

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

EFFET DE LA SURFACE LIBRE SUR LA DYNAMIQUE DES COQUES  
CYLINDRIQUES HORIZONTALES PARTIELLEMENT REMPLIES DE LIQUIDE

GHEORGHE BURSUC

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

JANVIER 2003



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-81512-9

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

EFFET DE LA SURFACE LIBRE SUR LA DYNAMIQUE  
DES COQUES CYLINDRIQUES HORIZONTALES  
PARTIELLEMENT REMPLIES DE LIQUIDE

présenté par : BURSUC Gheorghe

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. SHIRAZI-ADL Aboufazel, Ph.D., président

M. LAKIS Aouni A., Ph.D., membre et directeur de recherche

M. PETTIGREW Michel, Post. Grad. Dipl., membre

## REMERCIEMENTS

J'adresse mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont encouragé et témoigné leur confiance tout au long de ces années d'étude de maîtrise.

Tout d'abord, je voudrais remercier très sincèrement mon directeur de recherche, Monsieur Aouni A. Lakis, pour le soutien et la confiance qu'il m'a accordés.

Enfin, je remercie tout particulièrement mon épouse Ionela pour ses encouragements et aussi mes collègues de la section, pour l'ambiance de travail agréable qu'ils ont créée.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente un modèle analytique pour l'analyse dynamique des coques cylindriques minces horizontales partiellement remplies de liquide. C'est une méthode hybride qui combine les éléments finis avec la théorie des coques minces pour obtenir les fonctions de déplacement spécifiques.

Nous étudions l'effet des oscillations de la surface du fluide sur le comportement dynamique du système coque – liquide. Pour cette analyse, nous considérons l'influence de plusieurs paramètres comme le mode circonférentiel, le mode axial, le rapport d'élancement structural, la largeur de la coque ainsi que les forces d'inertie induites par le liquide et sa surface libre.

La coque est divisée en plusieurs éléments finis et les fonctions de déplacement sont calculées en utilisant la théorie des coques minces de Sanders. Les matrices de rigidité et de masse de la coque sont calculées afin de trouver et de résoudre les équations de mouvement.

Pour le fluide contenu dans la coque, on impose des conditions aux rives et on exprime son comportement à l'aide d'une fonction potentielle. Les énergies cinétiques et

potentielles du volume de fluide sont évaluées pour trouver l'influence du fluide sur la dynamique du système coque - liquide.

## ABSTRACT

This thesis presents an analytical model for the dynamic analysis of thin horizontal cylindrical shells partially filled with liquid. It is a hybrid method which combines the finite elements with the thin shell theory to obtain the specific displacement function.

We study the effect of oscillations of the surface of the fluid on the dynamic behaviour of the shell - liquid system. For this analysis we regard the influence of several parameters such as: circumferential mode, axial mode, slenderness ratio and inertial forces induced by the liquid.

The shell is divided into cylindrical finite elements and the displacement functions are calculated by using the thin shell theory of Sanders. The stiffness and mass matrices of the shell are evaluated in order to find and to solve the equations of motion.

For the internal fluid, a potential function is developed in terms of boundary conditions. The kinetic and potential energies are evaluated to find the influence of the fluid on the dynamics of the structure.

**TABLE DE MATIÈRES**

|                                                               |      |
|---------------------------------------------------------------|------|
| REMERCIEMENTS.....                                            | iv   |
| RÉSUMÉ.....                                                   | v    |
| ABSTRACT.....                                                 | vii  |
| TABLE DE MATIÈRES.....                                        | viii |
| LISTE DES TABLEAUX.....                                       | xi   |
| LISTE DES FIGURES.....                                        | xii  |
| LISTE DES ANNEXES.....                                        | xiv  |
| LISTE DES SYMBOLES.....                                       | xvi  |
| <br>                                                          |      |
| INTRODUCTION.....                                             | 1    |
| 0.1 Généralités.....                                          | 1    |
| 0.2 Objectifs de la recherche.....                            | 4    |
| 0.3 Contenu du mémoire.....                                   | 6    |
| <br>                                                          |      |
| CHAPITRE I FORMULATION ANALYTIQUE DE LA COQUE CYLINDRIQUE...8 |      |
| 1.1 Introduction.....                                         | 8    |
| 1.2 Fonctions de déplacement.....                             | 8    |
| 1.3 Équation caractéristique.....                             | 11   |
| 1.4 Matrices de masse et de rigidité.....                     | 14   |

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| CHAPITRE II FORMULATION ANALYTIQUE AVEC FLUIDE.....            | 19 |
| 2.1 Introduction.....                                          | 19 |
| 2.2 Formulation du probleme et hypothese de base.....          | 19 |
| 2.3 Influence de la surface libre du fluide.....               | 23 |
| 2.4 Résolution de l'équation de continuité.....                | 31 |
| 2.5 Évaluation de l'énergie cinétique de l'élément fluide..... | 36 |
| 2.5.1 Calcul de $T_X$ .....                                    | 38 |
| 2.5.2 Calcul de $T_r$ .....                                    | 39 |
| 2.5.3 Calcul de $T_0$ .....                                    | 40 |
| 2.6 Énergie potentielle de la surface libre du fluide.....     | 42 |
| 2.6.1 Limites d'intégration pour l'énergie potentielle.....    | 42 |
| 2.6.2 Expression matricielle d'élévation.....                  | 44 |
| 2.6.3 Expression d'énergie potentielle.....                    | 49 |
| CHAPITRE III ALGORITHMES ET RÉSULTATS NUMÉRIQUES.....          | 54 |
| 3.1 Introduction.....                                          | 54 |
| 3.2 Choix des logiciels.....                                   | 56 |
| 3.3 Assemblage matriciel.....                                  | 58 |
| 3.4 Analyse de la convergence.....                             | 61 |
| 3.5 Validation du modèle.....                                  | 69 |
| 3.6 Effet de la surface libre.....                             | 76 |

|                 |    |
|-----------------|----|
| CONCLUSION..... | 81 |
| RÉFÉRENCES..... | 83 |
| ANNEXES.....    | 93 |

## LISTE DES TABLEAUX

|             |                                                                                                                                             |    |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tableau 3.1 | Analyse de la convergence en fonction du nombre d'éléments finis pour la coque vide.....                                                    | 63 |
| Tableau 3.2 | Analyse de la convergence en fonction du nombre d'éléments finis pour le niveau $\varphi = 120^\circ$ .....                                 | 65 |
| Tableau 3.3 | Analyse de la convergence en fonction du nombre d'éléments finis pour le niveau $\varphi = 180^\circ$ .....                                 | 66 |
| Tableau 3.4 | Analyse de la convergence en fonction du nombre d'éléments finis pour le niveau $\varphi = 240^\circ$ .....                                 | 67 |
| Tableau 3.5 | Analyse de la convergence en fonction du nombre d'éléments finis pour le niveau $\varphi = 360^\circ$ .....                                 | 68 |
| Tableau 3.6 | Comparaison des résultats numériques de cette méthode avec les résultats expérimentaux de la référence [2] pour le mode axial $m = 1$ ..... | 70 |
| Tableau 3.7 | Comparaison des résultats numériques de cette méthode avec les résultats expérimentaux de la référence [2] pour le mode axial $m = 2$ ..... | 71 |
| Tableau 3.8 | Comparaison des résultats numériques de cette méthode avec les résultats de la référence [21] pour le mode axial $m = 1$ .....              | 78 |
| Tableau 3.9 | Comparaison des résultats numériques de cette méthode avec les résultats de la référence [21] pour le mode axial $m = 2$ .....              | 80 |

## LISTE DES FIGURES

|             |                                                                                                       |    |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 1.1  | Représentation schématique d'un élément fini de coque.....                                            | 9  |
| Figure 2.1  | Exemple de maillage pour le cas $\varphi < \pi$ .....                                                 | 20 |
| Figure 2.2  | Exemple de maillage pour le cas $\varphi = \pi$ .....                                                 | 22 |
| Figure 2.3  | Exemple de maillage pour le cas $\varphi > \pi$ .....                                                 | 23 |
| Figure 2.4  | Effet de la surface libre.....                                                                        | 24 |
| Figure 2.5  | Détail "A" de la surface libre.....                                                                   | 26 |
| Figure 2.6  | Surfaces d'un élément finis liquide.....                                                              | 31 |
| Figure 2.7  | Simplifications pour le cas $\varphi = \pi$ .....                                                     | 44 |
| Figure 3.1  | Analyse de la convergence des résultats finaux selon le nombre des<br>évaluations de la fonction..... | 57 |
| Figure 3.2  | Maillage circonférentiel d'une coque horizontale.....                                                 | 58 |
| Figure 3.3  | Structure d'une matrice de rigidité ou de masse.....                                                  | 59 |
| Figure 3.4  | Structure de la matrice de rigidité ou de masse globale.....                                          | 60 |
| Figure 3.5  | Code informatique pour l'assemblage des matrices globales.....                                        | 61 |
| Figure 3.6  | Niveaux de remplissage avec du liquide.....                                                           | 62 |
| Figure 3.7  | Convergence des résultats selon le raffinement du maillage ( $\varphi = 0^\circ$ )....                | 63 |
| Figure 3.8  | Convergence des résultats selon le raffinement du maillage ( $\varphi = 120^\circ$ ).64               |    |
| Figure 3.9  | Convergence des résultats selon le raffinement du maillage ( $\varphi = 180^\circ$ ).65               |    |
| Figure 3.10 | Convergence des résultats selon le raffinement du maillage ( $\varphi = 240^\circ$ ).66               |    |

|             |                                                                                                                                                                    |    |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 3.11 | Convergence des résultats selon le raffinement du maillage ( $\varphi = 360^\circ$ )                                                                               | 68 |
| Figure 3.12 | Comparaison des fréquences obtenues par cette méthode (lignes continues) avec les résultats expérimentaux (symboles) de la référence [2] ( $\varphi = 120^\circ$ ) | 71 |
| Figure 3.13 | Comparaison des fréquences obtenues par cette méthode (lignes continues) avec les résultats expérimentaux (symboles) de la référence [2] ( $\varphi = 180^\circ$ ) | 72 |
| Figure 3.14 | Comparaison des fréquences obtenues par cette méthode (lignes continues) avec les résultats expérimentaux (symboles) de la référence [2] ( $\varphi = 240^\circ$ ) | 72 |
| Figure 3.15 | Forme circonférentielle pour le mode $m = 1$ , $n = 4$ et $\varphi = 120^\circ$                                                                                    | 73 |
| Figure 3.16 | Forme circonférentielle pour le mode $m = 1$ , $n = 5$ et $\varphi = 120^\circ$                                                                                    | 73 |
| Figure 3.17 | Forme circonférentielle pour le mode $m = 1$ , $n = 4$ et $\varphi = 180^\circ$                                                                                    | 74 |
| Figure 3.18 | Forme circonférentielle pour le mode $m = 1$ , $n = 5$ et $\varphi = 180^\circ$                                                                                    | 74 |
| Figure 3.19 | Forme circonférentielle pour le mode $m = 1$ , $n = 4$ et $\varphi = 240^\circ$                                                                                    | 75 |
| Figure 3.20 | Forme circonférentielle pour le mode $m = 1$ , $n = 5$ et $\varphi = 240^\circ$                                                                                    | 75 |
| Figure 3.21 | Comparaison des fréquences obtenues par cette méthode (lignes pointillées) et celles de la référence [21] (lignes continues) ; $m = 1$ , $n = 4$ et 5              | 77 |
| Figure 3.22 | Comparaison des fréquences obtenues par cette méthode (lignes pointillées) et celles de la référence [21] (lignes continues) ; $m = 2$ , $n = 6$ et 7              | 79 |

## LISTE DES ANNEXES

|                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------|-----|
| ANNEXE A THÉORIE DES COQUES MINCES DE SANDERS.....                 | 93  |
| A.1 Équations générales d'équilibre.....                           | 93  |
| A.2 Vecteur de déformation.....                                    | 95  |
| A.3 Conditions aux rives.....                                      | 96  |
| A.4 Paramètres pour une coque cylindrique de révolution.....       | 96  |
| A.5 Matrices $[P]$ , $[H]$ , $[A]$ , $[R]$ , $[T_m]$ , $[Q]$ ..... | 99  |
| <br>ANNEXE B CALCUL DE LA SOMME DES MATRICES DE MASSE DU           |     |
| FLUIDE.....                                                        | 104 |
| B.1 Expressions des matrices de masse.....                         | 104 |
| B.1.1 Cas $\varphi = \pi$ .....                                    | 104 |
| B.1.2 Cas $\varphi < \pi$ .....                                    | 108 |
| B.1.3 Cas $\varphi > \pi$ .....                                    | 113 |
| B.2 Assemblage de la matrice de masse de l'élément fini            |     |
| liquide.....                                                       | 118 |
| <br>ANNEXE C DÉVELOPPEMENT DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ DU FLUIDE..   | 119 |
| C.1 Cas $\varphi < \pi$ .....                                      | 119 |
| C.2 Cas $\varphi = \pi$ .....                                      | 121 |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| C.3 Cas $\varphi > \pi$ ..... | 122 |
|-------------------------------|-----|

## LISTE DES SYMBOLES

|                               |                                                                                               |
|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a$                           | Rayon intérieur de la coque                                                                   |
| $A_1, A_2$                    | Paramètres de Lamé                                                                            |
| $A_j$                         | Constantes définies par les relations (1.2.3) et (1.3.1)                                      |
| $B_j$                         | Constantes définies par les relations (1.2.3) et (1.3.1)                                      |
| $C_j$                         | Constantes définies par les relations (1.2.3) et (1.3.1)                                      |
| $\{C\}$                       | Vecteur des constantes arbitraires défini par (1.3.6)                                         |
| $D$                           | Rigidité de membrane                                                                          |
| $E$                           | Module d'élasticité de Young                                                                  |
| $\{F\}^e$                     | Vecteur des forces externes                                                                   |
| $\{F_j\}_k, \{F_i\}_{k+1}$    | Vecteurs des forces internes au nœud $j$ de l'élément $k$ et au nœud $i$ de l'élément $(k+1)$ |
| $g$                           | Accélération gravitationnelle                                                                 |
| $h_i$                         | Coefficients de l'équation caractéristique de la coque                                        |
| $J_{i\eta}$                   | Fonction de Bessel de l <sup>re</sup> espèce d'ordre $i\eta$                                  |
| $k_i$                         | Parties réelles de $\eta_i$                                                                   |
| $K$                           | Rigidité de flexion                                                                           |
| $L$                           | Longueur de la coque                                                                          |
| $m$                           | Nombre de mode axial                                                                          |
| $M_1, M_2, \overline{M}_{12}$ | Résultantes des contraintes de flexion                                                        |

|                                                              |                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| $M_x, M_\theta, \overline{M}_{x\theta}$                      | Résultantes des contraintes de flexion en coordonnées cylindriques                     |
| $N$                                                          | Nombre total des éléments finis                                                        |
| $N_1, N_2, \overline{N}_{12}$                                | Résultantes des contraintes de membrane                                                |
| $N_x, N_\theta, \overline{N}_{x\theta}$                      | Résultantes des contraintes de membrane en coordonnées cylindriques                    |
| $n$                                                          | Nombre de mode circonférentiel                                                         |
| $Q_1, Q_2$                                                   | Résultantes des contraintes de cisaillement                                            |
| $Q_x, Q_\theta$                                              | Résultantes des contraintes de cisaillement en coordonnées cylindriques                |
| $\{q\} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}$ | Vecteur de déplacement, en coordonnées locales, aux nœuds $i$ et $j$ de l'élément fini |
| $r$                                                          | Rayon moyen de la coque                                                                |
| $r_1(\theta)$                                                | Équation qui définit géométriquement la surface libre du fluide                        |
| $R_1, R_2$                                                   | Rayons de courbure de la surface moyenne                                               |
| $\{R_F\}$                                                    | Matrice définie par la relation (2.4.9)                                                |
| $t$                                                          | Épaisseur de la paroi                                                                  |
| $U$                                                          | Déplacement axial                                                                      |
| $V$                                                          | Déplacement circonférentiel                                                            |
| $W$                                                          | Déplacement radial                                                                     |
| $x$                                                          | Coordonnée suivant l'axe du cylindre                                                   |

|                      |                                                                                |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $Y_{in}$             | Fonction de Bessel de 2 <sup>e</sup> espèce d'ordre $in$                       |
| $\alpha_i, \beta_i$  | Définis par la relation (1.3.4)                                                |
| $\delta_i, \delta_j$ | Ensemble des quatre déplacements de chaque nœud, défini par (1.3.7) et (1.3.8) |
| $\{\delta\}$         | Vecteur de déplacement en coordonnées globales                                 |
| $\{\varepsilon\}$    | Vecteur de déformation défini par (1.4.1)                                      |
| $\{\sigma\}$         | Vecteur de résultantes des contraintes défini par (1.4.2)                      |
| $\varphi$            | Niveau du liquide dans la coque                                                |
| $\varphi_1$          | Définis par la relation (B.52)                                                 |
| $\Phi$               | Fonction de potentiel de vitesse                                               |
| $\mu_i$              | Parties imaginaires de $\eta_i$                                                |
| $\eta$               | Hauteur de la vague                                                            |
| $\eta_i$             | Solutions de l'équation caractéristique de la coque                            |
| $\xi_1, \xi_2$       | Coordonnées à la surface moyenne                                               |
| $\theta$             | Coordonnée circonférentielle                                                   |
| $\theta_G$           | Angle circonférentiel d'un élément fini fluide                                 |
| $\omega$             | Fréquence angulaire propre                                                     |
| $\nu$                | Coefficient de Poisson                                                         |
| $\rho$               | Densité de la coque                                                            |
| $\rho_F$             | Densité du fluide                                                              |

**Matrices**

|              |                                                   |
|--------------|---------------------------------------------------|
| $[A]$        | Matrice définie par la relation (1.3.9) et (A.20) |
| $[B]$        | Matrice définie par la relation (1.4.1)           |
| $[G]$        | Matrice définie par la relation (1.4.8)           |
| $[H]$        | Matrice définie par la relation (A.18)            |
| $[H_F]$      | Matrice définie par la relation (2.4.22)          |
| $[H_R]$      | Matrice définie par la relation (2.5.15)          |
| $[H_x]$      | Matrice définie par la relation (2.5.11)          |
| $[H_\theta]$ | Matrice définie par la relation (2.5.23)          |
| $[H_\eta]$   | Matrice définie par la relation (2.6.14)          |
| $[I_\eta]$   | Matrice définie par la relation (C.5) et (C.12)   |
| $[h]$        | Matrice définie par la relation (B.78)            |
| $[h_r]$      | Matrice définie par la relation (B.38) et (B.64)  |
| $[h_s]$      | Matrice définie par la relation (C.10)            |
| $[h_x]$      | Matrice définie par la relation (B.30) et (B.56)  |
| $[h_\theta]$ | Matrice définie par la relation (B.46) et (B.71)  |
| $[k_0]$      | Matrice définie par la relation (1.4.6)           |
| $[k_F]$      | Matrice définie par la relation (C.1) et (C.7)    |
| $[m_0]$      | Matrice définie par la relation (1.4.7)           |
| $[m_e]$      | Matrice définie par la relation (B.76)            |

|              |                                                  |
|--------------|--------------------------------------------------|
| $[m_r]$      | Matrice définie par la relation (B.41) et (B.66) |
| $[m_x]$      | Matrice définie par la relation (B.33), (B.58)   |
| $[m_\theta]$ | Matrice définie par la relation (B.49), (B.73)   |
| $[N]$        | Matrice définie par la relation (1.3.10)         |
| $[P]$        | Matrice définie par la relation (A.14) et (A.15) |
| $[Q]$        | Matrice définie par la relation (A.23)           |
| $[R]$        | Matrice définie par la relation (A.21)           |
| $[S]$        | Matrice définie par la relation (1.4.8)          |
| $[T_m]$      | Matrice définie par la relation (A.22)           |

## INTRODUCTION

### 0.1 Généralités

Les coques minces sont utilisées dans une grande variété d'applications. Elles ont suscité l'intérêt constant des chercheurs qui étudient leur comportement sous l'effet des charges dynamiques et statiques.

On les retrouve partout: dans l'industrie aéronautique, nucléaire ou en construction. De même, les configurations cylindriques sont intensivement utilisées sous diverses formes comme réservoirs sous pression, conduites, conteneurs et composantes structurales.

La présence d'un fluide à l'intérieur de la coque a une influence importante dans le comportement dynamique de la structure et peut générer des problèmes complexes à résoudre. D'ailleurs, dans le design d'un vaisseau contenant un fluide, le calcul des fréquences naturelles du système est une étape préliminaire pour l'analyse dynamique.

Le couplage hydrodynamique entre le fluide et la structure peut être exprimé en termes de trois composantes de force: l'inertie, la force de Coriolis et la force centrifuge. Le terme d'inertie est utilisé pour indiquer la masse ajoutée à la masse réelle de la structure. Parmi les études réalisées dans le domaine d'interaction fluide - structure, on peut distinguer plusieurs directions principales comme: le couplage hydrodynamique, les

mouvements de la surface libre de fluide ou le «sloshing» et les vibrations induites par l'écoulement.

Les premières études qui constituent d'ailleurs les bases théoriques du comportement du fluide à l'intérieur des coques cylindriques, sphériques et autres datent du dix-neuvième siècle et peuvent être trouvées dans les travaux de Rayleigh et Lamb [36]. Après la deuxième guerre mondiale, l'avancement technologique et scientifique a donné un nouvel élan à ce domaine de recherche dans le but de soutenir les programmes de développement des vols des fusées cosmiques.

Parmi les études des années soixante, mentionnons celle de Berry et Reissner [7] qui étudiait le cas d'interaction d'un fluide pressurisé à l'intérieur d'une coque cylindrique. Les deux chercheurs ont utilisé la théorie des coques minces pour le cas des coques cylindriques en considérant un chargement composé de la pression statique interne et de l'inertie de la coque due au seul mouvement radial et de l'inertie du fluide à partir de la masse de fluide pressurisée.

Une autre étude théorique et expérimentale est celle de Lindholm, Kana et Abramson [37] qui ont analysé les vibrations des coques minces partiellement remplies de liquide dans le cas des coques cylindriques nonpressurisées. Il faut aussi tenir compte du travail de Coale et Nagano [10] qui ont considéré le cas d'une coque cylindrique couplée à une coque sphérique remplies de liquide.

Mazúch et al. [39] présentent le cas d'une coque cylindrique verticale en faisant une analyse modale pour différents niveaux du fluide. Une bonne concordance avec un modèle d'élément fini est trouvé seulement pour le mode  $n = 2$ ,  $m = 1$ .

Amabili [2] dans une étude expérimentale présente une analyse modale d'une coque cylindrique horizontale simplement supportée en interaction avec du liquide de différents niveaux.

Une étude avec une méthode combinée : théorie d'éléments finis et théorie d'élément de frontière (boundary element method) des coques immergées est proposée par Bérot et al. [6].

Des interactions plus complexes sont étudiées par Jeong [15] qui s'intéressait à l'influence transmise par un fluide entre deux coques cylindriques.

Niezrecki et al. [45] teste expérimentalement une coque simplement supportée aux deux bouts en essayant de créer les conditions théoriques idéales.

Une modélisation est proposée par Liu et al. [38] en appliquant la méthode d'analyse énergétique statistique pour étudier l'interaction liquide - structure.

Les trois derniers décennies, Lakis et al. [19] - [35] ont étudié les effets de la pression, de la surface libre et de l'écoulement du fluide interne et/ou externe sur la dynamique des coques minces composées de matériaux isotropes, orthotropes et anisotropes. C'est

une formulation basée sur la méthode des éléments finis et sur la théorie classique des coques minces.

Le développement de la présente recherche est fondé sur la méthode des éléments finis et sur l'application des équations de Lagrange pour obtenir l'influence du fluide sur les fréquences naturelles d'une coque cylindrique horizontale. L'objectif est de modéliser une coque horizontale partiellement remplie de liquide. Dans cet élément de fluide nous tenons compte de l'effet de la surface libre sur les fréquences naturelles du système.

L'élément fini utilisé est de forme cylindrique et les fonctions de déplacement sont dérivées de la théorie des coques minces de Sanders.

## **0.2 Objectifs de la recherche**

Le but de la présente recherche est d'analyser le comportement dynamique des mouvements de la surface libre de liquide en interaction avec une coque cylindrique horizontale.

L'étude est située dans le domaine des vibrations des coques minces partiellement et/ou totalement remplies de liquide. C'est une méthode hybride qui combine les éléments finis avec la théorie des coques minces pour obtenir les fonctions de déplacement spécifiques qui s'adaptent mieux aux déformations réelles.

Le comportement dynamique du système est régi par l'équation de mouvement:

$$([M_0] - [M_F])\{\ddot{\delta}\} - [C_F]\{\dot{\delta}\} + ([K_0] - [K_F])\{\delta\} = \{F(t)\} \quad (I.2.1)$$

où  $[M_0]$  et  $[K_0]$  représentent les matrices de masse et de rigidité de la coque solide (voir référence [34]),  $[M_F]$ ,  $[C_F]$  et  $[K_F]$  sont les matrices associées aux forces d'inertie, de coriolis et centrifuge et qui représentent l'effet du fluide sur la coque (voir référence [31]).  $\{F(t)\}$  est le vecteur des forces dues à un champ de pression aléatoire (voir référence [33]).

Pour le cas du fluide au repos, les matrices  $[C_F]$ ,  $[K_F]$  et  $\{F(t)\}$  sont nulles et l'équation (I.2.1) prend la forme suivante:

$$([M_0] - [M_f])\{\ddot{\delta}\} + [K_0]\{\delta\} = \{0\} \quad (I.2.2)$$

Dans les équations (I.2.1) et (I.2.2) les effets induits par la surface libre du liquide ont été négligés. Pour tenir compte de ces effets, nous allons ajouter une matrice de masse pour la surface en mouvement et une matrice de rigidité pour le changement de potentiel du liquide dû à l'élévation des vagues:

$$([M_0] - ([M_f] + [M_{fs}]))\{\ddot{\delta}\} + ([K_0] - [K_{fs}])\{\delta\} = \{0\} \quad (I.2.3)$$

Finalement avec les notations  $[M_F] = [M_f] + [M_{fs}]$  et  $[K_F] = -[K_{fs}]$ , nous trouvons pour le comportement dynamique du système l'équation de mouvement:

$$([M_0] + [M_F])\{\ddot{\delta}\} + ([K_0] + [K_F])\{\delta\} = \{0\} \quad (I.2.4)$$

Les matrices  $[M_o]$ ,  $[K_o]$  ont été calculées dans une recherche antérieure par Lakis et al. [34]. Dans cette étude, nous développons donc les matrices  $[M_F]$  et  $[K_F]$  pour modéliser le comportement du fluide en tenant compte des mouvements de la surface libre. Ensuite, pour analyser l'effet des oscillations de la surface, nous faisons une analyse comparative entre les résultats obtenus par cette méthode et ceux obtenus par Lakis [31] qui ne prennent pas en considération l'influence de la surface libre.

Nous considérons l'influence de plusieurs paramètres comme : le mode circonférentiel, le mode axial, le rapport d'élancement structural, la largeur de la coque ainsi que les forces d'inertie induites par le liquide et sa surface libre.

Pour une coque cylindrique horizontale mince, nous calculons des fonctions de déplacement spécifiques à partir de la théorie des coques. En utilisant ces résultats avec la méthode des éléments finis, nous trouvons les matrices de masse et de rigidité de la coque solide et les équations de mouvement. Tenant compte des conditions d'imperméabilité à l'interface fluide - structure, nous exprimons le comportement de l'élément fluide à l'aide d'une fonction potentielle. Les énergies cinétique et potentielle de la masse de liquide sont calculées afin de trouver l'influence du fluide et des mouvements de la surface libre sur les vibrations du système coque - fluide.

