

Titre: Optimisation simultanée de la conception et de la fabrication d'un nouveau produit
Title: nouveau produit

Auteur: Anas Lamghabbar
Author:

Date: 2002

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Lamghabbar, A. (2002). Optimisation simultanée de la conception et de la fabrication d'un nouveau produit [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7009/>
Citation:

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/7009/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Soumaya Yacout, & Mohamed-Salah Ouali
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**OPTIMISATION SIMULTANÉE DE LA CONCEPTION ET DE LA
FABRICATION D'UN NOUVEAU PRODUIT**

ANAS LAMGHABBAR

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE INDUSTRIEL)
DÉCEMBRE 2002**



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-81520-X

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

**OPTIMISATION SIMULTANÉE DE LA CONCEPTION ET DE LA
FABRICATION D'UN NOUVEAU PRODUIT**

présenté par : **LAMGHABBAR Anas**

en vue de l'obtention du diplôme de : **Maîtrise ès sciences appliquées**

a été dûment accepté par le jury d'examen composé de :

M. CLÉMENT Bernard, Ph.D., président

Mme YACOUT Soumaya, D.Sc., membre et directrice de recherche

M. QUALI Mohamed-Salah, Doctorat, membre et codirecteur de recherche

M. GHOSH Kalyan, D.Eng., membre

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier ma directrice de recherche, Mme Soumaya Yacout, pour la qualité de son encadrement sa disponibilité et son aide matérielle et morale. Je voudrais également remercier mon codirecteur, M. Mohamed Salah Ouali, qui a toujours su fournir les conseils judicieux pour orienter la vision globale et la rédaction de ce document. J'aimerais aussi remercier, M. Bernard Clément d'avoir bien accepté de présider le jury d'évaluation de ce travail. Mes remerciements vont aussi à M. Kalyan Ghosh d'avoir bien voulu évaluer ce travail et de m'avoir donné le goût, à travers le cours d'Ingénierie Simultanée, d'entamer une recherche dans ce domaine.

Finalement, je tiens à témoigner de ma gratitude envers l'École Polytechnique de Montréal qui m'a permis de terminer ma maîtrise en m'offrant l'exemption des frais de scolarité majorés pour étudiant étranger.

RÉSUMÉ

Le principal but de ce travail est de développer un modèle mathématique d'optimisation simultanée des phases de conception et de fabrication d'un nouveau produit. Nous modéliserons techniquement les deux phases, la conception et la fabrication, à l'aide de l'approche de déploiement de la fonction qualité (DFQ) et de l'ingénierie simultanée. Les fonctions objectifs des modèles sont inspirées de la fonction perte par manque de qualité de Taguchi.

Pour déterminer les caractéristiques qualités qui minimisent les fonctions pertes par manque de qualité dues aux phases de conception et de fabrication, nous résoudrons les modèles à l'aide de la programmation mathématique sous les contraintes des limites de spécifications de la fonctionnalité du produit, de faisabilité technique des pièces, de variabilité du processus de fabrication et des capacités des machines de fabrication. Nous comparerons les résultats obtenus par l'approche traditionnelle de l'optimisation séquentielle et l'approche de l'optimisation simultanée.

Nous développerons, ensuite, deux modèles d'optimisation multicritères qui permettent une interactivité avec le preneur de décision. Le premier modèle, composé de deux fonctions objectifs, optimise d'abord la phase de conception, puis la phase de fabrication en gardant la valeur de la fonction objectif de la conception très proche de sa valeur optimale.

Le deuxième modèle appliquera la même logique à cinq fonctions objectifs. Ces fonctions objectifs représentent la variabilité des valeurs moyennes des caractéristiques qualités de conception par rapport à leurs valeurs cibles et leurs écart-types, la variabilité des valeurs moyennes des caractéristiques qualités de fabrication par rapport

à leurs valeurs cibles et leurs écart-types, et le coût des opérations de fabrication (inversement proportionnelle aux tolérances de fabrication).

Les différentes approches seront appliquées à un exemple numérique et leurs résultats et analyses seront présentés.

ABSTRACT

The aim of this work is to develop a mathematical model of simultaneous optimization of the design and the manufacturing stages of a new product. Based on concurrent engineering and quality function deployment (QFD) concepts, the models relating the design and the manufacturing factors have been developed their objective functions inspired from the Taguchi's quality loss function.

The objective is to determine the level of design characteristics and product characteristics, which optimize the performance and the quality loss functions. We use the mathematical programming to present the specifications limits, the dimensions limits, the process variability and the process capability constraints. We compare the conventional sequential and the simultaneous approaches.

We develop afterwards two multi-criteria optimization models that allow interactivity with the decision maker. The first model, composed of two objective functions, optimizes first the design phase and then the manufacturing one keeping the value of the design objective function very close to its optimum

The second model applies the same logic to five objective functions. These objective functions represent the variability and deviation between design quality characteristics and its target values, the variability and deviation between the manufacturing quality characteristics and its target values and the manufacturing costs expressed in geometrical decreasing functions of tolerances.

In each of the steps of the optimization process, a numerical example is given.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES TABLEAUX	x
LISTE DES FIGURES.....	xi
LISTE DES ANNEXES	xii
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 2 : REVUE DE LA LITTERATURE ET PROBLEMATIQUE	6
2.1 REVUE DE LA LITTERATURE	6
2.2 DEPLOIEMENT DE LA FONCTION QUALITE (DFQ)	8
2.3 PROBLEMATIQUE.....	15
CHAPITRE 3 : MODELES D'OPTIMISATION SEQUENTIELLE ET SIMULTANEE ..	20
3.1 FORMULATION DES FONCTIONS OBJECTIFS ET DES CONTRAINTES.....	20
3.1.1 Fonctions objectifs	21
3.1.2 Contraintes	22
3.2 LE MODELE D'OPTIMISATION SEQUENTIELLE.....	23
3.2.1 Optimisation de la phase de conception	23
3.2.2 L'optimisation de la phase de fabrication	25
3.2.3 Étape de résolution du modèle d'optimisation séquentielle	28
3.3 LE MODELE INTEGRÉ DE L'OPTIMISATION SIMULTANEE	28
3.4 EXEMPLE NUMÉRIQUE : LE CIRCUIT PASSE-BAS (CPB)	30
3.4.1 Les Caractéristiques du CPB	30
3.4.2 Développement de la MDQ II (Maison de la qualité) du CPB	34
3.4.3 Développement de la MDQ III du CPB	36

3.5	OPTIMISATION SEQUENTIELLE DU CPB	40
3.6	OPTIMISATION SIMULTANEE AVEC LE MODELE INTEGRE DU CPB.....	46
CHAPITRE 4 : MODELES D'OPTIMISATION MULTICRITERE		50
4.1	LE MODELE DE « GOAL PROGRAMMING » A DEUX FONCTIONS	50
4.2	ALGORITHME DE RESOLUTION DU PROBLEME DE « GOAL PROGRAMMING ».....	52
4.3	L'APPROCHE DU « GOAL PROGRAMMING » INTERACTIF (ABDEL HALEEM, 1991)	54
4.3.1	Formulation du problème de « Goal Programming » interactif (GPI)	55
4.3.2	Définitions.....	56
4.3.3	Procédure de détermination de l'ensemble de stabilité du 1 ^{er} type	57
4.3.4	Algorithme de résolution du problème de « Goal Programming » interactif.....	58
4.4	OPTIMISATION SIMULTANEE AVEC LE MODELE GPI A DEUX FONCTIONS DU CPB	60
4.5	LE MODELE DE « GOAL PROGRAMMING » INTERACTIF A CINQ FONCTIONS.....	67
4.6	OPTIMISATION SIMULTANEE AVEC LE MODELE GPI A CINQ FONCTIONS DU CPB	69
CHAPITRE 5 : ANALYSES DES RESULTATS ET CONCLUSIONS		80
RÉFÉRENCES		86
ANNEXES		89

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1- Représentation de la valeur des relations entre les « Quoi » et les « Comment »	10
Tableau 2.2- Exemple d'une matrice de sélection de Pugh.....	14
Tableau 2.3- Liste des symboles associés à l'exigence technique y_j	17
Tableau 2.4- Liste des symboles associés à la caractéristique des pièces z_k	17
Tableau 2.5- Liste des symboles associés à l'opération de fabrication w_l	18
Tableau 3.1- Les différentes types de contraintes (Suhr et Baston, 2001)	23
Tableau 3.2- Résultats de l'optimisation de la MDQ II	42
Tableau 3.3- Limites inférieures et supérieures des valeurs nominales et des tolérances des PF .	43
Tableau 3.4- Résultats de l'optimisation de la MDQ III	45
Tableau 3.5- Résultats de l'optimisation simultanée à modèle intégré de la MDQII et MDQIII..	45
Tableau 4.1- la table des solutions efficientes	59
Tableau 4.2- Les solutions des PNL 4 et PNL 5	63
Tableau 4.3- La table des choix des fonctions EFPC et EFPF	64
Tableau 4.4- Résultats de la première itération de l'optimisation simultanée à GPI2F	66
Tableau 4.5- La table des choix des fonctions f_i avec $i=1$ à 5.....	73
Tableau 4.6- Résultats de la première itération de l'optimisation simultanée à GPI5F	77
Tableau 4.7- Table des choix.....	78
Tableau 4.8- Les solutions des PNL 6 à PNL 10.....	79
Tableau 5.1- Tableau de comparaison de la solution séquentielle et simultanée à modèle intégré	81
Tableau 5.2- Tableau de comparaison de deux solutions efficientes du GPI2F.....	83
Tableau 5.3- Tableau de comparaison de la solution du GPI2F et GPI5F	84
Tableau II.1- Résultats des itérations de l'optimisation simultanée à GPI2F.....	90
Tableau II.2- Résultats des itérations de l'optimisation simultanée à GPI5F.....	90

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1-Schématisation succincte d'une entreprise	1
Figure 2.1- La maison de la qualité	9
Figure 2.2- Processus du Déploiement de la Fonction Qualité	12
Figure 2.3- Intégration de la méthode de Pugh avec la DFQ	15
Figure 2.4- Les deux maisons de la qualité	16
Figure 3.1- Processus d'optimisation de la conception	24
Figure 3.2- Processus d'optimisation de la fabrication	26
Figure 3.3- Processus d'optimisation simultanée de la conception et de la fabrication	29
Figure 3.4- Schéma du circuit passe-bas	30
Figure 3.5- Schéma de la résistance électrique.....	31
Figure 3.6- Schéma de la capacité électrique	32
Figure 3.7- La MDQ II du circuit CPB	34
Figure 3.8- La MDQ III du circuit CPB	36
Figure 3.9- Démarche d'optimisation séquentielle de la MDQ II et la MDQ III	40
Figure 3.10- Démarche d'optimisation simultanée de la MDQ II et la MDQ III.....	46
Figure 4.1- Processus d'optimisation simultanée à modèle GPI2F de la MDQ II et la MDQ III .	61

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I : LES SOLUTIONS EFFICIENTES DES GPI2F ET GPI5F	90
ANNEXE II : DETAIL DU CALCUL DES FONCTIONS DE TRANSFERT DU CPB	91
ANNEXE III : MULTIPLICATEURS DE KUHN-TUCKER.....	96

Chapitre 1 : Introduction

Au cours des années quatre-vingt, les entreprises ont réalisé que l'avantage compétitif reposait sur la diversification des produits et sur l'amélioration de leur qualité. Elles abordaient la reprise en s'engageant dans une démarche d'amélioration de la qualité, de réduction des coûts de développement et de production. Certaines entreprises recherchaient un avantage compétitif par la diversité de produits à moindre coût, rompant ainsi avec la standardisation et la production de masse. L'hypothèse qui prévalait alors, selon laquelle le coût et la différentiation sont mutuellement exclusifs, se trouvait remise en question. Les entreprises de différents secteurs (automobile, informatique, télécommunication, etc.) commençaient à revoir leurs méthodes de conduite des projets, en particulier l'approche séquentielle de développement des produits (Bossard et al., 1997).

L'approche séquentielle de développement des produits s'adaptait parfaitement à la structure hiérarchique verticale de l'entreprise, présentée à la figure 1.1 (Branger, 1978).

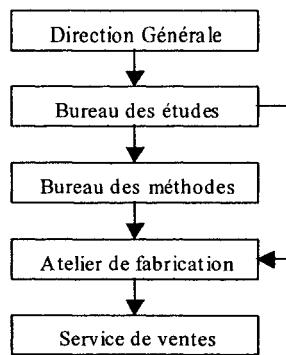


Figure 1.1-Schématisation succincte d'une entreprise

La direction générale possède un service commercial généralement très actif. En fonction des études de marché et de la concurrence, elle décide de lancer ou de supprimer tel ou tel produit.

Le Bureau des études (BE) est le lieu de créativité des produits futurs, et des études de modifications. Il met en évidence les éléments fonctionnels, la matière à utiliser, l'esthétique, etc. Le BE travaille toujours en étroite collaboration avec le bureau des méthodes et l'atelier de fabrication. Il conçoit également les dessins d'ensemble, et ceux de définitions.

Le bureau des méthodes (BdM) étudie les moyens de fabrication susceptibles de produire au moindre coût, en fonction des moyens dont dispose l'atelier de fabrication (machine-outils et personnels). Il a un service d'étude de fabrication, un service d'outillage, et selon l'importance de l'entreprise, un service d'étude des temps de fabrication.

L'atelier de fabrication (AF) reçoit des différents services précédents, les données de base, les détails, les quantités de produits à fabriquer, et les cadences envisageables en fonction des moyens possibles.

À long terme, en séparant les différentes fonctions pour augmenter leur efficacité individuelle, des barrières se sont érigées entre les services. Durant la phase de conception, à titre d'exemple, l'emphase est mise sur la satisfaction des tolérances de la conception sans réfléchir à la façon dont ces tolérances vont être obtenues. Beaucoup de problèmes relatifs aux coûts et aux délais de développements des produits influencent le degré de compétitivité des entreprises.

Ces problèmes ont poussé les entreprises, dans les années quatre-vingt-dix, à une réflexion globale sur leurs fonctionnements. L'entreprise devait répondre rapidement à

la demande des clients plus exigeants sur la qualité des produits et les délais de livraison. Une telle demande se fait de plus en plus incertaine et difficilement prévisible. L'entreprise devait également être capable de reconfigurer rapidement son système de production. Une organisation plus réactive par rapport à un environnement incertain ainsi qu'une capacité à innover qui implique une mobilisation des compétences de l'entreprise, deviennent des facteurs de compétitivité importants. Dès lors, l'ingénierie simultanée est considérée comme une réponse opérationnelle à ce défi (Bossard et al., 1997).

L'ingénierie simultanée se veut une approche de conception intégrée non plus séquentielle, des nouveaux produits et processus de fabrication. Cette nouvelle approche prend en considération dès l'amont tout le cycle de vie du produit (marketing, conception, fabrication, production, service après vente, recyclage, etc.). Initialement, elle est née pour répondre à un besoin propre à certaines entreprises des domaines de l'armement, la construction navale et l'aéronautique. Elle se déploie dans le champ de développement du produit en rassemblant les expertises des différents acteurs, et dans le temps en chevauchant les interventions des services de développement plutôt que leurs successions (Bossard et al., 1997).

Ainsi, cette approche essaye d'enlever les barrières qui se sont érigées entre les différents services, en formant une équipe multidisciplinaire chargée du développement du produit. Idéalement, l'équipe est formée des personnes issues des différentes disciplines telles que le marketing, la conception, la fabrication, le service après vente, et toutes autres disciplines favorables à la réussite du produit.

Dans la littérature le facteur temps est présenté comme l'élément décisif de toute compétition. Effectivement, l'un des enjeux pour l'entreprise est de réduire le délai de développement d'un nouveau produit, et ce à partir de la formulation du besoin jusqu'à la mise sur le marché. Vient ensuite, la réduction du coût de conception et de fabrication

du produit, notamment, par une meilleure intégration des contraintes de production dès les premières phases de conception. Sans oublier, bien entendu, la qualité du produit qui représente un facteur aussi important que les deux autres. Ainsi, le degré de satisfaction du client n'est autre que le résultat du niveau de réussite à améliorer ces trois facteurs.

Lors du développement séquentiel d'un produit, chaque phase est optimisée sans tenir compte des paramètres qui la relie avec les autres phases. L'ingénierie simultanée élimine ce genre de partition, elle traite tous les paramètres le plutôt possible. Ceci permet d'anticiper et de résoudre les problèmes futurs. C'est vrai qu'en réalité, chaque tâche précède une autre. Le concept passe avant la conception détaillée et les outils de production sont conçus avant la fabrication du produit. Cependant, dans l'approche simultanée on évite de dresser des barrières fictives entre l'amont et l'aval du processus de développement du produit. De cette manière, toutes les phases de conception et de fabrication comportent les visions produit, production et service après vente.

Le but de cette étude est de développer un modèle d'optimisation simultanée des phases de conception et de fabrication lors du développement d'un nouveau produit. Le développement de ce modèle d'optimisation sera basé sur deux approches principales : le développement de la fonction qualité (DFQ) et la programmation mathématique interactive multicritère. La DFQ sera utilisée pour modéliser le processus de développement et identifier les principales exigences et caractéristiques techniques du nouveau produit et du procédé de fabrication. La programmation multicritère sera utilisée pour optimiser les phases de conception et de fabrication. Le modèle mathématique est implémenté à l'aide du logiciel AMPL. Le solveur MINOS est utilisé comme outil d'optimisation numérique.

Ce rapport est organisé comme suit. Le deuxième chapitre présente d'abord une brève revue bibliographique sur l'optimisation de la conception et de la fabrication des produits dans un environnement d'ingénierie simultanée. Une synthèse bibliographique

portant sur la démarche préconisée par l'approche DFQ est ensuite présentée. Le chapitre se termine en exposant la problématique de l'optimisation séquentielle des deux phases de conception et de fabrication lors du développement d'un nouveau produit. Le troisième chapitre présente une revue des différentes formulations de la fonction objectif et des contraintes pour les phases de conception et de fabrication. Les deux modèles d'optimisation, séquentielle et simultanée, sont développés et validés sur un exemple numérique. Les modèles d'optimisation multicritères ainsi que toutes les définitions et les propriétés mathématiques utiles à leurs résolutions sont présentées au quatrième chapitre. À la fin de ce chapitre, les résultats de cette optimisation appliquée au même exemple numérique du chapitre précédent sont présentés. Nous concluons avec le cinquième chapitre en comparant les résultats des différentes approches et en explorant les limites de notre travail et les nouvelles voies qu'il ouvre dans le domaine de développement des produits.

Chapitre 2 : Revue de la littérature et problématique

Ce chapitre se divise en trois parties. Nous présentons d'abord une brève revue de la littérature sur l'optimisation de la conception et de la fabrication des produits dans un environnement d'ingénierie simultanée. Une synthèse bibliographique sur la définition de l'approche DFQ est ensuite présentée. Le chapitre se termine en exposant la problématique de l'optimisation séquentielle des deux phases de conception et de fabrication lors du développement des nouveaux produits.

2.1 Revue de la littérature

L'ingénierie simultanée est venue mettre un cadre global pour la discipline de développement des produits dans un esprit de compromis, afin de rendre l'optimisation de la conception et de la fabrication des produits une démarche systématique.

Néanmoins, depuis au moins deux décennies, plusieurs auteurs ont traité du développement des produits dans un environnement d'ingénierie simultanée, en proposant des approches expérimentales, des modèles mathématiques et des méthodes numériques. Dans cette revue bibliographique, nous présenterons un bref aperçu de ces différentes approches.

Bisgaard (1997) propose une approche expérimentale, il traite la tolérance au sein d'un assemblage de pièces, en faisant varier les dimensions des pièces dans leurs intervalles de tolérances respectifs. Il conçoit, ensuite, un plan d'expériences en combinant les différentes pièces aux différentes dimensions. Il mesure les jeux

fonctionnels de tous les assemblages obtenus. À l'aide de l'analyse de la variance (ANOVA), il trouve les dimensions des pièces qui influent le plus sur le jeu fonctionnel d'assemblage. Industriellement, la méthode présente un grand intérêt, sauf que le coût des essais risque d'être très élevé.

Ngoi et Teck (1997) développent un modèle linéaire de programmation mathématique. Ils formulent les tolérances fonctionnelles de l'assemblage comme des fonctions linéaires des tolérances des pièces constituant l'assemblage. Les tolérances des pièces sont formulées d'abord en fonction des tolérances des opérations de fabrications, données par les ingénieurs de fabrication au début de la conception du produit. La fonction objectif du modèle mathématique, qui est de maximiser les tolérances de fabrication, est alors établit ainsi que les contraintes issues des exigences d'assemblage et des contraintes de fabrication. C'est une approche déterministe, car elle suppose que les variables et la fonction objectif prennent des valeurs déterministes. Dans la production de masse, nous avons plus besoin d'un modèle avec les valeurs moyennes et les écart-types des variables.

Jeang (1997) discute un ensemble de modèles qui déterminent la tolérance optimale du produit en minimisant les coûts de fabrications et de pertes par manque de qualité. Ces modèles incluent les cas de la valeur cible « nominal-the-best », la valeur minimale « the smaller-the-better », et la valeur supérieure « the larger-the-better ». L'indice de capabilité du processus est utilisé pour établir une relation fonctionnelle entre les écart-types des caractéristiques du produit et leurs tolérances. En se basant sur cette relation, Jeang (1997) propose, pour chaque cas, une formulation du coût total en fonction des tolérances du produit, ainsi en minimisant ce coût, il obtient les tolérances optimales du produit.

