accord avec le taux de convergence théorique pour l'élément quadratique utilisé. En effet, on s'attendait à observer une erreur proportionnelle au carré de la taille ($\alpha = 2$ à la section 4.3). Or comme le nombre de noeuds est approximativement proportionnel à l'inverse du carré de la taille, on prévoit donc une erreur inversement proportionnelle au nombre de noeuds, tel qu'observé. Ceci n'est qu'approximatif puisque le raffinement du maillage n'évolue pas de la même façon partout dans le domaine.

Finalement, ce problème avec solution analytique permet d'examiner la performance de l'estimateur d'erreur par projection locale. Comme on peut le constater à la figure 5.2, les estimations d'erreur sont très près des erreurs vraies. Mieux encore, elles s'améliorent avec le raffinement du maillage. Les indices d'efficacité sur le maillage final sont supérieurs à 95%. Ainsi, l'estimateur d'erreur et son implantation sont eux aussi vérifiés par ce cas test.

5.1.3 Paramètre de forme

Reprenons le même problème en considérant cette fois-ci que y_0 est un paramètre de forme. On utilise donc dans l'expression générale des conditions aux limites de

Dirichlet (2.28) les valeurs suivantes :

$$\frac{D\hat{u}}{Dy_0} = \frac{D\hat{v}}{Dy_0} = \frac{D\hat{T}}{Dy_0} = 0 \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial x_f}{\partial y_0} = 0 \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial y_f}{\partial y_0} = 1 \quad (5.30)$$

Les conditions aux limites résultantes sont :

$$s_u = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.31)$$

$$s_v = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.32)$$

$$s_T = -\frac{\partial T}{\partial y} \quad (5.33)$$

Elles dépendent donc des dérivées premières de la solution de l'écoulement, contrairement au cas précédent, et seront forcément moins précises. Pour le reste, la solution exacte demeure la même.

Les résultats obtenus pour l'écoulement sont à peu près les mêmes que dans le cas précédent, ce qui était prévisible puisque la définition du problème demeure inchangée. Seule la séquence de maillage diffère. Par contre, pour les sensibilités, les erreurs vraies ont augmenté et les indices d'efficacité de l'estimateur se sont détériorés, tel qu'illustré à la figure 5.3. Malgré tout, les niveaux d'erreur sont bas et l'erreur décroît à un bon rythme. La solution converge encore une fois vers la solution exacte. En ce sens, la méthodologie est vérifiée. On tentera d'expliquer plus loin la baisse des indices d'efficacité.

L'obtention de résultats numériques moins précis était prévisible à cause de la présence de conditions aux limites moins précises. En fait, on aurait même pu s'attendre

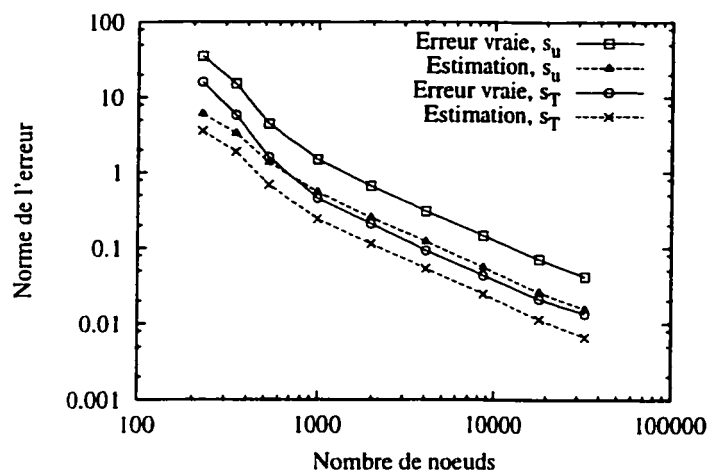
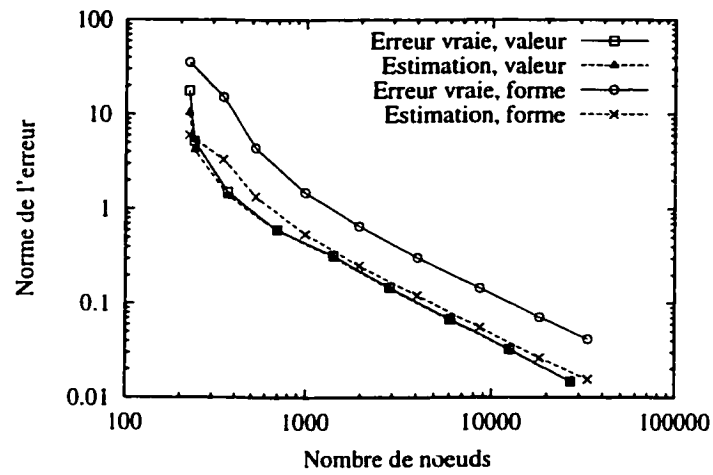
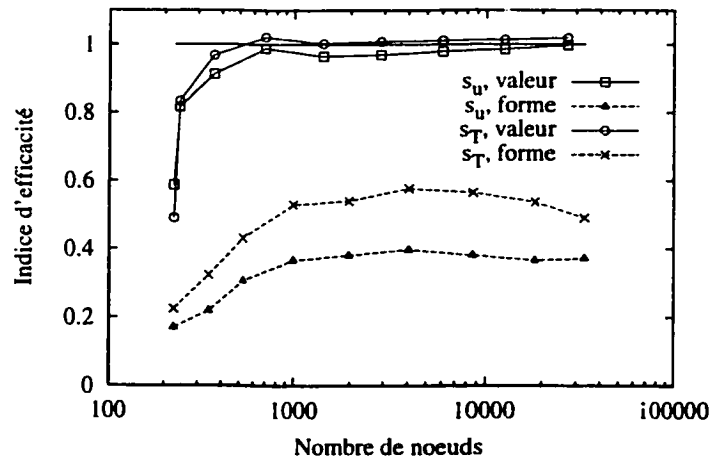


Figure 5.3 Couche limite analytique : trajectoires des erreurs pour un paramètre de forme

à une perte au niveau de l'ordre de convergence, soit une décroissance plus lente de l'erreur. En effet, la variable s_u (par exemple) dépend directement de $\partial u / \partial y$ par le biais de la condition aux limites, de sorte que $\partial s_u / \partial y$ aurait pu être d'un ordre moins précis que $\partial u / \partial y$. Cela ne semble pas être clairement le cas.

La figure 5.4 permet une meilleure comparaison entre les résultats avec paramètres de forme et de valeur. Les erreurs pour la variable s_u et les indices d'efficacité y sont confrontés. Dans un premier temps, on observe que les erreurs vraies sont nettement plus élevées dans le cas d'un paramètre de forme, soit par un facteur d'environ 3 ou 3,5. La condition aux limites inexacte contribue donc à une bonne proportion de l'erreur totale. Par contre, les estimations d'erreur dans les deux cas sont très proches l'une de l'autre. L'estimateur détecte en fait les erreurs de type interpolation et non les erreurs transportées. Ces erreurs d'interpolation sont donc à peu près inchangées. Par contre, les erreurs dues à la condition aux limites et qui se répercutent sur tout le domaine ne sont pas détectées par l'estimateur d'erreur. Il en résulte dans ce cas-ci des indices d'efficacité avoisinant les 40% et qui ne semblent pas vouloir s'améliorer

(a) Erreurs en s_u 

(b) Indices d'efficacité

Figure 5.4 Couche limite analytique : comparaison des erreurs et des indices d'efficacité (paramètres de valeur vs de forme)

avec le raffinement du maillage. Un autre cas test de calcul de sensibilité de forme possédant une solution analytique a donné des résultats similaires [116] : de faibles indices d'efficacité et des erreurs plus élevées que pour un paramètre de valeur. De plus, dans ce dernier cas, les indices d'efficacité et le taux de décroissance des erreurs semblaient se détériorer avec le raffinement du maillage.

Une autre façon d'analyser l'effet de l'inexactitude de la condition aux limites consiste à regarder l'erreur locale qui en résulte. La figure 5.5 présente une coupe de l'erreur locale $e^{s_u} = s_{u_h} - s_{u_{\text{exact}}}$ sur la sensibilité s_u . Ces données ont été extraites sur les sixièmes maillages adaptatifs des cas avec paramètre de valeur (6034 noeuds) et paramètre de forme (8581 noeuds) respectivement. Globalement, on constate que l'erreur dans le cas d'un paramètre de forme est nettement plus élevée que dans le cas d'un paramètre de valeur avec condition aux limites exacte et ce même avec un plus grand nombre de noeuds. De plus, l'erreur est maximale à la paroi. Malgré tout, cette solution est très précise : s_u exact vaut -14,14 à cet endroit, donc l'erreur absolue d'environ 0,01 correspond à une erreur relative inférieure à 0,1%.

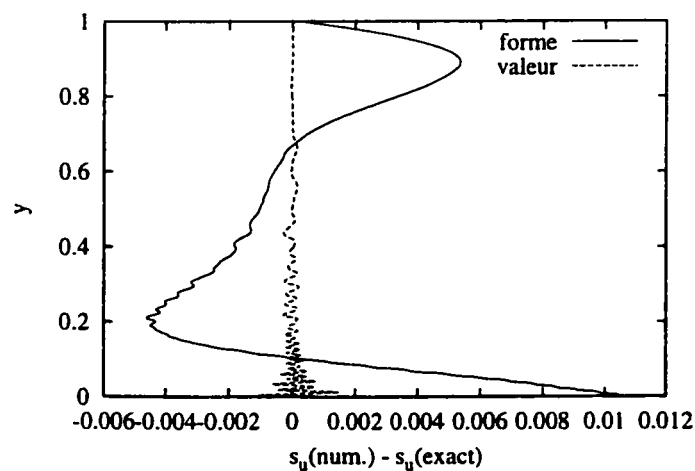
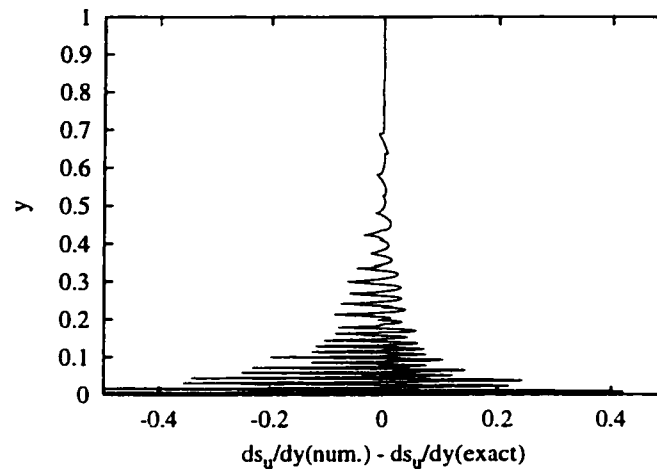


Figure 5.5 Couche limite analytique : coupe de l'erreur sur s_u à $x = 0,5$

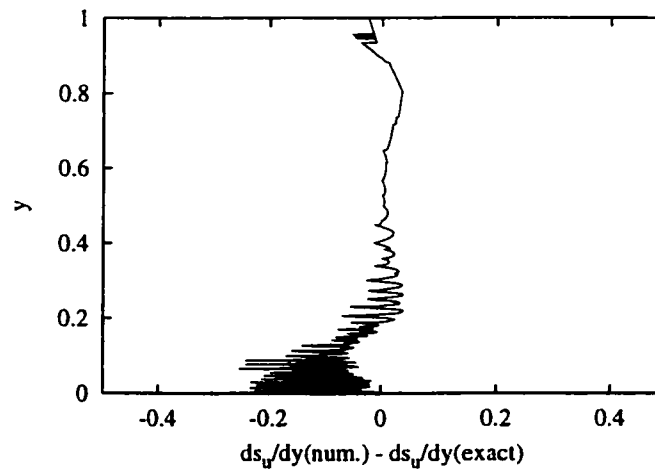
On constate également à la figure 5.5 que la distribution de l'erreur est fort différente dans les deux cas étudiés. Avec une condition aux limites exacte, on obtient une erreur qui oscille autour de zéro, les oscillations se produisant à l'échelle élémentaire. Il s'agit donc d'erreurs de type interpolation. À l'opposé, on remarque plus de régularité dans la distribution d'erreur pour un paramètre de forme : l'erreur ne change de signe qu'à deux reprises. La sensibilité s_u est donc surévaluée ou sous-évaluée sur une distance couvrant plusieurs éléments. L'erreur due à la condition aux limites et propagée dans le reste du domaine domine donc l'erreur d'interpolation, soit les petites oscillations autour d'une courbe moyenne d'erreur non nulle.

L'estimation d'erreur et l'évaluation de son indice d'efficacité se basent sur les dérivées premières de la solution et non sur les variables de calcul elles-mêmes. C'est donc du côté des dérivées qu'il faut regarder pour interpréter les mauvais indices d'efficacité observés à la figure 5.4. La figure 5.6 présente une coupe de l'erreur locale sur la dérivée $\partial s_u / \partial y$ à $x = 0,5$, à nouveau sur les sixièmes maillages adaptatifs. Cette fois-ci, le niveau d'erreur dans les deux cas est comparable et somme toute assez bas ($\partial s_u / \partial y$ vaut 200 à $(x, y) = (0,5, 0)$). Cependant, on note ici encore (mais de façon moins prononcée que pour s_u) que l'erreur dans le cas valeur est plutôt centrée autour de zéro avec des oscillations dues aux erreurs d'interpolation, alors que dans le cas d'un paramètre de forme la tendance est au décalage du niveau moyen de l'erreur. Dans ce dernier cas, l'estimateur d'erreur détecte uniquement les erreurs de type oscillation ou interpolation et non les erreurs dues au décalage du niveau moyen de la solution. Ceci explique les faibles indices d'efficacité obtenus. Une discussion sur le problème d'estimation d'erreur sur des solutions décalées est donnée par Turgeon [86].

En conclusion, le calcul de sensibilité avec paramètre de forme est plus difficile que celui avec paramètre de valeur et conduit typiquement à des solutions moins précises.



(a) Paramètre de valeur



(b) Paramètre de forme

Figure 5.6 Couche limite analytique : coupe de l'erreur sur $\frac{\partial s_u}{\partial y}$ à $x = 0,5$

Malgré une moins bonne estimation de l'erreur, l'algorithme continue à bien adapter le maillage à la solution. Globalement, la méthodologie a été vérifiée sur ce problème analytique. Il faut simplement être conscient de la difficulté supplémentaire imputable au traitement d'un paramètre de forme.

5.1.4 Améliorations possibles

La meilleure façon d'augmenter la précision des sensibilités et les indices d'efficacité pour des paramètres de forme consiste à améliorer la technique d'estimation d'erreur par projections locales au niveau des frontières du domaine. Par expérience, on sait que la technique actuelle donne de moins bons résultats sur les éléments aux frontières, et plus particulièrement pour la récupération de la dérivée normale à la frontière. Ceci est principalement dû au fait que pour un noeud situé sur la frontière, l'information disponible pour la projection est plus pauvre étant donné l'absence d'éléments du côté extérieur de la frontière. Une amélioration à cette technique permettrait de cumuler des effets bénéfiques à l'augmentation de la précision des sensibilités. Dans l'ordre, on cumulerait les gains suivants :

- amélioration de l'estimation d'erreur aux frontières pour l'écoulement qui sous-estime actuellement l'erreur vraie. Conséquemment, augmentation de l'indice d'efficacité pour l'écoulement ;
- augmentation du niveau de raffinement du maillage près des frontières due à la meilleure estimation d'erreur, d'où une amélioration de la solution numérique de l'écoulement à cet endroit ;
- amélioration de la condition aux limites pour les sensibilités à cause d'une meilleure précision de l'écoulement et d'une meilleure projection du gradient de l'écoulement apparaissant dans la condition aux limites ;

- augmentation de la précision globale de la solution numérique des sensibilités étant donné la plus grande précision de la condition aux limites ;
- augmentation du niveau de raffinement du maillage près des frontières due à la meilleure estimation d'erreur, d'où une amélioration de la solution numérique des sensibilités à cet endroit ;
- amélioration globale de l'indice d'efficacité pour les sensibilités due à la réduction de la contribution de la condition aux limites à l'erreur et à une meilleure estimation d'erreur.

Une étude préliminaire pour tenter d'améliorer la récupération de dérivées projetées au bord a été entreprise. L'idée retenue est d'éviter d'utiliser la projection associée à un noeud frontière pour évaluer le champ reconstruit à ce noeud : on tente plutôt d'utiliser l'information d'une autre projection, évaluée au bord. Dans une première approche, on a simplement utilisé une projection d'un sommet voisin dont le sous-domaine de projection s'étend jusqu'à la frontière.

Le tableau 5.1 compare les normes des erreurs et indices d'efficacité globaux obtenus avec cette approche préliminaire à ceux de l'approche de base. Ces résultats sur le problème avec paramètre de forme ont été obtenus après cinq cycles d'adaptation. On constate dans un premier temps que le nombre de noeuds augmente plus rapidement avec la nouvelle approche. On observe en fait un plus grand raffinement près de la paroi. Plus important encore, les erreurs sont significativement réduites, plus que simplement à cause de la petite augmentation du nombre de noeuds. Finalement, les indices d'efficacité ont grandement remonté. Ces résultats sont donc satisfaisants, mais il reste du travail à faire. En particulier, les maillages générés ont tendance à être plus irréguliers sur la paroi. Aussi, on voudrait idéalement récupérer des dérivées avec un ordre de convergence supérieur aux dérivées numériques, ce qui n'est pas le cas ici.

Tableau 5.1 Effet de la technique de reconstruction des dérivées sur les frontières

méthode	nombre de noeuds	erreur vraie $\times 10$		estimation $\times 10$		indice d'efficacité	
		s_u	s_T	s_u	s_T	s_u	s_T
standard	4326	2,956	0,8773	1,118	0,4894	37,8%	55,8%
modifiée	5507	1,612	0,4849	1,299	0,4479	80,6%	92,4%

5.1.5 Autres vérifications

Des variantes à ce cas test analytique ont été étudiées et publiées. La référence [117] présente des calculs de sensibilités par rapport à la vitesse à l'infini de même que l'évaluation subséquente du gradient d'une fonctionnelle objectif. Des vérifications sur un écoulement de fluide à viscosité variable se trouvent également dans la référence [118]. Dans ce dernier cas, le paramètre de design considéré est un coefficient du modèle de viscosité. Maintenant qu'on a vérifié l'implantation de la méthodologie adaptative de calcul de sensibilités par éléments finis en régime laminaire, on peut passer avec confiance à des applications.

5.2 Convection naturelle de sirop de maïs

5.2.1 Description du problème : écoulement

Comme deuxième application en régime laminaire, on considère la convection naturelle de sirop de maïs dans une enceinte fermée. Cette application soumet notre méthodologie à de nouvelles épreuves : la convection naturelle, la présence de plusieurs zones (fluide et solides) et des propriétés physiques très dépendantes de la température. Cet écoulement a fait l'objet d'une étude expérimentale par Chu et Hickox [119].

La figure 5.7 présente la configuration utilisée. Étant donné la symétrie du problème, on ne résout que sur la moitié du domaine réel. La base de la cavité est faite de plexiglas avec une bande de cuivre insérée qui fournit de la chaleur. Le reste de la cavité est rempli de sirop de maïs. La largeur de la bande de cuivre est de $L = 0,136$ m alors que la hauteur de la zone fluide, h , a une valeur nominale de $h = L$. Les autres dimensions sont indiquées à la figure 5.7. Du côté des conditions aux limites, on impose une température constante (chaude) $T_h = 57,2^\circ\text{C}$ sur le bas de la plaque de cuivre alors que le haut de l'enceinte est maintenu à une température plus froide $T_0 = 5,3^\circ\text{C}$. Le flux thermique est nul sur les autres frontières. Pour ce qui est des vitesses, on impose des conditions de paroi (vitesse nulle) partout sauf sur l'axe de symétrie où le cisaillement et la vitesse normale sont nuls.

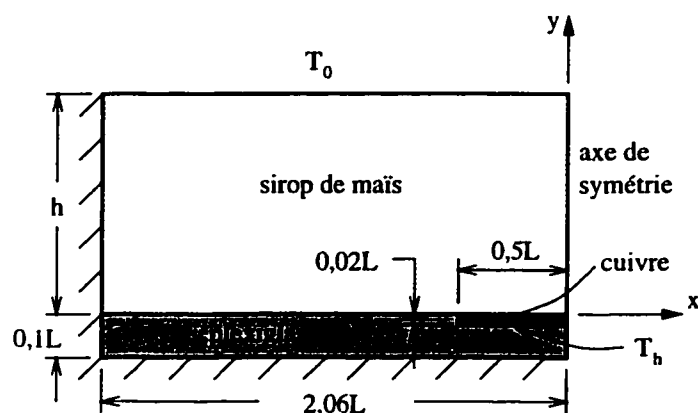


Figure 5.7 Géométrie de la cavité

Un des grands intérêts de ce problème réside dans la forte non-linéarité des propriétés physiques en fonction de la température. Plus précisément, on utilise les

recommandations de Chu et Hickox [119], soit :

$$\mu = a_0 e^{a_1 e^{-T/a_2}} \quad (5.34)$$

$$\lambda = b_0 + b_1 T \quad (5.35)$$

$$c_p = c_0 + c_1 T + c_2 T^2 \quad (5.36)$$

où :

$$\begin{array}{lll} a_0 = 0,2412 & b_0 = 0,3724 & c_0 = 2,2005 \\ a_1 = 12,5867 & b_1 = 3,034 \times 10^{-4} & c_1 = 3,9532 \times 10^{-3} \\ a_2 = 55,7805 & & c_2 = -6,7883 \times 10^{-6} \end{array} \quad (5.37)$$

À la température de référence $T_0 = 5,3^\circ\text{C}$ on a donc que :

$$\mu_0 = 22\,555 \text{ poises} \quad (5.38)$$

$$\lambda_0 = 0,3740 \text{ W/(m}\cdot\text{K)} \quad (5.39)$$

$$c_{p_0} = 2221 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)} \quad (5.40)$$

Notons qu'avec les écarts de température présents ($\Delta T = T_h - T_0 = 51,9^\circ\text{C}$), le ratio des valeurs extrêmes de la viscosité $\mu_{\max}/\mu_{\min}$ est de l'ordre de 1000. De plus, la masse volumique est supposée constante à $\rho_0 = 1,4334 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Finalement, les conductivités thermiques des solides sont respectivement de $0,5\lambda_0$ pour le plexiglas et $1000\lambda_0$ pour le cuivre.

Ce problème est résolu sous forme adimensionnelle. Plus précisément, on utilise la

forme suivante des équations :

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.41)$$

$$\sqrt{\frac{\text{Ra}_0}{\text{Pr}_0}} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot \left[\tilde{\mu} \left(\nabla \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^T \right) \right] - \sqrt{\frac{\text{Ra}_0}{\text{Pr}_0}} \tilde{T} \hat{\mathbf{g}} \quad (5.42)$$

$$\sqrt{\text{Ra}_0 \text{Pr}_0} \tilde{c}_p \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{T} = \nabla \cdot \left(\tilde{\lambda} \nabla \tilde{T} \right) \quad (5.43)$$

où :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= \frac{\mathbf{u}}{u_0} & \tilde{p} &= \frac{p}{p_0} & \tilde{T} &= \frac{T - T_0}{\Delta T} \\ \tilde{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0} & \tilde{\lambda} &= \frac{\lambda}{\lambda_0} & \tilde{c}_p &= \frac{c_p}{c_{p0}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

avec :

$$u_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0 L} \sqrt{\frac{\text{Ra}_0}{\text{Pr}_0}} \quad (5.45)$$

$$p_0 = \frac{\mu_0^2}{\rho_0 L^2} \sqrt{\frac{\text{Ra}_0}{\text{Pr}_0}} \quad (5.46)$$

et :

$$\text{Pr}_0 = \frac{\mu_0 c_{p0}}{\lambda_0} = 1,34 \times 10^7 \quad (5.47)$$

$$\text{Ra}_0 = \frac{\rho_0^2 c_{p0} \|\mathbf{g}\| \beta_0 \Delta T L^3}{\mu_0 \lambda_0} = 2850 \quad (5.48)$$

L'indice 0 identifie les quantités de référence et le tilde identifie les variables adimensionnelles. La longueur de référence est la largeur L de la bande de cuivre. Pour résoudre sous cette forme adimensionnelle en utilisant l'implantation dimensionnelle du code (équations (2.1) à (2.3)), on spécifie tout simplement les valeurs suivantes

comme données d'entrée :

$$\rho = \sqrt{\frac{Ra_0}{Pr_0}}, \quad c_p = Pr_0 \tilde{c}_p, \quad \beta = \sqrt{\frac{Ra_0}{Pr_0}}, \quad \mu = \tilde{\mu} \quad \text{et} \quad \lambda = \tilde{\lambda} \quad (5.49)$$

5.2.2 Description du problème : sensibilités

La motivation principale à choisir ce problème pour faire des calculs de sensibilités réside dans la présence d'incertitudes dans les données. On insiste donc ici sur l'utilisation des sensibilités à des fins d'analyse d'incertitude. Plus précisément, on considère quatre paramètres de design qui sont entachés d'incertitude :

1. La précision du modèle de viscosité est évaluée à 6,5%. On choisit le coefficient a_0 pour absorber toute cette incertitude, soit $a_0 \pm \Delta a_0$ avec $\Delta a_0 = 0,065a_0$.
2. La conductivité thermique du sirop de maïs est précise à environ 3%. On attribue une incertitude de $\Delta b_0 = 0,03b_0$ à b_0 pour en tenir compte.
3. Chu et Hickox [119] affirment que la hauteur de l'enceinte est égale à la largeur de la plaque chauffante en cuivre. Or, ils utilisent $h = 0,98L$ dans leurs simulations numériques. On considère donc une incertitude de $0,02L$ pour h . Notons qu'il s'agit ici d'un paramètre de forme.
4. Les différences de température mesurées le long de la région centrale de la plaque chauffante varient d'environ 2%. On choisit donc d'imposer une incertitude à T_h , soit $\Delta T_h = 0,02\Delta T$.

Mentionnons qu'on ne traite ici que des incertitudes sur des paramètres discrets. Par exemple, a_0 absorbe l'incertitude sur le modèle de viscosité et T_h , bien que possédant une incertitude, demeure un paramètre discret *i.e.* la condition aux limites demeure une constante. Une approche plus réaliste considérerait des incertitudes distribuées. Ainsi, la condition aux limites T_h ne serait pas uniforme, mais posséderait plutôt des

Tableau 5.2 Sensibilités des propriétés physiques

paramètre	μ'	λ'
a_0	$\frac{\mu}{a_0} - \frac{a_1}{a_2} \mu e^{-T/a_2} s_T$	$b_1 s_T$
b_0	$-\frac{a_1}{a_2} \mu e^{-T/a_2} s_T$	$1 + b_1 s_T$
T_h	$-\frac{a_1}{a_2} \mu e^{-T/a_2} s_T$	$b_1 s_T$
h	$-\frac{a_1}{a_2} \mu e^{-T/a_2} s_T$	$b_1 s_T$

déviations locales. Plusieurs paramètres, avec des déviations admissibles, pourraient décrire cette distribution de la condition aux limites. En première approche, on se limite à des incertitudes sur peu de paramètres, avec des effets plus globaux.

Les propriétés physiques du sirop de maïs étant variables, leurs sensibilités le sont aussi. Ces sensibilités s'obtiennent en différentiant les équations (5.34) à (5.36). Par exemple, pour c_p on obtient :

$$c'_p = (c_1 + 2c_2 T) s_T \quad (5.50)$$

pour les quatre paramètres étudiés. Les sensibilités de la viscosité et de la conductivité thermique sont données au tableau 5.2. De plus, on a que $\rho' = g' = \beta' = T'_0 = 0$ pour les quatre paramètres considérés. Pour une simulation adimensionnelle, on utilise, par exemple pour la viscosité, $\tilde{\mu}' = \mu' / \mu_0$. Les quantités de référence servant à l'adimensionnalisation sont des constantes fixées au départ et qui sont insensibles aux paramètres. Ainsi, $\mu'_0 = 0$. En effet, on ne désire pas réadimensionnaliser le problème pour un changement de paramètre. Notons enfin que dans l'approche présente, les équations de mouvement et d'énergie sont entièrement adimensionnelles alors que les équations des sensibilités ne le sont pas. En effet, l'opération de différentiation par rapport à un paramètre dimensionnel tel que a_0 fait apparaître des unités au dénominateur. À titre d'exemple, s_u et $\tilde{\mu}'$ possèdent les unités de a_0^{-1} .

Le dernier point à considérer pour le calcul de sensibilité est l'imposition de conditions aux limites. Pour les paramètres a_0 et b_0 , on a partout des conditions de Dirichlet ou de Neumann nulles. Pour T_h , les mêmes conditions s'appliquent sauf sur la paroi chauffée où $s_T = T'_h = 1$. Finalement, pour le paramètre de forme h qui déplace la paroi du haut, on impose les coefficients de condition aux limites suivants sur cette paroi :

$$\frac{D\hat{u}}{Dh} = \frac{D\hat{v}}{Dh} = \frac{D\hat{T}}{Dh} = 0 \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial x_f}{\partial h} = 0 \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial y_f}{\partial h} = 1 \quad (5.53)$$

En fait, la condition sur s_v en haut pour ce paramètre de forme a été légèrement modifiée suite à des problèmes de convergence. Normalement, cette condition serait $s_v = -\partial v / \partial y$. Or sur cette paroi horizontale, $u = 0$ et donc $\partial u / \partial x = 0$. On en déduit que $\partial v / \partial y = 0$ pour satisfaire l'équation de continuité. Ainsi, on a directement imposé la condition aux limites exacte $s_v = 0$.

La difficulté avec l'approche normale $s_v = -\partial v / \partial y$ est qu'il peut y avoir un débit net des sensibilités sur cette face puisque s_v ne sera pas exactement nul, même s'il est faible et qu'il tend vers zéro avec le raffinement du maillage. Il devient alors impossible de satisfaire l'équation de continuité des sensibilités. En effet, l'équation de continuité élémentaire associée à la première fonction test en pression ($\delta p = 1$) est :

$$\int_{\Omega_e} \nabla \cdot \mathbf{s}_u d\Omega = 0 \quad (5.54)$$

où Ω_e est la surface de l'élément. L'interpolation en pression étant discontinue, cette équation se retrouve telle quelle dans le système d'équations global assemblé. En

additionnant toutes ces équations élémentaires on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{s}_u d\Omega = 0 \quad (5.55)$$

Finalement, l'application du théorème de la divergence sur cette dernière équation conduit à :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{s}_u \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma = 0 \quad (5.56)$$

qui stipule que le débit net des sensibilités sur les frontières du domaine doit être nul. Si cette condition n'est pas respectée, alors les équations élémentaires 5.54 ne pourront pas l'être. C'est exactement ce qui se produit lorsqu'on utilise $s_v = -\partial v / \partial y \neq 0$ sur la paroi du haut. Dans ce cas, le débit net imposé peut être non nul sur cette paroi et donc sur l'ensemble de la frontière $\partial\Omega$ puisqu'ailleurs la condition de Dirichlet $\mathbf{s}_u \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ donne un débit nul. C'est le danger d'utiliser des conditions de Dirichlet sur toutes les frontières sans laisser de liberté d'évacuation de masse.

Dans les prochaines sections, on présente les résultats numériques obtenus. Suivant les résultats de l'écoulement, trois usages des sensibilités sont illustrés : l'analyse de sensibilité, l'analyse d'incertitude et le calcul de solutions voisines.

5.2.3 Solution de l'écoulement

Le figure 5.8 illustre le comportement de cet écoulement. On y voit la formation d'un tourbillon de convection provoqué par le réchauffement du fluide au-dessus de la plaque chauffante. Au niveau thermique, on note la présence de couches limites près des parois chaude et froide. Les gradients de température sont particulièrement élevés juste au-dessus de la plaque de cuivre. Dans cette plaque, la température est

presque uniforme à cause de la très grande conductivité thermique.

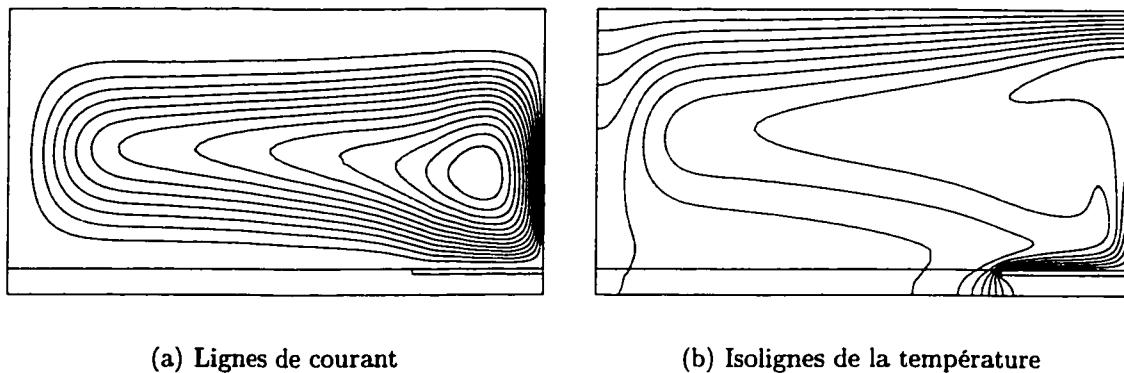


Figure 5.8 Cavité : solution de l'écoulement

Le maillage final généré par l'algorithme adaptatif est présenté à la figure 5.9. Ce maillage de 26 003 noeuds a été obtenu après 4 cycles d'adaptation où l'on exigeait une réduction de l'erreur par un facteur 2 pour les normes en vitesse, température et toutes les sensibilités correspondantes. Il semble être très bien adapté à la solution de l'écoulement et aux sensibilités présentées à la section suivante.

