

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MISE EN ŒUVRE DU MODÈLE ET SYNTHÈSE D'UNE LOI DE COMMANDE
PAR COMMUTATION DE COMPENSATEURS POUR UN AVION
COMMERCIAL

ALEXANDRE DARBOIS
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES (M.Sc.A.)
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
NOVEMBRE 2002



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-81540-4

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MISE EN ŒUVRE DU MODÈLE ET SYNTHÈSE D'UNE LOI DE COMMANDE
PAR COMMUTATION DE COMPENSATEURS POUR UN AVION
COMMERCIAL

présenté par : DARBOIS Alexandre

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès Sciences Appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. O'SHEA Jules, D.Ing., président

M. GOURDEAU Richard, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. SAYDY Lahcen, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. AKHRIF Ouassima, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord mes directeurs de recherche, Richard Gourdeau et Lahcen Saydy, qui m'ont accueilli dans le service d'automation et systèmes, et qui m'ont fait découvrir le monde de la recherche scientifique. Leur présence et leurs conseils à des moments-clé ainsi que leur soutien financier m'ont permis d'accomplir ce travail.

Je remercie aussi les collègues du laboratoire d'automatique, particulièrement David, ainsi que Javad et les autres qui se reconnaîtront certainement, pour nos discussions aussi bien techniques que diverses, les techniciens du service d'automation, notamment Marie-Lyne, toujours présente, et les différents professeurs que j'ai pu côtoyer lors de ma scolarité à Poly.

Je tiens également à dire un grand merci à toutes les personnes qui ont pu contribuer à faire de ce séjour au Québec une expérience très enrichissante de rencontres, périples et autres découvertes, avec une pensée particulière pour Jean et Micheline.

Je remercie également mes parents — mon père pour les instants consacrés à la relecture attentive de ce mémoire —, ma famille, et mes amis de France qui ont toujours su être proches ... à distance.

Enfin, je suis particulièrement reconnaissant à *Émilie*, qui a vécu ce travail, et qui a toujours été présente à mes côtés aussi bien pour les moments d'euphorie que pour les périodes plus difficiles, et dont l'attention et le soutien au quotidien m'ont été précieux.

RÉSUMÉ

L'objectif de ce travail est de concevoir une loi de commande pour un autopilote d'avion commercial, valable pour toute l'enveloppe de vol. La première étape d'un tel projet est d'obtenir le modèle linéarisé du système à contrôler : disposant d'un recueil complet de données aérodynamiques et de simulations, édité par la compagnie *Boeing Inc.* pour le Jumbo Jet *B-747*, nous avons appliqué, en exploitant largement ces données, une étude théorique de modélisation d'un avion à cet appareil. Nous avons d'abord obtenu son modèle non linéaire, puis après découplage son modèle longitudinal linéarisé en toute condition de vol.

Dans un deuxième temps et après une revue de littérature des méthodes de synthèse de loi de commande pour avions, nous avons choisi de concevoir une structure de commande contenant plusieurs contrôleurs, où il y a commutation entre ces derniers en fonction des conditions de vol dans lesquelles se trouve l'appareil. La méthode utilisée est la synthèse H_∞ , qui fournit la robustesse nécessaire aux contrôleurs pour être valables dans un domaine de vol suffisamment élargi. Après avoir étudié, puis validé, une méthode pour assurer des commutations en douceur entre les différents signaux de commande, nous avons étudié une structure de contrôle séquencée par commutation de contrôleurs («Gain-Scheduling»). Puis un critère de performance a été choisi pour sélectionner les contrôleurs à utiliser dans cette structure, dans le but d'en utiliser le moins possible.

Une dernière étape de validation de la loi de commande conçue permet de s'assurer de son bon fonctionnement et de la performance atteinte, conforme aux critères fixés. De plus, cette recherche a mené à la conception d'interfaces graphiques permettant de retrouver simplement les résultats présentés dans ce mémoire et de visualiser les mouvements du *Boeing 747* au travers d'une animation.

ABSTRACT

The main goal of this work is to design a control law for a commercial airplane autopilot, available through the entire flight envelope. The first step of such a project is to obtain the linearised model of the system we seek to control. This was carried out based on a full compendium edited by the *Boeing Company Inc.* of aerodynamic data and simulations of the *B-747 aircraft* we had at our disposal. Firstly, we obtained its nonlinear model and then, after decoupling, its linearised longitudinal model which is available for any flight condition.

Secondly, after a review of command law synthesis methods for aircraft, we decided to design a control structure containing several controllers which switch from one to another according to the flight condition of the aircraft. The method used, whose theory is widely studied, was the H_∞ synthesis which gives the necessary robustness to controllers to perform well over a wide enough flight domain. After studying and validating a method to ensure bumpless switching between command signals (the so-called observer-based method), we studied a control structure with gain-scheduling. A performance criterion was chosen to select which controllers had to be used in this structure, considering that the aim was to use the least number of them.

The last step consisted in validating the designed control law : we sought to ensure its smooth functioning and to reach the performance awaited. Moreover, this work led to designing graphical interfaces permitting to easily apply the results presented in this dissertation, and to show the motions of the *Boeing 747* through an animation.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	xi
LISTE DES FIGURES	xii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xvi
LISTE DES ANNEXES	xviii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : REPÉRAGE DE L'AVION DANS L'ESPACE . . .	4
1.1 Repères de base	4
1.2 Angles entre les repères	6
1.2.1 Passage du repère NED $\mathcal{R}_0$ au repère avion $\mathcal{R}_a$	7
1.2.2 Équations auxiliaires	8
1.2.3 Passage du repère avion $\mathcal{R}_a$ au repère de stabilité $\mathcal{R}_s$	10
1.3 Mouvement de l'avion en translation	11
1.3.1 Décomposition du vecteur vitesse de l'avion	11
1.3.2 Mouvement longitudinal de l'avion	11
1.3.3 Relations dans le repère <i>avion</i>	12

CHAPITRE 2 : MODÈLE LONGITUDINAL DE LA DYNAMIQUE

DE L'AVION	14
2.1 Hypothèses et données pour la modélisation	14
2.1.1 Hypothèses relatives à l'avion	14
2.1.2 Hypothèses relatives à l'environnement terrestre	16
2.2 Modèle mécanique de l'avion	17
2.2.1 Caractéristiques de l'avion	17
2.2.2 Choix du repère de travail	20
2.2.3 Théorème de la résultante dynamique	20
2.2.4 Théorème du moment cinétique	21
2.3 Efforts extérieurs appliqués à l'avion	23
2.3.1 Poids de l'avion et centre de gravité	23
2.3.2 Forces et moments aérodynamiques	24
2.3.3 Poussée	26
2.4 Modèle longitudinal de l'avion	26
2.4.1 Hypothèses relatives au vol longitudinal	26
2.4.2 Notations relatives au modèle longitudinal	27
2.4.3 Modèle longitudinal pour le vol en croisière	28
2.4.4 Étude de l'équilibre	29
2.5 Linéarisation du modèle longitudinal	31
2.5.1 Linéarisation des équations	31
2.5.2 Linéarisation des efforts extérieurs	32
2.5.3 Modèle d'état	34

CHAPITRE 3 : MODÉLISATION ET SIMULATION DU *BOEING*

<i>747</i>	36
3.1 Description du <i>Boeing 747</i>	36
3.1.1 Historique	36
3.1.2 Caractéristiques techniques	37

3.1.3	Surfaces de commande	38
3.1.4	Procédure d'interpolation des données	40
3.2	Synthèse du modèle longitudinal	43
3.2.1	Données d'inertie	44
3.2.2	Données aérodynamiques	44
3.2.3	Modèle de la poussée	53
3.2.4	Configuration des volets et becs	53
3.2.5	Modèle longitudinal du <i>Boeing 747</i>	54
3.3	Simulateur du vol longitudinal	57
3.3.1	Principe	57
3.3.2	Description du module « GUI »	58
3.3.3	Utilisation du module « GUI »	58
3.3.4	Charge de calcul du simulateur	61
3.3.5	Résultats obtenus	62
3.4	Modes longitudinaux	62

CHAPITRE 4 : CONCEPTION DE CONTRÔLEURS POUR LE VOL LONGITUDINAL

4.1	Problématique	65
4.2	Revue de littérature	66
4.2.1	Description du système	66
4.2.2	Synthèse des contrôleurs	68
4.2.3	Méthodes de design	69
4.2.4	Stratégie envisagée	73
4.3	Synthèse de contrôleurs H_∞	74
4.3.1	Présentation du problème H_∞ standard	75
4.3.2	Résolution du problème H_∞ par l'algorithme DGKF	77
4.3.3	Mise en forme du problème H_∞ : exemple du problème de la sensibilité mixte	81

4.4	Commutation des contrôleurs	88
4.4.1	Présentation du problème de commutation	88
4.4.2	Synthèse d'une structure de commande pour la commutation	89
CHAPITRE 5 : IMPLANTATION DE LA LOI DE COMMANDE		95
5.1	Synthèse des contrôleurs H_∞	95
5.1.1	Mise en oeuvre	95
5.1.2	Structure utilisée	97
5.1.3	Performance et choix des pondérations	98
5.1.4	Mise sous forme standard	104
5.1.5	Synthèse des contrôleurs	106
5.1.6	Résultats	108
5.2	Commutation des contrôleurs	120
5.2.1	Choix de la structure de commutation	120
5.2.2	Choix du gain H de l'observateur	120
5.2.3	Exemples de commutation de deux contrôleurs	122
5.3	Implantation de la structure de commande	128
5.3.1	Définition de l'enveloppe de vol	128
5.3.2	Choix des sous-domaines de vol	130
5.3.3	Description de la structure de commande	133
5.4	Simulation et résultats	135
5.4.1	Module GUI <i>gui747</i>	135
5.4.2	Validation de la performance de la structure de commande	142
CONCLUSION		151
BIBLIOGRAPHIE		153
ANNEXES		156

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Valeurs limites des angles d'Euler.	7
1.2	Valeurs limites des angles d'incidence et de dérapage.	10
2.1	Notations adoptées pour les variables d'état.	31
3.1	Limites de débattement et de vitesse de variation des élévateurs. . . .	39
3.2	Valeurs possibles pour l'angle des volets.	40
3.3	Détail des composantes du coefficient C_L	45
3.4	Détail des composantes du coefficient C_D	48
3.5	Détail des composantes du coefficient C_m	51
3.6	Limites de vitesse V_E en fonction de l'angle de volets sortis.	54
3.7	Temps de calcul du simulateur.	61
5.1	Limites de débattement et de vitesse de variation des élévateurs. . . .	100
5.2	Nombre de conditions pré-calculées.	130
5.3	Caractéristiques des différentes entrées possibles et conditions d'utili- sation.	139
5.4	Transitions sur la trajectoire de l'appareil.	144
I.1	Dérivées de stabilité pour la force de portance F_{z_s}	156
I.2	Dérivées de stabilité pour la force de traînée F_{x_s}	157
I.3	Dérivées de stabilité pour le moment en tangage M_{y_s}	157

LISTE DES FIGURES

1.1	Les repères $NED \mathcal{R}_0$ et avion $\mathcal{R}_a$	5
1.2	Les repères avion $\mathcal{R}_a$ et de stabilité $\mathcal{R}_s$	6
1.3	Les repères et angles caractéristiques du mouvement longitudinal. . .	12
2.1	Position du centre de gravité G sur la corde aérodynamique moyenne $\bar{c}$. .	24
2.2	Positions du centre de gravité G de l'avion et du foyer F du profil. . .	24
2.3	Grandeurs caractéristiques du mouvement longitudinal : efforts extérieurs, angles, vitesse.	27
3.1	Le <i>Boeing 747-400</i> sous différents angles, et ses dimensions.	37
3.2	Les surfaces de commande du <i>Boeing 747</i>	38
3.3	La composante basique originale du coefficient C_L	41
3.4	La composante basique expérimentale du coefficient C_L	42
3.5	Représentation du moment d'inertie I_{yy}	44
3.6	Représentation du coefficient de portance $C_{L_{basic}}$ en fonction de l'inci- dence α	46
3.7	Représentation du coefficient de traînée C_{D_M} en fonction de C_L^* pour <i>Mach</i> 0,7.	49
3.8	Représentation du coefficient de moment en tangage $C_{m,25 basic}$ en fonc- tion de l'incidence α	52
3.9	Module « GUI » permettant de calculer le modèle d'état longitudinal du <i>Boeing 747</i>	58
3.10	Simulation du modèle longitudinal en réponse à un échelon de l'élévateur. .	63
3.11	Lieu des pôles du modèle longitudinal d'ordre 4.	64
4.1	Problème H_∞ standard	75
4.2	Asservissement de référence pour la méthode H_∞	82
4.3	Représentation standard pour le problème de sensibilité mixte	82

4.4	Valeurs singulières maximales des fonctions de sensibilité S et T . . .	83
4.5	Mise en place des pondérations W_1 et W_2 pour le problème de sensibilité mixte	85
4.6	Montage pour l'étude du problème de sensibilité mixte généralisé . . .	86
4.7	Étude du suivi de commande	88
4.8	Étude de l'atténuation de saturation	89
4.9	Étude de la commutation de deux contrôleurs	90
4.10	Structure de suivi de signaux par estimation	91
4.11	Montage pour l'étude de la commutation de deux contrôleurs $K_{1_{est}}$ et $K_{2_{est}}$	92
5.1	Le montage utilisé pour la synthèse H_∞ de contrôleurs.	97
5.2	Définition des symboles pour le vol longitudinal de l'avion.	98
5.3	Schéma de la structure de commande globale.	99
5.4	Gabarits sur la fonction de sensibilité S	101
5.5	Gabarit sur la commande u_K	103
5.6	La forme standard du système contrôleur/avion.	104
5.7	Allure fréquentielle des valeurs singulières de la fonction de sensibilité S et du gabarit associé W_1^{-1}	109
5.8	Allure fréquentielle des valeurs singulières de la fonction KS et du gabarit associé W_2^{-1}	110
5.9	Allure fréquentielle des valeurs singulières de la fonction de transfert en boucle ouverte du système contrôlé.	111
5.10	Réponses du système contrôlé à un échelon de vitesse.	112
5.11	Évolution temporelle des actionneurs, en réponse à un échelon de vitesse.	113
5.12	Réponses du système contrôlé à un échelon de pente.	114
5.13	Réponses des actionneurs à un échelon de pente.	115
5.14	Réponses des élévateurs à un échelon de pente.	116

5.15 Réponses comparées de l'avion contrôlé et non contrôlé à un échelon des élévateurs.	118
5.16 Réponses à un créneau de perturbation sur la vitesse de tangage q . . .	119
5.17 Montages pour l'étude de la commutation de deux contrôleurs.	122
5.18 Figure explicative de l'exemple de commutation entre les contrôleurs K_{c092} et K_{c162} , appliqués au modèle G_{c092}	123
5.19 Réponses des élévateurs à un échelon de pente, pour deux montages et avec commutation.	124
5.20 Agrandissement des réponses des élévateurs à un échelon de pente. . .	125
5.21 Réponses des élévateurs à un échelon de pente et une perturbation sur q , pour deux montages et avec commutation.	126
5.22 Réponses de l'avion à un échelon de pente et une perturbation sur q , pour deux montages et avec commutation.	127
5.23 Enveloppes de vol pour les trois masses $m = 204\,117$ kg (1), 249 476 kg (2) et 294 835 kg (3).	129
5.24 Illustration de la procédure de choix des contrôleurs à utiliser dans la structure de commande.	132
5.25 Structure complète de commande.	133
5.26 Structure complète de commande appliquée au modèle non linéaire, restreinte à deux contrôleurs.	134
5.27 Module « <i>gui747</i> » en configuration « représentations temporelles ». .	136
5.28 Module « <i>gui747</i> » en configuration « animation ».	137
5.29 Position de l'avion et de la position à l'équilibre dans l'enveloppe de vol.	140
5.30 Évolution des contrôleurs au cours d'une simulation.	141
5.31 Trajectoire de l'avion pour la simulation du modèle non linéaire. . . .	143
5.32 Réponses de la pente, de l'altitude et contrôleurs utilisés.	145
5.33 Agrandissement de la zone de commutation $3 \rightarrow 4$	146
5.34 Réponses de la vitesse, de la vitesse de tangage et du facteur de charge.	147
5.35 Agrandissement de la zone de commutation $3 \rightarrow 4$	148

5.36 Réponses temporelles des actionneurs.	149
II.1 Exemple élémentaire de design H_∞	158
III.1 Système contrôlé par un compensateur PI de paramètres K_P et K_I .	162
III.2 Structure adaptée au suivi de commande dans le cas d'un correcteur PI	163

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

Notations :

$\alpha,$	angle d'incidence, ou d'attaque (rad).
$\beta,$	angle de dérapage (rad).
$\gamma,$	angle de pente (rad).
$\Phi,$	angle de gîte (rad).
$\Psi,$	angle d'azimut (rad).
$\theta,$	angle d'assiette (rad).
$\xi,$	amortissement d'un système.
$\delta_e,$	angle de position des élévateurs (deg).
$\delta_t,$	position de la manette des gaz (%).
$\delta_F,$	angle de position des volets (deg).
$\bar{c},$	corde aérodynamique moyenne, ou MAC (m).
$C_D,$	coefficient aérodynamique de traînée (SD).
$C_L,$	coefficient aérodynamique de portance (SD).
$C_m,$	coefficient aérodynamique de moment en tangage (SD).
$\mathbf{E},$	matrice d'Euler.
$\sum \overrightarrow{\mathcal{F}_{ext}},$	somme des forces extérieures appliquées à l'avion (N).
$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{ext}},$	somme des moments extérieurs appliqués à l'avion (N.m).
$F_{x_s},$	force de portance (N).
$F_{z_s},$	force de traînée (N).
$M_{y_s},$	moment en tangage (N.m).
$h,$	altitude (m).
$[I],$	matrice d'inertie de l'avion.
$I_{yy},$	moment d'inertie en tangage (kg.m ²).
$n_z,$	facteur de charge de l'avion (SD).
$\Omega_{i/j},$	vitesse de rotation du repère i par rapport au repère j (rad.s ⁻¹).

P ,	vitesse de rotation en roulis (rad.s^{-1}).
Q ,	vitesse de rotation en tangage (rad.s^{-1}).
R ,	vitesse de rotation en lacet (rad.s^{-1}).
R_i ,	matrice de rotation d'angle i .
$\mathcal{R}_0$,	repère normal terrestre, ou NED.
$\mathcal{R}_a$,	repère avion.
$\mathcal{R}_s$,	repère de stabilité, ou aérodynamique.
$R_{i \rightarrow j}$,	matrice de passage du repère i au repère j .
ρ ,	masse volumique de l'air à une altitude donnée (kg.m^{-3}).
ρ_0 ,	masse volumique de l'air au niveau de la mer : $h = 0$ m (kg.m^{-3}).
σ_{G_a} ,	moment cinétique de l'avion dans le repère $\mathcal{R}_a$ ($\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$).
T ,	module de la poussée (N).
V ,	module de la vitesse aérodynamique de l'avion (m.s^{-1}).
V_E ,	vitesse équivalente de l'avion (m.s^{-1}).

Abréviations :

AWBT,	Anti-Windup and Bumpless Transfer.
LFT,	Linear Fractional Transformation.
LMI,	Linear Matrix Inequalities.
LPV,	Linear Parameter Varying.
MAC,	Mean Aerodynamic Chord.
MIMO,	Multiple Input Multiple Output
NED,	North-East-Down.
GUI,	Graphical User Interface.
SISO,	Single Input Single Output

Constantes physiques :

$g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$,	accélération de la gravité.
$\rho_0 = 1.225 \text{ kg.m}^{-3}$,	masse volumique de l'air au sol.

LISTE DES ANNEXES

Annexe I:	Expressions des dérivées de stabilité	156
Annexe II:	Exemple de résolution d'un problème H_∞ sur un cas élémentaire	158
Annexe III:	Exemple simple de structure permettant le suivi de commande	162
Annexe IV:	Lexique	164

INTRODUCTION

Les grands constructeurs aéronautiques souhaitent, depuis quelques décennies, construire des avions toujours plus gros, plus performants et plus confortables dans la gamme des long-courriers : le récent programme **A380** d'Airbus Industrie en est la preuve. Cette évolution s'est naturellement effectuée en relation avec les progrès de la connaissance scientifique, notamment dans les domaines de la mécanique du vol et des structures, avec l'apparition de nouveaux matériaux souples et résistants, et également dans le domaine de l'automatisme. En effet lorsque l'on parle de tels appareils, il est nécessaire de concevoir des aides au pilotage dans la mesure où un pilote ne peut pas manœuvrer régulièrement pendant de longues durées, et ce pour des questions évidentes de sécurité et de confort des passagers.

La compagnie *Boeing inc.* est pionnière dans cette catégorie, puisque c'est elle qui a conçu le premier jumbo-jet *B-747*, dont la mise en service a eu lieu en 1970. Depuis, cet appareil n'a cessé de subir des évolutions techniques, au point que l'on peut raisonnablement dire qu'une de ses versions actuelles n'a plus beaucoup de points communs avec son ancêtre, si ce n'est sa silhouette.

C'est dans ce contexte que nous nous sommes intéressé à la conception de loi de commande pour un autopilote d'avion commercial. Disposant d'un recueil complet de données aérodynamiques et de simulations, édité par la compagnie *Boeing Inc.* pour le *B-747*, nous avons naturellement choisi d'étudier cet appareil. En effet, avant de concevoir un quelconque dispositif d'autopilotage pour un avion, il est nécessaire de prendre connaissance de son comportement dynamique par des simulations, et donc de disposer de son modèle mécanique. Cependant, lors des différentes phases de vol : décollage, croisière ou approche, on observe des variations de modèle, dues aux variations de plusieurs paramètres, dont par exemple l'altitude. En effet, le modèle de l'atmosphère n'est pas le même au niveau de la mer qu'à 11 000 mètres d'altitude, et le comportement de l'avion s'en ressent.

Le projet de maîtrise porte ainsi sur la synthèse d'une loi de commande qui tient compte de ces variations de modèle, et qui sera valable quelles que soient les paramètres de vol de l'appareil. Après une revue de littérature, nous verrons qu'une structure d'autopilote avec commutation de contrôleurs permettra d'atteindre cet objectif.

Le mémoire comporte deux grandes parties : la première partie (chapitres 1 à 3) traite de la modélisation d'un avion et de l'obtention du modèle du *Boeing 747*, à partir des données constructeur de la compagnie *Boeing Inc.*, et la seconde partie (chapitres 4 et 5) de la synthèse de loi de commande séquencée par commutation de contrôleurs.

Le chapitre 1 définit les repères et notations utiles au repérage de l'avion dans l'espace, pour que les développements des chapitres suivants soient clairs.

Le chapitre 2 présente le modèle théorique non linéaire d'un avion, puis le modèle linéarisé du vol longitudinal ; ils seront ensuite appliqués au *Boeing 747*.

Le chapitre 3 applique les modèles vus précédemment au *Boeing 747*, et explique comment les données constructeur de la compagnie *Boeing Inc.* ont été exploitées, puis utilisées dans l'élaboration des modèles. Cette étude a abouti à la synthèse d'une interface graphique permettant de calculer le modèle linéaire d'ordre 5 du vol longitudinal en toute condition de vol.

Le chapitre 4, après une revue de littérature sur les techniques de commande de vol, présente une étude théorique portant sur la synthèse H_∞ de contrôleurs robustes et sur le phénomène de commutation de contrôleurs.

Le chapitre 5 est consacré à l'implantation de la loi de commande, dont l'étude théorique est l'objet du chapitre précédent. Il contient l'application pratique de la synthèse H_∞ et de la théorie de commutation des contrôleurs, ainsi que la validation des performances de la structure complète de commande. Cette étude aboutit à l'élaboration d'une interface graphique permettant de regrouper les résultats, non seulement sous forme de réponses temporelles, mais également avec la possibilité de visualiser par une animation le mouvement en tangage du *Boeing 747*.

L'esprit de ce projet est donc de réaliser une étude générale, de la modélisation d'un avion jusqu'à la synthèse de loi de commande sur ce modèle en passant par l'application au *Boeing 747*. Le domaine couvert étant extrêmement vaste, nous nous sommes particulièrement attaché à réaliser un ensemble complet, cohérent et fonctionnel, plutôt que de pousser la recherche de la performance et l'optimisation des résultats : cela pourrait faire l'objet de travaux ultérieurs.

CHAPITRE 1

REPÉRAGE DE L'AVION DANS L'ESPACE

Dans ce premier chapitre nous allons définir les outils nécessaires au repérage d'un avion dans l'espace, non seulement en *position*, mais aussi en *orientation*. Pour ce faire, il va falloir définir les repères permettant de situer l'avion par rapport à la terre, et par rapport à un référentiel inertiel, dans lequel nous pourrions appliquer les équations de la mécanique. Puis nous définirons les angles caractéristiques de l'orientation de l'avion avec les relations qui les lient.

1.1 Repères de base

Voici les repères utiles que nous allons utiliser pour mettre le système en équation : chacun d'entre eux permet de localiser l'aéronef, sa direction et sa vitesse par rapport à la terre, mais ils correspondent à des objectifs différents :

le repère NED $\mathcal{R}_0$ (« North-East-Down ») $(\vec{x}_{ned}, \vec{y}_{ned}, \vec{z}_{ned})$ a comme origine l'intersection de la verticale du lieu où se trouve l'avion et de la surface de la terre, et son axe $\vec{z}_{ned}$ est dirigé et orienté par le vecteur de l'accélération de la gravité $\vec{g}$, vers le centre de la terre. Ses axes $\vec{x}_{ned}, \vec{y}_{ned}$ pointent respectivement vers le nord et l'est, vus de l'avion.

Le repère « avion » $\mathcal{R}_a$ $(\vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a)$ a comme origine le centre de gravité de l'avion, et son axe $\vec{x}_a$ pointe vers l'avant, dans la direction du fuselage. L'axe $\vec{z}_a$ est dans le plan de symétrie vertical de l'avion¹, orienté vers le ventre de l'avion, et l'axe $\vec{y}_a$ complète le trièdre direct, c'est-à-dire qu'il est perpendiculaire au plan de symétrie et orienté vers la droite, point de vue « pilote ». Ce repère sera utilisé pour étudier le mouvement de l'avion.

¹L'hypothèse de symétrie de l'avion sera justifiée ultérieurement

Le repère de stabilité, ou aérodynamique $\mathcal{R}_s$ ($\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s$) a la même origine G que les deux précédents, $\vec{x}_s$ est porté et orienté par le vecteur vitesse $\vec{V}$ de l'avion, $\vec{z}_s$ est dans le plan de symétrie ($\vec{x}_a, \vec{z}_a$) et perpendiculaire à $\vec{x}_s$, et $\vec{y}_s$ complète le trièdre direct.

Les figures suivantes illustrent ces trois repères $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_a$ et $\mathcal{R}_s$, et serviront à définir les angles caractéristiques à la section suivante. La première (1.1) montre le repère *NED* et le repère *avion*, ainsi que les angles d'Euler Ψ, θ et Φ :

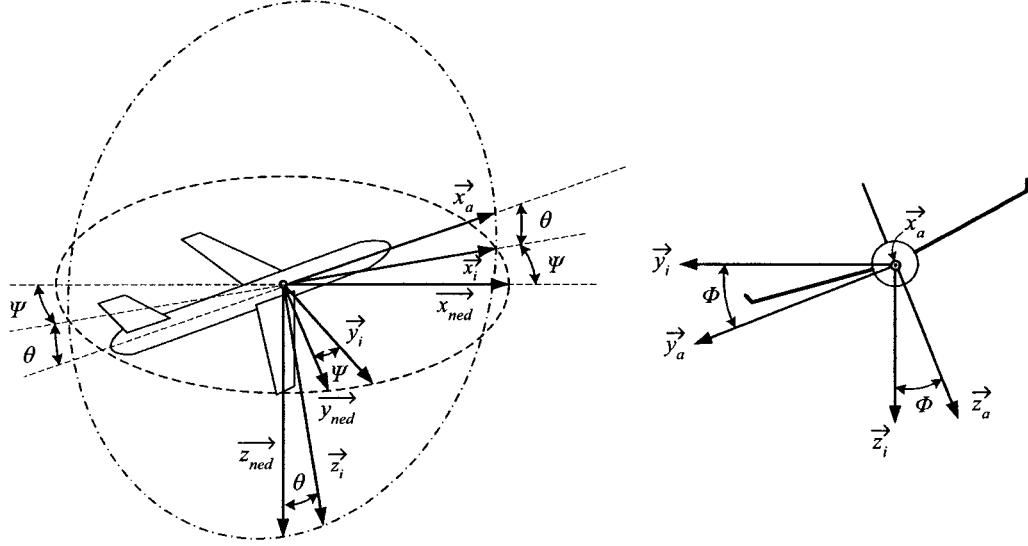


FIG. 1.1 – Les repères *NED* $\mathcal{R}_0$ et avion $\mathcal{R}_a$.

où $\vec{x}_i, \vec{y}_i$ et $\vec{z}_i$ sont des vecteurs intermédiaires et où les deux cercles représentent le plan horizontal contenant les vecteurs $\vec{x}_{ned}$ et $\vec{x}_i$ et le plan vertical contenant les vecteurs $\vec{z}_{ned}$ et $\vec{z}_i$. La position courante de l'avion est le résultat de trois rotations successives, qui seront étudiées plus en détail au paragraphe suivant :

- une première définie par l'angle d'azimut Ψ et l'axe $\vec{z}_{ned}$ qui transforme $\vec{x}_{ned}$ en $\vec{x}_i$ et $\vec{y}_{ned}$ en $\vec{y}_i$,
- une deuxième d'angle d'assiette θ et d'axe $\vec{y}_i$ qui transforme $\vec{x}_i$ en $\vec{x}_a$ et $\vec{z}_{ned}$ en $\vec{z}_i$,
- une troisième d'angle de gîte Φ qui transforme $\vec{y}_i$ en $\vec{y}_a$ et $\vec{z}_i$ en $\vec{z}_a$.

La seconde figure (1.2) situe le repère de stabilité $\mathcal{R}_s$ par rapport au repère avion $\mathcal{R}_a$, et définit d'une part l'incidence (ou l'attaque) α comme l'angle formé par $\vec{x}_a$ et $\vec{x}_j$ et d'autre part le dérapage β comme l'angle formé par $\vec{x}_j$ et $\vec{V}$, si on note $\vec{x}_j$ la projection du vecteur vitesse $\vec{V}$ sur le plan $(\vec{x}_a, \vec{z}_a)$.

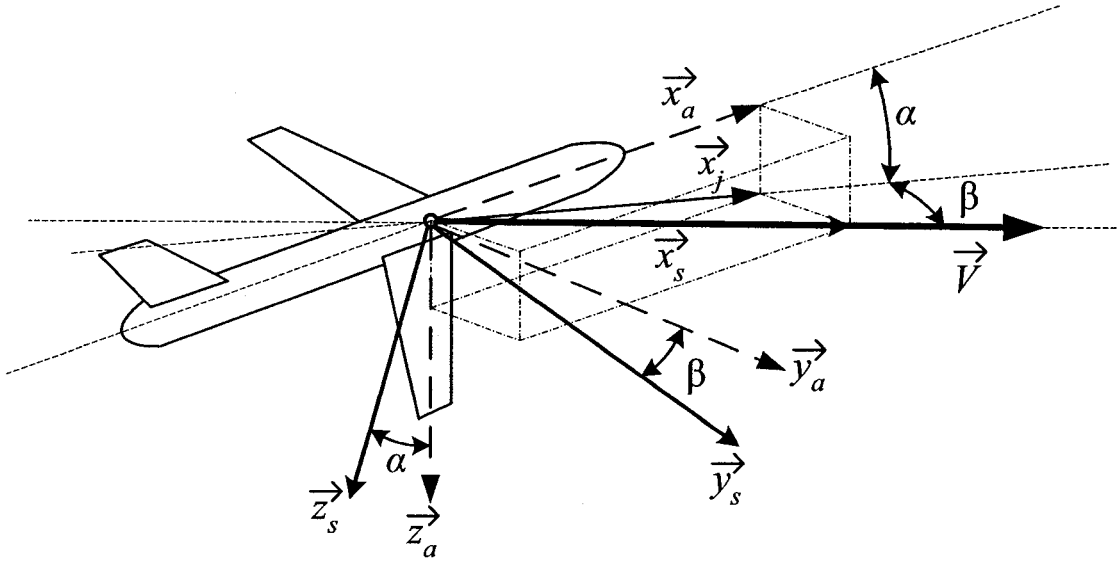


FIG. 1.2 – Les repères avion $\mathcal{R}_a$ et de stabilité $\mathcal{R}_s$.

Nous verrons en début de chapitre 2 que le repère $\mathcal{R}_0$ est considéré être en translation par rapport à la terre, et que nous pouvons donc y écrire le principe fondamental de la dynamique.

Voyons maintenant comment situer $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_a$ et $\mathcal{R}_s$ entre eux, en définissant les angles entre les repères.

1.2 Angles entre les repères

Ayant défini plusieurs repères fondamentaux, on s'intéresse ici à leurs positions relatives, que l'on va définir au moyen d'angles caractéristiques. Les solutions n'étant pas uniques, celles qui sont présentées sont les plus couramment utilisées.

1.2.1 Passage du repère NED $\mathcal{R}_0$ au repère avion $\mathcal{R}_a$

Nous souhaitons positionner $\mathcal{R}_a$ par rapport à $\mathcal{R}_0$; comme ces repères ont la même origine, trois rotations fondamentales suffiront à fournir le positionnement désiré. Les voici avec les trois angles et axes correspondants, dont l'illustration est donnée à la figure (1.1) :

- première rotation, dont l'angle est l'azimut Ψ et l'axe $\overrightarrow{z_{ned}}$,
- deuxième rotation, dont l'angle est l'assiette θ et l'axe $\overrightarrow{y_i}$,
- troisième rotation, dont l'angle est la gîte Φ et l'axe $\overrightarrow{x_a}$.

Le tableau 1.1 résume les valeurs extrêmes usuelles pour ces trois angles, évitant plusieurs représentations pour un même point.

TAB. 1.1 – Valeurs limites des angles d'Euler.

angle	valeur min.	valeur max.
Ψ	$-\pi$	π
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
Φ	$-\pi$	π

Chacune des rotations précédentes est caractérisée géométriquement par une matrice 3×3 ; on cherche alors à obtenir la matrice globale de rotation, c'est-à-dire la matrice de passage $R_{0 \rightarrow a}$ de $\mathcal{R}_0$ à $\mathcal{R}_a$.

Si R_Ψ , R_θ et R_Φ sont les matrices de rotation correspondant aux transformations d'Euler ci-dessus, on obtient l'orientation $\mathbf{E}$ de $\mathcal{R}_a$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ en effectuant leur produit dans l'ordre des transformations comme indiqué à l'équation (1.1) :

$$\mathbf{E} = R_\Phi \times R_\theta \times R_\Psi \quad (1.1)$$

où $\mathbf{E}$ est appelée la « Matrice d'Euler ». Son expression est la suivante, en fonction des angles d'Euler :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos \Psi \cos \theta & \sin \Psi \cos \theta & -\sin \theta \\ \cos \Psi \sin \theta \sin \Phi - \sin \Psi \cos \Phi & \sin \Psi \sin \theta \sin \Phi + \cos \Psi \cos \Phi & \cos \theta \sin \Phi \\ \cos \Psi \sin \theta \cos \Phi + \sin \Psi \sin \Phi & \sin \Psi \sin \theta \cos \Phi - \cos \Psi \sin \Phi & \cos \theta \cos \Phi \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

La matrice de passage cherchée s'écrit donc suivant l'équation (1.3) :

$$R_{0 \rightarrow a} = \mathbf{E} \quad (1.3)$$

Ainsi, si $\vec{X}$ est un vecteur de l'espace, $\vec{X}_a$ son expression dans le repère avion $\mathcal{R}_a$ et $\vec{X}_0$ son expression dans le repère $\mathcal{R}_0$, la relation les reliant est la suivante :

$$\vec{X}_a = R_{0 \rightarrow a} \vec{X}_0 \quad (1.4)$$

Une matrice de rotation étant orthogonale, son inverse est sa transposée ; on aura donc $R_{a \rightarrow 0} = R_{0 \rightarrow a}^T$.

1.2.2 Équations auxiliaires

Dans ce paragraphe, nous allons définir les vitesses de rotation de l'avion :

- en roulis P autour de l'axe $\vec{x}_a$,
- en tangage Q autour de l'axe $\vec{y}_a$,
- en lacet R autour de l'axe $\vec{z}_a$.

et les exprimer en fonction des vitesses angulaires des angles d'Euler $\dot{\Psi}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\Phi}$ grâce aux *équations auxiliaires*.

Les rotations d'angles $\dot{\theta}$ et $\dot{\Psi}$ se font respectivement autour d'axes que l'on exprime dans le repère NED $\mathcal{R}_0$, tandis que $\dot{\Phi}$ s'effectue autour de l'axe $\vec{X}_a$ du repère avion $\mathcal{R}_a$. On en déduit la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\Phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_{0 \rightarrow a} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

L'angle Ψ correspond au cap suivi par l'avion, et ne présente donc pas d'intérêt dans notre étude du modèle mécanique, puisque nous ne nous intéressons pas à l'aspect « navigation » : on pose ainsi arbitrairement $\Psi = 0$. L'expression (1.1) de la matrice d'Euler et l'équation (1.5) se simplifient donc pour obtenir le système de trois équations (1.6) suivant :

$$\begin{cases} P = \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \sin \theta \\ Q = \dot{\theta} \cos \Phi + \dot{\Psi} \cos \theta \sin \Phi \\ R = -\dot{\theta} \sin \Phi + \dot{\Psi} \cos \theta \cos \Phi \end{cases} \quad (1.6)$$

Cependant, on aura accès de préférence aux vitesses de rotation dans le repère avion P , Q et R au moyen de capteurs, d'où l'équation suivante (1.7), inverse de la relation (1.6) :

$$\begin{pmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \Phi \tan \theta & \cos \Phi \tan \theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \frac{\sin \Phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \Phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}, \text{ avec } |\theta| \neq \frac{\pi}{2} \quad (1.7)$$

Les relations (1.6) et (1.7) permettent ainsi d'exprimer les vitesses de rotation de l'avion P , Q et R en fonction des vitesses de rotation des angles d'Euler $\dot{\Psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\Phi}$, et réciproquement.

Étudions maintenant le passage des repères $\mathcal{R}_a$ à $\mathcal{R}_s$.

1.2.3 Passage du repère avion $\mathcal{R}_a$ au repère de stabilité $\mathcal{R}_s$

Nous souhaitons maintenant positionner $\mathcal{R}_s$ par rapport à $\mathcal{R}_a$; ces repères ont la même origine, mais contrairement au cas du paragraphe 1.2.1, deux rotations successives, illustrées à la figure (1.2), suffisent à passer d'un repère à l'autre :

- première rotation, dont l'angle est l'incidence α et l'axe $\vec{y}_a$,
- seconde rotation, dont l'angle est le dérapage β et l'axe $\vec{z}_s$.

Le tableau 1.2 résume les valeurs extrêmes usuelles pour ces deux angles, évitant plusieurs représentations pour un même point.

TAB. 1.2 – Valeurs limites des angles d'incidence et de dérapage.

angle	valeur min.	valeur max.
α	$-\pi$	π
β	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

En utilisant la même méthode qu'au paragraphe 1.2.1, on veut obtenir la matrice de passage $R_{a \rightarrow s}$ de $\mathcal{R}_a$ à $\mathcal{R}_s$. Notons R_α et R_β les matrices de rotation correspondant aux transformations ci-dessus ; compte tenu de leur chronologie, l'orientation de $\mathcal{R}_s$ par rapport à $\mathcal{R}_a$ est le produit des transformations comme indiqué à l'équation (1.8) :

$$R_{a \rightarrow s} = R_\beta \times R_\alpha \quad (1.8)$$

La matrice de passage cherchée s'écrit suivant l'équation (1.9) :

$$R_{a \rightarrow s} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

et on a de même que précédemment $R_{s \rightarrow a} = R_{a \rightarrow s}^T$.

Si $\vec{X}$ est un vecteur de l'espace, $\vec{X}_s$ son expression dans le repère de stabilité $\mathcal{R}_s$ et $\vec{X}_a$ son expression dans le repère avion $\mathcal{R}_a$, la relation les reliant est la suivante :

$$\vec{X}_s = R_{a \rightarrow s} \vec{X}_a \quad (1.10)$$

1.3 Mouvement de l'avion en translation

1.3.1 Décomposition du vecteur vitesse de l'avion

L'avion se déplace dans un espace à trois dimensions ; cet espace est rempli de l'air de l'atmosphère, qui n'est pas immobile à cause de nombreux effets climatiques qui ne seront pas détaillés dans le cadre de cette étude. L'avion se déplace donc par rapport à ces masses d'air en mouvement, qui elles-mêmes se déplacent par rapport à un repère.

Notons $\vec{V}_V^T$ le vecteur *vitesse vent* par rapport à la terre, et $\vec{V}$ le vecteur *vitesse aérodynamique* de l'avion par rapport au vent. Le vecteur $\vec{V}_a^T$ *vitesse de l'avion* par rapport à la terre est défini par :

$$\vec{V}_a^T = \vec{V} + \vec{V}_V^T \quad (1.11)$$

Nous ne tiendrons pas compte du vent dans la modélisation, de telle manière que $\vec{V}_a^T = \vec{V}$.

1.3.2 Mouvement longitudinal de l'avion

Nous donnerons les hypothèses du vol longitudinal au chapitre 2 ; cependant, nous considérerons dans ce paragraphe que le mouvement est longitudinal pour faciliter la visualisation, soit $\beta = 0$, et que le cap suivi par l'avion est $\Psi = 0$. Nous référant à la figure (1.3), et connaissant le vecteur vitesse $\vec{V}$ de l'avion, colinéaire à $\vec{x}_s$, nous pouvons observer trois angles, dont deux que nous avons déjà rencontré :

- l'angle d'incidence ou d'attaque α , entre $\vec{x}_a$ et le vecteur vitesse $\vec{V}$,

- l'angle de pente γ , entre $\vec{V}$ et $\vec{x}_{ned}$,
- l'angle d'assiette θ , somme des deux précédents.

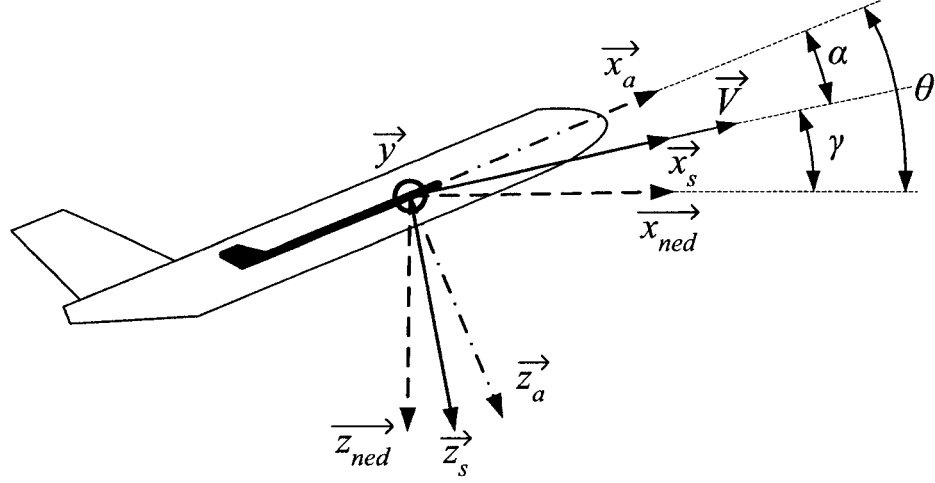


FIG. 1.3 – Les repères et angles caractéristiques du mouvement longitudinal.

1.3.3 Relations dans le repère *avion*

Dans ce paragraphe, nous allons donner les relations utiles entre les angles définis précédemment, le vecteur vitesse $\vec{V}$ et ses projections sur les axes du repère avion $\mathcal{R}_a$. Ces projections sont définies par la relation (1.12) :

$$\vec{V} = U_x \cdot \vec{x}_a + V_y \cdot \vec{y}_a + W_z \cdot \vec{z}_a \quad (1.12)$$

L'expression du module de $\vec{V}$ en fonction de U_x , V_y et W_z est :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{U_x^2 + V_y^2 + W_z^2} \quad (1.13)$$

Les composantes U_x , V_y et W_z s'écrivent en fonction du module $\|\vec{V}\|$ et des angles α et β selon l'équation (1.14) suivante :

$$\begin{cases} U_x &= \|\vec{V}\| \cdot \cos \beta \cos \alpha \\ V_y &= \|\vec{V}\| \cdot \sin \beta \\ W_z &= \|\vec{V}\| \cdot \cos \beta \sin \alpha \end{cases} \quad (1.14)$$

Enfin, les angles d'incidence α et de dérapage β s'expriment à partir des composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ dans le repère *avion* selon les relations (1.15) et (1.16) :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{W_z}{U_x}\right) \quad (1.15)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{V_y}{\|\vec{V}\|}\right) \quad (1.16)$$

Nous avons défini dans ce premier chapitre les repères et les grandeurs utiles au repérage de l'avion dans l'espace, qui vont nous permettre d'écrire les équations mécaniques régissant son mouvement : c'est l'objet du chapitre 2, dans lequel nous allons obtenir le modèle linéarisé de l'avion autour d'une condition de vol, après avoir fait les hypothèses et simplifications pertinentes en vue de notre étude du vol longitudinal.

CHAPITRE 2

MODÈLE LONGITUDINAL DE LA DYNAMIQUE DE L'AVION

Après avoir défini dans le premier chapitre les repères et grandeurs utiles au repérage de l'avion dans l'espace, tout est en place pour écrire les différentes équations issues de la mécanique. Préalablement, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices sont faites et justifiées sur l'avion et son environnement. Puis l'étude des forces s'appliquant à l'aéronef nous amènera aux équations non linéaires complètes, avant de linéariser le modèle du vol longitudinal auquel nous nous intéresserons par la suite.

2.1 Hypothèses et données pour la modélisation

Cette partie présente les hypothèses que l'on fait dans le but d'obtenir un modèle complet, mais néanmoins suffisamment simple pour demeurer exploitable à des fins de commande.

2.1.1 Hypothèses relatives à l'avion

Nous allons faire trois hypothèses relatives à l'avion avant d'en donner les principales caractéristiques :

- l'avion est un corps rigide et indéformable : les déformations de sa structure, notamment des ailes qui ont une élasticité plus élevée que le fuselage, sont négligées,
- il possède un plan de symétrie géométrique et mécanique, défini par les vecteurs $\vec{x}_a$ et $\vec{z}_a$ du repère $\mathcal{R}_a$,
- sa masse en vol est constante — considérant que sa variation est suffisamment faible dans l'intervalle d'étude pour être négligée dans les équations.

La première hypothèse de **rigidité** est bien vérifiée en pratique, puisque même l'étude plus fine des effets de la souplesse de l'avion s'effectue en perturbant le modèle

rigide : considérer l'avion comme rigide et indéformable est donc une étape nécessaire.

L'hypothèse de **symétrie** est naturelle pour un avion commercial ; l'appareil que nous étudions dans le chapitre 3, le *Boeing 747* est symétrique.

