

Titre: Synthèse et identification aveugle de signaux pour la prospection électromagnétique
Title: [Synthèse et identification aveugle de signaux pour la prospection électromagnétique](#)

Auteur: Fethi Malamane
Author: [Fethi Malamane](#)

Date: 1996

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Malamane, F. (1996). Synthèse et identification aveugle de signaux pour la prospection électromagnétique [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/6933/>
Citation: [https://publications.polymtl.ca/6933/](#)

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/6933/>
PolyPublie URL: [https://publications.polymtl.ca/6933/](#)

Directeurs de recherche: Michael J. Corinthios
Advisors: [Michael J. Corinthios](#)

Programme: Unspecified
Program: [Unspecified](#)

NOTE TO USERS

This reproduction is the best copy available

UMI

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SYNTHÈSE ET IDENTIFICATION AVEUGLE DE SIGNAUX POUR LA
PROSPECTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

FETHI MALAMANE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)

JUILLET 1996



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file. Votre référence.

Our file. Notre référence.

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-33156-3

Canadä

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:
SYNTHÈSE ET IDENTIFICATION AVEUGLE DE SIGNAUX POUR LA
PROSPECTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

présenté par: **MALAMANE Fethi**
pour l'obtention du diplôme de: **MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES**
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. HOULE Jean-louis, PhD., président

M. CORINTHIOS Michel, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. LEMIRE Michel, M.Eng., membre

À ma très chère mère,

À mes défunts père et frère aîné, (R.A.),

À la gazelle, à son poète, à nous deux....

Remerciements

Mes plus vifs remerciements s'adressent d'abord au Dr. M.J. Corinthios, qui a bien voulu diriger et superviser ce travail, ainsi que pour les multiples recommandations et judicieux conseils dans l'accomplissement de ma tâche.

Aussi ne manquerais-je pas d'ajouter, que c'est grâce au meilleur des soutiens moraux donnés par M. Corinthios, que je suis venu à bout de ce projet et des innombrables moments difficiles.

Que les membres du jury, se voient aussi vivement remerciés d'avoir accepté de juger ce mémoire, espérant ne pas avoir causé un débordement de travail ou empiétant dans le repos mérité par tout un chacun, sachant tout de même que c'est la période estivale.

Que mes amis M. Soufi, K. Rahmouni et N. Zerrouk trouvent dans ces quelques mots: profonde reconnaissance et gratitude, signes d'une amitié que j'espère indéfectible pour ces années polytechniciennes et celles à venir.

Résumé

Le problème auquel on est confronté est celui de l'interprétation de signaux provenant d'anomalies géophysiques. Ces dernières, vues comme des *sources*, excitées par le champ électromagnétique dit primaire provenant de puissantes antennes émettrices, feront rayonner à leur tour un champ électromagnétique secondaire. Théoriquement, le lieu géométrique parcouru par le champ électromagnétique total résultant des champs primaire et secondaire, est une ellipse dite 'ellipse de polarisation'.

Ces *sources* sont vues comme des demi-plans infinis parfaitement conducteurs. Elles sont définies en prospection électromagnétique, notamment par la méthode V.L.F. (very low frequency), par deux paramètres à extraire de l'ellipse de polarisation. Les deux paramètres en question sont le **taux d'ellipticité** ξ rapport des axes mineur à majeur de l'ellipse et l'**angle** Θ que forme l'axe mineur avec l'axe vertical (z) d'un repère cartésien (y, z) centré à l'origine. Le taux d'ellipticité ξ et l'angle Θ constituent ainsi les *signatures* des sources, en nous renseignant sur la profondeur d'enfouissement et sur l'inclinaison de chacune d'entre elles par rapport à un axe vertical. Ces signatures, appelées aussi *réponses* V.L.F., sont simulées. Leur description est détaillée dans la première partie du document. Notre étude est ainsi basée sur des simulations d'un réseau matriciel de capteurs disposés au sol.

