

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**CARACTÉRISATION HYDRAULIQUE ET THERMIQUE D'UNE ASSISTANCE
VENTRICULAIRE**

SIMON-PIERRE MONETTE

**DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)**

MAI 2001

© Simon-Pierre Monette, 2001.



**National Library
of Canada**

**Acquisitions and
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

**Bibliothèque nationale
du Canada**

**Acquisitions et
services bibliographiques**

**395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-65589-X

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

CARACTÉRISATION HYDRAULIQUE ET THERMIQUE D'UNE ASSISTANCE
VENTRICULAIRE

présenté par: MONETTE Simon-Pierre

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BERNIER Michel, Ph.D., président

M. GARON André, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. REGGIO Marcelo, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre

À mes parents.

REMERCIEMENTS

Je remercie sincèrement mon directeur de recherche, Monsieur André Garon. Innovateur, persévérant et généreux, il a contribué par ses conseils, tant sur le plan technique qu'humain, à faire de ce travail une expérience des plus agréables. Je lui suis reconnaissant de la confiance qu'il m'a témoignée.

Je désire ensuite exprimer toute ma gratitude à Monsieur Éric Turgeon pour son aide, la générosité de ses explications et la pertinence de ses commentaires.

Je remercie Monsieur Dominique Pelletier pour ses nombreux conseils, pour sa rigueur et pour savoir transmettre sa passion.

J'adresse aussi mes remerciements aux professeurs, étudiants et chercheurs qui ont contribué à rendre mon séjour à l'École Polytechnique agréable et stimulant.

Je remercie le Conseil de la recherche en sciences naturelles et en génie du Canada pour son appui financier.

Enfin, je suis reconnaissant au président et aux membres du jury d'avoir accepté de lire ce mémoire dans de brefs délais.

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente les travaux faits en appui à la conception d'un appareil d'assistance cardiaque intra-ventriculaire. Spécifiquement, l'étude porte sur deux aspects découlant de la problématique associée au joint hydraulique : la puissance supplémentaire imposée par le joint et l'élévation de température du sang à son passage dans le joint. Comme le joint est le média de couplage entre le moteur électrique et les parties tournantes de la pompe, ces aspects sont liés au développement du moteur, ce qui impose des contraintes supplémentaires.

Premièrement, pour que le moteur soit performant, l'entrefer (il correspond à l'épaisseur du joint) séparant les aimants du fer statorique doit être petit afin d'imposer une réluctance minimale au flux magnétique. D'un point de vue hydraulique, cela est par contre indésirable car la puissance imputable au joint augmente considérablement lorsque l'entrefer diminue. Dans l'optique de répondre aux objectifs contradictoires d'amélioration du rendement électrique et de minimisation de la puissance attribuable au joint, une indentation du stator — formant ainsi des dents et des encoches — est considérée afin de possiblement tirer avantage à la fois d'un petit et d'un large entrefer.

Le joint à encoches fait donc l'objet d'une étude visant à estimer s'il présente un avantage par rapport à un joint lisse. Les paramètres influençant la puissance qu'un tel joint impose sont identifiés afin d'éventuellement les optimiser. L'écoulement 3D dans le joint est résolu par une méthode de volumes finis à l'aide du logiciel commercial CFX-TASCflow. Une approche statistique permet de gérer neuf paramètres de forme et deux paramètres d'opération.

Il s'avère que l'entrefer est un paramètre dominant. Son importance est telle que

le relâchement du cisaillement espéré sous les encoches ne peut contribuer que de façon marginale à une diminution de la puissance. De plus, une telle diminution n'est possible que si l'entrefer est petit et si l'indentation du stator forte. Or, pour un petit entrefer, la puissance demeure trop élevée et il y a une limite à indenter le stator sans altérer le rendement électrique. Le joint à encoches ne semble donc pas présenter d'avantages significatifs par rapport à un joint lisse.

Deuxièmement, les pertes en chaleur du moteur risquent d'élever localement la température du sang à son passage dans le joint. Or, au-delà d'un seuil critique de 42°C , les constituants du sang sont dénaturés. Une étude thermique vise à traduire cette contrainte d'élévation de température en une contrainte sur la puissance générée en chaleur par le moteur. Celle-ci est finalement reliée à une borne minimale du rendement électrique. Ces aspects sont traités dans un cadre multiparamétrique permettant la génération d'une surface de réponse qui pourra, éventuellement, s'insérer dans le processus de conception et d'optimisation du moteur.

Le système thermique est représenté par un domaine 2D axisymétrique. L'écoulement du sang est supposé laminaire, développé et à propriétés constantes. La simplicité de la géométrie permet une résolution analytique du profil de vitesse. L'équation d'énergie est résolue numériquement par un schéma hybride couplant les méthodes de différences finies et d'éléments finis.

La puissance pouvant être générée en chaleur sans risquer une élévation critique de la température du sang varie entre 1 et 39 W selon la configuration et le point d'opération. La borne supérieure du rendement électrique minimal pour n'importe quelle configuration de l'espace expérimental est estimée à 60 %. Le rendement électrique minimal pour le prototype actuel est estimé à 20 %. Ces faibles valeurs laissent présager de façon très optimiste la faisabilité d'un moteur adéquat pour l'appareil d'assistance ventriculaire.

ABSTRACT

This thesis relates the work accomplished in the framework of the development of an internal left ventricular assist device. The study focusses specifically on two aspects linked to the hydraulic seal design : the extra power consumption imposed by the seal on the motor and the blood temperature rise as it flows through the seal. Since the seal is the media coupling the electric motor and the rotating hydraulic parts, these aspects are closely related to the motor development which is imposing supplementary constraints.

Firstly, for the motor to be efficient, the *airgap* (it corresponds to the seal thickness which is in fact filled by blood) between the magnets and the stator iron core should be small in order to minimize the reluctance imposed on the magnetic flux. From an hydraulic point of view, this is however undesirable since the power attributable to the seal increases considerably as the airgap is reduced. In order to deal with the contradictory objectives of improving the electric efficiency and of minimizing the seal power, indenting the stator core (thus forming slots and teeth) is considered so as to possibly benefit of a large and a small airgap.

A study aiming to assess the hypothetical advantage of a slotted seal over a cylindrical smooth seal is performed. The parameters influencing the seal power consumption are identified in order to eventually optimise them. The 3D flow in the seal is resolved by a finite-volume method with the commercial code CFX-TASCflow. A statistical approach enables the treatment of eleven parameters.

The airgap dominates other parameters regarding power consumption. It is so important that the stress relief under the slots contributes only marginally to a power reduction. Furthermore, such a reduction is possible only if the airgap is small and

the stator core indentation large. However, a small airgap is associated with a too high power consumption and there is a limit to indent the stator without altering the electric efficiency. Thus, the slotted seal does not seem to present any advantage compared to a cylindrical smooth seal.

Secondly, the motor heat loss risks to locally cause a temperature rise of the blood flowing through the seal. Yet, above a critical value of 42°C , some blood constituents are altered. A thermal study aims to translate this temperature rise constraint into a restriction on the heat generated by the motor. The latter is in turn related to a minimal electric efficiency. These aspects are treated in a multi-parametric framework enabling the generation of a response surface which could, eventually, be used during the process of designing and optimising the motor.

The thermal system is represented by a 2D axisymmetric domain. The blood flow is assumed laminar, developed and with constant physical properties. The domain simplicity allows an analytical solution of the flow. The energy equation is resolved numerically with a hybrid scheme coupling finite differences and finite elements.

The heat the motor can generate without risking a critical blood temperature rise varies between 1 and 39 W according to configuration and pumping conditions. The top minimal electric efficiency estimate for any configuration in the experimental space is 60 %. For the actual pump prototype, the minimal electric efficiency is estimated to 20 %. These low values let us presume optimistically the feasibility of an adequate motor for the assist device.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES TABLEAUX	xv
LISTE DES FIGURES	xvi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 CONFIGURATION ET PARAMÈTRES DE L'ÉTUDE DU JOINT À ENCOCHES	9
1.1 Configuration de la pompe avec le joint à encoches	9
1.2 Paramètres géométriques	9
1.3 Paramètres d'opération	10
1.4 Paramètres de l'étude	12
1.5 Variables de réponse	13
1.5.1 Couple et puissance	13
1.5.2 Cisaillement	14
1.5.3 Débit	16
CHAPITRE 2 RÉSOLUTION NUMÉRIQUE	18

2.1	Modélisation et CFX-TASCflow	18
2.1.1	Régime laminaire	18
2.1.2	Pas de temps	19
2.2	Maillage	20
2.2.1	Interpolation semi-isogéométrique	20
2.2.2	Concentration	25
2.2.3	Étude de raffinement et taille du maillage	26
2.3	Conditions aux frontières	29
2.4	Convergence	30
CHAPITRE 3 APPROCHE STATISTIQUE		32
3.1	Plan de tamisage à 32 essais	32
3.2	Inclusion des paramètres d'opération	33
3.3	Répétitions	33
3.4	Modèle de régression	35
3.5	Coefficient de détermination	36
3.6	Donnée manquante	37
CHAPITRE 4 RÉSULTATS ET DISCUSSION		39
4.1	Modèles	39
4.1.1	Valeurs optimales et utilisation des modèles	39
4.1.2	Validation : centre de l'espace expérimental et courbure	40
4.2	Diagrammes de Pareto et facteurs dominants	42
4.2.1	Couple et puissance	43
4.2.2	Cisaillement	45
4.2.3	Débit	45
4.3	Discussion sur l'avantage du joint à encoches	46
4.3.1	Indentation	46

4.3.2	Couple en entrée et en sortie	47
4.3.3	Joint à encoches <i>vs</i> joint lisse	48
4.4	Aspects de l'écoulement	51
4.4.1	Intégration lagrangienne	52
4.4.2	Tourbillon dans l'encoche	52
4.4.3	Écoulement près des ouvertures	54
4.4.4	Distribution du critère de von Mises	56
 CHAPITRE 5 CONFIGURATION ET PARAMÈTRES DE		
	L'ÉTUDE THERMIQUE	61
5.1	Configuration de la pompe	61
5.2	Domaine	62
5.3	Conditions aux frontières	63
5.4	Propriétés physiques	64
5.5	Paramètres géométriques	65
5.6	Paramètres de l'étude	66
 CHAPITRE 6 MODÉLISATION		
6.1	Équations de mouvement	68
6.1.1	Canal principal	69
6.1.2	Canal du joint	71
6.1.3	Répartition du débit	72
6.2	Équation d'énergie	75
6.3	Adimensionnalisation	76
6.4	Choix des échelles	78
6.5	Analyse de la forme adimensionnelle	80
6.5.1	Diffusion	82
6.5.2	Dissipation visqueuse	83

6.6	Obtention de $P_{c_{max}}$	85
6.6.1	Linéarité entre $\tilde{T}$ et $\tilde{q}$	85
6.6.2	Élévation maximale de température et récupération de $P_{c_{max}}$	86
CHAPITRE 7 DISCRÉTISATION ET RÉOLUTION		88
7.1	Schéma hybride	88
7.2	Différences finies	89
7.2.1	Discrétisation axiale	89
7.2.2	Conditions aux frontières	91
7.3	Éléments finis	93
7.3.1	Méthode de Galerkin	93
7.3.2	Base d'interpolation et quadrature	96
7.4	Précision de la solution	97
7.4.1	Erreur de discrétisation et choix du maillage	98
7.4.2	Erreur de convergence et choix du critère d'arrêt	102
7.5	Accélération de convergence	105
CHAPITRE 8 RÉSULTATS ET DISCUSSION		107
8.1	Étude de tamisage	107
8.2	Surface de réponse	110
8.2.1	Plan d'expérience central composite	110
8.2.2	Ajustement du modèle	111
8.2.3	Extrémums du modèle	112
8.3	Utilisation des résultats et optimisation	113
8.4	Borne supérieure au rendement électrique minimal	115
8.4.1	Rendement électrique minimal pour le prototype actuel	115
8.5	Effet de la conductivité effective	116
8.6	Effet de la longueur	117

CONCLUSION	119
RÉFÉRENCES	122

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 :	Paramètres géométriques du joint à encoches	11
Tableau 1.2 :	Paramètres de l'étude et plages de variation	13
Tableau 2.1 :	Caractéristiques des maillages de l'étude de raffinement	27
Tableau 2.2 :	Étude de raffinement sur Q_{net} , P_j et $\bar{\tau}_m$	28
Tableau 2.3 :	Variation temporelle des réponses dans le temps	31
Tableau 3.1 :	Plan d'expérience à 32 essais	34
Tableau 4.1 :	Coefficients des modèles	40
Tableau 4.2 :	Valeurs codées minimisant la puissance P_j	40
Tableau 4.3 :	Centre de l'espace expérimental : prédictions vs simulations	42
Tableau 5.1 :	Propriétés physiques	65
Tableau 5.2 :	Paramètres géométriques de l'étude thermique	66
Tableau 5.3 :	Plage de variation des paramètres	67
Tableau 6.1 :	Importance relative des termes de l'équation d'énergie	80
Tableau 7.1 :	Temps de calcul et accélération de convergence	106
Tableau 8.1 :	Plan d'expérience de tamisage à 16 essais	108
Tableau 8.2 :	Coefficients du modèle linéaire de régression sur P_{cmax}	108
Tableau 8.3 :	Coefficients de la surface de réponse de P_{cmax}	112
Tableau 8.4 :	Borne supérieure au rendement électrique minimal	115
Tableau 8.5 :	Rendement électrique minimal d'un prototype	116

LISTE DES FIGURES

Figure 0.1 :	Configuration initiale de la pompe et du moteur	2
Figure 1.1 :	Configuration avec le joint à encoches	9
Figure 1.2 :	Géométrie du joint à encoches	10
Figure 1.3 :	Entrée et sortie du joint	12
Figure 1.4 :	Plage géométrique de l'espace expérimental	14
Figure 1.5 :	Surfaces de la couronne d'aimants	15
Figure 2.1 :	Espaces de l'interpolation transfinie et semi-isogéométrique . .	23
Figure 2.2 :	Génération de maillage par interpolation	24
Figure 2.3 :	Maillage elliptique	25
Figure 2.4 :	Maillage de base pour l'étude paramétrique	26
Figure 2.5 :	Parois périodiques	29
Figure 2.6 :	Historique de convergence	31
Figure 3.1 :	Géométrie de l'essai 13	38
Figure 4.1 :	Linéarité du modèle et courbure de la réponse	41
Figure 4.2 :	Pareto P_j	44
Figure 4.3 :	Pareto T_{tot}	44
Figure 4.4 :	Pareto T_{entree}	44
Figure 4.5 :	Pareto T_{sortie}	44
Figure 4.6 :	Pareto $T_{entrefer}$	44
Figure 4.7 :	Pareto $T_{encoche}$	44
Figure 4.8 :	Pareto $\bar{\tau}_m$	46
Figure 4.9 :	Pareto Q_{net}	46
Figure 4.10 :	Pareto $\frac{T_{entrefer}}{T_{entrefer} + T_{encoche}}$	48
Figure 4.11 :	Observations $\frac{T_{entrefer}}{T_{entrefer} + T_{encoche}}$	48
Figure 4.12 :	Importance du couple en entrée et en sortie	49

Figure 4.13 :	Puissance d'un joint lisse vs P_j	51
Figure 4.14 :	Trajectoires dans le joint, départ en entrée	53
Figure 4.15 :	Trajectoires dans le joint, départ des faces périodiques	54
Figure 4.16 :	Vecteurs de vitesse radiale en entrée et en sortie	55
Figure 4.17 :	Pareto Q_{in}	56
Figure 4.18 :	Pareto Q_{out}	56
Figure 4.19 :	Surface $\tau_m=5$	58
Figure 4.20 :	Surface $\tau_m=10$	58
Figure 4.21 :	Surface $\tau_m=25$	58
Figure 4.22 :	Surface $\tau_m=50$	58
Figure 4.23 :	Surface $\tau_m=100$	59
Figure 4.24 :	Surface $\tau_m=200$	59
Figure 4.25 :	Surface $\tau_m=300$	59
Figure 4.26 :	Surface $\tau_m=400$	59
Figure 4.27 :	Surface $\tau_m=500$	60
Figure 4.28 :	Surface $\tau_m=600$	60
Figure 4.29 :	Surface $\tau_m=700$	60
Figure 4.30 :	Surface $\tau_m=800$	60
Figure 5.1 :	Configuration de l'étude thermique	61
Figure 5.2 :	Domaine de l'étude thermique et numérotation des zones	62
Figure 5.3 :	Conditions aux frontières : thermique	63
Figure 5.4 :	Domaine et conditions aux frontières révisées	64
Figure 5.5 :	Géométrie du domaine de l'étude thermique	66
Figure 6.1 :	Lieu d'élévation maximale de la température du sang	87
Figure 7.1 :	Discretisation : maillage cartésien structuré	89
Figure 7.2 :	Colonne de noeuds de température fictifs en entrée	91
Figure 7.3 :	Maillage de base	98
Figure 7.4 :	Erreur de discrétisation	100

Figure 7.5 :	Erreur de discrétisation réévaluée	103
Figure 7.6 :	Erreur de convergence	104
Figure 8.1 :	Pareto $P_{c_{max}}$	109
Figure 8.2 :	Plan central composite	111
Figure 8.3 :	Diagrammes de Pareto pour $P_{c_{max}}$	113
Figure 8.4 :	Effet de k_{eff} à la paroi fluide-solide du canal du joint	117
Figure 8.5 :	Effet de k_{eff} sur le profil de température en sortie	118
Figure 8.6 :	Effet de L sur le profil de température en sortie	118

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Caractères usuels

a	fraction circonférentielle non indentée du stator
a	paramètre contrôlant l'intensité de concentration
a, b, c	constantes
B	matrice du système global d'éléments finis
c_p	chaleur massique
C	longueur d'arc
E	épaisseur de la couronne d'aimants
E_p	épaisseur du canal principal
E_{Ti}	épaisseur des couches de titane
Ec	nombre d'Eckert
F	champ d'élévation de température pour $q = q_a$
h	taille caractéristique d'un maillage
i	courant électrique
i, j	indices
i, j	coordonnées de l'espace discret
k	conductivité thermique
L	longueur du joint
L_i	longueur de l'entrée du joint
L_o	longueur de la sortie du joint
L	vecteur (membre de droite) du système global d'éléments finis
n	nombre d'encoches
n	direction normale
N	nombre d'enroulements d'une phase électrique

p	pression
P_c	puissance en chaleur produite par le moteur
P_e	puissance électrique
P_f	puissance transmise au fluide
P_j	puissance supplémentaire imputable au joint
P_m	puissance mécanique transmise à l'arbre
P_Φ	puissance produite par dissipation visqueuse
Pe	nombre de Péclet
P	position d'un noeud de maille
q	débit traversant une face de volume de contrôle
q	production de chaleur volumique
q_a	production de chaleur volumique pour $P_c = 10$ W
Q_{net}	débit net traversant le joint
Q_{in}, Q_{out}	débit traversant l'entrée et la sortie du joint
Q_t	débit total
r	coordonnée radiale
r	ratio du nombre de noeuds dans chaque direction entre deux maillages
s, t	coordonnées de l'espace cubique unitaire
R	résistance électrique
R^2	coefficient de détermination d'un modèle de régression
Re	nombre de Reynolds
s_k, s_e	variables secondaires en éléments finis
ss	variabilité
t	temps
t	paramètre d'interpolation
t_2	paramètre d'interpolation contrôlant l'évasure des encoches
T	température

T	couple
T_f	champ fictif de température en entrée et en sortie
T_{entree}	couple appliqué sur la couronne d'aimants en entrée
T_{sortie}	couple appliqué sur la couronne d'aimants en sortie
$T_{entrefer}$	couple appliqué sur la couronne d'aimants sous la dent
$T_{enchoche}$	couple appliqué sur la couronne d'aimants sous l'encoche
$\mathbf{T}$	vecteur des degrés de liberté de température en éléments finis
u	vitesse
$\mathbf{u}$	vecteur vitesse
u, v	coordonnées paramétriques de l'espace continu
v	volumen d'un volume de contrôle
w	fonction test en éléments finis
w_1, w_2	fonctions d'interpolation pour la position d'un noeud
$\mathbf{x}$	vecteur position
x	coordonnée axiale
x, y	coordonnées de l'espace physique

Lettres caligraphiques

$\mathcal{R}_j$	réductance du joint
-----------------	---------------------

Lettres grecques

α	distance axiale du plan central-composite
β_0	moyenne d'un modèle de régression

β	demi-effet d'un modèle de régression
Γ	frontière
δ	entrefer
δ^n	correction au balayage n en différences finies
Δ	différence
ϵ	erreur absolue
ϵ_d	erreur de discrétisation
ϵ_c	erreur de convergence
ζ	critère d'arrêt des balayages en différences finies
η_e	rendement électrique
η_h	rendement hydraulique
θ	angle
μ	viscosité
ρ	masse volumique
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	contraintes principales du tenseur de contraintes visqueuses
τ	cisaillement
τ_m	cisaillement scalaire de von Mises
$\bar{\tau}_m$	moyenne volumique du cisaillement scalaire de von Mises
Υ	terme source en différences finies
ϕ	fonction d'interpolation en éléments finis
Φ	flux magnétique
Φ	dissipation visqueuse
ω	vitesse de rotation
ω	coordonnée circonférentielle
Ω	domaine

Indices et exposants

<i>max</i>	maximal
<i>min</i>	minimal
<i>o</i>	échelle
<i>r</i>	radial
<i>ref</i>	référence
<i>x</i>	axial
ω	circonférentiel
-	adimensionnel
-	moyen

INTRODUCTION

La présente étude s'insère dans le cadre du développement d'un appareil d'assistance cardiaque intra-ventriculaire. Il est constitué d'une pompe axiale et d'un moteur électrique à courant continu. Les pales du rotor de la pompe sont entraînées par l'assemblage d'aimants permanents du moteur. Ces parties mobiles sont séparées des parties fixes par un joint hydraulique lubrifié par le sang.

On s'attarde à certains aspects découlant de la problématique du design du joint : la puissance hydraulique supplémentaire attribuable au joint et l'élévation de température du sang à son passage dans le joint. Puisque le joint est le média de couplage entre le moteur et la pompe, ce travail contribue au développement du moteur car les contraintes de sa conception sont étroitement liées à la configuration du joint.

Considérations électromécaniques

Considérons quelques aspects électromécaniques afin de mieux comprendre la problématique associée au moteur. La figure 0.1 schématise l'arrangement du moteur et de la pompe considéré au début du projet. Le flux magnétique du moteur est établi par les aimants permanents fixés sur une certaine épaisseur de fer servant à fermer le circuit magnétique. Ce sont, du point de vue de l'électromécanique, les composants du rotor auquel les pales de la pompe sont fixées. Le stator se trouve en périphérie du rotor. Il est principalement constitué de fer servant au passage du flux magnétique. Le fer est souvent laminé en tôles afin d'éviter les pertes par courants de Foucault (ou *Eddy currents*) en canalisant le flux. Celui-ci lie (il s'agit de *flux linkage*) le courant du bobinage (normalement fait de fils de cuivre) dont les enroulements sont répartis dans le fer sur toute la longueur du stator dans des cavités axiales. L'entrefer δ

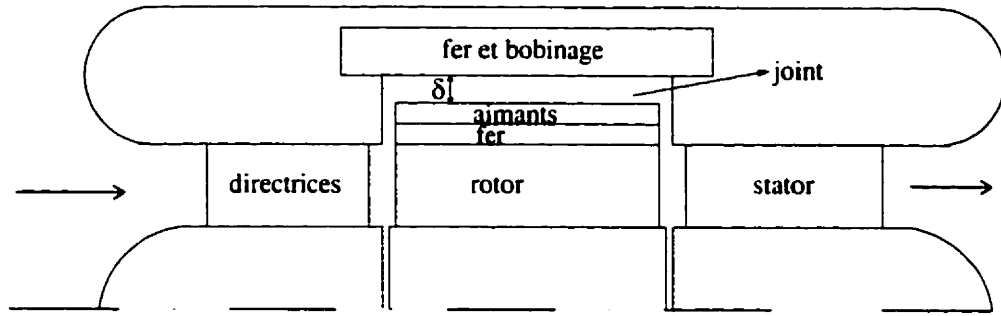


Figure 0.1: Configuration initiale de la pompe et du moteur

représente la distance séparant les aimants permanents du rotor au fer statorique ; il correspond, pour notre application, à l'épaisseur du joint.

Pour un tel moteur opérant sous des conditions normales, Hendershot et Miller [1] montrent que la contribution d'une phase au couple T exercé sur le rotor s'exprime selon :

$$T = Ni \frac{d\Phi}{d\theta} \quad (1)$$

où N est le nombre d'enroulements du bobinage de la phase, i le courant dans les fils, θ la position angulaire et Φ le flux magnétique établi par les aimants. Lors de l'intervalle $\Delta\theta$ où la phase considérée contribue au couple, la grandeur du terme $\frac{d\Phi}{d\theta}$ est une fonction linéaire du flux maximal Φ_{max} établi à une position θ donnée, tel que :

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \pm k_1 \Phi_{max} \quad (2)$$

où k_1 est une constante dépendant du nombre de pôles magnétiques. Le symbole $(\pm)$ est inséré dans l'équation (2) puisque le signe de $\frac{d\Phi}{d\theta}$ change selon la position angulaire. La commutation du courant, faisant en sorte que le produit $i \frac{d\Phi}{d\theta}$ est positif, assure toutefois que la contribution au couple est toujours positive. Elle est effectuée par des

transistors qui reçoivent les commandes de conduction selon la position du rotor. On laisse donc tomber le symbole $\pm$ en combinant les équations (1) et (2) pour obtenir :

$$T = k_1 Ni\Phi_{max} \quad (3)$$

Le produit du couple T par la vitesse de rotation angulaire ω du rotor donne la puissance mécanique P_m transmise au rotor :

$$P_m = \omega k_1 Ni\Phi_{max} \quad (4)$$

La puissance électrique P_e consommée par la phase est la somme de la puissance mécanique et des pertes P_c :

$$P_e = P_m + P_c \quad (5)$$

et le rendement électrique η_e du moteur est défini comme suit :

$$\eta_e = \frac{P_m}{P_e} = \frac{P_m}{P_m + P_c} \quad (6)$$

Les pertes se traduisent en production de chaleur. Elles sont principalement attribuables aux pertes ohmiques causées par la résistance R du bobinage au courant. Les pertes par commutation et par courants de Foucault dans le fer statorique sont d'autres sources de chaleur qui peuvent être minimisées au point d'être négligeables. On écrit donc :

$$P_c \approx Ri^2 \quad (7)$$

Cette approximation ne nuit en rien à la validité de notre raisonnement. En la com-

binant avec l'équation (4), on obtient une expression des pertes en chaleur :

$$P_c = k_2 \left(\frac{P_m}{\Phi_{max}} \right)^2 \quad (8)$$

où on a introduit $k_2 = \left(\frac{\omega k_1 N}{R} \right)^2$ pour expliciter la dépendance à Φ_{max} . En combinant ce résultat à l'équation (6), on écrit le rendement électrique comme suit :

$$\eta_e = \frac{P_m}{P_m + k_2 \left(\frac{P_m}{\Phi_{max}} \right)^2} \quad (9)$$

Ainsi, la puissance P_c est inversement proportionnelle au carré de Φ_{max} . Il en est de même pour le deuxième terme du dénominateur du rendement électrique. Une diminution significative de Φ_{max} cause donc, toutes choses étant fixées, une importante augmentation des pertes en chaleur et une baisse considérable du rendement électrique.

Selon Polk et Postow [2], la perméabilité magnétique du sang est comparable à celle du vide, donc de plusieurs ordres de grandeur inférieure à celle du fer. Puisque la réluctance — soit la « résistance » magnétique au flux — est inversement proportionnelle à la perméabilité, la réluctance du joint $\mathcal{R}_j$ domine le circuit magnétique. L'amplitude du flux Φ_{max} établi par les aimants en dépend donc étroitement. Or, comme $\mathcal{R}_j$ est proportionnelle à l'entrefer, la large dépendance de Φ_{max} à la réluctance se transpose en une dépendance à δ , telle que lorsque δ varie dans un sens, Φ_{max} varie dans l'autre. Les conclusions du paragraphe précédent quant à l'effet de Φ_{max} sur P_c et η_e s'extrapolent conséquemment comme suit : toutes choses étant fixées, une augmentation de l'entrefer entraîne une augmentation des pertes en chaleur et une diminution du rendement électrique.

Ainsi, du point de vue de l'électromagnétique, un petit entrefer est souhaitable ; afin

d'assurer un bon rendement électrique, l'entrefer des moteurs de la taille envisagée pour notre application est typiquement de l'ordre de 0,1 mm.

Étude d'un joint à encoches

Jusqu'ici, les joints considérés ont un entrefer variant de 1,0 à 2,5 mm (voir Farinas et *al.* [3, 4]). Ces valeurs sont largement supérieures à celles qu'on envisage traditionnellement lors de la conception d'un moteur ; elles ont été déterminées dans le but de diminuer la puissance mécanique P_m ; la puissance imputable au joint est largement dépendante de l'entrefer puisque le cisaillement de l'écoulement augmente lorsque les parois sont rapprochées. Or, un petit entrefer peut imposer une puissance supplémentaire importante.

Ainsi, les objectifs d'augmentation de Φ_{max} et de diminution de P_m sont contradictoires en ce sens que l'un est atteint lorsque l'entrefer est petit et l'autre lorsqu'il est grand : un entrefer large, en diminuant la puissance mécanique requise, compromet le flux magnétique et *vice versa*. Or, les équations (8) et (9) font clairement ressortir la dualité entre la puissance mécanique et le flux magnétique ; ils affectent tous deux le rendement électrique et les pertes en chaleur de façon quadratique. Ils ont donc la même importance mais ne peuvent être optimisés simultanément en ce qui a trait à l'entrefer.

Cependant, il existe possiblement une façon de contourner le problème. Sachons qu'il n'est pas nécessaire que le fer du stator soit près des aimants sur toute la circonférence du joint. Il s'agit en fait que des « chemins » suffisamment larges présentent une faible réluctance pour qu'un flux considérable puisse s'établir autour des enroulements. Ainsi, on songe à élargir les cavités du fer, normalement entièrement remplies par le bobinage, afin de dégager une partie de la périphérie du stator. Le

joint imaginé présente donc des encoches faisant en sorte que la distance entre les aimants et le stator soit petite entre les encoches et grande dans celles-ci. On espère d'une telle configuration qu'un petit entrefer effectif soit maintenu quant au champ magnétique et qu'une diminution du cisaillement résulte du dégagement d'une partie de la périphérie du stator. Des niveaux réduits de cisaillement pourraient aussi potentiellement réduire l'hémolyse.

Nous n'avons pas les compétences pour étudier l'effet exact des encoches sur le champ magnétique et sur le rendement électrique. Nous considérons plutôt le volet hydraulique : il s'agit de déterminer les paramètres influençant la puissance d'un joint à encoches et la façon dont ils le font afin d'éventuellement les optimiser. On veut aussi estimer si un joint à encoches présente réellement un avantage, par rapport à un joint lisse, quant à la consommation en puissance. Ces aspects sont traités dans les chapitres 1 à 4.4.

Élévation de température et dégradation du sang

Nous avons sous-entendu, sans le justifier, que la diminution des pertes en chaleur et l'augmentation du rendement électrique sont des considérations importantes. Il est clair qu'un bon rendement électrique permettrait, grâce à l'économie d'énergie encourue, d'accroître l'autonomie d'un patient. Ce n'est pourtant pas ici la principale préoccupation. Nous voyons pourquoi dans les paragraphes suivants.

La chaleur P_c est évacuée par l'écoulement. Le sang subit donc une élévation de température lors de son passage dans la pompe, particulièrement dans le joint. Or, selon Cokelet [5], certains constituants du sang humain subissent des altérations irréversibles à partir d'une température de 42°C. L'élévation de température du sang

représente donc une contrainte de conception pour l'appareil d'assistance ventriculaire. Afin de se rendre compte de la portée de cette contrainte, introduisons le rendement hydraulique η_h de la pompe :

$$\eta_h = \frac{P_f}{P_m} \quad (10)$$

où P_f est la puissance transmise au fluide pompé par un accroissement de pression statique. En combinant cette expression avec l'équation (6), on obtient pour P_c :

$$P_c = P_f \frac{1}{\eta_h} \left(\frac{1}{\eta_e} - 1 \right) \quad (11)$$

La chaleur produite dépend donc à la fois du rendement électrique (on peut maintenant apprécier son importance) et du rendement hydraulique de telle façon qu'elle peut être considérable si un de ces deux rendements est faible : le développement du moteur, celui de la pompe et nécessairement celui du joint les couplant sont donc impliqués et la globalité de la contrainte sur l'élévation de température découle du fait qu'elle est étroitement liée à ces aspects par P_c . Ainsi, l'étude du joint à encoches, comme elle vise l'augmentation du rendement électrique en maintenant un rendement hydraulique acceptable, s'insère dans cette problématique globale.

