UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

LA GESTION DES CENTRALES HYDROÉLECTRIQUES EN SÉRIE PAR BALANCEMENT DES RÉSERVOIRS

IMED LAOUINI

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION

DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR

(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)

DÉCEMBRE 2011

© Imed Laouini, 2011.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

GESTION DES CENTRALES HYDROÉLECTRIQUES EN SÉRIE PAR BALANCEMENT DES RÉSERVOIRS

Présentée par : LAOUINI Imed

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. SOUMIS François, Ph.D, président

M.TURGEON André, Ph.D, membre et directeur de recherche

M. GENDREAU Michel, Ph.D, membre

M. MAAROUF SAAD, Ph.D, membre externe

DÉDICACE

À la mémoire de mon père, à mes enfants: Rawene, Amine et Imene.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, M. André Turgeon, de m'avoir confié ce projet. Je le remercie aussi pour ses conseils et pour le soutien financier. Je voudrais également remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce projet et qui ont surtout crue en moi.

Je tiens aussi à remercier mes coéquipiers de la Chaire de recherche industrielle CRSNG-Hydro-Québec en gestion des systèmes hydriques qui ont contribué au raffinement de ces travaux par leurs commentaires et leurs discussions.

Je remercie chaleureusement ma femme pour sa patience et son amour et ma famille pour son soutien indéterminé.

Mes remerciements vont également aux membres du jury qui ont accepté de lire et d'évaluer cette thèse.

RÉSUMÉ

Le but de cette thèse est de développer un logiciel qui puisse gérer efficacement plusieurs réservoirs et centrales hydroélectriques sur une rivière. La règle de gestion que nous avons développée consiste à trouver un compromis entre les besoins pour la compagnie de générer des bénéfices et les risques d'inondation et de manquer de l'eau, et ceci sans connaître à l'avance les apports d'eau qui entreront dans les réservoirs dans les semaines futures.

Notre approche consiste tout d'abord à agréger toutes les installations hydroélectriques de la rivière de façon à n'avoir qu'un seul réservoir à gérer. Par la suite, nous déterminons une politique de gestion du réservoir unique avec la programmation dynamique stochastique. L'étape d'après consiste à répartir la production du réservoir unique entre toutes les installations de la rivière. Cette répartition entre les installations est faite par la méthode de balancement des réservoirs qui consiste à déterminer le contenu de chaque réservoir en fonction du contenu du réservoir agrégé. Les fonctions qui déterminent le contenu de chaque réservoir en fonction du contenu du réservoir agrégé sont appelées fonctions de balancement.

Les fonctions de balancement sont déterminées par une méthode de régression non paramétrique appelée régression multi-variée par spline adaptative (Multivariate Adaptive Regression Splines (MARS)). La méthode MARS permet d'ajuster automatiquement des modèles polynomiaux par parties. À ma connaissance, c'est la première fois qu'on utilise cette méthode de régression pour déterminer des fonctions de balancement.

Pour valider la méthode que nous avons développée, nous avons comparé les résultats de cette méthode à ceux obtenus avec la programmation dynamique stochastique pour des problèmes de deux et trois réservoirs en série. Enfin, nous avons appliqué notre approche à un problème de grande taille, et plus précisément de sept réservoirs en série.

ABSTRACT

This thesis presents our approach for determining a weekly operating policy of a hydropower system consisting of several reservoirs in series using an aggregation-disaggregation method and a balancing rule. The objective function consists in maximizing the difference between the revenues of the energy surplus sold on the spot market and the cost of the energy bought to meet demand. The first step of the method consists in aggregating all installations on the river and then solving the aggregate model with stochastic dynamic programming. The feedback operating policy obtained by solving the aggregate model gives the amount of energy that should be stored at the end of each period. The second step consists of finding a rule and a relation which optimally allocates the entire storage between the reservoirs using a balancing rule. These rules were obtained by applying both, classical linear regression and the Multivariate Adaptive Regression Method (MARS) to results from a deterministic model that maximize hydropower production. Balancing reservoirs means managing the hydroelectric installations so that the total amount of potential energy stored in the system is distributed among the reservoirs of the system. This distribution must take into account the randomness of the reservoir inflows, the efficiency of the installations, and the variations of the water heads and the risk of spillage. This report will show how to determine and improve balancing rules for several reservoirs in series and will compare the results obtained for two and three reservoirs to those obtained with stochastic dynamic programming. The proposed method was also extended to a large scale system and more precisely to seven reservoirs in series.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE III

REMERCIEMENTS IV

RÉSUMÉ V

ABSTRACT VI

TABLE DES MATIÈRES VII

LISTE DES TABLEAUX XI

LISTE DES FIGURES XII

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS XV

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1 MODÉLISATION DES COMPLEXES HYDROÉLECTRIQUES 3

1.1 Complexes hydroélectriques 3

1.2 Types de centrales hydroélectriques 5

1.2.1 Les centrales au fil de l'eau 5

1.2.2 Les centrales alimentées par un réservoir 5

1.3 Groupe turboalternateur et similitude en hydraulique 5

1.3.1 Rendement optimal d'un groupe turboalternateur 7

1.3.2 Chargement optimal des groupes et production d'une centrale hydroélectrique 8

1.4 Gestion des centrales hydroélectriques 9

1.4.1 Gestion à long terme des réservoirs 9

1.4.2 Gestion à moyen terme des réservoirs 9

1.4.3 Gestion à court terme des réservoirs 10

1.5 Système hydrique à l'étude. 10

CHAPITRE 2 PRÉSENTATION DU PROBLÈME 12

2.1 Notations 12
2.2 Problème de gestion des réservoirs 14
2.2.1 Fonction objective 15
2.2.2 Les Contraintes 20
2.3 Les apports naturels 20
2.4 La programmation dynamique stochastique 21
CHAPITRE 3 REVUE DE LITTÉRATURE 26
3.1 Les méthodes d'optimisation stochastique implicite 27
3.2 Les méthodes d'optimisation stochastique explicite 28
3.3 Les heuristiques 31
3.4 La simulation 31
CHAPITRE 4 AGRÉGATION DES INSTALLATIONS HYDROÉLECTRIQUES ET MODÈLE DU RÉSERVOIR UNIQUE 33
4.1 Méthode d'agrégation des installations hydroélectriques 34
4.2 Modèle du réservoir unique 37
4.3 La programmation dynamique stochastique 38
4.4 Application numérique 42
CHAPITRE 5 MODÈLE D'OPTIMISATION DÉTERMINISTE 44
5.1 Modèle déterministe 44
5.2 Choix de la méthode de résolution 45
5.2.1 Approximation de la fonction de production 46
5.2.2 Algorithme de résolution du problème déterministe 47
5.2.3 Stratégie de réduction des bornes et convergence vers une solution réalisable pour le modèle initial 49
5.3 Application 49

CHAPITRE 6 PROCESSUS DE DÉSAGRÉGATION ET BALANCEMENT DES RÉSERVOIRS…… 51

6.1 Fonctions de balancement 52

6.2 Coefficient de corrélation et régression linéaire 56

6.3 La méthode de régression MARS 63

6.3.1 Généralités et définitions 63

6.3.2 Algorithme MARS 66

6.3.3 Validation croisée 69

6.4 Application de la régression MARS 69

6.5 Limitations et corrections des fonctions de balancement 71

CHAPITRE 7 SIMULATION DE LA POLITIQUE DE GESTION 74

7.1 Méthodologie et algorithme de simulation 74

7.2 Générateur de scénarios d'apports naturels. 77

7.2.1 Algorithme de génération de scénario d'apports naturels 78

7.3 Évaluation numérique de notre approche 80

7.4 Application à un système de sept réservoirs 81

7.5 Analyse et discussion 84

CHAPITRE 8 UTILISATION DES FONCTIONS DE BALANCEMENT DANS UN MODÈLE D'OPTIMISATION POUR LE SUIVI DES NIVEAUX CIBLES 91

8.1 Stratégie d'amélioration des fonctions de balancement 91

8.2 Modèle d'optimisation pour le suivi des niveaux cibles 95

8.2.1 Condition d'optimalité 97

8.2.2 Algorithme d'activation de contraintes 99

8.2.3 Initialisation de l'algorithme d'activation de contraintes 103

8.3 Simulation 105

8.3.1 Algorithme de simulation.....105
8.3.2 Résultats de simulation.....105
CONCLUSION ET AMÉLIORATIONS FUTURES.....108
BIBLIOGRAPHIE 110

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 : Caractéristiques des installations 11

Tableau 2.1 : Liste des symboles mathématiques 12

Tableau 4.1 : Discrétisation de la loi normale centrée réduite 41

Tableau 6.1 : Coefficients de corrélation entre le réservoir agrégé et chacun les réservoirs de la rivière La-Grande 57

Tableau 7.1: Résultats de la programmation dynamique (PDS) et de notre méthode pour les deux systèmes de tests.....81

Tableau 7.2: Variation moyenne de la hauteur par unité de volume pour les réservoirs de la rivière La-Grande 85

Tableau 7.3: Classification des réservoirs de la rivière La-Grande selon le coefficient Ip_i 89

Tableau 8.1 : Tableau comparatif des résultats de simulation 106

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Aménagement hydroélectrique 4

Figure 1.2 : Fonction typique de la relation puissance/débit 6

Figure 1.3 : Variation de la fonction débit vs puissance avec la hauteur de chute 7

Figure 1.4 Variation du rendement avec le débit 8

Figure 2.1 : Fonction bénéfice 15

Figure 2.2 : Production hydroélectrique d'une centrale en fonction du soutirage 18

Figure 2.3: Profil de demande normalisée 19

Figure 4.1 : Rivière fictive 36

Figure 4.2 : Principe de décomposition de la PDS 39

Figure 4.3 : Discrétisation de la loi normale 41

Figure 4.4 : Contenu moyen (GWh) du réservoir agrégé pour un système de deux réservoirs en série 43

Figure 4.5 : Apport moyen, génération moyenne et demande pour le réservoir agrégé de deux réservoirs en série 43

Figure 5.1 : Algorithme de résolution du modèle déterministe 48

Figure 5.2 : Variation du contenu du réservoir 1 du système formé par deux réservoirs en série . 50

Figure 5.3 : Variation du contenu du réservoir 2 du système formé par deux réservoirs en série . 50

Figure 6.1 : Contenu du réservoir 1 en fonction du contenu du réservoir agrégé pour le système de deux réservoirs en série 54

Figure 6.2 : Contenu du réservoir 2 en fonction du contenu du réservoir agrégé pour le système de deux réservoirs en série 54

Figure 6.3 : Contenu d'un réservoir 1 en fonction du contenu du réservoir agrégé pour la dixième semaine de l'année. 55

Figure 6.4 : Contenu du réservoir 1 en fonction du contenu du réservoir agrégé 57

Figure 6.5 : Contenu du réservoir 2 en fonction du contenu du réservoir agrégé 58

Figure 6.6 : Contenu du réservoir 3 en fonction du contenu du réservoir agrégé 58

Figure 6.7 : Contenu du réservoir 4 en fonction du contenu du réservoir agrégé 59

Figure 6.8 : Contenu du réservoir 5 en fonction du contenu du réservoir agrégé 59

Figure 6.9 : Contenu du réservoir 6 en fonction du contenu du réservoir agrégé 60

Figure 6.10 : Contenu du réservoir 7 en fonction du contenu du réservoir agrégé 60

Figure 6.11 : Variation des coefficients de corrélation dans le temps 62

Figure 6.12 : Résidus de la régression linéaire du réservoir 7 en fonction du contenu du réservoir agrégé. 62

Figure 6.13 : Fonction de base de la méthode MARS [49].....65

Figure 6.14 : Illustration de la phase directe de l'algorithme MARS [51].....67

Figure 6.15 : Algorithme de la méthode MARS 69

Figure 6.16 : Exemple de fonction de balancement par ARESLab 70

Figure 7.1 : Méthodologie.....75

Figure 7.2 : Algorithme de simulation de la politique de gestion 76

Figure 7.3 : Algorithme de génération de scénarios d'apports naturels.....78

Figure 7.4 : Minimum, maximum et moyenne des séries historiques d'apports 80

Figure 7.5 : Évolution des contenus des réservoirs 1, 5 et 6 (réservoirs de grande capacité d'emmagasinement). 82

Figure 7.6 : Évolution des contenus des réservoirs 3 et 4 (réservoirs de capacité d'emmagasinement moyenne).....82

Figure 7.7 : Évolution des contenus des réservoirs 2 et 7 (réservoirs de capacité d'emmagasinement faible). 83

Figure 7.8 : Contenu du réservoir 5 en fonction du contenu du réservoir agrégé pour les périodes d'hiver (cas de 7 réservoirs en série).....84

Figure 7.9 : Variation de la hauteur de chute pour des capacités de stockage différentes [46] 85

Figure 8.1 : Agrégation et niveaux cibles pour un système de trois réservoirs en série 93

Figure 8.2 : Régression globale pour le sous-système formé par les réservoirs 3 et 4 94

Figure 8.3 : Régression globale pour le sous-système formé par les réservoirs 6 et 7 94

Figure 8.4 : Régression globale pour le réservoir agrégé de la rivière La-Grande 95

Figure 8.5 : Algorithme d'activation de contraintes 102

Figure 8.6 : Algorithme de simulation de la politique de gestion 105

Figure 8.7 : Contenu du réservoir 7 (algo-1: algorithme du chapitre 7 et algo-2 : algorithme du chapitre 8).....107

Figure 8.8 : Soutirages moyens des 7 réservoirs de la rivière La-Grande 107

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

ACP	Analyse en Composantes Principales
AG	Algorithme Génétique
DNS	Distribution Normale Standard
MARS	Multivariate Adaptive Regression Splines
MTO	Méthode des Trajectoires Optimales
OSI	Optimisation Stochastique Implicite
OSE	Optimisation Stochastique Explicite
PDS	Programmation Dynamique Stochastique
PLS	Programmation Linéaire Successive
RBF	*Radial Basis Function*

INTRODUCTION

Hydro-Québec et l'École Polytechnique de Montréal ont créé une chaire sur la gestion des systèmes hydriques dans le but de résoudre certains problèmes reliés à la gestion des installations hydroélectriques d'Hydro-Québec. Le problème de gérer les centrales hydroélectriques par balancement des réservoirs a été l'un des premiers problèmes soumis à la chaire. Quoique ce problème ait fait l'objet de plusieurs travaux de recherche au cours des deux dernières décades, ce problème reste un défi de grande taille pour les chercheurs et les gestionnaires des compagnies, comme Hydro-Québec, qui gèrent des centrales hydroélectriques.

La complexité des systèmes hydriques et le contexte socio-économique ont propulsé ce domaine de recherche à l'avant garde. Même si les récents travaux de recherche ont donnés des méthodes et approches novatrices, que se soit pour traiter l'aspect multi-objectif des réservoirs ou l'aspect stochastique des apports naturels, aucune méthode n'est encore capable de déterminer une règle de gestion stochastique pour les systèmes de grande taille. En effet, pour un système de N réservoirs, la règle de gestion hebdomadaire de chaque réservoir est une fonction des contenus et des apports à tous les réservoirs du système, ce qui rend le problème impossible à résoudre lorsque N est plus grand que quatre.

Lorsque les apports naturels sont considérés comme étant des variables aléatoires, la programmation dynamique stochastique (PDS) est le meilleur outil pour résoudre le problème parce qu'elle est capable de traiter simultanément l'aspect stochastique des apports et l'aspect non-linéaire de la fonction objective. Cependant, la PDS souffre du problème de « *curse of dimentionaliy* ». Pratiquement, la PDS ne peut pas résoudre dans un temps raisonnable des problèmes de gestion de systèmes hydriques contenant plus de quatre réservoirs.

Notre revue de littérature nous a fait découvrir trois façons de résoudre le problème : 1) Transformer le problème de gestion stochastique en un problème de gestion déterministe; 2) Réduire le nombre de variables en utilisant des schémas de décomposition ou d'agrégation des variables; 3) Utiliser des règles de gestion préétablies basées sur l'expérience des exploitants. Puisque les apports d'eau ne peuvent pas être prévus avec certitude sur un horizon de temps

d'une année, nous pensons que les deux dernières façons sont préférables. Notons que toutes ces méthodes donnent des solutions sous-optimales.

L'objectif de cette thèse est de développer une méthode pour déterminer une règle de gestion appropriée pour les sept complexes hydroélectriques de la rivière La-Grande au Québec. L'objectif de la règle de gestion est de maximiser l'espérance mathématique des profits de la compagnie tout en prenant en compte l'aspect stochastique des apports et les risques d'inondation. La règle optimale de gestion est déterminée au pas de temps hebdomadaire.

Cette thèse comprend sept chapitres. Le premier chapitre décrit les complexes hydroélectriques qui comprennent des réservoirs, des centrales, et des groupes turbo-alternateurs. Ce chapitre présente aussi les caractéristiques des installations sur la rivière La-Grande d'Hydro-Québec. Le deuxième chapitre présente le modèle mathématique de gestion des centrales hydroélectriques à l'étude avec toutes les hypothèses et particularités reliées à ce modèle. De plus, ce chapitre présente l'algorithme de la programmation dynamique stochastique qui représente la méthode de résolution la mieux adaptée pour ce type de problèmes lorsque le nombre de réservoirs est inférieur à quatre. Le troisième chapitre présente une revue de littérature pour les problèmes reliés à la gestion stochastique des systèmes hydriques. L'agrégation des installations hydroélectriques ainsi que la résolution du modèle du réservoir unique sont présentées dans le quatrième chapitre. Le cinquième chapitre présente une modélisation déterministe du problème à l'étude puis l'approche utilisée pour solutionner ce modèle. Le sixième chapitre est consacré à la présentation des fonctions de balancement et de la méthode de régression MARS.

La validation de la méthode utilisée pour résoudre le problème est faite dans le septième chapitre qui présente aussi le générateur des apports naturels utilisé pour la simulation de la règle de gestion développée. De plus, on y compare la règle de gestion obtenue avec notre approche à celle obtenue avec la PDS pour un système de deux et trois réservoirs en série. Le huitième chapitre est réservé à la présentation des stratégies d'amélioration que nous avons adoptées afin d'améliorer le modèle de régression de certains réservoirs. Finalement, ce chapitre permet de voir, avec la simulation, les avantages de telles approches pour un système de réservoirs en série.

CHAPITRE 1 MODÉLISATION DES COMPLEXES HYDROÉLECTRIQUES

Avant de présenter le problème à l'étude, qui est de déterminer une règle de gestion «optimale» pour des centrales hydroélectriques en série, il est important de faire une description sommaire des complexes hydroélectriques et de leur modélisation mathématique afin de mieux comprendre les modèles de gestion présentés dans le chapitre suivant.

Ce chapitre comprend cinq sections. La première présente les principales composantes d'un complexe hydroélectrique. La deuxième section présente une classification des centrales hydroélectriques. La troisième section est consacrée à la présentation des groupes turboalternateurs et à la notion de similitude en hydraulique. La quatrième section donne une classification des problèmes de gestion des centrales hydroélectriques. Finalement, la cinquième section est consacrée à la présentation des caractéristiques techniques des installations de la rivière La-Grande qui a servi comme exemple d'application.

La matière de ce chapitre est basée essentiellement sur les références [1], [2], [3] et [4].

1.1 Complexes hydroélectriques

L'énergie hydroélectrique est générée par la conversion de l'énergie potentielle, cinétique et de pression contenues dans les différents flux d'eau en énergie électrique. Les réservoirs offrent un avantage majeur puisqu'ils permettent de stocker de très grandes quantités d'énergie potentielle qui seront éventuellement converties en énergie électrique. Gérer efficacement la réserve d'énergie stockée dans les réservoirs est une tâche primordiale pour les compagnies productrices d'énergie hydroélectrique comme Hydro-Québec. Rappelons que présentement personne ne dispose de moyens techniques pour stocker de l'énergie électrique en grande quantité

Un complexe hydroélectrique est un ensemble d'ouvrages de génie civil et d'installations mécaniques et électriques dédiés à la production d'énergie électrique. Généralement, un complexe hydroélectrique comprend les ouvrages suivants:

- Un barrage pour stocker les surplus d'eau et augmenter la hauteur de chute.
- Des évacuateurs de crue pour écouler les surplus d'eau au besoin.

- Des conduites forcées pour amener l'eau à la centrale. Elles doivent supporter les surpressions et les dépressions causées par les coups de bélier et les fermetures brusques des turbines. Les surfaces intérieures doivent être suffisamment lisses de façon à minimiser les pertes de charge.
- Des salles de machine abritant les groupes turboalternateurs, les appareillages électriques et les équipements de commande et d'exploitation.
- Un canal de fuite pour permettre la restitution de l'eau dans le lit de la rivière.

La Figure 1.1 montre un schéma d'un aménagement hydroélectrique.

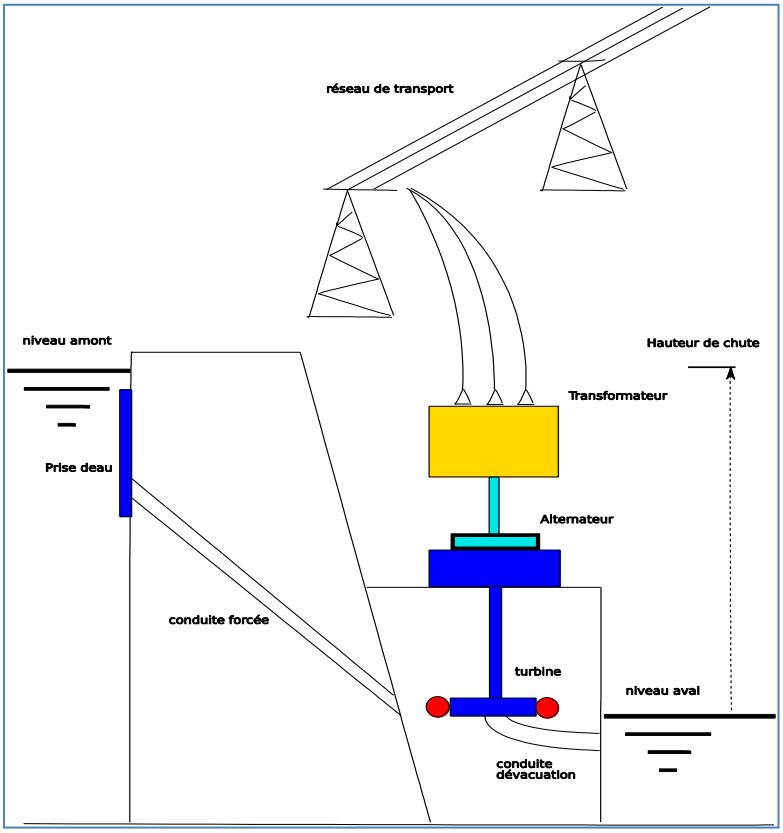

Figure 1.1 : Aménagement hydroélectrique

1.2 Types de centrales hydroélectriques

Nous distinguons deux types de centrales hydroélectriques : les centrales au fil de l'eau et les centrales alimentées par un réservoir.

1.2.1 Les centrales au fil de l'eau

Il s'agit d'une centrale installée directement dans le lit de la rivière et qui ne possède pas de réservoir. Le débit turbiné correspond au débit naturel du cours d'eau. La puissance produite varie uniquement avec ce débit.

1.2.2 Les centrales alimentées par un réservoir

Il s'agit d'une centrale alimentée par une retenue d'eau permettant un stockage d'eau saisonnier ou interannuel. Le réservoir permet de moduler le débit d'eau et offre donc une souplesse pour répondre aux variations de la demande d'électricité.

1.3 Groupe turboalternateur et similitude en hydraulique

Les groupes turboalternateurs sont les unités de production qui génèrent de l'énergie électrique à partir de l'énergie potentielle et/ou cinétique contenue dans l'eau turbinée. Ils sont représentés par une courbe type d'entrée/sortie qui donne le débit nécessaire en m^3/s pour alimenter la turbine afin qu'elle puisse produire la puissance électrique P_e (MW) demandée, et ceci à une hauteur de chute donnée appelée hauteur de chute de référence. Généralement, ces courbes de puissance/débit sont représentées par une fonction polynomiale linéaire par parties. Le nombre de polynômes ainsi que leur degré varient avec le type de turbines utilisées. Les coefficients des polynômes sont déterminés par la méthode des moindres carrés et/ou la méthode de Gram-Schmid appliquée à des données expérimentales obtenues par une série de tests empiriques sur les groupes.

La Figure 1.2 représente une courbe typique de débit/puissance d'un groupe turboalternateur. Soulignons que cette courbe peut être discontinue puisque les machines ne peuvent pas fonctionner de façon sécuritaire pour certaines plages de débits. Les plages de débits interdites pour le fonctionnement des turbines sont celles qui produisent un phénomène de cavitation et/ou

de vibration. Ces phénomènes sont dangereux pour la bonne marche de la machine et peuvent avoir un fonctionnement instable.

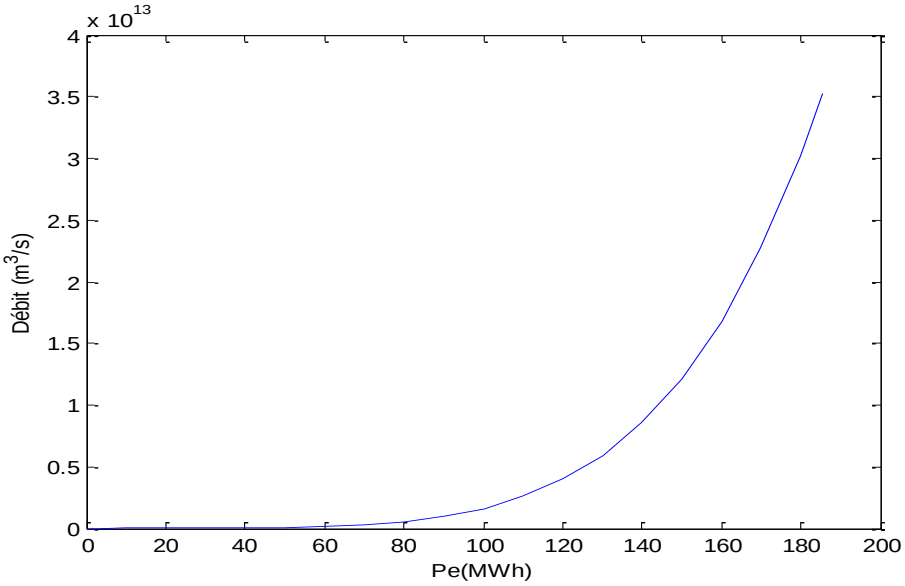

Figure 1.2 : Fonction typique de la relation puissance/débit

La détermination de la courbe débit/puissance d'un groupe turboalternateur à une hauteur de chute donnée s'obtient par similitude à partir de sa courbe-type. La similitude en hydraulique est une méthode qui permet d'effectuer des essais sur une turbine à une hauteur de chute de référence et de transposer ensuite ces résultats à une la hauteur de chute projetée. Pour plus d'information sur ce sujet voir la thèse de Hammadia [4].

La Figure 1.3 montre la variation de la courbe caractéristique débit/puissance d'une turbine avec la hauteur de chute.

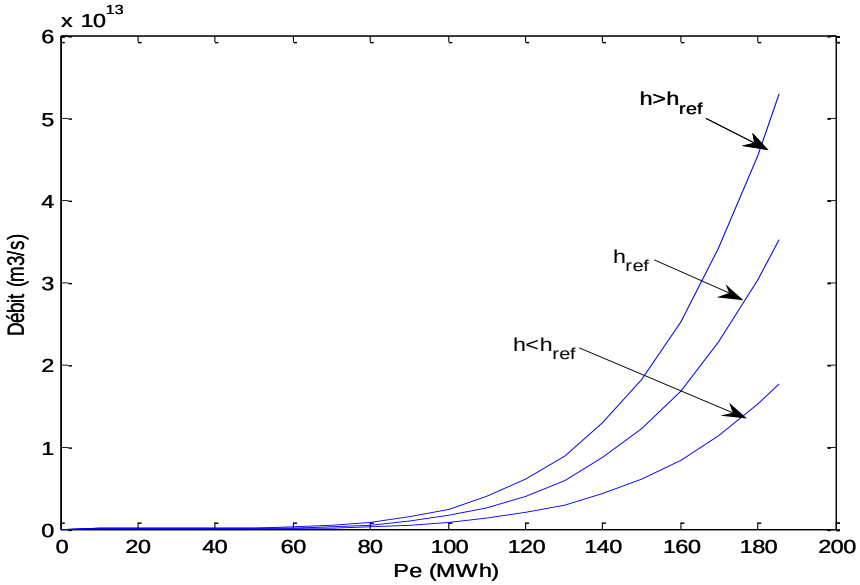

Figure 1.3 : Variation de la fonction débit vs puissance avec la hauteur de chute

1.3.1 Rendement optimal d'un groupe turboalternateur

Pour une hauteur de chute donnée, le rendement optimal d'un groupe turboalternateur correspond au point d'opération pour lequel la production d'énergie électrique par unité de débit est la plus grande. En d'autres mots, c'est le point d'opération qui utilise le moins d'eau par unité de puissance électrique générée et qui correspond au meilleur ratio $\frac{puissance}{débit}$. La Figure 1.4 montre la variation du rendement d'un groupe turboalternateur avec le débit à la hauteur de chute de référence. Le passage de cette courbe à la courbe de rendement à une hauteur de chute différente de la hauteur de chute de référence s'obtient par similitude. Généralement ces courbes sont concaves et discontinues.

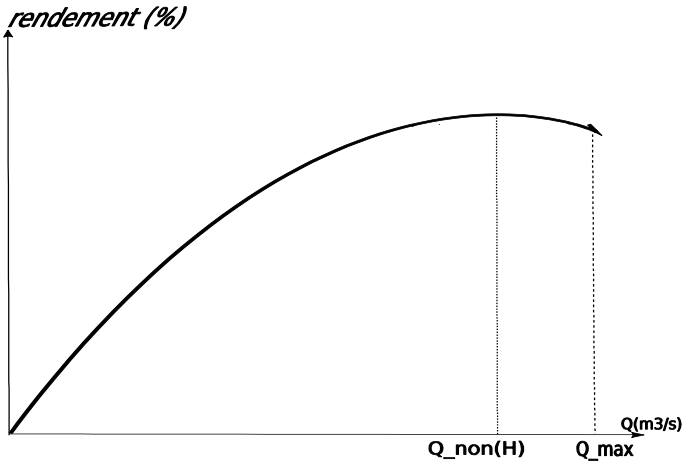

Figure 1.4 Variation du rendement avec le débit

1.3.2 Chargement optimal des groupes et production d'une centrale hydroélectrique

Une centrale hydroélectrique est caractérisée par une courbe de production qui donne la génération d'électricité en fonction du débit turbiné. Cette courbe est déterminée par la résolution d'un problème d'optimisation, appelé problème de chargement optimal. Ce problème consiste à déterminer la meilleure façon de répartir le débit entre les turbines en opération pour maximiser la production ou minimiser le débit total turbiné par les groupes disponibles afin de satisfaire une demande de puissance donnée. Ce problème est solutionné une seule fois à la hauteur de chute de référence et ceci pour un ensemble de débits. Pour évaluer la fonction à chaque point nous effectuons une interpolation linéaire. Cette fonction est croissante et concave. Pour obtenir la courbe de production à une hauteur de chute différente de la hauteur de chute de référence, nous utilisons les rapports de similitude.

La production d'une centrale hydroélectrique dépend de deux variables : la hauteur de chute et le débit turbiné. La hauteur de chute est égale à la différence d'altitude entre les niveaux amont et aval de la centrale. Le débit turbiné correspond au débit qui sera réparti entre les turbines disponibles.

1.4 Gestion des centrales hydroélectriques

Le problème de gestion des centrales hydroélectriques est un problème d'optimisation qui consiste à déterminer une règle de gestion, idéalement de type feedback, pour gérer l'eau stockée dans les réservoirs qui alimentent les centrales. Ce problème est généralement stochastique puisque les apports d'eau aux réservoirs ne sont pas connus d'avance. Ce problème est non linéaire et non séparable puisque la production électrique générée par une centrale est le produit de deux fonctions dont les variables sont dépendantes : le débit turbiné et la hauteur de chute.

Pour les systèmes contenant plusieurs réservoirs en série, l'eau turbinée par une centrale peut être utilisée par la centrale en aval après avoir franchie la distance entre les deux centrales. Les modèles d'optimisation ne tiennent généralement pas compte des délais d'écoulement de l'eau entre les centrales et supposent que l'eau soutirée de la centrale i dans la période t est disponible à la centrale $i + 1$ dans la même période. Cette hypothèse est généralement non réaliste.

Les modèles de gestion des réservoirs se classent selon l'objectif de l'étude et selon la façon de traiter les variables aléatoires. Nous distinguons trois types de problèmes de gestion : gestion à long terme, gestion à moyen terme et gestion à court terme.

1.4.1 Gestion à long terme des réservoirs

Les modèles de gestion à long terme sont généralement utilisés pour des fins de planification. Ils consistent à élaborer des scénarios d'évolution de la demande d'énergie électrique et à choisir les moyens de production permettant d'y répondre. Le pas de temps est généralement le mois et l'horizon d'étude peut aller jusqu'à une dizaine d'années.

1.4.2 Gestion à moyen terme des réservoirs

Les modèles de gestion à moyen terme sont utilisés pour trouver une règle de gestion optimale et généralement sécuritaire pour les équipements de production. Déterminer un planning de maintenance des groupes turboalternateurs qui minimise les pertes en énergie et les risques de ne pas satisfaire la demande représente une application typique de ces modèles.

Tout comme le problème de gestion à long terme, le problème de gestion à moyen terme exige la connaissance d'une distribution de probabilité des apports hebdomadaires à chaque réservoir qui reproduit les propriétés statistiques annuelles de ceux-ci.

1.4.3 Gestion à court terme des réservoirs

Les modèles de gestion à court terme sont utilisés, par exemple, pour déterminer le chargement optimal des groupes turboalternateurs. Le pas de temps peut varier entre une heure et vingt quatre heures tandis que l'horizon d'étude varie selon les besoins et les données disponibles.

Contrairement aux modèles de gestion à long et moyen termes, le court terme traite séparément les unités de production dans une centrale. Une unité de production est représentée par une courbe type de débit/puissance. Le débit de chaque centrale est reparti entre les groupes en opération de façon à maximiser le rendement global de toutes les unités disponibles dans la centrale.

Puisque le pas de temps est court, les apports sont considérés comme des variables déterministes et les délais de transit de l'eau entre deux centrales en série doivent être modélisés correctement et pris en compte dans la politique de gestion optimale à court terme.

1.5 Système hydrique à l'étude.

Le système hydrique qui a servi comme exemple d'application dans cette thèse est formé par une rivière contenant sept centrales hydroélectriques en série. Chaque centrale contient plusieurs groupes turboalternateurs qui sont alimentés par son réservoir. Nous avons construit ce système à partir des données de la rivière La-Grande au Québec.

