

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

OPTIMISATION MULTICRITÈRE DES
DEUX PREMIÈRES PHASES DU DÉPLOIEMENT
DE LA FONCTION QUALITÉ (DFQ/QFD)

HUGO ESTEBAN PIEDRAS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ES SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE INDUSTRIEL)
MARS 2003

National Library
of Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

Acquisitons et
services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-612-83225-2

Our file Notre référence

ISBN: 0-612-83225-2

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

OPTIMISATION MULTICRITÈRE DES
DEUX PREMIÈRES PHASES DU DÉPLOIEMENT
DE LA FONCTION QUALITÉ (DFQ/QFD)

présenté par: PIEDRAS Hugo Esteban

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. CLÉMENT Bernard, Ph.D., président

M. YACOUT Soumaya, D.Sc., membre et directrice de recherche

M. SAVARD Gilles, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. OUALI Mohamed-Salah, Doctorat, membre

*Pour Leticia, ma femme
merci pour ton appui et confiance
dans tout ce long chemin*

*Pour ma famille
Roman, Irene, Clelia, Marco, Abril, et Diana
merci pour leur encouragement et leur soutien*

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont tout d'abord à ma directrice de recherche, Mme Soumaya Yacout, pour m'avoir proposé un sujet aussi intéressant. Son encadrement, patience, conseils, et aide matérielle autant que morale ont été grandement appréciés.

Je remercie également à mon codirecteur, M. Gilles Savard, pour ses commentaires constructifs et ses conseils éclairés tout au long de la recherche.

Je remercie les professeurs M. Bernard Clément et M. Mohamed-Salah Ouali d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire.

Je tiens à remercier Mme Chantal Poulin et M. Anas Lamghabbar pour leur aide dans la correction de ce travail.

Je voudrais particulièrement exprimer ma reconnaissance à Mme Dominique Chassé, du Bureau d'appui pédagogique de l'École Polytechnique de Montréal, pour sa disponibilité et ses commentaires dans la correction de ce mémoire.

Enfin, je dois remercier l'École Polytechnique de Montréal, qui m'a donné l'entourage propice pour finir ma maîtrise.

RÉSUMÉ

Le déploiement de la fonction qualité (DFQ) est une méthodologie utilisée lors du développement d'un produit. Elle est constituée de quatre étapes appelées maisons. Ces étapes assurent que la voix (ou exigences) du client est prise en considération dans toutes les étapes du développement du produit. Les sorties ou extrants d'une maison deviennent les entrées ou intrants de la maison suivante.

Une approche commune dans l'utilisation du DFQ consiste à développer les différentes maisons d'une façon séquentielle. Il est probable que cette approche donne des solutions sous-optimales.

Cette recherche propose une approche interactive multicritères pour optimiser simultanément les deux premières maisons du DFQ. Deux fonctions objectives sont considérées: la satisfaction du client et le coût de conception. Pour résoudre le problème, nous employons un modèle interactif de programmation multicritères non linéaire (IMONLP).

Un exemple numérique est présenté pour illustrer les deux approches. Les résultats montrent que la résolution simultanée des étapes donne une meilleure solution que leur résolution séquentielle.

ABSTRACT

The Quality Function Deployment (QFD) is a methodology used during the development of a product. It consists of four phases called houses. These phases ensure that the voice (or requirements) of the customer is taken into account in all the stages of the development of the product. The outputs of a house become the inputs of the following house.

A common approach in the use of the QFD consists in developing the houses in a sequential manner. It is probable that this approach gives sub-optimal solutions.

This research proposes an interactive multiple objective approach to optimize simultaneously the first two houses of QFD. Two objective functions are considered: the client satisfaction and the cost of design. For solving the problem, we use an interactive multiple objective nonlinear programming model (MONLP).

A numerical example is presented to illustrate the two approaches. Results show that solving the two phases simultaneously leads to a better decision in comparison to that of solving the two mathematical programming problems separately.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE.....	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ.....	vi
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES.....	viii
LISTE DES FIGURES.....	xii
LISTE DES TABLEAUX.....	xiv
LISTE DES ANNEXES.....	xv
 CHAPITRE 1 : INTRODUCTION.....	 1
 CHAPITRE 2 : DESCRIPTION GÉNÉRALE DU DFQ ET REVUE DE	
LITTÉRATURE.....	4
2.1 Description du déploiement de la fonction qualité (DFQ)	4
2.1.1 Les étapes du DFQ	7
2.2 Problématique.....	11
2.3 Modèles de la maison de qualité (MQ1)	12
2.3.1 Modèle de Dawson et Askin	12
2.3.2 Modèle de Kim.....	13
2.3.3 Modèle de Wasserman	13
2.3.4 Modèle de Zhou	14
2.4 Modèles de la maison du déploiement du produit (MQ2).....	15
2.4.1 Modèle de Ames, MacDonald, Mattuci, Szonyi et Hawkins	15
2.4.2 Modèle de Artiles-León	16
2.4.3 Modèle de Kapur et Cho	16
2.4.4 Modèle de Krauss, Benneyan et Mackertich.....	17
2.4.5 Modèle de Pignatiello	18
2.3.6 Modèle de Ribeiro, Fogliatto et Ten Caten	18

CHAPITRE 3 : LES MODÈLES MATHÉMATIQUES SÉQUENTIEL ET

SIMULTANÉ	20
3.1 Nomenclature des modèles.....	20
3.2 Modèle mathématique séquentiel (MQ1 et MQ2)	21
3.2.1 Modèle mathématique de la maison de la qualité (MQ1/HOQ1)	21
Fonction objectif	22
Contraintes	23
Intervalle de changement des CD	23
Association entre les CD	24
Contrainte de comptabilité.....	25
Formulation du modèle MQ1 (basé sur le modèle de Kim).....	25
3.2.2 Modèle mathématique du déploiement du design (MQ2/HOQ2).....	26
Fonction objectif	27
Contraintes	28
Équation de prédiction de la moyenne	28
Équation de prédiction de la variance.....	29
Limites supérieure et inférieure des spécifications.....	29
Niveaux des facteurs de contrôle.....	30
Formulation du modèle MQ2.....	30
3.2.3 Processus de résolution du modèle mathématique séquentiel.....	31
3.3 Modèle mathématique simultané (MQ1 + MQ2).....	31
Fonction objectif	31
Contraintes	32
Formulation du modèle simultané.....	32
3.4 Exemple numérique.....	33
3.4.1 Modèle séquentiel résultant.....	33
Modèle MQ1 résultant	34
Contraintes.....	35
Intervalle de changement des CD	35

Association entre les CD	35
Contrainte de comptabilité.....	36
Modèle MQ2 résultant	38
Contraintes.....	39
Équation de prédiction de la moyenne	39
Équation de prédiction de la variance.....	40
Limites supérieure et inférieure de spécifications	40
Niveaux des facteurs de contrôle.....	41
3.4.2 Modèle simultané résultant	43
Contraintes.....	44
Intervalle de changement des CD	44
Association entre les CD	44
Contrainte de comptabilité.....	44
Équation de prédiction de la moyenne	45
Équation de prédiction de la variance.....	45
Limites supérieure et inférieure des spécifications.....	45
Niveaux des facteurs de contrôle.....	46
CHAPITRE 4 : APPROCHE INTERACTIVE MULTICRITÈRE	50
4.1 Prise de décision multicritères.....	50
4.2 Concepts de base de l'approche multicritères	51
4.3 Classification des méthodes de programmation multicritères.....	54
Méthodes pour générer l'ensemble des solutions non dominées.....	54
Méthodes d'articulation antérieure des préférences	54
Méthodes d'articulation progressive des préférencesou interactives	55
4.4 Méthode de programmation multicritères non linéaire interactive (IMONLP)	
(algorithme)	56
4.5 Modèle mathématique multicritères non linéaire (MONLP)	58
Fonction objectif	59
Contraintes du modèle.....	60

Intervalle de changement des CD	60
Association entre les CD	60
Contrainte de comptabilité.....	60
Équation de prédiction de la moyenne	60
Équation de prédiction de la variance.....	60
Limites inférieure et supérieure des spécifications.....	60
Niveaux des facteurs de contrôle.....	60
4.5.1 Formulation du modèle multicritères non linéaire (MONLP)	61
4.6 Exemple numérique.....	62
4.7 Processus de résolution du modèle MONLP en utilisant l'algorithme IMONLP.....	65
Étape 1a	65
Étape 1b.....	66
Étape 2a	66
Étape 2b.....	67
Étape 3	67
4.8 Conclusions	71
CONCLUSION	74
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	78
ANNEXE I : MODÈLES MATHÉMATIQUES DE LA MQ1	87
ANNEXE II : MODÈLES MATHÉMATIQUES DE LA MQ2	92

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Contexte et caractéristiques actuelles de la concurrence en relation avec le DFQ	2
Figure 2.1 Éléments du déploiement de la fonction qualité	5
Figure 2.2 Chambres de la maison de la qualité.....	7
Figure 2.3 Cascade des quatre étapes du DFQ.....	10
Figure 2.4 Problématique relative aux deux premières étapes du DFQ.....	11
Figure 2.5 Chambres de la MQ1 utilisées dans le modèle de Dawson et Askin.....	12
Figure 2.6 Chambres de la MQ1 utilisées dans le modèle de Kim	13
Figure 2.7 Chambres de la MQ1 utilisées dans le modèle de Wasserman.....	14
Figure 2.8 Chambres de la MQ1 utilisées dans le modèle de Zhou.....	14
Figure 2.9 Chambres de la MQ2 utilisées dans le modèle de Ames <i>et al</i>	15
Figure 2.10 Chambres de la MQ2 utilisées dans le modèle de Artiles-León.....	16
Figure 2.11 Chambres de la MQ2 utilisées dans le modèle de Kapur et Cho.....	17
Figure 2.12 Chambres de la MQ2 utilisées dans le modèle de Krauss <i>et al</i>	17
Figure 2.13 Chambres de la MQ2 utilisées dans le modèle de Pignatiello	18
Figure 2.14 Chambres de la MQ2 utilisées dans le modèle de Ribeiro <i>et al</i>	19
Figure 3.1 Variables des modèles.....	20
Figure 3.2 Niveaux de conformité selon la fonction perte de qualité	27
Figure 3.3 Processus de résolution du modèle séquentiel	33
Figure 3.4 Maison de la qualité	34
Figure 3.5 Maison du déploiement du produit	38
Figure 3.6 Niveaux de conformité des CD_j résultant de l'optimisation de la MQ2.....	43
Figure 3.7 Niveaux de conformité des CD_j résultant de l'optimisation du modèle simultané	48
Figure 4.1 Ensemble de solutions efficaces dans l'espace de décision et dans l'espace objectif.....	53
Figure 4.2 Classification des méthodes multicritères.....	55

Figure 4.3 Illustration de la méthode IMONLP pour deux critères	58
Figure 4.4 Ensemble de solutions efficaces dans l'espace objectif du MONLP	69
Figure 4.5 Niveaux de conformité des moyennes pour l'itération F^7	72

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 Résultats de l'optimisation du modèle MQ1	37
Tableau 3.2 Résultats de l'optimisation du modèle MQ2	42
Tableau 4.1 Solution de l'optimisation pour x^1 et x^2	66
Tableau 4.2 Solution de l'optimisation pour x^3	67
Tableau 4.3 Vecteurs des critères non dominés et leurs utilités associées	69
Tableau 4.4 Résultat des itérations du modèle IMONLP	70
Tableau 4.5 Comparaison de l'optimisation des modèles séquentiel, simultané et interactif.....	73

LISTE DES ANNEXES

Annexe I : Modèles mathématiques de la MQ1.....	87
Annexe II : Modèles mathématiques de la MQ2.....	92

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Au cours des dernières décennies, les environnements socio-économiques ont évolué rapidement. L'ouverture des marchés nationaux et la signature de traités de libre-échange ont durci la concurrence entre les entreprises, une concurrence qui, pour plusieurs d'entre elles, est passée de l'échelle nationale à l'échelle mondiale.

Ainsi, pour demeurer concurrentielles et garder leur part de marché, les entreprises doivent, d'une part, réduire leurs coûts et délais. D'autre part, il est crucial qu'elles développent de nouveaux produits avec un haut niveau de qualité en tenant compte des exigences croissantes de la clientèle. Aujourd'hui, en effet, les clients sont devenus plus attentifs et sélectifs face aux produits qu'ils achètent.

Dans les années 70, Akao (1993) a développé une méthodologie appelée *déploiement de la fonction qualité* (DFQ), approche qui garantit la qualité à chaque étape de développement d'un produit, à partir de la conception jusqu'à la production. Cette approche permet de traduire la "voix du client" dans toutes les étapes de développement du produit. La figure 1.1 illustre la relation entre le DFQ et les caractéristiques de la concurrence dans le monde d'aujourd'hui.

Le DFQ est constitué de quatre étapes ou "maisons": maison de la qualité (MQ1), maison de déploiement du produit (MQ2), maison de la planification du procédé (MQ3) et maison de la planification de la production (MQ4).

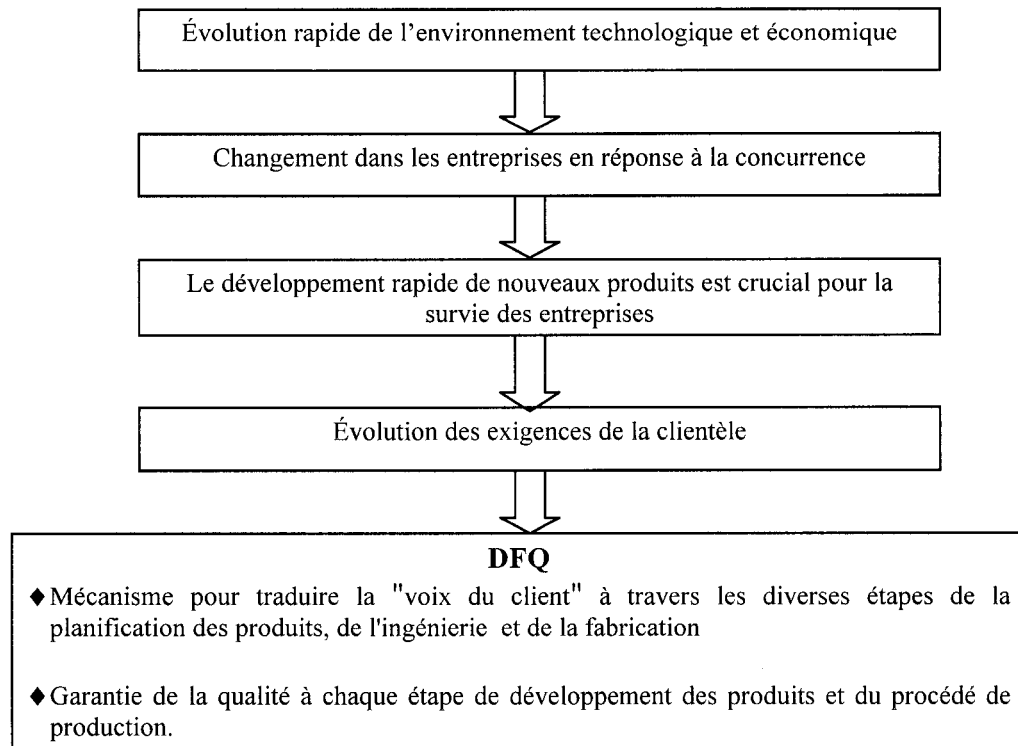


Figure 1.1 Contexte et caractéristiques actuelles de la concurrence en relation avec le DFQ

Actuellement, l'optimisation des étapes du DFQ considère chaque maison séparément et d'une manière séquentielle. Les extrants ou sorties d'une maison deviennent les intrants ou entrées de la maison suivante. Il est probable que cette approche séquentielle donne des solutions sous-optimales.

Dans ce mémoire, nous explorons l'avantage qu'il y aurait à considérer simultanément l'optimisation des maisons du DFQ. Pour réduire la complexité du travail, nous nous limitons à l'optimisation des deux premières maisons.

Nous visons deux objectifs principaux :

- ◆ Mettre au point une démarche permettant d'optimiser simultanément les deux premières étapes du DFQ.
- ◆ Développer et tester un modèle permettant d'obtenir les différentes solutions admissibles qui facilitent le choix du décideur.

Le développement du modèle d'optimisation simultanée est basé sur deux approches principales : le DFQ et la programmation mathématique interactive multicritère. Le DFQ sera utilisée pour identifier les attributs du client, les caractéristiques du design et les caractéristiques du produit. La programmation multicritère sera utilisée pour optimiser les maisons de la qualité et du déploiement du produit. Le modèle mathématique est programmé dans le langage de programmation mathématique AMPLPlus et le solveur MINOS 5.5 est utilisé comme outil d'optimisation numérique.

Au chapitre 2, nous présentons le concept du DFQ, sa structure, son fonctionnement, ses avantages et sa problématique. Nous faisons l'historique du DFQ et nous effectuons une revue de littérature en relation avec les deux premières étapes de l'approche.

Le chapitre 3 présente les modèles mathématiques utilisés pour optimiser la première et la deuxième maison du DFQ de façon séquentielle et simultanée. Un exemple numérique illustre les solutions d'optimisation des deux modèles.

Finalement, afin de générer plusieurs solutions admissibles pour le décideur, nous développons un modèle basé sur l'approche interactive multicritère. L'exemple numérique du chapitre 3 est résolu avec cette approche.

Nous concluons ce travail en comparant les solutions obtenues avec les trois modèles mathématiques explorés dans le mémoire en discutant les avantages et les inconvénients de chacun.

CHAPITRE 2

DESCRIPTION GÉNÉRALE DU DFQ ET REVUE DE LA LITTÉRATURE

Dans ce chapitre nous présentons la description du déploiement de la fonction qualité (DFQ). Ensuite, nous expliquons la problématique du développement des produits. Enfin nous faisons une revue de littérature pour la première et deuxième étape du DFQ.

2.1 Description du déploiement de la fonction qualité (DFQ)

Le DFQ (en anglais *Quality Function Deployment, QFD*) est un outil qui organise le développement d'un produit ou d'un service en y intégrant de façon systématique les attributs, exigences ou besoins des clients (AC) et qui garantit la qualité à chaque étape de la conception.

L'approche fait intervenir une équipe multidisciplinaire pour traduire les attributs du client en caractéristiques de conception et de design. Nous nous servons du DFQ aussi bien pour concevoir de nouveaux produits ou services que pour améliorer les produits existants. La figure 2.1 montre les éléments du DFQ.

La méthodologie DFQ a été développée au Japon en 1967 par Akao. Le premier article sur le sujet a été publié en 1972 dans la revue *Standardisation and Quality Control* sous le titre "*Development and quality assurance of new products: a system of deployment of quality*". En 1973, la première application du DFQ a été faite dans le chantier naval de Kobe des Industries Mitsubishi.

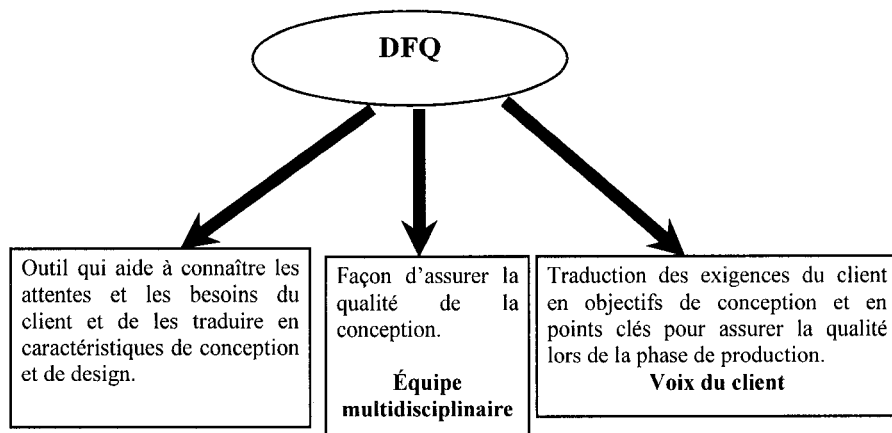


Figure 2.1 Éléments du déploiement de la fonction qualité

En 1974, Akao créa au sein de la société *Japanese Society for Quality Control (JSQC)* une commission de recherche sur le DFQ. Mizuno et Akao ont écrit le premier livre sur le DFQ, qui a été publié par la société *Union of Japanese Science and Engineering (JUSE)* en 1978.

En 1983, le DFQ a été introduit aux États-Unis à travers l'article publié par Kogure et Akao dans *Quality Progress*, revue de l'*American Society for Quality Control (ASQC)*. Clausing, en 1984, introduit le DFQ chez Ford Motor Company. Depuis ce temps, l'*American Supplier Institute (ASI)* donne des cours sur le sujet aux fournisseurs et sous-traitants de Ford.

En 1987, King a publié *Better design in half the time*, premier livre consacré au DFQ aux États-Unis, paru chez *GOAL/QPC*. On y décrit le DFQ comme une « matrice des matrices ». En 1988, Clausing et Hauser publient l'article "*The House of Quality*" dans la revue *Harvard Business Review*, qui est une des réimpressions le plus fréquemment demandées pour publication. En 1989 sous le patronage de l'ASI et de GOAL/QPC, un premier symposium annuel du DFQ a eu lieu.

En 1991, Clausing et Pugh dans la conférence international du design et de la productivité présentent *Enhanced Quality Function Deployment* qui est une amélioration du DFQ original.

Les deux sources principales de diffusion et formation du DFQ au Amérique du Nord sont le GOAL/QPC et l'ASI. La première préconise une approche de matrices multiples ou "matrice des matrices", développée par Akao. La deuxième utilise l'approche en quatre matrices développée par Macabe, un ingénieur japonais spécialisé en fiabilité, cette variante est connue sous le nom de modèle de Clausing.

Depuis son avènement, le DFQ a été utilisé par plusieurs entreprises dans le monde telles que AT&T, Digital Equipment, Eastman Kodak, General Motors, Goodyear, Hewlett Packard, Motorola, NASA, NCR, Polaroid, Procter and Gamble et Xerox.

Les avantages de l'utilisation du DFQ selon plusieurs auteurs (Akao, 1993; Kusiak, 1999; Prasad, 1998; Vonderembse et Raghunathan, 1997; Zaidi, 1990) sont les suivantes:

- ◆ réponse précise aux besoins spécifiques des clients ;
- ◆ réduction des problèmes aux premiers stades du développement des produits;
- ◆ diminution de la durée de la phase du développement des produits;
- ◆ augmentation de la satisfaction du client;
- ◆ diminution du coût de production;
- ◆ augmentation de la qualité du produit;
- ◆ réduction du nombre de défauts dès la conception.