Il ne s'agit cependant pas de minimiser P_c , mais bien de prévenir une élévation critique de la température du sang risquant d'altérer ses constituants. Or, l'élévation dépend non seulement de la chaleur générée, mais aussi de la géométrie, du point d'opération et de d'autres paramètres.

On vise donc à traduire la contrainte d'élévation de température en une contrainte sur la puissance P_c générée ; on cherche à caractériser, selon divers paramètres, la puissance de chaleur maximale $P_{c_{max}}$ qu'un moteur peut produire sans entraîner une augmentation de la température du sang au delà d'un seuil critique T_c . Par prudence,

à l'instar de Yamazaki *et al.* [6], on choisit une température critique de 40°C plutôt que 42°C. Sachant que la température normale chez l'humain est de 37°C, on admet une élévation maximale de 3°C. Donc, en aucun point à son passage dans la pompe, le sang peut atteindre une température locale supérieure à 40°.

On procède ainsi afin de clarifier la problématique de conception du moteur en évitant de fixer *a priori* une borne minimale au rendement électrique. Celle-ci doit en fait dépendre de la puissance maximale $P_{c_{max}}$. En isolant η_e dans (11), on obtient :

$$\eta_e = \frac{P_f}{\eta_h P_c + P_f} \quad (12)$$

et le rendement électrique minimal acceptable $\eta_{e_{min}}$ est alors donné par :

$$\eta_{e_{min}} = \frac{P_f}{\eta_h P_{c_{max}} + P_f} \quad (13)$$

Ainsi, en trouvant une fonction multi-paramétrique de $P_{c_{max}}$ (une surface de réponse), on pourra imposer *a posteriori* un rendement électrique minimal dépendant des paramètres de conception du moteur, de la pompe et du joint, du point d'opération (P_f) et du rendement hydraulique η_h . Les chapitres 5 à 8 traiteront donc de l'échauffement du sang et des aspects sus-mentionnés.

CHAPITRE 1

CONFIGURATION ET PARAMÈTRES DE L'ÉTUDE DU JOINT À ENCOCHES

1.1 Configuration de la pompe avec le joint à encoches

La figure 1.1 schématise la configuration de la pompe et du moteur avec le joint à encoches. Le trait pointillé horizontal montre la position de la tête des « dents » du stator entre lesquelles sont les encoches. L'écoulement passant dans celles-ci est représenté par la courbe pointillée.

1.2 Paramètres géométriques

La géométrie du joint à encoches, présentée à la figure 1.2, est définie par les paramètres du tableau 1.1. L'évasure de l'encoche est contrôlée par t_2 qui détermine a_2

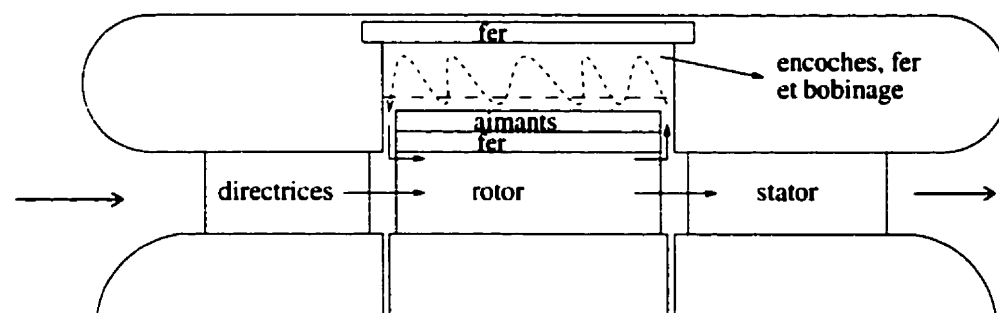


Figure 1.1: Configuration avec le joint à encoches

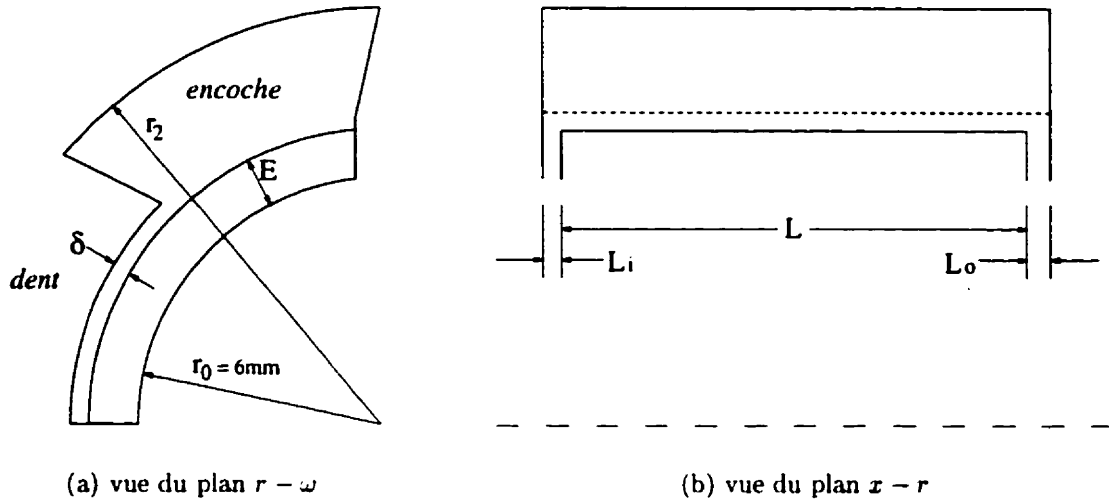


Figure 1.2: Géométrie du joint à encoches

selon :

$$a_2 = (1 - t_2)a_{2min} + (t_2)a_{2max} \quad \text{où} \quad a_{2min} = a_1 \quad \text{et} \quad a_{2max} = \frac{2\pi r_2}{n} \quad (1.1)$$

Ainsi, a_2 dépend de t_2 et de a_1 . De plus, le rayon interne r_0 est fixé à 6 mm. Il reste donc neuf paramètres géométriques indépendants.

Puisque la géométrie est périodique, on ne considère qu'un secteur correspondant à $\frac{2\pi}{n}$ radians de la circonférence (voir la figure 1.2(a)). On suppose donc que l'écoulement dans le joint est périodique, comme la géométrie.

1.3 Paramètres d'opération

La rotation de la couronne d'aimants induit, par l'adhérence du fluide, une composante circonférentielle à l'écoulement dans le joint. Il est donc naturel d'étudier l'effet de la vitesse de rotation ω .

Tableau 1.1: Paramètres géométriques du joint à encoches

1	n	Nombre d'encoches
2	L	Longueur de la couronne d'aimants
3	L_i	Longueur de l'entrée
4	L_o	Longueur de la sortie
-	r_0	Rayon interne de la couronne d'aimants et de la couche de fer
5	r_2	Rayon externe des encoches
6	δ	Entrefer
7	E	Épaisseur de la couronne d'aimants et de la couche de fer
8	a_1	Fraction circonférentielle non indentée du stator au rayon interne
-	a_2	Fraction circonférentielle non indentée du stator au rayon externe
9	t_2	Paramètre d'interpolation contrôlant a_2

En traversant le rotor, le sang subit un gain de pression qui provoque un retour d'écoulement par le joint. Cet écoulement à contresens est illustré par les flèches coudées à la figure 1.1. On introduit donc le paramètre d'opération Δp représentant la différence entre les pressions statiques en aval et en amont du rotor :

$$\Delta p = p_{\text{aval}} - p_{\text{amont}} \quad (1.2)$$

Évidemment, la pression dans la pompe n'est pas uniforme dans la direction radiale. Pour le joint, c'est la différence de pression au rayon r_0 qui importe. Ceci est implicite dans l'équation (1.2).

La figure 1.3 montre, en noir, les faces d'entrée et de sortie du joint. Comme l'écoulement dans le joint est à contresens de l'écoulement principal dans la pompe, l'entrée du joint se situe en aval et la sortie en amont. On distingue donc les ouvertures par l'imposition de la pression : celle-ci est plus élevée à l'entrée qu'à la sortie.

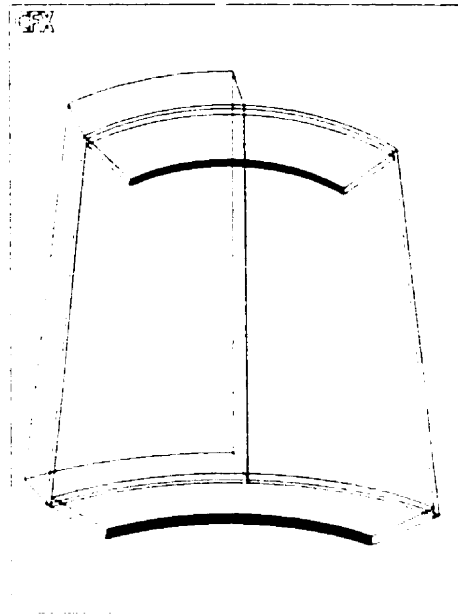


Figure 1.3: Entrée et sortie du joint

1.4 Paramètres de l'étude

Il y a donc 11 paramètres (aussi appelés *facteurs* en analyse statistique) dont on veut étudier l'effet : 9 paramètres géométriques et 2 paramètres d'opération. Le tableau 1.2 présente ces facteurs. Leurs valeurs minimales et maximales définissent l'espace expérimental dans lequel on admet qu'ils peuvent varier. Ces extrêmes sont déterminés par des contraintes géométriques pour la plupart des facteurs. Ceux des paramètres d'opération Δp et ω sont choisis afin de représenter une plage réaliste de conditions d'opération.

Les géométries obtenues lorsque les facteurs sont à leurs valeurs minimales et maximales sont présentées aux figures 1.4(a) et 1.4(b), respectivement. On peut ainsi apprécier la plage de variation géométrique de l'espace expérimental. La figure 1.4(c) présente une géométrie correspondant à un point de l'espace où les facteurs prennent une valeur médiane entre leurs extrêmes. On réfère plus loin au *centre* de l'espace

Tableau 1.2: Paramètres de l'étude et plages de variation

		unité	minimum	maximum
1	n	—	4	6
2	L	mm	8	16
3	L_i	μm	50	250
4	L_o	μm	50	250
5	δ	μm	50	250
6	r_2	mm	9.5	10.0
7	a_1	—	35	65
8	t_2	—	0	50
9	E	mm	1.5	3.0
10	Δp	Pa	6665	13330
11	ω	rad/s	1047.2	1466.1

expérimental pour désigner ce point.

1.5 Variables de réponse

La présente section introduit les variables de réponse d'intérêt : le couple, la puissance, le cisaillement et le débit.

1.5.1 Couple et puissance

Le couple additionnel imputable au joint est décomposé selon les régions de la couronne d'aimants. Quatre surfaces, présentées à la figure 1.5, sont définies :

1. Surface d'*entrée* : plan radial-circonférentiel en entrée du joint.
2. Surface de *sortie* : plan radial-circonférentiel en sortie du joint.
3. Surface de l'*encoche* : plan axial-circonférentiel sous l'encoche du stator.
4. Surface de l'*entrefer* : plan axial-circonférentiel sous la dent du stator.

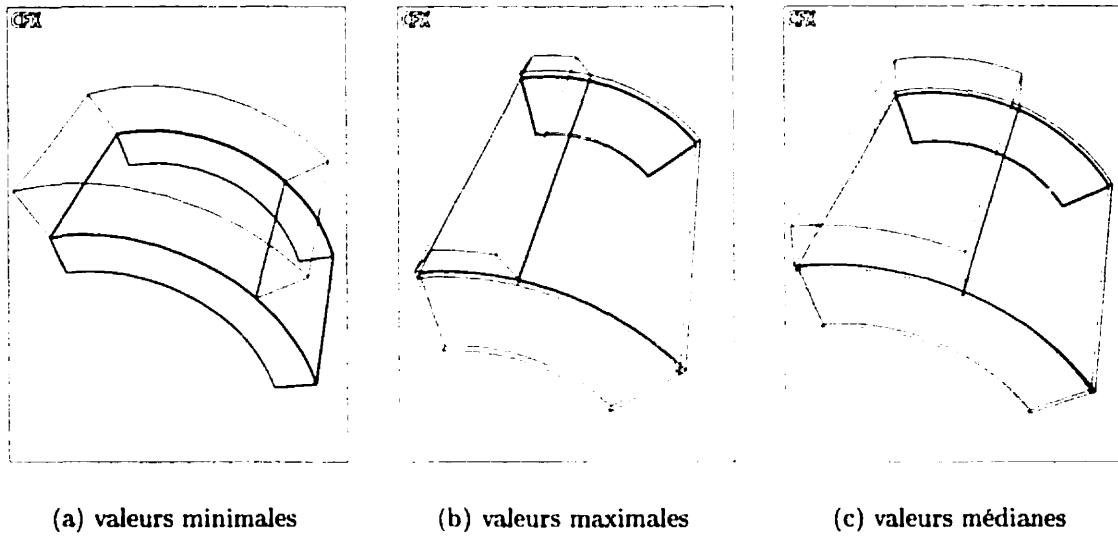


Figure 1.4: Plage géométrique de l'espace expérimental

Les couples correspondant à ces surfaces sont T_{entree} , T_{sortie} , $T_{encoche}$ et $T_{entrefer}$. Leur somme donne le couple total T_{tot} imposé par le joint et la puissance associée est $P_j = \omega T_{tot}$.

1.5.2 Cisaillement

L'hémolyse, c'est-à-dire la rupture de la membrane des globules rouges du sang, est une considération importante lors du design d'une pompe d'assistance cardiaque (voir Reul [7]). En effet, en se brisant, la membrane libère l'hémoglobine du globule dans le plasma. Or, un niveau excessif d'hémoglobine dans le sang peut s'avérer toxique et causer des problèmes rénaux.

Le dommage de la membrane des globules rouges dépend du cisaillement auquel le sang est exposé. De plus, dans les zones de haut cisaillement, les plaquettes libèrent des agents coagulants pouvant être la cause de thrombose. Pour quantifier le chargement imputable au cisaillement sur les particules de sang, Bludszuweit [8] utilise le

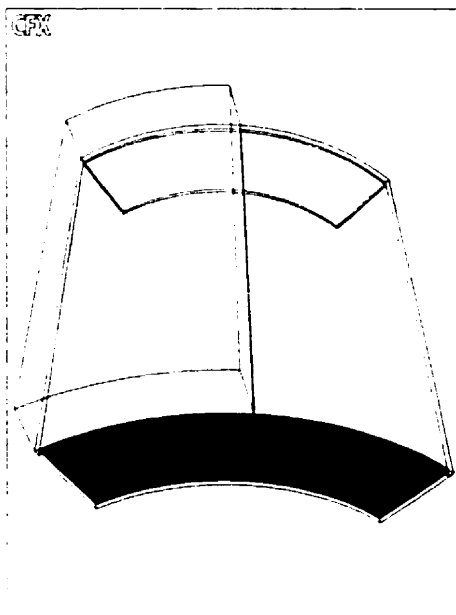
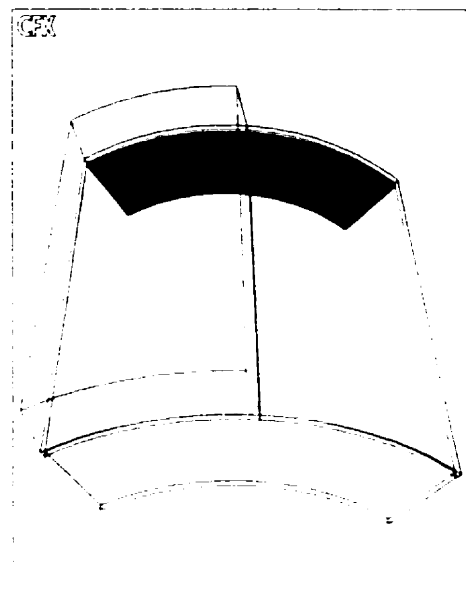
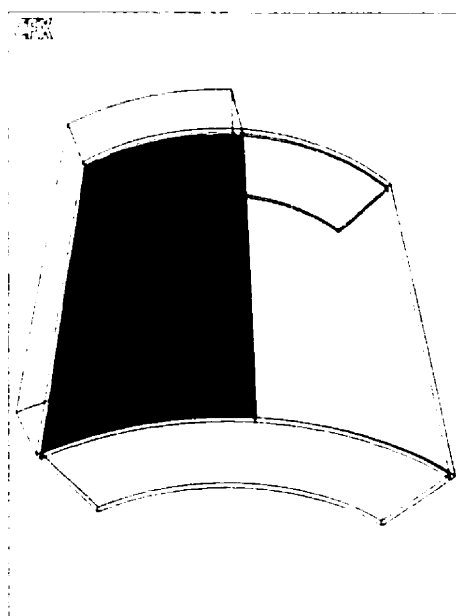
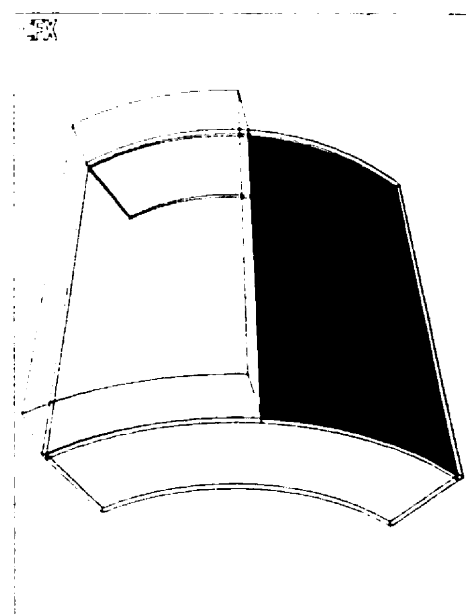
(a) *surface entrée*(b) *surface sortie*(c) *surface encoche*(d) *surface entrefer*

Figure 1.5: Surfaces de la couronne d'aimants

critère de von Mises τ_m défini par :

$$\tau_m = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}} \quad (1.3)$$

où σ_1 , σ_2 et σ_3 sont les contraintes principales du tenseur de contraintes visqueuses (voir Ryhming [9]). La résolution de l'écoulement dans le joint — par une méthode de volumes finis (voir le chapitre 2) — nous permettra d'obtenir un champ discret du scalaire τ_m . Puisqu'une quantité globale est nécessaire pour l'étude paramétrique, on définit la moyenne $\bar{\tau}_m$ comme suit :

$$\bar{\tau}_m = \frac{\sum_{i=1}^n v_i \tau_{mi}}{\sum_{i=1}^n v_i} \quad (1.4)$$

où i est l'indice et n le nombre des volumes finis de volume v_i . $\bar{\tau}_m$ est donc une moyenne de τ_m pondérée par le volume.

Selon la revue de Garon [10], la rupture des membranes des globules rouges dépend de l'historique du dommage ; celui-ci est lié au cisaillement — pas nécessairement de façon isotropique — et au temps d'exposition à ce cisaillement. On ne prétend donc pas quantifier l'hémolyse et le risque de thrombose dans un joint avec $\bar{\tau}_m$. On suppose cependant qu'ils y sont reliés de sorte qu'un joint ayant une grande valeur de $\bar{\tau}_m$ présente des risques élevés, sans plus.

1.5.3 Débit

D'une part, il est désirable de minimiser le débit traversant le joint dans l'optique de diminuer la quantité de sang risquant l'hémolyse. D'autre part, un certain débit doit être assuré afin d'éviter la coagulation du sang dans les zones à bas cisaillement.

On veut donc avoir une idée de l'influence qu'ont les paramètres sur le débit volu-

mique net Q_{net} traversant le joint. On s'intéresse aussi au débit volumique traversant l'entrée et la sortie du joint, Q_{in} et Q_{out} respectivement. Ces deux paramètres sont la somme de la valeur absolue du débit q_i traversant chaque face i des volumes de contrôle en entrée ou en sortie :

$$Q_{in,out} = \sum_{i=1}^{nfaces} abs(q_i) \quad (1.5)$$

CHAPITRE 2

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

2.1 Modélisation et CFX-TASCflow

On utilise le logiciel commercial CFX-TASCflow pour résoudre l'écoulement isotherme 3D du joint que l'on modélise par les équations de Navier-Stokes en régime laminaire pour un fluide à propriétés constantes. Dans ce cas, les équations de continuité et de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (2.2)$$

où $\mathbf{u}$ est le vecteur vitesse, p la pression statique, ρ la densité, et μ la viscosité. Les valeurs des propriétés physiques sont données au tableau 5.1 de la section 5.4. Ces équations sont discrétisées selon la méthode des volumes finis. Pour plus de détails, le lecteur intéressé peut consulter le manuel de théorie de TASCflow [11].

2.1.1 Régime laminaire

Considérons le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho u_o l_o}{\mu} \quad (2.3)$$

où u_o et l_o sont des échelles caractéristiques de vitesse et de longueur. On choisit $u_o = \omega(r_0 + E)$, soit la vitesse de rotation à la paroi externe de la couronne d'aimants, comme échelle de vitesse. Comme longueur caractéristique, on peut prendre l'entrefer δ ou la profondeur de l'encoche ($= r_2 - r_0 - E$). On choisit la profondeur car elle est plus grande que l'entrefer; on calcule ainsi un nombre de Reynolds maximal. Ce dernier est, selon les valeurs du tableau 1.2, inférieur à 10^4 dans l'espace expérimental. Ceci correspond à la limite inférieure de la plage où la transition turbulente ($10^4 \sim 10^5$) est observée. On conserve toutefois l'hypothèse d'écoulement laminaire en sachant qu'il se peut que l'écoulement soit légèrement turbulent à certains endroits. L'expérience nous a cependant montré que affecte très peu les variables globales. Anderson *et al.* [12] en viennent à la même conclusion en étudiant, avec CFX-TASCflow, le joint de la pompe centrifuge d'assistance ventriculaire CFVAD3. Or, le nombre de Reynolds caractéristique de leur joint étant de l'ordre de 10^5 , les phénomènes turbulents y sont potentiellement plus présents que pour notre cas. Ils rapportent de plus que la différence des distributions de pression et de vitesse est négligeable entre les solutions des équations de Navier-Stokes avec et sans le modèle de turbulence.

2.1.2 Pas de temps

On cherche une solution stationnaire de l'écoulement. Le terme transitoire $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ de l'équation (2.2) est toutefois conservé car il assure une relaxation à la procédure de solution des non-linéarités du système. Il est discrétisé selon un schéma d'Euler implicite. Si le pas de temps choisi est trop grand, le code peut ne pas converger et s'il est trop petit, le nombre d'itérations nécessaire augmente inutilement. En règle générale, le pas de temps doit être une fraction de l'échelle de temps caractéristique t_o du problème. Celle-ci peut être déterminée en divisant une longueur caractéristique

par une vitesse caractéristique.

On déduit l'échelle de temps de la rotation de la couronne d'aimants :

$$t_o = \frac{1}{\omega} \quad (2.4)$$

Ceci revient à diviser la vitesse circonférentielle à la surface de l'encoche par son rayon à cette surface. D'après le tableau 1.2, la valeur minimale de t_o est de 7×10^{-4} s ; un pas de temps de 10^{-4} s semble donc adéquat.

2.2 Maillage

Un mailleur a été codé afin de reproduire le format CFX-4 normalement généré par le programme CFX-Build [13] et importable dans TASCflow. Le mailleur construit le support géométrique de la solution discrète en fonction de quelques paramètres, à savoir le nombre d'éléments, les paramètres géométriques du joint et des poids de concentration de mailles. Les multiples variantes de la géométrie sont ainsi générées en un minimum de temps. Ce mailleur permet une reproduction systématique des maillages et un contrôle accru de leur qualité en comparaison à une construction interactive.

Le maillage 3D du joint est constitué d'hexahédres. Un maillage 2D est d'abord construit dans le plan radial-circonférentiel à l'aide d'une interpolation semi-isogéométrique. Une « extrusion » génère ensuite la dimension axiale du domaine. Le maillage résultant est structuré par zones.

2.2.1 Interpolation semi-isogéométrique

L'interpolation semi-isogéométrique est une variante de l'interpolation transfinie. Les deux méthodes génèrent des noeuds intérieurs en fonction d'une distribution paramétriquement rectangulaire de noeuds aux frontières. Pour les présenter brièvement, on introduit l'espace physique (x, y) du domaine à la figure 2.1(a) (borné par quatre courbes) et l'espace paramétrique discret (i, j) à la figure 2.1(b). Mathématiquement, il convient de remplacer l'espace discret (i, j) par un espace continu (u, v) , présenté à la figure 2.1(c). Pour que ce dernier soit unitaire, on définit la transformation de $(i, j) \rightarrow i = i_1, \dots, i_2$ et $j = j_1, \dots, j_2 \rightarrow$ vers (u, v) par :

$$u = \frac{i - i_1}{i_2 - i_1} \quad \text{et} \quad v = \frac{j - j_1}{j_2 - j_1} \quad (2.5)$$

Ainsi, les lignes de maillage i et j sont définies à des valeurs constantes de u et v ($0 \leq u, v \leq 1$) respectivement. Les quatre frontières courbes de l'espace physique correspondent à $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$ et $v = 1$. Comme (u, v) et (x, y) , sont des espaces continus, on peut définir une interpolation générale servant à obtenir la position $\mathbf{P}_{u,v}$ des noeuds intérieurs en fonction de la position des noeuds aux frontières, telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{u,v} = & (1 - w_1(u))\mathbf{P}_{0,v} + w_1(u)\mathbf{P}_{1,v} \\ & + (1 - w_2(v))\mathbf{P}_{u,0} + w_2(v)\mathbf{P}_{u,1} \\ & - w_1(u)(1 - w_2(v))\mathbf{P}_{1,0} - w_1(u)w_2(v)\mathbf{P}_{1,1} \\ & - (1 - w_1(u))(1 - w_2(v))\mathbf{P}_{0,0} - (1 - w_1(u))w_2(v)\mathbf{P}_{0,1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

où $w_1(u)$ et $w_2(v)$ sont des fonctions d'interpolation.

L'interpolation transfinie consiste simplement à poser $w_1 = u$ et $w_2 = v$. Le désavantage de cette méthode est qu'elle ne tient pas compte de la distribution des noeuds

aux frontières car seuls les indices i et j de l'espace discret servent à définir u et v . Ainsi, pour une distribution non-uniforme des noeuds aux frontières, l'interpolation transfinie génère des maillages tordus qui sortent parfois du domaine ou qui dégénèrent par recouvrement. Or, en volumes finis, de tels comportements s'avèrent nuisibles lors de l'évaluation du Jacobien (pour le passage au volume de référence) et des flux à l'interface des volumes.

Ce problème est en partie corrigé par l'interpolation semi-isogéométrique car elle tient compte de la distribution des noeuds aux frontières lors de l'évaluation des fonctions d'interpolation w_1 et w_2 . Afin d'expliquer la méthode, on introduit à la figure 2.1(d) l'espace cubique unitaire (s, t) sur lequel les frontières de l'espace (x, y) sont projetées en conservant la distribution des noeuds. La courbe $u = 0$ de l'espace (x, y) correspond à la droite $s = 0$ du plan (s, t) , ainsi de suite. La projection des noeuds sur s et t s'effectue selon une paramétrisation de la longueur d'arc des frontières de l'espace (x, y) :

$$\delta C_i = \frac{C_i}{C_{tot}} \quad (2.7)$$

où δC_i est la coordonnée paramétrique (s_i ou t_i) du noeud i d'une frontière courbe, C_i est l'arc de la frontière entre les noeuds 0 et i , et C_{tot} est la longueur d'arc totale de la frontière. Afin de placer un noeud interne du maillage, on relie avec une droite sur l'espace (s, t) les deux paires de noeuds frontières correspondant aux mêmes valeurs u et v selon l'équation (2.5). L'intersection de ces deux droites correspond à des coordonnées (s_x, t_x) de l'espace local (s, t) . Si les coordonnées des noeuds aux frontières sont notées $(s_b, 0)$, $(s_h, 1)$, $(0, t_b)$ et $(1, t_h)$ — voir la figure 2.1(d)) — , on

obtient les valeurs s_x et t_x en résolvant le système suivant :

$$\begin{aligned} s_x &= s_b + (s_h - s_b)t_x \\ t_x &= t_b + (t_h - t_b)s_x \end{aligned} \tag{2.8}$$

et l'interpolation semi-isogéométrique consiste à prendre $w_1 = s_x$ et $w_2 = t_x$ dans (2.6).

On compare les interpolations transfinie et semi-isogéométrique à la figure 2.2 sur un même domaine, où des fonctions de concentration sont spécifiées sur les frontières. Les éléments obtenus par l'interpolation transfinie perdent leur orthogonalité là où les noeuds sont concentrés dans la direction radiale. L'interpolation semi-isogéométrique équilibre la perte d'orthogonalité dans la direction radiale, augmentant ainsi l'angle minimal des éléments.

On aurait aussi pu générer le maillage à l'aide d'une méthode elliptique, c'est-à-dire avec la résolution du système obtenu de l'équation de Laplace. Avec une telle méthode, les risques de chevauchement des lignes d'une même famille paramétrique sont très faibles. Cependant, comme le montre la figure 2.3, la concentration aux frontières n'est pas propagée à l'intérieur du maillage et les lignes tendent à être équidistantes à l'intérieur du domaine. D'après Thompson et *al.*, il faut ajouter des termes sources (fonctions de contrôle) au Laplacien pour pallier à cet effet indésirable ; on résout alors une équation de type Poisson. Cela n'a pas été implanté, les maillages générés par l'interpolation semi-isogéométrique étant très satisfaisants.

2.2.2 Concentration

Les fonctions de concentration sont basées sur un schéma exponentiel inspiré de l'interpolation en volumes finis. Par exemple, pour le schéma de concentration décentré,

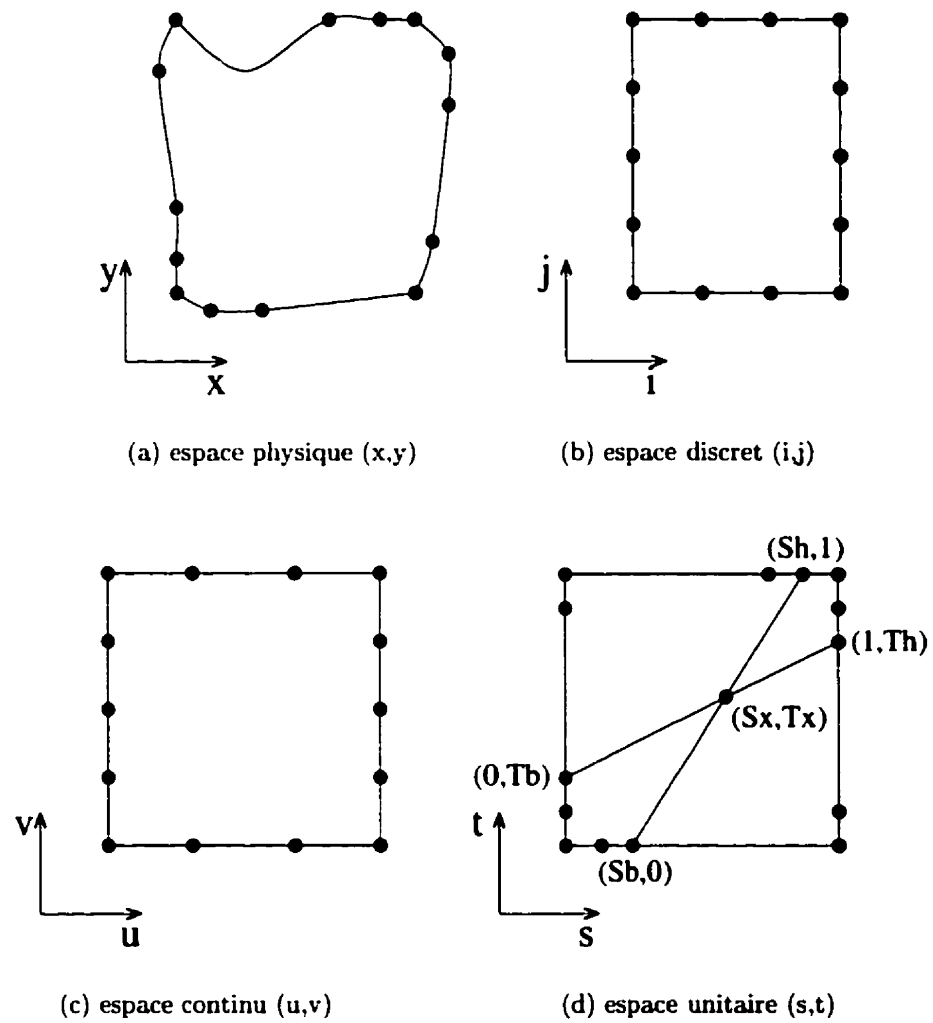
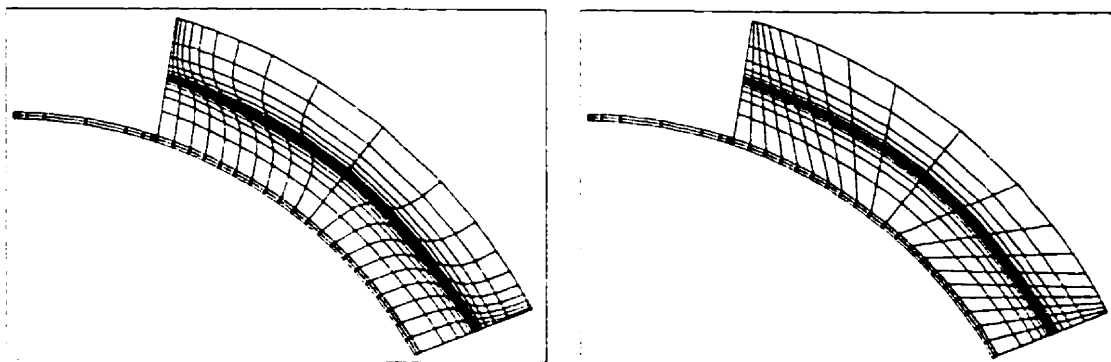


Figure 2.1: Espaces de l'interpolation transfinie et semi-isogéométrique



(a) Interpolation transfinie

(b) Interpolation semi-isogéométrique

Figure 2.2: Génération de maillage par interpolation

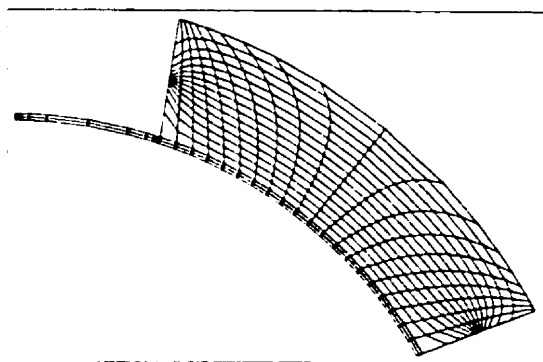


Figure 2.3: Maillage elliptique

la coordonnée paramétrique δC_i ($0 \leq \delta C_i \leq 1$) d'un noeud i sur une frontière est donnée par :

$$\delta C_i = \frac{e^{-at} - 1}{e^{-a} - 1} \quad \text{où} \quad t = \frac{i - 1}{n_i - 1} \quad (2.9)$$

où n_i est le nombre de noeuds i à distribuer sur la frontière et a est un paramètre contrôlant l'intensité de concentration. Plus la valeur absolue de a est élevée, plus la concentration des noeuds sera forte à une des extrémités de la courbe.

