

## **INFORMATION TO USERS**

This manuscript has been reproduced from the microfilm master. UMI films the text directly from the original or copy submitted. Thus, some thesis and dissertation copies are in typewriter face, while others may be from any type of computer printer.

**The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted.** Broken or indistinct print, colored or poor quality illustrations and photographs, print bleedthrough, substandard margins, and improper alignment can adversely affect reproduction.

In the unlikely event that the author did not send UMI a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if unauthorized copyright material had to be removed, a note will indicate the deletion.

Oversize materials (e.g., maps, drawings, charts) are reproduced by sectioning the original, beginning at the upper left-hand corner and continuing from left to right in equal sections with small overlaps.

ProQuest Information and Learning  
300 North Zeeb Road, Ann Arbor, MI 48106-1346 USA  
800-521-0600

**UMI<sup>®</sup>**



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÈLES POUR L'OPTIMISATION DES MARCHÉS  
DANS UN CONTEXTE BANCAIRE

JEAN-FRANÇOIS LAROCHELLE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR (Ph.D.)  
MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR  
NOVEMBRE 2001



**National Library  
of Canada**

**Acquisitions and  
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

**Bibliothèque nationale  
du Canada**

**Acquisitions et  
services bibliographiques**

**395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

**The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.**

**The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.**

**L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.**

**L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.**

**0-612-71312-1**

**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

MODÈLES POUR L'OPTIMISATION DES  
MARCHÉS DANS UN CONTEXTE BANCAIRE

présentée par: LAROCHELLE Jean-Francois

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. SOUMIS, François, Ph.D., président

Mme. SANSÒ, Brunilde, Ph.D., membre et directrice de recherche

M. CHAUNY, Fabien, Ph.D., membre

M. PRICE, Wilson, Ph.D., membre externe

À mes parents et à tous ces dimanches mémorables.

# Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui de près ou de loin m'ont motivé à écrire cette thèse.

Ces remerciements s'adressent plus particulièrement à ma directrice Brunilde Sansò pour avoir pris le temps de me conseiller tout au cours de cette longue recherche. Je voudrais aussi remercier Claude Jean Dumas et Claude Fugère pour leur aide inestimable en marketing bancaire.

Je voudrais profiter de cette occasion pour remercier les membres du jury de ma synthèse pour leurs conseils et Bernard Cheung pour m'avoir initié aux problèmes stochastiques multi-stage.

Je dois absolument remercier Pierre Girard pour son aide inestimable en informatique et Florent Mobiot pour son assistance en LaTeX. Je ne voudrais surtout pas

oublier de remercier Antoine Massoud pour ses explications sur la logique floue.

Finalement, je voudrais remercier le personnel du Gerad et du département de mathématiques de l'École Polytechnique pour l'aide qu'ils m'ont apportée au cours de toutes ces années.

À tous ceux qui m'ont supporté, vous avez toute ma gratitude.

## Résumé

Traditionnellement, les banques ont conçu leurs promotions de façon à viser les marchés les plus vastes dans l'espoir de recruter de nouveaux clients. Mais avec l'intensification de la compétition, les banques ont été forcées de segmenter leur marché pour mieux vendre leurs produits aux clients qui présentent la meilleure opportunité de profit actuel et futur.

Depuis quelques années, les banques ont développé des stratégies de marketing qui ressemblent beaucoup à celles que l'on retrouve dans le marché de la vente au détail. Récemment, une nouvelle approche appelée le "streetcorner strategy" propose de vendre le bon produit au bon client. Cependant une question reste : quel type de clientèle doit-on viser et avec quel produit ? Le but de ce travail est de proposer des modèles d'optimisation qui permettront de maximiser les profits sous des contraintes de stratégie de marketing raisonnables, de compétition et d'évolution des goûts et des taux d'intérêt.

En plus de proposer plusieurs modèles déterministes et stochastiques, une analyse des facteurs importants a été faite pour faire connaître le problème de l'optimisation des marchés et de ses difficultés. Finalement, plusieurs méthodes de résolution ont été présentées pour chaque modèle et des résultats ont été compilés sur leur efficacité.

# Abstract

For many years, banks have designed their promotional efforts to aim at the broadest markets in hope to recruit new clients. But competitive pressures have forced them to focus on a strategy of market segmentation that will aid in selling specific products to those areas that present the best current and future opportunity for profit.

In recent years, banks have developed a few marketing strategies that are mostly similar to those of the retail industry. Recently, a new approach called the streetcorner strategy was proposed for selling the right product to the right client. But a question remains : what kind of clients do we want and which products do we sell them ? The purpose of this work is to propose several optimization models that will maximize the profit under the constraints of feasible marketing strategy, competition and evolution of taste and interest rates.

Besides the proposition of several deterministic and stochastic models, an analysis of important factors has been made in hope of improving our understanding of the market-mix problem and its difficulties. Finally, several solution methods are presented for each model and results are compiled on their efficiency.

# Table des matières

|                                             |              |
|---------------------------------------------|--------------|
| <b>DÉDICACE</b>                             | <b>iv</b>    |
| <b>REMERCIEMENTS</b>                        | <b>v</b>     |
| <b>RÉSUMÉ</b>                               | <b>vii</b>   |
| <b>ABSTRACT</b>                             | <b>ix</b>    |
| <b>TABLE DES MATIÈRES</b>                   | <b>xi</b>    |
| <b>LISTE DES TABLEAUX</b>                   | <b>xvi</b>   |
| <b>LISTE DES FIGURES</b>                    | <b>xviii</b> |
| <b>LISTE DES ANNEXES</b>                    | <b>xxii</b>  |
| <b>LISTE DES MODÈLES</b>                    | <b>xxiii</b> |
| <b>CHAPITRE 1 : INTRODUCTION</b>            | <b>1</b>     |
| <b>I Description du problème</b>            | <b>7</b>     |
| <b>CHAPITRE 2 : DESCRIPTION DU PROBLÈME</b> | <b>8</b>     |
| 2.1 Environnement du problème               | 12           |
| 2.2 Les objectifs                           | 14           |

|                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>CHAPITRE 3 : TERMINOLOGIE ET REVUE DE LA</b>               |           |
| <b>DOCUMENTATION .....</b>                                    | <b>18</b> |
| 3.1 Classification des problèmes .....                        | 19        |
| 3.2 Influences primaires.....                                 | 22        |
| 3.2.1 La formulation mathématique du problème.....            | 22        |
| 3.2.2 La pénétration des marchés .....                        | 23        |
| 3.2.3 La segmentation.....                                    | 24        |
| 3.2.4 Positionnement des produits .....                       | 28        |
| 3.2.5 Client exclusif .....                                   | 30        |
| 3.2.6 La rentabilité d'un produit .....                       | 31        |
| 3.2.7 La potentialité des clients.....                        | 36        |
| 3.2.8 Le coût de recrutement .....                            | 39        |
| 3.2.9 Attrition des produits .....                            | 40        |
| 3.3 Influences secondaires .....                              | 44        |
| 3.3.1 Structure de la banque .....                            | 45        |
| 3.3.2 Stratégie de la banque.....                             | 46        |
| 3.3.3 Taux d'intérêt, rendement du marché et compétition..... | 48        |
| 3.3.4 L'image de la banque .....                              | 49        |
| 3.3.5 L'évolution des goûts de la population.....             | 51        |
| <b>II Modèles déterministes .....</b>                         | <b>52</b> |
| <b>CHAPITRE 4 : MODÈLES DÉTERMINISTES .....</b>               | <b>53</b> |
| 4.1 Modèles Cloisonnés .....                                  | 56        |
| 4.1.1 Définitions des variables .....                         | 57        |
| 4.1.2 Modèle Cloisonné 1 (MC1) .....                          | 62        |
| 4.1.3 Modèle Cloisonné 2 (MC2) .....                          | 67        |
| 4.1.4 Conclusion sur MC2 .....                                | 87        |
| 4.2 Modèle Actuariel (MA1).....                               | 89        |

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| 4.2.1 Équations du modèle actuariel (MA1) ..... | 89  |
| 4.2.2 Calcul de la rentabilité .....            | 98  |
| 4.2.3 Calcul des coûts de recrutement .....     | 115 |
| 4.2.4 Conclusion dur MA1 .....                  | 121 |
| 4.3 Modèle Actuariel (MA2).....                 | 121 |

## **CHAPITRE 5 : MÉTHODES DE RÉOLUTION DES MODÈLES**

### **DÉTERMINISTES..... 126**

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| 5.1 Modèle cloisonné (MC).....                       | 126 |
| 5.1.1 Modification de contraintes .....              | 127 |
| 5.1.2 Linéarisation des fonctions de pénalités ..... | 131 |
| 5.1.3 Solutions de départ.....                       | 139 |
| 5.1.4 Frank-Wolfe .....                              | 140 |
| 5.1.5 Décomposition de Dantzig-Wolfe .....           | 142 |
| 5.1.6 Décomposition en escalier.....                 | 147 |
| 5.2 Modèle Actuariel (MA1).....                      | 153 |
| 5.2.1 Approximation convexe .....                    | 155 |
| 5.2.2 Algorithme tabou .....                         | 160 |

### **III Modèles stochastiques..... 166**

## **CHAPITRE 6 : MODÈLES STOCHASTIQUES ..... 167**

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| 6.1 Modèle probabiliste (MP) .....                    | 168 |
| 6.1.1 Équations du modèle probabiliste .....          | 173 |
| 6.2 Modèle cloisonné stochastique (MCS) .....         | 174 |
| 6.2.1 Développement des scénarios.....                | 177 |
| 6.2.2 Équations du modèle cloisonné stochastique..... | 182 |

## **CHAPITRE 7 : MÉTHODES DE RÉOLUTION DES MODÈLES**

### **STOCHASTIQUES..... 186**

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 7.1 Modèle possibiliste ..... | 187 |
|-------------------------------|-----|

|                   |                                                                       |            |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| 7.1.1             | Méthode des $\alpha$ -coupes.....                                     | 191        |
| 7.1.2             | Méthodes des inégalités floues .....                                  | 192        |
| 7.2               | Modèle cloisonné stochastique .....                                   | 195        |
| 7.2.1             | Décomposition de Benders.....                                         | 196        |
| 7.2.2             | Décomposition par segment .....                                       | 197        |
| 7.2.3             | Décomposition par scénario .....                                      | 198        |
| 7.2.4             | Lagrangien augmenté.....                                              | 201        |
| 7.2.5             | Diagonal quadratic approximation (DQA) .....                          | 202        |
| <b>IV</b>         | <b>Analyse des résultats et conclusions .....</b>                     | <b>206</b> |
| <b>CHAPITRE 8</b> | <b>: ANALYSE DES RÉSULTATS .....</b>                                  | <b>207</b> |
| 8.1               | Analyse des résultats déterministes.....                              | 209        |
| 8.1.1             | Comparaison du modèle cloisonné (MC2) et modèle actuariel (MA2) ..... | 210        |
| 8.1.2             | Comparaison du modèle actuariel (MA1) et du modèle MA2... ..          | 212        |
| 8.1.3             | Analyse des méthodes de résolution du modèle MA2 .....                | 215        |
| 8.1.4             | Analyse des méthodes de résolution du modèle MA1 .....                | 221        |
| 8.2               | Analyse des modèles stochastiques .....                               | 223        |
| 8.2.1             | Modèle possibiliste .....                                             | 223        |
| 8.2.2             | Modèle cloisonné stochastique .....                                   | 224        |
| 8.3               | Analyse de sensibilité .....                                          | 227        |
| 8.3.1             | Effet de l'attrition sur MA2 .....                                    | 228        |
| 8.3.2             | Effet des coûts de recrutement.....                                   | 229        |
| 8.3.3             | Effet du départ des clients sur MA2 .....                             | 231        |
| 8.3.4             | Effet de la contrainte des nouveaux clients sur MA2.....              | 232        |
| 8.3.5             | Effet du volume d'argent sur MA2 .....                                | 234        |
| 8.3.6             | Effet de la limite de vente sur MA2 .....                             | 236        |
| 8.3.7             | Effet de la pondération des profits à long terme sur MA1 .....        | 238        |

|                                      |            |
|--------------------------------------|------------|
| <b>CHAPITRE 9 : CONCLUSION .....</b> | <b>241</b> |
| <b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>            | <b>247</b> |
| <b>ANNEXES .....</b>                 | <b>260</b> |

## Liste des tableaux

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| TABLEAU 3.1 : RAPPORT SUR LA PÉNÉTRATION DE MARCHÉ .....                               | 27  |
| TABLEAU 4.1 : BREF APERÇU DES MODÈLES DÉTERMINISTES.....                               | 54  |
| TABLEAU 4.2 : FIABILITÉ DES DONNÉES.....                                               | 55  |
| TABLEAU 4.3 : COEFFICIENT DE PÉNALITÉ POUR LES CONTRAINTES DE DÉPART<br>.....          | 79  |
| TABLEAU 4.4 : COEFFICIENT DE PÉNALITÉ POUR LES CONTRAINTES DE<br>DISTRIBUTION.....     | 83  |
| TABLEAU 4.5 : COEFFICIENT DE PÉNALITÉ POUR LES LIMITES DE VENTE.....                   | 86  |
| TABLEAU 4.6 : TAUX D'ATTRITION POUR UNE NOUVELLE HYPOTHÈQUE .....                      | 107 |
| TABLEAU 4.7 : CALCUL DE LA VALEUR ACTUALISÉE D'UNE HYPOTHÈQUE .....                    | 110 |
| TABLEAU 4.8 : VALEUR D'UNE HYPOTHÈQUE POUR DIFFÉRENTS ÂGES.....                        | 112 |
| TABLEAU 4.9 : CALCUL DE LA VALEUR ACTUALISÉE D'UN FOND MUTUEL.....                     | 114 |
| TABLEAU 4.10 : FACTEUR MULTIPLICATIF DE VENTE.....                                     | 118 |
| TABLEAU 4.11 : FACTEUR MULTIPLICATIF DE DISTRIBUTION.....                              | 119 |
| TABLEAU 4.12 : FACTEUR MULTIPLICATIF SUR LES DÉPARTS .....                             | 120 |
| TABLEAU 5.1 : BREF APERÇU DES MÉTHODES DE RÉOLUTION DES MODÈLES<br>DÉTERMINISTES ..... | 126 |
| TABLEAU 6.1 : BRÈVE DESCRIPTION DES MODÈLES STOCHASTIQUES .....                        | 168 |
| TABLEAU 6.2 : DIFFÉRENCE ENTRE LA DISTRIBUTION POSSIBILISTE ET<br>PROBABILISTE.....    | 170 |

|                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| TABLEAU 6.3 : FACTEURS INFLUENTS SUR LES DONNÉES.....                                                   | 175 |
| TABLEAU 6.4 : INFLUENCES DE LA COMPÉTITION .....                                                        | 179 |
| TABLEAU 6.5 : INFLUENCES DES TAUX D'INTÉRÊT .....                                                       | 180 |
| TABLEAU 6.6 : INFLUENCES DU RENDEMENT DU MARCHÉ.....                                                    | 181 |
| TABLEAU 6.7 : INFLUENCE DES SCÉNARIOS SUR L'ENSEMBLE DES FACTEURS                                       | 182 |
| TABLEAU 7.1 : BREF APERÇU DES MÉTHODES DE RÉOLUTION DES MODÈLES<br>STOCHASTIQUES .....                  | 187 |
| TABLEAU 7.1 : FRÈRE DE CHAQUE SCÉNARIO.....                                                             | 200 |
| TABLEAU 8.1 : PROFITABILITÉ DES SECTEURS À TRAVERS LES PÉRIODES (MC2)<br>.....                          | 211 |
| TABLEAU 8.2 : PROFITABILITÉ DES SECTEURS À TRAVERS LES PÉRIODES (MA2)<br>.....                          | 211 |
| TABLEAU 8.3 : COMPARAISON DES MODÈLES ACTUARIELS AVANT ET APRÈS LA<br>MODIFICATION DES CONTRAINTES..... | 216 |
| TABLEAU 8.4 : COMPARAISON DES MODÈLES LINÉARISÉS ET NON LINÉARISÉS<br>.....                             | 217 |
| TABLEAU 8.5 : COMPARAISON DES ALGORITHMES DE DÉPART .....                                               | 218 |
| TABLEAU 8.6 : COMPARAISON DE LA MÉTHODE DE FRANK-WOLFE ET LA<br>MÉTHODE DE RÉOLUTION BARRIER .....      | 219 |
| TABLEAU 8.7 : COMPARAISON DE LA MÉTHODE DE DANTZIG-WOLFE ET CELLE<br>DE CPLEX.....                      | 220 |
| TABLEAU 8.8 : TESTS POUR L'ANALYSE DE SENSIBILITÉ.....                                                  | 228 |
| TABLEAU A.1 : COMPARAISON DES RÉSULTATS DES SCÉNARIOS SOUS LES<br>MODÈLES MA2 ET MCS .....              | 261 |

## Liste des figures

|                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURE 2.1 : ILLUSTRATION D'UN SECTEUR .....                                                      | 9   |
| FIGURE 2.2 : ILLUSTRATION D'UN SEGMENT AVEC CLIENTS EXCLUSIFS .....                               | 10  |
| FIGURE 3.1 : LA NON-LINÉARITÉ DES FONCTIONS DE COÛT .....                                         | 33  |
| FIGURE 3.2 : LA NON-LINÉARITÉ DES PROFITS MOYENS .....                                            | 34  |
| FIGURE 3.3 : LES PROFITS CUMULATIFS .....                                                         | 35  |
| FIGURE 4.1 : ÉTABLISSEMENT DE GROUPES AVEC 2 PRODUITS.....                                        | 58  |
| FIGURE 4.2 : ILLUSTRATION DU MODÈLE CLOISONNÉ.....                                                | 63  |
| FIGURE 4.3 : ILLUSTRATION GÉNÉRALE D'UNE FONCTION DE PÉNALITÉ SUR<br>LE DÉPART DE CLIENTS.....    | 78  |
| FIGURE 4.4 : ILLUSTRATION D'UNE FONCTION DE PÉNALITÉ DE DISTRIBUTION.....                         | 82  |
| FIGURE 4.5 : ILLUSTRATION GÉNÉRALE D'UNE FONCTION DE PÉNALITÉ SUR LES<br>VENTES DE PRODUITS ..... | 85  |
| FIGURE 4.6 : PROFIT DE LA BANQUE SUR UNE NOUVELLE HYPOTHÈQUE AU<br>COURS DE SA VIE .....          | 102 |
| FIGURE 4.7 : PROFIT DE TOUS LES CLIENTS ACTUELS SUR LES HYPOTHÈQUES AU<br>COURS DE SA VIE .....   | 103 |
| FIGURE 4.8 : PROFIT MOYEN DES CLIENTS ACTUELS SUR LES HYPOTHÈQUES AU<br>COURS DE SA VIE .....     | 103 |
| FIGURE 4.9 : ATTRITION D'UNE HYPOTHÈQUE.....                                                      | 107 |
| FIGURE 4.10 : CALCUL DE LA RENTABILITÉ DU MODÈLE ACTUARIEL .....                                  | 122 |

|                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURE 5.1 : LINÉARISATION D'UNE FONCTION DE PÉNALITÉ .....                                                        | 132 |
| FIGURE 5.2 : STRUCTURE BLOC-ANGULAIRE AVEC CONTRAINTES COUPLANTES<br>.....                                         | 142 |
| FIGURE 5.3 : DÉCOMPOSITION DANTZIG-WOLFE .....                                                                     | 144 |
| FIGURE 5.4 : PSEUDO-CODE POUR LA DÉCOMPOSITION DE DANTZIG-WOLFE                                                    | 148 |
| FIGURE 5.5 : STRUCTURE EN ESCALIER .....                                                                           | 148 |
| FIGURE 5.6 : DÉCOMPOSITION NICHÉE .....                                                                            | 150 |
| FIGURE 5.7 : PSEUDO-CODE POUR LA DÉCOMPOSITION NICHÉE.....                                                         | 154 |
| FIGURE 5.8 : PSEUDO-CODE POUR L'ALGORITHME TABOU .....                                                             | 164 |
| FIGURE 6.1 : ILLUSTRATION D'UNE FONCTION TRIANGULAIRE DE POSSIBILITÉ                                               | 169 |
| FIGURE 6.2 : FONCTION TRAPÉZOÏDALE D'UN NOMBRE FLOU .....                                                          | 172 |
| FIGURE 6.3 : ILLUSTRATION DE L'ARBRE DES DÉCISIONS .....                                                           | 177 |
| FIGURE 7.1 : ILLUSTRATION DES FONCTIONS D'ADHÉSION DE $\tilde{A}$ ET $\tilde{B}$ .....                             | 193 |
| FIGURE 7.2 : SÉQUENCE DES DÉCISIONS ET NON-ANTICIPATION .....                                                      | 199 |
| FIGURE 7.3 : ALGORITHME DU DIAGONAL QUADRATIC APPROXIMATION .....                                                  | 204 |
| FIGURE 8.1 : COMPARAISON DE LA DISTRIBUTION PAR ÂGE DES MODÈLES MC2<br>ET MA2 SUR 3 PÉRIODES.....                  | 212 |
| FIGURE 8.2 : COMPARAISON DE LA DISTRIBUTION PAR STYLE DE VIE DES<br>MODÈLES MC2 ET MA2 SUR 3 PÉRIODES .....        | 213 |
| FIGURE 8.3 : COMPARAISON DE LA DISTRIBUTION DES VENTES PAR GROUPE<br>D'ÂGE DES MODÈLES ACTUARIELS MA1 ET MA2.....  | 214 |
| FIGURE 8.4 : COMPARAISON DE LA DISTRIBUTION DES VENTES PAR STYLE DE VIE<br>DES MODÈLES ACTUARIELS MA1 ET MA2 ..... | 215 |
| FIGURE 8.5 : COMPARAISON DE LA DISTRIBUTION PAR ÂGE DES MÉTHODES DE<br>RÉSOLUTION DE MA1 .....                     | 222 |
| FIGURE 8.6 : COMPARAISON DE LA DISTRIBUTION PAR STYLE DE VIE DES<br>MÉTHODES DE RÉSOLUTION DE MA1 .....            | 222 |
| FIGURE 8.7 : COMPARAISON DES PROFITS DES MÉTHODES DES A-COUPES ET<br>DES INÉGALITÉS FLOUES.....                    | 224 |

|                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURE 8.8 : PROFITS ANNUELS DU MODÈLE MA2 SOUS DIFFÉRENTS<br>SCÉNARIOS .....                                        | 225 |
| FIGURE 8.9 : PROFITS ANNUELS DU MODÈLE MCS SOUS DIFFÉRENTS<br>SCÉNARIOS .....                                        | 226 |
| FIGURE 8.10 : EFFET DE LA VARIATION DE L'ATTRITION SUR LES PROFITS ....                                              | 229 |
| FIGURE 8.11 : EFFET DE LA VARIATION DE L'ATTRITION DES HYPOTHÈQUES SUR<br>LES VENTES .....                           | 230 |
| FIGURE 8.12 : EFFET DE LA VARIATION DES COÛTS DE RECRUTEMENT DES<br>HYPOTHÈQUES SUR LES PROFITS .....                | 231 |
| FIGURE 8.13 : EFFET DE LA VARIATION DU POURCENTAGE DE DÉPART DE<br>CLIENTS SUR LES PROFITS .....                     | 232 |
| FIGURE 8.14 : EFFET DE LA VARIATION DU POURCENTAGE DE DÉPART DE<br>CLIENTS SUR LA DISTRIBUTION PAR ÂGE .....         | 233 |
| FIGURE 8.15 : EFFET DE LA VARIATION DU POURCENTAGE DE DÉPART DE<br>CLIENTS SUR LA DISTRIBUTION PAR STYLE DE VIE..... | 233 |
| FIGURE 8.16 : EFFET DE LA VARIATION DU POURCENTAGE DE NOUVEAUX<br>CLIENTS SUR LES PROFITS .....                      | 234 |
| FIGURE 8.17 : EFFET DE LA VARIATION DU POURCENTAGE DE NOUVEAUX<br>CLIENTS SUR LA DISTRIBUTION PAR ÂGE .....          | 235 |
| FIGURE 8.18 : EFFET DE LA VARIATION DU POURCENTAGE DE NOUVEAUX<br>CLIENTS SUR LA DISTRIBUTION PAR STYLE DE VIE.....  | 235 |
| FIGURE 8.19 : EFFET DE LA VARIATION DE LA CROISSANCE DU VOLUME<br>D'ARGENT SUR LES PROFITS.....                      | 236 |
| FIGURE 8.20 : EFFET DE LA VARIATION DES COÛTS DE LA PÉNALITÉ DU VOLUME<br>SUR LA DISTRIBUTION PAR ÂGE.....           | 237 |
| FIGURE 8.21 : EFFET DE LA VARIATION DES COÛTS DE LA PÉNALITÉ DU VOLUME<br>SUR LA DISTRIBUTION PAR STYLE DE VIE ..... | 237 |
| FIGURE 8.22 : EFFET DE LA VARIATION DE LA LIMITE DES VENTES DE PRODUITS<br>SUR LES PROFITS.....                      | 238 |

|                                                                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURE 8.23 : EFFET DE LA VARIATION DE LA PONDÉRATION DES REVENUS À<br>COURT ET LONG TERME SUR LA DISTRIBUTION PAR ÂGE.....              | 239 |
| FIGURE 8.24 : EFFET DE LA VARIATION DE LA PONDÉRATION DES REVENUS À<br>COURT ET LONG TERME SUR LA DISTRIBUTION PAR STYLE DE VIE<br>..... | 240 |

## Liste des annexes

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| ANNEXE A : Tableaux comparatifs..... | 260 |
|--------------------------------------|-----|

## Liste des modèles

|                                                        |     |
|--------------------------------------------------------|-----|
| Modèle 4.1 : Modèle Cloisonné (MC1) .....              | 63  |
| Modèle 4.2 : Modèle Cloisonné (MC2) .....              | 71  |
| Modèle 4.3 : Modèle Actuariel (MA1) .....              | 93  |
| Modèle 4.4 : Modèle Actuariel (MA2) .....              | 124 |
| Modèle 6.1 : Modèle Possibiliste (MP) .....            | 173 |
| Modèle 6.2 : Modèle Cloisonné Stochastique (MCS) ..... | 185 |

# Chapitre 1

## Introduction

Avant les années 1980, l'industrie financière était étroitement réglementée et les marges de profit étaient protégées. Des lignes bien définies divisaient les divers fournisseurs de services financiers et limitaient la compétition. Mais la déréglementation des institutions financières des années 1980 a laissé les banques face à une intensification de la compétition des "quasi-banques" tel les compagnies d'assurance et les compagnies d'investissement.

Dans un mouvement rapide vers un environnement où les consommateurs sont de plus en plus exigeants, les banques ont dû créer de nouveaux produits mieux adaptés à cette nouvelle réalité. La segmentation des marchés est devenue une stratégie essentielle pour procurer de façon efficace à sa clientèle un nombre croissant de produits. Devant ces modifications, les banques ont utilisé des techniques de plus en plus

poussées pour s'adapter aux conditions changeantes de leur environnement (Fabozzi et Trovato 1976).

Tous les secteurs des banques ont dû réviser la manière de traiter leurs activités. Ainsi, la gestion des investissements a dû se construire un portefeuille optimal quant aux risques et à la rentabilité (Markowitz 1959). Il a aussi fallu bâtir des horaires pour les employés et réduire les coûts d'opérations. Le secteur du marketing a dû s'adapter aux nouveaux développements technologiques tel le guichet automatique et le service par téléphone en créant de nouveaux produits mieux adaptés.

Dans cet exposé, nous abordons l'un des problèmes du secteur de marketing des banques. Il se trouve que depuis plusieurs années, les banques cherchent à augmenter l'efficacité de leur promotion. Plusieurs techniques, comme la qualité totale et le service total, ont été employées pour résoudre ce problème. En 1994, des consultants à la Banque Royale ont proposé une méthode appelée le "streetcorner strategy". Cette technique essaie de vendre des produits précis à une clientèle spécifique. Le seul problème de cette technique est qu'elle n'a pas une vue globale du marché, c'est-à-dire qu'elle ne sait pas quelle clientèle viser. En effet, les personnes travaillant dans ce milieu doivent souvent se fier à leur connaissance du marché et à leur intuition pour bien cibler leur marché. Comme il y a un nombre croissant de produits et que le marché est de plus en plus segmenté, cette tâche devient beaucoup plus difficile et moins précise. Ce manque d'outils de planification est le problème principal que ce

travail cherche à combler avec des modèles d'optimisation.

Nous pouvons définir le problème de l'optimisation des marchés comme la vente de plusieurs produits à une clientèle ayant des besoins différents de façon à maximiser les profits à court et à long terme. Selon Kotler (1997), le problème de l'optimisation des marchés est habituellement divisé en trois grands sous-problèmes. Ceux-ci sont **la segmentation des marchés, le positionnement des produits et le ciblage des marchés.**

Le problème de la segmentation cherche à maximiser les profits en segmentant le marché de façon à identifier les clients ayant des besoins similaires ce qui facilite la vente des produits. Le positionnement de produit s'attaque au même problème mais dans le sens inverse. Il cherche à maximiser les profits en déterminant les caractéristiques de produits recherchés par les clients dans le marché. Le ciblage de marché est le problème relié à la planification optimale des efforts de vente de produits. Il combine en fait les informations obtenues par la segmentation et par le positionnement des produits de façon à optimiser les profits à court et long terme par la planification des efforts de vente, aussi appelée le ciblage de marché.

L'approche habituelle trouvée dans la littérature, dont nous discutons en profondeur dans le chapitre 3, passe par la réévaluation de la segmentation ou du positionnement des produits. Il s'agit des méthodes coûteuses à mettre en place étant donné

qu'elles sont très fortement reliées aux types de bases de données et donc à tout le système informatique des banques. De plus, le manque de méthodes de planification est selon nous assez important pour réduire les avantages qu'elles apportent à moyen et à long terme. En effet, le travail demandé par la réévaluation de la segmentation et du positionnement des produits est tellement grand qu'il est pratiquement impossible que les solutions qu'ils apportent restent continuellement optimales. C'est pour cette raison que nous considérons que ces solutions peuvent être très bonnes à court terme mais qu'elles se dégradent avec le temps.

Dans ce travail, nous avons adopté une approche complètement différente. Nous avons supposé que la segmentation et le positionnement des produits sont des données du problème et nous avons proposé un tout nouveau problème qui ajoute la composante de planification manquante dans toutes les méthodes d'optimisation des marchés.

Nous avons donc proposé, pour la première fois dans la littérature, des modèles d'optimisation qui ne s'attaquent qu'au ciblage des marchés. Ceci est une première dans l'industrie bancaire et constitue la contribution la plus importante de cette thèse.

Le but de ce travail est de proposer des modèles d'optimisation pouvant être incorporés à un système de support à la décision pour le secteur du marketing. Ces modèles auront pour but de cibler les marchés présents et futurs les plus profitables

sans modifier les caractéristiques des produits actuels préconisées par les techniques de positionnement de produits. Ils devront tenir compte de la compétition, de l'évolution des goûts et de la sensibilité de certains produits aux fluctuations des taux d'intérêt. Le fait qu'un modèle illustre bien la réalité est très important car les résultats trouvés vont servir directement à la planification des ventes. Dans le cas des grandes banques, une minuscule hausse de la marge des profits peut représenter une somme importante.

Pour atteindre notre but principal, nous avons suivi un cheminement qui nous a permis de produire d'autres contributions importantes à savoir l'identification des facteurs les plus influents dans le problème de l'optimisation des marchés et la présentation d'une revue de littérature sur chacun d'eux. Deuxièmement, l'exploration de plusieurs avenues de résolution ont été étudiées afin de donner des pistes pour développer davantage des méthodes plus efficaces pour des grands problèmes. Finalement, une analyse de sensibilité des solutions nous a permis d'identifier les facteurs dont la variation influence le plus le ciblage du marché.

Cette thèse est divisée en quatre parties : description du problème, modèles déterministes, modèles stochastiques et analyse des résultats et conclusion. La première partie comprend les chapitres 2 et 3. Au chapitre 2, nous faisons une description poussée du problème. Le chapitre 3 porte sur la revue de la littérature touchant les facteurs qui influencent le plus notre problème. Ce chapitre est divisé en deux grandes sections. La première section s'attarde aux facteurs dits primaires qui ont une influence

importante sur la modélisation du problème. La seconde partie présente une brève revue des facteurs secondaires qui n'ont pas une influence directe sur la modélisation mais plutôt sur les données et les hypothèses adoptées.

La deuxième partie du travail englobe les chapitres 4 et 5. Dans le chapitre 4, nous nous concentrons sur la construction de modèles déterministes et dans le chapitre 5, nous proposons quelques approches pour les résoudre. Deux grandes classes de modèles déterministes sont proposés (les modèles cloisonnés et les modèles actuariels) chacune avec leurs avantages et désavantages.

La troisième partie de la thèse comprend les chapitres 6 et 7. Le chapitre 6 est consacrée à la confection de modèles stochastiques comme le modèle possibiliste et le modèle cloisonné stochastique. Différentes méthodes de résolution sont proposées dans le chapitre 7.

Finalement dans la dernière partie (chapitre 9), nous analysons l'efficacité des méthodes de résolution pour les modèles déterministes et stochastiques. De plus, nous faisons une analyse de sensibilité des facteurs les plus influents sur les modèles.

## Première partie

# Description du problème stochastiques

## Chapitre 2

### Description du problème

Dans ce chapitre, nous décrivons le problème de l'optimisation des marchés et les divers objectifs et contraintes qui le composent. Mais, tout d'abord, nous introduisons quelques définitions propres à ce travail.

#### **SECTEUR**

L'ensemble des personnes ayant la possibilité d'être un client d'une succursale bancaire ou dans un ensemble de succursales. En fait, ce sont surtout les personnes habitant ou travaillant près d'une succursale bancaire.

#### **MARCHÉ**

L'ensemble des consommateurs ayant la possibilité d'acheter un produit comme par exemple le marché des hypothèques.

- PÉNÉTRATION** Le pourcentage de personnes faisant partie d'un marché ciblé qui a acheté au moins un produit de la banque.
- SEGMENTATION** La division d'un marché en sous-groupes de clients ayant des caractéristiques et des besoins similaires. Par exemple, nous pouvons segmenter le marché des hypothèques selon l'âge des clients car nous pouvons penser que l'âge est une caractéristique importante dans la compréhension des besoins des clients.
- CLIENT EXCLUSIF** Client qui a investi la grande partie de son argent dans une même banque.

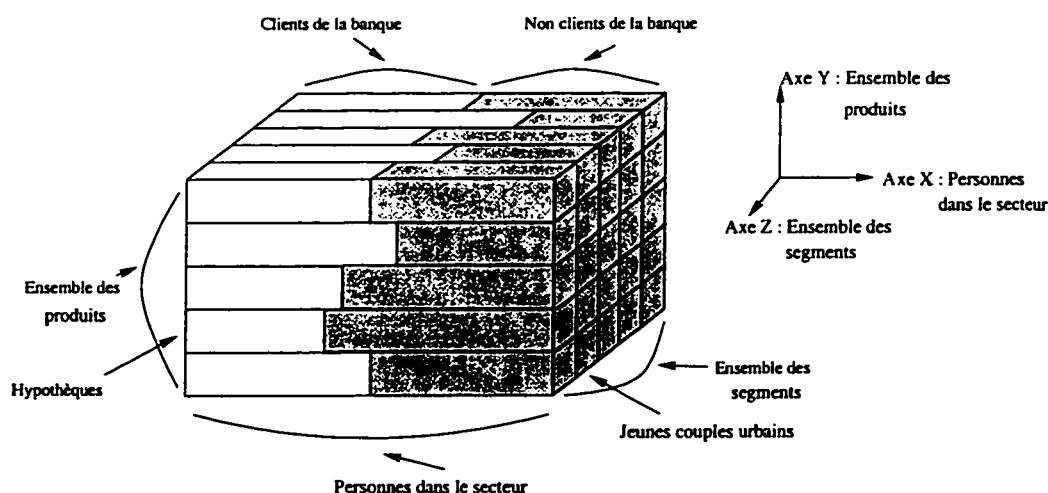


**Figure 2.1 – Illustration d'un secteur**

À la figure 2.1, nous illustrons un secteur de la banque pour aider à mieux comprendre la relation entre la segmentation, les produits et le secteur. Le cube illustre

la totalité des clients d'un secteur. Ce secteur est composé d'un ensemble de produits qui est offert par la banque (axe 'y') et par un ensemble de segments (la segmentation des marchés, à l'axe 'z'). Ces segments ont été étudiés par les spécialistes en marketing de la Banque Royale pour englober une quantité crédible de clients ayant des besoins similaires comme par exemple les jeunes couples en milieu urbain.

La pénétration du marché est illustrée par la partie blanche du secteur. Celle-ci désigne les clients d'un segment ayant acheté un produit dans la banque. La partie foncée représente les personnes qui ne détiennent pas ce produit en particulier. Si nous regardons de plus près un seul segment, nous pouvons faire la différence entre les clients exclusifs et non exclusifs comme il est illustré à la figure 2.2.

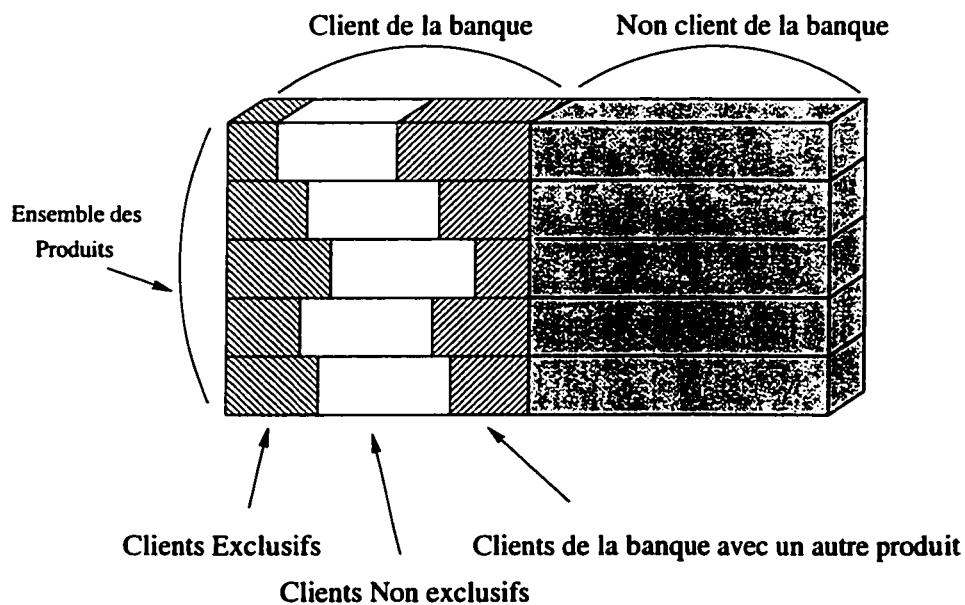


**Figure 2.2 – Illustration d'un segment avec clients exclusifs**

Ce marché est divisé entre clients et non-clients de la banque. La notion d'exclusivité a été utilisée pour mieux distinguer les types de clients. Pour un produit spécifique, la première tranche représente les clients exclusifs. Ensuite, nous avons les clients non exclusifs et finalement, les clients de la banque qui ont acheté au moins un produit mais qui ne détiennent pas ce produit en particulier. Cette dernière tranche est, en fait, incluse dans la partie foncée du cube de la figure 2.1 c'est-à-dire les personnes qui ne possèdent pas le produit. Par ces graphiques, nous pouvons voir qu'une banque peut accroître ses profits en allant chercher de nouveaux clients, en augmentant le nombre de clients exclusifs ou en pratiquant la vente croisée i.e. la vente de produits à des personnes qui sont déjà clients de la banque.

Dans les sections qui vont suivre, nous allons expliquer plus en détail l'importance de faire la distinction entre les clients qui possèdent un produit de la banque mais qui ne possèdent pas le produit considéré et les personnes qui ne sont pas clients de la banque. Mais avant de nous lancer dans ces explications, nous allons discuter des raisons qui nous ont poussé à étudier le problème du marché des banques et nous décrivons l'environnement dans lequel ce problème a été étudié.

## 2.1 Environnement du problème

Avant les années 1980, l'industrie bancaire était fortement réglementée. Ceci avait pour effet de limiter la compétition que se faisaient les banques et interdisait l'accès à ce marché aux autres institutions financières. La segmentation était rarement pratiquée et le nombre de nouveaux produits était minime. Donc, le marketing bancaire se limitait à faire de la promotion pour toucher le plus grand nombre de clients.

Mais depuis la déréglementation des institutions financières, la compétition a fortement augmenté avec l'arrivée des "quasi-banques", principalement les institutions financières et d'investissement. La déréglementation a permis aux banques d'élargir leur gamme de produits en entrant dans le domaine des assurances, du courtage et de la fiducie ce qui leur étaient interdit avant la déréglementation. Ceci a eu pour effet que les banques ont dû segmenter leur marché et créer de nouveaux produits plus spécialisés. De plus, ce nouvel environnement s'est compliqué avec l'introduction des différentes technologies comme les guichets automatiques.

Face à tous ces changements, le marketing a utilisé des stratégies plus complexes. Mais avec la hausse du nombre de segments et de produits, il devient très difficile de cibler le marché de façon optimale. Selon Clancy et Roberts (1992), la maximisation des profits ne peut être qu'atteinte que par un ciblage optimal des marchés. Cependant pour atteindre cet objectif, nous devons posséder une quantité importante

d'informations sur les produits et leur rentabilité de même que sur les clients, la segmentation et la potentialité de ceux-ci. D'un autre côté, McCormick, McMahon et Goetzmann (1996) estiment qu'il faut tellement d'informations qu'il est futile de s'attaquer à ce problème. Selon nous, ce problème, même s'il est très difficile d'y trouver une solution qui soit véritablement optimale lorsqu'appliqué à la réalité, présente une forte amélioration sur le système actuel basé uniquement sur l'intuition.

Le problème du ciblage de marché est tout d'abord un problème de marketing. En effet, les implications de celui-ci touchent directement la rentabilité des banques et la façon de vendre les produits. De plus, presque toutes les données utilisées dans ce problème proviennent du département du marketing et quelques unes du département de finance.

D'un autre côté, les divers systèmes d'information (les bases de données) disponibles où les données pouvant être recueillies influencent fortement la façon de traiter le problème. Il existe un lien direct entre les types de données et les modèles que l'on peut créer pour résoudre le problème. Avec un meilleur traitement des données, nous pouvons accroître la qualité d'un modèle mathématique.

Mais sans les outils que nous procure l'informatique, un tel problème serait très difficile à résoudre à cause de la grande quantité de données à traiter. Sans la venue de l'informatique, ce problème n'aurait peut-être jamais été proposé. L'ajout

des mathématiques, en particuliers de la recherche opérationnelle, nous permet de modéliser le problème de l'optimisation des marchés de façon efficace. Cette composante a la fonction très importante de tout réunir en un modèle pour trouver une solution.

Finalement, la dernière composante de l'environnement est le système de support à la décision car même avec le meilleur modèle et toutes les données, nous ne pouvons pas remplacer les connaissances et l'expérience du personnel en marketing. En effet, il y a tellement de données disponibles qu'il est très difficile pour quelqu'un sans expérience de juger de la qualité de ces données. Il faut donc créer un bon compromis entre une utilisation simple du système et des modèles efficaces. Dans ce travail, nous allons surtout nous attaquer au problème de la modélisation.

## 2.2 Les objectifs

L'introduction d'ordinateurs plus puissants et la disponibilité de l'information nous permettent d'établir avec plus de facilité les profils des clients favorisant ainsi la segmentation des marchés. De son côté, la déréglementation des institutions financières permet aux banques d'accroître le nombre de produits à offrir. Il devient alors important pour le secteur du marketing de cibler les marchés, c'est-à-dire de

savoir quel type de produits il faut vendre et à quelle clientèle.

Sachant que l'action de cibler un marché a un impact direct sur les profits d'une banque, il est important de comprendre tous les mécanismes en jeu et d'en tenir compte dans les décisions. La fonction première des modèles sera donc de maximiser les profits de la vente de produits en faisant varier la pénétration de différents marchés.

D'autres objectifs peuvent être ajoutés à cela. En effet, les banques cherchent à augmenter les profits mais aussi à augmenter la quantité de clients qu'elles détiennent en exclusif car ce sont habituellement des clients rentables. On explique cela par le fait que la rentabilité d'un produit est reliée de très près à la quantité d'argent investi. Comme un client exclusif met la grande partie de son avoir à la même banque, les profits que celle-ci retire sont plus grands.

Cependant, nous devons construire un portefeuille diversifié de clients car une banque ne peut pas se spécialiser dans un type de clients qui pourrait devenir non rentable. Il y a aussi le fait que les clients les plus rentables sont habituellement les plus convoités par les autres banques donc il y a une possibilité d'attrition i.e. possibilité que ces clients quittent la banque.

Il existe tout de même plusieurs contraintes qui rendent la tâche difficile. Premièrement, toutes les décisions doivent être réalisables dans un délai donné. Nous

ne pouvons pas soumettre une solution qui demande beaucoup de temps à implanter pour obtenir le résultat voulu.

Deuxièmement, il faut tenir compte de la compétition. Dans quelques secteurs, il est difficile d'aller chercher de nouveaux clients à cause des efforts agressifs des concurrents. Dans certains cas, un secteur peut être plus facile d'accès mais la vente d'un produit spécifique est dominée par une autre institution financière. Par exemple, la vente de REÉR dans un secteur où est établie une institution spécialisée dans la gestion des REÉR.

Une autre contrainte très importante est la demande de produits par les clients. En effet, la segmentation fait en sorte qu'il est possible de distinguer les demandes pour chaque produit de la part des différents types de clients. L'évolution des goûts de la population et l'arrivée de nouvelles technologies jouent aussi un rôle dans la modélisation du problème.

Des limites sur la quantité de produits qu'une succursale peut vendre sont essentielles si l'on veut garder la solution réalisable. Ces limites permettent d'éviter de mettre la succursale dans une position difficile si elle se spécialise dans la vente d'un produit et que celui-ci devient non rentable.

Voici un bref résumé des différents objectifs et contraintes.

**Objectif principal :**

- Maximiser la rentabilité en ne faisant varier que la pénétration des marchés ;

**Objectifs secondaires :**

- Augmenter la quantité de clients exclusifs ;
- Construire une clientèle diversifiée ;

**Contraintes :**

- Implanter les changements proposés dans un temps donné ;
- Limiter la quantité vendue des produits ;
- Tenir compte de la demande de produits par les clients ;
- Tenir compte de la compétition ;
- Tenir compte de l'évolution des goûts des clients.

## Chapitre 3

# Terminologie et revue de la documentation

Dans cette partie, nous discutons de différents problèmes reliés de près au problème de l'optimisation des marchés. En plus de les définir, nous examinons ce qu'il s'est fait sur ces problèmes dans la documentation.

### 3.1 Classification des problèmes

Les problèmes que l'on retrouve dans un contexte bancaire sont très diversifiés. Plusieurs secteurs bancaires utilisent les mathématiques appliquées pour résoudre une partie de ces problèmes. Un article synthèse récent (Zanakis et al 1986) classe en 9 groupes les divers secteurs bancaires où des modèles mathématiques ont été utilisés :

1. Marketing et Distribution ;
2. Gestion des Liquidités ;
3. Gestion des Prêts ;
4. Gestion des Investissements ;
5. Planification Financière ;
6. Gestion des Actifs ;
7. Opérations ;
8. Gestion de la Main d'oeuvre ;
9. Autres (Marché Monétaire, Arbitrage).

Pour ce travail, le secteur du marketing nous intéresse plus particulièrement. On y retrouve plusieurs facteurs qui touchent de près ce travail telles la pénétration des marchés, la segmentation des marchés, la rentabilité des clients et des produits, la

compétition et les caractéristiques des clients. D'autres problèmes comme le rendement du marché et les taux d'intérêt ne sont pas directement associés au marketing mais ils ont une influence importante sur le problème que l'on traite dans ce travail.

Il existe aussi d'autres problèmes importants pour le secteur du marketing qui ne touchent pas directement à notre problème d'optimisation des marchés. Ceux-ci ont une influence indirecte comme l'effet de la publicité sur les habitudes des clients (Hughes 1992) et l'image de la banque (Brown et al 1977 et Durand et al 1978). Ces influences sont implicitement traitées dans les différentes hypothèses que le personnel du marketing doit poser sur l'évolution des ventes de produits et de la demande des clients.

Nous pouvons diviser en deux grandes sections les facteurs qui ont une influence sur le problème que nous étudions. La première de ces sections englobe tous les facteurs, que nous appelons les influences primaires, qui ont une influence directe sur la modélisation du problème d'optimisation. La deuxième grande section est pour les influences secondaires qui n'influencent pas la façon dont nous faisons notre modélisation mais plutôt la qualité des données que nous utilisons.

Nous retrouvons parmi les influences primaires cette liste de facteurs :

- La formulation mathématique du problème ;

- La pénétration des marchés ;
- Client exclusif ;
- La segmentation ;
- Le positionnement des produits ;
- La rentabilité des produits ;
- La potentialité des clients ;
- Le coût de recrutement des clients ;
- L'attrition des produits.

Pour ce qui est des facteurs secondaires, nous avons :

- Structure de la banque ;
- Stratégies de la banque ;
- Taux d'intérêt, rendement du marché et compétition ;
- Image de la banque ;
- Attributs des produits ;
- L'évolution de la population.

Dans les sections qui suivent, nous allons décrire en profondeur l'influence de chacun de ces facteurs sur notre problème d'optimisation des marchés. Nous allons aussi faire une brève revue de la documentation sur chacun de ces facteurs en ce qui concerne le problème de l'optimisation des marchés.

Pour plus d'information sur l'évolution des sciences mathématiques dans l'industrie bancaire, nous conseillons au lecteur les articles de Cohen et al (1981) et de Zanakis et al (1986).

## **3.2 Influences primaires**

### **3.2.1 La formulation mathématique du problème**

En éliminant tout changement possible dans la segmentation des marchés et le positionnement des produits, le problème de l'optimisation des marchés se résume en un problème de ciblage de marchés. Ce problème, dont la formulation mathématique n'a jamais été proposée auparavant, ressemble à des problèmes que l'on retrouve dans l'industrie pétrochimique. Tout d'abord, en production et distribution, on s'efforce à maximiser les profits en faisant varier la quantité obtenue des différents produits dérivés. Dans les deux cas, nous cherchons le mélange des produits dérivés ou des pénétrations de marchés qui maximisent les profits. Pour le problème de pétrochimie, Duffuaa et al (1992) utilisent une approche de programmation linéaire tout comme Gurkan et al (1989) et Charnes et al (1954).

Il y a aussi le problème de mélange en pétrochimie de Charnes et al (1952) qui

ressemble un peu au problème de l'optimisation des marchés. Dans ce problème, on essaie de créer diverses essences avec des niveaux différents de plomb et d'octane pour les avions. Pour ce problème, la programmation linéaire est aussi utilisée. Dans une formulation différente et plus réaliste de ce problème, Lasdon (1970) utilise la programmation non linéaire et plus particulièrement la méthode du gradient réduit généralisée pour résoudre sa modélisation. Plus d'information sur les différentes techniques utilisées en pétrochimie peuvent être trouvées dans l'article de Bodington (1990).

### **3.2.2 La pénétration des marchés**

Avant tout, nous rappelons au lecteur que la pénétration des marchés est définie par Kwak et al (1991) comme étant le pourcentage de personnes vivant dans un secteur (autour d'une succursale) qui ont acheté au moins un produit de cette banque. Il est important de noter que la pénétration d'un marché est un concept différent de la part de marché. La part de marché peut être définie par Armstrong et al (1987) comme étant la quantité en dollars de vente par une banque sur la quantité totale de vente de toutes les banques d'un secteur. Beaucoup d'études ont été menées sur l'importance de la part de marché. Toutefois, nous cherchons la quantité optimale de clients dans chaque marché et non la part de chaque marché. Selon Pitt et Morris (1995), les mesures de performance du marketing comme la pénétration des marchés semblent

être de plus en plus acceptées comme indicateurs précis de la santé d'une firme que la part de marché.

La pénétration des marchés dépend fortement de la demande de produits par les clients. Si les clients ne sont pas intéressés à acheter un produit, il sera très difficile de faire augmenter la pénétration de ce marché. Toutefois, dans l'industrie bancaire, il y a un flot constant de clients à la recherche d'un produit financier. Selon le livre de Lilien et al (1992), la demande pour un produit peut être modélisée par une fonction de probabilité composée de différentes variables comme le type de client, la compétition, les taux d'intérêt et le taux de rendement du marché (Bult et Wansbeek (1995) étant un exemple dans le marketing direct). Il est même possible d'améliorer les prévisions de vente en ajoutant une recherche des intentions des clients (Morowitz et Schmittlein 1992) ou en implantant une nouvelle segmentation basée sur les trois décisions clés : choix, incidence et quantité (Bucklin et al 1991 ; 1998). Mais dans ce travail, le département du marketing a pris ses décisions à partir de données confidentielles auxquelles nous n'avions pas accès.

