



Titre: Lignes de transfert non fiables : décomposition/agrégation et optimisation
Title:

Auteur: Javad Sadr
Author:

Date: 2002

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Sadr, J. (2002). Lignes de transfert non fiables : décomposition/agrégation et optimisation [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/7068/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/7068/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Roland P. Malhamé
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

INFORMATION TO USERS

This manuscript has been reproduced from the microfilm master. UMI films the text directly from the original or copy submitted. Thus, some thesis and dissertation copies are in typewriter face, while others may be from any type of computer printer.

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted. Broken or indistinct print, colored or poor quality illustrations and photographs, print bleedthrough, substandard margins, and improper alignment can adversely affect reproduction.

In the unlikely event that the author did not send UMI a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if unauthorized copyright material had to be removed, a note will indicate the deletion.

Oversize materials (e.g., maps, drawings, charts) are reproduced by sectioning the original, beginning at the upper left-hand corner and continuing from left to right in equal sections with small overlaps.

ProQuest Information and Learning
300 North Zeeb Road, Ann Arbor, MI 48106-1346 USA
800-521-0600

UMI[®]

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**LIGNES DE TRANSFERT NON FIABLES :
DÉCOMPOSITION/AGRÉGATION ET OPTIMISATION**

JAVAD SADR

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE
INFORMATIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR(Ph.D.)
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)

Mai 2002

©Javad Sadr 2002



**National Library
of Canada**

**Acquisitions and
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

**Bibliothèque nationale
du Canada**

**Acquisitions et
services bibliographiques**

**395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-71316-4

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

**LIGNES DE TRANSFERT NON FIABLES :
DÉCOMPOSITION/AGRÉGATION ET OPTIMISATION**

présentée par : SADR, Javad

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. EL-KÉBIR Boukas, Ph.D., Président.

M. MALHAMÉ Roland P., Ph.D., membre et directeur de recherche.

M. LAPIERRE Sofie, Ph.D., membre.

M. GERSHWIN Stanley, Ph.D., membre.

À la mémoire de mon père *Seyed Ali Akbar SadrGhayeni*,

À ma mère,

À mes frères et mes sœurs,

et celle que j'aime.

Remerciements

Je désire avant tout remercier mon directeur de recherche, le professeur ***Roland P. Malhamé***, pour m'avoir témoigné sa confiance, et de m'avoir guidé et soutenu moralement tout au long de mon doctorat. Ses conseils ont toujours été utiles, judicieux et ses commentaires critiques, et très pertinents. Sa rigueur et son esprit scientifique m'ont permis de faire évoluer ma pensée. Merci encore pour son support constant et son implication personnelle soutenue.

Je tiens à remercier tous les professeurs de la section "Automation et Système" pour leur présence et les techniciens de cette même section, dont M. Richard Grenier et Mme Marie-Lyne Brisson, ainsi que les secrétaires de la section pour avoir facilité mes démarches.

Je remercie très sincèrement tous mes collègues du laboratoire, surtout mon cher ami *Said Grami*, avec qui j'ai passé beaucoup de temps à l'école Polytechnique.

Sans oublier ma famille, à qui j'adresse toute ma gratitude : merci à ma mère, à mes frères et mes soeurs pour tous leurs encouragements et leur soutien moral, et je tiens particulièrement à rendre hommage à la mémoire de mon père qui nous a quittés si tôt.

Je remercie enfin tous mes amis qui, de près ou de loin, n'ont cessé de m'encourager dans mes travaux.

Résumé

Partant d'un modèle fluide de la production des lignes de transfert non fiables, et d'une classe de politiques de production inspirées des stratégies KANBAN (proposées par les manufacturiers japonais à partir des années soixante) et paramétrées par des seuils d'encours ou inventaires critiques (un seuil par machine), notre objectif dans cette thèse a été double :

- développer des techniques de décomposition/agrégation des lignes de transfert permettant, pour un choix de seuils critiques donné, d'évaluer l'indice de performance de la loi de production, convenablement défini (mesure combinée des coûts de stockage et de retards de livraison), en nous basant uniquement sur les résultats théoriques concernant les ateliers à une seule machine.
- utiliser nos techniques de décomposition/agrégation en vue de formuler le problème d'optimisation des seuils critiques dans la loi de production comme un programme dynamique, dont les propriétés structurelles sont explorées en profondeur dans le cas des lignes de transfert dites homogènes, et permettant de déboucher sur des solutions numériques envisageables pour de très longues lignes de transfert, lorsque ces dernières sont non homogènes. Les aspects de décomposition de notre approche sont basées sur deux stratégies d'approximation : *l'hypothèse de découplage des machines*, celle-ci permettant de simplifier l'univers en amont d'une machine donnée, et *le principe de moyennage de la demande*. Il permet de déboucher sur un calcul simplifié de l'influence de l'univers en aval d'une machine donnée sur cette dernière.

La première partie de cette thèse pose le problème, définit le modèle mathématique utilisé, les lois de production étudiées, et l'indice de performance retenu.

Dans la deuxième partie, une revue de la littérature pertinente est faite. Par la suite, après une présentation des stratégies de découplage des lignes de transfert non fiables, le cas particulier des lignes partiellement homogènes (même taux de réparation des machines) est considéré.

Une approche de décomposition adaptée aux hypothèses d'homogénéité partielle est développée. Celle-ci permet de ramener le calcul de l'indice de performance associé à un choix donné de seuils critiques dans la loi de production, à une somme de m indices de performance, m étant le nombre de machines dans la ligne de transfert. Chaque indice individuel est calculé sur la base d'un modèle de machine fictive (pseudo-machine) Markovienne, à deux états, convenablement construit. La précision de la technique de décomposition est testée par comparaison avec les résultats de simulations de Monte-Carlo. La technique de décomposition est par la suite utilisée en vue de formuler un programme dynamique permettant de déboucher rapidement sur une répartition optimale des aires de stockage dans la ligne de transfert. Les propriétés analytiques de la solution optimale pour une ligne parfaitement homogène sont développées.

Le cas de lignes de transfert non homogènes est considéré. Dans un premier temps, une approche de décomposition/agrégation est développée, permettant de ramener le calcul de l'indice de performance associé à un choix donné de seuils critiques dans la loi de production, à m calcul successifs, chacun mettant en jeu un modèle de machine fictive Markovienne n'incluant jamais plus de six états. La précision de la décomposition est testée à partir de simulations de Monte-Carlo.

Dans un deuxième temps, et en vue de limiter la complexité des calculs lors de l'implantation d'un programme dynamique visant à optimiser la répartition des aires de stockage, les machines équivalentes sont agrégées à deux états seulement.

Un programme dynamique dont l'état appartient à présent à un sous-ensemble de $\mathcal{R}_2$, à chaque étape, est formulé, et sa résolution numérique est développée.

Abstract

Starting from a fluid type model of an unreliable transfer line, under a class of decentralized production control policies inspired by so-called KANBAN strategies, and parameterized by a set of *critical inventory levels or hedging points* (one for each machine in the transfer line), our objective in this thesis has been two fold :

- the development of decomposition/aggregation techniques which would permit, for a given choice of hedging levels, a quick and scalable, though approximate, evaluation of total cost of the associated production policy entirely based on theoretical results concerning single machines. Total cost is defined here as a combined measure of average parts storage cost and production backlog costs.
- the formulation of the buffering optimization problem as a dynamic program based on the proposed decomposition/aggregation techniques, with the goals of understanding the theoretical properties of the optimal solution for simple enough situations such as homogeneous transfer lines, while developing scalable numerical optimization schemes, for the more general transfer lines.

The decomposition aspects of our analysis are based on two approximation strategies : *the machine decoupling approximation* which aims at simplifying the analysis of the influence of machines upstream of a given machine ; *the demand averaging principle* which aims at simplifying the analysis of the influence of machines downstream of a given machine.

Chapter 1 of the thesis defines the problem of interest, and presents the mathematical model of the transfer line, the performance functional, and the class of production policies that we have chosen to study.

In chapter 2 a review of the pertinent literature is presented. Our decoupling approximations for unreliable transfer lines are described in Chapter 3, and the particular case of so-called partially homogeneous transfer line, i.e. lines such that mean repair rates for all machines are identical, is considered.

A decomposition/aggregation technique based on the partially homogeneous assumption is developed. It helps reducing the problem of computing the total cost associated with a given choice of hedging levels to that of summing up m individual two-state isolated machine based cost expressions (m is the total number of machines in the transfer line). The accuracy of our decomposition/aggregation technique is demonstrated by means of comparisons with Monte-Carlo simulation results. Subsequently, the decomposition technique is used to formulate an efficient dynamic programming algorithm aiming at optimizing the critical levels of buffers in a transfer line. Structural properties of the optimal solutions for a perfectly homogeneous transfer line are developed. A journal paper submitted for publication is reported in Appendix A of the thesis.

In Chapter 4, the case of a nonhomogeneous transfer line is considered. At first, a decomposition/aggregation technique is developed. As in the case of partially homogeneous transfer lines, the technique allows one to reduce the problem of computing the cost attached to a given choice of hedging levels, to a summation of m single machine based costs, with the notable difference that individual machines can incorporate up to *six* states. The accuracy of this decomposition technique is tested by comparison with the results of Monte-Carlo simulations.

Subsequently, and in an effort to limit the complexity of computations of optimal critical inventories based on the dynamic programming algorithm, the fictitious machine is aggregated down to two states. A dynamic programming optimization

algorithm whose state space at each stage is a subset of $\mathcal{R}_2$ is formulated, and its numerical implementation is carried out.

Finally, Chapter 5 summarizes for a second time our contributions, and points at a number of research directions which could stem from our work.

Table des matières

Dédicace	iv
Remerciements	v
Résumé	vi
Abstract	ix
 Table des matières	 xii
Liste des figures	xv
Liste des tableaux	xviii
Liste des annexes	xix
Liste des notations et des symboles	xx
 Chapitre 1 : INTRODUCTION	 1
1.1 : Notation	3
1.2 : Modèle mathématique de la ligne de transfert, politiques de production et critère d'optimalité	4
 Chapitre 2 : REVUE DE LA LITTÉRATURE	 9
2.1 : Introduction	9
2.2 : Techniques d'approximation	14
 Chapitre 3 : OPTIMISATION PAR PROGRAMMATION DYNAMIQUE D'UNE LIGNE DE TRANSFERT PAR-	

TIELLEMENT HOMOGÈNE¹	20
3.1 : Introduction	20
3.2 : Stratégies d'approximations	21
3.2.1 : L'hypothèse de découplage des machines	21
3.2.2 : Le principe de moyennage de la demande	21
3.3 : Principe de moyennage avec demande corrigée	23
3.4 : Machine isolée $\widetilde{M}_i$ équivalente à M_i , $i \geq 2$	24
3.4.1 : Représentation du modèle approximatif Markovien à deux états de l'état de disponibilité de l'encours x_i , $I_i(t)$	24
3.4.2 : Modèle de chaîne de Markov à deux états de $\widetilde{M}_i$	28
3.5 : Problème de programme dynamique : formulation et propriétés	32
3.5.1 : Formulation	32
3.5.2 : Propriétés	33
3.5.3 : Les bornes de l'ensemble des coefficients de disponibilité $A_i(a_i)$	33
3.6 : Lignes de transfert homogènes	35
3.6.1 : Problèmes P_{av} et DP_{av}	35
3.6.2 : Nature de la loi de commande en boucle fermée pour une ligne transfert longue	36
3.7 : Résultats numériques	39
3.7.1 : Lignes partiellement homogènes	39
3.7.2 : Ligne complètement homogène	41
3.8 : Validation par simulation de Monte-Carlo, et degré de sous-optimalité des solutions	42
3.9 : Conclusion	45

Chapitre 4 : OPTIMISATION PAR PROGRAMMATION DYNAMIQUE D'UNE LIGNE DE TRANSFERT PARTIELLEMENT NON HOMOGÈNE¹	47
--	-----------

4.1 : Introduction	47
4.2 : Le modèle de la chaîne de Markov à quatre états de $\widetilde{M}_2$	48
4.3 : Représentation Markovienne de I_2 à trois états agrégés	50
4.4 : Validation numérique par simulation Monte-Carlo	55
4.5 : Modèle simplifié pour l'optimisation des zones de stockage pour la ligne de transfert	58
4.5.1 : Modèle simplifié de $\widetilde{M}_i$	58
4.5.2 : Formulation de la programmation dynamique	59
4.6 : Caractérisation des ensembles admissibles	61
4.7 : Résultats numériques	62
4.7.1 : Un exemple de l'espace d'état atteignable	63
4.7.2 : Résultats optimaux des seuils critiques pour une ligne de trans- fert longue	63
4.8 : Conclusion	65
Chapitre 5 : CONCLUSION ET DISCUSSION GÉNÉRALE . . .	66
5.1 : Discussion générale	66
5.2 : Contributions spécifiques de la thèse	67
5.3 : Recherches futures	70
Bibliographie	72
Annexes	82

Liste des figures

Figure 1.1 : Un atelier de fabrication avec quatre machines en tandem. . .	4
Figure 1.2 : Ligne de transfert à m machines, non fiables, les inventaires à produit intermédiaire x_i , $i = 1, \dots, m - 1$ et fini, x_m , Le taux de demande de pièces d est supposé constant.	4
Figure 3.1 : Influence de l'univers en amont sur la machine en aval. . . .	22
Figure 3.2 : Atelier de fabrication avec une machine et un stock de produit.	25
Figure 3.3 : Modèle d'état Markovien de la machine M_i à deux états. . .	26
Figure 3.4 : Dynamique de l'inventaire x_1 sous une politique à seuil critique de valeur z_1	26
Figure 3.5 : Représentation du modèle approximatif Markovien de l'état de disponibilité de l'encours x_1	27
Figure 3.6 : Modèle d'état Markovien de la machine $\widetilde{M}_2$ équivalente à la machine M_2 alimentée par le stock d'encours non fiable x_1	29
Figure 3.7 : Modèle équivalent simplifié à deux états.	29
Figure 3.8 : Profil du coefficient de disponibilité optimal conjecturé pour une ligne de transfert longue lorsque $a_{m-1}^0 > \bar{a}$; $\bar{a}$ est le minimiseur de $T(a, a)$	38
Figure 3.9 : Profil du coefficient de disponibilité optimal conjecturé pour une ligne de transfert longue lorsque $a_{m-1}^0 < \bar{a}$; $\bar{a}$ est le minimiseur de $T(a, a)$	38

- Figure 3.10 : Fonction de coût de transition $T(a_{i-1}, a_i)$ lorsque $a_{i-1} = a_i = a$. a^* est le minimiseur global et il dicte le coût moyen de transition pour une ligne de transfert homogène infinie de paramètres $r = 0.5$, $p = 0.2$, $k = 2.5$, $d = 1$. Nous observons que $T(a, a)$ est convexe, et croît très rapidement lorsque le coefficient se rapproche de la limite d'ergodicité de la ligne ($a_{min} = 0.556$). Le minimiseur est $a^* = 0.5725$. 39
- Figure 3.11 : Profil optimal des coefficients de disponibilité des encours x_i pour $i = 1, \dots, 20$, pour une ligne de transfert partiellement homogène, avec des taux de réparations identiques pour toutes les machines, mais des taux de pannes diminuent lorsque i augmente. . . . 40
- Figure 3.12 : Profil optimal des coefficients de disponibilité des encours x_i pour $i = 1, \dots, 20$, pour une ligne de transfert partiellement homogène, avec des taux de réparations identiques pour toutes les machines, mais des taux de pannes augmentent lorsque i augmente. . . 41
- Figure 3.13 : Coefficients de disponibilités optimaux du stock x_i , $i = 1, \dots, 20$, pour une ligne de transfert homogène lorsque $a_{20}^0 = 0.9 > \bar{a}$; $\bar{a} = 0.506$. 41
- Figure 3.14 : Coefficients de disponibilités optimaux du stock x_i , $i = 1, \dots, 20$, pour une ligne de transfert homogène lorsque $a_{20}^0 = 0.5 < \bar{a}$; $\bar{a} = 0.578$. 42
- Figure 4.1 : Modèle d'état approximatif Markovien de la machine fictive isolée $\widetilde{M}_2$ équivalente à la machine M_2 alimentée par le stock d'encours non fiable x_1 49
- Figure 4.2 : Modèle binaire non Markovien de l'état de disponibilité de l'encours x_2 50
- Figure 4.3 : Sous-états du macro-état de rupture de stock x_2 . Les trois sous-états sont dénotés 2', 3' et 4'. 51
- Figure 4.4 : Dynamique du stock x_2 51

Figure 4.5 : Modèle Markovien approximatif de l'état de disponibilité d'encours x_2	52
Figure 4.6 : Modèle Markovien agrégé de la dynamique de l'état de disponibilité d'encours x_2	53
Figure 4.7 : Modèle Markovien à six états, agrégé à 3 états, pour la dynamique de l'état de disponibilité de l'encours x_3	54
Figure 4.8 : Modèle Markovien agrégé de la dynamique de l'état de disponibilité d'encours x_3	55
Figure 4.9 : Atelier de fabrication à trois machines.	55
Figure 4.10 : Le modèle de la chaîne Markov agrégé à deux états de pseudo machine $\widetilde{M}_i, i \geq 2$	58
Figure 4.11 : Le diagramme de transition d'état de la programmation dynamique où, à chaque étape i , l'espace d'état est de dimensions deux, et est directement identifié au vecteur $(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i)^T$. Le signe d'équivalence $\approx$ est en vertu des équations (4.1)-(4.2). Le coefficient de disponibilité a_{i-1} joue le rôle de la variable de décision (action de commande) alors que le coût de transition correspondant est donné par l'équation (4.3) avec $i - 1$ remplaçant i	60
Figure 4.12 : La ligne de transfert considérée dans les exemples 1 et 2. . .	62
Figure 4.13 : L'espace d'état atteignable de la ligne de transfert 2, présenté au Tab. 4.3. p_1, r_1 représentent de la machine M_1	63

Liste des tableaux

Tableau 3.1 : Les paramètres statiques des trois lignes de transfert à deux machines étudiées.	43
Tableau 3.2 : Résultats de comparaison des coûts optimaux obtenus à partir de la résolution numérique des équations (HJB) [58], l'optimisation basée sur la programmation dynamique fondée sur la méthode de décomposition/agrégation (DPO) et les calculs correspondants par simulation de Monte-Carlo (MC).	44
Tableau 4.1 : Paramètres d'opération des lignes de transfert pour les six cas étudiés.	56
Tableau 4.2 : Les résultats de comparaison de la technique de décomposition et ceux de la simulation de Monte-Carlo.	57
Tableau 4.3 : Les paramètres statiques des lignes de transfert 1 et 2 (ces données sont basées sur [18]). $c_i = 1, i = 1, \dots, 5, c_6^+ = c_6^- = 1, k_i = 1, i = 1, \dots, 6$ et la demande constante d est 0.5.	64
Tableau 4.4 : Les résultats des seuils critiques et des coûts optimaux pour six machines des lignes de transfert 1 et 2.	64

Liste des annexes

Annexe A : DECOMPOSITION/AGGREGATION BASED DYNAMIC PROGRAMMING OPTIMIZATION OF PARTIALLY HOMOGENEOUS UNRELIABLE TRANSFER LINES.	82
Annexe B : UNRELIABLE TRANSFER LINES : DECOMPOSITION/AGGREGATION AND OPTIMIZATION.	126

Liste des notations et des symboles

α_i	: État binaire de la machine M_i avec $\alpha_i = 1$ si M_i est opérationnelle et $\alpha_i = 0$ si M_i est en panne ;
$\tilde{\alpha}_i$	: État binaire de la machine fictive $\tilde{M}_i$;
a_i	: Coefficient de disponibilité des encours associés à x_i ;
c_i	: Coût unitaire de stockage d'inventaire x_i , pour $i = 1, \dots, m-1$;
c_m^+	: Coût unitaire de stockage d'inventaire x_m ($x_m > 0$) ;
c_m^-	: Coût unitaire de retard de livraison d'inventaire x_m ($x_m < 0$) ;
d	: Taux constant de la demande ;
k_i	: Taux de production (capacité) maximale de la machine M_i ;
$J_i(\cdot)$	: Coût moyen de production associé à la machine M_i ;
$J(\cdot)$	: Coût moyen total de production (stockage/retard de livraison) de la ligne de transfert $J(\cdot) = J_1(\cdot) + J_2(\cdot) + \dots + J_m(\cdot)$;
J_{HJB}^*	: Coût optimal de la solution numérique des équations Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) de la ligne de transfert ;
J_{DPO}^*	: Coût optimal basé sur la programmation fondée sur la méthode de décomposition/agrégation ;
J_{DT}^*	: Coût calculé basé sur la méthode de décomposition/agrégation proposée de l'ordre 6, pour un choix donné des seuils critiques ;
J_{MC}^*	: Coût optimal par la simulation régénératrice de Monte-Carlo ;
m	: Nombre totale de machines ;

M_i	: $i^{\text{ème}}$ machine dans la ligne de transfert, $i = 1, \dots, m$;
$\widetilde{M}_i$	: $i^{\text{ème}}$ machine équivalente dans la ligne de transfert;
p_i	: Taux de panne de la machine M_i ;
p_{s_i}	: Taux de pénurie du stock x_i ;
$\widetilde{p}_i$	: Taux de panne de la machine fictive $\widetilde{M}_i$;
r_i	: Taux de réparation de la machine M_i ;
$\widetilde{r}_i$	: Taux de réparation de la machine fictive $\widetilde{M}_i$;
s_j	: La probabilité d'être dans le sous-état j au moment de la rupture de stock;
$s_{j'}$	: La probabilité de pénurie de l'inventaire x_i due de l'état j' ;
t	: Temps;
t_{rz_i}	: Le temps du premier temps de retour à zéro du stock x_i ;
$\bar{t}_{rz_i}$	: Le temps moyen du premier temps de retour à zéro du stock x_i ;
$\overline{T}_{j1}$	: Le temps moyen de retour vers l'état de disponibilité, l'état 1, sachant que le sous-état initial de rupture de stock est j ;
$T^{(i)}(a_{i-1}, a_i)$	: Fonction du coût de transition d'un coefficient a_{i-1} pour le stock x_{i-1} à un coefficient de disponibilité a_i pour le stock x_i ;
x_i	: Niveau continu de l'encours associé à la machine M_i ;
z_i	: Seuil critique associé à la machine M_i ;

Chapitre 1

Introduction

Une *ligne de transfert ou ligne de production* est constituée de matériaux, de stations de travail et de zones de stockage. Le matériel se déplace d'une station d'usinage (la machine) à la zone de stockage ; dans une séquence fixe, il visite chaque machine et zone de stockage exactement une fois ; il existe une station de travail dans laquelle le matériel brut entre et une dernière station après laquelle le matériel usiné rejoint le stock de produits finis. Le temps que la pièce passe dans la station de travail est aléatoire et constituera pour nous la seule source de variabilité du système étudié. Plus précisément, la variabilité sera due soit aux variations du temps de traitement de pièces, soit aux événements aléatoires de panne et de réparation ou les deux. Les zones de stockage peuvent emmagasiner un nombre limité (fini) de matériel : la production en amont étant arrêté lors de l'obtention du maximum du stock. La station de travail est habituellement appelée *machine*, et la zone de stockage est souvent appelée le *stock* ou le *tampon*. Une ligne de transfert est dite dans un *état productif* si la machine, ou le groupe de machines le plus en aval de la chaîne de production est en mesure de produire (c'est à dire que ce groupe est opérationnel et n'est pas en pénurie de stock). L'*efficacité* ou *productivité* d'une ligne de production est la proportion de temps qu'elle soit dans un état productif.

Enfin, nous négligeons les temps de transport entre les machines et les tampons. La productivité d'une ligne de production est bien sûr un critère de performance très important. Nous cherchons toujours à la maximiser.

Dans cette thèse, nous considérons qu'il n'y a qu'un seul type de pièces à usiner et les temps de traitement à une machine donnée sont supposés suffisamment petits pour pouvoir considérer que le flux de matériel dans le système est *continu*. Chaque pièce transite une seule fois par la même séquence de machines et stocks.

Un nombre important de travaux ont été effectués dans le but de modéliser ou d'analyser les lignes de transfert avec deux machines séparées par un inventaire intermédiaire [11]. En général, on pose comme hypothèse que le temps pendant lequel les machines tombent en panne, ou le temps nécessaire à la réparation des machines, est distribué de façon exponentielle.

Dans le cas d'un flux discret, la solution analytique exacte pour une ligne de transfert à deux machines ou plus a été proposée par [72], [75] et [74]. Dans tous ces travaux, on considère que la probabilité d'une machine sous réparation est indépendante de l'état dans lequel elle était au cycle précédent. [36] ont exploité la solution du système précédent avec la méthode des blocs tridiagonaux. Cependant cette méthode présente des limites de précision numérique. En 1983, ces mêmes auteurs ont développé une solution analytique exacte de la même ligne de transfert [37]. Cette solution ne se limite pas au cas où la probabilité d'une machine sous réparation est indépendante de l'état dans lequel elle était au cycle précédent.

En général, le temps requis pour le traitement des pièces varie selon les machines. Une ligne de transfert dont les machines requièrent les mêmes temps de traitement des pièces, les mêmes temps moyens de panne et de réparation, est ap-

pelée ligne de transfert homogène ; dans le cas contraire, elle sera dite non-homogène.

Nous distinguons deux types de pannes [14]. Si les machines tombent en panne seulement lorsqu'elles sont en opération, on appellera le type de panne *panne dépendante d'opération*. Si au contraire, la probabilité de panne est strictement une fonction du temps, on parlera de *pannes dépendantes du temps*. Ce deuxième genre de panne peut survenir à n'importe quel moment, y compris les moments où la machine n'est pas en opération (par exemple lorsque les machines sont en blocage ou en pénurie).

Le problème de l'évaluation de l'influence des zones de stockage intermédiaires sur l'efficacité d'une chaîne de production revient constamment dans la littérature. La zone de stockage intermédiaire est en effet un moyen de tempérer les conséquences d'une panne d'une machine donnée sur la performance de la ligne de transfert. Pour pouvoir dimensionner de telles zones, il est utile de posséder des résultats de nature analytique exprimant la relation entre la productivité de la chaîne et la taille des zones de stockage [13], [25] et [73].

1.1 Notation

Nous adopterons la notation suivante. Les cercles représentent les zones de stockage et les carrés représentent les machines (voir Fig. 1.1). Les machines sont numérotées de 1 à n , où n est le nombre total de machines dans le système. Dans ce cas, il existe n zones de stockage, et l'état du stock entre la machine M_i et M_{i+1} est noté par x_i . Les pièces brutes rentrent de l'extérieur de la ligne de production dans la machine M_1 , ensuite dans le stock x_1 , puis dans la machine M_2 , et après dans le stock x_2 , et ainsi de suite jusqu'à la machine M_m . Finalement la pièce sous

forme de produit fini entre dans le stock de produit fini dont l'état est noté par x_m . Le flux maximal de pièces à travers une machine est appelé **taux maximal de production**. A chaque fois que la machine M_i usine une pièce, elle réduit le niveau de stock x_{i-1} et elle augmente le niveau de stock x_i par une seule pièce. Autrement dit, quand la machine M_i tombe en panne ou elle prend un long temps de traitement d'une pièce, et les machines du voisinage fonctionnent normalement, le niveau de stock x_{i-1} tend à augmenter alors que le niveau du stock x_i tend à décroître. Si la situation persiste, l'aire de stockage x_{i-1} pourrait devenir pleine (M_{i-1} en **blocage**) ou encore le stock x_i pourrait se vider (M_{i-1} en **pénurie**).

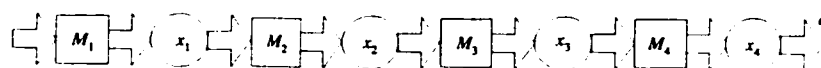


Figure 1.1 – Un atelier de fabrication avec quatre machines en tandem.

À la section suivante, nous posons le modèle mathématique de la ligne de transfert utilisé à des fins d'analyse, et restreignons la structure des lois de production à optimiser.

1.2 Modèle mathématique de la ligne de transfert, politiques de production et critère d'optimalité

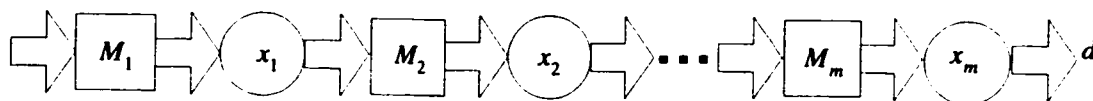


Figure 1.2 – Ligne de transfert à m machines, non fiables, les inventaires à produit intermédiaire x_i , $i = 1, \dots, m - 1$ et fini, x_m , Le taux de demande de pièces d est supposé constant.

Cette thèse présente une méthode de décomposition et d'optimisation des inventaires pour une ligne de transfert dont les machines sont associées à des stocks intermédiaires de capacité finies (Fig. 1.1). Nous posons les hypothèses suivantes :

- La première machine, qui se trouve en tête du système, a un approvisionnement infini (aucune pénurie de matériel possible).
- Les machines ne sont pas fiables, et évoluent entre un état opérationnel et un état de panne selon une chaîne de Markov en temps continu ; p_i et r_i désignent respectivement les taux de panne et de réparation de la machine M_i , $i = 1, \dots, m$.
- Les délais de transport et les temps de traitement des pièces au niveau des machines sont négligeables en comparaison avec les intervalles de temps séparant les pannes successives, ou encore par rapport aux durées de réparation.
- Le temps de traitement d'une pièce donnée peut différer d'une machine à l'autre, mais reste fixe pour une machine donnée.
- Le taux maximal de production k_i de la machine M_i en amont est toujours supérieur ou égale à celui de la machine M_{i+1} en aval ($k_1 \geq \dots \geq k_{i-1} \geq k_i \geq k_{i+1} \geq \dots \geq k_n$).
- La demande de pièces a un taux constant "d".
- Les pénuries de stocks résultantes "stocks négatifs" sont exclusivement permises au niveau des stocks de produits finis (le retard de livraison des produits finis est une conséquence de pénuries des stocks de produits finis).

- Il n'y a ni création, ni rejet de pièces dans le système de fabrication considéré.
- Les politiques de production considérées dans la thèse sont confinées à la classe de politiques dites *décentralisées* à seuils critiques (decentralized hedging point policies, voir [32]). Ces politiques reproduisent dans un contexte de modèle fluide de ligne de transfert, les politiques dites *KANBAN* introduites par Toyota dans les années soixante (voir [77]). Ainsi, la machine M_i est responsable du maintien d'un niveau critique d'encours z_i (à optimiser), qu'elle ne devra jamais dépasser, mais qu'elle devrait s'assurer de reconstruire au plus vite s'il venait à manquer et ce, en produisant au taux maximal si elle est opérationnelle, et que le stock d'encours associé à la machine immédiatement en amont est non vide. Ces lois de production, bien qu'en général sous-optimales, présentent les nets avantages de la simplicité, du caractère local de l'information requise pour l'implantation, et comme nous le montrerons plus loin dans la thèse, de la possibilité de mener les calculs pour des lignes de transfert comportant un nombre important de machines.
- Le critère de performance retenu est la limite supérieure du coût moyen associé aux inventaires et aux déficits de production sur horizon infini. Ainsi, si c_i , $i = 1, \dots, m-1$, désignent les coûts unitaires de stockage des encours x_i , $i = 1, \dots, m-1$; et c_i^+ et c_i^- désignent respectivement les coûts unitaires de l'inventaire $x_m^+ = \max(x_m, 0)$, et du déficit de production par rapport à la demande $x_m^- = \max(-x_m, 0)$, alors l'indice de performance retenu s'écrit comme suit :

$$J^{(z)}(x_0^T, \alpha_0^T) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[\int_0^t \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{m-1} c_i x_i(\tau) + c_m^+ x_m^+(\tau) + c_m^- x_m^-(\tau) \middle| x_0^T, \alpha_0^T \right] d\tau \right] \quad (1.1)$$

où

- $\{z\}^T = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$, est le vecteur de seuils critiques associé à la politique décentralisée à seuils critiques considérée.
- $[x(t)]^T = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]$ est le vecteur d'encours, et inventaires dans la ligne de transfert au temps t .
- $[\alpha(t)]^T = [\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_m(t)]$ est le vecteur dont les composantes $\alpha_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ correspondent aux états d'opération (1 représente la machine opérationnelle, 0 la machine panne) des machines M_i .
- L'indice 0, correspond au temps initial où la ligne de transfert est considérée.

De plus, soit $u_i(t)$ le taux de production instantané de la machine M_i . L'encours x_i , $i = 1, \dots, m - 1$ évolue selon :

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(t) - u_{i+1}(t) \quad (1.2)$$

avec la contrainte $x_i(t) \geq 0$, alors que le stock final est décrit par :

$$\frac{dx_m}{dt} = u_m(t) - d \quad (1.3)$$

x_0^T est donné.

De plus, nous supposons une condition de réalisabilité en moyenne de la demande d par chacune des machines M_i , $i = 1, \dots, m$:

$$\frac{r_i}{r_i + p_i} k_i > d. \quad (1.4)$$

Dans la thèse, partant de la caractérisation (1.1)-(1.4), notre objectif est double :

- *déterminer des approches de décomposition permettant, pour un choix du vecteur de seuils critiques, z , d'évaluer l'indice de performance de la loi de production associée, et ceci, à partir des résultats analytiques bien développés concernant la commande optimale d'ateliers ne comportant d'une seule machine non fiable.*
- Sur la base de ces résultats de décomposition, développer un algorithme d'optimisation du choix de vecteur de seuils critiques permettant de minimiser la mesure de performance en 1.1.

Cette thèse est organisée comme suit.

Le Chapitre 1 de la thèse pose le problème, définit le modèle mathématique utilisé, les lois de production étudiées, et l'indice de performance retenu.

Dans le Chapitre 2, une revue de la littérature pertinente est faite. Au Chapitre 3, après une présentation des stratégies de découplage des lignes de transfert non fiables, le cas particulier des lignes partiellement homogènes (même taux de réparation des machines) est considéré. Un article de journal soumis pour publication est mis en Annexe A de cette thèse.

Au Chapitre 4, le cas de lignes de transfert non homogènes est considéré. Un article de journal soumis pour publication est mis en annexe B de cette thèse.

Le Chapitre 5 résume une deuxième fois nos contributions et laisse entrevoir des directions de recherche futures pouvant émaner de nos travaux.

Les annexes A et B sont des articles soumis aux journaux scientifiques.

Chapitre 2

Revue de la littérature

2.1 Introduction

Afin d'optimiser l'opération d'un atelier de production, trois éléments sont requis :

- I) un modèle mathématique de l'atelier de production,
- II) une classe de politiques de production permises,
- III) et un critère de performance.

Les modèles de représentation les plus fréquemment utilisés dans la littérature des systèmes de fabrication sont : les réseaux de Pétri [26] et [76], les files d'attente [15], et les modèles à flux continu interrompu par des sauts Markoviens [64]. Il y a beaucoup de travaux qui ont déjà été publiés sur l'étude comparative de ces multiples outils de modélisation des ateliers de fabrication, notamment [21], [32], [50] et [62]. Bien que chaque type de modèle d'atelier de fabrication présente des avantages et des lacunes spécifiques, nous constatons qu'au cours des vingt dernières années, l'approche de modélisation basée sur le modèle à flux continu avec sauts [64], attire

l'attention des plus grand nombre de chercheurs.

Les classes de politiques de production ont aussi été au centre de nombreux travaux [2], [9], [32], [41], [65], [69] et [81]. Les termes ***Juste à temps*** (*Just in Time*), ***Conwip*** (*Constant work in process*) [9], ***Kanban*** (réseaux de jetons) [61], ***Stocks de base*** (*Base stock*) [9] et ***Seuils critiques*** (*Hedging points*) [32] couramment rencontrés dans la littérature récente des systèmes manufacturiers, désignent des exemples typiques de politiques de productions existantes. En particulier, la politique de production à seuils critiques ([2] et [48]) qui à l'instar de [59] a été étendue aux systèmes de fabrication en tandem, a donné lieu à de nombreuses études.

Plusieurs travaux ont été publiés sur les conditions d'optimalité de cette classe de politiques de production ([1], [8] et [43]), et sur les propriétés de renouvellement Markovien sous-jacentes [57]. Des études plus poussées permettant de mieux comprendre d'autres propriétés de base des lois de production de type seuils critiques ont également été publiées ([46], [47] et [66]). Par ailleurs, les techniques de recherche de seuils critiques optimaux et de calcul des performances associées ont été au centre de plusieurs travaux ([3], [16], [17], [28], [39], [66] et [71]). Enfin, dans le cas de seuils critiques multiples, le problème d'ordonnancement de seuils pour une machine multi-états a retenu l'attention de certains chercheurs ([45], [54] et [85]).

Le critère de performance utilisé dans les ateliers de fabrication peut être défini de plusieurs manières selon les objectifs recherchés. Cependant, dans la commande optimale du flux de production, le critère de performance le plus fréquemment utilisé est ***une mesure du coût total moyen de stockage des inventaires et de retards de livraison dus aux pénuries éventuelles des stocks*** [3] (voir Eq. (1.1), Chapitre 1). En connaissant le modèle approprié, la classe de politique de production et le critère de performance, le problème global de gestion du flux de

production dans un atelier se formule assez naturellement. Cependant compte tenu des multiples événements et aléas (pannes des machines, réparations aléatoires, pénurie de stocks, temps de traitement aléatoire, fluctuations de la demande, etc..) qui résultent du processus de fabrication sur des échelles de temps différentes, le problème global de gestion de la production demeure très complexe.

C'était par Finch en 1946 dans l'ex Union Soviétique que, pour la première fois, l'idée de zone de stockage intermédiaire a été introduite afin d'améliorer l'efficacité et augmenter la fiabilité d'une ligne de transfert dans un atelier de production [13].

En 1952, Valdievskii a été le premier à introduire la notion de probabilité dans l'analyse des ateliers de production en vue de décrire le comportement stochastique d'une ligne de production (rapporté par [21]). Il a alors utilisé une modélisation de processus Markovien pour résoudre un problème comportant deux machines identiques avec temps de panne et de réparation distribués exponentiellement, et séparés par un stock de capacité fixe.

Koenigsberg [50] a mentionné que les trois questions majeures au niveau de la conception et l'opération d'une ligne de production sont :

- I) le nombre d'étapes dans une ligne,
- II) la localisation des zones de stockage,
- III) la capacité ou grandeur de ces stocks.

Buzacott [13] a démontré, qu'on peut augmenter le rendement d'une chaîne de transfert automatique en la sous-divisant en plusieurs étapes, et en intercalant les stocks entre chaque étape. Dans cette analyse, il a considéré une ligne de production avec des machines en tandem dont le temps d'opération et le temps de panne ont une

distribution géométrique. Il a également démontré que le rendement d'une ligne de production dépend du nombre d'étapes, du taux relatif de panne des étapes, de la capacité des stocks et de la distribution des temps de réparation des étapes.

Okamura et Yamashina [63] ont analysé et discuté l'effet des encours et de la taille des stocks intermédiaires sur le taux de production d'une ligne de transfert comportant deux étapes.