### 3 Contenu du mémoire

Dans le chapitre I, nous développons les fonctions de déplacement, les matrices de masse et de rigidité et enfin les équations de mouvement de la coque solide.

Au chapitre II, nous définissons la fonction de potentiel des vitesses qui exprime le comportement du fluide, nous modélisons le mouvement de la surface et nous trouvons les matrices élémentaires fluides de masse et de rigidité induites par le mouvement de la surface libre.

Au chapitre III, nous présentons les principales étapes de la réalisation du programme informatique en détaillant le choix des logiciels et l'assemblage des éléments finis fluides.

Pour valider le modèle nous analysons la convergence de la solution et des résultats théoriques sont comparés avec des valeurs obtenues expérimentalement. La dernière partie est réservée à l'analyse de l'influence du mouvement vibratoire de la surface libre.

Finalement, nous présentons les conclusions générales.

## CHAPITRE I

### FORMULATION ANALYTIQUE DE LA COQUE CYLINDRIQUE

#### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les fonctions de déplacement pour un élément fini cylindrique à partir du travail de Lakis et Paidoussis [34] et nous développons les équations de base qui nous permettront de trouver les matrices de masse et de rigidité pour la partie solide du système à analyser.

#### 1.2 Fonctions de déplacement

L'élément fini utilisé est horizontal et il est limité à ses deux extrémités par deux nœuds linéaires  $i$  et  $j$  (Figure 1.1). Les fonctions de déplacement pour un élément fini cylindrique peuvent être exprimées d'une manière générale:

$$\begin{Bmatrix} U(x,\theta) \\ W(x,\theta) \\ V(x,\theta) \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (1.2.1)$$

où les éléments de la matrice  $[N]$  sont fonction de la position et de l'anisotropie de la coque et où le vecteur  $\{\delta_i \quad \delta_j\}^T$  représente les déplacements nodaux.

Pour dériver les fonctions de déplacement, nous utiliserons les équations de Sanders [51] du premier ordre. Ces équations sont basées sur la première approximation de Love et permettent d'avoir des déformations nulles pour des petits mouvements de corps rigide, ce qui n'est pas le cas pour d'autres formulations. Les équations d'équilibre des coques minces et des coques cylindriques ainsi que leur développement analytique sont données à l'Annexe A.

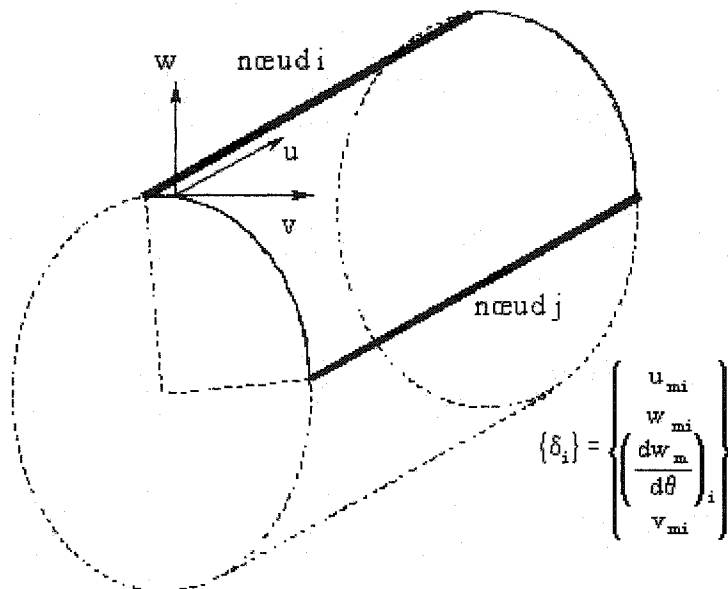


Figure 1.1 Représentation schématique d'un élément fini de coque

Pour l'équilibre de la coque géométriquement axisymétrique, il y a cinq équations générales qui seront réduites à trois en éliminant les forces de cisaillement  $Q_x$  et  $Q_\theta$ . En remplaçant les déplacements axiaux, radiaux et circonférentiels dans les équations d'équilibre, on obtient trois équations différentielles. Leur solution donne les fonctions de déplacement.

La forme générale des fonctions de déplacement (en coordonnées cylindriques dans les directions axiale, tangentielle et radiale et en tenant compte de leur périodicité dans la direction axiale) provient de la solution des équations de mouvement d'une coque cylindrique telle que :

$$\begin{aligned} U(x, \theta) &= u_m(\theta) \cos \frac{m\pi x}{L} \\ V(x, \theta) &= v_m(\theta) \sin \frac{m\pi x}{L} \\ W(x, \theta) &= w_m(\theta) \sin \frac{m\pi x}{L} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

où:

- $m$  est le nombre de mode axial,
- $x$  est la coordonnée suivant l'axe du cylindre,
- $\theta$  la coordonnée suivant la direction circonférentielle,
- $L$  est la longueur totale de l'élément fini et en assumant :

$$\begin{aligned} u_m(\theta) &= \sum_{i=1}^8 A_i e^{\eta_i \theta} \\ v_m(\theta) &= \sum_{i=1}^8 B_i e^{\eta_i \theta} \\ w_m(\theta) &= \sum_{i=1}^8 C_i e^{\eta_i \theta} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

où  $\eta_i$ ,  $i=1,8$  sont les solutions de l'équation caractéristique de la coque solide, nous obtiendrons les solutions des équations différentielles (A.10 – A.12) qui décrivent le comportement de la coque cylindrique.

### 1.3 Équation caractéristique

Lorsque nous remplaçons les fonctions de déplacement données par les relations (1.2.2), (1.2.3) dans les équations d'équilibre (voir Annexe A équations (A.10) - (A.12)), nous obtenons un système linéaire de trois équations:

$$[H] \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.3.1)$$

Pour obtenir une solution non triviale, le déterminant de la matrice  $[H]$  doit être égal à zéro, ce qui nous donne une équation caractéristique du huitième ordre en  $\eta$  :

$$h_8 \eta^8 + h_6 \eta^6 + h_4 \eta^4 + h_2 \eta^2 + h_0 = 0 \quad (1.3.2)$$

En séparant les parties réelles des parties imaginaires, les huit solutions  $\eta_i$  complexes de l'équation caractéristique peuvent être écrites sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -k_1 + i\mu_1 & \eta_5 &= k_1 + i\mu_1 \\ \eta_2 &= -k_1 - i\mu_1 & \eta_6 &= k_1 - i\mu_1 \\ \eta_3 &= -k_2 + i\mu_2 & \eta_7 &= k_2 + i\mu_2 \\ \eta_4 &= -k_2 - i\mu_2 & \eta_8 &= k_2 - i\mu_2 \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

où  $k_i$  et  $\mu_i$  sont des nombres réels.

Chaque valeur de  $\eta_i$ , constitue une solution des équations d'équilibre et la solution complète est une combinaison linéaire de celles-ci avec les constantes  $A_j$ ,  $B_j$  et  $C_j$ , où  $j$  varie de 1 à 8.

Puisque  $A_j$ ,  $B_j$  et  $C_j$ , ne sont pas des variables indépendantes nous exprimerons  $A_j$  et  $B_j$ , en fonction de  $C_j$  à l'aide des constantes complexes  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  :

$$\begin{aligned} A_j &= \alpha_j C_j \\ B_j &= \beta_j C_j \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

En remplaçant maintenant les relations (1.3.4) dans les équations (1.3.1), nous pouvons déterminer  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  qui sont reliés entre eux par l'équation (1.3.3). On doit donc résoudre seulement deux paires d'équations car  $\eta_1$  et  $\eta_2$ ,  $\eta_3$  et  $\eta_4$ ,  $\eta_5$  et  $\eta_6$ ,  $\eta_7$  et  $\eta_8$  sont des racines complexes conjuguées.

Étant donné que les déplacements sont des fonctions réelles,  $u_m$ ,  $v_m$  et  $w_m$  doivent aussi être des nombres réels. La forme matricielle finale peut donc s'écrire comme suit :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [T_m][R]\{C\} \quad (1.3.5)$$

où  $[T_m]$  et  $[R]$  sont des matrices de dimensions  $(3 \times 3)$  et  $(3 \times 8)$  et sont données dans l'Annexe A. Le vecteur  $\{C\}$  contient les seules constantes libres du problème qui seront exprimées en fonction des déplacements aux nœuds des éléments.

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \vdots \\ \bar{C}_8 \end{Bmatrix} \quad (1.3.6)$$

Les déplacements au nœud **i** sont définis par le vecteur:

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_{mi} \\ w_{mi} \\ \left(\frac{dw_m}{d\theta}\right)_i \\ v_{mi} \end{Bmatrix} \quad (1.3.7)$$

Toutes les composantes du vecteur  $\{\delta_i\}$  représentent les amplitudes des déplacements  $U$ ,  $W$ ,  $dW/d\theta$  et  $V$  associées au mode axial  $m$ . Chaque élément a deux nœuds et huit degrés de liberté (voir aussi Figure 1.1):

$$\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{mi} \\ w_{mi} \\ \left(\frac{dw_m}{d\theta}\right)_i \\ v_{mi} \\ u_{mj} \\ w_{mj} \\ \left(\frac{dw_m}{d\theta}\right)_j \\ v_{mj} \end{Bmatrix} = [A]\{C\} \quad (1.3.8)$$

Les termes de la matrice  $[A]$  sont obtenus à partir des valeurs de la matrice  $[R]$  et sont donnés dans l'Annexe A.

En multipliant par  $[A]^{-1}$  nous obtenons l'expression matricielle des constantes  $C_j$ , en fonction des degrés de liberté:

$$\{C\} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (1.3.9)$$

Finalement, nous substituons le vecteur  $\{C\}$  dans la relation (1.3.5) et nous obtenons les fonctions de déplacement sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [T_m][R][A]^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (1.3.10)$$

Les matrices  $[T_m]$ ,  $[R]$  et  $[A]$  sont données dans l'Annexe A.

#### 1.4 Matrices de masse et de rigidité

Le vecteur des déformations  $\{\epsilon\}$  peut être déterminé à partir des fonctions de déplacement  $U$ ,  $V$ ,  $W$  et des relations déformations - déplacements présentées dans l'Annexe A sous la forme:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ 2\varepsilon_{x\theta} \\ k_x \\ k_\theta \\ 2\bar{k}_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_m] & [0] \\ [0] & [T_m] \end{bmatrix} [Q][A]^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (1.4.1)$$

où les matrices  $[T_m]$  et  $[Q]$  sont données dans l'Annexe A.

Le vecteur des contraintes  $\{\sigma\}$  s'exprime en fonction des déformations  $\{\varepsilon\}$  et des relations contraintes - déformations (1.4.1):

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ \bar{N}_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ \bar{M}_{x\theta} \end{Bmatrix} = [P]\{\varepsilon\} = [P][B] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (1.4.2)$$

Pour le cas plus général d'un matériau orthotrope, la matrice  $[P]$  prend la forme (les coefficients  $P_{ij}$  proviennent de la référence [28]) :

$$[P] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & P_{14} & P_{15} & 0 \\ P_{21} & P_{22} & 0 & P_{24} & P_{25} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} & 0 & 0 & P_{36} \\ P_{41} & P_{42} & 0 & P_{44} & P_{45} & 0 \\ P_{51} & P_{52} & 0 & P_{54} & P_{55} & 0 \\ 0 & 0 & P_{63} & 0 & 0 & P_{66} \end{bmatrix} \quad (1.4.3)$$

Pour le cas d'une coque cylindrique formée d'un matériau isotrope les termes de la matrice d'élasticité  $[P]$  prennent la forme :

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= P_{22} = D & P_{44} &= P_{55} = K \\
 P_{12} &= P_{21} = \nu D & P_{45} &= P_{54} = \nu K \\
 P_{33} &= \frac{(1-\nu)}{2} D & P_{66} &= \frac{(1-\nu)}{2} K \\
 P_{14} &= P_{15} = P_{24} = P_{25} = P_{36} = P_{41} = \\
 &= P_{42} = P_{51} = P_{52} = P_{63} = 0
 \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

avec les paramètres:

$D$  = rigidité de membrane

$K$  = rigidité de flexion

$$D = \frac{E t}{1 - \nu^2}; \quad K = \frac{E t^3}{12 (1 - \nu^2)} \tag{1.4.5}$$

Les matrices de rigidité et de masse sont exprimées ensuite en fonction des équations

(1.4.1) - (1.4.3):

$$[k_0] = \iint_A [B]^T [P] [B] dA \tag{1.4.6}$$

$$[m_0] = \rho t \iint_A [N]^T [N] dA \tag{1.4.7}$$

où  $\rho$  est la densité de la coque et  $t$  son épaisseur.

L'élément de surface pour la paroi de la coque est  $dA = r d\theta dx$ ; en effectuant l'intégrale en fonction de  $\theta$  et  $x$  nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} [m_0] &= [A^{-1}]^T [S] [A^{-1}] \\ [k_0] &= [A^{-1}]^T [G] [A^{-1}] \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

où les matrices  $[S]$  et  $[G]$  sont définies dans l'Annexe A.

Maintenant nous sommes en mesure d'établir l'équation de mouvement pour un élément fini à vide qui sera donné par:

$$[m_0] \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_i \\ \ddot{\delta}_j \end{Bmatrix} + [k_0] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (1.4.9)$$

pour le cas des forces extérieures nulles.

L'assemblage des matrices élémentaires est fait en respectant les conditions de continuité sur la circonférence de la coque:

- La somme des forces et des moments à un nœud quelconque doit être égale à la somme des forces extérieures appliquées au nœud:

$$\{F\}^e = \{F_j\}_k + \{F_i\}_{k+1} \quad (1.4.10)$$

- L'égalité des déplacements au même nœud pour deux éléments voisins:

$$\{\delta_j\} = \{\delta_{i+1}\} \quad (1.4.11)$$

À partir de ces relations, nous pouvons assembler les matrices de masse et de rigidité de chaque élément dans le but d'obtenir les matrices de masse et de rigidité pour toute la coque:  $[M]$  et  $[K]$ . Chaque matrice élémentaire est de dimension  $(8 \times 8)$ , donc la

dimension finale de  $[M]$  et  $[K]$  sera  $4N$  (vu que la structure est fermée et le dernier élément est voisin du premier), où  $N$  est le nombre des éléments de la coque.

En termes de coordonnées globales, l'équation de mouvement pour toute la coque sera:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{0\} \quad (1.4.12)$$

## CHAPITRE II

### FORMULATION ANALYTIQUE AVEC FLUIDE

#### 2.1 Introduction

Nous considérons que le comportement dynamique de la coque cylindrique soumise à la pression du fluide est gouverné par l'équation de mouvement suivante (voir 1.2.4) :

$$([M_0] + [M_F])\{\ddot{\delta}\} + ([K_0] + [K_F])\{\delta\} = \{0\} \quad (2.1.1)$$

ou :

- $\delta$  est le vecteur de déplacement,
- $[M_0]$  et  $[K_0]$  sont les matrices de masse et de rigidité de la coque,
- $[M_F]$  et  $[K_F]$  sont les matrices de masse et de rigidité dues au fluide et à sa

surface libre

#### 2.2 Formulation du problème et hypothèse de base

Dans le but d'analyser le comportement dynamique du système fluide - structure nous assumons les hypothèses suivantes :

- a) le mouvement du fluide est irrotationnel et sans frottement;
- b) le cas des petites vibrations (théorie linéaire) est seulement considéré;
- c) le fluide est incompressible;

- d) la distribution des vitesses dans la section transversale est constante;
- e) la pression du fluide est supposée seulement radiale;
- f) l'énergie du fluide sera dérivée à partir des écoulements potentiels.

On suppose un élément fini avec les sections suggérées par les Figures 2.1, 2.2 et 2.3 avec deux nœuds  $i$  et  $j$ ; et pour chaque nœud les déplacements sont donnés par le vecteur :

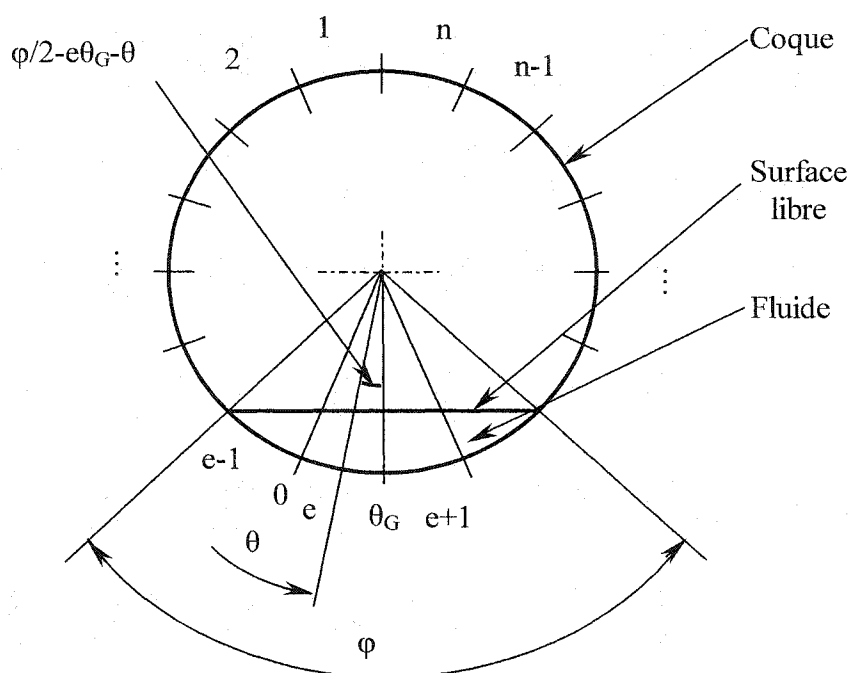


Figure 2.1 Exemple de maillage pour le cas  $\varphi < \pi$

$$\{\delta_i\} = \left\{ \begin{array}{c} u_{mi} \\ w_{mi} \\ \left( \frac{dw_m}{d\theta} \right)_i \\ v_{mi} \end{array} \right\} \quad (2.2.2)$$

où  $u_{mi}$ ,  $v_{mi}$ , et  $w_{mi}$  sont, respectivement, les composantes des déplacements axiaux, tangentiels et radiaux associées au nombre axial  $m$ .

Les équations qui régissent le comportement de l'élément liquide pour le cas d'un mouvement irrotationnel peuvent être exprimées en fonction d'un potentiel de vitesses  $\Phi$ . Le champ des vitesses associées est défini par les dérivées de la fonction potentiel.

Pour un fluide incompressible ( $\rho = \text{cte.}$ ), le mouvement est régi par l'équation de continuité sous la forme :

$$\nabla \bar{V} = 0 \quad (2.2.3)$$

Vu que  $\bar{V} = \nabla \Phi$  – car le mouvement est supposé irrotationnel – l'équation de mouvement devient :

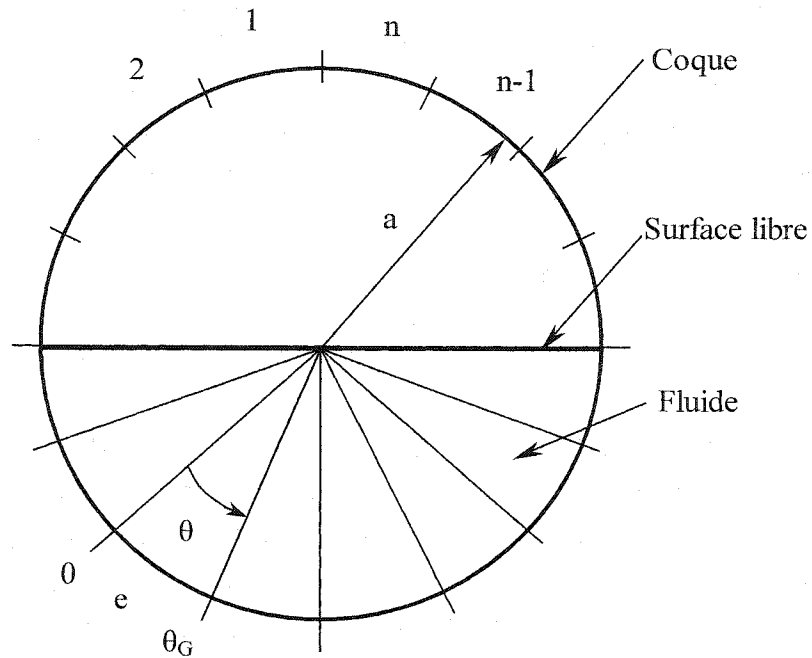


Figure 2.2 Exemple de maillage pour le cas  $\varphi = \pi$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.2.4)$$

$$V_x = U_x + \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad V_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \quad V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (2.2.5)$$

où  $U_x$  est la vitesse moyenne dans la direction de l'axe  $x$ ;  $V_x$ ,  $V_\theta$  et  $V_r$  sont les composantes axiale, tangentielle et radiale de la vitesse du fluide.

La condition d'imperméabilité pour avoir un contact entre la structure et le fluide peut être exprimée sous la forme suivante :

$$V_r|_{r=a} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U_x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{U_x^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{r=a} \quad (2.2.6)$$

où  $a$  = rayon intérieur de la coque.

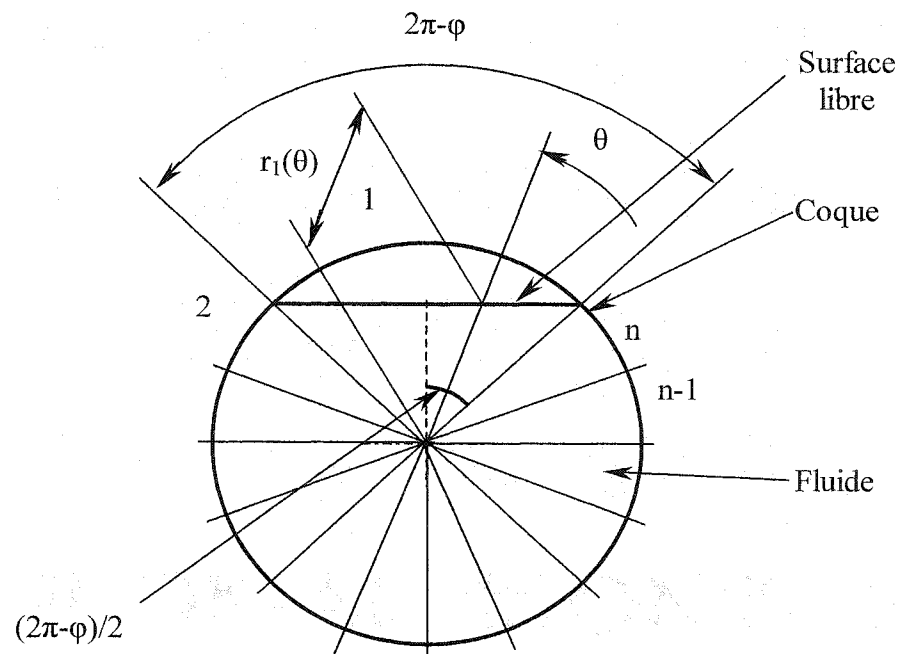


Figure 2.3 Exemple de maillage pour le cas  $\varphi > \pi$

### 2.3 Influence de la surface libre du fluide

Pour déterminer l'effet de la surface libre, on applique l'équation de Bernoulli sous sa forme générale :

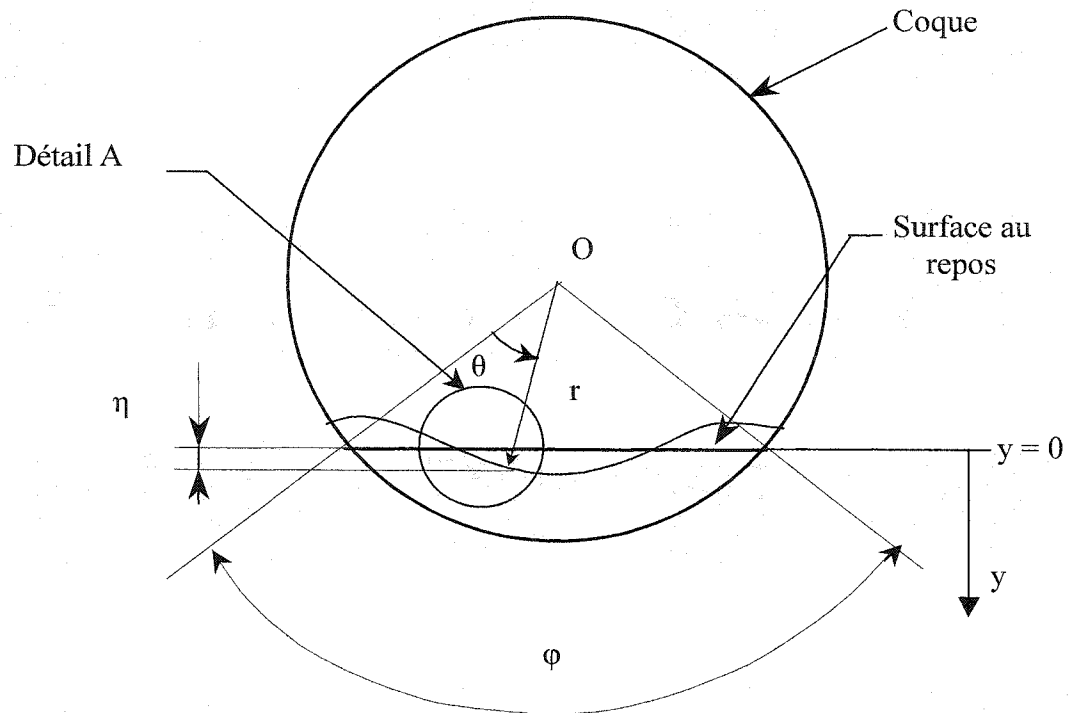


Figure 2.4 Effet de la surface libre

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gy + F(t) \quad (2.3.1)$$

où :

- $F(t)$  est une constante en fonction du temps qui sera incluse dans la valeur de  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  ;
- $g$  est l'accélération gravitationnelle et
- $y$  représente le niveau du fluide ( voir Figure 2.4).

Soit  $\eta$  l'élévation d'un point de la surface au moment  $t$  par rapport à la surface horizontale non perturbée ( voir Figure 2.4). Puisque la pression ( $p$ ) est constante à la surface ou nulle, l'équation de Bernoulli (2.3.1) nous donne la valeur de  $\eta$  comme suit :

$$\eta = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_{y=\eta} \quad (2.3.2)$$

ou encore, avec une approximation du même ordre de grandeur, suivant Lamb [36] :

$$\eta = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_{y=0} \quad (2.3.3)$$

Donc  $\eta$  est calculé à  $y = 0$  ( voir Figure 2.4 ), ce qui est le niveau de la surface du liquide non perturbée.