Les données techniques de la rivière La-Grande sont présentées dans le Tableau 1.1 suivant :

Tableau 1.1 : Caractéristiques des installations

Réservoir ***i***	**Nom du réservoir**	**Coefficient du bassin**	$S_i^{\min} - S_i^{\max}$ **(hm^3)**	$U_i^{\min} - U_i^{\max}$ **(m^3 /s)**	**Capacité (MW)**	$h_i^{\min} - h_i^{\max}$ **(m)**
1	Brisay	0.270	0-39008	0-1020	371	522,5 - 535.5
2	LA-2	0.017	0-392	0-1055	290	479.6 - 481.2
3	LA-1	0.05	0-3063	0-1663	853	436 - 439
4	LG-4	0.2	0-7079	0-2547	2660	366 - 377
5	LG-3	0.196	0-25195	0-3600	2403	243.8 - 256.
6	LG-2	0.26	0-19369	0-4680	5563	167.6 - 175.3
7	LG-1	0.007	0-98	0-5436	1284	30.48 - 32.00

La colonne 1 donne le numéro de chaque réservoir. Les réservoirs sont numérotés par ordre croissant à partir du sommet de la rivière. Le réservoir numéro 1 est à la tête de la rivière tandis que le réservoir numéro 7 se trouve à l'embouchure. La colonne 2 donne le nom de chaque réservoir. La colonne 3 donne les coefficients de bassin qui représentent les proportions des apports naturels à chacun des réservoirs par rapport à l'apport total à la rivière. La colonne 4 donne les capacités d'emmagasinement de chaque réservoir, la colonne 5 la capacité de turbinage de chaque centrale, la colonne 6 la puissance installée dans chaque centrale et la colonne 7 la hauteur de chute minimale et maximale de chaque centrale.

Dans le chapitre suivant nous donnons une modélisation mathématique du problème qui détermine la règle de gestion hebdomadaire pour gérer de façon optimale les installations hydroélectriques d'une telle rivière.

CHAPITRE 2 PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle mathématique de gestion des centrales hydroélectriques à l'étude avec toutes les hypothèses et particularités reliées à ce modèle.

Ce chapitre comprend quatre sections. La première section présente les symboles et variables mathématiques utilisés dans ce rapport. La deuxième section présente le modèle d'optimisation solutionné dans cette thèse avec toutes les hypothèses que nous avons dû faire pour le construire. La troisième section est consacrée aux apports naturels. Enfin, la quatrième section présente l'algorithme de la programmation dynamique stochastique.

2.1 Notations

Le tableau suivant donne la liste des variables et symboles mathématique utilisés dans cette thèse.

Tableau 2.1 : Liste des symboles mathématiques

Symbole	Description
$s_{i,t}$	Contenu du réservoir *i* au début de la période *t* en hm^3
$q_{i,t}$	Apport naturel au réservoir *i* à la période *t* en hm^3
$r_{i,t}$	Soutirage du réservoir *i* à la période *t* en hm^3
$u_{i,t}$	Débit turbiné du réservoir *i* à la période *t* en m^3/s
$v_{i,t}$	Déversement au réservoir *i* à la période *t* en hm^3
D_t	Demande en énergie à la période *t en GWh*
T	Longueur de l'horizon d'étude en semaines
N	Nombre total de réservoirs
M	Nombre total de scénarios d'apports utilisés
S_t	Vecteur de dimension N formé par les $s_{i,t}$
Q_t	Vecteur de dimension N formé par les $q_{i,t}$
R_t	Vecteur de dimension N formé par les $r_{i,t}$

U_t	Vecteur de dimension N formé par les $u_{i,t}$
$ch_{i,t}(s_{i,t})$	le nombre moyen de GWh, par hm^3 d'eau turbinée, produit par la centrale i dans la semaine t lorsque le contenu du réservoir au début de la semaine est égal à $S_{i,t}$ hm^3. En GWh/ hm^3
$b_t(.)$	Fonction de bénéfices : revenus - coûts d'achat ($GWh \mapsto \$$)
$g_i^{ref}(u_{i,t})$	Fonction de génération obtenue avec le chargement optimal des groupes à la hauteur de chute de référence h_i^{ref} pour le réservoir i ($hm^3/s \mapsto GWh$)
$g_{i,t}(s_{i,t},s_{i,t+1},u_{i,t})$	Fonction de génération obtenue en corrigeant g_i^{ref} pour le réservoir i ($hm^3 \mapsto GWh$)
$h_i(s_{i,t})$	Fonction donnant la hauteur de chute au réservoir i ($hm^3 \mapsto m$).
h_i^{ref}	Hauteur de chute de référence ou nominal de la centrale i (en m)
Niv_{am}	Fonction donnant le niveau du bief amont du réservoir i ($hm^3 \mapsto m$).
Niv_{av}	Fonction donnant le niveau du bief aval du réservoir i ($hm^3 \mapsto m$).
Niv_{am}^{nom}	Niveau nominal du bief amont de la centrale (en m)
$Ch_{i,t}$	Facteur de conversion moyen pour la central i durant la semaine t(GWh/hm^3)
X_t	Contenu du réservoir agrégé en GWh
Y_t	Apport énergétique au réservoir agrégé en GWh
G_t	Production énergétique du réservoir agrégé en GWh
V_t	Déversement énergétique du réservoir agrégé en GWh
App_t	Apport en eau à toute la rivière (en hm^3)
pu_j	Puissance générée par la turbine j
k	Coefficient de conversion (m^3/s en hm^3)

2.2 Problème de gestion des réservoirs

Le problème que l'on solutionne dans cette thèse est de trouver la règle de gestion de N complexes hydroélectriques en série qui maximise l'espérance mathématique de la différence entre les revenus des ventes et le coût des achats d'énergie électrique sur les marchés spots. La règle optimale de gestion est déterminée au pas de temps hebdomadaire et l'horizon d'étude est une année. Rappelons que chaque complexe comprend un réservoir alimentant une centrale hydroélectrique. Le réservoir de tête porte le numéro 1, celui immédiatement en aval le numéro 2, et ainsi de suite jusqu'à l'embouchure de la rivière.

Le problème d'optimisation mathématique, (PM), solutionné dans cette thèse consiste à déterminer la valeur de $u_{i,t}$ ($r_{i,t}$) pour $i = 1, 2, ..., N$ et $t = 0, 1, ..., T$, qui

$$\underset{U}{Max}\ \underset{Q}{E}\left[\sum_{t=1}^{T}\left\{b_t\left(\sum_{i=1}^{N}\left[g_{i,t}\left(s_{i,t}, s_{i,t+1}, u_{i,t}\right) - D_t\right]\right)\right\} + \Phi_{T+1}\left(s_{T+1}\right)\right] \qquad (2.1)$$

sous les contraintes :

$$s_{i,t+1} = s_{i,t} + r_{i-1,t} + v_{i-1,t} - r_{i,t} - v_{i,t} + q_{i,t}\ ; \quad \forall i,t \qquad (2.2)$$

$$r_{i,t} = k.u_{i,t} \qquad \forall i,t \qquad (2.3)$$

$$s_{i,t+1}^{\min} \le s_{i,t+1} \le s_{i,t+1}^{\max} \qquad \forall i,t \qquad (2.4)$$

$$u_{i,t}^{\min} \le u_{i,t} \le u_{i,t}^{\max} \qquad \forall i,t \qquad (2.5)$$

$$s_{i,1}\ connu; \quad r_{0,t} = v_{0,t} = 0\ \ et\ \ v_{i,t} \ge 0 \quad \forall i,t \qquad (2.6)$$

où $v_{i,t} = \max(0, r_{i,t} - r_{i,t}^{\max})$. Le symbole $E(.)$ dans (2.1) désigne l'espérance mathématique et la fonction $\Phi_{T+1}\left(S_{T+1}\right)$ la valeur de l'eau stockée dans les réservoirs à la fin de l'horizon que nous supposons être égale à une année ($T = 52$).

2.2.1 Fonction objective

a. Fonction bénéfice

La fonction $b_t(\cdot)$ dans la fonction objective du problème d'optimisation (PM) donne le revenu des ventes sur les marchés étrangers lorsque la production est plus grande que la demande D_t et donne le coût des achats d'énergie lorsque la production est plus petite que cette demande. Étant donné que l'objectif est de maximiser la fonction $b_t(\cdot)$, alors plus la différence entre la production et la demande sera grande plus la valeur de $b_t(\cdot)$ sera petite. Elle est en fait une fonction concave et linéaire par morceau qui donne le prix d'un GWh dans la période t (voir la Figure 2.1).

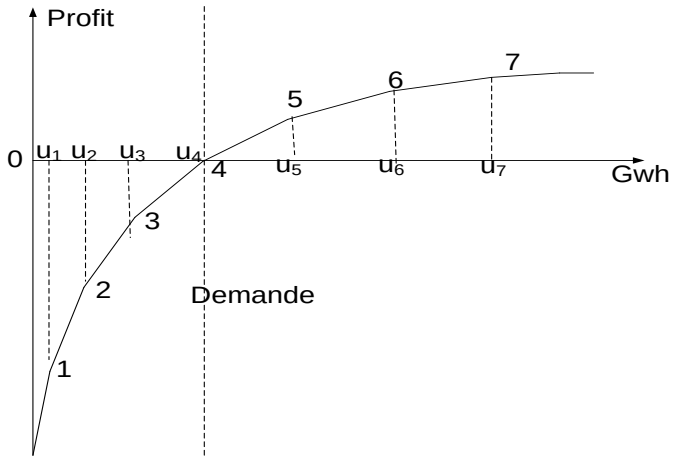

Figure 2.1 : Fonction bénéfice

Un coût d'importation plus élevé que le coût de production encourage le système à produire sa propre consommation. L'achat de l'énergie n'est nécessaire que lorsque le système ne peut pas satisfaire la demande par ses propres moyens. Un revenu d'exportation plus faible que le revenu de satisfaire sa propre demande encourage le système à satisfaire sa propre demande avant d'aller vendre de l'énergie sur les marchés étrangers. De plus, un coût élevé d'importation et un revenu faible d'exportation d'énergie empêche le modèle d'optimisation d'acheter et de vendre de

l'énergie pour faire le courtage sur le marché de l'énergie. Finalement, nous précisons que cette fonction a été construite d'une façon permettant de simuler le comportement réel du marché de l'énergie et n'a aucun rapport avec le prix réel de celle-ci.

b. Fonction de production

La fonction $g_{i,t}\left(s_{i,t}, s_{i,t+1}, u_{i,t}\right)$ donne la production en GWh en fonction du soutirage de la centrale i dans la période t. Comme nous l'avons mentionné précédemment, la production d'une centrale hydroélectrique à un instant donné est fonction de la hauteur de chute du réservoir qui l'alimente et du débit turbiné. Étant donné que la hauteur de chute du réservoir varie avec le contenu de celui-ci, la production d'une centrale hydroélectrique est donc fonction du contenu du réservoir $s_{i,t}$ derrière la centrale et du débit turbiné $(u_{i,t})$.

$$g_{i,t}\left(s_{i,t}, s_{i,t+1}, u_{i,t}\right) = \eta_i\left(s_{i,t}, s_{i,t+1}\right) g_i\left(u_{i,t}\right) = \frac{h_i\left(0,5(s_{i,t} + s_{i,t+1})\right)}{h_i^{ref}} g_i\left(u_{i,t}\right) \tag{2.7}$$

$$h_i\left(s_{i,t}\right) = Niv_{am}(s_{i,t}) - Niv_{av} \tag{2.8}$$

Les fonctions $g_i(u_{i,t})$ et $h_i(\frac{s_{i,t} + s_{i,t+1}}{2})$ utilisées dans ce modèle sont linéaires par partie, concaves et non décroissantes comme la fonction de production de la centrale de quatre groupes turbo-alternateur montrée dans la Figure 2.2. Puisque toute augmentation du débit turbiné entraîne une diminution de $s_{i,t+1}$, nous supposons que l'augmentation de la production hydroélectrique suite à une augmentation de turbinage est plus importante que la diminution qui sera causée par la réduction de la hauteur de chute. C'est-à-dire que toute augmentation du turbinage donne nécessairement une augmentation de la production. Mathématiquement, cette supposition se traduit par:

$$\frac{\partial g_i\left(s_{i,t}, s_{i,t+1}, u_{i,t}\right)}{\partial u_{i,t}} > -\frac{\partial g_i\left(s_{i,t}, s_{i,t+1}, u_{i,t}\right)}{\partial s_{i,t+1}} \quad \forall u_{i,t}, \forall s_{i,t+1} \tag{2.9}$$

Par conséquent, toute augmentation du turbinage donne nécessairement une augmentation de la production.

Hypothèse H1: Le niveau du bief aval ne varie pas avec le débit en aval de la centrale.

Hypothèse H2: La fonction représentant la hauteur de chute h_i est concave et strictement croissante sur tout le domaine $[s_i^{\min}; s_i^{\max}]$.

Hypothèse H3: La fonction représentant le niveau du bief amont Niv_{am} est concave et strictement croissante sur tout le domaine $[s_i^{\min}; s_i^{\max}]$.

La fonction $g_i(u_{i,t})$ est représentée par une courbe linéaire par partie comme celle de la Figure 2.2 Elle est obtenue à partir de la résolution d'un problème de chargement optimal pour un ensemble fini de débits. Pour un débit égal à u, le modèle de chargement optimale est solutionné comme suit :

$$\underset{pu}{Max}\left[\sum_{j=1}^{NT}\left(pu_j\right)\right] \tag{2.10}$$

sous :

$$\sum_{j=1}^{NT} f_j\left(pu_j\right) \le u \tag{2.11}$$

$$pu_j^{\min} \le pu_j \le pu_j^{\max} \quad \forall j = 1,\ldots,NT \tag{2.12}$$

où $f_j\left(pu_j\right)$ désigne la fonction puissance/débit du groupe turboalternateur j. Cette fonction donne le débit nécessaire pour que le groupe j génère une puissance pu_j.

Nous résolvons ce problème par la programmation dynamique pour différentes valeurs de débit u entre $u^{\min}$ et $u^{\max}$ pour obtenir les différentes points de la Figure 2.2. Pour évaluer la fonction en tout point de débit, nous avons effectué une interpolation linéaire. Pour plus d'informations sur ce problème, je réfère le lecteur à la thèse de Hammadia [4] .

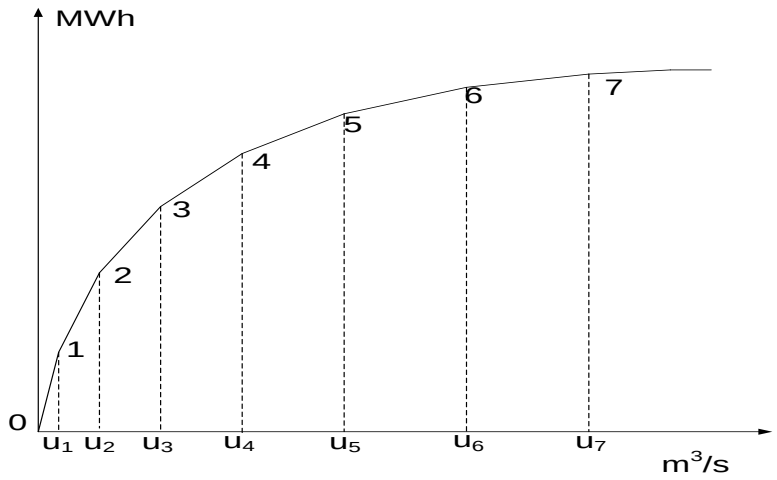

Figure 2.2 : Production hydroélectrique d'une centrale en fonction du soutirage

La courbe de la Figure 2.2 peut changer d'une semaine à l'autre selon la disponibilité des groupes. Le nombre de groupes turboalternateurs disponibles dans une centrale peut varier selon le plan d'entretien. Notons que si u est augmenté au-delà de la capacité de turbinage $u^{\max}$, alors $v = u - u^{\max}$ d'eau seront déversés.

c. Valeur finale de l'eau

La fonction $\Phi_{T+1}(s_{T+1})$ représente la valeur finale de l'eau stockée dans les réservoirs à la fin de l'horizon d'étude. Cette fonction est inconnue. Pour solutionner le problème lorsque cette valeur ne peut pas être déterminée, nous supposons que les contenus des réservoirs à la fin de l'horizon sont égaux aux contenus initiaux. Dans le cas de l'utilisation de l'algorithme de la programmation dynamique, il est possible d'estimer cette valeur avec la procédure donnée dans la suite de ce document.

Hypothèse H4: Les niveaux initiaux et finaux des réservoirs sont les mêmes.

d. Demande en énergie

Nous supposons dans cette thèse que le scénario de la demande est connu d'avance et suit un profile de demande normalisé par rapport aux valeurs de l'apport énergétique moyen au système. À chaque période, la valeur de la demande réelle D_t est obtenue en multipliant la valeur de la

demande normalisée $d_t^{normalisée}$ par $\overline{Y}$, l'apport énergétique moyen au réservoir agrégé en GWh. Ce dernier est obtenu du calcul de la moyenne statistique annuelle des apports énergétiques au système. L'apport énergétique à un réservoir est obtenu en multipliant le coefficient de conversion moyen Ch_i par l'apport en eau $q_{i,t}$.

Le profil de demande normalisé est choisi de manière à respecter l'allure d'une courbe de consommation réelle, c'est-à-dire d'une demande élevée en hiver et une demande faible en été. En hiver, la demande est supérieure à l'apport énergétique moyen. Il y aura donc des périodes où les réservoirs devront être vidés pour satisfaire la demande. Par contre, en été la demande est inférieure à l'apport énergétique moyen de sorte que les surplus d'énergie doivent être stockés dans les réservoirs. Dans cette thèse nous avons utilisé plusieurs scénarios de demande. La Figure 2.3 montre un exemple de profil de demande normalisée par mois.

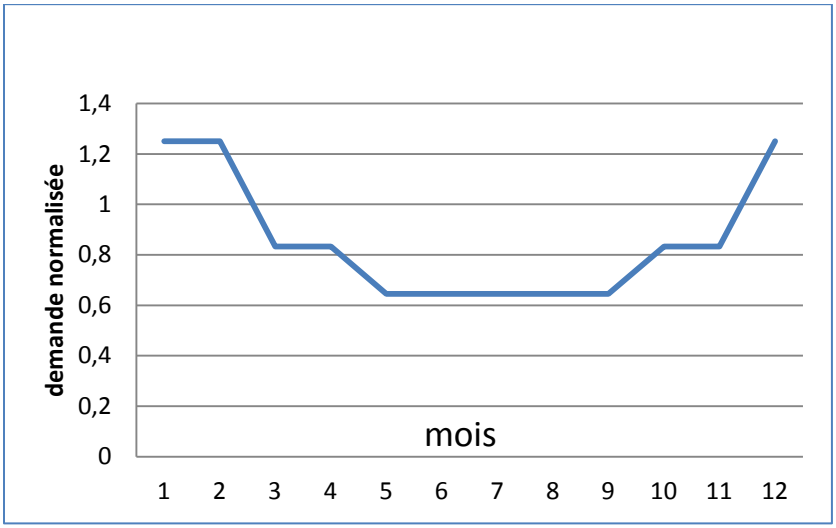

Figure 2.3: Profil de demande normalisée

Hypothèse H5: La demande en énergie est connue pour toutes les périodes de l'horizon.

Hypothèse H6: Le système n'est ni sous-dimensionné ni surdimensionné par rapport à la demande.

2.2.2 Les Contraintes

Les contraintes (2.2) à (2.6) sont des contraintes physiques et opérationnelles.

a. Équation dynamique

La dynamique du système est représentée par l'équation (2.2), dite équation de conservation et de continuité, qui doit être satisfaite pour chaque réservoir $i = 1, 2, \ldots, N$. Cette équation adopte le principe de l'écoulement instantané qui suppose que l'eau soutirée d'un réservoir à la période t sera entièrement disponible dans le réservoir en aval au début de la période $t+1$. Cette hypothèse semble être irréaliste lorsque la distance entre deux réservoirs est considérable. Cependant, tenir compte des délais d'écoulement entre les réservoirs dans un problème d'optimisation stochastique rendrait le problème presqu'impossible à résoudre.

Hypothèse H6: L'eau soutirée d'un réservoir à la période t sera totalement disponible dans le réservoir en aval au début de la période $t+1$.

b. Bornes sur les variables

Les contraintes (2.4) et (2.5) exigent que le contenu du réservoir et le débit turbiné respectent la capacité de stockage du réservoir et la capacité des conduites forcées. De plus, les bornes inférieures et supérieures pour ces contraintes peuvent varier au cours de l'année pour satisfaire des contraintes économiques, environnementales, récréatives, etc. Le respect de ces contraintes en tout le temps signifie qu'il n'y aura jamais d'inondation et de manque d'eau.

La contrainte (2.6) suppose que les déversoirs sont de capacité infinie.

Hypothèse H 7: Les déversoirs sont de capacité infinie.

2.3 Les apports naturels

Les apports aux réservoirs en série comprennent généralement les apports naturels et l'eau turbinée des installations en amont. Les apports naturels sont des variables aléatoires dans les problèmes d'optimisation des ressources hydriques et les soutirages des réservoirs en amont sont déterminer par la règle de gestion. Nous avons appliqué le principe de l'écoulement instantané qui suppose que l'eau soutirée d'un réservoir à la période t est entièrement disponible dans le réservoir en aval au début de la période $t+1$.

Les apports naturels sont corrélés de façon spatio-temporelle. Plus précisément, l'apport naturel $q_{i,t}$ est corrélé aux apports des p périodes qui précèdent la période t et aux apports des N autres réservoirs du système. Lorsque le pas de temps considéré est la semaine, comme c'est le cas dans cette thèse, la corrélation temporelle n'est pas aussi grande que pour les pas de temps journaliers [5]. C'est d'ailleurs pour cette raison que nous supposons que les apports naturels sont connus avec certitude à l'intérieur d'une semaine et sont corrélés uniquement à ceux de la semaine précédente. De plus, nous avons supposé que la corrélation spatiale est parfaite, ce qui est acceptable pour ce problème.

Hypothèse H8: Les apports naturels sont connus avec certitude à l'intérieur d'une semaine et sont corrélés uniquement à ceux de la semaine précédente. De plus, nous supposons qu'un modèle linéaire autorégressif d'ordre 1 est suffisant pour modéliser cette corrélation temporelle.

La relation entre Q_t et Q_{t-1} est généralement représentée par l'équation linéaire suivante [5, 6]:

$$Q_t^N = a_{0,t} + a_{1,t} Q_{t-1}^N + a_{2,t} \xi_t \qquad (2.13)$$

où $a_{0,t}$, $a_{1,t}$ et $a_{2,t}$ sont des paramètres à déterminer et ζ_t est une variable aléatoire normale centrée réduite. Q_t^N désigne l'apport Q_t après un processus de normalisation. L'équation (2.13) relie les apports normalisés et non pas les apports réels.

Hypothèse H9: Les apports naturels sont parfaitement corrélés entre les réservoirs d'une même rivière.

2.4 La programmation dynamique stochastique

Le problème de gestion de N réservoirs en série est un problème d'optimisation non linéaire, non convexe, non-séparable, dynamique, stochastique et de grande taille. Théoriquement, la meilleure façon de solutionner le problème d'optimisation (2.1)-(2.6) est d'utiliser la programmation dynamique stochastique qui, lorsqu'on ne tient pas compte de la corrélation temporelle des apports naturels, consiste à solutionner à rebours la fonctionnelle suivante :

$$F_t(S_t) = \underset{Q_t}{\mathrm{E}}\left\{\max_{U_t}\left[(b_t\left(\sum_{i=1}^{N} g_{i,t}\left(s_{i,t}, s_{i,t+1}, u_{i,t}\right) - D_t\right) + F_{t+1}\left(S_{t+1}\right)\right]\right\} \tag{2.14}$$

où

$$F_T\left(s_{1,T+1},...,s_{N,T+1}\right) = \Phi\left(s_{1,T+1},...,s_{N,T+1}\right) \quad \textit{connue} \tag{2.15}$$

en respectant les contraintes opérationnelles et physiques sur les variables. Cette fonctionnelle, dite fonction de Bellman ou fonction de récompense, donne l'espérance mathématique des profits futurs entre le début de la semaine t et la fin de l'horizon en fonction de l'état du système au début de la période.

Malheureusement, la résolution de (2.14) sous les contraintes (2.4) et (2.5) n'est pas toujours possible compte tenu des apports naturels. En effet, des apports suffisamment élevés peuvent conduire à une situation où la violation des bornes supérieures des contraintes (2.4) et (2.5) est inévitable. D'autre part, quand les apports sont très faibles, le risque de ne pas respecter les bornes inférieures de ces mêmes contraintes existe. Par conséquent, le problème d'optimisation pourrait ne pas être réalisable en tout temps. Cependant, il est possible de reformuler le problème de façon à le rendre réalisable pour tous les apports. Dans le problème modifié, les contraintes (2.4) et (2.5) sont remplacées par des contraintes de non négativité ($U_t \geq 0$, $S_{t+1} \geq 0$), et une fonction de pénalité dans la fonction objective.

La fonction de pénalité $L_t\left(S_{t+1}, U_t\right)$ pourrait ressembler à la suivante :

$$\begin{aligned} L_t\left(S_{t+1}, U_t\right) = \sum_{i=1}^{N} [e_{1,t}^{i} \cdot \max\left(0,\ s_{i,t+1}^{\min} - s_{i,t+1}\right) \ +\ e_{2,t}^{i} \cdot \max\left(0,\ s_{i,t+1} - s_{i,t+1}^{\max}\right) \ + \\ e_{3,t}^{i} \cdot \max\left(0,\ u_{i,t}^{\min} - u_{i,t}\right) \ +\ e_{4,t}^{i} \cdot \max\left(0,\ u_{i,t} - u_{i,t}^{\max}\right)], \end{aligned} \tag{2.16}$$

où $\max\left(0, \omega\right)$ est égal à ω si $\omega > 0$ et à 0 sinon. La fonction $L_t\left(S_{t+1}, R_t\right)$ a une valeur de zéro lorsque les contraintes (2.4) et (2.5) sont respectées et une valeur qui augmente linéairement avec le dépassement des bornes. La principale difficulté de cette approche est

l'ajustement des paramètres $e^i_{j,t}$, $j=1,...,4$, $t=1,...,T$, et $i=1,...,N$. Ces paramètres peuvent être ajustés récursivement par un processus d' essais/erreurs qui consiste à simuler le problème sans contraintes avec plusieurs scénarios d'apports, et, par la suite, à mesurer les probabilités de déversement et de pénurie d'eau. Si ces probabilités donnent un niveau de risque inacceptable, les paramètres de pénalité sont corrigés selon les résultats de simulation. Le processus s'arrête lorsque les paramètres $e_{i,t}$, $i=1,...,4$, $t=1,...,T$ donnent des probabilités de déversement et de manque d'eau qui sont inférieures au niveau critique prédéfini.

Pour simplifier la présentation, posons :

$$B_t\left(S_t,S_{t+1},U_t\right)=b_t(\sum_{i=1}^{N}g_{i,t}\left(S_t,S_{t+1},U_t\right)-D_t)-L_t\left(S_{t+1},U_t\right)$$

de sorte que la fonction de Bellman devient:

$$F_t\left(S_t\right)=\underset{Q_t}{E}\left\{\max_{U_t}\left[B_t\left(S_t,S_{t+1},U_t\right)+F_{t+1}\left(S_{t+1}\right)\right]\right\} \qquad (2.17)$$

sous les contraintes (2.3) et $U_t\geq 0$, $S_{t+1}\geq 0$. Ce problème est toujours réalisable.

L'apport prévu pour la semaine est égal à $Q_t\left(hm^3\right)$ et la règle optimale de gestion est suivie en tout temps. Précisons que la fonctionnelle (2.17) n'est valide que si Q_t, l'apport pour la semaine t, est connu lorsque le soutirage U_t est fixé, ce qui est le cas en réalité. Le soutirage optimal déterminé par (2.17) est fonction des variables S_t et Q_t et est donc de type feedback. Il est représenté par $U_t^{opt}\left(S_t,Q_t\right)$.

La fonction de Bellman devrait être résolue pour toutes les valeurs possibles de $s_{i,t}$, ce qui est impossible en pratique. Une approche largement utilisée consiste à solutionner (2.17) pour un ensemble fini de valeurs, puis à faire une interpolation linéaire pour évaluer la fonction en tout point du domaine. Naturellement, la solution est meilleure lorsque le nombre de points est plus grand.

Pour déterminer la valeur finale de l'eau en stock, $\Phi_{T+1}(S_{T+1})$, la méthode la plus utilisée consiste tout d'abord à fixer cette valeur à zéro, c'est-à-dire $F_{T+1}\left(S_{T+1}\right)=0 \;\; \forall\, s_{1,T+1},...,s_{N,T+1}$,

puis à résoudre l'équation (2.17) à rebours dans le temps pour une année. On fixe $F_{T+1}(S_{T+1}) = F_1(S_1)$ puis on refait le processus plusieurs fois jusqu'à la stabilisation de cette fonction. En fait, on arrête le processus lorsque les valeurs marginales de l'eau dans les réservoirs au début de la première semaine ne changent pas d'une année à l'autre.

Le calcul de l'espérance mathématique de l'équation (2.17) est fait par rapport aux vecteurs des variables aléatoires Q_t. Il s'en suit que la distribution de probabilité des variables aléatoires $q_{i,t}$ doit être estimée à partir de l'historique. Cependant, puisque nous avons supposé que les apports naturels aux différents sites d'une rivière sont parfaitement corrélés à la période *t* et que les apports intermédiaires peuvent être déterminés à partir de la valeur de l'apport total à la rivière $App_t = \sum_i q_{i,t}$, en multipliant cette dernière par un facteur de pondération appelé coefficient de bassin du réservoir, le calcul de l'espérance mathématique sera fait uniquement avec la distribution de probabilité de la variable aléatoire App_t. Il est possible d'estimer la loi de probabilité de App_t à partir de la loi normale centrée réduite $Z(0,1)$. La procédure consiste tout d'abord à déterminer la loi de probabilité de App_t à partir des apports historiques, puis à effectuer les transformations nécessaires pour normaliser la loi obtenue. Il suffit par la suite de transformer la loi normale en une loi normale centrée réduite. Désignons par App_t^N la variable aléatoire obtenue suite à ces transformations. On a $App_t^N \to Z(0,1)$.

Si on applique cette procédure à App_t pour toute les périodes et si on discrétise la variable $App_t^N \to Z(0,1)$ en *J* points, il devient alors possible d'estimer l'espérance mathématique de la fonction de Bellman par la sommation suivante :

$$F_t(S_t) = \sum_{j=1}^{J} \max\left[B_t(S_t, S_{t+1}, U_t) + F_{t+1}(S_{t+1})\right] \times \Pr\left(App_t^N = z_j\right) \qquad (2.18)$$

Où z_j pour $j = 1, \ldots, J$ représente les points de discrétisation de l'apport normalisé centré réduit et où $\Pr\left(App_t^N = z_j\right)$ donne la probabilité que l'apport normalisé centré réduit soit égal à z_j.

Finalement, pour tenir compte de l'hypothèse H8 qui stipule que l'apport à la période *t* soit corrélé à celui de la période *t*-1, la fonctionnelle (2.18) devient :

$$F_t\left(S_t, App_{t-1}\right) = \underset{App_t|App_{t-1}}{\mathrm{E}}\left\{\max_{U_t}\left[\left\{B_t\left(S_t, S_{t+1}, U_t\right)\right\} + F_{t+1}\left(S_{t+1}, q_{1,t}\right)\right]\right\} \qquad (2.19)$$

Dans ce cas, la variable aléatoire $q_{1,t}$ devient une variable d'état, ce qui nous oblige à déterminer la fonction de Bellman pour toutes les valeurs possibles de cette variable. Le calcul de l'équation (2.19) nécessite la discrétisation de la variable App_t et l'estimation de la probabilité conditionnelle $\Pr\left(App_t^N = z_j \middle| App_{t-1}^N = z_i\right)$ pour tous les z_i *et* $z_j, i, j = 1, \ldots, J$. Dans la pratique l'équation (2.19) devient :

$$F_t\left(S_t, App_{t-1}\right) = \sum_{j=1}^{J} \max\left[B_t\left(S_t, S_{t+1}, U_t\right) + F_{t+1}\left(S_{t+1}, App_t\right)\right] \times \Pr\left(App_t^N = z_j \middle| App_{t-1}^N\right) \qquad (2.20)$$

En réalité, les problèmes (2.17) et (2.20) sont très difficiles à résoudre dans un temps de calcul raisonnable lorsque le nombre de variables d'état est supérieur à quatre. La limitation est dûe principalement au nombre de points de discrétisation. En effet, le nombre de cas à résoudre augmente exponentiellement avec le nombre de variables d'état. Par exemple, pour un problème de N variables d'état où chaque variable est discrétisée en K points, il faut calculer K^N valeurs pour estimer la fonction de Bellman pour la période. Donc, la programmation dynamique n'est pas un choix à considérer pour résoudre un problème de sept réservoirs en série comme celui solutionné dans cette thèse.

CHAPITRE 3 REVUE DE LITTÉRATURE

La littérature est très riche en méthodes et techniques pour solutionner le problème de gestion des réservoirs présenté dans le chapitre précédent. La simulation, l'optimisation déterministe, l'optimisation stochastique, les méthodes heuristiques, et une combinaison de ces techniques et approches ont été utilisées pour déterminer une règle de gestion capable de gérer efficacement un système de plusieurs réservoirs. Certains auteurs ont fait une revue exhaustive de la littérature sur ce sujet. Je citerai, en particulier, Yeh [7] et Labadie [8] qui ont fait une classification détaillée des modèles d'optimisation et de simulation, ainsi que des différentes techniques et approches de résolution utilisées pour ces problèmes.

Les méthodes de résolution peuvent être divisées en deux grandes familles : la simulation et l'optimisation. La simulation est une méthode déterministe ou stochastique qui peut évaluer une règle de gestion pour tout l'horizon. L'optimisation par contre est un processus qui détermine une règle de gestion soit directement par la résolution d'un modèle d'optimisation stochastique ou indirectement par analyse statistique des résultats obtenues à partir de la résolution d'un modèle déterministe ayant plusieurs scénarios d'apports.

Les méthodes et approches de résolution peuvent être classées comme suit :

1. Les méthodes et approches d'Optimisation Stochastique Implicite (OSI)
2. Les méthodes et approches d'Optimisation Stochastique Explicite (OSE) incluant les algorithmes du contrôle optimal
3. Les heuristiques
4. La simulation.

Les deux premières classes de méthodes sont des méthodes algorithmiques basées sur la théorie d'optimisation qui garantie la convergence vers une solution optimale ou sous-optimale (bien sûr sous certaines conditions). Pour ces méthodes, la règle de gestion est inconnue à priori et elle n'est déterminée qu'après plusieurs résolutions d'un modèle déterministe ou encore par la résolution d'un problème d'optimisation stochastique.

La troisième classe est réservée aux méthodes heuristiques qui sont des algorithmes d'optimisation qui n'offrent aucune garantie quant à la solution obtenue. La quatrième classe

comprend les méthodes de simulation où l'on dispose d'une connaissance partielle ou complète de la règle de gestion ou de sa forme. Cette connaissance vient essentiellement du bon sens et de l'expérience accumulée par les opérateurs et exploitants des systèmes hydroélectriques. Lorsque la règle de gestion est fixée au début de la simulation, un indice de performance pour évaluer celle-ci est nécessaire.