La dernière hypothèse de **constance de la masse** est justifiée par le calcul suivant : considérons le système $\{S\}$ composé de l'avion et des gaz éjectés. Sa quantité de mouvement à un instant t s'écrit dans un repère inertiel : $p(t) = m(t) V(t)$. De plus, si l'on note Δm et Δv les variations respectives de la masse m et de la vitesse V pendant l'intervalle de temps Δt , alors on peut écrire à l'instant $t + \Delta t$:

$$p(t + \Delta t) = (m(t) + \Delta m) (V(t) + \Delta v) + (-\Delta m) (V(t) + v_e) \quad (2.1)$$

où v_e représente la vitesse d'éjection des gaz et $-\Delta m$ la masse qui a « quitté » l'avion. Un développement limité au 1^{er} ordre de l'équation (2.1) permet d'exprimer la variation de quantité de mouvement du système Δp pendant l'intervalle de temps Δt :

$$\begin{aligned} \Delta p &= p(t + \Delta t) - p(t) = m \Delta v - v_e \Delta m + \Delta m \Delta v \\ &= m \Delta v - v_e \Delta m \end{aligned} \quad (2.2)$$

En divisant les termes de l'équation (2.2) par Δt , et en prenant la limite dt lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, on arrive à l'équation suivante :

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dV}{dt} - v_e \frac{dm}{dt} = \sum \mathcal{F}_{\{S\}} \quad (2.3)$$

où $\sum \mathcal{F}_{\{S\}}$ est la somme des forces extérieures appliquées au système $\{S\}$ défini plus haut. L'équation précédente s'écrit ainsi :

$$m \frac{dV}{dt} = \sum \mathcal{F}_{\{S\}} + v_e \frac{dm}{dt} = \sum \mathcal{F}_{\{S\}} + T_e \quad (2.4)$$

Dans l'équation (2.4), le terme T_e ne correspond qu'à la contribution de la poussée due à l'éjection de la composante $-\Delta m$ de la masse totale, et devient une force extérieure si l'on considère le système $\{\text{avion}\}$, de masse constante m et de vitesse V .

Nous écrirons donc les équations en considérant la masse m constante sur l'intervalle d'étude, et la force T_e extérieure et négligeable ; cette dernière hypothèse, vérifiée dans la pratique, signifie que la poussée due à la seule variation de masse est négligeable. En effet, d'après Boiffier [7], la variation $\frac{dm}{dt}$ est de l'ordre de 0,02% à 0,2% de la masse totale par minute pour un avion commercial.

2.1.2 Hypothèses relatives à l'environnement terrestre

Les hypothèses couramment faites sur l'environnement terrestre dans le domaine du vol atmosphérique sont les suivantes :

- la terre est plate et fixe par rapport à un repère galiléen de référence, par exemple le repère *ECI* (« Earth Centered Inertial »),
- le vecteur gravité $\vec{g}$ est constant, vertical et dirigé vers le centre de la terre aux altitudes usuelles de vol (0 à 12 000 m).

La première hypothèse de la **terre plate et immobile** a le grand avantage de considérer tout repère fixe par rapport à la terre comme galiléen : c'est une simplification intéressante puisque nous pourrions écrire les équations de la mécanique dans le repère NED $\mathcal{R}_0$. Pour pouvoir considérer que la terre est immobile, étudions le rapport entre l'accélération de Coriolis – due à sa rotation – et l'accélération de la pesanteur :

$$\frac{a_{\text{coriolis}}}{g} = \frac{2\Omega_{\text{terre}} V}{g}$$

où Ω_{terre} est la vitesse de rotation de la terre, et V la vitesse de l'avion ; Ω_{terre} étant égale à $7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, ce rapport est de l'ordre de 0,4% pour Mach 0,9 à une altitude de 10 000 m, ce qui confirme la validité de cette hypothèse.

L'hypothèse de la terre plate peut également se justifier en calculant la vitesse de rotation du repère NED par rapport à la terre :

$$\Omega_{\text{ned/terre}} = \frac{V}{R_{\text{terre}}}$$

qui vaut environ $4.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ pour une vitesse de Mach 0,9 à une altitude de 10 000 m et le rayon de la terre $R_{\text{terre}} = 6,4.10^6 \text{ m}$. Cette vitesse est suffisamment faible pour considérer le repère NED $\mathcal{R}_0$ fixe par rapport à la terre.

La seconde hypothèse de **constance de l'accélération de la gravité** $\vec{g}$ simplifie également les équations. Elle est aussi justifiée par Boiffier [7] qui montre qu'il faut une variation d'altitude de 32 km pour provoquer une diminution de 1% sur la valeur initiale de g , à la surface de la terre. L'altitude de croisière d'un avion commercial étant de l'ordre de 10 000 m, cette hypothèse est donc valide.

Ces hypothèses étant posées, nous allons exprimer les équations de la mécanique dans le repère NED $\mathcal{R}_0$ que l'on retient comme étant galiléen.

2.2 Modèle mécanique de l'avion

Le mouvement de l'avion dans l'atmosphère est caractérisé par la **translation** de son centre de masse par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ d'une part, et d'autre part son **orientation** et sa **vitesse de rotation** autour de son centre de masse. Après avoir défini les caractéristiques mécaniques de l'avion, nous allons pouvoir écrire les deux relations fondamentales de la mécanique caractérisant ce mouvement.

2.2.1 Caractéristiques de l'avion

Cette section a pour objet de définir les grandeurs et notations que nous allons utiliser par la suite, pour ce qui concerne :

- les vitesses linéaires et de rotation de l'avion, leurs dérivées,
- les efforts qui sont appliqués à l'avion,
- ses caractéristiques techniques et mécaniques.

En effet, nous allons voir au paragraphe suivant que les équations de la mécanique seront écrites dans le repère NED, puis transférées dans les repères avion et de stabilité.

2.2.1.1 Données mécaniques de l'avion

Pour appliquer le théorème de la résultante dynamique, on notera m la masse de l'avion ; pour appliquer le théorème du moment cinétique, nous aurons besoin de ses données inertielles, regroupées dans la matrice d'inertie $[I]$, dont l'expression générale est donnée par la relation suivante :

$$[I] = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

L'hypothèse de symétrie de l'avion faite au paragraphe 2.1.1 permet de simplifier certains termes ; en effet, les produits d'inertie I_{xy} et I_{yz} sont nuls du fait de cette symétrie. Justifions rapidement ce résultat par un bref raisonnement qualitatif, en considérant par exemple le terme $I_{xy} = \int_{\text{avion}} x y \, dm$: à chaque élément de masse infinitésimale dm de coordonnées (x, y) correspond un élément de masse identique en $(x, -y)$. On arrive ainsi à la relation :

$$\begin{aligned} \int_{\text{avion}} x y \, dm &= \int_{y \geq 0} x y \, dm + \int_{y \leq 0} x y \, dm \\ &= \int_{y \geq 0} x y \, dm - \int_{y \geq 0} x y \, dm = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

En appliquant le même résultat au produit d'inertie $I_{yz} = \int_{\text{avion}} y z \, dm$, il reste donc finalement :

$$[I] = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Voyons maintenant les notations de la cinématique et de la dynamique avant d'écrire les équations.

2.2.1.2 Notations

Le vecteur **rotation** de l'avion, et donc du repère $\mathcal{R}_a$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ est noté $\vec{\Omega}_{a/0}$, dont on rappelle les composantes dans le repère avion :

$$\vec{\Omega}_{a/0} = P \vec{x}_a + Q \vec{y}_a + R \vec{z}_a \quad (2.8)$$

et $\vec{\Omega}_{s/0}$ est la rotation du repère de stabilité $\mathcal{R}_s$ par rapport à $\mathcal{R}_0$, dont les composantes sont dans le repère de stabilité :

$$\vec{\Omega}_{s/0} = \Omega_{xs} \vec{x}_s + \Omega_{ys} \vec{y}_s + \Omega_{zs} \vec{z}_s \quad (2.9)$$

Puis le **vecteur moment cinétique** $\vec{\sigma}_G$ exprimé dans le repère $\mathcal{R}_a$ est défini par la relation (2.10) :

$$\vec{\sigma}_{G_a} = [I] \vec{\Omega}_{a/0} \quad (2.10)$$

Ses dérivées temporelles sont notées :

$$\begin{aligned} & - \left. \frac{d\vec{\sigma}_{G_a}}{dt} \right)_0 \text{ dans le repère } \mathcal{R}_0, \\ & - \left. \frac{d\vec{\sigma}_{G_a}}{dt} \right)_a \text{ dans le repère } \mathcal{R}_a, \end{aligned}$$

et sont reliées entre elles par la **relation fondamentale de la cinématique**, donnée à l'équation suivante :

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_{G_a}}{dt} \right)_0 = \left. \frac{d\vec{\sigma}_{G_a}}{dt} \right)_a + \vec{\Omega}_{a/0} \wedge \vec{\sigma}_{G_a} \quad (2.11)$$

D'autre part, nous noterons le **vecteur vitesse** $\vec{V} = V \vec{x}_s$, et l'**accélération** $\frac{d\vec{V}}{dt}$ sera notée :

$$\begin{aligned} & - \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_0 \text{ dans le repère } \mathcal{R}_0, \\ & - \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_s = \dot{V} \vec{x}_s \text{ dans le repère } \mathcal{R}_s, \end{aligned}$$

ces deux expressions étant reliées par le même type de relation que celle donnée en (2.11) :

$$\left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_0 = \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right)_s + \vec{\Omega}_{s/0} \wedge \vec{V} \quad (2.12)$$

Les relations (2.11) et (2.12) auront une grande importance pour transférer les équations de la mécanique du repère $\mathcal{R}_0$ aux repères $\mathcal{R}_a$ et $\mathcal{R}_s$.

2.2.1.3 Efforts appliqués à l'avion

Les efforts appliqués à l'avion seront étudiés en détail au paragraphe 2.3, et sont donc provisoirement notés : $\sum \overrightarrow{\mathcal{F}}_{ext}$ pour les forces extérieures et $\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext}$ pour les moments extérieurs.

2.2.2 Choix du repère de travail

Ce paragraphe a pour objectif de donner et justifier la stratégie suivie dans l'écriture des équations. Nous allons ainsi écrire les relations de la dynamique dans le repère NED $\mathcal{R}_0$ que l'on a considéré comme galiléen, et donc dans lequel le principe fondamental de la dynamique s'applique. Cependant, certaines données de l'avion telles que la matrice d'inertie sont usuellement données dans le repère avion, et s'y simplifient comme le montre le paragraphe 2.2.1. Nous allons donc transposer l'équation s'y rapportant dans le repère avion $\mathcal{R}_a$, grâce à la relation fondamentale de la cinématique, illustrée en (2.11). De plus, l'étude des efforts aérodynamiques nous montrera au paragraphe 2.3 qu'ils s'expriment de préférence dans le repère de stabilité : c'est pourquoi nous projetterons l'équation concernée dans le repère de stabilité $\mathcal{R}_s$ en utilisant la relation (2.12).

En résumé, nous allons écrire le principe fondamental de la dynamique dans le repère $\mathcal{R}_0$, le transposer au repère de stabilité $\mathcal{R}_s$ pour le **théorème de la résultante dynamique**, et au repère avion $\mathcal{R}_a$ pour le **théorème du moment cinétique**.

2.2.3 Théorème de la résultante dynamique

Appliquons la première relation fondamentale de la mécanique (2.13) liée à la conservation de la quantité de mouvement, et exprimée dans le repère NED $\mathcal{R}_0$,

supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_0 = \sum \vec{\mathcal{F}}_{ext} \quad (2.13)$$

Transposons maintenant cette équation dans le repère de stabilité $\mathcal{R}_s$ grâce à la relation (2.12) :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_s + m \vec{\Omega}_{s/0} \wedge \vec{V} = \sum \vec{\mathcal{F}}_{ext} \quad (2.14)$$

Puis en utilisant la relation (2.9), le premier terme de l'équation précédente s'écrit :

$$m \begin{pmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \Omega_{xs} \\ \Omega_{ys} \\ \Omega_{zs} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \dot{V} \\ m V \Omega_{zs} \\ -m V \Omega_{ys} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

La relation (2.14) devient ainsi le système suivant de trois équations scalaires, projetées dans le repère de stabilité $\mathcal{R}_s$:

$$\begin{cases} m \dot{V} &= \sum \vec{\mathcal{F}}_{ext} \cdot \vec{x}_s \\ m V \Omega_{zs} &= \sum \vec{\mathcal{F}}_{ext} \cdot \vec{y}_s \\ -m V \Omega_{ys} &= \sum \vec{\mathcal{F}}_{ext} \cdot \vec{z}_s \end{cases} \quad (2.16)$$

Ce système est le théorème de la résultante dynamique appliqué à l'avion ; sa première et sa troisième ligne concernent le vol longitudinal, et sa deuxième le vol latéral.

2.2.4 Théorème du moment cinétique

La seconde relation fondamentale de la dynamique s'applique à l'inertie de l'avion ; avec les notations du paragraphe 2.2.1.1, elle s'exprime dans le repère NED $\mathcal{R}_0$ selon l'équation :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{G_a}}{dt} \Big|_0 = \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext} \quad (2.17)$$

et devient, une fois transposée dans le repère avion $\mathcal{R}_a$ grâce à la relation (2.11) :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_{G_a}}{dt}\right)_a + \vec{\Omega}_{a/0} \wedge \vec{\sigma}_{G_a} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext} \quad (2.18)$$

Comme nous l'avons vu en (2.10), le moment cinétique est le produit de la matrice d'inertie $[I]$ avec le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{a/0}$. Exprimons sa dérivée temporelle dans le repère avion $\mathcal{R}_a$, puisque la matrice $[I]$ y est constante et donnée par (2.7) :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_{G_a}}{dt}\right)_a = [I] \left(\frac{d\vec{\Omega}_{a/0}}{dt}\right)_a, \quad \text{avec} \quad \left(\frac{d[I]}{dt}\right)_a = [0] \quad (2.19)$$

On arrive donc à l'expression vectorielle du théorème exprimée dans le repère avion $\mathcal{R}_a$ en remplaçant (2.19) dans (2.18) :

$$[I] \left(\frac{d\vec{\Omega}_{a/0}}{dt}\right)_a + \vec{\Omega}_{a/0} \wedge ([I] \vec{\Omega}_{a/0}) = \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext} \quad (2.20)$$

En utilisant les notations (2.7) et (2.8), les deux relations suivantes donnent les projections dans le repère $\mathcal{R}_a$ du premier terme de l'équation précédente :

$$[I] \left(\frac{d\vec{\Omega}_{a/0}}{dt}\right)_a = \begin{pmatrix} I_{xx} \dot{P} - I_{xz} \dot{R} \\ I_{yy} \dot{Q} \\ -I_{xz} \dot{P} + I_{zz} \dot{R} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_{a/0} \wedge ([I] \vec{\Omega}_{a/0}) &= \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} I_{xx} P - I_{xz} R \\ I_{yy} Q \\ -I_{xz} P + I_{zz} R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q R (I_{zz} - I_{yy}) - I_{xz} P Q \\ P R (I_{xx} - I_{zz}) + I_{xz} (P^2 - R^2) \\ P Q (I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz} R Q \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

On aboutit ainsi au système suivant de trois équations scalaires projetées dans le repère avion $\mathcal{R}_a$:

$$\begin{cases} I_{xx} \dot{P} + Q R (I_{zz} - I_{yy}) - I_{xz} (\dot{R} + P Q) = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{ext}} \cdot \overrightarrow{x_a} \\ I_{yy} \dot{Q} + P R (I_{xx} - I_{zz}) + I_{xz} (P^2 - R^2) = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{ext}} \cdot \overrightarrow{y_a} \\ I_{zz} \dot{R} + P Q (I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz} (R Q - \dot{P}) = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{ext}} \cdot \overrightarrow{z_a} \end{cases} \quad (2.23)$$

Ce système est le théorème du moment cinétique appliqué à l'avion ; sa deuxième ligne concerne le vol longitudinal, sa première et sa troisième ligne le vol latéral.

2.3 Efforts extérieurs appliqués à l'avion

Nous avons obtenu précédemment le modèle mécanique du mouvement de l'avion, aussi bien longitudinal que latéral. Cependant, nous n'avons pas explicité les forces et moments qui s'appliquent à l'avion, notamment aérodynamiques. C'est l'objet de ce paragraphe, au cours duquel nous allons donner une définition générale de chaque effort. Cependant, nous détaillerons ceux du mouvement longitudinal qui nous intéresseront plus particulièrement lors de l'application au *Boeing 747*.

2.3.1 Poids de l'avion et centre de gravité

La force la plus évidente à laquelle est soumise l'avion est son **poids**, dont l'expression est donnée dans le repère de stabilité $\mathcal{R}_s$ par :

$$\overrightarrow{P} = m \overrightarrow{g} = -mg \sin \gamma \overrightarrow{x_s} + mg \cos \gamma \overrightarrow{z_s} \quad (2.24)$$

et dont le point d'application est le centre de gravité G . Cependant ce dernier n'est pas fixe : sa position dépend non seulement de la masse de l'appareil, mais aussi de la répartition du carburant dans les réservoirs (d'après Boiffier [7], la masse de carburant représente environ 30% de la masse totale en charge pour un avion qui vient de s'approvisionner). Il est repéré en pourcentage de sa position sur la corde

aérodynamique moyenne $\bar{c}$ ¹ comme le montre la figure (2.1) ; sa position oscille entre 10% et 40% de $\bar{c}$. Cependant, on ne tient pas compte dans la modélisation de sa variation de position, très lente.

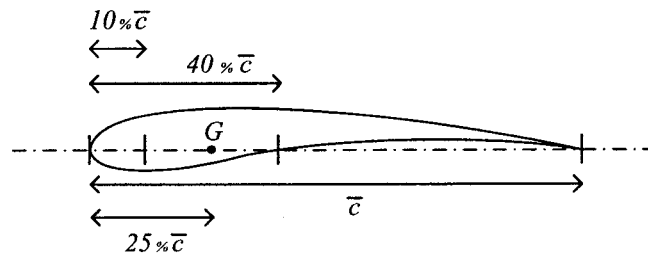


FIG. 2.1 – Position du centre de gravité G sur la corde aérodynamique moyenne $\bar{c}$.

2.3.2 Forces et moments aérodynamiques

Les efforts aérodynamiques sont naturellement les plus importants à étudier, puisque c'est par leur action que l'avion va pouvoir voler.

Les forces aérodynamiques s'appliquent généralement en des points distincts du centre de gravité G , contrairement aux moments aérodynamiques dont il est le point de réduction. La force de portance notamment s'applique en un point appelé foyer F du profil, illustré par la figure ci-dessous.

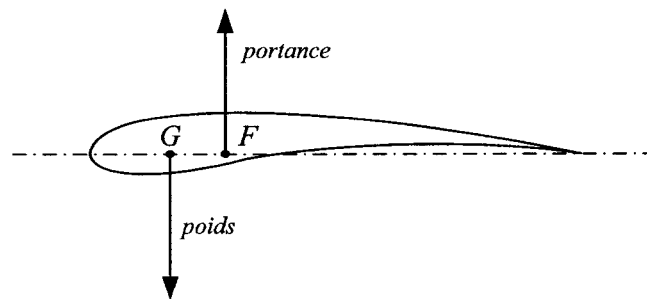


FIG. 2.2 – Positions du centre de gravité G de l'avion et du foyer F du profil.

¹ $\bar{c}$ est également notée MAC

Les deux relations ci-dessous donnent respectivement les expressions des **forces** et des **moments** aérodynamiques exprimés dans le repère de stabilité $\mathcal{R}_s$:

$$\begin{pmatrix} F_{x_s} \\ F_{y_s} \\ F_{z_s} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho S V^2 \begin{pmatrix} -C_D \\ C_Y \\ -C_L \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$$\begin{pmatrix} M_{x_s} \\ M_{y_s} \\ M_{z_s} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho S V^2 \begin{pmatrix} b C_l \\ \bar{c} C_m \\ b C_n \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

où ρ est la masse volumique de l'air à l'altitude d'étude, S la surface portante de l'avion, V sa vitesse aérodynamique, $\bar{c}$ la corde aérodynamique moyenne (« MAC ») vue précédemment, b l'envergure de l'avion et C_D , C_L , C_Y , C_l , C_m et C_n sont les coefficients aérodynamiques du profil, sans dimensions. Ces derniers varient en fonction des paramètres de la condition de vol dans laquelle se trouve l'avion, notamment son incidence, son altitude et sa vitesse : ils vont donc être en grande partie responsables des variations de modèle nécessitant le séquençement de gains, ou « Gain-Scheduling ». Une étude détaillée des composantes de chaque coefficient et de leurs variations sera faite en application au cas longitudinal du *Boeing 747*.

Voici comment sont nommés ces forces et moments aérodynamiques pour le mouvement longitudinal :

- F_{x_s} est la force de traînée, associée à C_D ,
- F_{z_s} est la force de portance, associée à C_L ,
- M_{y_s} est le moment en tangage, associé à C_m ,

et pour le mouvement latéral :

- F_{y_s} est la force latérale, associée à C_Y ,
- M_{x_s} est le moment de roulis, associé à C_l ,
- M_{z_s} est le moment de lacet, associé à C_n ,

La figure (2.3) illustre notamment les efforts du vol longitudinal.

2.3.3 Poussée

La poussée représente la force propulsive de l'avion, qui sert notamment à contrer la traînée ; on la note usuellement $\vec{T}$, et elle est généralement contenue dans le plan de symétrie de l'avion, conformément aux hypothèses posées au paragraphe 2.1.1. Elle s'exprimera ainsi selon l'équation :

$$\vec{T} = T_{x_s} \vec{x}_s + T_{z_s} \vec{z}_s \quad (2.27)$$

Nous supposerons cette force colinéaire au vecteur $\vec{x}_s$, et en donnerons un modèle simplifié ultérieurement.

2.4 Modèle longitudinal de l'avion

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire le modèle complet de l'avion ; cependant, comme nous nous intéresserons particulièrement au vol longitudinal dans la suite de cette étude, nous devons découpler les modes longitudinaux et latéraux en posant les hypothèses nécessaires, puis donner le modèle. Enfin l'étude de l'équilibre sera un préalable à sa linéarisation.

2.4.1 Hypothèses relatives au vol longitudinal

Les hypothèses relatives au vol longitudinal sont en fait des hypothèses de découplage des mouvements longitudinaux et latéraux ; elles sont globalement vérifiées lorsque :

- (i) le plan de symétrie de l'avion est vertical — et contient donc le centre de gravité,
- (ii) les forces extérieures lui sont parallèles,
- (iii) les axes des moments extérieurs lui sont perpendiculaires.

La première condition (i) implique que les ailes de l'avion sont horizontales, soit que l'angle de gîte est nul : $\Phi = 0$. De plus, comme nous avons fait l'hypothèse

(paragraphe 2.3.1) que le vecteur de l'accélération de la gravité $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas ; le plan de symétrie vertical de l'avion contient alors le poids $\vec{P}$ conformément à la condition **(ii)**.

Cette même condition **(ii)** place le vecteur vitesse $\vec{V}$ de l'avion dans le plan de symétrie, l'angle de dérapage est donc nul : $\beta = 0$.

Considérant la dernière condition **(iii)**, les vitesses de roulis et lacet sont nulles : $P = R = 0$.

Ainsi le mouvement de l'avion a lieu dans le plan vertical, les variables remarquables que l'on va étudier seront donc la vitesse $\vec{V}$ et la vitesse de tangage Q .

2.4.2 Notations relatives au modèle longitudinal

Ce paragraphe a pour but de préciser les grandeurs caractéristiques du mouvement de l'avion dans le cadre du modèle longitudinal.

La figure (2.3) rappelle les efforts, les angles caractéristiques ainsi que la position du vecteur vitesse $\vec{V}$ pour le vol longitudinal.

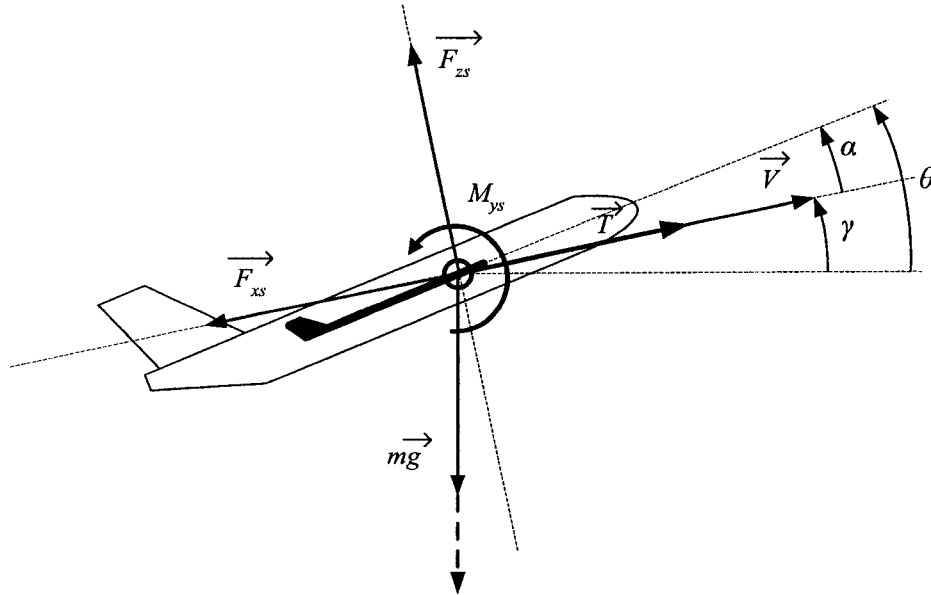


FIG. 2.3 – Grandeurs caractéristiques du mouvement longitudinal : efforts extérieurs, angles, vitesse.

La relation ci-dessous rappelle également l'expression des efforts aérodynamiques relatifs au mouvement longitudinal :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{force de traînée} & : F_{x_s} = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_D \\ \text{force de portance} & : F_{z_s} = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \\ \text{moment en tangage} & : M_{y_s} = \frac{1}{2} \rho S V^2 \bar{c} C_m \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Par ailleurs, la vitesse de rotation du repère de stabilité $\mathcal{R}_s$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ est donnée par :

$$\vec{\Omega}_{s/0} = \dot{\gamma} \vec{y}_s \quad (2.29)$$

2.4.3 Modèle longitudinal pour le vol en croisière

Tout est maintenant en place pour écrire les équations du mouvement longitudinal de l'avion, valable durant la phase de croisière pour un court laps de temps. D'après les hypothèses du paragraphe précédent, nous allons obtenir deux relations mécaniques scalaires pour le mouvement de translation, projetées dans le repère de stabilité $\mathcal{R}_s$, et une relation scalaire pour le mouvement de rotation, projetée dans le repère avion $\mathcal{R}_a$. À ces trois équations va s'ajouter une relation entre les trois vitesses angulaires de pente γ , d'incidence α et d'assiette θ .

Le système d'équations obtenu à partir des relations (2.16), (2.23) et (2.24) est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} m \dot{V} & = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_D + T - m g \sin \gamma \\ -m V \dot{\gamma} & = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_L + m g \cos \gamma \\ I_{yy} \dot{Q} & = \frac{1}{2} \rho S V^2 \bar{c} C_m \\ \dot{\alpha} + \dot{\gamma} & = Q \end{array} \right. \quad (2.30)$$

où les deux premières sont nommées **équation de propulsion**, ou de traînée et **équation de sustentation**, ou de portance : elles confirment que la force de poussée $\vec{T}$ est supposée portée par l'axe $\vec{x}_s$. La troisième **équation de moment en tangage** suppose que l'axe de cette même force de poussée $\vec{T}$ passe par le centre de gravité G ,

et donc qu'elle ne provoque pas de moment. L'**équation cinématique de vitesse de tangage** exprime la relation donnée plus haut entre les vitesses angulaires $\dot{\gamma}$, $\dot{\alpha}$ et $\dot{\theta}$. Enfin, une relation exprime la vitesse verticale $\dot{h}$ de l'avion (selon $-\vec{z}_{ned}$) en fonction de la vitesse linéaire V et de l'angle de pente γ :

$$\dot{h} = V \sin(\gamma) \quad (2.31)$$

Nous avons considéré que l'angle de pente γ était suffisamment faible pour que l'on puisse faire, au premier ordre, l'approximation suivante : $\sin \gamma \approx \gamma$ et $\cos \gamma \approx 1$, que nous utiliserons lors de la linéarisation.

Nous utiliserons cette expression du modèle non linéaire pour valider la structure de commande, en fin de chapitre 5.

2.4.4 Étude de l'équilibre

2.4.4.1 Variables de l'équilibre

L'objectif de pilotage du vol longitudinal est de maîtriser l'**altitude** h de l'appareil, sa **vitesse** V et la **pente** γ de sa trajectoire. La valeur de ces variables et la configuration de l'appareil vont suffire à définir la condition d'équilibre ; d'après les équations (2.30), nous devons également évaluer les valeurs des variables suivantes à l'équilibre : l'**incidence** α et la **vitesse de tangage** Q , qui sera nulle par définition.

De plus, la valeur des efforts aérodynamiques va dépendre de la position δ_e des **élevateurs**, ou gouvernes de profondeur ; nous séparerons donc les composantes des coefficients C_L et C_m , à vitesse donnée, comme suit :

$$C_L = C_{L_\alpha}(\alpha) + C_{L_\delta}\delta_e \quad (2.32)$$

$$C_m = C_{m_\alpha}(\alpha) + C_{m_\delta}\delta_e \quad (2.33)$$

Le coefficient C_D est essentiellement lié au coefficient C_L , tandis que la force de propulsion T dépendra de la position δ_t de la **manette des gaz**.

2.4.4.2 Calcul de l'équilibre

À l'équilibre, toutes les dérivées temporelles des variables d'état sont nulles ; les trois premières équations du système (2.30) modifiées avec les relations (2.32) et (2.33) deviennent alors :

$$0 = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_D(\alpha, \delta_e) + T(\delta_t) - m g \sin \gamma \quad (2.34)$$

$$0 = -\frac{1}{2} \rho S V^2 (C_{L_\alpha}(\alpha) + C_{L_\delta} \delta_e) + m g \cos \gamma \quad (2.35)$$

$$0 = \frac{1}{2} \rho S V^2 \bar{c} (C_{m_\alpha}(\alpha) + C_{m_\delta} \delta_e) \quad (2.36)$$

Ces trois équations permettent de connaître au point d'équilibre l'incidence α , la position de l'élévateur δ_e et celle de la manette des gaz δ_t à partir de la connaissance de la vitesse V et de la pente γ de l'avion. En effet, réécrivons dans un premier temps les équations (2.35) et (2.36) :

$$C_{L_\alpha}(\alpha) + C_{L_\delta} \delta_e = \frac{m g \cos \gamma}{\frac{1}{2} \rho S V^2} \quad (2.37)$$

$$C_{m_\alpha}(\alpha) + C_{m_\delta} \delta_e = 0 \quad (2.38)$$

Nous avons ici un système de deux équations à deux inconnues qui permet de déterminer les valeurs de α et δ_e .

Puis l'équation (2.34) réécrite sous la forme suivante :

$$T(\delta_t) = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D(\alpha, \delta_e) + m g \sin \gamma \quad (2.39)$$

nous fournit la valeur de δ_t .

Ce raisonnement suppose que les coefficients aérodynamiques soient connus pour toute condition de vol, et surtout que l'on puisse accéder aux fonctions réciproques de $C_{L_\alpha}(\alpha)$ ou $C_{m_\alpha}(\alpha)$, et de $T(\delta_t)$. Ceci est le cas pour l'application au *Boeing 747* que nous verrons au chapitre 3.

2.5 Linéarisation du modèle longitudinal

2.5.1 Linéarisation des équations

La condition de vol, ou point d'équilibre, étant définie, nous sommes en mesure d'obtenir le modèle des petites variations autour de celle-ci. Voici les notations que nous allons utiliser dans cette partie pour étudier les variables d'état, leurs valeurs à l'équilibre et les petites variations autour de ces dernières.

TAB. 2.1 – Notations adoptées pour les variables d'état.

variable d'état	valeur à l'équilibre	petite variation
V	V_e	$u = \frac{V-V_e}{V_e}$
γ	γ_e	$\bar{\gamma}$
α	α_e	$\bar{\alpha}$
Q	$Q_e = 0$	q
$\mathbf{X}$	$\mathbf{X}_e$	$\bar{\mathbf{x}}$
δ	δ_{eq}	$\bar{\delta}$

avec pour vecteur d'état $\mathbf{X} = [V \ \gamma \ \alpha \ Q]^T$ et pour vecteur des commandes : $\delta = [\delta_e \ \delta_t]^T$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire les équations linéarisées du système (2.30) en notant d'un indice « *lin* » les efforts (en incorporant le signe « - » dans F_{x_slin} et F_{z_slin}), ainsi que la force de poussée : en effet, leur traitement est l'objet du paragraphe suivant et ne sera pas développé ici. De plus, nous retiendrons l'approximation du paragraphe 2.4.3 : $\sin \gamma \approx \gamma$ et $\cos \gamma \approx 1$. Les équations, linéarisées en se limitant aux termes du premier ordre du développement en série de Taylor, sont les suivantes :

Équation de propulsion :

$$\dot{u} = \frac{1}{m V_e} \left(F_{x_slin} + T_{lin} \right) - \frac{g}{V_e} \bar{\gamma} \quad (2.40)$$

Équation de portance :

$$\dot{\gamma} = -\frac{1}{m V_e} F_{z_s lin} \quad (2.41)$$

Équation de moment :

$$\dot{q} = \frac{1}{I_{yy}} M_{y_s lin} \quad (2.42)$$

Équation cinématique angulaire :

$$\dot{\alpha} = q - \dot{\gamma} \quad (2.43)$$

Ces équations restent assez simples dans leurs expressions ; nous allons étudier maintenant la linéarisation des efforts extérieurs autour du point d'équilibre.

2.5.2 Linéarisation des efforts extérieurs

Les efforts extérieurs que nous allons étudier et linéariser dans ce paragraphe sont les forces et moments aérodynamiques F_{x_s} , F_{z_s} et M_{y_s} ; cependant, l'étude de la force de poussée T exige de connaître son expression, nous la laisserons donc sous cette forme avant d'en donner un modèle plus détaillé au chapitre 3.

Les efforts aérodynamiques ayant tous la même forme, la procédure de linéarisation sera donc la même : nous allons la détailler pour la force de portance F_{z_s} puis donner les principaux résultats pour F_{x_s} et M_{y_s} .

Rappelons tout d'abord son expression, vue en (2.28) :

$$F_{z_s} = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad (2.44)$$

où le coefficient aérodynamique C_L dépend de variables d'état. Linéarisons cette expression autour de la condition de vol, en écrivant l'équation aux variations de Poincaré, pour obtenir la force $F_{z_s lin}$:

$$F_{z_s lin} = \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \mathbf{X}} \bigg|_{\mathbf{X}_e, \delta_{eq}} \bar{\mathbf{x}} + \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \delta} \bigg|_{\mathbf{X}_e, \delta_{eq}} \bar{\delta} \quad (2.45)$$

soit :

$$F_{zs\,lin} = \frac{\partial F_{zs}}{\partial u} u + \frac{\partial F_{zs}}{\partial \gamma} \bar{\gamma} + \frac{\partial F_{zs}}{\partial \alpha} \bar{\alpha} + \frac{\partial F_{zs}}{\partial Q} q + \frac{\partial F_{zs}}{\partial h} \bar{h} + \frac{\partial F_{zs}}{\partial \delta_e} \bar{\delta}_e + \frac{\partial F_{zs}}{\partial \delta_t} \bar{\delta}_t \quad (2.46)$$

où les dérivées partielles sont évaluées au point d'équilibre. Prenons par exemple le premier terme, et développons le comme suit :

$$\left. \frac{\partial F_{zs}}{\partial u} \right|_0 = V_e \left. \frac{\partial F_{zs}}{\partial (V - V_e)} \right|_{V_e} = V_e \left. \frac{\partial F_{zs}}{\partial V} \right|_{V_e} = -V_e \cdot \rho S V_e \left(C_L + \frac{V_e}{2} \frac{\partial C_L}{\partial V} \right) \quad (2.47)$$

L'expression $\frac{1}{m} \frac{\partial F_{zs}}{\partial u}$ est appelée **dérivée de stabilité**, notée Z_u , et son utilisation simplifie grandement les écritures ; chacune des dérivées partielles peut s'écrire sous cette forme. Nous verrons dans la suite que certaines d'entre elles peuvent être négligées en fonction des variables auxquelles elles se rapportent.

On va obtenir de cette manière la forme suivante pour la relation (2.46) :

$$\frac{1}{m} F_{zs\,lin} = Z_u u + Z_{\bar{\gamma}} \bar{\gamma} + Z_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} + Z_q q + Z_{\bar{h}} \bar{h} + Z_{\bar{\delta}_e} \bar{\delta}_e + Z_{\bar{\delta}_t} \bar{\delta}_t \quad (2.48)$$

et des expressions équivalentes pour la force de traînée $F_{xs\,lin}$ et le moment en tangage $M_{ys\,lin}$:

$$\frac{1}{m} F_{xs\,lin} = X_u u + X_{\bar{\gamma}} \bar{\gamma} + X_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} + X_q q + X_{\bar{h}} \bar{h} + X_{\bar{\delta}_e} \bar{\delta}_e + X_{\bar{\delta}_t} \bar{\delta}_t \quad (2.49)$$

$$\frac{1}{I_{yy}} M_{ys\,lin} = M_u u + M_{\bar{\gamma}} \bar{\gamma} + M_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} + M_q q + M_{\bar{h}} \bar{h} + M_{\bar{\delta}_e} \bar{\delta}_e + M_{\bar{\delta}_t} \bar{\delta}_t \quad (2.50)$$

L'annexe I donne les expressions des dérivées de stabilité pour les trois efforts aérodynamiques ; nous verrons les simplifications et interprétations de ces termes lors de l'application au *Boeing 747*, au chapitre 3.

2.5.3 Modèle d'état

Nous avons maintenant toutes les données nécessaires à l'écriture du modèle d'état sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= A \bar{\mathbf{x}} + B \bar{\boldsymbol{\delta}} \\ \mathbf{y} &= C \bar{\mathbf{x}} + D \bar{\boldsymbol{\delta}} \end{cases} \quad (2.51)$$

où A est une matrice 4×4 , B une matrice 4×2 et $\mathbf{y}$ le vecteur des sorties.

Nous donnerons dans ce paragraphe l'expression des matrices A et B , les matrices C et D dépendant des sorties que l'on souhaite observer.

Dans ces conditions, avec les relations (2.40) à (2.43) et les expressions des dérivées de stabilité, la matrice A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} A_u & A_{\bar{\gamma}} & A_{\bar{\alpha}} & A_q \\ B_u & B_{\bar{\gamma}} & B_{\bar{\alpha}} & B_q \\ -B_u & -B_{\bar{\gamma}} & -B_{\bar{\alpha}} & 1 - B_q \\ D_u & D_{\bar{\gamma}} & D_{\bar{\alpha}} & D_q \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

où la première ligne est :

$$\begin{aligned} A_u &= \frac{1}{m V_e} (X_u + T_u) \\ A_{\bar{\gamma}} &= \frac{1}{m V_e} (X_{\bar{\gamma}} + T_{\bar{\gamma}}) - \frac{g}{V_e} \\ A_{\bar{\alpha}} &= \frac{1}{m V_e} (X_{\bar{\alpha}} + T_{\bar{\alpha}}) \\ A_q &= \frac{1}{m V_e} (X_q + T_q) \end{aligned}$$

la deuxième ligne est :

$$\begin{aligned} B_u &= -\frac{1}{m V_e} Z_u \\ B_{\bar{\gamma}} &= -\frac{1}{m V_e} Z_{\bar{\gamma}} \\ B_{\bar{\alpha}} &= -\frac{1}{m V_e} Z_{\bar{\alpha}} \\ B_q &= -\frac{1}{m V_e} Z_q \end{aligned}$$

et la quatrième ligne est :

$$\begin{aligned} D_u &= \frac{1}{I_{yy}} M_u \\ D_{\bar{\gamma}} &= \frac{1}{I_{yy}} M_{\bar{\gamma}} \\ D_{\bar{\alpha}} &= \frac{1}{I_{yy}} M_{\bar{\alpha}} \\ D_q &= \frac{1}{I_{yy}} M_q \end{aligned}$$

Puis la matrice B s'écrit :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{m V_e} (X_{\delta_e} + T_{\delta_e}) & \frac{1}{m V_e} (X_{\delta_t} + T_{\delta_t}) \\ -\frac{1}{m V_e} Z_{\delta_e} & -\frac{1}{m V_e} Z_{\delta_t} \\ \frac{1}{m V_e} Z_{\delta_e} & \frac{1}{m V_e} Z_{\delta_t} \\ \frac{1}{I_{yy}} M_{\delta_e} & \frac{1}{I_{yy}} M_{\delta_t} \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Nous avons ainsi obtenu le modèle longitudinal théorique et linéarisé d'un avion en toute condition de vol, que nous allons appliquer maintenant à un appareil : le *Boeing 747*.

CHAPITRE 3

MODÉLISATION ET SIMULATION DU *BOEING 747*

Dans les chapitres précédents, nous avons établi le modèle longitudinal d'un avion. Nous allons maintenant le mettre en application pratique à un appareil : le *Boeing 747*. La méthode utilisée est dans un premier temps de réunir les données disponibles : caractéristiques techniques, données d'inertie, coefficients aérodynamiques, puis dans un deuxième temps de les introduire dans le modèle théorique, synthétisé dans les chapitres précédents. C'est l'objet de ce chapitre, dans lequel nous allons élaborer un module **MATLAB** « GUI » (Graphical User Interface), qui va nous donner le modèle d'état de l'avion en toute condition de vol.

*Toutes les grandeurs utilisées dans les calculs seront données en **unités S.I.** . Les angles seront ainsi donnés en radians (rad), à l'exception de la position angulaire de l'élévateur δ_e et celle des volets (notée δ_F) qui seront exprimées en degrés (deg).*

3.1 Description du *Boeing 747*

3.1.1 Historique

Porté par le succès des avions à réaction, le transport aérien a connu dans les années 1960 un essor qui laissait prévoir un doublement du trafic tous les six ans. Cette demande a favorisé le développement d'appareils à fuselage de grand diamètre : les gros-porteurs, ou jumbo-jets. Le *Boeing 747* sera le premier gros-porteur à réaction. Son premier vol a eu lieu le 9 février 1969 et il est entré en service en 1970, bientôt suivi de diverses évolutions et modèles de conception analogue.

3.1.2 Caractéristiques techniques

Le document technique [13] de la compagnie *Boeing Inc.* nous fournit toutes les données techniques nécessaires à l'élaboration du modèle :

- les dimensions de l'appareil,
- ses données d'inertie : masse, positionnement du centre de gravité et matrice d'inertie en fonction de sa masse,
- ses coefficients aérodynamiques C_D , C_L et C_m , donnés sous forme de composantes élémentaires comme nous le verrons plus loin,
- ses configurations possibles d'angles de volets, ou hypersustentateurs,
- des simulations de référence réalisées par *Boeing inc.* et la *NASA*, qui nous permettront de valider notre modèle par comparaison.

Toutes ces informations sont données sous forme de courbes, qui devront être implantées dans le logiciel **MATLAB** pour être exploitées. La figure (3.1) montre l'appareil sous différents points de vue, avec ses dimensions.

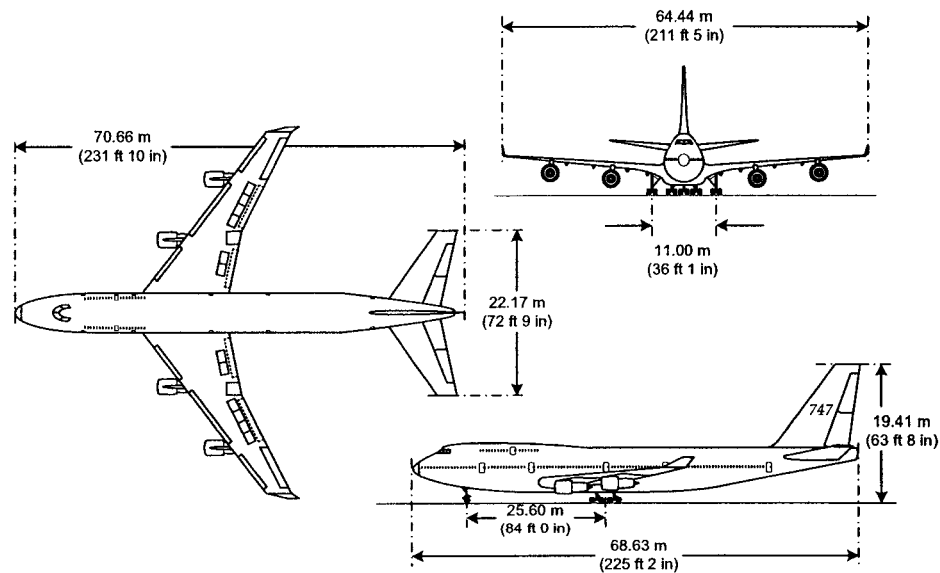


FIG. 3.1 – Le *Boeing 747-400* sous différents angles, et ses dimensions.

3.1.3 Surfaces de commande

Le *Boeing 747* possède un grand nombre de surfaces de commande, illustrées à la figure (3.2). Cependant, nous n'utiliserons qu'un petit nombre parmi celles-ci, utiles pour le mouvement longitudinal, que nous donnerons après la description générale de ces surfaces.

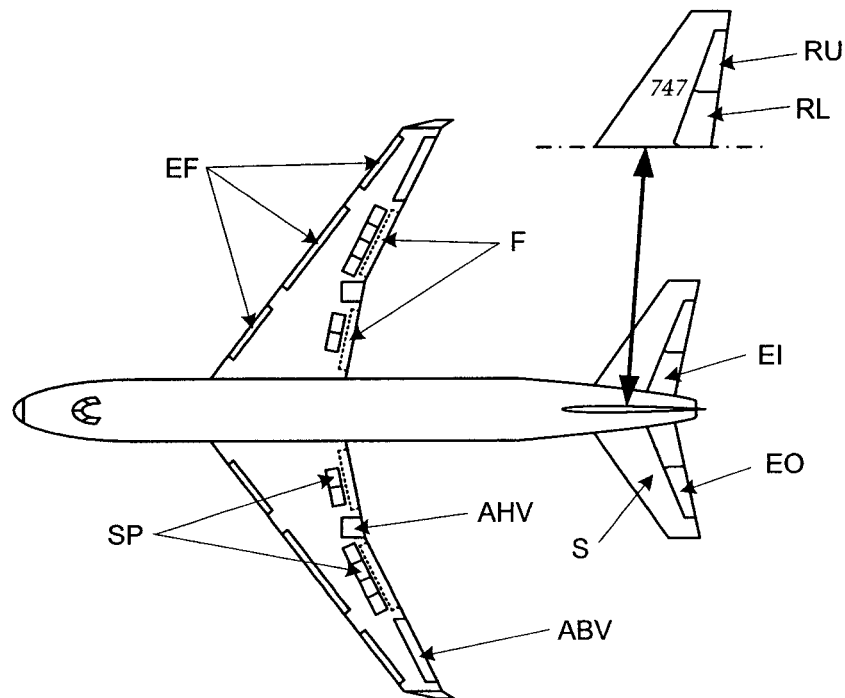


FIG. 3.2 – Les surfaces de commande du *Boeing 747*.

Pour le vol latéral :

- les *ailerons* basse vitesse **ABV** et haute vitesse **AHV** provoquent le mouvement de roulis de l'avion autour de son axe longitudinal,
- les *aérofreins* **SP** ont un double rôle : d'une part assister les ailerons à faible vitesse lorsque leur seule action ne suffit plus et d'autre part freiner l'avion en phase d'approche ou à l'atterrissage,
- les *gouvernes de direction* hautes **RU** et basses **RL** provoquent le mouvement de lacet de l'appareil.

Pour le vol longitudinal :

- les *gouvernes de profondeur* intérieures **EI** et extérieures **EO**, ou *élévateurs*, provoquent le mouvement en tangage de l'avion,
- les *volets* **F** augmentent la portance de l'appareil aux vitesses faibles, en phase de décollage, d'approche ou d'atterrissage, et sont jumelés aux *becs* **EF** qui diminuent le risque de décrochage,
- le *stabilisateur* **S**, sur lequel sont fixées les gouvernes de profondeur, est réglé de manière à compenser l'angle de ces dernières : ainsi le stabilisateur correctement réglé et une position neutre du manche à balai maintiendront l'incidence de l'appareil.

