UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FORMULATION ÉLÉMENTS FINIS ESPACE-TEMPS POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

KOUAKOU DONATIEN N'DRI
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR (Ph.D.)
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)
JUILLET 2001

© Kouakou Donatien N'dri, 2001.

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions and Bibliographic Services
Acquisitions et services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-65547-4

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

FORMULATION ÉLÉMENTS FINIS ESPACE-TEMPS POUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

présentée par: N'DRI Kouakou Donatien
en vue de l'obtention de diplôme de: Philosophiæ Doctor
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., président
M. GARON André, Ph.D., membre et directeur de recherche
M. FORTIN André, Ph.D., membre et codirecteur de recherche
M. REGGIO Marcelo, Ph.D, membre
M. LE ROUX Daniel, Ph.D., membre

À la mémoire de mon frère Herman et de ma soeur Aya.
À mon père.

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier Monsieur André Garon, qui a dirigé avec doigté ces travaux, pour m'avoir proposé un sujet de recherche passionnant, pour m'avoir désembourbé à maintes reprises et pour m'avoir donné le support technique, moral et financier nécessaire à la réalisation de cette thèse. Sa compétence et sa disponibilité m'ont été d'une aide précieuse. Mes remerciements se portent aussi vers Monsieur André Fortin, qui a participé à la direction de cette recherche, pour m'avoir fait partager son expérience sur les méthodes mixtes et pour m'avoir donné la possibilité d'enseigner le cours d'analyse numérique; ce qui fut une expérience très enrichissante et un complément important à ma formation.

De très sincères remerciements sont de mise pour Messieurs Dominique Pelletier, Marcello Reggio et Daniel Le Roux qui ont accepté de faire partie de mon jury d'examen.

Je remercie Monsieur Jean Yves Trépanier pour avoir accepté de faire partie de mon jury d'examen de synthèse et pour sa disponibilité pour mes questions au sujet du logiciel ADX. Je remercie également Monsieur Michel Fortin pour ses suggestions au sujet de la preuve de la condition inf-sup.

J'ai apprécié les contacts personnels et professionnels avec les personnes cotôyées lors de mon séjour au CEntre de Recherche en Calcul Appliqué (CERCA). Pour leur aide, je remercie Andréa Francioni, Julien Dompierre, François Guibault, Paul Labbé, Benoît Ozell et les membres du personnel.

J'ai également apprécié les contacts avec les collègues étudiants, qui ont contribué à rendre ce passage des plus agréable. Je pense en particulier à Aboubacar Bagayogo, Alain Béliveau, Jean-Luc Guilbault, Marie-Claude Heuzey, Alain Lioret, Jean-Philippe Marcotte, Antoine Massud, José Morin, Mourad Rajbaoui et Pierre Tran. Je voudrais profiter de cette occasion pour exprimer aux membres du personnel du département de Mathématiques et de Génie Industriel mes plus sincères remerciements.

Je tiens particulièrement à exprimer ma gratitude à l'endroit de Marie Isabelle Farinas et de Steven Dufour qui m'ont été d'une aide précieuse tout au long de ce travail.

Mes compatriotes, Florent Adoubi, Natasha Akpa, Jean-Claude Bamba, Awa Dicko, Carol Koomson, Georges Konan et Dembele Lassina saisiront à travers ce travail toute ma reconnaissance et ma gratitude.

J'aimerais saluer la patience qu'a eue Kindy Sylla. Elle est, sans aucun doute, la personne qui a été la mieux placée pendant ces années pour connaître et surtout subir le quotidien de la vie d'un étudiant aux cycles supérieurs.

Finalement, à mes parents et à ma soeur Emma, qui m'ont soutenu matériellement et moralement et ce, de façon inconditionnelle, tout au long de cette aventure. Je ne saurais suffisamment les remercier.

RÉSUMÉ

Nous présentons une méthode d'éléments finis espace-temps pour les équations de Navier-Stokes incompressibles en 2-D. La formulation est basée sur la méthode de Galerkin discontinue en temps avec l'utilisation de l'élément *mini espace-temps*. L'approximation de la pression est linéaire et continue tandis que celle de la vitesse est constituée d'une fonction linéaire enrichie d'une *bulle*. Cet élément est de type «simplex» et satisfait la condition *inf-sup*. Une étude théorique est présentée afin d'établir l'analogue de cette condition dans le contexte des éléments finis espace-temps et vérifier la stabilité de l'élément *mini espace-temps* sous cette condition. Des résultats numériques sont présentés pour attester de la stabilité de la discrétisation et pour illustrer les effets numériques liés à la non satisfaction de cette condition de compatibilité. Ce travail étant une étude préliminaire à la simulation des écoulements dans les artères, nous avons comparé la formulation stable à la méthode stabilisée GLS/ST («Galerkin/least-squares/space-time») pour une série de problèmes en 2-D afin d'étudier son comportement pour ce type d'écoulements.

ABSTRACT

A space-time finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations in a bounded domain in $\mathbb{R}^2$ is presented. The method is based on the time-discontinuous Galerkin method with the use of simplex-type meshes together with the requirement that the space-time finite element discretization for the velocity and the pressure satisfies the *inf-sup* stability condition of Brezzi and Babuška. The finite element discretisation for the pressure consists of piecewise linear functions, while piecewise linear functions enriched with a bubble function are used for the velocity. This element is referred to as the *space-time mini element.* The extension of the *inf-sup* condition to the context of space-time finite element fornulations, the stability proof and some numerical results are presented. We also assess the behaviour of the underlying mixed approximation when compared with the stabilized Galerkin least-squares /space-time (GLS/ST) method for some 2-D problems with flows physics similar to arterial flow computations, the intended applications.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iv

REMERCIEMENTS v

RÉSUMÉ vii

ABSTRACT viii

TABLE DES MATIÈRES ix

LISTE DES TABLEAUX xii

LISTE DES FIGURES xiii

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xvii

LISTE DES ANNEXES xxii

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1 LES MÉTHODES DE SEMI-DISCRÉTISATION 5

1.1 Les équations régissant les écoulements incompressibles 5

1.1.1 Les conditions frontières 6

1.2 La discrétisation des équations 7

1.2.1 Les formulations variationnelles 7

1.2.2 La méthode de Galerkin 10

1.2.3 Les considérations numériques 13

CHAPITRE 2 FORMULATIONS ESPACE-TEMPS 17

2.1 La présentation du concept 17

2.2 La méthode de Galerkin discontinue 19

2.2.1 La formulation variationnelle 20

2.3 Les méthodes stabilisées 23

2.3.1 La formulation SD 24

2.3.2 Formulation GLS/ST 25

2.3.3 La méthode CSD 27

CHAPITRE 3 ÉLÉMENT MINI 32

3.1 La condition inf-sup 32

3.1.1 Le problème de Stokes 32

3.1.2 L'élément mini espace-temps (2-D +temps) 38

3.2 Vérification de la condition *inf-sup* 40

CHAPITRE 4 SIMULATIONS NUMÉRIQUES 45

4.1 Les outils numériques 45

4.1.1 Le maillage espace-temps 45

4.1.2 Les algorithmes de résolution 47

4.1.3 Post-traitement des solutions 50

4.2 Vérifications 51

4.2.1 Le problème de Poiseuille 51

4.2.2 Le test «no-flow» 55

4.2.3 Le problème du cylindre 57

4.2.4 Notes et bibliographie 60

4.3 Validations 63

4.3.1 Écoulement laminaire autour d'un obstacle 64

4.3.2 Le problème de la marche inversée 69

4.3.3 Écoulement derrière un cylindre, $Re = 100$ 78

4.3.4 Modèle axisymétrique 86

4.3.5 Notes et bibliographie 93

4.4 Domaines variables 96

4.4.1 Deuxième problème de Stokes 96

CONCLUSION 100

BIBLIOGRAPHIE 103

ANNEXES 117

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1 53

LISTE DES FIGURES

2.1 Éléments géometriques espace-temps 18

2.2 Tranche espace-temps 20

2.3 Illustration de la discontinuité en temps 21

2.4 Maillages espace-temps 23

2.5 Maillage et élément espace-temps 26

2.6 Transformation d'un élément espace-temps 29

2.7 Maillage espace-temps aligné 31

3.1 Position des degrés de liberté pour l'élément mini 2-D + temps 40

4.1 Génération du maillage espace-temps 46

4.2 Les 6 configurations décomposables en 3 tétraèdres sans ajout de nœud. 48

4.3 Les 2 configurations décomposables en 3 tétraèdres avec l'ajout d'un nœud. 48

4.4 Position des degrés de liberté pour l'élément $P_1 - P_1$ 49

4.5 Domaine de calcul pour le problème de Poiseuille 51

4.6 Position des degrés de libertés 52

4.7 Maillage (400 éléments) 53

4.8 Vecteurs vitesse, élément $Q_1 - P_0$ 54

4.9 Isovaleurs de la pression, élément $Q_1 - P_0$ 54

4.10 Vecteurs vitesse, élément mini 54

4.11 Isovaleurs de la pression, élément mini 54

4.12 Domaine de calcul et maillage pour le problème du «no-flow» 55

4.13 Isovaleurs de la vitesse u 56

4.14 Isovaleurs de la vitesse v 56

4.15 Isovaleurs de la pression 56

4.16 Domaine de calcul et conditions aux limites pour le problème du cylindre 57

4.17 Évolution temporelle 59

4.18 Isovaleurs de la vitesse u 61

4.19 Isovaleurs de la vitesse v 61

4.20 Vecteurs vitesse 61

4.21 Isovaleurs de la pression 62

4.22 Isovaleurs de la fonction de courant ψ 62

4.23 Isovaleurs de la vorticité w 62

4.24 Canal plan avec obstacle 65

4.25 Maillage: 6769 éléments 65

4.26 Lignes de courant 66

4.27 Coupe de la composante horizontale de la vitesse 67

4.27 Coupe de la composante horizontale de la vitesse (suite) 68

4.28 Domaine de calcul pour le problème de la marche 69

4.29 Lignes de courant à différents instants (élément mini espace-temps) . . 71

4.30 Lignes de courant à différents instants (GLS/ST) 72

4.31 Évolution de la composante horizontale de la vitesse (élément mini espace-temps) 74

4.32 Évolution de la composante horizontale de la vitesse (méthode GLS/ST) 74

4.33 Évolutions temporelle de la composante horizontale de la vitesse (comparaison) 75

4.34 Coupes de diverses composantes à $x = 7$ 76

4.35 Coupes de diverses composantes à $x = 15$ 77

4.36 Évolution de la composante verticale de la vitesse pour $\Delta t = 0.1$, pour le problème du cylindre à $Re = 100$ 79

4.37 Évolution de la composante verticale de la vitesse au point (4,0) pour $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$ 80

4.38 Évolution de la composante verticale de la vitesse au point (4,0) 81

4.39 élément mini espace-temps 82

4.40 Méthode GLS/ST 83

4.41 Coupes de diverses composantes à $x = 4$ 85

4.42 Domaine de calcul 86

4.43 Maillage 3690 éléments 87

4.44 L'élément mini espace-temps 88

4.45 La méthode GLS/ST 89

4.46 Coupes de la vitesse axiale 90

4.47 Coupes de la vitesse radiale 91

4.48 Géometrie 92

4.49 Maillage: 4949 éléments 94

4.50 Champ de vitesse 94

4.51 Coupes de la vitesse axiale pour différentes valeurs de x/D. 95

4.52 Plaque oscillante 97

4.53 Domaine de calcul et conditions aux bords 97

4.54 Premier cycle 99

4.55 Deuxième cycle 99

A.1 Exemple de cellules 118

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

La convention, quant à la notation, est d'utiliser une lettre romaine ou grecque pour représenter un scalaire (a , α), une lettre romaine en caractère gras pour ce qui est d'un vecteur ($\boldsymbol{a}$) et une lettre grecque en caractère gras pour un tenseur ($\boldsymbol{\alpha}$). Une description succinte des symboles se retrouvant dans cette thèse, ainsi que la page où on retrouve leur définition ou leur première utilisation, sont classées par thèmes.

Indices:

t	:	quantité dépendant du temps	5
D	:	condition de Dirichlet en vitesse	7
N	:	condition de Neumann en vitesse	7
n	:	quantité évaluée au temps t_n	20
d	:	dimension d'un espace	5
h	:	quantité discrète	11
e	:	quantité évaluée sur un élément	39
K	:	quantité évaluée sur un élément	39
max	:	quantité maximale	64

Quantités géométriques:

Ω	:	domaine de calcul fixe	7
Ω_t	:	domaine de calcul occupée par le fluide à l'instant t	5
Γ	:	frontière du domaine de calcul	9
Γ_t	:	frontière du domaine de calcul à l'instant t	5
Γ_{D}	:	domaine de définition des conditions de Dirichlet en vitesse	9
Γ_{N}	:	domaine de définition des conditions de Neumann en vitesse	10
$\mathbf{n}$	:	normale extérieure à la frontière	7
S_n	:	tranche espace-temps	10
Σ	:	frontière de la tranche espace temps S_n	9
Σ_{D_n}	:	domaine de définition des conditions de Dirichlet en vitesse	9
Σ_{N_n}	:	domaine de définition des conditions de Neumann en vitesse	10

t	:	variable temps	5
$\boldsymbol{x}$	:	coordonnées géométriques, sous forme vectorielle	5
x, y	:	coordonnées cartésiennes	51
x, r	:	coordonnées axisymétriques	87

Quantités physiques:

$\boldsymbol{u}$	:	vitesse du fluide	5
p	:	pression du fluide	5
$\boldsymbol{\sigma}$	:	tenseur de Cauchy du fluide	6
$\boldsymbol{\tau}$	:	tenseur des extra-contraintes du fluide	6
ρ	:	densité du fluide	5
μ	:	viscosité du fluide	6
$\boldsymbol{f}$	:	force volumique du fluide	6

Quantités discrètes:

Δt	:	pas de temps	12
h_e	:	taille d'un élément	27
K	:	un élément	39
S_n^e	:	un élément espace-temps	26,27
$\boldsymbol{u}_h$	:	approximation discrète de la vitesse	11
p_h	:	approximation discrète de la pression	11
$\boldsymbol{u}_n^{\pm}$	:	$\lim_{\epsilon \to 0} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t_n \pm \epsilon)$	21
T_h	:	discrétisation du domaine de calcul Ω	34
$\mathcal{T}_h$	:	discrétisation de la tranche espace-temps S_n	36
V_h	:	espace discret contenant l'interpolant en vitesse (sur Ω)	11
Q_h	:	espace discret contenant l'interpolant en pression (sur Ω)	11
V_h^n	:	espace discret contenant l'interpolant en vitesse (sur S_n)	20
Q_h^n	:	espace discret contenant l'interpolant en pression (sur S_n)	20
$\boldsymbol{u}_j$	:	valeur de la vitesse à un noeud du maillage	11
$\boldsymbol{\phi}_j(\boldsymbol{x})$	:	fonction d'interpolation d'un espace discret	11
P_1^+-P_1	:	élément mini de Arnold-Brezzi-Fortin	13
P_2-P_1	:	élément de Taylor-Hood	13

P_2^+–P_1	:	élément de Crouzeix-Raviart	13

Espaces:

$\mathbb{R}$	:	espace des réels	8
$\mathbb{R}^d$	:	version vectorielle de $\mathbb{R}$	5
$\mathcal{D}(\Omega)$	:	fonctions indéfinement différentiables à support compact	5
$L^2(\Omega)$	:	fonctions de carré intégrable sur Ω	8
$L_0^2(\Omega)$	:	fonctions de $L^2(\Omega)$ à moyenne nulle	8
$H^1(\Omega)$	:	espace de Sobolev défini sur Ω	8
$(H^1(\Omega))^d$	:	version vectorielle de $H^1(\Omega)$	8
$H_0^1(\Omega)$	:	fonctions de $H^1(\Omega)$ à valeurs nulles sur Γ	9
$H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$	:	fonctions de $H^1(\Omega)$ à valeurs nulles sur Γ_D	9
$H_{\Sigma_{D_n}}^1(S_n)$	:	fonctions de $H^1(S_n)$ à valeurs nulles sur Σ_{D_n}	20
V_{div}	:	fonctions de $(H_0^1(\Omega))^2$ à divergence nulle	20
X	:	espace de Banach	9
$L^p(0,T;X)$	:	espace des fonctions L^p-intégrables	9
$L^\infty(0,T;X)$	:	espace des fonctions essentiellement bornées	9

Produits:

$(u\,,v)$	:	produit scalaire dans $L^2(\Omega)$	8
$(u\,,v)_{1,\Omega}$	:	produit scalaire dans $H^1(\Omega)$	8
$\langle\varphi\,,\psi\rangle$	:	produit de dualité	21

Quantités mathématiques:

ϵ	:	terme de diffusion d'une équation de convection-diffusion	28
$\widetilde{\mathbf{v}}_h, \widetilde{p}_h$	:	fonction test modifiée pour les méthodes stabilisées	24,25
$\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3$	:	paramètres de stabilisation de la méthode stabilisée SD	24,25
τ_{mom}, τ_{cont}	:	paramètres de stabilisation de la méthode stabilisée GLS/ST	27

Matrices :

$\mathbf{M}$	:	matrice de masse	12
$\mathbf{C}$	:	matrice de convection	12
$\mathbf{A}$	:	matrice de diffusion	12
$\mathbf{B}$	:	matrice divergence	12
$\vec{\mathbf{U}}$	:	vecteur des composantes discrètes en vitesse	12
$\vec{\mathbf{P}}$	:	vecteur des composantes discrètes en pression	12

Quantités de référence et nombres adimensionnels:

L, D, S, H	:	longueurs de référence	49, 58, 64, 70
$U_\infty, U, \bar{U}$	:	vitesses de référence	49, 58, 64,92
u_{max}	:	vitesse maximale	70
Re	:	nombre de Reynolds	47,58

Autres sigles:

∇	:	opérateur gradient	5
Δ	:	opérateur laplacien	6
$\nabla\cdot$	:	opérateur divergence	5
$\mathbf{I}$	:	tenseur identité	6
$\|\ \|$	:	norme de L^2	8
$\|\ \|_X$	:	norme de l' espace X	9
$\|\ \|_{1,\Omega}$	:	norme de $H^1(\Omega)$	9
$\|\ \|_{0,K}$	:	norme de $L^2(K)$	41
$|\ |$	:	semi-norme de $H^1(\Omega)$	9
$|\ |_{1,K}$	:	semi-norme de $H^1(K)$	41

Abréviations:

LBB	:	condition de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi	13
SD	:	streamline diffusion	24
SUPG	:	streamline upwind/Petrov-Galerkin	14
GLS	:	Galerkin/least-squares	14
DWFF	:	Douglass-Wang-Franca-Frey	14
RFB	:	residual free bubbles	15
GLS/ST	:	Galerkin/least-squares/space-time	25
DSD/ST	:	deforming-spatial-domain/space-time	25
CSD	:	characteristic streamline diffusion	27
ALE	:	arbitrary Lagrangian-Eulerian	29
ADX	:	algorithms for adaptative discretization	47
LU	:	factorisation matricielle	50

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A PROJECTION LOCALE 117

ANNEXE B MODÈLE AXISYMÉTRIQUE 120

B.1 Opérateurs différentiels 120

B.2 Équations de Navier-Stokes 121

B.3 Méthode de Galerkin discontinue en temps 123

B.4 Méthode GLS/ST 124

INTRODUCTION

La résolution numérique des problèmes d'évolution nécessite en général une semi-discrétisation en espace par des méthodes d'éléments finis suivie de l'approximation des dérivées temporelles par des schémas classiques aux différences finies. Contrairement à cette approche très répandue qui consiste à découpler les variables espace et la variable temps, la méthode d'éléments finis espace-temps est fondée sur l'emploi d'éléments finis relatifs à l'espace et au temps avec des fonctions de base qui dépendent à la fois des variables espace et de la variable temps. Dans cette approche, la variable temps est traitée comme une variable espace, engendrant ainsi le domaine espace-temps $\Omega \times (0,T)$, Ω étant le domaine spatial et $(0,T)$ un intervalle de temps. Ce domaine est d'une dimension supérieure à celle de l'espace et est discrétisé à l'aide d'éléments espace-temps. On distingue deux types d'éléments: le type extrudé (comprenant les quadrilatères, prismes, cubes, hexahèdres etc.) obtenu par extrusion d'éléments espace dans la direction du temps et le type simplex comprenant les triangles, tétraèdres etc.

L'avantage principal de la discrétisation par éléments finis espace-temps réside dans le traitement des problèmes où le domaine est variable. En effet, le déplacement ou la déformation est incorporé automatiquement dans le domaine espace-temps et non dans la formulation variationnelle comme c'est le cas dans l'approche semi-discrète (discrétisation par éléments finis en espace et différences finies en temps).

Bien que le concept de la discrétisation par éléments finis espace-temps ait été introduit par Fried (1969) et Oden (1969), les premiers tests numériques sont plutôt dûs aux travaux de Bonnerot et Jamet (1974, 1977) pour le problème de Stefan à une et à deux dimensions d'espace. Par la suite, Jamet (1978) a introduit une variante de la formulation initiale, dénommée méthode de Galerkin discontinue en temps, qui consiste à utiliser des fonctions d'interpolation continues en espace mais discontinues en temps. Dans cette approche, le domaine espace-temps est subdivisé en une série de tranches «slabs» espace-temps $(\Omega \times (t_n,t_{n+1}))$ et le problème discret est résolu sur une tranche à la fois en se servant de la solution de la tranche précédente comme

condition initiale. Cette nouvelle formulation est considérée comme une innovation majeure car elle est moins coûteuse que la précédente, mais surtout parce qu'elle est A-stable et d'ordre élevé.

La méthode de Galerkin discontinue en temps a été appliquée avec succès à divers problèmes, notamment, aux problèmes de type parabolique (voir Bonnerot et Jamet, 1979; Eriksson et al., 1985; Eriksson et Johnson, 1987; Makridakis et Babuška, 1997), aux problèmes de type hyperbolique (voir Hulbert et Hughes, 1990; Johnson, 1993; French, 1993; Li et Wiberg, 1998; Wiberg et Li, 1999), aux problèmes en acoustique (voir Thompson et Pinsky, 1996a,b,c) etc. Cependant, tout comme la méthode de Galerkin, elle souffre de la présence d'oscillations parasites dans la solution numérique dans le cas où le terme de convection, jumelé à une condition limite avec de brusques variations, est prépondérant dans les équations. Pour faire disparaître ces oscillations, Varoglu et Finn (1980a, 1982) ont utilisé, pour les équations de convection-diffusion, la méthode des caractéristiques pour orienter le maillage selon les caractéristiques de l'écoulement. Cette technique a été par la suite généralisée aux équations de Burgers par Varoglu et Finn (1980b); Froncioni et al. (1997) et aux équations de Navier-Stokes par Hansbo (1992b). Une approche plus répandue consiste plutôt à utiliser les formulations stabilisées. Dans cette optique, la méthode SD «Streamline-Diffusion» a été introduite par Hansbo et Szepessy (1990). La formulation est du type Petrov-Galerkin et est obtenue en ajoutant à la fonction test un terme de moindres carrés. Par la suite, Tezduyar et Behr (1992a) ont développé la méthode GLS/ST «Galerkin Least Squares/Space-Time» en ajoutant à la formulation variationnelle un résidu provenant de la minimisation d'une fonctionnelle par la méthode des moindres carrés.

Dans le cas particulier des équations de Stokes ou de Navier-Stokes, le choix des espaces d'interpolation en vitesse et en pression est soumis à une condition de compatibilité. Cette condition est l'analogue de la condition Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) (Ladyshenskaya, 1969; Babuška, 1973; Brezzi, 1974) plus connue sous le nom de la condition *inf-sup*. Cette difficulté a été contournée par l'utilisation des formulations stabilisées SD et GLS/ST. En effet, en plus de réduire les oscillations causées par les écoulements à convection dominante, elles permettent aussi d'obtenir des solutions stables sans que les espaces d'interpolation aient à vérifier la

condition *inf-sup*. Cependant, la construction d'espaces d'interpolation en vitesse et en pression vérifiant cette condition est inexistante dans la littérature. En fait la construction de formulations stabilisées constitue la seule approche au regard de cette condition de stabilité.

Cette thèse est consacrée au développement d'une formulation espace-temps stable pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes incompressibles en 2-D. La formulation est basée sur la méthode de Galerkin discontinue en temps et sur l'utilisation de l'élément (tétraédrique) *mini espace-temps*. La discrétisation de la pression est linéaire tandis que la vitesse est linéaire mais enrichie d'une bulle. À travers une étude théorique (existence et unicité) du problème de Stokes instationnaire, nous avons établi l'analogue de la condition *inf-sup* dans le contexte de la discrétisation par éléments finis espace-temps et nous avons montré que l'elément *mini espace-temps* est stable sous cette condition. La seconde contribution de cette thèse se situe au niveau de l'utilisation d'éléments espace-temps de type simplex (tétraèdres) pour les écoulements bidimensionnels. Bien que peu utilisé, ce type d'élément est plus apte à discrétiser les domaines courbes (domaines variables) et conduit à des maillages non-structurés qui sont plus aptes à l'adaptivité dans le contexte des éléments finis.

Le premier chapitre de la thèse est consacré au rappel des équations de Navier-Stokes, à la revue de quelques méthodes d'éléments finis dans le cadre de l'approche semi-discrète et aux considérations numériques relatives à leur mise en œuvre.

Au chapitre 2, après avoir présenté le concept de la discrétisation par éléments finis espace-temps, nous présentons la méthode de Galerkin discontinue en temps, suivie d'une revue des formulations espace-temps connues à ce jour.

Au chapitre 3, après le rappel de la condition *inf-sup* dans le cadre du problème de Stokes et sa généralisation au contexte de l'espace-temps, nous présentons l'élément *mini espace-temps* ainsi que la preuve de sa stabilité.

Finalement, le chapitre 4, présente les résultats numériques de la discrétisation des équations de Navier-Stokes pour quelques problèmes en 2-D. L'objectif visé est, d'abord de confirmer la stabilité de l'élément *mini espace-temps* et ensuite d'étu-

dier le comportement et illustrer l'enveloppe d'utilisation de la formulation stable. Dans le cadre de la vérification de la stabilité, trois problèmes sont présentés:le problème de Poiseuille, le test du «no-flow» et le problème du cylindre. Afin d'étudier le comportement de la formulation stable nous l'avons comparée à la formulation stabilisée GLS/ST pour une série de problèmes en coordonnées cartésiennes et axisymétriques. La simulation d'écoulements dans les artères étant une application potentielle de ce travail, une série de problèmes ont donc été étudiés, chacun faisant ressortir les caractéristiques de ce type d'écoulement. Finalement, à titre d'exemple d'application sur un domaine variable, nous avons étudié le deuxième problème de Stokes. Une conclusion et des recommandations complètent cette thèse.

CHAPITRE 1

FORMULATIONS ÉLÉMENTS FINIS POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Dans ce chapitre, on présente quelques méthodes d'éléments finis pour les équations de Navier-Stokes dans le cadre de l'approche semi-discrète:discrétisation par éléments finis en espace et discrétisation par différences finies en temps.

On rappelle d'abord les équations de Navier-Stokes avec les conditions aux limites appropriées. La méthode de Galerkin est ensuite présentée brièvement ainsi que les schémas classiques de différences finies dans le cadre de la discrétisation en espace et en temps. Finalement, des considérations numériques relatives à la mise en œuvre de ces formulations ainsi que les formulations dites stabilisées sont présentées.

1.1 Les équations régissant les écoulements incompressibles

On considère un fluide visqueux incompressible occupant, à l'instant $t \in (0,T)$, un domaine $\Omega_t \in \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) borné non vide et de frontière Γ_t. On désigne par $\mathbf{x}$ la variable espace et par t la variable temps. Les équations régissant l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible en régime laminaire sont:

i) l'*équation de la conservation de la quantité du mouvement*

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{f}\right) - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} \;=\; 0 \quad \text{sur } \Omega_t, \quad \forall t \in (0,T); \tag{1.1}$$

ii) l'*équation de la conservation de la masse ou équation de la continuité*

$$\nabla\cdot\mathbf{u} \;=\; 0 \quad \text{sur } \Omega_t, \quad \forall t \in (0,T). \tag{1.2}$$

Les variables dépendantes sont *la vitesse* $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = (u_1,\cdots,u_d)$ et *la pression* $p(\mathbf{x},t)$. *La masse volumique* (ou *la densité*) du fluide est représentée par ρ (constante pour

les fluides incompressibles), $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ est *une force de volume* et $\boldsymbol{\sigma}$ est *le tenseur des contraintes de viscosité* (ou *tenseur de Cauchy*). Dans le cas d'un fluide newtonien, ce tenseur est défini par:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u},p) \quad = \quad -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}),$$

où $\mathbf{I}$ est le tenseur métrique[1], μ est *le coefficient de viscosité* et $\boldsymbol{\varepsilon}$ est *le tenseur du taux de déformation* défini par:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\top}\right),$$

et l'équation (1.1) devient:

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{f}\right) - \nabla\cdot(2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + \nabla p \quad = \quad 0 \quad \text{sur } \Omega_t \quad \forall t \in (0,T). \quad (1.3)$$

Les équations (1.2)–(1.3), plus connues sous le nom d'équations de Navier-Stokes, sont dues à Georges S. Stokes (1819-1903) et à C.L.M.H. Navier (1785-1836). Ces équations sont non linéaires de nature mixte (parabolique-hyperbolique). Le terme de convection non linéaire $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ contribue au caractère hyperbolique de l'équation, alors que le terme visqueux linéaire $-\mu\Delta\mathbf{u}$ est de nature elliptique et $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}$ est de nature parabolique.

1.1.1 Les conditions frontières

Les conditions aux limites de type Dirichlet (essentielles) et/ou de type Neumann (naturelles) sont imposées sur la frontière Γ_t; pour ce faire, on considère pour chaque composante u_i, $(i = 1\cdots d)$ du vecteur vitesse, $(\Gamma_D)_i$ et $(\Gamma_N)_i$ deux parties complémentaires de Γ_t:

$$\Gamma_t = (\Gamma_D)_i \cup (\Gamma_N)_i, \quad (\Gamma_D)_i \cap (\Gamma_N)_i = \emptyset,$$

1. Pour le système de coordonnées cartésiennes, la matrice de cœfficient de ce tenseur correspond à la matrice identité.

sur lesquelles on impose les conditions aux limites suivantes:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_i = g_i \quad \text{sur } (\Gamma_D)_i \quad \forall t\in(0,T), \quad i=1\cdots d; \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_i = h_i \quad \text{sur } (\Gamma_N)_i \quad \forall t\in(0,T), \quad i=1\cdots d \tag{1.5}$$

où $\mathbf{e}_i$ est un vecteur de la base canonique $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{n}=(n_1,\cdots,n_d)$ est le vecteur normal unitaire extérieur à la frontière Γ du domaine Ω et $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes.

Pour completer la description du problème, une condition initiale à divergence nulle est imposée sur Ω_0, soit

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t=0)=\mathbf{u}_0,$$

où $\mathbf{u}_0$ satisfait l'équation (1.2). Dans la pratique, $\mathbf{u}_0=0$ ou $\mathbf{u}_0$ est la solution du problème stationnaire.

1.2 La discrétisation des équations

Dans l'approche semi-discrète, la discrétisation se fait en deux étapes: une discrétisation en espace par éléments finis suivie d'une discrétisation en temps par différences finies. Cependant, cette formulation n'est pas bien adaptée si la géométrie du domaine est variable puisque, à chaque pas de temps, la frontière variable passe entre les nœuds du maillage et cela complique la discrétisation au voisinage de la frontière.

1.2.1 Les formulations variationnelles

Dans cette section, par souci de simplicité, nous allons nous restreindre à un domaine fixe, Ω, avec des conditions de Dirichlet homogènes ($\mathbf{u}=0$) sur une partie de la frontière, le cas non homogène ne posant aucune difficulté supplémentaire puisqu'il est possible d'effectuer un relèvement de la condition essentielle.

Le cadre fonctionnel

Les notions et les notations utilisées dans ce rappel sont tirées du livre (en préparation) de Fortin et Garon (2001).