Buzacott et Hanifin [14] définissent les concepts de panne d'une station de travail, de panne totale (défaillance complète dans l'atelier de fabrication; ex. panne d'électricité), de panne dépendante d'opération de station et de panne dépendante du temps. Ils obtiennent une formule simple pour calculer le taux de production d'une ligne sans stock intermédiaire dans les cas de pannes dépendantes du temps et de pannes dépendantes d'opération. Ils se fondent sur les travaux de Valdievskii (rapporté par [21]) et Sevat'yanov [70] (travaux rapportés en langue russe). Finalement, ils comparent la performance d'un modèle de Buzacott avec une simulation basée sur les données réelles et ils concluent qu'il y a une différence significative entre les résultats théoriques et ceux de la simulation. Ceci, suggèrent-ils, est dû au caractère sans mémoire de la distribution des temps de panne et de réparation utilisée dans le modèle théorique.

Il y a principalement deux classes de modèles :

Ceux qui supposent un *flux discret* de produits sur la chaîne, et ceux qui considèrent une *production de nature continue*. Le modèle discret a l'avantage de mieux cerner la nature discrète d'un atelier de fabrication, mais cette représentation discrète a respectivement une lacune et une difficulté mathématique importantes : elle est limitée à des systèmes où toutes les durées de temps de traitement sont égales,

et les tailles des inventaires sont des entiers ([13] et [32]), ce qui force l'exploration d'un espace discret pour l'optimisation.

Contrairement au modèle à flux discret, le modèle à flux continu est bien placé pour l'optimisation car les variables sont des nombres réels et la théorie des équations différentielles peut être utilisée. Il est possible d'utiliser ce type de modélisation pour un atelier de production discret (lorsque la production s'effectue à rythme élevé et les zones de stockage contiennent un nombre important de pièces) en arrondissant la taille du tampon après avoir obtenu les résultats d'optimisation.

Nous discutons plus en détail des deux classes de modèles :

★ **Flux discret** : Dans la représentation avec le modèle discret, le temps de traitement du système est déterministe, et les machines sont identiques (avec mêmes temps de traitement des pièces et une distribution géométrique des temps de panne et de réparation). La probabilité pour que la machine M_i tombe en panne lorsqu'elle est opérationnelle (ni en pénurie, ni en blocage) est p_i . La probabilité de réparation d'une machine durant un cycle d'opération lorsqu'elle est sous réparation est r_i . La taille du tampon i est N_i , où N_i est une valeur entière ; p_i et r_i sont des nombres réels dans l'intervalle $[0,1]$.

Le modèle discret a été introduit la première fois par Buzacott [13]. La résolution du modèle discret a été menée à bien par [13], [36], [72], [74] et [75] pour le cas de deux machines séparées par une zone de stockage et de panne dépendante d'opération. Gershwin et Schick [37] ont considéré trois machines et deux zones de stockage pour le cas de pannes dépendantes d'opération. Malheureusement, leurs résultats mettent en jeu des sommations de termes difficiles à interpréter, à moins d'effectuer des essais de valeurs numériques.

Artamonov [5] et Buzacott et Hanifin [14] ont présenté la solution du modèle discret pour le cas de pannes dépendantes du temps.

★ **Flux continu** : Dans ce cas, les machines peuvent avoir différents temps de traitement des pièces et les temps de réparation et de panne sont distribués exponentiellement. La quantité de matériel produit durant l'intervalle $[t, t + \delta t]$ par la machine M_i lorsqu'elle est entièrement opérationnelle (ni en pénurie, ni en blocage) est bornée par $\mu_i \delta t$. La probabilité pour que la machine M_i tombe en panne pendant l'intervalle $[t, t + \delta t]$ est $p_i \delta t$. La probabilité de retour de réparation d'une machine durant la période de temps $[t, t + \delta t]$, lorsqu'elle est sous réparation, est $r_i \delta t$. La taille maximale du stock i est z_i . μ_i , p_i , r_i et z_i sont des nombres réels non négatifs ([21] et [38]).

L'intérêt du modèle continu est de fournir des résultats analytiques dans le cas de deux machines en tandem ([4], [23], [25], [32], [36] et [86]) ; on peut alors facilement interpréter ce modèle dans diverses configurations, et ce de façon rigoureuse à partir des expressions formelles, et non plus à partir des seuls essais de valeurs numériques. Tel que mentionné plus haut, l'approximation continue se justifie en pratique dès que le débit des machines est suffisamment important ([25] et [78]).

2.2 Techniques d'approximation

Les chercheurs ont jusqu'à présent, considéré deux techniques distinctes d'approximation : la méthode de *décomposition* et la méthode *d'agrégation*.

L'analyse de chaînes de transfert formées de deux machines et d'une zone du

stockage avec l'hypothèse d'un flux de produit continu a été menée à bien par Finch (cité dans [50], un travail qui n'a jamais été publié), Sevast'yanov [70] et plus récemment par Wijngaard [82]. Ces chercheurs calculent explicitement la productivité (liée au taux moyen de production maximal) de la chaîne en fonction des taux de panne, de réparation et des temps de processus des machines. Leur approche suppose qu'une machine étant bloquée ou en pénurie est encore susceptible de tomber en panne (modèle de panne dépendante du temps) ; c'est aussi le cas d'Artamonov [5] sur un modèle discret.

L'idée de la méthode de décomposition pour le modèle de pannes dépendantes de l'état opérationnel de la machine "operation dependant failures", a été proposée par Zimmern [86]. Cette méthode consiste à décomposer la ligne en un ensemble de sous-lignes composées de *deux* machines. Ainsi, pour une ligne de transfert de m machines, nous avons $(m - 1)$ lignes dont chacune comprend deux machines qui sont séparées par un stock intermédiaire. Cette méthode a été réinventée récemment, de façon indépendante (exposé dans Gershwin et Schick [37]).

De Koster [22] a développé une méthode d'agrégation approximative pour une ligne de production dont les machines sont en tandem. Il a agrégé les machines 1 à $m - 1$ en les remplaçant par une machine équivalente. Il a ainsi obtenu une ligne de production avec deux machines et un stock intermédiaire. Par la suite, il a employé les méthodes numériques développées par Koenigsberg [50] et Wijngaard [82] pour trouver l'efficacité de la ligne de transfert à deux machines. Les machines équivalentes ont des temps de panne et de réparation exponentiels. Dans le cas d'une ligne de transfert à trois machines identiques, cette méthode donne des bons résultats [22]. Les tests numériques n'ont pas été faits dans le cas plus de trois machines car les temps de calcul peuvent devenir très importants.

Une méthode de décomposition approximative a été proposée par Gershwin [30] afin d'analyser une ligne de transfert *homogène* avec un modèle discret. Gershwin a repris l'idée de décomposition due à Zimmermann pour la ligne de transfert. Ainsi, la ligne de transfert est décomposée en sous-lignes de deux machines ; dans les sous-lignes, chaque machine est caractérisée par son taux de panne et de réparation. Il a établi un ensemble d'équations pour chaque sous-ligne afin de déterminer les paramètres inconnus. Cette méthode peut se résoudre par un algorithme itératif. Les résultats expérimentaux ont montré que cette technique est très précise mais elle est très complexe, et peut diverger.

Gershwin [31] a proposé une méthode pour transformer une ligne de transfert non fiable et non homogène, en une ligne non fiable et homogène. Chaque machine sauf une (la plus rapide) est remplacée par un ensemble de deux machines séparées par une zone de stockage de capacité zéro. Le rôle de l'une des machines est de reproduire le comportement de non fiabilité de la machine originelle, tandis que la deuxième machine représente les phénomènes de ralentissement dus à des blocages en aval. La ligne résultante sera homogène et peut donc être analysée par la méthode approximative précédente. Les résultats des simulations peuvent cependant dévier de façon significative par rapport aux résultats de l'analyse du modèle simplifié, à la fois pour ce qui est du taux de production moyen maximal et du niveau moyen de stock, pour certains choix des paramètres du système.

Le travail de Dubois et Forestier [25] est la suite de l'article publié par Forestier [29]. Ils proposent dans leur article un calcul explicite de la productivité (taux de production maximal de la ligne) et du niveau d'en-cours moyen lorsque les machines sont différentes mais synchronisées. Dans le cas de taux de processus différents, ils ont montré qu'on se ramène à un système de deux équations différentielles linéaires du premier ordre. Ils ont retrouvé par un calcul formel les phénomènes observés

dans le cadre d'études numériques telles celles d'Okamura et Yamashina [63] (l'effet d'une faible zone de stockage sur la productivité des machines).

Dallery, David et Xie [19] ont conçu un algorithme communément dénoté DDX pour résoudre les équations de décomposition trouvées par Gershwin [30] pour un modèle discret dont les machines sont homogènes. Cet algorithme est rapide et fiable.

Dallery, David et Xie [20] ont proposé une méthode de décomposition approximative pour modèle continu et homogène, afin d'analyser une ligne de transfert où les machines sont non fiables et les zones de stockage limitées. Les pénuries et blocages sont permis. Les pannes peuvent se produire uniquement lorsque les machines sont opérationnelles (*pannes dépendantes d'opérations*). Cette technique de décomposition approximative est basée sur le même principe que la technique proposée par Gershwin [30] pour un modèle discret. Ainsi, ils ont employé la méthode d'homogénéisation d'une ligne de transfert non homogène proposé par Gershwin [31] pour rendre homogène une ligne de production qui ne l'est pas. Cependant, le modèle de la ligne de production est ici continu. Ils remplacent les équations originales obtenues par Gershwin par des équations équivalentes beaucoup plus simples à résoudre. L'algorithme de résolution proposé est une procédure itérative, plus facile à implanter et plus rapide que celle de Gershwin. Il semble converger tout le temps. Les résultats expérimentaux montrent que la technique de décomposition est précise. Une simple transformation permet de remplacer une ligne non homogène par une ligne homogène dans cette méthode. Cette méthode peut être employée pour des ligne de transfert qui peuvent être très longues (ex. la version continue de cet algorithme à été employé dans la ligne de production des imprimantes HP [12]).

Une autre technique d'agrégation est proposée par Ancelin et Semery [4] ainsi que Terracol et David [78]. Les auteurs ont utilisé un modèle continu. Cette technique

remplace chaque ensemble de deux machines séparées par un stock intermédiaire, par une machine équivalente. En répétant cette procédure, la ligne peut être agrégée à une machine unique (une macro machine, incluant la dernière machine) et un inventaire de produit fini associé à la machine M_m (m est le nombre total de machine dans la ligne de transfert). Dans la deuxième méthode, la ligne de transfert jusqu'à la $(m - 1)^{\text{ème}}$ machine peut se résumer en une macro machine en plus de son inventaire et la $m^{\text{ème}}$ machine et le stock de produit fini. Le défaut majeur de cette technique est de propager les événements dans une ligne de transfert de façon unidirectionnelle. De ce fait, il ne tiendra pas compte des effets de blocage des machines en aval sur les paramètres de l'étape d'agrégation précédente. La méthode d'agrégation est simple et elle peut être appliquée à une ligne homogène aussi bien qu'à une ligne non homogène. Mais l'erreur d'estimation des paramètres est quelquefois élevée. Une version améliorée de cette méthode a été proposée par Terracol et David [79]. Cette dernière est très complexe.

Il y a beaucoup d'autres travaux qui ont été faits pour améliorer ou généraliser les méthodes existantes.

Gershwin [30] et Di Mascolo, David et Dallery [23] ont proposé une technique pour une ligne de transfert d'assemblage et désassemblage dont les machines sont homogènes. Burman [11] et Burman, Gershwin et Suyematsu [12] ont étendu le travail précédent au cas de lignes de transfert non homogènes. Cette méthode peut déterminer approximativement le taux de production maximal de la ligne et le niveau d'encours moyen.

La méthode de décomposition développée par Burman [11], et Burman, Gershwin et Suyematsu [12] est une extension améliorée de l'algorithme DDX [20] et de la méthode de décomposition de Gershwin et Schick [36]. Cette méthode est conçue

pour un modèle continu et non homogène. Burman [11] a utilisé une méthode de décomposition similaire à Gershwin et Schick [36], pour des lignes de transfert longues avec flux des matériaux continu. Il a étendu ce dernier travail pour une ligne dont les machines sont associées à différents temps de traitement des pièces. Ensuite il a adopté l'algorithme de DDX pour le modèle continu développé. Une amélioration au niveau de temps de calcul de l'algorithme appelée ADDX a été présentée par Gershwin et Burman [35].

Chapitre 3

Optimisation par programmation dynamique d'une ligne de transfert partiellement homogène¹

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une technique d'analyse de performance par décomposition d'une ligne de transfert non fiable lorsque chaque machine opère sous sa propre loi de commande à seuil critique (la politique décentralisée KANBAN). dans le cas particulier où toutes les machines ont le *même* taux de réparation. Une telle ligne sera appelée *ligne de production partiellement homogène*. Partant de la technique de décomposition en question, nous présentons également un algorithme d'optimisation basé sur la programmation dynamique pour ce type de ligne de trans-

¹Ce chapitre est le résumé du contenu d'un article soumis pour publication au journal IEEE Transactions on Automatic & Control. La version complète de cet article se trouve à l'Annexe A, également cet annexe a été publiée dans la conférence de CDC-2001, Florida, Orlando, USA.

fert.

La méthode de décomposition développée dans ce chapitre est fondée principalement sur deux stratégies d'approximations :

- I) l'hypothèse de découplage des machines et
- II) le principe de moyennage de la demande.

Nous en présentons les détails dans ce qui suit.

3.2 Stratégies d'approximations

3.2.1 L'hypothèse de découplage des machines

Le principe de découplage des machines est un principe d'approximation visant à modéliser de façon simplifiée l'univers *en amont* d'une machine donnée. Ainsi, l'influence de l'univers en amont de la machine M_{i+1} se résume par un processus binaire ($I_i(t) = 1$ si $x_i > 0$ et $I_i(t) = 0$ si $x_i = 0$) de disponibilité d'encours x_i . Le principe de découplage stipule que $I_i(t)$ et l'état opérationnel de la machine M_{i+1} , x_{i+1} , sont des *processus stochastiques indépendants*.

3.2.2 Le principe de moyennage de la demande

Le principe de moyennage de la demande est un principe d'approximation visant à modéliser de façon simplifiée l'univers *en aval* d'une machine donnée. Pour la machine M_i , $i = 1, \dots, m$, (m est le nombre total de machine dans la ligne de transfert) l'influence de cet univers s'exerce par l'intermédiaire d'un processus stochastique de demande $d_{i+1}(t)$. Le principe de moyennage de la demande stipule que si le processus d'encours x_i est ergodique (c'est-à-dire si la machine non fiable M_i ,

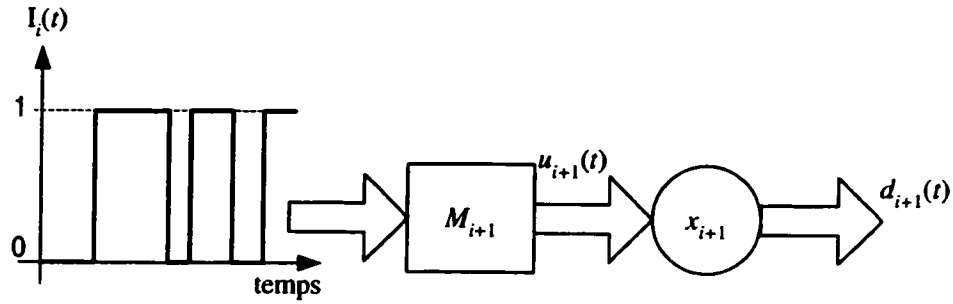


Figure 3.1 – Influence de l'univers en amont sur la machine en aval.

desservie par un encours non fiable en général x_{i-1} , est telle que la demande $d_{i+1}(t)$ est "réalisable" en moyenne), alors l'influence du processus $d_{i+1}(t)$ sur le niveau moyen d'encours x_i , $E[x_i]$, est la même que si $d_{i+1}(t)$ était remplacée par la valeur moyenne. Étant donné que sous des conditions d'ergodicité toutes les machines devront produire en moyenne la demande constante d , alors $E[d_{i+1}(t)] = d$. Sous cette hypothèse, les caractéristiques des processus de disponibilité d'encours $I_i(t)$ peuvent être déterminées à partir du calcul des moments de premier temps de passage du processus x_i à zéro tel que développé par Malhamé [56], et étendu dans El-Férik et Malhamé [27] sous une demande constante d . Il en résulte alors une représentation Markovienne approximative du processus $I_i(t)$. Ainsi, la machine M_{i+1} couplée directement en amont et en aval avec le reste de la ligne de transfert peut être remplacée par une machine M_{i+1} fictive, isolée, avec stock $x_{i+1} \geq 0$, et approximativement Markovienne. Le modèle Markovien approximatif est obtenu en effectuant le produit cartésien de deux espaces d'état, respectivement associés au modèle Markovien approximatif des encours, et à celui de la chaîne de Markov lié au comportement non fiable de la machine M_{i+1} (en effet, le modèle de la machine considérée comporte deux états, opérationnel et panne, où p_{i+1} et r_{i+1} sont respectivement les taux de panne et de réparation associés). La construction de la chaîne de Markov sur l'espace produit est possible en vertu de la propriété d'indépendance résultante du principe

de découplage. Nous présentons les détails de notre construction à la section 3.4.

3.3 Principe de moyennage avec demande corrigée

Dans cette section, nous présentons une correction possible du principe de moyennage de la demande formulé au 3.2.2. Soit $\tilde{x}_i(t)$ le processus fictif d'approximation de $x_i(t)$, c'est à dire l'encours associé à la machine Markovienne fictive $\widetilde{M}_i$, soumise en vertu du principe de moyennage à une demande constante d .

Notons que les stocks intermédiaires $\tilde{x}_i(t)$, $i = 1, \dots, m - 1$ doivent rester non négatifs, alors que l'inventaire de produits finis $\tilde{x}_m(t)$ peut devenir négatif. De ce fait, durant les périodes de pénurie de $\tilde{x}_i(t)$ ($i \neq m$), la production de la machine $\widetilde{M}_{i+1}$ tombera à zéro. De plus, lorsque $\tilde{x}_i(t)$ est positif, la machine $\widetilde{M}_{i+1}$ tire des pièces avec un taux constant d . Ceci signifie que sous le principe de moyennage 3.2.2, la machine $\widetilde{M}_i$, à long terme, aura fourni des pièces du taux moyen $[0(1 - a_i) + da_i] < d$, où a_i représente $E[I[\tilde{x}_i(t)]]$, et sera appelé **coefficient de disponibilité** du stock $\tilde{x}_i$. Or, le système réel doit répondre à une demande moyenne d . Il est, donc, nécessaire d'associer les machines fictives $\widetilde{M}_i$ à une *demande corrigée* (plus importante), $d^+ = \frac{d}{a_i}$, de sorte à ce que $[0(1 - a_i) + d^+a_i] = d$. Alors que cette correction a un effet négligeable lorsque le coefficient de disponibilité est élevé, elle devient significative pour des valeurs de a_i proches de zéro. Nous pouvons alors écrire l'expression suivante :

$$\begin{aligned} d &= \lim_{t \rightarrow \infty} E[d_i(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ E[d_i(t) \mid I_i(t) = 1] \Pr[I_i(t) = 1] \right. \\ &\quad \left. + E[d_i(t) \mid I_i(t) = 0] \Pr[I_i(t) = 0] \right\} = d_i^+ a_i \end{aligned} \quad (3.1)$$

Donc : $d_i^+ = d/a_i$.

Dans ce qui suit, nous développerons notre approche de décomposition/agrégation de la ligne de transfert fondée sur les stratégies d'approximation citées plus haut en partant de la première machine en amont, et en allant vers les machines intérieures de la ligne de transfert.

Nous définissons les paramètres p_i et r_i , respectivement, le taux de panne et de réparation de la machine M_i , $i = 1, \dots, m$.

3.4 Machine isolée $\widetilde{M}_i$ équivalente à M_i , $i \geq 2$

Dans cette section, en considérant la caractéristique probabiliste de la disponibilité de l'encours $I_1(t)$, une machine fictive équivalente Markovienne, à deux états, isolée $\widetilde{M}_2$ de la machine M_2 est construite. À ce stade, $\widetilde{M}_2$ joue pour x_3 un rôle similaire à celui que jouait M_1 pour x_1 et est une machine non fiable à deux états. Des étapes identiques pourront donc être répétées en vue de générer les machines équivalentes Markoviennes à deux états pour $M_3, M_4, \dots, M_m$.

3.4.1 Représentation du modèle approximatif Markovien à deux états de l'état de disponibilité de l'encours x_i , $I_i(t)$

Considérons la machine M_1 de la ligne de transfert (Fig. 3.2). Elle a accès à un stock de matériaux à usiner supposé par hypothèse de capacité infini, c'est à dire associé à un coefficient de disponibilité unitaire. D'autre part, en régime permanent, toutes les machines doivent produire en moyenne au taux de la demande, sinon il y aurait soit accumulation infinie d'encours à une machine donnée, ou un déficit d'inventaire non borné. En vertu de la version corrigée du principe de moyennage de la demande, et à des fins de calcul de stock moyen x_1 et de coefficient de disponibilité

a_1 du stock, on peut donc remplacer le taux de demande stochastique que subit x_1 par la constante $\frac{d}{a_1}$. Avec la dynamique du stock x_1 ainsi simplifiée, nous montrons qu'il est possible de construire une représentation Markovienne du processus de disponibilité d'inventaire.

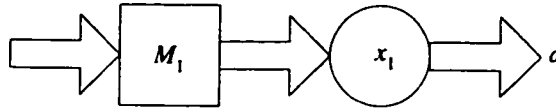


Figure 3.2 – Atelier de fabrication avec une machine et un stock de produit.

À la Fig. 3.3, les états 1 et 2 représentent respectivement le bon fonctionnement ($\alpha_1 = 1$, opérationnelle) et le mauvais fonctionnement ($\alpha_1 = 0$, panne) de la machine M_1 , pour $i = 1, \dots, m - 1$. Les paramètres p_i , r_i , t_{rz_i} et s_i sont définis comme suit :

- p_i : taux de panne de la machine M_i ,
- r_i : taux de réparation de la machine M_i , $i = 1, \dots, m$, (pour une ligne de transfert partiellement homogène $r_1=r_2=r_3=\dots=r_m$),
- $t_{rz_i}, \bar{t}_{rz_i}$: respectivement temps et temps moyen de premier retour à zéro du stock x_i ,
- s_j : probabilité que la machine M_i se trouve à l'état j à l'instant où le stock x_i tombe à zéro, l'indice j indique l'état de panne j , $j = 1$, la machine est active.

Ainsi, à la Fig. (3.4), t_{rz_1} est le temps de premier retour à zéro du stock x_1 et s_2 est la probabilité que la machine M_1 soit dans l'état 2 lorsque x_1 tombe à zéro. Puisque $\alpha_1 = 0$ (l'état de panne, 2,) est le seul état non productif de la machine M_1 (le coefficient de disponibilité des matériaux bruts pour M_1 est égal à l'unité), alors $s_2 = 1$.

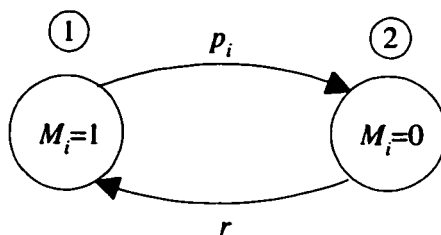


Figure 3.3 – Modèle d'état Markovien de la machine M_i à deux états.

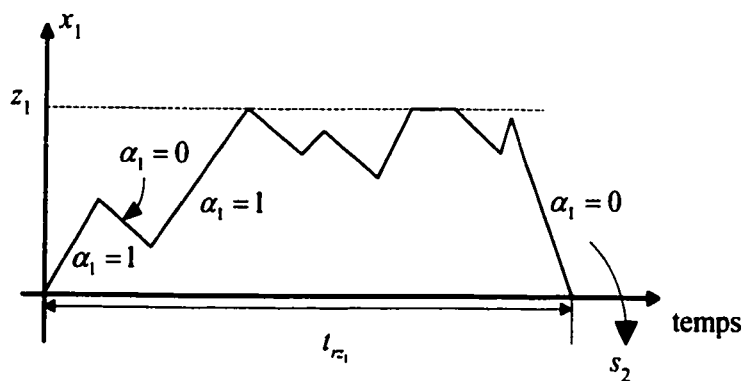


Figure 3.4 – Dynamique de l'inventaire x_1 sous une politique à seuil critique de valeur z_1 .

La Fig. 3.5 représente l'évolution de l'état de disponibilité d'encours x_1 . $p_{s_1} = \frac{1}{\bar{t}_{rz_1}}$ sera dit taux moyen de pénurie du stock x_1 . Pour un seuil critique z_1 donné, Malhamé [56] et El-Férik et Malhamé [27] ont montré comment calculer tous les moments du temps de premier retour t_{rz_1} lorsque le taux de demande de pièces est constant, comme c'est le cas en vertu du principe de moyennage. À partir de ces moments, ils montrent qu'il est possible de construire une représentation Markovienne approximative de ce temps de retour. Or Mbihi [58] a établi numériquement, pour un grand nombre de configurations de paramètres, qu'en utilisant le critère de Griffiths [40] (voir Annexe A, de l'article en annexe B de cette thèse), ce temps de retour avait une distribution quasi-exponentielle et donc caractérisé entièrement par son premier moment $\bar{t}_{rz_1}$. De plus, puisque le temps de pénurie de stock x_1 est associé à une panne de M_1 et se termine à la fin de cette panne, il est lui-même exponentiel de durée moyenne. Il s'en suit le modèle de chaîne de Markov à deux états approximatif pour x_1 , représenté à la Fig. 3.5.

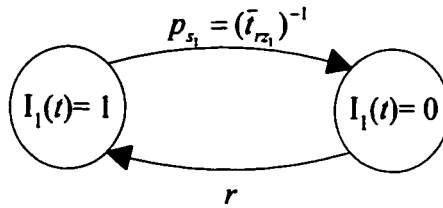


Figure 3.5 – Représentation du modèle approximatif Markovien de l'état de disponibilité de l'encours x_1 .

Soit a_1 , le coefficient de disponibilité stationnaire de x_1 , le taux de rupture p_{s_1} est relié à a_1 et r par la relation suivante :

$$p_{s_1} = \frac{r(1 - a_1)}{a_1}$$

À partir de la Fig. 3.5, nous pouvons réécrire le temps du premier passage à zéro de l'inventaire x_{i-1} en fonction du coefficient de la disponibilité a_{i-1} associé à l'inventaire x_{i-1} .

$$a_{i-1} = \frac{\bar{t}_{rz_{i-1}}}{\bar{t}_{rz_{i-1}} + \frac{1}{r}} \implies ps_{i-1} = \frac{1}{\bar{t}_{rz_{i-1}}} = \frac{r(1 - a_{i-1})}{a_{i-1}} \quad (3.2)$$

Noter que la théorie dans [43] peut, en principe, être généralisée à une machine semi-Markovienne et que, dans ce cas, il n'est pas absolument nécessaire d'imposer l'hypothèse de distribution exponentielle de la durée active de l'inventaire $x_1(t)$, soit $I_1(t)$.

3.4.2 Modèle de chaîne de Markov à deux états de $\widetilde{M}_i$

Avec l'état de disponibilité d'encours x_1 ainsi modélisé, et en utilisant l'hypothèse de découplage des machines, il devient possible de représenter la machine M_2 avec en amont, le stock x_1 non fiable de pièces à usiner, par une machine fictive $\widetilde{M}_2$ isolée, Markovienne, moins fiable que M_2 , mais associée cette fois-ci à un stock de pièces à usiner parfaitement fiable. Le modèle à 4 états de $\widetilde{M}_2$ est représenté à la Fig. 3.6. Ce n'est autre que le produit cartésien des deux chaînes de Markov à deux états associées à $I_1(t)$ et α_2 respectivement à l'état de disponibilité du stock x_1 et l'espace d'état de la machine M_2 , et ceci en vertu de l'hypothèse de découplage des machines (voir 3.2.1).

Notons que'à la Fig. 3.6, l'état 1 est le seul état opérationnel.

À ce stade, et en vue d'agréger le modèle $\widetilde{M}_2$ à deux états, nous négligeons la probabilité d'avoir deux pannes simultanément (les pannes simultanées de M_1 et M_2 ; ces pannes correspondent à l'état 3 dans la Fig. 3.6). Dans ce cas, seulement deux états de panne sont à considérer. De fait, la probabilité d'avoir deux telles

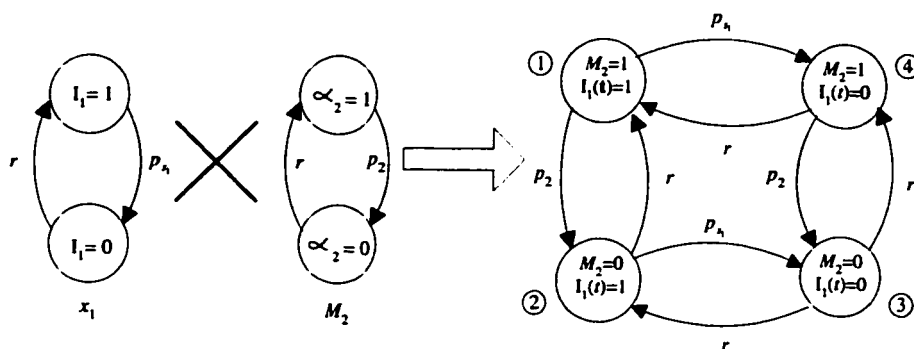


Figure 3.6 – Modèle d'état Markovien de la machine $\widetilde{M}_2$ équivalente à la machine M_2 alimentée par le stock d'encours non fiable x_1 .

pannes simultanément est très faible en générale. De plus, vu l'hypothèse d'une ligne partiellement homogène, du point de vue comportement statistique les deux états de panne ② et ④ sont pratiquement impossibles à distinguer et peuvent donc être fusionnés en un seul état (même taux de réparation). Ceci nous donne une représentation Markovienne à deux états à la Fig. 3.7, (pour $i = 2$), pour la machine fictive $\widetilde{M}_2$ avec l'état binaire $\widetilde{\alpha}_2$ et le taux de panne $\widetilde{p}_2$.

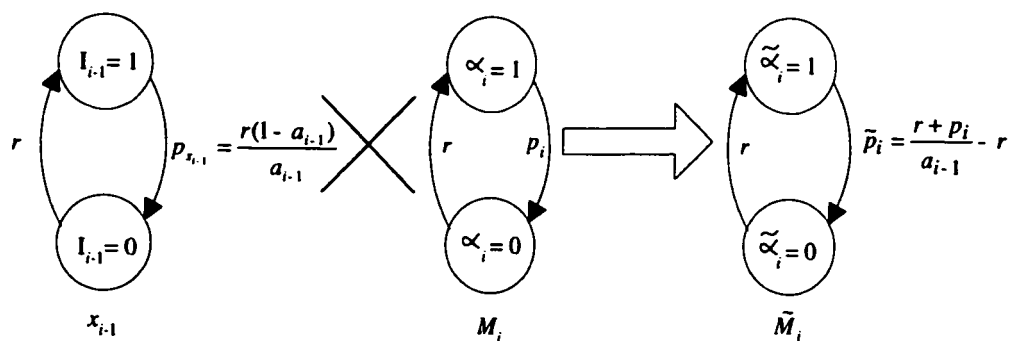


Figure 3.7 – Modèle équivalent simplifié à deux états.

En régime stationnaire, la disponibilité de la machine équivalente $\widetilde{M}_2$ doit être

égale à la disponibilité de l'ensemble de la machine M_2 et son alimentation, l'encours x_1 . Ceci se traduit par la relation montrée à l'équation suivante :

$$\left(\frac{r}{r + \tilde{p}_2} \right) = \left(\frac{r}{r + p_{s1}} \right) \left(\frac{r}{r + p_2} \right) \Rightarrow \tilde{p}_2 = \frac{r + p_2}{a_1} - r \quad (3.3)$$

Partant de la machine $\widetilde{M}_2$, cette procédure d'agrégation pourrait séquentiellement être répétée comme illustré à la Fig. 3.7 afin de générer les machines Markoviennes équivalentes à deux états $\widetilde{M}_i$, $i = 3, \dots, m$. À la Fig. 3.7, l'expression de $\tilde{p}_i$ est :

$$\tilde{p}_i = \frac{r + p_i}{a_{i-1}} - r \quad (3.4)$$

La machine équivalente $\widetilde{M}_i$ est une machine fictive isolée, à deux états, qui traite une pièce, avec retard de livraison non permis. Par le principe de moyennage avec demande corrigée, cette machine est sujette à une demande constante $\frac{d}{a_i}$, avec pénurie non permise, pour $i = 1, \dots, m-1$. Ce type de machine a été étudié par Hu [43]. Il a établi les expressions analytiques des lois stationnaires de probabilités associées à l'inventaire et celles des coûts de production associés.

La fonction du coût de la machine $\widetilde{M}_i$ isolée, d'après [43], en fonction de z_i et la demande moyenne de $\frac{d}{a_i}$ est donnée par l'équation suivante :

$$J(z_i) = c_i \frac{r(k_i - d/a_i)}{\tilde{p}_i(d/a_i)} \left(\frac{k_i(1 - e^{\left(\frac{k_i r - (d/a_i)(\tilde{p}_i + r)}{(k_i - d/a_i)d/a_i}\right) z_i})}{1 - \frac{r(k_i - d/a_i)}{\tilde{p}_i(d/a_i)}} - (\tilde{p}_i + r) z_i e^{\left(\frac{(k_i r - (d/a_i)(\tilde{p}_i + r)}{(k_i - d/a_i)d/a_i}\right) z_i} \right) \quad (3.5)$$

À partir du travail de Hu, nous pouvons trouver l'expression de la fraction du temps à long terme pour laquelle les encours x_i sont non disponibles, ou encore, la relation entre a_i , la fraction du temps à long terme pour laquelle l'encours x_i est

disponible, et z_i , le seuil critique de l'encours x_i . La relation obtenue est la suivante :

$$a_i = 1 - \frac{\tilde{p}_i}{r + \tilde{p}_i} \frac{1 - \frac{r(k_i - d/a_i)}{\tilde{p}_i(d/a_i)}}{1 - \frac{r(k_i - d/a_i)}{\tilde{p}_i(d/a_i)} e^{\left(\frac{k_i r - (d/a_i)(\tilde{p}_i + r)}{(k_i - d/a_i)d/a_i}\right) z_i}} \quad (3.6)$$

Elle correspond à l'expression développée par Hu mais avec d qui devient $\frac{d}{a_i}$. Nous résolvons l'équation (3.6) pour z_i et substituons dans l'expression de coût présentée à (3.5). Nous remplaçons également $\tilde{p}_i$ par son expression à l'équation (3.4). Le résultat de ces substitutions nous donne *la fonction de coût de transition*, $T^i(a_{i-1}, a_i)$ (soit l'équation 3.7). Nous définissons la fonction de coût de transition comme étant le coût moyen nécessaire pour assurer au stock x_i , un coefficient de disponibilité a_i sachant que le stock x_{i-1} est lui-même associé à un coefficient de disponibilité a_{i-1} . Le seuil critique à choisir z_i agit comme la commande permettant de passer d'un coefficient de disponibilité a_{i-1} pour x_{i-1} à un coefficient de disponibilité a_i pour x_i .

$$\begin{aligned} T^{(i)}(a_{i-1}, a_i) = & c_i \frac{k_i d (r a_{i-1} - r - p_i) a_{i-1}}{(r + p_i) (k_i r a_i a_{i-1} - d(r + p_i))} + \frac{k_i d (1 - a_i)}{k_i a_i r - d(\frac{r+p_i}{a_{i-1}} - r) - d r} \\ & + \left(\frac{(k_i - \frac{d}{a_i}) d}{k_i a_i r - d(\frac{r+p_i}{a_{i-1}} - r) - d r} + \frac{(k_i - \frac{d}{a_i}) (r + p_i) d^2 (1 - a_i)}{a_{i-1} (k_i a_i r - d(\frac{r+p_i}{a_{i-1}} - r) - d r)^2} \right) \\ & \ln \left(\frac{d(r a_{i-1} - r - p_i)}{r a_{i-1} (d - k_i a_i)} + \frac{(\frac{r+p_i}{a_{i-1}} - r) (k_i a_i r - d(\frac{r+p_i}{a_{i-1}} - r) - d r) \frac{a_{i-1}}{a_i}}{r (k_i - \frac{d}{a_i}) (r + p_i) (1 - a_i)} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.5 Problème de programme dynamique : formulation et propriétés

3.5.1 Formulation

Nous sommes à présent prêts à formuler le problème d'optimisation ci-dessous, appelé **Problème P** :

"Soit une ligne de transfert destinée à la production d'un seul type de pièces. La ligne comprend m **machines partiellement homogènes** (i.e. les taux de réparation de toutes les machines sont identiques) Markoviennes à deux états, non fiables, et est sujette à un taux de demande de pièces constant d . La demande d est supposée être réalisable pour chaque machine isolée lorsque son alimentation est parfaitement fiable. Étant donné un coefficient de disponibilité minimal désiré de l'encours x_{m-1} , a_{m-1}^0 , destiné à la machine m (la machine m produit les pièces finales), et tel que $a_{m-1}^0 \left(\frac{r}{r+p_m} \right) k_m > d$. Nous souhaitons déterminer une séquence de a_i^* (et les seuils z_i^* associés), $i = 1, \dots, m-2$, si elle existe, qui minimiserait le coût suivant :

$$J^* = \inf_{a_{i-1} \in A_i(a_i)} \left[\sum_{i=1}^{m-1} T^i(a_{i-1}, a_i) \right] \quad i = 2, 3, \dots, m-1. \quad (3.8)$$

où dans (3.8), $a_0 = 1$, et l'ensemble des coefficients de disponibilité admissibles $A_i(a_i)$ est défini à la Proposition 1, de l'Annexe A".

