

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**NOUVEL ALGORITHME DE DÉCOUPAGE POUR
LA CONSTRUCTION D'HORAIRES MENSUELS
PERSONNALISÉS DANS UN CONTEXTE D'ÉQUITÉ**

**CARL MITCHELSON
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)
JANVIER 2003**



**National Library
of Canada**

**Acquisitions and
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

**Bibliothèque nationale
du Canada**

**Acquisitions et
services bibliographiques**

**395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-81555-2

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

**NOUVEL ALGORITHME DE DÉCOUPAGE POUR
LA CONSTRUCTION D'HORAIRES MENSUELS
PERSONNALISÉS DANS UN CONTEXTE D'ÉQUITÉ**

présenté par : **MITCHELSON Carl**

en vue de l'obtention du diplôme de : **Maîtrise ès sciences appliquées**

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. **AUDET Charles**, Ph.D., président

M. **SOUVIS François**, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. **GAMACHE Michel**, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. **DESROSIERS Jacques**, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier MM. François Soumis et Michel Gamache pour leur support, leurs idées ainsi que le temps qu'ils ont consacré tout au long de mon projet de maîtrise. Je voudrais remercier tout particulièrement M. François Soumis pour l'aide financière qu'il m'a apportée durant mes études ainsi que pour la confiance qu'il m'a démontrée en me proposant ce projet de recherche. Un merci tout spécial à M. Michel Gamache pour m'avoir transmis la passion de la recherche opérationnelle. C'est son dynamisme et son désir de vouloir transmettre son savoir aux étudiants qui m'ont poussé à poursuivre mes études dans ce domaine.

J'aimerais également remercier le personnel et les étudiants du GERAD, tout particulièrement MM. Daniel Villeneuve et Nicolas Bélanger, pour leur support ainsi que leurs nombreuses explications concernant plusieurs aspects de mon projet.

Je remercie aussi l'entreprise Technologies AD OPT Inc. pour l'opportunité qui m'a été donnée de pouvoir travailler sur un projet d'une aussi grande envergure. Plus particulièrement, merci à MM. Norbert Lingaya, Éric Gélinas et Yvan Dumas pour le temps qu'ils ont consacré à mon projet malgré leur horaire de travail chargé. De même, je remercie sincèrement M. Olivier Milon pour sa grande patience et ses réponses qu'il a fournies à mes nombreuses questions.

Finalement, je voudrais remercier ma copine Marjolaine ainsi que mon père Yvon. Sans leurs nombreux encouragements, toute cette entreprise aurait été longue et ardue.

RÉSUMÉ

Le projet discuté dans ce mémoire traite de la construction d'horaires mensuels personnalisés de membres d'équipage d'une compagnie aérienne dans un contexte d'équité pour des problèmes de très grandes tailles. Le problème de fabrication d'horaires mensuels pour les compagnies aériennes est très important puisque la masse salariale des employés représente une des dépenses les plus importantes avec les coûts de carburant. De plus, il s'agit d'un problème très complexe à résoudre.

Le projet se penche sur l'optimisation des horaires mensuels des agents de bord d'une importante compagnie aérienne. Les horaires mensuels sont construits selon une méthode de *preferential bidding* dans un contexte d'équité. Dans un contexte d'équité, chaque membre d'équipage est traité de façon impartiale, sans tenir compte de son ancienneté. Le problème de la compagnie aérienne traitée est très complexe. À chaque mois, il y a plus de 3000 employés pour lesquels il faut générer un horaire et près de 10 000 tâches de travail à assigner. La taille du problème est trop grande pour le résoudre en un seul groupe. Un algorithme de découpage est utilisé pour séparer le problème original en dix groupes. Par contre, cet algorithme contient plusieurs lacunes.

Le projet traité dans ce mémoire propose de modifier l'algorithme de séparation des groupes afin de corriger ses lacunes. Trois objectifs sont visés, soit l'augmentation de la satisfaction globale des employés, une meilleure distribution des contraintes globales de composition d'équipage ainsi qu'une réduction de la non-couverture des tâches de travail.

Afin de modifier l'algorithme de découpage des groupes d'employés et de tâches de travail, un modèle d'affectation généralisée a été développé. La

relaxation linéaire de ce modèle d'affectation fournit une bonne approximation de la satisfaction globale des employés ainsi que de la non-couverture des tâches de travail dans des temps de calcul raisonnables. Cette approximation atteint un niveau de précision très élevé lorsqu'il y a peu ou pas de tâches de travail non couvertes.

Le modèle d'affectation généralisée est utilisé afin de réaliser une étude sur l'impact de la combinaison des groupes d'employés et de tâches de travail. Cette étude démontre que la combinaison des groupes permet une augmentation significative de la satisfaction des employés tout en réduisant fortement le nombre de tâches de travail non couvertes. De plus, cette étude illustre le gain potentiel d'une meilleure distribution des contraintes globales de composition d'équipage.

En se basant sur la résolution en nombres entiers du modèle d'affectation généralisée sur des combinaisons de groupes, un nouvel algorithme de séparation des groupes a été développé. Ce nouvel algorithme de découpage entraîne une augmentation de plus de 12% de la satisfaction globale des membres d'équipage tout en réduisant la quantité de tâches de travail non couvertes de plus de 66%. Le nouvel algorithme permet également une baisse de près de 98% de la violation des contraintes globales de composition d'équipage.

Des améliorations pour le découpage des groupes d'employés et de tâches sont discutées. De plus, l'excellente précision de l'approximation fournie par la relaxation linéaire du problème d'affectation généralisée porte à croire que les valeurs duales du modèle pourront être utilisées afin de stabiliser et accélérer le processus de génération de colonnes.

ABSTRACT

The project treated in this paper discusses the optimization of large-scale personalized crew scheduling problems for an airline in a fair equity context. The monthly crew scheduling problem is really important for airlines since salary expenses for crewmembers are among the highest costs along with fuel costs. Also, it is a very difficult problem to solve since it gives rise to large-scale problems.

The project discusses the optimization of monthly crew schedules for flight attendants for an important airline. The monthly schedules are built according to a preferential bidding method embedded in a fair equity context. In a fair equity context, each employee is treated fairly and equitably, without taking into account crewmember seniority. The airline problem treated is very difficult. In fact, every month, over 3000 crewmembers require a schedule while approximately 10 000 tasks have to be assigned. The size of the resulting problem is too big to be treated as one group. A separating algorithm is used to divide the original problem in ten groups. However, this algorithm has many flaws.

The project discussed in this paper proposes to modify the separating algorithm in order to eliminate its actual flaws. The three objectives of the new separating algorithm are to increase the global satisfaction of the crewmembers, to allow a better distribution of the global crew composition constraints and finally, to decrease the number of open-time tasks.

In order to modify the separating algorithm, a generalized assignment model was developed. The linear relaxation of this assignment model produces a good approximation of the global employees' satisfaction and the amount of open-

time tasks. The approximation becomes excellent when there are few or no open-time tasks.

The generalized assignment model is used to study the impact of merging employee and task groups. The study shows that merging groups increases significantly the crewmembers' satisfaction while it highly decreases the number of open-time tasks. The study also shows the potential gains of a better global crew composition constraints distribution among the groups.

Based on the integer solutions of merged groups, a new separating algorithm was developed. The new algorithm increases the global crewmembers' satisfaction by more than 12% while decreasing the number of days of open-time tasks by more than 66%. The new separating algorithm also decreases by approximately 98% the number of tasks having violated global crew composition constraints.

Improvements for the separation of groups are discussed. In addition, the excellent precision of the approximation given by the linear relaxation of the generalized assignment problem opens new research areas where the dual values of the model could be used to stabilize and accelerate the column generation process.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xiii
LISTE DES FIGURES	xvi
 CHAPITRE 1 : INTRODUCTION	 1
1.1 Construction des rotations	1
1.2 Construction des horaires mensuels	2
1.3 Modifications opérationnelles	5
1.4 Contexte du problème	5
1.4.1 Calcul du meilleur et du pire horaire	7
1.4.2 Affectation des entraînements et des activités pré-assignées	9
1.4.3 Séparation des groupes	9
1.4.4 Construction des horaires mensuels	12
1.5 Revue de la littérature	12
1.5.1 Méthodes heuristiques	13
1.5.2 Partition des problèmes de grandes tailles	14
1.5.3 Approximations par un modèle linéaire	15
1.6 Contributions	16
1.6.1 Jeu de données	16
1.7 Structure du mémoire	17

CHAPITRE 2 : APPROXIMATION DE LA SOLUTION OPTIMALE	18
2.1 Solution optimale et meilleur horaire	18
2.2 Modèle d'affectation 1 : une activité par jour avec fenêtres de temps. 21	
2.2.1 Modèle mathématique	21
2.2.2 Calcul de la satisfaction et des pénalités	23
2.2.3 Réductions dans la construction du modèle.....	25
2.2.4 Résultats de l'affectation	27
2.3 Modèle d'affectation 2 : ajout des contraintes de repos	28
2.3.1 Ajouts au modèle mathématique.....	29
2.3.2 Résultats de l'affectation	29
2.4 Modèle d'affectation 3 : modification de la discrétisation des tâches de travail	30
2.4.1 Résultats de l'affectation	31
2.5 Modèle d'affectation 4 : ajout des repos post-courrier.....	32
2.5.1 Imposition des jours de repos	33
2.5.2 Modifications et ajouts au modèle mathématique	36
2.5.3 Modification du calcul de la satisfaction des tâches de travail	37
2.5.4 Nouvelles réductions dans la construction du modèle	38
2.5.5 Résultats de l'affectation	38
2.6 Modèle d'affectation 5 : ajout des contraintes de satisfaction et de crédits	39
2.6.1 Ajouts au modèle mathématique.....	40
2.6.2 Résultats de l'affectation	40
2.7 Modèle d'affectation 6 : ajout des contraintes d'attributs cmc	41
2.7.1 Ajouts au modèle mathématique.....	42
2.7.2 Résultats de l'affectation	43
2.8 Évolution de la solution de l'approximation en réduisant progressivement la non-couverture des tâches	46

CHAPITRE 3 : COMBINAISON DES GROUPES	49
3.1 Méthodes de combinaison des groupes.....	49
3.1.1 Jonction des groupes.....	50
3.1.2 Fusion des groupes	50
3.1.3 Comparaison de la solution d'approximation pour chaque méthode	51
3.2 Évolution de la solution d'approximation en augmentant le nombre de groupes fusionnés.....	54
3.3 Évolution du temps de résolution en changeant les paramètres de tolérance sur la convergence et de la tolérance sur l'optimalité.....	57
 CHAPITRE 4 : RÉOLUTION EN NOMBRES ENTIERS ET NOUVELLE SÉPARATION DES GROUPES	62
4.1 Résolution en nombres entiers.....	62
4.1.1 Utilisation de compteurs.....	63
4.1.2 Ajout de variables d'écart.....	64
4.1.3 Modification de décisions de branchement	66
4.1.4 Paramètres de tolérance.....	66
4.1.5 Sièges de tâche de travail.....	67
4.1.6 Heuristique de branchement 1	67
4.1.7 Heuristique de branchement 2	70
4.1.8 Heuristique de branchement 3	72
4.2 Ajout des contraintes d'attributs cmc.....	74
4.3 Nouvelle séparation des groupes.....	76
4.3.1 Nouvel algorithme de séparation	77
4.3.2 Étape 6 : séparation des sièges de tâche de travail couverts	78
4.3.3 Étape 7 : séparation des sièges non couverts	78
4.3.4 Étape 8 : séparation des attributs cmc.....	79
4.3.5 Résultats de la nouvelle séparation	82

CHAPITRE 5 : CONCLUSION.....	87
-------------------------------------	-----------

RÉFÉRENCES.....	90
------------------------	-----------

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 : Valeurs de la solution optimale et du meilleur horaire pour tous les groupes	19
Tableau 2.2 : Durée maximale d'un bloc de tâches.....	25
Tableau 2.3 : Comparaison des valeurs de la relaxation de l'affectation 1 pour tous les groupes	27
Tableau 2.4 : Jours minimums de repos devant être pris par un employé selon ses jours d'absence	28
Tableau 2.5 : Comparaison des valeurs de la relaxation de l'affectation 2 pour tous les groupes	29
Tableau 2.6 : Comparaison des valeurs de la relaxation de l'affectation 3 pour tous les groupes	31
Tableau 2.7 : Comparaison des valeurs de la relaxation de l'affectation 4 pour tous les groupes	38
Tableau 2.8 : Comparaison des valeurs de la relaxation de l'affectation 5 pour tous les groupes	41
Tableau 2.9 : Comparaison des valeurs de la relaxation de l'affectation 6 pour tous les groupes	44
Tableau 2.10 : Données sur les contraintes d'attributs violées.....	45
Tableau 2.11 : Comparaison des solutions du groupe 5 en ajoutant des employés fictifs	47
Tableau 2.12 : Comparaison des solutions du groupe 9 en ajoutant des employés fictifs	47
Tableau 3.1 : Comparaison de la solution de la relaxation de l'approximation pour la jonction de paires de groupes.....	51
Tableau 3.2 : Comparaison de la solution de la relaxation de l'approximation pour la fusion de paires de groupes	52

Tableau 3.3 : Nombre de variables et de contraintes pour chaque paire de groupes	54
Tableau 3.4 : Évolution de la solution de la relaxation de l'affectation 6 en augmentant le nombre de groupes fusionnés.....	55
Tableau 3.5 : Comparaison des valeurs des relaxations des affectations 5 et 6 en augmentant le nombre de groupes fusionnés.....	56
Tableau 3.6 : Taille des problèmes fusionnés	56
Tableau 3.7 : Comparaison des temps de convergence de l'affectation 6 pour une fusion de 5 groupes en augmentant la tolérance sur la convergence	58
Tableau 3.8 : Comparaison des temps de <i>crossover</i> pour une fusion de 5 groupes en augmentant la tolérance sur l'optimalité (convergence 1×10^{-8}).....	59
Tableau 3.9 : Comparaison des temps de <i>crossover</i> pour une fusion de 5 groupes en augmentant la tolérance sur l'optimalité (convergence 1×10^{-4}).....	60
Tableau 4.1 : Valeurs des solutions de l'heuristique de branchement 1 pour différents problèmes	68
Tableau 4.2 : Valeurs des solutions de l'heuristique de branchement 2 pour différents problèmes avec un seuil de 0,8	71
Tableau 4.3 : Valeurs des solutions de l'heuristique de branchement 2 pour différents problèmes avec un seuil de 0,6	72
Tableau 4.4 : Valeurs des solutions de l'heuristique de branchement 3 pour différents problèmes	73
Tableau 4.5 : Valeurs des solutions de l'heuristique de branchement 3 pour les problèmes fusionnés avec contraintes d'attributs cmc	75
Tableau 4.6 : Comparaison des résultats de la nouvelle séparation pour tous les groupes	82
Tableau 4.7 : Comparaison des résultats de chaque fusion.....	84

Tableau 4.8 : Comparaison des tâches de travail avec contraintes d'attributs violées	85
Tableau 4.9 : Comparaison des valeurs de la relaxation du modèle d'approximation pour les deux fusions	86

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Étapes de la construction d'horaires mensuels	7
Figure 2.1 : Exemple de repos à effectuer imposable après la tâche de travail.....	33
Figure 2.2 : Exemple de repos à effectuer non-imposable	34
Figure 2.3 : Exemple de repos à effectuer imposable avant la tâche de travail.....	35

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION

Le problème de fabrication d'horaires mensuels pour les membres d'équipage des compagnies aériennes est important et complexe. En effet, la masse salariale des employés représente une des dépenses les plus importantes avec les coûts de carburant. Les horaires mensuels doivent également tenir compte des différentes règles existantes au niveau de la sécurité aérienne ainsi qu'au niveau des conventions collectives de travail. Par ailleurs, ces horaires couvrent les 24 heures d'une journée et les 7 jours d'une semaine (Gamache, 1995). Finalement, le nombre élevé d'employés pour lesquels il faut fabriquer un horaire mensuel ainsi que les milliers de tâches de travail à assigner font en sorte que les problèmes atteignent des tailles énormes.

On note généralement trois phases distinctes dans la fabrication d'horaires mensuels pour les membres d'équipage (Desaulniers *et al.*, 1998a). Ces phases sont la construction des rotations, la construction des horaires mensuels et les modifications opérationnelles.

1.1 Construction des rotations

La première phase est la construction des rotations. Elle consiste à construire, pour le mois considéré, un ensemble de rotations qui couvrent, à coût minimal, l'ensemble des segments de vol. Une rotation est une séquence de segments de vol effectuée par un équipage partant et revenant à la même ville appelée la base alors qu'un segment de vol est un vol sans escale entre deux villes. Chaque rotation doit être construite en respectant les normes de sécurité aérienne ainsi que celles des conventions collectives de travail.

Le problème de construction des rotations est modélisé comme un problème de recouvrement. L'objectif du problème est de sélectionner parmi l'ensemble des rotations réalisables celles qui recouvrent tous les segments de vol et dont la somme des coûts est minimale. Dans ce problème, les membres d'équipage ne sont pas considérés.

Plusieurs méthodes de résolution du problème de construction des rotations ont été développées. Certaines approches génèrent *a priori* des rotations valides grâce à des règles heuristiques et dérivent une solution en nombres entiers à partir de cet ensemble restreint de rotations. C'est le cas de l'approche proposée par Graves *et al.* (1993). Des approches basées sur la génération de colonnes ont également été développées. Entre autres, Desaulniers *et al.* (1997 et 1999) proposent des solutions optimales et approchées dans lesquelles les rotations sont générées en résolvant un problème de plus court chemin avec contraintes de ressource. La formulation des problèmes de plus court chemin avec contraintes de ressource ainsi que leurs applications sont discutées par Desaulniers *et al.* (1998b).

1.2 Construction des horaires mensuels

La construction des horaires mensuels consiste à affecter des rotations et des jours de repos à chaque membre d'équipage tout en tenant compte de ses activités pré-assignées. Parmi les activités pré-assignées on retrouve les périodes d'entraînement, les congés annuels, les examens médicaux, les activités ayant débuté à la fin du mois précédent et se terminant durant le mois courant, etc. Toutes les activités affectées à un employé doivent respecter les règles de conventions collectives déjà établies. De plus, la composition d'un équipage effectuant une rotation doit satisfaire les qualifications demandées par la compagnie aérienne.

Le nombre d'employés et d'activités à assigner mensuellement est généralement très élevé et mène à des problèmes de très grandes tailles. Par contre, il est possible de diviser le problème global selon les différentes fonctions des employés, ce qui mène à des problèmes de plus petites tailles. Le cas des pilotes et des agents de bord illustre bien cette situation. L'affectation du pilote à une rotation ne dépend pas des agents de bord et vice-versa. Il est également possible de diviser le problème global en fonction des différentes bases à partir desquelles la compagnie aérienne opère. Malgré ces divisions, la taille de certains problèmes, notamment celui des agents de bord, demeure très grande.

L'objectif de la construction d'horaires mensuels est de trouver l'ensemble des horaires mensuels qui couvrent, à coût minimal, toutes les rotations générées à l'étape précédente. On note trois approches de construction d'horaires mensuels : le *bidline*, le *rostering* (ou *preferential bidding* dans un contexte d'équité) et le *preferential bidding* dans un contexte d'ancienneté.

Le *bidline* est une méthode de construction d'horaires mensuels anonymes. Dans cette approche, des horaires mensuels couvrant toutes les rotations sont fabriqués indépendamment des employés. Les employés indiquent ensuite leurs préférences sur les horaires ainsi créés. Les horaires mensuels sont finalement affectés aux membres d'équipage selon un système de priorité déterminé par la compagnie aérienne. Ce type de fabrication d'horaires est discuté par Glanert (1984).

Le *rostering* (ou *preferential bidding* dans un contexte d'équité) introduit la notion d'horaires personnalisés. Le *rostering* construit des horaires mensuels en tenant compte des caractéristiques et des préférences des employés. Ce mode de construction d'horaires consiste à attribuer des poids aux activités désirées

afin d'encourager leur affectation à des employés qui en ont fait la demande. Les poids sur les activités peuvent varier selon des critères établis par la compagnie aérienne. L'objectif de ce problème est de maximiser la satisfaction globale des employés. Dans un contexte d'équité, chaque membre d'équipage est traité de façon impartiale, sans tenir compte de son ancienneté. Les horaires sont donc fabriqués de façon à ce que, en moyenne, tous les employés soient satisfaits équitablement. Puisqu'il est impossible de satisfaire tous les employés de façon identique pour un mois donné, l'historique des horaires précédents est conservé pour chaque employé. De cette façon, il est possible, pour le mois en cours, de construire des horaires qui avantagent les employés ayant obtenus une satisfaction inférieure à la moyenne et vice-versa. En utilisant cette technique, la satisfaction des membres d'équipage est plus ou moins identique sur une longue période de temps. Plusieurs méthodes heuristiques ont été développées afin de résoudre le problème de *rostering*. Parmi celles-ci, Ryan (1992) propose une approche qui consiste à générer *a priori* des horaires grâce à des règles heuristiques et ensuite à résoudre un problème de recouvrement sur l'ensemble des horaires générés. Gamache *et al.* (1999) proposent une approche par génération de colonnes dans laquelle des problèmes de plus court chemin avec contraintes de ressource sont solutionnés afin de générer les horaires mensuels.

