

**Titre:** Étude du frottement non linéaire isotropique et anisotropique : relations constitutives et application par la méthode des éléments finis  
**Title:**

**Auteur:** Wissal Mesfar  
**Author:**

**Date:** 2001

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Mesfar, W. (2001). Étude du frottement non linéaire isotropique et anisotropique : relations constitutives et application par la méthode des éléments finis [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
**Citation:** <https://publications.polymtl.ca/6978/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/6978/>  
**PolyPublie URL:**

**Directeurs de recherche:** Aboufazl Shirazi-Adl  
**Advisors:**

**Programme:** Unspecified  
**Program:**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE DU FROTTEMENT NON LINÉAIRE  
ISOTROPIQUE ET ANISOTROPIQUE -  
RELATIONS CONSTITUTIVES ET APPLICATION PAR  
LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

WISSAL MESFAR  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
JUN 2001



**National Library  
of Canada**

**Acquisitions and  
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

**Bibliothèque nationale  
du Canada**

**Acquisitions et  
services bibliographiques**

**395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

**The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.**

**The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.**

**L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.**

**L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.**

0-612-65588-1

**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

ÉTUDE DU FROTTEMENT NON LINÉAIRE  
ISOTROPIQUE ET ANISOTROPIQUE -  
RELATIONS CONSTITUTIVES ET APPLICATION PAR  
LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

présenté par: MESFAR Wissal

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BOUKHILI Rachid, Ph.D., président

M. SHIRAZI-ADL. Aboufazl, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. YAHIA. L'Hocine, Ph.D., membre

## **DÉDICACE**

À mes chers parents pour avoir imaginé et voulu  
cet instant.

À mes frères et sœurs de cœurs.

À mes amis (es) ...

## REMERCIEMENTS

Ce travail de recherche a été réalisé à la section mécanique appliquée du département de génie mécanique.

Je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères à mon directeur de recherche, Monsieur A. Shirazi-Adl, pour son apport, son soutien constant et l'agréable ambiance créée au cours de ce travail.

Je remercie Monsieur Rachid Boukhili, professeur au département de génie mécanique et Monsieur l'Hocine Yahia, professeur à l'institut de Génie Biomédical pour avoir accepté de faire partie du jury d'examen de ce mémoire.

Je remercie également Monsieur Maher Dammak, professeur à l'Institut Préparatoire des Études d'Ingénieur de Sfax en Tunisie, pour son encouragement à entreprendre mes études graduées ainsi que sa collaboration et ses conseils qui ont été vivement appréciés au cours de ce travail.

Je voudrais également remercier tous mes amis et tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

## RÉSUMÉ

Dans l'arthroplastie, le frottement entre la prothèse et l'os tibial joue un rôle très important dans la stabilité de l'implant non cimenté dans la période postopératoire. Les tests de frottement bidirectionnel expérimentaux entre l'os humain et une plaque en métal à surface poreuse ont démontré que la courbe charge tangentielle - déplacement relatif est fortement non linéaire et de nature isotropique avec un couplage significatif entre deux directions perpendiculaires. Les modèles numériques développés ont montré l'importance de la mise en considération du frottement non linéaire ainsi que les modèles de frottement adéquat, dans le cas du frottement avec charges combinées, dans les simulations. En effet, le modèle de frottement de Coulomb n'a pas été capable de modéliser le frottement non linéaire. Dans cette étude, on propose d'étendre l'aptitude à résoudre les problèmes de contact non linéaire avec des interfaces anisotropiques.

Le premier objectif de ce travail a consisté au développement des équations constitutives pour résoudre les problèmes de contact non linéaire anisotropique. Dans cette étude, on a pris en considération deux directions principales pour définir le comportement frictionnel de l'interface. Dans ce développement, on a tenu compte du phénomène de couplage qui est un résultat du comportement non linéaire de l'interface. Les termes de couplage sont une fonction des deux déplacements relatifs perpendiculaires. Contrairement au cas isotropique, la matrice constitutive est asymétrique, ceci représente une conséquence de l'anisotropie de l'interface. Lorsque les comportements frictionnels des deux directions principales sont identiques, les équations constitutives du cas isotropique sont bien retrouvées. Les termes de couplage disparaissent quand il s'agit d'un test de frottement selon l'une des directions principales ou lorsque les réponses frictionnelles des deux directions principales sont linéaires ou de type Coulomb. Pour des fins de comparaison, nous avons développé aussi une

formulation qui ne tient pas compte du couplage. Dans cette formulation, la réponse frictionnelle dans une direction est indépendante des autres directions.

Le deuxième objectif de cette étude de recherche consiste à donner une limite à la contrainte de cisaillement. Pour le cas de notre interface anisotropique, nous avons adopté un critère elliptique. Les valeurs des charges ultimes unidirectionnelles de chaque direction principale sont prises pour définir la grandeur du grand et du petit axe de l'ellipse. Avec ce critère, si le modèle de frottement est unidirectionnel, selon l'une des directions principales, on retrouve bien la limite de glissement de cette direction.

Le dernier objectif se présente dans l'élaboration de deux modèles numériques, par la méthode des éléments finis, en introduisant les équations constitutives développées dans les fichiers d'input d'ABAQUS pour modéliser le frottement à l'interface. Les deux modèles simulent le frottement unidirectionnel et bidirectionnel de deux corps en contact. Différents types d'interfaces sont considérés avec des courbes unidirectionnelles typiques permettant de dégager les résultats pertinents. Une comparaison avec le cas isotropique non linéaire est aussi effectuée. Les résultats de ces simulations montrent que lors du frottement non linéaire bidirectionnel, un phénomène de couplage est bien présent. Ce couplage dépend du comportement frictionnel des deux directions principales, ce qui montre la différence entre les résultats du cas isotropique et du cas anisotropique. Ce couplage disparaît lors des tests de frottement unidirectionnel selon l'une des directions principales ou lors de l'introduction d'un comportement frictionnel linéaire ou de type Coulomb selon les deux directions principales. Excepté les tests unidirectionnels selon l'une des directions principales, la direction du déplacement des corps en contact est différente de la direction de l'effort appliqué, contrairement au cas isotropique. La différence de la limite de cisaillement entre les cas isotropique et anisotropique est aussi bien observée. La proportionnalité des courbes unidirectionnelles est un facteur déterminant sur la constance de la direction du déplacement.



Comme suite à ce travail, des études expérimentales sur des corps en contact avec frottement non linéaire anisotropique sont suggérées dans l'avenir. Il est à noter qu'il existe des études expérimentales sur le cas des interfaces non linéaires isotropiques.

## ABSTRACT

The interface friction exists in natural and artificial joints as well as many engineering systems in which different bodies articulate. It often plays an important role in mechanics of the system. In cementless arthroplasty, the friction between the prosthesis (including stems and screws) and the host bone is exploited to increase the fixation of the artificial joint. The experimental studies have shown that the interface between the cancellous bone and various porous coated metals exhibits a nonlinear friction that remains nearly the same in different directions; a nonlinear isotropic friction. More recent bi-directional friction tests between cancellous bone or polyurethane cubes and a metallic plate with porous surface have demonstrated that the interface load-displacement curve is highly nonlinear with significant coupling between two perpendicular directions. Model studies incorporating measured nonlinear interface friction response have demonstrated the importance of proper simulation of nonlinear friction as compared with the Coulomb friction for the prediction of accurate results and the coupling between orthogonal directions. In this study, we aim to extend the earlier model studies to incorporate nonlinear direction-dependent anisotropic friction between two surfaces at contact.

The first objective is to develop bi-directional nonlinear constitutive equations based on the measured unidirectional friction properties in two interface principal directions say,  $x$  and  $y$ . These directions have the following characteristics: (a) the resultant displacement follows the applied load if this latter is in the interface principal direction; and (b) the ultimate shear stresses in these directions are denoted by  $\mu_x P$  and  $\mu_y P$ , respectively ( $P$  is the interface pressure). The interface friction stiffness terms are function of both perpendicular relative tangential displacements. In contrast to the

isotropic case, the constitutive matrix is not symmetric. Isotropic constitutive equations would be obtained if the friction responses in the two principal directions are taken identical. The nonlinear bi-directional friction properties introduce off-diagonal (cross-stiffness) terms in constitutive relations. These terms are equal in the isotropic case, but different when anisotropy in friction exists. The cross-stiffness terms vanish in unidirectional friction following a principal direction. These terms also disappear if the friction curves are Coulomb-type or linear.

To set a limit for the shear stress in any direction, as the second objective in this study. An elliptic criterion is used to define the interface ultimate resistance under perpendicular stresses. The ultimate shear stress in a principal direction is obtained as in a unidirectional friction following the principal direction on the ellipse.

Finally, these constitutive relations were input into the finite element (FE) package program ABAQUS to perform FE study of two contacting bodies with anisotropic nonlinear friction properties at the interface. Different unidirectional curves were used. Comparison was also made between results obtained using the anisotropic and isotropic nonlinear friction properties. The results show that the presence of pre-load generates coupled relations between loads and displacements, which are different from the case with isotropic friction properties. In contrast to cases with isotropic friction, resultant displacements do not follow the load if this latter is applied in any direction except the unidirectional directions. The proportionality of the unidirectional curves play an important role in the constancy of direction of displacement. The maximum shear stress is also different between the isotropic and anisotropic cases. Finally, experimental studies on surfaces with anisotropic nonlinear friction are needed to validated the proposed constitutive relations.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE .....	iv
REMERCIEMENTS.....	v
RÉSUMÉ .....	vi
ABSTRACT .....	ix
TABLE DES MATIÈRES .....	xi
LISTES DES FIGURES .....	xiii
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1: REVUE BIBLIOGRAPHIQUE .....	3
1.1 Généralités .....	3
1.2 Études expérimentales .....	5
1.2.1 Stabilité de fixation de l'implant .....	5
1.2.2 Frottement non linéaire .....	7
1.3 Modèles numériques .....	9
1.4 Frottement anisotropique .....	11
1.5 But de la recherche.....	12
1.6 Plan du mémoire .....	13
CHAPITRE 2: DÉVELOPPEMENT ANALYTIQUE.....	15
2.1 Frottement non linéaire isotropique .....	15
2.1.1 Formulation sans couplage .....	16
2.1.2 Formulation avec couplage .....	16
2.2 Frottement non linéaire anisotropique .....	19
2.2.1 Formulation sans couplage .....	20
2.2.2 Formulation avec couplage.....	21
2.3 Critère de glissement.....	26

CHAPITRE 3: MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS .....	28
3.1 Cube d'os sur une plaque de métal à surface poreuse .....	28
3.1.1 Modèle .....	29
3.2 Plaque métallique sur un bloc de polyuréthane .....	30
3.2.1 Modèle .....	30
CHAPITRE 4: RÉSULTATS .....	31
4.1 Cube d'os dur une plaque .....	31
4.1.1 Frottement bidirectionnel.....	31
4.1.2 Frottement unidirectionnel.....	33
4.2 Plaque métallique sur un bloc de polyuréthane .....	34
CHAPITRE 5: DISCUSSION .....	62
CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS.....	68
RÉFÉRENCES .....	71
ANNEXES .....	79

## LISTES DES FIGURES

Figure 1.1 Schéma représentatif des surfaces poreuses utilisées dans l'étude de Dammak et al.[34].	7
Figure 1.2: Résultats expérimentaux du test de frottement bidirectionnel d'un cube d'os / métal à surface poreuse de l'étude de Hashemi et al. [35] montrant l'effet du couplage.	8
Figure 2.1 Schéma représentatif des courbes unidirectionnelles des deux directions principales $x$ et $y$ avec les pentes sécantes de chacune $k_x$ et $k_y$ .	21
Figure 2.2 Ellipse caractérisant la limite de la contrainte de cisaillement équivalente pour le cas anisotropique.	26
Figure 4.1 Maillage, conditions aux limites et dimensions du cube d'os reposant librement sur un métal à surface poreuse.	36
Figure 4.2 Maillage, conditions aux limites et dimensions du modèle de la plaque métallique à surface poreuse reposant librement sur un bloc de polyuréthane.	37
Figure 4.3 Courbes unidirectionnelles non linéaires des deux directions principales $x$ et $y$ , utilisées dans la modélisation de l'interface anisotropique.	38
Figure 4.4 Contrainte tangentielle, $F_y$ , en fonction du déplacement relatif, $D_y$ , ( $F_y - D_y$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec	

frottement non linéaire anisotropique et en utilisant la formulation avec couplage. ....	39
Figure 4.5 Contrainte tangentielle, $F_y$ , en fonction du déplacement relatif, $D_x$ . ( $F_y - D_x$ ), en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique et en utilisant la formulation avec couplage. $D_x$ initial est ramené a zéro afin de simplifier la comparaison.....	40
Figure 4.6 Contrainte tangentielle, $F_x$ , en fonction du déplacement relatif, $D_x$ . ( $F_x - D_x$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique et en utilisant la formulation avec couplage. ....	41
Figure 4.7 Contrainte tangentielle, $F_x$ , en fonction du déplacement relatif, $D_y$ . ( $F_x - D_y$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique et en utilisant la formulation avec couplage. Les déplacements initiaux de $D_y$ sont ramenés à zéro pour simplifier la comparaison.....	42
Figure 4.8 Contrainte tangentielle, $F_y$ , en fonction du déplacement relatif, $D_y$ . ( $F_y - D_y$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique et en utilisant la formulation sans couplage.....	43
Figure 4.9 Contrainte tangentielle, $F_y$ , en fonction du déplacement relatif, $D_x$ . ( $F_y - D_x$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique et en utilisant la formulation sans	

couplage. Le déplacement initial selon $x$ est ramené à zéro afin de simplifier la comparaison.....	44
Figure 4.10 Contrainte tangentielle, $F_y$ , en fonction du déplacement relatif, $D_y$ , ( $F_y-D_y$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et en utilisant la formulation avec couplage.....	45
Figure 4.11 Contrainte tangentielle, $F_y$ , en fonction du déplacement relatif, $D_x$ , ( $F_y-D_x$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et en utilisant la formulation avec couplage. $D_x$ est ramené à zéro.....	46
Figure 4.12 Courbes unidirectionnelles bilinéaires des deux directions principales $x$ et $y$ .....	47
Figure 4.13 Contrainte tangentielle, $F_y$ , en fonction du déplacement relatif, $D_y$ , ( $F_y-D_y$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement bilinéaire anisotropique et en utilisant la formulation avec couplage.....	48
Figure 4.14 Contrainte tangentielle équivalente, $F_{eq}$ , en fonction de la direction du déplacement, en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement anisotropique Coulomb (Clb), avec 30 microns de déplacement permis dans les deux directions, et non linéaire isotropique et anisotropique en utilisant la formulation avec couplage (courbes unidirectionnelles, figure 4.3).....	49



- Figure 4.15 Contrainte tangentielle équivalente,  $F_{eq}$ , en fonction de la direction du déplacement, en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique en comparant les résultats obtenus par les formulations avec (A.) et sans (S.) couplage.....50
- Figure 4.16 Contrainte tangentielle équivalente,  $F_{eq}$ , en fonction de la direction du déplacement, en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique avec et sans couplage.....51
- Figure 4.17 Courbes unidirectionnelles des deux directions principales,  $x$  et  $y$  parfaitement proportionnelles.....52
- Figure 4.18 Contrainte tangentielle équivalente,  $F_{eq}$ , en fonction de la direction du déplacement, en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique avec et sans couplage.....53
- Figure 4.19 Courbes unidirectionnelles des deux directions principales de l'interface isotropique.....54
- Figure 4.20 Contrainte tangentielle équivalente,  $F_{eq}$ , en fonction du déplacement résultant relatif,  $Deq$ , en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique en utilisant la formulation sans couplage.....55
- Figure 4.21 Contrainte tangentielle équivalente,  $F_{eq}$ , en fonction du déplacement résultant relatif,  $Deq$ , obtenue par élément finis en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et en utilisant la formulation avec couplage.....56

- Figure 4.22 Courbes unidirectionnelles non linéaires des deux directions principales 1 et 2 pour modéliser l'interface d'une plaque en métal à surface poreuse reposant librement sur un bloc de polyuréthane.....57
- Figure 4.23 Force  $F_2$  en fonction du déplacement  $U_1$ , au point D0, obtenue par éléments finis en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et anisotropique avec et sans couplage.....58
- Figure 4.24 Force  $F_2$  en fonction du déplacement  $U_2$ , au point D0, obtenue par éléments finis en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et anisotropique avec et sans couplage.....59
- Figure 4.25 Force  $F_2$  en fonction du déplacement  $U_1$ , au point D1, obtenue par éléments finis en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et anisotropique avec et sans couplage.....60
- Figure 4.26 Force  $F_2$  en fonction du déplacement  $U_2$ , au point D1, obtenue par éléments finis en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et anisotropique avec et sans couplage.....61

## INTRODUCTION

Le développement et la modélisation des phénomènes de contact avec et sans frottement et leurs analyses se considèrent parmi les problèmes les plus importants de la mécanique des corps déformables. Le nombre élevé des études effectuées dans le domaine démontre l'importance du contact dans le comportement des structures dans plusieurs domaines du génie ; citons les exemples des composantes des machines, des impacts et des articulations dans les joints de l'être humain, etc.. Ce phénomène s'avère très complexe, ses caractéristiques varient considérablement selon la géométrie des surfaces en contact ainsi que les propriétés chimiques et physiques de chacune des surfaces. La diversité et la complexité des problèmes de la mécanique de contact nécessitent des informations efficaces sur les surfaces en contact, capable de décrire leurs comportements frictionnels, et l'application de méthodes mathématiques sophistiquées pour leurs descriptions quantitatives.

Dans l'arthroplastie non cimentée, le contact entre l'os humain et la prothèse du genou, joue un rôle considérable dans la stabilité de l'implant. Le frottement non linéaire entre l'os et le métal à surface poreuse de la prothèse est assez complexe à définir. Le développement des équations constitutives qui soient capables de décrire le modèle de frottement non linéaire quantitativement a été rendu possible qu'après avoir effectué des tests de frottement expérimentaux uni- et bidirectionnels. Ces tests ont donné des informations pertinentes sur le comportement frictionnel non linéaire en présence des charges appliquées. La modélisation par les méthodes numériques tout en exploitant les modèles mathématiques convenables, ont permis l'optimisation des paramètres de conception influant sur la réussite de la chirurgie des prothèses.

L'anisotropie du frottement est un autre phénomène observable dans certains matériaux. Décrire ce type d'interface anisotropique à l'aide de modèles mathématiques

ajoute un niveau de complexité plus élevé dans la description de ce phénomène de contact. Dans le chapitre suivant, nous présenterons une tentative pour couvrir les aspects du frottement non linéaire isotropique, en se basant sur la bibliographie dans le domaine biomécanique, ainsi que du frottement anisotropique, en se basant sur la bibliographie dans le domaine de la mécanique des solides.

## CHAPITRE 1

### REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Dans ce chapitre, nous allons essayer de fournir certaines connaissances qui seront capables d'amener le lecteur à mieux percevoir le phénomène de frottement à travers les revues bibliographiques. Le frottement non linéaire et le frottement anisotropique sont les grands axes de cette recherche bibliographique. Un aperçu sur les études expérimentales, analytiques et numériques, qui traitent du frottement non linéaire et de ses applications, surtout en biomécanique, ainsi que du frottement anisotropique a été fourni dans cette étude bibliographique.

#### 1.1 Généralités

La chirurgie des prothèses du genou humain est devenue un acte très répandu ces dernières décennies pour faire face aux maladies qui affectent l'articulation du genou. Ces maladies peuvent être divisées en deux classes :

- les maladies d'origine infectieuse telles que l'arthrite et le rhumatisme;
- les maladies d'origine non infectieuse telles que l'arthrite rhumatoïde et l'arthrose. Ces maladies favorisent la dégénérescence du cartilage qui est un élément essentiel au bon fonctionnement de l'articulation [1]. La chirurgie a connu plusieurs exploits ces dernières années en raison de l'amélioration de la qualité des prothèses, bien conçues et mieux posées. Sauf que le descellement de l'implant reste l'une des principales causes de l'échec des opérations chirurgicales. Dans ce cas, une révision chirurgicale est alors nécessaire [1].

Pour fixer la prothèse du genou à l'os trabéculaire, différentes méthodes sont utilisées, passant par des vis, des tiges et des plots jusqu'au ciment. Les méthodes de fixation de la prothèse du genou à l'os peuvent être divisées en deux classes : la technique de fixation avec ciment et la fixation sans ciment. La première technique utilise le ciment comme un moyen de fixation. Celle-ci a été couramment employée pendant plusieurs années. Sauf que la nécrose de la matrice osseuse suite à la polymérisation du ciment, la fragilité du ciment par rapport à l'os humain, et les effets secondaires d'ordre cardiovasculaire, pulmonaire et neurologique se considèrent comme des inconvénients sérieux de cette technique [2, 3]. Les inconvénients et les problèmes causés par la fixation avec ciment ont amené les chercheurs, vers la fin des années soixante, à la réflexion et au développement d'une nouvelle technique de fixation, qui n'utilise pas le ciment comme un moyen de fixation.

La deuxième technique, dite aussi technique de fixation par croissance osseuse, se base sur le principe que l'os en contact avec un matériau à surface poreuse peut s'infiltrer à travers les pores et venir ainsi établir un lien mécanique avec la surface poreuse de la prothèse [3-17]. Cette technique offre des avantages importants par rapport à la première. Parmi lesquelles on cite :

- l'assurance d'un attachement biologique de qualité à long terme grâce à l'adaptation naturelle, selon les lois de croissance de l'os, de l'interface os trabéculaire / métal;
- peu de surface de contact avec lien osseux est nécessaire pour stabiliser l'implant car le lien est fort;
- meilleures chances de succès à long terme que les prothèses cimentées [18-20].

Par contre, la réussite de cette technique exige : une qualité assez bonne de l'os du patient [6], une pression de contact initiale entre l'implant et l'os trabéculaire [7, 8], une assurance de la stabilité initiale de la prothèse pour limiter les micromouvements de celle-ci par rapport à l'os [22-24]. Pour ne pas inhiber la croissance osseuse, les études

[24, 10] ont montré que l'implant ne doit pas se déplacer de moins de 28 microns et pas plus de 150 microns. Hulbert et al. [9] ont montré qu'il ne faut pas avoir un niveau de contrainte trop faible entre la prothèse et l'os à cause du faible transfert des stimulus mécaniques.

Ne pas assurer la stabilité initiale aura comme conséquence la formation d'un tissu fibreux à travers les pores de la surface de la prothèse [6, 9]. Cette situation constitue un désavantage important puisque les liens du tissu fibreux sont plus faibles que les liens osseux. Les chercheurs visant à améliorer cette technique de fixation s'orientent donc à essayer d'identifier les facteurs qui favorisent la croissance osseuse à travers la surface de l'implant. La forme des pores ou des surfaces poreuses, le traitement de la surface poreuse, le diamètre des pores, le matériau de la prothèse et la stabilité postopératoire de l'implant sont des facteurs qui ont été et qui sont le sujet de plusieurs recherches. [9, 10, 25, 26].

## **1.2 Études expérimentales**

### **1.2.1 Stabilité de fixation de l'implant**

L'importance que porte la question de stabilité de fixation a orienté plusieurs recherches à effectuer des études expérimentales et numériques pour pouvoir optimiser la conception des prothèses, et surtout pour optimiser la conception de la partie qui est en contact avec l'os. Comme solution pour favoriser une stabilité préliminaire et permanente des prothèses non cimentés, des vis et des tiges ont été implanté dans les prothèses tibiales.

Giori et al. [27], ont étudié expérimentalement l'influence du design des tiges, en variant les caractéristiques géométriques, sur la stabilité de l'implant. Ils ont constaté que l'utilisation de plusieurs tiges de petit diamètre offre une meilleure résistance au

cisaillement qu'avec des tiges de grand diamètre. Kaiser [28] a montré que le déplacement des plateaux fixés par des vis est beaucoup plus faible que de celui avec des tiges. Miura et al. [29] ont montré l'importance de la qualité osseuse du patient sur la qualité de la fixation.

Shirazi-Adl et al. [30] ont étudié expérimentalement la question de l'arrachement des vis et des tiges, avec surface lisse et poreuse. Ils ont effectué ces tests sur le tibia humain et sur un bloc de polyuréthane. Ils ont conclu que la résistance des vis dépasse largement celle des tiges. Ils ont constaté aussi, que pour une même dimension, la force d'arrachement des tiges lisses est deux fois plus grande que celle des tiges poreuses. Dans cette étude, les tests de fatigue ont montré que les tiges lisses présentent une meilleure résistance en fatigue que les tiges poreuses et les vis.

Shirazi-Adl et al. [31] ont récemment étudié l'influence des modes de fixation sur la stabilité de l'implant. Ils ont effectué une comparaison entre différents modes de fixation. Une plaque fixée à un bloc de polyuréthane à l'aide de deux vis, deux tiges lisses ou deux tiges lisses avec différentes inclinaisons ( $0^\circ$ ,  $1.5^\circ$  et  $3^\circ$ ) a été le sujet de cette étude. Ils ont conclu que les vis offrent la rigidité la plus importante contrairement aux tiges qui sont les moins raides et que les tiges inclinées offrent une rigidité intermédiaire par rapport aux autres.

Dans la période postopératoire il n'y a pas de croissance osseuse, ce qui rend la stabilité de l'implant ainsi que le transfert des charges de cisaillement dépendent étroitement du frottement à l'interface os / métal à surface poreuse [1]. Cependant, il existait un manque d'effort pour savoir le type de frottement à l'interface os / métal et son comportement en présence des charges.



### 1.2.2 Frottement non linéaire

Les études expérimentales effectuées par Rancourt et al. [32] et Shirazi-Adl. et al. [33] ont montré que le comportement frictionnel de l'interface os / métal à surface poreuse est fortement non linéaire contrairement au frottement de Coulomb. Ils ont trouvé que le déplacement relatif à l'interface est compris entre 50 et 400  $\mu\text{m}$  avant d'atteindre la contrainte maximale de cisaillement. Shirazi-Adl et al. [33] ont montré que cette dernière est indépendante de la région anatomique du tibia, du type du métal à surface poreuse avec des fibres ou des billes, de la grandeur de la contrainte normale, du nombre de cycle de chargement et déchargement et de la période de conservation de l'os dans la solution saline. Dammak et al. [34] ont utilisé des métaux avec différents types de surface poreuse qui montrent l'influence du choix de la surface sur le coefficient de frottement.

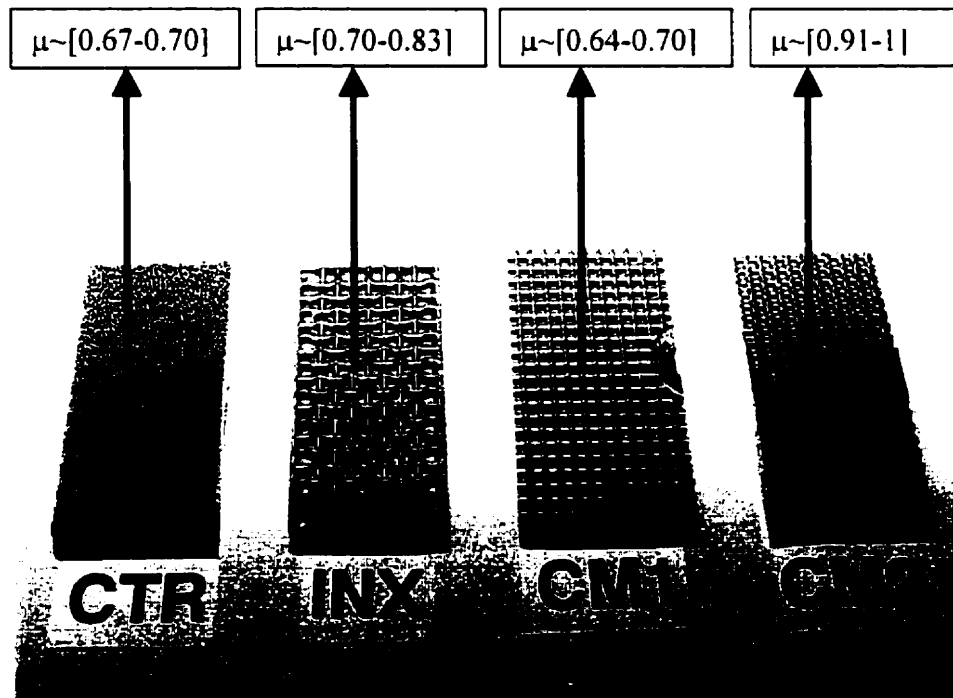


Figure 1.1 Schéma représentatif des surfaces poreuses utilisées dans l'étude de Dammak et al.[34].