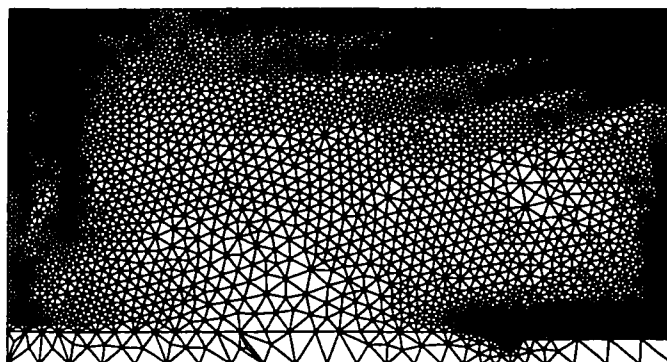


Figure 5.9 Cavité : maillage final

5.2.4 Analyse de sensibilité

Les sensibilités ont une interprétation propre, sans post-traitement : elles représentent l'influence d'un paramètre sur la solution. En particulier, elles permettent d'identifier les zones les plus sensibles ou bien les paramètres qui sont dominants. Par contre, les sensibilités telles quelles sont difficilement comparables pour divers paramètres dans la mesure où elles n'ont pas les mêmes unités et peuvent avoir des valeurs très différentes simplement à cause des écarts d'ordre de grandeur entre les paramètres. Pour cette raison, on utilise plutôt les sensibilités normalisées, c'est-à-dire les sensibilités multipliées par la valeur nominale du paramètre :

$$\frac{\partial u}{\partial a} a_{nom}, \quad \frac{\partial T}{\partial a} a_{nom} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial a} a_{nom} \quad (5.57)$$

Les sensibilités normalisées pour divers paramètres ont donc toutes les mêmes unités, soit celles de la variable de l'écoulement. Mieux encore, ces sensibilités normalisées expriment le changement de la solution correspondant à un pourcentage de variation du paramètre. Pour illustrer ceci, considérons le développement de Taylor au premier ordre pour la température :

$$T(x, y; a + \Delta a) = T(x, y; a) + \frac{\partial T}{\partial a} \Delta a \quad (5.58)$$

ou :

$$\Delta T = T(x, y; a + \Delta a) - T(x, y; a) = \frac{\partial T}{\partial a} \Delta a \quad (5.59)$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme suivante :

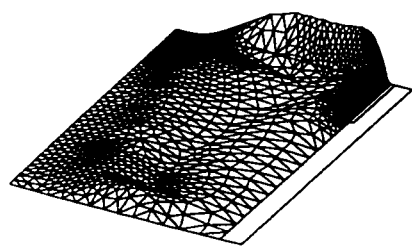
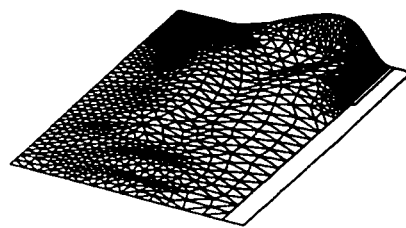
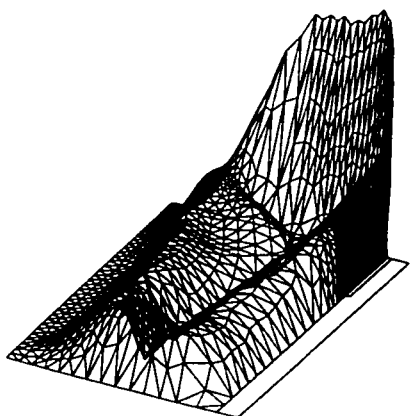
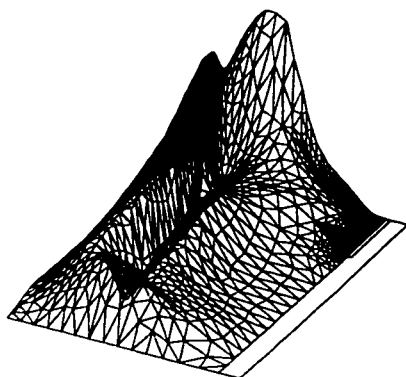
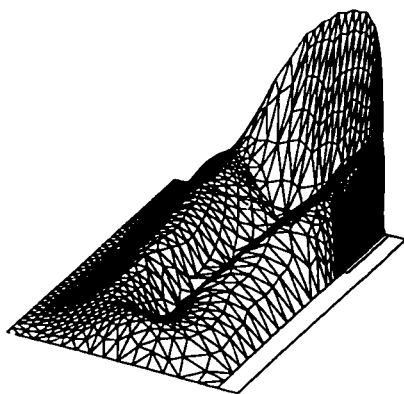
$$\Delta T = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial a} a_{nom}}_{\text{sensibilité normalisée}} \times \underbrace{\frac{\Delta a}{a_{nom}}}_{\text{perturbation relative}} \quad (5.60)$$

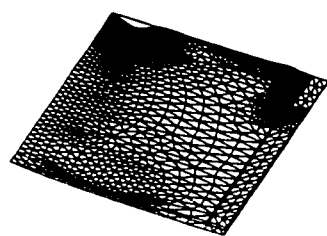
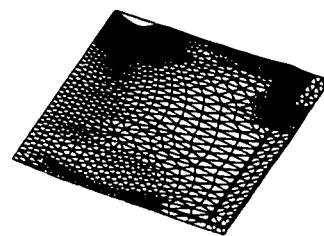
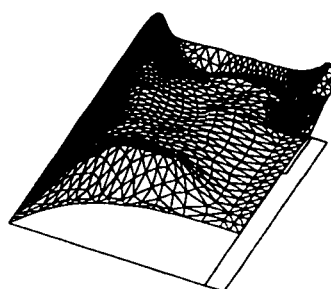
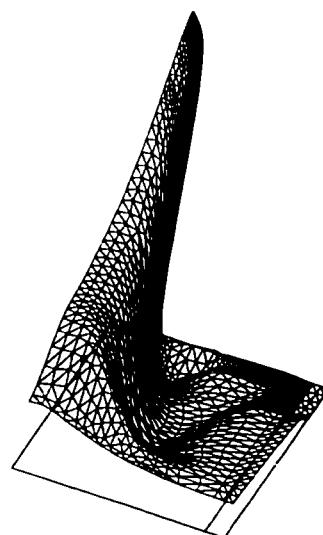
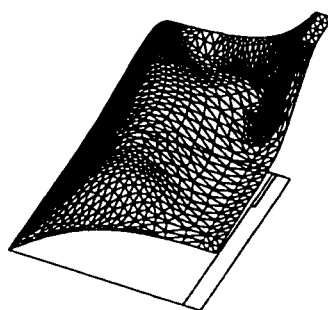
Ainsi, 1% de la sensibilité normalisée correspond à la variation de la température suite à une variation de 1% du paramètre. En d'autres mots, une sensibilité normalisée n fois plus élevée qu'une autre signifie que la solution varie n fois plus dans ce cas que dans l'autre, pour le même pourcentage de variation des deux paramètres.

Les figures 5.10 et 5.11 présentent les distributions des sensibilités normalisées de la norme de s_u et de s_T . Sur ces graphiques, on déplace verticalement les noeuds du premier maillage adapté proportionnellement aux valeurs des sensibilités normalisées. Les échelles sont les mêmes pour permettre les comparaisons, sauf pour les sous-figures (e) qui illustrent la solution de l'écoulement.

Pour la vitesse (figure 5.10), les paramètres T_h et h sont ceux qui ont le plus d'effet sur la solution. Les sensibilités sont maximales près de l'axe de symétrie, là où la vitesse elle-même est plus élevée. D'ailleurs, la distribution de la sensibilité par rapport à T_h , qui est le moteur principal de l'écoulement, ressemble beaucoup à la distribution de la vitesse. On remarque également que seul h a une influence près de la paroi froide du haut, qui bouge avec h , mais près de la bande de cuivre chaude son influence est moins élevée que les autres paramètres. Les fortes variations près de cette bande, principalement celles de la sensibilité à T_h et de l'écoulement, indiquent la nécessité de raffinement du maillage à cet endroit.

Du côté de la température (figure 5.11), le paramètre h est nettement le plus influent, surtout dans la partie supérieure du domaine. Les sensibilités de forme dans une couche limite sont typiquement élevées. À l'opposé, le champ de température est

(a) Paramètre a_0 (b) Paramètre b_0 (c) Paramètre T_h (d) Paramètre h (e) Solution $\|u\|$ Figure 5.10 Cavité : sensibilités $\|s_u\|$ normalisées

(a) Paramètre a_0 (b) Paramètre b_0 (c) Paramètre T_h (d) Paramètre h (e) Solution T Figure 5.11 Cavité : sensibilités s_T normalisées

assez peu sensible à a_0 et b_0 . Près de la plaque chaude, la température de cette plaque T_h a évidemment le plus d'effet. Au niveau du signe, seules les sensibilités par rapport à T_h sont positives sur tout le domaine. Les autres changent de signe. Par exemple, une augmentation de a_0 ou de b_0 semble induire une augmentation de la température là où elle est élevée et une réduction dans les zones déjà froides. Enfin, la diversité de ces solutions justifie notre approche qui consiste à adapter le maillage à toutes les variables qui interviennent, incluant les sensibilités.

5.2.5 Analyse d'incertitude

Certaines mesures expérimentales sont disponibles pour cet écoulement. La meilleure façon de comparer prédictions numériques et mesures expérimentales est d'ajouter à ces valeurs ponctuelles une bande d'incertitude. Un chevauchement des intervalles de prédiction et de mesure indique alors un accord entre les deux.

Au niveau expérimental, Chu et Hickox [119] affirment que l'incertitude sur les mesures de vitesse est d'au plus 7%. On ajoute donc cet intervalle d'incertitude aux mesures. L'incertitude sur les mesures de la température est moins clairement indiquée par les auteurs. Cependant, une valeur de 0,7% est souvent mentionnée. On adopte donc cette valeur, soit en fait 0,7% de $(T_h - T_0)$.

Au niveau des prédictions numériques, l'incertitude sur la solution provient de l'incertitude sur les paramètres d'entrée. On a déjà établi l'incertitude sur les quatre paramètres considérés. Voyons maintenant comment faire la cascade de l'incertitude vers la solution en vitesse ou en température. Considérons à titre d'exemple le champ de température qui dépend de quelques paramètres $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Pour de faibles perturbations $\Delta \mathbf{a}$ de ces paramètres, on peut représenter approximativement

les changements de température par une série de Taylor du premier ordre :

$$\Delta T = T(x, y; \mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}) - T(x, y; \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial a_i}(x, y; \mathbf{a}) \Delta a_i \quad (5.61)$$

Mathématiquement on a alors :

$$|\Delta T| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial T}{\partial a_i}(x, y; \mathbf{a}) \right| |\Delta a_i| \quad (5.62)$$

Cette dernière expression correspond exactement à ce que l'on désire en analyse d'incertitude : la plus grande déviation possible de la température associée à des perturbations admissibles de paramètres, soit le pire scénario (les changements de T s'accumulent dans le même sens). Ainsi, pour une incertitude $\Delta \mathbf{a}$ sur $\mathbf{a}$, qui signifie que $\mathbf{a}$ peut en fait se situer dans l'intervalle $\mathbf{a} \pm \Delta \mathbf{a}$, l'incertitude résultante ΔT se calcule de la façon suivante :

$$\Delta T = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial T}{\partial a_i}(x, y; \mathbf{a}) \right| \Delta a_i \quad (5.63)$$

de sorte que T se trouve dans l'intervalle $T \pm \Delta T$. Les sensibilités interviennent donc dans cette cascade d'incertitude. Dans un contexte d'analyse d'incertitude, on omet les valeurs absolues sur Δa_i et ΔT (par exemple) qui sont positives par définition, contrairement au cas général d'une perturbation de signe quelconque.

Les figures 5.12, 5.13 et 5.14 comparent des prédictions numériques et des mesures expérimentales en incluant des bandes d'incertitude : la vitesse verticale à $y = 0,4L$ et à $y = 0,65L$ de même que la température adimensionnelle le long de l'axe de symétrie ($x = 0$). Les incertitudes sur les prédictions sont calculées en utilisant la technique décrite précédemment. Comme on peut le constater, les intervalles d'incertitude se chevauchent, ce qui indique que les prédictions numériques sont en accord avec les

mesures expérimentales et ce pour les trois cas. L'ajout des intervalles d'incertitude permet une bien meilleure comparaison des résultats et les sensibilités sont très efficaces pour accomplir cette tâche.

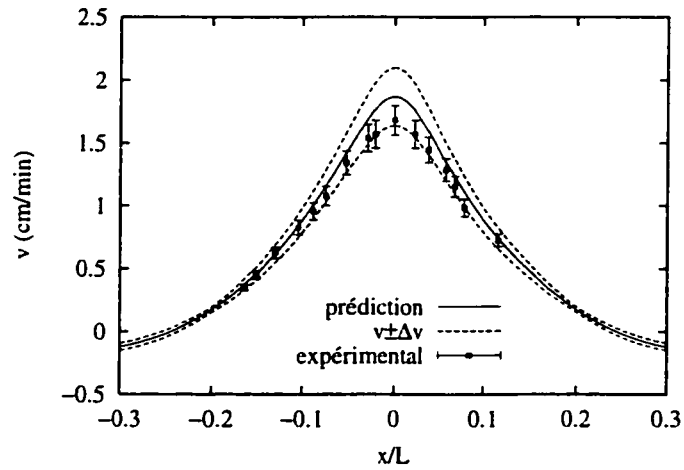


Figure 5.12 Cavité : prédiction de v à $y = 0,4L$

Les sensibilités peuvent aussi être utilisées pour calculer une borne d'incertitude sur des quantités déduites des variables primaires de l'écoulement. Par exemple, la position du centre du tourbillon est définie comme étant la position (x_c, y_c) où la vitesse est nulle : $u = v = 0$. Comme pour les autres quantités, on détermine les incertitudes sur x_c et y_c selon :

$$\Delta x_c = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial x_c}{\partial a_i} \right| \Delta a_i \quad (5.64)$$

$$\Delta y_c = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y_c}{\partial a_i} \right| \Delta a_i \quad (5.65)$$

Il faut donc déterminer les sensibilités de la position du centre du tourbillon, soit $\partial x_c / \partial a_i$ et $\partial y_c / \partial a_i$, à partir des sensibilités des variables de l'écoulement. Pour ce faire, on part du fait que la vitesse est toujours nulle au centre du tourbillon, mais que

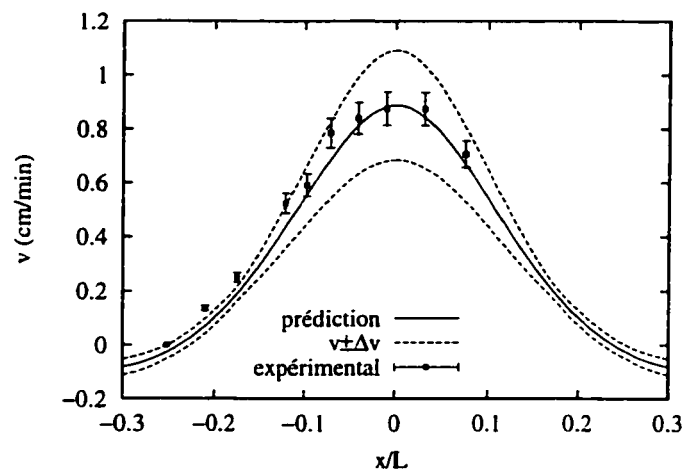


Figure 5.13 Cavité : prédiction de v à $y = 0,65L$

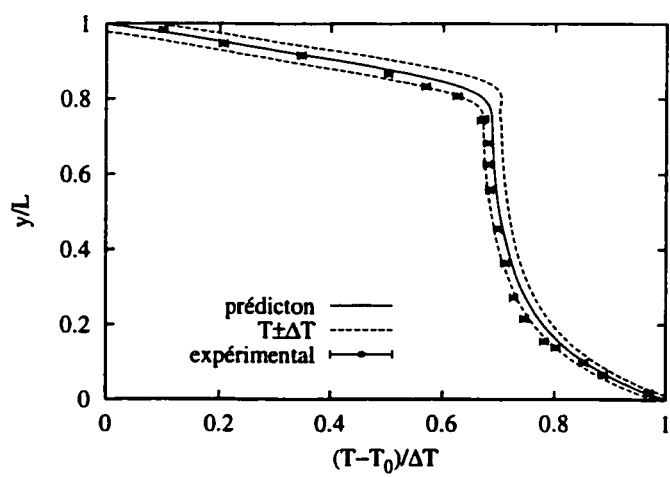


Figure 5.14 Cavité : prédiction de T à $x = 0$

cette position change avec les paramètres. Ainsi, la dérivée matérielle de la vitesse, suivant le point (x_c, y_c) qui se déplace, est nulle pour chaque paramètre considéré séparément :

$$\frac{Du}{Da_i} = 0 = s_u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x_c}{\partial a_i} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y_c}{\partial a_i} \quad (5.66)$$

$$\frac{Dv}{Da_i} = 0 = s_v + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x_c}{\partial a_i} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y_c}{\partial a_i} \quad (5.67)$$

Les sensibilités $\partial x_c/\partial a_i$ et $\partial y_c/\partial a_i$ pour chaque paramètre s'obtiennent donc en résolvant le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial a_i} \\ \frac{\partial y_c}{\partial a_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -s_u \\ -s_v \end{Bmatrix} \quad (5.68)$$

où les sensibilités (s_u, s_v) et les dérivées de la vitesse sont évaluées à (x_c, y_c) .

Dans cette application particulière, le modèle prédit $y_c/L = 0,365 \pm 0,0086$ alors que la mesure expérimentale est de $y_c/L = 0,40$. L'incertitude de la mesure expérimentale n'est pas fournie par les auteurs. Cependant, comme ils ne fournissent que deux décimales à la mesure, l'incertitude est d'au moins la moitié de la dernière décimale, soit $\Delta y_c = 0,005L$. Les plages d'incertitude ne s'entrecoupant pas, il n'y a pas d'accord formel entre la prédiction et la mesure. À moins de pouvoir justifier une plus grande incertitude expérimentale, le modèle n'arrive pas à prédire correctement la hauteur du centre du tourbillon. D'autres auteurs [110, 119] prédisent également une valeur trop faible de y_c en utilisant le même modèle.

5.2.6 Calcul de solutions voisines

Une autre utilité des sensibilités est l'extrapolation d'une solution voisine, à des valeurs voisines des paramètres. Par exemple, on peut désirer connaître rapidement le nouveau champ de température correspondant à des perturbations de 1%, 2%, 3% et 5% de a_0 sans recalculer toutes ces solutions. L'approche est tout à fait similaire au calcul d'incertitude : on suppose que les perturbations sont suffisamment faibles pour que l'on puisse approcher la solution voisine par une série de Taylor tronquée au premier ordre. Par exemple, on obtient pour la température :

$$T(x, y; \mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}) = T(x, y; \mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial a_i}(x, y; \mathbf{a}) \Delta a_i \quad (5.69)$$

où les Δa_i sont les perturbations des paramètres. Cette extrapolation linéaire fait donc intervenir les sensibilités.

Ici, on va montrer qu'on arrive à faire de telles extrapolations de solutions et en même temps on va vérifier les calculs de sensibilités en comparant les extrapolations avec les vraies solutions calculées aux valeurs perturbées des paramètres. En effet, à la limite d'une très faible perturbation des paramètres, comparer une extrapolation avec le calcul d'une nouvelle solution revient à comparer notre calcul de sensibilité à un calcul de sensibilité par différences finies (qui est plus coûteux).

Les perturbations Δa_i des paramètres sont choisies comme ayant la même grandeur que pour l'analyse d'incertitude, mais avec des signes différents. Ces signes sont tels que la vitesse verticale au-dessus de la région centrale de la plaque chaude est réduite. En résumé, on prend : $\Delta a_0 = 0,065a_0$, $\Delta b_0 = -0,03b_0$, $\Delta h = -0,02h$ et $\Delta T_h = -0,02\Delta T$.

Les figures 5.15 et 5.16 comparent les extrapolations de solutions voisines en utilisant

les sensibilités (identifiées par *extrapolé*) aux vraies solutions voisines recalculées (identifiées par *perturbé*). Les solutions aux valeurs nominales des paramètres sont ajoutées à titre comparatif (identifiées par *nominal*). Comme on peut le constater, l'accord est très bon : on observe de faibles écarts entre la vraie distribution et son approximation par une série de Taylor. Ces écarts sont dus à la non-linéarité du problème. Ceci valide les calculs de sensibilités pour les divers paramètres considérés. On en conclut également que la technique d'extrapolation s'avère efficace. Les écarts observés sont dus à la déviation par rapport au modèle d'extrapolation linéaire qui possède des limites d'applicabilité au niveau des valeurs des perturbations.

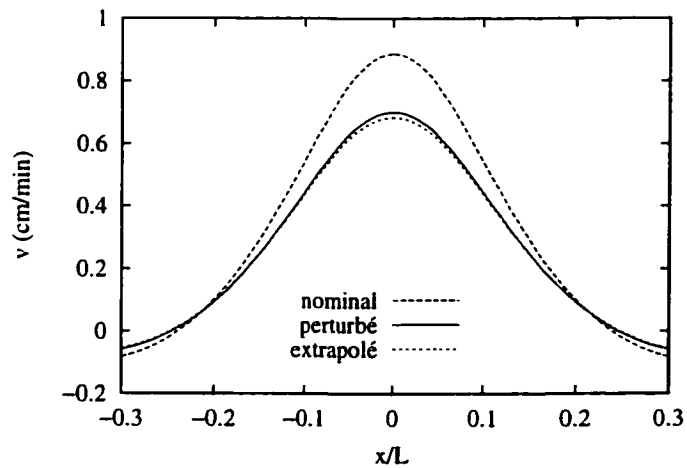


Figure 5.15 Cavité : solution voisine de v à $y = 0,65L$

  titre complémentaire, considérons maintenant l'extrapolation d'une quantité dérivée, soit le nombre de Nusselt sur la paroi supérieure :

$$\text{Nu} = -\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \quad (5.70)$$

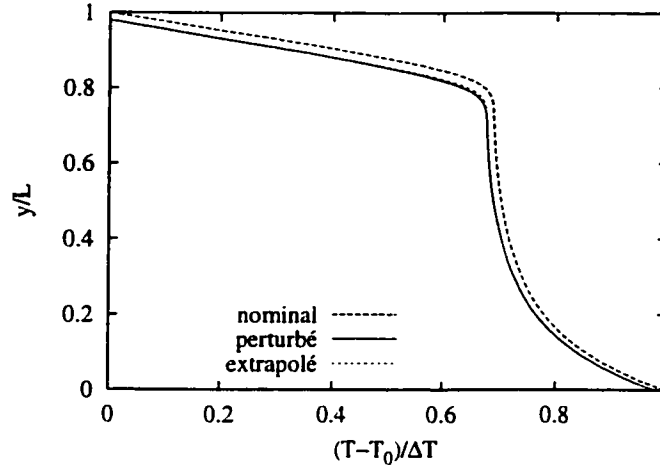


Figure 5.16 Cavité : solution voisine de T à $x = 0$

dont la sensibilité est donnée par :

$$\frac{\partial \text{Nu}}{\partial a_i} = -\bar{\lambda}' \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} - \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{s}_T}{\partial \bar{y}} \quad (5.71)$$

o   :

$$\bar{\lambda}' = \frac{\lambda'}{\lambda_0} = \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial a_i} + \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial a_i} = \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial a_i} + \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{T}} \bar{s}_T \quad (5.72)$$

Le tableau 5.2 fournit les expressions de λ' . Par extrapolation linéaire, on prévoit la variation suivante de Nu :

$$\Delta \text{Nu} = \frac{\partial \text{Nu}}{\partial a_0} \Delta a_0 + \frac{\partial \text{Nu}}{\partial b_0} \Delta b_0 + \frac{\partial \text{Nu}}{\partial T_h} \Delta T_h + \left(\frac{\partial \text{Nu}}{\partial h} + \frac{\partial \text{Nu}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial h} \right) \Delta h \quad (5.73)$$

Ici, on a tenu compte de la variation de la position d'évaluation de Nu, qui suit la paroi dans son déplacement.

Le même problème que pour les conditions de Neumann avec paramètre de forme surgit alors : la présence de dérivées secondes (dans $\partial \text{Nu} / \partial \bar{y}$ car $\text{Nu} = -\bar{\lambda} \partial \bar{T} / \partial \bar{y}$). On

a justement choisi cet exemple pour montrer que dans certains cas particuliers il est possible d'utiliser les équations aux dérivées partielles pour obtenir de l'information sur les dérivées secondes. Voyons comment.

Le long de la paroi du haut, la vitesse est nulle ($u = 0$) et la température uniforme, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} \right) = 0 \quad (5.74)$$

L'équation d'énergie se ramène alors à :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \right) = 0 \quad (5.75)$$

soit :

$$\frac{\partial Nu}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (5.76)$$

L'extrapolation de Nu se simplifie donc à l'expression suivante qui ne contient plus de dérivées secondes :

$$\Delta Nu = \frac{\partial Nu}{\partial a_0} \Delta a_0 + \frac{\partial Nu}{\partial b_0} \Delta b_0 + \frac{\partial Nu}{\partial T_h} \Delta T_h + \frac{\partial Nu}{\partial h} \Delta h \quad (5.77)$$

La figure 5.17 montre que l'extrapolation linéaire utilisant les sensibilités est en accord avec le calcul de la solution aux valeurs perturbées des paramètres. Les écarts observés entre l'extrapolation et la distribution recalculée sont minimales. La technique fonctionne donc même pour extrapoler des flux sur des parois mobiles.

Finalement, une étude de raffinement de maillage confirme que les résultats présentés ont tous atteint l'état d'indépendance face au maillage. La figure 5.18 illustre la

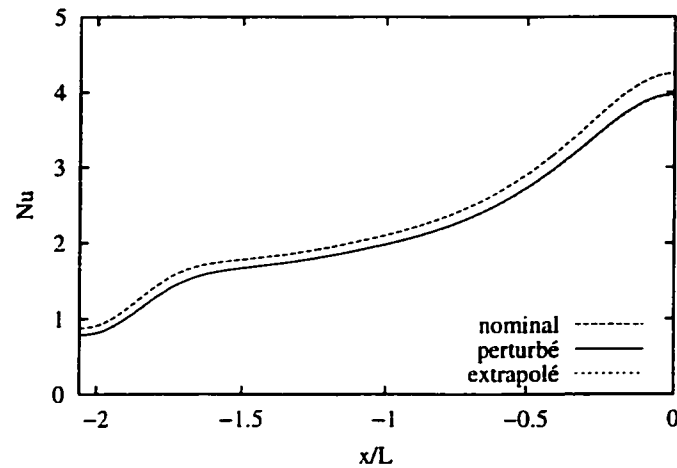


Figure 5.17 Cavité : solution voisine de Nu à la paroi du haut

convergence d'une des quantités les plus difficiles à obtenir avec précision : la dérivée normale d'une sensibilité de forme (paramètre h), soit $\partial \tilde{s}_T / \partial \tilde{y}$ le long de la paroi du haut. Les faibles écarts entre les solutions sur les deux derniers maillages adaptatifs confirment la grande précision numérique obtenue. Les autres dérivées, et *a fortiori* les variables primaires elles-mêmes, sont au moins aussi bien convergées par rapport au maillage. Notons enfin qu'étant donné cette grande précision numérique, les écarts observés entre les extrapolations linéaires de solutions voisines et le recalcul de ces solutions sont dus aux limites de l'extrapolation linéaire et non aux erreurs de la solution numérique.

5.3 Optimisation du transfert de chaleur

Cette application se veut une illustration de l'utilisation des sensibilités en optimisation. Plus particulièrement, on cherche à maximiser le transfert de chaleur en variant certains paramètres géométriques.

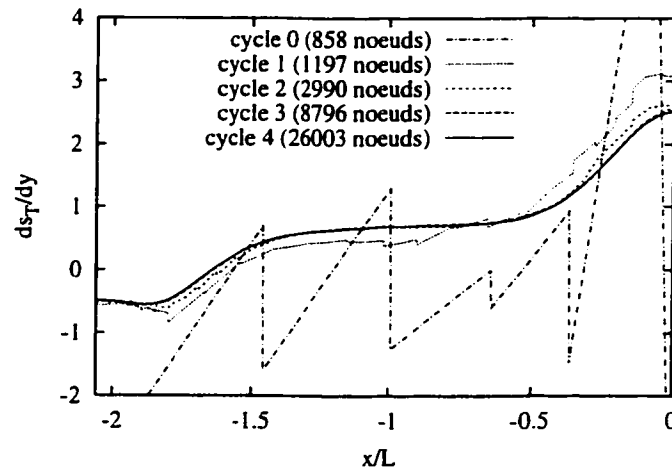


Figure 5.18 Cavité : convergence de $\frac{\partial \bar{s}_T}{\partial y}$ pour le paramètre h ,   la paroi du haut

5.3.1 Description du problème :  coulement

La figure 5.19 illustre la géométrie considérée. De l'air à temperature ambiante entre par le bas du canal et se dirige vers la sortie (en haut). Sur son passage, l'air extrait de la chaleur du bloc chaud situé sur la paroi de droite qui obstrue 20% du canal. La longueur de référence L est la largeur du canal qui est égale à la longueur du bloc. On ajoute aussi des effets de convection naturelle avec la gravité qui agit vers le bas. Afin d'augmenter le transfert de chaleur sur le bloc, on ajoute une plaque qui a pour tâche de dévier l'écoulement vers le bloc tout en l'accélérant. Cette plaque a une épaisseur de $0,02L$ et une longueur de $0,25L$ à laquelle s'ajoute des bouts arrondis (paraboliques) de $0,01L$. Son centro ide est situé à (x_c, y_c) et elle fait un angle α avec l'horizontale. La forme adimensionnelle des équations pour cet écoulement laminaire,

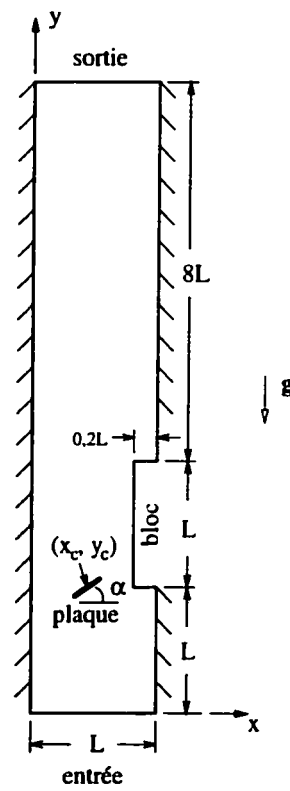


Figure 5.19 Géométrie du canal pour le problème d'optimisation

permanent, avec propriétés physiques constantes et convection mixte est :

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.78)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla \tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \tilde{\mathbf{u}})^T \right) \right] - \text{Ri} \tilde{T} \hat{\mathbf{g}} \quad (5.79)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{T} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\text{Re} \text{Pr}} \nabla \tilde{T} \right) \quad (5.80)$$

avec $\text{Re} = 378$, $\text{Pr} = 0,7$ et $\text{Ri} = 1$ dans la zone fluide. Ces conditions sont inspirées de Habchi et Acharya [120]. Pour la plaque solide, on résout seulement l'équation de conduction de chaleur avec une conductivité thermique égale à celle du fluide. De cette façon, on évite de traiter des sensibilités discontinues au niveau de l'interface pour des paramètres de forme. L'alternative d'imposer un flux nul aux parois de la plaque sans résoudre son intérieur a également été rejetée à cause des sensibilités : il s'agit d'une condition de Neumann avec paramètre de forme.

Au niveau des conditions aux limites, l'écoulement est uniforme en entrée ($\tilde{u} = 0$ et $\tilde{v} = 1$), libre en sortie ($\tilde{u} = 0$ et contrainte normale nulle) et la vitesse est nulle sur toutes les parois. Pour sa part, la température est constante en entrée ($\tilde{T} = 0$) et sur les parois du bloc ($\tilde{T} = 1$) alors que les parois du canal sont isolées. On impose également un flux nul en sortie alors qu'aucune condition ne s'applique sur les parois de la plaque puisqu'on résout l'équation d'énergie à l'intérieur de cette plaque. La continuité de la température et du flux s'y applique donc naturellement par la formulation éléments finis.