Finalement, le troisième mode de construction d'horaires mensuels est le *preferential bidding* dans un contexte d'ancienneté. Ce mode de construction est similaire au *rostering* sauf que l'on maximise la satisfaction globale des employés en donnant priorité aux employés comptant plus d'années d'expérience. Les horaires sont construits un employé à la fois, par ordre d'ancienneté. On maximise la satisfaction des préférences de l'employé courant en s'assurant que le problème de construction d'horaires mensuels est réalisable pour les employés comptant moins d'ancienneté.

Afin de résoudre le problème de construction d'horaires mensuels selon le mode de *preferential bidding* dans un contexte d'ancienneté, plusieurs approches ont été proposées. Parmi ces approches, Byrne (1988) propose une heuristique gloutonne alors que Gamache *et al.* (1998) formulent le problème comme un problème de partitionnement généralisé et utilisent la génération de colonnes pour construire les horaires.

1.3 Modifications opérationnelles

Il arrive à l'occasion que des situations imprévues surviennent et changent le bon déroulement des opérations. Parmi ces situations, on retrouve les vols retardés ainsi que les absences non prévues des employés. Les modifications opérationnelles consistent à changer une partie des horaires mensuels des membres d'équipage afin de minimiser les impacts sur la structure des horaires mensuels déjà planifiés. Cette étape de la fabrication d'horaires mensuels est discutée par Stojković *et al.* (1998). Les auteurs proposent une approche par génération de colonnes similaire à celle utilisée pour résoudre le problème de construction des rotations.

1.4 Contexte du problème

Le projet traité dans ce mémoire porte sur la deuxième étape de la fabrication d'horaires mensuels, soit la construction des horaires mensuels. Il s'agit d'un problème de construction d'horaires pour les agents de bord d'une compagnie aérienne selon le mode de *preferential bidding* dans un contexte d'équité.

Le projet a été effectué à la demande de la compagnie Technologies AD OPT Inc. (ci-après appelée AD OPT) qui offre, entre autres, des solutions d'optimisation des horaires de personnel. Un de ses domaines d'expertise est le

transport aérien. AD OPT met à la disposition de l'industrie aérienne la suite de produits Altitude qui optimise les rotations d'équipage et les horaires de personnel afin de satisfaire les intérêts des compagnies aériennes ainsi que ceux de leurs membres d'équipage. La suite de produits Altitude est adaptée aux besoins de chaque client afin de respecter les règles gouvernementales, les règles d'entreprise ainsi que les conventions collectives de travail. Lors du début du projet, à l'été 2001, la compagnie aérienne traitée dans ce mémoire est un des clients utilisateurs de la suite de produits Altitude.

Cette compagnie utilise la caractéristique du *Preferential Bidding System* (ci-après appelé PBS) d'Altitude afin de construire ses horaires mensuels d'équipage. Altitude PBS permet de prendre en considération les préférences de travail personnelles des membres d'équipage. En effet, les employés peuvent choisir parmi plusieurs options afin d'obtenir un horaire mensuel convenant à leurs besoins. Altitude PBS optimise les horaires afin de maximiser la satisfaction des employés tout en minimisant le nombre de tâches de travail non couvertes. La compagnie aérienne utilise également un principe d'équité tel que décrit à la section 1.2.

Une fois les rotations d'équipage générées et les préférences mensuelles des employés obtenues, les horaires de personnel sont construits. La construction des horaires mensuels des agents de bord de la compagnie aérienne est divisée en quatre grandes étapes. Ces étapes sont illustrées à la figure 1.1. Chaque étape est discutée individuellement, plus en détails, dans les sous-sections suivantes.

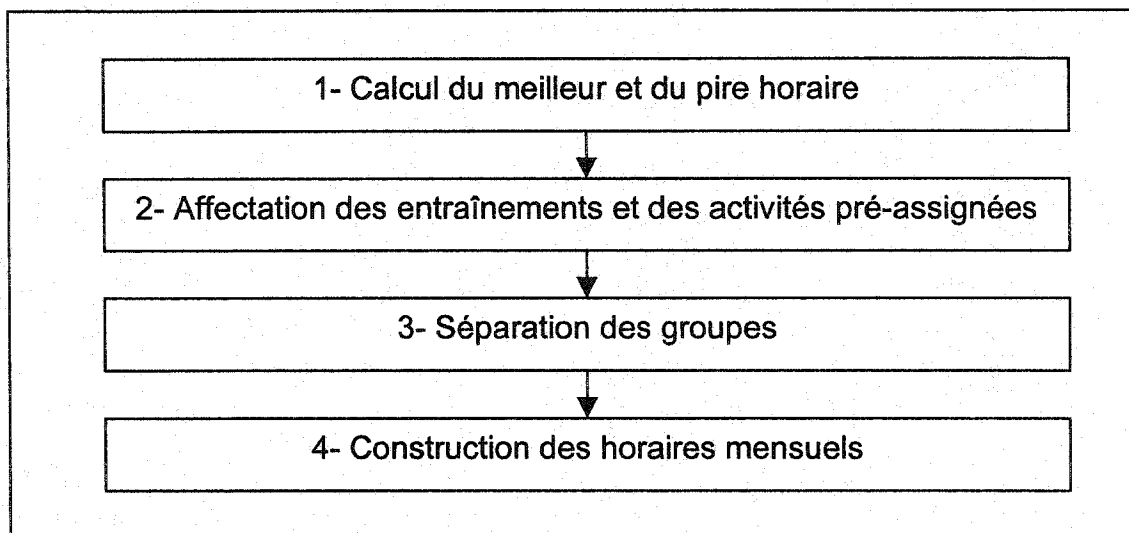


Figure 1.1 : Étapes de la construction d'horaires mensuels

1.4.1 *Calcul du meilleur et du pire horaire*

Tel que mentionné précédemment, les employés peuvent choisir parmi plusieurs préférences d'horaire afin d'obtenir un horaire correspondant à leurs désirs et leurs besoins. Par contre, il n'existe aucune restriction sur le nombre de préférences sur lesquelles les membres d'équipage peuvent miser ni sur le nombre de points qu'un employé peut miser sur ces préférences. De ce fait, les points misés par les employés sur les préférences ne peuvent pas être utilisés directement comme critère de satisfaction des employés. Afin d'illustrer pourquoi, prenons un exemple où deux employés misent strictement sur deux préférences, soit les préférences A et B. Supposons que le premier employé mise 10 et 100 points sur les préférences A et B respectivement alors que le deuxième employé mise 100 et 1000 points. Si les points misés sur les préférences sont utilisés comme critère de satisfaction des employés, le deuxième employé sera favorisé lors de la construction des horaires puisqu'il a misé plus de points que le premier employé. Par contre, aucun des deux employés ne devrait être favorisé par rapport à l'autre puisqu'ils ont tous les

deux misés dix fois plus de points sur la préférence B que sur la préférence A. Il faut donc utiliser un critère de satisfaction qui normalise les points misés par les employés.

On définit le meilleur horaire d'un employé comme étant l'horaire mensuel qui maximise la somme des points misés par l'employé sur les préférences d'horaire. La valeur du meilleur horaire est calculée individuellement pour chaque employé en résolvant un problème de plus long chemin sur un réseau qui contient toutes les tâches de travail et les jours de repos auxquels l'employé a accès sans violer les contraintes de conventions de travail. Ce réseau contient également les pré-affectations de l'employé.

On définit le pire horaire d'un employé comme étant l'horaire mensuel qui minimise la somme des points misés par l'employé sur les préférences d'horaire. La valeur du pire horaire est calculée individuellement pour chaque employé en résolvant un problème de plus court chemin sur un réseau qui contient toutes les tâches de travail et les jours de repos auxquels l'employé a accès sans violer les contraintes de conventions de travail. Ce réseau contient également les pré-affectations de l'employé.

La satisfaction d'un horaire mensuel pour un employé est calculée grâce à la fonction suivante :

$$\frac{Score_Horaire - Pire}{Meilleur - Pire} \times 100 \quad (1.1)$$

où *Score_Horaire* est la valeur de l'horaire mensuel attribué à l'employé;
Pire est la valeur du pire horaire de l'employé;
Meilleur est la valeur du meilleur horaire de l'employé.

L'équation (1.1) permet donc d'obtenir un critère de satisfaction normalisé pour tous les employés. Grâce à cette relation, chaque employé obtient un horaire mensuel d'une valeur entre 0 et 100 où la valeur de 0 correspond au pire horaire de l'employé et la valeur de 100 correspond au meilleur horaire de l'employé.

1.4.2 *Affectation des entraînements et des activités pré-assignées*

La deuxième étape de la construction d'horaires mensuels est l'affectation des entraînements et des activités pré-assignées aux membres d'équipage. Les employés doivent effectuer différents entraînements à des fréquences établies par les conventions collectives de travail. Ces entraînements doivent être intégrés aux horaires des employés. De plus, plusieurs employés ont des activités (rotation, vacances, absences, etc.) qui leur sont assignées pour le mois courant avant même que les horaires ne soient construits. Ces activités doivent donc faire partie de leurs horaires mensuels et sont affectées aux employés. Afin de s'assurer que les entraînements affectés aux employés respectent les différentes règles de conventions collectives de travail, ceux-ci sont affectés grâce au logiciel d'optimisation Gencol, qui résout des programmes linéaires de recouvrement par génération de colonnes.

1.4.3 *Séparation des groupes*

Le problème de la compagnie aérienne traitée contient environ 3000 agents de bord pour lesquels il faut générer un horaire à chaque mois. De plus, plusieurs milliers de tâches de travail (rotations ou périodes de réserve) doivent être couvertes, chacune requerrant un ou plusieurs employés. Chaque employé requis pour effectuer une tâche de travail compte comme un siège à couvrir sur la tâche. En tout, mensuellement, il y a près de 10 000 sièges à couvrir.

Les horaires mensuels des employés sont construits à la quatrième étape grâce au logiciel d'optimisation Gencol. Par contre, afin d'obtenir des temps de résolution acceptables, soit près de 12 heures de temps de calcul, Gencol doit traiter des groupes d'au plus 300 employés. Le problème original de 3000 agents de bord et 10 000 sièges doit donc être séparé en dix groupes d'environ 300 agents de bord et 1000 sièges à affecter chacun.

Afin d'effectuer cette séparation, un algorithme heuristique de découpage a été développé. Cet algorithme affecte les employés et les tâches de travail aux dix groupes de façon à recréer, à une échelle de 1/10, les profils quotidiens d'offre (disponibilité) des employés et de demande en employés des tâches de travail. L'algorithme minimise la distance euclidienne des valeurs d'offre et de demande entre les groupes formés et tente de conserver un cardinal identique parmi les groupes.

Pour séparer les tâches de travail de façon équitable parmi les groupes et afin de faciliter le respect du profil quotidien de demande, les tâches sont séparées siège par siège, c'est-à-dire que des sièges appartenant à la même tâche de travail peuvent être séparés parmi différents groupes.

Certaines règles imposées par la compagnie aérienne affectent la composition globale des équipages des tâches de travail. En effet, la compagnie aérienne définit huit attributs *cmc* (pour *crew-mixed constraints*) différents qui contrôlent la distribution des employés sur les tâches de travail en fonction de la destination des rotations et du type d'équipement utilisé. Ces attributs sont des qualificatifs que peuvent posséder certains employés. Les agents de bord peuvent posséder plusieurs de ces attributs. Les contraintes globales d'attributs contrôlent, pour chaque tâche de travail, le nombre minimum ou maximum d'employés pour chaque attribut. Puisque les sièges d'une tâche de travail

peuvent être séparés parmi plusieurs groupes, il faut également séparer les contraintes globales d'attributs parmi les groupes.

L'algorithme heuristique de découpage comporte trois grandes lacunes. La première est qu'il ne tient pas compte des préférences des employés. En effet, puisque les membres d'équipage sont séparés selon leur profil de disponibilité, il est possible qu'un employé soit affecté à un groupe où les tâches de travail auxquelles il a accès ne peuvent mener à un horaire de satisfaction élevée. De plus, la « compétition » entre les employés afin d'obtenir des tâches de travail et des repos n'est pas évaluée. Si plusieurs employés désirent les mêmes tâches de travail afin d'obtenir un horaire de satisfaction élevée, il est possible que certains membres d'équipage doivent effectuer des tâches de satisfaction inférieure si la demande est trop forte. Similairement, si plusieurs agents de bord désirent des jours de repos aux mêmes dates, il est possible que certains d'entre eux soient contraints à travailler à ces dates afin d'éviter la non-couverture de certaines tâches de travail.

La deuxième lacune de l'algorithme de séparation se situe au niveau de la séparation des attributs cmc. Le fait de séparer les contraintes d'attributs peut entraîner une réduction de la combinatoire. Puisque la majorité des employés possèdent plus d'un attribut cmc, il existe plusieurs combinaisons d'employés possibles afin de composer l'équipage d'une tâche de travail dont tous les sièges se situent dans le même groupe. En séparant les sièges et les attributs parmi les groupes, certaines combinaisons d'employés ne sont plus valides. Certains employés peuvent même se voir interdire l'accès à des sièges auxquels ils avaient accès avant leur séparation. Un exemple est illustré à la section 3.1.3. La réduction du nombre de combinaisons possibles rend le problème de construction d'horaires plus serré, ce qui augmente le risque de ne pas pouvoir couvrir certains sièges.

La troisième et dernière lacune est que l'algorithme de découpage ne tient pas compte de l'interaction entre les employés et les tâches de travail. Malgré le fait que les groupes soient séparés selon les profils d'offre et de demande quotidiennes, plusieurs tâches de travail requerrant des employés qui possèdent des qualifications identiques se chevauchent sur une même période de temps. Si on ajoute à cette situation le fait que les horaires des membres d'équipage doivent respecter les conventions collectives, notamment en ce qui concerne les repos, il est possible que certains sièges de tâches de travail ne puissent être couverts. Puisqu'un des objectifs de la construction d'horaires mensuels est de minimiser le nombre de tâches de travail non couvertes, il faut éviter que de telles situations surviennent.

1.4.4 Construction des horaires mensuels

Tel que mentionné dans la section précédente, une fois la séparation des groupes obtenue, les horaires mensuels sont générés, groupe par groupe, grâce au logiciel d'optimisation Gencol. Gencol résout des programmes linéaires par génération de colonnes. L'objectif de la génération d'horaires mensuels est de maximiser la satisfaction des employés tout en minimisant le nombre de tâches de travail non couvertes.

1.5 Revue de la littérature

Il existe peu d'articles traitant de la construction d'horaires mensuels par *preferential bidding* dans un contexte d'équité. Par contre plusieurs articles ont été publiés sur le *preferential bidding* dans un contexte d'ancienneté. Quelques articles traitant de la construction d'horaires mensuels de membres d'équipage de compagnies aériennes ont déjà été mentionnés dans les premières sections de ce chapitre. Dans cette section, certains aspects susceptibles d'améliorer la

construction d'horaires mensuels chez la compagnie aérienne traitée sont considérés. Trois aspects sont discutés, soit la construction d'horaires mensuels par méthodes heuristiques, la partition des problèmes de grandes tailles ainsi que des approximations d'horaires mensuels par modèle linéaire.

1.5.1 Méthodes heuristiques

Tel que mentionné précédemment, la construction des horaires mensuels chez la compagnie aérienne est effectuée en utilisant les techniques de la génération de colonnes. Pour obtenir des temps de résolution acceptables, le logiciel d'optimisation Gencol doit traiter des groupes d'au plus 300 employés et 1000 tâches de travail. Une méthode heuristique de construction des horaires mensuels des membres d'équipage pourrait être susceptible de tenir compte d'un plus grand nombre d'employés et de tâches de travail à la fois.

Afin de résoudre le problème de construction d'horaires mensuels par *preferential bidding* dans un contexte d'ancienneté, plusieurs méthodes heuristiques ont été proposées. Parmi celles-ci, Byrne (1988) propose une méthode de décomposition du problème global en considérant chaque membre d'équipage individuellement. Dans cette méthode, on construit les horaires mensuels un employé à la fois, en débutant par le plus ancien, en attribuant le meilleur horaire à chacun compte tenu de ses préférences. La construction des horaires s'effectue principalement en deux étapes. Premièrement, une priorité est associée à chaque tâche de travail disponible en fonction des choix de l'employé et ensuite, à partir des tâches disponibles, on construit le meilleur horaire mensuel. Les tâches de travail sont ajoutées une à une, selon les priorités, à l'horaire de l'employé. Un test de faisabilité doit constamment être effectué afin de s'assurer que les décisions prises ne mènent pas à un problème résiduel non-réalisable.

D'autres méthodes heuristiques ont été développées afin de construire des horaires mensuels par *rostering*. Glanert (1984) discute d'une méthode qui consiste à affecter à chaque itération la tâche de travail de priorité maximum à l'employé de priorité maximum. De son côté, Ryan (1992) propose une approche où le problème est modélisé comme un problème de recouvrement. Puisque le nombre d'horaires mensuels valides peut être très élevé, des contraintes sont ajoutées au modèle afin de n'en conserver qu'une fraction.

Les méthodes heuristiques mentionnées sont simples à implanter et sont généralement rapides dans leur résolution. Toutefois, la qualité des solutions produites n'est pas garantie. L'approche où le problème est modélisé comme un problème de recouvrement possède des fondements mathématiques qui permettent de garantir l'optimalité. Par contre, compte tenu de la taille des problèmes à résoudre, il faut utiliser la génération de colonnes pour résoudre ces problèmes. En effet, Gamache (1995) mentionne que contrairement aux méthodes heuristiques, la génération de colonnes permet d'obtenir une solution optimale et permet de considérer implicitement toutes les variables.

1.5.2 *Partition des problèmes de grandes tailles*

Afin de résoudre des problèmes de grandes tailles (plus de 1000 employés dans certains cas) chez Air France, Gamache *et al.* (1999) proposent la partition du problème original en deux ou trois groupes de tailles semblables. Les horaires mensuels des employés sont construits par génération de colonnes. Les auteurs montrent que le découpage du problème permet une baisse significative du temps de résolution et affecte peu la nature de la solution lorsque comparée à celle du problème original. Par contre, la partition du problème a été effectuée dans un contexte de construction d'horaires mensuels par *rostering* sans préférences. Le cas de la compagnie aérienne étudiée dans ce mémoire utilise

une méthode de *preferential bidding* dans un contexte d'équité. Cet aspect, combiné à la présence des contraintes d'attributs cmc font en sorte que le problème est plus difficile à résoudre qu'un problème de *rostering*.

1.5.3 *Approximations par un modèle linéaire*

Pour d'autres problèmes mathématiques possédant une structure mathématique semblable à celle du problème de construction d'horaires mensuels (problèmes de recouvrement), des approximations par un modèle linéaire ont déjà été utilisées. Notamment, afin de tenir compte de contraintes d'entretien des appareils et de contraintes d'équipage dans la résolution de problèmes d'affectation d'appareils à des vols, Clarke *et al.* (1996) proposent la résolution de la relaxation linéaire d'un problème d'affectation généralisée. Certaines variables sont ensuite fixées à l'unité selon un branchement heuristique et le problème résiduel en nombres entiers est résolu. Le fait de fixer plusieurs variables à l'unité élimine la garantie d'obtenir une solution optimale. Par contre, les auteurs démontrent que la solution ainsi obtenue est peu détériorée comparativement à celle de la relaxation linéaire du problème original.

Une technique d'approximation par modèle linéaire ne constitue toutefois pas une alternative intéressante pour résoudre le problème de construction d'horaires mensuels. En effet, la complexité de ces problèmes fait en sorte que les solutions ainsi trouvées ne seraient pas réalisables. Par contre, l'utilisation d'un tel modèle représente une option intéressante pour développer un algorithme de séparation des groupes basé sur la maximisation de la satisfaction des employés et la minimisation des tâches de travail non couvertes.

1.6 Contributions

L'objectif principal de ce mémoire est de modifier l'algorithme de séparation existant afin de corriger les lacunes identifiées précédemment. Trois objectifs sont visés, soit l'augmentation de la satisfaction globale des employés, une meilleure séparation des attributs cmc parmi les groupes, ainsi que la diminution du nombre de tâches de travail non couvertes.

D'abord, un modèle mathématique d'affectation généralisée est présenté. Ce modèle mathématique est utilisé afin de fournir une approximation de la satisfaction des employés et de la non-couverture des tâches de travail pour l'étape de construction des horaires mensuels. Par la suite, grâce à ce modèle, les effets de la combinaison des groupes séparés sont analysés. Finalement, à partir de la solution en nombres entiers du modèle mathématique d'approximation pour des groupes combinés, un nouvel algorithme de séparation des groupes est proposé.