Dans le cadre de notre étude du mouvement longitudinal, et dans un but de simplification, nous utiliserons comme surfaces de commande :

- les **élévateurs** que nous supposons liés : $\delta_{EI} = \delta_{EO} = \delta_e$ et représentant la résultante, en vol longitudinal, des actions de **EI** et **EO**,
- les **volets et becs**, qui sont traités conjointement dans le document technique et dont la position est caractérisée par l'angle δ_F .

Les mouvements de ces surfaces sont soumis à des restrictions, résumées pour les *élévateurs* dans le tableau 3.1 en terme de débattement et de vitesse de variation, et pour les *volets* dans le tableau 3.2 en terme de valeurs possibles.

TAB. 3.1 – Limites de débattement et de vitesse de variation des *élévateurs*.

direction	débattement δ_e	vitesse $\frac{d\delta_e}{dt}$
vers le haut	-23°	$37^\circ/s$
vers le bas	$+17^\circ$	$37^\circ/s$

TAB. 3.2 – Valeurs possibles pour l’angle des volets.

phase de vol	angle des volets δ_F
croisière	0°
transition	1°
transition	5°
décollage	10°
décollage, approche	20°
atterrissage	25°
atterrissage	30°

3.1.4 Procédure d’interpolation des données

3.1.4.1 Principe

Le document technique [13] de *Boeing Inc.* présente les coefficients sous forme de courbes que nous voulons implémenter sous **MATLAB** en fonctions `.m`. Pour ce faire, nous prélevons les coordonnées de quelques points caractéristiques (typiquement une quinzaine par représentation), puis nous les interpolons en utilisant la méthode des splines cubiques, disponible sous la fonction `spline` : celle-ci les relie par des polynômes d’ordre 3, et la fonction ainsi obtenue est trois fois continûment différentiable. Ceci a un intérêt lorsqu’il s’agit de dériver les coefficients aérodynamiques pour obtenir les dérivées de stabilité. Nous avons donc préféré cette méthode à celle de l’interpolation linéaire par la fonction `interp1`, ne permettant pas cette opération.

Chacun des coefficients est généralement donné en deux parties : une première partie *basse vitesse*, qui correspond aux volets baissés en phase de décollage, d’approche ou d’atterrissage, et une deuxième partie *volets rentrés*, qui correspond aux vitesses élevées en phase de croisière. Pour chacun d’entre eux, nous avons regroupé ces deux parties en un seul programme, qui permet ainsi de ne faire appel qu’à une seule fonction par coefficient.

L'ensemble des coefficients et données d'inertie se retrouve ainsi implémenté en fonction des paramètres de la condition de vol. De plus, il est possible de représenter chacun d'entre eux graphiquement. Pour plus de détails, une aide pour chaque fonction a été créée, et peut être appelée en tapant à l'invite **MATLAB** : `>> help fonction`. Quelques exemples en seront donnés plus loin.

3.1.4.2 Exemple d'interpolation du coefficient $C_{L_{basic \text{ low speed}}}$

Nous allons détailler dans ce paragraphe le processus d'interpolation d'un coefficient *basse vitesse*, donné pour plusieurs angles de volets abaissés ($\delta_F > 0$). La figure (3.3) montre la page du document technique [13] sur laquelle sont données les courbes de la composante $C_{L_{basic \text{ low speed}}}$ du coefficient C_L , pour plusieurs configurations de volets δ_F .

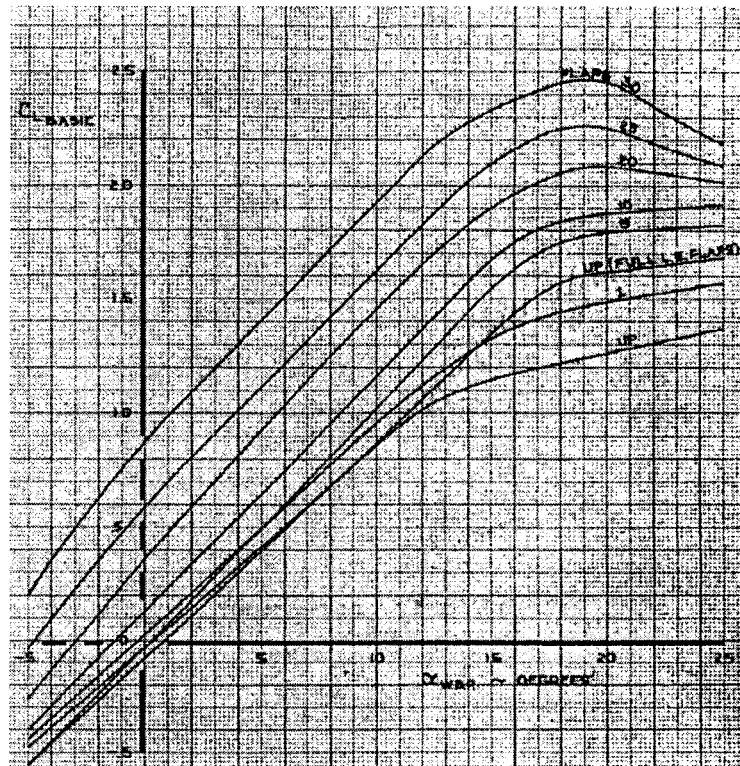


FIG. 3.3 – La composante basique originale du coefficient C_L .

La première étape est de relever quelques points de chacune d'entre elles, en l'occurrence 18 points, et de les rentrer sous forme de vecteurs de la manière suivante, par exemple pour $\delta_F = 10^\circ$:

```
vect_alpha =  $\frac{\pi}{180}$  [-5  -4  -2  0  2  4  6  8  10  12  14  16  ...
                    18  19  20  22  24  25];

CL_10_init = [-0.4  -0.3  -0.08  0.13  0.34  0.54  0.75  0.96  1.16  ...
              1.37  1.57  1.75  1.84  1.86  1.88  1.89  1.91  1.92];
```

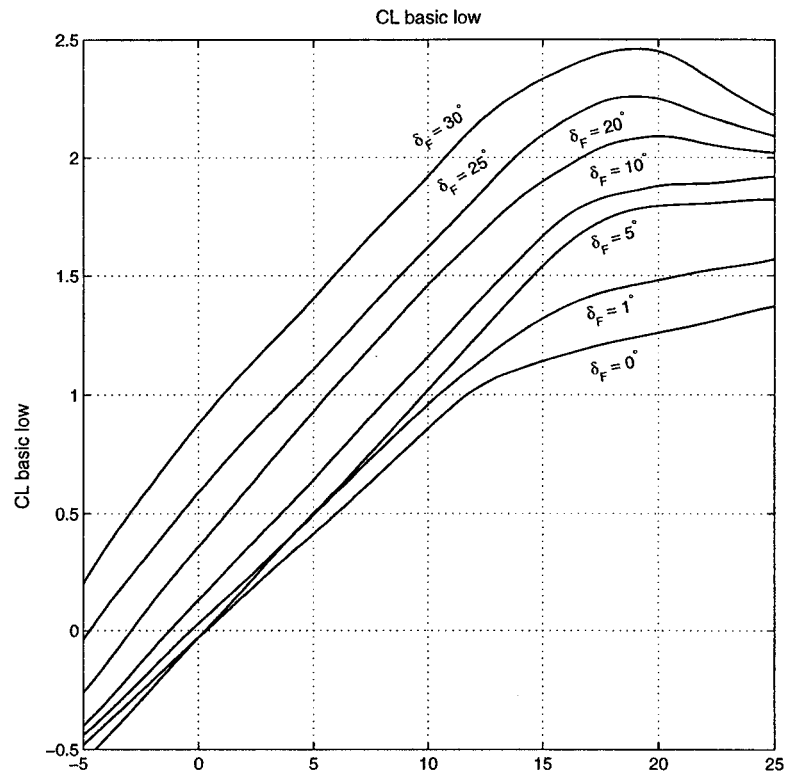


FIG. 3.4 – La composante basique expérimentale du coefficient C_L .

Puis ces vecteurs doivent être transformés en une structure **MATLAB** de spline grâce à l'opération suivante :

```
CL_10 = spline(vect_alpha, CL_10_init);
```

Enfin, pour obtenir la valeur désirée du coefficient en un certain angle α , il faut extraire cette donnée de la structure en exécutant la commande :

```
CL_basic_low = ppval(CL_10,  $\alpha$ );
```

La figure (3.4) montre les courbes correspondantes à celles, originales, de la figure (3.3), et on peut maintenant obtenir la valeur de la composante en tout point.

Cette procédure est répétée pour chaque valeur de l'angle de volets δ_F , puis de la même façon pour tous les coefficients.

3.1.4.3 Dérivation d'un coefficient

Pour obtenir le modèle linéarisé de l'avion, nous avons besoin de dériver les coefficients par rapport à certaines variables, afin d'obtenir les dérivées de stabilité : la fonction `derivpp.m` permet d'effectuer cette opération. En effet, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, chaque courbe est mise sous la forme d'une structure **MATLAB** spline, composée de polynômes de degré 3 entre les points originaux. Cette fonction a pour but de dériver ces polynômes un à un, puis de synthétiser une nouvelle structure dérivée à partir de ces derniers, qui ne sera plus que deux fois différentiable.

3.2 Synthèse du modèle longitudinal

Le modèle longitudinal du *Boeing 747* sera celui vu au chapitre 2, dans lequel nous allons implanter les données qui lui sont propres : ses données d'inertie puis ses coefficients aérodynamiques, qui vont aboutir aux expressions des forces et moments.

3.2.1 Données d'inertie

La masse de l'avion est notée m , et varie entre 158 800 kg et 340 000 kg. Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.3.1 du chapitre 2, la position de son centre de gravité G , mesurée en pourcentage de la corde aérodynamique moyenne $\bar{c}$ ¹, varie entre environ 10 % MAC et 40 % MAC, mais nous la considérerons fixe sur l'intervalle d'étude.

Le moment d'inertie en tangage I_{yy} nous est fourni sous forme d'une courbe que nous allons rentrer comme fonction **MATLAB** : `coeff_iyy.m`, prenant comme argument d'entrée la masse de l'avion et rendant en sortie la valeur du moment d'inertie I_{yy} . Sa représentation graphique est donnée par la figure suivante :

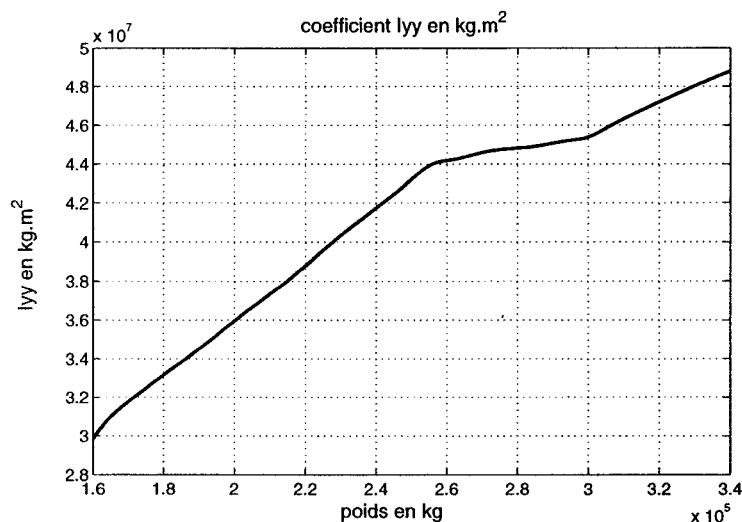


FIG. 3.5 – Représentation du moment d'inertie I_{yy} .

Les autres moments et produits d'inertie ne nous intéressent pas dans le cadre du mouvement longitudinal.

3.2.2 Données aérodynamiques

Les coefficients aérodynamiques C_L , C_D et C_m sont donnés en sommes de contributions qui sont, chacune d'entre elles, représentées graphiquement en fonction de la

¹ $\bar{c} = MAC$

configuration de l'avion et de la condition de vol : étudions chacun d'entre eux.

3.2.2.1 Coefficient de portance C_L

Le coefficient de portance C_L est le plus important à étudier, puisque les deux autres de traînée et de moment en tangage vont en dépendre, comme nous le verrons plus loin. Voici son expression donnée dans [13] :

$$C_L = C_{L_{basic}} + \Delta C_L + \Delta \frac{dC_L}{d\alpha} \alpha + \frac{dC_L}{d\hat{\alpha}} \hat{\alpha} + \frac{dC_L}{d\hat{Q}} \hat{Q} + \frac{dC_L}{dn_z} n_z + \frac{dC_L}{d\delta_e} \delta_e \quad (3.1)$$

où $\hat{\alpha} = \frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2V}$, $\hat{Q} = \frac{Q \bar{c}}{2V}$, et $n_z = \frac{\ddot{h}}{g}$ est le facteur de charge de l'avion. Le détail des composantes est donné dans le tableau 3.3 suivant :

TAB. 3.3 – Détail des composantes du coefficient C_L .

$C_{L_{basic}}$	coefficient de portance élémentaire pour l'avion rigide
ΔC_L	variation de C_L due à l'élasticité
$\Delta \frac{dC_L}{d\alpha} \alpha$	variation de C_L due à l'effet élastique en fonction de l'incidence
$\frac{dC_L}{d\hat{\alpha}} \hat{\alpha}$	variation de C_L due à la vitesse de variation de l'angle d'incidence α
$\frac{dC_L}{d\hat{Q}} \hat{Q}$	variation de C_L due à la vitesse de tangage Q
$\frac{dC_L}{dn_z} n_z$	variation de C_L due au facteur de charge n_z
$\frac{dC_L}{d\delta_e} \delta_e$	variation de C_L due au changement de l'angle des élévateurs δ_e

À chacune de ces composantes est associée une fonction **MATLAB** qui donne sa valeur pour une configuration de l'avion et une condition de vol donnée : ces fonctions sont obtenues par interpolation des courbes du document [13] selon la procédure décrite précédemment.

La figure (3.6) représente la courbe de la composante principale $C_{L_{basic}}$, prédominante devant les autres, pour deux configurations de volets, en fonction de l'angle

d'incidence α ; on retrouve ainsi deux des six courbes présentées à la figure (3.4) dans la configuration « *basse vitesse* ».

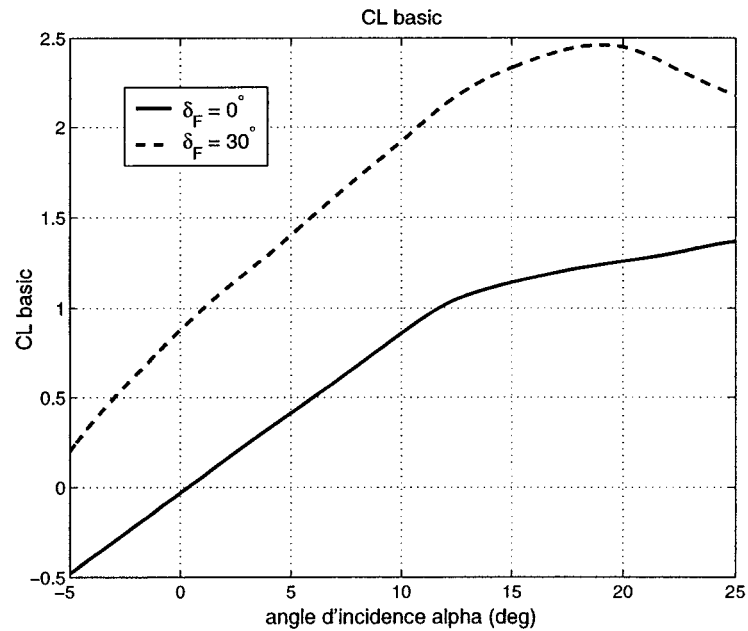


FIG. 3.6 – Représentation du coefficient de portance $C_{L_{basic}}$ en fonction de l'incidence α .

Le coefficient C_L est donné par une fonction `lift.m`, dont la syntaxe est la suivante :

```
COEFFICIENT DE PORTANCE CL
lift = lift(alpha,alpha_point,Q,nz,deltaEI,deltaEO,V,deltaF,alt,MAC)
incidence : alpha en rad
vitesse de rotation d'incidence : alpha_point en rad/s
vitesse de tangage : Q en rad/s
facteur de charge : nz
position des élévateurs : deltaEI = deltaEO = deltaE en deg
vitesse : V en m/s
angle des volets : deltaF en deg
altitude : alt en m
position du C.G. : MAC en %MAC
```

Pour obtenir le modèle longitudinal, il faut avoir accès aux dérivées de stabilité, vues au paragraphe 2.5.2. Après une étude des différents termes, on constate que les contributions $Z_{\bar{\gamma}}$, $Z_{\bar{h}}$, $Z_{\bar{\delta}_t}$ et Z_q peuvent être négligées si l'on prend en compte les considérations suivantes :

- la première $Z_{\bar{\gamma}}$, car les forces aérodynamiques dépendent de l'angle formé par l'axe de l'avion et le vecteur vitesse, soit de son incidence α , mais pas de la pente γ de la trajectoire,
- la deuxième $Z_{\bar{h}}$, car les petites variations d'altitude autour de la condition de vol ne provoquent pas un changement significatif des propriétés de l'atmosphère,
- la troisième $Z_{\bar{\delta}_t}$, puisque la poussée n'a pas d'influence sur la portance F_{zs} ,
- enfin, comme précisé dans Boiffier [7], la quatrième Z_q est souvent négligée.

La relation (2.48) devient alors avec ces simplifications :

$$F_{zslin} = Z_u u + Z_{\hat{\alpha}} \hat{\alpha} + Z_{\bar{\delta}_e} \bar{\delta}_e \quad (3.2)$$

où $\hat{\alpha} = \frac{\bar{\alpha}\bar{c}}{2V}$. À partir de la relation (3.2) et des expressions des dérivées de stabilité données en annexe I, on arrive à :

$$F_{zslin} = -V_e \cdot \rho S V_e \left(C_L + \frac{V_e}{2} \frac{\partial C_L}{\partial V} \right) u - \frac{1}{2} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \hat{\alpha}} \hat{\alpha} - \frac{1}{2} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \bar{\delta}_e} \bar{\delta}_e \quad (3.3)$$

où $\frac{\partial C_L}{\partial V}$ est obtenu par dérivation du coefficient C_L selon la procédure décrite au paragraphe 3.1.4.3.

3.2.2.2 Coefficient de traînée C_D

Le coefficient de traînée C_D a une expression beaucoup plus simple que le précédent, donnée par la relation suivante :

$$C_D = K_f C_{D_{basic}} + (1 - K_f) C_{D_M}, \text{ où } \begin{cases} K_f = 1 & \text{si les volets sont baissés,} \\ & \text{soit } \delta_F > 0 \\ K_f = 0 & \text{si les volets sont rentrés,} \\ & \text{soit } \delta_F = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

dont le détail des composantes est donné au tableau 3.4.

TAB. 3.4 – Détail des composantes du coefficient C_D .

$C_{D_{basic}}$	coefficient de traînée élémentaire pour l'avion rigide et les volets baissés
C_{D_M}	coefficient de traînée élémentaire pour l'avion rigide et les volets relevés

Il faut noter que le deuxième terme C_{D_M} s'exprime directement en fonction du coefficient C_L^* , constitué des six premiers termes de C_L donnés à la relation (3.1), selon l'équation suivante :

$$C_L^* = C_{L_{basic}} + \Delta C_L + \Delta \frac{dC_L}{d\alpha} \alpha + \frac{dC_L}{d\hat{\alpha}} \hat{\alpha} + \frac{dC_L}{d\hat{Q}} \hat{Q} + \frac{dC_L}{dn_z} n_z \quad (3.5)$$

de telle sorte que l'on ait :

$$C_L = C_L^* + \frac{dC_L}{d\delta_e} \delta_e \quad (3.6)$$

La figure (3.7) donne une représentation du terme C_{D_M} en fonction de la valeur de C_L^* pour une vitesse de *Mach* 0.7.

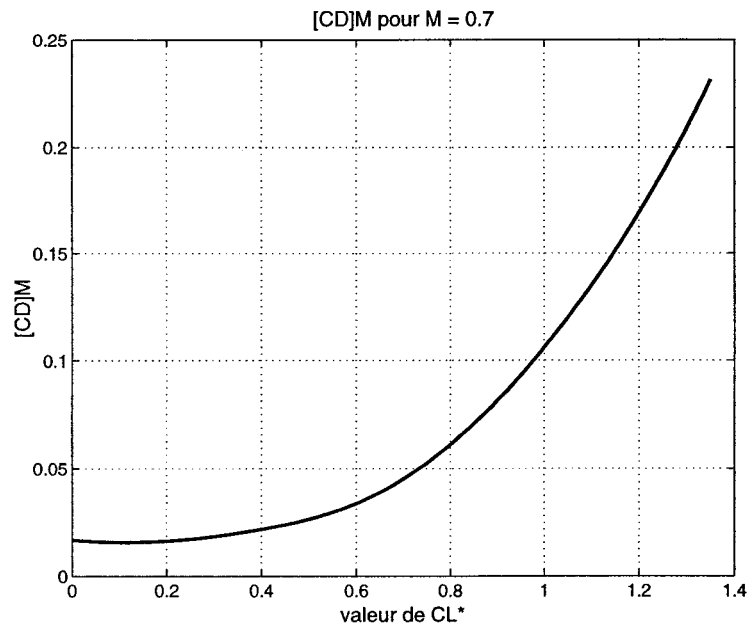


FIG. 3.7 – Représentation du coefficient de traînée C_{D_M} en fonction de C_L^* pour *Mach* 0,7.

De même que pour le coefficient de portance vu au paragraphe précédent, la syntaxe de la fonction `drag.m` donnant la valeur du coefficient C_D en toute condition de vol est la suivante :

```
COEFFICIENT DE TRAINEE CD
drag = drag(alpha,deltaF,V,alt,CL*)
incidence : alpha en rad
angle des volets : deltaF en deg
vitesse : V en m/s
altitude : alt en m
coefficient de portance : CL*
```

En outre, les dérivées de stabilité $X_{\bar{\gamma}}$, $X_{\bar{h}}$, $X_{\bar{\delta}_t}$ et X_q sont négligées pour les mêmes raisons que pour le coefficient C_L , ainsi que la composante $X_{\bar{\delta}_e}$ puisque l'on ne prend pas en compte la variation de traînée engendrée par le mouvement des élévateurs.

Les termes retenus sont donc X_u et $X_{\bar{\alpha}}$, de telle sorte que :

$$F_{x_{slin}} = X_u u + X_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} \quad (3.7)$$

Puis d'après la relation (3.7) et l'expression des dérivées de stabilité données en annexe I, l'expression de la force de traînée linéarisée est :

$$F_{x_{slin}} = -V_e \cdot \rho S V_e C_D u - \frac{1}{2} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \bar{\alpha} \quad (3.8)$$

où l'on néglige la variation de traînée provoquée par une variation de vitesse, soit $\frac{\partial C_D}{\partial V} \approx 0$.

3.2.2.3 Coefficient de moment en tangage C_m

La procédure de traitement du coefficient de moment en tangage C_m est très proche de celle adoptée pour le coefficient de portance C_L ; nous n'en donnerons donc que les résultats principaux. Son expression est la suivante :

$$\begin{aligned} C_m = & C_{m,25 basic} + \Delta C_{m,25} + \Delta \frac{dC_{m,25}}{d\alpha} \alpha + C_L (C.G. - .25) + \\ & + \frac{dC_m}{d\hat{\alpha}} \hat{\alpha} + \frac{dC_{m,25}}{d\hat{Q}} \hat{Q} + \frac{dC_{m,25}}{dn_z} n_z + \frac{dC_m}{d\delta_e} \delta_e \end{aligned} \quad (3.9)$$

où $\hat{\alpha} = \frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2V}$, $\hat{Q} = \frac{Q \bar{c}}{2V}$ et ses composantes sont détaillées dans le tableau 3.5.

On remarque que les différents termes sont donnés pour une position de référence du centre de gravité G : $x_{C.G.} = 25\% \bar{c}$; le terme $C_L (x_{C.G.} - .25)$ apporte la correction nécessaire en cas de changement de sa position.

La figure (3.8) représente la composante principale $C_{m,25 basic}$ pour deux configurations de volets extrêmes, en fonction de l'angle d'incidence α . On remarque physiquement qu'un angle d'incidence α élevé provoquera un moment de rappel négatif, ramenant l'avion à sa position d'équilibre, et réciproquement : l'avion configuré ainsi aura naturellement tendance à rester stable, c'est-à-dire à ramener l'incidence α vers

TAB. 3.5 – Détail des composantes du coefficient C_m .

$C_{m.25\ basic}$	coefficient de moment élémentaire en tangage pour l'avion rigide
$\Delta C_{m.25}$	variation de C_m due à l'élasticité
$\Delta \frac{dC_{m.25}}{d\alpha} \alpha$	variation de C_m due à l'effet élastique en fonction de l'incidence
$C_L (x_{C.G.} - .25)$	variation de C_m dû à un changement de position de G
$\frac{dC_m}{d\dot{\alpha}} \hat{\alpha}$	variation de C_m due à la vitesse de rotation de l'incidence α
$\frac{dC_{m.25}}{dQ} \hat{Q}$	variation de C_m due à la vitesse de tangage Q
$\frac{dC_{m.25}}{dn_z} n_z$	variation de C_m due au facteur de charge n_z
$\frac{dC_m}{d\delta_e} \delta_e$	variation de C_m due au changement de l'angle des élévateurs δ_e

sa valeur d'équilibre. Cependant, il n'y a aucune garantie sur ses performances et sur la stabilité selon la pente γ .

La syntaxe du programme `pitch.m` donnant la valeur du coefficient C_m en tout point est très proche de celle de la fonction `lift.m` :

```

COEFFICIENT DE MOMENT EN TANGAGE Cm
pitch=pitch(alpha,alpha_point,Q,nz,deltaEI,deltaEO,V,deltaF,alt,MAC)
incidence : alpha en rad
vitesse de rotation d'incidence : alpha_point en rad/s
vitesse de tangage : Q en rad/s
facteur de charge : nz
position des élévateurs : deltaEI = deltaEO = deltaE en deg
vitesse : V en m/s
angle des volets : deltaF en deg
altitude : alt en m
position du C.G. : MAC en %MAC

```

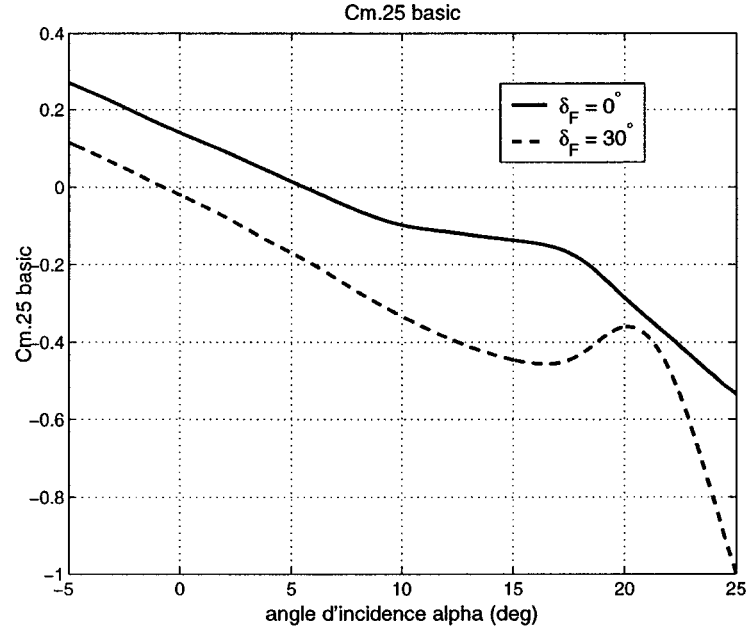


FIG. 3.8 – Représentation du coefficient de moment en tangage $C_{m.25\ basic}$ en fonction de l'incidence α .

En négligeant les dérivées de stabilité $M_{\bar{\gamma}}$, $M_{\bar{h}}$ et $X_{\bar{\delta}_e}$ pour les mêmes raisons que pour le coefficient de portance C_L , le moment en tangage s'écrit :

$$M_{y_{s\ lin}} = M_u u + M_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} + M_q q + M_{\bar{\delta}_e} \bar{\delta}_e \quad (3.10)$$

où l'on a, comme dans le cas de la force de traînée, $\frac{\partial C_m}{\partial V} \approx 0$ dans la dérivée de stabilité M_u .

Ainsi, l'expression du moment en tangage M_{y_s} est la suivante :

$$\begin{aligned} M_{y_{s\ lin}} = & V_e \cdot \rho S \bar{c} V_e C_m u + \frac{1}{2} \rho S \bar{c} V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \bar{\alpha} + \\ & + \frac{1}{2} \rho S \bar{c} V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial Q} q + \frac{1}{2} \rho S \bar{c} V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \bar{\delta}_e} \bar{\delta}_e \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2.3 Modèle de la poussée

Nous avons fait précédemment l'hypothèse que la poussée $\vec{T}$ est dirigée par l'axe $\vec{x}_s$, et ne provoque aucun moment en tangage. Nous allons adopter un modèle simplifié de cet effort, proposé dans Boiffier [7] pour les avions à réaction, donné par la relation suivante :

$$\vec{T} = 4 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{0,6} T_0 \delta_t \vec{x}_s \quad (3.12)$$

où T_0 est la poussée maximale engendrée par un réacteur au sol, δ_t est la position de la manette des gaz, comprise entre 0 (poussée nulle) et 1 (poussée maximale), et le facteur 4 correspond au nombre de réacteurs de l'appareil.

Remarque : en pratique sur le *Boeing 747*, l'axe de la poussée $\vec{T}$ ne passe pas par le centre de gravité et provoque donc un moment en tangage ; cependant, il est compensé par le réglage approprié du stabilisateur horizontal.

3.2.4 Configuration des volets et becs

Le système d'hypersustentation a pour but d'augmenter la portance du profil de l'avion et de diminuer les risques de décrochage à basse vitesse, c'est-à-dire pendant les phases de décollage, d'approche et surtout d'atterrissage. Il est composé de volets et de becs qui « allongent » l'aile, et peuvent prendre conjointement plusieurs inclinaisons.

Cependant, les angles pris par ces appendices aérodynamiques entraînent des contraintes sur la vitesse de l'appareil, afin qu'une trop grande vitesse ne les arrache pas ou que ces dispositifs n'augmentent pas exagérément la traînée. Le tableau 3.6 donne ces limites, où V_E est la vitesse équivalente de l'avion, exprimée en noeuds, et définie dans le document [13] de la compagnie *Boeing Inc.* par la relation suivante, si V est sa vitesse vraie, exprimée en m.s^{-1} , et ρ_0 la masse volumique de l'air au niveau de la mer ($h = 0$ m), exprimée en kg.m^{-3} :

$$V_E = \frac{1}{1.689} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} V \quad (3.13)$$

TAB. 3.6 – Limites de vitesse V_E en fonction de l'angle de volets sortis.

angle de volets δ_F (°)	V_E maximale (noeuds)
30	180
25	205
20	214
10	225
5	240
1	265

3.2.5 Modèle longitudinal du *Boeing 747*

Les données précédentes nous permettent maintenant d'écrire le modèle longitudinal linéarisé du *Boeing 747*.

En reprenant les notations définies en fin de chapitre 2, soit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= A \bar{x} + B \bar{\delta} \\ \mathbf{y} &= C \bar{x} + D \bar{\delta} \end{cases} \quad (3.14)$$

où le vecteur d'état correspondant est $\bar{x} = [u \ \bar{\gamma} \ \bar{\alpha} \ q]^T$ et le vecteur des commandes correspondant est $\bar{\delta} = [\bar{\delta}_e \ \bar{\delta}_t]^T$, les matrices d'état A et B s'expriment de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_u & A_{\bar{\gamma}} & A_{\bar{\alpha}} & 0 \\ B_u & 0 & B_{\bar{\alpha}} & 0 \\ -B_u & 0 & -B_{\bar{\alpha}} & 1 \\ D_u & 0 & D_{\bar{\alpha}} & D_q \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m V_e} \left(4 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{0,6} T_0 \right) \\ -\frac{1}{m V_e} \left(-\frac{1}{2} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e} \right) & 0 \\ \frac{1}{m V_e} \left(-\frac{1}{2} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e} \right) & 0 \\ \frac{1}{I_{yy}} \left(\frac{1}{2} \rho S \bar{c} V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \delta_e} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

où :

$$\begin{aligned} A_u &= \frac{1}{m V_e} \left(-V_e \cdot \rho S V_e C_D \right) \\ A_{\bar{\gamma}} &= -\frac{g}{V_e} \\ A_{\bar{\alpha}} &= \frac{1}{m V_e} \left(-\frac{1}{2} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_u &= -\frac{1}{m V_e} \left(-V_e \cdot \rho S V_e \left(C_L + \frac{V_e}{2} \frac{\partial C_L}{\partial V} \right) \right) \\ B_{\bar{\alpha}} &= -\frac{1}{m V_e} \left(-\frac{1}{2} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \bar{\alpha}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_u &= \frac{1}{I_{yy}} \left(V_e \cdot \rho S \bar{c} V_e C_m \right) \\ D_{\bar{\alpha}} &= \frac{1}{I_{yy}} \left(\frac{1}{2} \rho S \bar{c} V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \right) \\ D_q &= \frac{1}{I_{yy}} \left(\frac{1}{2} \rho S \bar{c} V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial Q} \right) \end{aligned}$$

Les matrices C et D seront choisies par défaut pour avoir comme sorties les quatre variables d'état et le facteur de charge n_z , défini par le rapport $\frac{\ddot{h}}{g}$. En rappelant que l'on considère $\gamma \approx 0$:

$$\ddot{h} = \frac{d\dot{h}}{dt} = \frac{d(V_e \gamma)}{dt} = V_e \dot{\gamma} \quad (3.17)$$

on obtient alors les matrices C et D :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{V_e}{g} B_u & 0 & \frac{V_e}{g} B_{\bar{\alpha}} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{1}{mg} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Nous verrons au chapitre 5 que pour la synthèse de la loi de commande :

- nous considérerons le modèle 4×4 dont le vecteur d'état correspondant est :
 $\bar{x} = [u \quad \bar{\gamma} \quad \bar{\alpha} \quad q]^T$ dans la mesure où la cinquième équation $\dot{h} = V_e \bar{\gamma}$ n'a aucune influence sur le système et nous permet juste d'exprimer l'altitude h ,
- nous utiliserons les matrices C_{com} et D_{com} donnant comme sorties u , $\bar{\gamma}$ et q , regroupées dans le vecteur y_{com} .

Le modèle obtenu est donc MIMO (« Multiple Input Multiple Output »).

Étudions maintenant le simulateur du mouvement longitudinal du *Boeing 747*.

3.3 Simulateur du vol longitudinal

Les composantes des coefficients étudiés ci-dessus sont chacune décrites par une fonction **MATLAB**. Le travail de cette partie consiste à synthétiser un module « GUI » permettant de calculer le modèle d'état 4×4 du vol longitudinal, et ce pour toute condition de vol. Il sera intégré à un autre module « GUI » global, qui permettra de visualiser des simulations temporelles et des animations et sera décrit au chapitre 5.

3.3.1 Principe

Il faut maintenant regrouper toutes les fonctions donnant les valeurs des données inertielles et aérodynamiques dans des programmes « maîtres ».

Le premier d'entre eux se nomme « `val_eq.m` » et calcule les grandeurs à l'équilibre suivantes :

- l'angle α_e d'incidence à l'équilibre,
- la position angulaire des élévateurs δ_{e_e} à l'équilibre,
- la position δ_{t_e} de la manette des gaz à l'équilibre,
- la valeur des trois coefficients aérodynamiques C_{L_e} , C_{D_e} et C_{m_e} à l'équilibre.

Ce programme est utilisé par le programme principal « `modele_etat_eq.m` », qui calcule le modèle d'état longitudinal du *Boeing 747* en fonction des paramètres de la condition de vol. Voici la syntaxe de ce programme :

```

FONCTION DONNANT LE MODELE D'ETAT DE L'AVION A L'EQUILIBRE
POUR UNE ALTITUDE, UNE VITESSE ET UNE CONFIGURATION DONNEE
[alpha_eq,deltaE_eq,deltaT_eq,A,B,C,D] = ...
    modele_etat_eq(masse,V,deltaF,alt,MAC,gamma_eq)
A,B,C,D : matrices d'état
masse : masse de l'avion en kg
V : vitesse en m/s
deltaF : angle de volets en deg
alt : altitude en m
MAC : position du C.G. en %MAC

```

γ_{eq} : angle de pente en rad

Ce programme utilise toutes les autres fonctions créées — dont « `val_eq.m` », et va servir de base au module « GUI », détaillé au paragraphe suivant.

3.3.2 Description du module « GUI »

La figure (3.9) montre une image de ce module : la partie de gauche sert à **définir** la condition de vol en altitude, vitesse, pente, volets, poids et position du centre de gravité, la partie inférieure permet à l'utilisateur d'effectuer un certain nombre d'**actions**, et la partie de droite **affiche** les résultats.

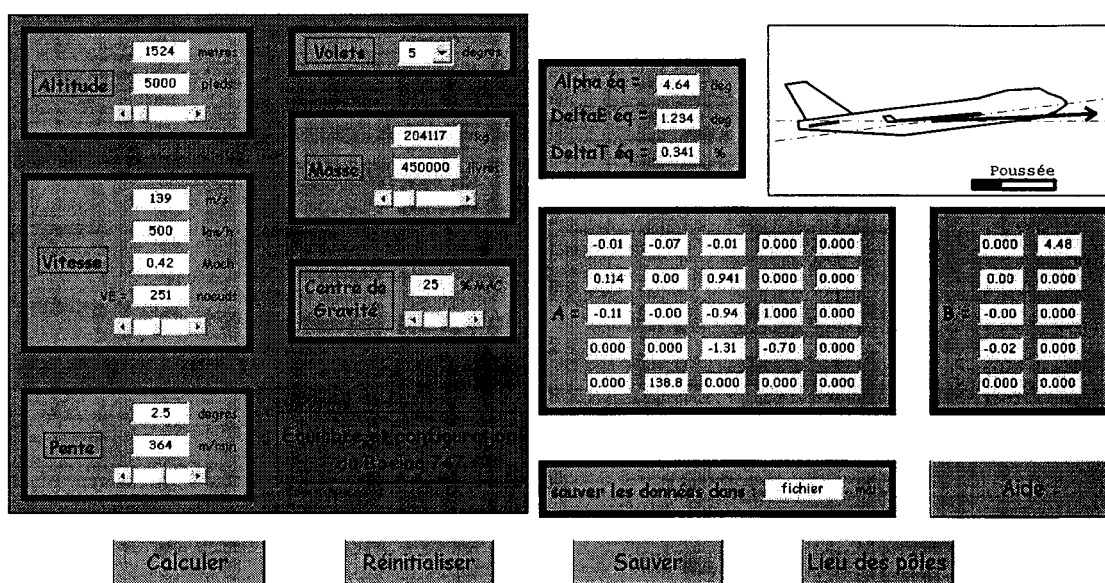


FIG. 3.9 – Module « GUI » permettant de calculer le modèle d'état longitudinal du Boeing 747.

3.3.3 Utilisation du module « GUI »

Ce paragraphe explique le fonctionnement de ce module « `GUI_modele_etat` », un peu à la manière d'un manuel de l'utilisateur.

3.3.3.1 Initialisation de MATLAB

Il faut tout d'abord se placer dans le répertoire `\simulateur747`, puis exécuter le programme « `startup.m` » qui va initialiser les répertoires (« `path` ») et l'espace de travail (« `workspace` ») afin d'assurer le bon fonctionnement des programmes.

Puis pour lancer l'ouverture du module « GUI », il faut taper son nom à l'invite **MATLAB**, soit : `>> GUI_modele_etat`.

Le module se présente comme à la figure (3.9) et est ainsi prêt à être utilisé.

3.3.3.2 Définition de la condition de vol et de la configuration de l'avion

Nous décrivons ici la partie gauche du module, qui va permettre à l'utilisateur de définir les paramètres du modèle qu'il souhaite obtenir :

- l'**altitude** h , qu'il peut choisir indifféremment en mètres (m) ou en pieds (ft), en rentrant les valeurs au clavier, ou en activant le curseur,
- la **vitesse** V peut être donnée de la même façon en m.s^{-1} (unité S.I.), en km.h^{-1} , en *Mach*, ou la vitesse équivalente V_E , définie au paragraphe 3.2.4 et exprimée en noeuds ; à noter qu'une variation de l'altitude modifie automatiquement ces deux dernières (*Mach* et V_E),
- la **pente** γ , ou taux de montée, choisie soit en degrés ($^{\circ}$), soit en m.min^{-1} ; comme ci-dessus, une variation de la vitesse linéaire V modifie automatiquement le taux de montée exprimé en m.min^{-1} ,
- Les **hypersustentateurs** par l'intermédiaire de l'angle δ_F des volets², dont on choisit une valeur parmi les 7 possibles dans le menu déroulant,
- la **masse** de l'appareil, exprimée en kilogrammes (kg) ou en livres (lbs),
- et enfin la **position du centre de gravité** (*C.G.*), choisie en pourcentage de la corde aérodynamique moyenne (% *MAC*).

Chacun de ces paramètres a des valeurs extrêmes définies dans le document technique [13], au-delà desquelles on ne peut accéder dans le module « GUI ». Elles sont

²on rappelle que les volets et les becs ont des mouvements conjoints

résumées dans le menu d'aide, décrit au paragraphe suivant.

3.3.3.3 Actions de l'utilisateur

La partie inférieure de la fenêtre « GUI » contient cinq boutons et une zone de texte, que nous allons définir ici.

Le bouton « **calculer** » lance le calcul du modèle d'état.

Le bouton « **réinitialiser** » remet tous les champs à zéro, sauf la masse et la position du centre de gravité qui sont fixés à une valeur intermédiaire.

Le bouton « **sauver** » permet de sauvegarder les résultats obtenus après calcul dans un fichier de données `fichier.mat`, dont on aura défini le nom dans la **zone de texte** « *sauver les données dans :* » prévue à cet effet. Les variables ainsi sauvegardées seront :

- les matrices d'état : 'A', 'B', 'C' et 'D',
- le modèle d'état associé : 'sys_avion',
- les valeurs à l'équilibre : 'alpha_eq', 'deltaE_eq' et 'deltaT_eq',
- enfin les paramètres choisis par l'utilisateur : l'altitude 'altm', la vitesse 'vitms', la pente 'pentedeg', l'angle de volets 'voletsdeg', la masse 'massekg' et la position du centre de gravité 'cgmac'.

Enfin, le bouton « **Lieu des pôles** », comme son nom l'indique, va ouvrir une nouvelle figure **MATLAB** sur laquelle sera représenté le lieu des pôles du modèle obtenu, d'ordre 4.

3.3.3.4 Affichage des résultats du calcul

À la fin de l'exécution du calcul, les cellules de la partie droite de la fenêtre « GUI » se remplissent automatiquement :

- d'une part celles définissant l'équilibre de l'avion : 'Alpha éq', 'DeltaE éq' et 'DeltaT éq', soit les valeurs à l'équilibre de l'incidence α , de l'angle des élévateurs δ_e et de la position de la manette des gaz δ_t ,
- d'autre part les matrices d'état A et B .

De plus, une visualisation de l'attitude de l'appareil, de sa pente et de la position de la manette des gaz est également disponible en haut et à droite de la fenêtre. Elle n'est pas animée, et permet juste de voir l'appareil à l'équilibre.

3.3.4 Charge de calcul du simulateur

Nous allons ici discuter de la performance purement informatique du simulateur. En effet, se référant au tableau 3.7, le temps de calcul d'une condition de vol est relativement long³. La raison en est que la méthode d'interpolation par splines cubiques nécessite beaucoup de calculs, et le logiciel **MATLAB** utilise des méthodes de résolution basées sur le calcul matriciel. Cependant, seule cette méthode d'interpolation, détaillée au paragraphe 3.1.4, nous permet de faire certaines opérations telles que la dérivation.

TAB. 3.7 – Temps de calcul du simulateur.

position du centre de gravité G	temps de calcul (min)
= 25 % MAC	de 1.5 à 2
≠ 25 % MAC	de 3 à 3.5

Une solution serait de calculer les coefficients aérodynamiques dans un autre langage (C/C++), en utilisant toujours la méthode des splines cubiques.

En fin de chapitre 5, nous utilisons un modèle non linéaire utilisant des expressions simplifiées des coefficients aérodynamiques. Leur évaluation à chaque itération de calcul est donc beaucoup plus rapide, et la simulation arrive à son terme dans des délais raisonnables.

³machine utilisée : processeur PIII 1 Ghz, 512 Mo RAM

3.3.5 Résultats obtenus

Après avoir simulé le modèle linéarisé du *Boeing 747* pour plusieurs conditions de vol, nous avons pu comparer avec succès les résultats obtenus avec les simulations de *Boeing inc.* et de la *NASA* incluses dans le document technique [13] : nous obtenons les mêmes allures de courbes et les mêmes ordres de grandeur pour les variables principales.

La figure (3.10) représente par exemple le comportement obtenu en réponse à un échelon de l'angle de l'élévateur de $\bar{\delta}_e = -6^\circ$ pendant une durée de deux secondes, et montre l'évolution des variables caractéristiques du mouvement longitudinal. La condition de vol correspondante est définie par :

- une altitude de 1 524 m, soit 5 000 pieds,
- une vitesse de 100 m.s⁻¹,
- un angle de volets de 10°,
- un poids de 322 051 kg, soit 710 000 lbs.

3.4 Modes longitudinaux

La simulation présentée à la figure (3.10) met en évidence deux modes : l'un rapide, l'autre plus lent. Le plus rapide d'entre eux s'appelle le **mode rapide**, ou **oscillation d'incidence**, le plus lent est le **mode phugoïde**. La figure (3.11) représente le lieu des pôles pour la même configuration que précédemment, et confirme la présence de ces deux régimes avec une paire de pôles conjugués proche de l'origine et une autre paire de pôles plus rapides.

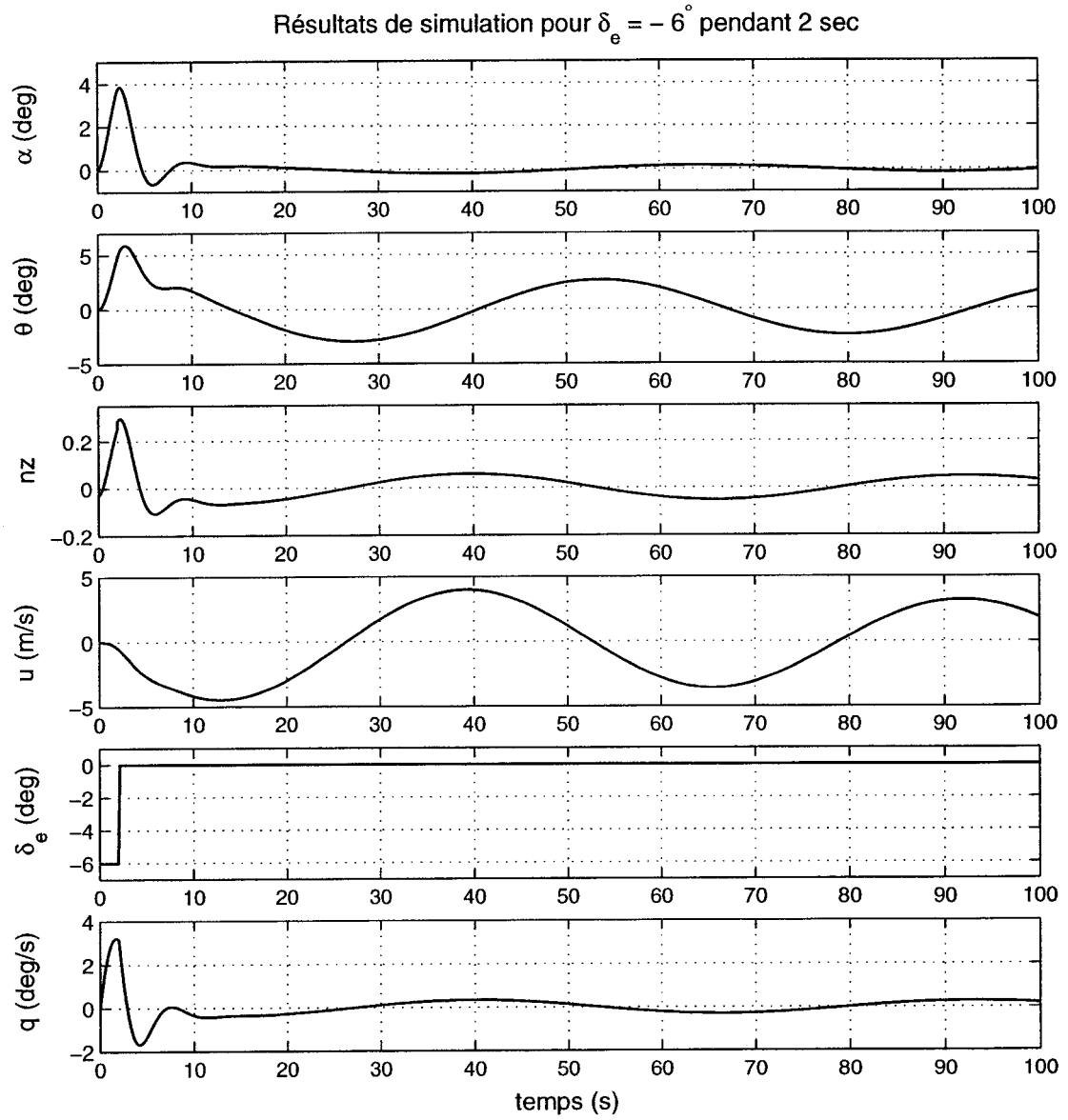


FIG. 3.10 – Simulation du modèle longitudinal en réponse à un échelon de l'élevateur.