### **3.2.3 La segmentation**

Un autre facteur important qui influence notre problème d'optimisation est la segmentation des marchés. Avant le milieu des années 1970, l'effort promotionnel des

banques visait le marché le plus large possible. Les banques espéraient rejoindre le plus grand nombre de personnes afin d'augmenter leurs chances d'avoir de nouveaux clients. Mais, lorsque l'on regarde les ventes des succursales des grandes banques, on s'aperçoit que les quantités vendues de certains produits varient grandement selon le lieu de la succursale. Cela est dû au fait que les clients de différentes succursales ont des besoins distincts et que certains produits leur sont mieux adaptés pour eux.

Pour faire face à cette réalité, les banques ont segmenté leur marché (Robertson et Bellenger (1977) pour un exemple de segmentation de marché). La segmentation d'un marché est définie par Beik et Buzby (1973) comme la division d'un marché en sous-groupes de clients ayant des besoins similaires.

Pour construire ces divisions, il faut déterminer les caractéristiques jugées les plus importantes ; par exemple l'âge, le revenu et le type de travail. Ensuite, l'importance relative de ces caractéristiques doit être évaluée. On retrouve dans la littérature plusieurs techniques comme les décompositions de type ANOVA (Green et al 1989), la programmation multicritères en nombres entiers (McGlone et Calantone 1992), l'étude statistique (Anderson et al 1976) ou l'analyse discriminante (Awh et Waters 1976 ; Pool 1974) qui servent à évaluer cette échelle relative des caractéristiques.

Lorsque l'importance des caractéristiques a été déterminée et que l'on a segmenté le marché de cette façon, il faut déterminer les différents motifs qui poussent les gens

à acheter un certain produit. Ceci est fait à l'aide d'études de marché et de beaucoup d'intuition. Il existe, tout de même, des techniques qui permettent de déterminer les préférences des clients. Ohta et Yoo (1993) ont calculé l'utilité ou l'importance pour les clients des attributs d'un produit. Ils peuvent ainsi déterminer les goûts des personnes et les produits qu'ils leur conviennent. Herniter (1973), quant à lui, utilise une méthode d'entropie maximale pour analyser le comportement d'achat des consommateurs.

À la Banque Royale, la segmentation était déjà faite. Les caractéristiques utilisées sont le groupe d'âge (25-34, 35-54, 55-64 et 65+), la possession des principaux produits (Hypothèque, Fonds Mutuels, REÉR et Dépôt) et le style de vie. Le style de vie inclut des informations sur le type de famille (célibataire, jeune famille, retraité, etc.) et sur le type de quartier où les clients demeurent (industriel, banlieue, bas-revenu, etc.). Selon cette approche, la population du Canada peut être segmentée en 345 segments différents. Pour ce travail, la segmentation se limite aux 12 styles de vie les plus importants et aux quatre groupes d'âge pour un total de 48 segments.

Dans le tableau 3.1, nous donnons un exemple de segmentation tiré d'un document de présentation du logiciel 'Local Market Analysis' utilisé à la Banque Royale (pour raisons de confidentialité les chiffres du tableau ont été modifiés).

Comme nous pouvons le constater dans le tableau 3.1, les données obtenues nous

Tableau 3.1 – Rapport sur la Pénétration de Marché

| Pénétration des Clients Avec un Dépôt Total (Détailé par Styles de Vie)<br>Tous les Clients de la Banque Royale Habitant le Secteur d'Étude |                             |              |                          |              |              |               |              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|--------------|--------------------------|--------------|--------------|---------------|--------------|
| Marché Potentiel<br>Énuméré par Styles de Vie                                                                                               | Habitant le Secteur d'Étude |              |                          |              |              |               |              |
|                                                                                                                                             | Population                  |              | Clients Avec Dépôt Total |              |              |               |              |
|                                                                                                                                             | Nombre                      | %            | Nombre                   | %            | % de la Pop. | Balance (000) | Moyenne      |
| <b>Secteurs très riches :</b>                                                                                                               |                             |              |                          |              |              |               |              |
| Secteurs très riches                                                                                                                        | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Banlieues aisées                                                                                                                            | 2,551                       | 8.8          | 909                      | 11.7         | 35.6         | 13,395        | 19903        |
| Famille exécutive                                                                                                                           | 9,486                       | 32.6         | 2,652                    | 34.1         | 28.0         | 14,601        | 7,539        |
| <b>Secteurs aisés :</b>                                                                                                                     |                             |              |                          |              |              |               |              |
| Banlieues établies                                                                                                                          | 11,380                      | 39.1         | 2,890                    | 37.2         | 25.4         | 13,809        | 6,242        |
| Urbain, Educ.Sup., plus âgé                                                                                                                 | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Revenu élevé sans enfant                                                                                                                    | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| <b>Secteurs variés :</b>                                                                                                                    |                             |              |                          |              |              |               |              |
| Aisé locataire                                                                                                                              | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Famille modeste                                                                                                                             | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Jeune urbain professionnel                                                                                                                  | 2,422                       | 8.3          | 515                      | 6.6          | 21.3         | 1,724         | 4,983        |
| Grosse famille, mix emploi                                                                                                                  | 542                         | 1.9          | 106                      | 1.4          | 19.6         | 156           | 2,217        |
| Nouveau secteur, jeune fam.                                                                                                                 | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Communauté rurale                                                                                                                           | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| <b>Secteur marché populaire :</b>                                                                                                           |                             |              |                          |              |              |               |              |
| Jeune col blanc, locataire                                                                                                                  | 995                         | 3.4          | 253                      | 3.3          | 25.4         | 982           | 5,340        |
| Famille âgée, col bleu                                                                                                                      | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Récant parc mobile                                                                                                                          | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Communauté indust. établie                                                                                                                  | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Jeune col blanc mobile                                                                                                                      | 155                         | 0.5          | 47                       | 0.6          | 30.3         | 235           | 5,174        |
| Célib., prof., col blanc                                                                                                                    | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Ferme                                                                                                                                       | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Industrie côtière, rurale                                                                                                                   | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Secteur foresterie                                                                                                                          | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Communauté côtière                                                                                                                          | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Retraité bas revenu                                                                                                                         | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Voisinage retraité                                                                                                                          | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Communauté isolée                                                                                                                           | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Urbain sans emploi                                                                                                                          | 0                           | 0.0          | 0                        | 0.0          | 0.0          | 0             | 0            |
| Urbain très bas revenu                                                                                                                      | 1,563                       | 5.4          | 294                      | 3.8          | 18.8         | 968           | 3,689        |
| Non classifié                                                                                                                               | 1                           | 0.0          | 104                      | 1.3          | 10400.0      | 791           | 9,308        |
| <b>TOTAL</b>                                                                                                                                | <b>29,095</b>               | <b>100.0</b> | <b>7,770</b>             | <b>100.0</b> | <b>26.7</b>  | <b>46,661</b> | <b>8,053</b> |

renseignent sur le type de population qui peuple un quartier et sur la quantité d'argent qu'elle a en dépôt dans une banque. Les banques connaissent aussi le pourcentage de chaque segment qui détient un certain produit. Ainsi à partir de ce type de données et du profil des clients des différents segments, le département du marketing peut savoir si un nouveau produit a une bonne probabilité de percer un certain segment du marché. Beaucoup de banques américaines ont appliqué cette idée en créant des services spécialisés pour les gens âgés et ont ainsi augmenté leurs ventes (Thomas 1994).

### **3.2.4 Positionnement des produits**

En étudiant les ventes des produits semblables entre des banques concurrentes, on s'aperçoit vite que même si les produits se ressemblent dans leur caractéristiques générales, il existe des différences qui expliquent pourquoi un produit d'une banque est plus populaire que d'autres. Chaque produit est composé d'un ensemble d'attributs qui servent à remplir les besoins des clients. Puisque chaque segment de la population a des besoins différents, les produits répondent plus ou moins bien à leurs attentes. Il est donc important lorsqu'on essaie de cibler un segment de la population d'avoir un produit bien adapté.

Certaines études ont été faites pour trouver les attributs du produit idéal à

être vendu aux jeunes collégiens (Tootelian 1996) ou les attributs recherchés par la génération X (Merrifield 1997).

Une des avenues préférées en marketing pour accroître les ventes et maximiser les profits est le positionnement des produits. Cette approche cherche à trouver les caractéristiques de chaque produit qui plairont chacun à un ensemble de segments du marché et ceci dans le but de maximiser les ventes et les profits. Nous retrouvons un large éventail de techniques dans la littérature, mais la majorité des modèles proposés se base soit sur l'analyse conjointe (Green, Carroll et Goldberg 1981) soit sur le modèle du point idéal (Shocker et Srinivasan 1974 ; Hansen et al 1998).

Malgré l'importance du positionnement des produits dans l'optimisation des marchés, il nous est impossible de modifier les caractéristiques des produits car nous n'avons aucun contrôle sur le positionnement. Il est à noter qu'une analyse des caractéristiques de chaque produit est inutile car nous possédons la distribution des ventes des produits actuels ce qui nous renseigne indirectement sur le positionnement des produits.

Nous supposons, pour ce travail, que les données que nous possédons reflètent le positionnement des produits et que la banque traite ces informations dans l'établissement des limites et des constantes utilisées dans les modèles.

### 3.2.5 Client exclusif

La distinction entre les clients exclusifs et les clients non exclusifs nous permet d'inclure dans les modèles la notion de loyauté et de la potentialité des profits. Selon Britt (1994), un client exclusif a habituellement une plus grande loyauté envers la banque et cela se traduit généralement par un plus grand investissement dans les produits offerts. Cette loyauté avantage aussi les banques dans leur promotion car les clients exclusifs sont souvent plus faciles à rejoindre et à convaincre d'acheter un nouveau produit ce qui diminue les coûts de recrutement.

Un des problèmes de la notion d'exclusivité est sa partie intuitive. En effet, cette notion d'exclusivité dépend fortement du comportement du client et de ses motivations à investir dans une banque. La notion d'investissement, ici, se rapporte plus à la quantité d'argent qui est en jeu entre le client et la banque. Nous allons parler d'investissement de 100 000\$ autant dans le cas où le client prend une hypothèque de 100 000\$ ou dépose 100 000\$ dans un dépôt.

Pour déterminer si un client est exclusif, le département du marketing se base généralement sur la quantité d'argent investie, sur le nombre de produits et sur le style de vie du client. Puisque nous ne possédons pas ces données pour chaque client, nous avons décidé d'utiliser la segmentation par groupe de produits que possède un client. Si un client possède trois produits et plus, il sera considéré automatiquement

comme exclusif. Nous croyons que la majorité des clients possédant trois produits et plus sont des clients exclusifs. Cette segmentation nous permet d'inclure directement la notion d'exclusivité et évite l'ajout de variables supplémentaires.

En plus de cette segmentation, nous avons diminué les coûts de recrutement des clients exclusifs pour simuler la facilité de vente. Nous avons aussi traité de la quantité d'argent investie par ces clients en augmentant les profits que rapportent la vente des produits aux clients exclusifs.

### **3.2.6 La rentabilité d'un produit**

Le facteur de la rentabilité est une notion très importante pour les banques. Il permet d'évaluer le potentiel des clients (Lingle 1995) i.e. la rentabilité potentielle pour la banque des investissements d'un client et la productivité des succursales comme dans celui de O'Heney (1995). Depuis plusieurs années, la technologie a permis aux banques de se doter de systèmes de base de données très efficaces qui permettent au marketing de mieux cibler leur marché selon Radigan (1993) et Hugh (1970), Merrill Lynch en étant un exemple étudié par Labe (1994). Ces systèmes permettent aussi, selon les experts, d'aider à aller chercher de nouveaux clients. Mais cette technologie ne permet toujours pas de calculer de façon précise la rentabilité d'un produit.

Thygersson (1991) propose une méthode pour mesurer la rentabilité d'une succursale bancaire en évaluant la rentabilité de tous les produits offerts en les agrégeant. Or selon nous, la méthode financière qu'il utilise est très imprécise et ne traite pas de tous les facteurs qui influencent la vente d'un produit.

Beik et Buzby (1973) proposent une méthode agrégée pour calculer les profits obtenus par segment. Même si ce résultat est intéressant, il manque de précision sur les effets d'une variation des taux d'intérêt et de la quantité moyenne d'argent investie dans un produit.

Idéalement, selon Carroll (1991), la banque devrait être capable de mesurer la contribution économique de chaque client. Le principal inconvénient est qu'il est très difficile d'évaluer la rentabilité réelle d'un produit car cela fait appel à des coûts fixes et à des coûts variables qui varient dans le temps, selon la quantité d'argent impliquée et un grand nombre d'autres facteurs.

Les coûts fixes sont les coûts qui ne dépendent pas de la quantité de produits vendus comme les dépenses pour le téléphone et le salaire des employés (à court terme). Lorsque nous augmentons la vente de ce produit, le coût fixe moyen (CFM) par produit de la banque se retrouve distribué sur un plus grand nombre de produits. On remarque alors que les coûts fixes moyens diminuent avec la quantité de produits vendus (voir figure 3.1 tirée du livre de Samuelson et Nordhaus 1989).

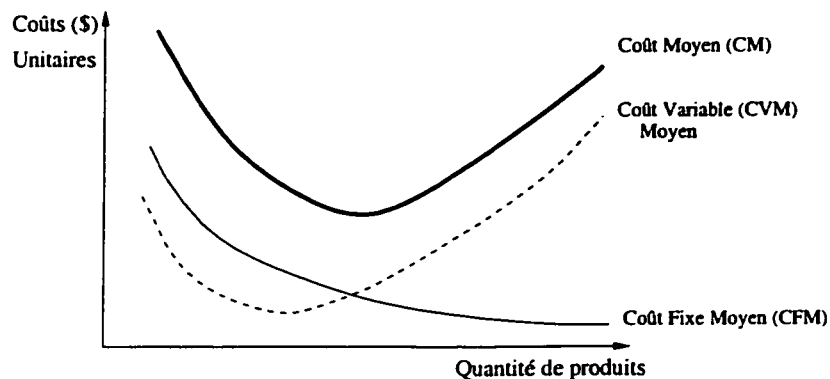


**Figure 3.1 – La non-linéarité des fonctions de coût**

Les coûts variables sont, quant à eux, directement reliés à la quantité de produits vendus. Au début, une hausse de la vente ajoute un coût variable de moins en moins élevé. Ainsi, la courbe des coûts variables moyens diminue (courbe CVM de la figure 3.1). Ce phénomène est surtout dû à une spécialisation du personnel et à l'augmentation de leur efficacité au travail. Mais à un certain point, la vente supplémentaire d'un produit entraîne une hausse des coûts variables. Une des raisons de ces hausses est souvent l'augmentation des heures supplémentaires ou la diminution de services pour les clients.

Ces variations dans les coûts variables nous obligent à considérer les coûts variables comme non linéaires et donc que les coûts moyens (CM) par produit (la somme des coûts fixes moyens et des coûts variables moyens) ne sont pas linéaires par rapport à la quantité de produits vendus.

Si nous considérons le revenu moyen que rapporte la vente d'un produit comme

étant indépendant de la quantité de produits vendus (figure 3.2), la courbe des profits par produit (revenu moyen - coûts moyens) ne peut pas être linéaire à cause de la non-linéarité des coûts moyens. Toutefois, on s'aperçoit que la section médiane de la courbe des rentabilités réelles est pratiquement linéaire et peut être approximée par une fonction linéaire sans trop de problèmes.

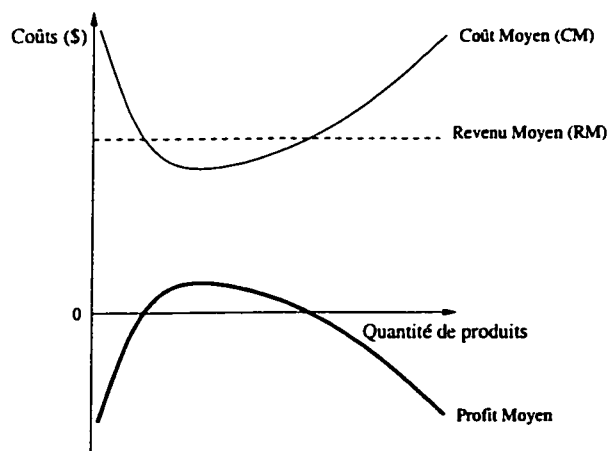


**Figure 3.2 – La non-linéarité des profits moyens**

À la Banque Royale, le fait que la rentabilité soit très difficile à calculer a obligé les départements de marketing à formuler une simple équation linéaire par produit qui ne traite pas de la quantité d'argent qui est impliquée et d'un taux de rentabilité estimé. Cependant même si cette façon de traiter ce problème est simple, elle donne des résultats approximatifs dans les cas extrêmes où la différence entre l'équation linéaire des coûts et la courbe de coût moyen est la plus grande.

Il existe aussi d'autres facteurs qui influencent la rentabilité d'un produit. Le fait de vendre le même produit à deux personnes différentes peut entraîner des profits

inégaux par le seul fait que ces deux personnes peuvent s'attendre à des niveaux distincts de service. Ceci signifie qu'il faut calculer une fonction de rentabilité pour chaque produit et pour chaque segment de la population.

Les banques divisent entre trois grands groupes (A,B,C) l'ensemble de leurs clients. Près de 50% des clients (groupe C) ne sont pas rentables alors que seulement 20% des clients (groupe A) rapportent à la banque la majorité des profits. Le reste des clients (groupe B) est à la limite de la rentabilité. À la figure 3.3 tirée de Carroll (1991), nous pouvons voir la provenance des profits selon les groupes de clients. Comme on peut le voir, la presque totalité des profits provient des clients du groupe A et alors que les clients du groupe C font perdre de l'argent à la banque. Cette différence de rentabilité est reflétée dans les différents taux de rentabilité des produits par segment.

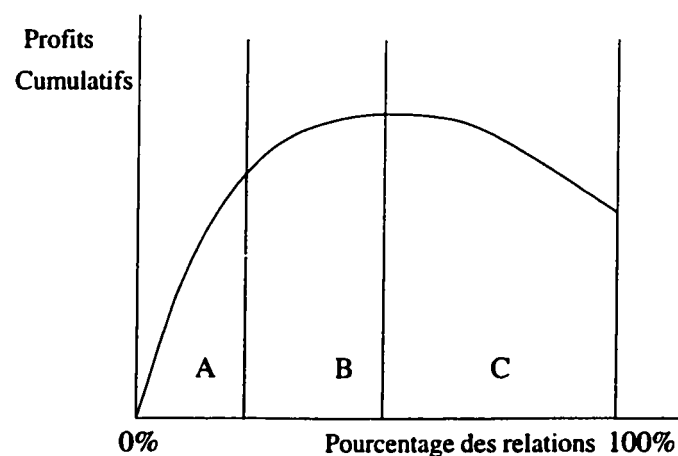


**Figure 3.3 – Les profits cumulatifs**

La variation des taux d'intérêt, du rendement du marché et de la compétition influencent aussi les profits que rapporte un produit à la banque. Dans ce travail,

ces influences sont introduites directement dans les taux de rentabilité. Leur impact est approximé par le personnel du département de marketing qui se base sur leur expérience et leur intuition.

### **3.2.7 La potentialité des clients**

La segmentation apporte des problèmes quant à la distribution des profits. Comme nous pouvons le constater la majorité des profits provient de quelques segments de la population, nous comprenons le premier instinct des vendeurs de se débarrasser des segments non profitables et de viser les plus payants. Mais dans l'industrie bancaire, cela serait une erreur d'ignorer le facteur important de la loyauté des clients selon Tootelian et Gaedeke (1996). En effet, plus un client utilise les produits d'une banque et plus cette relation dure, plus les chances que ce client reste avec la banque augmentent. Certains clients actuellement non profitables peuvent devenir de clients très profitables dans le futur. Nous citons en exemple le cas des étudiants en médecine.

Mais il est très difficile d'estimer la potentialité d'un client car on ne connaît pas ses décisions futures. White (1974) utilise une méthode de valeur actuelle pour sélectionner les clients. Cependant, cette technique n'est utilisée que pour évaluer la profitabilité des prêts que la banque accorde à des compagnies et ces résultats sont basés sur le fait que le taux d'escompte est fixe et que l'inflation est faible, ce qui

n'est plus le cas aujourd'hui.

Selon Clancy et Roberts (1992), la potentialité des clients dépend de quatre éléments : le taux de réaction, le potentiel de vente, le potentiel de croissance et le pouvoir de décision. Le taux de réaction se définit par le pourcentage de clients qui achète un produit après qu'une banque ait établi une nouvelle campagne promotionnelle. Plus le taux de réaction d'un groupe est élevé plus l'effort promotionnel de la banque est récompensé. Le potentiel de vente est la quantité d'utilisation du produit par un groupe. Plus le produit est utilisé par les gens de ce groupe, plus le potentiel de vente est élevé. Au niveau des produits bancaires, le potentiel de vente fait surtout référence à la quantité d'argent investie. Le potentiel de croissance sert à représenter la possibilité de croissance du nombre de clients faisant partie du groupe. Finalement, le pouvoir de décision fait allusion à la capacité des clients de ce groupe de prendre la décision finale sur l'achat d'un produit. En associant ces quatre éléments et les coûts de recrutement, Clancy et Roberts évaluent la valeur de chaque client. Cependant, il est très difficile de mettre une valeur sur chacun de ces éléments, surtout si nous regardons vers le long terme.

Selon Rossi et al (1996), une façon d'évaluer le potentiel de profitabilité moyenne d'un client d'un segment en particulier serait en estimant les gains futurs moyens à partir des gains des années précédentes et en ajustant pour les variations dans les achats. Cependant, nous devons nous assurer que le comportement futur des clients

sera similaire au comportement passé. Ceci est très difficile car l'arrivée de nouvelles technologies changent le comportement des clients.

Plusieurs articles dont celui de Carroll (1991) discutent du cycle de vie des achats des clients. Selon cette théorie, les clients sont assez prévisibles dans leurs achats. Si l'on possède des données assez précises sur la situation financière actuelle d'un client et des produits qu'il possède, il serait possible de déterminer son prochain achat. Cette idée est très populaire et il se fait beaucoup de travail dans la construction d'un tel système de données. Il faut remarquer que présentement ce type de travail vise des segments entiers et non pas un client en particulier. Nous ne possédons cependant aucune donnée à ce sujet.

Pour traiter de la potentialité des clients dans ce travail, nous avons interdit toutes décisions qui forcent la banque à se débarrasser des clients non profitables dans le cas où ceux-ci pourraient devenir profitables. Pour évaluer cette future rentabilité, nous utilisons des modèles qui étudient la rentabilité des produits et des segments sur plusieurs périodes. Un segment avec un haut potentiel occasionnera des pertes aux cours des premières périodes mais celles-ci devraient se transformer en gains avec les années.

### 3.2.8 Le coût de recrutement

Un autre facteur influençant le réalisme des modèles est le coût de recrutement des clients. Il est aussi difficile d'estimer les vrais coûts de la vente d'un produit qu'il l'est d'estimer la rentabilité réelle des produits. Dans notre étude, les coûts de recrutement sont calculés par le département de marketing et de finance dans un effort d'évaluer l'impact des coûts d'opérations de la banque.

Pour déterminer les coûts de recrutement, nous devons inclure seulement les coûts encourus lors de la vente d'un produit et non les coûts pour le maintien du produit. Les coûts de maintien doivent être soustraits du revenu que rapporte le produit en question. De plus, les produits que possèdent un client peuvent influencer les coûts de recrutement d'un autre produit. En effet, il est plus facile de vendre un dépôt à un client qui possède déjà des fonds mutuels que s'il possédait seulement une hypothèque. Dans les modèles que nous proposons, cet effet est inclus dans les coûts de recrutement.

Watne (1979) propose une méthode de régression multiple pour déterminer les coefficients de ventes croisées entre chaque paire de produits et selon le type de succursale bancaire. Il définit dans son travail quatre types de succursales : rurale, mature, grande et profitable. Il conclut que les succursales matures et grandes ont plus de facilité à créer des clients exclusifs. Selon nous, cette approche est très prometteuse

mais nous ne pouvons pas l'appliquer pour deux raisons. Premièrement, nous n'avons pas de données sur les succursales mais sur des régions (regroupement de plusieurs succursales). Deuxièmement, nous n'avons pas accès aux données nécessaires pour utiliser correctement cette méthode. Les facteurs de vente croisée que nous utilisons ont été déterminés par le département de marketing sans que nous puissions avoir accès à la méthode utilisée pour leur calcul.

L'effet de vendre plusieurs produits à un seul client a aussi un effet sur les coûts de recrutement. En effet, la vente de plusieurs produits à un seul client entraîne des coûts supérieurs à la somme des coûts de recrutement d'un client achetant chacun de ces produits individuellement. Ceci est dû au fait qu'il est plutôt rare qu'un client accepte d'acheter plusieurs produits ce qui fait en sorte que l'effort pour faire des ventes multiples est absorbé seulement par un petit nombre de clients. Ce coût supplémentaire est ajouté directement dans les coûts de recrutement.

### **3.2.9 Attrition des produits**

L'attrition des produits peut être définie comme la perte pour la banque d'un produit par un client et par conséquent, elle joue un rôle déterminant dans le calcul de la potentialité des clients. Il faut faire attention de ne pas confondre l'attrition des produits avec l'attrition des clients qui est la perte pour la banque d'un client avec

tous ses produits.

Une des principales raisons de l'attrition est le changement de banque par un client (attrition volontaire). Il y a aussi de l'attrition lorsqu'un client finit d'utiliser un produit comme par exemple le dernier paiement sur une hypothèque (attrition involontaire). Dans l'industrie des cartes de crédit, le problème de l'attrition a été longtemps ignoré jusqu'à l'apparition massive des cartes de crédit de toutes sortes (Punch 1994). L'industrie s'est vite aperçue de l'importance de la rétention (le contraire de l'attrition) car il y a un lien direct entre la rétention et les profits.

Un effort de rétention est déployé par une banque pour conserver ses clients actuels. Les compagnies de cartes de crédit se sont aperçues qu'il est beaucoup plus profitable d'assurer la rétention des clients actuels que de pratiquer la promotion continue pour aller chercher de nouveaux clients dans le but de remplacer les clients qui ont quitté (Gasner 1992).

Selon Kaytes et Kuenne (1997), il y a trois types d'attrition volontaire : défection, défection partielle et diminution majeure. La défection a lieu lorsqu'un client ferme tous ses comptes dans une institution en une courte période. Habituellement, cette défection est un signe d'insatisfaction envers l'institution ou d'un changement d'adresse du client. Il est très difficile de retenir un tel client.

La défection partielle survient lorsqu'un client diminue dramatiquement le contenu de certains produits ou les ferme tout en gardant d'autres produits. Cette situation compte pour presque 50% des cas d'attrition et peut être un signe de problème avec un produit mais pas avec l'institution. Toutefois, les balances de certains produits se déplacent vers un nouveau produit et donc ce mouvement ne peut pas être considéré comme de l'attrition. L'attrition n'a lieu que lorsque le solde des produits est déplacée vers une autre institution. Il est donc important pour la banque de comprendre les différents motifs des déplacements d'argent pour s'assurer de la qualité des produits offerts.

La diminution majeure est définie par la diminution des soldes totaux des produits par au moins 20% par année. Cette attrition est la plus insidieuse mais aussi la meilleure opportunité à l'augmentation des profits. Les principales raisons du départ des gens est la perception que les banques ne sont pas les meilleures gestionnaires pour des investissements à long terme. Ils préfèrent investir ces montants avec des groupes d'investissement à l'extérieur. La banque doit profiter de cette situation pour vendre les produits comme les fonds mutuels, les rentes et les services de courtier de la banque. La clé de la rétention de la clientèle est l'identification des comportements des clients et la compréhension des motifs de l'attrition.

Selon Kaytes et Kuenne (1997), les raisons de l'attrition tombent dans trois catégories : problème de positionnement des produits, service non compétitif et mauvaise

réaffectation des produits. Souvent, un problème d'image de la banque fait en sorte que les clients perçoivent une banque comme offrant des produits de moindre qualité ou que le produit ne convient pas à leur besoin, donc que le produit est mal positionné par rapport à leur besoin. La banque doit donc définir les besoins des clients et comment elle doit répondre à ces besoins.

Les clients perçoivent certains services comme étant non compétitifs. Or cette remarque provient très souvent des clients qui ont un solde élevé dans leur compte et s'attendent donc à plus de services. Selon Kaytes et Kuenne (1997), la banque devrait réagir rapidement en déplaçant les ressources de service du client moyen vers les meilleurs clients. Mais ce ne sont pas toutes les banques qui sont capables de distinguer les clients qui méritent un meilleur service.

Le problème de la mauvaise réaffectation des produits est occasionné lorsque la banque remplace des produits par d'autres. Il arrive que les vieux produits conviennent parfaitement à certains clients et que les nouveaux produits ne répondent plus à leurs attentes. Il peut donc y avoir de l'attrition. Ce problème existe surtout lorsqu'il y a des fusions de banques.

Dans la section qui suit, nous discutons des influences secondaires qui ne jouent pas un rôle direct sur la modélisation des problèmes mais plutôt sur la qualité des données que nous utilisons.

### 3.3 Influences secondaires

Ces influences sont généralement minimales sur la qualité des résultats mais ils peuvent cependant jouer un rôle plus important sur le plan d'un système d'aide à la décision.

En effet, les différents éléments que nous allons étudier ici influencent l'environnement où les décisions sont prises et appliquées. Contrairement aux influences primaires qui servent à construire les modèles d'optimisation, les influences secondaires servent à quantifier de façon réaliste l'environnement où les modèles seront appliqués. Un bon utilisateur modifie les paramètres nécessaires pour modéliser un scénario qu'il veut étudier. Pour éviter de créer un scénario non réaliste, l'utilisateur doit passer à travers toutes les variables et les constantes des modèles pour savoir comment elles sont influencées par le scénario. Les éléments que nous étudions prennent de l'importance à ce point-ci.

Voici les éléments les plus importants :

- Structure de la banque ;
- Stratégie de la banque ;
- Taux d'intérêt, rendement du marché et compétition ;
- Image de la banque ;

- Évolution des goûts de la population.

### **3.3.1 Structure de la banque**

Selon Pitt et Morris (1995), l'environnement d'agitation qui secoue l'industrie bancaire, dans la forme de la globalisation des marchés et de la métamorphose technologique, a un profond effet sur la nature des relations entre les banques et leurs clients. Les nouvelles formes d'organisation apparaissent en réponse à ces changements d'environnement plus dynamique et complexe. Les banques cherchent à obtenir une plus grande flexibilité, plus d'innovation et à augmenter la vitesse d'adaptation aux changements du marché.

Les nouvelles formes d'organisation ne se spécialisent plus que dans les activités pour faciliter les ventes ou pour différencier les produits et l'image de la banque, elles cherchent à négocier une relation mutuellement bénéfique avec les clients dans le but d'augmenter la loyauté de ceux-ci. Selon Wong et Perry (1991), la nouvelle culture des banques devrait être basée sur la relation avec les clients et permettre au personnel d'une banque de travailler avec un client avec un niveau de confiance plus élevé et diminuer le niveau de contrôle qui rebute les clients. Selon Cavuoto (1996), le problème provient du fait que la relation entre les clients et la banque devient ambiguë c'est-à-dire que le niveau de confiance du client envers la banque

varie avec les produits qu'il détient et de la perception qu'il a de la banque et de la compétition. Cette relation ambiguë rend le niveau de loyauté difficile à évaluer ce qui rend l'évaluation de l'efficacité des promotions plus floue.

La structure de la banque joue donc un rôle important dans la distribution de l'information vers les succursales et influence la position de la banque envers les gérants des succursales. Cette relation avec les gérants influence fortement l'application des mesures comme la rétention et la promotion et aussi le transfert de l'information des succursales vers les gestionnaires de la banque. Si l'information circule mal à l'intérieur de la banque, il se peut que les données que nous utilisons soient teintées d'erreur.

### **3.3.2 Stratégie de la banque**

La stratégie adoptée par une banque joue un rôle important dans le choix des scénarios à étudier. Elle influence directement les valeurs utilisées pour limiter la vente des produits, l'attrition des produits et la distribution des clients.

Il existe plusieurs stratégies qu'une banque peut appliquer au cours d'une année qui ont une influence considérable sur les ventes futures de celle-ci. Une banque peut décider de se spécialiser dans un marché ou au contraire faire une expansion générale.

Elle peut aussi mettre plus d'efforts sur la rétention de clients ou sur la création de nouveaux produits. Chacune de ces stratégies a un effet marqué sur les données que nous utilisons dans nos modèles et sur les scénarios que nous pouvons étudier. Dibb et Simkin (1991) discutent de 4 stratégies que peuvent appliquer les compagnies en segmentant leur marché. Ces quatre stratégies sont la pénétration de marché, le développement de produits, le développement de marché et la diversification.

Une autre stratégie que peut employer la banque est de chercher à augmenter le nombre de clients exclusifs. Morrall (1993) nous montre comment une banque américaine a utilisé le rapport mensuel des comptes bancaires pour promouvoir à chaque client un produit qui pourrait les intéresser en particulier. En établissant cette stratégie, on peut s'attendre à une diminution de l'attrition et à une augmentation du nombre de clients exclusifs.

Dans les modèles que nous proposons, les données utilisées sous-entendent qu'une stratégie a été adoptée et que les effets qu'elles encourent ont été bien étudiés. Si la banque utilise des scénarios dans les modèles, il faut que chaque scénario ait bien incorporé la stratégie de base sinon le modèle pourrait donner des solutions non réalistes.

### **3.3.3 Taux d'intérêt, rendement du marché et compétition**

Les taux d'intérêt, le rendement du marché et la compétition influencent principalement la demande de produits, les limites sur les ventes et l'attrition. Par exemple en 1997, nous avons pu assister à une période où les taux d'intérêt étaient fortement inférieurs au rendement du marché mais restaient tout de même largement au-dessus du taux d'inflation. L'économie se portait bien et aucune récession était en vue. Ceci a entraîné une forte augmentation des ventes de fonds mutuels et a contribué à l'augmentation de l'attrition dans les produits comme les certificats de dépôt.

Selon Beadle (1995), les taux d'intérêt et la vitesse à laquelle les banques réagissent jouent un rôle important dans la rentabilité des marchés hypothécaires. En effet, il montre comment une forte croissance des taux d'escompte et une adaptation un peu lente de quelques entreprises hypothécaires leur a fait perdre de l'argent pendant quelques mois en 1993-94. Il est cependant difficile d'associer les taux de rentabilité des produits que nous possédons avec les taux d'intérêt car ces taux comprennent les coûts de rétention des produits et le coût de l'argent. Avec la hausse des taux d'intérêt, les hypothèques à taux fixe se trouvent avantagées pendant que les certificats sont désavantagés. Puisqu'une grande partie de l'argent que la banque prête provient des dépôts qu'elle reçoit, il n'est pas évident que la banque perde de l'argent avec les fluctuations non prévues des taux d'intérêt. Il faut tout de même noter que toutes

informations sur les changements prévues des taux d'intérêt sont habituellement déjà incluses dans les taux hypothécaires et certificats de dépôt et donc dans la rentabilité des produits.

Nous avons inclus la compétition avec les taux d'intérêt et le rendement du marché car nous considérons qu'elle a un effet presque semblable sur les ventes du produit. La différence la plus importante est la portée des changements attribués à la compétition qui peut se limiter à seulement un produit ou à un segment.

Il est difficile de prévoir correctement les variations de ces trois variables, surtout lorsqu'on essaie de les prévoir à long terme. C'est pour cette raison que nous avons construit des modèles qui trouvent des solutions rapidement et permettent ainsi aux utilisateurs d'analyser plusieurs scénarios basés sur les variations de ces variables.

### **3.3.4 L'image de la banque**

Un facteur qui influence l'efficacité des promotions est l'image de la banque. L'image d'une banque est en fait la perception de la banque de la part des clients. Ceci est différent de l'identité d'une banque qui est la perception que la banque a d'elle-même. Souvent une banque a une image d'elle-même fort différente de celle des clients et ceci crée de petites imperfections dans la création des produits et des services

offerts. Kaynak (1986) propose d'étudier l'importance des attributs des produits selon le type de banque et de clientèle. À partir de ces données, l'auteur tire des conclusions sur les ajustements que la banque devrait apporter à son image. Durand, Eckrich et Sprecher (1978) proposent eux aussi un modèle d'attitude multi-attributs pour obtenir des informations sur la perception par les clients d'une banque. Cependant, leur méthode ne traite pas de la perception que la banque a d'elle-même.

Selon Howcroft et Lavis (1986), les clients cherchent une relation de confiance avec la banque et la clé à cette relation est la communication. Cependant les banques sont souvent perçues comme étant de très grosses entreprises, très impersonnelles qui sont portées seulement vers les produits et non vers les clients. D'un autre côté, Brown, Smith et Zurowski (1977) montrent dans leur article que l'image des banques ne joue pas un rôle important dans le choix des clients. Mais dans un article plus récent, Leonard et Spencer (1991) démontrent au contraire l'importance de l'image des banques.

L'image de la banque et la perception des clients jouent donc un rôle dans l'efficacité des promotions, la demande de produits et l'attrition. Il reste qu'il est encore difficile d'évaluer correctement l'effet de l'image d'une banque sur la relation banque-client.

### 3.3.5 L'évolution des goûts de la population

L'évolution des goûts de la population est un facteur important lorsqu'on essaie de calculer la potentialité d'un groupe de clients. Schniederjans et Loch (1994) ont remarqué une certaine évolution dans les achats des clients qui peut être exprimée sous forme de matrice à l'aide de processus de Markov. Kwak, Brown et Schniederjans (1986) ont appliqué une telle technique dans l'évolution des inscriptions dans un collège. Schniederjans et Loch (1994) ont utilisé à leur tour un processus de Markov non stationnaire pour déterminer l'évolution des goûts des clients d'une banque. Cette technique demande l'utilisation de données historiques pour prévoir ceux du futur. Mais l'article Schniederjans et Loch (1994) ne démontre pas l'efficacité de cette méthode, même si elle nous convainc d'éviter l'utilisation d'un processus de Markov stationnaire qui n'est pas réaliste. Toutefois, il est à noter que l'application de cette méthode suppose que les comportements passés des clients représentent bien les comportements que nous allons rencontrer dans le futur ce qui est, selon nous, difficile à prévoir à cause du grand nombre de variables.

Il est à noter que l'évolution démographique ne joue qu'un rôle à long terme et que les modifications démographiques doivent être assez grandes pour avoir un impact sur les ventes actuelles.

## Deuxième partie

### Modèles déterministes

## Chapitre 4

# Modèles déterministes

Dans ce chapitre, nous proposons plusieurs modèles déterministes pour résoudre le problème de l'optimisation des marchés. La diversité de ces modèles a pour but de montrer différentes approches s'attaquant chacune à une difficulté que nous avons rencontrée. Dans le tableau 4.1, nous présentons un bref aperçu de l'évolution de ces modèles et de leurs principales caractéristiques.

Il est important de comprendre que les modèles que nous proposons sont fortement liés aux types de données qui sont disponibles. En effet, une grande variété de données est disponible mais la variabilité de leur fiabilité rend difficile l'évaluation de l'utilité que nous pouvons en tirer et l'importance que nous pouvons leur attribuer.

**Tableau 4.1 – Bref aperçu des modèles déterministes**

| <b>Modèle</b>          | <b>Caractéristiques</b>                                                                                          |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Modèle Cloisonné (MC1) | Introduction aux groupes de produits<br>Contraintes sur la demande et la vente de produits                       |
| Modèle Cloisonné (MC2) | Ajout de contraintes de marchés<br>Contrainte sur le volume et la distribution<br>Ajout de fonctions de pénalité |
| Modèle Actuariel (MA1) | Nouvelle approche pour l'attrition et la rentabilité à long terme                                                |
| Modèle Actuariel (MA2) | Fusion des modèles MC2 et MA1<br>Structure du modèle cloisonné avec la rentabilité du modèle actuariel           |

Pour simplifier la présentation des données, nous les avons réunies en trois groupes : les données sur la population, les données sur les produits et les différents facteurs d'influence. Dans le tableau 4.2, nous classifions les divers types de données selon leur source et leur fiabilité.

Les données sur la population proviennent principalement de deux bases de données : de l'interne pour les données sur les segments et d'un programme d'analyse de marché pour déterminer le profil d'un secteur (tableau 3.1 sur la segmentation). On peut considérer ces deux bases de données comme étant précises et fiables.

Pour ce qui concerne les données sur les produits, la banque fournit le nombre de produits qu'elle détient actuellement et la rentabilité de ces produits. Comme nous l'avons expliqué, la rentabilité des produits n'est pas très précise ce qui implique une possibilité d'erreur. Le programme d'analyse du marché, quant à lui, nous renseigne

**Tableau 4.2 – Fiabilité des données**

| <b>Groupe de données</b> | <b>Données</b>                 | <b>Source</b>        | <b>Précision</b> |
|--------------------------|--------------------------------|----------------------|------------------|
| Sur la population        | Par segments                   | À l'interne          | Élevée           |
|                          | Par secteur                    | Analyse du marché    | Élevée           |
|                          | Demande de produits            | Expérience           | Moyenne          |
|                          | Exclusivité                    | Expérience           | Moyenne          |
|                          | Évolution des segments         | À l'interne          | Faible           |
| Sur les produits         | Détention par clients actuels  | À l'interne          | Élevée           |
|                          | Rentabilité                    | Calculée à l'interne | Moyenne          |
|                          | Montant investi par produit    | Analyse du marché    | Élevée           |
|                          | Coûts de recrutement           | Calculés à l'interne | Faible           |
|                          | Attrition                      | Évaluée à l'interne  | Faible           |
| Sur les facteurs         | Compétition                    | Expérience           | Faible           |
|                          | Sensibilité aux taux d'intérêt | Expérience           | Faible           |
|                          | Vente croisée                  | Expérience           | Faible           |
|                          | Vente multiple                 | Expérience           | Faible           |

sur la possession de produits bancaires par les gens d'un secteur. Ces chiffres sont précis et peu enclins aux erreurs.

Finalement, les données sur les différents facteurs de vente et de demande des produits sont obtenues grâce à l'expérience du personnel de marketing. Ils sont donc peu précis et il existe un haut taux de variabilité.

À partir de ces premières informations sur les données, nous présentons notre modèle cloisonné (MC1) dans la section qui suit où nous décrivons la démarche que nous avons adoptée lors de l'élaboration de ce modèle en plus d'expliquer le rôle des contraintes et la signification des variables.

## 4.1 Modèles Cloisonnés

Le modèle cloisonné, présenté ici, utilise une segmentation plus prononcée que celle de la banque. En effet, la banque segmente la population en se servant seulement de deux variables : le groupe d'âge et le style de vie. Pour ajouter un peu plus de réalisme et de variabilité au modèle, nous avons décidé d'ajouter une variable supplémentaire : le groupe de produits qu'un client détient actuellement. Cette nouvelle segmentation permet de différencier les clients par leur habitude d'achat en séparant les clients qui possèdent déjà plusieurs produits de ceux qui investissent peu et qui ont moins de chance d'être intéressés à acheter un nouveau produit.

Ainsi, la vente d'un produit à un client fait en sorte que ce client se déplace entre deux groupes de produits ; le groupe d'arrivée ayant les mêmes produits que le groupe de départ sauf pour les nouveaux produits que le client vient d'acheter. Cette variable nous permet ainsi d'inclure directement la notion d'exclusivité sans ajouter de nouvelles variables. Cependant, un client qui détient plusieurs produits n'est pas nécessairement un client exclusif mais les chances sont qu'il le soit. Donc en supposant que les clients exclusifs détiennent trois produits et plus, nous nous retrouvons à créer des groupes de produits où la majorité des clients sont exclusifs. Ce nouveau regroupement de client nous a fait penser à la création d'une cloison entre les clients d'où le nom du modèle.

Il existe cependant un nombre exponentiel de groupes de produits ( $2^{|P|}$  où  $|P|$  est le nombre de produits) et cela cause un problème quant à la pertinence de certains groupes. Il est effectivement possible qu'il n'y ait qu'un petit nombre de clients dans ces groupes et les chances de déplacer une fraction de client sont très grandes. Nous considérons la pertinence de ces fractions de clients comme étant négligeable sur la solution et par ce fait, il n'est pas nécessaire d'ajouter des contraintes d'intégralité dans nos modèles.

Avant d'élaborer sur la signification des contraintes, nous allons tout d'abord définir les variables que nous allons utiliser.

#### 4.1.1 Définitions des variables

Pour simplifier l'écriture du modèle, nous allons supposer qu'un segment est un ensemble de clients faisant partie d'un groupe d'âge et d'un style de vie précis. La possession des produits servira de segmentation mais à un niveau secondaire dans le modèle. Nous définissons maintenant les différents ensembles d'indices utilisés dans le modèle :

- $I$         L'ensemble des segments ;
- $T$         L'ensemble des périodes étudiées ;

|         |                                                                   |
|---------|-------------------------------------------------------------------|
| $P$     | L'ensemble des produits;                                          |
| $G$     | L'ensemble des groupes de produits;                               |
| $G_l^+$ | L'ensemble des groupes de produits qui ont le produit $l$ ;       |
| $G_l^-$ | L'ensemble des groupes de produits qui n'ont pas le produit $l$ ; |
| $H_k$   | L'ensemble des produits inclus dans le groupe de produits $k$ ;   |
| $Z$     | Le groupe de produits n'ayant pas de produits.                    |

La réunion des ensembles  $G_l^-$  et  $G_l^+$  donne l'ensemble  $G$ . Parmi ces groupes, il existe un groupe où il n'y a aucun produit. Ce groupe sert à représenter les clients qui ne détiennent aucun de ces produits et les personnes qui ne sont pas clients de la banque. Ce groupe sera toujours le groupe  $Z$ , c'est-à-dire le dernier groupe. L'ensemble  $H_k$  sert à déterminer si un produit fait partie d'un groupe  $k$  de produits.

|            | RÉER | Placement |
|------------|------|-----------|
| Groupe # 1 | ✓    |           |
| Groupe # 2 |      | ✓         |
| Groupe # 3 | ✓    | ✓         |
| Groupe # 4 |      |           |

**Figure 4.1 – Établissement de groupes avec 2 produits**

À la figure 4.1, nous illustrons la formation de groupes de produits lorsque nous avons seulement deux produits. Le groupe 3 représente le regroupement d'un RÉER

et d'un placement à la banque et le groupe 4, quant à lui, représente l'absence de produits. Passons maintenant à la définition des variables clients.

- $x_{ik}^t$  Nombre de clients du segment  $i$  qui détiennent les produits du groupe  $k$  à la fin de la période  $t$  ;
- $x_{ik}^0$  Nombre de clients du segment  $i$  qui détiennent initialement les produits du groupe  $k$  ;
- $y_{ijk}^t$  Nombre de clients du segment  $i$  qui passent du groupe de produits  $j$  vers le groupe  $k$  durant la période  $t$ .

La valeur des variables  $x_{ik}^t$  est connue seulement pour la période 0 et provient directement de la base de données de la banque. Pour toutes les autres périodes, elles sont calculées par rapport au nombre de clients de la période précédente ( $x_{ik}^{t-1}$ ) et à la quantité de clients qui ont été ajoutés ou retirés du groupe. Le nombre de clients déplacés est déterminé par la variable  $y_{ijk}^t$ .

Les paramètres reliés aux coûts et à la rentabilité sont les suivants :

- $R_{ik}^t$  Rentabilité pour le segment  $i$  du groupe de produits  $k$  au temps  $t$  ;
- $r_t$  Taux d'actualisation périodique des profits de la période  $t$  ;
- $A_{ijk}^t$  Coût de recrutement encouru par la banque pour faire passer un client du segment  $i$  du groupe  $j$  au groupe  $k$  durant la période  $t$ .

Avec l'introduction des groupes de produits, les rentabilités  $R'_{ik}$  sont calculées à partir de la rentabilité individuelle des produits et de la quantité moyenne d'argent investie dans ceux-ci. Il ne faut pas oublier que ces rentabilités ne traitent pas des coûts de recrutement mais plutôt des coûts d'entretien et de services associés aux produits.

Le taux d'actualisation sert à tenir compte de la valeur temporelle de l'argent car un dollar d'aujourd'hui vaut plus qu'un dollar de demain. Selon Thygeson (1991), nous devrions actualiser les profits à un taux égal au coût du capital de la banque.

Contrairement aux deux autres paramètres sur les coûts et la rentabilité, les coûts de recrutement ne sont pas trouvés par un simple calcul. En effet, ils ont été premièrement calculés pour chaque produit pris individuellement pour être ensuite modifiés dans le but de tenir compte de la différence entre chaque segment. Finalement, ils ont été combinés avec les facteurs de vente multiple et les facteurs de vente croisée, c'est-à-dire les facteurs qui traitent des produits que détient un client lors de l'achat de nouveaux produits.

Il faut noter que le coût de recrutement d'un client du groupe sans produit est supérieur au coût de recrutement d'un client de tout autre groupe. Nous expliquons cela par le fait qu'il faut plus d'effort au personnel de la banque pour vendre un produit à un inconnu qu'à un client de la banque.

Nous introduisons ici quelques paramètres qui agissent au niveau des contraintes.

- $\gamma_i^t$       Pourcentage des clients du segment  $i$  qui ne sont pas intéressés à acheter un nouveau produit au cours de la période  $t$  ;
- $\beta_p^t$       Croissance maximale en pourcentage de la vente du produit  $p$  au cours de la période  $t$  ;
- $\alpha_{ip}^t$       Pourcentage d'attrition du produit  $p$  dans le segment  $i$  au cours de la période  $t$ .

Les paramètres ci-dessus servent à limiter les mouvements permis de clients dans le but de rendre le modèle plus réaliste. Le pourcentage de clients qui ne sont pas intéressés à acheter un nouveau produit sert plutôt à regrouper l'ensemble des clients qui veulent acheter au moins un nouveau produit. Il est à remarquer que ce paramètre ressemble beaucoup à la demande totale des clients d'un segment pour l'ensemble des produits offerts. La raison de ce regroupement de produits sous un seul paramètre limitatif est de donner un peu de flexibilité aux ventes possibles. La croissance maximale de vente de produits et l'attrition sont aussi des paramètres qui limitent le mouvement de clients.

Toutes ces données ont été évaluées à l'interne par le département de marketing et de finance. Il est à noter que le pourcentage limite de hausse de vente d'un produit a un minimum de 0. Si nous voulons une baisse de la quantité d'un produit, nous

avons seulement à augmenter l'attrition du produit.

#### 4.1.2 Modèle Cloisonné 1 (MC1)

À la figure 4.2, nous illustrons une partie du fonctionnement du modèle cloisonné. Les groupes de produits sur la gauche représentent les clients au début de la période  $t$  ou à la fin de la période  $t - 1$ . Les arcs représentent les mouvements possibles entre les groupes, l'équivalent des variables  $y_{ijk}^t$ , et les groupes à la droite correspondent aux clients dans chaque groupe à la fin de la période  $t$ .

Il y a deux séries de limites sur cette figure : une sert à limiter le nombre de clients qui peuvent quitter un groupe de produit et un autre à limiter le nombre de nouveaux clients dans un groupe. Ces limites servent à conserver le modèle dans le domaine du réalisme.