Définissons d'abord quelques espaces fonctionnels auxquels nous ferons référence par la suite. Soit

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_\Omega f^2 dx < \infty \right\}$$

l'espace de Hilbert des fonctions à valeurs réelles et de carré sommable sur Ω, muni du produit scalaire et de la norme associée:

$$(f,g) = \int_\Omega fg dx, \quad \|f\|^2 = \int_\Omega f^2 dx.$$

De même, on définit par:

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega f dx = 0 \right\},$$

l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ à moyenne nulle. On désigne ensuite par:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq d \right\},$$

l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω muni du produit scalaire:

$$(u,v)_{1,\Omega} \;=\; (u,v) + (\nabla u, \nabla v)$$

de la norme:

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 = \|u\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^{d} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2,$$

et de la semi-norme:

$$|u|^2 = \sum_{i=1}^{d} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2.$$

Remarque 1.1. *Dans la définition de $H^1(\Omega)$, les dérivées sont prises au sens des distributions.*

Enfin, on définit deux sous-espaces de l'espace $H^1(\Omega)$, de la façon suivante:

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \quad | \quad u \in H^1(\Omega), u|_\Gamma = 0 \right\}$$

où $u|_\Gamma$ est la trace de u sur Γ et:

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \left\{ u| \quad u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma_D} = 0 \right\}$$

où Γ_D est une partie de la frontière Γ du domaine Ω.

Pour l'étude des problèmes d'évolution, nous allons maintenant introduire des espaces de fonctions $v : t \to v(t)$, définies sur $(0,T)$, à valeurs dans un espace de Banach X. Pour $p \in \mathbb{R}$, avec $1 \leq p < \infty$, on désigne par $L^p(0,T;X)$ l'espace des fonctions $v : t \to v(t)$ fortement mesurables sur $(0,T)$ pour la mesure dt (i.e. les fonctions scalaires $t \to \|v(t)\|_X$ mesurables pour la mesure dt) et telles que

$$\|v\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

D'autre part, lorsque $p = \infty$, on désigne par $L^\infty(0,T;X)$ l'ensemble des fonctions $v : t \to v(t)$ fortement mesurables sur $(0,T)$ pour la mesure dt et telles que

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;X)} < \infty.$$

Les espaces $L^p(0,T;X)$ (espace des fonctions L^p-intégrables), $L^\infty(0,T;X)$ (espace des fonctions essentiellement bornées) sont des espaces de Banach munis respectivement des normes $\|v\|_{L^p(0,T;X)}$ et $\|v\|_{L^\infty(0,T;X)}$.[2]

Les formes faibles

Soient,

$$\mathbf{V} = (H_{\Gamma_D}^1(\Omega))^2, \quad \mathbf{Q} = L^2(\Omega) \text{ et } \mathbf{H} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$$

2. $\|v\|_{L^\infty(0,T;X)}$ est la borne supérieure essentielle de $\|v(t)\|_X$

trois espaces de Hilbert. Nous obtenons la formulation variationnelle des équations (1.2) et (1.3) en multipliant ces dernières par des fonctions tests prises respectivement dans $\mathbf{V}$ et $\mathbf{Q}$; on intègre ensuite par parties sur tout le domaine Ω en tenant compte de la condition de Neumann. L'équation de la conservation de la quantité de mouvement (1.3) devient, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

$$\int_\Omega \rho(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, \mathrm{d}\Omega$$
$$- \int_\Omega p \nabla \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}\Gamma = 0, \tag{1.6}$$

et celle de la continuité devient, $\forall q \in \mathbf{Q}$:

$$\int_\Omega q \nabla \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}\Omega = 0. \tag{1.7}$$

Le problème variationnel consiste donc à trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ et $p \in \mathbf{Q}$ satisfaisant les formes faibles (1.6) et (1.7). Cette formulation est dite mixte en $(\mathbf{u},p)$. À l'aide de la méthode de Faedo-Galerkin et sous certaines conditions de régularité ($\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}, \mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{Q})$), on montre que ce problème variationnel admet une solution unique ($\mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{H} \cap L^\infty(0,T;\mathbf{Q})), p \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$) (voir Lions, 1968). Il est aussi possible de prouver l'existence et l'unicité de la solution par le biais de l'approche de semi-discrétisation en temps. On renvoie au livre de Temam (1969) pour les détails relatifs à cette preuve dite constructive.

Plusieurs techniques de discrétisation de problèmes variationnels dans le formalisme de la méthode des éléments finis sont possibles. Les plus usuels sont: la méthode des moindres carrés, la méthode de Petrov-Galerkin et la méthode de Galerkin. Cependant, selon la nature des équations à résoudre, certaines s'avèrent plus appropriées. Nous allons présenter la plus populaire, à savoir la méthode de Galerkin.

1.2.2 La méthode de Galerkin

La discrétisation en espace

Une fois en possession de la formulation variationnelle des équations de la conservation de la quantité de mouvement (1.3) et celles de la continuité (1.2), la discrétisation par éléments finis est immédiate. La solution du champ de vitesse est recherchée dans l'espace discret $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ et celle de la pression dans l'espace discret $\mathbf{Q}_h \subset \mathbf{Q}$. Suivant l'approche de Bubnov-Galerkin (méthode de Galerkin), les fonctions tests sont choisies dans l'espace des solutions discrètes ($\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, q_h \in \mathbf{Q}_h$). Ainsi, la formulation faible discrète du problème mixte revient à trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ et $p_h \in \mathbf{Q}_h$ telles que $\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ et $\forall q_h \in \mathbf{Q}_h$:

$$\int_\Omega \rho(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega + \int_\Omega 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) \, d\Omega$$
$$- \int_\Omega p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v}_h \, d\Gamma = 0, \tag{1.8}$$
$$\int_\Omega q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h \, d\Omega = 0. \tag{1.9}$$

Les espaces $\mathbf{V}_h$ et $\mathbf{Q}_h$ étant de dimension finie, les variables dépendantes $\mathbf{u}$ et p sont approximées respectivement par $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ et $p_h \in \mathbf{Q}_h$ qui sont exprimées dans leur base respective. On pose, par exemple, pour la vitesse $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{u}_j(t)\phi_j(\mathbf{x}), \tag{1.10}$$

où $\mathbf{u}_j(t)$ est la valeur de la vitesse au j^e nœud du maillage discrétisant le domaine Ω. Les fonctions d'interpolation sont $\phi_1, \cdots, \phi_m$, formant une base de $\mathbf{V}_h$. On obtient la formulation variationnelle élémentaire en choisissant comme fonctions tests, les éléments de la base des espaces discrets. Le problème (1.8–1.9) se ramène à un système d'équations différentielles non linéaires de la forme:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\vec{\mathbf{U}}} + \mathbf{C}(\vec{\mathbf{U}}) \cdot \vec{\mathbf{U}} + \mu \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{U}} + \mathbf{B}^T \cdot \vec{\mathbf{P}} &= \vec{\mathbf{G}}; \\ \mathbf{B} \cdot \vec{\mathbf{U}} &= \vec{\mathbf{0}}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

où $\vec{\mathbf{U}}$ et $\vec{\mathbf{P}}$ représentent respectivement les vecteurs contenant les composantes discrètes de la vitesse et de la pression. Les matrices $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ représentent respectivement la matrice masse, la matrice convection, la matice diffusion et la matrice divergence.

Afin d'obtenir un système totalement discrétisé, nous avons besoin des espaces discrets $\mathbf{V}_h$ et $\mathbf{Q}_h$ et d'un schéma pour de discrétisation en temps. Le choix des espaces de discrétisations en vitesse et en pression est assez délicat à cause de la condition d'incompressibilité discrète (1.9). Nous y reviendrons après avoir présenté la discrétisation du terme transitoire.

La discrétisation en temps

Les schémas aux différences utilisés, pour approcher les dérivées temporelles $\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t}$, sont regroupés en deux catégories: les schémas explicites et implicites. Les schémas explicites sont en général conditionnellement stables et nécessitent que l'on restreigne le pas de temps. Pour cette raison, les schémas implicites sont en général retenus. En plus, dans le cadre de la discrétisation des équations de Navier-Stokes, ce choix ne rajoute rien à la complexité de la résolution puisque la méthode de Galerkin, qui est une formulation implicite, est déjà employée pour la discrétisation spatiale.

Nous présentons ici les schémas aux différences les plus utilisés pour approcher $\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t}$. Pour ce faire, on considère $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, une partition de $(0,T)$ avec $\Delta t = t_n - t_{n-1}$. On note $\mathbf{u}_h^n = \mathbf{u}(\mathbf{x},t_n)$, la solution approximée au temps t_n est notée $\dot{\mathbf{u}}_h^n = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}|_{(\mathbf{x},t_n)}$. En utilisant successivement une différence arrière en t_{n+1} et une avant en t_n, on obtient les schémas

$$\theta \dot{\mathbf{u}}_h^{n+1} + (1-\theta)\dot{\mathbf{u}}_h^n \approx \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t},$$

mieux connus sous le nom de θ-schémas. Les plus usuels sont:

- Euler implicite ($\theta = 1$),
- Crank-Nicholson ($\theta = 1/2$).

Le schéma d'Euler implicite (ordre 1, inconditionnellement stable) étant trop diffusif, est en général utilisé pour obtenir des solutions stationnaires. Par contre, pour les solutions transitoires, on utilise plutôt le schéma de Crank-Nicholson (ordre 2, inconditionnellement stable). Étant donné que le schéma de Crank-Nicholson n'est pas A-stable, on va dans certains cas lui préférer un schéma du même ordre, A-stable à 2 pas; à savoir le schéma de Gear (voir Fortin et al., 1987, 1994, 1997):

$$\dot{\mathbf{u}}_h^n \approx \frac{3\mathbf{u}_h^n - 4\mathbf{u}_h^{n-1} + \mathbf{u}_h^{n-2}}{2\Delta t}.$$

Pour de plus amples détails sur les schémas de discrétisation en temps, on renvoie au livre de Gresho et al. (1999).

1.2.3 Les considérations numériques

La condition «inf-sup»

Pour assurer l'existence et l'unicité de la solution $(\mathbf{u}_h, p_h)$ du problème discret, le choix des espaces d'interpolation $\mathbf{V}_h$ et $\mathbf{Q}_h$ ne peut être fait de façon indépendante. Les espaces d'interpolation en vitesse et en pression doivent nécessairement vérifier la condition de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB) (Ladyshenskaya, 1969; Babuška, 1973; Brezzi, 1974) plus connue sous le nom de condition «inf-sup». Il s'agit donc de construire des espaces d'interpolation compatibles. Cette question fondamentale a fait l'objet d'une littérature très abondante. On consultera, pour la théorie générale, le livre de Brezzi et Fortin (1991). Les éléments les plus répandus satisfaisants cette condition sont l'élément *mini* de Arnold-Brezzi-Fortin ($P_1^+ - P_1$) (voir Arnold et al., 1984), l'élément de Taylor-Hood ($P_2 - P_1$) et l'élément de Crouzeix-Raviart ($P_2^+ - P_1$ discontinue) (voir Crouzeix et Raviart, 1973).

Dans le cas de la discrétisation des équations de Navier-Stokes incompressibles, en plus du problème du choix des espaces d'interpolation en vitesse et en pression, la méthode de Galerkin devient instable pour les écoulements à convection dominante. Pour réduire ces oscillations numériques, Christie et al. (1976) ont repris et adapté au contexte des éléments finis l'idée d' «upwinding» (décentrage en amont) des

méthodes de différences finies. On parle alors de techniques de stabilisation.

Les méthodes de stabilisation

Les techniques de stabilisation consistent à ajouter à la formulation variationnelle de Galerkin des termes de stabilisation dépendants du maillage, sans toutefois affecter la consistance de la formulation. De ce fait, elles sont des méthodes résiduelles qui sont des méthodes de type Petrov-Galerkin. La méthode de Petrov-Galerkin est une variante de la méthode de Galerkin, qui consiste à utiliser des fonctions tests différentes des fonctions d'interpolation pour réaliser le décentrage. Des améliorations de la méthode de Christie et al. (1976), ont conduit aux méthodes suivantes:

- la méthode «Streamline Upwind/Petrov-Galerkin» (SUPG) (Brooks et Hughes, 1982) ou encore « Streamline Diffusion» (SD),
- la méthode «Galerkin/Least-Square» (GLS) (Hughes et al., 1989),
- la méthode «Douglas-Wang-Franca-Frey» (DWFF) (Douglas et Wang, 1989; Franca et al., 1992).

La méthode SUPG a été initialement introduite pour les équations de convection-diffusion et ensuite généralisée, avec succès, aux équations de Stokes et de Navier-Stokes (voir Brooks et Hughes, 1982; Hughes, 1987). Elle permet de stabiliser la méthode de Galerkin en ajoutant à la fonction test de celle-ci un terme de moindres carrés.

La méthode GLS, quant à elle, consiste à ajouter à la formulation résiduelle de Galerkin un résidu provenant de la minimisation d'une fonctionnelle par la méthode des moindres carrés. Elle est plus générale que la méthode SUPG puisqu'elle permet l'utilisation d'interpolants de degré plus élevé et correspond à la méthode SUPG, lorsque des interpolants linéaires sont utilisés. Cette méthode est présentée par Hughes et Franca (1987); Franca et Hughes (1988); Hughes et al. (1989), pour l'équation de convection-diffusion et de Stokes et par Behr et al. (1993); Franca et al. (1993); Franca et Madureira (1993) pour les équations de Navier-Stokes.

La méthode de DWFF est une variante de la méthode GLS qui a l'avantage d'être moins sensible aux paramètres de stabilisation. Elle a été présentée par Douglas et Wang (1989), Franca et al. (1992)) et Franca et Frey (1992).

Dans le cas particulier des problèmes de convection-diffusion scalaire (1-D), les méthodes de stabilisation reviennent à ajouter de la diffusion dans la direction de l'écoulement. La quantité de cette diffusion est contrôlée par un paramètre de stabilisation qui doit être choisi de façon appropriée afin d'obtenir une solution stable. Plusieurs algorithmes basés sur des arguments heuristiques, ou numériques se sont avérées très efficaces pour certaines applications. Cependant, l'absence de théorie générale conduisant à la construction du paramètre optimal est considérée comme un inconvenient majeur par les utilisateurs de ce type de méthode.

Dans un développement parallèle, une approche de stabilisation sans paramètre, dite non conventionnelle, à été considérée. Elle consiste à enrichir l'espace des fonctions d'interpolation par une fonction bulle qui, une fois éliminée par condensation statique, conduit dans certains cas à une formulation stabilisée de type Petrov-Galerkin. En effet, Brezzi et al. (1992), Baiocchi et al. (1993) et Brezzi et al. (1997) ont montré, dans le cas particulier des équations de convection-diffusion et de Stokes, que l'utilisation de la fonction bulle était équivalente à la méthode SUPG ou GLS; cet effet de stabilisation a été aussi mentionné dans le cas des équations de Navier-Stokes par Russo (1996).

Les récents développements dans le contexte de la stabilisation sont tournés vers l'optimisation du processus de stabilisation, à savoir la construction de solutions non seulement stables, mais précises. Cela conduit à la méthode dite «Residual-Free-Bubbles» (RFB). Cette méthode est une variante de la stabilisation à l'aide de la fonction bulle. La fonction bulle utilisée dans cette approche, n'est plus la bulle classique mais plutôt une bulle qui est la solution d'un problème local. Cela permet d'optimiser le processus de stabilisation comme l'ont mentionné Brezzi et al. (1998) et Brezzi et Russo (1998). Pour de plus amples détails sur l'état actuel du progrès des techniques de stabilisation, on renvoie à la référence (Franca, 1998).

Par ailleurs, dans le cas particulier des équations de Navier-Stokes (formulation mixte), les méthodes de stabilisation permettent, en plus de stabiliser la solution

sans que les espaces discrets aient à vérifier la condition *inf-sup*. Cela permet de choisir les mêmes interpolants en vitesse et en pression comme les combinaisons $(P_1 - P_1)$, $(P_2 - P_2)$ et $(Q_1 - Q_1)$ (voir Hughes et al., 1986; Tezduyar et al., 1992; Droux et Hughes, 1994). Cette propriété est particulièrement intéressante dans le cas des éléments tridimensionnels, ainsi que dans le contexte des éléments finis espace-temps, pour des considérations relatives au coût de stokage et de calcul.

Après le choix d'éléments finis appropriés et l'approximation du terme transitoire $(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t})$ par une méthode adaptée de discrétisation en temps, le système d'équations non linéaires qui découle du système (1.11) est résolu à l'aide de techniques comme la méthode de Newton ou la méthode de Picard.

CHAPITRE 2

LES FORMULATIONS ESPACE-TEMPS

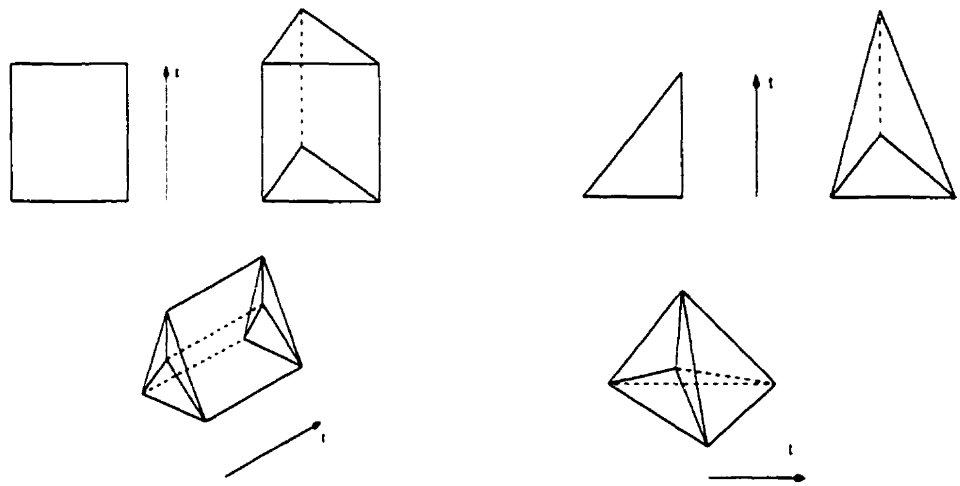
Dans ce chapitre, on présente les formulations espace-temps. On commence par présenter, le concept de l'approche de discrétisation par éléments finis espace-temps. La méthode de Galerkin discontinue en temps est ensuite présentée et on conclut avec une revue des formulations stabilisées.

2.1 La présentation du concept

Dans l'approche éléments finis espace-temps, l'espace et le temps sont discrétisés de façon simultanée par des éléments finis relatifs à l'espace et au temps, et les variables dépendantes sont approchées à l'aide de fonctions d'interpolation dépendant à la fois du temps et de l'espace. La variable temps est considérée comme une variable espace, engendrant ainsi un domaine espace-temps $\Omega \times (0,T)$, Ω étant le domaine spatial et $(0,T)$ un intervalle de temps. Pour la construction du maillage discrétisant le domaine espace-temps, on distingue deux types d'éléments finis: le type extrudé (comprenant les quadrilatères, prismes, cubes, hexahèdres etc.) obtenu par extrusion d'éléments espace dans la direction du temps (voir figure 2.1(a)) et le type simplex comprenant les triangles, tétraèdres etc. (voir figure 2.1(b)). Le type extrudé conduit à un maillage espace-temps structuré où chaque élément est le produit cartésien d'un élément spatial et d'un intervalle de temps. Par contraste, le type simplex conduit à un maillage espace-temps non-structuré.

À l'origine, les variables dépendantes étaient approximées à l'aide de fonctions d'interpolation continues par rapport aux variables d'espace et à la variable temps. Dans le cas particulier des problèmes à deux ou trois dimensions d'espace qui nécessitent un maillage espace-temps relativement fin (dans la direction du temps), la discrétisation des équations par cette approche (fonction continue en temps) conduit à un problème de taille excessive. Ceci pose des contraintes au niveau du coût de stockage

et du calcul, rendant ainsi cette approche moins attrayante et moins compétitive comparativement aux formulations semi-discrètes.



(a) Type extrudé (b) Type simplex

Figure 2.1 Éléments géometriques espace-temps

L'introduction de fonctions d'interpolation continues en espace mais discontinues en temps a donné naissance à la méthode de Galerkin discontinue en temps qui est considérée comme une innovation majeure dans le contexte des éléments finis espace-temps. En effet, les fonctions étant discontinues en temps, cela permet la subdivision du domaine espace-temps en série de tranches («slabs») espace-temps $S_n = \Omega \times (t_n, t_{n+1}), 0 \leq n \leq N-1$. Les équations sont ensuite résolues sur les tranches espace-temps de façon séquentielle (tranche après tranche), la solution de la tranche courante servant de condition initiale pour la tranche suivante.

Nous allons maintenant présenter la méthode de Galerkin discontinue en temps qui constitue le fondement des diverses formulations espace-temps connues à ce jour.

2.2 La méthode de Galerkin discontinue

La méthode de Galerkin discontinue a été initialement développée pour les équations hyperboliques du premier ordre par Reed et Hill (1973). Elle a ensuite été analysée et justifiée mathématiquement par Lesaint et Raviart (1974). Par la suite, elle a été appliquée, avec succès à de nombreux problèmes, notamment aux équations de type parabolique par Jamet (1978) et par Bonnerot et Jamet (1979) aux équations hyperboliques du deuxième ordre par Hulbert et Hughes (1990); Johnson (1993); French (1993); Li et Wiberg (1998) et Wiberg et Li (1999), et aux fluides viscoélastiques par Fortin et Fortin (1989). La méthode de Galerkin discontinue est, en général, une méthode d'éléments finis A-stable d'ordre élevé. En effet, appliquée aux équations différentielles ordinaires avec des approximations polynômiales de degré k (Lesaint et Raviart, 1974; Delfour et al., 1981; Johnson, 1988), elle conduit à une méthode A-stable d'ordre $2k+1$.

La méthode de Galerkin discontinue en temps découle de l'application de la méthode de Galerkin aux équations de type parabolique par Jamet (1978). Elle a ensuite été étudiée dans le cadre des équations de type parabolique par Bonnerot et Jamet (1979) et par Eriksson et al. (1985) qui ont montré qu'elle était A-stable et d'ordre $2k+1$, avec des approximations polynômiales de degré k et tout récemment par Makridakis et Babuška (1997) dans le cadre d'une analyse de stabilité des équations de la chaleur. Elle a aussi été généralisée aux équations hyperboliques du deuxième ordre par Hulbert et Hughes (1990) puis par Johnson (1993) qui a prouvé qu'elle est aussi A-stable, d'ordre 2 en espace et d'ordre 3 en temps dans la norme L^2, avec des fonctions d'interpolation bilinéaires en espace et en temps. Par contraste, l'utilisation de fonctions continues en temps conduit plutôt à des méthodes conditionnellement stables (voir Bajer, 1986, 1987).

De plus, la méthode de Galerkin discontinue en temps possède divers avantages inexistants dans l'approche semi-discrète. Les fonctions étant discontinues en temps, donc d'une tranche à l'autre, cela permet, par le biais d'estimateurs d'erreur *a posteriori*, de développer des stratégies adaptatives afin de contrôler soit le pas de temps (l'épaisseur de la tranche) et/ou adapter le maillage de chaque tranche (voir Eriksson et Johnson, 1987, 1991; Johnson, 1988; Eriksson, 1988; Hughes et

Hulbert, 1988; Froncioni et al., 1997; Li et Wiberg, 1998; Wiberg et Li, 1999) conduisant ainsi à des maillages différents sur chaque tranche espace-temps. En plus, elle conduit à des solutions de qualité avec des pas de temps relativement grands eu égard au fait qu'elle est en général (problèmes paraboliques, hyperboliques) une méthode A-stable d'ordre élevé. Finalement, les problèmes de surfaces libres, ou de domaines en mouvement, sont traités de façon naturelle. En effet, le déplacement ou la déformation du domaine ou d'une partie du domaine est incorporé dans la construction de la tranche espace-temps ainsi que dans le maillage le discrétisant (voir Tezduyar et Behr, 1992a,b; Mittal, 1992; Masud et T.J.R.Hughes, 1997; Behr et Tezduyar, 1999; Mittal et Kumar, 1999).

2.2.1 La formulation variationnelle

Afin de présenter la formulation espace-temps pour les équations 1.2–1.3, nous allons considérer $0 < t_1 < \cdots < t_N = T$, une partition de l'intervalle $(0,T)$ en sous intervalles $I_n = (t_n,t_{n+1})$ de longueur $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Soient $\Omega_n = \Omega_{t_n}$ et $\Gamma_n = \Gamma_{t_n}$, on définit la tranche espace-temps à l'étape n par S_n, le domaine délimité par Ω_n, Ω_{n+1} et Σ_n (voir figure 2.2), où Σ_n est la surface décrite par la frontière Γ_t quand t parcourt l'intervalle I_n. On désigne par Σ_{Dn} et Σ_{Nn} deux parties complémentaires de Σ_n:

$$\Sigma_n = \Sigma_{Dn} \cup \Sigma_{Nn}, \quad \Sigma_{Dn} \cap \Sigma_{Nn} = \emptyset,$$

dont l'une peut être vide et l'autre coïncider avec Σ_n. On introduit ensuite, pour

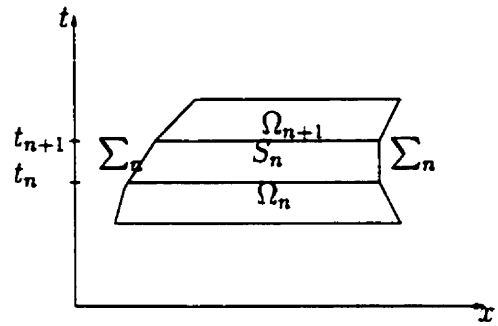


Figure 2.2 Tranche espace-temps

chaque tranche S_n, les espaces fonctionnels $V^n = (H^1_{\Sigma_{Dn}}(S_n))^2$ pour la vitesse et $Q^n = L^2(S_n)$ pour la pression. La discrétisation des équations de Navier-Stokes par la méthode de Galerkin discontinue en temps suit celle de la méthode de Galerkin. On approxime $(\mathbf{u}, p)$ par des fonctions $(\mathbf{u}_h, p_h) \in (V_h^n \times Q_h^n)$, où V_h^n et Q_h^n sont respectivement des sous espaces de V^n et Q^n de dimension finie qui seront définis plus loin.

Les fonctions d'interpolation en vitesse étant discontinues à chaque t_n, pour $n = 0,1,\cdots,N-1$ (voir figure 2.3), la dérivée par rapport au temps est considérée au sens des distributions et par l'identité de Dini, on obtient pour chaque tranche:

$$< T_{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}}, \phi >= \int_{S_n} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \phi \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + \int_{\Omega_n} \phi(\mathbf{u}_+^n - \mathbf{u}_-^n) \, \mathrm{d}\Omega, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(S_n),$$

avec $\mathbf{u}_\pm^n = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{u}_h(t_n \pm \varepsilon)$.

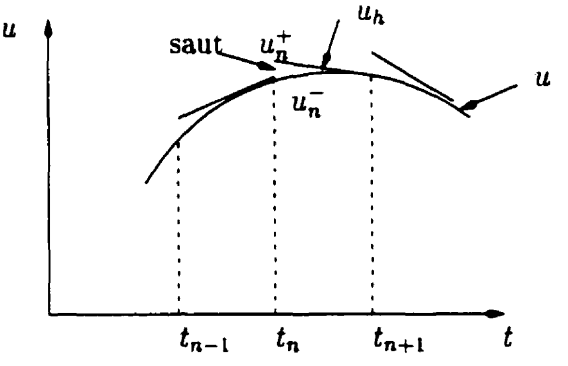


Figure 2.3 Illustration de la discontinuité en temps

La formulation espace-temps se présente comme suit: étant donné $\mathbf{u}_-^n$, trouver $\mathbf{u}_h \in V_h^n$ et $p_h \in Q_h^n$ telles que $\forall \mathbf{v}_h \in V_h^n$ et $\forall q_h \in Q_h^n$:

$$\begin{aligned} &\int_{S_n} \rho(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v}_h \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + 2\mu \int_{S_n} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\ &- \int_{S_n} p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t - \int_{\Sigma_{Nn}} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v}_h \mathrm{d}\Gamma + \int_{S_n} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h \, \mathrm{d}\Omega \, \mathrm{d}t \\ &+ \int_{\Omega_n} \rho(\mathbf{u}_+^n - \mathbf{u}_-^n) \cdot \mathbf{v}_+^n \, \mathrm{d}\Omega = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Les cinq premiers termes découlent de la formulation faible espace-temps des équations de la conservation de la quantité de mouvement et de la continuité par la méthode de Galerkin évaluée sur la tranche espace-temps. Les données sont transportées d'une tranche à l'autre via une projection L^2 par le terme de saut:

$$\int_{\Omega_n} \rho(\mathbf{u}_+^n - \mathbf{u}_-^n) \cdot \mathbf{v}_+^n \, \mathrm{d}\Omega. \tag{2.2}$$

Ce terme garantit la conservation de la masse d'une étape de temps à la suivante. Cependant, selon Priestley (1994), dans le cas où les maillages à l'interface des tranches sont différents, le calcul exact de l'intégrale devient coûteux et nécessite des algorithmes d'interpolation qui conduisent à des pertes de masse. Ce phénomène est plus prononcé dans les régions à fort gradient. Pour éviter cet inconvénient, Hansbo (2000) a suggéré deux techniques qui, tout en évitant le calcul exact de l'intégrale, permettent soit par des techniques de projections locales simplifiées (Hansbo, 1994) de conserver la masse, soit de rétablir la masse par des techniques de post-traitement (voir Sasaki, 1976). Bien que ces techniques soient efficaces, Hansbo (1994) suggère de raffiner le maillage à l'interface seulement si cela est absolument nécessaire.

Par ailleurs, il faut noter que le fait que les maillages soient différents à l'interface des tranches est le résultat d'une stratégie adaptative basée sur des éléments finis espace-temps de type extrudé. Cependant, avec les éléments de type simplex, le raffinement intervient seulement sur le haut de la tranche garantissant ainsi des maillages identiques à l'interface (voir figure 2.4).

Tout comme la méthode de Galerkin, le choix de la combinaison des espaces de discrétisation V_h^n et Q_h^n est aussi sujet à une condition de compatibilité. Cette condition est la généralisation de la condition inf-sup dans le contexte de l'espace-temps et sera presentée au chapitre 3. Il s'agit donc de construire des espaces de discrétisation compatibles (pour satisfaire à la condition *inf-sup*) ou d'utiliser des formulations stabilisées (pour contourner la condition *inf-sup*). Bien que la théorie générale concernant la construction d'éléments stables soit largement connue et ait conduit à de nombreux éléments stables dans le cas des équations de Stokes et de Navier-Stokes stationnaires, la construction d'éléments stables est inexistante dans le contexte des éléments finis espace-temps. En fait, la construction de formulations

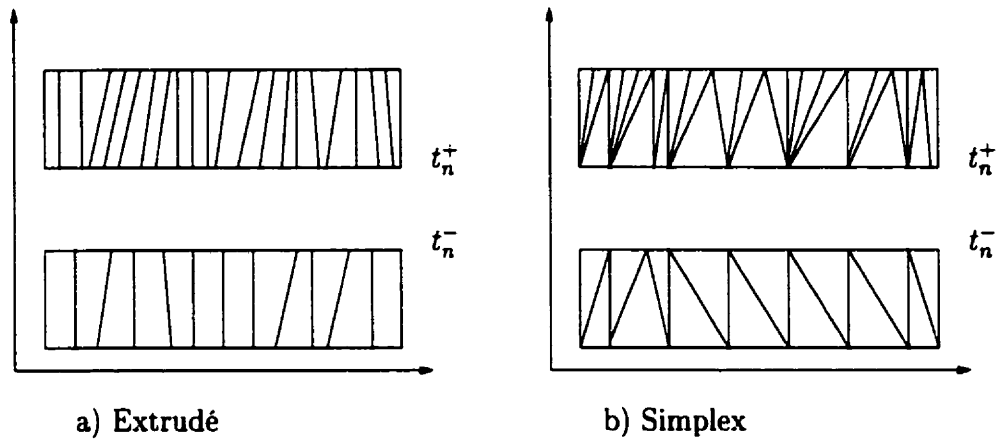


Figure 2.4 Maillages espace-temps

stabilisées constitue l'unique approche au regard de la condition *inf-sup*.

La construction d'éléments finis espace-temps stables est l'un des axes de cette thèse et sera présentée au chapitre suivant. Mais auparavant, nous présentons une revue des formulations espace-temps stabilisées.

