

Titre: Méthode de linéarisation pour l'optimisation sous contraintes de contrôlabilité du procédé de lavage de pâte à papier
Title: controllability of the paper pulp washing process optimization by linearization

Auteur: Mehdi Abdelmoula
Author:

Date: 2003

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Abdelmoula, M. (2003). Méthode de linéarisation pour l'optimisation sous contraintes de contrôlabilité du procédé de lavage de pâte à papier [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/7021/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/7021/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Gilles Savard, & Brigitte Jaumard
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MÉTHODE DE LINÉARISATION POUR L'OPTIMISATION SOUS
CONTRAINTE DE CONTRÔLABILITÉ DU PROCÉDÉ DE
LAVAGE DE PÂTE À PAPIER

MEHDI ABDELMOULA
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

MARS 2003

© Mehdi Abdelmoula, 2003.



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-81532-3

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

**MÉTHODE DE LINÉARISATION POUR L'OPTIMISATION SOUS
CONTRAINTES DE CONTRÔLABILITÉ DU PROCÉDÉ DE
LAVAGE DE PÂTE À PAPIER**

présenté par : ABDELMOULA, Mehdi

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. AUDET Charles, Ph.D., président

M. SAVARD Gilles, Ph.D., membre et directeur de recherche

Mme. JAUMARD Brigitte, T. Doct., T. Hab., membre et codirectrice
de recherche

M. STUART Paul, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mes trois directeurs, Gilles Savard, Michel Perrier et Brigitte Jaumard pour leur soutien constant et les précieux conseils qu'ils m'ont prodigués.

Je remercie également tous les membres du GERAD pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la réalisation de ce travail. Un grand merci est particulièrement adressé à Sylvain Perron pour son important soutien et à Benoît Archambault pour son appui constant.

Enfin, je désire remercier mes parents et tous mes amis pour leurs encouragements, leur grande disponibilité et surtout leur présence à mes côté dans les moments difficiles.

Résumé

L'étude de la contrôlabilité est l'un des points clés qui permettent d'assurer de bonnes maîtrise, fiabilité et performance d'un procédé chimique. Cette étude est normalement faite à la suite de simulations du procédé ou à partir de résultats expérimentaux. La nouvelle approche que nous proposons consiste à prendre en considération le contrôle au sein du processus de conception du procédé.

L'objectif de ce mémoire est d'optimiser le fonctionnement de l'étape de lavage de la pâte dans un procédé Kraft tout en assurant sa bonne contrôlabilité. Dans un premier temps, nous développons un modèle mathématique pour l'optimisation des laveurs de pâte en régime permanent. Le modèle obtenu représente un problème bilinéaire non-convexe.

Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à l'optimisation du fonctionnement des laveurs selon le modèle établi. Cette optimisation est faite par un algorithme de séparation et de coupe en minimisant les coûts opératoires. C'est un algorithme d'optimisation globale qui se base sur des techniques de linéarisation.

Dans un troisième temps, nous développons un algorithme de descente pour optimiser la contrôlabilité. La bonne contrôlabilité du système est caractérisée par la matrice de gain relatif (*RGA*). L'algorithme de descente recherche alors un optimum local en minimisant une fonction objectif tirée de la *RGA*.

Finalement, nous étudions la validité du modèle développé pour montrer qu'il décrit bien le comportement des laveurs. Nous analysons ensuite les différents paramètres utilisés et nous regardons l'impact de quelques-uns d'entre eux sur la contrôlabilité des laveurs. Nous mettons ainsi en évidence, pour la contrôlabilité, l'existence de deux régions parmi toutes les configurations de fonctionnement des

laveurs : une première où elle est bonne et n'est pas sensible aux variations des conditions opératoires et une deuxième où elle y est très sensible.

Abstract

The study of the controllability is one of the key points for insuring fiability and good performance of a chemical process. This study is normally done after performing process simulation or from experimental results. The new approach we adopt consists in taking in consideration the control within the process design procedure.

The objective of this work is to optimize the operation of the pulp washing step in a Kraft process while assuring good controllability. Previously, we developed a mathematical model of the pulp washers at steady state. The resulting model is a non-convex bilinear problem.

In a second step, we are interested in the optimization of the washers operation according to the established model. A Branch & Cut algorithm minimizing the operating costs is used for the optimization step. The algorithm is a global optimization one which is based on linearization techniques.

In a third step, we develop a descent algorithm to optimize the controllability. The relative gain matrix (*RGA*) characterizes the good controllability of the system. The descent algorithm look for a local optimum while minimizing an objective function based on the *RGA*.

Finally, we study the validity of the developed model to show that it describes well the behavior of the washers. Afterwards, we analyze the effect of key parameters and we look at their impact on washers' controllability. We put thus in evidence the existence, for the controllability, of two regions among all operating configurations : a first one where it's good and insensitive to operating conditions changes and a second one where it's very sensitive to those changes.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES TABLEAUX.....	xii
LISTE DES FIGURES	xiv
LISTE DES ANNEXES	xvi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 LE PROCÉDÉ KRAFT	4
2.1 Configuration générale de procédés papetiers	4
2.2 Description du procédé Kraft	5
2.3 Les laveurs de pâte à papier	7

2.3.1	Opérations élémentaires de lavage de la pâte	7
2.3.2	Les laveurs commerciaux de pâte à papier	8
2.3.3	Les facteurs d'efficacité des laveurs	10
CHAPITRE 3 MODÉLISATION DES LAVEURS DE PÂTE		14
3.1	Construction du modèle	15
3.1.1	Schématisation du procédé	15
3.1.2	Nature du procédé	16
3.2	Modélisation d'un laveur de pâte à papier	17
3.2.1	Variables du modèle	17
3.2.2	Contraintes du modèle	20
3.2.3	Bornes sur les variables	24
3.3	Modèle mathématique des laveurs	25
3.3.1	Fonction objectif	25
3.3.2	Seconde version du modèle	27
3.3.3	Particularité du modèle mathématique	28
CHAPITRE 4 LE CONTRÔLE DE PROCÉDÉS		30
4.1	Différents aspects du contrôle de procédés	30
4.1.1	Définition du contrôle de procédés	30

4.1.2	Variables de contrôle	31
4.1.3	Configurations des systèmes de contrôle	32
4.2	Conception des systèmes de contrôle	33
4.2.1	Modèle mathématique des systèmes multivariables	33
4.2.2	Méthodologie	35
4.2.3	Exemple de procédé	35
4.3	Contrôlabilité d'un procédé	37
4.4	Propriétés des systèmes de contrôle	38
4.5	Les indices de contrôlabilité	39
4.5.1	La matrice de gain relatif (<i>RGA</i>)	39
4.5.2	L'indice de Niederlinski	43
4.6	Contrôlabilité des laveurs de pâte à papier	44
CHAPITRE 5 ALGORITHMES D'OPTIMISATION		48
5.1	Algorithme de linéarisation pour les problèmes quadratiques	49
5.1.1	Approche de résolution	49
5.1.2	Linéarisation initiale	51
5.1.3	Classes de linéarisation	52
5.1.4	Algorithme de séparation et de coupes	58

5.2	Algorithme d'optimisation de la contrôlabilité	61
5.2.1	Description de l' <i>AOC</i>	62
5.2.2	Évaluation de la matrice <i>RGA</i>	65
5.2.3	Méthode du gradient	66
CHAPITRE 6 RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET DISCUSSIONS .		69
6.1	Description du cas de base	69
6.2	Étude des paramètres de l' <i>ALPQ</i>	72
6.2.1	Analyse des paramètres de précision des calculs	73
6.2.2	Analyse des facteurs de mise à l'échelle	74
6.3	Validation du modèle des laveurs	75
6.3.1	Validation par rapport au cas de base	75
6.3.2	Comportement du <i>MLPP</i>	77
6.3.3	Comparaison avec WinGEMS 5.0	82
6.4	Étude des paramètres de l' <i>AOC</i>	86
6.5	Étude de la contrôlabilité des laveurs	90
6.5.1	Résultats de l' <i>AOC</i>	90
6.5.2	Analyse de la contrôlabilité	93
6.5.3	Influence de la pureté de l'eau de lavage	96

6.5.4 Influence de la pureté de la pâte à l'entrée	98
CHAPITRE 7 CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS	100
RÉFÉRENCES	102
ANNEXES	108

LISTE DES TABLEAUX

6.1	Performances de l' <i>ALPQ</i> pour la résolution du problème de base avec $SC_d = 1e^{-4}$, $SC_f = 1$ et $\varepsilon_{gen} = 1e^{-7}$	73
6.2	Performances de l' <i>ALPQ</i> pour la résolution du problème de base avec $\varepsilon_{gen} = 1e^{-7}$, $\varepsilon_r = 1e^{-6}$ et $\varepsilon_r = 1e^{-6}$	75
6.3	Validation des résultats du modèle par rapport au cas de base de Felder	77
6.4	Sensibilité de la configuration optimale des laveurs au nombre de modules de lavage (<i>ALPQ</i> avec $SC_d = 1e^{-5}$, $SC_f = 1e^{-2}$: et $\varepsilon_r = \varepsilon_z = 1e^{-5}$)	78
6.5	Sensibilité de la configuration optimale des laveurs aux taux de déplacement ($SC_d = 1e^{-4}$, $SC_f = 1$: et $\varepsilon_r = \varepsilon_z = 1e^{-6}$)	80
6.6	Sensibilité de la configuration optimale des laveurs aux coefficients de recirculation ($SC_d = 1e^{-4}$, $SC_f = 1$: et $\varepsilon_r = \varepsilon_z = 1e^{-6}$)	81
6.7	Comparaison des résultats de WinGEMS et du modèle des laveurs avec une perte de pâte nulle	83
6.8	Comparaison des résultats de WinGEMS et du modèle des laveurs avec une perte de pâte de 0.1%	84
6.9	Points initiaux pour le choix des pas de différences finies	86
6.10	Évaluation de la contrôlabilité selon les pas de différences finies choisis et le nombre de modules de lavages	87

LISTE DES FIGURES

2.1	Schéma simplifié du procédé Kraft	6
2.2	Principe du lavage par déplacement	8
2.3	Lavage par eau fraîche pure	9
2.4	Lavage à contre-courant	9
2.5	Laveur rotatif à vide	11
2.6	Différents flux dans un module de laveur de pâte à papier	11
3.1	Schématisation d'un module de laveur de pâte à papier	15
3.2	Schéma complet d'un laveur à trois modules montés à contre-courant . .	17
4.1	Contrôle par rétroaction	32
4.2	Structure d'un modèle multivariable (2×2)	34
4.3	Schéma de contrôle élémentaire pour le CSTR	36
5.1	Sous-approximation de la fonction carré $f(x_i) = x_i^2$ (Audet et al. [5]) . .	54
5.2	Sous-estimation d'une paraboloïde (Audet et al. [5])	55
5.3	Utilisation des coupes de \mathcal{C}_{III}	56
5.4	Fonctionnement de l'algorithme d'optimisation de la contrôlabilité	63

6.1	Configuration de base pour un laveur à 3 modules montés à contre-courant	70
6.2	Configuration optimale de fonctionnement d'un laveur à 3 modules en considérant des pertes de pâte de 1% au niveau des filtres	76
6.3	Propreté de la pâte lavée en fonction du nombre de modules de lavage. .	79
6.4	Débit d'eau fraîche utilisé en fonction de la propreté de la pâte lavée. . .	81
6.5	Comportement de l'AOC pour $\mu_{ini} = (10332.7, 18459.5)$	90
6.6	Comportement de l'AOC pour $\mu_{ini} = (10050, 24800)$	91
6.7	Comportement de l'AOC pour $\mu_{ini} = (10050, 22630)$	91
6.8	Comportement de l'AOC pour $\mu_{ini} = (4800, 20000)$	92
6.9	Évolution de λ_{11} selon le débit de pâte pour un débit d'eau fraîche fixe .	94
6.10	Évolution de λ_{11} selon le débit d'eau fraîche pour un débit de pâte fixe .	95
6.11	Évolution de λ_{11} selon le débit d'eau fraîche pour un débit de pâte fixe et pour différentes fractions de solides dans l'eau fraîche	97
6.12	Évolution de λ_{11} selon le débit d'eau fraîche pour un débit de pâte fixe et pour différentes fractions de solides dans la pâte à l'entrée	98

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A Première version du <i>MLPP</i>	109
ANNEXE B Seconde version du <i>MLPP</i>	112

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Dans l'industrie chimique un procédé peut s'avérer, une fois implanté, difficile à contrôler et à faire fonctionner dans les conditions souhaitées. Le contrôle d'un procédé chimique est primordial vu le nombre de paramètres qui peuvent influencer son fonctionnement. Traditionnellement la conception d'un procédé et celle de son système de contrôle sont deux tâches qui s'effectuent séquentiellement. Ce type d'approche ne permet d'analyser le contrôle de la conception d'un procédé qu'une fois ce procédé établi. Cette analyse *a posteriori* du contrôle de procédé se fait habituellement à l'aide d'outils de simulation et il est généralement nécessaire de faire plusieurs itérations avant d'aboutir à une performance de contrôle acceptable. La nouvelle approche que nous adoptons consiste à intégrer simultanément la conception et la contrôlabilité du procédé dans une seule et unique phase.

Les grandes étapes de la conception d'un procédé sont la formulation du problème, la génération d'alternatives et l'analyse du comportement de ces dernières. L'idée de ce mémoire est d'examiner de près le moyen de concevoir des systèmes avec une faible sensibilité aux perturbations. Une manière de faire est d'intégrer une évaluation de la contrôlabilité d'un procédé lors de sa conception. On désigne généralement par contrôlabilité la meilleure performance de contrôle réalisable indépendamment du contrôleur utilisé. La contrôlabilité n'est de ce fait aucunement affectée par le choix du contrôleur mais uniquement par les changements conceptuels. Elle représente

donc un lien solide entre la conception du procédé et celle de son système de contrôle. L'objectif du présent mémoire est donc de considérer la contrôlabilité du procédé au cours de l'étape de conception à travers des indices de contrôlabilité. Pour ce faire, nous allons tout d'abord commencer par la modélisation d'un procédé chimique sous la forme d'un programme mathématique. Nous nous intéressons ensuite à l'optimisation du fonctionnement de ce procédé selon des objectifs bien définis et par le moyen d'un algorithme de séparation et de coupe. Finalement nous concevons un algorithme d'optimisation de la contrôlabilité qui a pour but de trouver, parmi les configurations de fonctionnement optimales, celles qui confèrent au procédé la meilleure contrôlabilité possible. La méthodologie ainsi adoptée permet de trouver un compromis entre les coûts économiques d'un procédé et sa bonne contrôlabilité. En effet, un point de fonctionnement du procédé peut ne pas être à coût minimal mais assurer une bonne contrôlabilité du procédé. Un pareil point a l'avantage de permettre une déviation minimale par rapport au point de fonctionnement choisi.

L'approche que nous adoptons peut être appliquée à n'importe quel procédé industriel. Pour ce mémoire, notre choix s'est porté sur les laveurs de pâte à papier dans le procédé Kraft de fabrication de pâte à papier. Ce choix est principalement justifié par deux raisons. La première est que c'est un procédé chimique et de ce fait l'aspect contrôle présente un intérêt particulier. La seconde raison est que c'est un procédé assez complexe pour permettre la mise en valeur et l'application des méthodes envisagées.

Le plan du présent mémoire est fortement inspiré de la méthodologie décrite ci-haut. Dans le premier chapitre nous décrivons le procédé Kraft en mettant le point sur les détails relatifs aux laveurs de pâte à papier. Nous exposons dans le deuxième chapitre les hypothèses et principes que nous avons adoptés pour la conception de notre modèle des laveurs. Au troisième chapitre nous présentons les différents

aspects du contrôle et de la contrôlabilité sur lesquels nous allons nous baser. Un intérêt particulier est porté aux indices de contrôlabilité présents dans la littérature. Nous décrivons les indices de contrôlabilité utilisés et adaptons par la suite tous les concepts au cas des laveurs de pâte. Au quatrième chapitre nous décrivons à la fois l'algorithme de séparation et de coupe conçu et développé par *Audet et al.* [5, 7] et celui de l'optimisation de la contrôlabilité que nous avons conçu et développé. L'objet du dernier chapitre est l'analyse et la validation des résultats obtenus par ces deux algorithmes.

CHAPITRE 2

LE PROCÉDÉ KRAFT

2.1 Configuration générale de procédés papetiers

La conversion du bois en papier prêt à l'utilisation est un procédé complexe qui nécessite la séparation de plusieurs composantes issues des copeaux de bois. L'objectif est d'extraire à partir du bois les fibres de cellulose dont il est majoritairement composé. Ceci peut être accompli principalement par deux méthodes : la méthode chimique ou la méthode thermo-mécanique. La méthode thermo-mécanique consiste à séparer les fibres mécaniquement tandis que la méthode chimique opère par la dissolution de plusieurs composantes du bois dans une solution alcaline. La méthode chimique est plus coûteuse que celle mécanique mais produit un papier de meilleure qualité que cette dernière. Toutefois, la dissolution et la séparation ultérieure de cette solution des fibres, sont difficiles et nécessitent des traitements aussi bien chimiques que physiques.

Aux débuts de l'industrie papetière, il suffisait de produire un papier de qualité raisonnable pour maintenir son activité industrielle. Il suffisait alors d'utiliser des procédés simples et relativement inefficaces. L'amélioration du procédé ne figurait pas parmi les priorités puisque le produit était rare et l'on pouvait vendre aux prix désirés. Au fur et à mesure de l'évolution de cette industrie et de la banalisation du papier, les compagnies papetières se sont trouvées obligées de réduire leurs coûts

d'exploitation en augmentant l'efficacité de leurs procédés. La prise de conscience de l'impact environnemental, est elle aussi venue récemment encourager les incitations à des procédés plus propres et plus performants.

Le procédé Kraft [15], dont nous allons étudier l'étape de lavage de la pâte, est un procédé chimique de fabrication du papier. Il est le résultat de plusieurs décennies d'expérimentation et de recherche scientifique.

2.2 Description du procédé Kraft

Les composantes majeures du bois sont la cellulose et la lignine. La cellulose peut être classée sous deux catégories : la cellulose insoluble (alpha cellulose) et la cellulose alkali-soluble (hemi-cellulose). La lignine permet au bois d'avoir une solidité structurelle mais elle doit être éliminée des fibres de cellulose pour obtenir un papier de haute qualité. À l'état naturel, la lignine est un polymère complexe et extrêmement insoluble qui doit être brisé jusqu'à ce que sa masse moléculaire et ses caractéristiques structurelles permettent sa dissolution. La dégradation de la lignine est accomplie par un traitement chimique du bois. Toutefois, étant donné que beaucoup de propriétés du papier dépendent de la masse moléculaire de la cellulose dans le produit fini, il est extrêmement important de limiter la réaction de dégradation à la seule lignine [15]. Dans le procédé Kraft (présenté à la figure 2.1), les bûches de bois sont tout d'abord déchiquetées en copeaux. Chaque kilogramme de copeaux de bois est ensuite mélangé à environ trois Kilogrammes d'une solution chimique appelée liqueur de cuisson (cooking liquor). Le mélange résultant passe ensuite dans un lessiveur (appelé aussi Kamyr) dans lequel les copeaux subissent un processus de cuisson qui dégrade la lignine et la rend alkali-soluble. Ce processus

de cuisson convertit les copeaux en pâte. Cette dernière, en quittant le lessiveur, est lavée avec de l'eau chaude pour éliminer la liqueur usée, les produits de la décomposition de la lignine et les sels d'acides résineux et graisseux qui se sont formés dans le lessiveur. La pâte peut ensuite être blanchie ou directement envoyée vers un procédé de fabrication de papier [15].

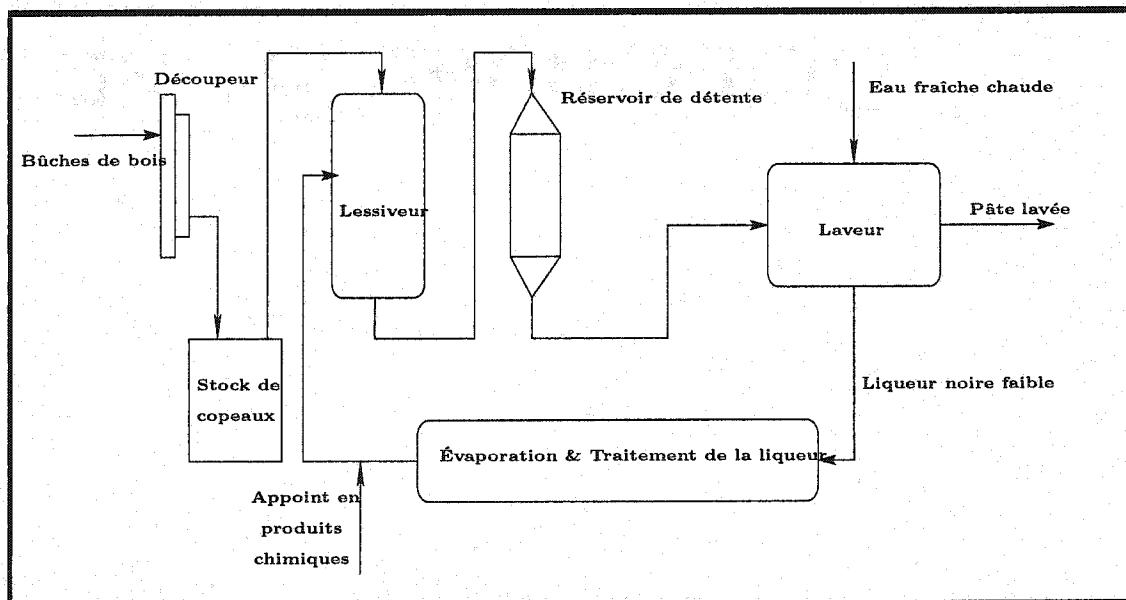


Figure 2.1 – Schéma simplifié du procédé Kraft

Pour que le procédé Kraft soit économique, les produits chimiques de la cuisson doivent être récupérés de l'eau de lavage. Cette eau de lavage appelée aussi liqueur noire faible (weak black liquor) est évaporée pour produire la liqueur noire concentrée (strong black liquor) qui est ensuite brûlée. La chaleur issue de sa combustion est utilisée pour produire de la vapeur. Les produits chimiques de cuisson, quant à eux, sont récupérés au niveau des résidus de la combustion pour être réutilisés au niveau du lessiveur.

2.3 Les laveurs de pâte à papier

Il existe plusieurs méthodes pour la production de la pâte à papier et chacune d'entre elles peut être mise en œuvre selon différentes configurations. Toutefois, une étape de lavage de la pâte est nécessaire pour chacune de ces configurations. La raison principale pour ceci est que l'étape de lavage a pour objectif de séparer dans la pâte à papier les fibres de cellulose des produits chimiques dissous. Cette séparation doit se faire de la façon la plus complète possible et concerne les produits chimiques aussi bien organiques (tels que les dérivatifs de la lignine) que non organiques (comme les ions de sodium, de magnésium et de calcium). Dans la suite, une grande partie de la description des laveurs est essentiellement issue de *Crotogino et al.* [14].

2.3.1 Opérations élémentaires de lavage de la pâte

Le lavage de la pâte peut être fait selon deux opérations élémentaires :

- **Lavage par Dilution/Extraction** : Le mélange de pâte à papier sale est dilué puis complètement brassé à l'aide d'une solution de lavage moins concentrée en solides dissous ou avec de l'eau fraîche. Le mélange résultant est ensuite épaissi par filtrage (habituellement aidé par une différence de pression appliquée à travers l'épaisseur de la pâte) ou par pression mécanique. L'efficacité d'un pareil procédé dépend du degré d'absorption du soluté par les fibres et du temps requis pour séparer le soluté des fibres.

- **Lavage par Déplacement** : Le soluté (ensemble des produits chimiques organiques ou non qui sont dissous dans la pâte) est déplacé à l'aide d'une solution de lavage moins concentrée en solides dissous ou avec de l'eau fraîche (Figure 2.2). Le mélange entre la solution de lavage et celle à déplacer doit être minimisé au

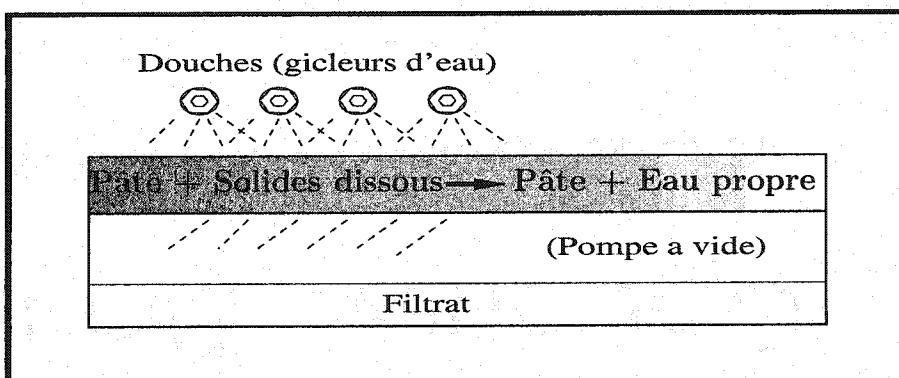


Figure 2.2 – Principe du lavage par déplacement

niveau de l'interface les séparant. Idéalement, s'il n'y a pas de mélange, il est possible d'éliminer tout le soluté en le déplaçant par un volume équivalent. Toutefois, en pratique, le mélange se produit et le soluté n'a pas le temps suffisant pour être séparé des fibres.

2.3.2 Les laveurs commerciaux de pâte à papier

En pratique, la majorité des laveurs de pâte à papier comportent plusieurs modules de lavage (typiquement trois). La raison qui pousse à utiliser plusieurs modules de lavage est l'efficacité moyenne du déplacement des produits chimiques dissous qui est de 80%. Plusieurs modules sont alors nécessaires pour atteindre une efficacité de déplacement avoisinant les 90%. Dans un pareil système, le maximum de soluté peut être éliminé si le lavage se fait avec de l'eau fraîche au niveau de chaque module. Cette approche, illustrée à la figure 2.3, nécessite de grandes quantités d'eau ce qui explique son absence dans les nouveaux système de lavage.

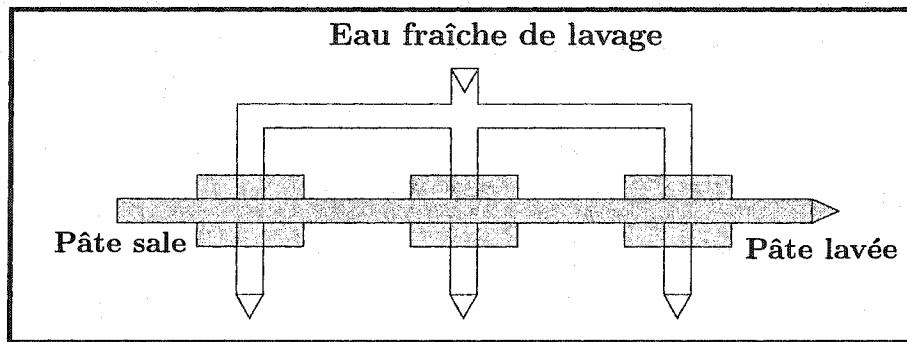


Figure 2.3 – Lavage par eau fraîche pure

La pratique la plus commune est de placer les différents modules de lavage à contre-courant comme indiqué à la figure 2.4. Dans ce type de lavage de la pâte, l'eau de lavage et la pâte sale vont à contresens. Au fur et à mesure qu'elle passe à travers les laveurs, la pâte se purifie et elle est lavée par une eau de plus en plus propre. L'eau de lavage, quant à elle, est introduite propre au niveau du dernier module de lavage et remonte ensuite les laveurs en sens contraire de la pâte en se salissant de plus en plus. L'eau de lavage la plus "sale" est alors récupérée dans le réservoir du premier module de lavage pour être envoyée vers la section de récupération de l'usine.

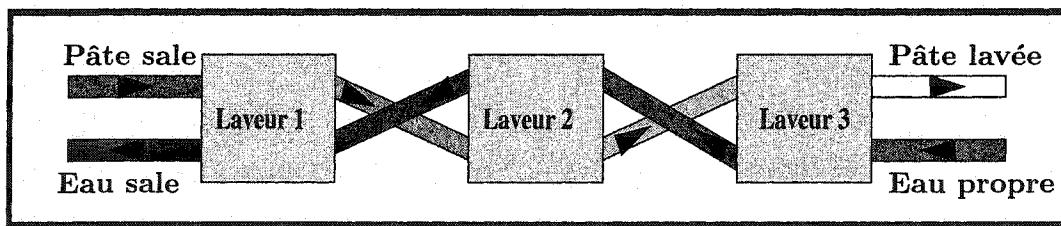


Figure 2.4 – Lavage à contre-courant

Il existe un large éventail d'équipements de lavage de la pâte à papier tels que le laveur à pression, le laveur à bande, le laveur à diffusion, etc. Dans ce projet, nous modélisons le laveur rotatif à vide (rotary vacuum washer). Ce type de laveurs, présenté à la figure 2.5, est de loin l'équipement le plus utilisé et le plus répandu. Pour ce type d'équipement l'opération de lavage peut être divisée en plusieurs étapes. La pâte entre dans un module de lavage à une consistance moyenne (12%) et elle est diluée jusqu'à atteindre une faible consistance (1%). On utilise pour cette dilution le filtrat recirculé du même module. La pâte passe ensuite dans une cuve de suspension. Un tambour rotatif imprégné dans cette cuve de suspension et couvert d'une membrane, agrippe alors la pâte. Cette dernière forme une couche épaisse sur le tambour et perd partiellement l'eau qu'elle contient. L'eau de lavage est alors appliquée pour déplacer les solides dissous. La pâte est encore débarrassée de l'eau qu'elle contient avant d'être décollée du tambour. Le déplacement de l'eau tout au long de ce processus est aidé par un vide créé à l'intérieur du tambour pour absorber les liquides à travers la membrane de ce dernier. Le filtrat est, quant à lui, dirigé vers un réservoir pour être ensuite réinjecté comme eau de dilution de la pâte entrant au module ou comme eau de lavage au niveau du module précédent ou encore comme alimentation pour les évaporateurs.

2.3.3 Les facteurs d'efficacité des laveurs

L'efficacité du lavage a toujours été un domaine d'investigation important pour les chercheurs. Beaucoup d'efforts ont été faits pour la décrire mathématiquement.