Hashemi et al. [35] ont étudié expérimentalement le comportement des interfaces non linéaires lors d'un test de frottement bidirectionnel. Ces tests ont donné une compréhension plus profonde et plus globale sur le comportement non linéaire de ces interfaces en présence de plusieurs charges combinées. Les résultats ont montré la présence d'un phénomène de couplage lors de l'application d'un effort en présence d'une précharge dans une direction perpendiculaire. En effet, la contrainte de cisaillement ne dépend pas seulement du déplacement relatif dans la direction de la charge appliquée mais aussi du déplacement relatif dans la direction qui lui est perpendiculaire. Dans cette étude, un modèle théorique qui tient compte du couplage pour les interfaces non linéaires et isotropiques a été développé. Dans le chapitre qui suit, une présentation détaillée de ce modèle sera fait.

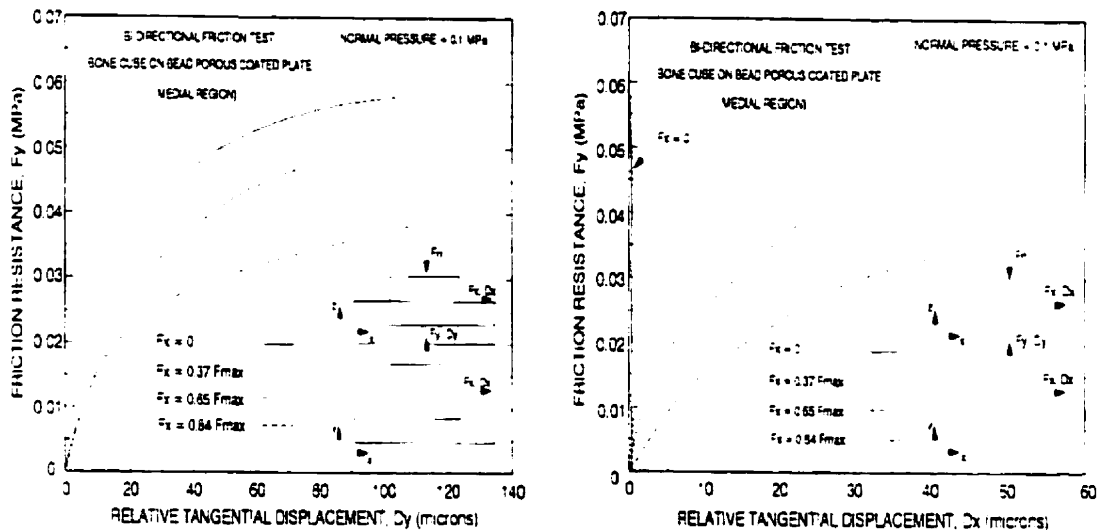


Figure 1.2: Résultats expérimentaux du test de frottement bidirectionnel d'un cube d'os / métal à surface poreuse de l'étude de Hashemi et al. [35] montrant l'effet du couplage.

### 1.3 Modèles numériques

Pour optimiser les paramètres de conception des prothèses et leurs modes de fixation, il a été impératif de modéliser l'ensemble par des modèles numériques. La majorité des modèles numériques qui ont été développés pour les prothèses non cimentées a utilisé le frottement de Coulomb comme modèle pour décrire le comportement frictionnel de l'interface os / métal [36-39]. Dans une étude, par des modèles d'élément finis axisymétriques, Shirazi-Adl. et Forcione [40] comme Forcione et Shirazi-Adl. [41], ont montré qu'il est très important de mettre en considération le comportement non linéaire de l'interface os / métal à surface poreuse dans les modèles numériques. En effet, le modèle de Coulomb n'a pas été capable de représenter assez fidèlement la réponse frictionnelle de ces interfaces. Il a été montré aussi que le frottement non linéaire est un paramètre très important pour étudier la stabilité de l'implant.

Dammak et al. [42] ont étudié l'arrachement des vis et des tiges d'un bloc de polyuréthane par la méthode des éléments finis. Ils ont conclu qu'il y a une grande différence entre les résultats obtenus par le modèle de frottement de Coulomb et ceux obtenus par le modèle de frottement non linéaire, en utilisant la courbe non linéaire de frottement unidirectionnelle de l'interface obtenue expérimentalement. Dans cette étude, les résultats du modèle de frottement non linéaire concordent remarquablement avec les résultats des tests expérimentaux contrairement au résultats du modèle de Coulomb.

Les études précédentes ont donné des résultats satisfaisants en utilisant le modèle de frottement non linéaire, ceci est en grande partie parce qu'elles traitent des problèmes de frottement unidirectionnel, en présence d'une seule charge tangentielle. La présence de plusieurs charges combinées à l'interface rend le problème plus complexe et la

fiabilité des résultats obtenus numériquement est étroitement dépendant du modèle théorique de frottement utilisé.

Hashemi et al. [35] ont modélisé le test de frottement bidirectionnel entre un cube d'os et un métal à surface poreuse tout en comparant les équations constitutives développées avec et sans couplage, en utilisant la courbe unidirectionnelle de frottement obtenue expérimentalement dans les deux cas. Suite à une comparaison avec les résultats expérimentaux, ils ont montré que les résultats obtenus par les modèles qui tiennent compte du couplage sont beaucoup plus satisfaisants que les résultats des modèles qui ne tiennent pas du couplage.

Shirazi-Adl et al. [31] ont comparé les résultats des modèles par élément finis en utilisant le modèle de Coulomb et le modèle de frottement non linéaire avec et sans couplage. Ils ont montré que les résultats obtenus par le modèle de Coulomb sous estiment les résultats obtenus expérimentalement, contrairement à ceux obtenus par le modèle de frottement non linéaire avec et sans couplage. Dans cette étude ils montrent aussi que la modélisation par éléments finis est capable de simuler les tests expérimentaux avec un degré de fidélité assez important.

Dans une étude récente, Hashemi et al. [43] ont étudié, en utilisant la méthode des élément finis, l'influence du design de la fixation de l'implant sur la stabilité de la prothèse dans la période postopératoire, où l'attachement biologique n'est pas encore établi, et l'effet du modèle de frottement utilisé sur l'estimation des résultats (Coulomb vs non linéaire). Ils ont conclu que le frottement de Coulomb sous estime une autre fois l'effet du comportement non linéaire, et que la fixation par des vis, ensuite la fixation par des tiges permettent de réduire considérablement les micromouvements entre l'os et l'implant.

#### 1.4 Frottement anisotropique

Quand le frottement dépend de la direction choisie, le frottement s'appelle frottement anisotropique. Le frottement peut dépendre de la direction choisie à l'interface en raison de la rugosité extérieure anisotrope originaire de l'usinage et /ou de l'usure. Le processus d'usure cause progressivement des changements sur la rugosité et sur l'anisotropie du frottement de la surface d'origine. La topographie de la surface a donc une grande influence sur le frottement. Ceci a été prouvé par les études expérimentales de Diacenko [44], Rabinowicz [45], Sharpin [46], Halaunbrenner [47] et Zielinski [51]. L'influence du choix de la direction et de la structure de la surface minimise l'effet de l'anisotropie du frottement si cette surface est lisse mais elle ne le fait pas disparaître complètement [45].

Rabinowicz [45] et Halaunbrenner [47] ont réalisé des tests expérimentaux de frottement relevant les valeurs de déplacement dans la direction qui est perpendiculaire à celle de la force appliquée. Ils ont constaté que cette composante de déplacement aura lieu quand la direction de la force appliquée est différente de la direction du déplacement. Ceci se considère parmi les effets, et les conséquences importantes de l'anisotropie du frottement.

La dépendance des propriétés mécaniques de la direction peut être une autre raison de l'anisotropie du frottement. L'anisotropie des propriétés mécaniques est observée essentiellement dans les matériaux cristallins et fibreux. Il a été observé que le frottement du Polytetrafluoroéthylène PTFE dépend de l'orientation de ses chaînes moléculaires par rapport à la direction de glissement [49]. Roberts [51] et Minford et Prewo [52] ont montré expérimentalement que le frottement des composites dépend de l'orientation des fibres.

Le frottement orthotropique (le cas où il existe deux directions principales orthogonales) a été analysé dans certaines études dans la littérature. Dans ce cas, il a été considéré que les forces de frottement peuvent être décrit en fonction du comportement frictionnel des deux directions principales [50]. Dans certaines études, le modèle de frottement de Coulomb a été utilisé pour résoudre les problèmes de contact orthotropique. [53,54]

Buczowski et al. [55] ont présenté une étude traitant le problème de contact 3-D orthotropique en tenant compte des caractéristiques microstructurales des surfaces. Pour résoudre le problème de contact, ils ont employé un modèle mathématique analogue à celui de la théorie classique de plasticité. Les deux différentes fonctions non linéaires des directions orthogonales ont été utilisées pour exprimer les propriétés de frottement orthotropiques des surfaces en contact. Un modèle par élément finis ainsi que l'algorithme permettant d'exprimer le contact sont aussi proposés.

Zmitrowicz [50,56] a classé ses modèles mathématiques développés pour résoudre les problèmes de frottement anisotropique, linéaires et non linéaires, pour un point matériel suivant le nombre de directions principales. En effet, la symétrie de la surface possède une influence considérable sur l'élaboration des modèles mathématiques.

### **1.5 But de la recherche**

Le résumé de la revue bibliographique montre que le frottement est un phénomène qui touche tous les secteurs d'engineering. Le frottement non linéaire a trouvé son importance dans le domaine biomédicale, et il joue un rôle très important dans les études de la stabilité des prothèses dans la période postopératoire, où la croissance osseuse n'a pas encore eu lieu. Le frottement isotropique a été le plus considéré dans ces études, puisque le type de contact os / métal à surface poreuse est non linéaire isotropique. La construction de surface poreuse avec un arrangement structurale bien défini peut rendre le

type de frottement à l'interface os / métal un frottement non linéaire anisotropique. On a vu dans l'étude bibliographique, que l'orientation des fibres par exemple, dans les matériaux composites influe sur le coefficient de frottement. Rendre possible la résolution de ce type de problème de contact, le frottement non linéaire et anisotropique, a été le but de cette recherche. Les objectifs de cette recherche sont alors :

Le développement des équations constitutives du frottement non linéaire et anisotropique, avec deux directions principales, est donc la première étape dans cette recherche. Ensuite, la proposition d'une relation donnant une limite à la contrainte tangentielle, en fonction de celles dans les directions principales, a été la seconde étape de cette recherche. Enfin, l'élaboration de deux modèles par éléments finis, la comparaison entre le cas non linéaire isotropique et anisotropique et aussi le cas de frottement de Coulomb est la troisième étape de cette recherche. L'introduction des modèles de frottement non linéaire, isotropique et anisotropique, dans les fichiers d'input du logiciel d'éléments finis ABAQUS, est rendue possible grâce aux "subroutines FRIC" programmées en Fortran.

## **1.6 Plan du mémoire**

Ce mémoire est réparti en cinq principaux chapitres et présenté de la manière suivante :

Dans ce premier chapitre, une description du domaine d'application du frottement non linéaire est décrit. Certains travaux expérimentaux et numériques traitant la question de la stabilité de fixation des prothèses et montrant l'importance du frottement non linéaire dans ces études ont été présentés. Ensuite, le frottement anisotropique a été

présenté à travers quelques revues dans la littérature. Enfin, les objectifs fixés sont présentés ainsi que le plan du mémoire.

Le deuxième chapitre présente initialement le développement analytique de la formulation avec et sans couplage du modèle de frottement non linéaire et isotropique [35]. Ensuite, nous présentons le développement analytique des équations constitutives, qui est le but de cette recherche, du modèle de frottement non linéaire anisotropique avec et sans couplage, en tenant compte de deux directions principales. Enfin, la relation donnant une limite à la contrainte tangentielle est présentée à la fin de ce chapitre.

La présentation des deux modèles par éléments finis est le sujet du troisième chapitre.

Le quatrième chapitre est réservé à la présentation des résultats obtenus par la méthode des éléments finis des deux modèles, où on a introduit le modèle de frottement non linéaire isotropique et anisotropique. Une comparaison entre les divers modèles de frottement est aussi présentée.

Enfin, le cinquième chapitre a été réservé à la discussion des résultats obtenus, les conclusions tirées et les recommandations à la suite de ce travail.



## CHAPITRE 2

### DÉVELOPPEMENT ANALYTIQUE

L'objectif de ce chapitre est de présenter le développement analytique des équations constitutives permettant de résoudre les problèmes des interfaces avec frottement non linéaire anisotropique. Une présentation de la formulation relative au frottement non linéaire isotropique, développée par Hashemi et al. [35], a été effectuée au début pour initier le lecteur à mieux comprendre et bien simuler la différence entre les deux cas, isotropique et anisotropique.

#### 2.1 Frottement non linéaire isotropique

Le frottement non linéaire, considère que la force tangentielle à la surface de contact est une fonction non linéaire du déplacement relatif. Dans le cas isotropique, cette fonction ne dépend pas de la direction choisie. Cependant, différents essais expérimentaux, uni- et bidirectionnels, ont été élaborés pour observer le comportement frictionnel de ces types d'interface [32, 33, 35]. Les essais bidirectionnels, [35], ont montré la présence du phénomène de couplage entre les réponses frictionnelles des différentes directions. Une formulation avec couplage a été proposée, ainsi qu'une formulation sans couplage pourvue une comparaison avec la première [35].

### 2.1.1 Formulation sans couplage

La formulation sans couplage considère que la réponse frictionnelle dans une direction est indépendante des autres directions. L'effort de cisaillement,  $\tau$ , est une fonction du déplacement relatif,  $\gamma$ , de sa propre direction uniquement. En effet, aucun couplage n'est présenté entre les différentes directions. Ainsi, la formulation est comme suit :

$$\tau_i = f(\gamma_i) \quad \text{avec } i = x, y \quad (1)$$

où  $f$  est la fonction de frottement non linéaire unidirectionnelle obtenue expérimentalement, (voir, par exemple, les figures 3.1 et 4.3).

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial \gamma_j} = \begin{cases} \frac{\partial f(\gamma_i)}{\partial \gamma_j} & \text{quand } i = j \\ 0 & \text{quand } i \neq j \end{cases} \quad (2)$$

Dans cette formulation, la rigidité tangentielle de l'interface de chaque direction est une fonction du déplacement relatif dans cette direction seulement et aucun couplage entre les différentes directions n'est introduit dans les équations constitutives. La force tangentielle résultante ne peut excéder en aucun cas la force maximale résistante uniaxiale de l'interface  $\mu F_n$ , ( $F_n$  étant l'effort normal et  $\mu$  le coefficient maximale de frottement,  $\mu = \frac{F_{\max}}{F_n}$ ).

### 2.1.2 Formulation avec couplage

Les tests de frottement bidirectionnels, effectués sur un cube d'os et une plaque de métal avec surface poreuse par Hashemi et al. [35], ont bien montré la présence du phénomène de couplage entre deux directions perpendiculaires. En effet, l'effort de cisaillement dans une direction ne dépend pas seulement du déplacement relatif dans cette direction uniquement mais aussi de celui de la direction perpendiculaire à cette première. Les propriétés non linéaires de frottement mesurées lors des essais de frottement unidirectionnel ont été employés pour développer les relations constitutives. Dans cette formulation les propriétés de friction sont couplées. Ce couplage introduit des termes non diagonaux non nuls dans la matrice constitutive.

Dans ce développement, il est supposé que la force tangentielle résultante et le déplacement relatif se produisent dans la même direction et suivent la courbe non linéaire unidirectionnelle. Considérons  $\gamma_{eq}$  et  $\tau_{eq}$  le déplacement relatif résultant et la contrainte de cisaillement résultante respectivement :

$$\tau_i = \tau_{eq} \frac{\gamma_i}{\gamma_{eq}}, \quad i = x, y \quad (3)$$

$$\text{où} \quad \tau_{eq} = f(\gamma_{eq}) \quad (4)$$

En réalité, la relation (3), présente la condition d'isotropie.

Les gradients de la contrainte de cisaillement par rapport au déplacement relatif selon  $x$  et  $y$  sont établis comme suit : en utilisant les relations suivantes.

$$\tau_{eq} = (\tau_x^2 + \tau_y^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad \gamma_{eq} = (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^{1/2}, \quad \frac{\partial \gamma_{eq}}{\partial \gamma_x} = \frac{\gamma_x}{\gamma_{eq}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \gamma_{eq}}{\partial \gamma_y} = \frac{\gamma_y}{\gamma_{eq}}$$

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial \gamma_x} = \frac{\tau_{eq}}{\gamma_{eq}} + \left( \frac{\gamma_x}{\gamma_{eq}} \right)^2 \frac{\partial \tau_{eq}}{\partial \gamma_{eq}} - \frac{\gamma_x^2}{\gamma_{eq}^3} \tau_{eq} \quad (5)$$

De la même manière

$$\frac{\partial \tau_v}{\partial \gamma_v} = \frac{\tau_{eq}}{\gamma_{eq}} + \left( \frac{\gamma_v}{\gamma_{eq}} \right)^2 \frac{\partial \tau_{eq}}{\partial \gamma_{eq}} - \frac{\gamma_v^2}{\gamma_{eq}^3} \tau_{eq} \quad (6)$$

Pour les termes non diagonaux :

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial \gamma_v} = \frac{\gamma_x \gamma_v}{\gamma_{eq}^2} \left( \frac{\partial \tau_{eq}}{\partial \gamma_{eq}} - \frac{\tau_{eq}}{\gamma_{eq}} \right) \quad (7)$$

De la même manière, on trouve

$$\frac{\partial \tau_v}{\partial \gamma_x} = \frac{\gamma_x \gamma_v}{\gamma_{eq}^2} \left( \frac{\partial \tau_{eq}}{\partial \gamma_{eq}} - \frac{\tau_{eq}}{\gamma_{eq}} \right) \quad (8)$$

La formulation peut être exprimée comme suit :

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial \gamma_j} = \begin{cases} \left( \frac{\partial f(\gamma_{eq})}{\partial \gamma_{eq}} - \frac{f(\gamma_{eq})}{\gamma_{eq}} \right) \frac{\gamma_i^2}{\gamma_{eq}^2} + \frac{f(\gamma_{eq})}{\gamma_{eq}} & \text{quand } i = j \\ \left( \frac{\partial f(\gamma_{eq})}{\partial \gamma_{eq}} - \frac{f(\gamma_{eq})}{\gamma_{eq}} \right) \frac{\gamma_i \gamma_j}{\gamma_{eq}^2} & \text{quand } i \neq j \end{cases} \quad i \text{ et } j = (x, y) \quad (9)$$

On remarque que cette formulation possède des termes de couplage nuls (lorsque  $i \neq j$ ). quand il s'agit d'un frottement linéaire ou de type Coulomb de l'interface, puisque les pentes sécante et tangente ont la même valeur ou bien lors d'un test de frottement uniquement unidirectionnel, puisque la valeur du déplacement dans la direction

perpendiculaire au chargement est nulle. Néanmoins, la force tangentielle résultante ne peut pas excéder la force maximale résistante uniaxiale de l'interface  $\mu F_n$ .

## 2.2 Frottement non linéaire anisotropique

Lorsque le comportement frictionnel dépend du choix de la direction, on parle d'un frottement anisotropique. Les études de Hashemi et al. [35] ont montré que la non linéarité est la raison pour laquelle on observe le phénomène de couplage. Ainsi, une formulation avec couplage a été développée. Une formulation sans couplage a été également développée, afin de simuler toujours l'effet du couplage. Une relation indiquant la limite de la contrainte équivalente de glissement est aussi proposée.

Avant de commencer la présentation des formulations, on présente les hypothèses qui définissent une interface anisotropique avec deux directions principales, qui est également appelée orthotropique dans certaines revus de la littérature, vu la présence de symétrie par rapport aux directions principales.

Hypothèses : L'interface anisotropique est caractérisée par :

- 1/ Deux directions principales perpendiculaires  $x$  et  $y$ . Les vecteurs effort et déplacement sont confondus lors d'un test de frottement selon l'une de ces deux directions.
- 2/ Deux coefficients de frottement pour les deux directions principales. Supposons que  $\mu_x$  et  $\mu_y$  sont les coefficients de frottement associés à  $x$  et  $y$  respectivement. Les contraintes de cisaillement maximales de ces deux directions,  $x$  et  $y$ , sont  $\mu_x P$  et  $\mu_y P$  respectivement ( $P$  étant la pression).

### 2.2.1 Formulation sans couplage

La philosophie de la formulation sans couplage pour les interfaces isotropiques est maintenue pour les interfaces anisotropiques. En effet, la formulation considère que la réponse frictionnelle dans une direction est indépendante des autres. Par ailleurs, l'effort de cisaillement, ainsi que la rigidité tangentielle de l'interface sont une fonction du déplacement relatif de cette direction uniquement. Ceci engendre des termes non diagonaux nuls dans la matrice de rigidité tangentielle de l'interface. L'introduction de deux comportements frictionnels différents, des deux directions principales, constitue la différence entre la formulation du cas anisotropique avec celle du cas isotropique. La matrice constitutive possède alors deux termes diagonaux différents.

La formulation est alors sous la forme suivante :

$$\text{Soit } \tau_i = f_i(\gamma_i) \quad \text{avec } i = x, y. \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial \gamma_i} = \begin{cases} \frac{\partial f_i(\gamma_i)}{\partial \gamma_i} & \text{quand } i = j \\ 0 & \text{quand } i \neq j \end{cases} \quad (11)$$

où  $f_x$  et  $f_y$  présentent les courbes unidirectionnelles des deux directions principales  $x$  et  $y$  respectivement obtenues à l'aide des mesures expérimentales. On remarque que si les directions principales ont le même comportement frictionnel, la dernière formulation retombe bien sur la formulation du cas isotropique.

### 2.2.2 Formulation avec couplage

Les équations constitutives sont développées en se basant sur les propriétés de frottement unidirectionnelles de chaque direction principale. Dans cette formulation, le couplage introduit des termes non diagonaux non nuls dans la matrice constitutive. Cependant, la réponse frictionnelle dans une direction ne dépend pas seulement du déplacement relatif dans cette direction mais aussi de la direction qui lui est perpendiculaire. Considérons  $\gamma_{eq}$  le déplacement relatif résultant, les composantes de la contrainte de cisaillement,  $\tau_i$ , où  $i=(x, y)$  peuvent être considérées comme suit :

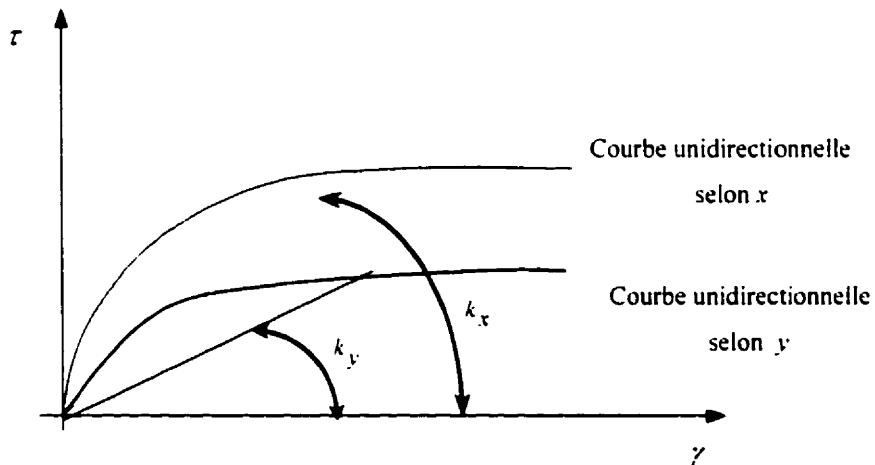


Figure 2.1 Schéma représentatif des courbes unidirectionnelles des deux directions principales  $x$  et  $y$  avec les pentes sécantes de chacune  $k_x$  et  $k_y$ .

$$\tau_x = k_x \gamma_x \quad \text{et} \quad \tau_y = k_y \gamma_y \quad (12)$$

$$\text{Avec } k_x = k_x(\gamma_{eq}) \quad \text{et} \quad k_y = k_y(\gamma_{eq}) \quad (13)$$

où  $k_i$  est la pente sécante de la courbe unidirectionnelle selon la direction principale  $i$

dépendant de  $\gamma_{eq}$ . Supposons que

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_x &= \frac{\bar{k}}{k_x} \tau_x = \bar{k} \gamma_x \\ \bar{\tau}_y &= \frac{\bar{k}}{k_y} \tau_y = \bar{k} \gamma_y \end{aligned} \right\} \text{avec } \bar{k} = \left( \frac{1}{2} k_x^2 + \frac{1}{2} k_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

$$\bar{\tau}_{eq} = \left( \bar{\tau}_x^2 + \bar{\tau}_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \bar{k} \left( \gamma_x^2 + \gamma_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \bar{k} \gamma_{eq} \quad (15)$$

Les équations (14) et (15) nous donnent:

$$\begin{cases} \bar{\tau}_x = \bar{k} \gamma_x \\ \bar{\tau}_y = \bar{k} \gamma_y \\ \bar{\tau}_{eq} = \bar{k} \gamma_{eq} \end{cases} \quad (16)$$

et

$$\bar{\tau}_{eq} / \gamma_{eq} = \bar{\tau}_x / \gamma_x = \bar{\tau}_y / \gamma_y \quad (17)$$

Par analogie avec le modèle isotropique non linéaire, équation (9), et en considérant

$$\bar{\tau}_{eq} = \bar{f}(\gamma_{eq}) \quad (18)$$

nous aurons alors les relations suivantes

$$\frac{\partial \bar{\tau}_i}{\partial \gamma_j} = \begin{cases} \left( \frac{\partial \bar{f}(\gamma_{eq})}{\partial \gamma_{eq}} - \frac{\bar{f}(\gamma_{eq})}{\gamma_{eq}} \right) \frac{\gamma_i^2}{\gamma_{eq}^2} + \frac{\bar{f}(\gamma_{eq})}{\gamma_{eq}} & \text{quand } i = j \\ \left( \frac{\partial \bar{f}(\gamma_{eq})}{\partial \gamma_{eq}} - \frac{\bar{f}(\gamma_{eq})}{\gamma_{eq}} \right) \frac{\gamma_i \gamma_j}{\gamma_{eq}^2} & \text{quand } i \neq j \end{cases} \quad i \text{ et } j = (x, y) \quad (19)$$



Les relations constitutives reliant les contraintes tangentielles aux déplacements relatifs

selon  $x$  et  $y$ ,  $\frac{\partial \tau_r}{\partial \gamma_r}$ , en fonction de  $\frac{\partial \bar{\tau}_r}{\partial \gamma_r}$ ,  $\bar{k}$ ,  $k_r$  et  $k_v$ , sont établis comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\tau}_r}{\partial \gamma_r} &= \frac{\partial \left( \frac{\bar{k}}{k_r} \tau_r \right)}{\partial \gamma_r} \\ &= \frac{\tau_r}{k_r} \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_r} \frac{\partial k_r}{\partial \gamma_r} + \frac{\bar{k}}{k_r} \frac{\partial \tau_r}{\partial \gamma_r} - \frac{\bar{k} \tau_r}{k_r^2} \frac{\partial k_r}{\partial \gamma_r} \end{aligned}$$

où

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial k_r} = \frac{1}{2\bar{k}} \left( k_r + k_v \frac{\partial k_v}{\partial k_r} \right)$$