2.3 Les méthodes stabilisées

Tout comme la méthode de Galerkin en espace, la méthode de Galerkin discontinue en temps n'est pas appropriée pour résoudre les écoulements à convection dominante. Cet état de fait va justifier la construction de formulations stabilisées de type Petrov-Galerkin basées sur des techniques de stabilisation en espace. Une autre approche propre à l'espace-temps consiste à utiliser une formulation lagrangienne dans le but d'obtenir la stabilité. On utilise la formulation de Galerkin discontinue sauf que le maillage est orienté, avec les éléments espace-temps alignés selon les caractéristiques.

On note deux courants importants: à savoir la méthode «Streamline-Diffusion» (SD) et la méthode «Galerkin Least Squares/Space-Time» (GLS/ST) qui découlent respectivement des méthodes SUPG et GLS. Ces techniques de stabilisation en espace-temps vont ensuite être combinées avec la méthode des caractéristiques pour

donner la méthode dite «Characteristic Streamline Diffusion» (CSD). Avant de présenter ces trois principales méthodes, il serait intéressant de mentionner deux méthodes qui, bien que peu utilisées, conduisent à des formulations stabilisées. La première, se veut une généralisation de la méthode de Lesaint-Raviart (Lesaint et Raviart, 1974) à l'espace-temps; elle est caractérisée par l'utilisation de fonctions d'interpolation discontinues en espace et discontinues en temps (voir Johnson et Saranen, 1986). La seconde dénommée «Space-Time coupled Least-Squares Finite Element Formulation», est une méthode de type moindres carrés (least-Squares) en espace-temps (voir Nguyen et Reynen, 1984; Bell et Surana, 1994, 1996).

2.3.1 La formulation SD

Cette méthode est basée sur un maillage espace-temps, avec les fonctions d'interpolation continues en espace et discontinue en temps. Nous allons présenter deux formulations basées sur la méthode de SD dans le cadre des équations de Navier-Stokes; pour plus de détails voir Johnson et Saranen (1986) et Hansbo et Szepessy (1990) .

La première formulation est due à Johnson et Saranen (1986). Elle se présente comme une méthode de type Petrov-Galerkin avec, comme fonction test:

$$\widetilde{\mathbf{v}_h} = \mathbf{v}_h + \delta\Big(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h + \nabla q_h\Big). \tag{2.3}$$

Les fonctions, $\mathbf{u}_h$,$\mathbf{v}_h \in V_h^n$, $q_h \in Q_h^n$, où V_h^n et Q_h^n sont respectivement les espaces d'interpolation en vitesse et en pression et δ est un paramètre de stabilisation . La particularité de cette approche réside dans le fait que les fonctions d'interpolation en vitesse sont des fonctions polynômiales à divergence nulle, ce qui implique que l'équation de continuité est résolue de façon exacte. Cependant cette approche est coûteuse compte tenu du fait qu'elle nécessite des éléments finis d'Hermite.

La seconde approche, présentée par Hansbo et Szepessy (1990), est beaucoup plus standard, en ce sens que la condition de divergence nulle est imposée faiblement. Elle se présente comme suit: étant donné $\mathbf{u}_-^n$, trouver $\mathbf{u}_h \in V_h^n$ et $p_h \in Q_h^n$ telles que

$\forall \mathbf{v}_h \in V_h^n$ et $\forall q_h \in Q_h^n$:

$$\begin{aligned}
&\int_{S_n} \rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h\right) \cdot \mathbf{v}_h \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + \int_{S_n} \left(2\mu\varepsilon(\mathbf{u}_h) : \varepsilon(\mathbf{v}_h) - p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h\right) \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\
&+ \int_{S_n} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + \int_{\Omega_n} \rho(\mathbf{u}_+^n - \mathbf{u}_-^n) \cdot \mathbf{v}_+^n \, \mathrm{d}\Omega \\
&+ \int_{S_n} \delta_1 \left(\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h\right) + \nabla p_h\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h + \nabla q_h\right) \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\
&+ \int_{S_n} \delta_2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_h)(\nabla \cdot \mathbf{v}_h) \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\
&+ \int_{\Sigma_{Nn}} \delta_3 [(2\mu\varepsilon(\mathbf{u}_h) - p_h I) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{h}] \cdot [(2\mu\varepsilon(\mathbf{u}_h) - q_h I) \cdot \mathbf{n}] \, \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t \\
&= \int_{S_n} \mathbf{f} \cdot \left(\mathbf{v}_h + \delta_1 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h + \nabla q_h\right)\right) \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + \int_{\Sigma_{Nn}} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v}_h \, \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Cette formulation est une méthode de type Petrov-Galerkin, avec comme fonction test:

$$\widetilde{\mathbf{v}_h} = \mathbf{v}_h + \delta_1 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h + \nabla q_h\right),$$

pour la vitesse et:

$$\widetilde{q_h} = q_h + \delta_2 \nabla \cdot \mathbf{v}_h$$

pour la pression. Les paramètres de stabilisation δ_1, δ_2 et δ_3 sont définis comme suit:

$$\delta_1 = \frac{C_1 h}{(1 + |\mathbf{u}_h|)}, \quad \delta_2 = C_2 h \text{ et } \delta_3 = C_3,$$

avec les constantes positives $C_1 \approx 1, C_2 \approx 1$ et $C_3 \gg 1$ indépendantes de h et de μ. Le paramètre δ_3 sert à imposer la condition de Neumann qui selon l'auteur serait imposée trop faiblement. Pour plus de détails sur ces paramètres voir Hansbo et Szepessy (1990).

2.3.2 Formulation GLS/ST

La formulation que nous allons présenter a été initialement proposée par Tezduyar et Behr (1992a,b) sous le nom de «Deforming-Spatial-Domain/ Space-Time» (DSD/ST), pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles sur des domaines variables. La formulation espace-temps se présente comme suit; étant

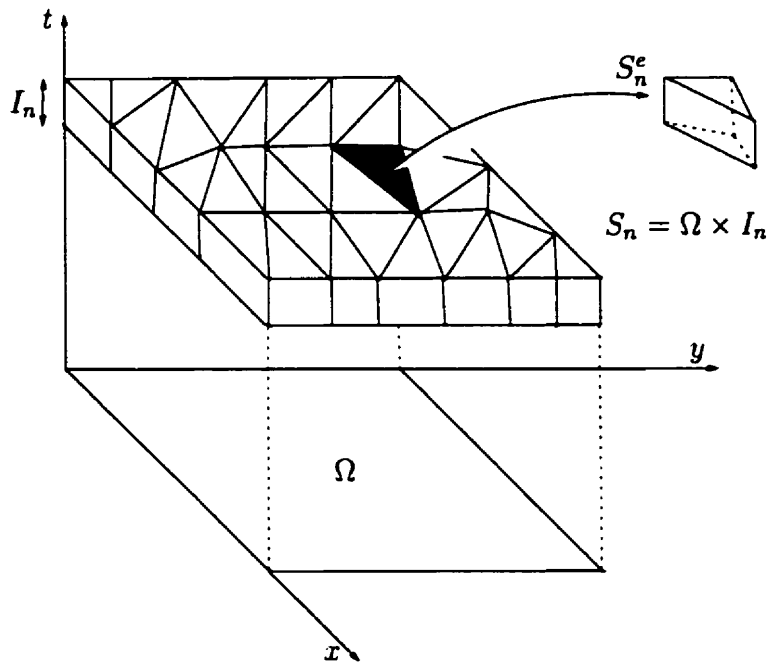


Figure 2.5 Maillage et élément espace-temps

donné $\mathbf{u}_-^n$, trouver $\mathbf{u}_h \in V_h^n$ et $p_h \in Q_h^n$ telles que $\forall \mathbf{v}_h \in V_h^n$ et $\forall q_h \in Q_h^n$:

$$\begin{aligned}
&\int_{S_n} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h + \mathbf{f} \right) \cdot \mathbf{v}_h \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + \int_{S_n} (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) - p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h) \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\
&+ \int_{\Sigma_{Nn}} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v}_h \, \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t + \int_{S_n} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + \int_{\Omega_n} \rho (\mathbf{u}_+^n - \mathbf{u}_-^n) \cdot \mathbf{v}_+^n \, \mathrm{d}\Omega \\
&+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{S_n^e} \frac{\tau_{mom}}{\rho} \left[\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(q_h, \mathbf{v}_h) \right] \\
&\quad \cdot \left[\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h + \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(p_h, \mathbf{u}_h) \right] \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\
&+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{S_n^e} \tau_{cont} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \, \rho \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

où S_n^e représente un élément du maillage espace-temps (voir figure 2.5). Dans cette formulation, les cinq premiers termes constituent la formulation de Galerkin discontinue en temps, les deux suivants sont des termes de stabilisation de type moindres carrés provenant respectivement de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (1.1) et celle de la continuité (1.2) . On obtient ainsi une

formulation stabilisée de type GLS d'où la dénomination «GLS/ST». Le premier terme de stabilisation sert à éliminer les oscillations provenant du choix d'une combinaison d'espaces de discrétisation inapropriée. Le second sert plutôt à éliminer les oscillations provenant des problèmes à convection-dominante (à haut *nombre de Reynolds*). Les paramètres de stabilisation τ_{mom} et τ_{cont} sont définis comme suit:

$$\tau_{mom} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2\|\mathbf{u}_h\|}{h_e}\right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2}\right)^2\right]^{-1/2}$$

et

$$\tau_{cont} = \frac{h_e}{2}\|\mathbf{u}_h\|\, z,$$

avec

$$z = \begin{cases} (\frac{Re}{3}) & \text{si } Re \leq 3; \\ 1 & \text{si } Re \geq 3 \end{cases}$$

où Re est le nombre de Reynolds défini par:

$$Re = \frac{\|\mathbf{u}_h\|\, h_e}{2\nu};$$

enfin, h_e est la taille élémentaire et est définie comme la longueur du plus grand côté de l'élément (S_n^e). Pour plus de détails sur l'origine de ces termes de stabilisation voir (Mittal, 1992) et (Behr, 1992).

Cette formulation a été appliquée par divers auteurs, notamment Thompson et Pinsky (1996a,c,b) pour des problèmes en acoustique, Shakib et Hughes (1991); Behr (1992); Mittal (1992); Behr et Tezduyar (1994); Johnson (1995) etMasud et T.J.R.Hughes (1997), pour les équations de Navier-Stokes et d'Euler sur des domaines variables.

2.3.3 La méthode CSD

Cette technique est propre aux problèmes d'évolution et a été introduite par Varoglu et Finn (1980a,b) pour les problèmes de convection-diffusion et l'équation de Burger en dimension 1. Elle consiste à aligner les éléments du maillage le long des

caractéristiques de l'écoulement et correspond à la méthode des caractéristiques dans le cas d'un problème hyperbolique pur.

Pour présenter cette technique, nous allons considérer le problème de convection-diffusion suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla u - \varepsilon \Delta u &= f \qquad \text{dans} \quad \Omega \quad \forall t \in (0,T), \\ u &= 0 \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad \forall t \in (0,T), \\ u(\mathbf{x},0) &= u_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $\mathbf{c} = (c_1,c_2)$ est la vitesse de convection et ε est un cœfficient de diffusion.

La discrétisation du problème (2.6) par la méthode de Galerkin discontinue en temps revient à trouver $u \in V_n$ tel que:

$$\begin{aligned} &\int_{S_n} (\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla u) v \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + \int_{S_n} \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{\Omega} (u_+^n - u_-^n) v_+^n \, \mathrm{d}\Omega = \int_{S_n} f v \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \quad \forall v \in V_n. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pour définir V_n, l'espace des fonctions d'interpolation et le maillage de la tranche S_n, on va appliquer la technique de passage à l'élément de référence. À cette fin, on considère, pour chaque n, $K_n = \{\kappa\}$ une triangulation de Ω et l'élément de référence espace-temps $\{\kappa \times (t_n,t_{n+1})\}$.

Soit F_n l'application qui permet de passer de l'élément de référence espace-temps à l'élément déformé. On pose

$$(\mathbf{x},t) = F_n(\boldsymbol{\xi},\tau) = (\boldsymbol{\xi} + (\tau - t_n)\mathbf{c}^n(\boldsymbol{\xi}),\tau), \tag{2.8}$$

où $\mathbf{c}^n$ est une approximation de la vitesse au temps t_n (voir figure 2.6).

De l'équation (2.8), on obtient:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} + \mathbf{c}^n \cdot \nabla u,$$

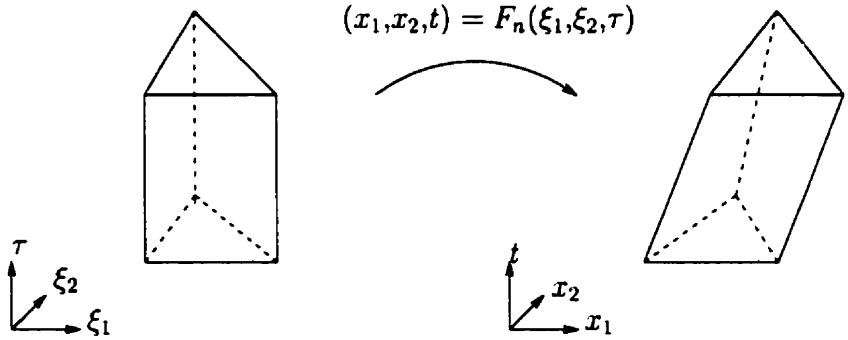


Figure 2.6 Transformation d'un élément espace-temps

où $\hat{u}(\boldsymbol{\xi},\tau) = u(\mathbf{x},t)$. Par ailleurs, on a:

$$\nabla_\xi = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} = J\nabla,$$

avec le jacobien de la transformation défini par:

$$J = \begin{bmatrix} 1 + (\tau - t_n)\frac{\partial c_1^n}{\partial \xi_1} & (\tau - t_n)\frac{\partial c_2^n}{\partial \xi_1} \\ (\tau - t_n)\frac{\partial c_1^n}{\partial \xi_2} & 1 + (\tau - t_n)\frac{\partial c_2^n}{\partial \xi_2} \end{bmatrix},$$

dont on déduit, finalement:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla u = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} + (\mathbf{c} - \mathbf{c}^n) \cdot J^{-1}\nabla_\xi \hat{u}.$$

On pose $V_n = \{v : v(\mathbf{x},t) = \hat{v}(\boldsymbol{\xi},\tau), \hat{v} \in \hat{V}_n, (\mathbf{x},t) = F_n(\boldsymbol{\xi},\tau)\}$, avec $\hat{V}_n$ un espace d'approximation défini sur l'élément de référence. Cette formulation espace-temps peut être considérée comme une formulation «Arbitrary Lagrangian-Eulerian» (ALE) (voir Hughes et al., 1981), en ce sens qu'elle combine à la fois les descriptions eulérienne et lagrangienne. En effet, si $\mathbf{c}^n = \mathbf{c}$ (le maillage se déplace à la même vitesse que u), la représentation est totalement lagrangienne; par contre, si $\mathbf{c}^n = 0$ (les endroits où le maillage est fixe), la représentation est eulérienne. Le fait d'orienter les éléments dans la direction des caractéristiques permet d'annuler la convection, si $\mathbf{c}^n = \mathbf{c}$, où de réduire son effet s'ils sont alignés approximativement dans la direction des caractéristiques. Cette idée va être adaptée à la formulation SD par Johnson (1991) et Hansbo (1992a) pour les équations de convection-diffusion, et

par Hansbo (1992b, 1993, 1995) pour les équations de Navier-Stokes et, dans un développement parallèle, par Pironneau et al. (1992) à la formulation GLS/ST pour donner la méthode dite «characteristic streamline diffusion» (CSD). Les formulations espace-temps sont exactement les formulations SD ou GLS/ST sauf que les espaces d'interpolation en vitesse et en pression sont définis par rapport aux éléments déformés (voir figure 2.7). On a:

$$V_n = \{\mathbf{v} : \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi},t), \quad \hat{v} \in \hat{V}_n, \quad (\mathbf{x},t) = F_n(\boldsymbol{\xi},t)\},$$

$$Q_n = \{q : q(\mathbf{x},t) = \hat{q}(\boldsymbol{\xi},t), \quad \hat{q} \in \hat{Q}_n, \quad (\mathbf{x},t) = F_n(\boldsymbol{\xi},t)\},$$

avec:

$$(\mathbf{x},t) = F_n(\boldsymbol{\xi},t) = (\boldsymbol{\xi} + (t - t_n)\mathbf{u}_n^*(\xi),t),$$

où $\mathbf{u}_n^*$ est une vitesse nodale pré-définie.

Avant de conclure cette revue des formulations dites stabilisées, il est important de préciser que les formulations que nous avons présentées sont basées sur des discrétisations qui possèdent les mêmes interpolants en vitesse et en pression. Les interpolants sont, selon le cas, bilinéaires en temps et en espace ($P_1(\mathbf{x}) \times P_1(t)$) ou linéaires en espace et constants en temps ($P_1(\mathbf{x}) \times P_0(t)$). Ces espaces de discrétisation reposent sur des éléments de type extrudé (maillage structuré) et conduisent à des solutions stables en dépit du fait qu'elles ne vérifient pas la condition «inf-sup». Les fonctions d'interpolation linéaires en espace et en temps ($P_1(\mathbf{x},t)$) basées sur les éléments de type simplex ont été mentionnées par certains auteurs (Varoglu et Finn, 1982; Bajer, 1986, 1987; Hughes et Hulbert, 1988; Hulbert et Hughes, 1990; Behr et Tezduyar, 1994) mais demeurent très peu utilisées. Leur utilisation pour les problèmes bidimensionnels constitue l'un des axes de ce travail.

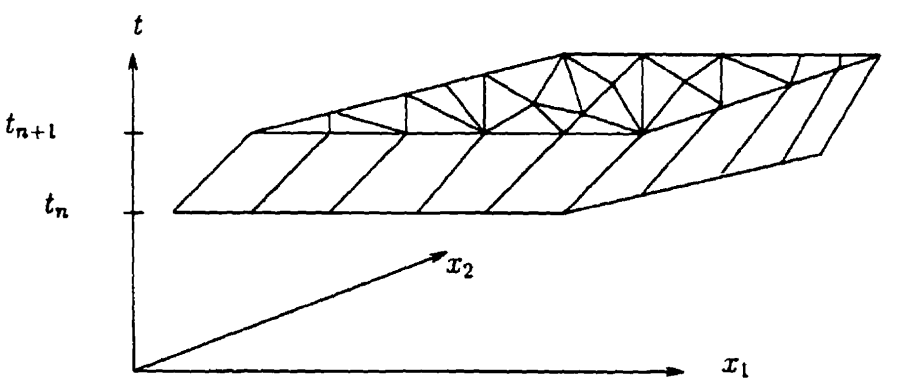


Figure 2.7 Maillage espace-temps aligné

CHAPITRE 3

L'ÉLÉMENT MINI ESPACE-TEMPS

Dans ce chapitre, nous présentons l'élément mini espace-temps ainsi que la preuve de sa stabilité. Mais auparavant, nous allons rappeler la condition inf-sup dans le contexte du problème de Stokes stationnaire et ensuite la généraliser au contexte des formulations éléments finis espace-temps.

3.1 La condition inf-sup

Selon Johnson et al. (1984), les propriétés mathématiques de la méthode de Galerkin discontinue en temps, pour les problèmes d'évolution sont semblables à celles de la méthode de Galerkin pour les problèmes stationnaires. Ainsi, tout comme la méthode de Galerkin, le choix des espaces de discrétisation (vitesse et pression) est soumis à une condition de compatibilité. Le respect de cette condition permet, d'abord d'éviter l'effet bloquant («locking effect») qui est caractérisé par le fait que l'ensemble des solutions à divergence nulle se réduit à la solution nulle, et ensuite d'éviter le problème des modes de pressions artificielles («spurious pressure modes») ou des pressions en damier («cherkerboard pressure») qui se manifeste par la présence de pressions parasites qui polluent la solution numérique.

3.1.1 Le problème de Stokes

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et soit Γ sa frontière. On considère le problème de Stokes stationnaire et homogène. Il s'agit de trouver le champ de vecteur vitesse

$$\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

et le champ de pression

$$p : \Omega \to \mathbb{R}$$

telles que pour la donnée d'une force volumique $\mathbf{f}$, les équations suivantes soient vérifiées:

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\nabla} \cdot (2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega; \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega; \\ \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.1}$$

Ce problème découle des équations de Navier-Stokes stationnaires en négligeant le terme non linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$.

Afin de discrétiser ces équations par la méthode des éléments finis, on commence par donner la formulation variationnelle associée à ce problème. Considérons à cet effet, les espaces fonctionnels suivants: $V = (H_0^1(\Omega))^2, Q = L_0^2(\Omega)$ et V_{div}, l'espace des fonctions de V à divergence nulle. Ainsi, la forme faible mixte du problème (3.1) est:

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u},p) \in V \times Q \text{ tel que :} \\ a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) = (\mathbf{f},\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V; \\ b(\mathbf{u},q) = 0, \quad \forall q \in Q \end{cases} \tag{3.2}$$

où

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 2\mu \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\, \mathrm{d}\Omega$$

et

$$b(\mathbf{u},q) = -\int_\Omega q \nabla \cdot \mathbf{u}\, \mathrm{d}\Omega.$$

Le problème (3.2) étant écrit sous forme mixte, l'existence et l'unicité de la solution $(\mathbf{u},p)$ sont alors assurés par le théorème 3.1 dû à Brezzi (1974).

Théorème 3.1. *La solution de* (3.2) *existe et est unique si:*

i) la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue sur $V \times V$:

$$\exists c > 0 \text{ tel que } |a(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq c\|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V, \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V;$$

ii) la forme bilinéaire $a(.,.)$ est elliptique[1] *sur V_{div}:*

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_V^2, \forall \mathbf{u} \in V_{div};$$

iii) la forme bilinéaire $b(.,.)$ satisfait la condition inf-sup:

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{|b(\mathbf{v},q)|}{\|\mathbf{v}\|_V \|q\|_Q} \geq \beta.$$

Esquisse de la démonstration:
La continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ découle de l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz tandis que l'ellipticité sur l'espace V_{div} découle de l'application des inégalités de Korn et de Poincaré. La condition inf-sup de la forme $b(.,.)$ découle quant à elle du fait que l'opérateur divergence est un isomorphisme de $V_{div}^{\perp}$ dans $L_0^2(\Omega)$ (voir Temam, 1969; Girault et Raviart, 1979). ■

Soit T_h, une triangulation de Ω. L'indice h caractérise la taille du maillage et est destiné à tendre vers 0. Soient V_h et Q_h des sous espaces de dimension finie approximant respectivement V et Q. On considère ensuite le sous espace de V_h, $V_{div_h} = \{\mathbf{v}_h \in V_h | (\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h\}$. La discrétisation par éléments finis (méthode de Galerkin) du problème (3.2) conduit au problème mixte approché (discret) suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que :} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h; \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0, \qquad \forall q_h \in Q_h \end{cases} \tag{3.3}$$

obtenu en remplaçant respectivement $\mathbf{u}, \mathbf{v}, p$ et q par $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, p_h$ et q_h. Sous les hypothèses d'existence et d'unicité de la solution $(\mathbf{u},p)$ du problème continue (voir théorème 3.1), l'existence, l'unicité et la convergence de la solution discrète $(\mathbf{u}_h,p_h)$ sont assurés par le théorème 3.2 (voir Brezzi et Fortin, 1991):

Théorème 3.2. *Le problème* (3.3) *admet une solution unique* $(\mathbf{u}_h,p_h) \in V_h \times Q_h$ *sous les hypothèses suivantes:*

1. Certains auteurs disent que $a(.,.)$ est coercive.

i) il existe une constante positive α telle que

$$a(\mathbf{u}_h,\mathbf{u}_h) \geq \alpha \|\mathbf{u}_h\|_V^2, \forall \mathbf{u}_h \in V_{div_h}; \tag{3.4}$$

ii) il existe une constante positive β indépendante de h telle que

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{|b(\mathbf{v}_h,q_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_V \|q_h\|_Q} \geq \beta. \tag{3.5}$$

De plus on a la majoration d'erreur

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V + \|p - p_h\|_Q \leq C \left\{ \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - p_h\|_Q \right\}$$

avec C une constante positive qui dépend de α et β. ■

La condition inf-sup discrète (3.5) définit la compatibilité entre les espaces V_h et Q_h, qui ne peuvent pas être choisis indépendamment l'un de l'autre. Elle est aussi connu sous le nom de condition de Brezzi-Babuška ou encore condition LBB (Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi).

Dans le but de généraliser cette condition au contexte de l'espace-temps, nous allons considérer le problème de Stokes instationnaire. Ainsi, pour tout $T > 0$, il s'agit de trouver une fonction vectorielle

$$\mathbf{u} : \Omega \times]0,T[\rightarrow \mathbb{R}^2$$

et une fonction scalaire

$$p : \Omega \times]0,T[\rightarrow \mathbb{R}$$

telles que pour la donnée d'une condition initiale $\mathbf{u}_0$ et d'une force volumique $\mathbf{f}$, les

équations suivantes soient vérifiées:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times]0,T[; \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0,T[; \\ \mathbf{u}(\mathbf{x},t=0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{sur } \Omega; \\ \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma \times]0,T[. \end{cases} \tag{3.6}$$

La discrétisation du problème (3.6) par éléments finis espace-temps découle de la méthode de Galerkin discontinue en temps (voir chapitre 2). Le domaine espace-temps $\Omega \times [0,T]$ est subdivisé en une série de tranches espace-temps $S_n = \Omega \times [t_n,t_{n+1}]$, $0 \leq n \leq N-1$. On considère ensuite $\mathcal{T}_h$ une discrétisation de la tranche espace-temps S_n (Ici, le paramètre h caractérise la taille du maillage espace-temps destinée à tendre vers 0) et on introduit $\mathcal{M}_h$ et $\mathcal{X}_h$ des sous espaces de dimension finie approximant respectivement les espaces $\mathcal{M} = L^2(t_n,t_{n+1};V)$ et $\mathcal{X} = L^2(t_n,t_{n+1};Q)$ munis respectivement des normes $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$. Ainsi, pour la donnée de la condition initiale $\mathbf{u}_-^n$ (solution au temps t_n de la tranche précedente), la discrétisation du problème (3.6) sur la tranche S_n revient à la formulation variationnelle discrète suivante:

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}_h,p_h) \in \mathcal{M}_h \times \mathcal{X}_h \text{ tel que :} \\ \widetilde{a}(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) + \widetilde{b}(\mathbf{v}_h,p_h) = ((\mathbf{f},\mathbf{v}_h)), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{M}_h; \\ \widetilde{b}(\mathbf{u}_h,q_h) = 0, \qquad \forall q_h \in \mathcal{X}_h \end{cases} \tag{3.7}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{a}(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) &= \int_{S_n} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_h \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + 2\mu \int_{S_n} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + \int_{\Omega} \mathbf{u}_+^n \cdot \mathbf{v}_+^n \, \mathrm{d}\Omega, \\ ((\mathbf{f},\mathbf{v}_h)) &= \int_{S_n} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + \int_{\Omega} \mathbf{u}_-^n \cdot \mathbf{v}_+^n \, \mathrm{d}\Omega \\ \text{et} & \\ \widetilde{b}(\mathbf{u}_h,q) &= -\int_{S_n} q \nabla \cdot \mathbf{u}_h \, \mathrm{d}\Omega \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Le problème (3.7) étant écrit sous forme mixte, l'existence et l'unicité de la solution $(\mathbf{u}_h,p_h)$ sont assurés par le théorème 3.2. Pour sa part, la condition (3.4) revient a

montrer l'ellipticité de la forme bilinéaire $\widetilde{a}(.,.)$ sur l'espace

$$\mathcal{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathcal{M}_h | \widetilde{b}(\mathbf{v}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in \mathcal{X}_h \right\}$$

comme le démontre le lemme suivant.

Lemme 3.1. *La forme bilinéaire $\widetilde{a}(.,.)$ est ellitique sur $\mathcal{V}_h$.*

Preuve:

Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$, de l'égalité

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2 = 2\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}\, \mathrm{d}\Omega, \tag{3.8}$$

on obtient en intégrant sur $[t_n, t_{n+1}]$

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}\, \mathrm{d}\Omega)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2 \mathrm{d}t & (3.9) \\ &= \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_-^{n+1}\|^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_+^n\|^2. & (3.10) \end{aligned}$$

D'autre part, les inégalités de Korn de Poincaré (voir Temam, 1969) induisent

$$\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\, \mathrm{d}\Omega \geq \|\mathbf{u}\|_V^2. \tag{3.11}$$

De l'égalité (3.10) et de l'inégalité (3.11), on en déduit que

$$\begin{aligned} \widetilde{a}(\mathbf{u},\mathbf{u}) &= \int_{S_n} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}\, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + 2\mu \int_{S_n} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + \int_\Omega \mathbf{u}_+^n \cdot \mathbf{u}_+^n\, \mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{1}{2}(\|u_-^{n+1}\|^2 - \|u_+^n\|^2) + 2\mu \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\, \mathrm{d}\Omega)\mathrm{d}t + \|u_+^n\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(\|u_-^{n+1}\|^2 + \|u_+^n\|^2) + 2\mu \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\, \mathrm{d}\Omega)\mathrm{d}t \\ &\geq 2\mu \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\mathbf{u}\|_V^2\, \mathrm{d}t = 2\mu \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{M}}^2. \end{aligned}$$

Ainsi la forme $\widetilde{a}(.,.)$ est elliptique sur $\mathcal{M}$ et en particulier sur $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{M}$. ■

Remarque 3.1. *Pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$, le résultat (3.8) est encore vrai si on considère un domaine variable Ω_t. En effet, pour tout $\mathbf{u} \in L^2(0,T;(H^1(\Omega_t))^2)$ et sous l'hy-*

pothèse que la variation de surface induite par la déformation infinitésimale de la frontière Γ_t de Ω_t est négligeable par rapport à la surface de Ω_t, on a:

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2 = 2\int_{\Omega_t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u}\, d\Omega - 2\int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^2 \mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma, \quad \forall t \in]0,T[,$$

où $\mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n}$ représente la composante normale de la vitesse de la déformation de la forntière Γ_t de Ω_t. Ainsi, dans le cas où $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$ (trace nulle au bord), l'intégrale au bord est nulle et on obtient l'égalité (3.8).

La condition inf-sup (3.5) revient dans le contexte de l'espace-temps à trouver une constante positive β indépendante de h telle que

$$\inf_{q_h \in \mathcal{X}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{M}_h} \frac{|\tilde{b}(\mathbf{v}_h, q_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{M}} \|q_h\|_{\mathcal{X}}} \geq \beta. \tag{3.12}$$

Cette condition est l'analogue espace-temps de la condition de Brezzi-Babuška et définit la compatibilité entre les espaces $\mathcal{M}_h$ et $\mathcal{X}_h$. Cette condition sera vérifiée à la section suivante dans le cas de l'élément mini espace-temps.

Remarque 3.2. *Dans le contexte espace-temps, le problème devient en fait un problème 3-D. Cependant, il faut noter que la différence fondamentale entre la condition* inf-sup *en 3D et celle en 2-D + temps est que l'opérateur divergence est défini seulement par rapport aux variables spatiales. En effet, on a*

$$(\nabla \cdot u)_{2-D+temps} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

et

$$(\nabla \cdot u)_{3-D} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

3.1.2 L'élément mini espace-temps (2-D + temps)

Proposée initialement par Arnold, Brezzi et Fortin (1984), l'idée d'enrichir l'espace des vitesses par une fonction bulle, permet dans certains cas de construire des éléments stables. Cette idée est aussi valable en espace-temps et a motivé la construction d'éléments de cette famille. Nous présentons maintenant l'élément mini

espace-temps (2-D + temps) qui est l'élément le plus simple et le moins coûteux de cette famille.

Soit $\mathcal{T}_h$, un maillage de tétraèdres discrétisant la tranche espace-temps S_n. Pour chaque tétraèdre K, on considère les 4 tétraèdres internes $K_i, i = 1,2,3,4$ obtenus, en reliant les 4 sommets au barycentre et on pose

$$B_1(K) \;=\; \{b \in H^1_{\Sigma_n}(S_n) \,|\, b|_{K_i} \in P_1(K_i) \cap H^1_0(K), K \in \mathcal{T}_h, i = 1,2,3,4\}.$$

Afin de décrire l'élément mini espace-temps, on pose pour les vitesses,

$$\mathcal{M}_h \;=\; \{v_h \in (C^0(S_n))^2 \,|v_h|_K \in (P_1(K))^2, \quad \forall K \in T_h\} \oplus (B_1(K))^2,$$

c'est-à-dire l'ensemble des fonctions continues et définies par la somme d'une fonction continue linéaire et d'une fonction bulle. La bulle standard est remplacée par une fonction nulle sur la frontière de l'élément K et linéaire par morceau sur les 4 tétraèdres internes à l'élément. La bulle est en fait considérée comme 4 sousfonctions linéaires. Pour la pression, on pose,

$$\mathcal{X}_h \;=\; \{q_h \in (C^0(S_n)) \,|q_h|_K \in P_1(K) \;\; \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des fonctions linéaires et continues sur K. Il en découle que les nœuds d'interpolation sont, pour les vitesses, les 4 sommets et le barycentre du tétraèdre et, pour la pression, les 4 sommets seulement. On obtient ainsi 10 degrés de liberté en vitesse (2 par nœud) et 4 en pression (voir figure 3.1), contrairement à l'élément mini standard 3D qui possède 15 degrés de liberté en vitesse (3 par nœud).