Lorsque le fluide est en mouvement, nous supposons que la normale à la surface fait un petit angle avec la verticale et que la vitesse de la surface du liquide est égale à la vitesse du fluide :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -[v_{ry} + v_{\theta y}]_{y=0} \quad (2.3.4)$$

où  $v_{ry}$  et  $v_{\theta y}$  sont les composantes verticales de  $v_r$  et  $v_\theta$ , respectivement. Ces termes peuvent être exprimés de la façon suivante (voir Figure 2.5) :

$$\begin{aligned} v_{ry} &= v_r \cos\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right) \\ v_{\theta y} &= v_\theta \sin\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sin\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

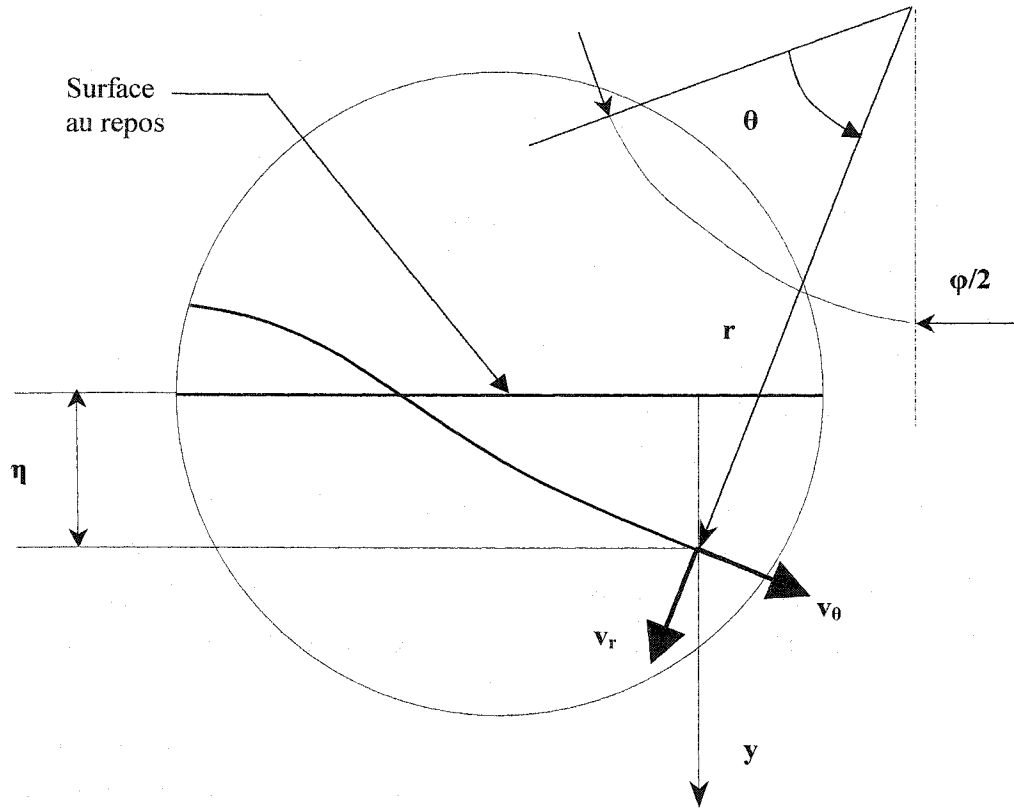


Figure 2.5 Détail "A" de la surface libre

On peut réécrire la relation (2.3.4) comme suit :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \left( \frac{\phi}{2} - e\theta_G - \theta \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sin \left( \frac{\phi}{2} - e\theta_G - \theta \right) \right]_{y=0} \quad (2.3.6)$$

En utilisant (2.3.3) et (2.3.6), nous obtenons la relation suivante qui est valide pour le cas  $\phi < \pi$  :

$$\left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \left( \frac{\phi}{2} - e\theta_G - \theta \right) + g \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sin \left( \frac{\phi}{2} - e\theta_G - \theta \right) \right]_{y=0} = 0 \quad (2.3.7)$$

Dans le cas  $\phi = \pi$ , la relation (2.3.7) devient :

$$\left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right]_{y=0} = 0 \quad (2.3.8)$$

Pour le cas  $\phi > \pi$ , la relation (2.3.7) devient :

$$\left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \left( \frac{2\pi - \phi}{2} - \theta \right) + g \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sin \left( \frac{2\pi - \phi}{2} - \theta \right) \right]_{y=0} = 0 \quad (2.3.9)$$

Ces dernières relations (2.3.7), (2.3.8) et (2.3.9) constituent la condition linéaire générale associée à la surface libre du fluide pour  $\phi < \pi$ ,  $\phi = \pi$  et  $\phi > \pi$ , respectivement.

Pour évaluer l'influence de la surface sur les vibrations du système coque – fluide, nous devons développer les énergies cinétique et potentielle du mouvement vibratoire.

Cette approche, proposée par Lamb [36], nous conduit à l'évaluation des expressions suivantes :

$$T = \frac{\rho}{2} \iint_{S_s} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n_s} ds \quad (2.3.10)$$

$$V = \rho_F g \iiint_V y \, dV \quad (2.3.11)$$

où :

- $S_s$  représente la surface libre de fluide,
- $n_s$  représente la normale sur la surface libre, positive vers l'extérieur et
- $y$  représente la cordonnée suivant la direction verticale.

L'énergie cinétique totale du fluide à l'intérieur de la coque est donnée par l'intégrale de volume de la somme des carrés des vitesses :

$$T = \frac{\rho_F}{2} \iiint_V [v_x^2 + v_r^2 + v_\theta^2] \, dV \quad (2.3.12)$$

En exprimant les composantes de la vitesse à l'aide de la fonction potentielle, nous obtenons :

$$T = \frac{\rho_F}{2} \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} \right)^2 \right] \, dV \quad (2.3.13)$$

Et en appliquant l'intégration par partie et le théorème de Green – Gauss sur l'intégrale de volume de l'énergie cinétique, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{2T}{\rho_F} &= \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} \right)^2 \right] dV = \\
&= \iint_S \left[ \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] dS - \iiint_V [\Phi \nabla^2 \Phi] dV
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

où :

- S est la surface qui entoure le volume de fluide et
- n est la normale à cette surface, positive vers l'extérieur.

Mais les équations de continuité et l'hypothèse que le fluide est irrotationnel imposent

que  $\nabla^2 \Phi = 0$ , ce qui annule le dernier terme de l'expression antérieure et l'équation

(2.3.14) devient :

$$\frac{2T}{\rho_F} = \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} \right)^2 \right] dV = \iint_S \left[ \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] dS \tag{2.3.15}$$

De plus le terme de droite de l'équation (2.3.15) pourra s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
\iint_S \left[ \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] dS &= \iint_{S_s} \left[ \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n_s} \right] dS + \iint_{S_L} \left[ \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n_L} \right] dS - \iint_{S_R} \left[ \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n_R} \right] dS - \\
&- \iint_{S_i} \left[ \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n_i} \right] dS + \iint_{S_1} \left[ \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \right] dS + \iint_{S_2} \left[ \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} \right] dS
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

où :

- $S_s$  et  $n_s$  sont, respectivement, la surface libre (surface supérieure) et la normale à cette surface positive vers l'extérieur (voir Figure 2.6);

- $S_L$ ,  $n_L$ ,  $S_R$  et  $n_R$  représentent, respectivement, les surfaces latérales à gauche et à droite du volume de fluide et les normales aux surfaces positives vers l'extérieur;
- $S_i$  et  $n_i$  indiquent, respectivement, la surface inférieure (au contact avec la structure solide) et la normale à cette surface positive vers l'extérieur;
- $S_1$ ,  $n_1$ ,  $S_2$  et  $n_2$  symbolisent, respectivement, les deux surfaces aux deux bouts de la coque et les normales à ces surfaces positives vers l'extérieur.

En se référant à la Figure 2.6, les termes en  $S_L$  et  $S_R$  s'annulent avec les surfaces des éléments voisins. La surface  $S_i$  tient compte de l'effet de la pression dynamique du fluide à la paroi. Les deux dernières intégrales sont nulles car  $\frac{\partial \Phi}{\partial n_1} = 0$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial n_2} = 0$  (la vitesse aux surfaces latérales est zéro).

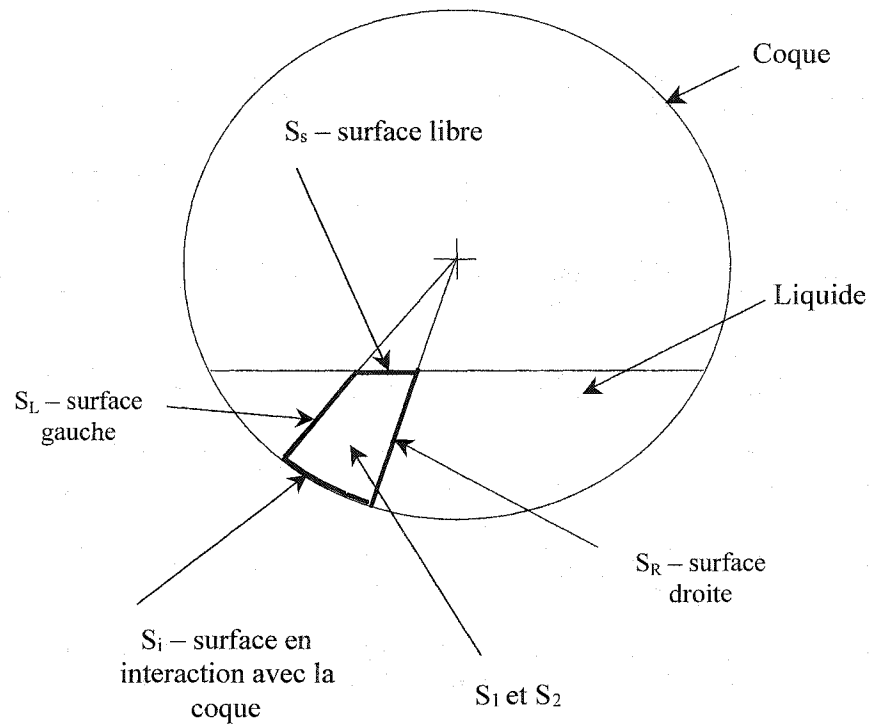


Figure 2.6 Les surfaces d'un élément fini liquide

Cette équation, (2.3.15), tient compte à la fois des énergies de la surface libre et de la surface du contact entre la coque et le fluide.

## 2.4 Résolution de l'équation de continuité

De la théorie des coques, le déplacement radial de la paroi solide,  $w$ , est une fonction de type :

$$W(x, \theta, t) = \sum_{j=1}^8 C_j e^{\eta_j \theta + i \omega t} \sin \frac{m \pi x}{L} \quad (2.4.1)$$

$$W(x, \theta, t) = \sum_{j=1}^8 w_j$$

Par séparation des variables, nous pouvons écrire :

$$\Phi(x, \theta, r, t) = \sum_{j=1}^8 R_j(r) S_j(x, \theta, t) \quad (2.4.2)$$

En utilisant la condition d'imperméabilité (2.2.5) nous obtenons :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=a} = \sum_{j=1}^8 \left( \frac{\partial w_j}{\partial t} + U_x \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{U_x^2}{2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \right) \bigg|_{r=a} = \sum_{j=1}^8 R'_j(a) S_j(x, \theta, t) \quad (2.4.3)$$

Dans le cas où  $U_x = 0$ , nous obtenons, pour chaque "j" :

$$S_j(x, \theta, t) = \frac{\dot{w}_j}{R'_j(a)} \quad \text{avec} \quad \dot{w}_j = \frac{\partial w_j}{\partial t} \quad (2.4.4)$$

La relation (2.4.4) fixe la variation de la fonction de potentiel selon  $x$ ,  $\theta$ , et  $t$  et nous conduit aux expressions suivantes :

$$\Phi(x, r, \theta, t) = \sum_{j=1}^8 \left( \frac{R_j(r)}{R'_j(a)} \dot{w}_j \right) \quad \text{avec} \quad R'_j(a) = \left. \frac{\partial R_j(r)}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (2.4.5)$$

En introduisant l'équation (2.4.5) dans la relation du potentiel (2.2.4) nous obtenons une équation différentielle de Bessel :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \sum_{j=1}^8 R_j(r) \frac{\dot{w}_j}{R'_j(a)} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \sum_{j=1}^8 R_j(r) \frac{\dot{w}_j}{R'_j(a)} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{j=1}^8 R_j(r) \frac{\dot{w}_j}{R'_j(a)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

ou :

$$\sum_{j=1}^8 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( R_j(r) \frac{\dot{w}_j}{R'_j(a)} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( R_j(r) \frac{\dot{w}_j}{R'_j(a)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( R_j(r) \frac{\dot{w}_j}{R'_j(a)} \right) \right\} = 0 \quad (2.4.7)$$

où :

$$\dot{w}_j = \frac{\partial w_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ C_j e^{\eta_j \theta + i \omega t} \sin \left( \frac{m \pi x}{L} \right) \right] = i \omega C_j e^{\eta_j \theta + i \omega t} \sin \left( \frac{m \pi x}{L} \right) \quad (2.4.8)$$

Cette équation (2.4.7) peut être réduite à l'expression suivante :

$$r^2 \frac{d^2 R_j(r)}{dr^2} + r \frac{dR_j(r)}{dr} + R_j(r) \left[ \left( \frac{i m \pi}{L} \right)^2 r^2 - (i \eta_j)^2 \right] = 0 \quad (2.4.9)$$

où  $i^2 = -1$ ,  $\eta_j$ , avec  $j = 1, 2, \dots, 8$  sont les solutions complexes de l'équation caractéristique.

La solution générale de l'équation différentielle de Bessel (2.4.9) est donnée par :

$$R_j(r) = A J_{i \eta_j} \left( \frac{i m \pi}{L} r \right) + B Y_{i \eta_j} \left( \frac{i m \pi}{L} r \right) \quad (2.4.10)$$

où  $J_{i \eta_j}$  et  $Y_{i \eta_j}$  sont les fonctions de Bessel de première et de deuxième espèces et d'ordre  $i \eta_j$ .

Pour un écoulement interne ( $r = 0$ ), la solution doit être finie, mais

$\lim_{r \rightarrow 0} Y_{i\eta_j} \left( \frac{i\pi}{L} r \right) \rightarrow -\infty$ ; il faut donc que  $B \rightarrow 0$ . Alors la solution devient :

$$R_j(r) = A J_{i\eta_j} \left( \frac{i\pi}{L} r \right) \quad (2.4.11)$$

En tenant compte que les racines  $\eta_j$  sont en fait des nombres complexes conjugués nous pouvons avoir  $\text{Real}(i\eta_j) < 0$ . Dans ce cas  $J_{i\eta_j} \left( \frac{i\pi}{L} r \right)$  et  $J_{-i\eta_j} \left( \frac{i\pi}{L} r \right)$  sont linéairement indépendantes et on peut écrire la solution sous la forme :

$$R_j(r) = C J_{i\eta_j} \left( \frac{i\pi}{L} r \right) + D J_{-i\eta_j} \left( \frac{i\pi}{L} r \right) \quad (2.4.12)$$

D'après [1] nous avons :

$$Y_{i\eta_j}(z) = \frac{J_{i\eta_j}(z) \cos(i\eta_j \pi) - J_{-i\eta_j}(z)}{\sin(i\eta_j \pi)} \quad (2.4.13)$$

pour  $z = \frac{i\pi}{L} r \rightarrow 0$  et  $\text{Real}(i\eta_j) < 0$ ,  $J_{i\eta_j} \left( \frac{i\pi}{L} r \right)$  est aussi divergente, il faut donc que

$C \rightarrow 0$ . La solution a la forme donnée par (2.4.11) avec la restriction que le côté réel de  $i\eta_j$  soit toujours positif.

$$R_j(r) = A J_{i\eta_j} \left( \frac{i\pi}{L} r \right) \quad (2.4.14)$$

avec

$$\bar{\eta}_j = \begin{cases} \eta_j & \text{si } \text{Real}(i\eta_j) \geq 0 \\ -\eta_j & \text{si } \text{Real}(i\eta_j) \leq 0 \end{cases} \quad (2.4.15)$$

La relation (2.4.14) détermine la variation de  $\Phi$  pour la direction radiale et elle donne la forme analytique de la fonction potentielle comme suit :

$$\Phi(x, r, \theta, t) = \sum_{j=1}^8 \frac{J_{i\bar{\eta}_j} \left( \frac{im\pi}{L} r \right) \dot{w}_j}{J'_{i\bar{\eta}_j} \left( \frac{im\pi}{L} r \right) \Big|_{r=a}} \quad (2.4.16)$$

La forme matricielle générale du déplacement radial de la paroi solide est donnée par (voir (2.4.1)) :

$$w = \sin \left( \frac{im\pi}{L} x \right) \{R_F\}^T \{C\} \quad (2.4.17)$$

où :

le vecteur des constantes  $\{C\}$  est défini par la relation (voir l'équation (A.19)) :

$$\{C\} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (2.4.18)$$

et le vecteur  $\{R_F\}^T$  est la deuxième ligne de la matrice  $[R]$  (équation (A.21)) qui correspond donc au déplacement radial :

$$\{R_F\}^T = \{e^{\eta_1\theta} \quad e^{\eta_2\theta} \quad e^{\eta_3\theta} \quad \dots \quad e^{\eta_8\theta}\} \quad (2.4.19)$$

Finalement, l'expression matricielle de la fonction de potentiel devient :

$$\Phi(x, r, \theta, t) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \{R_F\}^T [H_F] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (2.4.20)$$

où :

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (2.4.21)$$

et

$$H_F(j, k) = \begin{cases} \frac{J_{i\eta_j} \left( \frac{im\pi}{L} r \right)}{\frac{im\pi}{L} J'_{i\eta_j} \left( \frac{im\pi}{L} a \right)} & \text{pour } j = k \\ 0 & \text{pour } j \neq k \end{cases} \quad (2.4.22)$$

La fonction potentielle de la relation (2.4.20) dépend du vecteur de déplacement  $\{q\}$  défini pour chaque élément.

## 2.5 Évaluation de l'énergie cinétique de l'élément fluide

Pour déterminer les équations de mouvement du fluide, nous évaluons l'énergie cinétique afin de trouver la matrice de masse correspondante.

$$T = \frac{\rho_F}{2} \iint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n_s} ds \quad (2.5.1)$$

L'expression de l'énergie cinétique sous la forme donnée par Lamb [36] est :

$$T = \frac{\rho_F}{2} \iiint_V (V_x^2 + V_r^2 + V_\theta^2) dV \quad (2.5.2)$$

En coordonnées cylindriques, cette expression devient :

$$2T = \rho_F \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} \right)^2 \right] r d\theta dr dx \quad (2.5.3)$$

Nous calculerons l'énergie cinétique comme une somme de trois composantes d'après les trois directions axiale, radiale et circonférentielle :

$$T_{\text{element}} = T_x + T_r + T_\theta \quad (2.5.4)$$

L'énergie cinétique est évaluée pour chaque élément fini fluide et les trois composantes sont données par :

$$T_x = \frac{\rho_F}{2} \iiint_V \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 r d\theta dr dx \quad (2.5.5)$$

$$T_R = \frac{\rho_F}{2} \iiint_V \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 r d\theta dr dx \quad (2.5.6)$$

$$T_\theta = \frac{\rho_F}{2} \iiint_V \left( \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} \right)^2 r d\theta dr dx \quad (2.5.7)$$

### 2.5.1 Calcul de $T_x$

La relation du potentiel qui est donnée par (2.4.20) devient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{m\pi}{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \{R_F\}^T [H_F] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (2.5.8)$$

À partir de (2.5.5) nous pouvons écrire :

$$T_x = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \frac{\rho_F}{2} \times \{ \dot{q} \}^T [A^{-1}]^T \int_0^{\theta_0} \{R_F\} \int_{r(\theta)}^a [H_F]^T \int_0^L \cos^2\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx [H_F] r dr \{R_F\}^T d\theta [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (2.5.9)$$

L'énergie cinétique dans la direction de x est donnée par :

$$T_x = \frac{\rho_F L}{4} \{ \dot{q} \}^T [A^{-1}]^T \int_0^{\theta_0} \{R_F\} \int_{r(\theta)}^a [H_x]^T [H_x] r dr \{R_F\}^T d\theta [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (2.5.10)$$

avec :

$$[H_x] = \left[ \frac{m\pi}{L} \right]_j [H_F] = \begin{cases} J_{in_j} \left( \frac{im\pi}{L} r \right) & j = k \\ i J'_{in_j} \left( \frac{im\pi}{L} a \right) & \\ 0 & j \neq k \end{cases} \quad (2.5.11)$$

où :

$$\left[ \frac{m\pi}{L} \right]_j = \begin{cases} \frac{m\pi}{L} & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \quad (2.5.12)$$

### 2.5.2 Calcul de $T_r$

La dérivée par rapport à  $r$  du potentiel de vitesse (2.4.20) est :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) \{R_F\}^T \left[ \frac{\partial H_F}{\partial r} \right] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (2.5.13)$$

où  $[H_F]$  est donnée par (2.4.22) et  $\{R_F\}^T$  est donnée par (2.4.19) .

La dérivée de la matrice  $[H_F]$ , de dimensions (8x8) prend la forme :

$$\left[ \frac{\partial H_F}{\partial r} \right] = [H_R]$$

$$\text{où } \frac{\partial H_F}{\partial r}(j,k) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{J_{in_j} \left( \frac{im\pi}{L} r \right)}{\frac{im\pi}{L} J'_{in_j} \left( \frac{im\pi}{L} a \right)} \right] & \text{pour } j = k \\ 0 & \text{pour } j \neq k \end{cases} \quad j \text{ et } k=1,2,3,\dots,8 \quad (2.5.14)$$

En utilisant la notation :

$$H_R(j,k) = \begin{cases} \frac{J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}r\right)}{\frac{im\pi}{L}J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}a\right)} & \text{pour } j = k \\ 0 & \text{pour } j \neq k \end{cases} \quad \begin{matrix} j \text{ et } k = 1, 2, 3, \dots, 8 \end{matrix} \quad (2.5.15)$$

L'équation (2.5.13) devient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \{R_F\}^T [H_R] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (2.5.16)$$

En introduisant (2.5.16) dans (2.5.6) nous obtiendrons :

$$T_r = \frac{\rho_F}{2} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \int_0^{\theta_G} \{R_F\} \int_{r(\theta)}^a [H_R]^T \int_0^L \sin^2\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx [H_R] r dr \{R_F\}^T d\theta [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (2.5.17)$$

L'énergie cinétique pour la direction radiale se réduit à :

$$T_r = \frac{L\rho_F}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \int_0^{\theta_G} \{R_F\} \int_{r(\theta)}^a [H_R]^T [H_R] r dr \{R_F\}^T d\theta [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (2.5.18)$$

### 2.5.3 Calcul de $T_\theta$

La dérivée du potentiel de vitesse (2.4.20) par rapport à  $\theta$  est égale à :

$$\frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} = \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) \left\{ \frac{\partial R_F}{\partial \theta} \right\}^T [H_F] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (2.5.19)$$

Nous pouvons écrire :

$$\left\{ \frac{\partial R_F}{\partial \theta} \right\}^T = \{R_F\}^T [\bar{\eta}] \quad (2.5.20)$$

où

$$\bar{\eta}(j,k) = \begin{cases} \eta_j & \text{pour } j = k \\ 0 & \text{pour } j \neq k \end{cases} \quad j \text{ et } k = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (2.5.21)$$

avec :

$$[H_\theta] = [\bar{\eta}] [H_F] \quad (2.5.22)$$

définie par :

$$H_\theta(j,k) = \begin{cases} \eta_j \frac{J_{i\bar{\eta}_j}\left(\frac{im\pi}{L} r\right)}{\frac{im\pi}{L} J'_{i\bar{\eta}_j}\left(\frac{im\pi}{L} a\right)} & \text{pour } j = k \\ 0 & \text{pour } j \neq k \end{cases} \quad j \text{ et } k = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (2.5.23)$$

nous obtiendrons :

$$\frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} = \frac{1}{r} \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) \{R_F\}^T [H_\theta] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (2.5.24)$$

En remplaçant (2.5.24) en (2.5.7) nous obtiendrons :

$$T_{\theta} = \frac{\rho_F}{2} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \int_0^{\theta_G} \{R_F\} \int_{r(\theta)}^a [H_{\theta}]^T \int_0^L \sin^2\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx [H_{\theta}] \frac{1}{r} dr \{R_F\}^T d\theta [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (2.5.25)$$

Alors l'énergie cinétique dans la direction  $\theta$  sera de la forme suivante :

$$T_{\theta} = \frac{L\rho_F}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \int_0^{\theta_G} \{R_F\} \int_{r(\theta)}^a [H_{\theta}]^T [H_{\theta}] \frac{1}{r} dr \{R_F\}^T d\theta [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (2.5.26)$$

## 2.6 Énergie potentielle de la surface libre du fluide

### 2.6.1 Limites d'intégration pour l'énergie potentielle

Cette approche, proposée par Lamb [36] nous conduit à l'évaluation de l'énergie potentielle sous la forme suivante :

$$V = \rho_F g \iiint_V y dV \quad (2.6.1)$$

La variable  $y$  selon la direction verticale sera remplacée par sa projection selon la direction  $r$  :

Donc l'expression de l'énergie potentielle (2.6.1) en coordonnées cylindriques pour  $\varphi < \pi$  s'écrit sous la forme :

$$V = a \rho_F g \cos \frac{\varphi}{2} \int_0^L \int_0^{\theta_G} \frac{\eta^2}{\cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta \right)} d\theta dx \quad (2.6.2)$$

où  $e$  indique la position de l'élément et  $\theta_G$  est l'angle des éléments.

Dans le cas  $\varphi = \pi$ , et avec les limites d'intégration pour un élément fini liquide avec surface libre (voir Figure 2.7), l'expression (2.6.1) devient :

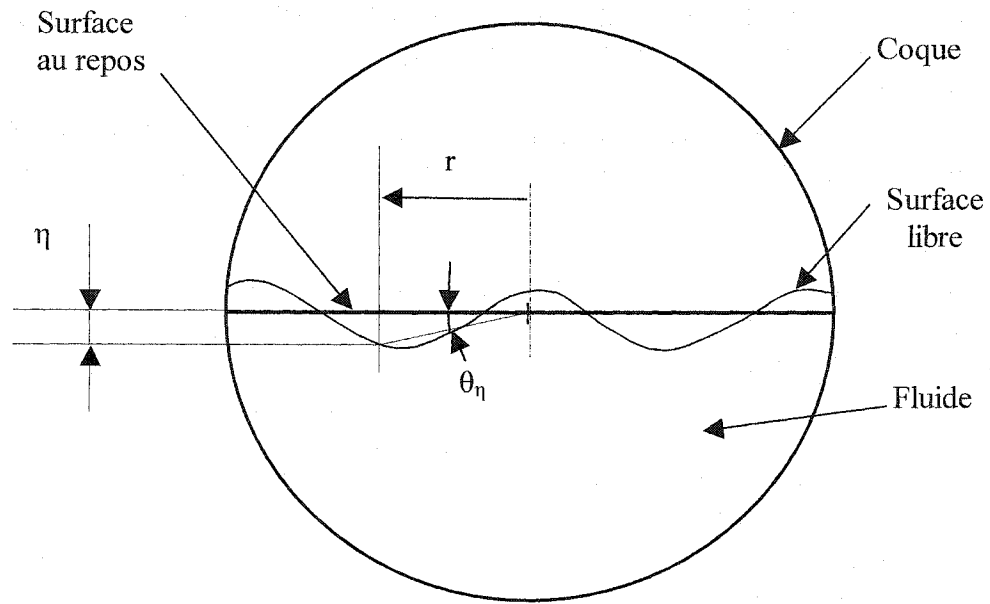
$$V = \rho_F g \int_0^L \int_0^{\theta_1} \int_0^a r^2 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) dr d\theta dx \quad (2.6.3)$$

ou encore :

$$V = \frac{\rho_F g}{2} \int_0^L \int_0^a \eta^2 dr dx \quad (2.6.4)$$

Pour  $\varphi > \pi$  la relation (2.6.1) devient :

$$V = 2 a \rho_F g \cos \frac{2\pi - \varphi}{2} \int_0^L \int_0^{\frac{2\pi - \varphi}{2}} \frac{\eta^2}{\cos^2 \left( \frac{2\pi - \varphi}{2} - \theta \right)} d\theta dx \quad (2.6.5)$$

Figure 2.7 Simplifications pour le cas  $\varphi = \pi$ 

### 2.6.2 Expression matricielle d'élévation

La fonction de potentiel  $\Phi$ , donnée par (I.4.11), remplacée dans la condition de la surface (1.1.7) pour  $\varphi < \pi$ , nous donne :

$$\begin{aligned} \{R_F\}_{r=r_1}^T [H_F] \{\ddot{C}\} + g \cos\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right) \{R_F\}_{r=r_1}^T [H_R] \{\dot{C}\} + \\ + g \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right) \{R_F\}_{r=r_1}^T [H_\theta] \{\dot{C}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

En exprimant les constantes  $\{C\}$  en fonction du vecteur  $\{q\}$  à l'aide de la relation (1.3.9) et étant donné que les déplacements  $\{q\}$  sont fonction du temps de type  $e^{i\omega t}$ , on trouve la forme matricielle de la condition générale de la surface :

$$\begin{aligned} \{R_F\}_{r=r_1}^T [H_F] [A]^{-1} \{\ddot{q}\} + g \cos\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right) \{R_F\}_{r=r_1}^T [H_R] [A]^{-1} \{q\} + \\ + g \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right) \{R_F\}_{r=r_1}^T [H_\theta] [A]^{-1} \{q\} = 0 \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Suivant le même raisonnement, en partant de la fonction de potentiel  $\Phi$  donnée par (2.4.20) et en la remplaçant dans la condition de la surface (2.3.8) pour  $\varphi = \pi$ , nous aurons :

$$\{R_F\}_{\theta=0}^T [H_F] [A]^{-1} \{\ddot{q}\} + g \frac{1}{r} \{R_F\}_{\theta=0}^T [H_\theta] [A]^{-1} \{q\} = 0 \quad (2.6.8)$$

La même chose pour  $\varphi > \pi$ , en partant de la relation (2.3.9) :

$$\begin{aligned} \{R_F\}_{r=r_1}^T [H_F] [A]^{-1} \{\ddot{q}\} + g \cos\left(\frac{2\pi - \varphi}{2} - \theta\right) \{R_F\}_{r=r_1}^T [H_R] [A]^{-1} \{q\} + \\ + g \frac{1}{r} \sin\left(\frac{2\pi - \varphi}{2} - \theta\right) \{R_F\}_{r=r_1}^T [H_\theta] [A]^{-1} \{q\} = 0 \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Dans la relation (2.3.3)  $\eta$  est donné sous la forme suivante :

$$\eta = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_{y=0} \quad (2.6.10)$$

et la fonction de potentiel donnée par (2.4.20) s'écrit sous la forme :

$$\Phi(x, r, \theta, t) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \{R_F\}^T [H_F] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (2.6.11)$$

En remplaçant la fonction de potentiel dans l'expression de l'élévation du fluide (2.6.5), nous obtenons la forme matricielle de  $\eta$  :

$$\eta = \frac{1}{g} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \{R_F\}^T [H_F] [A^{-1}] \{\ddot{q}\} \quad (2.6.12)$$

ou  $[H_F]$  est donné par (2.4.22) et  $\{R_F\}$  est donné par (2.4.19).