Pour plus de détails sur le DFQ, on peut consulter les travaux d'Akao (1993), de Cohen (1995), de Kim (1997-98), de Prasad (1998) et de Shillito (1994).

2.1.1 Les étapes du DFQ

L'outil de base de l'approche DFQ est la maison de la qualité (MQ), qui consiste à développer le concept entier d'un nouveau produit en partant des besoins des clients et en déterminant les caractéristiques à lui donner. La MQ est un diagramme matriciel constitué de neuf parties appelées « chambres » (Cohen, 1995; Kim, 1997-98), représenté à la figure 2.2.

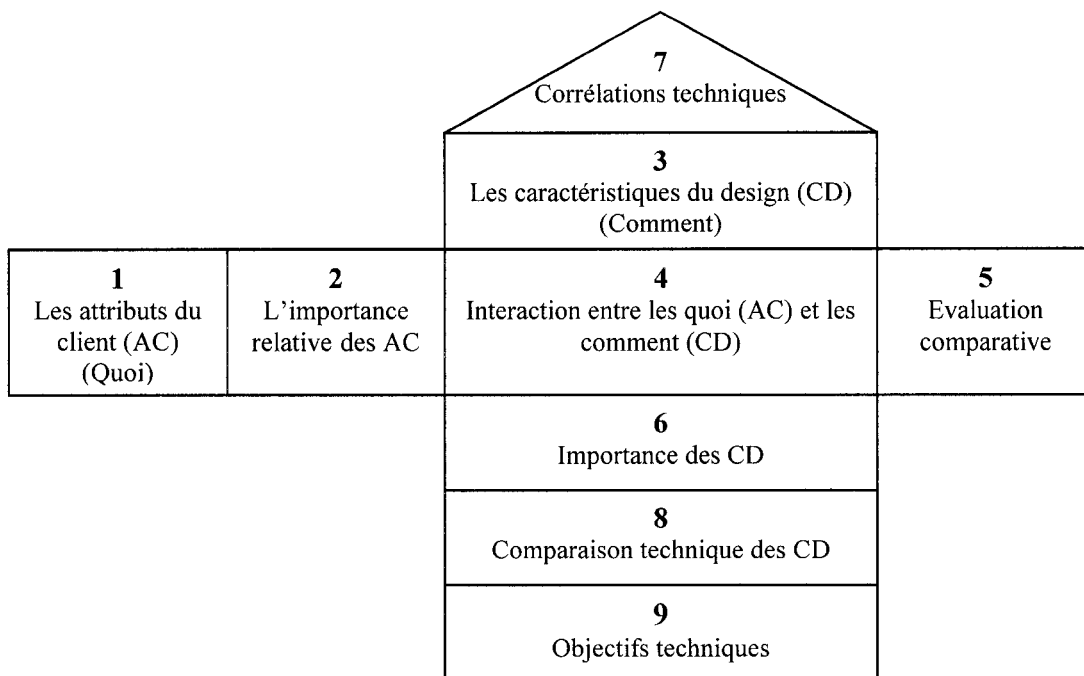


Figure 2.2 Chambres de la maison de la qualité

La première chambre contient une liste des *attributs du client (AC)* les "quoi" pour le produit ou service à l'étude. Cette liste est aussi appelée *voix ou besoins du client* ou encore *exigences de qualité*. Pour l'obtenir, on peut utiliser divers moyens : entrevues téléphoniques, questionnaires acheminés par la poste ou par courriel, groupes de discussion ou étude de marché. Pour organiser les renseignements recueillis, on utilise un diagramme d'affinités ou un diagramme d'arbre. Le résultat de cette étape donne une liste de 20 à 30 attributs qui sont exprimés fidèlement dans les termes du client.

La deuxième chambre exprime l'importance relative des attributs du client. Généralement on utilise une échelle de 1 (peu important) à 10 (très important) pour coter les attributs. Pour obtenir ces valeurs, on procède par entrevues ou par questionnaires.

La troisième chambre présente les *caractéristiques du design (CD)* les "comment", aussi appelées *caractéristiques techniques, exigences techniques, exigences du design* ou *attentes du produit*. Dans cette étape, on reformule ou on traduit les attentes du client dans un langage technique et objectif. On détermine également la fonction du produit, ses caractéristiques (taille, apparence, poids, goût, ergonomie, etc.) et ses coûts (coût de distribution, coût de fabrication, coût de service). Finalement on classe les caractéristiques en groupes.

La quatrième chambre établit l'interrelation entre les attributs du client "quoi" et les caractéristiques du design "comment". Cette étape traduit à quel point chaque caractéristique du design affecte chaque attribut du client. L'interrelation se fait selon une échelle de 0 à 9 tandis que la représentation des valeurs numériques se fait souvent à l'aide des symboles 1 (faible, Δ), 3 (moyen, $\bigcirc$) et 9 (fort, $\odot$).

La cinquième chambre est consacrée à l'évaluation comparative des attributs du client. À cette étape, on quantifie et on détermine la perception des clients, selon leurs exigences par rapport à un ou plusieurs produits existants. Pour y parvenir, on utilise des questionnaires ou des groupes de discussion.

La sixième chambre indique l'importance des caractéristiques du design. À cette étape, on évalue le niveau de contribution de chacune des CD. Pour ce faire, il faut multiplier la valeur de l'importance relative d'un attribut (chambre 2) par la valeur de l'interaction entre les AC et les CD (chambre 4). Ensuite, il faut additionner les valeurs identifiées pour chaque AC afin de déterminer son importance en fonction des CD.

La septième chambre définit l'interaction entre les caractéristiques du design. Fréquemment, un changement dans une caractéristique produit un effet négatif ou positif sur une autre caractéristique. Généralement on évalue par jugement les interactions ou corrélations entre toutes les paires de caractéristiques du design. Pour le faire, on emploie l'échelle suivante 0 (négatif fort, ☒), 1 (négatif moyen, Δ), 3 (positif moyen, O) et 9 (positif fort, ○).

La huitième chambre consiste en une comparaison technique des caractéristiques du design. À cette étape, on évalue le rendement du produit en comparaison avec les principaux concurrents (*benchmarking*).

La neuvième chambre établit les objectifs recherchés pour chaque caractéristique du design. À cette étape, on détermine la valeur cible pour chacune de ces caractéristiques.

L'approche DFQ utilise quatre matrices ou maisons de la qualité (MQ) reliées. Toutes les maisons se définissent par les 9 chambres. Dans le cadre de ce mémoire, nous utilisons le modèle à quatre matrices de Clausing (voir la section 2.1).

Dans le modèle du Clausing, la première étape ou maison de la qualité (MQ1) traduit les attributs du client (AC) en caractéristiques de design (CD). Son objectif est d'établir l'ensemble des attributs du client et l'ensemble des caractéristiques du design.

La deuxième étape ou déploiement du produit (MQ2) relie les caractéristiques de design (CD) aux caractéristiques du produit (CP). Son objectif est de déterminer les pièces critiques et les caractéristiques des pièces.

La troisième étape, appelée planification du procédé (MQ3) traduit les caractéristiques du produit (CP) obtenues à l'étape antérieure en procédés de fabrication (PF). Son objectif est d'identifier les processus de fabrication, la séquence des opérations (gamme d'usinage ou d'assemblage), les caractéristiques des outils requis et les paramètres des processus à employer pendant l'étape de fabrication.

La quatrième étape ou planification de la production (MQ4) traduit les procédés de fabrication (PF) en opérations de contrôle (OC). Son objectif est de déterminer les caractéristiques du plan de contrôle de production, du plan de contrôle qualité, du plan de contrôle de la maintenance ou tout autre plan d'amélioration du poste de travail. La figure 2.3 illustre le lien entre chaque maison.

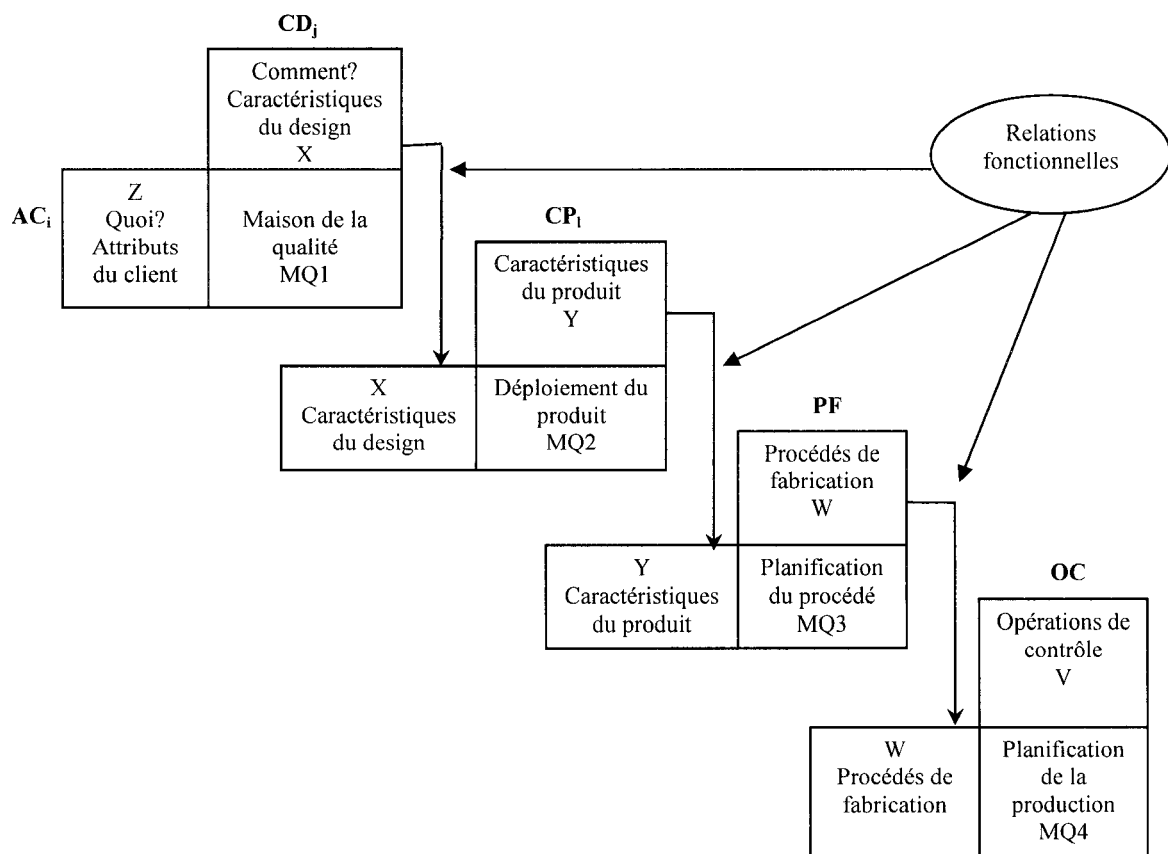


Figure 2.3 Cascade des quatre étapes du DFQ

2.2 Problématique

Actuellement, l'optimisation des étapes du DFQ traite chaque maison séparément et de façon séquentielle. Les extrants ou sorties d'une maison deviennent les intrants ou entrées de la maison suivante. Cette approche, qu'on a appelée séquentielle, donne vraisemblablement des solutions sous-optimales. De plus, il peut exister une rétroaction entre l'optimisation des différentes maisons, qui n'est pas prise en compte dans l'approche séquentielle. La figure 2.4 illustre cette problématique.

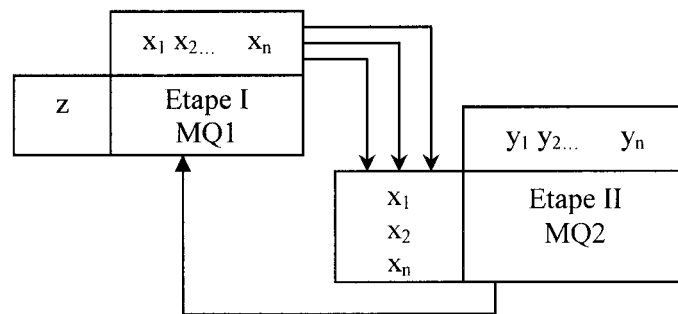


Figure 2.4 Problématique relative aux deux premières étapes du DFQ

Pour les raisons citées antérieurement, nous explorons, dans cette recherche, l'avantage d'optimiser simultanément les maisons du DFQ. Cependant, pour réduire la complexité du travail, nous nous limitons à développer l'optimisation des maisons de la qualité (MQ1) et du déploiement du produit (MQ2).

Les deux objectifs principaux de notre recherche sont de :

- ◆ Mettre au point une démarche permettant d'optimiser simultanément les deux premières étapes du DFQ.
- ◆ Développer et tester un modèle permettant d'obtenir les différentes solutions admissibles qui facilitent le choix du décideur.

2.3 Modèles de la maison de qualité (MQ1)

Dans cette section nous présentons la revue de littérature des différents modèles mathématiques de la première étape du DFQ. Pour chaque modèle, nous relevons les caractéristiques, la méthode de programmation (linéaire, entière, non linéaire) utilisée pour la résolution, le critère d'optimisation de la fonction objectif (maximisation ou minimisation) et les chambres de la maison de la qualité utilisées.

Dans l'annexe I, nous présentons la formulation mathématique intégrale des modèles de la première étape du DFQ.

2.3.1 Modèle de Dawson et Askin

Le modèle de Dawson et Askin (1991) est un programme mathématique non linéaire qui détermine les caractéristiques optimales du design (CD) qui maximisent la satisfaction du client. La fonction objectif vise à maximiser la satisfaction du client mesurée par la combinaison linéaire des fonctions des attributs du client (AC).

Le modèle utilise le concept de la fonction de valeur de client (V_j) où chaque V_j modélise implicitement une certaine combinaison des préférences du client et capture objectivement ses désirs. L'analyse de régression est utilisée pour construire la fonction V_j . Le modèle exploite les chambres 1, 2, 3, 4, 7, 8 et 9 de la maison de la qualité, comme le montre la figure 2.5.

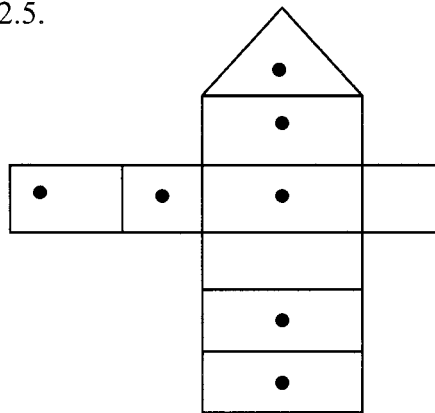


Figure 2.5 Chambres de la MQ1 utilisées dans le modèle de Dawson et Askin

2.3.2 Modèle de Kim

Le modèle de Kim (1997-98) utilise une formulation mathématique de programmation linéaire en nombres entiers pour déterminer les valeurs cibles des caractéristiques du design (CD). Le modèle permet à des concepteurs de concilier les divers attributs du client (AC) pour trouver le meilleur compromis. La fonction objectif vise à maximiser la satisfaction globale du client. Le modèle utilise les chambres 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 et 9, comme l'illustre la figure 2.6.

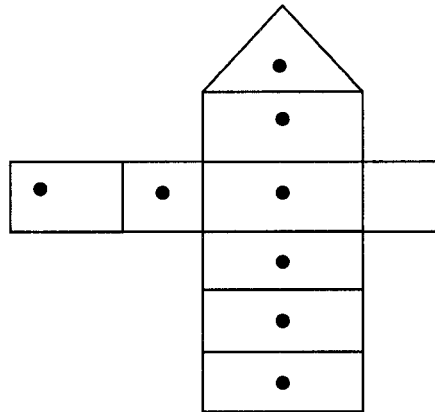


Figure 2.6 Chambres de la MQ1 utilisées dans le modèle de Kim

2.3.3 Modèle de Wasserman

Wasserman (1993) propose un modèle linéaire pour obtenir le degré de priorité des caractéristiques du design (CD) qui maximisent la satisfaction du client. Le modèle utilise le concept de normalisation du déploiement qui explique les dépendances qui peuvent exister entre les différentes caractéristiques du design. La fonction objectif vise à maximiser la satisfaction du client. Le modèle utilise les chambres 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 et 9 (voir figure 2.7).

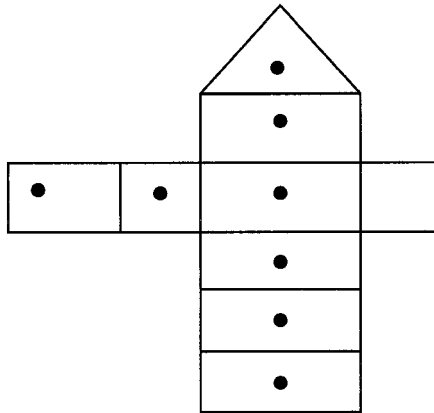


Figure 2.7 Chambres de la MQ1 utilisées dans le modèle de Wasserman

2.3.4 Modèle de Zhou

Zhou (1998) propose un programme mathématique mixte en nombres entiers pour obtenir la priorité des caractéristiques du design (CD) d'un procédé à rang flou (*fuzzy ranking procedure*). La fonction objectif vise à maximiser la satisfaction du client. Le modèle utilise les chambres 1, 2, 3, 4, 8 et 9 (voir figure 2.8).

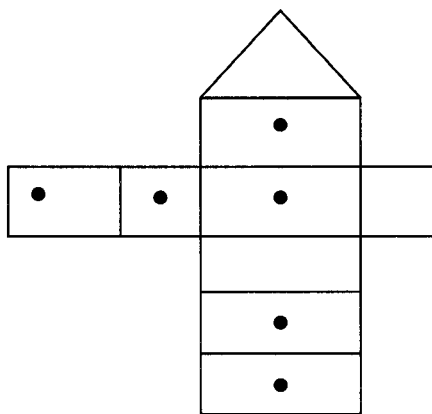


Figure 2.8 Chambres de la MQ1 utilisées dans le modèle de Zhou

2.4 Modèles de la maison du déploiement du produit (MQ2)

Nous présentons les modèles mathématiques de la deuxième étape du DFQ. Pour chaque modèle nous donnons les caractéristiques, la méthode de programmation (linéaire, entière, non linéaire) utilisée pour le résoudre, le critère d'optimisation de la fonction objectif (maximisation ou minimisation) et les chambres de la maison utilisées dans la formulation.

Dans l'annexe II, nous présentons la formulation mathématique intégrale des modèles de la deuxième étape du DFQ.

2.4.1 Modèle de Ames, MacDonald, Mattuci, Szonyi et Hawkins

Ames *et al* (1997) proposent un modèle non linéaire qui exploite la fonction quadratique de perte de qualité et la surface de réponse pour optimiser un produit à multiple critères ou variables de réponse. Le but du modèle est d'obtenir un produit de qualité supérieure. La surface de réponse est trouvée à l'aide des polynômes obtenus expérimentalement, qui peuvent être combinés avec une fonction simple de perte. Le critère d'optimisation vise à minimiser la fonction de perte en fonction des entrées du processus. Le modèle utilise les chambres 1, 3, 4, 7 et 9 de la MQ2 (voir figure 2.9).

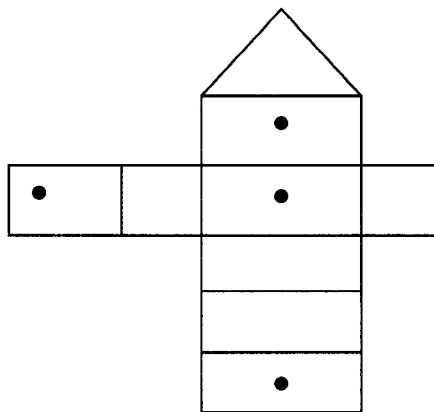


Figure 2.9 Chambres de la MQ2 utilisées dans le modèle de Ames *et al*

2.4.2 Modèle de Artilles-León

Artilles-León (1996-97) propose un modèle non linéaire pour résoudre le problème d'optimisation à plusieurs variables de réponse. Cette approche est basée sur l'idée de la fonction normalisée de perte et intègre les limites de spécification avec la fonction perte de qualité de Taguchi. Le critère d'optimisation vise à minimiser la fonction de perte. Le modèle utilise les chambres 1, 3, 4, 8 et 9 de la MQ2 (voir figure 2.10).

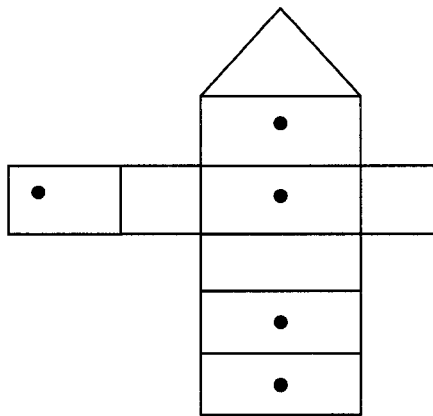


Figure 2.10 Chambres de la MQ2 utilisées dans le modèle de Artilles-León

2.4.3 Modèle de Kapur et Cho

Le modèle de Kapur et Cho (1996) développe une fonction de perte exprimée en fonction de la variance et l'écart type par rapport à la valeur cible. Cette approche exploite deux formulations mathématiques. La première optimise un problème pour une seule pièce et la deuxième pour une distribution de pièces. Cette dernière inclut le coût par unité inspectée et par unité de rebut. Le critère d'optimisation vise à minimiser la fonction de perte. Le modèle utilise les chambres 1, 3, 4 et 9 de la MQ2 comme le montre la figure 2.11.

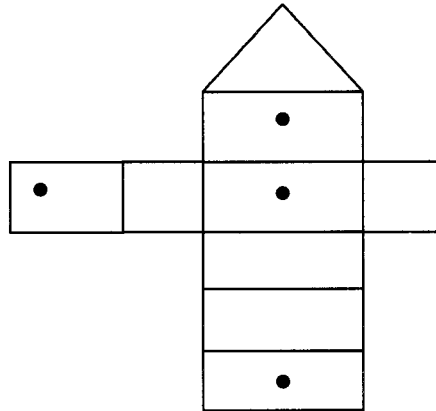


Figure 2.11 Chambres de la MQ2 utilisées dans le modèle de Kapur et Cho

2.4.4 Modèle de Krauss, Benneyan et Mackertich

Le modèle de Krauss *et al* (2000) présente une approche qui intègre la programmation mathématique et le design des expériences afin d'identifier les configurations optimales (*optimal settings*) des facteurs de contrôle, qui sont sujets à la borne supérieure du pourcentage de non-conformités ou au coût total. Cette approche permet également de réaliser une analyse de sensibilité dans le cas où les estimations exactes des coûts ne sont pas faciles à obtenir. La fonction objectif vise à minimiser le coût total prévu (coût de la configuration des facteurs et coût prévu de non-conformité). Le modèle utilise les chambres 1, 3, 4, 8 et 9 de la MQ2 (voir figure 2.12).