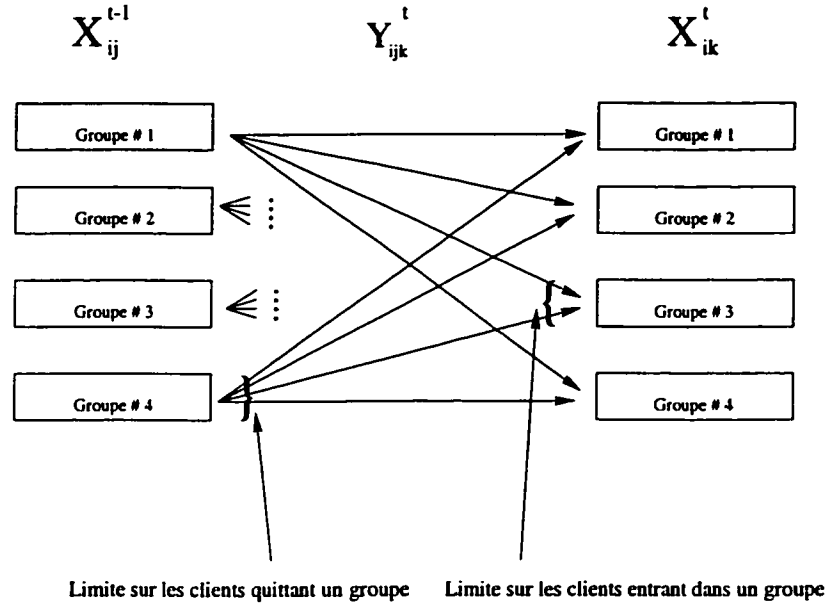


**Figure 4.2 – Illustration du modèle cloisonné**

$$\max_{x_{ik}^t, y_{ijk}^t} \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} \left( (x_{ik}^t \cdot \frac{R_{ik}^t}{\prod_{n=1}^t (1 + r_n)}) - (\sum_{j \in G} y_{ijk}^t \cdot \frac{A_{ijk}^t}{\prod_{n=1}^t (1 + r_n)}) \right) \quad (4.1)$$

$$s.a \quad x_{ij}^{t-1} = \sum_{k \in G} y_{ijk}^t \quad \forall i \in I, \forall j \in G, \forall t \in T \quad (4.2)$$

$$\sum_{j \in G} y_{ijk}^t = x_{ik}^t \quad \forall i \in I, \forall k \in G, \forall t \in T \quad (4.3)$$

$$y_{ikk}^t \geq (\gamma_i^t - \sum_{p \in H_k} \alpha_{ip}^t) \cdot x_{ik}^{t-1} \quad \forall i \in I, \forall k \in G, \forall t \in T \quad (4.4)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^-} \sum_{k \in G_p^+} y_{ijk}^t \leq \beta_p^t \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^+} x_{ij}^{t-1} \quad \forall p \in P, \forall t \in T \quad (4.5)$$

$$y_{ikj}^t \geq \alpha_{ip}^t \cdot x_{ik}^t \quad \forall i \in I, \forall p \in P, \forall t \in T, \quad \forall k \in G_p^+, j = k - \{p\} \quad (4.6)$$

$$y_{ijk}^t \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in G, \forall k \in G, \forall t \in T \quad (4.7)$$

$$x_{ik}^t \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall k \in G, \forall t \in T \quad (4.8)$$

### Modèle 4.1: Modèle Cloisonné 1 (MC1)

#### 4.1.2.1 Équations du MC1

#### 4.1.2.2 Fonction objectif (4.1)

Cette fonction cherche à maximiser la rentabilité en déplaçant des clients d'un groupe de produits à l'autre. À la fin de chaque période, les clients de chaque groupe ( $x_{ik}^t$ ) rapportent un profit à la banque. Cependant, certains de ces clients ont changé de groupe au cours de la période et ils ont encouru des frais de recrutement pour la banque. Ces frais sont calculés par le produit entre le nombre de clients qui se sont déplacés ( $y_{ijk}^t$ ) et le coût des recrutements ( $A_{ijk}^t$ ). Dans les deux cas, le modèle ne traite que de la valeur actuelle des profits et des coûts.

#### 4.1.2.3 Conservation de flots (4.2,4.3)

La modélisation du problème en forme de réseau fait en sorte que les clients sont des flots qui se déplacent sur un réseau. Pour garder ce modèle dans cet état de réseau, nous avons ajouté des contraintes de conservation de flot. L'implantation de telles contraintes peut être améliorée en remplaçant les variables  $x_{ij}^t$  par la somme suivante de variables :  $\sum_{j \in G} y_{ijk}^t$ . Ce remplacement permet de réduire le nombre de variables ( $x_{ij}^t$ ) et le nombre de contraintes en ajustant les contraintes (4.2) et (4.3). Cependant, cette transformation accentue la complexité de la lecture du modèle et

pour cette raison, nous préférons présenter la forme habituelle des contraintes de conservation de flots.

#### 4.1.2.4 Limite sur le nombre de clients prêt à acheter un produit (4.4)

Il existe une règle qui dit simplement qu'un client sur cinq (20%) est prêt à acheter un nouveau produit par année. Nous avons imposé cette règle en faisant varier cette demande avec le segment et les périodes étudiées ( $1 - \gamma_i^t$ ).

Une façon plus simple de modéliser cette contrainte est de limiter le nombre de clients qui restent dans le groupe ( $y_{ikk}^t$ ), c'est-à-dire qui ne sont pas intéressés à acheter de nouveaux produits. Cette limite est établie pour chaque segment et groupe de produits selon un pourcentage  $\gamma_i^t$ . Cependant, comme cette contrainte est construite de façon à limiter le nombre de clients qui ne changent pas de groupe, les clients qui subissent l'attrition sont maintenant compris dans l'ensemble de clients qui sont intéressés à acheter un produit ce qui n'est pas le cas. Pour corriger cette situation, nous avons soustrait la somme des facteurs d'attrition ( $\alpha_{ip}^t$ ) au paramètre  $\gamma_i^t$ .

#### 4.1.2.5 Limite sur la vente de produits (4.5)

La contrainte (4.5) sert à limiter la vente du produit  $p$  au cours de la période  $t$  par rapport à la quantité de produit au début de la période. Pour cela, le paramètre  $\beta_p^t$  a été évalué par le département de marketing en tenant compte de la compétition et des facteurs comme l'attrition et les taux d'intérêt et de rendement du marché. En effet, ces facteurs jouent un rôle important dans la détermination de la croissance possible des ventes d'un produit. Une forte croissance de l'attrition d'un produit pourrait signaler une perte d'intérêt pour ce produit et indiquerait du même coup la faible possibilité d'en augmenter les ventes. Il est cependant difficile d'évaluer mathématiquement ces relations et pour cette raison, nous nous basons sur l'expérience du personnel de marketing pour chaque cas analysé.

Pour expliquer la signification de l'équation (4.5), nous la séparons en deux au signe d'égalité. La partie gauche de l'équation représente alors le nombre de clients qui ont acheté le produit  $p$  ce qui ne doit pas être supérieure à la quantité actuelle de produit multipliée par la hausse maximale de vente  $\beta_p^t$  (la partie droite de l'équation).

#### 4.1.2.6 Attrition des produits (4.6)

Pour simuler l'attrition des produits, nous devons forcer un pourcentage de clients à se débarrasser de certains produits. Ainsi, un pourcentage ( $\alpha_{ip}^t$ ) de ces clients doivent passer d'un groupe de produits  $k$  où le produit  $p$  est présent vers un groupe  $j$  où tous les produits du groupe  $k$  sont présents à part le produit  $p$ . Cette attrition fait en sorte qu'un client ne peut perdre qu'un seul produit à chaque période. La raison de cette décision provient du manque de données au sujet de l'attrition complète (plusieurs produits) et le sentiment que ce type d'attrition ne joue pas un rôle majeur au niveau de la banque.

#### 4.1.3 Modèle Cloisonné 2 (MC2)

Les résultats préliminaires du modèle MC1 montrent que les solutions proposées sont irréalistes quant aux mesures à appliquer pour augmenter les profits, par exemple il permet la vente massive d'hypothèques aux clients de 65 ans et plus. Pour éviter ce type de solutions, nous ajoutons des contraintes opérationnelles qui ont été conçues à partir des informations du marché. Cependant, certaines de ces contraintes sont très rigides et pour éviter des solutions non réalisables, nous avons ajouté des fonctions de pénalité qui ajoutent de la flexibilité aux résultats et qui servent, en quelque sorte, de mesure des coûts associés à l'effort supplémentaire fourni par le personnel lors des

ventes. Ces fonctions de pénalité sont utilisées dans les contraintes sur le départ des clients (4.10), dans les contraintes de distribution (4.13,4.14), dans les contraintes sur le volume d'argent (4.12) et sur les limites de vente de produits (4.15,4.16).

Dans la sous-section qui suit, nous définissons certains termes utilisés dans ce nouveau modèle et nous énonçons les équations qui le composent.

#### 4.1.3.1 Équations du MC2

|                   |                                                                                                                                                            |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $D$               | Ensemble des groupes d'âge ;                                                                                                                               |
| $V$               | Ensemble des styles de vie ;                                                                                                                               |
| $B_d \subseteq I$ | Ensemble des segments ayant des clients du groupe d'âge $d$ ;                                                                                              |
| $C_v \subseteq I$ | Ensemble des segments ayant des clients du style de vie $v$ ;                                                                                              |
| $D_{ik}^t$        | Dépôt moyen d'argent dans le groupe de produits $k$ par les clients du segment $i$ à la fin de la période $t$ ;                                            |
| $\phi^t$          | Pourcentage maximal de nouveaux clients qui achètent des produits au cours de la période $t$ ;                                                             |
| $\pi^t$           | Pourcentage de hausse du volume d'argent visée par la banque au cours de la période $t$ ;                                                                  |
| $\theta_{dp}^t$   | Pourcentage de clients du groupe d'âge $d$ ayant acheté le produit $p$ par rapport à tous les clients ayant acheté ce produit au cours de la période $t$ ; |

|                 |                                                                                                                                                            |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\omega_{vp}^t$ | Pourcentage de clients du style de vie $v$ ayant acheté le produit $p$ par rapport à tous les clients ayant acheté ce produit au cours de la période $t$ ; |
| $L_k$           | Ensemble de groupes de produits ayant tous les produits du groupe $k$ avec au moins un autre produit ;                                                     |
| $f(x)$          | Fonction de pénalité sur la quantité de volume d'argent $x$ manquant pour atteindre la limite voulue ;                                                     |
| $g(x)$          | Fonction de pénalité sur le nombre de clients supplémentaires $x$ quittant un groupe de produits ;                                                         |
| $h(x)$          | Fonction de pénalité sur le nombre de clients supplémentaires ou manquants $x$ par âge et par produit ;                                                    |
| $o(x)$          | Fonction de pénalité sur le nombre de clients supplémentaires ou manquants $x$ par style de vie et par produit ;                                           |
| $w(x)$          | Fonction de pénalité sur le nombre de produits $x$ vendus au-dessus de la moitié de la limite de vente de produits ;                                       |
| $Vol^t$         | Volume d'argent manquant pour obtenir le volume d'argent cherché à la période $t$ ;                                                                        |
| $E_{ik}^t$      | Nombre de clients supplémentaires du segment $i$ ayant quitté le groupe de produits $k$ au cours de la période $t$ ;                                       |
| $M_{dp}^{t+}$   | Nombre de clients supplémentaires du groupe d'âge $d$ ayant acheté le produit $p$ au cours de la période $t$ ;                                             |

|                  |                                                                                                                |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $M_{dp}^{t-}$    | Nombre de clients manquants du groupe d'âge $d$ ayant acheté le produit $p$ au cours de la période $t$ ;       |
| $N_{vp}^{t+}$    | Nombre de clients supplémentaires du style de vie $v$ ayant acheté le produit $p$ au cours de la période $t$ ; |
| $N_{vp}^{t-}$    | Nombre de clients manquants du style de vie $v$ ayant acheté le produit $p$ au cours de la période $t$ ;       |
| $Q_p^t$          | Nombre de produits vendus au-dessus de la moitié de la limite ;                                                |
| $TP_p$           | Nombre totale du produit $p$ détenu par les clients au tout début ;                                            |
| $\bar{A}_{dp}^t$ | Rentabilité moyenne du produit $p$ pour les clients du groupe d'âge $d$ au cours de la période $t$ ;           |
| $\bar{B}_{vp}^t$ | Rentabilité moyenne du produit $p$ pour les clients du style de vie $v$ au cours de la période $t$ ;           |
| $\bar{C}_p^t$    | Coût moyen de recrutement d'un client achetant le produit $p$ au cours de la période $t$ .                     |

Les paramètres  $\pi$  et  $\phi$  sont déterminés à l'avance par l'administration de la banque. Les valeurs de  $\theta$  et de  $\omega$  sont, quant à elles, déterminées par le personnel du département de marketing à partir des pourcentages de distributions du passé qui peuvent être modifiées selon les besoins ou les espérances des administrateurs.

À première vue, les contraintes de distribution (4.13,4.14) semblent imposer une

$$\max_{x_{ik}^t, y_{ijk}^t} \sum_{i \in T} \left( \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} \left( x_{ik}^t \cdot \frac{R_{ik}^t}{\prod_{n=1}^t (1 + r_n)} \right) - \left( \sum_{j \in G} y_{ijk}^t \cdot \frac{A_{ijk}^t}{\prod_{n=1}^t (1 + r_n)} \right) \right) - \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} g(E_{ik}^t) - \sum_{p \in P} \left( \sum_{d \in D} h(M_{dp}^t) - \sum_{v \in V} o(N_{vp}^t) - w(Q_p^t) \right) - f(Vol^t) \quad (4.9)$$

$$s.à \quad x_{ij}^{t-1} = \sum_{k \in G} y_{ijk}^t \quad \forall i \in I, \forall j \in G, \forall t \in T \quad (4.2)$$

$$\sum_{j \in G} y_{ijk}^t = x_{ik}^t \quad \forall i \in I, \forall k \in G, \forall t \in T \quad (4.3)$$

$$y_{ikj}^t \geq \alpha_{ip}^t \cdot x_{ik}^t \quad \forall i \in I, \forall p \in P, \forall t \in T, \quad \forall k \in G_p^+, j = k - \{p\} \quad (4.6)$$

$$\sum_{k \in G} y_{ikk}^t + E_{ik}^t = (\gamma_i^t - \sum_{p \in H_k} \alpha_{ip}^t) \cdot x_{ik}^{t-1} \quad \forall i \in I, \forall k \in G, \forall t \in T \quad (4.10)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in G} y_{ijz}^t \leq \phi^t \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} \sum_{j \in L_k} y_{ikj}^t \quad \forall t \in T \quad (4.11)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in G} \sum_{j \in G} y_{ijk}^t \cdot D_{ik}^t + Vol^t \geq (1 + \pi^t) \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} x_{ik}^{t-1} \cdot D_{ik}^{t-1} \quad \forall t \in T \quad (4.12)$$

$$\sum_{i \in B_d} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^t - M_{dp}^{t+} + M_{dp}^{t-} = \theta_{dp}^t \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^t \quad \forall d \in D, \forall p \in P, \forall t \in T \quad (4.13)$$

$$\sum_{i \in C_v} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^t - N_{vp}^{t+} + N_{vp}^{t-} = \omega_{vp}^t \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^t \quad \forall v \in V, \forall p \in P, \forall t \in T \quad (4.14)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^-} \sum_{k \in G_p^+} y_{ijk}^t - Q_p^t \leq \frac{\beta_p^t}{2} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^+} x_{ij}^{t-1} \quad \forall p \in P, \forall t \in T \quad (4.15)$$

$$Q_p^t \leq \frac{\beta_p^t}{2} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^+} x_{ij}^{t-1} \quad \forall p \in P, \forall t \in T \quad (4.16)$$

$$y_{ijk}^t \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in G, \forall k \in G \quad \forall t \in T \quad (4.7)$$

$$x_{ik}^t \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall k \in G, \forall t \in T \quad (4.8)$$

$$E_{ik}^t \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall k \in G, \forall t \in T \quad (4.17)$$

$$M_{dp}^{t+} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall d \in D, \forall t \in T \quad (4.18)$$

$$M_{dp}^{t-} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall d \in D, \forall t \in T \quad (4.19)$$

$$N_{vp}^{t+} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall v \in V, \forall t \in T \quad (4.20)$$

$$N_{vp}^{t-} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall v \in V, \forall t \in T \quad (4.21)$$

$$Q_p^t \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall t \in T \quad (4.22)$$

$$Vol^t \geq 0 \quad \forall t \in T \quad (4.23)$$

## Modèle 4.2: Modèle Cloisonné 2 (MC2)

solution déterminée à l'avance par les paramètres  $\theta$  et  $\omega$ . Cependant, l'ajout des facteurs de pénalités permet d'augmenter la flexibilité de ces contraintes et ainsi diminuer l'importance de réaliser la solution pré-déterminée. De plus, les coûts reliés aux fonctions de pénalités sont assez faibles pour permettre une variation raisonnable de la distribution des ventes. Il ne faut pas oublier que les fonctions de pénalité ne servent pas simplement à pénaliser le non-respect des contraintes mais aussi à quantifier l'effort de vente supplémentaire associé à l'écart de la distribution prévue.

Il reste cependant que les contraintes de distribution (4.13,4.14) semblent très contraignantes alors qu'elles n'ont comme but que de distribuer l'intérêt des clients sur les différents produits tout en tenant compte de la segmentation. En effet, le paramètre  $\gamma$  qui sert à définir le pourcentage de clients non intéressés à acheter un produit est très général quant à l'intérêt premier de chaque client car il englobe l'intérêt que porte un client pour l'achat de n'importe quel produit. La raison de ce paramètre flou est d'ajouter de la flexibilité aux ventes possibles mais cette trop grande flexibilité doit être contrôlée par des contraintes de distribution pour éviter les extrêmes de MC1.

Il est possible de remplacer les contraintes de distributions en augmentant la précision des paramètres  $\gamma$  pour qu'ils reflètent directement l'intérêt des clients de chaque segment pour chacun des produits. Nous aurions alors un paramètre  $\gamma$  pour chaque segment, période et groupe de produits. Il faut cependant avertir le lecteur

qu'une telle approche demande une grande quantité de données sur les intérêts des clients et qu'en plus une analyse précise sur la variation des profits selon la quantité de produits vendus et le client acheteur doit être faite. Sans cette analyse, les résultats obtenus ne colleront pas à la réalité car nous risquons de créer des liens entre clients et produits non conformes à la réalité.

Nous pouvons dire que la force des contraintes de distribution réside dans le fait qu'elles permettent de distribuer les ventes selon un modèle réaliste des intérêts des clients (obtenus de l'année précédente) sans nécessiter une étude approfondie de ceux-ci.

#### **4.1.3.2 Fonction objectif (4.9)**

Cette nouvelle fonction objectif ressemble beaucoup à la fonction objectif (4.1) de MC1 par son traitement identique de la rentabilité et des coûts de recrutement. La principale différence provient de l'ajout des fonctions de pénalités qui réduisent la valeur de l'objectif lorsque certaines contraintes ne sont pas respectées.

#### **4.1.3.3 Limite du nombre de nouveaux clients par rapport aux clients actuels (4.11)**

Le but de cette contrainte est d'augmenter le nombre de clients exclusifs en forçant le modèle à vendre des produits aux clients qui détiennent déjà des produits. Cet objectif est atteint en limitant la quantité de nouveaux clients par rapport à l'ensemble des clients qui se déplacent entre les groupes. Parmi les clients qui se déplacent, il y en a qui sont le résultat de l'attrition et pour éviter de les compter parmi les clients qui achètent un nouveau produit, nous avons introduit l'ensemble  $L_k$  de groupes de produits qui ne regardent que les clients provenant du groupe  $k$  et qui se dirigent vers un groupe ayant au moins un produit supplémentaire. Nous pouvons par cette contrainte limiter le nombre de nouveaux clients à  $\phi\%$  du nombre de clients ayant acheté un nouveau produit.

#### **4.1.3.4 Contrainte sur le volume d'argent (4.12)**

Cette contrainte existe simplement à cause de la relation entre les administrateurs des succursales et les administrateurs provinciaux. Les administrateurs provinciaux considèrent une succursale comme productive si elle est capable d'augmenter la quantité d'argent qu'elle détient au cours d'une période. Ce volume d'argent est la quantité moyenne d'argent déposé dans chaque produit (Fonds Mutuels, Hypothèque, etc.)

multipliée par le nombre de clients qui détiennent ces produits. Cette contrainte est tellement importante pour les administrateurs qu'ils sont prêts à sacrifier une partie des profits pour respecter cette contrainte.

La partie gauche de l'équation est le volume d'argent que l'on retrouve à la fin de la période et la partie droite représente le volume d'argent au début de cette période multiplié par le facteur de hausse du volume  $\pi$ .

#### 4.1.3.5 Distribution des clients par âge et par produits (4.13)

Cette contrainte limite le ratio de clients d'un groupe d'âge ayant acheté un produit par rapport à tous les clients ayant acheté ce produit. Cette contrainte joue un rôle essentiel dans la qualité de la solution en limitant, par exemple, la vente d'hypothèques aux gens âgés. En ajoutant les variables  $M_{dp}^{t+}$  et  $M_{dp}^{t-}$ , nous cherchons à quantifier l'écart entre la distribution prévue et celle proposée. De cette façon, il est possible de quantifier l'effort supplémentaire de vente qui doit être fourni pour s'éloigner de la distribution prévue des ventes.

#### **4.1.3.6 Distribution de clients par style de vie et par produit (4.14)**

Nous essayons, par cette contrainte, de distribuer de façon réaliste les clients d'un style de vie ayant acheté un certain produit. Il est important de limiter, par exemple, la vente d'hypothèques aux gens de quartiers défavorisés. Cette contrainte est construite de la même façon que la contrainte (4.13).

#### **4.1.3.7 Limite sur les ventes de produits (4.15,4.16)**

Les contrainte (4.15,4.16) jouent deux rôles importants. Premièrement, ils limitent les ventes de produits à une croissance de  $\beta$  par rapport à la quantité de produit au début de la période. Deuxièmement, ils évaluent la valeur de la variable  $Q_p^t$  qui est la quantité de produits vendus au-dessus de la moitié de la limite  $\beta$ . Cette variable  $Q_p^t$  servira dans le calcul de la pénalité sur la limite des ventes. Il est à noter qu'importe la valeur de  $Q_p^t$ , la croissance des ventes totales du produit  $p$  ne dépassera jamais  $\beta_p^t$  à cause de cette contrainte.

#### 4.1.3.8 Fonctions de pénalité

Le modèle MC1 a un défaut majeur : il est beaucoup trop rigide au niveau des contraintes. En effet, trop de solutions sont refusées car elles ne respectent pas les contraintes. Pour accroître la flexibilité, nous avons ajouté des variables d'écart et de surplus avec des fonctions de pénalité associées à ces variables qui permettent d'obtenir des solutions qui ne respectent pas toutes les contraintes, mais qui entraînent des coûts supplémentaires dans la fonction objectif. Nous pouvons expliquer l'utilisation de ces fonctions par le fait que la grande majorité des données utilisées ont une fiabilité plutôt faible et donc que le respect de ces contraintes ne devrait pas être exigé de façon stricte.

##### Pénalité sur le volume

Pour la contrainte sur le volume d'argent, nous avons créé une fonction linéaire de pénalité  $f(x)$  où  $x$  représente le montant qu'il manque pour le respect de la contrainte. Pour chaque dollar manquant de volume, nous diminuons la fonction objectif de 0.50\$. Cette valeur a été proposée au tout début par une personne du département du marketing lorsque nous lui avons montré des résultats préliminaires où la contrainte sur le volume n'était pas respectée. Pour éviter cette situation à tout prix, il a semblé bon de fortement pénaliser cette contrainte. Au chapitre 8, nous analysons l'effet de différentes valeurs de pénalité pour cette contrainte.

$$f(x) = 0.50 \cdot x \quad (4.24)$$

### Pénalité sur le départ des clients

Pour les autres contraintes, nous avons créé des fonctions quadratiques de pénalité. Ainsi, si la solution ne respecte pas une contrainte par une petite fraction, la pénalité sera petite mais si cet écart augmente, la pénalité augmentera rapidement. Nous avons, toutefois, ajouté une borne supérieure aux pénalités pour éliminer les solutions qui s'écartent trop des contraintes.

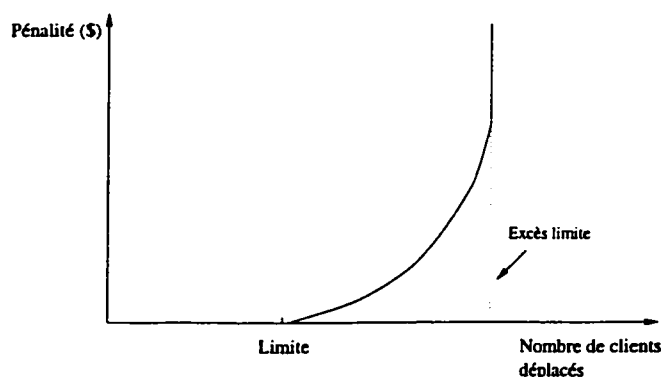


**Figure 4.3 – Illustration générale d'une fonction de pénalité sur le départ de clients**

La quantité de clients dans le groupe au début de la période et le taux de départ sont les principaux facteurs sur lesquels est basée la contrainte de pénalité. Dans un groupe où nous permettons le départ de 10 clients au maximum et que notre solution propose le déplacement de 15 clients, nous devons nous attendre à ce que la pénalité

soit beaucoup plus élevée que si la limite était de 100 clients avec 105 départs. Pour cette raison, la fonction de pénalité utilise le **ratio de clients en excès** sur la limite de départ.

La valeur de la fonction de pénalité est égale à la rentabilité du groupe de produits que possèdent les clients qui quittent, multiplié par un coefficient déterminé par l'excès de clients qui quittent. Pour simplifier l'équation de pénalité pour les périodes où nous ne possédons pas la limite exacte des départs, nous utiliserons la limite connue de départ de la première période.

Pour déterminer l'équation exacte de la fonction quadratique de pénalité, nous avons choisi trois pourcentages d'excès par rapport à la limite de départ et nous leur avons associé un coefficient de pénalité que nous avons jugé raisonnable (voir tableau 4.3). Ces trois points ont permis d'extrapoler une fonction quadratique. Il faut noter que les excès sont limités à 60% de la limite établie et que la région la plus utilisée par les solutions est entre 0% et 20%.

**Tableau 4.3 – Coefficient de pénalité pour les contraintes de départ**

| Excès | Coef(Excès) |
|-------|-------------|
| 0%    | 0%          |
| 10%   | 20%         |
| 20%   | 30%         |

La fonction de pénalité dépend donc de la quantité supplémentaire de clients ( $E_{ik}^t$ ), de la valeur actuelle de la rentabilité associée à ce groupe de produits et au coefficient

qui multiplie cette rentabilité.

$$g(E_{ik}^t) = Coef(Exces) \cdot E_{ik}^t \cdot \frac{R_{ik}^t}{\prod_{n=1}^t (1 + r_n)} \quad (4.25)$$

Comme nous cherchons une fonction quadratique pour  $g(E_{ik}^t)$  et que la variable  $Exces$  est la quantité supplémentaire de clients ( $E_{ik}^t$ ) sur la limite prévue de départ ( $\gamma_i^t \cdot c_{ik}^0$ ), alors nous pouvons réécrire  $g(E_{ik}^t)$  de la façon suivante :

$$g(E_{ik}^t) = (A \cdot (\frac{E_{ik}^t}{\gamma_i^t \cdot x_{ik}^0})^2 + B \cdot \frac{E_{ik}^t}{\gamma_i^t \cdot x_{ik}^0} + C) \cdot \frac{R_{ik}^t}{\prod_{n=1}^t (1 + r_n)} \quad (4.26)$$

Sachant que lorsque  $E_{ik}^t$  est égal à 0, le coefficient est aussi égal à 0, nous pouvons éliminer la constante C et réduire les équations précédentes. Ceci nous permet de trouver que la fonction Coef(Excès) est égal à ceci :

$$Coef(Exces) \cdot (\gamma_i^t \cdot x_{ik}^0) = A \cdot \frac{E_{ik}^t}{\gamma_i^t \cdot x_{ik}^0} + B \quad (4.27)$$

À partir des données du tableau 4.3, nous trouvons la valeur des constantes A et B ce qui nous donne la fonction de pénalité pour la limite sur les départs de clients :

$$g(E_{ik}^t) = (1 \cdot (\frac{E_{ik}^t}{\gamma_i^t \cdot x_{ik}^0})^2 + 0.1 \cdot \frac{E_{ik}^t}{\gamma_i^t \cdot x_{ik}^0}) \cdot \frac{R_{ik}^t}{\prod_{n=1}^t (1 + r_n)} \cdot (\gamma_i^t \cdot x_{ik}^0) \quad (4.28)$$

### Pénalité sur la distribution

Pour les contraintes de distribution par âge et par style de vie, nous utilisons le même type de fonction de pénalité que pour le départ de clients. Il y a cependant trois différences. Premièrement, au lieu d'utiliser le revenu du groupe de départ comme pénalité, nous utilisons la moyenne des revenus des groupes pour le produit étudié dans la contrainte. Deuxièmement, nous utilisons des coefficients de pénalité différents car le non-respect de ces contraintes est moins important que le non-respect des contraintes précédentes. Et troisièmement, la pénalité sur les contraintes est calculée autant pour le nombre réduit de clients ( $M_{dp}^{t-}$ ) que pour le nombre supplémentaire de clients ( $M_{dp}^{t+}$ ) par rapport à la distribution visée (la fonction de pénalité est symétrique). À la figure 4.4, nous illustrons la forme générale d'une courbe de pénalité autour du pourcentage cible de distribution. Les asymptotes verticales servent à limiter l'écart possible de la distribution des solutions.

Les limites de distributions sont calculées à partir du nombre de produits vendus multipliés par le pourcentage de distribution recherché. Si le pourcentage de distri-

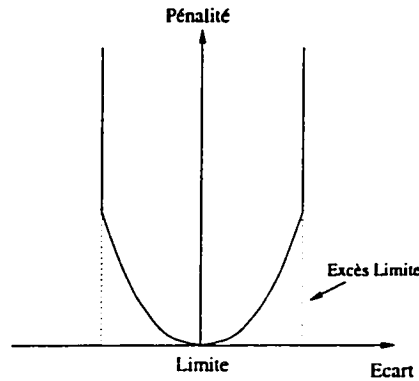


**Figure 4.4 – Illustration d'une fonction de pénalité de distribution**

bution est égal à zéro, alors nous remplaçons la fonction de pénalité par une fonction linéaire très coûteuse ( $10000 \cdot M_{ik}^t$ ). Le modèle cloisonné limite l'excès de distribution à 75% du niveau recherché. Comme pour le tableau 4.3 sur le départ de clients, les données ont été choisies par intuition pour combler le manque de données. Le pourcentage d'excès ou de manque de clients provient de la division du nombre de clients supplémentaires ( $M_{ik}^{t+}$ ) ou manquants ( $M_{ik}^{t-}$ ) par rapport à la distribution prévue ( $TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \theta_{dp}^t$ ). La limite de 75%, quant à elle, a été déterminée par le personnel du marketing lorsque nous avons présenté des résultats préliminaires pour connaître leur sensibilité aux écarts de distribution des solutions.

Pour simplifier les équations, nous avons remplacé les variables  $M_{ik}^{t+}$  et  $M_{ik}^{t-}$  par  $M_{ik}^{t*}$  car les équations sont identiques pour ces deux groupes de variables.

$$h(M_{dp}^{t*}) = \left( A \cdot \left( \frac{M_{dp}^{t*}}{TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \theta_{dp}^t} \right)^2 + B \cdot \frac{M_{dp}^{t*}}{TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \theta_{dp}^t} \right) \cdot \bar{A}_{dp}^t \cdot M_{dp}^{t*} \quad (4.29)$$

**Tableau 4.4 – Coefficient de pénalité pour les contraintes de distribution**

| Excès | Coef(Excès) |
|-------|-------------|
| 0%    | 0%          |
| 10%   | 10%         |
| 20%   | 30%         |

À partir du tableau 4.4 des coefficients prédéterminés, nous trouvons la valeur des constantes A et B ce qui nous donne la fonction de pénalité suivante :

$$h(M_{dp}^{t*}) = (0.5 \cdot (\frac{M_{dp}^{t*}}{TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \theta_{dp}^t})^2 + 0.05 \cdot \frac{M_{dp}^{t*}}{TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \theta_{dp}^t}) \cdot \bar{A}_{dp}^t \cdot (TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \theta_{dp}^t) \quad (4.30)$$

Cette fonction de pénalité s'applique pour les deux cas de non-respect de la contrainte de distribution ( $M_{dp}^{t+}$  et  $M_{dp}^{t-}$ ). La même méthode de calcul est ensuite appliquée pour déterminer la fonction de pénalité pour la contrainte de distribution par style de vie que voici :

$$o(N_{vp}^{t*}) = (0.5 \cdot (\frac{N_{vp}^{t*}}{TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \omega_{vp}^t})^2 + 0.05 \cdot \frac{N_{vp}^{t*}}{TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \omega_{vp}^t}) \cdot \bar{B}_{vp}^t \cdot (TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \omega_{vp}^t) \quad (4.31)$$

Les limites de distribution ( $TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \omega_{vp}^t$ ) sont correctes seulement pour la première période et seulement si les ventes du produit  $p$  sont dans les environs de  $TP_p \cdot \beta_p^t$  (la limite maximale de vente du produit  $p$ ). Dans le cas contraire, nous risquons d'avoir un débalancement dans le calcul des coefficients. Pour les périodes autres que la première, les limites  $TP_p \cdot \beta_p^t$  ne représentent plus très bien les ventes totales du produit  $p$  car

celles-ci varient avec le temps. Pour corriger cette situation, les limites de distribution pour la période  $t$  sont remplacées par

$$TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \omega_{vp}^t \cdot \prod_{j=1}^{t-1} (1 + \beta_p^j - \alpha_p^j)$$

D'après les premiers résultats préliminaires, ces approximations des limites de distribution semblent correctes.

### **Pénalité sur la vente de produits**

Les pénalités que nous venons d'analyser ont comme but de rendre le modèle MC2 plus flexible dans les solutions qu'il propose. Toutefois, les coûts des produits ne varient qu'avec la quantité de produits que nous vendons alors qu'en réalité, plus le personnel vend un produit plus il devient difficile pour eux de trouver de nouveaux clients prêts à acheter ce produit. Donc plus la vente de ce produit s'approche de la limite établie, plus les coûts de recrutement encourus par la banque devraient augmenter. Dans le modèle MC1, les coûts de recrutement sont linéaires c'est-à-dire que les coûts marginaux de recrutement ne varient pas avec la quantité de produits vendus. Pour limiter ce problème, nous avons décidé d'ajouter une fonction quadratique qui simule la hausse des coûts de recrutement (voir figure 4.5).

Nous posons comme hypothèse que les coûts de recrutement sont fixes pour des

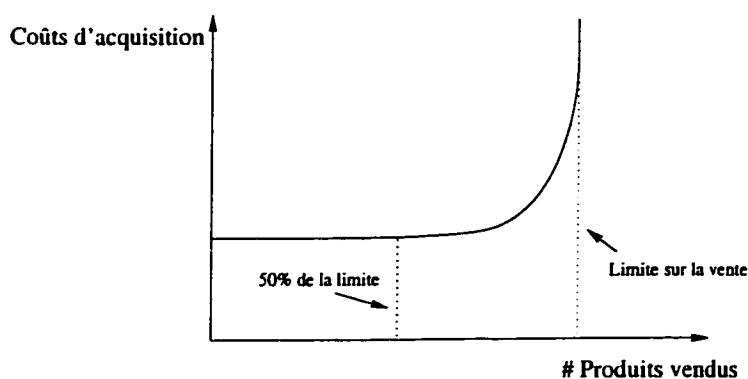


**Figure 4.5 – Illustration générale d'une fonction de pénalité sur les ventes de produits**

ventes qui sont inférieures à la moitié de la limite préétablie. Lorsque les ventes dépasseront cette limite, les coûts de recrutement devront augmenter de façon quadratique jusqu'à la limite de vente de ce produit. Pour trouver la valeur des constantes de cette fonction de 'pénalité', nous procédons de la même façon que pour les autres fonctions. Encore une fois, les données du tableau 4.5 ont été trouvées par intuition de même que l'idée d'ajouter cette pénalité que seulement pour les ventes au-dessus de la moitié de la limite. Nous expliquons cette décision par le fait que les coûts de recrutement que nous possédons sont une moyenne des coûts qu'importe le niveau de vente. De plus, cette décision nous permet de créer une fonction quadratique qui croît beaucoup plus rapidement à la fin mais conserve toujours un niveau fixe de coûts de recrutement pour des petits niveaux de ventes.

Le pourcentage d'excès du tableau 4.5 est obtenu par la division du nombre de clients supplémentaires ( $Q'_p$ ) au-dessus de la moitié de la limite de vente du produit

$p$  sur la quantité limite de vente de ce produit  $(TP_p \cdot \beta_p^t)$ .

**Tableau 4.5 – Coefficient de pénalité pour les limites de vente**

| Excès | Coef(Excès) |
|-------|-------------|
| 0%    | 0%          |
| 25%   | 50%         |
| 50%   | 100%        |

La valeur de la fonction de pénalité est égale aux coûts de recrutement moyens du produit  $(\bar{C}_p^t)$  multiplié par un coefficient déterminé par la grandeur de l'écart des contraintes. Pour simplifier l'équation de pénalité pour les périodes où nous ne possédons pas le nombre exact de clients pour la limite de vente des produits, nous utiliserons la limite de vente des produits de la première période qui est connue  $(TP_p \cdot \beta_p^t)$ . Pour les limites de vente des périodes qui suivent, nous utilisons le même principe que pour la fonction de pénalité de distribution avec la fonction suivante :

$$TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \prod_{j=1}^{t-1} (1 + \beta_p^j)$$

ce qui nous permet d'obtenir la fonction de pénalité suivante :

$$w(Q_p^t) = 2 \cdot (TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \prod_{j=1}^{t-1} (1 + \beta_p^j)) \cdot \bar{C}_p^t \cdot \left( \frac{Q_p^t}{TP_p \cdot \beta_p^t} \cdot \prod_{j=1}^{t-1} (1 + \beta_p^j) \right)^2 \quad (4.32)$$

Dans la littérature, la fonction de coût du modèle MC2 peut être considérée comme trop simple et ne ressemble en rien à la vraie fonction des coûts de recrutement.

Selon nous, notre fonction des coûts est beaucoup plus compliquée qu'elle ne le paraît car elle inclut indirectement l'ensemble des pénalités qui servent à quantifier l'effort supplémentaire de ventes de produits.

#### **4.1.4 Conclusion sur MC2**

Intuitivement, la faiblesse des modèles MC1 et MC2 provient de sa façon de calculer les profits des produits vendus à des nouveaux clients. En effet, lorsque les modèles MC1 et MC2 vendent un nouveau produit, ils ajoutent aussitôt dans leurs revenus la valeur moyenne de revenu que rapporte la vente de ce produit. Cependant les revenus que rapportent un produit varie avec le nombre d'années que le client détient le produit en question. Par exemple, une hypothèque est très payante pour la banque lors des premières années (en oubliant les frais encourus par la vente) mais elle perd rapidement cette profitabilité dans les dernières années car la partie d'intérêt dans le remboursement fait par le client diminue. C'est le cas contraire pour ce qui en est des fonds mutuels. En effet, au début le client investit peu d'argent (donc peu profitable pour la banque) mais avec le temps la somme accumulée dans les fonds mutuels devient importante et donc plus profitable.

Donc lorsque les modèles MC1 et MC2 disent que la vente des produits entraîne un profit moyen annuel, ils sous-estiment la valeur réelle des profits de certains produits

et en sur-estiment d'autres mais il reste que le profit moyen est correct. En supposant que la distribution des durées de détention des produits ne changent pas dans le temps, ces estimations restent correctes car lorsque les modèles sous-estiment les profits d'une hypothèque nouvellement vendue et ils sur-estiment également les profits d'une vieille hypothèque. L'addition de toutes ces déviations est nul et nous retrouvons la valeur moyenne d'une hypothèque.

Par souci de mieux présenter la réalité des profits qui varient avec la durée de détention, nous avons créé les modèles actuariels qui nous présentons dans les sections qui suivent. Il y a cependant plusieurs problèmes dans l'implantation de cette réalité dans les modèles MC1 et MC2. Premièrement, nous devrions étendre le nombre d'années à étudier pour mieux voir les changements de rentabilité des produits nouvellement vendus. Deuxièmement, nous devrions créer une variable pour chaque durée de détention (une série de variable pour les clients qui viennent d'acheter le produit, une pour ceux que c'est leur deuxième année ...). Les modèles MC1 et MC2 deviendraient beaucoup trop gros.

La deuxième faiblesse des modèles MC1 et MC2 est son utilisation de contraintes plutôt artificielles pour simuler l'effet de l'attrition. Pour limiter l'impact de ces deux problèmes, nous avons créé le modèle actuariel.

## 4.2 Modèle Actuariel (MA1)

Le modèle cloisonné évalue correctement la rentabilité des produits sur plusieurs périodes. Cependant, les clients détiennent ces produits sur des périodes beaucoup plus longues que celles considérées par le modèle cloisonné considère. Cette différence peut nuire à certains produits qui prennent beaucoup plus de temps à devenir profitables. Pour cette raison, nous proposons ici une nouvelle approche au problème de l'optimisation des marchés en incorporant l'attrition et la valeur temporelle de l'argent directement dans la fonction objectif (valeur actuelle des profits futurs). De plus, nous proposons une nouvelle forme de coûts de recrutement qui reflètent mieux l'effort de vente fourni par le personnel d'une succursale bancaire.

Dans la section suivante, nous décrivons le modèle actuariel (MA1) et nous commentons toutes les contraintes. Les explications sur le calcul de la rentabilité des produits et des nouveaux coûts de recrutement sont présentées dans les sections qui suivront.

### 4.2.1 Équations du modèle actuariel (MA1)

Le modèle actuariel emprunte la même approche que le modèle cloisonné avec ses groupes de produits et ses contraintes simulant la réalité. Une des grandes différences

de ce modèle est son approche de l'attrition et de la rentabilité à long terme. Cette nouvelle méthode permet d'éliminer l'étude de plusieurs périodes et de diminuer le nombre de contraintes. L'inclusion de l'attrition dans la rentabilité des produits fixe la valeur des profits de produits détenus actuellement par les clients et permet d'éliminer les contraintes d'attrition.

#### 4.2.1.1 Définition des termes

Le modèle actuariel utilise beaucoup de paramètres qu'on retrouve aussi dans les modèles cloisonnés. Certains de ces paramètres sont réutilisés mais avec une légère différence et pour cette raison, nous les redéfinissons. D'autres termes ont été ajoutés pour permettre de créer une nouvelle fonction des coûts de recrutement.

- $x_{ik}$  Nombre de clients du segment  $i$  qui détiennent initialement les produits du groupe  $k$  ;
- $y_{ijk}$  Nombre de clients du segment  $i$  qui passent du groupe  $j$  vers le groupe  $k$  ;
- $L_k$  Ensemble de groupes de produits ayant tous les produits du groupe  $k$  avec au moins un autre produit ;
- $R_{ik}$  Rentabilité actualisée des produits du groupe  $k$  vendus aux clients du segment  $i$  ;
- $C_{ip}$  Coût de recrutement d'un client du segment  $i$  voulant acheter le produit  $p$  ;

- $Q_p^-$  Quantité de produit  $p$  vendu manquant pour atteindre la moitié de la limite de vente de ce produit ;
- $Q_p^+$  Quantité de produit  $p$  vendu supplémentaire à la moitié de la limite de vente de ce produit ;
- $M_{dp}$  Ventes totales du produit  $p$  dans le groupe d'âge  $d$  ;
- $N_{vp}$  Ventes totales du produit  $p$  dans le style de vie  $v$  ;
- $E_{ij}^+$  Quantité de clients déplacés du segment  $i$  possédant le groupe  $j$  de produits au-dessus de la limite sur les départs ;
- $E_{ij}^-$  Quantité de clients déplacés du segment  $i$  possédant le groupe  $j$  de produits en-dessous de la limite sur les départs ;
- $F(Q_p^+)$  Facteur multiplicatif associé aux ventes supplémentaires du produit  $p$  ;
- $G(M_{dp})$  Facteur multiplicatif associé à la distribution par âge du produit  $p$  au segment  $d$  ;
- $G(N_{vp})$  Facteur multiplicatif associé à la distribution par style de vie du produit  $p$  au segment  $v$  ;
- $H(E_{ij}^+)$  Facteur multiplicatif associé au départ du groupe  $j$  de clients du segment  $i$  ;
- $\mu_{ijk}$  Facteur multiplicatif pour vente multiple de produits lorsqu'un client du segment  $i$  passe du groupe  $j$  au groupe  $k$  ;
- $\gamma_i$  Pourcentage de clients du segment  $i$  intéressés à acheter un nouveau produit ;
- $\overline{\gamma}_i$  Pourcentage maximal de clients du segment  $i$  intéressés à acheter un nouveau

produit ;

- $\beta_p$  Pourcentage limite de vente du produit  $p$  ;
- $\omega_{vp}$  Pourcentage de clients du style de vie  $v$  ayant acheté le produit  $p$  par rapport à tous les clients ayant acheté ce produit ;
- $\theta_{dp}$  Pourcentage de clients du groupe d'âge  $d$  ayant acheté le produit  $p$  par rapport à tous les clients ayant acheté ce produit ;
- $\phi$  Pourcentage maximal de nouveaux clients qui achètent des produits ;
- $\pi$  Pourcentage de hausse du volume d'argent visée par la banque.

Voici donc les équations du modèle actuariel MA1. Comme mentionné précédemment, l'explication du calcul de la rentabilité  $R_{ik}$  et des coûts de recrutement

$$\mu_{ijk} \cdot \left( \sum_{p \in (H_k - H_j)} C_{ip} \cdot F(Q_p^+) \cdot G(M_{dp}) \cdot G(N_{vp}) \cdot H(E_{ij}^+) \right)$$

est donnée dans les sections suivantes. Il est à noter que les facteurs multiplicatifs  $F(Q_p^+)$ ,  $G(M_{dp})$ ,  $G(N_{vp})$  et  $H(E_{ik}^+)$  ont une valeur minimale de 1 qu'importe la situation.

Les plus grandes différences entre ce modèle et les modèles cloisonnés sont l'introduction d'une fonction objectif non concave et l'élimination des périodes car les profits futurs de la vente d'un produit sont comptabilisés immédiatement.

$$\max_{y_{ijk}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in G} \sum_{k \in G} y_{ijk} \cdot R_{ik} \quad (4.33)$$

$$- y_{ijk} \cdot \mu_{ijk} \cdot \left( \sum_{p \in (H_k - H_j)} C_{ip} \cdot F(Q_p^+) \cdot G(M_{dp}) \cdot G(N_{vp}) \cdot H(E_{ij}^+) \right) - 0.50 \cdot Vol$$

$$s.t. \sum_{k \in G} y_{ijk} = x_{ij} \quad \forall i \in I, \forall j \in G \quad (4.34)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in G_p^-, j \in k \cup \{p\}} y_{ikj} = Q_p^- + Q_p^+ \quad \forall p \in P \quad (4.35)$$

$$Q_p^- \leq 0.5 \cdot \beta_p \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^+} x_{ij} \quad \forall p \in P \quad (4.36)$$

$$Q_p^+ \leq 0.5 \cdot \beta_p \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^+} x_{ij} \quad \forall p \in P \quad (4.37)$$

$$\sum_{j \in G, j \neq k} y_{ikj} = E_{ik}^- + E_{ik}^+ \quad \forall i \in I, \forall k \in G \quad (4.38)$$

$$E_{ik}^- \leq \gamma_i \cdot x_{ik} \quad \forall i \in I, \forall k \in G \quad (4.39)$$

$$E_{ik}^+ \leq \bar{\gamma}_i \cdot x_{ik} \quad \forall i \in I, \forall k \in G \quad (4.40)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in G} \sum_{j \in G} y_{ikj} \cdot D_{ij} + Vol \geq (1 + \pi) \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} x_{ik} \cdot D_{ik} \quad (4.41)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in G} y_{ijz_j} \leq \phi \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} \sum_{j \in L_k} y_{ikj} \quad (4.42)$$

$$\sum_{i \in B_d} \sum_{k \in G_p^-, j \in G_p^+} y_{ikj} - M_{dp} \leq \theta_{dp} \cdot (Q_p^+ + Q_p^-) \quad \forall d \in D, \forall p \in P \quad (4.43)$$

$$\sum_{i \in G_v} \sum_{k \in G_p^-, j \in G_p^+} y_{ikj} - N_{vp} \leq \omega_{vp} \cdot (Q_p^+ + Q_p^-) \quad \forall v \in V, \forall p \in P \quad (4.44)$$

$$y_{ijk} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in G, \forall k \in G \quad (4.45)$$

$$x_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall k \in G \quad (4.46)$$

$$E_{ik}^+ \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall k \in G \quad (4.47)$$

$$E_{ik}^- \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall k \in G \quad (4.48)$$

$$M_{dp} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall d \in D \quad (4.49)$$

$$N_{vp} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall v \in V \quad (4.50)$$

$$Q_p^+ \geq 0 \quad \forall p \in P \quad (4.51)$$

$$Q_p^- \geq 0 \quad \forall p \in P \quad (4.52)$$

$$Vol \geq 0 \quad (4.53)$$

### Modèle 4.3: Modèle Actuariel 1 (MA1)

#### 4.2.1.2 Fonction Objectif (4.33)

Cette fonction maximise les profits en additionnant tous les revenus que rapportent les clients et en soustrayant les coûts modifiés de recrutement. À ceci, une pénalité sur le manque à gagner au niveau du volume ( $Vol$ ) est ajoutée.

#### 4.2.1.3 Conservation de flot (4.34)

Cette contrainte ne sert qu'à faire respecter la conservation de flots.

#### 4.2.1.4 Limite de vente de produits (4.35,4.36,4.37)

Ces contraintes ne limitent pas la vente de produit, mais mesurent plutôt la nombre de produit vendu au-dessus de la moitié de la limite. Cette quantité est ensuite directement incluse dans les coûts de recrutement. L'équation (4.35) évalue la quantité de nouveaux acheteurs du produit  $p$  comprise dans la somme des deux variables  $Q_p^+$  et  $Q_p^-$ . L'équation (4.37) limite de son côté la quantité supplémentaire  $Q_p^+$  au-dessus de la moitié de la limite tout comme l'équation (4.36) limite la partie inférieure de la vente du produit  $p$ . Comme il n'y a pas de coût associé à  $Q_p^-$ , cette variable doit toujours être égale à sa limite supérieure avant que la variable  $Q_p^+$  puisse être différent

de 0.

#### **4.2.1.5 Limite sur les départs de clients (4.38,4.39,4.40)**

Comme dans la contrainte précédente, nous ne limitons pas directement le départ des clients, mais mesurons plutôt la quantité de clients qui quittent le groupe de produits. Les coûts de départ des clients sont évalués par la fonction multiplicative  $H(E_{ik}^+)$  qui accroît les coûts de recrutement.

#### **4.2.1.6 Limite sur la hausse du volume d'argent (4.41)**

Cette contrainte est identique à celle du modèle cloisonné MC2.

#### **4.2.1.7 Limite sur la quantité de nouveaux clients (4.42)**

Cette contrainte est identique à celle du modèle cloisonné MC2.

#### 4.2.1.8 Distribution des ventes de produits (4.43,4.44)

L'idée derrière ces contraintes est la même que celle des modèles cloisonnés mais il y a cependant quelques différences dans son écriture. Premièrement, la somme des variables  $Q_p^+$  et  $Q_p^-$  est équivalente à la somme des clients ayant acheté un produit que l'on retrouve dans les équations (4.13) et (4.14) de MC2

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^t$$

Deuxièmement, la substitution des variables  $M_{dp}^{t+}$  et  $M_{dp}^{t-}$  par la variable  $M_{dp}$  permet d'éliminer le signe de l'égalité des équations de MC2 mais elle ne permet plus la pénalisation des cas où la distribution des ventes est inférieure à la prévision.

#### 4.2.1.9 Rentabilité à long terme

Les solutions des tests préliminaires du modèle MA1 nous montrent que les solutions respectent très bien les contraintes imposées. Cependant, nous remarquons une forte hausse des ventes multiples de produits. Cette situation peut-être expliquée par le fait que les coûts de recrutement sont fortement inférieurs aux profits actualisés de chaque produit. Il faut comprendre que les coûts de recrutement sont encourus seule-

ment à la première année du produit et comme nous actualisons tous les profits que ce produit rapportera à la banque, les coûts de recrutement deviennent minuscules en comparaison.

Pour cette raison, nous proposons une petite variante au modèle MA1 où les profits de la fonction objectif sont le résultat d'une pondération entre les profits de la première année (court terme) et les profits actualisés des années suivantes (long terme). Ceci permet aux administrateurs de décider de l'importance à accorder aux profits à court et à long terme. La forme de la rentabilité suit la fonction suivante :

$$W \cdot R_{ik}^1 + (1 - W) \cdot R_{ik}^r \quad (4.54)$$

où

- $W$  Poids accordé aux profits de la première année (entre 0 et 1) ;
- $R_{ik}^1$  Rentabilité des produits du groupe  $k$  vendus aux clients du segment  $i$  au cours de la première année ;
- $R_{ik}^r$  Rentabilité actualisée que rapporte les produits du groupe  $k$  vendus aux clients du segment  $i$  au cours des années qui suivent la première année.

L'effet des poids est étudié au chapitre 8. Dans les sections qui suivent, nous

expliquons la provenance du calcul de la rentabilité des produits et de la nouvelle forme des coûts de recrutement.

#### 4.2.2 Calcul de la rentabilité

En ignorant les profits à long terme de certains produits, le modèle cloisonné rend impossible la comparaison de deux produits car ils ont souvent un horaire différent pour l'apparition des profits. Pour cette raison, nous allons actualiser tous les profits que devrait rapporter en moyenne la vente d'un produit. Cependant, le fait de vendre un produit aujourd'hui n'assure pas la banque que le client va rester fidèle à la succursale pendant toutes ces années. Nous devons donc considérer l'effet de l'attrition sur les profits à long terme.