Dans la deuxième partie du travail, on s'attelle à la tâche d'identification des signaux que transmet ce réseau de capteurs, en particulier dans le cas où ces *sources* sont rapprochées. L'observation faite sur chaque *capteur*, est considérée comme la combinaison linéaire ou *mixture* de toutes ces *sources*, à laquelle peut s'ajouter du bruit gaussien ou de toute autre nature. Ainsi, le milieu où sont plongées ces *sources*, joue le rôle d'un opérateur de transformation linéaire ou encore de *matrice* de mélange. Le processus d'identification-interprétation consiste alors en la *séparation* des signaux observés sur les capteurs, restituant les signaux *sources*, et de là les informations sur les anomalies géophysiques. Tout l'art est dans la séparation de la *mixture* de ces signaux, et l'analyse en composantes indépendantes est là pour nous aider à la faire.

Notre étude s'achève par une comparaison faite entre deux méthodes d'analyse, soit: l'**analyse en composantes indépendantes (A.C.I.)**, et l'**analyse en composantes principales (A.C.P.)**. Avec l'A.C.P. les observations sont décorrélées, par diagonalisation de leur matrice de covariance. Par contre l'A.C.I. nous permet d'extraire la base canonique de signaux indépendants en diagonalisant le **tenseur de cumulants** des observations effectuées au sol.

Abstract

The problem with which we are dealing, is the one of interpreting signals of geophysical anomalies. These anomalies are called *sources*, and are modelled sheet like semi-infinite plans conductors, producing the so called secondary electromagnetic field, when excited by the primary field propagated from antennas used for submarine communications. Theoretically, the total electromagnetic field is elliptically polarized, then we are interested only by the principal parameters, namely the ellipticity ratio ξ and the dip angle Θ . These parameters (signals) help us define the *sources*, by giving us the depth of the buried *sources*, and their inclination. The synthesis of these signals, is the first part of the study.

In the second part of this work, we deal with the identification of these signals, even if we are in the presence of a lot of closed *sources*. These data observed via a matrix net of *sensors*, are the linear combinations or the mixture of all these *sources*, with or without additive noise, gaussian or otherwise. All these signals are obviously obtained by simulation and the medium, where these *sources* are buried, is acting like a linear transformation operator or a *mixing* matrix. The process of identification-interpretation, then consists in the *separation* of these “mixed” signals. By doing this, we also have all the informations about the geophysical anomalies generating them. The principal tool, namely, the indepen-

dent component analysis, where we diagonalize the tensor of cumulants of the observed data, is used to achieve this *separation*.

Finally, we gave a brief comparison between the independent components analysis (I.C.A.), from which can extract the canonical basis of independent signals, and the principal components analysis (P.C.A.), where we obtain only uncorrelated signals, by diagonalizing the covariance matrix of the observed data.

Table des matières

Dédicace.....	iv
Remerciements.....	v
Résumé.....	vi
Abstract.....	viii
Table des matières.....	x
Liste des tableaux.....	xiv
Liste des figures.....	xv
Chapitre 1.....	1
INTRODUCTION.....	1
1.1 Historique et nature du problème.....	1
1.2 Définition du problème.....	2
1.3 Objectifs et organisation du mémoire.....	3
Chapitre 2.....	5
LA SYNTHÈSE DES SIGNAUX.....	5
2.1 Présentation de la méthode V.L.F.....	6
2.2 Paramètres principaux à synthétiser.....	6
2.3 Présentation du modèle.....	10