3.5.2 Propriétés

Proposition 1 - *Sans perte d'optimalité, les ensembles admissibles dans le Problème P, $A_i(a_i)$, $i = 2, \dots, m-1$, peuvent être considérés à être des sous-intervalles fermés de $\left(\frac{d}{k_i}\left(\frac{r+p_i}{r}\right), 1\right)$. (Pour la démonstration voir Annexe A, Section A.5.1)*

Corollaire 1 - *Soit la fonction de coût définie à l'équation (3.8) est continue sur un ensemble fermé. La fonction aura un minimum global (qui en général, pourrait ne pas être unique).*

3.5.3 Les bornes de l'ensemble des coefficients de disponibilité $A_i(a_i)$

L'ensemble des coefficients de disponibilité $A_i(a_i)$ est un sous-intervalle ouvert $(0, 1)$, appelé ensemble d'admissibilité de a_{i-1} (0 et 1 signifient respectivement la non disponibilité, et la disponibilité à 100% d'un stock donné). L'ensemble A_i doit être défini de sorte à assurer la réalisabilité de la demande d pour chaque machine équivalente isolée $\widetilde{M}_i$. L'ensemble $A_i(a_i)$ est donc défini par les contraintes ci-dessous :

I) Bornes supérieures

Pour un coefficient de disponibilité de l'encours x_{i-1} , a_{i-1} , donné, le minimum de a_i s'obtient lorsque z_i , le seuil critique associé à l'encours x_i est nul. Dans ce cas a_i est égal à $a_{i-1} \left(\frac{r}{r+p_i}\right)$. D'où, en général, $a_i \geq a_{i-1} \left(\frac{r}{r+p_i}\right)$ ou encore :

$$a_{i-1} \leq \left(\frac{r+p_i}{r}\right) a_i \quad (3.9)$$

Cependant, la terme à droite dans (3.9) pourrait être supérieure à 1. (3.9) doit donc être réécrite :

$$a_{i-1} < \min \left\{ \left(\frac{r+p_i}{r}\right) a_i, 1 \right\} \quad (3.10)$$

II) Bornes inférieures

Nous considérons à présent les bornes inférieures sur le coefficient a_{i-1} . Ce dernier doit être tel qu'il permette de garantir la réalisabilité de la demande d par la pseudo-machine $\widetilde{M}_i$. Ainsi, nous avons la contrainte de réalisabilité suivante :

$$a_{i-1}k_i \left(\frac{r}{r+p_i} \right) > d \implies a_{i-1} > \frac{d}{k_i} \left(\frac{r+p_i}{r} \right) \quad (3.11)$$

De plus, en appliquant de façon récursive l'inégalité (3.9) en partant de $a_0 = 1$, et en choisissant $z_1 = z_2 = \dots = z_i = 0$, nous pouvons établir une autre borne inférieure pour le coefficient de disponibilité a_{i-1} :

$$a_{i-1} \geq \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{r}{r+p_j} \right) \quad \begin{cases} \text{si} & z_1 = z_2 = \dots = z_i = 0 \\ \text{pour} & i \geq 2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Les inégalités (3.11) et (3.12) conduisent à :

$$a_{i-1} > \max \left\{ \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{r}{r+p_j} \right), \frac{d}{k_i} \left(\frac{r+p_i}{r} \right) \right\} \quad (3.13)$$

En résumant (3.10) et (3.13), nous obtenons les bornes de l'ensemble des coefficients de disponibilité admissibles $A_i(a_i)$.

$$\max \left\{ \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{r}{r+p_j} \right), \frac{d}{k_i} \left(\frac{r+p_i}{r} \right) \right\} < a_{i-1} < \min \left\{ \left(\frac{r+p_i}{r} \right) a_i, 1 \right\} \quad (3.14)$$

3.6 Lignes de transfert homogènes

3.6.1 Problèmes P_{av} et DP_{av}

Dans ce qui suit, nous considérons la version moyennée du problème P , dénotée Problème P_{av} , pour une ligne de transfert entièrement homogène (les machines sont associées à des paramètres identiques : $k_i = k$, $r_i = r$, $p_i = p$, $i = 1, \dots, m-1$). De plus, $a_{m-1} \geq a_{m-1}^0 > \frac{d}{k} \frac{r}{r+p}$. Cependant, lorsque le nombre de machines m tend vers l'infini, les effets des frontières se disparaissent. Par conséquent, nous cherchons à déterminer la séquence $a_1, a_2, \dots, a_{m-2}$, lorsque $m \rightarrow \infty$, en vue d'atteindre la fonction valeur J^* ci-dessous :

$$J^* = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m-1} \right) \inf_{a_{i-1} \in A_i(a_i)} \left[\sum_{i=1}^{m-1} T(a_{i-1}, a_i) \right] \\ i = 2, 3, \dots, m-1. \quad (3.15)$$

DP_{av} est définie comme la version discrétisée de P_{av} . Dans une telle reformulation, l'espace d'état de a_i est discrétisé, et est donc réduit à un nombre *fini* de valeurs.

Proposition 2 - *Le Problème DP_{av} admet une politique de loi de commande stationnaire en boucle fermée qui est optimale (Pour la démonstration voir la Section A.5.2 de l'Annexe A).*

Notons que, la Proposition 2 crée la possibilité d'utiliser un algorithme d'optimisation par "itération de politiques" [7] afin de déterminer la loi de commande optimale. Toutefois, sous certaines hypothèses structurelles sur la fonction du coût de transition, l'analyse présentée dans la section suivante fait ressortir la structure très particulière de la solution optimale pour les problèmes P_{av} et DP_{av} , et les solutions numériques directes deviennent possibles.

3.6.2 Nature de la loi de commande en boucle fermée pour une ligne transfert longue

Afin de cerner davantage la nature d'une distribution optimale des coefficients de disponibilités pour une ligne transfert longue, nous faisons certaines hypothèses structurelles sur les coûts de transitions et comportement de la trajectoire optimale. Ces hypothèses sont développées dans le lemme suivant qui est un résultat technique.

Lemme 1 - Soit $|\Delta a_{m-1}^0| < \delta$ et $a_{m-1}^0 + \Delta a_{m-1}^0 \in I$, I étant un intervalle fermé, et borné; $\exists \delta > 0$, tel que $\forall a_{m-1}^0 \in I$, $\text{sign}(\Delta a_i^* \Delta a_{m-1}^0) > 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, m-2$, où $a_i^* + \Delta a_i^*$, $i = 1, \dots, m-2$ est un profil de distribution optimal associé à la condition frontière perturbée $a_{m-1}^0 + \Delta a_{m-1}^0$. Le résultat ci-dessus est établi sous les hypothèses suivantes, regroupées sous le nom d'hypothèse A :

I) $\exists$ une trajectoire optimale $a^*(a_{m-1}^0) \triangleq [a_1^*(a_{m-1}^0), \dots, a_{m-2}^*(a_{m-1}^0)]^T$ qui dépend continûment de a_{m-1}^0 pour $a_{m-1}^0 \in I$.

II) $\forall a_{m-1}^0 \in I$, $M_H(a^*(a_{m-1}^0)) > 0$, où l'indice H indique la matrice Hessienne associée au coût scalaire :

$$M(a) = \sum_{i=1}^{m-2} T(a_{i-1}, a_i) + T(a_{m-2}, a_{m-1}^0)$$

et $a \triangleq [a_1, a_2, \dots, a_{m-2}]^T$, $a_0 = 1$.

III) la valeur propre minimale $\lambda_{\min}(a)$ de la matrice Hermitienne $M_H(a)$ est une fonction continue de a , pour $a \in A$, A étant l'ensemble convexe engendré par les points de la trajectoire $a^*(a_{m-1}^0)$, $a_{m-1}^0 \in I$. Une propriété similaire est supposée vérifier pour tous les mineurs principaux de $M_H(a)$.

IV) Pour toute paire admissible a_{i-1}, a_i , la fonction de coût de transition $T(a_{i-1}, a_i)$ satisfait l'inégalité $\frac{\partial^2 T}{\partial a_{i-1} \partial a_i} < 0$.

Pour la démonstration voir la Section A.5.2 de l'Annexe A.

La proposition suivante est une conséquence directe du Lemme 1.

Proposition 3 - Soit a_{m-1}^0 la condition aux frontières du Problème **P**. Considérons une perturbation admissible arbitraire ΔP , de la condition aux frontières. Sous l'hypothèse A du Lemme 1, avec l'intervalle I défini comme un intervalle fermé, a_{m-1}^0 et $a_{m-1}^0 + \Delta P$ étant ses points extrêmes, il existe une configuration optimale de l'inventaire, $a^*(a_{m-1}^0 + \Delta P)$, qui correspond à une déformation du profil $a^*(a_{m-1}^0)$ monotone croissante avec ΔP .

Démonstration : Selon le Lemme 1, il va exister un pas de grandeur fixe $\delta > 0$, tel qu'il soit possible de décomposer l'intervalle $[a_{m-1}^0; a_{m-1}^0 + \Delta P]$ si $\Delta P > 0$, ou $[a_{m-1}^0 + \Delta P; a_{m-1}^0]$ pour $\Delta P < 0$, en une séquence finie d'intervalles successifs de grandeur inférieure ou égale à δ . En utilisant le pas en question pour une augmentation ou une diminution de a_{m-1}^0 respectivement, il est possible de conclure qu'il existera une séquence de déformations du profil initial résultant, pour la condition aux frontières perturbée $a_{m-1}^0 + \Delta P$, en un profil de distribution optimal qui est une déformation du profil initial, monotone croissante avec ΔP . ■

À ce stade, sous l'hypothèse A, et partant de la Proposition 3, nous sommes en mesure de développer des conjectures fondées quant à la forme de la solution optimale du Problème **P** lorsque le nombre des machines dans la ligne de transfert homogène devient très grand. Ces conjectures nous fournissent des informations sur la structure des solutions optimales des problèmes **P_{av}** et **DP_{av}**. Pour une discussion de ces conjectures, le lecteur est référé à la Section A.5.2 de l'Annexe A.

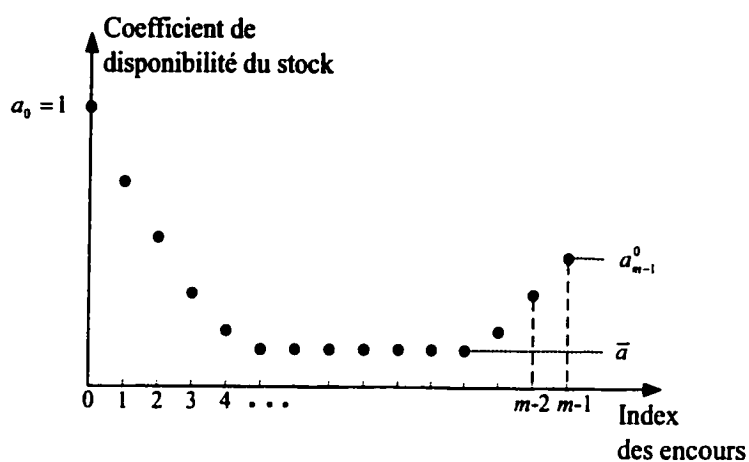


Figure 3.8 – Profil du coefficient de disponibilité optimal conjecturé pour une ligne de transfert longue lorsque $a_{m-1}^0 > \bar{a}$; $\bar{a}$ est le minimiseur de $T(a, a)$.

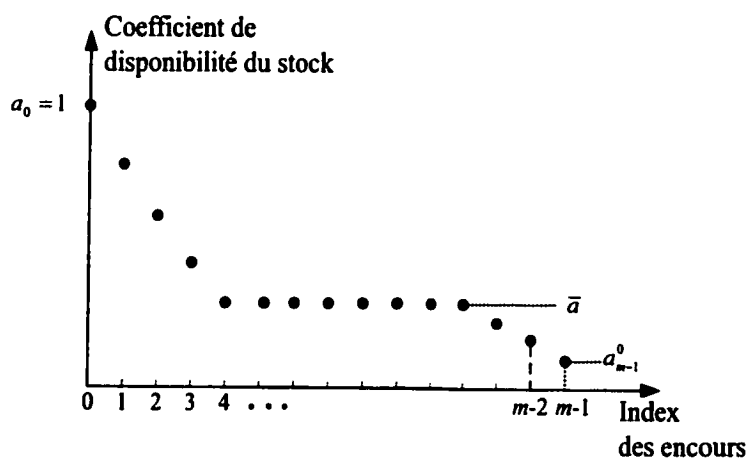


Figure 3.9 – Profil du coefficient de disponibilité optimal conjecturé pour une ligne de transfert longue lorsque $a_{m-1}^0 < \bar{a}$; $\bar{a}$ est le minimiseur de $T(a, a)$.

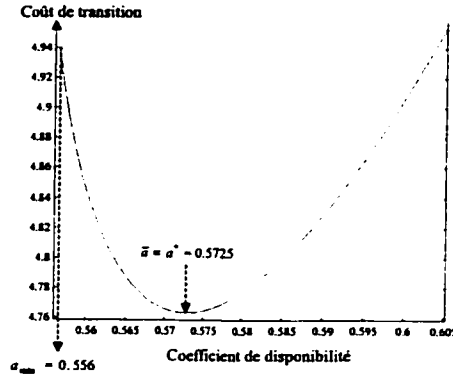


Figure 3.10 – Fonction de coût de transition $T(a_{i-1}, a_i)$ lorsque $a_{i-1} = a_i = a$. a^* est le minimiseur global et il dicte le coût moyen de transition pour une ligne de transfert homogène infinie de paramètres $r = 0.5$, $p = 0.2$, $k = 2.5$, $d = 1$. Nous observons que $T(a, a)$ est convexe, et croît très rapidement lorsque le coefficient se rapproche de la limite d'ergodicité de la ligne ($a_{min} = 0.556$). Le minimiseur est $a^* = 0.5725$.

3.7 Résultats numériques

Dans cette section, nous rapportons les résultats numériques du schéma de la programmation dynamique, appliqué au Problème **P** pour des lignes de transfert respectivement partiellement homogènes, et entièrement homogènes.

3.7.1 Lignes partiellement homogènes

Dans les résultats numériques illustrés dans cette sous-section, nous avons considéré une ligne de transfert partiellement homogène avec 20 machines. Les paramètres de cette ligne sont fixés à $r = 0.5$, $k_i = 4.5 - (i - 1) * \Delta k$, pour $i = 1, \dots, 20$ avec $\Delta k = 0.01$ (en respectant $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_{20}$), et les coûts unitaires de stockage d'encours sont $c_i = 2$, $i = 1, \dots, 19$, alors que la condition aux frontières est $a_{19}^0 \geq 0.85$ et le taux de demande constant à satisfaire est $d = 1.5$.

Par ailleurs, nous considérons deux cas : cas 1, où le taux de panne des ma-

chines augmente avec l'indice en allant de l'aval à l'amont ; plus précisément, $p_i = 0.2 - (i - 1) * \Delta p$, pour $i = 1, \dots, 20$ avec $\Delta p = 0.005$. Pour le deuxième cas, cas 2, $p_i = 0.2 + (i - 1) * \Delta p$, pour $i = 1, \dots, 20$ avec $\Delta p = 0.005$, i.e. le taux de panne augmente au contraire en partant de l'amont à l'aval de la ligne de transfert.

Les résultats de notre approche d'optimisation, basée sur la méthode de décomposition, sont montrés aux Figs 3.11 et 3.12. Nous pouvons observer un régime transitoire pour toutes les courbes. Durant ce régime, la solution optimale est sensible aux conditions des frontières en début et fin de ligne.

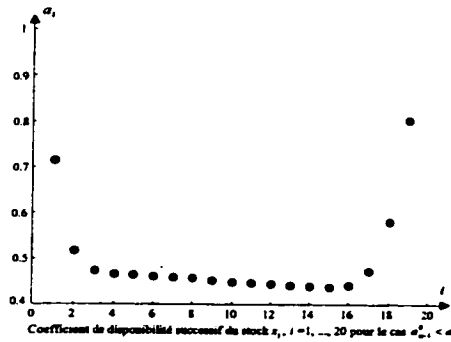


Figure 3.11 – Profil optimal des coefficients de disponibilité des encours x_i pour $i = 1, \dots, 20$, pour une ligne de transfert partiellement homogène, avec des taux de réparations identiques pour toutes les machines, mais des taux de pannes diminuent lorsque i augmente.

Au centre de la ligne, les coefficients de disponibilités optimaux sont décroissants monotones (lorsque les machines deviennent plus fiables), et croissants monotones (lorsque les machines deviennent moins fiables) respectivement. Notons que dans les deux cas, au centre de la ligne de transfert, il semble que les quantités $\left(a_i^* \frac{r}{r+p_i} k_i\right)$, i.e. les capacités moyennes de production des machines équivalentes $\widetilde{M}_i$, deviennent constantes.

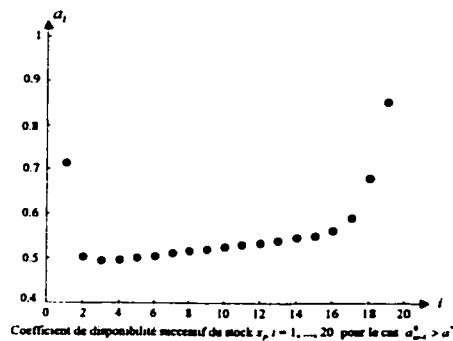


Figure 3.12 – Profil optimal des coefficients de disponibilité des encours x_i pour $i = 1, \dots, 20$, pour une ligne de transfert partiellement homogène, avec des taux de réparations identiques pour toutes les machines, mais des taux de pannes augmentent lorsque i augmente.

3.7.2 Ligne complètement homogène

La Fig. 3.13 illustre les résultats pour une ligne de transfert entièrement homogène, lorsque l'optimisation est basée sur notre méthode de décomposition avec $p = 0.2$, $r = 0.5$, $k = 4.5$ pour chaque machine et la demande constante d est 1.5.

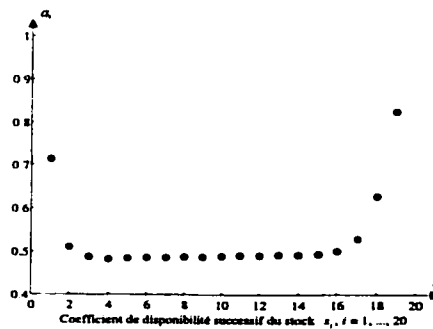


Figure 3.13 – Coefficients de disponibilités optimaux du stock x_i , $i = 1, \dots, 20$, pour une ligne de transfert homogène lorsque $a_{20}^0 = 0.9 > \bar{a}$; $\bar{a} = 0.506$.

Nous notons que, comme prévu par la théorie, suffisamment loin de deux extrêmes de la ligne de transfert, le profil du coefficient de disponibilité devient une

constante a^* qui est précisément le minimiseur de $T(a, a)$ tel que montré à la Fig. 3.10.

Les paramètres à la Fig. 3.14 sont identiques à ceux pour la Fig. 3.13, excepté que le taux de production maximal de toutes les machines est plus bas, et se situe à $k = 2.5$ au lieu de 4.5. Nous constatons que lorsque les k augmentent, les coefficients de disponibilités optimaux requis au centre de la ligne diminuent. Nous passons ainsi de 0.578 lorsque $k = 2.5$ (Fig. 3.14), à 0.506 lorsque $k = 4.5$ (Fig. 3.13).

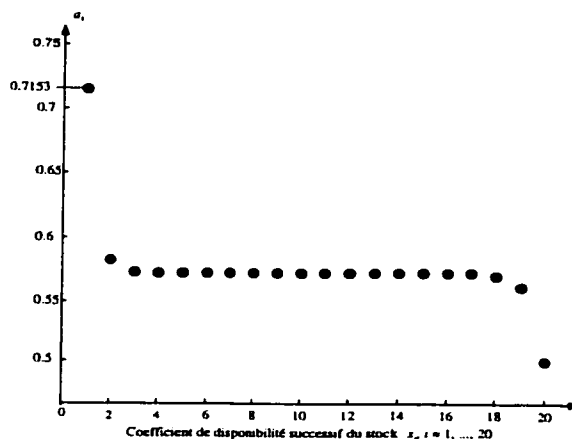


Figure 3.14 – Coefficients de disponibilités optimaux du stock x_i , $i = 1, \dots, 20$, pour une ligne de transfert homogène lorsque $a_{20}^0 = 0.5 < \bar{a}$; $\bar{a} = 0.578$.

3.8 Validation par simulation de Monte-Carlo, et degré de sous-optimalité des solutions

Nous rapportons ici, la comparaison des résultats des performances de commandes optimales obtenus en se basant sur les solutions numériques des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) pour trois lignes de transferts étudiées dans Mbihi

[58], avec ceux obtenus par la méthode proposée ici qui est basée sur une politique sous-optimale décentralisée à seuils critiques, et comportant des approximations dans l'analyse.

Le Tab. 3.1 donne les paramètres statistiques des lignes de transfert pour les trois lignes distinctes étudiées, comportant deux-machines (le temps requis de résolution des équations HJB augmente exponentiellement en fonction du nombre de machines ; d'où de nombre limité, 2, de machines considérées dans [58]). Pour une étude plus poussée de la précision des approximations de décompositions de découplage en tant que telles voir [60].

Paramètres des machines M_1 et M_2							Coûts/Unité			Demande d
Line	p_1	p_2	r_1	r_2	k_1	k_2	c_1	c_2^+	c_2^-	d
1	0.3	0.3	0.6	0.6	2.5	2	2	2	10	1
2	0.3	0.3	0.5	0.5	2.5	2	2	2	10	1
3	0.1	0.1	0.3	0.3	2.5	2	1	2	10	1

Tableau 3.1 – Les paramètres statiques des trois lignes de transfert à deux machines étudiées.

Le Tab. 3.2 montre les coûts de stockage et de retard de livraison d'une ligne de transfert calculés en se basant respectivement sur une loi de commande optimale obtenue par la résolution numérique des équations HJB [58], et sur une loi de commande sous-optimale obtenue par la programmation dynamique elle-même fondée sur la méthode de décomposition/agrégation (DPO) développée dans ce chapitre. Ces deux ensembles de valeurs sont comparés à ceux obtenus par simulation de Monte-Carlo (MC) lorsque les seuils critiques sont ceux obtenus par notre technique d'optimisation. Ainsi, les erreurs relatives des coûts totaux en pourcentage respectivement basées sur l'algorithme d'optimisation proposé et la résolution numérique des équations HJB par rapport aux coûts estimés basés sur la simulation de Monte-

Carlo sont présentés.

Le Tab. 3.2 indique que la perte d'optimalité relativement aux lois de commande

Ligne	J_{HJB}^*	J_{DPO}^*	J_{MC}^*	$ \frac{J_{MC}^* - J_{DPO}^*}{J_{MC}^*} $	$ \frac{J_{MC}^* - J_{HJB}^*}{J_{MC}^*} $
1	20.12	20.2 $\begin{cases} J_1 = 5.8 \\ J_2 = 14.4 \end{cases}$	20.73 $\begin{cases} 5.48 \\ 15.25 \end{cases}$	2.5%	2.9%
2	28.03	30.83 $\begin{cases} J_1 = 9.26 \\ J_2 = 21.57 \end{cases}$	31.76 $\begin{cases} 8.78 \\ 22.98 \end{cases}$	2.93%	11.74%
3	21.64	23.82 $\begin{cases} J_1 = 4.81 \\ J_2 = 19.01 \end{cases}$	24.13 $\begin{cases} 4.57 \\ 19.56 \end{cases}$	1.28%	10.32%

Tableau 3.2 – Résultats de comparaison des coûts optimaux obtenus à partir de la résolution numérique des équations (HJB) [58], l'optimisation basée sur la programmation dynamique fondée sur la méthode de décomposition/agrégation (DPO) et les calculs correspondants par simulation de Monte-Carlo (MC).

optimales peut être de l'ordre de 12%. Cependant, l'estimé de la performance basé sur la technique de décomposition/agrégation est de l'ordre de 3% par rapport aux résultats basés sur une simulation de Monte-Carlo pour les mêmes choix des seuils critiques. Notons que les écarts observés au niveau de la simulation de Monte-Carlo, par rapport aux valeurs théoriques, proviennent d'une combinaison des effets de toutes les approximations effectuées dans notre méthode de décomposition (découplage des machines, moyennage de la demande, caractère exponentiel attribué aux temps de disponibilité des encours, et agrégation d'état), en plus du bruits inhérents à la simulation de Monte-Carlo, particulièrement lorsque l'on se rapproche des limites d'ergodicité des paramètres.

L'estimée des coûts moyens par simulation de Monte-Carlo est obtenu en employant une approche régénératrice [51] (l'événement de régénération est celui du retour simultané de tous les stocks à leurs seuils critiques). L'estimé du coût global par unité de temps est basé sur le rapport du coût moyen par cycle sur le temps moyen par cycle). La simulation de Monte-Carlo s'arrête lorsque l'estimé de l'écart

type relatif pour les deux, numérateur (coût moyen par cycle) et dénominateur (temps moyen par cycle) est inférieur à 0.5%. Il en résulte alors un écart type total inférieur à 1% pour le *rapport* du coût moyen moyen par cycle sur le temps moyen par cycle. Nous exigeons également qu'au moins 500000 itérations aient été complétées, et que l'erreur relative du coût pour deux itérations consécutives soit inférieure à 10^{-9} . Enfin, au moins 10000 cycles de régénération devront avoir été complétés.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une technique d'optimisation des lignes de transfert par programmation dynamique, fondée sur une méthode de décomposition/agrégation nouvelle des lignes. Les lignes de transfert sont non fiables et sont supposées partiellement homogènes, avec le taux de production maximal supposé monotone décroissant dans la ligne de transfert en allant de l'amont à l'aval de la ligne.

Le méthode de décomposition est basée sur deux approximations principales de découplage : l'hypothèse de découplage des machines, et le principe de moyennage de la demande.

Le modèle simplifié obtenu de la ligne de transfert est un outil prometteur pour l'optimisation des lignes de transfert partiellement homogènes, les temps de calcul étant très courts.

L'optimisation des profils de stockage basée sur le modèle correspond à des résultats structurels intuitifs. En particulier, pour les lignes de transferts longues, et compte tenu de la structure de la fonction de coût de transition, l'analyse indique que sous certaines hypothèses détaillées au Lemme 1, loin des extrémités de la

ligne, le profil des coefficients de disponibilités optimaux tendent à devenir *constants* (ceci a été également confirmé par nos résultats numériques). Ces coefficients de disponibilité sont tels que les machines opèrent très proche d'une limite d'incapacité de satisfaire la demande (comme nous observons dans la Fig. 3.10, l'écart entre l'optimum et la limite de réalisabilité est très faible). Ceci illustre en quelque sorte un mécanisme interne de production "juste à temps". Ainsi, une répartition optimale des niveaux de stockage d'encours sera telle qu'elle permette tout juste de répondre à la demande. Une telle configuration du stockage tend à minimiser le temps de séjour des encours dans une ligne de production en forçant les machines à produire au maximum lorsqu'elles sont actives.

Chapitre 4

Optimisation par programmation dynamique d'une ligne de transfert partiellement non homogène¹

4.1 Introduction

Précédemment, nous avons développé une méthode de décomposition/agrégation basée sur les deux principes d'approximation (l'hypothèse de découplage des machines (MDA) et moyennage de la demande (DAP)). Dans la technique de décomposition proposée au Chapitre 3, nous avons vu à la Section 3.4.2 que lorsque l'on considère que la probabilité d'avoir deux pannes simultanées des machines M_1 et M_2 est très faible, l'état correspondant à une telle situation (l'état ③, Fig. 4.1) pouvait être considéré inexistant. Suite à cela, une fusion de deux états panne (② et ④, Fig.

¹Ce chapitre est le résumé du contenu d'un article soumis pour publication au *Annals of Operations Research*, special issue on "Stochastic Models of Production-Inventory Systems". La version complète de cet article se trouve à l'Annexe B.

4.1) en un seul état devenait possible dans le cas partiellement homogène, puisque ② et ④ se confondaient d'un point de vue statistique (même taux de réparation). Ceci aura permis d'obtenir un modèle Markovien à deux états pour la machine fictive équivalente $\widetilde{M}_i$.

Cependant, dans le cas d'une ligne de transfert où les taux de réparation des machines en panne sont différents, il devient impossible d'agréger les états ② et ④, sans perte de précision. La Fig. 4.1 présente le modèle des états de ces nouveau contexte.

Ainsi donc, dans ce chapitre, nous proposons une méthode de décomposition/agrégation qui conserve plus d'information au niveau des états "pannes" d'une ligne de transfert, tout en évitant l'explosion inévitable de l'espace d'état requis par la présentation si l'on insistait absolument à maintenir tous les niveaux de détail.

4.2 Le modèle de la chaîne de Markov à quatre états de $\widetilde{M}_2$

Le modèle Markovien à quatre états de la machine équivalente s'obtient par le produit cartésien de deux espaces d'états, respectivement le modèle d'état associé à la chaîne de Markov $I_1(t)$ et celui de la machine $\widetilde{M}_2$. À la Fig. 4.1, l'état étiqueté ① représente le seul état opérationnel associé à la chaîne de Markov du modèle à quatre états de $\widetilde{M}_2$ et les états ②, ③, ④ sont des états de panne.

À présent, nous construisons une représentation Markovienne de l'état de disponibilité d'encours x_2 , $I_2(t) = 1$. Le stock x_2 est alimenté par la machine fictive $\widetilde{M}_2$ Markovienne à 4 états dont un seul est opérationnel et soumis, en vertu du principe de moyennage de la demande, à une demande constante $\frac{d}{a_2}$, où $a_2 = E[I_2(t) = 1]$. Les

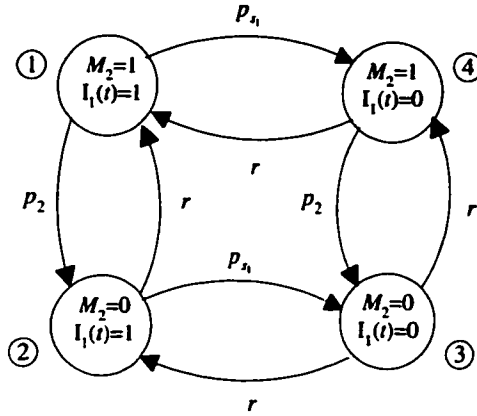


Figure 4.1 – Modèle d'état approximatif Markovien de la machine fictive isolée $\widetilde{M}_2$ équivalente à la machine M_2 alimentée par le stock d'encours non fiable x_1 .

instants durant lesquels $I_2(t) = 1$ sont les temps de premier retour de l'encours x_2 à zéro. Leur moyenne $\bar{t}_{rz2}$ peut être calculée par la technique développée par El-Férik et Malhamé [27] (voir l'Annexe A de l'article présenté à l'Annexe B de cette thèse). Ces instants sont de distribution approximativement exponentielle. Cependant, il n'est pas possible d'en dire autant pour l'état de rupture de stock $I_2(t) = 0$. En effet, la rupture du stock x_2 peut être causée soit par une panne de M_2 (l'état ②), soit par une panne de M_1 seulement, menant aux ruptures de stocks x_1 et éventuellement x_2 (l'état ④), ou encore une combinaison des deux types de pannes (l'état ③). De plus, *selon la cause de la panne, le temps de séjour dans l'état de rupture (Fig. 4.3) aura une durée moyenne différente.*

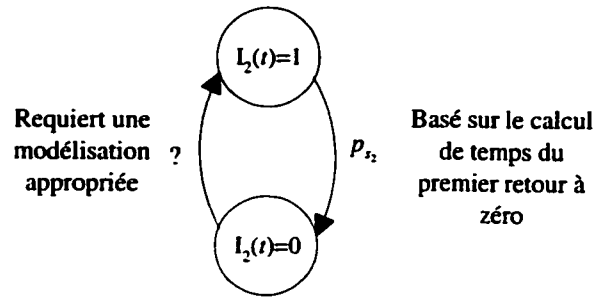


Figure 4.2 – Modèle binaire non Markovien de l'état de disponibilité de l'encours x_2 .

4.3 Représentation Markovienne de I_2 à trois états agrégés

Si l'objectif est d'obtenir une représentation Markovienne de processus de disponibilité d'encours x_2 , il est donc nécessaire de considérer l'état de rupture de stock x_2 comme un macro-état comportant 3 états possibles, non Markoviens (voir Fig. 4.2). C'est que le temps de séjour dans l'état de rupture n'est pas exponentiel (voir Fig. 4.3).

À la Fig. 4.3, $s_{2'}$, $s_{3'}$ et $s_{4'}$ sont les probabilités des différentes causes de pénurie de l'inventaire x_2 ($x_2=0$) dues respectivement à une panne de la machine M_2 seulement, à une combinaison de pannes des machines M_1 et M_2 , ou enfin à une panne de la machine M_1 seulement. Les probabilités $s_{2'}$, $s_{3'}$ et $s_{4'}$ sont obtenues au cours du calcul de la moyenne du premier temps de retour de x_2 à zéro, $\bar{t}_{rz2}$ (voir Annexe A de l'article en Annexe B de la thèse). La Fig. 4.4 illustre la dynamique de l'inventaire x_2 , où $\tilde{\alpha}_2$ est l'état binaire de la machine fictive $\tilde{M}_2$. $s_{i'}$ indique la probabilité d'être dans le sous-état i' au moment de la rupture de stock.

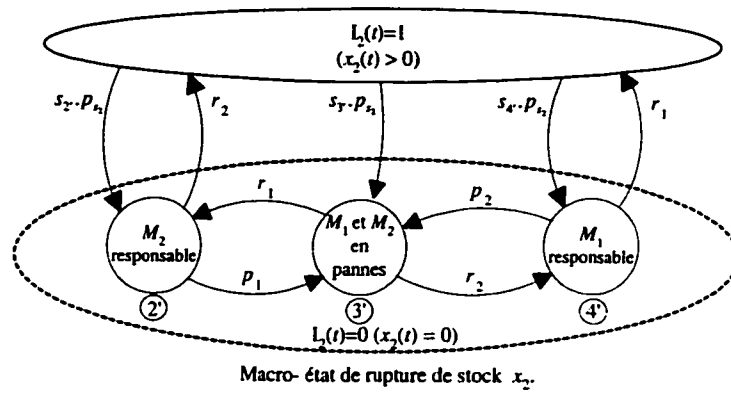


Figure 4.3 – Sous-états du macro-état de rupture de stock x_2 . Les trois sous-états sont dénotés 2', 3' et 4'.

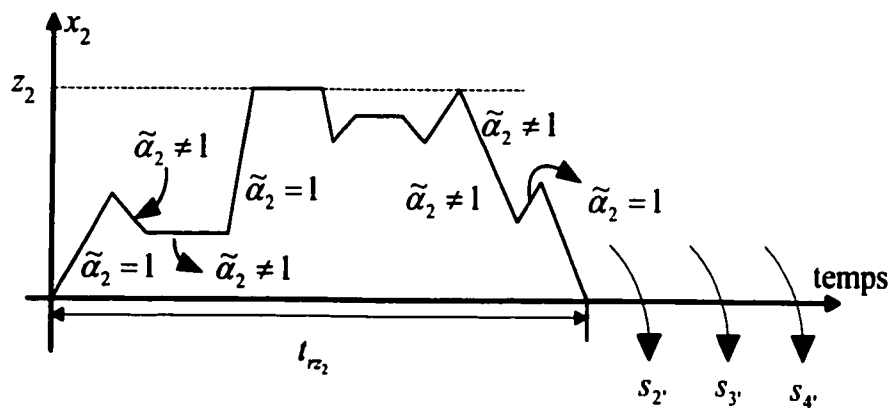


Figure 4.4 – Dynamique du stock x_2 .

$\bar{T}_{j'1}$ est défini comme le temps moyen de retour vers l'état de disponibilité $I_2(t) = 1$, dénoté état 1, sachant que le sous-état initial de rupture de stock est j' , pour $j' = 2', 3', 4'$. Le calcul des temps moyens $\bar{T}_{j'1}$, $j' = 2', 3', 4'$ est développé à l'Annexe A de l'article présenté à l'Annexe B de cette thèse.

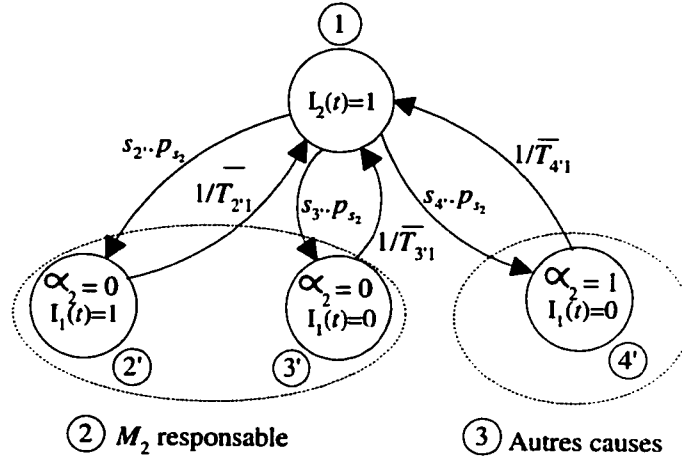


Figure 4.5 – Modèle Markovien approximatif de l'état de disponibilité d'encours x_2 .

À ce stade, il faudrait théoriquement maintenir la représentation Markovienne à 4 états du comportement de l'état de disponibilité du stock x_2 . Cependant, ceci mènerait éventuellement à une représentation Markovienne d'ordre $4 \times 2 = 8$ pour la machine fictive isolée équivalente de M_3 . Cette augmentation de l'espace d'état pourrait rapidement devenir explosive si l'on continuait à maintenir tout le détail des modèles pour M_4 , M_5 , etc.. En conséquence, nous agrégeons un peu plus les états de la chaîne, tel que présenté à la Fig. 4.5, pour la ramener à un ordre 3. Ceci correspond éventuellement à un modèle d'ordre 6 pour $\widetilde{M}_3$.

Le processus d'agrégation consiste à ramener le modèle d'état approximatif Markovien équivalent de l'état de disponibilité du stock x_2 (Fig. 4.5) à un modèle d'état

approximatif Markovien équivalent (Fig. 4.6). Pour arriver à cette fin, nous distinguons entre deux catégories de panne pour l'inventaire x_2 :

1. La panne de type **M_2 responsable**, c'est à dire tel que la rupture du stock x_2 soit causée par la panne M_2 . Ce type de cause est de loin le plus probable.
2. **Autres causes** qui correspondent à toutes les autres pannes ne mettant pas en cause la machine M_2 , et provenant de l'univers en amont de M_2 .

En regroupant les deux catégories de pannes mentionnées en états séparés, le modèle agrégé du modèle d'état Markovien approximatif représenté à la Fig. 4.5 se ramène à celui de la Fig. 4.6.

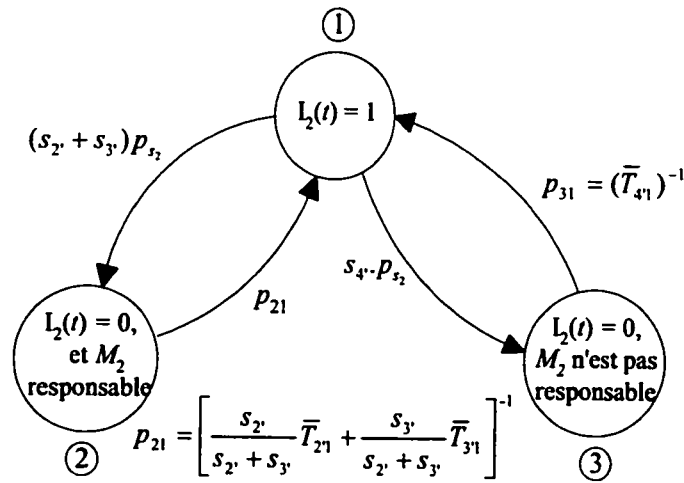


Figure 4.6 – Modèle Markovien agrégé de la dynamique de l'état de disponibilité d'encours x_2 .

En effectuant le produit cartésien de ce modèle d'état Markovien approximatif avec le modèle d'état Markovien à deux états de la machine M_3 , nous obtenons un

modèle fictif $\widetilde{M}_3$ d'ordre 6 de machine isolée et alimentée par une source totalement fiable, comportant un seul état opérationnel et *cinq* états de panne.

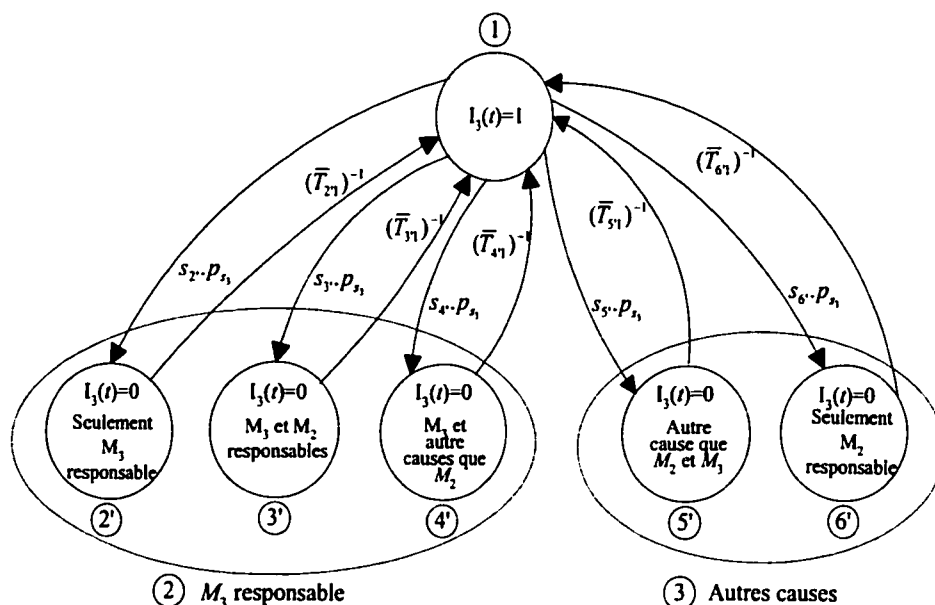


Figure 4.7 – Modèle Markovien à six états, agrégé à 3 états, pour la dynamique de l'état de disponibilité de l'encours x_3 .