Tout calcul et manipulations mathématiques faites, nous aurons la relation suivante :

$$\frac{\partial \bar{\tau}_r}{\partial \gamma_r} = \left( \frac{k_v}{2\bar{k}} + \frac{k_v}{2\bar{k}} \frac{\partial k_v}{\partial k_r} \right) \frac{\partial \tau_r}{\partial \gamma_r} - \frac{k_v^2}{2\bar{k}} - \frac{k_r k_v}{2\bar{k}} \frac{\partial k_v}{\partial k_r} + \bar{k} \quad (20)$$

De la même façon, on trouve

$$\frac{\partial \bar{\tau}_v}{\partial \gamma_v} = \left( \frac{k_v}{2\bar{k}} + \frac{k_r}{2\bar{k}} \frac{\partial k_r}{\partial k_v} \right) \frac{\partial \tau_v}{\partial \gamma_v} - \frac{k_v^2}{2\bar{k}} - \frac{k_r k_v}{2\bar{k}} \frac{\partial k_r}{\partial k_v} + \bar{k} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_r}{\partial \gamma_r} = \frac{\partial \left( \frac{\bar{k}}{k_r} \tau_r \right)}{\partial \gamma_r}$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_x}{\partial \gamma_v} = \frac{\bar{k}}{k_v} \frac{\partial \tau_x}{\partial \gamma_v} + \frac{\tau_x}{k_v} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \gamma_v} + \bar{k}_v \tau_x \left( \frac{\partial \left( \frac{1}{k_v} \right)}{\partial \gamma_v} \right)$$

Or

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial \gamma_v} = \frac{\partial \bar{k}}{\partial k_v} \frac{\partial k_v}{\partial \gamma_v} = \frac{1}{2\bar{k}} \left( k_v + k_v \frac{\partial k_v}{\partial k_v} \right) \frac{1}{\gamma_v} \frac{\partial \tau_x}{\partial \gamma_v}$$

on obtient donc :

$$\frac{\partial \bar{\tau}_x}{\partial \gamma_v} = \frac{\partial \tau_x}{\partial \gamma_v} \left[ \frac{1}{2} \left( k_v + k_v \frac{\partial k_v}{\partial k_v} \right) \right] \frac{1}{\bar{k}} \quad (22)$$

De même on trouve

$$\frac{\partial \bar{\tau}_v}{\partial \gamma_x} = \frac{\partial \tau_v}{\partial \gamma_x} \left[ \frac{1}{2} \left( k_x + k_x \frac{\partial k_x}{\partial k_x} \right) \right] \frac{1}{\bar{k}} \quad (23)$$

À partir des équations (20-23) ci-dessus on peut conclure les équations constitutives :

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial \gamma_v} = \frac{1}{\left( \frac{1}{2} \frac{k_x}{\bar{k}} + \frac{k_v}{2\bar{k}} \frac{\partial k_v}{\partial k_v} \right)} \left[ \frac{\partial \bar{\tau}_x}{\partial \gamma_v} + \frac{1}{2} \frac{k_x^2}{\bar{k}} + \frac{k_x k_v}{2\bar{k}} \frac{\partial k_v}{\partial k_v} - \bar{k} \right] \quad (24)$$

$$\frac{\partial \tau_v}{\partial \gamma_x} = \frac{1}{\left( \frac{1}{2} \frac{k_v}{\bar{k}} + \frac{k_x}{2\bar{k}} \frac{\partial k_x}{\partial k_x} \right)} \left[ \frac{\partial \bar{\tau}_v}{\partial \gamma_x} + \frac{1}{2} \frac{k_v^2}{\bar{k}} + \frac{k_x k_v}{2\bar{k}} \frac{\partial k_x}{\partial k_x} - \bar{k} \right] \quad (25)$$

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial \gamma_y} = \frac{\bar{k}}{\frac{1}{2} \left( k_x + k_y \frac{\partial k_y}{\partial k_x} \right)} \frac{\partial \bar{\tau}_x}{\partial \gamma_y} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial \gamma_x} = \frac{\bar{k}}{\frac{1}{2} \left( k_y + k_x \frac{\partial k_x}{\partial k_y} \right)} \frac{\partial \bar{\tau}_y}{\partial \gamma_x} \quad (27)$$

Ces équations constitutives (24 – 27) forment bien la formulation du cas anisotrope non linéaire avec couplage. On remarque que les termes de la rigidité sont une fonction du déplacement relatif des deux directions principales. Contrairement au cas isotrope, la matrice constitutive est asymétrique. Par ailleurs, les équations constitutives du cas isotrope sont bien retrouvées si le comportement frictionnel des deux directions principales est identique,  $k_x = k_y = k_{eq}$ . De plus, les termes de couplages, équations (26) et (27) disparaissent si le comportement frictionnel dans les deux directions principales est linéaire, puisque la courbe  $\bar{\tau}(\gamma_{eq})$  est une courbe linéaire et par la suite la pente sécante et la pente tangente relative à cette courbe sont identiques, équation (19). Aussi ces termes de couplage disparaissent lors d'un test unidirectionnel selon l'une des directions principales, ceci parce que le déplacement relatif est nul dans l'autre direction principale.

Si nous analysons la procédure suivie pour établir cette formulation, nous remarquons, que nous avons effectué un changement de variable pour transformer le problème anisotrope à un problème isotrope dans une première étape. Ceci se traduit par la condition d'isotropie trouvée, équation (17). Dans la seconde étape, nous avons ramener le problème à sa vraie grandeur, en exprimant les termes à rechercher en fonction des résultats obtenus à partir de ce changement de variable et en fonction des pentes sécantes des courbes unidirectionnelles selon les directions principales.

### 2.3 Critère de glissement

Dans le cas isotropique, la contrainte tangentielle maximale a été définie par la limite de cisaillement uniaxiale de l'interface  $\mu P$  ( $P$  étant la pression), étant donné que le coefficient de frottement est identique selon toutes les directions. Dans notre cas, frottement anisotropique, nous avons deux directions principales avec des coefficients de frottement qui ne sont pas nécessairement identiques. La limite de cisaillement pour chacune des deux directions principales  $x$  et  $y$  est  $\mu_x P$  et  $\mu_y P$  respectivement.

Il a été très raisonnable d'introduire un critère elliptique pour définir la résistance ultime de la contrainte de cisaillement. Cette ellipse prend les limites de cisaillement des directions principales,  $\mu_x P$  et  $\mu_y P$ , comme des valeurs du grand et petit axe. Ce même critère est aussi bien utilisé dans certains revus de la littérature, dans le cas du frottement de Coulomb anisotropique [57], pour donner une limite à la contrainte de cisaillement équivalente.

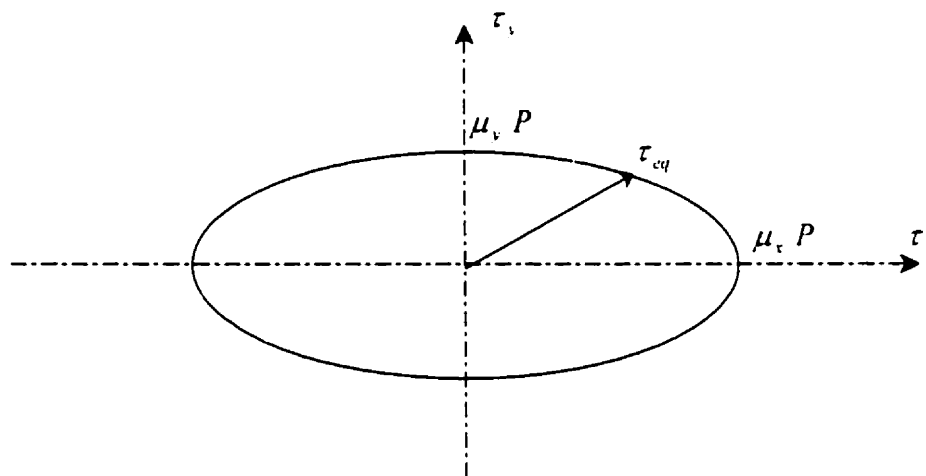


Figure 2.2 Ellipse caractérisant la limite de la contrainte de cisaillement équivalente pour le cas anisotropique.

La frontière de cette ellipse indique la limite de la contrainte de cisaillement équivalente. Cette frontière correspond à l'équation de l'ellipse définie par :

$$\left(\frac{\tau_x}{\mu_x P}\right)^2 + \left(\frac{\tau_y}{\mu_y P}\right)^2 - 1 = 0 \quad (29)$$

Pour qu'il n'y ait pas glissement, la condition suivante doit être respectée :

$$\left(\frac{\tau_x}{\mu_x P}\right)^2 + \left(\frac{\tau_y}{\mu_y P}\right)^2 \leq 1 \quad (30)$$

La contrainte maximale de cisaillement de chacune des directions principales, est retrouvée si nous faisons un test unidirectionnel selon ces directions. Ajoutons aussi, lorsque les deux coefficients de frottement  $\mu_x$  et  $\mu_y$ , des deux directions principales sont égaux, nous retrouvons bien la condition de non glissement du cas isotropique. Dans ce cas, l'ellipse devient un cercle.

## CHAPITRE 3

### MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS

Afin d'examiner la performance et la précision des équations constitutives et étudier le rôle du frottement sur la réponse des corps en contact, deux modèles par élément finis ont été développés et analysés en utilisant le logiciel ABAQUS (Hibbit, Karlsson and Sorenson Inc., RI, 2001). Des «subroutines» en Fortran ont été développées pour introduire les relations constitutives du frottement non linéaire, isotropique et anisotropique, dans les fichiers d'input d'ABAQUS. Ces modèles ont été utilisés dans des études antérieures [1] et [35] pour effectuer des tests de frottement avec des interfaces avec frottement de Coulomb et non linéaire isotropique. Le premier modèle simule le test de frottement bidirectionnel d'un cube d'os sur une plaque de métal à surface poreuse. La modélisation d'une plaque métallique reposant librement sur un bloc de polyuréthane est l'objet du deuxième modèle. Les chargements, le type de maillage, les propriétés des matériaux utilisées, ainsi que les conditions aux frontières sont données dans les sections respectives à chacune de ces deux modèles.

#### **3.1 Cube d'os sur une plaque de métal à surface poreuse**

Ce premier modèle par éléments finis a été élaboré pour modéliser les tests de frottement uni- et bidirectionnels d'un cube d'os sur un métal à surface poreuse avec différents types de frottement, anisotropiques et isotropiques, et des comportements frictionnels linéaires et non linéaires.

### 3.1.1 Modèle

Le module d'élasticité du cube d'os est de 300 MPa, et celui de la plaque en métal à surface poreuse est de 200 000 MPa. Le coefficient de poisson du cube et de la plaque sont 0.2 et 0.3, respectivement. Les dimensions du cube sont 20x20x10mm, et celles de la plaque en métal sont 30x30x10mm. Ces caractéristiques géométriques ainsi que les dispositions sont montrées dans la figure 4.1. Un maillage d'élément finis, composé de 52 éléments brique à 8 nœuds et 16 éléments de contact, a été employé pour l'analyse de ce modèle. Au total, 148 nœuds ont été utilisés dans ce maillage, figure 4.1. La suppression du mouvement de la base de la plaque du métal dans toutes les directions est la seule condition aux limites employée, figure 4.1. Les frottements non linéaire et bilinéaire sont introduit dans ce modèle. Les courbes unidirectionnelles sont prises d'une façon arbitraire de telle manière qu'elles nous dégagent les conclusions pertinentes de ces études. Des simulations avec des interfaces isotropiques et anisotropiques ont été effectuées. Une figure, illustrant les courbes unidirectionnelles utilisées de chaque direction principale, pour le cas anisotropique, et illustrant la courbe uniaxiale, pour le cas isotropique, précède chaque étude.

Une charge répartie normale d'une valeur 0.1 MPa est appliquée sur le cube d'os. Pour la simulation des tests de frottement bidirectionnels, des charges tangentielles à l'interface sont ensuite appliquées successivement selon les deux directions principales  $x$  et  $y$ . Pour les tests de frottement unidirectionnels, les charges tangentielles sont appliquées simultanément.

Pour les tests de frottement bidirectionnelles les charges appliquées selon  $x$  ou  $y$  ont une valeur de 0, 0.37, 0.65 et 0.84  $F_{x\_max}$  ( $F_{x\_max}$  est la résistance maximale de l'interface selon  $x$ ). Selon la direction perpendiculaire de la précharge, la charge est appliquée jusqu'au glissement. Pour les tests de frottement unidirectionnels, la charge

tangentielle est appliquée selon une direction constante jusqu'au glissement. Les directions choisies sont  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$  comptées par rapport à  $x$ .

### **3.2 Plaque métallique sur un bloc de polyuréthane**

On modélise dans ce second modèle une plaque métallique reposant librement sur un bloc de polyuréthane. Le comportement frictionnel envisagé des interfaces est non linéaire: isotropique et anisotropique.

#### **3.2.1 Modèle**

Les dimensions de la plaque métallique sont  $75 \times 50 \times 3$  mm, celles du bloc de polyuréthane sont  $85 \times 60 \times 40$  mm. Le module d'élasticité de la plaque ainsi que du bloc sont  $200\,000$  MPa et  $40$  MPa, respectivement. La plaque et le bloc ont  $0.3$  comme valeur du coefficient de Poisson. Les caractéristiques géométriques sont montrées dans la figure 4.2. Pour analyser ce modèle, un maillage d'élément finis, composé de  $1320$  éléments brique à  $8$  nœuds,  $150$  éléments de contact et  $3784$  nœuds, a été utilisé. La fixation de tous les nœuds de la base du bloc en polyuréthane, ainsi que les nœuds de la frontière du même bloc se situant à une hauteur d'environ  $11$  mm, sont les seules conditions aux limites qui sont considérées, figure 4.2. Le frottement non linéaire est adopté pour ce modèle avec des interfaces anisotropique et isotropique. Les courbes unidirectionnelles selon les directions principales, cas anisotropique, ainsi que la courbe uniaxiale, cas isotropique, sont montrées dans la figure précédant ces études. Les courbes unidirectionnelles sont aussi prises d'une manière arbitraire comme le cas du modèle précédent. Une charge normale et des charges tangentielles selon les directions  $x$  et  $y$  sont appliquées dans trois étapes consécutives ayant les valeurs  $1000$  N,  $250$  N et  $250$  N respectivement. Ces efforts sont appliqués excentriquement à la surface supérieure et à l'extrémité de la plaque du métal au point D0 ( $75,30,43$ ), voir figure 4.2.



## CHAPITRE 4

### RÉSULTATS

Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus par la modélisation par la méthode des éléments finis des modèles décrits dans le chapitre 3.

#### 4.1 Cube d'os dur une plaque

Pour ce premier modèle, différentes études ont été effectuées afin de valider les modèles analytiques développés, du cas anisotrope non linéaire, comparer le cas anisotrope avec le cas isotrope, et comparer les approches avec et sans couplage.

##### 4.1.1 Frottement bidirectionnel

On assume pour les directions principales  $x$  et  $y$  un comportement non linéaire et des coefficients de frottement de valeur 0.58 et 0.4 respectivement, figure 4.3. La courbe unidirectionnelle selon  $x$  est considérée comme la réponse frictionnelle de l'interface pour le cas isotrope.

Les figures 4.4 – 4.7 représentent respectivement les courbes résistance au frottement - déplacement obtenues par la méthode des éléments finis. La présence d'une précharge variable selon  $x$ , figures 4.4 et 4.5, et selon  $y$ , figures 4.6 et 4.7, génère un couplage entre la contrainte de cisaillement et le déplacement relatif dans les deux directions. L'effet du couplage varie en fonction de l'intensité de la précharge. Aussi, on remarque que le couplage n'a pas d'effet si la précharge a une valeur nulle, c'est à dire quand il s'agit d'un test de frottement effectué uniquement selon l'une des deux

directions principales. La différence des réponses frictionnelles, suite à une comparaison entre les figures 4.4 et 4.6, et les figures 4.5 et 4.7, en présence de la même valeur de la précharge, montre bien l'effet de l'anisotropie. Les figures 4.6 et 4.7, montrent aussi que le test de frottement bidirectionnel avec une précharge de  $0.84 F_{x\_max}$  selon la direction  $y$  n'a pu être réalisé. Ceci s'explique par le fait que la charge  $0.84 F_{x\_max}$  dépasse la limite de la contrainte de cisaillement selon la direction  $y$ .

Les résultats correspondant aux tests de frottement bidirectionnel en utilisant l'approche sans couplage, figure 4.8, montrent que les courbes résistance au frottement - déplacement ( $F_y$ - $D_y$ ) sont confondues avec la courbe unidirectionnelle de la direction principale  $y$ , et indépendantes de la valeur de la précharge appliquée selon  $x$ . C'est uniquement la limite de cisaillement qui change en variant la valeur de la précharge. Le déplacement relatif selon la direction  $x$  demeure pratiquement nul en fonction de la contrainte de cisaillement (figure 4.9). En effet, aucun couplage entre les directions principales n'est observé.

Les figures 4.10 et 4.11 illustrent respectivement les courbes pour le cas isotropique avec couplage. Une comparaison entre les figures 4.4 et 4.10, et les figures 4.5 et 4.11 montre bien la différence de l'effet du couplage entre le cas isotropique et le cas anisotropique.

La figure 4.12 illustre le cas de courbes unidirectionnelles bilinéaires selon les directions  $x$  et  $y$ . Les résultats du test bidirectionnel illustrés dans la figure 4.13 montrent qu'aucun couplage n'est présent, suite à l'application d'une précharge. Ceci montre que dans le cas linéaire l'effet du couplage est automatiquement nul.

#### 4.1.2 Frottement unidirectionnel

Ce test de frottement a été élaboré essentiellement afin d'observer l'influence du comportement frictionnel non linéaire de l'interface et l'emploi des approches avec et sans couplage, sur la direction du déplacement du cube d'os lors de l'application d'une charge tangentielle selon une direction donnée. Une comparaison entre le cas isotropique et anisotropique est l'une des objectives de cette étude. Les courbes unidirectionnelles selon les directions principales  $x$  et  $y$  sont présentées dans la figure 4.3. La courbe unidirectionnelle selon  $x$  est utilisée comme étant la réponse frictionnelle de l'interface pour les études relatives au cas isotropique.

La figure 4.14 montre la variation de la direction du déplacement équivalente en fonction de la charge équivalente appliquée pour les cas isotropiques et anisotropiques avec couplage ainsi que pour un cas de Coulomb anisotropique avec  $30\mu\text{m}$  de déplacement permis selon les deux directions principales. Contrairement au cas isotropique, la direction du déplacement relatif dans le cas anisotropique ne suit pas la direction de l'effort appliqué, ceci en exceptant le cas où l'effort est appliqué uniquement selon l'une des directions principales. Pour le cas de Coulomb, la direction du déplacement est constante mais ne suit toujours pas la direction de l'effort appliqué. Aussi, on remarque que la limite de la contrainte de cisaillement est variable en fonction de la direction de l'effort appliqué dans les cas anisotropiques. Ceci est expliqué par le critère elliptique de glissement introduit dans les modèles anisotropiques. La figure 4.15 montre une comparaison entre les approches avec couplage et sans couplage du cas isotropique. En effet, la différence est bien remarquable entre les cas où la direction de l'effort est à  $30^\circ$  et  $60^\circ$ . La figure 4.16 montre la même comparaison, mais pour le cas anisotropique. Une divergence entre les deux approches est bien remarquable aussi pour les trois directions dont la charge est appliquée,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$ .

Dans un cas étudié, où les courbes unidirectionnelles selon les directions principales sont parfaitement proportionnelles, figure 4.17, la direction du déplacement ne suit toujours pas la direction de l'effort appliqué mais elle suit une direction pratiquement constante en utilisant la formulation avec couplage, figure 4.18, semblable au cas isotropique. Ceci montre l'effet de la proportionnalité des courbes unidirectionnelles selon les directions principales sur la direction du déplacement. Dans un cas échéant, présenté en annexe, figure A.13, où les courbes unidirectionnelles ne sont pas du toutes proportionnelles figure A.12, on observe que la direction du déplacement est une courbe non linéaire. D'autres résultats additionnels, relatifs à d'autres études, seront présentés en annexe.

Les figures 4.20 et 4.21 illustrent les courbes charge équivalente en fonction du déplacement résultant d'un test de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique (figure 4.19). Contrairement aux résultats obtenus par l'approche avec couplage, les résultats relatifs à l'approche sans couplage sont différents en exceptant les cas où la direction de l'effort est de  $30^\circ$  et de  $60^\circ$ .

#### **4.2 Plaque métallique sur un bloc de polyuréthane**

Pour ce modèle, la réponse frictionnelle a été calculée en assumant plusieurs types de frottement à l'interface, ceci a pour but d'observer l'influence de ces derniers sur la réponse du modèle. Les charges appliquées sont concentrées au nœud D0, à l'extrémité de la plaque. Les directions principales 1 et 2 à l'interface ont un comportement non linéaire et des coefficients de frottement de valeur 0.4 et 0.58 respectivement, figure 4.22. La courbe unidirectionnelle selon 1 est considérée comme la réponse frictionnelle de l'interface dans le cas isotropique.

Les figures 4.23 – 4.26 illustrent respectivement les courbes force - déplacement calculées au point D0 et D1, tout en comparant le cas isotropique avec le cas anisotropique et le cas avec couplage avec celui du sans couplage. Pour les comportements frictionnels introduits, des directions principales, où la rigidité selon 2 est plus importante que celle de 1, les déplacements U1 et U2 soient plus importants dans le cas isotropique avec couplage qu'au cas anisotropique avec couplage pour une même valeur de F2. Initialement, quand  $F_2=0$ , la valeur du déplacement U2 est pratiquement la même dans les deux cas, ceci est bien attendu puisque le comportement frictionnel selon la direction 1 est identique dans les deux cas. La comparaison entre les approches avec et sans couplage des cas isotropique et anisotropique montre que l'effet de couplage résulte une différence bien remarquable entre les résultats des deux approches.

CUBE D'OS (20x20x10 mm)

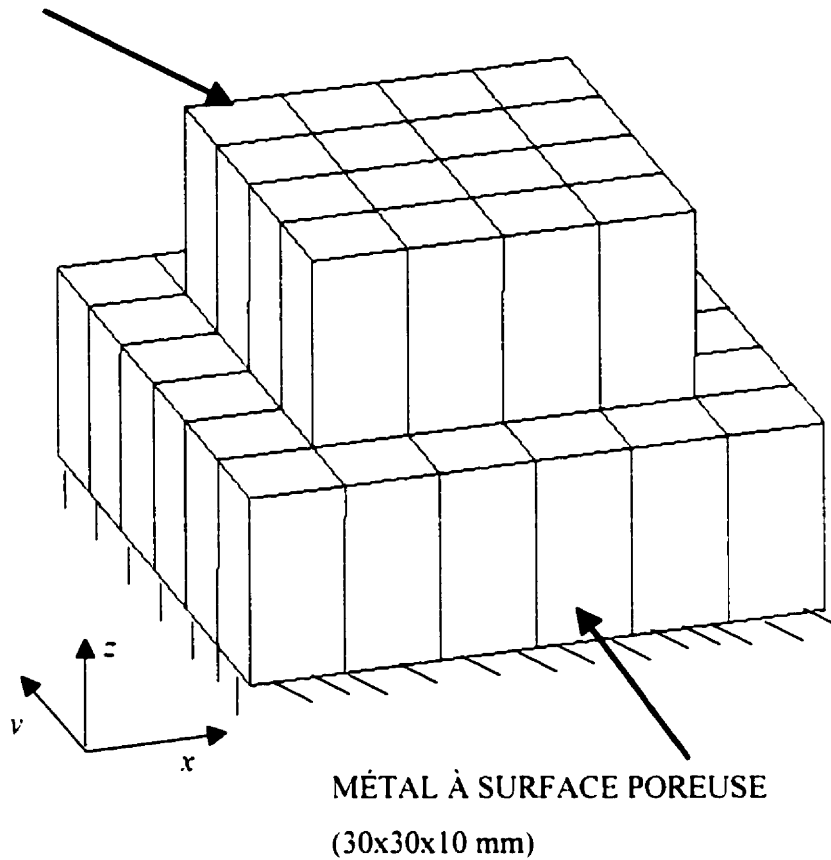


Figure 4.1 Maillage, conditions aux limites et dimensions du cube d'os reposant librement sur un métal à surface poreuse.

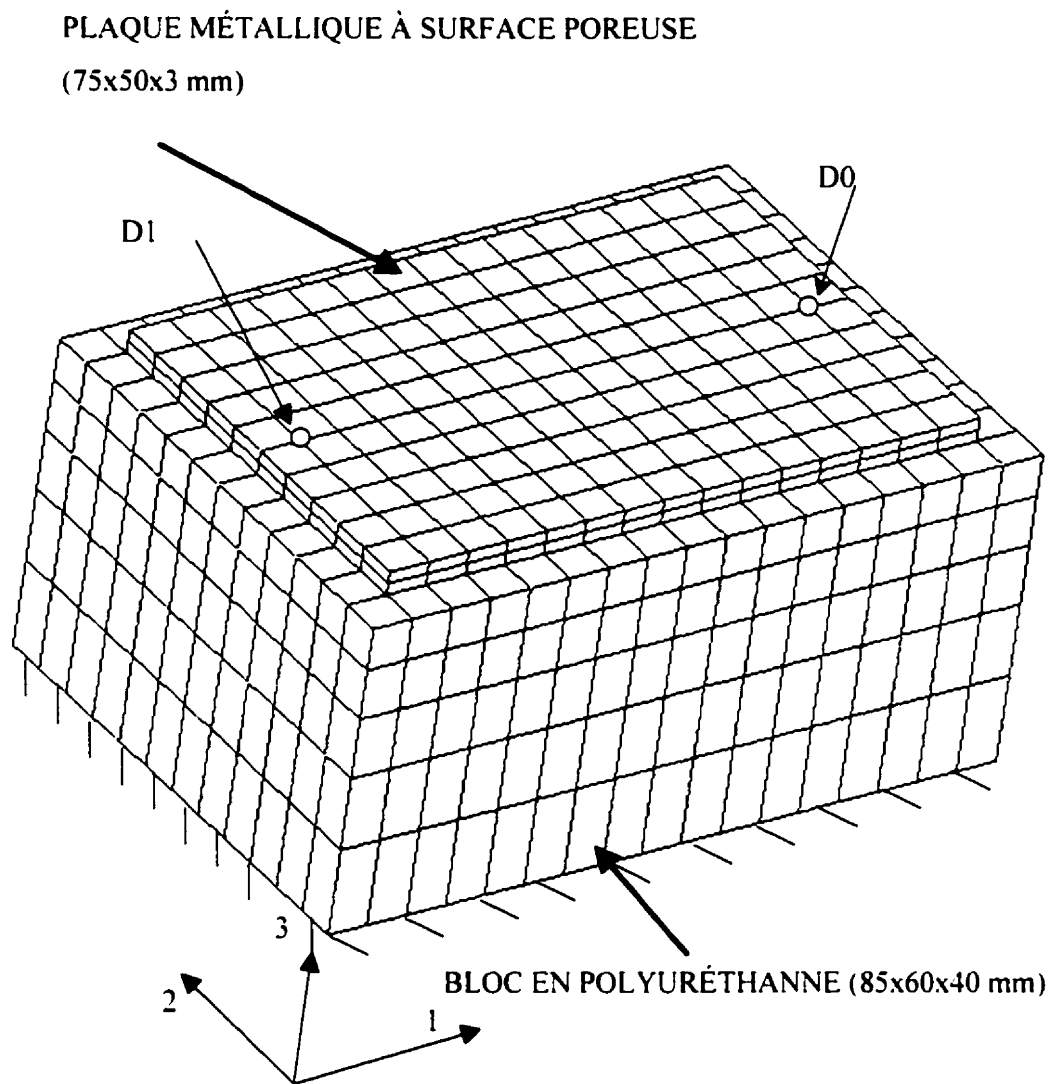


Figure 4.2 Maillage, conditions aux limites et dimensions du modèle de la plaque métallique à surface poreuse reposant librement sur un bloc de polyuréthane.