Il existe 3 types de facteurs d'efficacité qui seront décrits selon les notations de la figure 2.6 :

1- Des facteurs pour quantifier l'usage de l'eau de lavage : le plus utilisé est le facteur

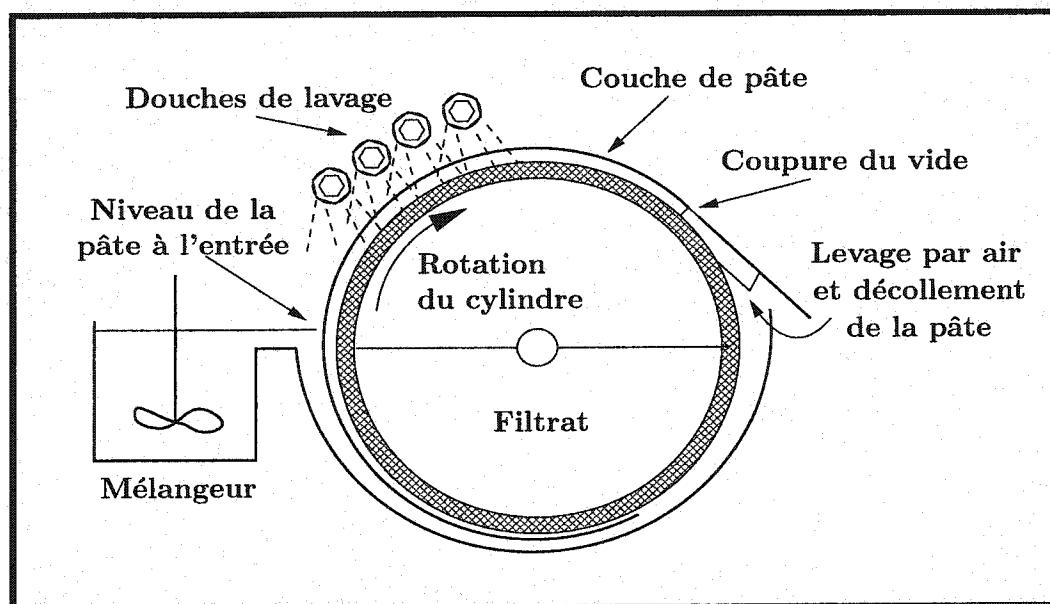


Figure 2.5 – Laveur rotatif à vide

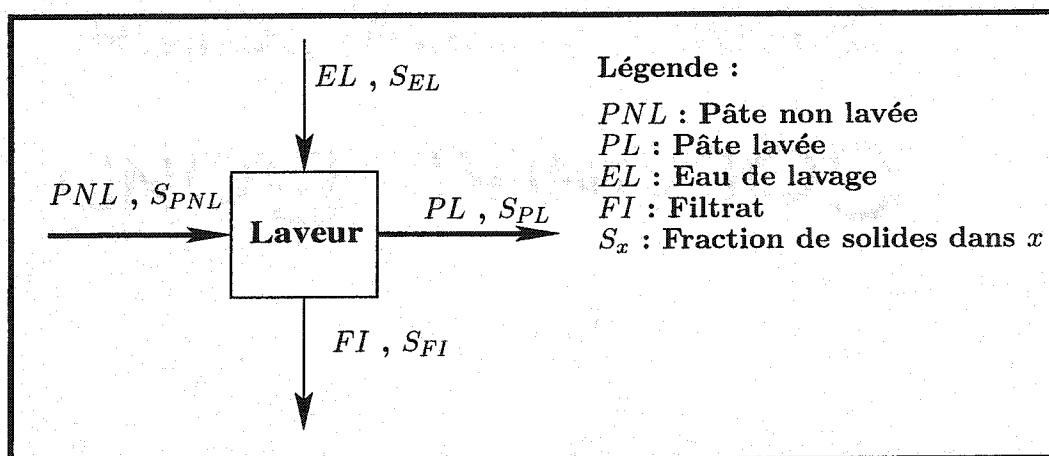


Figure 2.6 – Différents flux dans un module de laveur de pâte à papier

de dilution ou Dilution Factor (DF) qui décrit la quantité d'eau utilisée. Il est le seul facteur défini en terme de masse de pâte lavée comme suit :

$$DF = EL - PL. \quad (2.1)$$

Pour un laveur par déplacement, $DF = 0$ implique que le soluté dans la pâte a été déplacé par un volume égal d'eau de lavage.

2- Des facteurs pour quantifier le degré d'élimination du soluté : le plus commun de ces facteurs est le taux de déplacement ou Displacement Ratio (DR) défini originellement par Perkins et al.[28] comme :

$$DR = \frac{S_{PNL} - S_{PL}}{S_{PNL} - S_{EL}}. \quad (2.2)$$

Le DR est donc défini comme le ratio de la quantité de solides dissous éliminée par le lavage sur celle qui aurait pu être éliminée par un lavage idéal. Il tient donc compte des solides contenus dans l'eau de lavage et est basé sur le principe que la pâte ne peut pas être lavée plus propre que l'eau qui la lave. Le DR mesure à quel point le laveur est proche d'atteindre la même concentration de solides dissous que celle dans l'eau de lavage.

3- Des facteurs pour une caractérisation globale du laveur : Ces facteurs ont été introduits parce que les facteurs précédents ne permettent pas de comparer l'efficacité de systèmes de lavage avec des consistances de pâte différentes à l'entrée et à la sortie. Le facteur d'efficacité Norden (E) est le plus commun de ces facteurs [24]. Il provient de la comparaison de la performance d'un laveur donné avec celle d'un système de lavage idéal composé de plusieurs modules montés en série et à contre-courant. Un système de lavage idéal étant un système où les flux entrants sont parfaitement mélangés et où les flux sortants sont en équilibre. Le facteur d'efficacité Norden est défini comme le nombre de ces modules idéaux nécessaire pour avoir les mêmes flux à la sortie. Le facteur E est calculé pour un module de lavage

selon l'équation suivante :

$$E = \frac{\log\left(\frac{PNL}{PL}\left(\frac{S_{PNL}-S_{FI}}{S_{PL}-S_{EL}}\right)\right)}{\log\left(\frac{EL}{PL}\right)}. \quad (2.3)$$

Ce facteur E dépend de la consistance de la pâte à la sortie. C'est pour cette raison qu'a été introduit un autre facteur : le facteur d'efficacité Norden Modifié (E_{st}). Ce facteur est indépendant de la consistance à la sortie puisqu'il est calculé par rapport à une consistance standard C_{st} (typiquement 12%). Pour un module de lavage E_{st} est défini par l'équation suivante :

$$E_{st} = \frac{\log\left(\frac{PNL}{PL}\left(\frac{S_{PNL}-S_{FI}}{S_{PL}-S_{EL}}\right)\right)}{\log\left(1 + \frac{(EL-PL)C_{st}}{100-C_{st}}\right)}. \quad (2.4)$$

Le facteur E_{st} pour un système de lavage à plusieurs modules est calculé en additionnant les valeurs individuelles relatives à chacun des modules. E_{st} est un concept très simple et très utile. En plus, l'expérience a montré que les facteurs d'efficacité Norden sont très faiblement affectés par le facteur de dilution DF .

CHAPITRE 3

MODÉLISATION DES LAVEURS DE PÂTE

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle des laveurs de pâte à papier que nous avons conçu. La conception de ce modèle a été faite en collaboration avec *Archambaut* [4]. Nous nous intéressons à la modélisation d'un laveur comportant plusieurs modules de lavage montés en contre-courant. La démarche adoptée pour la modélisation des laveurs de pâte à papier est une démarche progressive en trois étapes. Elle consiste tout d'abord à établir un modèle simplifié, à tester par la suite la réalisabilité de ses résultats, pour enfin le rendre plus complexe au fur et à mesure. Le plus grand intérêt de cette démarche est de permettre une meilleure compréhension du comportement du modèle tout en construisant un modèle le plus performant possible. Dans un premier temps, nous présentons les hypothèses et principes que nous avons adoptés pour la modélisation d'un laveur de pâte à papier, pour ensuite détailler les variables, contraintes et fonction objectif de notre modèle. Le but est de construire un modèle qui décrit la réaction d'un laveur à certaines caractéristiques du courant de pâte à laver. L'effet du nombre de modules sur ce modèle sera étudié ultérieurement (voir le chapitre 6).

3.1 Construction du modèle

3.1.1 Schématisation du procédé

Au niveau d'un module de lavage, les différentes étapes du procédé peuvent être schématisées en deux opérations principales que nous décrivons ci-dessous.

- La dilution de la pâte à laver au niveau de l'entrée du module : cette opération de dilution se fait en utilisant une partie du filtrat du même module de lavage. Elle a pour but de réduire la consistance de la pâte pour permettre un meilleur lavage par déplacement.
- La filtration : cette opération regroupe à la fois le lavage par déplacement et la filtration de la pâte. Cette dernière en sort consistance et plus propre. Le filtrat est récupéré et stocké dans un réservoir.

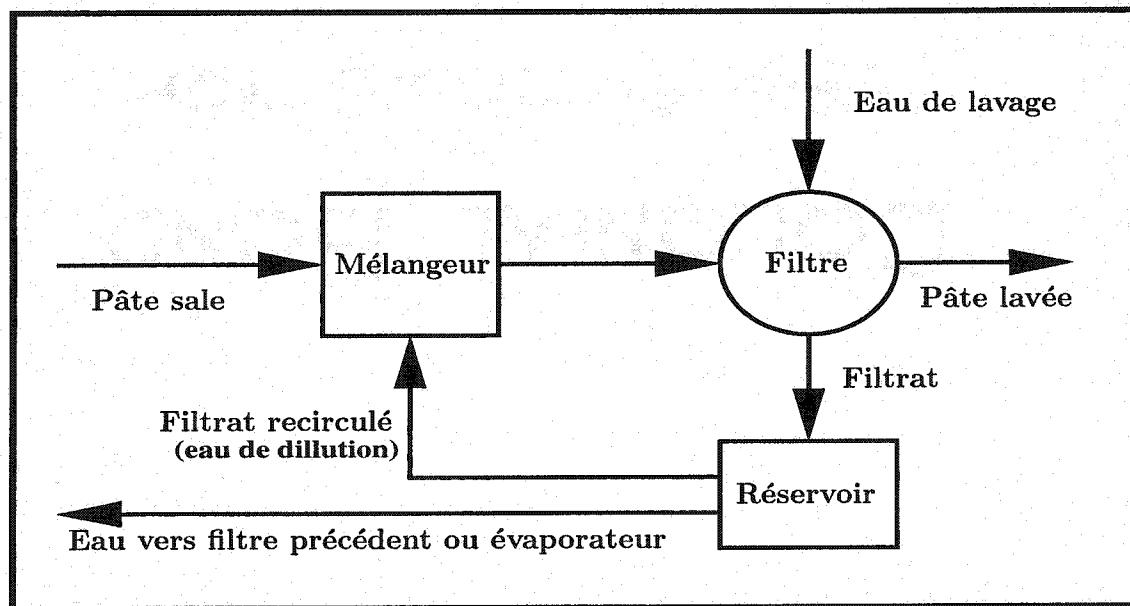


Figure 3.1 – Schématisation d'un module de laveur de pâte à papier

La modélisation du laveur est faite à partir de cette schématisation (voir schéma de la figure 3.1). Un module de lavage comporte trois composantes : un mélangeur, un filtre et un réservoir de récupération du filtrat.

3.1.2 Nature du procédé

Le laveur de pâte à papier est un procédé continu car les courants d'entrée et de sortie sont continus dans le temps. Le choix s'est porté sur l'étude des laveurs opérant en régime permanent (versus transitoire) pour deux raisons. La première est méthodologique puisqu'il est nécessaire d'étudier un système dans son régime permanent en premier lieu. Cette étude sert à comprendre le comportement du système, à le concevoir correctement et sert aussi comme base pour les études dynamiques ultérieures. La deuxième raison est la simplicité relative du modèle comparée à un modèle dynamique où les paramètres varient en fonction du temps introduisant ainsi des équations aux dérivées partielles compliquantes.

Pour les laveurs en régime permanent, les réservoirs de filtrat n'ont aucune raison d'être considérés. En effet, en régime dynamique ces réservoirs influent sur le fonctionnement des laveurs par leur niveau de remplissage variable tandis qu'en régime permanent leur niveau de remplissage reste constant en fonction du temps. Ces réservoirs ont donc été éliminés du modèle des laveurs. La figure 3.2 représente un laveur constitué de trois modules montés à contre-courant dont les réservoirs ont été supprimés. Les réservoirs de filtrat ont été remplacés par une vanne de jonction simple. Au niveau de cette jonction s'effectue une séparation du courant de filtrat en deux courants. Le premier courant sera recirculé dans le même laveur pour diluer la pâte à laver au niveau du mélangeur. Le deuxième courant sera redirigé vers les douches du laveurs précédent (s'il y en a) ou vers l'évaporateur. Pour un laveur,

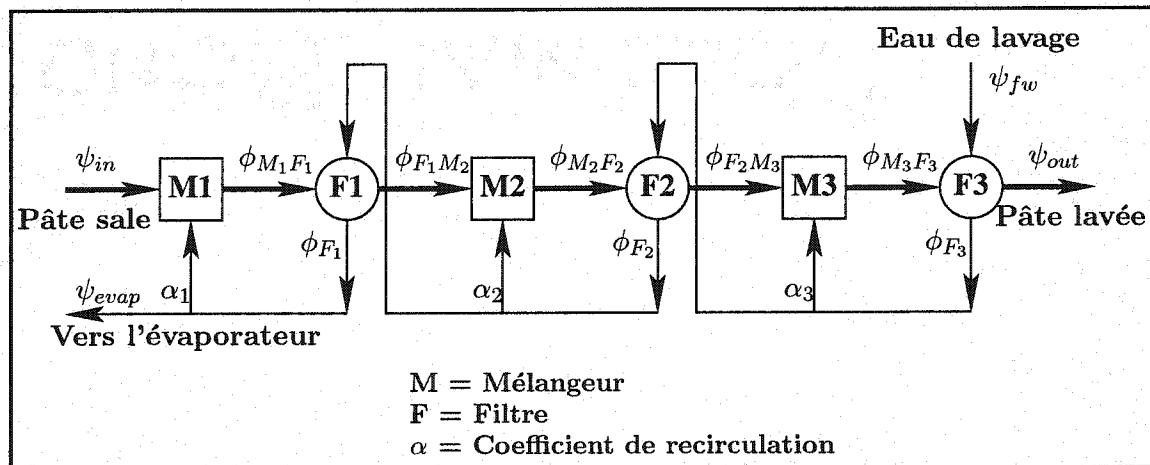


Figure 3.2 – Schéma complet d'un laveur à trois modules montés à contre-courant

le coefficient α de recirculation est le coefficient qui caractérise cette séparation du courant. Il indique le pourcentage du filtrat recirculé au niveau du laveur.

3.2 Modélisation d'un laveur de pâte à papier

3.2.1 Variables du modèle

Le modèle retenu est finalement celui d'un laveur de pâte en régime permanent, composé de plusieurs modules de lavage montés à contre-courant. Chaque module comprend uniquement un filtre et un mélangeur.

Dans ce procédé, il faut caractériser les courants de fluide circulant entre les filtres et mélangeurs et entre le laveur et les autres étapes du procédé kraft. Les matériaux dans un pareil courant peuvent être regroupés en trois composantes prin-

cipales : l'eau, la pâte à papier et les solides dissous (ou soluté). Les solides dissous regroupent tous les produits aussi bien organiques que chimiques contenus dans la pâte et destinés à en être éliminés. Pour chaque courant on définit alors les variables suivantes : le débit du courant et les fractions respectives d'eau, de pâte et de solides dissous dans ce courant. Dans toute la suite, tous les débits seront exprimés en *tonnes/jour* tandis que les fractions sont des nombres adimensionnels.

Dans la suite n désigne le nombre de modules de lavage dans le laveur, M_i désigne le mélangeur du module i et F_i désigne le filtre du module i , avec $i \in \{1, \dots, n\}$. Les différentes variables du modèle peuvent être regroupées comme suit :

Les variables des courants entre les composantes :

ϕ_{C_i, C_j} : débit du courant entre les composantes C_i et C_j ;

f_{C_i, C_j}^p : fraction de pâte dans le courant entre les composantes C_i et C_j ;

f_{C_i, C_j}^s : fraction de solides dissous dans le courant entre les composantes C_i et C_j ;

f_{C_i, C_j}^w : fraction d'eau dans le courant entre les composantes C_i et C_j ;

avec $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Les variables des courants d'entrée :

ψ_{in} : débit du courant de pâte à laver, à l'entrée du laveur ;

f_{in}^p : fraction de pâte dans le courant de pâte à laver ;

f_{in}^s : fraction de solides dissous dans le courant de pâte à laver ;

f_{in}^w : fraction d'eau dans le courant de pâte à laver ;

ψ_{fw} : débit du courant d'eau fraîche au niveau du dernier module de lavage.

Il n'y a pas de variables représentant les fractions dans le courant d'eau fraîche étant donné que l'eau de lavage au niveau du dernier filtre est propre. Il est donc évident que les fractions de solides et de pâte sont nulles alors que la fraction d'eau est égale à 1.

Les variables des courants de sortie :

ψ_{out} : débit du courant de pâte lavée, à la sortie du laveur ;

f_{out}^p : fraction de pâte dans le courant de pâte lavée ;

f_{out}^s : fraction de solides dissous dans le courant de pâte lavée ;

f_{out}^w : fraction d'eau dans le courant de pâte lavée ;

ψ_{evap} : débit du courant de liqueur noire qui va à l'évaporateur.

f_{evap}^p : fraction de pâte dans le courant liqueur noire ;

f_{evap}^s : fraction de solides dissous dans le courant de liqueur noire ;

f_{evap}^w : fraction d'eau dans le courant de liqueur noire.

Réduction du nombre de variables :

Afin de réduire le nombre de variables dans le modèle, considérons :

ϕ_{F_i} : débit du courant de filtrat au niveau du filtre i ,

$f_{F_i}^s$: fraction de solides dissous dans le filtrat au niveau du filtre i ,

$f_{F_i}^p$: fraction de pâte dans le filtrat au niveau du filtre i , où $i \in \{1, \dots, n\}$.

Les variables suivantes pourraient alors être réexprimées en fonction des nouvelles variables :

$$\phi_{F_i, M_i} = \alpha_i \phi_{F_i}, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\phi_{F_i, F_{i-1}} = (1 - \alpha_i) \phi_{F_i}, \quad i \in \{2, \dots, n\}$$

$$\psi_{evap} = (1 - \alpha_1) \phi_{F_1}$$

$$f_{F_i, M_i}^s = f_{F_i}^s, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$f_{F_i, F_{i-1}}^s = f_{F_i}^s, \quad i \in \{2, \dots, n\}$$

$$f_{evap}^s = f_{F_1}^s$$

$$f_{F_i, M_i}^p = f_{F_i}^p, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$f_{F_i, F_{i-1}}^p = f_{F_i}^p, \quad i \in \{2, \dots, n\}$$

$$f_{evap}^p = f_{F_1}^p.$$

3.2.2 Contraintes du modèle

Les contraintes de conservation de la matière sont les contraintes les plus élémentaires à satisfaire par un procédé chimique. Mais à elles seules, ces contraintes sont insuffisantes pour produire un modèle adéquat. En effet, pour les laveurs de pâte à papier, beaucoup de degrés de liberté existent et doivent être fixés. Il faut donc introduire des contraintes pour modéliser l'efficacité de lavage des modules, pour tenir compte des conditions physiques des laveurs et pour considérer les paramètres de fonctionnement de ces derniers.

Contraintes de conservation de la matière

Il y a certaines restrictions imposées par la nature qui doivent être prises en considération lors de la conception d'un procédé. La plus élémentaire de ces restrictions est la loi de conservation de la matière ou de la masse. Elle stipule que la masse totale à l'entrée d'un système est égale à celle à sa sortie. Pour un système continu en régime permanent cette loi se résume à :

$$\text{Entrées} + \text{Générations} = \text{Sorties} + \text{Consommations}$$

Il en découle que pour un système sans réaction chimique comme les laveurs : tout ce qui entre au système en ressort forcément. L'application de cette loi au modèle des laveurs aboutit à un système d'égalités sous la forme suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Conservation du débit} \\ \text{Conservation de la pâte} \\ \text{Conservation du soluté} \\ \text{Conservation de l'eau} \end{array} \right\} \text{au niveau du mélangeur } i \text{ et du filtre } i, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

où n est le nombre de modules dans le laveur.

Il est aussi possible d'écrire les équations de réalisabilité des fractions dans chaque

courant comme :

$$f_j^s + f_j^p + f_j^w = 1, \quad j \in \{1, \dots, m\}$$

où m désigne le nombre de courants dans le modèle.

Ces contraintes de réalisabilité des fractions, comme celles de conservation du débit, ont la particularité d'être linéaires. En les rajoutant au modèle, l'une des autres contraintes de conservation de pâte, d'eau ou des solides, devient redondante. Ces dernières étant bilinéaires, l'une d'elles peut être éliminée pour alléger le modèle. Nous avons choisi d'éliminer les équations de conservation de l'eau puisque les fractions d'eau sont moins caractéristiques du fonctionnement des laveurs que les fractions de pâte et de solides dissous. Il en résulte alors les deux systèmes de contraintes suivants :

$$(S_1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Conservation du débit} \\ \text{Conservation de la pâte} \\ \text{Conservation du soluté} \end{array} \right\} \text{au niveau de } M_i \text{ et de } F_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

$$(S_2) \quad f_j^s + f_j^p + f_j^w = 1 \quad \left. \right\} \text{dans tous les courants du laveur, } j \in \{1, \dots, m\}$$

La mise en équation des systèmes précédents aboutit à des équations sous la forme suivante :

S_1 : PREMIER MÉLANGEUR

$$\text{(Global)} \quad \phi_{M_1, F_1} - \alpha_1 \phi_{F_1} = \psi_{in} \quad (3.1)$$

$$\text{(Solides)} \quad \phi_{M_1, F_1} f_{M_1, F_1}^s - \alpha_1 \phi_{F_1} f_{F_1}^s = \psi_{in} f_{in}^s \quad (3.2)$$

$$\text{(Pâte)} \quad \phi_{M_1, F_1} f_{M_1, F_1}^p - \alpha_1 \phi_{F_1} f_{F_1}^p = \psi_{in} f_{in}^p \quad (3.3)$$

FILTRE i , $i \in \{1, \dots, n-1\}$

$$(\text{Global}) \phi_{M_i, F_i} + (1 - \alpha_{i+1})\phi_{F_{i+1}} - \phi_{F_i} - \phi_{F_i, M_{i+1}} = 0 \quad (3.4)$$

$$(\text{Solides}) \phi_{M_i, F_i} f_{M_i, F_i}^s + (1 - \alpha_{i+1})\phi_{F_{i+1}} f_{F_{i+1}}^s - \phi_{F_i} f_{F_i}^s - \phi_{F_i, M_{i+1}} f_{F_i, M_{i+1}}^s = 0 \quad (3.5)$$

$$(\text{Pâte}) \phi_{M_i, F_i} f_{M_i, F_i}^p + (1 - \alpha_{i+1})\phi_{F_{i+1}} f_{F_{i+1}}^p - \phi_{F_i} f_{F_i}^p - \phi_{F_i, M_{i+1}} f_{F_i, M_{i+1}}^p = 0 \quad (3.6)$$

MÉLANGEUR i , $i \in \{2, \dots, n\}$

$$(\text{Global}) \phi_{F_{i-1}, M_i} + \alpha_i \phi_{F_i} - \phi_{M_i, F_i} = 0 \quad (3.7)$$

$$(\text{Solides}) \phi_{F_{i-1}, M_i} f_{F_{i-1}, M_i}^s + \alpha_i \phi_{F_i} f_{F_i}^s - \phi_{M_i, F_i} f_{M_i, F_i}^s = 0 \quad (3.8)$$

$$(\text{Pâte}) \phi_{F_{i-1}, M_i} f_{F_{i-1}, M_i}^p + \alpha_i \phi_{F_i} f_{F_i}^p - \phi_{M_i, F_i} f_{M_i, F_i}^p = 0 \quad (3.9)$$

DERNIER FILTRE

$$(\text{Global}) \phi_{M_n, F_n} + \psi_{fw} - \phi_{F_n} - \psi_{out} = 0 \quad (3.10)$$

$$(\text{Solides}) \phi_{M_n, F_n} f_{M_n, F_n}^s - \phi_{F_n} f_{F_n}^s - \psi_{out} f_{out}^s = 0 \quad (3.11)$$

$$(\text{Pâte}) \phi_{M_n, F_n} f_{M_n, F_n}^p - \phi_{F_n} f_{F_n}^p - \psi_{out} f_{out}^p = 0 \quad (3.12)$$

S_2 : RÉALISABILITÉ DES FRACTIONS

$$f_{F_i}^p + f_{F_i}^s + f_{F_i}^w = 1; i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.13)$$

$$f_{C_i, C_j}^p + f_{C_i, C_j}^s + f_{C_i, C_j}^w = 1; i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (3.14)$$

$$f_{out}^p + f_{out}^s + f_{out}^w = 1 \quad (3.15)$$

où α_i est le coefficient de recirculation du module i , $i \in \{1, \dots, n\}$.

Contraintes d'efficacité des modules de lavage

Les principaux facteurs influençant le compromis désiré entre la propreté de la pâte et la quantité d'eau à utiliser, sont l'équipement utilisé et le degré d'efficacité lors de son utilisation. Pour en tenir compte dans le modèle, il faut introduire des contraintes pour quantifier l'efficacité du lavage et pour forcer les filtres à opérer de façon réaliste.

La limitation de l'efficacité du lavage représente le fait que la filtration n'est pas parfaite au niveau de l'un des filtres (par l'élimination de tous les solides d'un seul coup par exemple).

Les facteurs pour quantifier l'usage de l'eau tel que le facteur de dilution (DF) n'ont pas été utilisés vu qu'ils ne permettent pas de quantifier le degré d'élimination du soluté et dépendent trop des conditions opératoires. Les facteurs d'efficacité Norden, quant à eux, introduiraient des non-linéarités au modèle mathématique vu la nature des équations les définissant. Au contraire, le taux de déplacement (DR) permet de caractériser les performances des modules de lavage sur de grands intervalles de débits d'eau fraîche et de débits de production [37]. Le choix s'est donc porté sur l'introduction de contraintes sur le taux de déplacement (DR) au niveau des filtres. Ces contraintes sont les suivantes :

$$\begin{cases} \underline{DR}_i \leq DR_i & i \in \{1, \dots, n\} \\ DR_i \leq \overline{DR}_i \end{cases}$$

où \underline{DR}_i est une borne inférieure sur le DR du i^{e} module et \overline{DR}_i est une borne supérieure. Les équations correspondant à ces contraintes sont alors :

MODULE 1

$$\overline{DR}_1 f_{F_2}^s - f_{F_1, M_2}^s \leq (\overline{DR}_1 - 1) f_{in}^s \quad (3.16)$$

$$-\underline{DR}_1 f_{F_2}^s + f_{F_1, M_2}^s \leq (1 - \underline{DR}_1) f_{in}^s \quad (3.17)$$

MODULE i

$$(1 - \overline{DR}_i) f_{F_{i-1}, M_i}^s + \overline{DR}_i f_{F_{i+1}}^s - f_{F_i, M_{i+1}}^s \leq 0 \quad (3.18)$$

$$(\underline{DR}_i - 1) f_{F_{i-1}, M_i}^s - \overline{DR}_i f_{F_{i+1}}^s + f_{F_i, M_{i+1}}^s \leq 0 \quad (3.19)$$

MODULE *n*

$$(1 - \overline{DR}_n) f_{F_{n-1}, M_n}^s - f_{out}^s \leq 0 \quad (3.20)$$

$$(\overline{DR}_n - 1) f_{F_{n-1}, M_n}^s + f_{out}^s \leq 0 \quad (3.21)$$

3.2.3 Bornes sur les variables

Le débit de l'eau fraîche au niveau des laveurs est souvent manipulé pour satisfaire deux objectifs : (a) le contrôle des pertes de solides au niveau de la pâte lavée ou (b) le contrôle de la demande en liqueur noire au niveau des évaporateurs [37]. L'opération de lavage est donc contrainte par la capacité d'évaporation et par les limites des pertes en solides. Ceci justifie l'introduction dans le modèle de contraintes imposant un certain pourcentage R de récupération des solides dissous. Ce taux impose au système la récupération d'un pourcentage des produits chimiques contenus dans le courant initial de la pâte à laver. Ces contraintes se formulent alors comme :

$$\begin{cases} R \times S(\text{Pâte sale}) \leq S(\text{Filtrat}) \\ S(\text{Pâte lavée}) \leq (100 - R) \times S(\text{Pâte sale}) \end{cases}$$

où S désigne la quantité de solides.

Les équations correspondant à ces bornes sont alors :

$$\psi_{out} f_{out}^s \leq (1 - R) \psi_{in} f_{in}^s \quad (3.22)$$

$$-(1 - \alpha_1) \phi_{F_1} f_{F_1}^s \leq -R \psi_{in} f_{in}^s. \quad (3.23)$$

À ce stade de la modélisation, le modèle n'est toujours pas adéquat. Ceci est dû à l'existence de degrés de liberté supplémentaires qu'il faut fixer au moyen de bornes sur les variables du modèle.

- 1- Le modèle a tendance à prédire un lavage ayant des consistances de pâte atteignant les 80%. Dans de pareilles conditions la circulation physique des courants dans le laveur est impossible. Des bornes sur les fractions de pâte ont alors été rajoutées. Ces bornes sont de l'ordre de 12% à 15% pour la pâte à la sortie des filtres et de 1% à 2% pour la pâte à la sortie des mélangeurs.
- 2- Le modèle a tendance à prédire un lavage de la pâte en utilisant peu d'eau. Ceci provient du fait que la quasi-totalité du filtrat est recirculée pour diluer la pâte au niveau des mélangeurs. Pour remédier à ceci, il a fallu fixer les coefficients de recirculation. En pratique, les valeurs de ces derniers sont de l'ordre de 85%.
- 3- Le modèle aboutit à des résultats où les pertes de pâte au niveau des filtres sont nulles. En réalité ces pertes sont minimes mais existantes. Les fractions de pâte au niveau du filtrat ont été alors fixées à une consistance de 0.1%.

3.3 Modèle mathématique des laveurs

Dans ce qui suit seront présentés la fonction objectif du programme mathématique des laveurs ainsi que les caractéristiques de ce derniers. Le programme mathématique complet modélisant un laveur de pâte à papier comprenant 3 modules de lavage est présenté à l'Annexe A.

3.3.1 Fonction objectif

L'objectif principal de l'étape de lavage est d'éliminer le maximum d'impuretés solubles de la pâte. En effet, les produits chimiques qui persistent dans la pâte après l'étape de lavage sont des produits indésirables pour deux raisons. La première raison est que ce sont des produits non récupérés et donc perdus qu'il faut remplacer au

niveau du lessiveur. La deuxième raison est que la présence de produits chimiques dans la pâte lavée peut engendrer une contamination de l'étape suivante qui est celle de blanchiment. Cette dernière est plus difficile et plus coûteuse en présence de produits chimiques mélangés aux fibres de cellulose. Ces produits chimiques qui persistent après l'étape de lavage entraînent une augmentation de la consommation des agents chimiques de blanchiment et augmentent la production de dioxines et de certains composés organiques.

Un autre objectif de l'étape de lavage de la pâte est celui d'utiliser le minimum d'eau possible. Avec des ressources illimitées de temps et d'eau propre, il est possible d'éliminer de la pâte toutes les impuretés non organiques et quasiment tous les matériaux solubles. Toutefois, le temps et la quantité d'eau sont toujours limités et l'eau n'est pas toujours propre. Si on suppose qu'il n'existe pas de contraintes sur la capacité de l'évaporateur et sur la propreté de la pâte, il existe alors un point opérationnel optimum qui correspond à une valeur donnée du débit d'eau fraîche [37]. Ce point est principalement déterminé en minimisant les coûts relatifs des produits chimiques de traitement du bois et de blanchiment et ceux d'évaporation.

En résumé, d'un point de vue environnemental, il faut réduire la quantité d'eau utilisée et réduire les rejets de produits chimiques dans la nature. Du point de vue coût opératoire, il faut réduire la quantité de produits chimiques perdus puisque ce sont des quantités qu'il faudra remplacer et qui engendreront des coûts opératoires supplémentaires au cours des étapes ultérieures du procédé. Il découle que le lavage de la pâte à papier doit être le résultat d'un compromis entre la propreté de la pâte et la quantité d'eau à utiliser. On se propose alors de construire un problème d'optimisation avec l'objectif suivant :

$$\text{Minimiser} \quad \omega_1 \times \psi_{fw} + \omega_2 \times f_{out}^s \quad (3.24)$$

où ω_1 et ω_2 sont des poids à manipuler.