Ensuite, le produit matriciel  $\{R_F\}^T [H_F] [A^{-1}] \{\ddot{q}\}$  est remplacé par sa valeur qui est donnée par la condition de la surface sous forme matricielle des équations (2.6.2), (2.6.3) et (2.6.4) pour les différents valeurs de  $\varphi$ .

Nous trouvons alors pour  $\varphi < \pi$  :

$$\begin{aligned} \eta = & -\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \{R_F\}_{r=r_1}^T \left[ \cos\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right) [H_R] + \right. \\ & \left. + \cos\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right) \frac{1}{\text{acos}\frac{\varphi}{2}} [H_\theta] \right] [A^{-1}] \{\ddot{q}\} \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

Avec la notation :

$$[H_\eta]_{\varphi < \pi} = \cos\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right) \left[ [H_R] + \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right)}{\operatorname{acos}\frac{\varphi}{2}} [H_\theta] \right] \quad (2.6.14)$$

En remplaçant les termes de  $[H_R]$  donnés par (2.5.15) et les termes de  $[H_\theta]$  donnés par (2.5.23) nous obtenons le terme général de  $[H_\eta]_{\varphi < \pi}$  :

$$H_\eta(j, k) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right)}{J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}a\right)} \left[ J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}r_1\right) + \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right)}{\operatorname{acos}\frac{\varphi}{2} \frac{im\pi}{L}} J_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}r_1\right) \right] & \text{pour } j = k \\ 0 & \text{pour } j \neq k \end{cases} \quad (2.6.15)$$

avec  $j, k = 1, 2, \dots, 8$

La matrice  $\{R_F\}_0$  ne dépend pas de  $r$ , donc elle va avoir la même forme que  $\{R_F\}$ .

On peut réécrire l'expression de  $\eta$  :

$$\eta = -\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \{R_F\}^T [H_\eta] [A^{-1}] \{q\} \quad (2.6.16)$$

Pour  $\varphi = \pi$ , le même raisonnement nous amène à :

$$\eta = -\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \{R_F\}_{\theta=0}^T \frac{1}{r} [H_\theta] [A^{-1}] \{q\} \quad (2.6.17)$$

En remplaçant  $\theta = 0$  dans le vecteur  $\{R_F\}$  donné par (2.4.19), nous obtenons :

$$\{R_F\}_{\theta=0}^T = \{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1\}^T \quad (2.6.18)$$

Avec la notation :

$$[H_\eta]_{\varphi=\pi} = \frac{1}{r} [H_\theta] \quad (2.6.19)$$

et en remplaçant  $[H_\theta]$  par son terme général donné par (2.5.23), le terme général  $[H_\eta]_{\varphi=\pi}$  devient :

$$H_\eta(j,k) = \begin{cases} \frac{1}{r} \eta_j \frac{J_{\bar{\eta}_j} \left( \frac{im\pi}{L} r \right)}{\frac{im\pi}{L} J'_{\bar{\eta}_j} \left( \frac{im\pi}{L} a \right)} & \text{pour } j=k \\ 0 & \text{pour } j \neq k \end{cases} \quad j \text{ et } k = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (2.6.20)$$

On peut réécrire l'expression de  $\eta$  comme suit :

$$\eta = -\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) [H_\eta] [A^{-1}] \{q\} \quad (2.6.21)$$

Pour  $\varphi > \pi$ , analogue au cas  $\varphi < \pi$ , le terme général de  $[H_\eta]_{\varphi > \pi}$  devient :

$$H_\eta(j,k) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{2\pi-\varphi-\theta}{2}\right)}{J_{\bar{\eta}_j} \left( \frac{im\pi}{L} a \right)} \left[ J'_{\bar{\eta}_j} \left( \frac{im\pi}{L} r_1 \right) + \frac{\sin\left(\frac{2\pi-\varphi-\theta}{2}\right)}{a \cos \frac{2\pi-\varphi}{2} \frac{im\pi}{L}} J_{\bar{\eta}_j} \left( \frac{im\pi}{L} r_1 \right) \right] & \text{pour } j=k \\ 0 & \text{pour } j \neq k, \quad j \text{ et } k = 1, 2, \dots, 8 \end{cases} \quad (2.6.22)$$

où  $r_1$  est donné par la relation :

$$r_1 = a \frac{\cos \frac{2\pi - \varphi}{2}}{\cos \left( \frac{2\pi - \varphi}{2} - \theta \right)} \quad (2.6.23)$$

et  $\eta$  devient :

$$\eta = -\sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \{R_F\}^T [H_\eta] [A^{-1}] \{q\} \quad (2.6.24)$$

### 2.6.3 Expression d'énergie potentielle

i) Cas du  $\varphi < \pi$  (Figure 2.1)

En remplaçant (pour  $\varphi < \pi$ ) la valeur de  $\eta$  donnée par (2.6.16) dans l'expression de l'énergie potentielle donnée par (2.6.2), nous avons :

$$V = a\rho_F g \cos \frac{\varphi}{2} \int_0^{\theta_G} \frac{1}{\cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta \right)} \times \left\{ \{q\}^T [A^{-1}]^T \{R_F\}^T [H_\eta] [H_\eta]^T \{R_F\} [A^{-1}] \{q\} \int_0^L \sin^2 \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx \right\} d\theta \quad (2.6.25)$$

Avec l'intégrale suivante :

$$\int_0^L \sin^2 \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx = \frac{L}{2} \quad (2.6.26)$$

l'expression de l'énergie potentielle devient :

$$V = ap_F g \frac{L}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \times \int_0^{\theta_G} \frac{1}{\cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta \right)} \{q\}^T [A^{-1}]^T \{R_F\}^T [H_\eta] [H_\eta]^T \{R_F\} [A^{-1}] \{q\} d\theta \quad (2.6.27)$$

où encore :

$$V = ap_F g \frac{L}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \{q\}^T [A^{-1}]^T \times \int_0^{\theta_G} \frac{1}{\cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta \right)} \{R_F\}^T [H_\eta] [H_\eta]^T \{R_F\} d\theta [A^{-1}] \{q\} \quad (2.6.28)$$

Avec la notation :

$$[I_\eta] = \int_0^{\theta_G} \frac{1}{\cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta \right)} \{R_F\}^T [H_\eta] [H_\eta]^T \{R_F\} d\theta \quad (2.6.29)$$

l'expression (2.6.6) devient :

$$V = \frac{1}{2} ap_F g L \cos \frac{\varphi}{2} \{q\}^T [A^{-1}]^T [I_\eta] [A^{-1}] \{q\} \quad (2.6.30)$$

où les détails de calcul pour la matrice  $[I_\eta]$  sont donnés dans l'Annexe C.

ii) Cas du  $\varphi = \pi$  (Figure 2.2)

Avec la notation :

$$[k_F] = \rho_F g L \cos \frac{\varphi}{2} [A^{-1}]^T [I_\eta] [A^{-1}] \quad (2.6.31)$$

nous obtenons l'expression de l'énergie potentielle sous la forme :

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T [k_F] \{q\} \quad (2.6.32)$$

Les détails du calcul de la matrice  $[k_F]$  sont donnés dans l'Annexe C.

Pour  $\varphi = \pi$ , le remplacement d'expression de  $\eta$  sous la forme matricielle donnée par (2.6.5) dans l'expression de l'énergie potentielle donnée par (2.6.4), nous aurons :

$$V = \frac{\rho_F g}{2} \{q\}^T [A^{-1}]^T \int_0^L \sin^2 \left( \frac{m\pi x}{L} \right) \int_0^a [H_\eta] [H_\eta] dr dx [A^{-1}] \{q\} \quad (2.6.33)$$

Ou encore :

$$V = \frac{\rho_F g L}{4} \{q\}^T [A^{-1}]^T \int_0^a [H_\eta] [H_\eta] dr [A^{-1}] \{q\} \quad (2.6.34)$$

Pour :

$$[h_s] = \int_0^a [H_\eta] [H_\eta] dr \quad (2.6.35)$$

dont les détails du calcul sont donnés par l'Annexe C, l'énergie potentielle devient :

$$V = \frac{\rho_F g L}{4} \{q\}^T [A^{-1}]^T [h_s] [A^{-1}] \{q\} \quad (2.6.36)$$

Avec la notation :

$$[k_F] = \frac{\rho_F g L}{2} [A^{-1}]^T [h_s] [A^{-1}] \quad (2.6.37)$$

nous obtenons finalement :

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T [k_F] \{q\} \quad (2.6.38)$$

iii) Cas du  $\varphi > \pi$  (Figure 2.3)

Pour  $\varphi > \pi$ , suivant un raisonnement analogue à celui de  $\varphi < \pi$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} V &= a \rho_F g L \cos \frac{2\pi - \varphi}{2} \{q\}^T [A^{-1}]^T \times \\ &\times \int_0^{\frac{2\pi - \varphi}{2}} \frac{1}{\cos^2 \left( \frac{2\pi - \varphi}{2} - \theta \right)} \{R_F\}^T [H_\eta] [H_\eta]^T \{R_F\} d\theta [A^{-1}] \{q\} \end{aligned} \quad (2.6.39)$$

Avec la notation :

$$[I_\eta] = \int_0^{\frac{2\pi - \varphi}{2}} \frac{1}{\cos^2 \left( \frac{2\pi - \varphi}{2} - \theta \right)} \{R_F\}^T [H_\eta] [H_\eta]^T \{R_F\} d\theta \quad (2.6.50)$$

l'expression (2.6.5) devient :

$$V = a \rho_F g L \cos \frac{2\pi - \varphi}{2} \{q\}^T [A^{-1}]^T [I_\eta] [A^{-1}] \{q\} \quad (2.6.51)$$

où les détails de calcul pour la matrice  $[I_\eta]$  sont donnés dans l'Annexe C.

Avec la notation :

$$[k_F] = 2ap_F g L \cos \frac{\varphi}{2} [A^{-1}]^T [I_\eta] [A^{-1}] \quad (2.6.52)$$

nous obtenons l'expression de l'énergie potentielle sous la forme :

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T [k_F] \{q\} \quad (2.6.53)$$

## CHAPITRE III

### ALGORITHMES ET RÉSULTATS NUMÉRIQUES

#### 3.1 Introduction

À partir du développement théorique présenté dans les chapitres précédents, un logiciel informatique en langage FORTRAN 77 a été réalisé pour déterminer l'influence du liquide et de sa surface sur les fréquences naturelles du système.

Les éléments finis choisis sont dans la direction circonférentielle (voir Figure 1.1).

L'input nécessaire pour l'exécution du logiciel peut être décrit comme suit :

- le mode axial  $m$ ;
- le nombre d'éléments finis;
- une variable qui contrôle le maillage sous forme de l'angle circonférentiel de chaque élément  $\theta_G$  (voir Figure 2.1);
- la densité massique du liquide de chaque élément de la structure qui contient du liquide et le niveau du liquide;
- les propriétés physiques et mécaniques de chaque élément de la coque : densité massique, coefficient de Poisson, module de Young,
- les caractéristiques géométriques : rayon moyen, épaisseur de la paroi, longueur totale de la coque;

- différents paramètres qui contrôlent le volume des données imprimées dans le fichier de sortie et le processus d'intégration numérique.

Les principales étapes de calcul dans la partie du logiciel qui s'occupe de la coque solide sont :

- la résolution de l'équation caractéristique (2.3.2);
- le calcul de la matrice  $[A]^{-1}$  et des autres matrices intermédiaires;
- le calcul des matrices  $[m_0]$  et  $[k_0]$  de l'élément de la coque solide;
- assemblage de matrices;
- la résolution du problème aux valeurs et vecteurs propres pour la coque vide.

Les principales étapes de calcul pour l'obtention des fréquences du système (solide - liquide) sont :

- le calcul des matrices  $[m_F]$  et  $[k_F]$  de chaque élément du fluide, à partir de la formulation établie et par intégration numérique;
- assemblage des matrices  $[m_0] + [m_F]$  et  $[k_0] + [k_F]$  de chaque élément,
- la résolution du problème aux valeurs et vecteurs propres du système coque - fluide.

### 3.2 Choix des logiciels

Le point de départ de la programmation a été constitué par le code « sander.f » présenté dans la référence [21] qui sert à analyser le comportement dynamique des coques horizontales soumises à un écoulement. La limite maximale du nombre d'éléments finis dans ce logiciel est de l'ordre de cent cinquante éléments.

La présence des fonctions Bessel de première espèce, d'ordre et d'argument complexes dans le développement théorique nous imposait une solution d'intégration numérique. Des recherches bibliographiques ont conduit vers le code nommé « COULCC » décrit dans la référence [55] qui permet le calcul des fonctions de Coulomb et des fonctions de Bessel de première espèce. Des procédures ont été effectuées afin de vérifier la validité de ces résultats d'intégration.

L'intégration numérique a été faite par l'algorithme « DCHURE » dont la description est présentée dans la référence [4]. Ce logiciel qui utilise une méthode adaptative d'intégration par la quadrature de Gauss en plusieurs points. L'algorithme présentait aussi la possibilité de calculer plusieurs intégrales simultanément.

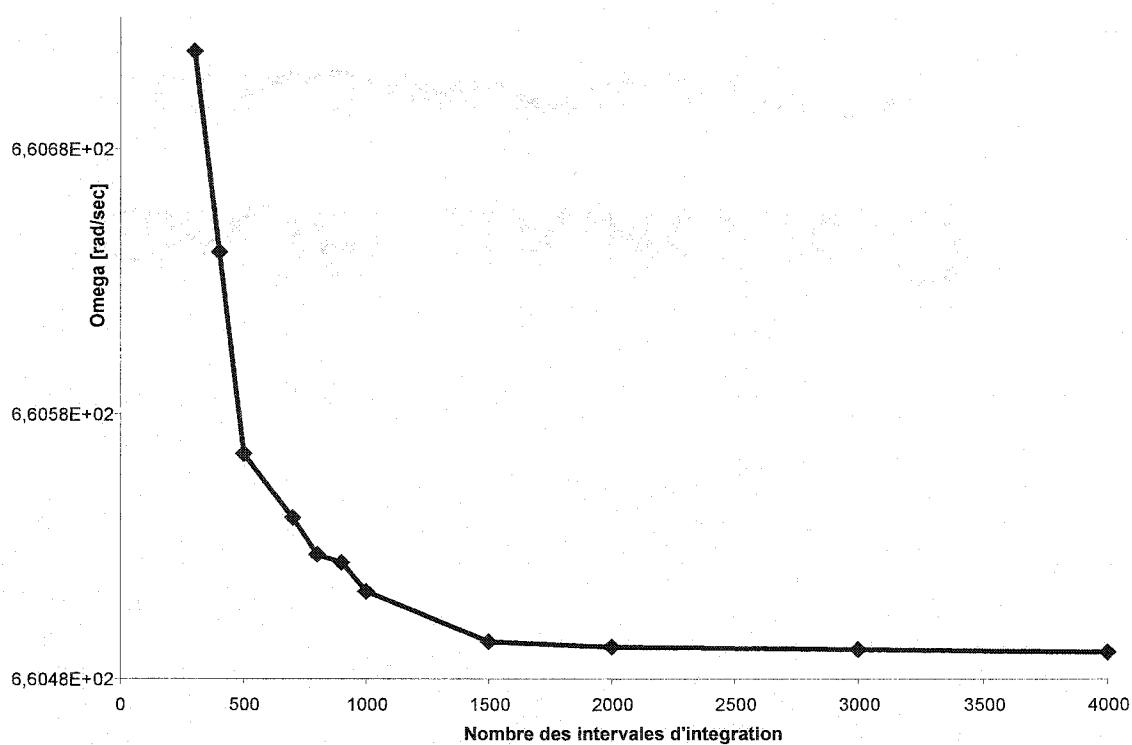


Figure 3.1 Analyse de la convergence des résultats finaux selon le nombre des évaluations de la fonction

Cet algorithme offre la possibilité de contrôler la précision de l'intégration par le nombre des valeurs de la fonction utilisées lors des calculs. Une analyse de la convergence des résultats est présentée à la Figure 3.1.

### 3.3 Assemblage matriciel

Dans la référence [34] nous pouvons trouver une présentation détaillée de mode d'assemblage des matrices globales d'une structure coque - fluide avec un maillage le long de l'axe de la coque.

Dans le cas présent il s'agit d'un maillage circonférentiel de la coque, ce qui fait que le premier nœud du premier élément fini doit coïncider avec le deuxième nœud du dernier élément fini. Pour répondre a ce besoin, nous avons utilisé une méthode décrite dans la référence [11].

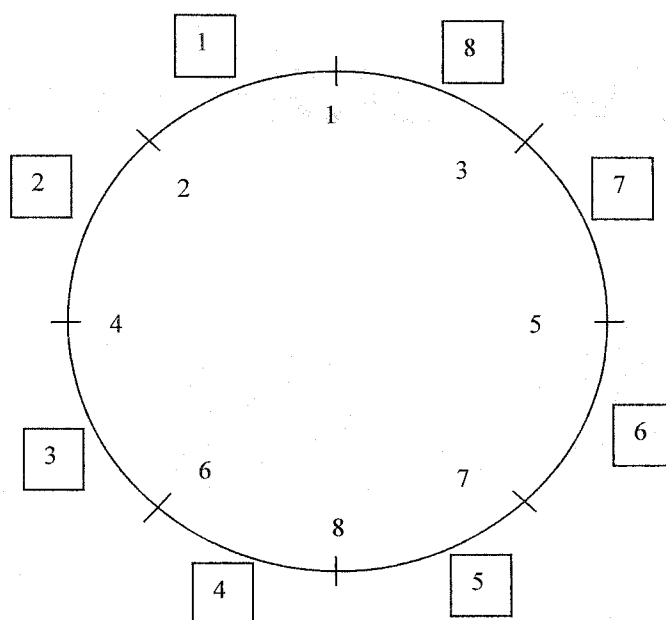


Figure 3.2 Maillage circonférentiel d'une coque horizontale

Bien que le programme permette un maillage complètement libre en ce qui concerne l'angle de chaque élément  $\theta_G$  (voir Figure 2.1) et les propriétés de la coque, nous recommandons l'utilisation du même  $\theta_G$  pour les éléments voisins du fluide dans le but de réduire le temps de calcul.

Dans le logiciel, nous avons défini un vecteur qui contrôle la position et l'ordre des nœuds dans la structure en fonction du numéro de l'élément. Un sous - programme spécialisé génère de façon automatique ce vecteur en utilisant les principes présentés dans la Figure 3.2.

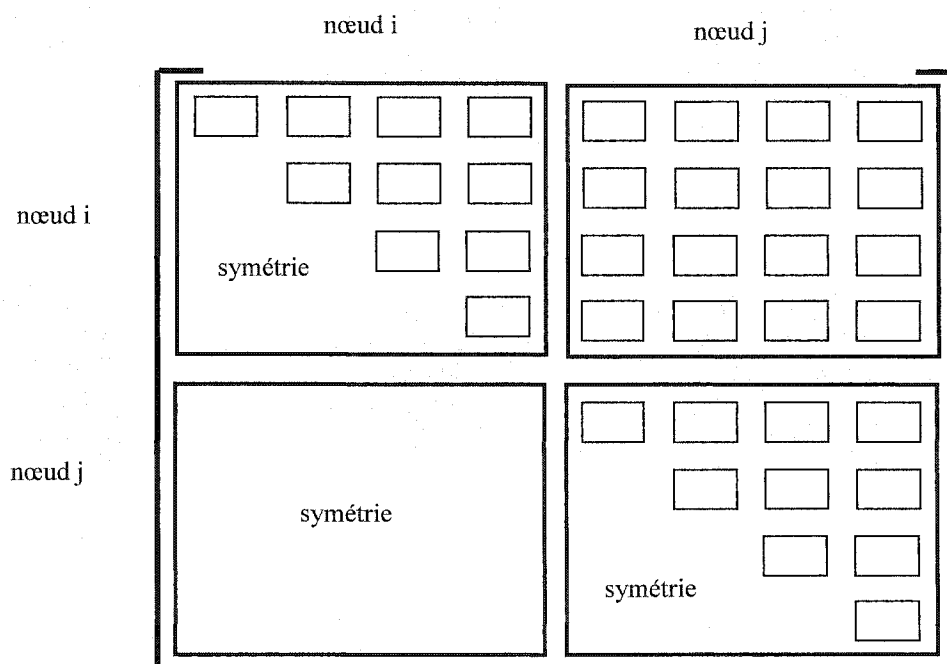


Figure 3.3 Structure d'une matrice de rigidité ou de masse

Les matrices de masse et de rigidité de l'élément fini solide vont s'additionner avec les matrices de masse et de rigidité de l'élément fini liquide pour donner, pour chaque élément, une matrice de masse et de rigidité locale correspondante. Vu que chaque élément fini a deux nœuds auxquels correspondent quatre degrés de liberté, les matrices de masse ou de rigidité sont de type 8x8, symétriques comme le montre la Figure 3.3.

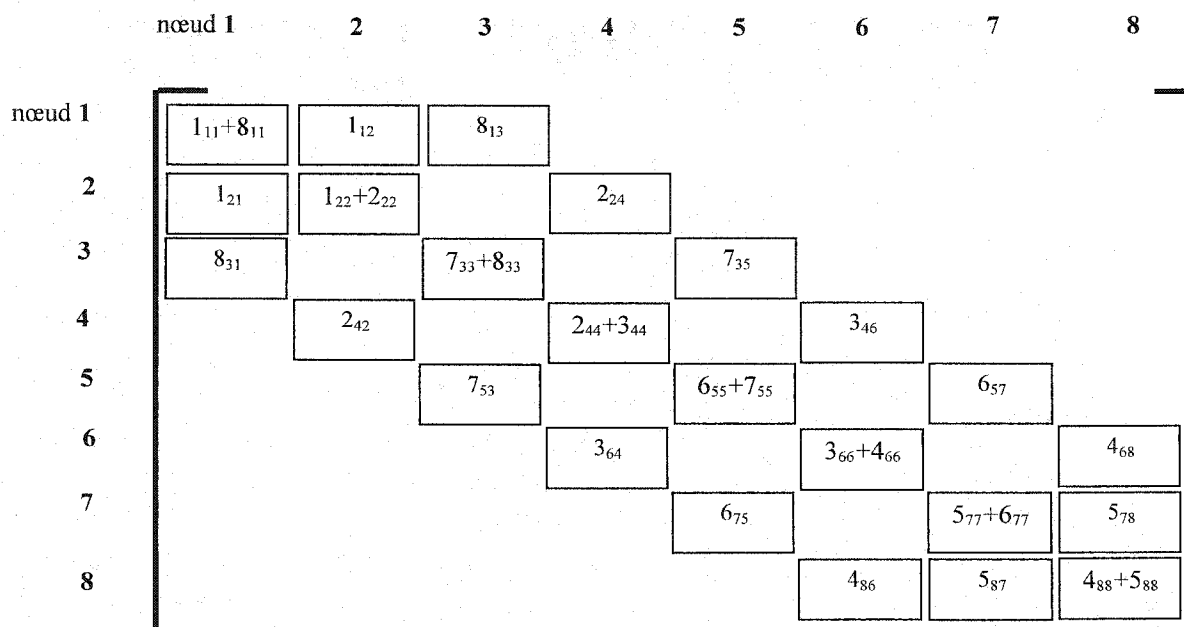


Figure 3.4 Structure de la matrice de rigidité ou de masse globale (Les numéros en « majuscules » représentent les éléments et les indices représentent les nœuds correspondants à chaque élément)

Dans l'exemple présenté dans la Figure 3.2 (maillage avec 8 éléments) nous présentons l'algorithme d'assemblage dicté par le numéro de nœud dans la Figure 3.4 et le code informatique correspondant dans la Figure 3.5

Comme on peut voir dans la Figure 3.4 la matrice correspondant à un élément fini quelconque sera divisée en quatre parties qui vont se placer dans la matrice globale selon la position des nœuds correspondants.

|     |                                                       |          |
|-----|-------------------------------------------------------|----------|
|     | DO 313 IEL=1,NEL                                      | COF00400 |
|     | DO 313 I4=1,4                                         | COF00400 |
|     | DO 313 J4=1,4                                         | COF00400 |
|     | II=4-I4                                               | COF00400 |
|     | JJ=4-J4                                               | COF00400 |
|     | II1=4*MNOD(IEI)-II                                    | COF00400 |
|     | JJ1=4*MNOD(IEI)-JJ                                    | COF00400 |
|     | II2=4*NNOD(IEI)-II                                    | COF00400 |
|     | JJ2=4*NNOD(IEI)-JJ                                    | COF00400 |
|     | KST(ION,II1,JJ1)=KST(ION,II1,JJ1)+KSGF(IEI,I4,J4)     | COF00400 |
|     | KST(ION,II1,JJ2)=KST(ION,II1,JJ2)+KSGF(IEI,I4,4+J4)   | COF00400 |
|     | KST(ION,II2,JJ1)=KST(ION,II2,JJ1)+KSGF(IEI,4+I4,J4)   | COF00400 |
|     | KST(ION,II2,JJ2)=KST(ION,II2,JJ2)+KSGF(IEI,4+I4,4+J4) | COF00400 |
| C   |                                                       | COF00400 |
|     | MST(ION,II1,JJ1)=MST(ION,II1,JJ1)+MSGF(IEI,I4,J4)     | COF00400 |
|     | MST(ION,II1,JJ2)=MST(ION,II1,JJ2)+MSGF(IEI,I4,4+J4)   | COF00400 |
|     | MST(ION,II2,JJ1)=MST(ION,II2,JJ1)+MSGF(IEI,4+I4,J4)   | COF00400 |
|     | MST(ION,II2,JJ2)=MST(ION,II2,JJ2)+MSGF(IEI,4+I4,4+J4) | COF00400 |
| 313 | CONTINUE                                              | COF00400 |

Figure 3.5 Code informatique pour l'assemblage des matrices globales

### 3.4 Analyse de la convergence

Les premiers calculs numériques ont été exécutés pour étudier la convergence de la solution en fonction du nombre d'éléments finis utilisés dans la modélisation de la coque partiellement remplie de liquide. À cette fin, nous avons utilisé une coque cylindrique avec les caractéristiques suivantes :

- longueur  $L = 0,664$  m;

- rayon moyen  $r = 0,175$  m;
- épaisseur de la paroi  $t = 0,001$  m;
- numéro de mode axial  $m = 1$ ;
- densité de la coque  $\rho = 7680$  kg/m<sup>3</sup> et celle du fluide  $\rho_F = 1000$  kg/m<sup>3</sup>;
- coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  et module de Young  $E = 206$  GPa.