1.6.1 Jeu de données

Afin de valider les différentes étapes du développement du nouvel algorithme de séparation des groupes, des données réelles du problème de construction d'horaires mensuels de la compagnie aérienne traitée ont été utilisées. Le jeu de données utilisé pour effectuer les tests est celui du mois d'août 2001. Ce jeu comprend toutes les données utilisées et générées par la suite de produits Altitude PBS pour toutes les étapes de la construction des horaires mensuels des agents de bord. De plus la version du logiciel Altitude PBS adaptée aux besoins de la compagnie aérienne a été utilisée afin de comparer les résultats du nouvel algorithme de séparation à ceux de l'algorithme présentement utilisé.

1.7 Structure du mémoire

La suite du mémoire est divisée en quatre chapitres. Le chapitre 2 présente un modèle d'approximation de la solution optimale bâti sous forme de problème d'affectation généralisée avec contraintes linéaires. Le troisième chapitre présente une étude réalisée afin de déterminer l'impact de la combinaison des groupes d'employés et de tâches de travail sur la satisfaction des employés, sur la non-couverture des tâches de travail ainsi que sur le respect des contraintes d'attributs cmc. Le chapitre 4 discute de l'obtention de solutions en nombres entiers du problème d'approximation en utilisant des heuristiques de branchement. Ce chapitre présente également le nouvel algorithme de séparation et compare les horaires mensuels construits suite à cette nouvelle séparation à ceux construits suite à la séparation actuelle. Finalement, le chapitre 5 conclut le mémoire en illustrant les contributions du projet et en soulignant les futures voies de recherche.

CHAPITRE 2 : APPROXIMATION DE LA SOLUTION OPTIMALE

Afin de pouvoir effectuer une nouvelle séparation basée sur la satisfaction des employés et la non-couverture des tâches de travail, il faut tout d'abord déterminer un critère à utiliser pour justifier les changements. Ce critère doit être en mesure d'évaluer avec une bonne précision la satisfaction des employés ainsi que les tâches de travail non couvertes pour le problème de construction d'horaires mensuels, en un temps raisonnable.

Dans ce chapitre, un modèle d'approximation de la solution optimale bâti sous forme de problème d'affectation généralisée avec contraintes linéaires est présenté. Les différentes étapes d'amélioration de la solution d'approximation sont discutées. Pour chacune de ces étapes, les ajouts et les modifications au modèle mathématique sont présentés. La solution de chaque étape est également fournie et est comparée à la solution optimale pour chacun des groupes.

En vue de simplifier la lecture de ce mémoire, le terme affectation sera utilisé pour désigner affectation généralisée.

2.1 Solution optimale et meilleur horaire

Dans le cadre de ce mémoire, nous appellerons solution optimale la somme de la satisfaction (sur une base de 0 à 100) des employés pour les horaires du mois d'août 2001 construits par le logiciel Gencol. Ces valeurs sont calculées grâce aux données fournies tel que mentionné à la section 1.6.1. Le meilleur horaire d'un employé (tel que discuté à la section 1.4.1) correspond à une satisfaction de 100 et on définit le meilleur horaire d'un groupe comme étant la

somme de la satisfaction des employés du groupe en considérant qu'ils obtiennent chacun leur meilleur horaire. Le tableau 2.1 présente la valeur de la solution optimale ainsi que du meilleur horaire pour chacun des dix groupes.

La quatrième colonne du tableau donne le pourcentage global de satisfaction pour les employés de chaque groupe.

Il est possible, une fois le processus de construction d'horaires mensuels terminé, que certaines activités de travail demeurent non couvertes. Un tel cas survient généralement lorsqu'il n'y a pas assez d'employés qualifiés disponibles pour effectuer les tâches en question. La cinquième colonne du tableau 2.1 illustre l'ampleur des tâches non couvertes pour chacun des groupes. Les valeurs de cette colonne sont exprimées en terme de jours de non-couverture, c'est-à-dire, si une rotation durant n jours n'est pas couverte, on compte n jours de non-couverture.

Tableau 2.1: Valeurs de la solution optimale et du meilleur horaire pour tous les groupes

Groupe	Satisfaction			NC (jours)
	Meilleur	Sol. Optimale	% Satisfaction	Sol. Optimale
1	26 800	23 264	87	0
2	26 600	23 663	89	0
3	29 200	22 011	75	73
4	29 200	23 234	82	15
5	28 900	19 719	68	36
6	29 300	22 799	78	80
7	29 200	22 824	78	38
8	29 300	22 333	76	61
9	29 300	21 426	73	61
10	29 100	22 002	76	54
TOTAL	286 900	223 275	78	418

En examinant les valeurs du tableau 2.1, on remarque que seuls les groupes 1 et 2 n'ont pas de tâches non couvertes. De plus, on note que le pourcentage de

satisfaction des employés pour ces deux groupes est plus élevé. Ces deux observations suggèrent que les groupes 1 et 2 sont plus faciles à résoudre que les autres puisqu'il y a suffisamment d'employés pour couvrir toutes les tâches. Donc, malgré le fait que les groupes soient séparés en respectant un profil d'offre et de demande, il existe des inégalités parmi ceux-ci lorsque vient le temps d'assigner les tâches de travail. Une séparation tenant compte non seulement de la satisfaction des employés mais également de la couverture des tâches pourrait permettre de réduire l'ampleur des activités de travail non couvertes.

La valeur du meilleur horaire de chaque employé est celle calculée globalement, c'est-à-dire lorsque l'employé en question a accès à toutes les tâches de travail des dix groupes. Il est possible d'effectuer ce calcul en ne donnant accès à l'employé qu'aux tâches contenues dans un groupe particulier. De cette façon, on peut obtenir la valeur du meilleur horaire pour chaque employé localement, c'est-à-dire pour chaque groupe. Il pourrait être intuitif d'utiliser ces valeurs comme critères de séparation des groupes. En effet, une méthode de séparation des groupes pourrait être développée de façon à ce que chaque employé soit inséré dans un groupe qui l'avantage du point de vue de son meilleur horaire. Compte tenu du fait que les valeurs locales sont facilement calculables grâce à la suite de produits d'Altitude PBS, cette méthode de séparation serait très rapide. Par contre, elle présente un grand désavantage. Puisque le calcul du meilleur horaire d'un employé quelconque s'effectue en considérant que l'employé est seul et a accès à toutes les tâches de travail pouvant mener à un horaire réalisable, le critère omet deux facteurs très importants des horaires mensuels, soit la couverture des tâches ainsi que la compétition qui existe entre employés afin d'obtenir la meilleure satisfaction possible. Par conséquent, le critère du meilleur horaire n'est pas représentatif de la solution optimale et l'utilisation d'un autre critère de séparation s'impose.

2.2 Modèle d'affectation 1 : une activité par jour avec fenêtres de temps

Afin de pouvoir utiliser un critère de séparation représentatif de la solution optimale des groupes, il faut bâtir un modèle d'approximation de cette solution tenant compte de la satisfaction des employés et tenant compte également de la compétition entre ces derniers pour obtenir les tâches de travail ou les repos menant à un horaire de satisfaction maximale.

Le problème de construction d'horaires mensuels pour les employés d'un groupe donné peut être simplifié en un modèle d'affectation. En effet, puisqu'on connaît les employés et les tâches de travail à assigner dans chacun des groupes, il s'agit de trouver l'affectation employés-tâches qui maximise la satisfaction des employés tout en minimisant la non-couverture des tâches. Dans ce modèle d'affectation, on impose que chaque employé effectue une activité par jour du mois, c'est-à-dire que, pour chaque jour du mois, un employé quelconque doit effectuer une tâche de travail ou être en repos. De plus, des fenêtres de temps sont utilisées afin de déterminer les tâches de travail auxquelles chaque employé a accès sans violer les contraintes de composition d'horaire.

Afin de procéder à l'affectation des tâches aux employés, les activités de travail sont discrétisées jour par jour dans le modèle mathématique, c'est-à-dire qu'une tâche de travail d'une durée de n jours sera divisée en n tâches journalières distinctes.

2.2.1 Modèle mathématique

Soit I l'ensemble des employés pour lesquels il faut construire un horaire mensuel, J l'ensemble des tâches à affecter durant le mois et K l'ensemble des jours du mois. On définit $i \in I$ comme étant un employé pour lequel il faut

construire un horaire mensuel, $j \in J$ une tâche à affecter et $k \in K$ un jour du mois.

Plusieurs paramètres sont utilisés dans la formulation du problème. δ_{jk} prend la valeur de 1 lorsque la tâche de travail j est présente le jour k et 0 sinon. On note s_{ij} la satisfaction de l'employé i lorsqu'il effectue la tâche de travail j , c_{ik} la satisfaction de l'employé i s'il est en repos le jour k , p_j la pénalité associée à la tâche de travail j si elle est non couverte et n_j le nombre d'employés requis pour effectuer la tâche de travail j .

On définit également trois types de variables dans le modèle. X_{ij} prend la valeur de 1 si l'employé i effectue la tâche de travail j et 0 sinon. R_{ik} prend la valeur de 1 si l'employé i est en repos le jour k et 0 sinon. Afin d'assurer la faisabilité mathématique du modèle, une variable d'écart E_j est associée à chaque tâche de travail j . Ces variables d'écart servent à tenir compte des tâches non couvertes.

En utilisant cette notation, le problème d'affectation 1 se formule comme suit :

$$\text{Max} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} s_{ij} X_{ij} + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} c_{ik} R_{ik} - \sum_{j \in J} p_j E_j \quad (2.1)$$

sujet à :

$$\sum_{j \in J} \delta_{jk} X_{ij} + R_{ik} = 1, \quad \forall i \in I, k \in K; \quad (2.2)$$

$$\sum_{i \in I} X_{ij} + E_j = n_j, \quad \forall j \in J; \quad (2.3)$$

$$X_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I, j \in J; \quad (2.4)$$

$$R_{ik} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I, k \in K; \quad (2.5)$$

$$E_j \geq 0, \text{entier}, \quad \forall j \in J. \quad (2.6)$$

La fonction objectif (2.1) consiste à maximiser la satisfaction globale des employés pour les tâches de travail et les repos qu'ils effectuent durant le mois tout en pénalisant les tâches qui demeurent non couvertes. En utilisant de fortes pénalités p_j , on favorise la minimisation de la non-couverture des tâches. Les contraintes (2.2) expriment la notion d'une activité par jour par employé. La couverture des tâches de travail est exigée grâce aux contraintes (2.3). Les contraintes (2.4) et (2.5) exigent que les variables de travail et de repos soient binaires alors que les contraintes (2.6) expriment l'intégralité des variables d'écart et indiquent qu'elles doivent être non-négatives.

2.2.2 Calcul de la satisfaction et des pénalités

Les paramètres de satisfaction s_{ij} et c_{ik} ainsi que les pénalités de non-couverture des tâches de travail p_j sont calculés grâce à des fonctions précises. Cette section présente les équations utilisées pour calculer ces paramètres.

La satisfaction d'un employé lorsqu'il effectue une tâche de travail ou lorsqu'il est en repos se détermine comme suit :

$$\frac{Score - \left(Pire \times \frac{Durée}{Jours} \right)}{Meilleur - Pire} \times 100 \quad (2.7)$$

où *Score* est le score de la tâche de travail ou du repos pour l'employé;

Pire est le score du pire horaire de l'employé;

Durée est la durée de la tâche de travail ou du repos;

Jours est le nombre de jours du mois;

Meilleur est le score du meilleur horaire de l'employé.

Dans le cas du modèle d'affectation 1, puisque les tâches de travail sont discrétisées jour par jour, la durée de toutes les tâches est de un jour. Les repos ont également une durée de un jour.

Il est possible pour certains employés que le score de leur meilleur horaire soit identique à celui de leur pire horaire. Dans un tel cas, l'équation (2.7) n'est pas valide puisque cette situation correspond à une division par zéro. Pour ces employés il faut plutôt utiliser la formule suivante :

$$\frac{Score}{Meilleur} \times 100. \quad (2.8)$$

Par contre, il est également possible pour les employés dont les scores du meilleur et du pire horaire sont identiques que ce score soit égal à 0. Dans un tel cas l'équation suivante doit être utilisée :

$$\frac{Durée}{Jours} \times 100. \quad (2.9)$$

Grâce à ces trois équations, il est possible de calculer la satisfaction de tous les employés pour une tâche de travail ou un repos donné.

Tel que mentionné dans la section précédente, afin de minimiser les tâches non couvertes, il faut utiliser des pénalités p_j suffisamment élevées. Ces pénalités sont calculées grâce à l'équation suivante :

$$Employés \times Durée \times 100 \quad (2.10)$$

où $Employés$ est le nombre total d'employés dans l'ensemble J .

En incluant ces pénalités dans la fonction objectif, on favorise la minimisation de la durée totale (en jours) des tâches de travail non couvertes.

2.2.3 Réductions dans la construction du modèle

La majorité des employés ont une ou plusieurs activités pré-assignées, c'est-à-dire qu'avant de construire les horaires mensuels pour les employés, ceux-ci ont déjà des tâches de travail à effectuer ou des journées de congé dans le mois. Afin de s'assurer de respecter les conventions d'horaire, certaines tâches à assigner ne doivent pas être accessibles pour certains employés. La notion de fenêtres de temps devient donc très importante.

Lorsqu'une tâche de travail à assigner précède ou succède immédiatement une tâche de travail pré-assignée, certaines règles doivent être observées. Ces règles sont illustrées dans le tableau 2.2.

Tableau 2.2: Durée maximale d'un bloc de tâches

Type de tâche	Durée maximale en jours				
	Court courrier	Long courrier	Attente/Réserve	Service au sol	Service militaire
Court courrier	6			6	6
Long courrier					
Attente	6		6	6	
Réserve	6		6	6	
Service au sol	6	5		6	6
Service militaire	6	6		6	

Le tableau 2.2 donne la durée maximale en jours d'un bloc de tâches. Par bloc de tâches, on entend deux ou plusieurs tâches de travail qui se suivent sans jour de repos. On interprète le tableau en faisant succéder les types de tâches des colonnes aux types de tâches des rangées. Une case ombragée indique que la succession des deux types de tâches n'est pas permise. Par exemple, aucun type de tâche ne peut succéder immédiatement une tâche du type long

courrier. Par contre, une tâche de type long courrier peut succéder immédiatement une tâche de type service au sol à condition que la durée totale des deux tâches de travail ne dépasse pas cinq jours.

En plus de ces restrictions sur la succession des tâches de travail, d'autres conventions d'horaire existent. Chaque tâche de travail requiert une ou des qualifications. Afin de pouvoir effectuer une tâche de travail, un employé doit posséder la ou les qualifications requises. De plus, certaines règles régissent les périodes d'absence des employés durant le mois. Notamment, deux jours de repos sont requis avant toute vacance. Également, une journée de repos est requise avant toute autre période d'absence. Puisque les périodes d'absence sont connues avant l'étape de construction des horaires pour les employés, il est possible d'imposer les journées de repos nécessaires.

Grâce à toutes ces conventions d'horaire, il est possible d'empêcher les employés d'avoir accès à certaines tâches de travail lors de la construction du modèle. Un employé n'aura donc pas accès à une tâche de travail si :

- il ne possède pas les qualifications requises;
- il possède une activité pré-assignée (travail, absence ou repos) qui chevauche la durée de la tâche;
- il possède une activité de travail pré-assignée qui mène à un bloc de tâches illégal.

Les tâches de travail qui respectent les conventions d'horaire pour un employé mènent à la création des variables X_{ij} dans le modèle mathématique. De plus, pour chaque journée où un employé est disponible pour effectuer une activité, une variable R_{ik} est créée dans le modèle mathématique.

2.2.4 Résultats de l'affectation

La relaxation linéaire du modèle d'affectation 1 a été résolue pour les dix groupes en utilisant l'algorithme *barrier* du logiciel Cplex (version 7.5). Tous les tests numériques de ce chapitre et des chapitres successifs utilisent cet algorithme et ont été effectués sur une station de travail Sunfire 4800 (900 MHz, 8G RAM). Le tableau 2.3 compare les valeurs de l'affectation 1 à celles de la solution optimale pour tous les groupes. Le temps de résolution de chaque problème, sans l'étape de *crossover*, est également donné. L'algorithme *barrier* de Cplex utilise une méthode de points intérieurs pour optimiser les problèmes alors que l'étape de *crossover* utilise les méthodes du simplexe pour trouver une solution de base optimale. La taille moyenne des problèmes présentés au tableau 2.3 est de près de 430 000 variables et 12 000 contraintes.

Tableau 2.3: Comparaison des valeurs de la relaxation de l'affectation 1 pour tous les groupes

Groupe	Satisfaction			Non-couverture (jours)		Temps (min.)
	Sol. Optimale	Affectation 1	% Écart	Sol. Optimale	Affectation 1	
1	23 264	31 832	36,83	0	0	3
2	23 663	30 314	28,11	0	0	5
3	22 011	34 476	56,63	73	0	5
4	23 234	33 095	42,44	15	0	8
5	19 719	31 471	59,60	36	0	6
6	22 799	31 706	39,07	80	0	7
7	22 824	31 780	39,24	38	0	5
8	22 333	31 217	39,78	61	0	6
9	21 426	33 765	57,59	61	0	6
10	22 002	32 604	48,19	54	0	7
TOTAL	223 275	322 260	44,33	418	0	58

Le pourcentage d'écart de la solution de l'affectation 1 est très élevé. En effet, globalement, l'écart entre la solution de l'affectation et la solution optimale est de plus de 44%. De plus, l'affectation 1 ne contient aucune tâche de travail non-couverte alors que la solution optimale a un total de 418 jours de non-couverture. On peut donc conclure que le modèle d'affectation 1 ne constitue pas un bon critère d'approximation. Des améliorations au modèle s'imposent.

Par contre, le temps de résolution des problèmes est très petit. En effet, le temps de résolution d'un groupe pour l'affectation 1 est en moyenne de près de 6 minutes ce qui constitue un temps extrêmement rapide considérant qu'il faut 120 heures pour trouver la solution optimale des dix groupes avec le logiciel d'optimisation Gencol.

2.3 *Modèle d'affectation 2 : ajout des contraintes de repos*

Un horaire mensuel valide pour un employé doit contenir un certain nombre minimum de jours de repos. Ce nombre est déterminé selon les jours d'absence (vacances, congés, etc.) que l'employé possède durant le mois. Le tableau 2.4 indique les valeurs minimales de jours de repos qui doivent être respectées afin de mener à un horaire mensuel valide pour un employé.

Tableau 2.4: Jours minimums de repos devant être pris par un employé selon ses jours d'absence

Mois de 31 jours		Mois de 30 jours		Mois de 29 jours		Mois de 28 jours	
Absence	Repos	Absence	Repos	Absence	Repos	Absence	Repos
0,1,2,3	9	0,1,2,3	9	0,1,2,3	8	0,1,2,3	8
4,5,6	8	4,5,6	8	4,5,6	7	4,5,6	7
7,8,9	7	7,8,9	7	7,8,9,10	6	7,8,9	6
10,11,12	6	10,11,12	6	11,12,13	5	10,11,12	5
13,14,15,16	5	13,14,15	5	14,15,16	4	13,14,15,16	4
17,18,19	4	16,17,18	4	17,18,19	3	17,18,19	3
20,21,22	3	19,20,21	3	20,21,22,23	2	20,21,22	2
23,24,25	2	22,23,24	2	24,25,26	1	23,24,25	1
26,27,28	1	25,26,27	1	27,28,29	0	26,27,28	0
29,30,31	0	28,29,30	0				

On remarque que, selon la durée du mois, les restrictions sur le nombre minimum de jours de repos pour les employés changent. Puisque le nombre de jours d'absence de chaque employé est connu avant l'étape de construction des horaires, il est facile de déterminer le nombre de jours de repos qu'il faut imposer à chacun durant le mois.

2.3.1 Ajouts au modèle mathématique

Afin de pouvoir tenir compte du nombre minimum de journées de repos dans le précédent modèle mathématique, il faut introduire un nouveau paramètre. Soit r_i le nombre de jours de repos que doit prendre l'employé i durant le mois. Le groupe de contraintes suivant est ajouté au modèle :

$$\sum_{k \in K} R_{ik} \geq r_i, \quad \forall i \in I. \quad (2.11)$$

Le nouveau modèle mathématique devient donc la maximisation de la fonction objectif (2.1) sujette aux contraintes (2.2) à (2.6) et (2.11).

2.3.2 Résultats de l'affectation

Le tableau 2.5 présente les valeurs de la relaxation linéaire du modèle d'affectation 2 et compare ces valeurs à celles de la solution optimale. Les problèmes présentés ont une taille moyenne de près de 430 000 variables et 12 200 contraintes.