Remarque 3.3. *On construit de façon similaire en trois dimensions d'espace, l'élément mini espace-temps 3-D + temps, en appliquant la même technique aux hypertétraèdres.*

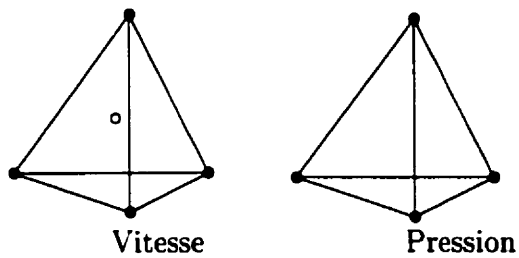


Figure 3.1 Position des degrés de liberté pour l'élément mini 2-D + temps

3.2 Vérification de la condition *inf-sup*

Les techniques standards de preuve de la condition (LBB) sont basées sur le lemme 3.2 dénommé critère de Fortin (voir Brezzi et Fortin, 1991).

Lemme 3.2. *La condition inf-sup* (3.5) *est équivalente à l'existence d'un opérateur d'interpolation:*

$$\begin{aligned} \Pi_h : V &\longrightarrow V_h \\ u &\longmapsto \Pi_h u \end{aligned}$$

vérifiant:

$$\int_\Omega \nabla \cdot (u - \Pi_h u) q_h \, \mathrm{d}\Omega = 0, \quad \forall q_h \in Q_h, \tag{3.13}$$

$$\|\Pi_h u\|_V \leq c\|u\|_V, \quad c > 0 \text{ indépendante de } h, \tag{3.14}$$

où la norme V représente la norme sur l'espace V.

En général, l'opérateur Π_h sera une composition des deux opérateurs $\Pi_1 \in \mathcal{L}(V,V_h)$ et $\Pi_2 \in \mathcal{L}(V,V_h)$ vérifiants:

$$\|\Pi_1 v\|_V \leq c_1\|v\|_V, \quad \forall v \in V; \tag{3.15}$$

$$\|\Pi_2(I - \Pi_1)v\|_V \leq c_2\|v\|_V, \quad \forall v \in V; \tag{3.16}$$

$$\int_\Omega \nabla \cdot (v - \Pi_2 v) q_h \, \mathrm{d}\Omega = 0, \quad \forall v \in V, \forall q_h \in Q_h, \tag{3.17}$$

où les constantes c_1 et c_2 sont indépendantes de h et on pose:

$$\Pi_h u = \Pi_1 u + \Pi_2(u - \Pi_1 u). \tag{3.18}$$

Cette définition de l'opérateur Π_h a été initialement proposée par Fortin (1984). L'un des problèmes dans la construction de l'opérateur Π_1 (le premier à agir sur **u**) est dû au manque de régularité des fonctions de $H^1(\Omega)$ (les fonctions ne sont pas *a priori* continues). Ainsi Π_1 ne pourra pas être un opérateur d'interpolation. Pour pallier à cet inconvénient, on aura recours à l'opérateur de Clément (1975). Cet opérateur est construit par «régularisation locale» et consiste en une projection sur un macro-élément («patch») suivie d'une interpolation standard. Cet opérateur a été initialement construit sur des maillages de triangles par Clément (1975) et généralisé, dans un premier temps, aux maillages de quadrilatères par Fortin (1984) et ensuite aux maillages de «d-simplex» (triangles, tétraèdres, hyper-tétraèdres, etc.) par Bernardi (1989). Pour les plus récents développements concernant cet opérateur, on renvoie aux travaux de Bernardi et Girault (1998).

Dans le cas des éléments à pression continue, l'opérateur Π_1 est celui de Clément pour lequel:

$$\sum_K h_K^{2m-2}|v - \Pi_1 v|_{m,K}^2 \leq c\|v\|_{1,\Omega}^2, \quad m = 0,1, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.19}$$

L'opérateur Π_2, quant à lui, est construit sur chaque élément K de façon à ce que la condition (3.17) soit vérifiée et tel que:

$$\|\Pi_2 v\|_{1,K} \leq c(h_K^{-1}\|v\|_{0,K} + |v|_{1,K}). \tag{3.20}$$

On peut ainsi reformuler le critère de Fortin qui, à l'aide des remarques précédentes, devient le lemme suivant.

Lemme 3.3. *Soit V_h défini de telle sorte qu'il existe un opérateur d'interpolation par régularisation locale au sens de Clément $\Pi_1 : V \to V_h$ qui satisfait (3.19). Si on construit un opérateur $\Pi_2 : V \to V_h$, vérifiant (3.17) et (3.20) alors l'opérateur Π_h vérifie le lemme 3.2 et la condition inf-sup est ainsi satisfaite.*

Nous référons le lecteur au livre de Brezzi et Fortin (1991) pour la démonstration des lemmes (3.2) et (3.3).

Munis de ces résultats préliminaires, nous sommes maintenant en mesure de présenter la contribution mathématique originale de cette thèse qui se résume en la proposition suivante.

Proposition 3.1. *L'élément mini espace-temps satisfait la condition inf-sup (3.12).*

Preuve:

La preuve est basée sur la construction des opérateurs Π_1 et Π_2 du lemme (3.3).

i) Construction de l'opérateur Π_1

L'opérateur Π_1 est celui de Clément. Pour les maillages de tétraèdres cet opérateur existe et on trouve dans Bernardi (1989) les détails de sa construction dans le cas général des maillages de «d-simplex» (tétraèdres, hyper-tétraèdres, etc.). Ainsi, en appliquant le lemme (3.3), nous avons seulement besoin de construire l'opérateur Π_2 vérifiant (3.17) et (3.20) pour que la preuve soit complète.

ii) Construction de l'opérateur Π_2

Pour chaque élément $K \in \mathcal{T}_h$, on considère $b_K \in B_1(K)$, une fonction linéaire par morceaux sur les 4 tétraèdres internes à l'élément K; elle vaut 1 au barycentre et 0 sur la frontière de l'élément.

L'opérateur Π_2 est défini par

$$\begin{aligned} \Pi_2 : \quad \mathcal{M} &\to (B_1(K))^2 \\ \mathbf{v} &\to \boldsymbol{\alpha}\, b_K \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2$ est donné par

$$\boldsymbol{\alpha} = \left[\int_K \mathbf{v}\, \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t\right] \left[\int_K b_K\, \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t\right]^{-1}.$$

Ainsi, pour l'élément mini espace-temps ($\mathbf{v}_h \in (P_1(K))^2 \oplus (B_1(K))^2$), on a

construit l'opérateur Π_2 de façon à satisfaire

$$\begin{cases} \Pi_2 \mathbf{v}|_K \in (B_1(K))^2; \\ \displaystyle\int_K (\Pi_2 \mathbf{v} - \mathbf{v})\, \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \end{cases} \tag{3.21}$$

Par ailleurs, puisque $\Pi_2 \mathbf{v}|_K \in (B_1(K))^2$, on montre par la technique de passage à l'élément de référence (Dupont et Scott, 1980), l'inégalité inverse

$$\|\Pi_2 \mathbf{v}\|_{1,K} \leq c h_K^{-1} \|\mathbf{v}\|_{0,K}, \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

et l'inégalité (3.20) suit immédiatement. Dans l'inégalité inverse ci-dessus, le paramètre h_K caractérise la taille de l'élément tétrahédrique espace-temps.

Pour compléter la preuve, il faut montrer que l'équation (3.17) est vérifiée. Les pressions étant continues d'un élément à l'autre ($Q_h \subset C^0(S_n)$), on obtient en intégrant par parties:

$$\begin{aligned} \int_{S_n} \nabla \cdot (\Pi_2 \mathbf{v} - \mathbf{v}) q_h \, \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t &= \int_{I_n} \Big(\int_\Omega \nabla \cdot (\Pi_2 \mathbf{v} - \mathbf{v}) q_h \, \mathrm{d}\Omega \Big) \mathrm{d}t \\ &= - \int_{I_n} \int_\Omega (\Pi_2 \mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot \nabla q_h \, \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

où les opérateurs gradient et divergence sont définis par rapport aux variables d'espace seulement. Sous la condition de régularité, $\mathbf{v} \in L^1(t_n, t_{n+1}; (H^1(\Omega))^2)$, le théorème de Fubini garanti l'existence de l'intégrale précédente et on a:

$$\int_{I_n} \int_\Omega (\Pi_2 \mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot \nabla q_h \, \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t = \int_{S_n} (\Pi_2 \mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot \nabla q_h \, \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, la pression étant linéaire sur chaque élément, son gradient est donc constant et en vertu de (3.21), il vient que:

$$\int_{S_n} (\Pi_2 \mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot \nabla q_h \, \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t = \sum_K \int_K (\Pi_2 \mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot \nabla q_h \, \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t = 0,$$

la condition 3.17 est ainsi satisfaite et la preuve est complète. ■

Remarque 3.4. *Bien que l'opérateur gradient soit seulement défini par rapport*

aux variables d'espace, il est nécessaire et suffisant que les approximations soient linéaires en espace-temps ($\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \in P_1(\mathbf{x},t)$) *et non pas seulement linéaire en espace afin d'obtenir un gradient le pression constant par élément* ($\nabla q_h \in (P_0(K))^2$). *Les éléments extrudés bilinéaires et trilinéaires ne pourront donc pas être stabilisés à l'aide de cette technique.*

Remarque 3.5. *Pour l'élément mini espace-temps, l'opérateur* Π_h *du critère de Fortin existe et est une composition des opérateurs* Π_1 *(opérateur de Clément) et* Π_2 *(solution de l'équation* (3.21)*) selon la relation* (3.18). *En effet, pour* $\mathbf{v} \in (H^1_{\Sigma_n}(S_n))^d$, $\Pi_h\mathbf{v}$ *est défini par les valeurs de l'opérateur de Clément aux sommets* (som^i) *du maillage i.e.*

$$\Pi_h\mathbf{v}(som^i) \;=\; \Pi_1\mathbf{v}(som^i).$$

Pour sa part, la valeur de $\Pi_h\mathbf{v}$ *au centre des éléments est choisie telle que:*

$$\int_K \Pi\mathbf{v}\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t = \int_K \Pi_2\mathbf{v}\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t = \int_K \mathbf{v}\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Remarque 3.6. *La preuve ci-dessus, s'étend aisément à l'élément mini espace-temps en dimension 3 (3-D + temps). L'opérateur* Π_1 *est encore celui de Clément et on trouve dans Bernardi (1989) les détails relatifs à sa construction sur des hyper-tétraèdres. L'opérateur* Π_2*, quant à lui, est construit sur des hyper-tétraèdres comme la solution d'un problème similaire à* (3.21).

CHAPITRE 4

LES SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Ce chapitre présente les résultats de simulations numériques de la discrétisation des équations de Navier-Stokes pour quelques problèmes en dimension 2. Dans un premier temps, nous allons résoudre une série de problèmes afin d'illustrer les effets liés à la violation de la condition inf-sup et vérifier la stabilité de l'élément mini espace-temps sous cette condition. Ensuite, nous allons étudier le comportement et illuster l'enveloppe d'utilisation de la formulation stable obtenue avec l'élément mini espace-temps; pour ce faire, nous allons la comparer à la méthode «GLS/ST» (2.5) pour une série de problèmes en coordonnées cartésiennes et axisymétriques. Finalement, nous allons présenter des résultats numériques dans le cadre d'un écoulement dans un domaine en mouvement.

En préambule aux simulations numériques, on présente les outils numériques utilisées pour la construction de maillages espace-temps, la résolution des problèmes discrets et le post-traitement des solutions.

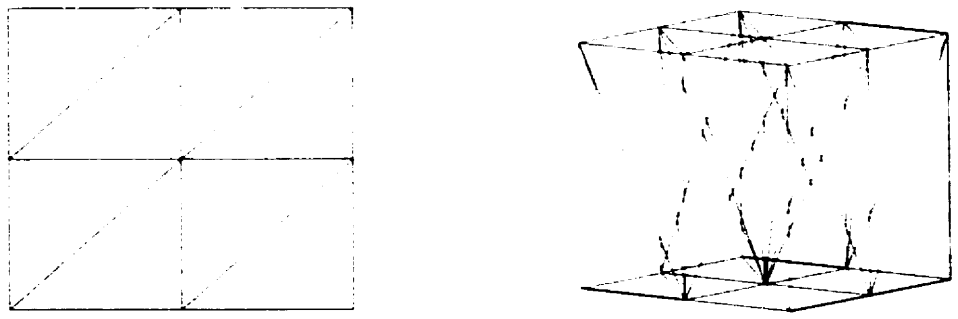
4.1 Les outils numériques

4.1.1 Le maillage espace-temps

Afin de discrétiser les tranches espace-temps (voir figure 2.2), nous avons retenu les éléments géométriques de type simplex en $2D + temps$, à savoir les tétraèdres. Ce choix a d'abord été motivé, par l'élément mini espace-temps; ensuite, par le fait que les tétraèdres sont plus aptes à mailler des domaines courbes (les domaines variables) et finalement, parce que l'utilisation d'éléments de type simplex conduit à des maillages non structurés et permet, en plus, d'éviter l'interpolation à l'interface de deux tranches lors du calcul du terme de saut (2.2).

Par ailleurs, bien que ce type d'élément soit peu utilisé, la nature non-structurée des maillages obtenus, permet de développer des stratégies adaptatives espace-temps. Ces stratégies vont permettre de raffiner le maillage en espace-temps (Hughes et Hulbert, 1988; Hulbert et Hughes, 1990; Froncioni et al., 1997) contrairement aux éléments de type extrudé qui permettent de raffiner le maillage en espace et en temps (épaisseur de la tranche) de façon découplée (Eriksson, 1988; Eriksson et Johnson, 1991; Li et Wiberg, 1998; Wiberg et Li, 1999).

Le maillage espace-temps initial est construit à partir d'un maillage du domaine Ω au temps t_n. Pour illustrer la méthode utilisée, on considère, par exemple T_h, le maillage de triangles discrétisant le domaine Ω au temps t_n (voir figure 4.1(a)). Le maillage de triangles est extrudé (orthogonalement) dans la direction du temps en un maillage de prismes de hauteur $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Selon le cas, ces prismes sont déformés pour tenir compte du déplacement du domaine au temps t_{n+1}. Les prismes sont ensuite subdivisés en 3 tétraèdres, afin d'obtenir un maillage conforme de tétraèdres (figure 4.1(b)), et cela sans ajout de nœuds supplémentaires dans la tranche espace-temps.



(a) T_h, maillage initial de triangles

(b) Maillage final de tétraèdres

Figure 4.1 Génération du maillage espace-temps

L'extrusion de triangle en prisme est immédiate, par contre la subdivision du maillage de prismes en tétraèdres est un peu délicate. On commence par diviser les 3 faces quadrilatérales de chaque prisme en 2 triangles, puis on subdivise chaque

prisme en 3 tétraèdres à partir des faces triangulaires. Chaque face quadrilatérale peut être divisée en 2 triangles de deux manières différentes. Parmi les huit configurations, seulement six (voir figure 4.2) peuvent être décomposées directement en 3 tétraèdres. Afin d'éviter les deux configurations (voir figure 4.3), caractérisées par le fait que les 3 diagonales divisant les 3 faces quadrilatérales en triangles ne possèdent aucun sommet en commun, nous avons retenu la méthode de Dompierre et al. (1999) pour la division des faces quadrilatérales en 2 triangles.

Cette méthode est directe (non-itérative) et est basée sur l'utilisation d'identificateurs associés aux sommets du maillage. En général, cet identificateur est le numéro global du sommet. Après avoir ordonné les sommets (du plus petit au plus grand), selon la numérotation globale, la méthode se résume en la règle suivante:

Une face quadrilatérale est divisée en 2 triangles par la diagonale issue du plus petit sommet de la face.

Cette méthode est appliquée localement (élément à élément) et ne nécessite pas d'information sur le voisinage de chaque élément.

Le maillage espace-temps étant construit à partir du maillage en espace, l'emphase a été mise sur la construction du maillage de triangles discrétisant le domaine espace Ω au temps t_n. Les maillages en dimension 2 ont été construits à l'aide du logiciel ADX (Trépanier et Yang, 1993).

4.1.2 Les algorithmes de résolution

Afin d'aider à identifier les caractéristiques physiques des écoulements et éviter les problèmes que pourraient engendrer des géométries de petites dimensions (erreur de troncature, convergence lente), les équations de Navier-Stokes sont adimensionalisées de façon classique, en remplaçant la *densité* ρ (constante) par 1 et la *viscosité dynamique* μ par $1/Re$. Le *nombre de Reynolds* Re représente le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité et est défini par:

$$Re = \frac{U_\infty L}{\nu},$$

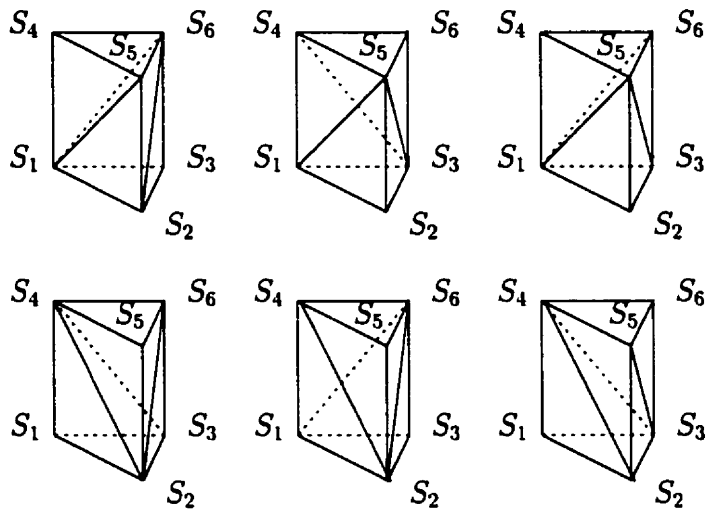


Figure 4.2 Les 6 configurations décomposables en 3 tétraèdres sans ajout de nœud.

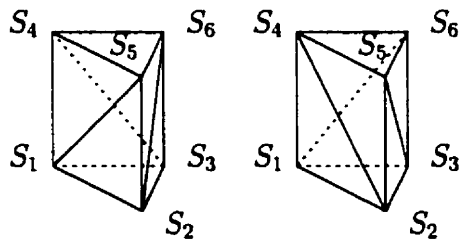


Figure 4.3 Les 2 configurations décomposables en 3 tétraèdres avec l'ajout d'un nœud.

où U_∞ est une vitesse caractéristique de l'écoulement étudié (par exemple la vitesse du mouvement d'un corps ou la vitesse moyenne dans une section déterminée du canal, etc.), $\nu = \mu/\rho$ est *la viscosité cinématique* du fluide et L est une longueur caractéristique (par exemple le diamètre ou la longueur d'un corps, la largeur intérieure d'un canal, etc.).

Tout au long de ce travail, nous avons utilisé essentiellement deux éléments tétraédriques espace-temps. Le premier est l'élément appelé $P_1 - P_1$ et est illustré par la figure 4.4. Pour cette combinaison, on approche les composantes de la vitesse et la pression par des fonctions linéaires et continues. Les nœuds de calcul (vitesse et pression) sont situés aux 4 sommets. On obtient ainsi, pour chaque élément 8 degrés de liberté en vitesse et 4 en pression. Cet élément ne vérifie pas la condition *inf-sup*, mais conduit à des solutions stables en utilisant les formulations stabilisées (2.4) et (2.5). Le second est l'élément mini espace-temps ($2D + temps$) (voir figure 3.1). Les fonctions de base associées aux nœuds internes ont un support qui se limite à un élément. Les degrés de liberté correspondants ne sont liés à aucun autre degré liberté que ceux de l'élément. Pour cette raison et pour économiser de l'espace mémoire, nous avons éliminé par *condensation statique* les degrés de liberté de la bulle au niveau élémentaire avant l'assemblage. On se ramène ainsi à la résolution du problème discret comme dans le cas de l'élément $P_1 - P_1$.

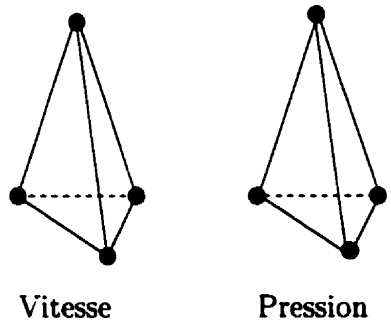


Figure 4.4 Position des degrés de liberté pour l'élément $P_1 - P_1$

Pour les éléments utilisés (mini espace-temps et $P_1 - P_1$) la discrétisation des formulations espace-temps conduit à un sytème global non linéaire, mixte en $(\mathbf{u},p)$. Ce système est résolu de façon couplée à l'aide d'une méthode de quasi-Newton.

Les matrices jacobiennes sont évaluées numériquement. Les systèmes linéaires sont résolus par la méthode de décomposition LU en correction. On cherche à annuler itérativement le résidu du système matriciel non-linéaire qui résulte des équations de Navier-Stokes discrétisées en vitesse-pression.

À l'aide de ces outils numériques, les problèmes discrets sont résolus de façon séquentielle (tranche après tranche) en partant d'une condition initiale identiquement nulle ($\mathbf{u}_0^- = 0$).

4.1.3 Post-traitement des solutions

Les variables dépendantes des équations de Navier-Stokes discrétisées sont la vitesse $\mathbf{u}_h$ et la pression p_h. Ces quantités sont obtenues pour chaque temps t_n, directement de la résolution par éléments finis. Pour fins d'analyse, les dérivées spatiales du champ de vitesse ($\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$), la vorticité et la fonction de courant doivent être déduites de la solution numérique $\mathbf{u_h}$. Les dérivées du champ de vitesse sont evaluées localement aux nœuds de chaque élément du maillage à l'aide des fonctions d'interpolation et de la solution calculée. Cependant, étant donné que les fonctions d'interpolation pour les éléments utilisés sont linéaires et continues par élément, les dérivées sont alors constantes et discontinues par élément; ce qui représente une approximation assez pauvre de ces quantités. Pour pallier à cette insuffisance, nous avons retenu une approche basée sur la technique de projection locale par moindres carrés de Labbé et Garon (1995), inspirée des travaux de Zienkiewicz et Zhu (1992a,b). Contrairement à la projection globale (Zienkiewicz et Zhu, 1987), la méthode est locale et ne requiert pas la construction et la résolution d'un système de même taille que celui de la solution $\mathbf{u}_h$. Cette approche rend les dérivées continues en projetant, les dérivées de la solution numérique sur une base polynômiale $\mathbf{P}$ du même degré que les fonctions d'interpolation de la solution numérique. Ainsi, cette nouvelle représentation des dérivées devrait mieux approcher les dérivées de la solution. Les détails de cette méthode sont présentés à l'annexe A.

4.2 Vérifications

Afin de vérifier la stabilité de l'élément mini espace-temps, nous avons considéré les trois tests suivants: le problème de Poiseuille, le test «no-flow» et le problème du cylindre. Les deux premiers tests sont des écoulements assez simples et conduisent à des solutions stationnaires. Le dernier, conduit plutôt à une solution transitoire (périodique) et au développement de l'allée de Von Karman. Bien que ces problèmes soient relativement simples, ils nous ont permis d'illustrer les effets numériques liés à la condition inf-sup.

4.2.1 Le problème de Poiseuille

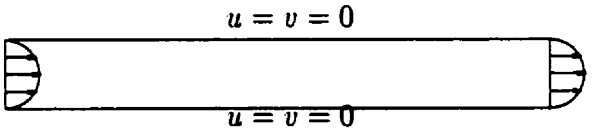


Figure 4.5 Domaine de calcul pour le problème de Poiseuille

Description du problème et procédures de calcul

Il s'agit de l'écoulement d'un fluide dans un canal avec un profil de vitesse parabolique imposée en entrée. Ce problème est simple et possède une solution analytique. En effet, si H est la hauteur du canal, la solution analytique des équations de Navier-Stokes est

$$\mathbf{u} = \left(\frac{4y}{H^2}(H-y),0\right), \text{ et } p = \frac{-4x}{H^2} + \text{constante}.$$

Le champ de vitesse est parabolique pour la première composante (l'autre composante est nulle) et la pression est linéaire. Afin d'illustrer les effets numériques liés à la violation de la condition *inf-sup*, nous avons considéré trois éléments pour le problème de Poiseuille. À savoir l'élément $P_1 - P_0$ (voir figure 4.6(a)), l'élément $Q_1 - P_0$ (voir figure 4.6(b)) et l'élément mini espace-temps (2-D + temps).

L'élément $P_1 - P_0$ est caractérisé par un champ de vitesse linéaire ($P_1(\mathbf{x},t)$) et un interpolant en pression constant par élément. Pour l'élément $Q_1 - P_0$, on approche les composantes de la vitesse par des fonctions bilinéaires ($P_1(\mathbf{x}) \times P_1(t)$) tandis que la pression est constante par élément. Pour ces deux éléments, les nœuds de calcul sont situés aux sommets pour la vitesse et au barycentre pour la pression. On obtient ainsi 8 degrés de liberté en vitesse et 1 en pression pour chaque tétraèdre et 12 degrés de liberté en vitesse et 1 en pression pour chaque prisme.

(a) $P_1 - P_0$ (b) $Q_1 - P_0$

Figure 4.6 Position des degrés de libertés

Une façon intuitive de déterminer si une discrétisation est stable ou non est de calculer son *ratio de contrainte* C_r sur un maillage donné. Ce nombre est défini par

$$C_r = (dimQ_h - 1)/dimV_h,$$

et représente le rapport du nombre des contraintes indépendantes sur celui des inconnues en vitesse. La valeur de ce nombre n'est pas très significative sauf si elle est plus grande que 1. Dans ce cas, le nombre des contraintes dépasse celui des variables et l'ensemble des solutions à divergence nulle se réduit à la seule solution nulle. C'est ce qu'on appelle l'effet bloquant («locking effect»). Pour le maillage illustré à la figure 4.7, les ratios de contraintes pour les trois éléments sont donnés par le tableau 4.1 et montrent que l'effet bloquant se produit pour l'élément $P_1 - P_0$ (tétraèdre).

Les tests réalisés avec l'élément $P_1 - P_0$, donnent des solutions satisfaisantes pour le champ de vitesse (voir figure 4.8) mais un champ de pression instable (voir

vu

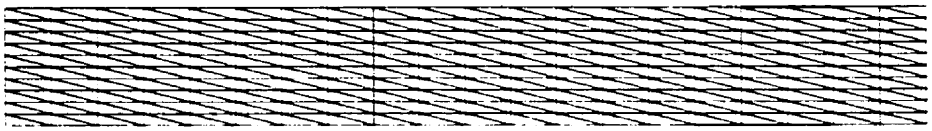


Figure 4.7 Maillage (400 éléments)

Tableau 4.1

Élément	Ratio de contrainte	Condition inf-sup
$P_1 - P_0$	$\frac{1200-1}{684}$	non
$Q_1 - P_0$	$\frac{400-1}{684}$	non
$P_1^+ - P_1$ (mini)	$\frac{400-1}{684+2400}$	oui

figure 4.9). La solution en pression est polluée par la présence de pressions parasites. En ce qui concerne l'élément mini espace-temps, les figures 4.10 et 4.11 montrent des résultats satisfaisants tant pour la vitesse que pour la pression et illustrent bien que l'élément mini espace-temps passe le test de Poiseuille.

Par ailleurs, bien que la pression soit stable, une analyse plus détaillée des solutions montre que la pression n'est pas exacte (linéaire) et cela en dépit du fait que l'interpolant en pression soit linéaire. Ce problème a déjà été mentionné par Fortin et Fortin (1985) et illustre le fait que les espaces de discrétisation en vitesse et en pression sont dépendants l'un de l'autre. En effet, les fonctions d'interpolation en vitesse étant linéaires, le champ de vitesse (analytique) quadratique ne peut pas être représenté de façon exacte. Dans le cas present, l'erreur d'interpolation en vitesse dégrade la précision en pression.

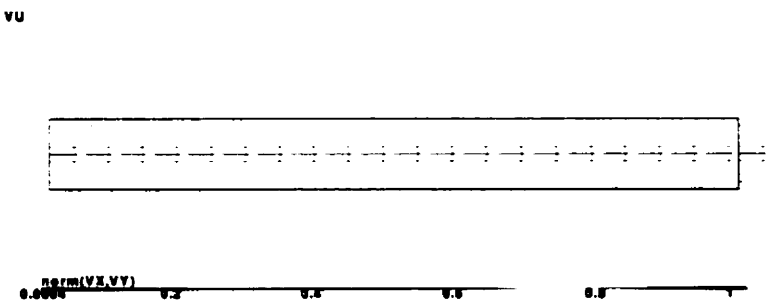


Figure 4.8 Vecteurs vitesse, élément $Q_1 - P_0$

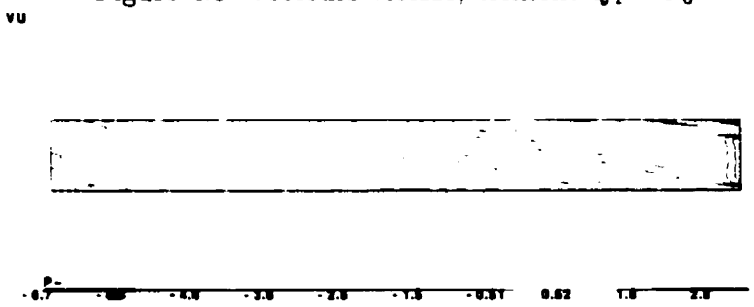


Figure 4.9 Isovaleurs de la pression, élément $Q_1 - P_0$

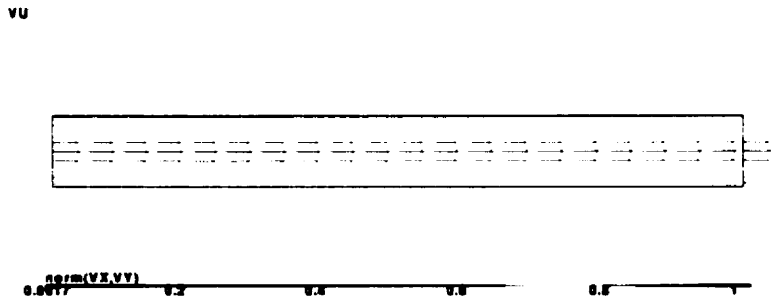


Figure 4.10 Vecteurs vitesse, élément mini

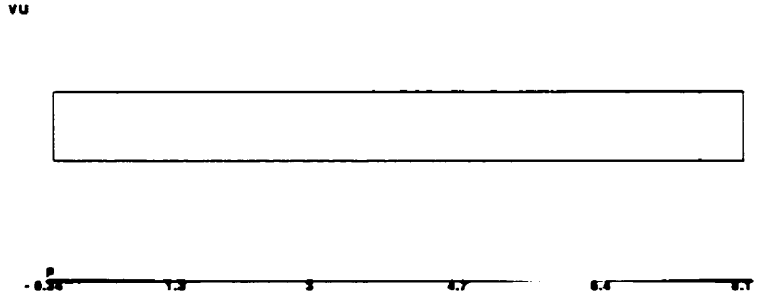


Figure 4.11 Isovaleurs de la pression, élément mini

4.2.2 Le test «no-flow»

La description du problème

Le problème du « No-flow» a été initialement présenté par Gresho et al. (1984). On impose des conditions essentielles homogènes ($\mathbf{u} = (0,0)$) sur toute la frontière et le terme source (force volumique) $\mathbf{f} = (0,g), g \neq 0$ de telle sorte que la solution analytique soit

$$\mathbf{u} = (0,0) \text{ et } p = gy + \text{constante}.$$

Le champ de vitesse est nul et la pression est linéaire. L'élément mini espace-temps étant linéaire en vitesse et en pression, on devrait être en mesure d'obtenir la solution analytique du «no-flow» contrairement au cas du problème de Poiseuille.