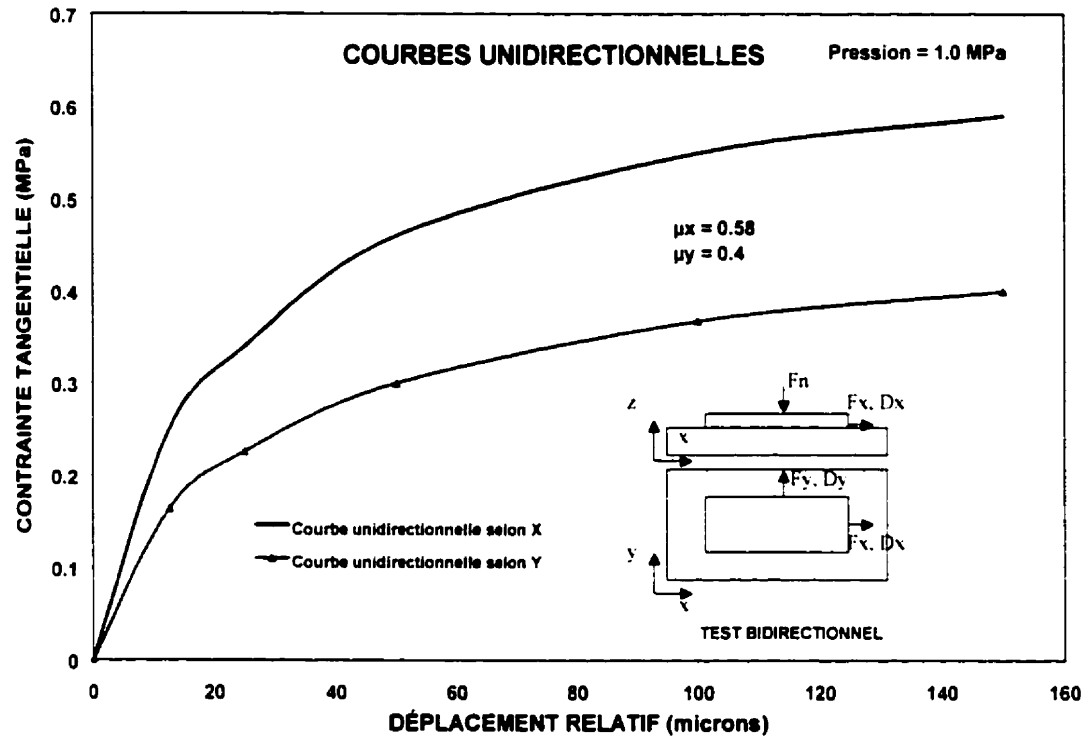


Figure 4.3 Courbes unidirectionnelles non linéaires des deux directions principales  $x$  et  $y$ , utilisées dans la modélisation de l'interface anisotrope.



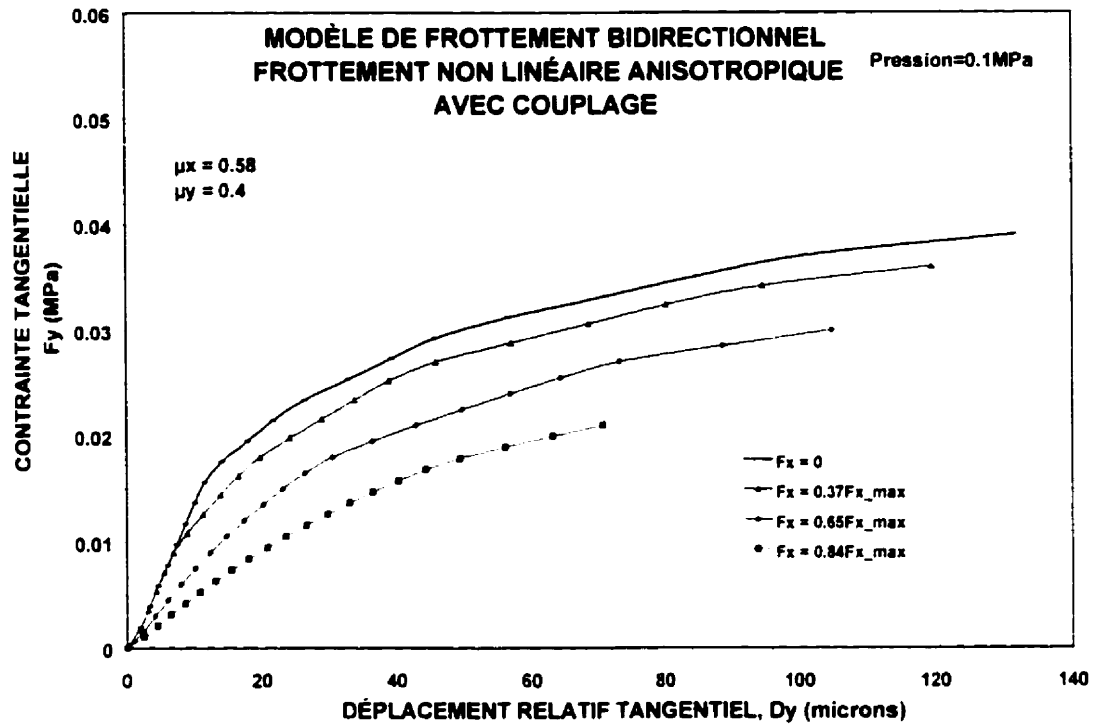


Figure 4.4 Contrainte tangentielle,  $F_y$ , en fonction du déplacement relatif,  $D_y$ , ( $F_y$ - $D_y$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique et en utilisant la formulation avec couplage.

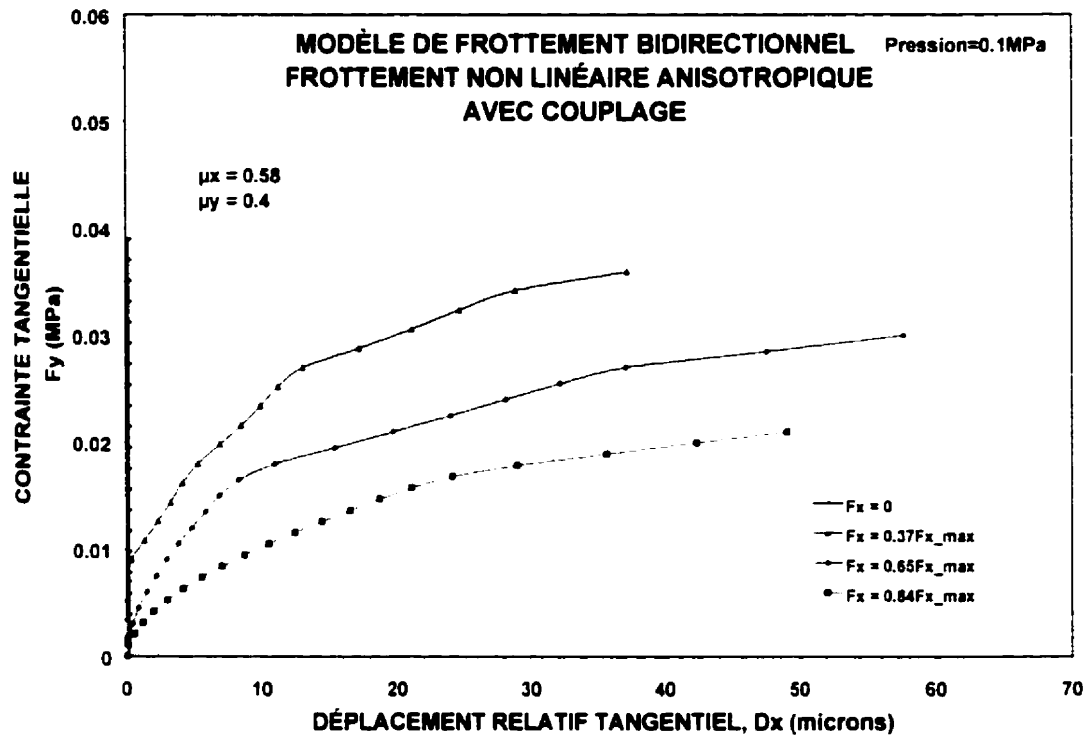


Figure 4.5 Contrainte tangentielle,  $F_y$ , en fonction du déplacement relatif,  $D_x$ , ( $F_y$ - $D_x$ ), en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique et en utilisant la formulation avec couplage.  $D_x$  initial est ramené à zéro afin de simplifier la comparaison.

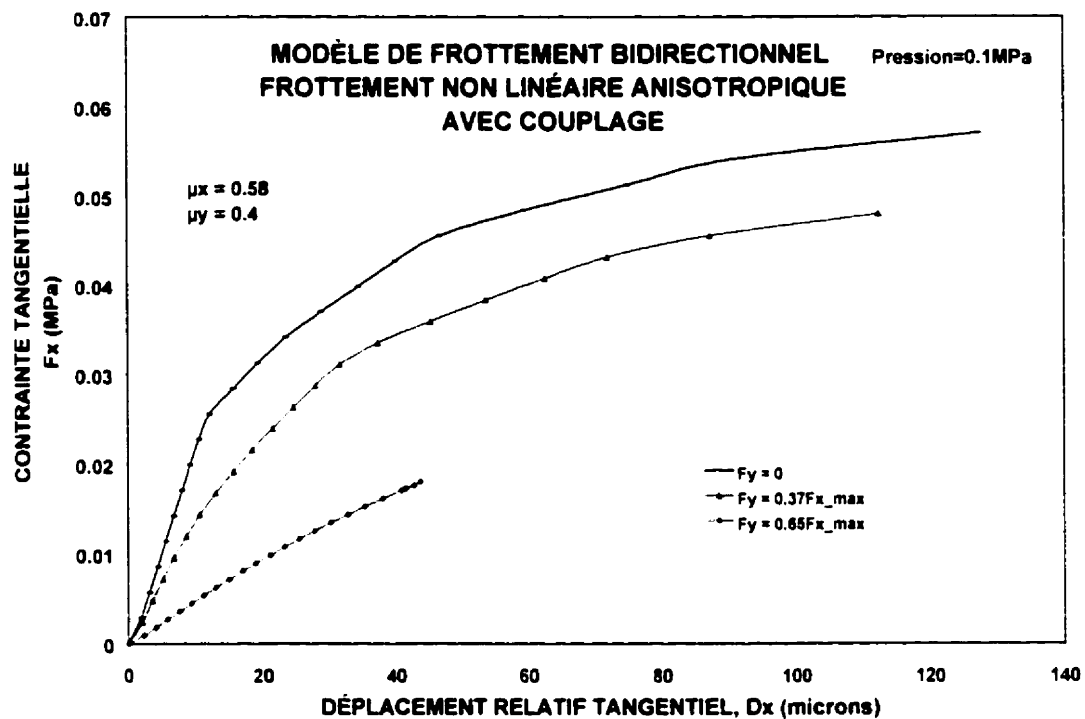


Figure 4.6 Contrainte tangentielle,  $F_x$ , en fonction du déplacement relatif,  $D_x$ , ( $F_x$ - $D_x$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique et en utilisant la formulation avec couplage.

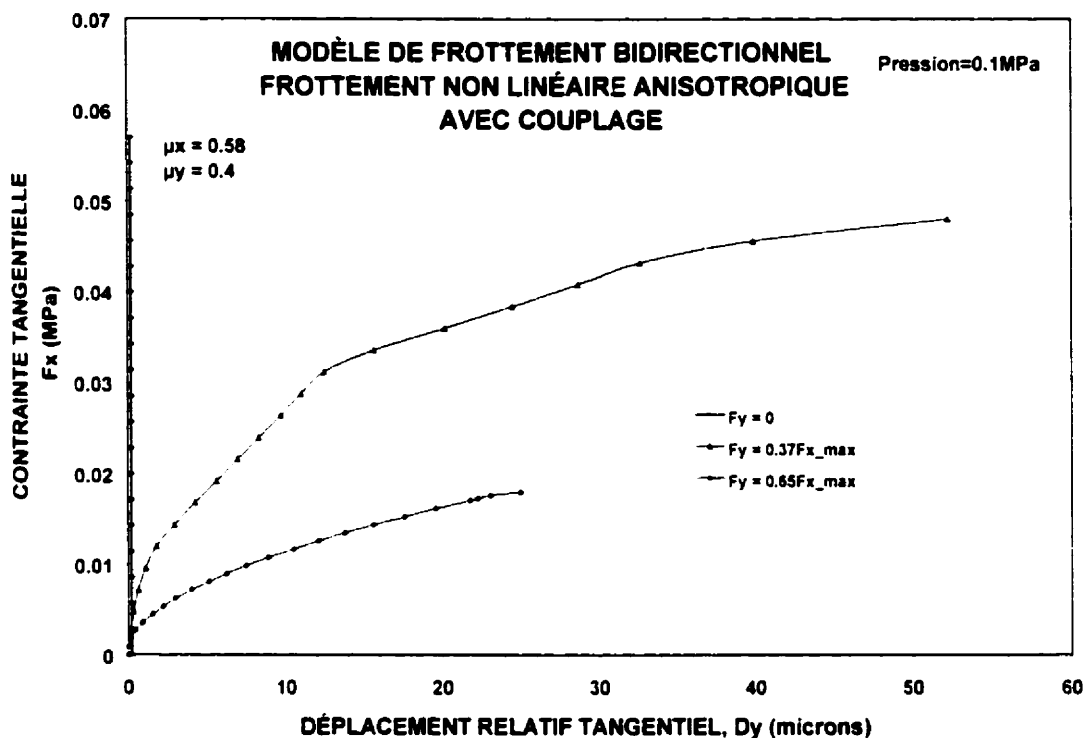


Figure 4.7 Contrainte tangentielle,  $F_x$ , en fonction du déplacement relatif,  $D_y$ , ( $F_x$ - $D_y$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique et en utilisant la formulation avec couplage. Les déplacements initiaux de  $D_y$  sont ramenés à zéro pour simplifier la comparaison.

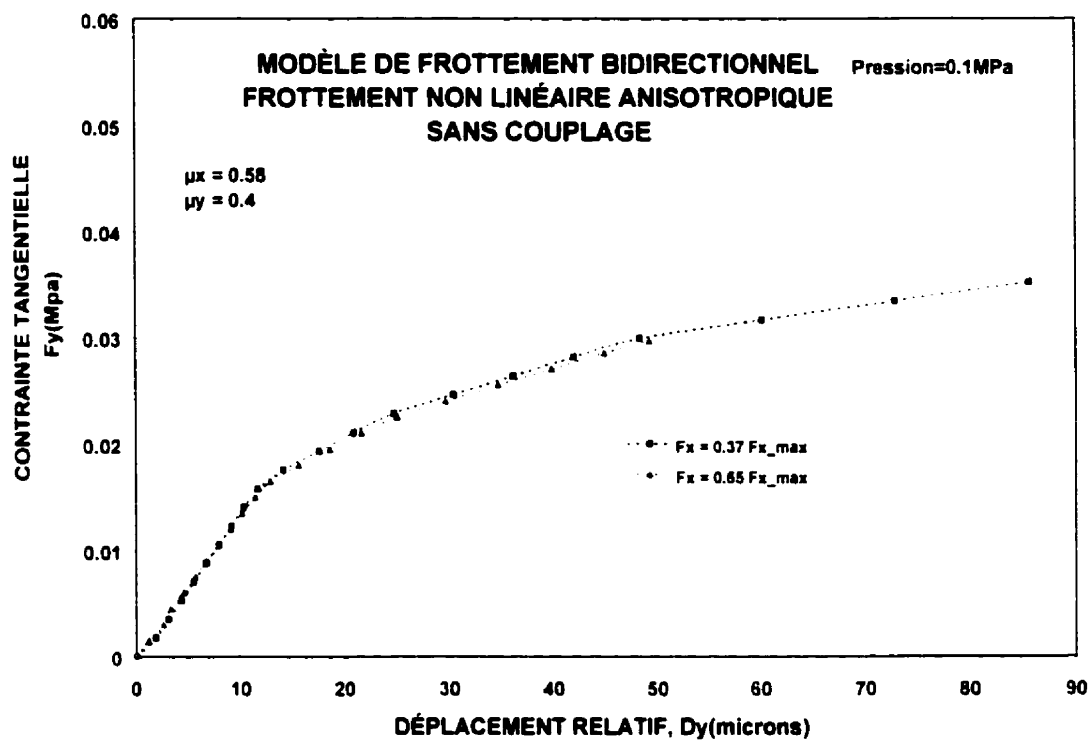


Figure 4.8 Contrainte tangentielle,  $F_y$ , en fonction du déplacement relatif,  $D_y$ . ( $F_y$ - $D_y$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire anisotrope et en utilisant la formulation sans couplage.

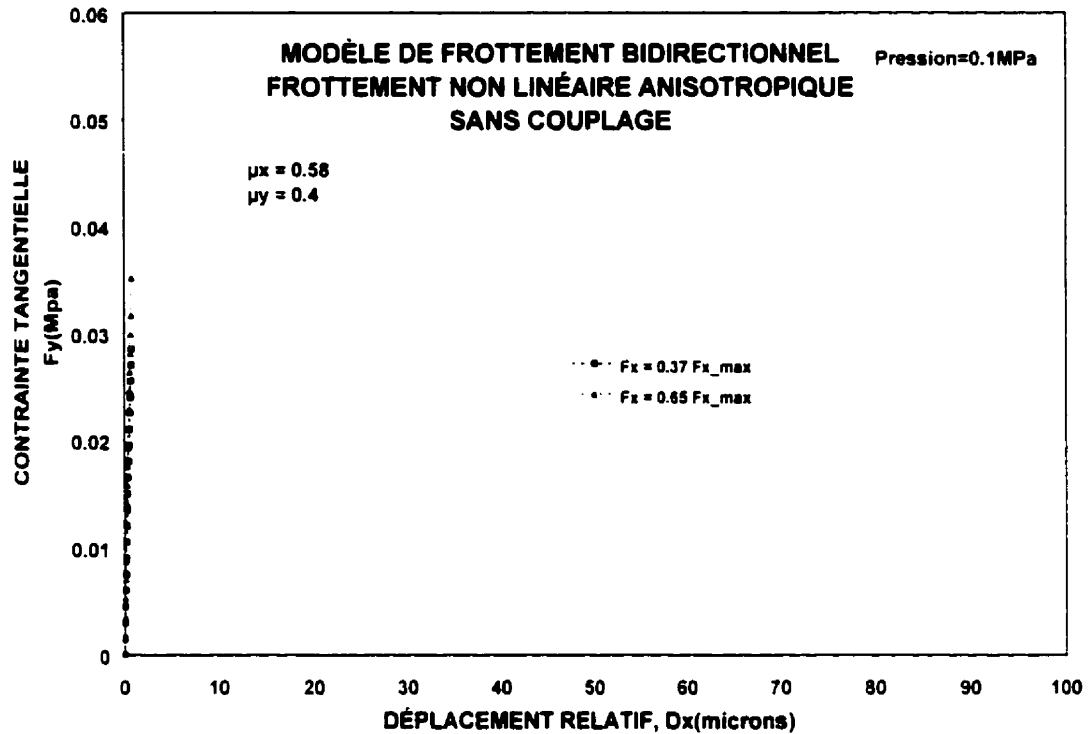


Figure 4.9 Contrainte tangentielle,  $F_y$ , en fonction du déplacement relatif,  $D_x$ . ( $F_y$ - $D_x$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique et en utilisant la formulation sans couplage. Le déplacement initial selon  $x$  est ramené à zéro afin de simplifier la comparaison.

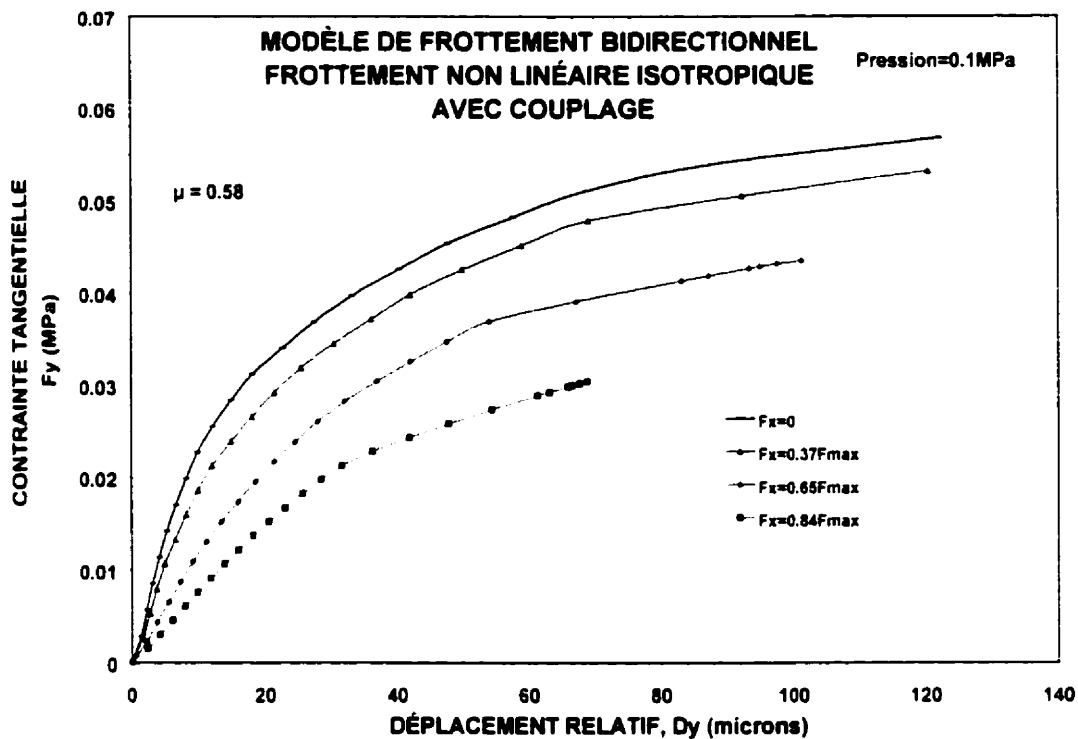


Figure 4.10 Contrainte tangentielle,  $F_y$ , en fonction du déplacement relatif,  $D_y$ . ( $F_y$ - $D_y$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et en utilisant la formulation avec couplage.

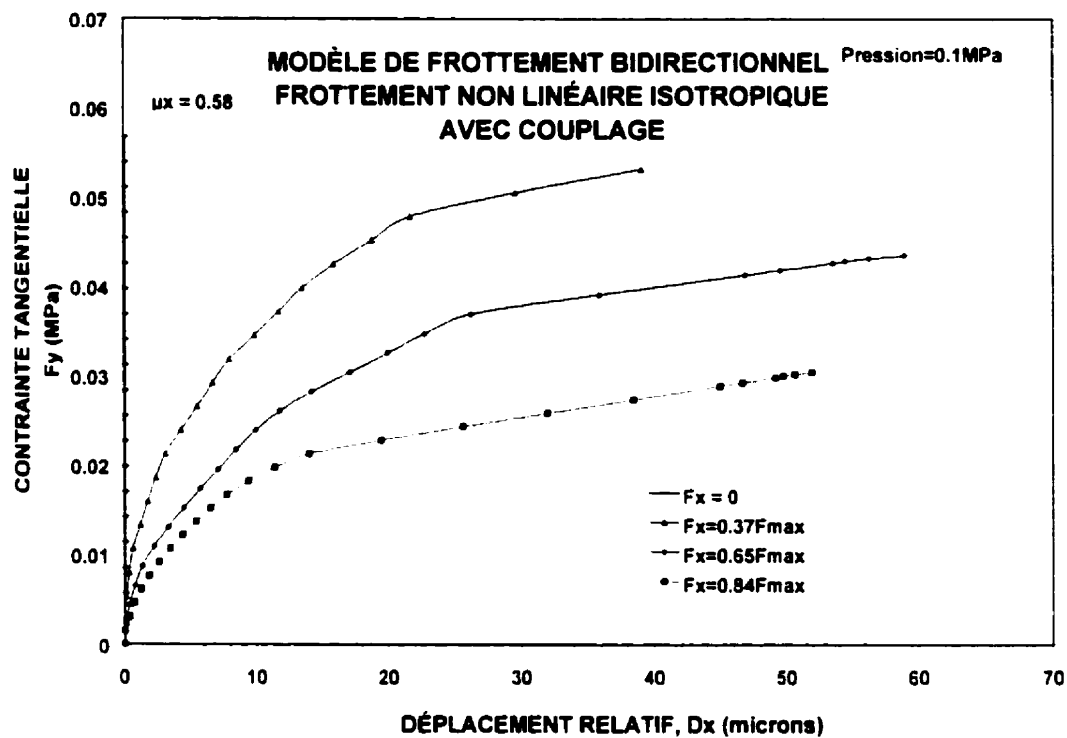


Figure 4.11 Contrainte tangentielle,  $F_y$ , en fonction du déplacement relatif,  $D_x$ , ( $F_y$ - $D_x$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et en utilisant la formulation avec couplage.  $D_x$  est ramené à zéro.



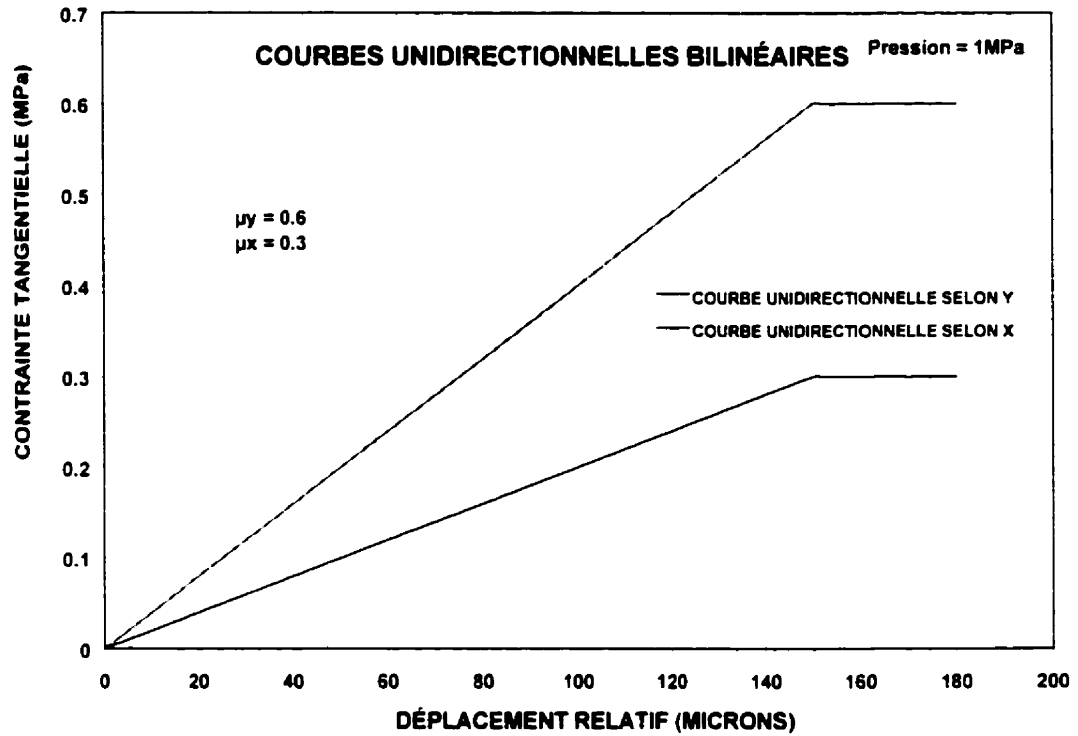


Figure 4.12 Courbes unidirectionnelles bilinéaires des deux directions principales x et y.