3.1 Les méthodes d'optimisation stochastique implicite

L'optimisation stochastique implicite ou la simulation Monte-Carlo consiste à transformer le modèle d'optimisation stochastique en un modèle d'optimisation déterministe et de solutionner ce dernier plusieurs fois avec un grand nombre de scénarios d'apports historiques ou synthétiques. Les variables et la fonction objective sont obtenus pour chaque scénario. Les solutions obtenues à partir de la résolution des problèmes déterministes sont ensuite utilisées pour déterminer une règle de gestion pouvant être utilisée en temps réel. La régression multiple linéaire et non linéaire [9], et les réseaux de neurones [10] représentent les techniques les plus utilisées pour ajuster une règle de gestion à partir des solutions déterministes. Cependant, les règles de gestion ainsi déterminées modélisent une évolution dans un avenir certain, ce qui ne correspond pas aux cas réels.

Autrement dit, la valeur de la fonction objective devient la production hydroélectrique annuelle obtenue avec une simulation.

À cause du grand nombre de problèmes d'optimisation déterministes à résoudre en un temps limité, l'adoption d'un algorithme d'optimisation déterministe efficace est nécessaire pour ce type de méthodes: Les principaux algorithmes utilisés dans la littérature sont :

1. Les algorithmes de la programmation linéaire [9] .
2. Les algorithmes de flux dans les réseaux [11] .
3. Les algorithmes de programmation non linéaire.
4. Les algorithmes de la programmation dynamique [12].
5. Les algorithmes de contrôle optimal discret [13].

Les méthodes OSI ont l'avantage de reproduire fidèlement les corrélations spatiales et temporelles des apports et elles demandent généralement un temps de calcul relativement faible et peuvent, par conséquent, être utilisées pour solutionner des problèmes de gestion de réservoirs de grande taille. Cependant, les méthodes basées sur la programmation dynamique ne sont pas applicables pour les systèmes ayant plus de quatre réservoirs.

3.2 Les méthodes d'optimisation stochastique explicite

Les méthodes d'optimisation stochastique explicite cherchent à déterminer une règle de gestion en abordant directement la formulation stochastique du problème de gestion des réservoirs. Les variables aléatoires, i.e. les apports naturels dans notre cas, sont représentés par leur distribution de probabilité. Les distributions de probabilités sont obtenues à partir des scénarios d'historiques d'apports. Malheureusement, les techniques OSE appliquées aux systèmes contenant plusieurs réservoirs telles que, *Stochastic Dynamic Programming (SDP), Chance-Constrained Programming, Stochastic Linear Programming (SLP), Stochastic Optimal Control (OCP)* sont plus exigeantes en temps de calcul et de mémoire que les techniques OSI. Par contre, lorsqu'elles sont applicables, elles donnent une règle de gestion plus réaliste.

Dans le domaine de la gestion des réservoirs, l'utilisation des techniques d'optimisation stochastique possèdent plusieurs limites pratiques et théoriques [7], [14], [15], et [16]. La principale limitation se situe au niveau des modèles d'optimisation stochastique utilisés qui sont généralement obtenus suite à des simplifications non réalistes de la fonction objectif et/ou des contraintes. De plus, la programmation dynamique détermine une solution de type feedback et prend en compte la stochasticité des apports. Malheureusement, elle ne s'applique qu'à des problèmes de petite taille (trois réservoirs max). La résolution des systèmes de grande taille par la programmation dynamique souffre essentiellement du problème de temps de calcul qui devient phénoménal lorsque le nombre de variables d'état dépasse quatre (*curse of dimensionality*) Archibald, McKinnon et al. [17] ont adoptés une technique d'agrégation qui exploite la capacité de la programmation dynamique au maximum. En effet, pour déterminer la règle de gestion d'un réservoir, ils ont solutionné, avec la programmation dynamique, un problème d'optimisation de quatre variables d'état, soit une pour le contenu énergétique du réservoir étudié, une pour les contenus énergétiques de tous les réservoirs en amont, une pour les contenus énergétiques des

réservoirs en aval et une pour la variable hydrologique. Les auteurs ont solutionné en fait N problèmes.

Turgeon [18] [19] a développé une approche hiérarchique d'agrégation-désagrégation pour faire la gestion du système hydroélectrique d'Hydro-Québec. Au premier niveau, l'auteur a utilisé la programmation dynamique pour déterminer la règle de gestion du réservoir agrégé. Au deuxième niveau, il a réparti la production hydroélectrique des vallées en résolvant NV problèmes d'optimisation stochastiques à deux variables d'état, soit le contenu énergétique d'une rivière et le contenu énergétique des autres rivières réunies. NV désigne le nombre de vallée. Au troisième niveau, il a effectué la répartition de la production d'une vallée entre ses réservoirs en essayant d'atteindre un niveau cible pour chaque réservoir. Les niveaux cibles sont obtenus par la résolution d'un problème d'optimisation qui maximise l'espérance de la production future. Cette méthode a été appliquée avec succès par EDF (Électricité de France) pour la gestion de son parc hydroélectrique [20]. La faiblesse de cette approche réside dans le fait que la solution du modèle agrégé (modèle du réservoir unique) peut ne pas être réalisable en pratique et peut ne pas prendre correctement en compte les hauteurs de chutes.

Saad et Turgeon [21] ont appliqué une analyse par composante principale (ACP) des solutions obtenues par la résolution d'un problème linéaire déterministe pour plusieurs scénarios d'apports synthétiques afin de réduire le nombre de variables. L'ACP consiste à transformer des variables liées entre elles en nouvelles variables indépendantes les unes des autres. Les nouvelles variables sont nommées « composantes principales » et elles sont moins nombreuses que les variables initiales. Cette réduction du nombre de variables a permis à l'auteur d'appliquer la programmation dynamique à un problème réduit. La désagrégation est faite par l'application des transformations inverses des «composantes principales» qui sont des transformations linéaires. Pour améliorer cette approche, Saad, Turgeon et al. [22] ont remplacé les relations linéaires par un réseau de neurones de type perceptron pour réaliser la désagrégation. La méthode a été appliquée avec succès au complexe La-Grande d'Hydro-Québec. Dans le même ordre d'idée, Saad, Bigras et al. [23] ont montré que le remplacement des réseaux de neurones de type perceptron par des réseaux RBF (réseaux de fonctions à base radiale) peuvent réduire de façon significative le temps de calcul sans affecter la performance de l'algorithme. La solution obtenue avec ces approches est sous-optimale car le modèle agrégé représente une simplification de la réalité et ne prend pas en compte les hauteurs de chute.

Georgakakos et Marks [24] ont développé une méthode intéressante, appelée ELQG (*Extended Linear Quadratic Gaussian*), en se basant sur la théorie du contrôle optimal stochastique. Leur approche consiste à approximer la fonction objective par une fonction quadratique, puis à linéariser les contraintes non linéaires et à relaxer toutes les contraintes autres que l'équation d'état. Hooper et al. [25] ont appliqué cette méthode à la gestion du système de Salt River, Arizona (6 réservoirs pour un horizon de 600 mois). La méthode ELQG donne une solution de type retour d'état (feedback) local, ce qui limite son application.

Murray et Yakowitz [26] ont fait une extension des travaux de Jacobsen et Mayne sur la DDP (*Differential Dynamic Programming*) pour l'adapter au problème d'optimisation avec contraintes linéaires. Ils ont appliqué cette technique à l'optimisation d'un système de quatre réservoirs. La méthode DDP n'exige pas de discrétiser l'espace des états et ne souffre pas du problème de dimensionnalité. Toutefois, elle exige une solution initiale. En commençant par une politique de gestion initiale et en approximant la fonction objectif par une fonction quadratique, la méthode DDP résout un problème d'optimisation quadratique pour chaque période. Plusieurs chercheurs ont utilisé la méthode DDP pour résoudre des problèmes de gestion de systèmes contenant plusieurs réservoirs, tel que Trezos et Yeh [27] et El-Awar et al [28]. Malgré leur intérêt théorique, l'approche DDP comme l'approche ELQG ne sont pas très recommandables pour résoudre des problèmes d'optimisation de grande taille ayant beaucoup de contraintes [8].

La méthode GDP (*Gradient Dynamic Programming*) proposée par Foufoula-Georgiou et Kitanidis [29] diffère de la méthode DDP par le fait que la fonction de Bellman est approximée par une série de polynômes d'Hermite au lieu d'une fonction quadratique. De ce fait, la méthode GDP est plus précise puisqu'elle réduit l'erreur de discrétisation.

Pereira [30] a proposé la méthode SDDP (*Stochastic Dual Dynamic Programming*) qui ne tient pas compte du nombre de variables d'état puisqu'elle construit la fonction de Bellman à partir de la solution duale d'un problème d'optimisation linéaire. La représentation des aléas des apports est limitée dans SDDP. De plus, le nombre de périodes doit être petit et le modèle doit être linéaire. Signalons que la description linéaire est non suffisante pour bien définir ce problème d'optimisation. Dans le même esprit, Yang et Read [31] ont développé la méthode CDP (*Constructive Dynamic Programming*) qui représente une amélioration de la méthode SDDP.

3.3 Les heuristiques

Les heuristiques sont des algorithmes d'optimisation de dernier recourt. Elles permettent de résoudre des problèmes d'optimisation difficiles pour lesquels on ne dispose pas de méthodes classiques plus efficaces comme le problème de gestion des réservoirs. Ces algorithmes se comportent comme les algorithmes de recherche où on exploite les caractéristiques d'un problème afin de trouver une solution proche de la solution optimale.

Cette catégorie contient les algorithmes génétiques, les réseaux de neurones et la logique floue. Dernièrement, plusieurs techniques d'optimisation (stochastiques) modernes utilisant des modèles heuristiques Otero [32], Sharif [33] et Cai [34], la logique floue Shrestha [35] et les réseaux de neurones Raman [10], ont été développées mais leur intégration dans des schémas de résolution OSI ou OSE n'est pas évidente à cause de leurs exigences computationnelles excessives. Le choix de la méthode de résolution dépend des caractéristiques spécifiques du système de réservoirs, des données disponibles, de la fonction objectif, des contraintes, de la nature du résultat désiré et bien entendu des ressources disponibles.

3.4 La simulation

Selon Labadie [8], les modèles d'optimisation sont difficilement applicables à des problèmes de gestion de réservoirs de très grande taille. Les modèles mathématiques sont généralement incapables de prendre en compte le grand nombre de contraintes que les exploitants des systèmes hydroélectriques doivent considérer. Les articles de Simonovic [14] et Wurbs [15] confirment cet état de fait. Les exploitants préfèrent donc se fier aux modèles de simulation, et à leur expérience, plutôt qu'aux modèles d'optimisation non réalistes. Par opposition aux modèles d'optimisation, les modèles de simulation permettent d'avoir une meilleure modélisation des caractéristiques et des performances des systèmes réels. En effet, la simulation offre la possibilité de représenter facilement et d'une manière détaillée le comportement du monde réel. De plus, il est possible de lui intégrer un module de génération synthétique des apports naturels [18].

Plusieurs chercheurs ont utilisé des modèles mixtes exploitant une approche optimisation-simulation Labadie [36, 37], Turgeon [38] et Koutsoyannis [39]. Ces techniques ne

conduisent pas à une solution optimale. Par contre, elles permettent d'obtenir la conformité avec les règles d'exploitation prédéfinies Oliveira-Loucks [16].

Certains auteurs, comme Nalbantis et al. [40], ont utilisé la simulation pour ajuster les paramètres d'une règle de gestion paramétrique. Les paramètres «optimaux» sont ceux qui correspondent au meilleur indice de performance. Les indices de performance sont calculés par la simulation de la règle de gestion paramétrique pour un ensemble fini de réalisations de ces paramètres.

Dernièrement, Turgeon [6] a proposé une méthode qu'il a nommée « méthode des trajectoires optimales (MTO)» qui simule une règle de gestion dont l'objectif est d'augmenter le contenu d'un réservoir tant et aussi longtemps que le gain de production due à l'augmentation de la hauteur de chute est plus grand que les pertes causées par les déversements. Ensuite, l'auteur a utilisé les niveaux obtenus comme étant les niveaux cibles à suivre pour gérer le système.

Le besoin d'avoir une règle de gestion préconçue représente l'inconvénient principal de la simulation.

CHAPITRE 4 AGRÉGATION DES INSTALLATIONS HYDROÉLECTRIQUES ET MODÈLE DU RÉSERVOIR UNIQUE

Dans ce chapitre, nous traitons de l'agrégation des installations hydroélectriques et du modèle de réservoir unique qui sont la première étape de notre approche. L'agrégation des installations hydroélectriques sert à réduire le nombre de variables dans le modèle d'optimisation stochastique. Sans agrégation, le soutirage hebdomadaire de chaque réservoir serait une fonction du contenu de ce réservoir et du contenu de chacun des autres réservoirs du système, ce qui est impossible à résoudre dans un temps raisonnable lorsque le nombre de réservoirs est plus grand que quatre. Notre étude bibliographique nous a permis d'identifier trois approches pour surmonter cette difficulté :

- Transformer le problème de gestion stochastique en un problème de gestion déterministe.
- Agréger les variables ou décomposer le problème afin de réduire le nombre de variables.
- Utiliser des règles de gestion prédéfinies ou empiriques.

Même si l'optimisation déterministe linéaire ou non-linéaire demeure attirante et prend en compte quelques aspects stochastiques du problème de gestion, telle que la variance et la persistance des apports, elle demeure une approximation puisque les apports d'eau ne peuvent pas être prévus avec certitude longtemps à l'avance. D'autre part, l'utilisation de règles de gestion prédéfinies ou empiriques est limitée puisque ces règles ont été développées pour des cas particuliers et des objectifs spécifiques. L'utilisation d'une règle qui a donné de bons résultats pour un système particulier ne garantit pas l'obtention de bons résultats pour un autre système. Enfin, nous pensons que l'approche d'agrégation des installations hydroélectrique est mieux adaptée. Le concept du réservoir unique est très utilisé en pratique puisqu'il donne une idée de l'évolution globale du système et tient compte de la stochasticité des apports d'eau. Cependant, les résultats obtenus avec ce modèle demeurent approximatifs et ne prennent pas en compte les variations des hauteurs de chute des réservoirs. De plus, le processus de désagrégation qui consiste à trouver la meilleure façon de répartir la production totale entre les installations disponibles demeure un défi de taille.

Dans la section qui suit, nous présentons la méthode retenue pour agréger le système hydroélectrique d'Hydro-Québec, le modèle du réservoir unique ainsi que la méthode utilisée pour déterminer la règle de gestion optimale du réservoir unique.

4.1 Méthode d'agrégation des installations hydroélectriques

Nous avons adopté la méthode d'agréation utilisée par Turgeon dans son modèle PERESE, modèle utilisé pour résoudre le problème de gestion à long terme des équipements de production d'Hydro-Québec [23, 41]. La procédure consiste à transformer les contenus des réservoirs, les apports d'eau et les contraintes en énergie potentielle. Cette transformation est faite en multipliant chaque variable et chaque paramètre par les facteurs de conversion moyen. Pour le réservoir i, nous avons estimé le facteur de conversion moyen, $Ch_{i,t}$ (GWh/hm^3), qui donne l'énergie moyenne pouvant être produite par le réservoir avec un hm^3 d'eau à la semaine t. Lorsque le système contient des réservoirs en série, l'eau soutirée du réservoir en amont a le potentiel d'être soutirée par tous les réservoirs en aval. Dans ce cas, on doit ajouter à $Ch_{i,t}$ la somme des $Ch_{j,t}$ de tous les réservoirs j situés en aval (pour plus de détails sur ce sujet, le lecteur pourra consulter le rapport de Turgeon [41].

La qualité du modèle de réservoir unique dépend essentiellement de la précision des facteurs de conversion $Ch_{i,t}$. Plus précisément, la quantité d'énergie en GWh obtenue en multipliant le contenu en eau d'un réservoir par le facteur de conversion suppose que l'eau sera toute soutirée à la même hauteur de chute, ce qui est non réaliste. Dans cette thèse, nous avons utilisé les résultats du modèle déterministe présenté dans le chapitre suivant pour calculer les facteurs de conversion moyens $Ch_{i,t}$ qui correspondent à la hauteur de chute moyenne du réservoir i dans la semaine t. Les facteurs de conversion $Ch_{i,t}$ sont déterminés par l'équation suivante :

$$Ch_{i,t} = \frac{\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} g_{i,t}\left(s_{i,t}^{m}, s_{i,t+1}^{m}, u_{i,t}^{m}\right)}{\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} r_{i,t}^{m}} \qquad (4.1)$$

où $(s_{i,t}^m, u_{i,t}^m)\ \forall i,t$ désigne la solution obtenue suite à la résolution du modèle déterministe avec le scénario d'apport numéro $m = 1,\ldots,M$. Rappelons que $r_{i,t}^m = k \times u_{i,t}^m$.

Pour illustrer la méthode d'agrégation, nous allons agréger toutes les installations de la rivière fictive montrées dans la Figure 4.1. Dans cette figure, les réservoirs sont représentés par des triangles et les centrales par des cercles. Puisque le modèle du réservoir unique est un modèle qui gère toute l'énergie stockée dans le système, nous allons convertir en énergie l'eau stockée dans chacun des réservoirs au début de l'horizon ainsi que les apports en eau dans la période *t.*

En appliquant la méthode d'agrégation retenue avec les coefficients de conversion moyens, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
x_{1,1} &= (Ch_1 + Ch_2 + Ch_3 + Ch_4 + Ch_5 + Ch_6 + Ch_7)s_{1,1} \\
x_{2,1} &= (Ch_2 + Ch_3 + Ch_4 + Ch_5 + Ch_6 + Ch_7)s_{2,1} \\
x_{3,1} &= (Ch_3 + Ch_4 + Ch_5 + Ch_6 + Ch_7)s_{3,1} \\
x_{4,1} &= (Ch_4 + Ch_5 + Ch_6 + Ch_7)s_{4,1} \\
x_{5,1} &= (Ch_5 + Ch_6 + Ch_7)q_{5,1} \\
x_{6,1} &= (Ch_6 + Ch_7)s_{6,1} \\
x_{7,1} &= (Ch_7)s_{7,1}
\end{aligned} \qquad (4.2)$$

Pareillement, les apports en eau à chaque réservoir peuvent être convertis en énergie en procédant de la même façon.

$$\begin{aligned}
y_{1,t} &= (Ch_1 + Ch_2 + Ch_3 + Ch_4 + Ch_5 + Ch_6 + Ch_7)q_{1,t} \\
y_{2,t} &= (Ch_2 + Ch_3 + Ch_4 + Ch_5 + Ch_6 + Ch_7)q_{2,t} \\
y_{3,t} &= (Ch_3 + Ch_4 + Ch_5 + Ch_6 + Ch_7)q_{3,t} \\
y_{4,t} &= (Ch_4 + Ch_5 + Ch_6 + Ch_7)q_{4,t} \\
y_{5,t} &= (Ch_5 + Ch_6 + Ch_7)q_{5,t} \\
y_{6,t} &= (Ch_6 + Ch_7)q_{6,t} \\
y_{7,t} &= (Ch_7)q_{7,t}
\end{aligned} \qquad (4.3)$$

De cette manière, nous obtenons les valeurs de X_t (*GWh*) et Y_t (*GWh*), qui représentent respectivement la quantité d'énergie totale stockée dans le système au début de l'horizon d'étude et l'apport total en énergie au système durant la période *t:*

$$X_1 = x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} + x_{5,1} + x_{6,1} + x_{7,t}$$

et (4.4)

$$Y_t = y_{1,t} + y_{2,t} + y_{3,t} + y_{4,t} + y_{5,t} + y_{6,t} + y_{7,t} \quad \forall t = 1, 2, \ldots T$$

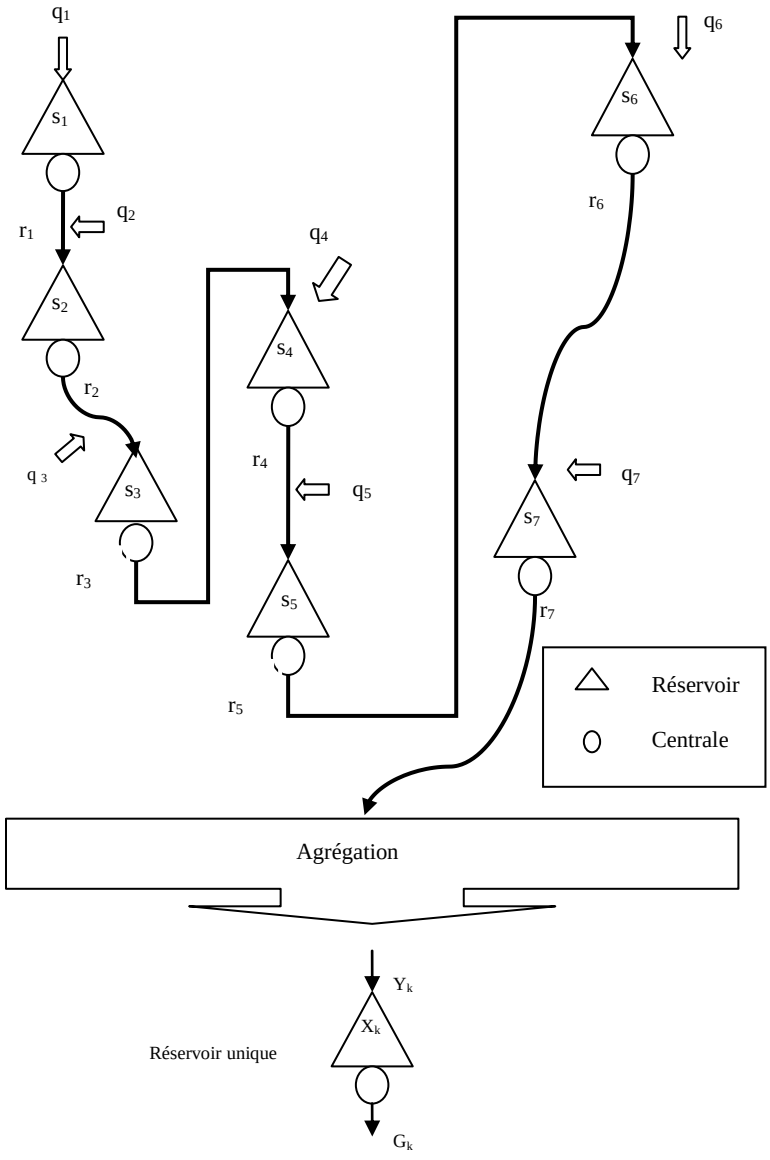

Figure 4.1 : Rivière fictive

4.2 Modèle du réservoir unique

Après avoir obtenues les valeurs de X_t et de Y_t, t=1,2,..T, le but est de trouver la règle de gestion du réservoir agrégé qui maximise l'espérance mathématique des profits de l'entreprise sur un horizon de 52 semaines (T=52). La règle optimale de gestion sera déterminée au pas de temps hebdomadaire en résolvant le modèle d'optimisation stochastique suivant.

Modèle du réservoir unique :

$$\underset{G \quad Y}{\text{Max}} \; E\left[\sum_{t=1}^{T} b_t \left(G_t - D_t\right)\right] + \varnothing_{T+1}\left(X_{T+1}\right) \tag{4.5}$$

sous contraintes :

$$X_{t+1} = X_t + Y_t - G_t - V_t \quad \forall\, t = 1, 2, \ldots, T-1 \tag{4.6}$$

$$X_t^{\min} \le X_t \le X_t^{\max} \quad \forall\, t = 1, 2, \ldots, T \tag{4.7}$$

$$G_t^{\min} \le G_t \le G_t^{\max} \quad \forall\, t = 1, 2, \ldots, T \tag{4.8}$$

où $V_t = \max(0, G - G^{\max})$ et le symbole E(.) désigne l'espérance mathématique. X_1 est connu. Les bornes sur le stock d'énergie et sur le tirage total correspondent respectivement aux bornes des réservoirs et aux bornes des centrales converties en énergie (voir le rapport de Turgeon [41]). Rappelons que ce modèle ne prend pas en compte la variation des hauteurs de chute puisqu'il utilise des facteurs de conversion moyens.

La fonction objective du modèle de gestion du réservoir unique est la même que celle du modèle à l'étude. Nous avons seulement remplacé la somme de g_{it} par G_t . D_t est donnée par la multiplication de la valeur de la demande normalisée par l'apport énergétique moyen de tout le système.

4.3 La programmation dynamique stochastique

Comme nous l'avons mentionné à la section 2.4 du chapitre 2, l'introduction de la fonction de pénalité $L_t\left(X_{t+1}, G_t\right)$ suivante :

$$L_t\left(X_{t+1}, G_t\right) = e_{1,t} \cdot \max\left(0,\ X_{t+1}^{\min} - X_{t+1}\right) + e_{2,t} \cdot \max\left(0,\ X_{t+1} - X_{t+1}^{\max}\right) + e_{3,t} \cdot \max\left(0,\ G_t^{\min} - G_t\right) + e_{4,t} \cdot \max\left(0,\ G_t - G_t^{\max}\right), \tag{4.9}$$

permet de relaxer le problème d'optimisation (4.5)-(4.9) et le rendre réalisable pour tous les scénarios d'apports. L'ajustement des paramètres $e_{i,t}$, $i = 1,...,4$, $t = 1,...,T$ est fait par simulation du problème sans contrainte sur plusieurs années avec les scénarios d'apports historiques. Pour chaque simulation, nous calculons les probabilités de déversement et de manque en énergie en comptant le nombre de périodes où il y a violation des contraintes. Si ces probabilités dépassent un seuil critique préétabli, nous corrigeons les paramètres $e_{i,t}$ en se basant sur les résultats de la simulation et nous recommençons le processus de nouveau.

Le nouveau problème d'optimisation (problème relaxé) peut être écrit comme suit :

$$\underset{G \quad Y}{\text{Max}}\ E\left[\sum_{t=1}^{T} b_t\left(G_t - D_t\right) - L_t(X_{t+1}, G_t)\right] + \varnothing_{T+1}\left(\mathrm{X}_{T+1}\right) \tag{4.10}$$

sous contraintes :

$$\mathrm{X}_{t+1} = \mathrm{X}_t + \mathrm{Y}_t - \mathrm{G}_t - V_t \quad \forall\ \mathrm{t} = 1, 2, \ldots, \mathrm{T} - 1 \tag{4.11}$$

$$0 \le \mathrm{X}_{t+1} \quad \forall\ \mathrm{t} = 1, 2, \ldots, \text{T-1} \tag{4.12}$$

$$0 \le\ \mathrm{G}_t\ ;\ 0 \le V_t \quad \forall\ \mathrm{t} = 1, 2, \ldots, \mathrm{T} \tag{4.13}$$

avec $V_t = \max\left(0\,,\, G_t - G_t^{\max}\right)$

Le problème (4.10)-(4.13) peut être résolu facilement par l'algorithme de programmation dynamique présenté dans le chapitre 2. Celui-ci consiste à résoudre la fonctionnelle:

$$F_t\left(X_t, Y_{t-1}\right) = \underset{Y_t|Y_{t-1}}{\mathrm{E}}\left\{\max_{G_t}\left[b_t\left(G_t - D_t\right) - L_t(S_{t+1}, G_t) + F_{t+1}\left(X_{t+1}, Y_t\right)\right]\right\} \qquad (4.14)$$

à rebours dans le temps en commençant à la semaine T avec $F_{T+1}\left(X_{T+1}\right) = \Phi\left(X_{T+1}\right)$. La solution doit, bien entendu, respecter les contraintes (4.11) à (4.13). $\Phi\left(X_{T+1}\right)$ est déterminé par la procédure donnée à la section 2.4 du chapitre 2.

Y_{t-1} est devenue une variable d'état du problème d'optimisation parce que nous avons supposé que Y_t est corrélée avec Y_{t-1}. Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 2, la relation entre Y_t et Y_{t-1} est généralement représentée par l'équation linéaire suivante :

$$Y_t^N = a_{0,t} + a_{1,t} \cdot Y_{t-1}^N + a_{2,t} \cdot \zeta_t \qquad (4.15)$$

où ζ_t est une variable aléatoire normale centrée réduite et où Y_t^N représente la variable aléatoire normale obtenue après la normalisation de la variable Y_t .

La programmation dynamique décompose le problème d'optimisation en une série de problèmes d'optimisation dont chacun correspond à une étape. Le graphe suivant montre le principe de décomposition.

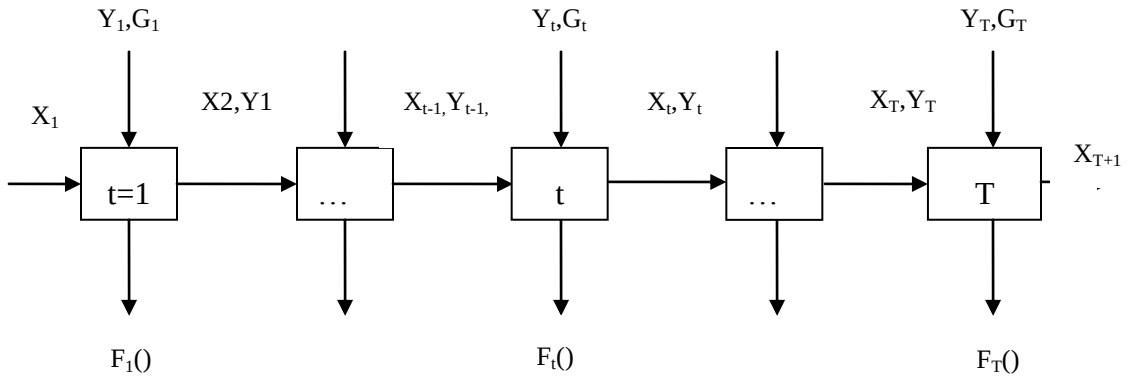

Figure 4.2 : Principe de décomposition de la PDS

Puisqu'il est impossible de résoudre (4.14) pour toutes les valeurs de X_t et de Y_{t-1}, nous avons discrétisé le domaine de chacune de ces variables en respectivement K et J points. Ensuite, nous avons évalué la fonction de Bellman $F_t\left(X_t, Y_{t-1}\right)$ à ces points. Pour évaluer $F_t\left(X_t, Y_{t-1}\right)$ sur tout le domaine, nous avons effectué une interpolation linéaire. Selon Turgeon [6], il n'est pas nécessaire de pousser la discrétisation à un niveau très élevé pour améliorer la qualité de la solution. Nous avons fixé $K = 50$ et $J = 11$. Pour $X_t^{(k)}$, la $k^{\text{ième}}$ valeur discrétisée du contenu du réservoir agrégé à la période t, l'espérance mathématique conditionnelle est donnée par la sommation suivante :

$$F_t\left(X_t^{(k)}, Y_{t-1}\right) = \sum_{j=1}^{11} \min\left[b_t\left(G_t - D_t\right) - L_t\left(X_{t+1}, G_t\right) + F_{t+1}\left(X_{t+1}, Y_t\right)\right] \times \Pr\left(Y_t = y_j \middle| Y_{t-1}\right) \tag{4.16}$$

En tenant compte de l'équation (4.15), la probabilité conditionnelle $\Pr\left(Y_t = y_j \middle| Y_{t-1}\right)$ peut être calculée avec l'équation suivante :

$$\Pr\left(Y_t^N = y_j^N \middle| Y_{t-1}^N\right) = \Pr\left(\xi = \frac{y_j^N - (a_{0,t} + a_{1,t} \cdot Y_{t-1}^N)}{a_{2,t}}\right) \tag{4.17}$$

y_j^N représente la valeur normalisée qui correspond à la valeur de l'apport réel y_j. Par la suite, les onze apports discrets sont des valeurs associées à onze régions disjointes de la loi normale centrées réduite. Le second terme de l'équation (4.17) est déterminé par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\xi = z\right) \approx \Pr\left(z - \frac{\Delta}{2} \le \xi \le z + \frac{\Delta}{2}\right) \\
&\Pr\left(\xi = z^1\right) \approx \Pr\left(\xi \le z^1 + \frac{\Delta}{2}\right) \\
&\Pr\left(\xi = z^J\right) \approx \Pr\left(\xi \ge z^J - \frac{\Delta}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

où Δ est la largeur d'une zone. La première ligne du tableau suivant donne la discrétisation de la loi normale utilisée dans cette thèse $(\Delta = 0,45)$ et la deuxième ligne donne la probabilité associée à ces valeurs:

Tableau 4.1 : Discrétisation de la loi normale centrée réduite

z	-2,27	-1,82	-1,36	-0,91	-0,45	0	0,45	0,91	1,36	1,82	2,27
Pr	0,0202	0,0357	0,0712	0,1202	0,1617	0,1820	0,1617	0,1202	0,0712	0,0357	0,0202

La figure suivante montre une répartition de la loi normale $Z \longrightarrow N(0,1)$ en onze zones.

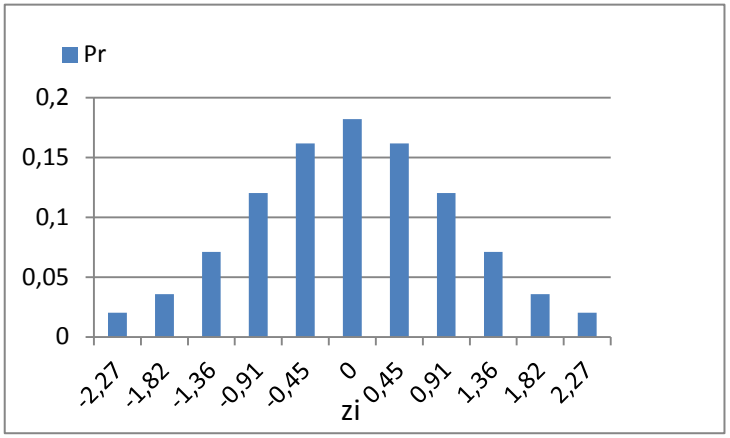

Figure 4.3 : Discrétisation de la loi normale

La solution de ce problème permet de déterminer la politique de gestion suivante:

$$\left(G_t^*\right) = \arg\max_{G_t}\left[b_t\left(G_t - D_t\right) - L_t(X_{t+1}, G_t) + F_{t+1}\left(X_{t+1}, Y_t\right)\right] \quad \forall\, t \tag{4.19}$$

La valeur de G_t^* correspond à la quantité d'énergie devant être produite par le système dans la semaine t. Elle est obtenue de la manière suivante : à chaque semaine le programme commence par fixer une solution initiale et ensuite il l'améliore en déterminant de combien cette génération doit être augmentée pour maximiser l'espérance mathématique des profits. Afin de partir d'une solution initiale la plus proche possible de la solution optimale, nous avons pris en compte les faits suivants :

- Si le contenu du réservoir agrégé au début de la semaine t est augmenté de $X_t^{(k)}$ à $X_t^{(k+1)} \succ X_t^{(k)}$ la génération optimale ne devrait pas diminuer, c'est-à-dire $G_t^{*(k+1)} \succ G_t^{*(k)}$

(la première valeur de la discrétisation du contenu du réservoir agrégé correspond à $X_t^{(\min)}$ et la dernière valeur correspond à $X_t^{(\max)}$)

- Si le réservoir agrégé est vide au début de la semaine *t*, la génération optimale qui correspond à un apport $z_i^{(k+1)}$ est supérieure à la génération optimale pour l'apport $z_i^{(k)} \prec z_i^{(k+1)}$ (la première valeur de la discrétisation de l'apport correspond à $z_i^{(\min)}$)

- Si $G_t^* \geq G_t^{\max}$ alors $G_t^* = G_t^{\max}$, et un déversement est inévitable $V_t = G_t^* - G_t^{\max}$. D'autre part, lorsque $G_t^* \prec G_t^{\min}$ un manque en énergie est inévitable.