3.3.2 Seconde version du modèle

Dans le but de réduire considérablement le nombre de termes quadratiques présents dans le modèle nous avons opéré un changement de variables. Étant donné que tous les termes quadratiques du modèle sont des produits de variables, le changement de variable effectué consiste à remplacer chacun de ces termes bilinéaires par une variable unique. Les contraintes du modèle ont été modifiées de façon à tenir compte de ce changement de variables. Certaines contraintes ont été rajoutées pour assurer l'équivalence entre la seconde et la première version du modèle. À titre d'exemple la contrainte bilinéaire 3.8 a été remplacée par la contrainte linéaire suivante :

$$\phi f_{F_{i-1}, M_i}^s + \alpha_i \phi f_{F_i}^s - \phi f_{M_i, F_i}^s = 0 \quad (3.25)$$

L'application de ce changement de variables au modèle des laveurs de pâte à papier permet d'obtenir une seconde version de ce dernier. La particularité de cette dernière est que les variables représentant les débits dans les courants des laveurs sont gardées intactes alors que la majorité des variables représentants les fractions disparaissent. Seules les variables représentants les fractions de solides et qui interviennent dans les contraintes de l'efficacité sont encore présentes dans le modèle et plus particulièrement dans les termes bilinéaires.

Si on considère N_m comme le nombre de modules de lavage dans le laveur, le résultat du changement de variables effectué est alors la réduction du nombre des termes bilinéaires de $6N_m$ à $2N_m - 1$ et du nombre des variables impliquées dans des termes bilinéaires de $9N_m$ à $4N_m - 2$. Notons que dans toute la suite N_m désigne le nombre de modules de lavage dans le laveur.

Une version du même modèle de l'annexe A, auquel est appliqué le changement de variable ci-dessus expliqué, est présentée à l'annexe B.

3.3.3 Particularité du modèle mathématique

Le programme mathématique auquel conduit la modélisation est un problème dont les caractéristiques sont décrites ci-dessous.

- Il est non-convexe car les contraintes d'égalité ne sont ni linéaires ni affines et les contraintes d'inégalité ne sont pas convexes. Un problème mathématique est convexe si son domaine réalisable est défini par un ensemble de contraintes parmi lesquels les contraintes d'inégalité sont convexes et les contraintes d'égalité sont linéaires ou affines, sa fonction objectif doit aussi être convexe sur son domaine.
- Il est bilinéaire étant donné la présence de termes bilinéaires impliquant les produits d'une fraction par un débit. Un problème bilinéaire est un problème qui est défini pour deux groupes de variables, qui fait intervenir des produits de variables et qui devient linéaire lorsque les valeurs de l'un des deux groupes de variables sont fixées.
- Il contient une majorité de contraintes d'égalité. En effet, mis à part les contraintes sur les efficacités de lavage et celles sur la récupération de produits chimiques, toutes les autres sont des contraintes d'égalité.
- Il contient $14N_m$ variables, $16N_m + 1$ contraintes et $2N_m - 1$ termes bilinéaires qui impliquent $4N_m - 2$ variables.

On aboutit donc à un problème non-convexe avec contraintes bilinéaires. Ce problème d'optimisation est extrêmement difficile. Il peut s'écrire sous sa forme générée

rale comme :

$$(BIL) \quad \begin{aligned} & \min_{x,u} \quad c^0 t x - u^t Q^0 x + u^t d^0 \\ & \text{s.c.} \quad c^j t x - u^t Q^j x + u^t d^j \leq b_j \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

où $x, c^j \in \mathbb{R}^{n_x}$; $d^j, u \in \mathbb{R}^{n_u}$; $b \in \mathbb{R}^m$; $Q^j \in M_{n_u \times n_x}$ pour $j \in \{0, 1, \dots, m\}$.

Le problème *BIL* est un cas particulier du problème encore plus général qui est le problème de programmation quadratique non convexe avec contraintes quadratique *QQP* Audet et al. [5].

Dans le chapitre 5, est détaillé un algorithme d'énumération implicite jumelée à des coupes valides sur tout le domaine réalisable, pour la résolution des problèmes du type *QQP*. Cet algorithme nommé algorithme de linéarisation, est basé sur une méthode d'approximations linéaires successives des termes quadratiques. L'algorithme de linéarisation sera utilisé pour l'optimisation du fonctionnement des laveurs de pâte à papier.

CHAPITRE 4

LE CONTRÔLE DE PROCÉDÉS

Dans ce chapitre nous voyons les principales notions reliées au contrôle et à la contrôlabilité des procédés. Nous exposant ensuite les principaux indices qui permettent de caractériser la contrôlabilité. Dans une dernière partie nous traitons les aspects contrôle et contrôlabilité des laveurs de pâte à papier.

4.1 Différents aspects du contrôle de procédés

4.1.1 Définition du contrôle de procédés

L'intérêt grandissant pour le contrôle des procédés industriels est motivé par le désir de s'assurer que le point de fonctionnement du procédé reste le plus proche possible de son point optimal. Il est évident qu'un procédé bien conçu peut garantir des performances optimales en terme de profit économique, de sécurité du procédé et de minimisation des erreurs de fonctionnement en régime dynamique.

Le contrôle de procédés, tel que défini par *Ogunnaike et Ray* [25], est l'aspect de l'ingénierie qui s'intéresse à l'analyse, la conception et l'implantation de systèmes de contrôle pour faciliter l'atteinte des objectifs spécifiés de sécurité du procédé, de taux de production et de qualité des produits.

4.1.2 Variables de contrôle

Nature des variables

Les variables de procédé peuvent être regroupées comme suit. [25] :

- 1- Les *variables d'entrée* qui sont capables de stimuler le système et d'induire ainsi un changement dans les conditions opératoires internes du procédé. Une distinction peut être faite entre celles dites *variables manipulées* (dont les valeurs peuvent être fixées) et d'autres qualifiées de *perturbations* (sur les valeurs desquelles il n'y a aucun pouvoir de décision).
- 2- Les *variables de sortie* par l'intermédiaire desquelles il est possible de caractériser les conditions internes d'un système. On désigne par variables d'état l'ensemble minimal de variables nécessaire pour la description complète de l'état interne du système. Concrètement une variable de sortie est la mesure d'une ou de plusieurs variables d'états. Ces variables sont aussi appelées *variables contrôlées*.

Nombre des variables

Les procédés ayant une seule variable de sortie contrôlée par une seule variable manipulée sont classifiés comme des systèmes du type *SISO* (“Single-Input Single-Output”). Toutefois, dans un procédé industriel, il est évident que toute unité capable de produire ou de raffiner un produit ne peut être contrôlée par une seule boucle de contrôle : il faut au moins contrôler le taux de production et la qualité du produit. Il existe au moins deux boucles de contrôle à prendre en considération. Les procédés avec plus d'une boucle de contrôle sont classifiés comme des systèmes du type *MIMO* (“Multi-Input Multi-Output”) ou encore comme des systèmes *multivariables*.

4.1.3 Configurations des systèmes de contrôle

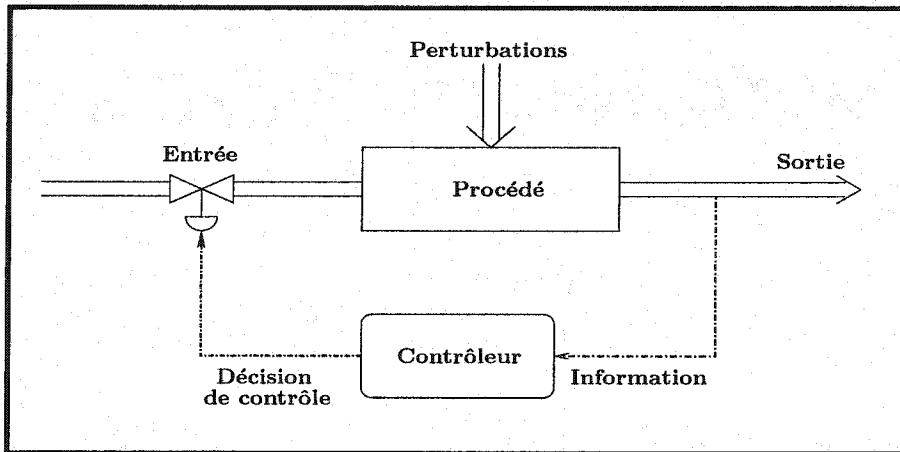


Figure 4.1 – Contrôle par rétroaction

Un système de contrôle est l'entité responsable de surveiller les variables de sorties, de prendre une décision relative à la manipulation des variables d'entrée et d'exécuter cette décision. On désigne par configuration d'un système de contrôle la structure connectant les variables manipulées avec celles contrôlées. Ces systèmes peuvent être configurés pour :

- un contrôle en *boucle fermée*, où le contrôleur agit sur les variables manipulées en fonction des informations recueillies au niveau des variables contrôlées en sortie. Cette configuration représentée à la figure 4.1 est la plus répandue. Elle est appelée aussi contrôle par *rétroaction* puisque le contrôleur agit sur le système et reçoit une information en retour qu'il utilise pour réajuster ses décisions de contrôle.
- un contrôle en *boucle ouverte*, où le contrôleur agit sur les variables manipulées sans avoir d'informations en retour. Le contrôleur ajuste ainsi les variables manipulées avant que le procédé ne soit affecté par les perturbations (par des mesures

anticipatives des perturbations), ou directement selon une stratégie préétablie. Dans les deux cas le contrôleur ne reçoit pas d'information en retour.

Une autre classification des configurations de contrôle pourrait se faire selon la structure adoptée pour le contrôleur. Ce dernier peut être décomposé en plusieurs ensembles de contrôleurs locaux avec des liens et des séquences prédéterminées. Les contrôleurs décentralisés et les contrôleurs en cascade sont les structures les plus communes. Le contrôle décentralisé implique une décomposition du système complet en plusieurs sous-systèmes interagissant l'un avec l'autre et muni chacun d'un contrôleur indépendant. Une telle décomposition du problème de contrôle est préférable en raison de sa robustesse et de la facilité de son réglage, comparativement aux contrôleurs dits centralisés.

4.2 Conception des systèmes de contrôle

4.2.1 Modèle mathématique des systèmes multivariables

Lors de la conception des stratégies de contrôle, le procédé doit tout d'abord être modélisé analytiquement (à l'aide d'un modèle mathématique comportant des équations différentielles) ou bien empiriquement (en ajustant des données expérimentales à une structure supposée du procédé). Pour les procédés existants, la deuxième méthode est généralement utilisée. Ceci revient à considérer le système comme un ensemble de boîtes noires et à décrire la relation entre les entrées et sorties au niveau de ces boîtes par des fonctions, appelées *fonctions de transfert*.

Pour des systèmes multivariables, plusieurs structures existent (se référer à Patel

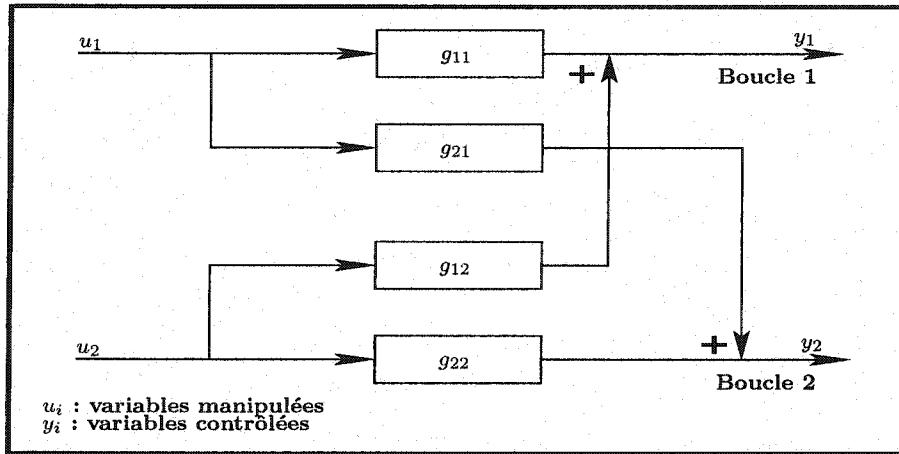


Figure 4.2 – Structure d'un modèle multivariable (2×2)

et Munro [27] ou encore à O'Reilly [26]). La P-canonique est typique des systèmes de contrôle par rétroaction et en boucle fermée. Cette dernière est celle considérée dans ce travail. La figure 4.2 représente la structure P-canonique pour un système (2×2) .

Dans le diagramme en blocs de la figure 4.2, g_{11} (resp. g_{22}) décrit la réponse de y_1 (resp. y_2) après un changement dans u_1 (resp. u_2). Par contre, g_{12} et g_{21} modélisent les effets des interactions entre les deux boucles de contrôle : g_{12} (resp. g_{21}) décrit la réponse de y_1 (resp. y_2) après un changement dans u_2 (resp. u_1). À l'aide des fonctions de transfert, les variables contrôlées sont alors reliées aux variables manipulées par les équations suivantes :

$$y_1 = g_{11} u_1 + g_{12} u_2. \quad (4.1)$$

$$y_2 = g_{21} u_1 + g_{22} u_2. \quad (4.2)$$

Les équations 4.1 et 4.2 peuvent se reformuler sous une forme matricielle comme :

$$V_c = GV_m \quad (4.3)$$

où $V_c = [y_1, y_2]^T$; $V_m = [u_1, u_2]^T$ et $G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$ (matrice des fonctions de transfert).

4.2.2 Méthodologie

Selon *Balchen et Mumme* [9], la conception des systèmes de contrôle peut être subdivisée en quatre étapes :

- **Étape 1** : Sélection des variables contrôlées. Cette sélection est généralement intuitive ou inspirée par l'expérience. Il est toutefois nécessaire de fixer des valeurs de référence pour ces variables à contrôler et de les choisir de façon à minimiser leur corrélation et leur sensibilité aux perturbations.
- **Étape 2** : Sélection des variables manipulées, fixer leur nombre et la localisation des mesures à faire.
- **Étape 3** : Sélection de la configuration de contrôle à adopter. À ce niveau intervient l'étape de couplage (ou d'association) entre les variables manipulées et celles contrôlées.
- **Étape 4** : Sélection du type de contrôleur à utiliser.

4.2.3 Exemple de procédé

Afin d'illustrer les concepts présentés ci-haut, considérons le procédé chimique simple suivant : un réacteur chimique continu et parfaitement agité (CSTR : Continuous Stirred Tank Reactor). Le CSTR, présenté à la figure 4.3, est utilisé pour

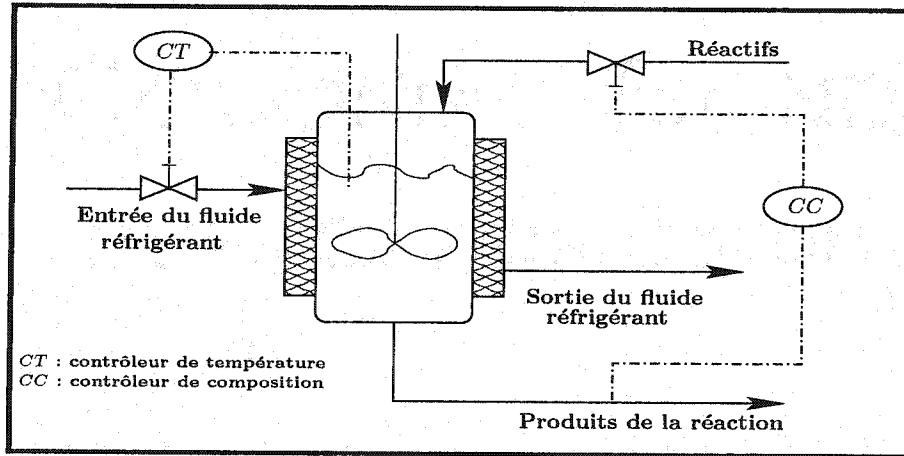


Figure 4.3 – Schéma de contrôle élémentaire pour le CSTR

convertir un réactif (A) en un produit (B). La réaction est du premier ordre ($A \rightarrow B$), en phase liquide et exothermique. Une chemise de refroidissement entoure le réservoir pour évacuer la chaleur de la réaction.

Dans ce type de procédé, il est d'usage de s'intéresser au contrôle de la composition du produit (y_1) et de la température de la masse en réaction (y_2). Les variables pouvant être manipulées sont le débit des réactifs (u_1) et le débit du liquide réfrigérant dans la chemise de refroidissement (u_2). Il est aussi d'usage d'adopter des contrôleurs en boucle fermée. Il y aura donc une boucle de contrôle de la composition (u_1, y_1) ainsi qu'une autre pour le contrôle de la température (u_2, y_2). Une question à éclaircir alors est celle de savoir quelle variable manipulée utiliser pour contrôler l'une ou l'autre des variables contrôlées ? C'est le problème de *couplage des variables*. Pour le CSTR le choix évident est de contrôler la composition par le débit des réactifs et de contrôler la température en ajoutant (ou retirant) de l'énergie à travers le liquide réfrigérant.

Le système de contrôle configuré de cette manière est sujet au phénomène *d'interaction des boucles de contrôle*. En effet, la manipulation du débit des réactifs change aussi la température du milieu réactif. L'ajout ou le retrait de chaleur influence aussi le taux de réaction et donc la composition du produit. Chaque boucle de contrôle doit ainsi "connaître" ce que fait l'autre pour que l'une n'influence pas négativement le fonctionnement de l'autre. Ce phénomène est présent dans plusieurs procédés et doit être pris en considération lors du développement des stratégies de contrôle.

4.3 Contrôlabilité d'un procédé

La contrôlabilité, tel que définie par *Skogestad et Wolff* [34], est la capacité d'un procédé à réaliser la performance voulue en utilisant les variables manipulées disponibles, tout en tenant compte des différentes limitations sur les opérations du procédé, des perturbations extérieures et des incertitudes sur les paramètres de conception.

La contrôlabilité décrit alors la capacité de contrôler un procédé et quantifie les propriétés de contrôle qui y sont inhérentes. En effet, si un procédé a une faible contrôlabilité, alors les performances de contrôle seront faibles quel que soit le choix du contrôleur et quelle que soit la méthode de contrôle à utiliser.

Les méthodes d'évaluation de la contrôlabilité peuvent être catégorisées en trois types selon le modèle utilisé [18] : modèle en régime permanent, modèle dynamique linéaire et modèle dynamique non-linéaire. Certains auteurs, comme *Meeuse et Toussaint* [20], se sont intéressés à l'étude des modèles dynamiques en appliquant la modéli-

sation multi-objectifs ou l'optimisation économique en boucle fermée. Toutefois, la plupart des études de contrôlabilité se sont intéressées aux modèles en régime permanent. Pour ces derniers, plusieurs indices et méthodes de contrôlabilité sont utilisés mais les plus populaires et plus utilisés demeurent la *matrice de gain relatif* et l'*indice Niederlinski* (décris à la section 4.5).

4.4 Propriétés des systèmes de contrôle

Dans un système multivariable, l'interaction des boucles de contrôle peut engendrer l'instabilité du système, ou au moins de faibles performances de contrôle. Pour concevoir un système de contrôle, trois propriétés sont fondamentales : l'interaction entre les variables, l'intégrité du système de contrôle et sa stabilité.

Interaction des boucles de contrôle

Comme montré dans l'exemple de la section 4.2.3, les boucles de contrôle dans un système multivariable ne peuvent opérer l'une indépendamment de l'autre sans interaction. La volonté de l'industrie a toujours été de contrôler ce type de systèmes comme s'ils étaient composés de procédés dont les variables sont isolées. Sauf qu'en réalité les boucles de contrôle résultantes interagissaient toujours. Une mesure de cette interaction a pour but de quantifier à quel point la fonction de transfert reliant une paire de variables contrôlées/manipulées, est affectée par le contrôle complet des autres variables de sortie.

Stabilité des systèmes de contrôle

La stabilité décrit la réaction du système à une perturbation de son régime permanent (variation finie de l'une des variables d'entrée). Un système stable a

la capacité de retrouver rapidement un régime permanent tandis qu'un système instable propage la perturbation indéfiniment [25].

L'hypothèse fondamentale du contrôle des procédés est que la réponse naturelle d'un procédé peut être modifiée sous l'influence d'un contrôleur. L'objectif serait de concevoir et implanter ce contrôleur de façon à modifier la réponse du procédé dans le sens désiré. De là découle la nécessité d'avoir des contrôleurs assurant une bonne stabilité des systèmes contrôlés.

Intégrité des systèmes de contrôle

Un système de contrôle est dit intègre s'il est fiable et si la probabilité de défaillance de ses boucles de contrôle est très faible. La stabilité et l'intégrité de ces systèmes ne sont pas nécessairement reliées puisqu'un système peut maintenir une bonne stabilité tout en ayant des problèmes d'intégrité (boucles de contrôle défaillantes) et vice versa [40]. Ce que l'on cherche à assurer par la conception de systèmes de contrôle intègres est la stabilité du système au cas où l'une de ses boucles de contrôle est défaillante [42].

4.5 Les indices de contrôlabilité

4.5.1 La matrice de gain relatif (*RGA*)

Calcul de la matrice *RGA*

Depuis qu'elle a été introduite par *Bristol* [10], la technique de la *matrice de gain relatif* ("Relative Gain Array" ou *RGA*), est devenue un outil incontournable pour le couplage des variables et pour la prédition des réponses des systèmes de

contrôle. *Bristol* a suggéré que les différents gains en boucle ouverte, pour le système en régime permanent, soient évalués à deux reprises : une première fois avec toutes les boucles de contrôle ouvertes puis une deuxième fois avec toutes les autres boucles fermées et toutes les variables contrôlées maintenues à leurs valeurs optimales [19].

Le quotient de ces deux gains est un scalaire sans dimension noté λ_{ij} . Ce dernier est défini comme le gain relatif d'une variable contrôlée y_i par rapport à une variable manipulée u_j et représente l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice RGA , tel que :

$$\lambda_{ij} = \frac{(\partial y_i / \partial u_j)_{B.Ouverte}}{(\partial y_i / \partial u_j)_{B.Fermée}}. \quad (4.4)$$

La matrice RGA est définie pour un système de contrôle carré (même nombre de variables manipulées et contrôlées) et qui est en régime permanent. Si, pour un pareil système, on dispose de la matrice des gains en régime permanent (K) du procédé à contrôler, alors la matrice RGA s'écrit comme [19] :

$$\Lambda = K . * K^{-1T} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

où $.*$ représente l'opérateur de multiplication élément par élément des matrices (multiplication de Schur) et K donnée par :

$$K(y, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial u_1} & \frac{\partial y_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial u_1} & \frac{\partial y_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Il est à remarquer que K n'est qu'un cas particulier de la matrice des fonctions de transfert G présentées à la section 4.2.1.

Propriétés de la matrice RGA

- La somme de chacune des colonnes et des lignes de Λ est égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} = 1, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.7)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} = 1, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.8)$$

- Les éléments de Λ sont des scalaires sans dimension. Contrairement à la matrice des gains, Λ ne dépend pas de la mise à l'échelle.
- Toute permutation des lignes ou colonnes de K , induit la même permutation dans Λ .

Interprétation de la matrice RGA

La matrice RGA correspond à un couplage diagonal des variables contrôlées et manipulées. Ceci revient à dire que la variable manipulée correspondant à la $i^{\text{ème}}$ colonne de Λ est couplée à la variable contrôlée correspondant à la $i^{\text{ème}}$ ligne de cette même matrice. Les conclusions sur les interactions entre les boucles de contrôle, pour un couplage donné des variables contrôlées et manipulées, se font à travers les éléments diagonaux de Λ :

- Si $\lambda_{ii} = 1$, il n'y a pas d'interaction entre la $i^{\text{ème}}$ boucle de contrôle et les autres boucles. Le couplage est alors parfait.
- Si $\lambda_{ii} = 0$, la variable manipulée u_i n'a aucun effet sur la variable contrôlée y_i . Ce type de couplage n'a évidemment aucun intérêt.
- $\lambda_{ii} < 0$, la $i^{\text{ème}}$ boucle fermée a un effet inverse à celui de cette même boucle ouverte. Ceci a pour effet d'entraîner le système de contrôle dans une direction inverse de celle désirée et influe donc sur son intégrité (voir le point 8 ci-dessous).

4. Si $\lambda_{ii} = 0.5$, il y a une grande interaction entre les boucles de contrôle : par rapport à la sortie i , la $i^{\text{ème}}$ boucle a le même effet que toutes les autres boucles réunies.
5. $0 < \lambda_{ii} < 0.5$, la $i^{\text{ème}}$ boucle a moins d'effet sur la sortie i que toutes les autres réunies. Cette situation est à éviter.
6. $0.5 < \lambda_{ii} < 1$, il y a une interaction entre les boucles de contrôle mais la $i^{\text{ème}}$ boucle a plus d'effet sur la sortie i que toutes les autres réunies. Ceci serait le couplage préférable puisqu'il la minimise.
7. $\lambda_{ii} > 1$, le gain en boucle ouverte est alors plus grand que le gain en boucle fermée. Ceci signifie que la sensibilité des variables contrôlées diminue à cause des interactions des autres boucles. Plus la valeur de λ_{ii} est grande, plus le gain du contrôleur à utiliser est grand. Pour ce cas de figure, il faut donc que la valeur de λ_{ii} soit la plus petite possible (en étant le plus près de 1).
8. Un système de contrôle décentralisé stable, dont les boucles de contrôle sont individuellement stables, possède l'intégrité contre la défaillance de la $i^{\text{ème}}$ boucle si $\lambda_{ii} > 0$.

Cette liste de propriétés est loin d'être exhaustive. *Bristol* [10, 11] et *Shinskey* [33] en font une plus complète. Une règle générale pour la sélection du meilleur couplage des variables peut être exprimée comme suit : “*Les boucles de contrôle doivent avoir un couplage des variables manipulées et contrôlées qui donne des gains relatifs positifs dont les valeurs sont les plus proches possible de l'unité*”. L'utilisation de la matrice *RGA* pour la détermination du meilleur couplage de variables manipulées et contrôlées pour un système multivariable est appelé *stratégie de contrôle à interaction dominante*. Cette approche, bien que basée sur une conception du système en régime permanent, est très utilisée.

4.5.2 L'indice de Niederlinski

L'indice de Niederlinski (*NI*) [22], est un indice qui donne une condition nécessaire pour la stabilité d'un système de contrôle. Il est défini, uniquement à la base du gain en régime permanent du procédé, comme :

$$NI[K] = \frac{\det[K]}{\det[\tilde{K}]} \quad (4.9)$$

où K est la matrice des gains du système de contrôle en régime permanent et \tilde{K} la matrice contenant uniquement les éléments diagonaux de K : $\tilde{K} = \text{diag}[K]$. Pour un système de contrôle décentralisé, $\det[\tilde{K}]$ est égal au produit des gains correspondants aux couplages des variables manipulées et contrôlées. Si le couplage des variables est diagonal, alors :

$$\begin{aligned} \det[\tilde{K}] &= \prod_i k_{ii} \\ \text{et } NI[K] &= \frac{\det[K]}{\prod_i k_{ii}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Habituellement, seul le signe du *NI* est significatif puisque lui seul intervient dans la condition nécessaire de stabilité, à savoir qu'un système est a priori *instable* si $NI[K] < 0$.

Cette condition est valable pour la caractérisation de la stabilité du système de contrôle entier à condition que les sous-systèmes considérés indépendamment soient stables et que le couplage des variables soit diagonal (sinon un réarrangement des variables est nécessaire).

Le *NI* peut être utilisé en combinaison avec le *RGA* pour donner une condition nécessaire pour l'intégrité du système contre la défaillance de la $i^{\text{ème}}$ boucle de

contrôle en considérant l'expression suivante donnée par *Chiu et Arkun* [12] :

$$NI[K].\lambda_{ii} = NI[K^{(i)}] \quad (4.11)$$

où λ_{ii} est le $i^{\text{ème}}$ élément diagonal de la matrice RGA et $K^{(i)}$ est la matrice des gains du système en éliminant la $i^{\text{ème}}$ boucle de contrôle. Si λ_{ii} prend des valeurs négatives alors que le NI est positif, le système de contrôle perdra son intégrité contre la défaillance de la $i^{\text{ème}}$ boucle de contrôle.

4.6 Contrôlabilité des laveurs de pâte à papier

La majorité des laveurs de pâte à papier (*LPP*) sont encore contrôlés manuellement par manque de capteurs permettant de contrôler le procédé en continu [35]. La plupart des travaux traitant des *LPP*, se sont intéressés à leur contrôle dynamique. *Turner et al.* [35] ont étudié la rapidité de la réponse dynamique des *LPP* à un changement des conditions opératoires. Ils se sont aussi intéressés au contrôle du niveau des réservoirs de filtrat qui est sujet à des oscillations persistantes (à cause du grand volume des réservoirs) [36]. *Noël et al.* [23] ont défini une stratégie de contrôle pour maintenir le niveau des réservoirs de filtrat et la qualité de lavage constante et pour compenser les variations dans la production en manipulant l'eau de lavage.

Pour la première fois, ce projet étudiera la contrôlabilité des *LPP*. Le système de contrôle que nous avons adopté pour les *LPP* est un système de contrôle décentralisé (*SCD*). Ce type de système est préféré en industrie pour la simplicité de sa conception, de sa mise en place et de son réglage [42].

La première étape de la conception du *SCD* des *LPP* est la sélection des variables manipulées et contrôlées. Les variables contrôlées ont été choisies selon les

objectifs de contrôle désirés :

- le débit du courant de pâte lavée (ψ_{out}), pour contrôler la production et la maintenir au niveau désiré ;
- la fraction de solides dissous dans la pâte lavée (f_{out}^s), pour contrôler la propreté de la pâte et donc la qualité de l'opération de lavage.

Les variables manipulées sont celles dont il est possible de changer les valeurs :

- le débit de la pâte sale en amont des laveurs (ψ_{in}) ;
- le débit de l'eau fraîche de lavage au niveau du dernier laveur (ψ_{fw}).

Le *SCD* pour le contrôle des *LPP* sera donc un système 2×2 , c'est-à-dire un système à deux variables manipulées et à deux variables contrôlées.

L'étape suivante de la conception du *SCD* pour les *LPP* est le couplage des variables manipulées et contrôlées de manière à assurer à la fois sa stabilité, son intégrité et l'interaction minimale de ses boucles de contrôle. Pour le couplage des variables du *LPP*, il est d'usage de contrôler la propreté de la pâte lavée par le débit de l'eau de lavage et de contrôler le débit de production par le débit de pâte sale. Le *SCD* des *LPP* est donc un système de contrôle multivariable, composé de deux boucles de contrôles fermées (ψ_{in}, ψ_{out}) et (ψ_{fw}, f_{out}^s). Il a la même structure que celle présentée à la figure 4.2.

D'un côté, la matrice *RGA* joue un rôle important dans la sélection de la configuration de contrôle. Cependant, elle est essentiellement utilisée comme mesure de l'interaction des variables et pour la caractérisation de l'intégrité du *SCD*. D'un autre côté, le *NI* procure une condition nécessaire pour la stabilité du *SCD* et constitue un outil utilisé en parallèle pour le couplage des variables [40]. L'utilisation conjointe du *RGA* et du *NI* est une solution efficace pour garantir les résultats escomptés pour un *SCD* 2×2 . Pour ce dernier, il est toujours possible d'avoir un couplage des variables avec des éléments de la matrice *RGA* positifs et avec un *NI*

positif [42].