2.3.1 Expressions des champs.....	12
2.4 Calcul des champs.....	15
2.4.1 Expressions de $N1(t')$ et $N2(t')$	16
2.4.2 Résolution du système d'équations intégrales.....	22
2.4.3 Transformée de Hankel.....	23
2.4.4 Résolution des transformées de Hankel.....	27
2.4.4.1 De la transformée de Hankel au produit de convolution discrète.....	28
2.4.5 Filtre linéaire d'Anderson.....	32
2.4.6 Calcul des principaux paramètres.....	37
2.4.6.1 Organigramme de synthèse des réponses V.L.F.....	42
Chapitre 3.....	48
ANALYSE EN COMPOSANTES INDÉPENDANTES.....	48
3.1 Formalisme tensoriel.....	49
3.2 Définition et principales propriétés des cumulants.....	50
3.2.1 Définition des cumulants.....	50
3.2.2 Principales propriétés des cumulants.....	51
3.2.3 Estimation des cumulants d'ordre quatre.....	54
3.3 L'analyse en composantes indépendantes.....	56
3.3.1 Présentation de l'A.C.I.....	57
3.3.2 Définition de l'A.C.I.....	58
3.3.3 Fonctions de contraste.....	58

3.3.4 Standardisation.....	59
3.3.5 Fonction et critère de contraste.....	60
3.3.5.1 Définition de la fonction de contraste.....	60
3.3.5.2 Critère du contraste.....	62
3.4 Algorithme.....	65
3.5 Validation de l'algorithme.....	70
3.5.1 Identification-interprétation.....	72
3.5.1.1 Application à deux et à quatre paramètres.....	72
3.5.1.2 Interprétation des résultats.....	80
3.5.1.3 Extension à d'autres signaux.....	81
3.5.1.4 Cas d'une mixture bruitée de deux signaux binaires.....	82
3.5.1.5 Cas d'une mixture non bruitée de quatre signaux.....	85
3.5.1.6 Application de l'A.C.I. aux données réelles.....	90
Chapitre 4.....	95
ÉTUDE COMPARATIVE ENTRE L'A.C.I. ET L'A.C.P.....	95
4.1 Définition.....	96
4.2 Comparaison.....	97
4.3 Représentations isométriques.....	100
4.4 Application de l'A.C.P. aux données réelles.....	102
Chapitre 5.....	105
CONCLUSION.....	105

BIBLIOGRAPHIE.....	107
ANNEXE A.....	112
Listage des programmes.....	112
ANNEXE B.....	162
Principales références utilisées de la bibliographie [5], [6] et [8].....	162

Liste des tableaux

Tableau 2.1 Symboles utilisés dans la première partie	10
---	----

Liste des figures

Figure 2.1 Champ électromagnétique total	7
Figure 2.2 Ellipse de polarisation	8
Figure 2.3 Paramètres secondaires.....	9
Figure 2.4 Géométrie du modèle	11
Figure 2.5 Coefficients du filtre a ($u = 1/2$)	35
Figure 2.6 Abaque # 1	38
Figure 2.7 Abaque # 2.....	38
Figure 2.8 Abaque # 3.....	39
Figure 2.9 Organigramme de synthèse des réponses V.L.F.	42
Figure 2.10 Histogramme des signaux de l'abaque # 1	43
Figure 2.11 Histogramme des signaux de l'abaque # 2	44
Figure 2.12 Histogramme des signaux de l'abaque # 3	45
Figure 2.13 Fonction de répartition $p(x)$	46
Figure 3.1 Balayage cyclique naturel.....	67
Figure 3.2 Modèle linéaire.....	70
Figure 3.3 Schéma bloc d'identification	71

Figure 3.4 Paramètres tan2Q, des abaques #1 et #2 (a), (b)	74
Figure 3.5 Mixture des 2 paramètres tan2Q, des abaques #1 et #2	75
Figure 3.6 Signaux_ 1 (a) en sortie de l'A.C.I.	75
Figure 3.7 Paramètres tan2Q, des abaques #1 et #2 (a), (b)	76
Figure 3.8 Mixture bruitée des 2 paramètres tan2Q, des abaques #1 et #2	77
Figure 3.9 Signaux_1 (b) en sortie de l'A.C.I.	77
Figure 3.10 Paramètres tan2Q, des abaques #1, #2 (a), (b), (c) et (d)	78
Figure 3.11 Mixture des 4 paramètres tan2Q, des abaques #1, #2	79
Figure 3.12 Signaux_2 (a) en sortie de l'A.C.I.	79
Figure 3.13 Signaux binaires	83
Figure 3.14 Mixture bruitée des 2 signaux binaires.....	83
Figure 3.15 Signaux en sortie de l'A.C.I.	84
Figure 3.16 Les quatre signaux sources	85
Figure 3.17 Mixture des quatre signaux	86
Figure 3.18 Distribution statistique des deux sinusoides.....	86
Figure 3.19 Signaux en sortie de l'A.C.I. 1 ^o balayage.....	87
Figure 3.20 Signaux en sortie de l'A.C.I. 2 ^o balayage.....	88
Figure 3.21 Signaux en sortie de l'A.C.I. 3 ^o balayage.....	88