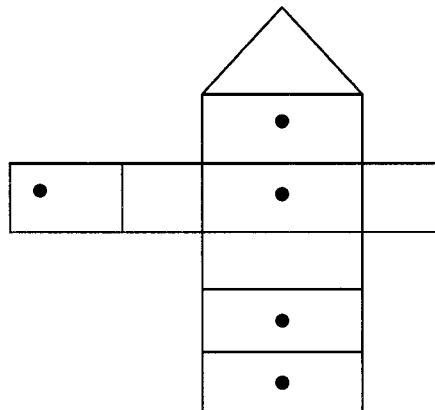


Figure 2.12 Chambres de la MQ2 utilisées dans le modèle de Krauss *et al*

2.4.5 Modèle de Pignatiello

Pignatiello (1993) propose une approche qui utilise la fonction quadratique de perte dans la résolution de problèmes à multiple caractéristiques de qualité. La fonction de perte est exprimée en termes de la variance et l'écart type par rapport à la valeur cible. Le modèle est applicable seulement quand une valeur cible limitée est établie pour chaque caractéristique de qualité. Le critère d'optimisation vise à minimiser la fonction de perte. Le modèle utilise les chambres 1, 3, 4 et 9 de la MQ2, comme l'illustre la figure 2.13.

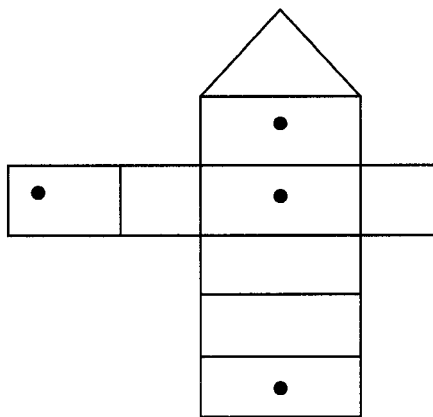


Figure 2.13 Chambres de la MQ2 utilisées dans le modèle de Pignatiello

2.3.6 Modèle de Ribeiro, Fogliatto et Ten Caten

Le modèle de Ribeiro *et al* (2000-01) utilise la fonction perte de qualité de Taguchi pour formuler un programme non linéaire qui considère comme critères d'optimalité le coût de fabrication, la distance entre la réponse et la valeur cible, la variance, la sensibilité aux fluctuations dans les configurations des facteurs de contrôle, les matières premières et le coût d'énergie. La fonction objectif vise à minimiser les coûts dus à une perte de qualité ainsi que le coût de fabrication. Le modèle utilise les chambres 1, 2, 3, 4, 6 et 9 de la MQ2 comme le montre la figure 2.14.

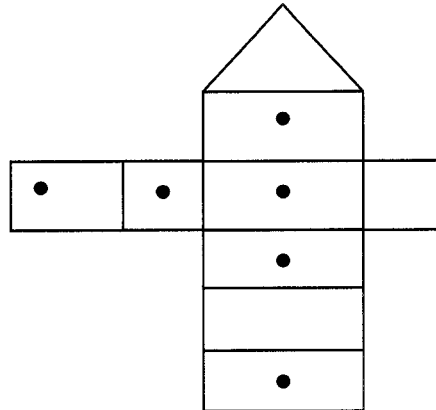


Figure 2.14 Chambres de la MQ2 utilisées dans le modèle de Ribeiro *et al*

Dans les pages qui précédent, nous avons présenté plusieurs modèles qui optimisent la première ou la deuxième étape du DFQ. Cependant, aucun des modèles n'optimise les deux étapes simultanément. Dans le chapitre qui suit, nous développons deux modèles mathématiques pour optimiser les deux premières maisons de façon séquentielle autant que simultanée.

CHAPITRE 3

LES MODÈLES MATHÉMATIQUES SÉQUENTIEL ET SIMULTANÉ

Dans ce chapitre nous présentons les modèles mathématiques utilisés pour optimiser les deux premières maisons du DFQ. D'abord nous présentons le modèle développé pour les optimiser séquentiellement. Ensuite, nous présentons le modèle qui les optimise simultanément. Chacune de ces deux approches est constituée des modèles mathématiques de la première et deuxième maisons. Nous concluons avec un exemple numérique qui compare les solutions obtenues avec les deux approches.

3.1 Nomenclature des modèles

Pour la modélisation des deux premières étapes du DFQ, nous avons utilisé les variables ci-dessous.

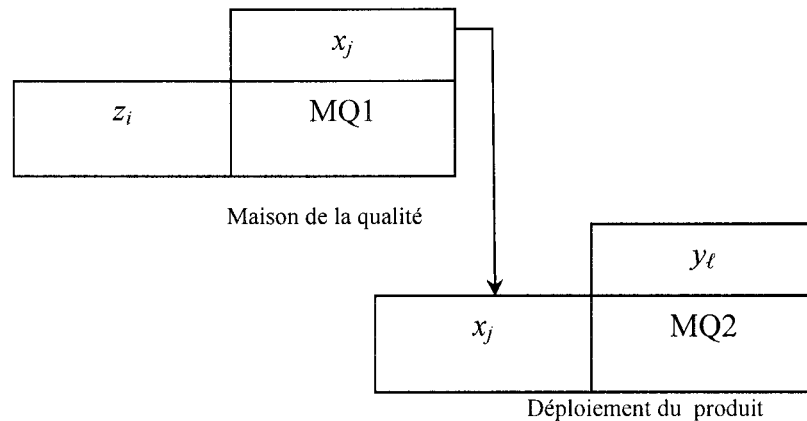


Figure 3.1 Variables des modèles

z_i : Attributs ou exigences du client (AC_i)

$i = 1, \dots, m$

x_j : Caractéristiques du design (CD_j)

$j = 1, \dots, n$

y_ℓ : Caractéristiques du produit (CP_ℓ)

$\ell = 1, \dots, L$

3.2 Modèle mathématique séquentiel (MQ1 et MQ2)

Les modèles mathématiques séquentiel autant que simultané sont constitués des modèles mathématiques de la première (MQ1) et deuxième (MQ2) maisons. Pour cette raison, nous commençons cette section en expliquant les éléments des modèles MQ1 et MQ2.

3.2.1 Modèle mathématique de la maison de la qualité (MQ1/HOQ1)

La première maison du DFQ établit les attributs ou exigences des clients, notés AC et sa variable correspondante z_i (intrants du MQ1) en fonction des caractéristiques du design, notées CD et sa variable correspondante x_j (extrants du MQ1), comme l'illustre la figure 3.1. Son objectif est de maximiser la satisfaction du client.

Le modèle mathématique développé ici est basé sur la formulation de Kim (1997-98), qui optimise la satisfaction du client calibrée entre deux valeurs -1 (aucune satisfaction) et 1 (satisfaction complète). Le modèle travaille avec trois ensembles des contraintes: l'intervalle de changement des CD, l'association entre les CD et la contrainte de comptabilité. Pour une explication plus détaillée du modèle consulter la section 2.3.2

Les variables de décisions du modèle sont Δx_j correspondant au changement dans la valeur des CD_j et qui est défini comme :

$$\Delta x_j = \frac{x_j - x_j^0}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}. \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

Les paramètres du modèle sont :

w_i : importance relative des AC_i $0 \leq w_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ $i = 1, \dots, m$

f_{ij} : coefficients de rapport entre AC_i et CD_j $\sum_{j=1}^n |f_{ij}| = 1$ $i = 1, \dots, m$

x_j : valeur cible des CD_j

x_j^0 : valeur actuelle des CD_j

x_j^{min} : valeur minimum possible des CD_j

x_j^{max} : valeur maximum possible des CD_j

Fonction objectif

L'objectif est de maximiser la satisfaction globale du client en changeant les valeurs courantes des CD_j . Pour la formulation de la fonction objectif, nous utiliserons une fonction de valeurs multiattributs (*multiattribute value function*, *MAV*). La fonction MAV peut agréger le niveau individuel de satisfaction (les z_i) dans le niveau global de satisfaction d'une manière additive, multiplicative ou multilinéaire selon la préférence du client. L'équation 3.2 montre une fonction additive MAV :

$$V(z_1, z_2, \dots, z_m) = \sum_{i=1}^m w_i V_i(z_i). \quad (3.2)$$

où

$V_i(z_i)$: changement dans le niveau individuel de satisfaction du client relativement aux AC_i . Les valeurs sont localisées entre -1 (pire niveau) et 1 (meilleur niveau) de AC_i .

w_i : importance relative des AC_i

$V(z_1, z_2, \dots, z_m)$: fonction additive des valeurs multiattributs (MAV) qui dépend des niveaux de satisfaction du client $(z_1, z_2, \dots, z_m)$.

Si nous supposons que le changement des CD_j affecte $V_i(z_i)$ d'une manière linéaire, la fonction $V_i(z_i)$ peut être exprimée comme:

$$V_i(z_i) = \sum_{j=1}^n f_{ij} \Delta x_j. \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

où

Δx_j : changement dans la valeur des CD_j , ces valeurs étant situées entre -1 et +1.

f_{ij} : coefficients des rapports entre AC_i et CD_j .

Par la combinaison des équations 3.2 et 3.3, la fonction objectif résultante est:

$$\max_{\Delta x} Z = \sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^n f_{ij} \Delta x_j. \quad (3.4)$$

La valeur de Z varie de -1 (pire cas) à +1 (meilleur cas). Dans ce dernier cas, la satisfaction du client est de 100 % ce qui se réalise seulement si $V_i(z_i) = 1$ pour tous les i . La valeur positive ou négative de Z indique une amélioration ou une réduction, respectivement, dans la satisfaction du client suite aux changements de niveau des CD . Donc, nous devrions prévoir une valeur positive de Z comme valeur optimale de la fonction objectif du modèle.

Contraintes

Intervalle de changement des CD

Les effets du mesurage dans CD_j , qui se produisent en raison des différentes unités de mesure, sont enlevés dans l'équation 3.1. Cette équation donne, après un changement de variable, les déplacements permis.

Les variations dans les valeurs des caractéristiques du design (Δx_j) peuvent se situer entre -1 et +1. Cela dépend toutefois du niveau courant des $CD_j(x_j^0)$. La valeur de Δx_j serait égale à 1 si la valeur de CD_j était placée à sa valeur minimum ($x_j^0 = x_j^{min}$), et il y aurait un changement à sa valeur maximum ($x_j = x_j^{max}$) et -1 dans le cas contraire.

Finalement la largeur de l'intervalle de Δx_j (la différence entre la borne supérieure et la borne inférieure de Δx_j dans l'équation 3.5) est toujours égale à 1.

$$\left(\frac{x_j^{min} - x_j^0}{x_j^{max} - x_j^{min}} \right) \leq \Delta x_j \leq \left(\frac{x_j^{max} - x_j^0}{x_j^{max} - x_j^{min}} \right) \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

Association entre les CD

Pour le développement de cette contrainte, il existe deux possibilités qui dépendent du type d'information existant. Quand il est possible de réaliser une planification d'expériences (*design of experiments*), nous pouvons établir les équations de régression qui reflètent la relation entre les CD_j en utilisant l'analyse de la variance (ANOVA). Quand une telle expérience n'est pas possible, nous pouvons recourir à des jugements subjectifs basés sur le rapport fourni par les concepteurs ou les ingénieurs. Dans ce dernier cas, la contrainte s'écrit :

$$h_{j1} \Delta x_{j2} \leq \Delta x_{j1} \leq h_{j2} \Delta x_{j2} \quad j_1 \neq j_2 \text{ pour } CD_{j1} \text{ et } CD_{j2}, \quad (3.6)$$

où

h_{j1} et h_{j2} : constantes qui dénotent la force de l'association entre CD_{j1} et CD_{j2} .

Cette contrainte montre le niveau de changement qu'une unité d'un CD_j peut causer par rapport à une autre. Le sens du changement de CD_{j1} relatif à CD_{j2} est déterminé par le signe des constantes h_{j1} et h_{j2} .

Contrainte de comptabilité

Cette contrainte est utilisée pour obtenir la valeur optimale des CD_j qui donne l'augmentation maximale de la satisfaction globale du client :

$$x_j = x_j^0 + \Delta x_j (x_j^{\max} - x_j^{\min}) \quad (3.7)$$

Formulation du modèle MQ1 (basé sur le modèle de Kim)

$$\max_{\Delta x} = \sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^n f_{ij} \Delta x_j \quad (3.8)$$

sujet à :

$$\left(\frac{x_j^{\min} - x_j^0}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \right) \leq \Delta x_j \leq \left(\frac{x_j^{\max} - x_j^0}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \right) \quad j = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

$$h_{j1} \Delta x_{j2} \leq \Delta x_{j1} \leq h_{j2} \Delta x_{j2} \quad j_1 \neq j_2 \text{ pour } CD_{j1} \text{ et } CD_{j2} \quad (3.10)$$

$$x_j = x_j^0 + \Delta x_j (x_j^{\max} - x_j^{\min}) \quad (3.11)$$

La solution optimale du problème donne comme résultat Δx_j^* qui dénote le changement optimal de CD_j en unités de $(x_j^{\max} - x_j^{\min})$ comme défini dans l'équation (3.1). Finalement la valeur optimale des CD_j qui donne l'augmentation maximale de la satisfaction globale du client est:

$$x_j^* = x_j^0 + \Delta x_j^* (x_j^{\max} - x_j^{\min}). \quad (3.12)$$

La valeur obtenue x_j^* sera utilisée comme la valeur cible T_j dans l'étape suivante (deuxième maison).

3.2.2 Modèle mathématique du déploiement du design (MQ2/HOQ2)

La deuxième phase du DFQ travaille avec les caractéristiques optimales du design, x_j^* (intrants du MQ2) en fonction des caractéristiques du produit, notées CP , variable y_ℓ (extrants du MQ2), comme l'illustre la figure 3.1.

Son objectif est de minimiser le coût de conception d'un produit donné par rapport à la valeur à atteindre des CD_j obtenues à l'issue de la première étape et notée $T_j = x_j^*$. Le modèle a quatre contraintes: l'équation de prédiction de la moyenne, l'équation de prédiction de la variance, les limites inférieures et supérieures de spécification, et les niveaux des facteurs de contrôle.

Les variables de décision du modèle sont y_ℓ , qui représente la caractéristique du produit.

Les paramètres du modèle sont :

LIS_j : limite inférieure de spécification des CD_j .

LSS_j : limite supérieure de spécification des CD_j .

Pour optimiser le coût de conception, nous avons utilisé le *design robuste*, approche développée par Taguchi dans les années 80. Kim et Cho (2002) définissent, quant à eux, le design robuste comme une méthode rentable pour déterminer les arrangements optimaux des facteurs de contrôle en utilisant des techniques d'optimisation et la planification d'expériences afin de réduire les coûts et améliorer la qualité.

Un concept clé dans le design robuste est la fonction de perte de qualité, qui considère que tout écart autour de la valeur nominale d'une caractéristique d'un produit se traduit par une baisse de qualité générant une perte pour l'entreprise et pour la société. Cette perte augmente en fonction du carré de la distance entre la valeur moyenne et la cible, comme l'illustre la figure 3.2.

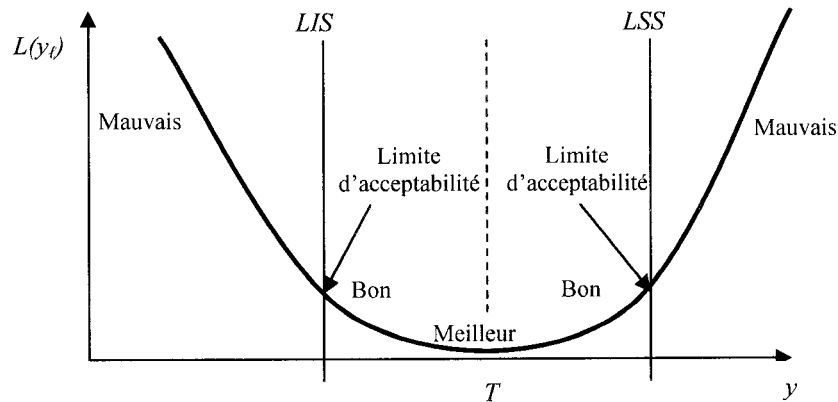


Figure 3.2 Niveaux de conformité selon la fonction perte de qualité

Dans la figure précédente nous pouvons observer que le niveau d'acceptation d'un produit se situe entre les limites inférieures et supérieures de spécification, LIS et LSS , et augmente s'il y a une diminution de l'écart entre la valeur moyenne de la caractéristique de qualité (CQ) et la valeur cible. Pour approfondir la notion de design robuste, on peut consulter les travaux de Baillargeon (1993), Fowlkes et Creveling (1995), Stuart (1993) et Taguchi (1986).

Fonction objectif

La fonction objectif vise à minimiser le coût de conception. Pour arriver à ce but nous divisons la fonction objectif en deux parties.

Dans la première partie, on utilise la fonction perte de qualité de Taguchi (*Taguchi loss function*) ($L(y_1, y_2, \dots, y_\ell) = k_{lj}(\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) - T_j)^2$), pour quantifier la valeur économique de la perte attribuable à un écart entre la valeur de la caractéristique de la qualité ou moyenne $\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell)$ et la valeur nominale ou valeur cible T_j , pondérée par un coefficient de perte k_{lj} .

Comme le modèle utilise plusieurs caractéristiques du design, nous utilisons une fonction multivariable de perte quadratique (*Multivariate quadratic loss function*).

Avec cette fonction nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^n k_{1j} [\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) - T_j]^2 \quad (3.13)$$

Dans la deuxième partie, on calcule toutes les pertes dues à la variabilité. On obtient ainsi la variance σ_j^2 et on la multiplie par un coefficient de perte k_{2j} .

$$\sum_{j=1}^n k_{2j} [\sigma_j^2(y_1, y_2, \dots, y_\ell)] \quad (3.14)$$

Finalement la fonction objectif résultante est :

$$\min_y \sum_{j=1}^n k_{1j} [\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) - T_j]^2 + \sum_{j=1}^n k_{2j} [\sigma_j^2(y_1, y_2, \dots, y_\ell)] \quad (3.15)$$

Contraintes

Équation de prédiction de la moyenne

Les équations de prédiction aident à trouver les combinaisons optimales dans le design d'un produit. Pour les obtenir nous avons deux possibilités : la première est l'utilisation d'une relation mathématique, basée sur la connaissance physique, chimique ou technologique des phénomènes, qui représente les caractéristiques du produit (par exemple, la loi de Kirchhoff, des lois des gaz et la loi d'Ohm).

Par contre quand la relation mathématique est inconnue, ce qui correspond à la deuxième possibilité, il est nécessaire d'établir un modèle reliant les variables basées sur les données observées. Ce type de modèle s'appelle modèle empirique, de régression ou équation de prédiction. Pour l'obtenir, nous utilisons la planification d'expériences

(Montgomery *et al*, 1998). L'équation 3.16 montre l'équation de prédiction de la moyenne obtenue à partir d'une relation mathématique inconnue :

$$\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) = F_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.16)$$

où

$F_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell)$: équations exprimant les moyennes des CD_j en fonction des CP_ℓ .

Équation de prédiction de la variance

Pour obtenir cette contrainte, nous utilisons la même procédure que celle utilisée pour trouver l'équation de prédiction de la moyenne. La contrainte résultante est :

$$\sigma_j^2(y_1, y_2, \dots, y_\ell) = H_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.17)$$

où

$H_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell)$: équations exprimant les variances des CD_j en fonction des CP_ℓ .

Limites supérieure et inférieure des spécifications

Les limites de spécifications peuvent être définies par les clients, les ingénieurs ou les concepteurs pour déterminer les caractéristiques optimales du produit. La théorie du contrôle statistique (*statistical quality control*) considère que la conformité d'un produit est satisfaisante (ou conforme) si la caractéristique de qualité se situe à l'intérieur des spécifications et qu'elle est non conforme si elle est à l'extérieur.

Dans le modèle du MQ2, nous considérons que l'équation de prédiction de la moyenne est la caractéristique de qualité à chercher et doit être entre les limites inférieure et supérieure des spécifications LIS_j et LSS_j :

$$LIS_j \leq \mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) \leq LSS_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.18)$$

Niveaux des facteurs de contrôle

Les facteurs de contrôle (*Controllable factors*) ou les caractéristiques du produit, y_ℓ , définis par Baillargeon (1993) comme les facteurs ou les paramètres qui permettent au produit ou procédé d'obtenir une caractéristique de qualité avec la plus faible dispersion possible, doivent être entre la valeur minimale et la valeur maximale de la variable de contrôle. Dans la nomenclature de la planification d'expériences, les niveaux qui peuvent atteindre les facteurs de contrôle sont situés entre -1 (valeur minimale) et +1 (valeur maximale).

$$-1 \leq y_\ell \leq 1, \quad \ell = 1, \dots, L, \quad (3.19)$$

Formulation du modèle MQ2

Le modèle mathématique de la deuxième étape de la DFQ est donné ci-dessous.

$$\min_y \sum_{j=1}^n k_{1j} [\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) - T_j]^2 + \sum_{j=1}^n k_{2j} [\sigma_j^2(y_1, y_2, \dots, y_\ell)] \quad (3.20)$$

sujet à :

$$\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) = F_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.21)$$

$$\sigma_j^2(y_1, y_2, \dots, y_\ell) = H_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.22)$$

$$LIS_j \leq \mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) \leq LSS_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.23)$$

$$-1 \leq y_\ell \leq 1 \quad \ell = 1, \dots, L \quad (3.24)$$

3.2.3 Processus de résolution du modèle mathématique séquentiel

La résolution du modèle séquentiel se fait en deux étapes. La première consiste à résoudre le programme linéaire de la MQ1, modélisé par les équations (3.8) à (3.12). La solution de cette étape donne les caractéristiques optimales du design CD_j , notées x_j^* , qui maximisent la satisfaction du client.

La deuxième étape consiste à résoudre le programme non linéaire de la MQ2, modélisé par les équations (3.20) à (3.24). Les valeurs cibles des CD_j , notées T_j , sont égales aux valeurs optimales des CD_j , notées x_j^* , trouvées dans la première étape, en d'autres termes, $T_j = x_j^*$. La solution de cette étape donne les caractéristiques optimales du produit CP_ℓ , notées y_ℓ , qui minimisent le coût de conception.