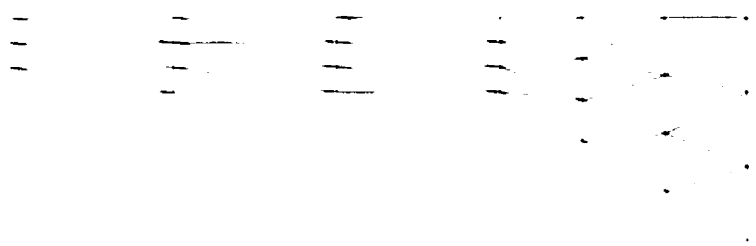


Figure 4.12 Domaine de calcul et maillage pour le problème du «no-flow»

Les figures 4.12 à 4.15, montrent que l'élément mini espace-temps passe le test du «no-flow» en donnant la solution exacte en vitesse et en pression sur un maillage grossier. En effet, les contours de la vitesse sont au voisinage du zero machine et la pression est linéaire.

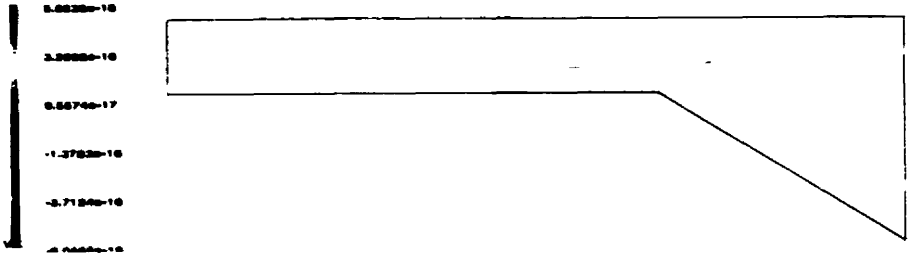


Figure 4.13 Isovaleurs de la vitesse u

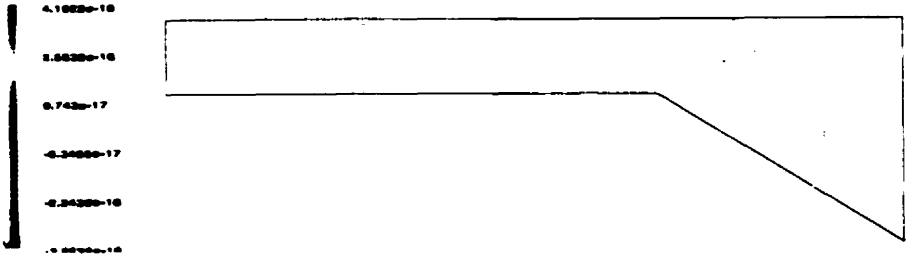


Figure 4.14 Isovaleurs de la vitesse v

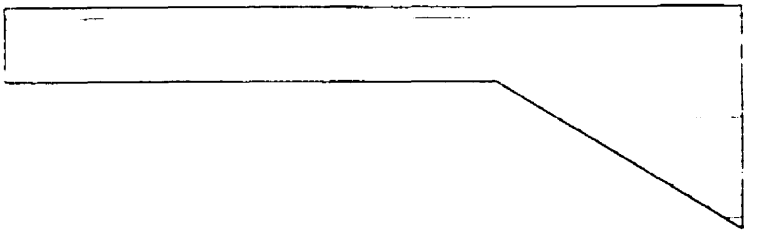


Figure 4.15 Isovaleurs de la pression

4.2.3 Le problème du cylindre

Il s'agit de l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre pour un nombre de Reynolds de $Re = 100$. Ce problème est caractérisé par un écoulement instationnaire (périodique) et le développement d'un détachement tourbillonnaire à l'arrière du cylindre, mieux connue sous le nom d'allée de Von Karman. Ce problème a été étudié par divers auteurs, numériquement (Brooks et Hughes, 1982; Behr et al., 1991; Tezduyar et al., 1992; Engelman et Jaminia, 1990; Behr et al., 1995) et expérimentalement (Tritton, 1959; Boissson et al., 1983). Il est aussi considéré comme un test de référence («benchmark») pour évaluer la performance (le caractère diffusif) des méthodes numériques pour la résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires. En effet, selon les expériences numériques réalisées par Buffat (1991), il s'avère que les algorithmes de discrétisation en temps trop diffusifs (par exemple les schémas d'ordre 1) ne sont pas en mesure de prédire correctement l'évolution temporelle de la solution. Ce cas test nous a permis d'évaluer la stabilité de notre élément, mais aussi de mesurer son caractère diffusif.

Description du problème et procédures de calcul

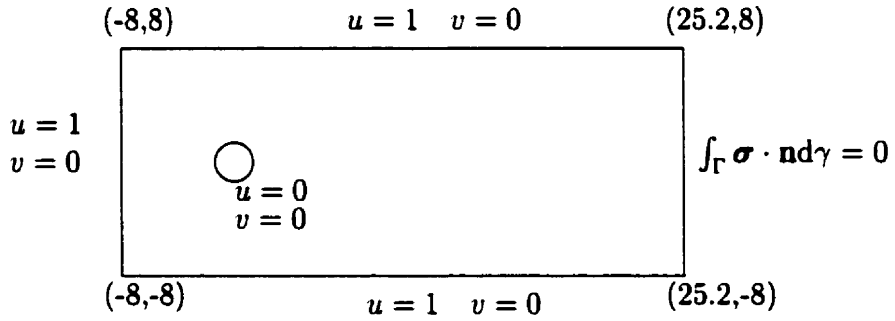


Figure 4.16 Domaine de calcul et conditions aux limites pour le problème du cylindre

La plupart des travaux antérieurs ont porté sur la position des frontières latérales (en haut et en bas) (Behr et al., 1995), sur la position de la sortie et sur le type de conditions aux limites à imposer en sortie (Behr et al., 1991). Pour cette étude, nous avons considéré les caractéristiques et les conditions du problème proposé

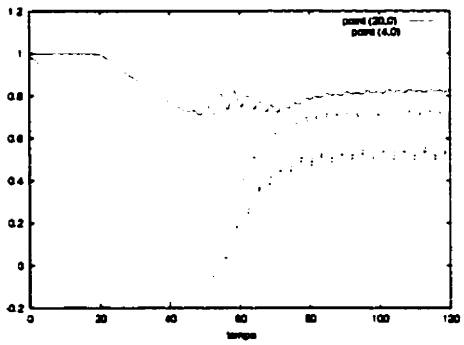
par Gresho et Sani dans le cadre du minisymposium sur les conditions aux limites en sortie de type frontière libre qui s'est tenu à l'Université Stanford en juillet 1991 («Open Boundary Condition Minisymposium 1991»). Pour ce problème, une solution de référence a été calculée par Engelman et Jaminia (1990) pour des fins de comparaison.

La figure 4.16 présente le domaine de calcul et les conditions aux limites. Le domaine de calcul est assez grand soit 16×33.2 unités de longueur adimensionnelle et le cylindre est de diamètre unitaire. Le fluide adhère à la paroi du cylindre. Un écoulement uniforme ($u = 1, v = 0$) est imposé à l'entrée et sur les frontières supérieure et inférieure du domaine. À la sortie, la condition de traction nulle est imposée faiblement. Le nombre de Reynolds est défini par $Re = DU/\nu$ où D est le diamètre du cylindre, U est la vitesse uniforme en entrée et ν est la viscosité. Le maillage est construit en tenant compte de la solution du problème. Il est suffisamment raffiné dans le sillage du cylindre, afin de capturer la formation des tourbillons. La simulation transitoire a été démarrée à partir d'une solution nulle et les solutions transitoires consécutives ont été calculées avec un pas de temps fixe de $\Delta t = 0.1$ et 1200 solutions consécutives ont été calculées.

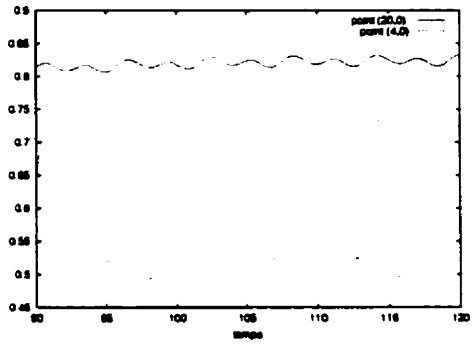
Analyse des résultats

La figure 4.17 présente l'évolution temporelle des composantes (verticale et horizontale) de la vitesse et la pression aux points (4,0) et (20,0). On observe, qu'après une période transitoire instable, l'écoulement pour $t \geq 70$ atteint un état périodique permanent. On note aussi que la fréquence et l'amplitude de ces oscillations sont constantes et se comparent assez bien avec la solution de référence (Engelman et Jaminia, 1990).

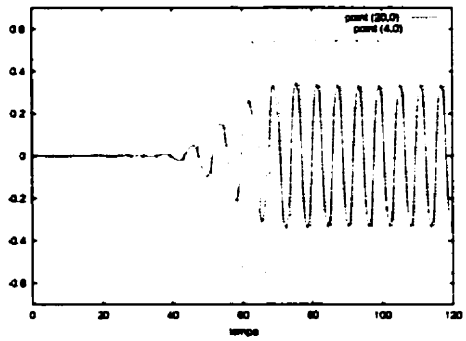
Il a été convenu (voir Engelman et Jaminia, 1990) de présenter la solution au temps t_{ref}, dit temps de référence, correspondant à l'instant où la composante verticale de la vitesse passe d'une valeur négative à une valeur positive à la position $x = 0$ et $y = 4$. Les figures 4.18 à 4.23 présentent le tracé des isovaleurs au temps t_{ref}, pour la vitesse u, la vitesse v, la pression, le vecteur vitesse, la fonction courant et la



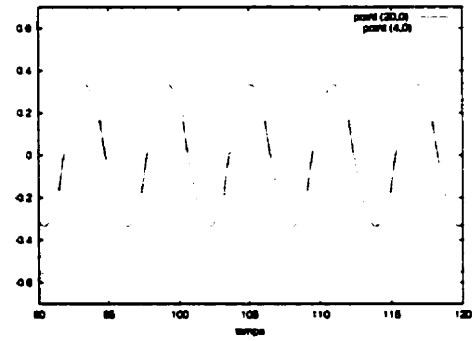
(a) Vitesse horizontale



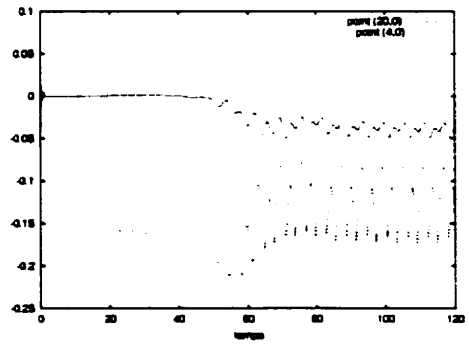
(b) Vitesse horizontale (90–120)



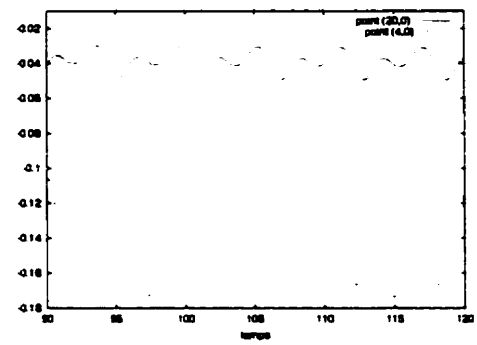
(c) Vitesse verticale



(d) Vitesse verticale (90–120)



(e) Pression



(f) Pression (90–120)

Figure 4.17 Évolution temporelle

vorticité. Ces résultats montrent la présence de tourbillons en arrière du cylindre. Ces tourbillons constituent une formation dénommée allée de Von Karman.

La qualité des résultats déduits de la simulation des allées de Von Karman derrière un cylindre au nombre de Reynolds de $Re = 100$, nous a permis de confirmer la stabilité de l'élément mini espace-temps et d'illustrer le caractère non-diffusif de cette discrétisation. Une comparaison plus quantitative sera présentée à la section suivante afin d'analyser le comportement et d'évaluer la précision de notre formulation dans le cadre d'écoulements transitoires périodiques.

4.2.4 Notes et bibliographie

À travers cette investigation numérique nous avons montré dans l'exemple de l'écoulement de Poiseuille, les effets numériques liés à la non satisfaction de la condition inf-sup (pressions parasites et effet bloquant) et confirmé le fait que les espaces de discrétisation en vitesse et en pression sont interdépendants dans le cadre de la discrétisation par la méthode de Galerkin discontinue en temps. Le test du «no-flow» et le problème du cylindre nous ont permis respectivement de prouver l'exactitude et la capacité de notre formulation à simuler des écoulements transitoires périodiques.

La présente vérification de la stabilité de l'élement mini espace-temps a déjà été présentée dans les articles suivants: (N'dri et al., 2000b) et (N'dri et al., 2000a).

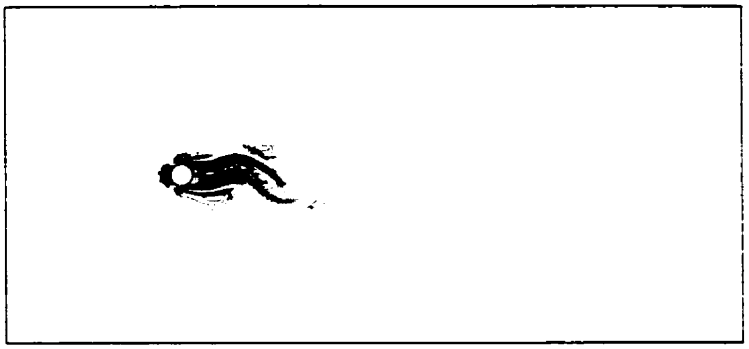


Figure 4.18 Isovaleurs de la vitesse u

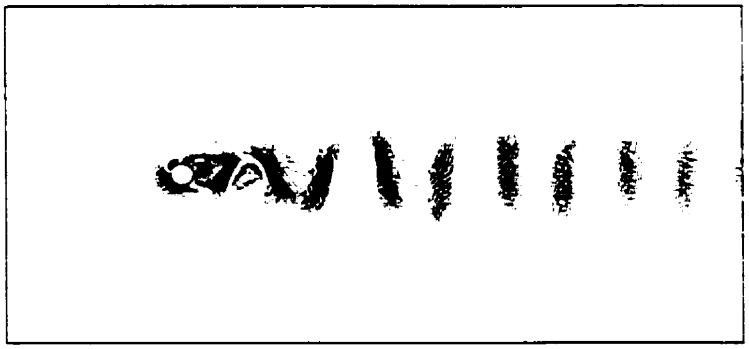


Figure 4.19 Isovaleurs de la vitesse v

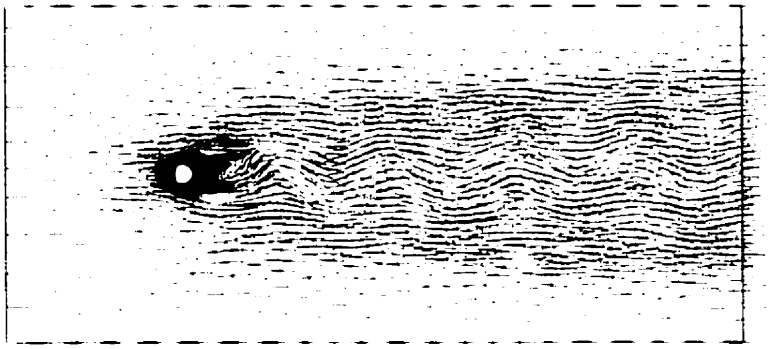


Figure 4.20 Vecteurs vitesse

Figure 4.21 Isovaleurs de la pression

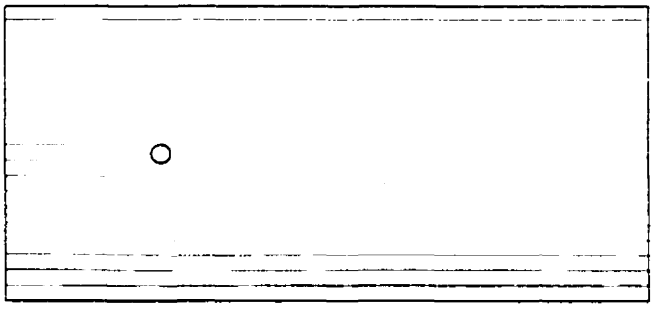


Figure 4.22 Isovaleurs de la fonction de courant ψ

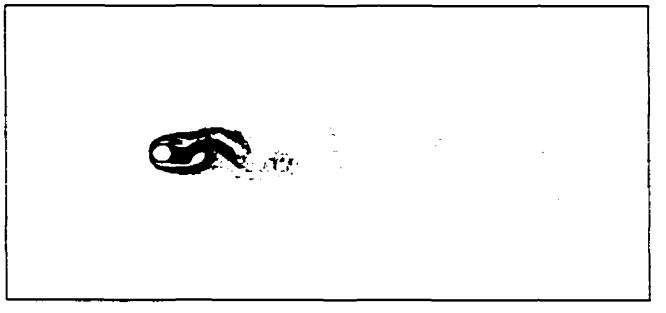


Figure 4.23 Isovaleurs de la vorticité w

4.3 Validations

Nous nous proposons dans la présente section de comparer la formulation stable (méthode de Galerkin discontinue en temps avec l'élément mini espace-temps) à la formulation stabilisée GLS/ST (avec l'élément $P_1 - P_1$) qui est la méthode de référence dans la cadre de la discrétisation par éléments finis espace-temps. Plusieurs cas tests dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et axisymétriques ont été étudiés à cette fin. Ces tests nous ont permis d'analyser le comportement, mais également d'illustrer l'enveloppe d'utilisation de la formulation stable.

La simulation des écoulements dans les artères est l'une des applications potentielles de ce travail. Ce domaine couvre les écoulements internes et externes qui peuvent être aussi bien stationnaires qu'instationnaires (périodiques). Ce sont en général des écoulements à faible nombre de Reynolds (compris entre 1 et 1200) qui incorporent des phénomènes de transport de masse et des interactions fluide-structure (domaines variables). En plus, en cas d'obturation d'une artère résultant d'artériosclérose (pathologie), l'écoulement est complexe et est caractérisé par la présence de plusieurs zones de recirculation. Pour de plus amples détails sur la dynamique des biofluides, on renvoie au livre de Comolet (1984).

Trois problèmes ont donc été étudiés, chacun faisant ressortir les caractéristiques des écoulements mentionnés ci-dessus. L'étude de l'écoulement autour d'un obstacle (rectangulaire) à $Re = 145$, nous permettra de valider notre formulation dans le cadre d'écoulements stationnaires avec recirculation. L'étude du problème de la marche inversée à $Re = 800$ va, pour sa part, nous permettre de vérifier l'état de l'écoulement à long terme et d'étudier le comportement asymptotique de notre formulation. Finalement, l'étude du problème du cylindre à $Re = 100$, nous permettra d'analyser le comportement de notre formulation dans le cadre d'un écoulement transitoire périodique.

4.3.1 Écoulement laminaire autour d'un obstacle

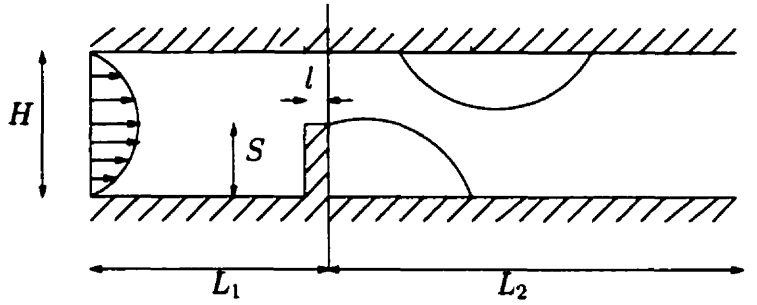
Les problèmes d'écoulements autour d'un obstacle font l'objet de plusieurs applications. Des exemples de tels écoulements se retrouvent dans des problèmes d'échangeurs de chaleur, d'écoulement du vent autour de maisons, écoulements dans les artères en présence de plaques, etc. Parmi cette classe d'écoulements, le problème de l'écoulement autour d'un obstacle rectangulaire entre deux plaques est considéré dans cette étude. Le domaine de calcul est composé d'un canal avec un rétrécissement soudain (marche) suivi d'un canal avec une expansion soudaine (marche inversée). Ce cas test a été choisi pour les raisons suivantes: d'abord, il existe des données expérimentales pour ce problème; ensuite, la géométrie est simple et l'écoulement est caractérisé par la présence de plusieurs zones de recirculation; et finalement, à travers les expériences numériques réalisées par Carvalho et al. (1987), il s'avère que ce problème est un test plus contraignant que le problème standard de la marche inversée. En effet, contrairement au problème de la marche inversée, les erreurs numériques provenant de l'avant de l'obstacle peuvent influencer de façon très significative la prédiction de l'écoulement dans tout le domaine.

Description du problème et procédures de calcul

Le domaine de calcul est constitué d'un canal en travers duquel se trouve un obstacle de hauteur S et de largeur l. À titre comparatif, les dimensions du domaine correspondent à celles utilisées par Carvalho et al. (1987) et sont illustrées à la figure 4.24. Le fluide rentre dans le canal avec un profil de vitesse parabolique

$$\mathbf{u}(y) = \left(\frac{3}{2}y\,(2-y),0\right) \qquad \text{pour } 0 \leq y \leq 2,$$

adhère aux parois solides (condition de non-glissement) et une condition de traction nulle est imposée faiblement en sortie. Le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse moyenne à l'entrée ($\bar{U} = \frac{2}{3}u_{max}$) et la hauteur S de l'obstacle, et vaut $Re = 145$. Le maillage utilisé est raffiné autour de l'obstacle afin de capturer les caractéristiques de base de l'écoulement. Les simulations ont été initialisées à l'aide d'une solution nulle en utilisant le maillage illustré à la figure 4.25. Des solutions transitoires ont



$S = 0.005\,m \quad e = 0.001\,m \quad H = 0.010\,m$

$L_1 = 0.030\,m \quad L_2 = 0.120\,m$

Figure 4.24 Canal plan avec obstacle

été calculées avec un pas de temps fixe, $\Delta t = 0.5$ jusqu'à ce que l'état stationnaire soit atteint.

Dans ce test, on cherche à prédire les caractéristiques de l'écoulement (zones de recirculations) et la composante horizontale de la vitesse à différentes stations en aval de l'obstacle. Les solutions numériques sont comparées aux données expérimentales fournies par Carvalho et al. (1987).

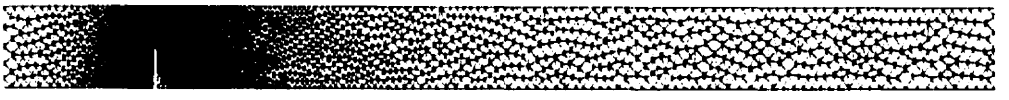
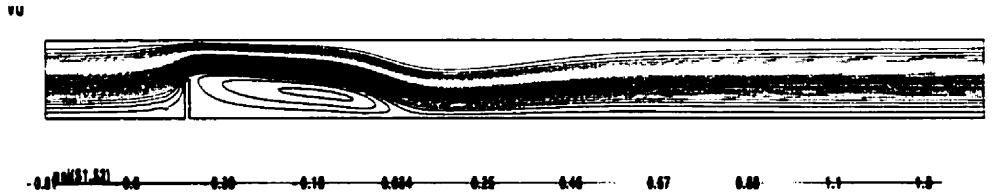


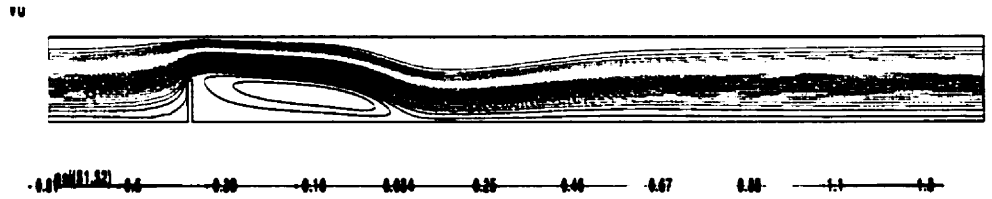
Figure 4.25 Maillage: 6769 éléments

Analyse des résultats

Les lignes de courant sont présentées aux figures 4.26(a) et 4.26(b). On observe la présence de deux zones de recirculation le long des parois solides (en haut et en bas).



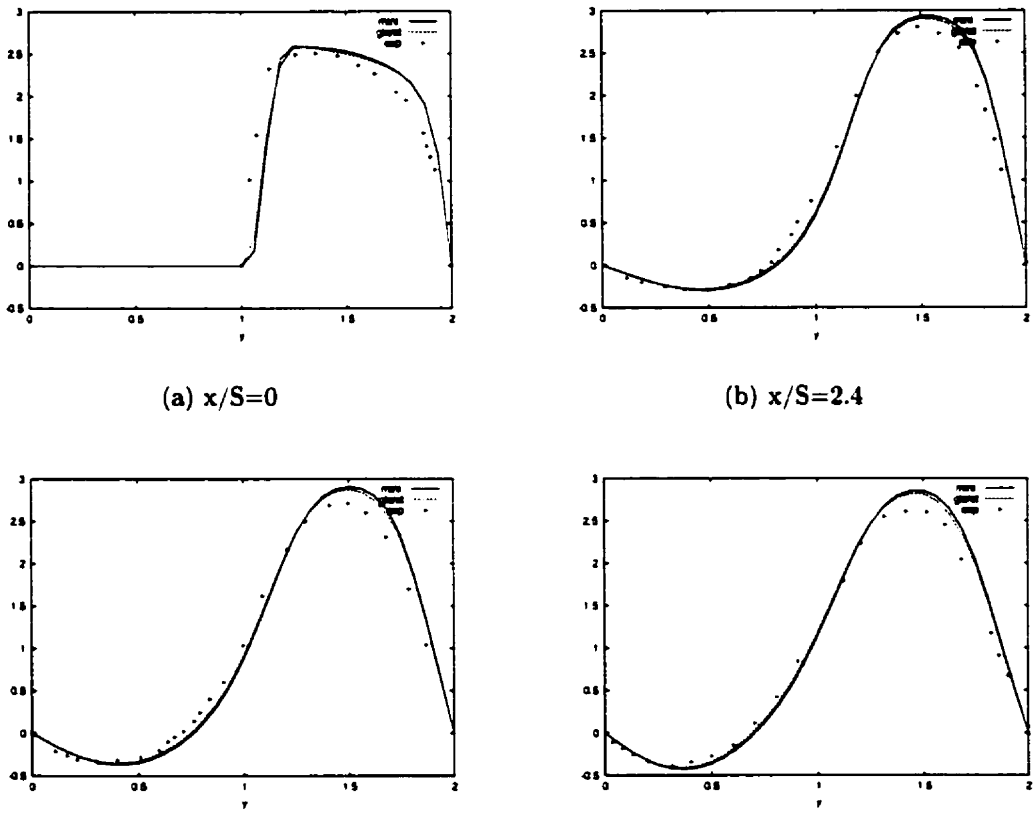
(a) Mini



(b) GLS/ST

Figure 4.26 Lignes de courant

En outre, à la figure 4.27 où, pour différentes stations x/S, la distribution de la vitesse est comparée aux résultats expérimentaux, nous constatons que les deux méthodes conduisent à des résultats similaires. Il n'y a pratiquement aucune différence notable au niveau de la précision des solutions calculées. En plus, nous constatons que ces solutions sont en accord avec les données expérimentales.



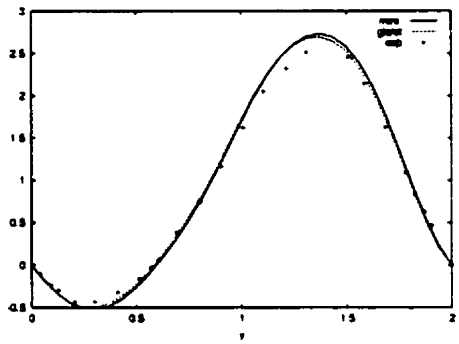
(a) x/S=0

(b) x/S=2.4

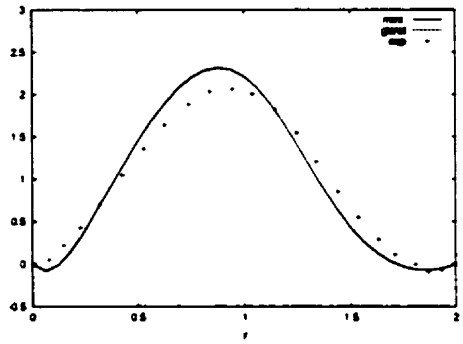
(c) x/S=3.4

(d) x/S=4.4

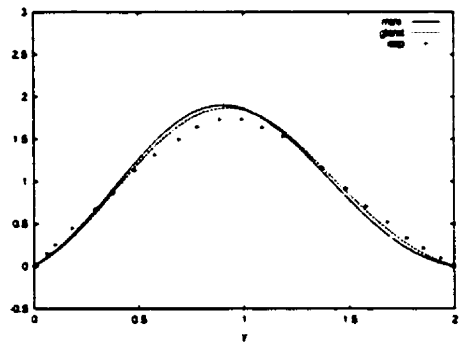
Figure 4.27 Coupe de la composante horizontale de la vitesse



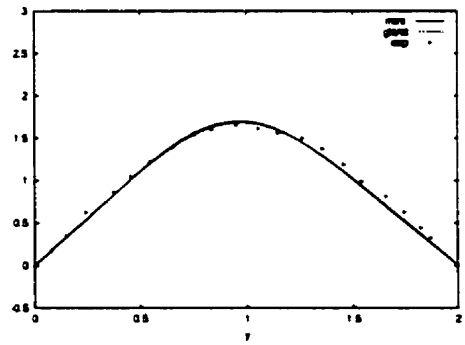
(e) x/S=6



(f) x/S=11



(g) x/S=18



(h) x/S=24

Figure 4.27 Coupe de la composante horizontale de la vitesse (suite)

4.3.2 Le problème de la marche inversée

Ce problème classique a été traité expérimentalement et numériquement par plusieurs auteurs. On cite parmi eux, Armaly et al. (1983); Gresho et al. (1993); Fortin et al. (1997). Il s'agit d'un écoulement laminaire dans un canal avec une expansion soudaine. La géométrie est simple et l'écoulement est caractérisé par la présence de plusieurs zones de recirculation. Ce problème est aussi connu pour les vives controverses qu'il a provoquées lors du minisymposium sur les conditions aux limites en sortie qui s'est tenu à l'université Stanford en juillet 1991. Contrairement à l'opinion générale soutenue à ce minisymposium, Kaiktsis, Karniadakis et S.Orszag (1991) ont affirmé que l'écoulement au nombre de Reynolds $Re = 800$ est instable. Ici, nous nous joignons à Gresho, Gartling, Torczynski, Cliffe, Winters, Garrantt, Spense et Goodrich (1993) et Fortin et al. (1997) pour infirmer ce résultat.

Dans le but de vérifier la stabilité de la solution stationnaire, nous avons étudié le comportement à long terme de l'écoulement. Pour ce faire, la solution à $Re = 800$ a été calculée en régime transitoire à l'aide des 2 formulations espace-temps. En plus de cette analyse transitoire, la précision des solutions stationnaires asymptotiques a été évaluée en comparant celles-ci à la solution du problème stationnaire calculée par Gartling (1990).