Le mode **rapide** est un mouvement oscillatoire de rotation en tangage autour d'un point situé devant le centre de gravité de l'avion et peut devenir instable : il correspond aux pôles $p_{r1,r2} = -0.436 \pm 0.892j$ et a une fréquence d'environ 1 rad.s^{-1} , élevée par rapport à la fréquence de pilotage. Ce mouvement s'effectue à vitesse et altitude variant très faiblement.

Le mode **phugoïde** est lui un mouvement oscillatoire entre la vitesse et la pente, à incidence constante, et est généralement stable mais très mal amorti : ses pôles sont $p_{p1,p2} = -0.004 \pm 0.12j$ et a un amortissement très faible $\xi = 0.035$. Ce mouvement correspond à un échange entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique de l'avion.

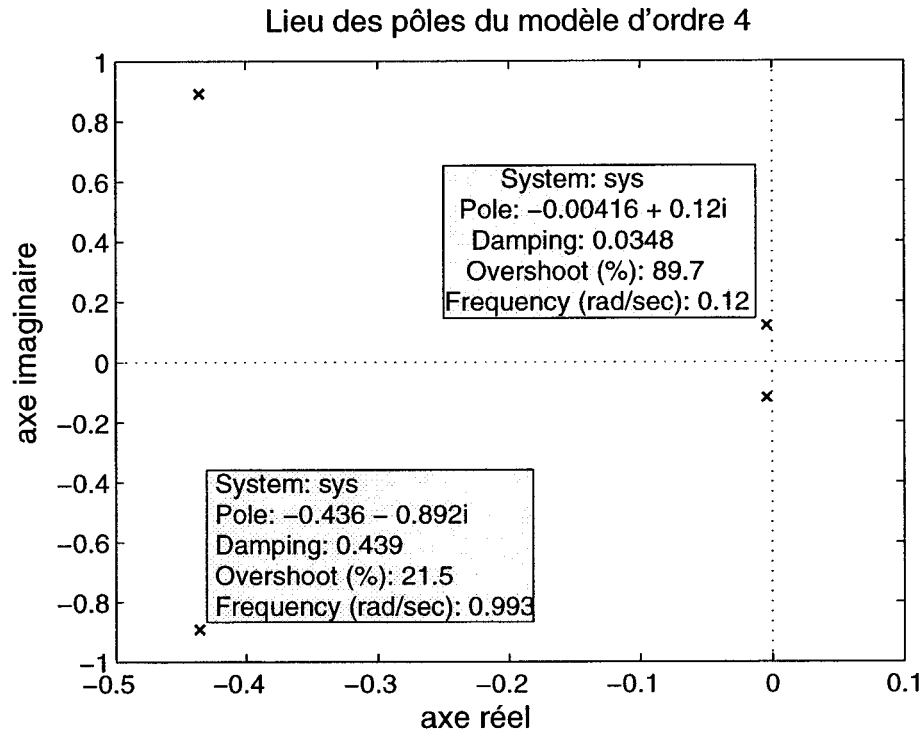


FIG. 3.11 – Lieu des pôles du modèle longitudinal d'ordre 4.

Ces deux modes ne répondent pas aux mêmes objectifs de performances, il sera donc pertinent de les séparer lors de la synthèse de la loi de commande.

CHAPITRE 4

CONCEPTION DE CONTRÔLEURS POUR LE VOL LONGITUDINAL

Dans ce chapitre, nous allons présenter les notions théoriques nécessaires à l'application de la synthèse d'une loi de commande au *Boeing 747* que nous avons étudié jusqu'ici. Après une brève revue de littérature, nous approfondirons une méthode de synthèse de contrôleurs avec séquencement de gains (« Gain-Scheduling ») ; l'application pratique en sera faite au chapitre 5.

4.1 Problématique

Le travail effectué jusqu'ici nous a permis d'obtenir le modèle d'état linéarisé, d'ordre 4, du *Boeing 747* en toute condition de vol, et ceci à partir des courbes des différents coefficients aérodynamiques provenant de la compagnie *Boeing Inc.* [13]. Cela nous permet, pour toute condition de vol admissible et pertinente, de simuler le comportement de l'appareil et de construire un contrôleur. Le problème que l'on se pose à ce stade de notre étude est de synthétiser une loi de commande qui serait valable sur toute l'enveloppe de vol¹. En effet, lorsque l'on passe d'un point d'équilibre à un autre, les paramètres du modèle de l'avion changent, comme nous le montrerons ultérieurement, et le contrôleur synthétisé pour une condition de vol n'est plus valable pour une autre condition. Cet objectif implique non seulement le choix d'un contrôleur, mais également celui d'une méthode de séquencement de gains (« gain-scheduling »), afin d'obtenir une correction acceptable aussi bien au niveau de la stabilité que de la performance, et ce sur toute l'enveloppe de vol.

Le domaine couvert par cette étude est extrêmement vaste, nous nous sommes donc limités à certains aspects du contrôle par séquencement de gains, d'autant

¹ensemble des paramètres caractérisant les conditions de vol admissibles et pertinentes

plus que plusieurs méthodes très différentes pourraient être utilisées, telles que le contrôle adaptatif, la programmation neuronale ou bien des méthodes telles que l'inversion dynamique non linéaire. Nous nous sommes donc volontairement concentrés sur une synthèse « classique » de contrôleurs, c'est-à-dire : répéter une méthodologie de synthèse de contrôleurs linéaires sur certains points de l'enveloppe de vol, associer cette répétition à une stratégie de séquençement, et ainsi regrouper les contrôleurs, élaborés localement, pour une application au modèle global non-linéaire.

Voici donc une revue de la littérature exposant les différentes approches traitées et présentant un intérêt dans le cadre de notre recherche.

4.2 Revue de littérature

Nous allons exposer dans cette partie les différentes orientations prises par les chercheurs pour résoudre le problème de contrôle avec séquençement de gains, tout en restant dans le cadre que l'on s'est fixé dans la problématique. Tout d'abord, nous verrons quelles sont les principales façons de représenter le système « avion » (description LPV, quasi-LPV, LFT), puis, selon le choix d'une de ces représentations, les différentes méthodes de synthèse de contrôleurs avec séquençement de gains. Enfin, nous traiterons des problèmes de stabilité et de performance de ces méthodes, qui ont aussi été largement évoqués dans la littérature.

4.2.1 Description du système

Pour décrire le système, nous allons utiliser sa représentation LPV (« Linear Parameter Varying ») , qui va « masquer » les non linéarités en introduisant une dépendance des matrices d'état vis-à-vis de paramètres dépendants du temps, mais indépendants des variables d'état du système. Cette approche a notamment été formulée par Apkarian et Gahinet [3], qui définissent les systèmes LPV dans l'espace

d'état de manière générale par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) &= C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \end{cases}$$

où $\theta(t)$ est un paramètre généralement vectoriel ($\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots]^T$), indépendant de $x(t)$.

Il existe plusieurs variantes à cette représentation, exposées dans Rugh et Shamma [27], qui répondent à des objectifs différents. Parmi celles-ci, la **représentation quasi-LPV**, où les variables d'état peuvent intervenir dans le paramètre θ . Ceci a pour avantage de supprimer les restrictions sur le caractère exogène des paramètres, mais également comme défaut de supprimer un certain nombre de propriétés des systèmes LPV.

Dans l'esprit de la définition d'Apkarian et Gahinet [3], un système quasi-LPV peut être défini comme un système LPV tel qu'il existe un couple de matrice non nulles (F, G) reliant le paramètre θ et le vecteur d'état x selon :

$$F \cdot \theta = G \cdot x$$

La **représentation LFT** (« Linear Fractional Transformation ») est également LPV, avec la contrainte que tous les éléments des matrices soient des fonctions rationnelles en θ ; ainsi, la matrice d'état A doit s'exprimer sous la forme :

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} a_{11}(\theta) & a_{12}(\theta) & \dots \\ a_{21}(\theta) & a_{22}(\theta) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

où $a_{ij}(\theta)$ sont des fonctions rationnelles en θ .

Les représentations LFT sont plus restrictives que les représentations LPV, mais présentent des propriétés intéressantes, dans la mesure où elles peuvent être mani-

pulées plus facilement.

Si l'on revient sur le modèle obtenu dans les chapitres précédents, on constate qu'il consiste en une **famille de modèles linéaires**, issue de la linéarisation du modèle non linéaire en un certain nombre de points d'équilibre (conditions de vol) ; chaque modèle de cette famille est caractérisé par des variables de séquençement (« scheduling variables ») qui peuvent être des signaux exogènes, mais aussi des variables d'état du système : l'altitude H , la vitesse V , l'angle d'incidence α ...

La famille ainsi obtenue est donc une représentation quasi-LPV du modèle linéarisé du *Boeing 747*, puisque certains paramètres sont reliés aux variables d'état du système. Voyons maintenant les méthodes de synthèse de la loi de commande.

4.2.2 Synthèse des contrôleurs

Le type de contrôleurs que nous souhaitons obtenir doit avoir, outre les exigences de stabilité et de performance qui seront définis ultérieurement, une caractéristique essentielle : il doit être robuste aux variations de modèle. En effet, l'objectif est de contrôler un système dont les paramètres vont évoluer avec les changements de conditions de vol.

De plus, le modèle obtenu au chapitre 3 est MIMO. Deux options s'offrent alors à nous : construire une loi de contrôle monovariante sans tenir compte du couplage entre les boucles, ou une loi multivariante. Les méthodes monovariantes, ou SISO (« Single Input Single Output ») sont actuellement très largement répandues, et permettent d'obtenir assez facilement une mesure de la robustesse, en utilisant des outils tels que la mesure des marges de gain et de phase, mais qui ne s'avère plus fiable lorsqu'il s'agit de systèmes multivariants, ou MIMO, comme l'a montré Hyde [15] dans un contre-exemple simple où ce critère ne prend pas en compte le couplage entre les boucles.

Considérant les techniques MIMO, la plus répandue est la synthèse H_∞ , qui non seulement permet la synthèse de contrôleurs robustes dont on peut quantifier la ro-

bustesse, par exemple en étudiant la plus grande valeur singulière du système en boucle fermée, mais qui est également très ouverte et souple, comme nous le verrons ultérieurement. Doyle et Glover [10] et [12] ont très largement contribué à la résolution du problème H_∞ en proposant un algorithme qui utilisait pour la première fois l'approche d'espace d'état. Cette méthode a été utilisée avec succès de nombreuses fois depuis, notamment dans des applications de séquençement de contrôleurs.

4.2.3 Méthodes de design

À partir des différentes représentations du système, plusieurs méthodes de séquençement de gains se présentent à nous. De manière générale, la structure du contrôleur sera la même que celle du système (LPV, quasi-LPV, LFT). Néanmoins, le principe de design reste sensiblement identique pour tous les cas rencontrés, et comprend généralement quatre grandes étapes, ci-dessous énumérées par Rugh et Shamma [27] :

1. obtention d'un modèle de type LPV pour le système,
2. synthèse d'une structure linéaire de contrôle,
3. implantation de la famille de contrôleurs linéaires dans le système non linéaire,
4. validation de la stabilité et des performances du système bouclé avec contrôleur planifié.

Notons qu'en général, une condition d'applicabilité liée à la stabilité est que la vitesse de variation des variables de séquençement soit suffisamment faible ; certaines conditions de stabilité, de robustesse et les propriétés de performance des systèmes contrôlés avec séquençement ont été étudiés par Shamma et Athans [31].

Sachant que nous disposons d'une famille de modèles linéaires, étudions la littérature concernant la commande de vol avec séquençement de gain. Nous distinguerons la synthèse d'une famille de contrôleurs linéaires à partir d'une famille de modèles linéaires et le design aboutissant directement à un contrôleur LPV à partir d'un modèle de type LPV du système à contrôler.

4.2.3.1 Famille de contrôleurs linéaires

a) Commutation de contrôleurs

L'idée de synthétiser des contrôleurs aux voisinages de différentes conditions de vol, puis de commuter entre ces derniers a été traitée par Hyde [15] : la commutation s'effectue en fonction des valeurs prises par certaines variables, dites de séquencement. Cependant, quelques problèmes se posent, dont le principal est l'initialisation des états du contrôleur nouvellement affecté, juste après la commutation ; si ces derniers venaient à être mal initialisés, des phénomènes tels qu'une discontinuité du signal de commande pourraient apparaître, compromettant ainsi fortement la stabilité et la performance du système. Cet aspect a été traité par Hanus, Kinnaert et Henrotte [14], qui ont notamment étudié les phénomènes de commutation entre deux systèmes en parallèle, et d'atténuation de l'influence d'une saturation sur le signal de commande. Il s'agit en fait de modifier la structure initiale du contrôleur, afin que son signal de sortie, la commande $u(t)$, poursuive l'entrée du processus commandé. Les limites de cette étude sont évoquées dans Hyde [15], qui développe également une technique pour analyser la stabilité de la commutation.

Une application pratique de cette théorie a été réalisée avec succès par Hyde [15], Hyde et Glover [16] sur un appareil VTOL (« Vertical Take-Off and Landing »). Leur synthèse de la loi de commande est fondée sur une technique de modelage (« loop-shaping ») des valeurs singulières du système en boucle ouverte, elle-même développée par Mc Farlane et Glover [19], afin d'optimiser la robustesse des contrôleurs. Les résultats ont été satisfaisants, une méthode d'évaluation de la stabilité et des performances ayant été proposée.

Une autre application a été développée par Buschek [8] sur une loi de commande latérale de missile, à partir de trois contrôleurs robustes ; ceux-ci ont été élaborés en utilisant la μ -synthèse, et planifiés sur la pression dynamique $\bar{q}$ ². Cependant, le problème est différent du cas précédent, puisque les deux contrôleurs sont actifs

² $\bar{q} = \frac{1}{2} \rho V^2$

au voisinage de la commutation : le signal de commande est alors composé d'une combinaison (« blending ») des signaux de commande issus des deux contrôleurs. Les résultats sont néanmoins satisfaisants, mais ne semblent pas meilleurs que ceux des travaux de Hyde.

b) Interpolation des coefficients

Le concept précédent de commutation des contrôleurs sous-entend la possibilité d'une évolution continue des paramètres du contrôleur en fonction des variables de séquençement : après avoir synthétisé une famille de contrôleurs linéaires, leurs paramètres (coefficients de fonctions de transfert ou de matrices d'état) sont interpolés à l'intérieur de l'enveloppe de vol. Cependant, cette méthode présente certaines contraintes : la structure des contrôleurs doit être strictement identique et le choix des conditions de vol pertinent. De plus, il n'existe pas de résultat général de stabilité pour cette méthode, même si elle a été utilisée à de nombreuses reprises : Nichols, Reichert et Rugh [20] l'ont appliquée en synthétisant des contrôleurs H_∞ en quatre points de l'enveloppe de vol, puis en interpolant leurs gains, pôles et zéros en fonction des variables de séquençement α (angle d'attaque) et M (nombre de Mach). Dans leur démarche, ils ont pu éliminer un couplage entre les contrôleurs et des paramètres qui n'étaient pas des variables de séquençement, et ainsi obtenir des résultats satisfaisant leurs critères de stabilité et de performance. En outre, le problème reste totalement ouvert concernant la méthode d'interpolation et le choix des points d'opération.

Reichert [26] a aussi étudié le séquençement dynamique de plusieurs contrôleurs LTI (invariants dans le temps), synthétisés en utilisant des techniques mixtes H_∞/μ -synthèse ; l'interpolation linéaire se produit directement ici à partir des solutions des équations de Riccati qui aboutissent à l'expression du contrôleur.

Il faut cependant retenir que cette méthode d'interpolation de coefficients de contrôleurs impose une contrainte non négligeable sur les variables de séquençement : elles doivent avoir une évolution lente et continue.

4.2.3.2 Méthodes de design LPV/LFT de lois de contrôle

a) Méthode de design LPV

La procédure décrite par Rugh et Shamma [27] pour la construction d'un contrôleur LPV est la suivante :

1. transformation d'un critère de performance en résolution de LMI (« Linear Matrix Inequalities »), soit un problème d'optimisation convexe,
2. résolution numérique,
3. construction du contrôleur.

Cette procédure, faisant appel aux LMI, est traitée dans les références suivantes : Apkarian et Gahinet [3], qui étendent les techniques de synthèse H_∞ aux cas où les paramètres des contrôleurs dépendent de variables mesurées, incluant des états, et idéalement où cette dépendance est LF (« linear fractional ») : dans ce cas l'existence de contrôleurs H_∞ séquencés est complètement caractérisée en termes de LMI. Tous ces contrôleurs sont automatiquement séquencés le long de trajectoires, ceci ayant pour avantage de passer outre certains aspects délicats reliés à l'interpolation ou aux techniques dites « classiques » de séquençement de gain.

Becker et Packard [6] donnent des conditions suffisantes quant à la stabilité et au niveau de performance pour des systèmes LPV, et formulent le problème de synthèse résultant en problème d'optimisation convexe, auquel Scherer, Gahinet, Chilali [29] donnent suite en proposant une approche de résolution de LMI pour la synthèse de contrôleurs linéaires.

Apkarian et Adams [2] ont étudié deux techniques de design amenant à la résolution de LMI, et Malloy et Chang [18] ont travaillé sur un contrôle avec retour de sortie dont les gains dépendent de paramètres mesurés en temps réel, et nécessitent une transformation du système LPV en forme canonique. Il subsiste néanmoins une condition de validité sur la vitesse de variation des paramètres qui doit rester faible.

Papageorgiou et Glover [24], ainsi que Papageorgiou, Glover, D'Mello et Patel [25] élaborent un contrôleur planifié à partir d'un modèle quasi-LPV de la dynamique

longitudinale d'un appareil de test ; la méthode robuste de séquençement est fondée sur le modelage H_∞ (« loop-shaping ») et la théorie de Lyapunov ; elle conduit à des résultats intéressants, même si le contrôleur obtenu n'a pas pu couvrir toute l'enveloppe de vol.

b) Méthode de design LFT

Dans le cas de la synthèse de contrôleurs LFT, les problèmes LMI à résoudre sont moins complexes que dans le cas général des modèles LPV, par leur structure même. Apkarian et Gahinet [3] et Packard [22] ont développé ces méthodes en utilisant la théorie des faibles gains, et en formulant des conditions d'existence en problèmes d'optimisation convexe pour la synthèse de la loi de commande.

4.2.4 Stratégie envisagée

Comme nous l'avons vu précédemment, le modèle de l'avion dont nous disposons se présente sous la forme d'une famille de modèles linéarisés en différentes conditions de vol. Cette représentation en famille de modèles linéaires suggère fortement une démarche de synthèse de plusieurs contrôleurs qu'il s'agit de relier entre eux, soit par commutation, soit par interpolation de coefficients.

Ce cheminement nécessite la synthèse d'une loi de commande robuste à des variations de paramètres du modèle, puisque chaque contrôleur devra être valable et performant dans un voisinage de la condition de vol choisie pour sa synthèse. La **synthèse H_∞** paraît donc particulièrement adaptée à cet objectif.

S'agissant du séquençement de ces contrôleurs, le manque de résultats théoriques sur la stabilité d'un ensemble de contrôleurs dont les coefficients ont été interpolés, et la contrainte de faible vitesse de variation qu'il impose sur certaines variables nous conduit plutôt à considérer l'approche de **commutation de contrôleurs**. En effet, dans ce cas, la stabilité du système est garantie autour de la condition de vol, et le seul problème peut surgir au moment de la commutation. Nous verrons que les travaux de Åström et Wittenmark [5], Åström et Rundqwist [4] et Hanus, Kinnaert

et Henrotte [14] permettent de transformer la structure de correction afin d'assurer la stabilité du phénomène de commutation.

Cette stratégie soulève également d'autres problèmes que nous détaillerons dans les paragraphes suivants et qu'il faudra résoudre. Tout d'abord, il faut définir des **variables de séquençement**, représentatives des variations de modèle les plus importantes : une méthode consiste à étudier l'influence des différentes variables telles que la vitesse V , l'altitude H , l'angle d'incidence α ou bien encore la pression dynamique $\bar{q} = \frac{1}{2} \rho V^2$ sur le modèle linéarisé de l'avion.

Les limites acceptables de ces variables vont définir une **enveloppe de vol**. Celle-ci sera ensuite fractionnée en différents domaines : chacun d'eux se verra affecter un contrôleur qui assurera une stabilité et une performance adéquates pour n'importe quel modèle pris dans ce domaine. Lorsque les **frontières** créées par les subdivisions de l'enveloppe seront traversées par au moins une des variables de séquençement, alors la structure de commande commutera entre deux contrôleurs. La taille des domaines dépendra également des **critères de performance** que l'on se sera fixés : plus ces critères seront exigeants, plus ces domaines seront petits, plus il y aura besoin de contrôleurs. Il faut donc faire un compromis entre la performance et le nombre de contrôleurs à synthétiser, afin d'en utiliser le moins possible.

Après avoir défini le cadre de notre étude et son orientation vers une structure de contrôle par commutation de contrôleurs H_∞ , nous pouvons nous intéresser de manière plus approfondie à ses différents aspects.

4.3 Synthèse de contrôleurs H_∞

Comme nous l'avons déjà dit, les méthodes H_∞ sont robustes et souples ; de plus elles ont été étudiées par de nombreux chercheurs, et peuvent être abordées de différentes façons. Nous définirons tout d'abord le problème H_∞ standard, puis nous étudierons succinctement le choix des fonctions de pondération à travers la mise en forme du problème H_∞ .

4.3.1 Présentation du problème H_∞ standard

Il consiste avant tout en un problème de réjection de perturbations, c'est-à-dire en la minimisation de l'influence de signaux d'entrée perturbateurs sur la sortie du système. Cette tâche est accomplie par le correcteur, qui, ayant accès à l'observation de certains signaux de sortie, élabore une loi de commande adéquate pour corriger le système.

Considérons le schéma de la figure (4.1), où v représente un vecteur de signaux de référence ou de perturbation, z un vecteur contenant les signaux à surveiller, u la commande du système et y le vecteur des sorties mesurées ou observées, et $V(s)$, $Z(s)$, $U(s)$, $Y(s)$ leurs transformées de Laplace respectives.

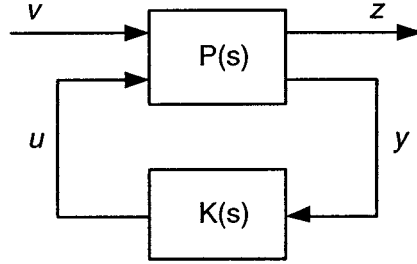


FIG. 4.1 – Problème H_∞ standard

La matrice de transfert $P(s)$ reliant $V(s)$, $U(s)$, $Z(s)$ et $Y(s)$ s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = P(s) \cdot \begin{bmatrix} V(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

ce qui permet, après calculs, de trouver la fonction de transfert de v à z en fonction de P_{11} , P_{12} , P_{21} et P_{22} :

$$Z(s) = (P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}) V(s) = F_l(P, K) V(s) \quad (4.2)$$

où $F_l(P, K)$ est la transformée linéaire fractionnelle (LFT) du système. L'indice « l »,

pour l'anglais « lower », rappelle que le correcteur $K(s)$ boucle le système à partir des entrées et sorties inférieures de $P(s)$.

Comme nous voulons minimiser l'influence des entrées $v(t)$ sur certains signaux choisis, regroupés dans le vecteur $z(t)$, l'objectif est alors de minimiser la norme :

$$\sup_{v \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|v\|_2} = \|F_l(P, K)\|_\infty \quad (4.3)$$

et la synthèse du correcteur K peut alors être formulé comme suit :

Problème H_∞ standard : *Étant donné un système $P(s)$ et un réel $\gamma > 0$, trouver un compensateur $K(s)$ qui stabilise internement le système et assure :*

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$$

Un autre problème H_∞ , dit optimal, consiste à minimiser $\|F_l(P, K)\|_\infty$ sur l'ensemble des compensateurs $K(s)$ qui stabilisent internement le système ; le minimum γ_{opt} sera alors nommé « gain H_∞ -optimal ». À noter qu'une autre approche est de considérer comme critère $\|\gamma' F_l(P, K)\|_\infty < 1$, ce qui donne comme valeur maximale de la norme $1/\gamma'$, et non plus γ : la fonction **MATLAB** `hinfopt`, que nous utiliserons ultérieurement pour la synthèse des contrôleurs, utilise cette approche.

Même si plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour résoudre ce problème, la plus utilisée est celle de Doyle, Glover, Khargonekar et Francis [10] et Glover et Doyle [12], que l'on va détailler dans le paragraphe suivant : elle utilise l'algorithme DGKF, dont l'appellation est issue des initiales de ses auteurs [10].

4.3.2 Résolution du problème H_∞ par l'algorithme DGKF

4.3.2.1 Hypothèses

Soit le schéma de la figure (4.1) et une réalisation minimale (A, B, C, D) du système $P(s)$:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

où, si l'on considère le système d'ordre n , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p_1 \times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{p_2 \times n}$, $D_{11} \in \mathbb{R}^{p_1 \times m_1}$, $D_{12} \in \mathbb{R}^{p_1 \times m_2}$, $D_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_1}$ et $D_{22} \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_2}$.

Cette réalisation permet d'écrire le modèle associé dans l'espace d'état suivant, avec x comme vecteur d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 v(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} v(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} v(t) + D_{22} u(t) \end{cases} \quad (4.5)$$

où les dimensions des vecteurs sont : $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $v(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$, $z(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$ et $y(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$; on supposera que $m_1 > p_2$ et $p_1 > m_2$.

Avec ces notations, les hypothèses suivantes doivent être satisfaites avant d'appliquer l'algorithme :

(H1) (A, B_2, C_2) stabilisable et détectable : ceci est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un compensateur stabilisant internement le système,

(H2) les matrices D_{12} et D_{21} sont de plein rang :

$$\text{rang}(D_{12}) = m_2 \text{ et } \text{rang}(D_{21}) = p_2,$$

(H3) $P_{12}(s)$ et $P_{21}(s)$ n'ont pas de zéro sur l'axe imaginaire ; la formulation mathé-

matique de ces hypothèses de régularité est la suivante :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } \omega \in \mathbb{R}, \text{ rang } \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) &= n + m_2, \\ \text{et } \text{rang } \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) &= n + p_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Deux hypothèses supplémentaires, dites de **normalisation**, simplifient la résolution mais ne lui sont pas nécessaires ; elles peuvent d'ailleurs toujours être satisfaites par des transformations appropriées, étudiées entre autre par Safonov, Limebeer et Chiang [28]. Les voici :

$$(H4) \quad D_{11} = 0 \text{ et } D_{22} = 0,$$

$$(H5) \quad D_{12}^T \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{m_2} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{p_2} \end{bmatrix}$$

4.3.2.2 Solution au problème H_∞

Avec ces hypothèses vérifiées, les deux théorèmes suivants fournissent une solution au problème standard :

Théorème 4.3.1 *Le système défini par le modèle d'état (4.5), vérifiant les hypothèses (H1)–(H5) ci-dessus peut être stabilisé par un compensateur $K(s)$ assurant*

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$$

si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) *les matrices*

$$\begin{aligned} H_\gamma &= \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} \text{ et} \\ J_\gamma &= \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

n'ont pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire,

(ii) Les équations de Riccati :

$$XA + A^T X + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 = 0 \quad (4.8)$$

$$Y A^T + A Y + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y + B_1 B_1^T = 0 \quad (4.9)$$

ont chacune une solution définie positive, respectivement X_γ et Y_γ ,

(iii) la plus grande valeur propre du produit $X_\gamma Y_\gamma$ est inférieure à γ^2 :

$$\lambda_{\max}(X_\gamma Y_\gamma) \leq \gamma^2$$

Le second théorème, énoncé ci-dessous, fournit des formules explicites pour une solution particulière du problème de paramètre γ :

Théorème 4.3.2 *Sous les conditions du théorème 4.3.1, un compensateur $K(s)$ stabilisant le système $P(s)$ et satisfaisant :*

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$$

est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) = C_c x_c(t) \end{cases} \quad (4.10)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_c &= A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\gamma - B_2 B_2^T X_\gamma - Z_\gamma Y_\gamma C_2^T C_2 \\ B_c &= Z_\gamma Y_\gamma C_2^T \\ C_c &= -B_2^T X_\gamma \\ \text{et } Z_\gamma &\triangleq (I - \gamma^{-2} Y_\gamma X_\gamma)^{-1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Cette solution particulière du problème H_∞ est appelée **compensateur central**.

4.3.2.3 Algorithme de γ -itération

Nous pouvons faire deux remarques sur la solution particulière donnée au théorème 4.3.2 : d'abord le correcteur obtenu est strictement propre et a le même ordre que le système (4.5), qui représente, comme nous allons le voir, le système à réguler — l'avion dans notre cas — augmenté de différentes fonctions de pondération. Ensuite, la valeur optimale γ_{opt} de γ en dessous de laquelle l'une des conditions du théorème 4.3.1 n'est plus satisfaite constitue la valeur minimale de la norme $\|F_l(P, K)\|_\infty$.

Cette dernière remarque suggère un algorithme permettant d'approcher par dichotomie la valeur optimale, et d'obtenir ainsi un correcteur proche du correcteur optimal du problème standard : cet algorithme est appelé une γ -itération. En voici les principales étapes :

1. choisir deux valeurs γ_{inf} et γ_{sup} et une tolérance η ; la valeur de γ_{inf} doit être telle que si l'une des conditions du théorème 4.3.1 n'est pas vérifiée pour $\gamma = \gamma_{inf}$, alors elles doivent toutes l'être pour $\gamma = \gamma_{sup}$,
2. tester les conditions (i) à (iii) pour la nouvelle valeur :

$$\gamma = \frac{\gamma_{inf} + \gamma_{sup}}{2}$$

choisir $\gamma_{sup} = \gamma$ et garder γ_{inf} si elles sont vérifiées, sinon prendre $\gamma_{inf} = \gamma$ et garder γ_{sup} ,

3. si la différence entre les deux dernières valeurs calculées de γ est supérieure à η , retourner à l'étape 2,
4. calculer le compensateur central pour la valeur de γ ainsi obtenue et vérifiant les conditions (i) à (iii).

En général, l'optimum est caractérisé par l'égalité de la plus grande valeur propre du produit $X_\gamma Y_\gamma$ avec γ^2 ; ceci entraîne la singularité des formules de calcul (4.11) du compensateur central $K_c(s)$, puisque $I - \gamma^{-2} Y_\gamma X_\gamma$ n'est plus inversible. K_c tend alors

vers un compensateur d'ordre réduit, la chute d'ordre étant égale à la chute de rang de $I - \gamma^{-2}Y_\gamma X_\gamma$.

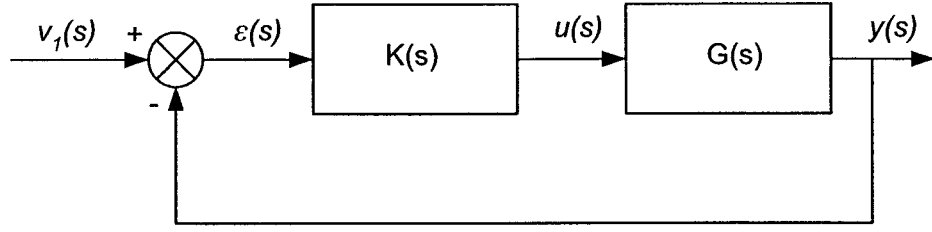
Pour bien comprendre le mécanisme décrit ci-dessus, un exemple élémentaire est présenté en annexe II. De plus, cet algorithme est programmé sous **MATLAB** dans la boîte à outil « *Robust Control Toolbox* », sous la fonction **hinfopt**, fonction que nous utiliserons ultérieurement pour synthétiser les contrôleurs H_∞ .

Nous allons maintenant voir comment obtenir le système augmenté $P(s)$ en ajoutant des pondérations sur les signaux à surveiller, et comment choisir ces signaux et pondérations : c'est l'objet du paragraphe suivant, où nous choisissons de traiter le problème de la sensibilité mixte, facilement généralisable.

4.3.3 Mise en forme du problème H_∞ : exemple du problème de la sensibilité mixte

4.3.3.1 Problématique

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la synthèse H_∞ s'applique à des représentations LFT du type de la figure (4.1). Le problème est maintenant de savoir comment obtenir ce type de représentation à partir du *système*, pour ce qui concerne l'avion, et des *pondérations* que l'on va lui ajouter, liées à des critères de stabilité et de performance. Le libre choix des signaux à surveiller ainsi que des pondérations, qui dépendent des objectifs de performance, rend la synthèse H_∞ souple. Ainsi, nous choisissons de présenter le problème H_∞ sur l'asservissement de référence de la figure (4.2), cette mise en œuvre pouvant être appliquée selon le même principe pour toute autre configuration répondant à des objectifs différents. Voici le montage que nous allons détailler : où l'entrée est un signal de référence $v_1(t)$ et la sortie le signal $y(t)$.

FIG. 4.2 – Asservissement de référence pour la méthode H_∞

Si l'on s'intéresse au signal d'erreur $\varepsilon(t)$ et à la sortie $y(t)$, on obtient la relation suivante entre les différents signaux :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I + GK)^{-1} \\ GK(I + GK)^{-1} \end{bmatrix} v_1 = \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} v_1 \quad (4.12)$$

En notant la fonction de sensibilité $S = (I + GK)^{-1}$ et la fonction de sensibilité complémentaire $T = GK(I + GK)^{-1}$, la représentation standard correspondante est donnée par la figure suivante :

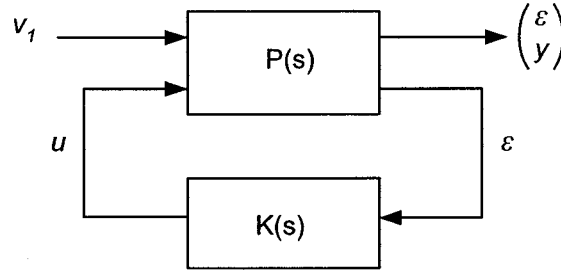


FIG. 4.3 – Représentation standard pour le problème de sensibilité mixte

Le problème standard sans pondération consisterait à trouver un critère γ et un correcteur $K(s)$ tel que l'on ait :

$$\left\| \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (4.13)$$

Cependant ce problème manque de souplesse, puisqu'il impose des contraintes

beaucoup trop conservatrices sur l'ensemble du spectre fréquentiel des fonctions S et T . En effet, la valeur singulière $\sigma_{max}(S(j\omega))$ doit généralement être faible à basse fréquence, par exemple pour réduire l'erreur statique, et $\sigma_{max}(T(j\omega))$ faible à haute fréquence pour minimiser l'influence des perturbations sur la sortie. La relation fondamentale $I = S(s) + T(s)$ est contradictoire avec cet objectif : nous allons donc rechercher un compromis en introduisant des pondérations dans le domaine fréquentiel, qui seront des gabarits pour ces fonctions, comme le montre la figure (4.4).

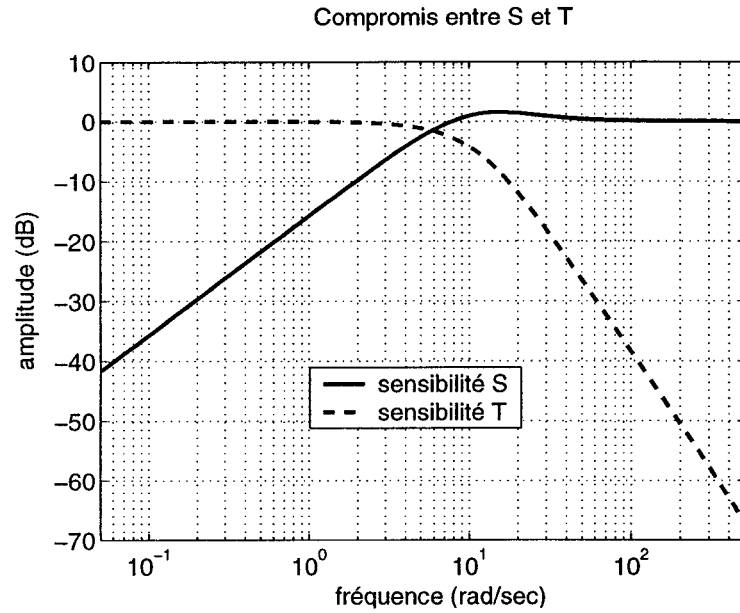


FIG. 4.4 – Valeurs singulières maximales des fonctions de sensibilité S et T

Remarquons que les contraintes s'appliqueront sur les valeurs singulières minimales $\sigma_{min}(S(j\omega))$ en haute fréquence et $\sigma_{min}(T(j\omega))$ en basse fréquence :

$$\sigma_{max}(S(j\omega)) \ll 1 \text{ en basses fréquences}$$

$$\sigma_{max}(T(j\omega)) \ll 1 \text{ en hautes fréquences}$$

4.3.3.2 Ajout des pondérations

Nous appliquons donc cette stratégie, en affectant des gabarits à certains transferts, tels que la sensibilité ou la sensibilité complémentaire. Ainsi :

$$\sigma_{\max}(S(j\omega)) \leq \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)|} \quad \text{soit } \|W_1 S\|_{\infty} \leq \gamma \quad (4.14)$$

$$\sigma_{\max}(T(j\omega)) \leq \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)|} \quad \text{soit } \|W_2 T\|_{\infty} \leq \gamma \quad (4.15)$$

4.3.3.3 Problème résultant

D'après la relation (4.16) donnée dans Alazard [1] :

$$\max(\|W_1 S\|_{\infty}, \|W_2 T\|_{\infty}) \leq \left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq \sqrt{2} \max(\|W_1 S\|_{\infty}, \|W_2 T\|_{\infty}) \quad (4.16)$$

nous pouvons substituer les conditions (4.14) et (4.15) à la condition (4.17), et ce pour obtenir ce qu'on appelle le **problème de sensibilité mixte** :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq \gamma \quad (4.17)$$

qui répond au choix de surveiller l'erreur ε et la sortie y en réponse à une entrée v_1 , et de pondérer ces signaux par les fonctions W_1 et W_2 . Il est conforme au schéma de la figure (4.5).

Le système en boucle fermée est représenté par la fonction de transfert :

$$F_l(P, K) = \frac{z}{v_1} = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 T \end{bmatrix}$$

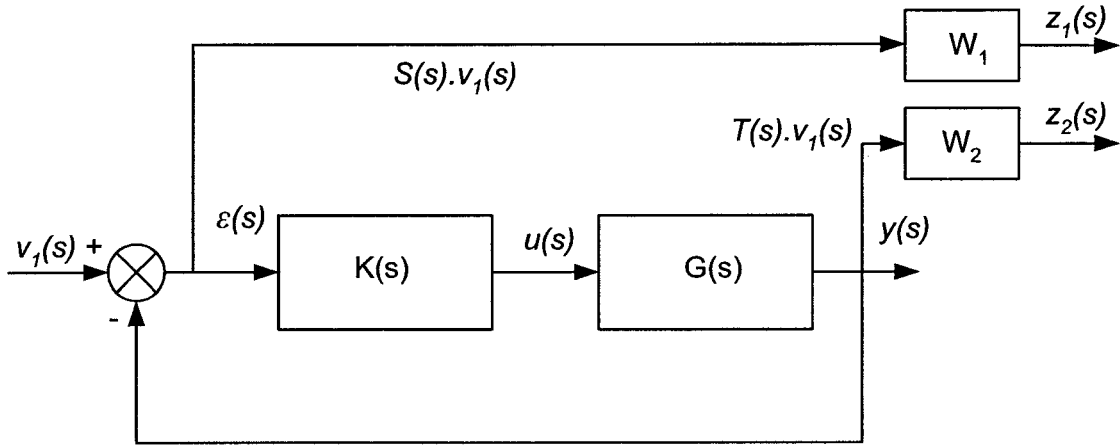


FIG. 4.5 – Mise en place des pondérations W_1 et W_2 pour le problème de sensibilité mixte

4.3.3.4 Système augmenté

Si l'on se réfère aux figures (4.1) et (4.5), le système dit « augmenté » P , élaboré à partir de G et des fonctions de pondération W_1 et W_2 , est donné par la fonction de transfert :

$$\begin{bmatrix} z \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} W_1 & -W_1 G \\ \hline 0 & W_2 G \\ \hline I & -G \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ u \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

où $z = [z_1 \ z_2]^T$, et ε est le signal d'erreur (cf. figure (4.1)).

C'est sur ce système augmenté que l'on va appliquer la méthode de synthèse H_∞ pour trouver un compensateur K tel que $\|F_l(P, K)\|_\infty \leq \gamma$, en suivant la méthodologie énoncée au paragraphe 4.3.2.1.

Voici maintenant le problème de sensibilité mixte généralisé, comprenant la majorité des signaux et pondérations que l'on peut trouver dans un problème standard.

4.3.3.5 Problème de la sensibilité mixte généralisée

Le **problème de sensibilité mixte** est souvent insuffisant pour représenter toutes les contraintes que l'on peut se fixer. En effet, ne pas prendre en compte de perturbation sur la commande u peut amener dans certains cas un phénomène d'inversion du système G : le compensateur va placer un ou plusieurs zéros sur les pôles indésirables du système commandé pour donner une allure satisfaisante au transfert en boucle ouverte GK , ce qui n'est pas robuste. Alazard, Cumer, Apkarian, Gauvrit et Ferreres [1] ont étudié ce phénomène et en ont présenté un exemple dans leur ouvrage. Nous allons donc considérer le montage complet de la figure (4.6) sur lequel nous avons rajouté une perturbation v_2 sur la commande et les pondérations W_4 , W_5 et W_6 .

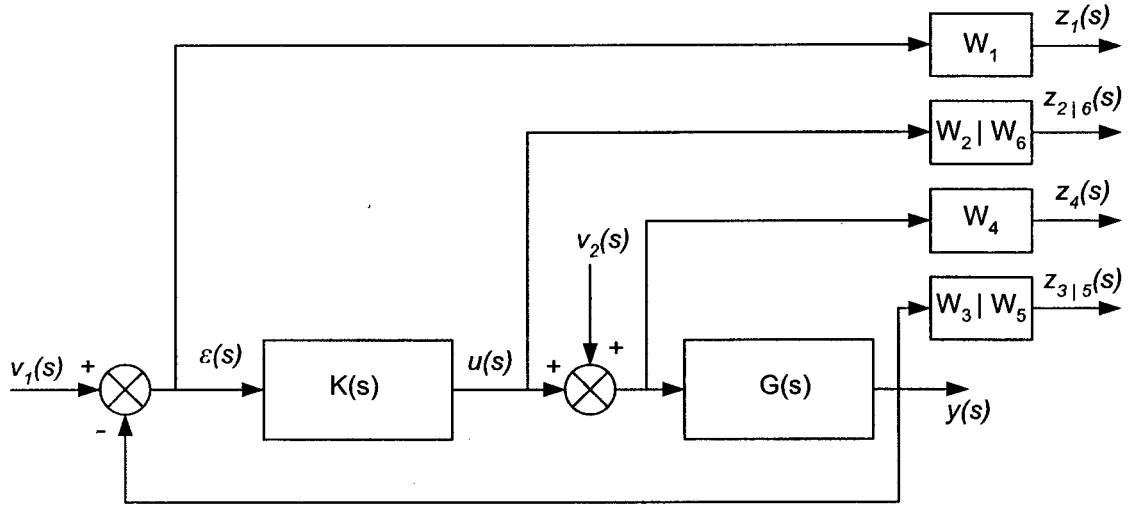


FIG. 4.6 – Montage pour l'étude du problème de sensibilité mixte généralisé

Dans ce cas on peut remarquer que le transfert entre v_1 , v_2 et le vecteur des signaux surveillés $\mathbf{z}$ s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4 \Sigma \\ W_5 G \Sigma \\ W_6 K G \Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

si l'on note $\Sigma = (I + KG)^{-1}$.

Le problème est maintenant de choisir les pondérations adéquates, puis de trouver un compensateur K stabilisant intérieurement la boucle. Par exemple, si l'on s'intéresse à l'influence de l'entrée v_1 sur z_1 et z_2 , et de v_2 sur z_5 , nous aurons à trouver un tel K assurant :

$$\|F_l(P, K)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_1 S & 0 \\ W_2 K S & 0 \\ 0 & W_5 G \Sigma \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (4.20)$$

en considérant le système augmenté P suivant :

$$\begin{bmatrix} z \\ \epsilon \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} W_1 & 0 & -W_1 G \\ 0 & 0 & W_2 \\ 0 & W_5 G & W_5 G \\ \hline I & -G & -G \end{array} \right] \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

où $z = [z_1 \ z_2 \ z_5]^T$ et $v = [v_1 \ v_2]^T$.

Dans notre cas de commande de vol, nous choisirons les signaux ainsi que les pondérations qui leur seront appliquées au chapitre 5, après avoir défini des critères de performance.

Étudions maintenant la commutation entre les contrôleurs lors des changements de condition de vol.

4.4 Commutation des contrôleurs

Le problème que l'on se pose dans ce paragraphe est de savoir comment commuter entre les contrôleurs H_∞ synthétisés en différentes conditions de vol, sachant que la commutation est déclenchée lorsqu'une des variables de séquençement (« scheduling variable ») franchit une frontière séparant deux domaines de l'enveloppe de vol. Après la présentation du problème, nous proposerons une solution qui consistera à changer la structure de commande.

4.4.1 Présentation du problème de commutation

Considérons le schéma de la figure (4.7) qui correspond au cas de la commutation entre deux contrôleurs; u_1 et u_2 sont les signaux de commande issus respectivement des deux contrôleurs K_1 et K_2 , et $\hat{u}$ est le signal d'entrée du processus commandé. Nous avons volontairement omis, dans un premier temps, l'interrupteur qui gère la commutation entre les signaux u_1 et u_2 en fonction des valeurs des variables de séquençement.