Dans le reste de cette section sur le problème d'optimisation, tous les résultats présentés sont adimensionnels. On omet cependant d'identifier les variables adimensionnelles par un tilde pour alléger l'écriture.

5.3.2 Algorithme d'optimisation

Le but est d'optimiser le transfert de chaleur sur le bloc chaud. La mesure de ce transfert de chaleur est alors :

$$\mathcal{J}_1(\mathbf{a}) = \int_{\Gamma_b} \lambda \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma_b \quad (5.81)$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur unitaire normal sortant du domaine, Γ_b est la frontière du bloc et $\mathbf{a}$ est le vecteur des paramètres de design. Dans ce cas-ci, on utilise au plus trois paramètres, soit $\mathbf{a} = (\alpha, x_c, y_c)$. De façon équivalente, par conservation de l'énergie, on peut calculer l'énergie convectée à travers les frontières du domaine, soit :

$$\mathcal{J}_2(\mathbf{a}) = \int_{\Gamma_{out}} \rho c_p v T d\Gamma_{out} - \int_{\Gamma_{in}} \rho c_p v T d\Gamma_{in} \quad (5.82)$$

où Γ_{out} et Γ_{in} sont les frontières de sortie et d'entrée respectivement. On évaluera ces fonctions objectif $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ avec les variables adimensionnelles, de sorte que $\mathcal{J}_2$ se réduit à :

$$\mathcal{J}_2(\mathbf{a}) = \int_{\Gamma_{out}} \rho c_p v T d\Gamma_{out} \quad (5.83)$$

puisque la température d'entrée est nulle.

Dans un contexte d'optimisation, chaque évaluation de la fonction objectif requiert la résolution d'un écoulement. Une réduction du nombre d'évaluations réduit donc d'autant le temps requis à l'optimisation. Les méthodes basées sur le gradient s'avèrent donc attrayantes, particulièrement lorsque l'évaluation du gradient est plus rapide que celle de l'écoulement. On peut également utiliser une méthode d'ordre supérieur nécessitant le calcul d'une matrice hessienne $\mathbf{H}$ des dérivées secondes, comme une méthode de Newton. L'approche retenue ici est la méthode BFGS avec intervalle

de confiance [121–124] qui construit une approximation de la matrice hessienne. En bref, partant d'un point de design $\mathbf{a}_k$ à l'itération k , on résout le problème suivant :

$$\max_{\|\mathbf{d}_k\| < \delta_k} \mathcal{J}(\mathbf{a}_k) + \nabla \mathcal{J}(\mathbf{a}_k)^T \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{d}_k \quad (5.84)$$

pour le vecteur de correction $\mathbf{d}_k$, ce qui donne le nouveau point de design $\mathbf{a}_{k+1}$:

$$\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k + \mathbf{d}_k \quad (5.85)$$

On parle ici d'une méthode quasi-Newton dans la mesure où la matrice hessienne est mise à jour itérativement (et approximativement) sans être calculée explicitement. Pour sa part, l'intervalle de confiance δ_k sert à limiter les corrections admissibles, particulièrement pour les premières itérations.

Cette technique requiert donc l'évaluation du gradient de la fonction objectif par rapport aux paramètres de design. Dans notre cas, ces gradients sont :

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \mathcal{J}_1 = \int_{\Gamma_b} \lambda \nabla s_T \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma_b \quad (5.86)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \mathcal{J}_2 = \int_{\Gamma_{out}} \rho c_p (s_v T + v s_T) \, d\Gamma_{out} \quad (5.87)$$

Ils font donc intervenir les sensibilités par rapport aux divers paramètres.

Notons enfin que $\mathcal{J}_1$ et son gradient $\nabla \mathcal{J}_1$ font intervenir des dérivées premières de la solution. Afin d'accroître leur précision, on les évaluera plutôt avec les gradients reconstruits par la technique de projection locale de l'estimateur d'erreur.

Tableau 5.3 Problème d'optimisation : coefficients des conditions aux limites des sensibilités

paramètre (a_i)	$\frac{D\hat{u}}{Da_i}$	$\frac{D\hat{v}}{Da_i}$	$\frac{\partial x_f}{\partial a_i}$	$\frac{\partial y_f}{\partial a_i}$
α	0	0	$y_c - y_f$	$x_f - x_c$
x_c	0	0	1	0
y_c	0	0	0	1

5.3.3 Description du problème : sensibilités

Trois paramètres de forme sont considérés dans ce problème : α , x_c et y_c . Pour tous ces paramètres, les sensibilités des propriétés physiques sont nulles. Au niveau des conditions aux limites, on retrouve des conditions de Dirichlet ou de Neumann nulles partout, sauf pour la sensibilité de la vitesse sur les parois de la plaque. Dans ce cas, on utilise les équations générales des conditions aux limites avec les coefficients fournis au tableau 5.3.

Les termes géométriques de ces conditions aux limites méritent quelques explications. La figure 5.20 illustre la position (x_f, y_f) d'un point quelconque sur la frontière de

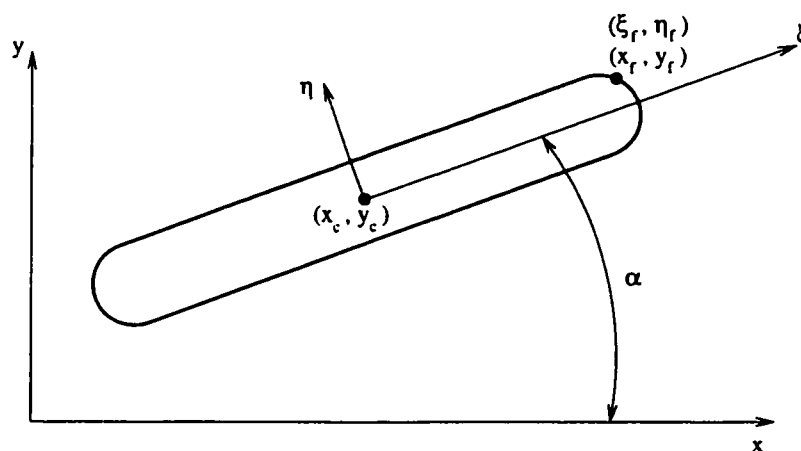


Figure 5.20 Problème d'optimisation : coordonnées d'un point sur la frontière

la plaque, dans le repère $x-y$. Dans un repère $\xi-\eta$ attaché à la plaque, ce même point a comme coordonnées (ξ_f, η_f) . La transformation d'un repère à l'autre s'obtient des expressions suivantes :

$$x_f = x_c + \xi_f \cos \alpha - \eta_f \sin \alpha \quad (5.88)$$

$$y_f = y_c + \xi_f \sin \alpha + \eta_f \cos \alpha \quad (5.89)$$

qui font intervenir l'angle α de la plaque et la position (x_c, y_c) de son centroïde. Pour obtenir $\partial x_f / \partial a_i$ et $\partial y_f / \partial a_i$, il suffit de différentier les équations (5.88) et (5.89) en suivant un point d'identité fixe, soit des coordonnées (ξ_f, η_f) constantes. À titre d'exemple, si on considère le paramètre y_c , alors on obtient :

$$\frac{\partial y_f}{\partial y_c} = 1 \quad (5.90)$$

Pour α on a plutôt :

$$\frac{\partial y_f}{\partial \alpha} = \xi_f \cos \alpha - \eta_f \sin \alpha \quad (5.91)$$

que l'on peut simplifier en utilisant l'équation (5.88) et ainsi obtenir :

$$\frac{\partial y_f}{\partial \alpha} = x_f - x_c \quad (5.92)$$

Notons que l'angle est exprimé en radians pour les calculs même si des résultats présentés ultérieurement utiliseront les degrés pour en faciliter l'interprétation.

5.3.4 Optimisation à un paramètre

Dans un premier temps, on maximise le transfert de chaleur en utilisant un seul degré de liberté, soit l'angle de la plaque. Son centroïde est fixé à $x_c = 0,55$ et $y_c = 1$, soit vis-à-vis le côté amont du bloc. L'angle de départ est fixé à 60° et la correction maximale admissible à 20° .

Avant de procéder à l'optimisation proprement dite, voyons le degré de précision numérique que l'on obtient. Le tableau 5.4 résume la séquence des résultats obtenus avec la méthodologie adaptative pour l'angle de départ. Comme on peut le constater, les fonctions objectif sont bien convergées par rapport au maillage alors que les gradients sont plus difficiles à obtenir avec précision, mais sont tout de même satisfaisants. Les variations observées entre les solutions sur les deux derniers maillages donnent une idée de l'erreur numérique de ces prédictions. Ainsi, on ne peut garantir une précision supérieure à 10^{-4} ou même 10^{-3} sur les fonctions objectif et leurs gradients. Dans un contexte d'optimisation, des corrections de cet ordre de grandeur sur $\mathcal{J}_1$ ou $\mathcal{J}_2$ et des gradients $\nabla \mathcal{J}_1$ ou $\nabla \mathcal{J}_2$ autour de ces valeurs signifieront que la poursuite de l'optimisation est inutile puisqu'elle ne répond qu'à du bruit ou de l'erreur numérique. Finalement, les deux fonctions objectif $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ sont en accord, ce qui indique que l'énergie est bien conservée. On peut donc utiliser l'une ou l'autre de façon équivalente. Dans la suite, l'optimisation se fera uniquement sur $\mathcal{J}_1$.

La séquence de designs obtenue avec l'algorithme d'optimisation est donnée dans le tableau 5.5. Les premières itérations ont été limitées par la correction maximale imposée de 20° . Il est inutile de poursuivre après l'itération 3 étant donné la précision numérique : la fonction $\mathcal{J}_1$ ne varie plus que de l'ordre de grandeur du bruit alors que son gradient très faible indique la proximité de l'optimum. À l'angle optimal obtenu, soit autour de 16° , le transfert de chaleur a augmenté d'environ 10% par rapport

Tableau 5.4 Problème d'optimisation : fonctions objectif et leurs gradients à $\alpha = 60^\circ$

nombre de noeuds	$\mathcal{J}_1$	$\mathcal{J}_2$	$\nabla \mathcal{J}_1$	$\nabla \mathcal{J}_2$
736	0,06274	0,06673	-0,00723	-0,00996
1346	0,06469	0,06410	0,00006	-0,00033
2775	0,06599	0,06598	-0,00790	-0,00770
5772	0,06741	0,06742	-0,01304	-0,01305
13 505	0,06837	0,06835	-0,01374	-0,01367
32 476	0,06891	0,06898	-0,01442	-0,01443

Tableau 5.5 Séquence d'optimisation à un paramètre

Itération	α	$\mathcal{J}_1$	$\nabla \mathcal{J}_1$
0	60,000	0,0689099	-0,0144212
1	40,000	0,0736174	-0,0112043
2	20,000	0,0757117	-0,0019027
3	15,917	0,0755710	-0,0003157

à l'angle de départ et de près de 25% par rapport à la configuration sans plaque (où $\mathcal{J}_1 = 0,06116$). Une autre tentative d'optimisation plus permissive au niveau des corrections admissibles (intervalle de confiance) a donné des résultats similaires, soit un angle optimal autour de 15° ou 16° .

Pour valider la valeur de l'angle optimal obtenu, on a calculé le transfert de chaleur $\mathcal{J}_1$ et sa sensibilité à différents angles α entre -15° et 90° . La figure 5.21 illustre les résultats obtenus. On constate d'abord que l'angle optimal semble effectivement se situer autour de 15° . De plus, les segments tangents tracés en utilisant les gradients calculés à partir des sensibilités semblent être en très bon accord avec la distribution de $\mathcal{J}_1$, ce qui valide les calculs de sensibilités. Notons que la courbe en traits pointillés ne fait que relier les points calculés, soit les petits cercles.

Finalement, la figure 5.22 compare la solution de l'écoulement et des sensibilités, soit plus précisément les isolignes de la norme de la vitesse et de la norme de la sensibilité

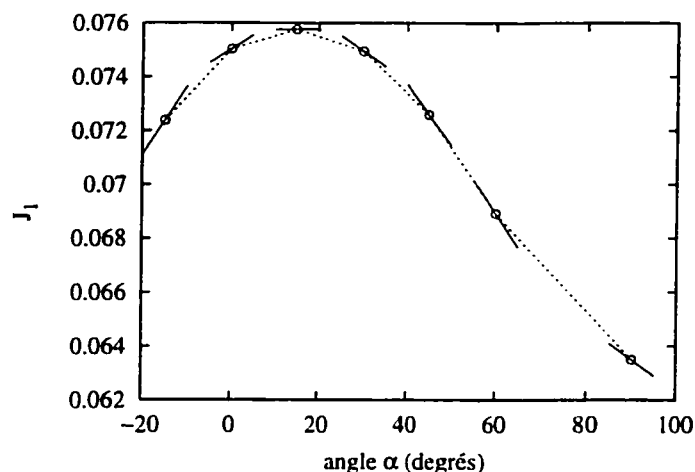


Figure 5.21 Problème d'optimisation : fonction objectif J_1 pour divers angles de la plaque

de la vitesse. Ces résultats sont à l'angle optimal. Comme on peut le constater, les distributions sont très différentes. En particulier, la distribution des sensibilités est très sévère avec des isolignes concentrées sur les bouts de la plaque. Les sensibilités de forme sont donc particulièrement élevées près de la paroi qui se déplace et surtout là où les gradients de la solution de l'écoulement sont élevés. Ce champ de sensibilité dépend donc fortement de la condition de Dirichlet sur la paroi et est donc difficile à obtenir avec précision. Enfin, le maillage est bien adapté à la solution et cet exemple illustre à nouveau l'importance de tenir compte des sensibilités pour l'adaptation.

5.3.5 Optimisation à trois paramètres

On tente ici d'améliorer le design en ajoutant deux degrés de liberté supplémentaires : x_c et y_c . Le point de design initial est le même que dans le cas précédent. Le tableau 5.6 résume la séquence obtenue. Notons que pour les itérations 0 à 6, on a utilisé des maillages plus grossiers de façon à s'approcher de l'optimum à coûts moindres. À

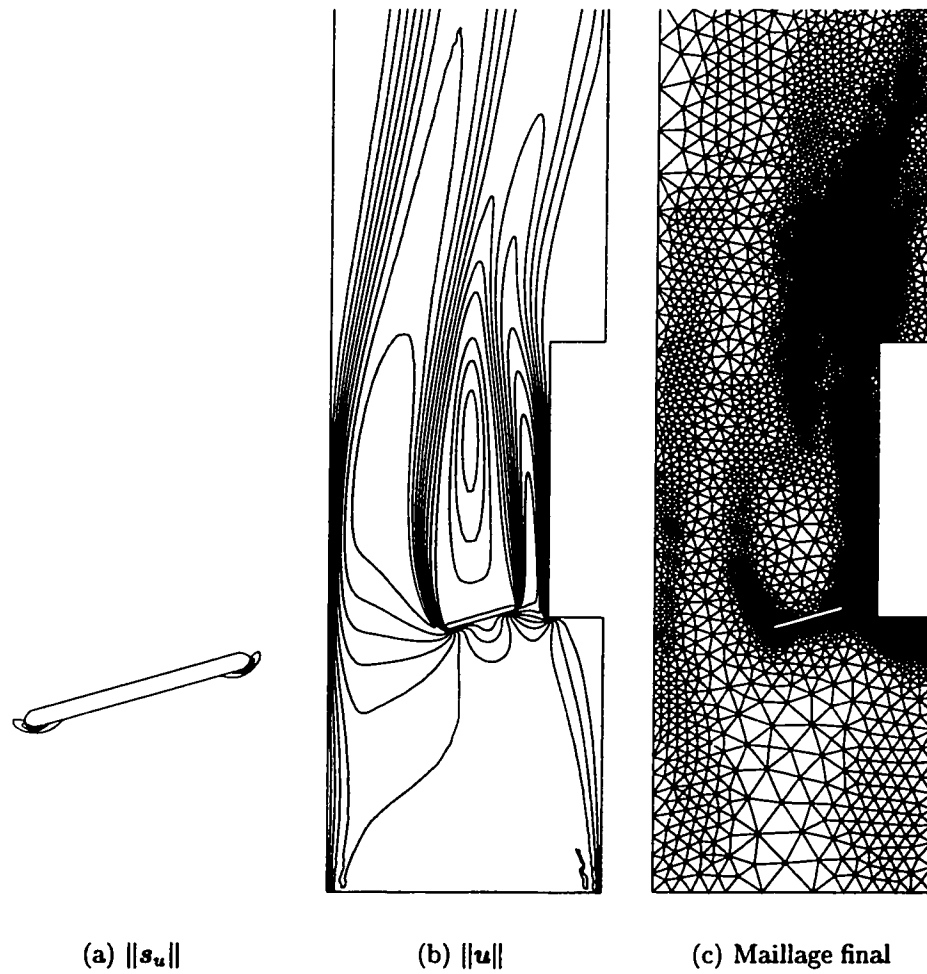


Figure 5.22 Problème d'optimisation : solution de l'écoulement vs des sensibilités

Tableau 5.6 Séquence d'optimisation à trois paramètres

Itération	x_c	y_c	α	$\mathcal{J}_1$	$\ \nabla \mathcal{J}_1\ $
0	0,550	1,000	60,00	0,06794	0,0297
1	0,458	1,263	53,68	0,06850	0,0192
2	0,504	1,132	56,84	0,06884	0,0194
3	0,453	1,166	51,33	0,06911	0,0182
4	0,444	1,193	47,20	0,07022	0,0180
5	0,441	1,231	38,90	0,07209	0,0149
6	0,426	1,274	30,71	0,07235	0,0241
7	0,443	1,325	22,97	0,07660	0,0129
8	0,429	1,338	6,46	0,07870	0,0086
9	0,413	1,331	-13,88	0,07842	0,0056
10	0,425	1,313	-3,62	0,07887	0,0043
11	0,433	1,270	-2,80	0,07931	0,0022
12	0,427	1,291	-3,34	–	–

partir de la septième itération, on utilise des séquences adaptatives complètes avec un maillage final d'environ 30 000 noeuds. On constate que la séquence d'itérations est moins stable que dans le cas précédent. Aussi, la précision numérique limitée finit par empêcher toute poursuite des itérations : les faibles variations du transfert de chaleur sont près du niveau d'erreur numérique. On a jugé inutile de résoudre la douzième itération étant donné les faibles variations des trois paramètres. De plus, à cette itération, les trois paramètres se sont repliés à des valeurs se situant entre celles des itérations 10 et 11. Notons que la norme du gradient de la fonction objectif décroît pour atteindre de faibles valeurs, indiquant la proximité de l'optimum. Le point optimal trouvé se situe autour de $x_c = 0,433$, $y_c = 1,270$ et $\alpha = -2,80^\circ$. La plaque s'est donc déplacée en aval et s'est légèrement distancée du bloc. Elle est aussi presque horizontale, bloquant ainsi le canal au maximum pour augmenter la vitesse locale de l'écoulement. Une étude intéressante consisterait à utiliser une fonction objectif qui maximise le transfert de chaleur mais en pénalisant la perte de pression dans le canal. Au point de design optimal, le transfert de chaleur est de

$\mathcal{J}_1 = 0,07931$, soit une augmentation d'environ 5% par rapport à l'optimisation à un seul paramètre.

Les isolignes de la température correspondant aux configurations sans plaque, avec plaque à angle optimisé et avec plaque à position et à angle optimisés sont tracées à la figure 5.23. L'ajout de la plaque a pour effet de réduire l'épaisseur de la couche limite thermique et donc d'augmenter le transfert de chaleur. En ne variant que l'angle, la couche limite est amincie près du coin amont alors que l'optimisation à trois paramètres agit plus loin sur le bloc.

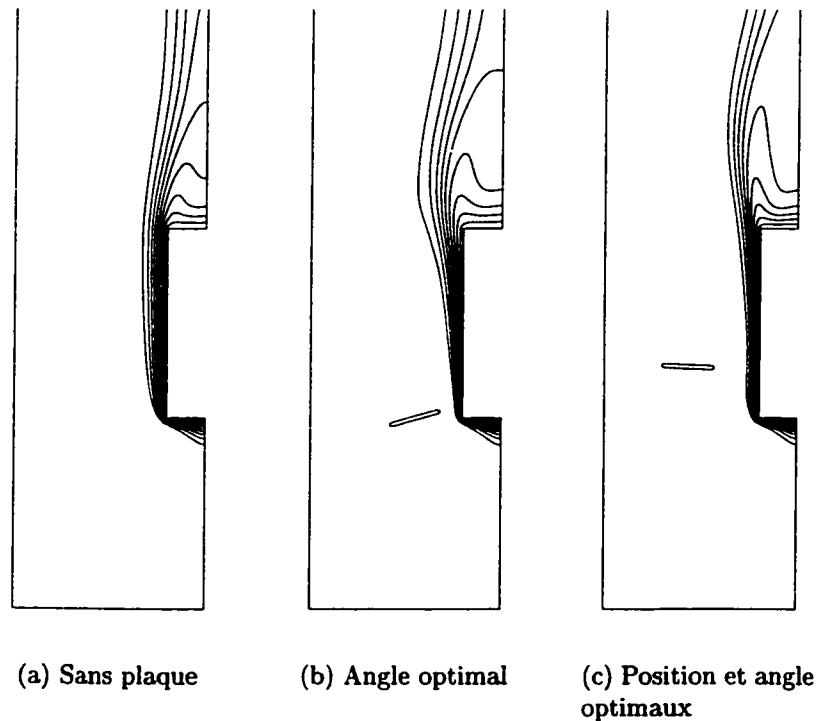


Figure 5.23 Problème d'optimisation : isolignes de la température

La figure 5.24 illustre autrement les différences entre les trois configurations. On y présente la dérivée normale de la température le long des trois faces du bloc. La

coordonnée curviligne z va de 0 à 0,2 sur la face du bas, de 0,2 à 1,2 sur le long côté et de 1,2 à 1,4 sur la face arrière. À la conductivité près, l'intégrale de ces courbes donne le transfert de chaleur $\mathcal{J}_1$. Sur la face amont, les trois solutions sont pratiquement identiques. Sur la face principale, l'ajout d'une plaque à $y_c = 1$ rend moins uniforme le transfert de chaleur : il a augmenté sur la partie amont, mais décroît plus rapidement pour atteindre un plus faible niveau qu'avant sur la dernière portion. Avec l'ajout de la translation de la plaque, on améliore le transfert de chaleur plus loin sur cette face principale et même sur la petite face arrière. Un maximum local apparaît à une position verticale près de celle de la plaque.

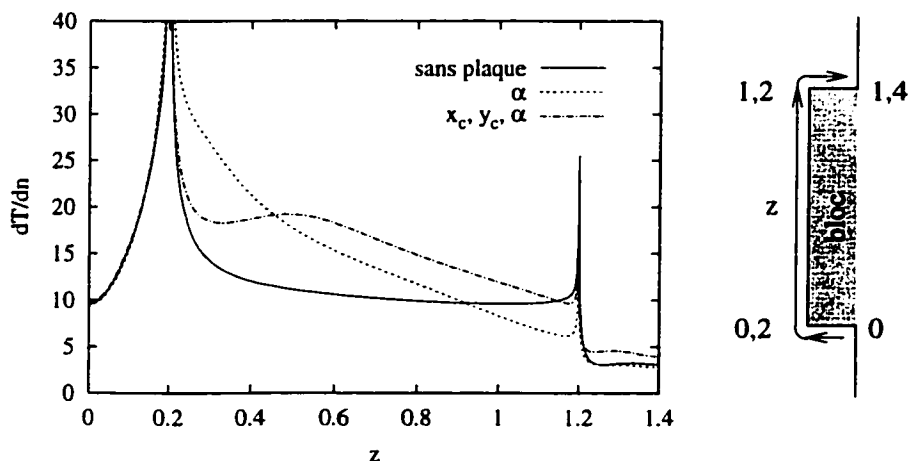


Figure 5.24 Problème d'optimisation : comparaison des flux sur le bloc

Globalement, les sensibilités se sont avérées utiles et efficaces pour ce problème d'optimisation. L'ajout d'une plaque déflectrice a permis d'augmenter significativement le transfert de chaleur, principalement en jouant sur son orientation. Sa position spatiale a eu moins d'impact.

5.4 Écoulement autour d'un profil NACA 0012

Cette dernière application en régime laminaire traite de l'écoulement autour d'un profil NACA 0012 avec un calcul de sensibilité par rapport à l'angle d'attaque α . Cet exemple montre qu'un paramètre de forme peut parfois être converti en paramètre de valeur. En outre, on insiste sur l'extrapolation linéaire de solutions voisines pour lesquelles un changement de comportement se produit : la séparation d'une couche limite et l'apparition d'une bulle de recirculation. On y examine en particulier les limites de l'extrapolation linéaire.

5.4.1 Description du problème

Le domaine rectangulaire s'étend sur 3 cordes en amont, 2,5 cordes en aval et 3 cordes au-dessus en dessous du profil. L'origine du système de coordonnées est placée au bord d'attaque. On considère un écoulement isotherme à un nombre de Reynolds de 2000 basé sur la corde c du profil et la vitesse u_∞ de l'écoulement à l'infini. Ce problème est formulé de façon adimensionnelle pour la résolution qui utilise en outre une méthode de stabilisation SUPG pour toutes les équations. Plutôt que de tourner le profil pour changer son angle d'attaque, on modifie la direction de l'écoulement incident, ce qui permet de traiter α comme un paramètre de valeur, donc avec plus de précision et de simplicité. En plus, les sensibilités résultantes sont plus faciles à interpréter : on pourra calculer la variation de la solution vue dans un repère fixe par rapport au profil. Ainsi, on impose en entrée (frontière amont à gauche) :

$$u = u_\infty \cos \alpha \quad (5.93)$$

$$v = u_\infty \sin \alpha \quad (5.94)$$

avec $u_\infty = 1$ pour faire une simulation adimensionnelle. Des conditions d'adhérence $u = v = 0$ s'appliquent sur les parois du profil alors que des contraintes horizontales et verticales nulles sont imposées sur les trois autres frontières externes.

Pour les sensibilités, on impose $s_u = s_v = 0$ sur le profil alors qu'en entrée les conditions de Dirichlet deviennent :

$$s_u = -u_\infty \sin \alpha \quad (5.95)$$

$$s_v = u_\infty \cos \alpha \quad (5.96)$$

par différentiation des conditions de l'écoulement. À l'infini (ou à l'entrée), les vecteurs vitesse des sensibilités sont donc perpendiculaires à l'écoulement. Des conditions de Neumann nulles s'appliquent sur les trois autres frontières externes. Enfin, toutes les sensibilités des propriétés physiques sont nulles.

5.4.2 Résultats

On insiste ici sur la séparation de la couche limite et la zone de recirculation correspondante. La figure 5.25 présente la ligne de courant ψ_0 pour divers angles d'attaque. Cette ligne de courant comprend les parois du profil, le point de stagnation près du bord d'attaque et le point de séparation de la couche limite sur l'extrados (s'il y a lieu). Une ligne qui ne se sépare du profil qu'au bord de fuite correspond à un écoulement attaché. Sur cette figure, on compare les vraies solutions aux extrapolations linéaires utilisant les sensibilités des solutions à 0° et 3° . L'écoulement symétrique à un angle d'attaque nul est attaché alors que la couche limite se détache pour les autres angles. À 6° , la séparation couvre presque la moitié de l'extrados.

Les extrapolations à partir de la solution symétrique attachée prédisent très bien

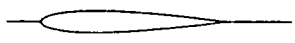
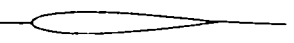
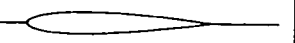
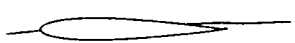
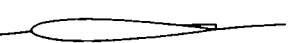
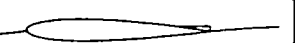
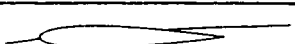
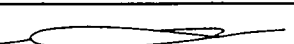
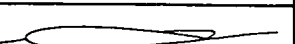
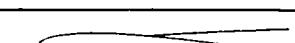
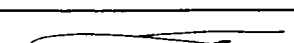
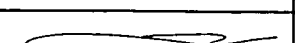
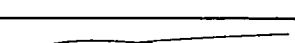
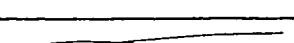
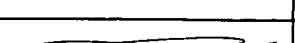
angle d'attaque	extrapolation de 0°	extrapolation de 3°	vraie solution
0°			
3°			
4°			
5°			
6°			

Figure 5.25 NACA 0012 laminaire : point de séparation (ligne de courant ψ_0)

la position du point de séparation, même à l'angle d'attaque le plus élevé. Ceci est excellent, voire même surprenant, étant donné les changements considérables dans la solution entre ces deux angles. Les sensibilités peuvent donc prédire la séparation à partir d'une solution attachée, soit un changement de comportement de l'écoulement. Cependant, la forme de la ligne de courant ψ_0 n'est pas très bien reproduite : elle ne se rattache pas au bord de fuite comme le fait la vraie solution, indiquant que la zone de recirculation n'est pas bien prédite par cette extrapolation.

Les extrapolations à partir de la solution à 3° sont globalement meilleures tant pour la position du point de séparation que pour la forme générale de cette ligne de courant. L'explication est fort simple : les perturbations $\Delta\alpha$ du paramètre sont plus faibles et donc l'extrapolation linéaire est plus fiable. En effet, les écarts observés entre les extrapolations et les vraies solutions sont dues à l'erreur de troncature de la série de Taylor et non aux erreurs numériques des solutions de l'écoulement ou des sensibilités. Ainsi, l'extrapolation de 3° à 4° est excellente. Finalement, notons que l'extrapolation de 3° à 0° a réussi à éliminer la séparation. Par contre, la solution n'est pas parfaitement symétrique.

On soupçonnait d'après la figure 5.25 une mauvaise extrapolation de la zone de recirculation, à tout le moins pour de grandes perturbations de α . La figure 5.26 s'attarde à cet aspect : on y compare les extrapolations et vraies solutions des lignes de courant dans le voisinage de la zone de recirculation. Les solutions à un angle donné sont à la même échelle, mais les échelles diffèrent d'un angle à l'autre. Comme on peut le constater, les extrapolations ne sont bonnes que pour de faibles perturbations de l'angle d'attaque, comme de 3° à 4° . L'extrapolation de 0° à 6° , par exemple, ne produit même pas de recirculation en boucle fermée. Le phénomène de recirculation n'est vraisemblablement pas une fonction linéaire de α . La technique d'extrapolation linéaire demeure néanmoins intéressante pour prédire à faibles coûts des changements modérés dans les conditions de vol.

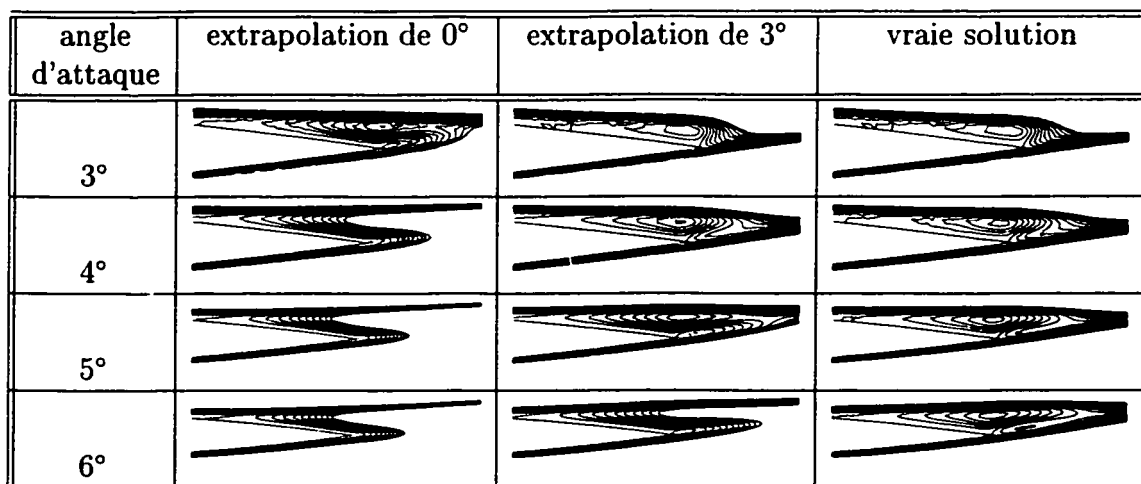


Figure 5.26 NACA 0012 laminaire : recirculation

Afin d'illustrer la non-linéarité de la vitesse face à l'angle d'attaque dans ou près de la zone de recirculation, les figures 5.27 à 5.29 montrent l'évolution de la composante horizontale de la vitesse avec α à trois positions au-dessus du profil à 80% de la corde : $y/c = 0,05, 0,1$ et $0,15$. À $y = 0,05c$, on observe une quasi-linéarité. Par contre, en s'éloignant du profil, les non-linéarités sont plus prononcées. Ceci est en

accord avec les difficultés d'extrapolation linéaire observées.