On détermine les paramètres de concentration en utilisant la géométrie du centre de l'espace expérimental : selon une appréciation visuelle, les éléments sont simplement plus regroupés aux endroits où on anticipe d'importants gradients dans la solution. Cette méthode *a priori* ne permet certes pas d'obtenir un rendement optimal du résolveur en fonction du nombre de noeuds ; elle est toutefois adéquate pour notre application. La figure 2.4 montre le maillage ainsi obtenu.

Notons que les maillages des joints de l'étude paramétrique comportent un même nombre de noeuds, distribués avec les mêmes paramètres de concentration, et cela, même si la géométrie change d'un joint à l'autre.

2.2.3 Étude de raffinement et taille du maillage

Afin de déterminer la taille du maillage pour l'étude paramétrique, on effectue une étude de raffinement en obtenant avec quatre maillages des solutions au centre de l'espace expérimental — on suppose donc que ce point de l'espace est représentatif de l'espace entier. Le tableau 2.1 présente les caractéristiques des maillages, soit le paramètre de raffinement r , le nombre de volumes de contrôle, le nombre de noeuds et le temps de calcul nécessaire à réaliser 250 itérations temporelles sur une station

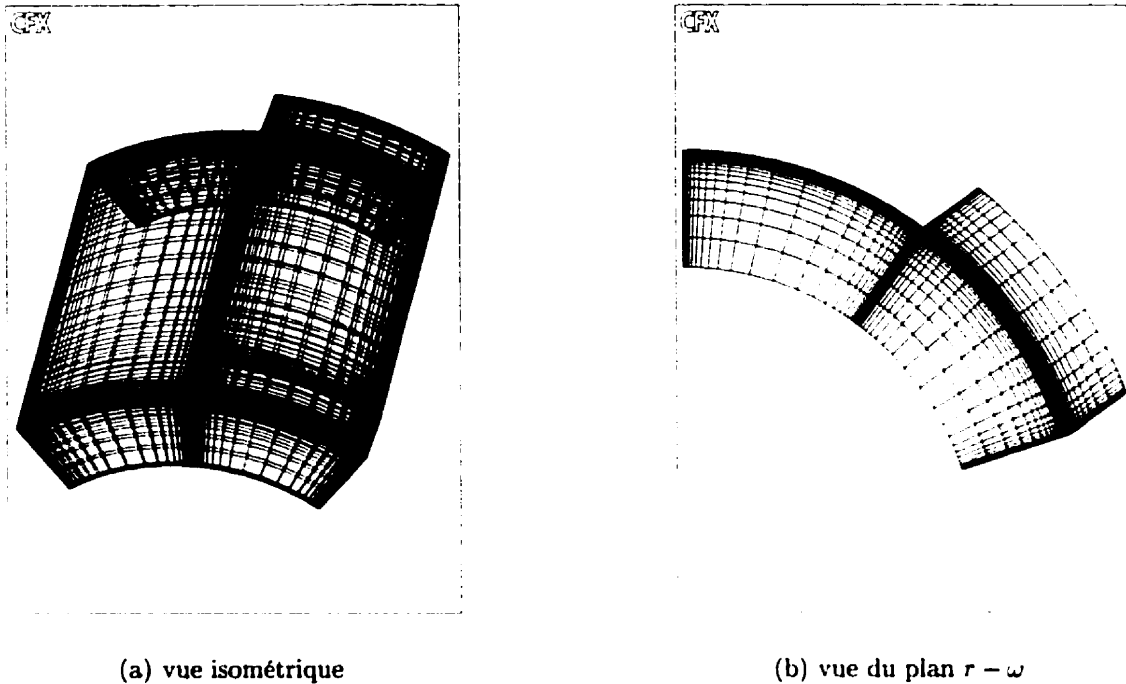


Figure 2.4: Maillage de base pour l'étude paramétrique

IBM 260. On définit le paramètre de raffinement r comme le ratio du nombre de noeuds d'un maillage sur le nombre de noeuds du maillage $m1$. Ce ratio est identique pour chacune des trois directions paramétriques.

Le tableau 2.2 présente les variables Q_{net} , P_j et $\bar{\tau}_m$ obtenues avec les quatre maillages après 200 et 245 itérations. Les valeurs exactes de ces réponses n'étant pas connues, on se base sur celles obtenues avec le maillage le plus raffiné ($m4$) pour estimer

Tableau 2.1: Caractéristiques des maillages de l'étude de raffinement

maillage	r	volumes	noeuds	temps (min)
$m1$	1	4750	6660	20
$m2$	2	38000	45265	108
$m3$	3	128250	144320	318
$m4$	4	304000	332325	729

Tableau 2.2: Étude de raffinement sur Q_{net} , P_j et $\bar{\tau}_m$

maillage	200 ^e itération		245 ^e itération	
	valeur	ϵ	valeur	ϵ
Q_{net}				
$m1$	0,2178	0,02	0,2180	0,02
$m2$	0,1995	0,003	0,1996	0,002
$m3$	0,1977	0,0007	0,1979	0,0002
$m4$	0,1969	—	0,1981	—
P_j				
$m1$	2,357	0,3	2,357	0,3
$m2$	2,078	0,03	2,076	0,02
$m3$	2,050	0,005	2,049	0,006
$m4$	2,046	—	2,054	—
$\bar{\tau}_m$				
$m1$	85,8	1,9	86,1	2
$m2$	86,6	0,92	87,4	0,2
$m3$	87,0	0,49	87,8	0,2
$m4$	87,4	—	87,6	—

l'erreur absolue ϵ ; par exemple, pour le débit net, on aura :

$$\epsilon^{mi} = \text{abs}(Q_{net}^{m4} - Q_{net}^{mi}) \quad (2.10)$$

Les valeurs obtenues sur le maillage $m4$ présentent certainement une erreur. L'estimation de ϵ selon l'expression précédente est donc nécessairement entachée de cette erreur.

On se sert de l'erreur absolue ϵ pour déterminer le nombre de chiffres significatifs. Selon la règle de la définition présentée par Fortin [14], pour que le chiffre correspondant à la m^e puissance de 10 soit significatif, on doit avoir :

$$\epsilon \leq 0,5 \times 10^m \quad (2.11)$$

Ainsi, d'après le tableau 2.2, on obtient pour toutes les variables de réponse, un chiffre significatif avec le maillage $m1$ et deux chiffres significatifs avec le maillage $m2$, sauf pour $\bar{\tau}_m$ où on a un seul chiffre significatif à la 200^e itération. Avec le maillage $m3$, on obtient deux chiffres significatifs pour $\bar{\tau}_m$ et deux ou trois chiffres significatifs selon l'itération pour Q_{net} et P_j . On ne peut donc pas affirmer avec certitude que les réponses sur le maillage $m3$ ont un chiffre significatif de plus que sur le maillage $m2$.

Ces considérations étant établies, on choisit un maillage légèrement plus raffiné ($r=2,6$) que le maillage $m2$ afin de s'assurer de 2 chiffres significatifs et compenser pour la probable erreur sur l'estimation de l'erreur. Le maillage comporte 83 486 éléments et 95 620 noeuds ; 2 heures de temps de calcul sont nécessaires afin d'effectuer 245 itérations.

Enfin, comme il est fort probable que l'erreur de T_{entree} , T_{sortie} , $T_{encoche}$, $T_{entrefer}$ et T_{tot} se comporte comme celle de P_j et que celle de Q_{in} et de Q_{out} soit du même ordre que celle de Q_{net} , on suppose que toutes les variables de réponse ont deux chiffres significatifs.

2.3 Conditions aux frontières

La couronne d'aimants tourne à la vitesse de rotation ω ; on impose donc cette vitesse sur ses parois qui sont illustrées à la figure 1.5.

En entrée et en sortie (voir la figure 1.3), on impose une pression statique constante sur toutes les faces des volumes de contrôle : on la fixe à Δp en entrée ; selon l'équation (1.2), elle doit être nulle en sortie. La direction de l'écoulement est laissée libre, c'est-à-dire que l'écoulement peut entrer et sortir, tant à l'entrée qu'à la sortie.

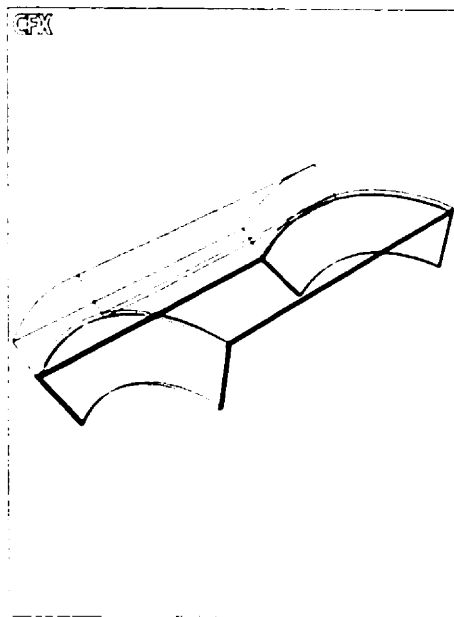


Figure 2.5: Parois périodiques

Comme on suppose une périodicité de l'écoulement dans le joint, le champ discret aux parois axiales-radiales, montrées en noir sur la figure 2.5, est le même. On impose ceci dans CFX-TASCflow en choisissant l'interface de maillage *periodic* pour les faces correspondantes.

Le reste du domaine est constitué de parois solides stationnaires ; la vitesse y est nulle et aucun flux ne les traverse.

2.4 Convergence

Les valeurs initiales du champ de vitesse et de pression ne satisfont normalement pas les équations et les conditions aux frontières. Le terme transitoire des équations de Navier-Stokes sert à itérer temporellement afin d'aider à converger vers une solution stationnaire — si une telle solution existe.

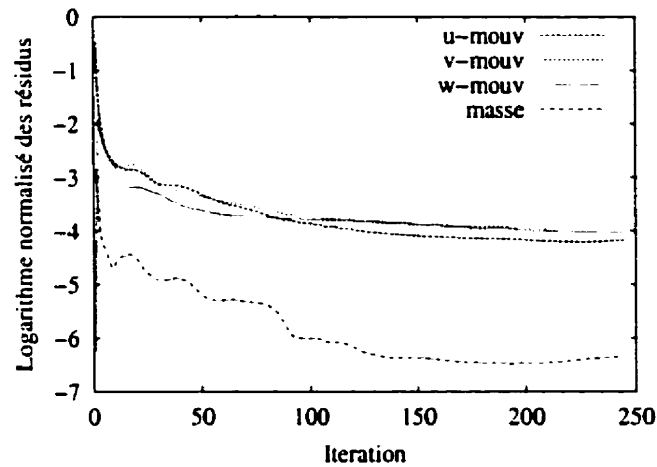


Figure 2.6: Historique de convergence

La figure 2.6 présente l'historique de convergence pour un cas typique. Le logarithme normalisé de la norme euclidienne des résidus des équations est tracé à chaque pas de temps. Les résidus devraient, pour une solution stationnaire convergée, tendre vers le zéro de la machine. Ce n'est pourtant pas le cas à la figure 2.6 après 250 itérations. Soit que le pas de temps de 10^{-4} , étant trop grand, déstabilise la solution, ou soit qu'il n'existe pas de solution stationnaire au problème. Or, un pas de temps de 10^{-5} n'a pas donné de meilleurs résultats. Il semble donc que la seconde explication est plus plausible. C'est ce que Farinas et *al.* [3,4] ont d'ailleurs observé : ils rapportent un effet de pompage dans le joint causant des variations périodiques de débit.

On présage donc des variations temporelles de la solution. Le tableau 2.3 présente les valeurs de Q_{net} , P_j et $\bar{\tau}_m$ obtenues au le centre de l'espace expérimental à partir de la 200^e itération. Malgré les résidus normalisés stagnants, la variation des réponses n'est observable que sur le quatrième chiffre pour Q_{net} et P_j et sur le troisième chiffre pour $\bar{\tau}_m$. Comme on a établi à la section 2.2.3 que deux chiffres significatifs sont estimés pour les réponses, la grandeur de ces variations importe peu et semble être dominée par l'erreur de discrétisation.

Tableau 2.3: Variation temporelle des réponses dans le temps

itération	variable		
	Q_{net}	P_j	$\bar{\tau}_m$
200	.1982	2.055	86.90
215	.1981	2.055	87.21
230	.1982	2.054	87.49
245	.1983	2.053	87.73

CHAPITRE 3

APPROCHE STATISTIQUE

On veut déterminer, parmi les 11 paramètres définis à la section 1.4, ceux ayant un effet dominant sur les variables de réponse, c'est-à-dire les facteurs clefs du système. Une étude de « tamisage » est donc de mise.

3.1 Plan de tamisage à 32 essais

Les facteurs prennent normalement deux modalités lors d'une étude de tamisage. Il convient de les choisir aux extrêmes de l'espace expérimental. On se réfère donc au tableau 1.2 pour les valeurs des modalités basse et haute. Celles-ci sont *codées* par 1 et -1 respectivement pour référence ultérieure.

Avec 11 facteurs, un plan complet à deux modalités compte $2^{11} = 2048$ essais. Pour le tamisage, il est inutile d'en effectuer autant ; on sacrifie normalement l'évaluation des effets d'interactions au profit de celle des effets principaux des facteurs par fractionnement du plan. C'est l'esprit des plans fractionnels factoriels de type « $2^{(k-p)}$ » où k est le nombre de facteurs étudiés et p le nombre de facteurs générés par les interactions d'un design factoriel complet 2^k . Un plan fractionnel n'est pas à *résolution* complète, c'est-à-dire que certains effets d'interactions sont confondus avec d'autres interactions ou même avec des effets principaux.

Avec un plan fractionnel factoriel « $2^{(11-7)}$ » de 16 essais, la résolution obtenue est de III, c'est à dire que les effets principaux sont confondus avec ceux des interactions

doubles. À la limite, cela pourrait convenir, mais en ajoutant 16 essais supplémentaires — une réflexion du plan de base où les modalités sont inversées — on obtient une résolution de IV : les effets principaux des facteurs ne sont pas confondus avec ceux des interactions doubles mais les effets d'interactions sont confondus entre eux. Or, une résolution de IV est recommandé par Clément [15] pour les études de tamisage.

Le plan d'expérience choisi est donc constitué de 32 essais : le plan de 16 essais de base et sa réflexion. Par rapport à un plan conventionnel de 32 essais, ceci a l'avantage de permettre l'analyse des résultats du premier plan à 16 essais (avec une résolution de design de III) advenant le cas où les 16 essais suivants ne puissent être effectués. Les modalités codées des facteurs sont présentées, pour chaque essai, au tableau 3.1.

3.2 Inclusion des paramètres d'opération

Il peut sembler étrange d'inclure les paramètres d'opération ω et Δp dans le plan d'expérience. On aurait pu choisir un même régime d'opération pour tous les essais et ainsi alléger le plan d'expérience de 2 facteurs pour ne considérer que la géométrie. Cependant, la résolution du plan à 32 essais demeure IV avec 9 facteurs et il peut être intéressant, dans le cadre du développement de la pompe, de connaître l'effet des paramètres d'opération.

3.3 Répétitions

Afin de rendre l'étude indépendante des très légères variations temporelles de la solution, la cueillette des résultats est effectuée aux 200^e, 215^e, 230^e et 245^e itérations.

Comme nous faisons des expériences numériques, on ne prétend toutefois pas pouvoir estimer l'erreur expérimentale avec cette forme de répétitions.

3.4 Modèle de régression

Le fait que les facteurs prennent seulement deux modalités limite la régression à un modèle linéaire. Pour un essai i du plan d'expérience ($i=1,\dots,32$), on établit donc le modèle suivant avec les données :

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{11} \beta_j x_{i,j} + \varepsilon_i \quad (3.1)$$

où y_i est la réponse observée, β_0 et les β_j sont des constantes à estimer, $x_{i,j}$ est la valeur codée du facteur j à l'essai i (-1 ou 1) et ε_i est l'erreur. Comme le plan d'expérience est de résolution IV, les termes bilinéaires d'interactions sont omis du modèle car leurs effets ne sont pas estimables indépendamment. Ce choix convient pour le tamisage : il fait ressortir les effets principaux des facteurs et facilite l'identification de ceux qui dominant la réponse. Suivant une régression par moindres carrés sur ε_i pour estimer β_0 et les β_j , on obtient un modèle de prédiction pour chaque variable de réponse selon :

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^{11} \hat{\beta}_j \hat{x}_j \quad (3.2)$$

où $\hat{y}$ est l'estimé de la variable de réponse y par le modèle, $\hat{\beta}_0$ est la constante moyennne, $\hat{\beta}_j$ est le demi-effet du facteur j et $\hat{x}_j$ est sa valeur codée. Afin de faciliter la compréhension et d'alléger la notation, on remplace l'indice j des demi-effets par le symbole du facteur correspondant à chacun d'eux et on laisse tomber les chapeaux. $\hat{\beta}_1$ devient donc β_n , $\hat{\beta}_2$ devient β_L et ainsi de suite. La moyenne demeure $\hat{\beta}_0$. En

développant, le modèle devient :

$$y = \beta_0 + \beta_n n + \beta_L L + \beta_{L_i} L_i + \beta_{L_o} L_o + \beta_\delta \delta + \beta_{r_2} r_2 \\ + \beta_{a_1} a_1 + \beta_{t_2} t_2 + \beta_E E + \beta_{\Delta p} \Delta p + \beta_\omega \omega \quad (3.3)$$

Rappelons que les facteurs de cette équation sont en valeurs codées. S'ils sont fixés à la modalité milieu (0), seul β_0 contribue à la réponse y . Il représente donc la prédiction de la réponse au centre de l'espace expérimental et, indépendamment de l'effet des facteurs, il nous renseigne sur son ordre de grandeur. La valeur d'un demi-effet représente la variation prévue de la réponse lorsqu'un facteur passe de sa modalité milieu (0) à sa modalité haute (1) — alors que l'effet représente la variation prévue de la réponse lorsqu'un facteur passe de sa modalité basse à sa modalité haute. Le codage est donc une façon de normaliser qui permet de comparer significativement l'effet des facteurs entre eux.

Pour obtenir une équation de prédiction avec les valeurs non-codées, il suffit d'introduire la transformation suivante (elle relie les valeurs codées à celles non-codées) dans l'équation (3.3) pour chacun des facteurs :

$$x_j = \frac{2\phi - (\phi_{max} + \phi_{min})}{\phi_{max} - \phi_{min}} \quad (3.4)$$

où ϕ est la valeur d'un facteur et ϕ_{max} et ϕ_{min} sont ses valeurs à modalité haute et basse respectivement.

3.5 Coefficient de détermination

Le coefficient de détermination R^2 des régressions est une mesure de l'efficacité d'un modèle à expliquer la variabilité originale encourue à travers le plan d'expérience.

C'est le ratio entre la variabilité du modèle ss_{mod} et la variabilité totale ss_{tot} autour de la grande moyenne de la variable de réponse $\bar{\bar{y}}$:

$$R^2 = \frac{ss_{mod}}{ss_{tot}} \quad (3.5)$$

où :

$$\begin{aligned} ss_{mod} &= nrep \sum_{i=1}^{ne} (\hat{y}_i - \bar{\bar{y}})^2 \\ ss_{tot} &= \sum_{i=1}^{ne} \sum_{k=1}^{nrep} (y_{i,k} - \bar{\bar{y}})^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

où $\hat{y}_i$ est la valeur prévue par le modèle pour l'essai i , $y_{i,k}$ est la valeur obtenue à l'essai i à la répétition k , $nrep$ est le nombre de répétitions (4 dans notre cas) et ne le nombre d'essais. R^2 prend des valeurs entre 0 et 1 ; plus il est élevé, plus le modèle explique la variabilité des données et mieux ses prédictions les recouvrent.

3.6 Donnée manquante

Le maillage de la géométrie du 13^e essai, montrée à la figure 3.1, comporte des angles inférieurs à 1° dans les éléments se trouvant dans l'encoche ; cette perte majeure d'orthogonalité nous empêche d'obtenir les résultats pour cet essai. Bien qu'il soit possible de mailler le domaine autrement, le temps requis pour cela surpasse le désavantage imputable à la donnée manquante. Il est en effet tout à fait possible d'obtenir les modèles prévus sans la donnée de l'essai 13 sans que la qualité en souffre considérablement.

La donnée manquante occasionne une légère perte d'orthogonalité du plan d'expérience, c'est-à-dire que l'effet d'un facteur ne peut être estimé de façon parfaitement

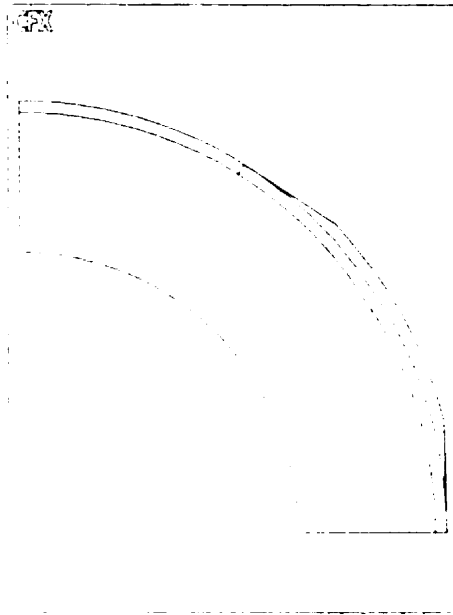


Figure 3.1: Géométrie de l'essai 13

indépendante de celui des autres.

Une possibilité serait de remplacer les variables de réponse de l'essai manquant par des prédictions faites à l'aide des 16 essais du plan réfléchi. On pourrait ensuite faire la régression avec les 32 essais de la façon prévue pour le plan orthogonal. On aurait toutefois altéré la résolution globale car les prédictions faites à l'aide des essais du plan réfléchi seraient nécessairement de résolution III. Il y a mieux et plus simple : les possibilités de régression linéaire pour designs quelconques, offertes par Statistica de StatSoft, permettent de déterminer les coefficients β des modèles selon l'équation (3.3) avec les résultats des 31 essais. La régression est plus complexe — cela ne pose aucun problème puisque Statistica l'effectue — mais on évite ainsi le remplacement des données de l'essai 13 et on préserve ainsi la résolution IV. Pour plus de détails, on invite le lecteur à consulter le manuel de Statistica [16].

CHAPITRE 4

RÉSULTATS ET DISCUSSION

4.1 Modèles

Le tableau 4.1 présente les demi-effets β des facteurs et la moyenne β_0 pour les variables de réponse P_j , $\bar{\tau}_m$ et Q_{net} — des modèles ont été construits pour toutes les réponses introduites à la section 1.5 mais il est inutile de lister ici leurs coefficients. On a inséré le coefficient de détermination R^2 (voir la section 3.5) des régressions : les valeurs de 0,88 et 0,82 sont satisfaisantes pour P_j et $\bar{\tau}_m$. Le modèle régressé sur la réponse Q_{net} explique par contre moins bien la variabilité générée, son coefficient de régression étant de 0,63.

4.1.1 Valeurs optimales et utilisation des modèles

Les modèles étant linéaires, les extrémums des valeurs de prédiction se trouvent nécessairement aux frontières de l'espace. Cela permet tout de même, en considérant le signe des coefficients des modèles, de déterminer si un facteur cause une diminution ou une augmentation de la réponse lorsqu'il est augmenté.

Ainsi, le tableau 4.2 présente les valeurs codées des facteurs minimisant P_j . En insérant ces valeurs dans le modèle de régression de l'équation (3.3), on obtient un puissance de $-1,60$ W. Cette valeur négative démontre l'inadéquation du modèle linéaire pour les prédictions. Il faut se rappeler qu'avec 32 essais et 11 facteurs, on

Tableau 4.1: Coefficients des modèles

	P_j	$\bar{\tau}_m$	Q_{net}
R^2	0,88	0,82	0,63
β_0	3,78	$1,76 \times 10^2$	$8,71 \times 10^{-2}$
β_n	$2,34 \times 10^{-2}$	-6,70	$-9,82 \times 10^{-3}$
β_L	$8,54 \times 10^{-1}$	$-2,37 \times 10^1$	$1,07 \times 10^{-2}$
β_{L_i}	$-2,47 \times 10^{-1}$	3,78	$6,54 \times 10^{-2}$
β_{L_o}	$-2,18 \times 10^{-1}$	3,31	$5,90 \times 10^{-2}$
β_δ	-1,38	$1,02 \times 10^1$	$-8,88 \times 10^{-3}$
β_{r_2}	$-2,33 \times 10^{-2}$	$-1,40 \times 10^1$	$9,30 \times 10^{-3}$
β_{a_1}	$9,26 \times 10^{-2}$	$4,23 \times 10^1$	$-1,17 \times 10^{-2}$
β_{t_2}	$-1,68 \times 10^{-3}$	$3,49 \times 10^1$	$-1,36 \times 10^{-2}$
β_E	1,19	$1,14 \times 10^2$	$-1,04 \times 10^{-2}$
$\beta_{\Delta p}$	$-5,53 \times 10^{-2}$	-5,36	$8,11 \times 10^{-3}$
β_ω	1,30	$3,49 \times 10^1$	$-1,56 \times 10^{-2}$

Tableau 4.2: Valeurs codées minimisant la puissance P_j

n	L	L_i	L_o	δ	r_2	a_1	t_2	E	Δp	ω
-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1

fait une étude de tamisage — et non de modélisation —, tentant de mettre en évidence les paramètres clefs du système et de déterminer de quelle façon ils affectent les variables de réponse, *i.e.* à la hausse ou à la baisse. Une fois identifiés, les facteurs clefs peuvent servir à la construction de modèles de prédictions (surfaces de réponse). Ceci nécessite bien entendu des essais supplémentaires dans l'espace expérimental, pas seulement à ses frontières.

4.1.2 Validation : centre de l'espace expérimental et courbure

On compare les prédictions des modèles aux résultats d'une simulation effectuée au centre de l'espace expérimental où tous les facteurs sont à la modalité codée 0. Les coefficients β_0 sont donc les seuls à contribuer aux prédictions.

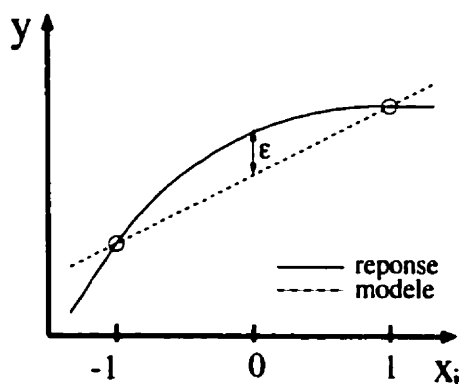


Figure 4.1: Linéarité du modèle et courbure de la réponse

Les écarts entre les prédictions et les simulation sont symptomatiques de la « courbure » des réponses, celle-ci n'étant pas prise en compte par le modèle linéaire. Pour illustrer ceci, la figure 4.1 représente la réponse hypothétique (ligne pleine) d'une variable y en fonction du facteur x_i (la situation est plutôt difficile à illustrer avec 11 facteurs... le lecteur devra faire preuve d'abstraction et se l'imaginer). La réponse étant courbe, le modèle linéaire (ligne hachurée) ne peut la représenter de sorte qu'il existe une différence ε entre la valeur prédite par le modèle et la réponse du système. On évalue donc cette différence au centre de l'espace expérimental ; plus elle est petite, plus la réponse a un comportement linéaire dans celui-ci.

Le tableau 4.3 présente les résultats pour les réponses P_j , $\bar{\tau}_m$ et Q_{net} . La différence, basée sur la valeur de simulation, est supérieure à 55 % pour les trois réponses, ce qui est symptomatique d'une courbure considérable du système. Cela explique en partie la valeur négative prévue pour P_j à la section précédente. Sans essais supplémentaires, on ne peut toutefois estimer l'effet non-linéaire attribuable à chaque facteur. Vu leur grand nombre, il est possible que la portion de la courbure attribuable à chacun d'eux soit relativement faible. Il ne faut donc pas rejeter les régressions linéaires ; malgré la courbure, elles nous permettent très bien d'identifier les facteurs clefs du système.

Tableau 4.3: Centre de l'espace expérimental : prédictions vs simulations

	P_j	$\bar{\tau}_m$	Q_{net}
prédiction	3,78	176	0,0871
simulation	2,06	87,3	0,198
différence (%)	83	102	56

4.2 Diagrammes de Pareto et facteurs dominants

On présente dans cette section les diagrammes de Pareto des variables de réponse. En présentant les facteurs classés selon l'importance de leur effet (2β), ils permettent de déterminer du coup d'oeil les facteurs dominants d'un système. L'identification des facteurs sur les figures est légèrement différente de celle du texte ; δ est représenté par DEL, ω par W, Δp par DP, L_o par LO, n par N, etc. Afin de mettre l'accent sur la l'ampleur des effets, on trace leur valeur absolue. Ils sont cependant affectés d'un signe + ou - indiquant qu'un effet est positif ou négatif. On dira d'ailleurs d'un facteur qu'il *affecte positivement* ou *négativement* une réponse selon son signe.

Il est important de rappeler, à ce point, que l'effet d'un facteur représente la variation prévue de la variable de réponse lorsqu'il passe de sa modalité basse à sa modalité haute. L'effet d'un facteur est donc étroitement lié au choix de ses modalités pour le plan d'expérience ; on conçoit aisément que des modalités plus larges entraînent nécessairement des effes plus importants, et *vice versa*. Par exemple, si la plage de l'entrefer était de 140 à 160 μm plutôt que 50 à 250 μm , il est fort probable que son effet sur les variables de réponse aurait diminué. Ainsi, lorsqu'un facteur est dominant par rapport aux autres, il faut se rappeler que cette dominance est en partie attribuable au choix des modalités.