À son tour, $\widetilde{M}_3$ va servir à construire un modèle Markovien réduit d'ordre 3 pour l'état de disponibilité du stock x_3 (voir Fig. 4.7), et ceci en regroupant les divers états de rupture du stock x_3 en deux catégories, mentionnées plus haut : les états associés à une panne de la machine M_3 (les plus probables), et ceux associés à une panne dans l'univers en amont de M_3 et ne mettant pas en cause la machine M_3 . La concaténation des états est représentée à la Fig. 4.7. Avec le modèle de disponibilité du stock x_3 réduit à 3 (voir la Fig. 4.8) et le modèle Markovien associé à la machine M_4 , nous obtenons le modèle fictif $\widetilde{M}_4$ d'ordre 6, c'est à dire le même ordre que $\widetilde{M}_3$. À partir de là, notre processus d'approximation débouchera toujours sur des modèles de machines $\widetilde{M}_i$, $i \geq 3$, du sixième ordre.

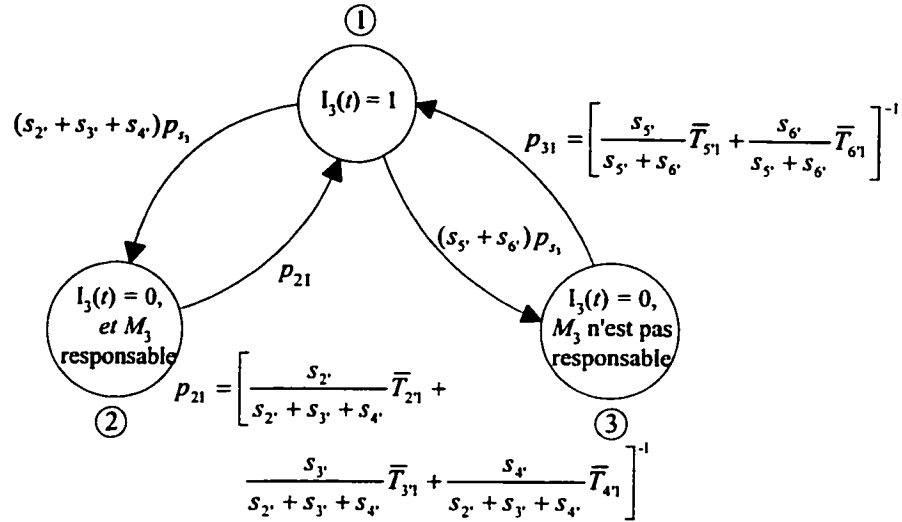


Figure 4.8 – Modèle Markovien agrégé de la dynamique de l'état de disponibilité d'encours x_3 .

4.4 Validation numérique par simulation Monte-Carlo

Dans cette section, sous la base de ce qui a été développé précédemment, nous allons appliquer la technique de décomposition à la ligne de production à trois machines illustrée à la Fig. 4.9.



Figure 4.9 – Atelier de fabrication à trois machines.

Nous allons évaluer la fonction de coût par l'équation B.3 de l'Annexe B de l'article à l'Annexe B de cette thèse lorsqu'une politique de commande décentralisée à seuils critiques est appliquée. Ceci est fait pour un choix donné du vecteur de seuils critiques z_i , $i = 1, \dots, m$. Noter que dans le calcul des coûts de stockage x_i à partir

des machines $\widetilde{M}_i$, $i \leq m - 1$ et en vertu du principe de moyennage de la demande, la valeur de la demande constante à utiliser est $\frac{d}{a_i}$ plutôt que d , où a_i est le coefficient de disponibilité de l'inventaire x_i , $i = 1, \dots, m - 1$, à priori inconnu. Bien qu'il soit possible d'entreprendre un calcul théorique itératif de la constante a_i , et à des fins de comparaison numérique, nous avons plutôt opté d'obtenir ces valeurs à partir d'une simulation de Monte-Carlo pour des valeurs de seuils critiques identiques. Ayant ainsi obtenu les a_i , $i = 1, \dots, m - 1$, nous les avons par la suite utilisés dans le calcul de coût pour une machine de Hu multi-états [59] avec d remplacé par $\frac{d}{a_i}$ (voir Annexe B de l'article en Annexe B de la thèse).

La configuration de la ligne de transfert pour chaque cas étudié est décrite dans le tableau 4.1 et les coûts/unité de produit sont $c_1 = c_2 = c_3^+ = 2$ et $c_3^- = 10$.

Configuration des machines M_1 , M_2 et M_3										Stock z_i et taux de demande d			
Ligne	p_1	p_2	p_3	r_1	r_2	r_3	k_1	k_2	k_3	z_1	z_2	z_3	d
1	.025	.05	.02	.3	.125	.1	3	2.9	2.8	.047	7.7	5	1
2	.01	.03	.25	.15	.45	.5	2	1.9	1.8	.12	3.4	8.1	1
3	.02	.15	.08	.15	.5	.3	4.5	3.5	2.5	.08	4.2	4.7	1.2
4	.1	.08	.15	.5	.45	.6	3	2.9	2.8	5	3	7	1
5	.2	.15	.1	.6	.45	.4	3	2.9	2.8	3	5	7	1
6	.15	.2	.1	.4	.45	.3	3	2.9	2.8	2	2	2	1

Tableau 4.1 – Paramètres d'opération des lignes de transfert pour les six cas étudiés.

Dans le Tab. 4.2, J_{total}^{DT} et J_{total}^{MC} sont respectivement les coûts totaux de stockage et de retard de livraison obtenus correspondants basés sur une simulation régénératrice de Monte-Carlo et la technique de décomposition/agrégation proposée dans ce chapitre. Le temps requis de simulation de Monte-Carlo augmente exponentiellement en fonction du nombre de machines. Nous nous sommes donc limité à des cas de lignes de production comportant trois machines. Les résultats des comparaisons du coût par la méthode d'analyse basée sur la technique de décomposition/agrégation,

pour un choix donné du vecteur de seuils critiques et pour un calcul de coût par la simulation régénératrice de Monte-Carlo sont montrés dans au Tab. 4.2. Les critères d'arrêt de la simulation régénératrice de Monte-Carlo sont les mêmes que ceux utilisés dans le chapitre précédent. L'erreur relative du coût total présentée au Tab. 4.2, dans le cas le plus défavorable est à peu près de 3%, ce qui indique un degré de précision élevé pour cette méthode de décomposition.

L	Tech. de Décomp. à trois états				Monte-carlo simul.				Erreur relative %
	J_1	J_2	J_3	$J_{total}^{DT}(d/a_i)$	J_1	J_2	J_3	$J_{total}^{MC}(SD)$	
1	.0923	10.8	42.24	53.24	.094	10.2	44	54.3(.09)	1.95
2	.225	5.99	44.04	50.35	.225	5.92	45.9	52.05(.12)	3.25
3	.141	6.26	34.6	41	.144	6.17	36.02	42.33(.16)	3.14
4	9.08	5.25	12.7	27	8.98	5.1	12.83	26.91(.032)	0.45
5	4.97	8.14	12.94	26.05	4.74	7.7	13	25.44(.12)	2.4
6	3.04	2.5	27.4	32.94	2.9	2.1	29	34(.17)	3.12

Tableau 4.2 – Les résultats de comparaison de la technique de décomposition et ceux de la simulation de Monte-Carlo.

Bien que la technique de décomposition/agrégation présentée donne des résultats précis pour une ligne de transfert non homogène, l'algorithme associé d'optimisation des seuils critiques basé sur cette technique et sur la programmation dynamique est trop complexe pour être applicable à une ligne de transfert de grande taille. En vue de remédier à cet inconvénient, à la section suivante, nous proposons d'aller plus loin dans les simplifications en vue d'obtenir un algorithme d'optimisation envisageable au niveau pratique.

4.5 Modèle simplifié pour l'optimisation des zones de stockage pour la ligne de transfert

4.5.1 Modèle simplifié de $\widetilde{M}_i$

Dans cette sous-section, nous présentons un modèle simplifié à deux états de la pseudo machine $\widetilde{M}_i$ afin de pouvoir implanter un algorithme d'optimisation par la programmation dynamique. Dans ce cas, nous obtenons un modèle équivalent du même degré de complexité que celui obtenu dans le cas d'une ligne de transfert partiellement homogène, présenté au chapitre 3. Nous introduisons le coefficient de disponibilité à priori inconnu a_i , $i = 1, \dots, m-1$ (avec $a_0 = 1$, l'approvisionnement de la première machine se trouvant en tête de la ligne de transfert étant considéré), La Fig. 4.10 est une représentation de la relation de récurrence qui existe entre paramètres caractéristiques de pseudo machines successives réduites.

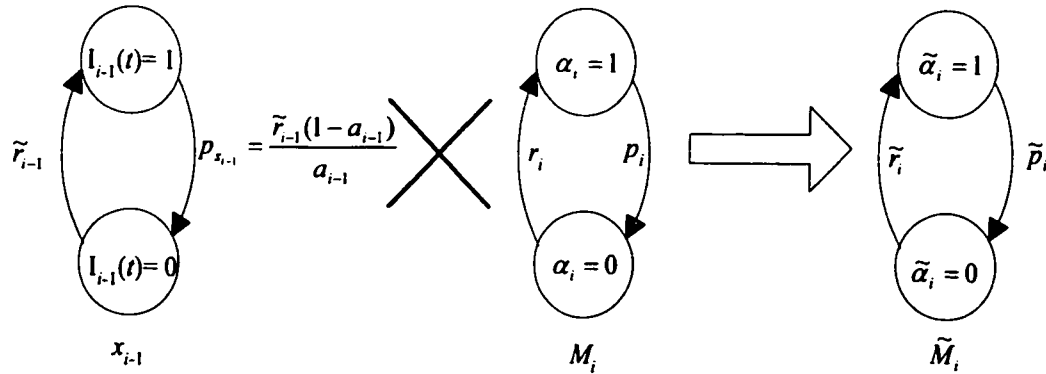


Figure 4.10 – Le modèle de la chaîne Markov agrégé à deux états de pseudo machine $\widetilde{M}_i$, $i \geq 2$.

Ainsi, Fig. 4.10, nous partons par hypothèse d'une machine équivalente $\widetilde{M}_{i-1}$ à deux états, avec taux de panne et de réparation respectifs $\tilde{r}_{i-1}$ et $\tilde{p}_{i-1}$ alimentant

le stock x_{i-1} . L'expression de taux de pénurie de l'inventaire x_{i-1} , $p_{s_{i-1}}$, de l'état binaire I_{i-1} en fonction du coefficient de disponibilité a_{i-1} dérive de la relation établie au Chapitre 3, $a_{i-1} = \frac{\tilde{r}_{i-1}}{p_{s_{i-1}} + \tilde{r}_{i-1}}$. Dans le modèle à deux états de la machine fictive, le taux de réparation de l'état de disponibilité d'inventaire I_{i-1} se confond avec $\tilde{r}_{i-1}$, le taux de réparation de la machine. Un estimé du taux de réparation de la machine fictive $\tilde{M}_i$ d'une ligne de transfert non homogène, lorsque l'on néglige la probabilité d'avoir deux pannes simultanées des machines $\tilde{M}_{i-1}$ et $\tilde{M}_i$ est donné dans l'expression suivante :

$$\tilde{r}_i = \frac{\left(\frac{p_{s_{i-1}}}{\tilde{r}_{i-1} + p_{s_{i-1}}}\right) \left(\frac{r_i}{r_i + p_i}\right)}{\left(\frac{p_{s_{i-1}}}{\tilde{r}_{i-1} + p_{s_{i-1}}}\right) \left(\frac{r_i}{r_i + p_i}\right) + \left(\frac{\tilde{r}_{i-1}}{\tilde{r}_{i-1} + p_{s_{i-1}}}\right) \left(\frac{p_i}{r_i + p_i}\right)} \tilde{r}_{i-1} + \frac{\left(\frac{\tilde{r}_{i-1}}{\tilde{r}_{i-1} + p_{s_{i-1}}}\right) \left(\frac{p_i}{r_i + p_i}\right)}{\left(\frac{p_{s_{i-1}}}{\tilde{r}_{i-1} + p_{s_{i-1}}}\right) \left(\frac{r_i}{r_i + p_i}\right) + \left(\frac{\tilde{r}_{i-1}}{\tilde{r}_{i-1} + p_{s_{i-1}}}\right) \left(\frac{p_i}{r_i + p_i}\right)} r_i \quad (4.1)$$

La probabilité stationnaire pour que la machine $\tilde{M}_i$ soit dans l'état opérationnel ($\tilde{\alpha}_i = 1$) est $\left(\frac{\tilde{r}_i}{\tilde{p}_i + \tilde{r}_i}\right) = \left(\frac{\tilde{r}_{i-1}}{p_{s_{i-1}} + \tilde{r}_{i-1}}\right) \left(\frac{r_i}{r_i + p_i}\right)$. Dans ce cas, $\tilde{p}_i$ est donnée par :

$$\tilde{p}_i = \left[\frac{(\tilde{r}_{i-1} + p_{s_{i-1}})(r_i + p_i)}{\tilde{r}_{i-1} \cdot r_i} - 1 \right] \tilde{r}_i \quad (4.2)$$

4.5.2 Formulation de la programmation dynamique

L'étude est basée sur le modèle à deux états de la machine équivalente dérivé dans la sous-section 4.5.1. Nous formulons le problème d'optimisation de l'inventaire d'une ligne de transfert comme un problème de programmation dynamique où l'espace d'état $(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i)$ à chaque étape du programme est un sous-ensemble de $\mathcal{R}_2$.

Comme au Chapitre 3, en se basant sur le résultat de Hu [43], et en utilisant la demande moyenne effective $\frac{d}{a_i}$ issue du principe de moyennage, il vient pour le coût

de transition à partir de l'état $\tilde{r}_i, \tilde{p}_i$ lorsque l'action a_i est appliquée :

$$T(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i, a_i) = c_i \frac{(1 + \lambda_i)}{\lambda_i} [k_i(\varphi_i - 1) + (\tilde{r}_i + \tilde{p}_i)(\varphi_i) \ln(\varphi_i)] \quad (4.3)$$

où φ_i et λ_i sont données par :

$$\varphi_i = \frac{(1 + \tilde{p}_i)(1 - a_i) + \lambda_i \tilde{p}_i}{(1 + \tilde{p}_i)(1 - a_i)(1 + \lambda_i)},$$

$$\lambda_i = \frac{k_i \tilde{r}_i - (d/a_i) (\tilde{p}_i + \tilde{r}_i)}{(k_i - d/a_i) d/a_i}$$

En utilisant $(i - 1)$ au lieu de i dans les équations (4.1), (4.2) (4.3), et si l'on se souvient que $p_{s_{i-1}} = \frac{\tilde{r}_{i-1}(1-a_{i-1})}{a_{i-1}}$, il est possible de tracer le diagramme de transition d'état présenté à la Fig. 4.11.

$$\begin{pmatrix} \tilde{r}_{i-1} \\ \tilde{p}_{i-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(coût de transition équation (4.3))}]{\text{Décision } a_{i-1}} \begin{pmatrix} \tilde{r}_{i-1} \\ p_{s_{i-1}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \tilde{r}_i \\ \tilde{p}_i \end{pmatrix}$$

Figure 4.11 – Le diagramme de transition d'état de la programmation dynamique où, à chaque étape i , l'espace d'état est de dimensions deux, et est directement identifié au vecteur $(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i)^T$. Le signe d'équivalence $\approx$ est en vertu des équations (4.1)-(4.2). Le coefficient de disponibilité a_{i-1} joue le rôle de la variable de décision (action de commande) alors que le coût de transition correspondant est donné par l'équation (4.3) avec $i - 1$ remplaçant i .

Par conséquent, partant de la Fig. 4.11 et des équations (4.1), (4.2) et (4.3), il est possible de formuler un problème de la programmation dynamique appelé *problème d'optimisation des zones de stockage d'une ligne de transfert mono pièce*, de la manière suivante :

« Soit une ligne de transfert Markovienne non fiable produisant un seul type de pièce et sujette à une demande constante de taux d qui peut se réaliser par chaque machine isolée. Nous cherchons à déterminer, s'il existe, une séquence optimale des coefficients de disponibilité de l'inventaire a_i , $i = 1, \dots, m-1$; permettant d'atteindre la borne inférieure du coût total de stockage et de retard de livraison :

$$J^* = \inf_{a_i \in A_i(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i)} \left[\sum_{i=1}^{m-1} T(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i, a_i) + T_F(\tilde{r}_m, \tilde{p}_m) \right], \quad i=1, \dots, m-1 \quad (4.4)$$

où dans (4.4) :

- $T_F(\tilde{r}_m, \tilde{p}_m)$ est le *coût terminal*. Il correspond en fait au coût optimal de Bielecki-Kumar avec le retard de livraison permis [8]. Le coût terminal s'obtient par :

$$T_F(\tilde{r}_m, \tilde{p}_m) = \frac{c_m^+ z_m}{[(\tilde{r}_m + \tilde{p}_m)(\tilde{r}_m(k_m - d) - \tilde{p}_m d)]^2} + \frac{\tilde{p}_m k_m d (e^{-\lambda_m} (c_m^- + c_m^+) - c_m^+)}{(\tilde{r}_m + \tilde{p}_m)(\tilde{r}_m(k_m - d) - \tilde{p}_m d)} \quad (4.5)$$

$$\text{avec } \lambda_m = \frac{\tilde{r}_m(k_m - d) - \tilde{p}_m d}{d(k_m - d)}.$$

- $A_i(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i)$, $i = 1, \dots, m$, sont les *ensembles admissibles* de la variable de décision a_i .
- Les *équations de transition d'état* associées à cette programmation dynamique, et dénotées $[\tilde{r}_i, \tilde{p}_i]^T = [f_{1i}(\tilde{r}_{i-1}, \tilde{p}_{i-1}, a_{i-1}), f_{2i}(\tilde{r}_{i-1}, \tilde{p}_{i-1}, a_{i-1})]$ sont données par (4.1) et (4.2), avec $p_{s_{i-1}}$ remplacé par $\frac{\tilde{r}_{i-1}(1-a_{i-1})}{a_{i-1}}$. »

4.6 Caractérisation des ensembles admissibles

L'ensemble admissible de la variable de décision du coefficient de disponibilité a_i , pour une demande d réalisable partant de l'état $(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i)$ à l'étape i , est l'intervalle ouvert $0 < a_i < 1$ (pour $a_i = 1$ il faudrait z_i infini ; 1 est donc exclu). De plus, le fait que la demande d doit demeurer réalisable pour la machine équivalente $\tilde{M}_i$, ajoute

une contrainte additionnelle sur a_i . Cette dernière s'écrit :

$$\frac{\tilde{r}_{i+1}}{\tilde{r}_{i+1} + \tilde{p}_{i+1}} k_{i+1} > d \quad (4.6)$$

En vertu des équations de transition d'état, (4.6) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{f_1(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i, a_i)}{f_1(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i, a_i) + f_2(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i, a_i)} > d \quad (4.7)$$

L'équation (4.7) et la condition $a_i \in (0, 1)$ définissent $A_i(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i)$.

4.7 Résultats numériques

Nous présentons les résultats numériques de l'algorithme de programmation dynamique présenté à la section 4.5 pour deux exemples de lignes de transfert à six machines analysés dans [18]. Les configurations des paramètres d'opération pour chaque ligne de transfert étudiée sont décrites au Tab. 4.3. À la sous-section 4.7.1, nous montrons l'espace d'état atteignable obtenu à partir de l'équation (4.7) pour la ligne de transfert de l'exemple 2. À la sous-section, 4.7.2 les seuils critiques optimaux des inventaires sont calculés en se basant sur l'algorithme d'optimisation de programmation dynamique. Les résultats sont résumés au Tab. 4.4.

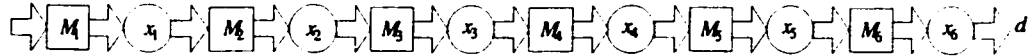


Figure 4.12 – La ligne de transfert considérée dans les exemples 1 et 2.

4.7.1 Un exemple de l'espace d'état atteignable

À la Fig. 4.13, l'espace d'état atteignable $\tilde{p}_i$ en fonction de $\tilde{r}_i$, $i = 1, \dots, 6$, pour la ligne 2 du Tab. 4.3 est représenté. Ainsi, partant de tous les états admissibles à l'étape i , et appliquant l'ensemble admissible des variables de décision a_i , $i = 1, \dots, 5$, toutes les paires possibles de $(\tilde{p}_{i+1}, \tilde{r}_{i+1})$ peuvent être générées. Les courbes illustrées à la Fig. 4.13 montre l'espace atteignable pour chaque machine équivalente $\tilde{M}_i$, $i = 1, \dots, 6$.

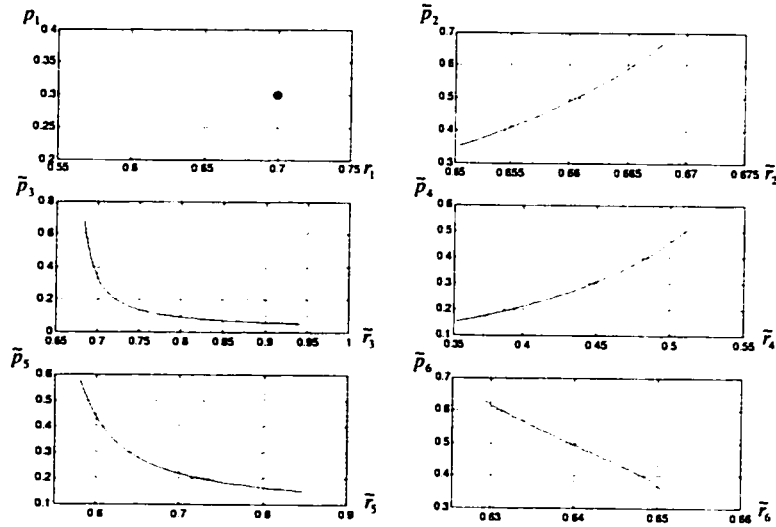


Figure 4.13 – L'espace d'état atteignable de la ligne de transfert 2, présenté au Tab. 4.3. p_1 , r_1 représentent de la machine M_1 .

4.7.2 Résultats optimaux des seuils critiques pour une ligne de transfert longue

Au tableau 4.4, nous présentons les seuils critiques optimaux des inventaires z_i^* , $i = 1, \dots, 6$ pour les lignes de transfert 1 et 2.

Configuration des machines M_1-M_6												
Ligne	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
1	.35	.175	.56	.15	.2	.35	.7	.39	1.44	.32	.8	.75
2	.3	.35	.05	.15	.15	.35	.6998	.6502	.9497	.35	.8503	.6502

Tableau 4.3 – Les paramètres statiques des lignes de transfert 1 et 2 (ces données sont basées sur [18]). $c_i = 1, i = 1, \dots, 5, c_6^+ = c_6^- = 1, k_i = 1, i = 1, \dots, 6$ et la demande constante d est 0.5.

Machine	Exemple 1		Exemple 2	
	Seuil critique opt.	Coût opt.	Seuil critique opt.	Coût opt.
	z_i^*	J_i^*	z_i^*	J_i^*
1	.197	.133	.275	.184
2	1.715	.524	1.351	.171
3	1.687	.438	.867	.387
4	1.125	.543	1.955	.607
5	2.093	1.091	2.12	1.283
6	.997	1.406	1.3	1.757

Tableau 4.4 – Les résultats des seuils critiques et des coûts optimaux pour six machines des lignes de transfert 1 et 2.

4.8 Conclusion

Une technique de décomposition/agrégation d'analyse approximative de performance pour une ligne de transfert non fiable et non homogène sous la politique de commande décentralisée de type KANBAN a été présentée. L'évaluation de performance est basée sur le calcul du coût individuel de chaque stock. Cependant le calcul du coût est basé sur l'analyse d'une machine équivalent isolée d'ordre six, sujette à une demande constante avec retard de livraison non permis. L'analyse d'une telle machine est possible grâce au modèle multi-état généralisé de Hu [43]. Pour les exemples de lignes de transfert considérés dans ce Chapitre, l'estimation de la performance basée sur la technique de décomposition/agrégation apparaît précise.

De plus, un modèle simplifié à deux états des machines équivalentes a été présenté. L'objectif était de formuler le problème d'optimisation des zones de stockage dans les lignes de transfert non fiables comme un problème de programmation dynamique dans un espace d'état de dimension deux à chaque étape. Les expériences numériques pour la méthode de décomposition dans la première partie et pour l'algorithme d'optimisation ont été présentés. L'algorithme d'optimisation converge très rapidement. Toutefois, une formulation du programme d'optimisation basée sur le modèle plus précis de la machine équivalente Markovienne à six états est possible, mais se révélerait nettement plus complexe en termes de calcul requis.

Chapitre 5

Conclusion et discussion générale

5.1 Discussion générale

Le problème central de notre thèse a été celui de la découverte de la relation entre les grandeurs optimales des aires de stockage d'encours ou d'inventaires dans une ligne de transfert avec machines non fiables, et la position de la machine à l'intérieur de la ligne. Ce problème a été étudié sous l'hypothèse que les statistiques de fiabilité des machines sont connues et que le taux de demande pour produits finis est constant. De plus, nous avons utilisé une structure de coût telle qu'à la fois les temps de séjour des encours dans la ligne et les périodes de déficit de production puissent être pénalisées.

Nous avons réussi à apporter au problème une solution numérique efficace, dans le cas où les machines ont des statistiques de fiabilité arbitraires mais cependant satisfaisant, du point de vue de leur capacité de production maximale. De plus, nous avons fait l'hypothèse de monotonie voulant que le taux maximal de production décroît de façon monotone en allant de l'amont vers l'aval de la ligne de transfert. Cette hypothèse de monotonie nous a permis de développer des simulations de

Monte-Carlo plus efficaces pour la validation numérique de nos stratégies d'approximation, et a un impact sur la précision de l'approximation dite de découplage des machines (voir Chapitre 3). Elle constitue une limitation à notre travail, mais nous pensons que le caractère restrictif de l'hypothèse peut être minimisé en remplaçant la machine réelle qui violerait l'hypothèse, par une machine fictive dont les coefficients k_i et p_i seraient perturbés de sorte à maintenir la même capacité moyenne de production, et rendre k_i conforme à l'hypothèse en question.

Dans le cas particulier où les machines sont identiques, nous avons réussi à dégager les propriétés structurelles de la répartition optimale des aires de stockage. Une telle répartition correspondait à un niveau de stockage qui a tendance à devenir assez rapidement constant lorsqu'on s'approche du centre de la ligne. Pour une ligne de transfert théoriquement infinie, en pratique suffisamment longue, le niveau de stockage optimal peut être précisément calculé à partir d'une fonction coût de transition, dont il est le minimum (voir Eq. 3.7, Chapitre 3). Il est alors intéressant de constater que la stratégie de stockage optimal au centre de la ligne viserait à mettre les machines presque à la limite de la pénurie d'encours, sans toutefois violer la condition de réalisabilité de la demande. Ainsi, dans une configuration optimale, les machines même en état opérationnelles, pourraient ne rien produire faute d'encours, alors que si elles produisent, elles le feraient en général au niveau maximal, et les pièces produites seraient retirées rapidement par les machines subséquentes. Le temps de séjour des encours dans la ligne serait ainsi minimisé, et un principe de production juste à temps interne à la ligne serait implicitement implanté.

5.2 Contributions spécifiques de la thèse

- Des techniques analytiques adéquates pour l'analyse de performance dans les lignes de transfert de grande taille ont été développées. Elles permettent d'op-

timiser les paramètres d'opération de la ligne, tout en garantissant, surtout pour les lignes de transfert partiellement homogènes, un degré de précision élevé.

Pour y arriver, nous avons proposé une approche de décomposition fondée sur deux stratégies d'approximations, à l'origine proposés dans Mbihi [58], mais avec une correction apportée à l'item (i) ci dessous :

- i) le principe de moyennage de la demande,
- ii) l'hypothèse de découplage approximatif des machines.

L'approche de décomposition/agrégation proposée présente les avantages suivants :

- Elle permet d'évaluer la performance de la ligne de transfert sous la classe de politiques décentralisées de production à seuils critiques. Cette classe de politique est similaire aux structures KANBAN introduites par Toyota dans les années soixante.
- Le calcul de performance est analytique et s'appuie sur les expressions de performance dans de machines isolées, Markovienne à deux ou plusieurs états.
- Cette méthode semble plus efficace au niveau calcul que les autres méthodes de décomposition importantes existantes [20], [30], mais il faut le souligner, ne vise plus à résoudre le même problème. En effet dans [20] et [30], l'objectif est de déterminer le taux de production maximal de la ligne, étant donné une certaine répartition des aires de stockage.

- Elle permet de déboucher sur la formulation de programmes dynamiques tels que l'état à chaque étape est soit un sous-ensemble de $\mathcal{R}_1$, soit un sous-ensemble de $\mathcal{R}_2$, respectivement pour les cas de lignes de transfert partiellement homogènes, ou totalement non homogènes.
- Dans le cas de lignes de transfert partiellement homogènes, l'existence d'une répartition optimale est établie, et des propriétés de monotonie du profil en fonction de la condition frontière du problème sont démontrées.

La structure du modèle obtenu donne des résultats intuitifs. Particulièrement, pour les lignes de transferts longues, et tenant compte de la structure de fonction du coût de transition, l'analyse indique que loin des extrémités de la ligne, le profil des coefficients de disponibilités optimaux sont constants ; ceci a été également confirmé par les résultats numériques. En d'autres termes, les machines doivent opérer sous coefficients de disponibilités fixes des encours, elles ajustent leurs seuils critiques de sorte à garantir le même coefficient de disponibilité pour la machine voisine, en aval. Ces coefficients de disponibilité sont tels que les machines opèrent à la limite de leurs capacités pour satisfaire la demande. Tel que mentionné plus haut, cela illustre, en quelque sorte, le mécanisme de "production juste à temps", en vertu duquel une machine donnée qui est souvent en pénurie de matières premières aura tendance à produire au débit maximum seulement lorsque l'inventaire redevient disponible. Par conséquent, la règle de répartition optimale consiste à maintenir le niveau de l'inventaire juste assez bas pour répondre à la demande compte tenu des données de fiabilité. Ce mécanisme tend à minimiser le temps de séjours des encours dans la ligne de production.

- Un modèle de machine équivalente à 6 états (d'ordre 6) a été développé pour

une ligne de transfert non homogène lorsque les taux des réparations ne sont plus identiques. Cette représentation de la machine équivalente est déduite d'un modèle agrégé du modèle d'inventaire d'ordre 3 et dont les paramètres sont déduits à partir d'une analyse de temps de passage. Un calcul assez précis de la performance devient possible.

- Afin de valider notre technique de décomposition, nous avons développé en parallèle un programme de simulation de Monte-Carlo efficace employant une approche régénératrice. Le temps avance directement d'un événement discret à l'autre dans cette approche de simulation régénératrice de Monte-Carlo. Nous sommes ainsi en mesure de simuler une ligne de transfert de très grande taille. Les résultats obtenus par l'approche analytique indiquent un haut degré de concordance avec la simulation de Monte-Carlo, au moins de même niveau de précision que les autres techniques de décomposition existant dans la littérature lorsque les données simulées sont similaires. Le critère d'arrêt de la simulation de Monte-Carlo a été basé sur une estimation de l'écart type relatif de numérateur (coût moyen par cycle) et de dénominateur (temps moyen par cycle) tels qu'ils doivent être respectivement inférieur à 0.5%. Il résulte alors un écart type total inférieur à 1% pour le *rapport* du coût moyen moyens par cycle sur le temps moyen par cycle. Nous avons également exigé qu'au moins 500000 itérations aient été complétées, et que l'erreur relative du coût pour deux itérations consécutives soit inférieure à 10^{-9} . Enfin, au moins 10000 cycles de régénération auront été complétés.

5.3 Recherches futures

Nous mentionnons ici quelques une des ramifications possibles de nos travaux de recherches :

- Le modèle agrégé d'ordre 6 obtenu par la méthode de décomposition/agrégation présentée au chapitre 4 dans le cadre de l'optimisation des lignes de transfert non homogène pourrait être la base d'un programme dynamique d'optimisation des seuils critiques, beaucoup plus complexe que celui proposé dans la thèse, mais potentiellement beaucoup plus précis.
- Nous suggérons d'appliquer nos techniques de décomposition/agrégation à l'analyse d'architectures de commandes, autre que KANBAN, telles que "CONWIP" (Constant Work In Process) ou "KANBAN/CONWIP hybride" [9], en vue de déterminer sous quels conditions une architecture de contrôle donnée serait plus performante.
- Notre travail a été conduit en considérant une ligne de transfert produisant un seul type de pièce. Une extension importante de ce travail serait de considérer les mêmes questions pour une ligne de transfert multi-pièces.

Bibliographie

- [1] Akella R. and Kumar P.R., "Optimal Control of Production Rate in a Failure Prone Manufacturing System", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 31, No. 2, pp. 116-126, Feb. 1986.
- [2] Akella R., Choong Y. and Gershwin S.B., "Performance of hierarchical production scheduling policy", *IEEE Transactions on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology*, Vol. CHMT-7, No. 3 pp. 225-40, Sept 1984. 1984.
- [3] Algoet Paul H., "Flow Balance Equations for the Steady-State Distribution of a Flexible Manufacturing System", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 8, pp. 917-921, Aug. 1989.
- [4] Ancelin B. and Semery A., "Calcul de la Productivité D'une Ligne Intégrée de Fabrication : CALF, un Logiciel Industriel Basé sur Une Nouvelle Heuristique", *RAIRO Automatique (APII)*, Vol. 21, pp. 209-238, 1987.
- [5] Artamonov G.T., "Productivity of a Two-Instrument Discrete Processing Line In The Presence of Failures", *Cybernetics*, Vol. 12, No. 3, pp. 464-468 (Traduit de Kibernetika , No. 3 pp. 126-130, 1972), May-June 1976.
- [6] Bai S.X. and Gershwin S.B., "Scheduling Manufacturing Systems with Work-in-Process Inventory Control : Single Part-Type Systems", *IIE Transactions*, Vol. 27, pp. 599-607, 1995.
- [7] Bertsekas D., *Dynamic Programming : Deterministic and Stochastic Models*, Prentice-Hall, 1987.

- [8] Bielecki T. and Kumar P.R., "Optimality of Zero-Inventory Policies For Unreliable Manufacturing Systems", *Operations Research Society of America*, Vol. 36, No. 4, pp. 532-541, July-August 1988.
- [9] Bonvik A.M., *Performance Analysis of Manufacturing Systems Under Hybrid Control Policies*, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, June 1996.
- [10] Brémaud P., Malhamé R.P. and Massoulié L., "A Manufacturing System with General Stationary Failure Process : Stability and IPA of Hedging Control Policies", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 2, pp. 155-170, Feb. 1997.
- [11] Burman M.H., *New Results in Flow Line Analysis*, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, June 1995.
- [12] Burman M.H., Gershwin S.B. and Suyematsu C., "Hewlett-Packard Uses Operations Research to Improve The Design of a Printer Production Line", *Interfaces*, Vol. 28, No. 1, pp. 24-36, Jan.-Feb. 1998.
- [13] Buzacott J. A., "Automatic Transfer Lines With Buffer Stocks", *The International journal of Production Research*, Vol. 5, No. 3, pp. 183-200, 1967.
- [14] Buzacott J.A. and Hanifin L.E., "Models of Automatic Transfer Lines with Inventory Banks A Review and Comparison", *AIIE Transactions*, Vol. 10, No. 2, June 1978.
- [15] Buzacott J.A. and Shanthikumar J.G., *Stochastic Models of Manufacturing Systems*, Prentice-Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [16] Caramanis M. and Liberopoulos G., "Perturbation Analysis For The Design of Flexible Manufacturing system Flow Controllers", *Operations Research society of America*, Vol. 40, No. 6, Nov.-Dec. 1992.

- [17] Caramanis M. and Sharifnia A., "Near Optimal Manufacturing Flow Controller Design", *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, Vol. 3, No. 3-4, pp. 321-336, 1991.
- [18] Chiang S.Y., Kuo C.T. and Meerkov S.M., "DT- Bottlenecks in Serial Production Lines : Theory and Application", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 16, No. 5 pp. 567-580, Oct. 2000.
- [19] Dallery Y., David R. and Xie X.L., "An Efficient Algorithm for Analysis of Transfer Lines With Unreliable Machine and Finite Buffers", *IIE Transactions*, Vol. 20, No. 3, pp. 280-283, 1988.
- [20] Dallery Y., David R., and Xie X.L., "Approximate Analysis of Transfer Lines with Unreliable Machines and Finite Buffers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 9, pp. 943-953, Sept. 1989.
- [21] Dallery Y. and Gershwin S.B., "Manufacturing Flow Line Systems : A Review of Models and Analytical Results", *Journal of Queueing Systems*, Vol. 12, pp. 3-94, 1992.
- [22] De Koster M.B.M., "Estimation of Line Efficiency by aggregation", *International Journal of Production Research*, Vol. 25, No. 4, pp. 615-626, 1987.
- [23] Di Mascolo M., David R. and Dallery Y., "Modelling and Analysis of Assembly Systems with Unreliable Machine and Finite Buffers", *IEE transactions*, Vol. 23, No. 4, pp. 315-330, 1991.
- [24] Di Mascolo M., Frein Y., and Dallery Y., "An Analytical Method for Performance Evaluation of KANABAN Controlled Production Systems", *Operations Research*, Vol. 44, No. 1, pp. 50-64, Jan.-Feb. 1996.
- [25] Dubois D. et Forestier J.P., "Productivité et Encours Moyens D'un Ensemble de Deux Machines Séparées Par Une Zone de Stockage", *RAIRO Automatique APII*, Vol. 16, No. 2, pp. 105-132, 1982.

- [26] Dubois D. and Stecké K.E., "Using Petri Nets To Represent Production Processes", *Proceeding of the 22th IEEE Conference on Descion and Control*, San Antonio, TX, Vol. 3, pp. 1062-1067, 1983.
- [27] El-Ferik S. and Malhamé R.P., "Padé Approximants for Transient Optimization of Hedging control Policies in Manufacturing", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 4, pp. 440-457, 1997.
- [28] El-Ferik S., Malhamé R.P. and Boukas E.K., "A Tractable Class of Maximal Hedging Policies in Multi-Part Manufacturing Systems", *Discrete Event Dynamic Systems : Theory and Applications*, Vol. 8, pp. 299-331, 1998.
- [29] Forestier J.P., "Productivité et En-Cours Moyens D'un Ensemble de Deux Machines Séparées Par Une Zone de Stockage", *RAIRO Automatique APII*, Vol. 14, No. 2, pp. 127-143, 1980.
- [30] Gershwin S.B., "An Efficient Decomposition Method For The Approximate Evaluation of Tandem Queues With Finite Storage space and Blocking", *Operations Research Society of America*, Vol. 35, No. 2, pp. 291-305, March-April 1987a.
- [31] Gershwin S.B., "Representation and Analysis of Transfer Lines with Machines that Have Different Processing Rates", *Annals of Operations Research*, Vol. 9, pp. 511-530, 1987b.
- [32] Gershwin S.B., *Manufacturing Systems Engineering*, Prentice-Hall, INC., Englewood Cliffs New Jersey, 1994.
- [33] Gershwin S.B., "Design and Operation of Manufacturing Systems : The Control-Point Policy", *IIE Transactions*, Vol. 32, No. 10, pp. 891-906, 2000.
- [34] Gershwin S.B., Akella R. and Choong Y.F., "Short-Time Production Scheduling of an Automated Manufacturing Facility", *IBM Journal of Research Development*, Vol. 29, No. 4, pp. 392-400, July 1985.