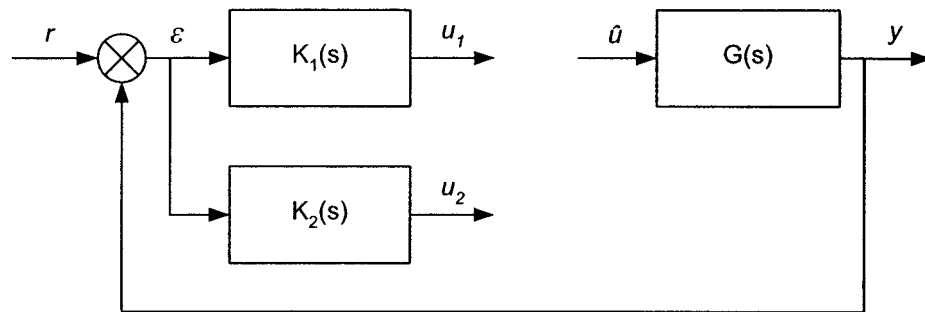


FIG. 4.7 – Étude du suivi de commande

Supposons que le contrôleur K_1 soit actif; si l'on commute sans précaution vers le contrôleur K_2 , il y aura alors une brusque variation au niveau de la commande $\hat{u}$ puisque u_1 et u_2 n'ont pas de raison *a priori* d'être du même ordre de grandeur. Il faut donc initialiser les états du contrôleur inactif K_2 pour que les signaux $\hat{u} = u_1$ et u_2 soient effectivement identiques ou très proches au moment de la commutation.

On remarque par ailleurs que ce problème ne s'applique pas seulement à la commutation, mais aussi à d'autres situations telles que l'atténuation d'une saturation du signal de commande, comme montré en figure (4.8). Dans ce cas, nous voulons que la sortie du contrôleur u demeure la plus proche possible du signal d'entrée $\hat{u}$ du système commandé, pour éviter la saturation qui met à rude épreuve les actionneurs, surtout s'il y a une grande différence entre ces deux signaux.

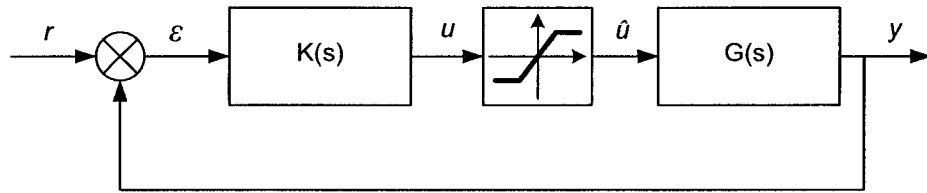


FIG. 4.8 – Étude de l'atténuation de saturation

Deux théories ont été développées pour résoudre ce problème, chacune d'elles étant adaptée à une certaine catégorie de contrôleurs : la première, par Åström et Wittenmark [5], Åström et Rundqwist [4], utilise une structure d'observateur et s'adapte à la majorité des cas. La seconde a été développée par Hanus, Kinnaert et Henrotte [14], et impose des contraintes sur la forme du contrôleur.

Étudions ces deux théories pour résoudre le problème de commutation et ainsi choisir une méthode adaptée à notre cas.

4.4.2 Synthèse d'une structure de commande pour la commutation

4.4.2.1 Cas général : structure d'observateur

L'objectif de cette méthode est de modifier la structure du contrôleur, qui devra avoir deux types de fonctionnement : lorsqu'il sera hors-ligne, son signal de sortie devra suivre le signal de commande, entrée du processus à commander, et lorsqu'il sera en ligne, le contrôleur devra agir normalement.

Åström et Wittenmark [5], Åström et Rundqwist [4] ont étudié ce problème et proposé comme solution une structure d'observateur, comme nous allons le voir.

La figure (4.9) présente le système avant tout traitement et avant que la commutation n'ait lieu : nous ne considérerons que le cas de deux contrôleurs, facilement généralisable. Le contrôleur K_1 est actif, ou en ligne, soit $\hat{u} = u_1$ et le contrôleur K_2 est inactif, ou hors ligne, soit *a priori* $\hat{u} \neq u_2$.

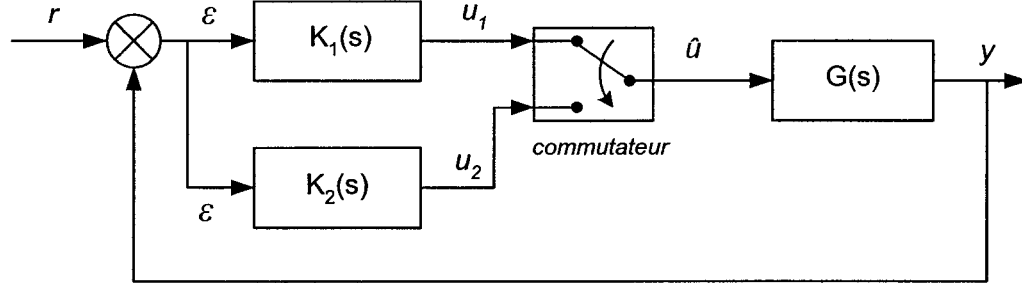


FIG. 4.9 – Étude de la commutation de deux contrôleurs

D'après ce qui précède, on veut que u_2 suive le signal $\hat{u} = u_1$ afin d'éviter la discontinuité du « saut » de u_1 à u_2 au moment de la commutation.

Soit la représentation dans l'espace d'état suivante pour le contrôleur K_2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_{K_2} = A_{K_2} x_{K_2} + B_{K_2} \varepsilon \\ u_2 = C_{K_2} x_{K_2} + D_{K_2} \varepsilon \end{cases} \quad (4.22)$$

où x_{K_2} est le vecteur d'état du contrôleur, ε le signal d'erreur, entrée du correcteur et u_2 le signal de commande issu de K_2 .

Le problème se pose ainsi en ces termes : « lorsque le contrôleur K_2 est hors-ligne, c'est-à-dire avant la commutation, initialiser en permanence l'état x_{K_2} , et ce quelle que soit l'entrée ε , de telle sorte que l'on ait $u_2 \approx \hat{u}$, où $\hat{u} = u_1$; la commutation s'effectue en douceur, et après celle-ci, c'est-à-dire lorsque $\hat{u} = u_2$, le contrôleur K_2 modifié devra retrouver son comportement original. »

La démarche que nous allons suivre, illustrée par la figure (4.10), va être d'estimer l'état $\hat{x}_{K_2}$ qui donnerait la sortie $u_2 = \hat{u}$ si on avait $x_{K_2} = \hat{x}_{K_2}$, en comparant $\hat{u} = u_1$ et u_2 , et en faisant un retour de cette différence pour ajuster l'état x_{K_2} .

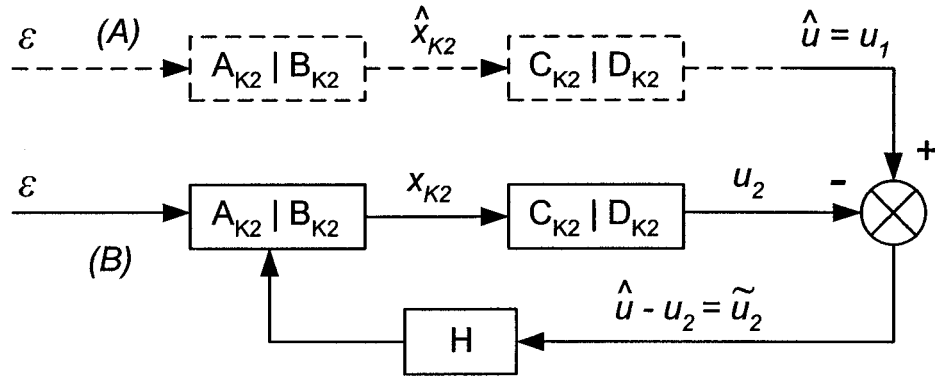


FIG. 4.10 – Structure de suivi de signaux par estimation

Ce raisonnement amène à justifier l'existence d'un état $\hat{x}_{K_2}$ vérifiant le modèle d'état (4.22), pour une entrée ε et une sortie u_2 quelconques et fixées : un tel état existe et on peut même obtenir son expression si la paire (A_{K_2}, C_{K_2}) est observable.

Les deux branches (A) et (B) de la figure (4.10) vérifient les équations de l'espace d'état suivantes :

– Pour la branche (A),

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{K_2} &= A_{K_2} \hat{x}_{K_2} + B_{K_2} \varepsilon \\ \hat{u} = u_1 &= C_{K_2} \hat{x}_{K_2} + D_{K_2} \varepsilon \end{cases} \quad (4.23)$$

– Pour la branche (B),

$$\begin{cases} \dot{x}_{K_2} &= A_{K_2} x_{K_2} + B_{K_2} \varepsilon + H (\hat{u} - u_2) \\ u_2 &= C_{K_2} x_{K_2} + D_{K_2} \varepsilon \end{cases} \quad (4.24)$$

où H est un gain matriciel constant, à déterminer.

D'après la relation précédente, on obtient l'expression de la nouvelle structure $K_{2_{est}}$ du contrôleur :

$$\begin{cases} \dot{x}_{K_2} &= A_{K_2} x_{K_2} + B_{K_2} \varepsilon + H (\hat{u} - C_{K_2} x_{K_2} - D_{K_2} \varepsilon) \\ u_2 &= C_{K_2} x_{K_2} + D_{K_2} \varepsilon \end{cases} \quad (4.25)$$

soit :

$$\begin{cases} \dot{x}_{K_2} = (A_{K_2} - H C_{K_2}) x_{K_2} + (B_{K_2} - H D_{K_2}) \varepsilon + H \hat{u} \\ u_2 = C_{K_2} x_{K_2} + D_{K_2} \varepsilon \end{cases} \quad (4.26)$$

Nous pouvons faire deux remarques sur ce résultat : la première est que l'on retrouve bien le modèle d'état (4.22) du contrôleur initial K_2 lorsque l'on a $\hat{u} = u_2$, et la seconde est que la différence $\tilde{x}_{K_2} = \hat{x}_{K_2} - x_{K_2}$ vérifie la relation suivante :

$$\dot{\tilde{x}}_{K_2} = (A_{K_2} - H C_{K_2}) \tilde{x}_{K_2} \quad (4.27)$$

Ainsi, la nouvelle structure de commande sera stable si et seulement si la matrice $(A_{K_2} - H C_{K_2})$ a toutes ses valeurs propres à partie réelle négative. Le problème résultant est donc de choisir le gain H , de telle sorte que la performance de suivi soit acceptable.

Cette structure s'applique aux deux nouveaux contrôleurs $K_{1_{est}}$ et $K_{2_{est}}$, et est illustrée à la figure suivante.

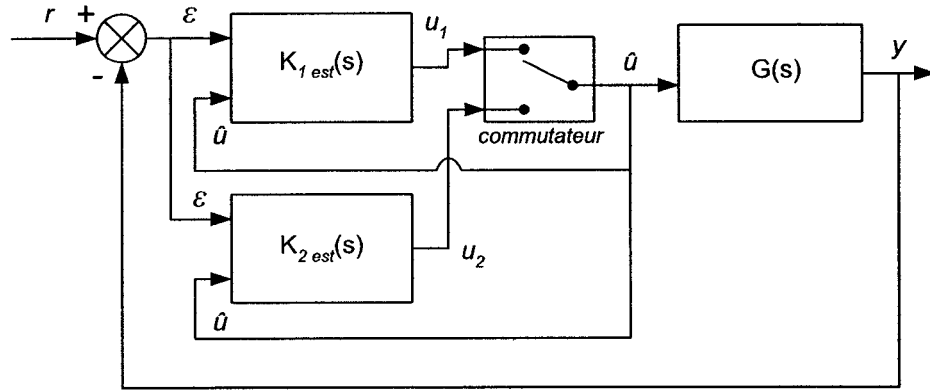


FIG. 4.11 – Montage pour l'étude de la commutation de deux contrôleurs $K_{1_{est}}$ et $K_{2_{est}}$

Nous allons étudier ci-après deux cas particuliers : d'abord le cas étudié par Hanus où la matrice d'état D_{K_2} est non nulle et inversible, puis le cas où cette dernière est nulle : nous verrons au chapitre 5 que les contrôleurs H_∞ synthétisés possèdent cette caractéristique.

4.4.2.2 D_{K_2} est non nulle et inversible, théorie de Hanus

Ce cas, traité dans Hanus, Kinnaert et Henrotte [14] et repris par Hyde [15] est restrictif dans la mesure où il impose une condition forte sur la structure du contrôleur, qui doit être « inversible ». Il présente l'avantage de fixer le gain H en fonction des autres matrices d'état du contrôleur, mais ôte ainsi la possibilité de tout choix.

Le principe de cette théorie est de déterminer une entrée ε^r réalisable qui donnerait comme sortie $\hat{u} = u_1$, selon le modèle d'état :

$$\dot{x}_{K_2} = A_{K_2} x_{K_2} + B_{K_2} \varepsilon^r \quad (4.28)$$

$$\hat{u} = u_1 = C_{K_2} x_{K_2} + D_{K_2} \varepsilon^r \quad (4.29)$$

puis utilisant le principe de réalisabilité (« present realizability ») énoncé dans Hanus, Kinnaert et Henrotte [14], l'expression suivante est valable pour le même état x_{K_2} qu'à l'équation précédente :

$$u_2 = C_{K_2} x_{K_2} + D_{K_2} \varepsilon \quad (4.30)$$

En soustrayant les équations (4.29) et (4.30) entre elles, on arrive à :

$$\hat{u} - u_2 = D_{K_2} (\varepsilon^r - \varepsilon) \quad (4.31)$$

soit

$$\varepsilon^r = \varepsilon + D_{K_2}^{-1} (\hat{u} - u_2) \quad (4.32)$$

avec l'hypothèse que la matrice D_{K_2} est non nulle et inversible.

En regroupant les expressions (4.28), (4.30) et (4.32), on arrive au modèle d'état suivant pour le nouveau contrôleur K_{2est} :

$$\begin{cases} \dot{x}_{K_2} = (A_{K_2} - B_{K_2} D_{K_2}^{-1} C_{K_2}) x_{K_2} + B_{K_2} D_{K_2}^{-1} \hat{u} \\ u_2 = C_{K_2} x_{K_2} + D_{K_2} \varepsilon \end{cases} \quad (4.33)$$

Cette structure sera stable si et seulement si les pôles de $(A_{K_2} - B_{K_2} D_{K_2}^{-1} C_{K_2})$ sont tous à partie réelle négative. L'inconvénient de ce montage est que les gains sont fixés par définition du contrôleur : il n'y a pas de possibilité de réglage.

Un autre moyen de retrouver ce résultat est d'utiliser la relation suivante, obtenue à partir de l'équation (4.29) :

$$\varepsilon^r = D_{K_2}^{-1} (\hat{u} - C_{K_2} x_{K_2}) \quad (4.34)$$

et de la relier aux équations (4.28) et (4.30).

On peut remarquer que ce modèle d'état correspond à celui de la relation (4.26) pour un gain $H = B_{K_2} D_{K_2}^{-1}$; c'est donc bien un cas particulier de l'approche « structure d'observateur » vue précédemment.

4.4.2.3 Cas où $D_{K_2} = 0$

Dans ce cas, voici le modèle d'état correspondant à la nouvelle structure avec observateur $K_{2_{est}}$ du contrôleur K_2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_{K_2} &= (A_{K_2} - H C_{K_2}) x_{K_2} + B_{K_2} \varepsilon + H \hat{u} \\ u_2 &= C_{K_2} x_{K_2} \end{cases} \quad (4.35)$$

où le gain H reste à déterminer en fonction de la performance désirée. Nous étudierons ce choix au chapitre 5.

Dans cette partie, nous avons décrit la démarche que nous allons suivre dans le chapitre 5 : synthétiser des contrôleurs qui seront inclus dans une structure globale de commande où ils commuteront entre eux, puis valider les performances sur toute l'enveloppe de vol.

CHAPITRE 5

IMPLANTATION DE LA LOI DE COMMANDE

Dans ce chapitre, nous allons mettre en application la théorie vue précédemment, portant sur la synthèse de contrôleurs robustes H_∞ et la commutation entre ceux-ci, pour obtenir une loi de commande séquencée sur toute l'enveloppe de vol. Pour rendre ces résultats disponibles et visibles sans rentrer dans les détails de l'étude, un module GUI permet d'obtenir l'ensemble des résultats et animations concernant les modèles linéarisés ; nous le décrirons en fin de chapitre.

5.1 Synthèse des contrôleurs H_∞

La première étape est de synthétiser les contrôleurs H_∞ , en définissant d'abord la structure de synthèse que nous allons utiliser.

5.1.1 Mise en oeuvre

Nous allons expliquer dans ce paragraphe le choix des signaux de consigne, des signaux de commande et des sorties.

a) Choix des consignes

Notre but est de synthétiser un autopilote pour le vol longitudinal du *Boeing 747*, c'est-à-dire que parmi les sorties du modèle d'état (3.14) vu au chapitre 3, nous nous intéresserons à la vitesse u et à la pente $\bar{\gamma}$ de l'avion, variables qui suffisent en effet à définir sa trajectoire.

Nous avons également vu en fin de chapitre 3 que le modèle longitudinal de l'avion peut se décomposer en deux modes principaux : le mode phugoïde et le mode rapide, qui ne requièrent pas la même performance. Or les deux variables u et $\bar{\gamma}$ sont caractéristiques du mode phugoïde, il faudra donc prendre en compte une variable du

mode rapide pour contrôler celui-ci, c'est-à-dire soit l'incidence $\bar{\alpha}$, soit la vitesse de rotation en tangage q : cette dernière est couramment utilisée comme variable du mode rapide pour le retour.

Les trois variables u_r , $\bar{\gamma}_r$ et q_r constitueront ainsi le vecteur des **références** ou **consignes** $\mathbf{ref} = [u_r \quad \bar{\gamma}_r \quad q_r]^T$.

Remarque : la référence q_r sur la vitesse de tangage est plutôt une perturbation pour l'avion, qui modélise les rafales de vent comme nous le verrons plus loin.

b) Signaux de commande

Les deux **signaux de commande** que nous utiliserons sont l'angle $\bar{\delta}_e$ des élévateurs et la position $\bar{\delta}_t$ de la manette des gaz. Même si dans ce mémoire nous n'utiliserons pas de modèle d'actionneurs, nous tiendrons compte des limites de débattement $(\delta_{e_{min}}, \delta_{e_{max}})$ et de vitesse de variation $(\frac{d\delta_e}{dt}_{min}, \frac{d\delta_e}{dt}_{max})$ des élévateurs. Ces signaux de commande seront perturbés par l'entrée $\mathbf{pert} = [\delta_{e_{pert}} \quad \delta_{t_{pert}}]^T$.

Remarque : ce problème de synthèse est MIMO (« Multiple Input Multiple Output »), contrairement aux cas généralement traités dans la littérature qui ne considèrent que rarement la propulsion δ_t comme une commande.

c) Choix des sorties

Le choix effectué plus haut nous impose de choisir comme **sorties** du système la vitesse u , la pente $\bar{\gamma}$ et la vitesse de rotation en tangage q , regroupées dans le vecteur $\mathbf{y}_{com}$. Ce choix fixe les matrices C_{com} et D_{com} du modèle d'état qui sera utilisé pour la synthèse de contrôleurs (3 sorties) ; cependant lorsque nous simulerons ce système sous l'environnement **SIMULINK** de **MATLAB**, nous considérerons la matrice C complète afin de pouvoir observer toutes les sorties, mais nous n'effectuerons le retour que des trois signaux u , $\bar{\gamma}$ et q .

5.1.2 Structure utilisée

Avec ce qui précède, nous pouvons déduire un schéma de synthèse, illustré à la figure (5.1). Il est issu de la théorie du chapitre 4, et nous choisissons de surveiller le signal d'erreur ϵ pondéré par une fonction W_1 , soit z_1 , et le signal de commande u_K pondéré par une fonction W_2 , soit z_2 , en réponse à une consigne ref et à une perturbation $pert$, définies aux paragraphes précédents. Cette dernière est également pondérée par une fonction W_3 comme nous le verrons plus loin.

Remarque : cette pondération W_3 , appliquée au signal de perturbation $pert$, est théorique et destinée à la synthèse de contrôleurs H_∞ .

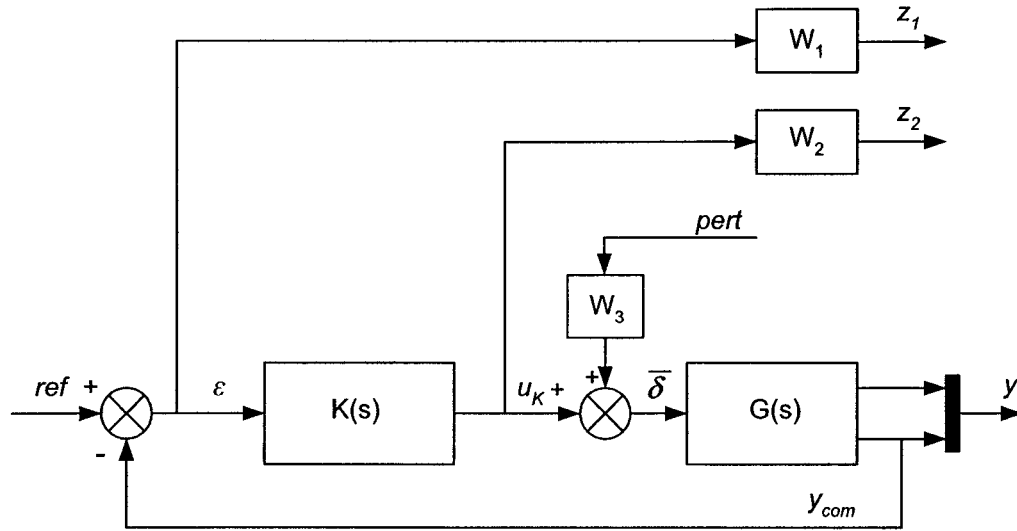


FIG. 5.1 – Le montage utilisé pour la synthèse H_∞ de contrôleurs.

Pour un tel montage, le problème H_∞ se pose en ces termes :

Problème H_∞ : pour un scalaire γ donné, trouver un compensateur $K(s)$ qui stabilise intérieurement le système et assure $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$, où :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = F_l(P, K) \begin{pmatrix} ref \\ pert \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Or, si on note la fonction de sensibilité $S = (I + GK)^{-1}$, on obtient les relations suivantes :

$$z_1 = W_1 S \text{ ref} - W_1 S G W_3 \text{ pert} \quad (5.2)$$

$$z_2 = W_2 K S \text{ ref} - W_2 K S G W_3 \text{ pert} \quad (5.3)$$

d'où l'expression de la matrice de transfert $F_l(P, K)$:

$$F_l(P, K) = \begin{pmatrix} W_1 S & -W_1 S G W_3 \\ W_2 K S & -W_2 K S G W_3 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Nous voyons ici l'intérêt présenté par la pondération W_3 sur l'entrée perturbatrice *pert*, qui permet de pondérer les fonctions de transfert de la deuxième colonne de $F_l(P, K)$ lors de la synthèse du contrôleur.

5.1.3 Performance et choix des pondérations

Dans cette section, nous allons voir comment choisir les trois pondérations W_1 , W_2 et W_3 pour une condition de vol donnée, puis nous évaluerons leur validité sur l'enveloppe de vol, c'est-à-dire s'il y a lieu de les modifier pour la synthèse en d'autres conditions de vol. La figure (5.2) rappelle les grandeurs caractéristiques du vol de l'avion que nous allons utiliser dans la définition des critères de performance.

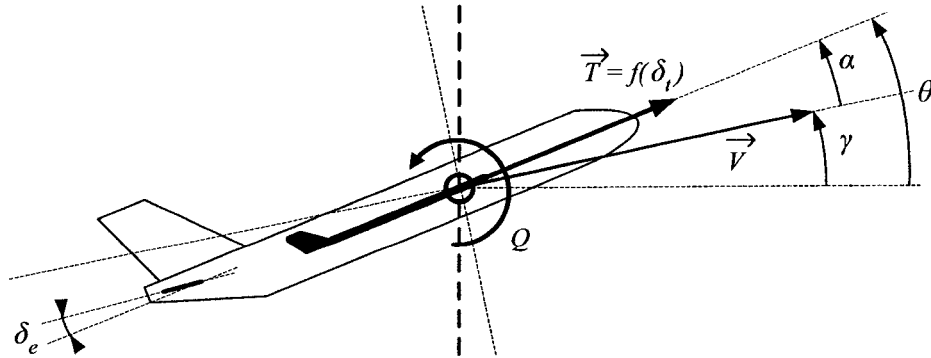


FIG. 5.2 – Définition des symboles pour le vol longitudinal de l'avion.

Nous avons vu que les deux modes du mouvement longitudinal n'ont pas les mêmes caractéristiques. Le mode rapide est bien amorti mais un mauvais réglage du contrôleur peut facilement le rendre instable. Le mode phugoïde est lent, stable, mais mal amorti (le lieu des pôles présenté en fin de chapitre 3 montre un amortissement $\xi = 3.48 \cdot 10^{-2}$).

L'objectif, dans le contexte de la synthèse d'un autopilote, est donc d'augmenter la robustesse du mode rapide et d'amortir le mode phugoïde. Nous allons « accélérer » le système, et ainsi fixer une **fréquence de coupure** minimale $\omega_c \approx 1 \text{ rad.s}^{-1}$ au filtre passe haut, pour couper les signaux basse fréquence correspondant au mode phugoïde mal amorti.

Le système contrôlé peut être considéré comme une boucle interne rapide (« inner loop ») d'après le montage global de la figure suivante.

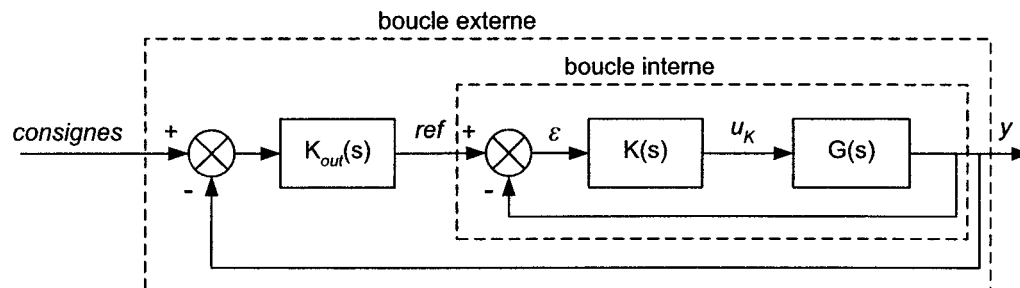


FIG. 5.3 – Schéma de la structure de commande globale.

En toute rigueur, les **dépassements** ne sont pas souhaitables dans le cadre de la commande d'avion ; cependant, nous tolérerons un dépassement maximum de 50 % dans cette boucle interne pour les réponses de la vitesse V et de la pente γ en réponse à un échelon des consignes correspondantes. La boucle externe (« outer loop »), plus lente, réglera les références de vitesse et de pente en fonction des consignes de vitesse et d'altitude souhaitées par le pilote, et permettra de réduire le dépassement. Cependant l'étude de la boucle externe n'est pas l'objet de ce mémoire.

La **précision** de l'asservissement doit être élevée afin d'éviter les écarts de trajectoire, notamment pour l'angle de pente γ , dont une petite erreur entraînera d'im-

portantes variations d'altitude. Ainsi, nous avons fixé une erreur statique due aux références u_{ref} et $\bar{\gamma}_{ref}$ inférieure à 0.01 %.

De plus, le *Boeing 747* étant un avion commercial, nous devons tenir compte du confort des passagers dans la conception de la loi de commande, comme le fait remarquer O'Shea [21], en maintenant le **facteur de charge** n_z dans une plage de valeurs raisonnables, soit de l'ordre de grandeur $n_z \approx 0.1$ pour des manoeuvres typiques, de changement de pente par exemple. Néanmoins, sa valeur lors de situations extrêmes, comme l'autopilotage suite à une violente rafale de vent, ne devra pas dépasser $n_z \approx 2.5$ selon Degrez [9].

Puis nous tiendrons compte des **limitations** sur l'amplitude et la vitesse de variation des élévateurs δ_e , rappelées au tableau 5.1, et nous nous assurerons que l'amplitude de la commande δ_t reste raisonnable.

TAB. 5.1 – Limites de débattement et de vitesse de variation des élévateurs.

direction	débattement δ_e	vitesse $\frac{d\delta_e}{dt}$
vers le haut	-23°	$37^\circ/s$
vers le bas	$+17^\circ$	$37^\circ/s$

Étudions maintenant plus en détail le choix des pondérations que nous allons utiliser lors de la synthèse H_∞ des contrôleurs.

a) Pondération W_1 sur l'erreur ε

La fonction de pondération W_1 de l'erreur ε est matricielle et se présente sous la forme suivante :

$$W_1 = \begin{pmatrix} W_{1u} & 0 & 0 \\ 0 & W_{1\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & W_{1q} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

La valeur des gabarits $\frac{1}{|W_{1u}(j\omega)|}$ et $\frac{1}{|W_{1\gamma}(j\omega)|}$ est le résultat de nombreux tests de type essai/erreur, effectués après un choix initial.

Suivant les critères de performance définis précédemment, ces gabarits doivent :

- être faibles en basse fréquence pour assurer les objectifs de précision ; nous choisissons un gain de -100 dB à $\omega \approx 0$ rad.s $^{-1}$, qui correspond à une erreur de 10^{-3} % en régime permanent,
- couper l'axe de gain 0 dB dans un voisinage de la fréquence de coupure, soit $\omega_c \approx 1$ rad.s $^{-1}$.

Compte tenu de ces objectifs, nous avons abouti à ces expressions :

$$\frac{1}{W_{1u}(s)} = 10^{-5} \frac{250^2 s^2 + 2 \cdot 250 s + 1}{\frac{s^2}{2.5 \cdot 2.5} + 2 \frac{s}{2.5} + 1} \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{W_{1\gamma}(s)} = 10^{-5} \frac{625^2 s^2 + 2 \cdot 625 s + 1}{s^2 + 2 s + 1} \quad (5.7)$$

La figure (5.4) montre leur allure fréquentielle en amplitude.

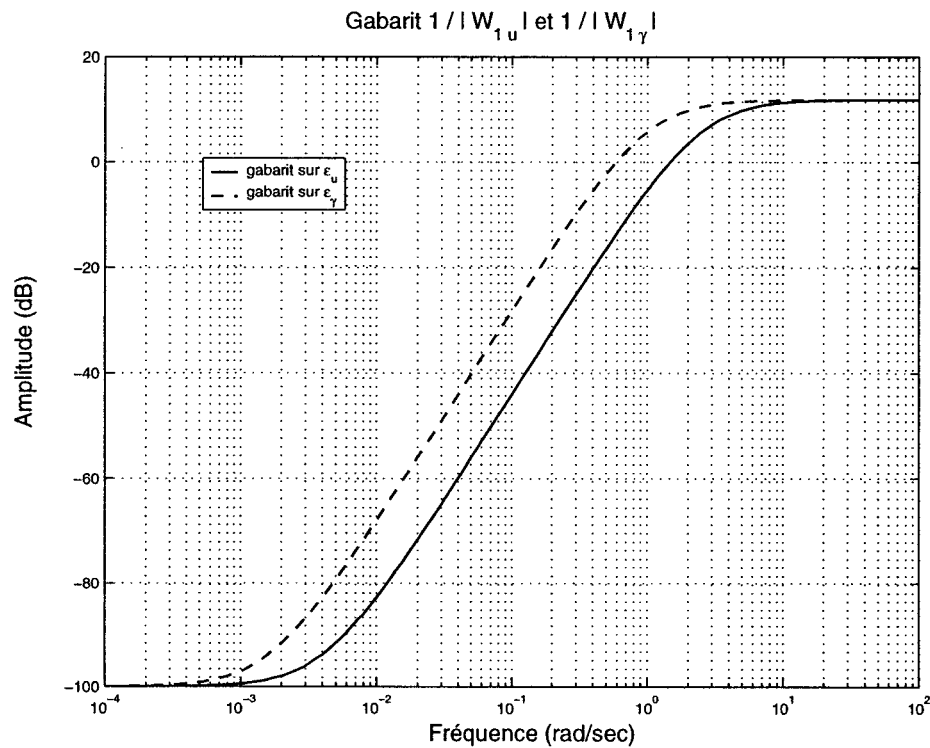


FIG. 5.4 – Gabarits sur la fonction de sensibilité S .

En revanche, l'entrée q_{ref} correspond à une perturbation ; dans l'immédiat, nous appliquerons au transfert $\frac{\varepsilon_q}{q_{ref}}$ une pondération constante $W_{1_q} = 1$, et verrons plus tard s'il y a lieu d'affiner la valeur de ce gabarit.

b) Pondération W_2 sur la commande u_K

La fonction de pondération W_2 sur la commande u_K est également matricielle et a la forme suivante :

$$W_2 = \begin{pmatrix} W_{2_{\delta_e}} & 0 \\ 0 & W_{2_{\delta_t}} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

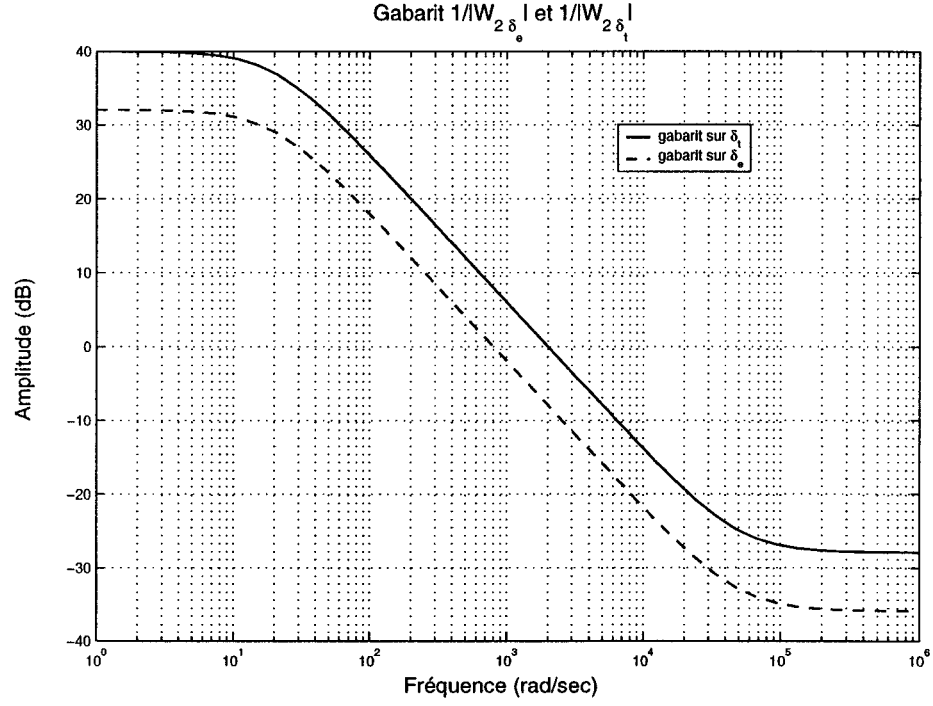
Comme le précisent Duc, Font [11], les gabarits $\frac{1}{|W_{2_{\delta_e}}(j\omega)|}$ et $\frac{1}{|W_{2_{\delta_t}}(j\omega)|}$ ont pour objectif de minimiser l'influence des dynamiques négligées en haute fréquence ; leur valeur devra ainsi y être faible, et ajustée afin que la courbe de la sensibilité S suive au plus près celle du gabarit W_1 . Ils devront également être réglés pour vérifier les contraintes d'amplitude et de vitesse de variation des élévateurs δ_e et une amplitude de commande raisonnable pour les gaz δ_t .

La fréquence de coupure de ces pondérations est la plus importante, plus que les gains maximaux imposés en basse et haute fréquence, puisqu'elle fixe la bande passante pour l'asservissement. À la suite de nombreux essais, cette bande passante a été choisie à environ $\omega \approx 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$, et les expressions des gabarits choisis qui seront affinées, le cas échéant, lors de la synthèse sont les suivants :

$$\frac{1}{W_{2_{\delta_e}}(s)} = 40 \frac{\frac{s}{50000} + 1}{\frac{s}{20} + 1} \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{W_{2_{\delta_t}}(s)} = 100 \frac{\frac{s}{50000} + 1}{\frac{s}{20} + 1} \quad (5.10)$$

Leur allure fréquentielle en amplitude est présentée en figure (5.5).

FIG. 5.5 – Gabarit sur la commande u_K .

c) Pondération W_3 sur la perturbation *pert*

La fonction de pondération W_3 appliquée sur les perturbations de commande a la forme matricielle suivante :

$$W_3 = \begin{pmatrix} W_{3\delta_{e_{pert}}} & 0 \\ 0 & W_{3\delta_{t_{pert}}} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Comme le préconisent Duc, Font [11], nous pouvons la choisir constante dans un premier temps, de valeur :

$$W_{3\delta_{e_{pert}}} = W_{3\delta_{t_{pert}}} = 0.1 \quad (5.12)$$

puis la choisir différemment s'il est nécessaire de modifier le comportement du transfert SG pour obtenir un régime transitoire correct en réponse à une perturbation.

5.1.4 Mise sous forme standard

Nous allons déterminer dans ce paragraphe le système augmenté $P(s)$ incluant les pondérations ci-dessus ; il est illustré à la figure (5.6) et défini au chapitre 4 par :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} P_{11} & P_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \text{ref} \\ \text{pert} \\ u_K \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

C'est celui-ci que nous allons utiliser pour synthétiser le contrôleur, en lui appliquant la méthode de γ -itération vue au chapitre 4.

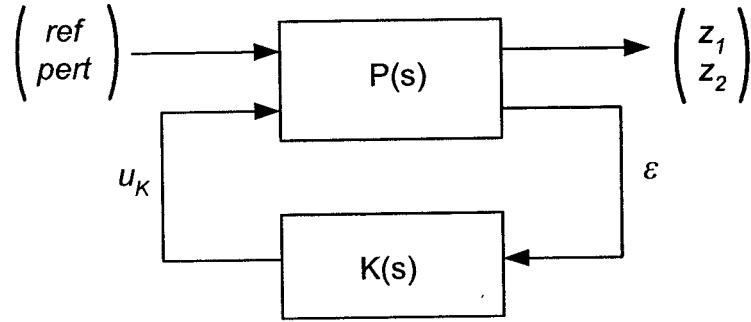


FIG. 5.6 – La forme standard du système contrôleur/avion.

Les pondérations W_1 et W_2 sont matricielles, notons leurs représentations dans l'espace d'état comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_{W_1} = A_{W_1} x_{W_1} + B_{W_1} \varepsilon \\ z_1 = C_{W_1} x_{W_1} + D_{W_1} \varepsilon \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{W_2} = A_{W_2} x_{W_2} + B_{W_2} u_K \\ z_2 = C_{W_2} x_{W_2} + D_{W_2} u_K \end{cases} \quad (5.15)$$

Nous avons vu que W_3 est une pondération matricielle constante.

Voici un rappel du modèle d'état du système avion (3.14) vu au chapitre 3 :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= A_{com} \bar{\mathbf{x}} + B_{com} \bar{\boldsymbol{\delta}} \\ \mathbf{y}_{com} &= C_{com} \bar{\mathbf{x}} + D_{com} \bar{\boldsymbol{\delta}} \end{cases} \quad (5.16)$$

où les matrices A_{com} et B_{com} sont les matrices 4×4 correspondant au vecteur d'état $\bar{\mathbf{x}} = [u \ \bar{\gamma} \ \bar{\alpha} \ q]^T$, et les matrices C_{com} et D_{com} sont réduites afin d'obtenir le vecteur des sorties $\mathbf{y}_{com} = [u \ \bar{\gamma} \ q]^T$ à des fins de commande. On a ainsi :

$$C_{com} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad D_{com} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

Remarque : l'indice « *com* » signifie pour les grandeurs concernées qu'elles sont utilisées à des fins de commande.

Nous cherchons maintenant à obtenir le modèle d'état du système augmenté, que nous allons écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B}_1 \mathbf{e} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_K \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{e} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}_K \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{e} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}_K \end{cases} \quad (5.18)$$

où $\mathbf{X} = [\bar{\mathbf{x}} \ \mathbf{x}_{W_1} \ \mathbf{x}_{W_2}]^T$ est le vecteur d'état complet, $\mathbf{e} = [\mathbf{ref} \ \mathbf{pert}]^T$ est le vecteur des entrées, $\mathbf{u}_K$ est le signal de sortie du contrôleur et $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2]^T$ est le vecteur des sorties surveillées.

Les matrices du modèle d'état précédent s'écrivent de la manière suivante, sachant que $D_{com} = \mathbf{0}_{3 \times 2}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{com} & 0 & 0 \\ -B_{W_1} C_{com} & A_{W_1} & 0 \\ 0 & 0 & A_{W_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \begin{pmatrix} 0 & B_{com} W_3 \\ B_{W_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad B_2 = \begin{pmatrix} B_{com} \\ 0 \\ B_{W_2} \end{pmatrix} \\
C_1 &= \begin{pmatrix} -D_{W_1} C_{com} & C_{W_1} & 0 \\ 0 & 0 & C_{W_2} \end{pmatrix} \quad et \quad C_2 = \begin{pmatrix} -C_{com} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
D_{11} &= \begin{pmatrix} D_{W_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_{W_2} \end{pmatrix} \\
D_{21} &= \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad D_{22} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant pouvoir synthétiser les contrôleurs H_∞ en appliquant au système augmenté l'algorithme DGKF, vu au chapitre 4.

5.1.5 Synthèse des contrôleurs

Pour synthétiser les contrôleurs H_∞ , nous allons utiliser la fonction **MATLAB** `hinftopt.m`. Elle utilise l'algorithme de γ -itération vu au chapitre 4, et vérifie systématiquement si le système augmenté respecte bien les hypothèses nécessaires à son application. Cependant, pour détailler la procédure, nous allons étudier une condition de vol particulière, pour laquelle nous vérifierons ces hypothèses.

Voici la syntaxe de la fonction `hinftopt` :

```
[gamma_opt,ss_cont,ss_bf] = hinftopt(sys_aug)
```

où `gamma_opt` est le critère de performance optimum atteint, `ss_cont` est le modèle d'état du contrôleur H_∞ obtenu, `ss_bf` est le modèle d'état du système bouclé avec le contrôleur et `sys_aug` est le modèle d'état du système augmenté $P(s)$.

Considérons la condition de vol suivante, référencée « a101 » dans le listing fourni avec le simulateur :

- une altitude de 14 000 ft, soit 4 267 m,
- une vitesse de 160 m.s⁻¹,

- une masse de 450 000 lbs, soit 204 117 kg,
- une position du centre de gravité de 25% MAC,
- tous volets rentrés,

dont les matrices du modèle d'état, obtenues à partir du module GUI du chapitre 3, s'écrivent :

$$A_{com} = \begin{pmatrix} -0.007 & -0.06 & -0.034 & 0 \\ 0.14 & 0 & 0.72 & 0 \\ -0.14 & 0 & -0.72 & 1 \\ 0 & 0 & -1.23 & -0.62 \end{pmatrix}, B_{com} = \begin{pmatrix} 0 & 3.78 \\ 9.1 \cdot 10^{-4} & 0 \\ -9.1 \cdot 10^{-4} & 0 \\ -0.027 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{com} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D_{com} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

À partir du système augmenté $P(s)$ précédent et sa représentation (5.18) dans l'espace d'état, vérifions une à une les hypothèses de résolution :

- (H1) (A, B_2, C_2) stabilisable et détectable : en effet, le triplet $(A_{com}, B_{com}, C_{com})$ est commandable et observable, et les pondérations choisies sont stables,
- (H2) les matrices D_{12} et D_{21} sont de plein rang : en effet, le gain de W_2 est non nul à l'infini,
- (H3) $P_{12}(s)$ et $P_{21}(s)$ n'ont pas de zéro sur l'axe imaginaire : la fonction `hinfopt` de **MATLAB** vérifie systématiquement cette hypothèse.

Le système augmenté $P(s)$ vérifie ainsi les hypothèses (H1) – (H3) ci-dessus.

Nous disposons maintenant de tous les éléments pour synthétiser les contrôleurs H_∞ , en utilisant la fonction **MATLAB** `hinfopt`, dont nous avons donné la syntaxe précédemment. Nous avons rassemblé l'ensemble de la procédure de synthèse dans une fonction `synthese_cont.m`, dont les principales parties sont les suivantes :

- définition des pondérations W_1 , W_2 et W_3 ,
- définition du système augmenté P à partir du système *avion* et des pondérations,

- calcul du contrôleur à l'aide de `hinfopt`,
- compte-rendu de la synthèse, avec notamment le critère de performance γ_{opt} atteint.

Cette fonction requiert comme arguments d'entrées les matrices d'état A , B , C et D du modèle linéarisé de l'avion, puis retourne en sortie les matrices d'état A_K , B_K , C_K et D_K du contrôleur obtenu en cette condition de vol et la valeur γ du critère de performance correspondant.

Remarque : les pondérations choisies sont fixées dans la fonction `synthese_cont.m`, puisqu'elles se révéleront valables partout dans l'enveloppe de vol.

Ces contrôleurs ont un inconvénient majeur : leur ordre est élevé, et égal à la somme des ordres du système *avion* (ordre 4), des pondérations W_1 (ordre 4) et W_2 (ordre 4) ; l'ordre de chaque contrôleur sera donc de 12.

Remarque : on ne tient pas compte de W_3 dans le calcul de l'ordre du contrôleur, puisque cette pondération est constante.

De plus, ils auront tous un gain nul à l'infini ($D_K = 0$). Leur modèle d'état s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_K x_K + B_K \varepsilon \\ u_K &= C_K x_K \end{cases} \quad (5.19)$$

ce qui va avoir une influence sur le choix de la méthode de commutation comme nous le verrons plus loin.

5.1.6 Résultats

Après l'étude théorique de la synthèse de contrôleurs puis de sa mise en application, voyons maintenant quelles sont les performances atteintes. Nous étudierons dans un premier temps les résultats obtenus dans le domaine fréquentiel, puis les réponses temporelles du système bouclé à différentes entrées caractéristiques.

Pour étudier l'avion contrôlé, nous allons considérer la condition de vol particulière « a101 » donnée au paragraphe ci-dessus. Le contrôleur est calculé avec un critère de performance $\gamma = 2.75$, critère que nous avons défini au chapitre 4. Les courbes de la sensibilité S et de la fonction KS respectent donc avec une bonne précision les gabarits fréquentiels choisis, comme nous allons le voir.

La figure (5.7) montre la représentation fréquentielle en amplitude des valeurs singulières de la fonction de sensibilité S .

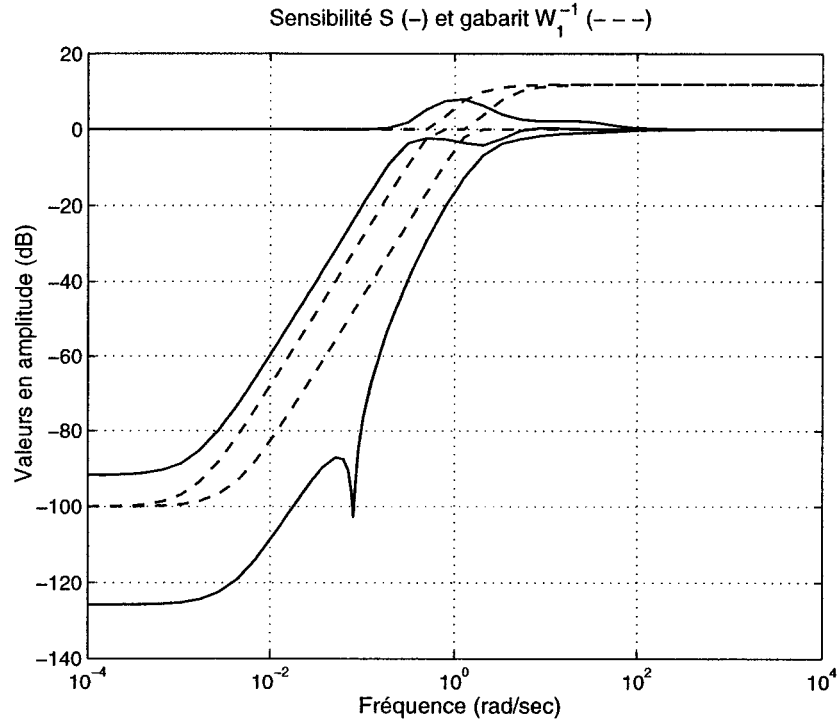


FIG. 5.7 – Allure fréquentielle des valeurs singulières de la fonction de sensibilité S et du gabarit associé W_1^{-1} .