Pour ce faire, nous proposons de traiter la vente d'un produit comme une rente où la banque est la rentière. Une rente est une série de flots monétaires qui sont payés au rentier jusqu'à une date limite ou jusqu'à la fin de sa vie. Les flots monétaires de cette rente sont en fait les profits que rapportent la vente du produit et la durée de vie de cette rente dépend de la durée de vie normale du produit et de l'attrition qui lui est associée. En évaluant l'attrition annuelle de chaque produit, nous pouvons construire une table de "mortalité" pour évaluer la valeur actuelle de cette rente i.e. la valeur actualisée moyenne des profits futurs d'un produit vendu aujourd'hui à un

client.

#### 4.2.2.1 Valeur actualisée des profits

Pour actualiser les profits, nous avons besoin d'un taux d'intérêt associé à la valeur future de ces profits. Puisque la banque réinvestit une grande partie de ses profits, il est raisonnable de considérer comme taux d'actualisation le taux de rendement des actifs de la banque, noté  $i$ .

Ainsi 1\$ d'aujourd'hui correspond à  $(1 + i)$ \$ dans 1 an. Donc si nous voulons 1\$ dans un an, nous devons mettre de côté  $\frac{1}{(1+i)}$ \$, qu'on notera par  $v$ \$.

En posant  $q_t$  comme l'attrition à la période  $t$ , nous pouvons évaluer le pourcentage de clients ( $l_t$ ) d'aujourd'hui qui vont détenir le produit à l'année  $t$ . Il est à noter que cette attrition  $q_t$  est différente de l'attrition  $\alpha_p^t$  définie dans le modèle cloisonné. En effet, l'attrition du modèle cloisonné englobe toutes les attritions qu'importe l'âge du produit alors que  $q_t$  est l'attrition d'un produit d'âge  $t$ . Donc, pour une période donnée, la variable  $l_t$  est le pourcentage restant de client qui ont acheté un nouveau produit il y a  $t$  période. Le calcul de  $l_t$  se fait de la façon suivante :

$$l_t = \prod_{j=0}^t (1 - q_j) \quad (4.55)$$

À partir de ces informations, les profits actualisés se calculent de la façon suivante :

$$VA(R) = R \cdot \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} \cdot l_j \quad (4.56)$$

où  $R$  sont les profits annuels de la banque.

Cette formule fonctionne bien si pour chaque année, la banque reçoit  $R$ \$ de profit. Mais en réalité, les profits varient avec les années et dans le cas de certains produits tel les hypothèques, les profits de la banque provenant d'un client diminuent avec le temps. Pour actualiser ces flots monétaires variables, nous devons modifier notre formule.

$$VA(R) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j \cdot v^{j+1} \cdot l_j \quad (4.57)$$

où  $R_j$  sont les profits de l'année  $j$ .

Il est à remarquer que nous travaillons avec la moyenne des profits par client. Ainsi, pendant que certains clients finissent de payer leur hypothèque d'autres ne font que commencer et ceci est sans compter le fait que les nouveaux clients ont des hypothèques au montant initial plus élevé à cause de l'inflation.

Nous pouvons facilement soupçonner qu'il existe une différence entre la distribution des nouveaux clients que nous allons chercher cette année et l'ensemble des clients que nous détenons actuellement. En effet, il existe une plus grande proportion

de nouvelles hypothèques chez les nouveaux clients que chez les clients que la banque détient. Ceci fait en sorte que l'attrition soit différente et donc que les profits actualisés le soient aussi. Pour cette raison, deux tables de mortalité sont construites : l'une pour les nouveaux clients et l'autre pour les clients actuels.

Il existe plusieurs types d'attrition et chacune de celles-ci a un effet différent sur les profits. L'attrition involontaire (fin de l'utilisation d'un produit) agit principalement sous la forme de la durée de vie moyenne du produit. Comme il est impossible de savoir combien de temps un client va conserver un produit, nous devons donc utiliser la durée moyenne d'utilisation des produits.

Pour ce qui est de l'attrition volontaire et plus en particulier de la défection, ils sont tout simplement inclus dans le facteur d'attrition  $q_t$  et indirectement dans la rentabilité à long terme du produit vendu (la défection est en fait la 'mort' de notre rentier). L'attrition partielle, quant à elle, limite son effet sur la quantité d'argent investie dans un produit comme le remboursement anticipé dans une hypothèque.

#### **4.2.2.2 Valeur actualisée d'une hypothèque**

Pour bien comprendre le calcul de la rentabilité des produits, nous présentons les calculs que nous avons faits pour la rentabilité des hypothèques et ensuite, nous

présentons les calculs pour les produits financiers comme les dépôts, les REÉR et les fonds mutuels. Nous faisons une différence entre ces produits car contrairement aux produits financiers, le capital investi dans une hypothèque diminue avec le temps.

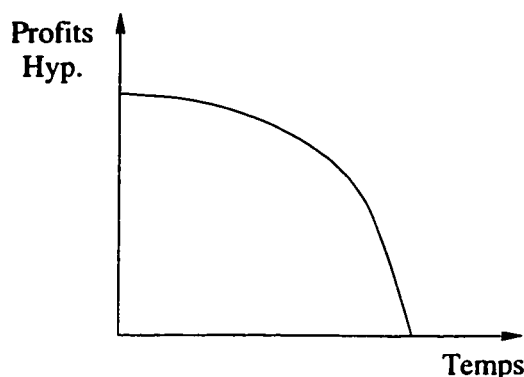


**Figure 4.6 – Profit de la banque sur une nouvelle hypothèque au cours de sa vie**

Comme il est illustré à la figure 4.6, les profits que fait une banque par la vente d'une hypothèque diminuent avec le temps car la valeur de l'hypothèque (et donc de l'intérêt) diminue. Nous devons cependant poser comme hypothèse que le taux de rentabilité sur les montants d'argent investis ne varient pas avec l'âge du produit. Cette hypothèse est raisonnable car, comme nous l'avons montré au chapitre précédent, une variation des taux d'intérêt n'affecte pas vraiment le taux de rentabilité des produits.

Parmi l'ensemble des clients actuels d'une succursale, il est possible de regrouper ces clients selon leur stade de remboursement de leur hypothèque (figure 4.7). De ces informations, nous pouvons tracer une courbe (en gras dans la figure 4.8) qui représente les profits moyens que la banque récolte de chaque client actuel à travers

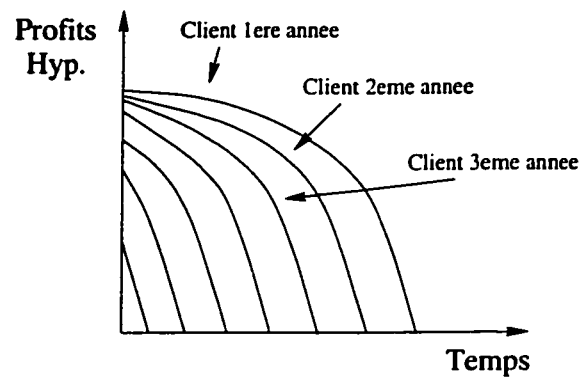


**Figure 4.7 – Profit de tous les clients actuels sur les hypothèques au cours de sa vie**

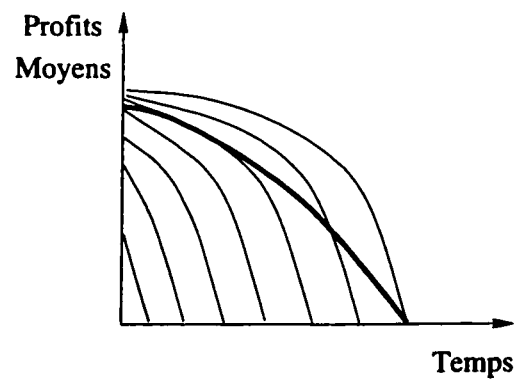


**Figure 4.8 – Profit moyen des clients actuels sur les hypothèques au cours de sa vie**

le temps. C'est cette courbe de profits qui permet de calculer la valeur actualisée des profits des clients actuels. Elle ne peut, cependant, servir que pour un ensemble assez homogène de nouveaux et d'anciens clients de tous âges comme on le retrouve dans une succursale bancaire qui existe depuis plusieurs années.

L'utilisation des montants moyens dans le modèle cloisonné sous-estime la vraie rentabilité des nouveaux produits achetés mais évalue correctement la rentabilité de l'ensemble des produits de tous âges de la banque. En effet, l'ensemble des produits comprend un mélange de produits où il y a beaucoup de nouveaux et de vieux produits, alors que chez les nouveaux clients il y a peu de vieux produits. Comme le modèle cloisonné traite les produits dans son ensemble et ne fait pas la différence dans l'âge des produits, l'utilisation de la valeur moyenne des produits pour tout âge est correcte. Dans le modèle actuariel, nous faisons une différence dans l'âge des produits (pour mieux évaluer l'effet de l'attrition) et pour cette raison, il est important de calculer la valeur moyenne des produits chez les nouveaux clients.

On peut diviser en deux grands groupes les clients qui achètent un produit : ceux qui achètent un nouveau produit et ceux qui se cherchent une nouvelle banque. Par exemple, nous savons qu'avec une attrition de 4% par année pendant 10 ans, nous avons près de 70% des clients initiaux qui vont payer la totalité de leur hypothèque à la même banque et 30% qui vont changer de banque. Donc si nous supposons que les banques concurrentielles subissent les mêmes taux d'attrition que la banque étudiée

et qu'il n'y a pas de croissance, alors nous devons nous attendre à ce que les clients que nous allons chercher sont 70% du temps des clients qui achètent un nouveau produit et 30% du temps des clients qui changent de banque. La ventilation de l'âge des produits des clients qui changent de banque dépend des taux d'attrition de la banque. Par exemple, s'il y a un haut taux d'attrition à la cinquième année d'une hypothèque, on devrait s'attendre à voir beaucoup de clients qui cherchent une banque pour financer une hypothèque qui a déjà cinq ans.

Pour calculer la valeur actualisée moyenne d'une hypothèque, nous avons besoin de la notation que nous définissons ici :

|                |                                                                                    |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| $M_t$          | Valeur d'une hypothèque au début de l'année $t$ ;                                  |
| $\overline{M}$ | Valeur actuelle moyenne d'une hypothèque (tous âges d'hypothèque confondus) ;      |
| $R_t$          | Taux de rétention cumulatif à la fin de l'année $t$ ;                              |
| $P$            | Paiement annuel sur une hypothèque étalée sur $d$ années à un taux d'intérêt $i$ ; |
| $a_d$          | Valeur actuelle d'une rente de 1\$ pendant $d$ années au taux d'intérêt constant ; |
| $d$            | Durée moyenne d'une hypothèque.                                                    |

La courbe de la valeur moyenne d'une hypothèque de la figure 4.8 est calculée à partir de quelques données que nous possédions comme : la valeur moyenne d'une hypothèque ( $\bar{M}$ ), la durée de vie moyenne ( $d$ ), le taux de rendement des actifs ( $i$ ) et le taux de profitabilité d'une hypothèque (environ 1%). Les profits que rapporte une hypothèque au début d'une année sont égaux à :  $1\% \cdot M_t$  où  $M_t$  est la valeur de cette hypothèque au début de l'année  $t$ . En supposant un taux d'intérêt de 10%, la valeur de  $M_t$  est calculée à partir de la fonction suivante  $M_t = (M_{t-1} \cdot 1.10) - P$  où  $P$  est le paiement annuel de l'hypothèque.

Pour calculer le paiement annuel d'une hypothèque nous avons besoin de la valeur de l'hypothèque au tout début ( $M_1$ ), du taux d'intérêt de l'emprunt et de la durée de l'emprunt. Nous supposons pour cet exemple que la durée moyenne d'une hypothèque est de 15 ans et que le taux d'actualisation  $i$  est de 10%.

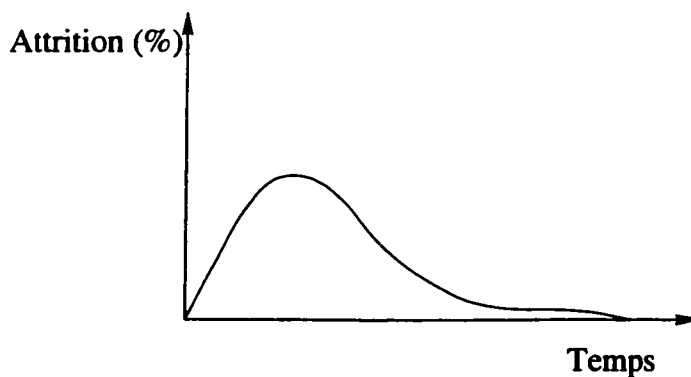
$$P = \frac{M_1}{a_{15}} \rightarrow a_{15} = \frac{(1 - (1.10)^{-15})}{0.10} \quad (4.58)$$

Comme nous pouvons le constater, la valeur du paiement dépend de la valeur initiale de l'hypothèque  $M_1$  que nous ne connaissons pas. Cependant sachant que l'âge des produits des clients actuels est distribué selon les taux de rétention ( $1 - \%$ attrition), nous allons essayer de déterminer la valeur d'une hypothèque à chaque année

**Tableau 4.6 – Taux d'attrition pour une nouvelle hypothèque**

| <b>Année</b> | <b>Attrition</b> | <b>Rétention</b> |
|--------------|------------------|------------------|
| 1            | 0.000            | 1.0000           |
| 2            | 0.030            | 0.9700           |
| 3            | 0.050            | 0.9215           |
| 4            | 0.075            | 0.8524           |
| 5            | 0.100            | 0.7671           |
| 6            | 0.075            | 0.7096           |
| 7            | 0.050            | 0.6741           |
| 8            | 0.025            | 0.6573           |
| 9            | 0.010            | 0.6507           |
| 10           | 0.005            | 0.6475           |
| 11           | 0.005            | 0.6442           |
| 12           | 0.005            | 0.6410           |
| 13           | 0.005            | 0.6377           |
| 14           | 0.005            | 0.6346           |
| 15           | 0.000            | 0.6346           |

à partir de la valeur moyenne des hypothèques. Dans le tableau 4.6, nous donnons un exemple des taux d'attrition pour une hypothèque de 15 ans. La distribution des taux d'attrition a été déterminée à partir d'une fonction illustrée à la figure 4.9 avec comme moyenne un taux d'attrition de 3.0% sur 15 ans.

**Figure 4.9 – Attrition d'une hypothèque**

Pour continuer notre exemple, nous estimons la valeur moyenne des hypothèques

$(\overline{M})$  à 85000\$ ce qui nous permet d'écrire l'équation suivante :

$$85000\$ = \frac{\sum_{t=1}^{15} M_t \cdot R_t}{\sum_{i=1}^{15} R_t} \quad (4.59)$$

Sachant que  $M_t = (1.10 \cdot M_{t-1}) - P$ , nous trouvons l'équation suivante :

$$85000\$ \cdot 11.0423 = R_1 \cdot M_1 + R_2 \cdot (M_1 \cdot 1.1 - P) + \dots + R_{15} \cdot (M_{14} \cdot 1.1 - P) \quad (4.60)$$

Nous remplaçons les  $M_t$  par leur équivalence avec  $M_1$  et nous obtenons l'équation suivante :

$$938595\$ = R_1 \cdot M_1 + R_2 \cdot (M_1 \cdot 1.1 - P) + R_3 \cdot ((M_1 \cdot 1.1 - P) \cdot 1.1 - P) + \dots \quad (4.61)$$

En regroupant les  $M_1$ , nous obtenons :

$$938595\$ = \sum_{j=1}^{15} R_j \cdot (1.1)^{(j-1)} \cdot M_1 - P \cdot \sum_{j=1}^{15} R_j \cdot \sum_{k=1}^{j-1} (1.1)^{(k-1)} \quad (4.62)$$

Avec les taux de rétention et en remplaçant P par son équivalent avec  $M_1$ ,

l'équation se réduit à :

$$938595\$ = M_1 \cdot 22.08101 - \frac{M_1}{7.60608} \cdot 110.3871 \quad (4.63)$$

En isolant  $M_1$ , nous trouvons que la valeur initiale d'une hypothèque moyenne est de 124022\$. Connaissant maintenant la valeur initiale d'une hypothèque, nous pouvons déterminer la valeur des paiements (16306\$) et la valeur de l'hypothèque au début de chaque année.

Les différentes valeurs de l'hypothèque pour chacune des 15 années du produit sont illustrées dans le tableau 4.7. À partir de ces valeurs et du pourcentage de clients qui détiennent encore le produit (les survivants), le montant moyen des hypothèques à chaque période peut être calculé. De ces montants moyens, les profits de la banque pour chacune des années (1% du montant de l'hypothèque au début de l'année) sont calculés puis actualisés à l'aide d'un facteur d'actualisation (10% par année). La dernière colonne du tableau 4.7 est la valeur actualisée des profits obtenus au cours d'une année précise.

La somme des profits actualisés (5822\$) signifie que pour chaque nouvelle hypothèque que la banque vend aujourd'hui à un client, elle fera des profits qui équivaldront à recevoir maintenant 5822.38\$. Cependant, ces profits proviennent seule-

Tableau 4.7 – Calcul de la valeur actualisée d'une hypothèque

| Année | Hypot.(\$) | Attr. | Rétent. | Valeur moyenne(\$) | Profit(1%) | Facteur d'actualisation | Profit actualisé(\$) |
|-------|------------|-------|---------|--------------------|------------|-------------------------|----------------------|
| 1     | 124022     | 0.000 | 1.0000  | 124022             | 1240.22    | 0.9091                  | 1127.48              |
| 2     | 120118     | 0.030 | 0.9700  | 116514             | 1165.14    | 0.8264                  | 962.87               |
| 3     | 115824     | 0.050 | 0.9215  | 106732             | 1067.32    | 0.7513                  | 801.88               |
| 4     | 111100     | 0.075 | 0.8524  | 94702              | 947.02     | 0.6830                  | 646.81               |
| 5     | 105904     | 0.100 | 0.7671  | 81239              | 812.39     | 0.6209                  | 504.41               |
| 6     | 100188     | 0.075 | 0.7096  | 71093              | 710.93     | 0.5645                  | 401.32               |
| 7     | 93900      | 0.050 | 0.6741  | 63298              | 632.98     | 0.5132                  | 324.85               |
| 8     | 86984      | 0.025 | 0.6573  | 57175              | 571.75     | 0.4665                  | 266.72               |
| 9     | 79376      | 0.010 | 0.6507  | 51650              | 516.50     | 0.4241                  | 219.05               |
| 10    | 71008      | 0.005 | 0.6475  | 45978              | 459.78     | 0.3855                  | 177.25               |
| 11    | 61803      | 0.005 | 0.6442  | 39813              | 398.13     | 0.3505                  | 139.54               |
| 12    | 51677      | 0.005 | 0.6410  | 33125              | 331.25     | 0.3186                  | 105.54               |
| 13    | 40539      | 0.005 | 0.6377  | 25852              | 258.52     | 0.2897                  | 74.89                |
| 14    | 28287      | 0.005 | 0.6346  | 17951              | 179.51     | 0.2633                  | 47.27                |
| 15    | 14810      | 0.000 | 0.6346  | 9398               | 93.98      | 0.2394                  | 22.50                |

ment de la vente d'une nouvelle hypothèque et non de la vente d'une hypothèque à un nouveau client. Comme nous supposons que les nouveaux clients proviennent en partie des autres banques par leur attrition (identique à la nôtre par hypothèse), nous pouvons estimer la ventilation des âges des hypothèques chez les nouveaux clients. Pour trouver ces valeurs, nous définissons de nouvelles données :

$VA_j$  Valeur actualisée d'un produit d'âge  $j$  ;

$PA_j$  Valeur actualisée des profits de l'année  $j$  (colonne Profit Actualisé du tableau 4.7).

L'équation 4.64 sert à trouver la valeur actualisée d'un produit d'âge  $j$ . En appliquant cette formule pour la valeur actualisée d'âge 1 c'est-à-dire une nouvelle hypothèque, cela revient à une simple addition des profits actualisés.

$$VA_j = \frac{\sum_{k=j}^{15} PA_k \cdot (1+i)^{j-1}}{R_j} \quad (4.64)$$

Si nous cherchons la valeur actualisée d'un produit d'âge 14, nous avons :

$$VA_{14} = \frac{(47.27 + 22.50) \cdot (1.10)^{13}}{0.6346} \quad (4.65)$$

ce qui nous donne 379.55\$ c'est-à-dire la valeur actualisée des profits d'une hypothèque d'âge 14. Pour simplifier les calculs, nous avons dû poser l'hypothèse que l'attrition dépend de l'âge du produit et non de la durée de la relation du client avec la banque. Cette hypothèse n'est généralement pas bonne, cependant, elle influence surtout les hypothèques d'âge mûr dont la ventilation est petite (environ 3% des ventes). L'impact de cette hypothèse est donc minime (moins de 1% des profits actualisés).

La distribution des clients par âge de leur produit et les profits de ces produits sont conciliés dans le tableau 4.8 de façon à pouvoir calculer la valeur actualisée moyenne d'une hypothèque vendue par la banque. La valeur moyenne actualisée des profits obtenus par la vente d'une hypothèque est de 5229.50 ce qui est légèrement moins que les profits moyens que rapporte une nouvelle hypothèque.

**Tableau 4.8 – Valeur d’une hypothèque pour différents âges**

| <b>Âge</b> | <b>Valeur Actualisée(\$)</b> | <b>Distribution des clients par âge</b> | <b>Profit Moyen(\$)</b> |
|------------|------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------|
| 0          | 5822.38                      | 0.6346                                  | 3694.88                 |
| 1          | 5324.11                      | 0.0300                                  | 159.72                  |
| 2          | 4900.44                      | 0.0485                                  | 237.67                  |
| 3          | 4575.35                      | 0.0691                                  | 316.16                  |
| 4          | 4358.02                      | 0.0853                                  | 371.74                  |
| 5          | 4037.46                      | 0.0575                                  | 232.15                  |
| 6          | 3620.41                      | 0.0355                                  | 128.52                  |
| 7          | 3121.15                      | 0.0168                                  | 52.44                   |
| 8          | 2589.44                      | 0.0066                                  | 17.09                   |
| 9          | 2064.76                      | 0.0033                                  | 6.81                    |
| 10         | 1569.21                      | 0.0033                                  | 5.18                    |
| 11         | 1113.65                      | 0.0033                                  | 3.68                    |
| 12         | 711.94                       | 0.0032                                  | 2.28                    |
| 13         | 379.55                       | 0.0031                                  | 1.18                    |
| 14         | 134.64                       | 0.0000                                  | 0.00                    |

#### **4.2.2.3 Valeur actualisée des produits financiers**

Pour les autres produits financiers comme les fonds mutuels, il est plus facile de mesurer l’impact de l’attrition partielle. En effet, à chaque période, le montant investi augmente avec le taux de rendement du marché et il diminue selon le taux d’attrition partielle. Nous pouvons donc combiner ces deux taux pour obtenir un taux de rendement net moyen qui inclut l’attrition partielle et le taux de rendement du marché. Il est à noter que ce taux varie largement selon les segments.

La valeur actualisée moyenne des fonds mutuels est calculée de la même façon que les hypothèques. Nous commençons encore par trouver la valeur moyenne des investissements par âge du produit à partir de la moyenne des investissements de

tous les clients (17000\$).

$$17000\$ = \frac{\sum_{i=t}^{20} M_t \cdot R_t}{\sum_{i=t}^{20} R_t} \quad (4.66)$$

Sachant que le taux de rendement net est 3.5% pour ce segment, la valeur des  $M_t$  est égale à  $(1.035 \cdot M_{t-1})$  ce qui nous permet de trouver l'équation suivante :

$$17000\$ \cdot 15.8299 = R_1 \cdot M_1 + R_2 \cdot (M_1 \cdot 1.035) + \dots + R_{20} \cdot (M_{19} \cdot 1.035) \quad (4.67)$$

Nous remplaçons les  $M_t$  par leur équivalence avec  $M_1$  et nous obtenons l'équation suivante :

$$269108\$ = \sum_{j=1}^{20} R_j \cdot (1.035)^{(j-1)} \cdot M_1 \quad (4.68)$$

Avec les taux de rétention du tableau 4.9, et en isolant  $M_1$ , nous trouvons que la valeur initiale des investissements dans les fonds mutuels est de 12266\$.

Dans le tableau 4.9, nous résumons tous les calculs qui doivent être faits pour trouver les profits actualisés obtenus par la vente d'un fonds mutuel d'un certain âge. Ces calculs sont identiques à ceux que nous avons faits pour les hypothèques. Une des différences qu'il faut noter est l'impact de l'attrition. Nous avons posé la même

Tableau 4.9 – Calcul de la valeur actualisée d'un fond mutuel

| Année | Invest.(\$) | Rérent. | Profit(1%)<br>avec rétention | Facteur<br>d'actual. | Profit<br>actualisé(\$) | Distrib.<br>par âge | Profit(\$)<br>par âge |
|-------|-------------|---------|------------------------------|----------------------|-------------------------|---------------------|-----------------------|
| 1     | 12266       | 1.0000  | 122.66                       | 0.9091               | 111.51                  | 0.7113              | 1092.71               |
| 2     | 12695       | 0.9800  | 124.41                       | 0.8264               | 102.81                  | 0.0200              | 1100.86               |
| 3     | 13139       | 0.9506  | 124.90                       | 0.7513               | 93.84                   | 0.0294              | 1117.53               |
| 4     | 13599       | 0.9126  | 124.10                       | 0.6830               | 84.76                   | 0.0380              | 1143.60               |
| 5     | 14075       | 0.8669  | 122.02                       | 0.6209               | 75.76                   | 0.0457              | 1181.13               |
| 6     | 14568       | 0.8236  | 119.98                       | 0.5645               | 67.73                   | 0.0433              | 1219.40               |
| 7     | 15078       | 0.7907  | 119.22                       | 0.5132               | 61.18                   | 0.0329              | 1245.40               |
| 8     | 15605       | 0.7669  | 119.67                       | 0.4665               | 55.83                   | 0.0238              | 1258.12               |
| 9     | 16152       | 0.7516  | 121.40                       | 0.4241               | 51.49                   | 0.0153              | 1252.87               |
| 10    | 16717       | 0.7441  | 124.39                       | 0.3855               | 47.95                   | 0.0075              | 1228.88               |
| 11    | 17302       | 0.7404  | 128.10                       | 0.3505               | 44.90                   | 0.0037              | 1190.55               |
| 12    | 17908       | 0.7367  | 131.93                       | 0.3186               | 42.03                   | 0.0037              | 1142.29               |
| 13    | 18534       | 0.7330  | 135.85                       | 0.2897               | 39.36                   | 0.0037              | 1082.91               |
| 14    | 19183       | 0.7293  | 139.90                       | 0.2633               | 36.84                   | 0.0037              | 1010.92               |
| 15    | 19854       | 0.7257  | 144.08                       | 0.2394               | 34.49                   | 0.0036              | 924.75                |
| 16    | 20549       | 0.7220  | 148.36                       | 0.2176               | 32.28                   | 0.0036              | 822.89                |
| 17    | 21269       | 0.7184  | 152.80                       | 0.1978               | 30.22                   | 0.0036              | 703.25                |
| 18    | 22013       | 0.7148  | 157.35                       | 0.1799               | 28.31                   | 0.0035              | 563.78                |
| 19    | 22783       | 0.7113  | 162.06                       | 0.1635               | 26.50                   | 0.0035              | 401.93                |
| 20    | 23581       | 0.7113  | 167.73                       | 0.1486               | 24.92                   | 0.0000              | 214.27                |

hypothèse que pour les hypothèques où l'attrition ne dépendait que de l'âge du produit et non de la durée de la relation entre le client et la banque. Pour les hypothèques, cette fausse hypothèse n'avait un impact seulement sur les hypothèques âgées et comme ces hypothèques avaient une valeur beaucoup plus petite que les autres, l'impact total était petit. Pour les fonds mutuels, la valeur de ceux-ci augmente avec le temps et donc l'impact de cette hypothèse va en grandissant. Pour régler ce problème, nous devrions trouver la série des taux d'attrition pour chaque âge du produit et refaire le tableau 4.9 pour chacun. Nous considérons que la solution à ce problème demande une trop grande quantité de données pour l'impact qu'il aura, nous utilisons donc l'hypothèse posée plus haut même si elle donne des résultats approximatifs.

La valeur des profits actualisés moyens des fonds mutuels est de 1110.24\$ c'est-

à-dire la somme des multiplications entre la distribution des âges du produit et les profits actualisés de ce produit aux différents âges.

#### **4.2.3 Calcul des coûts de recrutement**

Avec le modèle cloisonné MC2, nous avons établi des coûts de recrutement qui variaient selon le produit vendu, le segment du client et la quantité de produits achetés par ce client. À ces coûts, nous avons ajouté des pénalités pour simuler la réalité au niveau de la distribution des produits, du départ des clients et de la vente de produits. Cependant, nous considérons ces pénalités plutôt artificielles car elles ne servent pas à simuler l'effort de la vente mais plutôt l'idée que les contraintes ne sont pas respectées.

Pour cette raison, nous avons pensé faire varier les coûts de recrutement d'un produit avec le nombre de produits vendus et l'effort associé à ces ventes. Cet effort dépend de la distribution des ventes et de la provenance des clients. Les coûts de recrutement sont donc déterminés par le coût de recrutement d'un client achetant un produit dans des conditions normales auxquelles nous multiplions des facteurs pour tenir compte des autres variables qui affectent les coûts comme :

- La vente totale d'un produit ;
- La vente de plusieurs produits à un même client ;

- L'effort de vente à un groupe de client en particulier ;
- Le respect des distributions de produits.

Par cette nouvelle fonction des coûts, les coûts de recrutement devraient varier directement avec l'effort de vente.

#### 4.2.3.1 Fonction des coûts de recrutement

Il y a quatre facteurs qui entraînent des coûts de recrutement supplémentaires : vente multiple de produits à un client, vente excessive d'un produit, distribution mal répartie et promotion excessive dans certains segments. Dans ce modèle, nous suggérons que les coûts de recrutement d'un client achetant un seul produit soient déterminés par la formule suivante :

$$A_{ijk} = C_{ip} \cdot F(Q_p^+) \cdot G(M_{dp}) \cdot G(N_{vp}) \cdot H(E_{ij}^+) \quad (4.69)$$

L'équation (4.69) ne fonctionne que pour la vente d'un seul produit par client et non pour la vente de multiples produits par client. Un facteur multiplicatif  $\mu_{ijk}$  doit être ajouté pour simuler l'effort supplémentaire encouru lors du passage du groupe  $j$

au groupe  $k$  (s'il y a plus d'un produit vendu).

$$A_{ijk} = \mu_{ijk} \cdot \left( \sum_{p \in H_k, p \notin H_j} C_{ip} \cdot F(Q_p^+) \cdot G(M_{dp}) \cdot G(N_{vp}) \cdot H(E_{ij}^+) \right) \quad (4.70)$$

#### 4.2.3.2 Facteurs multiplicatifs

La fonction des coûts de recrutement dépend principalement des coûts de recrutement  $C_{ip}$  encourus lors de situations normales où la distribution des produits est bien faite et que les ventes ne sollicitent pas excessivement un segment en particulier. À ces coûts, nous ajoutons le facteur multiplicatif pour la vente excessive d'un produit pour simuler la croissance des coûts entraînée par la difficulté croissante de trouver de nouveaux clients. Ce facteur est déterminé par une fonction quadratique qui ressemble aux fonctions de pénalité du modèle cloisonné.

Pour des ventes totales qui sont inférieures à la moitié de la limite de vente, le facteur  $F(Q_p^+)$  sera égal à 1. Pour des ventes supérieures, nous nous basons sur le tableau 4.10 où nous comparons le ratio vente sur limite pour obtenir le facteur multiplicatif recherché. Les facteurs multiplicatifs sont comparables aux coefficients des facteurs de pénalité des modèles cloisonnés (tableaux 4.3, 4.4 et 4.5).

**Tableau 4.10 – Facteur multiplicatif de vente**

| Ratio $Q_p^+/\text{Limite}$ | Facteur |
|-----------------------------|---------|
| 0.00                        | 1.00    |
| 0.30                        | 1.50    |
| 0.50                        | 2.00    |

L'équation  $F(Q_p^+)$  a la forme suivante :

$$F(Q_p^+) = 1.6667 \cdot \left(\frac{Q_p^+}{\beta_p \cdot TP_p}\right)^2 + 1.1667 \cdot \left(\frac{Q_p^+}{\beta_p \cdot TP_p}\right) + 1 \quad (4.71)$$

La fraction  $\frac{Q_p^+}{\beta_p \cdot TP_p}$  représente le pourcentage de vente de produits ( $Q_p^+$ ) au-dessus de la moitié de la limite de vente de ce produit ( $\beta_p \cdot TP_p$ ). Donc si nous vendons 80 produits alors que nous avons une limite de 100, la valeur de la fraction sera de  $((80 - (100/2))/100)$  ou 30

Pour le facteur multiplicatif de la distribution des produits, nous utilisons le ratio de la vente d'un produit par un segment ( $M_{dp}$ ) sur la vente visée de ce produit pour ce segment ( $\beta_p \cdot TP_p$ ). Là où les ventes d'un produit seraient plus petites que les ventes ciblées, le facteur multiplicatif sera égal à 1. Dans le cas contraire, une fonction quadratique, qui suit une série de cibles (voir tableau 4.11), est établie comme pour les fonctions de pénalité du modèle cloisonné. Il est à remarquer que nous ne pénalisons pas le fait que la distribution des produits soit sous les ventes ciblées comme nous l'avons fait pour le modèle cloisonné. Nous expliquons cette différence

**Tableau 4.11 – Facteur multiplicatif de distribution**

| Ratio $M_{dp}/\text{Cible}$ | Facteur |
|-----------------------------|---------|
| 0.00                        | 1.00    |
| 0.10                        | 1.10    |
| 0.20                        | 1.30    |

par le fait que dans le modèle cloisonné nous cherchions à pénaliser tous les écarts de la cible mais dans ce modèle nous cherchons à refléter l'effort de vente sur les coûts de recrutement. Nous considérons que le fait de sous-distribuer un produit à un type de clients n'entraîne pas des coûts de recrutement supplémentaires surtout que cette sous-distribution est souvent reliée à une sur-distribution pour un autre type de clients.

À partir de ces hypothèses, la fonction suivante correspond à la fonction de pénalité pour la distribution de produits par groupe d'âge.

$$G(M_{dp}) = 5 \cdot \left( \frac{M_{dp}}{\theta_{dp} \cdot (Q_p^+ + Q_p^-)} \right)^2 + 0.5 \cdot \left( \frac{M_{dp}}{\theta_{dp} \cdot (Q_p^+ + Q_p^-)} \right) + 1 \quad (4.72)$$

Comme pour l'équation de la vente de produits, la fraction  $\frac{M_{dp}}{\theta_{dp} \cdot (Q_p^+ + Q_p^-)}$  représente le pourcentage de vente de produits au-dessus de la limite sur la limite de vente de ce produit pour ce style de vie ou groupe d'âge.

Pour la fonction de pénalité par style de vie, il suffit simplement de remplacer la

**Tableau 4.12 – Facteur multiplicatif sur les départs**

| Ratio $E_{ij}^+/\text{Limite}$ | Facteur |
|--------------------------------|---------|
| 0.00                           | 1.00    |
| 0.20                           | 1.20    |
| 0.40                           | 1.50    |

constante  $\theta_{dp}$  par  $\omega_{vp}$  et les variables  $M_{dp}$  par  $N_{vp}$ .

Dans le cas de départ supplémentaire de clients d'un groupe de produits, nous utilisons la même technique que le facteur précédent mais avec les données du tableau 4.12 où le ratio dépend du nombre de clients qui quittent un groupe ( $E_{ij}$ ) et du nombre de clients initialement dans le groupe de produits multiplié par le pourcentage limite de départ  $\gamma_i$ . Nous limitons tout écart à 60% du niveau limite prédéterminé.

$$H(E_{ij}^+) = 1.25 \cdot \left( \frac{E_{ij}^+}{\gamma_i \cdot x_{ik}^0} \right)^2 + 0.75 \cdot \left( \frac{E_{ij}^+}{\gamma_i \cdot x_{ik}^0} \right) + 1 \quad (4.73)$$

Le fait de pénaliser ces contraintes directement dans la fonction objectif transforme la fonction objectif en une fonction non convexe ce qui rend le problème difficile à résoudre. Certaines personnes trouvent qu'il est difficile d'expliquer le lien entre les coûts de recrutement et la distribution des produits dans les segments et que la raison de cette nouvelle fonction des coûts est inutile. Selon nous, il y a un lien direct entre les coûts de recrutement et l'effort de vente fait par le personnel de la banque. Dans le cas d'une mauvaise distribution des ventes (concentration dans un groupe d'âge), il

devient difficile au personnel de trouver de nouveaux clients ce qui entraîne une hausse de l'effort et donc des coûts. Si nous n'acceptons pas que l'effort de vente puisse être quantifié, nous devons alors faire varier les coûts de recrutement seulement selon le nombre de produits vendus et pénaliser tous écarts des contraintes de distribution et de départ comme dans le modèle cloisonné.

#### **4.2.4 Conclusion sur MA1**

Les avantages du modèle MA1 sont l'analyse de la profitabilité des profits à long terme, l'inclusion de l'attrition directement dans le calcul de la profitabilité et la construction d'un coût de recrutement qui quantifie mieux l'effort de vente. Cependant, le modèle MA1 ne regarde que la demande actuelle et n'étudie pas l'impact de la variation de la demande de produits à travers les périodes comme dans le modèle cloisonné. Pour ces raisons, nous proposons un troisième modèle qui combine le modèle cloisonné avec le modèle actuariel.

### **4.3 Modèle Actuariel (MA2)**

Pour construire le modèle actuariel MA2, le modèle cloisonné est utilisé comme modèle de base pour pouvoir profiter de sa manière de traiter la variation de la

demande de produits à travers les périodes. Les coûts de recrutement non-convexes du modèle actuariel ne sont pas utilisés car ils rendent le problème trop difficile à résoudre et donc l'approche avec un coût de recrutement pénalisé sera utilisée. La difficulté de la construction de ce modèle tourne autour du problème de l'attrition pour lequel les deux modèles utilisent des méthodes différentes. Cette différence affecte la structure du modèle et la manière de calculer la rentabilité des produits. Comme le modèle cloisonné est utilisé pour la structure du modèle, nous avons décidé d'utiliser les taux d'attrition et les rentabilités calculées par le modèle cloisonné pour les périodes habituellement étudiées. Pour les périodes qui viennent après, la rentabilité et les taux d'attrition du modèle actuariel sont utilisés. À la figure 4.10, nous illustrons cette relation de la rentabilité des modèles actuariels et cloisonnés à travers les périodes. La rentabilité des produits calculée par le modèle cloisonné est utilisée au cours des premières périodes. Ensuite, pour les périodes qui suivent, la rentabilité du modèle actuariel est utilisée. Ceci nous permet d'évaluer la profitabilité des produits sur toute leur durée de vie et l'impact de la demande pour ces produits au cours des prochaines années.

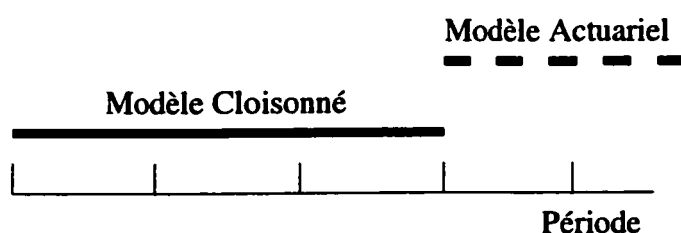


**Figure 4.10 – Calcul de la rentabilité du modèle actuariel**

En étudiant le problème sur 3 périodes, la rentabilité des produits des 3 premières périodes provient du modèle cloisonné où nous avons un mélange de nouveaux et d'anciens clients. La rentabilité des produits des périodes suivantes est calculée par le modèle actuariel. Cette rentabilité est en fait la moyenne des profits actualisés pour des produits d'âge 1, 2 et 3 ans. Ceci fait en sorte que le modèle actuariel (MA2) est identique au modèle cloisonné (MC2) avec l'ajout de rentabilités à long terme lors de la dernière période étudiée. Voici les équations du modèle MA2 :

Dans le prochain chapitre, nous discutons des différentes techniques utilisées pour résoudre le problème de l'optimisation des marchés à partir des modèles déterministes que nous avons proposés.

$$\max_{x_{ik}^t, y_{ijk}^t} \sum_{t \in T} \left( \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} \left( x_{ik}^t \cdot \frac{R_{ik}^t}{\prod_{n=1}^t (1+r_n)} \right) - \left( \sum_{j \in G} y_{ijk}^t \cdot \frac{A_{ijk}^t}{\prod_{n=1}^t (1+r_n)} \right) \right) \quad (4.9)$$

$$- \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} g(E_{ik}^t) - \sum_{p \in P} \left( \sum_{d \in D} h(M_{dp}^t) - \sum_{v \in V} o(N_{vp}^t) - w(Q_p^t) \right) - f(Vol^t)$$

$$s.a \quad x_{ij}^{t-1} = \sum_{k \in G} y_{ijk}^t \quad \forall i \in I, \forall j \in G, \forall t \in T \quad (4.2)$$

$$\sum_{j \in G} y_{ijk}^t = x_{ik}^t \quad \forall i \in I, \forall k \in G, \forall t \in T \quad (4.3)$$

$$y_{ikj}^t \geq \alpha_{ip}^t \cdot x_{ik}^t \quad \forall i \in I, \forall p \in P, \forall t \in T, \quad \forall k \in G_p^+, j = k - \{p\} \quad (4.6)$$

$$\sum_{k \in G} y_{ikk}^t + E_{ik}^t = (\gamma_i^t - \sum_{p \in H_k} \alpha_{ip}^t) \cdot x_{ik}^{t-1} \quad \forall i \in I, \forall k \in G, \forall t \in T \quad (4.10)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in G} y_{izj}^t \leq \phi^t \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} \sum_{j \in L_k} y_{ikj}^t \quad \forall t \in T \quad (4.11)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in G} \sum_{j \in G} y_{ijk}^t \cdot D_{ik}^t + Vol^t \geq (1 + \pi^t) \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} x_{ik}^{t-1} \cdot D_{ik}^{t-1} \quad \forall t \in T \quad (4.12)$$

$$\sum_{i \in B_d} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^t - M_{dp}^{t+} + M_{dp}^{t-} = \theta_{dp}^t \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^t \quad \forall d \in D, \forall p \in P, \forall t \in T \quad (4.13)$$

$$\sum_{i \in G_v} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^t - N_{vp}^{t+} + N_{vp}^{t-} = \omega_{vp}^t \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^t \quad \forall v \in V, \forall p \in P, \forall t \in T \quad (4.14)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^-} \sum_{k \in G_p^+} y_{ijk}^t - Q_p^t \leq \frac{\beta_p^t}{2} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^+} x_{ij}^{t-1} \quad \forall p \in P, \forall t \in T \quad (4.15)$$

$$Q_p^t \leq \frac{\beta_p^t}{2} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^+} x_{ij}^{t-1} \quad \forall p \in P, \forall t \in T \quad (4.16)$$

$$y_{ijk}^t \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall j \in G, \forall k \in G \quad \forall t \in T \quad (4.7)$$

$$x_{ik}^t \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall k \in G, \forall t \in T \quad (4.8)$$

$$E_{ik}^t \geq 0 \quad \forall i \in I, \forall k \in G, \forall t \in T \quad (4.17)$$

$$M_{dp}^{t+} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall d \in D, \forall t \in T \quad (4.18)$$

$$M_{dp}^{t-} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall d \in D, \forall t \in T \quad (4.19)$$

$$N_{vp}^{t+} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall v \in V, \forall t \in T \quad (4.20)$$

$$N_{vp}^{t-} \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall v \in V, \forall t \in T \quad (4.21)$$

$$Q_p^t \geq 0 \quad \forall p \in P, \forall t \in T \quad (4.22)$$

$$Vol^t \geq 0 \quad \forall t \in T \quad (4.23)$$

#### Modèle 4.4: Modèle Actuariel 2 (MA2)

## Chapitre 5

# Méthodes de résolution des modèles déterministes

Dans ce chapitre, nous analysons plusieurs méthodes pour résoudre les problèmes déterministes cloisonnés et actuariels. Au tableau 5.1, nous donnons un bref aperçu de ces méthodes.

**Tableau 5.1 – Bref aperçu des méthodes de résolution des modèles déterministes**

| Modèle                       | Technique                   | Aperçu                                                                                |
|------------------------------|-----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Modèles<br>MC1<br>MC2<br>MA2 | Modification de contraintes | Diminution du nombre de variables dans certaines contraintes                          |
|                              | Linéarisation               | Possibilité d'utilisation des méthodes de programmation linéaire                      |
|                              | Solution de départ          | Solutions de départ pour des programmes linéaires                                     |
|                              | Frank-Wolfe                 | Méthode de résolution pour des problèmes avec fonction objectif non linéaire          |
|                              | Décomposition Dantzig-Wolfe | Permet de résoudre des problèmes avec un nombre plus élevé de produits et de périodes |
|                              | Décomposition en escalier   | Méthode de décomposition basée sur celle de Benders                                   |
| Modèle<br>MA1                | Approximation convexe       | Modification de la fonction de coûts pour la rendre convexe                           |
|                              | Algorithme Tabou            | Méthode tabou pour résoudre le problème non convexe                                   |

## 5.1 Modèle cloisonné (MC)

Le modèle cloisonné 1 (MC1) est un modèle linéaire qui est simple à résoudre à l'aide d'un optimisateur commercial efficace comme Cplex. Cependant, ce modèle devrait être en nombres entiers car ce sont des clients que nous déplaçons et non des fractions de clients. Après avoir étudié la situation, il nous est apparu plus raisonnable de relaxer les contraintes d'intégralité vu le très grand nombre de variables (plus de 35 000 variables).

Nous avons toutefois étudié la matrice du problème pour s'apercevoir qu'une partie de cette matrice est totalement unimodulaire c'est-à-dire qu'il serait possible de

trouver une solution entière sans les contraintes d'intégralité (Minoux 1983). Cependant, ce n'est qu'une partie des contraintes de la première année étudiée qui sont affectées. Avant l'introduction des contraintes d'attrition, il aurait été possible de modifier légèrement les données pour obtenir, sans contrainte d'intégralité, des solutions entières. Mais les contraintes d'attrition viennent modifier cette matrice de façon à ce qu'il soit presque impossible d'obtenir des solutions entières.

### 5.1.1 Modification de contraintes

Les modèles MC2 et MA2 sont, avec l'introduction de pénalités quadratiques, des modèles où il est possible de trouver la solution avec la méthode de résolution Barrier de Cplex. Dans le cadre de ce travail, nous avons étudié une série de problèmes avec 48 segments (12 styles de vie et 4 groupes d'âge) et 4 produits (donc 16 groupes de produits) sur 3 périodes. Ceci nous oblige donc à avoir environ 38000 variables et 9000 contraintes.

En analysant nos résultats préliminaires, nous nous sommes aperçus qu'il est possible d'accélérer la solution de MC2 et de MA2 en modifiant légèrement les contraintes de distribution et de limite de produits (4.13, 4.14, 4.15, 4.16). Ces modifications nous permettent de diminuer le nombre de variables dans les contraintes de distribution et simplifier sa résolution sans affecter les solutions.

Avant les modifications, les contraintes sur la limite de vente de produits ressemblent aux équations suivantes :

$$llr \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^-} \sum_{k \in G_p^+} y_{ijk}^t - Q_p^t \leq \frac{\beta_p^t}{2} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^+} x_{ij}^{t-1} \quad \forall p \in P, t \in T \quad (4.15)$$

$$Q_p^t \leq \frac{\beta_p^t}{2} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^+} x_{ij}^{t-1} \quad \forall p \in P, t \in T \quad (4.16)$$

et la contrainte de distribution de produits par âge à celle-ci :

$$llr \sum_{i \in B_d} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^t - M_{dp}^{t+} + M_{dp}^{t-} = \theta_{dp}^t \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^t \quad \forall d \in D, p \in P, t \in T \quad (4.13)$$

La variable  $x_{ik}^0$  représente les clients du segment  $i$  qui détiennent actuellement les produits du groupe  $k$  et donc sa valeur est connue au début de l'optimisation. Dans les équations de vente de produits (4.15,4.16), la somme des  $x_{ik}^{t-1}$  est alors remplacée par  $TP_p^0$  pour  $t = 1$  (la première période).

$TP_p^t$  Nombre totale du produit  $p$  détenu par les clients à la fin de la période  $t$ .

Pour accélérer l'optimisation, une variable d'écart a été ajoutée aux contraintes de vente (4.15, 4.16) dans le cas où les ventes seraient plus petites que la moitié de la limite.

Ainsi avec ces nouveaux éléments, nous pouvons dire que l'équation de vente de produits lors de la première période ressemble à ceci :

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^-} \sum_{k \in G_p^+} y_{ijk}^1 = \left( \frac{\beta_p^1}{2} \cdot TP_p^0 \right) + Q_p^1 - W_p^1 \quad \forall p \in P \quad (5.1)$$

$$Q_p^1 = \frac{\beta_p^1}{2} \cdot TP_p^0 \quad \forall p \in P \quad (5.2)$$

La somme des  $y_{ijk}^t$  de cette équation représente donc le nombre de clients ayant acheté le produit  $p$  lors de la première période. Or, il se trouve que nous utilisons cette somme dans la contrainte de distribution. En remplaçant cette somme dans la contrainte de distribution, nous obtenons une nouvelle équation de distribution pour la première année :

$$\sum_{i \in B_d} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^1 - M_{dp}^{1+} + M_{dp}^{1-} = \theta_{dp}^1 \cdot \left( \frac{\beta_p^1}{2} \cdot TP_p^0 + Q_p^1 - W_p^1 \right) \quad \forall d \in D, p \in P \quad (5.3)$$

Les contraintes de vente et de distribution de produits pour la première année sont mathématiquement identiques aux équations proposées dans le modèle cloisonné mais chacune de ces contraintes utilise moins de variables.

Pour appliquer cette idée aux périodes suivantes, il faut connaître le nombre de clients qui possèdent le produit au début de la période c'est-à-dire de trouver la valeur

de la variable  $TP_p^t$  de cette période. Nous savons que cette variable dépend du nombre de produits au début de la période précédente ( $TP_p^{t-1}$ ), du taux d'attrition  $\alpha_p^{t-1}$  et de la vente du produit dans la période. Par la modification de la contrainte sur les limites de vente de produit, la vente du produit dans une période devient égale à  $\frac{\beta_p^t}{2} \cdot TP_p^{t-1} + Q_p^t - W_p^t$ . Nous trouvons donc l'équation récursive suivante :

$$TP_p^t = (1 + \frac{\beta_p^t}{2} - \alpha_p^{t-1}) \cdot TP_p^{t-1} + Q_p^t - W_p^t \quad (5.4)$$

Comme nous ne connaissons que la valeur de  $TP_p^0$ , nous appliquons récursivement cette formule pour trouver la valeur des  $TP_p^t$ .

$$TP_p^t = \prod_{r=1}^{t-1} (1 + \frac{\beta_p^r}{2} - \alpha_p^r) \cdot TP_p^0 + (\sum_{s=1}^{t-1} \prod_{r=s}^{t-2} (1 + \frac{\beta_p^r}{2} - \alpha_p^r) \cdot (Q_p^s - W_p^s)) + Q_p^t - W_p^t \quad (5.5)$$

Les nouvelles équations sont donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^-} \sum_{k \in G_p^+} y_{ijk}^t &= \frac{\beta_p^t}{2} \cdot (\prod_{r=1}^{t-1} (1 + \frac{\beta_p^r}{2} - \alpha_p^r) \cdot TP_p^0 \\ &+ (\sum_{s=1}^{t-1} \prod_{r=s}^{t-2} (1 + \frac{\beta_p^r}{2} - \alpha_p^r) \cdot (Q_p^s - W_p^s)) + Q_p^t - W_p^t) \end{aligned} \quad \forall p \in P, t \in T \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} Q_p^t &\leq \frac{\beta_p^t}{2} \cdot (\prod_{r=1}^{t-1} (1 + \frac{\beta_p^r}{2} - \alpha_p^r) \cdot TP_p^0 \\ &+ \sum_{s=1}^{t-1} \prod_{r=s}^{t-2} (1 + \frac{\beta_p^r}{2} - \alpha_p^r) \cdot (Q_p^s - W_p^s)) \end{aligned} \quad \forall p \in P, t \in T \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in B_d} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^1 - M_{dp}^{1+} + M_{dp}^{1-} &= \theta_{dp}^1 \cdot \left( \frac{\beta_p^t}{2} \cdot \left( \prod_{r=1}^{t-1} \left( 1 + \frac{\beta_p^r}{2} - \alpha_p^r \right) \cdot TP_p^0 \right) \right) \quad \forall d \in D, p \in P \\
+ \left( \sum_{s=1}^{t-1} \prod_{r=s}^{t-2} \left( 1 + \frac{\beta_p^r}{2} - \alpha_p^r \right) \cdot (Q_p^s - W_p^s) \right) &+ Q_p^t - W_p^t \quad \forall t \in T \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Cette modification du modèle MC2 et du modèle MA2 nous permet d'accélérer la résolution des problèmes tout en obtenant les mêmes solutions. Nous appelons ces nouveaux modèles MC2-M et MA2-M.