Tableau 2.5: Comparaison des valeurs de la relaxation de l'affectation 2 pour tous les groupes

Groupe	Satisfaction			Non-couverture (jours)		Temps (min.)
	Sol. Optimale	Affectation 2	% Écart	Sol. Optimale	Affectation 2	
1	23 264	30 616	31,60	0	0	3
2	23 663	28 741	21,46	0	0	5
3	22 011	29 607	34,51	73	0	7
4	23 234	31 058	33,67	15	0	10
5	19 719	29 766	50,95	36	0	9
6	22 799	29 906	31,17	80	0	10
7	22 824	29 846	30,77	38	0	9
8	22 333	30 688	37,41	61	0	10
9	21 426	31 674	47,83	61	0	9
10	22 002	31 068	41,21	54	0	6
TOTAL	223 275	302 970	35,69	418	0	78

En analysant les données du tableau 2.5, on remarque que l'ajout des contraintes de repos améliore la qualité de l'approximation. En effet, l'écart global passe de 44% à près de 36%. Par contre, malgré l'amélioration, le modèle d'affectation 2 ne constitue pas un bon critère d'approximation de la solution optimale et des améliorations sont encore nécessaires. L'affectation ne contient pas de tâches non couvertes et le temps moyen de résolution d'un groupe est d'environ 8 minutes ce qui constitue une augmentation d'approximativement 2 minutes comparativement au temps de résolution moyen de la relaxation linéaire du modèle d'affectation 1.

2.4 Modèle d'affectation 3 : modification de la discrétisation des tâches de travail

Un des principaux désavantages des modèles d'affectation présentés dans les deux sections précédentes est la discrétisation des tâches de travail. En effet, en explosant les tâches de travail en plusieurs tâches d'une durée de un jour, les employés ne sont pas tenus de les effectuer en entier. Un employé peut donc effectuer les jours d'une tâche de travail qui favorisent sa satisfaction alors qu'un ou plusieurs autres employés se partagent le reste de la tâche.

Le modèle d'affectation proposé dans cette section vise à modifier la discrétisation des tâches de travail afin d'éviter de telles situations. En fait, les tâches de travail ne sont plus séparées en sous-tâches. De façon concrète, cela signifie que pour un employé donné, il n'existe qu'une seule variable X_{ij} associée à une tâche de travail donnée.

Cette modification de la discrétisation résulte en une formulation similaire du modèle mathématique telle que présentée dans les deux sections précédentes.

Le problème d'affectation demeure donc la maximisation de la fonction objectif (2.1) sujette aux contraintes (2.2) à (2.6) et (2.11).

2.4.1 Résultats de l'affectation

Les valeurs de la relaxation linéaire de l'affectation 3 sont données dans le tableau 2.6. Le tableau compare également les valeurs de l'affectation 3 à celles de la solution optimale suite au changement dans la discrétisation. La taille moyenne des problèmes présentés au tableau 2.6 est de près de 160 000 variables et 10 200 contraintes.

Tableau 2.6: Comparaison des valeurs de la relaxation de l'affectation 3 pour tous les groupes

Groupe	Satisfaction			Non-couverture (jours)		Temps (min.)
	Sol. Optimale	Affectation 3	% Écart	Sol. Optimale	Affectation 3	
1	23 264	27 488	18,16	0	0	4
2	23 663	28 085	18,69	0	0	5
3	22 011	28 963	31,58	73	0	6
4	23 234	30 378	30,75	15	0	5
5	19 719	29 166	47,91	36	0	8
6	22 799	29 344	28,71	80	0	5
7	22 824	29 232	28,08	38	0	5
8	22 333	29 971	34,20	61	0	5
9	21 426	31 044	44,89	61	0	7
10	22 002	29 847	35,66	54	0	6
TOTAL	223 275	293 518	31,46	418	0	56

Les changements apportés au modèle d'affectation 3 permettent de réduire l'écart entre la solution de l'affectation et la solution optimale de près de 5% globalement. De plus, le temps de résolution moyen d'un groupe est réduit. Ce changement peut être expliqué par la diminution considérable du nombre de variables et de contraintes lors du changement de discrétisation. Malgré ces améliorations, l'écart est toujours trop grand pour que la relaxation du modèle d'affectation puisse être considérée comme une bonne approximation de la solution optimale.

2.5 Modèle d'affectation 4 : ajout des repos post-courrier

Pour chaque activité de travail effectuée, un employé doit prendre un nombre de jours de repos associé à la tâche. Ces jours de repos se nomment repos post-courrier. Le nombre de jours de repos varie en fonction du type et de la durée de la tâche de travail. Le nombre comprend généralement une partie entière et une partie fractionnaire. Il faut tenir compte de ces repos dans le modèle d'affectation puisqu'ils forcent certains employés à prendre plus de jours de repos que leur minimum requis et, dans certains cas, ils forcent même les employés à prendre ces repos à des jours précis durant le mois.

Puisqu'il est possible d'effectuer des blocs de tâches consécutives, les jours de repos ne doivent pas obligatoirement être pris suite à une tâche mais ils doivent être obligatoirement pris immédiatement après un bloc de tâches. Lorsque deux ou plusieurs tâches font partie d'un bloc de tâches, leurs jours de repos à imposer sont additionnés afin d'obtenir le nombre de jours de repos à imposer immédiatement après le bloc.

Tel que mentionné précédemment, le nombre de jours de repos à imposer comporte une partie entière et une partie fractionnaire. Par contre, on ne peut imposer une fraction de journée de repos à un employé. Il faut donc arrondir le nombre à son entier inférieur ou supérieur. La fonction suivante, développée par la compagnie aérienne, est utilisée afin d'effectuer ce choix :

$$\frac{\text{Nombre}}{2} \geq 3 - (6 \times \text{Fraction}) \quad (2.12)$$

où *Nombre* est le nombre de jours de repos à imposer;
Fraction est la partie fractionnaire de *Nombre*.

Si l'inéquation est respectée, le nombre de jours de repos à imposer est arrondi à l'entier supérieur. Sinon, il est arrondi à l'entier inférieur.

2.5.1 Imposition des jours de repos

Selon le tableau 2.2, lorsque la combinaison de tâches est légale, la durée maximale d'un bloc de tâches est de cinq ou six jours. À partir de cette information et connaissant la durée de la tâche ou du bloc de tâches à affecter ainsi que le nombre de jours de repos devant être pris suite à l'affectation, il est possible de déterminer si des jours de repos doivent être imposés à des jours précis du mois. En effet, on sait qu'il faut imposer les jours de repos immédiatement après un bloc de tâches. En supposant qu'un employé prend les jours de repos requis immédiatement après l'affectation, si un ou plusieurs jours de repos dépassent la durée maximale d'un bloc de tâches, on sait que ces repos doivent être imposés à ces jours du mois. La figure 2.1 illustre une telle situation dans le cas d'une tâche de travail (ou un bloc de tâches) d'une durée de quatre jours avec quatre jours de repos à imposer.

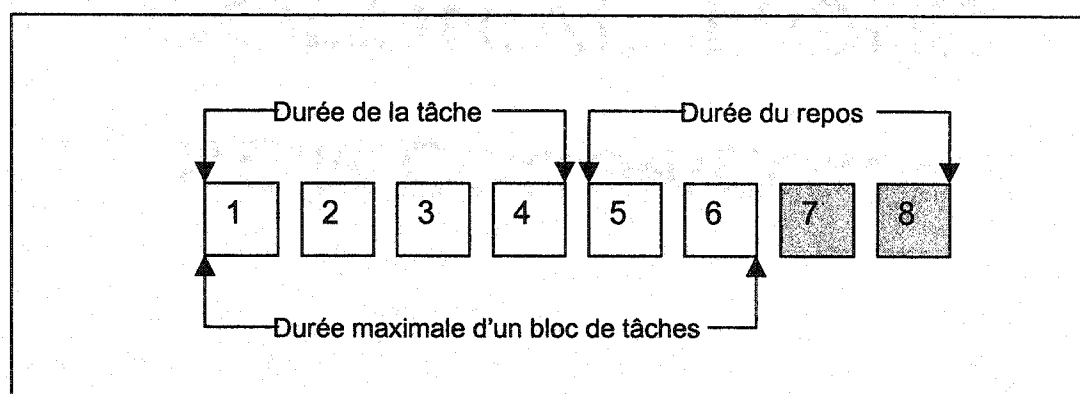


Figure 2.1 : Exemple de repos à effectuer imposable après la tâche de travail

En examinant la figure 2.1, on remarque que la durée de la tâche (ou du bloc de tâches) combinée à la durée du repos dépasse la durée maximale d'un bloc de tâches. Puisqu'un bloc de tâches ne peut dépasser la durée maximale de six jours, on peut donc imposer à l'employé tout jour de repos à effectuer qui dépasse cette durée maximale. Dans le cas décrit, deux jours de repos sur quatre (illustrés par les cases ombragées) sont considérés comme des jours de repos à effectuer impossibles. Les deux jours de repos restants sont considérés comme des jours de repos à effectuer non-imposables, c'est-à-dire que l'employé qui effectue la tâche de travail (ou le bloc de tâches) en question devra effectuer ces deux jours de repos mais il est impossible de déterminer avec certitude les dates où il doit les effectuer.

Prenons un autre exemple où cette fois, la tâche de travail (ou le bloc de tâches) a une durée de quatre jours et la durée du repos à effectuer est de deux jours. Cette situation est illustrée à la figure 2.2.

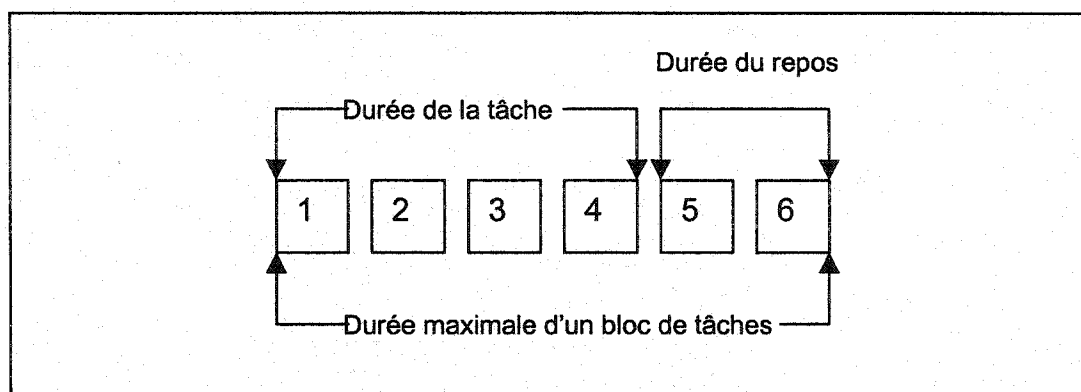


Figure 2.2 : Exemple de repos à effectuer non-imposable

Dans le cas illustré à la figure 2.2, la durée totale de la tâche et du repos ne dépasse pas la durée maximale d'un bloc de tâches. Il est donc impossible de

dire à quelle date les deux jours de repos doivent être pris et ils deviennent donc des jours de repos à effectuer non-imposables.

En plus du cas où la durée de la tâche (ou du bloc de tâches) combinée à la durée du repos dépasse la durée maximale d'un bloc de tâches, il existe d'autres situations où des jours de repos à effectuer peuvent être imposés. En effet, dans le cas où la durée de la tâche de travail (ou du bloc de tâches) est égale à la durée maximale d'un bloc de tâches, il est possible non seulement d'imposer tous les jours de repos suite à la tâche (ou le bloc de tâches) mais il est également possible d'imposer un jour de repos immédiatement avant la tâche (ou le bloc de tâches) puisque toute tâche qui serait jointe auparavant mènerait à un bloc de tâches d'une durée illégale. Cette situation est illustrée à la figure 2.3 avec une tâche de travail (ou un bloc de tâches) d'une durée de six jours avec trois jours de repos à effectuer.

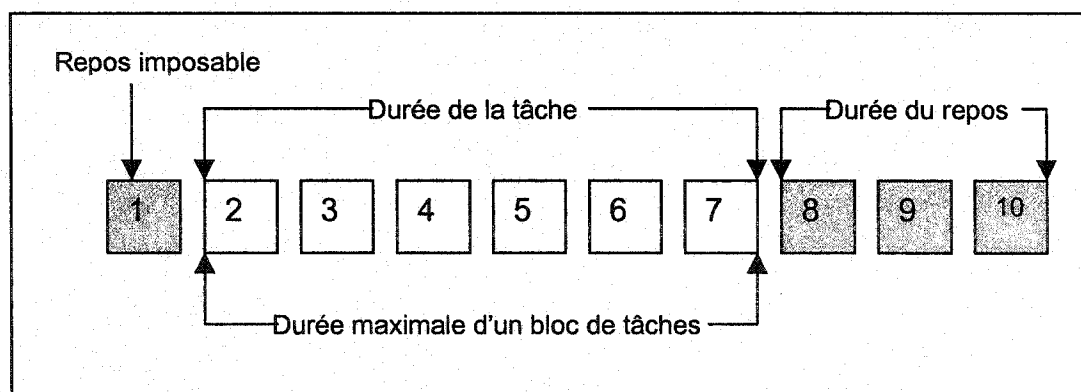


Figure 2.3 : Exemple de repos à effectuer imposable avant la tâche de travail

Dans le cas où une tâche de travail individuelle a une durée de plus de six jours, la même situation qu'à la figure 2.3 se présente, c'est-à-dire que les jours de repos à effectuer sont imposés immédiatement après la tâche et une journée de repos supplémentaire immédiatement avant la tâche de travail est imposée.

Finalement, selon le tableau 2.2, aucune tâche ne peut succéder immédiatement une tâche de travail de type long courrier. Grâce à cette information, on sait que l'on doit imposer les jours de repos à effectuer immédiatement après toute activité de type long courrier.

2.5.2 Modifications et ajouts au modèle mathématique

Afin de tenir compte des repos post-courrier, des modifications au modèle mathématique s'imposent. Tout d'abord, le paramètre δ_{jk} est modifié. Il devient δ_{ijk} . En plus de prendre la valeur de 1 lorsque la tâche de travail j est présente le jour k pour tout employé i , le paramètre prend également la valeur de 1 lorsqu'un repos associé à la tâche de travail j est imposable le jour k pour l'employé i et 0 sinon. De cette façon, la durée des tâches de travail est « allongée » afin de tenir compte de leur repos post-courrier imposable. Le groupe de contraintes (2.2) est donc modifié et s'écrit de la façon suivante :

$$\sum_{j \in J} \delta_{ijk} X_{ij} + R_{ik} = 1, \quad \forall i \in I, k \in K. \quad (2.13)$$

Les journées de repos imposables suite à une tâche de travail affectée doivent être additionnées aux autres journées de repos que l'employé prend afin d'atteindre le nombre minimum de jours de repos pour le mois. Soit g_{ij} le nombre de jours de repos imposables lorsque l'employé i effectue la tâche de travail j . Le groupe de contraintes de repos minimum (2.11) est modifié et s'écrit de la façon suivante :

$$\sum_{k \in K} R_{ik} + \sum_{j \in J} g_{ij} X_{ij} \geq r_i, \quad \forall i \in I. \quad (2.14)$$

Tel que mentionné précédemment, lorsqu'un employé effectue une tâche de travail, certaines journées de repos à effectuer ne peuvent être imposées à des jours précis du mois. Par contre, puisque l'employé effectue la tâche de travail, il doit tout de même effectuer ces jours de repos. Afin de tenir compte de cette situation, un nouveau groupe de contraintes est ajouté au modèle mathématique. Soit h_{ij} le nombre de jours de repos non-imposables devant être pris durant le mois lorsque l'employé i effectue la tâche de travail j . Le nouveau groupe de contraintes s'écrit comme suit :

$$\sum_{k \in K} R_{ik} - \sum_{j \in J} h_{ij} X_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in I. \quad (2.15)$$

Le groupe de contraintes (2.15) assure que tout employé effectue globalement durant le mois les jours de repos non-imposables associés aux tâches de travail qui lui sont affectées.

Le nouveau modèle mathématique devient donc la maximisation de la fonction objectif (2.1) sujette aux contraintes (2.3) à (2.6) et (2.13) à (2.15).

2.5.3 *Modification du calcul de la satisfaction des tâches de travail*

Puisque la durée des tâches de travail est allongée afin de tenir compte des jours de repos imposables, il faut également tenir compte de ces jours de repos dans la satisfaction des employés. Dans les équations (2.7) à (2.9), pour une tâche de travail, *Score* devient le score de la tâche de travail plus le score des jours de repos imposables pour l'employé alors que *Durée* devient la durée de la tâche de travail plus la durée des repos imposables.

2.5.4 Nouvelles réductions dans la construction du modèle

La notion des repos post-courrier permet d'effectuer de nouvelles réductions dans la construction du modèle mathématique. En effet, il est possible d'imposer des journées de repos immédiatement avant et après certaines tâches de travail pré-affectées. De plus, un employé n'aura pas accès aux tâches de travail pour lesquelles il lui est impossible d'effectuer les jours de repos imposables (en raison d'une activité de travail pré-affectée chevauchant cette période).

2.5.5 Résultats de l'affectation

Le tableau 2.7 présente les valeurs de la relaxation linéaire du modèle d'affectation 4 et compare ces valeurs à celles de la solution optimale pour tous les groupes. Les problèmes bâtis selon le modèle d'affectation 4 ont une taille moyenne de près de 150 000 variables et 10 500 contraintes.

Tableau 2.7: Comparaison des valeurs de la relaxation de l'affectation 4 pour tous les groupes

Groupe	Satisfaction			Non-couverture (jours)		Temps (min.)
	Sol. Optimale	Affectation 4	% Écart	Sol. Optimale	Affectation 4	
1	23 264	24 289	4,41	0	0	5
2	23 663	24 096	1,83	0	0	6
3	22 011	26 434	20,09	73	0	6
4	23 234	26 784	15,28	15	0	8
5	19 719	25 023	26,90	36	131	10
6	22 799	24 758	8,59	80	73	8
7	22 824	24 618	7,86	38	0	8
8	22 333	25 666	14,92	61	101	9
9	21 426	25 093	17,11	61	71	10
10	22 002	24 692	12,23	54	22	8
TOTAL	223 275	251 453	12,62	418	398	78

L'ajout des repos post-courrier fait baisser considérablement l'écart global entre la solution de l'affectation et la solution optimale. L'écart est de moins de 13% comparativement à près de 31% auparavant. De plus, le modèle d'affectation 4 contient un nombre de jours de tâches non couvertes similaire à celui de la

solution optimale. Le temps moyen de résolution d'un groupe a sensiblement augmenté, passant de 5,6 minutes à 7,8 minutes.

Par contre, malgré la forte amélioration entre les modèles d'affectation 3 et 4, un écart de près de 13% constitue une trop grande différence pour que le modèle d'affectation 4 soit considéré comme étant une bonne approximation de la solution optimale. De plus, les valeurs de plusieurs groupes ont un écart individuel au-dessus de 15%. Le modèle d'affectation doit encore être amélioré afin d'atteindre un écart plus petit.

2.6 Modèle d'affectation 5 : ajout des contraintes de satisfaction et de crédits

Après un examen détaillé des horaires produits par le modèle d'affectation 4, il a été noté que certains employés ont des horaires menant à un score plus élevé que le score de leur meilleur horaire. Ces employés sont donc satisfaits à plus de 100%. Cette situation signifie que l'horaire de ces employés n'est pas valide.

Afin de remédier à cette situation, deux groupes de contraintes sont ajoutés au modèle mathématique. Le premier groupe de contraintes est le groupe des contraintes de satisfaction qui exige que la somme de la satisfaction de toutes les tâches de travail et de tous les repos pour chaque employé ne dépasse pas 100%.

Le deuxième groupe de contraintes ajouté est le groupe de contraintes de crédits. Les crédits sont des unités de travail telles les heures. À chaque tâche de travail est associé un certain nombre de crédits. Selon les conventions d'horaire, le nombre maximum de crédits qu'un employé peut avoir sur une période glissante de 28 jours est de 190. Afin de simplifier la notion de période

glissante, la valeur maximale de crédits est transformée en fonction du nombre de jours dans le mois. La valeur maximum de crédits pour un mois est calculée grâce à l'équation suivante :

$$\frac{190 \times \text{Jours}}{28} . \quad (2.16)$$

2.6.1 Ajouts au modèle mathématique

Soit q_j le nombre de crédits associé à la tâche de travail j et m le nombre maximum de crédits qu'un employé peut avoir durant le mois tel que calculé grâce à l'équation (2.16). Les groupes de contraintes suivants sont ajoutés au modèle :

$$\sum_{j \in J} s_{ij} X_{ij} + \sum_{k \in K} c_{ik} R_{ik} \leq 100 , \quad \forall i \in I ; \quad (2.17)$$

$$\sum_{j \in J} q_j X_{ij} \leq m , \quad \forall i \in I . \quad (2.18)$$

Les contraintes (2.17) sont les contraintes de satisfaction alors que les contraintes (2.18) sont les contraintes de crédits. Avec ces ajouts, le modèle mathématique devient la maximisation de la fonction objectif (2.1) sujette aux contraintes (2.3) à (2.6), (2.13) à (2.15) et (2.17) à (2.18).