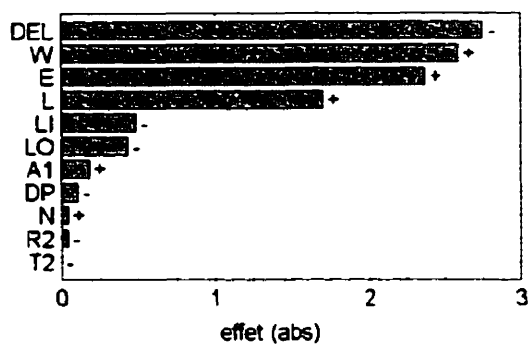
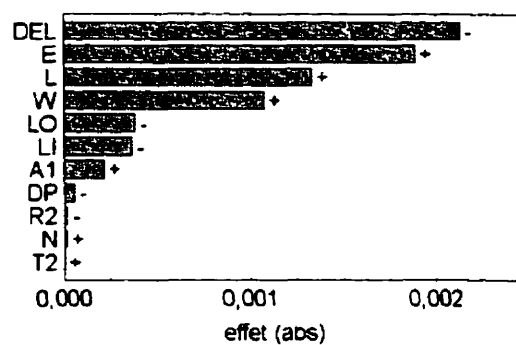
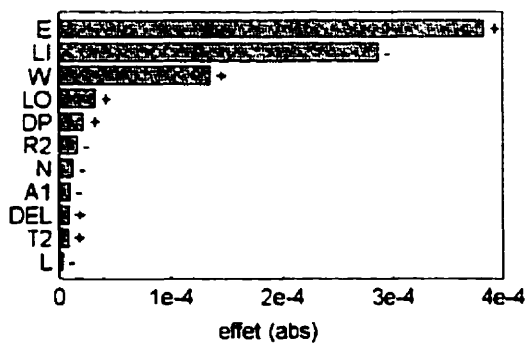
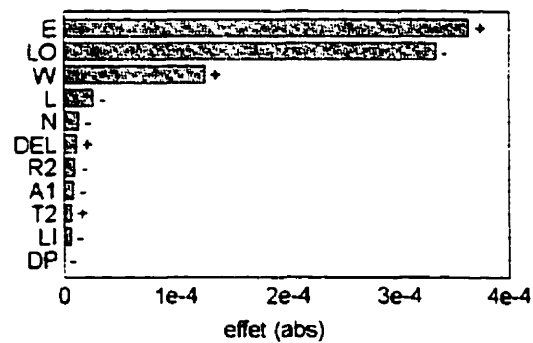
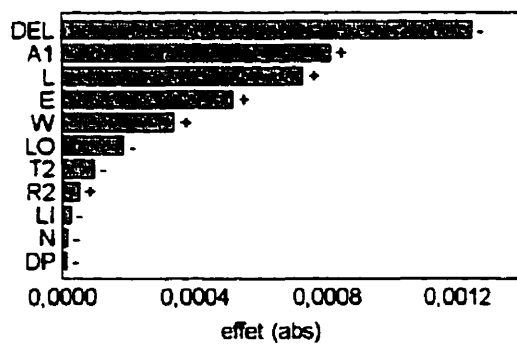
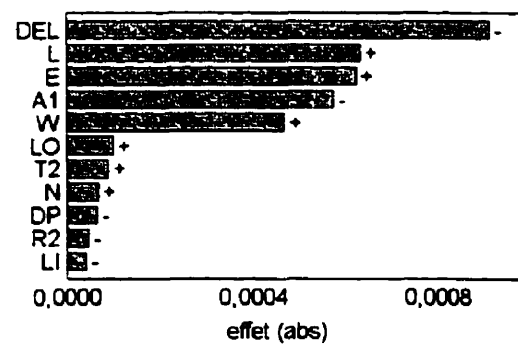
4.2.1 Couple et puissance

Quatre facteurs dominants sont identifiés au diagramme de Pareto 4.2 pour P_j , soit δ , ω , E et L , en ordre d'importance. L'entrefer δ affecte donc (négativement) la puissance consommée par le joint bien plus que les facteurs contrôlant la forme des encoches, tels a_1 , n , r_2 et t_2 dont les effets sont très petits. Il semble ainsi qu'aucun changement spectaculaire ne puisse être attendu d'une optimisation de la forme des encoches.

Les facteurs clefs du couple total T_{tot} (voir la figure 4.3) sont les mêmes que ceux de P_j sauf qu'ici la vitesse de rotation se retrouve au quatrième rang plutôt qu'au deuxième. Sa perte d'importance est simplement attribuable au fait que le couple T_{tot} est multiplié par ω pour obtenir la puissance P_j , renforçant ainsi l'effet de ω .

Au diagramme de Pareto présenté à la figures 4.6, le couple $T_{entrefer}$, est d'abord affecté négativement par l'épaisseur d'entrefer δ . Cela n'a rien de surprenant puisqu'on sait qu'un petit entrefer entraîne de plus grands cisaillements. Pour $T_{encoche}$ (figure 4.7), l'entrefer domine aussi avec un effet positif. Ainsi, l'entrefer semble affecter le couple presque de la même façon sous l'encoche que sous la dent. Étonnamment, les paramètres contrôlant la forme des encoches (t_2 , r_2 et n) ont relativement peu d'influence sur $T_{encoche}$.

Les diagrammes de Pareto des figures 4.4 et 4.5 indiquent que les facteurs dominants des réponses T_{entre} et $T_{encoches}$ sont E , L_i , L_o et ω . Ceci s'explique facilement : lorsque l'épaisseur d'aimants augmente, les surfaces d'entrée et de sortie de la couronne sont plus grandes et le couple appliqué augmente ; plus les longueurs d'entrée ou de sortie sont petites, plus les surfaces circonférentielles-radiales sont rapprochées, augmentant ainsi le cisaillement et le couple appliqué.

Figure 4.2: Pareto P_j Figure 4.3: Pareto T_{tot} Figure 4.4: Pareto T_{entree} Figure 4.5: Pareto T_{sortie} Figure 4.6: Pareto $T_{entreefer}$ Figure 4.7: Pareto $T_{encoche}$

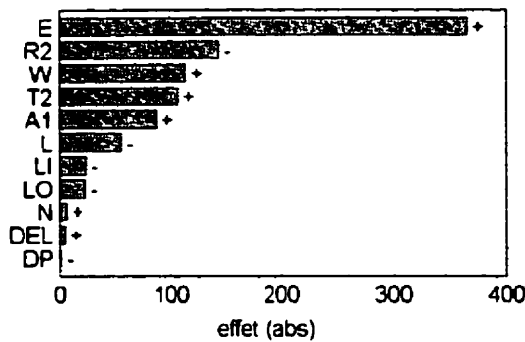
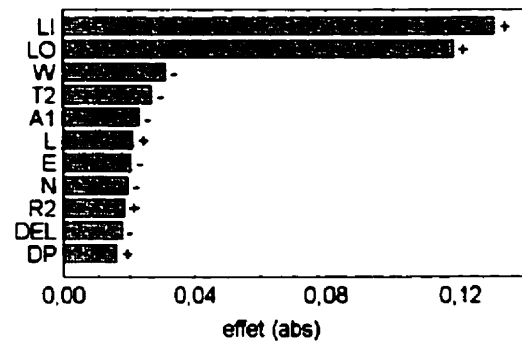
4.2.2 Cisaillement

Le diagramme de Pareto de $\bar{\tau}_m$ est présenté à la figure 4.8. L'entrefer se trouve en avant-dernière position et son effet est positif. En réduisant l'entrefer, c'est-à-dire en rapprochant les parois, on diminuerait donc le cisaillement ? Ceci est difficile à admettre mais on peut expliquer le résultat comme suit : en réduisant l'entrefer, le volume de la zone où les cisaillements sont élevés (en supposant qu'ils le sont sous la dent — ceci est confirmé à la section 4.4.4) est réduit et comme $\bar{\tau}_m$ est une moyenne volumique de τ_m , elle tend à diminuer. Une augmentation de τ_m sous la dent, due à une diminution de δ , ne serait donc pas prise en compte à cause de la diminution du volume affecté par l'augmentation. Cela illustre une limite importante du paramètre $\bar{\tau}_m$. De plus, il est certain qu'il ne tient compte ni du temps d'exposition au cisaillement ni de la portion de l'écoulement subissant un niveau de contraintes critique. Nous évitons donc dorénavant toute discussion basée sur $\bar{\tau}_m$.

4.2.3 Débit

D'après le diagramme de Pareto 4.9, les facteurs L_i et L_o dominent la réponse Q_{net} avec des effets positifs, la longueur en entrée ayant légèrement plus d'importance. Lorsqu'ils sont à leur modalité élevée, le débit traversant le joint peut être considérable : la plus grande valeur observée s'élève à $4,90 \times 10^{-1}$ L/min. À un tel débit, 5 litres de sang (volume typique chez l'humain) traversent le joint en seulement 10 minutes. Si l'hémolyse dans le joint est élevée, cela peut s'avérer critique.

Chose surprenante, l'effet de la différence de pression Δp se retrouve en dernière position. Cela ne veut pas dire que Δp n'affecte pas la réponse de façon significative. Pour se rendre compte de l'effet qu'il peut avoir sur Q_{net} , on effectue un essai semblable à l'essai 24 — c'est à cet essai qu'on a observé le plus faible débit, soit

Figure 4.8: Pareto $\bar{\tau}_m$ Figure 4.9: Pareto Q_{net}

$7,85 \times 10^{-3}$ L/min — avec le seul changement que Δp prend la modalité haute. On obtient $2,12 \times 10^{-2}$ L/min, soit pratiquement le triple. Δp a donc une influence considérable sur le débit Q_{net} mais celle-ci est simplement moindre que celle des autres facteurs. On rappelle de plus que le modèle de Q_{net} est moins fiable (son coefficient de régression R^2 est de 0,63) et il se peut que l'effet de Δp soit sous-estimé.

Les diagrammes de Pareto des réponses Q_{in} et Q_{out} sont présentés à la section 4.4.3.

4.3 Discussion sur l'avantage du joint à encoches

Les aspects considérés dans cette section nous permettent d'estimer les avantages potentiels d'un joint à encoches.

4.3.1 Indentation

La figure 4.10 présente le diagramme de Pareto du ratio $\frac{T_{entrefer}}{T_{entrefer} + T_{encoche}}$. Le facteur d'indentation a_1 est largement dominant. Il détermine donc la répartition du couple sur la couronne entre $T_{encoche}$ et $T_{entrefer}$. Ceci est prévisible puisque ces deux

réponses ont les mêmes facteurs clefs et que a_1 est le seul parmi ceux-ci qui les affecte différemment : d'après les diagrammes de Pareto 4.6 et 4.7, lorsque a_1 augmente, $T_{encoche}$ diminue alors que $T_{entrefer}$ augmente.

De plus, en considérant les observations de $\frac{T_{entrefer}}{T_{entrefer} + T_{encoche}}$ sur la figure 4.11, on distingue clairement deux groupes. Le premier s'étale autour de 0,35 et le deuxième autour de 0,65. Or, ces valeurs sont précisément les modalités du facteur a_1 pour le plan d'expérience. Ainsi, non seulement a_1 est le principal facteur déterminant la répartition du couple sur la surface axiale-circonférentielle de la couronne, mais cette répartition est pratiquement égale à la valeur de a_1 . Ceci est prévisible puisque l'entrefer affecte le couple sous l'encoche pratiquement de la même façon que sous la dent (voir la section 4.2.1 : l'entrefer domine avec un effet négatif la réponse $T_{encoche}$ comme tout comme $T_{entrefer}$). Ainsi, lorsque a_1 diminue, la portion circonférentielle de la tête de dent diminuant autant, $T_{entrefer}$ diminue mais $T_{encoche}$ augmente. Toutefois, comme le très faible effet de a_1 sur T_{tot} est positif (voir la figure 4.3), il semble que $T_{encoche}$ augmente alors moins que $T_{entrefer}$ ne diminue. On pourrait donc diminuer légèrement la puissance en indentant fortement le stator. Toutefois, la section des « chemins » de flux magnétique à faible réluctance étant alors diminuée, cela peut altérer le rendement électrique de sorte qu'aucun gain global ne serait réalisé.

Ainsi, il semble qu'augmenter l'indentation ne soit pas remarquablement bénéfique. Or, si son augmentation n'est pas bénéfique, on peut présager que l'indentation elle-même ne le soit pas non plus.

4.3.2 Couple en entrée et en sortie

D'après les diagrammes de Pareto 4.4 et 4.5, les couples T_{entree} et T_{sortie} sont pratiquement indépendants des paramètres décrivant la géométrie des encoches (r_2 , n ,

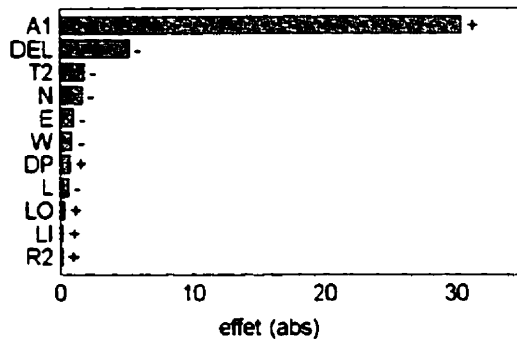


Figure 4.10: Pareto $\frac{T_{entreefer}}{T_{entreefer} + T_{encoche}}$

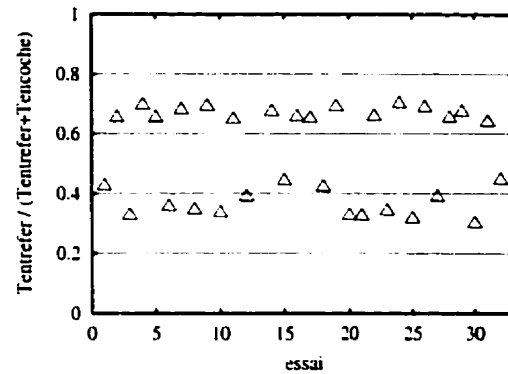


Figure 4.11: Observations $\frac{T_{entreefer}}{T_{entreefer} + T_{encoche}}$

a_1 , δ et t_2). Ainsi, même si les encoches contribuent à diminuer le couple total, elles ne peuvent le faire que dans une mesure restreinte car elles n'affectent pas le couple attribuable à l'entrée et à la sortie. Or, il s'avère que ce couple peut avoir une importance considérable. On peut s'en rendre compte à la figure 4.12 où sont présentées les observations des ratios $\frac{T_{in}}{T_{tot}}$, $\frac{T_{out}}{T_{tot}}$ et $\frac{T_{in} + T_{out}}{T_{tot}}$. Les portions du couple en entrée et en sortie s'élèvent respectivement jusqu'à 38 % et 33 % du couple total et la plage de variation de $\frac{T_{in} + T_{out}}{T_{tot}}$ s'étend de 7 % à 57 %, près de la moitié des résultats se situant entre 20 % et 40 %. Les couples T_{entree} et T_{sortie} peuvent certes être minimisés par une augmentation des longueurs d'ouvertures L_i et L_o . Le débit Q_{net} augmentera toutefois, soumettant ainsi plus de sang aux cisaillements du joint. Or, ceci risque d'augmenter l'hémolyse de l'appareil d'assistance.

4.3.3 Joint à encoches vs joint lisse

Comme les couples T_{entree} et T_{sortie} sont pratiquement indépendants des paramètres décrivant la géométrie des encoches, il y a lieu de croire que la puissance imputable à l'entrée et à la sortie d'un joint lisse est tout à fait comparable à celle du joint à encoches. En admettant cela, il est justifiable de comparer la puissance résultant

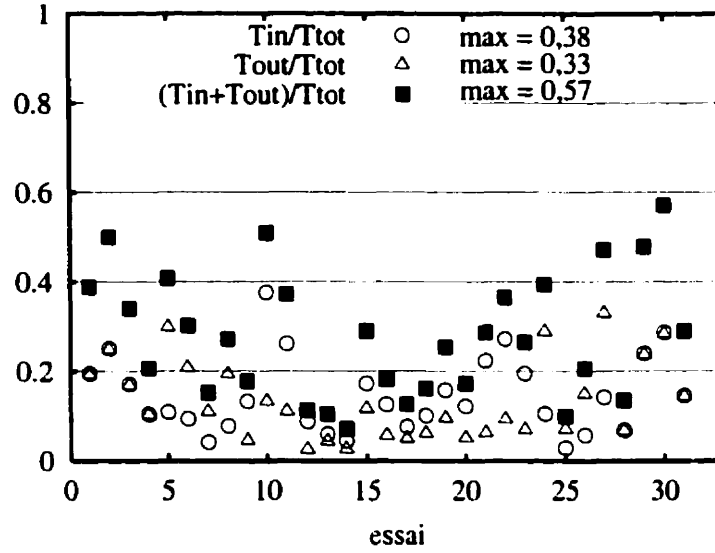


Figure 4.12: Importance du couple en entrée et en sortie

des couples $T_{entrefer}$ et $T_{encoche}$ à la puissance théorique nécessaire pour faire tourner le cylindre intérieur d'un arrangement de deux cylindres concentriques séparés d'un même entrefer. L'écoulement développé pour un tel arrangement est résolu à la section 6.1.2. Le profil de vitesse circonférentielle u_ω est donné par l'expression suivante :

$$u_\omega(r) = \omega \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(\frac{r_o^2}{r} - r \right) \quad (4.1)$$

où r_i et r_o sont les rayons internes et externes respectivement. Le cisaillement τ_{rw} agissant dans la direction circonférentielle est donné par :

$$\tau_{rw} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\omega}{r} \right) \quad (4.2)$$

En insérant (4.1) dans cette équation, on obtient :

$$\tau_{rw} = -2\mu\omega \frac{r_i^2 r_o^2}{r^2 (r_o^2 - r_i^2)} \quad (4.3)$$

et le cisaillement à la paroi du cylindre interne est obtenu en posant $r = r_i$. En multipliant ce cisaillement par la surface du cylindre interne et par la vitesse de rotation ω , on obtient la puissance consommée P_l :

$$P_l = 4\pi\mu\omega^2 L \frac{r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad (4.4)$$

où L est la longueur.

Pour une comparaison adéquate de ce joint lisse au joint à encoches, il convient de poser $r_i = r_0 + E$ et $r_o = r_0 + E + \delta$. La figure 4.13 illustre donc la puissance attribuable au couple $T_{entrefer} + T_{encoche}$ et la puissance P_l correspondante aux modalités des facteurs pour les 31 essais du plan d'expérience. Pour plus de clarté, les essais sont renumérotés de sorte que P_l soit croissant. Pour des valeurs supérieures à 2 W, la puissance du joint à encoches est en général légèrement inférieure à celle du joint lisse. De telles valeurs de puissance consommée sont cependant pratiquement inadmissibles car elles représentent plus de deux fois la puissance transmise à l'écoulement au point d'opération nominal ($Q = 5$ L/min, $\Delta p = 100$ mmHg), soit 1,11 W. Ainsi, l'avantage hypothétique du joint à encoches étant faible, on ne peut en profiter vraiment pour une gamme de puissance si élevée. À des niveaux inférieurs à 2 W, là où on aurait souhaité une diminution de la puissance due aux encoches, la puissance du joint à encoches est égale ou dépasse celle du joint lisse.

Le léger avantage du joint à encoches seulement pour les observations où la puissance est élevée s'explique par le fait que l'entrefer a un effet négatif, mais très faible, sur la réponse $\frac{T_{entrefer}}{T_{entrefer} + T_{encoche}}$ (voir le diagramme de Pareto 4.10). Cet effet négatif signifie que lorsque δ diminue, bien que $T_{entrefer}$ et $T_{encoche}$ augmentent alors tous deux, $T_{entrefer}$ augmente de façon plus importante. Donc, plus l'entrefer est petit, plus le relâchement du cisaillement espéré sous l'encoche se fait sentir et devient bénéfique. Malheureusement, cet avantage minime accompagne seulement des niveaux de

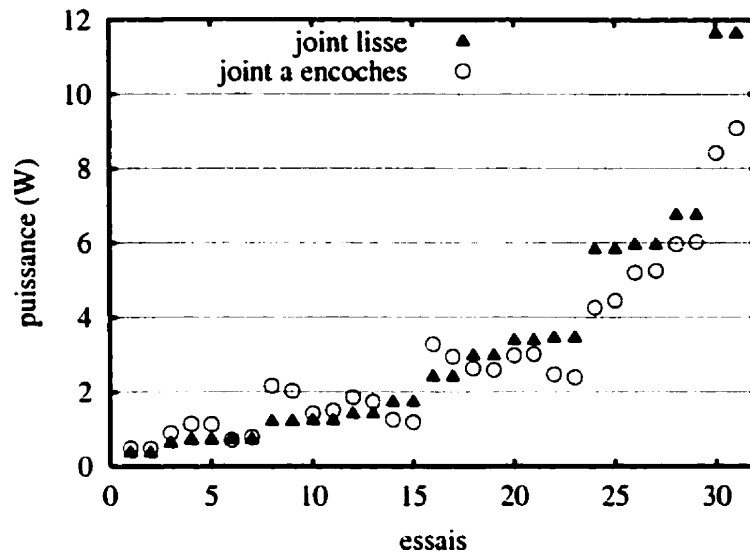


Figure 4.13: Puissance d'un joint lisse vs P_j

puissance peu enviables puisqu'il se manifeste lorsque l'entrefer est très petit.

Ainsi, il ne semble pas que les encoches représentent un avantage majeur par rapport à un joint où le stator est lisse. On élimine donc, pour l'instant, toute étude d'optimisation des encoches.

4.4 Aspects de l'écoulement

On considère dans cette section divers aspects de l'écoulement dans le joint : la trajectoire 3D des particules (elle s'apparentent aux lignes de courant en 2D), l'écoulement à l'entrée et à la sortie, et la distribution du critère de von Mises. On décrit d'abord la technique de calcul des trajectoires.

4.4.1 Intégration lagrangienne

La description eulérienne de TASCflow d'un écoulement fournit le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ en fonction de la position $\mathbf{x}$ et du temps t . Dans la description lagrangienne, les particules sont identifiées par leur position initiale $\mathbf{x}^o$ et suivies le long de leur trajectoire. L'écoulement est donc décrit par le vecteur position des particules $\mathbf{x}$, qui est une fonction de $\mathbf{x}^o$ et du temps t . Or, comme la relation entre le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ et le vecteur position $\mathbf{x}$ est donnée par $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, on peut passer de la description eulérienne à la description lagrangienne par intégration. Si l'intégration sur l'intervalle de temps δt est faite en supposant $\mathbf{v}$ constante sur tout l'intervalle et égal à la vitesse au début de l'intervalle ($\mathbf{v}^o$), on obtient :

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^o + \mathbf{v}^o \delta t \quad (4.5)$$

où $\mathbf{x}^n$ est la nouvelle position de la particule. En répétant cette intégration sur plusieurs intervalles de temps δt , on obtient la trajectoire d'une particule identifiée par sa position initiale. Afin d'assurer une qualité d'intégration, certaines restrictions sur le pas de temps s'appliquent. Pour plus de détails sur ces considérations, le lecteur est invité à consulter la documentation de CFX-TASCflow [11] où les trajectoires lagrangiennes sont appelés *streaklines*.

4.4.2 Tourbillon dans l'encoche

La figure 4.14 montre les trajectoires générées à partir de l'entrée pour l'essai 5. La couronne d'aimants tourne dans le sens horaire, de gauche à droite. Dans l'encoche, on identifie un tourbillon irrégulier dont le diamètre est environ de la taille de l'encoche. Il est plus aplati contre la face de l'encoche du côté droit. On remarque qu'une bonne partie des particules qui entrent dans le joint par l'entrée sont entraînées par la

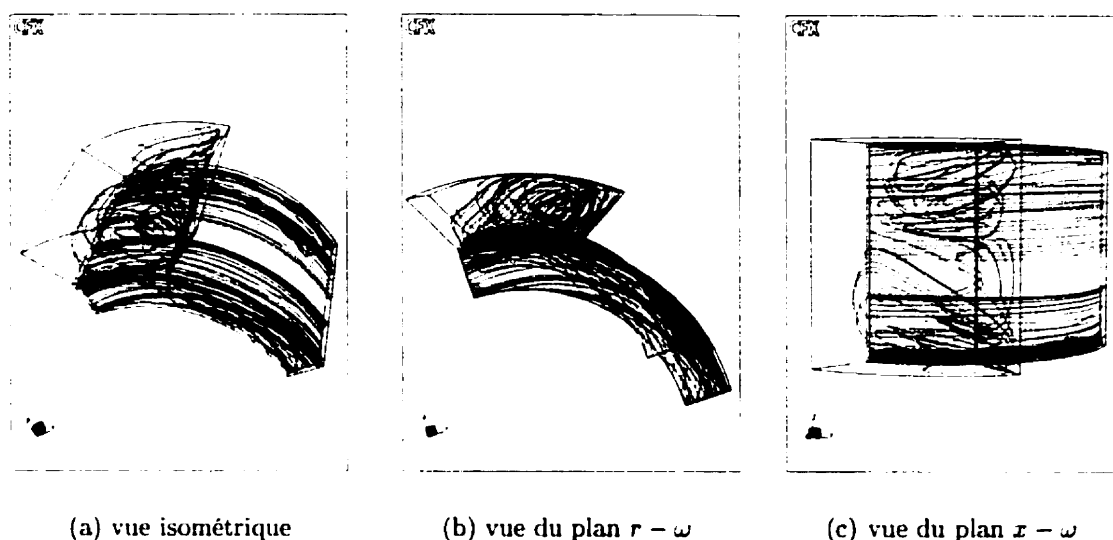


Figure 4.14: Trajectoires dans le joint, départ en entrée

couronne dans la direction circonférentielle au point qu'il est pratiquement impossible d'identifier une composante débitante à l'écoulement. Ces particules passent d'un entrefer au suivant sans prendre part au tourbillon de l'encoche.

On a généré à la figure 4.15 des trajectoires à partir des faces périodiques du côté opposé au sens de rotation du joint, toujours pour le 5^e essai. Ici aussi, plusieurs particules restent près de la paroi de la couronne d'aimants et sont pratiquement orientées selon la direction circonférentielle. C'est seulement dans le joint, où l'écoulement est fortement tridimensionnel, que l'on peut identifier une composante axiale significative. Près de l'entrée, plusieurs particules semblent sortir du domaine. On a donc probablement un cas où le débit traversant (en entrant ou en sortant) l'entrée Q_{in} excède le débit net Q_{net} . La section suivante traite de ce phénomène.

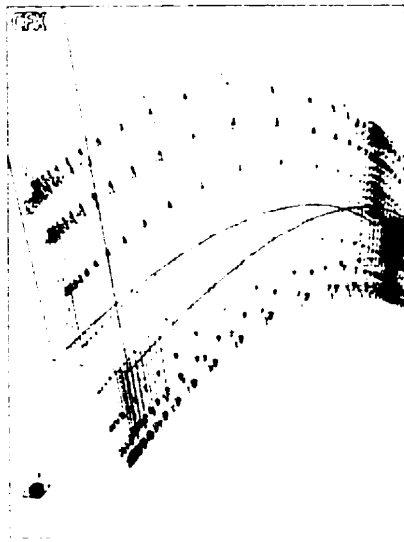


Figure 4.15: Trajectoires dans le joint, départ des faces périodiques

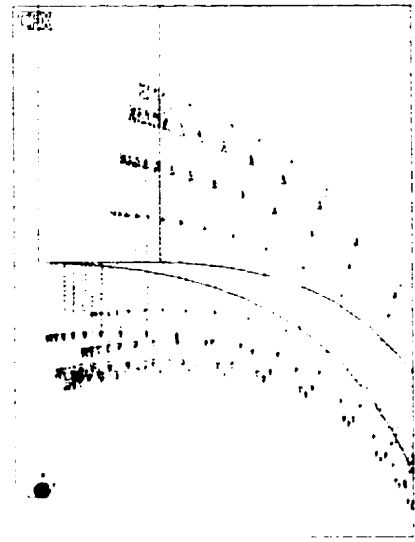
4.4.3 Écoulement près des ouvertures

Selon les essais, les ratios $\frac{Q_{in}}{Q_{net}}$ et $\frac{Q_{out}}{Q_{net}}$ varient de 1 à 37 et de 1 à 212 respectivement. Le débit traversant les ouvertures (peu importe qu'il entre ou qu'il sorte) est donc parfois beaucoup plus grand que le débit net traversant le joint ; pour cela, l'écoulement doit entrer et sortir à la fois par des régions différentes d'une même ouverture. À la figure 4.16, on présente le champ de vitesse radiale à l'entrée pour l'essai 7 où $\frac{Q_{in}}{Q_{net}}=17$ et à la sortie pour l'essai 21 où $\frac{Q_{out}}{Q_{net}}=212$. Dans les deux cas, les vecteurs indiquent un écoulement entrant près de la paroi en rotation et sortant près du mur fixe. C'est toujours le cas, à plus ou moins forte mesure, lorsque les ratios $\frac{Q_{in}}{Q_{net}}$ et $\frac{Q_{out}}{Q_{net}}$ sont supérieurs à 1.

Ce phénomène est probablement attribuable à la rotation de la couronne d'aimants face au mur statorique immobile. Par adhérence, la vitesse circonférentielle u_ω est égale à ωr à la paroi tournante et est nulle à la paroi fixe. Entre les deux, il suffit de considérer, pour notre explication, que la variation axiale de u_ω est monotone, c'est à dire qu'elle n'est que décroissante de la paroi mobile à la paroi fixe. En conséquence de ce mouvement de rotation, pour qu'une particule de fluide reste au même rayon,



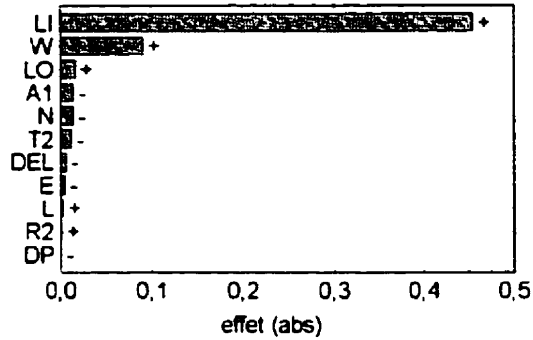
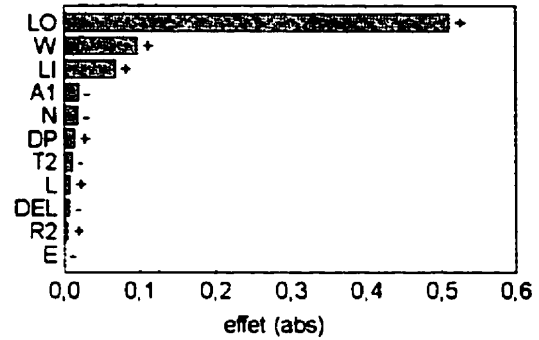
(a) entrée de l'essai 7



(b) sortie de l'essai 21

Figure 4.16: Vecteurs de vitesse radiale en entrée et en sortie

elle doit subir une force centripète proportionnelle à $\frac{u_\omega^2}{r}$. Or, cette dernière expression est croissante — variation monotone de $u_\omega = 0$ sur la paroi fixe à $u_\omega = \omega r$ sur la paroi mobile — et comme rien n'indique qu'une distribution du gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial r}$ est susceptible d'équilibrer les forces centripètes, les particules subissent une accélération centrifuge ; elles ont tendance à se déplacer vers des rayons plus élevés. Cette tendance étant plus forte près de la paroi en rotation et le débit net traversant les ouvertures étant limité, l'écoulement entre dans le joint près de la paroi mobile et en sort près de la paroi fixe. Comme la vitesse est nulle aux parois, la vitesse radiale forme un profil sinusoïdal. La rotation de la couronne d'aimants serait donc la cause du fluide entrant et sortant par une même ouverture. Les diagrammes de Pareto 4.17 et 4.18 confirment cette hypothèse : on remarque qu'après L_i et L_o , le facteur ω domine les réponses Q_{in} et Q_{out} .

Figure 4.17: Pareto Q_{in} Figure 4.18: Pareto Q_{out}

4.4.4 Distribution du critère de von Mises

Les figures 4.19 à 4.30 présentent les surfaces 3D du scalaire τ_m pour des valeurs de 5 à 800 N/m². On considère la configuration de joint du centre de l'espace expérimental afin d'illustrer une distribution typique de τ_m . Soyons toutefois conscients que la distribution varie selon les essais.