### 5.1.2 Linéarisation des fonctions de pénalités

La linéarisation des fonctions apporte deux avantages à la résolution d'un modèle quadratique. Premièrement, un modèle entièrement linéaire est souvent plus facile à résoudre qu'un modèle quadratique et deuxièmement, la méthode de résolution Barrier de Cplex n'utilise pas l'information que nous pourrions fournir par une bonne solution de départ, alors que Cplex pour programme linéaire s'en sert.

Chaque fonction quadratique peut être approximée en fonction linéaire par morceaux et pour éviter de créer trop de variables, nous avons décidé de segmenter ces fonctions quadratiques en trois fonctions linéaires (voir illustration 5.1). Comme il existe plusieurs façon de segmenter une fonction quadratique, nous avons choisi la

fonction linéaire qui minimise l'aire entre elle et la courbe quadratique qu'elle approxime.

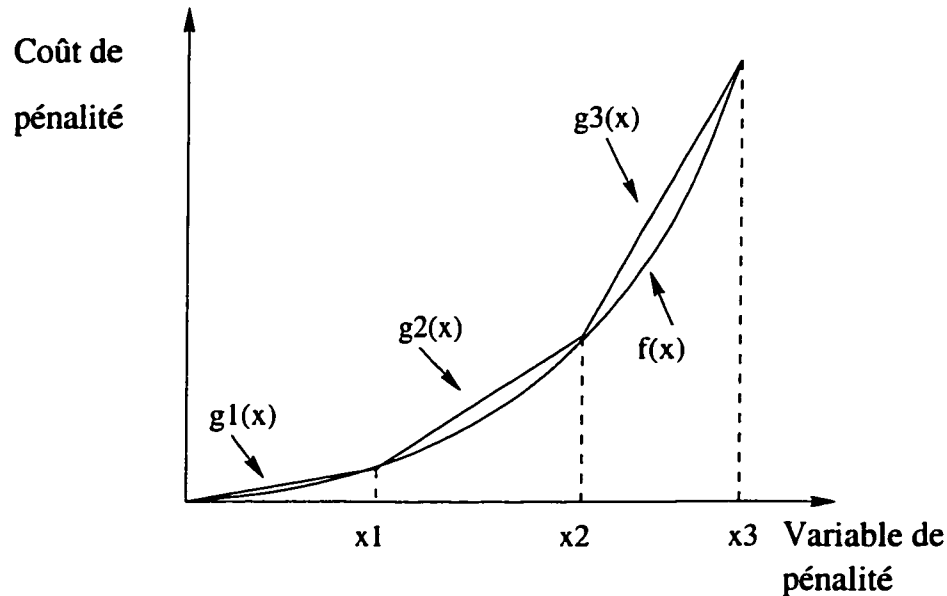


**Figure 5.1 – Linéarisation d'une fonction de pénalité**

L'aire entre les courbes est calculée à partir de la somme des aires sous les trois fonctions linéaires  $g(x)$ . On y soustrait l'aire sous la fonction quadratique  $f(x)$  entre les bornes 0 et  $x_3$  (l'écart maximal permis par une fonction de pénalité). Cependant, nous ne connaissons pas les points  $x_1$  et  $x_2$  ni les fonctions  $g(x)$  qui servent à minimiser l'aire entre les courbes. Il est cependant possible d'évaluer les fonctions  $g(x)$  à partir des  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  ce qui fait en sorte que l'aire ne dépendrait que de ces points.

Les fonctions  $g(x)$  sont de la forme  $y = mx + b$  où  $x$  est compris entre deux bornes. Pour  $g_1(x)$ , ces bornes sont 0 et  $x_1$  et cela nous permet d'évaluer la pente  $m$  et la

constante  $b$  de  $g_1(x)$  :

$$m = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} \quad (5.9)$$

$$b = f(0) - m \cdot 0 \quad (5.10)$$

Donc,

$$g_1(x) = \left( \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} \right) \cdot x + f(0) \quad (5.11)$$

Sachant que les bornes de la deuxième fonction sont  $x_1$  et  $x_2$  et que les bornes de la troisième fonction sont  $x_2$  et  $x_3$ , nous pouvons estimer les fonctions  $g_2(x)$  et  $g_3(x)$ .

$$g_2(x) = \left( \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right) \cdot (x - x_1) + f(x_1) \quad (5.12)$$

$$g_3(x) = \left( \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \right) \cdot (x - x_2) + f(x_2) \quad (5.13)$$

L'aire comprise sous ces trois courbes est égale :

$$\text{Aire} = \int_0^{x_1} g_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} g_2(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} g_3(x) dx \quad (5.14)$$

ce qui revient à :

$$\begin{aligned}
 Aire &= \left( \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} \right) \cdot \frac{x_1^2}{2} \\
 &\quad + f(0) \cdot x_1 \\
 &\quad \left( \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right) \cdot \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} \\
 &\quad f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) \\
 &\quad \left( \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \right) \cdot \frac{(x_3 - x_2)^2}{2} \\
 &\quad f(x_2) \cdot (x_3 - x_2)
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

ou plus simplement à ceci :

$$\begin{aligned}
 Aire &= (f(x_1) - f(0)) \cdot \frac{x_1}{2} + 2 \cdot f(0) \cdot \frac{x_1}{2} \\
 &\quad + (f(x_2) - f(x_1)) \cdot \left( \frac{x_2 - x_1}{2} \right) \\
 &\quad + 2 \cdot f(x_1) \cdot \frac{(x_2 - x_1)}{2} \\
 &\quad + (f(x_3) - f(x_2)) \cdot \left( \frac{x_3 - x_2}{2} \right) \\
 &\quad + 2 \cdot f(x_2) \cdot \frac{(x_3 - x_2)}{2}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

que nous réduisons à :

$$Aire = x_1 \cdot \left( \frac{f(0) - f(x_2)}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& +x_2 \cdot \left( \frac{f(x_1) - f(x_3)}{2} \right) \\
& +x_3 \cdot \left( \frac{f(f(x_2)) + f(x_3)}{2} \right)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

En remplaçant les fonctions  $f(x)$  par la forme générale des fonctions quadratiques  $ax^2 + bx + c$ , nous obtenons l'aire suivante :

$$\begin{aligned}
Aire &= x_1 \cdot \left( \frac{-ax_2^2 - bx_2}{2} \right) \\
&+ x_2 \cdot \left( \frac{ax_1^2 + bx_1 - ax_3^2 - bx_3}{2} \right) \\
&+ x_3 \cdot \left( \frac{ax_2^2 + bx_2 + ax_3^2 + bx_3 + 2 \cdot c}{2} \right)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

qui se réduit ainsi :

$$\begin{aligned}
Aire &= x_1 \cdot \left( \frac{-ax_2^2}{2} \right) \\
&+ x_2 \cdot \left( \frac{ax_1^2 - ax_3^2}{2} \right) \\
&+ x_3 \cdot \left( \frac{ax_2^2 + ax_3^2 + bx_3 + 2 \cdot c}{2} \right)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Pour minimiser cette aire, nous cherchons la valeur des variables  $x_1$  et  $x_2$  qui

annule le gradient de cette fonction.

$$\begin{aligned} \nabla Aire = & \left[ \frac{1}{2} \cdot (-ax_2^2 + 2 \cdot ax_1x_2); \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \cdot (-2 \cdot ax_1x_2 + ax_1^2 - ax_3^2 + 2 \cdot ax_2x_3) \right] \end{aligned} \quad (5.20)$$

En simplifiant, la dérivée partielle par rapport à  $x_1$ , nous trouvons que  $2 \cdot x_1 = x_2$ .

En remplaçant ceci dans la seconde dérivée partielle, nous pouvons isoler  $x_2$ .

$$x_2 = \frac{2 \cdot x_3}{3} \quad x_1 = \frac{x_3}{3}$$

#### 5.1.2.1 Fonction de pénalité sur les départs

Originellement, la fonction de pénalité sur les départs avait la forme suivante :

$$g(\text{ratio}) = (1.00 \cdot \text{ratio}^2 + 0.1 \cdot \text{ratio}) \cdot (\gamma_i^t \cdot x_{ik}^0) \quad (5.21)$$

La fonction linéaire par morceaux qui la remplacent a la forme suivante :

$$g(ratio) = \begin{cases} 0.3 \cdot ratio \cdot (\gamma_i^t \cdot x_{ik}^0) & si \quad 0 \leq ratio \leq 0.2 \\ (0.7 \cdot ratio - 0.08) \cdot (\gamma_i^t \cdot x_{ik}^0) & si \quad 0.2 \leq ratio \leq 0.4 \\ (1.1 \cdot ratio - 0.24) \cdot (\gamma_i^t \cdot x_{ik}^0) & si \quad 0.4 \leq ratio \leq 0.6 \end{cases}$$

En implantant cette équation dans les modèles, chaque intervalle du ratio est remplacé par une variable avec une borne supérieure égale à la longueur de l'intervalle de façon à obtenir une nouvelle série d'équations pour les pénalités. Il est à remarquer que ce n'est plus la valeur de la pénalité qui dépend de la limite  $(\gamma_i^t \cdot x_{ik}^0)$  mais les bornes des nouvelles variables.

$$g(E_{ik}^t) = \begin{cases} 0.3 \cdot E_{ik}^{t1} & si \quad 0 \leq E_{ik}^{t1} \leq 0.2 \cdot \gamma_i^t \cdot x_{ik}^0 \\ 0.7 \cdot E_{ik}^{t2} & si \quad 0 \leq E_{ik}^{t2} \leq 0.2 \cdot \gamma_i^t \cdot x_{ik}^0 \\ 1.1 \cdot E_{ik}^{t3} & si \quad 0 \leq E_{ik}^{t3} \leq 0.2 \cdot \gamma_i^t \cdot x_{ik}^0 \end{cases}$$

#### 5.1.2.2 Fonction de pénalité sur la vente de produits

La fonction quadratique de pénalité sur la vente de produits est égale à :

$$w(ratio) = 2 \cdot ratio^2 \cdot (TP_p \cdot \beta_p^t) \quad (5.22)$$

La fonction linéaire par morceaux que nous avons implantée utilise les équations suivantes :

$$w(P_p^{+t}) = \begin{cases} 0.3333 \cdot P_p^{+t1} & si & 0 \leq P_p^{+t1} \leq 0.1667 \cdot (TP_p \cdot \beta_p^t) \\ P_p^{+t2} & si & 0 \leq P_p^{+t2} \leq 0.1667 \cdot (TP_p \cdot \beta_p^t) \\ 1.6667 \cdot P_p^{+t3} & si & 0 \leq P_p^{+t3} \leq 0.1667 \cdot (TP_p \cdot \beta_p^t) \end{cases}$$

### 5.1.2.3 Fonction de pénalité sur la distribution

La fonction de pénalité sur la distribution par groupe d'âge est égale à :

$$h(ratio) = (0.5 \cdot ratio^2 + 0.05 \cdot ratio) \cdot (TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \theta_{dp}^t) \quad (5.23)$$

La fonction par morceaux que nous avons implantée est égale à ceci :

$$h(M_{dp}^t) = \begin{cases} 0.175 \cdot M_{dp}^{t1} & si & 0 \leq M_{dp}^{t1} \leq 0.25 \cdot (TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \theta_{dp}^t) \\ 0.425 \cdot M_{dp}^{t2} & si & 0 \leq M_{dp}^{t2} \leq 0.25 \cdot (TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \theta_{dp}^t) \\ 0.675 \cdot M_{dp}^{t3} & si & 0 \leq M_{dp}^{t3} \leq 0.25 \cdot (TP_p \cdot \beta_p^t \cdot \theta_{dp}^t) \end{cases}$$

La fonction de pénalité sur la distribution par style de vie est égale à la fonction de distribution par groupe d'âge sauf pour le facteur  $\theta_{dp}^t$  que nous remplaçons par

$$\omega_{vp}^t.$$

En appliquant cette linéarisation aux modèles MC2 et MA2, nous obtenons respectivement les modèles MC2-L et MA2-L. Il est aussi possible d'appliquer ces transformations aux modèles modifiés MC2-M et MA2-M pour obtenir les modèles MC2-ML et MA2-ML.

### 5.1.3 Solutions de départ

Avec la linéarisation de la fonction objectif, il est maintenant possible d'utiliser des solutions de départ qui, nous espérons, permettront de réduire le temps de calcul. Nous proposons dans cette section trois solutions de départ.

#### 5.1.3.1 Solution du statu quo

La première solution est l'application du statu quo c'est-à-dire que les clients changent de groupe seulement sous l'influence de l'attrition. Il n'y a aucune vente c'est-à-dire aucun déplacement de clients entre les groupes à part pour ceux dus à l'attrition.

#### **5.1.3.2 Solution myope**

La deuxième solution de départ est obtenue en décomposant le problème original par période. Chaque période est ensuite optimisée en ordre chronologique de façon à ce que la solution obtenue soit passée à la période suivante. Cette méthode myope permet d'optimiser les périodes qui dépendent des résultats des périodes qui les précèdent. Il faut toutefois modifier la rentabilité des produits pour traiter des profits futurs qui ne sont pas considérés lorsque nous analysons qu'une période à la fois. Cette modification ressemble beaucoup à notre traitement de la rentabilité du modèle actuariel (MA1).

#### **5.1.3.3 Solution Cplex**

La troisième solution de départ est en fait l'absence de solution de départ. Cela servira à analyser l'efficacité des autres solutions par rapport à la solution initiale fournie par Cplex.

#### **5.1.4 Frank-Wolfe**

Une autre façon de résoudre un problème avec une fonction objectif non linéaire ( $\theta(x)$ ) en présence de contraintes linéaires est d'utiliser la méthode itérative de Frank-

Wolfe (1956). Cette méthode génère une séquence de points réalisables à partir d'une solution initiale réalisable (Murty 1988). À partir d'une solution réalisable  $x_k$  au début de l'itération  $k$ , nous cherchons une direction ascendante  $y_k$  (problème de maximisation) de la forme  $z_k - x_k$  où  $z_k$  est un point réalisable qui satisfait  $(\nabla\theta(x_k)(z_k - x_k)) > 0$ . Pour trouver ce point  $z_k$ , il suffit de résoudre le problème linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & (\nabla\theta(x_k))z \\ \text{s.à} \quad & z \in X \end{aligned}$$

où  $X$  est l'ensemble des solutions réalisables.

Lorsque nous avons trouvé la direction de la pente ascendante  $z_k - x_k$ , il suffit de trouver par recherche linéaire le pas  $\alpha$  qui maximise la fonction  $\theta(\alpha \cdot x_k + (1 - \alpha) \cdot z_k)$ . Le nouveau point réalisable  $x_{k+1}$  est alors égal à  $\alpha \cdot x_k + (1 - \alpha) \cdot z_k$ . L'algorithme se termine lorsque les changements à la fonction objectif deviennent mineurs.

Cette méthode a l'avantage d'être facile à implanter et permet l'utilisation de Cplex pour résoudre les problèmes linéaires. Cependant, les résultats sont approximatifs et la méthode demande un grand nombre d'itérations avant de trouver la solution optimale.

### 5.1.5 Décomposition de Dantzig-Wolfe

Dû aux grands nombres de variables et de contraintes, le modèle actuariel (MA2) devient très difficile à résoudre lorsque nous augmentons le nombre de produits et de périodes à analyser. Pour cette raison, nous proposons d'utiliser une méthode de décomposition élaborée par Dantzig et Wolfe (1960). En regardant de plus près la matrice des contraintes linéaires, on s'aperçoit qu'elle est très creuse c'est-à-dire que la majorité des coefficients de la matrice sont égaux à zéro et qu'elle a une structure bloc-angulaire avec quelques contraintes couplantes. On peut voir à la figure 5.2 tirée du livre de Minoux (1983) cette structure bloc-angulaire où les cases blanches représentent les coefficients nuls de la matrice des contraintes.

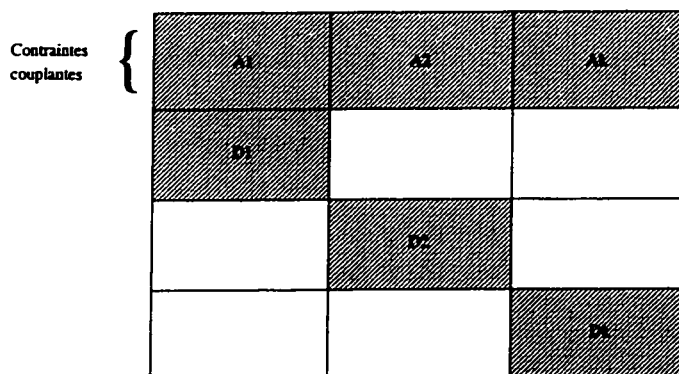


**Figure 5.2 – Structure bloc-angulaire avec contraintes couplantes**

L'algorithme de décomposition de Dantzig-Wolfe nous permet d'utiliser à notre avantage cette structure spéciale du problème. La formulation générale d'un pro-

gramme avec une structure bloc-angulaire ressemble à ceci :

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x = c \cdot x \\
 \text{s.à} \quad & A \cdot x = b \\
 & D \cdot x = d \\
 & x \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Sachant que la matrice  $D$  est bloc-diagonale c'est-à-dire qu'elle est composée de blocs  $D_k$  autour de la diagonale et que le reste de la matrice est nul, nous pouvons partitionner les vecteurs  $c$ ,  $x$  et  $d$  et la matrice  $A$  correspondant aux blocs  $A_k$ . Le problème devient donc égal à :

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = c \cdot x = \sum_{k=1}^K c_k \cdot x_k \\
 \text{s.à} \quad & \sum_{k=1}^K A_k \cdot x_k = b \\
 & D_k \cdot x_k = d_k \quad k = 1, 2, \dots, K \\
 & x_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, K
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Les matrices  $D_k$  sont créées en partitionnant les variables par rapport au segment auxquelles elles appartiennent. De cette façon, les contraintes (4.2), (4.3), (4.6) et (4.10) composent les blocs indépendants  $D_k$  de chaque segment. Ces contraintes servent à la conservation de flot, à la limite de départ des clients et à l'attrition et de

plus elles comptent pour plus de 98% des contraintes du problème original.

La matrice  $A$  correspond aux contraintes couplantes de la structure bloc-angulaire qui, dans le modèle actuariel (MA2), sont les contraintes (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) et (4.16) c'est-à-dire les contraintes sur le nombre de nouveaux clients, le volume, la distribution des ventes et la limite des ventes.

L'idée derrière l'algorithme de Dantzig-Wolfe est de résoudre les sous-problèmes indépendants et de proposer des solutions à un problème maître qui, à partir de ces solutions, essaie de faire respecter les contraintes couplantes du problème original. Le problème maître envoie à son tour un signal ou un prix aux sous-problèmes pour signaler les contraintes couplantes qui sont respectées ou non (voir figure 5.3).

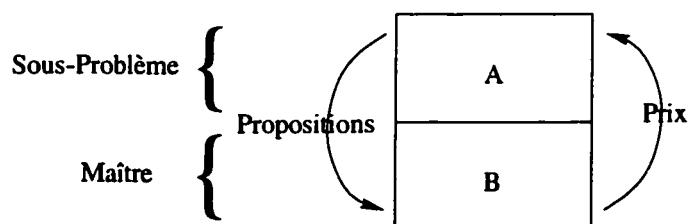


**Figure 5.3 – Décomposition Dantzig-Wolfe**

Les sous-problèmes ont donc la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \max_{x_k} (c_k - \pi \cdot A_k) \cdot x_k \\
 & s.\dot{a} \quad D_k \cdot x_k = d_k \\
 & \quad \quad x_k \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{5.26}$$

où  $\pi$  est le vecteur prix que renvoie le problème maître. Quant au problème maître, il a la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \max_{\lambda_k^t} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \lambda_k^t \cdot z_k^t \\
 & s.\dot{a} \quad \sum_{k=1}^K A_k \cdot q_k^t \cdot \lambda_k = b \\
 & \quad \lambda_k^t = 1
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

où  $z_k^t$  est la valeur de la fonction objectif de la  $t$ -ième proposition du sous-problème  $k$  et  $q_k^t$  est le  $t$ -ième vecteur solution proposé par le sous-problème  $k$ . L'optimisation du problème maître se fait autour des variables  $\lambda_k^t$  qui servent de poids entre les  $t$  solutions proposées pour résoudre le sous-problème  $k$ .

Selon cette approche, nous avons donc 48 sous-problèmes (un par segment) de 816 variables et 192 contraintes. Ces sous-problèmes n'ont cependant pas de forme spéciale qui permettraient de les résoudre rapidement par un algorithme spécialisé. Comme les sous-problèmes auraient une fonction objectif quadratique, nous devrions utiliser l'optimisateur Cplex avec la méthode de résolution Barrier. Il faut toutefois noter que la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe optimise plusieurs fois le même sous-problème avec seulement des légères modifications à la fonction objectif apportées par le vecteur  $\pi$ . Comme la méthode de résolution Barrier ne permet pas de réoptimisation à partir de la solution courante, il se retrouve à résoudre le même

problème plusieurs fois même si le changement à la fonction objectif est mineur. Pour éviter cette inefficacité, nous avons décidé d'utiliser la version linéarisée du problème original. Cela nous permet de conserver la solution précédente du sous-problème et de la réutiliser lors de la prochaine étape.

Quant au problème maître, il est composé de 114 contraintes couplantes et de 48 contraintes de recouvrement. À chaque itération du problème maître, il s'ajoute au maximum 48 nouvelles variables c'est-à-dire les solutions proposées par les 48 sous-problèmes.

La solution d'un sous-problème est envoyée au problème maître seulement si la variable duale ( $\omega$ ) associée à la contrainte de recouvrement du sous-problème dans le programme maître est supérieure à la valeur de la fonction objectif du sous-problème en question. Lorsque la différence de ces deux valeurs est supérieure à zéro, cela signifie qu'il est possible qu'une solution de ce sous-problème permette d'augmenter la valeur de la fonction objectif du problème maître.

Théoriquement, le critère d'arrêt de l'algorithme de Dantzig-Wolfe est rempli lorsque la différence maximale de la variable  $\omega_k$  et de la solution du sous-problème  $k$  pour tous les sous-problèmes est plus petite ou égale à 0. Cependant, à cause des difficultés numériques des calculs, le critère d'arrêt est mis à 0.01.

À la figure 5.1.5, nous décrivons le pseudo-code de l'algorithme de Dantzig-Wolfe mais auparavant, nous définissons les termes utilisés dans cet algorithme.

|                  |                                                                                                |
|------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\pi$            | Vecteur de la solution duale du problème maître ;                                              |
| $t$              | Le compteur d'itération ;                                                                      |
| $k$              | L'identificateur des sous-problèmes ;                                                          |
| $Z_k$            | Valeur de la fonction objectif du sous-problème $k$ ;                                          |
| $Z_k^t$          | Valeur de la fonction objectif du sous-problème $k$ à l'itération $t$ ;                        |
| $\omega_k$       | Vecteur de la solution duale sur les contraintes de recouvrement ;                             |
| $A_k$            | Matrice des contraintes du sous-problème $k$ ;                                                 |
| $C_k$            | Vecteur des coûts du sous-problème $k$ ;                                                       |
| $\overline{C}_k$ | Vecteur des coûts modifiés du sous-problème $k$ ;                                              |
| $X_k^t$          | Vecteur solution du sous-problème $k$ à l'itération $t$ ;                                      |
| $\lambda_k^t$    | Variable du problème maître représentant la solution du sous-problème $k$ de l'itération $t$ . |

### 5.1.6 Décomposition en escalier

Une autre structure spéciale de la matrice des coefficients des contraintes est la structure en escalier illustrée à la figure 5.5. Cette structure est généralement présente

**Initialisation :**  
 $\pi = 0$   
 $t = 0$   
 $k = 1$   
**Décomposition de Dantzig-Wolfe :**  
**Tant que**  $\text{Max}(Z_k - \omega_k) > 0$  **Faire**  
**Début**  
 $\overline{C}_k = C_k - \pi_k \cdot A_k$   
 Résoudre le Sous-Problème  $k$  avec  $\overline{C}_k$   
 Vecteur-solution  $= X_k^t$   
 $Z_k^t = C_k \cdot X_k^t$   
**si**  $(Z_k^t \leq \omega_k)$   
**Début**  
 Ajouter la Variable  $\lambda_k^t$  au problème maître avec coût  $Z_k^t$   
 Ajouter Coefficients  $A_k \cdot X_k^t$   
**Fin**  
 Résoudre Problème-Maître  
 Vecteurs de la solution duale  $= \pi$  et  $\omega_k$   
**Fin**  
**Solution :**  
 $X_k = \sum_{t=0}^T \lambda_k^t \cdot X_k^t$   
 $X = X_k$

**Figure 5.4 – Pseudo-code pour la décomposition de Dantzig-Wolfe**

dans les problèmes temporels comme les problèmes dynamiques et les problèmes d'as-  
 signation. Le modèle actuariel (MA2) est un bon exemple d'un problème temporel  
 où la décision à une période dépend directement des décisions prises à la période  
 précédente.

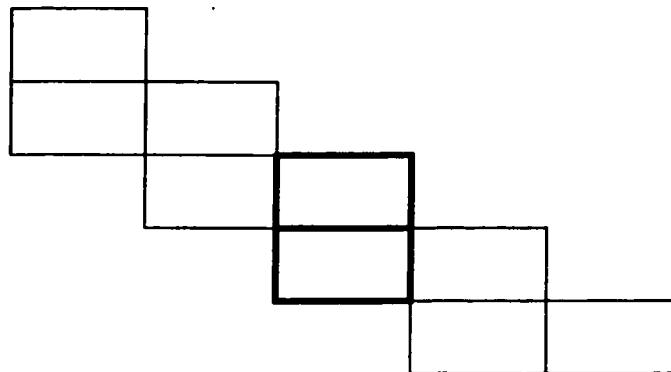


**Figure 5.5 – Structure en escalier**

La formulation mathématique de ce problème revient à ceci :

$$\begin{aligned}
 & \max_x \quad C \cdot x \\
 & \text{s.t.} \quad A_1 \cdot x_1 = d_1 \\
 & \quad \quad B_{t-1} \cdot x_{t-1} + A_t \cdot x_t = d_t \quad (t = 2, \dots, T)
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

La décomposition en escalier nous permet de créer des sous-problèmes composés seulement des variables d'une période. Cependant, certaines contraintes dépendent des résultats des périodes qui la précèdent. En utilisant la décomposition de Benders, nous pouvons créer un programme maître qui s'occupe à ce que les solutions des sous-problèmes respectent ces contraintes. Entriken (1996) résout une série de problèmes généraux avec une structure en escalier en utilisant la décomposition parallèle de Benders. Selon Entriken (1996), l'utilisation du parallélisme permettrait d'accélérer la recherche de la solution optimale non seulement par la répartition du travail sur plusieurs processeurs mais aussi en permettant la recherche de la solution sur plusieurs fronts.

Jayakumar (1995) propose de son côté une méthode cascade-heuristique pour résoudre ce type de problème. Il obtient des bons temps de calcul mais il n'offre aucune information quant à la précision de la méthode par rapport à la solution optimale.

Une autre façon de s'attaquer au problème linéaire avec une structure en escalier est d'utiliser la décomposition nichée ("Nested Decomposition") (Glassey 1973; Ho et Manne 1974). Cette méthode nous permet d'inclure dans les sous-problèmes une partie du programme maître (voir la figure 5.6). De son côté, Fourer (1982) a adapté le simplexe pour mieux résoudre les problèmes avec une structure en escalier. Cette adaptation s'attaque surtout aux routines d'inversion de matrices éparées. Selon Ho et Loute (1979), la modification du simplexe est une méthode qui fonctionne bien lorsque nous avons un grand nombre de périodes avec peu de contraintes. Quant à la décomposition nichée, elle fonctionne mieux avec des problèmes avec un petit nombre de périodes qui possèdent un grand nombre de contraintes.

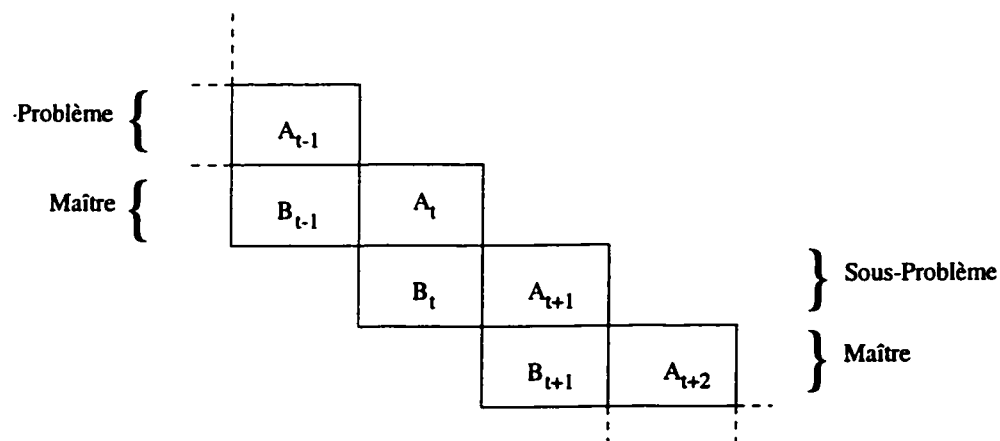


**Figure 5.6 – Décomposition nichée**

Le problème MA2 possède 3 sous-problèmes de 13000 variables et 3000 contraintes et donc la méthode de décomposition nichée semble être la plus efficace. Comme pour les sous-problèmes de la méthode de Dantzig-Wolfe, il est préférable d'utiliser la ver-

sion linéarisée de la fonction objectif pour pouvoir réutiliser les solutions précédentes.

Pour faciliter la lecture des équations et de l'algorithme, nous définissons ici les termes utilisés :

|                    |                                                                                                                           |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $t$                | Identificateur des sous-problèmes ;                                                                                       |
| $T$                | Nombre maximal de sous-problème ;                                                                                         |
| $k$                | Compteur d'itération de l'algorithme ;                                                                                    |
| $Diff$             | Variable pour terminer la décomposition ;                                                                                 |
| $\pi_t^k$          | Vecteur de la solution duale du sous-problème $t$ à l'itération $k$ ;                                                     |
| $\omega_t^k$       | Vecteur de la solution duale associée aux contraintes de recouvrement du sous-problème $t$ à l'itération $k$ ;            |
| $SP_t^k$           | Sous-problème $t$ à l'itération $k$ ;                                                                                     |
| $Z_k^t$            | Valeur de la fonction objectif du sous-problème $t$ à l'itération $k$ ;                                                   |
| $C_t$              | Vecteur des coûts du sous-problème $t$ ;                                                                                  |
| $B_t$              | Portion de la matrice originale contenant les variables et les contraintes servant au sous-problème $t + 1$ ;             |
| $\overline{C}_t^k$ | Vecteur des coûts modifiés du sous-problème $t$ à l'itération $k$ ;                                                       |
| $p_t^k$            | Vecteur de la valeur des solutions modifiées du sous-problème $t$ à l'itération $k$ ;                                     |
| $q_t^k$            | Vecteur de l'apport dans les contraintes de la solution du sous-problème $t - 1$ au sous-problème $t$ à l'itération $k$ ; |

- $X_t^k$  Vecteur solution du sous-problème  $t$  à l'itération  $k$  ;
- $\lambda_t^{jk}$  Vecteur solution associé aux coefficients  $q_t^j$  et aux coûts  $p_t^j$  du sous-problème  $t$  de l'itération  $k$ .

Selon Ho et Manne (1974), la formulation des sous-problèmes  $SP_t^k$  ressemble à ceci :

$$\begin{aligned}
 z_t^k &= \max_{x_t^k, \lambda_t^{jk}} (c_t - \pi_{t+1}^k \cdot B_t) \cdot x_t^k + \sum_{j=1}^{k-1} p_t^j \cdot \lambda_t^{jk} \\
 \text{s.à} \quad & A_t \cdot x_t^k + \sum_{j=1}^{k-1} q_t^j \cdot \lambda_t^{jk} = d_t \\
 & \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_t^{jk} = 1
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 p_2^k &= c_1 \cdot x_1^k \\
 p_t^k &= c_{t-1} \cdot x_{t-1}^k + \sum_{j=1}^{k-1} p_{t-1}^j \cdot \lambda_{t-1}^{jk} \quad (t = 3, \dots, T) \\
 q_t^k &= B_{t-1} \cdot x_{t-1}^k \quad (t = 2, \dots, T)
 \end{aligned}$$

À l'itération  $k$ , les vecteurs-poids  $\lambda_t^{jk}$  sont placés devant les propositions faites par le sous-problème  $SP_t^j$ .  $p_t^j$  est la valeur de la fonction objectif de ce sous-problème et  $q_{t+1}^j$  est la valeur des coefficients de la matrice  $B_t$  multipliés par la solution du problème  $SP_t^j$ .

Les variables duales qui sont associées aux contraintes comprises dans la matrice

$A_t$  sont rassemblées dans le vecteur  $\pi_t^k$  et celles des autres contraintes dans le vecteur  $\omega_t^k$ . La solution optimale de ce problème est obtenue lorsque  $z_{t-1}^k = \omega_t^k \quad \forall t = 2, \dots, T$ .

Comme pour la décomposition de Dantzig-Wolfe, nous avons relaxé légèrement cette égalité en permettant un écart de 1 entre  $z_{t-1}^k$  et  $\omega_t^k$ . Ho et Manne (1974) ont prouvé que cet algorithme est de convergence finie.

Pour pouvoir utiliser correctement cet algorithme, nous utilisons une solution de départ trouvée en optimisant les sous-problèmes  $SP_t$  dans l'ordre chronologique. Cela nous permet d'avoir des solutions réalisables qui permettront d'avoir une base raisonnable pour partir l'algorithme de la décomposition nichée (voir figure 5.7).

La solution finale peut être reconstruite à partir des solutions  $x_t^k$  et des vecteurs  $\lambda_t^k$  que nous avons obtenu à la dernière itération. L'algorithme de cette reconstruction est décrit dans l'article de Ho et Manne (1974).

## 5.2 Modèle Actuariel (MA1)

Le modèle actuariel (MA1) est composé d'environ 13000 variables et de 1500 contraintes. La fonction objectif est non convexe ce qui rend la résolution de ce problème beaucoup plus difficile que pour les modèles cloisonnés. Plusieurs solutions

**Initialisation :**  
 $k = 0$   
 $Diff = 1$   
**Pour** ( $t = 1$  à  $T$ )  
  **Début**  
     $\pi_t^0 = 0$   
    Résoudre  $SP_t^0$   
    Solution =  $X_t^0$   
    Calculer  $q_t^k$  et  $p_t^k$   
  **Fin**  
**Algorithme de décomposition :**  
  **Tant que** ( $Diff \geq 1$ )  
    **Début**  
       $Diff = 0$   
       $k++$   
      **Pour** ( $t = T$  à  $1$ )  
        **Début**  
          Calculer  $\overline{C}_t^k = (C_k - \pi_{t+1}^k \cdot B_t)$   
          Résoudre  $SP_t^k$   
          Solution =  $X_t^k$  et  $\lambda_t^k$   
          Calculer  $q_t^k$  et  $p_t^k$   
          **Si** ( $t <> T$ )  
             $Diff = \text{Max}(Diff, |Z_k^t - \omega_{t+1}^k|)$   
        **Fin**  
    **Fin**  
**Solution Finale :**  
  Méthode de Ho et Manne (1974)

**Figure 5.7 – Pseudo-code pour la décomposition nichée**

s'offrent à nous. Premièrement, nous pouvons chercher à transformer la fonction des coûts pour la rendre convexe et ainsi trouver une approximation au problème beaucoup plus facilement. Deuxièmement, nous pouvons utiliser l'optimisation globale pour résoudre ce problème. Comme il est très difficile de prouver que la solution d'un programme non convexe est la solution optimale globale du problème, l'utilisation d'une heuristique est souvent la meilleure solution. C'est pour cette raison que nous proposons aussi une méthode de recherche avec tabou pour le résoudre.

### 5.2.1 Approximation convexe

La difficulté dans la résolution du modèle actuariel (MA1) est sa fonction de coût non convexe qui contient des termes comme ceux-ci :

$$y_{ijk} \cdot (R_{ik} - \mu_{ijk} \cdot (\sum_{p \in (H_k - H_j)} C_{ip} \cdot F(Q_p^+) \cdot G(M_{ip}) \cdot G(N_{ip}) \cdot H(E_{ij}^+))) \quad (5.30)$$

où  $H(E_{ij}^+)$  et  $F(Q_p^+)$  sont des fonctions quadratiques et  $G(M_{ip})$  et  $G(N_{ip})$  dépendent de la variable  $P_p^+$  en plus de la variable  $M_{ip}$  et  $N_{ip}$  respectivement. En remplaçant la variable  $Q_p^+$  dans l'équation  $G(M_{ip})$  par une estimation, nous allons vérifier si la fonction de coût est convexe.

Premièrement, nous savons que si une fonction  $f(x)$  est une somme de fonction de fonctions convexes  $g_i(x)$  multipliées par des poids non négatifs  $\alpha_i$ , alors  $f(x)$  est aussi une fonction convexe (voir le livre de Rardin 1998).

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot g_i(x) \quad (5.31)$$

Deuxièmement, nous savons aussi que la somme de fonctions convexes est aussi une fonction convexe. Donc, en utilisant ces deux conditions, nous pouvons dire que la fonction des coûts est convexe si la fonction suivante est convexe :

$$f(E_{ij}^+, Q_p^+, M_{ip}, N_{ip}) = H(E_{ij}^+) \cdot \sum_{p \in (H_k - H_j)} C_{ip} \cdot F(Q_p^+) \cdot G(M_{ip}) \cdot G(N_{ip}) \quad (5.32)$$

En rappliquant les deux conditions à cette nouvelle formulation, nous pouvons la réduire à cette fonction finale à vérifier :

$$f_{z_j}(E_{ij}^+, Q_p^+, M_{ip}, N_{ip}) = F(Q_p^+) \cdot G(M_{ip}) \cdot G(N_{ip}) \cdot H(E_{ij}^+) \quad (5.33)$$

Si cette nouvelle équation est convexe, alors la fonction transformée des coûts est

convexe. Pour prouver que cette fonction est convexe, nous n'avons qu'à montrer que le Hessien est semi-défini positif. Sachant que la matrice du Hessien est symétrique, nous pouvons utiliser le critère de Gauss (Gauvin 1995) :

Une matrice symétrique  $A$  est définie positive si et seulement si, lorsque réduite à une forme échelonnée triangulaire par la méthode de Gauss appliquée systématiquement le long de la diagonale principale, sans permutation de lignes, tous les pivots sont positifs.

En utilisant les fonctions du modèle actuariel (MA1) que nous rappelons ici :

$$\begin{aligned}
 F(Q_p^+) &= 1.6667 \cdot (Q_p^+)^2 + 1.1667 \cdot Q_p^+ + 1 \\
 G(M_{ip}) &= 5 \cdot (M_{ip})^2 + 0.5 \cdot M_{ip} + 1 \\
 G(N_{ip}) &= 5 \cdot (N_{ip})^2 + 0.5 \cdot N_{ip} + 1 \\
 H(E_{ij}^+) &= 1.25 \cdot (E_{ij}^+)^2 + 0.75 \cdot E_{ij}^+ + 1
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Les valeurs de  $M_{ip}$  et  $N_{ip}$  sont incluses dans l'intervalle  $[0,0.75]$  et les valeurs de  $Q_p^+$  dans l'intervalle  $[0,0.5]$ . En évaluant la matrice réduite, on s'aperçoit que l'un des termes est négatif et donc que la fonction de coûts est non convexe. En analysant cette fonction, nous nous sommes aperçus qu'elle change de convexité pour les valeurs les plus élevées de l'intervalle et donc il est possible de considérer cette fonction comme

convexe sur seulement une partie des solutions. Malheureusement, nous ne sommes pas prêts à réduire l'intervalle des solutions seulement pour cette raison.

Nous proposons alors de trouver une fonction convexe sur le domaine en considérant les ratios et coefficients des tableaux 4.10, 4.11 et 4.12 qui ont servi à l'élaboration des fonctions  $F()$ ,  $G()$  et  $H()$ . En regroupant ces ratios, nous pouvons créer 81 points qui nous serviront à créer une fonction convexe des coûts.

La fonction convexe des coûts doit s'approcher de la courbe actuelle tout en restant convexe. Nous cherchons donc à minimiser la différence au carré entre la valeur de la fonction non convexe et celle de la fonction convexe.

Les solutions préliminaires nous permettent de dire que les solutions se concentrent beaucoup dans certaines régions du domaine. Nous voudrions donc diminuer l'écart entre les deux fonctions pour ces régions. La majorité des variables de pénalité est souvent à sa borne inférieure et donc la fonction de pénalité équivaut souvent aux coûts de recrutement normaux. Lorsque ces variables ne sont pas à leur minimum, elles sont souvent seules à être différentes de zéro dans la fonction  $f()$ . Pour cette raison, nous avons décidé de commencer avec la somme des fonctions  $F(Q^+)$ ,  $G(M_{ip})$ ,  $G(N_{ip})$  et  $H(E_{ij}^+)$  pour créer notre fonction convexe :

$$g(Q_p^+, E_{ij}^+, M_{ip}, N_{ip}) = 5 \cdot (N_{ip})^2 + 0.5 \cdot N_{ip} + 5 \cdot (M_{ip})^2 + 0.5 \cdot M_{ip} + 1.6667 \cdot$$

$$(Q_p^+)^2 + 1.1667 \cdot Q_p^+ + 1.25 \cdot (E_{ij}^+)^2 + 0.75 \cdot E_{ij}^+ + 1 \quad (5.35)$$

Cette fonction fait une bonne approximation, cependant elle sous-estime les cas où une paire de variables de pénalité est différente de zéro. Comme la fonction originale est une multiplication des fonctions quadratiques, nous nous retrouvons avec quatre multiplications de variables pour chaque paire (par exemple :  $(Q_p^+ \cdot E_{ij}^+)^2$ ,  $Q_p^+ \cdot (E_{ij}^+)^2$ ,  $(Q_p^+)^2 \cdot E_{ij}^+$ ,  $Q_p^+ \cdot E_{ij}^+$ ). Le coefficient de ces termes a été évalué à partir de la fonction originale des coûts. En ajoutant ces termes à la fonction  $g()$ , nous la rendons non convexe. Nous avons donc décidé d'ajouter seulement le terme le plus simple de chaque paire à la fonction  $g()$  et nous avons cherché le coefficient qui permettait de minimiser l'écart. Nous nous retrouvons à ajouter la fonction suivante :

$$\begin{aligned} h(Q_p^+, E_{ij}^+, M_{ip}, N_{ip}) = & 1.5625 \cdot M_{ip} \cdot N_{ip} + 1.40625 \cdot E_{ij}^+ \cdot (M_{ip} + N_{ip}) \quad (5.36) \\ & + 2.40 \cdot Q_p^+ \cdot (M_{ip} + N_{ip}) + 2.2125 \cdot E_{ij}^+ \cdot Q_p^+ \end{aligned}$$

Cet ajout nous permet d'estimer la valeur de  $f()$  si chacune des variables est seule ou en paire. Le problème survient lorsque trois variables et plus sont différentes de zéro. En utilisant la même technique que pour les paires de variables, la fonction devient très instable c'est-à-dire qu'un simple changement de coefficient fait en sorte que la fonction devient non convexe sur le domaine. Dû à la difficulté d'optimiser les

coefficients des triplets tout en gardant la fonction non convexe, nous avons décidé de les évaluer par essais et erreurs. En utilisant cette technique, il est devenu évident du peu d'impact que ces termes ont sur l'écart entre la fonction originale et la nouvelle fonction pour les 81 points de référence. Ces termes ont cependant un impact important sur les solutions extrêmes. Nous avons décidé d'ajouter une nouvelle série de termes qui aide à diminuer légèrement l'écart total mais qui laisse la fonction convexe.

$$i(Q_p^+, E_{ij}^+, M_{ip}, N_{ip}) = 1.336 \cdot M_{ip} \cdot N_{ip} \cdot E_{ij}^+ + 1.427 \cdot Q_p^+ \cdot M_{ip} \cdot N_{ip} \quad (5.37)$$

$$+ 0.20 \cdot Q_p^+ \cdot E_{ij}^+ \cdot (M_{ip} + N_{ip}) + 0.25 \cdot E_{ij}^+ \cdot Q_p^+ \cdot M_{ip} \cdot N_{ip}$$

Comme la nouvelle fonction de coût est convexe mais non linéaire, nous avons décidé d'utiliser l'algorithme de Frank-Wolfe pour résoudre le problème. Une explication du fonctionnement de l'algorithme a été donnée dans la section précédente.

### 5.2.2 Algorithme tabou

La modification de la fonction des coûts est une technique qui évite beaucoup de travail, elle n'est cependant qu'une grossière approximation. Dans cette section, nous proposons un algorithme tabou qui a été proposé pour la première fois par Glover (1986) et indépendamment par Hansen et Jaumard (1986). Les méthodes tabous

sont des méthodes de recherche itérative qui permettent d'analyser le voisinage d'une solution et de proposer des modifications à cette solution dans le but d'atteindre un optimum. Pour éviter de se coincer dans un optimum local, les modifications apportées par l'algorithme ne sont pas toujours des modifications qui améliorent la solution. Le but de ces modifications est de visiter le plus grand voisinage possible pour trouver la solution optimale. Cependant pour éviter de revenir sur nos pas, les modifications apportées au cours d'une itération deviennent tabous pour un certain nombre d'itérations c'est-à-dire qu'on interdit de faire les modifications inverses.

Les méthodes tabous sont des méthodes qui ont été employées dans pratiquement tous les domaines. Elles ont prouvé leur efficacité à trouver des solutions rapidement et avec un écart minime sur des problèmes diversifiés comme le problème de l'arbre de Steiner (Gendreau et al 1999), le problème du voyageur de commerce (Laporte et al 1996) et les problèmes de conception de réseaux (Chamberland et al 2000).

Le coeur de l'heuristique tabou se trouve dans la construction du voisinage d'une solution. Dans le problème de l'optimisation des marchés, nous partons d'une solution obtenue à l'aide du modèle actuariel (MA2) normal où les clients ont déjà été déplacés entre les groupes. Une solution "voisine" est alors identique à la solution actuelle sauf pour un seul client qui revient à son point de départ (s'il avait changé de groupe auparavant) ou qui change de groupe (s'il n'avait pas déjà changé de groupe). Donc à chaque itération, nous avons un voisinage composé d'environ 25000 solutions possibles

au maximum c'est-à-dire pour chaque segment et chaque mouvement possible des clients.

Le tabou d'un changement est en fait l'itération à laquelle un changement peut être réutilisé. Il est calculé à partir de l'itération où le tabou commence plus un nombre aléatoire compris entre 10 et 20.

La difficulté de cet algorithme est l'évaluation de l'impact des changements apportés à une solution. En effet, le déplacement d'un client modifie les coûts de recrutement de centaines d'autres clients. Pour évaluer cet impact, nous devons recalculer les coûts de recrutement de tous ces clients, ce qui est très long.

Un autre problème que l'on retrouve avec les heuristiques tabous est le cyclage de certaines décisions. Habituellement, la liste tabou permet d'éliminer une grande partie de ce cyclage mais il arrive que ces cycles se créent sur un grand nombre d'itérations. Comme les tabous n'existent que seulement sur quelques itérations, ils ne peuvent empêcher cette situation. Pour cette raison, nous avons ajouté une simple technique de diversification continue. Cette diversification permet d'allonger le tabou de certains changements s'il détecte des cycles à moyen terme.

Cependant, il est toujours possible que des solutions avec tabou puissent améliorer la meilleure solution. Pour cette raison, nous avons introduit un critère d'aspiration

qui permet de briser un tabou lorsque cette situation arrive.

Une technique de diversification radicale proposée par Gendreau et al (1999) a aussi été implantée. Cette technique permet d'arrêter l'algorithme après 50 itérations sans amélioration et de la repartir avec la meilleure solution comme point de départ. Tous les mouvements des 50 dernières itérations ont maintenant un tabou de 25 itérations. Cette technique permet de diversifier les solutions étudiées.

À la figure 5.8, nous décrivons brièvement l'algorithme tabou utilisé. Pour mieux comprendre l'algorithme, nous définissons les termes utilisés :

|                |                                                                                                                                                     |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $T$            | Solution actuelle ;                                                                                                                                 |
| $T^*$          | Meilleure solution connue ;                                                                                                                         |
| $iter(T^*)$    | L'itération où la meilleure solution connue a été trouvée ;                                                                                         |
| $(i, j, k, +)$ | Mouvement d'un client du segment $i$ du groupe $j$ vers le groupe $k$ ;                                                                             |
| $(i, j, k, -)$ | Mouvement d'un client du segment $i$ , et initialement du groupe $j$ , du groupe $k$ vers le groupe $j$ (le mouvement inverse de $(i, j, k, +)$ ) ; |
| $P^+(i, j, k)$ | Variation des coûts en déplaçant un client du segment $i$ du groupe $j$ vers le groupe $k$ ;                                                        |
| $P^-(i, j, k)$ | Variation des coûts en ramenant un client du segment $i$ , et initialement provenant du groupe $j$ , du groupe $k$ vers le groupe $j$ ;             |

$Tabu(i, j, k, +)$  Itération où le tabou sera levé sur les mouvements  $(i, j, k, +)$  ;

$Tabu(i, j, k, -)$  Itération où le tabou sera levé sur les mouvements  $(i, j, k, -)$  ;

$Som$  Somme des coûts de la solution actuelle ;

$Som(T^*)$  Somme des coûts de la meilleure solution ;

$\bar{P}$  Meilleure variation des coûts au cours d'une itération ;

$w$  Meilleur mouvement au cours d'une itération.

**Initialisation**

$T$  = Solution du modèle normal MA2 avec une période

**Tant que**  $(iteration - iter(T^*) < 200)$

**Début**

**Déterminer la meilleure transformation :**

$\bar{P} := +\infty$

**Pour**  $i \in I, j \in G, k \in G$  **Faire**

**Début**

Calculer  $P^+(i, j, k)$

**Si**  $P^+(i, j, k) \leq \bar{P}$  **et**

$(Tabu(i, j, k, +) \leq iteration \text{ or } P^+(i, j, k) \leq Som)$  **Alors**

$\bar{P} := P^+(i, j, k)$  **et**  $w := (i, j, k, -)$

Calculer  $P^-(i, j, k)$

**Si**  $P^-(i, j, k) \leq \bar{P}$  **et**

$(Tabu(i, j, k, -) \leq iteration \text{ ou } P^-(i, j, k) \leq Som)$  **Alors**

$\bar{P} := P^-(i, j, k)$  **et**  $w := (i, j, k, -)$

**Fin**

**Mise à jour :**

$T := T + \{w\}$

**Si**  $Tabu(w) \leq iteration - 20$  **Alors**

$Tabu(w) := iteration + Random(3, 7) + 1$

**Sinon**

$Tabu(w) := iteration + Random(3, 7) + 21$

**Si**  $Som(T) \leq Som(T^*)$  **Alors**

$T^* := T$  **et**  $iter(T^*) := iteration$

**Si**  $(iteration - iter(T^*)) \bmod 50 == 0$  **et**  $iter(T^*) \neq iteration$  **Alors**

**Début : Diversification radicale**

$T := T^*$

**Pour**  $i \in I, j \in G, k \in G$  **Faire**

**Début**

$w := (i, j, k, +)$  ;

**Si**  $Tabu(w) > iter(T^*)$  **Alors**  $Tabu(w) := iteration + 25$

$w := (i, j, k, -)$  ;

**Si**  $Tabu(w) > iter(T^*)$  **Alors**  $Tabu(w) := iteration + 25$

**Fin**

**Fin : Diversification radicale**

**Prochaine itération :**

$iteration := iteration + 1$

**Fin.**

**Figure 5.8 – Pseudo-code pour l'algorithme tabou**

Les résultats des différentes méthodes de résolution des problèmes déterministes sont présentés au chapitre 8. Mais avant de les voir, nous présentons les modèles stochastiques dans le prochain chapitre et leurs méthodes de résolution au chapitre 7.

## Troisième partie

### Modèles stochastiques

## Chapitre 6

# Modèles stochastiques

Dans ce chapitre, nous discutons de différentes approches aux problèmes stochastiques de l'optimisation des marchés. Les modèles proposés cherchent à traiter une partie de la stochasticité que l'on rencontre dans le problème.

Nous proposons deux grandes approches : le modèle possibiliste et le modèle cloisonné stochastique. Ces deux approches s'attaquent à un problème précis du modèle actuariel (MA2). Dans le modèle possibiliste, nous cherchons une solution aux problèmes de fiabilité des données obtenues par "l'intuition" du personnel du marketing.