Cette façon de faire a permis de réduire le temps de calcul puisque l'algorithme commence avec une solution initiale plus proche de la solution optimale. De plus, elle nous a permis d'éviter la discrétisation de la variable de tirage et de s'assurer que le contenu du réservoir unique est toujours réalisable.

Afin de s'assurer de converger à la règle de gestion optimale, nous avons refait les calculs sur plusieurs années [42]. En pratique, trois passes annuelles sont suffisantes. Finalement, rappelons que cette solution reste approximative puisqu'elle est obtenue à partir d'un modèle approximatif.

4.4 Application numérique

Nous avons appliqué cette procédure à un système comprenant les deux premiers réservoirs de la rivière décrite dans la section 1.5) du premier chapitre. La Figure 4.4 montre le contenu moyen du réservoir agrégé alors que la Figures 4.5 montre que la génération du système agrégé suit bien le profil de la demande. Dans cet exemple, la demande hebdomadaire moyenne est égale à l'apport énergétique moyen qui est de 150 GWh.

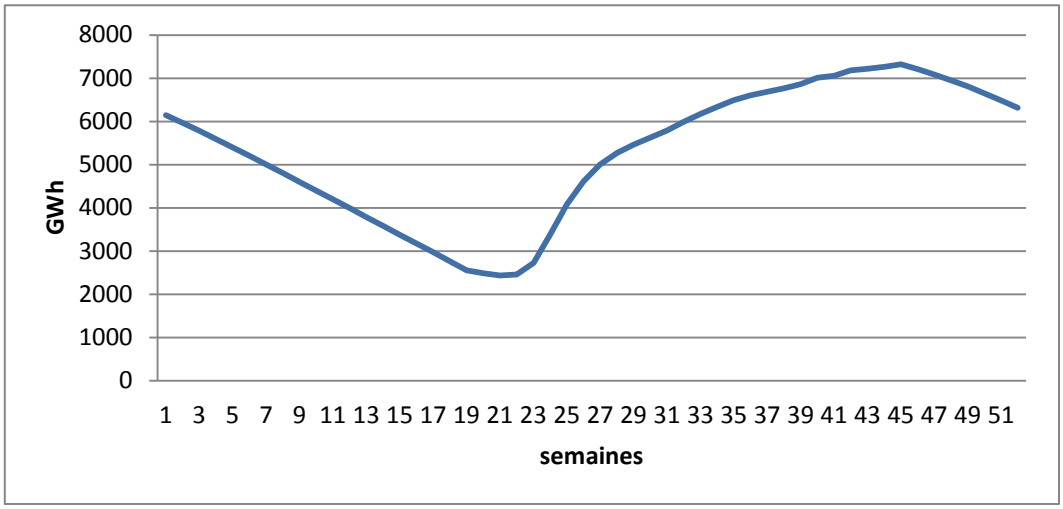

Figure 4.4 : Contenu moyen (GWh) du réservoir agrégé pour un système de deux réservoirs en série

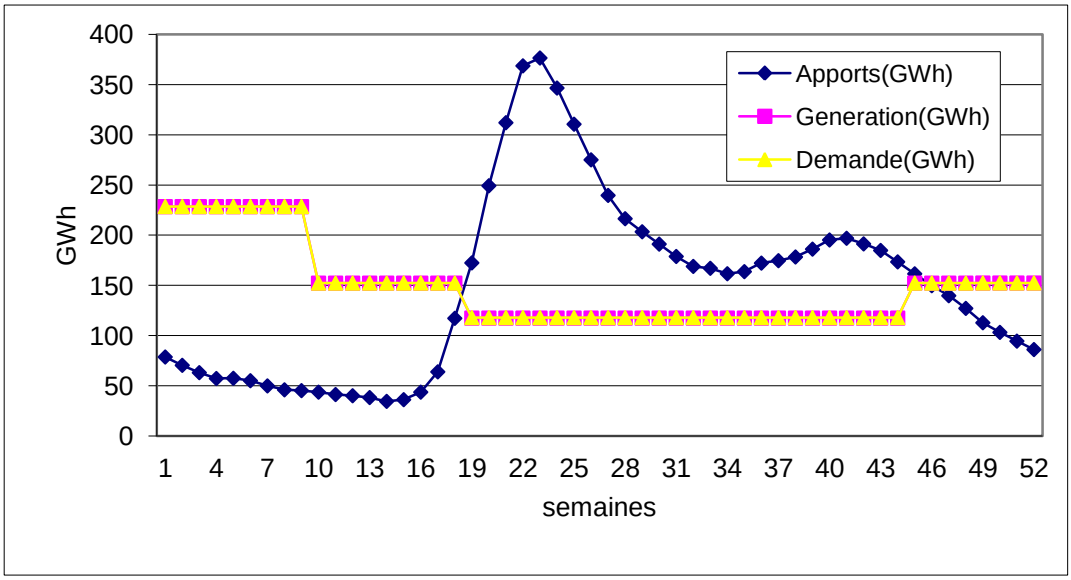

Figure 4.5 : Apport moyen, génération moyenne et demande pour le réservoir agrégé de deux réservoirs en série

CHAPITRE 5 MODÈLE D'OPTIMISATION DÉTERMINISTE

La résolution du problème d'optimisation déterministe, pour plusieurs scénarios d'apports historiques, nous a permis de construire une base de données contenant les volumes d'eau et les soutirages optimaux qui seront utilisés pour déterminer la règle optimale de gestion. Les résultats du problème d'optimisation déterministe ont aussi été utilisés pour estimer la valeur des coefficients de conversion $Ch_{i,t}$. La valeur de $Ch_{i,t}$ est en fait égale à la production moyenne du réservoir *i* dans la période t divisée par la quantité moyenne d'eau turbinée dans cette période.

Ce chapitre est subdivisé en trois sections : la première section est réservée à la présentation du modèle déterministe. La deuxième présente l'algorithme de résolution alors que dans la troisième nous faisons une présentation graphique des résultats obtenus par cette méthode pour un système de deux réservoirs en série.

5.1 Modèle déterministe

Dans cette section, nous présentons le modèle déterministe ainsi que sa méthode de résolution. Le problème d'optimisation mathématique consiste à déterminer les valeurs de $u_{i,t}\left(r_{i,t}\right)$, pour $i = 1, 2, ..., N$ et $t = 1, 2, ..., T$ qui solutionnent le problème suivant :

$$\underset{u}{Max}\left[\sum_{t=1}^{T} c_t \left(\sum_{i=1}^{N} g_{i,t}\left(s_{i,t}, u_{i,t}\right)\right)\right] \tag{5.1}$$

sous

$$s_{i,t+1} = s_{i,t} + r_{i-1,t} + v_{i-1,t} - r_{i,t} - v_{i,t} + q_{i,t} \quad ; \ \forall i,t \ ; \tag{5.2}$$

$$r_{i,t} = k * u_{i,t} \tag{5.3}$$

$$s_{i,t+1}^{\min} \le s_{i,t+1} \le s_{i,t+1}^{\max} \qquad \text{pour} \quad i = 1,...n \quad \text{et} \quad t = 1,...,T-1 \tag{5.4}$$

$$u_{i,t}^{\min} \le u_{i,t} \le u_{i,t}^{\max} \qquad \text{pour} \quad i = 1,...n \quad \text{et} \quad t = 1,...,T \tag{5.5}$$

$$s_{i,T} = s_{i,1} \ \textit{connu}; \quad v_{i,t} \ge 0 \quad \textit{et} \quad r_{0,t} = v_{0,t} = 0 \ \text{ pour } t = 1,...,T \tag{5.6}$$

avec $v_{i,t} = \max\left(0 , r_{i,t} - r_{i,t}^{\max}\right)$.

La fonction objective de ce modèle cherche uniquement à maximiser la production hydroélectrique. Par la suite, elle est différente de celle du modèle stochastique des réservoirs. Nous avons modifié la fonction objective de façon à obtenir des relations de répartition qui ne dépendent pas d'un scénario de demande et qui maximisent l'énergie produite par le système sur l'horizon considéré. Le paramètre c_t représente la valeur relative du GWh produit par les centrales dans la semaine t. On suppose que la valeur du GWh produit en hiver est c_t fois plus grande que la valeur de celui produit en été.

5.2 Choix de la méthode de résolution

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la résolution du problème d'optimisation (5.1)-(5.6) dans sa version initiale n'est pas toujours possible parce que les contraintes (5.4)-(5.5) ne peuvent pas être respectées en tout temps.

Le problème (5.1)-(5.6) peut être reformulé de la façon suivante :

$$\underset{u}{Max}\left[\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{N} c_t\, g_{i,t}\left(s_{i,t},u_{i,t}\right)-\sum_{i=1}^{n} L_{i,t}(s_{i,t},u_{i,t})\right)\right] \qquad (5.7)$$

sous :

$$s_{i,t+1} \;=\; s_{i,t}+r_{i-1,t}+v_{i-1,t}-r_{i,t}-v_{i,t}+q_{i,t} \quad ;\ \forall i,t\ ; \qquad (5.8)$$

$$r_{i,t} \;=\; k \;*\; u_{i,t} \qquad (5.9)$$

$$0 \le s_{i,t+1} \qquad \text{pour} \quad i=1,...n \quad \text{et} \quad t=1,...,T-1 \qquad (5.10)$$

$$0 \le u_{i,t} \quad 0 \le v_{i,t} \qquad \text{pour} \quad i=1,...n \quad \text{et} \quad t=1,...,T \qquad (5.10)$$

$$s_{i,T}=s_{i,1}\ \textit{connu};\quad r_{0,t}=v_{0,t}=0 \ \text{ pour } t=1,...,T \qquad (5.11)$$

avec $v_{i,t}=\max\,(0\,,\,r_{i,t}-r_{i,t}^{\max})$.

La fonction de pénalité à toujours la même forme, c'est-à-dire :

$$L_{i,t}\left(s_{i,t+1},u_{i,t}\right)=e_{1,t}^{i}\cdot\max\left(0,\ s_{i,t+1}^{\min}-s_{i,t+1}\right)\ +\ e_{2,t}^{i}\cdot\max\left(0,\ s_{i,t+1}-s_{i,t+1}^{\max}\right)\ +$$

$$e_{3,t}^{i}\cdot\max\left(0,\ u_{i,t}^{\min}-u_{i,t}\right)\ +\ e_{4,t}^{i}\cdot\max\left(0,\ u_{i,t}-u_{i,t}^{\max}\right),$$

Même s'il existe dans la littérature scientifique un grand nombre d'algorithmes pour résoudre des problèmes d'optimisation déterministe, l'algorithme de résolution utilisé dans cette thèse est en fait une heuristique basée sur une approximation linéaire successive de la fonction de production $g_{i,t}\left(s_{i,t},u_{i,t}\right)$ autour d'un point de fonctionnement $\left(s_{i,t},u_{i,t}^{*}\right)$. Nous avons choisi cet algorithme pour les trois raisons suivantes :

1. Il permet de tenir compte de la variation de la hauteur de chute.
2. L'approximation de la fonction production d'une centrale donne une fonction concave.
3. Le problème peut être résolu avec Cplex.

De plus, Hiew [43] et Grygier et Stedinger [44] rapportent que dans le cas de problèmes de gestion des réservoirs la méthode de la *Successive Linear Programming (SLP)* est plus efficace que les autres méthodes d'optimisation non-linéaire qu'ils ont testées. Malheureusement, cet algorithme ne dispose pas d'une garantie de convergence [45].

5.2.1 Approximation de la fonction de production

Puisque la hauteur de chute correspond à la différence d'altitude entre le niveau amont et le niveau aval du réservoir alimentant la centrale hydroélectrique, la production d'une centrale hydroélectrique peut être écrite de la façon suivante :

$$g_{i,t}\left(s_{i,t},s_{i,t+1},u_{i,t}\right)=\frac{Niv_{am}(0.5(s_{i,t}+s_{i,t+1}))-Niv_{av}}{h_{i}^{réf}}\,g_{i}\left(u_{i,t}\right) \qquad (5.12)$$

De plus, nous avons fait l'hypothèse que le niveau du bief aval ne varie pas avec le débit en aval de la centrale et ne dépend pas de la variation du contenu du réservoir. La relation (5.12) devient :

$$g_{i,t}\left(s_{i,t}, s_{i,t+1}, u_{i,t}\right) = \frac{Niv_{am}(0.5(s_{i,t} + s_{i,t+1})) - Niv_{av}^{nom}}{h_i^{réf}} g_i\left(u_{i,t}\right) \tag{5.13}$$

En ajoutant et en retranchant Niv_{am}^{nom} du réservoir, l'équation (5.13) s'écrit :

$$g_{i,t}\left(s_{i,t}, s_{i,t+1}, u_{i,t}\right) = \frac{Niv_{am}(0.5(s_{i,t} + s_{i,t+1})) - Niv_{am}^{nom} + Niv_{am}^{nom} - Niv_{av}^{nom}}{h_i^{réf}} g_i\left(u_{i,t}\right) \tag{5.14}$$

La séparation de (5.14) en deux termes donne:

$$g_{i,t}\left(s_{i,t}, s_{i,t+1}, u_{i,t}\right) = \frac{Niv_{am}(0.5(s_{i,t} + s_{i,t+1})) - Niv_{am}^{nom}}{h_i^{réf}} g_i\left(u_{i,t}\right) + \frac{Niv_{am}^{nom} - Niv_{av}}{h_i^{réf}} g_i\left(u_{i,t}\right) \tag{5.15}$$

L'approximation de (5.15) autour d'un point de fonctionnement $\left(s_{i,t}, u_{i,t}^*\right)$ donne :

$$g_{i,t}\left(s_{i,t}, s_{i,t+1}, u_{i,t}\right) \approx \frac{Niv_{am}(0.5(s_{i,t} + s_{i,t+1})) - Niv_{am}^{nom}}{h_i^{réf}} g_i\left(u_{i,t}^*\right) + g_i\left(u_{i,t}\right) \tag{5.16}$$

Les deux termes de cette approximation sont des fonctions linéaires par parties et concaves. La fonction $\frac{Niv_{am}(0.5(s_{i,t} + s_{i,t+1})) - Niv_{am}^{nom}}{h_i^{réf}} g_i\left(u_{i,t}^*\right)$ est concave en $\overline{s_{i,t}} = \frac{(s_{i,t} + s_{i,t+1})}{2}$ puisque $Niv_{am}(\overline{s_{i,t}})$ est concave par hypothèse (hypothèse H2). D'autre part, la fonction $g_i\left(u_{i,t}\right)$ est concave en $u_{i,t}$ par construction (voir Figure 2.1).

5.2.2 Algorithme de résolution du problème déterministe

En remplaçant la fonction objective du modèle déterministe par l'approximation concave de la relation (5.16), le modèle déterministe peut être résolu avec une heuristique qui utilise une méthode du simplexe associée à une stratégie de réduction des bornes sur les variables. Les principales étapes de cette heuristique sont :

ALGORITHME DE RÉSOLUTION DU PROBLÈME DÉTERMINISTE

Pour chaque scénario d'apport

Étape 1 : Fixer le nombre d'itérations maximal à $K_{\max}$. Initialiser le compteur d'itération $k=1$;

Étape 2 : Fixer $S_{T+1}=S_1$. Fixer $h_{i,t}=h_i^{réf}$, puis résoudre (5.7)–(5.11) pour obtenir une solution initiale $\left(s_{i,t},u_{i,t}^1\right)$;

Étape 3 : Déterminer l'approximation concave, selon (5.16), des fonctions de production autour de la solution courante $\left(s_{i,t},u_{i,t}^k\right)$ du problème d'optimisation (5.7)-(5.11) déterministe relaxé.

Étape 4 : Résoudre par Cplex le modèle d'optimisation dont la fonction objectif est celle de l'étape 3 et sous les contraintes (5.8)-(5.11) ;

Étape 5 : Si le nombre d'itérations maximal est atteint, alors Fin. Sinon aller à l'étape suivante ;

Étape 6 : Mettre à jour les paramètres de réduction des bornes $\Delta_{s_{i,t}}^k$ et $\Delta_{u_{i,t}}^k$;

Étape 7: Réduire et recentrer les intervalles des débits turbinés et les intervalles des volumes des réservoirs :

$$s_{i,t}^k-\Delta_s^{k+1}s_{i,t}^k\le s_{i,t}^{k+1}\le s_{i,t}^k-\Delta_s^{k+1}s_{i,t}^k \qquad \forall i=1,2,...,N \quad et \quad t=1,2,...,T$$

$$u_{i,t}^k-\Delta_u^{k+1}u_{i,t}^k\le u_{i,t}^{k+1}\le u_{i,t}^k-\Delta_u^{k+1}u_{i,t}^k \qquad \forall i=1,2,...,N \quad et \quad t=1,2,...,T$$

Étape 8 : Mettre à jour les approximations concaves selon (5.16);

Étape 9 : $k=k+1$ et retourner l'**Étape 4**.

Figure 5.1 : Algorithme de résolution du modèle déterministe

5.2.3 Stratégie de réduction des bornes et convergence vers une solution réalisable pour le modèle initial

La stratégie de réduction des bornes est basée sur deux paramètres $\Delta_{s_{i,t}}^{k+1}$ et $\Delta_{u_{i,t}}^{k+1}$. À chaque pas de l'algorithme ces paramètres sont mis à jour selon une suite décroissante et convergente vers zéro comme suit :

$$\Delta_{s_{i,t}}^{k} = \Delta_{u_{i,t}}^{k} = \frac{K_{\max} - k}{K_{\max}} \ .$$

À la dernière itération ($k = K_{\max}$) les paramètres de réduction des bornes deviennent égales à zéro ($\Delta_{s_{i,t}}^{k_{\max}} = \Delta_{u_{i,t}}^{k_{\max}} = 0$) et la solution du problème $\left(s_{i,t}^{k_{\max}}, u_{i,t}^{k_{\max}}\right)$ peut être réalisable pour le modèle original. Si la solution obtenue par cet algorithme respecte les contraintes (5.4) et (5.5) alors nous avons obtenu une solution réalisable pour le problème de départ (5.1)-(5.6). Sinon, nous essayons de rendre cette solution réalisable en activant les bornes violées et réitérons de nouveau autour de ce point.

5.3 Application

Le but de cette section est de donner une présentation graphique des résultats obtenus par l'application de cet algorithme à un système comprenant les deux premiers réservoirs de la rivière La-Grande présentée dans la section 1.5 du premier chapitre. Nous avons supposé que les réservoirs sont pleins au début de l'horizon, c'est à dire que $s_{i,1} = s_i^{\max} \quad i = 1,2$. De plus, nous avons constaté que la solution se stabilise après quelques itérations, ce qui permet de réduire $K_{\max}$. Nous avons fixé $K_{\max} = 10$. Les paramètres de pénalité sont fixés de façon à minimiser les déversements.

Les Figures 5.2 et 5.3 montrent respectivement l'évolution des contenus du premier réservoir et du deuxième réservoir en fonction du temps et pour tous les scénarios d'apports.

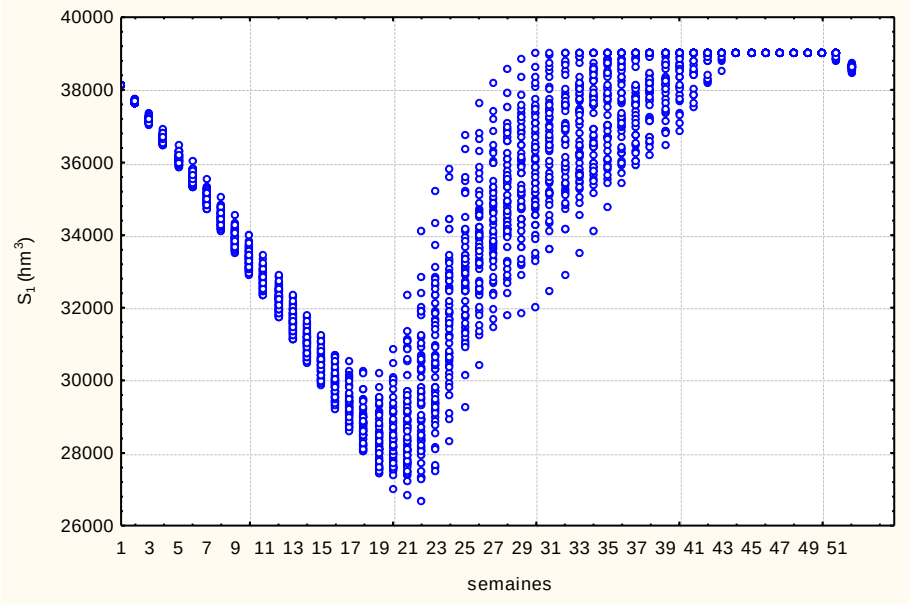

Figure 5.2 : Variation du contenu du réservoir 1 du système formé par deux réservoirs en série

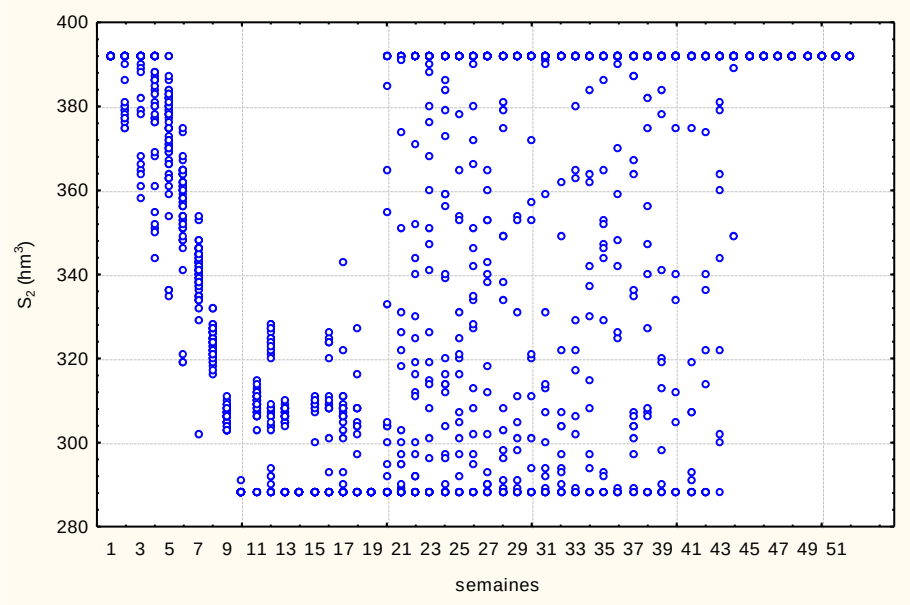

Figure 5.3 : Variation du contenu du réservoir 2 du système formé par deux réservoirs en série

CHAPITRE 6 PROCESSUS DE DÉSAGRÉGATION ET BALANCEMENT DES RÉSERVOIRS

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le but recherché dans cette thèse est de développer une approche pour modéliser le plus fidèlement possible les relations donnant le contenu d'un réservoir en fonction du contenu du réservoir agrégé. Ces relations sont utilisées pour gérer le système hydroélectrique par une approche d'agrégation-désagrégation. Si le processus d'agrégation est rendu possible grâce à l'utilisation des facteurs de conversion (même s'ils sont approximatifs), le processus de désagrégation est difficile et est en fait la principale difficulté des approches de type agrégation-désagrégation. Plusieurs auteurs ont utilisé des résultats déterministes (les solutions du problème d'optimisation (5.1)-(5.6) avec plusieurs scénarios d'apports) pour faire la désagrégation. Par exemple, Saad et al. [21] ont appliqué l'analyse en composantes principales à des solutions déterministes pour pouvoir gérer un système de quatre réservoirs. Selon ces auteurs, cette approche fonctionne seulement lorsqu'il y a une grande interdépendance entre les réservoirs. Saad et al. [22] ont utilisé des solutions déterministes pour construire un réseau de neurones qui permet de désagréger le contenu total de la rivière. Cependant, l'entraînement et la calibration des réseaux de neurones requièrent beaucoup de données.

Nalbantis et al. [40] ont utilisé des fonctions linéaires par parties pour déterminer le contenu d'un réservoir en fonction du contenu total de la vallée. Les coefficients des fonctions linéaires par parties sont déterminés par une approche d'optimisation-simulation. Pour chaque combinaison de coefficients possibles, on calcule la production moyenne puis on choisit celle qui donne le meilleur résultat. Lorsque les fonctions linéaires par parties varient dans le temps, le temps de calcul augmente considérablement de sorte que cette méthode [40] ne peut pas être utilisée pour un problème de grande taille.

Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode de régression multivariée par spline adaptative (Multivariate Adaptive Regression Splines (MARS) que nous avons utilisée pour déterminer les relations entre le contenu d'un réservoir et le contenu de toute la rivière dans le temps.

6.1 Fonctions de balancement

Théoriquement, le soutirage optimal d'un réservoir dans la période t et par la suite le contenu de ce réservoir au début de la période $t+1$ sont fonctions des contenus et des apports à tous les réservoirs du système. Lorsque le système comprend plusieurs réservoirs, comme c'est le cas pour la rivière La-Grande d'Hydro-Québec, cette fonction est difficile à déterminer en pratique. Dans cette thèse nous avons fait l'hypothèse que le contenu optimal d'un réservoir peut être adéquatement représenté par une fonction dite de balancement qui dépend uniquement de deux variables:

- Le contenu en énergie potentielle du réservoir agrégé,
- La période de l'année

Oliveira et Loucks [16] ont défini les fonctions de balancement des réservoirs comme suit: «*individual reservoir storage target (or balancing) functions identify the desired storage volumes in each reservoir, all as functions of total storage volume and time of year*». Selon ces auteurs, les fonctions de balancement sont utilisées dans plusieurs modèles de simulation telle que HEC 3, HEC 5 développés par U.S. Corps of Engineers (Hydrologic Engineering Center (HEC)).

De façon formelle, cette fonction est définie par:

Définition 6.1 : *La fonction de balancement donne le contenu cible du réservoir* i, $s_{i,t+1}^{cible}$, *lorsque le contenu du réservoir agrégé à la fin de période est égal à* X_{t+1}.

Définition 6.2 : *Le contenu cible d'un réservoir est le contenu optimal qu'un réservoir doit d'essayer d'atteindre à la fin de chaque période pour maximiser l'espérance des productions futures du système.*

Le suivi des contenus cibles définis par les fonctions de balancement donne la règle de gestion obtenue dans cette thèse. L'optimalité de cette règle découle du fait que les fonctions de balancement sont obtenues à partir des solutions déterministes du chapitre précédent (problème d'optimisation 5.1 à 5.6) et que le réservoir agrégé est géré de façon optimale par PDS.

Mathématiquement parlant, nous devons déterminer les fonctions suivantes :

$$s_{i,t}^{*} = f_{i,t}(X_t) \quad \forall\, i,t \tag{6.1}$$

La régression linéaire semble être la technique la plus utilisée pour obtenir une forme analytique de ces fonctions. Certains auteurs, comme Lund [46], ont proposé l'utilisation de méthodes de régression linéaire par parties pour représenter la dépendance entre ces variables. Selon Labadie [8], une régression globale qui prend en compte toutes les données peut donner une règle de gestion inappropriée lorsque les corrélations sont faibles. L'étude d'un système comprenant les deux réservoirs de tête de la rivière La-Grande montre que les fonctions de balancement peuvent avoir des formes très différentes. La Figure 6.1 donne une courbe linéaire par parties pour le réservoir 1 tandis que la Figure 6.2 donne une courbe fortement non linéaire pour le réservoir 2. Ceci peut s'expliquer par la différence énorme entre les capacités de stockage des deux réservoirs. La capacité de stockage du réservoir 1 est cent fois plus grande que celle du réservoir 2. L'analyse statistique des résultats du modèle d'optimisation déterministe donnent un coefficient de corrélation de 0.99 entre le réservoir 1 et le réservoir agrégé et de 0,69 entre le réservoir 2 et le réservoir agrégé.

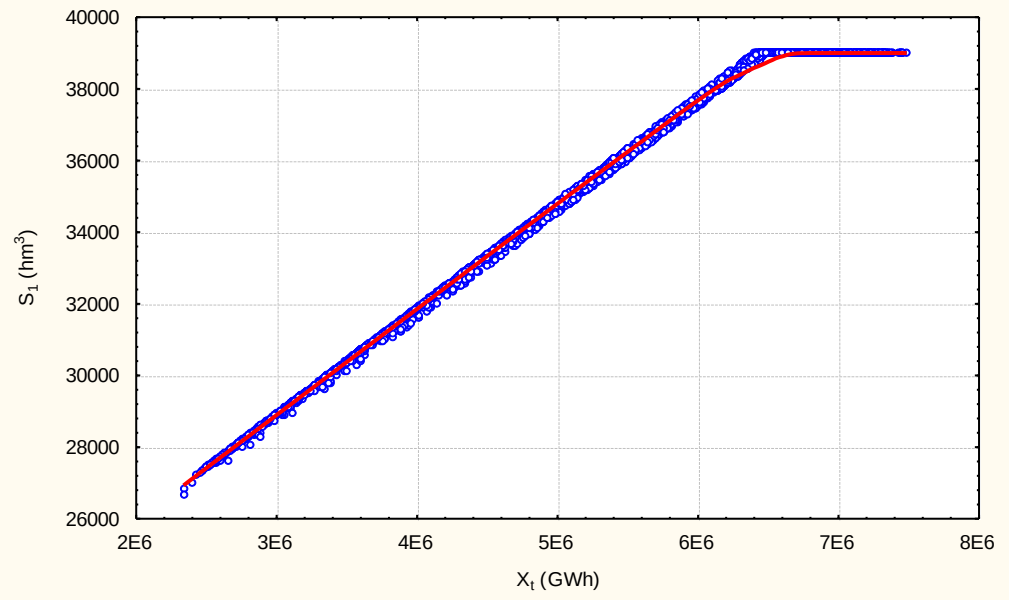

Figure 6.1 : Contenu du réservoir 1 en fonction du contenu du réservoir agrégé pour le système de deux réservoirs en série

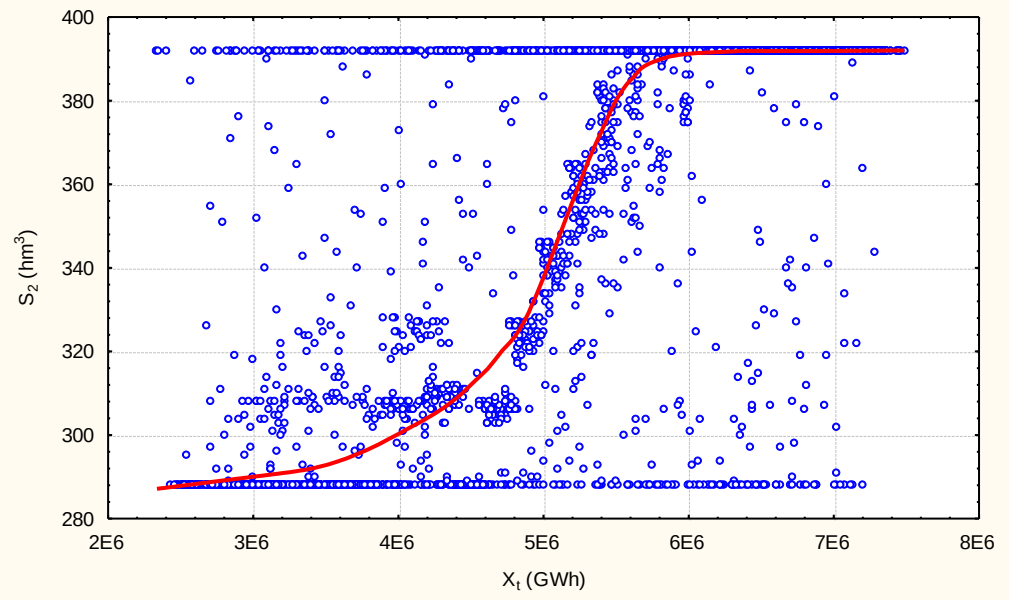

Figure 6.2 : Contenu du réservoir 2 en fonction du contenu du réservoir agrégé pour le système de deux réservoirs en série

D'autre part, la Figure 6.3 donne un nuage de points reliant le contenu du réservoir de tête au contenu du réservoir agrégé de la rivière La-Grande pour la dixième semaine de l'année. Nous constatons que ce nuage de points est très dispersé et ne montre pas, à première vue, une tendance particulière. Les coefficients de détermination R^2 des modèles linéaire et polynomial déterminés avec ces données sont faibles et, plus précisément, de l'ordre de 0,4. Rappelons que le coefficient de détermination R^2 est un indicateur simple et non unique qui permet de juger de la qualité de la régression linéaire, simple ou multiple. Une régression polynomiale peut être considérée comme étant une régression linéaire multiple. La valeur du coefficient R^2 est comprise entre zéro et un et mesure l'adéquation entre le modèle développé et les données observées. Un bon modèle linéaire à généralement une valeur de R^2 proche de un.