Jeang et Leu (1999) proposent une méthode pour l'optimisation de la conception assistée par ordinateur (CAO) des produits. Ils établissent, tout d'abord, un plan

d'expériences avec les pièces, constituant le produit, à différentes dimensions. Puis ils conduisent une simulation Monte-Carlo avec le logiciel VSA-3D/Pro pour obtenir les données expérimentales. Ensuite, en analysant les données, ils obtiennent les dimensions critiques des pièces qui réduisent la fonction perte qualité du produit. C'est une méthode qui s'avère intéressante, surtout que de plus en plus de produits sont développés par la CAO. Cependant, cette approche ne considère que l'optimisation de la conception en vue de l'assemblage. Cependant, elle omet un côté très important qui est la conception en vue de la fabrication.

Afin de faciliter la compréhension de ce rapport, nous avons choisis de présenter d'autres revues bibliographiques portant sur les modèles d'optimisation mathématiques au fur et à mesure que nous avançons dans le développement.

2.2 Déploiement de la fonction qualité (DFQ)

L'une des approches les plus utilisée dans le cadre de l'ingénierie simultanée est la « Déploiement de la Fonction Qualité », c'est l'interprétation de l'intégration des trois termes suivant :

- Qualité : satisfaction du besoin de l'utilisateur.
- Fonction : action d'un produit exprimé en terme de sa finalité.
- Déploiement : développement dans toute son extension.

Cette approche est utilisée pour analyser, rendre prioritaire et mettre en évidence les différents facteurs, les «Quoi» et les «Comment», pour satisfaire aux exigences du client. Elle met en valeur les deux aspects essentiels d'un produit, une conception optimale et un coût de développement minimal.

La DFQ préconise une démarche structurée qui intègre le point de vue du client dans le processus de conception et de fabrication du produit. Elle a pour but de s'assurer que l'on tient compte des exigences du client au moment de la conception du produit et du processus de fabrication. Pour se faire, les trois étapes suivantes s'imposent :

Étape 1 : collecter les attentes du client.

Étape 2 : développer le concept du produit.

Étape 3 : déployer à la phase de conception les critères qui répondent aux besoins du client et aux contraintes de fabrication.

L'outil de base de la DFQ est la maison de la qualité, un diagramme matricielle constitué de huit parties appelées « chambre », représenté à la figure 2.1 (Chenel, 2000).

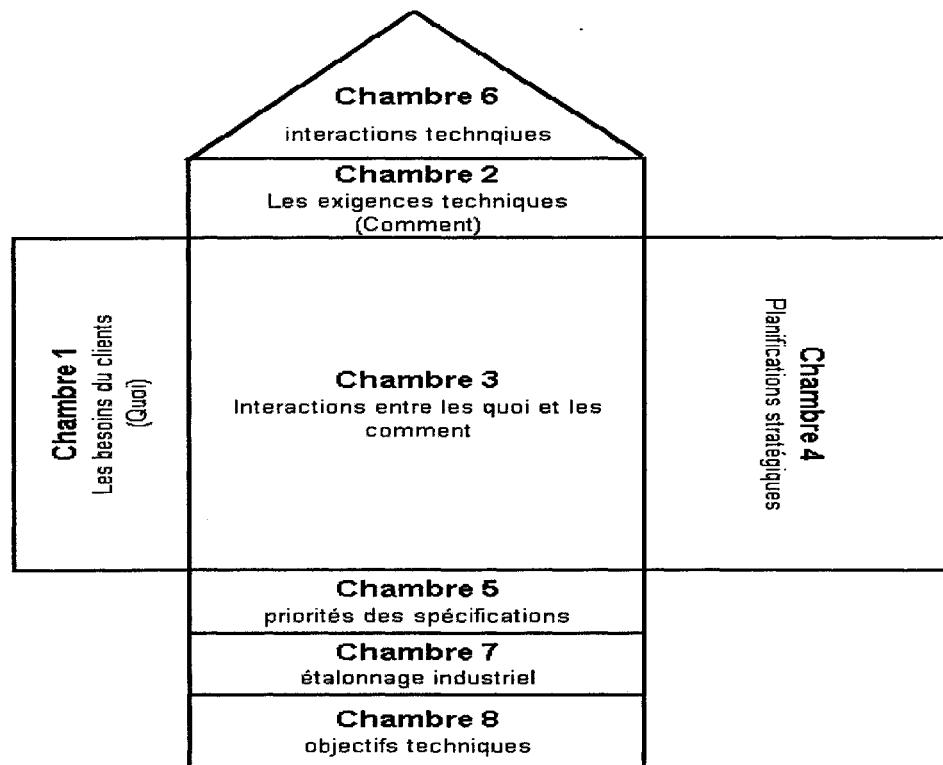


Figure 2. 1- La maison de la qualité

La première chambre reçoit la voix du client (les Quoi). Elle consiste à regrouper l'information obtenue des clients. C'est l'étape d'interactivité avec le client dans le but de définir ses attentes. En fait, c'est ce qu'on pourrait comparer à la phase de l'étude du marché, la sélection du type de clientèle ciblée, la collecte de la vision du client et le tamisage des besoins. Généralement, ce travail conduit à la sélection de 15 à 30 besoins, fidèlement exprimés sur la base de la propre formulation du client.

La deuxième chambre est celle des exigences techniques (les Comment). C'est l'étape de développement des exigences techniques du produit. Ainsi, on détermine la fonction du produit, son environnement, son état (poids, taille, apparence, goût, ergonomie, etc.), ses différents coûts (coût de fabrication, coût de service, coût de distribution). Puis on organise ces spécifications en catégories et sous catégories.

La troisième chambre établit l'interrelation du « Quoi » avec le « Comment ». L'évaluation de la matrice relationnelle entre la voix du client et les exigences techniques se fait selon le tableau 2.1. En général, uniquement le quart ou le tiers du nombre total des cellules est rempli (Clausing, 1994). C'est l'un des travaux les plus délicats de l'équipe multidisciplinaire, alors il faudrait plusieurs itérations jusqu'à atteindre un compromis final.

Tableau 2.1- Représentation de la valeur des relations entre les « Quoi » et les « Comment »

Nature de la relation	Valeur	Symbole
Relation possible	1	▲
Relation faible	3	○
Relation forte	9	⊗

La quatrième chambre concerne la planification stratégique. Elle permet la quantification et l'établissement des priorités des besoins. Le but recherché est de

fournir à l'équipe multidisciplinaire une comparaison entre la performance de l'entreprise et celle des concurrents par rapport aux mêmes besoins du client.

La cinquième chambre consiste à établir la priorité des exigences techniques du produit. Ainsi, à l'aide de simples calculs arithmétiques, on peut évaluer le niveau de contribution de chacune des exigences techniques. Pour calculer la contribution d'une exigence, il faut partir d'un élément provenant de la quatrième chambre pour un besoin. Ensuite, il faut multiplier cette valeur avec celle de l'interaction entre le « Quoi » et le « Comment ». En dernier lieu, il faut additionner les valeurs identifiées pour chaque besoin client afin de déterminer sa priorité en fonction des exigences techniques.

La sixième chambre établit l'interaction entre les exigences techniques. C'est l'évaluation des exigences techniques deux à deux, alors celles qui se contredisent (cases remplis avec un « - ») représentent les vrais défis auxquelles doit faire face l'équipe multidisciplinaire (ex. la légèreté du vélo et sa rigidité). Tandis que, les spécifications qui vont ensemble (cases remplis avec un « + ») seront des arguments dans la main des vendeurs (ex. la légèreté d'un véhicule et sa faible consommation).

La septième chambre est celle de la planification. Dans cette chambre, on se concentre sur les spécifications les plus importantes :

1. Celles qui ont une valeur importante de la somme des produits du poids (spécifié par le client) et la valeur de la case relationnelle (chambre 3) entre la voix du client et la spécification technique;
2. Celles qui représentent des contradictions apparues dans la 6^{ème} chambre.

La huitième chambre consiste à établir les objectifs recherchés pour chaque exigence technique. Ainsi, on détermine la valeur cible, l'écart type admissible, et la quantification de la perte par manque de qualité pour chaque exigence technique.

L'approche de déploiement de la fonction qualité (DFQ) se manifeste par le développement des quatre maisons de la qualité (MDQ). Silvaloganathan et Ebuomwan (1997), dans leur revue bibliographique, font état de quatre phases correspondant chacune à une MDQ :

- Phase 1 : la maison du produit (MDQ I);
- Phase 2 : la maison des pièces (MDQ II);
- Phase 3 : la maison du processus (MDQ III);
- Phase 4 : la maison de production (MDQ IV).

Ces quatre maisons de la qualité se composent toutes des huit chambres ou moins, comme on peut remarquer sur la figure 2.2 (Clausing, 1994)

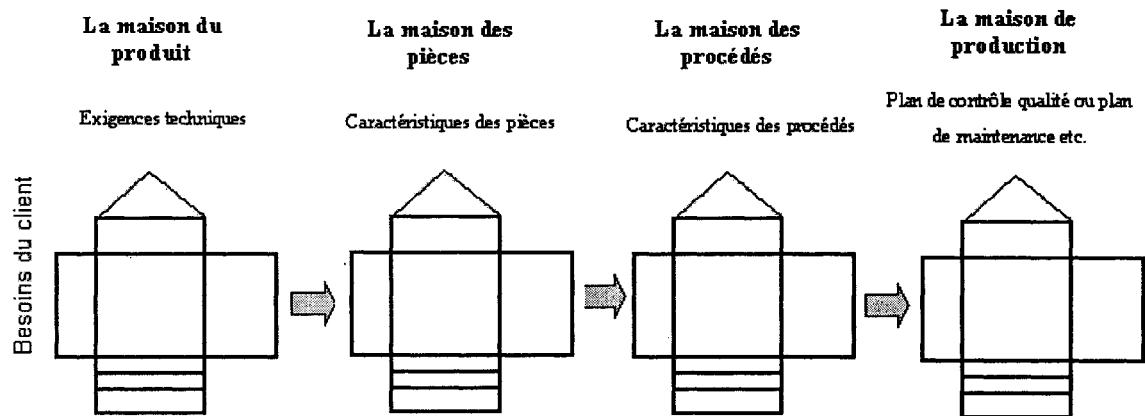


Figure 2.2- Processus du Déploiement de la Fonction Qualité

La maison du produit est la traduction des exigences clients en exigences techniques quantifiables.

La suite logique de la phase 1 est de déterminer les caractéristiques techniques des pièces à partir des exigences techniques du produit. L'analyse fonctionnelle est un outil convenable pour déterminer les fonctionnalités des pièces et par conséquent leurs

caractéristiques techniques. La liste des caractéristiques des pièces constituera les « Comment » de la maison des pièces en réponse aux « Quoi » exprimés par les exigences techniques du produit.

Puis vient la maison des procédés qui détermine les caractéristiques des procédés de fabrication. Le résultat de cette phase permettra d'établir la séquence des opérations (gamme d'usinage et/ou d'assemblage) d'obtenir les caractéristiques des outils requis et les paramètres d'usinage. L'institut « American Supplier Institute » (ASI, 1987) propose dans son diagramme des flux une représentation de cette phase en donnant les détails de :

1. L'assemblage total;
2. Les sous assemblages et les pièces;
3. Les matières premières;
4. Les opérations de fabrication;
5. Les paramètres critiques du processus.

Et enfin, dans le but de contrôler la fabrication, chaque caractéristique technique critique des procédés de fabrication devrait rester dans un intervalle déterminé. Alors la dernière maison pourrait déterminer les caractéristiques techniques du plan de contrôle qualité, du plan de contrôle de la maintenance ou tout autre plan de prévention des accidents ou d'amélioration du poste de travail.

Clausing et Pugh (1991) présentent la méthode de Pugh comme l'étape suivant la première maison de la qualité. Cette méthode permet de sélectionner le meilleur concept de développement du produit. La méthode est une représentation matricielle composée de trois parties (tableau 2.2) :

Tableau 2. 2- Exemple d'une matrice de sélection de Pugh

Critères	Concepts			
	○	□	□	○
A	+	-	+	Concept de base
B	+	S	-	
C	-	+	-	
D	S	S	+	

1. La première partie représente tous les critères formés des caractéristiques techniques développés dans la 1^{ère} maison de la qualité.
2. La deuxième partie représente tous les concepts possibles du produit en choisissant forcément un comme concept de base (DATUM).
3. La troisième partie représente la matrice d'évaluation. C'est la partie où on compare chaque concept vis à vis du concept de base et ce par rapport à chaque critère. L'évaluation a pour résultat un signe (+) si le concept satisfait mieux le critère que le concept de base, un signe (-) sinon et une lettre (S) s'ils sont similaires.

Une fois l'évaluation faite, on somme les (+) les (-) et les (S), ensuite on compare les différents concepts, puis on choisit le nouveau concept de base et on recommence l'opération. Il ne faut pas perdre de vue que le but est de s'attaquer aux points négatifs (signe -) et de développer les points forts (signe +), et ce en adaptant les concepts et en les raffinant. Ainsi, on devrait itérer jusqu'à arriver au meilleur concept.

Cette méthode donne une nouvelle dimension à la DFQ, en s'insérant entre les quatre maisons de la qualité permettant de sélectionner le meilleur concept entre chaque deux maisons de la qualité. Ainsi, on obtient un processus structuré, présenté à la figure 2.3,

permettant de sélectionner les différents concepts de développement et de faciliter le choix technologique (Chenel, 2000).

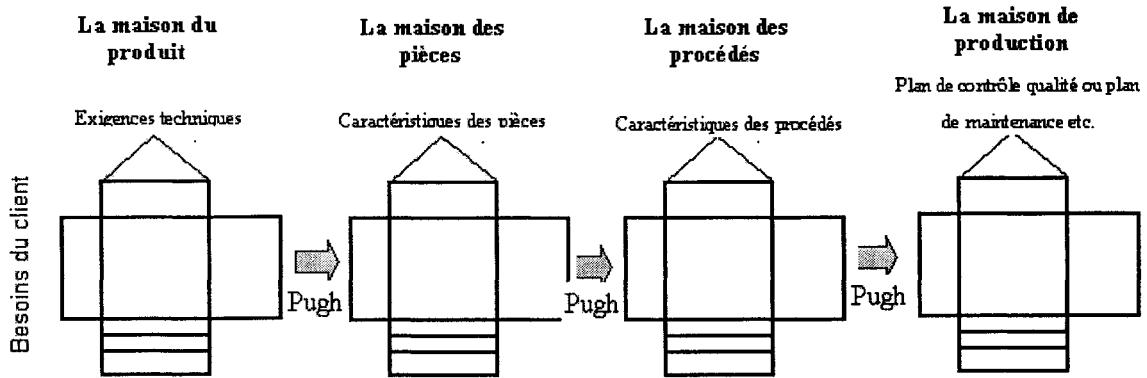


Figure 2.3- Intégration de la méthode de Pugh avec la DFQ

2.3 Problématique

Cette recherche vise à optimiser les étapes de développement d'un nouveau produit. Cette optimisation repose sur la notion de l'ingénierie simultanée pour expliciter toutes les relations fonctionnelles entre les étapes du développement. Ainsi, nous faisons la distinction entre les quatre phases comme suit :

La première phase est la maison du produit, notée MDQ I, qui relie la voix du client ou les besoins du client, notées BC, et les exigences techniques du produit, notées ET.

La deuxième phase est la maison de conception, notée MDQ II, qui relie les exigences techniques du produit, et les caractéristiques techniques des pièces, notées CP.

La troisième phase est la maison de fabrication, notée MDQ III, qui relie les caractéristiques techniques des pièces aux caractéristiques techniques des procédés de fabrication, notée PF.

Et la quatrième phase est la maison de production, notée MDQ IV, qui relie les caractéristiques techniques des procédés de fabrication aux caractéristiques techniques du plan de contrôle qualité, noté PQC.

En revanche, nous nous limiterons dans ce travail à l'étude exclusive de la MDQ II et la MDQ III, c'est-à-dire, l'optimisation des phases de conception et de fabrication d'un nouveau produit. Notre objectif sera de trouver comment optimiser le passage des exigences techniques ET, aux procédés de fabrication PF, en passant par les caractéristiques des pièces CP.

Pour ce faire, nous avons besoin de définir les éléments composants les deux maisons de la qualité, la MDQ II et la MDQ III. (figure 2.4)

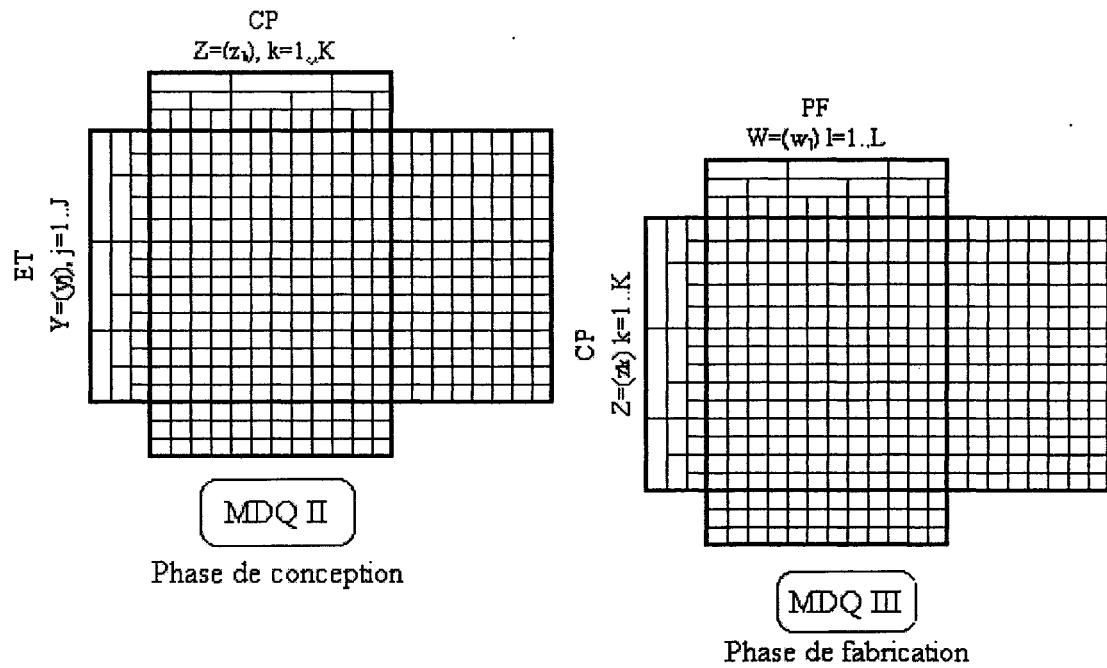


Figure 2.4- Les deux maisons de la qualité

La chambre 1 de la MDQ II contiendra les exigences techniques du produit ET. Ces ET sont représentées par le vecteur $Y=(y_j)$ avec $j = 1$ à J . Le tableau 2.3, donne la liste des symboles des ET utilisées dans la MDQ II.

Tableau 2.3- Liste des symboles associés à l'exigence technique y_j

Symbol	Désignation
σ_{y_j}	écart type sur l'exigence technique y_j
μ_{y_j}	moyenne de l'exigence technique y_j
C_j	valeur cible pour y_j
USL_{y_j}	limite de spécification supérieure de y_j
LSL_{y_j}	limite de spécification inférieure de y_j
k_{1j}, k_{2j}	constantes de perte par qualité

La chambre 2 de la MDQ II contiendra les caractéristiques techniques des pièces CP. Ces caractéristiques représentées par le vecteur $Z=(z_k)$ avec $k = 1$ à K . Le tableau 2.4. donne la liste des symboles des CP utilisées dans la MDQ II.

Tableau 2.4- Liste des symboles associés à la caractéristique des pièces z_k

Symbol	Désignation
σ_{z_k}	écart type sur z_k
μ_{z_k}	valeur moyenne de z_k
T_{z_k}	valeur cible de z_k
z_k^+	la valeur supérieure de z_k
z_k^-	la valeur inférieure de z_k
z_k^*	valeur optimale de z_k
$Sup_{\sigma_{z_k}}$	la valeur supérieure de l'écart type sur z_k
tol_{m_k}	la tolérance minimale permise par la conception aux CP
tol_{p_k}	la tolérance maximale permise par la conception aux CP

La chambre 1 de la MDQ III contiendra les caractéristiques techniques des pièces $Z=(z_k)$ avec $k = 1$ à K . La chambre 2 de la MDQ III contiendra les caractéristiques techniques des procédés de fabrication PF. Ces caractéristiques sont représentées par le vecteur $W=(w_l)$ avec $l = 1$ à L . Le tableau 2.5 donne la liste des symboles des PF utilisées dans la MDQ III.

Tableau 2.5- Liste des symboles associés à l'opération de fabrication w_l

Symbol	Désignation
w_l	valeur nominale de l'opération de fabrication
t_l	tolérance sur w_l de l'opération de fabrication
$C_M(t_l)$	coût de fabrication en fonction de t_l
p	indice de capacité, où $p=3C_p$ (C_p : capacité du processus)
t_{L_j}, t_{U_j}	limite inférieure et supérieure de contrôle des opérations de fabrication

Lors du développement des produits, il est inévitable de traiter avec les tolérances à toutes les phases, à partir de la formulation des exigences du client jusqu'à la production du produit. Ainsi, à la phase de conception, des tolérances doivent être allouées au produit. Les valeurs limites de ces tolérances sont fixées par les limites de spécifications (LSL_{y_j} et USL_{y_j}) et par les fonctionnalités du produit. Cependant, du point de vue de la fabrication la tolérance devrait être le plus large possible afin d'assurer le façonnage du produit et minimiser le coût des opérations de fabrication $C_M(t_l)$. Par conséquent, les tolérances allouées au produit ont un impact direct sur la fonctionnalité et le coût de ce produit (Ngoi et Ong, 1999).