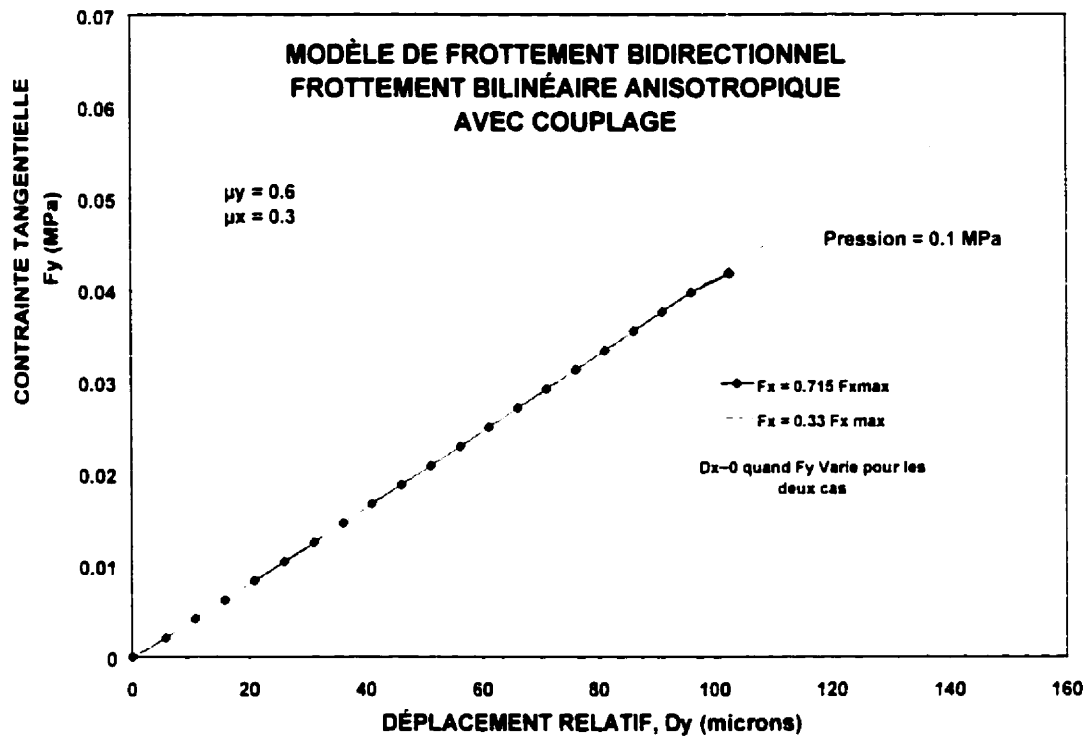


Figure 4.13 Contrainte tangentielle,  $F_y$ , en fonction du déplacement relatif,  $D_y$ , ( $F_y$ - $D_y$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement bilinéaire anisotrope et en utilisant la formulation avec couplage.

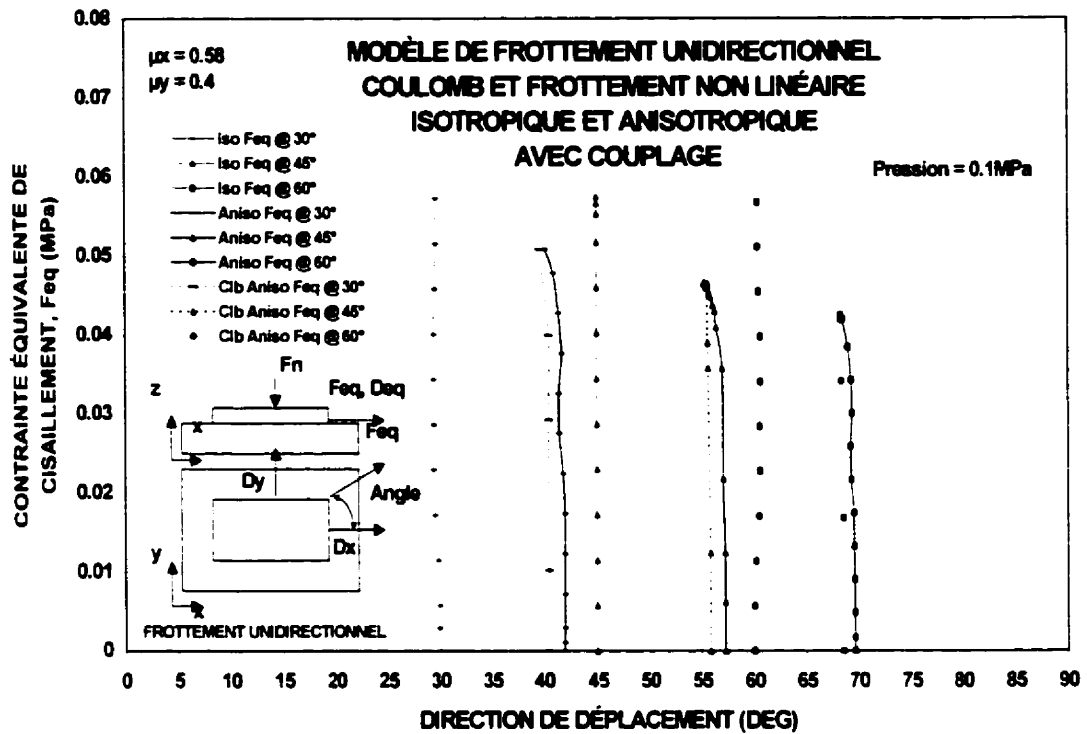


Figure 4.14 Contrainte tangentielle équivalente,  $F_{eq}$ , en fonction de la direction du déplacement, en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement anisotrope Coulomb (Cib), avec 30 microns de déplacement permis dans les deux directions, et non linéaire isotrope et anisotrope en utilisant la formulation avec couplage (courbes unidirectionnelles, figure 4.3).

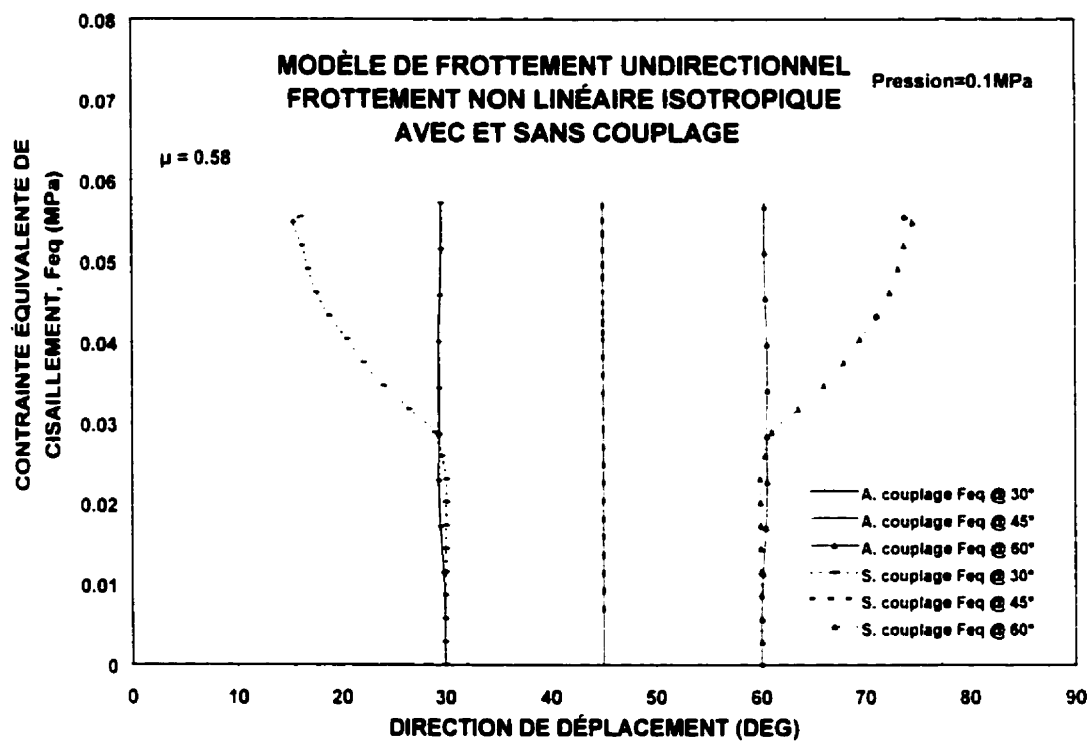


Figure 4.15 Contrainte tangentielle équivalente, Feq, en fonction de la direction du déplacement, en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique en comparant les résultats obtenus par les formulations avec (A.) et sans (S.) couplage.

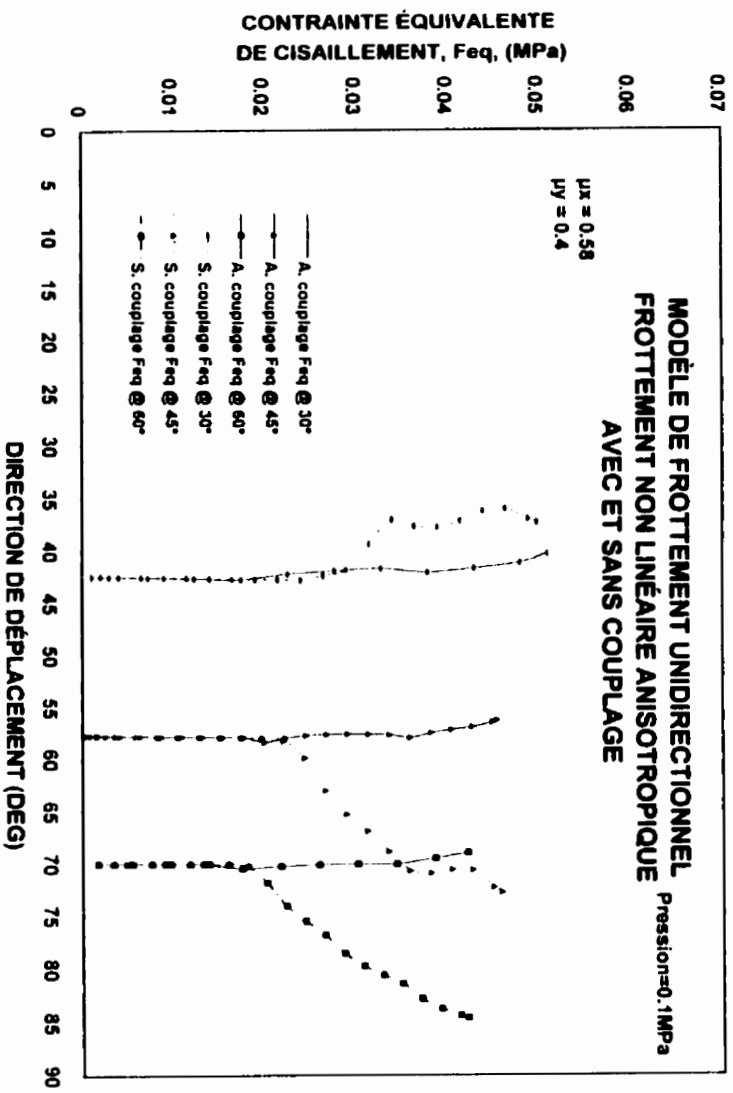


Figure 4.16 Contrainte tangentielle équivalente, Feq, en fonction de la direction du déplacement, en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique avec et sans couplage.

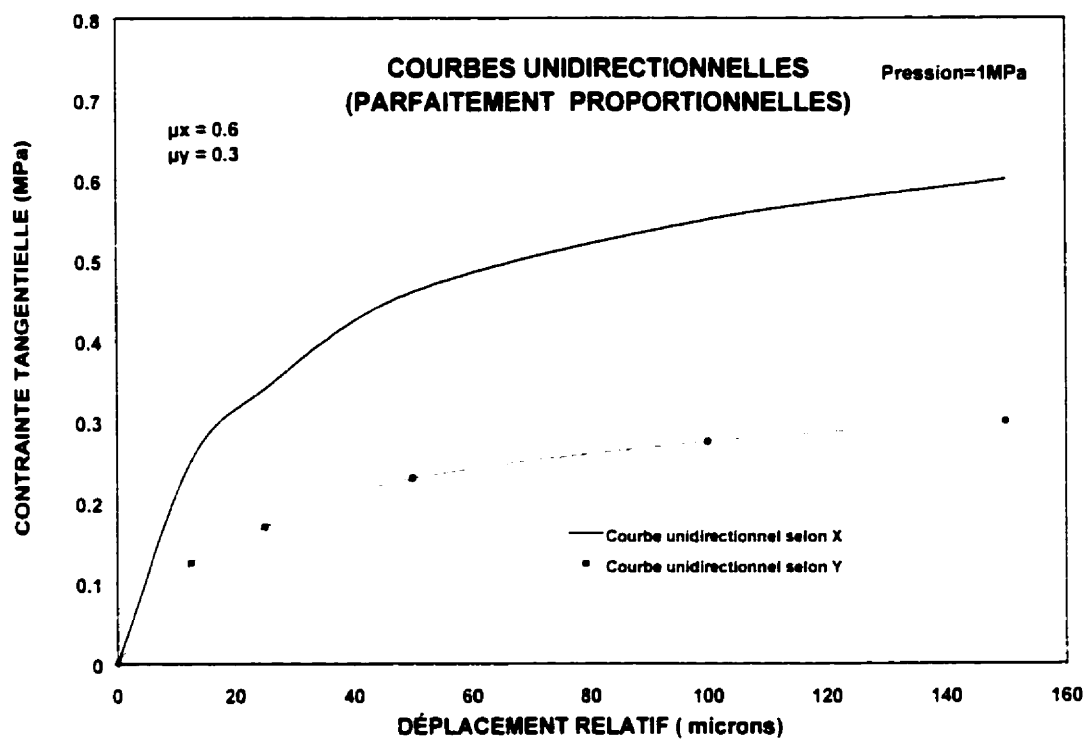


Figure 4.17 Courbes unidirectionnelles des deux directions principales,  $x$  et  $y$  parfaitement proportionnelles.

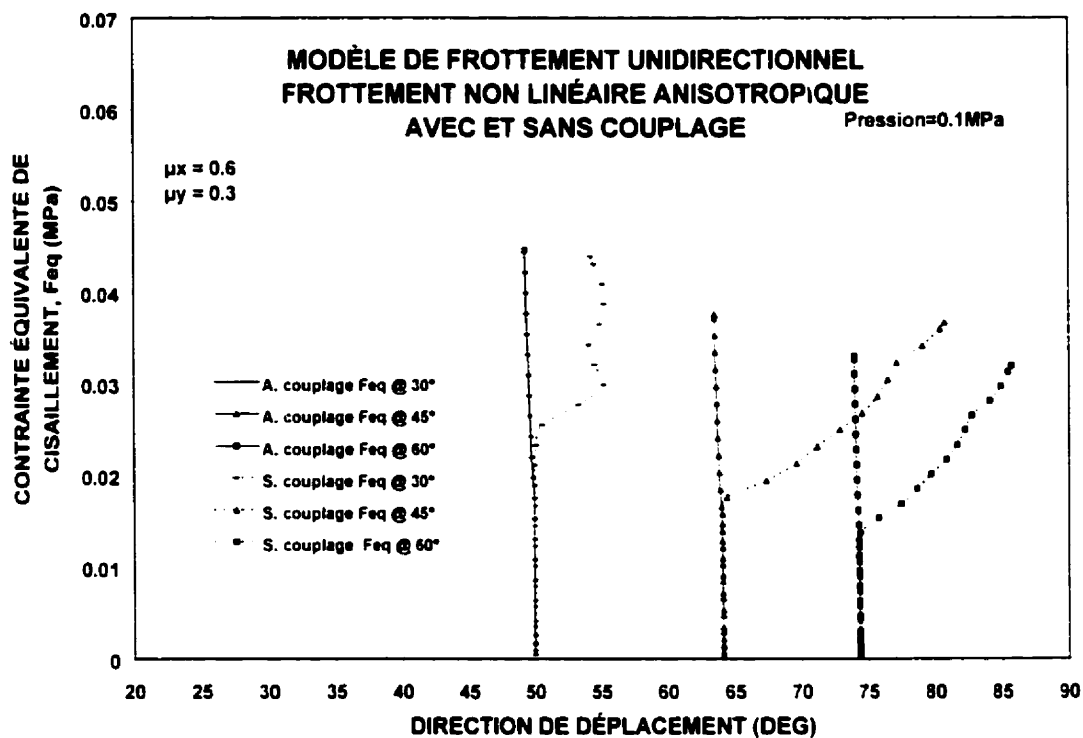


Figure 4.18 Contrainte tangentielle équivalente, Feq, en fonction de la direction du déplacement, en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique avec et sans couplage.

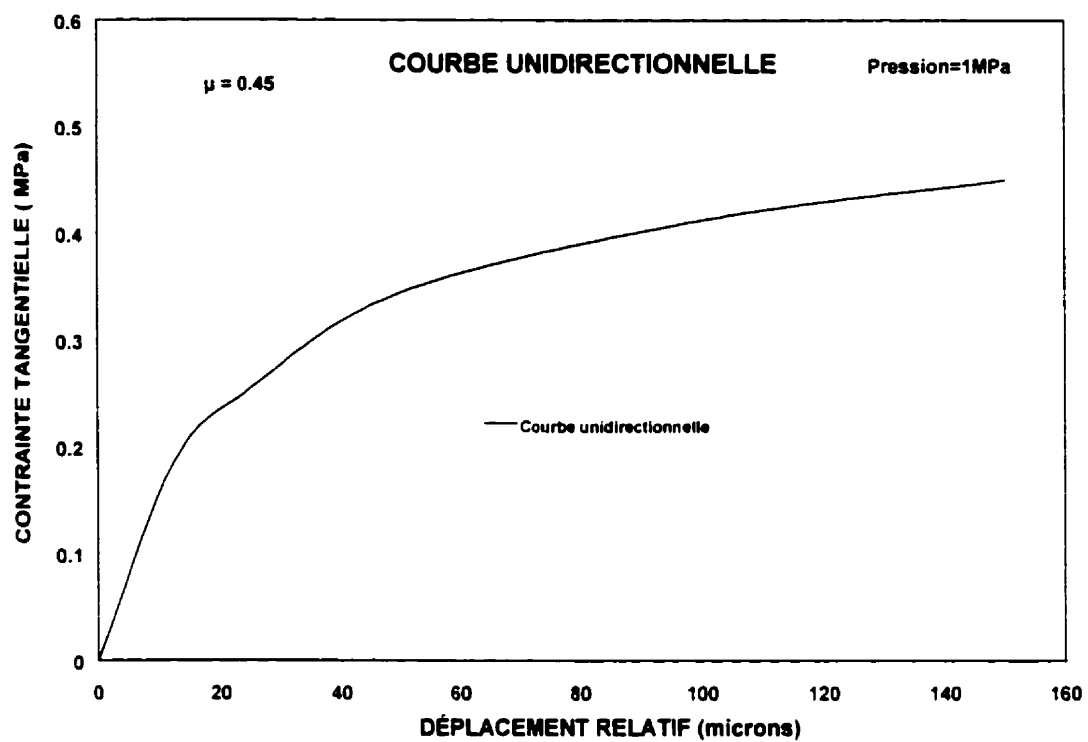


Figure 4.19 Courbes unidirectionnelles des deux directions principales de l'interface isotropique.



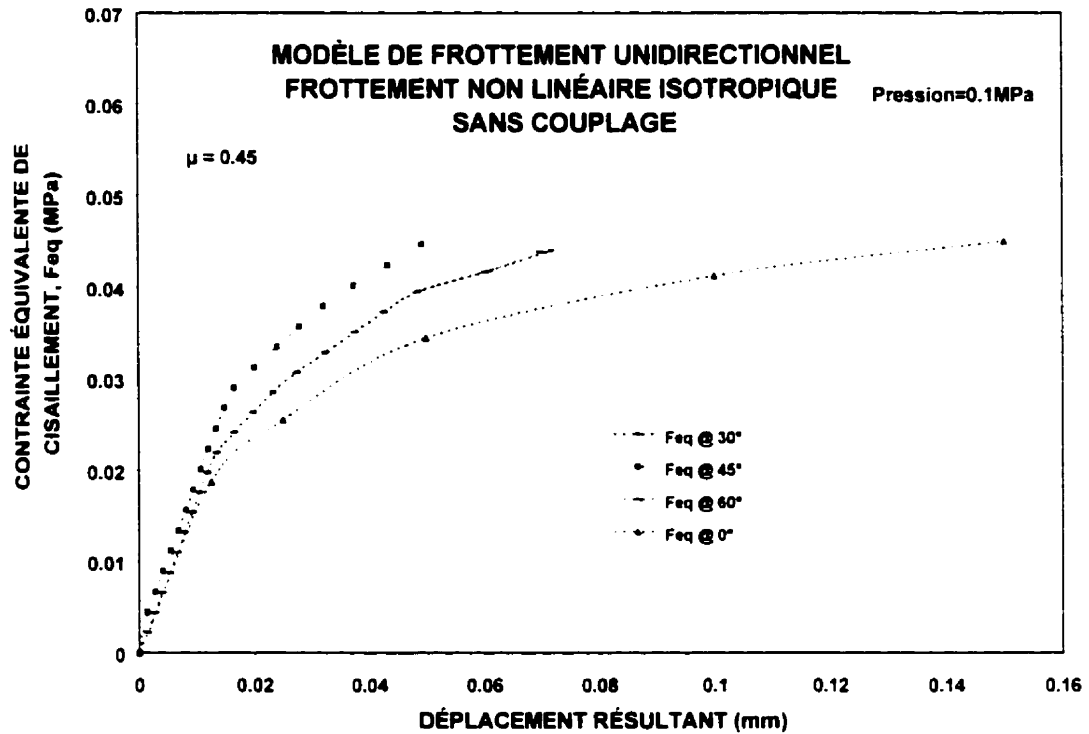


Figure 4.20 Contrainte tangentielle équivalente, Feq, en fonction du déplacement résultant relatif. Deq, en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique en utilisant la formulation sans couplage.

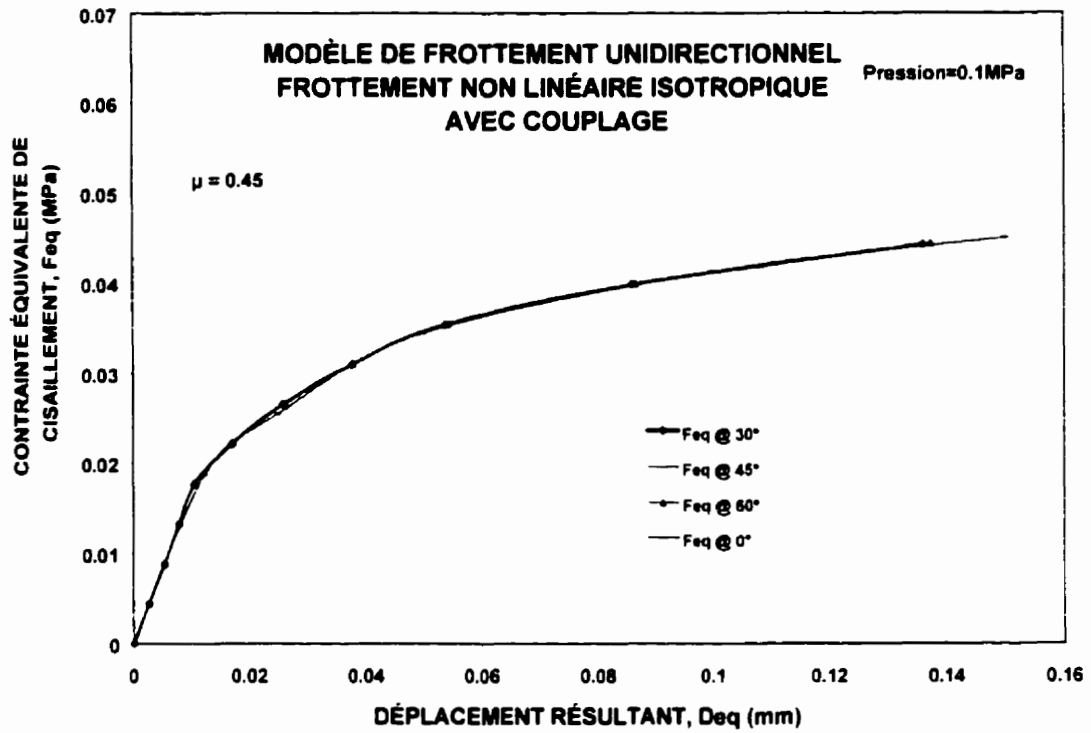


Figure 4.21 Contrainte tangentielle équivalente,  $F_{eq}$ , en fonction du déplacement résultant relatif,  $Deq$ , obtenue par élément finis en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et en utilisant la formulation avec couplage.

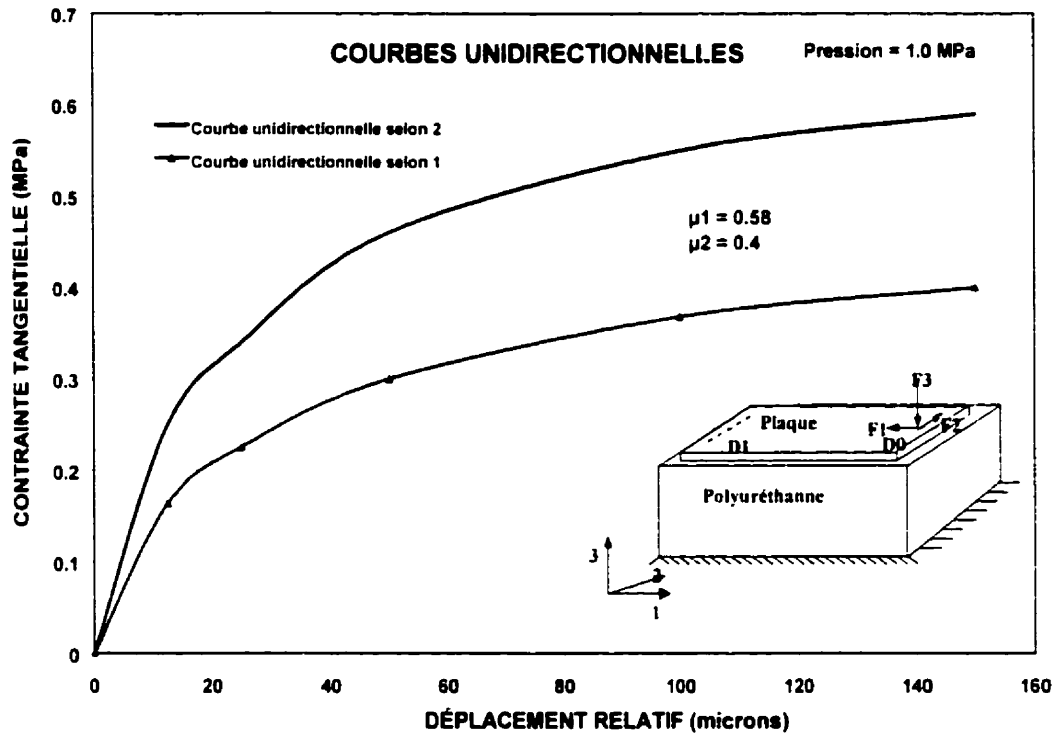


Figure 4.22 Courbes unidirectionnelles non linéaires des deux directions principales 1 et 2 pour modéliser l'interface d'une plaque en métal à surface poreuse reposant librement sur un bloc de polyuréthane.

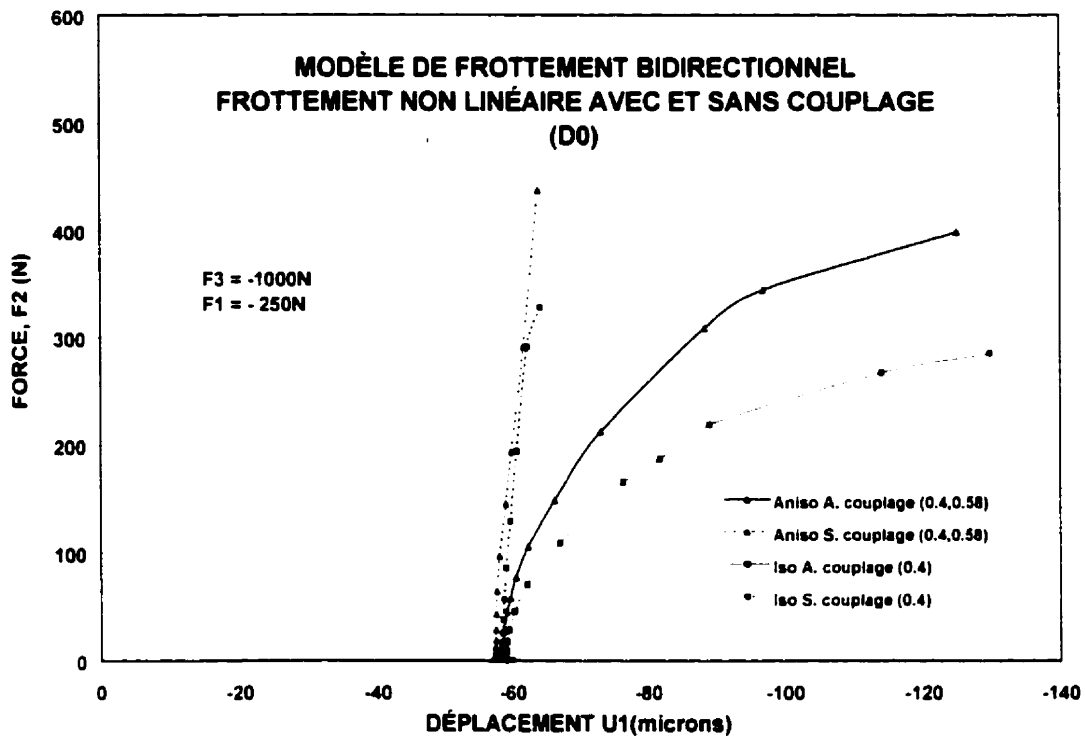


Figure 4.23 Force F2 en fonction du déplacement U1, au point D0, obtenue par éléments finis en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et anisotropique avec et sans couplage.