- [35] Gershwin S.B. and Burman M.H., "A Decomposition Method for Analyzing inhomogeneous Assembly/Disassembly Systems", *Annals of Operations Research*, Netherlands, Vol. 93, pp. 91-115, 2000.
- [36] Gershwin S.B. and Schick I.C., "Analytic Methods For Calculating Performance measures of Production Lines With Buffer Storages", *Proceedings of the 1978 IEEE Conference on Decision & Control Including the 17th Symposium on Adaptive Processes*, San Diego, CA, pp. 618-624, 10-12 Jan. 1979.
- [37] Gershwin S.B. and Schick I.C., "Modeling and Analysis of Three-Stage Transfer Lines with Unreliable Machines and Finite Buffers", *Operations Research*, Vol. 31, No. 2, pp. 355-380, March-April 1983.
- [38] Gershwin S.B. and Schor J., "Efficient Algorithms for Buffer Space Allocation", *Annals of Operations Research*, Netherlands, Vol. 93, pp. 117-144, 2000.
- [39] Glasserman P., "Hedging-Point Production Control with Multiple Failure Modes", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 4, pp. 707-712, April 1995.
- [40] Griffiths J.D., "The Coefficient of Variation of Queue Size for Heavy Traffic", *Journal of The Operational research Society*, Vol. 47, No. 8, pp. 1072-1076, 1996.
- [41] Graves S.C., "A Review of Production Scheduling", *Operations Research*, Vol. 29, No. 4, pp. 646-675, 1981.
- [42] Haurie A., L'écuyer P. and Van Delft Ch., "Convergence of Stochastic Approximation Coupled With Perturbation Analysis in a Class of Manufacturing Flow Control Models", *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, Vol. 4, No. 1, pp. 87-111, Feb. 1994.
- [43] Hu J.Q., "Production Control for Failure-Prone Production Systems with No Backlog Permitted", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 2, pp. 299-305, Feb. 1995a.

- [44] Hu J.Q., "A Decomposition Approach to Flow Control in Tandem Production Systems", *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, pp. 3140-3143, Dec. 1995b.
- [45] Huang L., Hu J.Q. and Vakili P., "Optimal Control of a Multi-State Manufacturing System : Control of Production Rate and Temporary Increase in Capacity", *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida USA, pp. 2155-2159, Dec. 1998.
- [46] Hu J.Q. and Xiang D., "The Queueing Equivalence to a Manufacturing System with Failures", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 3, pp. 499-502, March 1993.
- [47] Hu J.Q. and Xiang D., "Monotonicity of Optimal Flow Control for Failure-Prone Production Systems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 86, No. 1, pp. 57-71, July 1995.
- [48] Kimemia J. and Gershwin S.B., "An Algorithm For The Computer Control of a Flexible Manufacturing System", *IIE Transactions*, pp. 353-362, Dec. 1983.
- [49] Kimemia J. and Gershwin S.B., "Flow optimization in flexible manufacturing systems", *International Journal of Production Research*, Vol. 23, No. 1, pp. 81-96, Jan.-Feb. 1985.
- [50] Koenigsberg E., "Production Lines and Internal Storage-A review", *Management Science*, Vol. 5, pp. 410-433, 1959.
- [51] Law A.M. and Kelton W.D., *Simulation, Modeling and Analysis*, McGraw-Hill, 1991.
- [52] Liberopoulos G. and Caramanis M., "Production Control of Manufacturing Systems with Production Rate-Dependent Failure Rates", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 4, pp. 889-895, April 1994.

- [53] Liberopoulos G. and Caramanis M., "Dynamics and Design of a Class of Parameterized Flow controllers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 6, pp. 1018-1028, June 1995.
- [54] Liberopoulos G. and Hu J.Q., "On the Ordering of Optimal Hedging Points in a Class Manufacturing Flow Control Models", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 2, pp. 282-286, Feb. 1995.
- [55] Lou Sheldon X. and Kager P.W., "A Robust Production Control Policy for VLSI wafer Fabrication", *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, Vol. 2, No. 4, pp. 159-164, Nov. 1989.
- [56] Malhamé R.P., "Ergodicity of Hedging Control Policies in Single-Part Multiple-State Manufacturing Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 2, pp. 340-343, Feb. 1993.
- [57] Malhamé R.P. and Boukas E.K., "A Renewal Theoretic Analysis of a Class of Manufacturing Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, No. 5, pp. 580-587, May 1991.
- [58] Mbihi J., *Commande à seuils critiques de la production dans un atelier de fabrication avec machines en tandem non fiables*, Thèse de Ph.D., École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada, Juin 1999.
- [59] Mbihi J. and Malhamé R. P., "Optimization of a Class of Decentralized Hedging Production Policies in an Unreliable Two-Machine Flow Shop", *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, Dec. 1998.
- [60] Mbihi J., Malhamé R.P. and Sadr J., "Two Approximations as a Basis for the Optimization of Production in Long Unreliable Markovian Transfer Lines", In *Decision and Control in Management Science*, edited by Zaccour G., Kluwer Amsterdam, 2001.

- [61] Mitra D. and Mitrani I., "Analysis of a KANBAN Discipline for Cell Coordination in Production Lines. I", *Management Science*, Vol. 36, No. 12, Dec. 1990.
- [62] Muckstadt J.A. and Tayur S.R., "A Comparison of Alternative Kanban Control Mechanisms. I. Background and Structural results", *IIE Transactions*, Vol. 27, pp. 140-150, 1995.
- [63] Okamura K. and Yamashina H. , "Analysis of the Effect of Buffer Storage Capacity in Transfer Line Systems", *AIIE Transactions*, Vol. 9, No. 2, pp. 127-135, 1977.
- [64] Olsder, G.J. and Suri R., "Time-Optimal Control of Parts-Routing in a Manufacturing System With Failure-Prone Machines", *Proceedings of the 19th IEEE Conference on Decision & Control Including the Symposium on Adaptive Processes*, Albuquerque, New Mexcio, pp. 722-727, 10-12 December 1980.
- [65] Panwalkar S.S. and Iskander W., "A Survey of Scheduling rules", *Operations Research*, Vol. 25, No. 1, pp. 45-61, 1977.
- [66] Perkins, J.R. and Srikant R., "Hedging Policies for Failure-Prone Manufacturing Systems : Optimality of JIT and Bounds on Buffer Levels", *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision & Control*, New Orleans, LA., Vol. 3, pp. 3144-3149, 13-15 December 1995.
- [67] Presman E., Sethi S. and Zhang Q., "Optimal Feedback Production Planning in a Stochastic N-Machine Flowshop", *Automatica*, Vol. 31, No. 9, pp. 1325-32, Sept. 1995.
- [68] Philipoom P.R., Rees L.P. and Taylor III B.W., "Simultaneously Determining the Number of Kanbans, Container Sizes, and The Final-Assembly Sequence of Products in a Just-In-Time Shop", *International Journal of Production Research*, Vol. 34, No. 1, pp. 51-69, 1996.

- [69] Sethi S.P. and Zhang Q., *Hierarchical Decision Making in Stochastic Manufacturing Systems*, Birkhäuser, 1994.
- [70] Sevast'yanov B. A.(1962), "Influence of Storage Bin Capacity on the Average Standstill Time of a Production Line", *Teoriya veroyatnosty i ee primeneniya (English Transl : Theory of Probability and its Applications)*, Vol. 7, No. 4, pp. 429-438, 1962.
- [71] Sharifnia A., "Production Control of a Manufacturing System with Multiple Machine States", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, No. 7, pp. 620-625, 1988.
- [72] Sheskin T.J., "Allocation of Interstage Storage Along an Automatic Production Line", *AIIE Transactions*, Vol. 8, No. 1, pp. 146-152, March 1976.
- [73] So K.C. and Pinault S.C., "Allocating Buffer Storages in a Pull System", *International Journal of Production Research*, Vol. 26, No. 12, pp. 1959-1980, 1988.
- [74] Soyster A.L., Schmidt J.W. and Rohrer M.W., "Allocation of Buffer Capacities for a Class of Fixed Cycle Production Lines", *AIIE Transactions*, Vol. 11, No. 2, pp. 140-146, June 1979.
- [75] Soyster A.L. and Toof D.I., "Some Comparative & Design Aspects of Fixed Cycle Production Systems", *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 23, No. 3, pp. 437-454, 1976.
- [76] Stecke K.E., "Planning and Control Models To Analyze Problems of Flexible Manufacturing", *Proceeding of the 23th IEEE Conference on Descion and Control*, Las Vegas, Nev., pp. 851-854, Dec. 1984.
- [77] Tabe T., Murumatsu R. and Tanaka Y., "Analysis of Production Ordering Quantities and Inventory Variations in a Multi-Stage Production System", *International Journal of Production Research*, Vol. 18, pp. 245-257, 1980.

- [78] Terracol C. et David R., "Performances D'une Ligne Composée de Machines et de Stocks Intermédiaires", *RAIRO Automatique*, Vol. 21, pp. 239-262, 1987a.
- [79] Terracol C. and David R., "An Aggregation Method for Performance Evaluation of Transfer Lines with Unreliable Machines and Finites Buffers", *Proceedings 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, North Carolina, Vol. 3, pp. 1333-1338, March 31- April 3, 1987b.
- [80] Van Ryzin G., Lou S.X.C. and Gershwin S.B., "Production Control for a Tandem Two-Machine System", *IIE Transactions*, Vol. 5, pp. 5-20, 1993.
- [81] Veatch M.H. and Wein, L.M., "Optimal Control of a Two-Station Tandem Production/Inventory System", *Operations Research*, Vol. 42, No. 2, pp. 337-350, 1994.
- [82] Wijngaard J., "The Effect of Interstage Buffer Storage on the Output of Two Unreliable Production Units In Series, with Different Production Rates", *AIIE Transactions*, Vol. 11, No. 1, 1979.
- [83] Yan H., Yin G. and Lou S. X. C., "Using Stochastic Optimization to Determine Threshold Values for the Control of Unreliable Manufacturing Systems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 83, No. 3, pp. 511-539, Dec. 1994.
- [84] Yan H., Yu Zhou X. and Yin G., "Approximating An Optimal Production Policy in a continuous Flow Line : Recurrence and Asymtotic Properties", *Operations Research*, Vol. 47, No. 4, pp. 535-549, July-August. 1999.
- [85] Yu X.Z. and Song W.Z., "Further Properties of Optimal Hedging Points in a Class of Manufacturing Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 2, pp. 379-382, Feb. 1999.
- [86] Zimmern B., "Étude de la Propagation Des Arrêts Aléatoires Dans Les Chaînes de Production", *Revue de Statistique Appl.*, Vol. 4, pp. 85-104, 1956.

Annexe A

Decomposition/aggregation based
dynamic programming optimization
of partially homogeneous unreliable
transfer lines.

Decomposition/Aggregation Based Dynamic Programming Optimization of Partially Homogeneous Unreliable Transfer Lines ^{*†}

Javad Sadr [‡]

Roland P. Malhamé [§]

Abstract

In this paper, the problem of optimally controlling production in a single part unreliable, manufacturing flow line, subjected to a constant rate of demand for parts is considered. A performance measure which combines storage and production backlog costs is used. For Markovian, two-state machines, an analytic solution of the associated Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation is beyond reach. Instead, the focus here is on a suboptimal class of decentralized hedging policies parameterized by a set of *critical inventory levels*, one for each machine in the transfer line. Thus, each machine strives to achieve as quickly as possible a given critical level of processed parts in the associated storage bin, which, once reached, it will attempt to maintain by producing exactly at the current rate of demand for parts until failure or starvation occurs. Once starvation ceases or the machine is repaired, it will resume the same production strategy. Our objective is to optimize the choice of the processed parts critical levels. For doing so, we first recall a decomposition technique

^{*}Cet annexe a été publiée dans la conférence de CDC-2001, Florida, Orlando, USA, également il a été soumis au Journal of IEEE Transactions on Automatic & Control.

[†]Research supported by grant NSERC-3-31-1361, CANADA.

[‡]École Polytechnique de Montréal (sadr@auto.polymtl.ca).

[§]École Polytechnique de Montréal and GERAD (malhame@auto.polymtl.ca).

based on two decoupling approximations; the *machine decoupling approximation* aims at simplifying the world *upstream* of a given machine; the *demand averaging principle* aims at effectively shielding the machine from the precise instantaneous behavior of the machines *downstream*. The decomposition technique yields particularly simple models in so-called partially homogeneous flow lines, i.e. lines such that mean repair rates for machines, after failure, are all identical. Under the partially homogeneous assumption, an efficient dynamic programming solution to the optimization problem is developed. Existence of an optimum distribution of critical levels is established for the finite transfer line case. In addition, for a discretized finite state version of the homogeneous infinite transfer line problem, existence of an optimal feedback policy which is stationary is established. Finally, under specific structural assumptions, qualitative properties of optimal critical levels profile for the homogeneous (continuous states) but finite transfer line are derived. From these properties, homogeneous infinite (continuous state) transfer line behavior is inferred. Results of numerical experiments, and comparisons with optimal control performance and Monte-Carlo simulations are reported.

Index Terms : decomposition techniques, transfer lines, manufacturing flow control, dynamic programming, KANBAN optimization, hedging policies.

1 Introduction

With the introduction of mass production in the 1950's, the issue of the role of inventory in between successive machines or machine groups in transfer lines was to become central. Indeed, very early on, the dual consequences of the introduction of buffers/inventories within the transfer line have been recognized : on the one hand, their presence is beneficial in that they partially shield a given machine from the effects of machine failures upstream, and from slowdowns downstream due to either failures or part processing times variability; as such, they allow an increase in

the average production rate of the transfer line. On the other hand, their presence means storage space and capital immobilized within the factory, and from that point of view, their size should be kept under control. Determining the right balance between these two contradictory effects has been a long standing goal.

Zimmern [34] recognized the central role of variability due to machine failures, in analyzing productivity transfer lines. He developed a profound analysis of buffering issues based on a continuous model with disruptions which was influential. Following Sevast'yanov [30], Buzacott [8] analyzed discrete models of transfer lines. Given the complexity of optimizing buffer levels in long transfer lines, the idea of reducing the analysis - at the cost of some loss in accuracy - to that of a collection of smaller, albeit coupled, subproblems was attractive. This was the impulse behind the so-called decomposition techniques. An excellent survey on the subject has been presented by Dallery and Gershwin [12]. Starting with Gershwin [15], a series of works on decomposition techniques have followed, which brought gradual computational improvements and further generality to this original work. Let us mention Dallery, David and Xie [10], [11], Di Mascolo, David and Dallery [13], Burman [7] and Gershwin and Burman [16]. In a different line of work, a novel technique, the so called forward and backward aggregation has been presented by Chiang, Kuo and Meerkov [9] for computing the maximum production capacity of a transfer line and identifying bottleneck machines. Their formalism is particularly adapted to the automotive environment; their algorithm probably converges and yields relatively precise results. Finally, recent work based on large deviation theory has been reported in [26].

While the above decomposition techniques have treated with equal importance problems of machine starvation and machine blocking inherent to finite work-in-process buffers, and proceeded - as in Zimmern's original work - to a grouping of

production units into blocks of two successive machines separated by a buffer zone, the decomposition technique recalled here [24] amounts to focusing, first and foremost, on the impact of storage on *starvation phenomena* within the transfer line. This is because, unlike the above papers, our main concern here is not maximizing line productivity for a given set of buffers, but rather minimizing buffering for a given feasible production rate to be met by the transfer line. Thus, the last machine in the transfer line *can also be blocked*. In such a context, blocking is but one mechanism for achieving limitations on individual machine production. The *basic unit* in our decomposition is the *individual machine*. We consider an unreliable transfer line under a class of so-called decentralized hedging policies (a continuous flow analog of KANBAN policies)[32]. As is usual in control theoretic approaches ([20], [27]), the objective is to minimize a cost functional dependent on the chosen control policy. The proposed decomposition policy rests on two approximations ideas : the machine decoupling approximation and the so-called demand averaging principle. It is worthwhile noting that decompositions in tandem machines under *variable threshold centralized* hedging policies were considered in [19]. The approach in [19] is based on attaching an "equivalent" cost to starvation phenomena based on an estimation of the backlog costs they may provoke. To the best of our knowledge, no extensive numerical tests results on tandem machines or generalizations of this approach to m machines ($m > 2$) were ever reported. In the current approach, starvation is never directly associated with any cost, and the control laws are strictly decentralized (which reduces the complexity of computations, implementation, and enhances the scalability of the approach).

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2, we present the mathematical model of the unreliable transfer line and precisely define the class of control policies of interest. In Section 3, we recall decoupling approximations underlying our decomposition methodology. The transfer line decomposition/aggregation resulting

from the principles in Section 3, is developed in Section 4. In Section 5, a dynamic programming formulation of the inventory optimization problem is presented. In addition, structural properties of the infinite homogeneous transfer line optimal buffering profile are developed. In Section 6, we report results on the numerical optimization procedure. In section 7, we numerically test the degree of sub-optimality of the decomposition/aggregation based theoretical computations as compared to optimal control based on the HJB equations, as well as their accuracy when compared to Monte-Carlo based estimates under the same production policies. Section 8 is the conclusion. Note that once our decomposition/aggregation technique is established, we rely on single machine machines analyses of [18] and [4] to carry out individual machine storage costs evaluations.

2 Mathematical model of the transfer line, performance functional, and the class of production policies.

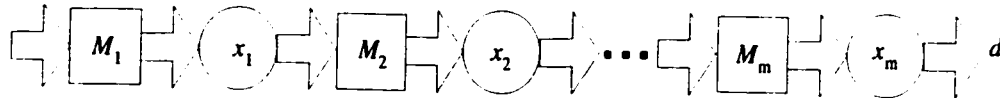


Figure 1 – Transfer line with m unreliable machines, intermediary and finished parts inventory.

Following [20], we consider a fluid model of production in an unreliable m machine single part transfer line. A machine, say M_i , can be in one of two-modes : an operational mode where production rate lies between 0 and a maximum rate k_i , and a failure mode where production is zero. The mode indicator is denoted α_i . Thus for $\alpha_i = 1$, M_i is operational, while for $\alpha_i = 0$, M_i is in a failure state. Furthermore

each α_i is assumed to evolve according to a two-state Markov chain with failure rate p_i , and repair rate r_i . This corresponds to a time-dependent (as opposed to an operation-dependent) failure model. The instantaneous demand rate for parts is assumed to be a constant d . Furthermore, the following assumptions/definitions are made :

- The line is partially homogeneous, i.e. while production and failure rates can differ from machine to machine, repair rates are all equal to r .
- The first machine is never starved.
- Production rates $k_i, i = 1, \dots, m$ are such that : $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_i \geq \dots \geq k_m$. This is to insure that the production ability of a given machine not be systematically limited by the maximum production rate of the machines upstream.
- Let $x_i(t)$ designate the instantaneous level of work-in-process in the storage bin downstream of machine $M_i, i = 1, \dots, m-1$. Let $x_m(t)$ denote the inventory of finished parts when non negative, and $-x_m(t)$ the backlogged demand whenever production lags behind demand. No backlog is allowed for $i = 1, \dots, m-1$. We assume a piecewise linear cost structure. Let c_i be the instantaneous storage cost per unit $x_i, i = 1, \dots, m-1$. Also let c_m^+ be the instantaneous storage cost par unit inventory $\max(x_m, 0)$, and c_m^- the cost per unit backlog $\max(-x_m, 0)$. Let $u_i(t)$ denote the instantaneous production rate of machine M_i . Work in process $x_i(t), i = 1, \dots, m-1$, evolves according to :

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(t) - u_{i+1}(t) \quad (1)$$

with the constraint $x_i(t) \geq 0$, while

$$\frac{dx_m}{dt} = u_m(t) - d. \quad (2)$$

We shall assume an isolated machine demand feasibility condition :

$$\frac{r_i}{r_i + p_i} * k_i \geq d$$

- In general, the aim is to develop feedback control policies on system hybrid state : $[x^T, \alpha^T]^T = [x_1, x_2, \dots, x_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T$, which can minimize the long term average cost :

$$J(x_0^T, \alpha_0^T) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[\int_0^t \left[\sum_{i=1}^{m-1} c_i x_i(\tau) + c_m^+ \max(x_m(\tau), 0) + c_m^- \max(-x_m(\tau), 0) \right] d\tau \middle| x_0^T, \alpha_0^T \right] \quad (3)$$

For ergodic control laws, the above performance function will be independent of the initial conditions. For an expression of the associated HJB equations, see [29]. While numerical solution of the HJB equations can be a formidable task, they often point at potential suboptimal control structures simpler to analyze and implement than optimal controls, whenever they exist ([2], [27]). Inspired by [4], [20], we look for optimality within a restricted, but parameterized class of feedback control policies : that of so-called decentralized hedging policies(DHP's). DHP's are an extension to transfer lines of hedging policies first defined for a single part, constant demand, unreliable single machine production system. Such policies are characterized by a critical inventory level to be maintained whenever possible and have been proven optimal [4] in single machine manufacturing systems under the assumptions of our model. We extend here the notion of critical inventory level as an insurance policy against potential machine failures, and the ensuing costs associated with backlogged demand. Thus each machine, say M_i , is associated with its own critical level of work-in-process, denoted z_i , hereon referred to as the i^{th} hedging level. Whenever able to produce (i.e. operational and not starved), machine M_i will produce at maximum peak rate k_i , until x_i reaches z_i . Thereupon, M_i will produce just at the rate $u_{i+1}(t) \equiv d_i(t)$, so as to maintain x_i at level z_i (we set $u_{m+1}(t) = d$).

This class of control policies mimics in a fluid model context the celebrated KANBAN policies introduced by Toyota in the 1960's [32]. The z_i 's are analogous to KANBAN sizes. Thus, our objective is to develop efficient techniques to optimize

the hedging levels z_i , $i = 1, \dots, m$, for $m \geq 2$, with respect to the performance measure in (3). Note that the class of DHP's has been considered previously for two machines in tandem ([24], [33]). In particular, Yan *et al.* have optimized the choice of hedging levels using infinitesimal perturbation analysis. Furthermore, Monte-Carlo optimization of single and multiple inventory levels in single unreliable machines has been considered in [6], [17], [21]. We study here the more general problem of KANBAN optimization in m machine flow lines with $m \geq 2$, and with a view towards scalability of our optimization algorithms.

Along the line of decomposition strategies in [23] and [24], with the improvements in [25], our optimization approach attempts to capitalize on precise analytical results obtained for the much simpler problem of single machine optimal control, via an approximate representation of the transfer line as a collection of isolated machines $\widetilde{M}_i$, where each $\widetilde{M}_i$ has its reliability adequately decreased to account for starvation effects. This is in contrast to previous decomposition techniques [15] where the smallest unit in the decomposition is a group of two machines in tandem.

The decomposition technique recalled here rests on two decoupling approximations which we now discuss in detail.

3 Decoupling approximations

3.1 The machine decoupling approximation.

This approximation aims at efficiently summarizing the impact of the world upstream of a given machine on the operation of that machine. In the context of transfer lines, the world upstream of a given machine acts like an unreliable supply of parts. Thus for example, from the point of view of the ability of machine M_{i+1} to produce,

what matters is the value of the binary supply state $I_i(t) = I[\{x_i(t) > 0\} \cup \{x_i(t) = 0, \alpha_i(t) = 1, I_{i-1}(t) = 1\}]$ where $I[\cdot]$ is the indicator function, $I_0(t) = 1$, and $i = 1, \dots, m-1$. The *machine decoupling approximation* (MDA) states the following :

"Binary supply state $I_i(t)$ is a random process which is independent of machine M_{i+1} operating state $\alpha_{i+1}(t)$, for $i = 1, \dots, m-1$ ".

Clearly, in reality, $I_i(t)$ is not strictly independent of $\alpha_{i+1}(t)$, if only at instants where $I_i(t)$ switches from 1 to 0, while $\alpha_i(t^-) = 0$, because at such instants $\alpha_{i+1}(t)$ can only be 1. However, what MDA asserts is that the coupling is very weak. Note that MDA holds exactly during the OFF portions of the cycles of $I_i(t)$, because duration of these portions is strictly linked with the memoryless repair time of one or more machines upstream of M_{i+1} , and that duration is totally independent of $\alpha_{i+1}(t)$. Thus, if $I_i(t)$ can be assimilated to a two-state or multi-state Markov chain, by relying on MDA, M_{i+1} could be viewed as an isolated machine $\widetilde{M}_{i+1}$ with mode $\widetilde{\alpha}_{i+1}(t)$ evolving on the Markov chain defined on the product space of $I_i(t)$ and $\alpha_{i+1}(t)$.

3.2 The demand averaging principle.

For a constant rate d of demand for finished parts and under stationary ergodic controls (known to exist under the demand feasibility condition if only when allowing buffer sizes to increase to infinity [22]), every machine in the transfer line will be responding to the same average rate of demand d (otherwise inventory would build up to infinity or deplete to zero in some parts of the transfer line). The aim of the demand averaging principle is to use this observation to achieve an approximate but compact representation of the effect of machines downstream of a given buffer i , on the dynamics of the associated storage level $x_i(t)$ and supply state $I_i(t)$. In

effect, it allows one to develop a simple model of the evolution of $x_i(t)$ and $I_i(t)$, and eventually achieve a semi-Markov or Markov chain representation of the dynamics of the latter.

Let us then assume that ergodic decentralized hedging point controls have been applied. Let $d_i(t)$ denote the instantaneous (stochastic) rate at which parts are drawn from buffer i by machine M_i , and let $d_i^+(t)$ be the restriction of that process on time intervals where $I_i(t) = 1$ (parts are available). Let $d_i^+ = \lim_{t \rightarrow \infty} E[d_i^+(t)]$ denote the steady-state value of $E[d_i^+(t)]$. Let $a_i(t) = E[I_i(t)]$ be defined as the instantaneous *availability coefficient* of supply $x_i(t)$, and let a_i be its steady-state value. Then the *demand averaging principle* (DAP) states the following : "*Under ergodic decentralized hedging controls in a transfer line subjected to a constant rate of demand for parts d , the steady-state mean value of stock level $x_i(t)$ over the active portions of the supply cycle ($I_i(t) = 1$), and the steady-state mean length of the active portion of that cycle, both depend on the steady-state of mean demand process $d_i^+(t)$, d_i^+ , but are not affected by its higher order statistics*". Thus, what DAP states is that the real demand process $d_i(t)$ could be replaced during the active portions of the x_i supply cycle by an appropriate constant level d_i^+ without affecting either the mean of $x_i(t)$ over the active portion of the supply cycle or the mean duration of supply activity. In addition, given that the mean of the $d_i(t)$ process must be d , one can write :

$$\begin{aligned} d &= \lim_{t \rightarrow \infty} E[d_i(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ E[d_i(t) \mid I_i(t) = 1] \Pr[I_i(t) = 1] \right. \\ &\quad \left. + E[d_i(t) \mid I_i(t) = 0] \Pr[I_i(t) = 0] \right\} = d_i^+ a_i \end{aligned} \quad (4)$$

Thus : $d_i^+ = d/a_i$.

The consequences of DAP are profound, because it states that in an average sense, the cost associated with the operation of a machine M_i and its storage $x_i(t)$ is *independent* of the specifics of machines downstream. To the best of our current

knowledge, DAP is an *approximation*. However, in [25], we present partial analytical results to back this approximation. Also, DAP is tested numerically against the results of Monte Carlo regenerative simulations for a diversified set of machine and demand parameters, and its accuracy appears to be quite high.

In the context of a m machine transfer line, DAP helps us achieve two goals : because demand $d_i(t)$ (production rate $u_{i+1}(t)$) is replaced by an appropriately chosen constant, the cost at machine M_i , $i < m$ can be analytically computed using existing constant demand based single machine theory [18] and multi-state generalizations of [18], as reported in [23]. In addition, a lower bound on the variance of durations of the active portion of the $x_i(t)$ supply cycle can be computed using first return time (to zero level) computations as developed [22] for single Markovian machines. This allows one to verify the plausibility of an exponential approximation of the active supply sojourn time (see for example [25] or [24]). Indeed, in the current analysis, this first return time is approached by an exponential distribution. Note that, *under the partially homogeneous line assumption*, and if one neglects the probability of two simultaneous failures in the line, the inactive portion of the supply cycle is exponential as it coincides with the failure of a single machine M_i for some index i . By combining the Markovian representations of the active and inactive portions of the x_i supply cycle, a Markov chain representation of $I_i(t)$ is achieved. At this stage, the MDA allows a direct combination of the $I_i(t)$ Markov chain with that of the mode of machine M_{i+1} , to yield a representation of machine M_{i+1} , subjected to an unreliable supply, as an *isolated Markovian machine* $\widetilde{M}_{i+1}$, *having access to a fully reliable supply*. Furthermore, this fictitious machine has a single operational mode, and two failure modes which under the partial line homogeneity assumption are essentially indistinguishable and can thus be merged into a single failure mode, finally yielding a two-state Markovian machine. Single part two-state Markovian machine theory can subsequently be used on $\widetilde{M}_{i+1}$ to compute the optimal cost attachable

to inventory x_{i+1} for a given hedging level z_{i+1} at machine $\widetilde{M}_{i+1}$ [18]. We fill in the details of this modeling strategy in the next section.

4 Equivalent model of binary supply state $I_i(t)$ and isolated Markovian machine representation of M_i .

In the following, starting from a probabilistic characterization of supply state $I_1(t)$, an isolated two-state Markovian equivalent $\widetilde{M}_2$ of machine M_2 is developed. At that stage, $\widetilde{M}_2$, much like M_1 , is a two-state unreliable machine. Identical steps can then be followed to generate isolated two-state Markovian machine equivalents of $M_3, M_4, \dots, M_m$. Note that M_1 is a two-state Markovian machine which according to DAP could be considered subjected to a constant demand.

4.1 Two-state Markovian representation of $I_1(t)$.

Successive sojourn times of $I_1(t)$ at value 1 coincide with the active portions of the $x_1(t)$ supply cycle and correspond to first return times of the $x_1(t)$ process to the zero level. For the purposes of the approximate modeling we wish to achieve here, the first return time to zero, say t_{rz_1} , of the $x_1(t)$ process, will be considered an *exponential* random variable. Recall that using DAP and the moment computations for piecewise constant velocity one dimensional continuous processes, where velocity changes coincide with the jumps of an underlying homogeneous finite state Markov chain developed in [22] and [14], [25] provides numerical evidence backing this approximation. Indeed, it is shown that the squared coefficient of variation of t_{rz_i} remains slightly below one for a wide range of critical inventory levels z_i . Given positivity of t_{rz_i} , this is a clear indication of the plausibility of exponential behavior. In that case, since as argued earlier, the sojourn times of $I_i(t), i \geq 1$ in the zero state are themselves exponential, the following two-state Markovian representation

of $I_1(t)$ in Figure 2 can be obtained.

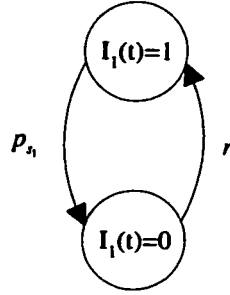


Figure 2 – Approximate two-state Markovian representation of $I_1(t)$.

Given a_1 , the steady-state availability coefficient of x_1 , the supply failure rate p_{s_1} is related to a_1 and r by :

$$p_{s_1} = \frac{r(1 - a_1)}{a_1}$$

Notice that since the theory in [18], can in principle, be generalized to semi-Markovian machines. For tractability purposes, it is not absolutely essential to impose the exponential active supply duration assumption for $I_1(t)$.

4.2 The two-state Markov chain model of $\widetilde{M}_i$.

At this stage, using MDA, it is possible to conclude that machine M_2 subjected to an unreliable supply characterized by the Markov chain $I_1(t)$, can be represented by an unreliable multi-state Markovian machine fed by a fully reliable supply where the state-space of the Markov chain is the cartesian product of that of the $I_1(t)$ Markov chain, and that of the mode $\alpha_2(t)$ of Machine M_2 . For a two-state representation of $I_1(t)$, as developed in the previous section, this would normally yield a four-state Markov chain representation with a single operational mode and three failure modes. However, in view of the fact that we neglect the probability of two simultaneous failures, there are only two failure states considered. Furthermore, in view of the line partial homogeneity assumption, these failure states are essentially indistinguishable

and can thus be merged into a single state. This yields the two-state Markovian representation of Figure 3 (for $i = 2$), for fictitious machine $\tilde{M}_2$ with binary state $\tilde{\alpha}_2$ and failure rate $\tilde{p}_2$.

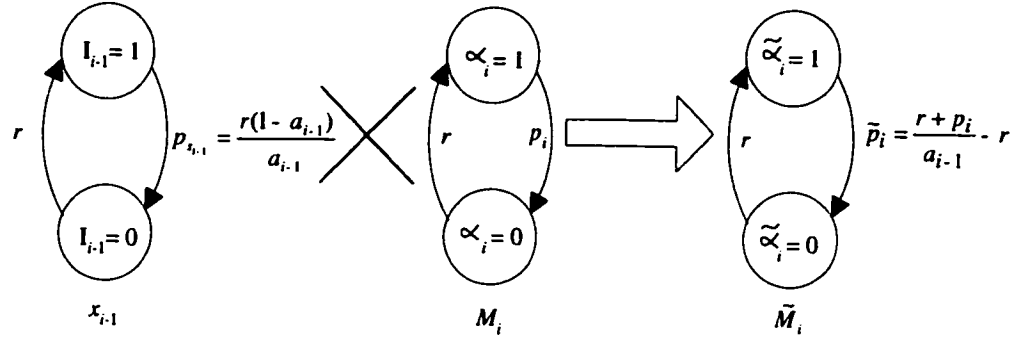


Figure 3 – Two states simplified equivalent model of machine M_i .

Steady-state considerations yield :

$$\left(\frac{r}{r + \tilde{p}_2} \right) = \left(\frac{r}{r + p_{s1}} \right) \left(\frac{r}{r + p_2} \right) \Rightarrow \tilde{p}_2 = \frac{r + p_2}{a_1} - r \quad (5)$$

Now, starting from machine $\tilde{M}_2$, the procedure in the above could be sequentially repeated as in Fig. 3 to generate two-state Markovian machine equivalents $\tilde{M}_i$, $i = 3, \dots, m$. In Fig. 3, the expression of $\tilde{p}_i$ is :

$$\tilde{p}_i = \frac{r + p_i}{a_{i-1}} - r \quad (6)$$

4.3 An expression for storage cost at machine M_i

Fictitious isolated machine $\tilde{M}_i$ feeds work-in-process x_i . Let a_i be the unknown as yet steady-state coefficient of availability of stock x_i . Relying on DAP, a_i and the mean level of x_i for a given hedging level z_i , can be computed by considering that over the active portion of the supply cycle, the demand process on stock x_i is a constant rate process with rate equal to $\frac{d}{a_i}$. In this case, it is possible to use the

analysis of the single two-state Markovian machine, with no backlog allowed, in [18], to write :

$$a_i = 1 - \frac{\tilde{p}_i}{r + \tilde{p}_i} \frac{1 - \frac{r(k_i - d/a_i)}{\tilde{p}_i(d/a_i)}}{1 - \frac{r(k_i - d/a_i)}{\tilde{p}_i(d/a_i)} e^{\left(\frac{k_i r - (d/a_i)(\tilde{p}_i + r)}{(k_i - d/a_i)d/a_i}\right) z_i}} \quad (7)$$

Note that in (7), $d_i^+ = \frac{d}{a_i}$ plays the role of the constant demand rate in the original expression in [18]. From (7), the z_i required to achieve a given a_i can be obtained. If one then solves for z_i in terms of a_i and substitutes the results in the expression for storage cost associated with parts $\tilde{x}_i$ [18], $\tilde{x}_i$ being the fictitious work-in-process under demand $\frac{d}{a_i}$, the result is as follows :

$$J_i(a_i) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[c_i \tilde{x}_i(t)] = c_i \frac{(1 + \lambda_i)}{\lambda_i} [k_i(\varphi_i - 1) + (r + \tilde{p}_i)(\varphi_i) \ln(\varphi_i)] \quad (8)$$

where in (8), φ_i is as below :

$$\varphi_i = \frac{(1 + \tilde{p}_i)(1 - a_i) + \lambda_i \tilde{p}_i}{(1 + \tilde{p}_i)(1 - a_i)(1 + \lambda_i)}$$

with $\lambda_i = \frac{k_i r - (d/a_i)(\tilde{p}_i + r)}{(k_i - d/a_i)d/a_i}$.

Thus, for a given $\tilde{p}_i$, $J_i(a_i)$ is the long term storage cost of maintaining a coefficient of availability a_i for stock $\tilde{x}_i$, and thus, using DAP, it is considered to be the storage cost associated with the actual stock x_i . With our decomposition methodology thus developed, and based on (8), we are now in a position to formulate the KANBAN optimization problem in a transfer line as a dynamic programming problem.

5 Dynamic program : formulation and structural properties.

Given that in our simplified line decomposition scheme, individual machines $\tilde{M}_i$ are characterized by two-state Markov chains, i.e. two parameters of which one is already fixed (r , the repair rate), there is only one remaining degree of freedom at

each stage of the transfer line. Thus the "state" at each stage of the transfer line is one-dimensional. Given that work-in-process availability a_i is comprised between 0 and 1, we choose that variable as our state at stage i .

We define the *transition cost function*, $T^{(i)}(a_{i-1}, a_i)$, as the mean storage cost of maintaining a hedging level z_i for stock x_i , consistent with a supply availability coefficient of a_i , given a supply coefficient a_{i-1} for stock x_{i-1} . z_i essentially acts as the required control input.