3.3 Modèle mathématique simultané (MQ1 + MQ2)

Pour obtenir un modèle mathématique qui optimise en même temps les deux premières maisons du DFQ, nous avons développé le modèle simultané. Ce modèle travaille avec trois ensembles de variables: les attributs des clients z_i , les caractéristiques du design x_j et les caractéristiques du produit y_ℓ , et sept ensembles de contraintes. Le modèle vise à maximiser la satisfaction du client et minimiser le coût de conception.

Fonction objectif

Le critère d'optimisation du modèle simultané doit maximiser la satisfaction du client (MQ1) et minimiser le coût de conception (MQ2). Comme la solution de la fonction objectif de chaque modèle a une échelle différente, la MQ1 donnant une solution en décimales et la MQ2 en milliers, nous avons multiplié la fonction objectif de la MQ1 par un facteur de poids α pour obtenir une échelle de mesure comparable pour les deux critères.

Dans la fonction objectif de la MQ2, nous avons transformé les paramètres des valeurs cibles T_j en variables x_j . On obtient :

$$\max_{\Delta x, y} \left[\alpha \left(\sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^n f_{ij} \Delta x_j \right) \right] - \left[\sum_{j=1}^n k_{1j} [\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) - x_j]^2 + \sum_{j=1}^n k_{2j} [\sigma_j^2(y_1, y_2, \dots, y_\ell)] \right] \quad (3.25)$$

Contraintes

Le modèle simultané a sept contraintes: l'intervalle de changement des CD, l'association entre les CD et la contrainte de comptabilité (équations (3.9) à (3.11)) ; l'équation de prédiction de la moyenne, l'équation de prédiction de la variance, les limites inférieure et supérieure des spécifications, et les niveaux des facteurs de contrôle (équations (3.21) à (3.24)).

Formulation du modèle simultané

$$\max_{\Delta x, y} \left[\alpha \left(\sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^n f_{ij} \Delta x_j \right) \right] - \left[\sum_{j=1}^n k_{1j} [\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) - x_j]^2 + \sum_{j=1}^n k_{2j} [\sigma_j^2(y_1, y_2, \dots, y_\ell)] \right] \quad (3.26)$$

sujet à :

$$\left(\frac{x_j^{\min} - x_j^0}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \right) \leq \Delta x_j \leq \left(\frac{x_j^{\max} - x_j^0}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \right) \quad j = 1, \dots, n \quad (3.27)$$

$$h_{j1} \Delta x_{j2} \leq \Delta x_{j1} \leq h_{j2} \Delta x_{j2} \quad j_1 \neq j_2 \quad \text{pour } CD_{j1} \text{ et } CD_{j2} \quad (3.28)$$

$$x_j = x_j^0 + \Delta x_j (x_j^{\max} - x_j^{\min}) \quad j = 1, \dots, n \quad (3.29)$$

$$\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) = F_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.30)$$

$$\sigma_j^2(y_1, y_2, \dots, y_\ell) = H_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.31)$$

$$LIS_j \leq \mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) \leq LSS_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.32)$$

$$-1 \leq y_\ell \leq 1 \quad \ell = 1, \dots, L \quad (3.33)$$

3.4 Exemple numérique

Pour illustrer notre approche, nous avons développé un exemple numérique conçu à partir de deux exemples de la littérature (Kim, 1997-98 ; Ribeiro *et al*, 2000-01). L'exemple fait intervenir quatre attributs du client (*AC*), six caractéristiques du design (*CD*) et cinq caractéristiques du produit (*CP*). Nous débutons par la formulation et l'optimisation du modèle séquentiel et nous terminons par le modèle simultané.

3.4.1 Modèle séquentiel résultant

La résolution du modèle séquentiel s'effectue en deux étapes (voir la section 3.2.3). La première étape (MQ1) est formulée par un programme linéaire et la deuxième (MQ2) par un programme non linéaire. La figure 3.3 présente la résolution du modèle séquentiel.

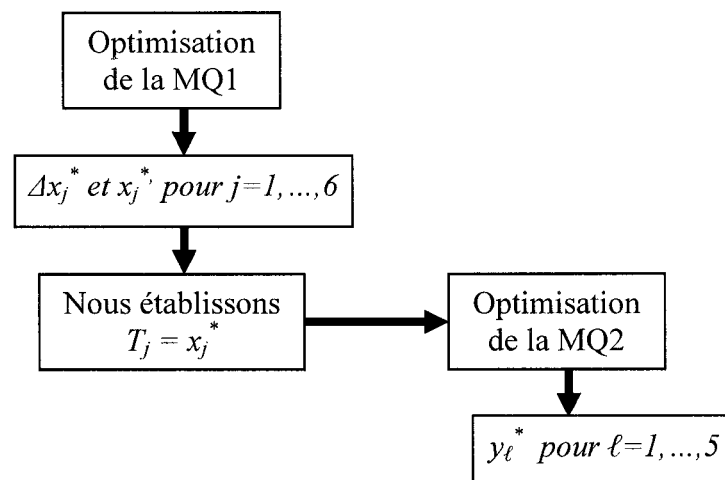


Figure 3.3 Processus de résolution du modèle séquentiel

Modèle MQ1 résultant

Pour formuler la fonction objectif et les contraintes de la MQ1, nous utilisons les données présentées à la figure 3.4, qui montre quatre attributs du client z_i , six caractéristiques du design x_j , ainsi que les niveaux minimum ($x_j^{\min}$), maximum ($x_j^{\max}$) et actuel (x_j^0) des caractéristiques du design. Ainsi les chiffres négatifs qui se montrent dans la partie central de la maison représentent l'existence d'un rapport négatif entre les attributs du client (AC) et les caractéristiques du produit (DC) (Kim, 1997-98).

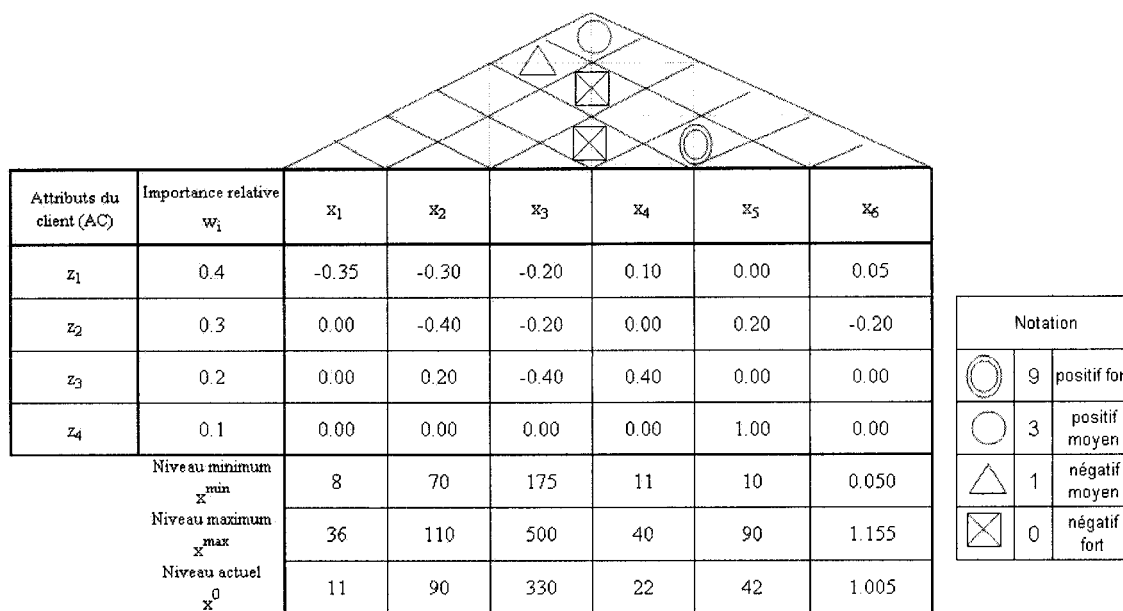


Figure 3.4 Maison de la qualité (source : adapté de Kim, 1997-98)

Fonction objectif de la MQ1

$$\begin{aligned}
 \max_{\Delta x} Z &= \sum_{i=1}^4 w_i \sum_{j=1}^6 f_{ij} \Delta x_j \\
 &= [0.4(-0.35)] \Delta x_1 \\
 &\quad + [0.4(-0.30) + 0.3(-0.40) + 0.2(0.2)] \Delta x_2 \\
 &\quad + [0.4(-0.20) + 0.3(-0.20) + 0.2(-0.40)] \Delta x_3 \\
 &\quad + [0.4(0.10) + 0.2(0.40)] \Delta x_4 \\
 &\quad + [0.3(0.20) + 0.1(1.00)] \Delta x_5 \\
 &\quad + [0.4(0.50) + 0.3(-0.20)] \Delta x_6 \\
 &= -0.14 \Delta x_1 - 0.2 \Delta x_2 - 0.22 \Delta x_3 + 0.12 \Delta x_4 + 0.16 \Delta x_5 - 0.04 \Delta x_6
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Contraintes

Intervalle de changement des CD

Pour calculer l'intervalle de changement pour la CD_1 , nous utilisons l'équation (3.5) et les niveaux minimum ($x_1^{\min}$), maximum ($x_1^{\max}$) et actuel (x_1^0), qui sont 8, 36 et 11 respectivement. Nous calculons la borne inférieure de Δx_1 comme $(8-11)/(36-8) = -0.107$, et la borne supérieure $(36-11)/(36-8) = 0.8928$. Finalement l'intervalle de changement du CD_1 donne :

$$-0.107 \leq \Delta x_1 \leq 0.8928 \quad (3.35)$$

De la même façon, nous obtenons l'intervalle de changement des autres CD.

$$-0.5 \leq \Delta x_2 \leq 0.5 \quad (3.36)$$

$$-0.476 \leq \Delta x_3 \leq 0.523 \quad (3.37)$$

$$-0.379 \leq \Delta x_4 \leq 0.620 \quad (3.38)$$

$$-0.4 \leq \Delta x_5 \leq 0.6 \quad (3.39)$$

$$-0.864 \leq \Delta x_6 \leq 0.135 \quad (3.40)$$

Association entre les CD

Pour obtenir la relation entre les caractéristiques du design, nous utilisons l'équation (3.6). Par exemple, la première caractéristique du design x_1 est associée avec la cinquième caractéristique du design x_5 , ce qui est représenté par le triangle (Δ) que l'on voit dans la partie supérieure de la figure 3.4. Nous prévoyons qu'une augmentation de dix unités de x_5 ($10/90 = 11.1\%$ d'incrément) causera une réduction dans x_1 de 3 unités approximativement (ce qui correspond à $3/(36-8) = 10.7\%$ de diminution). Par conséquent, l'association entre les deux CD est calculée comme :

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_5} = -\frac{0.107}{0.111} = -0.963 \quad \text{ou} \quad \Delta x_1 = -0.963 \Delta x_5 \quad (3.41)$$

De façon similaire, les associations entre les autres CD sont obtenues comme suit :

$$\Delta x_1 \leq 2 \Delta x_6 \quad (3.42)$$

$$-2.0 \Delta x_5 \leq \Delta x_2 \leq -1.0 \Delta x_5 \quad (3.43)$$

$$\Delta x_4 = 3.0 \Delta x_5 \quad (3.44)$$

$$\Delta x_3 \geq -0.75 \Delta x_4 \quad (3.45)$$

Contrainte de comptabilité

Les contraintes de comptabilité sont formulées en utilisant l'équation (3.7) et les niveaux minimum ($x_j^{\min}$), maximum ($x_j^{\max}$) et actuel (x_j^0) de chaque caractéristique du design. Prenons comme exemple la première contrainte de comptabilité avec les valeurs $x_1^0 = 11$, $x_1^{\min} = 8$ et $x_1^{\max} = 36$. La contrainte résultante, est montrée dans l'équation (3.46). De façon similaire, nous obtenons les autres contraintes.

$$x_1 = 11 + \Delta x_1 (36 - 8) \quad (3.46)$$

$$x_2 = 90 + \Delta x_2 (110 - 70) \quad (3.47)$$

$$x_3 = 330 + \Delta x_3 (500 - 175) \quad (3.48)$$

$$x_4 = 22 + \Delta x_4 (40 - 11) \quad (3.49)$$

$$x_5 = 42 + \Delta x_5 (90 - 10) \quad (3.50)$$

$$x_6 = 1.005 + \Delta x_6 (1.155 - 0.05) \quad (3.51)$$

La résolution du modèle MQ1 avec le logiciel AMPLPlus (Fourer *et al.*, 1993) et le solveur Minos 5.5 Murtagh et Saunders (1993) donnent les résultats présentés dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 Résultats de l'optimisation du modèle MQ1

		MQ1 max
Variables indépendantes	Δx_1	-0.103448
	Δx_2	-0.413793
	Δx_3	-0.465517
	Δx_4	0.62069
	Δx_5	0.206897
	Δx_6	-0.0517241
Variables Dépendantes	x_1	8.10345
	x_2	73.4483
	x_3	178.707
	x_4	40
	x_5	58.5517
	x_6	0.947845
Fonct obj		0.30931

L'optimisation résulte en une augmentation de la satisfaction du client de 30.93 %. En conséquence, les valeurs obtenues à partir des caractéristiques du design x_1 , x_2 et x_3 sont près de ces niveaux minimaux, la valeur x_4 est au niveau maximal, la valeur x_5 est plus grande que le niveau actuel, et la variable x_6 est un peu plus bas que le niveau actuel.

Pour obtenir la relation entre la première et la deuxième étape du DFQ, on convient que les caractéristiques du design x_j^* résultant de l'optimisation de la première maison deviennent les valeurs cibles T_j pour la deuxième maison.

Modèle MQ2 résultant

Nous obtenons la formulation de la fonction objectif et les contraintes de la maison du déploiement du produit (MQ2) en utilisant les données spécifiées dans la figure 3.5. L'exemple exploite six caractéristiques du design x_j et cinq caractéristiques du produit y_ℓ .

Chaque caractéristique du design est constituée pour la valeur cible et pour les limites inférieure et supérieure de spécification. De même, pour chaque caractéristique du produit, on considère la valeur actuelle, la valeur minimale et la valeur maximale.

Rappelons que les caractéristiques du design (x_j) obtenues de l'optimisation de la première maison (MQ1) deviennent les valeurs cibles pour la deuxième maison (MQ2).

Caractéristiques du design (CD)	Caractéristiques du produit (CP)					T_j : valeur cible	LIS _j : Limite inférieure de spécification	LSS _j : Limite supérieure de spécification
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5			
x_1						x_1^*	7.93	9.07
x_2						x_2^*	71.2	95.8
x_3						x_3^*	174.5	232.7
x_4						x_4^*	27.02	52.98
x_5						x_5^*	55.29	61.51
x_6						x_6^*	0.901	1.135
Valeur minimale $y_{\min}$	3.0	5.5	18.0	2.0	8.0			
Valeur maximale $y_{\max}$	5.0	6.5	22.0	4.0	12.0			
Valeur actuelle y^0	4.0	6.5	19.5	3.5	8.0			

Notation		
	9	positif fort
	3	positif moyen
	1	négatif moyen
	0	négatif fort

Figure 3.5 Maison du déploiement du produit (source : adapté de Ribeiro *et al*, 2001)

En choisissant des valeurs de coefficients de perte égales à 1, $k_{1j} = 1$ et $k_{2j} = 1$, $j=1, \dots, 6$, nous obtenons le modèle.

Fonction objectif de la MQ2

$$\begin{aligned} \min_y \sum_{j=1}^6 k_{1j} [\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_6) - T_j]^2 + \sum_{j=1}^6 k_{2j} [\sigma_j^2(y_1, y_2, \dots, y_6)] \\ \{ [\mu_1 - 8.103]^2 + [\mu_2 - 73.448]^2 + [\mu_3 - 178.707]^2 + [\mu_4 - 40]^2 + [\mu_5 - 58.551]^2 + [\mu_6 - 0.9478]^2 \} \\ + \{ [\sigma_1^2] + [\sigma_2^2] + [\sigma_3^2] + [\sigma_4^2] + [\sigma_5^2] + [\sigma_6^2] \} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Contraintes

Équation de prédiction de la moyenne

Pour obtenir les équations de régression de la moyenne et la variance, nous avons utilisé le design expérimental développé dans l'article de Ribeiro *et al* (2000-01). Le design exploite un plan factoriel fractionnaire central composite (*central composite designs, CCD*), où l'expérience a été menée en trois blocs (27 essais). Les contraintes résultantes de l'expérience sont données dans les équations (3.53) à (3.58).

$$\mu_1 = 7.10 + 1.08y_1 + 0.64y_1^2 + 1.11y_2 + 0.54y_2^2 + 0.42y_4 + 0.256y_1y_2 \quad (3.53)$$

$$\mu_2 = 74.62 - 2.33y_1 - 6.26y_2^2 \quad (3.54)$$

$$\mu_3 = 201.19 - 4.89y_1 - 7.78y_1^2 + 3.89y_2 - 9.8y_5 \quad (3.55)$$

$$\mu_4 = 31.57 + 3.60y_1 + 1.43y_1^2 + 1.98y_2 + 1.58y_2^2 + 1.69y_3 + 1.10y_4 + 2.36y_5 \quad (3.56)$$

$$\mu_5 = 61.73 + 2.06y_1 + 2.46y_1^2 + 2.33y_2 + 0.938y_3 + 0.938y_5 \quad (3.57)$$

$$\mu_6 = 1.132 + 0.00678y_1 + 0.0058y_1^2 + 0.0108y_2 + 0.0063y_2^2 - 0.00281y_4 \quad (3.58)$$

Équation de prédiction de la variance

Pour obtenir les équations de prédiction de la variance, nous procédons de la même façon que dans la section antérieure. Les équations (3.59) à (3.64) montrent les contraintes résultantes.

$$\sigma_1^2 = 0.362 + 0.186y_1 + 0.118y_2 \quad (3.59)$$

$$\sigma_2^2 = 4.125 - 1.40y_3 + 1.58y_5 \quad (3.60)$$

$$\sigma_3^2 = 6.225 + 2.225y_1 \quad (3.61)$$

$$\sigma_4^2 = 0.623 + 0.253y_2 \quad (3.62)$$

$$\sigma_5^2 = 1.633 + 0.892y_1 \quad (3.63)$$

$$\sigma_6^2 = 0.00356 + 0.00202y_1 + 0.00825y_4 \quad (3.64)$$

Limites supérieure et inférieure de spécifications

Pour formuler cette contrainte, nous utilisons les valeurs des limites inférieure et supérieure de spécifications vues dans la figure 3.5. Par exemple, pour la première caractéristique du design x_1 , les valeurs inférieure et supérieure sont 7.93 et 9.07 respectivement, ce qui donne la contrainte résultante illustrée dans l'équation (3.65). Avec la même procédure, nous obtenons les autres contraintes.

$$7.93 \leq \mu_1 \leq 9.07 \quad (3.65)$$

$$71.2 \leq \mu_2 \leq 95.08 \quad (3.66)$$

$$198 \leq \mu_3 \leq 232.7 \quad (3.67)$$

$$27.02 \leq \mu_4 \leq 32.98 \quad (3.68)$$

$$59.49 \leq \mu_5 \leq 64.51 \quad (3.69)$$

$$1.125 \leq \mu_6 \leq 1.135 \quad (3.70)$$

Niveaux des facteurs de contrôle

Pour obtenir cette contrainte, nous utilisons les valeurs minimale et maximale indiquées dans la partie inférieure de la figure 3.5. Par exemple, pour la première caractéristique du produit y_1 , ces valeurs minimale et maximale sont 3.0 et 5.0 respectivement, et la contrainte résultante donne $3.0 \leq y_1 \leq 5.0$. Notons cependant que, dans la théorie de la planification des expériences, la nomenclature utilisée pour définir le niveau minimal et maximal des facteurs de contrôle se situe entre -1 et +1. En tenant compte de ce fait, la contrainte résultante est finalement:

$$3.0 \leq y_1 \leq 5.0 \quad = \quad -1 \leq y_1 \leq 1 \quad (3.71)$$

En utilisant une procédure similaire, nous obtenons les contraintes restantes.

$$-1 \leq y_2 \leq 1 \quad (3.72)$$

$$-1 \leq y_3 \leq 1 \quad (3.73)$$

$$-1 \leq y_4 \leq 1 \quad (3.74)$$

$$-1 \leq y_5 \leq 1 \quad (3.75)$$

$$-1 \leq y_6 \leq 1 \quad (3.76)$$

Pour optimiser le modèle MQ2, nous utilisons le logiciel AMPLPlus avec le solveur Minos 5.5. Le tableau 3.2 présente les résultats obtenus au terme de l'optimisation.

Tableau 3.2 Résultats de l'optimisation du modèle MQ2

		MQ2 min
Variables Dépendantes	μ_1	7.93
	μ_2	71.2
	μ_3	195.937
	μ_4	32.4785
	μ_5	61.51
	μ_6	1.13183
	σ^2_1	0.415
	σ^2_2	5.008
	σ^2_3	7.837
	σ^2_4	0.482
	σ^2_5	2.202
	σ^2_6	0.013
Paramètres	T_1	8.10345
	T_2	73.4483
	T_3	178.707
	T_4	40
	T_5	58.5517
	T_6	0.947845
Variables indépendantes	y_1	0.638667
	y_2	-0.555528
	y_3	-1
	y_4	1
	y_5	-0.326971
Fonct obj		459.079

La résolution du modèle donne un coût total de conception de 459.079 \$. Pour analyser la conformité de chaque caractéristique du design, nous présentons à la figure 3.6 le graphique de niveau de conformité, selon la méthode montre dans la section 3.2.2.

Nous concluons que la moyenne des caractéristiques du design μ_1 , μ_2 et μ_5 donne un niveau de conformité acceptable, alors que pour les moyennes μ_3 , μ_4 et μ_6 , le niveau de conformité est bon comme le montre la figure 3.6.