La matrice RGA , pour un système multivariable (2×2) peut être déterminée par le seul calcul de son premier élément diagonal λ_{11} . Les autres éléments de la matrice se déduisent des propriétés sur ses colonnes et ses lignes (voir les équations (4.7) et (4.8)). Si en plus, on dispose de l'expression analytique de la matrice des gains (en régime permanent) et si on pose k_{ij} le gain correspondant à la fonction de transfert g_{ij} ($i, j \in \{1, 2\}$), on aura [19] :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 1 - \lambda_{11} \\ 1 - \lambda_{11} & \lambda_{11} \end{bmatrix} \text{ avec } \lambda_{11} = \frac{k_{11}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}. \quad (4.12)$$

Pour les LPP , il est très lourd et assez complexe de trouver l'expression analytique de la matrice RGA . Ceci impliquerait l'écriture de formules assez longues avec des dérivées partielles imbriquées que l'on est pas en mesure de calculer. Néanmoins, dans le cas où on ne dispose pas de l'expression analytique des gains, il est possible d'approximer la matrice RGA expérimentalement. Pour les LPP ceci reviendrait à évaluer λ_{11} comme suit :

$$\lambda_{11} = \frac{(k_{11})_{\psi_{fw}}}{(k_{11})_{f_{out}^s}} \text{ où } (k_{11})_{\psi_{fw}} = \left(\frac{\Delta \psi_{out}}{\Delta \psi_{in}} \right)_{\psi_{fw}} \text{ et } (k_{11})_{f_{out}^s} = \left(\frac{\Delta \psi_{out}}{\Delta \psi_{in}} \right)_{f_{out}^s}. \quad (4.13)$$

D'après la définition de la matrice RGA , $(k_{11})_{\psi_{fw}}$ est le gain de la boucle de contrôle (ψ_{in}, ψ_{out}) lorsque les deux boucles de contrôle sont ouvertes. Il n'y a alors pas de rétroaction et ψ_{fw} est maintenue constante sans s'ajuster aux variations de f_{out}^s . $(k_{11})_{f_{out}^s}$ est le gain de la même boucle ouverte en gardant la deuxième boucle (ψ_{fw}, f_{out}^s) fermée (ψ_{fw} s'ajuste pour maintenir f_{out}^s à sa valeur optimale). Malheureusement, les données expérimentales qui permettraient d'évaluer la matrice RGA ne sont pas disponibles. Les expressions analytiques des gains ont alors été évaluées numériquement en utilisant des différences finies.

D'autre part, pour un *SCD* de taille 2×2 l'indice *NI* est égal à l'inverse du premier élément diagonal de la matrice *RGA*. Il se déduit du calcul direct du *NI* d'après l'équation (4.10) qui donne l'inverse de l'expression de λ_{11} de l'équation 4.12 :

$$NI[K] = \frac{\det[K]}{\prod_i k_{ii}} = \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}{k_{11}k_{22}} = \frac{1}{\lambda_{11}}. \quad (4.14)$$

Si on suppose que chacune des boucles de contrôle est stable quand l'autre est ouverte, $\lambda_{11} > 0$ est alors une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du *SCD* [13]. Cette condition est nécessaire et suffisante car le système est de taille 2×2 . La combinaison de ce résultat avec les propriétés de la matrice *RGA* pourrait alors se résumer à la seule règle suivante.

Règle de contrôlabilité pour les *LPP*

Pour assurer une bonne contrôlabilité des *LPP* tout en minimisant l'interaction des boucles de contrôle et en maintenant de bonnes stabilité et intégrité, il suffit de trouver des conditions opératoires optimales dont la matrice *RGA* correspondante vérifie :

- λ_{11} le plus proche possible de 1,
- $\lambda_{11} > 0$,
- et λ_{11} ne prend pas des valeurs très grandes.

CHAPITRE 5

ALGORITHMES D'OPTIMISATION

Le problème d'optimisation issu de la modélisation des laveurs de pâte à papier (*LPP*), présenté au chapitre 3, est un problème de programmation quadratique à contraintes quadratiques (*QQP*). Dans une première étape, nous optimisons le fonctionnement des *LPP* pour leur trouver une configuration de fonctionnement optimale. Pour résoudre le problème *QQP*, nous utilisons un algorithme de séparation et de coupes qui donne en temps fini, une solution approximée (à la fois pour la réalisabilité et l'optimalité). Nous allons présenter une description sommaire de cet “algorithme de linéarisation pour la résolution des problèmes quadratiques” (*ALPQ*), qui a été développé par *Audet et al.* [5, 7]. Les sections 5.1.1 à 5.1.3 sont en grande partie reprises de l'une ou de l'autre de ces références mais d'une manière sommaire. Dans la section 5.1.4 nous résumons les grandes lignes de l'*ALPQ*. Ce dernier a été codé par *Perron* [29].

Dans une seconde étape, nous optimisons la contrôlabilité des *LPP* par une méthode itérative tout en assurant l'optimalité des configurations obtenues à chaque itération. Nous utilisons pour ce faire une méthode basée sur l'algorithme du sous-gradient que nous avons développé et que nous présentons dans la deuxième partie de ce chapitre.

5.1 Algorithme de linéarisation pour les problèmes quadratiques

Le problème QQP est un problème d'optimisation globale structuré, qui est à la fois général et difficile. La généralité de QQP provient du fait qu'il englobe plusieurs problèmes d'optimisation dont les problèmes bilinéaires, biniveau et fractionnaires. Ces problèmes peuvent être reformulés comme un cas particulier de QQP [6]. Cette généralité engendre des difficultés à le résoudre. QQP est en effet fortement NP-complet et son domaine réalisable est généralement non convexe et non connexe [5]. Le seul fait de trouver une solution réalisable est un problème NP-complet [5]. Tout ceci rend très difficile le développement d'un algorithme exact qui résout en temps raisonnable des problèmes de grande taille.

Dans la littérature, deux approches sont essentiellement adoptées pour la résolution des problèmes QQP : la linéarisation des termes quadratiques [3, 32] et la décomposition de Benders généralisée [16, 38]. QQP peut aussi être écrit comme une différence de problèmes convexes [30]. Dans ce mémoire seul l' $ALPQ$ est développé. Le choix s'est porté sur cet algorithme car il a fait ses preuves sur les problèmes du type QPP [8]. De plus, pour certains des problèmes, l'optimalité globale ($\pm \varepsilon_r$) de la solution trouvée a été prouvée.

5.1.1 Approche de résolution

Dans la suite nous allons considérer le cas où QQP est un problème de minimisation. La formulation générale adoptée alors pour QQP est la suivante :

$$(QQP) \quad \begin{aligned} & \min_{x \in X} Q^0(x) \\ & \text{s.c. } Q^k(x) \leqq b_k \quad k = 1, 2, \dots, \bar{k}, \end{aligned}$$

où $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq a\}$ est le polyèdre des contraintes linéaires. Pour chaque indice k de l'ensemble $K = \{1, 2, \dots, \bar{k}\}$

$$Q^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto Q^k(x) = \sum_{(i,j) \in M} c_{ij}^k x_i x_j + \sum_{i \in N} c_i^k x_i^2 + \sum_{i \in N} d_i^k x_i,$$

est une fonction quadratique avec $N = \{1, 2, \dots, n\}$ et $M = \{(i, j) \in N \times N : i > j\}$ deux ensembles d'indices. Le symbole \leqq signifie que les contraintes peuvent être des égalités ou des inégalités. Les dimensions des matrices et vecteurs sont les suivantes :

$$x \in \mathbb{R}^n; A \in \mathbb{R}^{m \times n}; a \in \mathbb{R}^m; b \in \mathbb{R}^{\bar{k}};$$

$$c_{ij}^k, c_i^k, d_i^k \in \mathbb{R} \text{ pour tout } (i, j) \in M \text{ et } k \in K.$$

Dans l'*ALPQ*, aucune hypothèse n'est faite quant à la convexité ou la concavité de la fonction objectif ou des fonctions définissant les contraintes. Les hypothèses faites concernent essentiellement les bornes sur les variables. Les contraintes $x \geq 0$ sont supposées présentes dans $Ax \leq a$ ou implicites à travers les autres contraintes. Il a été aussi supposé qu'il est possible d'évaluer des bornes finies sur toutes les variables et donc que $\forall i \in N, x_i \in [\ell_i, u_i]$. Le polyèdre des contraintes linéaires X peut alors se réécrire comme $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq a, 0 \leq l \leq x \leq u\}$ avec $l, u \in \mathbb{R}^n$.

L'idée générale de l'*ALPQ* se base sur des méthodes d'approximation de tous les termes quadratiques à l'aide de techniques de reformulation-linéarisation (TRL). Quatre classes de linéarisations sont développées et parmi chacune d'elles la meilleure linéarisation est choisie selon un critère bien défini. En se basant sur ces techniques

un algorithme de séparation (ou d'énumération implicite) et de coupe est développé pour les intégrer dans un arbre de branchement. Les coupes introduites au niveau d'un sommet de l'arbre de branchement ont la particularité d'être valides pour l'ensemble de l'arbre et non seulement à l'intérieur du sous-arbre enraciné en ce sommet. Cet algorithme converge en un temps fini pour une tolérance donnée et trouve une solution approchée dans l'optimalité de l'objectif et les contraintes de *QQP*.

5.1.2 Linéarisation initiale

La difficulté de *QQP* réside surtout dans sa non-convexité et aussi dans les termes quadratiques présents à la fois dans la fonction objectif et dans les contraintes. Considérons les fonctions quadratiques suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & \text{et} & \quad g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x_i &\mapsto f(x_i) = x_i^2 & (x_i, x_j) &\mapsto g(x_i, x_j) = x_i x_j. \end{aligned}$$

L'approximation linéaire de la fonction f est plus facile que celle de g car elle est convexe. Toute tangente à f définit une sous-estimation valide sur tout le domaine \mathbb{R} . Un plan tangent à g peut définir à la fois une surestimation et une sous-estimation.

Pour tout i appartenant à N , la variable v_i est introduite afin d'estimer le terme x_i^2 , et pour chaque (i, j) appartenant à M , la variable additionnelle w_{ij} est introduite pour estimer le produit $x_i x_j$. Des contraintes impliquant les variables x_i , v_i et w_{ij} sont successivement ajoutées de façon à raffiner l'approximation tout en garantissant que la solution où $v_i = x_i^2$ et $w_{ij} = x_i x_j$ demeure réalisable.

Comme la définition du polyèdre X comprend les contraintes $A_p x \leq a_p$ et $A_q x \leq a_q$ (où A_p est la $p^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A et a_p le $p^{\text{ème}}$ élément de a), on peut obtenir une inégalité valide dans un espace de dimension supérieure en imposant à la

linéarisation du produit $(a_p - A_p x)(a_q - A_q x)$ d'être positive. En utilisant la notation introduite par *Sherali et Tuncbilek* [31], la linéarisation où les termes quadratiques sont remplacés par ceux linéaires, est notée $[\cdot]_\ell$. Il en découle que $[(a_p - A_p x)(a_q - A_q x)]_\ell$ désigne la linéarisation du produit

$$(a_p - A_p x)(a_q - A_q x) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} A_{pi} A_{qj} x_i x_j - \sum_{i \in N} (a_p A_{qi} + a_q A_{pi}) x_i + a_p a_q,$$

et s'écrit explicitement en introduisant les variables de linéarisation v et w comme :

$$\sum_{(i,j) \in M} (A_{pi} A_{qj} + A_{pj} A_{qi}) w_{ij} + \sum_{i \in N} A_{pi} A_{qi} v_i - \sum_{i \in N} (a_p A_{qi} + a_q A_{pi}) x_i + a_p a_q.$$

Audet [5] a démontré que le problème suivant défini une relaxation linéaire de *QQP* :

$$\begin{aligned} & \min_{x \in X, v, w} [Q^0(x)]_\ell \\ [QQP]_\ell \quad & \text{s.t. } [Q^k(x)]_\ell \leq b_k \quad k = 1, 2, \dots, \bar{k}, \\ & [(a_p - A_p x)(a_q - A_q x)]_\ell \geq 0 \quad p \in P, q \in Q_p \end{aligned}$$

où P est un sous-ensemble d'indices de $\{1, 2, \dots, m\}$, et Q_p un sous-ensemble de $\{p, p+1, \dots, m\}$ pour chaque p de P .

5.1.3 Classes de linéarisation

En se basant sur les principes de linéarisation décrits à la section 5.1.2, *Audet* [5] a défini quatre classes de linéarisations des fonctions quadratiques f et g qui sont décrites ci-après. Les deux premières classes d'inégalités (\mathcal{C}_I et \mathcal{C}_{II}) sont des sous-estimations linéaires tangentes à des fonctions convexes et sont de ce fait valides partout sur le domaine réalisable. Au contraire, les inégalités des deux dernières classes (\mathcal{C}_{III} et \mathcal{C}_{IV}) ne sont pas valides sur tout le domaine réalisable. Pour remédier

à ce problème une dichotomie est utilisée pour raffiner les approximations des termes quadratiques sur des sous-intervalles.

Les linéarisations des quatre classes engendrent ainsi une approximation extérieure du domaine réalisable. Ce sont des coupes, c.-à-d. des inégalités valides qui permettent d'éliminer la solution optimale d'un problème relaxé $(\hat{x}, \hat{v}, \hat{w})$ pour laquelle la linéarisation est inexacte ($\hat{x}_i^2 \neq \hat{v}_i$ ou $\hat{x}_i \hat{x}_j \neq \hat{w}_{ij}$). La solution optimale du problème relaxé est appelée point courant.

L'algorithme de séparation et de coupes introduit des variables $\delta_i(\alpha_i) \in [0, 1]$ où $\alpha_i \in [\ell_i, u_i]$ pour $i \in N$. L'introduction de ces variables assure que toutes les contraintes sont valides partout. Le processus de branchement fixe ces variables à 1 ou à 0 selon la branche de l'arbre courante. Cette fixation des variables $\delta_i(\cdot)$ a pour effet de rendre une contrainte redondante ou non en la translatant. La construction des classes C_{III} et C_{IV} est donc faite de façon à ce que leurs contraintes soient redondantes (non contraignantes) lorsque les variables $\delta_i(\alpha_i)$ sont libres dans $]0, 1[$. L'*ALPQ* a donc la grande particularité que les coupes développées en un sommet de l'arbre sont valides pour l'ensemble de l'arbre, et non seulement à l'intérieur du sous-arbre enraciné en ce sommet.

Classe I : Sous-estimation de la fonction carrée

Pour une valeur de $\alpha_i \in [\ell_i, u_i]$, $i \in N$ tel que $\alpha_i \in]\hat{x}_i - \sqrt{\hat{x}_i^2 - \hat{v}_i}, \hat{x}_i + \sqrt{\hat{x}_i^2 - \hat{v}_i}[$, la contrainte

$$\underline{V}_i(\alpha_i) : \quad [(x_i - \alpha_i)^2]_\ell \geq 0 \\ (\text{ou encore } \underline{V}_i(\alpha_i) : \quad (v_i - 2\alpha_i x_i + \alpha_i^2) \geq 0),$$

définit le demi-espace tangent à la fonction $f(x_i) = x_i^2$ au point $x_i = \alpha_i$ (figure 5.1). Ceci permet de définir une classe de contraintes valides partout. Ces dernières

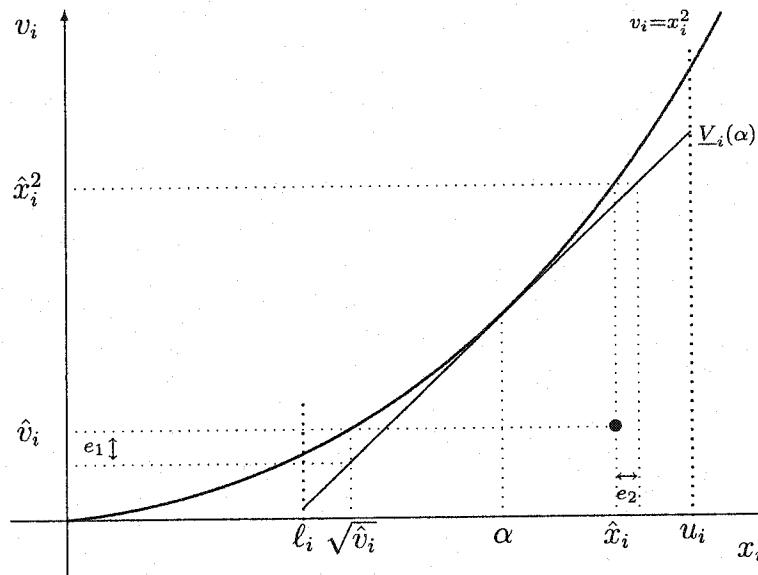


Figure 5.1 – Sous-approximation de la fonction carré $f(x_i) = x_i^2$ (Audet et al. [5])

coupent tout point courant pour lequel il existe $i \in N$ tel que $\hat{v}_i < \hat{x}_i^2$:

$$\mathcal{C}_I = \{\underline{V}_i(\alpha_i) : \alpha_i \in [\ell_i, u_i], i \in N\}.$$

La valeur de α à choisir est celle qui assure une coupe $\underline{V}_i(\alpha)$ minimisant l'erreur pondérée maximale sur l'intervalle $[\sqrt{\hat{v}_i}, \hat{x}_i]$. L'erreur à minimiser est la plus grande valeur entre $e_1 = \hat{v}_i - (2\alpha\sqrt{\hat{v}_i} - \alpha^2)$ et αe_2 avec $e_2 = (\frac{\hat{x}_i^2}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2}) - \hat{x}_i$. Le poids du second terme α compense le fait que e_1 représente une différence de carrés mais pas e_2 . La valeur optimale de α est : $\alpha = (\sqrt{2} - 1)\hat{x}_i + (2 - \sqrt{2})\sqrt{\hat{v}_i} \in [\sqrt{\hat{v}_i}, \hat{x}_i]$.

Classe II : Sous-estimation d'une paraboloïde

Pour des valeurs de $\alpha_i \in [\ell_i, u_i]$, $\alpha_j \in [\ell_j, u_j]$, $i, j \in N$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, la contrainte

$$\underline{P}_{ij}^\gamma(\alpha_i, \alpha_j) : [((\alpha_i - x_i) + \gamma(\alpha_j - x_j))^2]_\ell \geq 0$$

définit le demi-espace tangent à la fonction $h(x_i, x_j) = (x_i + \gamma x_j)^2$ au point $(x_i, x_j) = (\alpha_i, \alpha_j)$ (figure 5.2). Ceci permet de définir la deuxième classe de contraintes valides

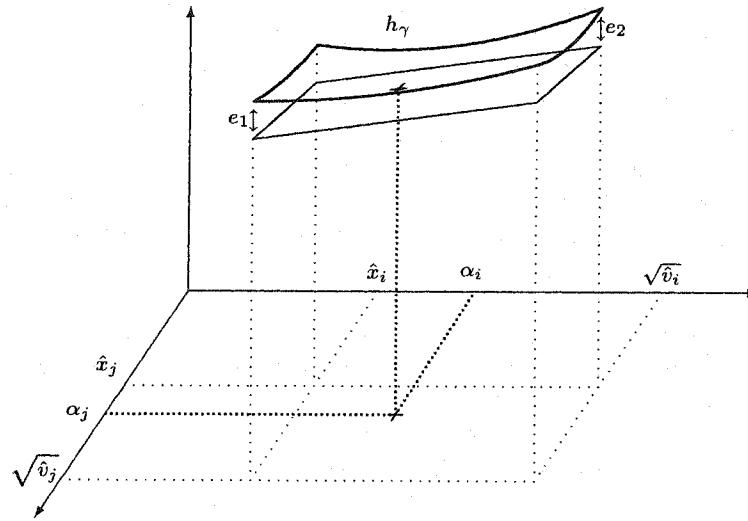


Figure 5.2 – Sous-estimation d'une paraboloïde (Audet et al. [5])

partout :

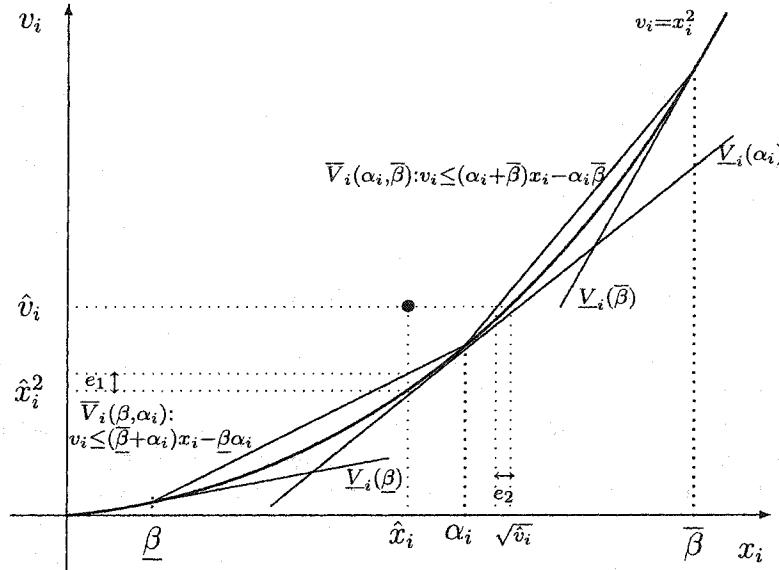
$$\mathcal{C}_{II} = \{P_{ij}^\gamma(\alpha_i, \alpha_j) : \alpha_i \in [\ell_i, u_i], \alpha_j \in [\ell_j, u_j], i, j \in N, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Les inégalités de cette classe dépendent de trois paramètres : α_i , α_j et γ . Les deux premiers définissent le point où le plan tangent est évalué et ils sont choisis de façon à minimiser la plus grande distance de la paraboloïde au plan tangent au point d'évaluation (e_1 et e_2 sur la figure 5.2). Le couple $(\alpha_i, \alpha_j) = (\hat{x}_i + \sqrt{\hat{v}_i}, \hat{x}_j + \sqrt{\hat{v}_j})/2 \in [x_i, \sqrt{v_i}] \times [x_j, \sqrt{v_j}]$ est celui qui vérifie cette condition. La valeur de γ est choisie de façon à maximiser la profondeur de la coupe. Posons

$$\tau_i \equiv \hat{v}_i - 2\alpha_i \hat{x}_i + \alpha_i^2, \quad \tau_j \equiv \hat{v}_j - 2\alpha_j \hat{x}_j + \alpha_j^2, \quad \pi_{ij} \equiv \hat{w}_{ij} - \alpha_i \hat{x}_j - \alpha_j \hat{x}_i + \alpha_i \alpha_j.$$

Si $\ell_i \leq \hat{x}_i < \sqrt{\hat{v}_i} \leq u_i$ et $\ell_j \leq \hat{x}_j < \sqrt{\hat{v}_j} \leq u_j$ et si $\tau_i \tau_j < \pi_{ij}^2$, alors la valeur $\gamma = -\frac{\pi_{ij}}{\tau_j}$, est celle qui engendre la coupe la plus profonde.

Classe III : Surestimation de la fonction carrée

Figure 5.3 – Utilisation des coupes de \mathcal{C}_{III}

Pour des valeurs de $\alpha_i, \beta_i \in [\ell_i, u_i]$, $\alpha_i < \beta_i$, $i \in N$, la contrainte

$$\bar{V}_i(\alpha_i, \beta_i) : [(\alpha_i - x_i)(\beta_i - x_i)]_\ell \geq (u_i - \ell_i)^2(\delta_i(\alpha_i) - \delta_i(\beta_i) - 1).$$

définit le demi-espace délimité par la corde $(x_i, v_i) = (\alpha_i, \alpha_i^2)$ à (β_i, β_i^2) . Cette inégalité valide associée à celles de la classe \mathcal{C}_I , permet de définir la classe de contraintes suivante :

$$\mathcal{C}_{III} = \{V_i(\alpha_i), V_i(\beta_i), \bar{V}_i(\alpha_i, \beta_i) : \alpha_i, \beta_i \in [\ell_i, u_i], \alpha_i < \beta_i, i \in N\}.$$

Pour une variable $x_i, i \in N$, et pour $\alpha_i \in [\underline{\beta}, \bar{\beta}]$ les coupes de la classe \mathcal{C}_{III} appliquées respectivement aux points $(\underline{\beta}, \alpha_i)$ et $(\alpha_i, \bar{\beta})$ permettent de couper tout point courant pour lequel il existe $i \in N$ tel que $\hat{v}_i > \hat{x}_i^2$. $\underline{\beta}$ et $\bar{\beta}$ sont deux points d'évaluation où $\ell_i \leq \underline{\beta} \leq \hat{x}_i \leq \sqrt{\hat{v}_i} \leq \bar{\beta} \leq u_i$. L'ensemble de ces coupes est présenté à la figure 5.3. La valeur de α_i choisie étant celle qui minimise le maximum des erreurs d'approximation pondérés $e_1 = (\underline{\beta} + \alpha)\hat{x}_i - \underline{\beta}\alpha - \hat{x}_i^2$ et αe_2 où $e_2 = \sqrt{\hat{v}_i} - \frac{\hat{v}_i + \alpha\bar{\beta}}{\alpha + \bar{\beta}}$. La

valeur de α_i qui assure ces conditions est telle que $\alpha_i = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p\bar{\beta}(\hat{x}_i - \underline{\beta})\hat{x}_i}}{2p} \in [x_i, \sqrt{v_i}]$ où $p = (\hat{x}_i - \underline{\beta}) + (\bar{\beta} - \sqrt{\hat{v}_i})$ et $q = (\hat{x}_i - \underline{\beta})(\bar{\beta} - \hat{x}_i) - (\bar{\beta} - \sqrt{\hat{v}_i})\sqrt{\hat{v}_i}$.

Classe IV : Estimation du produit de deux variables

Cette classe introduit des coupes pour l'estimation des produits de variables. Si on considère le plan Π tangent à la fonction $g(x_i, x_j) = x_i x_j$ au point (α_i, α_j) . Ce plan satisfait les trois propriétés suivantes :

- i- (x_i, x_j, w_{ij}) appartient à Π si et seulement si $x_i = \alpha_i$ où $x_j = \alpha_j$.
- ii- Π sous-estime strictement (x_i, x_j, w_{ij}) si et seulement si à la fois $x_i < \alpha_i$ et $x_j < \alpha_j$, ou bien si $x_i > \alpha_i$ et $x_j > \alpha_j$.
- iii- Π surestime strictement (x_i, x_j, w_{ij}) si et seulement si à la fois $x_i < \alpha_i$ et $x_j > \alpha_j$, ou bien si $x_i > \alpha_i$ et $x_j < \alpha_j$.

On définit les quatre quadrants associés au point (α_i, α_j) :

$$\begin{aligned}\Omega^I &= \{(x_i, x_j) : x_i \geq \alpha_i, x_j \geq \alpha_j\}, & \Omega^{II} &= \{(x_i, x_j) : x_i \leq \alpha_i, x_j \geq \alpha_j\}, \\ \Omega^{III} &= \{(x_i, x_j) : x_i \leq \alpha_i, x_j \leq \alpha_j\}, & \Omega^{IV} &= \{(x_i, x_j) : x_i \geq \alpha_i, x_j \leq \alpha_j\}.\end{aligned}$$

Pour $\alpha_i \in [\ell_i, u_i]$, $\alpha_j \in [\ell_j, u_j]$, $i, j \in N$, soit $L_i = \alpha_i - \ell_i$, $L_j = \alpha_j - \ell_j$, et $U_i = u_i - \alpha_i$, $U_j = u_j - \alpha_j$. Les inégalités

$$\begin{aligned}\underline{W}_{ij}^I(\alpha_i, \alpha_j) : \quad & [(x_i - \alpha_i)(x_j - \alpha_j)]_\ell \geq L_i U_j (\delta_i(\alpha_i) - 1) + U_i L_j (\delta_j(\alpha_j) - 1), \\ \underline{W}_{ij}^{III}(\alpha_i, \alpha_j) : \quad & [(x_i - \alpha_i)(x_j - \alpha_j)]_\ell \geq -U_i L_j \delta_i(\alpha_i) - L_i U_j \delta_j(\alpha_j),\end{aligned}$$

définissent l'enveloppe convexe de g sur Ω^I et Ω^{III} et éliminent les points courants où il existe $i \in N$ tel que $\hat{w}_{ij} < \hat{x}_i \hat{x}_j$. Les inégalités

$$\begin{aligned}\overline{W}_{ij}^{II}(\alpha_i, \alpha_j) : \quad & [(x_i - \alpha_i)(x_j - \alpha_j)]_\ell \leq U_i U_j \delta_i(\alpha_i) + L_i L_j (1 - \delta_j(\alpha_j)), \\ \overline{W}_{ij}^{IV}(\alpha_i, \alpha_j) : \quad & [(x_i - \alpha_i)(x_j - \alpha_j)]_\ell \leq L_i L_j (1 - \delta_i(\alpha_i)) + U_i U_j \delta_j(\alpha_j),\end{aligned}$$

définissent l'enveloppe concave de g sur Ω^{II} et Ω^{IV} et éliminent les points courants où il existe $i \in N$ tel que $\hat{w}_{ij} > \hat{x}_i \hat{x}_j$. La quatrième classe d'inégalités est alors partitionnée en deux sous-classes comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{IV} &= \{ \underline{W}_{ij}^I(\alpha_i, \alpha_j), \underline{W}_{ij}^{III}(\alpha_i, \alpha_j) : \alpha_i \in [\ell_i, u_i], \alpha_j \in [\ell_j, u_j], i, j \in N \} \\ \bar{\mathcal{C}}_{IV} &= \{ \bar{W}_{ij}^{II}(\alpha_i, \alpha_j), \bar{W}_{ij}^{IV}(\alpha_i, \alpha_j) : \alpha_i \in [\ell_i, u_i], \alpha_j \in [\ell_j, u_j], i, j \in N \}.\end{aligned}$$

Étant donné que dans l'algorithme de séparation et de coupes le branchement se fait sur une seule variable, le choix des points (α_i, α_j) se fait en fixant x_j , par exemple, à $\alpha_j = (\hat{x}_j + \sqrt{\hat{v}_j})/2$ et en choisissant pour x_i la valeur de

$$\alpha_i = \frac{(1 - \frac{\bar{\beta}}{\alpha_j})\hat{x}_i + (1 - \frac{\alpha_j}{\bar{\beta}})\frac{\hat{w}_{ij}}{\hat{x}_j}}{(1 - \frac{\bar{\beta}}{\alpha_j}) + (1 - \frac{\alpha_j}{\bar{\beta}})}$$

qui minimise le maximum des erreurs d'approximation pondérés sur l'intervalle $[\hat{x}_i, \frac{w_{ij}}{\hat{x}_j}]$. $\underline{\beta}$ et $\bar{\beta}$ sont les deux points d'évaluations courants tel que $[\hat{x}_j, \frac{\hat{w}_{ij}}{\hat{x}_j}] \subset]\underline{\beta}, \bar{\beta}[$.

5.1.4 Algorithme de séparation et de coupes

L'*ALPQ* se base sur les linéarisation décrites ci-dessus pour chercher et trouver en un temps fini une solution approchée à la fois dans sa réalisabilité et dans son optimalité. Une pareille solution est dite ε_r - ε_z -*optimale* [5]. Une solution $(\hat{x}, \hat{v}, \hat{w})$ est dite ε_r -*approximées* si pour une tolérance de réalisabilité $\varepsilon_r > 0$ elle satisfait les trois conditions suivantes :

- (i) $\hat{x} \in X$;
- (ii) $|\hat{x}_i^2 - \hat{v}_i| < \varepsilon_r$ pour tout i de N ;
- (iii) $|\hat{x}_i \hat{x}_j - \hat{w}_{ij}| < \varepsilon_r$ pour tout (i, j) de M .