Transition cost $T^{(i)}(a_{i-1}, a_i)$ is obtained from (8), by replacing $\tilde{p}_i$ by its expression in terms of a_{i-1} (see (6)). This yields :

$$\begin{aligned}
 T^{(i)}(a_{i-1}, a_i) = & c_i \left[\frac{k_i d (r a_{i-1} - r - p_i) a_{i-1}}{(r + p_i) (k_i r a_i a_{i-1} - d (r + p_i))} + \frac{k_i d (1 - a_i)}{k_i a_i r - d (\frac{r+p_i}{a_{i-1}} - r) - d r} \right. \\
 & + \left(\frac{(k_i - \frac{d}{a_i}) d}{k_i a_i r - d (\frac{r+p_i}{a_{i-1}} - r) - d r} + \frac{(k_i - \frac{d}{a_i}) (r + p_i) d^2 (1 - a_i)}{a_{i-1} (k_i a_i r - d (\frac{r+p_i}{a_{i-1}} - r) - d r)^2} \right) \\
 & \left. \ln \left(\frac{d (r a_{i-1} - r - p_i)}{r a_{i-1} (d - k_i a_i)} + \frac{(\frac{r+p_i}{a_{i-1}} - r) (k_i a_i r - d (\frac{r+p_i}{a_{i-1}} - r) - d r) \frac{a_{i-1}}{a_i}}{r (k_i - \frac{d}{a_i}) (r + p_i) (1 - a_i)} \right) \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

We are now ready to formulate the following optimization problem, hereon referred to as **Problem P** :

Given a single part, partially homogeneous transfer line, subjected to a constant rate of demand for parts d , with m Markovian two-state unreliable machines with common repair rate r , and where d is assumed to be "feasible" by every machine in isolation (with fully reliable supply of parts). Furthermore, given a *fixed* and strictly less than one, minimum desired availability coefficient of supply a_{m-1}^0 at the m^{th} machine (producing the final parts) and such that $a_{m-1}^0 \left(\frac{r}{r+p_m} \right) k_m > d$, determine a

sequence of a_i^* , $i = 1, \dots, m - 2$, if it exists, which attains the value J^* below :

$$J^* = \inf_{a_{i-1} \in A_i(a_i)} \left[\sum_{i=1}^{m-1} T^{(i)}(a_{i-1}, a_i) \right], \quad i=2, \dots, m-1 \quad (10)$$

where in (10), $a_0 = 1$, and the admissibility sets $A_i(a_i)$ are to be defined in subsection 5.1.

In fact, in order to settle the existence issue without loss of optimality, we shall strive to define the admissibility sets as sufficiently large but closed subintervals of $(0,1)$. In this manner, the existence of an optimum derives from the continuity of the cost function over a compact set.

5.1 Characterization of admissibility sets.

We shall start by considering the constraints on a_{i-1} for some $1 \leq i \leq m - 2$, conditional on knowledge of the value of a_i (the availability of the next stock downstream), i.e. with a forward propagating dynamic programming solution in mind.

One set of constraints provides us with an upper bound on a_{i-1} . Indeed, given a_{i-1} , the availability coefficient of stock x_{i-1} , the least a_i is achieved when z_i , the critical level at machine M_i , is zero. In this case a_i would be equal to $\left(\frac{r}{r+p_i}\right)a_{i-1}$.

Thus $a_{i-1} \left(\frac{r}{r+p_i}\right) \leq a_i$, or equivalently

$$a_{i-1} \leq \left(\frac{r+p_i}{r}\right)a_i \quad (11)$$

But since the right-hand side of (11) could be greater than one, (11) yields :

$$a_{i-1} \leq \min \left[\left(\frac{r+p_i}{r}\right)a_i, 1 \right] \quad (12)$$

In addition, the **transfer** line demand d must be "feasible" for each isolated equivalent machine; **this is in particular true** for machine M_i . Thus, $(a_{i-1})\left(\frac{r}{r+p_i}\right)k_i > d$, or equivalently :

$$a_{i-1} > \frac{d}{k_i} \left(\frac{r+p_i}{r} \right) \quad (13)$$

Furthermore, since $a_0 = 1$, a repeated application of inequality (11) yields for $i \geq 2$:

$$a_{i-1} \geq \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{r}{r+p_j} \right) \quad (14)$$

(13) and (14) yield :

$$a_{i-1} \geq \max \left[\prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{r}{r+p_j} \right), \frac{d}{k_i} \left(\frac{r+p_i}{r} \right) \right] \quad (15)$$

Summarizing now (12) and (15) :

$$\max \left[\prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{r}{r+p_j} \right), \frac{d}{k_i} \left(\frac{r+p_i}{r} \right) \right] \leq a_{i-1} \leq \min \left[\left(\frac{r+p_i}{r} \right) a_i, 1 \right] \quad (16)$$

$i = 2, \dots, m-2$

Inequality (16) could be used to define the $A_i(a_i)$ admissibility sets of section 5. However, this would eventually include the points $a_{i-1} = 1$, $i \geq 2$ which is impossible to achieve unless one pays an infinite cost. Likewise, when operating strictly at the ergodicity limit $\frac{d}{k_i} \left(\frac{r+p_i}{r} \right)$, transition costs will become infinite. Thus, such extreme points are essentially points of *discontinuity* of the cost function in (10). They should be excluded from the domain of admissibility of a_{i-1} . The following result can be established :

Proposition 1 - *Without any loss of optimality, each of the admissibility sets in Problem P, $A_i(a_i)$, $i = 2, \dots, m-1$, can be considered to be a closed subinterval of $\left(\frac{d}{k_i} \left(\frac{r+p_i}{r} \right), 1 \right)$.*

Proof : In the first part of the proof, the focus is on the upper bounds of the admissibility sets $A_i(a_i)$. Throughout the proof, we shall need an initial feasible solution the problem of achieving the minimum required supply availability coefficient a_{m-1}^0 of machine $m - 1$ at finite cost. Let $a_0 = 1$, $a_1 = a_1^F$, $a_2 = a_2^F$, ..., $a_{m-1} = a_{m-1}^F$, correspond to such a solution, hereon referred to as profile F . Let C_F be the associated finite cost as computed from (10). C_F acts as an upper bound on the infimum cost achievable in Problem P. Notice that at least one such profile F must exist under the assumptions of Problem P. Indeed, we shall describe one way of constructing a particular feasible profile. Define $s = \max \left\{ \frac{d}{k_i} \frac{r+p_i}{r} \right\}$, $i = 1, \dots, m$. Furthermore, define $s^+ = s + \frac{1}{2}(1 - s)$. Notice that in view of our demand feasibility assumptions, $s < 1$. In addition $s^+ > s$. Consider the profile F defined by : $a_0 = 1$ and $a_i = \max \left(\frac{r}{r+p_i} a_{i-1}^F, s^+ \right)$, $i = 1, \dots, m$. It is not difficult to show that profile F satisfies constraints (11) and (13), and furthermore corresponds to a finite total cost since discontinuity points of the cost function in (10), $a_i = 1$, and $a_i \left(\frac{r}{r+p_i} \right) = d$, $i = 1, \dots, m - 1$ are systematically avoided. Now focus on stock x_1 , and consider an optimization problem where all transition costs $T^{(i)}(a_{i-1}, a_i)$ are zero except $T^{(1)}(a_0, a_1)$. Furthermore, let a_1 approach unity. Since as this happens, the corresponding transition cost increases to infinity, it is possible to identify $a_{1,max}$, such that $T^{(1)}(a_0, a_{1,max}) = C_F$ and $a_{1,max} < 1$. Clearly, any choice of $a_1 \in (a_{1,max}; 1]$ would yield a transition cost greater than C_F , and thus could not be part of an optimal solution to Problem P. Now repeat the argument for transition cost $T^{(2)}(a_1, a_2)$. Given the monotone decreasing nature of $T^{(2)}(a_1, a_2)$ with respect to a_1 , this cost is less than or equal to a cost $T^{(2)}(a_1, a_2)$ where $a_1 \leq a_{1,max}$. Again, determine $a_{2,max} < 1$ such that $T^{(2)}(a_{1,max}, a_{2,max}) = C_F$. Any $a_2 \in (a_{2,max}; 1]$ could not be part of the optimal solution. By proceeding recursively, it is possible to determine a sequence of positive reals $a_{3,max}, \dots, a_{(m-2),max}$, all strictly less than one, which can constitute upper bounds on - thus far - semi-closed admissibility intervals respectively, $A_i(a_i)$, $i = 4, \dots, m$. Conversely, using the same kind of arguments and C_F as

a reference cost, it is possible to show that a sequence of $a_{i,min}$, $i = 2, \dots, m-1$, strictly greater than the ergodicity limit $\frac{d}{k_i} \left(\frac{r+p_i}{r} \right)$, can constitute lower bounds on closed admissibility intervals, $A_i(a_i)$. In the interest of conciseness, we shall only sketch this part of the proof. Starting from $a_0 = 1$, it is possible to generate a sequence $a_{1,min}, a_{2,min}, \dots$ of coefficients of availability which would be attainable using zero hedging levels for $x_1, x_2, \dots$ and which would be both minimal and admissible as long as demand feasibility condition $a_{i,min} k_i \frac{r}{r+p_i} > d$ is satisfied uniformly for $j = 1, 2, \dots, i$. Notice that $a_{i,min} = \prod_{j=1}^i \frac{r}{r+p_j}$. If all $a_{i,min}$'s, $i = 1, \dots, m-2$ thus generated make demand d feasible, then $a_{m-1,min} = \max \left[a_{m-1}^0, \frac{r}{r+p_{m-1}} a_{m-2,min} \right]$.

Otherwise, let $i_0 \leq m-2$ be the first machine index such that $a_{i_0,min}$ would not be admissible. In this case, $a_{m-1,min} = a_{m-1}^0$. Starting from a_{m-1}^0 compute the $a_{m-2,min}$ such that $T^{(m-1)}(a_{m-2,min}, a_{m-1}^0) = C_F$. Notice that by decreasing availability coefficient a_{m-2} sufficiently, transition cost could grow without bound as one reaches the demand infeasibility limit. Clearly $a_{m-2,min}$ would make demand d feasible, and in view of the monotone decreasing nature of $T^{(i)}(a_{i-1}, a_i)$ with respect to a_{i-1} , any $a_{m-2} < a_{m-2,min}$ could not be part of the optimum solution. From $a_{m-2,min}$, one can construct $a_{m-3,min}$ such that $T^{(m-2)}(a_{m-3,min}, a_{m-2,min}) = C_F$. The procedure is repeated until one reaches index i_0 at which point the complete sequence of lower bound values would have been obtained. ■

Summarizing then, provided $a_{m-1}^0 \frac{r}{r+p_m} k_m > d$ (a necessary condition for demand feasibility), there exists a sequence of closed intervals $[a_{i,min}; a_{i,max}]$, $i = 1, \dots, m-2$, such that there is no loss in optimality for Problem P if admissibility sets $A_i(a_i)$ are identified with closed intervals $[a_{i,min}; a_{i,max}]$. The cost in (10) is bounded above by $(m-1)C_F$.

Corollary 1 - *Given that the cost function to be minimized in (10) is continuous*

on a compact set, it will have a global minimum (which, in general, may be non unique).

5.2 The case of a perfectly homogeneous transfer line.

In the following, we consider the averaging version of Problem P, say Problem P_{av} , for a perfectly homogeneous transfer line (identical machines : $k_i = k$, $r_i = r$, $p_i = p$, $i = 1, \dots, m-1$), $a_{m-1} \geq a_{m-1}^0 > \frac{d}{k} \frac{r}{r+p}$, as the number of machines m goes to infinity. Thus, one seeks to determine $a_1, a_2, \dots, a_{m-2}$ so as to attain the following average cost per stage :

$$J^* = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m-1} \right) \inf \left[\sum_{i=1}^{m-1} T(a_{i-1}, a_i) \right] \\ a_{i-1} \in A_i(a_i), \quad i = 2, \dots, m-1 \quad (17)$$

where, in (17), the $A_i(a_i)$ are defined by inequalities (16), but can without loss of optimality, as argued in Proposition 1, be reduced to adequate closed subintervals of the original $A_i(a_i)$, and where $a_0 = 1$, and $a_{m-1} \in A_m(a_m) \triangleq \{a | a \geq a_{m-1}^0 > \frac{d}{k} \frac{r+p}{r}\}$. Notice that in view of the complete homogeneity of the transfer line in 17, $T^{(i)}(a_{i-1}, a_i)$ is replaced by $T(a_{i-1}, a_i)$.

5.2.1 Existence of an optimal stationary feedback law for problem DP_{av} .

In the following, we establish the existence of a stationary feedback control law $a_{i-1} = f^*(a_i)$, for a discrete version of problem P_{av} called DP_{av} .

For a perfectly homogeneous transfer line, inequalities (16) can be rewritten :

$$\max \left[\left(\frac{r}{r+p} \right)^i, \frac{d}{k} \left(\frac{r+p}{r} \right) \right] \leq a_{i-1} \leq \min \left[\left(\frac{r+p}{r} \right) a_i, 1 \right] \\ \text{for } i = 2, 3, \dots, m-1 \quad (18)$$

or equivalently :

$$\max \left[\left(\frac{r}{r+p} \right)^{m-i}, \frac{d}{k} \left(\frac{r+p}{r} \right) \right] \leq a_{m-i-1} \leq \min \left[\left(\frac{r+p}{r} \right) a_{m-i}, 1 \right] \quad \text{for } i = 1, \dots, m-2 \quad (19)$$

(19) indicates that, for a given i , as m goes to infinity, both the effect of the boundary condition $a_0 = 1$, on the admissibility set (left hand-side), and that of boundary condition $a_{m-1} = a_{m-1}^0$ on that set (right hand-side) vanish. Thus, far enough from both edges of the transfer line, i.e. when i and $m-i$ are such that :

$$\left(\frac{r}{r+p} \right)^{m-i} \leq \frac{d}{k} \left(\frac{r+p}{r} \right), \text{ and } \left(\frac{r+p}{r} \right)^i a_{m-1}^0 > 1,$$

the availability coefficient state space becomes essentially *fixed* and can be reduced to a closed subinterval of $\left(\frac{d}{k} \left(\frac{r+p}{r} \right); 1 \right)$.

We now discretize the availability space, thus making it finite. The corresponding version of problem P_{av} will be called DP_{av} . It is not difficult to see that the resulting dynamic system will be controllable. Indeed, if one wishes to move from some discretized availability coefficient a_i at stage i , to some distinct (discretized) availability coefficient b , two situations can arise : if $b > a_i$, this can be achieved in one step, by imposing a sufficiently high hedging level for work-in-process x_{i+1} . Conversely, if $b < a_i$, then in one step, if no buffering at all is used, it is possible to attain $a_{i+1} = a_i \left(\frac{r}{r+p} \right)$. If $a_i \left(\frac{r}{r+p} \right) \leq b$, then use just enough buffering for x_{i+1} so as to attain availability coefficient b in one step. Otherwise, let $l > 1$ be the minimum (finite) integer so that $a_i \left(\frac{r}{r+p} \right)^l \leq b$. From stage i to stage $i+l-1$, use zero hedging levels, while for x_{i+l} use just enough buffering to achieve a coefficient of availability b . Note that if we consider DP_{av} as a degenerate (deterministic) average cost Markov decision problem, the strategy used to stir the system from state a_i to state b can be viewed as partially defining a *stationary* control policy. Thus, we have just established that for any two distinct states in the state space, one can

devise a stationary policy which makes it possible to move from one state to the other within a finite number of steps. Given the finite state, and action space, as well as the boundedness of individual transition costs of DP_{av} , viewed as a Markov decision problem, it is possible to conclude from Proposition 4(b), chapter 7, in [3], that Problem DP_{av} admits a stationary policy which is optimal. Therefore, we have the following Proposition.

Proposition 2 - *Problem DP_{av} admits a stationary state feedback control policy which is optimal.*

Notice that Proposition 2 makes it possible to use an algorithm such as policy iteration [3] in order to determine the optimal control law. However, under specific structural assumptions on the transition cost function $T(a_{i-1}, a_i)$, the analysis in the next section brings out the special structure of the optimum solution for problems P_{av} and DP_{av} , and more direct numerical solutions become possible.

5.2.2 Nature of the optimal feedback law for long homogeneous transfer lines.

In order to further capture the nature of the optimal buffering distribution for long transfer lines, we need to make specific structural assumptions on the transition costs and the behavior of optimal trajectories. They are summarized in the next lemma which is a technical result.

Lemma 1 - *Provided $|\Delta a_{m-1}^0| < \delta$ and $a_{m-1}^0 + \Delta a_{m-1}^0 \in I$, I being some fixed closed and bounded interval, $\exists \delta > 0$, such that $\forall a_{m-1}^0 \in I$, $\text{sgn}(\Delta a_i^* \Delta a_{m-1}^0) > 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, m-2$, where $a_i^* + \Delta a_i^*$, $i = 1, \dots, m-2$ is an optimal distribution profile associated with the perturbed boundary condition $a_{m-1}^0 + \Delta a_{m-1}^0$.*

The above holds under the following assumptions, labelled Assumption A :

I) $\exists$ an optimal trajectory $a^*(a_{m-1}^0) \triangleq [a_1^*(a_{m-1}^0), \dots, a_{m-2}^*(a_{m-1}^0)]^T$ which depends continuously on a_{m-1}^0 for $a_{m-1}^0 \in I$.

II) $\forall a_{m-1}^0 \in I$, $M_H(a^*(a_{m-1}^0)) > 0$, where subscript H stands for the Hessian matrix associated with the scalar cost :

$$M(a) = \sum_{i=1}^{m-2} T(a_{i-1}, a_i) + T(a_{m-2}, a_{m-1}^0)$$

and $a \triangleq [a_1, a_2, \dots, a_{m-2}]^T$, $a_0 = 1$.

III) The minimal eigenvalue of Hermitian matrix $M_H(a)$ denoted $\lambda_{\min}(a)$ is a continuous function of a , for $a \in \mathcal{A}$ where $\mathcal{A}$ is the convex hull of the trajectory $a^*(a_{m-1}^0)$, $a_{m-1}^0 \in I$. An analogous property is assumed to hold for all the principal minors of $M_H(a)$.

IV) For all admissible a_{i-1} , a_i pairs, transition cost function $T(a_{i-1}, a_i)$ satisfies $\frac{\partial^2 T}{\partial a_{i-1} \partial a_i} < 0$.

Before proceeding to the proof of the lemma we make a few comments concerning its interpretation and the plausibility of the assumptions. The lemma essentially states that under *Assumption A*, for a sufficiently small perturbation of boundary condition a_{m-1}^0 , Δa_{m-1}^0 , the optimal buffering trajectory will move monotonically with Δa_{m-1}^0 . As to the assumptions themselves, A(I) and A(III) are essentially continuity assumptions. Assumption A(II) would be systematically valid if relaxed to $M_H(a^*(a_{m-1}^0)) \geq 0$, i.e. non negative definiteness, in general, due to the nature of $a^*(a_{m-1}^0)$ as a minimum. However the non negative definiteness would require studying higher order derivatives so as to eventually reach some Hessian that would be positive definite. We chose to eliminate this difficulty at the outset. Finally, for a given set of parameters, assumption A(IV) is a property of the transition cost function which can be verified numerically. It may or may not hold in general, but we have verified it in all our numerical experiments.

Proof : In the following, denote partial differentiation by one and more (ordered) indices (for higher order partial differentiation) associated with the position of the variable(s) within the argument of the function. Thus, for example :

$$M_{ij}(a_1, a_2, \dots, a_{m-2}) \triangleq \frac{\partial^2 M}{\partial a_i \partial a_j}(a_1, a_2, \dots, a_{m-2}), \quad i, j = 1, \dots, m-2,$$

and :

$$M_H(a_1^*(a_{m-1}^0), \dots, a_{m-2}^*(a_{m-1}^0)) \triangleq [M_{ij}(a_1^*(a_{m-1}^0), \dots, a_{m-2}^*(a_{m-1}^0))],$$

$$i, j = 1, \dots, m-2.$$

Now, in view of the hypothesized optimality of a^* for $a_{m-1} = a_{m-1}^0$, the following holds :

- stationarity :

$$M_i(a_1^*, a_2^*, \dots, a_{m-2}^*) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m-2 \quad (20)$$

- Local minimality/Assumption A(II) :

$$M_H(a_1^*, a_2^*, \dots, a_{m-2}^*) > 0 \quad (21)$$

where in (20) and (21) the dependence on a_{m-1}^0 has not been specifically written. Let $a^* + \delta a^*(\delta a_{m-1}^0)$ the new optimum when a_{m-1}^0 is incremented to $a_{m-1}^0 + \delta a_{m-1}^0$. Equation (20) written at the new optimum, and using a Taylor expansion yields :

$$\begin{bmatrix} M_1(a_1^*, a_2^*, \dots, a_{m-1}^*) \\ M_2(a_1^*, a_2^*, \dots, a_{m-1}^*) \\ \vdots \\ M_{m-2}(a_1^*, a_2^*, \dots, a_{m-1}^*) \end{bmatrix} + M_H(a) \begin{bmatrix} \Delta a_1^*(\Delta a_{m-1}^0) \\ \Delta a_2^*(\Delta a_{m-1}^0) \\ \vdots \\ \Delta a_{m-2}^*(\Delta a_{m-1}^0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_{12}(a_{m-2}, a_{m-1}^0) \end{bmatrix} \Delta a_{m-1}^0 = 0 \quad (22)$$

where in (22), $a = \alpha a^* + (1 - \alpha)(a^* + \Delta a^*(\Delta a_{m-1}^0))$ for some $\alpha \in [0; 1]$.

Recalling (20) and multiplying both sides of (22) by $[\Delta a^*]^T$ yields :

$$\Delta a_{m-2}^*(\Delta a_{m-1}^0) \Delta a_{m-1}^0 = \frac{-\Delta a^*(\Delta a_{m-1}^0)^T M_H(a) \Delta a^*(\Delta a_{m-1}^0)}{T_{12}(a_{m-2}, a_{m-1}^0)}. \quad (23)$$

Consider now the inequality :

$$\begin{aligned} \Delta a^*(\Delta a_{m-1}^0)^T M_H(a^* + (1 - \alpha)\Delta a^*(\Delta a_{m-1}^0))^T &\geq \\ \lambda_{\min}(a^* + (1 - \alpha)\Delta a^*(\Delta a_{m-1}^0)) \|\Delta a^*(\Delta a_{m-1}^0)\|^2 &\end{aligned} \quad (24)$$

Furthermore, by assumption A(I), a^* is a continuous function of a_{m-1}^0 which evolves on a compact set. Therefore a^* is a uniformly continuous function of a_{m-1}^0 [28]. In addition, since the continuous image of a compact set is compact, and the convex hull of a closed and bounded set is closed and bounded, $\mathcal{A}$ is a compact set. Therefore, by A(III) $\lambda_{\min}(\cdot)$ is a uniformly continuous function of a . Finally, since $\lambda_{\min}(a^*)$ is a continuous function of a^* which itself evolves on a compact set, and $M_H(a^*(a_{m-1}^0)) > 0$, (i.e. will have all eigenvalues strictly positive), $\forall a_{m-1}^0 \in I$, by assumption A(II), then $\exists k > 0$ (the minimizer of $\lambda_{\min}(a^*)$), such that :

$$\min_{a_{m-1}^0 \in I} \lambda_{\min}(a^*(a_{m-1}^0)) = k \quad (25)$$

Now set $\varepsilon = \frac{k}{2}$. By the uniform continuity of $\lambda_{\min}(a)$, there exists a $\delta^{(m-2)}(\varepsilon) > 0$ such that :

$$\begin{aligned} \|\Delta a^*(\Delta a_{m-1}^0)\| < \delta^{(m-2)}(\varepsilon) &\Rightarrow |\lambda_{\min}(a^* + (1 - \alpha)\Delta a^*(\Delta a_{m-1}^0)) - \lambda_{\min}(a^*)| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \lambda_{\min}(a^* + (1 - \alpha)\Delta a^*(\Delta a_{m-1}^0)) > \lambda_{\min}(a^*) - \varepsilon \geq \frac{k}{2} > 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Finally by the uniform continuity of $a^*(a_{m-1}^0)$, $\exists \delta_{(m-2)}(\varepsilon) > 0$ such that :

$$|\Delta a_{m-1}^0| < \delta_{(m-2)}(\varepsilon) \Rightarrow \|\Delta a^*(\Delta a_{m-1}^0)\| < \delta^{(m-2)}(\varepsilon) \Rightarrow$$

(26) holds.

Inequalities (26) and (24) together with equation (23), yield for $|\Delta a_{m-1}^0| < \delta_{m-2}$:

$$\text{sgn}(\Delta a_{m-2}^*(\Delta a_{m-1}^0)) \Delta a_{m-1}^0 \geq 0. \quad (27)$$

At this point, using the principle of optimality and the boundary condition $a_{m-2} = a_{m-2}^* + \Delta a_{m-2}^*(\Delta a_{m-1}^0)$, it is possible to proceed similarly to establish that

there exists $\delta_{m-3} > 0$, such that for $|\Delta a_{m-1}^0| < \delta_{m-3}$, $\text{sgn } \Delta a_{m-3}^* \Delta a_{m-2}^* \geq 0$.

In general, there exist a sequence $\delta_{m-i} > 0$, $i = 3, \dots, m-1$ such that :

$$|\Delta a_{m-1}^0| < \delta_{m-i} \Rightarrow \text{sgn } \Delta a_{m-1}^0 \Delta a_{m-i}^* \geq 0, \quad i = 2, \dots, m-1 \quad (28)$$

Finally, the required δ in the lemma is $\delta = \min[\delta_i]$, $i = 1, \dots, m-2$. This completes the proof of the lemma. ■

The following proposition is a direct consequence of Lemma 1.

Proposition 3 - Let a_{m-1}^0 be a boundary condition to problem P . Consider an arbitrary admissible perturbation ΔP of that boundary condition. Under Assumption A of Lemma 1, with interval I defined as the closed interval with a_{m-1}^0 and $a_{m-1}^0 + \Delta P$ as its end points, there will exist an optimum buffer configuration $a^*(a_{m-1}^0)$ which will move with ΔP monotonically.

Proof : According to Lemma 1 there will exist a fixed step size $\delta > 0$, such that, it is possible to decompose the interval $[a_{m-1}^0; a_{m-1}^0 + \Delta P]$ if $\Delta P > 0$, or $[a_{m-1}^0 + \Delta P; a_{m-1}^0]$ for $\Delta P < 0$, into a finite sequence of successive intervals of size no greater than δ . By respectively incrementing or decrementing a_{m-1}^0 using such steps, it is possible to conclude that there will exist a sequence of deformations of the initial profile resulting eventually, for boundary condition $a_{m-1}^0 + \Delta P$, into an optimum profile distribution which is a deformation of the initial profile, monotonic with ΔP . ■

In the following, under Assumption A and based on Proposition 3 we shall develop arguments to conjecture the form of optimal solutions to Problem P as the

number of machines becomes very large. In turn, this should yield information on the nature of optimal solutions for problems P_{av} and DP_{av} .

Thus, consider Problem P for a long homogeneous transfer line. From Proposition 1 and its corollary, we know that Problem P admits an optimal, possibly non unique, profile. Let a_{m-2}^* be the optimum availability coefficient for work-in-process x_{m-2} for a given optimum profile. Notice that given a_{m-2}^* , it is possible to define a new Problem P, involving this time machines $1, 2, \dots, m-2$. While this new problem is strictly speaking different from the first one, as the number of machines becomes very large, since transition costs are bounded and machines are identical, the structure of the optimal solution for the two problems away from the first machine should become essentially the same. Three cases can in principle arise :

Case a : $a_{m-2}^* > a_{m-1}^0$

Case b : $a_{m-2}^* = a_{m-1}^0$

Case c : $a_{m-2}^* < a_{m-1}^0$.

We suppose, for m very large, case (a) had occurred. This would mean that Problem P would have to be solved anew, but this time with a "more demanding" boundary condition since $a_{m-2}^* > a_{m-1}^0$. Based on Proposition 3, the resulting optimum profile for a_{m-3} would have to satisfy $a_{m-3}^* \geq a_{m-2}^*$. By arguing similarly, it is possible to establish that $a_{m-i}^* \geq a_{m-i-1}^* \geq \dots \geq a_{m-3}^* \geq a_{m-2}^*$, $i \geq 4$, as m becomes very large. Thus, optimal profiles would be monotone increasing as $m-i$ decreases. However, given that the a_i^* are bounded above, the sequence of a_{m-i}^* will eventually converge to a limit, say $\bar{a} > a_{m-1}^0$.

One could argue similarly for case (c) to establish, in this case, the monotone *decreasing* nature of a_{m-i}^* as i increases, as well as the existence of a limiting value $\bar{a}$ (since the a_i^* 's are bounded below) which would constitute an accumulation point

for the a_{m-i}^* sequence. Finally, the profile for case (b) would be strictly flat. Thus summarizing, the optimum availability profile from right to left would be a monotone, either increasing or decreasing sequence starting at value a_{m-1}^0 and eventually accumulating in the neighborhood of some constant coefficient of availability $\bar{a}$. The above analysis is of course valid for long lines, and as long as the machine considered is "sufficiently far" from the first machine upstream which has access to a fully reliable supply. What about the nature of an optimum profile for supply coefficients of availability at machines 1, 2, 3, ...? Arguing in a manner similar to the above including a variant of Proposition 3 (with fixed left boundary condition), for the downstream machines, it is possible to establish that $a_0 = 1, a_1^*, a_2^*, \dots$ will be a monotone decreasing sequence which will eventually accumulate in the neighborhood of some coefficient of availability which can only be the $\bar{a}$ alluded to earlier. Thus the optimum profile would look like the ones represented either in Fig. 4 or Fig. 5.

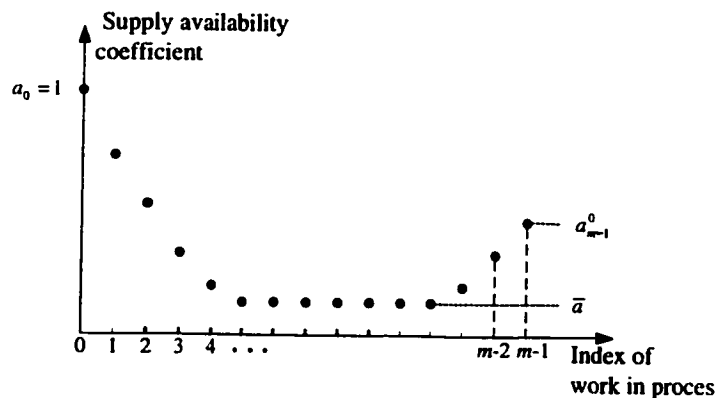


Figure 4 – Conjectured optimum coefficient of availability profile for long transfer lines when $a_{m-1}^0 > \bar{a}$, $\bar{a}$ is the minimizer of $T(a, a)$.

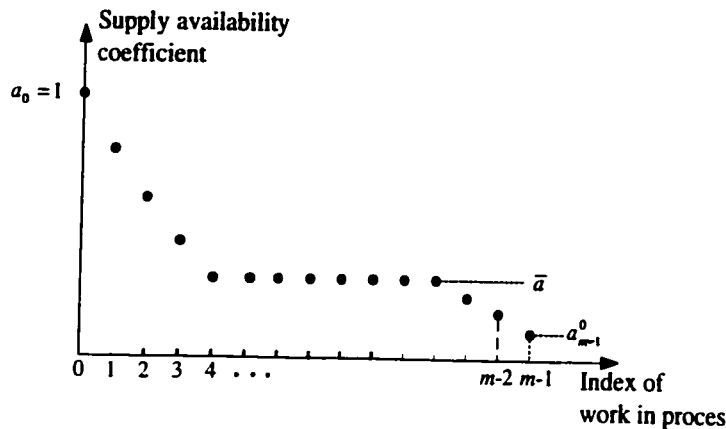


Figure 5 – Conjectured optimum coefficient of availability profile for long transfer lines when $a_{m-1}^0 < \bar{a}$, $\bar{a}$ is the minimizer of $T(a, a)$.

Based on Figures 4 and 5, it is possible to conjecture the form of the optimum coefficient of availability profile for Problems P_{av} and DP_{av} . As the number of machines goes to infinity, every machine becomes "internal" to the transfer line and thus the optimum profile would be flat at a fixed level $\bar{a}$ independent of the boundary conditions $a_0 = 1$, and $a_{m-1} = a_{m-1}^0$. Indeed, it is clear from Eq. (10), that when averaging, the "dominant" transition cost will be $T(\bar{a}, \bar{a})$. Thus, $\bar{a}$ should be the minimizer of function $T(a, a)$, obtained from Eq. (9) by setting $a_{i-1} = a_i = a$. In view of the continuity of $\frac{\partial T}{\partial x}(\cdot, \cdot)$, $\frac{\partial T}{\partial y}(\cdot, \cdot)$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\cdot, \cdot)$, $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(\cdot, \cdot)$, the stationary property $\frac{\partial T}{\partial y}(a_{m-i-1}^*, a_{m-i}^*) + \frac{\partial T}{\partial x}(a_{m-i}^*, a_{m-i+1}^*) = 0$, the minimality property $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(a_{m-i-1}^*, a_{m-i}^*) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(a_{m-i}^*, a_{m-i+1}^*) \geq 0$ and the fact that $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{m-i-1}^* = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m-i}^* = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m-i+1}^* = \bar{a}$, it is not difficult to conclude that one or more local minimizers a^* of $T(a, a)$ should exist and satisfy $\frac{\partial T}{\partial a}(a, a)|_{a=a^*} = 0$, $\frac{\partial^2 T}{\partial a^2}(a, a)|_{a=a^*} \geq 0$. A numerical example of a plot of $T(a, a)$ is presented in Fig. 6, with $p = 0.2$, $r = 0.3$, $k = 4.5$ and $d = 1.5$. It is seen that $T(a, a)$ is strictly convex and increases rapidly as the line ergodicity limit $a_{min} = \frac{d}{k} \left(\frac{r+p}{r} \right) = 0.556$ is approached. The minimizer $a^* = 0.5725$ is unique and in accordance with our

analysis $a^* = \bar{a}$.

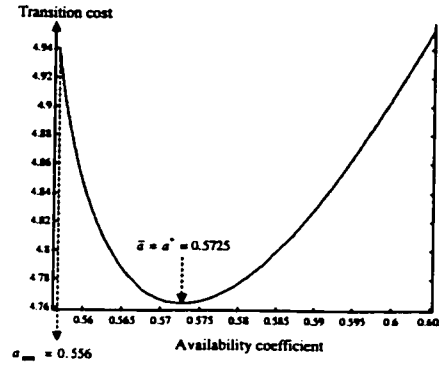


Figure 6 – Transition cost function $T(a_{i-1}, a_i)$ when $a_{i-1} = a_i = a$. a^* is the global minimizer and will dictate the average transition cost for infinite homogeneous transfer lines. It is seen that $T(a, a)$ is convex, and increases rapidly as the long line ergodicity limit $a_{min} = 0.556$ is approached. The minimizer $a^* = 0.5725$.

6 Numerical results

In this section, we report numerical results of a dynamic programming scheme, applied to Problem P for, respectively, partially homogeneous and fully homogeneous transfer lines.

Note that in Problem P, machine M_m has been excluded. This is because our intention here was, first and foremost to understand the "geometry" of optimal inventory allocation (i.e. the correlation between machine position relative to the edges of the line and associated inventory, irrespective of backlog costs). Thus the coefficient of availability was fixed or bounded below at a_{m-1}^0 , for x_{m-1} . In practice though, the last machine can and must be included in the analysis. In this case, a_{m-1} is an additional design parameter. At machine M_m , backlog is allowed, with an

associated backlog cost c_m^- . The two-state isolated equivalent machine M_m becomes a Bielecki-Kumar (1988) type of machine for which a closed form optimal hedging level $z_m^*(a_{m-1})$ can be calculated for a given a_{m-1} . This yields a known cost function to be attached to a_{m-1} , say $T_m(a_{m-1})$. This way, the last machine can become part of the optimization procedure.

6.1 Partially homogeneous lines

In the numerical experiments below, we have considered a partially homogeneous transfer line with 20 machines. The parameters of the line are considered as $r = 0.5$, $k_i = 4.5 - (i - 1) * \Delta k$, for $i = 1, \dots, 20$ with $\Delta k = 0.01$ (thus respecting $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_{20}$), and the costs/unity are $c_i = 2$, $i = 1, \dots, 19$, $a_{19}^0 = 0.85$ and the constant demand rate taken to be $d = 1.5$.

Furthermore, we consider two cases : case 1, where the failure rate of machines decreases when going downstream ; more specifically, $p_i = 0.2 - (i - 1) * \Delta p$, for $i = 1, \dots, 20$ with $\Delta p = 0.005$. For the second case, case 2, $p_i = 0.2 + (i - 1) * \Delta p$, for $i = 1, \dots, 20$ with $\Delta p = 0.005$, i.e. failure rates increases when going downstream.

Results of our decomposition method based optimization scheme are shown respectively in Figures 7 and 8. We can observe for both curves a transient, boundary condition sensitive regime, on both edges of the line.

At the center of the line, the optimal availabilities are respectively monotone decreasing (as machines become more reliable), and monotone increasing (as machines become less reliable). Note that in both cases it would appear that at the center of the line, the $\left(a_i^* \frac{r}{r+p_i} k_i\right)$ products, i.e. the mean production capacities of machines $\widetilde{M}_i$ become constant.

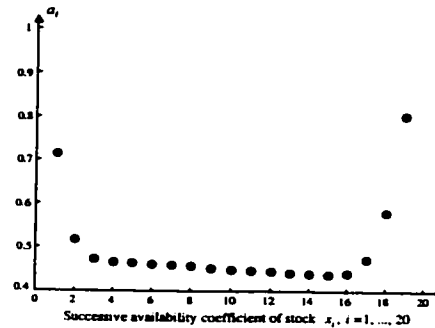


Figure 7 – Optimal availability coefficients of work-in-processes x_i for $i = 1, \dots, 20$, for a partially homogeneous transfer line, with identical repair rates for all machines, but failure rates which decrease as i increases.

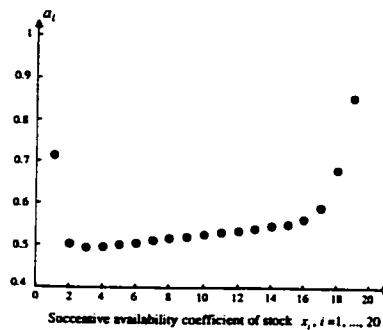


Figure 8 – Optimal availability coefficients of work-in-processes x_i , $i = 1, \dots, 20$, for a partially homogeneous transfer line, with identical repair rates for all machines, but failure rates which increases as i increases.

6.2 Fully homogeneous line

Figure 9 illustrates optimization results for a fully homogenous transfer line based on our decomposition method with $p = 0.2$, $r = 0.5$, $k = 4.5$ for each machine and the constant demand d is 1.5.

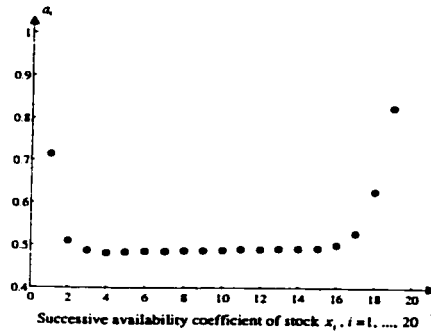


Figure 9 - Optimal availability coefficients of the inventory x_i , $i = 1, \dots, 20$, for a homogeneous transfer line with $k = 4.5$, $p = 0.2$, $r = 0.5$, and $d = 1.5$, when $a_{20}^0 = 0.9 > \bar{a}$; $\bar{a} = 0.506$.

Note that, as predicted by the theory, sufficiently far from edges, the optimal availability profile becomes a constant a^* which is precisely the minimizer of $T(a, a)$ as displayed in Figure 6.

The parameters in Figure 10 are identical to those in Figure 9, except the maximum production rate of all machines is set at $k = 2.5$. Notice that as k decreases, the required optimal availability coefficient at the center of the line increases.

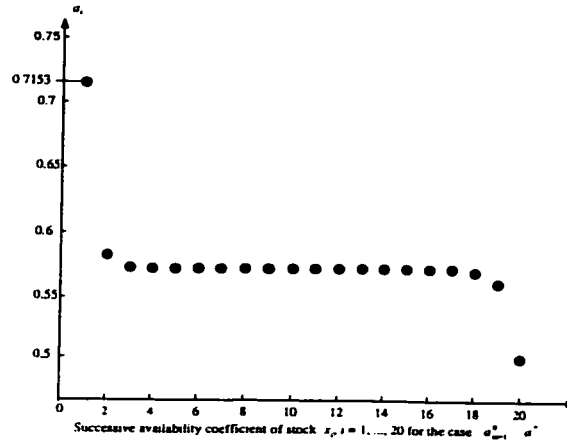


Figure 10 – Optimal availability coefficients of the inventory x_i , $i = 1, \dots, 20$, for a homogeneous transfer line identical to Figure 9, except that $k = 2.5$; $a_{20}^0 = 0.5 < \bar{a}$; $\bar{a} = 0.578$.