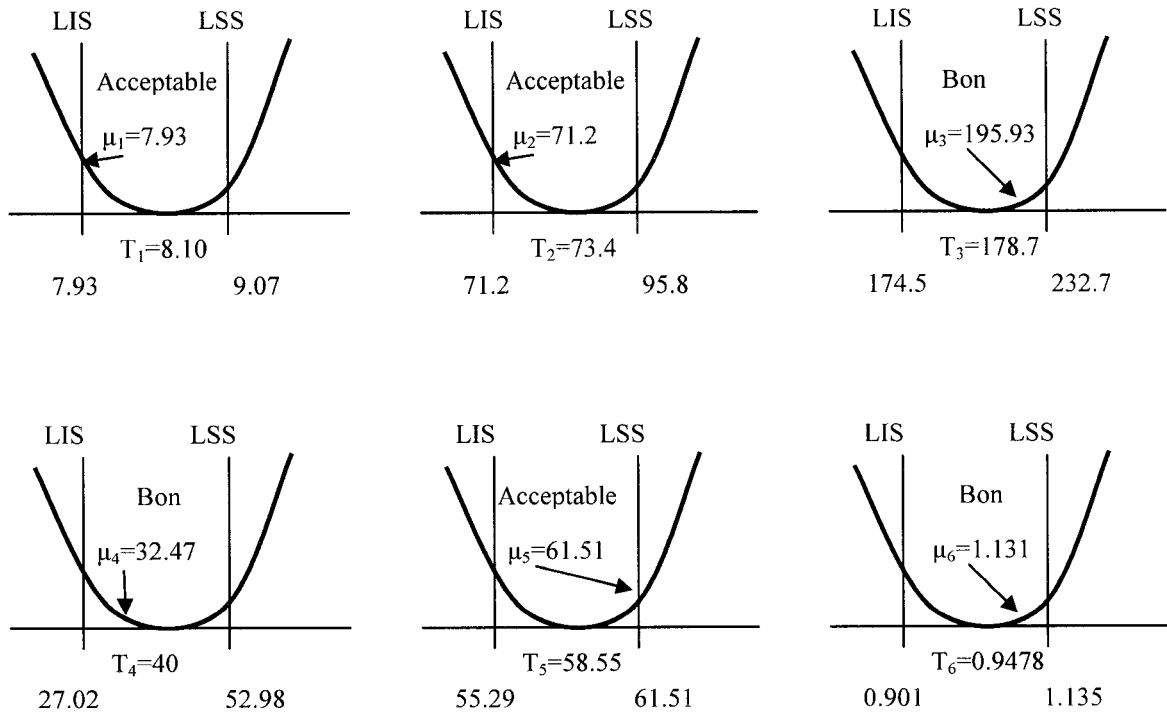


Figure 3.6 Niveaux de conformité des CD_j résultant de l'optimisation de la MQ2

3.4.2 Modèle simultané résultant

Pour la formulation du modèle simultané, nous avons utilisé les données des modèles MQ1 et MQ2. La fonction objectif est divisée en deux parties. La première maximise la satisfaction du client de la MQ1, avec un facteur de poids α égal à 100, et la deuxième minimise le coût de conception de la MQ2. Les valeurs utilisées pour les coefficients de perte sont égaux à 1, $k_{1j} = 1$ et $k_{2j} = 1$, $j = 1, \dots, 6$.

Fonction objectif pour le modèle simultané

$$\max_{\Delta x, y} \left[\begin{array}{l} \{100 * (-0.14\Delta x_1 - 0.2\Delta x_2 - 0.22\Delta x_3 + 0.12\Delta x_4 + 0.16\Delta x_5 - 0.04\Delta x_6)\} \\ - \left[\begin{array}{l} \{[\mu_1 - x_1]^2 + [\mu_2 - x_2]^2 + [\mu_3 - x_3]^2 + [\mu_4 - x_4]^2 + [\mu_5 - x_5]^2 + [\mu_6 - x_6]^2\} \\ + \{[\sigma_1^2] + [\sigma_2^2] + [\sigma_3^2] + [\sigma_4^2] + [\sigma_5^2] + [\sigma_6^2]\} \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (3.77)$$

Contraintes

Intervalle de changement des CD

$$-0.107 \leq \Delta x_1 \leq 0.8928 \quad (3.78)$$

$$-0.5 \leq \Delta x_2 \leq 0.5 \quad (3.79)$$

$$-0.476 \leq \Delta x_3 \leq 0.523 \quad (3.80)$$

$$-0.379 \leq \Delta x_4 \leq 0.620 \quad (3.81)$$

$$-0.4 \leq \Delta x_5 \leq 0.6 \quad (3.82)$$

$$-0.864 \leq \Delta x_6 \leq 0.135 \quad (3.83)$$

Association entre les CD

$$\Delta x_1 = -0.963 \Delta x_5 \quad (3.84)$$

$$\Delta x_1 \leq 2 \Delta x_6 \quad (3.85)$$

$$-2.0 \Delta x_5 \leq \Delta x_2 \leq -1.0 \Delta x_5 \quad (3.86)$$

$$\Delta x_4 = 3.0 \Delta x_5 \quad (3.87)$$

$$\Delta x_3 \geq -0.75 \Delta x_4 \quad (3.88)$$

Contrainte de comptabilité

$$x_1 = 11 + \Delta x_1(36 - 8) \quad (3.89)$$

$$x_2 = 90 + \Delta x_2(110 - 70) \quad (3.90)$$

$$x_3 = 330 + \Delta x_3(500 - 175) \quad (3.91)$$

$$x_4 = 22 + \Delta x_4(40 - 11) \quad (3.92)$$

$$x_5 = 42 + \Delta x_5(90 - 10) \quad (3.93)$$

$$x_6 = 1.005 + \Delta x_6(1.155 - 0.05) \quad (3.94)$$

Équation de prédiction de la moyenne

$$\mu_1 = 7.10 + 1.08y_1 + 0.64y_1^2 + 1.11y_2 + 0.54y_2^2 + 0.42y_4 + 0.256y_1y_2 \quad (3.95)$$

$$\mu_2 = 74.62 - 2.33y_1 - 6.26y_2^2 \quad (3.96)$$

$$\mu_3 = 201.19 - 4.89y_1 - 7.78y_1^2 + 3.89y_2 - 9.8y_5 \quad (3.97)$$

$$\mu_4 = 31.57 + 3.60y_1 + 1.43y_1^2 + 1.98y_2 + 1.58y_2^2 + 1.69y_3 + 1.10y_4 + 2.36y_5 \quad (3.98)$$

$$\mu_5 = 61.73 + 2.06y_1 + 2.46y_1^2 + 2.33y_2 + 0.938y_3 + 0.938y_5 \quad (3.99)$$

$$\mu_6 = 1.132 + 0.00678y_1 + 0.0058y_1^2 + 0.0108y_2 + 0.0063y_2^2 - 0.00281y_4 \quad (3.100)$$

Équation de prédiction de la variance

$$\sigma_1^2 = 0.362 + 0.186y_1 + 0.118y_2 \quad (3.101)$$

$$\sigma_2^2 = 4.125 - 1.40y_3 + 1.58y_5 \quad (3.102)$$

$$\sigma_3^2 = 6.225 + 2.225y_1 \quad (3.103)$$

$$\sigma_4^2 = 0.623 + 0.253y_2 \quad (3.104)$$

$$\sigma_5^2 = 1.633 + 0.892y_1 \quad (3.105)$$

$$\sigma_6^2 = 0.00356 + 0.00202y_1 + 0.00825y_4 \quad (3.106)$$

Limites supérieure et inférieure des spécifications

$$7.93 \leq \mu_1 \leq 9.07 \quad (3.107)$$

$$71.2 \leq \mu_2 \leq 95.08 \quad (3.108)$$

$$198 \leq \mu_3 \leq 232.7 \quad (3.109)$$

$$27.02 \leq \mu_4 \leq 32.98 \quad (3.110)$$

$$59.49 \leq \mu_5 \leq 64.51 \quad (3.111)$$

$$1.125 \leq \mu_6 \leq 1.135 \quad (3.112)$$

Niveaux des facteurs de contrôle

$$-1 \leq y_1 \leq 1 \quad (3.113)$$

$$-1 \leq y_2 \leq 1 \quad (3.114)$$

$$-1 \leq y_3 \leq 1 \quad (3.115)$$

$$-1 \leq y_4 \leq 1 \quad (3.116)$$

$$-1 \leq y_5 \leq 1 \quad (3.117)$$

$$-1 \leq y_6 \leq 1 \quad (3.118)$$

Nous utilisons le langage de modélisation mathématique AMPLPlus avec le solveur Minos 5.5 pour optimiser le modèle simultané. Le tableau 3.3 présente les résultats d'optimisation des modèles séquentiel et simultané.

Nous avons divisé la solution de la fonction objectif en trois parties. La première présente l'optimisation de la fonction objectif, la deuxième le résultat de la MQ1 et la troisième la solution de la MQ2. Prenons comme exemple le résultat du modèle simultané, où la MQ1 est égale à 0.259664, la MQ2 égale à 118.912 et la fonction objectif égale à -92.9461 , qui est obtenue de la façon suivante :

$$\text{F.O} = 0.259664(100) - 118.912 = -92.9461.$$

Le temps de résolution du modèle simultané diminue d'un tiers par rapport au modèle séquentiel. Cette différence découle du fait que dans ce dernier, nous devons d'abord optimiser la MQ1, trouver sa solution et ensuite l'utiliser pour obtenir l'optimisation de la MQ2.

Tableau 3.3 Résultats de l'optimisation des modèles séquentiel et simultané

	$k_{1j}=1$ $k_{2j}=1$	Séquentiel		Simultané
		MQ1	MQ2	
Variables indépendantes MQ1	Δx_1	-0.103448	-	-0.0904085
	Δx_2	-0.413793	-	-0.361634
	Δx_3	-0.465517	-	-0.358394
	Δx_4	0.62069	-	0.542451
	Δx_5	0.206897	-	0.180817
	Δx_6	-0.0517241	-	-0.0452042
Variables indépendantes MQ2	y_1	-	0.638667	-0.228988
	y_2	-	-0.555528	0.476601
	y_3	-	-1	-0.0530449
	y_4	-	1	1
	y_5	-	-0.326971	-1
Variables dépendantes MQ1	x_1	8.10345	-	8.46856
	x_2	73.4483	-	75.5346
	x_3	178.707	-	213.522
	x_4	40	-	37.7311
	x_5	58.5517	-	56.4654
	x_6	0.947845	-	0.955049
Variables dépendantes MQ2	μ_1	-	7.93	7.93
	μ_2	-	71.2	73.7316
	μ_3	-	195.937	213.556
	μ_4	-	32.4785	30.7735
	μ_5	-	61.51	61.51
	μ_6	-	1.13183	1.13452
	σ_{11}^2	-	0.415	0.375
	σ_{22}^2	-	5.008	2.619
	σ_{33}^2	-	7.837	5.646
	σ_{44}^2	-	0.482	0.743
	σ_{55}^2	-	2.202	1.488
	σ_{66}^2	-	0.013	0.011
Paramètres MQ2	T_1	-	8.10345	8.46856
	T_2	-	73.4483	75.5346
	T_3	-	178.707	213.522
	T_4	-	40	37.7311
	T_5	-	58.5517	56.4654
	T_6	-	0.947845	0.955049
	Fonct obj	0.30931	459.079	- 92.9461
	MQ1	0.30931	-	0.259664
	MQ2	-	459.079	118.912

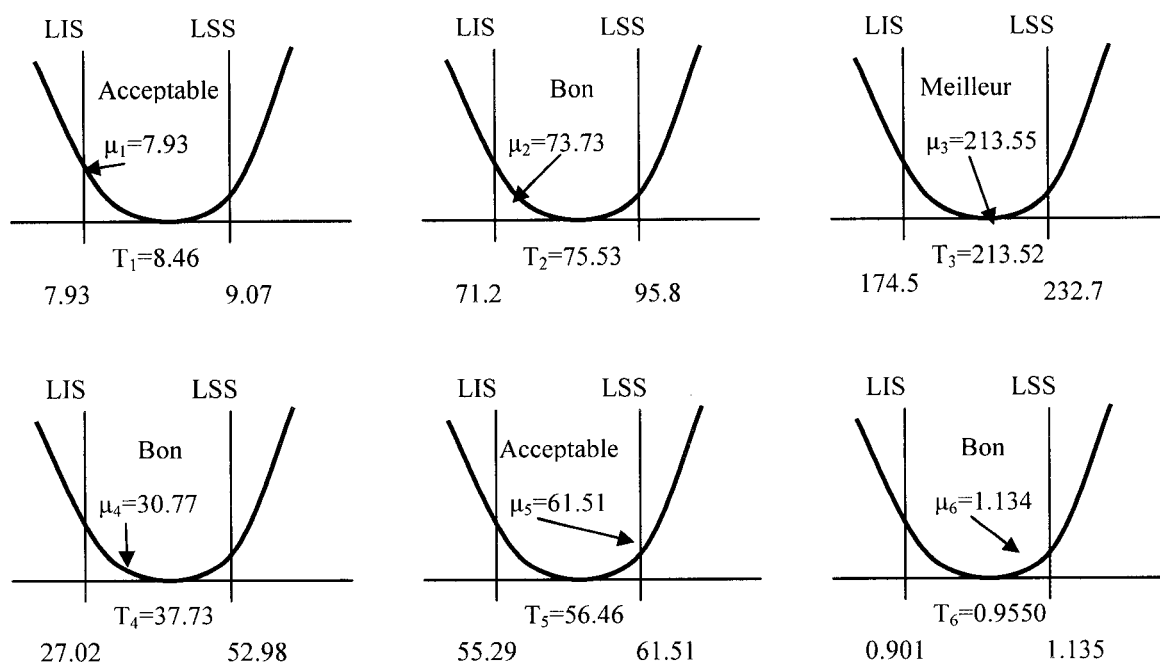


Figure 3.7 Niveaux de conformité des CDj résultant de l'optimisation du modèle simultané

Les résultats du tableau 3.3 et de la figure 3.7 nous amènent à conclure que l'optimisation du modèle simultané produit les effets suivants:

- ◆ La satisfaction du client est de 25.96 %, soit une baisse de 4.97 % par rapport à la solution de la MQ1 du modèle séquentiel ($0.3093 - 0.2596 = 0.0497$).
- ◆ Le coût de conception est égal à 118.912 \$, soit une baisse de 340.167\$ par rapport à la solution de la MQ2 du modèle séquentiel ($459.079 - 118.912 = 340.167$).
- ◆ L'analyse de conformité pour les caractéristiques du design indique que les moyennes μ_1 et μ_5 se situent à un niveau acceptable, que ce niveau est bon pour μ_2 , μ_4 et μ_6 et excellent pour μ_3 . En comparant avec le modèle séquentiel, on note une amélioration dans deux caractéristiques du design : μ_2 est passé du niveau acceptable au niveau bon et μ_3 est passé de bon à excellent.

- ◆ Presque toutes les valeurs de la variance σ_j^2 ont diminué parce les valeurs des moyennes sont très proches des valeurs cibles.

Finalement, nous concluons que l'approche simultanée donne de meilleures solutions que l'approche séquentielle car elle cherche le meilleur compromis (*trade-off*) entre la satisfaction du client et le coût de conception. Cependant l'approche simultanée donne une seule solution optimale (un seul compromis) au décideur.

Afin d'offrir au décideur différentes solutions (compromis) et de déterminer de façon systématique la valeur du poids α , nous proposons d'améliorer le modèle simultané en utilisant l'approche interactive multicritères.

CHAPITRE 4

APPROCHE INTERACTIVE MULTICRITÈRE

Afin de déterminer de façon systématique la valeur du poids α , nous développons dans ce chapitre un modèle basé sur l'approche interactive multicritères. Cette approche permet l'exploration de plusieurs solutions admissibles facilitant le choix du décideur. Nous présentons dans ce chapitre tout d'abord les caractéristiques des modèles multicritères, leurs concepts de base, leur terminologie et leur classification. Nous décrivons ensuite la méthode interactive de programmation multicritères non linéaire (IMONLP), ainsi que la formulation mathématique du modèle interactif multicritères non linéaire (MONLP). Nous concluons en appliquant la méthode IMONLP à l'optimisation des deux premières étapes de la DFQ.

4.1 Prise de décision multicritères

Plusieurs problèmes réels d'optimisation sont caractérisés par un grand nombre d'alternatives ou critères qu'impliquent plusieurs objectifs. Les méthodes multicritères (*multiple criteria decision making, MCDM*) développées depuis une trentaine d'années sont utilisées pour définir et évaluer plusieurs critères dont certains sont incompatibles ou génèrent des conflits. Par conséquent, on ne parle pas du concept de solution optimale, mais plutôt de solutions non dominées ou efficaces. Ces méthodes recherchent parmi toutes les solutions non dominées la solution qui satisfait le décideur.

4.2 Concepts de base de l'approche multicritères

Pour comprendre l'approche multicritères, il est nécessaire de connaître un certain nombre de concepts de base. Nous les expliquons dans cette section.

Considérons le problème multicritères non linéaire suivant :

$$\min f_i(x) \quad i = 1, \dots, k \quad (4.1)$$

sujet à :

$$M \equiv \{x \in R^n \mid g_r(x) \leq 0, r = 1, \dots, m\} \quad (4.2)$$

où

$f_i(x)$, $i = 1, \dots, k$ et $g_r(x)$, $r = 1, \dots, m$ sont des fonctions continues non linéaires.

Nous définissons :

$F^i = (f_1(x^i), f_2(x^i), \dots, f_k(x^i))$, un vecteur de dimension k des critères évalués à x^i

Décideur ou DM (*decision maker*) : individu ou groupe d'individus qui évaluent directement ou indirectement les solutions trouvées.

Analyste (*analyst*) : personne qui aide le décideur à trouver la meilleure solution.

Objectif : dans l'approche multicritères, l'objectif est en rapport avec l'état désiré par le décideur du système étudié. Il est habituellement exprimé en tant que fonction mathématique des variables et des paramètres du système.

Critère : mesure de l'efficacité d'exécution ; sert de base à l'évaluation. Les critères peuvent être classifiés comme buts (ou cibles) et objectifs.

Attributs : caractéristiques, qualités ou paramètres d'exécution des alternatives mesurables dont la valeur (mesurée) reflète le degré d'accomplissement d'un objectif particulier.

Buts (*goals*) : valeurs désirées par le décideur, exprimées sous la forme d'un état spécifique dans l'espace et le temps.

Compromis (*trade-off*) : quantité d'un objectif qui doit être sacrifiée pour obtenir une augmentation dans l'autre objectif.

Dominance (*domination*) : une solution réalisable B domine une solution réalisable A dans un problème multicritères si B est au moins aussi bon que A en ce qui concerne chaque objectif et est strictement meilleur que A en ce qui concerne au moins un objectif. La structure de dominance est liée à la préférence du décideur, qui détermine comment une alternative domine une autre. Nous disons que la solution x^1 domine x^2 , ou $x^1 \geq x^2$, si et seulement si $U(F(x^1)) \geq U(F(x^2))$, où U est la structure de préférence ou fonction d'utilité.

Solution efficace (*efficient solution*) : une solution réalisable d'un problème de programmation multicritères est dite efficace, s'il n'existe aucune autre solution apportant une amélioration relativement à un objectif sans entraîner une dégradation relativement à moins un autre objectif. Ce concept est aussi connu comme "non-dominance" (*nondominance*) ou "optimalité de Pareto" (*pareto optimality*). En termes mathématiques, x^* est une solution efficace, s'il n'existait aucun autre x réalisable tel que $f(x) \leq f(x^*)$, signifiant que $f_j(x) \leq f_j(x^*)$, pour tout $j = 1, \dots, n$ avec l'inégalité stricte pour au moins un j .

La figure 4.1 illustre l'ensemble de solutions efficaces X^* et l'ensemble efficace F^* dans l'espace de décision et l'espace objectif, respectivement. Les points qui se trouvent sur la frontière noircie s'appellent solutions efficaces.

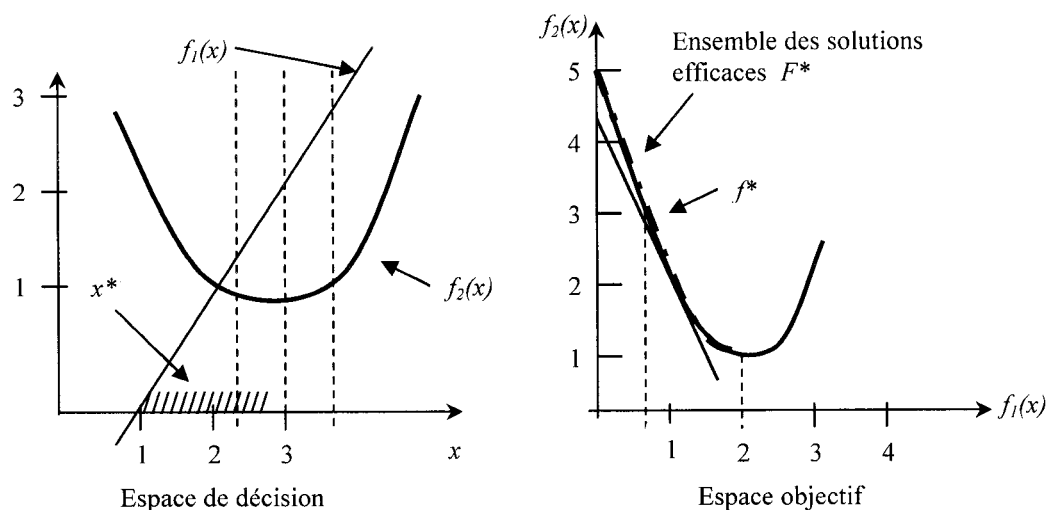


Figure 4.1 Ensemble de solutions efficaces dans l'espace de décision et dans l'espace objectif

Ensemble efficace (*efficient set*) ou ensemble de solutions non dominées (*set of nondominated solutions*) : ensemble de toutes les solutions efficaces (non dominées).

Frontière efficace (*efficient frontier*) ou courbe des compromis (*trade-off curve*) : ensemble des points efficaces pour le modèle.

Solution du meilleur compromis (*best-compromise solution*) ou solution préférée (*preferred solution*) ou encore meilleure solution (*best solution*) : solution efficace sur laquelle le décideur fixe se choisit lors de la décision finale.

4.3 Classification des méthodes de programmation multicritères

Durant les trente dernières années, la programmation multicritères s'est beaucoup développée. Actuellement il existe une grande quantité de méthodes permettant de résoudre les problèmes multicritères. Certains auteurs (Abdel Haleem, 1991; Chankong et Haimès, 1983; Goicoechea, 1982) ont classifié ces méthodes en trois catégories principales : méthodes pour générer l'ensemble des solutions non dominées (*methods for generating the nondominated set*), méthodes d'articulation antérieure des préférences (*methods with prior articulation of preferences*) et méthodes d'articulation progressive des préférences ou interactives (*methods of progressive articulation of preferences*).

Méthodes pour générer l'ensemble des solutions non dominées

Ces méthodes identifient et génèrent l'ensemble des solutions efficaces. Cette approche ne tient aucunement compte des préférences du décideur. Pour cette raison, l'ensemble spécifié des poids ne rapporte pas toujours une solution qui semble acceptable au décideur. Parmi les méthodes de ce type, on peut citer : la méthode du poids (*weighting method*), la méthode de la contrainte (*constraint method*) et la méthode multicritères linéaire de Zeleny (*Zeleny's linear multiobjective method*) (Goicoechea, 1982).