Une solution ε_r - ε_z -*optimale* est définie comme une solution $(\hat{x}, \hat{v}, \hat{w})$ qui est ε_r -*approximée* et vérifie les deux dernières conditions.

mée et dont la valeur de la fonction objectif est égale, à $-\varepsilon_z$, au minimum des valeurs des fonctions objectifs de toutes les solutions ε_r -approximées.

Les coupes des classes C_I et C_{II} ajoutées à un nœud donné sont valides pour tous les autres nœuds. Les contraintes des classes C_{III} et C_{IV} sont elles aussi valides pour tous les nœuds mais elles ne coupent effectivement le point courant que dans la sous-arborescence enracinée au nœud où elles ont été créées. Au niveau des autres nœuds, ces contraintes sont relaxées si les variables δ_i correspondantes sont libres dans l'intervalle $]0, 1[$. Tout ceci fait de l'*ALPQ* un algorithme de séparation et de coupes.

L'*ALPQ* est constitué de deux étapes principales : le pré-traitement et l'exploration de l'arbre d'énumération. La première permet de créer la première approximation extérieure. La seconde étape traite les nœuds récursivement en examinant d'abord celui qui a la meilleure valeur de la fonction objectif. Chaque nœud est soit mis de côté (si non réalisable, résolu ou éliminé), soit séparé en deux nouveaux nœuds fils.

A- Le pré-traitement

Cette première étape a lieu au nœud racine de l'arbre de branchement et permet d'obtenir des bornes de "qualité" sur les variables. Ces bornes ainsi que les contraintes définissant X permettent d'obtenir la relaxation initiale présentée à la section 5.1.2. Le pré-traitement peut se résumer aux deux étapes suivantes qui sont réitérées jusqu'à ce qu'aucune borne ne soit améliorée par plus qu'un certain pourcentage de sa valeur ou par plus de ε_r :

- A.1-** le raffinement des bornes qui consiste à résoudre les problèmes linéaires obtenus en remplaçant la fonction objectif de $[QQP]_L$ respectivement par les quatre fonctions objectif $\pm x_i$ et $\pm v_i$. On trouve alors x_i^- , x_i^+ les bornes sur x_i tel que

$0 \leq x_i^- \leq x_i \leq x_i^+$, et v_i^-, v_i^+ les bornes sur v_i tel que $0 \leq v_i^- \leq v_i \leq v_i^+$.

Définissons $\ell_i \equiv \max\{x_i^-, \sqrt{v_i^-}\}$ et $u_i \equiv \min\{x_i^+, \sqrt{v_i^+}\}$. Si $\ell_i \leq u_i$, alors ℓ_i et u_i sont des bornes valides pour la variable x_i sur le domaine réalisable de QQP . Si $\ell_i > u_i$, alors le domaine réalisable de QQP est vide.

A.2- l'ajout des inégalités valides appartenant aux classes \mathcal{C}_I et \mathcal{C}_{II} au problème relaxé. Parmi les égalités appartenant aux classes \mathcal{C}_{III} et \mathcal{C}_{IV} , seules sont rajoutées celles valides sur tout le domaine réalisable.

Une liste \mathcal{L} de nœuds à explorer est initialisée pour contenir le seul nœud racine et une variable Z_{in} représentant la meilleure fonction objectif à date est initialisée à $+\infty$.

B- Exploration de l'arbre d'énumération

Cette seconde étape résout et raffine une série de relaxations. Elle est réitérée jusqu'à atteindre la précision requise. À chaque itération, le point obtenu lors de la résolution de la relaxation courante de QQP est coupé par les inégalités linéaires valides de l'une des classes présentées à la section 5.1.3. Pour cet algorithme, le branchement se fait uniquement quand des coupes de la classe \mathcal{C}_{III} sont introduites. Les coupes de la classe \mathcal{C}_{IV} ne sont introduites que s'il est possible d'utiliser des variables $\delta_i(\cdot)$ précédemment créés par l'algorithme. L'étape d'exploration peut se résumer aux trois étapes suivantes qui sont réitérées tant que \mathcal{L} est non vide :

B.1- Élimination du nœud ayant la meilleure valeur Z_{in} de la liste \mathcal{L} .

B.2- Introduction des coupes :

- * Tester l'optimalité. Si la valeur de la fonction objectif est plus grande que $Z_{in} - \varepsilon_z$ aucune coupe n'est nécessaire et le nœud est éliminé. Sinon continuer avec les étapes suivantes.
- * Ajouter si nécessaire les coupes des classes \mathcal{C}_I et \mathcal{C}_{II} .

- * Ajouter si nécessaire les coupes des classes $\bar{\mathcal{C}}_{IV}$ et $\underline{\mathcal{C}}_{IV}$ en utilisant les variables $\delta_i(\cdot)$ déjà existantes.
- * Si la solution optimale du problème relaxé est ε_r -approximée, alors mettre à jour Z_{in} .
- * Sinon passer à l'étape de branchement si la relaxation est réalisable et sa valeur objectif optimale est inférieure à $Z_{in} - \varepsilon_z$.

B.3- Branchement :

- * Déterminer la variable de branchement x_i selon un critère de branchement (par exemple la variable qui engendre la plus grande erreur d'approximation).
- * Déterminer la valeur de branchement α_i et les valeurs $\delta(\cdot)$ correspondantes.
- * Si possible réutiliser la structure créée aux autres nœuds.
- * Sinon introduire des coupes de la classe \mathcal{C}_{III} ou de la classe \mathcal{C}_{IV} s'il n'y a aucune erreur d'approximation sur les carrés.
- * Ajouter les deux nouveaux nœuds fils à \mathcal{L} .

5.2 Algorithme d'optimisation de la contrôlabilité

L'idée première que nous avons eu, pour l'optimisation de la contrôlabilité des laveurs de pâte à papier (*LPP*), était de mettre au point un programme mathématique qui combine simultanément les contraintes physiques des laveurs et les contraintes sur leur contrôlabilité. L'optimisation d'un pareil programme aurait abouti à une configuration des paramètres des laveurs qui assure aussi bien l'optimalité de leur fonctionnement que celle de leur contrôlabilité. Cette approche n'a pu être concrétisée à cause de l'impossibilité de trouver une expression analytique de la matrice *RGA*

ou d'utiliser des données expérimentales existantes.

Pour remédier à ce problème nous avons conçu et développé un Algorithme itératif pour l'Optimisation de la Contrôlabilité (*AOC*). Ce dernier, contrairement à l'idée originale, optimise le fonctionnement des laveurs et leur contrôlabilité séquentiellement. L'*AOC* se base sur une méthode de sous-gradient et itère selon deux grandes étapes : l'optimisation du fonctionnement des laveurs et l'optimisation de la contrôlabilité. Comme indiqué à la section 4.6, pour que la contrôlabilité soit optimale, les éléments diagonaux de la matrice *RGA* doivent être choisis de façon à être le plus proche possible de l'unité. Ceci peut être exprimé comme :

$$\min \sum_i (\lambda_{ii} - 1)^2. \quad (5.1)$$

5.2.1 Description de l'*AOC*

Le système de contrôle des *LPP* est un système de contrôle décentralisé à deux variables manipulées et deux variables contrôlées. Pour un pareil système, tel qu'expliqué à la section 4.6, la détermination d'un seul élément de la matrice *RGA* suffit pour déterminer toute la matrice. Il suffit alors de s'assurer que le premier élément diagonal de la matrice (λ_{11}) est le plus proche possible de l'unité. L'idée de l'*AOC* repose sur ce principe et consiste à résoudre au moyen d'approximations numériques le problème suivant :

$$\mathcal{P}_{cont} : \min_{\mu \in \mathbb{R}^2, (y, x) \in argmin \mathcal{P}_\mu} F(\lambda_{11}), \quad (5.2)$$

où :

$$* F(\lambda_{11}) = (\lambda_{11}(\mu, y, x) - 1)^2.$$

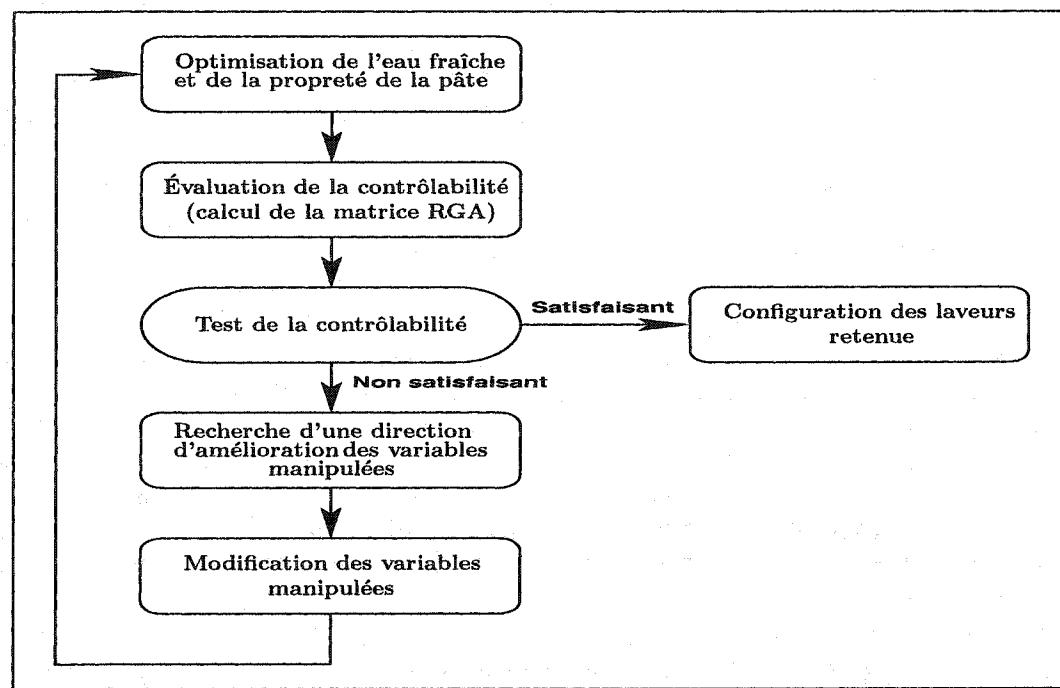


Figure 5.4 – Fonctionnement de l'algorithme d'optimisation de la contrôlabilité

- * \mathcal{P}_μ est le programme mathématique décrit au chapitre 3 qui optimise le fonctionnement des *LPP* en minimisant la consommation d'eau fraîche et la fraction de solides à la sortie pour μ fixé :

$$\mathcal{P}_\mu : \min_{y,x} f_\mu(y,x). \quad (5.3)$$

- * $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, est le couple de variables manipulées, soit le couple (ψ_{in}, ψ_{fw}) .
- * $y = (y_1, y_2)$, est le couple de variables contrôlées, soit le couple (ψ_{out}, f_{out}^s) .
- * x est le vecteur représentant les variables internes du problème \mathcal{P}_μ autres que μ et y .
- * $F(\lambda_{11})$ est la fonction assurant une bonne contrôlabilité et que nous supposons différentiable. Cette fonction ne considère pas directement la minimisation de la quantité d'eau fraîche ni celle de la fraction de solides à la sortie du dernier filtre.

L'*AOC*, présenté à la figure 5.4, est basé sur une méthode de sous-gradient et peut être résumé comme suit :

1- Initialisation :

- (a) Trouver une solution réalisable $(\mu_{ini}, y_{ini}, x_{ini})$ pour $\mathcal{P}_{\mu_{ini}}$.
- (b) Initialiser le nombre d'itérations $k = 0$.
- (c) Initialiser la solution courante (μ^0, y^0, x^0) à $(\mu_{ini}, y_{ini}, x_{ini})$.

2- Résolution :

- (a) Évaluer la matrice des gains relatifs K au point (μ^k, y^k, x^k) par différences finies.
- (b) Calculer le premier élément diagonal de la *RGA* : $\lambda_{11}(\mu^k, y^k, x^k)$.
- (c) Tester la contrôlabilité selon la règle de contrôlabilité présentée à la section 4.6 : si la contrôlabilité est satisfaisante sortir, sinon continuer avec l'étape suivante.

- (d) Chercher une direction d^k sur la fonction F . d^k est calculée au point (μ^k, y^k, x^k) par rapport aux variables manipulées μ_1 et μ_2 .
- (e) Évaluer le nouveau point $\mu^{k+1} = \mu^k + \alpha d^k$ où α est le pas de déplacement selon la direction d^k .
- (f) Calculer (μ^*, y^*, x^*) solution optimale de $\mathcal{P}_{\mu^{k+1}}$.
- (g) Fixer $(\mu^{k+1}, y^{k+1}, x^{k+1}) = (\mu^*, y^*, x^*)$.
- (h) Fixer $k = k + 1$ et retourner à l'étape 2(a).

5.2.2 Évaluation de la matrice RGA

La première opération de l'étape de résolution (2a) consiste à évaluer la matrice des gains relatifs (K) en un point (μ^k, y^k, x^k) . Posons $K_{ij}(\mu^k)$ le gain correspondant à la fonction de transfert g_{ij} , évalué au point μ^k ($i, j \in \{1, 2\}$). $K_{ij}(\mu^k)$ n'est autre que la dérivée partielle de la variable contrôlée y_i par rapport à la variable manipulée μ_j , évaluée au point μ_k :

$$K_{ij}(\mu^k) = \frac{\partial y_i}{\partial \mu_j}(\mu^k). \quad (5.4)$$

Il est à noter que tout point (μ^k, y^k, x^k) où la matrice K est évaluée correspond à un point optimal de \mathcal{P}_{μ^k} . Selon l'objectif de ce dernier (équation 3.24), la valeur du débit d'eau fraîche (ψ_{fw}) est minimale pour un débit de pâte à l'entrée (ψ_{in}). Il en découle que les seules différences finies qu'il est possible d'évaluer sont celles décentrées à gauche sur ψ_{in} et celles décentrées à droite sur ψ_{fw} . Nous avons choisi d'évaluer ces différences finies décentrées en deux points.

Soit $h_i = h e_i$ où e_i est le vecteur unitaire et h un réel représentant le pas de calcul des différences finies pour l'évaluation de K . Une approximation par différences finies

décentrées à droite de $K_{ij}(\mu^k)$, évaluée en deux points s'écrit comme :

$$K_{ij}(\mu^k) = \frac{\partial y_i}{\partial \mu_j}(\mu^k) \approx \frac{-3y_i(\mu^k) + 4y_i(\mu^k + h_i) - y_i(\mu^k + 2h_i)}{2|h_i|}, \quad (5.5)$$

où $y_i(\mu^k)$ (resp. $y_i(\mu^k + h_i)$) est la valeur de la variable y_i dans la solution optimale du problème \mathcal{P}_{μ^k} (resp. $\mathcal{P}_{\mu^k + h_i}$). De la même façon, une approximation par différences finies décentrées à gauche de $K_{ij}(\mu^k)$, évaluée en deux points s'écrit comme :

$$K_{ij}(\mu^k) = \frac{\partial y_i}{\partial \mu_j}|_{\mu^k} \approx \frac{3y_i(\mu^k) - 4y_i(\mu^k - h_i) + y_i(\mu^k - 2h_i)}{2|h_i|}. \quad (5.6)$$

L'évaluation du premier élément de la *RGA* se fait aussi par différences finies. D'après l'équation 4.12, le premier élément λ_{11} de la *RGA*, évalué au point μ^k s'écrit :

$$\lambda_{11}(\mu^k, y^k, x^k) = \frac{K_{11}(\mu^k)K_{22}(\mu^k)}{K_{11}(\mu^k)K_{22}(\mu^k) - K_{12}(\mu^k)K_{21}(\mu^k)}. \quad (5.7)$$

5.2.3 Méthode du gradient

L'étape de résolution de l'algorithme d'optimisation de la contrôlabilité est une adaptation de la méthode de sous-gradient. Cette dernière est une méthode de descente qui prend comme direction de descente le gradient de la fonction à minimiser ($F(\lambda_{11})$ pour notre cas de figure). Elle ne garantit pas l'obtention d'un optimum global mais elle est simple, facile à utiliser et permet de trouver un optimum local pour une fonction. Le sous-gradient étant défini uniquement pour des fonctions convexes, nous supposons que la fonction $F(\lambda_{11})$ l'est localement au voisinage du point d'évaluation du sous-gradient.

Le principe de la méthode de descente est de construire une suite minimisante sous la forme [1] :

$$[\lambda_{11}]_{n+1} = [\lambda_{11}]_n + \alpha_n d_n, \quad (5.8)$$

où $d_n \in \mathbb{R}^2$, $d_n \neq 0$ est la direction de descente et α_n un scalaire qui représente le pas de déplacement selon cette direction. Tous deux sont choisis de façon à assurer la condition

$$F([\lambda_{11}]_{n+1}) < F([\lambda_{11}]_n). \quad (5.9)$$

La convergence de la méthode dépend bien sûr des choix de d_n et de α_n .

L'idée de la méthode de gradient est de choisir comme direction de descente le gradient de $F(\lambda_{11})$ au point $[\lambda_{11}]_n$. L'équation 5.8 se réécrit alors :

$$[\lambda_{11}]_{n+1} = [\lambda_{11}]_n - \alpha_n \frac{\nabla F([\lambda_{11}]_n)}{\| \nabla F([\lambda_{11}]_n) \|}. \quad (5.10)$$

La difficulté réside dans le calcul de $\nabla F(\lambda_{11})$ puisque λ_{11} est elle même évaluée numériquement. Il est donc nécessaire d'approcher $\nabla F(\lambda_{11})$ par différences finies aussi. Dans la suite, $\lambda_{11}(\mu^k)$ représentera $\lambda_{11}(\mu^k, y^k, x^k)$. Le gradient s'écrit comme :

$$\nabla F(\lambda_{11}) = [\frac{\partial F}{\partial \mu_1}(\lambda_{11}(\mu^k)), \frac{\partial F}{\partial \mu_2}(\lambda_{11}(\mu^k))],$$

$$\text{avec } \frac{\partial F}{\partial \mu_i}(\lambda_{11}) = 2(\lambda_{11}(\mu^k) - 1) \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial \mu_i}(\mu^k), i = 1, 2. \quad (5.11)$$

Soit $\delta_i = \delta e_i$ où e_i est le vecteur unitaire et δ un réel représentant le pas de calcul des différences finies pour l'évaluation du gradient. Une approximation décentrée de $\frac{\partial F}{\partial \mu_i}([\lambda_{11}]_n)$, évaluée en un seul point, est :

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_i}(\lambda_{11}) \approx 2(\lambda_{11}(\mu^k) - 1) \left(\frac{\lambda_{11}(\mu^k + \delta_i) - \lambda_{11}(\mu^k)}{|\delta_i|} \right), i = 1, 2. \quad (5.12)$$

Pour les mêmes raisons que celles citées à la section 5.2.2, il est seulement possible d'évaluer des approximations décentrées à gauche sur ψ_{in} et décentrées à droite sur ψ_{fw} . D'autre part, le pas δ_i choisi ne doit pas être plus précis que celui choisi pour le calcul des différences finies approximant les éléments de la RGA. En d'autres termes, il faut que $h < \delta$.

Une fois la direction de descente déterminée, il reste à déterminer le pas de déplacement α_n suivant cette direction. Il y a plusieurs manières de choisir le pas α_n . Il peut être choisi de sorte à minimiser la fonction $\Phi(\alpha) = F([\lambda_{11}]_n - \alpha_n d_n)$ ou en suivant la condition de Wolfe ou encore selon le test de Goldstein, etc [21]. La façon la plus simple de faire est de choisir un pas fixe ($\alpha_n = \forall \alpha, n \in \mathbb{N}$). Le choix s'est porté sur un pas fixe par intervalle puisque sinon il y aurait d'autres approximations numériques à faire et ceci engendrerait plus d'imprécisions numériques.

CHAPITRE 6

RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET DISCUSSIONS

Dans ce chapitre nous présentons les résultats numériques de l'algorithme de résolution des problèmes quadratiques (*ALPQ*) ainsi que de celui de l'optimisation de la contrôlabilité (*AOC*). Nous procémons, tout d'abord, à des tests de validation des paramètres que nous choisissons pour ces deux algorithmes. Nous validons ensuite les configurations des laveurs calculées selon le modèle des laveurs de pâte à papier (*MLPP*) présenté au chapitre 3 et les comparons aux données obtenues par les outils de simulation. En dernier lieu nous étudions l'impact des différents paramètres du *MLPP* sur la contrôlabilité de ces derniers. Tous les résultats ci-dessous présentés sont obtenus sur une station SUN ULTRA 60, sous le système d'exploitation Solaris 2.7-05.

6.1 Description du cas de base

Pour la validation de notre méthode et la présentation des résultats numériques nous nous sommes basés sur la configuration de fonctionnement des laveurs de pâte à papier présentée par *Felder* [15]. Cette configuration est celle d'un laveur à trois modules de lavages montés en série. Le choix de ce cas d'étude est justifié par le

manque de cas aussi détaillés dans la littérature. Les différentes valeurs que prennent les variables pour cette configuration sont présentées sur la figure 6.1. On y trouve également les valeurs des coefficients de recirculation ($\alpha_i, i \in \{1, 2, 3\}$), des taux de déplacement ($DR_i, i \in \{1, 2, 3\}$) et du pourcentage de récupération des solides (R), correspondants au cas d'étude de Felder. Il est à remarquer que dans ce dernier, une autre fraction est considérée en plus des fractions de l'eau, de la pâte et de solides dissous. Cette fraction est celle d'une huile brute ("Crude Tall Oil"). Nous avons choisi de comptabiliser les fractions de cette huile brute avec celles de l'eau circulant dans les différents courants des laveurs.

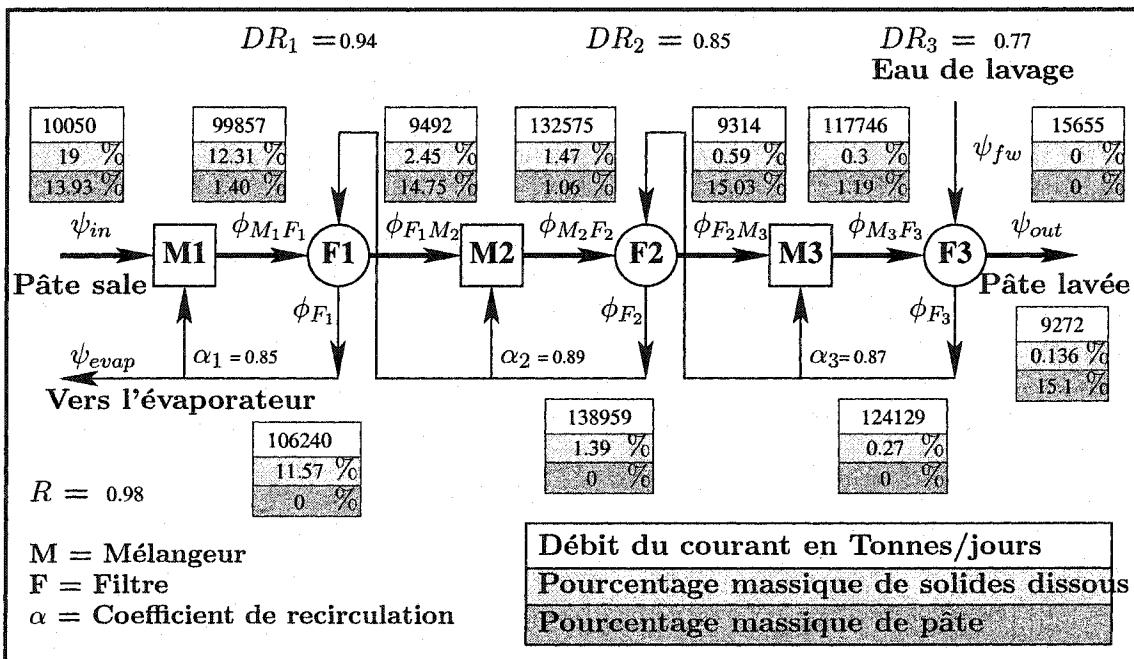


Figure 6.1 – Configuration de base pour un laveur à 3 modules montés à contre-courant

Dans la suite de ce chapitre, nous avons adopté un problème standard sur lequel sont effectués la majorité des tests. Ce problème est une configuration du *MLPP* de façon à ce qu'il corresponde au cas de base. Certains paramètres du modèle présenté au chapitre 3 ont été alors fixés pour tenir compte des valeurs du cas de base indiquées à la figure 6.1 :

- * le coefficient de ψ_{fw} dans la fonction objectif est fixé à 1 tandis que celui de f_{out}^s est fixé à 10000. Pour toutes les optimisations effectuées dans ce chapitre, nous avons pris ces coefficients dans le but d'effectuer une mise à l'échelle entre les ordres de grandeur des variables.
- * les variables caractérisant le débit de pâte à l'entrée (ψ_{in}, f_{in}^s et f_{in}^p) sont maintenues à leur valeur du cas de base ;
- * les bornes supérieures sur les taux de déplacement ($\overline{DR}_i, i \in 1, 2, 3$), sont fixées aux valeurs des taux de déplacement du cas de base. Tandis que les bornes inférieures sur ces mêmes taux de déplacement ($\underline{DR}_i, i \in 1, 2, 3$) sont fixées arbitrairement à une valeur minimale de 0.6 ;
- * le pourcentage de récupération des solides (R) et les coefficients de recirculation ($\alpha_i, i \in \{1, 2, 3\}$), sont eux aussi fixés à leurs valeurs du cas de base ;
- * les bornes supérieures sur les fractions de pâtes sont fixées à leurs valeurs respectives dans les différents courants du cas de base ;
- * les pertes de pâtes au niveau du filtrat sont fixées à 0.1%, contrairement au cas d'étude où elles sont considérées comme nulles ;
- * l'eau fraîche de lavage au niveau du troisième filtre est considérée comme pure et ne contenant aucune impureté solide.

6.2 Étude des paramètres de l'*ALPQ*

L'algorithme de linéarisation pour la résolution des problèmes quadratiques a été codé en langage C++ par *Perron* [29], en utilisant les librairies de CPLEX 7.5 [17]. Lors de la résolution d'un problème par l'*ALPQ* deux types de paramètres interviennent : ceux liés à la précision des calculs et ceux liés aux facteurs de mise à l'échelle. Les paramètres liés à la précision des calculs sont au nombre de trois :

- 1 - ε_r , la tolérance de réalisabilité d'une solution qui correspond à l'erreur commise dans l'approximation des termes quadratiques par leur linéarisation respective.
- 2 - ε_z , la précision sur la valeur de la fonction objectif qui correspond à l'écart de la valeur objectif de la solution courante par rapport à celle minimale parmi toutes les solutions réalisables.
- 3 - ε_{gen} , la précision générale sur les calculs de l'*ALPQ*. Cette précision définit un zéro dans le programme.

Le modèle des laveurs comprend deux types de variables : les variables représentant les débits et celles représentant les fractions massiques. Il existe une grande disparité entre les ordres de grandeur des valeurs que ces deux types de variables peuvent prendre. Afin de garder une précision des calculs significative, il est avantageux de conserver un même ordre de grandeur parmi les variables. Pour ce faire, deux facteurs de mise à l'échelle sont utilisés :

- * SC_d : facteur de mise à l'échelle des variables représentant les débits.
- * SC_f : facteur de mise à l'échelle des variables représentant les fractions massiques.

6.2.1 Analyse des paramètres de précision des calculs

La précision générale ε_{gen} est fixée à sa valeur minimale de $1e^{-7}$ pour toutes les optimisations étant donné que la tolérance de CPLEX est limitée à $1e^{-9}$. Afin de tester l'impact de ε_z et de ε_r , plusieurs solutions ont été générées en variant leurs valeurs respectives. Les tests ont été effectués sur le cas de base décrit à la section 6.1 et en prenant comme facteurs de mise à l'échelle le couple $(SC_d, SC_f) = (1e^{-4}, 1)$.

Tableau 6.1 – Performances de l'*ALPQ* pour la résolution du problème de base avec $SC_d = 1e^{-4}$, $SC_f = 1$ et $\varepsilon_{gen} = 1e^{-7}$.

ε_z	ε_r	$\psi_{fw}(t/j)$	$\psi_{out}(t/j)$	$f_{out}^s(\%)$	F_{obj}	E_{max}	N_{nd}	$T_p(s)$	$T_b(s)$	$T_t(s)$
$1e^{-5}$	$1e^{-3}$	16842.1	9153.82	0.124796	18090.1	$3.70579e^{-3}$	37	9.71	0.83	10.72
	$1e^{-4}$	16842.1	9153.82	0.125051	18092.6	$8.20349e^{-5}$	51	9.71	1.15	11.05
	$1e^{-5}$	16842.1	9153.82	0.125068	18092.8	$1.18812e^{-5}$	83	9.67	2.24	12.1
	$1e^{-6}$	16842.1	9153.82	0.125069	18092.8	$5.144e^{-7}$	89	9.68	2.53	12.39
$1e^{-6}$	$1e^{-3}$	16842.1	9153.82	0.124796	18090.1	$3.70579e^{-3}$	37	9.74	0.81	10.73
	$1e^{-4}$	16842.1	9153.82	0.125051	18092.6	$8.20349e^{-5}$	51	9.69	1.14	10.99
	$1e^{-5}$	16842.1	9153.82	0.125068	18092.8	$1.18812e^{-5}$	85	9.66	2.26	12.1
	$1e^{-6}$	16842.1	9153.82	0.125069	18092.8	$5.144e^{-7}$	89	9.72	2.53	12.44
$1e^{-5}$	$1e^{-3}$	16842.1	9153.82	0.125068	18092.8	$1.18812e^{-5}$	83	9.72	2.16	12.07
	$1e^{-4}$	16842.1	9153.82	0.125068	18092.8	$1.18812e^{-5}$	83	9.7	2.25	12.14
	$1e^{-5}$	16842.1	9153.82	0.125068	18092.8	$1.18812e^{-5}$	83	9.72	2.24	12.14
	$1e^{-6}$	16842.1	9153.82	0.125068	18092.8	$1.18812e^{-5}$	85	9.55	2.23	11.96
$1e^{-4}$	$1e^{-3}$	16842.1	9153.82	0.125069	18092.8	$5.144e^{-7}$	89	9.64	2.51	12.35
	$1e^{-4}$	16842.1	9153.82	0.125069	18092.8	$5.144e^{-7}$	89	9.7	2.55	12.42
	$1e^{-5}$	16842.1	9153.82	0.125069	18092.8	$5.144e^{-7}$	89	9.65	2.52	12.36
	$1e^{-6}$	16842.1	9153.82	0.125069	18092.8	$5.144e^{-7}$	89	9.72	2.49	12.39
$1e^{-3}$	$1e^{-3}$	16842.1	9153.82	0.124796	18090.1	$3.70579e^{-3}$	37	9.7	0.83	10.72
	$1e^{-4}$	16842.1	9153.82	0.125051	18092.6	$8.20349e^{-5}$	51	9.79	1.15	11.11

Pour chaque couple de précision $(\varepsilon_z, \varepsilon_r)$, le tableau 6.1 présente :

- * les valeurs des variables les plus significatives par rapport à la qualité d'une configuration des laveurs à savoir le débit d'eau fraîche (ψ_{fw}), le débit de pâte

à la sortie (ψ_{out}) et la fraction de solides à la sortie (f_{out}^s);

- * les résultats de l'optimisation à savoir la valeur de la fonction objectif (F_{obj}) et l'écart maximal sur les contraintes (E_{max});
- * les caractéristiques de l'*ALPQ* à savoir le nombre de noeuds branchés(N_{nd}), le temps de pré-traitement (T_p), le temps de branchement (T_b) et le temps total (T_t).