Figure 3.22 Données V.L.F. du site Marbridge	90
Figure 3.23 Données V.L.F. normalisées Marbridge	91
Figure 3.24 Données V.L.F. Marbridge en sortie de l'A.C.I.	92
Figure 4.1 Transformations A.C.P. / A.C.I.	97
Figure 4.2 Signaux binaires	98
Figure 4.3 Mixture des 2 signaux binaires.....	98
Figure 4.4 Signaux en sortie de l'A.C.P.....	99
Figure 4.5 Signaux en sortie de l'A.C.I.	99
Figure 4.6 Représentation isométrique à l'entrée de l'A.C.P. et de l'A.C.I. (a)	100
Figure 4.7 Représentation isométrique en sortie de l' A.C.P. (b)	101
Figure 4.8 Représentation isométrique en sortie de l' A.C.I. (c)	101
Figure 4.9 Données V.L.F. Marbridge en sortie de l'A.C.P.	102
Figure 4.10 Données V.L.F. Marbridge en sortie de l'A.C.P. et de l'A.C.I.	103

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 Historique et nature du problème

La recherche minière dans son aspect découverte de nouveaux gisements, constitue une des multiples applications de la géophysique. En empruntant au vocabulaire des géophysiciens, tout gisement de quelque nature qu'il soit est appelé: anomalie géophysique. Si ces anomalies géophysiques sont conductrices d'électricité, l'exploitation de cette propriété de pair avec celle des champs électromagnétiques environnants, forme l'ensemble des méthodes de prospection électromagnétique.

Toutes ces méthodes servent à interpréter les signaux émis par ces sources (anomalies géophysiques) et l'on s'attardera particulièrement sur celle dite v.l.f.¹-électromagnétique. Toutefois, cette méthode sera plutôt utilisée pour synthétiser les signaux qui joueront le rôle de *signatures* de ces sources. Ces sources ont été modélisées par [1], [2], [3], [4],

1. Very Low Frequency

comme des demi-plans infinis conducteurs enfouis dans la terre et cette dernière est considérée par [4], [5], à deux couches seulement. L'interprétation des signaux émis par ces sources, vise à pouvoir ‘revenir’ aux sources ayant produit ces signaux, en donnant tout au moins comme dans notre cas: la profondeur d'enfouissement dans la terre et l'angle d'inclinaison de chacune des sources.

1.2 Définition du problème

On étudie le cas où nous sommes en présence de plusieurs sources rapprochées. Le milieu (la terre) et la promiscuité des sources $s_k, k \in \{1, 2, \dots, S\}$, engendrent une *mixture* de signaux observables au sol par un réseau matriciel de capteurs $c_j, j \in \{1, 2, \dots, C\}$. Cette *mixture* notée $\bar{y} = \{y_k\}$: vecteur de données, résulte de la transformation linéaire du vecteur sources $\bar{s} = \{s_k\}$ par une matrice M dite de *mélange*. La mixture \bar{y} à laquelle peut s'ajouter du bruit gaussien ou de toute autre nature, s'écrit alors:

$$\bar{y} = M \cdot \bar{s} + \bar{w},$$

où \bar{w} est le vecteur bruit à k composantes $\{w_k\}$. Le nombre S de sources $\{s_k\}$ est considéré au plus égal à celui des capteurs $C = \{c_j\}, S \leq C$. Ainsi le problème se réduit à celui d'identifier M et notamment le vecteur sources \bar{s} à partir du vecteur de données \bar{y} . En l'absence totale ou partielle d'information sur M , l'identification est dite alors, “aveugle” ou “myope”.