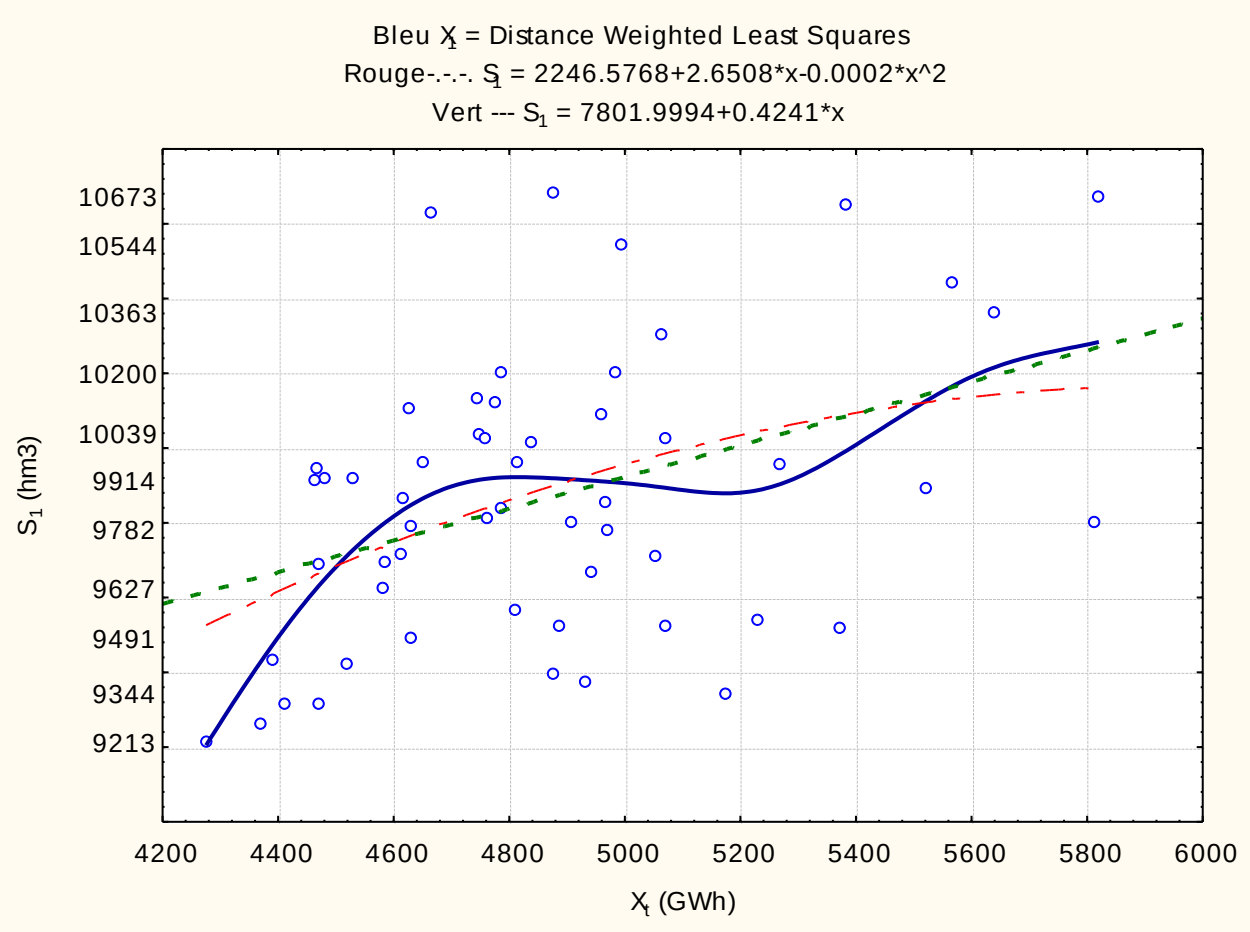

Figure 6.3 : Contenu d'un réservoir 1 en fonction du contenu du réservoir agrégé pour la dixième semaine de l'année.

La courbe contenue de couleur bleu de la Figure 6.3 a été obtenue par une méthode d'ajustement des courbes (curve fitting). Cette méthode permet généralement de déterminer la courbe qui réprésente le mieux les données. Cette courbe est utilisée ici pour montrer qu'il est possible d'ajuster un modèle analytique par parties (linéaire par parties ou polynomiale par parties) qui puisse bien représenter les données. Toutes les approches et méthodes d'inférence statistique cherchent à identifier un pattern ou une tendance dans les données qui puisse être utilisée pour déterminer une règle de gestion. Malheureusement, l'identification des patterns n'est pas toujours facile à obtenir.

Dans ce chapitre, la détermination d'un modèle analytique représentant la relation (6.1) est faite par la méthode de régression multivariée par spline adaptative (MARS). Cette méthode construit de manière automatique des modèles linéaires et polynomiaux par parties [47].

6.2 Coefficient de corrélation et régression linéaire

En utilisant les résultats de la programmation linéaire obtenus par Cplex, nous avons pu déterminer les coefficients de corrélation entre le réservoir agrégé et chacun des réservoirs de la rivière La-Grande. Rappelons que le coefficient de corrélation peut être vu comme un indicateur de relation linéaire entre deux variables aléatoires. Il est égal à 1,0 dans le cas où une relation affine croissante relie la variable dépendante à l'autre variable explicative et à -1,0 dans le cas où la fonction affine est décroissante. Les valeurs entre 1,0 et -1,0 nous donnent le degré de dépendance linéaire entre les deux variables. Plus le coefficient est proche des valeurs -1,0 et 1, 0 plus la corrélation entre les variables est forte. Une corrélation égale à 0 signifie que les variables sont linéairement indépendantes. En pratique, nous utilisons le coefficient de détermination R^2 au lieu de R pour représenter la corrélation entre les variables. Dans le cas des deux variables, X et Y, la valeur de R^2 indique dans quelle mesure la variabilité de Y est attribuable à la variabilité de la variable X.

Le tableau suivant donne les coefficients de corrélation entre le contenu du réservoir agrégé et le contenu de chacun des réservoirs de la rivière La-Grande.

Tableau 6.1 : Coefficients de corrélation entre le réservoir agrégé et chacun les réservoirs de la rivière La-Grande

réservoir	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
réservoir agrégé **: X**	0.97	0.61	0.95	0.97	0.93	0.99	0.69

Nous constatons que les coefficients de corrélations sont relativement élevés. Ceci montre qu'une règle de gestion basée sur des modèles de régression linéaire peut être envisagée pour gérer le système à l'étude [8]. Cependant, l'ajustement de modèles linéaires statistiquement valables n'est pas toujours possible comme le montrent les graphes suivants (de la Figure 6.4 jusqu'à la Figure 6.10). Le logiciel STATISTICA V5.1 a été utilisé pour faire les analyses exploratoires des données, ajuster et valider les modèles de régression linéaires.

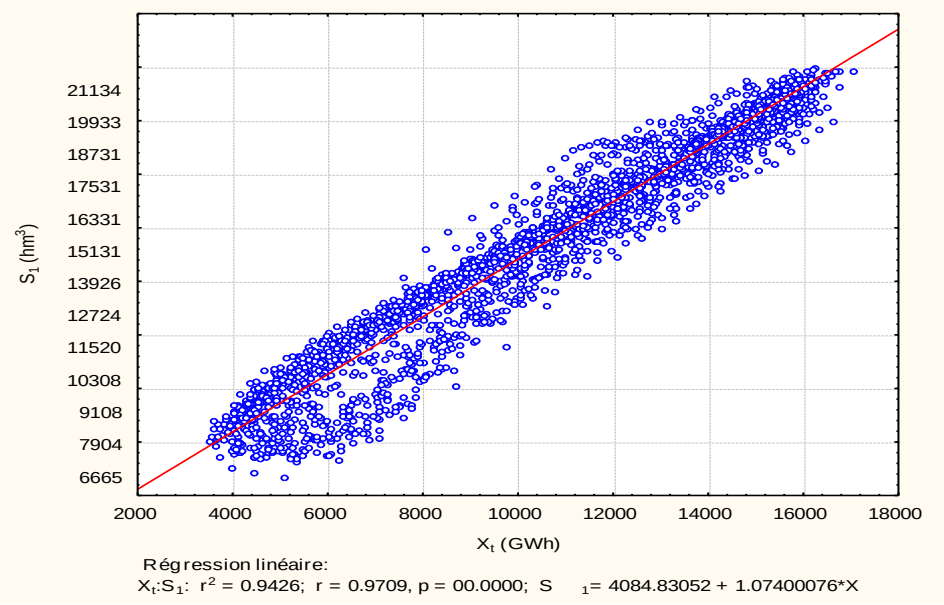

Figure 6.4 : Contenu du réservoir 1 en fonction du contenu du réservoir agrégé

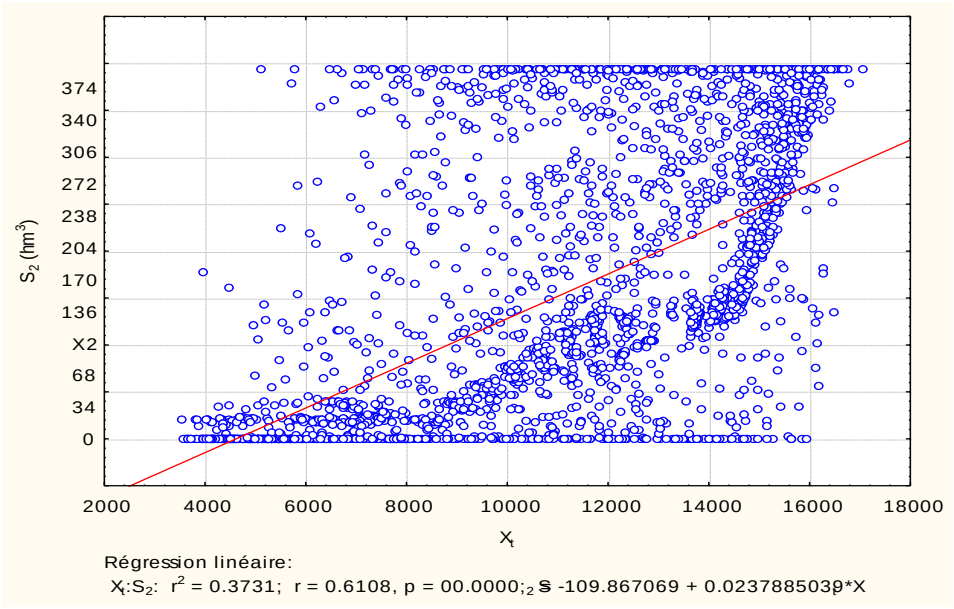

Figure 6.5 : Contenu du réservoir 2 en fonction du contenu du réservoir agrégé

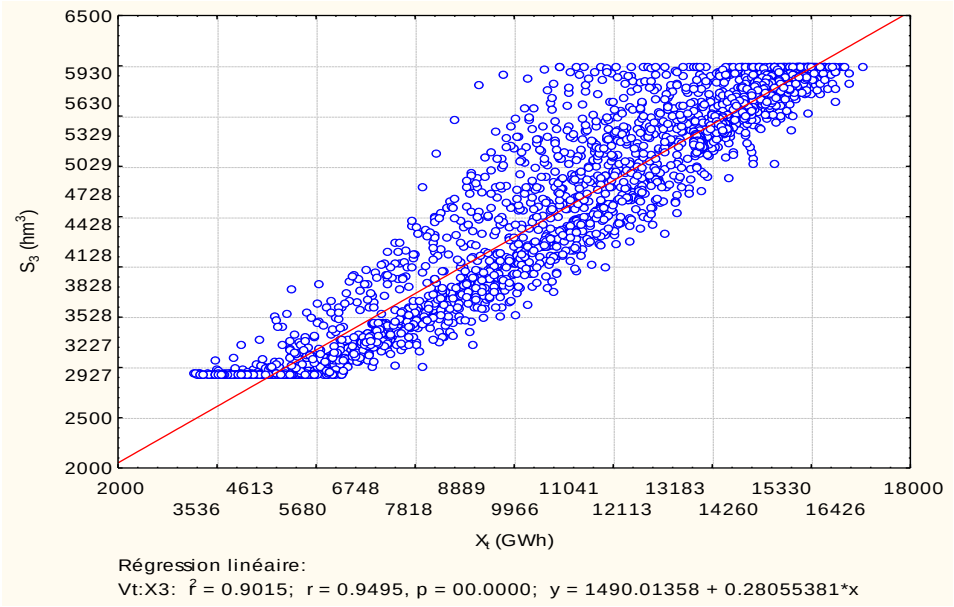

Figure 6.6 : Contenu du réservoir 3 en fonction du contenu du réservoir agrégé

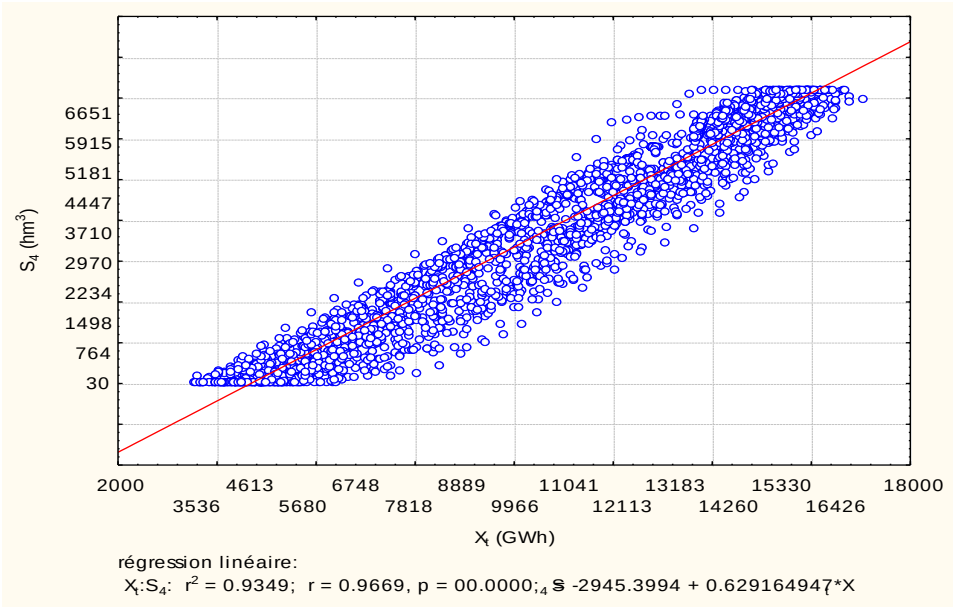

Figure 6.7 : Contenu du réservoir 4 en fonction du contenu du réservoir agrégé

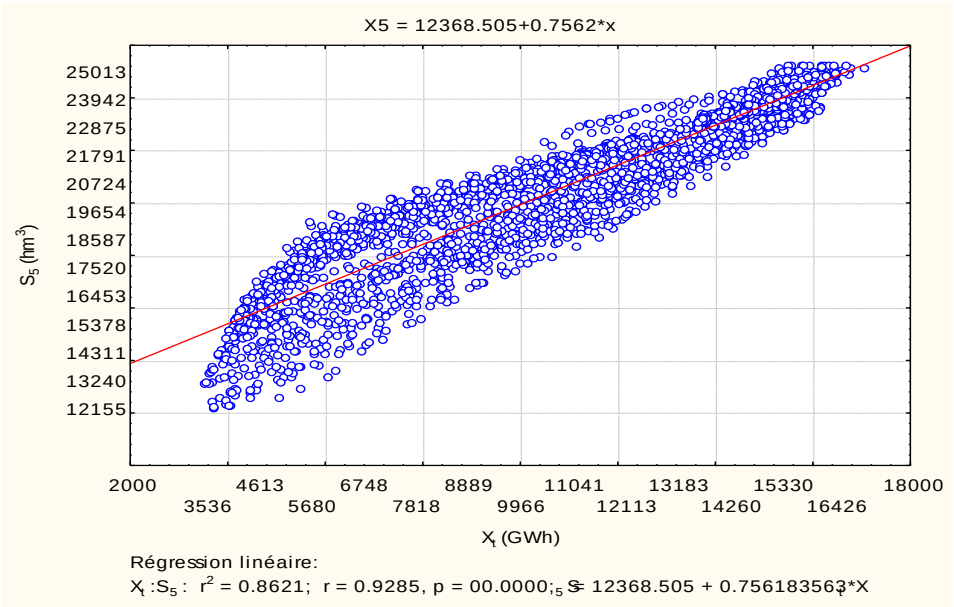

Figure 6.8 : Contenu du réservoir 5 en fonction du contenu du réservoir agrégé

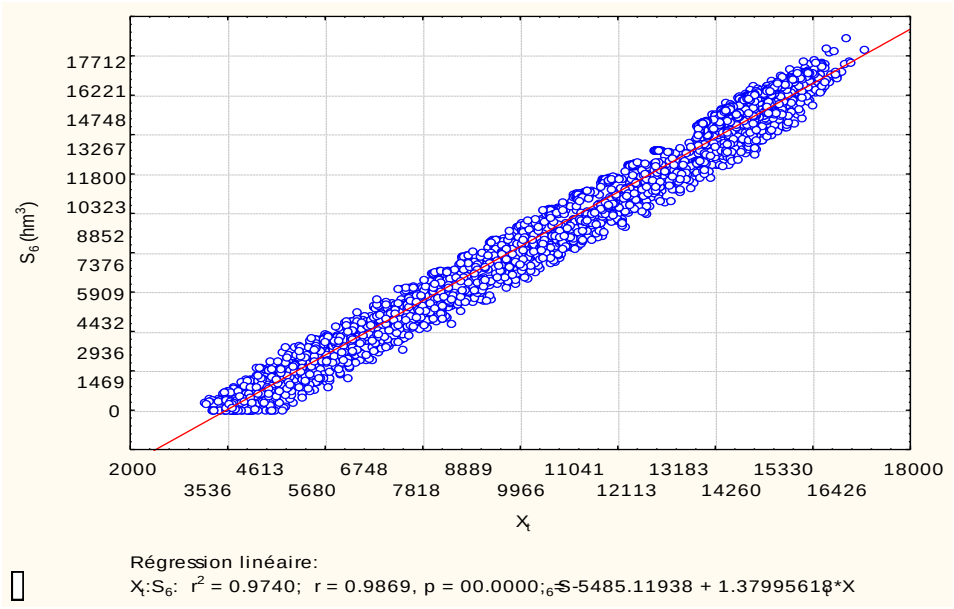

Figure 6.9 : Contenu du réservoir 6 en fonction du contenu du réservoir agrégé

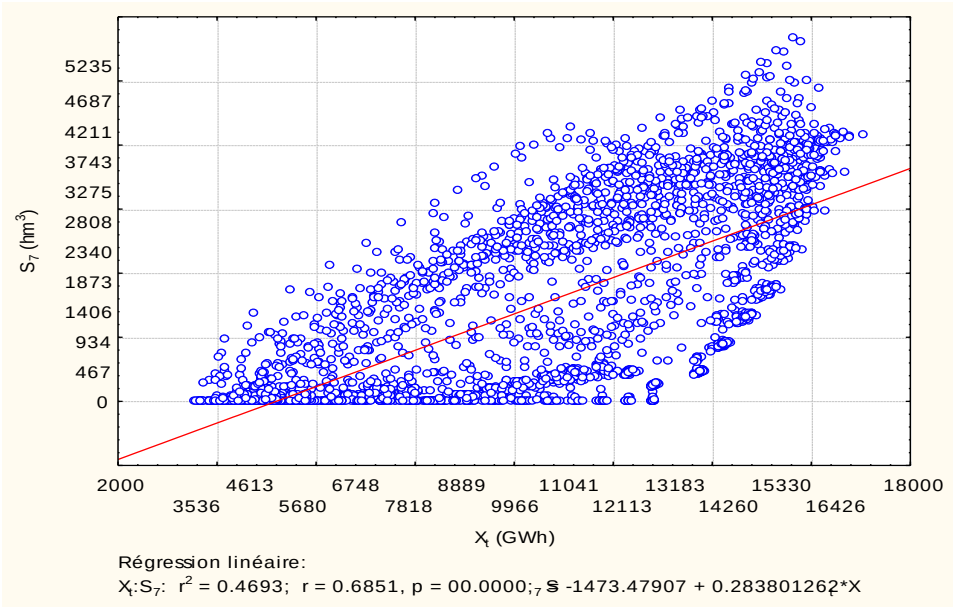

Figure 6.10 : Contenu du réservoir 7 en fonction du contenu du réservoir agrégé

Dans le cas de la régression linéaire, l'équation 6.1 est modélisée par une fonction affine dont les coefficients sont déterminés par la méthode des moindres carrés. Cette méthode cherche à minimiser la somme des carrées des résidus $e_{i,t} = s_{i,t}^{mesurée} - s_{i,t}^{estimée}$. Rappelons que les résidus sont

des estimateurs des erreurs de modélisation qui en fait sont des variables aléatoires non mesurables.

Pour qu'un modèle de régression linéaire soit valide il faut que :

- Le modèle linéaire soit approprié, et plus précisément que le nuage de points des observations montre une tendance linéaire. Le coefficient de détermination R^2 ne doit pas avoir une petite valeur, car une valeur proche de zéro signifie un piètre ajustement du modèle linéaire.
- Les hypothèses sur les erreurs sont satisfaites, c'est-à-dire que les erreurs liées aux observations sont des variables aléatoires indépendantes qui ont une loi de distribution normale.

Une analyse exploratoire des graphiques précédents permet de voir qu'un modèle linéaire n'est pas toujours plausible. L'analyse nous permet de repérer des points atypiques et des allures non linéaires. Les Figure 6.3-Figure 6.11 montrent les nuages de points et les droites de la régression linéaire pour chaque réservoir.

La Figure 6.11 montre comment les coefficients de corrélation reliant le contenu du réservoir agrégé et le contenu de chacun des réservoirs de la rivière La-Grande varient d'une période à l'autre et peuvent prendre des valeurs très petites dans certaines périodes. Précisons que la valeur du coefficient de corrélation peut être interprétée de façon très différente selon le problème que l'on solutionne. Par exemple, une corrélation de 0,9 peut être vue comme étant très faible dans certaines applications alors qu'elle peut être très élevée dans d'autres applications. De plus, un tel coefficient ne peut pas nous informer du type de la relation qui pourrait exister entre les variables étudiées.

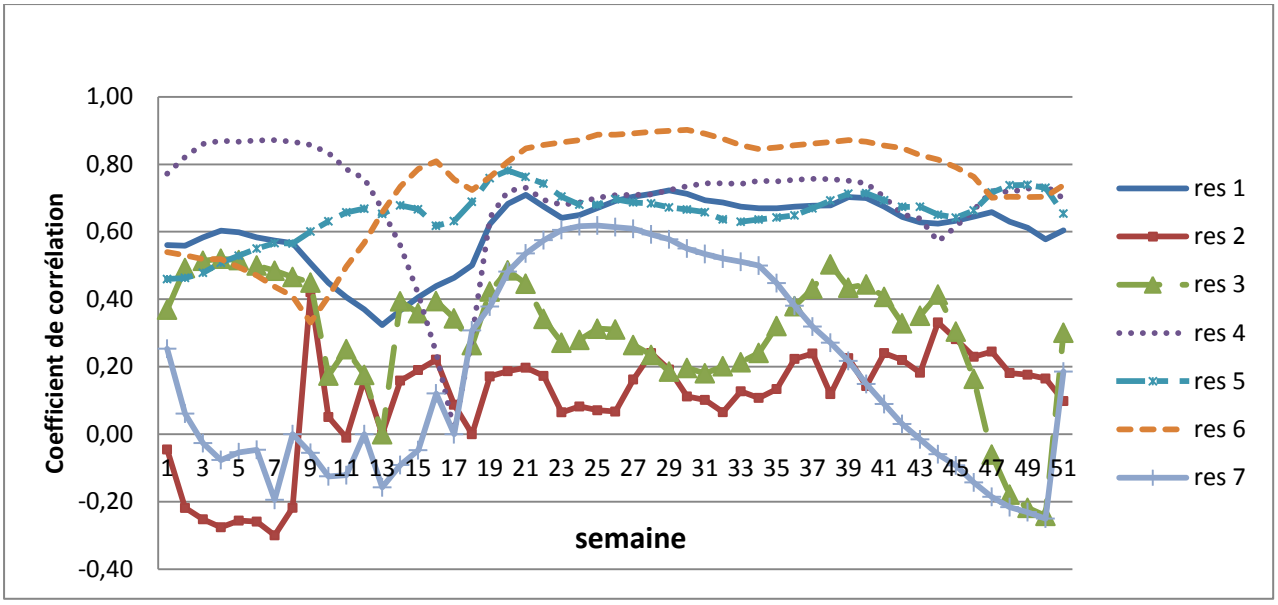

Figure 6.11 : Variation des coefficients de corrélation dans le temps

Dans la Figure 6.10, nous représentons un nuage de points ainsi que la droite de régression linéaire pour le contenu du réservoir 7. Pour ce réservoir, un modèle linéaire n'est pas significatif puisque le graphique montrant les résidus en fonction de la variable indépendante (Figure 6.12) indique qu'il y a une dépendance entre ces variables. La variance des erreurs n'est pas constante. Elle augmente avec la valeur de la variable du contenu du réservoir agrégé (effet d'entonnoir).

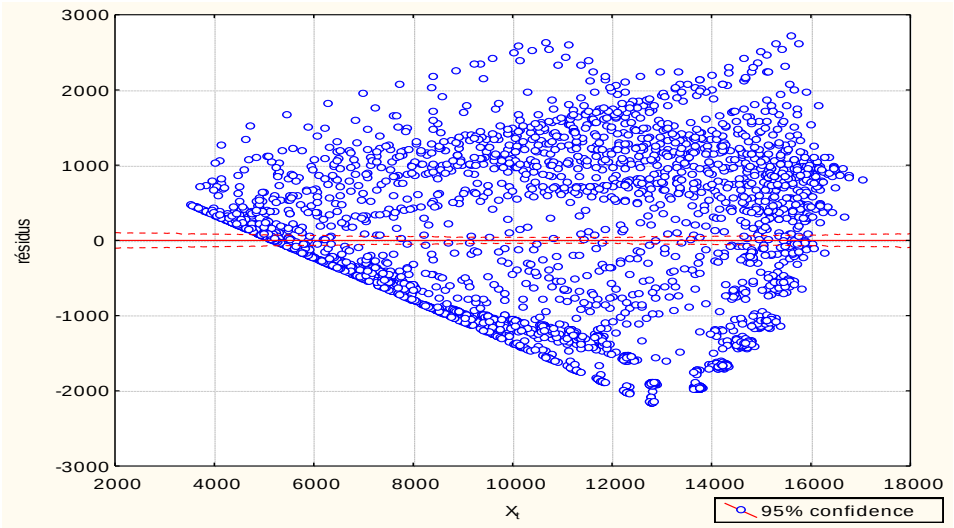

Figure 6.12 : Résidus de la régression linéaire du réservoir 7 en fonction du contenu du réservoir agrégé.

Pour dilater les valeurs faibles et, en même temps, compresser les valeurs élevées du contenu du réservoir agrégé, on transforme cette variable en son logarithme. Malheureusement, cette transformation ne nous a pas permis de trouver un modèle linéaire acceptable. Généralement, lorsqu'un graphique de nuage de points ne donne pas une relation linéaire entre les variables X et Y, on peut toujours essayer de transformer les données pour obtenir une relation linéaire. Nous avons eu recours à plusieurs techniques de transformation des données, mais malheureusement ceci n'a pas donné de résultats satisfaisants. Nous avons donc abandonné cette piste de recherche pour nous concentrer sur les méthodes de régression modernes et en particulier sur celles qui ne nécessitent pas de préciser la forme du modèle. Notre recherche bibliographique nous a conduit à la méthode de régression MARS.

6.3 La méthode de régression MARS

6.3.1 Généralités et définitions

MARS est une méthode de régression non paramétrique qui génère un modèle non linéaire pour représenter la relation entre une variable dépendante, y, et une ou plusieurs variables indépendantes $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Cette méthode a été proposée la première fois par Friedman en 1991 [48]. Le modèle obtenue avec cette méthode est une combinaison linéaire de fonctions préalablement choisies appelées fonctions de base, ce qui suppose que le modèle appartient à l'espace vectoriel engendré par ces fonctions. Par exemple, si la base est formée par les fonctions $\{1, x, x^2, x^3\}$ le modèle va obligatoirement appartenir à l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Dans le cas d'une régression simple, le modèle construit avec cette méthode a la forme suivante :

$$\hat{f}(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{Kc} c_i B_i(x) \qquad (6.2)$$

Où $\{c_i \quad i = 0,1,...,Kc\}$ sont des coefficients réels et $\{B_i(x) \quad i = 1,...,Kc\}$ sont les fonctions de base. Kc désigne le nombre de fonctions de la base. Lorsque les fonctions de la base sont

connues, les coefficients c_i sont obtenus avec un modèle d'optimisation qui minimise l'erreur quadratique moyenne :

$$\min_{\{c_i\}} \sum_{i=1}^{Np} \left(y_i - \hat{f}(x_i) \right)^2 \tag{6.3}$$

où Np désigne le nombre de points de mesure $\{(x_1, y_1) \quad \ldots \quad (x_{Np}, y_{Np})\}$.

Le choix des fonctions qui forment la base joue un rôle important dans la forme du modèle à construire. Les fonctions de base peuvent prendre les formes suivantes:

- Une constante.
- Spline linéaire (fonction charnière)
- Spline cubique et spline cubique naturelle.
- Un produit de ces fonctions.

Les fonctions splines linéaires utilisées par MARS sont définies comme suit :

$$(x-t)_+ = \begin{cases} x-t & si\ x > t \\ 0 & ailleurs \end{cases} \tag{6.3}$$

$$(t-x)_+ = \begin{cases} t-x & si\ x < t \\ 0 & ailleurs \end{cases} \tag{6.4}$$

Le point *t* est appelé un nœud. Le couple formé par ces deux fonctions est appelé *paire de fonctions réfléchies* ou *reflected pair* en anglais.

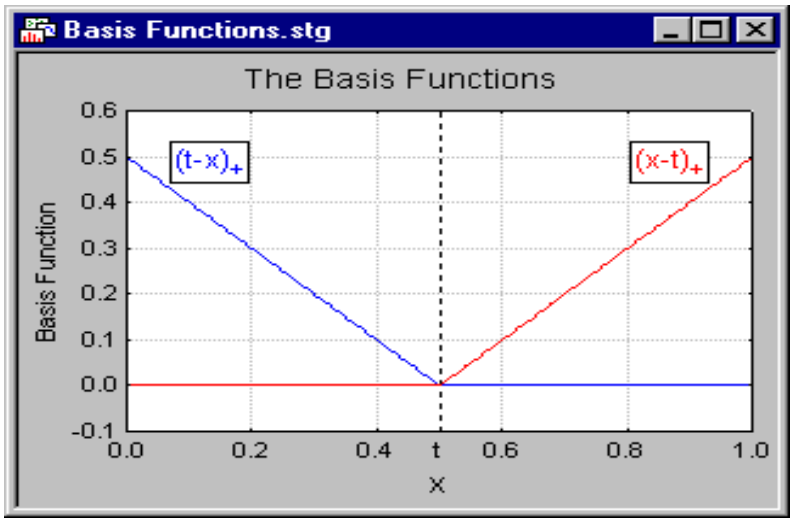

Figure 6.13 : Fonction de base de la méthode MARS [49]

Définition 6.3 *Étant donnés un intervalle* $[a \quad b]$ *subdivisé en* K *intervalles de la forme* $[t_i \quad t_{i+1}]$ $i = 1,\ldots,K-1$ *avec* $t_1 = a$ *et* $t_K = b$. *Les points* $t_i \quad i = 1,\ldots,K$ *sont appelés des nœuds (knots). La courbe* $S: [a \quad b] \to R$ *est appelée spline de degré* n *si sa restriction sur chaque sous-intervalle* $[t_i \quad t_{i+1}]$ *est un polynôme de degré* n. *C'est-à-dire* $S_{\|[t_i \quad t_{i+1}]} \in P_n \quad i = 1,\ldots,K-1$ *où* P_n *désigne l'ensemble des polynômes de degré* n.

La base de splines cubiques suivante permet d'obtenir une approximation lisse sur tout l'intervalle.

$$B = \{B_1(x) = 1,\ B_2(x) = (x - t_1)_+,\ B_3(x) = (x - t_1)_-,\ B_4(x) = (x - t_1)_+^2,\ B_5(x) = (x - t_1)_-^2,$$
$$B_6(x) = (x - t_1)_+^3,\ B_7(x) = (x - t_1)_-^3, \ldots\} \quad t_i \in \{x_1, x_2, \ldots\ldots x_{Np}\} \tag{6.5}$$

Enfin, les splines cubiques naturelles, qui sont une variante des splines cubiques pour lesquelles on a ajouté une contrainte qui exige que le modèle soit affine aux régions extrêmes, ce qui permet de réduire l'instabilité numérique au bord de l'intervalle d'étude (effets de bords) [50].

6.3.2 Algorithme MARS

Étant donné Np observations $\left\{(x_1^m, x_2^m, \ldots, x_N^m, y^m) \quad m = 1, \ldots, Np\right\}$ qui représentent des réalisations des variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_N, Y)$, nous cherchons à modéliser la relation suivante $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ par la méthode de régression MARS. D'un point de vue algorithmique, la construction d'un modèle avec cette méthode se fait en deux phases. En premier lieu, la phase directe permet de sélectionner itérativement les fonctions de la base et de construire pas à pas le modèle. Ensuite, la phase inverse permet de simplifier le modèle en éliminant itérativement ses composantes pour ne garder que les éléments significatifs (selon un critère).

La Figure 6.14 montre les trois premières itérations de la phase directe. La colonne de gauche contient les fonctions de base qui forment actuellement le modèle alors que la colonne de droite contient toutes les fonctions de base à partir desquelles sont choisies les fonctions de la colonne de gauche.

La base est formée par les paires de fonctions réfléchies de la Figure 6.13 dont les nœuds sont définis aux points d'observation $\left\{x_i^m \quad \forall\, m = 1, ..., Np\right\}$ de chaque variable indépendante X_i. Au début de l'algorithme, le modèle est formé uniquement de la fonction constante. Ensuite, à chaque itération, le modèle évolue en intégrant une nouvelle fonction. Cette dernière est obtenue par la résolution d'un problème d'optimisation combinatoire qui consiste à choisir, parmi tous les produits possibles, des paires de fonctions réfléchies dans la base par une fonction du modèle, la fonction qui réduit le plus l'erreur d'estimation. Notons que cet algorithme traite les fonctions de la base par paire de fonctions réfléchies. Dans la Figure 6.14, les fonctions qui entrent dans le modèle à chaque itération sont dessinées en rouge.

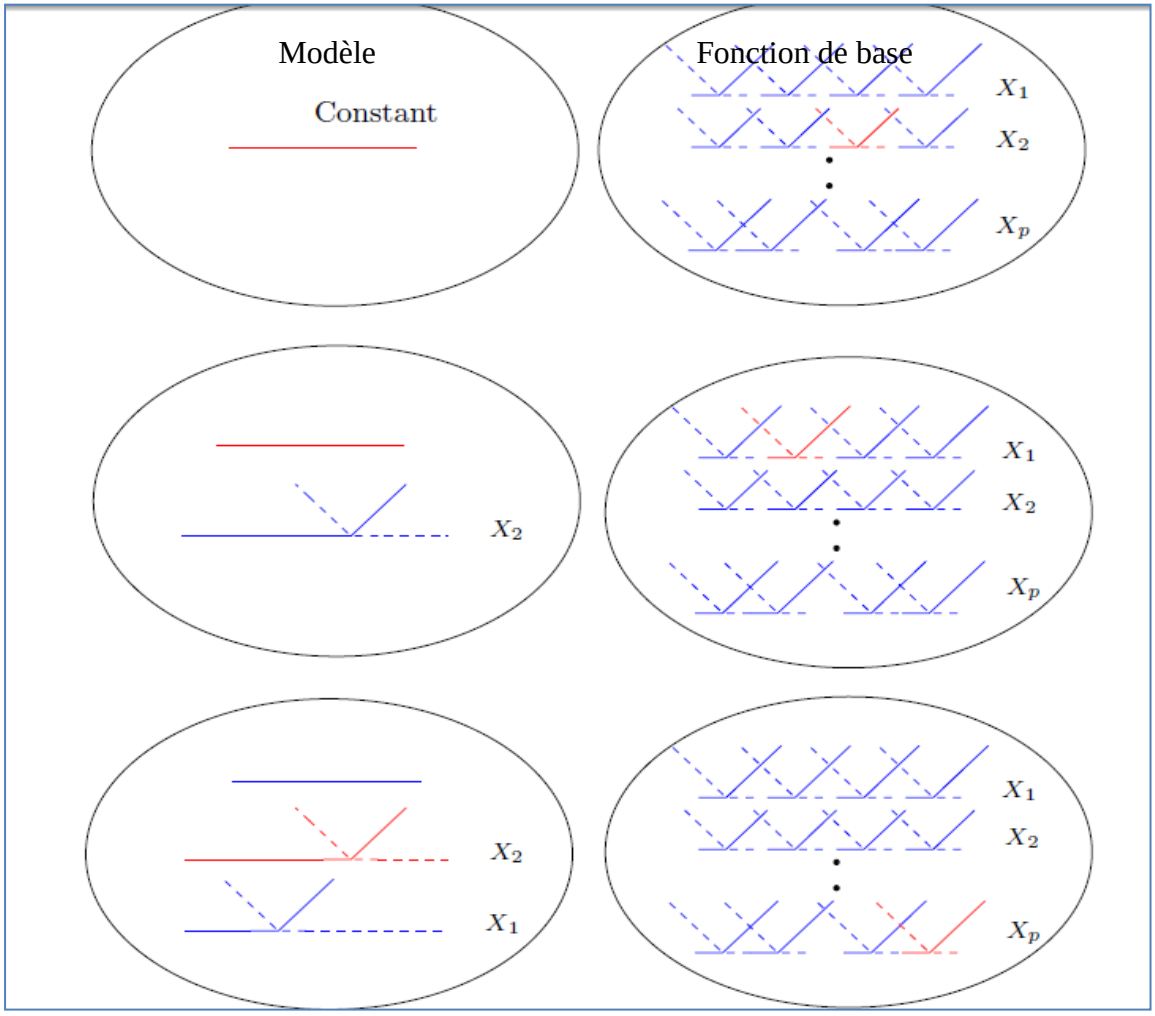

Figure 6.14 : Illustration de la phase directe de l'algorithme MARS [51]

La Figure 6.15, donne les principales étapes de l'algorithme MARS tel qu'il est décrit dans [51]

ALGORITHME DE LA RÉGRESSION MARS

Phase direct:

Étape 1 : Inclure dans le modèle M la fonction constante: $B_1(x) = 1$. Toutes les autres fonctions de la base sont candidates pour la composition du modèle.