Méthodes d'articulation antérieure des préférences

Avec ces méthodes la structure de préférence ou la fonction d'utilité du décideur est connue avant la résolution du problème multicritères, ceci permettant de réduire l'ensemble des solutions non dominées à un ensemble de solutions beaucoup plus petit. Parmi les méthodes de ce type, on peut citer : la programmation par objectifs (*goal programming*), la méthode de la fonction d'utilité (*utility function method*), la méthode du compromis de la valeur substituée (*surrogate worth trade-off method*), la méthode du poids moyen (*weighted average method*), la méthode PROTRADE et la méthode ELECTRE I et II. (Chankong et Haimès, 1983).

Méthodes d'articulation progressive des préférences ou interactives

Cette approche est connue comme une méthode interactive parce qu'il y a une interaction entre le décideur et l'analyste. À chaque itération, le décideur est placé devant un nombre restreint de solutions candidates ; il choisit alors sa solution préférée (solution qui le satisfait le plus) à partir de ce petit ensemble. Parmi les méthodes qui appartiennent à cette catégorie, il faut citer : la méthode STEM (*stem metod*), la méthode de Geoffrion, la méthode de Zionts-Wallenius, la programmation avec compromis (*compromise programming*), la méthode multicritères séquentielle de résolution de problème (*sequential multiobjective problem solving, SEMOPS*) et la méthode de programmation multicritères non linéaire interactive (*interactive multiobjective nonlinear programming algorithm, IMONLP*) (Abdel Haleem, 1991; Chankong et Haimes, 1983). La figure 4.2 présente l'ensemble des méthodes multicritères.

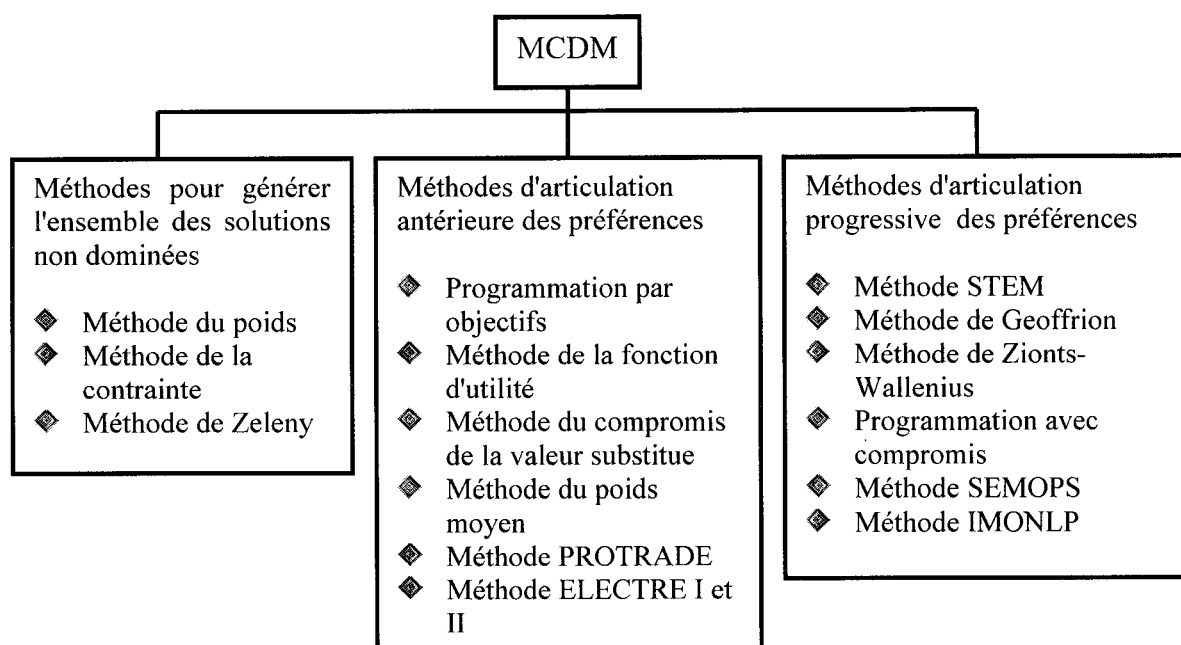


Figure 4.2 Classification des méthodes multicritères

4.4 Méthode de programmation multicritères non linéaire interactive (IMONLP) (algorithme)

La méthode de programmation multicritères non linéaire interactive (*Interactive multiobjective nonlinear programming algorithm, IMONLP*) a été développée par Abdel Haleem et al (1993) pour résoudre les problèmes de programmation multicritères non linéaires (*multiobjective nonlinear programming problem, MONLP*). L'approche est basée sur la méthode du poids (*weighting method*) : on utilise un ensemble prédéterminé de poids et on ramène ainsi l'ensemble de toutes les solutions efficaces à un sous-ensemble plus petit.

Rappelons le problème MONLP de la section 4.2 et défini pour les équations (4.1) et (4.2).

Étape 1a

On résout les k problèmes de programmation non linéaire, $i = 1, \dots, k$ avec objectif simple:

$$\min f_i(x) \quad (4.3)$$

sujet à :

$$M \equiv \{x \in R^n \mid g_r(x) \leq 0, r = 1, \dots, m\} \quad (4.4)$$

Pour obtenir les k points efficaces $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i), i = 1, \dots, k$ du problème original et leur vecteur associé des critères non dominés F^i . On a : $s = 0, N_0 = \{F^i, i = 1, \dots, k\}$; où $F^i = (f_1(x^i), f_2(x^i), \dots, f_k(x^i))$ et N_s est l'ensemble de tous les vecteurs des critères efficaces présentés au décideur après s itérations

Étape 1b

Le décideur revoit les éléments de N_0 . S'il est satisfait des éléments de N_0 , le processus s'arrête. Si le décideur souhaite explorer d'autres solutions efficaces, fixer $i = k$ et on continue à l'étape 2a.

Étape 2a

On pose $i = i + 1$, et on construit l'hyperplan F_i qui traverse les éléments de N_s où

$$F_i = \sum_{j=1}^k p_j f_j(x) \quad (4.5)$$

Les valeurs de p_j sont déterminées en résolvant le système homogène des équations linéaires de $k \times k$.

$$\sum_{j=1}^k p_j f_j(x^i) = c \quad i = 1, \dots, k, \quad (4.6)$$

où

c : constante arbitraire.

La valeur de c est choisie d'une façon arbitraire et doit être différente de zéro.

Étape 2b

On résout le problème de programmation non linéaire (*nonlinear programming weighting problem*).

$$\min F_i = \sum_{j=1}^k p_j f_j(x) \quad (4.7)$$

sujet à :

$$M \equiv \{x \in R^n \mid g_r(x) \leq 0, \quad r = 1, \dots, m, \quad x \in R^n\} \quad (4.8)$$

Pour obtenir le point efficace x^i et le vecteur associé des critères non dominé F^i .

Étape 3

Si $F^i \notin N_s$ et que F^i est préféré à un élément de N_s , on remplace cet élément par F^i . On pose $s = s + 1$ et on retourne à l'étape 2a. Si $F^i \in N_s$ ou si le décideur ne préfère F^i à aucun élément de N_s , on permet au décideur de choisir l'élément de N_s qu'il préfère, et on s'arrête. Ce choix se fait à l'aide de la fonction d'utilité U .

Les étapes 2 et 3 sont répétées itérativement jusqu'à ce que le décideur identifie une solution préférée au problème de MONLP à l'étude. Pour plus de détails au sujet de la formulation du problème, consulter Abdel Haleem (1991). La figure 4.3 montre un exemple de la méthode IMONLP pour deux critères.

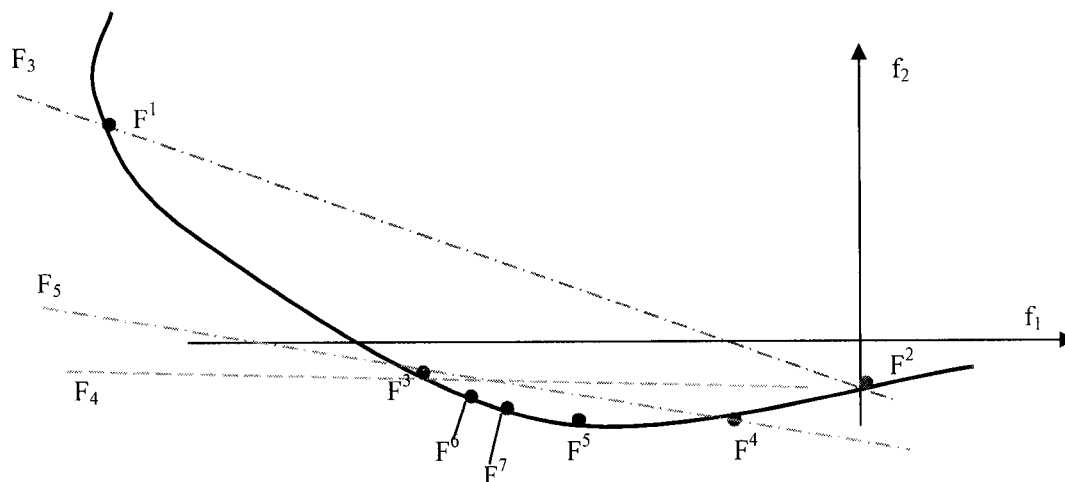


Figure 4.3 Illustration de la méthode IMONLP pour deux critères (source : Abdel Haleem ,1991)

4.5 Modèle mathématique multicritères non linéaire (MONLP)

Pour formuler le modèle MONLP qui optimise les deux premières phases du DFQ, nous nous sommes basées sur le modèle simultané détaillé au chapitre précédent.

Le modèle MONLP est constitué de :

- ◆ Trois ensembles de variables: les attributs des clients z_i , les caractéristiques du design x_j et les caractéristiques du produit y_l ,
- ◆ Deux fonctions objectifs: la satisfaction du client et le coût de conception.
- ◆ Sept ensembles de contraintes: l'intervalle de changement des CD, l'association entre les CD et la contrainte de comptabilité (contraintes du MQ1). L'équation de prédiction de la moyenne, l'équation de prédiction de la variance, les limites inférieure et supérieure des spécifications et les niveaux des facteurs de contrôle (contraintes du MQ2).

Les variables de décision du modèle sont :

Δx_j : changement de la valeur des CD_j y_ℓ : caractéristiques du produit

Les paramètres du modèle sont:

MQ1

MQ2

w_i : importance relative des AC_i

LIS_j : limite inférieure de spécification des CD_j

f_{ij} : coefficients de rapport entre AC_i et CD_j

LSS_j : limite supérieure de spécification des CD_j

x_j : valeur cible des CD_j

x_j^0 : valeur actuelle des CD_j

x_j^{min} : valeur minimum possible des CD_j

x_j^{max} : valeur maximum possible des CD_j

Fonction objectif

Deux fonctions objectifs sont considérées : maximiser la satisfaction du client (objectif f_1) et minimiser le coût de conception (objectif f_2).

$$\max_{\Delta x} \quad f_1 = \sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^n f_{ij} \Delta x_j \quad (4.9)$$

$$\min_y \quad f_2 = \sum_{j=1}^n k_{1j} [\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) - x_j]^2 + \sum_{j=1}^n k_{2j} [\sigma_j^2(y_1, y_2, \dots, y_\ell)] \quad (4.10)$$

En ramenant le tout à un problème de minimisation, on obtient :

$$\min_{\Delta x, y} \left\{ \begin{array}{l} f_1 = - \left(\sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^n f_{ij} \Delta x_j \right) \quad (4.11) \\ f_2 = \sum_{j=1}^n k_{1j} [\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) - x_j]^2 + \sum_{j=1}^n k_{2j} [\sigma_j^2(y_1, y_2, \dots, y_\ell)] \quad (4.12) \end{array} \right.$$

Contraintes du modèle

Le modèle MONLP est constitué de sept ensembles de contraintes énumérées ci-dessous.

Intervalle de changement des CD

$$\frac{x_j^{\min} - x_j^0}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \leq \Delta x_j \leq \frac{x_j^{\max} - x_j^0}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \quad j = 1, \dots, n \quad (4.13)$$

Association entre les CD

$$h_{j1} \Delta x_{j2} \leq \Delta x_{j1} \leq h_{j2} \Delta x_{j2} \quad j_1 \neq j_2 \quad \text{pour } CD_{j1} \text{ et } CD_{j2} \quad (4.14)$$

Contrainte de comptabilité

$$x_j = x_j^0 + \Delta x_j (x_j^{\max} - x_j^{\min}) \quad (4.15)$$

Équation de prédiction de la moyenne

$$\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) = F_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.16)$$

Équation de prédiction de la variance

$$\sigma_j^2(y_1, y_2, \dots, y_\ell) = H_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.17)$$

Limites inférieure et supérieure des spécifications

$$LIS_j \leq \mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) \leq LSS_j \quad j = 1, \dots, n \quad (4.18)$$

Niveaux des facteurs de contrôle

$$-1 \leq y_\ell \leq 1 \quad \ell = 1, \dots, L \quad (4.19)$$

La formulation du modèle MONLP utilise deux types de constantes : h_{j1} et h_{j2} , qui dénotent la force de l'association entre les caractéristiques du design dans la fonction (f_1) et k_{1j} , k_{2j} qui sont les coefficients de perte utilisés dans la fonction (f_2).

4.5.1 Formulation du modèle multicritères non linéaire (MONLP)

$$\min_{\Delta x, y} \left\{ \begin{array}{l} f_1 = - \left(\sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^n f_{ij} \Delta x_j \right) \quad (4.20) \\ f_2 = \sum_{j=1}^n k_{1j} [\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) - x_j]^2 + \sum_{j=1}^n k_{2j} [\sigma_j^2(y_1, y_2, \dots, y_\ell)] \quad (4.21) \end{array} \right\}$$

Sujet à

$$\frac{x_j^{\min} - x_j^0}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \leq \Delta x_j \leq \frac{x_j^{\max} - x_j^0}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \quad j = 1, \dots, n \quad (4.22)$$

$$h_{j1} \Delta x_{j2} \leq \Delta x_{j1} \leq h_{j2} \Delta x_{j2} \quad j_1 \neq j_2 \text{ pour } CD_{j1} \text{ et } CD_{j2} \quad (4.23)$$

$$x_j = x_j^0 + \Delta x_j (x_j^{\max} - x_j^{\min}) \quad j = 1, \dots, n \quad (4.24)$$

$$\mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) = F_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) \quad j = 1, \dots, n, \quad \ell = 1, \dots, L \quad (4.25)$$

$$\sigma_j^2(y_1, y_2, \dots, y_\ell) = H_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) \quad j = 1, \dots, n, \quad \ell = 1, \dots, L \quad (4.26)$$

$$LIS_j < \mu_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) < LSS_j \quad j = 1, \dots, n \quad (4.27)$$

$$-1 < y_\ell < 1 \quad \ell = 1, \dots, L \quad (4.28)$$

4.6 Exemple numérique

Pour illustrer l'approche multicritères non linéaire interactive (IMONLP), nous utilisons l'exemple développé dans la section 3.5 pour le modèle simultané, qui est constitué de quatre attributs du client (AC_i), six caractéristiques de design (CD_j) et de cinq caractéristiques du produit (CP_ℓ). En choisissant $k_{lj} = 1$ et $k_{2j} = 1$, on obtient le modèle :

Fonctions objectifs

$$\min_{\Delta x, y} \left\{ \begin{array}{l} f_1 = -(-0.14\Delta x_1 - 0.2\Delta x_2 - 0.22\Delta x_3 + 0.12\Delta x_4 + 0.16\Delta x_5 - 0.04\Delta x_6) \\ f_2 = \left\{ \begin{array}{l} ([\mu_1 - x_1]^2 + [\mu_2 - x_2]^2 + [\mu_3 - x_3]^2 + [\mu_4 - x_4]^2 + [\mu_5 - x_5]^2 + [\mu_6 - x_6]^2) \\ + ([\sigma_1^2] + [\sigma_2^2] + [\sigma_3^2] + [\sigma_4^2] + [\sigma_5^2] + [\sigma_6^2]) \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (4.29) \\ (4.30) \end{array}$$

Contraintes

Intervalle de changement des CD

$$-0.107 \leq \Delta x_1 \leq 0.8928 \quad (4.31)$$

$$-0.5 \leq \Delta x_2 \leq 0.5 \quad (4.32)$$

$$-0.476 \leq \Delta x_3 \leq 0.523 \quad (4.33)$$

$$-0.379 \leq \Delta x_4 \leq 0.620 \quad (4.34)$$

$$-0.4 \leq \Delta x_5 \leq 0.6 \quad (4.35)$$

$$-0.864 \leq \Delta x_6 \leq 0.135 \quad (4.36)$$

Association entre les CD

$$\Delta x_1 = -0.963\Delta x_5 \quad (4.37)$$

$$\Delta x_1 \leq 2\Delta x_6 \quad (4.38)$$

$$-2.0\Delta x_5 \leq \Delta x_2 \leq -1.0\Delta x_5 \quad (4.39)$$

$$\Delta x_4 = 3.0\Delta x_5 \quad (4.40)$$

$$\Delta x_3 \geq -0.75\Delta x_4 \quad (4.41)$$

Contrainte de comptabilité

$$x_1 = 11 + \Delta x_1(36 - 8) \quad (4.42)$$

$$x_2 = 90 + \Delta x_2(110 - 70) \quad (4.43)$$

$$x_3 = 330 + \Delta x_3(500 - 175) \quad (4.44)$$

$$x_4 = 22 + \Delta x_4(40 - 11) \quad (4.45)$$

$$x_5 = 42 + \Delta x_5(90 - 10) \quad (4.46)$$

$$x_6 = 1.005 + \Delta x_6(1.155 - 0.05) \quad (4.47)$$

Équation de prédiction de la moyenne

$$\mu_1 = 7.10 + 1.08y_1 + 0.64y_1^2 + 1.11y_2 + 0.54y_2^2 + 0.42y_4 + 0.256y_1y_2 \quad (4.48)$$

$$\mu_2 = 74.62 - 2.33y_1 - 6.26y_2^2 \quad (4.49)$$

$$\mu_3 = 201.19 - 4.89y_1 - 7.78y_1^2 + 3.89y_2 - 9.8y_5 \quad (4.50)$$

$$\mu_4 = 31.57 + 3.60y_1 + 1.43y_1^2 + 1.98y_2 + 1.58y_2^2 + 1.69y_3 + 1.10y_4 + 2.36y_5 \quad (4.51)$$

$$\mu_5 = 61.73 + 2.06y_1 + 2.46y_1^2 + 2.33y_2 + 0.938y_3 + 0.938y_5 \quad (4.52)$$

$$\mu_6 = 1.132 + 0.00678y_1 + 0.0058y_1^2 + 0.0108y_2 + 0.0063y_2^2 - 0.00281y_4 \quad (4.53)$$

Équation de prédiction de la variance

$$\sigma_1^2 = 0.362 + 0.186y_1 + 0.118y_2 \quad (4.54)$$

$$\sigma_2^2 = 4.125 - 1.40y_3 + 1.58y_5 \quad (4.55)$$

$$\sigma_3^2 = 6.225 + 2.225y_1 \quad (4.56)$$

$$\sigma_4^2 = 0.623 + 0.253y_2 \quad (4.57)$$

$$\sigma_5^2 = 1.633 + 0.892y_1 \quad (4.58)$$

$$\sigma_6^2 = 0.00356 + 0.00202y_1 + 0.00825y_4 \quad (4.59)$$

Limites supérieure et inférieure des spécifications

$$7.93 \leq \mu_1 \leq 9.07 \quad (4.60)$$

$$71.2 \leq \mu_2 \leq 95.08 \quad (4.61)$$

$$198 \leq \mu_3 \leq 232.7 \quad (4.62)$$

$$27.02 \leq \mu_4 \leq 32.98 \quad (4.63)$$

$$59.49 \leq \mu_5 \leq 64.51 \quad (4.64)$$

$$1.125 \leq \mu_6 \leq 1.135 \quad (4.65)$$

Niveaux des facteurs de contrôle

$$-1 \leq y_1 \leq 1 \quad (4.66)$$

$$-1 \leq y_2 \leq 1 \quad (4.67)$$

$$-1 \leq y_3 \leq 1 \quad (4.68)$$

$$-1 \leq y_4 \leq 1 \quad (4.69)$$

$$-1 \leq y_5 \leq 1 \quad (4.70)$$

$$-1 \leq y_6 \leq 1 \quad (4.71)$$

4.7 Processus de résolution du modèle MONLP en utilisant l'algorithme IMONLP

Dans cette section nous illustrons l'algorithme IMONLP à partir de l'exemple numérique de la section antérieure.

Étape 1a

On résout les deux problèmes d'optimisation avec objectif simple, $i = 2$, afin d'obtenir les solutions efficaces x^i et leur vecteur associé des critères non dominé F^i .

$$\min_{\Delta x, y} f_i(x) \quad (4.72)$$

sujet à :

$$x \in M \quad (4.73)$$

Nous obtenons :

$$F^1 = (f_1(x^1), f_2(x^1)) = (-0.30931, 705.752) \quad (4.74)$$

$$F^2 = (f_1(x^2), f_2(x^2)) = (-0.250712, 118.756) \quad (4.75)$$

et

$$N_0 = \{F^1, F^2\} = \{(-0.30931, 705.752), (-0.250712, 118.756)\} \quad (4.76)$$

Nous supposons que la fonction d'utilité du décideur est additive.

$$U(x^i) = f_1(x) + f_2(x) \quad (4.77)$$

ou

$$U(x^i) = \sum_{j=1}^2 f_j(x) \quad (4.78)$$

Par abus de langage nous noterons $U^i = U(x^i)$, le résultat de la fonction d'utilité U^1 et U^2 donne :

$$U^1 = f_1(x) + f_2(x) = -0.30931 + 705.752 = 705.4426 \quad (4.79)$$

$$U^2 = f_1(x) + f_2(x) = -0.250712 + 118.756 = 118.5052 \quad (4.80)$$

Nous devons mentionner que la fonction d'utilité est en fait une fonction de "désutilité", puisque une solution efficace de plus petite valeur est préférable (problème de minimisation).

La résolution du modèle MONLP pour obtenir les solutions efficaces x^1 et x^2 se présente dans le tableau 4.1. Pour optimiser le modèle MONLP, nous avons utilisé le logiciel AMPLPlus avec le solveur Minos 5.5.