L'analyse des résultats du tableau 6.1 permet de conclure que ε_z n'a pas d'influence sur la qualité de la solution. Par contre, ε_r influe sur la qualité de la solution et sur les performances de l'algorithme. Il est alors évident que le choix de ε_r doit se faire de façon à avoir la solution la plus précise et que ε_z peut être choisi indifféremment. Dans la suite les paramètres de précision sont fixés à $\varepsilon_r = 1e^{-6}$ et $\varepsilon_z = 1e^{-6}$.

Au vu des résultats du tableau 6.1, nous pouvons aussi remarquer que le temps du prétraitement est toujours long par rapport au temps de l'exploration de l'arbre. Ceci est dû au fait que le resserrement des bornes réduit le domaine réalisable d'une façon importante.

6.2.2 Analyse des facteurs de mise à l'échelle

La mise à l'échelle des variables n'est qu'un artifice de calcul pour homogénéiser les valeurs des variables afin de diminuer les erreurs de calcul (principalement les erreurs de troncature).

Le tableau 6.2, présente les résultats de l'optimisation du cas de base selon différents facteurs de mise à l'échelle. Il apparaît que les résultats de calcul sont sensiblement les mêmes. La mise à l'échelle agit donc comme attendu sur les résultats

Tableau 6.2 – Performances de l’*ALPQ* pour la résolution du problème de base avec $\varepsilon_{gen} = 1e^{-7}$, $\varepsilon_r = 1e^{-6}$ et $\varepsilon_t = 1e^{-6}$.

SC_d	SC_f	$\psi_{fw}(t/j)$	$\psi_{out}(t/j)$	$f_{out}^s(\%)$	F_{obj}	E_{max}	N_{nd}	$T_p(s)$	$T_b(s)$	$T_t(s)$
$1e^{-5}$	$1e^{-2}$	16872	9153.62	0.12443	18116.3	0	79	6	3.57	9.78
	$1e^{-1}$	16842.1	9153.82	0.125069	18092.8	0	93	7.54	5.13	12.89
	1	16842.1	9153.82	0.125069	18092.8	$3.3e^{-9}$	89	11.06	4.15	15.42
$1e^{-4}$	$1e^{-2}$	16872	9153.62	0.12443	18116.3	$1e^{-10}$	81	5.59	5.71	11.52
	$1e^{-1}$	16842.1	9153.82	0.125069	18092.8	$2e^{-10}$	79	9.8	3.85	13.85
	1	16842.1	9153.82	0.125069	18092.8	$1.63e^{-8}$	117	10.34	7.56	18.11
$1e^{-3}$	$1e^{-2}$	16872	9153.62	0.12443	18116.3	$2.4e^{-9}$	157	12.37	18.47	31.08
	$1e^{-1}$	16842.1	9153.82	0.125069	18092.8	$1.83e^{-8}$	79	13.39	3.09	16.68
$1e^{-2}$	$1e^{-2}$	16872	9153.62	0.137987	18251.9	$7e^{-10}$	943	21.18	421.27	442.87

de calcul de l’*ALPQ*. Dans la suite, nous fixons les facteurs de mise à l’échelle $SC_d = 1e^{-4}$ et $SC_f = 1$.

6.3 Validation du modèle des laveurs

6.3.1 Validation par rapport au cas de base

Le but de ce qui suit est la validation des résultats de l’optimisation du *MLPP* par rapport au cas de base. Pour ce faire, deux variantes de ce modèle seront considérées :

- 1 - une première variante en considérant que les pertes de pâte au niveau des filtres sont nulles
- 2 - et une deuxième variante en considérant que les pertes de pâte au niveau des filtres sont égales à 0.1% (fraction massique de la pâte dans le filtrat).

La configuration des laveurs obtenue en optimisant la deuxième variante est présentée à la figure 6.2. De plus, le tableau 6.3, présente une comparaison des valeurs des variables caractéristiques des deux variantes avec celles du cas de base.

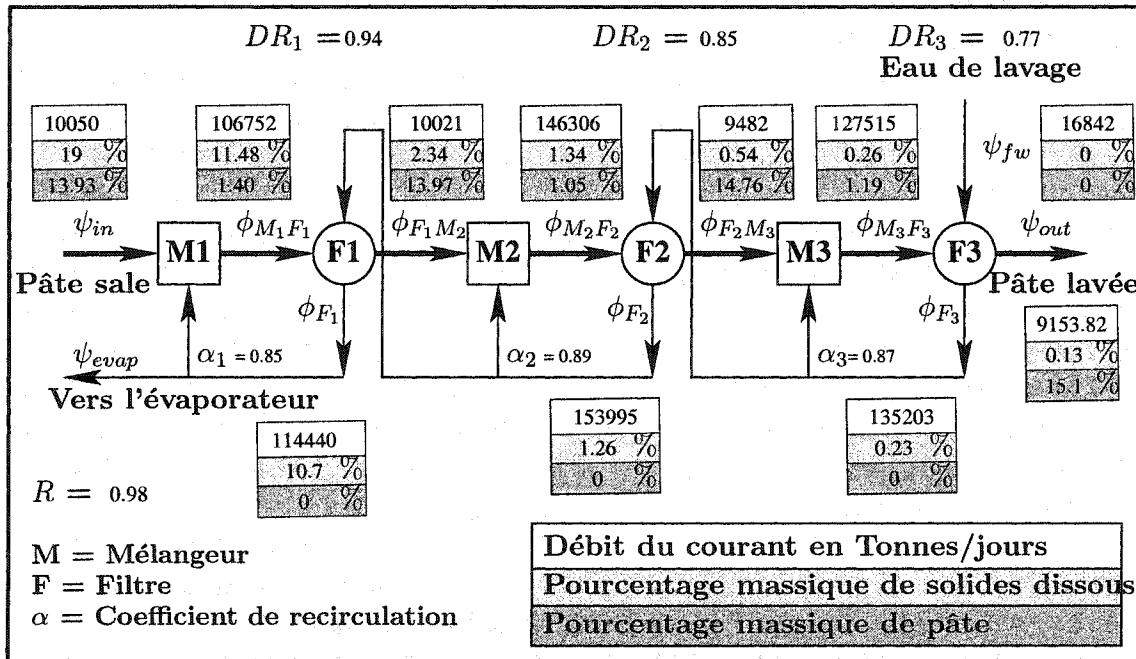


Figure 6.2 – Configuration optimale de fonctionnement d'un laveur à 3 modules en considérant des pertes de pâte de 1% au niveau des filtres

Les deux configurations données par les deux variantes du *MLPP* diffèrent légèrement de la configuration initiale. Deux raisons expliquent ces différences et justifient le fait que l'adéquation avec le cas de base n'est pas parfaite. La première est le fait que la configuration de base de Felder est un cas d'étude établi à la main ce qui amène à considérer une faible précision des calculs. La deuxième raison, et la plus importante, est que la configuration du cas de base ne tient compte d'aucun objectif d'optimisation contrairement à celle donnée par l'*ALPQ* qui minimise la consom-

Tableau 6.3 – Validation des résultats du modèle par rapport au cas de base de Felder

Perte	F_{obj}	Débit	Débit eau fraîche (ψ_{fw})		Débit sortie (ψ_{out})		Frac solides sortie (f_{out}^s)		Max diff
			Entrée (ψ_{in})	Base ALPQ % diff	Base ALPQ % diff	Base ALPQ % diff	Base ALPQ % diff	Base ALPQ % diff	
0%	16999.7	10050	15654.6 15608.9	-0.29	9271.5 9271.3	-0.0025	0.136 0.139	2.26	2.67
0.1%	18012	10050	15654.6 16750.7	7	9271.5 9154.4	-1.26	0.136 0.126	-7.25	10.35

mation d'eau fraîche et les solides dissous au niveau de la pâte lavée. Les coûts opératoires, caractérisés par la fonction objectif F_{obj} , sont de 16999.7 pour le cas de base. Pour la première variante, qui correspond le plus au cas de base, les coûts opératoires sont légèrement inférieurs pour une configuration de fonctionnement qui utilise un peu moins d'eau et produit une pâte un peu plus sale.

Il est à noter qu'au niveau de toutes les variables du modèle, le maximum d'écart de la valeur d'une variable par rapport à celle de la même variable dans le cas de base (Max diff), est de 2.67%. La configuration obtenue pour la deuxième variante implique que les laveurs utilisent 7% plus d'eau pour produire 1.26% moins de pâte à la sortie mais à une propreté qui est de 7.25% meilleure que celle du cas de base. Cette configuration est acceptable du moment que les laveurs utilisent plus d'eau pour produire une pâte plus propre. En terme de coûts opératoires, la deuxième variante est logiquement plus onéreuse puisqu'elle produit une pâte plus propre.

6.3.2 Comportement du MLPP

Le but de cette section est de tester l'effet que peut avoir l'un ou l'autre des paramètres du modèle sur la configuration optimale de fonctionnement des laveurs. Les tests sont réalisés à partir du problème de base dont les paramètres suivants sont modifiés séparément : le nombre de modules de lavage, les taux de déplacement

et les coefficients de recirculation.

Réaction aux variations du nombre de modules de lavage

Le nombre de modules de lavages dans un laveur de pâte à papier (N_m) est un paramètre important dans la conception de ce dernier. Il est indispensable de choisir le nombre de modules de lavage de façon à réaliser un compromis entre la propreté de la pâte et les coûts aussi bien opératoires que fixes. Le tableau 6.4 présente la variation des variables caractéristiques en fonction de N_m . Notons que les résultats de ce tableau sont obtenus à travers des optimisations de l'*ALPQ* à des précisions $\varepsilon_r = \varepsilon_z = 1e^{-5}$ car une précision de $1e^{-6}$ ne permet pas de résoudre des problèmes à plus de quatre modules.

Tableau 6.4 – Sensibilité de la configuration optimale des laveurs au nombre de modules de lavage (*ALPQ* avec $SC_d = 1e^{-5}$, $SC_f = 1e^{-2}$: et $\varepsilon_r = \varepsilon_z = 1e^{-5}$)

N_m	ψ_{fw}	ψ_{out}	f_{out}^s	F_{obj}	E_{max}	N_{nd}	$T_p(s)$	$T_b(s)$	$T_t(s)$
1	16872	9153.62	1.159	28462	0	1	0.99	0	1.04
2	16872	9153.62	0.313376	20005.8	$8.3091e^{-6}$	5	2.25	0.04	2.4
3	16872	9153.62	0.123058	18102.6	$7.3273e^{-6}$	83	6.02	1.62	7.82
4	16872	9153.62	0.0545925	17418	$8.596e^{-6}$	297	18.52	14.37	33.12
5	16872	9153.62	0.0365577	17237.6	$8.9641e^{-6}$	301	38.58	16.8	55.67
6	16872	9153.62	0.0215323	17087.4	$4.1675e^{-6}$	297	76.16	22.35	98.86

Il est clair que le nombre de modules n'a pas d'influence sur le débit d'eau fraîche et le débit de pâte lavée. Ces derniers gardent toujours la même valeur indépendamment de N_m . Par contre, le nombre de modules de lavage influe sensiblement sur la propreté de la pâte lavée tel qu'illustré à la figure 6.3. La propreté de la pâte lavée est nettement améliorée en adoptant jusqu'à quatre modules de lavage mais l'est beaucoup moins au-delà. Ceci justifie bien le fait qu'en industrie les laveurs comprennent le plus souvent de trois à quatre modules de lavage.

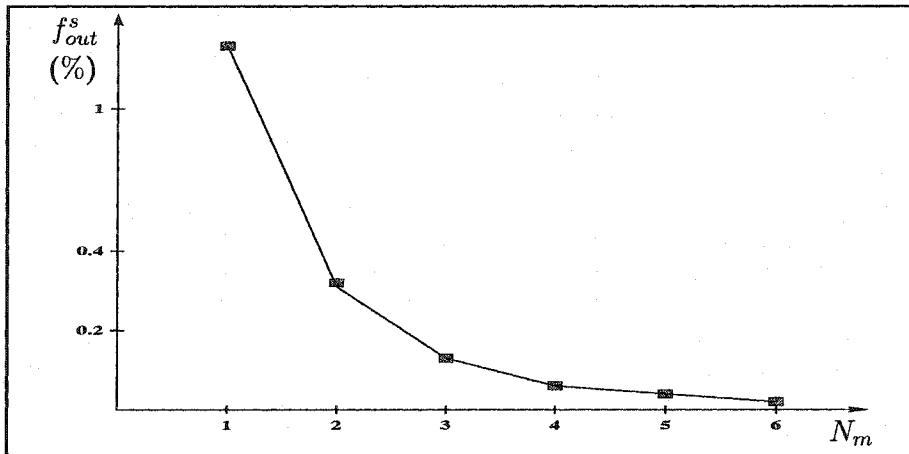


Figure 6.3 – Propreté de la pâte lavée en fonction du nombre de modules de lavage.

Réaction aux variations des taux de déplacement

Afin d'étudier l'influence des taux de déplacement sur le comportement du *MLPP*, plusieurs tests sont réalisés à partir du cas de base en variant à la fois les trois bornes supérieures sur les taux de déplacement ($\overline{DR}_i, i \in \{1, 2, 3\}$). Ces variations (V_{DR}) se font d'un certain pourcentage par rapport à leurs valeurs initiales et sont opérées sur les \overline{DR}_i car ce sont des bornes supérieures presque toujours atteintes.

L'analyse des résultats du tableau 6.5 permet de conclure que les taux de déplacement n'ont aucun effet sur la consommation d'eau fraîche ou le débit de pâte lavée. Par contre, plus grands sont les taux de déplacements, meilleure est la propreté de la pâte. Ce type de réaction est très naturel du moment que les taux de déplacement caractérisent l'efficacité de lavage. Il est donc évident qu'un module de lavage plus efficace permet de mieux laver la pâte. Ceci se traduit aussi au niveau des coûts opératoires (F_{obj}) qui diminuent lorsque les laveurs sont plus efficaces.

Tableau 6.5 – Sensibilité de la configuration optimale des laveurs aux taux de déplacement ($SC_d = 1e^{-4}$, $SC_f = 1$: et $\varepsilon_r = \varepsilon_z = 1e^{-6}$)

$V_{DR}(\%)$	ψ_{fw}	ψ_{out}	f_{out}^s	F_{obj}	E_{max}	N_{nd}	$T_p(s)$	$T_b(s)$	$T_t(s)$
-5	16842.1	9153.82	0.294597	19788.1	$1.23e^{-8}$	109	10.46	2.33	12.98
-4	16842.1	9153.82	0.255546	19397.6	$1.6e^{-9}$	63	10.51	0.8	11.49
-3	16842.1	9153.82	0.219068	19032.8	$4.95e^{-8}$	97	12.47	1.16	13.82
-2	16842.1	9153.82	0.185163	18693.7	$1.53e^{-8}$	95	8.55	2.19	10.93
-1	16842.1	9153.82	0.153831	18380.4	$9.7e^{-9}$	79	9.64	2.75	12.58
0	16842.1	9153.82	0.125069	18092.8	$1.63e^{-8}$	117	9.98	6.57	16.74
1	16842.1	9153.82	0.0988715	17830.8	$2.4e^{-9}$	103	38.68	9.27	48.16
2	16842.1	9153.82	0.0752285	17594.4	$1.32e^{-8}$	139	21.75	13.96	35.97
3	16842.1	9153.82	0.0541267	17383.4	$4.6e^{-9}$	167	16.47	22.29	39.03
4	16842.1	9153.82	0.0355477	17197.6	$6.5e^{-9}$	263	27.79	38.37	66.44
5	16842.1	9153.82	0.0194669	17036.8	$3.21e^{-8}$	179	24.74	14.56	39.55

Réaction aux variations des coefficients de recirculation

L'étude de l'influence des coefficients de recirculation sur le comportement du *MLPP* est faite de la même manière que pour celle des taux de déplacement. Plusieurs tests sont réalisés à partir du cas de base en variant à la fois les trois coefficients de recirculation. Ces variations (V_α) sont aussi faites d'un certain pourcentage par rapport aux valeurs initiales. L'analyse des résultats du tableau 6.6 permet de conclure que la consommation d'eau fraîche diminue au fur et à mesure que la quantité de filtrat recirculé au niveau des filtres est plus importante. L'augmentation des taux de recirculation permet aussi de diminuer les coûts opératoires (F_{obj}). Toutefois, plus on recircule d'eau dans le procédé moins la pâte lavée est propre. Le choix des coefficients de recirculation doit donc satisfaire un certain compromis entre la propreté désirée de la pâte lavée et les coûts opératoires. La figure 6.4, montre bien le compromis à faire.

Tableau 6.6 – Sensibilité de la configuration optimale des laveurs aux coefficients de recirculation ($SC_d = 1e^{-4}$, $SC_f = 1$: et $\varepsilon_r = \varepsilon_z = 1e^{-6}$)

$V_\alpha(\%)$	ψ_{fw}	ψ_{out}	f_{out}^s	F_{obj}	E_{max}	N_{nd}	$T_p(s)$	$T_b(s)$	$T_t(s)$
-6	24098.5	9105.44	0.091817	25016.6	$1.87e^{-8}$	67	16.12	3.23	19.56
-5	22825.4	9113.93	0.0952494	23777.9	$3.1671e^{-6}$	81	11.34	3.22	14.77
-4	21578.9	9122.24	0.0992404	22571.3	$1.484e^{-7}$	77	21.19	3.76	25.15
-3	20358.1	9130.38	0.103945	21397.5	$8.4e^{-9}$	97	39.35	6.77	46.33
-2	19162.2	9138.35	0.109582	20258	$2.2e^{-9}$	77	14.86	2.96	18.03
-1	17990.4	9146.16	0.116466	19155.1	$1.075e^{-7}$	69	17.27	2.33	19.8
0	16842.1	9153.82	0.125069	18092.8	$1.63e^{-8}$	117	10.04	6.6	16.85
1	15716.5	9161.32	0.136183	17078.4	$2.3e^{-9}$	93	10.51	6.76	17.48
2	14613	9168.68	0.153707	16150.1	0	67	9.61	2.89	12.69
3	13531	9175.89	0.180336	15334.3	$1.6e^{-9}$	79	10.08	1.95	12.21
4	12469.7	9182.97	0.220226	14672	$6e^{-10}$	41	9.44	1.15	10.77
5	11428.6	9189.91	0.285102	14279.7	$1e^{-10}$	67	8.92	2.18	11.3
6	11106.9	9192.05	0.314235	14249.3	$4e^{-10}$	281	26.21	36.56	63.04

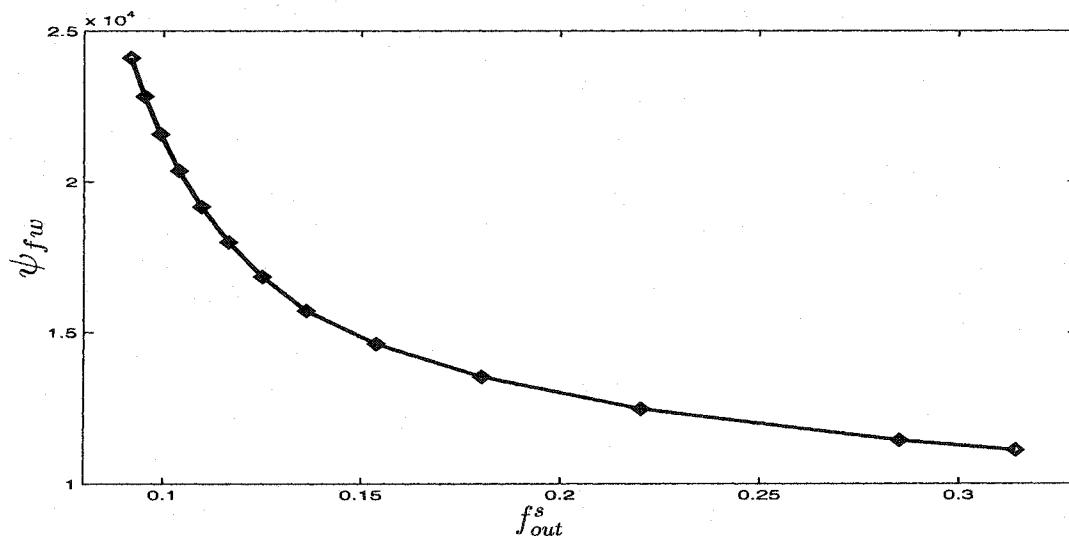


Figure 6.4 – Débit d'eau fraîche utilisé en fonction de la propreté de la pâte lavée.

6.3.3 Comparaison avec WinGEMS 5.0

La simulation est une étape fréquente lors de la conception des procédés industriels pour éviter les conséquences désastreuses des erreurs de conception. Pour l'industrie des pâtes et papier, le logiciel WinGEMS 5.0 (*WG*) [39], est l'un des outils de simulation les plus utilisés. Il nous a alors paru intéressant de comparer les configurations optimales du *MLPP* avec celles données par des simulations avec *WG* dans les mêmes conditions de fonctionnement.

Présentation de WinGEMS 5.0

WinGEMS est un outil de simulation développé pour aider les ingénieurs de conception à résoudre les problèmes spécifiques à l'industrie des pâtes et papiers. Il contient plus de 60 modules représentant chacun une partie du procédé papetier. *WG* peut être utilisé pour des analyses complètes ou partielles des circulations d'eau, de fibres, d'énergie, etc. Le principe d'utilisation de *WG* est la construction visuelle du procédé à simuler en utilisant les différents modules nécessaires. Ces derniers doivent être ensuite reliés entre eux et paramétrés individuellement. L'algorithme de simulation de *WG* procède ensuite par substitutions successives pour trouver les configurations optimales de fonctionnement.

Comparaison des configurations

De la même manière qu'à la section 6.3.1, deux variantes du modèle des laveurs de pâte à papier sont considérées : celle avec une perte de pâte nulle au niveau des filtres et celle avec une perte de pâte de 1%. Pour chacune des variantes, les comparaisons sont réalisées par rapport à des simulations faites par *WG*. Ces simulations, sont inspirées du cas de base auquel certains changements sont apportés au niveau des paramètres d'entrée de *WG* tout en gardant les autres paramètres à leurs valeurs de base. Les différentes simulations réalisées sont les suivantes :

Tableau 6.7 – Comparaison des résultats de WinGEMS et du modèle des laveurs avec une perte de pâte nulle

N	F_{obj} ALPQ	Débit Entrée (ψ_{in})	Débit eau fraîche (ψ_{fw})			Débit sortie (ψ_{out})			Frac solides sortie (f_{out}^s)		
			WG	ALPQ	% diff	WG	ALPQ	% diff	WG	ALPQ	% diff
1-a	16125	10050	15650	14498	-7.36	9271.3	9271.3	-0.0001	0.1150	0.1627	41.47
1-b	17052	10050	15650	15650	0	9271.3	9271.3	-0.0001	0.1150	0.1402	21.94
2-a	15101	10050	12000	14498	20.81	9271.3	9271.3	-0.0001	0.0600	0.0604	0.65
3-a	14548	10050	20000	14498	-27.51	9271.3	9271.3	-0.0001	0.0070	0.0051	-27.54
3-b	20029	10050	20000	20000	0	9271.3	10884.7	17.4	0.0070	0.0029	-58.10
4-a	11765	8000	15650	11541	-26.26	7380.1	7380.2	0.0004	0.0080	0.0225	181.24
4-b	15772	8000	15650	15650	0	7380.1	7380.2	0.0004	0.0080	0.0122	52.62
5-a	21287	14000	15650	20223	29.22	12915	12942	0.2096	0.079	0.1064	34.62

- 1 - Simulation pour un changement des taux de déplacements au niveau des trois laveurs de : ($DR_1 = 0.94$, $DR_2 = 0.85$ et $DR_3 = 0.77$) à ($DR_1 = 0.81$, $DR_2 = .75$ et $DR_3 = 0.62$).
- 2 - Le résultat de la simulation pour une diminution du débit d'eau fraîche de lavage de 15650 à 12000.
- 3 - Simulation pour une augmentation du débit d'eau fraîche de lavage de 15650 à 20000.
- 4 - Simulation pour une diminution du débit de pâte à laver en amont des laveurs de 10050 à 8000.
- 5 - Simulation pour une augmentation du débit de pâte à laver en amont des laveurs de 10050 à 14000.

Pour chacun des cas ci-haut cités, nous présentons deux comparaisons :

- (a) La première en laissant libre dans le *MLPP* la variable correspondant au débit d'eau fraîche ce qui revient à minimiser sa valeur.
- (b) La deuxième en fixant la variable correspondant au débit d'eau fraîche à la

même valeur que celle adoptée pour la simulation. Le problème obtenu dans le cas (b) n'est pas toujours réalisable puisqu'il est impossible de fixer la valeur de l'eau fraîche à une valeur inférieure à celle obtenue dans le cas (a). Celle-ci étant la valeur minimale que peut prendre l'eau selon la modélisation adoptée.

Tableau 6.8 – Comparaison des résultats de WinGEMS et du modèle des laveurs avec une perte de pâte de 0.1%

N	F_{obj} ALPQ	Débit Entrée (ψ_{in})	Débit eau fraîche (ψ_{fw})			Débit sortie (ψ_{out})			Frac solides sortie (f_{out}^s)		
			WG	ALPQ	% diff	WG	ALPQ	% diff	WG	ALPQ	% diff
1-a	16895	10050	15650	15481	-1.08	9271.3	9162.9	-1.17	0.1150	0.1415	23.04
1-b	17037	10050	15650	15650	0	9271.3	9161.8	-1.18	0.1150	0.1388	20.65
2-a	15995	10050	12000	15481	29.00	9271.3	9162.9	-1.17	0.0600	0.0515	-14.12
3-a	15522	10050	20000	15481	-22.60	9271.3	9162.9	-1.17	0.007	0.0042	-40.50
3-b	20093	10050	20000	20000	0	9271.3	11006.1	18.71	0.007	0.0093	33.47
4-a	12510	8000	15650	12323	-21.26	7380.1	7293.9	-1.17	0.0080	0.0188	134.8
4-b	15770	8000	15650	15650	0	7380.1	7271.7	-1.47	0.0080	0.0121	51.20
5-a	21653	14000	15650	20840	33.16	12915	12844	-0.55	0.079	0.0813	2.95

À partir des résultats des tableaux 6.7 et 6.8, aucune tendance générale ne peut être détectée quant aux similarités ou différences entre WinGEMS et le *MLPP*. À partir du tableau 6.7 par exemple, il est clair que plusieurs cas de figure peuvent se présenter :

- * pour le cas 1-b, le *MLPP* lave plus sale que *WG* pour un même débit de production et pour une même consommation d'eau fraîche ;
- * pour le cas 2-a, le *MLPP* utilise 20% plus d'eau pour une même propreté de la pâte ;
- * pour le cas 3-b, le *MLPP* donne un débit de sortie supérieur de 17.4% à celui de *WG* mais 58% plus propre pour une même quantité d'eau fraîche consommée ;
- * pour le cas 4-b, le *MLPP* produit une pâte en sortie qui est de 50% plus sale

que celle donnée par *WG* pour une même consommation d'eau fraîche et un même débit de sortie;

- * pour le cas 5-a, le *MLPP* produit une pâte en sortie qui est 35% plus sale que celle de *WG* tout en consommant 30% plus d'eau.

Cette liste de remarques n'est pas exhaustive. Il est aussi à noter que les deux variantes du *MLPP* ne réagissent pas de la même manière dans tous les cas. Pour le cas 2-a par exemple, d'un côté la variante avec perte de pâte consomme 29% plus d'eau que *WG* pour laver la pâte à 14% plus propre. De l'autre côté, la variante sans perte de pâte consomme 21% plus de pâte que *WG* pour laver la pâte légèrement plus sale (0.65%).

Les différences constatées entre le *MLPP* adopté dans ce mémoire et *WG* sont dues aux différences au niveau de la modélisation et de l'approche de résolution. Ces différences peuvent être expliquées par plusieurs points, parmi lesquels :

- * *WG* tient compte d'équations et de contraintes inconnues par l'utilisateur. Les équations de *WG* ne sont pas modifiables contrairement à celles du *MLPP*. À titre d'exemple, *WG* n'utilise pas les mêmes équations de conservation de la matière. Ceci peut être dû au fait que le *MLLP* se base sur des fractions massiques des débits alors que ce n'est peut-être pas le cas pour *WG*.
- * Le *MLPP* est un modèle approximatif qui ne tient pas compte de toutes les contraintes physiques et techniques.
- * *WG* est un simulateur et non un optimiseur.
- * Le débit d'eau fraîche est une donnée du problème de simulation tandis que c'est une variable à optimiser pour le *MLPP*.
- * Le modèle de *WG* n'offre pas la possibilité d'imposer un taux de récupération des solides.
- * Les critères d'efficacité des laveurs ne sont pas définis de la même manière dans

WG que dans le *MLPP*. *WG* possède l'avantage d'offrir le choix des critères d'efficacité à utiliser.

6.4 Étude des paramètres de l'*AOC*

Nous avons codé l'algorithme d'optimisation de la contrôlabilité a été codé en langage C++. Parmi les paramètres de l'*AOC*, trois influencent considérablement les résultats des calculs :

- 1 - h , le pas de calcul des différences finies pour l'évaluation de la matrice de gains relatifs K (section 5.2.2) ;
- 2 - δ , le pas de calcul des différences finies pour l'évaluation du gradient (section 5.2.3) ;
- 3 - α , le pas de déplacement dans la direction donnée par le gradient (section 5.2.3).

Choix des pas de différences finies

La première étape de l'*AOC*, tel que décrit à la section 5.2.1, est la recherche d'une solution initiale $(\mu_{ini}, y_{ini}, x_{ini})$. Les solutions initiales y_{ini} et x_{ini} sont obtenues suite à l'optimisation du modèle pour μ_{ini} .