Étape 2 : Considérer tous les produits possibles de la fonction dernièrement introduite dans la composition du modèle par toutes les paires de fonctions réfléchies de la base. Inclure ces fonctions dans la base et ajouter au modèle M toutes les fonctions de la forme

$$B_{l,j} = \hat{c}_{M+1} B_l(x) * (x_j - t)_+ + \hat{c}_{M+2} B_l(x) * (t - x_j)_+, B_l \in M \tag{6.6}$$

qui ont permis de réduire le plus l'erreur d'estimation courante.

Les coefficients $\hat{c}_{M+1}$ *et* $\hat{c}_{M+2}$ sont estimés par moindre carré en tenant compte de tous les éléments du modèle.

Étape 3 : Si le nombre maximale de fonctions de base est atteint alors arrêter le processus. Sinon retourner à l'étape 2.

Le nombre maximal de fonctions dans la base est un paramètre à définir au début de l'algorithme.

À la fin de cette phase, nous avons obtenu un modèle M qui contient plusieurs fonctions de base.

Phase inverse ***:***

Étape 5 : Réduire la taille du modèle en éliminant itérativement les composantes qui n'augmentent pas de façons notable l'erreur d'estimation. Obtenir un modèle réduit et efficace de taille λ (nombre de termes dans le modèle).

Étape 6 : Pour estimer la meilleure valeur de λ : Il faut minimiser le «*generalized cross-validation criterion*» définit comme suit :

$$GCV(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{Np} (y_i - \hat{f}_\lambda(x_i))^2}{(1 - M(\lambda)/Kc)^2} \tag{6.7}$$

Où $M(\lambda)$ est le nombre de paramètres effectifs dans le modèle qui correspond à la somme du nombre de composantes du modèle avec le nombre de paramètres utilisés pour choisir la position optimale des nœuds.

Si le modèle contient *r* fonctions de base et K nœuds alors $M(\lambda) = r+3K$.

Étape 7 : fin

Figure 6.15 : Algorithme de la méthode MARS

Dans cette thèse nous n'avons pas développé notre propre code pour cet algorithme. Cependant, nous avons utilisé le toolbox ARESLab dans MATLAB développé par Gints Jekabsons, chercheur à l'université technique de Riga (Lettonie), et disponible au lien internet suivant : *http://www.cs.rtu.lv/jekabsons/regression.html.*

6.3.3 Validation croisée

La validation croisée est une méthode de mesure de la fiabilité des modèles de régression basée sur l'échantillonnage des données. Elle consiste à partitionner l'échantillon des données en deux sous-ensembles complémentaires : un sous-ensemble pour déterminer le modèle de régression appelé l'ensemble d'apprentissage, et un sous ensemble pour tester la validité du modèle appelé l'ensemble de validation. En fait, nous avons divisé les résultats déterministes en deux échantillons : un échantillon d'apprentissage contenant 80% de l'échantillon initial et un échantillon de test contenant le 20% qui reste. Ensuite, nous avons ajusté le modèle de régression MARS avec l'échantillon d'apprentissage puis validé le modèle obtenu avec l'échantillon de test. L'erreur de modélisation est estimée en calculant l'erreur quadratique moyenne. Plus l'erreur quadratique moyenne est faible, plus le modèle ajusté est bon. Pour réduire la variabilité, plusieurs séries de validation croisée peuvent être effectuées en utilisant des partitions différentes. Les résultats de validation sont calculés en moyenne sur les résultats de toutes les séries.

6.4 Application de la régression MARS

Pour chaque réservoir *i*, et pour chaque semaine *t*, nous avons utilisé le toolbox ARESLab pour ajuster un modèle polynomial par parties de façon à déterminer les fonctions de balancement.

Pour un système de 7 réservoirs et un horizon d'étude de 52 semaines, nous avons ajusté et testé 364 modèles. La Figure 6.16 ci-dessous montre un exemple d'un modèle obtenu par l'utilisation du toolbox ARESLab pour modéliser la fonction $s_{4,24} = f_{4,24}(X_{24})$ (réservoir 4, semaine 24) du système formé par 7 réservoirs de la rivière La-Grande (voir section 1.5 du premier chapitre).

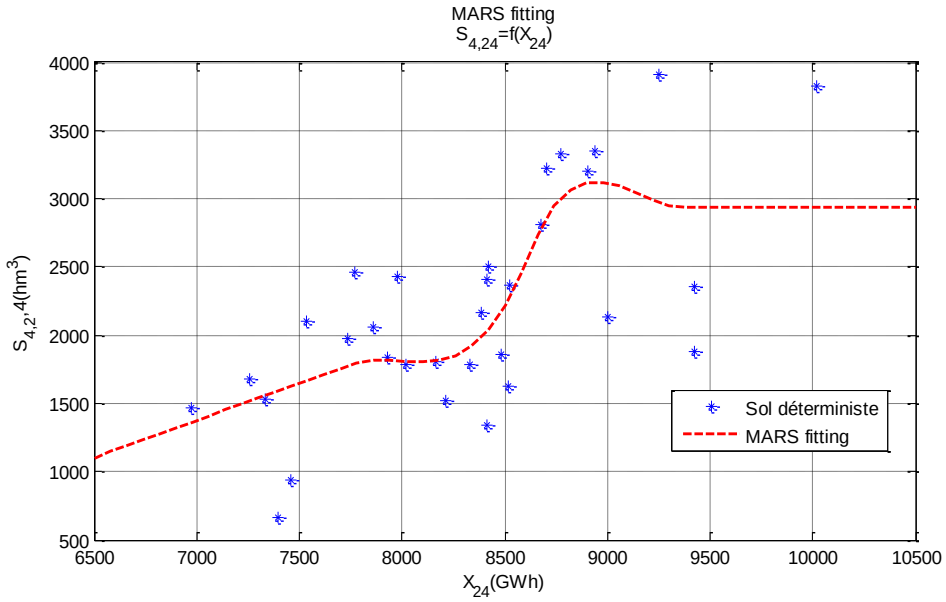

Figure 6.16 : Exemple de fonction de balancement par ARESLab

Le modèle $s_{4,24} = f_{4,24}(X_{24})$ à la forme suivante :

$$M: s_{4,24} = 2939.81 - 3.89 * BF1 + 3.35 * BF2$$

où

$$BF1 = \begin{cases} -(X_{24} - (8706)) & si \quad (X_{24} \leq 8611.5) \\ p_{1,1} * (X_{24} - (9361))^2 + r_{1,1} * (X_{24} - (9361))^3 & si \quad (8611.5 < X_{24} < 9361) \\ 0 & si \quad (X_{24} \geq 9361) \end{cases}$$

et

$$BF2 = \begin{cases} -\left(X_{24} - (8517)\right) & si \quad \left(X_{24} \le 7746.5\right) \\ p_{2,1} * \left(X_{24} - (8611.5)\right)^2 + r_{2,1} * \left(X_{24} - (8611.5)\right)^3 & si \quad \left(7746.5 < X_{24} < 8611.5\right) \\ 0 & si \quad \left(X_{24} \ge (8611.5)\right) \end{cases}$$

Ce modèle se compose de deux fonctions de bases (BF1 et BF 2) et trois nœuds (X_{24}=*7746.5,* X_{24}=*8611.5 et* X_{24}=*9361*).

En résumé, la méthode de régression MARS présente les avantages suivants :

- elle cherche des modèles dans un espace de fonctions plus large que celui des méthodes de régression paramétriques,
- elle utilise un algorithme simple dont le code testé est disponible,
- elle détermine automatiquement un modèle polynomial par parties. Selon la littérature, ce modèle donne un meilleur résultat par rapport aux méthodes de régression classique (régression linéaire, régression polynomiale, etc.).

6.5 Limitations et corrections des fonctions de balancement

Dans cette section, nous allons décrire les problèmes reliés à l'utilisation des fonctions de balancement pour la gestion des réservoirs. Ces fonctions déterminent comment répartir de la meilleure façon possible le volume total d'énergie potentielle entre les réservoirs du système. Si l'on désigne par X_t le volume total d'énergie potentielle stockée dans les réservoirs au début de la semaine t, le problème consiste alors à déterminer les meilleures valeurs de $s_{i,t}$, $i = 1, 2, ..., N$, qui satisfait la contrainte suivante :

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=i}^{N} Ch_{j,t} \right) \cdot s_{i,t} = X_t \qquad (6.8)$$

Rappelons que $Ch_{i,t}$ désigne le facteur de conversion moyen de l'eau stockée dans le réservoir i dans la semaine t. Désignons par $s_{i,t}^*$ les valeurs obtenues à partir des fonctions de balancement. En pratique, à cause des bornes sur les variables et des contraintes dynamiques des

équations (2.2) à (2.5), il ne sera pas toujours possible de respecter l'équation (6.8) compte tenu des valeurs $s_{i,t}^{*}$. Pour respecter cette équation, nous avons utilisé la procédure de correction proposée par Nalbantis et al.[40]. Cette procédure corrige les valeurs de $s_{i,t}^{*}$ en deux phases : la première phase consiste à modifier les valeurs prévues par les fonctions de balancement afin de respecter les contraintes de bornes. La deuxième phase consiste à s'assurer que l'énergie potentielle dans tous les réservoirs est égale à celle du réservoir unique.

Phase 1 :

$$s_{i,t}^{**} = \begin{cases} s_{i,t}^{\min} & si \quad s_{i,t}^{*} \le s_{i,t}^{\min} \\ s_{i,t}^{*} & si \quad s_{i,t}^{\min} \le s_{i,t}^{*} \le s_{i,t}^{\max} \\ s_{i,t}^{max} & si \quad s_{i,t}^{*} \ge s_{i,t}^{\max} \end{cases} \tag{6.9}$$

Où $s_{i,t}^{*} = f_{i,t}^{MARS}(X_t)$ désigne la valeur prédite par le modèle obtenu par régression MARS.

Phase 2 :

$$s_{i,t}^{cible} = s_{i,t}^{**} + \frac{(s_{i,t}^{**} - s_{i,t}^{\min})(1 - \frac{s_{i,t}^{\max} - s_{i,t}^{**}}{s_{i,t}^{\max} - s_{i,t}^{\min}})}{\sum_{j=1}^{N}(s_{j,t}^{**} - s_{j,t}^{\min})(1 - \frac{s_{j,t}^{\max} - s_{j,t}^{**}}{s_{j,t}^{\max} - s_{j,t}^{\min}})}(X_t - \sum_{i=1}^{N}(\sum_{j=i}^{N} Ch_{j,t})s_{i,t}^{**}) \tag{6.10}$$

L'équation (6.10) fait la répartition de la quantité d'énergie potentielle $(X_t - \sum_{i=1}^{N}(\sum_{j=i}^{N} Ch_{j,t})s_{i,t}^{**})$ entre les réservoirs proportionnellement aux coefficients $(s_{i,t}^{**} - s_{i,t}^{\min})(1 - \frac{s_{i,t}^{\max} - s_{i,t}^{**}}{s_{i,t}^{\max} - s_{i,t}^{\min}})$.

Cette équation garantit que nous obtenons $s_{i,t}^{cible} = s_{i,t}^{\min}$ lorsque $s_{i,t}^{**} = s_{i,t}^{\min}$ et obtenons $s_{i,t}^{cible} = s_{i,t}^{\max}$ lorsque $s_{i,t}^{**} = s_{i,t}^{\max}$. Le choix de cette procédure d'ajustement se justifie par le fait

qu'elle est simple à implanter et qu'elle respecte les bornes sur les variables et sur le contenu du réservoir agrégé. Elle procède de la même façon que la méthode de régression MARS, puisqu'elle ajoute un nœud et deux fonctions de base à chaque modèle $f_{i,t}^{mars}$. Le nouveau nœud introduit par cette procédure est $(X = \sum_{i=1}^{N}(\sum_{j=i}^{N} Ch_{j,t})s_{i,t}^{**})$ et la paire de fonctions de base introduit dans le modèle est $(X_t - \sum_{i=1}^{N}(\sum_{j=i}^{N} Ch_{j,t})s_{i,t}^{**})_+$ si $X_t \geq \sum_{i=1}^{N}(\sum_{j=i}^{N} Ch_{j,t})s_{i,t}^{**}$ et $(X_t - \sum_{i=1}^{N}(\sum_{j=i}^{N} Ch_{j,t})s_{i,t}^{**})_-$ si $X_t \leq \sum_{i=1}^{N}(\sum_{j=i}^{N} Ch_{j,t})s_{i,t}^{**}$.

CHAPITRE 7 SIMULATION DE LA POLITIQUE DE GESTION

Ce chapitre présente l'algorithme que nous avons utilisé pour simuler la gestion des centrales hydroélectriques par un balancement des réservoirs. Les résultats obtenus avec cet algorithme sont comparés à ceux obtenus avec la PDS pour un système de deux et trois réservoirs en série. Dans ce chapitre, nous présentons aussi le modèle statistique utilisé pour générer des apports hebdomadaires à chaque réservoir.

Ce chapitre comprend quatre sections. La première présente notre algorithme. Nous expliquons comment nous avons intégré les relations de répartition obtenues au sixième chapitre avec la règle de gestion stochastique du réservoir unique obtenue au quatrième chapitre . La deuxième section est consacrée à la présentation du générateur d'apports utilisé dans la simulation. La troisième section présente une évaluation numérique de notre algorithme pour des systèmes de deux et trois réservoirs en série. Les résultats sont comparés à ceux obtenus avec la programmation dynamique stochastique. La quatrième section présente les résultats des simulations effectuées pour un système de sept réservoirs en série.

7.1 Méthodologie et algorithme de simulation

La Figure 7.1 qui suit présente notre approche de même que les principales étapes de notre algorithme.

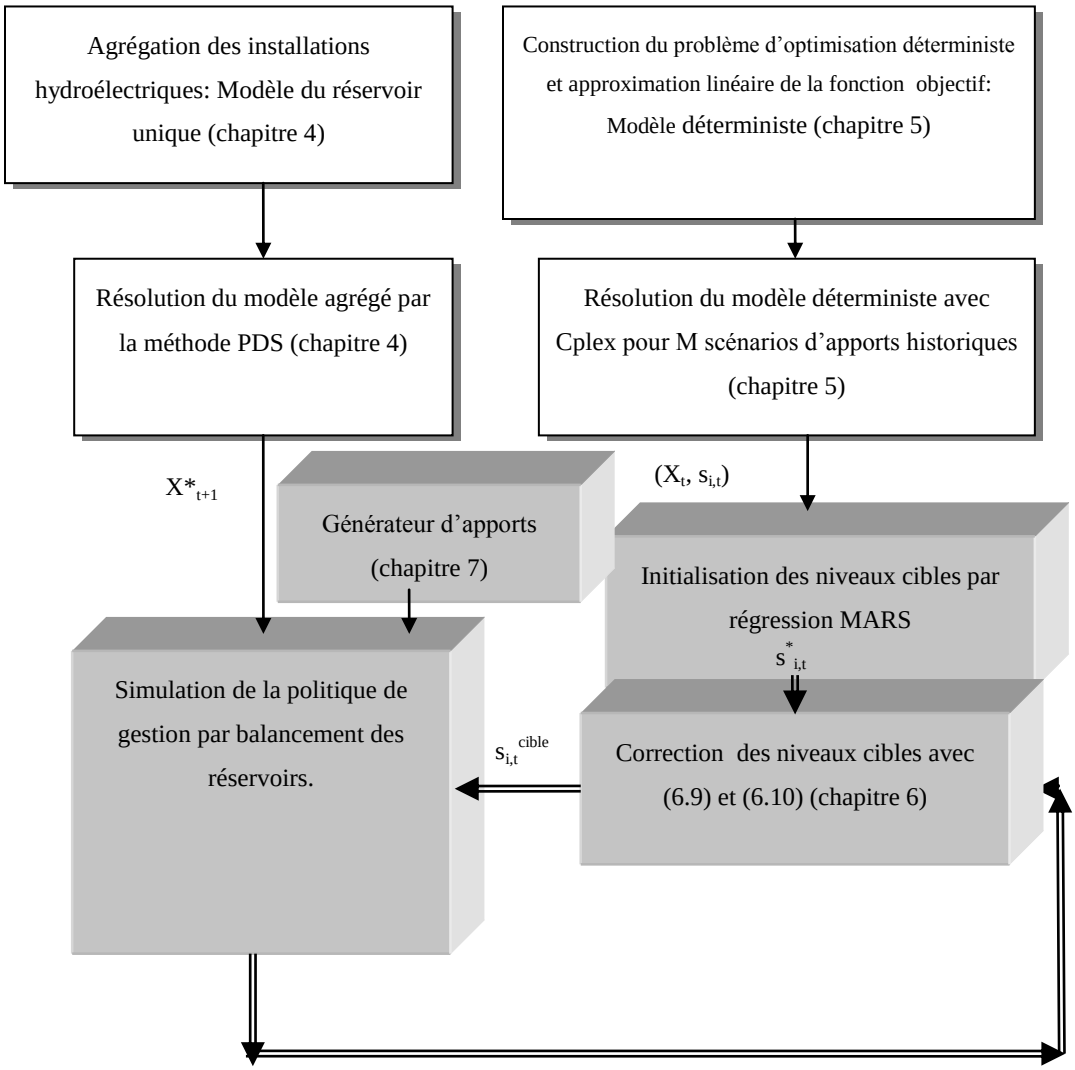

Figure 7.1 : Méthodologie

ALGORITHME DE SIMULATION

Étape 1 : Fixer t = 1;

Étape 2 : Calculer le contenu énergétique du réservoir agrégé X_t et générer Y_t avec (7.1);

Étape 3 : Déterminer G_t^*, la production optimale du réservoir agrégé, à partir de la politique de gestion du réservoir agrégé obtenue avec la PDS ;

Étape 4 : Fixer $X_{t+1} = X_t + Y_t - G_t^*$. Cette valeur suppose que le déversement est nul.

Étape 5 : Répartir X_{t+1} entre les réservoirs selon (6.10) pour obtenir

$s_{i,t+1}^{cible} \quad \forall\, i = 1, \ldots, N$

Étape 6 : Calculer $r_{i,t}^* = Max\,(Min\,(s_{i,t+1}^{cible} - s_{i,t} - q_{i,t} - v_{i-1,t} + r_{i-1,t}^*, r_{i,t}^{\max})\,, r_{i,t}^{\min})$ et

$v_{i,t} = \max\left(0, ((s_{i,t} + q_{i,t} + r_{i-1,t}^* + v_{i-1,t}) - s_{i,t+1}^{cible}) - r_{i,t}^{\max}\right)$ pour $i = 1, \ldots, N$.

$r_{0,t} = v_{0,t} = 0$. $q_{i,t} = Y_t * cb[i]$.

Étape 7 : Corriger $s_{j,t+1}^{cible}$ et retourner à **l'étape 5.** Si le déversement est nul aller à **l'étape 9.** Sinon aller à **l'étape 8;**

Étape 8 : S'il est impossible de répartir X_{t+1} entre les réservoirs sans déversement; corriger $X_{t+1} = X_{t+1} - \sum_j v_{i,t}$ et retourner à **l'Étape 5** ;

Étape 9 : Déterminer $s_{i,t+1} = s_{i,t} + q_{i,t} + r_{i-1,t} + v_{i-1,t} - r_{i,t} - v_{i,t} \quad \forall\, i = 1, \ldots, N$ **;**

Étape 10 : Si $t = T$ aller à **l'étape 11** ; Sinon $t = t + 1$ et aller à **l'étape 2**

Étape 11 : Fin.

Figure 7.2 : Algorithme de simulation de la politique de gestion

Les étapes 6 et 7 sont introduites dans l'algorithme pour s'assurer que $s_{i,t+1}^{cible}$ conduit à des soutirages réalisables, c'est-à-dire $r_{i,t}^{\min} \le r_{i,t} \le r_{i,t}^{\max}$. Si pour le réservoir j le soutirage n'est pas réalisable, on fixe le soutirage égal à la valeur de la borne non respectée (activer la borne) et on corrige la valeur de $s_{j,t+1}^{cible}$ en tenant compte de cet événement : $s_{j,t+1}^{corrigé} = s_{j,t} + q_{i,t} - r_{j,t}^{*} + r_{j-1,t}^{*}$. Ensuite, on répartit $(X_{t+1} - s_{j,t+1}^{corrigé})$ entre les autres réservoirs avec (6.10). L'étape 8 permet de corriger la valeur de X_{t+1} pour ne pas avoir de déversement puisque la valeur de X_{t+1} obtenue avec la politique de gestion optimale du réservoir agrégé suppose un déversement nul.

À cette étape, la règle de gestion décrite ci-haut permet de déterminer les soutirages optimaux qui devraient être effectués de chaque réservoir. Cette règle cherche à suivre les niveaux cibles qui sont indexés pour la période et le contenu du réservoir agrégé.

7.2 Générateur de scénarios d'apports naturels.

La simulation de la règle de gestion définie ci-dessus a été faite pour des systèmes fictifs de deux, trois et sept réservoirs en série. Ces systèmes ont été construits à partir des données de la rivière La-Grande au Québec. Pour chaque système de réservoirs, nous avons généré un grand nombre de scénarios d'apports avec le générateur conçu pour la rivière. L'apport au site i dans la semaine t, $q_{i,t}$, est obtenu en multipliant l'apport total à la rivière pour la semaine t par un coefficient de bassin. Ce coefficient détermine le pourcentage des apports totaux au site i de la rivière dans la semaine t. Avec cette méthode, les apports aux sept réservoirs dans chaque semaine sont parfaitement corrélés.

Dans cette thèse, nous avons 55 années d'apports historiques à la rivière La-Grande, ce qui est suffisant pour construire un modèle statistique des apports. Plusieurs modèles peuvent être utilisés pour générer des scénarios mais, dans cette thèse, nous avons adopté uniquement un modèle autorégressif d'ordre un [6]. L'apport en énergie à la rivière est modélisé par :

$$Y_t = a_{0,t} + a_{1,t} Y_{t-1} + a_{2,t} \xi_t \qquad (7.1)$$

où ξ_t est une variable aléatoire de distribution normale standard (DNS). Les coefficients $a_{0,t}$, $a_{1,t}$ et $a_{2,t}$ sont obtenus par la résolution d'un problème des moindres carrés à partir des 55

années d'apports de l'historique. Le choix du modèle autorégressif d'ordre un est justifié par sa capacité de reproduire une corrélation temporelle d'ordre un, ce qui est suffisant lorsque le pas de temps est la semaine.

7.2.1 Algorithme de génération de scénario d'apports naturels

L'algorithme suivant donne les différentes étapes suivies pour construire le générateur de scénarios d'apports naturels.

ALGORITHME DE GÉNÉRATION DE SCÉNARIOS D'APPORTS NATURELS

Étape 1 : Déterminer la loi de probabilité de chaque apport Y_t ;

Étape 2 : Enregistrer les paramètres de la distribution trouvée ;

Étape 3 : Transformer la distribution obtenue en une loi Normale $N_{i,t}(\mu,\sigma^2)$;

Étape 4 : Transformer la loi Normale obtenue en une loi Normale Standard Normale $Z(0,1)$ (DNS);

Étape 5 : Ajuster un modèle autorégressif d'ordre 1 sur les données normales standards.

Étape 6 : Générer une variable aléatoire DNS ;

Étape 7 : Effectuer la transformation inverse de l'Étape 4 ;

Étape 8 : Effectuer la transformation inverse de l'Étape 3 ;

Étape 9 : Une valeur de Y_t est obtenue.

Étape 10 : Fin.

Figure 7.3 : Algorithme de génération de scénarios d'apports naturels

L'étape 1 de cet algorithme consiste à déterminer une loi de probabilité qui peut s'appliquer à chaque apport agrégé Y_t. Les lois de probabilité les plus utilisées dans le milieu hydrologique sont [52] [53] :

- Loi Normale (μ,σ^2)
- Loi Log Normale à deux paramètres (μ,σ^2)

- Loi Log Normale à trois paramètres (μ,σ^2,λ)
- Loi Gamma (α,θ)

Pour savoir laquelle de ces quatre distributions est applicable à l'apport Y_t , nous avons appliqué le test de Filliben [54] aux 55 valeurs de l'historique des apports. Le test de Filliben calcule le coefficient de corrélation R entre les 55 valeurs des apports ordonnés en ordre croissant, préalablement normalisés avec la distribution à vérifier. La probabilité associée à un rang k est estimée à partir de la formule de Bloom suivante:

$$p(k) = \frac{k - \frac{3}{8}}{55 + \frac{1}{4}} - 0,5 \qquad \forall\, k = 1, 2, \cdots, 55 \qquad (7.2)$$

Plus la corrélation entre les observations normalisées et les valeurs empiriques est forte ($R \approx 1$), plus les données se rapprochent d'une distribution normale. En fonction du résultat du test de Felliben, une seule distribution $Dist_t(\ )$ parmi les quatre données ci-dessus est retenue. Ce processus est répété à chaque période.

À l'étape 3, et une fois que les distributions $Dist_t(\ )$ ont été déterminées, nous transformons les lois obtenues en lois normales $N_t(\mu,\sigma^2\ )$ puis, à l'étape 4, nous transformons la loi normale obtenue $N_t(\mu,\sigma^2\ )$ en une loi normale $Z(0,1)$. La transformation des lois $Dist_t(\ )$ en lois normales $N_t(\mu,\sigma^2)$ est un processus complexe et fastidieux. Nous référons le lecteur à la thèse d'Alain Régnier [55] pour mieux comprendre ce processus.

Les coefficients du modèle autorégressif ont été ajustés à l'étape 5 à partir des données centrées et normalisées. À l'étape 6, nous générons des nombres aléatoires distribués selon une DNS et à l'étape 7 nous transformons ces nombres en valeurs de distribution normale $N_{i,t}(\mu,\sigma^2)$ obtenues à l'étape 4. Enfin, à l'étape 8, nous appliquons la transformation inverse à celle de l'étape 3 pour retrouver les apports synthétiques.

La Figure 7.4 donne les apports minimums, maximums et moyens à la rivière La-Grande déterminés à partir des 55 scénarios d'apports historiques. Nous avons utilisé ces apports afin de générer 300 scénarios d'apports hebdomadaires synthétiques avec un modèle autorégressif. Le but de ce travail n'était pas cependant de construire le meilleur générateur possible, mais tout

simplement de construire un générateur capable de générer un ensemble de scénarios d'apports plausibles pour notre rivière.

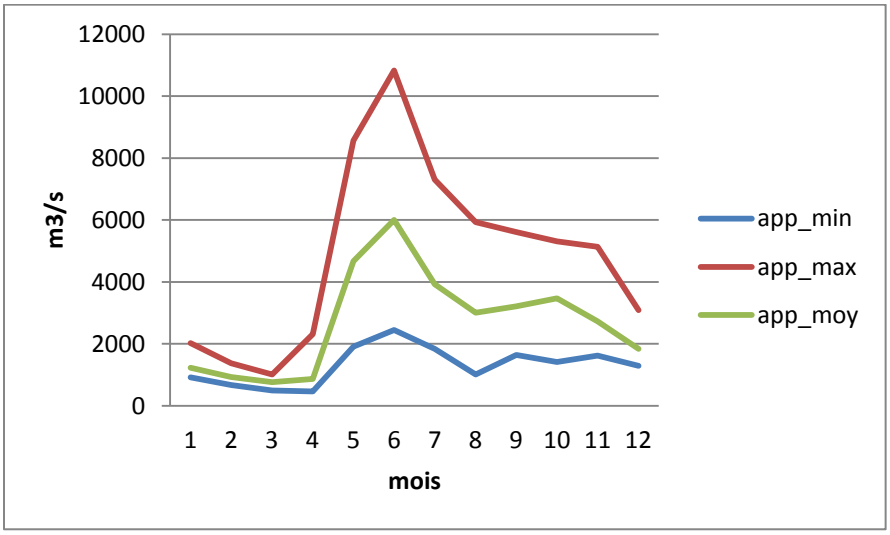

Figure 7.4 : Minimum, maximum et moyenne des séries historiques d'apports

7.3 Évaluation numérique de notre approche

Le Tableau 7.1 donne les résultats des simulations obtenus avec notre méthode et la PDS pour un système comprenant les deux et trois premiers réservoirs de tête du système étudié (section 1.5 du premier chapitre). Ce tableau compare les résultats de la PDS à ceux de notre méthode et donne l'erreur relative pour la fonction objective (colonne 5). De plus, il donne la quantité moyenne d'énergie produite par période (colonne 2 et 3) et la valeur de la fonction objective (colonnes 4 et 5) calculée par la fonction objective du problème à résoudre, soit:

$$\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\left\{b_t\left(\sum_{i=1}^{N} g_{i,t}\left(s_{i,t}^{m}, s_{i,t+1}^{m}, u_{i,t}^{m}\right) - D_t\right) - \sum_{i=1}^{N} L_{i,t}(s_{i,t+1}, u_{i,t})\right\} \qquad (7.3)$$

où $s_{i,t}^{m}$ et $u_{i,t}^{m}$ sont respectivement les contenu et soutirage du réservoir i dans la période t obtenus lors de la simulation du scénario m, où M est le nombre total de scénarios utilisés. Pour les deux systèmes utilisés pour tester notre méthode, l'erreur relative dans la fonction objective entre la PDS et notre méthode est inférieure à 10%. . Cette erreur s'explique par le fait que notre approche essaie de suivre le niveau cible de chaque réservoir, ce qui peut conduire à

des soutirages non réalisables ou à des déversements. Nous avons constaté aussi que le système essaie de toujours suivre le profil de la demande même s'il est incapable de le satisfaire.

Tableau 7.1: Résultats de la programmation dynamique (PDS) et de notre méthode pour les deux systèmes de tests

Nombre de réservoirs en série	*Demande moyenne (GWh)*	*Quantité moyenne d'énergie produite (GWh)*		*Déversement moyen (hm3)*		*Valeur de la fonction objective*		*% d'écart*
		Notre approche	PDS	Notre approche	PDS	Notre approche	PDS	
2	4000	4283	3896	176.28	0	27.89	29.6	5.7
3	10000	11794	12057	178.29	153.35	18.58	20.52	9.4

La lecture de ce tableau nous fait croire que notre approche est capable de donner des résultats acceptables et que notre politique de gestion peut donner une production annuelle moyenne similaire ou supérieure à celle obtenue avec la PDS. Cependant, elle peut générer des pertes inutiles par déversement.

7.4 Application à un système de sept réservoirs

Cette section présente les résultats de la simulation de notre règle de gestion pour un système de sept réservoirs en série. Les caractéristiques techniques de ce système sont présentées à la section 1.5 du chapitre 1. Rappelons que l'algorithme de la PDS n'est pas applicable à de tels systèmes puisque le temps de calcul devient excessif. Avec notre approche, nous avons pu déterminer une règle de gestion pour ce système dans un temps relativement court. En effet, la détermination de la règle de gestion du réservoir unique prend environ 1,17 seconde. Le temps moyen de la résolution d'un scénario du problème déterministe avec Cplex est de 0,15 seconde. Il nous a donc fallu 8,25 secondes pour résoudre les 55 problèmes (un problème pour chaque scénario d'apports). La détermination d'un modèle avec ARESlab prend en moyenne 20 secondes. Donc, pour un système de 7 réservoirs, il nous faut environ 1,82 minute pour ajuster les 364 modèles. Enfin, la simulation de la règle de gestion pour 300 scénarios d'apports a pris 38 secondes. Pour une simulation de 300 scénarios, la génération annuelle moyenne des sept centrales est de 98627 GWh et les déversements annuels moyens sont de 33694,15 hm^3. Les

réservoirs sont supposés être pleins au début de la simulation et la demande annuelle moyenne a été fixée à 80000 GWh. Les Figures 7.5, 7.6 et 7.7 permettent de visualiser l'évolution moyenne des contenus des sept réservoirs.

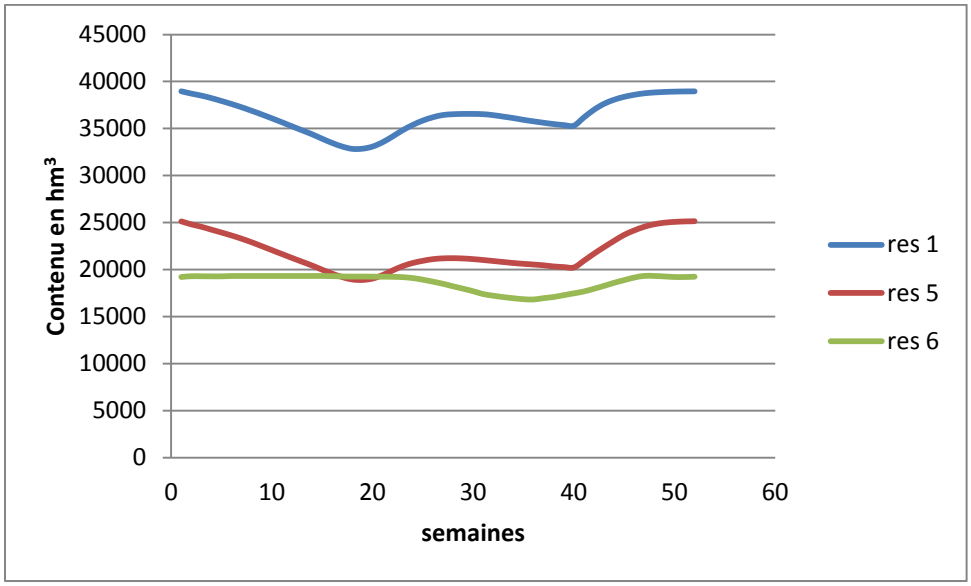

Figure 7.5 : Évolution des contenus des réservoirs 1, 5 et 6 (réservoirs de grande capacité d'emmagasinement).