Dans notre recherche bibliographique, nous avons remarqué que les modèles développés considéraient l'optimisation des phases de conception et de fabrication comme un seul système. Ainsi, nous avons pensé à intégrer l'approche DFQ et la programmation mathématique, afin de modéliser et de simuler les approches

d'optimisation séquentielle et simultanée de la conception et de la fabrication d'un nouveau produit.

Le chapitre 3 présente les modèles d'optimisation séquentielle et simultanée développés dans cette étude.

Chapitre 3 : Modèles d'optimisation séquentielle et simultanée

Nous présentons dans ce chapitre les différentes formulations des fonction objectifs et des contraintes qui régissent les modèles d'optimisation de la conception et de la fabrication.

Le chapitre est divisé en six parties. La première partie présente la formulation de la fonction objectif et des contraintes. La deuxième partie présente la formulation du modèle d'optimisation séquentielle des phases de conception et de fabrication d'un produit. La troisième partie propose le modèle d'optimisation simultanée de la conception et de la fabrication. Les MDQ II et MDQ III relatives au développement d'un circuit passe-bas (CPB) sont présentées à la quatrième partie. Les résultats des optimisations séquentielle et simultanée de la conception et de la fabrication du CPB sont présentées, respectivement, à la cinquième et à la sixième parties.

3.1 Formulation des fonctions objectifs et des contraintes

Dans la littérature, la minimisation de la fonction de perte par manque de qualité est adoptée comme une méthode d'aide à la prise de décision quant à l'optimisation des processus de conception et de fabrication des produits. Pignatello (1993) résume les différentes méthodes d'optimisation des fonctions à plusieurs variables, et discute de leur application afin de minimiser la fonction de perte par manque de qualité. Il y a les méthodes de recherche directe, les méthodes basées sur la stratégie de partition, les modèles basés sur les surfaces de réponses, les approches basées sur la priorité, les approches graphiques assistées par ordinateur et l'approche Taguchi signal-bruit.

Artilés-Léon (1996) décrit une autre façon pour minimiser la fonction perte en utilisant des logiciels de calcul numériques. Il y a les logiciels qui optimisent cette fonction en calculant toutes les combinaisons possibles de la fonction, comme les programmes développés avec Basic/Fortran, ou bien, les feuilles de calcul Excel, Quattro Pro ou lotus 1-2-3. Il faut noter qu'aucune de ces approches n'utilise la programmation mathématique. Contrairement à Suhr et Baston (2001) qui proposent différentes formulations de fonction objectif et de contraintes. Ils suggèrent la minimisation de la fonction perte sous des contraintes.

3.1.1 Fonctions objectifs

Chaque processus dépend d'un certain nombre de caractéristiques qualités (CQ) qui interagissent entre elles. Les chercheurs ne sont pas tous d'accord sur la meilleure manière de formuler mathématiquement la perte par manque de qualité en fonction des CQ (Suhr et Baston, 2001). Mais, ils présentent différentes formulations qui considèrent la fonction perte comme la somme des différentes pertes causées par :

1. la variation de chaque caractéristique qualité;
2. la variation de chaque CQ plus les termes d'interactions entre les différentes CQ;
3. la variation de chaque CQ plus les termes d'interactions avec les facteurs de contrôles;
4. un mixage de tous les cas ci-dessus.

Les fonctions de perte à plusieurs variables sont continues, et quadratiques, parce qu'elles sont toutes inspirées de la formulation de la fonction perte à une variable de Taguchi. D'après Taguchi (1989), la fonction perte se compose de la perte par unité, et l'espérance de perte par unité.

3.1.2 Contraintes

Le problème à une variable vise à minimiser l'espérance de la fonction perte suivante :

$$\text{Minimiser} \quad EL(\mu, \sigma) = k[\sigma^2 + (\mu - t)^2] \quad (3.1)$$

Où :

μ : la valeur moyenne d'une caractéristique qualité

σ^2 : la variance d'une caractéristique qualité

k : coefficient du coût de perte

L : perte par unité

EL : espérance totale de perte par unité

Idéalement, la valeur minimale de cette fonction est nulle. Cela requiert que la valeur moyenne soit égale à sa valeur cible et que la variance soit nulle. En pratique, ce n'est pas possible, c'est pourquoi les contraintes définissent l'ensemble des solutions pratiquement réalisables.

Les contraintes constituent différentes informations qui dépendent du système étudié. Le tableau 3.1 présente les différents types de contraintes possibles ainsi qu'avec quels types de fonctions objectifs on les associe.

Tableau 3.1- Les différents types de contraintes (Suhr et Baston, 2001)

Catégorie de contraintes	Information	Le type de fonction à utiliser	
		$L(y, x, t)$	$EL(y, t)$
Structurelle	Relation entre la CQ y_i et ses facteurs de contrôles x_j basée sur les modèles de surface de réponse	Oui	
Distribution	Relation entre la CQ y_i et sa valeur moyenne, sa variance et sa covariance.		Oui
Mécanique	Relation entre la CQ y_i et ses facteurs de contrôles x_j ou les x_j entre elles, basée sur les lois physiques, chimiques, ou géométriques.	Oui	Oui
Coût	Reflétant les coûts de contrôles de la qualité, inspection, maintenance, travail, protection de l'environnement, etc..	Oui	Oui
Spécification et tolérance	Reflète les données du processus à cause du client ou de la politique de l'entreprise	Oui	Oui
Capabilité	Reflète l'indice de capabilité du processus minimal acceptable	Oui	Oui

3.2 Le Modèle d'optimisation séquentielle

3.2.1 Optimisation de la phase de conception

La phase de conception (MDQ II) peut être considérée comme un processus de transfert avec des entrées, des sorties, des paramètres et des fonctions de transfert. (figure 3.1)

Les entrées de la MDQ II sont les caractéristiques des pièces CP ($Z=(z_k)$, $k=1,.., K$).
 Les sorties de la MDQ II sont les exigences techniques ET ($Y=(y_j)$, $j=1,..,J$).

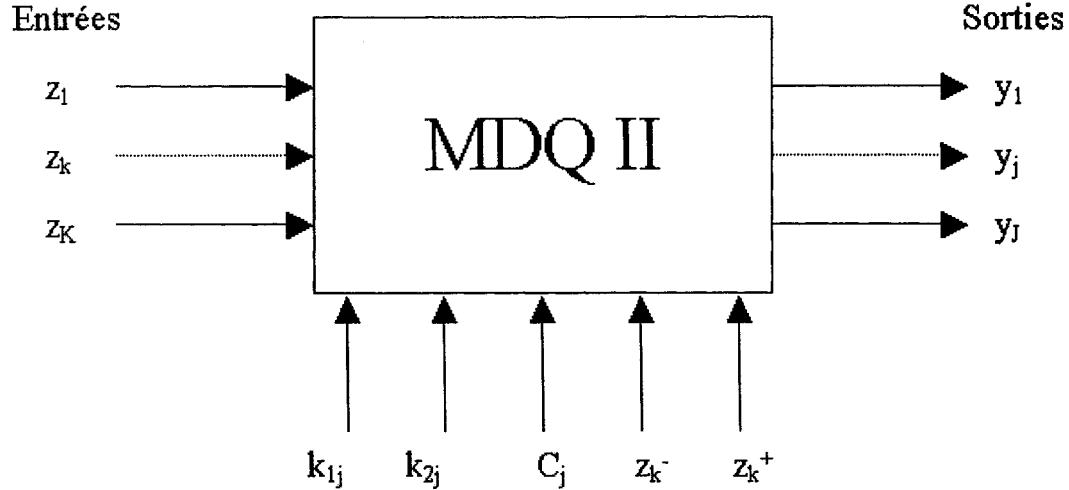


Figure 3. 1- Processus d'optimisation de la conception

Les fonctions de transfert de la MDQ II sont les équations exprimant les moyennes des ET en fonction des CP ($\mu_{y_j} = f(z_k)$, $j=1,..,J$) et les équations exprimant les écart-types des ET en fonction des CP ($\sigma_{y_j} = g(z_k)$, $j=1,..,J$).

Les contraintes de la MDQ II sont les limites de spécifications sur les ET ($LSL_j \leq \mu_{y_j} \leq USL_j$, $j=1,..,J$), et l'espace de faisabilité des CP ($z_k^- \leq z_k \leq z_k^+$, $k=1,..,K$).

La fonction objectif de la MDQ II est l'espérance de la fonction de perte de conception (EFPC), qui est la somme des variations entre les moyennes des ET (μ_{y_j}) par rapport à leurs valeurs cibles (C_j) et la somme des variances des ET ($\sigma_{y_j}^2$).

Ainsi, le modèle de la MDQ II s'écrit comme suit :

Minimiser : (espérance de la fonction perte de conception)

$$EFPC = \sum_{j=1}^J \left[k_{1j} (\mu_{y_j} - C_j)^2 + k_{2j} \sigma_{y_j}^2 \right] \quad (3.2)$$

Sujet à :

$$\mu_{y_j} = f(z_k) \quad \text{pour } j=1,..,J \quad (\text{la 1}^{\text{ère}} \text{ fonction de transfert}) \quad (3.3)$$

$$\sigma_{y_j} = g(z_k) \quad \text{pour } j=1,..,J \quad (\text{la 2}^{\text{ème}} \text{ fonction de transfert}) \quad (3.4)$$

$$LSL_j \leq \mu_{y_j} \leq USL_j \quad \text{pour } j=1,..,J \quad (\text{la limite de spécification des ET}) \quad (3.5)$$

$$z_k^- \leq z_k \leq z_k^+ \quad \text{pour } k=1,..,K \quad (\text{l'espace de faisabilité des CP}) \quad (3.6)$$

3.2.2 L'optimisation de la phase de fabrication

La phase de fabrication (MDQ III) peut être considérée comme un processus de transformation avec des entrées, des sorties, des paramètres et des fonctions de transfert. (figure 3.2)

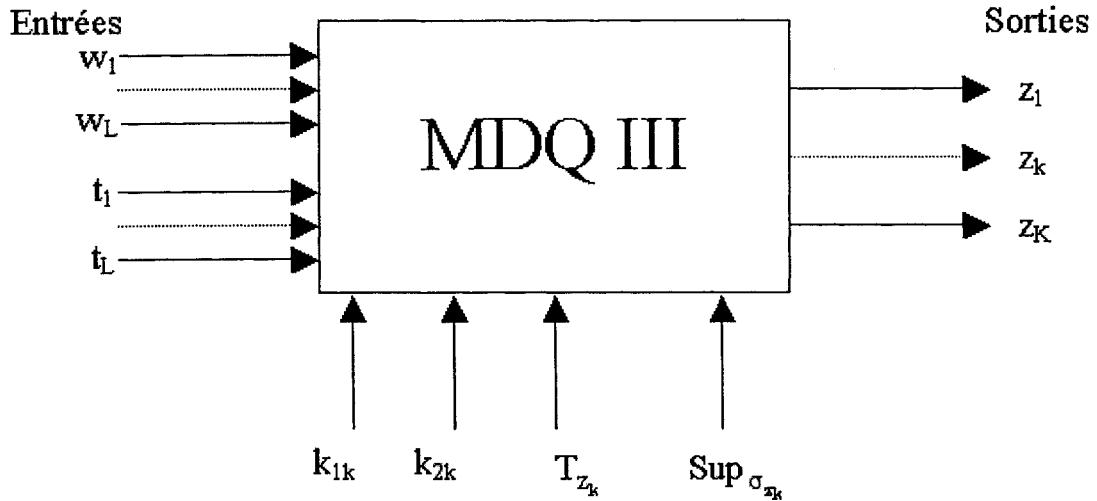


Figure 3.2- Processus d'optimisation de la fabrication

La fabrication des pièces présente toujours une certaine variation par rapport aux dimensions voulues (valeurs nominales) dues aux conditions environnantes et inhérentes. Nous définissons alors, la tolérance de fabrication comme la variation maximale résultant des opérations de fabrication, notée t_l .

Les entrées de la MDQ III sont les valeurs nominales des procédés de fabrication (NPF) ($W=(w_l)$, $l=1, \dots, L$) et les tolérances des procédés de fabrication (TPF) ($t=(t_l)$, $l=1, \dots, L$). Les sorties de la MDQ III sont les caractéristiques des pièces CP ($Z=(z_k)$, $k=1, \dots, K$).

Les fonctions de transfert de la MDQ III sont les équations exprimant les moyennes des CP en fonction des NPF ($\mu_{z_k} = h(w_l)$, $k=1, \dots, K$) et les équations exprimant les écart-types des CP en fonction des TPF ($\sigma_{z_k} = e(t_l)$, $k=1, \dots, K$).

Les contraintes de la MDQ III sont l'espace de capacité des machines de fabrication ($w_l^- \leq w_l \leq w_l^+$, $l=1, \dots, L$) et les limites de précision des machines ($t_{L_l} \leq t_l \leq t_{U_l}$,

$l=1,..,L$). Nous ajoutons aussi une contrainte sur la variabilité du processus ($\sigma_{z_k} \leq \text{Sup}_{\sigma_k}$, $k=1,..,K$).

La fonction objectif de la MDQ III est l'espérance de la fonction de perte de fabrication (EFPF) qui est la somme des variations entre les moyennes des CP (μ_{z_k}) par rapport à leurs valeurs cibles (T_{z_k}) et la somme des variabilités des CP ($\sigma_{z_k}^2$), augmentée du coût des opérations de fabrication ($C_M(t_l)$).

Le coût des opérations de fabrication est une fonction inverse des tolérances des opérations de fabrications (Wei ,1997). Dans la littérature, différentes formulations sont proposées en se basant sur les données des machines de fabrication. À titre d'exemple, Jeang (1994) propose la forme suivante :

$$C_M(t_l) = \frac{b}{t_l^a} \quad (3.7)$$

Où a et b sont des constantes.

Ainsi, le modèle d'optimisation de la MDQ III s'écrit :

Minimiser : (espérance de la fonction perte de fabrication)

$$\text{EFPF} = \sum_{k=1}^K \left[k_{1k} (\mu_{z_k} - T_{z_k})^2 + k_{2k} \sigma_{z_k}^2 \right] + \sum_{l=1}^L C_M(t_l) \quad (3.8)$$

Sujet à :

$$\mu_{z_k} = h(w_l) \quad \text{pour } k=1,..,K \quad (\text{la 3}^{\text{ème}} \text{ fonction de transfert}) \quad (3.9)$$

$$\sigma_{z_k} = e(t_l) \quad \text{pour } k=1,..,K \quad (\text{la 4}^{\text{ème}} \text{ fonction de transfert}) \quad (3.10)$$

$$\sigma_{z_k} \leq \text{Sup}_{\sigma_k} \quad \text{pour } k=1,..,K \quad (\text{contrainte sur la variabilité du processus}) \quad (3.11)$$

$$w_l^- \leq w_l \leq w_l^+ \quad \text{pour } l=1,..,L \quad (\text{l'espace de capacité des machines de fabrication}) \quad (3.12)$$

$$t_{L_l} \leq t_l \leq t_{U_l} \quad \text{pour } l=1,..,L \quad (\text{les limites de précision des machines}) \quad (3.13)$$

3.2.3 Étape de résolution du modèle d'optimisation séquentielle

L'optimisation séquentielle des phases de conception et de fabrication se fait en deux étapes.

La première étape consiste à résoudre le programme non-linéaire de la phase de conception, modélisé par les équations (3.2) à (3.6). La solution de ce problème est le vecteur des caractéristiques des pièces CP optimales, noté $Z^* = (z_k^*, k = 1, \dots, K)$, qui minimise la fonction EFPC.

La deuxième étape consiste à résoudre le programme non-linéaire de la phase de fabrication, modélisé par les équations (3.8) à (3.13), en posant les valeurs cibles des CP, les T_{z_k} , égales aux valeurs optimales des CP, les z_k^* , trouvées dans la première étape. Les solutions de ce problème sont le vecteur des valeurs nominales des PF, noté $W^* = (w_l^*, l = 1, \dots, L)$, et le vecteur des tolérances de fabrication des PF, noté $t^* = (t_l^*, l = 1, \dots, L)$.

3.3 Le Modèle intégré de l'optimisation simultanée

L'idée de base de ce modèle est de considérer la MDQ II et la MDQ III comme étant un seul processus de transfert avec comme entrées les caractéristiques des pièces (z_k) et les caractéristiques de fabrications (valeurs moyennes (w_l) et tolérances de fabrications (t_l)) et comme sorties les exigences techniques (y_j). (figure 3.3)

Les deux fonctions objectifs EFPC et EFPF représentent des coûts. Elles sont donc relativement homogènes. C'est pourquoi nous proposons de construire une autre fonction objectif l'espérance de la fonction perte totale (EFPT), la somme de la EFPC et

la EFPT, et de l'optimiser sous toutes les contraintes, seulement au lieu de fixer les valeurs cibles T_{z_k} ($k=1,2$) nous les laissons variables.

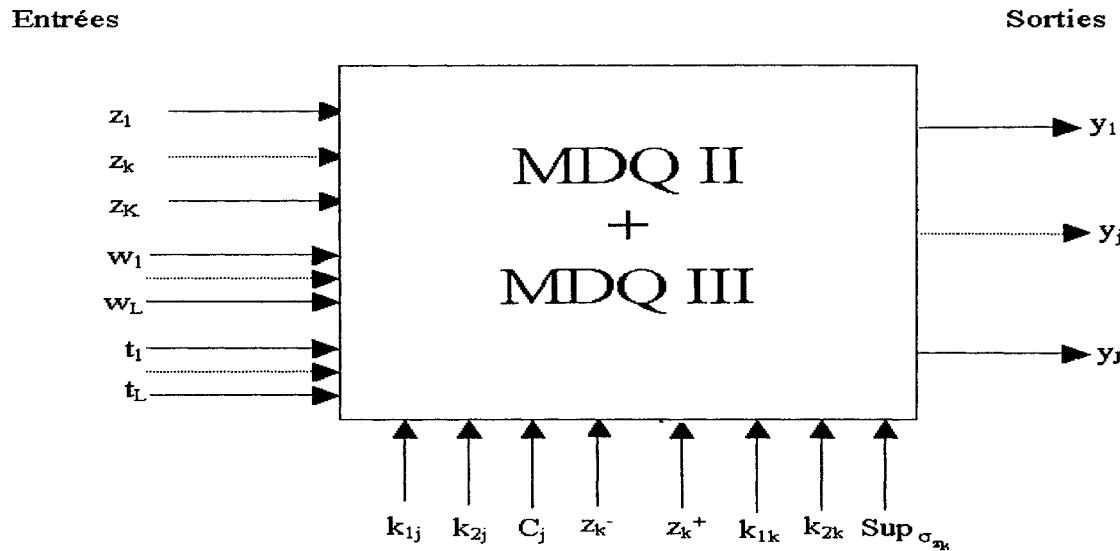


Figure 3.3- Processus d'optimisation simultanée de la conception et de la fabrication

Le modèle intégré de l'optimisation simultanée s'écrit donc comme suit :

Minimiser : (l'espérance de la fonction perte totale)

$$\text{EFPT} = \sum_{j=1}^J [k_{1j}(\mu_{y_j} - C_j)^2 + k_{2j}\sigma_{y_j}^2] + \sum_{k=1}^K [k_{1k}(\mu_{z_k} - z_k)^2 + k_{2k}\sigma_{z_k}^2] + \sum_{l=1}^L C_M(t_l) \quad (3.14)$$

Sujet à :

$$\mu_{y_j} = f(z_k) \quad \text{pour } j = 1, \dots, J \quad (3.15)$$

$$\sigma_{y_j} = g(z_k) \quad \text{pour } j = 1, \dots, J \quad (3.16)$$

$$\mu_{z_k} = h(w_l) \quad \text{pour } k = 1, \dots, K \quad (3.17)$$

$$\sigma_{z_k} = e(t_l) \quad \text{pour } k = 1, \dots, K \quad (3.18)$$

$$\text{LSL}_j \leq \mu_{y_j} \leq \text{USL}_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, J \quad (3.19)$$

$$\sigma_{z_k} \leq \text{Sup}_{\sigma_{z_k}} \quad \text{pour } k = 1, \dots, K \quad (3.20)$$

$$z_k^- \leq z_k \leq z_k^+ \quad \text{pour } k = 1, \dots, K \quad (3.21)$$

$$w_l^- \leq w_l \leq w_l^+ \quad \text{pour } l = 1, \dots, L \quad (3.22)$$

$$t_{L_l}^- \leq t_l \leq t_{U_l}^+ \quad \text{pour } l = 1, \dots, L \quad (3.23)$$

3.4 Exemple numérique : Le circuit passe-bas (CPB)

Le produit qui va servir comme exemple de l'optimisation de la conception et de la fabrication est un circuit électrique simple, appelé circuit passe-bas (CPB), représenté à la figure 3.4. Le CPB est formé de deux pièces, une résistance et une capacité électriques qui sont reliées par des fils conducteurs. Pour simplifier les modèles nous ne tiendrons pas compte de l'influence des fils électriques sur la performance du CPB.