7 Degree of suboptimality and accuracy of the results.

We report here, for validation purposes, the results of comparisons of the performance of optimal controls respectively based on the numerical solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations for the three transfer lines as analyzed in [23], and on suboptimal decentralized hedging policies as optimized via our decomposition approach.

Table 1 shows the static parameters of three two-machines transfer line configurations. The size of the line in [23] was kept small because numerical solutions of HJB equations can become otherwise prohibitive. For more extensive numerical validation of the decoupling approximations, as such, see [25].

Table 2 shows the comparison of transfer line total storage/backlog costs as computed respectively based on a numerical solution of HJB equations [23], our dynamic

programming optimization algorithm based on the decomposition scheme (DPO), and regenerative Monte-Carlo simulation results (MC) when the hedging levels are set at the optimal calculated by the dynamic program. Finally, the absolute value of the relative discrepancy in percentage between total transfer line costs as computed respectively, using optimization based on our decomposition technique, and numerical analysis of HJB equations, is evaluated when the base cost is taken to be the Monte-Carlo simulation values.

The percentile relative errors recorded in Table 2 indicate a reasonable agreement between optimal control performance obtained by numerically solving HJB equations [23] for total cost, and suboptimal performance based on the decomposition technique, and estimated from Monte-Carlo simulations. In addition, theoretical DPO estimates of performance are within 3% of Monte-Carlo based results for the same choices of hedging levels. Recall that recorded discrepancies between Monte-Carlo results and DPO results are a combination of the effects of all approximations involved in the decomposition (machine decoupling, demand averaging, exponential active supply times, and machine Markov chain state aggregation), as well as the noisiness inherent to Monte-Carlo simulations.

Monte-Carlo average cost estimates are obtained using a regeneration simulation approach (regenerative events are first simultaneous returns to hedging levels), and are based on the ratio of average cost per cycle divided by average cycle length. The simulation is stopped when the estimated relative standard deviation for both of numerator and denominator is within 0.5%, and thus the relative standard deviation for the ratio is within 1%. In this case, at least 500000 iterations have been completed, the relative cost change for each buffer between two consecutive iterations is less than 10^{-9} . Moreover, at least 10000 regenerative cycles (all buffer levels back at critical value and all machines operational) must have been completed.

Machines parameters M_1 and M_2							Costs/Unity			Demand d
Line	p_1	p_2	r_1	r_2	k_1	k_2	c_1	c_2^+	c_2^-	d
1	0.3	0.3	0.6	0.6	2.5	2	2	2	10	1
2	0.3	0.3	0.5	0.5	2.5	2	2	2	10	1
3	0.1	0.1	0.3	0.3	2.5	2	1	2	10	1

Tableau 1 - Static parameters of two machines line configuration.

Line	J_{HJB}^*	J_{DPO}^*		J_{MC}^*		$ \frac{J_{MC}^* - J_{DPO}^*}{J_{MC}^*} $	$ \frac{J_{MC}^* - J_{HJB}^*}{J_{MC}^*} $
1	20.12	20.2	$\begin{cases} J_1 = 5.8 \\ J_2 = 14.4 \end{cases}$	20.73	$\begin{cases} 5.48 \\ 15.25 \end{cases}$	2.5%	2.9%
2	28.03	30.83	$\begin{cases} J_1 = 9.26 \\ J_2 = 21.57 \end{cases}$	31.76	$\begin{cases} 8.78 \\ 22.98 \end{cases}$	2.93%	11.74%
3	21.64	23.82	$\begin{cases} J_1 = 4.81 \\ J_2 = 19.01 \end{cases}$	24.13	$\begin{cases} 4.57 \\ 19.56 \end{cases}$	1.28%	10.32%

Tableau 2 - Optimal costs results comparison of a numerical solution of HJB equations [23], dynamic programming optimization based on the decomposition/aggregation technique (DPO) and regenerative Monte-Carlo simulations.

8 Conclusion

We have developed a decomposition/aggregation based dynamic programming optimization technique for partially homogeneous unreliable transfer lines with machine maximum production rates satisfying a monotonicity assumption.

The decomposition rests on two decoupling approximations : the machine decoupling approximation, and the so-called demand averaging principle.

The latter appears to have far reaching consequences in that it indicates that if in a transfer line, the rate of demand for parts is a given constant, average storage cost for the buffer filled up by a given machine, strictly depends on the reliability of that machine and starvation phenomena due to machines *upstream*, but are *not* affected by the specifics of machines downstream, as long as demand is met on the average. This results is a great simplification of the analysis.

The simplified transfer line model developed here is a promising tool for the optimization of partially homogeneous (identical) machine repair rates long lines because it is highly scalable in terms of computations, and the resulting optimality gap appears to be low.

The model yields intuitive results with structure to them. In particular, for long homogeneous transfer lines, and under a structural assumption on the transition cost, the analysis, as confirmed by numerical experiments, appears to indicate that, away from line edges, the optimal availability profile is constant (i.e. machines should enjoy a fixed coefficient of supply availability, and adjust their own hedging levels so that they guarantee that same coefficient of availability to their next downstream neighbor). This coefficient of availability is such that it brings machines at the brink

of inability to meet demand (see Fig. 6; the minimizer is very close to the demand infeasibility limit). Thus, some kind of "just in time production" principle is at work, whereby when machines are starved, they will tend to produce at maximum rate (with minimal blocking) whenever supply becomes available. This, in effect, tends to minimize sojourn time of work-in-process in the line. The algorithm converges very quickly. It is scalable and speed of convergence is much higher than alternatives such as Monte-Carlo based optimization, or solution of Hamilton-Jacobi-Bellman equations.

In future work and much like in [5], we shall analyze and compare control architectures, other than KANBAN (such as CONWIP, or hybrid KANBAN/CONWIP), using our simplified transfer line model.

Finally, note that an extension of this analysis to general non homogeneous lines is significantly complicated by the fact that effective equivalent repair rates for a given machine, become dependent on hedging level decisions taken upstream of that machine. As to the monotonicity assumption on machine production rates, it is important only in so far as the machine decoupling approximation is concerned. It is not excluded that its effect on the approximation be minor, but thus far, we have not carried out any tests to that effect.

Références

- [1] Akella R. and Kumar P.R., "Optimal Control of Production Rate in a Failure Prone Manufacturing System", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 31, No. 2, pp. 116-126, Feb. 1986.
- [2] Bai S.X. and Gershwin S.B., "Scheduling Manufacturing Systems with Work-in-Process Inventory Control : Single Part-Type Systems", *IIE Transactions*,

Vol. 27, pp. 599-607, 1995.

- [3] Bertsekas D., *Dynamic Programming : Deterministic and Stochastic Models*, Prentice-Hall, 1987.
- [4] Bielecki T. and Kumar P.R., "Optimality of Zero-Inventory Policies For Unreliable Manufacturing Systems", *Operations Research Society of America*, Vol. 36, No. 4, pp. 532-541, July-August 1988.
- [5] Bonvik A.M., *Performance Analysis of Manufacturing Systems Under Hybrid Control Policies*, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, June 1996.
- [6] Brémaud P., Malhamé R.P. and Massoulié L., "A Manufacturing System with General Stationary Failure Process : Stability and IPA of Hedging Control Policies", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 2, pp. 155-170, Feb. 1997.
- [7] Burman M.H., *New Results in Flow Line Analysis*, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, June 1995.
- [8] Buzacott J.A., "Automatic Transfer Lines With Buffer Stocks", *The International Journal of Production Research*, Vol. 5, No. 3, pp. 183-200, 1967.
- [9] Chiang S.-Y., Kuo C.-T. and Meerkov S.M., "DT-Bottlenecks in Serial Production Lines : Theory and Application", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 16, No. 5, pp. 567-580, October 2000.
- [10] Dallery Y., David R. and Xie X.L., "An Efficient Algorithm for Analysis of Transfer Lines With Unreliable Machine and Finite Buffers", *IIE Transactions*, Vol. 20, No. 3, pp. 280-283, 1988.
- [11] Dallery Y., David R. and Xie X.L., "Approximate Analysis of Transfer Lines with Unreliable Machines and Finite Buffers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 9, pp. 943-953, Sept. 1989.

- [12] Dallery Y. and Gershwin S.B., "*Manufacturing Flow Line Systems : A Review of Models and Analytical Results*", *Journal of Queueing Systems*, Vol. 12, pp. 3-94, 1992.
- [13] Di Mascolo M., David R. and Dallery Y., "Modelling and Analysis of Assembly Systems with Unreliable Machine and Finite Buffers", *IEE transactions*, Vol. 23, No. 4, pp. 315-330, 1991.
- [14] El-Ferik S. and Malhamé R.P., "Padé Approximants for Transient Optimization of Hedging control Policies in Manufacturing", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 4, pp. 440-457, 1997.
- [15] Gershwin S.B., "An Efficient Decomposition Method For The Approximate Evaluation of Tandem Queues With Finite Storage space and Blocking", *Operations Research Society of America*, Vol. 35, No. 2, pp. 291-305, March-April 1987.
- [16] Gershwin S.B. and Burman M.H., "A Decomposition Method for Analyzing inhomogeneous Assembly/Disassembly Systems", *Annals of Operations Research*, Netherlands, Vol. 93, pp. 91-115, 2000.
- [17] Haurie A., L'écuyer P. and Van Delft Ch., "Convergence of Stochastic Approximation Coupled With Perturbation Analysis in a Class of Manufacturing Flow Control Models", *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, Vol. 4, No. 1, pp. 87-111, Feb. 1994.
- [18] Hu J.Q., "Production Control for Failure-Prone Production Systems with No Backlog Permitted", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 2, pp. 299-305, Feb. 1995.
- [19] Hu J.Q., "A Decomposition Approach to Flow Control in Tandem Production Systems", *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, pp. 3140-3143, Dec. 1995.

- [20] Kimemia J. and Gershwin S.B., "An Algorithm For The Computer Control of a Flexible Manufacturing System", *IIE Transactions*, pp. 353-362, Dec. 1983.
- [21] Liberopoulos G. and Caramanis M., "Production Control of Manufacturing Systems with Production Rate-Dependent Failure Rates", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 4, pp. 889-895, April 1994.
- [22] Malhamé R.P., "Ergodicity of Hedging Control Policies in Single-Part Multiple-State Manufacturing Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 38, No. 2, pp. 340-343, Feb. 1993.
- [23] Mbihi J., *Commande à seuils critiques de la production dans un atelier de fabrication avec machines en tandem non fiables*, Thèse de Ph.D., École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada, Juin 1999.
- [24] Mbihi J. and Malhamé R.P., "Optimization of a Class of Decentralized Hedging Production Policies in an Unreliable Two-Machine Flow Shop", *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, Dec. 1998.
- [25] Mbihi J., Malhamé R.P. and Sadr J., "Two Approximations as a Basis for the Optimization of Production in Long Unreliable Markovian Transfer Lines", In *Decision and Control in Management Science*, edited by Zaccour G., Kluwer Amsterdam, 2001.
- [26] Paschalidis I.Ch. and Liu Y., "Large Deviations-based Asymptotics for Inventory Control in Supply Chains", *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, Dec. 2000.
- [27] Presman E., Sethi S. and Zhang Q., "Optimal Feedback Production Planning in a Stochastic N-Machine Flowshop", *Automatica*, Vol. 31, No. 9, pp. 1325-32, Sept. 1995.
- [28] Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, 1964.

- [29] Sethi S.P. and Zhang Q., *Hierarchical Decision Making in Stochastic Manufacturing Systems*, Birkhäuser, 1994.
- [30] Sevast'yanov B. A.(1962), "Influence of Storage Bin Capacity on the Average Standstill Time of a Production Line", *Teoriya veroyatnosty i ee primeneniya (English Transl : Theory of Probability and its Applications)*, Vol. 7, No. 4, pp. 429-438, 1962.
- [31] Sharifnia A., "Production Control of a Manufacturing System with Multiple Machine States", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, No. 7, pp. 620-625, 1988.
- [32] Tabe T., Murumatsu R. and Tanaka Y., "Analysis of Production Ordering Quantities and Inventory Variations in a Multi-Stage Production System", *International Journal of Production Research*, Vol. 18, pp. 245-257, 1980.
- [33] Yan H., Yin G. and Lou S.X.C., "Using Stochastic Optimization to Determine Threshold Values for the Control of Unreliable Manufacturing Systems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 83, No. 3, pp. 511-539, Dec. 1994.
- [34] Zimmern B., "Étude de la Propagation Des Arrêts Aléatoires Dans Les Chaînes de Production", *Revue de Statistique Appl.*, Vol. 4, pp. 85-104, 1956.

Annexe B

**Unreliable transfer lines :
decomposition/aggregation and
optimization.**

Unreliable Transfer Lines : Decomposition/Aggregation and Optimization^{*†}

Javad Sadr [‡] Roland P. Malhamé [§]

Abstract

A decomposition/aggregation technique is presented for the approximate performance analysis of fluid models of unreliable transfer lines subjected to a constant rate of demand for parts, and under a class of KANBAN type control policies. The accuracy of the decomposition/aggregation technique is tested against the results of Monte-Carlo regenerative simulations for a collection of three machine transfer lines. While the above computations are based on single machine analytical results, involving sixth order machine Markov chain models, further aggregated two-state machine models are used to formulate the buffer optimization problem in unreliable transfer lines as a highly scalable dynamic programming problem. The results of numerical experiments on sample six machine transfer lines are reported.

Index Terms : decomposition techniques, transfer lines, manufacturing flow control, dynamic programming, KANBAN optimization, hedging policies.

^{*}Cet article est soumis pour publication au Annals of Operations Research, special issue on "Stochastic Models of Production-Inventory Systems"

[†]Research supported by grant NSERC-3-31-1361, CANADA.

[‡]École Polytechnique de Montréal (sadr@auto.polymtl.ca).

[§]École Polytechnique de Montréal and GERAD (malhame@auto.polymtl.ca).

1 Introduction

Since the introduction of transfer lines in the 1950's, the identification of the role of buffering and the determination of adequate buffering and inventory levels respectively within, and at the end of transfer lines, have been crucial issues. Early and seminal contributors to the analysis of these problems were Zimmermann [33], and Sevast'yanov [28].

Buffering in transfer lines (the fully automated version of human operated flow lines) presents both advantages and disadvantages. On the one hand, sufficient buffering will shield machines in a transfer line from parts starvation due to failures of machines upstream, excessive part processing time variability upstream or downstream, or from production blocking due to machine failures downstream. As such, buffering stands to bolster line productivity. On the other hand, buffering/inventory is synonymous with longer part sojourn times within the plant (thus higher theft/decay likelihood), occupied expensive storage space, as well as frozen capital. How can one quantify and determine adequate compromises?

Many schools of thought have tried to address buffering issues directly or indirectly. Already in 1967, Buzacott [5] introduced a *synchronous discrete time discrete state* model of unreliable transfer lines and analyzed the extreme (zero and infinity) buffering configurations, based on which one could at least decide whether buffering would be worth considering at all. Also, based on previous work, he made use of aggregation types of approximations to carry out a preliminary analysis of optimization issues when the number of stations is small. The transfer line model of Buzacott was subsequently analyzed by Gershwin [14] using different decomposition ideas (collections of two machine lines were the basic decomposition building block). He developed an algorithm which would allow transfer line maximum throughput

evaluation, given buffer sizes, and where calculations could be carried out for very long lines. His initial computational algorithm was improved upon by Dallery, David and Xie [8], [9], who proposed their very effective so-called DDX algorithm, while initial modeling restrictions were gradually removed in subsequent papers (see [10] for a comprehensive survey up to publication date including transfer line aggregation papers, and [11], [12], [15] for more recent contributions). Finally, for an independent decomposition based theory of transfer line improvability, particularly suited for the automobile industry environment, see for example [7].

Parallel to the queuing model/decomposition based performance analysis school above, and under the influence of a seminal paper by Kimemia and Gershwin [19], a control theoretic school was beginning to develop which aimed at addressing buffering issues in a more general context. It allowed in principle arbitrary time-varying buffer structures, and information flows. The resulting production policy had to minimize a cost functional typically capturing costs associated with both buffering, and failure to meet customer requirements on time. The workhorse of this approach was the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) optimality partial differential equations. Also by then, the transfer line model had shifted from a discrete parts version to a continuous fluid like version of the production process, better known as the flow control paradigm. For an excellent overview and contributions within this research current, see [27]. The major practical successes of this school were in fully analyzing optimality within the single machine context (see [1], [3] for pioneering works). Also, numerical analysis of more complex configurations pointed at suboptimal control structures somewhat easier to implement and optimize than those based on HJB equations [2].

In [3], Bielecki and Kumar rigorously established that for a single unreliable machine manufacturing system, the optimal control law is a so-called *hedging policy* (see

[19]), which involves maintaining whenever possible a critical inventory level in the plant. Thus given that level, and as long as inventory is below the critical level, the optimal policy is to produce at maximum rate whenever the machine is operational. When the critical level is reached, it requires producing exactly what is demanded. Otherwise, if the machine has failed, its production rate falls to zero, inventory is gradually depleted, and eventually, if sufficient time is spent in this state, backlog starts building up as negative inventory. The analysis in [3] was an illustration of the fact that while HJB equations could easily point out at the threshold structure of the optimal control law, they were much less effective as a computational device for the optimal threshold value itself. Instead, if the buffering level were taken to be a parameter within a general threshold based control policy, and the threshold dependent corresponding cost functional obtained through probabilistic analysis, it could be easily optimized analytically or via numerically effective optimization tools. Hence control theory had pointed at promising *parameterized control structures*, while probabilistic analysis permitted an expression of system performance in terms of the parameters to be optimized.

There is a rich literature evolving around single unreliable plant production optimization (see [1], [3], [20] and the references therein). Of particular interest to us here, are the works by Sharifnia [29] (multi-state machine with backlog), Hu [18] (two-state machine with no backlog allowed), and an unpublished generalization of [18] to multi-state machines [22]. The goal of this paper is to extend the single machine control theoretic framework to arbitrarily long unreliable transfer lines, under parameterized threshold production policies. In order to face the scalability issue, we are compelled to use approximations. Thus, and much like in [9], and [14], in the first part of the paper, we shall be presenting a novel transfer line decomposition approach, best suited for our transfer line operation assumptions (constant rate of demand for finished parts; blocking of last machine). The decomposition metho-

dology leads to an approximation of the performance of the policies, based on a collection of *six-state Markovian* isolated machine calculations. The accuracy of the decomposition is tested by means of comparisons with Monte-Carlo simulations. In the second part of the paper, and in an effort to make optimization for large systems possible, we further aggregate the three-state machines in the decomposition scheme down to two states. Subsequently, a two-dimensional dynamic program is formulated for the optimization of hedging levels (or KANBANS), in the transfer line. Optimization results are reported for a collection of six machine transfer lines.

Note that in a companion paper [26], a similar dynamic program is developed and its structural properties are analyzed for the particular case when the machines in the transfer line are either identical or have identical repair rates.

The detailed organization of the paper is as follows. Section 2 is devoted to a presentation of the class of transfer lines, performance index, and control policies of interest. Two transfer line decoupling approximations are reviewed in Section 3. A simplified Markovian equivalent model of binary work in process supply state $I_i(t)$ and a resulting isolated Markovian machine representation of M_i are presented in Section 4. In Section 5, we show how the isolated Markovian machine equivalents can be used to obtain estimates of the various parts storage and backlog costs in the transfer line. A comparison of numerical results as obtained respectively based on the proposed decomposition technique, and based on Monte-Carlo regenerative simulations is also reported in this section. In Section 6, further simplified two-state Markovian models of machines in the transfer line are derived, and buffering optimization is formulated as a dynamic programming problem. Numerical results are reported in Section 7. Section 8 is our conclusion. Appendices A and B describe probabilistic calculations in multi-state Markovian machines with no backlog allowed.

2 Mathematical model of the transfer line, performance functional, and the class of production policies.

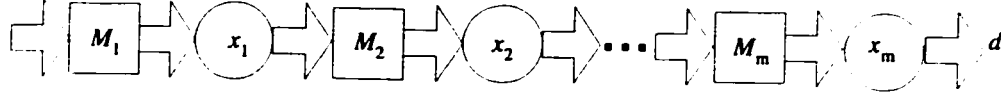


Figure 1 – Transfer line with m unreliable machines, intermediary and finished parts inventory.

Following [19], a fluid model of production in an unreliable m machine single part transfer line is considered. A machine, say M_i , can be in one of two modes : an operational mode where production rate lies between 0 and a maximum rate k_i , and a failure mode where production is zero. The mode indicator is denoted α_i . Thus for $\alpha_i = 1$, M_i is operational, while for $\alpha_i = 0$, M_i is in a failure state. Furthermore, each α_i is assumed to evolve according to a two-state Markovian chain with failure rate p_i , and repair rate r_i . This corresponds to a time-dependent (as opposed to an operation-dependent) failure model. The instantaneous rate of demand for finished parts is assumed to be a constant d . Furthermore, the following assumptions/definitions are made :

- The first machine is never starved.
- Production rates k_i , $i = 1, \dots, m$ are such that : $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_i \geq \dots \geq k_m$
This is to ensure that the production ability of a given machine is not systematically limited by the maximum production rate of the upstream machines.
- Let $x_i(t)$ designate the instantaneous level of work-in-process in the storage bin downstream of machine M_i , $i = 1, \dots, m-1$. Let $x_m(t)$ and $-x_m(t)$ denote the inventory of finished parts, and the backlogged demand respectively whenever

production lags behind demand. No backlog is allowed for $i = 1, \dots, m-1$. A piecewise linear cost structure is assumed. c_i is the instantaneous storage cost per unit x_i , $i = 1, \dots, m-1$. c_m^+ is the instantaneous storage cost per unit inventory $\max(x_m, 0)$, and c_m^- the cost per unit backlog $\max(-x_m, 0)$.

Let $u_i(t)$ denote the instantaneous production rate of machine M_i . Work in process $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m-1$, evolves according to :

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(t) - u_{i+1}(t) \quad (1)$$

with the constraint $x_i(t) \geq 0$, while

$$\frac{dx_m}{dt} = u_m(t) - d. \quad (2)$$

An isolated machine demand with following feasibility condition has been assumed :

$$\frac{r_i}{r_i + p_i} * k_i \geq d$$

In general, the aim is to develop feedback control policies on the system with hybrid state : $[x^T, \alpha^T]^T = [x_1, x_2, \dots, x_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T$, which can minimize the long run average cost :

$$J(x_0^T, \alpha_0^T) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \left[\int_0^t \left[\sum_{i=1}^{m-1} c_i x_i(\tau) + c_m^+ \max(x_m(\tau), 0) + c_m^- \max(-x_m(\tau), 0) \right] d\tau \right] \quad (3)$$

For ergodic control laws, the above performance functional will be independent of initial conditions. For an expression of the associated HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) equations, see [27]. While numerical solutions of the HJB equations can be a formidable task, they often point at potential suboptimal control structures simpler to analyze and implement than optimal controls, whenever they exist ([2], [25]). Inspired by [3], [19], we look for optimality within a restricted but parameterized class of feedback control policies ; that of so-called *decentralized hedging policies*

(DHP). DHP's are an extension to transfer lines of hedging policies first defined for a single part, constant demand, unreliable single machine production system. Such policies are characterized by a critical inventory level to be maintained whenever possible and have been proven optimal [3] in single machine manufacturing systems under the assumptions of our model. The notion of critical inventory levels as an insurance policy against potential machine failures and the ensuing costs associated with backlogged demand is extended. Thus each machine, say M_i , is associated with its own critical level of work-in-process, denoted z_i , hereon referred to as the i^{th} hedging level. Whenever able to produce (i.e. operational and not starved), machine M_i will produce at the maximum peak rate k_i , until x_i reaches z_i . Thereupon, M_i will produce precisely at the rate $u_{i+1}(t) \equiv d_i(t)$, so as to maintain x_i at level z_i (we set $u_{m+1}(t) = d$).

This class of control policies mimics in a fluid model context the celebrated KANBAN policies introduced by Toyota in the 1960's [30]. The z_i 's are analogous to KANBAN sizes. Thus, our objective is to develop efficient techniques to optimize the hedging levels z_i , $i = 1, \dots, m$, for $m \geq 2$, with respect to the performance measure in Eq. (3). Note that the class of DHP's has been considered previously for two machines in tandem ([23], [31], [32]). In particular, Yan *et al.* have optimized the choice of hedging levels using infinitesimal perturbation analysis. Furthermore, Monte-Carlo optimization of single and multiple inventory levels in single unreliable machines has been considered in [4], [6] and [16]. The more general problem of KANBAN optimization in m machine flow lines with $m \geq 2$, and with a view towards scalability of our optimization algorithms is studied here.

Along the line of decomposition strategies in [22], with the improvements in [24], our optimization approach attempts to capitalize on precise analytical results obtained for the much simpler problem of single machine optimal control, via an

approximate representation of the transfer line as a collection of isolated machines $\widetilde{M}_i$, where each $\widetilde{M}_i$ has its reliability adequately decreased to account for starvation effects. This is in contrast to previous decomposition techniques [14] where the smallest unit in the decomposition is a group of two machines in tandem.

The decomposition technique recalled here rests on two decoupling approximations which we now discuss in detail.

3 Decoupling approximations

3.1 The machine decoupling approximation.

This approximation aims at efficiently summarizing the impact of the world upstream of a given machine on the operation of that machine. In the context of transfer lines, the world upstream of a given machine acts like an unreliable supply of parts. Thus for example, from the point of view of the ability of machine M_{i+1} to produce, what matters is the value of the binary supply state $I_i(t) = I[\{x_i(t) > 0\} \cup \{x_i(t) = 0, \alpha_i(t) = 1, I_{i-1}(t) = 1\}]$ where $I[\cdot]$ is the indicator function, $I_0(t) = 1$, and $i = 1, \dots, m - 1$. The *machine decoupling approximation* (MDA) states the following :

"Binary supply state $I_i(t)$ is a random process which is independent of machine M_{i+1} operating state $\alpha_{i+1}(t)$, for $i = 1, \dots, m - 1$ ".

Clearly, in reality, $I_i(t)$ is not strictly independent of $\alpha_{i+1}(t)$, if only in instances where $I_i(t)$ switches from 1 to 0, while $\alpha_i(t^-) = 0$, because in such instances $\alpha_{i+1}(t)$ can only be 1. However, what MDA asserts is that the coupling is very weak. Note that MDA holds exactly during the OFF portions of the cycles of $I_i(t)$, because the

duration of these portions is strictly linked with the memoryless repair time of one or more machines upstream of M_{i+1} , and that duration is totally independent of $\alpha_{i+1}(t)$. Thus, if $I_i(t)$ can be assimilated to a two-state or multi-state Markovian chain, by relying on MDA, M_{i+1} could be viewed as as an isolated machine $\widetilde{M}_{i+1}$ with mode $\widetilde{\alpha}_{i+1}(t)$ evolving on the Markov chain defined on the product space of $I_i(t)$ and $\alpha_{i+1}(t)$.

3.2 The demand averaging principle.

For a constant rate d of demand for finished parts and under stationary ergodic controls (known to exist under the demand feasibility condition if only when allowing buffer sizes to increase to infinity [21]), every machine in the transfer line will be responding to the same average rate of demand d (otherwise inventory would build up to infinity or deplete to zero in some parts of the transfer line). The aim of the demand averaging principle is to use this observation to achieve an approximate but compact representation of the effect of machines downstream of a given buffer i , on the dynamics of the associated storage level $x_i(t)$ and supply state $I_i(t)$. In effect, it allows one to develop a simple model of the evolution of $x_i(t)$ and $I_i(t)$, and eventually achieve a semi-Markovian or a Markovian chain representation of the dynamics of the latter.

Let us then assume ergodic decentralized hedging point controls have been applied. Let $d_i(t)$ denote the instantaneous (stochastic) rate at which parts are drawn from buffer i by machine M_i , and let $d_i^+(t)$ be the restriction of that process on time intervals where $I_i(t) = 1$ (parts are available). Let $d_i^+ = \lim_{t \rightarrow \infty} E[d_i^+(t)]$ denote the steady-state value of $E[d_i^+(t)]$. Let $a_i(t) = E[I_i(t)]$ be defined as the instantaneous *availability coefficient* of supply $x_i(t)$, and let a_i be its steady-state value. Then the *demand averaging principle* (DAP) states the following : "*Under ergodic decentra-*

lized hedging controls in a transfer line subjected to a constant rate of demand for parts d , the steady-state mean value of stock level $x_i(t)$ over the active portions of the supply cycle ($I_i(t) = 1$), and the steady-state mean length of the active portion of that cycle, both depend on the steady-state of mean demand process $d_i^+(t)$, d_i^+ , but are not affected by its higher order statistics". Thus, what DAP states is that the real demand process $d_i(t)$ could be replaced during the active portions of the x_i supply cycle by an appropriate constant level d_i^+ without affecting either the mean of $x_i(t)$ over the active portion of the supply cycle or the mean duration of supply activity. In addition, given that the mean of the $d_i(t)$ process must be d , one can write :

$$d = \lim_{t \rightarrow \infty} E[d_i(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ E[d_i(t) \mid I_i(t) = 0] \Pr[I_i(t) = 1] + E[d_i(t) \mid I_i(t) = 1] \Pr[I_i(t) = 0] \right\} = d_i^+ a_i \quad (4)$$

Thus : $d_i^+ = d/a_i$.

The consequences of DAP are profound, because it states that in a mean sense, the cost associated with the operation of a machine M_i and its storage $x_i(t)$ is *independent* of the specifics of machines downstream. To the best of our current knowledge, DAP is an *approximation*. However, in [24], we present partial analytical results to back this approximation. Also, DAP is tested numerically against the results of Monte Carlo regenerative simulations for a diversified set of machine and demand parameters, and its accuracy appears to be quite high.

In the context of a m machine transfer line, DAP helps us achieve two goals : because demand $d_i(t)$ (production rate $u_{i+1}(t)$) is replaced by an appropriately chosen constant, the cost at machine M_i , $i < m$ can be analytically computed using existing *constant demand* based single machine theory [18], and multi-state generalizations of [18], as reported in [22] and discussed in Appendices A and B. In addition, a lower bound on the variance of durations of the active portion of the $x_i(t)$ supply cycle

can be computed using first return time (to zero level) computations as developed in [21] for single Markovian machines. This allows one to verify the plausibility of an exponential approximation of the active supply sojourn time (see for example [22] or [24]). We fill in the details of the modeling strategy in the next section.

4 Equivalent model of binary supply state $I_i(t)$ and isolated Markovian machine representation of M_i .

4.1 Two-state Markovian representation of $I_1(t)$.

Successive sojourn times of $I_1(t)$ at value 1 coincide with the active portions of the $x_1(t)$ supply cycle and correspond to first return times of the $x_1(t)$ process to the zero level. For the purposes of the approximate modeling we wish to achieve here, the first return time to zero, say t_{rz_1} , of the $x_1(t)$ process, will be considered an *exponential* random variable. Indeed, using DAP and the moment computations for piecewise constant velocity one dimensional continuous processes, where velocity changes coincide with the jumps of an underlying homogeneous finite state Markov chain developed in [13] and [21], [24] provides numerical evidence backing this approximation. It is shown that the squared coefficient of variation of t_{rz_1} , the mean first return time to zero, remains slightly below one for a wide range of critical inventory levels z_1 . Given the positivity of t_{rz_1} , this is a clear indication of the plausibility of exponential behavior. Thus, a two-state Markovian representation of $I_1(t)$ is shown in Fig. 2.

In Fig. 2, given a_1 , the steady-state availability coefficient of x_1 for some choice of critical hedging levels, the supply failure rate p_{s_1} is related to a_1 and r_1 by :

$$p_{s_1} = \frac{r_1(1 - a_1)}{a_1}$$

In fact, the supply failure rate is the inverse of the mean first return time to zero

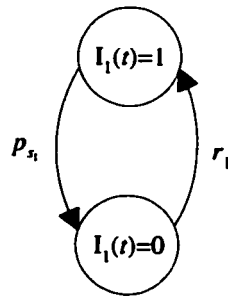


Figure 2 – Approximate two-state Markovian representation of $I_1(t)$.

of buffer x_1 , $\bar{t}_{rz1}$, thus :

$$p_{s_1} = \frac{1}{\bar{t}_{rz1}}$$

Notice that since the theory in [18] can in principle be generalized to semi-Markovian machines, for tractability purposes, it is not absolutely essential to impose the exponential active supply duration assumption for $I_1(t)$.

4.2 The four-state Markov chain model of M_2 .

At this stage, using MDA, it is possible to conclude that machine M_2 subjected to an unreliable supply characterized by the Markov chain $I_1(t)$ can be represented by an unreliable multi-state Markovian machine fed by a fully reliable supply where the state-space of the Markov chain is the cartesian product of that of the $I_1(t)$ Markov chain, and that of the two-state Markovian machine M_2 . For a two-state representation of $I_1(t)$, as developed in the previous section, this would normally yield a four-state Markov chain representation with a single operational mode and three failure modes (see Fig. 3, where the only operational mode has been labeled ①).

We now seek to construct a Markovian representation of availability state of buffer x_2 , $I_2(t)$. Buffer x_2 is supplied by pseudo machine $\widetilde{M}_2$ in Fig. 3 and can be considered by virtue of the demand averaging principle as subjected to a constant

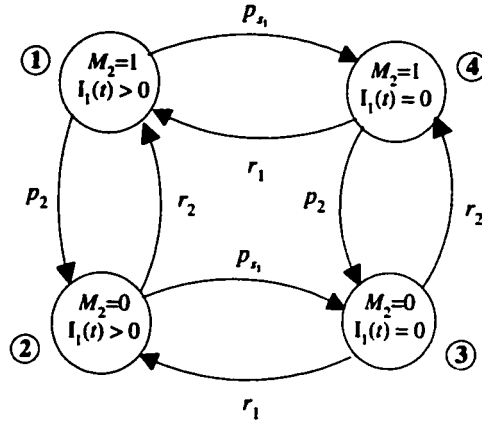


Figure 3 – Four state approximate Markovian model, $\widetilde{M}_2$, of the machine M_2 supplied by unreliable buffer x_1 .

demand $\frac{d}{a_2}$, where $a_2 = E[I_2(t) = 1]$. The periods of time for which $I_2(t) = 1$, are the first return times to zero of supply x_2 . $\bar{t}_{rz2}$, the mean of these times, can be computed based on an adaptation of an algorithm presented in El-Férik and Malhamé (1997) (see Appendix A for details). As discussed for x_1 , these return times are approximately exponential. Nevertheless, it is not possible to claim the same for sojourn in the starvation state of x_2 , $I_2(t) = 0$. In fact, the starvation state of x_2 may be caused by multiple causes, more specifically, a failure of only M_2 or a starvation of M_2 caused by a failure of M_1 , or (with negligible probability) a combination of the two causes. Moreover, *according to each cause of depletion of supply x_2 , the sojourn time in rupture state will in general have a different average* (see Fig. 5). This is not the case when all machines have identical repair rates and under the assumption that the probability of two simultaneous machine failures is neglected [26], because failure modes are essentially indistinguishable.

Thus, a more detailed analysis of the return rate from failure (see Fig. 4) is required.

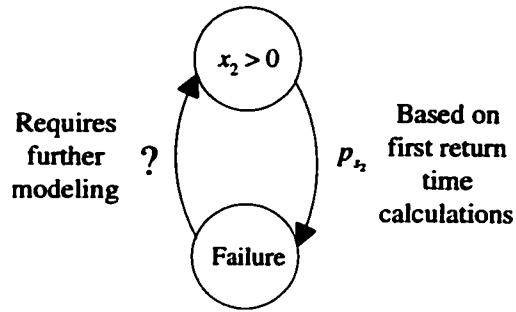


Figure 4 – Non Markovian binary model of the availability state of supply x_2 .

4.3 Aggregated three-state Markovian representation of $I_2(t)$.

The rupture state of supply x_2 can be considered as a non exponential sojourn time macro-state including 3 possible substates (see Fig. 5).

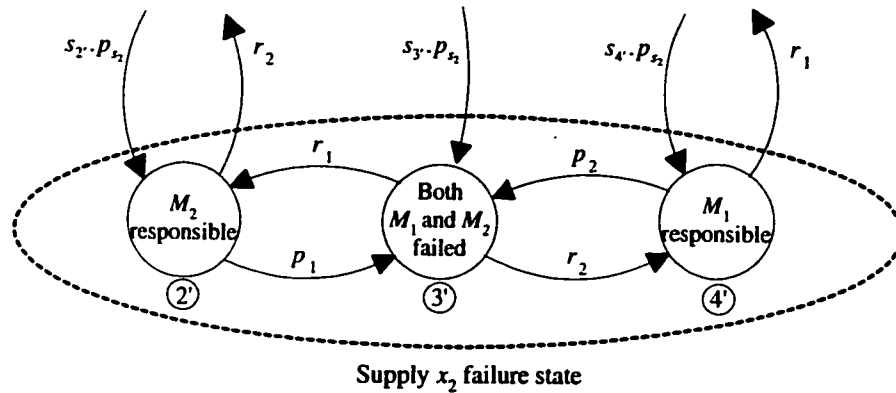


Figure 5 – Zooming on supply, x_2 , failure state. The three depletion substates are distinguished by their causes and are respectively denoted as 2', 3', 4'.

In Fig. 5, s_2' , s_3' , s_4' are the probabilities that when WIP x_2 becomes zero, it

does so respectively because of a failure of machine M_2 alone, failures of both machines M_1 and M_2 , or a failure of machine M_1 alone. Probabilities $s_{2'}$, $s_{3'}$, $s_{4'}$ are calculated based on first return time to zero type calculations. The value of these probabilities can be precisely calculated (see Appendix A for details).

Fig. 6 illustrates the dynamics of process x_2 , where $\tilde{\alpha}_2$ is the ON state of fictitious machine $\tilde{M}_2$, and $s_{i'}$ indicates the probability of reaching substate i' when WIP x_2 becomes zero.

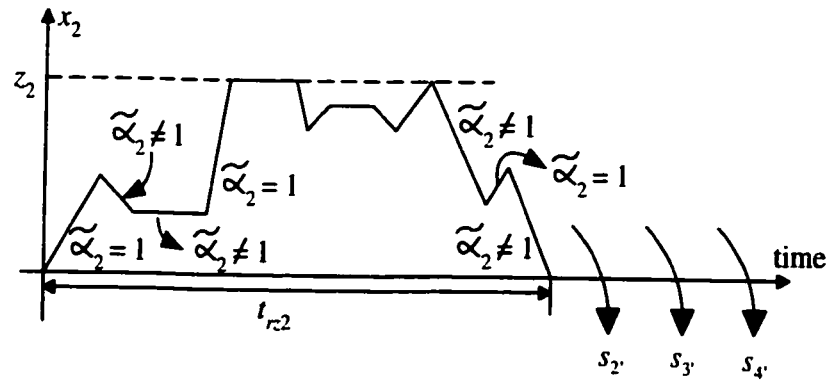


Figure 6 – Dynamics of buffer storage level x_2 . $s_{2'}$, $s_{3'}$, $s_{4'}$ are respectively probabilities of M_2 only failed, both M_1 and M_2 failed, and M_1 only failed when x_2 returns to zero.