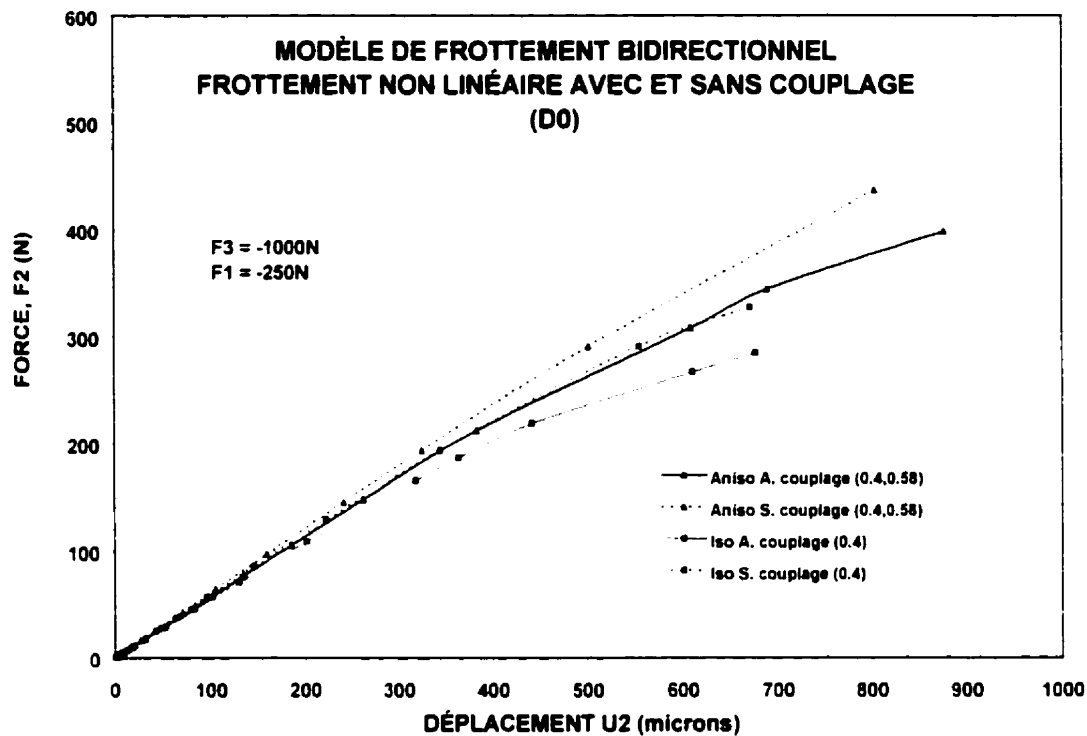


Figure 4.24 Force F2 en fonction du déplacement U2, au point D0, obtenue par éléments finis en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et anisotropique avec et sans couplage.

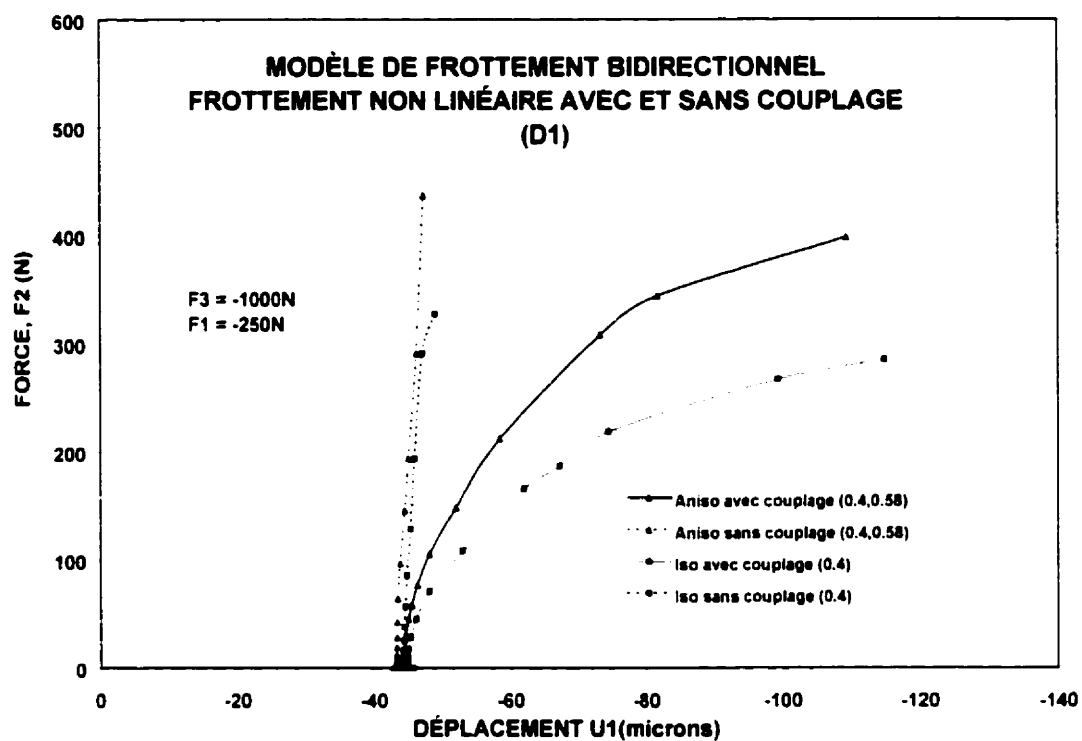


Figure 4.25 Force F2 en fonction du déplacement U1, au point D1, obtenue par éléments finis en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et anisotropique avec et sans couplage.

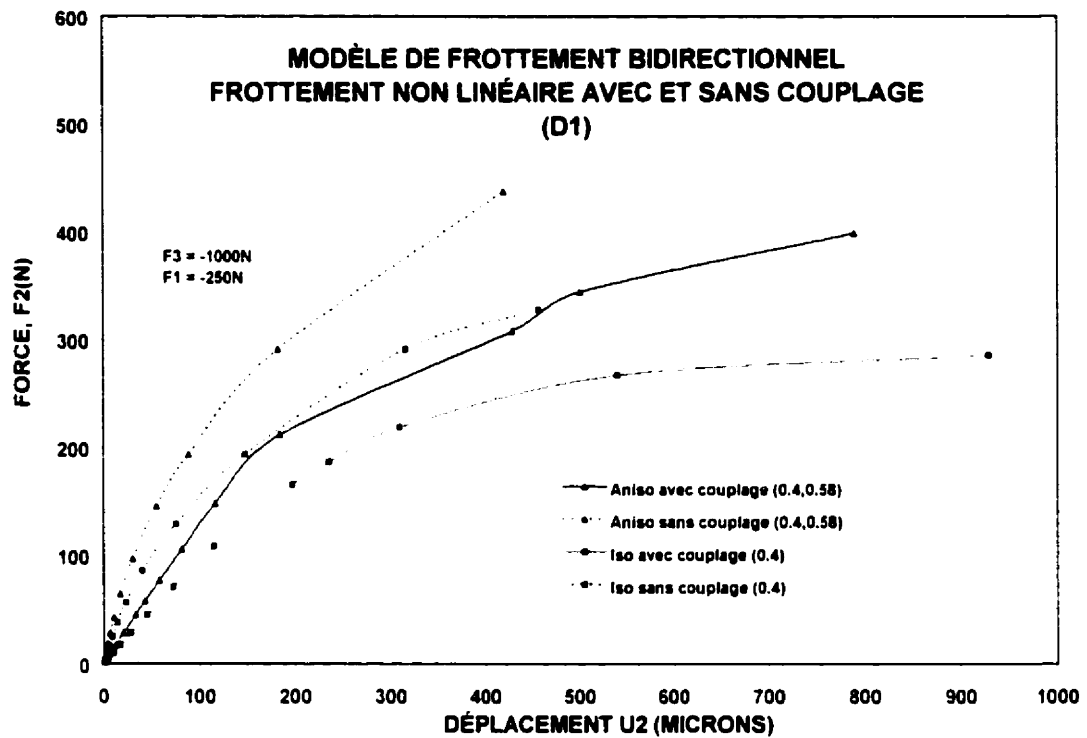


Figure 4.26 Force F2 en fonction du déplacement U2, au point D1, obtenue par éléments finis en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et anisotropique avec et sans couplage.

## CHAPITRE 5

### DISCUSSION

Dans la recherche bibliographique, on s'est rendu compte du rôle très important que le frottement joue pour étudier la réponse des corps qui sont en contact. Il a été montré par les travaux qui ont traité la question de la stabilité de la prothèse du genou humain que la connaissance de la nature du frottement ainsi que son incorporation est primordiale pour des études numériques assez rigoureuses. En général, on peut dire quand la rigidité de l'interface augmente la prothèse est plus stable, ceci a été confirmé par les études de Shirazi-Adl et al. [33] ainsi que celles de Dammak et al. [34]. Les études expérimentales de Rancourt et al. [32] ainsi que Shirazi-Adl et al. [33] ont montré l'aspect non linéaire du frottement à l'interface os/ métal à surface poreuse. Ceci a eu une grande influence sur les travaux qui ont succédé ces études. Dans cette période, la plupart des études numériques ont adopté le frottement de Coulomb pour modéliser le frottement à l'interface os/ métal à surface poreuse. Forcione et Shirazi-Adl [41] ainsi que Shirazi-Adl et Forcione [40] étaient les premiers à mettre l'accent sur l'importance d'introduire la non linéarité du frottement dans les modèles numériques. Ils ont conclu que celle-ci est un paramètre très important pour étudier la stabilité de l'implant. En effet, les résultats obtenus sont beaucoup plus satisfaisants que de ceux qui sont obtenus par le modèle de frottement de Coulomb.

Malgré que ces résultats sont satisfaisants, il a été montré par Hashemi. et al. [35] que ceci est en grande partie parce que les tests modélisés sont unidirectionnels. Cependant, leurs travaux expérimentaux montrent que lors des tests bidirectionnels, un phénomène de couplage qui apparaît lors de l'application d'un effort en présence d'une précharge dans une autre direction. En développant un modèle mathématique qui tient compte du phénomène de couplage, les résultats obtenus par les études numériques



modélisant un test de frottement bidirectionnel ont concordé remarquablement avec les résultats expérimentaux, et ont montré l'importance de prendre en considération le phénomène de couplage dans la modélisation des interfaces soumis aux charges combinées. Le fait que le couplage n'est pas présent dans le cas du frottement de Coulomb ou dans le cas de frottement linéaire, nous renseigne que la non linéarité est alors le responsable de l'apparition du couplage lors des tests bidirectionnels. Bien que tous les travaux aient étudié le cas des interfaces avec frottement non linéaire isotropique, on a vu qu'il est intéressant de donner un aspect théorique plus global au frottement non linéaire en développant les équations constitutives capables de modéliser les interfaces avec frottement non linéaire anisotropique à deux directions principales, et faire des applications numériques par la méthode des éléments finis là-dessus. Dans ce qui suit, nous allons énumérer et discuter chacun des objectifs de cette étude de recherche.

Le premier objectif consiste au développement des équations constitutives permettant de résoudre les problèmes de contact non linéaire anisotropique, avec la prise en considération de deux directions principales pour définir le comportement frictionnel de l'interface. Dans ces équations, on a tenu compte du phénomène de couplage entre la charge tangentielle et les déplacements lors de la présence d'une précharge. Ce phénomène est une conséquence de la non linéarité du frottement. Ceci a été bien observé dans les tests expérimentaux bidirectionnels sur des interfaces non linéaires isotropiques [24]. Des équations constitutives ne tenant pas compte du couplage ont été aussi développées pour des fins de comparaison. Dans ces deux cas, avec et sans couplage, on se base sur l'introduction des courbes de frottement unidirectionnelles des deux directions principales obtenues expérimentalement.

Le frottement non linéaire bidirectionnel introduit des termes non diagonaux non nuls dans la matrice de rigidité de l'interface. Ces termes sont égaux dans le cas isotropique, mais différent quand il s'agit d'un frottement anisotropique. Ces termes de couplage disparaissent lors d'un test de frottement unidirectionnel selon l'une des

directions principales ou quand les courbes de frottement introduites sont linéaires ou de type Coulomb. Dans ces deux derniers cas, on retrouve bien la formulation sans couplage. L'introduction d'un comportement frictionnel identique selon les deux directions principales nous permet de retrouver les équations constitutives du cas isotropique non linéaire avec couplage. Ceci est évident puisque les pente sécante selon  $x$  et selon  $y$  sont égales.

La proposition d'une relation limitant la contrainte maximale de glissement était un deuxième objectif. Un critère elliptique a été adopté pour définir la limite de la résistance maximale de frottement de l'interface. Les valeurs du grand et petit axes de l'ellipse correspondent aux résistances maximales de chacune des deux directions principales. En effet, quand il s'agit d'un test de frottement unidirectionnel, selon l'une des directions principales, la contrainte tangentielle maximale est bien celle de cette direction. Quand il s'agit de deux directions principales avec des coefficients de frottement égales, la limite de la contrainte tangentielle est bien celle du cas isotropique présenté par un cercle au lieu d'une ellipse.

La modélisation par la méthode des éléments finis des interfaces soumises aux chargements bidirectionnels et unidirectionnels ainsi que l'introduction de différents types de frottement étaient le dernier objectif de cette étude de recherche. Pour ceci, deux modèles par élément finis ont été développés. Des «subroutines» programmées en Fortran ont été développées afin d'introduire les relations constitutives des cas isotropique et anisotropique et afin d'introduire les courbes unidirectionnelles adoptées pour chaque direction principale.

Dans le premier modèle nous avons modélisé le test de frottement bidirectionnel et unidirectionnel d'un cube d'os reposant librement sur une plaque en métal à surface poreuse. Ces modélisations de frottement bidirectionnels avec des interfaces anisotropiques non linéaires nous renseignent que la présence d'une précharge génère un

couplage entre la charge appliquée et le déplacement dans les deux directions principales, figures 4.4 - 4.7. L'influence du couplage dans le cas anisotrope est bien différente de celle du cas isotrope. Pour un comportement frictionnel selon  $x$  identique au comportement frictionnel d'une interface isotrope, et en présence de la même précharge selon  $x$ , l'influence du couplage dépend uniquement du comportement frictionnel selon  $y$ . Contrairement au modèle de frottement avec couplage, et en présence d'une précharge, aucun couplage n'est présent dans les résultats obtenus en utilisant la formulation sans couplage, figures 4.8 - 4.9. La réponse frictionnelle selon une direction suit la courbe de frottement de cette même direction. La variation de la valeur de la précharge entraîne uniquement la variation de la valeur maximale de la contrainte de cisaillement.

Exceptant les tests de frottement unidirectionnel selon l'une des directions principales, le déplacement est plus important dans les résultats obtenus par la formulation avec couplage qu'avec celle qui ne tient pas compte du couplage, pour une même charge appliquée. Ceci peut être expliqué par le fait que la pente de la courbe de frottement diminue en fonction du déplacement tangentiel. Dans le cas où les courbes unidirectionnelles seraient linéaires ou de type Coulomb l'effet du couplage est nul. Ceci s'explique par le fait que la pente tangente et la pente sécante sont égaux dans ce cas, ce qui annule les termes non diagonaux de la matrice de rigidité de l'interface.

En ce qui concerne les tests de frottement unidirectionnel, on a relevé la valeur de la direction résultante du déplacement en fonction de la contrainte tangentielle équivalente appliquée. Comparons les cas isotropes et anisotropes avec couplage, on remarque que contrairement au frottement isotrope, le comportement frictionnel anisotrope engendre un déplacement dans une direction autre que la direction de l'effort appliqué. Généralement, la courbe résistance au frottement équivalente – direction résultante de déplacement est une courbe non linéaire, figure A.13. L'introduction de courbes unidirectionnelles proportionnelles selon les directions

principales engendre une direction de déplacement constant mais toujours différent de celle de l'effort appliqué, figure 4.18. Cette remarque nous montre que le rapport entre les pentes sécantes et les pentes tangentes des deux courbes unidirectionnelles pour une position donnée du déplacement équivalent sont les responsables de la détermination de la direction du déplacement.

La figure 4.15 illustre un cas très clair montrant la puissance de la formulation avec couplage. En effet, les résultats trouvés par la formulation avec couplage montrent que la direction du déplacement, pour une interface non linéaire isotropique, est constante et suit la direction de l'effort appliqué, ce qui n'est pas le cas pour les résultats obtenus par la formulation sans couplage. Étant donné que dans le cas isotropique toutes les directions à l'interface sont principales, et la rigidité tangentielle est constante selon toutes les directions de l'interface, donc on ne voit pas de raison pour que la direction de déplacement varie au cours de l'essai de frottement unidirectionnel, ceci est une confirmation des résultats obtenus par la formulation avec couplage, et une démonstration de la faiblesse de la formulation sans couplage. Les figures 4.20 et 4.21 montrent d'une autre façon ce que nous venons de conclure, où la courbe unidirectionnelle est retrouvée pour n'importe quelle direction quand l'effort est appliqué dans le cas avec couplage contrairement au cas sans couplage. Pareil pour le cas anisotropique non linéaire, figure 4.16, une différence entre les résultats obtenus par les formulations avec et sans couplage est aussi observée. La concordance entre les résultats de la formulation avec couplage et sans couplage est évidente s'il s'agit de courbes de frottement linéaire ou de type Coulomb selon les directions principales. La variation de la direction de l'effort appliqué engendre une variation de la charge limite de glissement. En effet, ceci est une conséquence de l'utilisation d'un critère elliptique pour donner une limite à la contrainte de cisaillement.

Le deuxième modèle traite le cas d'un frottement bidirectionnel à l'interface d'une plaque métallique reposant librement sur un bloc de polyuréthane. Comme il a été

décrit. le comportement frictionnel des surfaces non linéaires isotropiques, correspond à celui de la direction principale 1 des interfaces anisotropiques. Les résultats obtenus ont montré que peu importe le modèle de frottement utilisé, avec couplage ou sans couplage, et peu importe le type de frottement utilisé, isotropique ou anisotropique, le déplacement est pratiquement le même après le premier et deuxième chargement, soit selon 3 ou 1. Ces résultats s'expliquent comme suit :

- 1- durant l'application de l'effort normal, les résultats ne sont pas affectés d'une façon appréciable par le modèle et le type de frottement utilisés.
- 2- lors de l'application des précharges, le comportement est alors unidirectionnel selon la direction principale 1, donc il n'y a pas de phénomène de couplage qui intervient. Ceci montre la concordance entre les résultats des formulations avec et sans couplage. La réponse frictionnelle suit donc la courbe de frottement selon 1 qui correspond à la courbe unidirectionnelle du cas isotropique. Ceci explique la concordance des résultats entre les cas isotropique et anisotropique.

Au cours du deuxième chargement, et pour l'étude effectuée, le cas anisotropique a montré plus de résistance au frottement que le frottement isotropique. Ceci s'explique par le fait que la rigidité de l'interface selon 2 est plus importante que celle de 1.

## CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

L'importance que porte la question de la réponse frictionnelle des corps en contact ont amené plusieurs chercheurs à pousser leur compréhension de ce phénomène. Les études expérimentales bidirectionnelles [35] effectuées sur des corps avec frottement non linéaires ont montré la présence d'un couplage entre les efforts appliqués et les déplacements relatifs. Ces observations ont été absentes lors des essais expérimentaux unidirectionnels, ou bien sur des corps avec frottement de Coulomb à l'interface. Le développement d'une formulation mathématique pour résoudre les problèmes de frottement non linéaire isotropique a donné des résultats bien satisfaisants, en comparant avec les résultats expérimentaux, par rapport à la formulation qui ne tient pas compte du couplage. Étendre cette aptitude à résoudre les problèmes non linéaires en ajoutant l'aspect anisotropique a été l'objectif de cette étude. Dans le développement des équations constitutives on a tenu compte du couplage qui est un résultat de la non linéarité du frottement et de deux directions principales pour exprimer le comportement frictionnelle de l'interface en fonction de celui de ces deux directions principales. Ensuite la proposition d'une relation donnant une limite à la contrainte maximale a été faite. Enfin, on a effectué une étude par la méthode des éléments finis en introduisant les relations développées afin de les valider et comparer le cas anisotropique avec le cas isotropique comme aussi les formulations avec et sans couplage.

Une récapitulation de cette étude nous permet de conclure ce qui suit :

- 1- la non linéarité fait apparaître un phénomène de couplage en présence de charges combinées.
- 2- le couplage disparaît quand il s'agit de frottement unidirectionnel ou quand il s'agit d'un frottement linéaire ou de type Coulomb selon les deux directions principales.
- 3- le couplage dépend de la rigidité des deux directions principales, et de la valeur de la précharge, ce qui fait que son influence est différente dans le cas anisotropique que du cas isotropique.

- 4- la formulation sans couplage donne une idée sur l'influence du fait de tenir compte du couplage. Celle-ci est valable pour décrire des interfaces avec frottement de type linéaire et Coulomb ou lors des tests unidirectionnels mais pas pour des tests de frottement bidirectionnel avec interfaces non linéaires.
- 5- lors des tests unidirectionnels, le rapport entre les pentes sécantes et les pentes tangentes de chaque direction principale pour une position donnée du déplacement équivalent est le responsable à la détermination de la direction de déplacement entre les deux corps en contact. Lorsque ces rapports sont égaux à 1 à une position donnée, la direction principale suit la direction de l'effort appliqué. Pour le cas anisotropique, généralement ces rapports sont différents de 1 donc la direction du déplacement ne suit pas la direction de l'effort appliqué. La constance de ces rapports entraîne une direction de déplacement constante.
- 6- lors de ces tests unidirectionnels aussi avec frottement anisotropique la valeur de la contrainte maximale varie en fonction de la direction de l'effort appliqué à cause de l'adoption d'un critère elliptique. Cette valeur est constante dans le cas isotropique puisque ce critère elliptique devient circulaire.

Finalement, nous aimerions bien finir en soulignant la question de la validation expérimentale. Celle du modèle bidirectionnel dans le cas de frottement isotropique non linéaire a été effectuée par Hashemi et al. [35]. Il reste à faire alors les tests bidirectionnels dans le cas d'une interface avec frottement anisotropique non linéaires. Ceci peut être le sujet d'une étude de recherche expérimentale dans l'avenir pour valider les résultats numériques trouvés. Différents autres modèles numériques peuvent être développés en introduisant le modèles de frottement non linéaire anisotropique pour voir l'influence de celui-ci sur la réponse du système notamment celui avec chargement cyclique. Si l'anisotropie du frottement peut améliorer la conception et peut satisfaire certaines exigences de la réponse des systèmes en contact est un autre créneau pour d'autres recherches. En effet, la faisabilité et les moyens pour avoir des interfaces

anisotropiques ou anisotropiques non linéaires artificiellement tout en jouant sur la composition des pièces et leur façon d'usinage est alors une autre question qui se pose.



## RÉFÉRENCES

- 1 M.DAMAK. " Études expérimentale et numérique de prothèses non cimentées du genou humain". Thèse de doctorat. École Polytechnique de Montréal, p. 1995
- 2 F. LANGLAIS et J.P. DELAGOUTTE. " Conception des prothèses articulaires : Biomécanique et Biomatériaux ". Cahier d'enseignement de la SOFCOT, 197 p. (1993).
- 3 D.C. MEARS. " Metals in medicine and surgery " Int. Metals Review, 128, 119-154, June (1977).
- 4 HOMSY, CHARLES A. et al., "Dynamic stabilization of implanted prostheses" Journal of bone and joint surgery, Vol. 52-A, pp. 604 (1970).
- 5 BROOKER, ANDREW F., COLLIER, J.R., " Evidence of bone ingrowth into a porous-coated prosthesis", Journal of bone and joint surgery, Vol. 66-A, N°4, pp. 619-621 (1984).
- 6 MANIATOPOULOS, C. et al. " Threaded versus porous-surfaced designs for implant stabilization in bone-endodontic implant model", J. Biomed. Mater. Res., Vol. 20, 1309-1333, (1986).
- 7 CAMERON, H.U. et al. " The rate of bone ingrowth into porous metal", J. Biomed. Mater. Res., Vol. 10, 295-302, (1976).
- 8 BOBYN, J.D., et ENGH C.A . "Human histology of the bone-porous metal implant interface" Orthopaedics, Vol.7, N°9, 1410-1421, (1984).

- 9 S.F HULBERT.. et al., " Effect of stress on tissue ingrowth into porous aluminium oxide", J. Biomed. Mater. Res., Vol 5,part I . 85-97. (1974).
- 10 VOLZ, G. ROBER et al. " The mechanical stability of various noncemented tibial compenents" , Clin. Orthop. Rel. Res., 226. 38-42 (1988).
- 11 P.DUCHEYNE et al. "Influence of a functional dynamic loading on bone ingrowth into suface pores of orthopaedic implants". J. Biomed. Mater. Res., Vol 11, 811-838. (1977).
- 12 R.Y HORI, J.L LEWIS, " Mechanical properties of the fibrous tissue found at the bone-cement interface following total joint replacement".. J. Biomed. Mater. Res., Vol 16, 911-927, (1982).
- 13 D.P. RIVERO et al. " Effect of pulsing electromagnetic fields on bone ingroth in a porous material". Proceedings of Orthopaedic Research Society, p 492 (1986).
- 14 E.J CHEAL et al. " Trabecular bone remodeling around smooth and porous implants" . Proceedings of Orthopaedic Research Society, p 434 (1987).
- 15 E.Y. CHAO " Extracortical bone bridging : a new concept for implant fixation". Proceedings of Orthopaedic Research Society, p. 435 (1987).
- 16 M.T MANLEY " Direct observation of micromotion at the implant-bone interface with cemented and non-cemented tibial components". Proceedings of Orthopaedic Research Society, p. 436 (1987).

- 17 T.M TURNER et al. " Cortical remodeling and bone ingrowth in proximal and full-length porous-coated canine femoral stems". Proceedings of Orthopaedic Research Society, p. 309 (1988).
- 18 HUNGERFORD, DAVID S., KRACKOW, K. A.-. " Total joint arthroplasty of the knee". Clin. Orthop. Rel. Res., 192, 23-33 (1985).
- 19 WAUGH et R. THEODORE, " Total knee arthroplasty in 1984". Clin. Orthop. Rel. Res., 192, 40-45 (1985).
- 20 D. O. O'CONNOR et al. " Bone-implant micromotion in titanium ingrowth hip stems". Meeting of society for biomaterials, p 97, (1987).
- 21 D.R. SUMNER, A.BERZINS et T.M. TURNER, " Stability of the tibial tray in cementless TKA : Initial versus late post-operative motion". Transactions of the orthop. Res. Soc., 38<sup>th</sup> annual Meeting, 268 (1992).
- 22 H.U CAMERON, R.M. PILLIAR et I. MACNAB, " The effect of movement on the bonding of porous metal to bone". J. Biomed. Mater. Res., 7, 301-311 (1973)
- 23 R.G. VOLZ J.K. NISBET, R.W. LEE et M.G. MCMURTRY, " The mechanical stability of various noncemented tibial components" Clin. Orthop. Rel. Res., 226, 38-42 (1988).
- 24 R.M. PILLIAR, J.M. LEE et C. MANIATOPOULOS, " Observations on the effect of movement on bone ingrowth into porous-surfaced implants", Clin. Orthop. Rel. Res., 208, 108-113 (1986).