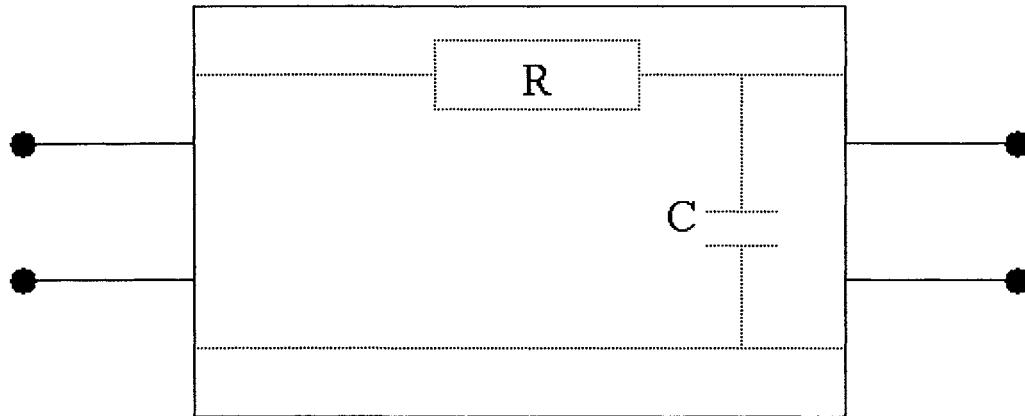


Figure 3.4- Schéma du circuit passe-bas

3.4.1 Les Caractéristiques du CPB

Sans perdre la généralité des modèles présentés, valable pour J caractéristiques techniques, nous considérons une seule caractéristique technique du CPB, qui est sa fréquence de coupure, notée y_1 , mesurée en MégaHertz (MHz). Nous supposons que la

maison des besoins (MDQ I) du CPB a déjà été optimisée, de façon à maximiser la fonction représentant la satisfaction du client. Le résultat de cette optimisation est la valeur cible de la fréquence de coupure y_1 , notée C_1 , et les valeurs inférieures et supérieures des limites de spécifications, notées respectivement LSL_1 et USL_1 . Ainsi, les paramètres relatifs à l'ET y_1 sont $C_1=20$ MHz, $LSL_1=15$ MHz et $USL_1=30$ MHz.

Le CPB est formé de deux pièces, une résistance et une capacité. Les caractéristiques des pièces sont, alors, la résistance, notée z_1 mesurée en Kilo ohms ($K\Omega$), et la capacité, notée z_2 mesurée en NanoFaraday (nF). Ainsi, les paramètres relatifs aux caractéristiques des pièces sont les valeurs inférieures et supérieures faisables de la résistance et de la capacité, notées respectivement, $z_1^- = 8 K\Omega$ $z_2^- = 0.4 nF$ et $z_1^+ = 12 K\Omega$, $z_2^+ = 1.2 nF$.

Les trois caractéristiques qui déterminent la valeur de la résistance, représentée sur la figure 3.5, sont : la résistivité du matériau qui forme la résistance, notée w_1 , la longueur de la résistance, notée w_2 , et la section de la résistance, notée w_3 .

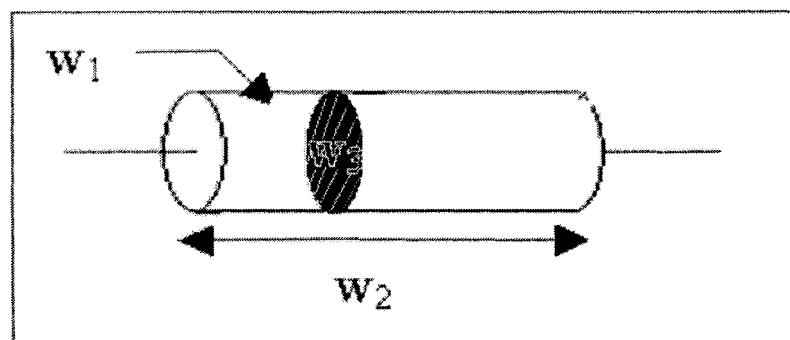


Figure 3.5- Schéma de la résistance électrique

Les trois caractéristiques qui déterminent la valeur de la capacité, représentée sur la figure 3.6, sont : la permittivité diélectrique, notée w_4 , la distance entre les plaques formant la capacité, notée w_6 , et la surface des plaques, notée w_5 .

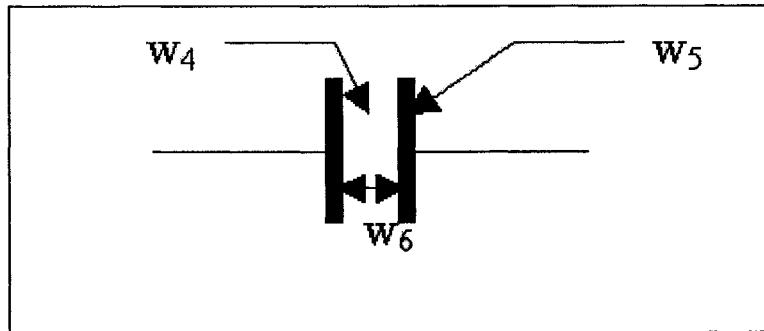


Figure 3.6- Schéma de la capacité électrique

En générale, les procédés de fabrication sont représentés par leurs caractéristiques techniques, par exemple la vitesse de coupe, la profondeur de coupe et l'avance de l'outil. Mais dans le cas du CPB, les procédés de fabrication sont représentés par les caractéristiques physiques et géométriques de la résistance et la capacité. Les dimensions nominales des procédés de fabrications sont les w_l avec $l=1$ à 6, Les tolérances de fabrication sont les t_l avec $l=1$ à 6. Ainsi, les paramètres relatifs aux procédés de fabrication sont :

1. La gamme de matériaux permis, définie par la valeur inférieure, et la valeur supérieure, mesurées en millième d'OhmMètre ($10^{-3}\Omega \cdot \text{m}$). Les tolérances minimale et maximale sont $t_{L_1} = 0.01$ et $t_{U_1} = 0.05$.
 2. Les longueurs maximale et minimale permises, définies par $w_2^- = 4.5$ et $w_2^+ = 5.5$, mesurées en millimètre (mm). Les tolérances minimale et maximale sont $t_{L_2} = 0.1$ et $t_{U_2} = 0.5$.

3. Les sections minimale et maximale, définies par $w_3^- = 11.5$ et $w_3^+ = 12.5$, mesurées en Nanomètre carré (10^{-9}m^2). Les tolérances minimale et maximale sont $t_{L_3} = 0.1$ et $t_{U_3} = 0.5$.
4. L'étendue de la permittivité diélectrique permise, définie par la valeur inférieure $w_4^- = 3.5$, et la valeur supérieure $w_4^+ = 4.5$, mesurées en Faraday par mètre ($\frac{10^{-9}}{36\pi} \text{F/m}$). Les tolérances minimale et maximale sont $t_{L_4} = 0.1$ et $t_{U_4} = 0.5$.
5. La surface des plaques maximale et minimale permises, définies par $w_5^- = 0.88$ et $w_5^+ = 1.8$, mesurées en millimètre carré (mm^2). Les tolérances minimale et maximale sont $t_{L_5} = 0.01$ et $t_{U_5} = 0.05$.
6. La distance entre les plaques minimale et maximale, définies par $w_6^- = 0.55$ et $w_6^+ = 0.75$, mesurées en millimètre (10^{-4}mm). Les tolérances minimale et maximale sont $t_{L_6} = 0.01$ et $t_{U_6} = 0.05$.

Les unités seront enlevées dans tous les modèles, par soucis d'allégement. Elles sont, néanmoins, prises en considération lors de la formulation des fonctions de transferts entre les différentes variables.

Du fait que notre travail porte juste sur l'optimisation de la conception et de la fabrication du circuit passe-bas (CPB), nous n'allons développer que la MDQ II et la MDQ III sans la MDQ I. Nous supposons que cette maison a déjà été développée et optimisée en maximisant la fonction de satisfaction du client. Les informations obtenues de l'optimisation de la MDQ I du CPB sont la valeur cible de la fréquence de coupure ($C_1=20$), la valeur limite inférieure de spécification ($LSL_1=15$), et la valeur supérieure de spécification ($USL_1=30$).

Par souci de simplicité, nous ne représenterons que la première chambre, la deuxième chambre, et la troisième chambre pour les MDQ II et MDQ III.

3.4.2 Développement de la MDQ II du CPB

Dans la première chambre de la MDQ II du CPB, nous définissons la fréquence de coupure y_1 comme exigence technique. Et dans la deuxième chambre, nous définissons les caractéristiques des pièces, la résistance z_1 et la capacité z_2 . La MDQ II est présentée à la figure 3.7.

LES EXIGENCES TECHNIQUES	LES CARACTÉRISTIQUES DES PIÈCES		C ₁ : valeur cible	U _{SL1} : limite supérieure de spécification	L _{SL1} : limite inférieure de spécification
	z ₁ : valeur de la résistance	z ₂ : valeur de la capacité			
y_1 : fréquence de coupure	⊗	⊗	20	30	15
	8	0.995			
z_1^- : valeur inférieure faisable	8	0.4			
z_1^+ : valeur supérieure faisable	12	1.2			

Figure 3.7- La MDQ II du circuit CPB

Les fonctions de transfert de la MDQ II sont obtenues des lois physiques du circuit passe-bas. La relation (3.24) établit le lien entre les valeurs des CP (z_1 et z_2) et la valeur

moyenne de l'ET (μ_{y_1}). La relation (3.25) établit le lien entre les CP (z_1 et z_2) et l'écart-type de l'ET (σ_{y_1}). Idéalement, la fonction de l'écart-type de l'ET (σ_{y_1}) devrait être déduite de la formule de propagation des erreurs (voir annexe II). Cependant, la valeur trouver de σ_{y_1} est très grande, ce qui fait que notre programme d'optimisation ne converge pas très rapidement. Afin de palier à ce problème purement technique, nous avons choisi de réduire davantage la valeur de σ_{y_1} en utilisant la formule (3.25). En effet, pour les valeurs numériques de notre exemple ($\mu_{y_1} = 20 \pm 5\%$, $z_1 = 10 \pm 5\%$ et $z_2 = 0.8 \pm 0.04$) nous obtenons un σ_{y_1} de 1.41 avec la formule de propagation d'erreur et 0.022 avec la formule proposée (3.25). Ceci fait que nous sommes plus exigeant avec la formule de l'écart-type proposée par rapport à la formule de propagation d'erreur (voir détails des calculs dans l'annexe II).

$$\mu_{y_1} = \frac{10^3}{2\pi z_1 z_2} \quad (3.24)$$

$$\sigma_{y_1} = \left| \frac{-1}{2\pi z_1^2 z_2} + \frac{1}{2\pi z_1 z_2^2} \right| \quad (3.25)$$

La contrainte de spécification restreint la variation de la valeur moyenne de l'ET (μ_{y_1}) entre la valeur limite inférieure de spécification (LSL_1), et la valeur supérieure de spécification (USL_1). Cette contrainte est représentée par l'inéquation (3.26).

$$LSL_1 \leq \mu_{y_1} \leq USL_1 \quad (3.26)$$

Les conditions industrielles et les normes techniques déterminent la plage des résistances et des capacités valables à la conception du CPB. Elles sont formulées selon l'inéquation (3.27).

$$z_k^- \leq z_k \leq z_k^+ \quad k=1,2 \quad (3.27)$$

3.4.3 Développement de la MDQ III du CPB

Dans la première chambre de la MDQ III du CPB, nous définissons la résistance (z_1) et la capacité (z_2) comme des caractéristiques des pièces CP. Dans la deuxième chambre, nous définissons la résistivité électrique (w_1), la longueur de la résistance (w_2), la section de la résistance (w_3), la permittivité diélectrique (w_4), la distance entre les plaques (w_5), et la surface des plaques (w_6), comme les procédés de fabrication (PF). La MDQ III est présentée à la figure 3.8.

LES PROCÉDÉS DE FABRICATION	La résistivité du matériau	La longueur de la résistance	la section de la résistance	la permittivité diélectrique	la distance entre les plaques	la surface des plaques	Valeurs cibles de la résistance et de la capacité						
	w_1 : la valeur de la résistivité	t_1 : la tolérance de la résistivité	w_2 : la valeur de la longueur	t_2 : la tolérance de la longueur	w_3 : la valeur de la section	t_3 : la tolérance de la section	w_4 : la valeur de la permittivité	t_4 : la tolérance de la permittivité	w_5 : la valeur de la distance	t_5 : la tolérance de la distance	w_6 : la valeur de la surface	t_6 : la tolérance de la surface	
LES CARACTÉRISTIQUES DES PIÈCES													
z_1 : La résistance électrique	⊗	○	⊗	○	⊗	○							8.000
z_2 : La capacité électrique							⊗	○	⊗	○	⊗	○	0.995
	24.95	0.05	4.50	0.14	12.50	0.141	3.50	0.13	0.95	0.05	0.75	0.05	
valeur inférieure faisable	24.95	0.01	4.50	0.10	11.50	0.10	3.50	0.10	0.88	0.01	0.55	0.01	0.4
valeur supérieure faisable	25.05	0.05	5.50	0.50	12.50	0.50	4.50	0.50	1.80	0.05	0.75	0.05	1.2
													12 ⁺

Figure 3.8- La MDQ III du circuit CPB

Les fonctions de transferts de la MDQ III sont obtenues des lois physiques. La relation (3.28) fait le lien entre la résistivité électrique (w_1), la longueur de la résistance

(w_2), et la section de la résistance (w_3), avec la valeur moyenne de la résistance (μ_{z_1}). De même, la relation (3.29) fait le lien entre la permittivité diélectrique (w_4), la distance entre les plaques (w_6) et la surface des plaques (w_5), avec la valeur moyenne de la capacité (μ_{z_2}).

$$\mu_{z_1} = \frac{w_1 w_2}{w_3} \quad (3.28)$$

$$\mu_{z_2} = \frac{w_4 w_5}{5 w_6} \quad (3.29)$$

Les écart-types de la résistance (σ_{z_1}) et de la capacité (σ_{z_2}) sont respectivement les racines carrées des sommes des écart-types des tolérances des PF (t_1, t_2, t_3) et (t_4, t_5, t_6), et sont formulées selon les équations (3.30) et (3.31). Il importe de souligner que les formules proposées (3.30) et (3.31) donnent des valeurs plus réduites aux écart-types (σ_{z_1} et σ_{z_2}) que celles trouvées avec les formules de propagation d'erreur (voir annexe II). Ceci permet une convergence plus rapide du programme d'optimisation.

$$\sigma_{z_1} = \sqrt{\sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2) + \sigma^2(t_3)} \quad (3.30)$$

$$\sigma_{z_2} = \sqrt{\sigma^2(t_4) + \sigma^2(t_5) + \sigma^2(t_6)} \quad (3.31)$$

Pour chaque écart-type de tolérance de PF ($\sigma(t_1)$), nous pouvons l'écrire en fonction de sa tolérance sous la forme de l'équation (3.32) (Jeang, 1994).

$$\sigma(t_1) = \frac{t_1}{p} \quad (3.32)$$

En combinant les formules (3.32), (3.30) et (3.31), nous obtenons les formules (3.33) et (3.34).

$$\sigma_{z_1} = \frac{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{p} \quad (3.33)$$

$$\sigma_{z_2} = \frac{\sqrt{t_4^2 + t_5^2 + t_6^2}}{p} \quad (3.34)$$

L'analyse du cas le plus défavorable pour la valeur de la résistance (z_1) fait apparaître les deux conditions (3.35) et (3.36), sachant que la tolérance minimale (tol_{m_1}) et maximale (tol_{p_1}) permise par la conception pour la valeur de la résistance sont des paramètres fixes.

$$\text{Max}(\mu_{z_1}) - \mu_{z_1} \leq tol_{p_1} \quad (3.35)$$

$$\mu_{z_1} - \text{Min}(\mu_{z_1}) \geq tol_{m_1} \quad (3.36)$$

Où $\text{Max}(\mu_{z_1})$ et $\text{Min}(\mu_{z_1})$ sont les valeurs maximale et minimale de la valeur de la résistance, représentées par les formules (3.37) et (3.38).

$$\text{Max}(\mu_{z_1}) = \frac{(w_1 + t_1)(w_2 + t_2)}{w_3 - t_3} \quad (3.37)$$

$$\text{Min}(\mu_{z_1}) = \frac{(w_4 - t_4)(w_5 - t_5)}{w_6 + t_6} \quad (3.38)$$

Les conditions (3.35) et (3.37) nous amènent à la conclusion de la 1^{ère} contrainte du cas le plus défavorable de la résistance. Celle exprimée par l'équation (3.39).

$$\frac{(w_1 + t_1)(w_2 + t_2)}{w_3 - t_3} - \mu_{z_1} \leq tol_{p_1} \quad (3.39)$$

De la même façon, les conditions (3.36) et (3.38) donnent la 2^{ème} contrainte du cas le plus défavorable de la résistance, équation (3.40).

$$\mu_{z_1} - \frac{(w_1 - t_1)(w_2 - t_2)}{w_3 + t_3} \geq tol_{m_1} \quad (3.40)$$

La même analyse faite sur la capacité nous amène à conclure les deux contraintes du cas le plus défavorable pour la capacité, les équations sont (3.41) et (3.42).

$$\frac{(w_4 + t_4)(w_5 + t_5)}{5(w_6 - t_6)} - \mu_{z_2} \leq tol_{p_2} \quad (3.41)$$

$$\mu_{z_2} - \frac{(w_4 - t_4)(w_5 - t_5)}{5(w_6 + t_6)} \geq tol_{m_2} \quad (3.42)$$

La contrainte de qualité sur le processus de fabrication se formule à l'équation (3.43).

$$\sigma_{z_k} \leq \text{Sup}_{\sigma_{z_k}} \quad k=1,2 \quad (3.43)$$

Les moyens matériels limitent le choix des machines à utiliser, en réduisant la gamme des valeurs nominales des PF (w_l) et le degré de précision possible sur ces PF (t_l), ces contraintes se traduisent par les inéquations (3.44) et (3.45).

$$w_l^- \leq w_l \leq w_l^+ \quad l=1,..,6 \quad (3.44)$$

$$t_{L_l} \leq t_l \leq t_{U_l} \quad l=1,..,6 \quad (3.45)$$

3.5 Optimisation séquentielle du CPB

Selon la démarche de résolution du problème d'optimisation séquentielle annoncée au paragraphe 3.2.3 (page 28), nous retrouvons deux étapes. Chaque étape est formulée par un programme non-linéaire. La figure 3.9 présente la démarche globale de résolution.

Le premier programme non-linéaire (PNL 1) est construit avec la fonction perte de la conception du CPB sujet aux contraintes (3.26) et (3.27), en tenant compte des fonctions de transfert (3.24) et (3.25).

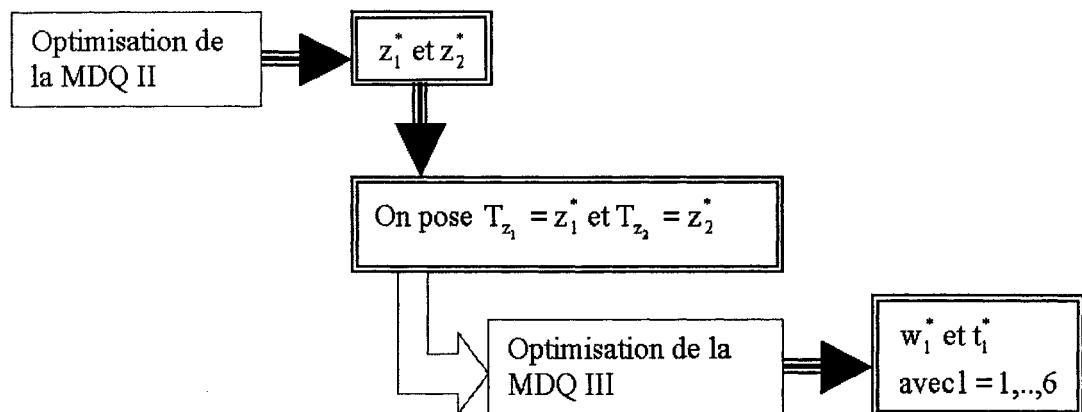


Figure 3.9- Démarche d'optimisation séquentielle de la MDQ II et la MDQ III

Pour construire ce programme il faut d'abord définir les paramètres de la MDQ II qui sont :

1. la valeur cible de l'ET y_1 ($C_1=20$);
2. la limite inférieure de spécification de l'ET ($LSL_1=15$);
3. la limite supérieure de spécification de l'ET ($USL_1=30$);
4. les constantes de pertes ($k_{11}=k_{21}=1$);
5. les limites inférieure et supérieure de la résistance ($z_1^- = 8$ et $z_1^+ = 12$);

6. les limites inférieure et supérieure de la capacité ($z_2^- = 0.4$ et $z_2^+ = 1.2$).

Les variables dépendantes du PNL 1 sont :

1. la valeur moyenne de l'ET y_1 (μ_{y_1});
2. l'écart-type de l'ET y_1 (σ_{y_1}).

Les variables indépendantes du PNL 1 sont les valeurs des CP (z_1 et z_2).