Les calculs sont faits pour cinq cas de remplissage : angles de remplissage  $0^\circ$  (coque vide),  $120^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$  et  $360^\circ$  (coque complètement remplie de fluide) (voir Figure 3.6).

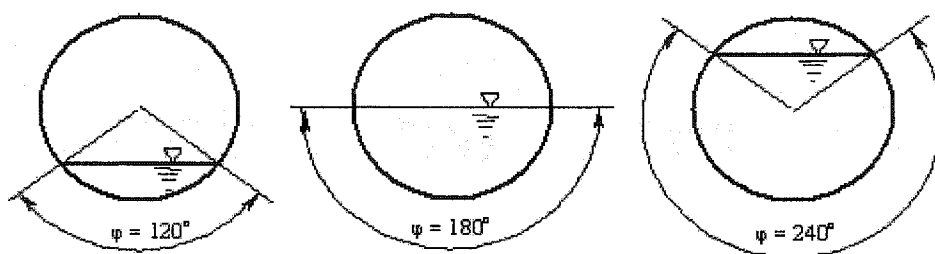


Figure 3.6 Niveaux de remplissage avec du liquide

Le nombre d'éléments finis varie de six à soixante. Pour le mode circonférentiel nous avons analysé les six premières fréquences.

Les résultats obtenus sont présentés dans les figures 3.7 à 3.11

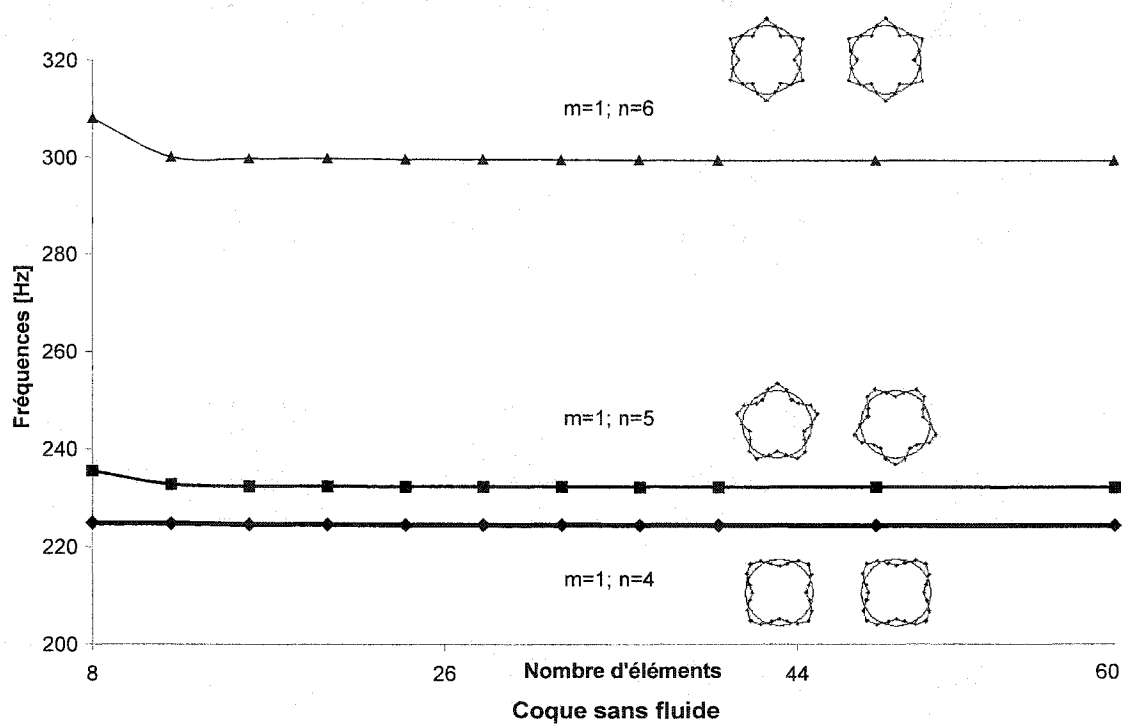


Figure 3.7 Convergence des résultats selon le raffinement du maillage ( $\varphi = 0^\circ$ )

Tableau 3.1 Analyse de la convergence en fonction du nombre d'éléments finis pour la coque vide

| Nombre d'éléments finis |        |                |        |                |        |                |        |                |        |                |
|-------------------------|--------|----------------|--------|----------------|--------|----------------|--------|----------------|--------|----------------|
| 8                       | 12     |                | 16     | 20             |        | 24             | 28     |                |        |                |
| Fréquence [Hz]          | E* [%] | Fréquence [Hz] | E* [%] | Fréquence [Hz] | E* [%] | Fréquence [Hz] | E* [%] | Fréquence [Hz] | E* [%] | Fréquence [Hz] |
| 225,0                   | -0,03  | 224,9          | -0,12  | 224,6          | 0,00   | 224,6          | -0,03  | 224,6          | 0,00   | 224,6          |
| 235,6                   | -1,19  | 232,8          | -0,17  | 232,4          | 0,00   | 232,4          | -0,03  | 232,3          | 0,00   | 232,3          |
| 308,1                   | -2,65  | 300,1          | -0,12  | 299,8          | 0,00   | 299,8          | -0,06  | 299,6          | 0,00   | 299,6          |

$$E^* - \text{Erreur relative calculée avec la formule : } E^* = \frac{F_{N'} - F_N}{F_{N'}} * 100 [\%] \quad (3.3.1)$$

où  $F_N$  [Hz] représente la valeur de la fréquence pour un maillage plus raffiné et  $F_N$  [Hz] la valeur de la fréquence pour un maillage moins raffiné.

Les résultats présentés dans la figure 3.7 sont obtenus pour la coque vide (sans interaction avec le fluide). Nous pouvons constater que la stabilisation des valeurs des fréquences commence avec un maillage de douze éléments.

Pour des différents niveaux du fluide les résultats sont présentés dans les figures 3.8 pour 120 degrés, 3.9 pour 180 degrés, 3.10 pour 240 degrés et 3.11 pour 360 degrés. Une analyse de la convergence selon le nombre d'éléments s'imposerait pour chaque niveau du fluide à cause de la nature différente de l'élément fini fluide utilisé dans chaque cas.

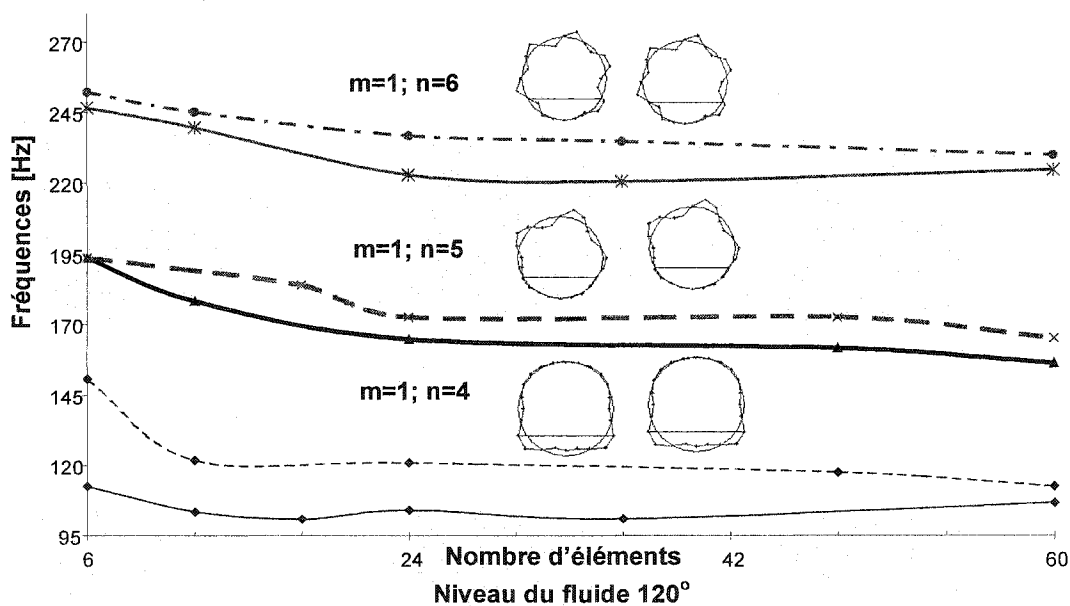


Figure 3.8 Convergence des résultats selon le raffinement du maillage ( $\phi = 120^\circ$ )

Tableau 3.2 Analyse de la convergence en fonction du nombre d'éléments finis pour le  
niveau  $\varphi = 120^\circ$

| Nombre d'éléments finis |           |                   |           |                   |           |                   |           |                   |
|-------------------------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|
| 6                       | 12        |                   | 24        |                   | 36        |                   | 60        |                   |
| Fréquence<br>[Hz]       | E*<br>[%] | Fréquence<br>[Hz] | E*<br>[%] | Fréquence<br>[Hz] | E*<br>[%] | Fréquence<br>[Hz] | E*<br>[%] | Fréquence<br>[Hz] |
| 112,5                   | -8,7      | 103,5             | 0,5       | 104,1             | -3,1      | 100,9             | 5,3       | 106,6             |
| 150,8                   | -23,7     | 121,9             | -0,8      | 120,9             | -3,0      | 117,4             | -4,5      | 112,4             |
| 193,6                   | -8,5      | 178,4             | -8,2      | 164,9             | -2,0      | 161,6             | -3,4      | 156,3             |
| 193,6                   | -5,2      | 184,0             | -6,6      | 172,6             | 0,0       | 172,6             | -4,5      | 165,1             |
| 246,6                   | -2,9      | 239,7             | -7,5      | 223,0             | -1,0      | 220,8             | 1,8       | 224,9             |
| 252,2                   | -2,8      | 245,2             | -3,6      | 236,8             | -0,8      | 235,0             | -2,1      | 230,2             |

Pour le cas de remplissage à  $\varphi = 120^\circ$  (tableau 3.2), les valeurs de l'erreur relative nous montrent une bonne convergence des basses fréquences même pour un nombre réduit d'éléments.

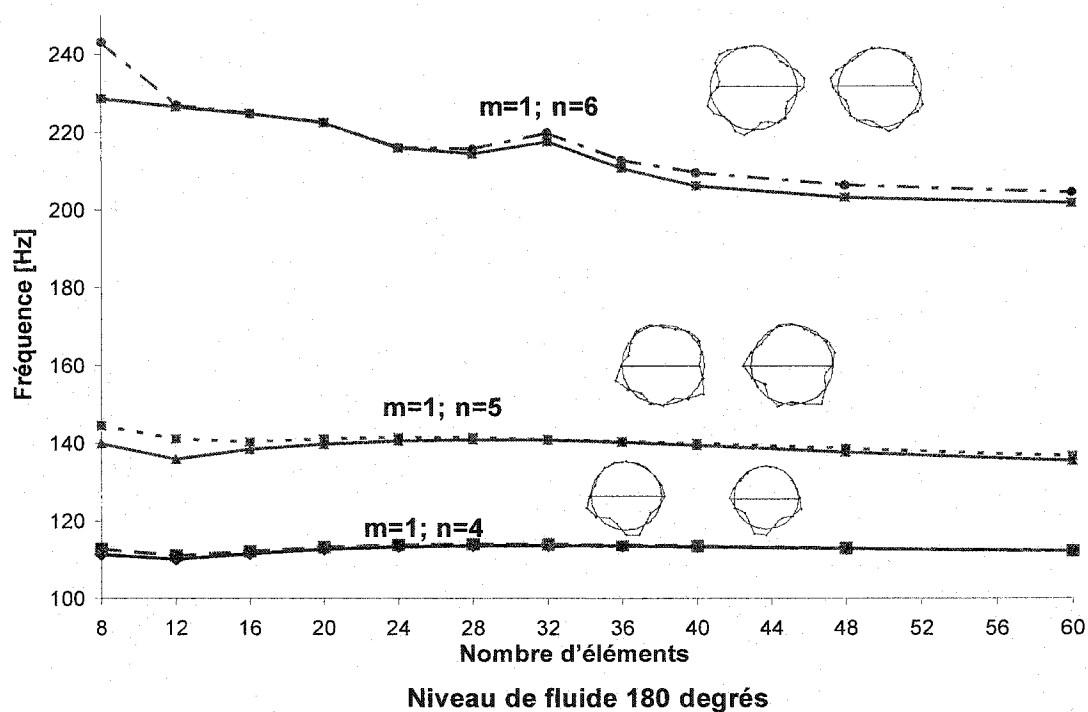


Figure 3.9 Convergence des résultats selon le raffinement du maillage ( $\varphi = 180^\circ$ )

Tableau 3.3 Analyse de la convergence en fonction du nombre d'éléments finis pour le  
niveau  $\varphi = 180^\circ$

| Nombre d'éléments finis |                       |                   |                       |                   |                       |                   |                       |                   |                       |                   |                       |                   |
|-------------------------|-----------------------|-------------------|-----------------------|-------------------|-----------------------|-------------------|-----------------------|-------------------|-----------------------|-------------------|-----------------------|-------------------|
| 8                       | 12                    |                   | 16                    |                   | 20                    |                   | 24                    |                   | 28                    |                   | 32                    |                   |
| Fréquence<br>[Hz]       | E <sup>+</sup><br>[%] | Fréquence<br>[Hz] | E <sup>+</sup><br>[%] | Fréquence<br>[Hz] | E <sup>+</sup><br>[%] | Fréquence<br>[Hz] | E <sup>+</sup><br>[%] | Fréquence<br>[Hz] | E <sup>+</sup><br>[%] | Fréquence<br>[Hz] | E <sup>+</sup><br>[%] | Fréquence<br>[Hz] |
| 111,4                   | -1,1                  | 110,1             | 1,3                   | 111,6             | 1,0                   | 112,7             | 0,6                   | 113,4             | 0,2                   | 113,7             | 0,0                   | 113,7             |
| 112,8                   | -1,5                  | 111,1             | 1,1                   | 112,2             | 0,9                   | 113,3             | 0,5                   | 113,9             | 0,2                   | 114,0             | -0,1                  | 114,0             |
| 139,9                   | -2,9                  | 135,9             | 1,8                   | 138,4             | 1,0                   | 139,8             | 0,6                   | 140,6             | 0,2                   | 140,9             | -0,1                  | 140,8             |
| 144,6                   | -2,5                  | 141,1             | -0,5                  | 140,3             | 0,6                   | 141,1             | 0,3                   | 141,5             | -0,1                  | 141,5             | -0,3                  | 141,0             |
| 228,6                   | -0,9                  | 226,6             | -0,8                  | 224,8             | -1,0                  | 222,6             | -3,0                  | 216,1             | -0,7                  | 214,6             | 1,5                   | 217,8             |
| 243,1                   | -7,1                  | 227,0             | -0,9                  | 224,9             | -1,0                  | 222,6             | -2,9                  | 216,3             | -0,2                  | 215,9             | 1,9                   | 220,0             |

Dans le cas de remplissage à  $\varphi = 180^\circ$ , le tableau 3.3 nous indique que l'erreur relative entre les valeurs des six premiers fréquences est inférieure à 1% pour le maillage avec 28 éléments par rapport à un maillage avec 24 éléments.

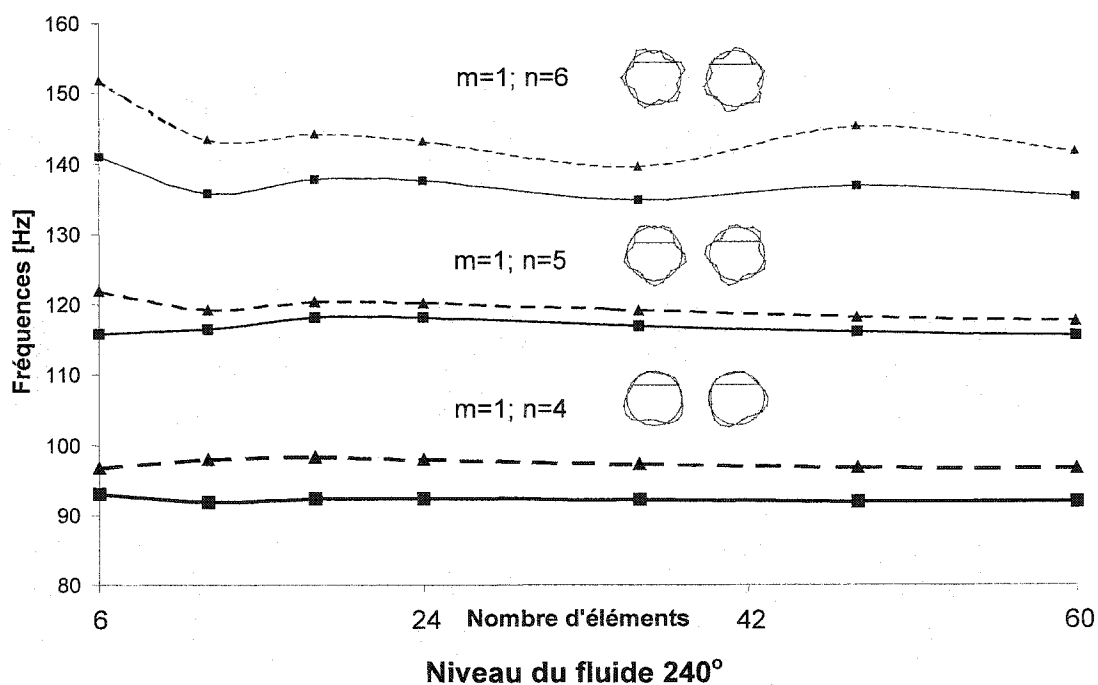


Figure 3.10 Convergence des résultats selon le raffinement du maillage ( $\varphi = 240^\circ$ )

Tableau 3.4 Analyse de la convergence en fonction du nombre d'éléments finis pour le  
niveau  $\varphi = 240^\circ$

| Nombre d'éléments finis |           |                   |           |                   |           |                   |           |                   |           |                   |           |                   |           |
|-------------------------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|
| 6                       |           | 12                |           | 18                |           | 24                |           | 36                |           | 48                |           | 60                |           |
| Fréquence<br>[Hz]       | E*<br>[%] | Fréquence<br>[Hz] | E*<br>[%] | Fréquence<br>[Hz] | E*<br>[%] | Fréquence<br>[Hz] | E*<br>[%] | Fréquence<br>[Hz] | E*<br>[%] | Fréquence<br>[Hz] | E*<br>[%] | Fréquence<br>[Hz] | E*<br>[%] |
| 93,0                    | -1,3      | 91,7              | 0,7       | 92,4              | 0,0       | 92,4              | -0,3      | 92,1              | -0,2      | 91,9              | -0,1      | 91,8              |           |
| 96,7                    | 1,2       | 97,9              | 0,4       | 98,3              | -0,4      | 97,9              | -0,8      | 97,2              | -0,4      | 96,7              | -0,2      | 96,5              |           |
| 115,8                   | 0,6       | 116,5             | 1,4       | 118,1             | 0,0       | 118,1             | -0,9      | 117,0             | -0,7      | 116,2             | -0,4      | 115,7             |           |
| 121,9                   | -2,3      | 119,1             | 1,0       | 120,3             | -0,1      | 120,2             | -0,9      | 119,1             | -0,7      | 118,2             | -0,4      | 117,7             |           |
| 141,0                   | -3,9      | 135,7             | 1,5       | 137,8             | -0,1      | 137,6             | -2,0      | 134,9             | 1,5       | 136,9             | -1,2      | 135,4             |           |
| 151,7                   | -5,9      | 143,3             | 0,6       | 144,1             | -0,6      | 143,2             | -2,5      | 139,6             | 3,9       | 145,3             | -2,5      | 141,7             |           |

Dans le cas de remplissage  $\varphi = 240^\circ$ , tableau 3.4 nous montre que l'erreur relative entre les valeurs des six premières fréquences est de l'ordre de 1% pour le maillage avec 24 éléments par rapport à un maillage avec 18 éléments. Nous observons aussi une variation oscillante de la valeur de la dernière fréquence avec le nombre des éléments utilisés dans le maillage.

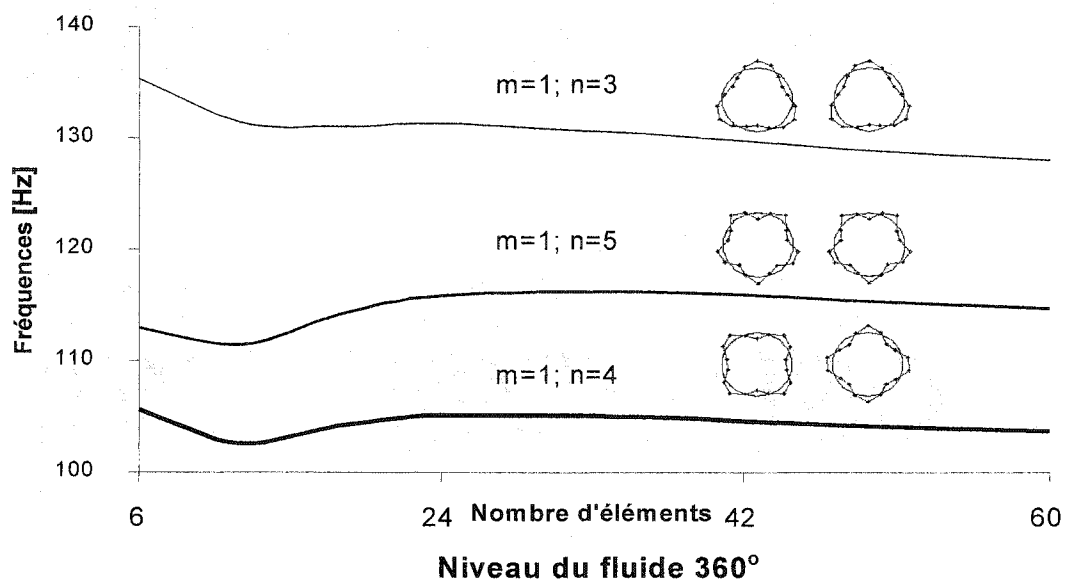


Figure 3.11 Convergence des résultats selon le raffinement du maillage ( $\varphi = 360^\circ$ )

Tableau 3.5 Analyse de la convergence en fonction du nombre d'éléments finis pour le niveau  $\varphi = 360^\circ$

| Nombre d'éléments finis |        |                |        |                |        |                |        |                |        |                |        |                |
|-------------------------|--------|----------------|--------|----------------|--------|----------------|--------|----------------|--------|----------------|--------|----------------|
| 6                       | 12     |                | 18     |                | 24     |                | 36     |                | 48     |                | 60     |                |
| Fréquence [Hz]          | E* [%] | Fréquence [Hz] | E* [%] | Fréquence [Hz] | E* [%] | Fréquence [Hz] | E* [%] | Fréquence [Hz] | E* [%] | Fréquence [Hz] | E* [%] | Fréquence [Hz] |
| 105,5                   | -2,9   | 102,5          | 1,6    | 104,2          | 0,9    | 105,1          | -0,2   | 104,9          | -0,7   | 104,2          | -0,6   | 103,6          |
| 112,9                   | -1,3   | 111,4          | 2,4    | 114,2          | 1,4    | 115,8          | 0,4    | 116,2          | -0,6   | 115,5          | -0,7   | 114,7          |
| 135,4                   | -3,1   | 131,3          | -0,3   | 131,0          | 0,2    | 131,3          | -0,7   | 130,4          | -1,0   | 129,0          | -0,8   | 128,0          |

Dans le cas de la coque pleine ( $\varphi = 360^\circ$ ), l'erreur relative entre les valeurs des trois premières fréquences est inférieure à de 1% pour le maillage avec 36 éléments par rapport à un maillage avec 24 éléments.

Une bonne convergence peut être constatée pratiquement pour tous les cas étudiés pour un maillage plus fin, supérieur à vingt éléments.

### 3.5 Validation du modèle

Pour valider la théorie développée dans cette étude, nous avons exécuté des cas expérimentaux publiés.

1) Les dimensions géométriques et les caractéristiques physiques étudiées dans la référence [2] sont comme suit :

- longueur  $L = 0,664$  m;
- rayon moyen  $r = 0,175$  m;
- épaisseur de la paroi  $t = 0,001$  m;
- numéros de mode axial  $m = 1$  et  $m = 2$ ;
- densité de la coque  $\rho = 7680$  kg/m<sup>3</sup> et celle du fluide  $\rho_F = 1000$  kg/m<sup>3</sup>;
- coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  et module de Young  $E = 206$  GPa.

Les résultats numériques obtenus par la méthode présentée dans cette étude et les résultats expérimentaux de la référence [2] sont donnés dans le tableau 3.6 pour le mode axial  $m = 1$  et dans le tableau 3.7 pour le mode axial  $m = 2$ . Une comparaison, entre les résultats expérimentaux de la référence [2] et les résultats numériques obtenus par cette

méthode, est décrite dans les figures 3.12, 3.13 et 3.14 pour différents niveaux du fluide ( $120^\circ$ ,  $180^\circ$  et  $240^\circ$  respectivement).

Les vecteurs propres sont présentés dans les figures 3.15 à 3.20.