2.6.2 Résultats de l'affectation

Les valeurs de la relaxation linéaire du modèle d'affectation 5 sont données dans le tableau 2.8. Le tableau compare également les valeurs de l'affectation à celles de la solution optimale pour tous les groupes suite à l'ajout des deux

nouveaux groupes de contraintes. Les problèmes présentés au tableau 2.8 ont une taille moyenne de près de 150 000 variables et 11 000 contraintes.

Tableau 2.8: Comparaison des valeurs de la relaxation de l'affectation 5 pour tous les groupes

Groupe	Satisfaction			Non-couverture (jours)		Temps (min.)
	Sol. Optimale	Affectation 5	% Ecart	Sol. Optimale	Affectation 5	
1	23 264	23 939	2,90	0	0	8
2	23 663	23 915	1,06	0	0	9
3	22 011	25 910	17,71	73	0	10
4	23 234	26 235	12,92	15	0	10
5	19 719	24 843	25,99	36	131	12
6	22 799	24 454	7,26	80	73	11
7	22 824	24 475	7,23	38	0	10
8	22 333	25 237	13,00	61	101	11
9	21 426	24 946	16,43	61	71	12
10	22 002	24 476	11,24	54	22	15
TOTAL	223 275	248 430	11,27	418	398	108

L'ajout des contraintes de satisfaction et de crédits contribue à faire baisser l'écart entre la solution du modèle d'affectation et la solution optimale. Par contre, cette baisse est peu significative et l'écart est toujours trop grand pour que le modèle d'affectation soit utilisé comme approximation de la solution optimale. Le nombre de jours de non-couverture demeure stable à 398 alors que le temps moyen de résolution d'un groupe augmente à 10,8 minutes.

2.7 Modèle d'affectation 6 : ajout des contraintes d'attributs cmc

Tel que mentionné à la section 1.4.3, les attributs cmc sont des qualificatifs que peuvent posséder certains employés. Chaque tâche de travail requiert qu'un certain nombre minimum (ou maximum) d'employés possèdent un ou des attributs précis. Pour les données du mois d'août 2001, il existe huit types d'attributs cmc différents. Ces attributs sont :

- l'employé possède la qualification « classe affaire 110 »;
- l'employé possède la qualification « classe affaire 320 »;

- l'employé possède la qualification « classe affaire 330 »;
- l'employée est une femme;
- l'employé parle le portugais et l'espagnol;
- l'employé est un employé temporaire;
- l'employé a de l'expérience sur les tâches de travail de type long courrier;
- l'employé a de l'expérience sur les tâches de travail de type court courrier.

Les attributs cmc associés aux tâches de travail permettent une bonne distribution des employés parmi ces tâches et permettent également une meilleure satisfaction de la clientèle. Il est donc important d'en tenir compte dans le modèle d'affectation.

2.7.1 *Ajouts au modèle mathématique*

Soit L l'ensemble des attributs cmc. On définit $l \in L$ comme étant un attribut cmc. Le paramètre γ_{il} prend la valeur de 1 si l'employé i possède l'attribut cmc l et 0 sinon. On note a_{jl} le nombre minimum d'employés effectuant la tâche de travail j devant posséder l'attribut l et b_{jl} le nombre maximum d'employés effectuant la tâche de travail j pouvant posséder l'attribut l . Si une tâche de travail j ne requiert pas un minimum d'employés devant posséder l'attribut cmc l , la valeur de a_{jl} est 0. De même, si une tâche de travail j ne restreint pas le maximum d'employés possédant l'attribut cmc l , b_{jl} prend la valeur de n_j .

En utilisant cette notation, on ajoute les groupes de contraintes suivants au modèle mathématique :

$$\sum_{i \in I} \gamma_{il} X_{ij} + E_j \geq a_{jl}, \quad \forall j \in J, l \in L; \quad (2.19)$$

$$\sum_{i \in I} \gamma_{il} X_{ij} \leq b_{jl}, \quad \forall j \in J, l \in L. \quad (2.20)$$

Les cinq premiers types d'attributs cmc énumérés requièrent un nombre minimum d'employés devant posséder l'attribut cmc mais ne restreignent pas le nombre maximum d'employés pouvant posséder l'attribut cmc. Ces types d'attributs cmc requièrent donc l'utilisation du groupe de contraintes (2.19). À l'inverse, les trois derniers types d'attributs cmc énumérés restreignent strictement le nombre maximum d'employés pouvant posséder l'attribut cmc. Ces types d'attributs cmc requièrent donc l'utilisation du groupe de contraintes (2.20).

La présence des variables d'écart E_j dans le groupe de contraintes (2.19) permet d'assurer la faisabilité mathématique du modèle. Le modèle mathématique devient la maximisation de la fonction objectif (2.1) sujette aux contraintes (2.3) à (2.6), (2.13) à (2.15) et (2.17) à (2.20).

2.7.2 Résultats de l'affectation

Les valeurs de la relaxation linéaire de l'affectation 6 sont présentées dans le tableau 2.9. La comparaison des valeurs de l'affectation à celles de la solution optimale pour tous les groupes y est également donnée. La taille moyenne des problèmes présentés au tableau 2.9 est de près de 150 000 variables et 13 200 contraintes.

Tableau 2.9: Comparaison des valeurs de la relaxation de l'affectation 6 pour tous les groupes

Groupe	Satisfaction			Non-couverture (jours)		Temps (min.)
	Sol. Optimale	Affectation 6	% Ecart	Sol. Optimale	Affectation 6	
1	23 264	23 125	-0,60	0	0	15
2	23 663	23 292	-1,57	0	0	17
3	22 011	23 138	5,12	73	136	19
4	23 234	23 976	3,19	15	89	16
5	19 719	23 934	21,38	36	179	22
6	22 799	23 799	4,39	80	149	20
7	22 824	22 900	0,33	38	115	14
8	22 333	24 391	9,22	61	165	24
9	21 426	23 876	11,43	61	185	23
10	22 002	23 446	6,56	54	115	19
TOTAL	223 275	235 877	5,64	418	1133	189

L'écart moyen entre la solution du modèle d'affectation et la solution optimale est maintenant de moins de 6%. Avec un écart aussi petit, on peut considérer que le modèle d'affectation 6 fournit une bonne approximation de la solution optimale et peut être utilisé comme critère de décision pour une nouvelle séparation des groupes basée sur la satisfaction des employés et sur la couverture des tâches de travail.

On remarque que l'écart moyen pour les deux premiers groupes est inférieur à 0. En fait, la solution de l'affectation est inférieure à celle de la solution optimale. Ce phénomène est expliqué par le fait que lors de la résolution de la solution optimale par génération de colonnes, les contraintes d'attributs cmc ne sont pas incluses en tout temps. Puisqu'il existe plusieurs de ces contraintes et que leur présence dans le modèle complique et ralentit fortement le processus de résolution, elles ne sont vérifiées qu'à certains moments de la résolution afin de rectifier la solution.

Ce phénomène peut également expliquer l'écart entre le nombre de jours de non-couverture de l'affectation 6 (1133 jours) et de la solution optimale (418 jours). En effet, en incluant en tout temps les contraintes d'attributs cmc dans le

modèle d'affectation 6, l'affectation est plus restrictive du point de vue de ces contraintes que le modèle mathématique original. En permettant la violation des contraintes d'attributs cmc dans le modèle original, les employés peuvent couvrir des rotations qu'ils n'auraient pu couvrir si les contraintes avaient été présentes en tout temps. Le tableau 2.10 présente le nombre de tâches de travail pour lesquelles une ou plusieurs contraintes d'attributs cmc sont violées globalement pour l'affectation 6 ainsi que pour la solution optimale.

Tableau 2.10: Données sur les contraintes d'attributs violées

	Sol. Optimale	Affectation 6
Nombre de tâches de travail avec contraintes d'attributs	1883	1883
Nombre de tâches avec contraintes d'attributs violées	277	39
Pourcentage de tâches avec contraintes d'attributs violées	14,71%	2,07%

À l'inverse de l'écart entre le nombre de jours de non-couverture de l'affectation 6 et de la solution optimale, l'écart entre le nombre de contraintes d'attributs violées favorise l'affectation 6. En effet, le modèle d'affectation 6 contient 238 tâches de travail avec contraintes violées de moins que la solution optimale, soit une différence de 86%. Cette différence explique pourquoi l'affectation 6 contient plus de jours de non-couverture que la solution optimale.

Malgré les écarts entre les jours de non-couverture et le nombre de contraintes d'attributs violées, le modèle d'affectation 6 constitue une bonne approximation de la solution optimale. De plus, le temps moyen de résolution d'un groupe est d'environ 19 minutes ce qui constitue un temps très rapide considérant les 12 heures qu'il faut en moyenne pour obtenir la solution optimale d'un groupe.

2.8 Évolution de la solution de l'approximation en réduisant progressivement la non-couverture des tâches

Malgré la bonne performance globale du modèle d'affectation 6, certains groupes ont un grand écart entre la solution de l'affectation et la solution optimale. C'est le cas des groupes 5 (21,38%) et 9 (11,43%). Un phénomène liant l'écart entre les jours de non-couverture et l'écart entre la solution du problème d'affectation et la solution optimale peut être observé. En effet, lorsque l'écart entre les jours de non-couverture des tâches de travail est élevé (> 100 jours), l'écart entre la solution de l'approximation et la solution optimale est également élevé.

Ce phénomène est dû aux pénalités de non-couverture p_j utilisées dans la fonction objectif (2.1). Ces pénalités sont très élevées, ce qui fait que l'optimiseur tente avant-tout d'éviter de laisser des tâches de travail non couvertes. Par contre, lorsque l'ajout d'une nouvelle tâche de travail non couverte est inévitable, l'optimiseur tente d'augmenter la satisfaction des employés au maximum afin de compenser pour la forte baisse dans la fonction objectif. Donc, à chaque ajout de tâche non couverte, le profil des horaires des employés, et par conséquent leur satisfaction, peut varier beaucoup.

Afin de confirmer la performance du modèle d'affectation 6 comme modèle d'approximation de la solution optimale, une étude a été réalisée. Cette étude vise à montrer l'évolution de l'écart entre la solution de l'affectation 6 et la solution optimale en réduisant progressivement le nombre de jours de non-couverture des tâches. Cette réduction est effectuée en ajoutant des employés fictifs (disponibles tout au long du mois et n'ayant aucune pré-affectation) au modèle original et au modèle d'affectation 6. Le tableau 2.11 compare les

valeurs de la solution d'approximation à celles de la solution optimale pour le groupe 5 lorsque des employés fictifs sont ajoutés.

Tableau 2.11: Comparaison des solutions du groupe 5 en ajoutant des employés fictifs

Ajout	Satisfaction			Non-couverture (jours)		Temps (min.)
	Sol. Optimale	Affectation 6	% Ecart	Sol. Optimale	Affectation 6	
0	19 719	23 934	21,38	36	179	22
5	21 604	24 296	12,46	8	101	21
10	25 559	24 669	-3,48	4	24	16
15	26 181	25 169	-3,87	2	8	19
20	26 421	25 581	-3,18	3	8	18
22	27 012	26 776	-0,87	3	0	24

Les données du tableau 2.11 montrent que plus le nombre de jours de non-couverture des tâches de l'affectation 6 est réduit, plus l'écart entre la solution de l'affectation et la solution optimale est réduit. En effet, tout comme les valeurs des groupes 1 et 2, lorsqu'il n'y a pas de tâches de travail non couvertes, l'écart entre les deux solutions est très petit.

La même étude a été réalisée pour le groupe 9. Le tableau 2.12 présente les résultats de cette étude.

Tableau 2.12: Comparaison des solutions du groupe 9 en ajoutant des employés fictifs

Ajout	Satisfaction			Non-couverture (jours)		Temps (min.)
	Sol. Optimale	Affectation 6	% Ecart	Sol. Optimale	Affectation 6	
0	21 426	23 876	11,43	61	182	23
5	22 712	24 522	7,97	19	105	17
10	25 768	24 841	-3,60	0	27	17
15	27 158	26 872	-1,05	0	0	21

En analysant les données du tableau 2.12, le même phénomène que pour le groupe 5 peut être observé. En réduisant le nombre de jours de non-couverture à zéro, l'écart entre la solution de l'affectation 6 et la solution optimale est très petit.

L'étude réalisée dans cette section montre l'efficacité de l'affectation 6 comme modèle d'approximation de la solution optimale lorsque le nombre de jours de tâches de travail non couvertes est petit. Le modèle d'affectation 6 peut donc être utilisé comme critère d'approximation de la satisfaction des employés afin d'effectuer une nouvelle séparation des groupes. Également, plus la nouvelle séparation favorisera la minimisation du nombre de jours de non-couverture des tâches de travail, plus l'évaluation de la satisfaction des employés sera exacte.

CHAPITRE 3 : COMBINAISON DES GROUPES

Afin de déterminer si une nouvelle séparation des employés et des tâches de travail est nécessaire, il est important d'évaluer l'impact de l'augmentation du nombre d'employés et de tâches de travail sur un ensemble de groupes. Notamment, il est utile de déterminer l'impact sur la satisfaction des employés s'ils ont accès à plus de tâches de travail, l'impact sur la non-couverture des tâches de travail s'il y a plus d'employés pour les couvrir, ainsi que l'impact des attributs cmc lorsque plusieurs groupes sont combinés. Si ces impacts se révèlent être positifs, une nouvelle séparation des groupes d'employés et de tâches de travail est justifiée.

Dans ce chapitre, deux méthodes de combinaison des groupes d'employés et de tâches de travail sont présentées. Une étude comparative est également effectuée afin de déterminer quelle méthode de combinaison offre les meilleurs résultats. La deuxième section du chapitre montre l'évolution de la solution d'approximation en augmentant le nombre de groupes combinés. Finalement, la dernière section du chapitre analyse l'évolution du temps de résolution des problèmes en fonction des paramètres de tolérance sur la convergence de l'algorithme *barrier* et de tolérance sur l'optimalité du simplexe.

3.1 Méthodes de combinaison des groupes

Deux méthodes de combinaison des groupes ont été développées. La première méthode est la jonction des groupes alors que la deuxième est la fusion des groupes. Cette section illustre les différences entre les deux méthodes et compare la valeur de la solution d'approximation pour chaque méthode de combinaison pour plusieurs paires de groupes.

3.1.1 *Jonction des groupes*

La jonction consiste à combiner l'information des groupes en un seul ensemble sans la modifier. Ceci signifie que l'information relative aux employés et aux tâches de travail à assigner demeure identique à celle contenue à l'intérieur de chaque groupe. Malgré le fait que certaines tâches de travail sont présentes dans plusieurs groupes à la fois, elles sont traitées comme des tâches de travail distinctes. De plus, les contraintes d'attributs cmc de ces tâches de travail ne sont pas consolidées : les membres de droite de ces contraintes demeurent identiques à ceux des groupes individuels. La jonction des groupes ne réduit donc pas le nombre de contraintes dans le modèle mathématique. Aucune modification d'information relative aux groupes d'employés n'est possible puisque chaque employé ne fait partie que d'un seul groupe. Par contre, les employés sont autorisés à effectuer les tâches de travail de tous les groupes combinés à condition qu'ils soient qualifiés et disponibles pour effectuer ces tâches.

3.1.2 *Fusion des groupes*

La fusion combine l'information individuelle des groupes en procédant à des consolidations. Tel que mentionné précédemment, certaines tâches de travail sont présentes dans plusieurs groupes. Lors de la fusion des groupes, ces tâches de travail séparées sont réunies en une seule tâche de travail. Le nombre d'employés requis pour chaque tâche de travail correspond donc à la somme des employés initialement requis pour la tâche dans chaque groupe. De plus, les valeurs minimales et maximales des attributs cmc correspondent également à la somme des valeurs individuelles pour chaque groupe. Tel que mentionné précédemment, aucune modification de l'information relative aux groupes d'employés n'est possible puisque chaque employé n'est présent que dans un seul groupe.

3.1.3 Comparaison de la solution d'approximation pour chaque méthode

La jonction et la fusion des groupes ont été effectuées sur plusieurs paires de groupes. Le modèle d'affectation 6 a été généré et résolu pour chacun des problèmes ainsi créés. Le tableau 3.1 présente les valeurs de la relaxation linéaire de l'affectation 6 suite à la jonction des groupes. La deuxième colonne du tableau illustre la somme des valeurs de satisfaction des groupes combinés telles que présentées au tableau 2.9. De même, la cinquième colonne montre la somme des jours de non-couverture de chaque paire de groupes. La quatrième colonne du tableau illustre le gain de satisfaction en pourcentage de la combinaison comparativement à la somme des groupes individuels.

Tableau 3.1: Comparaison de la solution de la relaxation de l'approximation pour la jonction de paires de groupes

Groupes	Satisfaction			Non-couverture (jours)		Temps (min.)
	Somme	Jonction	% Gain	Somme	Jonction	
1-2	46 417	47 214	1,72	0	0	139
1-3	46 263	49 772	7,58	136	0	189
1-5	47 059	45 812	-2,65	179	48	158
2-4	47 268	49 674	5,09	89	0	145
3-4	47 114	48 282	2,48	225	205	148
5-6	47 733	48 454	1,51	328	314	196
7-8	47 291	48 351	2,24	280	266	181
9-10	47 322	48 196	1,85	297	284	207

La jonction des groupes permet d'augmenter la satisfaction globale des employés pour la majorité des problèmes tout en réduisant le nombre de jours de non-couverture des tâches de travail. Le gain de satisfaction atteint plus de 5% pour certains groupes. Par contre, la jonction des groupes 1 et 5 mène à une réduction de la satisfaction globale des employés. Cette baisse peut être expliquée par le fait que l'optimiseur tente d'abord de réduire le nombre de jours de non-couverture des tâches de travail dû aux fortes pénalités dans la fonction objectif. En effet, la jonction des groupes 1 et 5 présente une des plus fortes baisses du nombre de jours de non-couverture parmi tous les problèmes traités.

Cette baisse est de plus de 100 jours. On remarque également que les plus fortes hausses de satisfaction se situent dans les problèmes où la jonction des groupes a permis la réduction des jours de tâches de travail non couvertes à zéro. Les temps de résolution des problèmes se situent entre 139 et 207 minutes avec un temps moyen de résolution par problème de 170 minutes.

Le tableau 3.2 présente les valeurs de la relaxation linéaire de l'affectation 6 suite à la fusion des groupes. Les valeurs de la solution sont également comparées à la somme des valeurs des groupes individuels.

Tableau 3.2: Comparaison de la solution de la relaxation de l'approximation pour la fusion de paires de groupes

Groupes	Satisfaction			Non-couverture (jours)		Temps (min.)
	Somme	Fusion	% Gain	Somme	Fusion	
1-2	46 417	47 563	2,47	0	0	94
1-3	46 263	50 074	8,24	136	0	127
1-5	47 059	47 357	0,63	179	37	101
2-4	47 268	50 573	6,99	89	0	111
3-4	47 114	51 779	9,90	225	4	110
5-6	47 733	49 047	2,75	328	201	124
7-8	47 291	48 921	3,45	280	94	118
9-10	47 322	48 484	2,46	297	90	140

La fusion des groupes permet l'augmentation de la satisfaction globale pour tous les problèmes traités. En fait, l'augmentation de la satisfaction des problèmes fusionnés est plus élevée dans tous les cas que celle observée pour les problèmes joints. De plus, la réduction des jours de non-couverture des tâches de travail est plus significative lorsque les problèmes sont fusionnés. En effet, cette réduction atteint plus de 200 jours dans certains cas.

La forte réduction des jours de non-couverture ainsi que la plus grande augmentation de la satisfaction peuvent être expliquées par le fait que la fusion des groupes mène à des problèmes plus simples à résoudre que lors de la

jonction des groupes. En effet, la fusion des valeurs d'attributs cmc contribue à simplifier les problèmes en permettant aux employés possédant plusieurs de ces attributs de contribuer à un maximum de contraintes cmc, laissant ainsi plus de liberté aux autres employés pour couvrir les tâches. Illustrons cette situation avec un exemple.

Une tâche de travail requérant deux employés est séparée dans deux groupes, soit les groupes 1 et 2. Le groupe 1 requiert donc un employé pour cette tâche mais supposons qu'il requiert en plus que cet employé soit une femme alors que le groupe 2 requiert que l'employé possède la qualification « classe affaire 320 ». Lors de la fusion des groupes, la tâche de travail requiert deux employés dont une femme et un employé possédant la qualification « classe affaire 320 ». Dans cette situation, une femme possédant la qualification « classe affaire 320 » comble tous les besoins en attributs cmc en ne prenant qu'un des sièges disponibles pour la tâche de travail. L'employé qui comble l'autre siège ne doit respecter aucune contrainte d'attributs cmc. Dans le cas où les tâches de travail sont séparées dans leur groupe respectif, on exige que deux employés possèdent des attributs cmc précis alors que dans le cas où les groupes sont fusionnés, de nouveaux employés ont accès aux tâches de travail.