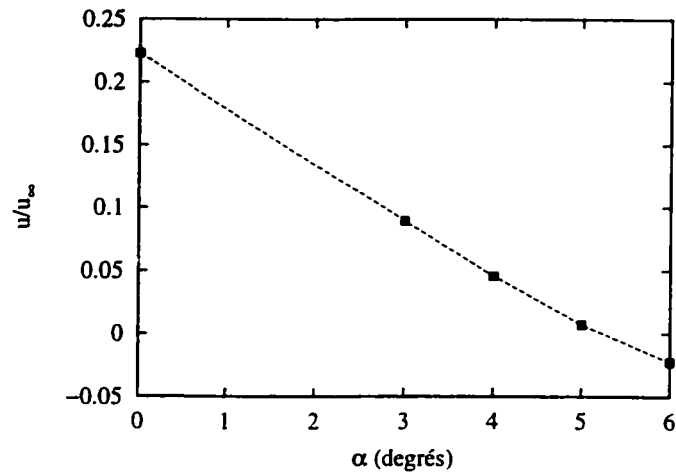


Figure 5.27 NACA 0012 laminaire : u/u_∞ à $x = 0,8c$ et $y = 0,05c$ pour divers angles d'attaque α

D'autres résultats sur l'écoulement autour d'un profil NACA 0012 sont présentés au chapitre suivant qui traite des écoulements turbulents.

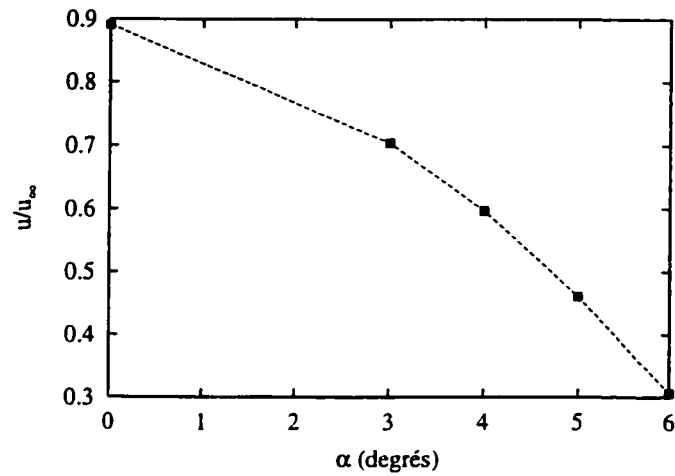


Figure 5.28 NACA 0012 laminaire : u/u_∞ à $x = 0,8c$ et $y = 0,1c$ pour divers angles d'attaque α

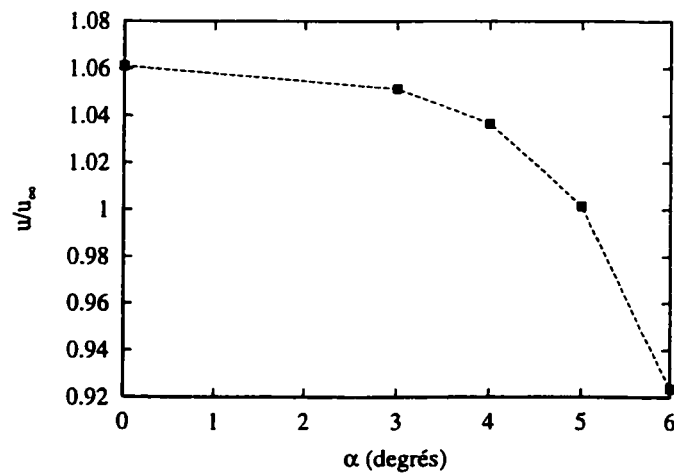


Figure 5.29 NACA 0012 laminaire : u/u_∞ à $x = 0,8c$ et $y = 0,15c$ pour divers angles d'attaque α

CHAPITRE 6

APPLICATIONS EN RÉGIME TURBULENT

Ce chapitre est consacré aux applications de la méthodologie en régime turbulent, sans transfert de chaleur et pour des paramètres de valeur. En premier, on considère un problème possédant une solution analytique et permettant ainsi de vérifier l'implantation du code. La seconde application traite de l'écoulement sur une plaque plane à incidence nulle. Les calculs de sensibilités couvrent un grand nombre de paramètres de design. Pour terminer, on considère l'écoulement autour d'un profil NACA 0012.

On met surtout l'accent sur la vérification, la démonstration du bon fonctionnement de la méthodologie et de l'efficacité des sensibilités à accomplir diverses tâches dans diverses situations plutôt que sur les complexités géométriques ou de la physique des écoulements. À travers ces applications, on illustre de nombreux usages des sensibilités.

6.1 Vérification : couche cisailée analytique

6.1.1 Description du problème

Cette première application en régime turbulent sert à vérifier le code, tant pour l'écoulement que pour les sensibilités. Tout comme dans le chapitre précédent en régime laminaire, on se construit une solution analytique artificielle et on ajoute

les termes sources appropriés dans les équations aux dérivées partielles. La solution choisie est celle étudiée par Ilinca [93] qui s'est inspiré de Schlichting [125], soit :

$$u = U_1 \left[\left(\frac{1+r}{2} \right) + \left(\frac{1-r}{2} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{\sigma y}{x} \right) \right] \quad (6.1)$$

$$v = U_1 \left(\frac{1-r}{2} \right) \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\sigma y}{x} \right)^2} \quad (6.2)$$

$$p = 0 \quad (6.3)$$

$$k = k_0 \left[c_k + e^{-\left(\frac{\sigma y}{x} \right)^2} \right] \quad (6.4)$$

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{x} \left[c_k + e^{-\left(\frac{\sigma y}{x} \right)^2} \right] \quad (6.5)$$

$$\mu_t = \mu_{t_0} x \left[c_k + e^{-\left(\frac{\sigma y}{x} \right)^2} \right] \quad (6.6)$$

où :

$$k_0 = \frac{343}{75\,000} U_1^2 (1-r) \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \quad (6.7)$$

$$\epsilon_0 = \frac{343}{22\,500} C_\mu U_1^3 (1-r)^2 \frac{\sigma^2}{\pi} \quad (6.8)$$

$$\mu_{t_0} = \frac{343}{250\,000} \rho U_1 \quad (6.9)$$

$$c_k = \frac{10^{-4}}{k_0} \quad (6.10)$$

et enfin :

$$\begin{aligned} U_1 &= 1 & r &= 0,3 & \sigma &= 13,5 \\ \mu &= 10^{-4} & \rho &= 1 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Cette solution se rapproche d'une couche cisailée, c'est-à-dire la rencontre de deux couches de fluide ayant des vitesses différentes. La vitesse de la couche supérieure est de U_1 (à l'infini) alors que celle de la couche du bas tend vers rU_1 , plus faible que U_1 .

Le domaine est un rectangle dont les coins inférieur gauche et supérieur droit sont respectivement aux coordonnées $(100, -75)$ et $(300, 75)$. On impose des conditions de Dirichlet sur toutes les frontières et toutes les variables $(u, v, \mathcal{K}$ et $\mathcal{E})$, sauf sur la frontière du bas où la contrainte normale est mise à zéro pour l'équation de v .

Au calcul de l'écoulement s'ajoute un calcul de sensibilités. Le paramètre de design considéré est U_1 , soit la vitesse de la couche de fluide rapide qui affecte également la vitesse de l'autre couche et toute la solution. Il s'agit d'un paramètre de valeur. En différentiant la solution exacte de l'écoulement par rapport à U_1 , on obtient la solution exacte suivante pour les sensibilités :

$$s_u = \left(\frac{1+r}{2} \right) + \left(\frac{1-r}{2} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{\sigma y}{x} \right) \quad (6.12)$$

$$s_v = \left(\frac{1-r}{2} \right) \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\sigma y}{x} \right)^2} \quad (6.13)$$

$$s_p = 0 \quad (6.14)$$

$$s_k = \frac{2k_0}{U_1} e^{-\left(\frac{\sigma y}{x} \right)^2} \quad (6.15)$$

$$s_\epsilon = \frac{\epsilon_0}{U_1 x} \left[c_k + 3e^{-\left(\frac{\sigma y}{x} \right)^2} \right] \quad (6.16)$$

$$\mu'_t = \frac{\mu_{t0} x}{U_1} \left[-c_k + e^{-\left(\frac{\sigma y}{x} \right)^2} \right] \quad (6.17)$$

De plus, toutes les sensibilités des propriétés physiques et des coefficients de fermeture du modèle $k - \epsilon$ sont nulles. Finalement, des conditions de Dirichlet s'appliquent partout, sauf sur la frontière du bas où on a une condition de Neumann nulle pour l'équation de s_v .

6.1.2 Résultats

La première série de simulations utilise une formulation stabilisée GLS pour toutes les équations. L'algorithme adaptatif vise à réduire l'erreur par un facteur 2 pour les normes en vitesse, $\mathcal{K}$, $\mathcal{E}$, μ_t et leurs sensibilités respectives.

La figure 6.1 illustre sommairement la solution, soit les isolignes de la vitesse horizontale u et du logarithme de l'énergie cinétique de la turbulence $\mathcal{K}$. Le comportement général est une forme conique des isolignes : la couche cisailée est centrée verticalement et s'épaissit selon x .

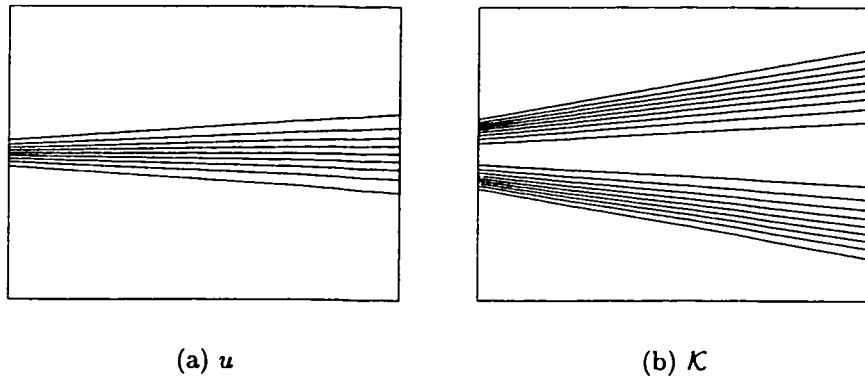


Figure 6.1 Couche cisailée : solution

Les figures 6.2 et 6.3 montrent l'évolution des normes de l'erreur de l'écoulement et des sensibilités avec l'adaptation du maillage. Rappelons que les variables de calcul pour la turbulence sont les variables logarithmiques, de sorte que l'erreur est calculée pour ces dernières et non pour k et ϵ . Ces graphiques contiennent à la fois les estimations d'erreur et les erreurs vraies pour permettre la comparaison. On voit clairement que toutes les erreurs décroissent avec le raffinement du maillage, confirmant que la solution numérique tend vers la solution exacte des équations aux

Tableau 6.1 Couche cisailée : erreurs relatives sur le maillage final

	u, s_u	$\mathcal{K}, s_{\mathcal{K}}$	$\mathcal{E}, s_{\mathcal{E}}$	μ_t, μ'_t
écoulement	$5,0 \times 10^{-4}$	$8,5 \times 10^{-4}$	$8,7 \times 10^{-4}$	$1,6 \times 10^{-4}$
sensibilités	$5,5 \times 10^{-4}$	$2,6 \times 10^{-3}$	$2,6 \times 10^{-3}$	$2,7 \times 10^{-4}$

dérivées partielles de l'écoulement et des sensibilités. Le taux de décroissance des erreurs est également en accord avec le schéma numérique utilisé. Le résolveur est donc vérifié par cet exercice mathématique.

Pour mieux juger du haut niveau de précision, le tableau 6.1 donne les erreurs relatives vraies sur le maillage final de 54 027 noeuds. Toutes les variables sont très précises, l'erreur maximale étant inférieure à 0,3%. Il ne faudra cependant pas s'attendre à obtenir de tels niveaux de précision sur des applications pratiques qui auront des solutions beaucoup plus complexes avec des variations plus sévères.

Les figures 6.2 et 6.3 montrent aussi que les estimations d'erreur sont très près des erreurs vraies, particulièrement pour les maillages plus raffinés. Seule la prédiction d'erreur sur μ'_t est moins précise. Pour confirmer la performance de l'estimateur d'erreur, les figures 6.4 et 6.5 présentent l'évolution des indices d'efficacité avec le raffinement adaptatif. Ces indices d'efficacité sont d'au moins 95% pour toutes les normes sur le maillage final, sauf pour μ'_t où il se situe à environ 75%. Néanmoins, cette dernière solution est très précise, son erreur relative étant même d'un ordre de grandeur inférieur à celles de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$ (voir le tableau 6.1). En conclusion, l'estimateur d'erreur et son implantation sont vérifiés et peuvent maintenant être utilisés avec confiance.

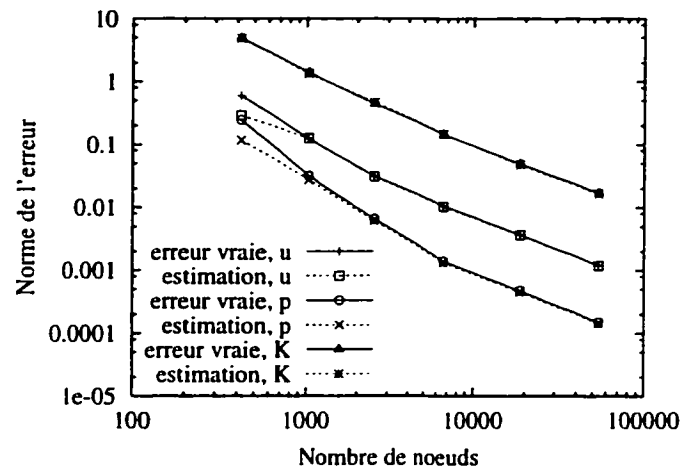
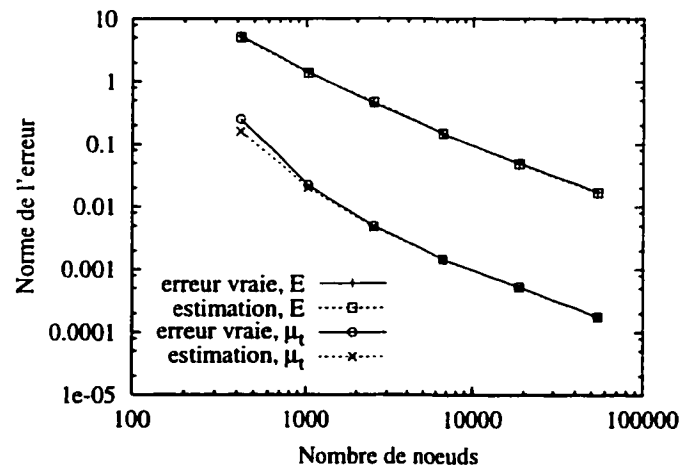
(a) u, p, K (b) E, μ_t

Figure 6.2 Couche cisailée : trajectoires des erreurs pour l'écoulement

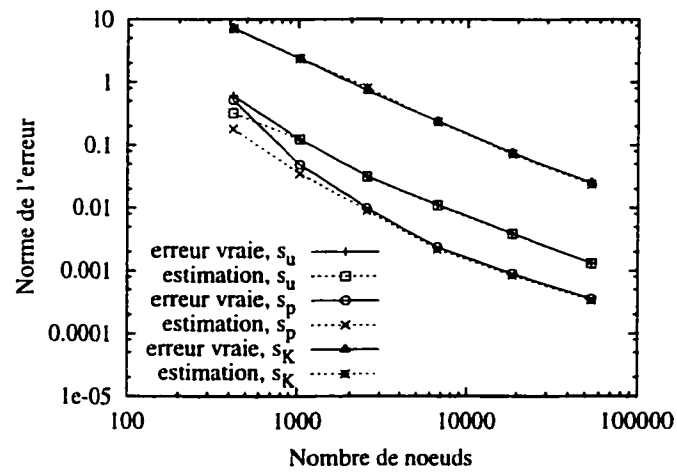
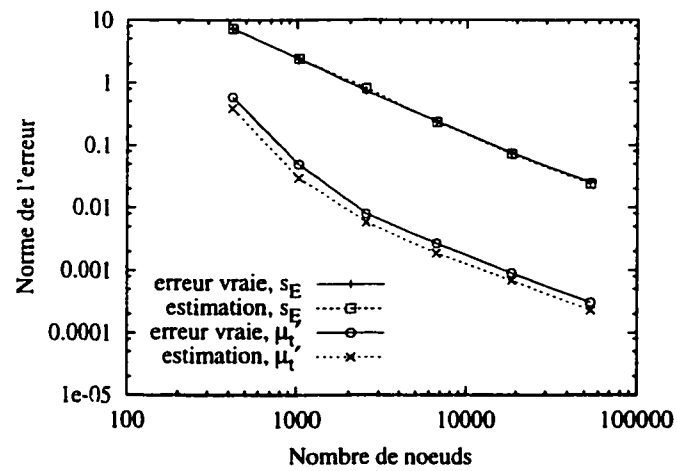
(a) s_u, s_p, s_K (b) s_E, μ'_t

Figure 6.3 Couche cisailée : trajectoires des erreurs pour les sensibilités

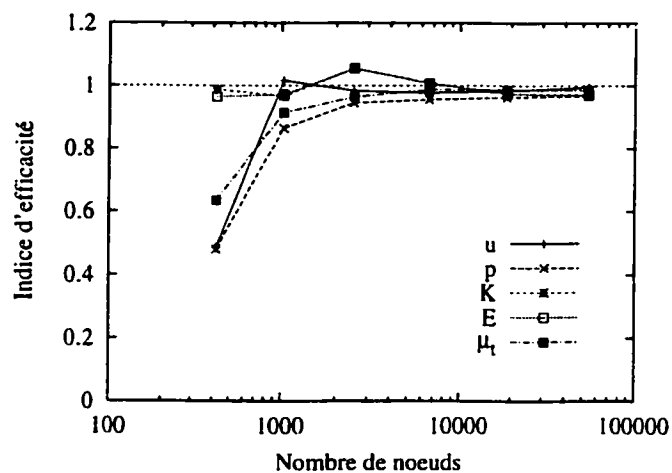


Figure 6.4 Couche cisailée : trajectoires des indices d'efficacité pour l'écoulement

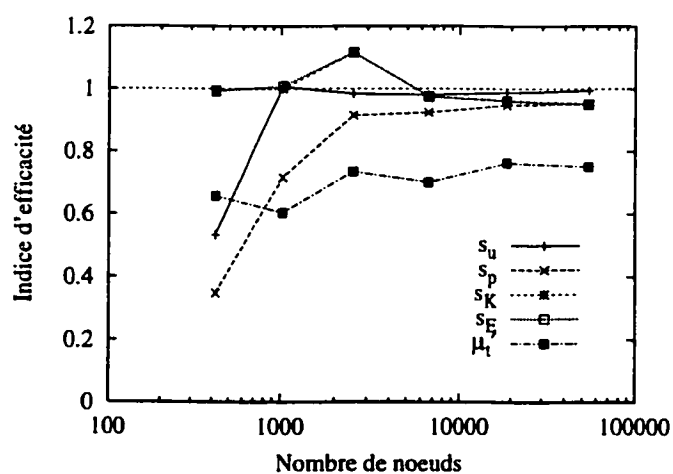


Figure 6.5 Couche cisailée : trajectoires des indices d'efficacité pour les sensibilités

6.1.3 Effets de la technique de stabilisation

Les calculs précédents ont utilisé une méthode de stabilisation GLS. Ceci permet de réduire les oscillations dans la solution et de faciliter la convergence pour des problèmes dominés par la convection (un nombre de Reynolds élevé), ce qui est le cas ici. Dans cette section, on reprend les calculs en utilisant une formulation Galerkin standard, ce qui permet de vérifier cette formulation non stabilisée et par le fait même la comparer à la formulation stabilisée GLS. En fait, on utilise une formulation Galerkin pour toutes les équations sauf celles de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$ de l'écoulement où on a dû utiliser une formulation GLS pour arriver à converger. Tous les autres paramètres du problème demeurent inchangés et on refait une nouvelle séquence adaptative complète.

Les figures 6.6 et 6.7 comparent les isolignes de s_v et s_κ sur les maillages adaptés #1 et #2. Comme on peut le constater, les solutions avec la formulation GLS sont plus lisses qu'avec la formulation Galerkin. Plus de bruit et d'oscillations sont présents dans les solutions non stabilisées. Cependant, lorsqu'on poursuit le raffinement du maillage, les différences s'amenuisent et les deux solutions deviennent très précises. Il est donc possible d'obtenir des solutions de bonne qualité avec la méthode de Galerkin, mais avec plus de noeuds. L'approche GLS est donc avantageuse.

Les figures 6.8 et 6.9 comparent les maillages obtenus avec les deux formulations. Le maillage initial est très grossier avec ses 419 noeuds répartis assez uniformément. Par la suite, les maillages Galerkin sont beaucoup moins *propres*, avec des poches ou irrégularités de concentration qui ne sont pas liées à la physique du problème. En particulier, on note une concentration d'éléments dans la partie supérieure où la vitesse est la plus élevée mais pourtant presque uniforme, et donc qui ne nécessite pas de maillage raffiné. On gaspille donc des degrés de liberté à cet endroit. Les

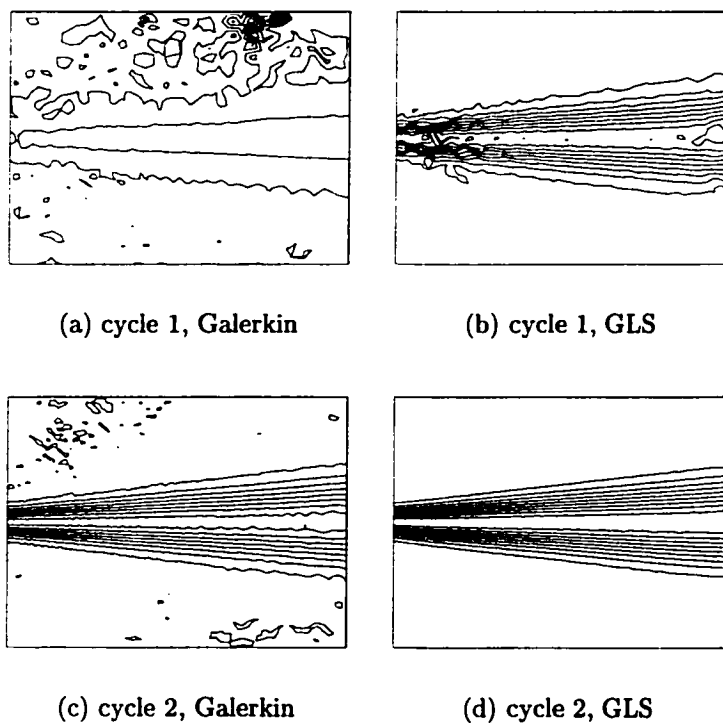


Figure 6.6 Couche cisailée : comparaison des isolignes de s_v entre les formulations Galerkin et GLS

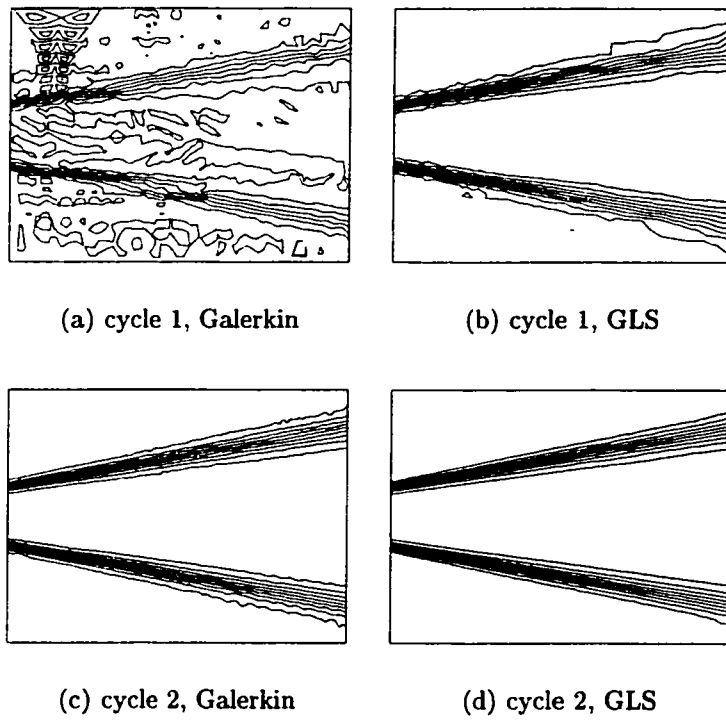


Figure 6.7 Couche cisailée : comparaison des isolignes de s_K entre les formulations Galerkin et GLS

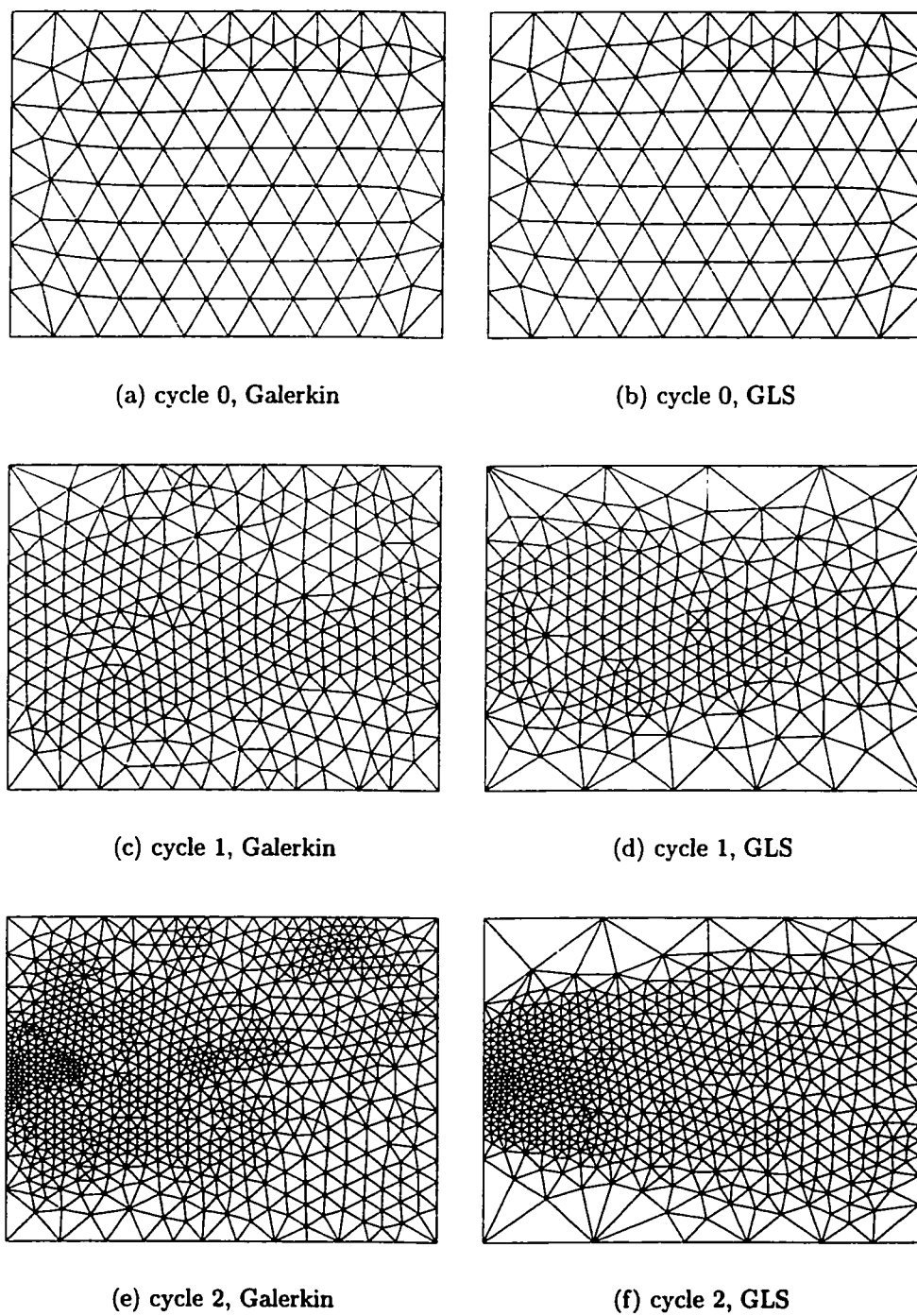
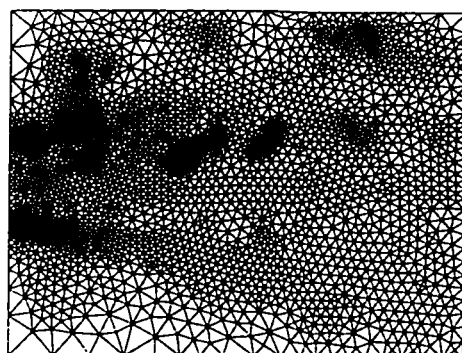
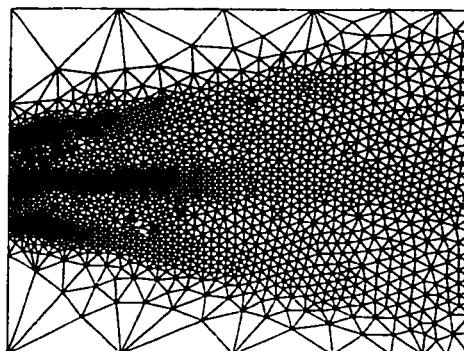


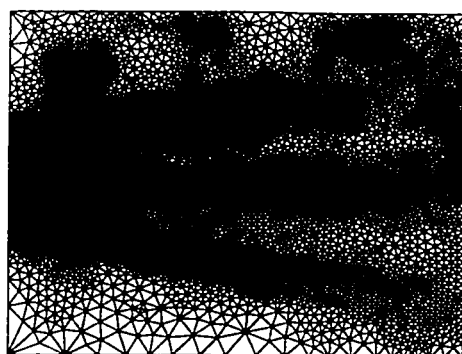
Figure 6.8 Couche cisailée : comparaison des maillages entre les formulations Galerkin et GLS — cycles adaptatifs 0 à 2



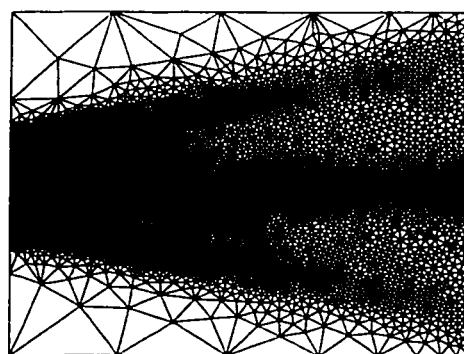
(a) cycle 3, Galerkin



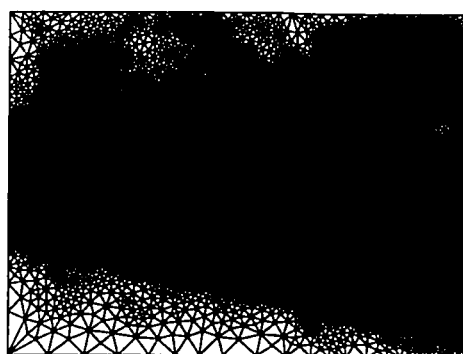
(b) cycle 3, GLS



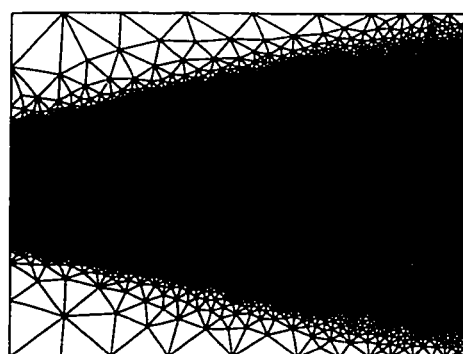
(c) cycle 4, Galerkin



(d) cycle 4, GLS



(e) cycle 5, Galerkin



(f) cycle 5, GLS

Figure 6.9 Couche cisailée : comparaison des maillages entre les formulations Galerkin et GLS — cycles adaptatifs 3 à 5

concentrations irrégulières dans le maillage proviennent des oscillations ou irrégularités dans la solution numérique (figures 6.6 et 6.7). Les maillages GLS sont très bien adaptés à la solution alors que ceux de Galerkin sont moins bons mais acceptables. Les maillages GLS s'adaptent plus rapidement à la solution.

Une dernière vérification de la solution obtenue avec la méthode de Galerkin consiste à regarder l'évolution des normes de l'erreur avec le raffinement du maillage, tel que le présentent les figures 6.10 et 6.11. Ces erreurs décroissent régulièrement pour atteindre de faibles niveaux. La solution de l'écoulement et des sensibilités converge donc vers la solution exacte. Cependant, on constate que les erreurs avec la formulation Galerkin sont globalement plus élevées qu'avec la méthode GLS.