Nous remarquons que l'une des courbes de sensibilité est située temporairement au-dessus du gabarit $1/W_1$, c'est-à-dire que nous aurons $\|S W_1\|_\infty < \gamma$ dans cet intervalle, où $\gamma = 2.75$, et non $\|S W_1\|_\infty < 1$. Ce résultat est acceptable, puisque nous admettrons plus loin comme critère de performance $\gamma_{max} \approx 4$.

La figure (5.8) présente la représentation fréquentielle des valeurs singulières du transfert KS . Elle nous montre que les valeurs singulières de KS restent inférieures en gain à celles du gabarit W_2^{-1} , à l'exception d'un intervalle où elles lui sont légèrement supérieures.

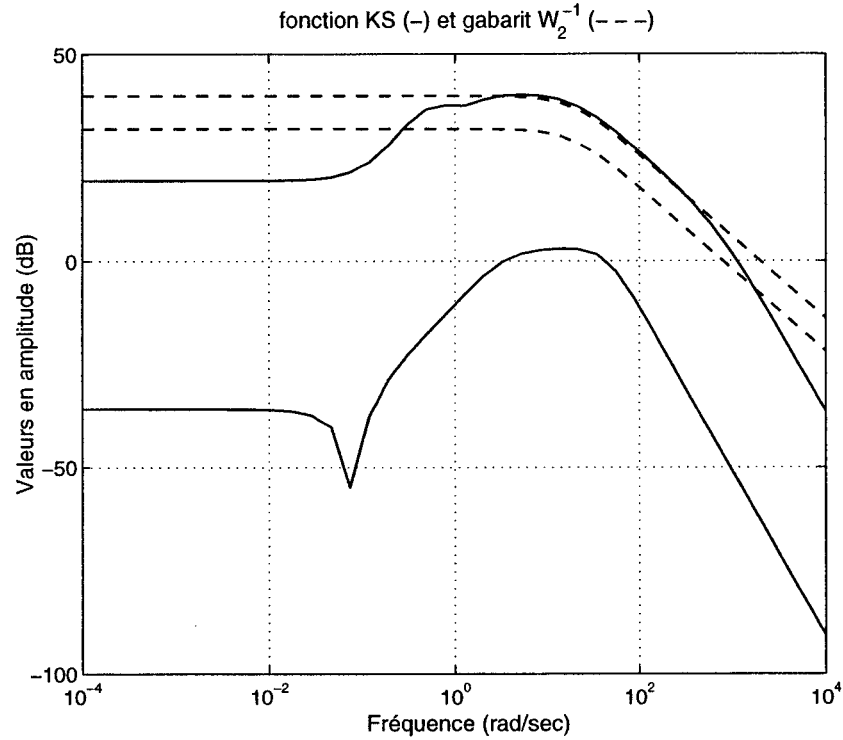


FIG. 5.8 – Allure fréquentielle des valeurs singulières de la fonction KS et du gabarit associé W_2^{-1} .

Nous avons vérifié qu'en général, les valeurs singulières des fonctions caractéristiques S et KS restent bornées par les gabarits choisis à un facteur multiplicateur γ près.

Étudions maintenant l'allure fréquentielle en amplitude des valeurs singulières du transfert en boucle ouverte du système contrôlé, présentée en figure (5.9).

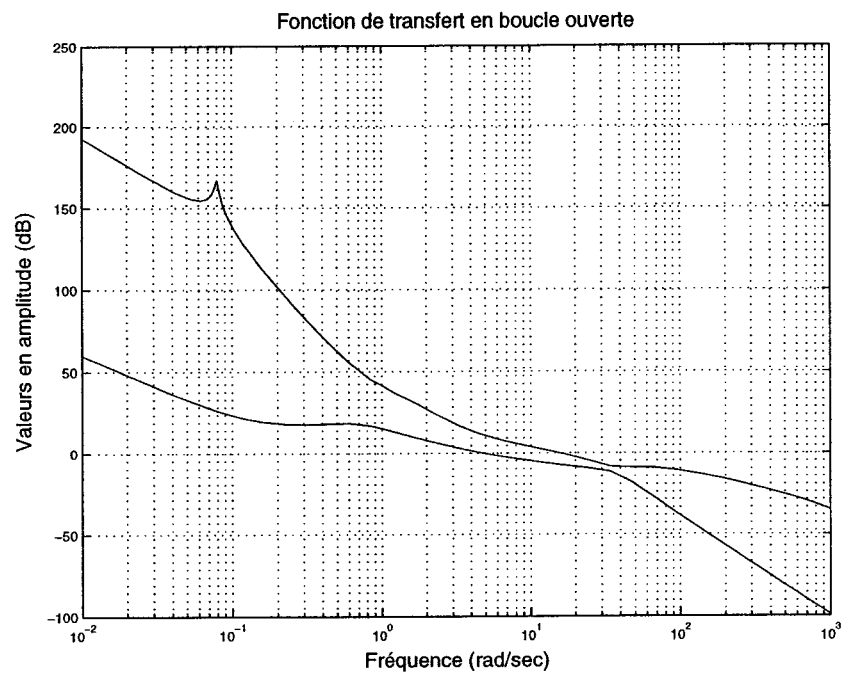


FIG. 5.9 – Allure fréquentielle des valeurs singulières de la fonction de transfert en boucle ouverte du système contrôlé.

Comme nous le souhaitons dans le chapitre 4, nous obtenons pour cette fonction un gain élevé en basse fréquence, un gain faible en hautes fréquences et une bande passante correspondant aux objectifs définis, soit une bande passante minimale de $\omega_c \approx 1 \text{ rad.s}^{-1}$.

Voyons maintenant les réponses temporelles du système contrôlé. Nous allons étudier les réponses du système en boucle fermée à plusieurs entrées :

- échelons de consigne en vitesse u et en angle de pente γ ,
- échelons de perturbation en vitesse de tangage q et en angle d'élévateurs δ_e .

a) Échelons de consigne

La figure (5.10) montre la réponse temporelle du système contrôlé à un échelon de vitesse $u = 10\%$, soit pour la condition « a101 » considérée un échelon d'une valeur de 16 m.s^{-1} .

Remarque : on rappelle que l'expression de u est la suivante : $u = \frac{V-V_e}{V_e}$. Ainsi, pour la condition « a101 », soit $u = 10\%$ et $V_e = 160 \text{ m.s}^{-1}$, on a $\delta_V = V - V_e = 16 \text{ m.s}^{-1}$.

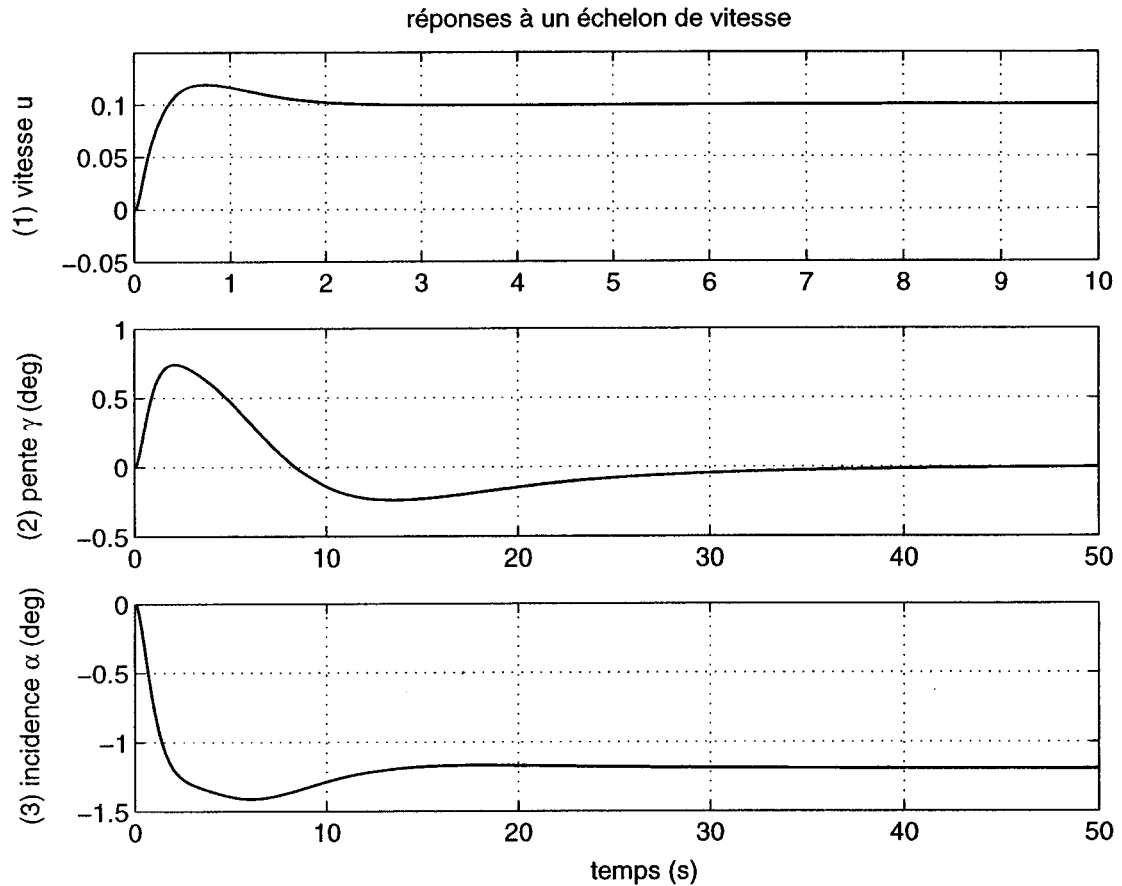


FIG. 5.10 – Réponses du système contrôlé à un échelon de vitesse.

Le temps de réponse et le dépassement de la réponse en vitesse (1) sont corrects dans le contexte de boucle rapide : il sont respectivement de $t_r = 1.7 \text{ s}$ et $D = 20\%$ et la précision est excellente, puisque l'erreur statique est inférieure à 0.1% .

De plus, on constate sur la courbe (2) que la pente augmente pendant l'accélération de l'appareil. Ce phénomène est dû à l'augmentation de la portance provoquée par celle de la vitesse. La courbe (3) nous indique que l'incidence α diminue simultanément pour compenser cette variation.

En effet la force de portance s'exprime $F_{z_s} = -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_L(\alpha)$; pour la maintenir constante, une augmentation de vitesse devra être compensée par une diminution de la valeur du coefficient C_L , soit de l'incidence α si on se réfère à la représentation graphique $C_L = f(\alpha)$ vue au chapitre 3. Ainsi, lorsque le régime permanent est atteint, la vitesse est à la valeur souhaitée ($u = 10\%$), la pente est de nouveau nulle et l'incidence se stabilise à une valeur correspondant au nouvel équilibre.

Avec ce qui précède, la réponse des actionneurs δ_e et δ_t présentée en figure (5.11) montre qu'une variation de l'angle des élévateurs δ_e a pour effet final de modifier l'incidence α et la vitesse V de l'appareil, alors que la manette des gaz δ_t revient à son état initial après un court régime transitoire. Nous verrons que l'inverse se produit lors d'une augmentation de pente à vitesse constante. Une analyse plus complète de ce phénomène est présentée dans Boiffier [7].

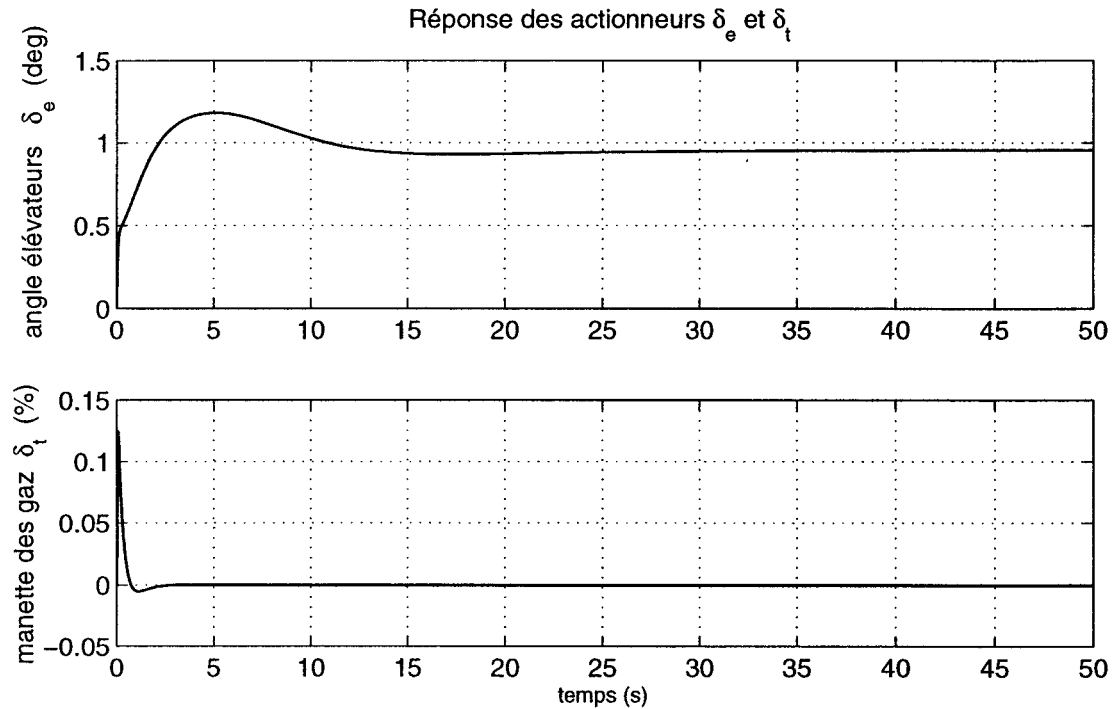


FIG. 5.11 – Évolution temporelle des actionneurs, en réponse à un échelon de vitesse.

La figure (5.12) montre la réponse temporelle du système contrôlé à un échelon unitaire de pente $\gamma = 1$ deg.

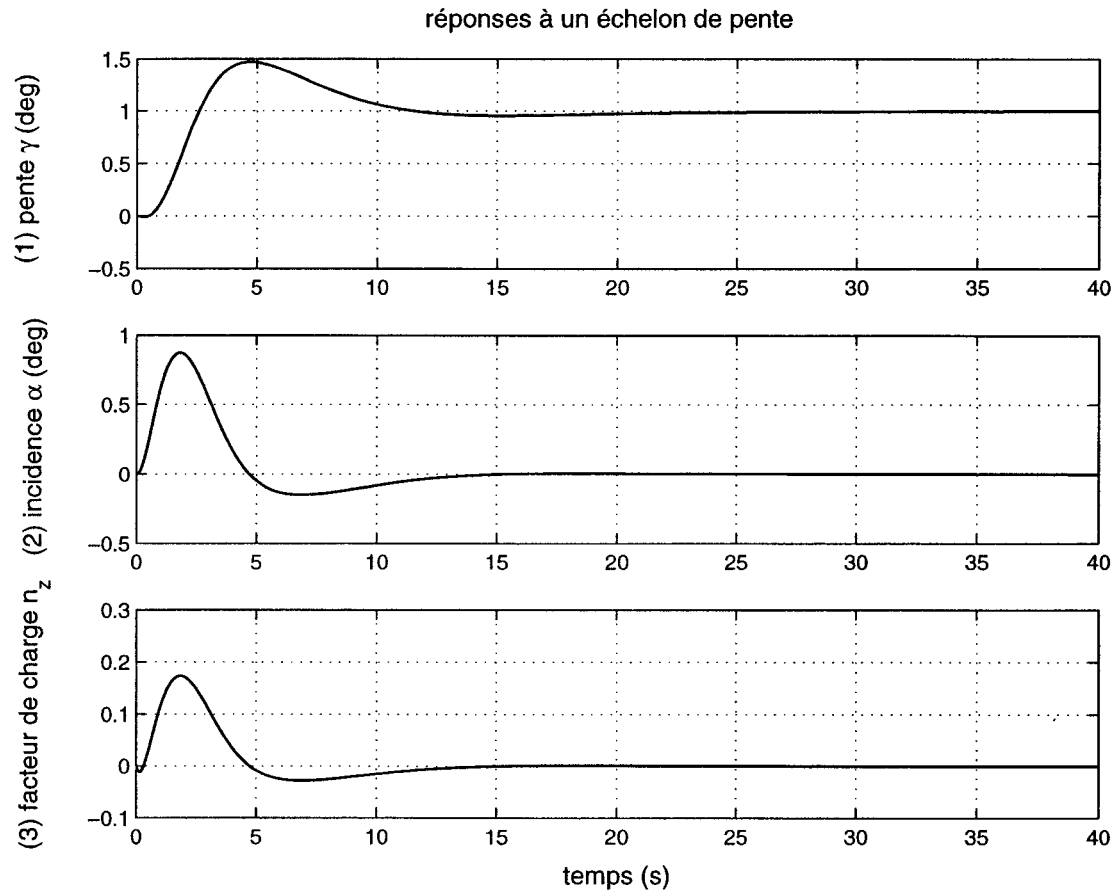


FIG. 5.12 – Réponses du système contrôlé à un échelon de pente.

La performance du système bouclé en réponse à cette entrée, analysée à partir de la courbe (1), est également satisfaisante compte tenu du gabarit du *Boeing 747* : le temps de réponse est d'environ $t_r = 10$ s, l'erreur statique, comme dans le cas de l'échelon de vitesse, est très faible, toujours inférieure à 0.1 %. Le dépassement est lui moins bon que dans le cas précédent puisqu'il atteint presque 50 %.

La courbe (2) nous montre la réponse temporelle de l'incidence α : après un régime transitoire dû au mouvement des élévateurs pour placer l'avion sur sa nouvelle trajectoire, l'incidence se stabilise à une valeur nulle. Ceci s'explique par le raisonnement vu

précédemment, puisqu'à vitesse constante, la position en régime permanent de l'angle des élévateurs, donc de l'incidence ne change pas.

Concernant le confort des passagers, le facteur de charge n_z , donné à la courbe (3), reste inférieur à 0.2 en valeur absolue, ce qui est satisfaisant compte tenu du critère donné en début de chapitre.

Comme dans le cas précédent où la variation de vitesse était provoquée par une variation de l'incidence, l'augmentation de pente est maintenant provoquée par une augmentation de la poussée. En effet, à incidence et vitesse constantes, nous souhaitons équilibrer le terme $T - mg\sin(\gamma)$ de l'équation de propulsion du système (2.30), vu au chapitre 2. La figure (5.13) confirme ces propos puisqu'en régime permanent, on a $\delta_e = 0$ et $\delta_t > 0$.

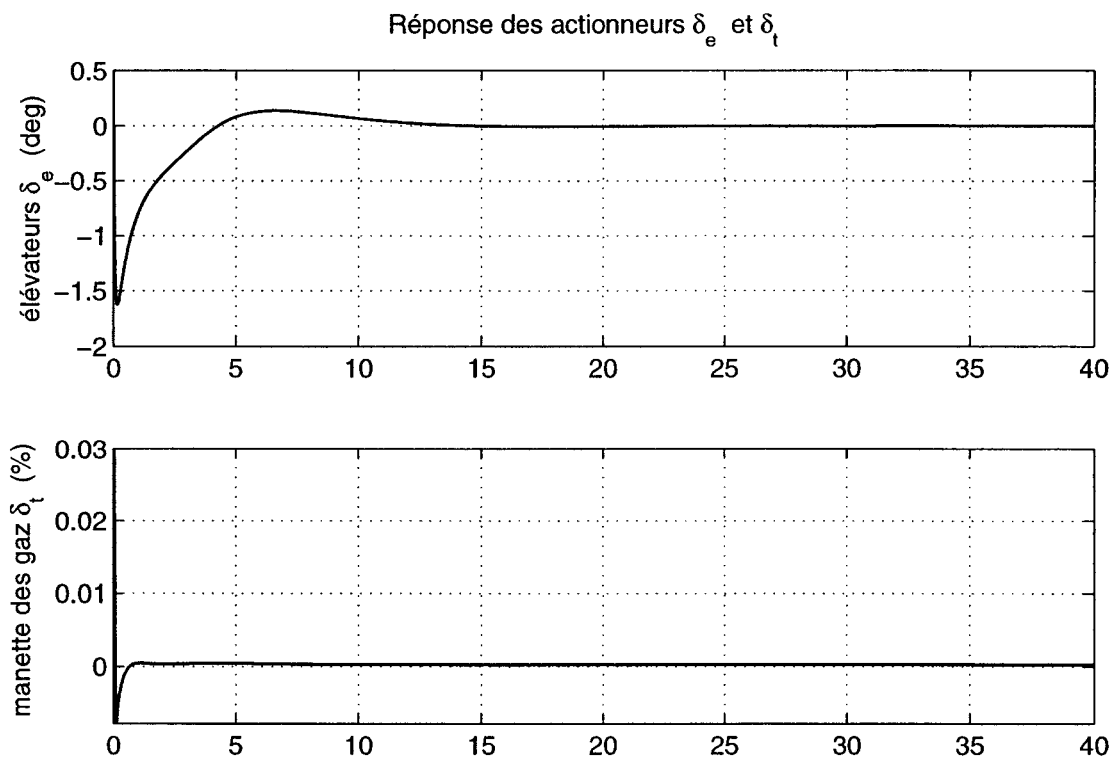


FIG. 5.13 – Réponses des actionneurs à un échelon de pente.

De plus, la loi de commande respecte les contraintes imposées aux actionneurs des élévateurs, comme le montre la figure (5.14) qui représente un agrandissement des courbes de δ_e et $\frac{d\delta_e}{dt}$ sur les 3 premières secondes : l'angle δ_e reste compris dans l'intervalle $[-23 \text{ deg} ; +17 \text{ deg}]$ et sa vitesse de variation $\frac{d\delta_e}{dt}$ inférieure à 37 deg.s^{-1} en valeur absolue.

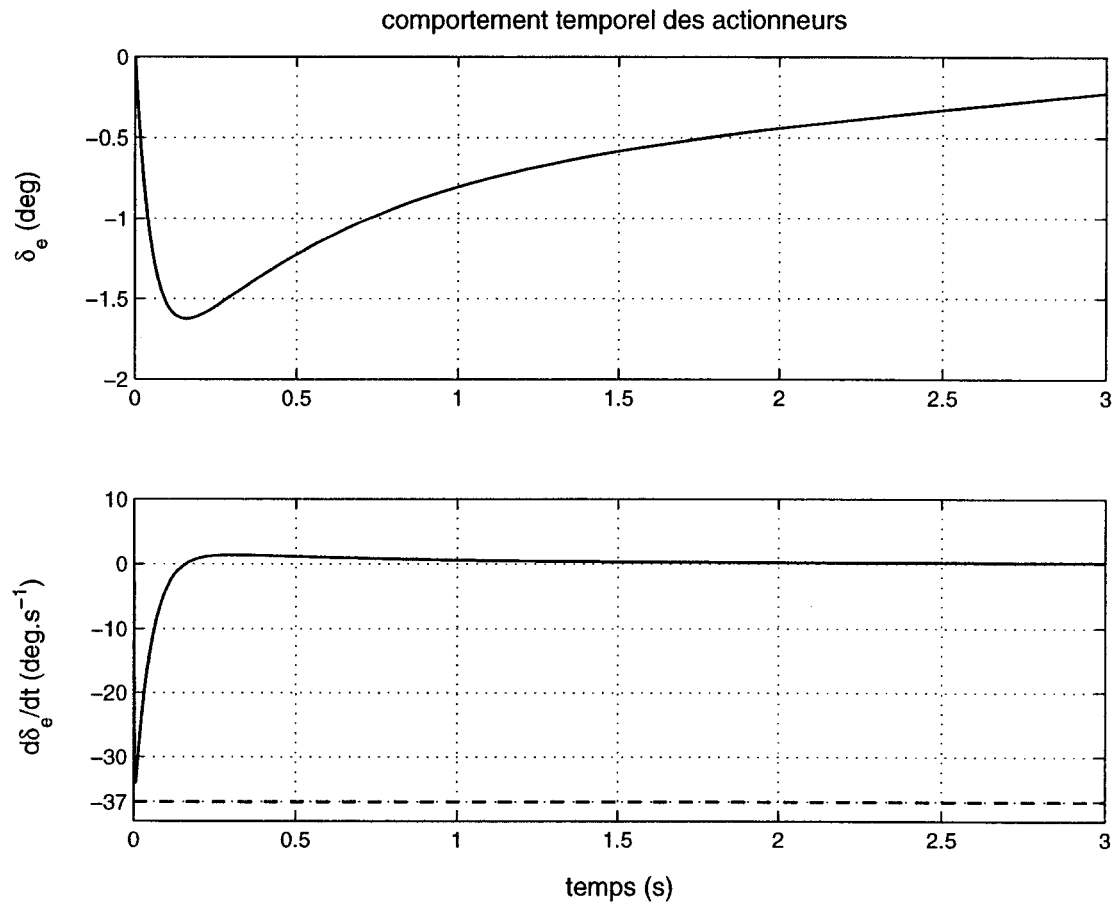


FIG. 5.14 – Réponses des élévateurs à un échelon de pente.

Nous pouvons constater que la contrainte majeure portant sur les élévateurs est leur vitesse de variation. En effet, leur amplitude reste bien en-deçà des valeurs limites préconisées.

b) Échelons de perturbation

Les réponses du système bouclé à des échelons de perturbation peuvent être directement comparées aux réponses en boucle ouverte vues en fin de chapitre 3. La figure (5.15) présente l'une d'entre elles : la réponse à un créneau de l'angle des élévateurs, d'une amplitude de -6 deg pendant une durée de 2 s.

On remarque que l'on ne perçoit aucune transitoire sur la courbe de la vitesse u du mode phugoïde, l'échelle la rendant imperceptible. Cependant, le mode rapide conserve de grandes amplitudes : ceci vient du fait que notre but n'est pas de « piloter » l'avion mais de concevoir un autopilote. Dès lors, une brusque variation de l'angle des élévateurs n'est pas réaliste puisque ces derniers sont commandés par la loi de contrôle, non par le pilote. Cette simulation n'a donc qu'un objectif : la comparaison des comportements des avions contrôlé et non contrôlé.

Ainsi, tenant compte de la signification de cette simulation, le contrôleur commande convenablement l'avion en réponse à une telle perturbation, notamment le mode lent, ou phugoïde, qu'il amortit correctement.

De plus, l'avion en vol sera soumis aux mouvements de l'atmosphère, en l'occurrence des vents, qui vont perturber sa trajectoire : nous allons les modéliser par une perturbation sur la vitesse de tangage q par un signal en créneaux.

La figure (5.16) présente les réponses temporelles du système bouclé à une telle perturbation, d'amplitude 10 deg.s^{-1} , et de fréquence $f = 0.02 \text{ Hz}$. Nous remarquons sur la première courbe (1) que le contrôleur annule l'effet de la perturbation en stabilisant la vitesse de tangage q , après un régime transitoire, à 0 deg.s^{-1} . Le suivi de la trajectoire de vol est également respecté puisque la pente γ , dont l'évolution temporelle est donnée par la courbe (2), retrouve sa valeur initiale, après un régime transitoire comme précédemment. Enfin, la courbe (3) montre que le facteur de charge n_z reste toujours dans un intervalle acceptable pour un avion commercial : $|n_z| < 0.04$, inférieur au seuil que l'on s'est fixé, de l'ordre de 0.1.

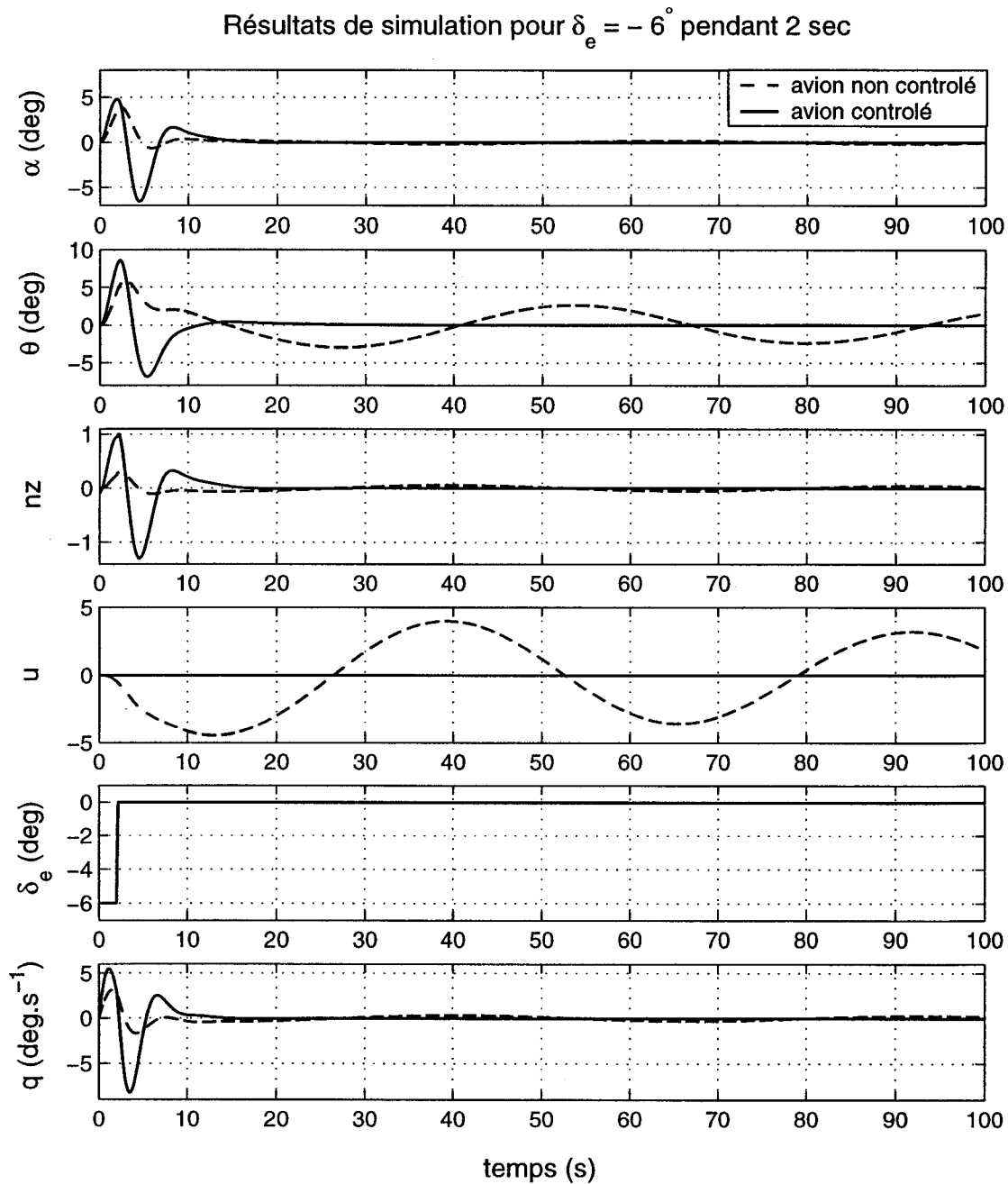


FIG. 5.15 – Réponses comparées de l'avion contrôlé et non contrôlé à un échelon des élévateurs.

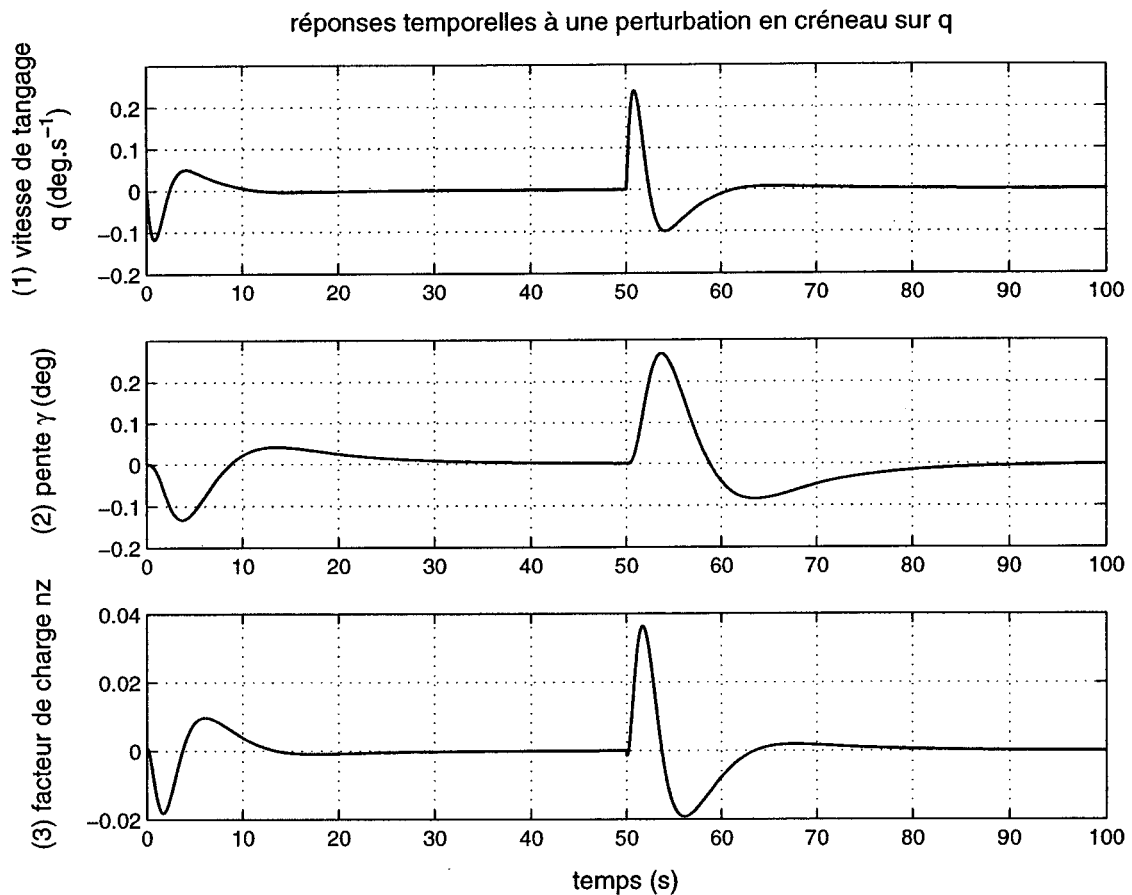


FIG. 5.16 – Réponses à un créneau de perturbation sur la vitesse de tangage q .

Lors de la synthèse des contrôleurs pour chacun des modèles de l'enveloppe de vol, il a été vérifié que les pondérations sont toujours valables avec un même niveau de performance : il n'y a donc pas lieu de changer leurs expressions.

Cette méthode étant validée sur l'enveloppe de vol, étudions le phénomène de commutation : nous pourrons alors vérifier la robustesse des contrôleurs aux variations de modèle, puis synthétiser la structure complète de commande.

Remarque : nous observerons en fin de chapitre 5 que ces résultats, obtenus sur les modèles linéarisés, sont également valables sur le modèle non linéaire du *Boeing 747*.

5.2 Commutation des contrôleurs

À la section précédente, nous avons décrit une méthode de synthèse de contrôleurs H_∞ valable pour toute condition de vol ; ainsi, chaque contrôleur aura une performance acceptable dans une zone de l'enveloppe de vol. Cependant, lors de certains changements de condition de vol, la structure de commande devra commuter entre deux contrôleurs, selon des critères que nous étudierons plus loin : c'est ce phénomène de commutation que nous allons étudier dans cette partie.

5.2.1 Choix de la structure de commutation

Nous avons étudié ce phénomène au paragraphe 4.4 du chapitre 4. Cependant, plusieurs options nous étaient offertes selon la forme du modèle d'état du contrôleur obtenu. Dans notre cas, la matrice D_K étant nulle, nous choisissons l'expression suivante du contrôleur modifié, vue en fin de chapitre 4 :

$$\begin{cases} \dot{x}_K &= (A_K - H C_K) x_K + B_K \varepsilon + H \hat{u} \\ u_K &= C_K x_K \end{cases} \quad (5.20)$$

où nous rappelons que le gain matriciel H constant est choisi de telle sorte que la performance de suivi de la commande $\hat{u}$ par les sorties u_i des contrôleurs soit acceptable.

5.2.2 Choix du gain H de l'observateur

Les pôles de l'observateur sont généralement choisis dans l'ordre de grandeur de ceux du contrôleur à observer. Cependant, intéressons nous plus précisément au cas des contrôleurs H_∞ obtenus à la partie précédente : on a vu que leur ordre était de 12, il est donc pertinent d'étudier la répartition de leurs pôles.

Les pôles du contrôleur correspondant à la condition « a101 » étudiée précédemment sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = -684.8 \\ p_2, p_3 = -35.4 \pm 33i \\ p_4 = -19.9 \\ p_5, p_6 = -1.3 \pm 1.4i \\ p_7, p_8 = -2.5 \pm 2 \cdot 10^{-8}i \\ p_9, p_{10} = -1.6 \cdot 10^{-3} \pm 1.1 \cdot 10^{-5}i \\ p_{11} = -4 \cdot 10^{-3} \\ p_{12} = -3.99 \cdot 10^{-3} \end{array} \right. \quad (5.21)$$

On remarque que les huit premiers (p_1 à p_8) ont des valeurs acceptables, dont les parties réelles sont inférieures à -1 , tandis que les quatre derniers (p_9 à p_{12}) sont de l'ordre de grandeur de -10^{-3} . Si nous choisissons une constante de temps maximale de l'ordre de la seconde pour l'observateur, soit un pôle minimal en module de l'ordre de 1, nous devons « accélérer » seulement les quatre plus lents, soit p_9 à p_{12} , d'un facteur 10^3 .

En utilisant la fonction `place.m` de **MATLAB**, nous déterminons le gain H tel que les pôles de $(A_K - HC_K)$ soient :

$$\left[p_1 \quad \dots \quad p_8 \quad p_9 \cdot 10^3 \quad p_{10} \cdot 10^3 \quad p_{11} \cdot 10^3 \quad p_{12} \cdot 10^3 \right]^T \quad (5.22)$$

Puis après avoir vérifié que les contrôleurs synthétisés sur l'enveloppe de vol ont des pôles répartis de cette manière, nous pouvons calculer les gains H_i correspondants.

Étudions maintenant la validité de ce choix.

5.2.3 Exemples de commutation de deux contrôleurs

Pour montrer l'intérêt d'utiliser cette structure, nous allons comparer le comportement de deux montages, représentés sur la figure (5.17) : le premier où la commutation s'effectuera sans précaution, le second utilisant la structure d'observateur.

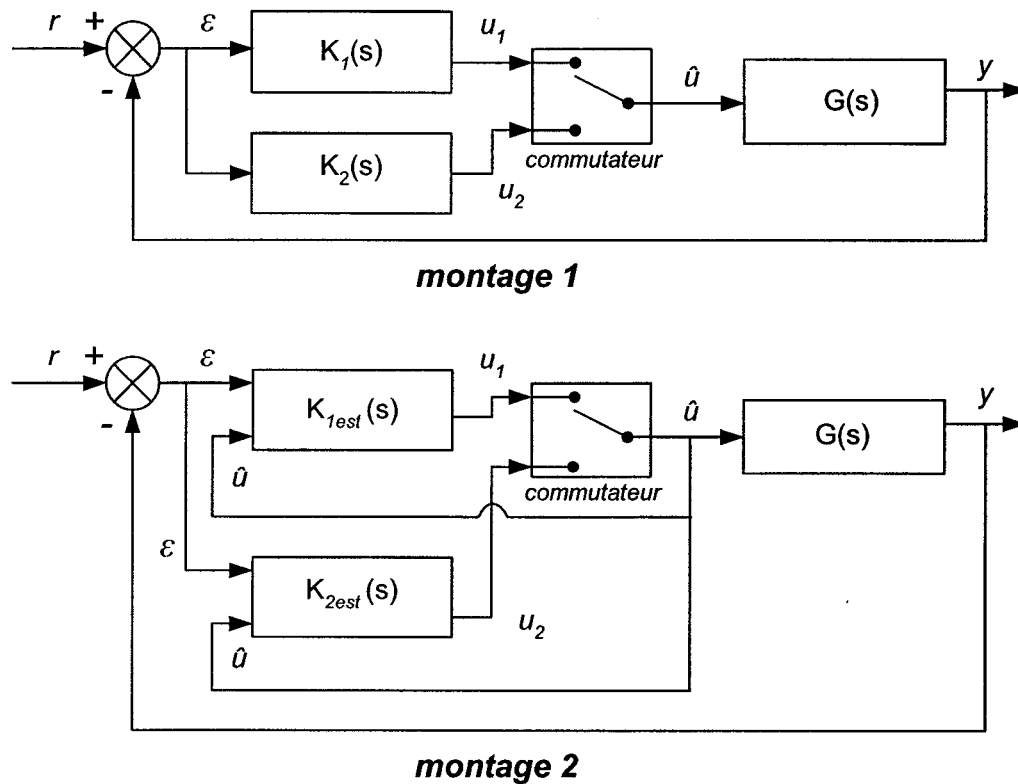


FIG. 5.17 – Montages pour l'étude de la commutation de deux contrôleurs.

Au moins deux contrôleurs devront corriger le comportement de l'avion de manière satisfaisante à l'instant où la commutation aura lieu. Autrement dit, dans le cadre de l'étude de la commutation de contrôleurs pour les modèles linéaires, il suffit de considérer un modèle linéarisé en une condition de vol et le contrôleur correspondant, ainsi qu'un deuxième contrôleur dont la performance sur ce modèle est toujours satisfaisante.

Choisissons par exemple d'étudier le modèle et le contrôleur associé, synthétisés à la condition de vol suivante (de référence « c092 ») :

- une altitude de 13 000 ft, soit 3 962 m,
- une vitesse de 173 m.s^{-1} ,
- une masse de 650 000 lbs, soit 294 835 kg, et un centre de gravité à 25% MAC,
- tous volets rentrés,

et comme deuxième contrôleur, celui synthétisé en la condition (de référence « c162 ») :

- une altitude de 20 000 ft, soit 6 096 m,
- une vitesse de 194 m.s^{-1} ,
- une masse de 650 000 lbs, soit 294 835 kg, et un centre de gravité à 25% MAC,
- tous volets rentrés,

Il a été vérifié que ces deux compensateurs contrôlent le modèle G_{c092} de manière satisfaisante. Appliquons comme consigne un échelon de pente $\gamma = 5 \text{ deg}$ à $t = 0 \text{ s}$, et fixons *arbitrairement* $\bar{h} = 1\,640 \text{ ft}$ comme altitude de commutation, soit $\bar{h} = 500 \text{ m}$. La trajectoire de l'appareil est donnée à la figure suivante.

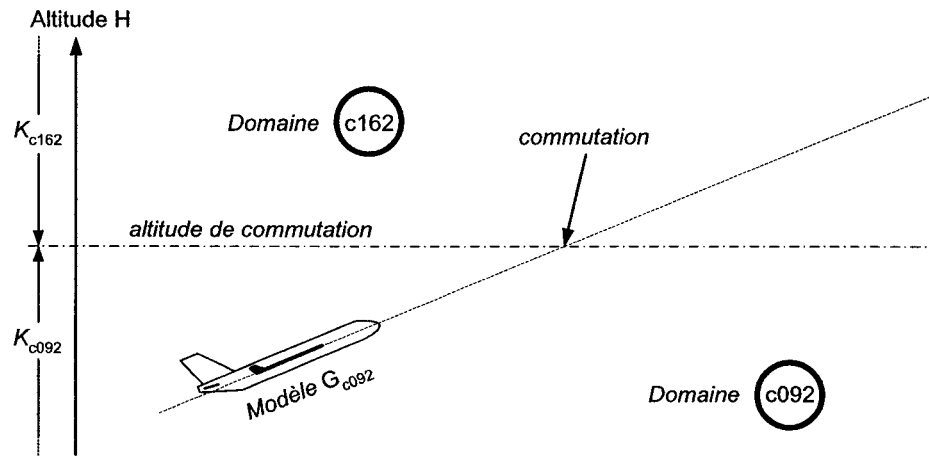


FIG. 5.18 – Figure explicative de l'exemple de commutation entre les contrôleurs K_{c092} et K_{c162} , appliqués au modèle G_{c092} .

Remarque : il est important de noter que cet exemple est juste cité à titre d'illustration du phénomène de commutation, et que nous étudierons les domaines de vol

et la structure complète de commutation ultérieurement.

Les réponses les plus intéressantes à étudier sont celles des signaux de commande, soit les réponses des actionneurs, puisque la commutation intervient directement sur ceux-ci. Nous allons considérer deux cas de figure pour étudier le phénomène :

- réponses non perturbées,
- réponses perturbées par une variation sinusoïdale de la vitesse de tangage q .

Pour le premier cas, la figure (5.19) nous montre la réponse temporelle de la commande δ_e des élévateurs issue de chacun des contrôleurs pour les deux montages.

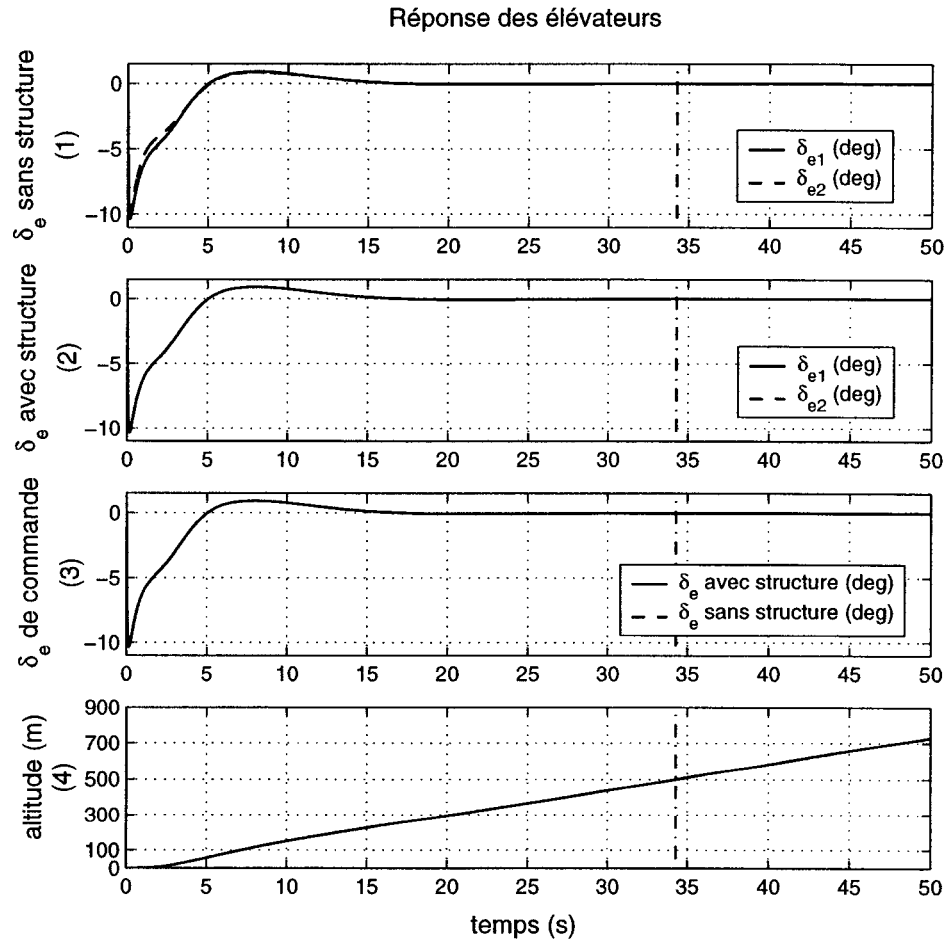


FIG. 5.19 – Réponses des élévateurs à un échelon de pente, pour deux montages et avec commutation.