Le modèle cloisonné stochastique cherche de son côté une solution au problème de l'impact des variations des facteurs macro-économiques sur le problème. Comme ces facteurs sont difficiles à déterminer à moyen terme et qu'ils ont un impact sur un bon nombre de paramètres, nous cherchons une façon de construire nos solutions pour nous protéger contre ces fluctuations. Au tableau 6.1, nous faisons un résumé des modèles que nous allons étudier.

**Tableau 6.1 – Brève description des modèles stochastiques**

| Modèle                        | Caractéristique                                                                              |
|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| Modèle Possibiliste           | Problème du manque de fiabilité des données<br>Utilisation de la logique floue (fuzzy logic) |
| Modèle Cloisonné Stochastique | Création de scénarios<br>Analyse des effets à court et moyen terme des scénarios             |

## 6.1 Modèle possibiliste (MP)

Une des principales faiblesses des modèles déterministes est leur manque de flexibilité face aux données peu fiables. En effet, le modèle déterministe doit traiter toutes les données comme étant exactes qu'importe la fiabilité qu'on leur accorde. Pour cette raison, nous introduisons le modèle possibiliste qui essaie de s'attaquer à cette faiblesse des modèles déterministes en utilisant la logique floue (fuzzy logic). Bellman et Zadeh (1970) ont été les premiers à proposer des solutions optimales à problèmes de prises de décisions dans un environnement flou.

La logique floue peut rendre service dans la modélisation lorsque nous avons beaucoup de données peu fiables. Cette technique nous permet de remplacer les données floues par un intervalle de données possibles c'est-à-dire un sous-ensemble flou et une fonction qui détermine cette possibilité ( $\mu(x)$ ). Par exemple à la figure 6.1, nous avons un paramètre dont la valeur peut être dans un certain intervalle selon une fonction linéaire des possibilités. Souvent ces paramètres sont définis par des personnes qui font une approximation "linguistique" des données (par exemple : "environ 10%").

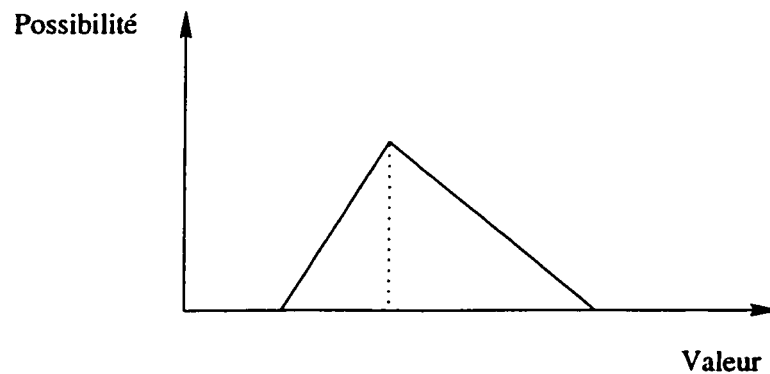


**Figure 6.1 – Illustration d'une fonction triangulaire de possibilité**

Selon Ramík et Rímánek (1985), un nombre flou est un sous-ensemble flou convexe d'une vraie ligne  $E$  avec une fonction d'adhésion ( $\mu$ ) normalisée. Donc le sous-ensemble  $\tilde{b}$  de  $E$  avec la fonction d'adhésion

$$\mu_{\tilde{b}} : E \rightarrow [0, 1] \quad (6.1)$$

**Tableau 6.2 – Différence entre la distribution possibiliste et probabiliste**

| X        | 1   | 2   | 3   | 4 | 5   | 6   | 7   | 8   |
|----------|-----|-----|-----|---|-----|-----|-----|-----|
| $\pi(x)$ | 1   | 1   | 1   | 1 | 0.8 | 0.6 | 0.4 | 0.2 |
| P(x)     | 0.1 | 0.8 | 0.1 | 0 | 0   | 0   | 0   | 0   |

est un nombre flou, si pour n'importe quel  $\alpha \in [0, 1]$  l'ensemble  $\alpha$ -coupe

$$\tilde{b}_\alpha = \{u \in E; \mu_{\tilde{b}}(u) \geq \alpha\} \quad (6.2)$$

est un sous-ensemble convexe de  $E$  et qu'il existe un  $m \in E$  tel que  $\mu_{\tilde{b}}(m) = 1$ .

Ceci est équivalent à la condition que la fonction d'adhésion  $\mu_{\tilde{b}}$  soit non décroissante dans l'intervalle  $]-\infty, m]$  et non croissante dans l'intervalle  $[m, +\infty[$ .

La différence entre la logique floue et les probabilités se situent surtout au niveau de l'interprétation. Un exemple présenté par Zimmermann (1984) montre la différence entre une fonction possibiliste et une fonction probabiliste où l'on cherche à savoir combien d'oeufs a mangé Hans pour déjeuner. Selon la théorie probabiliste, on peut déterminer la distribution  $P(x)$  en observant Hans déjeuner pendant 100 jours. D'un autre côté, la distribution possibiliste  $\pi(x)$  va plutôt regarder la facilité avec laquelle Hans mange ses oeufs pour déterminer la possibilité qu'il mange  $x$  oeufs. On peut voir au tableau 6.2 la différence des distributions. On remarque qu'un haut degré de possibilité ne signifie pas un haut degré de probabilité.

Il est clair que la théorie possibiliste n'est pas un substitut aux probabilités mais plutôt un autre genre d'incertitude. L'incertitude qui nous intéresse dans ce type de problème est celle qui entoure les données fournies par le personnel du marketing. Souvent ces données ont une certaine fiabilité mais il reste toujours un intervalle d'incertitude autour de ces valeurs.

En remplaçant toutes les données que nous considérons comme floues ( $\gamma$ ,  $\beta_p$ ,  $\phi$  et  $\pi$ ) par un intervalle, nous pouvons réécrire le modèle actuariel (MA2). Nous ne considérons pas le taux de rentabilité d'un produit comme un élément flou car il a été longuement analysé et représente la valeur réelle de rentabilité dans un environnement précis.

Les fonctions de possibilité prennent généralement la forme d'un trapèze ou d'un triangle. Ces fonctions permettent d'évaluer facilement le degré de possibilité d'un nombre flou. Par exemple, à la figure 6.2, le nombre flou  $\bar{4}$  peut en fait varier entre 2 et 5. Entre 3 et 4.5, le degré de possibilité est de 1 et à l'extérieur de l'intervalle  $[2,5]$ , le degré de possibilité est de 0. Pour les autres valeurs possibles, le degré de possibilité varie linéairement ce qui est facile à évaluer.

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \leq 4.5 \\ 2 \cdot (5 - x) & \text{si } 4.5 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

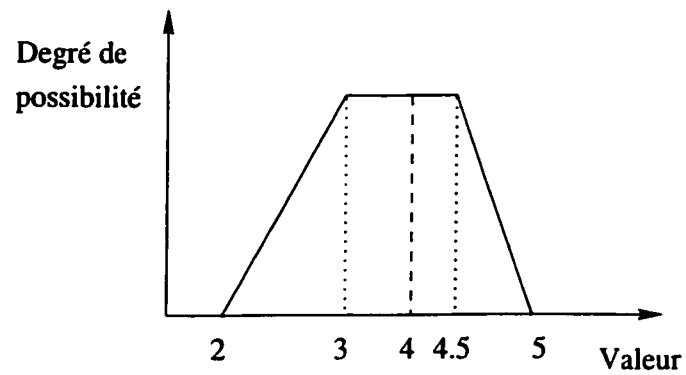


**Figure 6.2 – Fonction trapézoïdale d'un nombre flou**

Dans le modèle possibiliste que nous proposons, nous avons décidé d'utiliser des fonctions triangulaires (voir figure 6.1), pour des raisons de simplicité, pour tous les nombres flous que nous avons.

### 6.1.1 Équations du modèle possibiliste

Le modèle possibiliste est identique au modèle actuariel (MA2) à l'exception des données floues que nous remplaçons par leur équivalent désigné avec un  $\sim$  au-dessus de leur ancienne désignation.

$$\max_{x_{ik}^t, y_{ijk}^t} \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} \sum_{t \in T} \left( (x_{ik}^t \cdot \frac{R_{ik}^t}{(1+r^t)^t}) - (\sum_{j \in G} y_{ijk}^t \cdot A_{ijk}^t) \right) - f(Vol^t) - \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} g(E_{ik}^t) - \sum_{p \in P} \sum_{d \in D} h(M_{dp}^t) - \sum_{v \in V} o(N_{vp}^t) - w(Q_p^t) \quad (6.3)$$

$$s.a \quad x_{ij}^{t-1} = \sum_{k \in G} y_{ijk}^t \quad \forall i \in I, j \in G, t \in T \quad (6.4)$$

$$\sum_{j \in G} y_{ijk}^t = x_{ik}^t \quad \forall i \in I, k \in G, t \in T \quad (6.5)$$

$$y_{ikj}^t \geq \alpha_{ip}^t \cdot x_{ik}^t \quad \forall i \in I, p \in P, t \in T \quad (6.6)$$

$$k \in G_p^+, j = k - \{p\}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in G} y_{ijk}^t \leq \tilde{\phi}^t \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} \sum_{j \in G, j \neq k} y_{ijk}^t \quad \forall t \in T \quad (6.7)$$

$$\sum_{k \in G} y_{ikk}^t + E_{ik}^t = (1 - \tilde{\gamma}_i^t) \cdot x_{ik}^{t-1} \quad \forall i \in I, k \in G, t \in T \quad (6.8)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in G} \sum_{j \in G} y_{ijk}^t \cdot D_{ik}^t + Vol^t \geq (1 + \tilde{\pi}^t) \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} x_{ik}^{t-1} \cdot D_{ik}^{t-1} \quad \forall t \in T \quad (6.9)$$

$$\sum_{i \in B_d} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ijk}^t - M_{dp}^{t+} + M_{dp}^{t-} = \tilde{\theta}_{dp}^t \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ijk}^t \quad \forall d \in D, p \in P, t \in T \quad (6.10)$$

$$\sum_{i \in C_v} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ijk}^t - N_{vp}^{t+} + N_{vp}^{t-} = \tilde{\omega}_{vp}^t \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ijk}^t \quad \forall v \in V, p \in P, t \in T \quad (6.11)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^-} \sum_{k \in G_p^+} y_{ijk}^t - Q_p^t \leq \frac{\tilde{\beta}_p^t}{2} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^+} x_{ij}^{t-1} \quad \forall p \in P, t \in T \quad (6.12)$$

$$Q_p^t \leq \frac{\tilde{\beta}_p^t}{2} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^+} x_{ij}^{t-1} \quad \forall p \in P, t \in T \quad (6.13)$$

$$(6.14)$$

**Modèle 6.1: Modèle Possibiliste (MP)**

Cette approche diffère du modèle actuariel (MA2) surtout au niveau de son approche de résolution. Le fait de considérer ces paramètres comme flous va permettre de trouver des solutions différentes qui se rapprocheront peut-être mieux de la réalité.

En ce qui a trait aux méthodes de résolution, nous rappelons qu'elles seront étudiées au chapitre 7. Dans la section qui suit, nous introduisons le modèle cloisonné stochastique qui s'attaque à la variabilité des solutions sous divers scénarios de facteurs macro-économiques.

## 6.2 Modèle cloisonné stochastique (MCS)

Le modèle cloisonné permet de résoudre rapidement le problème de l'optimisation des marchés et permet ainsi d'analyser plusieurs scénarios. Cependant, il est difficile, à partir de ces résultats, de trouver la solution qui puisse être optimale qu'importe le scénario qui arrive. Pour cette raison, nous introduisons le modèle cloisonné stochastique qui permet de choisir la meilleure solution connaissant la variabilité des scénarios pour les périodes suivantes.

L'optimisation des marchés est composée de contraintes dont la majorité des données sont plus ou moins fiables. En plus de ce manque de fiabilité, ces données varient dans le temps selon des facteurs macro-économiques que nous ne contrôlons

pas et qui sont difficiles à prédire (les taux d'intérêt, la compétition et le rendement du marché).

Devant ces difficultés, les modèles déterministes doivent supposer que les données sont fiables et que l'effet des facteurs macro-économiques est connu et prédit correctement. Tant que nous considérons ces hypothèses comme raisonnables, le modèle cloisonné donne une bonne solution au problème de l'optimisation des marchés.

Cependant, il faut bien se rendre compte que les facteurs macro-économiques sont difficiles à prédire et qu'ils jouent un rôle important dans la valeur des données utilisées dans le modèle cloisonné.

**Tableau 6.3 – Facteurs influents sur les données**

| <b>Données</b>      | <b>Facteurs Influent</b>                                     |
|---------------------|--------------------------------------------------------------|
| Coût de recrutement | Compétition<br>Demande                                       |
| Rentabilité         | Intérêt<br>Rendement du marché<br>Demande<br>Compétition     |
| Attrition           | Rentabilité<br>Intérêt<br>Compétition<br>Rendement du marché |
| Demande             | Attrition<br>Compétition<br>Intérêt<br>Rendement du marché   |

Nous résumons dans le tableau 6.3 les facteurs influents sur les données du modèle cloisonné. Une forte variation de la compétition, des taux d'intérêt ou du rendement du

marché peut modifier largement les données sur la demande, les coûts de recrutement, la rentabilité et l'attrition. Comme ces données sont à la base du modèle cloisonné, les solutions en sont fortement dépendantes surtout pour les décisions à long terme où ces facteurs jouent un rôle dominant. Dans le court terme, les facteurs macro-économiques sont habituellement bien évalués donc un modèle déterministe est raisonnable pour des périodes de courte durée.

À cause des problèmes à long terme et selon Mulvey et Shetty (1996), un modèle stochastique multi-stage semble apporter une bonne alternative. En effet, la solution proposée par un modèle déterministe n'est bonne que seulement pour un scénario précis ce qui la rend non robuste. Avec plus d'information sur l'évolution des facteurs macro-économiques, il est possible d'augmenter la précision des résultats obtenus. En traitant tous les scénarios, le modèle cloisonné stochastique s'assure de trouver une solution robuste qui maximise les profits qu'importe les changements dans les facteurs macro-économiques.

À la figure 6.3, nous illustrons l'arbre des scénarios et des décisions qui s'y rapportent à chaque période. À la période  $T1$ , nous proposons les décisions  $w$ . Au début de la deuxième période, il y a 3 possibilités dans l'évolution des facteurs macro-économiques. Pour chacun de ces scénarios, nous proposons une nouvelle série de décisions  $x$  et ensuite  $y$ . Il est à noter que chacun de ces scénarios a une probabilité de se réaliser (*prob* dans la figure) dont la somme est égale à 1. Pour chacun des

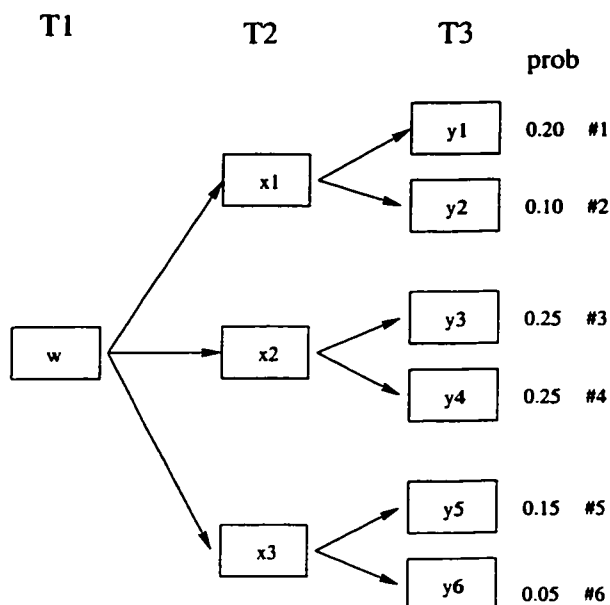


**Figure 6.3 – Illustration de l'arbre des décisions**

scénarios, nous devons donc proposer une série de décisions de la racine de l'arbre vers les feuilles. Le scénario #1 comprend les décisions  $w$ ,  $x_1$  et  $y_1$  et le scénario #2 les décisions  $w$ ,  $x_1$  et  $y_2$ . Comme on peut le voir, les décisions que ces deux scénarios ont en commun ( $w$  et  $x_1$ ) doivent être identiques. On appelle cet effet la non-anticipation des décisions.

### 6.2.1 Développement des scénarios

Les trois principaux facteurs qui influencent la majorité des scénarios sont les taux d'intérêt, le rendement des marchés et la compétition. Pour bâtir des scénarios, nous avons d'abord trouvé toutes les constantes que nous utilisons dans nos modèles

qui peuvent être influencées par ces trois facteurs. Ensuite, nous avons déterminé la sensibilité de chacune de ces constantes par rapport à une variation de ces trois facteurs.

Pour limiter le nombre de scénarios, nous avons décidé de faire varier les trois facteurs de trois façons : soit une hausse, une baisse ou aucune variation. Ainsi, pour chaque période, il y a 27 scénarios à analyser. Sur 3 périodes, cela revient à un total de 729 scénarios différents. Il faut remarquer qu'à la première période, il n'y a qu'un seul scénario car nous sommes sûrs du développement de ces trois facteurs à court terme. En analysant de plus près les 729 scénarios, on s'aperçoit que certains ont une très petite probabilité de se réaliser et d'autres se ressemblent beaucoup. Nous avons donc décidé de réduire ce nombre de scénarios en agrégeant certains ou en éliminant tout simplement ceux dont la probabilité de se réaliser est très faible. On se retrouve donc avec 9 scénarios à la fin de la deuxième période et 81 à la fin de la troisième. Ce nombre restreint de scénarios va permettre de réduire largement la taille du problème tout en ayant une bonne ventilation des scénarios possibles.

Les facteurs de compétition ont un effet déterminant sur les coûts de recrutement, la rentabilité des produits et la demande des produits. En effet, une hausse de la compétition fait en sorte que la demande de produits à la banque diminue et que l'attrition des produits augmente. Ceci entraîne à son tour une hausse des frais de rétention (diminution de la rentabilité) en plus de causer une augmenta-

tion des coûts de recrutement. Comme nous l'avons déjà expliqué, le facteur de compétition peut avoir une influence très précise (un produit ou un segment) ou très large (tous les produits à travers tous les segments) dépendant de la stratégie des compétiteurs. Comme nous voulons limiter le nombre de scénarios, nous sommes obligés de considérer seulement la compétition qui touche tous les segments et les produits. Dans le tableau 6.4, nous illustrons l'effet multiplicatif de la compétition sur les constantes sous différents scénarios. Les données ont été trouvées par intuition et n'ont aucune base mathématique ou statistique. Ainsi, dans cet exemple, sous un scénario où il y a hausse de la compétition, l'attrition des produits devrait augmenter de 12% par rapport à son niveau original.

**Tableau 6.4 – Influences de la compétition**

| <b>Constantes</b>   | <b>Scénarios</b> |               |               |
|---------------------|------------------|---------------|---------------|
|                     | <b>Hausse</b>    | <b>Stable</b> | <b>Baisse</b> |
| Coût de recrutement | 1.15             | 1.00          | 0.90          |
| Rentabilité         | 0.95             | 1.00          | 1.03          |
| Attrition           | 1.12             | 1.00          | 0.93          |
| Demande             | 0.90             | 1.00          | 1.07          |

Les facteurs des taux d'intérêt et du rendement du marché ont, de leur côté, une influence qui diffère entre les produits. En effet, une hausse des taux d'intérêt peut nuire à la vente d'hypothèques mais va aider dans la vente de certificats de placement. Nous pouvons même dire que cet effet peut être différent entre les segments. Certains segments de la population seront plus sensibles à la variation des taux d'intérêt que d'autres mais parce que cet effet reste plutôt difficile à quantifier, nous ne l'utilisons

pas dans le développement de scénarios. Nous résumons l'effet des variations des taux d'intérêt dans le tableau 6.5 et du rendement du marché dans le tableau 6.6.

**Tableau 6.5 – Influences des taux d'intérêt**

| Produits      | Constantes          | Scénarios |        |        |
|---------------|---------------------|-----------|--------|--------|
|               |                     | Hausse    | Stable | Baisse |
| Hypothèque    | Coût de recrutement | 1.10      | 1.00   | 0.90   |
|               | Rentabilité         | 0.97      | 1.00   | 1.02   |
|               | Attrition           | 1.12      | 1.00   | 0.90   |
|               | Demande             | 0.80      | 1.00   | 1.15   |
| Dépôt         | Coût de recrutement | 0.92      | 1.00   | 1.06   |
|               | Rentabilité         | 0.98      | 1.00   | 1.01   |
|               | Attrition           | 0.85      | 1.00   | 1.15   |
|               | Demande             | 1.15      | 1.00   | 0.90   |
| REÉR          | Coût de recrutement | 1.00      | 1.00   | 1.00   |
|               | Rentabilité         | 1.00      | 1.00   | 1.00   |
|               | Attrition           | 1.00      | 1.00   | 1.00   |
|               | Demande             | 1.00      | 1.00   | 1.00   |
| Fonds Mutuels | Coût de recrutement | 1.10      | 1.00   | 0.92   |
|               | Rentabilité         | 0.95      | 1.00   | 1.05   |
|               | Attrition           | 1.12      | 1.00   | 0.88   |
|               | Demande             | 0.85      | 1.00   | 1.20   |

Les REÉR ne sont pas influencés par les variations des taux d'intérêt et du rendement du marché car ils sont habituellement composés de produits comme les fonds mutuels et les certificats de dépôts. Les variations d'intérêt et du rendement du marché ne font que changer la proportion de ces produits à l'intérieur des REÉR. Les REÉR sont donc plutôt insensibles aux variations des taux d'intérêt et du rendement de marché. Cependant, ils sont sensibles à la santé de l'économie et surtout au taux d'épargne, or celui-ci est relativement stable à court et moyen terme.

En rassemblant les influences du rendement du marché, des taux d'intérêt et de la

**Tableau 6.6 – Influences du rendement du marché**

| <b>Produits</b>      | <b>Constantes</b>   | <b>Scénarios</b> |               |               |
|----------------------|---------------------|------------------|---------------|---------------|
|                      |                     | <b>Hausse</b>    | <b>Stable</b> | <b>Baisse</b> |
| <b>Hypothèque</b>    | Coût de recrutement | 1.02             | 1.00          | 0.98          |
|                      | Rentabilité         | 1.02             | 1.00          | 0.98          |
|                      | Attrition           | 1.01             | 1.00          | 0.99          |
|                      | Demande             | 0.95             | 1.00          | 1.05          |
| <b>Dépôt</b>         | Coût de recrutement | 1.07             | 1.00          | 0.95          |
|                      | Rentabilité         | 0.95             | 1.00          | 1.03          |
|                      | Attrition           | 1.10             | 1.00          | 0.90          |
|                      | Demande             | 0.85             | 1.00          | 1.20          |
| <b>REÉR</b>          | Coût de recrutement | 1.00             | 1.00          | 1.00          |
|                      | Rentabilité         | 1.00             | 1.00          | 1.00          |
|                      | Attrition           | 1.00             | 1.00          | 1.00          |
|                      | Demande             | 1.00             | 1.00          | 1.00          |
| <b>Fonds Mutuels</b> | Coût de recrutement | 0.90             | 1.00          | 1.10          |
|                      | Rentabilité         | 1.05             | 1.00          | 0.95          |
|                      | Attrition           | 0.70             | 1.00          | 1.20          |
|                      | Demande             | 1.20             | 1.00          | 0.70          |

variation de la compétition, nous pouvons créer nos 81 scénarios. Mais il faut avant tout déterminer la probabilité des mouvements macro-économiques par rapport au statu quo. Il est très difficile de déterminer ces probabilités et encore plus de leur donner une valeur.

Au tableau 6.7, nous présentons la probabilité de réalisation des 9 scénarios de base et l'influence de ces scénarios sur l'ensemble des produits et des différents facteurs.

Tableau 6.7 – Influence des scénarios sur l'ensemble des facteurs

| Produit         | Paramètres Affectés | Scénarios |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------|---------------------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                 |                     | 1         | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
| Hypothèque      | Coût de recrutement | 1.265     | 1.100 | 1.150 | 1.000 | 0.909 | 0.872 | 1.078 | 1.127 | 0.980 |
|                 | Rentabilité         | 0.922     | 0.970 | 0.950 | 1.000 | 1.030 | 1.056 | 0.951 | 0.931 | 0.980 |
|                 | Attrition           | 1.254     | 1.120 | 1.120 | 1.000 | 0.905 | 0.877 | 1.109 | 1.109 | 0.990 |
|                 | Demande             | 0.720     | 0.800 | 0.900 | 1.000 | 1.121 | 1.131 | 0.840 | 0.855 | 1.050 |
| Dépôt           | Coût de recrutement | 1.058     | 0.920 | 1.150 | 1.000 | 1.097 | 1.077 | 0.874 | 1.093 | 0.950 |
|                 | Rentabilité         | 0.931     | 0.980 | 0.950 | 1.000 | 0.985 | 0.974 | 1.009 | 0.979 | 1.030 |
|                 | Attrition           | 1.064     | 0.950 | 1.120 | 1.000 | 1.208 | 1.221 | 0.765 | 1.008 | 0.900 |
|                 | Demande             | 1.035     | 1.150 | 0.900 | 1.000 | 0.833 | 0.792 | 1.380 | 1.080 | 1.200 |
| REÉR            | Coût de recrutement | 1.150     | 1.000 | 1.150 | 1.000 | 1.000 | 0.950 | 1.000 | 1.150 | 1.000 |
|                 | Rentabilité         | 0.950     | 1.000 | 0.950 | 1.000 | 1.000 | 1.015 | 1.000 | 0.950 | 1.000 |
|                 | Attrition           | 1.120     | 1.000 | 1.120 | 1.000 | 1.000 | 0.965 | 1.000 | 1.120 | 1.000 |
|                 | Demande             | 0.900     | 1.000 | 0.900 | 1.000 | 1.000 | 1.035 | 1.000 | 0.900 | 1.000 |
| Fonds mutuels   | Coût de recrutement | 1.265     | 1.100 | 1.150 | 1.000 | 0.874 | 0.787 | 1.210 | 1.265 | 1.100 |
|                 | Rentabilité         | 0.903     | 0.950 | 0.950 | 1.000 | 1.076 | 1.119 | 0.903 | 0.903 | 0.950 |
|                 | Attrition           | 1.254     | 1.120 | 1.120 | 1.000 | 0.748 | 0.594 | 1.344 | 1.344 | 1.200 |
|                 | Demande             | 0.765     | 0.850 | 0.900 | 1.000 | 1.320 | 1.490 | 0.595 | 0.630 | 0.700 |
| Probabilité (%) |                     | 9.00      | 17.00 | 11.00 | 22.00 | 5.00  | 5.00  | 11.00 | 7.00  | 13.00 |

### 6.2.2 Équations du modèle cloisonné stochastique

La forme de ce problème rappelle les problèmes stochastiques multi-stage que l'on retrouve souvent dans les problèmes de planification financière (voir Dantzig et Infanger 1993; Gassmann 1990; Mulvey et Ruszczinsky 1995). En appliquant ces idées au modèle cloisonné et en sachant que le modèle cloisonné a près de 14000 variables par période, cela crée un problème de 1.7 million de variables avec 300000 contraintes. Ce problème est beaucoup plus gros que les problèmes de planification financière qui ont typiquement une taille plus raisonnable (150000 variables et 75000 contraintes selon Mulvey et Shetty [83]).

Malgré sa taille, le modèle cloisonné stochastique a une structure identique au modèle actuariel (MA2). Nous présentons ici les équations du modèle cloisonné sto-

chastique et définissons les nouveaux termes que nous utilisons. La majorité des variables et des paramètres ont la même signification que dans le modèle actuariel. Cependant, ces variables et paramètres ont un identificateur supplémentaire pour désigner le scénario auxquels ils appartiennent. Ainsi, les variables  $y_{ijk}^t$  deviennent les variables  $y_{ijk}^s$  qui est en fait le nombre de clients du segment  $i$  qui passe du groupe  $j$  vers le groupe  $k$  sous le scénario  $s$ . L'identificateur de la période  $t$  est maintenant inclus dans la définition de l'identificateur de scénario  $s$ .

L'ensemble des scénarios  $S(t)$  dépend de la période que nous étudions car la contrainte de non-anticipation fait en sorte que les scénarios ayant un passé en commun doivent avoir les mêmes décisions. Ainsi, à la première période, tous les scénarios doivent avoir les mêmes décisions. Donc au lieu d'avoir 81 séries de variables pour cette période, nous n'avons qu'une série de variables communes à tous les scénarios. Ceci fait en sorte que  $S(1)$  n'est composé que d'un seul regroupement de scénarios.

Le regroupement de scénario  $r(s, t)$  sert à déterminer dans quel groupe de scénarios de la période  $t - 1$  un groupe de scénarios de la période  $t$  se trouve. Les paramètres reliés au regroupement  $r(s, 1)$  sont fixes au début de la modélisation et ainsi donc  $x_{ik}^{r(s,1)}$  représente le nombre de clients du segment  $i$  qui possèdent le groupe  $k$  de produits.

$S(t)$  Ensemble des scénarios ayant les mêmes décisions à la période  $t$  ;

$r(s, t)$  Ensemble de scénarios  $\in S(t - 1)$  faisant aussi partie de  $s \in S(t)$  si  $t > 1$  ;

$p(s, t)$  Probabilité du scénario  $s$  à la période  $t$ .

$$\begin{aligned} \max_{x_{ik}^s, y_{ijk}^s} \quad & \sum_{t \in T} \sum_{s \in S(t)} \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} p(s) \cdot \left( (x_{ik}^s \cdot \frac{R_{ik}^s}{(1+r^t)^t}) - (\sum_{j \in G} y_{ijk}^s \cdot A_{ijk}^s) \right) \\ & - f(Vol^s) - \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} g(E_{ik}^s) - \sum_{p \in P} (\sum_{d \in D} h(M_{dp}^s) - \sum_{v \in V} o(N_{vp}^s) - w(Q_p^s)) \end{aligned} \quad ()$$

$$s.a \quad x_{ij}^{r(s,t)} = \sum_{k \in G} y_{ijk}^s \quad \forall i \in I, j \in G, t \in T, \quad ()$$

$$s \in S(t)$$

$$\sum_{j \in G} y_{ijk}^{r(s,t)} = x_{ik}^s \quad \forall i \in I, k \in G, t \in T, \quad ()$$

$$s \in S(t)$$

$$y_{ikj}^s \geq \alpha_{ip}^s \cdot x_{ik}^s \quad \forall i \in I, p \in P, t \in T, \quad ()$$

$$s \in S(t), k \in G_p^+, j = k - \{p\}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in G} y_{ijk}^s \leq \phi^s \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} \sum_{j \in G, j \neq k} y_{ijk}^s \quad \forall t \in T, s \in S(t) \quad ()$$

$$\sum_{k \in G} y_{ikk}^s + E_{ik}^s = (1 - \gamma_i^s) \cdot x_{ik}^{r(s,t)} \quad \forall i \in I, k \in G, \quad ()$$

$$\forall t \in T, s \in S(t)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in G} \sum_{j \in G} y_{ijk}^s \cdot D_{ik}^s + Vol^s \geq (1 + \pi^s) \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G} x_{ik}^{r(s,t)} \cdot D_{ik}^{r(s,t)} \quad \forall t \in T, s \in S(t) \quad ()$$

$$\sum_{i \in B_d} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^s - M_{dp}^{s+} + M_{dp}^{s-} = \theta_{dp}^s \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^s \quad \forall d \in D, p \in P, \quad ()$$

$$\forall t \in T, s \in S(t)$$

$$\sum_{i \in C_v} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^s - N_{vp}^{s+} + N_{vp}^{s-} = \omega_{vp}^s \cdot \sum_{i \in I} \sum_{k \in G_p^-} \sum_{j \in G_p^+} y_{ikj}^s \quad \forall v \in V, p \in P, \quad ()$$

$$\forall t \in T, s \in S(t)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^-} \sum_{k \in G_p^+} y_{ijk}^s - Q_p^s \leq \frac{\beta_p^s}{2} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^+} x_{ij}^{r(s,t)} \quad \forall p \in P, t \in T, s \in S(t) \quad ()$$

$$Q_p^s \leq \frac{\beta_p^s}{2} \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in G_p^+} x_{ij}^{r(s,t)} \quad \forall p \in P, t \in T, s \in S(t) \quad ()$$

**Modèle 6.2:** Modèle cloisonné stochastique (MCS)

## Chapitre 7

# Méthodes de résolution des modèles stochastiques

Dans ce chapitre, nous présentons quelques méthodes de résolution pour les modèles stochastiques présentés dans le chapitre précédent. Au tableau 7.1, nous présentons un bref résumé des méthodes à venir.

**Tableau 7.1 – Bref aperçu des méthodes de résolution des modèles stochastiques**

| Modèle                        | Technique                        | Aperçu                                                                    |
|-------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| Modèle Possibiliste           | Résolution possibiliste          | Introduction à l'optimisation floue                                       |
|                               | Méthode des $\alpha$ -coupes     | Méthode de borne sur les $\alpha$ -coupe                                  |
|                               | Méthodes des inégalités floues   | Transformation des contraintes d'inégalité                                |
| Modèle Cloisonné Stochastique | Benders                          | Décomposition par période                                                 |
|                               | Dantzig-Wolfe                    | Décomposition par segment                                                 |
|                               |                                  | Décomposition par scénarios                                               |
|                               | Lagrangien Augmenté              | Pénalisation de contraintes difficiles                                    |
|                               | Diagonal Quadratic Approximation | Approche qui unit l'algorithme de Dantzig-Wolfe et le Lagrangien Augmenté |

## 7.1 Modèle possibiliste

Avant de résoudre le modèle possibiliste, un bref aperçu des techniques utilisées en programmation linéaire floue est nécessaire. L'ensemble des décisions floues  $\tilde{D}$  obtenu en présence de l'ensemble de contraintes floues  $\tilde{C}$  et de la fonction objectif floue  $\tilde{G}$  est en fait l'intersection entre ces deux derniers ensembles. Si nous définissons  $\mu_G$  et  $\mu_C$  comme les fonctions d'adhésion qui caractérisent respectivement les ensembles  $\tilde{G}$  et  $\tilde{C}$ , nous pouvons dire que

$$\tilde{D} = \tilde{C} \cap \tilde{G} \quad (7.1)$$

et donc,

$$\mu_D(x) = \max_x(\mu_C(x), \mu_G(x)) \quad (7.2)$$

La fonction d'adhésion des décisions floues  $\mu_D(x)$  représente le degré d'appartenance d'une décision  $x$  à l'ensemble  $D$ . La meilleure décision  $x^*$  est alors obtenue en maximisant la fonction  $\mu_D(x)$ .

Généralement, un problème linéaire flou a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \bar{c}x \\ \text{s.t.} \quad & \bar{A}x \cdot \bar{b}, x \geq 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

où  $\cdot$  remplace  $<, \leq, =, >, \geq$  dans chacune des contraintes,  $\bar{A}$  est la matrice des coefficients flous des contraintes. Pour maximiser  $\mu_D(x)$  ou  $Poss[Z = z]$  (comme le présente Buckley (1989) dans son article), il suffit de trouver le degré de possibilité ( $Poss[x \in \mathcal{F}_i]$ ) de la solution dans chaque contrainte  $i$ . Pour ceci, nous définissons  $\Pi(a_i, b_i)$  comme la distribution jointe des  $\bar{a}_{ij}$  et  $\bar{b}_i$  de la contrainte  $\mathcal{F}_i$ .

$$\Pi(a_i, b_i) = \min(\mu(\bar{a}_{i1}), \dots, \mu(\bar{a}_{in}), \mu(\bar{b}_i)) \quad (7.4)$$

Alors,

$$Poss[x \in \mathcal{F}_i] = \sup_{a_i, b_i} \{\Pi(a_i, b_i) | a_i x \cdot b_i\} \quad (7.5)$$

$Poss[x \in \mathcal{F}]$  (degré de possibilité de l'ensemble des contraintes) est ainsi limité

par la contrainte ayant la plus petite possibilité ( $Poss[x \in \mathcal{F}_i]$ ).

Nous cherchons ensuite la possibilité conditionnelle de  $Z$  (la fonction objectif) connaissant la solution  $x$  ( $Poss[Z = z|x]$ ). Pour ce faire, la distribution jointe de  $\tilde{c}_j$  doit être calculée.

$$\Pi(c) = \min(\mu(\tilde{c}_1), \dots, \mu(\tilde{c}_n)) \quad (7.6)$$

De cette distribution, la possibilité conditionnelle est alors égale à :

$$Poss[Z = z|x] = \sup_c \{\Pi(c) | cx = z\} \quad (7.7)$$

Avec ces deux résultats, nous pouvons maintenant évaluer le degré de possibilité de la solution  $z$  :

$$Poss[Z = z] = \sup_x [\min(Poss[Z = z|x], Poss[x \in \mathcal{F}])] \quad (7.8)$$

ou de l'équation équivalente de Modave et Julien (1996)

$$Poss[Z = z] = \max_{A,b,c} \{Poss(A, b, c) | z \in S\} \quad (7.9)$$

où  $S$  est la solution du problème linéaire strict :

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = cx \\ \text{s.à} \quad & Ax \leq b, \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Le modèle possibiliste que nous proposons n'a que les coefficients de la matrice  $A$  et certaines valeurs du vecteur  $b$  qui sont flous. Pour ces problèmes, Julien (1996) et Ramík et Rímánek (1985) ont proposé des méthodes que nous allons discuter dans les sections qui suivent. Il faut cependant mentionner la méthode de Tanaka et Asai (1984) qui permet de résoudre ces problèmes lorsqu'il est possible de transformer la fonction objectif en contrainte.

Nous conseillons au lecteur le très bon résumé fait par Hu et Hung (1996) sur la programmation linéaire floue et le livre de Zimmermann (1984) sur la logique floue en général. Le livre de Terano, Asai et Sugeno (1991) fait un bref aperçu de la théorie des systèmes flous et présente quelques applications. Il ne faut pas oublier l'article de Saade (1994) qui discute des avantages et désavantages des différentes techniques de la maximisation de fonctions sur un domaine flou.

### 7.1.1 Méthode des $\alpha$ -coupes

La méthode proposée par Julien (1996) fait appel aux  $\alpha$ -coupe. Une  $\alpha$ -coupe sur une variable floue peut-être définie par cette équation :

$$c_j^\alpha = \{c_j | \mu(\tilde{c}_j) \geq \alpha\} \quad (7.11)$$

Une  $\alpha$ -coupe est ainsi un sous-ensemble de toutes les valeurs possibles de la fonction objectif  $\tilde{c}_j$  où pour chaque niveau de possibilité  $\alpha$  il y a une borne inférieure  $(c_j)_l^\alpha$  et une borne supérieure  $(c_j)_u^\alpha$ . La recherche d'une solution optimale se fait de la même façon que la programmation linéaire classique avec ces solutions sur la frontière de la région réalisable sauf que pour la programmation linéaire floue, les solutions sont sur les frontières  $\alpha$ -coupes des variables floues.

Les bornes d'un intervalle  $\alpha$ -coupe sont en fait la plus petite et la plus grande valeur optimale de la fonction objectif avec un degré de possibilité  $\alpha$ . Ceci revient donc à résoudre le problème possibiliste avec les contraintes les plus permissives (pour la borne supérieure) et ensuite avec les contraintes les plus restrictives (pour la borne inférieure). Nous nous retrouvons donc avec un ensemble de solutions optimales pour chaque niveau de possibilité  $\alpha$ .

Il est à noter qu'avec un  $\alpha$  égal à 1, nous n'avons qu'une seule solution car les fonctions de possibilité sont triangulaires et que ce problème reste identique au problème strict.

### 7.1.2 Méthodes des inégalités floues

Un désavantage de la méthode des  $\alpha$ -coupes est la présence d'un grand nombre de solutions possibles et du choix qui doit être fait. Pour cette raison, nous présentons la méthode de Ramík et Rímánek (1985) qui modifie le problème original en ajoutant des contraintes supplémentaires.

À partir des propriétés spéciales des ensembles flous, Ramík et Rímánek ont montré comment il est possible de transformer les contraintes floues d'inégalités en un ensemble de contraintes strictes équivalentes. En effet, l'inégalité floue signifie en fait qu'il existe une équation stricte  $Ax \leq b$  tel que le niveau de possibilité de  $\tilde{A}x$  est plus petit que le niveau de possibilité de  $\tilde{b}$ . De cette conclusion et de la construction d'une fonction générale d'adhésion, il est possible de construire des fonctions strictes pour représenter une inégalité floue.

La fonction d'adhésion des coefficients de la contrainte  $i$  ( $\mu(\tilde{a}_{ij})$ ) peut être représentée par l'ensemble  $(m_{ij}, n_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij})$  et la fonction  $\mu(\tilde{b}_i)$  par  $(p_i, q_i, \gamma_i, \delta_i)$ . Chacun des

éléments représente un point ou un écart dans la fonction trapézoïdale d'adhésion que l'on peut voir à la figure 7.1.

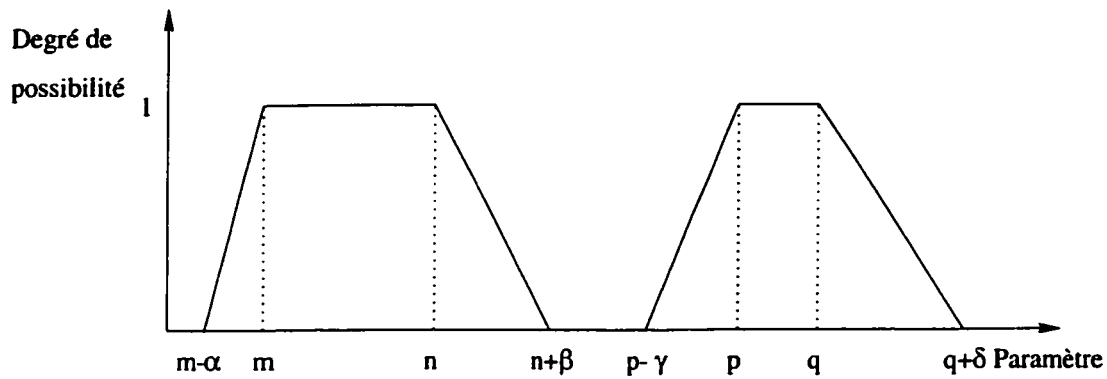


**Figure 7.1 – Illustration des fonctions d'adhésion de  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$**

Dans une fonction triangulaire, la valeur de  $p_i$  et de  $q_i$  sont égales, tout comme  $m_{ij}$  et  $n_{ij}$ ,  $\gamma_i$  et  $\delta_i$  et  $\alpha_{ij}$  et  $\beta_{ij}$ . Donc la contrainte  $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$  est remplacée par l'ensemble des 4 contraintes strictes suivantes :

$$\begin{aligned}
 -\epsilon_{L_i} \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j - \gamma_i \right) &\leq p_i - \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i \\
 -\delta_{L_i} \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j - \gamma_i \right) &\leq p_i - \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i \\
 \epsilon_{R_i} \left( \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j - \delta_i \right) &\leq q_i - \sum_{j=1}^n n_{ij} x_i \\
 \delta_{R_i} \left( \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j - \delta_i \right) &\leq q_i - \sum_{j=1}^n n_{ij} x_i
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

où les paramètres  $\epsilon_{L_i}$ ,  $\epsilon_{R_i}$ ,  $\delta_{L_i}$  et  $\delta_{R_i}$  varient de  $[0,1]$  et dépendent du niveau minimal de possibilité recherché. Pour une fonction d'adhésion triangulaire où nous cherchons la solution qui respectent toutes contraintes possibles, les paramètres  $\epsilon_{R_i}$  et  $\delta_{L_i}$  sont nuls et les paramètres  $\delta_{R_i}$  et  $\epsilon_{L_i}$  sont égaux à 1. Donc des quatre équations, il ne reste que les deux suivantes :

$$\begin{aligned} -\left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}x_j - \gamma_i\right) &\leq p_i - \sum_{j=1}^n m_{ij}x_i \\ \left(\sum_{j=1}^n \beta_{ij}x_j - \delta_i\right) &\leq q_i - \sum_{j=1}^n n_{ij}x_i \end{aligned} \quad (7.13)$$

Il est à noter que ces transformations ne fonctionnent seulement que pour des contraintes d'inégalité. Comme nous pouvons le constater, les paramètres flous du modèle possibiliste sont seulement sur les contraintes d'inégalité, donc cette méthode fonctionne pour résoudre notre modèle. Dans la section qui suit, nous proposons des méthodes pour résoudre le modèle cloisonné stochastique.

## 7.2 Modèle cloisonné stochastique

Parmi les méthodes pour résoudre les modèles stochastiques multi-stage de planification financière, Mulvey (1995) en décrit trois dans son résumé : les méthodes directes de résolution, les méthodes de décomposition et les modèles de contrôle dynamique stochastique.

Les méthodes directes de résolution sont des méthodes qui essaient d'utiliser à leur avantage la faible densité de la matrice des coefficients. Plusieurs techniques dont les méthodes de points intérieurs et la factorisation ont été proposées pour résoudre le problème de la planification financière avec sa fonction objectif non linéaire. Cependant avec un grand nombre de scénarios, ce problème devient trop difficile à résoudre avec une méthode directe et pour cette raison, des méthodes de décomposition ont été proposées. Parmi celles-ci, nous retrouvons une méthode de Benders modifiée (Dantzig et Infanger 1993), une méthode de décomposition nichée (Gassmann 1990) et une méthode de décomposition par scénario (Mulvey et Vladimirov 1991) basée sur le Lagrangien augmenté.

Dernièrement, des méthodes basées sur les méthodes de contrôle dynamique stochastique ont été proposées. Cependant, selon Mulvey (1995), elles ont la fâcheuse habitude de rendre le problème non convexe. Il est possible de traiter avec ces méthodes des problèmes avec un horizon infini selon Cheung (1998).

En étudiant le modèle cloisonné stochastique, nous sommes arrivés à la conclusion que les techniques de décomposition seraient les plus appropriées pour résoudre ce modèle. Les techniques de décomposition de la littérature se définissent soit en décomposant le problème par période (décomposition duale) ou soit en décomposant par rapport aux scénarios (décomposition primale). Pour le problème de l'optimisation des marchés, il existe aussi la décomposition par segment (décomposition primale).

Dans les sections qui suivent, nous faisons un bref résumé des méthodes de décomposition qui peuvent être utilisées pour résoudre le modèle cloisonné stochastique.

### **7.2.1 Décomposition de Benders**

La décomposition de Benders proposée par Dantzig et Infanger (1993) et par Gassmann (1990) décompose le problème original par période. Gassmann profite de cette décomposition pour proposer une décomposition nichée identique à la décomposition en escalier. Cependant il note qu'avec un grand nombre de scénarios, il devient difficile d'utiliser cette méthode car il faut conserver toutes les solutions des sous-problèmes pour pouvoir reconstruire la solution primale.

Dantzig et Infanger ont décidé d'éviter la décomposition nichée pour rester avec un problème maître à résoudre. Une difficulté majeure de la résolution du problème

maître est la grande quantité de propositions fournies par tous les sous-problèmes et le temps de calcul qu'elles nécessitent pour être incorporées dans le problème maître. Pour cette raison, ils proposent d'utiliser une simulation de Monte-Carlo pour évaluer ces calculs. Dantzig et Infanger (1993) affirment que cette méthode trouve une très bonne approximation de la solution optimale (erreur de moins de 0.5% de celle-ci, 95% du temps).

### 7.2.2 Décomposition par segment

Le modèle cloisonné stochastique se prête très bien à la décomposition primale par segment. Cette décomposition nous permet de créer 48 sous-problèmes (un par segment) qui comprennent toutes les variables qui se rattachent à un segment particulier et ceci qu'importe le scénario auxquelles les variables dépendent.

Cette approche crée des sous-problèmes avec environ 25000 variables et 6000 contraintes ce que nous considérons comme des problèmes de grande taille mais pas excessive. Le problème maître est composé d'environ 3500 contraintes couplantes qui est un nombre important lorsque nous le comparons avec les 6000 contraintes non couplantes des sous-problèmes. Vu cette disparité, l'espérance de trouver une solution rapidement est faible et par conséquent, la décomposition par scénario semble offrir une meilleure alternative pour ce problème.

### 7.2.3 Décomposition par scénario

Mulvey et Ruszczyński (1995) présentent plusieurs méthodes pour décomposer un grand problème stochastique par les scénarios. Nous présentons ici l'évolution de leur méthode qui leur a permis de résoudre le problème multi-stage stochastique.

La décomposition par scénario nous oblige de considérer chaque scénario comme un sous-problème indépendant des autres. Le problème maître a la tâche de faire en sorte que les contraintes de non-anticipation soient respectées. Il se trouve qu'il y a autant de contraintes de non-anticipation qu'il y a de variables ce qui crée un immense problème maître. Une autre possibilité est de considérer un sous-ensemble de ces contraintes pour faire le même travail.

Définissons la dernière période en commun des scénarios  $\epsilon$  et  $\omega$  par

$$t^{max}(\epsilon, \omega) = \max\{t : s_{\epsilon}(\tau) = s_{\omega}(\tau), \tau = 1, \dots, t\} \quad (7.14)$$

En numérotant les scénarios de 1 à  $S$  de façon à ce que pour chaque scénario  $i$  ce soit le scénario  $i + 1$  qui a la dernière période en commun la plus élevée avec  $i$  :

$$t^{max}(i, i + 1) = \max\{t^{max}(i, j) : j > i\} \quad (7.15)$$

L'ordonnancement des scénarios et le lien qui relie chaque scénario est illustré à la figure 7.2 tirée de l'article de Mulvey et Ruszczyński (1995). Comme on peut le voir, tous les scénarios produisent les mêmes décisions lors de la première période. Pour les périodes qui suivent, la non-anticipation fait en sorte que seulement des sous-ensembles de scénarios doivent avoir les décisions en commun. Finalement à la dernière période, chaque scénario produit des décisions indépendantes des autres.

De cette séquence, nous définissons la fonction de "frère" pour chaque scénario :

$$v(i, t) = \begin{cases} i + 1 & \text{si } t^{\max}(i, i + 1) \geq t \\ \min\{j : t^{\max}(i, j) \geq t\} & \text{sinon} \end{cases}$$

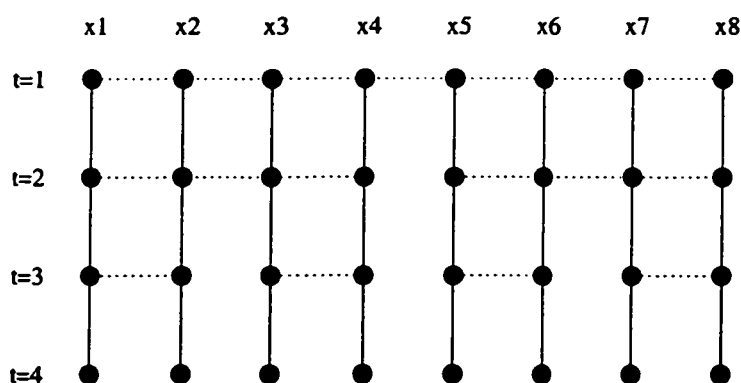


**Figure 7.2 – Séquence des décisions et non-anticipation**

On peut voir le résultat de la fonction "frère" dans le tableau 7.2 (La permutation inverse est dénotée par  $v^{-1}(i, t)$ ). Cette fonction nous permet ainsi de décrire le sous-

ensemble des contraintes de non-anticipation avec la contrainte suivante :

$$x_i(t) = x_{v(i,t)}(t) \quad i = 1, \dots, S, \quad t = 1, \dots, T - 1 \quad (7.16)$$

**Tableau 7.2 – Frère de chaque scénario**

| Période | Scénario |   |   |   |   |   |   |   |
|---------|----------|---|---|---|---|---|---|---|
|         | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1       | 2        | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 |
| 2       | 2        | 3 | 4 | 1 | 6 | 7 | 8 | 5 |
| 3       | 2        | 1 | 4 | 3 | 6 | 5 | 8 | 7 |
| 4       | 1        | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

On rassemble ces contraintes sous la forme  $x = Ux$  pour simplifier l'écriture des modèles. En ajoutant cette contrainte dans le modèle cloisonné stochastique et appliquant la décomposition par scénario, nous retrouvons le problème suivant :

$$\begin{aligned}
 & \max_{x_i} \sum_{i \in S} c_i \cdot x_i \\
 & s.à \quad x - Ux = 0 \\
 & \quad x_i \in X_i \quad \forall i = 1, \dots, S
 \end{aligned} \quad (7.17)$$

où  $X_i$  représente l'ensemble des solutions du sous-problème  $i$  :

$$X_i = \{x_i : A_i x_i = b_i, x_i \geq 0\}, \quad i = 1, \dots, S \quad (7.18)$$

En appliquant cette technique, nous nous retrouvons avec 81 sous-problèmes composés d'environ 40000 variables et 9000 contraintes. Le problème maître, de son côté, est composé seulement des contraintes de non-anticipation. Cependant comme il existe une contrainte pour chaque variable des périodes autres que la dernière, nous nous retrouvons avec un problème avec plus de 2 millions de contraintes ce qui est beaucoup trop élevé. Pour cette raison, une méthode de Lagrangien augmenté a été proposée pour éliminer les contraintes difficiles de non-anticipation.