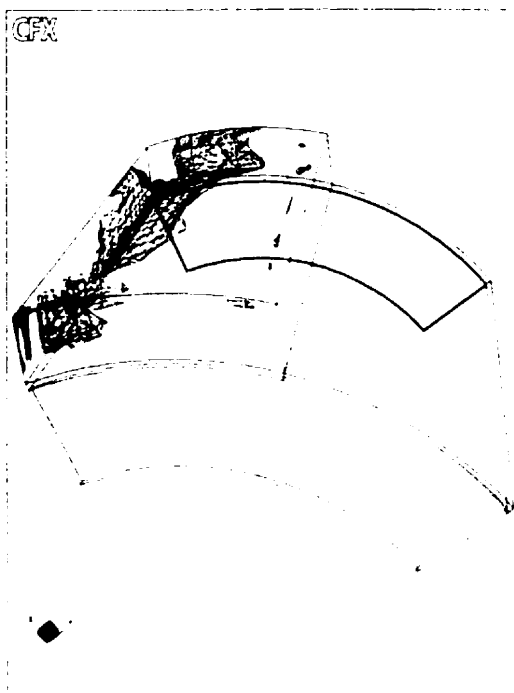
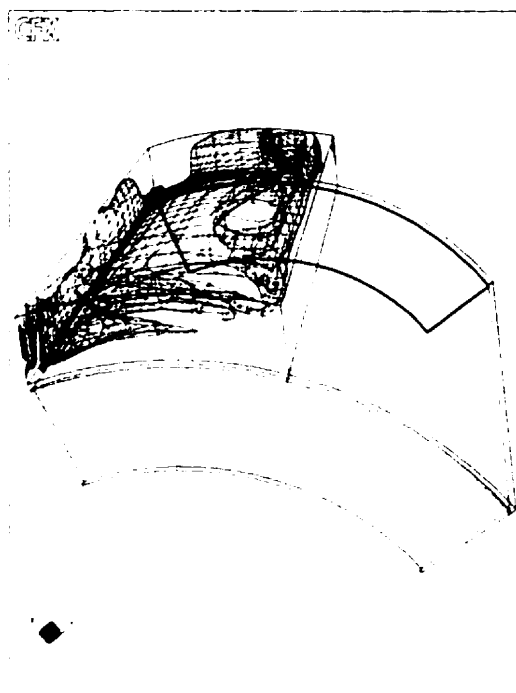
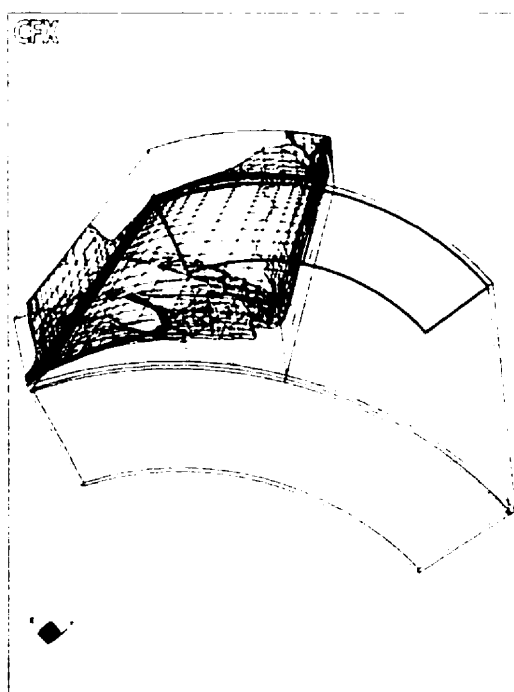
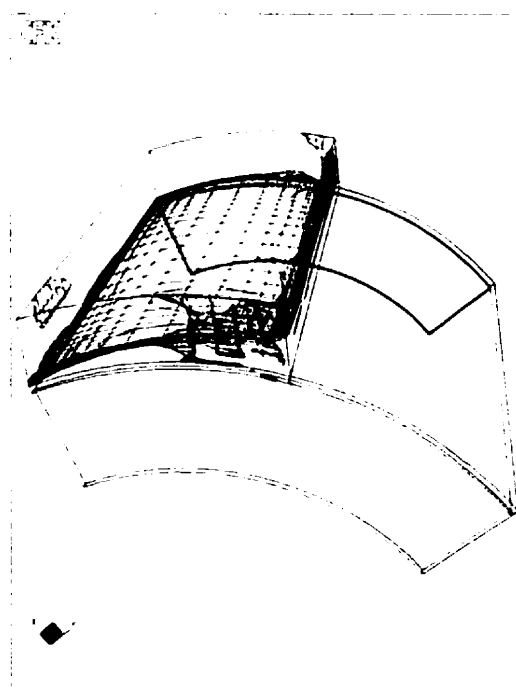
On remarque à l'intérieur de l'encoche les surfaces où $\tau_m \leq 100$ N/m². La surface de la plus petite valeur de τ_m (5 N/m²) se trouve du côté opposé au sens de rotation (à gauche sur la figure), dans le creux de l'encoche. Les surfaces où $\tau_m = 10, 25, 50$ et 100 N/m² se rapprochent progressivement du mur de l'encoche du côté droit et de la couronne d'aimants. Plus près de celle-ci, sous l'encoche, les valeurs de τ_m vont de 100 à 400 N/m².

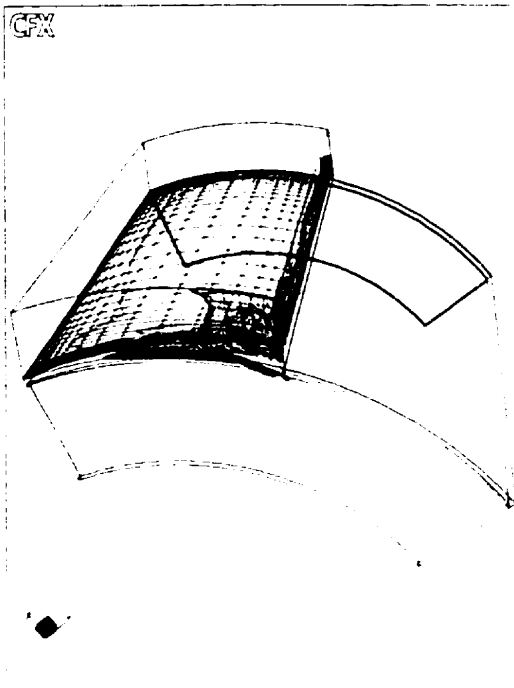
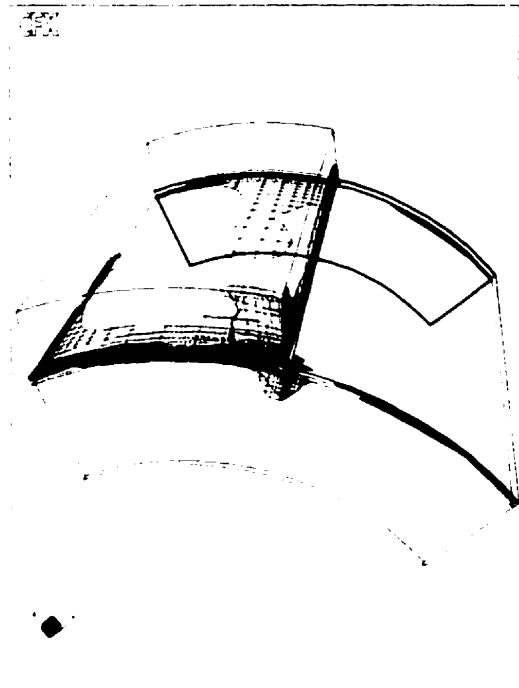
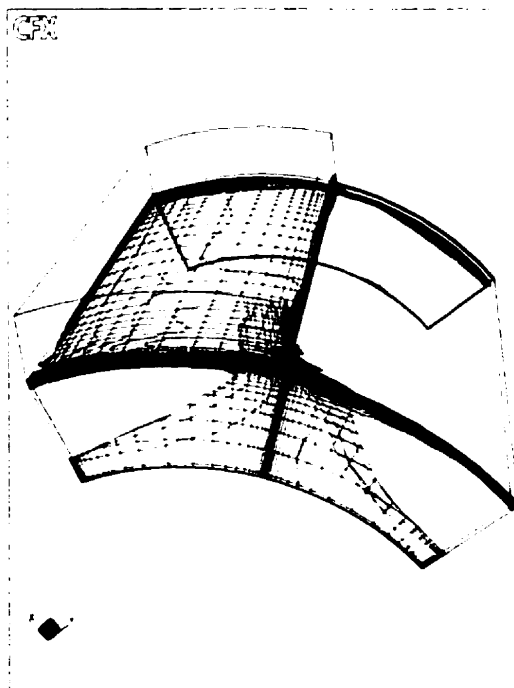
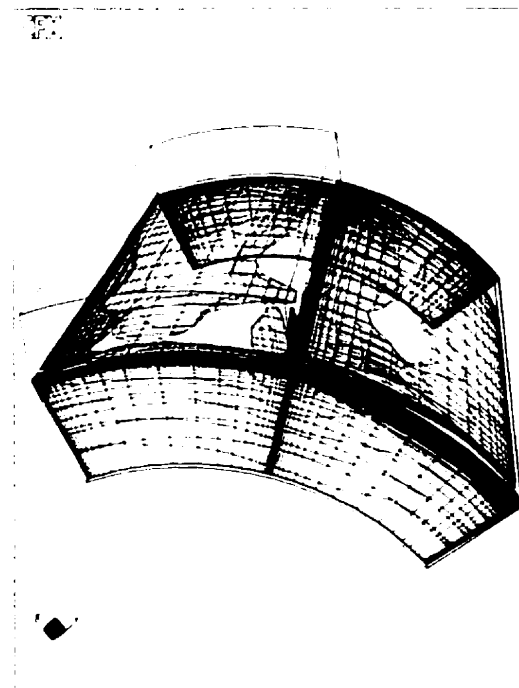
Sous la dent, les valeurs sont plus élevées. Les surfaces dominantes sont celles tracées pour les valeurs $\tau_m = 400$ N/m² et $\tau_m = 500$ N/m². On observe du côté gauche les surfaces aux valeurs les plus élevées ($\tau_m = 600, 700$ et 800 N/m²). En effet, c'est dans cette région que l'écoulement, étant entraîné par la couronne d'aimants, pénètre dans la contraction sous la dent après avoir traversé l'expansion de l'encoche. Dans celle-ci, le profil de vitesse circonférentielle u_w a pu se dilater (en entraînant le tourbillon)

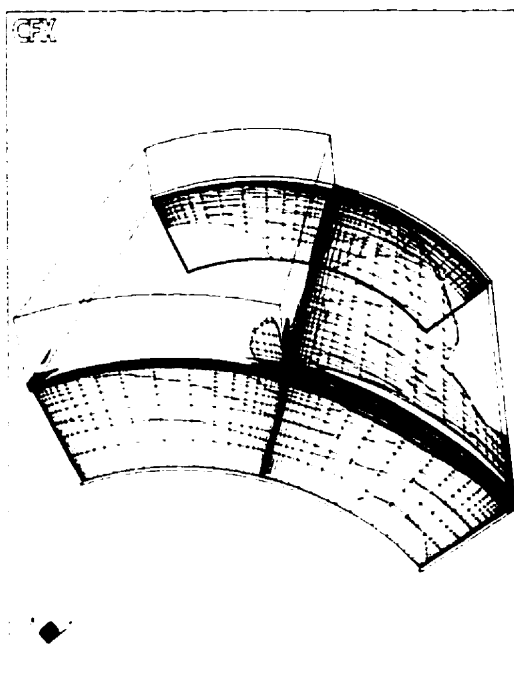
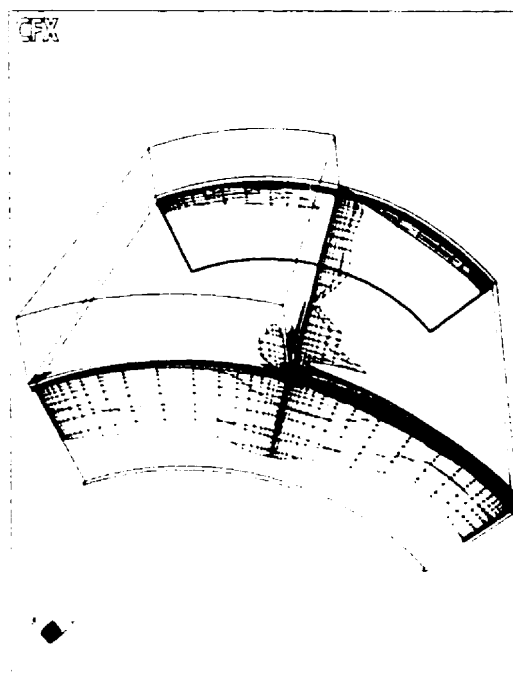
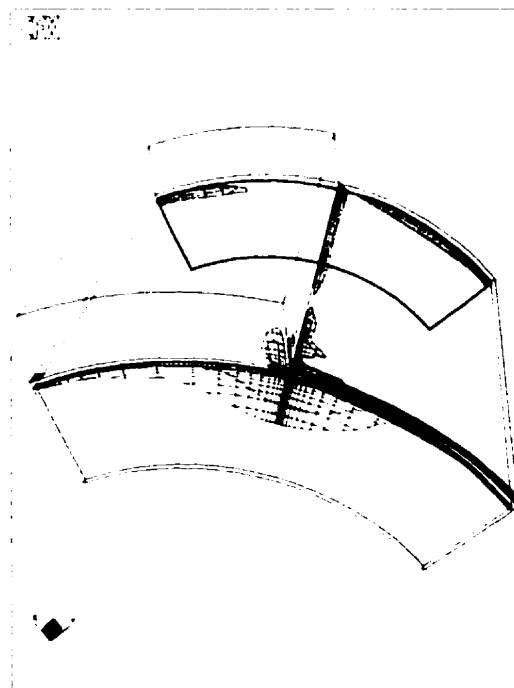
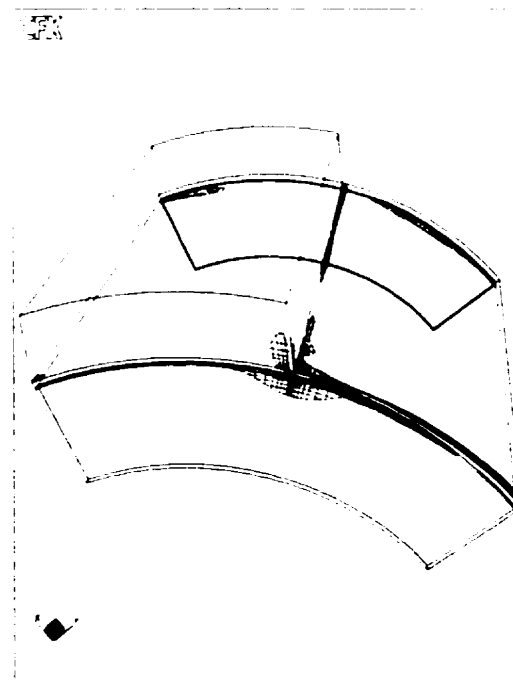
et doit se redévelopper lorsque l'écoulement pénètre sous la dent, ce qui entraîne un cisaillement plus grand que si le profil était demeuré développé.

Dans les canaux d'entrée et de sortie, on remarque les surfaces où $300 \leq \tau_m \leq 800 \text{ N/m}^2$. Celles à $\tau_m \geq 800 \text{ N/m}^2$ se trouvent à des rayons plus élevés et on en observe une plus forte concentration près de la tête de dent, du côté de l'encoche.

Il est difficile, voire irréaliste, de caractériser l'hémolyse du joint à encoches en se basant sur ces distributions : la revue de Garon *et al.* [10] indique que le dommage à la membrane des globules rouges dépend non seulement du cisaillement mais aussi du temps d'exposition au cisaillement : au delà de 150 N/m^2 à 250 N/m^2 , le temps d'exposition pour un dommage considérable serait de quelques minutes. Mentionnons donc simplement que des niveaux de cisaillement surpassant ce seuil sont atteints dans le joint, notamment en entrée, en sortie et sous la dent du côté opposé au sens de rotation.

Figure 4.19: Surface $\tau_m=5$ Figure 4.20: Surface $\tau_m=10$ Figure 4.21: Surface $\tau_m=25$ Figure 4.22: Surface $\tau_m=50$

Figure 4.23: Surface $\tau_m=100$ Figure 4.24: Surface $\tau_m=200$ Figure 4.25: Surface $\tau_m=300$ Figure 4.26: Surface $\tau_m=400$

Figure 4.27: Surface $\tau_m=500$ Figure 4.28: Surface $\tau_m=600$ Figure 4.29: Surface $\tau_m=700$ Figure 4.30: Surface $\tau_m=800$

CHAPITRE 5

CONFIGURATION ET PARAMÈTRES DE L'ÉTUDE THERMIQUE

5.1 Configuration de la pompe

Comme les encoches dans le stator du moteur ne semblent pas présenter d'avantage notable, on effectue l'étude thermique pour un joint sans encoches. On envisage, à ce stade-ci, de placer les aimants au coeur de l'appareil. La configuration, présentée à la figure 5.1 (les flèches indiquent le sens de l'écoulement), a l'avantage de laisser plus d'espace au parties du moteur, notamment aux aimants qui sont placés sur l'arbre central. Ceux-ci sont séparés du bobinage et des tôles ferreuses par le joint. Du point de vue électromagnétique, son épaisseur correspond à l'entrefer. En périphérie, le canal principal permet le passage de la plupart du débit. Les pales du rotor, solidaires de l'arbre d'aimants permanents, sont placées en aval du moteur. Elles sont suivies par un stator de redressement.

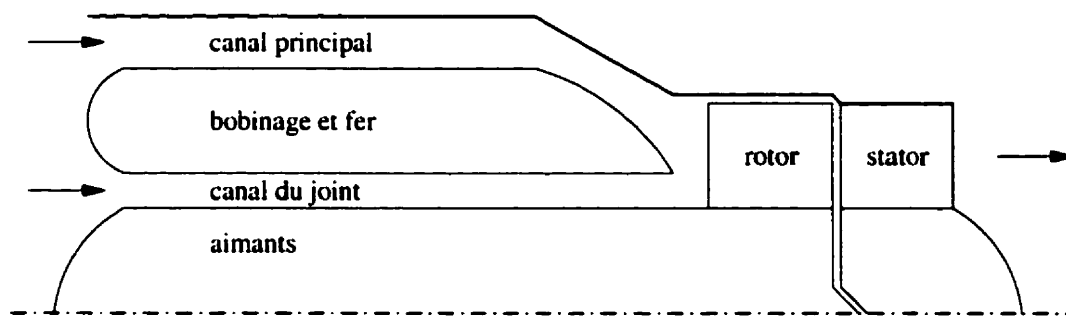


Figure 5.1: Configuration de l'étude thermique

La chaleur est principalement produite dans le bobinage du moteur par effet joule. En second lieu viennent normalement les pertes par courants de Foucault dans le

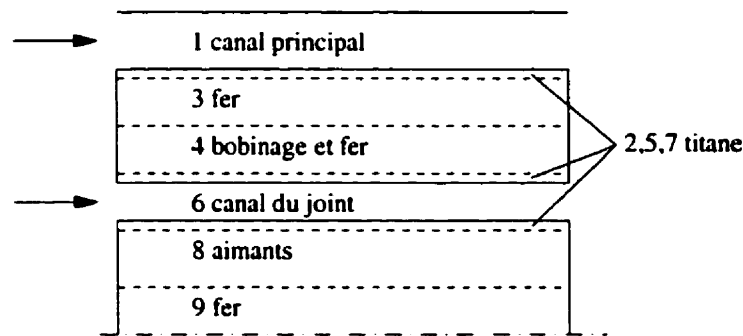


Figure 5.2: Domaine de l'étude thermique et numérotation des zones

fer. Selon Hendershot et Miller [1], elles peuvent être minimisées en utilisant des laminations de fer plus minces ou un acier ayant une résistance électrique élevée (un acier au silicone par exemple). Ces options ne font qu'augmenter les coûts de production, ce qui ne représente pas une préoccupation importante. On suppose donc que les pertes dans les laminations de fer sont nulles et qu'aucune chaleur y est produite. Les pertes associées à la commutation n'ont aucun effet pertinent puisque celle-ci est effectuée à l'extérieur du corps. Ainsi, on considère que la production de chaleur a lieu uniquement dans le bobinage.

5.2 Domaine

La production de chaleur ayant lieu dans la partie amont de l'appareil (identifiée par *moteur électrique et canaux* à la figure 5.1), c'est dans cette zone que le sang atteint une élévation maximale de température à son passage. On limite donc le domaine étudié à la section amont. Celle-ci est présentée de façon plus détaillée à la figure 5.2 où on a numéroté les zones pour référence ultérieure. Le rotor du moteur est composé de fer (zone 9) servant à lier le champ magnétique, sur lequel les aimants permanents (zone 8) sont fixés. Le stator du moteur est composé de laminations de fer (zone 3) pour l'établissement du champ magnétique. Dans sa partie interne (zone 4), le fer

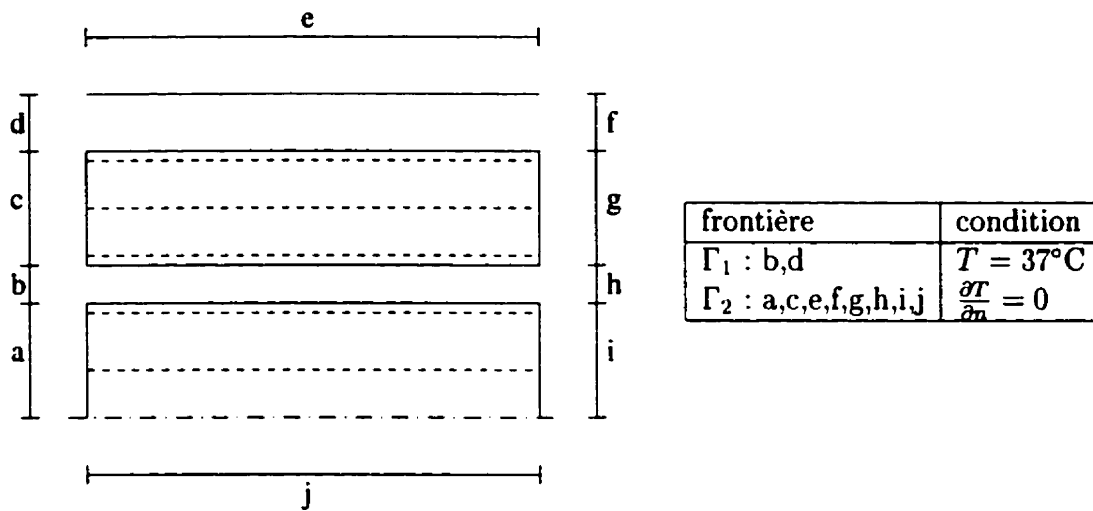


Figure 5.3: Conditions aux frontières : thermique

du stator est indenté pour loger le bobinage de cuivre. C'est dans cette zone que la chaleur P_c est produite par pertes ohmiques. Une mince couche de titane (matériel bio-compatible) recouvre les parties en contact avec le sang (zones 2,5,7) circulant dans les canaux (zones 1 et 6).

5.3 Conditions aux frontières

Les conditions aux frontières thermiques sont présentées à la figure 5.3. En entrée (b et d), on impose des conditions essentielles de Dirichlet (frontière Γ_1), soit une température de 37°C . Il est raisonnable de supposer que le sang entre à cette température dans la pompe. Partout ailleurs (frontière Γ_2), on impose des conditions de Neumann homogènes, soit $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$, où n représente la direction normale à face considérée. Ce choix force toute la chaleur produite à être évacuée par le sang par convection et fait en sorte que la prédiction d'élévation de température est surestimé, ce qui est une chose prudente. La condition de flux nul à la frontière j découle naturellement de la symétrie de révolution du domaine.

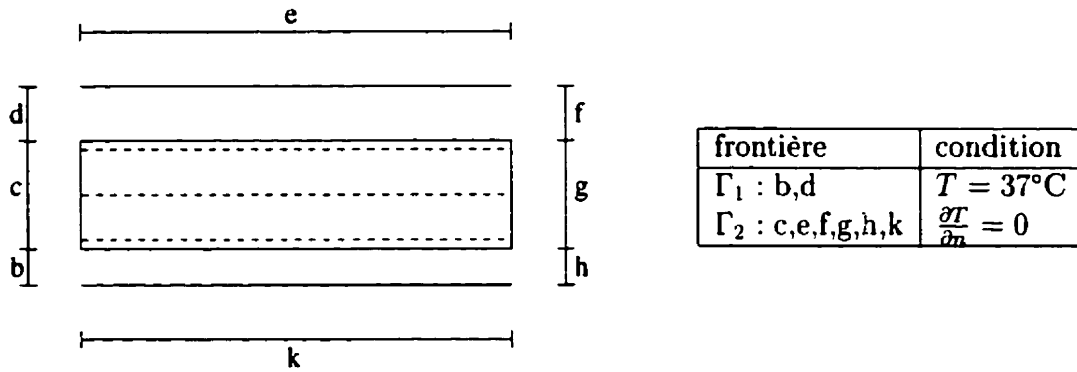


Figure 5.4: Domaine et conditions aux frontières révisées

On remarque que les frontières a, i et j sont toutes trois isolées. Comme aucune chaleur n'est produite dans le rotor (zones 7, 8 et 9), la conservation d'énergie implique que l'intégrale du flux de chaleur traversant l'interface entre le canal du joint (zone 6) et la couche de titane (zone 7) doit être nulle. Cela même à supposer que le flux à cette interface est nul, ce qui permet de réduire le domaine en éliminant les zones 7, 8 et 9. Le domaine ainsi révisé est présenté à la figure 5.4 qui montre l'imposition du flux de chaleur nul à la frontière intérieure du canal du joint.

5.4 Propriétés physiques

L'écoulement dans les canaux et la distribution de température dans le domaine dépendent des propriétés physiques des matériaux et du sang présentés au tableau 5.1.

Aucune valeur de conductivité thermique n'est attribuée à la zone 4 puisqu'elle est hétérogène; elle est constituée de fer et des bobinages de cuivre. De plus, des interstices d'air sont présents entre les fils de cuivre qui sont généralement isolées électriquement. Or, l'isolant électrique et l'air risquent d'agir comme isolant thermique. La conductivité thermique dans la zone 4 varie donc dans la direction circonferentielle. Puisqu'on considère un domaine axisymétrique, on ne peut tenir compte de

Tableau 5.1: Propriétés physiques

symbole	nom	zones	valeur	réf.
c_p	chaleur massique du sang	1,6	3890 J/kg°C	[2]
μ	viscosité dynamique du sang	1,6	0,00366 kg/ms	—
ρ	masse volumique du sang	1,6	1060 kg/m ³	[2]
k_s	conductivité thermique du sang	1,6	0,492 W/mK	[17]
k_{Ti}	conductivité thermique du titane	2,5	20,0 W/mK	[1]
k_{Fe}	conductivité thermique du fer (3% Si)	3	27,0 W/mK	[18]
k_{Cu}	conductivité thermique du cuivre	—	360 W/mK	[1]
k_{eff}	conductivité thermique effective	4	—	—

cette réalité. On introduit donc une conductivité effective k_{eff} . La valeur appropriée de cette conductivité est toutefois difficile à estimer. Elle dépend certainement de la distribution interne des constituants de la zone. On peut cependant fixer logiquement des limites supérieures et inférieures à k_{eff} , soit la conductivité maximale et minimale des constituants de la zone respectivement. En négligeant la présence des interstices d'air et des isolants électriques car ils sont très minces, on a :

$$k_{Fe} \leq k_{eff} \leq k_{Cu} \quad (5.1)$$

Afin de tenir compte de cette plage de variation et d'évaluer l'effet d'incertitude sur k_{eff} , la conductivité effective fait partie de l'étude paramétrique.

5.5 Paramètres géométriques

Les paramètres définissant la géométrie du domaine sont présentés à la figure 5.5. Comme certains des paramètres ne sont pas indépendants des autres, seuls les sept décrits par le tableau 5.2 sont nécessaires pour définir entièrement la géométrie.

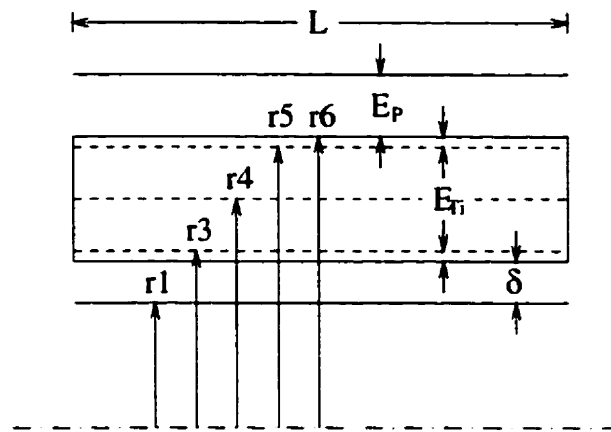


Figure 5.5: Géométrie du domaine de l'étude thermique

Tableau 5.2: Paramètres géométriques de l'étude thermique

L	Longueur du domaine
δ	Épaisseur d'entrefer
r_1	Rayon externe du rotor (aimants)
t	Paramètre d'interpolation servant à déterminer r_4 : $r_4 = (1 - t)r_3 + tr_5$
r_6	Rayon interne du canal principal
E_p	Épaisseur du canal principal
E_{Ti}	Épaisseur des couches de titane

5.6 Paramètres de l'étude

Des sept paramètres géométriques introduits à la section précédente, six feront partie de l'étude paramétrique, le rayon r_6 étant fixé arbitrairement à 11 mm.

À ces paramètres géométriques s'ajoutent la conductivité effective k_{eff} de la zone 4 et le débit total Q_t traversant les canaux.

Le tableau 5.3 présente donc les huit paramètres de l'étude et leurs valeurs minimales et maximales admises. Elles définissent l'espace expérimental. La plage de débit est choisie en fonction des conditions d'opération envisagées de la pompe.

Tableau 5.3: Plage de variation des paramètres

		unité	minimum	maximum
1	Q_t	L/min	2	5
2	k_{eff}	W/mK	27,0	360
3	L	mm	20	30
4	δ	mm	0,25	1,0
5	r_1	mm	3	6
6	t	—	0,3	0,7
7	E_p	mm	1	2
8	E_{Ti}	μm	25	75

CHAPITRE 6

MODÉLISATION

6.1 Équations de mouvement

On considère un écoulement de sang à propriétés constantes : la viscosité et la masse volumique ne dépendent pas de la température. Les équations de mouvement sont donc découplées de celles du transport d'énergie et le comportement de l'écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible. En coordonnées cylindriques et en régime stationnaire, elles s'écrivent :

direction axiale x :

$$\rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\omega}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \omega} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x \quad (6.1)$$

direction radiale r :

$$\rho \left(u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\omega}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \omega} - \frac{u_\omega^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\omega}{\partial \omega} \right) \quad (6.2)$$

direction circonférentielle ω :

$$\rho \left(u_x \frac{\partial u_\omega}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_\omega}{\partial r} + \frac{u_\omega}{r} \frac{\partial u_\omega}{\partial \omega} + \frac{u_r u_\omega}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \omega} + \mu \left(\nabla^2 u_\omega + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \omega} - \frac{u_\omega}{r^2} \right) \quad (6.3)$$

avec :

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \omega^2} \quad (6.4)$$

où u_i est la vitesse selon la direction i .

6.1.1 Canal principal

La canal principal (zone 1) correspond à l'espace entre deux cylindres concentriques.

On y fait les hypothèses suivantes :

1. écoulement développé : $\frac{\partial u_i}{\partial x} = 0$
2. écoulement axisymétrique : $\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = 0$ où $\phi = u_i, p$
3. vitesse radiale nulle : $u_r = 0$
4. vitesse circonférentielle nulle : $u_\omega = 0$

Selon ces hypothèses, tous les termes de l'équation (6.3) s'annulent. L'équation (6.2) se réduit à $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$. On conclut de ce résultat et de la 2^e hypothèse que la pression dépend uniquement de x . On peut donc remplacer la dérivée partielle $\frac{\partial p}{\partial x}$ par une dérivée totale dans l'équation (6.1) qui se simplifie pour donner :

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_x}{dr} \right) \quad (6.5)$$

Comme le deuxième terme de cette équation est une fonction de r uniquement et que la pression est une fonction de x uniquement, le terme $\frac{dp}{dx}$ est nécessairement une constante. En intégrant deux fois par rapport à r , on obtient l'expression de la vitesse axiale :

$$u_x(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + a \ln r + b \quad (6.6)$$

On détermine les constantes a et b en imposant l'adhérence de l'écoulement aux parois : $u_x|_{r=r_i} = u_x|_{r=r_o} = 0$ où r_i et r_o sont respectivement les rayons interne et externe du canal. En appliquant ces conditions aux frontières à l'équation (6.6), on

trouve :

$$a = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \frac{r_o^2 - r_i^2}{\ln(r_o/r_i)} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left((r_o^2 - r_i^2) \frac{\ln r_i}{\ln(r_o/r_i)} - r_i^2 \right) \quad (6.7)$$

ce qui conduit finalement à :

$$u_x(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r_o^2 - r_i^2) \left(\frac{r^2 - r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} - \frac{\ln(r/r_i)}{\ln(r_o/r_i)} \right) \quad (6.8)$$

La vitesse axiale u_x dépend donc linéairement du gradient de pression $\frac{dp}{dx}$. Il est toutefois plus convenable de spécifier un débit Q traversant le canal. On le relie au gradient de pression en intégrant le profil de vitesse axiale (6.8) sur la section du canal :

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \int_{r_i}^{r_o} u_x(r) r dr \\ &= \frac{dp}{dx} \frac{\pi}{8\mu} (r_o^2 - r_i^2) \left(\frac{r_o^2 - r_i^2}{\ln(r_o/r_i)} - r_o^2 - r_i^2 \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

En isolant $\frac{dp}{dx}$ dans cette dernière équation et en insérant l'expression obtenue dans l'équation (6.8), on obtient finalement :

$$u_x(r) = \frac{2Q}{\pi} \frac{(r^2 - r_i^2) \ln(r_o/r_i) - (r_o^2 - r_i^2) \ln(r/r_i)}{r_o^2 - r_i^2 - (r_o^2 + r_i^2) \ln(r_o/r_i)} \quad (6.10)$$

Cette expression donne donc le profil de vitesse axiale en fonction de la géométrie du canal et du débit le traversant.