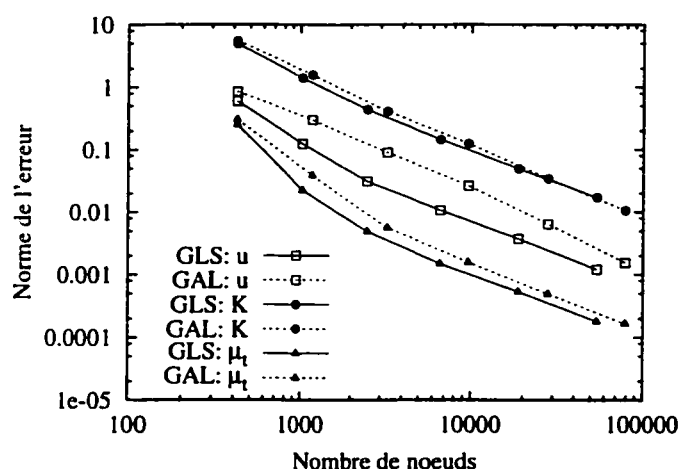


Figure 6.10 Couche cisailée : comparaison des erreurs sur l'écoulement entre les formulations Galerkin et GLS

6.1.4 Conclusion

En conclusion, ce cas test analytique a permis de vérifier l'implantation de la méthodologie en régime turbulent. Il a aussi illustré les gains significatifs attribuables

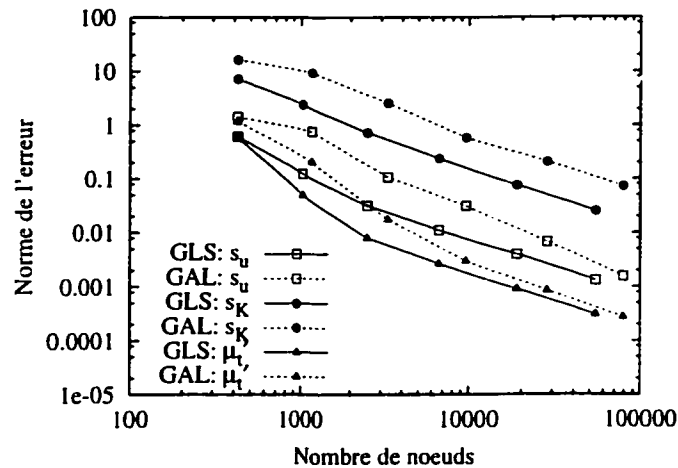


Figure 6.11 Couche cisailée : comparaison des erreurs sur les sensibilités entre les formulations Galerkin et GLS

à la stabilisation.

Pour l'écoulement, ce cas test est complet dans la mesure où il active tous les termes des équations aux dérivées partielles. Malheureusement, une application particulière de calcul de sensibilités désactive plusieurs termes des équations générales. Ainsi, le fait d'avoir vérifié le calcul de sensibilité par rapport à U_1 ne garantit pas qu'il n'y a pas d'erreur dans l'implantation pour d'autres paramètres qui font intervenir d'autres termes. Il est cependant impensable de vérifier toutes les combinaisons possibles en construisant pour chacun une solution analytique. Certains paramètres ont déjà été testés en régime laminaire, dont des paramètres de forme et de propriétés physiques. Une vérification d'un calcul de sensibilité par rapport à C_2 sur une problème avec solution analytique est également donné dans [126]. Une composante importante n'a toutefois pas été mise à l'épreuve jusqu'ici : les lois de parois. On retrouve dans [127] une telle vérification (incluant les sensibilités) sur un cas avec solution analytique simple. Des calculs de sensibilités pour d'autres paramètres seront vérifiées dans le reste du chapitre par comparaison entre l'extrapolation d'une solution voisine et le

calcul de cette solution.

Maintenant que les vérifications nécessaires ont été effectuées avec succès, on peut passer à des applications réelles.

6.2 Écoulement sur une plaque plane

6.2.1 Description du problème

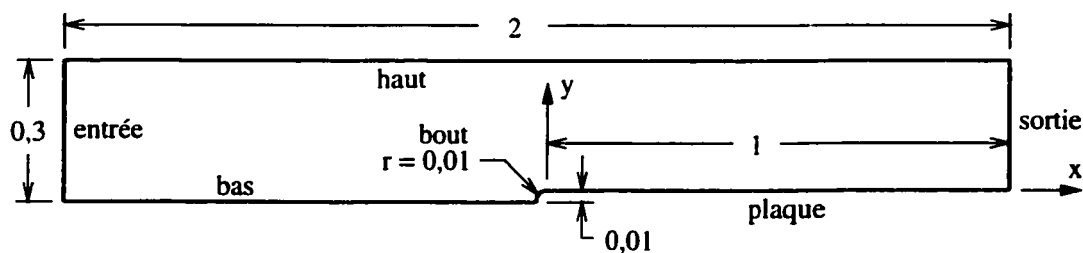


Figure 6.12 Plaque plane : domaine

Cette section traite de l'écoulement sur une plaque plane à incidence nulle où une couche limite turbulente se développe. Le choix de la géométrie et des conditions aux limites s'inspire d'une étude détaillée de Lacasse *et al.* [106]. La figure 6.12 illustre le domaine adimensionnel utilisé, la longueur de référence étant la longueur de la plaque. Cette plaque possède une épaisseur finie et un bord d'attaque arrondi pour être plus réaliste, permettant ainsi de bien amorcer la couche limite en générant un bon niveau de turbulence. Les conditions aux limites pour le calcul de l'écoulement

sont les suivantes :

$$\text{entrée : } u = \tilde{U}_\infty, \quad v = 0, \quad k = 10^{-6}, \quad \epsilon = 1,8 \times 10^{-8} \quad (6.18)$$

$$\text{haut : } u = \tilde{U}_\infty, \quad -p + 2\mu_e \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0 \quad (6.19)$$

$$\text{sortie : } -p + 2\mu_e \frac{\partial u}{\partial x} = \mu_e \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0 \quad (6.20)$$

$$\text{bas : } v = \mu_e \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0 \quad (6.21)$$

$$\text{plaque et bout : } \text{loi de paroi avec } d = 0,0009 \quad (6.22)$$

où μ_e est la viscosité effective, soit $\mu + \mu_t$. La vitesse adimensionnelle à l'infini $\tilde{U}_\infty$ est définie par :

$$\tilde{U}_\infty = \frac{U_\infty}{U_r} \quad (6.23)$$

où U_∞ est la vitesse à l'infini et U_r la vitesse de référence. Aux conditions nominales on prend $U_\infty = U_r$, soit $\tilde{U}_\infty = 1$. À des conditions voisines, $\tilde{U}_\infty$ sera différent de 1. On ne réadimensionnalise donc pas le problème pour un changement de la vitesse à l'infini. De la même façon, le nombre de Reynolds, basé sur la longueur de la plaque et la vitesse de référence constante U_r , est fixé à 2×10^6 peu importe $\tilde{U}_\infty$. Pour cette simulation adimensionnelle, la viscosité est fixée à $1/\text{Re}$ alors que la masse volumique est unitaire. Notons enfin que la viscosité turbulente en entrée est dix fois plus élevée que la viscosité moléculaire.

Dans les sections suivantes, on présente les résultats de trois séries de calcul de sensibilités qui considèrent respectivement les paramètres suivants :

- vitesse à l'infini $\tilde{U}_\infty$;
- coefficients de fermeture du modèle de turbulence, soit C_μ , C_1 , C_2 , σ_k et σ_ϵ ;
- coefficients qui interviennent dans les lois de paroi, soit d , κ et E .

On y démontre la diversité des utilisations potentielles des sensibilités, soit par exemple :

- prédiction du taux de changement de la solution avec les paramètres ;
- extrapolation de solutions voisines ;
- détermination des limites de l'extrapolation linéaire pour C_f et y^+ ;
- analyse d'incertitude ;
- changements requis des paramètres pour rattraper les corrélations ;
- analyse de sensibilité ;
- analyse des modèles de turbulence et de loi de paroi.

Les résultats se concentrent principalement sur le coefficient de friction, pour lequel on dispose de corrélations empiriques. À la fin, on regroupe les résultats des divers paramètres pour une analyse de sensibilité globale. Des études de raffinement de maillage servent à démontrer la précision numérique des solutions. On vérifie également les calculs de sensibilités en comparant les extrapolations linéaires au calcul de ces solutions voisines.

6.2.2 Sensibilité à $\tilde{U}_\infty$

Le premier paramètre étudié est la vitesse à l'infini $\tilde{U}_\infty$. Voyons d'abord les résultats de l'écoulement, puis ceux des sensibilités.

6.2.2.1 Prédiction de l'écoulement

La figure 6.13 montre l'évolution de la distribution du coefficient de friction C_f sur la plaque avec le raffinement adaptatif du maillage. Le coefficient de friction est basé

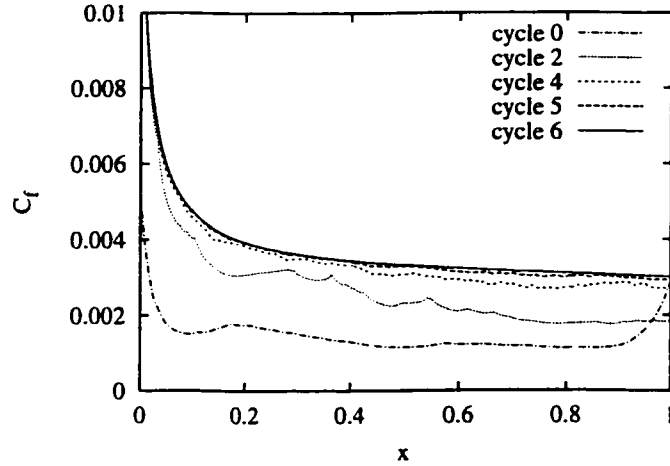


Figure 6.13 Plaque plane : convergence de C_f avec le maillage

sur U_r et non sur U_∞ , soit :

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U_r^2} = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \tilde{U}_\infty^2 \quad (6.24)$$

où τ est le cisaillement sur la plaque. Pour cette configuration nominale, cela ne fait aucune différence puisque $U_\infty = U_r$. Par contre, pour des solutions voisines où $\tilde{U}_\infty \neq 1$, on désire que les changements de C_f correspondent à des changements de cisaillement et non à un changement de mise à l'échelle. C'est ce qu'on obtient ici puisque $\frac{1}{2}\rho U_r^2$ est une constante. Comme on peut le constater sur cette figure, les écarts de prédictions sont prononcés entre les premiers et les derniers maillages. Cependant, la solution ne varie presque plus entre les deux derniers maillages, confirmant que C_f est convergé par rapport au maillage et donc numériquement précis. Notons qu'ici τ est évalué à partir de la loi de paroi (équation (3.17)) au lieu des dérivées de l'écoulement au bord, cette dernière approche étant moins précise.

La figure 6.14 montre que y^+ est lui aussi convergé par rapport au maillage. Ceci est important dans la mesure où la condition aux limites en dépend et doit elle-même

être précise puisqu'elle affecte grandement toute la solution. Les valeurs de y^+ sont partout dans la plage de validité, soit $[30, 300]$.

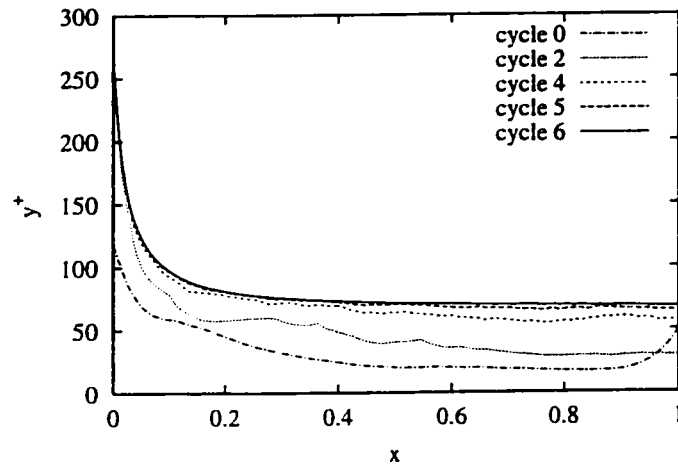


Figure 6.14 Plaque plane : convergence de y^+ avec le maillage

La figure 6.15 compare la prédiction de C_f (sur le maillage le plus raffiné) aux trois corrélations suivantes :

$$C_f = 0,0592 (\text{Re } x)^{-0,2} \tilde{U}_\infty^{1,8} \quad (\text{Schlichting [125]}) \quad (6.25)$$

$$C_f = \frac{0,455 \tilde{U}_\infty^2}{\ln^2(0,06 \text{Re}_x)} \quad (\text{White [128]}) \quad (6.26)$$

$$C_f = 0,37 \tilde{U}_\infty^2 (\log \text{Re}_x)^{-2,584} \quad (\text{Schultz-Grunow [129]}) \quad (6.27)$$

où :

$$\text{Re}_x = \text{Re } x \tilde{U}_\infty$$

et x est la distance le long de la plaque. Dans l'ensemble, l'accord est assez bon. La prédiction est inférieure aux corrélations sauf près du bord d'attaque. Il faut dire que les corrélations ne sont pas valides aux très faibles valeurs de Re_x près du

bord d'attaque. En plus, les simulations font l'hypothèse que la couche limite est pleinement turbulente alors qu'en pratique il risque plutôt d'y avoir une transition laminaire/turbulent. Pour $x > 0,03$, l'écart maximum est de 15% par rapport à la corrélation de White et de 10% par rapport à celle de Schultz-Grunow. Comme on a démontré le haut niveau de précision numérique de la solution, ces écarts doivent être attribués aux lacunes de la modélisation et non aux erreurs numériques.

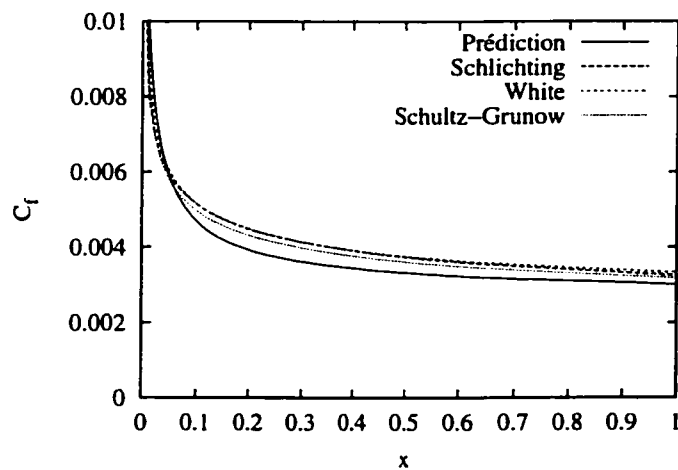


Figure 6.15 Plaque plane : comparaison de C_f avec les corrélations

6.2.2.2 Prédiction des sensibilités

Au calcul de l'écoulement s'ajoute un calcul de sensibilités par rapport à $\tilde{U}_\infty$. Dans ce cas, la sensibilité du coefficient de friction est donnée par :

$$C'_f = \frac{\partial C_f}{\partial \tilde{U}_\infty} = \frac{\tau'}{\frac{1}{2}\rho U_\tau^2} \quad (6.28)$$

Rappelons que U_τ est insensible à quelque paramètre que ce soit. La prédiction de τ' se calcule de l'équation (3.35) et fait intervenir les sensibilités des variables

de l'écoulement. La figure 6.16 présente la convergence de C_f' avec les cycles de raffinement adaptatif. Tout comme pour l'écoulement, on atteint la convergence par rapport au maillage avec de très faibles variations de la solution entre les deux derniers maillages. Tel que prévu, C_f' a une forme similaire à C_f et un signe positif. À une augmentation de la vitesse correspond une augmentation du cisaillement, cette augmentation étant d'autant plus grande que le cisaillement est déjà élevé.

La sensibilité de y^+ est également convergée par rapport au maillage, tel qu'illustré à la figure 6.17. Un signe positif indique qu'une augmentation de $\tilde{U}_\infty$ produit une augmentation de y^+ . Ceci est logique puisque la couche limite s'amincit avec une augmentation de $\tilde{U}_\infty$ et donc la position de la frontière de calcul, qui est à une distance constante d , se trouve plus haut dans la couche limite, soit à un y^+ plus élevé. Ces sensibilités indiquent aussi que si $\tilde{U}_\infty$ descend en-dessous de 0,4, alors y^+ pourrait descendre sous la borne inférieure de son intervalle de validité ($y^+ < 30$) et il faudrait alors augmenter la valeur de d . Les sensibilités permettent donc d'analyser d'éventuels changements au niveau des conditions aux frontières de type loi de paroi.

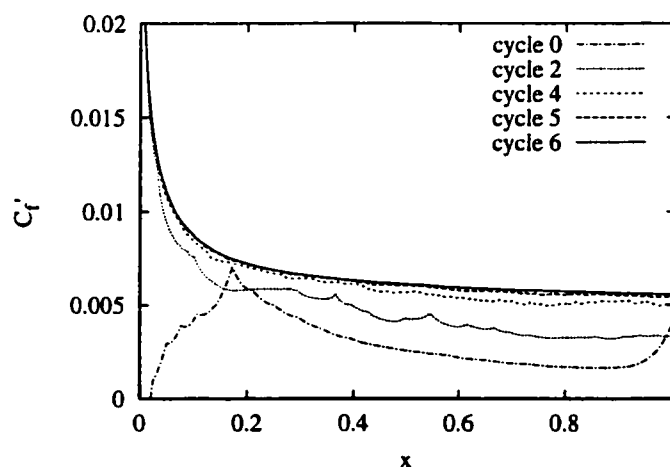


Figure 6.16 Plaque plane : convergence de C_f' avec le maillage

de l'écoulement. La figure 6.16 présente la convergence de C'_f avec les cycles de raffinement adaptatif. Tout comme pour l'écoulement, on atteint la convergence par rapport au maillage avec de très faibles variations de la solution entre les deux derniers maillages. Tel que prévu, C'_f a une forme similaire à C_f et un signe positif. À une augmentation de la vitesse correspond une augmentation du cisaillement, cette augmentation étant d'autant plus grande que le cisaillement est déjà élevé.

La sensibilité de y^+ est également convergée par rapport au maillage, tel qu'illustré à la figure 6.17. Un signe positif indique qu'une augmentation de $\tilde{U}_\infty$ produit une augmentation de y^+ . Ceci est logique puisque la couche limite s'amincit avec une augmentation de $\tilde{U}_\infty$ et donc la position de la frontière de calcul, qui est à une distance constante d , se trouve plus haut dans la couche limite, soit à un y^+ plus élevé. Ces sensibilités indiquent aussi que si $\tilde{U}_\infty$ descend en-dessous de 0,4, alors y^+ pourrait descendre sous la borne inférieure de son intervalle de validité ($y^+ < 30$) et il faudrait alors augmenter la valeur de d . Les sensibilités permettent donc d'analyser d'éventuels changements au niveau des conditions aux frontières de type loi de paroi.

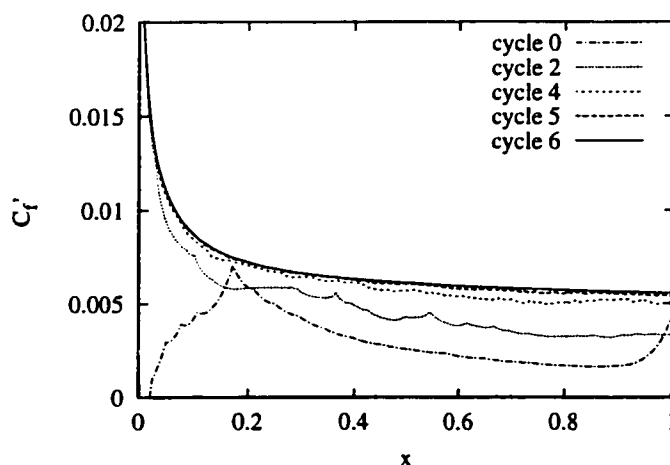


Figure 6.16 Plaque plane : convergence de C'_f avec le maillage

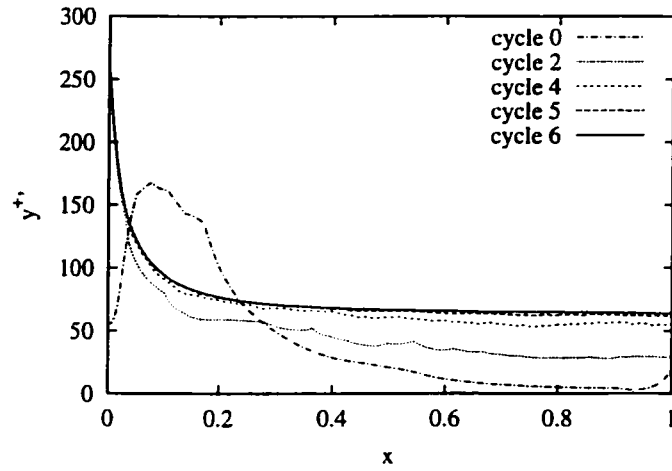


Figure 6.17 Plaque plane : convergence de y^{+} avec le maillage

La différentiation des corrélations (6.25) à (6.27) par rapport à $\tilde{U}_{\infty}$ donne les expressions suivantes pour C'_f :

$$C'_f = \frac{1,8C_f}{\tilde{U}_{\infty}} \quad (\text{Schlichting}) \quad (6.29)$$

$$C'_f = \frac{2C_f}{\tilde{U}_{\infty}} \left[1 - \frac{1}{\ln(0,06\text{Re}_x)} \right] \quad (\text{White}) \quad (6.30)$$

$$C'_f = \frac{2C_f}{\tilde{U}_{\infty}} \left[1 - \frac{1,292}{\log \text{Re}_x \ln 10} \right] \quad (\text{Schultz-Grunow}) \quad (6.31)$$

La figure 6.18 compare la prédiction numérique à ces corrélations. L'accord est bon et même légèrement meilleur que pour l'écoulement. Ceci valide le modèle de l'écoulement et le calcul de sensibilités. À nouveau, la prédiction est généralement inférieure aux corrélations et l'écart le plus faible est avec la corrélation de Schultz-Grunow.

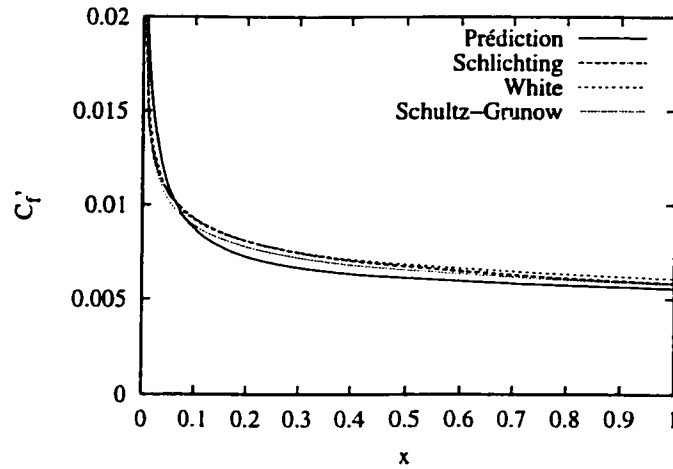


Figure 6.18 Plaque plane : comparaison de C_f' avec les corrélations

6.2.2.3 Extrapolation de solutions voisines

Les sensibilités permettent d'extrapoler linéairement C_f à des valeurs voisines des paramètres selon :

$$C_f(\tilde{U}_\infty + \Delta\tilde{U}_\infty) = C_f(\tilde{U}_\infty) + C_f'(\tilde{U}_\infty)\Delta\tilde{U}_\infty \quad (6.32)$$

Les figures 6.19 à 6.21 comparent les extrapolations à partir de l'écoulement et de sa sensibilité à $\tilde{U}_\infty = 1$ aux calculs complets des écoulements à $\tilde{U}_\infty = 0,96, 0,8$ et $0,5$. Ces calculs d'écoulement utilisent chacun leur propre séquence adaptative. À $\tilde{U}_\infty = 0,96$, l'accord est presque parfait, ce qui vérifie de façon assez rigoureuse le calcul de sensibilités. En effet, l'approximation d'une série de Taylor au premier ordre est fiable pour de si faibles perturbations, de sorte que la comparaison des solutions voisines (extrapolée et calculée) revient à comparer les sensibilités calculées avec notre méthodologie aux sensibilités obtenues par différences finies. À $\tilde{U}_\infty = 0,8$, l'accord est encore bon mais les écarts deviennent perceptibles. Les résultats à $\tilde{U}_\infty = 0,5$ illustrent les limites de l'extrapolation linéaire qui devient carrément

mauvaise. Une variation de 50% du paramètre constitue une forte perturbation, de sorte que l'approximation linéaire est imprécise, voire inutilisable. La relation $C_f(\tilde{U}_\infty)$ n'est donc visiblement pas linéaire. Les corrélations (6.25) à (6.27) suggèrent d'ailleurs cette forte non-linéarité. Ceci n'est cependant pas généralisable : la linéarité ou non-linéarité dépend du paramètre de design, du problème étudié et de la quantité observée.

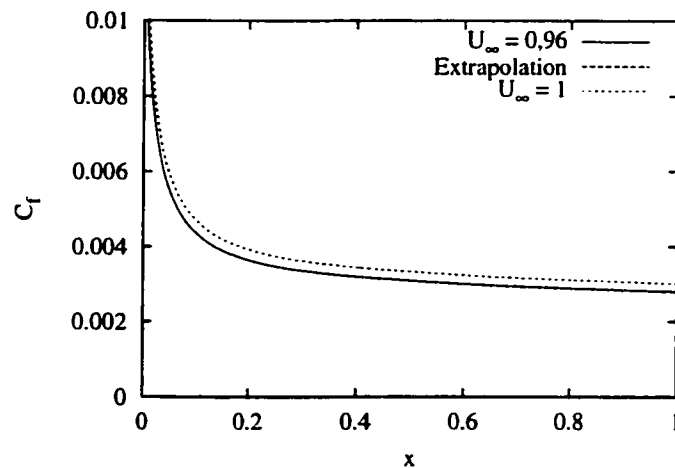


Figure 6.19 Plaque plane : extrapolation de C_f à $\tilde{U}_\infty = 0,96$

Certaines quantités peuvent avoir un comportement plus linéaire sur un plus grand intervalle. La figure 6.22 présente l'extrapolation de y^+ à $\tilde{U}_\infty = 0,5$. Malgré la forte perturbation du paramètre $\tilde{U}_\infty$, l'extrapolation est très près de la vraie solution. Il semble que y^+ soit une fonction presque linéaire de $\tilde{U}_\infty$. Enfin, la valeur de y^+ demeure toujours valide mais s'est grandement rapprochée de la limite de 30.

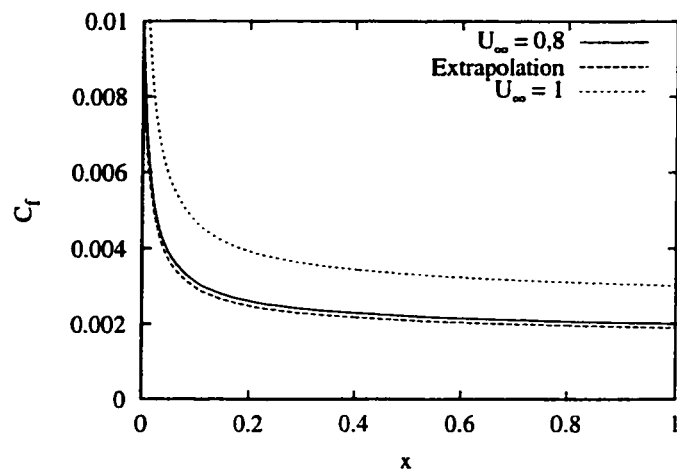


Figure 6.20 Plaque plane : extrapolation de C_f à $\tilde{U}_\infty = 0,8$

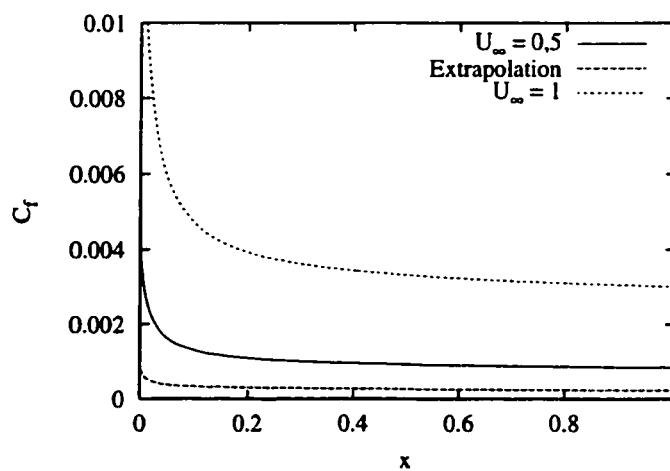


Figure 6.21 Plaque plane : extrapolation de C_f à $\tilde{U}_\infty = 0,5$

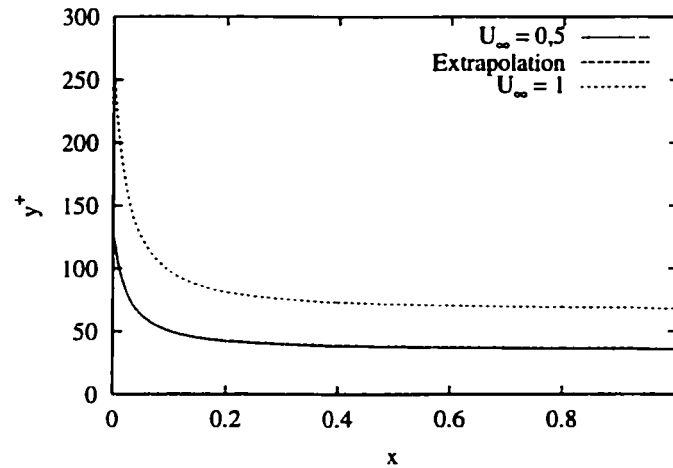
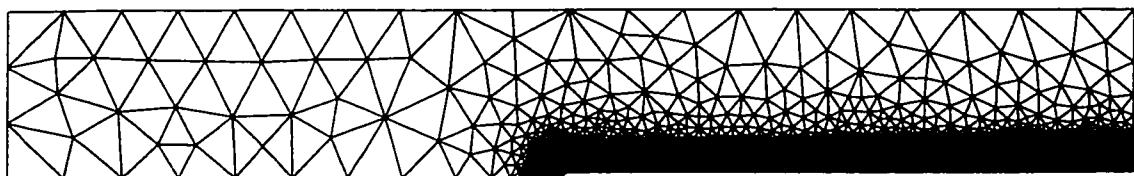


Figure 6.22 Plaque plane : extrapolation de y^+ à $\tilde{U}_\infty = 0,5$

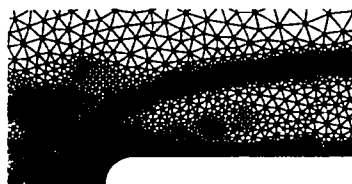
6.2.3 Sensibilité aux coefficients de fermeture du modèle $k - \epsilon$

Cette deuxième série de calculs de sensibilités considère cinq paramètres : C_μ , C_1 , C_2 , σ_k et σ_ϵ . L'écoulement et toutes les sensibilités utilisent la même séquence de maillage et tous contribuent à l'adaptation du maillage. La figure 6.23 illustre le maillage final dans son ensemble et près du bord d'attaque de la plaque. Le raffinement près de la plaque capture la couche limite. Les gradients de la vitesse y sont importants, surtout sur le coin (bord d'attaque). La seconde bande de raffinement un peu au-dessus de la plaque s'explique plutôt par les variables de turbulence. En particulier, les gradients de la sensibilité $\partial\mathcal{K}/\partial C_1$ y sont sévères. Le maillage colle littéralement aux isolignes concentrées de cette variable. Globalement, le maillage est donc très bien adapté. Dans ce qui suit, on se concentre principalement sur l'analyse d'incertitude.

Les coefficients de fermeture du modèle $k - \epsilon$ ne sont pas déterminés de façon mathématiquement exacte, mais ont plutôt été calés selon divers critères. On peut donc admettre qu'ils pourraient être légèrement modifiés ou qu'ils comportent une certaine incertitude. D'ailleurs, leurs valeurs admises ont évolué avec le temps. Cependant, il



(a) Maillage final



(b) Agrandissement du maillage final près du bord d'attaque

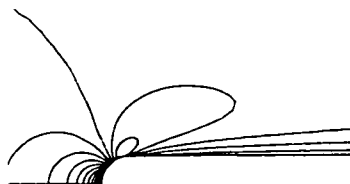
(c) u (d) $\frac{\partial \kappa}{\partial C_1}$

Figure 6.23 Plaque plane : maillage final et solution pour la série sur les coefficients de fermeture

Tableau 6.2 Plaque plane : incertitudes attribuées aux coefficients de fermeture

ΔC_μ	ΔC_1	ΔC_2	$\Delta \sigma_k$	$\Delta \sigma_\epsilon$
0,005	0,005	0,005	0,05	0,05

est assez difficile de leur attribuer une incertitude rigoureuse. L'incertitude minimale résulte du nombre de chiffres donnés dans les valeurs de ces coefficients : on a à tout le moins une incertitude égale à la moitié de la dernière décimale fournie. En se basant sur ce critère, le tableau 6.2 résume les incertitudes choisies.