Le PNL 1 s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\text{PNL 1 :} \quad \text{Minimiser} \quad \text{EFPC} = (\mu_{y_1} - 20)^2 + \sigma_{y_1}^2 \quad (3.46)$$

Sujet à :

$$15 \leq \mu_{y_1} \leq 30 \quad (3.47)$$

$$8 \leq z_1 \leq 12 \quad (3.48)$$

$$0.4 \leq z_2 \leq 1.2 \quad (3.49)$$

Où :

$$\mu_{y_1} = \frac{10^3}{2\pi z_1 z_2} \quad (3.50)$$

$$\sigma_{y_1} = \left| \frac{-1}{2\pi z_1^2 z_2} + \frac{1}{2\pi z_1 z_2^2} \right| \quad (3.51)$$

La résolution de ce problème avec le logiciel AMPL et le solveur MINOS, donne les résultats représentés au tableau 3.2.

Tableau 3.2- Résultats de l'optimisation de la MDQ II

Variables Indépendantes		Variables Dépendantes		Fonction objectif
Résistance (z_1)	Capacité (z_2)	Moyenne μ_{y_1} de la fréquence de coupure	Écart-type σ_{y_1} de la fréquence de coupure	EFPC
8	0.995	20	0.0176	0.00031

La moyenne de la fréquence de coupure (ET) μ_{y_1} arrive à sa valeur cible ($C_1=20$) avec un écart-type ($\sigma_{y_1} = 0.0176$) assez bas. Donc, le produit sera conforme aux exigences de conception si on arrive à réaliser les valeurs de la résistance et de la capacité ($z_1^* = 8$ et $z_2^* = 0.995$) dans la phase de fabrication. Ces deux valeurs seront introduites à la phase de fabrication comme des paramètres, ainsi, $T_{z_1} = z_1^* = 8$ et $T_{z_2} = z_2^* = 0.995$.

Le deuxième programme non-linéaire (PNL 2) est construit avec l'espérance de la fonction perte de fabrication EFPF comme fonction objectif, sujet aux contraintes (3.40) à (3.45) en tenant compte des fonctions de transferts (3.28), (3.29), (3.33) et (3.34).

Pour construire ce programme, il faut définir d'abord les paramètres de la MDQ III qui sont :

1. les valeurs cibles de la résistance ($T_{z_1} = z_1^* = 8$) et de la capacité ($T_{z_2} = z_2^* = 0.995$) (valeurs trouvées à la MDQ II);
2. les limites inférieures et supérieures des valeurs nominales et des tolérances des procédés de fabrication PF, représentées au tableau 3.3;
3. les constantes de pertes qui sont égales à 1;

4. les valeurs supérieures admissibles pour les écart-types de la résistance et de la capacité ($\text{Sup}_{\sigma_{z_1}} = \text{Sup}_{\sigma_{z_2}} = 0.08$);
5. les tolérances minimales et maximales permises par la conception pour la résistance ($\text{tol}_{m_1} = 0.39$, $\text{tol}_{p_1} = 0.4$) et la capacité ($\text{tol}_{m_2} = 0.05$, $\text{tol}_{p_2} = 0.15$).

Les variables indépendantes du PNL 2 sont les valeurs nominales des PF (w_l avec $l=1,..,6$) et les tolérances de fabrications des PF (t_l avec $l=1,..,6$).

Les variables dépendantes sont les valeurs moyennes de la résistance et de la capacité (μ_{z_k} , $k = 1,2$) et les écart-types (σ_{z_k} , $k = 1,2$).

Tableau 3.3- Les limites inférieures et supérieures des valeurs nominales et des tolérances des PF

Indice <i>l</i>	Les valeurs nominales limites des PF		Les tolérances limites des PF	
	Valeurs inférieures w_l^-	Valeurs supérieures w_l^+	Limites inférieures t_{L_l}	Limites supérieures t_{U_l}
1	24.95	25.05	0.01	0.05
2	4.5	5.5	0.1	0.5
3	11.5	12.5	0.1	0.5
4	3.5	4.5	0.1	0.5
5	0.88	1.8	0.01	0.05
6	0.55	0.75	0.01	0.05

Le PNL 2 s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\text{PNL 2 : Minimiser } \text{EFPF} = \sum_{k=1}^2 [(\mu_{z_k} - T_{z_k})^2 + \sigma_{z_k}^2] + \sum_{l=1}^6 C_M(t_l) \quad (3.52)$$

Sujet à :

$$\frac{(w_1 + t_1)(w_2 + t_2)}{w_3 - t_3} - \mu_{z_1} \leq 0.4 \quad (3.53)$$

$$\mu_{z_1} - \frac{(w_1 - t_1)(w_2 - t_2)}{w_3 + t_3} \geq 0.39 \quad (3.54)$$

$$\frac{(w_4 + t_4)(w_5 + t_5)}{5(w_6 - t_6)} - \mu_{z_2} \leq 0.15 \quad (3.55)$$

$$\mu_{z_2} - \frac{(w_4 - t_4)(w_5 - t_5)}{5(w_6 + t_6)} \geq 0.05 \quad (3.56)$$

$$\sigma_{z_k} \leq \text{Sup}_{\sigma_{z_k}} \quad k=1,2 \quad (3.57)$$

$$w_l^- \leq w_l \leq w_l^+ \quad l=1,..,6 \quad (3.58)$$

$$t_{L_l} \leq t_l \leq t_{U_l} \quad l=1,..,6 \quad (3.59)$$

Où :

$$\mu_{z_1} = \frac{w_1 w_2}{w_3} \quad (3.60)$$

$$\mu_{z_2} = \frac{w_4 w_5}{5 w_6} \quad (3.61)$$

$$\sigma_{z_1} = \frac{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{p} \quad p=3 \quad (3.62)$$

$$\sigma_{z_2} = \frac{\sqrt{t_4^2 + t_5^2 + t_6^2}}{p} \quad p=3 \quad (3.63)$$

$$C_M(t_l) = \frac{0.01}{t_l} \quad l=1,..,6 \quad (3.64)$$

La solution de ce problème est donnée au tableau 3.4.

Tableau 3.4- Résultats de l'optimisation de la MDQ III

Ind	Variables Indépendantes		Variables Dépendantes		Fonction objectif
	Valeurs nominales des PF (w_i)	Tolérances des PF (t_i)	Moyenne μ_{z_k} des CP	Écart-type σ_{z_k} des CP	
1	24.95	0.05	8.982	0.068	1.8044
2	4.5	0.14	0.884	0.050	
3	12.5	0.14			
4	3.5	0.13			
5	0.95	0.05			
6	0.75	0.05			

Nous n'avons pas pu atteindre les deux valeurs cibles de la résistance ($T_{z_1} = 8$) et de la capacité ($T_{z_2} = 0.995$). Pour la résistance, nous avons obtenu une moyenne de $\mu_{z_1} = 8.982$, tandis que pour la capacité nous n'avons pas pu faire mieux que $\mu_{z_2} = 0.884$.

Dans le processus d'optimisation séquentielle, chaque phase a été optimisée seule. Ce qui a généré une espérance de fonction perte totale ($EFPT = EFPC + EFPT = 1.8075$). L'inconvénient de cette approche est la difficulté d'obtenir les valeurs de la résistance et de la capacité exigées par la phase de conception. Nous avons donc conçu un produit que nous ne pouvons fabriquer avec les moyens matériels dont nous disposons.

3.6 Optimisation simultanée avec le modèle intégré du CPB

L'optimisation simultanée de la MDQ II et la MDQ III, représentée à la figure 3.10, est une résolution d'un programme non-linéaire PNL 3. Cette approche considère les deux phases comme un seul système, en formulant l'espérance de la fonction perte totale (EFPT), somme de la EFPC et la EFPF. En effet, les deux fonctions sont homogènes, car elles représentent les mêmes grandeurs physiques, l'espérance de la fonction perte.

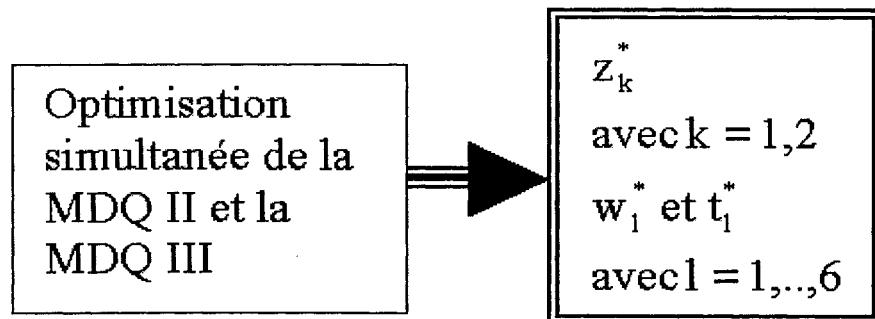


Figure 3.10- Démarche d'optimisation simultanée de la MDQ II et la MDQ III

Le programme PNL 3 a comme fonction objectif la EFPT. Il est considéré comme un traitement simultané de la MDQ II et la MDQ III parce que dans l'expression de la EFPT, au lieu de fixer les valeurs cibles de la résistance ($T_{z_1} = 8$) et de la capacité ($T_{z_2} = 0.995$), nous les laissons variables.

Les paramètres, les fonctions de transferts et les contraintes du PNL 3 sont les mêmes que ceux des PNL 1 et PNL 2. Le PNL 3 s'écrit alors sous la forme suivante :

PNL 3 :

$$\text{Minimiser} \quad \text{EFPT} = (\mu_{y_1} - 20)^2 + \sigma_{y_1}^2 + \sum_{k=1}^2 [(\mu_{z_1} - z_k) + k_{2k} \sigma_{z_k}^2] + \sum_{l=1}^6 C_M(t_l) \quad (3.65)$$

Sujet à :

$$15 \leq \mu_{y_1} \leq 30 \quad (3.66)$$

$$\frac{(w_1 + t_1)(w_2 + t_2)}{w_3 - t_3} - \mu_{z_1} \leq 0.4 \quad (3.67)$$

$$\mu_{z_1} - \frac{(w_1 - t_1)(w_2 - t_2)}{w_3 + t_3} \geq 0.39 \quad (3.68)$$

$$\frac{(w_4 + t_4)(w_5 + t_5)}{5(w_6 - t_6)} - \mu_{z_2} \leq 0.15 \quad (3.69)$$

$$\mu_{z_2} - \frac{(w_4 - t_4)(w_5 - t_5)}{5(w_6 + t_6)} \geq 0.05 \quad (3.70)$$

$$\sigma_{z_k} \leq 0.08 \quad k=1,2 \quad (3.71)$$

$$8 \leq z_1 \leq 12 \quad (3.72)$$

$$0.4 \leq z_2 \leq 1.2 \quad (3.73)$$

$$w_l^- \leq w_l \leq w_l^+ \quad l=1,..,6 \quad (3.74)$$

$$t_{L_l} \leq t_l \leq t_{U_l} \quad l=1,..,6 \quad (3.75)$$

Où :

$$\mu_{y_1} = \frac{10^3}{2\pi z_1 z_2} \quad (3.76)$$

$$\sigma_{y_1} = \left| \frac{-1}{2\pi z_1^2 z_2} + \frac{1}{2\pi z_1 z_2^2} \right| \quad (3.77)$$

$$\mu_{z_1} = \frac{w_1 w_2}{w_3} \quad (3.78)$$

$$\mu_{z_2} = \frac{w_4 w_5}{5 w_6} \quad (3.79)$$

$$\sigma_{z_1} = \frac{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{3} \quad (3.80)$$

$$\sigma_{z_2} = \frac{\sqrt{t_4^2 + t_5^2 + t_6^2}}{3} \quad (3.81)$$

$$C_M(t_l) = \frac{0.01}{t_l} \quad l=1,..,6 \quad (3.82)$$

La solution de ce problème est donnée au tableau 3.5.

Tableau 3.5- Résultats de l'optimisation simultanée à modèle intégré de la MDQ II de la MDQ III

Ind.	Variables Indépendantes			Variables Dépendantes				Fonction objectif		
	w_l^*	t_l^*	z_k^*	μ_{z_k}	σ_{z_k}	μ_{y_l}	σ_{y_l}	EFPC	EFPF	EFPT
1	24.95	0.05	9.476	9.474	0.067	20.001	0.022	0.0008	0.8171	0.8179
2	4.75	0.13	0.840	0.821	0.057					
3	12.5	0.15								
4	3.5	0.16								
5	0.88	0.05								
6	0.75	0.05								

Nous avons obtenu une diminution de près de 55 % de l'espérance de perte totale du produit. Cette diminution est calculée comme suit :

$$\frac{EFPT_1 - EFPT_2}{EFPT_1} = \frac{1.8075 - 0.8179}{1.8075} = 0.55$$

Ce résultat est obtenu grâce à :

$$1. \text{ Une augmentation de, } \left| \frac{EFPC_1 - EFPC_2}{EFPC_1} \right| = \left| \frac{0.00031 - 0.0008}{0.00031} \right| = 170\%, 170\% \text{ de}$$

perte de conception, en s'écartant un peu de la valeur cible $C_l=20$ et en acceptant un écart-type plus faible que celui trouvé lors de l'optimisation séquentielle ($\sigma_{y_l} = 0.022 > 0.0176$).

2. Une diminution de, $\frac{EFPF_1 - EFPF_2}{EFPF_1} = \frac{1.8044 - 0.8171}{1.8044} = 0.54$, 54 % de perte fabrication, en relaxant les tolérances de fabrications t_3 et t_4 et en ajustant les valeurs moyennes des opérations de fabrications.

Nous soulignons au passage, la diminution de l'écart entre les z_k^* et μ_{z_k} ($z_1^* = 9.476, \mu_{z_1} = 9.474$ et $z_2^* = 0.840, \mu_{z_2} = 0.821$).

Un compromis s'est dessiné entre la conception et la fabrication. La première a diminué ses exigences contraignantes en acceptant de s'écartier un peu plus de la valeur cible de l'exigence technique C_1 . La deuxième a pu effectuer le travail avec quelques réglages en plus, w_1 passe de 4.5 à 4.75 et w_5 passe de 0.95 à 0.88 ; et une tolérance relativement plus contraignante, t_2 passe de 0.14 à 0.13, mais surtout avec une relaxation d'autres tolérances, t_3 passe de 0.14 à 0.15 et t_4 passe de 0.13 à 0.16.

Le modèle intégré offre une sérieuse option pour arriver au compromis souhaité. Cependant, c'est un modèle conditionné par l'homogénéité des deux fonctions objectifs. Dans ce cas particulier, nous avons considéré deux fonctions objectifs homogènes avec une pondération égale à 1 pour chacune d'entre elles. Dans le cas général, nous avons besoin de poursuivre plusieurs objectifs de différentes natures en même temps. Ceci nous a amené à considérer les modèles d'optimisation multicritères développés dans le quatrième chapitre.

Chapitre 4 : Modèles d'optimisation multicritère

Nous présentons dans ce chapitre la formulation des deux modèles d'optimisation multicritère des phases de conception et de fabrication et leurs résultats dans le cas du circuit passe-bas (CPB).

Le chapitre est divisé en six parties. La première partie énonce le modèle de « Goal Programming » (GP) à deux fonctions. La deuxième partie propose l'algorithme de résolution du GP. La troisième partie présente l'approche du GP interactif (GPI). Les résultats de l'optimisation de la conception et la fabrication du CPB à l'aide du GPI à deux fonctions sont présentés à la quatrième partie. La cinquième partie énonce le GPI à cinq fonctions. Et finalement, la sixième partie présente les résultats de l'optimisation du CPB à l'aide du GPI à cinq fonctions.

4.1 Le Modèle de « Goal Programming » à deux fonctions

L'optimisation simultanée de la conception et la fabrication peut être vue comme un problème à deux objectifs. Le premier objectif est de minimiser l'espérance de la fonction perte de conception (EFPC). Le deuxième objectif est de minimiser l'espérance de la fonction perte de fabrication (EFPF). C'est ce que le modèle intégré a essayé de réaliser, mais en donnant la même importance aux deux fonctions. En effet, il se peut que pour un produit donné, la minimisation de la EFPC soit plus importante que la minimisation de la EFPF.

Le modèle du « Goal Programming » (GP) répond à cette exigence. Il permet de minimiser en premier lieu la EFPC et ensuite de minimiser la EFPF tout en gardant la fonction EFPC proche de sa valeur optimale.

Le modèle du GP à deux fonctions se formule comme suit :

$$\text{Minimiser : } \text{EFPC} = \sum_{j=1}^J [k_{1j}(\mu_{y_j} - C_j)^2 + k_{2j}\sigma_{y_j}^2] \leq b_1 \quad (4.1)$$

$$\text{Minimiser : } \text{EFPF} = \sum_{k=1}^K [k_{1k}(\mu_{z_k} - z_k)^2 + k_{2k}\sigma_{z_k}^2] + \sum_{l=1}^L C_M(t_l) \leq b_2 \quad (4.2)$$

Sujet à :

$$\mu_{y_j} = f(z_k) \quad \text{pour } j = 1, \dots, J \quad (4.3)$$

$$\sigma_{y_j} = g(z_k) \quad \text{pour } j = 1, \dots, J \quad (4.4)$$

$$\mu_{z_k} = h(w_l) \quad \text{pour } k = 1, \dots, K \quad (4.5)$$

$$\sigma_{z_k} = e(t_l) \quad \text{pour } k = 1, \dots, K \quad (4.6)$$

$$LSL_j \leq \mu_{y_j} \leq USL_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, J \quad (4.7)$$

$$\sigma_{z_k} \leq \text{Sup}_{\sigma_{z_k}} \quad \text{pour } k = 1, \dots, K \quad (4.8)$$

$$z_k^- \leq z_k \leq z_k^+ \quad \text{pour } k = 1, \dots, K \quad (4.9)$$

$$w_l^- \leq w_l \leq w_l^+ \quad \text{pour } l = 1, \dots, L \quad (4.10)$$

$$t_{L_l} \leq t_l \leq t_{U_l} \quad \text{pour } l = 1, \dots, L \quad (4.11)$$

Où b_1 et b_2 sont les deux objectifs (Goals) des deux fonctions à minimiser.

4.2 Algorithme de résolution du problème de « Goal Programming »

Drauer et Krueger (1977) ont développé un algorithme pour résoudre le programme non-linéaire général GP avec k fonctions objectifs et m contraintes, qui se résume en k étapes. Il est noté ALG 1.

ALG 1 :

- La première étape consiste à résoudre le problème non-linéaire dans le but d'atteindre l'objectif b_1 pour la fonction f_1 . Le programme s'écrit alors comme suit :

$$\text{Étape 1 :} \quad \text{Minimiser} \quad d_1 \quad (4.12)$$

Sujet à :

$$f_1(X) - d_1 \leq b_1 \quad (4.13)$$

$$g_r(X) \leq 0 \text{ pour } r = 1, \dots, m \quad (4.14)$$

$$d_1 \geq 0 \quad (4.15)$$

où d_1 est la variable de déviation de la fonction f_1 par rapport à l'objectif b_1 . La solution de ce problème est d_1^* qui représente le degré d'achèvement maximal dans l'atteinte de l'objectif b_1 .

- La deuxième étape consiste à résoudre le problème non-linéaire dans le but d'atteindre l'objectif b_2 pour la fonction f_2 . Le programme s'écrit alors comme suit :

$$\text{Étape 2 :} \quad \text{Minimiser} \quad d_2 \quad (4.16)$$

Sujet à :

$$f_2(X) - d_2 \leq b_2 \quad (4.17)$$

$$f_1(X) - d_1^* \leq b_1 \quad (4.18)$$

$$g_r(X) \leq 0 \text{ pour } r = 1, \dots, m \quad (4.19)$$

$$d_2 \geq 0 \quad (4.20)$$

où d_2 est la variable de déviation de la fonction f_2 par rapport à l'objectif b_2 . La solution de ce problème est d_2^* qui représente le degré d'achèvement maximal dans l'atteinte de l'objectif b_2 .

- Et ainsi de suite jusqu'à la $k^{\text{ème}}$ étape qui consiste en la résolution d'un problème non-linéaire dans le but d'atteindre l'objectif b_k pour la fonction f_k . Le programme s'écrit alors comme suit :

$$\text{Étape } k : \quad \text{Minimiser} \quad d_k \quad (4.21)$$

Sujet à :

$$f_k(X) - d_k \leq b_k \quad (4.22)$$

$$f_i(X) - d_i^* \leq b_i \text{ pour } 1 \leq i \leq k \quad (4.23)$$

$$g_r(X) \leq 0 \text{ pour } r = 1, \dots, m \quad (4.24)$$

$$d_k \geq 0 \quad (4.25)$$

où d_k est la variable de déviation de la fonction f_k par rapport à l'objectif b_k . La solution de ce problème est d_k^* qui représente le degré d'achèvement maximal dans l'atteinte de l'objectif b_k .

Afin d'intégrer les variables de déviation avec les variables du problème, on pose $d_i = x_{n+i}$, pour $i=1,..,k$. Ainsi, le dernier problème ci-dessus, noté $P(G_j)$, peut être écrit sous la nouvelle forme suivante :

$$P(G_j) : \quad \text{Minimiser} \quad x_{n+k} \quad (4.26)$$

Sujet à :

$$g_r(X) \leq b_r \quad \text{pour } r = 1,..,k+m \quad (4.27)$$

$$x_\alpha = x_\alpha^* \quad \text{pour } n+1 \leq \alpha \leq n+k-1 \quad (4.28)$$

$$x_{n+k} \geq 0 \quad (4.29)$$

$$X \in R^{n+k} \quad (4.30)$$

La solution de ce problème est :

$$\bar{X} = (x_1^*, .., x_{n+k}^*) \quad (4.31)$$

4.3 L'approche du « Goal Programming » interactif (Abdel Haleem, 1991)

L'approche interactive de la programmation mathématique à objectifs multiples est une technique d'optimisation progressive articulée autour des préférences du preneur de décision « Decision Maker »(DM). Elle est réputée comme étant une approche interactive entre le DM et le programmeur, qui vise à trouver la « solution compromis » qui satisfait le plus le DM.