Tableau 3.6 Comparaison des résultats numériques de cette méthode avec les résultats expérimentaux de la référence [2] pour le mode axial  $m = 1$

| $m = 1$             |                     |        |                     |                     |        |                     |                     |        |
|---------------------|---------------------|--------|---------------------|---------------------|--------|---------------------|---------------------|--------|
| $\varphi = 120$     |                     |        | $\varphi = 180$     |                     |        | $\varphi = 240$     |                     |        |
| fréquences          |                     | erreur | fréquences          |                     | erreur | fréquences          |                     | erreur |
| présente<br>théorie | expérimental<br>[2] |        | présente<br>théorie | expérimental<br>[2] |        | présente<br>théorie | expérimental<br>[2] |        |
| [Hz]                |                     | [%]    | [Hz]                |                     | [%]    | [Hz]                |                     | [%]    |
| 104,068             | 107,9               | -3,68  | 114,743             | 100,3               | 12,59  | 92,367              | 95,7                | -3,61  |
| 120,936             | 113,2               | 6,40   | 114,864             | 100,9               | 12,16  | 97,922              | 97,1                | 0,84   |
| 164,868             | 174,4               | -5,78  | 145,351             | 127,5               | 12,28  | 118,082             | 113,9               | 3,54   |
| 172,589             | 182,4               | -5,68  | 145,900             | 136                 | 6,66   | 120,165             | 116,3               | 3,22   |
| 223                 | 237,1               | -6,32  | 185,886             | -                   | -      | 137,577             | 138,7               | -0,82  |
| 236,827             | 239,7               | -1,21  | 188,967             | -                   | -      | 143,166             | 141,2               | 1,37   |
| 252,145             | 253,2               | -0,42  | 197,52              | -                   | -      | 180,641             | 180,9               | -0,14  |
| 268,673             | 258,9               | 3,64   | 198,474             | -                   | -      | 181,385             | -                   | -      |

Tableau 3.7 Comparaison des résultats numériques de cette méthode avec les résultats expérimentaux de la référence [2] pour le mode axial  $m = 2$

| $m = 2$          |                  |        |                  |                  |        |
|------------------|------------------|--------|------------------|------------------|--------|
| $\varphi = 120$  |                  |        | $\varphi = 240$  |                  |        |
| fréquences       |                  | erreur | fréquences       |                  | erreur |
| présente théorie | expérimental [2] |        | présente théorie | expérimental [2] |        |
| [Hz]             |                  | [%]    | [Hz]             |                  | [%]    |
| 233,903          | 232,7            | 0,52   | 199,966          | 219,6            | -8,94  |
| 251,36           | -                | -      | 250,56           | 238,5            | 5,06   |
| 252,857          | -                | -      | 253,345          | 241,3            | 4,99   |
| 304,045          | -                | -      | 279,883          | 270,9            | 3,32   |

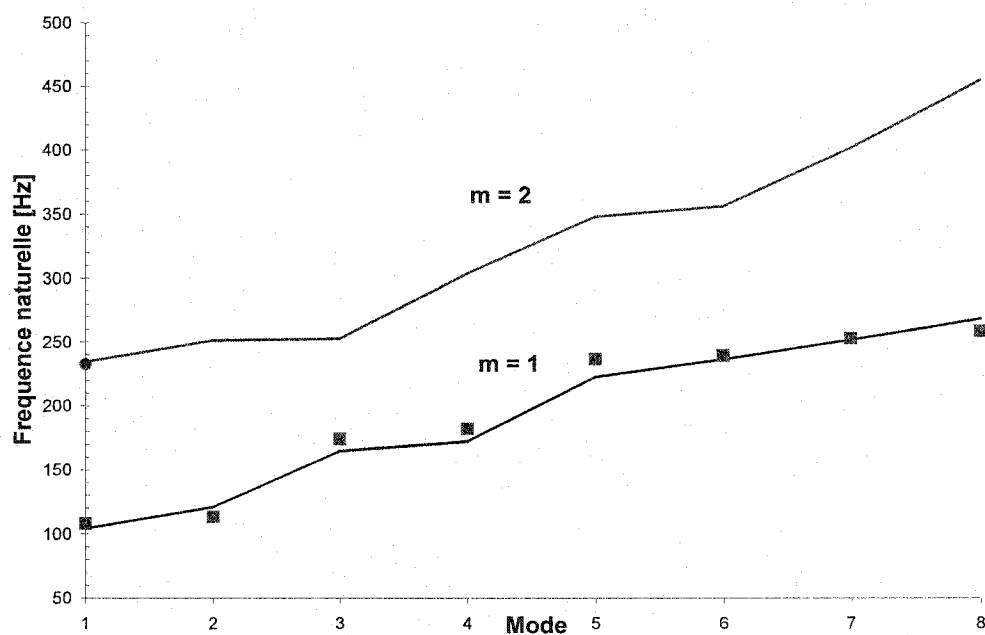


Figure 3.12 Comparaison des fréquences obtenues par cette méthode (lignes continues) avec les résultats expérimentaux (symboles) de la référence [2] ( $\varphi = 120^\circ$ )

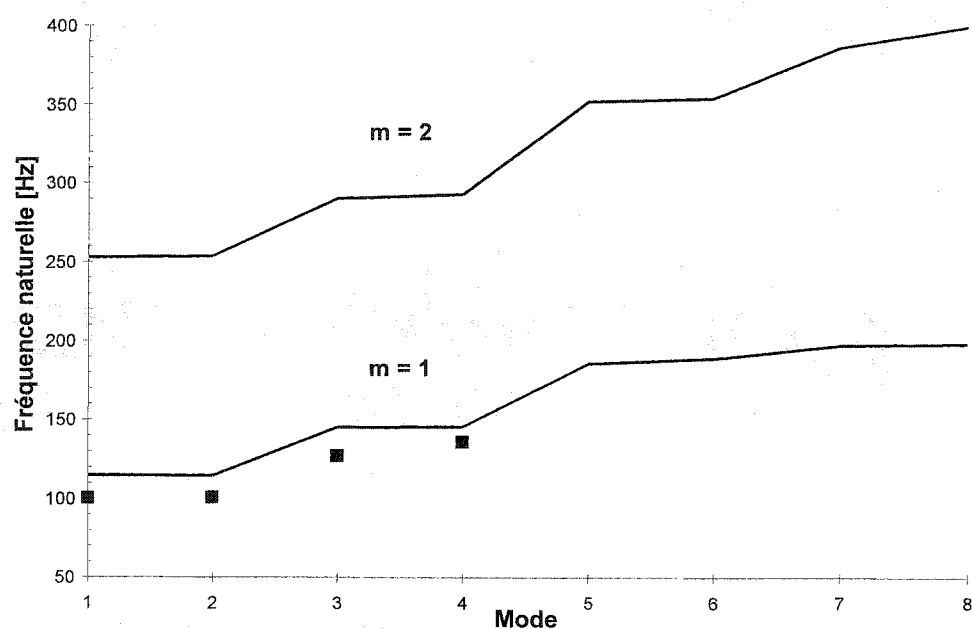


Figure 3.13 Comparaison des fréquences obtenues par cette méthode (lignes continues) avec les résultats expérimentaux (symboles) de la référence [2] ( $\varphi = 180^\circ$ )

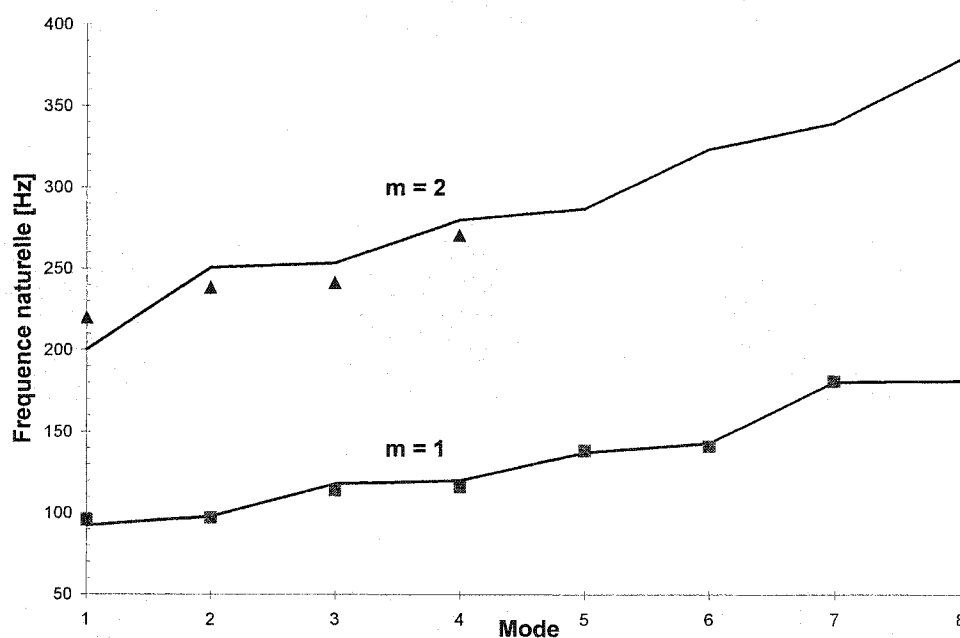


Figure 3.14 Comparaison des fréquences obtenues par cette méthode (lignes continues) avec les résultats expérimentaux (symboles) de la référence [2] ( $\varphi = 240^\circ$ )

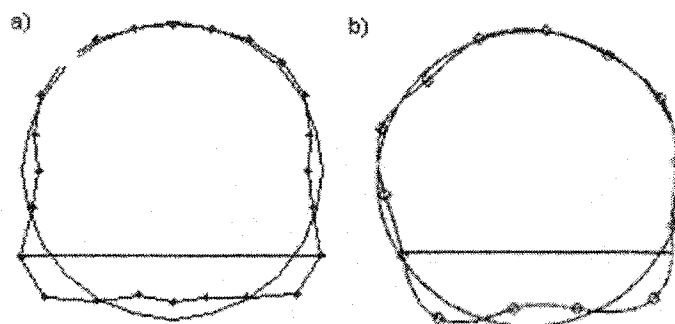


Figure 3.15 Forme circonférentielle pour le mode  $m = 1$ ,  $n = 4$  et  $\varphi = 120^\circ$ ;

- a) vecteur propre obtenu avec la présente théorie pour la fréquence 104,068 Hz,
- b) vecteur propre obtenu expérimentalement donné par la référence [2] pour la fréquence 107,9 Hz.

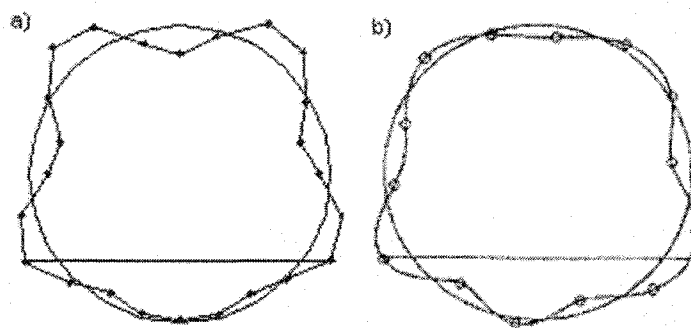


Figure 3.16 Forme circonférentielle pour le mode  $m = 1$ ,  $n = 5$  et  $\varphi = 120^\circ$ ;

- a) vecteur propre obtenu avec la présente théorie pour la fréquence 172,589 Hz,
- b) vecteur propre obtenu expérimentalement donné par la référence [2] pour la fréquence 182,4 Hz.

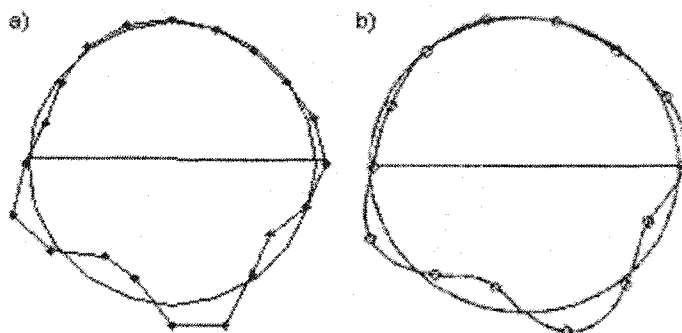


Figure 3.17 Forme circonférentielle pour le mode  $m = 1$ ,  $n = 4$  et  $\varphi = 180^\circ$ ;

- a) vecteur propre obtenu avec la présente théorie pour la fréquence 114,407 Hz,
- b) vecteur propre obtenu expérimentalement donné par la référence [2] pour la fréquence 100,9 Hz.

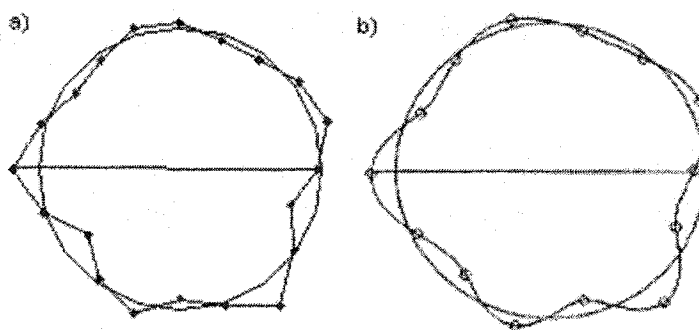


Figure 3.18 Forme circonférentielle pour le mode  $m = 1$ ,  $n = 5$  et  $\varphi = 180^\circ$ ;

- a) vecteur propre obtenu avec la présente théorie pour la fréquence 145,900 Hz,
- b) vecteur propre obtenu expérimentalement donné par la référence [2] pour la fréquence 127,5 Hz.

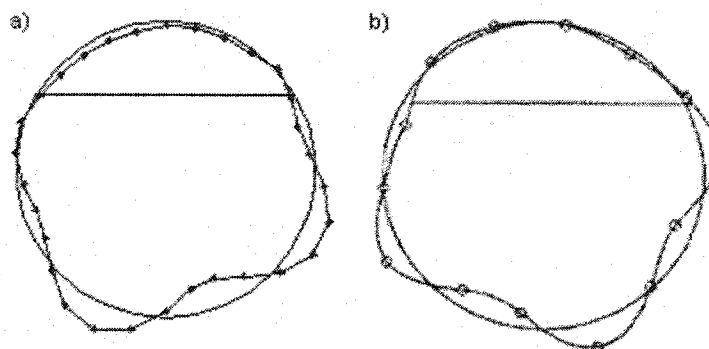


Figure 3.19 Forme circonférentielle pour le mode  $m = 1$ ,  $n = 4$  et  $\varphi = 240^\circ$ ;

- a) vecteur propre obtenu avec la présente théorie pour la fréquence 97,922 Hz,
- b) vecteur propre obtenu expérimentalement donné par la référence [2] pour la fréquence 97,1 Hz.

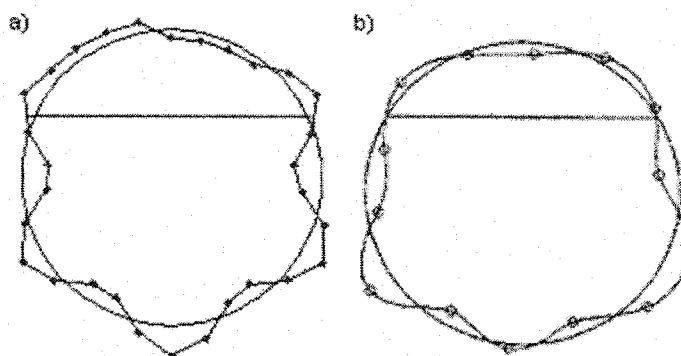


Figure 3.20 Forme circonférentielle pour le mode  $m = 1$ ,  $n = 5$  et  $\varphi = 240^\circ$ ;

- c) vecteur propre obtenu avec la présente théorie pour la fréquence 120,165 Hz,
- d) vecteur propre obtenu expérimentalement donné par la référence [2] pour la fréquence 116,3 Hz.

### 3.6 Effet de la surface libre

Pour mettre en évidence l'effet de la surface libre, une analyse comparative avec les résultats publiés dans la référence [21] a été réalisée. Il s'agit des résultats théoriques obtenus par une méthode d'élément fini hybride identique excepté que l'effet de la surface libre n'est pas considéré. À cette fin, nous avons utilisé une coque cylindrique avec les caractéristiques telles que données dans [21] :

- longueur  $L = 0,234$  m;
- rayon moyen  $r = 0,0377$  m;
- épaisseur de la paroi  $t = 0,000229$  m;
- numéro de mode axial  $m = 1$  et dans un deuxième cas  $m = 2$ ;
- densité de la coque  $\rho = 7812,5$  kg/m<sup>3</sup> et celle du fluide  $\rho_F = 1000$  kg/m<sup>3</sup>;
- coefficient de Poisson  $\nu = 0,29$  et module de Young  $E = 205$  GPa.

Pour le premier mode axial, la comparaison porte sur les modes circonférentielles  $n = 4$  et  $n = 5$ , comme indiqué dans la Figure 3.21.

Dans la figure 3.22, sont montrées les comparaisons pour le deuxième mode axial ( $m = 2$ ) des modes circonférentielles  $n = 6$  et  $n = 7$ .

Le tableau 3.8 nous montre aussi les écarts relatifs entre les deux méthodes, qui varient entre 2 et 13 % pour les niveaux du fluide comparés.

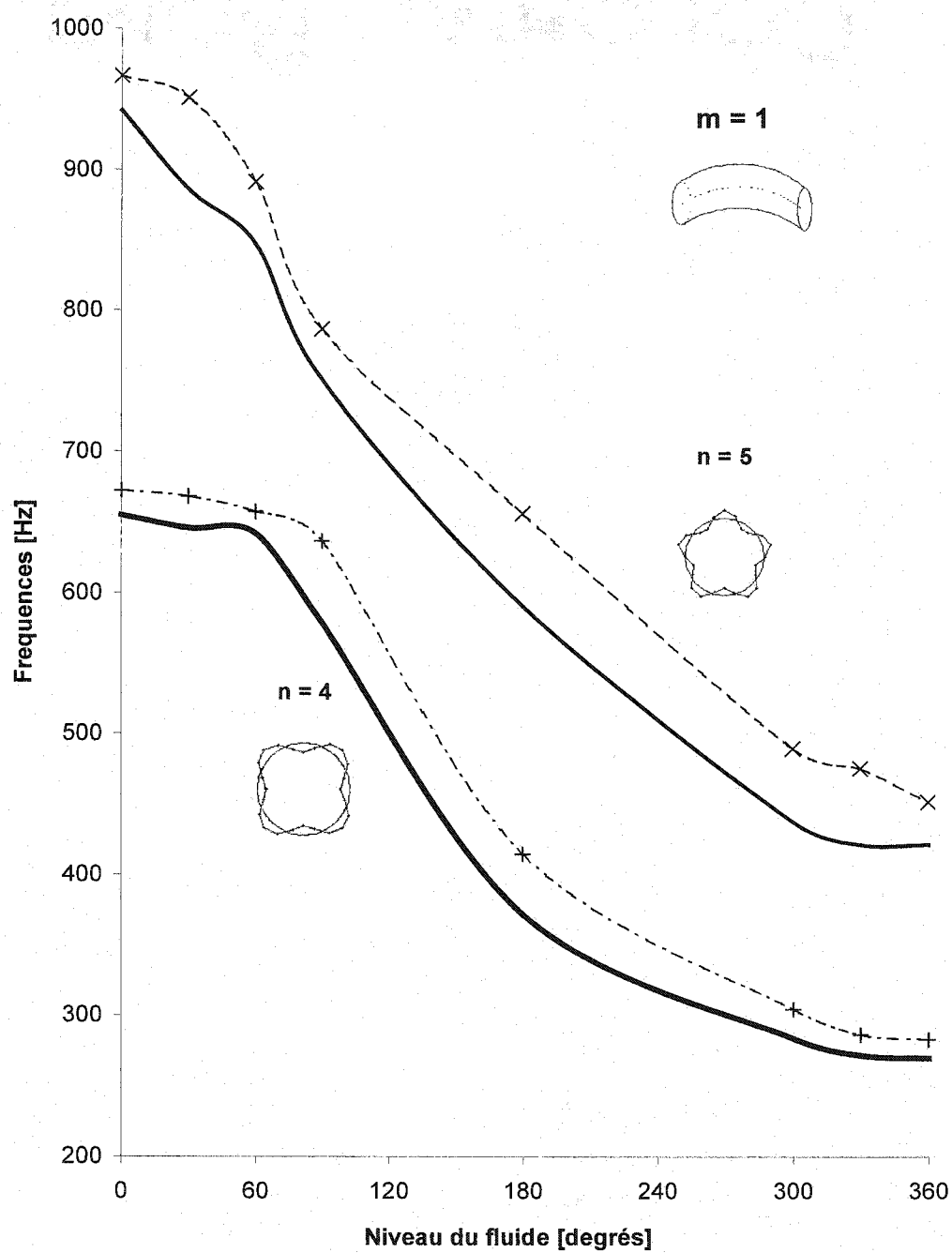


Figure 3.21 Comparaison des fréquences obtenues par cette méthode (lignes pointillées)

et celles de la référence [21] (lignes continues);  $m = 1$ ,  $n = 4$  et  $5$

Tableau 3.8 Comparaison des résultats numériques de cette méthode avec les résultats de la référence [21] pour le mode axial  $m = 1$

| Niveau de fluide [degres] | Fréquences [Hz] |                  | Écart relatif [%] | Fréquences [Hz] |                  | Écart relatif [%] |
|---------------------------|-----------------|------------------|-------------------|-----------------|------------------|-------------------|
|                           | n =4            |                  |                   | n =5            |                  |                   |
|                           | Référence [21]  | présente théorie |                   | Référence [21]  | présente théorie |                   |
| 0                         | 655             | 672,4            | 2,7               | 942             | 966,6            | 2,6               |
| 30                        | 646             | 668,3            | 3,4               | 886             | 951,4            | 7,4               |
| 60                        | 642             | 657,5            | 2,4               | 847             | 891,4            | 5,2               |
| 90                        | 579             | 636,8            | 10,0              | 751             | 786,8            | 4,8               |
| 180                       | 372             | 414,9            | 11,5              | 591             | 656,5            | 11,1              |
| 300                       | 284             | 304,7            | 7,3               | 438             | 490,0            | 11,9              |
| 330                       | 272             | 286,7            | 5,4               | 422             | 476,0            | 12,8              |
| 360                       | 270             | 283,4            | 4,9               | 422             | 452,2            | 7,2               |

Les différences observées dans la figure 3.21 et quantifiées dans le tableau 3.8 sont dues principalement à l'effet de la surface libre d'une coque horizontale partiellement remplie du liquide.

L'influence de l'effet de la surface pour  $m = 2$  est présentée dans la figure 3.22 sous forme graphique et sous forme quantitative dans le tableau 3.9 qui nous montre les écarts relatifs entre les deux méthodes, qui varient entre 2 et 17 % pour les niveaux du fluide comparés.

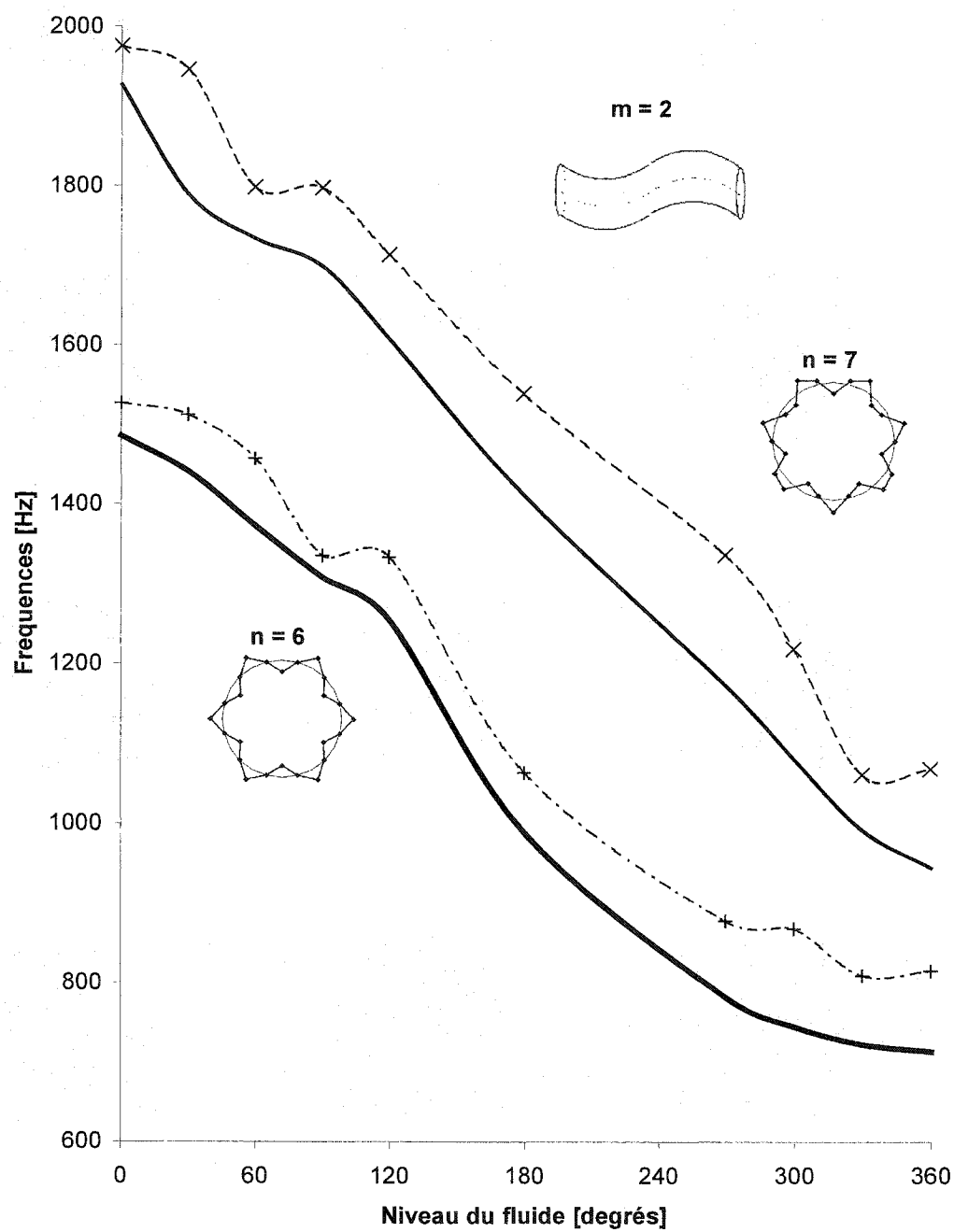


Figure 3.22 Comparaison des fréquences obtenues par cette méthode (lignes pointillées) et celles de la référence [21] (lignes continues);  $m = 2$ ,  $n = 6$  et  $7$

Tableau 3.9 Comparaison des résultats numériques de cette méthode avec les résultats de la référence [21] pour le mode axial  $m = 2$

| Niveau de<br>fluide<br>[degrés] | Fréquences [Hz]   |                     | Écart relatif<br><br>[%] | Fréquences [Hz]   |                     | Écart relatif<br><br>[%] |
|---------------------------------|-------------------|---------------------|--------------------------|-------------------|---------------------|--------------------------|
|                                 | n =6              |                     |                          | n =7              |                     |                          |
|                                 | Référence<br>[21] | présente<br>théorie |                          | Référence<br>[21] | présente<br>théorie |                          |
| 0                               | 1486              | 1527,2              | 2,8                      | 1927              | 1975,8              | 2,5                      |
| 30                              | 1441              | 1512,2              | 4,9                      | 1789              | 1946,2              | 8,8                      |
| 60                              | 1373              | 1457,4              | 6,1                      | 1734              | 1798,6              | 3,7                      |
| 90                              | 1308              | 1335,6              | 2,1                      | 1699              | 1797,8              | 5,8                      |
| 120                             | 1255              | 1333,8              | 6,3                      | 1608              | 1713,9              | 6,6                      |
| 180                             | 989               | 1064,4              | 7,6                      | 1412              | 1539,7              | 9,0                      |
| 270                             | 782               | 878,6               | 12,3                     | 1174              | 1337,2              | 13,9                     |
| 300                             | 745               | 868,9               | 16,6                     | 1082              | 1219,6              | 12,7                     |
| 330                             | 723               | 809,6               | 12,0                     | 993               | 1062,3              | 7,0                      |
| 360                             | 714               | 815,7               | 14,2                     | 946               | 1069,6              | 13,1                     |

## CONCLUSION

Ce travail présente une méthode pour l'analyse dynamique des coques minces horizontales qui prend en considération les effets de la surface libre du fluide. Une particularité de cette méthode est qu'elle utilise des fonctions de déplacement obtenues de la théorie de Sanders pour les coques minces. Les fonctions de déplacement modélisent mieux les déplacements réels des structures, nécessitant un nombre réduit d'éléments finis et un temps du calcul réduit.