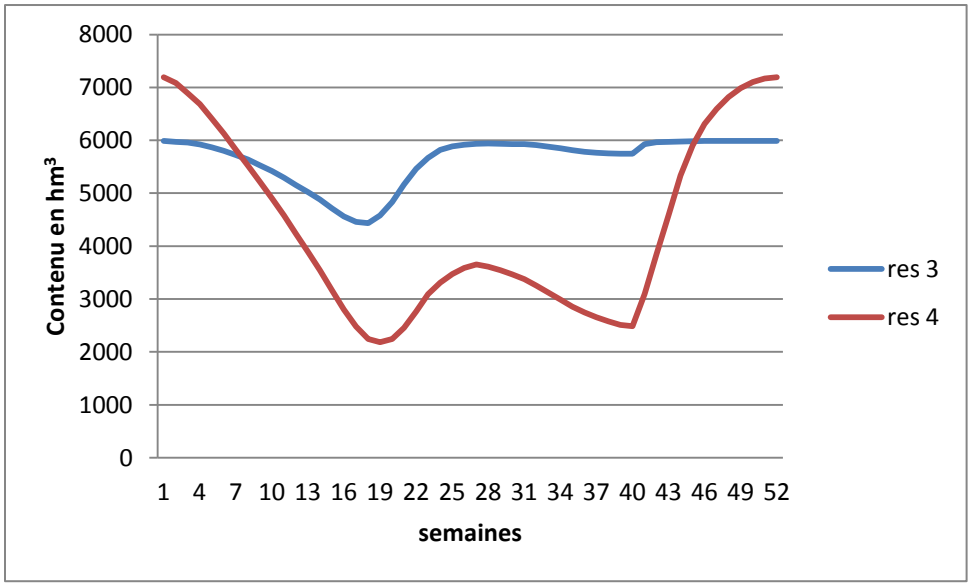

Figure 7.6 : Évolution des contenus des réservoirs 3 et 4 (réservoirs de capacité d'emmagasinement moyenne).

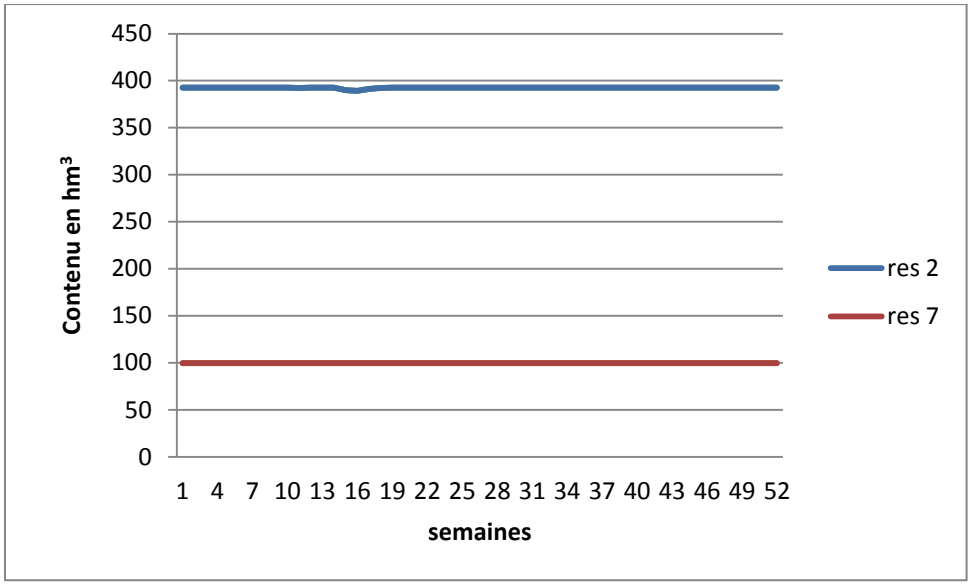

Figure 7.7 : Évolution des contenus des réservoirs 2 et 7 (réservoirs de capacité d'emmagasinement faible).

Ces courbes montrent que les petits réservoirs sont toujours pleins, que les contenus des réservoirs de grande capacité changent doucement et que les contenus des réservoirs de moyenne capacité changent le plus. Ceci est particulièrement vrai pour le réservoir numéro 4 qui a la plus grande variation de la hauteur de chute pour la classe des réservoirs de capacité moyenne. Ceci signifie que certains réservoirs varient beaucoup plus que les autres réservoirs. Finalement, nous pensons qu'il est toujours profitable d'effectuer une analyse exploratoire des résultats déterministes avant d'entreprendre le processus d'ajustement de modèles pour les fonctions de balancement (data minning). Par exemple, les résultats déterministes indiquent qu'un modèle linéaire par partie, qui ne dépend pas du temps, peut être envisageable pour modéliser les fonctions de balancement du réservoir 5 durant les périodes d'hiver. Cette constatation va nous permettre de caractériser une seule fonction de balancement au lieu de 16 fonctions. Un coefficient de corrélation de 0,93 et le nuage de points de Figure 7.8 confirment cette constatation.

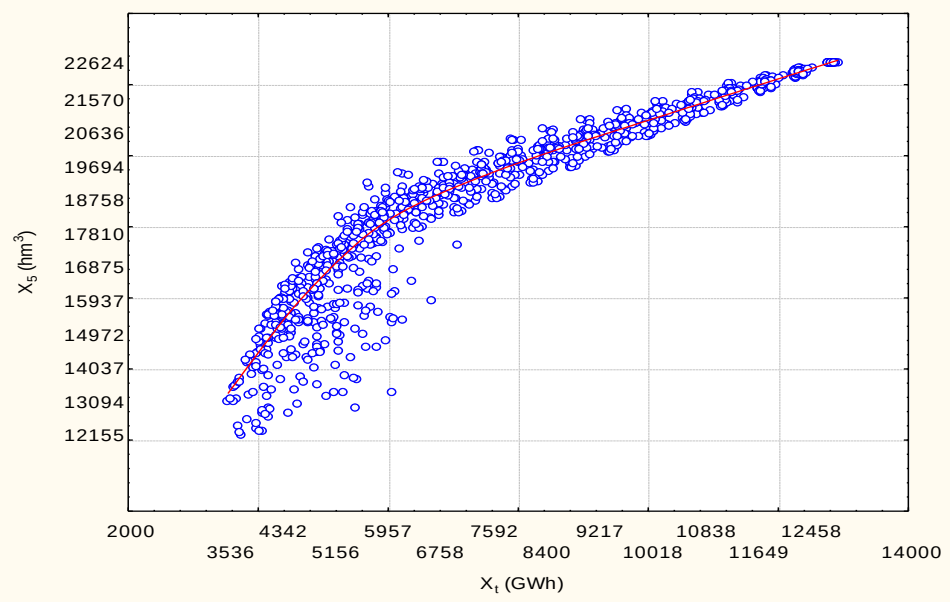

Figure 7.8 : Contenu du réservoir 5 en fonction du contenu du réservoir agrégé pour les périodes d'hiver (cas de 7 réservoirs en série).

7.5 Analyse et discussion

La gestion des centrales hydroélectriques par balancement des réservoirs consiste à répartir à chaque pas de temps l'énergie potentielle totale stockée dans le réservoir agrégé et obtenue par PDS, entre tous les réservoirs du système de façon à maximiser la production hydroélectrique. En d'autres termes, la règle de gestion cherche à maximiser la production hydroélectrique tout en suivant des niveaux cibles de stockage pour chaque réservoir et pour le réservoir agrégé. En fait, puisque la production hydroélectrique d'une centrale est le produit de la hauteur de chute et du soutirage, la règle de gestion favorise l'allocation de l'énergie du réservoir agrégé au réservoir dont la variation de la hauteur de chute par unité de volume d'eau est la plus élevée, le rendement plus élevé, et où la capacité de turbinage est la plus importante.

La production hydroélectrique maximale d'une rivière se produit lorsque les hauteurs de chute des réservoirs du système sont à leur maximum. Cependant, lorsque la quantité d'eau stockée dans le système est limitée par la règle de gestion du réservoir agrégé le problème devient alors de répartir le stock d'eau entre les réservoirs de façon à maximiser la production hydroélectrique. L'énergie maximale produite par l'eau stockée dans le réservoir agrégé dépend de la capacité des réservoirs, des apports, des rendements, et de la quantité totale d'eau en stock.

L'eau est souvent stockée en premier lieu dans les petits réservoirs où la hauteur de chute varie généralement plus rapidement que pour les grands réservoirs (tableau 7.2). Ceci est illustré à la Figure 7.9 où le volume d'eau moyen nécessaire pour accroître la hauteur de chute par une quantité x dans le réservoir en aval, V2, est bien inférieur à celle nécessaire pour obtenir une augmentation équivalente de la hauteur de chute pour le réservoir en amont, V1.

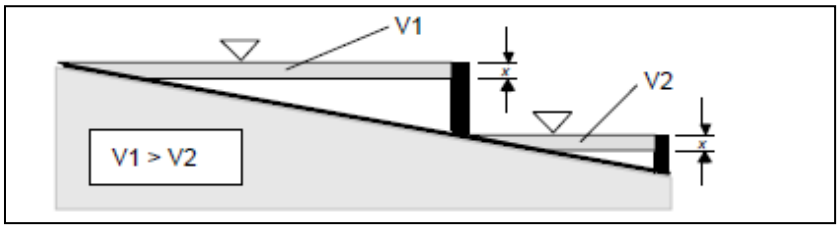

Figure 7.9 : Variation de la hauteur de chute pour des capacités de stockage différentes [46]

Le tableau suivant donne les taux de variation moyens de la hauteur de chute par unité de volume pour les sept réservoirs de la rivière La-Grande.

Tableau 7.2: Variation moyenne de la hauteur par unité de volume pour les réservoirs de la rivière La-Grande

Réservoir	Variation de la hauteur ΔH (m)	Capacité de stockage (hm^3)	$\Delta H / capacité$ (%)
1	13	39008	0.03
2	1.6	392	0.41
3	3	3063	0.10
4	11	7079	0.16
5	12.2	25195	0.05
6	7.7	19369	0.04
7	1.52	98	1.55

L'autre paramètre à considérer est la capacité de soutirage. En effet, pour des réservoirs identiques l'énergie hydroélectrique est maximisée lorsque les réservoirs ayant la plus grande capacité de turbinage sont remplis en premier. Pour les réservoirs en série qui ont des apports intermédiaires, il est souvent souhaitable de maximiser le stockage dans les réservoirs en aval en premier. Généralement, les réservoirs en aval reçoivent plus d'apports directs et indirects que les

réservoirs en amont. La hauteur de chute des réservoirs en aval est donc souvent maintenue à des niveaux élevés afin de profiter de débits de soutirage plus importants (bien entendu avec un risque accru de déversements). Enfin, les réservoirs ayant des rendements plus élevés devraient être maintenus à des hauteurs de chute plus élevées que les réservoirs ayant des rendements moindres.

En supposant que toutes les centrales ont une capacité de turbinage suffisante, la combinaison de la capacité du réservoir, des apports totaux, et du rendement détermine le potentiel global d'une centrale hydroélectrique pour produire de l'énergie. Lorsque des réductions de stockage sont requises, elles sont généralement faites aux réservoirs dont les potentiels de production sont les plus faibles. Cependant, si une augmentation du stockage est requise, elle devrait être faite aux réservoirs ayant la plus grande capacité de production. L'interaction de ces facteurs a fait l'objet de plusieurs études et recherches et en particulier celles de Lund [46] et de Lund et Guzman [56]. Mathématiquement, cette interaction détermine un coefficient pour chaque réservoir. Ce coefficient est calculé à chaque pas de la simulation et permet d'ordonner les réservoirs dans un ordre d'importance décroissante. Les réservoirs les plus importants (qui ont les coefficients les plus élevés) sont remplis en premier et ceci jusqu'à l'épuisement du contenu cible du réservoir agrégé. Une variante de cette règle est l'utilisation de l'indice d'efficacité du stockage. Cet indice a été développé par l'*US Army Corps of Engineers* pour maximiser la production hydroélectrique pendant les saisons de sécheresse [57]. Pour chaque réservoir, un «indice d'efficacité du stockage» est calculé à chaque pas de temps en utilisant une estimation des apports en eau et des demandes en énergie pour le pas de temps présent et pour le reste de l'horizon. Les réservoirs qui ont un indice d'efficacité de stockage élevé sont remplis en premier.

Plusieurs chercheurs tels que Turgeon [6] et Lund [46] ont résolu un problème d'optimisation à chaque pas du temps pour répartir le contenu du réservoir agrégé entre tous les réservoirs du système. Cependant, une fonction objective qui maximise la production à chaque pas de temps en se basant sur les hauteurs de chute peut être inadéquate lorsque le système est en phase de vidange et que la principale préoccupation est de maximiser le stock énergétique du système. De plus, le temps de résolution de tels problèmes d'optimisation peut accroitre de façon considérable en fonction de la structure des ces problèmes et du nombre total de réservoirs.

Dans ce qui suit, nous montrons que les résultats obtenus avec notre méthode peuvent être expliqués en partie par la résolution d'un modèle d'optimisation linéaire à chaque pas de temps. Dans l'article [46], il est montré qu'il est possible de déterminer les niveaux cibles en résolvant un problème d'optimisation qui consiste à répartir de façon optimale le contenu du réservoir agrégé entre les réservoirs réels du système, et ceci afin de maximiser la production hydroélectrique dans une période tout en respectant la contrainte sur le contenu du réservoir agrégé. Cependant, notre approche a le mérite de s'appliquer peu importe la phase du système (vidange et remplissage) alors que l'approche décrite dans [46] s'applique particulièrement dans la phase de vidange [46].

Pour un système de N réservoirs en série les niveaux cibles sont obtenus par la résolution du problème suivant :

Maximiser la fonction :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{h_i\left(\frac{s_{i,t}+s_{i,t+1}}{2}\right)}{h_i^{ref}} g_i(u_{i,t}^{\text{moy}}) \tag{7.4}$$

sous les contraintes :

$$s_{i,t+1} \le s_{i,t+1}^{\max} \quad \forall\, i = 1,\ldots,N \tag{7.5}$$

$$\sum_{i=1}^{N}(\sum_{j=i}^{N} ch_{j,t+1}) s_{i,t+1} = X_{t+1}^{*} \tag{7.6}$$

où :

- $u_{i,t}^{moy}$ est connue. Elle représente le soutirage moyen du réservoir *i* dans la période *t*'elle est estimée à partir des soutirages déterministes.
- $s_{i,t}$ est connu.
- X_{t+1}^{*} contenu cible du réservoir agrégé. il est déterminé par la règle de gestion du réservoir agrégé.

Si on linéarise la fonction reliant la hauteur de chute au contenu du réservoir *i* autour de $s_{i,t}$ (ce qui suppose de petites variations du contenu de chaque réservoir) nous obtenons :

$$h_i\left(0,5(s_{i,t+1}+s_{i,t})\right) \simeq h_i\left(s_{i,t}\right)+\alpha_i\left(s_{i,t+1}-s_{i,t}\right) \tag{7.7}$$

Puisque $s_{i,t}$ est connu, le problème d'optimisation se transforme en un problème d'optimisation linéaire:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_i s_{i,t+1}\right) g_i\left(u_{i,t}^{\text{moy}}\right) \tag{7.8}$$

sous les contraintes (7.5) et (7.6).

Le problème d'optimisation (7.8), (7.5) et (7.6) peut être résolu en déterminant la pente (Ip_i) de la fonction objectif par rapport aux variables des contenus des réservoirs comme suit :

$$Ip_{i,t+1}=\frac{\partial(\left(\alpha_i s_{i,t+1}\right) g_i\left(u_{i,t}^{\text{moy}}\right))}{\partial s_{i,t+1}}=\alpha_i g_i(u_{i,t}^{\text{moy}}) \tag{7.9}$$

Donc la règle de gestion consiste à remplir les réservoirs dans un ordre décroissant de l'indice de performance $Ip_{i,t+1}$ Cette règle de gestion est adaptée principalement durant la période de vidange du système, c'est-à-dire durant les périodes où les apports sont inférieurs à la demande énergétique [56].

Si on détermine la pente de la courbe d'emmagasinement (fonction qui donne le niveau (en *m*) en fonction du volume d'eau emmagasiné dans le réservoir) par le taux de variation moyen et si on remplace la génération moyenne de la semaine *t*, $g_i(u_{i,t}^{\text{moy}})$, par la génération hebdomadaire moyenne $g_i(u_i^{\text{moy}})$, nous pouvons estimer le coefficient Ip_i de la façon suivante :

$$Ip_{i,t} \approx \hat{Ip}_i=\frac{\Delta h}{S^{\max}} g_i(u_i^{\text{moy}}) \tag{7.10}$$

Pour les réservoirs de la rivière La-Grande, nous obtenons le tableau qui suit :

Tableau 7.3: Classification des réservoirs de la rivière La-Grande selon le coefficient Ip_i

réservoir	Génération hebdomadaire moyenne (GWh)	rang des centrales selon la génération moyenne	Ratio = hauteur de chute / capacité de stockage	rang des réservoirs selon le ratio de la colonne 4	Somme des rangs des colonnes 3 et 5	Estimation de $\hat{Ip}_i$	Rang des réservoirs selon le coefficient $\hat{Ip}_i$
1 Bersimis	55,44	6	0,03%	7	13	0,02	7
2 LA-2	43,35	7	0,41%	2	9	0,18	5
3 LA-1	132,25	5	0,10%	4	9	0,13	6
4 LG-4	406,87	2	0,16%	3	5	0,63	2
5 LG-3	387,00	3	0,05%	5	8	0,19	4
6 LG-2	695,00	1	0,04%	6	7	0,28	3
7 LG-1	176,79	4	1,55%	1	5	2,74	1

L'analyse de la dernière colonne de ce tableau confirme les résultats de notre simulation, c'est-à-dire que le septième réservoir (LG-1) doit être maintenu plein et que le réservoir numéro 4 (LG-4) joue un rôle important dans la gestion de cette rivière (somme des rangs dans la colonne numéro 6).

Le suivi des niveaux cibles obtenus par les fonctions de balancement ne résout pas un problème d'optimisation à chaque pas de temps et ne dépend pas de la phase du système (phase de vidange ou phase de remplissage) et peut par conséquent être appliqué à un très grand nombre de réservoirs en tout temps. Cependant, l'amélioration de la qualité des modèles de régression, en particulier, pour les petits réservoirs, la réduction du nombre de fonction de balancement à

déterminer et l'utilisation d'un modèle d'optimisation pour suivre les niveaux cibles m'apparaissent suffisamment important pour qu'ils soient le sujet du chapitre suivant.

CHAPITRE 8 UTILISATION DES FONCTIONS DE BALANCEMENT DANS UN MODÈLE D'OPTIMISATION POUR LE SUIVI DES NIVEAUX CIBLES

Ce chapitre présente les modifications que nous avons apportées à notre méthode pour améliorer les résultats du chapitre précédent. La première modification fut d'agréger certains réservoirs pour obtenir de meilleures fonctions de balancement. La deuxième modification fut de construire un modèle d'optimisation pour mieux gérer les réservoirs. Finalement, nous présenterons l'algorithme que nous avons développé pour solutionner les problèmes d'optimisation et comparerons les résultats de ce chapitre à ceux du chapitre précédent.

8.1 Stratégie d'amélioration des fonctions de balancement

L'analyse des résultats du chapitre 6 montre que la validité d'un modèle de régression d'un réservoir dépend essentiellement de sa corrélation avec le réservoir agrégé. Pour les réservoirs de grande capacité de stockage et de turbinage, la corrélation avec le réservoir agrégé est élevée. Pour ces réservoirs, nous avons constaté qu'une régression qui ne dépend pas du temps (annuelle ou saisonnière) est suffisante pour obtenir des fonctions de balancement acceptables. Cependant, lorsque la corrélation est faible, la relation entre le contenu du réservoir et celui du réservoir agrégé peut être mauvaise. Nous avons constaté que ce résultat est obtenu surtout pour les réservoirs de petite et moyenne tailles. Pour les réservoirs de petite capacité, la règle de gestion consiste généralement à maintenir la hauteur de chute à son niveau maximal, ce qui n'est pas nécessairement optimal. Pour les réservoirs de capacité moyenne, les trajectoires peuvent varier beaucoup comparativement aux autres réservoirs. Nous pensons que pour ces réservoirs les fonctions de balancement qui dépendent du temps et du contenu du réservoir agrégé, n'arrivent pas à bien représenter les trajectoires. Il existe deux solutions pour ce problème: une qui consiste à ajouter des variables à la fonction de balancement, l'autre qui consiste à combiner les réservoirs de façon à obtenir des réservoirs de plus grande capacité. Avec un réservoir de grande capacité on obtient une meilleure corrélation avec le réservoir agrégé.

Pour améliorer la qualité des modèles de régression associés aux réservoirs de petite et moyenne capacités, nous avons combiné ces réservoirs avec d'autres réservoirs adjacents afin d'obtenir un

sous système de plus grande capacité qui permet d'avoir un modèle de régression statistiquement valide.

Par exemple, pour le système de trois réservoirs en série, dont le réservoir du milieu est de petite capacité par rapport aux autres réservoirs du système, l'approche est la suivante (voir la Figure 8.1):

1. Utiliser les résultats déterministes pour ajuster un modèle de régression pour chaque réservoir afin de déterminer $s_i^{(cible)} = f(X), i = 1,2,3$. Calculer R_1^2, R_2^2 et R_3^2. Supposons que le coefficient de détermination R_2^2 est faible.
2. Considérer le réservoir agrégé 2, 1 et utiliser les résultats déterministes pour déterminer $\hat{\mathbf{s}}_{1,2}^{(cible)} = f(X)$. Calculer $R_{1,2}^2$.
3. Considérer le réservoir agrégé 2, 3 et utiliser les résultats déterministes pour déterminer $\hat{\mathbf{s}}_{2,3}^{(cible)} = f(X)$. Calculer $R_{2,3}^2$.
4. Si l'un des coefficients ou les deux coefficients $R_{1,2}^2$ et $R_{2,3}^2$ sont proches de un, la solution est de choisir la combinaison qui a donné le meilleur coefficient. Si non, aller à l'étape suivante. Aucune combinaison de deux réservoirs incluant le réservoir 2 permet d'identifier une sous système donnant un modèle de régression valide.
5. Considérer le réservoir agrégé 1, 2, 3 et utiliser les résultats déterministes pour déterminer $\hat{\mathbf{s}}_{1,2,3}^{(cible)} = f(X)$. Calculer $R_{1,2,3}^2$. Si ce coefficient est proche de un alors cette combinaison est la combinaison recherchée. Si non, choisir parmi les sous systèmes construits dans les étapes 1, 2, 3 et 5 celui qui a le meilleur coefficient de détermination.

Rappelons que les variables s_i représentent les contenus réels des réservoirs (en hm^3) et que la variable X représente le contenu du réservoir agrégé en Gigawatt-heure (GWh).

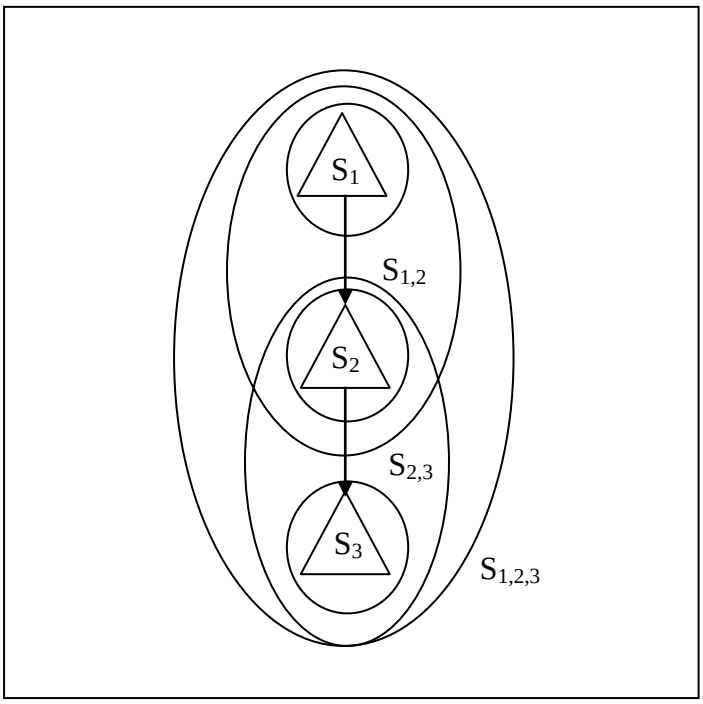

Figure 8.1 : Agrégation et niveaux cibles pour un système de trois réservoirs en série

Pour chaque petit réservoir, nous avons déterminé la meilleure combinaison de ce réservoir avec des réservoirs adjacents qui permettent d'obtenir une fonction de balancement valide. Cette procédure donne une fonction de balancement et un niveau cible pour chaque réservoir et pour toutes les combinaisons possibles des réservoirs adjacents. L'idée de définir des niveaux à suivre pour chaque réservoir et pour chaque sous système formé de réservoirs adjacents a été introduite en premier lieu par Turgeon dans [6]. Son approche lui a permis de gérer un système de sept réservoirs en série en un temps de calcul très petit.

Pour réduire le nombre de fonction de balancement du chapitre précédent, nous avons commencé par ajuster des modèles de régression globaux. Si les modèles de régression globaux sont non valides, nous ajustons des modèles de régression saisonniers. Si les modèles de régression saisonniers sont non valides, nous ajustons des modèles de régression par semaine.

Les Figures 8.2, 8.3 et 8.4 montrent des exemples de courbes ajustées avec la régression globale par la méthode MARS pour des sous-systèmes formés des réservoirs de la rivière La-Grande. Pour cette rivière, les fonctions de balancement des réservoirs 2 et 7 étaient de moins bonne qualité parce que leur coefficient de corrélation était plus petit et le nuage de points était plus dispersé.

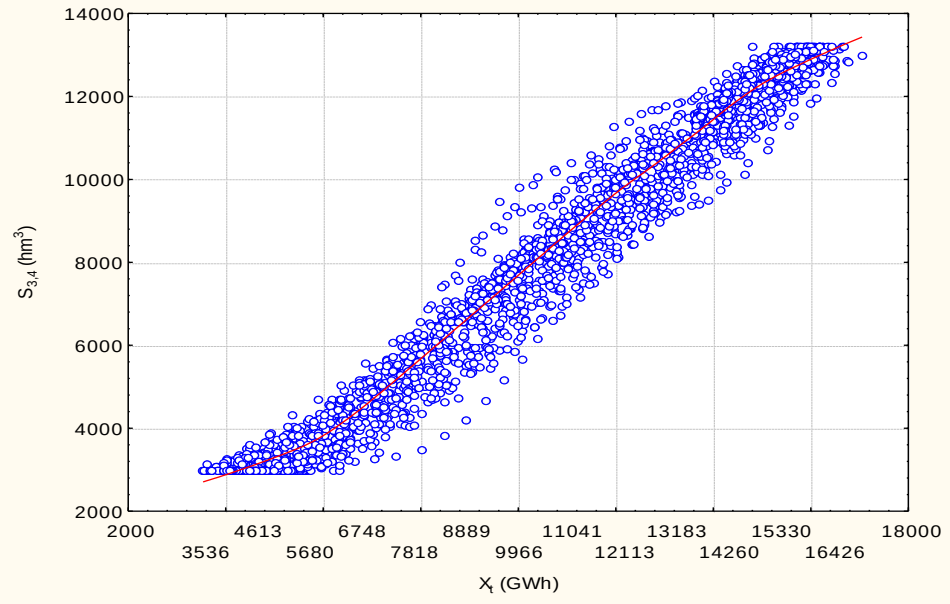

Figure 8.2 : Régression globale pour le sous-système formé par les réservoirs 3 et 4

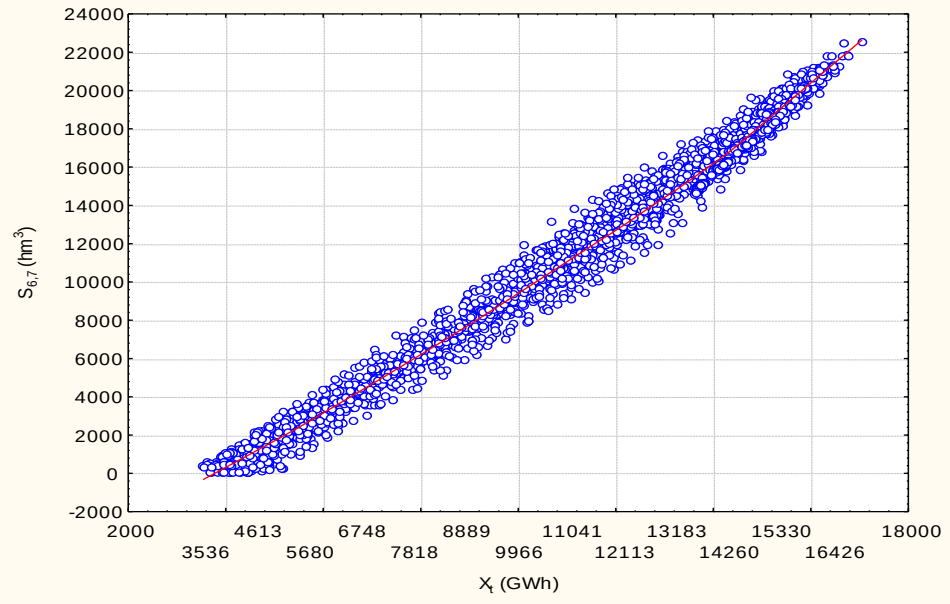

Figure 8.3 : Régression globale pour le sous-système formé par les réservoirs 6 et 7

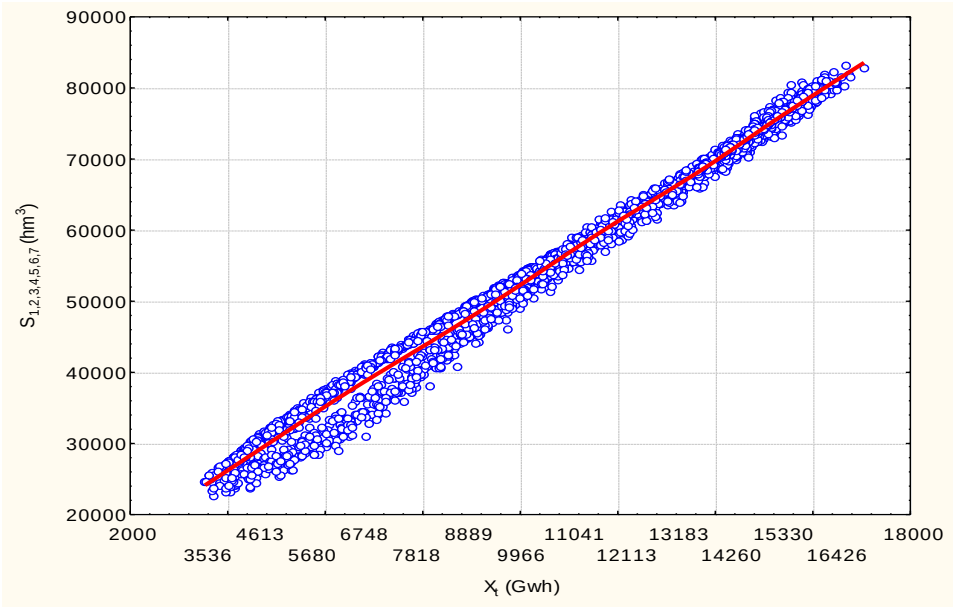

Figure 8.4 : Régression globale pour le réservoir agrégé de la rivière La-Grande

8.2 Modèle d'optimisation pour le suivi des niveaux cibles

La gestion de centrales hydroélectriques par balancement des réservoirs consiste à déterminer la meilleure façon de répartir le contenu du réservoir agrégé entre les réservoirs du système. Nous avons résolu ce problème en deux étapes. Dans la première, nous avons déterminé des fonctions donnant des trajectoires de références pour chaque réservoir et pour chaque sous système formé de réservoirs adjacents. Ensuite, nous avons essayé de suivre ces trajectoires.

Dans le chapitre précédent, le suivi des niveaux cibles a été fait par une heuristique alors que dans ce chapitre nous avons fait le suivi par la résolution du problème d'optimisation suivant :

pour $t = 1,...,T$:

$$\underset{s_{i,t}}{Min}\left[\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{N}\left(v_{i,t}^{2}\right)+\sum_{i=1}^{N} w_i\left(s_{i,t+1}-s_{i,t+1}^{cible}\right)^2+\sum_{i=1}^{N-1} w_{i,i+1}\left(s_{i,t+1}+s_{i+1,t+1}-s_{i,i+1,t}^{cible}\right)^2+ \\ \sum_{i=1}^{N-2} w_{i,i+1,i+2}\left(s_{i,t+1}+s_{i+1,t+1}+s_{i+2,t+1}-s_{i,i+1,i+2,t+1}^{cible}\right)^2+...+w_{1,...,N}\left(s_{i,t+1}+...+s_{N,t+1}-s_{i,i+1,i+2,...,N,t+1}^{cible}\right)^2\end{array}\right] \quad (8.1)$$

sous

$$s_{i,t+1} = s_{i,t}+q_{i,t}+r_{i-1,t}+v_{i-1,t}-r_{i,t}-v_{i,t} \quad ; \ \forall i = 1,...,N \quad (8.2)$$

$$r_{i,t} = k^{*}\, u_{i,t} \quad i = 1,...,N \quad (8.3)$$

$$s_{i,t+1}^{\min} \le s_{i,t+1} \le s_{i,t+1}^{\max} \quad \text{pour} \quad i = 1,...N \quad (8.4)$$

$$u_{i,t}^{\min} \le u_{i,t} \le u_{i,t}^{\max} \quad \text{pour} \quad i = 1,...N \quad (8.5)$$

$$v_{i,t} \ge 0 \quad i = 1,...,N \quad (8.6)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=i}^{N} ch_{j,t+1}\right)s_{i,t+1} = X_{t+1}^{cible} \quad (8.7)$$

avec $s_{i,t}$ *connu*; $r_{0,t} = v_{0,t} = 0$ et $v_{i,t} = \max(0\,,\, r_{i,t} - r_{i,t}^{\max})$.

Les termes $\left\{w_m\,,\, m = 1,2,...,\frac{N(N+1)}{2}\right\}$ sont des coefficients de pondération pour accroître ou réduire l'importance de certains critères lors du calcul de la fonction objectif. Ces pondérations sont déterminées à partir des coefficients de détermination des modèles de régression ($0 \le w_m \le 1$). De cette façon, nous donnons plus d'importance aux niveaux cibles obtenues des meilleures modèles de régression. La fonction objective de ce modèle est une fonction quadratique qui cherche à réduire la distance au carré entre les niveaux réels et les niveaux cibles. Le terme $\sum_{i=1}^{N}\left(v_{i,t}^{2}\right)$ permet de pénaliser les déversements. Comme ces termes ne sont pas

pondérés, on accepte dans certains cas de s'éloigner des niveaux cibles lorsque cela permet d'éviter un déversement inutile.