Pour pouvoir formuler l'algorithme de cette approche, il faut d'abord définir un certain nombre d'expressions et de notions mathématiques.

4.3.1 Formulation du problème de « Goal Programming » interactif (GPI)

Le problème non-linéaire du « Goal Programming » interactif (GPI) s'écrit de façon générale comme suit :

$$\text{GPI :} \quad \text{Minimiser} \quad f_1(X) \leq b_1 \quad (4.32)$$

•
•
•
•

$$f_k(X) \leq b_k \quad (4.33)$$

Sujet à :

$$X \in M \quad (4.34)$$

où b_i , $i=1,..,k$ représentent les valeurs objectives pour les fonctions $f_i(X)$. Notons que, les inéquations sont ordonnées en fonction de leurs priorités ou importances : si $i \leq j$ alors l'inéquation $f_i(X) \leq b_i$ est plus importante que l'inéquation $f_j(X) \leq b_j$.

Pour résoudre le GPI, il suffit de générer des solutions efficientes jusqu'à satisfaction du DM. Une solution X^* est dite efficiente ou non-dominante du problème GPI, s'il n'existe aucune autre solution \bar{X} tel que $f_j(\bar{X}) \leq f_j(X^*)$ pour tout $j=1,..,k$ avec au moins une inégalité stricte.

4.3.2 Définitions

Les variables indépendantes sont les inconnues du modèle mathématique, notées $X = [x_1, \dots, x_n]^T$. Les fonctions objectifs sont les fonctions à minimiser, notées $F = [f_1, \dots, f_k]^T$. Les paramètres sont les constantes du modèle. Les contraintes sont l'espace de faisabilité des variables indépendantes, notées $g_r(X)$ avec $r=1, \dots, m+k$.

L'ensemble des contraintes est noté M , tel que :

$$M = \{ X \in R^n / g_r(X) \leq b_r, r = 1, \dots, m+k \} \quad (4.35)$$

Soit le problème $P(G)$, défini comme suit :

$$P(G) : \quad \text{Minimiser} \quad f(X)$$

Sujet à :

$$X \in M(b)$$

$$\text{Où } M(b) = \{ X \in R^{n+k} / g_r(X) \leq b_r, r = 1, \dots, m+k \}$$

Pour ce problème, les ensembles suivants sont définis :

- L'ensemble des paramètres faisables A , tel que :

$$A = \{ b \in R^{m+k} / M(b) \neq \emptyset \} \quad (4.36)$$

- L'ensemble des solutions optimales du problème $P(G)$, tel que :

$$U_{\text{opt}}(b) = \{ X^* \in R^{m+k} / f(X^*) = \min_{X \in M(b)} f(X) \} \quad (4.37)$$

- L'ensemble de faisabilité du problème $P(G)$, noté D , tel que :

$$D = \{ b \in R^{n+k} / U_{\text{opt}}(b) \neq \emptyset \} \quad (4.38)$$

- L'ensemble de stabilité du 1^{er} type du problème P(G), noté $G(\bar{X})$, tel que :

$$G(\bar{X}) = \{\bar{b} \in D / f(\bar{X}) = \min_{x \in M(\bar{b})} f(x)\} \quad (4.39)$$

4.3.3 Procédure de détermination de l'ensemble de stabilité du 1^{er} type

Pour la détermination de l'ensemble de stabilité du 1^{er} type du problème P(G), on suppose que le problème est stable pour $\bar{b} \in D$ avec la solution optimale \bar{X} , alors les conditions de Kuhn-Tucker (CKT) s'écrivent sous la forme suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial X_\alpha} + \sum_{r=1}^{m+k} \bar{u}_r \cdot \frac{\partial g_r(\bar{X})}{\partial X_\alpha} = 0 \quad \text{avec } \alpha = 1, \dots, n+k \quad (4.40)$$

$$g_r(\bar{X}) \leq \bar{b}_r \quad \text{avec } r = 1, \dots, m+k \quad (4.41)$$

$$\bar{u}_r \cdot (g_r(\bar{X}) - \bar{b}_r) = 0 \quad \text{avec } r = 1, \dots, m+k \quad (4.42)$$

$$\bar{u}_r \geq 0 \quad \text{avec } r = 1, \dots, m+k \quad (4.43)$$

Un algorithme pour la détermination de $G(\bar{X})$ du problème P(G) est présenté par Osman (1977). Il se résume comme suit :

1. Choisir $\bar{b} \in D$ et résoudre P(G) pour obtenir \bar{X} et formuler les conditions de Kuhn-Tucker (CKT) selon les équations (4.40) à (4.43).
2. Trouver les multiplicateurs de KT \bar{u}_r , en résolvant le système d'équations linéaires issu des CKT.

3. En fonctions des valeurs de \bar{u}_r , l'ensemble de stabilité de 1^{er} type $G(\bar{X})$ peut être déterminé selon les cas suivants :

- a. Si $\bar{u}_r = 0$ pour $r = 1, \dots, k+m$ alors :

$$G(\bar{X}) = \{b / b_r \geq g_r(\bar{X})\}$$

- b. Si $\bar{u}_r > 0$ pour $r = 1, \dots, k+m$ alors :

$$G(\bar{X}) = \{b / b_r = g_r(\bar{X})\}$$

- c. Si $\bar{u}_r = 0$ pour $r \in \{1, \dots, k+m\}$ et $\bar{u}_{r'} > 0$ pour $r' \neq r$ alors :

$$G(\bar{X}) = \bigcup G_j(\bar{X})$$

où : $G_j(\bar{X}) = \{b / b_r \geq g_r(\bar{X}) \text{ pour } r \in \{1, \dots, k+m\} \text{ et } b_{r'} = g_{r'}(\bar{X}) \text{ pour } r' \neq r\}$.

4.3.4 Algorithme de résolution du problème de « Goal Programming » interactif

L'algorithme de résolution du problème de « Goal Programming » interactif (GPI) se formule en neuf étapes, les voici :

Étape 1 : Pour $i=1$ à k résoudre le problème (P_i)

$$(P_i) : \text{Minimiser } f_i(X) \quad (4.44)$$

Sujet à

$$X \in M \quad (4.45)$$

Les solutions de ces problèmes seront notées X^i .

Étape 2 : Construire la table des solutions efficientes, selon le tableau 4.1. Choisir ensuite, pour chaque colonne les valeurs minimale et maximale qui correspondent respectivement à $b_{r\min}$ et $b_{r\max}$ avec $r=1$ à k .

Tableau 4.1- la table des solutions efficientes

Solution optimale X^i	$f_1(X^i)$	$f_2(X^i)$	----	$f_k(X^i)$
X^1	$f_1(X^1)$	$f_2(X^1)$	----	$f_k(X^1)$
----	----	----	----	----
X^k	$f_1(X^k)$	$f_2(X^k)$	----	$f_k(X^k)$

On détermine ensuite l'ensemble réduit de faisabilité, notés D' et définit par :

$$D' = \{ b \in D / b_{r_{\min}} \leq b_r \leq b_{r_{\max}}, r = 1, \dots, k \} \quad (4.46)$$

Étape 3 : Demander aux DM de choisir le vecteur objectif b_r dans l'ensemble D' ,

soit :

$$b_j = (b_r^j), r = 1, \dots, m + k \quad (4.47)$$

Où j est le nombre d'itérations.

Étape 4 : Résoudre le problème de GP, avec b_j comme vecteur objectif, en utilisant l'algorithme ALG 1 déjà développé ci-dessus. On obtient, alors, \bar{X}_j comme solution optimale du problème $P(G_j)$.

Étape 5 : Présenter la solution au DM, s'il est satisfait de la solution on arrête, sinon, on passe à l'étape 6.

Étape 6 : Formuler les conditions de Kuhn-Tucker (CKT) pour le problème $P(G_j)$, à savoir, les équations (4.40) et (4.43). Et résoudre le système d'équations linéaires pour trouver les multiplicateurs de Kuhn-Tucker.

Étape 7 : Déterminer l'ensemble $G(\bar{X}_j)$, à l'aide de la procédure du paragraphe 4.3.3.

Étape 8 : Construire l'ensemble $D \setminus G(\bar{X}_j)$.

Étape 9 : Demander au DM de choisir son deuxième vecteur objectif $b_2 = (b_r^2), r = 1, \dots, m + k$ dans l'ensemble $D \setminus G(\bar{X}_j)$ et reprendre la procédure à l'étape 4.

4.4 Optimisation simultanée avec le modèle GPI à deux fonctions du CPB

L'optimisation simultanée avec le modèle de « Goal Programming » interactif à deux fonctions GPI2F, représentée à la figure 4.1, est une approche interactive avec le DM. Cette approche optimise, tout d'abord, la MDQ II en déterminant la valeur minimale possible pour la EFPC, ensuite, elle optimise la MDQ III en minimisant la EFPF tout en gardant le plus possible la EFPC proche à sa valeur minimale. L'interactivité avec le DM fait de cette méthode une approche participative qui intègre l'expérience ou la vision du DM quant au choix du vecteur objectif, noté b . Cette approche permet de gérer des solutions alternatives efficientes.

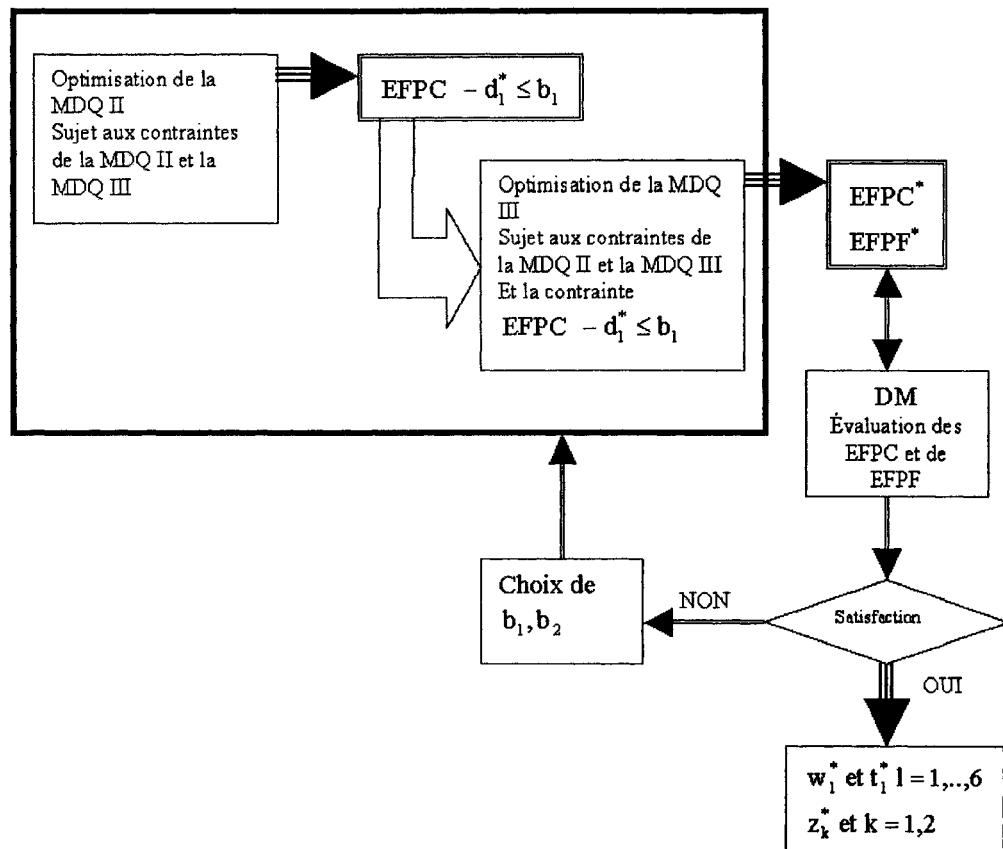


Figure 4.1- Processus d'optimisation simultanée à modèle GPI2F de la MDQ II et la MDQ III

Le GPI2F s'écrit alors sous la forme suivante :

GPI2F :

$$\text{Minimiser} \quad \text{EFPC} = (\mu_{y_1} - 20)^2 + \sigma_{y_1}^2 \quad (4.48)$$

$$\text{Minimiser} \quad \text{EFPF} = \sum_{k=1}^2 [(\mu_{z_1} - z_k)^2 + \sigma_{z_k}^2] + \sum_{l=1}^6 C_M(t_l) \quad (4.49)$$

Sujet à :

$$15 \leq \mu_{y_1} \leq 30 \quad (4.50)$$

$$\frac{(w_1 + t_1)(w_2 + t_2)}{w_3 - t_3} - \mu_{z_1} \leq 0.4 \quad (4.51)$$

$$\mu_{z_1} - \frac{(w_1 - t_1)(w_2 - t_2)}{w_3 + t_3} \geq 0.39 \quad (4.52)$$

$$\frac{(w_4 + t_4)(w_5 + t_5)}{5(w_6 - t_6)} - \mu_{z_2} \leq 0.15 \quad (4.53)$$

$$\mu_{z_2} - \frac{(w_4 - t_4)(w_5 - t_5)}{5(w_6 + t_6)} \geq 0.05 \quad (4.54)$$

$$\sigma_{z_k} \leq 0.08 \quad k=1,2 \quad (4.55)$$

$$8 \leq z_1 \leq 12 \quad (4.56)$$

$$0.4 \leq z_2 \leq 1.2 \quad (4.57)$$

$$w_l^- \leq w_l \leq w_l^+ \quad l=1,..,6 \quad (4.58)$$

$$t_{L_l} \leq t_l \leq t_{U_l} \quad l=1,..,6 \quad (4.59)$$

Où :

$$\mu_{y_1} = \frac{10^3}{2\pi z_1 z_2} \quad (4.60)$$

$$\sigma_{y_1} = \left| \frac{-1}{2\pi z_1^2 z_2} + \frac{1}{2\pi z_1 z_2^2} \right| \quad (4.61)$$

$$\mu_{z_1} = \frac{w_1 w_2}{w_3} \quad (4.62)$$

$$\mu_{z_2} = \frac{w_4 w_5}{5 w_6} \quad (4.63)$$

$$\sigma_{z_1} = \frac{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{3} \quad (4.64)$$

$$\sigma_{z_2} = \frac{\sqrt{t_4^2 + t_5^2 + t_6^2}}{3} \quad (4.65)$$

$$C_M(t_l) = \frac{0.01}{t_l} \quad l=1,..,6 \quad (4.66)$$

La procédure de résolution du GPI2F, décrite au paragraphe 4.3.4 à la page 58, se compose de neuf étapes :

- La première étape consiste à déterminer l'espace de solution du problème du GPI2F. Pour trouver les points efficients du GPI2F, on résout les problèmes non-linéaires PNL 4 et PNL 5.

Étape 1 : PNL 4 : Minimiser EFPC
 Sujet aux :
 Contraintes (4.50) à (4.59)

PNL 5 : Minimiser EFPF
 Sujet aux :
 Contraintes (4.50) à (4.59)

Les solutions de PNL 4 et PNL 5 sont représentées au tableau 4.2.

Tableau 4.2- Les solutions des PNL 4 et PNL 5

Indice	Solution du PNL 4			Solution du PNL 5		
	w_1^*	t_1^*	z_k^*	w_1^*	t_1^*	z_k^*
1	24.95	0.01	8	24.95	0.05	8.982
2	4.5	0.15	0.995	4.5	0.14	0.821
3	12.5	0.11		12.5	0.14	
4	3.95	0.10		3.5	0.16	
5	1.34	0.01		0.88	0.05	
6	0.75	0.01		0.75	0.05	

Nous définissons $X^1 = (z_1^*, z_2^*, w_1^*, \dots, w_6^*, t_1^*, \dots, t_6^*)$ solution du PNL 4.

Nous définissons $X^2 = (z_1^*, z_2^*, w_1^*, \dots, w_6^*, t_1^*, \dots, t_6^*)$ solution du PNL 5.

La deuxième étape consiste à construire le tableau 4.3 des choix des deux fonctions. Pour se faire, nous calculons les valeurs des fonctions EFPC et EFPF aux points X^1 et X^2 .

Étape 2 :

Tableau 4.3- La table des choix des fonctions EFPC et EFPF

	EFPC(X^i)	EFPF(X^i)
X^1	0.00031	3.836
X^2	2.512	0.815

En se basant sur le tableau 4.3 et le paragraphe 4.3.4, nous déterminons les valeurs minimales et maximales des composantes du vecteur objectif, qui sont :

$$b_{1\min} = 0.00031, b_{1\max} = 2.512$$

$$b_{2\min} = 0.815, b_{2\max} = 3.836$$

Donc l'ensemble réduit de faisabilité D' s'écrit selon la formulation (4.67).

$$D' = \{b \in D / b_{1\min} \leq b_1 \leq b_{1\max} \text{ et } b_{2\min} \leq b_2 \leq b_{2\max}\} \quad (4.67)$$

Où D est l'ensemble de faisabilité dont la définition a déjà été présentée au paragraphe 4.3.2 (voir les formules (4.36) à (4.38)).

La troisième étape consiste à demander au DM de choisir dans l'ensemble D' le vecteur objectif b .

Étape 3 : Soit $b=(b_1, b_2)$ avec $b_1 = 0.0004$ et $b_2 = 0.816$

La quatrième étape consiste à résoudre le problème $P(G)$ selon l'algorithme ALG 1, présenté au paragraphe 4.2.

Étape 4 : $P(G)$: Minimiser $EFPC \leq b_1$ (4.68)

Minimiser $EFPF \leq b_2$ (4.69)

Sujet à :

Les contraintes (4.50) à (4.59).

Où :

Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

Nous minimisons d'abord la déviation d_1 de la EFPC par rapport à sa valeur cible b_1 , en résolvant le programme non-linéaire suivant :

Minimiser d_1 (4.70)

Sujet à

$EFPC - d_1 \leq b_1$ (4.71)

Les contraintes (4.50) à (4.59)

Où :

Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

Nous trouvons ainsi la valeur de $d_1^* = 0$. Nous résolvons ensuite le problème $P(G_1)$ qui minimise la déviation d_2 de la fonction EFPF par rapport à son objectif b_2 tout en gardant la EFPC la plus proche possible de b_1 .

$P(G_1)$ Minimiser d_2 (4.72)

Sujet à

$EFPC - d_1^* \leq b_1$ (4.73)

$EFPF - d_2 \leq b_2$ (4.74)

Les contraintes (4.50) à (4.59)

Où : Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

La solution de ce problème donne une valeur de $d_2^* = 0.02$ ainsi que les autres valeurs, les composantes du premier vecteur solution ($\bar{X}_1 = (z_1^*, z_2^*, w_1^*, \dots, w_6^*, t_1^*, \dots, t_6^*)$), représentées au tableau 4.4.

Tableau 4.4- Résultats de la première itération de l'optimisation simultanée à GPI2F

Indice	Variables Indépendantes			Fonction objectif	
	w_1^*	t_1^*	z_k^*	EFPC	EFPF
1	24.95	0.05	8.860	0.0004	0.836
2	4.5	0.14	0.899		
3	12.5	0.14			
4	3.5	0.16			
5	0.88	0.05			
6	0.75	0.05			

La cinquième étape consiste à présenter les résultats au DM. S'il est satisfait des valeurs des fonctions EFPC et EFPF nous arrêtons. Sinon, nous passons à l'étape 6.

La sixième étape consiste à formuler les conditions de Kuhn-Tucker (CKT) du problème $P(G_1)$, et de trouver les multiplicateurs de KT selon la procédure du paragraphe 4.3.3.(page 57)

Étape 6 : Les multiplicateurs de KT qui nous intéressent sont $u_1 > 0$ et $u_2 > 0$ (voir détails des calculs à l'annexe III).

La septième étape consiste à déterminer l'ensemble de stabilité de 1^{er} type $G(\bar{X}_1)$, selon l'algorithme présenté au paragraphe 4.2.2. Nous trouvons alors :

$$\text{Étape 7 : } G(\bar{X}_1) = \{b = (b_1, b_2) / b_1 = 0.0004, b_2 = 0.816\} \quad (4.75)$$

La huitième étape consiste à construire l'ensemble $D^{\setminus}G(\bar{X}_1)$, nous trouvons alors les deux cas suivants :

$$\text{Étape 8 : } 1. D^{\setminus}G(\bar{X}_1) = \{b = (b_1, b_2) / b_1 \neq 0.0004, b_{2\min} \leq b_2 \leq b_{2\max}\} \quad (4.76)$$

$$2. D^{\setminus}G(\bar{X}_1) = \{b = (b_1, b_2) / b_{1\min} \leq b_1 \leq b_{1\max}, b_2 \neq 0.816\} \quad (4.77)$$

La neuvième étape consiste à demander au DM de refaire son choix du vecteur objectif en respectant l'une des deux conditions (4.76) ou (4.77). Soit $b^2 = (b_1^2, b_2^2)$ tel que :

$$\text{Étape 9 : } b_1^2 = 0.0004, b_2^2 = 0.8179.$$

Nous reprenons toute la procédure de résolution, depuis la quatrième étape, avec les deux nouveaux objectifs pour les fonctions EFPC et EFPF, les différentes solutions efficientes sont regroupées au tableau I.1 à l'annexe I.