Description du problème et procédures de calcul

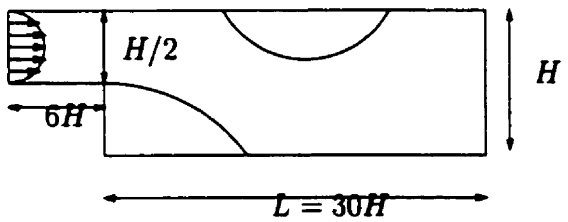


Figure 4.28 Domaine de calcul pour le problème de la marche

Le domaine de calcul décrit à la figure 4.28 est constitué à la fois des canaux en amont et en aval de la marche. Le canal en aval a une hauteur unitaire H tandis que la marche et le canal en amont ont pour hauteur $H/2$. La longueur du canal

en aval vaut $L = 30H$ et l'entrée du canal est située à une distance de $6H$ de la marche. Le fluide rentre par le canal en amont avec une vitesse parabolique

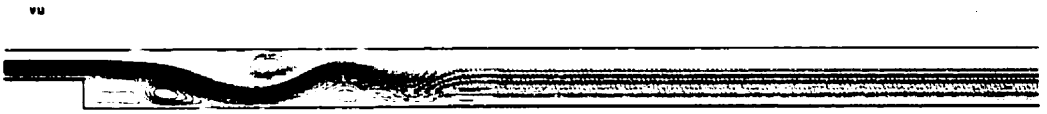
$$\mathbf{u}(y) = (24\,y\,(0.5 - y), 0) \quad \text{pour } 0 \leq y \leq \frac{1}{2},$$

adhère aux parois solides et aucune traction n'est imposée en sortie. Le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse moyenne ($\bar{U} = \frac{2}{3}u_{max}$) à l'entrée, la hauteur H et vaut $Re = 800$. Le maillage utilisé en aval de la marche est semblable à celui utilisé par Gartling (1990). Nous avons une distribution uniforme le long du canal pour $0 \leq x \leq 20$ ($2 \times 21 \times 350$ éléments) suivie d'un déraffinement graduel (selon une loi de concentration sinusoïdale) dans la direction de l'écoulement pour $20 \leq x \leq 30$. Les simulations ont été démarrées d'une solution identiquement nulle et des solutions transitoires consécutives ont été calculées avec un pas de temps fixe $\Delta t = 0.5$. Ces simulations ont été réalisées jusqu'au temps adimensionnel $t = 500$.

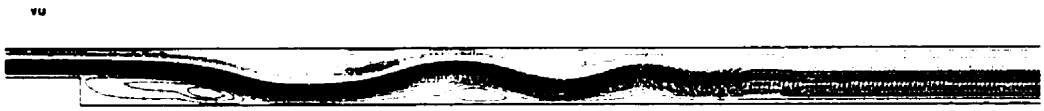
Analyse des résultats

Les figures 4.29 et 4.30 donnent un aperçu de l'évolution de l'état de l'écoulement. À partir des lignes de courant, on observe que l'écoulement après la marche se développe avec la formation d'une série de tourbillons le long des parois solides (en haut et en bas). Deux tourbillons principaux sont accompagnés de différents tourbillons de moindres intensités. À mesure que la simulation transitoire progresse, les petits tourbillons se dissipent et les deux tourbillons principaux atteignent un état d'équilibre à $t = 500$. La compréhension des détails et du mécanisme d'apparition et de disparition des tourbillons, ou encore de la dynamique de cet écoulement est en soit un problème fort intéressant. Cependant, nous allons nous contenter, dans cette étude, de vérifier l'état de l'écoulement à long terme.

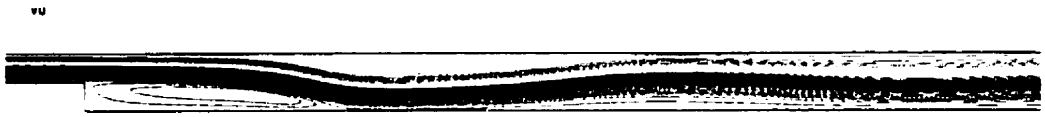
Les figures 4.31 et 4.32 présentent l'évolution temporelle de la composante horizontale de la vitesse à differents points situés le long des stations $x/H = 6$ et $x/H = 12$. Ces figures montrent que l'écoulement se confond à la solution stationnaire après une courte période transitoire. Ces résultats révèlent aussi que les deux méthodes ont le même comportement transitoire pour la composante horizontale de la vitesse.



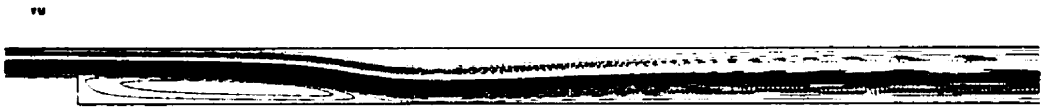
(a) t=10



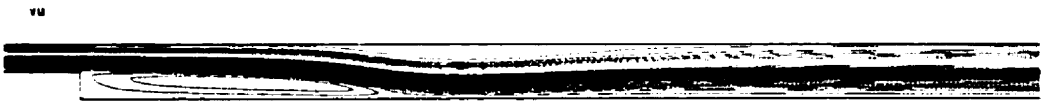
(b) t=20



(c) t=50

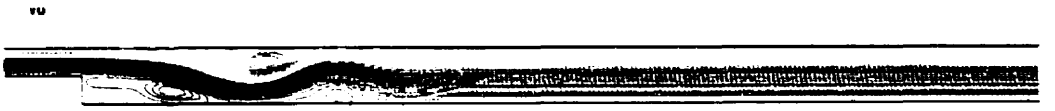


(d) t=125

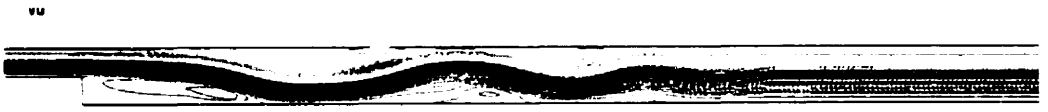


(e) t=500

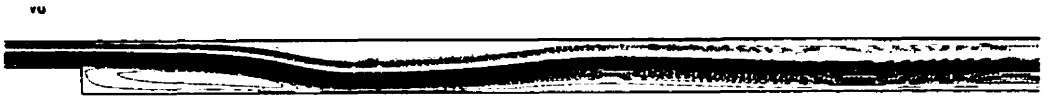
Figure 4.29 Lignes de courant à différents instants (élément mini espace-temps)



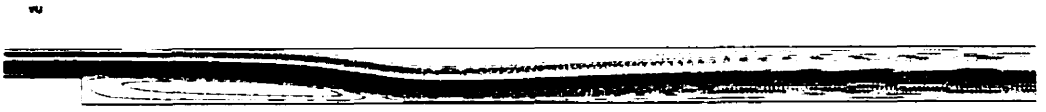
(a) t=10



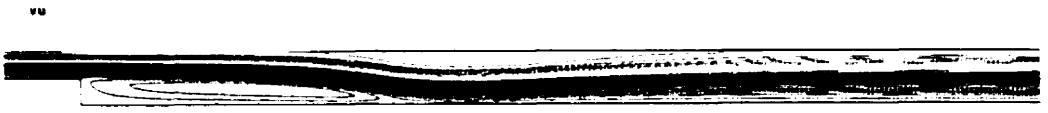
(b) t=20



(c) t=50



(d) t=125



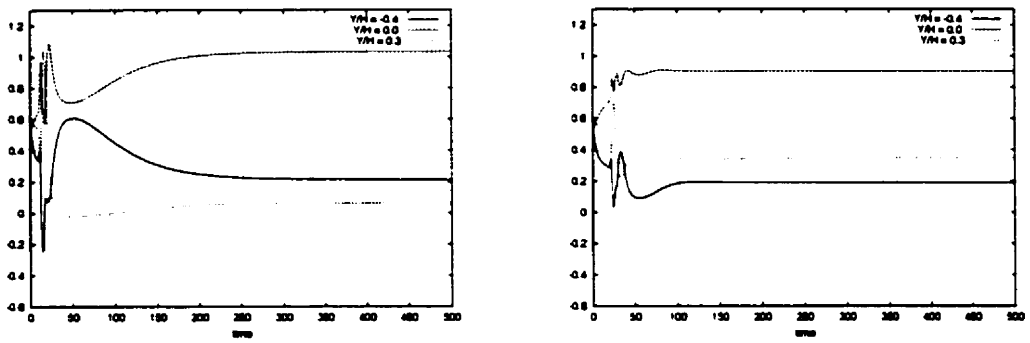
(e) t=500

Figure 4.30 Lignes de courant à différents instants (GLS/ST)

Ajoutons aussi que Gresho et al. (1993); Fortin et al. (1997) ont observé le même comportement en se servant de schémas aux différences pour la discrétisation en temps. La comparaison avec la solution de référence de Gresho et al. (1993) (voir figure 4.33), illustre d'abord la concordance des résultats et montre ensuite que la formulation stable est légèrement plus précise que la méthode stabilisée GLS/ST.

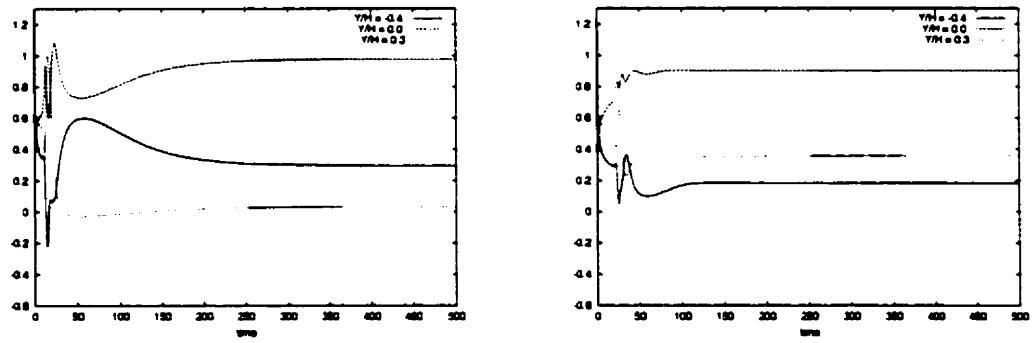
Cette étude transitoire par les formulations espace-temps (stable et stabilisée) du problème de la marche inversée, suggère que l'écoulement à $Re = 800$ tend asymptotiquement vers une solution stationnaire stable.

Finalement, en plus de cette étude transitoire, nous avons evalué la précision des solutions stationnaires (asymptotiques). La comparaison avec la solution de référence du problème stationnaire calculée par Gartling (1990) est illustrée aux figures 4.34 et 4.35. On y compare les distributions de la vitesse (composantes verticale et horizontale), de la pression et de la vorticité aux stations $x = 7$ (figure 4.34) et $x = 15$ (figure 4.35). Pour des fins d'analyse, il faut noter que la solution de référence de Gartling (1990) a été calculée à l'aide de l'élément $Q_2 - P_1$ en se servant d'un maillage plus fin que celui utilisé dans cette étude. Il faut noter aussi que l'élément $Q_2 - P_1$ satisfait la condition inf-sup, est d'ordre 2 en espace et est considéré comme l'un des meilleurs pour le calcul bidimensionnel. Cette comparaison montre que les solutions calculées se comparent dans l'ensemble assez bien à la solution de référence. Cependant, la précision des solutions obtenues (composante verticale de la vitesse et pression) pourrait être améliorée en utilisant un maillage plus fin. Cette comparaison révèle aussi que les solutions calculées sont dans l'ensemble assez similaires sauf pour la pression (voir figure 4.35(b)) et la composante verticale de la vitesse (voir figure 4.34(d)) qui semblent être légèrement mieux approchées par la formulation stable. La différence entre les niveaux de pression obtenus est certainement causé par les paramètres de stabilisation et le traitement de la condition aux limites (traction nulle) imposée en sortie.



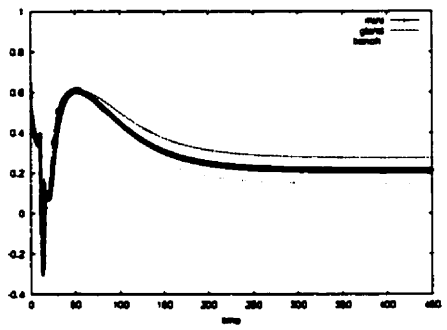
(a) X/H = 6 (b) X/H = 12

Figure 4.31 Évolution de la composante horizontale de la vitesse (élément mini espace-temps)

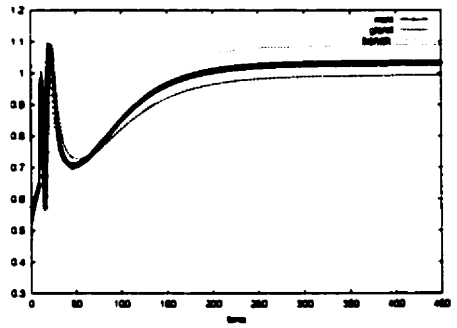


(a) X/H =6 (b) X/H = 12

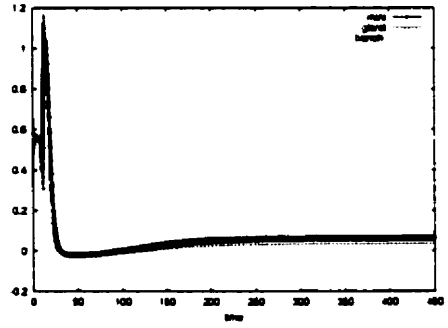
Figure 4.32 Évolution de la composante horizontale de la vitesse (méthode GLS/ST)



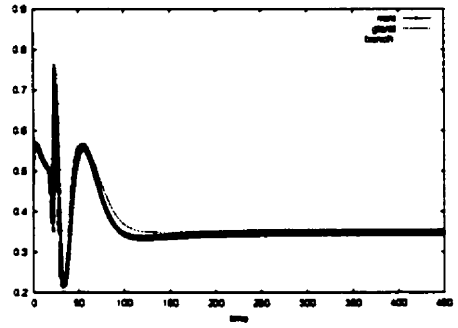
(a) Y/H = -0.4, X/H = 6



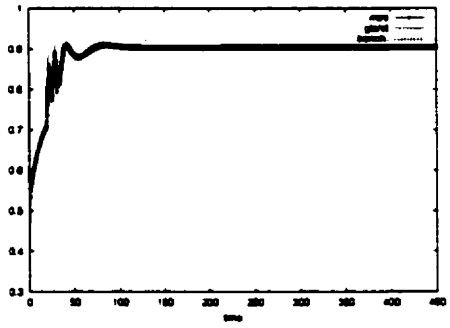
(b) Y/H = 0.0, X/H = 6



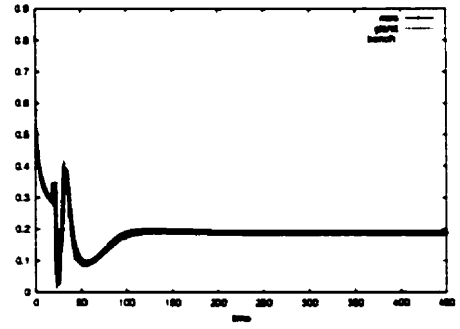
(c) Y/H = 0.3, X/H = 6



(d) Y/H = 0.3, X/H = 12

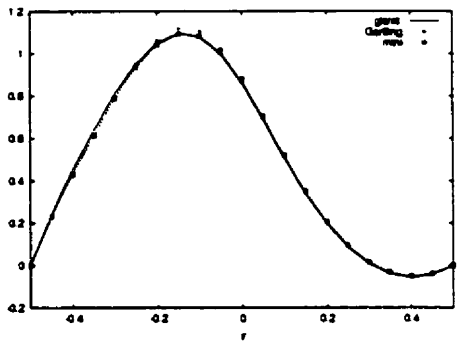


(e) Y/H = 0, X/H = 12

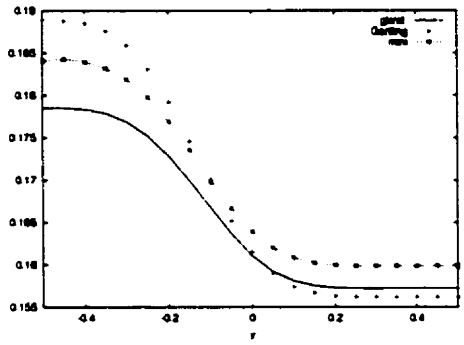


(f) Y/H = -0.4, X/H = 12

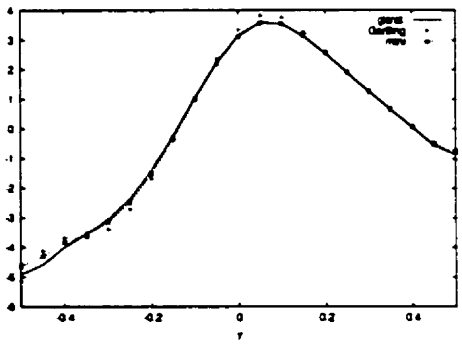
Figure 4.33 Évolutions temporelle de la composante horizontale de la vitesse (comparaison)



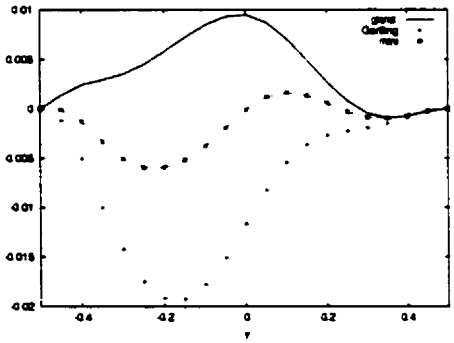
(a) Vitesse horizontale



(b) Pression

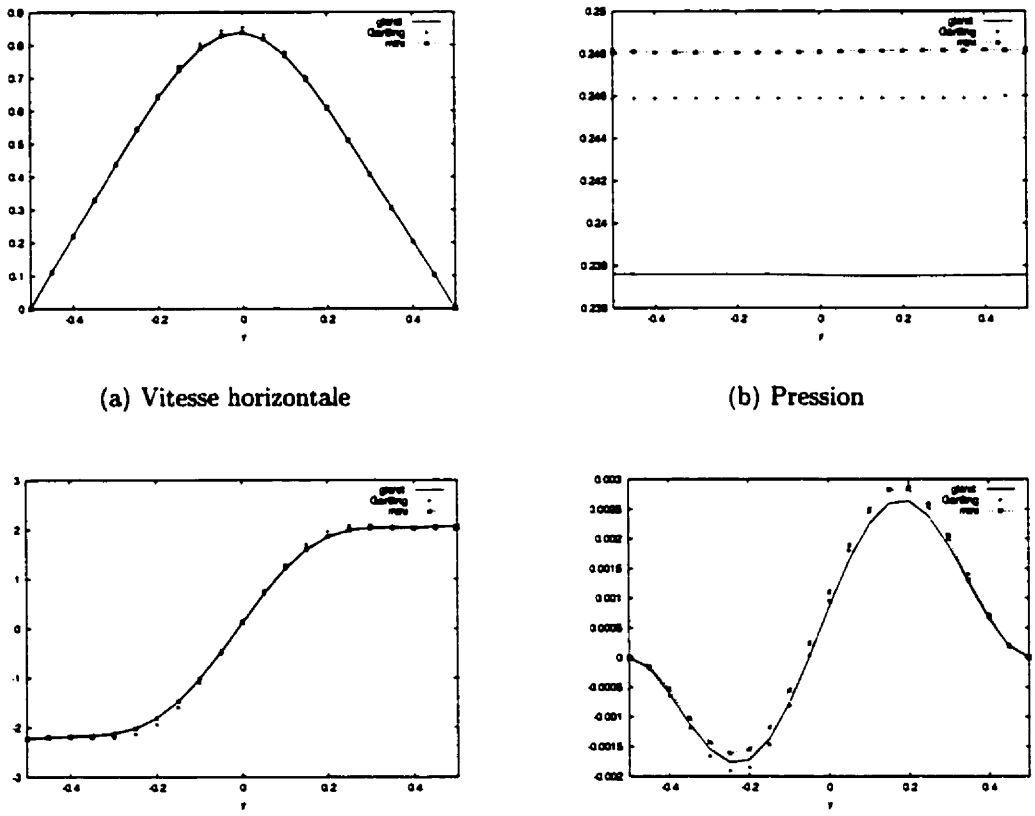


(c) Vorticité



(d) Vitesse verticale

Figure 4.34 Coupes de diverses composantes à $x = 7$



(a) Vitesse horizontale

(b) Pression

(c) Vorticité

(d) Vitesse veticale

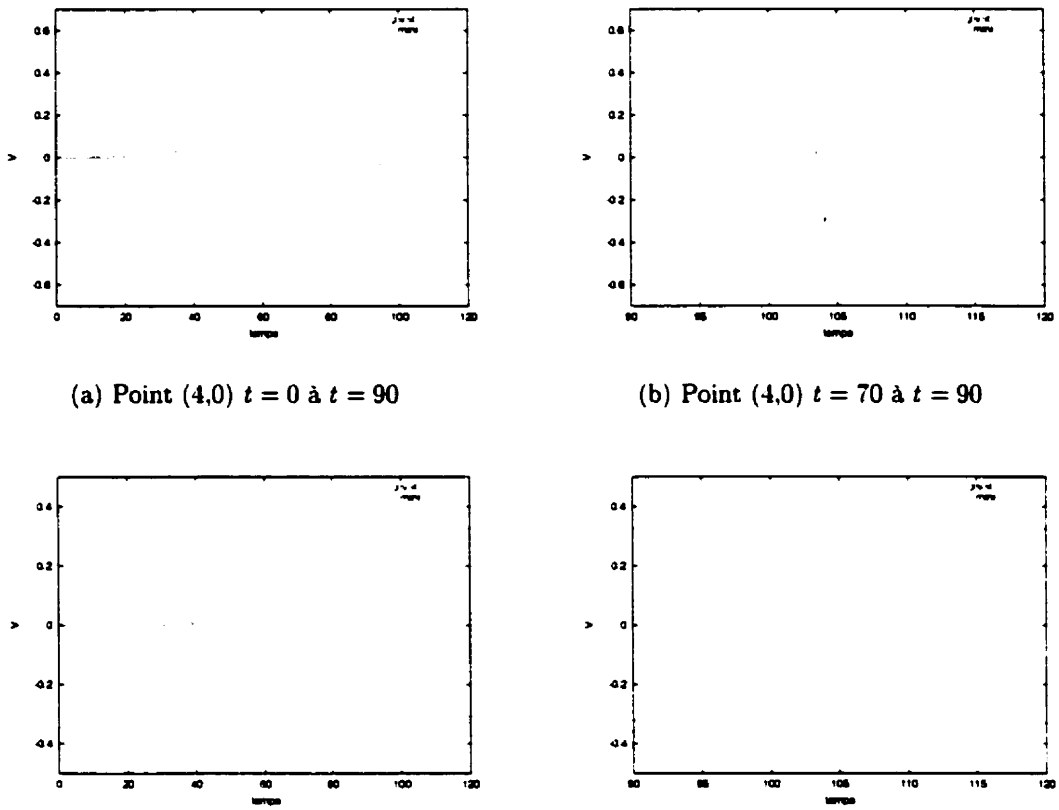
Figure 4.35 Coupes de diverses composantes à $x = 15$

4.3.3 Écoulement derrière un cylindre, $Re = 100$

Ce problème a déjà été défini à la section 4.2 dans le cadre de la vérification de la stabilité de l'élément mini espace-temps. Nous étudions ici le comportement transitoire des deux formulations espace-temps ainsi que la précision des solutions périodiques calculées. À l'aide des deux formulations espace-temps, nous avons résolu le problème du cylindre pour $Re = 100$ en se servant des conditions initiales suivantes: une solution initiale identiquement nulle; un pas de temps fixe de $\Delta t = 0.1$; et le maillage utilisé précédemment (voir section 4.2). Les points témoins à l'aide desquels nous allons analyser le comportement transitoire de l'écoulement sont respectivement (4,0) et (20,0) (voir figure 4.16).

L'évolution temporelle (pour les deux méthodes) de la composante verticale de la vitesse aux points témoins est présentée à la figure 4.36. À partir de ces résultats, nous pouvons faire les constatations suivantes: d'abord, pour les deux méthodes, l'écoulement atteint l'état périodique après une période instationnaire; ensuite, en partant des mêmes conditions initiales (maillage, pas de temps et solution initiale), les deux méthodes n'ont pas le même comportement transitoire. Les amplitudes des oscillations sont plus fortes dans la période instationnaire et l'état périodique est atteint plus vite avec la méthode GLS/ST. Il en résulte des solutions périodiques qui ne sont pas en phase. Finalement, bien que les deux solutions ne soient pas en phase, l'amplitude et la fréquence des oscillations sont très similaires (voir figures 4.36(b) et 4.36(d)). Ajoutons qu'une étude de raffinement du pas de temps, nous suggère fortement que le déphasage des solutions périodiques provient du comportement dans la période instationnaire et est propre à chacune des formulations espace-temps. En effet, une analyse de convergence en fonction du pas de temps, réalisée en examinant l'évolution temporelle de la composante verticale de la vitesse au point (4,0) pour $\Delta t = 0.2, 0{,}1$ et 0.05, nous a permis de montrer que les deux méthodes convergent chacune vers une solution périodique (voir figure 4.37). En plus, bien que la fréquence et la période de ces oscillations soient très similaires, ces solutions périodiques ne sont pas en phase (voir figure 4.38).

D'autre part, les figures 4.39 et 4.40 illustrent (pour les deux méthodes) le tracé aux temps de référence des isovaleurs de la fonction courant, de la pression et



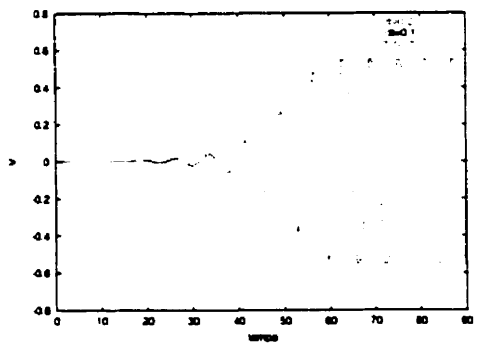
(a) Point (4,0) $t = 0$ à $t = 90$

(b) Point (4,0) $t = 70$ à $t = 90$

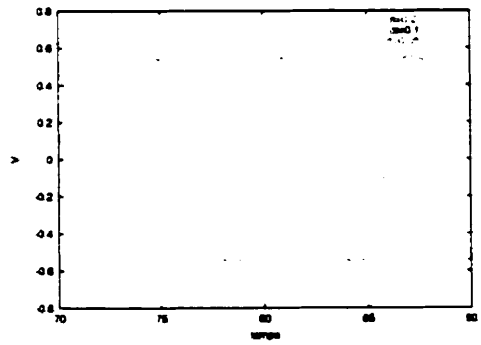
(c) Point (20,0) $t = 0$ à $t = 90$

(d) Point (20,0) $t = 70$ à $t = 90$

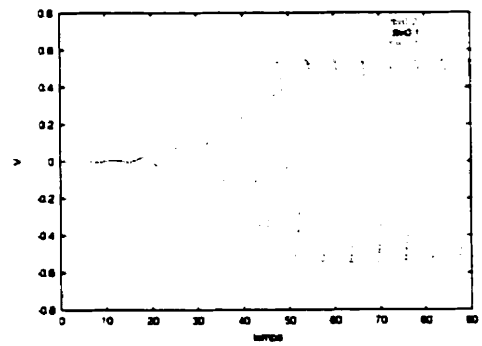
Figure 4.36 Évolution de la composante verticale de la vitesse pour $\Delta t = 0.1$, pour le problème du cylindre à $Re = 100$



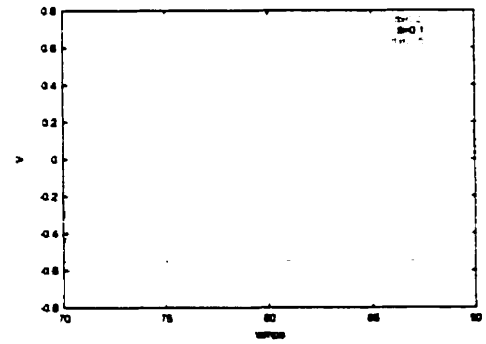
(a) Élément mini espace-temps, (pour $t = 0$ à $t = 90$)



(b) Élément mini espace-temps, (pour $t = 70$ à $t = 90$)

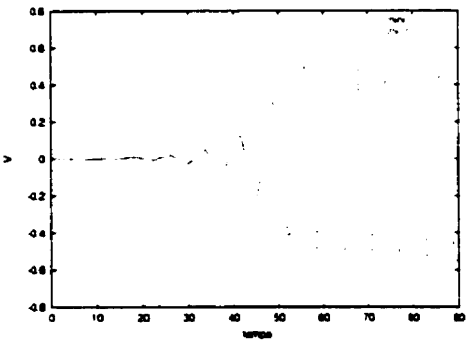


(c) Méthode GLS/ST, (pour $t = 0$ à $t = 90$)

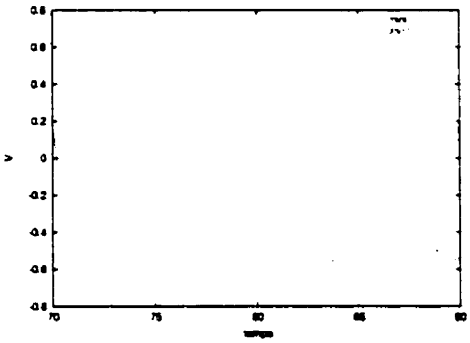


(d) Méthode GLS/ST, (pour $t = 0$ à $t90$)

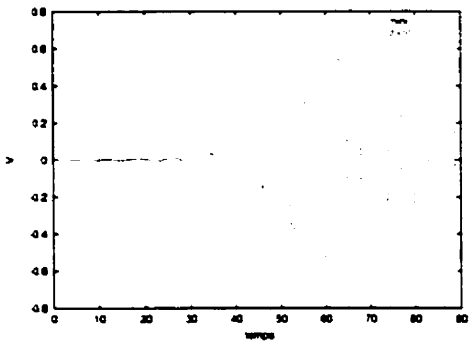
Figure 4.37 Évolution de la composante verticale de la vitesse au point (4,0) pour $\Delta t = 0.2, 0.1, 0.05$



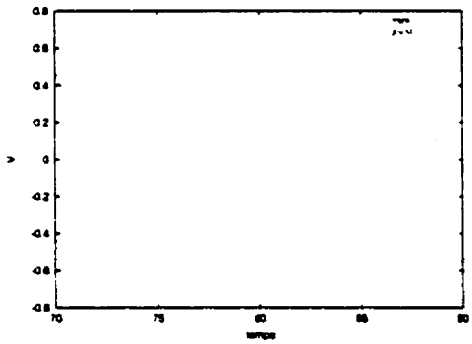
(a) $\Delta t = 0.2$, pour $t = 0$ à $t = 90$



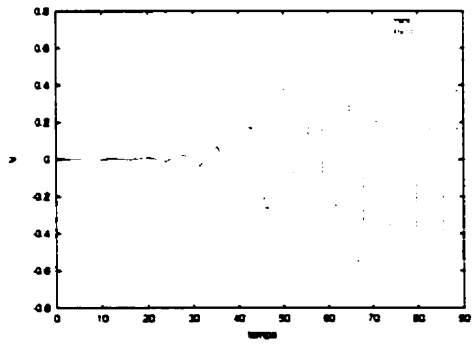
(b) $\Delta t = 0.2$, pour $t = 70$ à $t = 90$



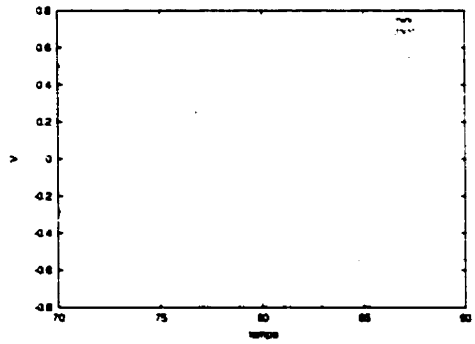
(c) $\Delta t = 0.1$, pour $t = 0$ à $t = 90$



(d) $\Delta t = 0.1$, pour $t = 0$ à $t = 90$

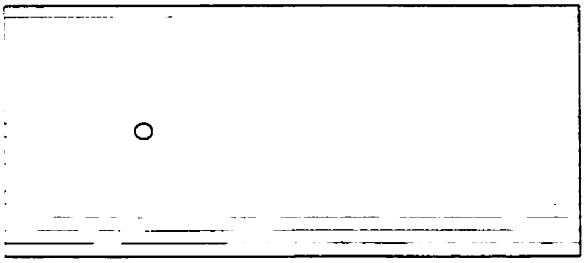


(e) $\Delta t = 0.05$, pour $t = 0$ à $t = 90$



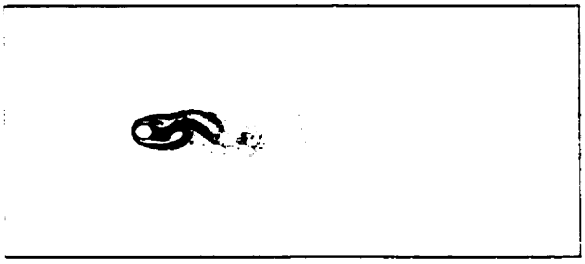
(f) $\Delta t = 0.05$, pour $t = 70$ à $t = 90$

Figure 4.38 Évolution de la composante verticale de la vitesse au point (4,0)



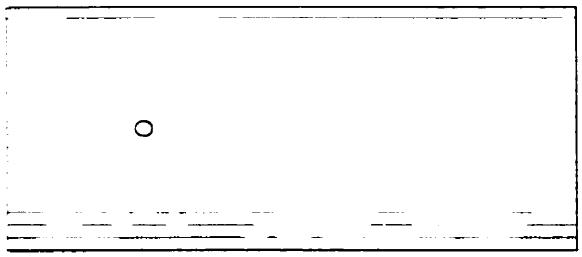
(a) Lignes de courant

(b) Pression

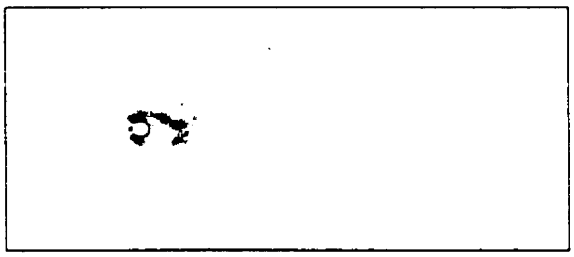


(c) Vorticité

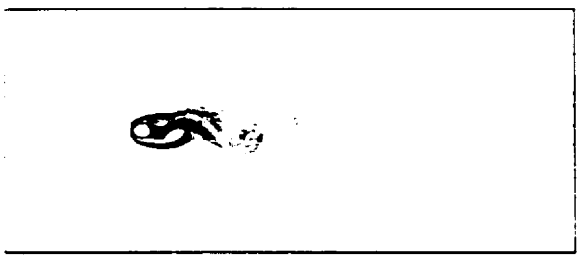
Figure 4.39 élément mini espace-temps



(a) Lignes de courant



(b) Pression

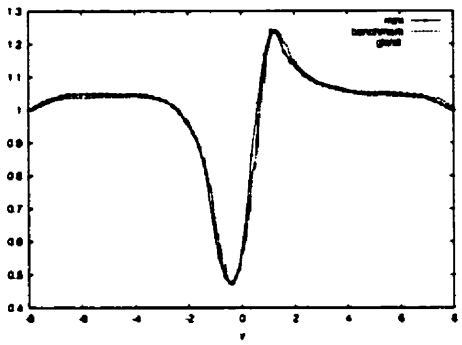


(c) Vorticité

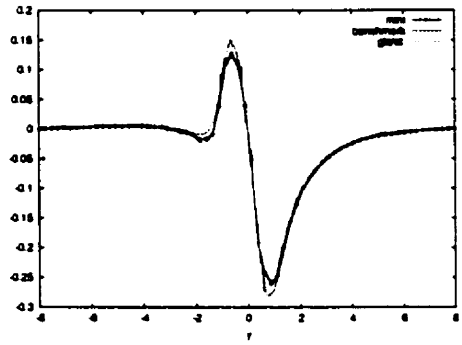
Figure 4.40 Méthode GLS/ST

de la vorticité. Étant donné le déphasage entre les 2 solutions périodiques, nous avons associé à chaque solution un temps de référence. Il s'agit de l'instant où la composante verticale de la vitesse pour la position $x = 4$ et $y = 0$ passe d'une valeur négative à une valeur positive au dernier cycle calculé. L'analyse de ces figures, montre qu'il n'y a aucune différence notable entre les deux solutions à cet état de l'écoulement. En plus, la présence d'allées de Von Karman montre aussi que l'état périodique permanent est bel et bien atteint.