- 25 BOBYN, J. D. et al.- " The optimum pore size for the fixation of porous-surfaced metal implants by the ingrowth of bone", Clin. Orthop. Rel. Res., 150, 263-270 (1980).
- 26 M.H. POPE et J.O OUTWATER, " The fracture characteristics of bone substance" J. Biomechanics, Vol. 5, pp. 457-465. (1972).
- 27 N.J. GIORI, G.S. BEAUPRE et D.R. CARTER, " The influence of fixation peg design on the shear stability of prosthetic implants", J. Orthop. Res., 8, 892-898 (1990)
- 28 A.D. KAISER et L.A. WHITESIDE, " The effect of screws and pegs on the initial fixation stability of an uncemented unicondylar knee replacement". Clin. Orthop. Rel. Res., 259, 169-178 (1990).
- 29 H. MIURA, L.A WHITESIDE, J.C. EASLEY et D.D. AMODOR. "Effects of screws and a sleeve on initial fixation in uncemented total knee tibial components". Clin. Orthop. Rel. Res., 259, 160-168 (1990)
- 30 A. SHIRAZI-ADL, M.DAMMAK et D. J. ZUKOR " Fixation pull-out response measurement of bone screws and porous-surfaced posts". J. Biomechanics, Vol. 27, N° 10, 1249-1258 (1994).
- 31 A. SHIRAZI-ADL, O. PATENAUDE, M. DAMMAK, D. ZUKOR. " Experimental and finite element comparison of various fixation designs in combined loads". sous presse ASME J. Biomechanical Engineering (2001).

- 32 D. RANCOURT, A. SHIRAZI-ADL, G. PAIEMENT, " Friction properties of the interface between porous-surfaced metals and tibial cancellous bone". J. Biomed. Mater. Res., 24, 1503-1519 (1990).
- 33 A. SHIRAZI-ADL, M.DAMMAK et G. PAIEMENT. " Experimental determination of friction characteristics at the trabecular bone/ porous-coated metal interface in cementless implants", J. Biomechanics, Vol. 27, 167-175 (1993).
- 34 M. DAMMAK, A. SHIRAZI-ADL et M. SCHWARTZ, JR, et L. GUSTAVSON. " Friction properties at the bone-metal interface : Comparaison of four different porous metal surfaces", J. Biomechanics, Vol. 35, 329-336 (1997).
- 35 A. HASHEMI, A. SHIRAZI-ADL, et M. DAMMAK, " Bidirectional friction study of cancellous bone-porous coated metal interface", J. Biomed. Mater. Res., Vol 33, 257-267 (1996).
- 36 R.L RAKOMANATA, P.F. LEYVRAZ, J.H CURNIER, HEEGAARD et RUBIN. " A finite element model for evaluation of tibial prosthesis-bone interface in total knee replacement". J. Biomech., 25, 1413-1424 (1992)
- 37 J.M. DAWSON et D.L. BARTEL, " Consequences of an interfaces fit on the fixation of porous-coated tibial components in total knee replacement". J. Bone Joint surg., 74, 233-238 (1992).
- 38 P.J RUBIN, R.L. RAKOTOMANANA, P.F. LEYVRAZ, P.K. ZYSSET, A. CURNIER et J.H. HEEGAARD, " Friction interface micromotions and anisotropic stress distribution in a femoral total hip componenet", J. Biomechanics, Vol. 26, N°. 6, 725-739 (1993).

- 39 M. TISSAKHT, A.M. AHMED et G.MULAS. " Experimental validation of finite element method for the prediction of bone-prosthesis interface relative displacement", Trans. Of Orthop. Res. Soc., 36<sup>th</sup> Annual Meeting (1990).
- 40 A. SHIRAZI-ADL et A. FORCIONE, " Finite element stress analysis of a push-out test-part II: Free interface with nonlinear friction properties", J. Biomech. Eng., 114, 155-161 (1992).
- 41 A. FORCIONE et A. SHIRAZI-ADL. " Biomechanical analysis of a porous surfaced knee implant : A finite element contact problem with nonlinear friction". Mechanical Engineering Forum, Vol 2. Canadian Society of Mechanical Engineers, Toronto, pp. 19-24 (1990).
- 42 M. DAMMAK, A. SHIRAZI-ADL et D. J. ZUKOR. " Analysis of cementless implants using interafec nonlinear friction – Experimental and finite element studies", J. Biomechanics, Vol. 30, N°2, pp. 121-129 (1997)
- 43 A. HASHEMI et SHIRAZI-ADL. " Finite element analysis of tibial implants – Effect of fixation design and friction model", Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, Vol. 3, pp. 183-201 (2000).
- 44 P.E DIACENKO. " An influence of machining mark direction on the friction force" Trenie Iznos Mash. en russe 2, 130-134, (1946).
- 45 E. RABINOWICZ. " Direction of the friction forces. Nature 179, 1073 (1957).
- 46 E.F SHARPIN, " Some principles of the anisotropic friction of slip", Trudy Charkovskogo Politech, en russe 9, 29-39 (1957).

- 47 M. HALAUNBRENNER, "Direction effects in friction", Wear 3, 421-425 (1960).
- 48 R. ZIELINSKI, ' An influence of surface structure orientation on a durability of moving joints" Thèse de doctorat, Warsaw Technical University, en polonais, (1964).
- 49 D.TABOR et D.E. WILLIAMS, " The effect of orientation on the friction of polytetrafluoroethylene", Wear 4, 391-400 (1961).
- 50 A. ZMITROWICZ, " Mathematical descriptions of anisotropic friction", Int. J. Solids Structures, Vol.25, N° 8, pp. 837-862, (1989).
- 51 J.C ROBERTS, " A graphical representation of tribological properties in polymer-graphite / epoxy sliding", ASLE Trans. 27, 313 –320 (1984).
- 52 E. MINFORD, et K. PREWO, " Friction and wear of graphite-fiber reinforced glass matrix composites", Wear 102, 253-264 (1984).
- 53 C.L SUNG.M.K BYUNG, M.KWAK, O.KWAN KWON, " Analysis of incipient sliding contact by three-dimensional linear complementarity problem formulation", Computer and Structures, Vol. 53, pp. 695-708, (1994).
- 54 H. M. RAMADAN, S.A. MOURAD, A.A. RASHED et H. BODE, " Finite element modeling and experimental testing of single shear bolted joints, Civil-Comp Press, p. 117-124, (1998).

- 55 R. BUCZKOWSKI, M. KLEIBER. " Elasto-plastic interface model for 3D-frictional orthotropic contact problems", Int. J. Num. meth. Eng., Vol. 40, pp. 599-619, (1997).
- 56 A. ZMITROWICZ, " An equation of anisotropic with sliding path curvature effects". Int. J. Solids Structures, Vol.36, pp. 2825-2848 (1999).
- 57 ABAQUS THEORY MANUAL, Version 5.7, p 5.2.3-6



**ANNEXES**

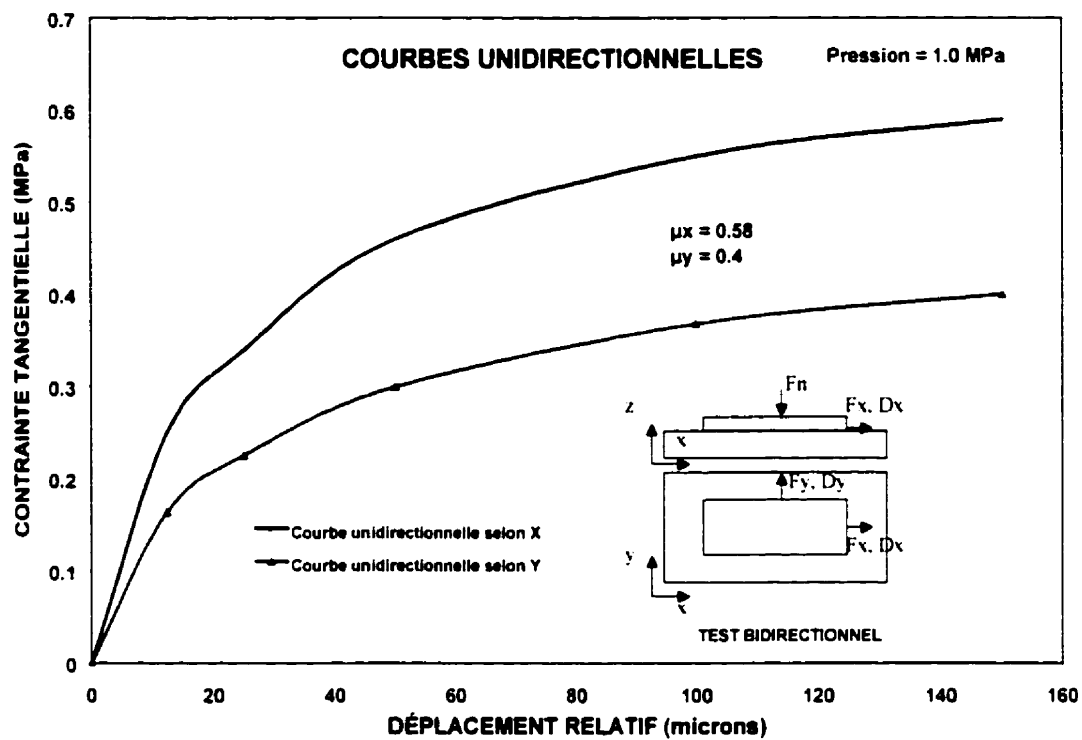


Figure A.1 Courbes unidirectionnelles des deux directions principales  $x$  et  $y$ .

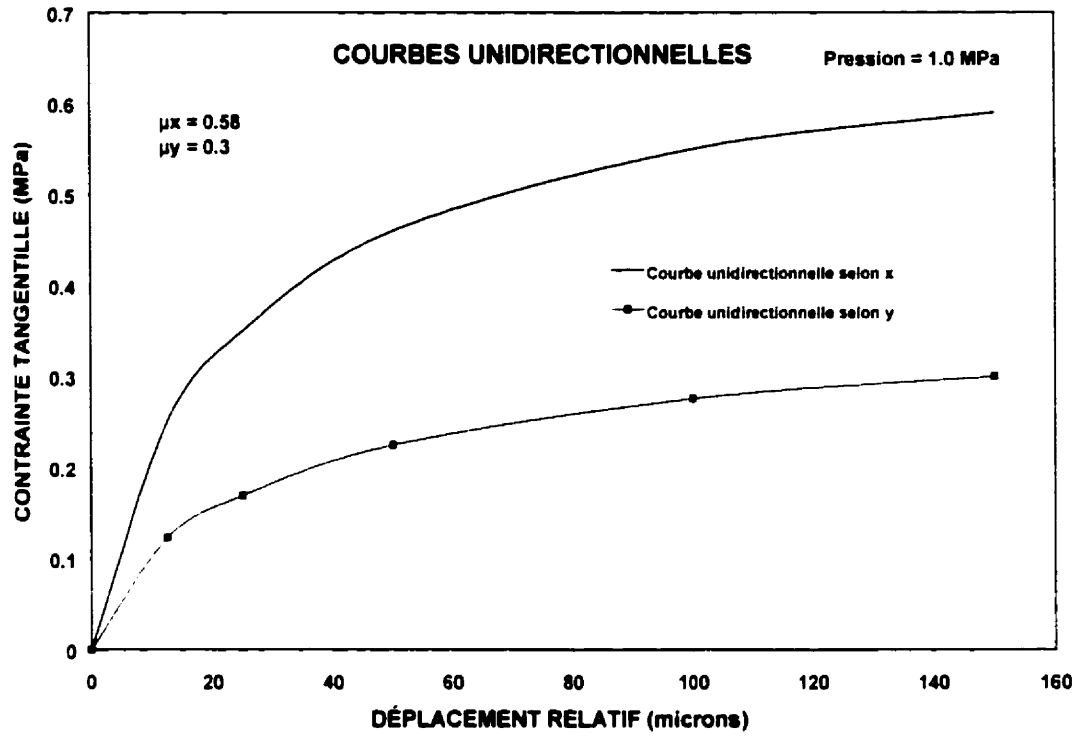


Figure A.2 Courbes unidirectionnelles des deux directions principales x et y.

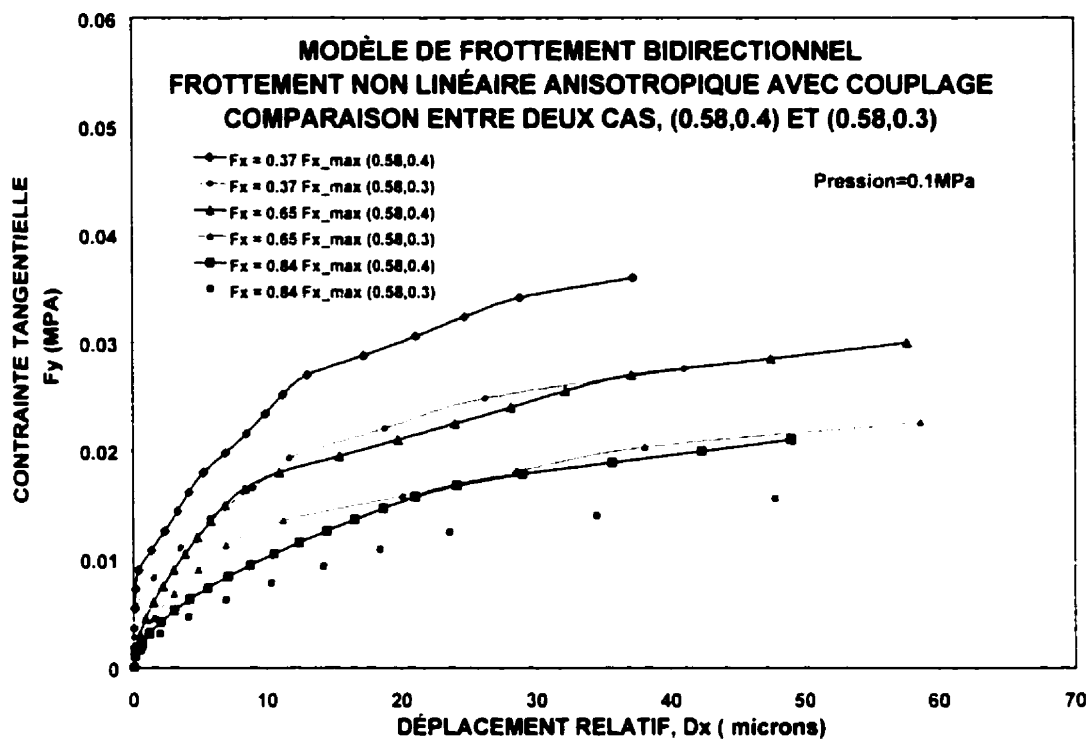


Figure A.3 Contrainte tangentielle,  $F_y$ , en fonction du déplacement relatif,  $D_x$ , ( $F_y$ - $D_x$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique et en utilisant la formulation avec couplage.

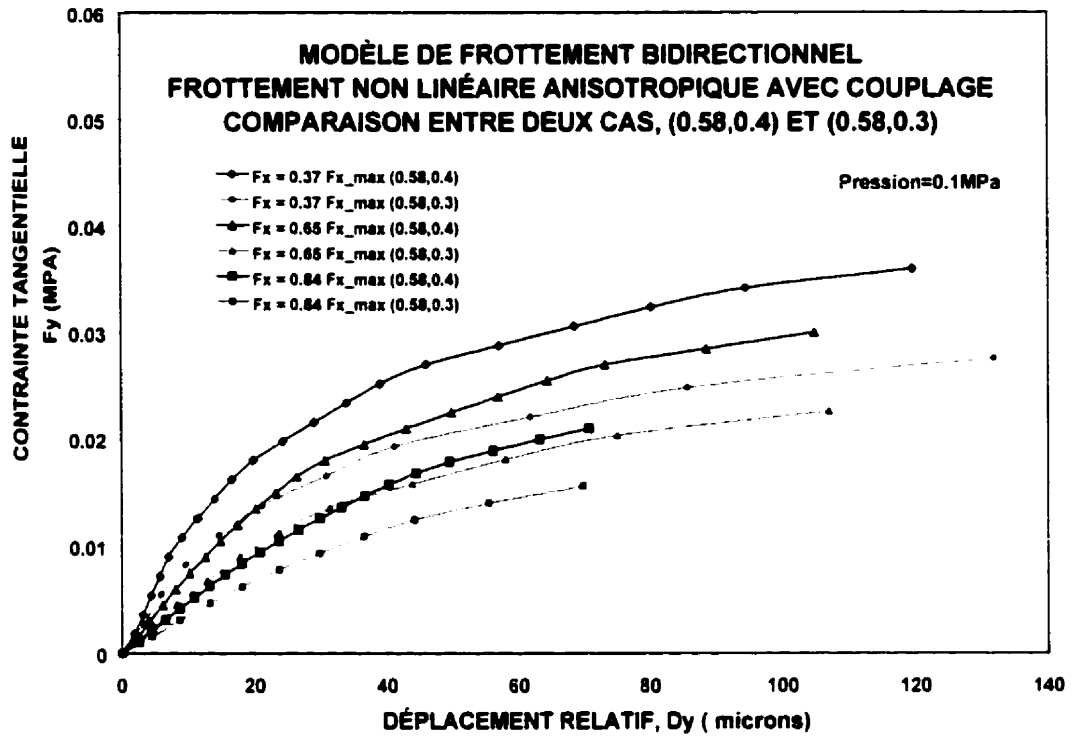


Figure A.4 Contrainte tangentielle,  $F_y$ , en fonction du déplacement relatif,  $D_y$ . ( $F_y$ - $D_y$ ) en employant le modèle de frottement bidirectionnel avec frottement non linéaire anisotrope et en utilisant la formulation avec couplage.

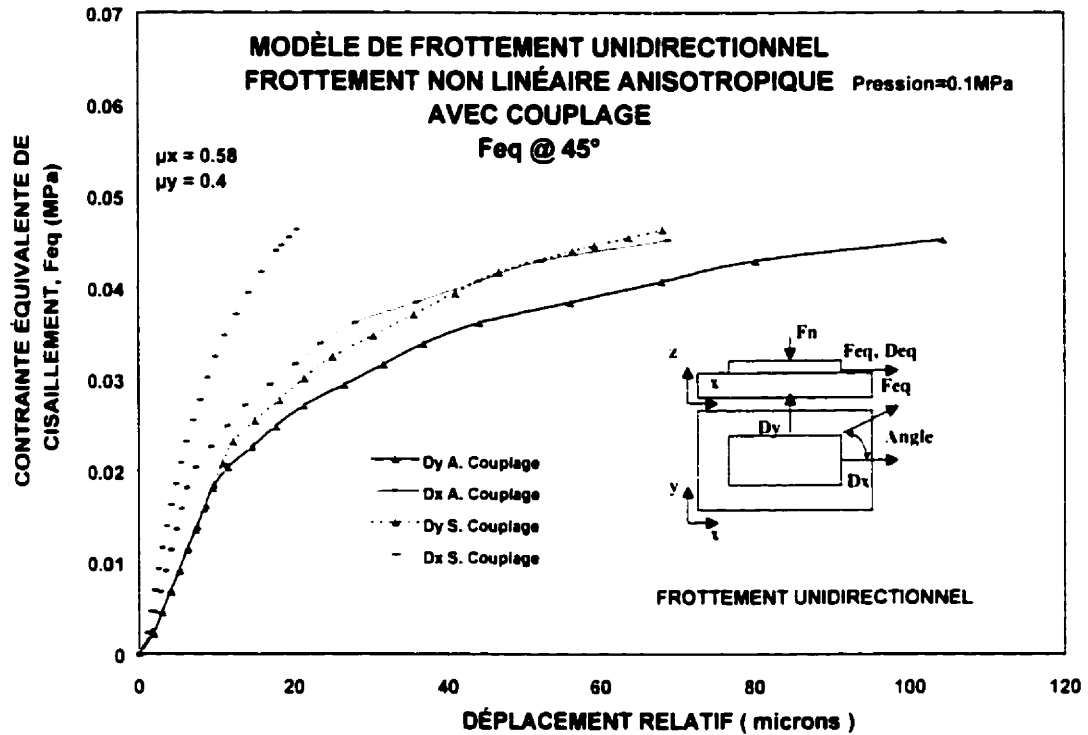


Figure A.5 Contrainte tangentielle équivalente,  $F_{eq}$  appliqué à  $45^\circ$  par rapport à  $x$ , en fonction des déplacements relatifs  $D_x$  et  $D_y$ , en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique avec et sans couplage.

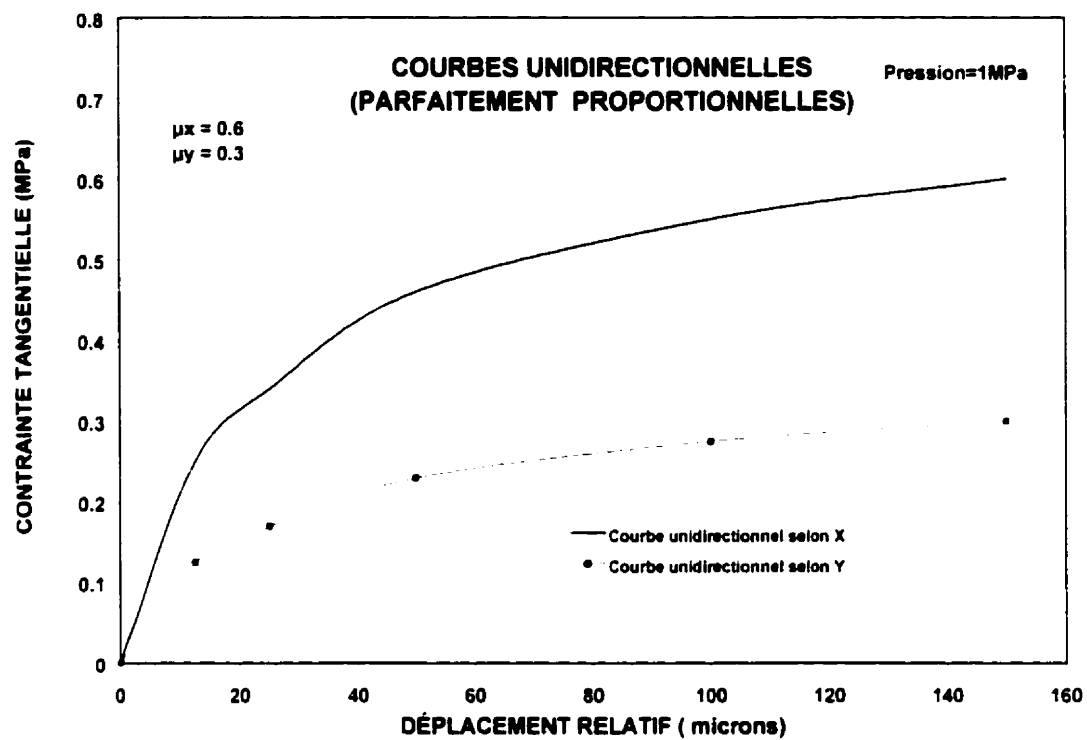


Figure A.6 Courbes unidirectionnelles des deux directions principales,  $x$  et  $y$ .

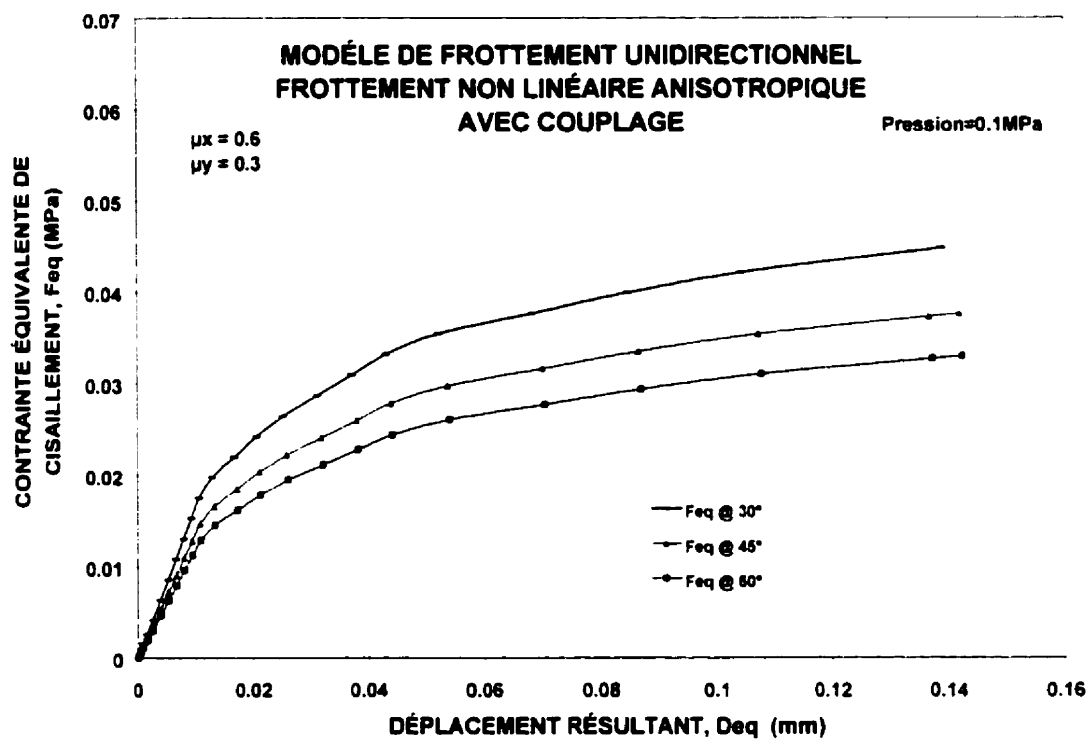


Figure A.7 Contrainte tangentielle équivalente, Feq, en fonction du déplacement résultant relatif, Deq, en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique en utilisant la formulation avec couplage.



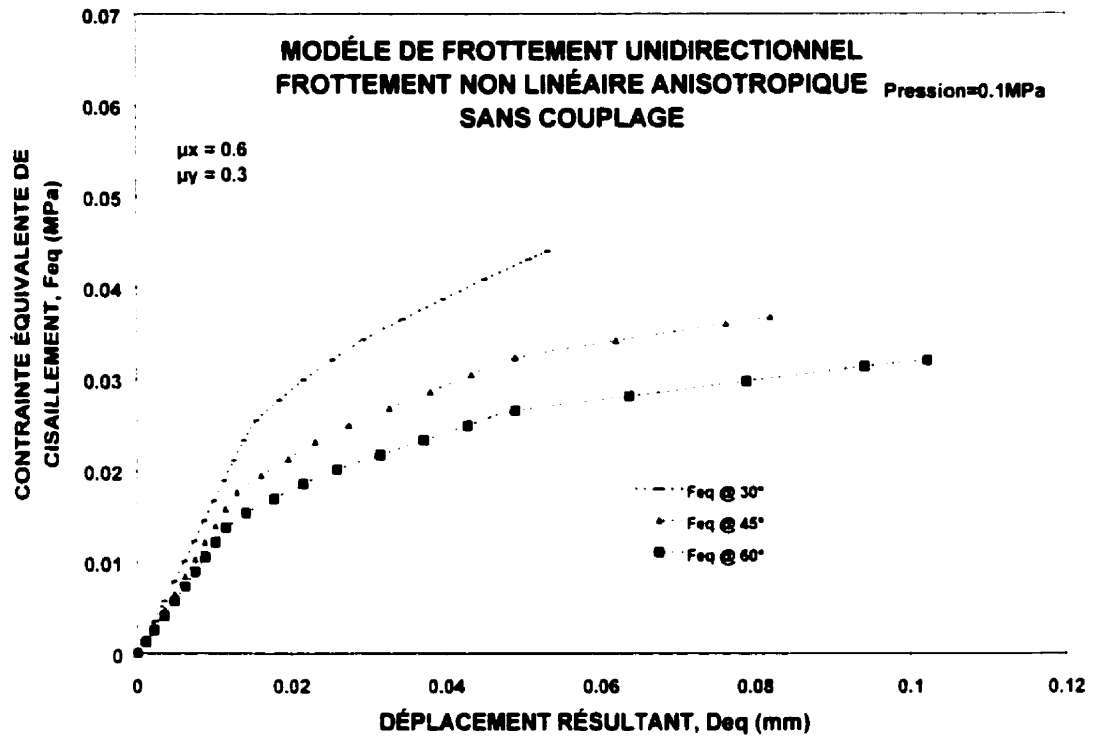


Figure A.8 Contrainte tangentielle équivalente,  $F_{eq}$ , en fonction du déplacement relatif résultant,  $Deq$ , en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique et en utilisant la formulation sans couplage.