#### 7.2.4 Lagrangien augmenté

La difficulté de la décomposition de Dantzig-Wolfe provient de la grosseur du problème maître car chaque variable a sa propre contrainte de non-anticipation. Vu le grand nombre de variables, la taille du problème devient trop importante pour être résolu rapidement. La méthode du Lagrangien augmenté pénalise la non-égalité des contraintes de non-anticipation directement dans la fonction objectif :

$$\Lambda(x, \pi) = \max_x \sum_{i=1}^S c_i \cdot x_i + \pi \cdot (x - Ux) + \frac{1}{2}r||x - Ux||^2 \quad (7.19)$$

$$s.\hat{a} \quad x_i \in X_i \quad \forall i \in S$$

$r$  est un paramètre de pénalité utilisé par la méthode du Lagrangien augmenté

(voir Bertsekas 1982).

La méthode du Lagrangien a cependant un problème majeur. Le fait d'ajouter la pénalité  $\|x - Ux\|^2$  rend le problème non décomposable car les variables ne sont plus séparables. Nous retrouvons donc avec un problème de très grande taille difficile à résoudre.

### 7.2.5 Diagonal quadratic approximation (DQA)

Pour contourner ce problème, Mulvey et Ruszczyński (1995) ont proposé la méthode de DQA (Diagonal Quadratic Approximation). Cette méthode nous permet d'approximer le terme de pénalité par une fonction séparable. Avec l'introduction de ce nouveau terme, il devient possible de décomposer le problème par scénario.

Le terme de pénalité  $\|x - Ux\|^2$  est égal, pour un scénario  $i$  et une période  $t$  donnés, au terme quadratique  $\|x_i(t) - x_{v(i,t)}(t)\|^2$  qui contient le produit croisé de  $x_i(t) \cdot x_{v(i,t)}(t)$ . Ce produit croisé peut être approximé par :

$$x_i(t) \cdot x_{v(i,t)}(t) \approx x_i(t) \cdot \tilde{x}_{v(i,t)}(t) + \tilde{x}_i(t) \cdot x_{v(i,t)}(t) - \tilde{x}_i(t) \cdot \tilde{x}_{v(i,t)}(t) \quad (7.20)$$

avec une erreur de l'ordre de  $O(\|x - \tilde{x}\|)$ . Cette approximation nous permet de













- 

- $r$  Paramètre de pénalité du Lagrangien augmenté ;
- $\pi_i(t)$  Valeur de la variable duale associée au sous-problème  $i$  de la période  $t$  ;
- $\epsilon$  Facteur sur la précision prescrite de la solution.

**Initialisation**

**Début**

$x^0$  (solution des sous-problèmes traités indépendamment)  
 $\pi$  (variable duale associée à la solution de ces sous-problèmes)  
 $k = 1$   
 $\pi = \pi^k$   
 $\bar{x}^k = x^{k-1}$

**Fin**

**Diagonal Quadratic Approximation**

**Tant que**  $\|x_i(t) - x_{v_i(t)}\| \geq \epsilon \forall i$  **et**  $t < T$  **Faire**

**Début**

**Tant que**  $\|x_i(t) - \bar{x}_i(t)\| \leq \epsilon \forall i$  **et**  $t < T$  **Faire**

**Début**

**Pour**  $i = 1, \dots, S$  **Faire**

**Début**

Résoudre sous-problème  $\tilde{\Lambda}(x_i, \pi; \bar{x})$  avec  $\bar{x} = \bar{x}^k$

Solution :  $x_i^k$

**Fin**

$\bar{x}_i^{k+1}(t) = \bar{x}_i^k(t) + \alpha(x_i^k(t) - \bar{x}_i^k(t))$

**Fin**

$\pi_i^{k+1}(t) = \pi_i^k(t) + r(x_i^k(t) - x_{v(i,t)}^k(t))$

$k = k + 1$

**Fin**

**Figure 7.3 – Algorithme du Diagonal Quadratic Approximation**

Il est à remarquer que les sous-problèmes  $\tilde{\Lambda}(x_i, \pi, \bar{x})$  ont une fonction objectif non linéaire avec des contraintes linéaires. Il est possible d'utiliser Cplex avec la méthode de résolution Barrier mais la méthode DQA réoptimise souvent les mêmes sous-problèmes avec peu de changements dans les coefficients. Comme la méthode de résolution Barrier n'utilise pas les solutions précédentes comme point de départ, nous perdons de l'efficacité dans la résolution du problème. Pour cette raison, nous avons

décidé de résoudre les sous-problèmes à l'aide de l'algorithme de Frank-Wolfe.

## Quatrième partie

### Analyse des résultats et conclusions

## Chapitre 8

# Analyse des résultats

Ce chapitre est divisé en trois parties : comparaison des modèles déterministes, comparaison des modèles stochastiques et analyse de sensibilité.

Le but de l'analyse des résultats est d'évaluer la qualité des solutions des différents modèles et l'efficacité des méthodes de résolution (le temps de calculs) des différentes approches déterministes et stochastiques. L'analyse de sensibilité cherche de son côté à exposer l'influence des différents paramètres sur les solutions des modèles déterministes.

Avant d'entamer l'analyse des résultats, nous présentons une vue d'ensemble des

données disponibles. Pour commencer, nous connaissons la disposition actuelle des clients dans les segments et les produits qu'ils possèdent. Pour chaque produit et segment, la quantité moyenne d'argent investie est connue. Les taux de rentabilité associés aux produits ont été préparés pour le département de marketing et tiennent compte des coûts de maintien des produits. Il n'y a cependant pas de différenciation aux niveaux des segments. Cette différenciation n'a été faite que plus tard et a été évaluée par groupe d'âge et style de vie.

Les coûts de recrutement des clients ont été évalués individuellement et indépendamment des segments. Ils n'ont été modifiés que par la suite pour tenir compte des différences entre les groupes d'âge et les styles de vie. L'effet de ventes multiples et croisés a ensuite été estimé par le département de marketing pour être ajouté aux coûts de recrutement.

Les paramètres ( $\beta, \gamma, \theta, \omega, \phi$  et  $\pi$ ) ont tous été déterminés par le département de marketing pour les modèles déterministes dans le cas du scénario le plus probable. Les paramètres de la première période ayant une fiabilité plus élevée que les périodes subséquentes. Pour ce qui est du modèle stochastique, la construction des scénarios a été faite intuitivement dans le but d'analyser l'impact de différents scénarios.

Dans la section qui suit, les modèles déterministes (MC2, MA1 et MA2) sont comparés entre eux pour évaluer leurs différences au niveau de la qualité des solutions.

Ensuite, une comparaison des méthodes de résolution de ces modèles est faite.

## 8.1 Analyse des modèles déterministes

L'analyse des modèles déterministes est divisée en quatre sections. Au début, nous comparons les modèles MC2 et MA2 au niveau des profits et de la distribution des ventes. Nous rappelons que la différence majeure entre ces deux modèles est leur traitement des profits futurs (au-delà de la troisième période).

Ensuite vient la comparaison des modèles MA1 et MA2 qui servira surtout à montrer la différence des résultats quant à la distribution des ventes. Il n'y a cependant aucune comparaison au niveau des profits car ces modèles ont une façon tout à fait différente de calculer les coûts de recrutement.

La troisième partie de cette section sert à tester les différentes méthodes de résolution du modèle MA2. Un de ces tests compare l'efficacité de la modification des contraintes sur le modèle actuariel MA2 par rapport au modèle original. L'efficacité de la linéarisation des fonctions de pénalité et des solutions de départ proposées est aussi testée. Les temps de calculs obtenus avec les algorithmes de Frank-Wolfe et de Dantzig-Wolfe sont aussi analysés.

Dans la dernière partie, nous comparons l'algorithme tabou du modèle MA1 avec l'approximation convexe de la fonction objectif. Cette comparaison sert surtout à montrer l'effet de l'approximation de la fonction objectif sur la distribution des ventes.

### **8.1.1 Comparaison du modèle cloisonné (MC2) et modèle actuariel (MA2)**

Les premiers tests faits dans cette section servent à évaluer la qualité des solutions proposées par le modèle cloisonné (MC2) et le modèle actuariel (MA2). L'analyse de la qualité des solutions est faite à partir des solutions obtenues avec l'utilisation de Cplex et de sa méthode de résolution Barrier.

Aux tableaux 8.1 et 8.2, nous montrons la progression des profits à travers le temps. Pour le modèle MC2, on note une croissance de 6.34% à la première année et d'une croissance des profits de 13.74% à la deuxième. Ce qu'il faut retenir de ce tableau est l'accélération des taux de croissance entre la première et la deuxième année. En effet, l'impact de l'optimisation des marchés fait en sorte qu'à la première année, le modèle remplace les clients partis à cause de l'attrition par des clients de segments plus profitables. Cet échange entraîne des coûts de recrutement initialement plus élevés qui sont rapidement effacés par des profits en croissance. On note le même type de croissance dans le modèle MA2.

Tableau 8.1 – Profitabilité des secteurs à travers les périodes (MC2)

| Secteur      | Profit Initial (\$) | Année 1         |             | Année 2         |              | Année 3          |              |
|--------------|---------------------|-----------------|-------------|-----------------|--------------|------------------|--------------|
|              |                     | Profit (\$)     | Crois. (%)  | Profit (\$)     | Crois. (%)   | Profit (\$)      | Crois. (%)   |
| 5            | 5067634             | 5502620         | 8.58        | 6237472         | 13.35        | 6936712          | 11.21        |
| 12           | 5106291             | 5339472         | 4.57        | 6031480         | 12.96        | 6763597          | 12.14        |
| 13           | 1423524             | 1515907         | 6.49        | 1720456         | 13.49        | 1938095          | 12.65        |
| 14           | 2833033             | 3029685         | 6.94        | 3428328         | 13.16        | 3834114          | 11.84        |
| 17           | 2274746             | 2406870         | 5.81        | 2753627         | 14.41        | 3121337          | 13.35        |
| 18           | 4232618             | 4455638         | 5.27        | 5065247         | 13.68        | 5735080          | 13.22        |
| 20           | 5024089             | 5383054         | 7.14        | 6164487         | 14.52        | 6975793          | 13.16        |
| 21           | 3494676             | 3796072         | 8.62        | 4307487         | 13.47        | 4841496          | 12.40        |
| 22           | 7165562             | 7663362         | 6.95        | 8771489         | 14.46        | 9911404          | 13.00        |
| 24           | 7931500             | 8368536         | 5.51        | 9488993         | 13.39        | 10623214         | 11.95        |
| 25           | 8589013             | 9116046         | 6.14        | 10328530        | 13.30        | 11578369         | 12.10        |
| 32           | 4307098             | 4482028         | 4.06        | 5053487         | 12.75        | 5674571          | 12.29        |
| 33           | 4832613             | 5034750         | 4.18        | 5693660         | 13.09        | 6393259          | 12.29        |
| 34           | 3648061             | 3973871         | 8.93        | 4536171         | 14.15        | 5116378          | 12.79        |
| 35           | 3509477             | 3671500         | 4.62        | 4164206         | 13.42        | 4689280          | 12.61        |
| 39           | 2020781             | 2155456         | 6.66        | 2485391         | 15.31        | 2831661          | 13.93        |
| 40           | 6899639             | 7422283         | 7.57        | 8531521         | 14.94        | 9676811          | 13.42        |
| 41           | 2196297             | 2344140         | 6.73        | 2670394         | 13.92        | 3013786          | 12.86        |
| <b>Total</b> | <b>80556652</b>     | <b>85661290</b> | <b>6.34</b> | <b>97432426</b> | <b>13.74</b> | <b>109654967</b> | <b>12.54</b> |

Tableau 8.2 – Profitabilité des secteurs à travers les périodes (MA2)

| Secteur      | Profit Initial (\$) | Année 1         |             | Année 2         |              | Année 3          |              |
|--------------|---------------------|-----------------|-------------|-----------------|--------------|------------------|--------------|
|              |                     | Profit (\$)     | Crois. (%)  | Profit (\$)     | Crois. (%)   | Profit (\$)      | Crois. (%)   |
| 5            | 5067634             | 5507569         | 8.68        | 6234956         | 13.21        | 6937553          | 11.27        |
| 12           | 5106291             | 5327408         | 4.33        | 6028167         | 13.15        | 6762302          | 12.18        |
| 13           | 1423524             | 1516043         | 6.50        | 1720612         | 13.49        | 1937651          | 12.61        |
| 14           | 2833033             | 3023208         | 6.71        | 3427861         | 13.38        | 3831174          | 11.77        |
| 17           | 2274746             | 2403820         | 5.67        | 2749828         | 14.39        | 3120625          | 13.48        |
| 18           | 4232618             | 4452367         | 5.19        | 5065093         | 13.76        | 5737922          | 13.28        |
| 20           | 5024089             | 5380921         | 7.10        | 6164804         | 14.57        | 6975590          | 13.15        |
| 21           | 3494676             | 3796131         | 8.63        | 4307451         | 13.47        | 4841454          | 12.40        |
| 22           | 7165562             | 7651129         | 6.78        | 8756001         | 14.44        | 9910923          | 13.19        |
| 24           | 7931500             | 8357467         | 5.37        | 9479249         | 13.42        | 10622451         | 12.06        |
| 25           | 8589013             | 9115321         | 6.13        | 10329188        | 13.32        | 11579029         | 12.10        |
| 32           | 4307098             | 4463924         | 3.64        | 5042856         | 12.97        | 5674225          | 12.52        |
| 33           | 4832613             | 5031098         | 4.11        | 5695674         | 13.21        | 6393479          | 12.25        |
| 34           | 3648061             | 3972994         | 8.91        | 4536608         | 14.19        | 5120897          | 12.88        |
| 35           | 3509477             | 3671742         | 4.62        | 4165373         | 13.44        | 4690615          | 12.61        |
| 39           | 2020781             | 2151398         | 6.46        | 2481794         | 15.36        | 2829970          | 14.03        |
| 40           | 6899639             | 7407691         | 7.36        | 8532332         | 15.18        | 9676748          | 13.41        |
| 41           | 2196297             | 2339515         | 6.52        | 2669916         | 14.12        | 3014387          | 12.90        |
| <b>Total</b> | <b>80556652</b>     | <b>85569746</b> | <b>6.22</b> | <b>97387763</b> | <b>13.81</b> | <b>109657005</b> | <b>12.60</b> |

Aux figures 8.1 et 8.2, nous comparons respectivement la distribution des produits par âge et par style de vie des deux modèles. Il existe qu'une toute petite différence dans la distribution des produits par âge et pratiquement aucune différence dans la distribution par style de vie. Ces résultats semblent signifier que l'analyse sur trois ans du modèle MC2 est assez longue pour faire ressortir la rentabilité de chaque produit et obtenir d

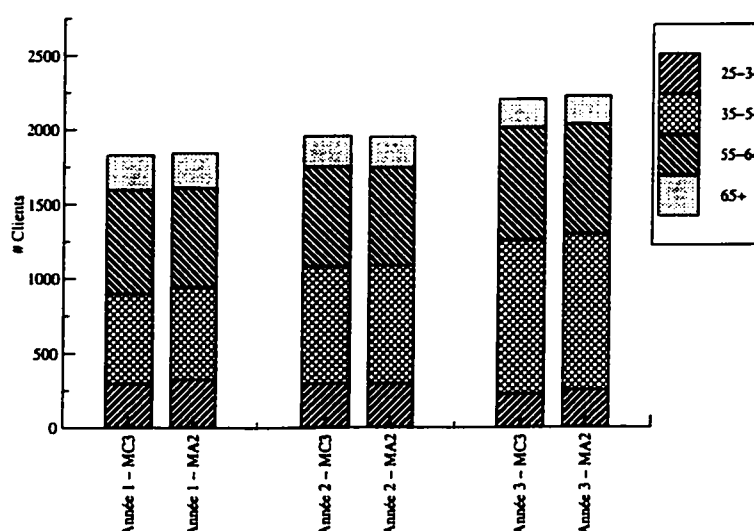


**Figure 8.1 – Comparaison de la distribution par âge des modèles MC2 et MA2 sur 3 périodes**

### 8.1.2 Comparaison du modèle actuariel MA1 et du modèle MA2

La comparaison des modèles actuariels MA1 et MA2 cherche à montrer la différence entre les solutions proposées par ces deux modèles. Les résultats des modèles MA1

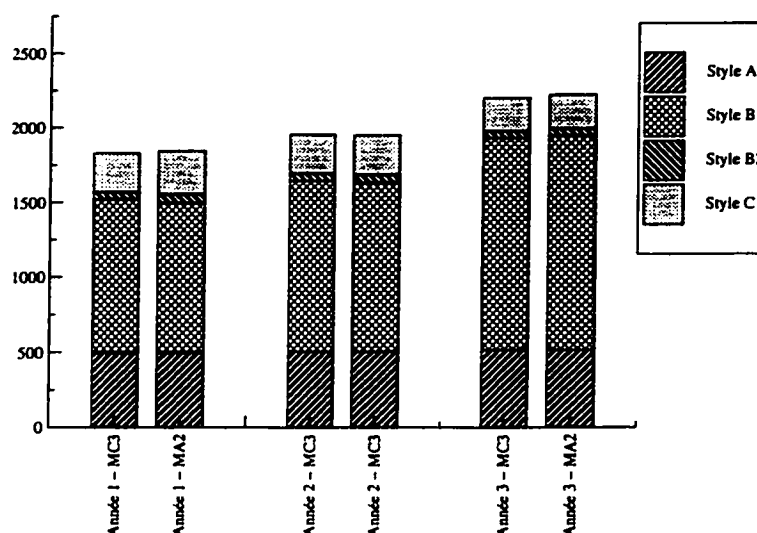


**Figure 8.2 – Comparaison de la distribution par style de vie des modèles MC2 et MA2 sur 3 périodes**

et MA2 sont obtenus en utilisant respectivement l'algorithme tabou et l'optimisateur Cplex avec la méthode de résolution Barrier.

Rappelons que le modèle actuariel (MA1) a été proposé pour corriger certains problèmes du modèle cloisonné. Un de ces problèmes est la construction d'une fonction de coût plus réaliste. En analysant les résultats obtenus avec l'heuristique tabou pour une région spécifique, nous remarquons que la distribution des ventes est différente de celle proposée par le modèle actuariel MA2 (voir figures 8.3 et 8.4).

Outre la fonction objectif distincte, une des raisons de cette différence est l'effet de la variation des demandes de produits à travers le temps présent dans le modèle MA2. Une autre raison non négligeable est le traitement de l'attrition. Dans le modèle

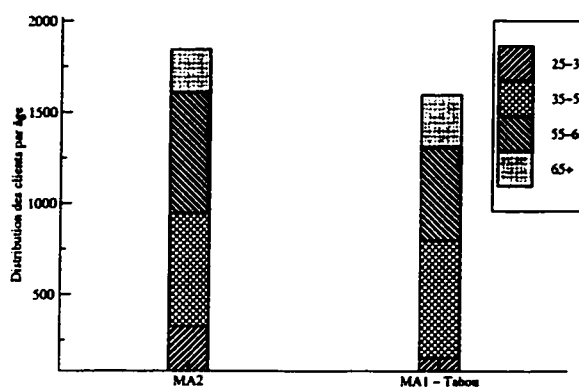


**Figure 8.3 – Comparaison de la distribution des ventes par groupe d'âge des modèles actuariels MA1 et MA2**

cloisonné, un client ayant subi l'attrition est rapidement remplacé par un nouveau client qui achète le produit "disparu". Souvent, l'optimisation va faire en sorte que ce nouveau client fait partie d'un segment plus rentable que celui du client qui a quitté. Dans le modèle actuariel (MA1), il n'y a aucun client qui quitte pour être remplacé. Les clients qui subissent l'attrition ne font que diminuer la rentabilité du produit ce qui est en fait l'effet contraire du modèle cloisonné. Finalement, la valeur des coûts de recrutement est sûrement une autre raison pour cette différence. La valeur des coûts de recrutement devient très élevée dans le modèle actuariel (MA1) comparativement au modèle MA2 pour les ventes multiples de produits.



**Figure 8.4 – Comparaison de la distribution des ventes par style de vie des modèles actuariels MA1 et MA2**

### 8.1.3 Analyse des méthodes de résolution du modèle MA2

Cette sous-section compare les différentes techniques de résolution du modèle MA2. Au début, nous étudions l'effet de la modification des contraintes de distribution et de ventes sur le temps de calcul. Ensuite, nous analysons l'effet de la linéarisation de la fonction objectif et l'apport de solutions de départ au modèle MA2. Finalement, nous comparons les solutions fournies par Cplex avec celle obtenue avec l'algorithme de Frank-Wolfe et de Dantzig-Wolfe.

Les temps de calcul des modèles actuariels (MA2) pour les 18 régions sont donnés au tableau 8.3. Ils sont comparés avec les temps de calcul du modèle avec contraintes modifiées (MA2-M). Nous pouvons facilement voir qu'il y a une très bonne amélioration dans le temps de calcul.

**Tableau 8.3 – Comparaison des modèles actuariels avant et après la modification des contraintes**

| <b>Secteur</b> | <b>MA2<br/>Temps (sec.)</b> | <b>MA2-M<br/>Temps (sec.)</b> |
|----------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 5              | 132                         | 74                            |
| 12             | 116                         | 61                            |
| 13             | 133                         | 66                            |
| 14             | 150                         | 66                            |
| 17             | 113                         | 60                            |
| 18             | 127                         | 63                            |
| 20             | 106                         | 56                            |
| 21             | 149                         | 73                            |
| 22             | 127                         | 66                            |
| 24             | 123                         | 62                            |
| 25             | 131                         | 65                            |
| 32             | 141                         | 64                            |
| 33             | 127                         | 66                            |
| 34             | 157                         | 71                            |
| 35             | 130                         | 60                            |
| 39             | 137                         | 68                            |
| 40             | 136                         | 64                            |
| 41             | 119                         | 62                            |
| <b>Moyenne</b> | <b>131</b>                  | <b>65</b>                     |

Dans le tableau 8.4, nous analysons l'impact de la linéarisation de la fonction objectif du modèle actuariel (MA2). Quatre algorithmes ont été comparés : le modèle actuariel normal (MA2) et sa linéarisation (MA2-L), le modèle actuariel modifié (MA2-M) et sa linéarisation (MA2-ML). Il y a deux résultats qui sont très apparent. Premièrement, la linéarisation des modèles semblent ralentir la résolution des problèmes par un grand facteur. Deuxièmement, la présence de cette linéarisation n'a que peu d'effet sur la qualité de la solution. En effet, on note un écart de 0.17% en moyenne sur la valeur de la fonction objectif originale et la distribution des ventes est pratiquement identique.

**Tableau 8.4 – Comparaison des modèles linéarisés et non linéarisés**

| Secteur        | Modèles non modifiés |             |             | Modèles modifiés |              |             |
|----------------|----------------------|-------------|-------------|------------------|--------------|-------------|
|                | MA2(sec.)            | MA2-L(sec.) | Écart(%)    | MA2-M(sec.)      | MA2-ML(sec.) | Écart(%)    |
| 5              | 132                  | 407         | 0.25        | 74               | 287          | 0.25        |
| 12             | 116                  | 438         | 0.14        | 61               | 298          | 0.14        |
| 13             | 133                  | 256         | 0.21        | 66               | 159          | 0.21        |
| 14             | 150                  | 373         | 0.15        | 66               | 292          | 0.15        |
| 17             | 113                  | 356         | 0.17        | 60               | 258          | 0.17        |
| 18             | 127                  | 412         | 0.23        | 63               | 289          | 0.23        |
| 20             | 106                  | 439         | 0.11        | 56               | 311          | 0.11        |
| 21             | 149                  | 420         | 0.18        | 73               | 271          | 0.18        |
| 22             | 127                  | 481         | 0.09        | 66               | 340          | 0.09        |
| 24             | 123                  | 393         | 0.17        | 62               | 284          | 0.17        |
| 25             | 131                  | 467         | 0.17        | 65               | 290          | 0.17        |
| 32             | 141                  | 429         | 0.19        | 64               | 304          | 0.19        |
| 33             | 127                  | 407         | 0.25        | 66               | 265          | 0.25        |
| 34             | 157                  | 370         | 0.10        | 71               | 268          | 0.10        |
| 35             | 130                  | 280         | 0.25        | 60               | 180          | 0.25        |
| 39             | 137                  | 315         | 0.18        | 68               | 216          | 0.18        |
| 40             | 136                  | 428         | 0.03        | 64               | 280          | 0.03        |
| 41             | 119                  | 315         | 0.20        | 62               | 200          | 0.20        |
| <b>Moyenne</b> | <b>131</b>           | <b>388</b>  | <b>0.17</b> | <b>65</b>        | <b>266</b>   | <b>0.17</b> |

Les résultats des modèles linéarisés ont été obtenus sans l'utilisation de solution de départ. Au tableau 8.5, nous montrons l'impact des solutions de départ proposées au chapitre 5 sur les modèles linéaires non modifiés et modifiés. Les résultats sont plutôt surprenants avec les méthodes statu quo qui sont deux fois plus efficaces que les solutions myopes. Il faut bien se rendre compte que Cplex fait un meilleur travail que les heuristiques proposées.

Finalement, nous comparons au tableau 8.6 l'algorithme de Frank-Wolfe avec les solutions originales. Comme il fallait s'y attendre, les temps de calcul de l'algorithme de Frank-Wolfe ne sont pas très bons mais les solutions qu'il propose sont meilleures que la linéarisation avec un écart moyen de 0.07% sur la fonction objectif originale.

Les méthodes de décomposition offrent des possibilités quant à la résolution de très

Tableau 8.5 – Comparaison des algorithmes de départ

| Secteur        | MA2-L     |       |        | MA2-ML    |       |        |
|----------------|-----------|-------|--------|-----------|-------|--------|
|                | Statu quo | Myope | Aucune | Statu quo | Myope | Aucune |
| 5              | 608       | 1187  | 407    | 317       | 645   | 287    |
| 12             | 686       | 1269  | 438    | 328       | 729   | 298    |
| 13             | 474       | 962   | 256    | 289       | 480   | 159    |
| 14             | 519       | 1147  | 373    | 303       | 664   | 292    |
| 17             | 553       | 1089  | 356    | 286       | 658   | 258    |
| 18             | 563       | 1281  | 412    | 285       | 665   | 289    |
| 20             | 614       | 1181  | 439    | 277       | 662   | 311    |
| 21             | 674       | 1191  | 420    | 289       | 682   | 271    |
| 22             | 705       | 1201  | 481    | 356       | 678   | 340    |
| 24             | 673       | 1209  | 393    | 304       | 668   | 284    |
| 25             | 608       | 1269  | 467    | 362       | 721   | 290    |
| 32             | 660       | 1248  | 429    | 355       | 695   | 304    |
| 33             | 706       | 1240  | 407    | 288       | 693   | 265    |
| 34             | 514       | 1223  | 370    | 337       | 664   | 268    |
| 35             | 541       | 985   | 280    | 244       | 556   | 180    |
| 39             | 553       | 1183  | 315    | 278       | 593   | 216    |
| 40             | 603       | 1082  | 428    | 267       | 665   | 280    |
| 41             | 608       | 1250  | 315    | 295       | 589   | 200    |
| <b>Moyenne</b> | 603       | 1178  | 388    | 303       | 650   | 266    |

grands problèmes. Les premiers résultats de la méthode décomposition par période nous laissent penser que cette méthode est mal adaptée à l'optimisation des marchés. Il semblerait que dû à la grosseur des sous-problèmes et des nombreux liens qui les relient, le problème décomposé soit très difficile à résoudre dans un temps raisonnable.

La décomposition de Dantzig-Wolfe quant à elle fonctionne correctement. Au tableau 8.7, nous comparons les temps de calcul de cette décomposition versus la solution de Cplex pour des problèmes avec 4, 5 et 6 produits. Il est à remarquer que dû à la grosseur des problèmes, Cplex est incapable de résoudre les problèmes avec 6 produits. Notre implantation de la décomposition de Dantzig-Wolfe a un léger problème de mémoire avec les problèmes de 6 produits et obtient des résultats seulement après

**Tableau 8.6 – Comparaison de la méthode de Frank-Wolfe et la méthode de résolution Barrier**

| Secteur        | F-W(sec.)  | MA2-M(sec.) | Écart(%)    |
|----------------|------------|-------------|-------------|
| 5              | 468        | 74          | 0.03        |
| 12             | 636        | 61          | 0.15        |
| 13             | 200        | 66          | 0.06        |
| 14             | 509        | 66          | 0.07        |
| 17             | 398        | 60          | 0.03        |
| 18             | 424        | 63          | 0.03        |
| 20             | 686        | 56          | 0.09        |
| 21             | 451        | 73          | 0.02        |
| 22             | 607        | 66          | 0.11        |
| 24             | 301        | 62          | 0.03        |
| 32             | 537        | 64          | 0.04        |
| 25             | 578        | 65          | 0.05        |
| 33             | 345        | 66          | 0.03        |
| 34             | 434        | 71          | 0.11        |
| 35             | 233        | 60          | 0.06        |
| 39             | 278        | 68          | 0.04        |
| 40             | 648        | 64          | 0.23        |
| 41             | 312        | 62          | 0.06        |
| <b>Moyenne</b> | <b>447</b> | <b>65</b>   | <b>0.07</b> |

un très long temps de calcul. Pour ces raisons, nous n'avons résolu qu'un seul problème (région 33) qui a mis 7379 secondes (temps CPU) avant d'obtenir une solution.

**Tableau 8.7 – Comparaison de la méthode de Dantzig-Wolfe et celle de Cplex**

| Secteur        | 4 Produits  |           | 5 produits  |           |
|----------------|-------------|-----------|-------------|-----------|
|                | Cplex(sec.) | D-W(sec.) | Cplex(sec.) | D-W(sec.) |
| 5              | 74          | 940       | 360         | 4117      |
| 12             | 61          | 694       | 311         | 2626      |
| 13             | 66          | 515       | 358         | 1320      |
| 14             | 66          | 677       | 308         | 3996      |
| 17             | 60          | 648       | 315         | 1825      |
| 18             | 63          | 744       | 334         | 2701      |
| 20             | 56          | 713       | 307         | 3514      |
| 21             | 73          | 587       | 357         | 4258      |
| 22             | 66          | 706       | 299         | 3239      |
| 24             | 62          | 773       | 314         | 3882      |
| 25             | 65          | 542       | 306         | 4474      |
| 32             | 64          | 997       | 328         | 2771      |
| 33             | 66          | 452       | 322         | 2606      |
| 34             | 71          | 770       | 361         | 4047      |
| 35             | 60          | 385       | 327         | 2105      |
| 39             | 68          | 480       | 324         | 1944      |
| 40             | 64          | 941       | 317         | 5159      |
| 41             | 62          | 606       | 325         | 1898      |
| <b>Moyenne</b> | 65          | 596       | 326         | 3138      |

Comme on peut le voir les temps de calcul de la décomposition de Dantzig-Wolfe sont très loin des temps de calcul des problèmes non décomposés. Une des explications pour la mauvaise performance de la décomposition est l'absence de techniques servant à réduire la taille du problème maître. Dans sa forme actuelle, 90% du temps de calcul est passé à résoudre le problème maître, les sous-problèmes n'utilisant qu'une petite fraction de ce temps.

#### 8.1.4 Analyse des méthodes de résolution du modèle MA1

La deuxième méthode proposée pour résoudre le modèle actuariel (MA1) est la modification des coûts de recrutement par une fonction convexe (la première étant la méthode tabou). Comme on peut le voir aux figures 8.5 et 8.6, il se déplace environ le même nombre de clients sous les deux méthodes, cependant, il y a une différence au niveau de la distribution par âge de ces ventes. En effet, dû à la transformation de la fonction des coûts, les clients du groupe d'âge 55-64 ans sont sollicités en plus grand nombre par l'approximation convexe que par la méthode des tabous.

Cette différence peut être expliquée par le fait que la fonction convexe approximée des coûts pénalise moins les grands écarts sur les contraintes de distribution que la fonction non convexe ce qui permet d'aller chercher des clients des groupes d'âge plus riches (55-64 ans) pour un coût moindre. Le seul apport de cette méthode de résolution est son temps de calcul d'environ de 15 secondes par problèmes comparativement aux 1000 secondes de temps de calcul pour l'algorithme tabou.

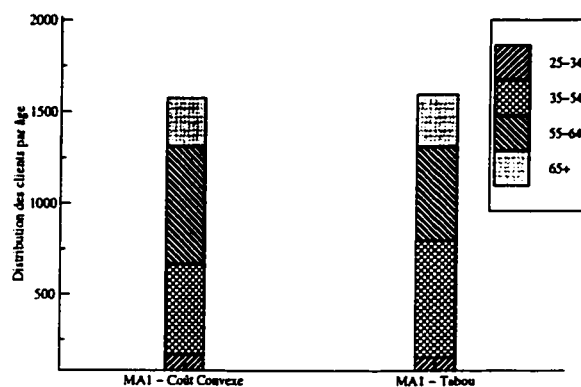


**Figure 8.5 – Comparaison de la distribution par âge des méthodes de résolution de MA1**

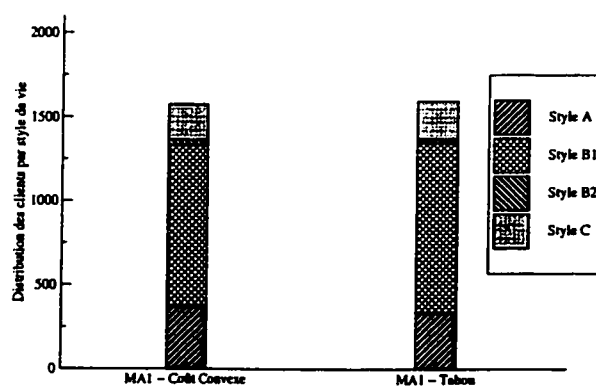


**Figure 8.6 – Comparaison de la distribution par style de vie des méthodes de résolution de MA1**

## 8.2 Analyse des modèles stochastiques

L'analyse des modèles stochastiques est divisée en deux parties. La première partie se concentre sur le modèle possibiliste et ses deux méthodes de résolution. La seconde partie de l'analyse se concentre sur le modèle cloisonné stochastique où nous cherchons à comparer les résultats de ce modèle avec ceux du modèle MA2.

### 8.2.1 Modèle possibiliste

Nous avons présenté au chapitre 7 deux méthodes pour résoudre le problème du modèle possibiliste. La première méthode, la méthode des  $\alpha$ -coupes, donne une série de solutions pour chaque niveau de possibilité. Ces solutions forment une pyramide que nous pouvons observer à la figure 8.7. Donc pour un certain niveau de possibilité, les solutions peuvent varier entre les bornes des profits. Lorsque nous augmentons le niveau de possibilité, nous nous retrouvons à réduire le nombre de solutions possibles jusqu'au point où nous avons qu'une seule solution de niveau de possibilité de 1.

La deuxième méthode, celle sur les inégalités floues, produit des solutions identiques à la borne inférieure du niveau de possibilité 0 de la méthode des  $\alpha$ -coupes. Ceci peut s'expliquer par le fait que les contraintes avec inégalités floues n'avaient souvent qu'un paramètre flou ce qui rendaient une des deux contraintes ajoutées superflues

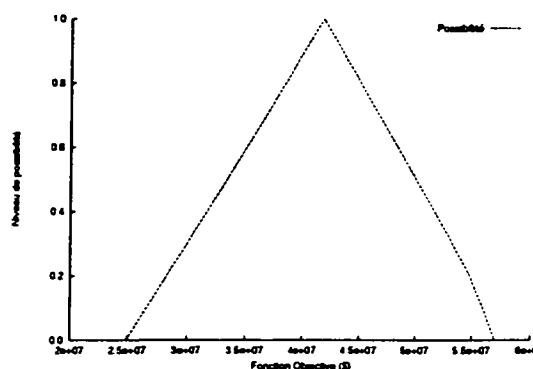


**Figure 8.7 – Comparaison des profits des méthodes des  $\alpha$ -coupes et des inégalités floues**

et poussaient ainsi les solutions vers les bornes inférieures. Cette solution nous porte à croire que l'utilisation de la logique floue dans le problème de l'optimisation des marchés nous forcerait à voir les données floues avec pessimisme. Une des raisons de ces résultats est l'utilisation de fonctions d'adhésion triangulaires. D'autres types de fonctions pourraient peut-être trouver des solutions plus intéressantes en ce qui concernent la méthode des inégalités floues.

### 8.2.2 Modèle cloisonné stochastique

Dans cette section, nous étudions le modèle cloisonné stochastique qui a été créé pour résoudre simultanément plusieurs scénarios et pour proposer des solutions robustes qui maximisent les profits totaux indépendamment des influences macro-économiques futures. Pour illustrer la robustesse du modèle cloisonné stochastique,

nous présentons à la figure 8.8 les profits annuels d'une région sous les 81 scénarios obtenus à l'aide du modèle MA2 que nous comparons aux résultats de la figure 8.9 obtenus par le modèle cloisonné stochastique. Les 81 scénarios ont été résolus séparément sous le modèle MA2 contrairement au modèle MCS qui les a tous résolus d'un seul coup.

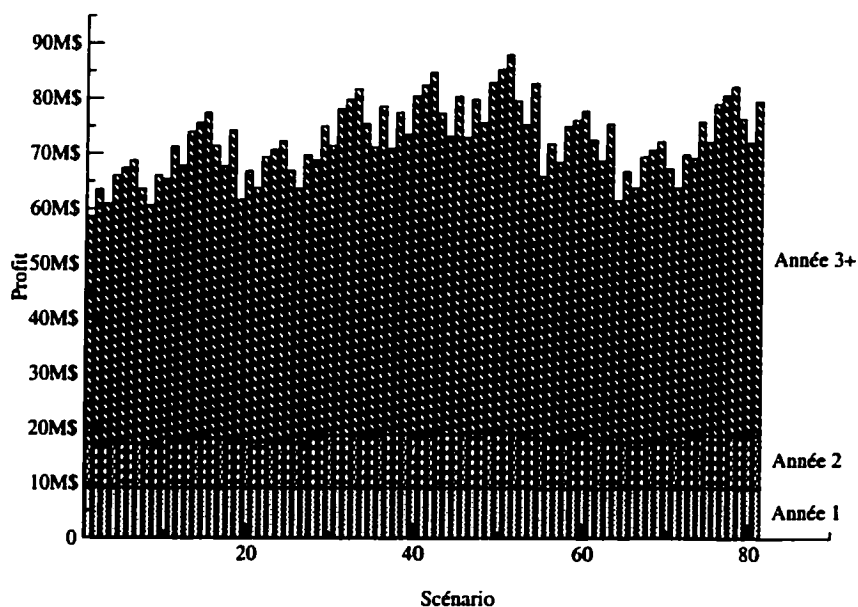


**Figure 8.8 – Profits annuels du modèle MA2 sous différents scénarios**

La comparaison des deux figures (8.8 et 8.9) nous permet de remarquer que le modèle cloisonné stochastique propose des solutions identiques sous chaque scénario à la première année alors que celles-ci varient si les scénarios sont traités indépendamment par le modèle actuariel MA2.

Nous comparons au tableau A de l'annexe les deux modèles (MA2 et MCS) au niveau des profits annuels sous les 81 scénarios. Il est à remarquer que les profits

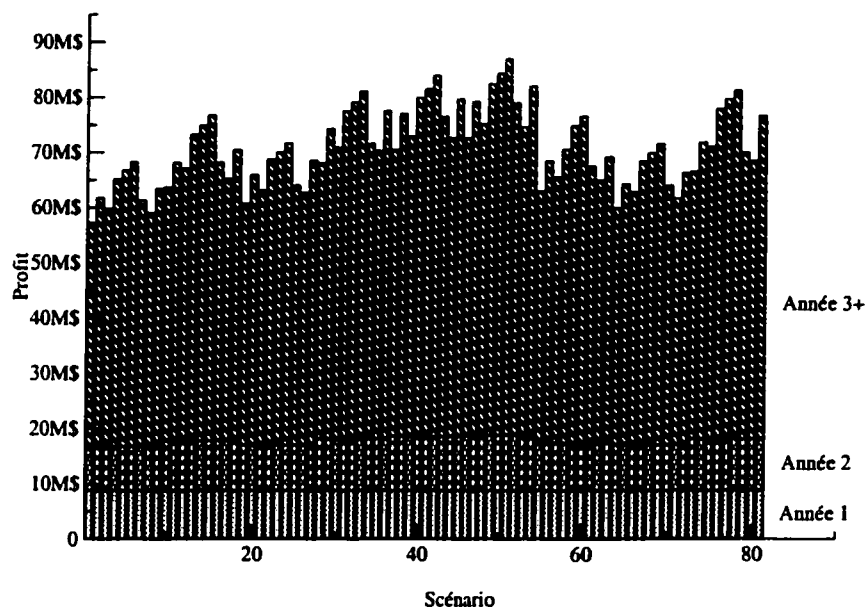


**Figure 8.9 – Profits annuels du modèle MCS sous différents scénarios**

annuels de la première année de chaque scénario sont supposés être égaux entre eux sous le modèle MCS. Cependant, pour diminuer le temps de calcul déjà très long, nous avons décidé d'arrêter la résolution du modèle lorsque la majorité des variables était presque égales entre les scénarios (à l'unité près) et ceci a entraîné de légères variations au niveau des profits.

En analysant les résultats du tableau A, on peut voir que les solutions proposées par le modèle MCS ont un profit annuel inférieur à celui du modèle MA2. La raison de cette différence est due à l'incertitude des facteurs macro-économiques futurs. L'écart des solutions au niveau des profits totaux entre les deux modèles est en moyenne de 2.6097% avec un écart-type de 2.1562%. Le pire des écarts est de 8.9961% et le meilleur cas est de 0.4011% toujours en faveur du modèle MA2. Il est à noter que

la médiane des écarts se situe à 1.4011%. Nous pouvons donc dire que l'incertitude sur les facteurs macro-économiques fait diminuer les profits d'environ 2.6097% par rapport au cas certain. Nous ne pouvons pas utiliser la médiane pour mesurer ce degré d'incertitude à cause du fait que les scénarios ont un niveau différent de probabilité de se réaliser.

Dans la section suivante, nous faisons une analyse de sensibilité des facteurs qui influencent le plus les modèles proposés.

### **8.3 Analyse de sensibilité**

Cette analyse de sensibilité cherche surtout à montrer le bon conditionnement du modèle MA2. En fait, nous montrons que même si le modèle répond aux variations des paramètres, elles ne sont pas extrémistes. Au tableau 8.8, nous énumérons les différents tests que nous avons effectués et les buts de ceux-ci. Ces tests sont présentés dans les sous-sections qui suivent.

**Tableau 8.8 – Tests pour l'analyse de sensibilité**

| <b>Paramètre étudié</b>                    | <b>Test</b>                                                              | <b>But du test</b>                                 |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Attrition                                  | Variation du % d'attrition<br>Variation du % d'attrition des hypothèques | Effet sur les profits<br>Effet sur les ventes      |
| Coût de recrutement                        | Variation des coûts de recrutement des hypothèques                       | Effet sur les profits                              |
| Départ de clients                          | Variation du % limite                                                    | Effet sur les profits<br>Effet sur la distribution |
| Nouveaux clients                           | Variation du % de nouveaux clients                                       | Effet sur les profits<br>Effet sur la distribution |
| Volume                                     | Variation du % limite<br>Variation de la pénalité sur le volume          | Effet sur les profits<br>Effet sur la distribution |
| Pondération court-long terme du modèle MA1 | Variation de la pondération                                              | Effet sur la distribution                          |

### 8.3.1 Effet de l'attrition sur MA2

Nous cherchons dans cette section à montrer l'effet de la variation de l'attrition de tous les produits sur les profits et l'effet de la variation de l'attrition des hypothèques sur la distribution des ventes des autres produits dont le taux d'attrition n'a pas changé.

À la figure 8.10, nous pouvons voir l'effet de la variation de l'attrition de tous les produits de la contrainte (4.6) sur les profits. Cette modification des taux d'attrition varie de 0% à 200% du niveau normal de l'attrition des produits. Comme il fallait s'y attendre, une baisse de l'attrition augmente les profits.

En modifiant seulement les taux d'attrition des hypothèques, on s'aperçoit que la

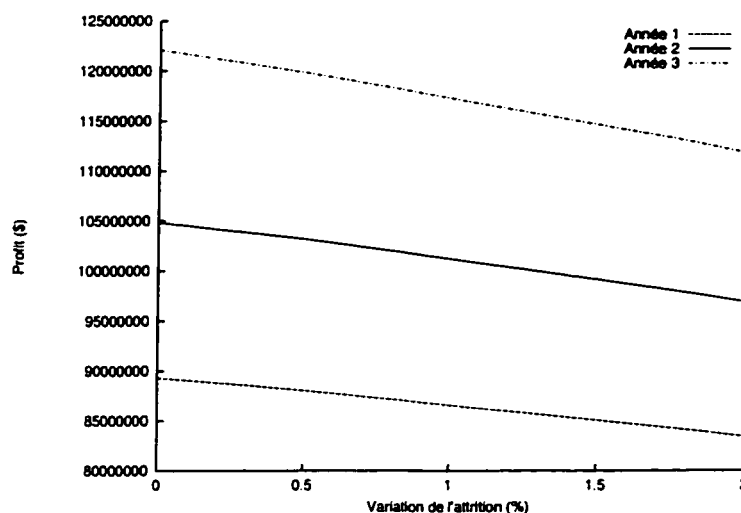


**Figure 8.10 – Effet de la variation de l'attrition sur les profits**

vente des autres produits est affectée par les taux très élevés d'attrition. À la figure 8.11, on peut voir qu'à des niveaux élevés d'attrition, les ventes nettes (vente totale - attrition) des autres produits commencent elles aussi à chuter. On peut expliquer ce phénomène par le fait que les ventes d'hypothèques se concentrent dans certains segments et empêchent la vente des autres produits dans ces segments car il n'y a plus de clients intéressés à acheter un autre produit.

### 8.3.2 Effet des coûts de recrutement sur MA2

La variation des coûts de recrutement a, bien sûr, un effet direct sur les profits mais il reste à déterminer si cette variation affecte la distribution des ventes. À la figure 8.12, nous illustrons l'effet de la variation des coûts de recrutement des clients

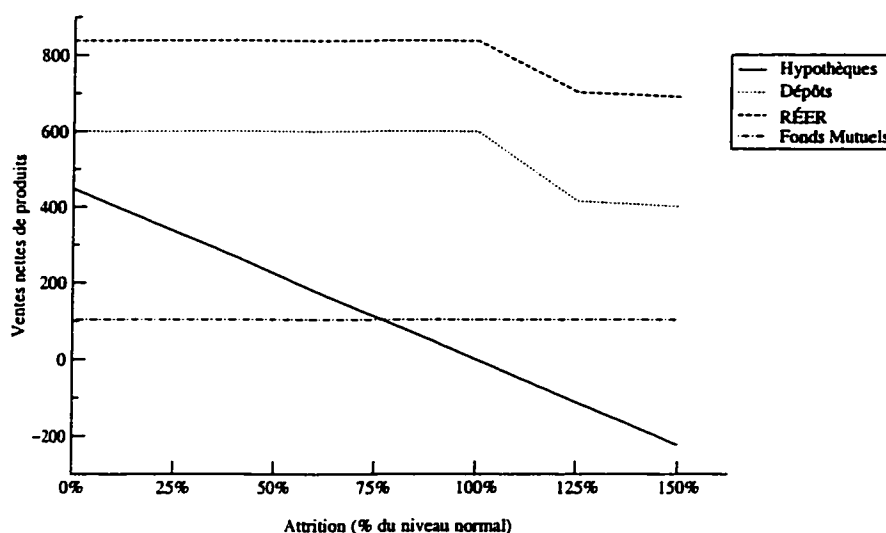


**Figure 8.11 – Effet de la variation de l'attrition des hypothèques sur les ventes**

achetant des hypothèques sur les profits. Il est surprenant de voir que l'augmentation des coûts n'a pratiquement aucun effet sur la distribution des ventes. Une des explications de cette situation est la grande pénalité mise sur la contrainte du volume (4.12). En effet, l'augmentation des coûts des hypothèques devrait faire diminuer le nombre d'hypothèques vendues, or les hypothèques contribuent fortement au volume d'une succursale. Avec une pénalité élevée sur le volume, la succursale ne pourra se permettre de diminuer la vente d'hypothèques.

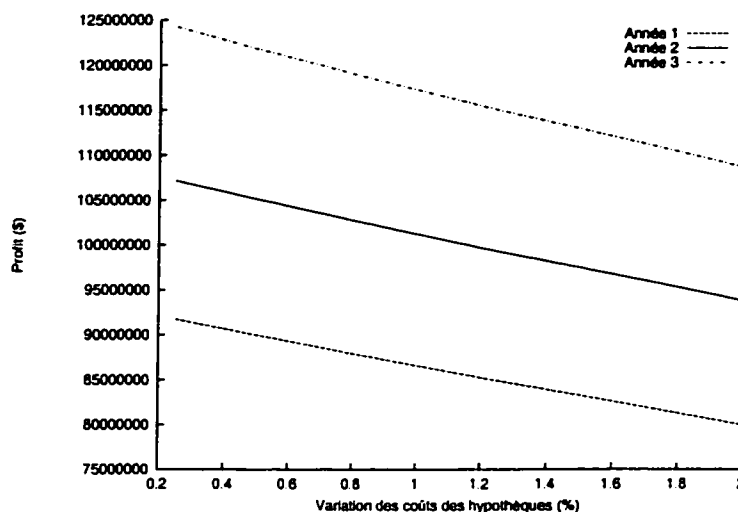


**Figure 8.12 – Effet de la variation des coûts de recrutement des hypothèques sur les profits**

### **8.3.3 Effet du départ de clients sur MA2**

Un autre facteur qui a un effet important sur les revenus, les coûts de recrutement et les profits est le pourcentage de clients intéressés à acheter un nouveau produit (voir figure 8.13). Une augmentation du nombre de clients intéressés à acheter un nouveau produit permet d'augmenter les ventes à des coûts moindres et ainsi augmenter les profits.

En plus des profits qui varient, la vente totale de produit est aussi fortement touchée tout comme la distribution des ventes en pourcentage comme on peut le voir aux figures 8.14 et 8.15. Cette variation dans la distribution semblerait être due aux pénalités sur la distribution (contraintes 4.13 et 4.14). En effet, un nombre moins

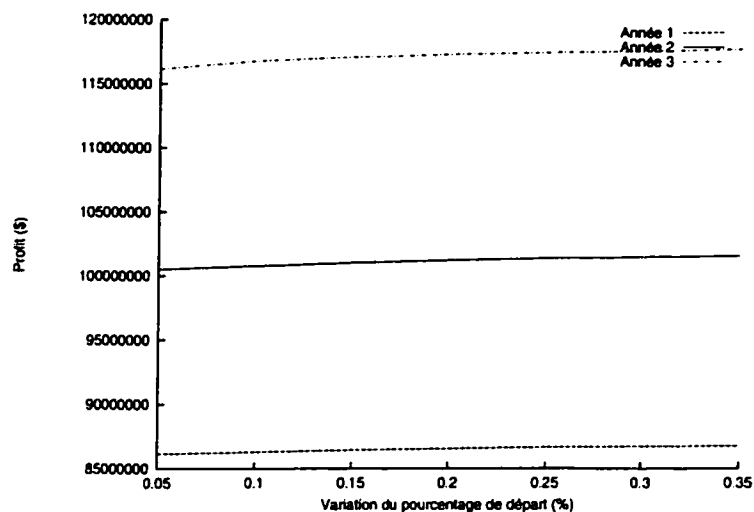


**Figure 8.13 – Effet de la variation du pourcentage de départ de clients sur les profits**

important de départs dans certains segments forceraient à concentrer les ventes dans les segments les plus peuplés et créeraient un débalancement dans la distribution. En permettant plus de départs, les segments les moins peuplés ont beaucoup plus de chance de contribuer à la distribution à des coûts plus appropriés.