Notons qu'un écoulement développé ne favorise pas le transfert de chaleur par convection puisque la vitesse axiale près des parois est alors plus petite. La prédiction d'élévation de température locale est en conséquence surestimée car une élévation de la température du sang près des parois représente moins de chaleur évacuée. Il est donc prudent de supposer un écoulement développé.

6.1.2 Canal du joint

Le canal du joint (zone 6) est similaire au canal principal à l'exception que sa paroi interne — c'est le rotor du moteur — est en rotation. On y fait donc les mêmes hypothèses que plus haut pour le canal principal, à l'exception de la 4^e car la vitesse circonférentielle ne peut être nulle. L'équation de Navier-Stokes pour la direction axiale (6.1) se simplifie de la même façon que précédemment et on obtient l'équation (6.5). De l'équation pour la direction radiale, on obtient :

$$\rho \frac{u_\omega^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (6.11)$$

Puisque le terme de gauche est une fonction de r uniquement, la pression est une fonction de r et $\frac{\partial p}{\partial r}$ une fonction de r uniquement. De plus, d'après l'équation (6.5), $\frac{\partial p}{\partial x}$ est une fonction de r uniquement. La pression prend donc la forme suivante :

$$p(x, r) = x f(r) + g(r) + h \quad (6.12)$$

où f et g sont des fonctions de r et h une constante. En insérant cette expression dans (6.11), on a :

$$\rho \frac{u_\omega^2}{r} = x \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial r} \quad (6.13)$$

Or, comme le premier et le troisième terme sont des fonctions de r uniquement, on déduit que $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$; f est donc une constante. Elle représente $\frac{\partial p}{\partial x}$ — il suffit de dériver la forme (6.12) par rapport à x pour s'en rendre compte. Ainsi, comme $\frac{\partial p}{\partial x}$ n'est pas une fonction de r , on peut résoudre l'équation (6.5) pour trouver la vitesse axiale u_x de la même façon qu'à la section précédente. Le profil de vitesse axiale est donc donné par (6.10).

On obtient le profil de vitesse u_ω en résolvant l'équation pour la direction circon-férentielle (6.3) qui se simplifie, d'après les hypothèses, pour donner :

$$0 = \frac{\partial^2 u_\omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\omega}{\partial r} - \frac{u_\omega}{r^2} \quad (6.14)$$

Sa solution générale est :

$$u_\omega(r) = \frac{1}{r_o^2 - r_i^2} \left[r (u_\omega|_{r=r_o} r_o - u_\omega|_{r=r_i} r_i) + \frac{1}{r} (u_\omega|_{r=r_o} r_i r_o^2 - u_\omega|_{r=r_i} r_i^2 r_o) \right] \quad (6.15)$$

En imposant les conditions d'adhérence appropriées, soit $u_\omega|_{r=r_i} = \omega r_i$ et $u_\omega|_{r=r_o} = 0$ où ω est la vitesse de rotation angulaire du rotor, on obtient :

$$u_\omega(r) = \omega \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(\frac{r_o^2}{r} - r \right) \quad (6.16)$$

L'écoulement dans le canal du joint est donc constitué de la superposition de deux écoulements unidimensionnels simples : l'écoulement axial u_x développé entre deux cylindres concentriques stationnaires et l'écoulement circonférentiel u_ω entre deux cylindres concentriques en rotation.

6.1.3 Répartition du débit

On veut caractériser l'élévation de température pour des points d'opération particuliers où le débit est spécifié. Il importe de répartir ce débit afin d'en spécifier la portion traversant chaque canal.

On suppose une même pression statique moyenne (moyennée sur la section) en entrée

et en sortie pour les deux canaux, soit :

$$\bar{p}_b = \bar{p}_d \quad \text{et} \quad \bar{p}_f = \bar{p}_h \quad (6.17)$$

où les indices réfèrent aux faces identifiées à la figure 5.3. La différence de pression moyenne entre l'entrée et la sortie du canal principal $\Delta \bar{p}_1$ et celle du canal du joint $\Delta \bar{p}_2$ est par conséquent la même :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p}_1 &= \bar{p}_f - \bar{p}_d \\ &= \bar{p}_h - \bar{p}_b = \Delta \bar{p}_2 \end{aligned} \quad (6.18)$$

et puisque que le gradient de pression $\frac{dp}{dx}$ est constant pour les deux canaux et que la pression a la forme $p_1 = x \frac{dp}{dx}|_1 + h_1$ dans le canal principal (indice 1) et $p_2 = x \frac{dp}{dx}|_2 + g(r) + h_2$ dans le canal du joint (indice 2), on a, en posant arbitrairement $x = 0$ aux faces b et d et $x = L$ aux faces f et h :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p}_1 &= \bar{p}_f - \bar{p}_d \\ &= 2\pi \frac{\int_{r_i}^{r_o} (p_f - p_d) r dr}{A_1} \\ &= 2\pi \frac{\int_{r_i}^{r_o} ((L - 0) \frac{dp}{dx}|_1 + (h_1 - h_2)) r dr}{A_1} \\ &= L \frac{dp}{dx}|_1 \frac{2\pi \int_{r_i}^{r_o} r dr}{A_1} \\ &= L \frac{dp}{dx}|_1 \end{aligned} \quad (6.19)$$

pour le canal principal, et :

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{p}_2 &= \bar{p}_h - \bar{p}_b \\
 &= 2\pi \frac{\int_{r_i}^{r_o} (p_h - p_b) r dr}{A_2} \\
 &= 2\pi \frac{\int_{r_i}^{r_o} ((L - 0) \frac{dp}{dx} \Big|_2 + (g(r) - g(r)) + (h_2 - h_2)) r dr}{A_2} \\
 &= L \frac{dp}{dx} \Big|_2 \frac{2\pi \int_{r_i}^{r_o} r dr}{A_2} \\
 &= L \frac{dp}{dx} \Big|_2
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

pour le canal du joint. Le symbole A représente l'aire de la section de passage des canaux. En combinant ces résultats avec (6.18), on obtient :

$$\frac{dp}{dx} \Big|_1 = \frac{dp}{dx} \Big|_2 = \frac{dp}{dx} \tag{6.21}$$

Le débit dans chaque canal étant donné par l'expression (6.9), on en déduit le débit total Q_t :

$$\begin{aligned}
 Q_t &= Q_1 + Q_2 \\
 &= \frac{dp}{dx} \frac{\pi}{8\mu} (q(r_i, r_o) \Big|_1 + q(r_i, r_o) \Big|_2)
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

où :

$$q(r_i, r_o) = (r_o^2 - r_i^2) \left(\frac{r_o^2 - r_i^2}{\ln(r_o/r_i)} - r_o^2 - r_i^2 \right) \tag{6.23}$$

Enfin, en isolant $\frac{dp}{dx}$ dans l'équation (6.22) et le substituant dans (6.9), on obtient le débit dans chaque canal en fonction de la géométrie et du débit total traversant la

pompe :

$$Q_{1,2} = Q_t \frac{q(r_i, r_o)|_{1,2}}{q(r_i, r_o)|_1 + q(r_i, r_o)|_2} \quad (6.24)$$

6.2 Équation d'énergie

Pour un fluide incompressible à propriétés constantes en régime stationnaire, l'équation d'énergie, en terme du système de coordonnées cylindriques, est donnée par :

$$\rho c_p \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{u_\omega}{r} \frac{\partial T}{\partial \omega} + u_r \omega \frac{\partial T}{\partial r} \right) = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \omega^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + q + \mu \Phi \quad (6.25)$$

où :

$$\begin{aligned} \Phi = 2 & \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\omega}{\partial \omega} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right] \\ & + \left(\frac{\partial u_\omega}{\partial r} - \frac{u_\omega}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \omega} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \omega} + \frac{\partial u_\omega}{\partial x} \right)^2 \\ & + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Le terme source q sert à modéliser la chaleur P_c produite dans le bobinage de la zone 4. Le terme $\mu \Phi$ représente la dissipation visqueuse, soit l'énergie irréversiblement transformée en chaleur par les contraintes de cisaillement.

La seule hypothèse faite quant à la température découle de la symétrie de révolution : $\frac{\partial T}{\partial \omega} = 0$. Elle est complétée par les hypothèses 1, 2 et 3 de la section 6.1.1 qui sont valables pour l'écoulement dans les deux canaux. L'équation de la température (6.25)

devient donc :

$$\rho c_p u_x \frac{\partial T}{\partial x} = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + q + \mu \Phi \quad (6.27)$$

où :

$$\Phi = \left(\frac{\partial u_\omega}{\partial r} - \frac{u_\omega}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2 \quad (6.28)$$

L'équation d'énergie (6.27) s'applique à tout le domaine. Dans les zones solides 2, 3, 4 et 5, il n'y a évidemment pas d'écoulement (les vitesses sont nulles) et seuls les termes de diffusion demeurent (avec la source q dans la zone 4).

On suppose une production de chaleur P_c uniforme dans la zone 4; la source q a donc une valeur constante qui s'obtient en divisant P_c par le volume de la zone 4 :

$$q = \frac{P_c}{\pi L r^2|_{r_3}^{r_4}} \quad (6.29)$$

6.3 Adimensionnalisation

On résout l'équation (6.27) dans sa forme adimensionnelle afin de s'assurer d'un meilleur conditionnement lors de la résolution numérique (voir Fortin [14]) et de comparer adéquatement l'importance relative des phénomènes présents dans l'écoulement.

Chaque variable ϕ est adimensionnalisée selon :

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi - \phi_{ref}}{\phi_o} \quad (6.30)$$

où $\tilde{\phi}$ est la variable adimensionnelle, ϕ_{ref} une valeur de référence et ϕ_o l'échelle caractéristique de la variable. Pour toutes les variables, sauf T , la valeur de référence est nulle. En choisissant la même échelle de longueur l_o pour les variables x et r et la même échelle de vitesse u_o pour u_x et u_ω , on insère la forme (6.30) dans l'équation d'énergie (6.27) et on obtient :

$$\frac{\rho_o c_{p_o} u_o T_o}{l_o} \tilde{\rho} \tilde{c}_p \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = \frac{k_o T_o}{l_o^2} \tilde{k} \left[\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) \right] + q_o \tilde{q} + \frac{\mu_o u_o^2}{l_o^2} \tilde{\mu} \tilde{\Phi} \quad (6.31)$$

En divisant cette équation par $\frac{\rho_o c_{p_o} u_o T_o}{l_o}$ et en posant $q_o = \frac{\rho_o c_{p_o} u_o T_o}{l_o}$ — ceci suppose un équilibre entre la production q et la convection de chaleur, hypothèse sur laquelle nous revenons à la section 6.5 —, on obtient la forme adimensionnelle suivante :

$$\tilde{\rho} \tilde{c}_p \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{Pe} \tilde{k} \left[\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) \right] + \tilde{q} + \frac{Ec}{Re} \tilde{\mu} \tilde{\Phi} \quad (6.32)$$

qui fait apparaître les nombres adimensionnels de Péclet (Pe), d'Eckert (Ec) et de Reynolds (Re) caractéristiques de l'écoulement dans les canaux et définis comme suit :

$$Pe = \frac{c_{p_o} \mu_o}{k_o} \quad Re = \frac{\rho_o u_o l_o}{\mu_o} \quad Ec = \frac{u_o^2}{c_{p_o} T_o} \quad (6.33)$$

Le nombre d'Eckert représente l'importance de l'énergie cinétique de l'écoulement par rapport à la variation d'enthalpie associée à l'échelle de température — celle-ci doit être représentative de l'écart entre la plus grande et la plus petite valeur du domaine.

6.4 Choix des échelles

Une adimensionnalisation valable doit faire en sorte que les variables adimensionnelles soient de l'ordre de l'unité : leur minimum près de 0 et leur maximum près de 1. On doit donc choisir des échelles représentatives de la grandeur (ou de la plage de variation) des quatités dimensionnelles. Comme c'est à la température du sang qu'on s'intéresse, le choix des échelles est fait en fonction de l'écoulement, même si l'équation d'énergie est valable dans le solide aussi. Les nombres de Péclet, de Reynolds et d'Eckert n'ont d'ailleurs aucune signification dans les zones solides.

Pour les constantes ρ , c_p et μ , on choisit l'échelle selon $\phi_o = \phi$. Puisque ϕ_{ref} est nul pour ces variables, on a $\tilde{\phi} = 1$. L'équation (6.32) s'allège donc légèrement :

$$\tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{Pe} \tilde{k} \left[\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) \right] + \tilde{q} + \frac{Ec}{Re} \tilde{\Phi} \quad (6.34)$$

La valeur de référence pour la température T_{ref} est fixée à 37°C. C'est la température à laquelle on suppose que le sang entre dans la pompe. La température critique T_c — pour laquelle on cherche $P_{c_{max}}$ — étant fixée à 40°C, les variations de température admises sont de l'ordre de 3°C au maximum. Cette valeur devrait constituer le choix de l'échelle de température mais nous prenons plutôt $T_o = 1^\circ\text{C}$ par convenance. Ce choix fait en sorte que la variable adimensionnelle $\tilde{T}$ représente une élévation de température correspondante à l'élévation dimensionnelle. On peut donc la récupérer directement.

Pour des raisons pratiques (comparaisons visuelles des configurations selon la même échelle, etc.), on désire choisir la même échelle de longueur l_o pour toutes les configurations. Or, seul le rayon r_6 est fixé à 11 mm. Encore pour des raisons pratiques (coupes dans le domaine à des endroits précis), on choisit la valeur plus convenable de

10 mm pour l_o . En conséquence de ce choix d'échelle arbitraire, le nombre de Reynolds ne sera pas exactement caractéristique de l'écoulement pour chaque configuration. Pour cela, il serait plus juste d'utiliser le diamètre hydraulique comme échelle de longueur. Cependant, comme le diamètre hydraulique est en général de l'ordre de 10 mm, l'approximation du nombre de Reynolds est passablement représentative. De plus, numériquement, la légère différence n'a aucun impact significatif car l'échelle l_o fait quand même en sorte que les dimensions géométriques adimensionnelles du domaine sont environ unitaires.

On choisit de déterminer l'échelle de vitesse selon :

$$u_o = \frac{Q_o}{l_o^2} \quad (6.35)$$

où Q_o est l'échelle de débit tel que $Q_o = Q_t$. Le débit, selon le tableau 5.3, prenant des valeurs de 2 à 6 L/min, l'échelle de vitesse varie de 0,3 à 1,0 m/s. Puisque les vitesses dimensionnelles maximales sont de cet ordre, les choix de u_o et de Q_o sont appropriés.

Enfin, l'échelle de conductivité thermique k_o est celle du sang, tel que $k_o = k_s$. On aura donc $\tilde{k} = 1$ dans le sang. La conductivité dimensionnelle des autres matériaux étant plus grande que celle du sang, $\tilde{k}$ est plus grand que 1 dans les zones solides.

Les échelles étant déterminées, les nombres adimensionnels de similitude de Péclet, de Reynolds, et d'Eckert se situent dans les plages suivantes :

$$\begin{aligned} 3 \times 10^4 &\leq Pe \leq 8 \times 10^4 \\ 1 \times 10^3 &\leq Re \leq 3 \times 10^3 \\ 9 \times 10^{-5} &\leq Ec \leq 3 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Tableau 6.1: Importance relative des termes de l'équation d'énergie

	nom	coefficient
$\tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}}$	convection	1
$\tilde{k} \left[\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) \right]$	diffusion	$\frac{1}{Pe} \sim 10^{-5}$
$\tilde{\Phi}$	dissipation	$\frac{Ec}{Re} \sim 10^{-7}$
$\tilde{q}$	production	—

6.5 Analyse de la forme adimensionnelle

La forme adimensionnelle nous permet de comparer l'importance relative des phénomènes. Pour un choix d'échelles appropriées, les groupes adimensionnels sont du même ordre et il suffit de considérer leurs coefficients que nous présentons au tableau 6.1. Rappelons que l'adimensionnalisation a été faite en fonction de l'écoulement et que les nombres adimensionnels ne sont caractéristiques que de celui-ci. Ils n'ont d'ailleurs aucun sens dans le solide et les remarques suivantes s'appliquent donc uniquement au fluide.

Le coefficient du terme de diffusion ($\frac{1}{Pe}$) est environ 10^5 fois plus petit que celui du terme de convection. Le transfert de chaleur est donc largement dominé par la convection. Cela justifie le choix d'imposer un flux nul aux frontières f et g en sortie (voir la section 5.3) forçant ainsi toute la chaleur produite à être évacuée du domaine par convection.

Par rapport au terme de convection, le coefficient de la dissipation visqueuse est très petit. L'échauffement visqueux serait donc négligeable. Cette conclusion est quelque peu expéditive. Il est plus approprié de comparer la dissipation avec la production : les deux génèrent de la chaleur, alors que la convection et la diffusion sont des mécanismes de transport. Cependant, le tableau 6.1 n'attribue aucune valeur au coefficient du terme de production, même si le coefficient de $\tilde{q}$ dans l'équation (6.34) est 1. Ceci

vient du fait que la production $\bar{q}$ est nulle dans le fluide. Il est ainsi difficile de justifier la comparaison du coefficient du terme de dissipation, caractéristique de l'écoulement, avec celui du terme de production. On peut cependant le faire. Rappelons que toute la chaleur produite dans le solide est évacuée par le fluide. Donc, même si $\bar{q}$ est nul dans le fluide, un flux proportionnel à la production dans le solide pénètre dans l'écoulement et est évacué par convection (celle-ci dominant la diffusion). Il était donc sensé, à la section 6.3, de définir l'échelle q_o en supposant un équilibre entre la convection et la production. La convection est conséquemment représentative de la grandeur de la production. Or, comme le coefficient du terme de convection est environ 10^7 fois plus grand que celui du terme de dissipation visqueuse, la production $\bar{q}$ semble dominer largement la dissipation.

Le terme de dissipation visqueuse peut donc être négligé en toute sécurité. Ainsi, l'équation d'énergie (6.34) devient :

$$\bar{u}_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{Pe} \bar{k} \left[\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} \right) \right] + \bar{q} \quad (6.36)$$

C'est la forme finale de l'équation d'énergie que nous résolvons.

Enfin, notons que la validité de la discussion précédente repose sur le choix adéquat de l'échelle de température $T_o = 1^\circ\text{C}$. Cette échelle, rappelons-le, est représentative de l'élévation de température critique pour laquelle on veut associer une puissance de chaleur produite. Une échelle de température plus petite, en augmentant le nombre d'Eckert, aurait injustement fait croire à une plus grande importance de la dissipation. En fait, selon Panton [19] l'échelle de température $T_{o,\phi}$ associée à la dissipation visqueuse devrait être :

$$T_{o,\phi} = \frac{\mu_o u_o^2}{k_o} \quad (6.37)$$

Or, avec les échelles μ_o , u_o et k_o définies à la section 6.4, on obtient $T_{o,\phi} \sim 10^{-3}$. Cette valeur nettement plus petite que celle de l'échelle de température de notre problème illustre une fois de plus la faible importance de la dissipation.

6.5.1 Diffusion

Le nombre de Péclet, basé sur une échelle de vitesse représentative de la composante axiale de l'écoulement, s'élève à $\sim 10^4$ - 10^5 . Dans ce cas, comme le mentionne Bejan [20], le terme axial de diffusion $\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2}$ peut être négligé, la convection dans cette direction étant dominante. On fait alors face à un problème parabolique (dans le fluide) ce qui a le potentiel de simplifier le schéma de résolution numérique (voir la section 7.2.1 : un seul balayage axial suffirait, le terme de convection étant discrétisé en amont). Cependant, dans le solide, la diffusion axiale a la même importance que la diffusion radiale. On doit donc en tenir compte et le problème demeure elliptique dans cette région. Or, comme le schéma de résolution (voir le chapitre 7) couple les zones solides et fluides, on ne peut pas le simplifier. Le terme de diffusion axiale est donc conservé dans le fluide.

La composante u_r de l'écoulement étant nulle, il n'y a pas de convection dans la direction radiale. La conduction $\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right)$ est donc le seul mécanisme de transfert de chaleur. Celle-ci ne peut évidemment pas être négligée : elle assure d'abord le transfert de chaleur du solide au fluide ; ensuite, pour être convectée hors du domaine, la chaleur doit être diffusée radialement à l'intérieur du fluide car la convection axiale est nulle à la paroi (la vitesse y étant nulle). La faible valeur du nombre de Péclet signifie seulement que la couche limite thermique sera mince.

6.5.2 Dissipation visqueuse

Il est tout de même intéressant d'évaluer la puissance de chaleur P_Φ produite par dissipation visqueuse afin de la comparer avec la puissance P_c produite par le moteur. Il suffit d'intégrer $\mu\Phi$ sur la partie du domaine Ω_s où le sang s'écoule (zones 1 et 6) :

$$\begin{aligned} P_\Phi &= \int_{\Omega_s} \mu \Phi \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega_s} \mu \left[\left(\frac{\partial u_\omega}{\partial r} - \frac{u_\omega}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2 \right] d\Omega \end{aligned} \quad (6.38)$$

où les expressions pour u_x et u_ω sont données par les équations (6.10) et (6.16) respectivement. En posant :

$$\Phi_{u_\omega} = \left(\frac{\partial u_\omega}{\partial r} - \frac{u_\omega}{r} \right)^2 \quad \text{et} \quad \Phi_{u_x} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2 \quad (6.39)$$

on obtient :

$$P_\Phi = \int_{\Omega_s} \mu (\Phi_{u_\omega} + \Phi_{u_x}) \, d\Omega \quad (6.40)$$

Les expressions Φ_{u_ω} et Φ_{u_x} représentent les contributions respectives des vitesses circonférentielle et axiale. Dans le canal principal, comme $u_\omega = 0$, Φ_{u_ω} est nul.

En prenant une vitesse de rotation ω de 1200 rad/s (c'est une valeur réaliste), on obtient $P_\Phi \sim 0,1$ W, la valeur exacte variant légèrement selon les paramètres géométriques. Or, nous le verrons au chapitre 8, la puissance $P_{c_{max}}$ oscille autour de 20 W dans l'espace expérimental ; P_Φ est donc inférieur à 1 % de cette valeur. L'importance relative de la puissance de dissipation est donc faible, mais pas autant que le laisse présager la très faible valeur (10^{-7}) du coefficient du terme de dissipation dans le tableau 6.1.

Cela s'explique de la façon suivante. Mentionnons d'abord que la contribution de Φ_{u_ω} domine celle de Φ_{u_z} pour la puissance P_Φ . De plus, comme $\Phi_{u_\omega} = 0$ dans le canal principal, la puissance de dissipation est principalement générée dans le canal du joint. La distribution de génération de chaleur par dissipation suit donc la distribution de Φ_{u_ω} . On l'obtient, en combinant les expressions (6.16) et (6.39) :

$$\Phi_{u_\omega}(r) = 4\omega^2 \left(\frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \right)^2 \left(\frac{r_o}{r} \right)^4 \quad (6.41)$$

Cette fonction, légèrement décroissante lorsque r varie du rayon interne r_i au rayon externe r_o , est relativement uniforme pour les valeurs de r_i et r_o envisagées. À l'opposé, la chaleur associée à la production $\tilde{q}$ dans la zone 4 pénètre dans le canal du joint par sa surface externe et, la conduction étant faible, son effet sur l'élévation de température est local. Ainsi, en plus d'être beaucoup moins importante, comme elle est répartie dans tout le canal, la chaleur de dissipation cause une élévation de température nettement moindre que la chaleur associée à la production $\tilde{q}$. Pour s'en convaincre, on calcule l'élévation de température ΔT_{P_Φ} associée à une puissance $P_\Phi = 0,1$ distribuée uniformément dans le canal du joint :

$$\Delta T_{P_\Phi} = \frac{P_\Phi}{Q\rho c_p} = \frac{0,1}{Q\rho c_p} \quad (6.42)$$

En prenant une valeur de Q égale à 5 % du débit total Q_t minimal traversant la pompe (2 L/min) — c'est l'ordre de grandeur minimal de la portion du débit total traversant la pompe —, on obtient une valeur maximale de $0,01^\circ\text{C}$ ce qui représente moins de 0,5 % de l'élévation maximale de 3°C qui nous préoccupe.

6.6 Obtention de $P_{c_{max}}$

On cherche la puissance $P_{c_{max}}$ causant une augmentation de la température du sang de 3°C. Ce dernier atteint alors le niveau critique T_c de 40°C. Par contre, lors de la résolution de l'équation (6.36), on impose — via la source $\bar{q}$ — la puissance de chaleur produite P_c et on obtient un champ d'élévation de température $\tilde{T}$. Il s'agit en quelque sorte d'un problème inverse. Toutefois, comme le champ $\tilde{T}$ dépend linéairement de $\bar{q}$, les résultats d'une simulation avec P_c nous permettent d'obtenir directement $P_{c_{max}}$.

6.6.1 Linéarité entre $\tilde{T}$ et $\bar{q}$

Montrons d'abord la relation linéaire entre $\tilde{T}$ et $\bar{q}$. On suppose que la température adimensionnelle peut s'exprimer comme le produit de $\bar{q}$ et d'une fonction F dépendant de la géométrie (x, y) et des paramètres p_i :

$$\tilde{T}(\bar{q}, x, y, p_1, p_2, \dots) = \frac{\bar{q}}{q_a} F(x, y, p_1, p_2, \dots) \quad (6.43)$$

où q_a est une valeur arbitraire de source de chaleur. Mentionnons d'abord que d'après cette équation, F représente le champ d'élévation de température lorsque $\bar{q} = q_a$ tel que $F = \tilde{T}|_{\bar{q}=q_a}$. Elle doit donc satisfaire l'équation (6.36) avec $\bar{q} = q_a$:

$$0 = -\tilde{u}_x \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Pe} \bar{k} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial F}{\partial \tilde{r}} \right) \right] + q_a \quad (6.44)$$

Ensuite, en insérant la forme linéaire (6.43) dans l'équation d'énergie (6.36), on a :

$$0 = -\tilde{u}_x \frac{\partial \left(\frac{\bar{q}}{q_a} F \right)}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Pe} \bar{k} \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{\bar{q}}{q_a} F \right)}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \left(\frac{\bar{q}}{q_a} F \right)}{\partial \tilde{r}} \right) \right] + \bar{q} \quad (6.45)$$

et comme $\tilde{q}$ et q_a sont des constantes, on peut réécrire cette équation sous la forme suivante :

$$0 = \tilde{q} \left[-\tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{q} F}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Pe} \tilde{k} \left[\frac{\partial^2 \tilde{q} F}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{q} F}{\partial \tilde{r}} \right) \right] + q_a \right] \quad (6.46)$$

Or, cette équation est vérifiée en vertu de l'équation (6.44). Ainsi, si la fonction F satisfaisant l'équation (6.44) existe, la forme linéaire (6.43) peut être valable. Pour que ce soit le cas, les conditions aux frontières doivent aussi être des formes linéaires de $\tilde{q}$ car si la forme (6.43) est valable sur le domaine, elle doit l'être aussi sur sa frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Or, les conditions essentielles (sur Γ_1) et naturelles (sur Γ_2) sont :

$$\tilde{T} \Big|_{\Gamma_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0 \quad (6.47)$$

Ces conditions étant des formes linéaires (nulles) de $\tilde{q}$, la linéarité de la dépendance du champ $\tilde{T}$ à la source $\tilde{q}$ est confirmée. Ceci implique que l'on obtient le champ $\tilde{T}$ pour n'importe quelle valeur de $\tilde{q}$ en multipliant par le rapport $\frac{\tilde{q}}{q_a}$ le champ F obtenu avec $\tilde{q} = q_a$.

Notons enfin que la relation linéaire entre $\tilde{q}$ et $\tilde{T}$ ne serait pas valable si on avait conservé la dissipation visqueuse.

6.6.2 Élévation maximale de température et récupération de $P_{c_{max}}$

Pour toutes les simulations, on choisit de fixer P_c à 10 W. Cette valeur nous permet de fixer q_a d'après l'équation (6.29) pour chaque configuration. Puisque la relation entre $\tilde{q}$ et P_c est linéaire, on peut remplacer le ratio $\frac{\tilde{q}}{q_a}$ de l'équation (6.43) par $\frac{P_c}{10}$.

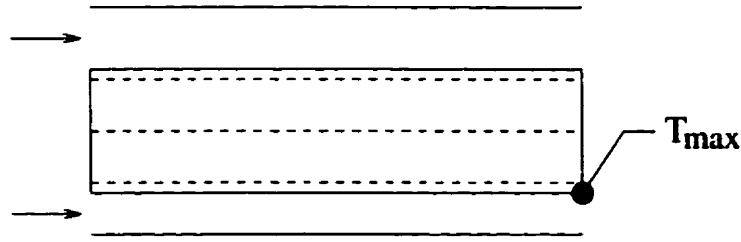


Figure 6.1: Lieu d'élévation maximale de la température du sang

On a donc :

$$\tilde{T}(P_c, x, y, p_1, p_2, \dots) = \frac{P_c}{10} F(x, y, p_1, p_2, \dots) \quad (6.48)$$

où F est obtenu pour $P_c = 10$ W. Or, par définition, $P_{c_{max}}$ correspond à une élévation maximale de température de 3°C dans le sang. On l'obtient donc lorsque $\max(\tilde{T}|_{\Omega_s}) = 3$, où Ω_s représente la partie du domaine où le sang s'écoule. Conséquemment, $P_{c_{max}}$ est donné par :

$$P_{c_{max}} = 10 \frac{3}{\max(F|_{\Omega_s})} \quad (6.49)$$

où l'expression $\max(F|_{\Omega_s})$ est la valeur maximale du champ d'élévation de température dans le sang, que nous notons dorénavant T_{max} . Il s'avère, pour tous les essais, que T_{max} se trouve à la paroi externe du canal du joint (zone 6), en sortie. Cet endroit est identifié par un point noir à la figure 6.1.

CHAPITRE 7

DISCRÉTISATION ET RÉOLUTION

7.1 Schéma hybride

L'équation d'énergie (6.36) est discrétisée et résolue par un schéma hybride combinant les différences finies dans la direction axiale et les éléments finis dans la direction radiale. Le support de la discrétisation est un maillage cartésien structuré, tel que schématisé à la figure 7.1, où les valeurs discrètes de température sont stockées aux noeuds. Plus de détails sur le maillage sont fournis à la section 7.4.1.

La température, pour chaque colonne radiale du maillage, est résolue par une méthode directe d'éléments finis 1D. On applique pour cela l'équation (6.34) à la colonne i :

$$u_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i = \frac{k}{Pe} \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]_i \right] + q \quad (7.1)$$

où on a omis les tildes des variables adimensionnelles afin d'alléger la notation. Il n'y a pas lieu d'indicer la vitesse u_x , celle-ci étant indépendante de la coordonnée axiale ; il s'agit de la même fonction pour toutes les colonnes. Il en va de même pour la production q et la conductivité thermique k .

Les termes $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i$, provenant de la discrétisation axiale en différences finies, font intervenir les valeurs de température aux colonnes $i-1$ et $i+1$. Cette étendue est représentée par le domaine encadré de lignes pointillées à la figure 7.1. Le système est donc découplé axialement et on doit utiliser une méthode itérative de balayage

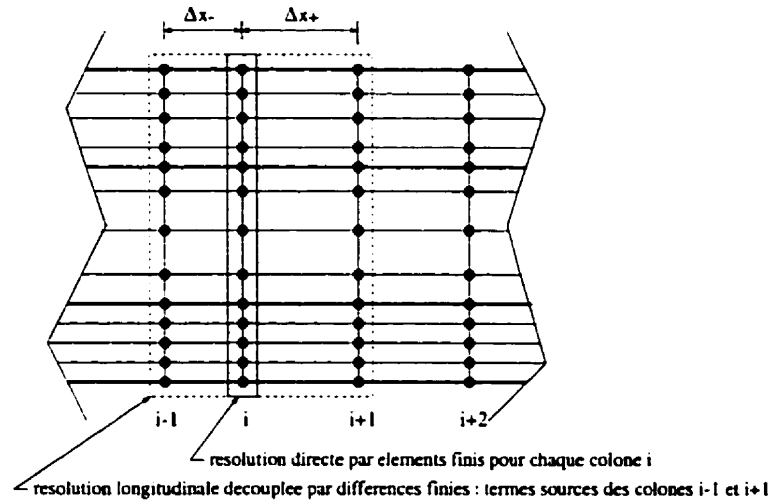


Figure 7.1: Discretisation : maillage cartésien structuré

du domaine *par colonnes*. Les directions alternées ne semblent pas accélérer la convergence, les balayages sont effectués de l'amont à l'aval exclusivement.