Notons qu'il n'y a aucune solution plus « optimale » qu'une autre, car toutes les solutions respectent le compromis, qui fait que si la EFPC augmente la EFPF diminue et vice-versa. L'interactivité avec le DM permet la prise de décision la plus adaptée aux spécificités du produit.

4.5 Le Modèle de « Goal Programming » interactif à cinq fonctions

L'optimisation de la phase de conception est réalisée en minimisant l'espérance de la fonction perte de conception. C'est-à-dire en minimisant la variabilité des valeurs moyennes des ET ($\mu_{y_j}, j=1,..,J$) autour de leurs valeurs cibles ($C_j, j=1,..,J$), et en

minimisant les variances des ET ($\sigma_{y_j}^2$, $j = 1, \dots, J$). Donc, l'optimisation de la phase de conception peut être considérée comme un problème à deux objectifs.

De même, l'optimisation de la phase de fabrication est réalisée en minimisant l'espérance de la fonction perte de fabrication. C'est-à-dire en minimisant la variabilité des valeurs moyennes des CP (μ_{z_k} , $k = 1, \dots, K$) autour de leurs valeurs cibles (T_{z_k} , $k = 1, \dots, K$), en minimisant les variances des CP ($\sigma_{z_k}^2$, $k = 1, \dots, K$), et en minimisant le coût des opérations de fabrication ($C_M(t_i)$). Donc, l'optimisation de la phase de fabrication peut être considérée comme un problème à trois objectifs.

D'où, le modèle de « Goal Programming » interactif à cinq fonctions, qui se formule comme suit :

$$\text{GPI5F : Minimiser : } f_1 = \sum_{j=1}^J (\mu_{y_j} - C_j)^2 \leq b_1 \quad (4.78)$$

$$\text{Minimiser : } f_2 = \sum_{j=1}^J \sigma_{y_j}^2 \leq b_2 \quad (4.79)$$

$$\text{Minimiser : } f_3 = \sum_{k=1}^K (\mu_{z_k} - z_k)^2 \leq b_3 \quad (4.80)$$

$$\text{Minimiser : } f_4 = \sum_{k=1}^K \sigma_{z_k}^2 \leq b_4 \quad (4.81)$$

$$\text{Minimiser : } f_5 = \sum_{i=1}^L C_M(t_i) \leq b_5 \quad (4.82)$$

Sujet à :

$$\mu_{y_j} = f(z_k) \quad \text{pour } j = 1, \dots, J \quad (4.83)$$

$$\sigma_{y_j} = g(z_k) \quad \text{pour } j = 1, \dots, J \quad (4.84)$$

$$\mu_{z_k} = h(w_i) \quad \text{pour } k = 1, \dots, K \quad (4.85)$$

$$\sigma_{z_k} = e(t_1) \quad \text{pour } k = 1, \dots, K \quad (4.86)$$

$$LSL_j \leq \mu_{y_j} \leq USL_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, J \quad (4.87)$$

$$\sigma_{z_k} \leq \text{Sup}_{\sigma_{z_k}} \quad \text{pour } k = 1, \dots, K \quad (4.88)$$

$$z_k^- \leq z_k \leq z_k^+ \quad \text{pour } k = 1, \dots, K \quad (4.89)$$

$$w_l^- \leq w_l \leq w_l^+ \quad \text{pour } l = 1, \dots, L \quad (4.90)$$

$$t_{L_l}^- \leq t_l \leq t_{U_l}^+ \quad \text{pour } l = 1, \dots, L \quad (4.91)$$

Où b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 sont les cinq objectifs (Goals) des cinq fonctions à minimiser.

4.6 Optimisation simultanée avec le modèle GPI à cinq fonctions du CPB

Ce modèle, noté GPI5F, traite le problème d'optimisation simultanée de la MDQ II et la MDQ III du CPB comme une programmation mathématique à cinq objectifs.

Le premier objectif est la minimisation de la variation, notée f_1 , de la moyenne de la fréquence de coupure (μ_{y_1}) par rapport à sa valeur cible (C_1).

Le deuxième objectif est la minimisation de la variance, notée f_2 , de la fréquence de coupure ($\sigma_{y_1}^2$).

Le troisième objectif est la minimisation de la variation, notée f_3 , des moyennes de la résistance (μ_{z_1}) et la capacité (μ_{z_2}) par rapport à leurs valeurs cibles (z_1) et (z_2).

Le quatrième objectif est la minimisation de la variance, notée f_4 , composée de la somme des variance de la résistance ($\sigma_{z_1}^2$) et la capacité ($\sigma_{z_2}^2$).

Et le cinquième objectif est la minimisation du coût des opérations de fabrication, noté f_5 .

Cette formulation enlève tous les poids entre les différentes composantes du problème d'optimisation, à savoir les constantes de pertes des fonctions EFPC et EFPP.

Le GPI5F s'écrit alors sous la forme suivante :

GPI5F :

$$\text{Minimiser} \quad f_1 = (\mu_{y_1} - 20)^2 \quad (4.92)$$

$$\text{Minimiser} \quad f_2 = \sigma_{y_1}^2 \quad (4.93)$$

$$\text{Minimiser} \quad f_3 = \sum_{k=1}^2 [(\mu_{z_1} - z_k)^2] \quad (4.94)$$

$$\text{Minimiser} \quad f_4 = \sum_{k=1}^2 [\sigma_{z_k}^2] \quad (4.95)$$

$$\text{Minimiser} \quad f_5 = \sum_{l=1}^6 C_M(t_l) \quad (4.96)$$

Sujet à :

$$15 \leq \mu_{y_1} \leq 30 \quad (4.97)$$

$$\frac{(w_1 + t_1)(w_2 + t_2)}{w_3 - t_3} - \mu_{z_1} \leq 0.4 \quad (4.98)$$

$$\mu_{z_1} - \frac{(w_1 - t_1)(w_2 - t_2)}{w_3 + t_3} \geq 0.39 \quad (4.99)$$

$$\frac{(w_4 + t_4)(w_5 + t_5)}{5(w_6 - t_6)} - \mu_{z_2} \leq 0.15 \quad (4.100)$$

$$\mu_{z_2} - \frac{(w_4 - t_4)(w_5 - t_5)}{5(w_6 + t_6)} \geq 0.05 \quad (4.101)$$

$$\sigma_{z_k} \leq 0.08 \quad k=1,2 \quad (4.102)$$

$$8 \leq z_1 \leq 12 \quad (4.103)$$

$$0.4 \leq z_2 \leq 1.2 \quad (4.104)$$

$$w_l^- \leq w_l \leq w_l^+ \quad l=1,..,6 \quad (4.105)$$

$$t_{L_l} \leq t_l \leq t_{U_l} \quad l=1,..,6 \quad (4.106)$$

Où :

$$\mu_{y_1} = \frac{10^3}{2\pi z_1 z_2} \quad (4.107)$$

$$\sigma_{y_1} = \left| \frac{-1}{2\pi z_1^2 z_2} + \frac{1}{2\pi z_1 z_2^2} \right| \quad (4.108)$$

$$\mu_{z_1} = \frac{w_1 w_2}{w_3} \quad (4.109)$$

$$\mu_{z_2} = \frac{w_4 w_5}{5 w_6} \quad (4.110)$$

$$\sigma_{z_1} = \frac{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{3} \quad (4.111)$$

$$\sigma_{z_2} = \frac{\sqrt{t_4^2 + t_5^2 + t_6^2}}{3} \quad (4.112)$$

$$C_M(t_l) = \frac{0.01}{t_l} \quad l=1,..,6 \quad (4.113)$$

Nous appliquons les neuf étapes de la procédure de résolution du GPI5F énoncées au paragraphe 4.3.4.(page 58)

La première étape consiste à déterminer l'espace de solution du problème du GPI5F. Pour trouver les points efficients du GPI5F, nous résolvons les problèmes non-linéaires PNL 6 à PNL 10.

Étape 1 : PNL 6 : Minimiser f_l

Sujet aux :

Les contraintes (4.50) à (4.59)

Où :

Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

PNL 7 : Minimiser f_2

Sujet aux :

Les contraintes (4.50) à (4.59)

Où :

Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

PNL 8 : Minimiser f_3

Sujet aux :

Les contraintes (4.50) à (4.59)

Où :

Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

PNL 9 : Minimiser f_4

Sujet aux :

Les contraintes (4.50) à (4.59)

Où :

Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

PNL 10 : Minimiser f_5

Sujet aux :

Les contraintes (4.50) à (4.59)

Où :

Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

Les solutions de PNL 6 à PNL 10 sont représentées au tableau 4.8 (page 79) à la fin de ce chapitre.

Nous définissons $X^1 = (z_1^*, z_2^*, w_1^*, \dots, w_6^*, t_1^*, \dots, t_6^*)$ solution du PNL 6.

Nous définissons $X^2 = (z_1^*, z_2^*, w_1^*, \dots, w_6^*, t_1^*, \dots, t_6^*)$ solution du PNL 7.

Nous définissons $X^3 = (z_1^*, z_2^*, w_1^*, \dots, w_6^*, t_1^*, \dots, t_6^*)$ solution du PNL 8.

Nous définissons $X^4 = (z_1^*, z_2^*, w_1^*, \dots, w_6^*, t_1^*, \dots, t_6^*)$ solution du PNL 9.

Nous définissons $X^5 = (z_1^*, z_2^*, w_1^*, \dots, w_6^*, t_1^*, \dots, t_6^*)$ solution du PNL 10.

La deuxième étape consiste à construire le tableau 4.5 des choix des cinq fonctions.

Pour se faire, on calcule les valeurs des fonctions f_i avec $i=1$ à 5 aux points X^j où $j=1$ à 5.

Étape 2 :

Tableau 4.5- La table des choix des fonctions f_i avec $i=1$ à 5

	$f_1(X^j)$	$f_2(X^j)$	$f_3(X^j)$	$f_4(X^j)$	$f_5(X^j)$
X^1	0	0.0008	8.690	0.009	3.164
X^2	25	0.0001	0.151	0.0088	3.169
X^3	2.80	0.0004	0	0.007	3.188
X^4	1.90	0.0006	0.060	0.004	2.646
X^5	1.95	0.0006	9.12	0.0078	0.808

En se basant sur le tableau 4.5 et le paragraphe 4.3.4 (page 58), nous déterminons les valeurs minimales et maximales des composantes du vecteur objectif, qui sont :

$$\begin{array}{ll}
 b_{1\min} = 0 & b_{1\max} = 25 \\
 b_{2\min} = 0.0001 & b_{2\max} = 0.0008 \\
 b_{3\min} = 0 & b_{3\max} = 9.12 \\
 b_{4\min} = 0.004 & b_{4\max} = 0.009 \\
 b_{5\min} = 0.808 & b_{5\max} = 3.188
 \end{array}$$

Donc, l'ensemble réduit de faisabilité D' s'écrit selon la formulation (4.114).

$$D' = \left\{ b \in D / b_{1\min} \leq b_1 \leq b_{1\max} \text{ et } b_{2\min} \leq b_2 \leq b_{2\max}, b_{3\min} \leq b_3 \leq b_{3\max} \right. \\ \left. b_{4\min} \leq b_4 \leq b_{4\max}, b_{5\min} \leq b_5 \leq b_{5\max} \right\} \quad (4.114)$$

Où D est l'ensemble de faisabilité, dont la définition a été présentée au paragraphe 4.3.2. (voir les formules (4.36) à (4.38))

La troisième étape consiste à demander au DM de choisir dans l'ensemble D' le vecteur objectif b .

Étape 3 : Soit $b=(b_1, \dots, b_5)$ avec $b_1 = 0$, $b_2 = 0.0004$, $b_3 = 0.015$, $b_4 = 0.0055$ et $b_5 = 0.9$

La quatrième étape consiste à résoudre le problème $P'(G)$ selon l'algorithme ALG 1, présenté au paragraphe 4.2.

$$\text{Étape 4 : } P'(G) : \quad \text{Minimiser} \quad f_1 \leq b_1 \quad (4.115)$$

$$\text{Minimiser} \quad f_2 \leq b_2 \quad (4.116)$$

$$\text{Minimiser} \quad f_3 \leq b_3 \quad (4.117)$$

$$\text{Minimiser} \quad f_4 \leq b_4 \quad (4.118)$$

$$\text{Minimiser} \quad f_5 \leq b_5 \quad (4.119)$$

Sujet à :

Les contraintes (4.50) à (4.59).

Où :

Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

Nous minimisons d'abord la déviation d_1 de la f_1 par rapport à sa valeur cible b_1 , en résolvant le programme non-linéaire suivant :

$$\text{Minimiser} \quad d_1 \quad (4.120)$$

Sujet à

$$f_1 - d_1 \leq b_1 \quad (4.121)$$

Les contraintes (4.50) à (4.59)

Où :

Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

Nous trouvons ainsi la valeur de $d_1^* = 0$.

Nous minimisons ensuite la déviation d_2 de la f_2 par rapport à sa valeur cible b_2 , en résolvant le programme non-linéaire suivant :

$$\text{Minimiser} \quad d_2 \quad (4.122)$$

Sujet à

$$f_1 - d_1^* \leq b_1 \quad (4.123)$$

$$f_2 - d_2 \leq b_2 \quad (4.124)$$

Les contraintes (4.50) à (4.59)

Où :

Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

Nous trouvons ainsi la valeur de $d_2^* = 0$.

Nous minimisons ensuite la déviation d_3 de la f_3 par rapport à sa valeur cible b_3 , en résolvant le programme non-linéaire suivant :

$$\text{Minimiser} \quad d_3 \quad (4.125)$$

Sujet à

$$f_i - d_i^* \leq b_i \quad i=1,2 \quad (4.126)$$

$$f_3 - d_3 \leq b_3 \quad (4.127)$$

Les contraintes (4.50) à (4.59)

Où : Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

Nous trouvons ainsi la valeur de $d_3^* = 0$.

Ensuite, nous minimisons ensuite la déviation d_4 de la f_4 par rapport à sa valeur cible b_4 , en résolvant le programme non-linéaire suivant :

$$\text{Minimiser} \quad d_4 \quad (4.128)$$

Sujet à

$$f_i - d_i^* \leq b_i \quad i=1,2,3 \quad (4.129)$$

$$f_4 - d_4 \leq b_4 \quad (4.130)$$

Les contraintes (4.50) à (4.59)

Où :

Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

Et nous trouvons ainsi la valeur de $d_4^* = 0$. Nous résolvons ensuite le problème $P'(G_1)$, qui minimise la déviation d_5 de la fonction V_5 par rapport à son objectif b_5 , en gardant les autres fonctions les plus proches possibles de leurs objectifs.

$$P'(G_1) \text{ Minimiser} \quad d_5 \quad (4.131)$$

Sujet à

$$f_i - d_i^* \leq b_i \quad i=1,2,3,4 \quad (4.132)$$

$$f_5 - d_5 \leq b_5 \quad (4.133)$$

Les contraintes (4.50) à (4.59)

Où :

Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

La solution de ce problème donne une valeur de $d_5^* = 0.05$ ainsi que les autres valeurs, les composantes du premier vecteur solution $(\bar{X}_1 = (z_1^*, z_2^*, w_1^*, \dots, w_6^*, t_1^*, \dots, t_6^*))$, représentées au tableau 4.6.

Tableau 4.6- Résultats de la première itération de l'optimisation simultanée à GPI5F

Indice	Variables Indépendantes			Fonction Objectif				
	w_1^*	t_1^*	z_k^*	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
1	24.95	0.04	8.860	0	0.0004	0.015	0.0055	0.95
2	4.5	0.15	0.898					
3	12.5	0.10						
4	3.5	0.10						
5	0.98	0.04						
6	0.75	0.04						

La cinquième étape consiste à présenter les résultats au DM. S'il est satisfait des valeurs des fonctions f_1 à f_5 , nous arrêtons. Sinon, nous passons à l'étape 6.

La sixième étape consiste à formuler les conditions de Kuhn-Tucker (CKT) du problème $P'(G_1)$. Et de trouver les multiplicateurs de KT selon la procédure du paragraphe 4.3.3. (page 57)

Étape 6 : Les multiplicateurs de KT qui nous intéressent sont : $u_1 > 0$, $u_2 > 0$, $u_3 > 0$, $u_4 > 0$, $u_5 > 0$ (Voir détail des calculs à l'annexe III).

La septième étape consiste à déterminer l'ensemble de stabilité de 1^{er} type $G(\bar{X}_1)$, selon l'algorithme présenté au paragraphe 4.3.3. Nous trouvons alors :

$$G(\bar{X}_1) = \left\{ \begin{array}{l} b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) / b_1 = 0, b_2 = 0.0004, b_3 = 0.015, \\ b_4 = 0.0055, b_5 = 0.90 \end{array} \right\} \quad (4.134)$$

La huitième étape consiste à construire l'ensemble $D \setminus G(\bar{X}_1)$. Le tableau 4.7 donne les cinq cas possibles pour cet ensemble.

Étape 8 :

Tableau 4.7- Table des choix

Ensemble #	b ₁		b ₂		b ₃		b ₄		b ₅	
	Min	Max	Min	Max	Min	Max	Min	Max	Min	Max
1	0	25	0.0001	0.0008	0	9.12	0.004	0.009	b ₅ ≠0.9	
2	0	25	0.0001	0.0008	0	9.12	b ₄ ≠0.0055		0.808	3.188
3	0	25	0.0001	0.0008	b ₃ ≠0.015		0.004	0.009	0.808	3.188
4	0	25	b ₂ ≠0.0004		0	9.12	0.004	0.009	0.808	3.188
5	b ₁ ≠0		0.0001	0.0008	0	9.12	0.004	0.009	0.808	3.188

La neuvième étape consiste à demander au DM de refaire son choix du vecteur objectif parmi les ensembles du tableau 4.7.

Étape 9 : Soit $b^2 = (b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2, b_5^2)$

tel que $b_1^2 = 0.0001, b_2^2 = 0.00035, b_3^2 = 0.35, b_4^2 = 0.0055, b_5^2 = 1$.

Nous reprenons toute la procédure de résolution, depuis la quatrième étape, avec les deux nouveaux objectifs pour les fonctions f_1 à f_5 , les différentes solutions efficientes sont regroupées au tableau I.2 à l'annexe I.

Tableau 4.8- Les solutions des PNL 6 à PNL 10

Chapitre 5 : Analyses des résultats et conclusions

Dans cette optimisation de la phase de conception et de la phase de fabrication, nous avons étudié l'approche séquentielle et l'approche simultanée. Le tableau 5.1 dresse un bilan comparatif de l'approche séquentielle et de l'approche simultanée à modèle intégré pour l'exemple du CPB. Nous remarquons que lors de l'approche séquentielle, nous avons obtenu des valeurs de la résistance (z_1^*) et la capacité (z_2^*) que nous n'avons pas pu réaliser avec les moyens matériels dont nous disposons. Nous avons voulu optimiser d'abord la phase de conception, ensuite la phase de fabrication, en tenant compte des résultats de la conception.

Par contre, lors de l'optimisation simultanée à modèle intégré, nous avons toléré des écart-types importants pour l'ET ($\sigma_{y_1} = 0.022 > 0.0176$) et pour les CP ($\sigma_{z_2} = 0.057 > 0.05$). Le résultat était que les valeurs moyennes des CP ($\mu_{z_1} = 9.474$) et ($\mu_{z_2} = 0.821$) sont plus proches de leurs valeurs optimales ($z_1^* = 9.476$) et ($z_2^* = 0.840$).

Tableau 5.1- Tableau de comparaison de la solution séquentielle et simultanée à modèle intégré

		Optimisation séquentielle		Optimisation simultanée
		MDQ II EFPC	MDQ III EFPF	Modèle intégré EFPT=EFPC+EFPF
Fonction objectif		0.00031	1.8044	0.8179
		MDQ II	0.00031	0.0008
		MDQ III		0.8171
ET La fréquence de coupure	Moyenne μ_{y_1}	20		20.001
	Écart-type σ_{y_1}	0.0176		0.022
CP Résistance Capacité	Résistance (z_1)	8		9.476
	Capacité (z_2)	0.995		0.840
	Moyenne μ_{z_1}		8.982	9.474
	Moyenne μ_{z_2}		0.884	0.821
	Écart type σ_{z_1}		0.068	0.067
	Écart type σ_{z_2}		0.050	0.057
PF	Nominales (w_1)		24.95	24.95
	Nominales (w_2)		4.5	4.75
	Nominales (w_3)		12.5	12.5
	Nominales (w_4)		3.5	3.5
	Nominales (w_5)		0.95	0.88
	Nominales (w_6)		0.75	0.75
	Tolérances (t_1)		0.05	0.05
	Tolérances (t_2)		0.14	0.13
	Tolérances (t_3)		0.14	0.15
	Tolérances (t_4)		0.13	0.16
	Tolérances (t_5)		0.05	0.05
	Tolérances (t_6)		0.05	0.05

Cette approche assure le compromis souhaité entre la phase de conception et de la phase de fabrication. Néanmoins, l'approche n'offre qu'un seul compromis (une seule solution optimale), du fait de la formulation mathématique du modèle. C'est ainsi, que nous avons pensé à améliorer le modèle en proposant un GPI2F capable de donner différentes solutions « compromis ».