#### **8.3.4 Effet de la contrainte des nouveaux clients sur MA2**

Nous illustrons à la figure 8.16 l'effet de la variation du pourcentage de nouveaux clients de la contrainte (4.11) sur les profits. Plus nous permettons de nouveaux clients à entrer dans le modèle, plus les profits augmentent même si ce sont les clients qui coûtent les plus chers à aller chercher. Une explication possible à cette situation est

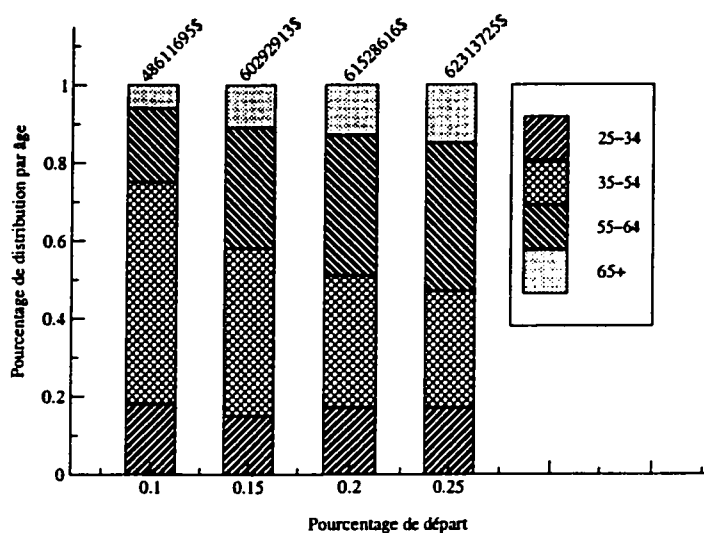


**Figure 8.14 – Effet de la variation du pourcentage de départ de clients sur la distribution par âge**

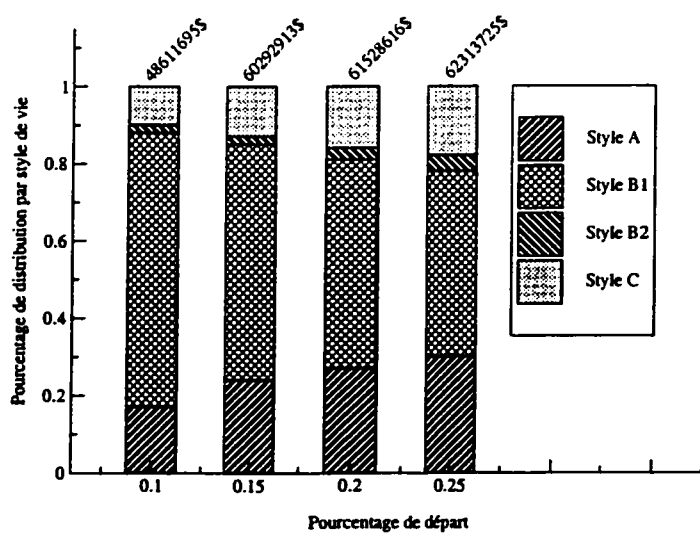


**Figure 8.15 – Effet de la variation du pourcentage de départ de clients sur la distribution par style de vie**

obtenue en regardant la distribution des ventes aux figures 8.17 et 8.18. Les segments les moins peuplés profitent le plus de cet apport de nouveaux clients car les segments peuplés sont souvent des segments de classe bon marché où il y a beaucoup de compétition et donc, moins profitable que les segments peu peuplés.

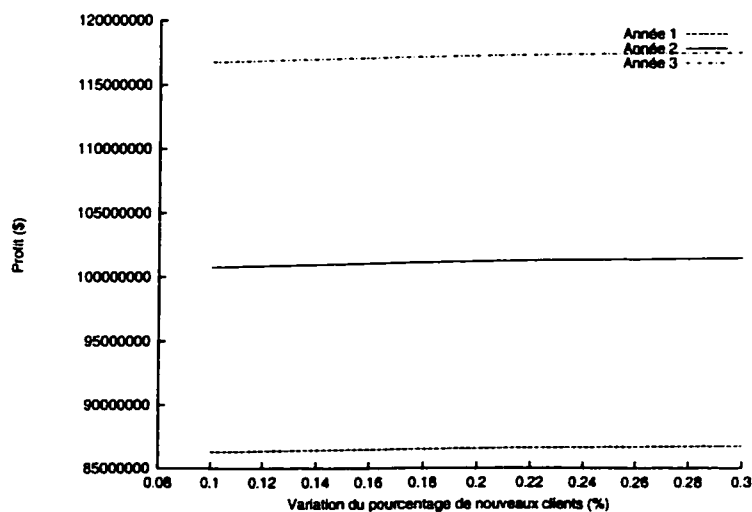


**Figure 8.16 – Effet de la variation du pourcentage de nouveaux clients sur les profits**

### 8.3.5 Effet du volume d'argent sur MA2

Un des grands moteurs de l'optimisation des modèles cloisonnés est la contrainte (4.12) sur les volumes. En effet, elle est tellement importante que l'on pourrait sacrifier des profits très importants pour satisfaire cette contrainte. En faisant varier le pourcentage visé, nous affectons en fait la valeur de la pénalité sur la fonction objectif. Cette variation a cependant un effet plutôt neutre sur les profits comme on peut le

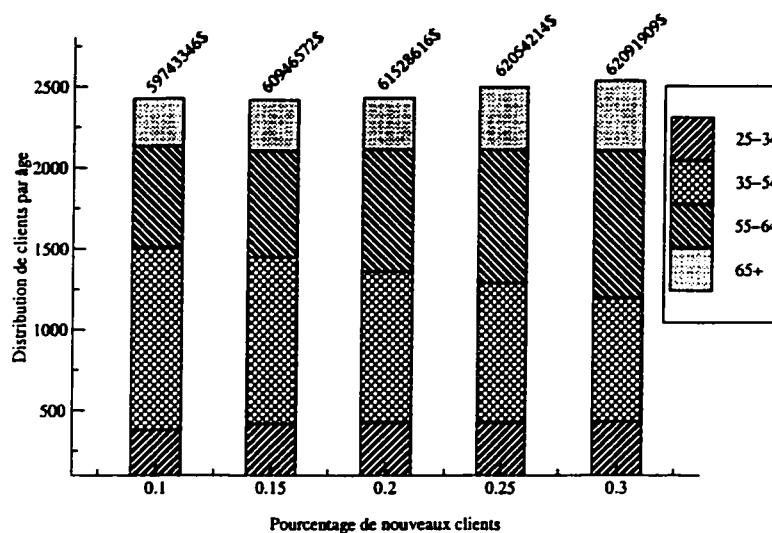


**Figure 8.17 – Effet de la variation du pourcentage de nouveaux clients sur la distribution par âge**

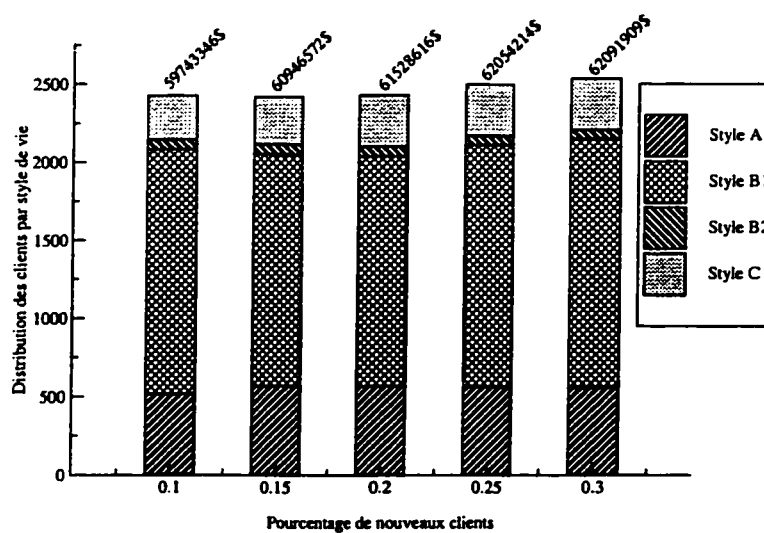


**Figure 8.18 – Effet de la variation du pourcentage de nouveaux clients sur la distribution par style de vie**

voir à la figure 8.19.

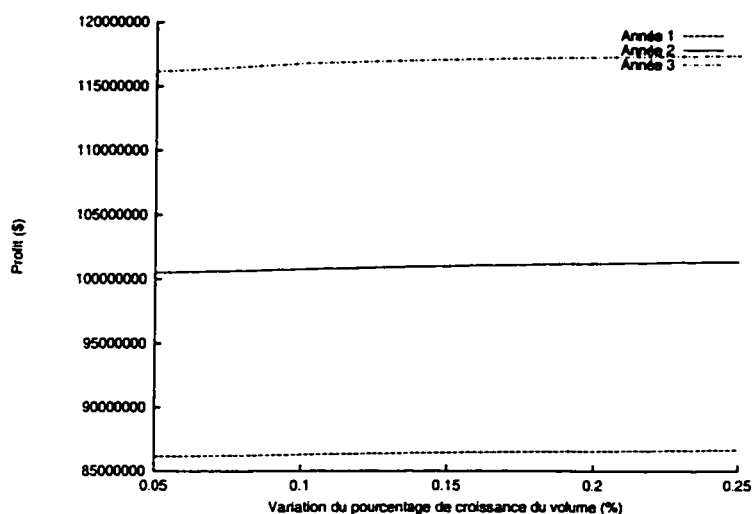


**Figure 8.19 – Effet de la variation de la croissance du volume d'argent sur les profits**

D'un autre côté, la variation des coûts de cette pénalité sur le volume n'a pratiquement aucun effet sur la distribution par âge (figure 8.20) ou sur la distribution par style de vie (figure 8.21). Il est à remarquer que la variation des coûts de la pénalité a surtout un effet sur la distribution lorsqu'elle est petite c'est-à-dire entre 0 et 0.1\$ par dollar manquant du volume visé.

### 8.3.6 Effet de la limite de vente sur MA2

À la figure 8.22, nous étudions l'effet de la variation des limites de ventes de produits des contraintes (4.15) et (4.16) sur les profits. Comme il fallait s'y attendre,

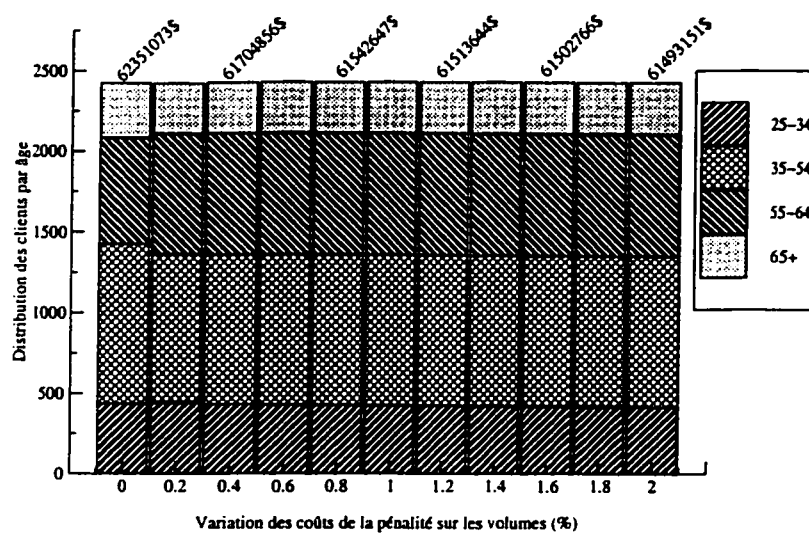


**Figure 8.20 – Effet de la variation des coûts de la pénalité du volume sur la distribution par âge**

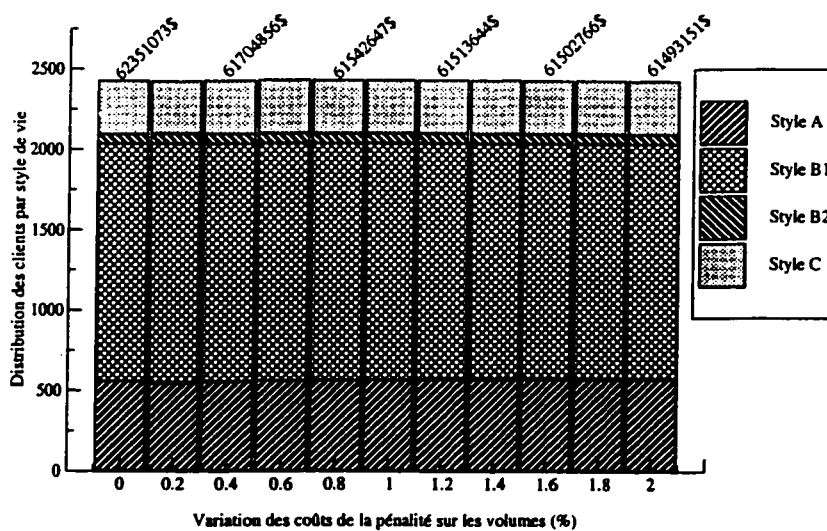


**Figure 8.21 – Effet de la variation des coûts de la pénalité du volume sur la distribution par style de vie**

une hausse des limites permet une hausse des ventes et des profits. La distribution (en pourcentage des ventes) est légèrement affectée par ces limites. Cela signifie seulement que certains segments sont plus profitables que d'autres et que dans le cas où il y aurait une limite sur les ventes, la banque devrait viser les clients des segments les plus profitables en premier.

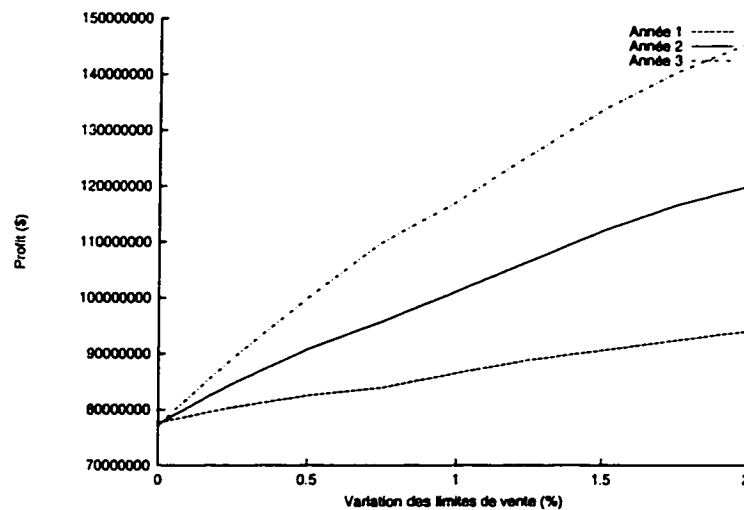


**Figure 8.22 – Effet de la variation de la limite des ventes de produits sur les profits**

### 8.3.7 Effet de la pondération des profits à long terme sur MA1

Une des corrections apportées par le modèle actuariel (MA1) est son approche envers les profits à long terme. Comme les profits à long terme sont beaucoup plus grands que les coûts de recrutement, nous avons introduit un facteur de pondération entre

les profits à long et court terme. Comme on peut s'y attendre les profits augmentent avec une pondération plus grande pour les profits à long terme. Cette variation de la pondération a aussi un effet sur la distribution de produits par âge (figure 8.23) et par style de vie (figure 8.24). On peut voir dans les deux figures une hausse des ventes dans les segments les plus populeux (35-54 ans et Style B1). On peut expliquer cette nouvelle distribution par le fait que les pénalités marginales de ces grands segments sont moindres que pour les autres segments. Donc il y a plus de chances que les nouvelles ventes se fassent là où les coûts sont plus petits. On remarque aussi qu'il n'y a pratiquement pas de changement au niveau des ventes chez les jeunes. Ce phénomène est surtout dû au fait que les jeunes investissent peu dans les produits et qu'ils les gardent moins longtemps, donc ils sont moins profitables que les autres clients même à long terme.

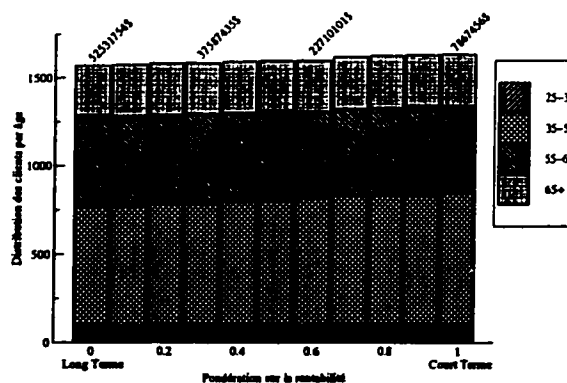


**Figure 8.23 – Effet de la variation de la pondération des revenus à court et long terme sur la distribution par âge**

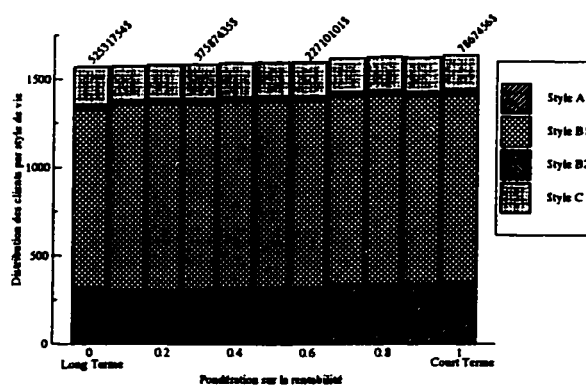


**Figure 8.24 – Effet de la variation de la pondération des revenus à court et long terme sur la distribution par style de vie**

## Chapitre 9

### Conclusion

Une banque doit faire beaucoup d'efforts pour conserver sa part du marché, ses clients et surtout pour augmenter ses profits. L'optimisation des marchés passe tout d'abord par une construction sensée de la segmentation, par le développement de produits bien adaptés au marché et par le ciblage du marché. Cependant, l'efficacité de ces méthodes diminue dans le temps car le marché évolue et les concurrents réagissent aux changements faits par la banque. De plus, la segmentation et le positionnement des produits sont rarement recalculés à cause de l'effort considérable qu'ils demandent. Pour ces raisons, le ciblage de marché doit être refait périodiquement dans le but de conserver une saine planification des efforts de vente. Il est surprenant de constater le peu de références dans la documentation sur le ciblage de marché. En effet, après avoir

fait tant d'effort dans la construction des segments et le développement de produits, le ciblage des marchés est fait par intuition.

Nous avons dégagé sous forme de liste les principales contributions de cette thèse :

1. Création pour la première fois de modèles d'optimisation dans le but de maximiser les profits lorsque la segmentation des marchés et le positionnement des produits sont fixés,
2. Identification des principaux facteurs qui affectent la construction de ces modèles d'optimisation et une brève revue des travaux sur ces facteurs,
3. Identification des facteurs secondaires qui ont un impact sur les résultats et une brève revue des travaux sur ces facteurs,
4. Analyse de différentes méthodes de résolution pour les modèles proposés,
5. Comparaison de l'efficacité des méthodes de résolution spécifiquement pour ce problème,
6. Comparaison des modèles sous divers scénarios et analyse de sensibilité des facteurs les plus importants.

Les modèles que nous avons proposés essaient de venir en aide au personnel de la banque en ciblant les segments pour la vente de produits. En plus de remplir cette tâche, les modèles doivent aussi fournir des informations sur la quantité de produits

que la banque doit vendre dans chaque segment dans le but d'aider à une planification des tâches et aussi dans le but de surveiller le développement des ventes. En plus de remplir ces tâches, on a ajouté des objectifs secondaires et des contraintes pour trouver des solutions mieux adaptées à l'administration courante des banques. En effet, notre travail permet, entre autres, d'évaluer quantitativement l'impact d'une série de restrictions administratives adoptées souvent par habitude dans le milieu bancaire. Un exemple clair de ce fait est la contrainte sur l'augmentation du volume d'argent. Grâce à nos modèles, nous avons constaté que cette contrainte est si forte qu'elle peut même induire à une diminution des profits.

À cause des nombreux facteurs administratifs et des contraintes simulant le marché, le problème de l'optimisation des marchés devient un problème d'assignation de produits à des clients beaucoup plus compliqué. Pour cette raison, nous avons proposé différents modèles qui attaquent des parties différentes de la problématique. Les modèles cloisonnés ont une très bonne vue de l'ensemble du problème mais ils traitent l'attrition de façon artificielle et ne traitent pas les profits à long terme. D'un autre côté, le modèle actuariel (MA1) réussit à s'attaquer à ces problèmes mais il n'a pas une vue à long terme sur les conséquences de la variation de la demande. Finalement, nous avons proposé le modèle actuariel (MA2) dans le but de colmater les failles de deux modèles précédents.

La présence de données peu fiables nous a porté à considérer la logique floue pour

évaluer l'impact de ces données sur les solutions. Une des méthodes de résolution des modèles à logique floue considère le pire cas comme point à optimiser. L'autre méthode semble indiquer que le statu quo donne les solutions ayant le niveau de possibilité le plus élevé. Une étude plus approfondie sur les fonctions d'adhésion des paramètres flous apporterait peut-être des résultats plus intéressants et moins divergents.

Puisque nos modèles sont affectés par les facteurs macro-économiques de nature stochastique, nous avons introduit le modèle cloisonné stochastique. Ce type de modèle est souvent retrouvé en finance dans la planification financière. Cependant, le problème de l'optimisation des marchés avec sa grande taille et ses contraintes couplées est difficilement résoluble par les techniques actuelles d'optimisation. Même avec l'utilisation de techniques de décomposition, ce problème reste difficile à résoudre.

Après l'étude de tous ces facteurs et la proposition de plusieurs modèles, le modèle cloisonné stochastique est, selon nous, le plus complet des modèles. Il est basé sur le deuxième modèle actuariel (MA2) qui est le plus stable et le plus complet des modèles déterministes. En plus, il permet l'étude des plusieurs scénarios d'un seul trait tout en considérant l'impact de l'incertitude des événements directement dans les décisions. Ceci est un atout majeur par rapport aux modèles déterministes. Le seul défaut de ce modèle est son temps de calcul élevé. Si on tient compte de ce facteur, il est possible de faire une analyse raisonnable en limitant le nombre de scénarios tout en trouvant une solution supérieure aux modèles déterministes.

En ce qui à trait aux leçons tirées de ce travail et aux améliorations proposées, nous tirons les conclusions suivantes :

1. Un des grands atouts de la modélisation proposée est qu'elle nous a permis d'identifier clairement les données nécessaires à une planification optimale du ciblage de marché. Notre première recommandation est que la prise de données ainsi que les études statistiques d'évaluation de ces données soient mieux mariées aux modèles d'optimisation proposés. En particulier, nous proposons comme amélioration :

- une meilleure analyse statistique des relations entre les clients et les produits ;
- des analyses statistiques sur la sensibilité de la demande de produits par rapport aux coûts de recrutement et à la rentabilité ;
- une meilleure étude des coûts de recrutement par segment et des facteurs des ventes croisées ;
- des analyses sur l'impact des facteurs macro-économiques sur les différents paramètres des modèles.

2. Une autre leçon tirée de ce travail est l'identification des contraintes et des paramètres importants et l'analyse de leur comportement face aux changements.

Nous notons en particulier :

- la contrainte sur le volume est très importante dans l'optimisation car elle permet le sacrifice de profits pour satisfaire à des contraintes administratives ;

- la contrainte limitant le nombre de nouveaux clients a de son côté peu d'effet sur les profits mais elle influence tout de même la distribution des ventes ;
- certains paramètres et limites ont des effets très marqués sur les solutions mais ces influences restent prévisibles et bien conditionnées.

Il reste beaucoup de travail à faire dans le domaine de l'optimisation des marchés. Nous considérons comme prioritaires des travaux futurs sur l'analyse statistique des paramètres du problème pour ainsi augmenter la précision des résultats. Également, il serait intéressant d'incorporer des techniques de promotions aux modèles d'optimisation pour étudier leur effet sur les ventes. Une étude plus approfondie sur les méthodes de programmation mathématique apporterait sûrement des solutions mieux adaptées à ce type de problème.

## Bibliographie

- [1] ARMSTRONG, J. S., BRODIE, R. S. et MCINTYRE, S. H. (1987) Forecasting Methods for Marketing International Journal of Forecasting 3, pp.355-376.
- [2] ANDERSON, W. T. Jr, COX, E. P. et FULCHER, D. G. (1976) Bank Selection Decisions and Market Segmentation Journal of Marketing 40 pp.40-45.
- [3] AWH, R. Y. et WATERS, D. (1974) A Discriminant Analysis of Economic, Demographic and Attitudinal Characteristics of Bank Charge-Card Holders : A Case Study The Journal of Finance Vol.29 No.3 pp.973-980.
- [4] BAYUS, B. L. et MEHTA, R. (1991) A Segmentation for the Targeted Marketing of Consumer Durables Journal of Marketing Research Vol.32 pp.463-469.
- [5] BEADLE, D. (1995) An Education in Rates Mortgage Banking Vol.55 No.5 pp.48-60.
- [6] BEIK, L. L. et BUZBY, S. L. (1973) Profitability Analysis Market Segments Journal of Marketing 37 pp.48-53.

- [7] BELLMAN, R. et ZADEH, L. A. (1970) Decision Making in a Fuzzy Environment  
Management Science Vol.17 pp.141-164.
- [8] BERTSEKAS, D. P. (1982) Constrained Optimization and Lagrange Multiplier  
Methods Academic Press 395p.
- [9] BODINGTON, C. E. et BAKER, T. E. (1990) A History of Mathematical Pro-  
gramming in the Petroleum Industry Interfaces Vol.20 No.4 pp.117-127.
- [10] BRITT, P. (1994) Dividing and conquering Savings and Community Banker  
Vol.3 Iss.7 pp.35-39.
- [11] BROWN, S. W., SMITH, R. L. et ZUROWSKI, G. J. (1977) The Appropriate-  
ness and Applicability of Image Research to Banking Journal of Bank Research  
Vol.8 No.2 pp.221-241.
- [12] BUCKLEY, J. J. (1989) Solving Possibilistic Linear Programming Problems  
Fuzzy Sets and Systems Vol.31 pp.329-341.
- [13] BUCKLIN, R. E., GUPTA, S. et SIDDARTH, S. (1998) Determining  
Segmentation in Sales Response Across Consumer Purchase Behavior  
Journal of Marketing Research Vol.35 pp.189-197.
- [14] BUCKLIN, R. E. et LATTIN, J. M. (1991) A Two-State Model of Purchase  
Incidence and Brand Choice Marketing Science Vol.10(1) pp.24-39.
- [15] BULT, J. R. et WANSBEEK, T. (1995) Optimal Selection for Direct Mail  
Marketing Science Vol.14 pp.378-394.

- [16] CARROLL, P. (1991) Rethinking the Basics of Retail Banking  
Journal of Retail Banking Vol.13 No.3 pp.5-18.
- [17] CAVUOTO, D. (1996) The Customer is Priority One, at Last  
ABA Banking Journal Vol.88 No.11 pp.20-22.
- [18] CHAMBERLAND, S., SANSÒ, B. et MARCOTTE, O. (2000) Topological  
Design of Two-Level Telecommunication Networks with Modular Switches  
Operations Research Vol.48.5.
- [19] CHARNES, A., COOPER, W. W. et MELLON, B. (1952) Blending Aviation  
Gasolines - A Study in Programming Interdependent Activities in an Integrated  
Oil Company Econometrica 20 pp.135-159.
- [20] CHARNES, A., COOPER, W. W. et MELLON, B. (1954) A Model for Pro-  
gramming and Sensitivity Analysis in a Integrated Oil Company Econometrica  
22 pp.193-217.
- [21] CHEUNG, B. K.-S. (1998) Some Optimization Models in Risk Management I  
Cahiers du Gerad G-98-12 10p.
- [22] CLANCY, K. J. et ROBERTS, M. L. (1992) Toward an Optimal Market Target :  
a Strategy for Market Segmentation Journal of Product and Brand Management  
Vol.1 No.1 pp.5-14.
- [23] COHEN, K. J., MAIER, S. F. et VANDER WEIDE, J. H. (1981) Recent Develop-  
ments in Management Science in Banking Management Science 27 pp.1097-1119.

- [24] DANTZIG, G. B. et INFANGER, G. (1993) Multi-Stage Stochastic Linear Programs for Portfolio Optimization Annals of Operations Research Vol.45 pp.59-76.
- [25] DANTZIG, G. B. et WOLFE, P. (1960) Decomposition Principle for Linear Programs Operations Research Vol.8 pp.101-111.
- [26] DIBB, S. et SINKIN, L. (1991) Targeting, Segments and Positioning International Journal of Retail and Distribution Management Vol.19 No.3 pp.4-10.
- [27] DUFFUAA, S. O., AL-ZAYER, J. A., AL-MARJOUN, M. A. et AL-SALEH, M. A. (1992) A Linear Programming Model to Evaluate Gas Availability for Vital Industries in Saudi Arabia Journal of the Operational Research Society Vol.43 No.11 pp.1035-1045.
- [28] DURAND, R. M., ECKRICH, D. W. et SPRECHER, C. R. (1978) Bank Image : An Adequacy Importance Approach Journal of Bank Research Vol.9 No.3 pp.168-172.
- [29] ENTRIKEN, R. (1996) Parallel Decomposition : Results for Staircase Linear Programs SIAM Journal of Optimization Vo.6 No.4 pp.961-977.
- [30] FABOZZI, F.J. et TROVATO, S. (1976) The Use of Quantitative Techniques in Commercial Banks Journal of Bank Research Vol.7 No.2 pp.173-178.
- [31] FOURER, R. (1982) Solving Staircase Linear Programs by the Simplex Method, 1 : Inversion Mathematical Programming 23 pp.274-313.

- [32] FRANK, N. et WOLFE, P. (1956) An Algorithm for Quadratic Programming  
Naval Research Logistics Quarterly Vol.3 pp.95-110.
- [33] GASNER, S. (1992) Forging a Link Between Retention and Profits  
Credit Card Management Vol.5 No.1 pp.84-87.
- [34] GASSMANN, H. I. (1990) MSLiP : a Computer Code for the Multistage Stochastic Linear Programming Problem Mathematical Programming 47 pp.407-423.
- [35] GAUVIN, J. (1995) Leçons de Programmation Mathématique  
Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal 140p.
- [36] GENDREAU, M., LAPORTE, G. et SEMET, F. (1996) A Tabu Search Heuristic for the Undirected Selective Traveling Salesman Problem Publications du CRT  
No.96-17 16p.
- [37] GENDREAU, M., LAROCHELLE, J.-F. et SANSÒ, B. (1999) A Tabu Search Heuristic for the Steiner Tree Problem Networks Vol.34.2 pp.162-172.
- [38] GILL, E., MURRAY, W., SAUNDERS, M. A. et WRIGHT, M. H. (1989) Constrained Nonlinear Programming Optimization, Ed.North-Holland pp.171-210.
- [39] GHOUILA-HOURI, A. (1962) Caractérisation des Matrices Totalemt Unimodulaires C.R.Acad.Sc.Paris 254 p.1192.
- [40] GLASSEY, C. R. (1973) Nested Decomposition and Multi-Stage Linear Programs Management Science Vol.20 pp.282-292.

- [41] GLOVER, F., (1986) Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence Computer and Operations Research Vol.13 533-549.
- [42] GONDRAN, M. et MINOUX, M. (1985) Graphes et Algorithmes Editions Eyrolles 545p.
- [43] GREEN, P. E., CARROLL, J. D. et GOLDBERG, S. M. (1981) A General Approach to Product Design Optimization Via Conjoint Analysis Journal of Marketing Vol.4 pp.17-37.
- [44] GREEN, P. E. et KRIEGER, A. M. (1989) Recent Contributions to Optimal Product Positioning and Buyer Segmentation European Journal of Operational Research Vol.41 pp.127-141.
- [45] GREEN, P. E. et KRIEGER, A. M. (1991) Product Design Strategies for Target-Market Positioning Journal of Product Innovation Management Vol.8 pp.189-202.
- [46] GREEN, P. E., KRIEGER, A. M. et ZELNIO, R. N. (1989). A Componential Segmentation Model with Optimal Product Design Features Decision Sciences 20 pp.221-238.
- [47] GURKAN, T. et KARTAL, N. (1989) Model for the Development of the Turkish Petrochemical Industry Engineering Costs and Production Economics 18 pp.145-157.
- [48] HANSEN, P., JAUMARD, B., MEYER, C. et THISSE, J. F. (1998) New Algorithms for Product Positioning European Journal of Operational Research

Vol.104.1 pp.154-174.

- [49] HANSEN, P. and JAUMARD, B. (1986) Algorithms for the Maximum Satisfiability Problem RUTCOR Research Report, Rutgers pp.43-87.
- [50] HERNITER, J. D. (1993) An Entropy Model of Brand Purchase Behavior Journal of Marketing Research 10 pp.361-375.
- [51] HO, J. K. et LOUTE, E. (1979) A Comparative Study of Two Methods for Staircase Linear Programs ACM Transactions on Mathematical Software Vol.5 No.4 pp.17-30.
- [52] HO, J. K. et MANNE, A. S. (1974) Nested Decomposition for Dynamic Models Mathematical Programming Vol.6 pp.121-140.
- [53] HOWCROFT, J. B. et LAVIS, J. (1986) Image in Retail Banking International Journal of Bank Marketing Vol.4 No.4 pp.3-13.
- [54] HOFFMAN, A. J. et KRUSKAL, J. B. (1956) Integral Boundary Points of Convex Polyhedra Annals of Mathematical Studies 38 p.247.
- [55] HU, C.-F. et HUNG, T.-W. (1996) Literature Review on Fuzzy Linear Programming North-Carolina OR-605 17p.
- [56] HUGHES, G. D. (1970) Predicting Bank Deposits and Loans Journal of Marketing Research Vol.7 No.1 (pp.95-100.
- [57] HUGHES, T. J. (1992) The Customer Database : Cross-Selling Retail Financial Services International Journal of Bank Marketing Vol.10 No.7 pp.11-16.

- [58] JAYAKUMAR, M. D. (1995) Cascading-Heuristics for the Solution of Staircase Linear Programs Computers Operations Research Vol.22 No.3 pp.285-295.
- [59] JULIEN, B. (1994) An Extension to Possibilistic Linear Programming Fuzzy Sets and Systems Vol.64 pp.195-206.
- [60] KAYNAK, E. (1986) How to Measure Your Banks Personality : Some Insights from Canada International Journal of Bank Marketing Vol.4 No.3 pp.54-68.
- [61] KAYTES, D. G. et KUENNE, C. B. (1997) Battling Attrition of Profitable Deposits Banking Strategies Vol.73 No.1 pp.6-10.
- [62] KAYTES, D. G. et KUENNE, C. B. (1997) The Three Faces of Attrition Banking Strategies Vol.73 No.1 pp.10.
- [63] KOTLER, P. (1987) Marketing Management Prentice Hall 9<sup>th</sup> Edition 789p.
- [64] KWAK, N. K., BROWN, R. et SCHNIEDERJANS, M. J. (1986) A Markov Analysis of Estimating Student Enrollment Transition in a Trimester Institution Socio-Economic Planning Science Vol.20 No.5 pp.311-318.
- [65] KWAK, N. K., SCHNIEDERJANS, M. J. et WARKENTIN, K. S. (1991) An Application of Linear Goal Programming to the Marketing Distribution Decision European Journal of Operational Research 52 pp.334-344.
- [66] LABE, R. P. Jr (1994) Database Marketing Increases Prospecting Effectiveness at Merrill Lynch Interfaces Vol.24 No.5 pp.1-12.
- [67] LASDON, L. S. (1970) Optimization Theory for Large Systems MacMillan Cie 523p.

- [68] LASDON, L. S. (1984) Nonlinear Programming Algorithms- Applications, Software, and Comparisons Numerical Optimization SIAM (1984) pp.41-70.
- [69] LEONARD, M. et SPENCER, A. (1991) The Importance of Image as a Competitive Strategy : an Exploratory Study in Commercial Banks International Journal of Bank Marketing Vol.9 No.4 pp.25-29.
- [70] LILIEN, G. L. , KOTLER, P. et MOORTHY, K. S. (1992) Marketing Models Prentice-Hall 803p.
- [71] LINGLE, S. (1995) How Much is a Customer Worth ? Bank Marketing Vol.27 No.8 pp.13-16.
- [72] LUENBERGER, D. G. (1984) Linear and Nonlinear Programming Addison-Wesley Second Edition 490p.
- [73] MARKOWITZ, H. M. (1959) Portfolio Selection Wiley 351p.
- [74] MCCORMICK, J. M., MCMAHON, S. P. et GOETZMANN, G. J. (1996) Realigning Retail Channels Bank Management Vol.72 Iss.2 pp.30-36.
- [75] MCGLONE, T. A. et CALANTONE, R. J. (1992) A Goal Programming Model for Effective Segment Determination : A Comment and Application Decision Sciences 23 pp.1231-1239.
- [76] MERRIFIELD, D. (1997) The X-Files Bank Marketing Vol.29 No.3 pp.46-51.
- [77] MINOUX, M. (1983) Programmation Mathématique : Théories et Algorithmes Collection Technique et Scientifique des Télécommunications.

- [78] MODAVE, F. et JULIEN, B. (1996) Possibilistic Optimization Intelligent Manufacturing and Process Design Neuro-Fuzzy Integration, Canada-Japan Bilateral Workshop (Avril) 5p.
- [79] MOROWITZ, V. G. et SCHMITTLEIN, D. (1992) Using Segmentation to Improve Sales Forecasts Based on Purchase Intent : Which Intenders Actually Buy ? Journal of Marketing Research Vol.29 pp.391-405.
- [80] MORRALL, K. (1993) Customize Your Cross-Sell Bank Marketing Vol.25 No.3 pp.14-19.
- [81] MULVEY, J. M. (1995) Financial Planning via Multi-Stage Stochastic Optimization Princeton University Report 31p.
- [82] MULVEY, J. M. et et RUSZCZYNSKI, A. (1995) A New Scenario Decomposition Method for Large-Scale Stochastic Optimization Operations Research Vol.43 No.3 pp.477-490.
- [83] MULVEY, J. M. et SHETTY, B. (1996) Strategic Financial Risk Management and Operations Research : a Review Technical Report SOR-96-18 Princeton University, Princeton, NJ 29p.
- [84] MULVEY, J. M. et VLADIMIROU, H. (1991) Solving Multistage Stochastic Networks : an Application of Scenario Aggregation Networks Vol.21 pp.619-643.
- [85] MURTY, K. G. (1988) Linear Complementary, Linear and Nonlinear Programming Heldermann Verlag Publications 629p.

- [86] NENHAUSER, G.L. et WOLSEY, L. A. (1988) Integer and Combinatorial Optimization Wiley Ed. 763p.
- [87] OHENEY, S. (1995) Profitability Program Bank Marketing Vol.27 No.8 pp.19-22.
- [88] OHTA, H. et YOO, D. I. (1993) An Information-Theoretic Approach to Consumer Preference and Product Planning Computers and Industrial Engineering Vol.24 No.4 pp.511-522.
- [89] PITT, L. F. et MORRIS, M. H. (1995) When Marketing and Strategy Become One Journal of General Management Vol.21 No.2 pp.21-30.
- [90] POOL, A. A. (1974) Application of Discriminant Analysis in Formulation of Promotional Strategy for Cash-Dispensing Machines Journal of Bank Research Vol.5 No.1 pp.13-19.
- [91] PUNCH, L. (1994) The Attrition Score Credit Card Management Vol.7 No.8 pp.60-68.
- [92] RADIGAN, J. (1993) Why Computers Cant Turn Bankers into Salespeople United States Banker (September) pp.53-56.
- [93] RAMÍK, J. et RÍMÁNEK, J. (1985) Inequality Relation Between Fuzzy Numbers and its Use in Fuzzy Optimization Fuzzy Sets and Systems Vol.16 pp.139-147.
- [94] RARDIN, R. L. (1998) Optimization in Operations Research Prentice-Hall 919p.
- [95] ROBERTSON, D. H. et BELLENGER, D. N. (1977) Identifying Bank Market Segments Journal of Bank Research Vol.7 No.4 pp.276-283.

- [96] ROSSI, P. E., MCCULLOCH, R. E. et ALLENBY, G. M. (1996) The Value of Purchase History Data in Target Marketing Marketing Science Vol.15 No.4 (pp.321-340.
- [97] SAADE, J. J. (1994) Maximization of a Function over a Fuzzy Domain Fuzzy Sets and Systems Vol.62 pp.55-70.
- [98] SAMUELSON, P. A. et NORDHAUS, W. D. (1989) Economics 13ème édition, McGraw-Hill 1014p.
- [99] SCHNIEDERJANS, M. J. et LOCH, K. D. (1994) An Aid for Strategic Marketing in the Banking Industry : A Markov Analysis Computers Operations Research Vol.21 No.3 pp.281-287.
- [100] TANAKA, H. et ASAI, K. (1984) Fuzzy Linear Programming Problems with Fuzzy Numbers Fuzzy Sets and Systems Vol.13 pp.1-10.
- [101] TERANO, T., ASAI, K. et SUGENO, M. (1991) Fuzzy Systems Theory and its Applications Academic Press 268p.
- [102] THOMAS, V. (1994) Mature Market : An Update Bank Marketing Vol.26 No.9 pp.15-22.
- [103] THYGERSON, K. J. (1991) Modeling Branch Profitability Journal of Retail Banking Vol.13 No.3 pp.19-24.
- [104] TOOTELIAN, D. H. et GAEDEKA, R. M. (1996) Targeting the College Market for Banking Services Journal of Professional Services Marketing Vol.14 No.2 pp.161-172.

- [105] WATNE, D. A. (1979) Cross-Selling the Bank Customer  
Journal of Bank Research Vol.9 No.3 pp.165-172.
- [106] WHITE, D. L. (1974) The Present Value Approach to Selecting Bank Customers  
Journal of Bank Research 5 pp.96-101.
- [107] WONG, S. M. et PERRY, C. (1991) Customer Service Strategies in Financial  
Retailing International Journal of Bank Marketing Vol.9 No.3 pp.11-16.
- [108] ZANAKIS, S. H., MAVRIDES, L. P. et ROUSSAKIS, E. N. (1986) Applications  
of Management Science in Banking Decision Science 17 pp.114-128.
- [109] ZIMMERMANN, H. J. (1984) Fuzzy Set Theory and its Applications Kluwer  
Nijhoff Publishing 363p.

## **Annexe A**

### **Tableaux comparatifs**

**Tableau A.1 – Comparaison des résultats des scénarios sous les modèles  
MA2 et MCS**

| Scén. | MA2        |            |             | MCS        |            |             |
|-------|------------|------------|-------------|------------|------------|-------------|
|       | Année 1    | Année 2    | Année 3+    | Année 1    | Année 2    | Année 3+    |
| 1     | 9153856.36 | 8070603.09 | 41318332.67 | 8766074.22 | 7939222.51 | 40568198.11 |
| 2     | 9129450.88 | 8052052.58 | 46218400.18 | 8766074.22 | 7947740.48 | 45001168.57 |
| 3     | 9123965.61 | 8093287.81 | 43578464.49 | 8766074.22 | 7945147.87 | 43113914.09 |
| 4     | 9129902.29 | 8091192.91 | 48678709.22 | 8766074.22 | 7940593.81 | 48445104.49 |
| 5     | 9127303.38 | 8101068.79 | 50078290.59 | 8765114.55 | 7943520.23 | 49997687.68 |
| 6     | 9136889.34 | 8086507.05 | 51463397.88 | 8765114.55 | 7943520.23 | 51462306.14 |
| 7     | 9080846.69 | 8034557.71 | 46413690.55 | 8766138.16 | 7937155.11 | 44577230.92 |
| 8     | 9138035.20 | 8054629.42 | 43322569.52 | 8766186.40 | 7946465.64 | 42330373.85 |
| 9     | 9105351.59 | 8057103.51 | 48833280.30 | 8765226.73 | 7939517.90 | 46636082.03 |
| 10    | 9129003.68 | 9130115.76 | 47015149.75 | 8762910.12 | 8979056.77 | 45890260.84 |
| 11    | 9097697.68 | 9183889.94 | 52887238.86 | 8765226.73 | 8989629.46 | 50267706.29 |
| 12    | 9138684.34 | 9158221.12 | 49395886.51 | 8763869.79 | 9002177.46 | 49259923.99 |
| 13    | 9147312.59 | 9120444.91 | 55598917.58 | 8763869.79 | 8995477.82 | 55400846.95 |
| 14    | 9148001.06 | 9162394.37 | 57216904.66 | 8763215.30 | 9002120.35 | 57136042.87 |
| 15    | 9142357.85 | 9156338.86 | 58980044.87 | 8763215.30 | 9002200.65 | 58920666.43 |
| 16    | 9077046.80 | 9106359.17 | 53118027.92 | 8763869.79 | 8981462.56 | 50339890.31 |
| 17    | 9090193.52 | 9098440.04 | 49373611.48 | 8763869.79 | 8989268.42 | 47377547.94 |
| 18    | 9082511.42 | 9102855.01 | 55976708.50 | 8765114.55 | 8983571.53 | 52560208.02 |
| 19    | 9130256.83 | 8377392.78 | 44020871.29 | 8765114.55 | 8179864.07 | 43661972.55 |
| 20    | 9127695.10 | 8384001.96 | 49223290.58 | 8765178.49 | 8165106.68 | 48882593.96 |
| 21    | 9112060.22 | 8377611.09 | 46177602.05 | 8765226.73 | 8180358.41 | 46116491.89 |
| 22    | 9131537.70 | 8392840.28 | 51787213.76 | 8765226.73 | 8179328.75 | 51710760.99 |
| 23    | 9117201.69 | 8387011.35 | 53102900.74 | 8765178.49 | 8179948.18 | 52960187.21 |
| 24    | 9117517.30 | 8383356.10 | 54710364.13 | 8765114.55 | 8180065.43 | 54593201.35 |
| 25    | 9112090.34 | 8361189.63 | 49393937.41 | 8766074.22 | 8165019.87 | 46987582.19 |
| 26    | 9119780.94 | 8377623.18 | 46020095.48 | 8766074.22 | 8173728.41 | 45651615.59 |
| 27    | 9127499.53 | 8382648.19 | 52105320.87 | 8766074.22 | 8173391.18 | 51527590.20 |
| 28    | 9134133.42 | 9569734.35 | 50049442.08 | 8763869.79 | 9391963.32 | 49811206.71 |
| 29    | 9154601.79 | 9521513.35 | 56220753.55 | 8763869.79 | 9354034.07 | 56052043.98 |
| 30    | 9136758.65 | 9571494.93 | 52659776.24 | 8763869.79 | 9396627.14 | 52616474.97 |

| Scén. | MA2        |             |             | MCS        |             |             |
|-------|------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|
|       | Année 1    | Année 2     | Année 3+    | Année 1    | Année 2     | Année 3+    |
| 31    | 9146309.84 | 9565198.77  | 59335423.98 | 8763869.79 | 9388046.23  | 59291511.28 |
| 32    | 9134232.41 | 9557690.71  | 61037607.37 | 8763215.30 | 9390996.66  | 60897767.40 |
| 33    | 9137715.04 | 9548457.37  | 62967106.26 | 8763215.30 | 9391449.92  | 62851435.39 |
| 34    | 9083258.57 | 9499894.58  | 56731498.94 | 8762910.12 | 9354074.56  | 53342359.14 |
| 35    | 9145030.10 | 9573521.28  | 52353005.96 | 8762910.12 | 9392200.88  | 52045260.88 |
| 36    | 9155548.12 | 9559678.30  | 59776613.57 | 8762910.12 | 9392832.30  | 59223516.68 |
| 37    | 9144418.24 | 9780228.20  | 51843183.77 | 8765114.55 | 9769876.83  | 51865453.02 |
| 38    | 9145836.76 | 9782293.19  | 58390838.43 | 8765419.73 | 9759241.90  | 58386603.38 |
| 39    | 9129597.57 | 9782493.42  | 54355252.31 | 8765178.49 | 9766879.33  | 54331470.60 |
| 40    | 9133379.61 | 9776757.08  | 61387254.47 | 8763215.30 | 9747818.36  | 61322260.37 |
| 41    | 9136511.14 | 9782055.46  | 63458594.11 | 8763215.30 | 9744559.65  | 62913815.12 |
| 42    | 9112209.21 | 9760093.55  | 65765158.54 | 8763215.30 | 9756757.55  | 65261655.23 |
| 43    | 9142505.53 | 9781184.97  | 58255736.76 | 8765226.73 | 9761411.67  | 57882999.22 |
| 44    | 9130811.91 | 9786927.62  | 54066200.58 | 8765226.73 | 9769965.25  | 53996890.62 |
| 45    | 9142250.32 | 9787491.51  | 61346690.90 | 8765483.67 | 9768001.88  | 61043888.42 |
| 46    | 9150019.89 | 10090443.15 | 53578663.03 | 8765178.49 | 10052550.67 | 53676721.84 |
| 47    | 9133871.48 | 10099336.66 | 60449554.31 | 8765419.73 | 10030338.68 | 60324804.58 |
| 48    | 9123908.08 | 10093781.89 | 56275947.78 | 8765178.49 | 10049863.73 | 56282961.29 |
| 49    | 9135601.42 | 10100324.79 | 63550785.56 | 8763215.30 | 10046160.85 | 63557317.49 |
| 50    | 9110789.27 | 10075670.29 | 66000608.65 | 8763215.30 | 10046933.19 | 65484967.27 |
| 51    | 9114498.22 | 10064329.25 | 68681467.75 | 8763215.30 | 10047762.31 | 68101529.67 |
| 52    | 9151841.59 | 10098501.67 | 60227629.62 | 8765419.73 | 10037265.42 | 60062400.75 |
| 53    | 9131327.75 | 10105384.62 | 55897041.28 | 8765114.55 | 10053477.06 | 55681948.07 |
| 54    | 9140394.24 | 10107875.53 | 63416249.02 | 8765419.73 | 10041153.80 | 63102684.29 |
| 55    | 9045216.03 | 9135899.46  | 47573039.48 | 8765119.12 | 8545454.32  | 45556046.27 |
| 56    | 8947146.06 | 9126545.75  | 53623708.00 | 8765119.12 | 8522686.66  | 51043910.92 |
| 57    | 9087618.24 | 9182970.29  | 50054072.67 | 8765231.30 | 8567690.78  | 48066744.70 |
| 58    | 9066317.49 | 9152841.02  | 56618110.61 | 8765231.30 | 8529401.44  | 53124841.42 |
| 59    | 9119686.81 | 9237599.15  | 57637607.14 | 8765119.12 | 8570341.08  | 57407791.36 |
| 60    | 9127704.98 | 9245757.68  | 59281251.00 | 8764363.02 | 8570341.08  | 59023331.40 |
| 61    | 8951647.37 | 9101669.01  | 54271685.02 | 8765183.06 | 8531309.23  | 49997185.05 |
| 62    | 8954591.15 | 9137282.16  | 50445216.97 | 8765178.49 | 8557339.58  | 47535763.97 |
| 63    | 8957368.72 | 9101271.53  | 57163433.41 | 8765114.55 | 8531921.29  | 51735009.40 |
| 64    | 9140234.87 | 8420791.04  | 43822343.86 | 8765178.49 | 8200038.02  | 42830260.97 |
| 65    | 9087487.89 | 8381934.30  | 49223215.34 | 8765114.55 | 8184128.45  | 47159320.67 |
| 66    | 9119883.58 | 8441695.78  | 46122769.83 | 8765114.55 | 8200448.32  | 45762361.61 |
| 67    | 9142133.87 | 8434808.05  | 51710047.20 | 8765114.55 | 8199007.54  | 51307891.66 |
| 68    | 9131770.38 | 8439298.11  | 52975284.58 | 8765114.55 | 8200074.98  | 52784791.38 |
| 69    | 9138239.30 | 8440408.72  | 54474621.19 | 8765114.55 | 8200051.32  | 54421743.57 |
| 70    | 9053988.60 | 8360250.27  | 49762020.79 | 8766074.22 | 8165822.48  | 46895210.03 |
| 71    | 9111016.00 | 8425956.44  | 46144055.20 | 8766074.22 | 8193686.57  | 44595922.36 |
| 72    | 9115908.32 | 8428064.04  | 52171359.19 | 8766074.22 | 8193433.04  | 49149688.36 |
| 73    | 9101395.76 | 9533563.24  | 50424602.19 | 8764847.48 | 9298629.30  | 48338469.85 |
| 74    | 9083844.64 | 9530821.97  | 57063362.06 | 8764783.54 | 9245528.44  | 53642780.06 |
| 75    | 9141434.72 | 9607572.42  | 53263929.93 | 8765183.06 | 9294182.13  | 52836614.58 |
| 76    | 9130159.57 | 9580172.42  | 60255529.19 | 8765119.12 | 9292809.02  | 59678519.96 |
| 77    | 9152869.70 | 9613965.65  | 61728495.15 | 8764027.44 | 9294823.97  | 61449360.89 |
| 78    | 9151283.95 | 9622951.57  | 63300128.19 | 8764363.02 | 9294966.01  | 63016760.23 |
| 79    | 8951794.69 | 9473856.16  | 57757944.33 | 8764783.54 | 9247884.00  | 51883043.38 |
| 80    | 9105774.74 | 9568583.24  | 53239328.71 | 8764733.73 | 9300938.13  | 50293703.32 |
| 81    | 9092003.19 | 9561668.21  | 60745289.35 | 8764669.79 | 9290274.22  | 58459877.17 |