Finalement, le temps de résolution des problèmes fusionnés est plus petit que pour les problèmes joints, se situant entre 94 et 140 minutes avec un temps moyen de résolution de 116 minutes. Cette réduction du temps est attribuée au fait que la fusion de groupes facilite le respect des contraintes d'attributs cmc et par le fait même, facilite la résolution des problèmes. De plus, la fusion des groupes entraîne une diminution du nombre de variables et de contraintes comparativement à la jonction des groupes. Le tableau 3.3 illustre cette situation.

Tableau 3.3: Nombre de variables et de contraintes pour chaque paire de groupes

Groupes	Variables			Contraintes		
	Jonction	Fusion	% Baisse	Jonction	Fusion	% Baisse
1-2	491 171	387 336	21,14	24 670	23 339	5,40
1-3	525 596	452 585	13,89	25 571	24 678	3,49
1-5	555 491	459 335	17,31	25 905	24 756	4,44
2-4	541 193	458 465	15,29	25 662	24 706	3,73
3-4	574 846	471 878	17,91	26 561	25 404	4,36
5-6	617 919	500 123	19,06	27 005	25 729	4,73
7-8	583 428	490 027	16,01	26 713	25 642	4,01
9-10	616 064	496 697	19,38	26 943	25 643	4,83
MOYENNE	500 634	412 938	17,52	23 226	22 211	4,37

Le tableau 3.3 montre que la fusion des groupes permet une réduction de plus de 17%, en moyenne, du nombre de variables et de plus de 4%, en moyenne, du nombre de contraintes en combinant les tâches de travail séparées en une seule tâche de travail.

La fusion des groupes offre donc de meilleurs résultats que la jonction des groupes. La fusion permet une meilleure augmentation de la satisfaction globale des employés tout en permettant une meilleure réduction du nombre de jours de non-couverture et ce, en des temps plus petits.

3.2 Évolution de la solution d'approximation en augmentant le nombre de groupes fusionnés

Tel que mentionné à la section précédente, la fusion des groupes permet d'augmenter la satisfaction des employés tout en réduisant le nombre de jours de non-couverture des tâches de travail. Cette section montre l'évolution de la solution de l'affectation 6 lorsque le nombre de groupes fusionnés est augmenté. De plus, puisqu'il a été montré à la section précédente que la fusion des groupes rend plus facile le respect des contraintes d'attributs cmc, la

solution de l'affectation 5 est comparée à celle de l'affectation 6 pour tous les problèmes.

Le tableau 3.4 présente les valeurs de la relaxation linéaire de l'affectation 6 pour des fusions de 2 à 5 groupes. La solution de chaque problème est comparée à la somme des valeurs des groupes individuels.

Tableau 3.4: Évolution de la solution de la relaxation de l'affectation 6 en augmentant le nombre de groupes fusionnés

Groupes	Satisfaction			Non-couverture (jours)		Temps (min.)
	Somme	Fusion	% Gain	Somme	Fusion	
1-2	46 417	47 563	2,47	0	0	94
1-2-3	69 555	75 365	8,35	136	0	315
1-2-3-4	93 531	102 923	10,04	225	0	645
1-2-3-4-5	117 465	127 461	8,51	404	0	837

Les résultats du tableau 3.4 montrent que plus le nombre de groupes fusionnés augmente, plus le nombre de jours de non-couverture diminue. Le nombre de jours de tâches non couvertes est même nul pour tous les problèmes fusionnés. De plus, à l'exception de l'ajout du groupe 5, le gain de satisfaction globale des employés augmente avec le nombre de groupes fusionnés. La baisse remarquée lors de l'ajout du groupe 5 peut être expliquée par le fait que ce groupe contient plusieurs jours de non-couverture des tâches de travail lorsque résolu individuellement. L'optimiseur tente donc de réduire ce nombre de jours de non-couverture au détriment de la satisfaction des employés. Par contre, le gain de satisfaction lorsque les cinq groupes sont fusionnés est tout de même important.

Le tableau 3.5 compare les valeurs de la relaxation linéaire des affectations 5 et 6 lorsque le nombre de groupes fusionnés augmente. La quatrième colonne du tableau donne le pourcentage d'écart entre les deux solutions, alors que la

dernière colonne montre le temps de résolution de l'affectation 5 pour chacun des problèmes.

Tableau 3.5: Comparaison des valeurs des relaxations des affectations 5 et 6 en augmentant le nombre de groupes fusionnés

Groupes	Satisfaction			Non-couverture (jours)		Temps (min.)
	Affectation 6	Affectation 5	% Ecart	Affectation 6	Affectation 5	
1-2	47 563	48 456	1,88	0	0	35
1-2-3	75 365	76 060	0,92	0	0	100
1-2-3-4	102 923	103 564	0,62	0	0	197
1-2-3-4-5	127 461	128 443	0,77	0	0	242

Les valeurs du tableau 3.5 montrent que plus le nombre de groupes fusionnés augmente, plus l'écart entre la solution de l'affectation 5 et l'affectation 6 diminue. Une fois de plus, pour les mêmes raisons, l'ajout du groupe 5 fait exception à la règle. La baisse de l'écart implique donc que plus le nombre de groupes fusionnés augmente, moins les contraintes d'attributs cmc influencent la solution. De plus, les temps de résolution des problèmes avec l'affectation 5 sont beaucoup plus rapides que ceux de l'affectation 6.

Le tableau 3.6 présente la taille des problèmes fusionnés pour les modèles d'affectation 5 et 6. Le nombre de variables et de contraintes de chaque problème y est illustré.

Tableau 3.6: Taille des problèmes fusionnés

Groupes	Variables		Contraintes	
	Affectation 6	Affectation 5	Affectation 6	Affectation 5
1-2	387 336	387 336	23 339	19 948
1-2-3	798 987	798 987	35 050	30 453
1-2-3-4	1 268 494	1 268 494	46 316	40 929
1-2-3-4-5	1 756 068	1 756 068	57 137	51 169

Les valeurs du tableau 3.6 illustrent que la taille des problèmes augmente significativement avec l'ajout d'un nouveau groupe à la fusion. Le nombre de

variables est très élevé, atteignant même plus de 1 750 000 pour la fusion de cinq groupes. La grande taille des problèmes fusionnés explique les temps de résolution élevés observés dans les tableaux précédents.

L'étude réalisée dans cette section montre que plus le nombre de groupes fusionnés augmente, plus il est possible d'augmenter la satisfaction globale des employés. De plus, il est également possible de réduire le nombre de jours de non-couverture des tâches de travail à zéro. Il a également été montré que les contraintes d'attributs cmc perdent de leur influence avec l'augmentation du nombre de groupes fusionnés. Ces observations laissent donc croire qu'une séparation basée sur le modèle d'approximation développé au chapitre précédent permettrait d'augmenter la satisfaction globale des employés tout en réduisant le nombre total de jours de non-couverture des tâches de travail. De plus, cette séparation permettrait une meilleure distribution des attributs cmc parmi les groupes, facilitant ainsi la solution individuelle de chaque groupe.

3.3 Évolution du temps de résolution en changeant les paramètres de tolérance sur la convergence et de la tolérance sur l'optimalité

Les temps de résolution des problèmes présentés à la section précédente augmentent significativement avec le nombre de groupes combinés. Cette augmentation est particulièrement élevée dans le cas des problèmes construits selon le modèle d'affectation 6. Le temps de résolution d'une fusion de cinq groupes, tel que présenté au tableau 3.4, est de près de 14 heures.

Le logiciel Cplex permet à l'utilisateur de faire varier les paramètres de la tolérance sur la convergence de l'algorithme *barrier* et de la tolérance sur l'optimalité d'un problème. La tolérance sur la convergence de l'algorithme *barrier* indique au logiciel Cplex que la solution est optimale si le

complémentaire relatif est plus petit que celle-ci alors que la tolérance sur l'optimalité d'un problème indique au logiciel jusqu'à quel point le simplexe doit s'approcher de la solution optimale à l'étape de *crossover*. Les valeurs de base de ces deux paramètres dans le logiciel Cplex sont de 1×10^{-8} .

Afin de déterminer l'impact de ces tolérances sur le temps de résolution des problèmes, deux études ont été réalisées. La première compare les temps de convergence de l'algorithme *barrier* lorsque le paramètre de tolérance sur la convergence augmente. La deuxième étude compare les temps de *crossover* lorsque le paramètre de tolérance sur l'optimalité augmente. La relaxation linéaire du modèle d'affectation 6 pour la fusion des cinq premiers groupes a été utilisée pour les deux études. Les paramètres des deux tolérances ont été augmentés progressivement par un facteur de 1×10^2 jusqu'à ce qu'ils atteignent une valeur de 1×10^0 . Le logiciel Cplex ne permet pas d'initialiser le paramètre de tolérance sur l'optimalité à une valeur plus élevée que 1×10^{-4} . Par contre, il est possible d'augmenter la tolérance au-delà de cette valeur en divisant les coefficients de la fonction objectif du problème. Chaque division des coefficients de la fonction objectif par un facteur de 1×10^2 contribue à augmenter la tolérance par le même facteur. Le tableau 3.7 illustre l'évolution des temps de convergence de l'algorithme *barrier* pour le problème fusionné lorsque la tolérance sur la convergence augmente.

Tableau 3.7: Comparaison des temps de convergence de l'affectation 6 pour une fusion de 5 groupes en augmentant la tolérance sur la convergence

Tolérance	Borne primale	Borne duale	Temps (min.)
1×10^{-8}	127 461	127 461	837
1×10^{-6}	127 461	127 461	700
1×10^{-4}	127 460	127 463	641
1×10^{-2}	127 097	127 853	550
1×10^0	70 896	2 880 530	188

Les valeurs du tableau 3.7 montrent que plus la tolérance sur la convergence de l'algorithme *barrier* augmente, plus le temps de convergence diminue. En effet, il atteint une valeur de près de 3 heures avec une tolérance de 1×10^0 alors que cette valeur était de près de 14 heures avec une tolérance de 1×10^{-8} . Par contre, les valeurs des bornes primale et duale pour ce problème lorsque la convergence de l'algorithme *barrier* se termine ont un écart très grand comparativement à la solution optimale de 127 461. L'étape de *crossover* effectue ensuite des itérations de simplexe afin de trouver une solution de base optimale.

Le tableau 3.8 montre l'évolution du temps de résolution de l'étape de *crossover* pour le problème fusionné lorsque la tolérance sur l'optimalité augmente. Pour cette étude, le paramètre de tolérance sur la convergence est conservé à une valeur de 1×10^{-8} . Tel que mentionné précédemment, les valeurs de tolérance supérieures à 1×10^{-4} sont obtenues en divisant les coefficients de la fonction objectif.

Tableau 3.8: Comparaison des temps de *crossover* pour une fusion de 5 groupes en augmentant la tolérance sur l'optimalité (convergence 1×10^{-8})

Tolérance	Satisfaction	NC (jours)	Temps (min.)
1×10^{-8}	127 461	0	15
1×10^{-6}	127 461	0	15
1×10^{-4}	127 461	0	16
1×10^{-2}	127 461	0	12
1×10^0	127 461	0	11

L'analyse du tableau 3.8 montre que lorsque le paramètre de tolérance sur l'optimalité est augmenté dans le logiciel Cplex, les temps d'exécution de l'étape de *crossover* demeurent stables. Par contre, lorsque les coefficients de la fonction objectif sont divisés par des facteurs de 1×10^2 , le temps d'exécution de l'étape de *crossover* diminue quelque peu. De plus, la valeur de la fonction

objectif change peu. En effet, les seuls changements ont été observés dans les décimales de la solution.

Le tableau 3.9 compare également les temps de résolution de l'étape de *crossover* mais cette fois, pour une valeur de paramètre de tolérance sur la convergence de 1×10^{-4} .

Tableau 3.9: Comparaison des temps de *crossover* pour une fusion de 5 groupes en augmentant la tolérance sur l'optimalité (convergence 1×10^{-4})

Tolérance	Satisfaction	NC (jours)	Temps (min.)
1×10^{-8}	n/a	n/a	> 600
1×10^{-6}	n/a	n/a	> 600
1×10^{-4}	127 461	0	377
1×10^{-2}	127 461	0	15
1×10^0	127 461	0	11

Les valeurs du tableau 3.9 montrent que pour les tolérances sur l'optimalité de 1×10^{-6} et 1×10^{-8} l'étape de *crossover* n'avait toujours pas trouvé la solution optimale après 10 heures de temps de calcul. Pour les autres paramètres de tolérance, on remarque que le temps de résolution baisse considérablement. Similairement au problème précédent, la valeur de la fonction objectif demeure stable.

Pour le paramètre de convergence de l'algorithme *barrier* de 1×10^{-2} , aucune solution optimale n'a été trouvée par l'étape de *crossover* après 10 heures de calcul peu importe la tolérance sur l'optimalité utilisée. Par déduction, le paramètre de convergence de l'algorithme *barrier* de 1×10^0 mène à la même situation. Il n'est donc pas avantageux d'utiliser un de ces deux paramètres.

Il a été montré dans cette section qu'il est possible de réduire les temps de résolution des problèmes en augmentant les paramètres de tolérance dans le

logiciel Cplex. Les améliorations les plus significatives sont observées lors de l'utilisation d'un paramètre de tolérance sur la convergence de 1×10^{-4} et d'un paramètre de tolérance sur l'optimalité de 1×10^0 .

CHAPITRE 4 : RÉOLUTION EN NOMBRES ENTIERS ET NOUVELLE SÉPARATION DES GROUPES

Les valeurs présentées aux chapitres précédents sont les résultats de la relaxation linéaire des problèmes d'affectation. Les valeurs des variables de ces solutions ne sont donc pas nécessairement entières. Par contre un horaire valide pour un employé ne peut contenir une fraction de tâche de travail ou de jour de repos. Un employé doit effectuer une tâche de travail dans son intégralité. De même, un employé doit prendre une journée complète de repos.

Dans ce chapitre, trois heuristiques de branchement qui fournissent des solutions en nombres entiers sont présentées. La solution en nombres entiers de chaque heuristique est analysée et comparée à la valeur de la relaxation linéaire pour plusieurs problèmes. De plus, une nouvelle séparation des groupes basée sur la résolution en nombres entiers est présentée et les résultats de la nouvelle séparation sont comparés à ceux de la séparation actuelle.

4.1 Résolution en nombres entiers

Puisque les problèmes traités dans ce mémoire, même les problèmes individuels pour un groupe particulier, contiennent un nombre très élevé de variables, une procédure de branchement classique, où l'on fixe une seule variable à la fois, peut être extrêmement longue avant de fournir la solution optimale en nombres entiers.

Afin de remédier à ce problème, des heuristiques de branchement où l'on fixe plusieurs variables à une valeur entière à chaque itération et où l'on n'effectue aucune remontée dans l'arbre de branchement peuvent être utilisées. Par

contre, l'utilisation de ces dernières entraîne généralement une perte d'optimalité. Cette section présente trois algorithmes heuristiques de branchement et compare les valeurs des heuristiques aux valeurs de la relaxation linéaire pour plusieurs problèmes. Les problèmes testés dans cette section ne contiennent pas les contraintes d'attributs cmc. Il a été montré au chapitre précédent que la résolution de ces problèmes est beaucoup plus rapide que lorsque l'on tient compte des contraintes d'attributs cmc. Il est donc plus pratique d'effectuer des tests en omettant ces contraintes. L'ajout des contraintes d'attributs cmc sera discuté ultérieurement dans ce chapitre.

Le fait de fixer plusieurs variables à la fois peut entraîner la violation de certaines contraintes. Il faut donc avoir recours à différentes méthodes afin d'assurer la faisabilité mathématique du problème. Les méthodes utilisées au cours de cette étude sont l'utilisation de compteurs, l'ajout de variables d'écart et la modification de décisions de branchement.

4.1.1 *Utilisation de compteurs*

Le groupe de contraintes (2.3), soit les contraintes de couverture des tâches de travail, peut causer certains problèmes lorsque l'on fixe à l'unité plus d'une variable à la fois. En effet, puisque ces contraintes doivent être respectées à l'égalité, il est possible que, dans certaines situations, on fixe plus de variables que nécessaire. Prenons un exemple où une tâche de travail requiert deux employés. Supposons maintenant que trois employés se partagent la tâche de travail et que les variables employé-tâche ont une valeur de $2/3$ chacune. De plus, supposons que le critère de branchement est que l'on fixe toute variable de valeur supérieure ou égale à $0,6$. Dans cet exemple, les trois variables d'une valeur de $2/3$ sont fixées à 1. Par contre, il n'y a que deux employés qui sont requis pour effectuer la tâche de travail.

Afin d'éviter qu'une telle situation se produise, l'utilisation de compteurs est nécessaire. Dans le cas illustré précédemment, le compteur de la tâche de travail est initialisé à une valeur de 2. Pour chaque variable employé-tâche appartenant à cette tâche de travail qui est fixée à 1, on diminue le compteur de la tâche de travail de 1 également. Lorsque le compteur d'une tâche de travail atteint 0, on interdit que toute variable employé-tâche associée à la tâche de travail soit fixée à 1. De cette façon, les contraintes de recouvrement des tâches de travail ne sont pas violées.

4.1.2 *Ajout de variables d'écart*

Les groupes de contraintes (2.14), (2.15) et (2.17) ont des dépendances entre eux qui peuvent entraîner la violation d'une ou plusieurs contraintes lorsque des variables sont fixées à l'unité. Le groupe de contraintes (2.14) assure que chaque employé effectue le nombre de jours de repos minimums requis dans le mois alors que le groupe de contraintes (2.15) assure que tout employé effectue les jours de repos non-imposables associés aux tâches de travail qui lui sont affectées. Le groupe de contraintes (2.17) ne permet à aucun employé d'être satisfait à plus de 100%.

Il est possible, lorsqu'une ou plusieurs variables employé-tâche sont fixées à 1, que la satisfaction d'un employé soit supérieure à 100%. Afin d'illustrer comment un tel cas peut survenir, prenons un exemple où un employé a une satisfaction égale à 100% avant de fixer une ou plusieurs de ses affectations à l'unité. Toute variable fractionnaire qui sera fixée à l'unité pour cet employé mènera à un horaire d'une satisfaction supérieure à 100%. Dans un tel cas, l'optimiseur tente d'affecter à cet employé des tâches de travail qui contribuent à réduire sa satisfaction. Par contre l'ajout de ces tâches peut entraîner la

violation d'une ou des deux contraintes de repos. L'employé n'a donc pas assez de jours de repos disponibles pour combler la demande.

Similairement, il est possible, lorsqu'une ou plusieurs variables employé-tâche sont fixées à 1, que le nombre de jours de repos minimum requis dans le mois pour un employé ne soit plus respecté. Dans un tel cas, l'optimiseur tente d'affecter à l'employé des tâches de travail avec des jours de repos imposables afin de respecter la contrainte. Par contre ces tâches de travail peuvent avoir des jours de repos non-imposables que l'employé doit effectuer. Cette situation peut entraîner la violation de la contrainte de repos non-imposables à effectuer.

Deux groupes de variables d'écart sont ajoutés au modèle mathématique afin de pouvoir remédier à ces situations. Le premier groupe de variables d'écart est ajouté aux contraintes de satisfaction, soit le groupe de contraintes (2.17). Le deuxième groupe de variables d'écart est ajouté aux contraintes de repos non-imposables, soit le groupe de contraintes (2.15). Chaque contrainte contient une variable d'écart et ces variables doivent être non-négatives.

Les variables d'écart ne doivent être utilisées que pour prévenir que des contraintes soient violées. Afin de s'assurer que ces variables n'influencent pas les affectations employé-tâche, il faut les pénaliser suffisamment dans la fonction objectif. La pénalité associée aux variables d'écart du groupe de contraintes de repos non-imposables doit être supérieure à celle associée aux variables d'écart du groupe de contraintes de couverture des tâches de travail (2.3), c'est-à-dire qu'une journée de repos violée ne devrait pas être favorisée à une journée de non-couverture de tâche de travail. L'équation (2.10) donne la fonction à utiliser pour calculer la pénalité d'une tâche de travail non couverte. Selon cette équation, la pénalité associée à une journée de non-couverture est :

$$Employés \times 100. \quad (4.1)$$

La pénalité à utiliser dans la fonction objectif pour une journée de repos violée doit donc être supérieure à la valeur calculée à l'équation (4.1).

Puisqu'il est difficile de développer une relation entre les variables d'écart du groupe de contraintes de satisfaction et les jours de non-couverture des tâches de travail, une pénalité arbitraire de 1000 a été choisie pour ces variables d'écart afin d'effectuer les tests.

4.1.3 *Modification de décisions de branchement*

Si, malgré les modifications discutées précédemment, une ou plusieurs contraintes sont violées dans le modèle mathématique, on procède à des modifications de décisions de branchement. Si une contrainte est violée, on identifie l'employé pour lequel la contrainte est violée. Une fois l'employé identifié, on modifie la dernière variable qui a été fixée à 1 pour cet employé, c'est-à-dire que la dernière variable fixée à 1 pour cet employé sera fixée à 0. Ce processus est répété tant qu'il existe une contrainte violée.