7.2 Différences finies

7.2.1 Discretisation axiale

Il est naturel de discrétiser la dérivée seconde du terme de diffusion selon un schéma centré. On a donc :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i &= \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} (\Delta x_+ + \Delta x_-)} \\
 &= \frac{\Delta x_- T_{i+1} - (\Delta x_+ + \Delta x_-) T_i + \Delta x_+ T_{i-1}}{\frac{1}{2} \Delta x_- \Delta x_+ (\Delta x_+ + \Delta x_-)}
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

où Δx_- et Δx_+ sont les distances entre les colonnes i et $i - 1$ et entre les colonnes $i + 1$ et i respectivement. Les expressions T_{i-1} et T_{i+1} représentent le champ de température aux colonnes amont et aval respectivement. Ce ne sont donc pas des

valeurs nodales mais plutôt des fonctions de la coordonnée radiale, tout comme T_i . Rigoureusement, on devrait donc écrire $T_{i-1}(r)$ plutôt que T_{i-1} , etc.

Pour la dérivée du terme de convection $\frac{\partial T}{\partial x}$, on choisit une discrétisation en amont (*upwind*) car le nombre de Peclet est élevé :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_i = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x_-} \quad (7.3)$$

On évite ainsi les risques potentiels d'oscillations et de divergence de la résolution associés à une discrétisation centrée, comme le montrent Ferziger et Perić [21]. Il faut cependant mentionner que ces risques diminuent lorsque le maillage est raffiné en conséquence de la diminution du nombre de Peclet local encourue. De plus, alors que le schéma de discrétisation en amont est de premier ordre, le schéma de discrétisation centré est du second ordre pour un maillage régulier et tend asymptotiquement vers le second ordre lorsqu'un maillage concentré est raffiné. Nous sommes conscient de ce désavantage de la discrétisation en amont mais il ne semble pas qu'elle affecte significativement à la baisse l'ordre global du schéma, comme nous le verrons à la section 7.4.1.

En insérant les discrétisations 7.2 et 7.3 dans l'équation 7.1, on obtient :

$$\frac{u_x}{\Delta x_-} T_i - \frac{k}{Pe} \left[\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]_i - \frac{2}{\Delta x_+ \Delta x_-} T_i \right] = \Upsilon \quad (7.4)$$

où on a introduit le terme source Υ :

$$\Upsilon = \frac{u_x}{\Delta x_-} T_{i-1} + \frac{k}{Pe} \left(\frac{\Delta x_- T_{i+1} + \Delta x_+ T_{i-1}}{\frac{1}{2} \Delta x_- \Delta x_+ (\Delta x_+ + \Delta x_-)} \right) + q \quad (7.5)$$

Lors de la résolution du système de la colonne i , les champs de température T_{i-1} et T_{i+1} sont fixés (le système est découplé dans la direction axiale). C'est pourquoi ils

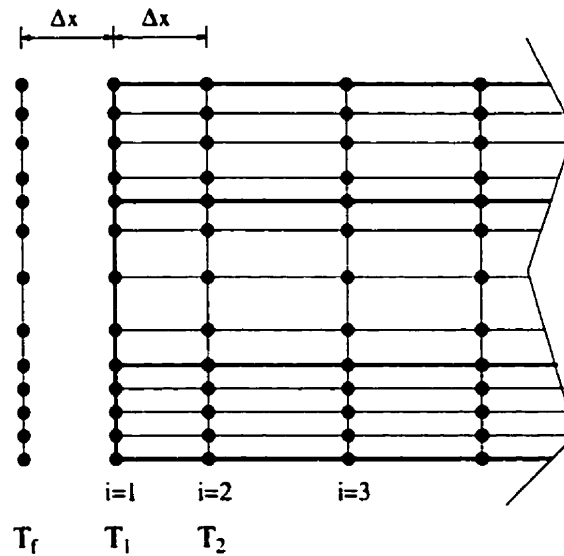


Figure 7.2: Colonne de noeuds de température fictifs en entrée

font partie du terme Υ , avec la source de production q .

7.2.2 Conditions aux frontières

Afin d'appliquer les conditions limites aux frontières axiales, on introduit une colonne fictive à l'extérieur du domaine en entrée et en sortie, tel qu'illustré à la figure 7.2 pour l'entrée. La colonne est le support d'un champ de température fictif T_f . Elle est située à une distance Δx de la colonne 1 égale à la distance séparant les colonnes 1 et 2.

Comme la discrétisation axiale ne fait intervenir que le champ de température des colonnes immédiatement voisines (voir les équations (7.2) et (7.3)), on se servira du champ T_f lors de la résolution des champs T_1 et T_{nc} (nc est le nombre de colonnes).

Les conditions aux frontières sont présentées à la figure 5.4. Un flux thermique nul (condition naturelle) est imposé en entrée à la paroi du solide et partout en sortie.

Une température de 37°C (condition de Dirichlet) est imposée en entrée des canaux.

Condition naturelle de Neumann

La condition de flux nul se traduit par $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. Il est naturel de discrétiser cette condition selon un schéma centré. En se référant à la figure 7.2, on écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial T}{\partial x} \\ &= \frac{T_2 - T_f}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (7.6)$$

et il en résulte :

$$T_f = T_2 \quad (7.7)$$

Ainsi, à titre d'exemple, lors de la résolution de la première colonne, la discrétisation de la dérivée seconde du terme de diffusion selon l'équation (7.2) devient, en remplaçant T_{i-1} par T_f :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_1 &= \frac{\Delta x T_2 - 2\Delta x T_1 + \Delta x T_f}{\Delta x^3} \\ &= \frac{2(T_2 - T_1)}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (7.8)$$

En sortie, on impose la condition de façon symétrique.

Condition essentielle de Dirichlet

Le choix de la référence de température $T_{ref} = 37^\circ\text{C}$ à la section 6.4 fait en sorte que la condition de Dirichlet, après l'adimensionnalisation, devient $T = 0$. Afin d'éviter une légère singularité à l'interface fluide-solide (une condition naturelle est imposée

à la paroi du solide), on impose cette condition essentielle à la colonne fictive plutôt que de l'imposer directement à la première colonne du domaine. On a donc :

$$T_f = 0 \quad (7.9)$$

On permet ainsi une légère élévation de la température en entrée des canaux sur la première colonne, ce qui prévient le saut, sur un seul élément, d'une valeur nulle à une valeur finie relativement élevée, la conductivité des parties solides étant grande.

Cette façon d'imposer la condition essentielle est relativement indépendante du maillage. Puisque la convection dans le fluide est dominante, elle est pratiquement équivalente à allonger le domaine des canaux en entrée pour imposer $T = 0$ loin de l'entrée réelle.

7.3 Éléments finis

7.3.1 Méthode de Galerkin

Afin de résoudre l'équation 7.4 pour chaque colonne, on utilise la méthode d'éléments finis de Galerkin (aussi appelée méthode de Ritz-Galerkin) décrite par Reddy [22] et Fortin et Garon [23]. Il s'agit de trouver une approximation de la solution $T(r)$ ayant la forme :

$$T(r) \simeq \sum_{j=1}^n T_j \phi_j(r) \quad (7.10)$$

où n est le nombre de degrés de liberté de température T_j du domaine associés à T et les ϕ_j sont les fonctions d'interpolation globales (fonctions de Ritz) associées à chaque degré de liberté. Une fonction d'interpolation globale ϕ_j est constituée d'une

des fonctions d'interpolation locales (polynômes de Lagrange) de chaque élément adjacent au degré de liberté T_j . Le support des fonctions ϕ_j est donc réduit à 2 éléments à l'intérieur du domaine et à 1 élément aux frontières.

La première étape consiste à multiplier l'équation différentielle par une fonction test $w = w(r)$ et à intégrer sur le domaine — on considère ici un domaine Ω radial 1D allant de $r = r_1$ à $r = r_7$:

$$\int_{r_1}^{r_7} \left(\frac{u_x}{\Delta x_-} T - \frac{a}{r} \frac{dT}{dr} - a \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2a}{\Delta x_+ \Delta x_-} T - \Upsilon \right) w r dr = 0 \quad (7.11)$$

où $a = \frac{k}{\rho c}$. On a remplacé les dérivées partielles par des dérivées totales car le champ T n'est fonction que de r pour un terme source Υ donné. L'indice i est omis afin d'alléger la notation ; on se rappellera simplement que T représente le champ de température à la colonne i . On intègre ensuite par parties le terme de second ordre afin de faire passer la dérivée de T à la fonction test w . On obtient ainsi la formulation variationnelle (forme faible) :

$$\int_{r_1}^{r_7} \left(\frac{u_x}{\Delta x_-} w T + a \frac{dw}{dr} \frac{dT}{dr} + \frac{2a}{\Delta x_+ \Delta x_-} w T \right) r dr = \int_{r_1}^{r_7} \Upsilon w r dr + s_a + s_b \quad (7.12)$$

où on a introduit les variables secondaires s_k et s_e :

$$s_k = - a r w(r) \frac{dT}{dr} \Big|_{r_1} \quad \text{et} \quad s_e = a r w(r) \frac{dT}{dr} \Big|_{r_7} \quad (7.13)$$

Les indices k et e font référence aux frontières présentées à la figure 5.4 de la section 5.3. Le flux de chaleur nul ($\frac{dT}{dr} = 0$) aux frontières équivaut à poser $s_k = s_e = 0$. L'équation (7.12) devient donc :

$$\int_{r_1}^{r_7} \left(\frac{u_x}{\Delta x_-} w T + a \frac{dw}{dr} \frac{dT}{dr} + \frac{2a}{\Delta x_+ \Delta x_-} w T \right) r dr = \int_{r_1}^{r_7} \Upsilon w r dr \quad (7.14)$$

Enfin, la méthode de Galerkin consiste à prendre pour la fonction test w les n fonctions d'interpolation ϕ_i utilisées pour la base de la solution approchée selon l'équation (7.10). Ce faisant, l'équation 7.14 devient :

$$\int_{r_1}^{r_7} \left[\left(\frac{u_x}{\Delta x_-} + \frac{2a}{\Delta x_+ \Delta x_-} \right) \phi_i \sum_{j=1}^n T_j \phi_j + a \frac{d\phi_i}{dr} \sum_{j=1}^n T_j \frac{d\phi_j}{dr} \right] r dr = \int_{r_1}^{r_7} \Upsilon \phi_i r dr \quad (7.15)$$

Comme il y a n équations de ce type ($i = 1, n$), on peut assembler un système linéaire $n \times n$ de la forme :

$$\mathbf{BT} = \mathbf{L} \quad (7.16)$$

où le vecteur $\mathbf{T}$ contient les n degrés de liberté T_j . La matrice $\mathbf{B}$ et le vecteur $\mathbf{L}$ ont pour coefficients :

$$B_{ij} = \int_{r_1}^{r_7} \left[\left(\frac{u_x}{\Delta x_-} + \frac{2a}{\Delta x_+ \Delta x_-} \right) \phi_i \phi_j + a \frac{d\phi_i}{dr} \frac{d\phi_j}{dr} \right] r dr \quad (7.17)$$

et :

$$L_i = \int_{r_1}^{r_7} \Upsilon \phi_i r dr \quad (7.18)$$

Les coefficients B_{ij} de la forme bilinéaire (7.17) sont constants. La matrice $\mathbf{B}$ peut donc être construite une fois pour toutes ce qui représente une économie de temps de calcul. Comme Υ dépend du champ T des colonnes voisines (voir équation (7.5)), les coefficients L_i changent d'un balayage à l'autre ; on devra donc les calculer à chaque balayage.

L'équation différentielle (7.1) est d'ordre 2 et les conditions aux frontières sont exclusivement naturelles ; les fonctions test et la solution sont donc dans l'espace de

Hilbert $H^1(\Omega)$.

7.3.2 Base d'interpolation et quadrature

On choisit une base d'interpolation ϕ linéaire et les degrés de liberté T_j sont stockés aux noeuds géométriques présentés à la figure 7.1. Selon ce choix on a :

$$d^\circ[\phi_i(r)\phi_j(r)r] = 3 \quad (7.19)$$

où $d^\circ[P]$ est le degré du polynôme P . Les polynômes à intégrer de la forme (7.15) sont donc au minimum du troisième degré.

Les polynômes de degré plus élevé proviennent des termes de convection. Considérons donc la forme de la vitesse axiale, selon l'équation (6.6) : $u_x = cr^2 + a \ln r + b$ (a , b et c sont des constantes). Cette forme n'est pas polynomiale à cause du logarithme. Toutefois, si on le néglige, on a $d^\circ[u_x(r)] \approx 2$, de sorte que $d^\circ[u_x(r)\phi_i(r)\phi_j(r)r] \approx 5$. On choisit donc une quadrature de Gauss à 3 points pour évaluer numériquement les intégrales de la forme (7.15) car elle permet d'intégrer exactement un polynôme du cinquième degré. Les termes ne contenant pas u_x sont ainsi intégrés exactement mais le logarithme des termes de convection induit une légère erreur (équivalente à approximer le logarithme par une forme quadratique).

Mentionnons que comme les champs de température ont un même support d'interpolation et sont alignés, le terme $\Upsilon = \Upsilon(T_{i-1}, T_{i+1})$ est évalué aux points de Gauss pour le calcul des coefficients L_i .

Enfin, le choix linéaire pour les fonctions d'interpolation fait que la matrice $\mathbf{B}$ du système (7.16) est tridiagonale. On résout donc le système par une méthode d'élimination gaussienne simplifiée.

7.4 Précision de la solution

La résolution numérique des équations induit deux sources d'erreur : l'erreur de discrétisation ϵ_d et l'erreur de convergence ϵ_c . L'erreur de discrétisation est liée à la richesse de l'espace discret (nombre d'éléments, de colonnes et de noeuds de calcul par éléments) et l'erreur de convergence est liée à la tolérance fixée pour l'arrêt de la procédure itérative de balayages dans la direction axiale du domaine.

On désire limiter ces erreurs de façon à obtenir 3 chiffres significatifs sur la réponse T_{max} introduite à la section 6.6.2. On choisit cette valeur locale d'élévation de température car c'est elle qui est directement utilisée pour récupérer $P_{c_{max}}$. Dans l'espace expérimental, on obtient $T_{max} \sim 1,5^\circ\text{C}$; afin de s'assurer de 3 chiffres significatifs, la définition (2.11) conduit à :

$$\epsilon_c + \epsilon_d \leq 5 \times 10^{-3} \quad (7.20)$$

Afin de satisfaire cette contrainte, on choisit d'admettre une distribution de l'erreur selon les critères suivants :

$$\epsilon_d \leq 4 \times 10^{-3} \quad (7.21)$$

et

$$\epsilon_c \leq 5 \times 10^{-4} \quad (7.22)$$

Ce choix est conservateur car il fait en sorte que l'erreur totale ne dépasse pas $4,5 \times 10^{-3}$ plutôt que 5×10^{-3} . Il nous sert à déterminer le maillage à utiliser et le critère d'arrêt du balayage des colonnes.

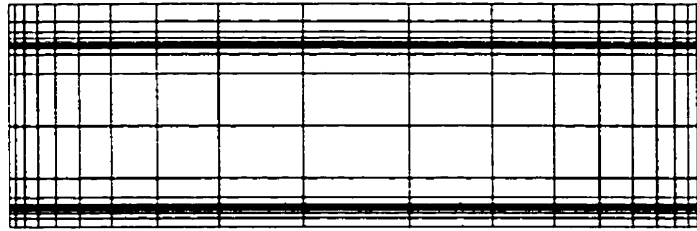


Figure 7.3: Maillage de base

7.4.1 Erreur de discrétisation et choix du maillage

Choix du maillage

On désire utiliser un seul maillage pour toutes les simulations. Une étude de raffinement permet de déterminer la taille nécessaire de ce maillage en fonction du critère (7.21).

Afin que l'étude de raffinement caractérise l'espace expérimental, on considère trois configurations : le cas $c1$, où les facteurs sont fixés à leur valeur minimale, le cas $c2$, où les facteurs sont fixés à leur modalité milieu et le cas $c3$ où les facteurs sont fixés à leur valeur maximale. On se réfère au tableau 5.3 pour les valeurs des facteurs.

Le maillage de base $m1$, présenté à la figure 7.3 est composé de 20 colonnes radiales de 20 éléments 1D chacune (20×20). La distribution des noeuds est générée par le schéma exponentiel de concentration présenté à la section 2.2.2. Les paramètres de concentration (il sont les mêmes pour tous les maillages) sont fixés de sorte qu'il y ait plus de noeuds là où on suppose que les gradients de la solution sont élevés. C'est le cas en entrée des canaux, près de la paroi interne du canal principal et près de la paroi externe du canal du joint. On concentre aussi en sortie afin de s'assurer que la condition de flux nul soit bien respectée.

On obtient des solutions avec 11 maillages ($m1, m2, \dots, m11$) tels que le paramètre de raffinement r d'un maillage mi vaut i . Le raffinement r d'un maillage mi représente le ratio du nombre d'éléments dans la direction radiale (ou de colonnes) du maillage mi sur celui du maillage $m1$. Ainsi, la taille du maillage $m10$ est de 200×200 . Comme le maillage $m11$ est le plus fin, on se sert de la solution obtenue avec celui-ci pour estimer l'erreur de la variable T_{max} obtenue avec les autres maillages :

$$\epsilon_d^{mi} \approx T_{max}^{m11} - T_{max}^{mi} \quad (7.23)$$

Le graphique 7.4 présente le comportement de cette approximation de l'erreur pour les trois cas. Celle-ci permet d'apprécier des variations sur plusieurs échelles à la fois. L'abscisse du graphe est la taille h associée au maillage, où $h = \frac{1}{r}$. Cette taille n'est pas représentative mais plutôt proportionnelle à la taille des éléments. On note de plus que les fonctions de concentration utilisées font que le raffinement n'est pas uniforme ; lorsqu'on double un maillage, le plus petit élément du nouveau maillage est plus de deux fois plus petit que le plus petit élément du maillage original et inversement pour les plus grands éléments. Ainsi, les noeuds ajoutés au maillage $m1$ pour former le maillage $m2$ ne sont pas exactement au milieu des noeuds initiaux.

Les courbes d'erreur du graphique 7.4 présentent un même comportement mais l'erreur pour le cas $c1$ est dominante. C'est donc celle-ci qu'on considère. Avec le maillage $m6$ ($h = 0,167$), le critère (7.21) est satisfait de justesse. Par prudence, on choisit le maillage $m8$ ($h = 0,125$) pour lequel on obtient une erreur de discrétisation de 10^{-3} . Pour les cas $c2$ et $c3$, on a $\epsilon_{d,m8} \approx 2 \times 10^{-4}$.

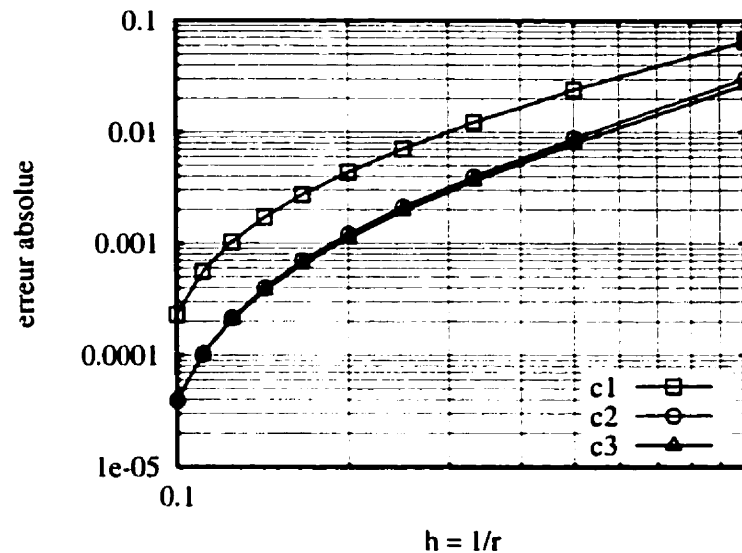


Figure 7.4: Erreur de discrétisation

Analyse de convergence

Les courbes d'erreur de la figure 7.4 plongent lorsque la taille h approche 0,1. Cela n'a rien de surprenant car on estime l'erreur en supposant exactes les valeurs obtenues du maillage $m11$; elles ne le sont pourtant pas et il est normal que les valeurs obtenues des maillages dont le raffinement est près de celui de $m11$ en diffèrent guère. On a donc vraisemblablement sous-estimé l'erreur de discrétisation, particulièrement pour les maillages les plus raffinés. Ceci explique le fait que l'erreur semble se comporter asymptotiquement seulement pour les grandes valeurs de h ; l'estimé de l'ordre de l'erreur n'est valable que pour les maillages grossiers. Il aurait donc été préférable d'avoir des résultats sur un maillage beaucoup plus raffiné afin d'estimer l'erreur mais ceci est très coûteux en temps de calcul et en espace mémoire.

Il est tout de même possible d'obtenir un meilleur estimé de l'erreur avec les données

que nous avons. Supposons d'abord que l'erreur de discrétisation se comporte selon :

$$\epsilon_d = T_{max}^* - T_{max}^h \simeq \alpha h^p \quad (7.24)$$

où T_{max}^* est la valeur exacte de T_{max} , α une constante indépendante de h et p l'ordre auquel la solution discrète T_{max}^h obtenue avec le maillage converge vers la solution exacte. En vertu de cette équation, on peut écrire :

$$\epsilon_d^{mi} = \frac{\Delta^{ij}}{1 - \left(\frac{h_i}{h_j}\right)^p} \quad (7.25)$$

où $\Delta^{ij} = T_{max}^{mi} - T_{max}^{mj}$. Les indices i et j réfèrent simplement à des maillages dont le paramètre de raffinement est différent. D'après cette équation, lorsqu'on connaît l'ordre de convergence p , on peut estimer l'erreur d'un maillage en se basant sur la différence entre la valeur obtenue avec deux maillages. Ceci est à la base de la généralisation de l'extrapolation de Richardson décrite par Roache [24].

On peut déterminer l'ordre de convergence à l'aide des résultats en calculant p à l'aide de l'équation suivante (elle découle de la forme (7.24)) :

$$\frac{T_{max}^{mi} - T_{max}^{mj}}{T_{max}^{mi} - T_{max}^{mk}} = \frac{h_j^p - h_i^p}{h_k^p - h_i^p} \quad (7.26)$$

En prenant arbitrairement $m4$ pour mi , $m8$ pour mj et $m10$ pour mk , on obtient $p = 1,86$, $p = 2,21$ et $p = 2,15$ pour les cas $c1$, $c2$ et $c3$ respectivement.

La méthode d'éléments finis utilisée est normalement d'ordre 2 pour les variables primaires. Par contre, la discrétisation en différences finies n'est pas d'ordre 2 car le maillage n'est pas uniforme et le terme de convection est discrétisé selon un schéma en amont d'ordre 1 (voir la section 7.2.1) ; Ferziger et Perić [25] donnent plus de détails. On devrait donc s'attendre à ce que l'ordre global de la méthode soit légèrement

inférieur à 2. Or, on observe cela pour le cas *c1* uniquement. Les valeurs au dessus de 2 peuvent être dues au fait que l'on estime l'erreur avec la valeur locale T_{max} (et non avec une norme du champ solution) et que la taille de référence des maillages n'est pas représentative de la taille locale des éléments autour de T_{max} ; les fonctions de concentration font que cette taille locale, dans les régions raffinées, diminue plus rapidement que le ratio $\frac{1}{r}$ dont nous nous servons pour obtenir la taille caractéristique des maillages.

Comme il semble difficile de convenir d'un ordre de convergence général et notre but étant simplement de fournir un meilleur estimé de l'erreur de discrétisation, nous utilisons la valeur de p trouvée pour chaque cas. On détermine ainsi l'erreur ϵ_d avec l'équation (7.25) et utilisant des valeurs consécutives pour i et j : si $i = 10$, alors $j = 9$. La figure 7.5 présente les résultats obtenus pour les cas *c1* et *c2*, ainsi que ceux obtenus selon l'équation (7.23), identifiés par *m11*. Les nouveaux estimés de l'erreur de discrétisation ne plongent plus lorsque la taille diminue, lacune à laquelle nous voulions précisément remédier. L'erreur pour le cas *c1* est toujours dominante. Avec le maillage *m8*, on a $\epsilon_d = 2,5 \times 10^{-3}$; comme cette valeur satisfait le critère (7.21), il n'est pas nécessaire de réviser le choix du maillage *m8*.

7.4.2 Erreur de convergence et choix du critère d'arrêt

Afin de satisfaire le critère (7.22) sur l'erreur de convergence, on doit fixer un critère d'arrêt pour le balayage des colonnes. Pour une telle procédure itérative, il est courant de se baser sur la différence entre deux itérations successives ; on arrête lorsque la différence, mesurée par une norme appropriée, est plus petite qu'une tolérance ζ prédéterminée.

Soit T^{n-1} et T^n les champs discrets de température avant et après le balayage n

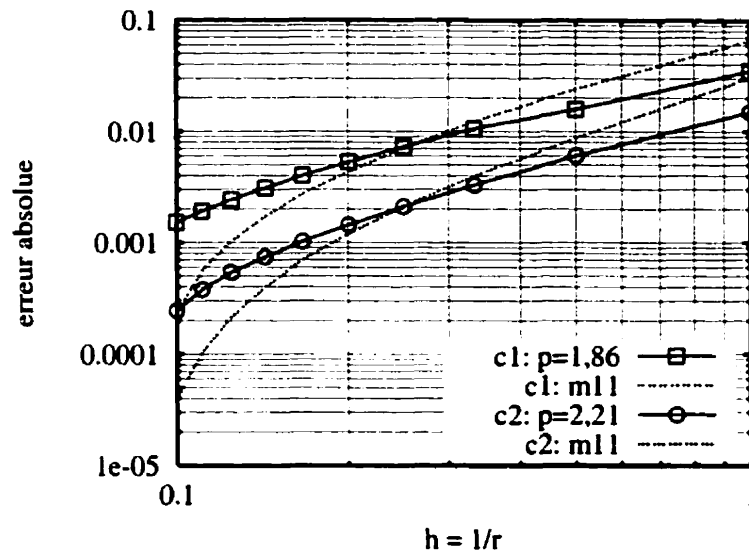


Figure 7.5: Erreur de discrétisation réévaluée

respectivement. La correction δ^n attribuable au balayage est alors :

$$\delta^n = T^n - T^{n-1} \quad (7.27)$$

Cette correction représente donc la différence entre deux itérations successives. Le critère d'arrêt est basé sur la norme euclidienne de δ^n . Celle-ci est notée $\|\delta^n\|_e$ et définie par :

$$\|\delta^n\|_e = \sqrt{\sum_i^{ni} \delta_i^n} \quad (7.28)$$

où ni est le nombre de valeurs discrètes i . Le critère d'arrêt prend donc la forme :

$$\frac{\|\delta^n\|_e}{\|T^n\|_e} \leq \zeta \quad (7.29)$$

où on a normalisé la norme euclidienne de δ^n par celle du champ de température courant T^n .

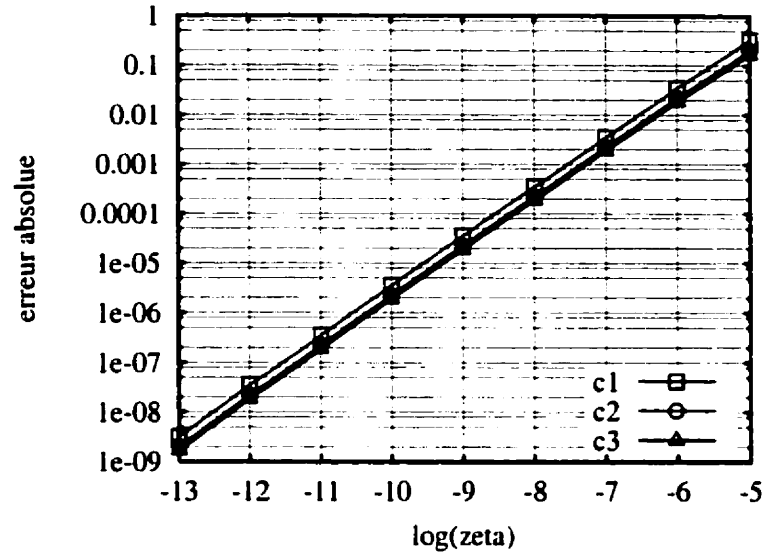


Figure 7.6: Erreur de convergence

On détermine la valeur appropriée de la tolérance ζ en obtenant des solutions sur le maillage $m8$ pour les trois cas avec $\zeta = 10^{-5}, 10^{-6}, \dots, 10^{-14}$. Comme $\zeta = 10^{-14}$ représente le critère le plus sévère, on se sert de la solution convergée avec cette valeur pour estimer l'erreur de convergence de la variable T_{max} obtenue avec les autres valeurs de tolérance :

$$\epsilon_{c,\zeta} \approx T_{max}|_{\zeta=10^{-14}} - T_{max}|_{\zeta} \quad (7.30)$$

Le graphique 7.6 présente cette approximation de l'erreur en fonction de ζ (noté *zeta*) pour les trois cas. Les traces sont droites et la dépendance entre ζ et l'erreur est linéaire. Pour le cas *c1*, celle-ci est légèrement plus grande. Lorsque $\zeta = 10^{-8}$, l'erreur de convergence ϵ_c est tout juste sous 5×10^{-4} ce qui satisfait le critère (7.22) fixé sur l'erreur de convergence. On choisit donc $\zeta = 10^{-8}$ pour définir le critère d'arrêt (7.29).

Notons que l'étude de raffinement de la section précédente a été effectuée avec $\zeta =$

10^{-10} . Il résulte d'une telle tolérance, selon le graphique 7.6, une erreur de convergence inférieure à 5×10^{-6} . Cette valeur est inférieure de trois ordres de grandeur au critère (7.21) sur l'erreur de discrétisation. Les résultats et conclusions de l'étude de raffinement ne sont donc pas significativement entachés par l'erreur de convergence.

7.5 Accélération de convergence

Une méthode d'accélération de convergence est implantée afin de réduire le temps de calcul de chaque simulation. Elle est basée sur le fait qu'une solution obtenue sur un maillage grossier, peu coûteuse en temps de calcul, constitue un bon champ de départ pour la résolution sur un maillage raffiné.

On obtient donc, par interpolation dans le champ obtenu de la solution d'un maillage grossier, le champ initial d'un maillage raffiné. Pour cela, il faut supposer une base d'interpolation. La discrétisation par le schéma hybride couplant différences finies et éléments finis ne présente pas de base d'interpolation claire entre les colonnes. Il semble cependant raisonnable d'utiliser une interpolation bilinéaire entre quatre noeuds; on fait comme si la solution était obtenue et représentée par des éléments quadrilatères avec une base d'interpolation lagrangienne de type Q_1 .

Ainsi, on obtient une solution sur le maillage $m8$ en passant successivement par les maillages $m2$, $m4$ et $m6$. Pour se donner une idée de l'avantage de cette méthode, le tableau 7.1 présente le temps de calcul (en secondes) nécessaire à converger les solutions « accélérées » pour les cas $c1$, $c2$ et $c3$. Le temps de la solution *directe* est le temps nécessaire à converger une solution sur le maillage $m8$ en partant d'un champ initial nul. Le *gain* est la réduction de temps, en pourcentage du temps de la solution directe, encourue grâce à la méthode d'accélération; il varie de 72 à 81%. La

Tableau 7.1: Temps de calcul et accélération de convergence

	solution directe	solution accélérée	gain (%)
cas <i>c1</i>	19720	5601	72
cas <i>c2</i>	31705	6179	80
cas <i>c3</i>	35706	6872	81

méthode permet donc de faire plus de simulations et d'enrichir la surface de réponse pour un même temps de calcul.

CHAPITRE 8

RÉSULTATS ET DISCUSSION

8.1 Étude de tamisage

On cherche à construire une fonction multi-paramétrique de la puissance de chaleur maximale $P_{c_{max}}$ qu'un moteur peut produire sans entraîner une augmentation de la température du sang au-delà du seuil critique de 3°C. Avec huit paramètres, un nombre d'essais considérable est nécessaire pour de construire une surface de réponse valable. Ainsi, afin de repérer les facteurs dont l'effet est négligeable, on effectue d'abord une étude de tamisage. Le coût d'une telle étude peut être largement compensé car l'élimination de quelques facteurs. Ceci réduit en effet considérablement le nombre d'essais requis pour générer des surfaces de réponses (ou les susfaces seront plus riches pour un même nombre d'essais) et allège leur analyse.