Les incertitudes sur les paramètres d'entrée peuvent être propagées dans la solution à l'aide des sensibilités en utilisant la technique décrite au chapitre précédent. L'application de cette technique ajoute à la prédiction de C_f une bande d'incertitude tracée à la figure 6.24. Les faibles incertitudes sur les coefficients sont insuffisantes pour expliquer les écarts avec les corrélations puisque la bande d'incertitude n'intersecte toujours pas ces corrélations. Il n'y a donc pas d'accord indéniable entre le modèle de l'écoulement et les corrélations liées à la physique, à moins de pouvoir justifier des incertitudes plus élevées. Malgré tout, ceci montre la capacité de faire de l'analyse d'incertitude en utilisant les sensibilités.

Une analyse d'incertitude similaire pour l'écoulement dans une expansion brusque a donné des résultats similaires (voir Turgeon *et al.* [130]) : les incertitudes sur les coefficients de fermeture du modèle étaient généralement insuffisantes pour permettre un chevauchement des prédictions numériques (avec une bande d'incertitude) et des mesures expérimentales de vitesse et surtout d'énergie cinétique de la turbulence. Cependant, la prédiction de la longueur de la zone de recirculation devenait en accord avec la mesure expérimentale si on ajoutait la bande d'incertitude : la prédiction de $6,3 \pm 0,4$ chevauche l'expérience à $7 \pm 0,5$.

Pour en revenir à notre application, le tableau 6.3 compare la sensibilité normalisée

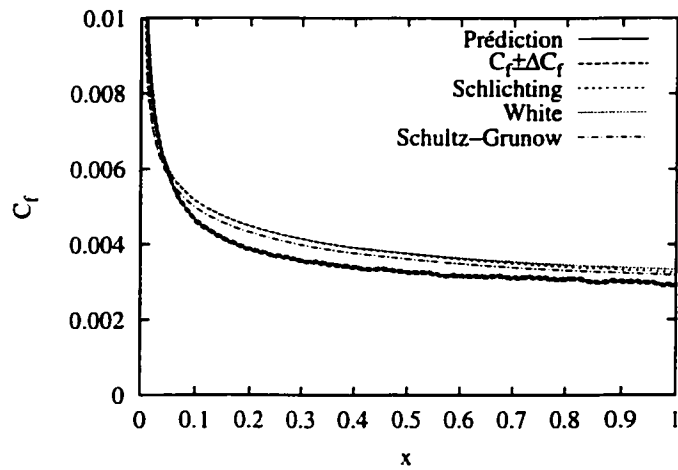


Figure 6.24 Plaque plane : incertitude sur C_f (due à C_μ , C_1 , C_2 , σ_k et σ_ϵ)

Tableau 6.3 Plaque plane : sensibilités et incertitudes pour C_f à $x = 0,8$ (pour les 5 coefficients de fermeture)

paramètre	$10^3 \frac{\partial C_f}{\partial a_i} a_i$	incertitude		$\frac{\Delta a_i}{a_i}$ pour rattraper
		$10^5 \Delta C_f$	$\frac{\Delta C_f}{C_f}$	C_f de Schultz-Grunow
C_μ	0,23	1,29	0,41%	+86%
C_1	-1,26	0,44	0,14%	-16%
C_2	2,35	0,61	0,20%	+9%
σ_k	0,04	0,19	0,06%	+500%
σ_ϵ	0,42	1,64	0,53%	+47%

de C_f pour les divers paramètres, donne les contributions de chacun à l'incertitude et indique les variations requises des paramètres pour rattraper la corrélation de Schultz-Grunow, le tout à la position $x = 0,8$. À cet endroit, la prédiction de C_f est de $3,11 \times 10^{-3}$ alors que la corrélation de Schultz-Grunow donne $3,31 \times 10^{-3}$, soit un écart d'environ 6%. La solution est davantage sensible à C_2 et C_1 tel qu'indiqué par les sensibilités normalisées. À l'opposé, C'_f pour σ_k est si faible que son erreur numérique est de l'ordre de grandeur de sa propre valeur. Au niveau de l'incertitude sur C_f , ce sont C_μ et σ_ϵ qui contribuent le plus. L'incertitude totale est de $4,17 \times 10^{-5}$, soit un cinquième de l'écart entre la prédiction et la corrélation de Schultz-Grunow. Le chevauchement de cette corrélation par la bande d'incertitude nécessiterait donc des incertitudes 5 fois plus grandes sur les paramètres, soit 2,5 unités de la dernière décimale (au lieu de 0,5 unité). La dernière colonne du tableau 6.3 indique la correction nécessaire sur chaque paramètre pris séparément pour rattraper la corrélation. Le coefficient C_2 requiert la plus petite correction pour permettre ce rattrapage avec 9%. On ne peut cependant pas justifier un tel changement au modèle sur la base des résultats d'une seule application particulière.

Afin de vérifier qu'une augmentation de 9% de C_2 produit l'augmentation désirée de 6% sur C_f à $x = 0,8$, on calcule un nouvel écoulement avec $C_2 = 2,09$. La figure 6.25 montre qu'effectivement cette solution rattrape la corrélation à $x = 0,8$. Ailleurs, il y a toujours des écarts entre la solution et la corrélation. Autour de $x = 0,25$ l'écart a été coupé de moitié environ alors que pour $x < 0,1$ l'écart s'est accentué. Partout l'extrapolation linéaire à partir de la solution nominale est proche de la nouvelle solution recalculée, validant le calcul de cette sensibilité. Le manque de régularité de la solution extrapolée s'explique par le fait que lorsqu'on adapte le maillage sur plus de variables, le nombre de degrés de liberté requis pour obtenir une même précision est plus élevé. Dans ce cas-ci, la solution de l'écoulement (C_f) est moins précise que pour un calcul d'écoulement avec un seul paramètre comme précédemment.

D'ailleurs, on peut constater à la figure 6.24 que C_f est moins régulier que dans le cas précédent (figure 6.15).

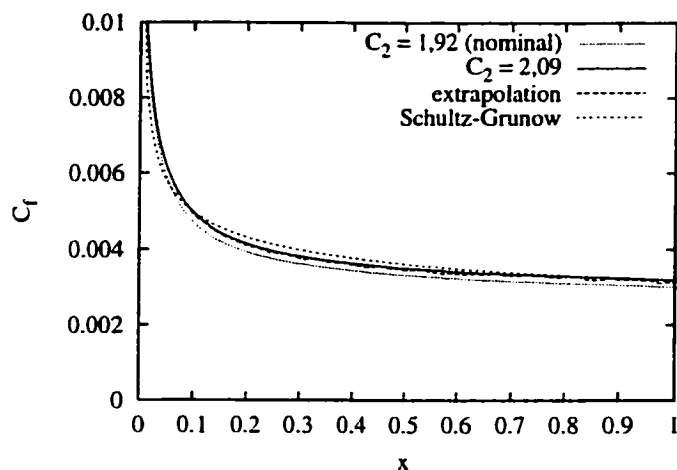


Figure 6.25 Plaque plane : solution voisine de C_f pour une variation du paramètre C_2

6.2.4 Sensibilité aux paramètres des lois de paroi

La dernière série de simulations pour la plaque plane s'attarde aux lois de paroi : on calcule les sensibilités par rapport aux coefficients κ , E et d . La figure 6.26 compare la sensibilité normalisée de C_f pour ces trois paramètres. Le coefficient de friction est plus sensible à κ , moins à E et presque pas à d . On analyse dans la suite ces trois paramètres un à un.

6.2.4.1 Paramètre κ

L'extrapolation linéaire utilisant les sensibilités prédit qu'une augmentation de 5% de κ entraîne une augmentation de 6% de C_f à $x = 0,8$, rattrapant ainsi la corrélation

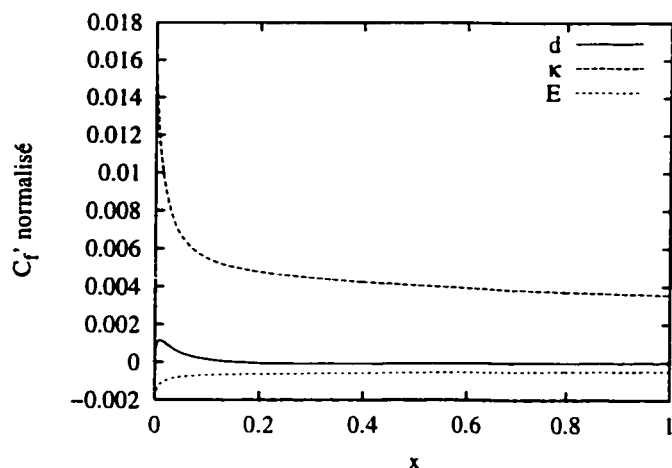


Figure 6.26 Plaque plane : C_f' normalisé pour les paramètres des lois de paroi (d , κ et E)

de Schultz-Grunow. Le cisaillement à la paroi est donc encore plus sensible à κ qu'à C_2 puisqu'un plus faible changement du paramètre produit la même variation de C_f . Afin de valider le calcul de sensibilités pour κ , la figure 6.27 compare l'extrapolation linéaire à partir de la solution à $\kappa = 0,42$ à une solution calculée à $\kappa = 0,44$ (soit une augmentation de 5%), de même qu'à la corrélation. La solution à $\kappa = 0,44$ s'est effectivement rapprochée de la corrélation, sauf près du bord d'attaque. Dans le dernier cinquième de la plaque, il y a presque superposition. Plus important encore, l'extrapolation linéaire est extrêmement proche de la vraie solution, ce qui vérifie le calcul de sensibilités pour ce paramètre. En fait, on n'arrive même pas distinguer les deux courbes sur le graphique. La perturbation de κ est suffisamment faible (5%) pour que l'extrapolation linéaire soit très fiable.

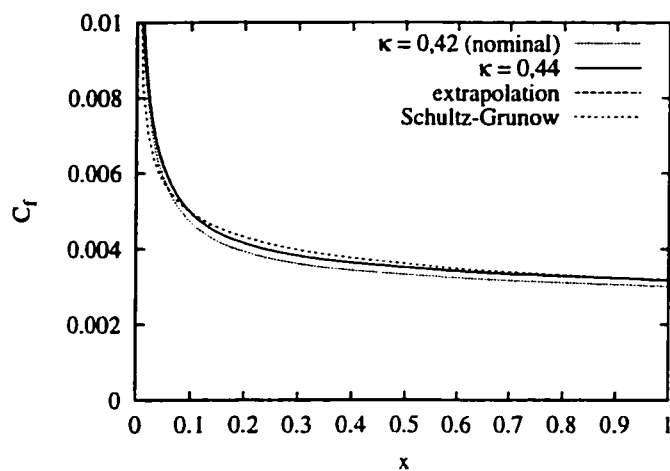


Figure 6.27 Plaque plane : solution voisine de C_f pour une variation du paramètre κ

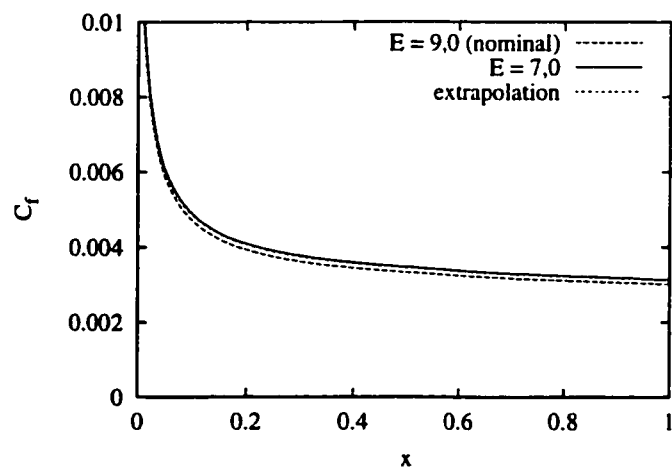


Figure 6.28 Plaque plane : solution voisine de C_f pour une variation du paramètre E

6.2.4.2 Paramètre E

Le cisaillement à la paroi est moins sensible à E qu'à κ (figure 6.26). Le signe négatif indique qu'il faut réduire le paramètre de rugosité E pour augmenter C_f , ce qui peut sembler contraire à l'intuition. À nouveau on vérifie ce calcul par une solution voisine, E passant de 9,0 à 7,0. Un changement aussi important (de l'ordre de 22%) est nécessaire pour obtenir un changement perceptible de C_f . La figure 6.28 présente ces résultats. La proximité de l'extrapolation et de la vraie solution voisine, malgré l'importance de la perturbation, confirme la justesse du calcul de sensibilités pour le paramètre E .

6.2.4.3 Paramètre d

Le troisième et dernier paramètre est la distance à la paroi d . L'étude de ce paramètre est particulièrement intéressante dans la mesure où sa valeur n'est pas prédéterminée mais constitue plutôt un choix de l'utilisateur. Idéalement, on voudrait que la solution ne soit pas du tout affectée par ce choix, ce qui signifierait que le raccord entre le modèle de turbulence et la loi de paroi est parfait. D'après la figure 6.26, la sensibilité de C_f à d est presque nulle, sauf très près du bord d'attaque. Ceci est en accord avec la loi de paroi qui stipule que le cisaillement est constant dans l'épaisseur de la couche limite. Pour vérifier le tout, on calcule une solution voisine à $d = 0,0006$ (au lieu de $d = 0,0009$) avec une toute nouvelle séquence adaptative (contrairement à κ et E où on a simplement réutilisé un maillage final). La figure 6.29 confirme que C_f est presque identique avec les deux valeurs très différentes de d , ce qui vérifie du même coup le calcul de sensibilités. Il ne faut cependant pas en conclure que toute solution est insensible au choix de d . Cela peut dépendre du problème considéré et de la quantité interrogée. Par exemple, Lacasse *et al.* [107] ont montré que dans une

conduite courbée en U, la séparation de la couche limite peut être prédite ou non selon le choix de d , pour des variations de d comparables à celles du présent exemple.

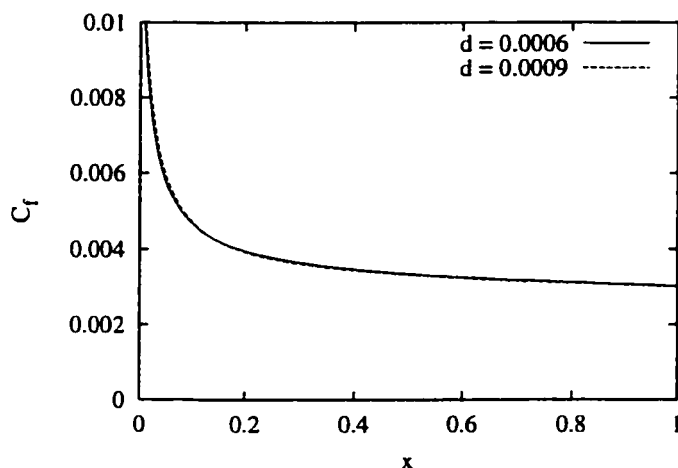


Figure 6.29 Plaque plane : solution voisine de C_f pour une variation du paramètre d

Même si C_f varie peu avec d , la valeur de ce paramètre doit demeurer valide. En particulier, il faut éviter que y^+ descende sous le niveau plancher de 30. La figure 6.30 montre la distribution de y^+ le long de la plaque pour les deux valeurs de d et selon l'extrapolation. Partout y^+ est supérieur à 30. Aussi, l'extrapolation linéaire est très près de la vraie solution voisine, malgré le changement important imposé à d . On en conclut que y^+ varie de façon presque linéaire avec d sur une large plage de valeurs et que le calcul de sensibilité à d est vérifié. Les sensibilités peuvent donc constituer un outil aidant à choisir d . D'ailleurs, le choix de $d = 0,0006$ n'était pas aléatoire mais plutôt basé sur les sensibilités et la prévision (extrapolation) de y^+ .

D'après la loi de paroi, k devrait être constant dans l'épaisseur de la couche limite (du moins dans la zone logarithmique). Modifier d , soit l'équivalent de se déplacer verticalement dans la couche limite sans changer la position de la frontière de calcul,

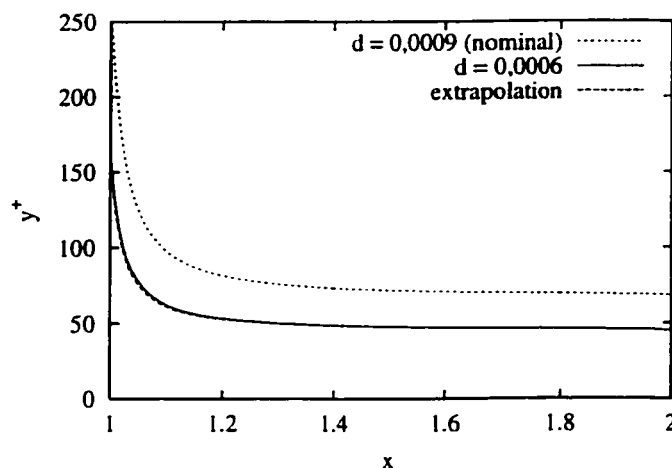


Figure 6.30 Plaque plane : solution voisine de y^+ pour une variation du paramètre d

ne devrait pas affecter la valeur de k sur cette frontière. La figure 6.31 confirme ce comportement : la sensibilité normalisée de k est nettement inférieure au niveau de k lui-même, sauf dans le premier cinquième de la plaque.

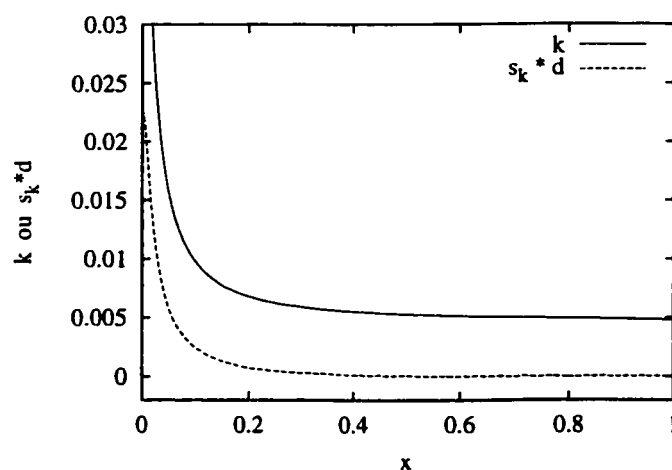


Figure 6.31 Plaque plane : distribution de k et $\frac{\partial k}{\partial d}$ sur la frontière de la plaque

Les sensibilités du paramètre d permettent également d'analyser la qualité du raccord entre le modèle $k - \epsilon$ et la loi de paroi au niveau du profil de vitesse. Si l'utilisation

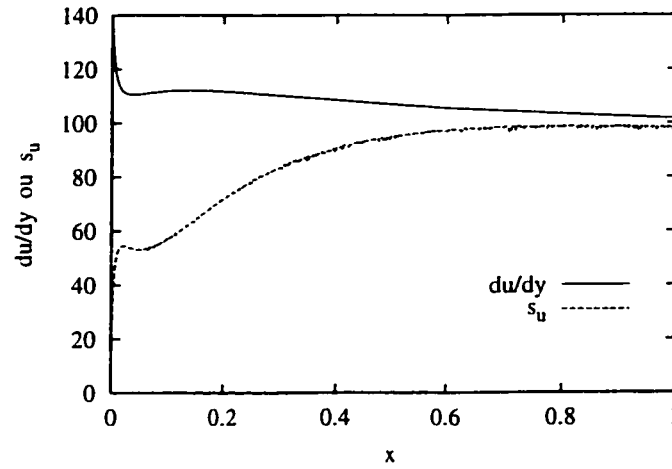


Figure 6.32 Plaque plane : comparaison de $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $s_u = \frac{\partial u}{\partial d}$ sur la frontière de la plaque

du modèle de turbulence ou de la loi de paroi dans la zone logarithmique était tout à fait équivalente, changer d pour un domaine de calcul fixe serait équivalent à déplacer verticalement le domaine pour un d fixe. Dans ce cas idéal, l'égalité suivante serait respectée :

$$s_u \equiv \frac{\partial u}{\partial d} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.33)$$

La figure 6.32 compare s_u et $\partial u/\partial y$ le long de la plaque. Pour améliorer la précision de l'évaluation de la dérivée $\partial u/\partial y$ à la frontière, on utilise plutôt la condition aux limites imposée via la loi de paroi, soit :

$$(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w \quad (6.34)$$

avec τ_w donné par la loi de paroi (équation (3.17)). La dérivée $\partial u/\partial y$ s'évalue alors selon :

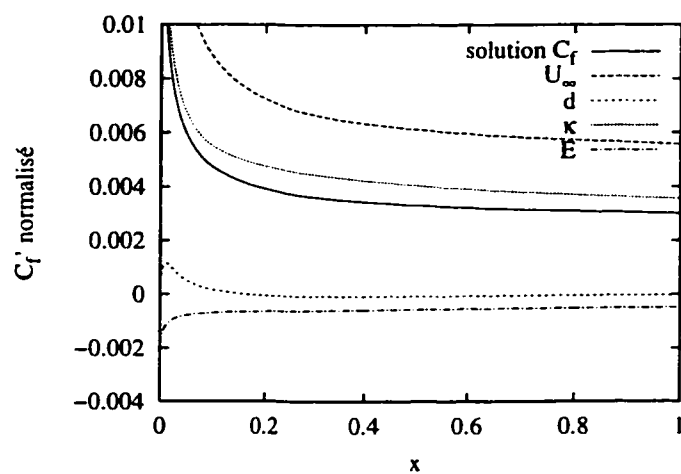
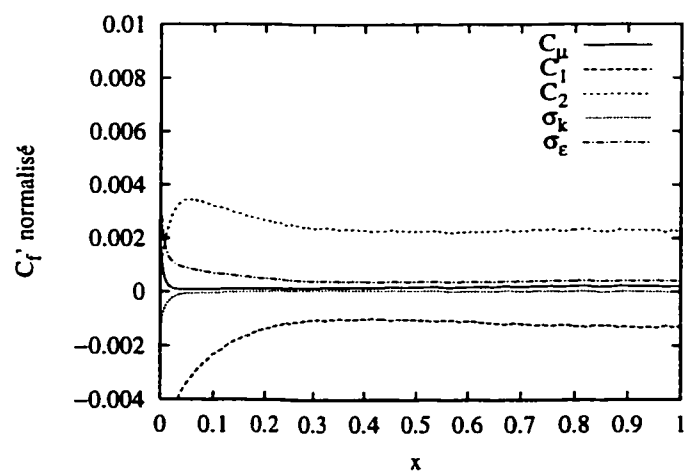
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_w}{\mu + \mu_t} \quad (6.35)$$

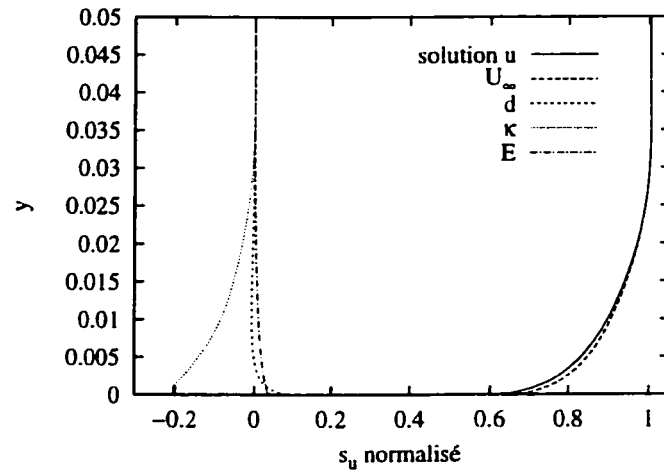
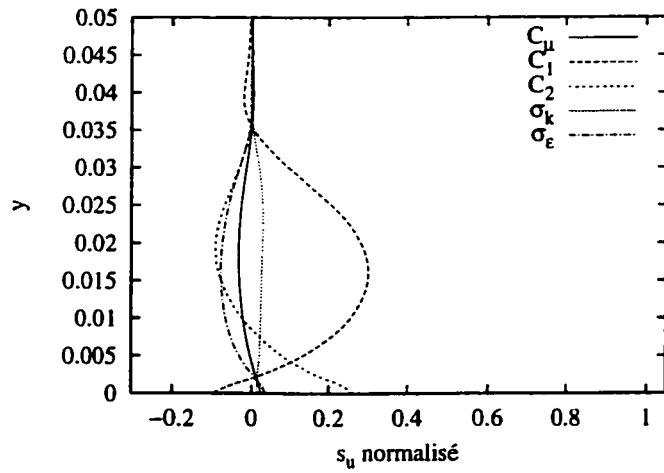
L'accord entre $\partial u / \partial y$ et s_u est plutôt mauvais sur la première moitié de la plaque et relativement bon sur la deuxième moitié. Le modèle de turbulence et la loi de paroi ne sont donc pas en parfait accord. Notons enfin que même si C'_f est presque nul, s_u est très élevé sur la frontière associée à la plaque.

6.2.5 Comparaison des sensibilités pour l'ensemble des paramètres

On regroupe ici les résultats précédents pour faire une analyse de sensibilité globale, soit une comparaison entre les sensibilités normalisées des divers paramètres. Les résultats de C'_f normalisé sont donnés à la figure 6.33. À titre indicatif, la courbe de C_f est ajoutée sur le graphique. Le coefficient de friction est donc plus sensible à U_∞ , κ , C_2 et C_1 alors que d et σ_k ont très peu d'influence. Les sensibilités normalisées pour U_∞ et κ sont supérieures à C_f , ce qui signifie qu'un changement de 1% de ces paramètres entraîne un changement supérieur à 1% pour C_f . Finalement, les coefficients du modèle de turbulence et ceux de la loi de paroi ont des effets comparables même si cet écoulement répond principalement à la présence de la paroi solide, donc de la loi de paroi imposée. Les sensibilités sont donc très utiles pour identifier les paramètres dominants.

La figure 6.34 présente une coupe des sensibilités de la vitesse horizontale au milieu de la plaque ($x = 0,5$). La distance normale y est mesurée à partir de la frontière de calcul. À nouveau, les paramètres les plus influents sont U_∞ , C_1 , C_2 et κ . On voit également que la forme des distributions varie grandement avec les paramètres. Par exemple, s_u pour U_∞ est le seul à ne pas tendre vers 0 à l'infini. Pour C_1 , le maximum de s_u est à une position intermédiaire tandis qu'avec d les variations sont concentrées près de la paroi. Ceci procure de forts arguments justifiant le choix d'adapter sur toutes les variables, incluant les diverses sensibilités. Enfin, la sensibilité par rapport à

(a) Écoulement et paramètres U_∞ , d , κ et E (b) Paramètres C_μ , C_1 , C_2 , σ_k et σ_ϵ Figure 6.33 Plaque plane : C_f et les C_f' normalisés

(a) Écoulement et paramètres U_∞ , d , κ et E (b) Paramètres C_μ , C_1 , C_2 , σ_k et σ_ϵ Figure 6.34 Plaque plane : u et les s_u normalisés à $x = 0,5$

U_∞ a pratiquement la même forme que la solution u , mais avec des valeurs légèrement supérieures près de la paroi. Cela signifie qu'une augmentation de U_∞ produit une mise à l'échelle du profil de vitesse, à forme constante, plus une légère augmentation là où l'écoulement est un peu plus lent, ce qui déforme la distribution. Ce changement de forme correspond à une diminution de l'épaisseur de la couche limite, ce qui est en accord avec une augmentation de la vitesse externe.

En conclusion, cette application sur un écoulement relativement simple a permis d'illustrer plusieurs usages des sensibilités. On a en outre considéré une vaste gamme de paramètres de design et par le fait même vérifié l'implantation du code pour ceux-ci. Les sensibilités se sont avérées particulièrement utiles pour analyser le modèle de turbulence et les lois de paroi.

6.3 Écoulement autour d'un profil NACA 0012

Cette dernière application reprend l'écoulement autour d'un profil NACA 0012 de la section 5.4 mais en régime turbulent cette fois-ci. Outre l'aspect de la physique de l'écoulement, une nouveauté technique s'ajoute : l'extrapolation cubique de solutions voisines. On étudie en outre les limites et capacités d'extrapolation du coefficient de pression C_p .

6.3.1 Description du problème

La définition du problème (écoulement et sensibilités) est la même que dans le cas laminaire (section 5.4.1) sauf pour les points suivants :

- le domaine de calcul s'étend à 10 cordes en amont et en aval du profil ainsi qu'à 8 cordes au-dessus et en-dessous ;

- le nombre de Reynolds est de $1,86 \times 10^6$;
- la condition de vitesse nulle sur la paroi du profil est remplacée par une loi de paroi avec $d = 0,001c$ et une condition de tangence ;
- les conditions aux limites pour k et ϵ sont respectivement de 10^{-5} et 10^{-6} en entrée, alors qu'on impose une dérivée normale nulle sur les autres frontières extérieures ;
- toutes les équations sont stabilisées avec une méthode GLS.

Les calculs de sensibilités considèrent à nouveau l'angle d'attaque α comme paramètre.

6.3.2 Solution à $\alpha = 3,59^\circ$

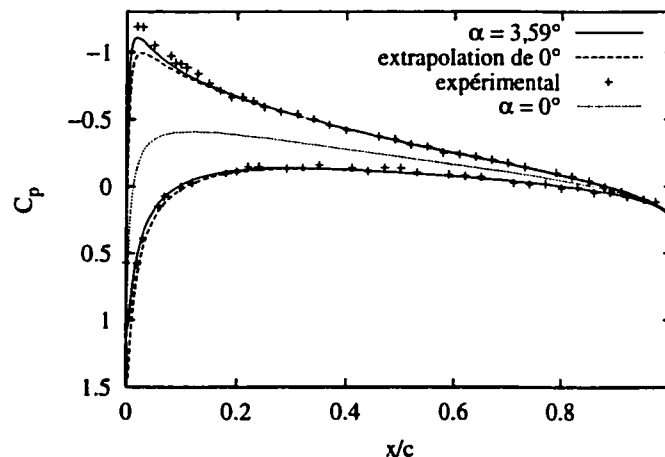


Figure 6.35 NACA 0012 turbulent : C_p à $\alpha = 3,59^\circ$

La figure 6.35 présente la distribution du coefficient de pression C_p sur le profil à un angle d'attaque de $3,59^\circ$. On y compare l'extrapolation linéaire à partir de la solution (écoulement et sensibilités) à $\alpha = 0^\circ$, la solution calculée à $\alpha = 3,59^\circ$ et les points expérimentaux [131]. La courbe de C_p à $\alpha = 0^\circ$ est ajoutée pour apprécier les

changements entre les deux angles. Rappelons que l'extrapolation linéaire s'effectue de la façon suivante :

$$C_p(\alpha + \Delta\alpha) = C_p(\alpha) + C'_p(\alpha)\Delta\alpha \quad (6.36)$$

où :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} \quad (6.37)$$

Avec les variables adimensionnelles de la simulation, C_p se réduit à :

$$C_p = 2\bar{p} \quad (6.38)$$

De même, la sensibilité C'_p pour le paramètre α est :

$$C'_p = \frac{s_p}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = 2\bar{s}_p \quad (6.39)$$

On voit à la figure 6.35 que l'extrapolation linéaire est très proche de la vraie solution, sauf près du bord d'attaque. Ceci est excellent compte tenu des forts changements de C_p entre 0° et $3,59^\circ$. La portance est bien prédite à partir de la solution symétrique. La prédiction numérique est aussi en bon accord avec les mesures expérimentales. Les écarts observés sont dus aux erreurs expérimentales et de modélisation. En particulier, on a traité l'écoulement comme étant incompressible alors que le nombre de Mach se situait autour de 0,3. Aussi, l'angle d'attaque de $3,59^\circ$ est un angle effectif pour tenir compte de l'interférence des murs de la soufflerie, l'angle d'attaque d'origine étant à 4° . Certaines erreurs ou incertitudes y sont donc associées.

Pour démontrer que les écarts observés entre les mesures expérimentales et les prédictions numériques ne sont pas dues à une mauvaise résolution, la figure 6.36 montre

l'évolution de C_p avec les cycles de raffinement adaptatif à $\alpha = 3,59^\circ$. Les faibles écarts entre les derniers cycles permettent de conclure que les erreurs numériques sont minimales et que la solution (pour C_p du moins) est convergée par rapport au maillage. De même, la figure 6.37 confirme la précision numérique des sensibilités : C'_p à $\alpha = 3,59^\circ$ a atteint l'indépendance face au maillage. Pour terminer, la figure 6.38 montre un agrandissement du maillage final autour du profil. Le raffinement près de la surface du profil et en aval capture bien la couche limite et le sillage.