1.3 Objectifs et organisation du mémoire

Les objectifs du présent mémoire se résument ainsi:

1. Synthèse des signaux:

D'emblée, nous rappelons que le présent travail est entièrement basé sur des simulations. Dans la première partie (chapitre 2) du présent mémoire on trouve, outre les aspects théoriques concernant la méthode de prospection v.l.f.-électromagnétique et le modèle choisi de l'anomalie géophysique, la synthèse des signaux ou *signatures* des anomalies géophysiques. Ces signatures servent lors de l'identification à interpréter les signaux que produisent les sources ou anomalies géophysiques. Le modèle choisi de l'anomalie géophysique est celui que propose Poddar [5]. Pour synthétiser les signatures des anomalies géophysiques telles que modélisées par [5], nous avons dû entreprendre une analyse mathématique *assez fine* afin de concrétiser les étapes de la section “method of computation”, page 1063 de la référence [5].

2. Identification par analyse en composantes indépendantes:

La deuxième partie (chapitres 3 et 4) englobe des aspects théoriques qui conduisent alors à fournir une solution au type de problème tel que défini dans la section 1.2. Afin d'identifier M et \bar{s} , on fait appel à l'analyse en composantes indépendantes (A.C.I.) et spécifiquement à l'algorithme de séparation de ces signaux, qui est attribuable à Comon [6]. L'identification-interprétation des observations se fait par séparation des signaux sources ce qui conduit à la restitution des *signatures* des anomalies géophysiques.

Reste à citer la partie charnière entre la première et deuxième partie. En effet, par le tracé des histogrammes des *signatures* synthétisées cette partie charnière fait ressortir que ces signaux sont possiblement de distribution non gaussienne. La mise en évidence du caractère non gaussien des signaux synthétisés est appuyée par une comparaison avec des distributions de sinusoïdes telles que données par [7].

3. Comparaison de l'A.C.I. à l'analyse en composantes principales (A.C.P.):

Cette dernière partie qui fait l'objet du chapitre 4 est basée sur la référence [8]. Par comparaison à l'A.C.I., on montre comme dans [8] *l'incapacité* de l'A.C.P. à résoudre ce type de problème, à savoir, l'identification-interprétation s'agissant de signaux non gaussiens. L'analyse en composantes principales fait appel à la statistique d'ordre 2, contrairement à l'analyse en composantes indépendantes qui fait intervenir la statistique d'ordre supérieur.

Chapitre 2

LA SYNTHÈSE DES SIGNAUX

Dans ce chapitre, on introduit la méthode de prospection v.l.f.-électromagnétique dans le but de décrire les signaux que l'on synthétise. Ces derniers qui rappelons-le constituent les *signatures* des anomalies géophysiques sont aussi appelés par les géophysiciens réponses V.L.F. Après une courte présentation du modèle de l'anomalie géophysique [5], la synthèse des réponses V.L.F. découlant de la résolution des équations mettant en jeu les composantes complexes magnétiques horizontale H_y et verticale H_z du champ électromagnétique, est décrite en détail. Suivra, afin de calculer ces composantes du champ électromagnétique, la résolution de transformées de Hankel que constituent les expressions du champ électromagnétique total. Pour y parvenir, la méthode [9], utilise la résolution de produits de convolution discrète. Finalement, de ces réponses V.L.F. synthétisées et représentées dans trois abaques, on trace leurs histogrammes. Ces derniers nous donnent une idée sur la “distribution” statistique de chacun de ces signaux synthétisés.