Tableau 4.1 Solution de l'optimisation pour x^1 et x^2

x^i	$\Delta x_i \quad i = 1, \dots, 6$	$y_j \quad j = 1, \dots, 5$	F^i	U^i
x^1	-0.103448 -0.413793 -0.465517 0.62069 0.206897 -0.051724	0.237063 0.121598 -1 0.923017 -0.210347 n.d.	$F^1 =$ (-0.30931, 705.752)	$U^1 = 705.4426$
x^2	-0.089187 -0.356748 -0.358234 0.535122 0.178374 0.117239	-0.234096 0.479554 -0.0553666 1 -1 n.d.	$F^2 =$ (-0.250712, 118.756)	$U^2 = 118.5052$

Étape 1b

Nous supposons que le décideur n'est pas satisfait avec $N_0 = \{(-0.30931, 705.752), (-0.250712, 118.756)\}$ et nous souhaitons obtenir une meilleure solution.

Étape 2a

Comme $i = 3$ ($i = i + 1$), nous formons l'équation de l'hyperplan F_3 (voir équation 4.6) qui passe par les éléments F^1 et F^2 .

$$p_1(-0.30931) + p_2(705.752) = c \quad (4.81)$$

$$p_1(-0.250712) + p_2(118.756) = c \quad (4.82)$$

Pour l'exemple, nous avons pris une valeur de $c = 1$. Il est important de mentionner que la valeur de c est choisie d'une façon arbitraire et que sa valeur ne change en rien la solution du problème.

On résout le système linéaire pour obtenir p_1 et p_2 :

$$p_1 = 0.82836 \quad p_2 = 0.00178$$

Étape 2b

On résout le problème du poids de programmation non linéaire, définit pour les équations (4.7) et (4.8).

$$\begin{aligned} \min_{\Delta x, y} f_3(x) &= 0.82836f_1(x) + 0.00178f_2(x) \\ x &\in M \end{aligned} \quad (4.83)$$

La solution de l'optimisation est présentée dans le tableau 4.2.

Tableau 4.2 Solution de l'optimisation pour x^3

x^i	$\Delta x_i \quad i = 1, \dots, 6$	$y_j \quad j = 1, \dots, 5$	F^i	U^i
x^3	-0.094872	-0.210943	$F^3 =$ (-0.268722, 121.473)	$U^3 = 121.204$
	-0.37949	0.465987		
	-0.358983	-0.0454915		
	0.569236	1		
	0.189745	-1		
	-0.047436	n.d.		

Étape 3

On demande au décideur de comparer F^3 aux éléments de N_0 . Le meilleur point est le point qui a la valeur minimum U^i . Si $F^3 \in N_0$, ou si F^3 n'est préféré à aucun autre élément de N_0 , on permet au décideur de choisir l'élément de N_s qu'il préfère et on arrête.

Selon la fonction d'utilité U^i , F^3 est comparé aux éléments de F^1 et F^2 , où

$$U^1 = 705.4426, U^2 = 118.5052 \text{ et } U^3 = 121.204.$$

D'après l'utilité assumée F^3 s'avère meilleur que F^1 puisque $U^2 < U^3 < U^1$. Alors F^1 est remplacé par F^3 (car F^1 est le moindre élément préféré de N_0) et ainsi $N_1 = \{F^3, F^2\}$.

L'hyperplan F_4 qui passe par F^2 et F^3 est déterminé et le procédé est répété itérativement jusqu'à la quatrième itération qui donne :

$$N_4 = \{F^6, F^2\}$$

$$U^6 = 118.5059 \text{ et } U^2 = 118.5052$$

La cinquième itération donne $F^7 = F^6$.

Le procédé s'arrête avec N_4 et l'algorithme détermine que x^7 est la solution préférée.

Les résultats des itérations de l'exemple sont regroupés dans le tableau 4.3. La figure 4.4 illustre l'ensemble des solutions efficaces dans l'espace des valeurs des objectifs pour les deux objectifs du problème, et le tableau 4.4 montre les valeurs obtenues pour les objectifs, les variables de décision et les paramètres de l'exemple.

Tableau 4.3 Vecteurs des critères non dominés et leurs utilités associées

Itération 0		Itération 1	
	$F^1 = 705.444$ (- 0.30931, 705.752) $F^2 = 118.5052$ (- 0.25071, 118.756) $N_0 = \{ F^1, F^2 \}$	$F^3 = 121.204$	$F^2 = 118.5052$ (- 0.25071, 118.756) $F^3 = 121.204$ (- 0.26872, 121.473) $N_1 = \{ F^2, F^3 \}$
Itération 2		Itération 3	
$F^4 = 118.8090$	$F^2 = 118.5052$ (- 0.25071, 118.756) $F^4 = 118.8090$ (- 0.260923, 119.07) $N_2 = \{ F^2, F^4 \}$	$F^5 = 118.5109$	$F^2 = 118.5052$ (- 0.25071, 118.756) $F^5 = 118.5109$ (- 0.254096, 118.765) $N_3 = \{ F^2, F^5 \}$
Itération 4		Itération 5	
$F^6 = 118.5059$	$F^2 = 118.5052$ (- 0.25071, 118.756) $F^6 = 118.5059$ (- 0.2521, 118.758) $N_4 = \{ F^2, F^6 \}$	$F^7 = 118.5059$ (- 0.25107, 118.757)	arrêt

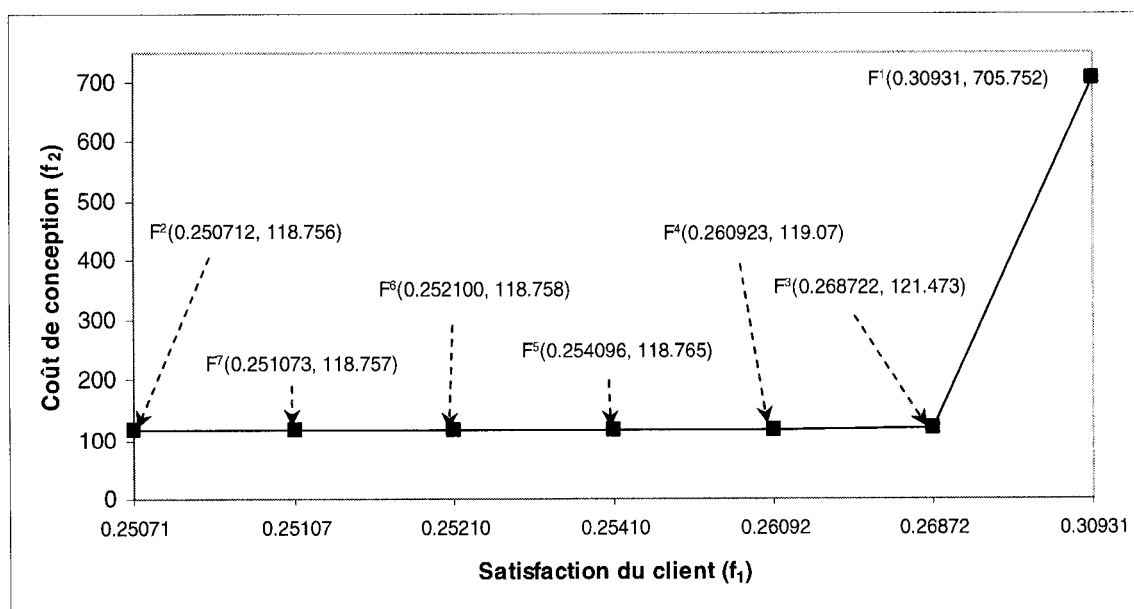


Figure 4.4 Ensemble de solutions efficaces dans l'espace objectif du MONLP

Tableau 4.4 Résultat des itérations du modèle IMONLP

Var	$k_{1j}=1$ $k_{2j}=1$	F^1 $p_1=1$ $p_2=0$	F^2 $p_1=0$ $p_2=1$	F^3 $p_1=0.8283$ $p_2=0.0017$	F^4 $p_1=1.8626$ $p_2=0.0123$	F^5 $p_1=0.0423$ $p_2=0.0085$	F^6 $p_1=0.0172$ $p_2=0.0084$	F^7 $p_1=0.0044$ $p_2=0.0084$
indépendants MQ1	Δx_1	-0.10344	-0.08918	-0.094872	-0.091029	-0.089247	-0.089211	-0.089193
	Δx_2	-0.41379	-0.35674	-0.37949	-0.364117	-0.356989	-0.356847	-0.356774
	Δx_3	-0.46551	-0.35823	-0.358983	-0.358475	-0.358242	-0.358238	-0.358235
	Δx_4	0.62069	0.535122	0.569236	0.546175	0.535484	0.535271	0.535161
	Δx_5	0.206897	0.178374	0.189745	0.182058	0.178495	0.178424	0.178387
	Δx_6	-0.05172	0.117239	-0.047436	-0.045514	0.0356796	0.0837931	0.108536
indépendants MQ2	y_1	0.237063	-0.23409	-0.210943	-0.226431	-0.233832	-0.233988	-0.234068
	y_2	0.121598	0.479554	0.465987	0.475114	0.479402	0.479492	0.479538
	y_3	-1	-0.05536	-0.045491	-0.051913	-0.055244	-0.055316	-0.055353
	y_4	0.923017	1	1	1	1	1	1
	y_5	-0.21034	-1	-1	-1	-1	-1	-1
dépendants MO1	x_1	8.10345	8.50276	8.34357	8.45118	8.50107	8.50207	8.50258
	x_2	73.4483	75.7301	74.8204	75.4353	75.7204	75.7261	75.729
	x_3	178.707	213.574	213.331	213.496	213.571	213.573	213.574
	x_4	40	37.5185	38.5078	37.8391	37.529	37.5228	37.5197
	x_5	58.5517	56.2699	57.1796	56.5647	56.2796	56.2739	56.271
	x_6	0.947845	1.13455	0.952583	0.954706	1.04443	1.09759	1.12493
dépendants MO2	μ_1	7.93	7.93	7.93	7.93	7.93	7.93	7.93
	μ_2	73.9751	73.7258	73.7522	73.7345	73.7261	73.7259	73.7258
	μ_3	202.128	213.574	213.488	213.547	213.573	213.573	213.574
	μ_4	31.5968	30.7649	30.8031	30.7778	30.7654	30.7651	30.765
	μ_5	61.5046	61.51	61.51	61.51	61.51	61.51	61.51
	μ_6	1.13275	1.13455	1.13442	1.13451	1.13455	1.13455	1.13455
	σ_1^2	0.42044	0.37504	0.37775	0.37594	0.37507	0.37505	0.37504
	σ_2^2	5.1926	2.6225	2.6086	2.6176	2.6223	2.6224	2.6225
	σ_3^2	6.8235	5.6339	5.6923	5.6532	5.6345	5.6341	5.6339
	σ_4^2	0.6537	0.7443	0.7408	0.7432	0.7442	0.7443	0.7443
	σ_5^2	1.8444	1.4241	1.4448	1.4310	1.4244	1.4242	1.4242
	σ_6^2	0.011653	0.011337	0.0113839	0.0113526	0.0113377	0.0113373	0.0113372
paramètres MO2	T_1	8.10345	8.50276	8.34357	8.45118	8.50107	8.50207	8.50258
	T_2	73.4483	75.7301	74.8204	75.4353	75.7204	75.7261	75.729
	T_3	178.707	213.574	213.331	213.496	213.571	213.573	213.574
	T_4	40	37.5185	38.5078	37.8391	37.529	37.5228	37.5197
	T_5	58.5517	56.2699	57.1796	56.5647	56.2796	56.2739	56.271
	T_6	0.947845	1.13455	0.952583	0.954706	1.04443	1.09759	1.12493
	F_i	-0.30931	118.756	-0.006376	0.984881	0.999922	0.999982	0.999993
	f_1	-0.30931	-0.25071	-0.268722	-0.260923	-0.254096	-0.2521	-0.251073
	f_2	705.752	118.756	121.473	119.07	118.765	118.758	118.757

Dans la partie supérieure du tableau 4.4, nous présentons les valeurs utilisées pour les coefficients de perte k_{1j} et k_{2j} et les poids p_1 et p_2 trouvés pour chaque itération. Dans la partie inférieure divisée en trois parties, nous montrons le résultat de la fonction objectif, la première partie présente l'optimisation de la fonction objectif (F_i), la deuxième le résultat de la fonction (f_1) et la troisième la solution de la fonction (f_2).

Si nous prenons comme exemple l'itération F^7 où le résultat de la fonction (f_1) est égal à -0.251073, la fonction (f_2) égale à 118.757, le poids p_1 égal à 0.0044 et le poids p_2 égal à 0.0084, finalement la fonction objectif F_7 est obtenue de la façon suivante:

$$F_7 = -0.251073 (0.0044) + 118.757 (0.0084) = 0.999993$$

4.8 Conclusions

À partir des tableaux 4.3 et 4.4, nous pouvons tirer les conclusions suivantes pour la solution efficace F^7 :

- ◆ Le niveau de satisfaction du client est en baisse de 0.86 % par rapport à la solution du modelé simultané (MS) (25.96 %) ($0.2596 - 0.251073 = 0.0086$).
- ◆ Le coût de conception est en baisse de 15.5 centièmes par rapport à 118.912\$, trouvé dans la solution du MS ($118.912 - 118.757 = 0.155$).
- ◆ Il y a une diminution dans presque toutes les valeurs de la variance σ_j^2 . Par exemple la valeur de la variance σ_5^2 qui a diminué de 0.064 unité ($1.488 - 1.424 = 0.064$) par rapport à la solution du MS.
- ◆ Les niveaux de conformité pour les moyennes donnent une amélioration dans la caractéristique du design μ_2 qui est passé du niveau bon au niveau meilleur par rapport à la solution du MS. L'analyse de niveaux de conformités est donnée à la figure 4.5.

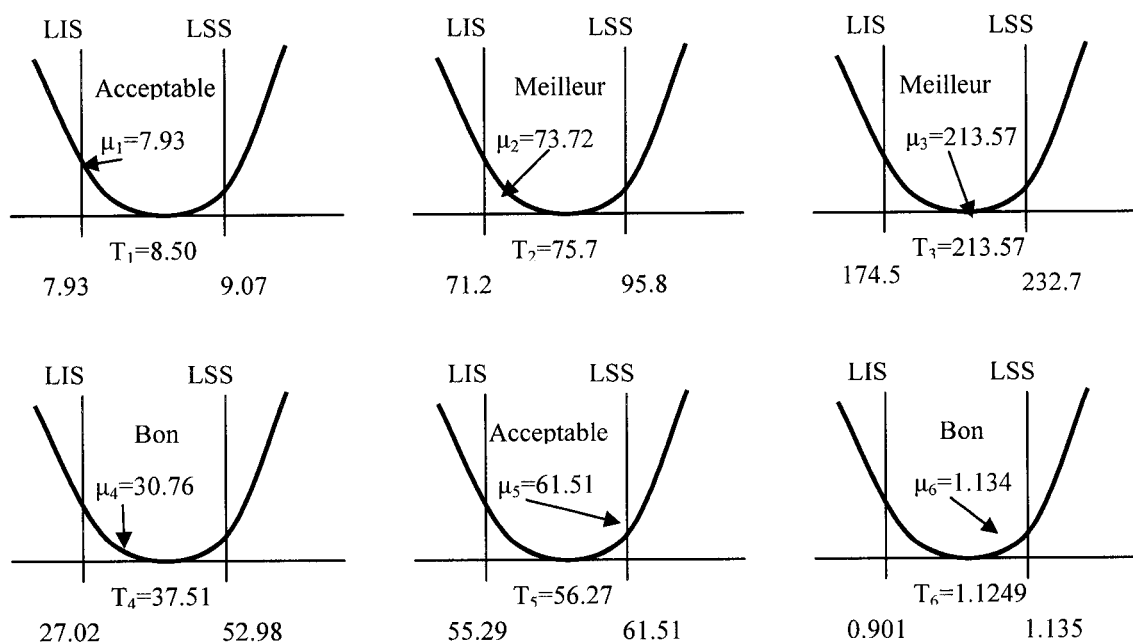


Figure 4.5 Niveaux de conformité des moyennes pour l'itération F^7

En somme, les avantages de la méthode de programmation multicritères non linéaire interactive (IMONLP) sont les suivantes:

- ◆ Les informations collectées auprès du décideur sont minimales, parce qu'il doit indiquer seulement ses préférences parmi un nombre limité d'alternatives qui est toujours égal au nombre d'objectifs du problème.
- ◆ Le nombre d'itérations est limité et les alternatives de décision sont toujours efficaces.

En conséquence, l'application du modèle IMONLP dans l'optimisation des deux premières phases du DFQ donne une petite amélioration en comparaison de l'approche simultanée. Cependant, le poids α est déterminé d'une façon systématique et le décideur dispose de différentes solutions (compromis), qui dépendent de ses besoins. Il peut choisir laquelle s'adapte le plus à ses exigences.

Pour conclure le chapitre, nous présentons dans le tableau 4.5 une comparaison entre les solutions des modèles séquentiel, simultané et interactif.

CONCLUSION

Comme nous l'avons vu, d'une part, le déploiement de la fonction qualité (DFQ) est une méthodologie qui assure que la "voix" du client, autrement dit ses besoins, soit traduite à toutes les étapes de développement du produit, à partir de la conception jusqu'à la production; d'autre part, l'approche garantit la qualité à chaque étape de la conception.

Les avantages de l'utilisation du DFQ dans la conception de nouveaux produits sont: la diminution du temps de développement, l'augmentation de la satisfaction du client, la diminution des coûts de conception et de production, l'obtention de produits plus concurrentiels et de qualité supérieure.

Le DFQ est constitué de quatre étapes ou "maisons": maison de la qualité (MQ1), déploiement du produit (MQ2), planification du procédé (MQ3), planification de la production (MQ4).

Ces dernières années, plusieurs auteurs ont proposé des modèles mathématiques pour optimiser la première ou la deuxième étape du DFQ. Cependant ces modèles optimisent chaque étape de façon séparée et séquentielle, ce qui donne des solutions sous-optimales.

Dans ce travail, nous avons exploré l'avantage de l'optimisation simultanée des deux premières maisons du DFQ. Pour confirmer notre hypothèse, nous avons développé deux approches : la séquentielle et la simultanée. Chacune des deux approches intègre des modèles mathématiques de la première et de la deuxième maison.

◆ Modèle mathématique séquentiel

- Le modèle MQ1 utilise deux ensembles de variables, *les attributs des clients* (z_i) et *les caractéristiques du design* (x_j), ainsi que trois ensembles de contraintes: *l'intervalle de changement des CD*, *l'association entre les CD et la contrainte de comptabilité*. Le critère d'optimisation est la maximisation de la satisfaction du client.
- Le modèle MQ2 travaille avec deux ensembles de variables, *les caractéristiques du design* (x_j) et *les caractéristiques du produit* (y_l), ainsi que quatre ensembles de contraintes: *l'équation de prédiction de la moyenne*, *l'équation de prédiction de la variance*, *les limites inférieure et supérieure des spécifications*, enfin, *les niveaux des facteurs de contrôle*. Le critère d'optimisation est la minimisation du coût de conception.

◆ Modèle mathématique simultané

Il exploite trois ensembles de variables, *les attributs des clients* (z_i), *les caractéristiques du design* (x_j) et *les caractéristiques du produit* (y_l), ainsi que sept ensembles de contraintes : pour la MQ1, *l'intervalle de changement des CD*, *l'association entre les CD et la contrainte de comptabilité* ; pour la MQ2, *l'équation de prédiction de la moyenne*, *l'équation de prédiction de la variance*, *les limites inférieure et supérieure des spécifications*, et finalement, *les niveaux des facteurs de contrôle*. Le critère d'optimisation vise à maximiser la satisfaction du client et à minimiser le coût de conception

Étant donné que le modèle simultané utilise deux fonctions objectifs et un poids α , nous l'avons amélioré en utilisant l'approche interactive multicritères. Cette amélioration nous a permis d'offrir au décideur différentes solutions (compromis) et de déterminer de façon systématique la valeur du poids α .

◆ Modèle mathématique interactif

Il exploite trois ensembles de variables, *les attributs des clients* (z_i), *les caractéristiques du design* (x_j) et *les caractéristiques du produit* (y_l), deux fonctions objectifs, *la satisfaction du client* et *le coût de conception*, ainsi que, sept ensembles de contraintes : pour la MQ1, *l'intervalle de changement des CD*, *l'association entre les CD* et *la contrainte de comptabilité* ; pour la MQ2, *l'équation de prédiction de la moyenne*, *l'équation de prédiction de la variance*, *les limites inférieure et supérieure des spécifications*, enfin, *les niveaux des facteurs de contrôle*.

Nous avons développé un exemple numérique pour illustrer notre approche. L'optimisation de l'exemple nous a donné les conclusions suivantes :

- Le modèle simultané donne une meilleure solution que le modèle séquentiel car il cherche le meilleur compromis entre la satisfaction du client et le coût de conception. Avec ce modèle, la satisfaction du client a diminué de 4.97 % mais le coût de conception de 74.08 %. Deux caractéristiques du design sont améliorées, presque toutes les valeurs de la variance ont diminué, et les moyennes sont très proches des valeurs cibles.
- Le modèle interactif donne une légère amélioration par rapport au modèle simultané. La satisfaction du client a diminué de 0.086 % et le coût de conception de 15.5 centièmes. Une des caractéristiques du design est améliorée et presque toutes les valeurs de la variance ont diminué.

Le modèle interactif présente deux avantages : le poids α est trouvé de façon systématique et le décideur dispose de différentes solutions (compromis), selon ses besoins ; il peut choisir celle qui répond le mieux à ses exigences.

Les résultats que l'on obtient avec les modèles mathématiques montrent bien la supériorité de l'approche simultanée par rapport à l'approche séquentielle.

On peut l'affirmer au moins pour les deux premiers étapes du DFQ, puisque notre travail était consacré à cette portion de la méthodologie.

Pour développer une méthode globale d'optimisation du développement de produits, dans les prochaines étapes de la recherche, il faudra étendre l'approche simultanée à la MQ3 et à la MQ4 du DFQ.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ABDEL HALEEM, B. (1991). A study on Interactive Multiple Criteria Decision Making Problems. A thesis submitted for the degree of philosophy doctor in mechanical engineering. Mechanical Design and Production Department. Faculty of Engineering, Cairo University.

ABDEL HALEEM, B., YACOUT, S., OSMAN, M. et HASSAN, M.F. (1993). A Simplified Interactive Multiple Objective Nonlinear Programming Technique for Parameter Selection in Metal Cutting. 2nd Industrial Engineering Research Conference Proceedings, 340-344.