4.1.4 *Paramètres de tolérance*

Tel que mentionné au chapitre précédent, l'augmentation des paramètres de tolérance sur la convergence de l'algorithme *barrier* et de la tolérance sur l'optimalité peut réduire considérablement le temps de résolution des problèmes. Pour les différentes heuristiques de branchement testées dans cette section, les paramètres de tolérance sur la convergence et sur l'optimalité utilisées sont 1×10^{-4} et 1×10^0 respectivement.

4.1.5 *Sièges de tâche de travail*

Une tâche de travail requiert n_j employés. On dit que cette tâche de travail contient n_j sièges à combler. Dans ce chapitre, la notion de sièges est utilisée afin d'exprimer la non-couverture des tâches de travail et afin d'effectuer la nouvelle séparation des tâches de travail. Puisque les problèmes sont résolus en nombres entiers, les variables d'écart E_j sont entières. Si une variable d'écart E_j est non-nulle, on dit que la tâche de travail j contient E_j sièges non-couverts.

4.1.6 *Heuristique de branchement 1*

La première heuristique de branchement testée sur les problèmes fixe les variables selon les étapes suivantes :

- 1) Résoudre la relaxation linéaire du problème initial.
- 2) Fixer à l'unité toutes les variables employé-tâche (X_{ij}) supérieures ou égales à 0,8.
- 3) Si aucune variable n'est fixée à l'étape 2), fixer à l'unité toutes les variables employé-repos (R_{ik}) supérieures ou égales à 0,8. Sinon, aller à l'étape 7).
- 4) Si aucune variable n'est fixée à l'étape 3), fixer à l'unité toutes les variables employé-tâche (X_{ij}) supérieures à 0,5. Sinon, aller à l'étape 7).
- 5) Si aucune variable n'est fixée à l'étape 4), fixer à l'unité toutes les variables employé-repos (R_{ik}) supérieures à 0,5. Sinon, aller à l'étape 7)
- 6) Si aucune variable n'est fixée à l'étape 5), fixer à l'unité la plus grande variable fractionnaire.
- 7) Résoudre la relaxation linéaire du nouveau problème. Si le problème est non-réalisable, modifier les décisions de branchement.

- 8) Si la solution contient des variables fractionnaires, aller l'étape 2).
Sinon, la solution est en nombres entiers.

Cette heuristique de branchement a été testée sur les groupes individuels de 1 à 4 et sur la fusion des groupes 1 à 4 pour le modèle d'affectation 5. Le tableau 4.1 présente les valeurs de la solution en nombres entiers pour l'heuristique de branchement 1 pour les différents problèmes. Le tableau présente le saut d'intégrité de la satisfaction totale des employés et le pourcentage de sièges de tâche de travail non couverts. Le saut d'intégrité représente généralement le pourcentage d'écart entre la solution optimale en nombres entiers et la solution optimale de la relaxation linéaire d'un problème. Dans ce mémoire, le terme saut d'intégrité est utilisé afin de désigner le pourcentage d'écart entre la solution en nombres entiers fournie par l'heuristique de branchement et la solution optimale de la relaxation linéaire d'un problème. Les colonnes 4 et 5 du tableau représentent respectivement le pourcentage de violation des contraintes de satisfaction et des contraintes de repos non-imposables. Ces pourcentages reflètent la proportion d'utilisation des variables d'écart associées à chacun des deux groupes de contraintes. Finalement, la dernière colonne du tableau indique les temps de branchement sans l'étape initiale de résolution de la relaxation linéaire des problèmes.

Tableau 4.1: Valeurs des solutions de l'heuristique de branchement 1 pour différents problèmes

Groupes	Saut d'intégrité	Sièges NC	Satisfaction violée	Repos violés	Temps (min.)
1	1,17%	0,66%	0,10%	2,62%	10
2	1,01%	0,64%	0,08%	3,01%	8
3	3,39%	1,50%	0,08%	2,64%	26
4	1,14%	1,35%	0,27%	3,74%	60
Fusion	0,65%	0,76%	0,34%	3,26%	1571

Les valeurs du tableau 4.1 montrent que le saut d'intégrité de la solution en nombres entiers des différents problèmes est petit. Seul le saut d'intégrité du groupe 3 est plus élevé que les autres. Le pourcentage de sièges non couverts est également petit, demeurant en dessous de 2% pour tous les problèmes. Les pourcentages de violation des contraintes de satisfaction et de repos non-imposables sont également faibles. Ceci suggère donc que les pénalités choisies pour les variables d'écart de ces deux groupes de contraintes sont efficaces, c'est-à-dire que les variables d'écart ne sont utilisées qu'afin de conserver la faisabilité mathématique des problèmes suite à un branchement. Elles ne sont pas utilisées afin d'augmenter la satisfaction des employés ou de réduire le nombre de tâches de travail non couvertes.

L'analyse des valeurs du tableau 4.1 montre donc que l'heuristique de branchement 1 détériore peu la qualité de la solution de la relaxation linéaire. Par contre, le temps de branchement de certains problèmes, notamment le groupe 4 et la fusion, est beaucoup plus élevé que le temps de résolution de la relaxation linéaire. En effet, pour le problème fusionné, le temps de branchement est de plus de 26 heures. Une méthode de branchement plus rapide s'impose donc.

L'analyse des itérations de branchement montre que lors de certaines itérations, plusieurs centaines de variables employé-repos, voir même plusieurs milliers dans le cas du problème fusionné, sont fixées à l'unité. Les jours de repos ainsi imposés aux employés ne peuvent plus contribuer à la couverture des tâches de travail. Ceci laisse donc croire que si l'on ne fixe aucune variable employé-repos à l'unité, le nombre de jours de non-couverture des tâches de travail risque de diminuer. De plus, en éliminant toutes les étapes de branchement sur les variables employé-repos, plusieurs itérations sont éliminées, ce qui accélère le processus de branchement. Une fois le processus de branchement sur les

variables employé-tâche terminé, les variables employé-repos sont automatiquement en nombres entiers dû au groupe de contraintes (2.13) qui impose que chaque employé effectue une seule activité par jour. Il n'est donc pas nécessaire de brancher sur les variables employé-repos.

4.1.7 *Heuristique de branchement 2*

L'heuristique de branchement 2 s'inspire des commentaires émis sur l'heuristique de branchement 1, c'est-à-dire que toute étape de branchement sur les variables employés-repos est éliminée. Cette nouvelle heuristique de branchement fixe les variables selon les étapes suivantes :

- 1) Résoudre la relaxation linéaire du problème initial.
- 2) Fixer toutes les variables employé-tâche (X_{ij}) supérieures ou égales au **seuil** (défini ci-dessous).
- 3) Si aucune variable n'est fixée à l'étape 2), fixer toutes les variables employé-tâche (X_{ij}) supérieures à 0,5. Sinon, aller à l'étape 5).
- 4) Si aucune variable n'est fixée à l'étape 3), fixer à l'unité la plus grande variable employé-tâche (X_{ij}) fractionnaire.
- 5) Résoudre la relaxation linéaire du nouveau problème. Si le problème est non-réalisable, modifier les décisions de branchement.
- 6) Si la solution contient des variables employé-tâche (X_{ij}) fractionnaires, aller à l'étape 2). Sinon, la solution est en nombres entiers.

L'heuristique de branchement 2 a été testée sur les groupes individuels de 1 à 4 et sur la fusion des groupes 1 à 4 pour le modèle d'affectation 5. Deux seuils, employés à la seconde étape de l'heuristique, ont été utilisés. Le tableau 4.2 présente les valeurs de la solution en nombres entiers pour l'heuristique de branchement 2 pour les différents problèmes avec un seuil de 0,8.

Tableau 4.2: Valeurs des solutions de l'heuristique de branchement 2 pour différents problèmes avec un seuil de 0,8.

Groupes	Saut d'intégrité	Sièges NC	Satisfaction violée	Repos violés	Temps (min.)
1	0,96%	0,09%	0,12%	3,38%	8
2	0,36%	0,18%	0,10%	3,13%	5
3	2,28%	0,60%	0,28%	5,20%	16
4	1,66%	0,38%	0,18%	5,49%	40
Fusion	0,66%	0,14%	0,29%	4,84%	628

Les valeurs du tableau 4.2 illustrent que l'heuristique de branchement 2 permet de réduire le saut d'intégrité de la satisfaction ainsi que le pourcentage de sièges non couverts pour la majorité des problèmes. En effet, seul le saut d'intégrité du problème 4 augmente comparativement à l'heuristique de branchement 1. Par contre, cette augmentation est très petite. Le pourcentage de violation des contraintes de satisfaction demeure sensiblement le même que pour l'heuristique de branchement 1. En revanche, on note une augmentation du pourcentage de violation des contraintes de repos non-imposables. Malgré cette augmentation, il peut être conclu que l'heuristique de branchement 2 détériore peu la qualité de la solution de la relaxation linéaire des problèmes. De plus, le temps de branchement de l'heuristique 2 avec un seuil de 0,8 est plus petit que le temps de branchement de l'heuristique 1.

Le fait de ne pas brancher sur les variables employés-repos améliore donc la vitesse d'exécution du branchement et réduit également le nombre de sièges non couverts et ce, sans détériorer la satisfaction des employés.

Le tableau 4.3 présente les valeurs de la solution en nombres entiers pour l'heuristique de branchement 2 avec un seuil de 0,6.

Tableau 4.3: Valeurs des solutions de l'heuristique de branchement 2 pour différents problèmes avec un seuil de 0,6.

Groupes	Saut d'intégrité	Sièges NC	Satisfaction violée	Repos violés	Temps (min.)
1	0,79%	0,19%	0,13%	3,67%	3
2	0,37%	0,09%	0,09%	2,79%	2
3	2,44%	0,40%	0,11%	4,99%	6
4	1,52%	0,38%	0,24%	5,20%	6
Fusion	0,50%	0,17%	0,30%	4,34%	194

L'analyse du tableau 4.3 montre que les solutions en nombres entiers lorsqu'un seuil de 0,6 est utilisé pour l'heuristique de branchement 2 sont pratiquement identiques à celles lorsqu'un seuil de 0,8 est utilisé. Une légère amélioration des résultats est même observée lors de l'utilisation du seuil de 0,6. Par contre, la grande amélioration qu'apporte le seuil de 0,6 se situe au niveau du temps de branchement. En effet, ce dernier est de près de 3 heures pour le seuil de 0,6 pour le problème fusionné comparativement à près de 10 heures pour le seuil de 0,8. Puisque, à solution similaire, le temps de résolution est plus petit, il est plus avantageux d'utiliser le seuil de 0,6 avec l'heuristique de branchement 2.

4.1.8 *Heuristique de branchement 3*

Suite aux résultats obtenus en utilisant différents seuils pour l'heuristique de branchement 2, une troisième heuristique de branchement a été développée. Cette heuristique élimine l'étape 2) du branchement précédent et fixe les variables selon les étapes suivantes :

- 1) Résoudre la relaxation linéaire du problème initial.
- 2) Fixer toutes les variables employé-tâche (X_{ij}) supérieures à 0,5.
- 3) Si aucune variable n'est fixée à l'étape 2), fixer à l'unité la plus grande variable employé-tâche (X_{ij}) fractionnaire.

- 4) Résoudre la relaxation linéaire du nouveau problème. Si le problème est non-réalizable, modifier les décisions de branchement.
- 5) Si la solution contient des variables employé-tâche (X_{ij}) fractionnaires, aller à l'étape 2). Sinon, la solution est en nombres entiers.

L'heuristique de branchement 3 a été testée sur les groupes individuels de 1 à 4 ainsi que sur la fusion des groupes 1 à 4 pour le modèle d'affectation 5. Le tableau 4.4 présente les valeurs de la solution en nombres entiers pour l'heuristique de branchement 3 pour les différents problèmes.

Tableau 4.4: Valeurs des solutions de l'heuristique de branchement 3 pour différents problèmes.

Groupes	Saut d'intégrité	Sièges NC	Satisfaction violée	Repos violés	Temps (min.)
1	0,91%	0,28%	0,16%	3,37%	2
2	0,42%	0,09%	0,14%	3,77%	1
3	2,27%	0,50%	0,31%	5,59%	3
4	1,24%	0,38%	0,49%	6,11%	2
Fusion	0,66%	0,17%	0,37%	4,86%	96

L'heuristique de branchement 3 offre des solutions en nombres entiers similaires à celles obtenues grâce à l'heuristique de branchement 2. On observe toutefois une légère augmentation des pourcentages par rapport aux valeurs de l'heuristique de branchement 2 avec un seuil de 0,6. Une fois de plus, la différence majeure est observée dans le temps de branchement. En effet, le temps de branchement de l'heuristique 3 est deux fois plus petit que celui de l'heuristique 2 avec un seuil de 0,6. En considérant la taille du problème fusionné des groupes 1 à 4 (1 268 494 variables et 40 929 contraintes), un temps de branchement de 96 minutes est un temps très rapide.

Suite à la comparaison des différentes heuristiques de branchement testées, il peut être conclu que le gain en temps de branchement de l'heuristique 3 est

beaucoup plus significatif que l'augmentation des pourcentages lorsque cette dernière est utilisée. Par conséquent, il est plus avantageux d'utiliser l'heuristique de branchement 3.

4.2 Ajout des contraintes d'attributs cmc

Tel que mentionné dans la section précédente, afin d'accélérer l'exécution, les différentes heuristiques de branchement ont été testées sur des problèmes d'affectation ne contenant pas de contraintes d'attributs cmc. Dans cette section, les contraintes d'attributs cmc sont ajoutées au problème fusionné des groupes 1 à 4 afin de produire la solution en nombres entiers. Puisqu'il a été montré que l'heuristique de branchement 3 offre les meilleures performances, celle-ci sera utilisée pour effectuer les tests de cette section.

Deux méthodes d'intégration des contraintes d'attributs cmc ont été testées. La première consiste à intégrer strictement les contraintes d'attributs cmc de type supérieures ou égales, soit le groupe de contraintes (2.19), au modèle d'affectation 5. Les contraintes de type inférieures ou égales, soit le groupe de contraintes (2.20), sont ensuite gérées par un système de compteurs, c'est-à-dire que lors de chaque itération de branchement, des compteurs sont utilisés afin de s'assurer que les variables fixées à l'unité ne violent pas ces contraintes. La deuxième méthode d'intégration consiste à résoudre le problème d'affectation 6 qui contient les deux types de contraintes d'attributs cmc. Dans ce cas-ci, aucun compteur n'est nécessaire pour les contraintes de type inférieures ou égales puisque ces contraintes sont présentes en tout temps dans le modèle mathématique.

Le tableau 4.5 montre les valeurs de la solution en nombres entiers de chaque méthode d'intégration des contraintes d'attributs cmc au problème fusionné des groupes 1 à 4 en utilisant l'heuristique de branchement 3.

Tableau 4.5: Valeurs des solutions de l'heuristique de branchement 3 pour les problèmes fusionnés avec contraintes d'attributs cmc.

Contraintes	Saut d'intégrité	Sièges NC	Satisfaction violée	Repos violés	Temps (min.)
≥ seulement	2,71%	2,55%	0,30%	5,09%	108
toutes	1,16%	0,29%	0,23%	4,29%	100

L'analyse des valeurs du tableau 4.5 révèle que lorsque les contraintes d'attributs cmc sont présentes en tout temps dans le modèle mathématique, l'heuristique de branchement 3 offre de meilleurs résultats. En effet, le saut d'intégrité est réduit de plus de la moitié alors que le nombre de sièges non couverts est très petit. De plus, le pourcentage de violation de contraintes de satisfaction et de repos non-imposables est moins élevé. Finalement, le temps de branchement est également plus petit.

Si on compare les valeurs de la solution en nombres entiers lorsque toutes les contraintes d'attributs cmc sont incluses avec celles du problème fusionné au tableau 4.4, la majeure différence se situe au niveau du saut d'intégrité. L'ajout des contraintes d'attributs cmc affecte peu la performance de l'heuristique de branchement 3. Même les temps de branchement sont similaires. Une étude plus détaillée des itérations de branchement montre que lors de la première itération, près de 85% des sièges de tâche de travail sont affectés aux employés pour le problème fusionné sans contraintes d'attributs cmc alors que 81% des sièges sont affectés aux employés pour le problème avec contraintes d'attributs cmc. Cette forte proportion de branchement dès la première itération fait baisser considérablement le temps de résolution de la relaxation linéaire du problème

pour les itérations subséquentes. En effet, ce temps de résolution atteint rapidement des valeurs de moins de une minute.

L'heuristique de branchement 3 demeure donc très rapide malgré l'ajout des contraintes d'attributs cmc. Malgré l'augmentation du saut d'intégrité que l'ajout de ces contraintes occasionne, l'heuristique de branchement 3 procure une solution en nombres entiers peu détériorée comparativement à la relaxation linéaire initiale.

4.3 Nouvelle séparation des groupes

Puisque la solution en nombres entiers d'un problème fournie par l'heuristique de branchement 3 est peu détériorée comparativement à sa relaxation linéaire, il est intéressant de développer un nouvel algorithme de séparation des groupes d'employés et de tâches de travail basé sur cette solution, c'est-à-dire qu'à partir d'une solution en nombres entiers, il est possible de redistribuer les employés et les sièges des tâches de travail parmi les différents groupes de façon à conserver l'affectation en nombres entiers initiale valide à l'intérieur de chaque groupe.

Dans cette section, un nouvel algorithme de séparation des groupes est proposé. La séparation des sièges non couverts ainsi que la distribution des attributs cmc parmi les groupes sont également discutées. Finalement, la solution optimale obtenue suite à la nouvelle séparation des groupes est comparée à la solution optimale de la séparation actuelle.

4.3.1 *Nouvel algorithme de séparation*

Le nouvel algorithme de séparation des groupes proposé est basé sur l'actuelle séparation à laquelle on ajoute une phase de résolution en nombres entiers de groupes fusionnés. À partir des solutions en nombres entiers obtenues, les sièges des tâches de travail ainsi que les attributs cmc sont redistribués parmi les dix groupes. Plus en détails, le nouvel algorithme de séparation proposé suit les étapes suivantes :

- 1) Les employés, les tâches de travail et les attributs cmc sont séparés en dix groupes selon l'algorithme de séparation initial.
- 2) Les groupes 1 à 5 sont fusionnés selon la méthode décrite au chapitre 3.
- 3) Les groupes 6 à 10 sont fusionnés selon la méthode décrite au chapitre 3.
- 4) Le modèle d'affectation 6 des deux groupes fusionnés est résolu en nombres entiers avec l'heuristique de branchement 3.
- 5) Chaque employé est redistribué dans son groupe tel que déterminé par la séparation effectuée à l'étape 1).
- 6) Selon l'affectation en nombres entiers, chaque siège de tâche de travail est distribué dans le groupe appartenant à l'employé affecté à la tâche.
- 7) Les sièges non couverts sont distribués parmi les groupes.
- 8) Les attributs cmc sont distribués parmi les groupes.

Les étapes 1) à 5) ont été discutées précédemment et ne nécessitent aucune explication supplémentaire. Par contre, les étapes 6) à 8) sont décrites avec plus de détails dans les sous-sections suivantes.

4.3.2 *Étape 6 : séparation des sièges de tâche de travail couverts*

Une fois la solution en nombres entiers obtenue, chaque siège d'une tâche de travail est soit affecté à un employé, et par conséquent couvert, ou non couvert. Dans le cas où le siège est couvert par un employé, on distribue ce siège dans le groupe appartenant à l'employé auquel il est affecté. Si le groupe contient déjà un ou plusieurs sièges de cette tâche de travail, le nouveau siège séparé est ajouté aux autres.