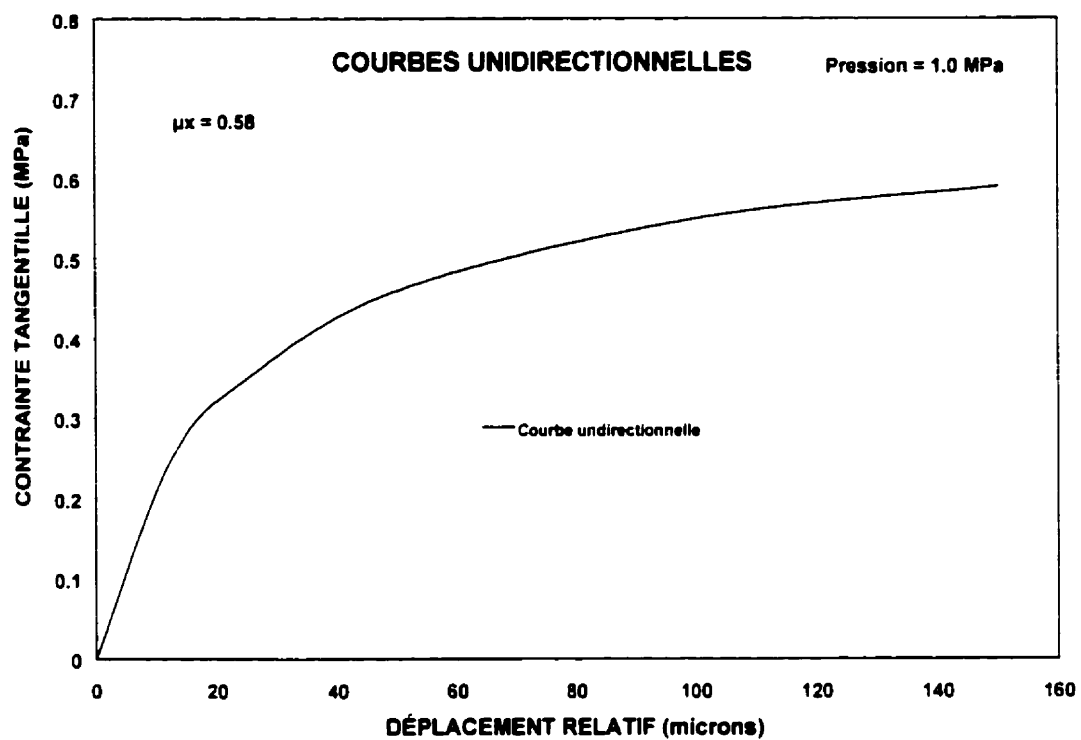


Figure A.9 Courbe unidirectionnelle de l'interface isotropique.

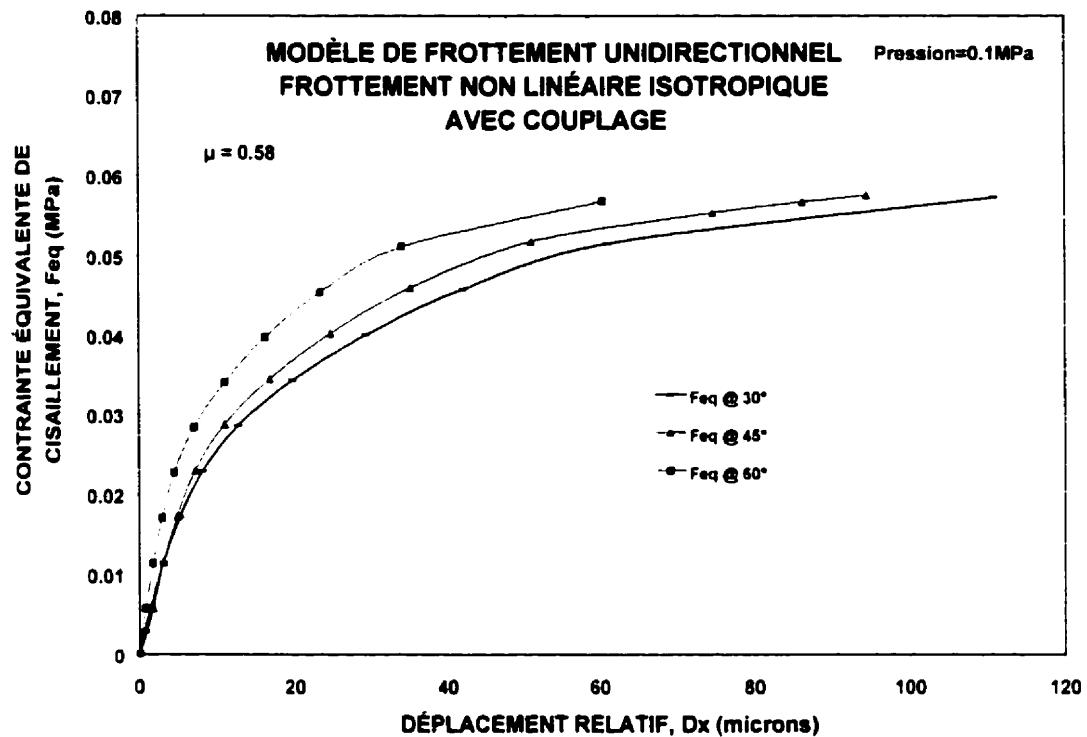


Figure A.10 Contrainte tangentielle équivalente, Feq, en fonction des déplacements relatifs, Dx, en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et en utilisant la formulation avec couplage.

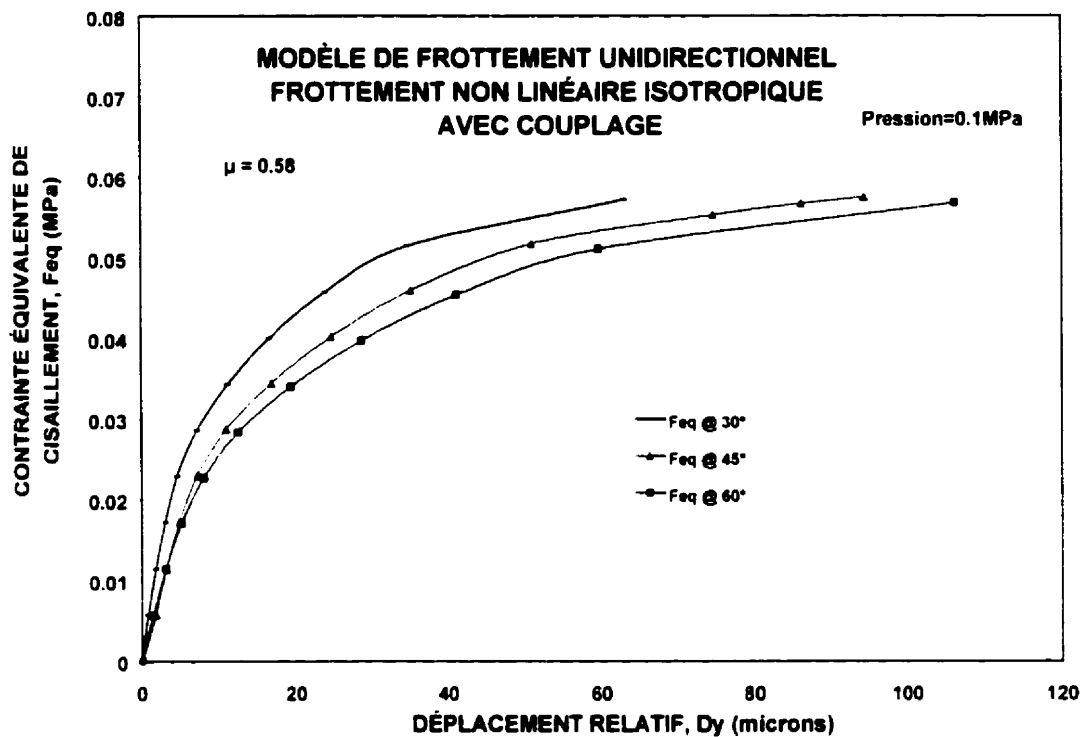


Figure A.11 Contrainte tangentielle équivalente,  $F_{eq}$ , en fonction des déplacements relatifs,  $D_y$ , en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire isotropique et en utilisant la formulation avec couplage.

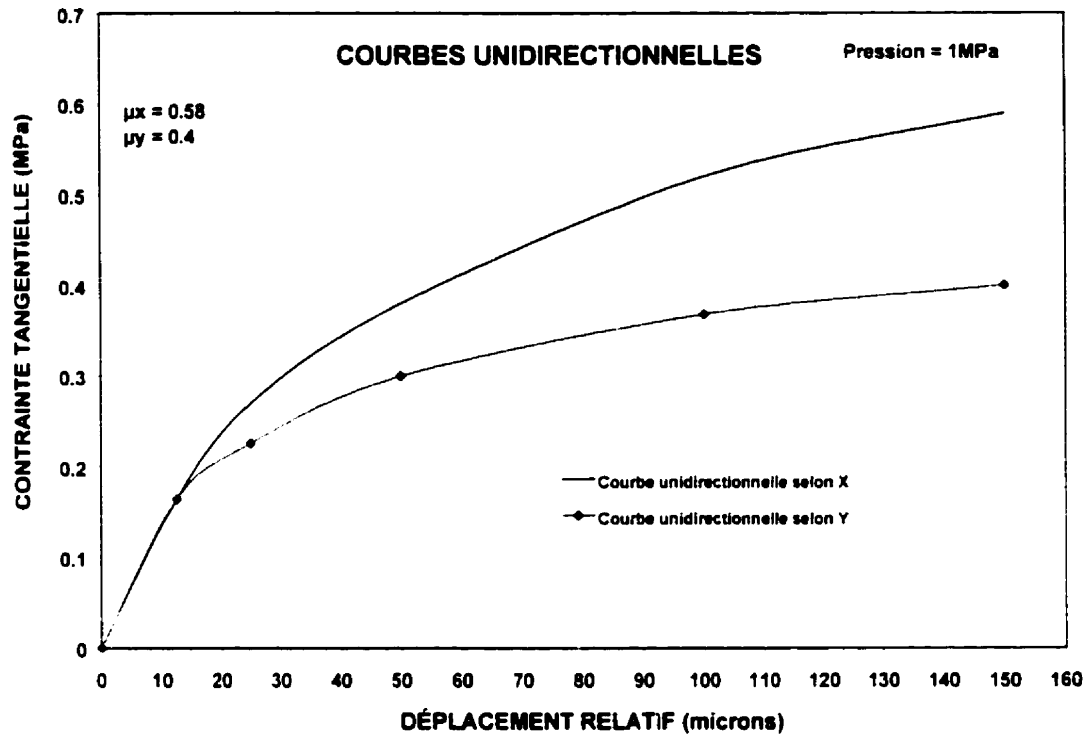


Figure A.12 Courbes unidirectionnelles des deux directions principales  $x$  et  $y$ .

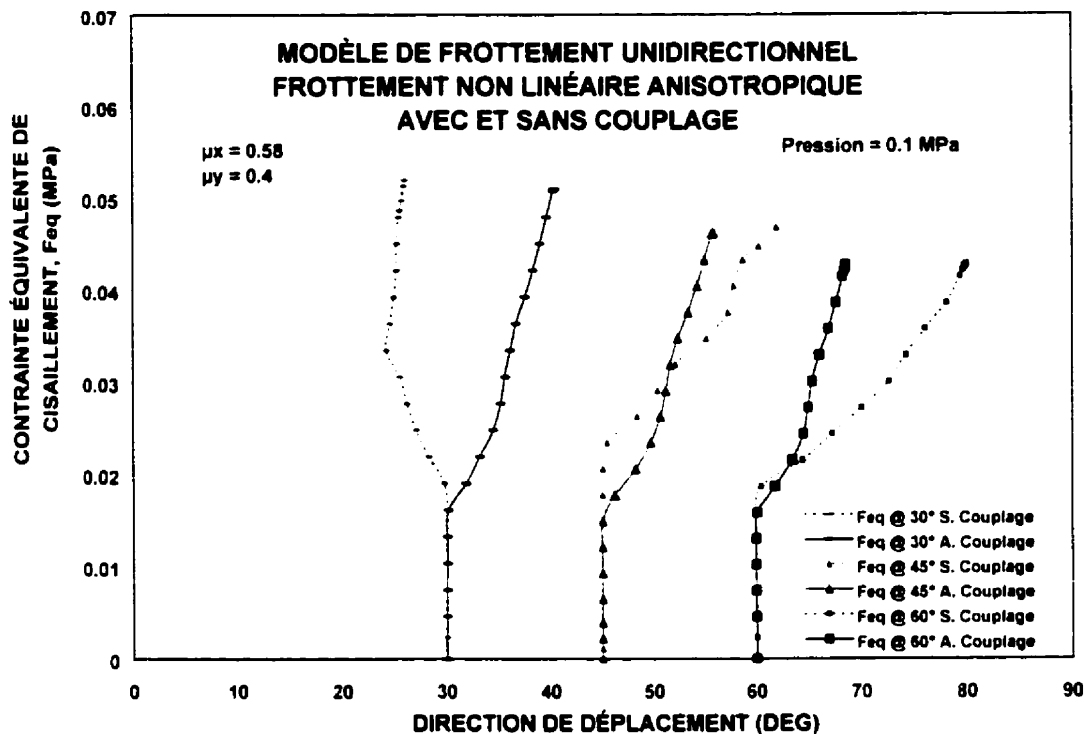


Figure A.13 Contrainte tangentielle équivalente,  $F_{eq}$ , en fonction de la direction du déplacement, en employant le modèle de frottement unidirectionnel avec frottement non linéaire anisotropique avec et sans couplage.

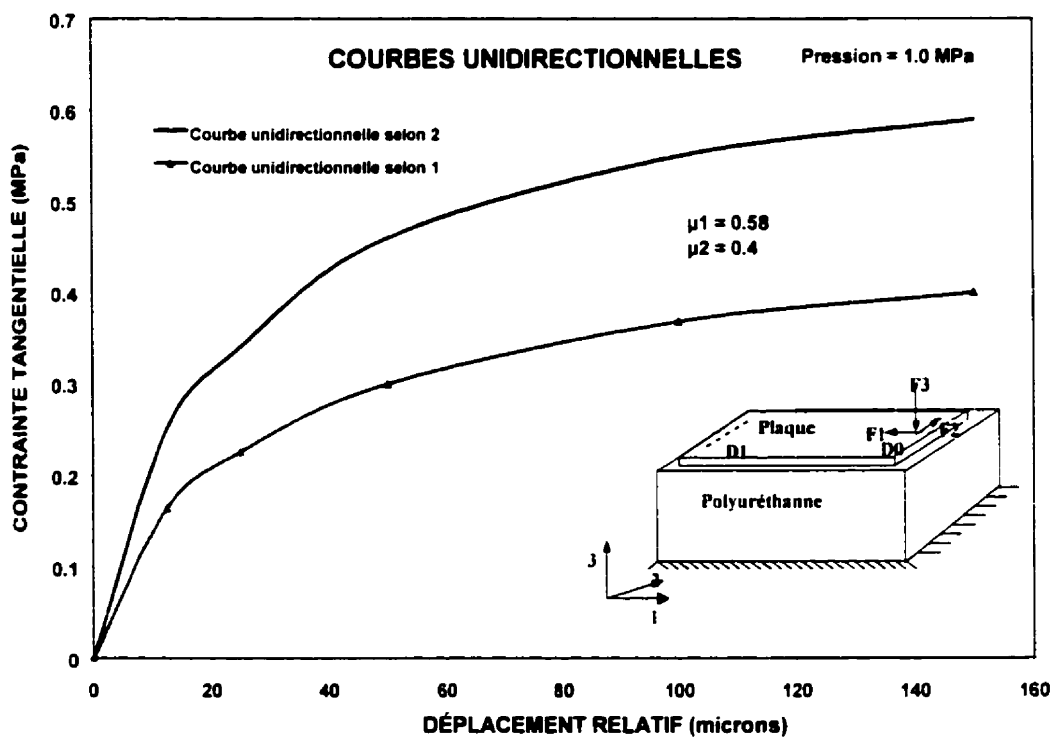


Figure A.14 Courbes unidirectionnelles des deux directions principales 1 et 2. Pour le cas isotropique la courbe unidirectionnelle est celle de la direction 1.

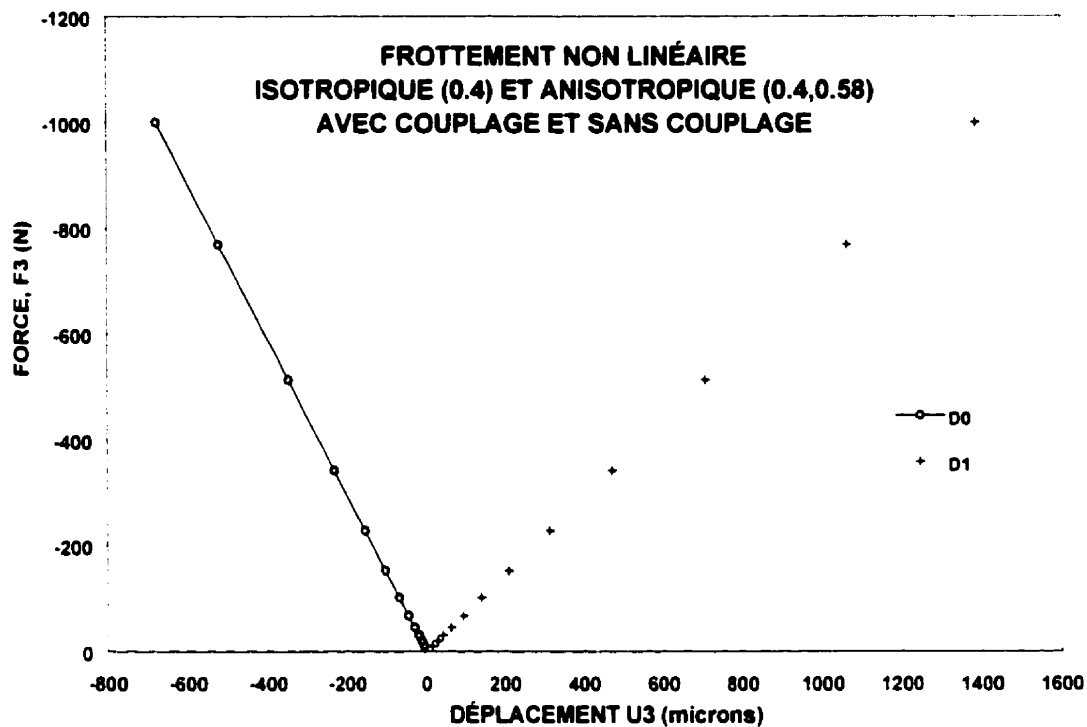


Figure A.15 Force F3 en fonction du déplacement U3, au point D0 et D1. Uniquement la charge normale qui est appliquée. Frottement non linéaire isotropique et anisotropique, avec et sans couplage. Dans les quatre cas les résultats sont les mêmes.



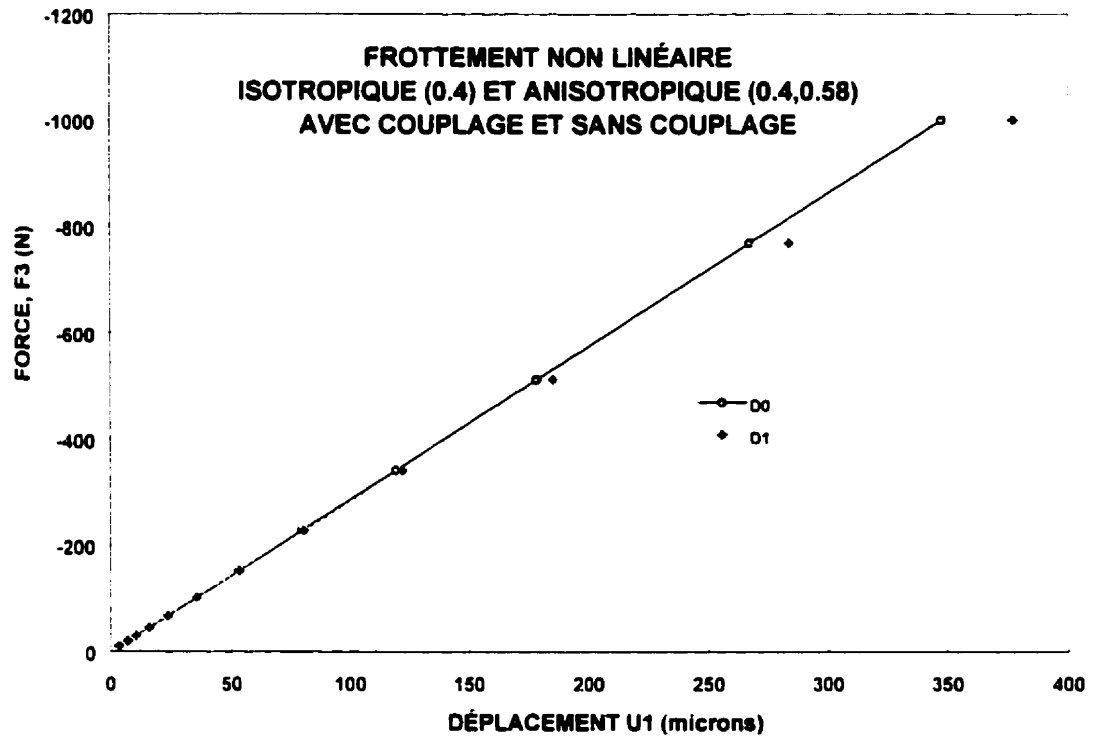


Figure A.16 Force F3 en fonction du déplacement U1, au point D0 et D1. Uniquement la charge normale qui est appliquée. Frottement non linéaire isotropique et anisotropique, avec et sans couplage. Dans les quatre cas, les résultats sont les mêmes.

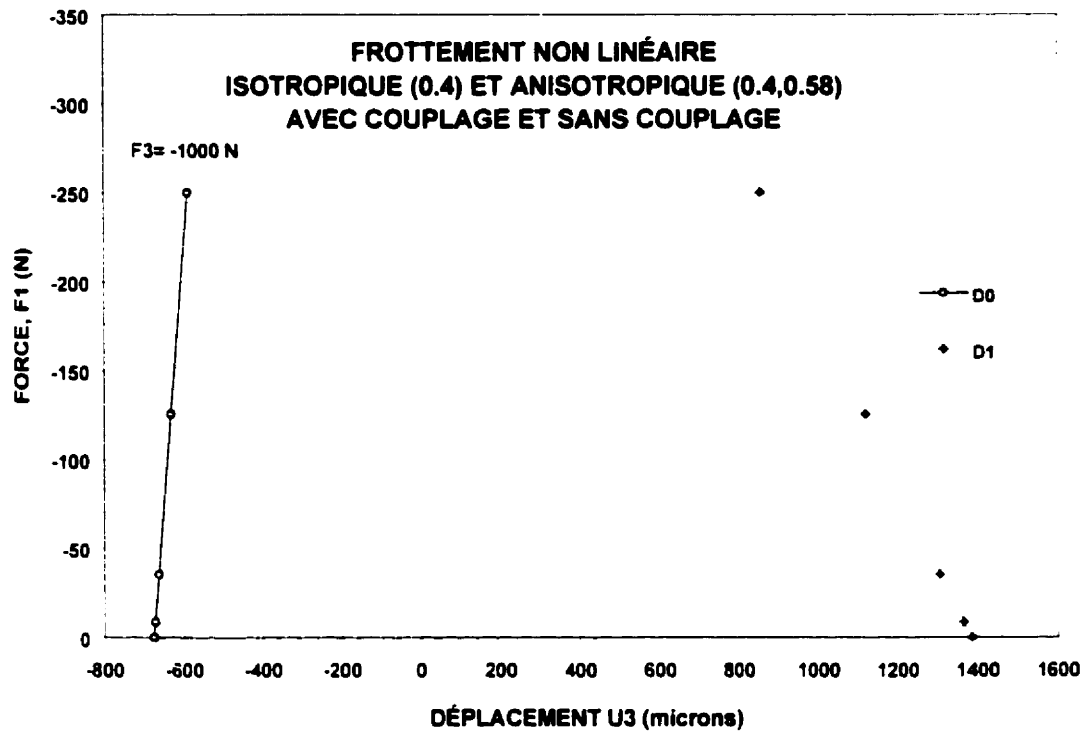


Figure A.17 Force F1 en fonction du déplacement U3, au point D0 et D1, en employant le modèle de frottement unidirectionnel selon x avec frottement non linéaire isotropique et anisotropique avec et sans couplage.

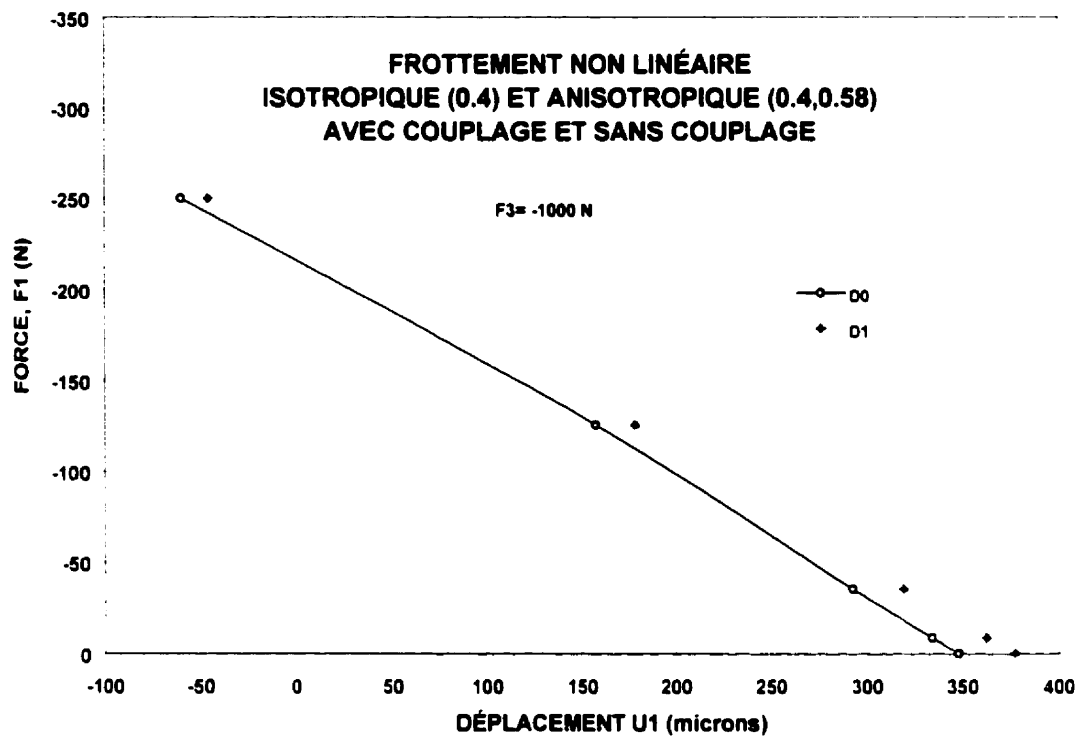


Figure A.18 Force  $F_1$  en fonction du déplacement  $U_1$ , au point D0 et D1, en employant le modèle de frottement unidirectionnel selon  $x$  avec frottement non linéaire isotropique et anisotropique avec et sans couplage.