AKAO, Y. (1993). Quality Function Deployment, Integrating Customer Requirements into Product Design, Productivity Press, Portland.

AMERICAN SUPPLIER INSTITUTE (1989). Quality Function Deployment Implementation Manual, American Supplier Institute, Dearborn, MI.

AMES, A. E., MACDONALD, S., MATTUCI, N., SZONYI, G., et HAWKINS, D. M. (1997). Quality loss functions for optimization across multiple response surfaces, Journal of Quality Technology, 29(3), 339-346.

ARTILES-LEÓN, N. (1996-97). A Pragmatic Approach to Multiple-Response Problems Using Loss Functions. Quality engineering, 9(2), 213-220.

ASFOUR, S., IAKOVOU, E. et CORTES, G. (1999-2000). A synthesis of quality function deployment and robust design and its application in the medical device industry. Quality engineering, 12(1), 37-45.

ASKIN, R. et DAWSON, D. (2000). Maximizing customer satisfaction by optimal specification of engineering characteristics. IIE transactions, 32, 9-20.

BAILLARGEON, G. (1993). Méthodes Taguchi: Détermination des paramètres. Les Editions SMG, Trois-Rivières, Québec.

BODE, J. et FUNG, Y. K. (1998). Cost Engineering with Quality Function Deployment. 22nd International Conference on Computers and Industrial Engineering, 587-590.

CHAN, L. K. et WU, M. L. (1998). Prioritizing the technical measures in quality function deployment. Quality engineering, 10(3), 467-479.

CHAN, L. K. KAO, H. P. NG, A. et WU, M. L. (1999). Rating the importance of customers needs in quality function deployment by fuzzy and entropy methods. International Journal of Production Research, 37(11), 2499-2518.

CHANKONG, V. et HAIMES, Y. (1983). Multiobjective decision making: theory and methodology. North Holland series in system science and engineering, North Holland, New York.

CLAUSING, D. (1994). Total quality development: A step by step to World Class Concurrent Engineering. ASME Press, New-York.

CLEMENT, B. (2001). Design, développement, fabrication: déploiement avec la Maison de la qualité. Génistat Conseils Inc.

COHEN, L. (1995). Quality Function Deployment: How to make QFD work for you. Addison-Wesley Publishing Company.

COHON, J. L. (1978). Multiobjective Programming and Planning. Academic Press. New York.

COOK, T. M. et RUSSELL, R. A. (1989). Introduction to Management Science, fourth edition. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

DAWSON, D. et ASKIN, R. (1999). Optimal new product design using quality function deployment with empirical value functions. Quality and reliability engineering international, 15, 17-32.

DELANO, G., PARNELL, G., SMITH, C. et VANCE, M. (2000). Quality function deployment and decision analysis a R&D case study. International Journal of Operations and Production Management, 20(5), 591-609.

DOWLATSHAHI, S. (1992). Product design in a concurrent engineering environment: an optimization approach. International Journal of Production Research, 30(8), 1803-1818.

FRANCESCHINI, F. et ROSSETTO, S. (1997). Design for quality: Selecting a product's technical features. Quality engineering, 9(4), 681-688.

FOGLIATTO, F. S. et ALBIN, S. L. (2000). Variance of Predicted Reponse as an Optimization Criterion in Multiresponse Experiments. Quality engineering, 12(4), 523-533.

FOURER, R., GAY, D. M., et KERNIGHAN, B. W. (1993). AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming. Duxbury Press, Brooks/Cole Publishing Company.

FOWLKES, W. et CREVELING C. (1995). Engineering Methods for Robust Product Design: Using Taguchi Methods in Technology and Product Development. Addison-Wesley Publishing Company.

GHIYA, K. K., BAHILL, A. T., CHAPMAN, W. L. (1999). QFD: validating robustness. Quality engineering, 11(4), 593-611.

HAN, C. H., KIM, J. K., CHOI, S. H. et KIM, S. H. (1998). Determination of information system development priority using quality function deployment. 23rd International Conference on Computers and Industrial Engineering, 35(1-2), 241-244.

HAUSER, J.R., CLAUSSING, D. (1988). The house of quality, Harvard Business Review., May-June, 63-73.

HWANG, C-L. et MASUD, A.S. H. (1979). Multiple Objective Decision Making- Methods and Applications 'A State-of-the-Art Survey'. Springer-Verlag.

JUSSEL, R. et ATHERTON, M. (2000). Improve product development using QFD. Quality World, Institute of Quality Assurance, 26(6), 32-37.

KANE, V. (1989). Defect prevention "use of simple statistical tool". ASQC-Dekker.

KAPUR, C. K. et AND CHO, B. R. (1996). Economic design of the specification region for multiple quality characteristics. IIE transactions, 28(3), 237-248.

KHOO, L. P. et HO, N.C. (1996). Framework of a fuzzy quality function deployment system. International Journal of Production Research, 34(2), 299-311.

KIM, J.K., HAN, C. H., CHOI S. H. et KIM, S. H. (1998). A knowledge-based approach to the quality function deployment. 23rd International Conference on Computers and Industrial Engineering, 35(1-2), 233-236.

KIM, K-J. (1997-98). Determining optimal design characteristic levels in quality function deployment. Quality engineering, 10(2), 295-307.

KIM, Y. J. et CHO B. R. (2002). Development of Priority-Based Robust Design. Quality engineering, 14(3), 355-363.

KING, B. (1987). Better Design in Half the Time. GOAL/QPC, Methuen, Massachusetts.

KRAUS, P., BENNEYAN J. et MACKERTICH, N. (2000). Use of mathematical programming in the analysis of constrained and unconstrained industrial experiments. Quality engineering, 12(3), 395-406.

KUSIAK, A. (1999). Engineering design "Products, process, and systems", chapter 6, Quality Function Deployment and Process Models. Academic Press, 129-148.

LINER, M., LOREDO, E., GITLOW, H. et EINSRUCH, N. G. (1996-97). Quality function deployment applied to electronic component design. Quality engineering, 9(2), 237-248.

MONTGOMERY, D.C., RUNGER, G.C. et HUBELE, N. F. (1998). Engineering statistics, chapter 6, Building empirical models and chapter 7, design of engineering experiments. John Wiley & Sons, 275-425

MOSKOWITZ, H. et KIM K. J. (1997). QFD optimizer: a novice friendly quality function deployment decision support system for optimizing product designs. Computers and Industrial Engineering, 32(3), 641-655.

MURTAGH, B et SAUNDERS, M. (1993). MINOS 5.5: A software package for solving large-scale optimization problems. Stanford Business Software, Inc. Stanford University.

MYINT, S. (1999). Concurrent Engineering (CE) in Product Design: A Multicriteria Decision-Making Approach. Concurrent Engineering Research and Applications, 7(1), 2-9.

NAKAYAMA, H. (1995). Aspiration level approach to interactive multi-objective programming and it's applications. Advances in multicriteria analysis. Kluwer academic publishers, Netherlands, 147-174.

PRASAD, B. (1998). Review of QFD and Related Deployment Techniques "Trends and Perspectives. Journal of Manufacturing Systems, 17(3), 221-234.

PIEDRAS, H. E., YACOUT, S. et SAVARD, G. (2001). An Integrated Approach for Optimizing the Houses of Quality of QFD. 29th International Conference on Computers and Industrial Engineering, 437-442.

PIGNATIELLO, J. J. (1993). Strategies for robust multiresponse quality engineering. IIE transactions, 25(3), 5-15.

RARDIN, R. (2000). Optimization in Operations Research, chapter 8, Multiobjective Optimization and Goal Programming. Purdue University, 373-403.

REVELLE, J., MORAN, J. et COX, J. (1998). The QFD Handbook, John Wilet & Sons.

RIBEIRO, J. L., FOGLIATTO, F. S. et TEN CATEN, C. S. (2000-01). Minimizing manufacturing and quality costs in multiresponse optimization. Quality engineering, 13(2), 191-201.

RINGUEST, J., GULLEDE, T. (1985). Interactive multiobjective complex research. European Journal of Operational Research, 19, 362-371.

SCHNIEDERJANS, M. J., HONG, S. (1996). Multiobjective concurrent engineering: A goal programming approach. IEEE transactions on Engineering Management, 43(2), 202-209.

SHILLITO, L. M. (1994). Advanced QDF Linking Technology to Market and Company Needs. John Wiley & Sons.

SHIRLAND, L.; JESSE R. (1997). Prioritizing customer requirements using goal programming. ASQC's 51st Annual Quality Congress Proceedings, 297-308.

SIVALOGANATHAN, S., EVBUOMWAN, N. F. O. (1997). Quality Function Deployment-The technique: state of the art and future directions. Concurrent engineering: research and applications, 5(2), 171-181.

STUART, G. (1993). Taguchi methods "A hands-on approach". Addison-Wesley publishing company.

SUHR, R. et BATSON, R. G. (2001). Constrained Multivariate Loss Function Minimization. Quality engineering, 13(3), 475-483.

TABUCANON, M. T. (1988). Multiple criteria decision making in industry, Studies in production and engineering economics, n. 8, Elsevier Science Publishers.

TAGUCHI, G. (1986). Introduction to Quality Engineering. Asian Productivity Organisation, Tokyo, Japan.

TERNINKO, J. (1998). Step-by-step QFD. 2nd edition, St. Lucie Press, Boca Raton, Florida.

THURSTON, D. L. et LOCASCIO, A. (1993). Multiattribute design optimization and concurrent engineering. Concurrent engineering: Contemporary issues and modern design tools, H. R. PARSAEI et W. G. SULLIVAN. Chapman & Hall, London, 207-230.

TRAPPEY, C. V., TRAPPEY, A. J. C. et HWANG, S.-J. (1996). A computerized quality function deployment approach for retail services. Computers and Industrial Engineering, 30(4), 611-622.

TSUI, K.-L. (1999). Robust design optimization for multiple characteristic problems. International Journal of Production Research, 37(2), 433-445.

VAIRAKTARAKIS, G. (1999). Optimization tools for design and marketing of new/improved products using the house of quality. Journal of Operations Management, 17, 645-663.

VIGIER, M. (1992). La pratique du QFD (Quality Function Deployment). Les Editions d'organisation, Paris.

VONDEREMBSE M. A. et RAGHUNATHAN T. S. (1997). Quality function deployment's impact on product development. International Journal of Quality Science, 2(4), 253-271.

WASSERMAN, G. (1993). On how prioritize design requirements during the QFD planning process. IIE Transactions, 25(3), 59-65.

WINSTON, W. L. (1997). Operations Research: Applications and Algorithms, 3rd ed. Duxbury Press, Boston.

WINSTON, W. L., ALBRIGHT, S. C., et BROADIE M. (2001). Practical Management Science, chapter 9, "Multi-objective Decision Making", 2nd ed. Duxbury Press, Boston, 449-492.

WURL, R. C., ALBIN, S. L. (1999). A comparison of multiresponse optimization: Sensitivity to parameter selection. Quality engineering, 11(3), 405-415.

ZAIDI, A. (1990). QFD: Une introduction, Techniques et Documentation. Lavoisier Paris.

ZELENY, M. (1982). Multiple Criteria Decision Making. McGraw-Hill Book Company.

ZHOU, M. (1998). Fuzzy logic and optimization models for implementing QFD. 23rd International Conference on Computers and Industrial Engineering. 35(1-2), 237-240.

ANNEXE I : MODÈLES MATHÉMATIQUES DE LA MQ1

La notation suivante est utilisée dans la formulation des quatre modèles de la MQ1 trouves dans la revue de littérature. La fonction objectif est de maximiser la satisfaction globale du client (S).

- AC_i : attributs ou exigences du client $i = 1, \dots, m$
 CD_j : caractéristiques du design $j = 1, \dots, n$
 w_i : importance relative des AC_i
 w'_i : importance absolue des AC_i
 f_{ij} : coefficients de rapport entre AC_i et CD_j
 x_j : variable décisionnelle des CD_j
 x_j^0 : valeur actuelle des CD_j
 $x_j^{\min}$: valeur minimum possible des CD_j
 $x_j^{\max}$: valeur maximum possible des CD_j
 Δx_j : changement dans la valeur des CD_j
 x'_j : réalisation corrélée de x_j
 x_j^c : valeur normale de x'_j
 L_j, U_j : limites inférieure et supérieure des CD_j
 V_i : niveau de satisfaction des AC_i
 π_i : moindre niveau acceptable des AC_i
 Z_j : énergie dépensée à améliorer x_j
 θ_{jk} : changement dans les CD_k par changement d'unité dans CD_j
 $V_i^{\min}, V_i^{\max}$: valeurs minimums et maximums de V_i (au - dessus de tout $[L_j, U_j]$)
 c_j : coût fixe pour le changement du niveau des CD_j
 c_p : budget de production (c_{pj} est le coût de production par le CD_j)
 c_D : budget de recherche et de développement (c_{Dj} est le coût de R & D par CD_j)
 T : temps permis de développement (t_j est le temps de développement par CD_j)
 h_1 et h_2 : constantes qui dénotent la force de l'association entre CD_{j1} et CD_{j2}
 B : limite de budget
 d_i : degré d'importance des AC_i
 γ_{jk} : matrice de corrélation entre les CD_j et k
 $\underline{d}$: estimation de l'importance des clients
 v_j : nombre trapézoïdal flou (trapezoidal fuzzy number)
 a_j : coefficient d'utilité
 d_j^{-1} : intervalle qui limite la valeurs des CD_j

D_j : coût fixe encouru si CD_j est choisi

P_j : tout nombre qui peut faire que $z_j P_j \geq u_j$ quand $z_j = 1$

m_{ij} : jugement comparative entre AC_1 et AC_2

$U_T(v_j)$: impact globale de CD_j sur AC_i

Modèle de Dawson et Askin

$$\text{Maximiser } S = \sum_i w_i \cdot V_i$$

sujet a

$$\pi_i \leq V_i \leq 1 \quad (\pi_i \geq 0) \quad i = 1, \dots, m$$

$$V_i = \left[\beta_{0i} + \sum_j \beta_{ji} x_j^c + \sum_j \beta_{jji} (x_j^c)^2 + \sum_{j,k} \beta_{j-1,ji} x_{j-1}^c x_j^c - V_i^{\min} + \sum_{j,k} \beta_{j,k,i} x_j^c x_k^c \right] \times [V_i^{\max} - V_i^{\min}]^{-1}$$

$$x_j' = x_j^0 + Z_j + \sum_{k \neq j} \theta_{jk} Z_k \quad j = 1, \dots, n$$

$$L_j \leq x_j \leq U_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$Z_j = |x_j - x_j^0| \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_j^c = \frac{x_j' - (U_j + L_j)/2}{(U_j - L_j)/2} \quad j = 1, \dots, n$$

$$\theta_{jk} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \quad j = 1, \dots, n, \quad k$$

$$\sum_j c_{pj} \cdot Z_j \leq c_p$$

$$\sum_j c_{Dj} \cdot Z_j \leq c_D$$

$$\sum_j t_j \cdot Z_j \leq T$$

$$Z_j \geq 0$$

Modèle de Kim

$$\text{Maximiser } S = \sum_{i=1}^m w_i \sum_{j=1}^n f_{ij} \Delta x_j$$

sujet a :

$$\left(\frac{x_j^{\min} - x_j^0}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \right) \leq \Delta x_j \leq \left(\frac{x_j^{\max} - x_j^0}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \right) \quad j = 1, \dots, n$$

$$h_1 \Delta x_{j_2} \leq \Delta x_{j_1} \leq h_2 \Delta x_{j_2} \quad i \neq j \quad \text{pour associer } CD_{j_1} \text{ et } CD_{j_2}$$

$$\sum c_j d_j \leq B$$

$$d_j \left(\frac{x_j^{\min} - x_j^0}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \right) \leq \Delta x_j \leq d_j \left(\frac{x_j^{\max} - x_j^0}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \right) \quad j = 1, \dots, n$$

$$d_j = 0 \text{ ou } 1 \quad j = 1, \dots, n$$

Avec

$$V(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m w_i V_i(y_i), \quad V_i(y_i) = \sum_{j=1}^n f_{ij} \Delta x_j$$

$$0 \leq w_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^m w_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^n |f_{ij}| = 1$$

$$\Delta x_j = \frac{x - x_j^0}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}$$

$$x_j = x_j^0 + \Delta x_j (x_j^{\max} - x_j^{\min})$$

Modèle de Wasserman

$$\text{Maximiser } S = \{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \dots + w_n \cdot x_n\}$$

sujet à :

$$w'_j = \sum_{i=1}^m d_i \cdot f_{ij}$$

$$\underline{d} = d_1 \underline{u}_1 + d_2 \underline{u}_2 + \dots + d_m \underline{u}_m$$

$$\gamma_{jk} = \underline{v}_j \cdot \underline{v}_k \left(= \cos \left(\underline{v}_j \cdot \underline{v}_k \right) \right) \quad k = 1, \dots, n$$

$$(f_{i1} \underline{v}_1 + f_{i2} \underline{v}_2 + \dots + f_{in} \underline{v}_n) \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \dots + \underline{v}_n) = 1, \quad i = 1, \dots, m$$

$$f_{ij}^{norm} = \frac{\sum_{k=1}^n f_{ik} \cdot \gamma_{kj}}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ij} \cdot \gamma_{jk}}$$

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \leq B$$

avec

$$w_j = \frac{w'_j}{\sum_{j=1}^n w'_j}$$

Modèle de Zhou

$$\text{Maximiser } S = \sum_j^n a_j d_j^{-1} x_j$$

sujet a :

$$x_j \leq z_j P_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_j (D_j z_j + c_j x_j) \leq B$$

$$L_j \leq x_j \leq U_j, \quad L_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$z_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n$$

avec

$$v_j = (\alpha_j, \beta_j, \tau_j, \gamma_j)$$

$$a_j = \frac{U_T(v_j)}{\sum U_T(v_k)}$$

$$U_T(v_j) = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma_i - x_j^{\min}}{(x_j^{\max} - x_j^{\min}) - (\tau_i - \gamma_i)} + \frac{x_j^{\max} - x_j}{(x_j^{\max} - x_j^{\min}) - (\beta_i - \alpha_i)} \right]$$

$$v_i = \left(\frac{1}{k} \right) \otimes [(v_{i1} \otimes w_1) \oplus (v_{i2} \otimes w_2) \oplus \dots \oplus (v_{ik} \otimes w_k)] \quad \otimes, \oplus : \text{addition et multiplication flou}$$

ANNEXE II : MODÈLES MATHÉMATIQUES DE LA MQ2

Dans la formulation de six modèles de la MQ2 obtenues de la revue de littérature, nous utilisons la notation suivante. La fonction objectif vise à minimiser le coût de conception.

- FPQ : fonction perte de qualité
 CD_j : caractéristiques du design $j = 1, \dots, n$
 CP_ℓ : caractéristiques du produit $\ell = 1, \dots, L$
 y_ℓ : variable décisionnelle des CP_ℓ
 $k_j, k_{j\ell}$: coefficient de perte lie à la CD
 t_i, t_j : valeur cible des CD
 μ_j, μ_ℓ : moyenne des CD
 σ_j^2 : variance des CD
 σ_j : écart type des CD
 $\sigma_{j\ell}$: covariance entre CD
 Y_j, Y_ℓ : équation de prédiction obtenue du modèle de surface de réponse
 $P_\mu(y_\ell)$: équation de prédiction de la moyenne
 $P_\sigma(y_\ell)$: équation de prédiction de l'écart type
 LIS_j : limite inférieure de spécification des CD_j
 LSS_j : limite supérieure de spécification des CD_j
 V_ℓ^{inf} : valeur inférieure de CP_ℓ
 V_ℓ^{sup} : valeur supérieure de CP_ℓ
 C_j^+, C_j^- : coût relatif pour chaque CD_j à son réglage minimal et maximal
 C_s : coût par unité de rebute
 C_I : coût par unité inspecte
 p : fraction de produits expédiés au client
 w_j : poids d'importance des CD_j
 RI_j : importance relative des CD_j
 ΔE_j^2 : moitié de l'intervalle forme par les limites des spécifications des CD_j

Modèle de Ames et al

$$\text{Minimiser } FPQ = \sum_{j=1}^n k_j \{Y_j(y_1, y_2, \dots, y_\ell) - T_j\}^2$$

Modèle de Artiles - León

$$\text{Minimiser } FPQ = 4 \sum_{j=1}^n \left(\frac{Y_j - T_j}{LSS_j - LIS_j} \right)^2$$

sujet à :

$$V_{\ell}^{\inf} \leq V_{\ell} \leq V_{\ell}^{\sup} \quad \ell = 1, \dots, L$$

Modèle de Kapure et Cho

Pour une partie

$$\text{Minimiser } FPQ = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^L k_{j\ell} (y_j - t_j)(y_{\ell} - t_{\ell})$$

Pour une distribution de parties

$$\text{Minimiser } FPQ = \sum_{j=1}^n k_j [(\mu_j - t_j)^2 + \sigma_j^2] + \sum_{j=2}^n \sum_{\ell=1}^{j-1} k_{j\ell} [\sigma_{j\ell} + (\mu_j - t_j)(\mu_{\ell} - t_{\ell})] + C_s(1-p) + C_i$$

Modèle de Krauss, Benneyan et Mackertich

$$\text{Minimiser } CTA = \sum_{j=1}^n \left(\frac{C_j^+ + C_j^-}{2} + \frac{C_j^+ - C_j^-}{2} x_j \right) + \left[1 - \phi \left(\frac{LSS_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) + \phi \left(\frac{LIS_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \right] C_D V$$

sujet à :

$$\mu_j = P_\mu(y_\ell) \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sigma_j = P_\sigma(y_\ell) \quad j = 1, \dots, n$$

$$-1 \leq y_\ell \leq 1 \quad \ell = 1, \dots, L$$

CTA = coût total à attendre

Modèle de Pignatiello

$$\text{Minimiser } FPQ = \sum_{j=1}^n k_j [Y_j(y_\ell) - t_j]^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=j+1}^L k_{j\ell} [Y_j(y_\ell) - t_j] [Y_\ell(y_\ell) - t_\ell]$$

Modèle de Ribeiro, Fogliatto et Ten Caten

$$\text{Minimiser } FPQ = \sum_{j=1}^n w_j \left[(Y_j(y_\ell) - T_j)^2 + \sigma_j^2(y_\ell) + \sum_{\ell=1}^L \sigma_\ell^2 \left(\frac{\partial Y_j(y_\ell)}{\partial X_k} \right) \right]$$

avec

$$w_j = \frac{RI_j}{\Delta E_j^2}$$