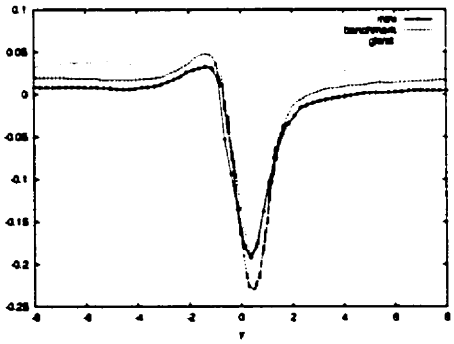
Finalement, afin d'évaluer la précision des solutions calculées, nous les avons comparé à la solution de référence de Engelman et Jaminia (1990). Cette comparaison s'effectue au niveau des coupes à $x = 4$ de certaines quantités aux temps de référence (voir figure 4.41). On constate que les prédictions numériques se comparent assez bien à la solution de référence. On observe aucune différence significative au niveau des solutions obtenues sauf pour la pression qui semble mieux approchée avec la formulation stable (élément mini espace-temps).



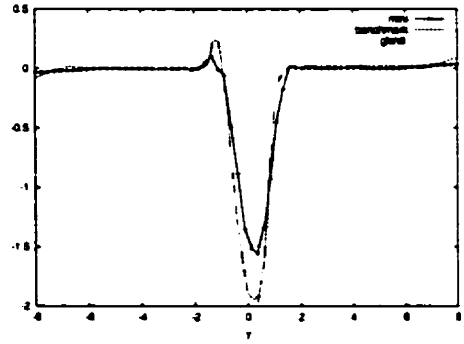
(a) Composante horizontale de la vitesse



(b) Composante verticale de la vitesse



(c) Pression



(d) Vorticité

Figure 4.41 Coupes de diverses composantes à $x = 4$

4.3.4 Modèle axisymétrique

Les simulations précédentes ont été réalisées dans le système de coordonnées cartésiennes. L'extension au cas axisymétrique a pour principal intérêt la simulation des écoulements dans les artères mais également, les nombreuses applications que l'on rencontre en pratique. Ce sont par exemple, le développement d'un écoulement dans une conduite circulaire, l'écoulement dans un canal avec une contraction ou une expansion soudaine, l'écoulement dans un diffuseur et les jets.

Les équations de Navier-Stokes, la méthode de Galerkin discontinue en temps et la formulation stabilisée GLS/ST dans le cas axisymétrique sont présentées à l'annexe B. À titre de vérification et de validation du modèle axisymétrique, nous commencerons par la simulation d'un jet analytique et ensuite nous allons considérer la simulation d'un écoulement dans un canal avec une contraction soudaine à un nombre de Reynolds de $Re = 196$. Pour ce problème, nos prédictions numériques seront comparées aux données expérimentales.

Jet libre analytique

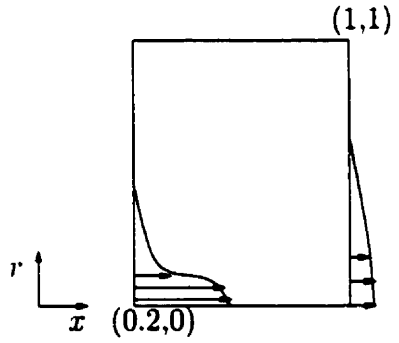


Figure 4.42 Domaine de calcul

Ce cas test correspond à une simulation d'un jet libre axisymétrique. Les expressions pour la vitesse et la pression proviennent d'une analyse de Schlichting (1979). On

impose un terme source (force volumique) **f**, tel que la solution analytique soit

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{3}{8\pi}\frac{c}{\epsilon_0 x}\frac{1}{(1+\frac{1}{4}\eta^2)^2}; \\
v &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{\sqrt{c}}{x}\frac{\eta-\frac{1}{4}\eta^3}{(1+\frac{1}{4}\eta^2)^2},
\end{aligned}
$$

où $\eta = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{\sqrt{c}}{\epsilon_0}\frac{r}{x}$, $c = 7.277\times 10^{-4}$, $\epsilon_0 = 0.0161\sqrt{c}$ et $\nu\,(\equiv 8\times 10^{-4})$ est la viscosité. Le domaine de calcul dans le repère axisymétrique est illustré à la figure 4.42 et a comme dimension $0.2 \leq x \leq 1$ et $0 \leq r \leq 1$. Les conditions aux frontières sont des conditions de type Dirchlet partout sauf sur l'axe de symétrie ($r = 0$) où l'on impose une traction axiale nulle (u = libre) et sur la frontière du haut ($r = 1$) où une traction radiale nulle est imposée (v= libre) afin d'obtenir un niveau de pression moyen

$$p = 2\nu\frac{\partial v}{\partial r}|_{r=1}.$$

Basé sur la vitesse axiale maximale, la hauteur du domaine de calcul et la viscosité, le nombre de Reynolds vaut 8×10^4. Les simulations ont été démarrées à partir d'une solution identiquement nulle en utilisant le maillage illustré à la figure 4.43. Par la suite, plusieurs solutions transitoires consécutives ont été calculées avec un pas de temps fixe $\Delta t = 0.1$ jusqu'à l'atteinte de l'état stationnaire.

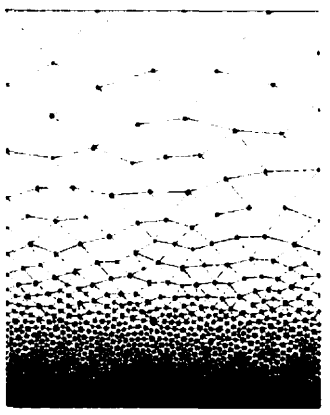
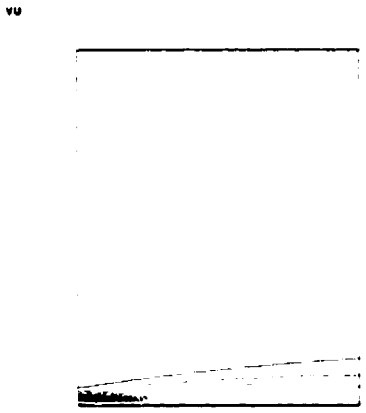


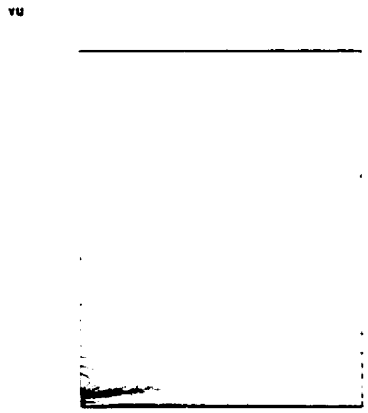
Figure 4.43 Maillage 3690 éléments

Les figures 4.44 et 4.45 représentent les isovaleurs du champ de vitesse, de la vitesse

axiale et de la vitesse radiale. En plus, une comparaison directe avec la solution analytique (voir figures 4.46 et 4.47), montre que les deux solutions sont similaires et très précises.

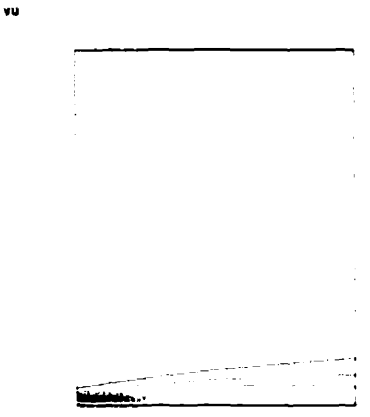


(a) Vitesse axiale

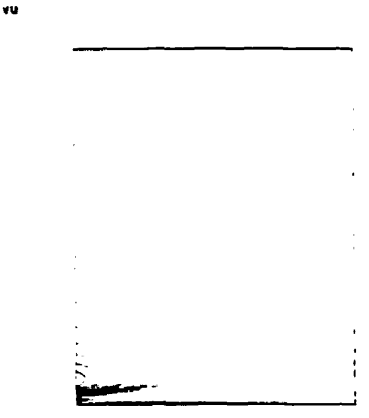


(b) Vitesse radiale

Figure 4.44 L'élément mini espace-temps

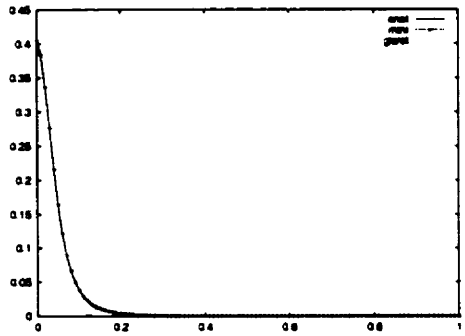


(a) Vitesse axiale

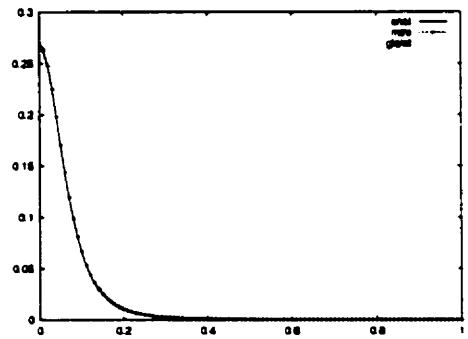


(b) Vitesse Radiale

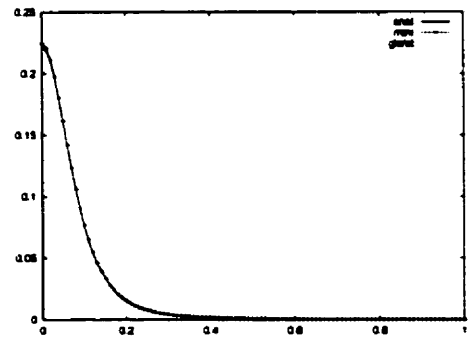
Figure 4.45 La méthode GLS/ST



(a) x =0.5

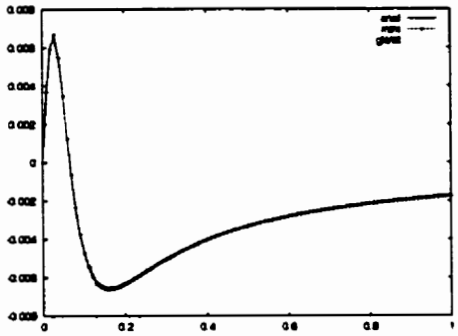


(b) x=0.75

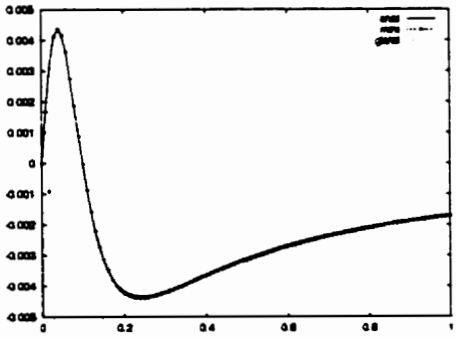


(c) x=0.90

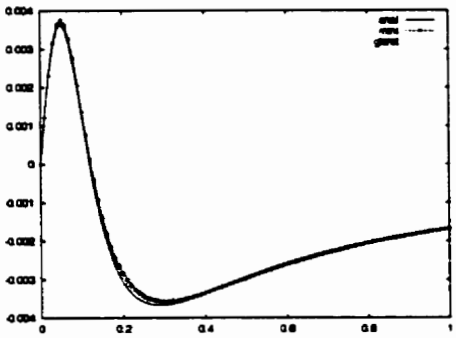
Figure 4.46 Coupes de la vitesse axiale



(a) x=0.5



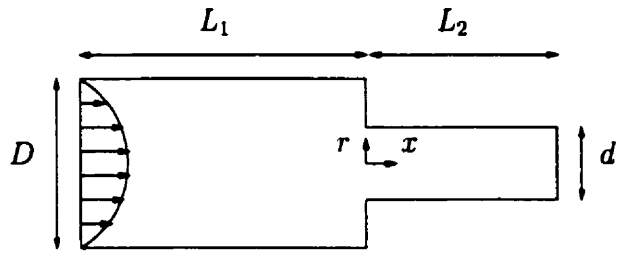
(b) x=0.75



(c) x=0.90

Figure 4.47 Coupes de la vitesse radiale

Écoulement axisymétrique dans un canal avec contraction soudaine



$D = 0.0191m \quad d = 0.0102m$

$L_1 = 0.026m \quad L_2 = 0.020m$

Figure 4.48 Géometrie

On considère l'écoulement dans un canal avec une contraction soudaine dont les caractéristiques et les dimensions sont données à la figure 4.48. Un profil de vitesse parabolique

$$\mathbf{u}(r) = (8(r+0.5)(0.5-r),0) \quad \text{pour } -\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{2}$$

est imposé en entrée. Le fluide adhère aux parois solides et une condition de traction nulle est imposée faiblement en sortie. Le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse axiale moyenne ($\bar{U} = \frac{u_{max}}{2}$) à l'entrée, le diamètre D, et est égal à 196. Pour sa part, le domaine de calcul ne comprend que la moitié supérieure ($0 \leq r \leq \frac{1}{2}$) du domaine physique, compte tenu de la symétrie axiale du problème. Les simulations ont éte initialisées à l'aide d'une solution nulle en utilisant le maillage illustré à la figure 4.49. Des solutions consécutives ont été calculées avec un pas de temps fixe de $\Delta t = 0.1$, jusqu'à ce que l'état stationnaire soit atteint.

Dans ce test, on cherche à prédire les profils de la vitesse axiale à différentes stations de part et d'autre de la contraction. Les résultats numériques sont comparées aux données expérimantales fournies par Durst et Loy (1985).

Les figure 4.50(a) et 4.50(b) illustrent les caractéristiques de la solution stationnaire pour $Re = 196$. Dans la figure 4.51, on compare nos prédictions aux résultats expérimentaux. Les deux méthodes donnent des résultats très similaires et la comparaison est bonne à toutes les stations. Ce test confirme la précision et la capacité

de notre formulation à bien reproduire des écoulements laminaires en coordonnées cylindriques axisymmétriques.

4.3.5 Notes et bibliographie

Dans cette étude comparative, nous nous sommes restreint aux applications avec des domaines fixes. Ce choix a été motivé par le fait que les deux méthodes utilisent la même procédure pour traiter les domaines variables. Dans cette procédure, le déplacement ou la déformation du domaine est incorporé dans la construction de la tranche espace-temps. Ainsi, la résolution de problèmes sur les domaines variables n'est pas significative pour cette comparaison.

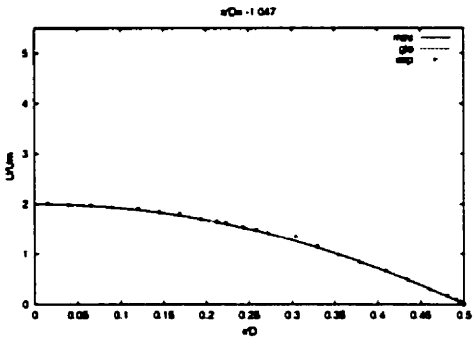
La présente comparaison entre les formulations stable et stabilisée a déjà fait l'objet d'un article (N'dri et al., 2001b) et a été présentée en congrès scientifique (N'dri et al. (2000c) (dans le cas cartésien) et N'dri et al. (2001a) (dans le cas axisymétrique)).

Figure 4.49 Maillage: 4949 éléments

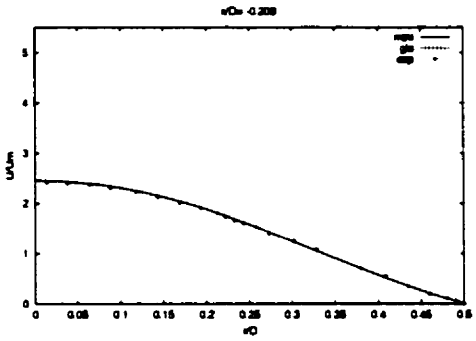
(a) Élément mini espace-temps

(b) Méthode GLS/ST

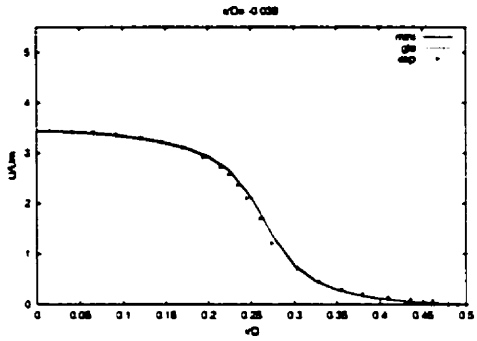
Figure 4.50 Champ de vitesse



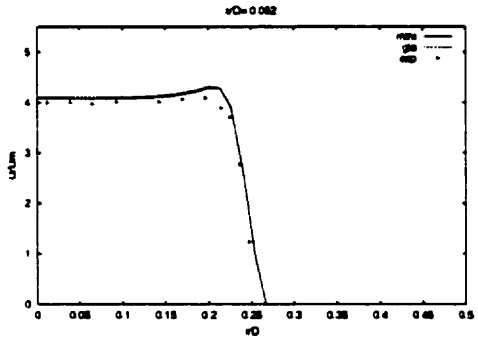
(a) x/D =-1.047



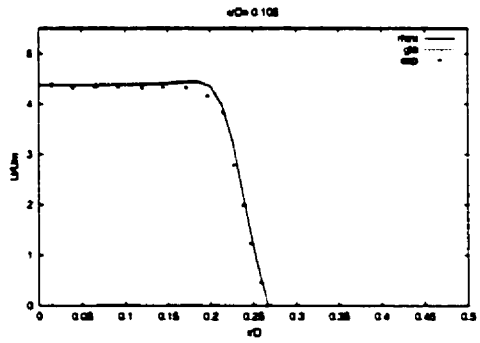
(b) x/D =-0.209



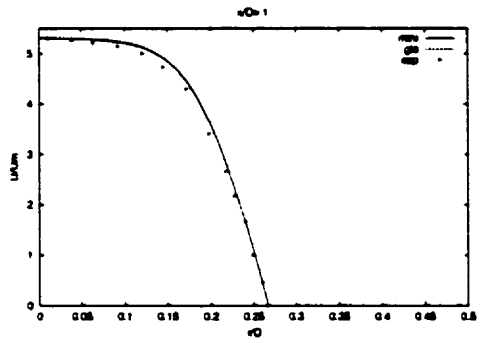
(c) x/D =-0.039



(d) x/D =0.052



(e) x/D =0.105



(f) x/D =1

Figure 4.51 Coupes de la vitesse axiale pour différentes valeurs de x/D.

4.4 Domaines variables

La discrétisation des équations de Navier-Stokes sur des domaines variables par la formulation stable (méthode de Galerkin discontinue en temps avec l'élément mini espace-temps), s'inscrit dans le cadre général des formulations espace-temps. Selon cette approche, le déplacement ou la déformation du domaine est incoporé automatiquement dans la construction de la tranche espace-temps ainsi que dans le maillage le discrétisant. Cette procédure est directe et immédiate dans le cas où la déformation temporelle du domaine est connue a priori. Cependant, pour les applications plus complexes (par exemple, les problèmes de surfaces libres et les problèmes d'interaction fluides-structures), où la vitesse de déformation ou de déplacement du domaine dépend de celle de l'écoulement, on utilise la méthode DSD/ST «Deforming-Spatial-Domain/Space-Time» (voir Shakib et Hughes, 1991; Tezduyar et Behr, 1992a,b; Behr, 1992; Mittal, 1992; Behr et Tezduyar, 1994; Johnson, 1995; Masud et T.J.R.Hughes, 1997) et la méthode CSD « Characteristic-Streamline - Diffusion » (voir Johnson, 1991; Hansbo, 1992b; Pironneau et al., 1992; Hansbo, 1993, 1995). Ces deux techniques possèdent des similarités avec la méthode ALE « Arbitrary Euleurian-Lagrangian» utilisée dans l'approche semi-discrète (discrétisation par éléments finis en espace et différences finies en temps) mais sont relativement plus simples à implémenter (voir Tezduyar et Behr, 1992b).

À titre d'exemple d'application dans un domaine variable, nous avons considéré le deuxième problème de Stokes (Ryhming, 1985). Pour ce problème, la vitesse de déplacement du domaine est connue et les équations de Navier-Stokes possèdent une solution analytique.

4.4.1 Deuxième problème de Stokes

Il s'agit du problème d'une plaque infinie effectuant un mouvement oscillatoire dans son propre plan (voir figure 4.52). À cause de la viscosité du fluide, des oscillations longitudinales sont engendrées dans le fluide au dessus de la plaque. La solution

analytique des équations de Navier-Stokes est :

$$\mathbf{u} = (u(y,t),0), \quad p = constante.$$

La vitesse horizontale est fonction de la variable d'espace y et du temps, et est donnée par

$$u(y,t) = U_\infty exp\left[-\left(\frac{w}{2\nu}\right)^{1/2} y + i\left(wt - \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2}\right)\right],$$

où U_∞ est l'amplitude maximale de la vitesse de la plaque et ω est la fréquence angulaire des oscillations. Ainsi, le fluide effectue un mouvement oscillatoire avec une amplitude qui diminue avec la distance y à la plaque. À la distance caractéristique $\delta = (\frac{2\nu}{\omega})^{-1/2}$, l'amplitude maximale est amortie à $1/e$ de sa valeur à la plaque même. Le nombre de Reynolds, basé sur le déplacement longitudinal ($L = \frac{2U_\infty}{\omega}$) qu'effectue la plaque, est défini par $Re = U_\infty L/\nu$ et satisfait le rapport suivant:

$$\frac{\delta}{L} = Re^{-1/2}.$$

Ce qui indique que l'effet de la viscosité est limité à une couche d'épaisseur relative inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre de Reynolds.

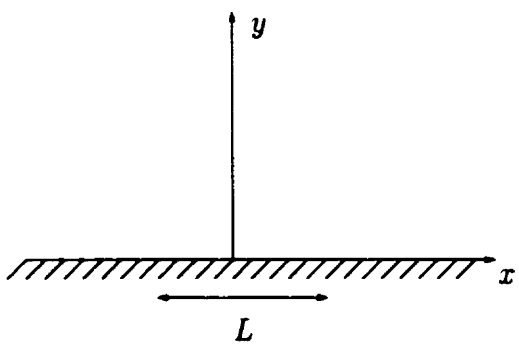


Figure 4.52 Plaque oscillante

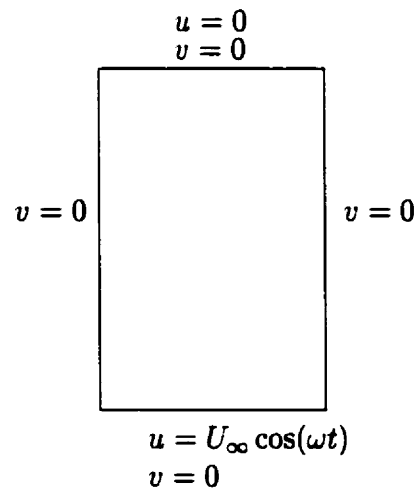


Figure 4.53 Domaine de calcul et conditions aux bords

Les caractéristiques du domaine de calcul et les conditions aux limites sont données à la figure 4.53. Le domaine effectue un déplacement longitudinale et les conditions aux limites sont fonction du temps.

Les simulations ont été réalisées avec une fréquence angulaire $w = 2\pi$, une amplitude de vitesse à la plaque de $U_\infty = 1$ et un nombre de Reynolds basé sur le déplacement longitudinal $L = 1/\pi$, soit $Re = 10$. La simulation transitoire a été démarrée avec une solution nulle et les 3 premiers cycles ont été calculés avec un pas de temps fixe $\Delta t = 0.01$.

Analyse des résultats

Afin de comparer la solution calculée avec la solution analytique, le profil de la vitesse horizontale a été tracé à chaque quart de cycle des oscillations. Les figures 4.54 et 4.55 présentent ces profils pour le premier et le deuxième cycle. Le troisième et le deuxième sont identiques.

On observe que la solution numérique correspond très bien à la solution analytique sauf pour le premier quart du premier cycle. Le retard qui n'apparait plus pour les cycles suivants provient de l'effet de démarrage de la solution transitoire. En effet la solution initiale est nulle alors que la simulation débute avec une vitesse non nulle, U_∞ à la plaque.

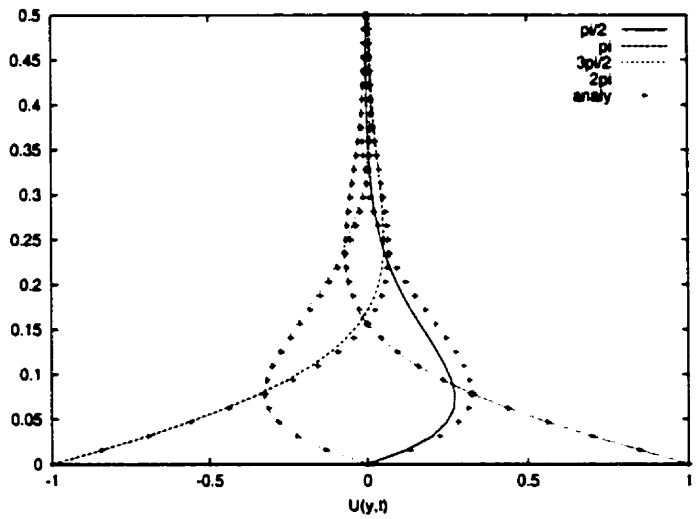


Figure 4.54 Premier cycle

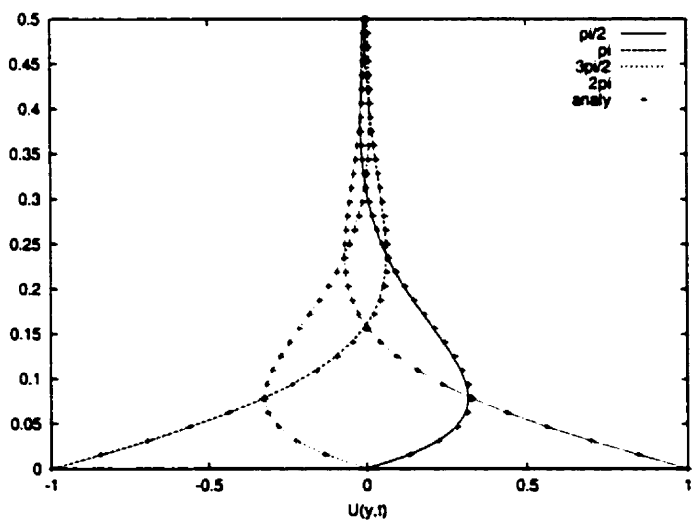


Figure 4.55 Deuxième cycle

CONCLUSION

Une formulation éléments finis espace-temps stable pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes en 2-D a été présentée. La formulation est basée sur la méthode de Galerkin discontinue et repose sur l'élément *mini espace-temps*. La discrétisation de la pression est linéaire tandis que la vitesse est linéaire mais enrichie d'une bulle (4 fonctions linéaires). Cette discrétisation est stable, il n'est donc pas nécessaire d'ajouter explicitement des termes de stabilisation afin d'obtenir une solution exempte d'instabilités.

À travers une étude théorique (existence et unicité) du problème de Stokes instationnaire, nous avons établi l'analogue de la condition *inf-sup* dans le contexte de la discrétisation par éléments finis espace-temps. Par la suite, nous avons vérifié la stabilité de l'élément *mini espace-temps* sous cette condition en se servant du critère de Fortin. Dans l'exemple du problème de Poiseuille, nous avons illustré les effets numériques liés à la non satisfaction de la condition *inf-sup* (pressions parasites et effet bloquant) confirmant ainsi la dépendance réciproque entre les espaces d'approximation en vitesse et en pression dans le cadre de la discrétisation par la méthode de Galerkin discontinue en temps. Pour sa part, le test du «no-flow», nous a permis de prouver l'exactitude de la discrétisation.

Cet travail étant une étude préliminaire à la simulation d'écoulements artériels, nous avons abordé différents problèmes afin d'étudier le comportement de la formulation stable pour ce type d'écoulement. L'étude de l'écoulement autour d'un obstacle rectangulaire au nombre de Reynolds $Re = 145$ et du problème de la marche inversée à un nombre de Reynolds $Re = 800$, nous a permis de valider notre formulation dans le cadre d'écoulements stationnaires avec recirculation et d'illustrer son comportement asymptotique. L'étude du problème du cylindre à un nombre de Reynolds $Re = 100$, nous a permis de montrer le caractère non diffusif de notre discrétisation et sa capacité à reproduire correctement l'évolution temporelle d'une solution transitoire périodique. Finalement, la simulation d'un jet analytique à un nombre de Reynolds $Re = 8.10^4$ et l'étude d'un écoulement dans un canal

avec une contraction soudaine au nombre de Reynolds $Re = 196$, nous ont permis de vérifier le modèle axisymétrique de notre formulation et d'illustrer ses possibilités dans ce système de coordonnées. Pour les problèmes abordés, la validation des résultats numériques avec les données expérimentales ou les solutions de référence («benchmark») était bonne dans l'ensemble. Une comparaison a aussi été effectée entre la formulation stable et la méthode stabilisée GLS/ST. Avec l'élimination des degrés de liberté associés à la bulle de l'élément *mini espace-temps*, les systèmes d'équations résultant de la discrétisation des équations par les deux méthodes ont le même nombre d'inconnues globales. En plus, pour les problèmes considérés, les deux méthodes conduisent à des solutions très similaires.