Tableau 6.9 – Points initiaux pour le choix des pas de différences finies

Point initial (μ_{ini})	ψ_{in}	ψ_{fw}	F_{obj}		
			$N_m = 1$	$N_m = 2$	$N_m = 3$
1	8624	15650	27240	18550	16730
2	6525	13540	25130	16200	14460
3	10050	22630	34220	25180	23480
4	10050	24800	36390	27300	25630

Tableau 6.10 – Évaluation de la contrôlabilité selon les pas de différences finies choisis et le nombre de modules de lavages

μ_{ini}	h	δ	$N_m = 1$				$N_m = 2$				$N_m = 3$			
			λ_{11}	$F(\lambda_{11})$	d_1	d_2	λ_{11}	$F(\lambda_{11})$	d_1	d_2	λ_{11}	$F(\lambda_{11})$	d_1	d_2
1	5	30	0.671	0.108	$5.7e^{-6}$	$-9.1e^{-12}$	1.013	$1.8e^{-4}$	$2.3e^{-5}$	$-2.6e^{-5}$	1.013	$1.8e^{-4}$	$1.5e^{-5}$	$-1.7e^{-5}$
	5	50	0.671	0.108	$6.5e^{-6}$	$1.4e^{-12}$	1.013	$1.8e^{-4}$	$1e^{-4}$	$-5.6e^{-5}$	1.013	$1.8e^{-4}$	$9.8e^{-5}$	$-4.9e^{-5}$
	10	80	0.671	0.108	$9.3e^{-6}$	$-2.8e^{-11}$	1.013	$1.8e^{-4}$	$2.7e^{-4}$	$-1.4e^{-4}$	1.013	$1.8e^{-4}$	$2.6e^{-4}$	$-1.7e^{-4}$
	10	100	0.671	0.108	$1.2e^{-5}$	$-4.4e^{-11}$	1.013	$1.8e^{-4}$	$4.2e^{-4}$	$-2.3e^{-4}$	1.013	$1.8e^{-4}$	$4.4e^{-4}$	$-2.5e^{-4}$
	20	200	0.671	0.108	$5e^{-11}$	$6.3e^{-12}$	1.013	$1.8e^{-4}$	$1.6e^{-3}$	$-9.3e^{-4}$	1.013	$1.8e^{-4}$	$1.7e^{-3}$	$-9.2e^{-4}$
	50	500	0.671	0.108	-5.3	$-1.2e^{-11}$	1.013	$1.8e^{-4}$	$1e^{-2}$	$-5.7e^{-3}$	1.013	$1.8e^{-4}$	$1.0e^{-2}$	$-5.7e^{-3}$
2	5	30	0.560	0.194	-17.6	17.6	1.015	$2.3e^{-4}$	$6.7e^{-5}$	$-3.4e^{-5}$	1.013	$1.6e^{-4}$	$3.1e^{-3}$	$-3.1e^{-3}$
	5	50	0.560	0.194	-29.4	29.4	1.015	$2.3e^{-4}$	$1.8e^{-4}$	$-1.5e^{-4}$	1.013	$1.6e^{-4}$	$5.2e^{-3}$	$-5.2e^{-3}$
	10	80	0.671	0.108	-26.3	26.3	1.015	$2.3e^{-4}$	$4.6e^{-4}$	$-2.3e^{-4}$	1.015	$2.3e^{-4}$	$4.8e^{-4}$	$-2.8e^{-4}$
	10	100	0.671	0.108	-32.9	3.3	1.015	$2.3e^{-4}$	$7.2e^{-4}$	$-3.5e^{-4}$	1.015	$2.3e^{-4}$	$7.4e^{-4}$	$-3.6e^{-4}$
	20	200	0.838	0.026	-16.2	16.2	1.015	$2.3e^{-4}$	$2.9e^{-3}$	$-1.4e^{-3}$	1.015	$2.3e^{-4}$	$2.8e^{-3}$	$-1.3e^{-3}$
	50	500	0.938	$3.8e^{-3}$	-6.2	6.2	1.015	$2.3e^{-4}$	$1.8e^{-2}$	$-8.7e^{-3}$	1.015	$2.3e^{-4}$	-45.6	$-8.7e^{-3}$
3	5	30	1.005	$2.4e^{-5}$	$1.2e^{-8}$	$-3.4e^{-13}$	0.147	0.728	$-2.3e^{-5}$	$1.8e^{-4}$	0.127	0.763	$1.4e^{-1}$	$-2.5e^{-3}$
	5	50	1.005	$2.4e^{-5}$	$9.6e^{-9}$	$8e^{-13}$	0.147	0.728	$-4.6e^{-2}$	$-6.3e^{-5}$	0.127	0.763	$-3e^{-2}$	$-6.9e^{-3}$
	10	80	1.005	$2.4e^{-5}$	$-9.6e^{-11}$	$2.5e^{-13}$	0.147	0.728	4.260	$1.2e^{-4}$	0.127	0.763	4.6	$-1e^{-2}$
	10	100	1.005	$2.4e^{-5}$	$-1.2e^{-10}$	$-3.6e^{-13}$	0.147	0.728	10.68	$-6.8e^{-6}$	0.127	0.763	11.5	$-1.8e^{-2}$
	20	200	1.005	$2.4e^{-5}$	$2.2e^{-9}$	$1.8e^{-13}$	0.147	0.728	0.694	$1.7e^{-4}$	0.127	0.763	$5.1e^{-2}$	$-5.6e^{-2}$
	50	500	1.005	$2.4e^{-5}$	$8.3e^{-9}$	$-3.5e^{-13}$	0.147	0.728	-36.8	$1.9e^{-4}$	0.127	0.763	-40.57	-0.367
4	5	30	0.618	1.46	$3.5e^{-5}$	$4.6e^{-12}$	0.147	0.728	$-3.8e^{-5}$	$8.4e^{-5}$	0.125	0.766	$7.2e^{-3}$	81.66
	5	50	0.618	1.46	$-1.1e^{-5}$	$-5.2e^{-12}$	0.147	0.728	$1e^{-4}$	$5.1e^{-5}$	0.125	0.766	721.4	$8.6e^{-2}$
	10	80	0.618	1.46	$-1.2e^{-6}$	$-3.4e^{-15}$	0.147	0.728	$-3.5e^{-5}$	$2.9e^{-4}$	0.125	0.765	9.97	-0.195
	10	100	0.618	1.46	$4.3e^{-5}$	$9.9e^{-12}$	0.147	0.728	$-5.2e^{-4}$	$1.4e^{-4}$	0.125	0.765	531.8	$-6.2e^{-2}$
	20	200	0.618	1.46	55.32	$1.6e^{-12}$	0.147	0.728	$1e^{-4}$	$-1.3e^{-4}$	0.707	0.085	102.2	-102.3
	50	500	0.618	1.46	-641.6	$4.3e^{-11}$	0.147	0.728	$-2.3e^{-4}$	$-1.8e^{-4}$	0.125	0.765	-1543	-0.290

Dans le but de fixer le meilleur choix du couple (h, δ) pour les calcul des différences finies, nous avons testé quelques combinaisons de ce couple avec quatre points initiaux. Ces derniers sont présentés au tableau 6.9 avec leurs coûts opératoires respectifs (F_{obj}) selon le nombre de modules de lavage (N_m). Nous présentons dans le tableau 6.10 les résultats de calculs pour quatre de ces points et selon le nombre de modules de lavage afin d'estimer l'impact des pas de calculs sur le premier élément de la *RGA* (λ_{11}), la fonction objectif que minimise l'*AOC* ($F(\lambda_{11})$) et la direction de descente $d = (d_1, d_2)$.

Il paraît clair d'après le tableau 6.10 que le choix du pas de différences finies h n'influe pas sur l'évaluation de λ_{11} . En effet, pour un même point initial et pour un même nombre de modules de lavages, λ_{11} reste invariante par rapport aux changements de valeur de h . Une exception doit toutefois être faite pour le cas d'un module à partir du point initial 2 qui peut être expliqué par le fait que l'*ALPQ* résoud les problèmes à un module de lavage au noeud initial sans branchement.

Contrairement à l'évaluation de λ_{11} , celle de la direction de descente d est sensible à la valeur du pas δ choisie. Cette sensibilité n'est pas de mise quand la valeur λ_{11} est au voisinage de 1. Les directions évaluées sont dans ce cas du même ordre de grandeur, de même signe et avec de petites valeurs numériques confirmant la proximité à l'optimum. Au contraire, la sensibilité de l'évaluation de d aux variations de δ est très accentuée lorsque la valeur de λ_{11} est loin de l'optimum. D'après les tests numériques effectués il paraît que les couples de pas (10, 80) et (10, 100) sont ceux qui donnent les résultats numériques les plus stables. Dans la suite nous fixons h à 10 et δ à 100.

À partir du tableau 6.10 il est aussi possible de remarquer que pour un même point initial la contrôlabilité (λ_{11}) dépend du nombre de modules de lavage utilisés.

La contrôlabilité est similaire entre deux ou trois modules de lavage. Les valeurs prises par λ_{11} dans ce cas sont au voisinage de 1 ou compris entre 0.1 et 0.2. Au contraire la contrôlabilité est différente lorsqu'il s'agit d'un seul module de lavage. Une explication possible serait que pour les laveurs à un seul module de lavage les degrés de libertés dans le modèle sont moins nombreux ce qui constraint le système à réagir d'une façon différente.

Choix du pas de déplacement dans la direction de descente

Le choix du pas de déplacement (α) dans la direction de descente s'est porté sur un pas fixe. Ceci est justifié essentiellement par le fait que les évaluations des directions de descente se font de façon numérique ce qui exige la résolution à plusieurs reprises du modèle. Toute méthode pour calculer le pas de descente impliquerait alors plus d'évaluations numériques et un temps de calcul élevé.

Tableau 6.11 – Différentes valeurs du pas de déplacement dans la direction d pour $\lambda_{11} \leq 0.9$ et $\lambda_{11} \geq 1.1$

$m_d \leq 0.2$	$0.2 < m_d \leq 1$	$1 < m_d \leq 10$	$10 < m_d \leq 1e^2$	$1e^2 < m_d \leq 1e^3$	$1e^3 < m_d \leq 1e^4$	$1e^4 < m_d \leq 1e^5$	$m_d \geq 1e^5$
α	1000	100	10	1	0.1	0.01	0.001

Le pas α retenu pour l'AOC est un pas fixe dont la valeur dépend de la valeur de λ_{11} à l'itération courante et de la valeur des composantes de la direction de descente :

- * Si $\lambda_{11} \in [0.9, 1.1]$ alors $\alpha = 100$.
- * Sinon α prend une valeur qui dépend de la plus grande valeur parmi les deux composantes de la direction de descente ($m_d = \max(d_1, d_2)$). Les différentes valeurs que peut prendre α dans ce cas sont présentées dans le tableau 6.11.

Le choix d'un pareil pas est aussi justifié en partie par le fait que l'optimum à atteindre est connu (λ_{11} est optimalement égal à 1) ce qui explique que le pas choisi est petit lorsque l'algorithme se trouve au voisinage de 1.

6.5 Étude de la contrôlabilité des laveurs

6.5.1 Résultats de l'AOC

Afin d'étudier le comportement de l'*AOC* plusieurs tests ont été réalisés sur le cas de base présenté à la section 6.1 en partant de plusieurs points initiaux. Pour ces tests aucune condition d'arrêt n'a été appliquée. À l'issu de ces derniers il paraît que l'*AOC* peut avoir dans la majorité des cas deux types de comportements qui dépendent du point initial choisi :

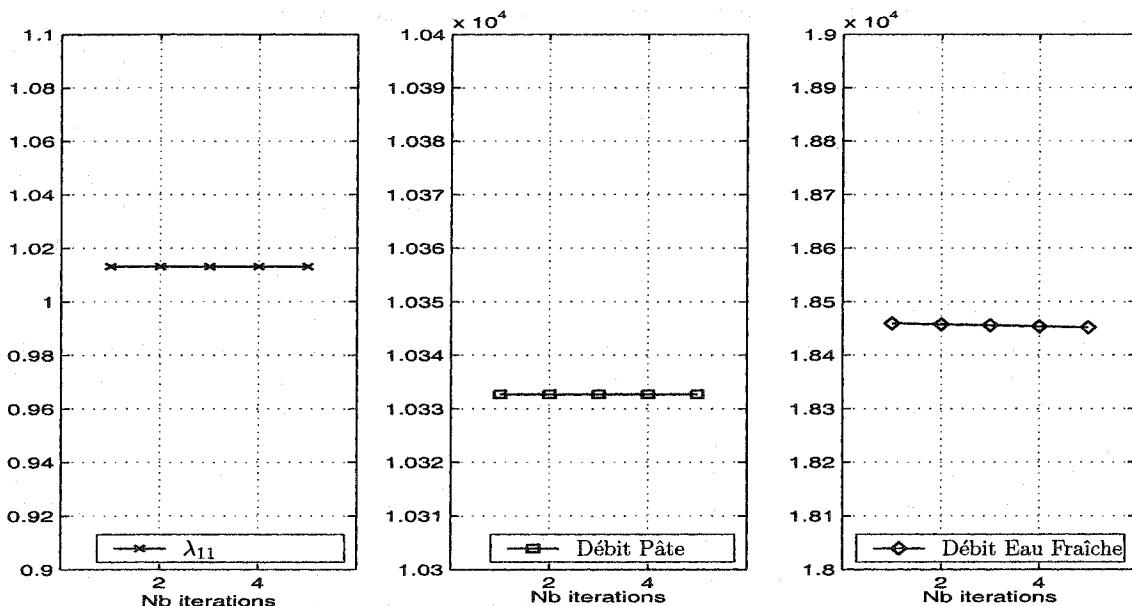


Figure 6.5 – Comportement de l'*AOC* pour $\mu_{ini} = (10332.7, 18459.5)$

- 1 - Le point initial a une bonne contrôlabilité. Dans ce cas λ_{11} est très proche de 1 et l'algorithme de contrôlabilité se comporte comme prévu en demeurant dans la région optimale. La configuration optimale de fonctionnement des laveurs

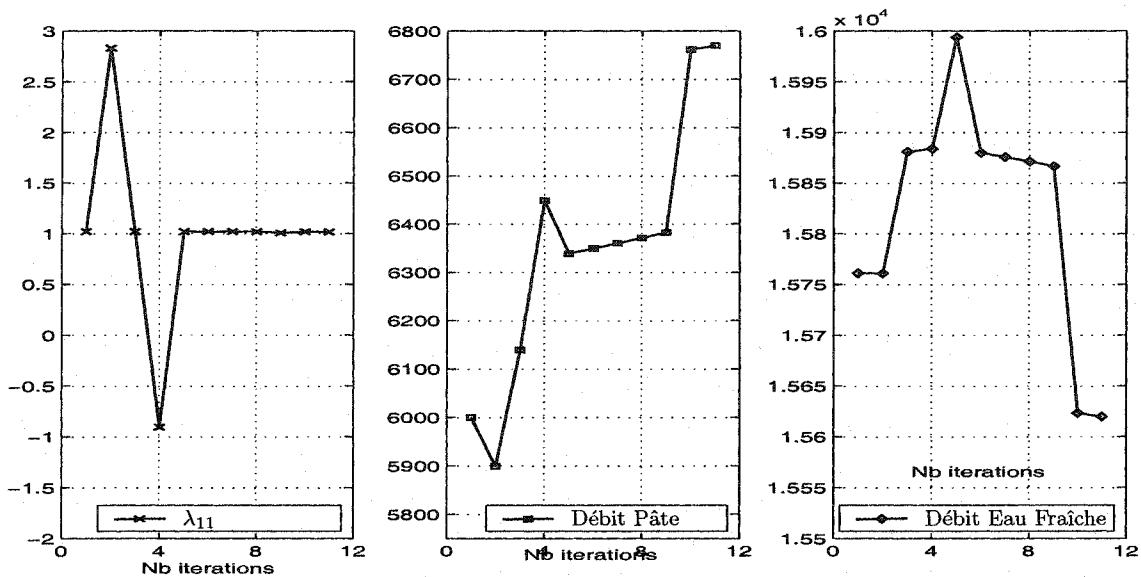


Figure 6.6 – Comportement de l'AOC pour $\mu_{ini} = (10050, 24800)$

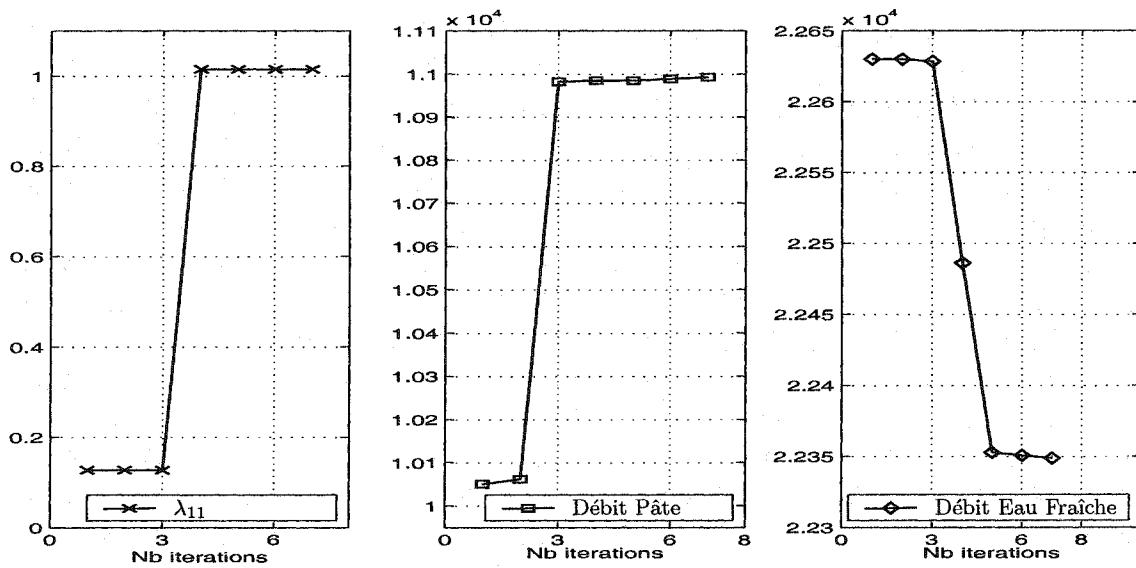


Figure 6.7 – Comportement de l'AOC pour $\mu_{ini} = (10050, 22630)$

ne change pas au fil des itérations. Les courbes de la figure 6.5 montrent bien l'évolution des valeurs de λ_{11} dans un cas pareil.

- 2 - Le point a une mauvaise contrôlabilité. Dans ce cas λ_{11} est toujours compris entre 0.1 et 0.2. Au fil des itérations les valeurs de λ_{11} présentent toujours un saut au niveau des valeurs numériques. Ce dernier se produit lors du passage de λ_{11} d'une valeur entre 0.1 et 0.2 à une valeur très proche de 1.

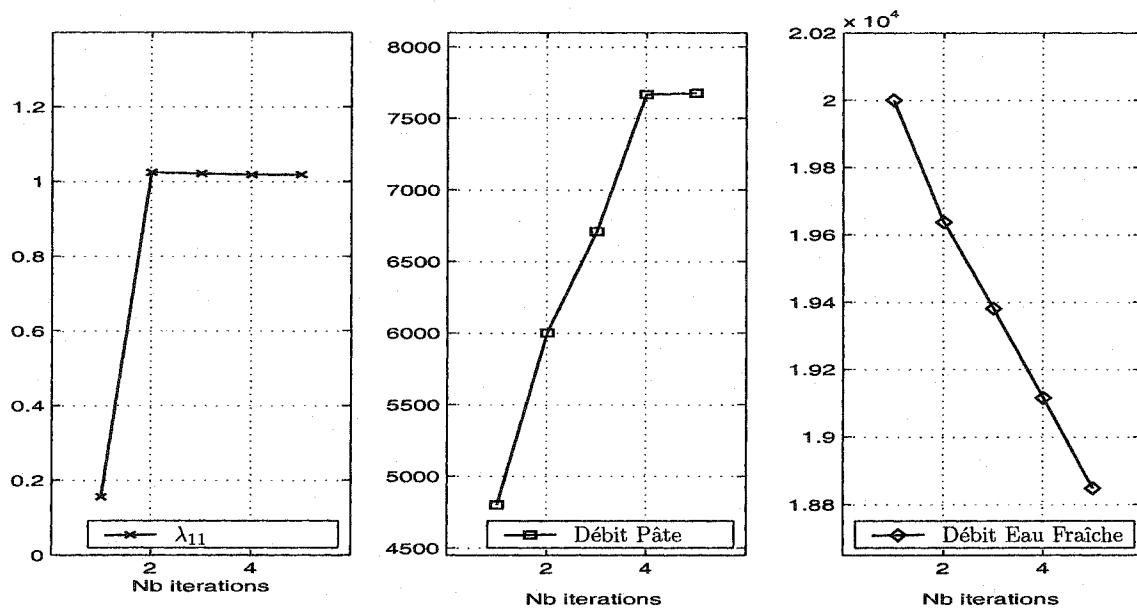


Figure 6.8 – Comportement de l'AOC pour $\mu_{ini} = (4800, 20000)$

Comme présenté dans les figures 6.6 et 6.7, le saut au niveau des valeurs de λ_{11} s'effectue entre deux paliers sur lesquels ces valeurs restent constantes. Pour certains cas, comme présenté à la figure 6.8, ce saut se fait dès la première itération alors que pour d'autres il se fait beaucoup plus tard (figure 6.6).

Au fil des itérations de l'*AOC*, les valeurs des variables manipulées (débit de pâte en entrée et débit d'eau fraîche de lavage) peuvent évoluer d'une façon monotone (figures 6.7 et 6.8) comme elles peuvent évoluer d'une façon irrégulière avant de se stabiliser (figures 6.6).

Les tests réalisés sur le cas de base ont permis de montrer que l'*AOC* réussit le plus souvent à trouver une configuration de fonctionnement des laveurs ayant une bonne contrôlabilité. Toutefois, ceci n'est pas toujours possible essentiellement à cause de problèmes numériques ou à cause du choix du point initial. Les problèmes numériques proviennent de la nature de la fonction objectif qui reste plus ou moins constante sur une certaine plage pour varier brusquement sur d'autres.

Ces tests ont donc permis de mettre au clair deux points importants :

- * λ_{11} varie entre deux plages de valeurs. La première entre 0.1 et 0.2 et la seconde au voisinage de 1.
- * Il existe donc plusieurs configurations à contrôlabilité optimale pour les laveurs de pâte à papier.

6.5.2 Analyse de la contrôlabilité

La présence de paliers au niveau des valeurs de λ_{11} constatée à la section 6.5.1 nous a amené à examiner l'évolution de la contrôlabilité plus en détail pour des valeurs fixes du débit de pâte à l'entrée ou du débit d'eau fraîche.

Évolution de la contrôlabilité à débit d'eau fraîche fixé

Lorsque le débit d'eau fraîche (ψ_{fw}) est fixé il existe un intervalle de débit de pâte (ψ_{in}) pour lequel la contrôlabilité est très bonne (λ_{11} est à un palier près de 1). Par contre, pour les petites valeurs de ψ_{in} la contrôlabilité varie d'une façon irrégulière et

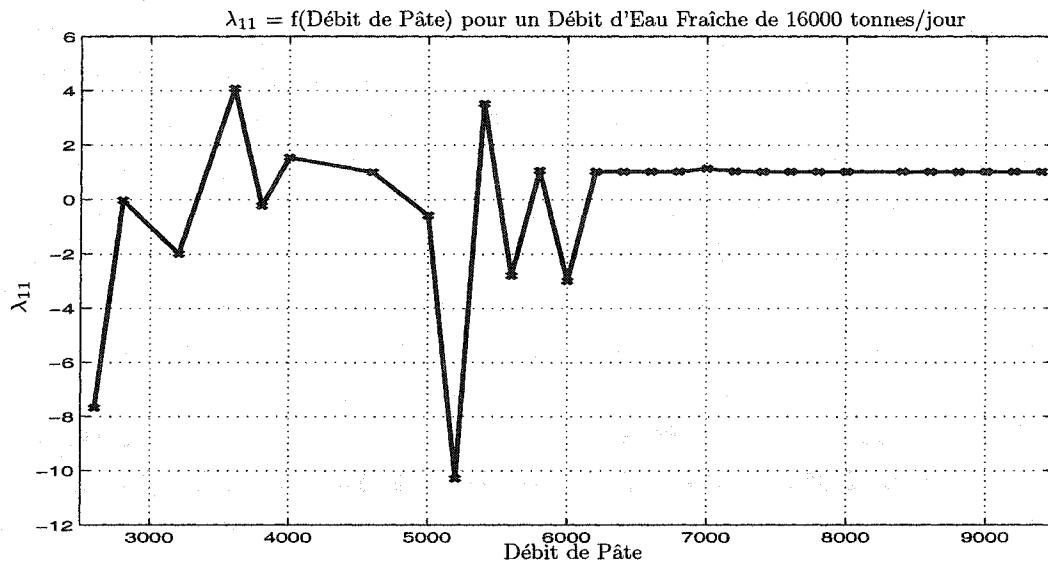


Figure 6.9 – Évolution de λ_{11} selon le débit de pâte pour un débit d'eau fraîche fixe

sans conserver une tendance. La figure 6.9, représente la variation de la contrôlabilité en fonction de ψ_{in} pour ψ_{fw} fixée à 16000 t/j. Il est clair que pour des valeurs de ψ_{in} inférieures à 6200 t/j la contrôlabilité n'est pas bonne.

En examinant de plus près le comportement de l'AOC pour les petites valeurs de ψ_{in} , il s'est avéré que le changement de la qualité de la contrôlabilité provient essentiellement du changement des contraintes actives au niveau du modèle. Plus spécifiquement, la contrainte qui a le plus d'effet est celle qui borne supérieurement la consistance de la pâte à la sortie des laveurs (f_{out}^p). Si cette dernière est active alors le système est contrôlable, sinon il ne l'est pas forcément. C'est ce degré de liberté au niveau de notre modèle qui explique son comportement. En effet, si nous fixons la consistance de la pâte en sortie au lieu de la borner supérieurement nous obtenons toujours un système avec une bonne contrôlabilité même pour les petites valeurs du débit de pâte.

Évolution de la contrôlabilité à débit de pâte fixé

Lorsque ψ_{in} est fixé il existe deux paliers au niveau des valeurs de λ_{11} : le premier

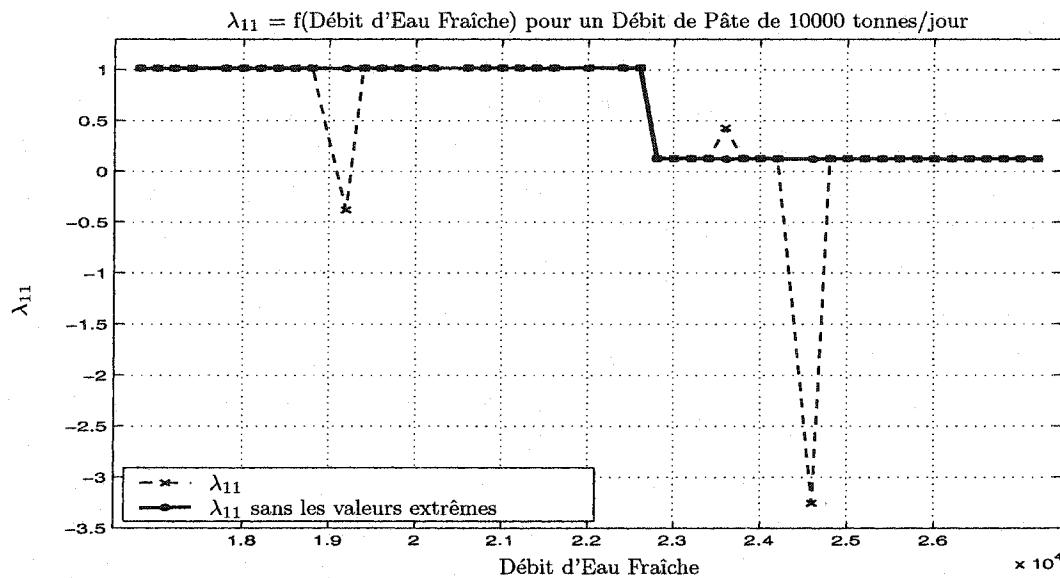


Figure 6.10 – Évolution de λ_{11} selon le débit d'eau fraîche pour un débit de pâte fixe

au voisinage de 1 pour les petites valeurs de ψ_{fw} et l'autre entre 0.1 et 0.2 pour les grandes valeurs de ψ_{fw} . Il existe donc deux intervalles distincts pour ψ_{fw} : un premier où la contrôlabilité est bonne et un deuxième où elle est mauvaise. La figure 6.10, représente la variation de la contrôlabilité selon ψ_{fw} pour ψ_{in} fixée à 10000 t/j. Mises à part quelques valeurs aberrantes, les deux paliers au niveau des valeurs de λ_{11} apparaissent clairement.

Le changement de palier au niveau des valeurs de λ_{11} survient au moment où l'une des variables sur le débit colle sur sa borne supérieure. Comme ces bornes sont fixées arbitrairement dans notre modèle le fait de les élargir permet de décaler le saut des valeurs. Donc théoriquement si aucune borne supérieure n'est imposée sur

les débits, il est toujours possible d'avoir un système qui est toujours parfaitement contrôlable. Pratiquement, l'imposition de pareilles bornes sur les débits est justifiée par la capacité physique des canalisations qui ont une limite sur les débits qu'ils peuvent acheminer.

Conclusions sur la contrôlabilité

L'analyse de la contrôlabilité présentée ci-haut permet de conclure que pour le modèle des laveurs de pâte à papier ainsi établi la contrôlabilité n'est pas homogène. D'une part, il existe des intervalles des valeurs du couple de variables manipulées (ψ_{in}, ψ_{fw}) pour lesquels la contrôlabilité est très bonne. D'autre part, il existe des intervalles des valeurs de (ψ_{in}, ψ_{fw}) pour lesquels la contrôlabilité est mauvaise. Ces irrégularités expliquent bien le comportement de l'AOC et justifient bien que ces résultats dépendent fortement du point de départ choisi et donc de la zone de contrôlabilité dans laquelle la recherche d'optimum local est amorcée.

La même analyse permet de confirmer le choix de l'objectif de l'optimisation du modèle des laveurs. En effet, il est clair que pour un débit de pâte fixé (chose très courante en pratique), plus le débit d'eau fraîche est petit, plus grande est la chance d'avoir une bonne contrôlabilité.

6.5.3 Influence de la pureté de l'eau de lavage

Dans le modèle de laveurs adopté dans ce mémoire, l'eau fraîche de lavage a été considérée comme propre et ne contenant aucune impureté solide. En réalité, l'eau utilisée pour le lavage de la pâte provient essentiellement de condensat de vapeur d'eau provenant des évaporateurs. Ce condensat n'est pas toujours pur et contient assez souvent des résidus et surtout de la liqueur noire. Pour évaluer l'influence

que peut avoir de pareilles impuretés sur la contrôlabilité des laveurs nous avons considéré quelques cas de figure où la fraction de solides de l'eau fraîche (f_{fw}^s) est non nulle.

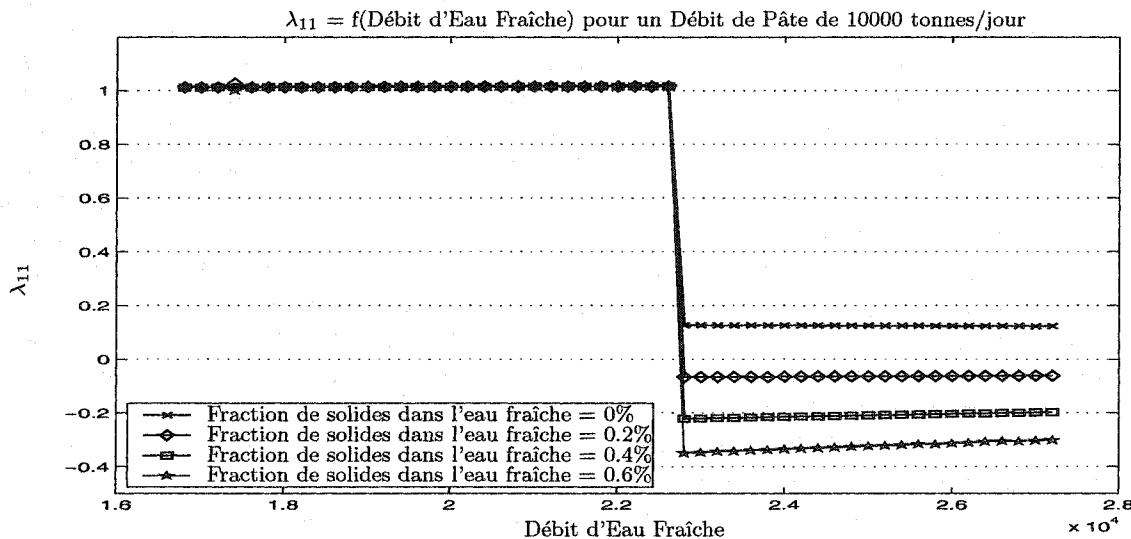


Figure 6.11 – Évolution de λ_{11} selon le débit d'eau fraîche pour un débit de pâte fixe et pour différentes fractions de solides dans l'eau fraîche

Sur la figure 6.11 sont présentées des courbes décrivant l'évolution de λ_{11} selon le débit d'eau fraîche et pour un débit de pâte fixe. On remarque que le fait de considérer f_{fw}^s non nulle n'a pas d'influence sur l'allure de la courbe par rapport à celle où f_{fw}^s est nulle du moment qu'il y a toujours deux paliers pour les valeurs de λ_{11} . Toutefois, la valeur à laquelle est le deuxième palier dépend de f_{fw}^s : plus f_{fw}^s est grande moins la contrôlabilité est bonne. Donc, globalement f_{fw}^s n'a pas une grande influence sur la contrôlabilité mais la plus petite est sa valeur, meilleure est la contrôlabilité.