Le problème d'optimisation (8.1)-(8.6) peut être écrit sous la forme générale suivante :

Minimiser la fonction :

$$\frac{1}{2}x^T Hx + c^T x \tag{8.8}$$

Sujet aux contraintes :

$$A_{equ}x - b_{equ} = 0 \tag{8.9}$$

$$A_{ineq}x - b_{ineq} \leq 0 \tag{8.10}$$

$$x \in \mathbb{R}^n \tag{8.11}$$

où H, A_{equ} et A_{ineq} sont des matrices de dimension $3N \times 3N$. x, b_{equ}, b_{ineq} et c sont des vecteurs de dimension $3N$. $x = \left[\left[s_{i,t}\right] \left[u_{i,t}\right] \left[v_{i,t}\right]\right]$. La matrice H est semi définie positive. Par conséquent le problème d'optimisation est convexe.

8.2.1 Condition d'optimalité

Généralement un problème d'optimisation quadratique avec des contraintes linéaires s'écrit comme suit:

Minimiser la fonction :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x^T Hx + c^T x \tag{8.12}$$

sujet aux contraintes :

$$h_i(x) = A_{equ}(:, i)(x) - b_{equ} = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m \tag{8.13}$$

$$g_j(x) = A_{ineq}(:, j)(x) - b_{ineq} \leq 0 \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, p \tag{8.14}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$. Les fonctions g et h sont des fonctions affines de $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Le terme $A_{equ}(:,i)$ ($A_{ineq}(:,i)$) désigne la i^{ème} ligne de la matrice A_{equ} (A_{ineq}).

Le Lagrangien associé à ce problème est:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\lambda,\mu) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j(\mathbf{x}) \tag{8.15}$$

où λ_i et μ_i sont des multiplicateurs réels.

Soit $\mathbf{x}^*$ la solution du problème (8.12)-(8.14). Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre sont données par les équations KKT (*Karush-Kuhn-Tucker*) suivantes:

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{8.16}$$

$$h_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall\, i = 1,2,\ldots,m \tag{8.17}$$

$$g_j(\mathbf{x}^*) \le 0 \quad \forall\, j = 1,2,\ldots,p \tag{8.18}$$

$$\mu_j \ge 0 \quad \forall\, j = 1,2,\ldots,p \tag{8.19}$$

$$\mu_j g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall\, j = 1,2,\ldots,p \tag{8.20}$$

Lorsque le problème d'optimisation est convexe, les conditions d'optimalité de KKT deviennent des conditions nécessaires et suffisantes pour l'optimalité globale.

Le choix de l'algorithme de résolution dépend essentiellement de la taille et de la structure du problème à l'étude. Pour un problème d'optimisation quadratique avec des contraintes linéaires, il existe plusieurs méthodes de résolution efficaces telles que les méthodes de type points intérieurs, les méthodes de type régions de confiance et les méthodes de projection communément appelées méthodes d'activation des contraintes (*Active Set Method*). Vu que le problème d'optimisation est de petite taille (*3N*), nous avons adopté un algorithme de type activation des contraintes. L'algorithme de résolution utilisé dans cette thèse est obtenu par la conversion en *Cpp* de la fonction «*quadprog*» du logiciel *MATLAB* de *MathWork* [60].

8.2.2 Algorithme d'activation de contraintes

La procédure de résolution comprend deux phases. La première est une phase d'initialisation qui consiste à déterminer un point initial réalisable lorsqu'il existe. La deuxième est une phase itérative qui consiste à générer une séquence de points réalisables qui converge à un point réalisable. Dans cette méthode, une suite de matrices décrivant l'ensemble des contraintes actives (A*ctive Set*), AS_k, est mise à jour à chaque itération k. Une contrainte du type $g(x^*) \leq 0$ est dite active au point x^* si $g(x^*) = 0$ et inactive si $g(x^*) \prec 0$. Plus précisément, la matrice AS_k est formée par les lignes de la matrice qui définit les contraintes d'égalité A_{equ}, et un sous-ensemble des lignes de la matrice qui définit les contraintes d'inégalité A_{ineq}.

À chaque itération, la matrice qui comprend les contraintes actives est utilisée pour trouver une direction de descente d_k pour la fonction objective. Une direction d_k est appelée direction de descente de la fonction f au point courant x_k si $f(x_k + d_k) \prec f(x_k)$.

Puisque les contraintes d'égalité sont toujours actives, la direction de descente d_k est choisie de façon à ne pas violer les bornes actives des contraintes d'inégalité. Il s'en suit que nous devons trouver la longueur du pas $\alpha \succ 0$ qui minimise la valeur de $f(x_k + \alpha d_k)$ tout en respectant les bornes actives. La direction d_k est choisie dans l'espace nul de la matrice AS_k ($AS_k \times d_k = 0$). Autrement dit, d_k appartient au sous-espace orthogonal complémentaire du sous-espace formé des colonnes de la matrice AS_k. On est alors assuré que le nouveau point $x_k + \alpha d_k$ demeurera sur les bornes des contraintes déjà actives. Rappelons que l'espace nul d'une matrice A de taille $m \times n$, appelé $Nul(A)$, correspond à l'ensemble de toutes les solutions de l'équation homogène $Ax = 0$. Autrement dit $Nul(A) = \{ x \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ et } Ax = 0 \}$.

Soit Z_k la matrice formée par des vecteurs orthogonaux à l'espace vectoriel de la matrice AS_k ($AS_k . Z_k = 0$). Cette matrice est formée par les dernières $(m + p - l)$ colonnes de la décomposition QR de la transposée de la matrice AS_k, où l désigne le nombre de contraintes

actives et $(m+p)$ le nombre total des contraintes linéaires du problème d'optimisation. On a $(l \prec m+p)$.

On a :

$$Z_k = Q[:, l+1 : m+p] \tag{8.21}$$

Ou

$$Q^T A S_k^T = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

La décomposition QR d'une matrice A, appelée aussi décomposition QU, est une décomposition qui a la forme $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale qui satisfait $QQ^T = I$, et où R est une matrice triangulaire supérieure. Ce type de décomposition est souvent utilisée pour résoudre des systèmes d'équations dont la matrice correspondante n'est pas carrée. Précisons que cette décomposition n'est pas unique et qu'elle est toujours possible.

Une fois que la matrice Z_k est déterminée, nous devons rechercher le vecteur p donnant la meilleure combinaison linéaire des colonnes de Z_k qui minimise :

$$q(p) = f(Z_k p) = \frac{1}{2} p^T Z_k^T H Z_k p + c^T Z_k p \tag{8.22}$$

La condition d'optimalité du premier ordre donne :

$$\nabla q(p) = Z_k^T H Z_k p + c^T Z_k = 0$$

Où $\nabla q(p)$ est appelé gradient projeté de la fonction quadratique car il est la projection du gradient dans le sous-espace défini par Z_k. Le terme $Z_k^T H Z_k$ est appelé Hessien projeté. Lorsque la matrice Hessienne H est définie positive, le minimum de la fonction $q(p)$, pour le sous-espace défini par Z_k, se produit lorsque $\nabla q(p) = 0$, ce qui conduit à la solution du système d'équations linéaires suivant :

$$Z_k^T H Z_k p = -c^T Z_k \tag{8.23}$$

À partir de la solution réalisable x_k de l'itération courante et d'une direction de recherche $d_k = Z_k p \neq 0$, on détermine la longueur du pas $\alpha \in [0,1]$ qui conduit à une nouvelle solution réalisable $x_{k+1} = x_k + \alpha d_k$ et qui n'entraine pas l'activation des contraintes qui sont déjà inactives. Un déplacement unitaire le long de la direction d_k conduit à la solution du problème d'optimisation réduit à l'espace nul de la matrice AS_k. Si un tel déplacement peut être réalisé sans violer les contraintes, alors la nouvelle solution est celle du problème d'optimisation (8.12)-(8.14). Sinon, un déplacement inférieur à l'unité le long de la direction d_k va activer la contrainte inactive la plus proche. Celle-ci sera incluse dans l'ensemble des contraintes actives à l'itération suivante.

La distance le long d'une direction d_k, et jusqu'à la borne d'une contrainte non active i, est calculée par la formule : $\dfrac{-((A_{ineq})_i x_k - (b_{ineq})_i)}{(A_{ineq})_i d_k}$. Par la suite, la longueur du pas α est donnée par :

$$\alpha \overset{déf}{=} \min_{i \in \{1,\ldots,m+p\}} \left\{ 1, \quad \frac{-((A_{ineq})_i x_k - (b_{ineq})_i)}{(A_{ineq})_i d_k}, \quad (A_{ineq})_i d_k \succ 0 \right\} \tag{8.24}$$

La condition $(A_{ineq})_i d_k \succ 0$ s ignifie que la direction de recherche d_k pointe vers la borne non active de la contrainte. La distance est calculée seulement pour les contraintes non actives.

Les multiplicateurs de Lagrange μ_k sont déterminés par la résolution du système d'équations suivant :

$$S_k^T \mu_k = c \tag{8.25}$$

Si tous les multiplicateurs de Lagrange μ_k sont positifs, x_k est la solution optimale du problème (8.12)-(8.14). Si toutefois un des multiplicateurs μ_k est négatif et correspond à une contrainte active, cette contrainte doit être retirée de l'ensemble des contraintes actives et une

nouvelle itération est requise. Une contrainte d'inégalité active associée à un multiplicateur de Lagrange négatif indique que la fonction objective peut être améliorée en désactivant cette contrainte.

Un pseudo-code de haut niveau de l'algorithme d'activation des contraintes a la structure suivante [58]:

ALGORITHME D'ACTIVATION DES CONTRAINTES

Étape 1 : Trouver un point de départ admissible x_0.

Si un tel point n'existe pas, le problème d'optimisation est alors non réalisable. Alors c'est la fin. Sinon aller à l'**étape 2**. .

Étape 2 : Pour $k = 0,1,.....N_{\max}$,

1. Identifier l'ensemble des indices des contraintes actives $I_k = \{i = 1,..,p \mid \mathrm{A_{ineq}}(:,\mathrm{i}).\mathrm{x_k} = 0\}$ puis déterminer la matrice AS_k.
2. Trouver une direction de recherche d_k puis calculer les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes actives (μ_k^{active}) (selon 8.23 et 8.25).
3. Si $d_k = 0$,

   Si $\mu_k^{active} \geq 0$ alors x_k est un optimum. Dans ce cas c'est la fin.

   Sinon enlever un sous-ensemble de contraintes correspondant aux multiplicateurs de Lagrange négatifs. Enlever les contraintes selon la valeur du multiplicateur de Lagrange la plus négative et $k = k + 1$
4. Si $d_k \neq 0$,
   - Déterminer le pas de déplacement α selon (8.24),
   - Poser $x_{k+1} = x_k + \alpha d_k$, et $k = k + 1$.

Étape 3 : Fin pour

Figure 8.5 : Algorithme d'activation de contraintes

En résumé, la méthode d'activation des contraintes est un algorithme itératif qui génère une suite de directions de descente qui améliorent la valeur de la fonction objective. À chaque itération, le domaine des points réalisables est réduit en gardant à jour une approximation de l'ensemble des contraintes actives. Pour les problèmes d'optimisation quadratique strictement convexes comme c'est le cas pour le problème d'optimisation (8.1)-(8.7), cet algorithme converge en un nombre fini d'itération si on suppose que pour toute direction de descente non nulle il existe un pas de déplacement différent de zéro [58]. Tous les détails techniques concernant l'implantation et la convergence de cet algorithme sont donnés dans les références [58] et [60].

8.2.3 Initialisation de l'algorithme d'activation de contraintes

L'algorithme commence par déterminer une solution initiale. Étant donné que le problème d'optimisation (8.1)-(8.7) cherche à minimiser la carré de la différence entre les niveaux réels et les niveaux cibles des réservoirs, nous avons cherché une solution initiale qui est le plus près possible de ces niveaux. La procédure d'initialisation que nous avons adoptée comprend les trois étapes suivantes:

1. déterminer l'évolution du système : le système est en phase de vidange lorsque le contenu du réservoir agrégé à la fin de la semaine est plus petit que le contenu au début de la semaine, c'est-à-dire lorsque $X_{t+1} - X_t \leq 0$. Le système est en phase de remplissage lorsque le contenu du réservoir agrégé à la fin de la semaine est plus grand que le contenu du début de la semaine, c'est-à-dire lorsque $X_{t+1} - X_t \geq 0$. De manière générale, l'évolution du système est déterminée par la différence entre l'apport total en énergie et la demande dans une période donnée. Lorsque $Q_t - D_t$ est positif, le système est en phase de remplissage. Sinon, il est en phase de vidange. Cette définition ne tient pas compte des périodes où le système doit être vidé même si les apports naturels sont suffisants pour satisfaire la demande. Autrement dit, le réservoir pourrait être vidé pour recevoir les fortes pluies du printemps et de l'automne et ainsi prévenir les inondations.

2. Si le système est dans une phase de remplissage, alors répartir le contenu du réservoir agrégé en s'inspirant de l'«*Energy storage rules*» [46] qui elle maximise l'énergie stockée

dans le système à la fin de la semaine courante. Cette règle commence par stocker l'eau dans le réservoir de tête, puis dans le deuxième réservoir, dans le troisième, etc. Le stockage de l'eau est avantageux dans les réservoirs du haut, car l'eau stockée en haute altitude a un contenu énergétique plus élevé que l'eau stockée à basse altitude. Ceci est particulièrement vrai pour l'eau stockée dans les réservoirs en série, où l'eau turbinée des réservoirs en amont permet de générer de l'énergie hydroélectrique au réservoir en aval.

3. Si le système est dans une phase de vidange ou phase de génération, répartir le contenu du réservoir agrégé en adoptant l'«*hydropower production rules*» qui consiste à remplir les réservoirs selon leur potentiel de production que nous avons estimé par l'indice $\hat{Ip}_i$ défini dans la section 7.5 du chapitre 7.

Cette procédure d'initialisation peut être vue comme un premier choix de l'ensemble des contraintes actives. En effet, l'utilisation de l'une des deux règles expliquées ci-dessus est équivalente à activer les contraintes de bornes pour certains variables.

8.3 Simulation

8.3.1 Algorithme de simulation

Nous avons simulé la gestion de la rivière La-Grande avec l'algorithme suivant :

ALGORITHME DE SIMULATION

Étape 1 : Fixer t = 1;

Étape 2 : Calculer le contenu énergétique du réservoir agrégé X_t et générer Y_t avec (7.1);

Étape 3 : Déterminer G_t^*, la production optimale du réservoir agrégé, à partir de la politique de gestion du réservoir agrégé obtenue avec la PDS ;

Étape 4 : Déterminer $X_{t+1} = X_t + Y_t - G_t^*$. .

Étape 5 : Résoudre le problème d'optimisation (8.1)-(8.7) ;

Étape 6 : Si $t = T$ aller à **l'étape suivante** ; Sinon $t = t + 1$ et aller à **l'étape 2**

Étape 7 : Fin.

Figure 8.6 : Algorithme de simulation de la politique de gestion

Dans cet algorithme, le suivi des niveaux cibles est assuré par la résolution du problème d'optimisation (8.1)-(8.7), alors que dans le chapitre précédent, le suivi des niveaux cibles a été fait par une heuristique.

8.3.2 Résultats de simulation

Le tableau 8.1 montre les résultats obtenus avec notre nouvelle approche et les comparent à ceux obtenus avec l'ancienne approche. De manière générale, nous obtenons une nette amélioration de la fonction objective et une nette diminution des volumes d'eau déversés. Ce gain est obtenu de l'utilisation des niveaux cibles et ceci non seulement pour chacun des réservoirs, mais pour

chaque sous-système formé de plusieurs réservoirs adjacents. L'ajout des sous-systèmes a permis de mieux répartir le contenu du réservoir agrégé et d'éviter certains déversements.

Le fait de définir des niveaux cibles pour tous les systèmes de réservoirs adjacents a conduit à mieux représenter la dépendance entre les réservoirs, ce qui n'était pas fait antérieurement. Rappelons que pour un système de plusieurs réservoirs, le soutirage optimal d'un réservoir est fonction du contenu de ce réservoir et du contenu de tous les autres réservoirs du système. Cependant, il faut être très prudent lorsqu'on utilise les fonctions de balancement pour estimer des niveaux cibles lorsque le contenu du réservoir agrégé n'appartient pas à la plage des valeurs des résultats déterministes. En effet, nous avons ajusté les modèles de régression seulement sur la plage des résultats déterministes, et nous ne disposons d'aucune garantie quant à la validité de ces modèles à l'extérieur de ces plages de valeurs.

La résolution d'un problème d'optimisation à chaque pas de temps n'a pas affecté le temps total de résolution. En effet, nous avons résolu le problème à 7 réservoirs en moins de 5 minutes.

Tableau 8.1 : Tableau comparatif des résultats de simulation

Nombre de réservoirs en série	*Demande moyenne (GWh)*	*Quantité moyenne d'énergie produite (GWh)*		*Déversement moyen (hm3)*		*Valeur de la fonction objective*		*% d'écart par rapport à la PDS*	
		approche modifiée	ancienne approche	approche modifiée	ancienne approche	approche modifiée	ancienne approche	approche modifiée	ancienne approche
2	4000	3953	4283	89	176.28	28.7	29.6	3.0	5.7
3	10000	11991	12057	163.45	178.29	19.43	20.52	5.6	9.4
7	80000	92334	98627	187.66	336.94	110.21	185.28		

La Figure 8.7 montre comment l'utilisation d'un problème d'optimisation a permis de modifier le comportement du réservoir 7 (réservoir de petite capacité) afin d'éviter certains déversements. Avec un problème d'optimisation, le niveau du réservoir 7 est baissé de façon à éviter les déversements inutiles ce qui n'était pas possible avec l'heuristique du chapitre précédent. La Figure 8.7 montre les courbes de turbinage de tous les réservoirs de la rivière. Nous constatons par exemple que, pour le réservoir 7 qui a un contenu presque constant durant toute l'année, la variation de production dépend essentiellement de la variation du débit turbiné. Cependant, la

grande variation du soutirage d'une période à une autre peut limiter l'application de la méthode à un cas réel.

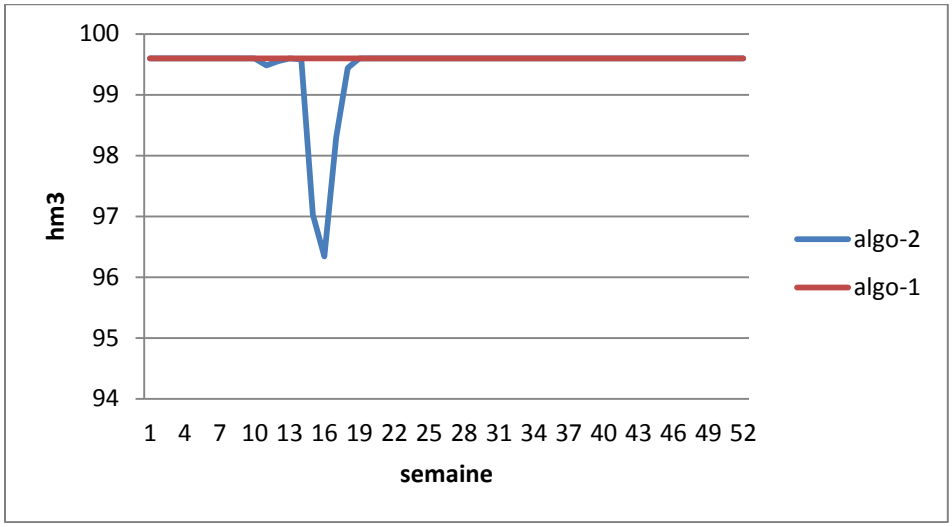

Figure 8.7 : Contenu du réservoir 7 (algo-1: algorithme du chapitre 7 et algo-2 : algorithme du chapitre 8)

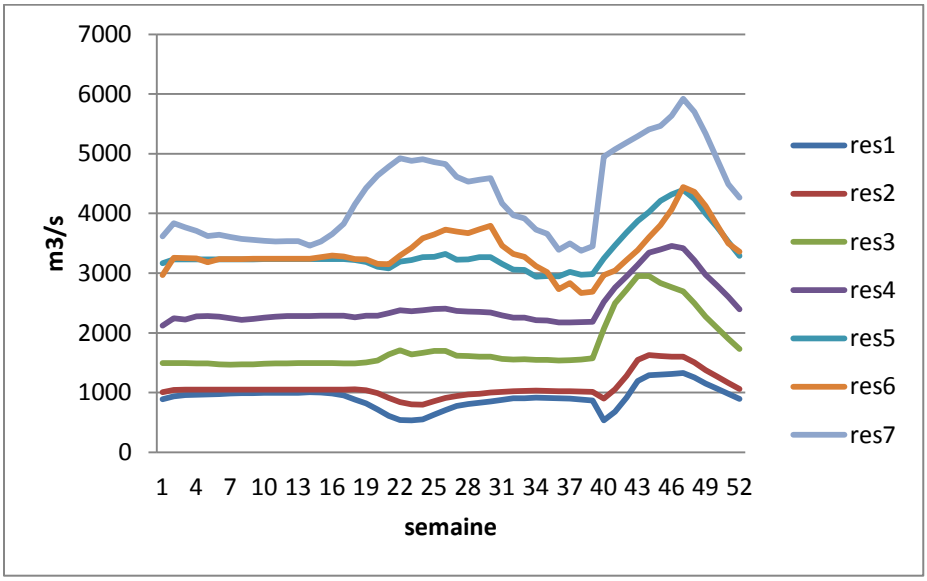

Figure 8.8 : Soutirages moyens des 7 réservoirs de la rivière La-Grande

CONCLUSION ET AMÉLIORATIONS FUTURES

Le but principal de cette thèse était de développer un outil mathématique capable de gérer efficacement et en un temps raisonnable un grand nombre d'installations hydroélectriques interconnectées. Pour résoudre le problème, nous avons développé une méthode d'agrégation-désagrégation qui consiste tout d'abord à agréger toutes les installations puis à les désagréger par la suite. La règle de gestion de toutes les installations agrégées est déterminée par la programmation dynamique stochastique et est donc optimale. Le grand défi de cette thèse était de trouver la meilleure façon de désagréger le réservoir agrégé.

La désagrégation est faite par une méthode de balancement des réservoirs qui détermine à chaque pas de temps le contenu cible de chaque réservoir en fonction du contenu du réservoir agrégé. Ayant déterminé les contenus cible, la règle de gestion consiste alors à maintenir le niveau de chaque réservoir prés de son niveau cible.

Pour modéliser les fonctions de balancement, nous avons appliqué la méthode de régression MARS aux solutions déterministes du problème de gestion, c'est-a-dire, aux solutions obtenues de la résolution du problème de gestion pour un grand nombre de scénarios d'apports. Selon notre recherche bibliographique, nous sommes les premiers à utiliser la méthode de régression MARS pour modéliser les fonctions de balancement.

Les niveaux cibles déterminés par les fonctions de balancement à la période $t+1$ sont indépendants des niveaux cibles déterminés à la période t, ce qui à l'occasion peut donner des solutions non réalisables. Pour résoudre le problème, nous avons construit un modèle d'optimisation qui puisse déterminer les soutirages réalisables et minimiser les écarts des niveaux cibles. Notons qu'un niveau cible a été déterminé pour chacun des réservoirs et pour chaque combinaison de deux, trois ou plusieurs réservoirs adjacents. L'extension de la notion du niveau cible et du balancement des réservoirs à des sous-systèmes formés de un, deux, et plusieurs réservoirs agrégés est définitivement une contribution majeure de cette thèse.

Quoique notre approche ait résolu efficacement un problème de grande taille, nous pensons qu'il est encore possible d'apporter des améliorations à la méthode que nous avons développée. Plus précisément, nous avons constaté que pour certains réservoirs, la qualité du modèle de régression est médiocre. Pour remédier à cette situation, nous avons agrégé ces réservoirs avec d'autres afin d'obtenir des sous-systèmes qui ont une plus grande corrélation avec le réservoir agrégé. Cette approche a fonctionnée, car le système contient déjà des réservoirs qui sont fortement corrélés avec le réservoir agrégé. Que ce passe-t-il si de tels réservoirs n'existent pas. Nous suggérons d'introduire de nouvelles variables indépendantes dans les fonctions de balancement, tels que les apports en eau, et d'effectuer des analyses par régression multiple à la place de la régression simple proposée dans cette thèse..

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Ginocchio, *L´Énergie hydraulique*. Paris., 1978.

[2] Hydro-Québec. *Hydro-Québec production. http://www.hydroquebec.com/production. Pages consultées en 2005.*

[3] H. Varlet, *Turbines hydrauliques et groupes hydroélectriques.* . Eyrolles, Paris., 1964.

[4] Hammadia A., "Contributions à l'optimisation, en temps réel et à court terme, des ressources hydroélectriques d'une rivière. ," Dept math. et génie ind., École Polytechnique de Montréal, , Montréal., 2000.

[5] A. Turgeon, "Solving a stochastic reservoir management problem with multi-lag autororrelated inflows," Les cahiers de GERAD, G-2004-88, Décembre 2004.

[6] A. Turgeon, "Stochastic optimization of multireservoir operation: The optimal reservoir trajectory approach," *Water Resources Research*, vol. 43, 2007.

[7] W. W. G. Yeh, "Reservoir management and operation model: A state-of-the-art review," *Water Resources Research*, vol. 21, pp. 1797-1818, 1985.

[8] J. Labadie, "Optimal operation of multireservoir systems : State-of-the-Art Review.," *J. Water Resour. Plan. Manage.,*, vol. Vol. 129, pp. 388-398., 2004.

[9] K. Hiew, Labadie, J., and Scott, J., ,, "Optimal operational analysis of the Colorado-Big Thompson project. ," *Computerized decision support systems for water managers* vol. J. Labadie et al., eds., ASCE, Reston, Va., , pp. 632–646., 1989.

[10] H. Raman and V. Chandramouli, "Deriving a general operating policy for reservoirs using neural network," *Journal of Water Resources Planning and Management*, vol. 122, pp. 342-347, 1996.

[11] J. Lund and I. Ferreira, "Operating rule optimization for Missouri River reservoir system.," *J. Water Resour. Plan. Manage.*, vol. 122, pp. 287–295, 1996.

[12] M. Karamouz, Houck, M., and Delleur, J. , "Optimization and simulation of multiple reservoir systems. ," *J. Water Resour. Plan. Manage.,* . vol. 118 pp. 71-81, 1992.

[13] N. Mizyed, J. Loftis, and D. Fontane, "Operation of large multireservoir systems using optimal-control theory.," *J. Water Resour. Plan. Manage., ,* vol. 118, pp. 371–387., 1992

[14] S. P. Simonovic, "Reservoir systems analysis : closing gap between theory and practice," *ASCE- Journal of Water Resour. Plan. and Man.,*, vol. Vol. 118, pp. 262-280. , 1992.

[15] R. A. Wurbs, "Reservoir-system simulation and optimization models," *ASCE- Journal of Water Resour. Plan. and Man., ,* vol. Vol. 119, pp. 455-472. , 1993.

[16] R. Oliveira and D. P. Loucks, "Operating rules for multireservoir systems," *Water Resources Research,* vol. 33, pp. 839-852, 1997.

[17] T. W. Archibald, K. I. M. McKinnon, and L. C. Thomas, "An aggregate stochastic dynamic programming model of multiple reservoir systems," *Water Resources Research,* vol. 33, pp. 333-340, 1997.

[18] A. Turgeon, "A decomposition method for long-term scheduling of reservoirs in series," *Water Resources Research,* vol. 17, pp. 1565-1570, 1981.

[19] A. Turgeon, "Optimal operation of multireservoir power systems with stochastic inflows," *Water Resources Research,* vol. 16, pp. 275-283, 1980.

[20] P. Lederer, Torrion ,P. and J.P. Bouette, , "A global feedback for the French system generation planning. in the 11th IFIP conference on system modeling and optimization, pp. 215-225, Vol. D8, techniques de l'ingénieur.," ed, 1983.

[21] M. Saad and A. Turgeon, "Application of principal component analysis to long-term reservoir management," *Water Resources Research,* vol. 24, pp. 907-912, 1992.

[22] M. Saad, A. Turgeon, P. Bigras, and R. Duquette, "Learning disaggregation technique for operation of long-term hydroelectric power systems," *Water Resources Research,* vol. 30, pp. 3195-3202, 1994.

[23] M. Saad, P. Bigras, A. Turgeon, and R. Duquette, "Fuzzy learning decomposition for the scheduling of hydroelectric power systems," *Water Resources Research,* vol. 32, pp. 179-186, 1996.

[24] A. Georgakakos and D. Marks, "A new method for real-time operation of reservoir system," *Water Resources Research,* vol. 23, pp. 1376-1390, 1987.

[25] E. R. Hooper, Georgakakos, A.P., , "Optimal stochastic operation of the Salt River Project, Arizona," *ASCE- Journal of Water Resour. Plan. and Man.,* , vol. Vol. 117, pp. 566-587.

[26] D. M. Murray and S. J. Yakowitz, "Constrained differential dynamic programming and its application to multireservoir control," *Water Resources Research,* vol. 15, pp. 1017-1027, 1979.

[27] T. Trezos and W. W. G. Yeh, ,, "Use of stochastic dynamic programming for reservoir management. ," *Water Resour. Res,* vol. Vol. 23, pp. 983-996. , 1987.

[28] F. El-Awar and J. W. Labadie, "Stochastic differential dynamic programming for multireservoir system control," *Stochastic Hydrology and Hydraulics,* vol. 12, pp. 247-266, 1998.

[29] E. Foufoula-Georgiou and P. K. Kitanidis, "Gradient dynamic programming for stochastic optimal control of multidimentional water ressources systems," *Water Resources Research*, vol. 24, pp. 1345-1359, 1988.

[30] M. Pereira, "Optimal stochastic operations of a large hydroelectric system," *Electr. Power Energy Syst.*, vol. 11, pp. 161-169, 1989.

[31] M. Yang, Read, E.G.,, "A constructive dual dynamic programming for reservoir model with correlation.," *Water Resour. Res.*, vol. Vol. 35,, pp. 2247-2257, 1999.

[32] J. Otero, Labadie, J., and Haunert, D., , "Optimization of managed runoff to the St-Lucie Estuary. ," presented at the Water Resources Engineering Division, ASCE, , St Antonio. , 1995.

[33] M. Sharif and R. Wardlow, "Multireservoir systems optimization using genetic algorithms : Case study," *Journal of Comput. Civ. Eng.*, , vol. Vol. 14, , pp. 255-263., 2000.

[34] X. Cai, McKinney, D. and Ladson, L., , "Solving nonlinear water management models using a combained genetic algorithm and lineair programming approach.," *Adv. Water Resources*, , vol. Vol. 24 pp. 667-676, 2001.

[35] B. Shrestha, Duckstein, L., and Stakhiv, E.,, " Fuzzzy rule-based modeling of reservoir operation," *Fuzzzy rule-based modeling of reservoir operation,* vol. Vol. 122, pp. 262-269., 1996.

[36] J. Labadie, Brazil, L., Corbu, I., and Johnson, L., , "Computerized decision support systems for water managers," Reston, Va., 1989.

[37] J. Labadie, Baldo, M., and Larson, R., , "MODSIM : Decision support system for river basin managementm. Documentation and user manual," Dept. of Civil Engineering, Colorado State Univ., Ft. Collins, Colo. 2000.

[38] A. Turgeon and R. Charbonneau, "An aggregation-disagregation approach to long-term reservoir management," *Water Resources Research,* vol. 34, pp. 3585-3594, 1998.

[39] D. Koutsoyannis, Efstratiadis, A., Karavokiros, G., , "A decision support tool for the management of multireservoir systems. ," *Jour. of the Amirican Water Resour. Asso.*, , vol. Vol. 38, pp. 945-958, 2002.

[40] I. Nalbantis, Koutsoyiannis, D., , "A parametric rule for planning and management of multi-reservoir systems," *Water Resour. Res.*, vol. Vol. 33, pp. 2165-2177. , 1997.

[41] A. Turgeon, "Modèle PERESE (version1)," Hydro-Québec.1996.

[42] D. P. Bertsekas, *Dynamic Programming and Optimal Control*: Athena Scientific, 2007.

[43] K. Hiew, . PhD dissertation, , "Optimization algorithms for large scale multi-reservoir hydropower systems," Dept. of Civil Engineering,, Colorado State Univ., Ft. Collins, Colo. , 1987.

[44] J. Grygier, and Stedinger, J.,, "Algorithms for optimizing hydropower system operation," *Water Resour. Res,* vol. 21, pp. 1–10, 1985.

[45] M. Bazarra, Sherali, H., Shetty,C.,. *Non lineair programming theory and algorithm*, 1993.

[46] J. R. Lund, Guzman, J., , "Derived operating rules for reservoirs in series or in parallel.," *J. Water Resour. Plan. Manage.*, vol. Vol. 125, pp. 143-153, 1999.

[47] G. Jekabsons. (2010). *ARESLab: Adaptive Regression Splines toolbox for Matlab/Octave . http://www.cs.rtu.lv/jekabsons. (pages consultées en 2010).*

[48] J. H. Friedman, "Multivariate Adaptive Regression Splines (with discussion)," *The Annals of Statistics* vol. Vol. 19, , pp. pp. 1-141., 1991.

[49] S. Multivariate-adaptive-regression-splines. (page consultées en 2010). *http://www.statsoft.com/textbook/multivariate-adaptive-regression-splines /TechnicalNotesalgorithm.*

[50] Ginsbourger D., "Métamodeles multiples pour l'approximation et l'optimisation de fonctions numériques multivariables. ," École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne., 2009.

[51] T. Hastie, Tibshirani, R., Friedman J.H. , "The Elements of Statistical Learning: Data mining, Inference, and Prediction," in *New York, NY, USA,*, S.-V. S. edition., Ed., ed, 2009.

[52] D. P. Loucks, Stedinger, J., Haith, D., , *Water ressource systemes planning and analysis*. N.J.: Prentice-Hall, 1981.

[53] D. R. Maidment, *Handbook of Hydrology*: McGraw-Hill: New York, 1993.

[54] J. J. Filliben, "The Probability Plot Correlation Coefficient Test for Normality," *Technometrics*, vol. 17, pp. 111-117, 1975.

[55] Régnier A., "Détermination d'un horaire optimal d'arret des groupes turbo-alternateurs.," Ph.D, École Polytechnique de Montréal, Montréal., 2008.

[56] Lund, J.R. and J. Guzman, (1996), "Developing Seasonal and Long-term Reservoir System Operation Plans using HEC-PRM", Technical Report RD-40, Hydrologic Engineering. Center, U.S. Army Corps of Engineers, Davis, CA, June.

[57] U.S. Army Corps of Engineers (1985), *Engineering Manual: Engineering and Design, Hydropower*, EM 1110-2-1701, U.S. Army Corps of Engineers, Washington D.C.

[58] Nocedal, Jorge; Wright, Stephen J. (2006). *Numerical Optimization* (2nd ed.). Berlin, New York: Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-30303-1.

[59] Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Active_set. Pages consultées en mai -juin 2011

[60] Mathwork, http://www.mathworks.com/help/toolbox/optim, 2008.