Suite à ce travail, quelques recommandations peuvent être formulées. D'abord, il est clair que l'approche de discrétisation par éléments finis espace-temps, conduit à la résolution de systèmes d'équations linéaires algébriques de grande taille. Pour les travaux ultérieurs, on aurait tout avantage à utiliser des méthodes itératives.

Pour la discrétisation dans le temps, un pas de temps fixe a été utilisé. Pour mieux suivre l'évolution de la solution en diminuant les coûts de calcul et la durée des simulations transitoires, Li et Wiberg (1998) ont dévéloppé un mécanisme de contrôle automatique du pas de temps dans le cas des problèmes hyperboliques du deuxième ordre. Le terme de saut à l'interface

$$\|e_t\|^2 = \int_{S_n} (u_+^n - u_-^n)^2 \, \mathrm{d}\Omega,$$

est utilisé comme estimateur d'erreur *a posteriori* et permet via un opérateur de transition de déterminer un nouveau pas de temps. Les tests que nous avons réalisés pour les équations de Naviers-Stokes ont montré, d'une part, que l'estimateur d'erreur était excellent, et que cette procédure était capable de contrôler le pas de temps et de maintenir l'erreur de discrétisation en temps en deçà de l'erreur prescrite.

L'élément *mini espace-temps* étant linéaire en espace-temps, il serait pertinent de développer une stratégie adaptative en espace-temps, afin d'améliorer la précision des approximations. Deux approches sont disponibles selon que l'espace et le temps sont découplés ou non. Dans l'approche découplée, deux stratégies adaptatives sont développées respectivement en espace et en temps afin de contrôler le pas de temps

et raffiner/déraffiner le maillage en espace. Cette approche repose sur des maillages espace-temps obtenus par extension du maillage espace dans la direction du temps (type extrudé) et constitue l'essentiel des méthodes adaptatives espace-temps. On peut consulter à cet effet les travaux de Eriksson et Johnson (1987, 1991); Johnson (1988) et Eriksson (1988) pour les problèmes paraboliques et ceux de Li et Wiberg (1998); Wiberg et Li (1999) en dynamiques des structures. Pour sa part, l'approche couplée est basée sur un estimateur d'erreur espace-temps et repose sur des éléments finis espace-temps de type «simplex». Elle a été proposée par Hulbert et Hughes (1990), mais la première mise en œuvre est le résultat de Froncioni et al. (1997) pour le problème de Burger en 1-D. Il serait intéressant de généraliser cette approche aux équations de Navier-Stokes en 2-D afin de tirer avantage de la nature non-structurée des maillages de type «simplex».

Nous avons déjà débuté l'extension au 3-D avec la construction de l'élément *mini espace-temps (3D + temps)* en appliquant la même technique aux hypertétraèdres (N'dri et al., 2000a). Mais tout reste à faire au niveau des simulations numériques.

BIBLIOGRAPHIE

ARMALY, B., DURST, F., J.C.F.PEREIRA et SCHÖNUNG, B. (1983). Experimental and theorical investigation of backward-facing step flow, *Journal of Fluids Mechanics*, *127*, 473–496.

ARNOLD, D., BREZZI, F. et FORTIN, M. (1984). A stable finite element for the Stokes equations, *Calcolo*, *21*, 337–344.

BABUŠKA, I. (1973). The finite element method with Lagrangian multipliers, *Numer. Math*, *20*, 179–192.

BAIOCCHI, C., BREZZI, F. et FRANCA, L. (1993). Virtual bubbles and Galerkin-least-squares type methods (Ga.L.S), *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *105*, 125–141.

BAJER, C. (1986). Triangular and tetrahedral space-time finite elements in vibration analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *23*, 2031–2048.

BAJER, C. (1987). Notes on the stability of non-rectangular space-time finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *24*, 1721–1739.

BEHR, M. (1992). *Stabilized finite element methods for incompressible flows with emphasis on moving boundaries and interfaces*, Thèse de doctorat, University of Minnesota.

BEHR, M., FRANCA, L. et TEZDUYAR, T. (1993). Stabilized finite element methods for the velocity-pressure-stress formulation of incompressible flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *104*, 31–48.

BEHR, M., HASTREITER, D., MITTAL, S. et TEZDUYAR, T. (1995). Incompressible flow past a circular cylinder: dependence of the computed flow field on the location of the lateral boundaries, *Computer Methods in Applied Mechanics*

and Engineering, *123*, 309–316.

BEHR, M., LIOU, J., SHIH, R. et TEZDUYAR, T. (1991). Vorticity-streamfunction formulation of the unsteady incompressible flow past a cylinder: sensibility of the computed flow field to the location of the outflow boundary, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *12*, 323–342.

BEHR, M. et TEZDUYAR, T. (1994). Finite element solution strategies for large-scale flow simulations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *112*, 3–24.

BEHR, M. et TEZDUYAR, T. (1999). The shear-slip mesh update method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *174*, 261–274.

BELL, B. et SURANA, K. (1994). A space-time coupled p-version least-squares finite element formulation for unsteady fluid dynamics problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *37*, 3545–3569.

BELL, B. et SURANA, K. (1996). A space-time coupled p-version least-squares finite element formulation for unsteady two-dimensional Navier-Stokes equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *39*, 2593–2618.

BERNARDI, C. (1989). Optimal finite-element interpolation on curved domains, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *26*, 5, 1212–1240.

BERNARDI, C. et GIRAULT, V. (1998). A local regularization operator for triangular and quidrilateral finite elements, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *35*, 5, 1893–1916.

BOISSSON, H., BRAZA, M., CHASSAING, P. et MINH, H. H. (1983). Sur les champs de vitesse et de pression induits par allée tourbillonnaire d'un sillage turbulent, *Revue d'Acoustique*, *67*, 247–255.

BONNEROT, R. et JAMET, P. (1974). A second-order finite element method for the one-dimensional Stefan problem, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *8*, 811–820.

BONNEROT, R. et JAMET, P. (1977). Numerical computation of the free boundary for the two-dimensional Stefan problem by space-time finite elements, *Journal of Computational Physics*, *25*, 163–181.

BONNEROT, R. et JAMET, P. (1979). A third order acurate discontinuous finite element method for the one dimensional Stefan problem, *Journal of Computational Physics*, *25*, 145–167.

BREZZI, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers, *RAIRO Anal. Numér.*, *R-2*, 129–151.

BREZZI, F., BRISTEAU, M.-O., FRANCA, L. et ROGÉ, M. M. G. (1992). A relation between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *96*, 117–129.

BREZZI, F. et FORTIN, M. (1991). *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag.

BREZZI, F., FRANCA, L., HUGHES, T. et RUSSO, A. (1997). $b = \int g$, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *145*, 329–339.

BREZZI, F., MARINI, D. et RUSSO, A. (1998). Applications of the pseudo residual-free bubbles to the stabilization of the convection-diffusion problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *166*, 51–64.

BREZZI, F. et RUSSO, L. F. A. (1998). Further considerations on residual-free bubbles for advective-diffusive equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *166*, 3–24.

BROOKS, A. et HUGHES, T. (1982). Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for conduction dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *32*, 199–259.

BUFFAT, M. (1991). *Étude de la simulation numérique par une méthode d'éléments finis des écoulements internes subsoniques instationnaires bi et tridimensionnels*, Thèse de doctorat, Université Claude Bernard (Lyon I), France.

CARVALHO, M., DURST, F. et PEREIRA, J. (1987). Predictions and mesurements of laminar flow over two-dimensional obstacles, *appl. Math. Modelling*, *11*, 23–34.

CHRISTIE, I., GRIFFITHS, D., MITCHELL, A. et ZIENKIEWICZ, O. (1976). Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *10*, 1389–1396.

CLÉMENT, P. (1975). Approximation by finite element functions using local regularization, *R.A.I.R.O. Anal. Numer.*, *9*, 77–84.

COMOLET, R. (1984). *Biomécanique circulatoire*, Masson.

CROUZEIX, M. et RAVIART, P. (1973). Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equation, *R.A.I.R.O. Anal. Numer.*, *7*, 33–76.

DELFOUR, M., HAGGER, W. et TROCHU, F. (1981). Discontinuous Galerkin methods for ordinary differential equations, *Mathematics of Computation*, *36*, 455–473.

DOMPIERRE, J., LABBÉ, P., VALLET, M. et CAMARERO, R. (1999). How to subdivide pyramids, prisms and hexahedra into tetrahedra, *Eight International Meshing Roundtable*, Sandia National Laboratories, South Lake Tahoe, Ca.

DOUGLAS, J. et WANG, J. (1989). An absolute stabilized finite element method for the Stokes problem, *Mathematics of Computation*, *52*, 495–508.

DROUX, J.-J. et HUGHES, T. (1994). A boundary integral modification of the Galerkin least squares formulation for the Stokes problem, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *113*, 173–182.

DUPONT, T. et SCOTT, L. (1980). Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces, *Mathematics of Computation*, *34*, 441–463.

DURST, F. et LOY, T. (1985). Investigation of laminar flow in a pipe with sudden contraction of cross sectional area, *Computers & Fluids*, *13*, 1, 15–36.

ENGELMAN, M. et JAMINIA, M.-A. (1990). Transient flow past a circular cylinder: A benchmark solution, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *11*, 985–1000.

ERIKSSON, K. (1988). Adaptative finite element methods for parabolic problems II: A priori error estimates in $L_\infty(L_2)$ and $L_\infty(L_\infty)$, Rapport technique, Departement of Mathematics, Chalmers University of Technology.

ERIKSSON, K. et JOHNSON, C. (1987). Error estimates and automatic time step control for nonlinear parabolic problems, I^*, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, *24*.

ERIKSSON, K. et JOHNSON, C. (1991). Adaptative finite element methods for parabolic problems I: A linear model problem, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, *28*, 43–77.

ERIKSSON, K., JOHNSON, C. et THOMEE, V. (1985). Time discretisation of the parabolic problems by the discontinuous Galerkin method, *RAIRO Math. Anal.*, *19*, 611–643.

FORTIN, A. (1984). *Méthode d'éléments finis pour les équations de Navier-Stokes*, Thèse de doctorat, Université Laval.

FORTIN, A., FORTIN, M. et GERVAIS, J. (1987). A numerical simulation of the transition to turbulence in a two-dimensional flow, *Journal of Computational Physics*, *70*, 2, 295–310.

FORTIN, A. et GARON, A. (2001). *Élément finis de la théorie à la pratique*, en préparation.

FORTIN, A., JARDAK, M., GERVAIS, J. et PIERRE, R. (1994). Old and new results on the two-dimensional Poiseuille flow, *Journal of Computational Physics*, *115*, 2, 445–469.

FORTIN, A., JARDAK, M., GERVAIS, J. et PIERRE, R. (1997). Localization of Holf bifurcations in fluid flow problems, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *24*, 1185–1210.

FORTIN, M. et FORTIN, A. (1985). Experiments with several elements for incompressible flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *5*, 911–928.

FORTIN, M. et FORTIN, A. (1989). A new approach for the FEM simulation of viscœlastic flows, *Journal of Non-Newtonian Fluids Mechanics*, *32*, 295–310.

FRANCA, L., (1998). *Advances in stabilized Methods in computational mechanics*, tome 166, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.

FRANCA, L., FREY, S. et HUGHES, T. (1992). Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *99*, 209–233.

FRANCA, L., HUGHES, T. et STENBERG, R. (1993). Stabilized finite element methods, in incompressible computational fluids dynamics, Rapport technique, Cambridge University press.

FRANCA, L. et MADUREIRA, A. (1993). Element diameter free stability parameters for stabilized methods applied to fluids, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *105*, 395–403.

FRANCA, L. P. et FREY, S. L. (1992). Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *99*, 209–233.

FRANCA, L. P. et HUGHES, T. (1988). Two classes of mixed finite element methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *69*, 89–129.

FRENCH, D. (1993). A space-time finite element method for the wave equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *107*, 145–157.

FRIED, I. (1969). Finite-element analysis of time dependent phenomena, *AIAA J.*, *7*, 1170–1172.

FRONCIONI, A., LABBE, P., GARON, A. et CAMARERO, R. (1997). Interpolation-free space-time remeshing for the Burger's equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, *13*, 875–884.

GARTLING, D. (1990). A test problem for outflow boundary conditions–flow over a backward-facing step, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *11*, 953–967.

GIRAULT, V. et RAVIART, P.-A. (1979). *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag.

GRESHO, P., GARTLING, D., TORCZYNSKI, J., CLIFFE, K., WINTERS, K., GARRANTT, T., SPENSE, A. et GOODRICH, J. (1993). Is the steady viscous incompressible two-dimensional flow over a backward-facing step at $Re = 800$ stable?, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *17*, 501–541.

GRESHO, P., LEE, R. et SANI, R. (1984). Further studies in equal order interpolation for Navier-Stokes, *Fifth Int. Symposium on Finite Elements in Flow Problems*, Austin, Texas.

GRESHO, P., SANI, R. et ENGELMAN, M. (1999). *Incompressible flow and the finite element method*, John Wiley and sons.

HANSBO, P. (1992a). The characteristic streamline diffusion method for convection-diffusion problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *96*, 239–253.

HANSBO, P. (1992b). The characteristic streamline diffusion method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *99*, 171–186.

HANSBO, P. (1993). The characteristic streamline diffusion method for incompressible flow in three dimensions, *Finite elements in fluids*, 287–295.

HANSBO, P. (1994). Aspects of conservation in finite element flow computations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *117*, 423–437.

HANSBO, P. (1995). Lagrangian incompressible flow computations in three dimensions by the use of space-time finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *20*, 989–1001.

HANSBO, P. (2000). A free-lagrangian finite element method using space-time elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *188*, 347–361.

HANSBO, P. et SZEPESSY, A. (1990). A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *84*, 175–192.

HUGHES, T. (1987). Recent progress in the development and understanding of SUPG methods with special reference to the compressible Euler and Navier-Stokes equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *7*, 1261–1275.

HUGHES, T., FRANCA, L. et BALESTRA, M. (1986). A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *59*, 85–99.

HUGHES, T., FRANCA, L. et HULBERT, G. (1989). A new finite element formulation for computational fluid mechanics:VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *73*, 173–189.

HUGHES, T. et FRANCA, L. P. (1987). A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII. The Stokes problem with various well-posed boundary conditions: symmetric formulations that converge for all velocity/pressure

spaces, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *65*, 85–96.

HUGHES, T. et HULBERT, G. (1988). Space-time finite element methods for elastodynamics: formulations and error estimates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *66*, 339–363.

HUGHES, T., LIU, W. et ZIMMERMANN, T. (1981). Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *29*, 329–349.

HULBERT, G. et HUGHES, T. (1990). Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *84*, 327–348.

JAMET, P. (1978). Galerkin-type approximations which are discontinuous in time for the parabolic equations in a variable domain, *Journal of Computational Physics*, *15*, 5, 912–928.

JOHNSON, A. (1995). *Mesh generation and update strategies for parallel computation of flow problems with moving boundaries and interfaces*, Thèse de doctorat, University of Minnesota.

JOHNSON, C. (1988). Error estimates and adaptive time-step control for a class of one-step methods for stiff ordinary diffential equations, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, *25*, 4.

JOHNSON, C. (1991). The characteristic streamline diffusion method, *Mat Aplic Comp*, *10*, 229–242.

JOHNSON, C. (1993). Discontinuous Galerkin finite element methods for second order hyperbolic problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *107*, 117–129.

JOHNSON, C., NAVERT, U. et PITKARANTA, J. (1984). Finite element methods for linear hyperbolic problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *45*, 285–312.

JOHNSON, C. et SARANEN, J. (1986). Streamline diffusion methods for the incompressible Euler and Navier-Stokes equations, *Mathematics of Computation*, *47*, 1–18.

KAIKTSIS, L., KARNIADAKIS, G. et S.ORSZAG (1991). Onset of three-dimensionality, equilibria and early transition in the flow over a backward facing step, *Journal of Fluids Mechanics*, *231*, 501–528.

LABBÉ, P. et GARON, A. (1995). A robust implementation of Zienkiewicz and Zhu's local patch recovery method, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, *11*, 427–434.

LADYSHENSKAYA, O. (1969). *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows*, Gordon and Breach.

LESAINT, P. et RAVIART, P.-A. (1974). On a finite element method for solving the neutron transport equation, *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equation*, C. Boor, Academic Press, New York, 89–123.

LI, X. et WIBERG, N. (1998). Implementation and adaptivity of a space-time finite element method for structural dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *156*, 211–229.

LIONS, J. (1968). *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*, Dunod.

MAKRIDAKIS, C. et BABUŠKA, I. (1997). On the stability of the discontinuous Galerkin method for the heat equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, *34*, 1, 389–401.

MASUD, A. et T.J.R.HUGHES (1997). A space-time Galerkin/least-squares finite element formulation of the Navier-Stokes equations for moving domain problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *146*, 91–126.

MITTAL, S. (1992). *Stabilized space-time finite element formulations for unsteady incompressible flows involving fluid-body interactions*, Thèse de doctorat, University of Minnesota.

MITTAL, S. et KUMAR, V. (1999). Finite element study of vortex-induced cross-flow and in-line oscillations of the circular cylinder at low reynolds numbers, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *31*, 1087–1120.

N'DRI, D., GARON, A. et FORTIN, A. (2000a). A new stable space-time finite element formulation for 2D and 3D incompressible viscous flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, accepté.

N'DRI, D., GARON, A. et FORTIN, A. (2000b). Stable space-time formulation for the Navier-Stokes equations, *38th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, numéro AIAA–2000–0394, Reno, Nevada.

N'DRI, D., GARON, A. et FORTIN, A. (2000c). Stable vs. stabilized space-time formulations for the Navier-Stokes equations, *8th Annual conference of the CFD Society of Canada*, Montreal, Canada, 71–78.

N'DRI, D., GARON, A. et FORTIN, A. (2001a). Analysis of mixed and stabilized space-time finite element formulation for the Navier-Stokes equations, *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, numéro AIAA–2001–0280, Reno, Nevada.

N'DRI, D., GARON, A. et FORTIN, A. (2001b). Incompressible Navier-Stokes computations with stable and stabilized space-time formulations: A comparative study, *Communication in Numerical Methods in Engineering*, soumis.

NGUYEN, H. et REYNEN, J. (1984). A space-time least-square finite element scheme for advection-diffusion equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *42*, 331–342.

ODEN, J. (1969). A general theory of finite element, part I and part II, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *1*, 205–221,247–259.

PIRONNEAU, O., LIOU, J. et TEZDUYAR, T. (1992). Characteristic-Galerkin and Galerkin/least-squares space-time formulations for the advection-diffusion equation with time-dependent domains, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *100*, 117–141.

PRIESTLEY, A. (1994). Exact projections and the Lagrange-Galerkin method: A realistic alternative to quadrature, *Journal of Computational Physics*, *112*, 316–333.

REED, W. et HILL, T. (1973). Triangular mesh methods methods for neutron transport equation, Rapport technique LA-UR-73-47, Los Alamos scientific laboratory.

RUSSO, A. (1996). Bubble stabilisation of finite element methods for linearized incompressible Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *132*, 335–343.

RYHMING, I. (1985). *Dynamique des fluides*, Presses Polytechnique Romandes.

SASAKI, Y. (1976). Variational design of finite-difference schemes for initial value problems with an integral invariant, *Journal of Computational Physics*, *21*, 270–278.

SCHLICHTING, H. (1979). *Boundary-layer theory*, Mc Graw-Hill.

SHAKIB, F. et HUGHES, T. (1991). A new finite element formulation for computational fluid dynamics:IX. Fourier analysis of space-time Galerkin/least-squares algorithms, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *87*, 35–58.

TEMAM, R. (1969). *Navier-Stokes equations*, North-Holland.

TEZDUYAR, T. et BEHR, M. (1992a). A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces. The deforming-spatial-domaine/space-time procedure: I. The concept and preliminary numerical tests, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *94*, 339–351.

TEZDUYAR, T. et BEHR, M. (1992b). A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces. The deforming-spatial-domaine/space-time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *94*, 353–371.

TEZDUYAR, T., MITTAL, S., RAY, S. et SHIH, R. (1992). Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *95*, 221–242.

THOMPSON, L. et PINSKY, P. (1996a). A space-time finite element method for the exterior structural acoustics problem: time-dependent radiation boundary conditions in two space dimensions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *39*, 1635–1657.

THOMPSON, L. et PINSKY, P. (1996b). A space-time finite element method for the structural acoustics in infinite domains part 1: Formulation, stability and convergence, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *132*, 195–227.

THOMPSON, L. et PINSKY, P. (1996c). A space-time finite element method for the structural acoustics in infinite domains part 2: Exact time-dependent non-reflecting boundary conditions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *132*, 229–258.

TRITTON, D. (1959). Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers, *J. Fluid Mech*, *6*, 547–567.

TRÉPANIER, J. et YANG, H. (1993). ADX: algorithms for adaptive discretization based on triangular grids, Rapport technique, École Polytechnique de Montréal.

VAROGLU, E. et FINN, W. L. (1980a). Space-time finite elements incorporating characteristics for one-dimensional diffusion-convection equation, *Journal of Computational Physics*, *34*.

VAROGLU, E. et FINN, W. L. (1980b). Space-time finite elements incorporating characteristics for the Burgers equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *16*, 174–184.

VAROGLU, E. et FINN, W. L. (1982). Utilisation of the method of characteristics to solve accurately two-dimensional transport problems by finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *2*, 173–184.

WIBERG, N.-E. et LI, X. (1999). Adaptive finite element procedures for linear and non-linear dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *46*, 1781–1802.

ZIENKIEWICZ, O. et ZHU, J. (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *24*, 7, 337–357.

ZIENKIEWICZ, O. et ZHU, J. (1992a). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates, part 1: The recovery technique, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *33*, 7, 1331–1364.

ZIENKIEWICZ, O. et ZHU, J. (1992b). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates, part 2: Error estimates and adaptivity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *33*, 7, 1365–1382.

ANNEXE A

PROJECTION LOCALE

Cette méthode rend les dérivées continues en projetant, les dérivées de la solution numérique sur une base polynômiale **P** du même ordre que les fonctions d'interpolation de la solution numérique.

Pour chaque sommet du maillage, on regroupe les éléments connectés à un sommet en une cellule «patch», tel qu'illustré à la figure A.1. La nouvelle représentation de la dérivée au nœud central de la cellule est obtenue en projetant la dérivée de la solution numérique sur la base polynômiale **P**. Cette base est constituée des fonctions d'interpolation de la solution définies sur l'élément de référence. Par exemple, dans le cas d'une solution linéaire en dimension 2, la base polynômiale possède $m = 3$ termes et s'écrit $\mathbf{P} = [1,x,y]$. Afin de définir la nouvelle représentation $(\frac{\partial u_h^*(x,y)}{\partial x})$ de la dérivée, on pose $\mathbf{P} = [p_1(x,y), \cdots ,p_m(x,y)]$ et on obtient la dérivée (d'une composante de la vitesse) résultant de la projection sous la forme:

$$\frac{\partial u_h^*(x,y)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} p_j(x,y) a_{xj}$$

Les cœfficients $\mathbf{a}_x = [a_{x1}, \cdots ,a_{xm}]^T$ sont obtenus pour chaque cellule en minimisant la fonctionnelle discrète de moindres carrés,

$$F(a_{x1}, \cdots ,a_{xm}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nb_pe} \left[\frac{\partial u_h(x_i,y_i)}{\partial x} - \sum_{j=1}^{m} p_j(x_i,y_i) a_{xj} \right]^2 , \qquad \text{(A.1)}$$

où, $nb_pe = nb_el * k$ représente, le nombre de points d'échantionnage obtenu en prenant k points d'échantillonnage par élément pour une cellule de nb_el éléments. En posant,

$$\frac{\partial F}{\partial a_{xj}} = 0 \quad (j = 1, \cdots ,m),$$

on montre que le vecteur $\mathbf{a}_x$ est solution du système matriciel:

$$A\mathbf{a}_x = \mathbf{b}_x, \tag{A.2}$$

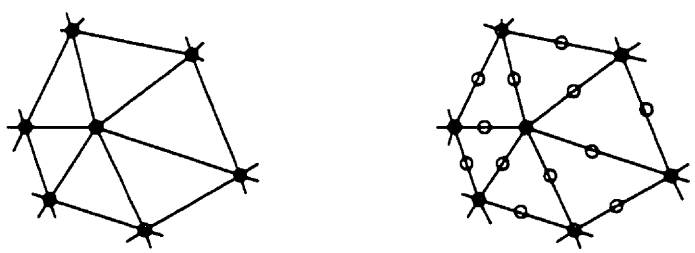
où

$$A = \sum_{i=0}^{nb_pe} \mathbf{P}^T(x_i,y_i)\mathbf{P}(x_i,y_i)$$

est la matrice du système de membre de droite

$$\mathbf{b}_x = \sum_{i=0}^{nb_pe} \mathbf{P}^T(x_i,y_i)\frac{\partial u_h(x_i,y_i)}{\partial x}.$$

La matrice A est indépendante des composantes du gradient. On a donc un système matriciel à membres de droite multiples à résoudre. On tire avantage de ce fait en calculant et décomposant la matrice A une seule fois.



Triangles linéaires Triangles quadratiques

Figure A.1 Exemple de cellules

La qualité de la projection obtenue dépend essentiellemnent de la position et du nombre de points d'échantillonage par élément. Le choix de points dits optimaux, superconvergents et ultraconvergents conduit à de meilleures approximations. On renvoie aux travaux de Zienkiewicz et Zhu (1992a,b) pour les détails sur cette propriété de superconvergence et sur la localisation et le nombre de ces points d'échantillonnage. D'autre part, pour que le système linéaire (A.2) possède une solution, il faut que le nombre de points d'échantillonnage soit supérieur ou égal au nombre de termes dans la base polynômiale $\mathbf{P}$ ($nb_pe \geq m$). Cette condition n'est pas satisfaite sur les cellules à peu d'éléments (1 ou 2 éléments) lorsqu'on

choisit les points d'échantillonnage dits optimaux. Pour satisfaire cette condition sur le rang de la matrice A et cela indépendamment du nombre d'éléments par cellule, Labbé et Garon (1995) ont suggéré l'utilisation de points de quadrature de Gauss en nombre égal au nombre de termes dans la base polynômiale $\mathbf{P}$, afin que le rang de la matrice A soit égal au nombre d'inconnues. En contrepartie, cela entraîne la perte de la propriété de superconvergence de l'opérateur de projection local discret telle que reportée par Zienkiewicz et Zhu (1992a,b). Finalement, La matrice A étant mal conditionnée (Labbé et Garon, 1995), le sytème linéaire (A.2) est résolu par la méthode de décomposition LU avec pivotage, afin de réduire les effets de l'arithmétique flottante.

Par ailleurs, comme un élément peut faire partie de plusieurs cellules, certains nœuds ont une contribution venant de plusieurs polynômes. Dans ce cas, la valeur de la dérivée projetée sera la moyenne des contributions de chaque polynôme.

Pour un écoulement bidimensionnel, l'intensité de la vorticité $\nabla \times \mathbf{u}$ s'exprime par

$$w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

et est évaluée à partir des dérivées spatiales projetées.

ANNEXE B

MODÈLE AXISYMÉTRIQUE

B.1 Opérateurs différentiels

Dans le cas axisymétrique, on utilise le système de coordonnées (x, r, θ) où x est dans la direction axiale, r est dans la direction radiale et θ est dans la direction tangentielle.

Soient s un scalaire, $\mathbf{v}$ un vecteur et T un tenseur:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_\theta \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xr} & T_{x\theta} \\ T_{rx} & T_{rr} & T_{r\theta} \\ T_{\theta x} & T_{\theta r} & T_{\theta\theta} \end{pmatrix} \tag{B.2}$$

On a alors les opérateurs différentielles suivants:

$$\nabla s = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{\partial s}{\partial \theta} \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \tag{B.4}$$

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_r}{\partial x} & \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial r} & \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial \theta} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \end{pmatrix} \tag{B.5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r T_{rx}) = \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta x}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r T_{rr} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{T_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{r\theta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{\theta r} - T_{r\theta}}{r} \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

B.2 Équations de Navier-Stokes

Soient $\mathbf{u}$ le vecteur vitesse, p la pression et ε le tenseur du taux de déformation. Les composantes du vecteur vitesse associées aux directions axiale, radiale et tangentielle sont respectivement u, v et w . Dans cette recherche, on considère seulement le cas sans tourbillon, c'est-à-dire qu'on suppose que $w = 0$ et que $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$. On obtient ainsi,

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v}{r} \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} \\ \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r} \\ \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

$$\nabla\cdot(2\mu\varepsilon(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \\ \\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[2r\mu\frac{\partial v}{\partial r}\right] \\ \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.9}$$

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial p}{\partial r} \\ \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.10}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) \tag{B.11}$$

L'équation de la conservation de la quantité de mouvement devient:

- dans la direction axiale:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} - f_x\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

- dans la direction radiale:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r} - f_y\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[2r\mu\frac{\partial v}{\partial r}\right] + 2\mu\frac{v}{r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

et celle de la continuité devient:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0$$

B.3 Méthode de Galerkin discontinue en temps

- mouvement axial:

$$\begin{aligned}
&\int_{S_n} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} - f_x \right) \delta u \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t - \int_{S_n} p \frac{\partial \delta u}{\partial x} \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\
&+ \int_{S_n} \mu \left[2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial r} \right] \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\
&- \int_{\Sigma_{Nn}} h_x \cdot \delta u \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_n} \rho(u_+^n - u_-^n) \cdot \delta u_+^n \, \mathrm{d}\Omega = 0.
\end{aligned}$$

- mouvement radial:

$$\begin{aligned}
&\int_{S_n} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r} - f_y \right) \delta v \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t - \int_{S_n} p \left(\frac{\partial \delta v}{\partial r} + \frac{\delta v}{r} \right) \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\
&+ \int_{S_n} \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial \delta v}{\partial r} + 2\frac{v}{r^2}\delta v \right] \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\
&- \int_{\Sigma_{Nn}} h_y \cdot \delta v \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_n} \rho(v_+^n - v_-^n) \cdot \delta v_+^n \, \mathrm{d}\Omega = 0.
\end{aligned}$$

- continuité

$$\int_{s_n} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \delta p \, \mathrm{d}\Omega = 0.$$

où $\mathrm{d}\Omega = r\mathrm{d}r\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}\Gamma = r\mathrm{d}r\mathrm{d}s$.

B.4 Méthode GLS/ST

- mouvement axial (termes supplémentaires)

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{S_n^e} \frac{\tau_{mom}}{\rho} \left\{ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} - f_x \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right.$$
$$\left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} \rho \left(\frac{\partial \delta u}{\partial \delta t} + u \frac{\delta u}{\partial x} + v \frac{\delta u}{\partial r} \right) \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t$$
$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{S_n^e} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \tau_{cont} \frac{\delta u}{\partial x} \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t$$

- mouvement radial (termes supplémentaires)

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{S_n^e} \frac{\tau_{mom}}{\rho} \left(\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} - f_x \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right.$$
$$\left. - \frac{1}{r} \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[2\mu r \frac{\partial v}{\partial r} \right] - 2\mu \frac{v}{r^2} \right) \rho \left(\frac{\partial \delta v}{\partial t} + u \frac{\partial \delta v}{\partial x} + v \frac{\partial \delta v}{\partial r} \right) \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t$$
$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{S_n^e} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \tau_{cont} \left(\frac{\delta v}{\partial r} + \frac{\delta v}{r} \right) \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t$$

- continuité (termes supplémentaires)

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{S_n^e} \frac{\tau_{mom}}{\rho} \left(\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} - f_x \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right.$$
$$\left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right) \frac{\partial \delta p}{\partial x} \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t$$
$$+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{S_n^e} \frac{\tau_{mom}}{\rho} \left(\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} - f_x \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right.$$
$$\left. - \frac{1}{r} \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[2r \frac{\partial v}{\partial r} \right] - 2\mu \frac{v}{r^2} \right) \frac{\partial \delta p}{\partial r} \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t$$

Les paramètres de stabilisation τ_{mom} et τ_{cont} sont définis au chapitre 2.