On remarque que le suivi de signal n'est pas bon pour le premier montage sans structure (graphe (1)), notamment pendant les dix premières secondes (régime transitoire), alors que la structure avec observateur du second montage a pour effet d'assurer un suivi de qualité (graphe (2)). Néanmoins, les deux signaux de commande $\hat{u}$ avec et sans structure sont très proches comme on peut le constater sur le graphe (3), y compris au moment de la commutation qui a lieu à $t = 34.3$ s environ. Ceci est dû au fait que les signaux de commande sont rapprochés, et qu'à la commutation le saut de l'un à l'autre reste faible. La figure (5.20) illustre ce phénomène.

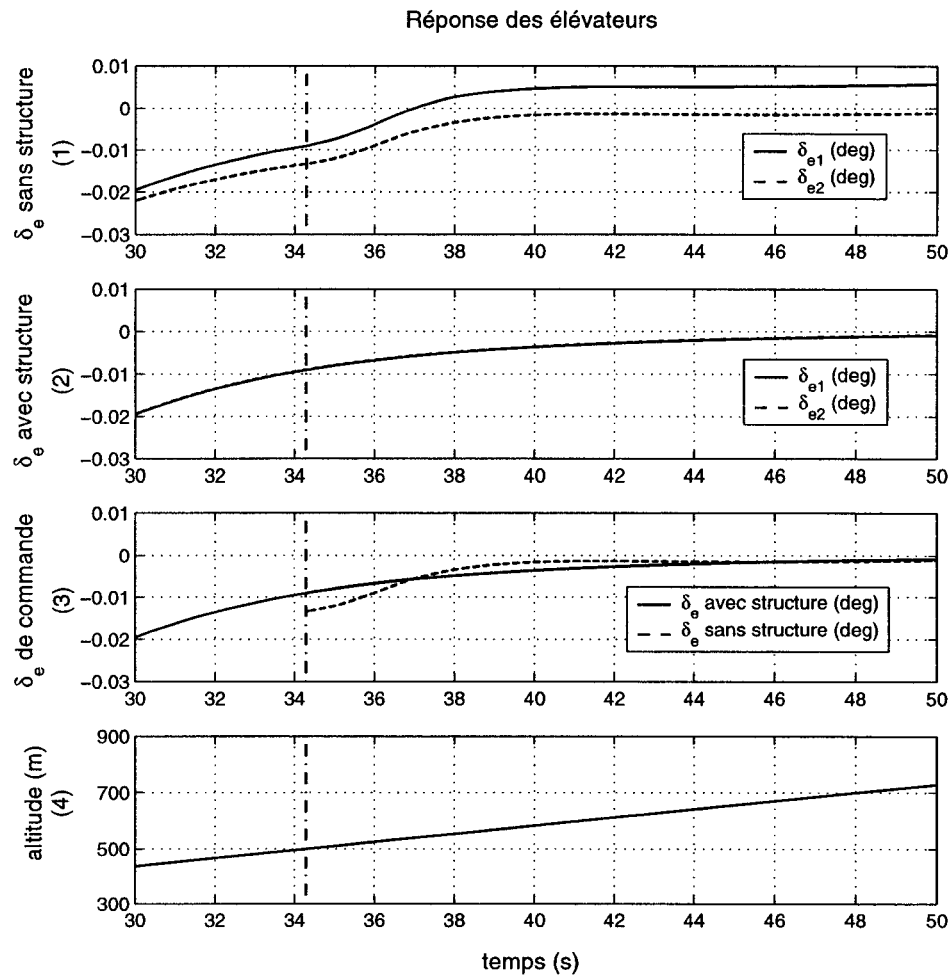


FIG. 5.20 – Agrandissement des réponses des élévateurs à un échelon de pente.

Au regard des courbes précédentes, nous constatons que le saut du signal de commande à la commutation n'est pas suffisamment prononcé pour négliger le premier montage et justifier l'utilisation d'une structure complexe. Cependant, les prochains résultats vont confirmer le besoin d'utiliser l'observateur.

Nous allons perturber le système bouclé par une variation sinusoïdale de la vitesse de tangage q , d'amplitude 3 deg et de fréquence 0.02 Hz, qui modélise les rafales de vent comme nous l'avons vu précédemment. Les résultats sont plus probants comme le montre la figure (5.21).

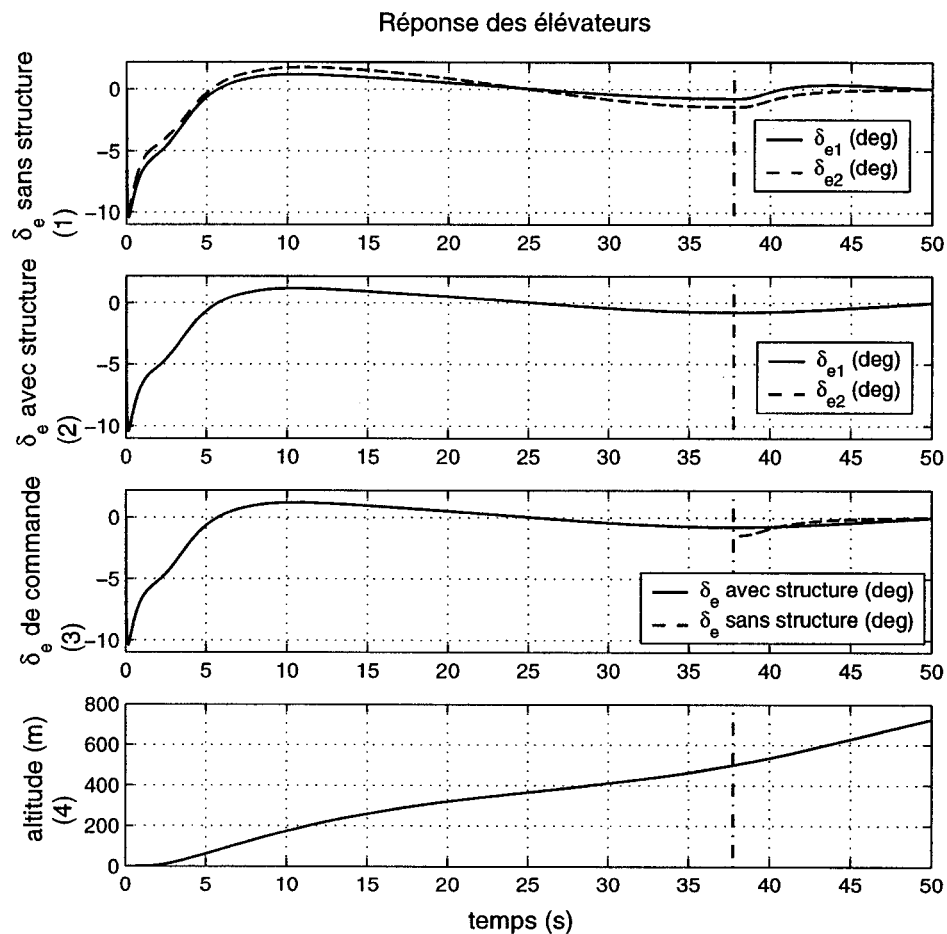


FIG. 5.21 – Réponses des élévateurs à un échelon de pente et une perturbation sur q , pour deux montages et avec commutation.

Pour le premier montage, le décalage entre les signaux de sortie des deux contrôleurs

u_1 et u_2 (graphe (1)) nuit beaucoup à la commutation entre ces derniers, et donc au signal de commande $\hat{u}$, comme on le voit sur le graphe (3). Avec la structure d'observateur, les signaux u_1 et u_2 se suivent correctement, et le saut de la commutation demeure insensible.

Dans ce cas, on observe une différence importante entre les réponses des sorties γ , α et n_z des deux montages, comme le montre la figure (5.22) qui fournit des courbes au voisinage de la commutation.

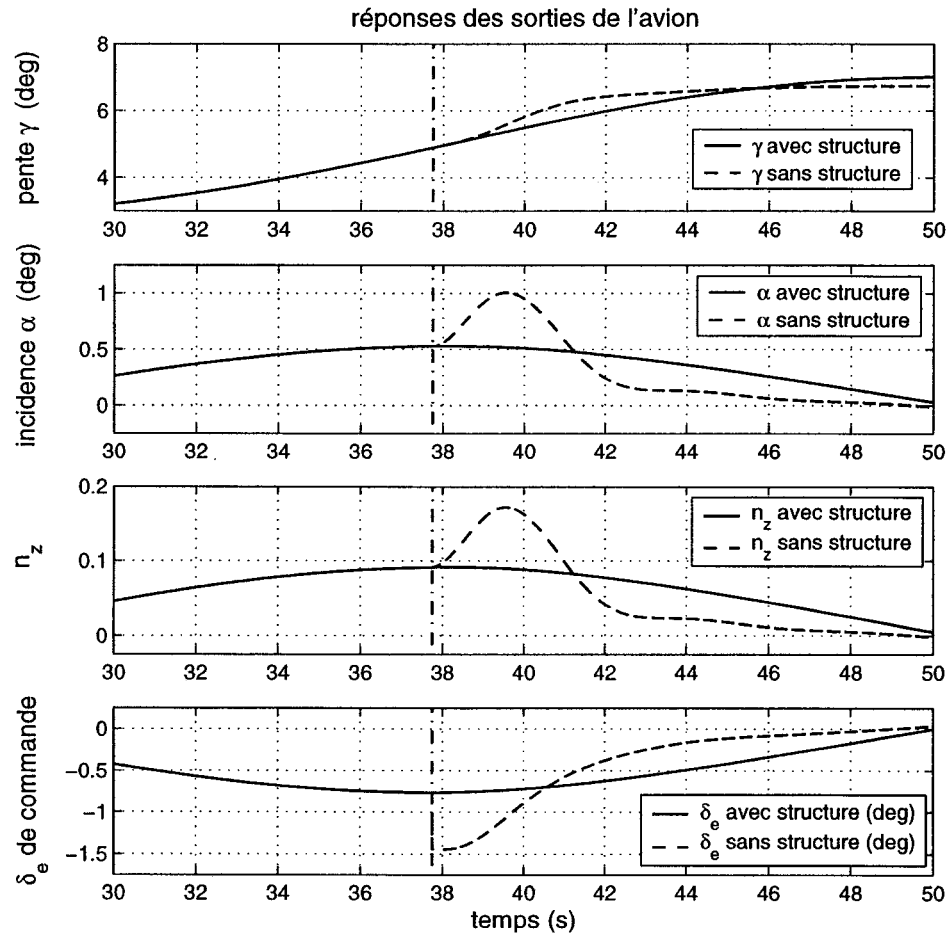


FIG. 5.22 – Réponses de l'avion à un échelon de pente et une perturbation sur q , pour deux montages et avec commutation.

5.3 Implantation de la structure de commande

Jusqu'ici nous avons synthétisé les contrôleurs H_∞ en plusieurs conditions de vol, vérifié leur performance et étudié le phénomène de commutation entre deux d'entre eux. Nous allons maintenant étudier la démarche du choix des contrôleurs à utiliser, la structure globale qui va les regrouper puis le moyen pour passer de l'un à l'autre en fonction de la condition dans laquelle se trouve l'avion.

5.3.1 Définition de l'enveloppe de vol

Boiffier [7] définit l'enveloppe de vol, ou le domaine de vol, comme la recherche des limites du vecteur vitesse $\vec{V}(H)$; cette notion est associée à l'idée de limite d'utilisation de l'avion. En considérant par exemple la vitesse V et l'altitude H comme variables, l'enveloppe de vol sera une surface donnant, pour toute valeur de H , les valeurs de V acceptables pour un vol du *Boeing 747*, c'est-à-dire qui assureront un vol sécuritaire. Le document technique [13] de la compagnie *Boeing Inc.* fournit ces données et limites standard. Cependant, nous allons encore plus restreindre cette définition pour notre étude, puisque nous ne considérerons pas les conditions pour lesquelles le mode phugoïde a des pôles réels.

Un autre paramètre de l'avion en vol doit être pris en compte : sa masse m . Cependant, lors d'une simulation, nous n'étudions les sorties que sur un intervalle de temps assez court devant la durée totale du vol (intervalle pouvant aller jusqu'à plusieurs minutes), mais pendant lequel la variation de masse est négligeable. Nous allons donc considérer trois valeurs significatives pour la masse :

- masse minimale, à l'atterrissage : $m = 450\,000$ lbs, soit $m = 204\,117$ kg,
- masse intermédiaire, de croisière : $m = 550\,000$ lbs, soit $m = 249\,476$ kg,
- masse maximale, au décollage : $m = 650\,000$ lbs, soit $m = 294\,835$ kg.

Lorsque l'une d'elles sera choisie, elle restera constante lors de la simulation. La figure (5.23) montre les enveloppes de vol correspondantes, avec en abscisse les vitesses V correspondant à chacune des altitudes H , elles-mêmes données en ordonnée.

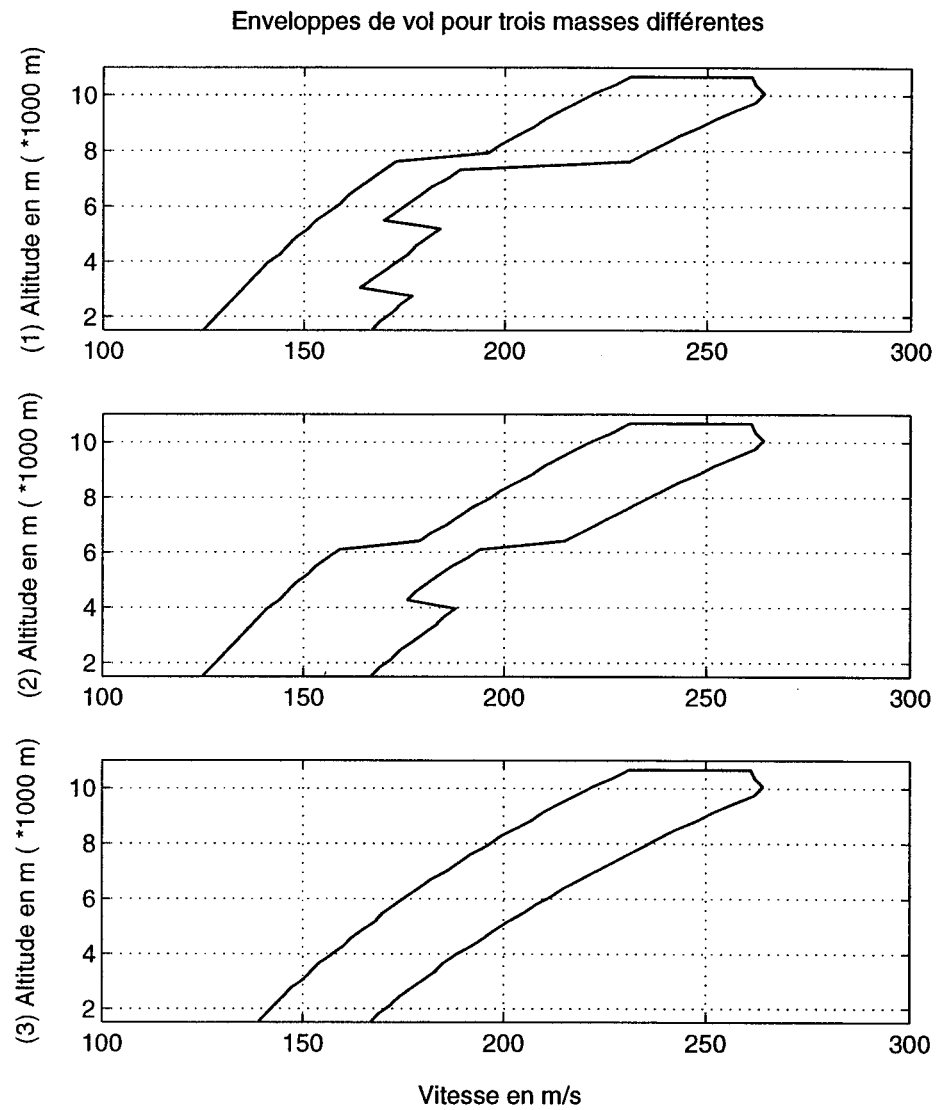


FIG. 5.23 – Enveloppes de vol pour les trois masses $m = 204\,117$ kg (1), $249\,476$ kg (2) et $294\,835$ kg (3).

Pour ce qui concerne les phases de décollage, d'approche et d'atterrissage, où les volets sont baissés d'un certain angle δ_F , nous fixerons la vitesse V et l'angle de volets δ_F pour chacune d'entre elles, jusqu'à atteindre une phase de vol où les volets sont rentrés. Ainsi, la condition de vol correspondant au décollage est valable de $H = 0$ m jusqu'à $H = 1524$ m, pour une vitesse $V_E = 300$ noeuds et un angle de volets $\delta_F = 10$ deg.

De nombreuses conditions de vol ont été calculées grâce au module GUI vu au chapitre 3 ; le tableau 5.2 donne leur nombre pour chacune des trois masses.

TAB. 5.2 – Nombre de conditions pré-calculées.

masse correspondante	nombre de conditions
204 117 kg	97
249 476 kg	104
294 835 kg	93

Typiquement, on retrouve trois conditions par altitude :

- une première correspondant à une vitesse minimale V_1 ,
- une deuxième correspondant à une vitesse intermédiaire V_2 ,
- une troisième correspondant à une vitesse maximale V_3 .

Ces trois conditions sont calculées pour plusieurs altitudes, c'est-à-dire tous les 1000 pieds, soit tous les 305 mètres.

5.3.2 Choix des sous-domaines de vol

Nous allons étudier dans ce paragraphe le domaine de validité d'un contrôleur, ou encore évaluer sa robustesse : nous pourrons ainsi sélectionner certains d'entre eux qui, regroupés dans une même structure, couvriront entièrement l'enveloppe de vol.

Le critère de robustesse utilisé est le critère γ , vu lors de la synthèse H_∞ . La démarche que nous allons suivre est la suivante : choisir un contrôleur qui couvre un

sous-domaine de vol le plus vaste possible, lequel est représenté par un nombre fini de conditions. Considérant un contrôleur quelconque, nous devons donc trouver la condition la moins favorable pour laquelle le système bouclé offre encore une performance satisfaisante : c'est ici qu'intervient le critère γ , qui va mesurer cette performance. Ce choix définit implicitement chaque sous-domaine, de sorte qu'il ne se produise pas de chevauchements entre eux.

Nous choisissons ainsi de suite des contrôleurs permettant de couvrir l'enveloppe de vol, et ce pour chacune des masses étudiées. Cependant, il faut remarquer qu'il n'y a pas d'optimisation rigoureuse dans le choix des contrôleurs : notre but dans ce mémoire est d'élaborer une structure de commande fonctionnelle, qui limite autant que possible le nombre de contrôleurs utilisés, mais sans faire de l'optimisation un objectif. Cet aspect ne rentre pas dans le cadre de notre étude, mais pourrait faire l'objet de travaux ultérieurs.

Pour illustrer le choix des contrôleurs à utiliser, considérons la figure (5.24) : la première surface (1) représente les valeurs du critère de performance γ obtenues sur l'intégralité de l'enveloppe de vol ($m = 650\,000$ lbs, soit $294\,835$ kg) si l'on n'utilise que le contrôleur K_{c062} : le résultat est acceptable sur le sous-domaine tel que $H < 11\,000$ pieds, mais se dégrade rapidement dès que l'on en sort, soit pour $H > 11\,000$ pieds. La seconde surface (2) représente les valeurs de γ obtenues lorsque le choix de tous les contrôleurs est effectué. Le principe consiste à choisir un nouveau contrôleur dans une zone de l'enveloppe de vol où la performance γ obtenue avec ceux déjà choisis n'est pas satisfaisante. Ainsi, si la valeur de γ devient supérieure à une valeur donnée sur un sous-domaine, nous sélectionnerons un contrôleur correspondant à ce sous-domaine, capable de ramener γ sous la limite fixée. Nous avons choisi cette limite, après inspection de la qualité des résultats temporels, à $\gamma_{max} \approx 4.6$.

Pour obtenir l'allure de la surface (2) à la figure (5.24), nous devons utiliser 19 contrôleurs répartis sur l'enveloppe de vol ($m = 294\,835$ kg), et la structure subséquente permettra de contrôler tout modèle linéaire y appartenant. Néanmoins, son application au modèle non linéaire nécessitera vraisemblablement un affinement.

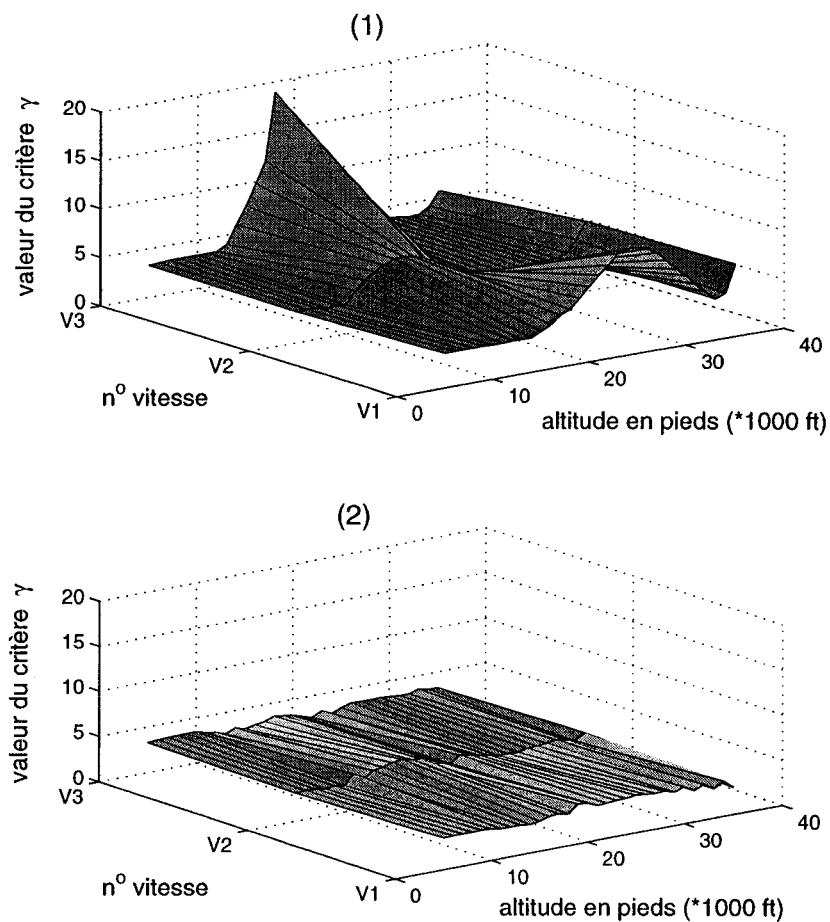


FIG. 5.24 – Illustration de la procédure de choix des contrôleurs à utiliser dans la structure de commande.

Remarque 1 : nous avons représenté les surfaces sur la figure précédente à des fins de lisibilité; en aucun cas elles ne sont garantes de la performance entre les différents points.

Remarque 2 : les altitudes sont exceptionnellement exprimées en pieds (ft) pour faciliter la lecture; en effet, les conditions sont calculées à tous les 1 000 pieds, soit environ tous les 305 mètres.

5.3.3 Description de la structure de commande

La figure (5.25) donne le schéma de principe de la structure complète pour les modèles linéarisés.

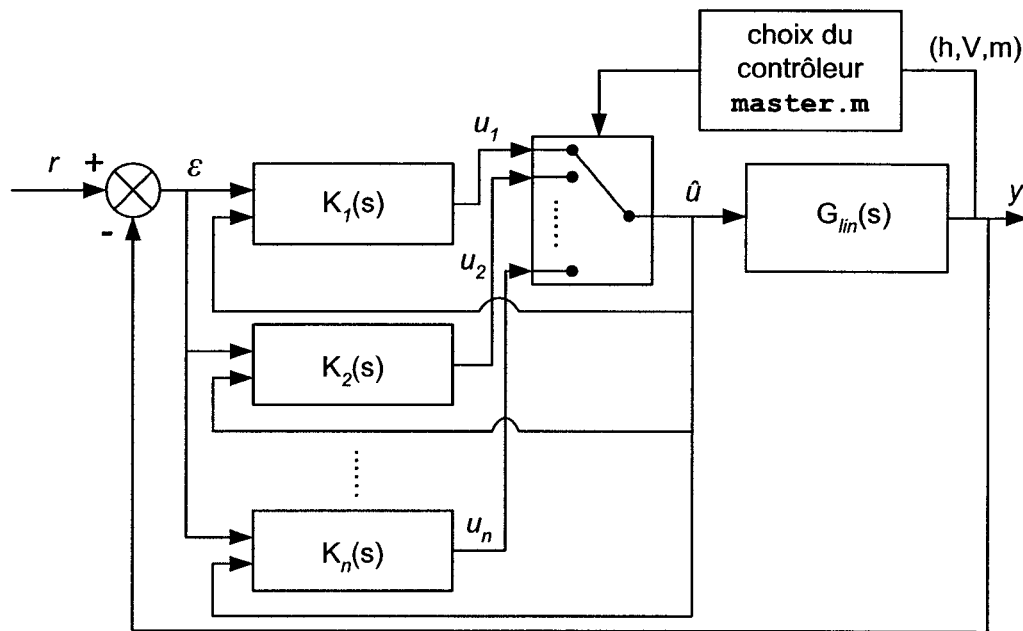


FIG. 5.25 – Structure complète de commande.

Nous allons dans un premier temps étudier l'implémentation du programme maître « `master.m` » de la structure de commande, c'est-à-dire celui qui va déterminer le contrôleur à utiliser en fonction de l'altitude H à laquelle vole l'appareil, de sa vitesse V et de sa masse m . Cette description s'applique à la simulation du modèle linéarisé du *Boeing 747* : ainsi, pour toute condition, ce programme déterminera automatiquement le meilleur contrôleur à utiliser.

Le programme « `master.m` » prend comme arguments d'entrée : V , h et m , et retourne après traitement le numéro du contrôleur à mettre en service. Puis la structure d'observateur utilisée, décrite dans les paragraphes précédents, assure une transition en douceur entre les différents contrôleurs, aux instants de commutation. Le principe de fonctionnement de ce programme consiste à repérer l'avion dans l'enveloppe de

vol et, en fonction du domaine dans lequel il se trouve, de déterminer le numéro du contrôleur adéquat.

Néanmoins, pour appliquer cette loi de commande au système non linéaire, la structure à utiliser est différente et plus complexe : en effet, il faut prendre en compte les valeurs à l'équilibre des variables de commande U_o et de sortie Y_o pour chaque contrôleur, comme montré à la figure (5.26), pour laquelle on n'a représenté que deux contrôleurs dans un souci de lisibilité.

Dans ce cas, chaque contrôleur K_i (où $i = \{1, 2\}$) a comme entrée $\varepsilon_i = Y - Y_{o_i}$, et comme sortie u_i . Le signal de commande complet issu de cette sortie u_i s'écrit $U_i = u_i + U_{o_i}$. De plus, le retour du signal de commande $\hat{U}$ du processus « avion non linéaire », que nécessite la structure d'observateur, est corrigé par la valeur à l'équilibre U_{o_i} , pour obtenir la variation $\hat{u}_i$.

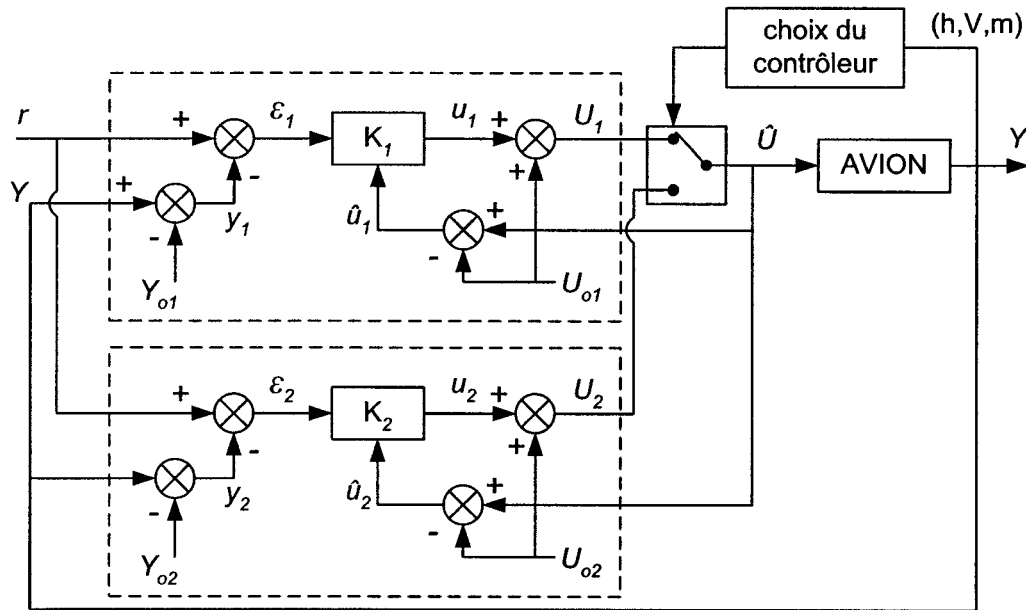


FIG. 5.26 – Structure complète de commande appliquée au modèle non linéaire, restreinte à deux contrôleurs.

Comme nous l'avons déjà dit précédemment, le calcul des expressions complètes des coefficients aérodynamiques demande beaucoup de temps et de ressources infor-

matiques. Cependant, en les simplifiant, il a été possible de concevoir un modèle non linéaire du comportement du *Boeing 747* dont la durée de simulation est acceptable. C'est sur ce modèle que nous allons pouvoir valider cette structure de commande, après avoir présenté le module GUI *gui747*.

5.4 Simulation et résultats

Nous allons dans un premier temps détailler le module GUI *gui747*, qui va nous fournir les résultats des simulations des modèles linéarisés, puis dans un deuxième temps évaluer, sur un modèle non linéaire simplifié, la performance de la loi de commande avec séquencement.

5.4.1 Module GUI *gui747*

5.4.1.1 Principe

Ce module a non seulement pour objectif de présenter les simulations et résultats obtenus, mais aussi de visualiser les mouvements de l'avion par l'intermédiaire de la fonction « animation ». Il simule le comportement du modèle linéaire du *Boeing 747* au voisinage d'une condition de vol donnée, calculée à l'aide du module vu au chapitre 3, et peut être corrigé ou non. Il est également possible de choisir le signal d'entrée (consigne ou perturbation), et les conditions initiales de la simulation.

Étudions plus en détail l'initialisation, le fonctionnement et les possibilités offertes par ce module.

5.4.1.2 Description du module GUI *gui747*

Les figures (5.27) et (5.28) montrent l'allure générale du module, sous deux configurations différentes : la première présente uniquement des courbes temporelles sur la partie droite de l'interface graphique, tandis que la seconde présente une courbe temporelle et une fenêtre d'animation permettant de visualiser le mouvement longitudinal de l'avion dans le temps.

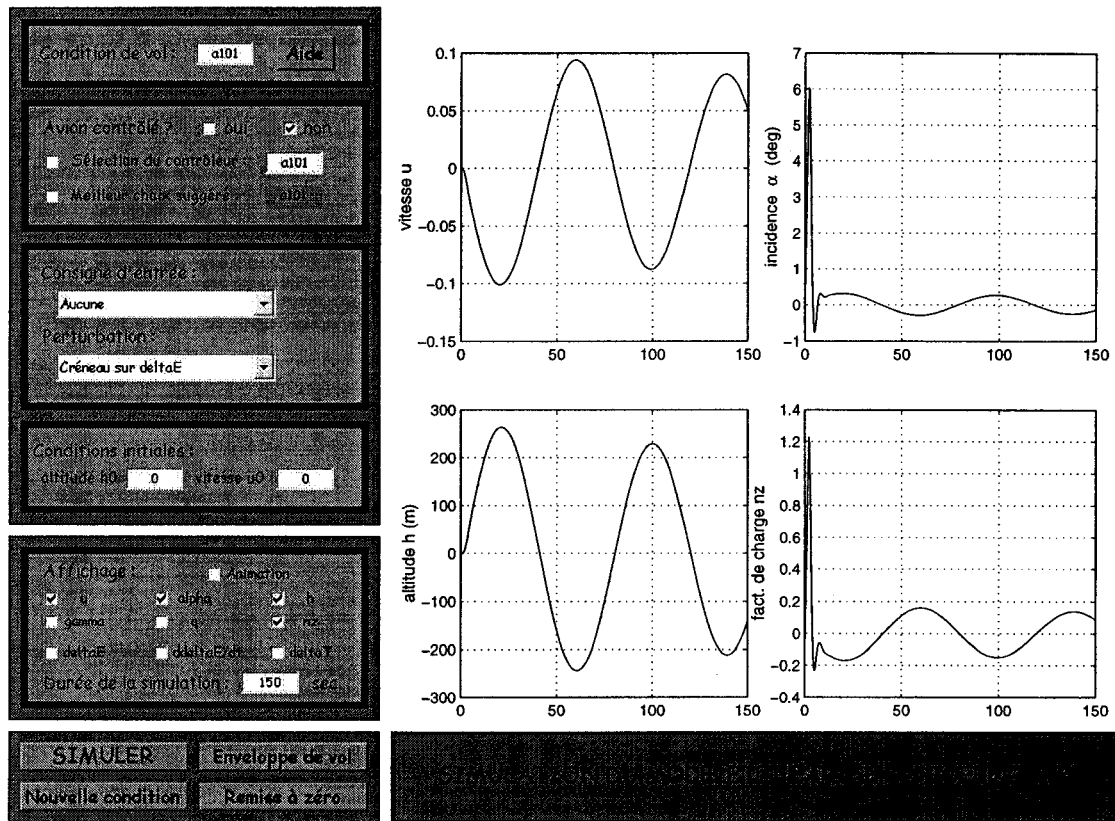


FIG. 5.27 – Module « *gui747* » en configuration « représentations temporelles ».

Dans les deux cas, la partie gauche permet de définir les paramètres de la simulation :

- sélection de la condition de vol,
- sélection du mode de contrôle : « aucun », « choix manuel » ou « choix automatique »,
- sélection du type d'entrée,
- conditions initiales,
- choix de l'affichage et sélection des variables à représenter,

Elle contient également le panneau de commandes regroupant les différentes actions possibles :

- lancer la simulation,

- voir la position de l'avion dans l'enveloppe de vol,
- définir une nouvelle condition de vol,
- réinitialiser les figures.

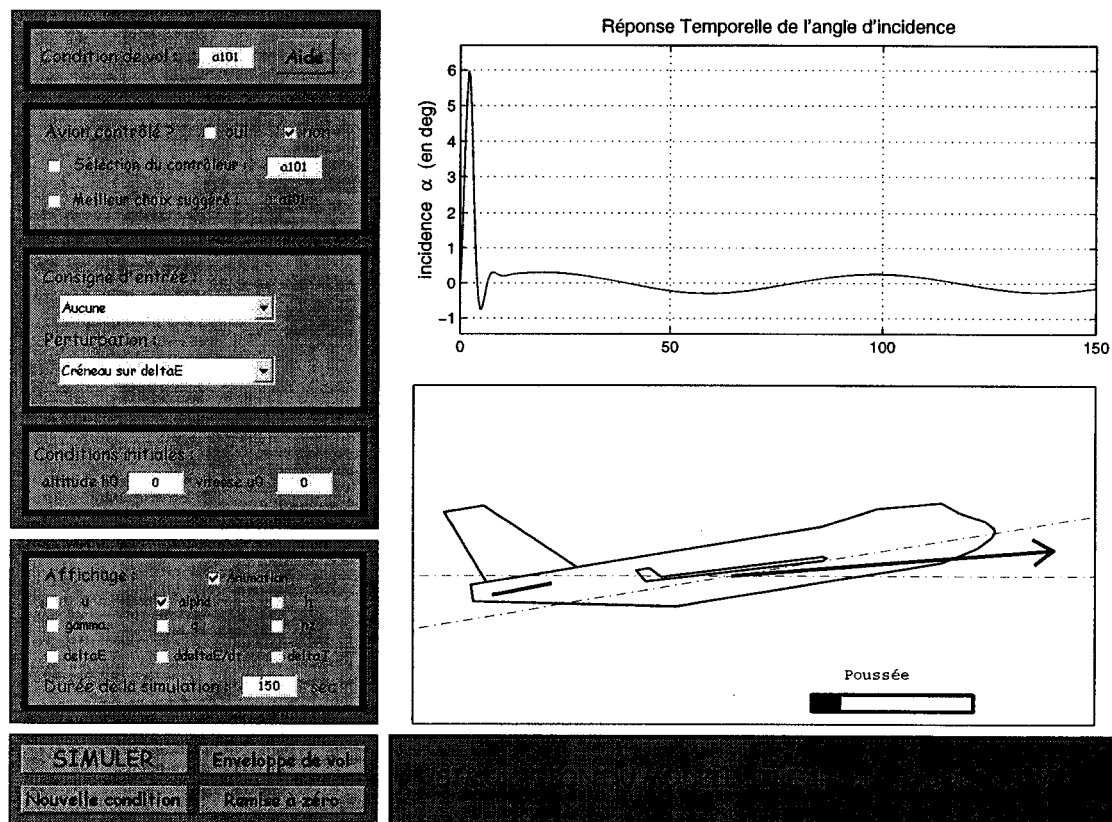


FIG. 5.28 – Module « *gui747* » en configuration « animation ».

Décrivons maintenant en détail l'utilisation de ce module.

5.4.1.3 Utilisation du module GUI *gui747*

a) Initialisation de MATLAB

Comme dans le cas du module vu au chapitre 3, il faut se placer, sous **MATLAB**, dans le répertoire « `\simulateur747` », puis exécuter le programme « `startup.m` » qui va initialiser les répertoires (« `path` ») et l'espace de travail (« `workspace` ») afin d'assurer le bon fonctionnement des programmes.

À l'invite **MATLAB**, l'instruction : `>> gui747` lancera l'exécution et l'affichage de l'interface graphique, sous la forme donnée à la figure (5.27) ou (5.28).

b) Définition des paramètres de la simulation

Cette étape préliminaire au lancement de la simulation s'effectue en agissant sur la partie gauche de l'interface.

Le premier bloc permet de choisir la condition de vol parmi celles déjà précalculées, dont un listing se trouve dans le fichier excel « `listing_conditions.xls` », dans le répertoire « `\simulateur747\controle_enveloppe_de_vol` » : il donne les caractéristiques de chacune d'entre elles.

Le deuxième bloc permet de choisir le mode de contrôle de l'avion :

- soit il n'est pas contrôlé,
- soit il est contrôlé par un compensateur défini par l'utilisateur (« sélection du contrôleur »),
- soit il est contrôlé par un compensateur choisi automatiquement par le programme en fonction de sa position dans l'enveloppe de vol, selon la procédure définie au paragraphe 5.3.3 (« meilleur choix suggéré »).

Le troisième bloc permet de sélectionner le signal d'entrée du système, qu'il soit contrôlé ou non ; cependant, certaines entrées telles que l'échelon de vitesse ou d'angle de pente ne s'appliquent qu'au cas du système contrôlé. Le tableau 5.3 résume les différentes entrées possibles, leurs caractéristiques et les cas où elles peuvent s'appliquer (voir explications page 117).

Le quatrième bloc permet de rentrer les conditions initiales de la simulation, c'est-à-dire l'altitude h_0 (en m) et la vitesse réduite u_0 initiales.

Le cinquième bloc permet de déterminer l'affichage de la partie droite de l'interface, et la durée de la simulation, en secondes. Deux cas se présentent :

- La case « Animation » n'est pas cochée, et la configuration du GUI est celle de la figure (5.27) : on peut alors représenter toute combinaison des neuf variables proposées, en cochant simplement la ou les case(s) correspondante(s). Dans le

cas présenté, on peut observer la vitesse réduite u , l'incidence α , l'altitude h et le facteur de charge n_z sur une durée $t = 150$ s.

- La case « Animation » est cochée, et la configuration du GUI est celle de la figure (5.28) : on ne peut afficher la représentation temporelle que d'une seule sortie, à choisir parmi les neuf proposées, et l'animation. Dans le cas présenté, le choix s'est porté sur l'incidence α , toujours sur une durée $t = 150$ s.

TAB. 5.3 – Caractéristiques des différentes entrées possibles et conditions d'utilisation.

Type d'entrée	Consigne		Perturbation		
Signal	u	γ	q	δ_e	δ_t
Catégorie	échelon	échelon	créneaux	impulsion	impulsion
Valeur	0.01	1 deg	10 deg.s ⁻¹	-6 deg	1 %
Fréquence/Durée	-	-	0.02 Hz	2 s	2 s
Système contrôlé	oui	oui	oui	oui	oui
Système non contrôlé	non	non	non	oui	oui

Remarque : les amplitudes des signaux d'entrée sont fixées à des valeurs standard.

c) Actions de l'utilisateur

Nous parlons ici de la partie inférieure gauche de l'interface graphique, contenant quatre boutons dont nous allons détailler pour chacun les actions.

Le bouton « **SIMULER** » lance l'exécution de la simulation, et après le calcul affiche les courbes et l'animation le cas échéant.

Le bouton « **Enveloppe de vol** » ouvre une nouvelle fenêtre, montrée en figure (5.29), où sont représentées :

- l'enveloppe de vol dans laquelle se trouve l'avion,
- la position de l'avion à l'équilibre dans l'enveloppe de vol : croix bleue,
- la position courante de l'avion dans l'enveloppe de vol, en tenant compte des

conditions initiales en altitude et en vitesse choisies par l'utilisateur : croix rouge.

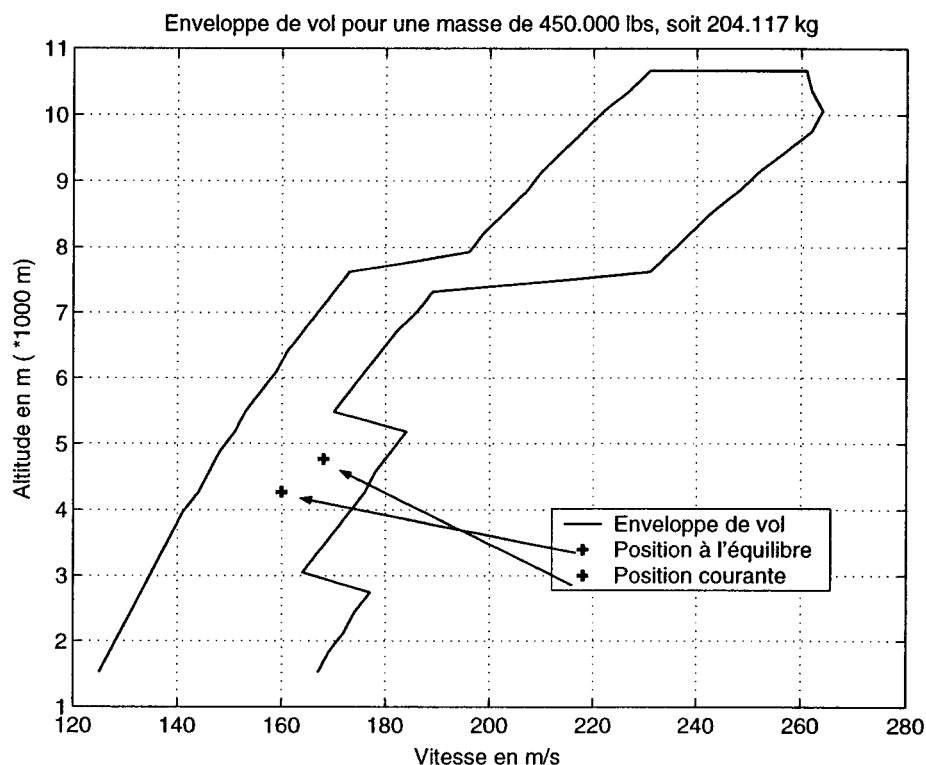


FIG. 5.29 – Position de l'avion et de la position à l'équilibre dans l'enveloppe de vol.

Le bouton « **Nouvelle condition** » affiche l'interface GUI étudiée en fin de chapitre 3, et sert à définir une nouvelle condition de vol.

Le bouton « **Remise à zéro** » permet de réinitialiser les figures de la partie « affichage ».

d) Fonctionnement du module *gui747*

Le fonctionnement du module de simulation en mode « non contrôlé » est intuitif et ne pose donc pas de problèmes particuliers. En mode « contrôle manuel » également, on choisit la condition de vol et le contrôleur, puis on simule le système bouclé correspondant.

Cependant, le mode « contrôle automatique » nécessite quelques explications. Lorsque l'on choisit une condition de vol ou lorsque l'on change les conditions initiales de la simulation, la référence du contrôleur correspondant à cette position s'affiche dans le champ « Meilleur choix suggéré ». De plus, à l'affichage des courbes à la fin de la simulation, une nouvelle fenêtre s'ouvre comme à la figure (5.30) et montre l'évolution des contrôleurs dans le temps ; dans ce cas, on observe une commutation entre les contrôleurs K_{c082} et K_{c172} à $t \approx 5.2$ s.

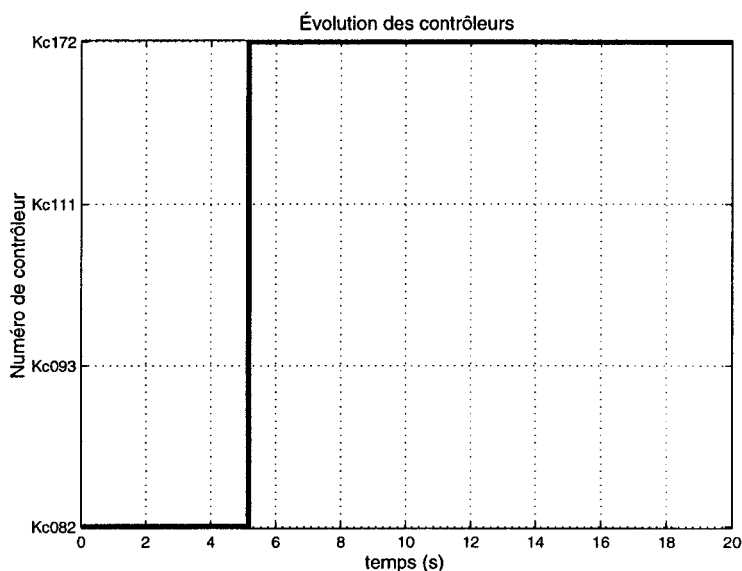


FIG. 5.30 – Évolution des contrôleurs au cours d'une simulation.

Enfin, toujours en mode « contrôle automatique », lorsque l'option « Animation » est cochée, le contrôleur en service est affiché dynamiquement pendant la simulation dans le champ « meilleur choix suggéré ».

5.4.1.4 Charge de calcul du module *gui747*

Le simulateur utilise trois modules **SIMULINK** pour effectuer la simulation : un dans le cas où l'avion n'est pas contrôlé, un dans le cas du contrôle manuel et un autre dans le cas du contrôle automatique.

En fonction de la durée choisie de la simulation, l'affichage des résultats peut

prendre plusieurs dizaines de secondes¹. Par exemple pour une durée de simulation $t = 200$ s, ce qui apparaît comme un maximum, l’affichage des résultats prend entre 1 et 1.5 minutes, auxquelles il faut ajouter la durée de l’animation, le cas échéant.

Les simulations dans le cas du « contrôle automatique » sont plus longues dans la mesure où le système à simuler est plus important. Pour des résultats uniquement temporels, le temps d’affichage est d’environ 30 s pour une durée de simulation $t = 30$ s, tandis que dans le cas de l’animation, une durée de simulation $t = 10$ s demande environ 10 min.

5.4.2 Validation de la performance de la structure de commande

Nous abordons une étude particulièrement intéressante : l’application de la structure de commande au modèle non linéaire du *Boeing 747*. Nous allons dans un premier temps expliquer sommairement l’obtention de ce modèle, puis nous passerons dans un deuxième temps aux simulations temporelles.

Comme nous l’avons déjà précisé, le problème majeur en vue de l’obtention de résultats de simulation pour le modèle non linéaire est le temps de calcul des coefficients aérodynamiques. La solution a donc été naturellement de simplifier leurs expressions afin de diminuer ce temps de calcul, d’autant plus que simuler une phase de montée du *Boeing 747* demande plusieurs centaines de secondes de simulation.