D'un autre côté, le fait de varier f_{fw}^s en gardant le débit d'eau fraîche fixe n'a pas

de grand impact sur la contrôlabilité du moment que toutes les courbes représentant l'évolution de λ_{11} gardent la même allure que celle de la courbe présentée à la figure 6.9 c.-à-d. que la contrôlabilité n'est pas bonne si la valeur du débit de pâte diminue en dessous d'une certaine valeur seuil. Il est à remarquer que cette valeur seuil est plus petite quand f_{fw}^s est plus grande.

6.5.4 Influence de la pureté de la pâte à l'entrée

Il nous a semblé intéressant d'étudier l'influence que pourrait avoir la propreté de la pâte à laver f_{in}^s sur la contrôlabilité des laveurs puisque c'est un paramètre externe aux laveurs et sur lequel il n'y a aucun moyen d'agir.

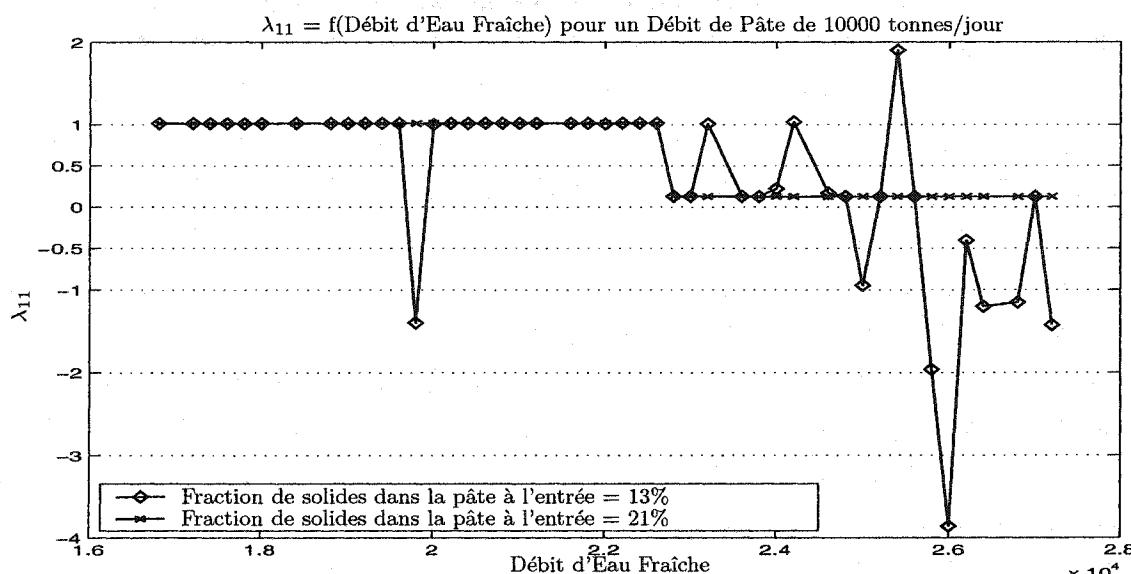


Figure 6.12 – Évolution de λ_{11} selon le débit d'eau fraîche pour un débit de pâte fixe et pour différentes fractions de solides dans la pâte à l'entrée

Sur la figure 6.12 sont présentées deux courbes décrivant l'évolution de λ_{11} selon

le débit d'eau fraîche et pour un débit de pâte fixe. La courbe correspondant au cas de base où $f_{in}^s = 19\%$ est celle de la figure 6.9. On remarque que si la valeur f_{in}^s augmente (21% par exemple), la contrôlabilité n'est pas affectée par ce changement de valeur. Au contraire si f_{in}^s diminue (13% par exemple), la contrôlabilité du système se détériore à partir d'une certaine valeur du débit d'eau fraîche. En effet, pour des valeurs de f_{in}^s inférieures à 19% la contrôlabilité ne présente qu'un seul palier au niveau des valeurs de λ_{11} .

D'un autre côté, comme pour f_{fw}^s , le fait de varier f_{in}^s en gardant le débit d'eau fraîche fixe n'a pas de grand impact sur la contrôlabilité. Cette dernière n'est pas bonne si la valeur du débit de pâte diminue en dessous d'une certaine valeur seuil.

Donc en résumé la contrôlabilité des laveurs est meilleure si la pâte à l'entrée est plus sale. Ceci pourrait être du au fait que le modèle des laveurs établi dans ce mémoire est plus adapté à ce genre de conditions de fonctionnement des laveurs.

CHAPITRE 7

CONCLUSIONS ET RECOMMENDATIONS

Dans ce mémoire nous avons concrétisé l'application d'une nouvelle approche de conception des procédés qui vise à prendre en considération la contrôlabilité d'un procédé au cours de sa conception. Cette approche a été appliquée aux laveurs de pâte à papier dans un procédé Kraft.

Dans une première étape nous avons conçu un modèle mathématique des laveurs en régime permanent. Le modèle obtenu représente un problème bilinéaire non-convexe et a l'avantage d'être manipulable. Le modèle reproduit bien le fonctionnement des laveurs aux alentours du cas de base adopté tout au long de ce mémoire. Dans une deuxième étape, nous avons utilisé un algorithme de séparation et de coupes pour optimiser le fonctionnement des laveurs. Cet algorithme se base sur des méthodes de linéarisation pour résoudre les problèmes quadratiques. Il s'est avéré efficace et bien adapté au type de problème que représente le modèle des laveurs. Nous avons enfin développé un algorithme de descente pour l'optimisation de la contrôlabilité des laveurs qui se base sur la matrice des gains relatifs (*RGA*) comme indice pour caractériser la contrôlabilité. Les résultats de l'algorithme dépendent fortement du point initial choisi. L'utilisation de la *RGA* nous a permis de mesurer la sensibilité du procédé aux variations des conditions opératoires. Nous avons mis

en évidence l'existence, pour la contrôlabilité, de deux régions parmi toutes les configurations de fonctionnement des laveurs : une première où elle n'est pas sensible aux variations des conditions opératoires et une deuxième où elle y est très sensible.

Ce travail est un premier pas sur la voie de cette nouvelle approche de conception des procédés. Plusieurs pistes restent toutefois à explorer. Une première piste se situe au niveau du modèle des laveurs. Il serait certainement avantageux de répondre aux questions suivantes : est-ce que ce type de réponses est propre au procédé des laveurs ou est-ce que nous pouvons nous attendre à de pareilles réponses pour tout procédé que nous allons essayer de modéliser de cette manière ? ou encore est-ce ces réponses sont dûes au modèle que nous avons adopté et aux hypothèses émises ? On pourrait alors essayer de raffiner le modèle des laveurs de pâte à papier pour essayer d'atténuer les réactions brusques au niveau de l'algorithme de contrôlabilité. Une manière de faire pourrait être l'introduction dans le modèle d'approximations des facteurs d'efficacité Norden qui ne dépendent pas des conditions opératoires. Il serait aussi très intéressant d'appliquer cette méthodologie à d'autres procédés industriels. Les colonnes à distiller sont à ce titre un bon exemple puisqu'elles sont plus communément étudiées dans la littérature.

Au niveau méthodologique, il est possible d'envisager un algorithme de contrôle qui ne manipule pas une variable sur laquelle porte l'optimisation du fonctionnement du procédé (le débit d'eau fraîche pour les laveurs). Même si le procédé ne présente pas un grand nombre de variables à manipuler, on pourrait essayer de changer la configuration de contrôle au lieu de changer le point de fonctionnement du procédé.

Une autre possibilité d'extension serait au niveau de la contrôlabilité. Il serait certainement avantageux d'étudier des systèmes de contrôle à plus que deux variables contrôlées et deux variables manipulées. Nous pourrons utiliser l'optimisation multi-

objectifs en intégrant à la fois l'optimisation du procédé (coûts opératoires) et de la contrôlabilité dans un même problème d'optimisation. Pour de pareils systèmes nous pourrons envisager une formulation mixte du modèle de façon à introduire des variables binaires caractérisant le couplage entre les variables manipulées et celles contrôlées.

RÉFÉRENCES

- [1] ACHDOU, Y. (2000). "Méthodes de Descente pour la Résolution de Systèmes Linéaires", http://www.ann.jussieu.fr/~achdou/enseignement/maitriseAN/cours_methodes_descente.ps.
- [2] AIYOSHI, E. et SHIMIZU, K. (1981). "Hierarchical Decentralized Systems and its New Solution by a Barrier Method", *IEEE Trans in Systems, Man and Cybernetics*, 11, 6, 444-449.
- [3] AL-KHAYYAL, F.A., LARSEN, C. et VAN VOORHIS, T. (1995). "A Relaxation Method for Nonconvex Quadratically Constrained Quadratic Programs", *Journal of Global Optimization*, 6, 215-230.
- [4] ARCHAMBAUT, B. (2003). "Méthode de Décomposition pour l'Optimisation sous Contraintes de Contrôlabilité du Procédé de Lavage de Pâte à Papier", *Mémoire de Maîtrise, École Polytechnique de Montréal*.
- [5] AUDET, C. (1997). "Optimisation Globale Structurée : Propriétés, Équivalences et Résolution", *Thèse de Doctorat, École Polytechnique de Montréal*.
- [6] AUDET, C., HANSEN, P., JAUMARD, B. et SAVARD, G. (1997). "Links Between the Linear Bilevel and Mixed 0-1 Programming Problems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 93, 2, 273-300.
- [7] AUDET, C., HANSEN, P., JAUMARD, B. et SAVARD, G. (2000). "A Branch

- and Cut Algorithm for Nonconvex Quadratically Constrained Quadratic Programming”, *Mathematical Programming*, 87, 1, 131-152.
- [8] AUDET, C., HANSEN, P., MESSINE F. et XIONG J. (2002). “The Largest Small Octagon”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 98, 1, 46-59.
- [9] BALCHEN, J.G. et MUMME, K.I. (1988). “Process Control - Structures and Applications”, *Van Nostrand Reinhold*, New York.
- [10] BRISTOL, E.H. (1966). “On a New Measure of Interaction of Multivariable Process Control”, *IEEE Trans Autom Control*, 11, 133-134.
- [11] BRISTOL, E.H. (1978). “Recent Results on Interaction in Multivariable Process Control”, *Proc. AIChE 71st Annual Meeting*, Miami, november 1978.
- [12] CHIU, M.S. et ARKUN, Y. (1990). “Decentralized Control Structure Selection Based on Integrity Considerations”, *Ind. Eng.. Chem. Res.*, 29, 3, 369-373.
- [13] CHIU, M.S. et ARKUN, Y. (1991). “A New Result on Relative Gain Array, Niederlinski Index and Decentralized Stability : 2×2 Plant Cases”, *Automatica*, 27, 2, 419-421.
- [14] CROTOGINO, R. H., POIRIER, N.A. et TRINH, D.T. (1987). “The Principles of Pulp Washing”, *Kraft Recovery Operations Seminar Proceedings*, TAPPI PRESS publication.
- [15] FELDER, R.M. et ROUSSEAU, R.W. (1986). “Elementary Principles of Chemical Processes”, *Wiley series in chemical engineering*, 2nd edition.
- [16] FLOUDAS, C.A. et VISWESWARN, V. (1990). “A Global Optimization Al-

- gorithm (GOP) for Certain Classes of Nonconvex NLPs-I Theory”, *Computers and Chemical Engineering*, 14, 12, 1397-1417.
- [17] ILOG (2000). “ILOG CPLEX 7.0 - Reference Manual”.
- [18] KIM, Y., LEE, B., EO, S. et YOON, E.S. (2000). “A Study on the Evaluation and Improvement of Structural Controllability of Chemical Processes”, *Computers&Chemical Engineering*, 24, 931-936.
- [19] KOOKOS, I.K. et LYGEROS, A.I. (1998). “An Algorithmic Method for Control Structure Selection Based on the RGA and RIA Interation Mesures”, *Trans IChemE* , 76, Part A.
- [20] MEEUSE, F.M. et TOUSAIN, R.L. (2002). “Closed-loop Controllability Analysis of Process Designs : Application to Distillation Column Design”, *Computers&Chemical Engineering*, 26, 641-647.
- [21] NASH, S.G. et SOFER, A. (1996). “Linear and Nonlinear Programming”, *Mc Graw-Hill publication*, 660.
- [22] NIEDERLINSKI, A. (1971). “A Heuristic Approach to the Design of Linear Multivariable Interacting Control Systems”, *Automatica*, 7, 691.
- [23] NOËL, A., SAVOIE, M., BUDMAN, H. et LAFONTAINE, L. (1996). “Advanced Brownstock Washer Control : Successful Industrial Implementation at James Maclaren”, *TAPPI journal*, 79, 1.
- [24] NORDEN, H.V. et TEOLLISUUS, K. (1965). *TAPPI Journal*, 22, 7, 481.
- [25] OGUNNAIKE, B.A. et HARON RAY, W. (1994). “Process Dynamics, Modeling, and Control”, *Oxford university press*.

- [26] O'Reilly, J. (1987). "Multivariable Control for Industrial Applications", *IEE Control Engineering Series*, 32.
- [27] PATEL, R.V. et MUNRO, N. (1982). "Multivariable System Theory and Design", *International series on systems and control*, Pergamon Press.
- [28] PERKINS, J.K., WELSH, H.S. et MAPPUS, J.H. (1954). *TAPPI Journal*, 37, 3, 83.
- [29] PERRON, S. (2004). *Thèse de Doctorat, École Polytechnique de Montréal*.
- [30] PHONG, T.Q., TAO, P.D. et HOAI AN, L.T. (1995). "A Method for Solving D.C Programming Problems. Application to Fuel Mixture Optimization Problem", *Journal of Global Optimization*, 6, 87-105.
- [31] SHERALI, H.D. et TUNCBILEK, C.H. (1992). "A Global Optimization Algorithm for Polynomial Programming Using a Reformulation-Linearization Technique", *Journal of Global Optimization*, 2, 101-112.
- [32] SHERALI, H.D. et TUNCBILEK, C.H. (1995). "A Reformulation-Convexification Approach for Solving Nonconvex Quadratic Programming Problems", *Journal of Global Optimization*, 7, 1-31.
- [33] SHINSKEY, F.G. et GREG, F. (1979). "Process Control Systems : Application, Design and Adjustment", *McGraw Hill*, 2nd edition.
- [34] SKOGESTAD, S. et WOLFF, E.A. (1992). "Controllability Measures for Disturbance Rejection", *IFAC workshop on interactions between process design and process control*.
- [35] TURNER, P.A., ROCHE, A.A., McDONALD, J.D. et VAN HEININGEN,

- A.R.P. (1993). "Dynamic Behavior of Brownstock Washing System", *Pulp&Paper Canada*, 94, 9.
- [36] TURNER, P.A., ALLISON, B.J. et OEI, J.K. (1993). "Brownstock Washer Filtrate Tank Level Control", *Pulp&Paper Canada*, 94, 11.
- [37] WASIK, L.S., MITTET, G.R. et NELSON, D.J. (2000). "Controlling Brownstock Washing During Production Rate Changes", *TAPPI Journal*, 83, 3, 94-101.
- [38] WOLSEY, L.A. (1981). "A Rescourse Decomposition Algorithm for General Mathematical Programs", *Mathematical Programming Study*, 14, 244-257.
- [39] WINGEMS 5.0 <http://www.pacsim.com>.
- [40] ZHU, Z.X. et JUTAN, A. (1996). "RGA as a Measure of Integrity for Decentralized Control Systems", *Trans IChemE*, 74, A.
- [41] ZHU, Z.X. (1996). "Structural Analysis and Stability of Decentralized Control Systems", *Ind. Eng. Chem. Res.*, 35, 736-745.
- [42] ZHU, Z.X. (1998). "Stability and Integrity Enforcement by Integrating Variable Pairing and Controller Design", *Chemical Engineering Science*, 53, 5, 1009-1013.

ANNEXES

ANNEXE A

Première version du *MLPP*

Minimiser $\psi_{fw} + 10000 f_{out}^s$

S.C.

(Bilan des débits)

$$(M_1) \phi_{F_1, M_1} - \alpha_1 \phi_{F_1} = \psi_{in} \quad (A.1)$$

$$(F_1) \phi_{M_1, F_1} + (1 - \alpha_2) \phi_{F_2} - \phi_{F_1} - \phi_{F_1, M_2} = 0 \quad (A.2)$$

$$(M_2) \phi_{F_1, M_2} + \alpha_2 \phi_{F_2} - \phi_{M_2, F_2} = 0 \quad (A.3)$$

$$(F_2) \phi_{M_2, F_2} + (1 - \alpha_3) \phi_{F_3} - \phi_{F_2} - \phi_{F_2, M_3} = 0 \quad (A.4)$$

$$(M_3) \phi_{F_2, M_3} + \alpha_3 \phi_{F_3} - \phi_{M_3, F_3} = 0 \quad (A.5)$$

$$(F_3) \phi_{M_3, F_3} + \psi_{fw} - \phi_{F_3} - \psi_{out} = 0 \quad (A.6)$$

(Bilan des solides dissous)

$$(M_1) \phi_{F_1, M_1} f_{F_1, M_1}^s - \alpha_1 \phi_{F_1} f_{F_1}^s = \psi_{in} f_{in}^s \quad (A.7)$$

$$(F_1) \phi_{M_1, F_1} f_{M_1, F_1}^s + (1 - \alpha_2) \phi_{F_2} f_{F_2}^s - \phi_{F_1} f_{F_1}^s - \phi_{F_1, M_2} f_{F_1, M_2}^s = 0 \quad (A.8)$$

$$(M_2) \phi_{F_1, M_2} f_{F_1, M_2}^s + \alpha_2 \phi_{F_2} f_{F_2}^s - \phi_{M_2, F_2} f_{M_2, F_2}^s = 0 \quad (A.9)$$

$$(F_2) \phi_{M_2, F_2} f_{M_2, F_2}^s + (1 - \alpha_3) \phi_{F_3} f_{F_3}^s - \phi_{F_2} f_{F_2}^s - \phi_{F_2, M_3} f_{F_2, M_3}^s = 0 \quad (A.10)$$

$$(M_3) \phi_{F_2, M_3} f_{F_2, M_3}^s + \alpha_3 \phi_{F_3} f_{F_3}^s - \phi_{M_3, F_3} f_{M_3, F_3}^s = 0 \quad (A.11)$$

$$(F_3) \phi_{M_3, F_3} f_{M_3, F_3}^s - \phi_{F_3} f_{F_3}^s - \psi_{out} f_{out}^s = 0 \quad (A.12)$$

(Bilan de la pâte)

$$(M_1) \phi_{F_1, M_1} f_{F_1, M_1}^p - \alpha_1 \phi_{F_1} f_{F_1}^p = \psi_{in} f_{in}^p \quad (\text{A.13})$$

$$(F_1) \phi_{M_1, F_1} f_{M_1, F_1}^p + (1 - \alpha_2) \phi_{F_2} f_{F_2}^p - \phi_{F_1} f_{F_1}^p - \phi_{F_1, M_2} f_{F_1, M_2}^p = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$(M_2) \phi_{F_1, M_2} f_{F_1, M_2}^p + \alpha_2 \phi_{F_2} f_{F_2}^p - \phi_{M_2, F_2} f_{M_2, F_2}^p = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$(F_2) \phi_{M_2, F_2} f_{M_2, F_2}^p + (1 - \alpha_3) \phi_{F_3} f_{F_3}^p - \phi_{F_2} f_{F_2}^p - \phi_{F_2, M_3} f_{F_2, M_3}^p = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$(M_3) \phi_{F_2, M_3} f_{F_2, M_3}^p + \alpha_3 \phi_{F_3} f_{F_3}^p - \phi_{M_3, F_3} f_{M_3, F_3}^p = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$(F_3) \phi_{M_3, F_3} f_{M_3, F_3}^p - \phi_{F_3} f_{F_3}^p - \psi_{out} f_{out}^p = 0 \quad (\text{A.18})$$

(Réalisabilité des fractions)

$$f_{M_1, F_1}^p + f_{M_1, F_1}^s + f_{M_1, F_1}^w = 1 \quad (\text{A.19})$$

$$f_{F_1, M_2}^p + f_{F_1, M_2}^s + f_{F_1, M_2}^w = 1 \quad (\text{A.20})$$

$$f_{M_2, F_2}^p + f_{M_2, F_2}^s + f_{M_2, F_2}^w = 1 \quad (\text{A.21})$$

$$f_{F_2, M_3}^p + f_{F_2, M_3}^s + f_{F_2, M_3}^w = 1 \quad (\text{A.22})$$

$$f_{M_3, F_3}^p + f_{M_3, F_3}^s + f_{M_3, F_3}^w = 1 \quad (\text{A.23})$$

$$f_{out}^p + f_{out}^s + f_{out}^w = 1 \quad (\text{A.24})$$

$$f_{F_1}^p + f_{F_1}^s + f_{F_1}^w = 1 \quad (\text{A.25})$$

$$f_{F_2}^p + f_{F_2}^s + f_{F_2}^w = 1 \quad (\text{A.26})$$

$$f_{F_3}^p + f_{F_3}^s + f_{F_3}^w = 1 \quad (\text{A.27})$$

(Efficacité des laveurs)

$$(\text{Module1}) \overline{DR}_1 f_{F_2}^s - f_{F_1, M_2}^s \leq (\overline{DR}_1 - 1) f_{in}^s \quad (\text{A.28})$$

$$-\underline{DR}_1 f_{F_2}^s + f_{F_1, M_2}^s \leq (1 - \overline{DR}_1) f_{in}^s \quad (\text{A.29})$$

$$(\text{Module2}) (1 - \overline{DR}_2) f_{F_1, M_2}^s + \overline{DR}_2 f_{F_3}^s - f_{F_2, M_3}^s \leq 0 \quad (\text{A.30})$$

$$(\underline{DR}_2 - 1) f_{F_1, M_2}^s - \overline{DR}_2 f_{F_3}^s + f_{F_2, M_3}^s \leq 0 \quad (\text{A.31})$$

$$(\text{Module3}) (1 - \overline{DR}_3) f_{F_2, M_3}^s - f_{out}^s \leq 0 \quad (\text{A.32})$$

$$(\overline{DR}_3 - 1) f_{F_2, M_3}^s + f_{out}^s \leq 0 \quad (\text{A.33})$$

(Récupération des produits chimiques)

$$\psi_{out} f_{out}^s \leq (1 - R) \psi_{in} f_{in}^s \quad (\text{A.34})$$

$$-(1 - \alpha_1) \phi_{F_1} f_{F_1}^s \leq -R \psi_{in} f_{in}^s \quad (\text{A.35})$$

(Bornes)

$$\underline{X} \leq X \leq \bar{X} \quad (\text{A.36})$$

X = Vecteur des variables du modèle.

\underline{X} = Vecteur des bornes inférieures sur les variables du modèle.

\bar{X} = Vecteur des bornes supérieures sur les variables du modèle.

ANNEXE B

Seconde version du *MLPP*

Minimiser $\psi_{fw} + 10000 f_{out}^s$

S.C.

(Bilan des débits)

$$(M_1) \phi_{F_1, M_1} - \alpha_1 \phi_{F_1} = \psi_{in} \quad (B.1)$$

$$(F_1) \phi_{M_1, F_1} + (1 - \alpha_2) \phi_{F_2} - \phi_{F_1} - \phi_{F_1, M_2} = 0 \quad (B.2)$$

$$(M_2) \phi_{F_1, M_2} + \alpha_2 \phi_{F_2} - \phi_{M_2, F_2} = 0 \quad (B.3)$$

$$(F_2) \phi_{M_2, F_2} + (1 - \alpha_3) \phi_{F_3} - \phi_{F_2} - \phi_{F_2, M_3} = 0 \quad (B.4)$$

$$(M_3) \phi_{F_2, M_3} + \alpha_3 \phi_{F_3} - \phi_{M_3, F_3} = 0 \quad (B.5)$$

$$(F_3) \phi_{M_3, F_3} + \psi_{fw} - \phi_{F_3} - \psi_{out} = 0 \quad (B.6)$$

(Bilan des solides dissous)

$$(M_1) \phi f_{F_1, M_1}^s - \alpha_1 \phi f_{F_1}^s = \psi_{in} f_{in}^s \quad (B.7)$$

$$(F_1) \phi f_{M_1, F_1}^s + (1 - \alpha_2) \phi f_{F_2}^s - \phi f_{F_1}^s - \phi f_{F_1, M_2}^s = 0 \quad (B.8)$$

$$(M_2) \phi f_{F_1, M_2}^s + \alpha_2 \phi f_{F_2}^s - \phi f_{M_2, F_2}^s = 0 \quad (B.9)$$

$$(F_2) \phi f_{M_2, F_2}^s + (1 - \alpha_3) \phi f_{F_3}^s - \phi f_{F_2}^s - \phi f_{F_2, M_3}^s = 0 \quad (B.10)$$

$$(M_3) \phi f_{F_2, M_3}^s + \alpha_3 \phi f_{F_3}^s - \phi f_{M_3, F_3}^s = 0 \quad (B.11)$$

$$(F_3) \phi f_{M_3, F_3}^s - \phi f_{F_3}^s - \psi f_{out}^s = 0 \quad (B.12)$$

(Bilan de la pâte)

$$(M_1) \phi f_{F_1, M_1}^p - \alpha_1 \phi f_{F_1}^p = \psi_{in} f_{in}^p \quad (B.13)$$

$$(F_1) \phi f_{M_1, F_1}^p + (1 - \alpha_2) \phi f_{F_2}^p - \phi f_{F_1}^p - \phi f_{F_1, M_2}^p = 0 \quad (B.14)$$

$$(M_2) \phi f_{F_1, M_2}^p + \alpha_2 \phi f_{F_2}^p - \phi f_{M_2, F_2}^p = 0 \quad (B.15)$$

$$(F_2) \phi f_{M_2, F_2}^p + (1 - \alpha_3) \phi f_{F_3}^p - \phi f_{F_2}^p - \phi f_{F_2, M_3}^p = 0 \quad (B.16)$$

$$(M_3) \phi f_{F_2, M_3}^p + \alpha_3 \phi f_{F_3}^p - \phi f_{M_3, F_3}^p = 0 \quad (B.17)$$

$$(F_3) \phi f_{M_3, F_3}^p - \phi f_{F_3}^p - \psi f_{out}^p = 0 \quad (B.18)$$

(Réalisabilité des fractions)

$$\phi f_{M_1, F_1}^p + \phi f_{M_1, F_1}^s + \phi f_{M_1, F_1}^w - \phi_{M_1, F_1} = 0 \quad (B.19)$$

$$\phi f_{F_1, M_2}^p + \phi f_{F_1, M_2}^s + \phi f_{F_1, M_2}^w - \phi_{F_1, M_2} = 0 \quad (B.20)$$

$$\phi f_{M_2, F_2}^p + \phi f_{M_2, F_2}^s + \phi f_{M_2, F_2}^w - \phi_{M_2, F_2} = 0 \quad (B.21)$$

$$\phi f_{F_2, M_3}^p + \phi f_{F_2, M_3}^s + \phi f_{F_2, M_3}^w - \phi_{F_2, M_3} = 0 \quad (B.22)$$

$$\phi f_{M_3, F_3}^p + \phi f_{M_3, F_3}^s + \phi f_{M_3, F_3}^w - \phi_{M_3, F_3} = 0 \quad (B.23)$$

$$\phi f_{out}^p + \phi f_{out}^s + \phi f_{out}^w - \phi_{out} = 0 \quad (B.24)$$

$$\phi f_{F_1}^p + \phi f_{F_1}^s + \phi f_{F_1}^w - \phi_{F_1} = 0 \quad (B.25)$$

$$\phi f_{F_2}^p + \phi f_{F_2}^s + \phi f_{F_2}^w - \phi_{F_2} = 0 \quad (B.26)$$

$$\phi f_{F_3}^p + \phi f_{F_3}^s + \phi f_{F_3}^w - \phi_{F_3} = 0 \quad (B.27)$$

(Efficacité des laveurs)

$$(Module1) \overline{DR}_1 f_{F_2}^s - f_{F_1, M_2}^s \leq (\overline{DR}_1 - 1) f_{in}^s \quad (B.28)$$

$$- \underline{DR}_1 f_{F_2}^s + f_{F_1, M_2}^s \leq (1 - \overline{DR}_1) f_{in}^s \quad (B.29)$$

$$(Module2) (1 - \overline{DR}_2) f_{F_1, M_2}^s + \overline{DR}_2 f_{F_3}^s - f_{F_2, M_3}^s \leq 0 \quad (B.30)$$

$$(\underline{DR}_2 - 1) f_{F_1, M_2}^s - \overline{DR}_2 f_{F_3}^s + f_{F_2, M_3}^s \leq 0 \quad (B.31)$$

$$(Module3) (1 - \overline{DR}_3) f_{F_2, M_3}^s - f_{out}^s \leq 0 \quad (B.32)$$

$$(\overline{DR}_3 - 1) f_{F_2, M_3}^s + f_{out}^s \leq 0 \quad (B.33)$$

(Récupération des produits chimiques)

$$\psi f_{out}^s \leq (1 - R)\psi f_{in}^s \quad (B.34)$$

$$-(1 - \alpha_1)\phi f_{F_1}^s \leq -R\psi f_{in}^s \quad (B.35)$$

(Équivalence entre les deux versions du modèle)

$$\text{Égalité des variables : } \phi f_{F_1, M_2}^s - \phi_{F_1, M_2} f_{F_1, M_2}^s = 0 \quad (B.36)$$

$$\phi f_{F_2, M_3}^s - \phi_{F_2, M_3} f_{F_2, M_3}^s = 0 \quad (B.37)$$

$$\phi f_{F_2}^s - \phi_{F_2} f_{F_2}^s = 0 \quad (B.38)$$

$$\phi f_{F_3}^s - \phi_{F_3} f_{F_3}^s = 0 \quad (B.39)$$

$$\psi f_{out}^s - \psi_{out} f_{out}^s = 0 \quad (B.40)$$

$$\text{Conservation des bornes : } \psi f_x - \psi_x f_x \leq 0 \quad (B.41)$$

Équation valables pour les variables f_x représentant des fractions et ayant des bornes supérieures différentes de 1 ou des bornes inférieures différentes de 0.

(Bornes)

$$\underline{X} \leq X \leq \overline{X} \quad (B.42)$$

X = Vecteur des nouvelles variables du modèle.

\underline{X} = Vecteur des bornes inférieures sur les nouvelles variables du modèle.

\overline{X} = Vecteur des bornes supérieures sur les nouvelles variables du modèle.