4.3.3 *Étape 7 : séparation des sièges non couverts*

Les sièges de tâche de travail non couverts sont séparés parmi les groupes selon les résultats de la relaxation linéaire initiale du problème. Soit Ω l'ensemble des groupes fusionnés. On définit $\omega \in \Omega$ comme étant un groupe fusionné. On note $ip_{j\omega}$ le nombre de sièges de la tâche de travail j affectés aux employés du groupe ω suite à la résolution en nombres entiers et $lp_{j\omega}$ le nombre de sièges de la tâche de travail j affectés aux employés du groupe ω suite à la relaxation linéaire initiale du problème. La séparation des sièges non couverts d'une tâche de travail j est effectuée selon l'algorithme suivant :

- 1 **Pour** une tâche de travail j donnée **Faire**
- 2 **Pour** tous les $\omega \in \Omega$ **Faire**
- 3 $lp_{j\omega} = lp_{j\omega} - ip_{j\omega}$
- 4 $n_j = n_j - ip_{j\omega}$
- 5 **Fin de Pour**
- 6 **Tant que** $n_j > 0$
- 7 **Choisir** la variable $lp_{j\omega}$ la plus élevée
- 8 **Pour** le groupe ω correspondant à la variable $lp_{j\omega}$ choisie **Faire**
- 9 **Distribuer** un siège de la tâche j au groupe ω

```

10           $ip_{j\omega} = ip_{j\omega} + 1$ 
11           $lp_{j\omega} = lp_{j\omega} - 1$ 
12      Fin de Pour
13       $n_j = n_j - 1$ 
14  Fin de Tant que
15  Fin de Pour

```

La boucle 2-5 de l'algorithme ajuste la variable $lp_{j\omega}$ et le nombre de sièges n_j en fonction du nombre de sièges de la tâche de travail j affectés aux employés suite à la résolution en nombres entiers pour chaque groupe. Ensuite, la boucle 6-14 est effectuée tant qu'il reste un siège non couvert à distribuer. À la ligne 7, on choisit la variable $lp_{j\omega}$ la plus élevée et on distribue un siège dans le groupe de cette variable avec la boucle 8-12. Dans cette boucle, on ajuste les variables $ip_{j\omega}$ et $lp_{j\omega}$. Une fois le siège distribué, on ajuste le nombre de sièges restant à la ligne 13. Lorsque tous les sièges non couverts sont distribués, les variables $ip_{j\omega}$ indiquent le nombre de sièges distribués dans chaque groupe pour chaque tâche de travail.

Cet algorithme permet de distribuer les sièges de tâche de travail non couverts selon le résultat initial de la relaxation linéaire du problème. Les sièges sont donc séparés dans des groupes où ils sont susceptibles de faire augmenter la satisfaction des employés et où les employés ont les disponibilités et les qualifications les plus propices afin de les couvrir.

4.3.4 Étape 8 : séparation des attributs cmc

De même que pour la séparation des sièges non couverts, la séparation des attributs cmc des tâches de travail est basée sur un système de compteurs. On

note $ip_cmc_{jl\omega}$ le nombre d'employés du groupe ω affectés à la tâche de travail j possédant l'attribut cmc l suite à la résolution du problème en nombres entiers et $lp_cmc_{jl\omega}$ le nombre d'employés du groupe ω affectés à la tâche de travail j possédant l'attribut cmc l suite à la résolution de la relaxation linéaire du problème. On note également $att_{jl\omega}$ le nombre d'attributs cmc l distribués dans le groupe ω pour la tâche de travail j . De plus, on définit emp_{jl} le nombre d'employés devant (ou pouvant) posséder l'attribut cmc l pour la tâche de travail j et *Liste_Groupe* une liste pouvant contenir les groupes ω susceptibles de recevoir un attribut cmc . La séparation des attributs cmc d'une tâche de travail j est effectuée selon l'algorithme suivant :

```

1   Pour une tâche de travail  $j$  donnée Faire
2       Pour chaque attribut  $cmc$   $l$  défini pour la tâche de travail  $j$  Faire
3           Pour tous les  $\omega \in \Omega$  Faire
4               Initialiser  $att_{jl\omega}$ 
5           Fin de Pour
6       Tant que  $emp_{jl} > 0$ 
7           Initialiser Liste_Groupe
8           Pour tous les  $\omega \in \Omega$  Faire
9               Si  $ip_{j\omega} - att_{jl\omega} > 0$  Faire
10                  Empiler  $\omega$  dans Liste_Groupe
11              Fin de Si
12          Fin de Pour
13          Pour tous les  $\omega \in Liste\_Groupe$  Faire
14              Choisir la variable  $ip\_cmc_{jl\omega}$  la plus élevée
15              Si plusieurs variables  $ip\_cmc_{jl\omega}$  sont identiques Faire
16                  Choisir celle dont la variable  $lp\_cmc_{jl\omega}$  est la plus élevée
17              Fin de Si

```

```

18      Fin de Pour
19      Pour le groupe  $\omega$  correspondant à la variable  $ip\_cmc_{jl\omega}$ 
        choisie Faire
20          Distribuer un attribut  $l$  à la tâche de travail  $j$  dans
            le groupe  $\omega$ 
21           $att_{jl\omega} = att_{jl\omega} + 1$ 
22           $ip\_cmc_{jl\omega} = ip\_cmc_{jl\omega} - 1$ 
23           $lp\_cmc_{jl\omega} = lp\_cmc_{jl\omega} - 1$ 
24      Fin de Pour
25       $emp_{jl} = emp_{jl} - 1$ 
26      Fin de Tant que
27      Fin de Pour
28      Fin de Pour

```

La boucle 2-27 de l'algorithme distribue les attributs cmc dans chaque groupe individuellement pour chaque attribut l défini pour la tâche de travail j . La boucle 3-5 initialise la variable $att_{jl\omega}$ à 0 pour chaque groupe. Ensuite, la boucle 6-26 est effectuée tant qu'il reste un attribut l à distribuer pour la tâche de travail j . À la ligne 7, *Liste_Groupe* est initialisée alors que la boucle 8-12 empile dans *Liste_Groupe* tous les groupes dont le nombre de sièges de la tâche de travail j est supérieur au nombre d'attributs l déjà distribués pour cette même tâche. Donc, les groupes empilés dans *Liste_Groupe* sont ceux pour lesquels il reste au moins un siège pouvant recevoir l'attribut l . La boucle 13-18 choisit ensuite le groupe empilé le plus susceptible à respecter l'attribut à distribuer. Pour ce groupe, la boucle 19-24 distribue un attribut l . Dans cette boucle, on ajuste les variables $att_{jl\omega}$, $ip_cmc_{jl\omega}$ et $lp_cmc_{jl\omega}$. Une fois l'attribut distribué, on ajuste le nombre d'attributs restant à distribuer à la ligne 25. Lorsque tous les attributs

sont distribués, les variables $att_{j|w}$ indiquent le nombre d'attributs distribués dans chaque groupe pour chaque tâche de travail.

Cet algorithme permet de distribuer les attributs cmc aux groupes en tenant compte des attributs que possèdent les employés affectés aux tâches de travail. En tenant compte des résultats de l'affectation en nombres entiers ainsi que de la relaxation linéaire, les attributs cmc sont séparés dans des groupes où ils sont susceptibles d'être respectés.

4.3.5 Résultats de la nouvelle séparation

Le nouvel algorithme de séparation des groupes tel que décrit dans cette section a été testé sur les données du mois d'août 2001. Les horaires des dix nouveaux groupes ainsi obtenus ont été générés par le module de construction d'horaires d'Altitude PBS. Le tableau 4.6 compare les valeurs des nouveaux horaires générés pour tous les groupes avec celles des horaires générés suite à la méthode de séparation des groupes actuelle.

Tableau 4.6: Comparaison des résultats de la nouvelle séparation pour tous les groupes

Groupe	Satisfaction			Sièges non couverts		Jours non couverts	
	Actuelle	Nouvelle	% Gain	Actuelle	Nouvelle	Actuelle	Nouvelle
1	23 264	24 063	3,43	0	1	0	3
2	23 663	24 129	1,97	0	1	0	5
3	22 011	25 824	17,32	13	0	73	0
4	23 234	26 820	15,43	3	0	15	0
5	19 719	26 165	32,69	7	0	36	0
6	22 799	22 068	-3,21	13	9	80	51
7	22 824	24 731	8,36	9	9	38	39
8	22 333	25 873	15,85	11	6	61	32
9	21 426	25 472	18,88	11	2	61	9
10	22 002	25 110	14,13	11	1	54	3
TOTAL	223 275	250 255	12,08	78	29	418	142

L'analyse des résultats du tableau 4.6 montre que le nouvel algorithme de séparation des groupes augmente la satisfaction globale des employés de plus de 12%. À l'exception du groupe 6, tous les groupes individuels voient leur satisfaction augmentée. Le gain atteint même plus de 32% dans le cas du groupe 5. La baisse observée dans le groupe 6 est peu élevée.

Tel que mentionné à la section 2.2.2, pour certains employés, le score de leur meilleur horaire est identique à celui de leur pire horaire. Près de 38% des employés ont cette caractéristique. Puisqu'il n'existe aucun écart entre ces deux valeurs, on considère ces employés comme étant satisfaits à 100% peu importe l'horaire dont ils héritent. Ces employés ont donc une satisfaction constante et ne contribuent en rien à l'augmentation de la satisfaction entre l'ancienne séparation des groupes et la nouvelle. Si on élimine ces employés du calcul d'augmentation de la satisfaction globale, l'augmentation de satisfaction moyenne par employé est de plus de 15%.

Les valeurs du tableau 4.6 montrent également une importante baisse de la non-couverture des tâches de travail. En effet, le nombre de sièges non couverts passe de 78 à 29, ce qui correspond à une baisse de près de 63% alors que le nombre de jours de non-couverture est réduit de 276, ce qui correspond à une baisse de plus de 66%.

En considérant que chaque employé travaille en moyenne 18 jours par mois, une économie de 276 jours de non-couverture par mois correspond à un total de 15 employés. En considérant également que le coût par employé est de l'ordre de 100 000 dollars par année, incluant le salaire, les vacances, les charges patronales ainsi que les coûts de formation et d'encadrement, une réduction de 15 employés correspond à une économie de près de 1,5 millions de dollars par année.

Malgré la baisse importante du nombre de jours de non-couverture des tâches de travail ainsi que la forte augmentation de la satisfaction globale, des améliorations sont possibles. En effet, si on compare les performances de chaque fusion, on remarque que la fusion des groupes 1 à 5 offre de meilleurs résultats que la fusion des groupes 6 à 10. Le tableau 4.7 illustre bien cette situation.

Tableau 4.7: Comparaison des résultats de chaque fusion

	Fusion 1 à 5	Fusion 6 à 10
Pourcentage d'augmentation de la satisfaction globale	13,50%	10,66%
Pourcentage de baisse de la non-couverture (sièges)	91,30%	50,91%
Pourcentage de baisse de la non-couverture (jours)	93,55%	54,42%

L'analyse des valeurs du tableau 4.7 indique que la fusion des groupes 1 à 5 permet de réduire presque entièrement la non-couverture des tâches de travail alors que la fusion des groupes 6 à 10 ne réduit cette non-couverture que de moitié approximativement. De plus, la fusion des groupes 1 à 5 permet une meilleure augmentation de la satisfaction des employés.

Suite à cette analyse, les groupes fusionnés ont été étudiés plus en profondeur. Cette étude a démontré que plusieurs tâches de travail ont des sièges répartis dans chacune des deux fusions. Dans certains cas, le nombre de sièges d'une tâche de travail qui se trouvent dans une des deux fusions est petit alors que le nombre de contraintes d'attributs cmc associées à ces sièges est élevé. Cette séparation des sièges entre les deux fusions restreint donc la combinatoire des employés pouvant composer l'équipage d'une tâche de travail. Afin de résoudre ce problème et éventuellement afin d'améliorer l'augmentation de la satisfaction des membres d'équipage et la baisse de la non-couverture des tâches de

travail, il est recommandé que tous les sièges appartenant à la même tâche de travail soient présents dans le même groupe fusionné. De cette façon, la combinatoire des employés pouvant composer l'équipage de cette tâche de travail ne dépendra plus de la séparation des sièges de la tâche mais seulement du nombre d'employés disponibles pour effectuer la tâche de travail ainsi que des attributs qu'ils possèdent.

Le tableau 4.8 compare le nombre de tâches de travail de la nouvelle séparation pour lesquelles une ou plusieurs contraintes d'attributs cmc sont violées avec celles de la séparation actuelle.

Tableau 4.8: Comparaison des tâches de travail avec contraintes d'attributs violées

	Ancienne	Nouvelle
Nombre de tâches de travail avec contraintes d'attributs	1883	1883
Nombre de tâches avec contraintes d'attributs violées	277	6
Pourcentage de tâches avec contraintes d'attributs violées	14,71%	0,32%

Les résultats du tableau 4.8 illustrent que le nouvel algorithme de séparation des groupes permet une meilleure distribution des attributs cmc parmi les dix groupes. En effet, suite à la nouvelle séparation des groupes, il n'y a pratiquement plus de tâches de travail ayant une ou plusieurs contraintes cmc violées. Le nombre de tâches de travail avec contraintes d'attributs cmc violées passe de 277 avec l'ancien algorithme de séparation des groupes à 6 avec le nouvel algorithme, soit une baisse de près de 98%.

Finalement, le tableau 4.9 illustre la précision du modèle d'approximation développé au chapitre 2. Les valeurs de la relaxation linéaire du problème d'approximation sont comparées à celles de la solution optimale suite à la

nouvelle séparation des groupes pour les deux fusions ainsi que pour le problème global.

Tableau 4.9: Comparaison des valeurs de la relaxation du modèle d'approximation pour les deux fusions

Problème	Sol. Optimale	Approximation	% Écart
Fusion des groupes 1 à 5	127 001	127 461	0,36
Fusion des groupes 6 à 10	123 254	122 329	-0,75
TOTAL	250 255	249 790	-0,19

Le tableau 4.9 montre que le modèle d'approximation développé au chapitre 2 est très précis. En effet, pour chacun des deux problèmes fusionnés et par conséquent pour le problème global, le modèle d'affectation 6 fournit une approximation de la satisfaction globale des employés avec un écart de moins de 1% de la valeur de la solution optimale.

Malgré le fait que l'approximation de la satisfaction globale soit excellente, certains employés ont un écart considérable entre leur satisfaction personnelle telle que calculée par le modèle d'approximation et celle calculée par le module de construction d'horaires d'Altitude PBS. Il est possible de modifier le modèle mathématique d'approximation afin de personnaliser un peu plus les horaires mensuels, notamment, en tenant compte de l'historique des horaires mensuels précédents pour chaque employé. Ces changements ne devraient pas modifier grandement la valeur de la satisfaction globale des employés mais devraient permettre une meilleure approximation de la satisfaction individuelle de chaque employé. De plus, ces ajouts au modèle mathématique d'approximation peuvent être implantés très rapidement et demandent peu de changement au code informatique.

CHAPITRE 5 : CONCLUSION

Dans ce mémoire, un nouvel algorithme de séparation des groupes pour le problème de construction d'horaires mensuels d'agents de bord chez une importante compagnie aérienne a été proposé. Ce nouvel algorithme de séparation rencontre les trois objectifs du projet, soit l'augmentation de la satisfaction globale des employés, une meilleure distribution des attributs cmc parmi les groupes ainsi que la diminution du nombre de tâches de travail non couvertes.

Un modèle mathématique d'affectation généralisée a été développé afin de fournir une approximation de la solution optimale générée par le module de construction d'horaires d'Altitude PBS. Il a été montré que le modèle d'affectation généralisée permet de générer une excellente approximation de la solution optimale globale (moins de 6% d'écart) et ce, en des temps d'exécution très rapides, soit près de 19 minutes, en moyenne, par groupe. De plus, il a été montré que lorsque la solution du modèle d'approximation contient peu ou pas de tâches de travail non couvertes, l'écart avec la solution optimale est de près de 1%.

Le modèle d'approximation a permis de déterminer avec précision les avantages d'une nouvelle séparation des groupes. En effet, il a été montré qu'en fusionnant plusieurs groupes d'employés et de tâches de travail ensemble, une augmentation de la satisfaction globale des membres d'équipage est possible tout en réduisant l'impact des attributs cmc et en réduisant considérablement le nombre de tâches de travail non couvertes.

La fusion de groupes d'employés et de tâches de travail entraîne une grande augmentation de la taille des problèmes et des temps de calcul. Par contre, il a été montré qu'en modifiant les paramètres de tolérances du logiciel Cplex, une réduction des temps de calcul est possible.

Plusieurs heuristiques de branchement ont été utilisées afin de fournir des solutions en nombres entiers. Les heuristiques testées ont fourni des solutions en nombres entiers peu détériorées comparativement aux valeurs des relaxations linéaires des problèmes. En effet, dans le cas de l'heuristique de branchement 3, les sauts d'intégrité observés sont de l'ordre de 1%. De plus, il a été montré que des solutions en nombres entiers peuvent être générées rapidement (en près de 90 minutes pour un problème de 1 268 494 variables et 40 929 contraintes).

À partir des solutions en nombres entiers, un nouvel algorithme de séparation des groupes a été développé. Cet algorithme redistribue les tâches de travail ainsi que les attributs cmc parmi les dix groupes en solutionnant deux fusions de cinq groupes. La nouvelle séparation des groupes a permis une augmentation de la satisfaction globale des employés de plus de 12% ainsi qu'une baisse des jours de non-couverture des tâches de travail de plus de 66%. De plus, la nouvelle séparation des groupes a permis de réduire le nombre de tâches de travail ayant une ou plusieurs contraintes cmc violées de près de 98%. Suite à la nouvelle séparation, il a été observé que le modèle d'approximation fournit une solution globale avec un écart de 0,19% de la solution optimale.

Il a été montré que la réduction en jours de non-couverture des tâches de travail correspond à une économie de près de 1,5 millions de dollars en coût de personnel. De plus, le nouvel algorithme de séparation permet une augmentation de la satisfaction du personnel ainsi qu'une augmentation de la

qualité de service puisque la composition des équipages respecte mieux les contraintes établies par la compagnie. Ces deux augmentations ont une valeur plus importante pour la compagnie aérienne malgré le fait qu'elles soient difficilement quantifiables d'un point de vue monétaire.

Il est recommandé de tester le nouvel algorithme de séparation des groupes sur un plus grand nombre de jeux de données. Ce faisant, il sera possible de documenter plus en détails les contributions de cet algorithme.

Parmi les futures voies de recherche engendrées par cette étude, il serait intéressant d'observer les changements apportés lorsque l'algorithme de séparation des groupes est testé sur un jeu de données où les sièges des tâches de travail se trouvent tous dans la même fusion. De plus, il serait intéressant de comparer les horaires individuels générés par le modèle d'approximation avec ceux générés par le module de construction d'horaires d'Altitude PBS si des modifications afin de personnaliser les horaires sont apportés au modèle d'approximation. Finalement, compte tenu de l'écart entre la solution d'approximation et la solution optimale, les valeurs duales du modèle d'approximation pourraient être utilisées afin de stabiliser le processus de génération de colonnes.

Les droits du nouvel algorithme de découpage ont été achetés par Technologies AD OPT Inc. en vue d'une implantation future chez ses clients utilisant une structure de construction d'horaires mensuels telle que décrite dans ce mémoire.

RÉFÉRENCES

BYRNE, J. (1988). A Preferential Bidding System for Technical Aircrew. 1988 AGIFORS Symposium Proceedings, 28, 87-89.

CLARKE, L.W., HANE, C.A., JOHNSON, E.L. et NEMHAUSER, G.L. (1996). Maintenance and Crew Considerations in Fleet Assignment. Transportation Science, 30(3), 249-260.

DESAULNIERS, G., DEROSIERS, J., DUMAS, Y., MARC, S., RIOUX, B., SOLOMON, M.M. et SOUMIS, F. (1997). Crew Pairing at Air France. European Journal of Operational Research, 97(2), 245-259.

DESAULNIERS, G., DESROSIERS, J., GAMACHE, M. et SOUMIS, F. (1998a). Crew Scheduling in Air Transportation. Fleet Management and Logistics, T.G. Crainic et G. Laporte, éditeurs, Kluwer Academic Publishers, Boston, 169-185.

DESAULNIERS, G., DESROSIERS, J., IOACHIM, I., SOLOMON, M.M., SOUMIS, F. et VILLENEUVE, D. (1998b). A Unified Framework for Deterministic Time Constrained Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems. Fleet Management and Logistics, T.G. Crainic et G. Laporte, éditeurs, Kluwer Academic Publishers, Boston, 57-93.

DESAULNIERS, G., DESROSIERS, J., LASRY, A. et SOLOMON, M.M. (1999). Crew Pairing for a Regional Carrier. Computer-Aided Transit Scheduling, N.H.M. Wilson, éditeur, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin, 471, 19-41.

GAMACHE, M. (1995). Fabrication d'horaires mensuels pour les membres d'équipage en transport aérien. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.

GAMACHE, M., SOUMIS, F., VILLENEUVE, D., DESROSIERS, J. et GÉLINAS, E. (1998). The Preferential Bidding System at Air Canada. Transportation Science, 32(3), 246-255.

GAMACHE, M., SOUMIS, F., MARQUIS, G. et DESROSIERS, J. (1999). A Column Generation Approach for Large Scale Aircrew Rostering Problems. Operations Research, 47(2), 247-262.

GLANERT, W. (1984). A Timetable Approach to the Assignment of Pilots to Rotations. 1984 AGIFORS Symposium Proceedings, 24, 369-391.

GRAVES, G.W., McBRIDE, R.D., GERSHKOFF, I., ANDERSON, D. et MAHIDHARA, D. (1993). Flight Crew Scheduling. Management Science, 39(6), 736-745.

RYAN, D.M. (1992). The Solution of Massive Generalized Set Partitioning Problems in Aircrew Rostering. Journal of the Operational Research Society, 43(5), 459-467.

STOJKOVIĆ, M., SOUMIS, F. et DESROSIERS, J. (1998). The Operational Airline Crew Scheduling Problem. Transportation Science, 32(3), 232-245.