Le tableau 5.2 compare deux solutions de GPI2F. Nous remarquons que $EFPC_2 > EFPC_1$ et $EFPF_1 > EFPF_2$. Cette propriété de non-dominance entre les deux solutions efficientes est respectée pour toutes les solutions du GPI2F. En plus, on ne peut pas dire que la première solution est mieux que la deuxième, car tout dépend des préférences du DM.

En effet, la première solution est meilleure que la deuxième, si nous les comparons du point de vue de la moyenne de l'ET ($\mu_{y_1} = 20$) et l'écart type de l'ET ($\sigma_{y_1} = 0.02$). Mais, la deuxième solution est meilleure que la première, si nous les comparons du point de vue du rapprochement des valeurs moyennes des CP ($\mu_{z_1} = 8.982$ et $\mu_{z_2} = 0.821$) de leurs valeurs optimales ($z_1^* = 8.86$ et $z_2^* = 0.899$).

Notons que, les solutions des modèles séquentiel et intégré peuvent être obtenues par le modèle GPI2F, leurs formulations est un cas particulier de la formulation du GPI2F. La pertinence du GPI2F a poussé notre analyse au cas le plus élémentaire, soit le GPI5F.

Tableau 5.2- Tableau de comparaison de deux solutions efficientes du GPI2F

		GPI2F (1ère solution efficiente)		GPI2F (2ème solution efficiente)	
		EFPC		EFPC	
		Fonction objectif	0.0004	0.8363	0.00047
ET La fréquence de coupure	Moyenne μ_{y_1}	20		20.0002	
	Écart type σ_{y_1}	0.02		0.022	
CP Résistance Capacité	Résistance (z_1)	8.86		9.481	
	Capacité (z_2)	0.899		0.84	
	Moyenne μ_{z_1}	8.982		9.48	
	Moyenne μ_{z_2}	0.821		0.821	
	Écart type σ_{z_1}	0.068		0.067	
	Écart type σ_{z_2}	0.057		0.057	
PF	Nominales (w_1)	24.95		24.95	
	Nominales (w_2)	4.5		4.75	
	Nominales (w_3)	12.5		12.5	
	Nominales (w_4)	3.5		3.5	
	Nominales (w_5)	0.88		0.88	
	Nominales (w_6)	0.75		0.75	
	Tolérances (t_1)	0.05		0.05	
	Tolérances (t_2)	0.14		0.13	
	Tolérances (t_3)	0.14		0.14	
	Tolérances (t_4)	0.16		0.16	
	Tolérances (t_5)	0.05		0.05	
	Tolérances (t_6)	0.05		0.05	

Le tableau 5.3 compare une solution du GPI2F avec une autre solution du GPI5F. En fait, le GPI5F est un modèle plus exigeant que le GPI2F. Il fixe cinq objectifs alors que le GPI2F en fixe que deux.

Tableau 5.3- Tableau de comparaison de la solution du GPI2F et GPI5F

		GPI2F		GPI5F				
		EFPC	EFPF	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
	Fonction objectif	0.0004	0.8363	0	0.0004	0.015	0.0055	0.95
ET La fréquence de coupure	Moyenne μ_{y_1}	20		20				
	Écart type σ_{y_1}	0.02		0.02				
CP Résistance Capacité	Résistance (z_1)	8.86		8.86				
	Capacité (z_2)	0.899		0.898				
	Moyenne μ_{z_1}	8.982		8.982				
	Moyenne μ_{z_2}	0.821		0.913				
	Écart type σ_{z_1}	0.068		0.063				
	Écart type σ_{z_2}	0.057		0.039				
PF	Nominales (w_1)	24.95		24.95				
	Nominales (w_2)	4.5		4.5				
	Nominales (w_3)	12.5		12.5				
	Nominales (w_4)	3.5		3.5				
	Nominales (w_5)	0.88		0.98				
	Nominales (w_6)	0.75		0.75				
	Tolérances (t_1)	0.05		0.04				
	Tolérances (t_2)	0.14		0.15				
	Tolérances (t_3)	0.14		0.10				
	Tolérances (t_4)	0.16		0.1				
	Tolérances (t_5)	0.05		0.04				
	Tolérances (t_6)	0.05		0.04				

Aussi dans ce cas, on ne peut pas dire que la solution du GPI5F est meilleure que celle du GPI2F, car ce dernier n'est qu'un cas particulier du premier. Mais, on remarque clairement la puissance de ce modèle. En effet, en une seule itération il a été possible de

trouver des $\mu_{z_1} = 8.982$ et $\mu_{z_2} = 0.913$ proche aux $z_1^* = 8.86$ et $z_2^* = 0.898$, avec des écart-types $\sigma_{z_1} = 0.063$ et $\sigma_{z_2} = 0.039$ assez petits par rapport aux solutions des autres modèles. L'explication possible à ce phénomène est que les tolérances (t_1, t_2, t_3, t_5, t_6) ont changé de valeurs toutes en même temps, contrairement, aux autres modèles qui font varier dans la plupart des autres solutions juste (t_2, t_3, t_5).

Ce travail a servi à développer une approche pour l'optimisation de la conception et de la fabrication d'un nouveau produit. Il a intégré l'approche multicritère avec les deux maisons de la qualité, MDQ II et MDQ III, afin de modéliser mathématiquement les deux phases.

Les modèles mathématiques développés sont basés sur l'espérance de la fonction de perte par manque de qualité. L'espace de résolution est limité par des contraintes liées aux produit et aux moyens de fabrication. La résolution des modèles mathématiques a montré numériquement l'intérêt que présente la vision simultanée par rapport à la vision séquentielle.

L'approche multicritère est l'autre point traité par ce travail, le problème d'optimisation du développement des produits est ainsi traité comme un problème à plusieurs objectifs relatifs à la MDQ II et à la MDQ III.

Le développement des produits comporte d'autres phases, deux autres dans le cas de l'approche DFQ. Nous croyons que si cette approche est développée pour la MDQ IV et la MDQ I, cela pourrait permettre le développement d'une approche intégrée d'optimisation du développement des produits, surtout que beaucoup de produit sont développés à l'aide des logiciels de CAO. Et ceci, pourrait rendre le développement des produits une approche systématique.

RÉFÉRENCES

- ABDEL HALEEM, B.A.K. (1991). A Study on Interactive Multiple Criteria Decision Making Problems. Thèse de Doctorat 1991. Faculty of Engineering, Cairo University, 147p.
- AMERICAN SUPPLIER INSTITUTE. (1987). Quality Function Deployment-Implementation Manual for the Three Day Workshop. Deaborn, Michigan.
- AMES, A.E., MACDONALD, S., MATUCCI, N., SZONYI, G., HAWKINS, D.M. (1997). Quality Loss Functions for Optimization Across Multiple Response Surfaces. Journal of Quality Technologies, 29(3), 339-346.
- ARTILES-LEON, N. (1996). A Pragmatic Approach to Multiple-Response Problems Using Loss Functions. Quality Engineering, 9(2), 213-220.
- BISGAARD, S. (1997). Designing Experiments for Tolerancing Assembly Products. Technometrics. Opl. Res. Q., 39(2), 142-152.
- BOSSARD, B., CHANCHEVRIER, C., LECLAIR, L. (1997). Ingénierie concourante de la technique au social. Édition ECONOMICA.
- BRANGER, G. (1978). Savoir choisir : sa gamme d'usinage, sa machine, ses outils, son ordre de montage. DEFORGES , 187 p.

CHENEL, P.J. (2000). Définition et structuration de l'ingénierie simultanée dans le domaine de l'aéronautique et application chez Bombardier Aéronautique. Mémoire de maîtrise 2000. École Polytechnique de Montréal, 413 p.

CLAUSING, D. (1994). Total Quality Development: A Step-By-Step Guide to World-Class Concurrent Engineering. ASME Press, 507 pages.

CLAUSING, D.P., PUGH, S. (1991). Enhanced Quality Function Deployment. Design and Productivity International Conference, Honolulu, HA, February 6-8.

DRAUER, J.P., KRUEGER, R.J. (1977). An Interactive Approach to Goal Programming. Opl. Res. Q., 28(3), 671-681.

FLOYD, T.L. (1999). Fondements d'électronique: circuits, composantes et applications. Les éditions Reynolds Goulet inc.

JEANG, A. (1997). An Approach of Tolerance Design for Quality Improvement and Cost Reduction. Int. J. Prod. Res., 35(5), 1193-1211.

JEANG, A. (1994). Tolerance Design: Choosing Optimal Tolerance Specifications in the Design of Machined Parts. Quality and Reliability Engineering International, 10, 27-35.

JEANG, A., LEU, E. (1999). Robust Tolerance Design by Computer Experiments. Int. J. Prod. Res., 37(9), 1949-1961.

KAPUR, C.K., CHO, B.-R. (1996). Economic Design of the Specification Region for Multiple Quality Characteristics. IIE Trans., 28(3), 237-248.

NGOI, B.K.A., ONG, J.M. (1999). A Complete Tolerance Charting System in Assembly. Int. J. Prod. Res., 37(11), 2477-2498.

NGOI, B.K.A., TECK, O.C. (1997). A Tolerancing Optimisation Method for Product Design. Int. J. Adv. Manuf. Technol., 13, 290-299.

OSMAN, M.S.A. (1977). Qualitative Analysis of Basic Notions in Parametric Convex Programming I (Parameters in the Constraints). Appl. Math. CSSR Akad. Ved., Prague.

PIGNATIALLO, J.J., Jr. (1993). Strategies for Robust Multiresponse. Quality Engineering, 25(3), 5-15.

SUHR, R., BASTON, R.G. (2001). Constrained Multivariate Loss Function Minimization. Quality Engineering, 13(3), 475-483.

SIVALOGANATHAN, S., EVBUOMWAN, N.F.O. (1997). Quality Function Deployment—The Technique : State of the Art and Future Directions. CONCURRENT ENGINEERING: Research and Applications, 5(2), 171-181.

TAGUCHI, G. (1989). Introduction to Quality Engineering. New York: Unipub, pp 21-22.

WEI, C.-C. (1997). Tolerance Design With Concurrent Optimization of Quality Loss and Process Capability. International Journal of Industrial Engineering, 5(2), 169-174.

ANNEXES

ANNEXE I : Les solutions efficientes des GPI2F et GPI5F

Tableau I.1- Résultats des itérations de l'optimisation simultanée à GPI2F

No. (j)	Ind.	Variables			Vecteur objectif		Fonction objectif		G(\bar{X}_1)
		Indépendantes			$b^j = (b_1^j, b_2^j)$		b_1	b_2	
		w_1^*	t_1^*	z_k^*					
1 ère solution	1	24.95	0.05	8.860	0.0004	0.816	0.0004	0.8363	$\begin{cases} b_1 = 4.10^{-4}, \\ b_2 = 0.816 \end{cases}$
	2	4.5	0.14	0.899					
	3	12.5	0.14						
	4	3.5	0.16						
	5	0.88	0.05						
	6	0.75	0.05						
2 ème solution	1	24.95	0.05	9.481	0.00047	0.8179	0.00047	0.8179	$\begin{cases} b_1 = 4.710^{-4}, \\ b_2 \geq 0.8179 \end{cases}$
	2	4.75	0.13	0.840					
	3	12.5	0.14						
	4	3.5	0.16						
	5	0.88	0.05						
	6	0.75	0.05						
3 ème solution	1	24.95	0.05	9.522	0.0008	0.81745	0.0008	0.81745	$\begin{cases} b_1 = 8.10^{-4}, \\ b_2 \geq 0.81745 \end{cases}$
	2	4.77	0.13	0.835					
	3	12.5	0.14						
	4	3.5	0.16						
	5	0.88	0.05						
	6	0.75	0.05						

Tableau 12- Résultats des itérations de l'optimisation simultanée à GPI5F

ANNEXE II : Détail du calcul des fonctions de transferts du CPB

L'exemple utilisé dans ce travail est un circuit RC. C'est la simplicité de ses fonctions de transferts qui a attiré notre attention.

Floyd (1999) développe les équations qui régissent le circuit RC. Il établit ainsi la première relation :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \text{ (en unité du système international (SI))} \quad (\text{II.1})$$

Où : f_c : la fréquence de coupure, notée y_1

R : la résistance électrique, notée z_1

C : la capacité électrique, notée z_2

Dans le but de travailler avec des grandeurs sans unités, nous avons convertit l'équation (II.2).

$$y_1 = \frac{1}{2\pi z_1 z_2} \quad (\text{II.2})$$

où : y_1 (MHz), z_1 (KΩ) et z_2 (nF)

Le modèle que nous développons a besoin d'une valeur moyenne et d'un écart-type, ainsi l'équation II.2 devient :

$$\mu_{y_1} = \frac{10^3}{2\pi z_1 z_2} \quad (\text{II.3})$$

Pour formuler l'écart type de y_1 en fonction de z_1 et z_2 , nous nous sommes inspirés de la formule de propagation du calcul des erreurs et nous l'avons ajusté aux valeurs réelles du circuit RC, de façon à ce que cette équation agisse aussi sur le modèle mathématique.

$$\sigma_{y_1} = \sqrt{\frac{-1}{2\pi z_1^2 z_2} + \frac{1}{2\pi z_1 z_2^2}} \quad (\text{II.4})$$

Le calcul de la formule de propagation des erreurs s'écrit selon les équations II.5 à II.7.

$$\sigma_{y_1}^2 = \left(\frac{\partial \mu_{y_1}}{\partial z_1} \right)^2 \sigma_{z_1}^2 + \left(\frac{\partial \mu_{y_1}}{\partial z_2} \right)^2 \sigma_{z_2}^2 \quad (\text{II.5})$$

$$\sigma_{y_1}^2 = \left(\frac{-1}{2\pi z_1^2 z_2} \right)^2 \sigma_{z_1}^2 + \left(\frac{-1}{2\pi z_1 z_2^2} \right)^2 \sigma_{z_2}^2 \quad (\text{II.6})$$

D'où :

$$\sigma_{y_1} = \sqrt{\left(\frac{-1}{2\pi z_1^2 z_2} \right)^2 \sigma_{z_1}^2 + \left(\frac{-1}{2\pi z_1 z_2^2} \right)^2 \sigma_{z_2}^2} \quad (\text{II.7})$$

Cet exemple a été développé sur la base des grandeurs réelles représentées par les formules II.8 à II.10.

$$\mu_{y_1} = 20 \pm 5\% \quad (\text{II.8})$$

$$z_1 = 10 \pm 5\% \quad (\text{II.9})$$

$$z_2 = 0.8 \pm 0.04 \quad (\text{II.10})$$

Ainsi, si nous estimons l'erreur avec la formule de propagation II.7 nous trouvons une valeur plus grande que celle trouvée par la formule II.4.

$$\sigma_{y_1} = 1.41 \quad (\text{valeur calculée avec la formule II.7})$$

$$\sigma_{y_1} = 0.022 \quad (\text{valeur calculée avec la formule II.4})$$

Donc notre formule est plus contraignante pour le modèle mathématique.

La résistance est formulée en fonction de ses caractéristiques.

$$R = \frac{\rho l}{A} \text{ (en unité du système international (SI))} \quad (\text{II.11})$$

où : ρ : la résistivité électrique du matériau, notée w_1
 l : la longueur de la résistance, notée w_2
 A : la section de la résistance, notée w_3

Cette formule devient :

$$\mu_{z_1} = \frac{w_1 w_2}{w_3} \quad (\text{II.12})$$

où : w_1 ($10^{-3} \Omega \cdot \text{m}$), w_2 (mm), w_3 (10^{-9}m^2) et μ_{z_1} (K Ω).

La capacité est formulée en fonction de ses caractéristiques :

$$C = \frac{A \epsilon_r (8.85 * 10^{-12} \text{F/m})}{d} \quad (\text{II.13})$$

où : A : l'aire des plaques, notée w_4
 ϵ_r : la permittivité diélectrique, notée w_5
 d : la distance entre les plaques, notée w_6

Cette formule devient :

$$\mu_{z_2} = \frac{w_4 w_5}{5 w_6} \quad (\text{II.14})$$

où : w_4 ($\frac{10^{-9}}{36\pi} \text{F/m}$), w_5 (mm^2), w_6 (10^{-4}mm) et μ_{z_2} (nF).

Pour formuler l'écart type de z_1 en fonction de t_1 , t_2 et t_3 , nous nous sommes inspirés de la formule de propagation du calcul des erreurs et nous l'avons ajusté aux valeurs réelles du circuit RC, de façon à ce que cette équation agisse aussi sur le modèle mathématique.

$$\sigma_{z_1} = \sqrt{\sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2) + \sigma^2(t_3)} \quad (\text{II.15})$$

Le calcul de la formule de propagation des erreurs s'écrit selon les équations II.16 à II.18.

$$\sigma_{z_1}^2 = \left(\frac{\partial \mu_{z_1}}{\partial z_1} \right)^2 \sigma^2(t_1) + \left(\frac{\partial \mu_{z_1}}{\partial z_2} \right)^2 \sigma^2(t_2) + \left(\frac{\partial \mu_{z_1}}{\partial z_3} \right)^2 \sigma^2(t_3) \quad (\text{II.16})$$

$$\sigma_{z_1}^2 = \left(\frac{w_2}{w_3} \right)^2 \sigma^2(t_1) + \left(\frac{w_1}{w_3} \right)^2 \sigma^2(t_2) + \left(\frac{w_1 w_2}{w_3^2} \right)^2 \sigma^2(t_3) \quad (\text{II.17})$$

D'où :

$$\sigma_{z_1} = \sqrt{\left(\frac{w_2}{w_3} \right)^2 \sigma^2(t_1) + \left(\frac{w_1}{w_3} \right)^2 \sigma^2(t_2) + \left(\frac{w_1 w_2}{w_3^2} \right)^2 \sigma^2(t_3)} \quad (\text{II.18})$$

Cet exemple a été développé sur la base des grandeurs réelles représentées par les formules II.19 à II.21.

$$w_1 = 25 \pm 0.02 \quad (\text{II.19})$$

$$w_2 = 5 \pm 0.2 \quad (\text{II.20})$$

$$w_3 = 12 \pm 0.2 \quad (\text{II.21})$$

Ainsi, si nous estimons l'erreur avec la formule de propagation II.18 nous trouvons une valeur plus grande que celle trouvée par la formule II.15.

$$\sigma_{z_1} = 0.15 \text{ (valeur calculée avec la formule II.18)}$$

$$\sigma_{z_1} = 0.09 \text{ (valeur calculée avec la formule II.15)}$$

Donc notre formule est plus contraignante pour le modèle mathématique.

ANNEXE III : Multiplicateurs de Kuhn-Tucker

Le calcul des multiplicateurs de Kuhn-Tucker (KT) du problème $P(G_1)$ se fait comme suit :

Soit le problème $P(G_1)$:

$$P(G_1) \text{ Minimiser } d_2 \quad (\text{III.1})$$

Sujet à

$$EFPC - d_1^* \leq b_1 \quad \text{multiplicateur } u_1 \quad (\text{III.2})$$

$$EFPF - d_2 \leq b_2 \quad \text{multiplicateur } u_2 \quad (\text{III.3})$$

Les contraintes (4.50) à (4.59)

Où :

Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

Pour ce problème, nous avons 28 multiplicateurs de KT. Pour trouver l'ensemble $G(\bar{X}_1)$ nous n'avons besoin que de u_1 et u_2 .

D'après les résultats du chapitre 4 :

$$EFPC=0.0004, d_1^* = 0 \text{ et } b_1=0.0004.$$

Donc la contrainte III.2 est saturée, et d'après les conditions de KT énoncées au chapitre 4, $u_1>0$

D'après les résultats du chapitre 4 :

$$EFPF=0.836, d_2^* = 0.02 \text{ et } b_2=0.816$$

Donc la contrainte III.3 est saturée, et d'après les conditions de KT énoncées au chapitre 4 (page 58), $u_2>0$

Le calcul des multiplicateurs de Kuhn-Tucker (KT) du problème $P'(G_1)$ se fait comme suit :

Soit le problème $P'(G_1)$:

$$P'(G_1) \text{ Minimiser } d_5 \quad (III.4)$$

Sujet à

$$f_i - d_i^* \leq b_i \quad i=1,2,3,4 \quad \text{multiplicateur } u_1 \text{ à } u_4 \quad (III.5)$$

$$f_5 - d_5 \leq b_5 \quad \text{multiplicateur } u_5 \quad (III.6)$$

Les contraintes (4.50) à (4.59)

Où :

Les fonctions de transferts (4.60) à (4.66)

Les multiplicateurs de KT qui nous intéressent sont u_1 à u_5 .

$$f_1 = 0, d_1^* = 0 \text{ et } b_1 = 0 \Rightarrow \text{contrainte saturée} \Rightarrow u_1 > 0$$

$$f_2 = 0.0004, d_2^* = 0 \text{ et } b_2 = 0.0004 \Rightarrow \text{contrainte saturée} \Rightarrow u_2 > 0$$

$$f_3 = 0.015, d_3^* = 0 \text{ et } b_3 = 0.015 \Rightarrow \text{contrainte saturée} \Rightarrow u_3 > 0$$

$$f_4 = 0.0055, d_4^* = 0 \text{ et } b_4 = 0.0055 \Rightarrow \text{contrainte saturée} \Rightarrow u_4 > 0$$

$$f_5 = 0.95, d_5^* = 0.05 \text{ et } b_5 = 0.90 \Rightarrow \text{contrainte saturée} \Rightarrow u_5 > 0$$