L'influence de la surface libre est évaluée en développant les énergies cinétique et potentielle de l'élément fluide pendant le mouvement vibratoire. Les résultats numériques calculés à l'aide d'un logiciel informatique sont en bonne concordance avec les résultats expérimentaux de la référence [2].

Les fonctions de déplacement spécifiques nous permettent d'obtenir des résultats précis, tout en gardant un nombre réduit d'éléments finis. La fonction potentielle trouvée à partir de la condition d'imperméabilité aux parois modélise convenablement le comportement du fluide et celui de la surface libre pour le mouvement vibratoire de la coque.

Le modèle développé peut donc prévoir, d'une manière adéquate, les caractéristiques vibratoires des coques cylindriques horizontales et isotropes partiellement remplies de liquide.

La présente théorie a été développée d'une manière générale pour les coques de révolution et en détail, pour le cas des coques cylindriques. Elle permet aussi d'assembler des éléments de coque cylindriques avec des propriétés géométriques et physiques différentes et obtenir des sections complexes, comme par exemple une aile d'avion.

La méthode utilisée a l'avantage de combiner la simplicité de mise en œuvre de l'élément fini avec une modélisation réaliste de comportement du fluide et de la coque cylindrique. Dans l'étape de validation, nous constatons la force de l'approche ainsi que ses points faibles qui consistent principalement dans la grande importance de la précision nécessaire du calcul et la nécessité d'améliorer les méthodes numériques utilisées dans le logiciel.

Ce travail fait partie d'une grande étude sur la modélisation de la dynamique des coques minces. Dans le but d'obtenir un caractère beaucoup plus général, d'autres étapes s'imposent : la modélisation des conditions aux rives générales et la réalisation des éléments de coque cylindrique toroïdaux.

## RÉFÉRENCES

- [1] ABRAMOVITCH, M., STEGUN, I. (1972). *Handbook of mathematical functions*. United States Department of Commerce, Washington.
- [2] AMABILI, M. (1996). Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, 191(5), 757-780.
- [3] BASSET, A.B. (1961). *A treatise on hydrodynamics with numerous examples*. Vol. Two. Dover Publications, Inc., New York.
- [4] BERNTSEN, J., ESPELID, T.O., GENZ, A. (December 1991). Algorithm 698: DCUHRE: An Adaptive Multidimensional Integration Routine for a Vector of Integrals. *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 17, No. 4.
- [5] BERNTSEN, J., ESPELID, T.O., GENZ A. (December 1991). An Adaptive for the Approximate Calculation of Multiple Integrals. *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 17, No. 4.
- [6] BEROT, F., PESEUX, B. (1998). Vibro-acoustic behavior of submerged cylindrical shells: Analytical formulation and numerical model, *Journal of Fluids and Structures* 12, 959-1003.

- [7] BERRY, J.G., REISSNER, E. (May 1958). The effect of an internal compressible fluid column on the breathing vibrations of a thin pressurized cylindrical shell. *Journal Aerospace Sci.*, vol. 25, no. 5, 288-294.
- [8] BROWN, S.J. (February 1982). A survey of studies into the hydrodynamic response of fluid - coupled circular cylinders. *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 104, 2-19.
- [9] CHUNG, T.J. (1978). *Finite element analysis in fluid dynamics*. New York, McGraw-Hill International Book Co.
- [10] COALE, C.W., NAGANO, M. (Aug. 30 – Sept. 1, 1965). Axisymmetric modes of an elastic cylindrical- hemyspherical tank partially filled with liquid. *AIAA Symposium on Structural - Dynamics and Aeroelasticity*.
- [11] COOK, R-D., MALKUS, D.S., PLESHA, M.E. (1989). *Concepts and applications of finite element analysis*. New York, Toronto, Wiley, 3rd edition.
- [12] DODGE, F.T., KANA D.D., ABRAMSON H.N. (April 1965). Liquid Surface Oscillations In Longitudinally Excited Rigid Cylindrical Containers. *AIAA Journal*, Vol.3, No.4.

- [13] FLUGGE, W. (1973). *Stresses in Shells*. New York Springer Verlag.
- [14] IMSL (1994). *IMSL Math/Library User's Manual: Fortran Subroutines for Mathematical Applications*. Houston, Texas, Visual Numerics, Inc.
- [15] JEONG, K.-H. (1998). Natural Frequencies and mode shapes of two coaxial cylindrical shells coupled with bounded fluid. *Journal of Sound and Vibration* 215(1), 105-124.
- [16] JEONG, K.-H. (1999). Dynamics of a concentrically or eccentrically submerged circular cylindrical shell in a fluid-filled container. *Journal of Sound and Vibration* 224(4), 709-732.
- [17] KARDESTUNCER, H., NORRIE, D.H., BREZZI, F. (1987). *Finite Element Handbook*. New York, McGraw-Hill.
- [18] KRAUS, H. (1967). *Thin Elastic Shells*, John Wiley and Sons, New York.
- [19] LAKIS, A.A., TOORANI, M. H. (2001). Shear deformations in dynamic analysis of anisotropic laminated open cylindrical shell with or subjected to a

- flowing fluid. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 190 4929-4966.
- [20] LAKIS, A.A., TOORANI, M. H. (2000). General Equations of Anisotropic Plates and Shells Including Traverse Shear Deformations, Rotary Inertia and Initial Curvature. *Journal of the Sound and Vibration*. 237(4), 561-615.
- [21] LAKIS, A.A., SELMANE, A. (1997). Vibration Analysis of Anisotropic Open Cylindrical Shells Subjected to a Flowing Fluid. *Journal of Fluids and Structures*. 11 111-134
- [22] LAKIS, A.A., SELMANE, A. (1997). Non-linear dynamic analysis of orthotropic open cylindrical shells subjected to a flowing fluid. *Journal of Fluids and Structures*. 202(1), 67-93.
- [23] LAKIS, A.A., NEAGU, S.C. (1996). *L'effet de la surface libre sur la dynamique des coques cylindriques partiellement remplies de liquide*. École Polytechnique de Montréal, Département de Génie Mécanique.
- [24] LAKIS, A.A., NEAGU, S.C. (1997). Free surface effects on the dynamics of cylindrical shells partially filled with liquid. *Journal of Sound and Vibration*. 207(2), 175-205.

- [25] LAKIS, A.A., SELMANE, A. (1996). *Analyse par une méthode hybride d'éléments finis des coques cylindriques non - uniformes, anisotropes et contenant un liquide en écoulement*. École Polytechnique de Montréal, Département de Génie Mécanique.
- [26] LAKIS, A.A., SINNO, M. (1992). Free vibration of axisymmetric and beam-like cylindrical shells, partially filled with liquid. *Int. Journal for Numerical Methods in Eng.* Vol.33, pp.235-268.
- [27] LAKIS, A.A., VAN DYKE, P., OURICHE, H. (1992). Dynamic analysis of anisotropic fluid-filled conical shells. *Journal of Fluids and Struc.*, Vol.6, pp.135-162.
- [28] LAKIS, A.A., LAVEAU, A. (1991). Non-linear dynamic analysis of anisotropic shells containing a flowing fluid. *Int. Journal Solids and Struc.*, Vol.28(9), pp. 1079-1094.
- [29] LAKIS, A.A., OURICHE, H. (1986). *Dynamic analysis of anisotropic conical shells*. École Polytechnique de Montréal, Département de Génie Mécanique, EPM/RT, 86/36.

- [30] LAKIS, A.A., TOLEDANO, A. (1986). *Non-linear analysis of cylindrical shells*. École Polytechnique de Montréal, Département de Génie Mécanique, FPM/RT, 86/37.
- [31] LAKIS, A.A. (1976). Effects of fluid pressure on the vibration characteristics of cylindrical vessel. *Second International Conference on Pressure Surges*, Sept., paper II.
- [32] LAKIS, A.A. (June 1976). Theoretical Model Of Cylindrical Structures Containing Turbulent Flowing Fluids, 2<sup>nd</sup> *Intelligence symposium on finite element methods in flow problems*, Santa Margherita Ligure (Italy).
- [33] LAKIS, A.A., PAIDOUSSIS, M.P. (1972). Prediction Of The Response Of a Cylindrical Shell To Arbitrary Or Boundary-Layer-Induced Random Pressure Field. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 25, pp. 1-27.
- [34] LAKIS, A.A., PAIDOUSSIS, M.P. (1972). Dynamic Analysis Of Axially Non-Uniform Thin Cylindrical Shells. *Journal of Mechanical Science*, vol. 14, no. 1, pp.49-71.
- [35] LAKIS, A.A., PAIDOUSSIS, M.P. (1971). Free Vibration Of Cylindrical Shells Partially Filled With Liquid. *Journal of Sound and Vibration*. vol. 19, pp. 1- 15.

- [36] LAMB, H. (1945). *Hydrodynamics*. Dover publications, New York. Sixth edition.
- [37] LINDHOLM, U. S., KANA, D.D., ABRAMSON, H.N. (September 1962). Breathing Vibrations of a Circular Cylindrical Shell With an Internal Liquid. *Journal of the Aerospace Sciences*.
- [38] LIU, M., KEANE, A.J., EATOCK TAYLOR, R. (2000). Modeling liquid-structure interactions within the framework of statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration* 238(4), 547-574.
- [39] MAZUCH, T. (1996). Natural modes and frequencies of a thin clamped-free cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement. *Journal of Sound and Vibration* 193(3), 669-690.
- [40] MATHEWS, G.B., MACROBERT T.M. (1966) *A treatise on Bessel functions and their applications to physics*. New York Dover.
- [41] McCracken, D.D., DORN, W.S. (1967). *Numerical methods and FORTRAN programming*. John Wiley and Sons, Inc. New York.

- [42] MEIROVITCH L. (1967). *Analytical methods in vibrations*. Macmillan Series in Applied Mechanics.
- [43] MISTRY, J., MENEZES, J.C. (January 1995) Vibration of cylinders partially - filled with liquid. *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 117, p.87-93.
- [44] NOBLE, B., DANIEL, J.W. (1977). *Applied Linear Algebra*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall.
- [45] NIEZRECKI, C., CUDNEY, H.H. (1999). Creating and verifying a research-grade simply supported cylinder with PZT actuation. *Journal of Sound and Vibration*, 228(5), 961-975.
- [46] OWCZAREK, J.A. (1964). *Fundamentals of gas dynamics*. International Textbook Company, Scranton, Pennsylvania.
- [47] PETYT, M. (1990). *Introduction to finite element vibrations analysis*. Cambridge University Press.
- [48] PIPES, L.A. (1963). *Matrix methods for engineering*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall.

- [49] POTTER, M. C. (1978). *Mathematical methods in the physical sciences*. Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall.
- [50] RELTON, F. E. (1965). *Applied Bessel functions*. New York Dover Publications.
- [51] SANDERS, J.L. (1959). An improved first approximation theory for thin shells. *NASA, TR-R24*.
- [52] STILLMAN, W.E. (1973). Free vibration of cylinders containing liquid. *Journal of Sound and Vibration*, 30(4), 509-524.
- [53] STOKER, J.J. (1957). *Water waves: the mathematical theory with applications*. New York Interscience Publishers.
- [54] STREETER, V.L., Wylie, E.B. (1985). *Fluid Mechanics*. 8th edition, New York, Montreal, McGraw-MI.
- [55] THOMSON, I.J., BARNETT, A.R. (1985). COULCC: a continued-fraction algorithm for Coulomb functions of complex order with complex arguments. *Computer physics Communications* 36 363-372 North-Holland, Amsterdam.

- [56] THOMSON, I.J., BARNETT, A.R. (1985). Coulomb and Bessel functions of complex arguments and order, *Computer physics Communications* 36 363-372 North-Holland, Amsterdam.
  
- [57] VETTERING, W., TEUKOLSKY, S., FLANNERY, B. (1992). *Numerical recipes in FORTRAN, the art of scientific computing, Second Edition*. Cambridge University Press, Cambridge.
  
- [58] WATSON, G.N. (1958). *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge, University Press.
  
- [59] WOLFRAM, S. (1991). *Mathematica a system for doing mathematics by computer*. Addison-Wesley, Second ed., Champaign, Illinois.

## ANNEXE A

## THÉORIE DES COQUES MINCES DE SANDERS

## A.1 Équations générales d'équilibre

Il y a cinq équations différentielles de mouvement déduites par Sanders [51] sous la forme :

$$\frac{\partial A_2 N_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1 \bar{N}_{12}}{\partial \xi_2} + \bar{N}_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} - N_{22} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_1 + \frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \bar{M}_{12} \right] = 0$$

$$\frac{\partial A_2 N_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1 N_{22}}{\partial \xi_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} - N_{11} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + \frac{A_1 A_2}{R_2} Q_2 + \frac{A_2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \bar{M}_{12} \right] = 0$$

$$\frac{\partial A_2 Q_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_2 Q_1}{\partial \xi_1} - A_1 A_2 \left( \frac{N_{11}}{R_1} - \frac{N_{22}}{R_2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial A_2 M_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1 \bar{M}_{12}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \bar{M}_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} M_{22} - A_1 A_2 Q_1 = 0$$

$$\frac{\partial A_2 \bar{M}_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_1 M_{22}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \bar{M}_{12} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} M_{11} - A_1 A_2 Q_2 = 0$$

$$\text{avec: } \begin{cases} \bar{N}_{12} = \frac{1}{2} (N_{12} + N_{21}) \\ \bar{M}_{12} = \frac{1}{2} (M_{12} + M_{21}) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

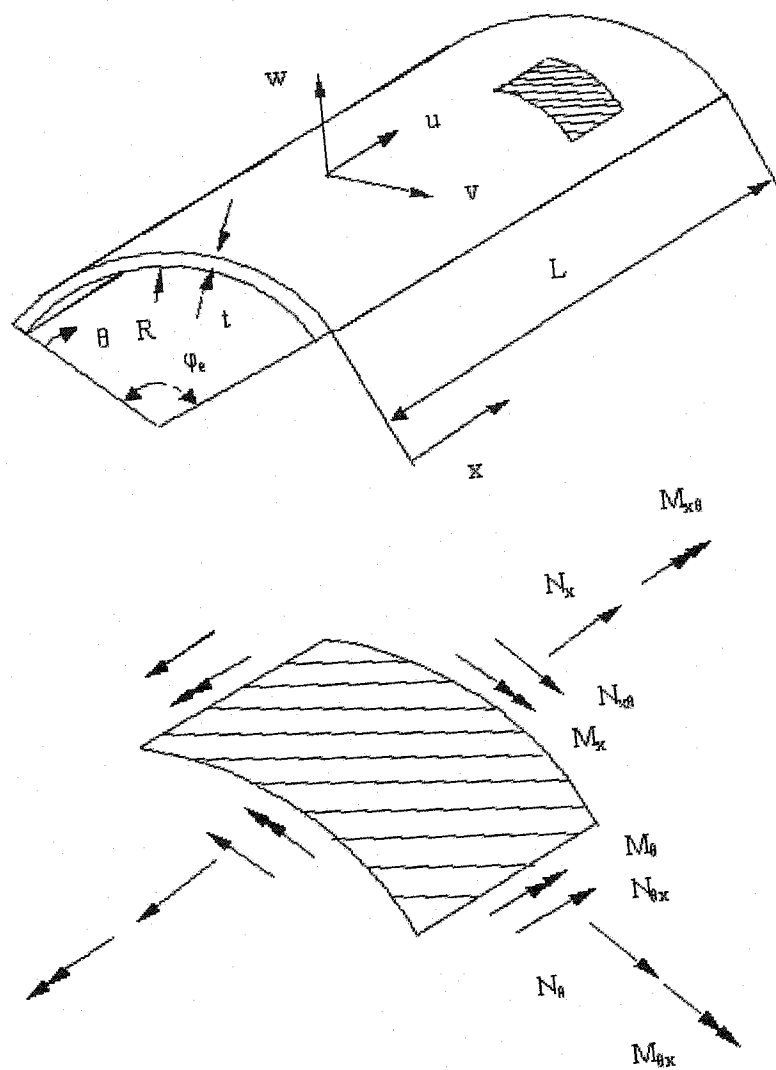


Figure A.1 Coque cylindrique avec élément différentiel

## A.2 Vecteur de déformation

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} U_2 + \frac{W}{R_1}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial U_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} U_1 + \frac{W}{R_2}$$

$$\bar{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2A_1 A_2} \left( A_2 \frac{\partial U_2}{\partial \xi_1} + A_1 \frac{\partial U_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} U_1 - \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} U_2 \right)$$

$$k_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \beta_2$$

$$k_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \beta_1$$

$$\bar{k}_{12} = \frac{1}{2A_1 A_2} \left[ A_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_1} + A_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \beta_1 - \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \beta_2 \left[ + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \beta_2 \right] \right]$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \left( \frac{\partial A_2 U_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial A_1 U_1}{\partial \xi_2} \right) \quad (A.2)$$

$$\text{avec: } \begin{cases} \beta_1 = \frac{U_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \\ \beta_2 = \frac{U_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \end{cases}$$

### A.3 Conditions aux rives

$$\begin{aligned}
 \frac{M_{11}}{R_{11}} + N_{11} &= \bar{N}_{11} & \text{ou} & & U_1 &= U_1^* \\
 \bar{N}_{12} + \left( \frac{3}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \frac{\bar{M}_{12}}{2} &= \bar{T}_{12} & \text{ou} & & U_2 &= U_2^* \\
 Q_1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \bar{M}_{12}}{\partial \xi_2} &= \bar{V}_1 & \text{ou} & & W &= W^* \\
 M_{11} &= \bar{M}_{11} & \text{ou} & & \frac{\partial W}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial W^*}{\partial \xi_1}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Pour une rive à  $\xi_1$  constant, les quantités marquées avec étoile correspondent aux valeurs de la rive.

### A.4 Paramètres pour une coque cylindrique de révolution

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= x & U_1 &= U & R_1 &= \infty & A_1 &= 1 \\
 \xi_2 &= \theta & U_2 &= V & R_2 &= r & A_2 &= r \\
 w &= W
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

En substituant ces paramètres dans les relations (A.1), nous obtenons les équations d'équilibre des coques cylindriques :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{N}_{x\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial \bar{M}_{x\theta}}{\partial \theta} &= 0 \\
\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{N}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{N}_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{2R} \frac{\partial \bar{M}_{x\theta}}{\partial x} + \frac{Q_\theta}{R} &= 0 \\
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} &= 0 \\
\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{M}_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_x &= 0 \\
\frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{M}_{x\theta}}{\partial x} - Q_\theta &= 0
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Nous pouvons réduire le nombre de ces équations de cinq à trois en éliminant les forces de cisaillement.  $Q_x$  et  $Q_\theta$  sont exprimés à partir des deux dernières relations (A.5) et ensuite remplacés dans les premières trois :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{N}_{x\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial \bar{M}_{x\theta}}{\partial \theta} &= 0 \\
\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{N}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{N}_{x\theta}}{\partial x} + \frac{3}{2R} \frac{\partial \bar{M}_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} &= 0 \\
\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \bar{M}_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} &= 0
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Nous remplaçons également les paramètres des coques cylindriques (A.4) dans les valeurs du vecteurs de déformation (A.2) :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{W}{R}$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$k_\theta = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$k_{x\theta} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \theta} + \frac{3}{4r} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (\text{A.7})$$

Relations contraintes – déformations :

$$N_x = D(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta) \quad M_x = K(k_x + \nu k_\theta)$$

$$N_\theta = D(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x) \quad M_\theta = K(k_\theta + \nu k_x) \quad (\text{A.8})$$

$$N_{x\theta} = D(1-\nu)\varepsilon_{x\theta} \quad M_{x\theta} = K(1-\nu)k_{x\theta}$$

Paramètres de rigidité :

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad D = \frac{Et}{1-\nu^2} \quad (\text{A.9})$$

Finalement, en substituant (A.7) et (A.8) dans les relations (A.6) on obtient trois équations différentielles de mouvement en termes de déplacements U, V et W :

$$r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{r(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + r\nu \frac{\partial W}{\partial x} + k \left[ \frac{(1-\nu)}{8} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{3(1-\nu)r}{8} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \frac{(1-\nu)r}{2} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial \theta^2} \right] = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{(1-\nu)r^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial \theta} + k \left[ -\frac{3(1-\nu)r}{8} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} + \frac{9(1-\nu)r^2}{8} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - \frac{(3-\nu)r^2}{2} \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3} \right] = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$-vr \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial \theta} - W + k \left[ \frac{(1+\nu)r}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{(3-\nu)r^2}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3} - r^4 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - 2r^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^4 V}{\partial \theta^4} \right] = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\text{où } k = \frac{1}{12} \left( \frac{t}{r} \right)^2$$

#### A.5 Matrices [P], [H], [A], [R], [T<sub>m</sub>], [Q]

Les matrices suivantes concernent le développement analytique de la coque cylindrique solide et elles ont été citées dans le chapitre deux :

MATRICE  $[P]_{6 \times 6}$ 

$$\{\sigma\} = [P]\{\varepsilon\} \quad (A.13)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{44} & P_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{54} & P_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{66} \end{bmatrix} \quad (A.14)$$

Pour un matériel isotrope les termes sont :

$$P_{11} = P_{22} = D \quad P_{44} = P_{55} = K$$

$$P_{12} = P_{21} = \nu D \quad P_{45} = P_{54} = \nu K \quad (A.15)$$

$$P_{33} = \frac{(1-\nu)}{2} D \quad P_{66} = \frac{(1-\nu)}{2} D$$

où D est la rigidité due à l'effet de membrane et K la rigidité en flexion, dont les expressions sont :

$$D = \frac{E t}{1-\nu^2}; \quad K = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad (A.16)$$

avec E le module de Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson et t l'épaisseur de la paroi de la coque.

MATRICE  $[H]_{3 \times 3}$

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -H_{13} \\ -H_{23} \end{Bmatrix} \text{ avec } j=1,2,\dots,8 \quad (\text{A.17})$$

les termes de la matrice [H] sont :

$$\begin{aligned} H_{11} &= -P_{11} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{\eta^2}{R^2} \left[ P_{33} + \frac{1}{4R^2} P_{66} \right] \\ H_{12} &= \frac{\eta}{R} \frac{m\pi}{L} \left[ (P_{12} + P_{33}) - \frac{3}{4R} P_{66} \right] \\ H_{13} &= \frac{1}{R} \frac{m\pi}{L} \left( P_{12} + \frac{\eta^2}{R^2} P_{66} \right) \\ H_{21} &= H_{12} \\ H_{22} &= \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( P_{33} + \frac{9}{4R^2} P_{66} \right) - \frac{\eta^2}{R^2} \left( P_{22} + \frac{1}{R^2} P_{55} \right) \\ H_{23} &= -\frac{\eta}{R^2} \left[ P_{22} - \frac{\eta^2}{R^3} P_{55} + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 (3P_{66} + P_{54}) \right] \\ H_{31} &= H_{13} \\ H_{32} &= H_{23} \\ H_{33} &= -\frac{\eta^4}{R^4} P_{55} + \frac{\eta^2}{R^2} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 (2P_{45} + 4P_{66}) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

MATRICE [A]<sub>8x8</sub>

$$\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = [A] \{C\} \quad (\text{A.19})$$

Les termes de la matrice [A] sont donnés par :

$$[A] = \begin{bmatrix} A(1, j) = \alpha_j \\ A(2, j) = 1 \\ A(3, j) = \eta_j \\ A(4, j) = \beta_j \\ A(5, j) = \alpha_j e^{\eta_j \theta} \\ A(6, j) = e^{\eta_j \theta} \\ A(7, j) = \eta_j e^{\eta_j \theta} \\ A(8, j) = \beta_j e^{\eta_j \theta} \end{bmatrix} \quad \text{pour } j = 1 \dots 8 \quad (\text{A.20})$$

MATRICE  $[R]_{3 \times 8}$

$$[R] = \begin{bmatrix} R(1, j) = \alpha_j e^{\eta_j \theta} \\ R(2, j) = e^{\eta_j \theta} \\ R(3, j) = \beta_j e^{\eta_j \theta} \end{bmatrix} \quad \text{pour } j = 1 \dots 8 \quad (\text{A.21})$$

MATRICE  $[T_m]_{3 \times 3}$

$$[T_m] = \begin{bmatrix} \cos \frac{m\pi x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \sin \frac{m\pi x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \sin \frac{m\pi x}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

MATRICE  $[Q]_{3 \times 8}$ 

Définie par l'expression :

$$[Q]_{6 \times 8} = \begin{bmatrix} Q(1, j) = A_j e^{\eta_j \theta} \\ Q(2, j) = B_j e^{\eta_j \theta} \\ Q(3, j) = C_j e^{\eta_j \theta} \\ Q(4, j) = D_j e^{\eta_j \theta} \\ Q(5, j) = E_j e^{\eta_j \theta} \\ Q(6, j) = F_j e^{\eta_j \theta} \end{bmatrix} \text{ pour } j = 1 \dots 8 \quad (\text{A.23})$$

où pour  $j = 1 \dots 8$  nous avons :

$$\begin{aligned} A_j &= -\frac{m\pi\alpha_j}{L}; & B_j &= -\frac{\eta_j\beta_j + 1}{R}; & C_j &= -\frac{m\pi\beta_j}{L} + \frac{\eta_j\alpha_j}{R} \\ D_j &= -\frac{(m\pi)^2}{L^2}; & E_j &= -\frac{\eta_j^2 + \eta_j\beta_j}{R^2}; & F_j &= -\frac{2m\pi\eta_j}{RL} + \frac{3m\pi\beta_j}{2RL} - \frac{\eta_j\alpha_j}{2R^2} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

## ANNEXE B

### CALCUL DE LA SOMME DES MATRICES DE MASSE DU FLUIDE

#### B.1 Expressions des matrices de masse

##### B.1.1 Cas $\varphi = \pi$

Calcul de  $[m_x]$

L'expression de l'énergie cinétique dans la direction axiale, telle que trouvée dans la relation (2.5.10), est donnée par :

$$T_x = \frac{\rho_F L}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \int_0^a [H_x]^T \int_0^{\theta_G} \{R_F\} \{R_F\}^T d\theta [H_x] r dr [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.1)$$

Pour intégrer par rapport à  $\theta$ , nous connaissons la forme de  $\{R_F\}$  donnée par (2.4.19), le résultat sera :

$$[R_{F\theta}] = \int_0^{\theta_G} \{R_F\} \{R_F\}^T d\theta \quad (B.2)$$

Pour  $j$  et  $k = 1, 2, 3, \dots, 8$ , le terme général  $R_{F\theta}(j, k)$  après l'intégration de (B.2) est :

$$R_{F\theta}(j, k) = \int_0^{\theta_G} e^{\eta_j \theta} e^{\eta_k \theta} d\theta = \frac{1}{\eta_j + \eta_k} (e^{\eta_j \theta_G} e^{\eta_k \theta_G} - 1) = \frac{1}{\eta_j + \eta_k} [e^{(\eta_j + \eta_k) \theta_G} - 1] \quad (B.3)$$

où  $\theta_G$  et 0 les limites en coordonnée  $\theta$  pour un élément fini  $e$ ;  $i^2 = -1$  et  $\eta_j$  avec  $j = 1, 2, 3, \dots, 8$  sont les solutions complexes de l'équation caractéristique.