Les expressions de ces coefficients simplifiés sont les suivantes :

$$C_L = C_{L_{basic}} + \frac{dC_L}{d\delta_e} \delta_e \quad (5.23)$$

$$C_D = K_f C_{D_{basic}} + (1 - K_f) C_{D_M}, \text{ où } \begin{cases} K_f = 1 & \text{si } \delta_F > 0 \\ K_f = 0 & \text{si } \delta_F = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

$$C_m = C_{m,25 basic} + \frac{dC_{m,25}}{d\hat{Q}} \hat{Q} + \frac{dC_m}{d\delta_e} \delta_e \quad (5.25)$$

où $\hat{Q} = \frac{Q\bar{c}}{2V}$.

¹machine utilisée : processeur PIII 1 Ghz, 512 Mo RAM

Comme l'on pouvait s'y attendre, les modèles linéarisés synthétisés à partir des expressions complètes des coefficients aérodynamiques ne correspondent plus à ce modèle, puisqu'on en a négligé certaines composantes. Il a donc été nécessaire de calculer à nouveau les modèles linéarisés en différentes conditions de vol (nous allons préciser lesquelles plus bas) avec ces nouveaux coefficients, en utilisant les formules (3.15) à (3.19) vues au chapitre 3. Les contrôleurs correspondant à ces conditions de vol ont également été synthétisés en utilisant la même structure de synthèse H_∞ que précédemment.

Comme nous souhaitons valider d'une part la performance des contrôleurs et d'autre part la performance de la structure de commutation, nous allons simuler une phase de montée du *Boeing 747*. Ainsi nous pourrons non seulement observer la réponse de l'appareil à un échelon de pente, mais également la commutation entre les contrôleurs lors de la montée, puisque l'avion traversera plusieurs sous-domaines de vol, comme nous allons le voir ci-dessous.

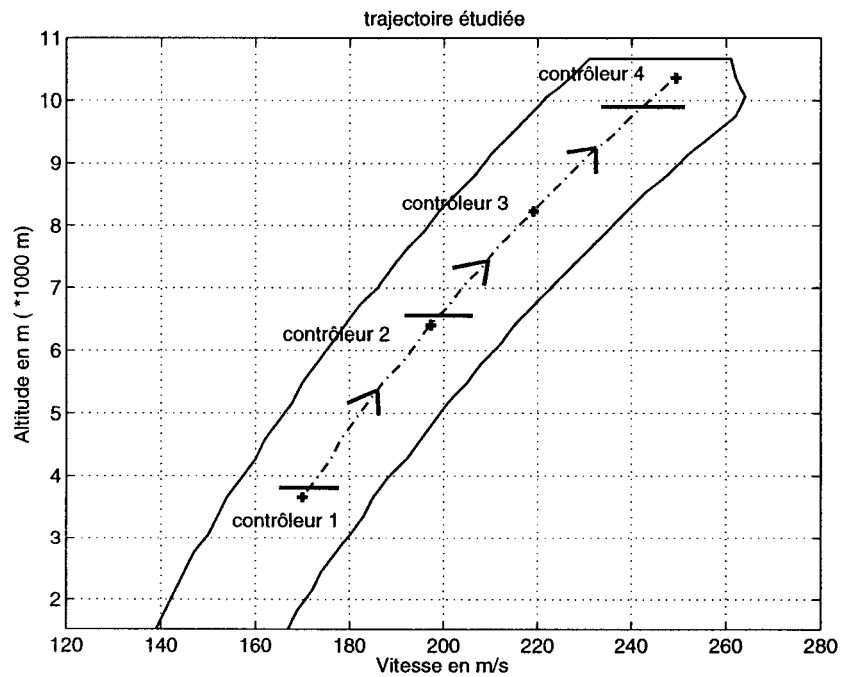


FIG. 5.31 – Trajectoire de l'avion pour la simulation du modèle non linéaire.

Nous considérerons sa vitesse équivalente V_E constante et nous nous intéresserons aux frontières en altitude pour ne pas compliquer les simulations. Ainsi, l'avion d'une masse de $m = 650\,000$ lbs, soit $294\,835$ kg, volera pendant toute cette phase les volets rentrés, à une vitesse $V_E = 275$ noeuds dont l'équivalent V en m.s^{-1} va varier en fonction de l'altitude, de $V = 170 \text{ m.s}^{-1}$ à $V = 249 \text{ m.s}^{-1}$. Il est soumis à une consigne d'échelon de pente de 1 degré lorsqu'il se situe à une altitude d'environ $3\,658$ m, soit $12\,000$ ft. Cette consigne reviendra à 0 degré lorsque l'avion franchira l'altitude de croisière $H = 10\,363$ m, soit $H = 34\,000$ ft. La figure (5.31) représente sa trajectoire dans l'enveloppe de vol, notamment les domaines traversés.

Nous avons implanté ce modèle non linéaire dans un modèle **SIMULINK**, et nous lui avons appliqué la structure de commande telle que décrite à la figure (5.26), mais en utilisant cette fois-ci 4 contrôleurs. Le programme maître `master.m` choisit le contrôleur à utiliser en fonction de l'altitude.

Comme nous l'avions prévu, le temps de simulation est long puisqu'il est de $2\,000$ s, mais avec la réduction des coefficients aérodynamiques son temps d'exécution est avantageusement réduit à quelques minutes. Le tableau 5.4 présente les transitions majeures que traverse l'avion sur sa trajectoire, et les instants approximatifs où celles-ci ont lieu.

TAB. 5.4 – Transitions sur la trajectoire de l'appareil.

commutation	H (ft)	H (m)	t(s)
$1 \rightarrow 2$	12 500	3 810	≈ 51 s
$2 \rightarrow 3$	21 500	6 553	≈ 904 s
$3 \rightarrow 4$	32 500	9 906	≈ 1780 s

Les résultats sont positifs, comme le montre tout d'abord la figure (5.32), qui représente les réponses temporelles de la pente γ , de l'altitude H et l'évolution dans les contrôleurs utilisés : on remarque que la pente se maintient correctement à $\gamma = 1$ deg après un régime transitoire, jusqu'à ce que l'altitude atteigne son niveau de croisière $H = 10\,363$ m, après quoi elle rejoint de nouveau la valeur $\gamma = 0$ deg. De plus, l'altitude augmente régulièrement sans à-coups majeurs et ce malgré les commutations, qui ont lieu comme en témoigne la troisième courbe de l'évolution dans le temps des contrôleurs utilisés.

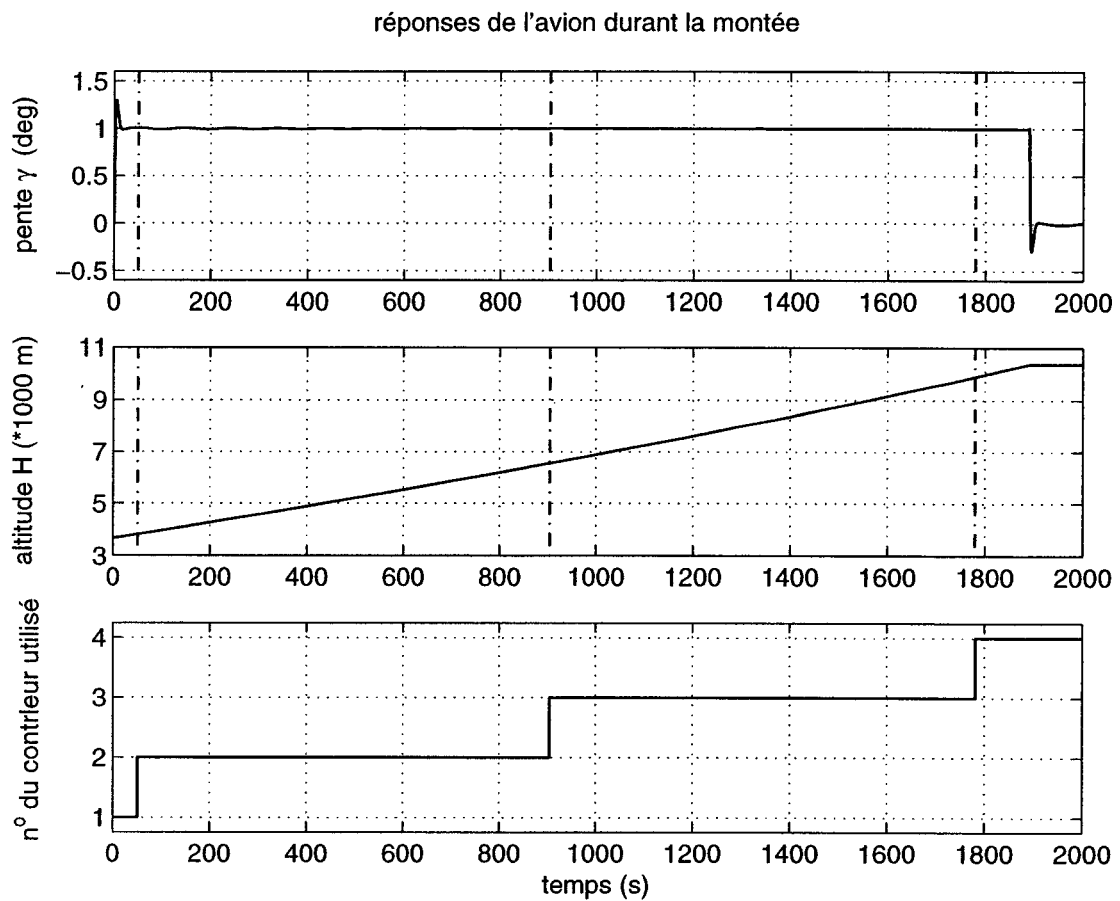


FIG. 5.32 – Réponses de la pente, de l'altitude et contrôleurs utilisés.

La figure (5.33) montre des agrandissements de la figure précédente à l'instant de la commutation entre les contrôleurs 3 et 4 et du retour transitoire de la valeur de la pente γ de 1 deg à 0 deg. On peut ainsi observer la faible influence de la commutation sur ces réponses du système non linéaire.

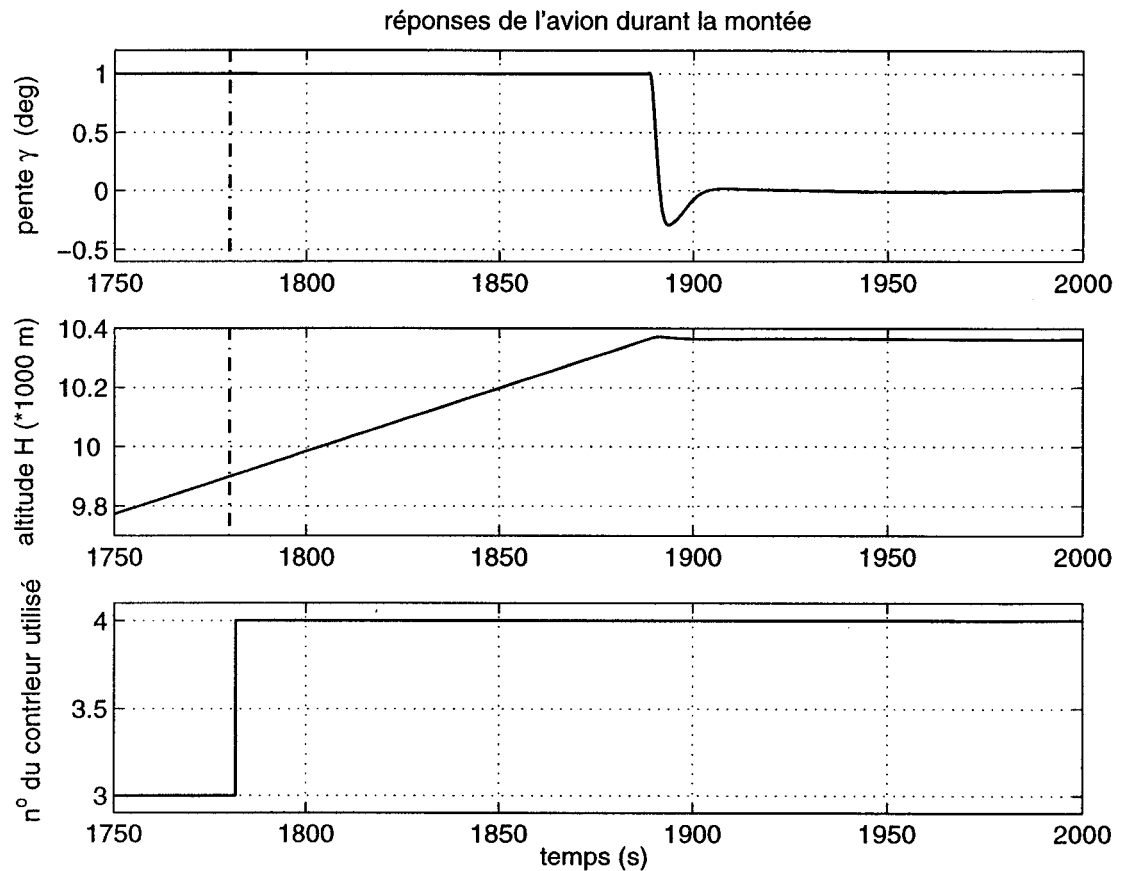


FIG. 5.33 – Agrandissement de la zone de commutation 3 $\rightarrow$ 4.

Cette figure permet non seulement de confirmer le bon comportement de l'appareil lors des commutations, mais également la performance des contrôleurs, puisque la pente γ rejoint rapidement sa nouvelle valeur de consigne avec le dépassement prévu, soit environ 50%.

Étudions maintenant la figure (5.34) qui montre les réponses de la vitesse V , de la vitesse de tangage Q et du facteur de charge n_z : la vitesse équivalente V_E de l'avion est constante par hypothèse, égale à 275 noeuds, mais la vitesse vraie V va varier en fonction de l'altitude, de $V = 170 \text{ m.s}^{-1}$ à $V = 249 \text{ m.s}^{-1}$ comme nous l'avons vu plus haut ; la première courbe de vitesse confirme ces propos.

De plus, la vitesse de tangage Q reste stable à une valeur nulle d'équilibre, et est très peu perturbée par les commutations.

Enfin, le facteur de charge n_z reste bien dans la plage de valeur recommandée que l'on s'est fixée en début de ce chapitre, puisque sa valeur reste nettement en-deçà de 0.4.

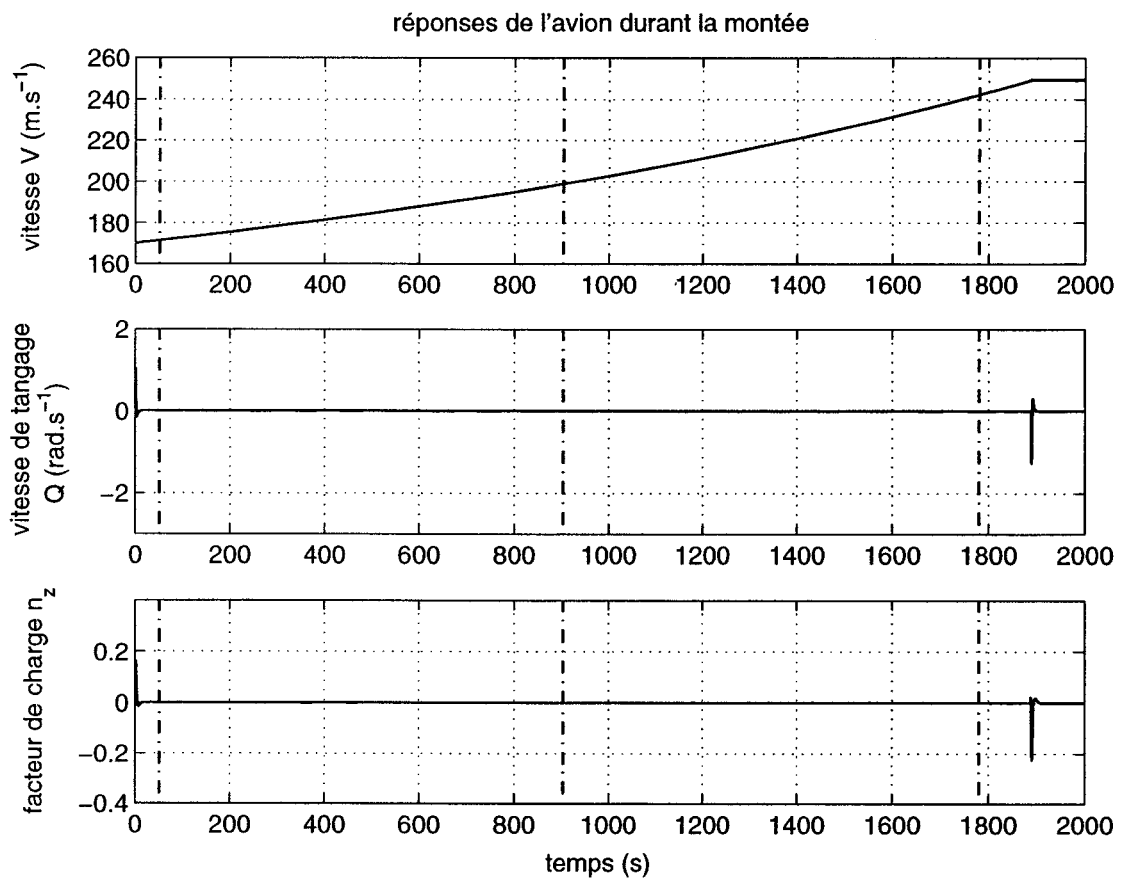


FIG. 5.34 – Réponses de la vitesse, de la vitesse de tangage et du facteur de charge.

La figure (5.35) montre l'agrandissement de la figure (5.34) et confirme les remarques précédentes, puisque la variation majeure est due au passage de la consigne de pente de 1 deg à 0 deg.

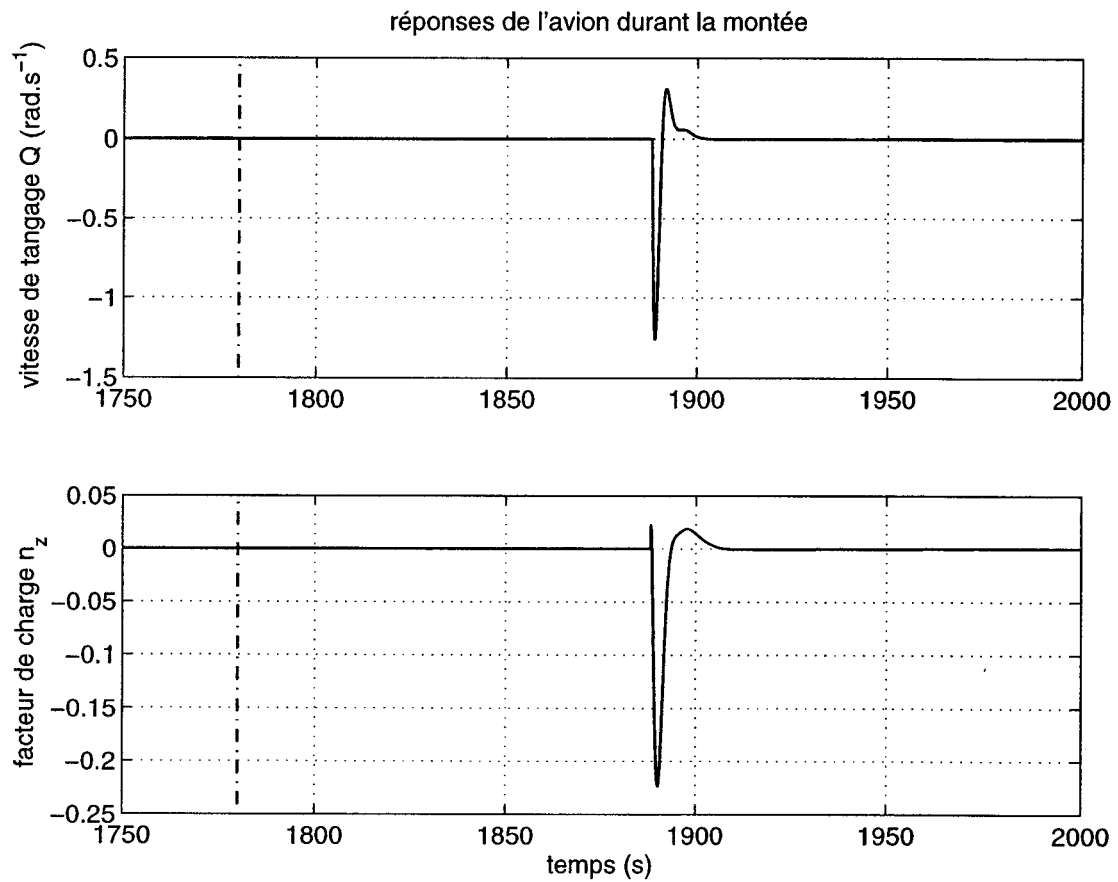


FIG. 5.35 – Agrandissement de la zone de commutation $3 \rightarrow 4$.

Les réponses temporelles des variables de sorties présentent des allures acceptables, puisque les contrôleurs agissent correctement d'une part, et d'autre part les effets des commutations sont quasiment insensibles. Étudions maintenant les réponses des actionneurs δ_e et δ_t .

La figure (5.36) montre l'allure des deux signaux de commande δ_e et δ_t , issus de la structure de commutation, c'est-à-dire qu'en se référant à la figure (5.26), ils sont regroupés dans le vecteur $\hat{U}$.

On remarque qu'ils sont peu perturbés par le phénomène de commutation grâce à la structure d'observateur utilisée. De plus, leurs limites de variations sont vérifiées puisque l'angle des élévateurs reste en dessous de 5 deg, et que la position de la manette des gaz reste comprise entre 0 et 1, et ce y compris lors d'une réponse à un échelon de pente γ .

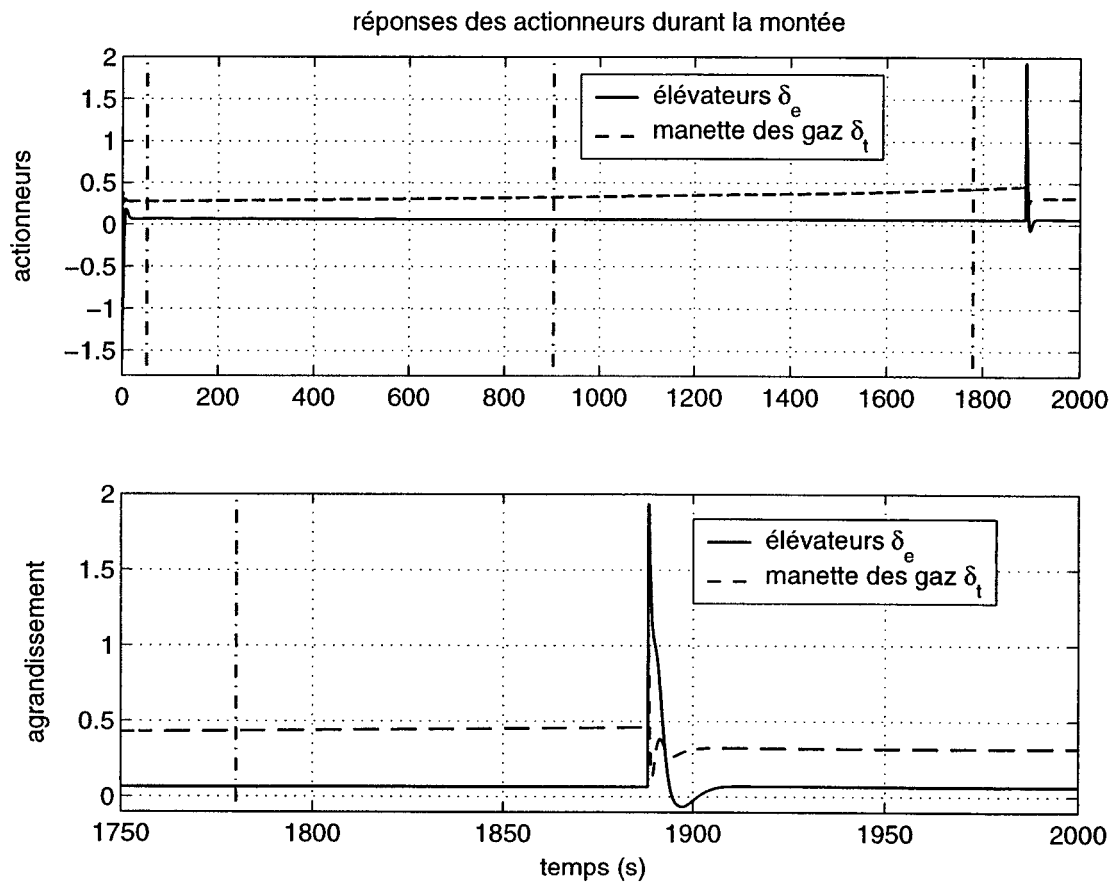


FIG. 5.36 – Réponses temporelles des actionneurs.

La structure de contrôleurs H_∞ avec commutation est donc validée sur une trajectoire par les simulations que l'on vient de détailler, effectuées à partir du modèle non linéaire du *Boeing 747*.

Elles confirment les résultats précédents obtenus à partir des modèles linéarisés.

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous avons présenté une étude complète sur l'élaboration d'une loi de commande pour le *Boeing 747*, de la modélisation de l'avion jusqu'à la synthèse de contrôleurs robustes et leur loi de séquençement.

Le projet se partageait en deux grandes étapes : dans une première partie, nous avons obtenu le modèle non linéaire du vol d'un avion, dont le mode longitudinal, après découplage, a été linéarisé pour arriver au modèle linéaire d'ordre 4. Ce travail théorique, reprenant les grands principes de la mécanique et de l'aérodynamique, a ensuite été appliqué au *Boeing 747*, en exploitant les données techniques et aérodynamiques d'un document technique [13] de la compagnie *Boeing Inc.*, avec succès puisque les résultats obtenus ont pu être comparés de manière concluante à des simulations de référence réalisées par *Boeing Inc.* et la *NASA*. À ce stade, nous avons réalisé une première interface graphique qui permet d'obtenir le modèle linéaire d'ordre 4 du vol longitudinal du *Boeing 747* en toute condition de vol.

Dans une seconde partie, nous avons traité la partie de synthèse de loi de commande : après une revue de littérature sur le vaste domaine de la commande de vol, nous avons choisi de synthétiser une loi de commande composée de contrôleurs robustes, reliés entre eux par une structure de commutation. La synthèse H_∞ a été choisie non seulement à cause de la robustesse qu'elle fournit aux contrôleurs, mais également pour sa souplesse d'utilisation. Puis nous avons étudié le phénomène de commutation, auquel plusieurs solutions peuvent remédier selon la forme obtenue pour les contrôleurs. L'application de cette théorie au *Boeing 747* a confirmé le bien fondé de ce choix : la structure de synthèse H_∞ s'est avérée valable sur toute l'enveloppe de vol, la performance obtenue a été acceptable, ainsi que la structure de commande par commutation entre les contrôleurs. Les résultats ont même été vérifiés sur le modèle non linéaire du *Boeing 747*.

Pour synthétiser tout ce travail et les résultats obtenus, nous avons été amené à élaborer une interface graphique sous **MATLAB** qui permet non seulement de

retrouver simplement les simulations présentés dans ce mémoire, mais également de visualiser une animation du mouvement de l'avion dans toutes les configurations possibles : toute condition de vol, non contrôlé, contrôlé avec choix de contrôleur manuel ou automatique.

Plusieurs prolongations de ce travail peuvent être proposées. Dans les travaux à venir, une étude plus approfondie des méthodes utilisées pourrait être envisagée, concernant par exemple le calcul des coefficients aérodynamiques, puisque les outils **MATLAB** utilisés demandent de grosses ressources informatiques pour mener à bien les calculs, et nuisent ainsi à l'exploitation du modèle non linéaire complet.

Pour ce qui concerne la loi de commande, il pourrait être intéressant d'optimiser d'une part le choix des pondérations lors de la synthèse H_∞ des contrôleurs, pour augmenter encore leur robustesse, et d'autre part la sélection de ceux à inclure dans la structure de commande par commutation, afin d'augmenter sa performance et d'en utiliser le moins possible.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Alazard, D., Cumer, C., Apkarian, P., Gauvrit, M. and Ferreres, G. (1999). *Robustesse et commande optimale*, Cepaduès Éditions, Toulouse.
- [2] Apkarian, P. and Adams, R. J. (1998). Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(1), pp. 21-32.
- [3] Apkarian, P. and Gahinet, P. (1995). A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers. *IEEE transactions on Automatic Control*, 40(5), pp. 853-864.
- [4] Åström, K. J. and Rundqwist, L. (1989). Integrator windup and how to avoid it. *Proceedings of the 1989 American Control Conference*, pp. 1693-98.
- [5] Åström, K. J. and Wittenmark, B. (1984). *Computer controlled systems theory and design*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [6] Becker, G. and Packard, A. (1994). Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback. *Systems and Control Letters*, 23(3), pp. 205-15.
- [7] Boiffier, J.-L. (2000). Dynamique du vol de l'avion. *Notes de cours*, Supaéro, Toulouse.
- [8] Buschek, H. (1999). Full envelope missile autopilot design using gain scheduled robust control. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 22(1), pp. 115-122.
- [9] Degrez, G. (2001). Performances et stabilité des avions. *Notes de cours*, Université Libre de Bruxelles.
- [10] Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. and Francis, B. A. (1989). State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8), pp. 831-847.
- [11] Duc, G., Font, S. (1999). *Commande H_∞ et μ -analyse, des outils pour la robustesse*, Éditions Hermès, Paris.

- [12] Glover, K. and Doyle, J. C. (1988). State space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity. *Systems and Control Letters*, 11(3), pp. 167-72.
- [13] Hanke, C. R. and Nordwall, D. R. (1970). *The simulation of a jumbo jet transport aircraft*, II, The Boeing Company, Wichita, Kansas.
- [14] Hanus, R., Kinnaert, M. and Henrotte, J.-L. (1987). Conditioning technique, a general anti-windup and bumpless transfer method. *Automatica*, 23(6), pp. 729-39.
- [15] Hyde, R. A. (1996). *H_∞ aerospace control design : a VSTOL flight application*, Springer-Verlag, New York.
- [16] Hyde, R. A. and Glover, K. (1990). VSTOL aircraft flight control system design using H_∞ controllers and a switching strategy. *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, 6, pp. 2975-80.
- [17] Kothare, M. V., Campo, P. J., Morari, M. and Nett, C. N. (1995). A unified framework for the study of anti-windup designs. *Automatica*, 30(12), pp. 1869-83.
- [18] Malloy, D. and Chang, B. C. (1998). Stabilizing controller design for linear parameter-varying systems using parameter feedback. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 21(6), pp. 891-898.
- [19] McFarlane, D. and Glover, K. (1992). A loop shaping design procedure using H_∞ synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6), pp. 759-769.
- [20] Nichols, R. A., Reichert, R. T., and Rugh, W. J. (1993). Gain scheduling for H_∞ controllers : a flight control example. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1(2), pp. 69-79.
- [21] O'Shea, J. (2000). Dynamique du vol et autopilotage. *Notes de cours*, École Polytechnique de Montréal.
- [22] Packard, A. (1994). Gain scheduling via linear fractional transformations. *Systems and Control Letters*, 22(2), pp. 79-92.

- [23] Packard, A. and Doyle, J. (1993). The complex structured singular value. *Automatica*, 29(1), pp. 71-109.
- [24] Papageorgiou, G. and Glover, K. (2000). Design of a robust gain scheduled controller for the high incidence research model. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 3, pp. 1613-23.
- [25] Papageorgiou, G., Glover, K., D'Mello, G. and Patel, Y. (2000). Taking robust LPV control into flight on the VAAC Harrier. *Proceedings of the 39th Conference on Decision and Control*, pp. 4558-64.
- [26] Reichert, R. T. (1992). Dynamic scheduling of modern-robust-control autopilot designs for missiles. *IEEE Control Systems Magazine*, 12(5), pp. 35-42.
- [27] Rugh, W. J. and Shamma, J. S. (2000). Research on gain scheduling. *Automatica*, 36, pp. 1401-25.
- [28] Safonov, M. G., Limebeer, D. J. N., Chiang, R. Y. (1989). Simplifying the H_∞ theory via loop-shifting, matrix-pencil and descriptor concepts. *International Journal of Control*, 50(6), pp. 2467-88.
- [29] Scherer, C., Gahinet, P. and Chilali, M. (1997). Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7), pp. 896-911.
- [30] Schumacher, C. and Khargonekar, P. P. (1997). A comparison of missile autopilot designs using H_∞ control with gain scheduling and nonlinear dynamic inversion. *Proceedings of the American Control Conference*, 5, pp. 2759-63.
- [31] Shamma, J. S. and Athans, M. (1990). Analysis of Gain Scheduled Control for Nonlinear Plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(8), pp. 898-907.

Annexe I

Expressions des dérivées de stabilité

En suivant la méthode vue au paragraphe 2.5.2 du chapitre 2, on obtient les expressions suivantes des dérivées de stabilité, dans le repère de stabilité $\mathcal{R}_s$.

On remarque que comme les coefficients aérodynamiques dépendent de l'incidence α et non de la pente γ , les composantes dérivées par rapport à γ sont nulles.

Force de portance F_{z_s}

TAB. I.1 – Dérivées de stabilité pour la force de portance F_{z_s} .

$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{z_s}}{\partial u}$	Z_u	$-\frac{1}{m} V_e \cdot \rho S V_e \left(C_L + \frac{V_e}{2} \frac{\partial C_L}{\partial V} \right)$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \bar{\alpha}}$	$Z_{\bar{\alpha}}$	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \bar{\alpha}}$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{z_s}}{\partial q}$	Z_q	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial q}$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{z_s}}{\partial h}$	$Z_{\bar{h}}$	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial h}$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \delta_e}$	$Z_{\bar{\delta}_e}$	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e}$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{z_s}}{\partial \delta_t}$	$Z_{\bar{\delta}_t}$	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_L}{\partial \delta_t}$

Force de traînée F_{x_s}

TAB. I.2 – Dérivées de stabilité pour la force de traînée F_{x_s} .

$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{x_s}}{\partial u}$	X_u	$-\frac{1}{m} V_e \cdot \rho S V_e (C_D + \frac{V_e}{2} \frac{\partial C_D}{\partial V})$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{x_s}}{\partial \bar{\alpha}}$	$X_{\bar{\alpha}}$	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial \bar{\alpha}}$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{x_s}}{\partial q}$	X_q	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial q}$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{x_s}}{\partial h}$	$X_{\bar{h}}$	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial h}$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{x_s}}{\partial \delta_e}$	$X_{\bar{\delta}_e}$	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial \delta_e}$
$\frac{1}{m} \frac{\partial F_{x_s}}{\partial \delta_t}$	$X_{\bar{\delta}_t}$	$-\frac{1}{2m} \rho S V_e^2 \frac{\partial C_D}{\partial \delta_t}$

Moment en tangage M_{y_s}

TAB. I.3 – Dérivées de stabilité pour le moment en tangage M_{y_s} .

$\frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{y_s}}{\partial u}$	M_u	$\frac{1}{I_{yy}} V_e \cdot \rho S \bar{c} V_e (C_m + \frac{V_e}{2} \frac{\partial C_m}{\partial V})$
$\frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{y_s}}{\partial \bar{\alpha}}$	$M_{\bar{\alpha}}$	$\frac{1}{2I_{yy}} \rho S \bar{c} V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \bar{\alpha}}$
$\frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{y_s}}{\partial q}$	M_q	$\frac{1}{2I_{yy}} \rho S \bar{c} V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial q}$
$\frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{y_s}}{\partial h}$	$M_{\bar{h}}$	$\frac{1}{2I_{yy}} \rho S \bar{c} V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial h}$
$\frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{y_s}}{\partial \delta_e}$	$M_{\bar{\delta}_e}$	$\frac{1}{2I_{yy}} \rho S \bar{c} V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \delta_e}$
$\frac{1}{I_{yy}} \frac{\partial M_{y_s}}{\partial \delta_t}$	$M_{\bar{\delta}_t}$	$\frac{1}{2I_{yy}} \rho S \bar{c} V_e^2 \frac{\partial C_m}{\partial \delta_t}$

Annexe II

Exemple de résolution d'un problème H_∞ sur un cas élémentaire

Soit le problème représenté sur la figure suivante II.1, composé d'un système intégrateur de fonction de transfert $1/s$. Il est soumis à un bruit de mesure $v_1(t)$ et à une perturbation $v_2(t)$, la sortie $z(t)$ doit être asservie à 0, et les signaux que l'on va surveiller sont la sortie $z(t)$ (avant le bruit) et la commande $u(t)$ issue du correcteur.

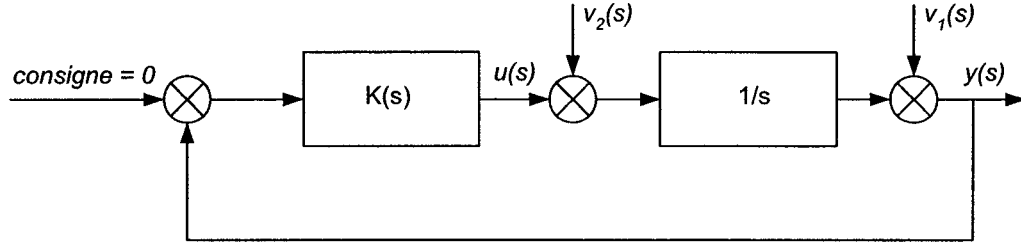


FIG. II.1 – Exemple élémentaire de design H_∞

Avec les notations utilisées au paragraphe 4.3.2.1, nous avons $v = [v_1 \ v_2]^T$, $z = [y \ u]^T$ et $y = \varepsilon$; de plus le modèle d'état augmenté correspondant à 4.5 s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \varepsilon &= \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

où l'on constate que $n = 1$, $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$.

Nous allons tester dans un premier temps si les hypothèses **(H1)**–**(H3)**, préalables

au théorème 4.3.1, sont vérifiées par ce système :

(H1) le système (A, B_2, C_2) est stabilisable et détectable. En effet,

$\text{rang}(B_2 \ AB_2 \ \cdots \ A^{n-1}B_2) = \text{rang}(B_2) = 1$, donc la paire (A, B_2) est commandable, puis $\text{rang}([C_2 \ C_2 A \ \cdots \ C_2 A^{n-1}]^T) = \text{rang}(C_2) = 1$, donc la paire (A, C_2) est observable,

(H2) les matrices D_{12} et D_{21} sont de plein rang, puisque $\text{rang} D_{12} = \text{rang}([0 \ 1]^T) = 1$ et $\text{rang} D_{21} = \text{rang}([1 \ 0]) = 1$,

$$\begin{aligned} \text{(H3)} \quad \text{rang} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) &= \left(\begin{bmatrix} -j\omega & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2 = n + m_2, \text{ et} \\ \text{rang} \left(\begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) &= \left(\begin{bmatrix} -j\omega & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2 = n + p_2, \end{aligned}$$

et ceci pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

On peut également remarquer que pour ce problème particulier, les conditions de normalisation (H4) et (H5) sont également vérifiées :

$$\begin{aligned} \text{(H4)} \quad D_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \\ \text{(H5)} \quad D_{12}^T \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{et } \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vérifions donc maintenant les conditions du théorème 4.3.1 pour obtenir le compensateur $K(s)$. Soit les matrices H_γ et J_γ :

$$H_\gamma = J_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^{-2} - 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

dont les valeurs propres sont racines du polynôme en λ :

$$\det(\lambda I - H_\gamma) = \det(\lambda I - H_\gamma) = \lambda^2 + (\gamma^{-2} - 1) \quad (\text{II.3})$$

Elles n'ont donc pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire pour $\gamma > 1$, ce qui vérifie la condition **(i)** du théorème 4.3.1. Pour la condition **(ii)** de ce même théorème, écrivons les deux équations de Riccati :

$$\begin{aligned} X_\gamma \cdot 0 + 0 \cdot X_\gamma + X_\gamma(\gamma^{-2} - 1)X_\gamma + 1 &= 0 \\ Y_\gamma \cdot 0 + 0 \cdot Y_\gamma + Y_\gamma(\gamma^{-2} - 1)Y_\gamma + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

qui ont chacune une solution identique, toujours pour la condition $\gamma > 1$:

$$X_\gamma = Y_\gamma = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad (\text{II.5})$$

La dernière condition **(iii)** du théorème s'écrit alors :

$$X_\gamma Y_\gamma = \frac{\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} < \gamma^2 \quad (\text{II.6})$$

qui est équivalente à dire que la valeur minimale de γ^2 est 2, soit $\gamma_{opt} = \sqrt{2}$. Dans la pratique, les problèmes seront plus complexes et γ_{opt} sera plutôt déterminé par dichotomie.

Appliquons maintenant le théorème 4.3.2 pour obtenir l'expression du compensateur central, exprimée dans l'espace d'état, correspondant à l'équation 4.10. Pour toute valeur de γ supérieure à $\sqrt{2}$, on a :

$$\begin{aligned}
Z_\gamma &= (1 - \frac{\gamma^{-2}\gamma^2}{\gamma^2 - 1})^{-1} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 - 2} \\
A_c &= \gamma^{-2} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 - 2} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} = -2 \frac{(\gamma^2 - 1)\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma(\gamma^2 - 1)} \\
B_c &= \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 - 2} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} = \gamma \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma^2 - 2} \\
C_c &= -\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}
\end{aligned} \tag{II.7}$$

Écrivons la fonction de transfert du compensateur $K(s)$ qui nous permettra de faire quelques remarques d'intérêt :

$$K(s) = \frac{u(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{\gamma^2}{(\gamma^2 - 2)s + 2\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma}\sqrt{\gamma^2 - 1}} \tag{II.8}$$

Nous pouvons faire deux remarques sur ce résultat : en premier lieu, on constate bien que le compensateur $K(s)$ est d'ordre égal au système, c'est-à-dire d'ordre 1. D'autre part, lorsque γ tend vers sa valeur optimale $\gamma_{opt} = \sqrt{2}$, le terme en s disparaît ce qui confirme le phénomène de *réduction d'ordre à l'optimum*. Une explication est que la matrice $[I - \gamma^{-2}Y_\gamma X_\gamma]$ devient singulière en γ_{opt} ; on observe d'ailleurs que le pôle de $K(s)$ tends vers $-\infty$ lorsque γ tend vers γ_{opt} .

Annexe III

Exemple simple de structure permettant le suivi de commande

Soit le schéma de la figure III.1 suivante, où le système est quelconque, le contrôleur est un PI (Proportionnel Intégral) de paramètres K_P et K_I et le bloc reliant u et $\hat{u}$ est inconnu.

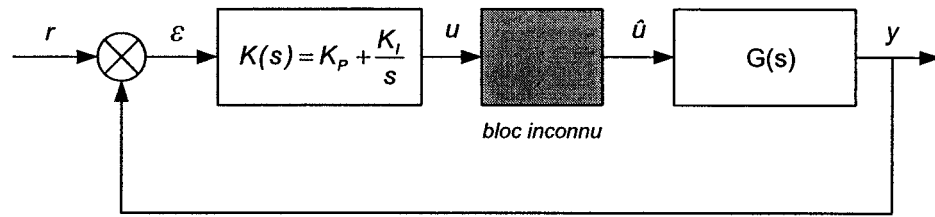


FIG. III.1 – Système contrôlé par un compensateur PI de paramètres K_P et K_I

Le modèle du contrôleur s'écrit dans l'espace d'état de la manière III.1 suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_K = & K_I \varepsilon \\ u = & x_K + K_P \varepsilon \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Notre objectif est que le signal de commande u suive le plus fidèlement possible le signal d'entrée du système $\hat{u}$, et ce quel que soit le contenu du bloc inconnu. Pour cela, nous allons appliquer la formulation vue au paragraphe 4.4.2. Voici le modèle d'état du nouveau contrôleur K_{com} , sous l'hypothèse, tout à fait réaliste, que $K_P = D$ est différent de zéro :

$$\begin{cases} \dot{x}_{K_{com}} = & -\frac{K_I}{K_P} x_{K_{com}} + \frac{K_I}{K_P} \hat{u} \\ u = & x_{K_{com}} + K_P \varepsilon \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

À partir de la relation (III.2), nous obtenons la fonction de transfert :

$$\frac{u(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{K_I/K_P}{s + K_I/K_P} \quad (\text{III.3})$$

qui confirme bien la présence d'une dynamique dans la poursuite de $\hat{u}$ par u . De plus on peut faire la remarque que lorsque $u = \hat{u}$, on retrouve bien la dynamique du contrôleur original dont la représentation en modèle d'état est donnée par la relation III.1.

Voici le schéma de la nouvelle structure :

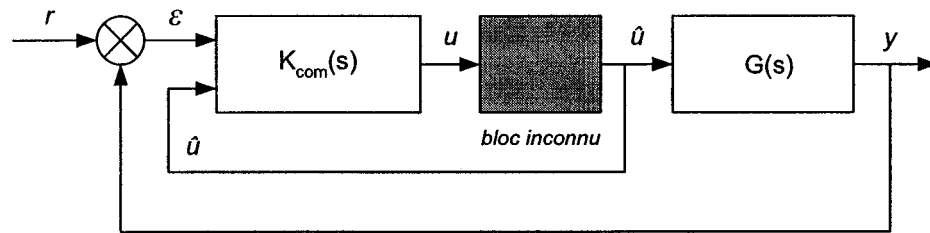


FIG. III.2 – Structure adaptée au suivi de commande dans le cas d'un correcteur PI

Annexe IV

Lexique

Lexique Français/Anglais :

aérofrein,	<i>spoiler.</i>
aile,	<i>wing.</i>
assiette,	<i>trim.</i>
becs,	<i>edge flaps.</i>
commutation de contrôleurs,	<i>switching controllers.</i>
corde aérodynamique moyenne,	<i>mean aerodynamic chord.</i>
effet de sol,	<i>ground effect.</i>
en ligne,	<i>on-line.</i>
facteur de charge,	<i>load factor.</i>
fonctions de pondération,	<i>weighting functions.</i>
foyer,	<i>focus.</i>
gouverne de direction,	<i>rudder.</i>
gouverne de profondeur,	<i>elevator.</i>
lacet,	<i>yaw.</i>
manette des gaz,	<i>thrust lever.</i>
masse volumique de l'air,	<i>air mass density.</i>
moment en tangage,	<i>pitching moment.</i>
pente,	<i>slope.</i>
poids,	<i>weight.</i>
portance,	<i>lift.</i>
poussée,	<i>thrust.</i>
roulis,	<i>roll.</i>
séquençement de gains,	<i>gain scheduling.</i>
stabilisateur,	<i>stabilizer.</i>

tangage,
 train d'atterrissage,
 traînée,
 transfert en douceur,
 volets,

pitch.
landing gear.
drag.
bumpless transfer.
flaps.

Lexique Anglais/Français :

air mass density,
 bumpless transfer,
 drag,
 edge flaps,
 elevator,
 flaps,
 focus,
 gain scheduling,
 ground effect,
 landing gear,
 lift,
 load factor,
 mean aerodynamic chord,
 on-line,
 pitch,
 pitching moment,
 roll,
 rudder,
 slope,
 spoiler,
 stabilizer,
 switching controllers,

masse volumique de l'air.
transfert en douceur.
traînée.
becs.
gouverne de profondeur.
volets.
foyer.
séquencement de gains.
effet de sol.
train d'atterrissage.
portance.
facteur de charge.
corde aérodynamique moyenne.
en ligne, en service.
tangage.
moment en tangage.
roulis.
gouverne de direction.
pente.
aérofrein.
stabilisateur.
commutation de contrôleurs.

thrust,	<i>poussée.</i>
thrust lever,	<i>manette des gaz.</i>
trim,	<i>assiette.</i>
weight,	<i>poids.</i>
weighting functions,	<i>fonctions de pondération.</i>
wing,	<i>aile.</i>
yaw,	<i>lacet.</i>