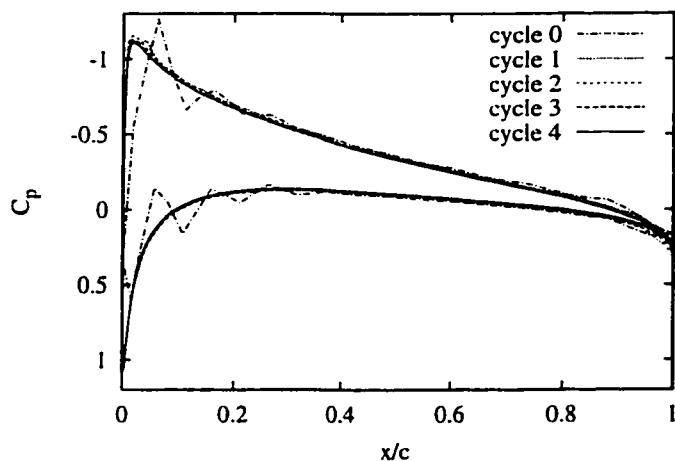


Figure 6.36 NACA 0012 turbulent : convergence de C_p avec le maillage à $\alpha = 3,59^\circ$

6.3.3 Extrapolation cubique

Dans toutes les applications présentées jusqu'à maintenant, l'extrapolation de solutions voisines utilisait une série de Taylor tronquée au terme linéaire qui nécessite la connaissance de la dérivée première, soit la sensibilité. On pourrait construire une approximation quadratique ou plus riche encore si on connaissait directement les dérivées secondes et autres, ce qui n'est pas le cas ici. Une alternative consiste à utiliser de l'information provenant de plusieurs points de design et à faire passer un

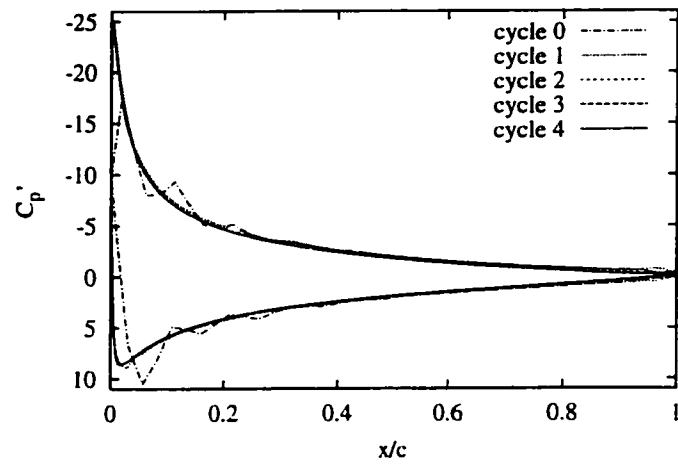


Figure 6.37 NACA 0012 turbulent : convergence de C_p' avec le maillage à $\alpha = 3,59^\circ$

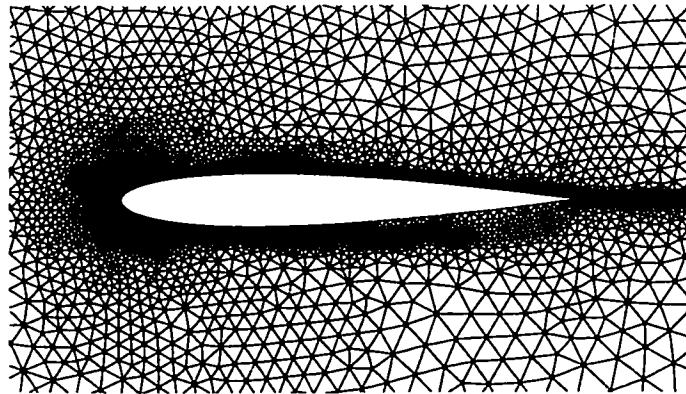


Figure 6.38 NACA 0012 turbulent : agrandissement du maillage final à $\alpha = 3,59^\circ$

polynôme par ces points. Ainsi, en utilisant deux écoulements et leurs sensibilités, donc quatre informations, on peut construire une représentation cubique de la solution en fonction du paramètre de design. Dans notre application, la connaissance de C_p et C'_p à 0° et à $\alpha_1 = 3,59^\circ$ permet de construire le polynôme cubique suivant :

$$\begin{aligned}
 C_p(\alpha) = & \left[\frac{C'_p(0) + C'_p(\alpha_1)}{\alpha_1^2} + 2 \frac{C_p(0) - C_p(\alpha_1)}{\alpha_1^3} \right] \alpha^3 \\
 & + \left[-\frac{2C'_p(0) + C'_p(\alpha_1)}{\alpha_1} + 3 \frac{C_p(\alpha_1) - C_p(0)}{\alpha_1^2} \right] \alpha^2 \\
 & + C'_p(0) \alpha \\
 & + C_p(0)
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

duquel on peut extrapoler (ou interpoler) C_p à divers angles α . L'utilisation des polynômes d'Hermite permet une écriture différente mais équivalente à cette expression. Il y a tout lieu de croire que cette représentation cubique sera plus précise que la simple extrapolation linéaire.

6.3.4 Solution à $\alpha = 8^\circ$

Afin de vérifier les capacités d'extrapolation, on augmente l'angle d'attaque jusqu'à 8° . La figure 6.39 compare les distributions calculée et extrapolées de C_p à cet angle. Notons qu'aucune mesure expérimentale n'est disponible pour cette configuration. Toutes les extrapolations sont bonnes pour $x/c > 0,2$. Plus près du bord d'attaque, l'extrapolation linéaire à partir de la solution à $\alpha = 0^\circ$ s'écarte beaucoup de la vraie solution. Par exemple, la valeur maximale de C_p est autour de 1 alors que l'extrapolation l'amène au-dessus de 2, pour une erreur supérieure à 100%. L'extrapolation linéaire est fiable pour des changements de quelques pourcents, mais pas pour des valeurs qui doublent ou triplent, à moins que la relation ne soit intrinsèquement linéaire. L'extrapolation linéaire à partir de la solution à $\alpha = 3,59^\circ$ performe mieux,

ce qui était prévisible étant donné la plus faible perturbation du paramètre *i.e.* le plus faible pas d'extrapolation. On note toutefois encore des écarts assez importants par rapport à la vraie solution. Finalement, l'extrapolation cubique donne des résultats extrêmement satisfaisants : elle colle presque à la vraie solution. La solution C_p peut donc être représentée avec une bonne précision sur une large plage de α en calculant seulement deux écoulements et leurs sensibilités.

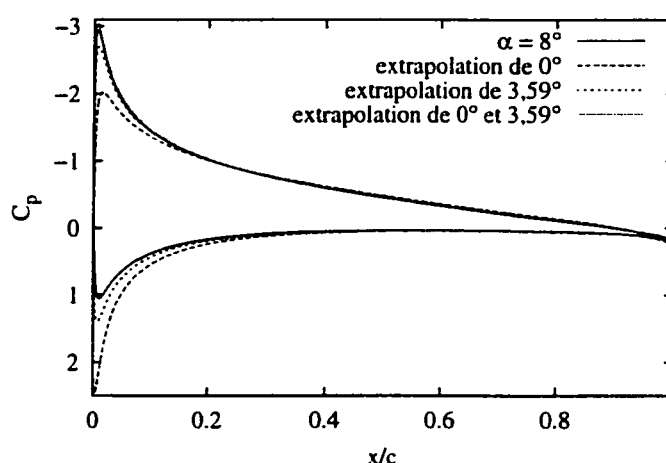


Figure 6.39 NACA 0012 turbulent : C_p à $\alpha = 8^\circ$

L'écoulement à $\alpha = 8^\circ$ est toujours attaché, contrairement à l'écoulement laminaire du chapitre précédent. Cependant, les lignes de courant des sensibilités tracées à la figure 6.40 indiquent que cet « écoulement » est fortement renversé sur l'extrados. Ceci indique qu'une augmentation additionnelle de l'angle d'attaque produira un ralentissement de l'écoulement sur la partie arrière de l'extrados, entraînant éventuellement la séparation de la couche limite. Les sensibilités fournissent donc de l'information concernant une éventuelle séparation de l'écoulement sans avoir à calculer ces écoulements à des angles d'attaque élevés.

Finalement, ce problème avec une importante surface courbe a permis de tester

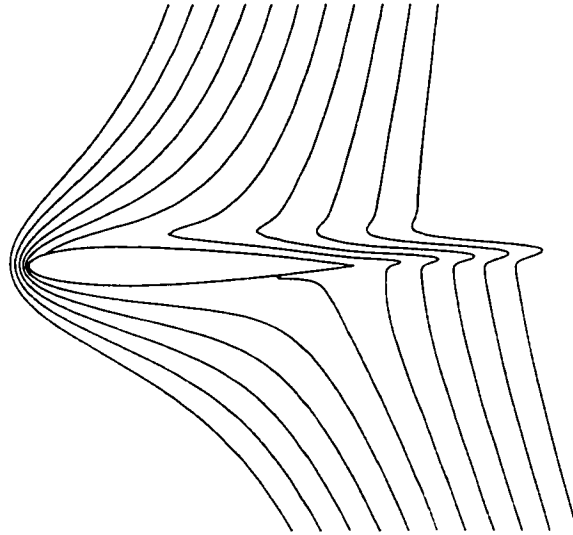


Figure 6.40 NACA 0012 turbulent : lignes de courant des sensibilités à $\alpha = 8^\circ$

solidement les conditions de tangence pour les sensibilités. Une inspection détaillée a confirmé que les vecteurs de la sensibilité de la vitesse sont effectivement tangents à la paroi.

CONCLUSION

Le but de ce projet était de développer une méthode générale d'éléments finis adaptative pour le calcul des sensibilités d'écoulements de fluides. On a utilisé ici la méthode de l'équation des sensibilités qui consiste à développer les équations au niveau continu, soit les équations aux dérivées partielles. La première étape consistait donc à développer la forme générale de ces équations de sensibilités et des conditions aux frontières associées. Cette formulation générale novatrice en sensibilités continues permet de traiter n'importe quel paramètre de design et admet toutes les dépendances possibles face à ce paramètre. Le développement est plus simple avec l'approche continue qu'avec les sensibilités discrètes. La formulation résultante se marie très bien avec une méthode de jacobien numérique pour la construction des matrices éléments finis qui ne nécessite que la transcription de la forme faible des équations sans faire ressortir explicitement les variables de calcul.

Les régimes laminaire et turbulent ont tous deux été traités. Les contributions originales du projet sont principalement pour le traitement des fluides à propriétés variables et le modèle de turbulence $k - \epsilon$ avec lois de paroi. En régime turbulent, on a utilisé la formulation en variables logarithmiques pour préserver la positivité des variables de turbulence. Au niveau du calcul de sensibilités, cette approche est d'autant plus novatrice.

Afin de contrôler l'erreur numérique des solutions, on a utilisé un algorithme de remaillage adaptatif. La contribution du projet consistait à ajouter les sensibilités à cet algorithme. Les résultats numériques présentés ont démontré le bon fonctionnement de la méthodologie qui a permis d'obtenir des solutions numériquement précises, tant pour l'écoulement que pour les sensibilités, tout en illustrant cette précision par des

études systématiques de raffinement de maillage. Les maillages générés étaient en outre très bien adaptés à la solution.

Les premiers résultats numériques effectués étaient consacrés à la vérification systématique de l'implantation du code par la résolution de problèmes possédant une solution analytique, selon la technique des solutions manufacturées. Ces vérifications systématiques et rigoureuses ont démontré le bon fonctionnement du résolveur et de l'estimateur d'erreur, tant en régime laminaire que turbulent. Seule l'estimation d'erreur sur μ'_t a moins bien performé. Quelques observations en sont ressorties. D'abord, le traitement d'un paramètre de forme conduit typiquement à des solutions un peu moins précises et l'estimateur d'erreur performe moins bien dans ce cas. La condition aux limites inexacte contribue significativement à l'erreur. Une amélioration de la projection locale près des frontières permettrait vraisemblablement d'améliorer ces faiblesses. Aussi, le problème de vérification en régime turbulent a illustré l'utilité de stabiliser les équations par une méthode GLS (par exemple) lorsque le nombre de Reynolds est élevé. On réduit ainsi les oscillations et le maillage est de meilleure qualité, produisant une solution plus précise avec moins de degrés de liberté.

Outre l'exercice de vérification, trois applications en régime laminaire ont été présentées. La première considérait la convection naturelle de sirop de maïs. La formulation générale a permis de traiter aisément ce problème avec propriétés physiques variables. On en retient principalement que l'ajout d'une bande d'incertitude aux prédictions numériques est beaucoup plus réaliste qu'une simple prédiction déterministe. Le chevauchement des prédictions et des mesures expérimentales, avec leurs intervalles d'incertitude, a indiqué l'accord entre les deux. Seule la prédiction de la hauteur du centre du tourbillon était en désaccord. La deuxième application a illustré la capacité de faire de l'optimisation de forme en utilisant les sensibilités. Dans ce cas, on a augmenté de 30% le transfert de chaleur en ajoutant une plaque déflectrice dont la

position et l'orientation ont été optimisées. Par contre, ce problème a fait ressortir les limites en terme de précision numérique et d'inconsistance des dérivées. Les sensibilités de forme sont très sévères pour ce genre de problème. Finalement, le calcul des sensibilités par rapport à l'angle d'attaque sur un profil NACA 0012 a montré qu'il est possible d'utiliser les sensibilités pour extrapoler des solutions voisines pour lesquelles un changement de comportement se produit : la séparation de la couche limite. Par contre, la forme de la zone de recirculation est difficile à extrapoler à un angle voisin de plus de un ou deux degrés à cause de la forte non-linéarité.

En régime turbulent, on a traité une panoplie de paramètres de design sur le problème de l'écoulement sur une plaque plane. Tout d'abord, la prédiction du coefficient de friction et de sa sensibilité par rapport à la vitesse à l'infini étaient en assez bon accord avec les corrélations empiriques, avec une tendance à la sous-évaluation. L'ajout d'une bande d'incertitude associée aux incertitudes sur les coefficients de fermeture du modèle $k - \epsilon$ était insuffisant pour expliquer les écarts. On a toutefois pu utiliser les sensibilités pour déterminer les changements requis à ces coefficients de façon à rattraper les corrélations. Globalement, les paramètres U_∞ , C_1 , C_2 et κ se sont avérés être ceux qui avaient le plus d'influence sur la solution. On a aussi pu constater que la quantité y^+ se comportait de façon beaucoup plus linéaire avec la vitesse à l'infini que le coefficient de friction ne le faisait. Il est ainsi possible de l'extrapoler linéairement à des valeurs voisines plus éloignées en utilisant les sensibilités. Enfin, les sensibilités ont permis d'analyser le modèle de turbulence. En particulier, elles ont montré que le raccord entre la loi de paroi et le modèle $k - \epsilon$ n'était pas parfait et que le choix de la distance à la paroi d n'avait pas trop d'influence. Les sensibilités donnent aussi un sens à l'effet des paramètres : par exemple, une augmentation du paramètre de rugosité E diminue le cisaillement sur la paroi.

La dernière application considérait l'écoulement turbulent autour d'un profil NACA

0012. La principale conclusion est que les sensibilités permettent de bien prédire le coefficient de pression, et donc la portance, à un angle d'attaque de 3 ou 4 degrés à partir d'un écoulement symétrique à incidence nulle. Par contre, l'extrapolation à des angles plus élevés comme 8 degrés nécessite une extrapolation cubique pour être très efficace. Cette extrapolation cubique qui n'utilise que deux solutions d'écoulements et deux sensibilités permet une excellente représentation de l'écoulement sur un intervalle de plusieurs degrés.

Globalement, les nombreuses vérifications et applications ont démontré l'efficacité et la performance de la méthodologie tant en régime laminaire que turbulent. La formulation générale a permis de traiter avec une grande facilité des paramètres de design aussi variés que des conditions aux limites, des paramètres géométriques, des propriétés physiques et des coefficients des modèles de turbulence et de loi de paroi. On a démontré la grande utilité et efficacité des sensibilités pour effectuer diverses tâches aussi variées que l'optimisation, l'analyse d'incertitude, le calcul de solutions voisines et l'analyse de modèles. À l'opposé, une méthode de variables adjointes n'aurait à toutes fins pratiques permis de faire que de l'optimisation.

Malgré l'étape franchie avec succès, certaines améliorations et développements demeurent possibles et même souhaitables. Le point qui permettrait d'ouvrir les plus grandes portes est le traitement des conditions de Neumann pour un paramètre de forme. On a développé les expressions de ces conditions aux limites, tout comme les conditions mixtes des lois de paroi ou les conditions d'interface mobile, mais le point faible non résolu qui en ressort est l'évaluation précise de dérivées secondes de l'écoulement. Des techniques de reconstruction de type projection locale doivent être explorées. Cet ajout augmenterait nos capacités à faire de l'optimisation de forme, particulièrement en régime turbulent. Dans la même veine, l'amélioration de la technique de reconstruction des dérivées premières sur les frontières permettrait

d'améliorer les conditions de Dirichlet pour un paramètre de forme.

Un autre point qui mériterait des études plus approfondies et qui a été mis de côté ici est le traitement des solutions avec discontinuités. Les discontinuités internes dans les écoulements, comme une onde de choc, sont d'une certaine façon assez marginales et en ce sens non essentielles ou urgentes. La portée du traitement des interfaces avec discontinuités semble plus intéressante.

Bien que l'algorithme actuel fonctionne, certaines retouches pourraient permettre d'améliorer sa performance. En particulier, il est probablement possible de réduire le temps de calcul des sensibilités, par exemple en récupérant la factorisation des matrices ou en modifiant le couplage et les sous-itérations en régime turbulent. Un autre point qui ne semble pas être à son plein rendement est la stabilisation des équations des sensibilités.

Finalement, la méthodologie peut être facilement étendue à d'autres régimes, permettant l'accès à de nouvelles applications. Les écoulements compressibles de même que le transfert de chaleur en régime turbulent ont déjà été implantés et ne demandent qu'à être testés et utilisés. Les écoulements tridimensionnels et transitoires constitueraient une suite logique.

RÉFÉRENCES

- [1] ROACHE, P. J. (1998). *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa publishers, Albuquerque, NM.
- [2] FRANK, P. D. et SHUBIN, G. R. (1992). A comparison of optimization-based approaches for a model computational aerodynamics design problem. *J. Comput. Phys.*, 98, 74–89.
- [3] GUNZBURGER, M. D. (1997). *Three lectures on flow optimization*. Applied Mathematics Report Number AM97-8, Department of Mathematics, Iowa State University, Ames, Iowa.
- [4] GUNZBURGER, M. (2000). *Control and Optimal Design of Flow Systems with CFD*. Cours intensif, CERCA, Montréal, Canada.
- [5] GUNZBURGER, M. D. (1999). Sensitivities, adjoints and flow optimization. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 31, 53–78.
- [6] HAFTKA, R. T. (1981). Techniques for thermal sensitivity analysis. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 17, 71–80.
- [7] BORGGGAARD, J. et BURNS, J. (1997). A PDE sensitivity equation method for optimal aerodynamic design. *J. Comput. Phys.*, 136(2), 366–384.
- [8] BORGGGAARD, J. et BURNS, J. (1995). A sensitivity equation approach to shape optimization in fluid flows. Dans GUNZBURGER, M., éditeur, *Flow Control*, volume 68 de *Proceedings of the IMA*. Springer-Verlag.

- [9] BURKARDT, J. (1995). *Sensitivity Analyses and Computational Shape Optimization for Incompressible Flows*. Thèse de doctorat, Department of Mathematics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.
- [10] BORGGGAARD, J. T. (1994). *The Sensitivity Equation Method for Optimal Design*. Thèse de doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.
- [11] BORGGGAARD, J. et BURNS, J. (1997). Asymptotically consistent gradients in optimal design. Dans ALEXANDROV, N. et HUSSAINI, M., éditeurs, *Multidisciplinary Design Optimization : State of the Art*, pages 303–314. SIAM Publications, Philadelphia, PA.
- [12] BISCHOF, C., CARLE, A., KHADEMI, P., MAUER, A. et HOVLAND, P. (1995). *ADIFOR 2.0 User's Guide*. Technical Report CRPC-95516-S, Center for Parallel Computation.
- [13] BISCHOF, C., KHADEMI, P., MAUER, A. et CARLE, A. (1996). ADIFOR 2.0 : Automatic differentiation of FORTRAN 77 programs. *Comput. Sci. Engrg.*, 3, 18–32.
- [14] GUNZBURGER, M. D., HOU, L. et SVOBODNY, T. P. (1991). Analysis and finite element approximation of optimal control problems for the stationary Navier-Stokes equations with distributed and Neumann controls. *Math. Comp.*, 57(195), 123–151.
- [15] GUNZBURGER, M. D., HOU, L. S. et SVOBODNY, T. P. (1991). Analysis and finite element approximation of optimal control problems for the stationary

- Navier-Stokes equations with Dirichlet controls. *Math. Model. Numer. Anal.*, 25(6), 711–748.
- [16] GUNZBURGER, M. D., HOU, L. et SVOBODNY, T. P. (1992). Boundary velocity control of incompressible flow with an application to viscous drag reduction. *SIAM J. Control Optim.*, 30(1), 167–181.
- [17] GUNZBURGER, M. D. et HOU, L. S. (1996). Finite-dimensional approximation of a class of constrained nonlinear optimal control problems. *SIAM J. Control Optim.*, 34(3), 1001–1043.
- [18] TORTORELLI, D. A., TILLER, M. M. et DANTZIG, J. A. (1994). Optimal design of nonlinear parabolic systems. Part I : Fixed spatial domain with applications to process optimizaton. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 113, 141–155.
- [19] TORTORELLI, D. A., TOMASKO, J. A., MORTHLAND, T. E. et DANTZIG, J. A. (1994). Optimal design of nonlinear parabolic systems. Part II : Variable spatial domain with applications to casting optimizaton. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 113, 157–172.
- [20] KLEIBER, M., ANTÚNEZ, H., HIEN, T. D. et KOWALCZYK, P. (1997). *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics*. John Wiley and Sons.
- [21] HAUG, E. J., CHOI, K. K. et KOMKOV, V. (1986). *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press.
- [22] TORTORELLI, D. A. et WANG, Z. (1993). A systematic approach to shape sensitivity analysis. *Internat. J. Solids Structures*, 30(9), 1181–1212.

- [23] DEMS, K. (1987). Sensitivity analysis in thermal problems-II : Structure shape variation. *J. Therm. Stresses*, 10, 1-16.
- [24] BLACKWELL, B. F., DOWDING, K. J. et COCHRAN, R. J. (1999). Development and implementation of sensitivity coefficient equations for heat conduction problems. *Numer. Heat Transf. Part B*, 36, 15-32.
- [25] DEMS, K. (1986). Sensitivity analysis in thermal problems-I : Variation of material parameters within a fixed domain. *J. Therm. Stresses*, 9, 303-324.
- [26] DOWDING, K. J., BLACKWELL, B. F. et COCHRAN, R. J. (1999). Application of sensitivity coefficients for heat conduction problems. *Numer. Heat Transf. Part B*, 36, 33-55.
- [27] TORTORELLI, D. A. et HABER, R. B. (1989). First-order design sensitivities for transient conduction problems by an adjoint method. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 28, 733-752.
- [28] TORTORELLI, D. A., HABER, R. B. et LU, S. C.-Y. (1989). Design sensitivity analysis for nonlinear thermal systems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 77, 61-77.
- [29] ANDERSON, W. K. et VENKATAKRISHNAN, V. (1997). Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation. Dans *35th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 97-0643.
- [30] GILES, M. B. et DRELA, M. (1987). Two-dimensional transonic aerodynamic design method. *AIAA J.*, 25(9), 1199-1206.

- [31] BAYSAL, O., ELESKAKY, M. E. et BURGEEEN, G. W. (1993). Aerodynamic shape optimization using sensitivity analysis on third-order Euler equations. *J. Aircr.*, 30(6), 953–961.
- [32] BURGEEEN, G. W. et BAYSAL, O. (1996). Three-dimensional aerodynamic shape optimization using discrete sensitivity analysis. *AIAA J.*, 34(9), 1761–1770.
- [33] DERVIEUX, A., LANTERI, S., MALÉ, J.-M., MARCO, N., ROSTAING-SCHMIDT, N. et STOUFFLET, B. (1999). New technologies for advanced three-dimensional optimum shape design in aeronautics. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 30, 179–191.
- [34] MELVIN, R. G., HUFFMAN, W. P., YOUNG, D. P., JOHNSON, F. T., HILMES, C. L. et BIETERMAN, M. (1999). Recent progress in aerodynamic design optimization. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 30, 205–216.
- [35] REUTHER, J. J., JAMESON, A., ALONSO, J. J., RIMLINGER, M. J. et SAUNDERS, D. (1999). Constrained multipoint aerodynamic shape optimization using an adjoint formulation and parallel computers, part 2. *J. Aircr.*, 36(1), 61–74.
- [36] FADALE, T. D. (1993). *Uncertainty analysis using stochastic finite elements*. Thèse de doctorat, University of Washington.
- [37] KLEIBER, M. et HIEN, T. D. (1992). *The Stochastic Finite Element Method*. John Wiley and Sons, Chichester.

- [38] ELISHAKOFF, I. et REN, Y. (1999). The bird's eye view on finite element method for structures with large stochastic variations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 168, 51–61.
- [39] GHANEM, R. (1999). Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 168, 19–34.
- [40] BRAIBANT, V., OUDSHOORN, A., BOYER, C. et DELCROIX, F. (1998). Non-deterministic possibilistic approaches for structural analysis and optimal design – a comparison of numerical methods for computing structural response uncertainties. Dans *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, pages 331–340, St.Louis, Missouri. AIAA Paper 98-4750.
- [41] SANTOS, J. L. T., SIEMASZKO, A., GOLLWITZER, S. et RACKWITZ, R. (1995). Continuum sensitivity method for reliability-based structural design and optimization. *Mech. Struct. & Mach.*, 23(4), 497–520.
- [42] GU, Y. et GRANDHI, R. V. (1998). Sensitivity analysis and optimization of heat transfer and thermal-structural designs. Dans *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, pages 300–308, St.Louis, Missouri. AIAA Paper 98-4746.
- [43] GU, X., RENAUD, J. E. et BATILL, S. M. (1998). An investigation of multidisciplinary design subject to uncertainty. Dans *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, pages 309–319, St.Louis, Missouri. AIAA Paper 98-4747.

- [44] MOLLER, H. et LUND, E. (2000). Shape sensitivity analysis of strongly coupled fluid-structure interaction problems. Dans *8th AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, Long Beach, CA. AIAA Paper 2000-4823.
- [45] NEWMAN, III, J. C., TAYLOR, III, A. C., BARNWELL, R. W., NEWMAN, P. A. et HOU, G. J.-W. (1999). Overview of sensitivity analysis and shape optimization for complex aerodynamic configurations. *J. Aircr.*, 36(1), 87–96.
- [46] REUTHER, J. J., JAMESON, A., ALONSO, J. J., RIMLINGER, M. J. et SAUNDERS, D. (1999). Constrained multipoint aerodynamic shape optimization using an adjoint formulation and parallel computers, part 1. *J. Aircr.*, 36(1), 51–60.
- [47] GUNZBURGER, M. D., HOU, L. S. et SVOBODNY, T. P. (1993). The approximation of boundary control problems for fluid flows with an application to control by heating and cooling. *Comput. & Fluids*, 22(2/3), 239–251.
- [48] GUNZBURGER, M. D., HOU, L. S. et SVOBODNY, T. P. (1993). Heating and cooling control of temperature distributions along boundaries of flow domains. *J. Math. Systems Estim. Control*, 3(2), 147–172.
- [49] GUNZBURGER, M. D. et LEE, H. C. (1994). Analysis, approximation, and computation of a coupled solid/fluid temperature control problem. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 118, 133–152.
- [50] BLACKWELL, B. F., DOWDING, K. J., COCHRAN, R. J. et DOBRANICH, D. (1998). Utilization of sensitivity coefficients to guide the design of a thermal battery. Dans *ASME IMECE*, volume 361, pages 73–82, Anaheim, CA.

- [51] GODFREY, A. G. (1998). Using sensitivities for flow analysis. Dans BORGGAARD, J., BURNS, J., CLIFF, E. et SCHRECK, S., éditeurs, *Computational Methods for Optimal Design and Control*, pages 181–196. Birkhäuser.
- [52] GODFREY, A. G. et CLIFF, E. M. (1998). Direct calculation of aerodynamic force derivatives : A sensitivity-equation approach. Dans *36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 98-0393.
- [53] LIMACHE, A. C. (2000). *Aerodynamic Modeling Using Computational Fluid Dynamics and Sensitivity Equations*. Thèse de doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.
- [54] GODFREY, A. G., EPPARD, W. M. et CLIFF, E. M. (1998). Using sensitivity equations for chemically reacting flows. Dans *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, pages 789–798, St.Louis, Missouri. AIAA Paper 98-4805.
- [55] CRAIG, K. J. et VENTER, P. J. (1999). Optimization of the $k - \epsilon$ coefficients for separation on a high-lift airfoil. Dans *37th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 99-0151.
- [56] JOSLIN, R. D., GUNZBURGER, M. D., NICOLAIDES, R. A., ERLEBACHER, G. et HUSSAINI, M. Y. (1997). Self-contained automated methodology for optimal flow control. *AIAA J.*, 35(5), 816–824.
- [57] WANG, Z.-X., TORTORELLI, D. A. et DANTZIG, J. A. (1996). Sensitivity analysis and optimization of coupled thermal and flow problems with applications to contraction design. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 23, 991–1020.

- [58] MCDAVID, R. M. (1997). *Sensitivity analysis of turbulent free-surface flows applied to optimal casting rigging design*. Thèse de doctorat, Graduate College of the University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois.
- [59] MANNHEIM, E. (1993). *Modeling of charge carrier transport in photoetching of gallium arsenide*. Thèse de doctorat, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois.
- [60] BUGEDA, G. et OLIVER, J. (1993). A general methodology for structural shape optimization problems using automatic adaptive remeshing. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 36, 3161–3185.
- [61] DUTTA, A. et RAMAKRISHNAN, C. V. (1998). Accurate computation of design sensitivities for structures under transient dynamic loads using time marching scheme. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 41, 977–999.
- [62] SIENZ, J. et HINTON, E. (1997). Reliable structural optimization with error estimation, adaptivity and robust sensitivity analysis. *Comput. & Structures*, 64, 31–63.
- [63] BUGEDA, G. et OÑATE, E. (1995). Optimum aerodynamic shape design including mesh adaptivity. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 20, 915–934.
- [64] BUGEDA, G. et OÑATE, E. (1999). Optimum aerodynamic shape design for fluid flow problems including mesh adaptivity. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 30, 161–178.
- [65] MOHAMMADI, B. et PIRONNEAU, O. (1999). Mesh adaption and automatic differentiation in a CAD-free framework for optimal shape design. *Internat. J.*

Numer. Methods Fluids, 30, 127–136.

- [66] BORGGAARD, J. et PELLETIER, D. (1996). Computing design sensitivities using an adaptive finite element method. Dans *27th AIAA Fluid Dynamics Conference*, New Orleans, LA. AIAA Paper 96-1938.
- [67] BORGGAARD, J. et PELLETIER, D. (1998). Optimal shape design in forced convection using adaptive finite elements. Dans *36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 98-0908.
- [68] BORGGAARD, J. et PELLETIER, D. (1998). Observations in adaptive refinement strategies for optimal design. Dans BORGGAARD, J., BURNS, J., CLIFF, E. et SCHRECK, S., éditeurs, *Computational Methods for Optimal Design and Control*, pages 59–76. Birkhäuser.
- [69] STEWART, D. L. (1998). *Numerical Methods for Accurate Computation of Design Sensitivities*. Thèse de doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.
- [70] BUSCAGLIA, G. C., FEIJÓO, R. A. et PADRA, C. (1995). A posteriori error estimation in sensitivity analysis. *Struct. Optim.*, 9, 194–199.
- [71] DOWDING, K. J. et BLACKWELL, B. F. (1999). Sensitivity analysis for nonlinear heat conduction. Dans *ASME Proceedings of 33th National Heat Transfer Conference*, Albuquerque, NM. HTD99-111.
- [72] KIM, C. S., KIM, C. et RHO, O. H. (2001). Aerodynamic sensitivity analysis for turbulent flows on Chimera overlaid grids. Dans *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2001-0267.