L'énergie cinétique  $T_x$  devient :

$$T_x = \frac{\rho_F L}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \int_0^a [H_x]^T [R_{F0}] [H_x] r dr [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.4)$$

La dernière intégrale, par rapport à  $r$ , est notée avec :

$$[h_x] = \int_0^a [H_x]^T [R_{F0}] [H_x] r dr \quad (B.5)$$

Avec la relation (2.5.11) pour les termes de  $[H_x]$  et l'équation (B.3), le terme général, pour  $j$  et  $k = 1, 2, 3, \dots, 8$ , est :

$$h_x(j, k) = \frac{-R_{F0}(j, k)}{J'_{i\eta_j} \left( \frac{im\pi}{L} a \right) J'_{i\eta_k} \left( \frac{im\pi}{L} a \right)} \int_0^a r J_{i\eta_j} \left( \frac{im\pi}{L} r \right) J_{i\eta_k} \left( \frac{im\pi}{L} r \right) dr \quad (B.6)$$

L'expression de l'énergie cinétique dans la direction axiale devient alors :

$$T_x = \frac{\rho_F L}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T [h_x] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.7)$$

avec la notation de la matrice de masse :

$$[m_x] = \frac{\rho_F L}{2} [A^{-1}]^T [h_x] [A^{-1}] \quad (B.8)$$

Nous obtenons :

$$T_x = \frac{1}{2} \{\dot{q}\} [m_x] \{\dot{q}\}^T \quad (B.9)$$

Calcul de  $[m_r]$

En reprenant la relation (2.5.18) et en changeant les limites d'intégration, nous pouvons écrire :

$$T_r = \frac{L\rho_F}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \int_0^a [H_R]^T \int_0^{\theta_G} \{R_F\} \{R_F\}^T d\theta [H_R] r dr [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.10)$$

Avec  $[R_{F\theta}]$  calculée dans les relations (B.2) et (B.3), nous pouvons écrire :

$$T_r = \frac{L\rho_F}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \int_0^a [H_R]^T [R_{F\theta}] [H_R] r dr [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.11)$$

L'intégrale par rapport à  $r$  nous donne :

$$[h_r] = \int_0^a [H_R]^T [R_{F\theta}] [H_R] r dr \quad (B.12)$$

avec  $[H_R]$  donnée par (2.5.15) nous avons :

$$h_r(j,k) = \frac{R_{F\theta}(j,k)}{\left(\frac{im\pi}{L}\right)^2 J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}a\right) J'_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}a\right)} \int_0^a J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}r\right) J'_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}r\right) r dr \quad (B.15)$$

L'expression de l'énergie cinétique dans la direction radiale devient :

$$T_r = \frac{L\rho_F}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T [h_r] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.16)$$

La matrice de masse :

$$[m_r] = \frac{L\rho_F}{2} [A^{-1}]^T [h_r] [A^{-1}] \quad (B.17)$$

Et finalement :

$$T_r = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m_r] \{\dot{q}\} \quad (B.18)$$

Calcul de  $[m_\theta]$

La relation (2.5.26) avec des limites d'intégration changées, nous donne :

$$T_\theta = \frac{L\rho_F}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \int_0^a [H_\theta]^T \int_0^{\theta_G} \{R_F\} \{R_F\}^T d\theta [H_\theta] \frac{1}{r} dr [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.19)$$

ou encore :

$$T_\theta = \frac{L\rho_F}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \int_0^a \frac{1}{r} [H_\theta]^T [R_{F\theta}] [H_\theta] dr [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.20)$$

En faisant la notation :

$$[h_\theta] = \int_0^a \frac{1}{r} [H_\theta]^T [R_{F\theta}] [H_\theta] dr \quad (B.21)$$

où  $[H_\theta]$  est donnée par (2.5.23), le terme général de la matrice  $[h_\theta]$  est :

$$h_\theta(j, k) = \frac{\eta_j \eta_k R_{F\theta}(j, k)}{\left(\frac{im\pi}{L}\right)^2 J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}a\right) J'_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}a\right)} \int_0^a \frac{1}{r} J_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}r\right) J_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}r\right) dr \quad (B.22)$$

L'expression de l'énergie devient :

$$T_{\theta} = \frac{L\rho_F}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T [h_{\theta}] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.23)$$

Faisant une dernière notation :

$$[m_{\theta}] = \frac{L\rho_F}{2} [A^{-1}]^T [h_{\theta}] [A^{-1}] \quad (B.24)$$

Nous obtenons :

$$T_{\theta} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m_{\theta}] \{\dot{q}\} \quad (B.25)$$

### B.1.2 Cas $\varphi < \pi$

Une des limites d'intégration est donnée par l'équation géométrique de la surface libre  $r_1$  (voir Figure 2.1) en fonction de l'angle  $\theta$  et de la position de l'élément fini dans la structure (donné par le nombre  $e$ ) :

$$\begin{aligned} r_1(\theta) &= a \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \left( \frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta \right)} & \text{pour } 0 < \theta < \frac{\varphi}{2} \\ r_1(\theta) &= a \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \left( \theta - e\theta_G - \frac{\varphi}{2} \right)} & \text{pour } \frac{\varphi}{2} < \theta < \varphi \end{aligned} \quad (B.26)$$

Calcul de  $[m_x]$

L'expression de l'énergie cinétique dans la direction axiale, telle que trouvée dans la relation (2.5.10), est donnée par :

$$T_x = \frac{\rho_F L}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \int_0^{\theta_G} \{R_F\} \int_{r_1(\theta)}^a [H_x]^T [H_x] r dr \{R_F\}^T d\theta [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.27)$$

L'intégrale par rapport à  $r$ , est notée avec :

$$[I_x] = \int_{r_1(\theta)}^a [H_x]^T [H_x] r dr \quad (B.28)$$

avec  $[H_x]$  donnée par la relation (2.5.11) on peut évaluer le terme général :

$$I_x(j, k) = \frac{-1}{J'_{i\eta_j} \left( \frac{im\pi}{L} a \right) J'_{i\eta_k} \left( \frac{im\pi}{L} a \right)} \int_{r_1(\theta)}^a r J_{i\eta_j} \left( \frac{im\pi}{L} r \right) J_{i\eta_k} \left( \frac{im\pi}{L} r \right) dr \quad (B.29)$$

Avec la notation :

$$[h_x] = \int_0^{\theta_G} \{R_F\} [I_x] \{R_F\}^T d\theta \quad (B.30)$$

Le terme général de la matrice  $8 \times 8$ , avec  $j$  et  $k=1,2,\dots,8$ ,  $[h_x]$  aura la forme :

$$h_x(j, k) = \frac{-1}{J'_{i\eta_j} \left( \frac{im\pi}{L} a \right) J'_{i\eta_k} \left( \frac{im\pi}{L} a \right)} \int_0^{\theta_G} e^{\eta_j \theta} e^{\eta_k \theta} \int_{r_1(\theta)}^a r J_{i\eta_j} \left( \frac{im\pi}{L} r \right) J_{i\eta_k} \left( \frac{im\pi}{L} r \right) dr d\theta \quad (B.31)$$

L'énergie cinétique dans la direction axiale devient :

$$T_x = \frac{\rho_F L}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T [h_x] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.32)$$

Avec la notation de la matrice de masse :

$$[m_x] = \frac{\rho_F L}{2} [A^{-1}]^T [h_x] [A^{-1}] \quad (B.33)$$

Nous obtenons :

$$T_x = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m_x] \{\dot{q}\} \quad (B.34)$$

Calcul de  $[m_r]$

En reprenant la relation (2.5.18) :

$$T_r = \frac{L\rho_F}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \int_0^{\theta_G} \{R_F\} \int_{r_1(\theta)}^a [H_R]^T [H_R] r dr \{R_F\}^T d\theta [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.35)$$

avec la notation de la matrice :

$$[I_r] = \int_{r_1(\theta)}^a [H_R]^T [H_R] r dr \quad (B.36)$$

qui a le terme général :

$$I_r(j,k) = \frac{1}{\left(\frac{im\pi}{L}\right)^2 J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}a\right) J'_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}a\right)} \int_{r(\theta)}^a J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}r\right) J'_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}r\right) r dr \quad (B.37)$$

et avec la notation :

$$[h_r] = \int_0^{\theta_G} \{R_F\} [I_r] \{R_F\}^T d\theta \quad (B.38)$$

qui a le terme général :

$$h_r(j,k) = \frac{1}{\left(\frac{im\pi}{L}\right)^2 J'_{i\eta_j} \left(\frac{im\pi}{L}a\right) J'_{i\eta_k} \left(\frac{im\pi}{L}a\right)} \int_0^{\theta_G} e^{\eta_j\theta} e^{\eta_k\theta} \times \int_{r_j(\theta)}^a r J'_{i\eta_j} \left(\frac{im\pi}{L}r\right) J'_{i\eta_k} \left(\frac{im\pi}{L}r\right) dr d\theta \quad (B.39)$$

l'expression de l'énergie cinétique dans la direction radiale devient :

$$T_r = \frac{\rho_F L}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T [h_r] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.40)$$

En faisant la notation de la matrice de masse  $[m_r]$  avec l'expression :

$$[m_r] = \frac{\rho_F L}{2} [A^{-1}]^T [h_r] [A^{-1}] \quad (B.41)$$

l'énergie cinétique sera :

$$T_r = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m_r] \{\dot{q}\} \quad (B.42)$$

Calcul de  $[m_\theta]$

La relation (2.5.26), pour l'énergie cinétique dans la direction  $\theta$  :

$$T_{\theta} = \frac{L\rho_F}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \int_0^{\theta_G} \{R_F\} \int_{r_1(\theta)}^a [H_{\theta}]^T [H_{\theta}] \frac{1}{r} dr \{R_F\}^T d\theta [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.43)$$

avec la notation :

$$[I_{\theta}] = \int_{r_1(\theta)}^a \frac{1}{r} [H_{\theta}]^T [H_{\theta}] dr \quad (B.44)$$

dont le terme général est :

$$I_{\theta}(j, k) = \frac{\eta_j \eta_k}{\left(\frac{im\pi}{L}\right)^2 J'_{i\eta_j} \left(\frac{im\pi}{L} a\right) J'_{i\eta_k} \left(\frac{im\pi}{L} a\right)} \int_{r_1(\theta)}^a J_{i\eta_j} \left(\frac{im\pi}{L} r\right) J_{i\eta_k} \left(\frac{im\pi}{L} r\right) \frac{1}{r} dr \quad (B.45)$$

et avec la notation :

$$[h_{\theta}] = \int_0^{\theta_G} \{R_F\} [I_{\theta}] \{R_F\}^T d\theta \quad (B.46)$$

avec le terme général :

$$h_{\theta}(j, k) = \frac{\eta_j \eta_k}{\left(\frac{im\pi}{L}\right)^2 J'_{i\eta_j} \left(\frac{im\pi}{L} a\right) J'_{i\eta_k} \left(\frac{im\pi}{L} a\right)} \int_0^{\theta_G} e^{\eta_j \theta} e^{\eta_k \theta} \times \\ \times \int_{r_1(\theta)}^a \frac{1}{r} J_{i\eta_j} \left(\frac{im\pi}{L} r\right) J_{i\eta_k} \left(\frac{im\pi}{L} r\right) dr d\theta \quad (B.47)$$

l'énergie cinétique dans direction  $\theta$  devient :

$$T_{\theta} = \frac{\rho_F L}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T [h_{\theta}] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.48)$$

La matrice de masse a l'expression :

$$[m_{\theta}] = \frac{\rho_F L}{2} [A^{-1}]^T [h_{\theta}] [A^{-1}] \quad (B.49)$$

et celle d'énergie devient :

$$T_\theta = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m_\theta] \{\dot{q}\} \quad (\text{B.50})$$

### B.1.3 Cas $\varphi > \pi$

Pour ce cas une, des limites d'intégration est donnée par la surface libre (voir Figure 2.3)

qui a l'équation  $r_1$  en fonction de  $\theta$ .

$$r_1(\theta) = \begin{cases} a \frac{\cos\left(\frac{2\pi - \varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi - \varphi}{2} - \theta\right)} & \text{pour } 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi - \varphi}{2} \\ a \frac{\cos\left(\frac{2\pi - \varphi}{2}\right)}{\cos\left(\theta - \frac{2\pi - \varphi}{2}\right)} & \text{quand } \frac{2\pi - \varphi}{2} \leq \theta \leq 2\pi - \varphi \end{cases} \quad (\text{B.51})$$

Pour les éléments de 2 à  $n$ , le calcul de la matrice de masse est donné dans le paragraphe

B.1. Donc, nous considérons dans ce qui suit seulement le premier élément.

Calcul de  $[m_x]$

Nous reprenons la relation (2.5.10), pour l'énergie cinétique dans la direction  $x$ , avec les limites d'intégration changées et en considérant la notation :

$$\varphi_1 = 2\pi - \varphi \quad (\text{B.52})$$

$$\begin{aligned} T_x = \frac{\rho_F L}{4} \{\dot{q}\}^T [A_F^{-1}]^T & \left\{ \int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} \{R_F\} \int_0^{r_1(\theta)} [H_x]^T [H_x] r dr \{R_F\}^T d\theta + \right. \\ & \left. + \int_{\frac{\varphi_1}{2}}^{\varphi_1} \{R_F\} \int_0^{r_1(\theta)} [H_x]^T [H_x] r dr \{R_F\}^T d\theta \right\} [A_F^{-1}] \{\dot{q}\} \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

L'intégrale par rapport à  $r$ , est notée avec :

$$[I_x] = \int_0^{r(\theta)} [H_x]^T [H_x] r dr \quad (\text{B.54})$$

avec  $[H_x]$  donnée par la relation (2.5.11) on peut évaluer le terme général :

$$I_x(j, k) = \frac{-1}{J'_{i\eta_j} \left( \frac{i m \pi}{L} a \right) J'_{i\eta_k} \left( \frac{i m \pi}{L} a \right)} \int_0^{r_1(\theta)} r J_{i\eta_j} \left( \frac{i m \pi}{L} r \right) J_{i\eta_k} \left( \frac{i m \pi}{L} r \right) dr \quad (\text{B.55})$$

Avec la notation :

$$[h_x] = \int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} \{R_F\} [I_x] \{R_F\}^T d\theta + \int_{\frac{\varphi_1}{2}}^{\varphi_1} \{R_F\} [I_x] \{R_F\}^T d\theta \quad (\text{B.56})$$

L'énergie cinétique dans la direction axiale devient :

$$T_x = \frac{\rho_F L}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T [h_x] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (\text{B.57})$$

Avec la notation de la matrice de masse :

$$[m_x] = \frac{\rho_F L}{2} [A^{-1}]^T [h_x] [A^{-1}] \quad (\text{B.58})$$

finalement nous obtenons :

$$T_x = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m_x] \{\dot{q}\} \quad (B.59)$$

Calcul de  $[m_r]$

En reprenant la relation (2.5.18), avec des nouvelles limites d'intégration :

$$T_r = \frac{\rho_F L}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \left\{ \int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} \{R_F\} \int_0^{r_1(\theta)} [H_r]^T [H_r] r dr \{R_F\}^T d\theta + \right. \\ \left. + \int_{\frac{\varphi_1}{2}}^{\varphi_1} \{R_F\} \int_0^{r_1(\theta)} [H_r]^T [H_r] r dr \{R_F\}^T d\theta \right\} [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.60)$$

avec la notation de la matrice :

$$[I_r] = \int_0^{r_1(\theta)} [H_R]^T [H_R] r dr \quad (B.61)$$

qui a le terme général :

$$I_r(j, k) = \frac{1}{\left(\frac{im\pi}{L}\right)^2 J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}a\right) J'_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}a\right)} \int_0^{r_1(\theta)} J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}r\right) J'_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}r\right) r dr \quad (B.62)$$

et avec la notation :

$$[h_r] = \int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} \{R_F\} [I_r] \{R_F\}^T d\theta + \int_{\frac{\varphi_1}{2}}^{\varphi_1} \{R_F\} [I_r] \{R_F\}^T d\theta \quad (B.64)$$

l'expression de l'énergie cinétique dans la direction radiale devient :

$$T_r = \frac{\rho_F L}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T [h_r] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.65)$$

En faisant la notation de la matrice de masse  $[m_r]$  avec l'expression :

$$[m_r] = \frac{\rho_F L}{2} [A^{-1}]^T [h_r] [A^{-1}] \quad (B.66)$$

l'énergie cinétique sera :

$$T_r = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m_r] \{\dot{q}\} \quad (B.67)$$

Calcul de  $[m_\theta]$

La relation (2.5.26), pour l'énergie cinétique dans la direction  $\theta$ , avec les limites d'intégration appropriées :

$$T_\theta = \frac{\rho_F L}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T \left\{ \int_0^{\frac{\varphi_1}{2}} \{R_F\} \int_0^{r_1(\theta)} [H_\theta]^T [H_\theta] \frac{1}{r} dr \{R_F\}^T d\theta + \right. \\ \left. + \int_{\frac{\varphi_1}{2}}^{\varphi_1} \{R_F\} \int_0^{r_1(\theta)} [H_\theta]^T [H_\theta] \frac{1}{r} dr \{R_F\}^T d\theta \right\} [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (B.68)$$

avec la notation :

$$[I_\theta] = \int_0^{\eta_1(\theta)} [H_\theta]^T [H_\theta] \frac{1}{r} dr \quad (\text{B.69})$$

dont le terme général est :

$$I_\theta(j, k) = \frac{\eta_j \eta_k}{\left(\frac{\text{im} \pi}{L}\right)^2 J'_{i\eta_j}\left(\frac{\text{im} \pi}{L} a\right) J'_{i\eta_k}\left(\frac{\text{im} \pi}{L} a\right)} \int_0^{\eta_1(\theta)} J_{i\eta_j}\left(\frac{\text{im} \pi}{L} r\right) J_{i\eta_k}\left(\frac{\text{im} \pi}{L} r\right) \frac{1}{r} dr \quad (\text{B.70})$$

et avec la notation :

$$[h_\theta] = \int_0^{\frac{\phi_1}{2}} \{R_F\} [I_\theta] \{R_F\}^T d\theta \quad (\text{B.71})$$

l'énergie cinétique dans direction  $\theta$  devient :

$$T_\theta = \frac{\rho_F L}{4} \{\dot{q}\}^T [A^{-1}]^T [h_\theta] [A^{-1}] \{\dot{q}\} \quad (\text{B.72})$$

La matrice de masse a l'expression :

$$[m_\theta] = \frac{\rho_F L}{2} [A^{-1}]^T [h_\theta] [A^{-1}] \quad (\text{B.73})$$

et celle d'énergie devient :

$$T_\theta = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m_\theta] \{\dot{q}\} \quad (\text{B.74})$$

## B.2 Assemblage de la matrice de masse de l'élément fini liquide

En reprenant les équations (2.5.4), (B.9), (B.18) et (B.25) nous pouvons maintenant écrire l'équivalence de l'énergie cinétique d'un élément :

$$T_{\text{élément}} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\} [m_x] \{\dot{q}\}^T + \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m_r] \{\dot{q}\} + \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m_\theta] \{\dot{q}\} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\} [m_e] \{\dot{q}\}^T \quad (\text{B.75})$$

La matrice de la masse équivalente d'élément  $[m_e]$  est donnée par :

$$[m_e] = [m_x] + [m_r] + [m_\theta] \quad (\text{B.76})$$

Chaque matrice de masse est représentée par les produits (B.8), (B.17) et (B.24) :

$$\begin{aligned} [m_x] &= \frac{\rho_F L}{2} [A^{-1}]^T [h_x] [A^{-1}] \\ [m_r] &= \frac{\rho_F L}{2} [A^{-1}]^T [h_r] [A^{-1}] \\ [m_\theta] &= \frac{\rho_F L}{2} [A^{-1}]^T [h_\theta] [A^{-1}] \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

Les termes généraux des matrices  $[h]$ , avec  $j$  et  $k = 1, 2, \dots, 8$ , sont donnés par la relation :

$$[h] = [h_x] + [h_r] + [h_\theta] \quad (\text{B.78})$$

L'équivalence de la masse a été montrée seulement pour le cas  $\varphi < \pi$  mais des raisonnements analogues sont applicables pour les cas  $\varphi > \pi$  et  $\varphi = \pi$ .

## ANNEXE C

## DÉVELOPPEMENT DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ DU FLUIDE

C.1 Cas  $\varphi < \pi$ 

En partant de la relation (2.6.31) nous avons besoin de développer le terme général de  $[I_\eta]$  :

$$[k_F] = a \rho_F g L \cos \frac{\varphi}{2} [A^{-1}]^T [I_\eta] [A^{-1}] \quad (C.1)$$

où la matrice  $[A]$  est définie par la relation (A.20) et  $[I_\eta]$  est donnée par la relation (2.6.29) :

$$[I_\eta] = \int_0^{\theta_G} \frac{1}{\cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} - \epsilon \theta_G - \theta \right)} \{R_F\}^T [H_\eta] [H_\eta]^T \{R_F\} d\theta \quad (C.2)$$

La matrice  $[H_\eta]$  pour le cas  $\varphi < \pi$  est donnée par la relation (2.6.15) :

$$H_\eta(j,k) = \begin{cases} \frac{\cos \left( \frac{\varphi}{2} - \epsilon \theta_G - \theta \right)}{J'_{i\eta_j} \left( \frac{i m \pi}{L} a \right)} \left[ J'_{i\eta_j} \left( \frac{i m \pi}{L} r_1 \right) + \frac{\sin \left( \frac{\varphi}{2} - \epsilon \theta_G - \theta \right)}{\left( \frac{i m \pi}{L} a \right) \cos \frac{\varphi}{2}} J_{i\eta_j} \left( \frac{i m \pi}{L} r_1 \right) \right] & \text{pour } j = k \\ 0 & \text{pour } j \neq k \end{cases} \quad \text{jet } k=1,2,3,\dots,8 \quad (C.3)$$

et la matrice  $\{R_F\}$  est donnée par la relation (2.4.19).

Donc, le terme général de la matrice  $[I_\eta]$  est donné par la relation :

$$I_{\eta}(j,k) = \frac{1}{J'_{i_{\eta_j}}\left(\frac{im\pi}{L}a\right)J'_{i_{\eta_k}}\left(\frac{im\pi}{L}a\right)} \int_0^{\theta_G} e^{(\eta_j+i_{\eta_k})\theta} \times$$

$$\times \left[ J'_{i_{\eta_j}}\left(\frac{im\pi}{L}r_1\right) + \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta - \theta\right)}{\frac{im\pi}{L}a \cos \frac{\varphi}{2}} J_{i_{\eta_j}}\left(\frac{im\pi}{L}r_1\right) \right] \left[ J'_{i_{\eta_k}}\left(\frac{im\pi}{L}r_1\right) + \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta - \theta\right)}{\frac{im\pi}{L}a \cos \frac{\varphi}{2}} J_{i_{\eta_k}}\left(\frac{im\pi}{L}r_1\right) \right] d\theta \quad (C.4)$$

ou encore :

$$I_{\eta}(j,k) = \frac{1}{J'_{i_{\eta_j}}\left(\frac{im\pi}{L}a\right)J'_{i_{\eta_k}}\left(\frac{im\pi}{L}a\right)} \int_0^{\theta_G} e^{(\eta_j+i_{\eta_k})\theta} \times$$

$$\times \left[ J'_{i_{\eta_j}}\left(\frac{im\pi}{L}r_1\right)J'_{i_{\eta_k}}\left(\frac{im\pi}{L}r_1\right) + \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right)}{a \frac{im\pi}{L} \cos \frac{\varphi}{2}} J'_{i_{\eta_j}}\left(\frac{im\pi}{L}r_1\right)J_{i_{\eta_k}}\left(\frac{im\pi}{L}r_1\right) + \right. \quad (C.5)$$

$$\left. + \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right)}{a \frac{im\pi}{L} \cos \frac{\varphi}{2}} J_{i_{\eta_j}}\left(\frac{im\pi}{L}r_1\right)J'_{i_{\eta_k}}\left(\frac{im\pi}{L}r_1\right) + \left( \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right)}{a \frac{im\pi}{L} \cos \frac{\varphi}{2}} \right)^2 J_{i_{\eta_j}}\left(\frac{im\pi}{L}r_1\right)J_{i_{\eta_k}}\left(\frac{im\pi}{L}r_1\right) \right] d\theta$$

avec :

$$r_1 = a \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\cos\left(\frac{\varphi}{2} - e\theta_G - \theta\right)} \quad (C.6)$$

## C.2 Cas $\varphi=\pi$

En partant de la relation (2.6.38) nous avons besoin de développer le terme général de  $[h_s]$  :

$$[k_F] = \frac{\rho_F g L}{2} [A^{-1}]^T [h_s] [A^{-1}] \quad (C.7)$$

où la matrice  $[A]$  est définie par la relation (A.20), et  $[h_s]$  est donnée par la relation (2.6.35) :

$$[h_s] = \int_0^a [H_\eta] [H_\eta] dr \quad (C.8)$$

La matrice  $[H_\eta]$  pour le cas  $\varphi = \pi$  est donnée par la relation (2.6.20) :

$$H_\eta(j,k) = \begin{cases} \frac{1}{r} \eta_j \frac{J_{i\eta_j} \left( \frac{i\pi}{L} r \right)}{\frac{i\pi}{L} J'_{i\eta_j} \left( \frac{i\pi}{L} a \right)} & \text{pour } j=k \\ 0 & \text{pour } j \neq k \end{cases} \quad j \text{ et } k = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (C.9)$$

Donc, le terme général de la matrice  $[h_s]$  est donné par la relation :

$$h_s(j,k) = - \frac{\eta_j \eta_k}{\left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 J'_{i\eta_j} \left( \frac{i\pi}{L} a \right) J'_{i\eta_k} \left( \frac{i\pi}{L} a \right)} \int_0^a \frac{1}{r^2} J_{i\eta_j} \left( \frac{i\pi}{L} r \right) J_{i\eta_k} \left( \frac{i\pi}{L} r \right) dr \quad (C.10)$$

### C.3 Cas $\varphi > \pi$

L'expression (C.1.4) peut être aussi utilisée pour le cas  $\varphi > \pi$ , en changeant  $\varphi/2$  avec  $(2\pi - \varphi)/2$  et en tenant compte des limites d'intégration dues à la symétrie de l'élément fini fluide :

$$I_{\eta}(j, k) = \frac{2}{J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}a\right)J'_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}a\right)} \int_0^{\frac{2\pi-\varphi}{2}} e^{(\eta_j+\eta_k)\theta} \times$$

$$\times \left[ J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}r_l\right) + \frac{\sin\left(\frac{2\pi-\varphi}{2}-\theta\right)}{\frac{im\pi}{L}a\cos\frac{2\pi-\varphi}{2}} J_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}r_l\right) \right] \left[ J'_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}r_l\right) + \frac{\sin\left(\frac{2\pi-\varphi}{2}-\theta\right)}{\frac{im\pi}{L}a\cos\frac{2\pi-\varphi}{2}} J_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}r_l\right) \right] d\theta \quad (C.11)$$

ou encore :

$$I_{\eta}(j, k) = \frac{2}{J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}a\right)J'_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}a\right)} \int_0^{\frac{2\pi-\varphi}{2}} e^{(\eta_j+\eta_k)\theta} \left\{ J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}r_l\right) J'_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}r_l\right) + \right.$$

$$+ \frac{\sin\left(\frac{2\pi-\varphi}{2}-\theta\right)}{\frac{im\pi}{L}a\cos\frac{2\pi-\varphi}{2}} J'_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}r_l\right) J_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}r_l\right) + \frac{\sin\left(\frac{2\pi-\varphi}{2}-\theta\right)}{a\frac{im\pi}{L}\cos\frac{2\pi-\varphi}{2}} J_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}r_l\right) J'_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}r_l\right) \quad (C.12)$$

$$\left. + \left[ \frac{\sin\left(\frac{2\pi-\varphi}{2}-\theta\right)}{\frac{im\pi}{L}a\cos\frac{2\pi-\varphi}{2}} \right]^2 J_{i\eta_j}\left(\frac{im\pi}{L}r_l\right) J_{i\eta_k}\left(\frac{im\pi}{L}r_l\right) \right\}$$

avec :

$$r_l = a \frac{\cos\left(\frac{2\pi - \varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi - \varphi}{2} - \theta\right)} \quad (\text{C.13})$$