Denote here, the mean first return time from failure mode j' back to operating mode 1, $\bar{T}_{j'1}$, $j' = 2', 3', 4'$. We emphasize that in the $\bar{T}_{j'1}$ calculation, the initial substate is j . The approximate Markovian model of supply availability state for machine M_3 is illustrated in Fig. 7.

If the four state Markovian representation in Fig. 7 were to be left as such, and combined with the two-state Markov chain associated with machine M_3 , this would result in an 8th order model for pseudo machine $\tilde{M}_3$. As one further proceeds to

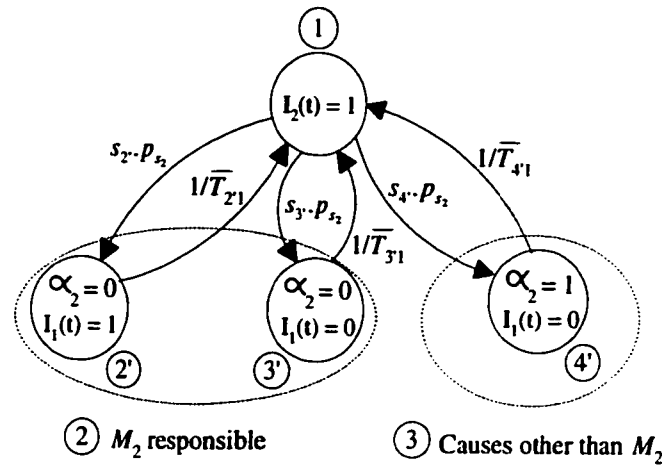


Figure 7 – Approximate Markovian model of the supply availability state for machine M_3 .

build fictitious isolated pseudo machines $\widetilde{M}_4, \widetilde{M}_5, \dots$, there would rapidly ensue a state explosion. Instead, we choose to systematically aggregate the Markov chains associated supply availability states down to order 3.

Starting with supply availability state for machine M_3 , we now illustrate how such a states aggregation is carried out. In Fig. 3, there is a single "on" mode, and three failure modes where the most likely in practice is that which can be traced back to a failure of machine M_2 alone (this is because for M_1 to be responsible, it would take a failure of M_1 as well as the emptying of *both* existing supplies of works in process x_1 and x_2). Therefore, we aggregate the failure states into two categories : those involving a failure of machine M_2 , and those due to other causes. This is illustrated in Figures 7 and 8.

In turn, we use the sixth order model of $\widetilde{M}_3$ (where a single mode is operational), to obtain a 6th order Markovian representation of supply state $I_3(t)$. The various substates are labeled, defined, and represented in Fig. 9, while the aggregated model

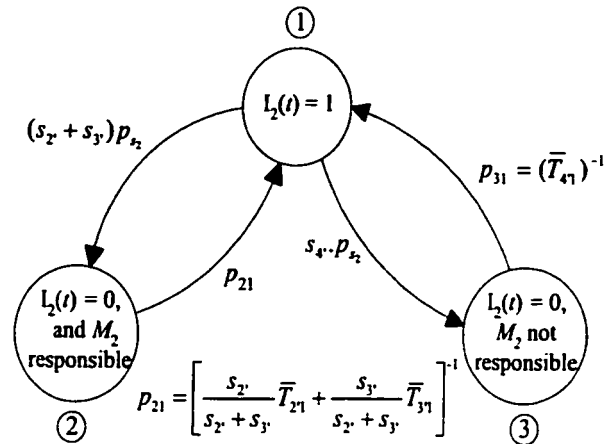


Figure 8 – Markovian aggregated model of the state space availability of buffer dynamic x_2 .

is shown in Fig. 10. At this point, starting from the model in Fig. 10, the latter plays for the construction of $\widetilde{M}_4$, a role analogous to that played by the model in Fig. 8 for the construction of $\widetilde{M}_3$. Consequently, pseudo-machine models $\widetilde{M}_i$ are generated recursively, and are of order 6 for $i \geq 3$.

5 Numerical testing of decomposition/aggregation based transfer line performance evaluation.

In the following, we apply the decomposition/aggregation strategy detailed in section 4, to the evaluation of the cost function in (3), when decentralized hedging policies are applied and the values of hedging levels z_i , $i = 1, \dots, m$, are given. Performance estimation proceeds by adding up the *separate* storage costs incurred for works in process $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$, and the combined storage/backlog costs incurred for surplus process x_m , respectively based on equivalent machine models $\widetilde{M}_i$, $i = 1, \dots, m$. For the computations relating to $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$, we rely on the

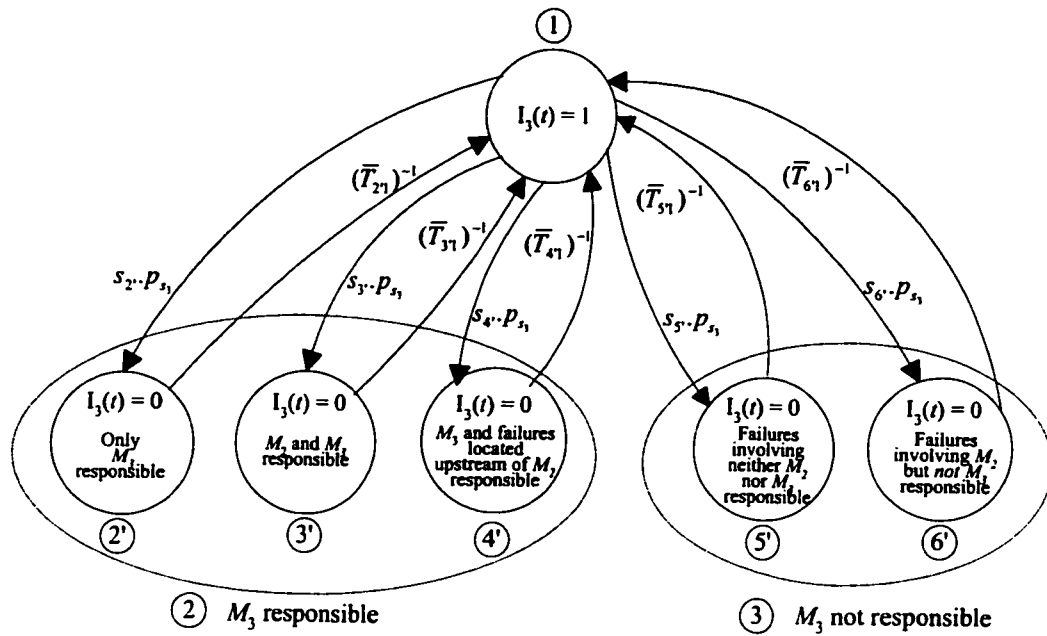


Figure 9 – Sixth state Markov chain model of supply availability state for machine M_4 .

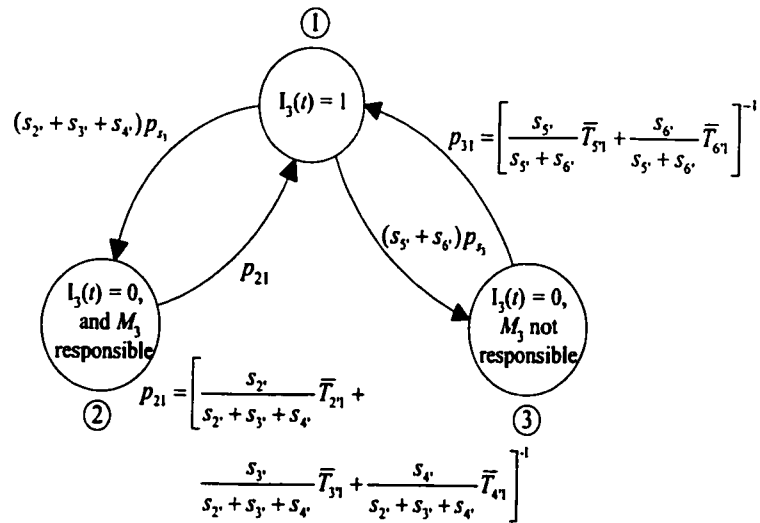


Figure 10 – Markovian aggregated model of the state space availability of buffer dynamic x_3 .

generalization of Hu [18], i.e. the case of a Markovian two-state machine with *no backlog allowed*, to multiple state machines with no backlog (see [22] and Appendix B), while the costs relating to x_m are computed based on Sharifnia [29], i.e. the case of a multi-state Markovian machine with *backlog allowed*. Note that the multi-state generalization of Hu's result is based on using Sharifnia [29], pretending that all machine states are feasible, and associating the actually infeasible (failure) states with hedging levels located at zero. Furthermore, note that, for machines $\widetilde{M}_i$, $i \leq m - 1$, by virtue of the demand averaging principle (see section 3.2), the "apparent" constant demand to be used in the calculation should not be d , but $\frac{d}{a_i}$ where a_i is the a priori unknown supply availability coefficient related to works in process x_i , $i = 1, \dots, m - 1$. While a theoretically based iterative calculation of the value of a_i is possible, and strictly for purposes of numerical comparison, we have instead chosen to obtain this value from Monte-Carlo simulations under the same conditions. Thus a_i , $i = 1, \dots, m - 1$, is estimated based on Monte-Carlo runs and plugged back into the theoretical expressions of Hu (as generalized), with demand d replaced by $\frac{d}{a_i}$.

Configuration of machines M_1, M_2 and M_3										Supply z_i and constant demand rate d			
Line	p_1	p_2	p_3	r_1	r_2	r_3	k_1	k_2	k_3	z_1	z_2	z_3	d
1	.025	.05	.02	.3	.125	.1	3	2.9	2.8	.047	7.7	5	1
2	.01	.03	.25	.15	.45	.5	2	1.9	1.8	.12	3.4	8.1	1
3	.02	.15	.08	.15	.5	.3	4.5	3.5	2.5	.08	4.2	4.7	1.2
4	.1	.08	.15	.5	.45	.6	3	2.9	2.8	5	3	7	1
5	.2	.15	.1	.6	.45	.4	3	2.9	2.8	3	5	7	1
6	.15	.2	.1	.4	.45	.3	3	2.9	2.8	2	2	2	1

Tableau 1 – Transfer line configuration for three studied cases. $c_1 = c_2 = c_3^+ = 2$; $c_3^- = 10$.

The numerical experiments were carried out for a sample set of three machine lines with parameters described in Table 1. Monte-Carlo *regenerative* simulations were employed (regeneration state is first return of vector $(x_1, x_2, x_3)^T$ to $(z_1, z_2, z_3)^T$),

and the stopping criterion was when relative mean total cost change between two successive regeneration cycles is less than 10^{-9} . Standard deviation (SD) was estimated at that stopping point. the results are summarized in Table 2 and indicate agreement within roughly 3% in the worst case.

Line	Three states decomposition technique				Monte-carlo simulation				Relative error%
	J_1	J_2	J_3	$J^{DT} (d/a_i)$	J_1	J_2	J_3	$J^{MC} (SD)$	
1	.0923	10.8	42.24	53.24	.094	10.2	44	54.3(.09)	1.95
2	.225	5.99	44.04	50.35	.225	5.92	45.9	52.05(.12)	3.25
3	.141	6.26	34.6	41	.144	6.17	36.02	42.33(.16)	3.14
4	9.08	5.25	12.7	27	8.98	5.1	12.83	26.91(.032)	0.45
5	4.97	8.14	12.94	26.05	4.74	7.7	13	25.44(.12)	2.4
6	3.04	2.5	27.4	32.94	2.9	2.1	29	34(.17)	3.12

Tableau 2 – Transfer line performance evaluation estimates based on decomposition/aggregation technique as compared to Monte-Carlo regenerative simulation based estimates. SD is estimated standard deviation for Monte-Carlo computed costs.

While the above decomposition/aggregation technique yields accurate performance evaluation results in nonhomogeneous transfer lines, it is still too complex for buffering optimization purposes, particularly in long transfer lines. Thus, in order to make optimization algorithms scalable, further simplifications are needed.

6 A simplified model for dynamic programming transfer line buffering optimization.

6.1 Simplified model of $\widetilde{M}_i$

In this subsection, for scalability of computations, albeit at the cost of some loss in accuracy, we further aggregate the models of pseudo machines $\widetilde{M}_i$ down to

order 2, thus reaching a level of complexity comparable to that used for buffering optimization in partially homogeneous (identical machine repair rates) transfer lines [26]. Introducing the a priori unknown coefficients of supply availability a_i , $i = 2, \dots, m-1$, with $a_0 = 1$ (first machine upstream is never starved), Fig. 11 is a representation of the recursive relationship between successive pseudo machine model parameters.

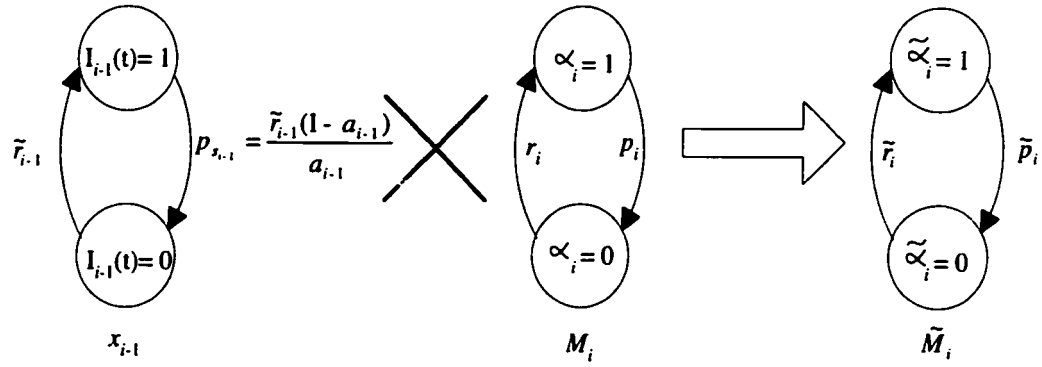


Figure 11 – Derivation of two-state aggregate Markov chain model of pseudo machine $\tilde{M}_i$, $i \geq 2$.

In Fig. 11, assuming a two-state Markov model of machine $\tilde{M}_{i-1}$ is given with respective failure and repair rates $\tilde{p}_{i-1}$ and $\tilde{r}_{i-1}$, the expression of supply state I_{i-1} failure rate $p_{s_{i-1}}$ as a function of coefficient of availability a_{i-1} derives from : $a_{i-1} = \frac{\tilde{r}_{i-1}}{p_{s_{i-1}} + \tilde{r}_{i-1}}$. Indeed, for two state machine models, the repair rate of a given supply state coincides with that of the machine directly feeding that supply. Furthermore, if one neglects the probability of a simultaneous failure of machines $\tilde{M}_{i-1}$ and $\tilde{M}_i$, then it is not difficult to show that an estimate of $\tilde{r}_i$ would be :

$$\tilde{r}_i = \frac{\left(\frac{p_{s_{i-1}}}{\tilde{r}_{i-1} + p_{s_{i-1}}}\right) \left(\frac{r_i}{r_i + p_i}\right)}{\left(\frac{p_{s_{i-1}}}{\tilde{r}_{i-1} + p_{s_{i-1}}}\right) \left(\frac{r_i}{r_i + p_i}\right) + \left(\frac{\tilde{r}_{i-1}}{\tilde{r}_{i-1} + p_{s_{i-1}}}\right) \left(\frac{p_i}{r_i + p_i}\right)} \tilde{r}_{i-1} + \frac{\left(\frac{\tilde{r}_{i-1}}{\tilde{r}_{i-1} + p_{s_{i-1}}}\right) \left(\frac{p_i}{r_i + p_i}\right)}{\left(\frac{p_{s_{i-1}}}{\tilde{r}_{i-1} + p_{s_{i-1}}}\right) \left(\frac{r_i}{r_i + p_i}\right) + \left(\frac{\tilde{r}_{i-1}}{\tilde{r}_{i-1} + p_{s_{i-1}}}\right) \left(\frac{p_i}{r_i + p_i}\right)} r_i \quad (5)$$

while if one imposes that the steady-state probability of $\tilde{\alpha}_i = 1$ be $\left(\frac{\tilde{r}_{i-1}}{p_{s_{i-1}} + \tilde{r}_{i-1}}\right)$ $\left(\frac{r_i}{r_i + p_i}\right)$, it is possible to obtain :

$$\tilde{p}_i = \left[\frac{(\tilde{r}_{i-1} + p_{s_{i-1}})(r_i + p_i)}{\tilde{r}_{i-1} \cdot r_i} - 1 \right] \tilde{r}_i \quad (6)$$

6.2 Formulation of a dynamic program.

In the following, based on the simplified two-state machine model derived above, and existing single machine related analytical results, we formulate the transfer line buffering optimization problem as a dynamic programming problem where the state space at each stage of the program is a subset of $\mathcal{R}_2$.

For $i = 1, \dots, m-1$, based on [18] - the case of a two-state Markovian machine, under a constant demand and with no backlog allowed - and the demand averaging principle (Section 3.2), it is possible to write for stock x_i fed by machine $\tilde{M}_i$:

$$a_i = 1 - \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{r}_i + \tilde{p}_i} \frac{1 - \frac{\tilde{r}_i (k_i - d/a_i)}{\tilde{p}_i (d/a_i)}}{1 - \frac{\tilde{r}_i (k_i - d/a_i)}{\tilde{p}_i (d/a_i)} e^{\left(\frac{k_i \tilde{r}_i - (d/a_i)(\tilde{p}_i + \tilde{r}_i)}{(k_i - d/a_i) d/a_i}\right) z_i}} \quad (7)$$

Note that in (7), $d_i^+ = \frac{d}{a_i}$ plays the role of the constant demand rate in the original expression in [18]. If one then solves (7) for z_i in terms of a_i and substitutes the results in the expression for storage cost with no backlog allowed from [18], the result is :

$$T(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i, a_i) = c_i \frac{(1 + \lambda_i)}{\lambda_i} [k_i(\varphi_i - 1) + (\tilde{r}_i + \tilde{p}_i)(\varphi_i) \ln(\varphi_i)] \quad (8)$$

where in (8), φ_i and λ_i are as below :

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{(1 + \tilde{p}_i)(1 - a_i) + \lambda_i \tilde{p}_i}{(1 + \tilde{p}_i)(1 - a_i)(1 + \lambda_i)}, \\ \lambda_i &= \frac{k_i \tilde{r}_i - (d/a_i)(\tilde{p}_i + \tilde{r}_i)}{(k_i - d/a_i) d/a_i} \end{aligned}$$

Based on (5), (6), (8) applied for $i-1$ instead of i , and recalling that $p_{s_{i-1}} = \frac{\tilde{r}_{i-1}(1-a_{i-1})}{a_{i-1}}$, it is possible to draw the state transition diagram in Fig. 12.

$$\begin{pmatrix} \tilde{r}_{i-1} \\ \tilde{p}_{i-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(transition cost Eq. (8))}]{\text{Decision } a_{i-1}} \begin{pmatrix} \tilde{r}_{i-1} \\ p_{s_{i-1}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \tilde{r}_i \\ \tilde{p}_i \end{pmatrix}$$

Figure 12 – State transition diagram of a dynamic program where, at each stage i , the state space is two dimensional, and directly identified with vector $(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i)^T$. The equivalence sign $\approx$ is by virtue of Eq. (5)-(6). Availability coefficient a_{i-1} plays the role of a decision (input action) variable, while the corresponding transition cost is given by Eq. (8) for i replaced by $i - 1$.

Thus, based on Fig. (12), Eq. (5)-(6), and Eq. (8), it is possible to formulate the following dynamic programming problem, hereon referred to as the *single part transfer line buffer optimization problem*.

« Given a single part unreliable Markovian transfer line subjected to a constant demand rate d which can be met by each machine in isolation ; determine, if it exists, an optimal sequence of supply availability coefficients, a_i , $i = 1, \dots, m - 1$, which would achieve the following lower bound on the total buffering/backlog costs :

$$J^* = \inf_{a_i \in A_i(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i)} \left[\sum_{i=1}^{m-1} T(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i, a_i) + T_F(\tilde{r}_m, \tilde{p}_m) \right], \quad i=1, \dots, m-1 \quad (9)$$

where in (9) :

- $T_F(\tilde{r}_m, \tilde{p}_m)$ is a *terminal state cost* and is in effect the Bielecki-Kumar optimal cost with backlog allowed [3]. It is given by :

$$T_F(\tilde{r}_m, \tilde{p}_m) = \frac{c_m^+ z_m}{[(\tilde{r}_m + \tilde{p}_m)(\tilde{r}_m(k_m - d) - \tilde{p}_m d)]^2} + \frac{\tilde{p}_m k_m d (e^{-\lambda_m z_m} (c_m^- + c_m^+) - c_m^+)}{(\tilde{r}_m + \tilde{p}_m)(\tilde{r}_m(k_m - d) - \tilde{p}_m d)} \quad (10)$$

$$\text{where } \lambda_m = \frac{\tilde{r}_m(k_m - d) - \tilde{p}_m d}{d(k_m - d)}.$$

- $A_i(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i)$, $i = 1, \dots, m$, are *admissibility sets* of the a_i decision variables.

- The *state transition equations* associated with this dynamic program, and denoted $[\tilde{r}_i, \tilde{p}_i]^T = [f_1(\tilde{r}_{i-1}, \tilde{p}_{i-1}, a_{i-1}), f_2(\tilde{r}_{i-1}, \tilde{p}_{i-1}, a_{i-1})]$ are given by (5) and (6), with $p_{s_{i-1}}$ replaced by $\frac{\tilde{r}_{i-1}(1-a_{i-1})}{a_{i-1}}$. »

6.3 Characterization of admissibility sets $A_i(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i)$, $i = 1, \dots, m - 1$.

The admissibility sets for the coefficient of supply availability decision variable a_i , given a "d feasible" state $(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i)$ at stage i , are open sets such that $0 < a_i < 1$ (it would require z_i infinite to make a_i go to one), and an additional constraint on a_i deriving from the fact that demand d must remain feasible for equivalent machine $\tilde{M}_{i+1}$. More specifically :

$$\frac{\tilde{r}_{i+1}}{\tilde{r}_{i+1} + \tilde{p}_{i+1}} k_{i+1} > d \quad (11)$$

Thus, recalling the state transition equations :

$$\frac{f_1(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i, a_i)}{f_1(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i, a_i) + f_2(\tilde{r}_i, \tilde{p}_i, a_i)} > d \quad (12)$$

Note that the study of the existence of an optimal solution to the single part transfer line buffer optimization problem is beyond the scope of this paper (for the partially homogeneous transfer line case, existence issues have been tackled in [26]). It should derive from first establishing that, without loss of optimality, admissibility sets can be chosen to be closed and bounded. Existence of an optimum would then follow from the continuity of the cost function in (9) over a compact set.

7 Numerical results.

In the following, we report on results of numerical experiments with the dynamic programming algorithm in (6) for two six-machine sample transfer line examples analyzed in [7], and described in Table 3 below. In subsection 7.1, the reachable

state space obtained from a recursive application of Eq. 12 for transfer line 2 is represented. In Subsection 7.2, actual optimum buffering levels are computed.

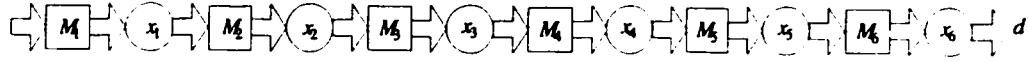


Figure 13 – Flow shop considered in example 1 and 2.

7.1 An example of reachable state space sets.

In Fig. 14, the reachable state space $\tilde{p}_i$ versus $\tilde{r}_i$, $i = 1, \dots, 6$, for line 2 in Table 3 below is illustrated. Thus, the curves in Fig. 14 account for all possible $(\tilde{p}_i, \tilde{r}_i)$ pairs that can be reached, given the admissibility constraints for supply availability decision variables a_i , $i = 1, \dots, 5$.

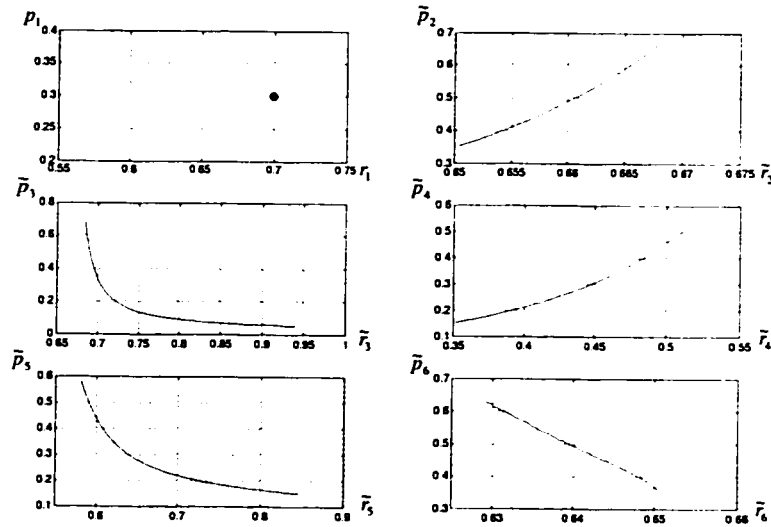


Figure 14 – Reachable state space of transfer line 2, in Table 3, at stages $i = 1, \dots, 6$.

7.2 Optimal buffering results for long transfer lines.

In Table 4, we report optimum buffering levels z_i^* , $i = 1, \dots, 6$ for transfer lines 1 and 2.

Configuration of machines M_1-M_6												
Line	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
1	.35	.175	.56	.15	.2	.35	.7	.39	1.44	.32	.8	.75
2	.3	.35	.05	.15	.15	.35	.6998	.6502	.9497	.35	.8503	.6502

Tableau 3 – Reliability data for transfer lines 1 and 2 configurations (data based on [7]). $c_i = 1$, $i = 1, \dots, 5$, $c_6^+ = c_6^- = 1$, $k_i = 1$, $i = 1, \dots, 6$ and constant demand d is 0.5.

Machine	Example 1		Example 2	
	Optimal hedging level	Optimal cost	Optimal hedging level	Optimal cost
	z_i^*	J_i^*	z_i^*	J_i^*
1	.197	.133	.275	.184
2	1.715	.524	1.351	.171
3	1.687	.438	.867	.387
4	1.125	.543	1.955	.607
5	2.093	1.091	2.12	1.283
6	.997	1.406	1.3	1.757

Tableau 4 – Optimal hedging levels and optimal costs results for six machine transfer lines 1 and 2.

8 Conclusion

A decomposition/aggregation technique for approximate performance analysis of KANBAN controlled unreliable nonhomogeneous transfer lines, has been presented. Performance evaluation is based on computation of individual work in process storage costs, itself based on the analysis of sixth order Markovian equivalent (isolated) machines subjected to a constant demand rate, and with no backlog allowed.

The analysis of such machines is possible thanks to a multi-state generalization of Hu's model [18]. For the sample transfer lines considered in the paper, performance estimates based on the decomposition/aggregation approach appear to be accurate.

In addition, a further simplified two-state individual machine equivalent has been the basis for the formulation of a two-dimensional state dynamic program for buffer optimization in unreliable long transfer lines. Numerical experiments with the algorithm have been reported. Optimal buffer levels can be computed very quickly. While formulation of a dynamic program based on the more accurate six states Markovian machine model is possible, it would be much heavier in terms of complexity of the optimization procedure.

In further work, we would like to apply the proposed decomposition/aggregation approach to the analysis of more complex manufacturing plant architectures including possible reentrant flows.

A First passage-time related calculations in multi-state Markovian machines with no backlog allowed.

In this appendix, based on an adaptation of the analyses in [13] and [21], given the sixth order machine equivalent parameters for $\widetilde{M}_i$ and the associated hedging level z_i in Fig. 9 (for index 3 replaced by i), and for supply state $I_i(t)$, $i \leq m-1$, i.e. when no backlog is allowed, and for a constant rate of demand $\bar{d}$, we show how to compute :

- probabilities $s_{i'}$ for $\widetilde{M}_i$ in failure state i' , $i' = 2', \dots, 6'$, upon the first return of stock x_i to zero,
- mean return time $\bar{t}_{rzi} = (p_{s_i})^{-1}$ of stock x_i to zero,

The probabilistic calculations in Hu [18] are extended to multi-state machines with no backlog by pretending that machine failure modes are actually feasible (states where demand can be met), but are associated with a hedging level at zero. Thus, as in Sharifnia [29], every mode will be associated with a hedging level, namely z_i for mode 1, and zero for all the other modes.

As in [13], hybrid density probability vector $\vec{f}(x_i, t) = [f_1(x_i, t), f_2(x_i, t), \dots, f_6(x_i, t)]^T$, where hybrid probability density function $f_j(\lambda, t)d\lambda = Pr[(\lambda \leq x_i(t) \leq \lambda + d\lambda) \cap (\tilde{\alpha}_i(t) = j)]$, evolves according to the following Forward-Kolmogorov equations :

$$\frac{\partial \vec{f}(x_i, t)}{\partial t} = -V_i \frac{\partial \vec{f}(x_i, t)}{\partial x_i} + \Lambda^T \vec{f}(x_i, t) \quad (\text{A.1})$$

for $0 < x_i < z_i$

and in (A.1), $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ is the matrix of the transition rates for Markov chain $\widetilde{M}_i$, and $V_i = \text{Diag}[v_i]$, $v_1 = k_1 - \bar{d}$, while $v_j = -\bar{d}$ for $j = 2, \dots, 6$.

At hedging level z_i , a time varying probability mass $P_{z_i}(t)$ evolves according to the following differential equation :

$$\frac{dP_{z_i}(t)}{dt} = v_1 f_1(z_i, t) + \lambda_{11} P_{z_i}(t) \quad (\text{A.2})$$

In order to compute first return to zero of stock x_i related probabilistic quantities, initial and boundary conditions must complement (A.1) and (A.2). They are as follows :

initial conditions :

$$\begin{aligned} P_{z_i}(0) &= 0 \\ \vec{f}^T(x_i, 0) &= [\delta(x_i), 0, \dots, 0] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Boundary conditions :

$$\text{At } x_i = z_i : \quad v_i f_j(z_i, t) + \lambda_{1j} P_{z_j}(t) = 0, \quad j = 2, \dots, 6 \quad (\text{A.4a})$$

$$\text{At } x_i = 0 : \quad f_1(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (\text{A.4b})$$

Defining $\vec{F}^*(x_i, s)$ as the Laplace transform of $\vec{f}(x_i, t)$, the mean return time to zero of stock x_i can be obtained from :

$$\bar{t}_{rzi} = \int_0^\infty t \left[\sum_{j=2}^6 -v_j f_j(0, t) \right] dt = \sum_{j=2}^6 v_j \frac{\partial F_j^*(0, s)}{\partial s} \Big|_{s=0} \quad (\text{A.5})$$

While the probabilities $s_{j'}$, $j' = 2', \dots, 6'$, can be obtained from :

$$s_{j'} = \int_0^\infty \left[-v_j f_j(0, t) \right] dt = F_j^*(0, s) \Big|_{s=0} \quad (\text{A.6})$$

Upon Laplace transformation of (A.1)-(A.4), and partial differentiation with respect to s , letting s go to zero, it is possible to show, much like in [13], that the quantities in (A.5) and (A.6) emerge as a result of the solution of a system of linear differential equations. Finally, note that mean times to repair $\bar{T}_{i'1}$, given current failure mode i' are computed based on the first passage-time theory of Markov chains (see [17] for example).

B Mean storage cost computations.

In order to compute the long term mean of x_i , $E[x_i]$, one should complement (A.1) and (A.2), with the following ordinary differential equations, where P_{0j} , indicate probability masses at $x_i = 0$, at time t , and in state j , $j = 2, \dots, 6$:

$$\frac{dP_{0j}}{dt} = -v_j f_j(0, t) + \lambda_{jj} P_{0j}(t) + \sum_{k \neq j} \lambda_{kj} P_{0k}(t) \quad (\text{B.1})$$

In addition, the following boundary conditions must be imposed :

$$\text{At } x_i = z_i : \quad (\text{A.4a})$$

$$\text{At } x_i = 0 : \quad -v_1 f_1(0, t) + \sum_{j=2}^6 \lambda_{j1} P_{0j}(t) = 0 \quad (\text{B.2})$$

Considering then (A.1), (A.2), (B.1), (A.4a) and (B.2) in the steady-state, and computing the corresponding steady-state probability density functions vector $\tilde{f}^{\text{ss}}(x_i)$, and probability masses $P_{z_i}^{\text{ss}}, P_{0j}^{\text{ss}}, j = 2, \dots, 6$, it is possible to compute the mean of x_i as :

$$E[x_i] = z_i P_{z_i}^{\text{ss}} + \sum_{j=1}^6 \int_0^{z_i} x f_j^{\text{ss}}(x) dx. \quad (\text{B.3})$$

Références

- [1] Akella R. and Kumar P.R., "Optimal Control of Production Rate in a Failure Prone Manufacturing System", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.31, No.2, pp.116-126, Feb. 1986.
- [2] Bai S.X. and Gershwin S.B., "Scheduling Manufacturing Systems with Work-in-Process Inventory Control : Single Part-Type Systems", *IIE Transactions*, Vol.27, pp.599-607, 1995.
- [3] Bielecki T. and Kumar P.R., "Optimality of Zero-Inventory Policies For Unreliable Manufacturing Systems", *Operations Research Society of America*, Vol.36, No.4, pp.532-541, July-August 1988.

- [4] Brémaud P., Malhamé R.P. and Massoulié L., "A Manufacturing System with General Stationary Failure Process : Stability and IPA of Hedging Control Policies", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.42, No.2, pp.155-170, Feb. 1997.
- [5] Buzacott J.A., "Automatic Transfer Lines With Buffer Stocks", *The International journal of Production Research*, Vol.5, No.3, pp.183-200, 1967.
- [6] Caramanis M. and Liberopoulos G., "Perturbation Analysis For The Design of Flexible Manufacturing system Flow Controllers", *Operations Research society of America*, Vol.40, No.6, pp.1107-1125, Nov.-Dec. 1992.
- [7] Chiang S.Y., Kuo C.T. and Meerkov S.M., "DT- Bottlenecks in Serial Production Lines : Theory and Application", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.16, No.5 pp.567-580, October 2000.
- [8] Dallery Y., David R. and Xie X.L., "An Efficient Algorithm for Analysis of Transfer Lines With Unreliable Machine and Finite Buffers", *IIE Transactions*, Vol.20, No.3, pp.280-283, 1988.
- [9] Dallery Y., David R. and Xie X.L., "Approximate Analysis of Transfer Lines with Unreliable Machines and Finite Buffers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.34, No.9, pp.943-953, Sept. 1989.
- [10] Dallery Y. and Gershwin S.B., "Manufacturing Flow Line Systems : A Review of Models and Analytical Results", *Journal of Queueing Systems*, Vol.12, pp.3-94, 1992.
- [11] Di Mascolo M., David R. and Dallery Y., "Modelling and Analysis of Assembly Systems with Unreliable Machine and Finite Buffers", *IEE transactions*, Vol.23, No.4, pp.315-330, 1991.
- [12] Di Mascolo M., Frein Y. and Dallery Y., "An Analytical Method for Performance Evaluation of KANABAN Controlled Production Systems", *Operations Research*, Vol.44, No.1, pp.50-64, Jan.-Feb. 1996.

- [13] El-Ferik S. and Malhamé R.P., "Padé Approximants for Transient Optimization of Hedging control Policies in Manufacturing", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.42, No.4, pp.440-457, 1997.
- [14] Gershwin S.B., "An Efficient Decomposition Method For The Approximate Evaluation of Tandem Queues With Finite Storage space and Blocking", *Operations Research Society of America*, Vol.35, No.2, pp.291-305, March-April 1987.
- [15] Gershwin S.B. and Burman M.H., "A Decomposition Method for Analyzing inhomogeneous Assembly/Disassembly Systems", *Annals of Operations Research*, Netherlands, Vol.93, pp.91-115, 2000.
- [16] Haurie A., L'écuyer P. and Van Delft Ch., "Convergence of Stochastic Approximation Coupled With Perturbation Analysis in a Class of Manufacturing Flow Control Models", *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, Vol.4, No.1, pp.87-111, Feb. 1994.
- [17] Hoel P.G., Port S.C. and Stone C.J., *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin Company, 1972.
- [18] Hu J.Q., "Production Control for Failure-Prone Production Systems with No Backlog Permitted", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.40, No.2, pp.299-305, Feb. 1995.
- [19] Kimemia J. and Gershwin S.B., "An Algorithm For The Computer Control of a Flexible Manufacturing System", *IIE Transactions*, pp.353-362, Dec. 1983.
- [20] Liberopoulos G. and Hu J.-Q.; "On the Ordering of Optimal Hedging Points in a Class of Manufacturing Flow Control Models", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.40, No.2, Feb. 1995.
- [21] Malhamé R.P., "Ergodicity of Hedging Control Policies in Single-Part Multiple-State Manufacturing Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.38, No.2, pp.340-343, Feb. 1993.

- [22] Mbihi J., *Commande à seuils critiques de la production dans un atelier de fabrication avec machines en tandem non fiables*, Thèse de Ph.D., École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada, Juin 1999.
- [23] Mbihi J. and Malhamé R. P., "Optimization of a Class of Decentralized Hedging Production Policies in an Unreliable Two-Machine Flow Shop", *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, Dec. 1998.
- [24] Mbihi J., Malhamé R.P. and Sadr J., "Two Approximations as a Basis for the Optimization of Production in Long Unreliable Markovian Transfer Lines", In *Decision and Control in Management Science*, edited by Zaccour, G., Kluwer Amsterdam, 2001.
- [25] Presman E., Sethi S. and Zhang Q., "Optimal Feedback Production Planning in a Stochastic N-Machine Flowshop", *Automatica*, Vol.31, No.9, pp.1325-32, Sept. 1995.
- [26] Sadr J., Malhamé P.R., "Decomposition/Aggregation Based Dynamic Programming Optimization of Partially Homogeneous Unreliable Transfer Lines", *GERAD Technical report G-2001-44*, Groupe d'études et de recherche en analyse des décisions, Nov. 2001.
- [27] Sethi S. P. and Zhang Q., *Hierarchical Decision Making in Stochastic Manufacturing Systems*, Birkhäuser, 1994.
- [28] Sevast'yanov B. A.(1962), "Influence of Storage Bin Capacity on the Average Standstill Time of a Production Line", *Teoriya veroyatnosty i ee primeneniya (English Transl : Theory of Probability and its Applications)*, Vol.7, No.4, pp.429-438, 1962.
- [29] Sharifnia A., "Production Control of a Manufacturing System with Multiple Machine States", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.33, No.7, pp.620-625, 1988.

- [30] Tabe T., Murumatsu R. and Tanaka Y., "Analysis of Production Ordering Quantities and Inventory Variations in a Multi-Stage Production System", *International Journal of Production Research*, Vol.18, pp.245-257, 1980.
- [31] Yan H., Yin G. and Lou S. X. C., "Using Stochastic Optimization to Determine Threshold Values for the Control of Unreliable Manufacturing Systems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.83, No.3, pp.511-539, Dec. 1994.
- [32] Yan H., Yu Zhou X. and Yin G., "Approximating An Optimal Production Policy in a continuous Flow Line : Recurrence and Asymtotic Properties", *Operations Research*, Vol.47, No.4, pp.535-549, July-August. 1999.
- [33] Zimmern B., "Étude de la Propagation Des Arrêts Aléatoires Dans Les Chaînes de Production", *Revue de Statistique Appl.*, Vol.4, pp.85-104, 1956.