- [73] AHN, T., KIM, C. et RHO, O. H. (2001). Dynamic stall control using aerodynamic sensitivity analysis. Dans *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2001-0255.
- [74] NIELSEN, E. J. et ANDERSON, W. K. (1999). Aerodynamic design optimization on unstructured meshes using the Navier-Stokes equations. *AIAA J.*, 37(11), 1411–1419.
- [75] NIELSEN, E. J. et ANDERSON, W. K. (2001). Recent improvements in aerodynamic design optimization on unstructured meshes. Dans *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2001-0596.
- [76] RUMSEY, C. L. et GATSKI, T. B. (2001). Isolating curvature effects in computing wall-bounded turbulent flows. Dans *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2001-0725.
- [77] H. SUNG, C. et KWON, J. H. (2001). Aerodynamic design optimization using the Navier-Stokes and adjoint equations. Dans *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2001-0266.
- [78] GODFREY, A. G. et CLIFF, E. M. (2001). Sensitivity equations for turbulent flows. Dans *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2001-1060.
- [79] HE, B., GHATTAS, O. et ANTAKI, J. F. (1998). Continuous shape sensitivity of incompressible Navier-Stokes flows. Dans *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, pages 430–440, St. Louis, Missouri. AIAA Paper 98-4762.

- [80] CROUZEIX, M. et RAVIART, P. A. (1973). Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. *R.A.I.R.O.*, 7(R-3), 33–76.
- [81] CUVELIER, C., SEGAL, A. et VAN STEENHOVEN, A. A. (1986). *Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations*. D. Reidel Publishing Company.
- [82] PELLETIER, D. et FORTIN, A. (1989). Are FEM solutions of incompressible flows really incompressible? (or how simple flows can cause headaches). *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 9(1), 99–112.
- [83] HUGHES, T. J. R. et BROOKS, A. (1979). A multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. Dans HUGHES, T. J. R., éditeur, *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, pages 19–35. ASME.
- [84] BROOKS, A. N. et HUGHES, T. J. R. (1982). Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 32, 199–259.
- [85] HUGHES, T. J. R., FRANCA, L. P. et HULBERT, G. M. (1989). A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 73, 173–189.
- [86] TURGEON, É. (1997). *Application d'une méthode d'éléments finis adaptative à des écoulements axisymétriques*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.

- [87] STANLEY, L. G. et STEWART, D. L. (1998). A comparison of local and global projections in design sensitivity computations. Dans BORGGAARD, J., BURNS, J., CLIFF, E. et SCHRECK, S., éditeurs, *Computational Methods for Optimal Design and Control*, pages 361–373. Birkhäuser.
- [88] APPEL, J. R. et GUNZBURGER, M. D. (1997). Difficulties in sensitivity calculations for flows with discontinuities. *AIAA J.*, 35(5), 842–848.
- [89] APPEL, J. R. (1997). *Sensitivity Calculations for Conservation Laws with Application to Discontinuous Flows*. Thèse de doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.
- [90] PELLETIER, D., BORGGAARD, J. et HÉTU, J.-F. (2000). A continuous sensitivity equation method for conduction and phase change problems. Dans *38th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2000-0881.
- [91] HINZE, J. O. (1975). *Turbulence*. McGraw-Hill, New-York, 2nd edition.
- [92] LAUNDER, B. E. et SPALDING, J. (1974). The numerical computation of turbulent flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, pages 269–289.
- [93] ILINCA, F. (1996). *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements turbulents*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.
- [94] ILINCA, F. et PELLETIER, D. (1998). Positivity preservation and adaptive solution for the $k - \epsilon$ model of turbulence. *AIAA J.*, 36(1), 44–51.

- [95] LACASSE, D. (2000). *Application d'une méthode d'éléments finis adaptative à des écoulements turbulents*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.
- [96] CHABARD, J. P. (1991). *Projet N3S de mécanique des fluides - Manuel théorique de la version 3*. Technical Report EDF HE-41/91.30B, Électricité de France.
- [97] SCHETZ, J. A. (1993). *Boundary Layer Analysis*. Prentice-Hall.
- [98] TURGEON, É. et PELLETIER, D. (1999). Verification and validation in CFD using an adaptive finite element method. Dans *Proceedings of the 46th CASI Annual Conference*, pages 223–232, Montréal, Canada.
- [99] PELLETIER, D. et TURGEON, É. (1999). Vérification et validation de simulations en thermique par une méthode d'éléments finis adaptative. Dans *IVe Colloque Inter-universitaire Franco-Québécois, Thermique des systèmes à température modérée*, Montréal, Canada.
- [100] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992). The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 1 : The recovery technique. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 33, 1331–1364.
- [101] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1992). The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 33, 1365–1382.
- [102] HÉTU, J.-F. et PELLETIER, D. H. (1992). Adaptive remeshing for viscous incompressible flows. *AIAA J.*, 30(8), 1986–1992.

- [103] HÉTU, J.-F. et PELLETIER, D. H. (1992). Fast, adaptive finite element scheme for viscous incompressible flows. *AIAA J.*, 30(11), 2677–2682.
- [104] ILINCA, F., PELLETIER, D. et GARON, A. (1997). An adaptive finite element method for a two-equation turbulence model in wall-bounded flows. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 24(1), 101–120.
- [105] ILINCA, F., PELLETIER, D. et ARNOUX-GUISSE, F. (1997). An adaptive finite element scheme for turbulent free shear flows. *Internat. J. CFD*, 8(3), 171–188.
- [106] LACASSE, D., TURGEON, É. et PELLETIER, D. (2001). On the judicious use of the $k - \epsilon$ model, wall functions, and adaptivity. Dans *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2001-0882.
- [107] LACASSE, D., TURGEON, É. et PELLETIER, D. (2001). Predictions of turbulent separated flow in a turnaround duct using wall functions and adaptivity. Dans *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2001-0448.
- [108] PELLETIER, D. et ILINCA, F. (1997). Adaptive remeshing for the $k - \epsilon$ model of turbulence. *AIAA J.*, 35(4), 640–646.
- [109] PELLETIER, D., HÉTU, J.-F. et ILINCA, F. (1994). Adaptive finite element method for thermal flow problems. *AIAA J.*, 32(4), 741–747.
- [110] PELLETIER, D., ILINCA, F. et HÉTU, J.-F. (1994). Adaptive finite element method for convective heat transfer with variable fluid properties. *J. Thermophys. Heat Transfer*, 8(4), 687–694.

- [111] PELLETIER, D. et ILINCA, F. (1995). An adaptive finite element method for mixed convection. *J. Thermophys. Heat Transfer*, 9(4), 708–714.
- [112] PELLETIER, D., IGNAT, L. et ILINCA, F. (1997). Adaptive finite element method for conjugate heat transfer. *Numer. Heat Transf. Part A Appl.*, 32(3), 267–287.
- [113] PELLETIER, D., ILINCA, F. et TURGEON, É. (1997). An adaptive finite element method for forced convection. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 25(7), 803–823.
- [114] ILINCA, F., PELLETIER, D. et IGNAT, L. (1998). Adaptive finite element solution of compressible turbulent flows. *AIAA J.*, 36(12), 2187–2194.
- [115] TURGEON, É., PELLETIER, D. et ILINCA, F. (1999). Compressible heat transfer computations by and adaptive finite element method. Dans *37th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 99-0875.
- [116] BORGGAARD, J., PELLETIER, D. et TURGEON, É. (2000). A study of optimal cooling strategies in thermal processes. Dans *38th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2000-0563.
- [117] TURGEON, É., PELLETIER, D. et BORGGAARD, J. (2000). A continuous sensitivity equation approach to optimal design in mixed convection. *Numer. Heat Transf. Part A Appl.*, 38(8), 869–885.
- [118] TURGEON, É., PELLETIER, D. et BORGGAARD, J. (2000). A general continuous sensitivity equation formulation for complex flows. Dans *8th*

AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Long Beach, CA. AIAA Paper 2000-4732.

- [119] CHU, T. Y. et HICKOX, C. E. (1990). Thermal convection with large viscosity variation in an enclosure with localized heating. *J. Heat Tran.*, 112(3), 388–395.
- [120] HABCHI, S. et ACHARYA, S. (1986). Laminar mixed convection in a partially blocked, vertical channel. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 29(11), 1711–1722.
- [121] MOREÉ, J. J. (1983). Recent developments in algorithms and software for trust region methods. Dans BACHEM, A., GRÖTSCHEL, M. et KORTE, B., éditeurs, *Mathematical Programming : The State of the Art*, Berlin. Springer-Verlag.
- [122] DENNIS, JR., J. E. et SCHNABEL, R. B. (1983). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [123] CARTER, R. G. (1989). *Numerical Optimization in Hilbert Space Using Inexact Function and Gradient Evaluations*. Technical Report 89-45, ICASE.
- [124] CARTER, R. G. (1991). On the global convergence of trust-region algorithms using inexact gradient information. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(1), 251–265.
- [125] SCHLICHTING, H. (1979). *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, 7th edition.
- [126] TURGEON, É., PELLETIER, D. et BORGGAARD, J. (2001). Application of a sensitivity equation method to the $k - \epsilon$ model of turbulence. Dans *15th*

AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Anaheim, CA. AIAA Paper 2001-2534.

- [127] TURGEON, É., PELLETIER, D. et BORGGAARD, J. (2001). A general continuous sensitivity equation formulation for the $k - \epsilon$ model of turbulence. Dans *31st AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, Anaheim, CA. AIAA Paper 2001-3000.
- [128] WHITE, F. M. (1974). *Viscous Flow*. McGraw-Hill.
- [129] SCHULTZ-GRUNOW, F. (1941). *New Frictional Resistance Law for Smooth Plates*. NACA TM 986.
- [130] TURGEON, É., PELLETIER, D. et BORGGAARD, J. (2001). Application of a sensitivity equation method to turbulent flows. Dans SCHNEIDER, G. E., éditeur, *Proceedings of the 9th Annual Conference of the CFD Society of Canada*, pages 38–43, Waterloo, Canada.
- [131] (1979). *Experimental Data Base for Computer Program Assessment, Report of the Fluid Dynamics Panel Working Group 04*. AGARD Advisory Report 138.

ANNEXE I

MÉTHODES D'ÉLÉMENTS FINIS STABILISÉES POUR LES ÉQUATIONS DES SENSIBILITÉS

On a mentionné au chapitre 2 la nécessité de stabiliser les équations pour les écoulements dominés par la convection. Les applications présentées par la suite ont utilisé certaines de ces techniques de stabilisation. Les formulations variationnelles des équations de l'écoulement en régime turbulent sont détaillées dans le mémoire de Turgeon [86] et la thèse de Ilinca [93]. On y traite la méthode de Galerkin standard et quatre méthodes stabilisées, soit SU, SUPG-incomplet, SUPG et GLS. Ici, on applique les mêmes techniques sur les équations des sensibilités, sans traitement particulier. Dans les sections suivantes, on présente dans l'ordre les diverses formulations pour les équations de mouvement, de continuité et d'énergie en régime laminaire, suivi des équations en régime turbulent (mouvement, continuité, s_K et s_E).

I.1 Équations de mouvement en régime laminaire

I.1.1 Méthode de Galerkin

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} [2\mu' \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{s}_u) d\Omega - \int_{\Omega} s_p \nabla \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} [(\rho' \mathbf{g} \beta + \rho \mathbf{g}' \beta + \rho \mathbf{g} \beta') (T - T_0) + \rho \mathbf{g} \beta (s_T - T_0')] \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \mathbf{f}' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}_f' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{I.1}$$

Notons que l'équation de mouvement en x s'obtient en utilisant $\delta \mathbf{s}_u = (\delta s_u, 0)$ alors que l'équation en y s'obtient avec $\delta \mathbf{s}_u = (0, \delta s_v)$.

I.1.2 Méthode SU

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} [2\mu' \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{s}_u) d\Omega - \int_{\Omega} s_p \nabla \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} [(\rho' \mathbf{g} \beta + \rho \mathbf{g}' \beta + \rho \mathbf{g} \beta') (T - T_0) + \rho \mathbf{g} \beta (s_T - T_0')] \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \mathbf{f}' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}_f' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Gamma \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) \cdot (\tau_u \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{s}_u) d\Omega_e = 0
 \end{aligned} \tag{I.2}$$

où Ω_e est la portion de domaine couverte par l'élément e et n_{elem} est le nombre d'éléments. Le paramètre de stabilisation τ_u se calcule selon :

$$\tau_u = \frac{\alpha_u h}{2V} \quad (I.3)$$

où V est la norme de la vitesse et h est la taille de l'élément calculée comme étant la valeur maximale des projections des trois côtés de l'élément triangulaire dans la direction de la vitesse. Pour sa part, α_u est donné par :

$$\alpha_u = \coth(\text{Pe}_u) - \frac{1}{\text{Pe}_u} \quad (I.4)$$

avec le nombre de Péclet élémentaire Pe_u défini par :

$$\text{Pe}_u = \frac{\rho h V}{2\mu_e} \quad (I.5)$$

où la viscosité effective μ_e vaut μ dans le cas d'un écoulement laminaire. Ces notations et définitions prévalent aussi pour les méthodes de stabilisation qui suivent.

I.1.3 Méthode SUPG-incomplet

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [2\mu' \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{s}_u) d\Omega - \int_{\Omega} s_p \nabla \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [(\rho' \mathbf{g} \beta + \rho \mathbf{g}' \beta + \rho \mathbf{g} \beta') (T - T_0) + \rho \mathbf{g} \beta (s_T - T'_0)] \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \mathbf{f}' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}'_f \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Gamma \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} [\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u \\
& + \nabla s_p + (\rho' \mathbf{g} \beta + \rho \mathbf{g}' \beta + \rho \mathbf{g} \beta') (T - T_0) + \rho \mathbf{g} \beta (s_T - T'_0) - \mathbf{f}'] \\
& \cdot (\tau_u \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{s}_u) d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{I.6}$$

I.1.4 Méthode SUPG

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [2\mu' \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{s}_u) d\Omega - \int_{\Omega} s_p \nabla \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [(\rho' \mathbf{g} \beta + \rho \mathbf{g}' \beta + \rho \mathbf{g} \beta') (T - T_0) + \rho \mathbf{g} \beta (s_T - T_0')] \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& \quad - \int_{\Omega} \mathbf{f}' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}'_f \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Gamma \tag{I.7} \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \{ \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u - \nabla \cdot [2\mu' \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] \\
& \quad + \nabla s_p + (\rho' \mathbf{g} \beta + \rho \mathbf{g}' \beta + \rho \mathbf{g} \beta') (T - T_0) + \rho \mathbf{g} \beta (s_T - T_0') - \mathbf{f}' \} \\
& \quad \cdot (\tau_u \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{s}_u) d\Omega_e = 0
\end{aligned}$$

I.1.5 Méthode GLS

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [2\mu' \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{s}_u) d\Omega - \int_{\Omega} s_p \nabla \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [(\rho' \mathbf{g} \beta + \rho \mathbf{g}' \beta + \rho \mathbf{g} \beta') (T - T_0) + \rho \mathbf{g} \beta (s_T - T'_0)] \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \mathbf{f}' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}'_f \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Gamma \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \{ \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u - \nabla \cdot [2\mu' \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] \\
& + \nabla s_p + (\rho' \mathbf{g} \beta + \rho \mathbf{g}' \beta + \rho \mathbf{g} \beta') (T - T_0) + \rho \mathbf{g} \beta (s_T - T'_0) - \mathbf{f}' \} \\
& \quad \cdot (\tau_u \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{s}_u) d\Omega_e \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\nabla \cdot \mathbf{s}_u) \tau_p (\nabla \cdot \delta \mathbf{s}_u) d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{I.8}$$

Ici, τ_p est défini par :

$$\tau_p = \frac{h}{2V} \tag{I.9}$$

Comme on peut le constater, le couplage des équations est encore plus fort avec cette méthode : l'équation de continuité se retrouve dans la formulation des équations de mouvement.

I.2 Équation de continuité en régime laminaire

I.2.1 Méthodes de Galerkin, SU, SUPG-incomplet et SUPG

$$\int_{\Omega} \delta s_p \nabla \cdot \mathbf{s}_u d\Omega = 0 \quad (\text{I.10})$$

I.2.2 Méthode GLS

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta s_p \nabla \cdot \mathbf{s}_u d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \{ \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u - \nabla \cdot [2\mu' \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] \\ & \quad + \nabla s_p + (\rho' \mathbf{g} \beta + \rho \mathbf{g}' \beta + \rho \mathbf{g} \beta') (T - T_0) + \rho \mathbf{g} \beta (s_T - T'_0) - \mathbf{f}' \} \\ & \quad \cdot (\tau_u \nabla \delta s_p) d\Omega_e = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

I.3 Équation d'énergie en régime laminaire

I.3.1 Méthode de Galerkin

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(\rho' c_p + \rho c'_p) \mathbf{u} \cdot \nabla T + \rho c_p (\mathbf{s}_u \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T)] \delta s_T d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (\lambda' \nabla T + \lambda \nabla s_T) \cdot \nabla \delta s_T d\Omega - \int_{\Omega} q'_s \delta s_T d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q}' \delta s_T d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

I.3.2 Méthode SU

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} [(\rho' c_p + \rho c'_p) \mathbf{u} \cdot \nabla T + \rho c_p (\mathbf{s}_u \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T)] \delta s_T d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} (\lambda' \nabla T + \lambda \nabla s_T) \cdot \nabla \delta s_T d\Omega - \int_{\Omega} q'_s \delta s_T d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q}' \delta s_T d\Gamma \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} [(\rho' c_p + \rho c'_p) \mathbf{u} \cdot \nabla T + \rho c_p (\mathbf{s}_u \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T)] \\
 & \quad \times \tau_T \mathbf{u} \cdot \nabla \delta s_T d\Omega_e = 0
 \end{aligned} \tag{I.13}$$

où :

$$\tau_T = \frac{\alpha_T h}{2V} \tag{I.14}$$

avec :

$$\alpha_T = \coth(\text{Pe}_T) - \frac{1}{\text{Pe}_T} \tag{I.15}$$

et :

$$\text{Pe}_T = \frac{\rho c_p h V}{2\lambda_e} \tag{I.16}$$

La conductivité effective λ_e vaut λ dans le cas d'un écoulement laminaire.

I.3.3 Méthode SUPG-incomplet

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [(\rho' c_p + \rho c'_p) \mathbf{u} \cdot \nabla T + \rho c_p (\mathbf{s}_u \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T)] \delta s_T d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (\lambda' \nabla T + \lambda \nabla s_T) \cdot \nabla \delta s_T d\Omega - \int_{\Omega} q'_s \delta s_T d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q}' \delta s_T d\Gamma \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} [(\rho' c_p + \rho c'_p) \mathbf{u} \cdot \nabla T + \rho c_p (\mathbf{s}_u \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T) - q'_s] \\
& \quad \times \tau_T \mathbf{u} \cdot \nabla \delta s_T d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{I.17}$$

I.3.4 Méthodes SUPG et GLS

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [(\rho' c_p + \rho c'_p) \mathbf{u} \cdot \nabla T + \rho c_p (\mathbf{s}_u \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T)] \delta s_T d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (\lambda' \nabla T + \lambda \nabla s_T) \cdot \nabla \delta s_T d\Omega - \int_{\Omega} q'_s \delta s_T d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q}' \delta s_T d\Gamma \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} [(\rho' c_p + \rho c'_p) \mathbf{u} \cdot \nabla T + \rho c_p (\mathbf{s}_u \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T) \\
& \quad - \nabla \cdot (\lambda' \nabla T + \lambda \nabla s_T) - q'_s] \tau_T \mathbf{u} \cdot \nabla \delta s_T d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{I.18}$$

I.4 Équations de mouvement en régime turbulent

I.4.1 Méthode de Galerkin

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} [2(\mu' + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{s}_u) d\Omega - \int_{\Omega} s_p \nabla \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \mathbf{f}' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}_f' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Gamma = 0
 \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

I.4.2 Méthode SU

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} [2(\mu' + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{s}_u) d\Omega - \int_{\Omega} s_p \nabla \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \mathbf{f}' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}_f' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Gamma \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) \cdot (\tau_u \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{s}_u) d\Omega_e = 0
 \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Dans le cas d'écoulements turbulents, la viscosité effective μ_e vaut $\mu + \mu_t$ pour le calcul de τ_u .

I.4.3 Méthode SUPG-incomplet

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [2(\mu' + \mu'_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{s}_u) d\Omega - \int_{\Omega} s_p \nabla \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& \quad - \int_{\Omega} \mathbf{f}' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}'_f \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Gamma \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} [\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u + \nabla s_p - \mathbf{f}'] \\
& \quad \cdot (\tau_u \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{s}_u) d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{I.21}$$

I.4.4 Méthode SUPG

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [2(\mu' + \mu'_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{s}_u) d\Omega - \int_{\Omega} s_p \nabla \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& \quad - \int_{\Omega} \mathbf{f}' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}'_f \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Gamma \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \{ \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u + \nabla s_p - \mathbf{f}' \\
& \quad - \nabla \cdot [2(\mu' + \mu'_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] \} \cdot (\tau_u \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{s}_u) d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{I.22}$$

I.4.5 Méthode GLS

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [2(\mu' + \mu'_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{s}_u) d\Omega - \int_{\Omega} s_p \nabla \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega \\
& \quad - \int_{\Omega} \mathbf{f}' \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Omega - \int_{\Gamma_t} \vec{\mathbf{t}}'_f \cdot \delta \mathbf{s}_u d\Gamma \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \{ \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u + \nabla s_p - \mathbf{f}' \\
& \quad - \nabla \cdot [2(\mu' + \mu'_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] \} \cdot (\tau_u \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{s}_u) d\Omega_e \\
& \quad + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\nabla \cdot \mathbf{s}_u) \tau_p (\nabla \cdot \delta \mathbf{s}_u) d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{I.23}$$

I.5 Équation de continuité en régime turbulent

I.5.1 Méthode de Galerkin, SU, SUPG-incomplet et SUPG

$$\int_{\Omega} \delta s_p \nabla \cdot \mathbf{s}_u d\Omega = 0 \tag{I.24}$$

I.5.2 Méthode GLS

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \delta s_p \nabla \cdot \mathbf{s}_u d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \{ \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u + \nabla s_p - \mathbf{f}' \\
& - \nabla \cdot [2(\mu' + \mu'_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{s}_u)] \} \cdot (\tau_u \nabla \delta s_p) d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{I.25}$$

I.6 Équation de s_K

I.6.1 Méthode de Galerkin

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_K) \delta s_K d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_K \right] \cdot \nabla \delta s_K d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla s_K \right] \delta s_K d\Omega \\
& - \int_{\Omega} e^{-\kappa} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P s_K) \delta s_K d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \rho e^{\varepsilon - \kappa} \left(2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + s_K - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) \delta s_K d\Omega \\
& - \int_{\Omega} q'_K \delta s_K d\Omega - \int_{\Gamma_{f_K}} \bar{f}'_K \delta s_K d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{I.26}$$

L'expression de la condition aux limites naturelle $\bar{f}'_K$ qui s'applique sur la portion de

frontière $\Gamma_{f\kappa}$ est :

$$\bar{f}'_{\kappa} = \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\kappa} \right] \cdot \hat{n} \quad (\text{I.27})$$

I.6.2 Méthode SU

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\kappa}) \delta s_{\kappa} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\kappa} \right] \cdot \nabla \delta s_{\kappa} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla s_{\kappa} \right] \delta s_{\kappa} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} e^{-\kappa} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P s_{\kappa}) \delta s_{\kappa} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho e^{\varepsilon - \kappa} \left(2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + s_{\kappa} - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) \delta s_{\kappa} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} q'_{\kappa} \delta s_{\kappa} d\Omega - \int_{\Gamma_{f\kappa}} \bar{f}'_{\kappa} \delta s_{\kappa} d\Gamma \\ & + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\kappa}) \tau_{\kappa} \mathbf{u} \cdot \nabla \delta s_{\kappa} d\Omega_e = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

Le paramètre de stabilisation τ_{κ} se calcule de la façon suivante :

$$\tau_{\kappa} = \frac{\alpha_{\kappa} h}{2V} \quad (\text{I.29})$$

où :

$$\alpha_{\kappa} = \coth(\text{Pe}_{\kappa}) - \frac{1}{\text{Pe}_{\kappa}} \quad (\text{I.30})$$

et :

$$\text{Pe}_\kappa = \frac{\rho h V}{2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right)} \quad (\text{I.31})$$

I.6.3 Méthode SUPG-incomplet

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}}) \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} e^{-\kappa} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P s_{\mathcal{K}}) \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \rho e^{\varepsilon - \kappa} \left(2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + s_{\mathcal{K}} - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} q'_\kappa \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega - \int_{\Gamma_{f\kappa}} \bar{f}'_\kappa \delta s_{\mathcal{K}} d\Gamma \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \int_{\Omega_e} \left[\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}} \right. \\
 & - \left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}} \\
 & \left. - e^{-\kappa} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P s_{\mathcal{K}}) + \rho e^{\varepsilon - \kappa} \left(2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + s_{\mathcal{K}} - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) - q'_\kappa \right] \\
 & \times \tau_\kappa \mathbf{u} \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega_e = 0
 \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

I.6.4 Méthode SUPG

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}}) \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} e^{-\mathcal{K}} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P s_{\mathcal{K}}) \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \rho e^{\mathcal{E}-\mathcal{K}} \left(2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + s_{\mathcal{K}} - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} q'_K \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega - \int_{\Gamma_{f_K}} \bar{f}'_K \delta s_{\mathcal{K}} d\Gamma \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \left\{ \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}} \right. \\
& - \nabla \cdot \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \\
& - \left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}} \\
& \left. - e^{-\mathcal{K}} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P s_{\mathcal{K}}) + \rho e^{\mathcal{E}-\mathcal{K}} \left(2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + s_{\mathcal{K}} - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) - q'_K \right\} \\
& \quad \times \tau_K \mathbf{u} \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{I.33}$$

I.6.5 Méthode GLS

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}}) \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} e^{-\kappa} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P s_{\mathcal{K}}) \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \rho e^{\varepsilon - \kappa} \left(2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + s_{\mathcal{K}} - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} q'_{\mathcal{K}} \delta s_{\mathcal{K}} d\Omega - \int_{\Gamma_{f\mathcal{K}}} \bar{f}'_{\mathcal{K}} \delta s_{\mathcal{K}} d\Gamma \tag{I.34} \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \left\{ \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}} \right. \\
& - \nabla \cdot \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla s_{\mathcal{K}} \right] \\
& - \left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla s_{\mathcal{K}} \\
& \left. - e^{-\kappa} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P s_{\mathcal{K}}) + \rho e^{\varepsilon - \kappa} \left(2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + s_{\mathcal{K}} - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) - q'_{\mathcal{K}} \right\} \\
& \times \tau_{\mathcal{K}} (\mathbf{u} \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{K}} + e^{-\kappa} \mu_t P \delta s_{\mathcal{K}} + \rho e^{\varepsilon - \kappa} \delta s_{\mathcal{K}}) d\Omega_e = 0
\end{aligned}$$

I.7 Équation de $s_{\mathcal{E}}$

I.7.1 Méthode de Galerkin

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}}) \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \left[\rho C_1 C_{\mu} e^{\kappa - \mathcal{E}} P \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_1}{C_1} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + s_{\kappa} - s_{\mathcal{E}} + \frac{P'}{P} \right) \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left[C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \kappa} \left(\frac{C'_2}{C_2} + \frac{\rho'}{\rho} + s_{\mathcal{E}} - s_{\kappa} \right) \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} q'_{\mathcal{E}} \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega - \int_{\Gamma_{f_{\mathcal{E}}}} \bar{f}'_{\mathcal{E}} \delta s_{\mathcal{E}} d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{I.35}$$

L'expression de la condition aux limites naturelle $\bar{f}'_{\mathcal{E}}$ qui s'applique sur la portion de frontière $\Gamma_{f_{\mathcal{E}}}$ est :

$$\bar{f}'_{\mathcal{E}} = \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{I.36}$$

I.7.2 Méthode SU

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}}) \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[\rho C_1 C_{\mu} e^{\kappa - \mathcal{E}} P \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_1}{C_1} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + s_{\kappa} - s_{\mathcal{E}} + \frac{P'}{P} \right) \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \kappa} \left(\frac{C'_2}{C_2} + \frac{\rho'}{\rho} + s_{\mathcal{E}} - s_{\kappa} \right) \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} q'_{\mathcal{E}} \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega - \int_{\Gamma_{f_{\mathcal{E}}}} \bar{f}'_{\mathcal{E}} \delta s_{\mathcal{E}} d\Gamma \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}}) \tau_{\mathcal{E}} \mathbf{u} \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{I.37}$$

Le paramètre de stabilisation $\tau_{\mathcal{E}}$ se calcule de la façon suivante :

$$\tau_{\mathcal{E}} = \frac{\alpha_{\mathcal{E}} h}{2V} \tag{I.38}$$

où :

$$\alpha_{\mathcal{E}} = \coth(\text{Pe}_{\mathcal{E}}) - \frac{1}{\text{Pe}_{\mathcal{E}}} \tag{I.39}$$

et :

$$\text{Pe}_{\mathcal{E}} = \frac{\rho h V}{2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right)} \tag{I.40}$$

I.7.3 Méthode SUPG-incomplet

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}}) \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[\rho C_1 C_{\mu} e^{\kappa - \mathcal{E}} P \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_1}{C_1} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + s_{\kappa} - s_{\mathcal{E}} + \frac{P'}{P} \right) \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \kappa} \left(\frac{C'_2}{C_2} + \frac{\rho'}{\rho} + s_{\mathcal{E}} - s_{\kappa} \right) \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} q'_{\mathcal{E}} \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega - \int_{\Gamma_{f_{\mathcal{E}}}} \bar{f}'_{\mathcal{E}} \delta s_{\mathcal{E}} d\Gamma \tag{I.41} \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \left[\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}} \right. \\
& - \left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}} \\
& - \rho C_1 C_{\mu} e^{\kappa - \mathcal{E}} P \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_1}{C_1} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + s_{\kappa} - s_{\mathcal{E}} + \frac{P'}{P} \right) \\
& \left. + C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \kappa} \left(\frac{C'_2}{C_2} + \frac{\rho'}{\rho} + s_{\mathcal{E}} - s_{\kappa} \right) - q'_{\mathcal{E}} \right] \\
& \times \tau_{\mathcal{E}} \mathbf{u} \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega_e = 0
\end{aligned}$$

I.7.4 Méthode SUPG

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}}) \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[\rho C_1 C_{\mu} e^{\kappa - \mathcal{E}} P \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_1}{C_1} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + s_{\kappa} - s_{\mathcal{E}} + \frac{P'}{P} \right) \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \kappa} \left(\frac{C'_2}{C_2} + \frac{\rho'}{\rho} + s_{\mathcal{E}} - s_{\kappa} \right) \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} q'_{\mathcal{E}} \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega - \int_{\Gamma_{f_{\mathcal{E}}}} \bar{f}'_{\mathcal{E}} \delta s_{\mathcal{E}} d\Gamma \\
& + \sum_{e=1}^{n_{e|em}} \int_{\Omega_e} \left[\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}} \right. \\
& - \nabla \cdot \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \\
& - \left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}} \\
& - \rho C_1 C_{\mu} e^{\kappa - \mathcal{E}} P \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_1}{C_1} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + s_{\kappa} - s_{\mathcal{E}} + \frac{P'}{P} \right) \\
& \left. + C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \kappa} \left(\frac{C'_2}{C_2} + \frac{\rho'}{\rho} + s_{\mathcal{E}} - s_{\kappa} \right) - q'_{\mathcal{E}} \right] \\
& \times \tau_{\mathcal{E}} \mathbf{u} \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{I.42}$$

I.7.5 Méthode GLS

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}}) \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[\rho C_1 C_{\mu} e^{\kappa - \mathcal{E}} P \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_1}{C_1} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + s_{\kappa} - s_{\mathcal{E}} + \frac{P'}{P} \right) \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \kappa} \left(\frac{C'_2}{C_2} + \frac{\rho'}{\rho} + s_{\mathcal{E}} - s_{\kappa} \right) \right] \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} q'_{\mathcal{E}} \delta s_{\mathcal{E}} d\Omega - \int_{\Gamma_{f_{\mathcal{E}}}} \bar{f}'_{\mathcal{E}} \delta s_{\mathcal{E}} d\Gamma \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \left[\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}} \right. \\
& \quad - \nabla \cdot \left[\left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla s_{\mathcal{E}} \right] \\
& \quad - \left(\mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + 2 \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla s_{\mathcal{E}} \\
& \quad - \rho C_1 C_{\mu} e^{\kappa - \mathcal{E}} P \left(\frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_1}{C_1} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + s_{\kappa} - s_{\mathcal{E}} + \frac{P'}{P} \right) \\
& \quad \left. + C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \kappa} \left(\frac{C'_2}{C_2} + \frac{\rho'}{\rho} + s_{\mathcal{E}} - s_{\kappa} \right) - q'_{\mathcal{E}} \right] \\
& \times \tau_{\mathcal{E}} (\mathbf{u} \cdot \nabla \delta s_{\mathcal{E}} + \rho C_1 C_{\mu} e^{\kappa - \mathcal{E}} P \delta s_{\mathcal{E}} + C_2 \rho e^{\mathcal{E} - \kappa} \delta s_{\mathcal{E}}) d\Omega_e = 0
\end{aligned} \tag{I.43}$$