Avec huit facteurs, un plan fractionnel factoriel de 16 essais ($2^{(8-4)}$) à résolution IV convient pour le tamisage. Le tableau 8.1 présente les valeurs codées des facteurs et les résultats de $P_{c_{max}}$ obtenus pour chaque essai. Les valeurs codées sont choisies aux extrémités de l'espace expérimental et correspondent donc aux valeurs minimales et maximales du tableau 5.3.

On construit à l'aide des données un modèle linéaire de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 P_{c_{max}} = & \beta_0 + \beta_L L + \beta_\delta \delta + \beta_{r_1} r_1 + \beta_{k_{eff}} k_{eff} \\
 & + \beta_t t + \beta_{E_p} E_p + \beta_{Q_t} Q_t + \beta_{E_{T_i}} E_{T_i}
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

Tableau 8.1: Plan d'expérience de tamisage à 16 essais

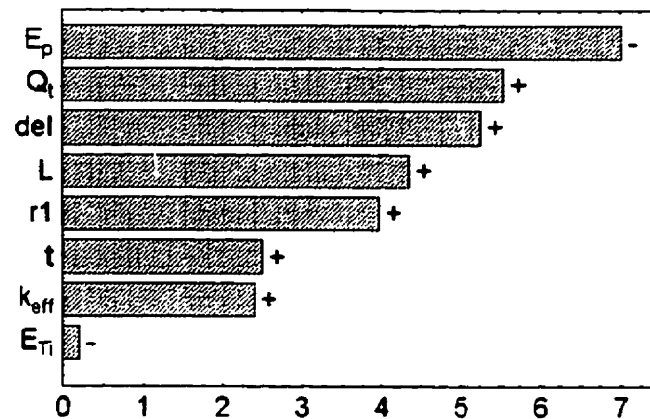
essai	L	δ	r_1	k_{eff}	t	E_p	Q_t	E_{Ti}	P_{cmax}
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	7,82
2	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	9,06
3	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	19,77
4	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	12,43
5	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	10,51
6	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	16,23
7	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	11,32
8	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	30,12
9	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	8,59
10	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	24,19
11	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	11,83
12	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	17,30
13	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	19,05
14	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	10,35
15	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	20,56
16	1	1	1	1	1	1	1	1	24,68

Le coefficient de détermination R^2 de la régression est de 0.93 ; le modèle recouvre donc bien les résultats. Les demi-effets β_i sont présentés au tableau 8.2. La réponse moyenne β_0 est de 15,9 W et les observations s'étalent entre 7,8 et 30,1 W. Cela représente une variabilité considérable. Les facteurs — du moins certains d'entre eux — ont donc un effet significatif sur la réponse.

Tableau 8.2: Coefficients du modèle linéaire de régression sur P_{cmax}

β_0	β_L	β_δ	β_{r_1}	$\beta_{k_{eff}}$	β_t	β_{E_p}	β_{Q_t}	$\beta_{E_{Ti}}$
15,86	2,18	2,64	1,99	1,21	1,26	-3,52	2,79	-0,11

L'effet des facteurs est comparé sur le diagramme de Pareto 8.1. L'épaisseur du canal principal E_p domine la réponse alors que celle des couches de titane E_{Ti} a le plus petit effet. Il est plus de dix fois plus petit que ceux de la conductivité effective k_{eff} et du paramètre d'interpolation t qui se classent ensuite en ordre d'importance croissante. La différence entre l'effet des autres facteurs n'est en aucun cas aussi importante :

Figure 8.1: Pareto $P_{c_{\max}}$

l'effet de k_{eff} , soit le facteur le moins important après E_{Ti} , est seulement trois fois moins important que celui du facteur dominant E_p . De plus, le coefficient $\beta_{E_{Ti}}$ ne représente que 0,7 % de la moyenne β_0 . On élimine donc l'épaisseur des couches de titane E_{Ti} pour la génération des surfaces de réponse. Sa valeur sera fixée à sa modalité milieu, soit $50 \mu\text{m}$. Advenant que les couches de titane n'aient pas $50 \mu\text{m}$ d'épaisseur, on estime, à l'aide de la valeur du demi-effet $\beta_{E_{Ti}}$, l'erreur de prédiction à un maximum de 0,1 W. Ceci est tout à fait raisonnable compte tenu que la puissance $P_{c_{\max}}$ varie de 10 à 30 W dans l'espace expérimental. L'erreur relative demeure ainsi en deçà de 1 %.

Avant toutefois de procéder au calcul des surfaces de réponse, il convient de vérifier la courbure du système afin de s'assurer qu'un modèle plus riche est nécessaire. On effectue donc une simulation au centre de l'espace expérimental. On obtient $P_{c_{\max}} = 17,6 \text{ W}$; la moyenne β_0 représente une erreur de 10 % par rapport à cette valeur. Ce résultat, faisant état d'une certaine courbure du système, justifie un plan d'expérience visant à caractériser la réponse de façon plus riche dans l'espace expérimental.

8.2 Surface de réponse

8.2.1 Plan d'expérience central composite

Afin de tenir compte de la courbure dans le système, on construit un modèle admettant un effet quadratique pour les facteurs. En négligeant les interactions, un tel modèle prend la forme suivante :

$$P_{cmax} = \beta_0 + \sum_i^7 \beta_i x_i + \sum_i^7 \beta_{i^2} x_i^2 \quad (8.2)$$

où le coefficient β_{i^2} est le demi-effet quadratique du facteur x_i . Afin de déterminer les coefficients, on choisit un plan d'expérience central composite de 79 essais où les facteurs prennent cinq modalités. Le passage de deux à cinq modalités permet de capturer l'effet quadratique des facteurs. Le plan est composé des 64 essais d'un plan fractionnel factoriel 2^{7-2} , de 14 essais aux points axiaux et d'un essai au centre de l'espace expérimental. Afin de clarifier cette « composition », la figure 8.2 schématise la distribution des essais pour un plan central composite à deux facteurs, l'un étant lié à l'axe horizontal et l'autre à l'axe vertical. Le trait plein représente l'espace expérimental. Le trait hachuré représente l'espace du plan fractionnel factoriel dont les essais sont identifiés par les carrés. Le point central est identifié par le cercle et les points axiaux par des croix. Ceux-ci sont à une distance axiale de $\pm\alpha$ du centre, aux frontières de l'espace expérimental. Comme les essais du plan factoriel sont fixés à une distance de ± 1 du centre, la valeur de α détermine l'étendue de l'espace du plan factoriel dans l'espace expérimental. La détermination de sa valeur est liée à des considérations statistiques dépassant le cadre de cet ouvrage. Mentionnons seulement qu'une valeur de 1,94 fait en sorte que le plan est orthogonal, c'est-à-dire que tous les effets sont estimés indépendamment des autres. Par rapport à une valeur de 2,83 assurant une rotatabilité du plan d'expérience, c'est-à-dire une répartition uniforme

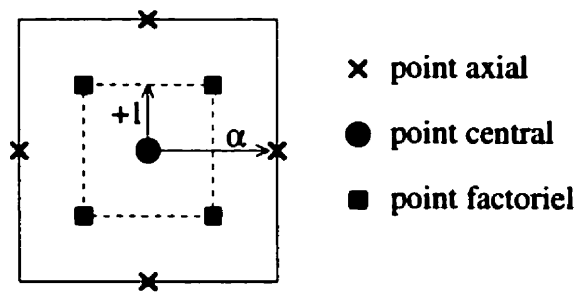


Figure 8.2: Plan central composite

de l'incertitude associée à la régression, le choix que nous faisons place les essais du plan factoriel dans une plus large portion de l'espace expérimental ; cela nous semble préférable.

8.2.2 Ajustement du modèle

Le diagramme de Pareto 8.3(a) présente les effets obtenus de la régression sur le plan d'expérience. Le coefficient de détermination est de 0,98, montrant une excellente corrélation entre le modèle et les résultats. Les effets linéaires et quadratiques des facteurs sont identifiés par (L) et (Q) respectivement. Les effets quadratiques sont tous plus faibles que l'effet linéaire le moins important, soit celui de k_{eff} . Seuls l'entrefer et l'épaisseur du canal principal présentent un effet quadratique supérieur à 0,5 W. L'effet des autres facteurs est inférieur à 0,2 W. Considérant l'ordre de grandeur de la réponse ($P_{cmax} \sim 20$ W), on décide de les rejeter du modèle dans l'optique de le simplifier ; ils font maintenant partie de l'erreur. Statistiquement, le modèle allégé récupère aussi bien les résultats car le coefficient de détermination R^2 demeure 0,98 ; les effets quadratiques négligés ne sont donc pas statistiquement significatifs et leur rejet en est d'autant plus justifié. En développant la forme (8.2),

le modèle simplifié s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 P_{c_{max}} = & \beta_0 + \beta_L L + \beta_\delta \delta + \beta_{r_1} r_1 + \beta_{k_{eff}} k_{eff} \\
 & + \beta_t t + \beta_{E_p} E_p + \beta_{Q_t} Q_t + \beta_{E_{Ti}} E_{Ti} \\
 & + \beta_{\delta^2} \delta^2 + \beta_{E_p^2} E_p^2
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

et ses demi-effets sont présentés au tableau 8.3. Le diagramme de Pareto 8.3(b) permet d'apprécier l'importance des facteurs du modèle ajusté. Comme le plan d'expérience est orthogonal, l'effet des facteurs que nous avons conservés n'a pas changé. Le demi-effet de la conductivité effective n'est que de 0,4 W, ce qui représente moins de 3 % de la moyenne β_0 . L'effet d'incertitude de k_{eff} sur la réponse est donc faible, ce qui est une chose satisfaisante. On note toutefois que la valeur de $\beta_{k_{eff}}$ est fortement liée à la plage de variation de k_{eff} du plan d'expérience. Ainsi, si la valeur réelle de la conductivité effective se trouve largement hors des bornes supposées pour k_{eff} , l'effet d'incertitude est possiblement sous-estimé et la qualité des prédictions nécessairement entachée.

Tableau 8.3: Coefficients de la surface de réponse de $P_{c_{max}}$

β_0	β_L	β_δ	β_{r_1}	$\beta_{k_{eff}}$	β_t	β_{E_p}	β_{Q_t}	β_{δ^2}	$\beta_{E_p^2}$
17,35	1,13	1,13	1,26	0,40	0,91	-1,97	1,28	-0,36	0,30

8.2.3 Extrémums du modèle

Deux points d'inflexion sont attribuables aux effets quadratiques de l'entrefer et de l'épaisseur du canal. On les obtient en annulant la dérivée du modèle par rapport à chacune de ces variables. Pour l'épaisseur du canal principal, on a $E_p = 3,28$ (en valeur codée). Comme cette valeur est très nettement à l'extérieur de l'espace expérimental ($-\alpha \leq E_p \leq \alpha$ où $\alpha = 1,94$), elle ne représente pas d'intérêt particulier.

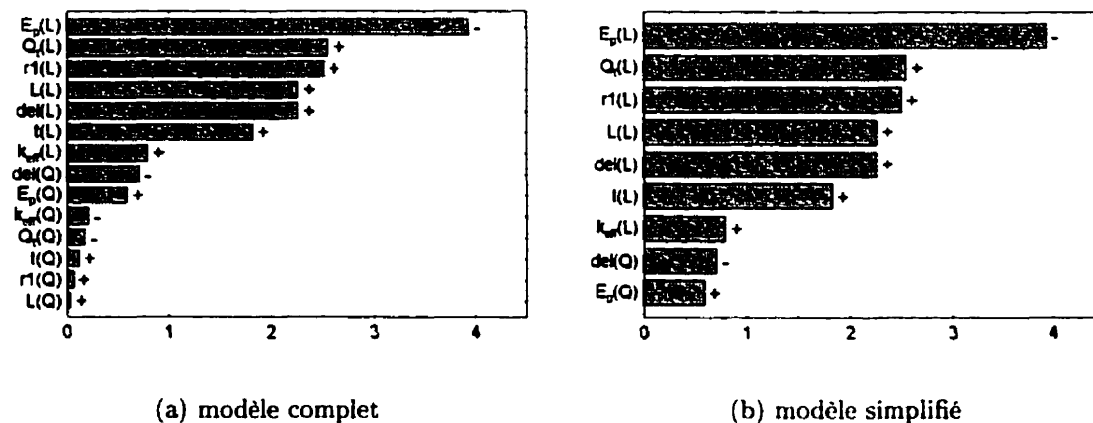


Figure 8.3: Diagrammes de Pareto pour P_{cmax}

Par contre, pour l'entrefer, l'inflexion de la réponse P_{cmax} se trouve à l'intérieur de l'espace expérimental à $\delta = 1,57$; cette valeur codée correspond à un entrefer de 0,93 mm et à un maximum de P_{cmax} . Selon le modèle, il n'est donc pas désirable que l'entrefer dépasse cette valeur critique car c'est elle qui permettrait une production de chaleur P_{cmax} maximale. Ceci augure bien car un petit entrefer assure une meilleure performance électromécanique.

Les autres facteurs ayant un effet linéaire, leurs extrémums se trouvent aux frontières de l'espace expérimental. On détermine le minimum et maximum pour chacun en considérant le signe de son effet. Ainsi, selon le modèle, dans l'espace expérimental, les valeurs de P_{cmax} minimale et maximale sont de 1,4 W et 32,9 W respectivement.

8.3 Utilisation des résultats et optimisation

On donne un sens aux prédictions du modèle en s'en servant pour déterminer le rendement électrique minimal $\eta_{e,min}$ assurant une élévation de température inférieure au seuil critique de 3°C. Selon l'équation (13), développée à l'introduction, ce rendement

est donné par :

$$\eta_{e_{min}} = \frac{P_f}{\eta_h P_{c_{max}} + P_f} \quad (8.4)$$

Pour utiliser cette équation, il faut non seulement connaître la valeur de $P_{c_{max}}$ mais aussi celle du rendement hydraulique η_h et de la puissance P_f transmise au fluide. Or, ces paramètres dépendent du point d'opération et de la configuration.

L'expérience suggère qu'il est raisonnable d'estimer le minimum du rendement hydraulique atteignable à 30 %, peu importe la valeur des paramètres — en autant que ceux-ci demeurent dans la plage admise au tableau 5.3 définissant l'espace expérimental. De plus, comme $P_f = Q_t \Delta p$, l'équation (8.4) devient :

$$\eta_{e_{min}} = \frac{Q_t \Delta p}{0,3 P_{c_{max}} + Q_t \Delta p} \quad (8.5)$$

Or, cette expression atteint un maximum pour une valeur de Δp maximale. Il suffit donc de considérer le régime d'opération où le gain de pression est le plus élevé, soit à 120 mmHg (16 kPa), pour obtenir le rendement $\eta_{e_{min}}$ de n'importe quelle configuration en fonction du débit.

L'équation (8.5) peut donc servir au développement du moteur. Le concepteur peut vérifier, pour la plage de débit et la configuration choisie, si le rendement électrique prévu est acceptable ou non. Il importe de considérer la plage de débit en entier car la vitesse de rotation change en fonction du débit et le rendement électrique s'en trouve alors affecté. Le modèle peut aussi être utilisé dans un contexte structuré d'optimisation simultanée des paramètres du moteur.

8.4 Borne supérieure au rendement électrique minimal

On s'intéresse maintenant à établir une borne supérieure au rendement électrique minimal dans l'espace expérimental. Il suffit d'insérer la réponse $P_{c_{max}}$ dans l'équation (8.5) en fixant les paramètres aux valeurs la minimisant et avec $\Delta p = 16$ kPa. Les résultats sont présentés au tableau 8.4. La situation la plus contraignante se trouve à 2 L/min où on obtient un rendement minimal de 60 % ; $\eta_{e_{min}}$ diminue ensuite lorsque le débit augmente pour atteindre 50 % à 6 L/min. Il y a lieu d'être optimiste en considérant ces prédictions ; elles signifient que peu importe la configuration, si le rendement électrique est supérieur à 60 %, le sang subira une élévation de température inférieure à la valeur critique de 3°C.

Tableau 8.4: Borne supérieure au rendement électrique minimal

Q_t (L/min)	2	3	4	5	6
$\eta_{e_{min}}$ (%)	60	55	52	51	50

8.4.1 Rendement électrique minimal pour le prototype actuel

La configuration présentée à la figure 5.1 est optimisée d'un point de vue hydraulique, sans égards au couplage avec le moteur. En vue de la conception prochaine du moteur de ce prototype, il importe de connaître la chaleur maximale pouvant être générée et le rendement électrique minimal acceptable.

La géométrie considérée est caractérisée par les valeurs suivantes : $r_1 = 4,36$ mm, $\delta = 1$ mm, $E_p = 2$ mm et $L = 30$ mm. On ne connaît pas *a priori* la valeur du paramètre d'interpolation t ni la conductivité effective de la zone du bobinage et du fer. Le choix prudent consiste leur attribuer des valeurs conservatrices qui maximisent la prédiction de $\eta_{e_{min}}$ et qui minimisent conséquemment celle de $P_{c_{max}}$. On se réfère au

Tableau 8.5: Rendement électrique minimal d'un prototype

Q_t (L/min)	P_f (W)	η_h (%)	$P_{c_{max}}$ (W)	$\eta_{e_{min}}$ (%)
2	0,53	25,4	12,4	14,4
3	0,80	32,1	13,7	15,4
4	1,07	36,9	14,9	16,2
5	1,33	38,2	16,2	17,7
6	1,60	37,7	17,4	19,6

diagramme de Pareto 8.3(b) : k_{eff} et t prennent tous deux la valeur codée minimale de -1,94.

Comme le rendement hydraulique est connu, on utilise l'équation (8.4) pour trouver la valeur du rendement électrique minimal. Les résultats sont présentés au tableau 8.5. Malgré le rendement hydraulique plus élevé au débit maximal de 6 L/min, comme la puissance $P_{c_{max}}$ ne compense pas l'augmentation de puissance P_f transmise au fluide, c'est à ce point d'opération que le rendement électrique minimal est le plus contraignant, soit ~ 20 %. Il diminue avec le débit jusqu'à ~ 14 % à 2 L/min. Ces résultats augurent bien : il suffit qu'il soit possible de construire un moteur, avec un entrefer relativement élevé de 1 mm, dont le rendement électrique sera supérieur à ~ 20 % sur toute la plage d'opération pour que le sang n'atteigne en aucun endroit une température dépassant 40°C.

8.5 Effet de la conductivité effective

Les figures 8.4(a) et 8.4(b) présentent les distributions de flux et de température à la paroi externe du canal du joint pour diverses valeurs de k_{eff} . Les autres paramètres sont fixés à la modalité milieu. Lorsque la conductivité effective est élevée, le flux est plus grand en entrée, plus faible vers la sortie et la distribution de température s'uniformise. On observe alors une réduction de l'élévation maximale de tempéra-

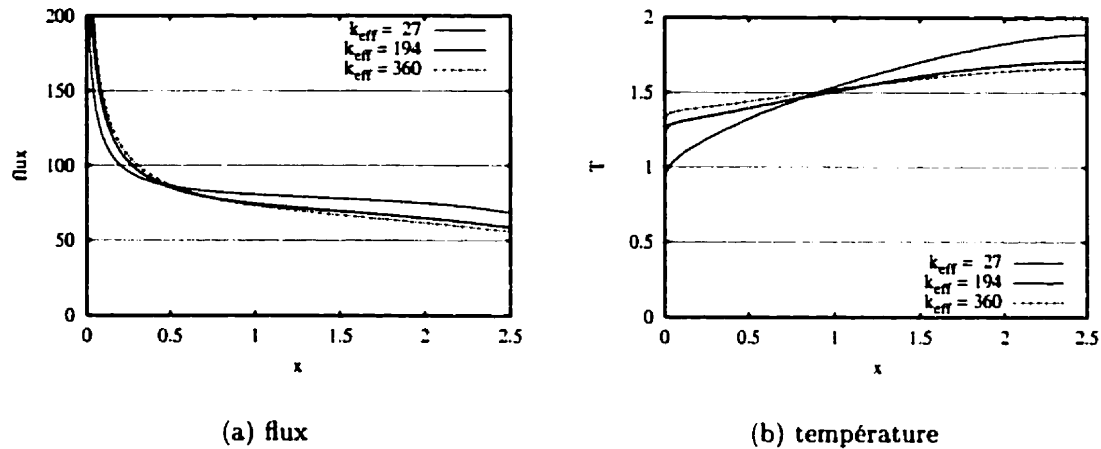


Figure 8.4: Effet de k_{eff} à la paroi fluide-solide du canal du joint

ture : on obtient $T_{max}=1,66^{\circ}\text{C}$ pour $k_{eff}=360$ W/mK alors que $T_{max}=1,89^{\circ}\text{C}$ lorsque $k_{eff}=27$ W/mK. Ceci s'explique. Plus la conductivité est élevée, plus la température dans le solide est uniforme. Cela favorise le transfert de chaleur en entrée, permettant ainsi à plus de chaleur d'être diffusée radialement dans l'écoulement vers des niveaux de convection plus élevés sur une longueur importante. La figure 8.5 illustre le phénomène en présentant le profil radial d'élévation de température à la sortie du canal du joint pour diverses valeurs de k_{eff} , : l'élévation près de la paroi est moindre pour de plus grandes valeurs de conductivité effective alors qu'elle est légèrement plus élevée au centre du canal (cela est par contre difficile à distinguer sur la figure) où la convection de chaleur est plus grande.

8.6 Effet de la longueur

Une plus grande longueur des canaux favorise la diffusion radiale de chaleur vers des niveaux de convection plus élevés dans l'écoulement. Une réduction de la température maximale à la paroi interne du canal du joint est alors encourue. Ceci est illustré

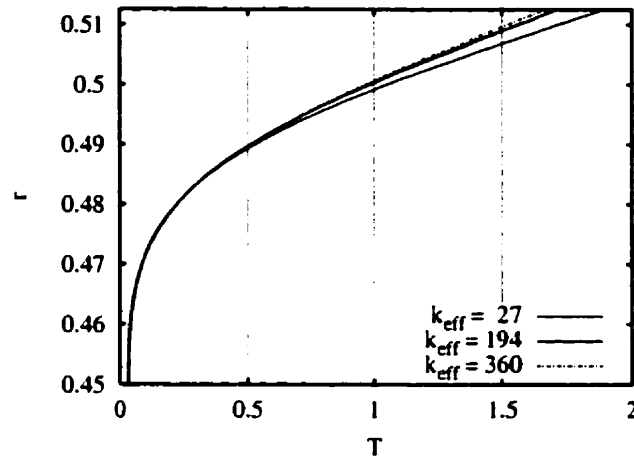


Figure 8.5: Effet de k_{eff} sur le profil de température en sortie

par la figure 8.6 qui présente le profil radial d'élévation de température à la sortie du canal du joint pour diverses valeurs de L . Les autres paramètres sont fixés à la modalité milieu. Lorsque la longueur des canaux est grande, la température est considérablement plus petite à la paroi externe mais légèrement plus grande au centre du canal.

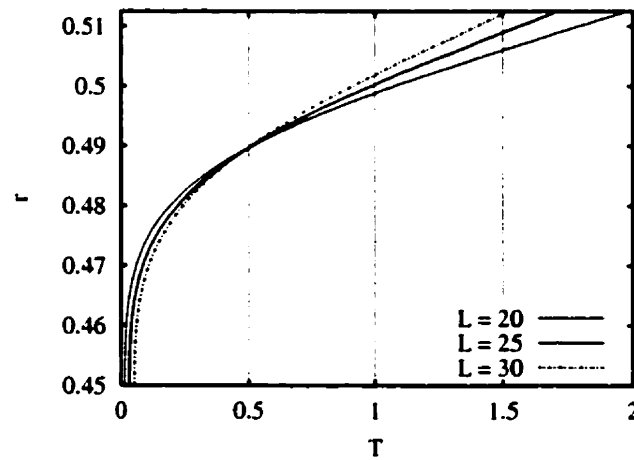


Figure 8.6: Effet de L sur le profil de température en sortie

CONCLUSION

Ce mémoire a traité principalement de deux aspects découlant de la problématique associée au joint hydraulique : la puissance supplémentaire attribuable au joint et l'élévation de température du sang à son passage dans le joint.

Dans le but de répondre aux objectifs contradictoires d'amélioration du rendement électrique et de minimisation de la puissance imputable au joint, nous avons premièrement étudié l'écoulement dans un joint à encoches. Par une analyse statistique où nous avons étudié l'effet de divers paramètres sur des réponses appropriés, nous en venons à la conclusion qu'un joint à encoches ne présente pas d'avantages significatifs par rapport à un joint lisse en ce qui a trait à la puissance supplémentaire consommée.

D'abord, nous avons montré l'importance de la puissance attribuable à l'entrée et à la sortie du joint. Celle-ci peut représenter jusqu'à près de 60 % de la puissance totale. Il s'avère que cette puissance dépend principalement des longueurs d'entrée et de sortie ; la géométrie des encoches n'affecte donc pas cette puissance. Une diminution éventuelle de puissance attribuable aux encoches ne réduirait donc pas cette portion considérable de la puissance totale. Celle-ci peut toutefois être diminuée en augmentant les longueurs d'entrée et de sortie ; toutefois, il en résulte une augmentation du débit traversant le joint ce qui soumet plus de sang aux cisaillements élevés : pour un joint caractéristique de ceux étudiés, le scalaire de von Mises s'élève jusqu'à 800 N/m^2 dans certaines zones de l'écoulement.

Ensuite, il ressort de l'analyse statistique que l'entrefer demeure un paramètre dominant, tout comme pour un joint lisse. Son importance est telle que le relâchement du cisaillement espéré sous les encoches ne peut contribuer que de façon marginale à

une diminution de la puissance. Une telle diminution n'est possible que si l'entrefer est petit et l'indentation du stator forte. Or, pour un petit entrefer, la puissance demeure trop élevée et il y a une limite à indenter le stator sans altérer le rendement électrique.

Il a aussi été tenté d'utiliser une moyenne volumique du cisaillement scalaire de von Mises dans le but d'identifier les paramètres pouvant potentiellement affecter le dommage aux globules rouges du sang. Après analyse, nous avons montré l'ina-
déquation d'une telle moyenne puisqu'elle minimise l'importance des paramètres géométriques qui augmentent le cisaillement dans certaines zones tout en diminuant le volume des ces zones. Il s'avère donc nécessaire de développer des méthodes permettant de mieux quantifier le dommage potentiel aux globules rouges du sang.

Nous avons en deuxième lieu étudié dans un cadre multiparamétrique l'échauffement du sang à son passage dans la pompe et dans le joint. Pour cela, une méthode hybride combinant les éléments finis et les différences finies a été développée pour résoudre le champ de température dans la pompe. Ceci nous a permis de traduire un critère d'élévation de température critique de 3°C en une puissance de chaleur maximale pouvant être générée par les pertes en chaleur du moteur électrique. Nous avons identifié les paramètres dominant de cette réponse à l'aide d'une étude de tamisage. Une surface de réponse a ensuite pu être générée afin de prédire la puissance de chaleur maximale pour n'importe quelle configuration envisageable.

Le modèle indique que l'entrefer maximisant la puissance de chaleur admise — donc minimisant l'élévation de température dans le joint — serait de 0,93 mm. Du point de vue thermique, il ne serait donc pas désirable d'avoir un entrefer plus large que 0,93 mm ; ceci augure bien puisqu'un petit entrefer assure une meilleure performance électromécanique.

La puissance pouvant être générée en chaleur sans risquer une élévation critique de la température du sang varie entre 1 et 39 W selon la configuration et le point d'opération. À la valeur minimale de cette plage correspond la borne supérieure du rendement électrique minimal pour n'importe quelle configuration envisageable dans l'espace expérimental : on l'estime à 60 %. Enfin, le rendement électrique minimal pour le prototype actuel est estimé à 20 %. Ces faibles valeurs laissent présager de façon très optimiste la faisabilité d'un moteur adéquat pour l'appareil d'assistance ventriculaire.

Enfin, la surface de réponse peut être utilisée dans le cadre du développement du moteur ; une méthode d'optimisation simultanée combinant à notre modèle d'éventuelles surfaces de réponse pour les rendements électrique et hydraulique permettrait d'optimiser de façon couplée plusieurs paramètres pour une configuration optimale.

RÉFÉRENCES

- [1] HENDERSHOT Jr, J. et MILLER, T. (1994). *Design of Brushless Permanent-Magnet Motors*. Magma Physics Publishing and Oxford University Press, Mentor, OH and Oxford, UK.
- [2] POLK, C. et POSTOW, E. (1986). *CRC Handbook of Biological Effects of Electromagnetic Fields*. CRC Press, Inc, Boca Raton, FL.
- [3] FARINAS, M., THIENOT, S., GARON, A. et DETUNCQ, B. (2000). Hydraulic seal effect in the design of a vad as an enclosed-impeller axial flow blood pump. Dans *Proceedings of the 11th ICMMB International Conference on Mechanics in Medicine and Biology*, pages 137–140, Maui, Hawaii, April 2000.
- [4] FARINAS, M., THIENOT, S., GARON, A. et CLÉMENT, B. (2000). Optimisation du design du joint hydraulique d'un SAV comprenant une pompe axiale avec pales encastrées. Dans *Comptes rendus de la 8^e conférence de la société canadienne de CFD*, volume 2, pages 681–688, Montréal, juin 2000.
- [5] COKELET, G. (1986). The rheology and tube flow of blood. Dans CHIEN, S. et SKALAK, R., editors, *Handbook of Bioengineering*, chapter 14. McGraw-Hill Book Compagny.
- [6] YAMAZAKI, K., LITWAK, P., TAGUSARI, O., MORI, T., KONO, K., KAMENEVA, M., WATACH, M., GORDON, L., MIYAGISHIMA, M., TOMIOKA, J., UMEZU, M., OUTA, E., ANTAKI, J., KORMOS, R., KOYANAGI, H. et GRIFFITH, B. (1978). An implantable centrifugal blood pump

- with a recirculating purge system (cool-seal system). *Artificial Organs*, 22(6), 466–474.
- [7] REUL, H. (1983). Blood pumps — general design considerations. *Advances in Cardiovascular Physics*, 5(4), 55–71.
- [8] BLUDSZUWEIT, C. (1995). Three-dimensional numerical prediction of stress loading of blood particles in a centrifugal pump. *Artificial Organs*, 19(7), 590–596.
- [9] RYHMING, I. (1985). *Dynamique des fluides*. Presses polytechniques romandes, Lausanne.
- [10] GARON, A., MONGRAIN, R., FOURGEAU, P. et KEMPENAARS, M. (2001). Numerical prediction of hemolysis rate : Past and recent approaches. En voie de publication dans *Artificial Organs*.
- [11] AEA Technology. (1998). *CFX-TASCflow, Version 2.8 : Theory Documentation*. AEA Technology Engineering Software Ltd., Waterloo, Ontario, Canada.
- [12] ANDERSON, J. B., WOOD, H. G., ALLAIRE, P. E., MCDANIEL, J. C., OLSEN, D. B. et BEARNSON, G. (2000). Numerical studies of blood shear and washing in a continuous flow ventricular assist device. *ASAIO Journal*, 46, 486–494.
- [13] AEA Technology. (1997). *CFX-4.2 : Pre-Processing*. AEA Technology, CFX International, Oxfordshire, United Kingdom.

- [14] FORTIN, A. (1995). *Analyse numérique pour ingénieurs*. Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada.
- [15] CLÉMENT, B. (1999). *Design and Analysis of Experiments*. Génistat Conseils Inc.
- [16] STATSOFT. (1998). *Statistica for Windows*. Statsoft Inc., Tulsa, OK.
- [17] BALASUBRAMANIAM, T. A. et BOWMAN, H. F. (1977). Thermal conductivity and thermal diffusivity of biomaterials : A simultaneous measurement technique. *Transactions of the ASME. Journal of Biomechanical Engineering*, 99, 148-154.
- [18] BELLETTRE, J. (1997). Transient state study of electric motor heating and phase change solid-liquid cooling. *Applied Thermal Engineering*, 17(1), 17-31.
- [19] PANTON, R. L. (1986). *Incompressible Flow*. John Wiley and Sons, New York.
- [20] BEJAN, A. (1984). *Convection Heat Transfer*. John Wiley and Sons, New York, fifth edition.
- [21] FERZIGER, J. H. et PERIĆ, M. (1996). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin.
- [22] REDDY, J. N. (1993). *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, Inc., New York, second edition.

- [23] FORTIN, A. et GARON, A. (1997). *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. École Polytechnique de Montréal, Montréal.
- [24] ROACHE, P. (1994). Perspective : A method for uniform reporting of grid refinement studies. *Journal of Fluids Engineering*, 116, 405-413.
- [25] FITZGERALD, A., JR, C. K. et UMANS, S. (1990). *Electric Machinery*. McGraw-Hill, Inc., New York, fifth edition.