2.1 Présentation de la méthode V.L.F.

Du réseau mondial de stations haute-puissance V.L.F. mis en place pour la navigation maritime, les émissions de signaux V.L.F. sont utilisées comme sources de prospection électromagnétique. Les positions de ces stations sont telles que, de n'importe quel point du globe, on puisse capter au moins deux stations. La méthode V.L.F. en exploration géophysique, utilise comme source de prospection électromagnétique, celle des stations radios militaires très puissantes, qui émettent dans la bande de fréquence de 15 à 25 kHz [3]. Si l'on se place à des distances suffisamment éloignées des émetteurs, l'onde électromagnétique qui théoriquement est tangente à des cercles concentriques autour de l'antenne peut être considérée comme plane.

De nombreuses études théoriques basées sur différents modèles ont été entreprises, [1] à [5], afin de mieux comprendre les réponses V.L.F. Ces études mettent en évidence l'influence de nombreux facteurs et les modèles considérés demeurent toutefois, de géométrie simple.

2.2 Paramètres principaux à synthétiser

Toutes les méthodes de prospection électromagnétique utilisées s'accordent pour ne prendre en compte que les composantes magnétiques du champ électromagnétique, et desquelles découlent deux paramètres constituant les réponses V.L.F.

Si l'on se place dans le repère cartésien Y, Z de la figure 2.1, où sont représentées la composante magnétique du champ primaire supposée horizontale H^P et celle du champ

secondaire H^s déphasée d'un angle α , alors de [1], les composantes magnétiques horizontale $\zeta_y(t)$ et verticale $\zeta_z(t)$ du champ total $\zeta(t)$ résultant des champs primaire et secondaire, s'expriment comme suit:

$$\zeta_y(t) = Y \cdot \cos(wt + \phi'), \quad \zeta_z(t) = Z \cdot \cos(wt + \phi).$$

De [5], la source d'excitation harmonique dépendante du temps est de la forme $e^{j\omega t}$, ϕ représente un certain déphasage et $\phi' = \text{atan} \frac{H^s \cdot \cos \alpha \cdot \sin \phi}{H^p + H^s \cdot \cos \alpha \cdot \sin \phi}$, [1].

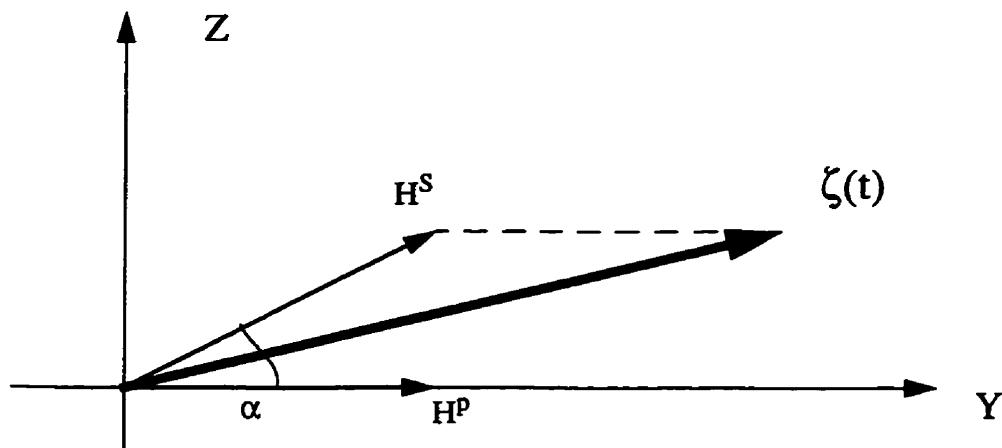


Figure 2.1 Champ électromagnétique total

Le lieu parcouru par $\zeta(t)$ a pour équation:

$$\frac{\zeta_y^2}{Y^2} + \frac{\zeta_z^2}{Z^2} - \frac{2 \cdot \zeta_y \cdot \zeta_z}{Y \cdot Z} \cdot \cos \Delta\phi = \sin 2\Delta\phi \text{ et } \Delta\phi = (\phi' - \phi).$$

C'est l'équation d'une ellipse dite "ellipse de polarisation" (figure 2.2) d'axe majeur 'a' et d'axe mineur 'b' incliné par rapport à l'axe vertical (Z) d'un angle Θ ,

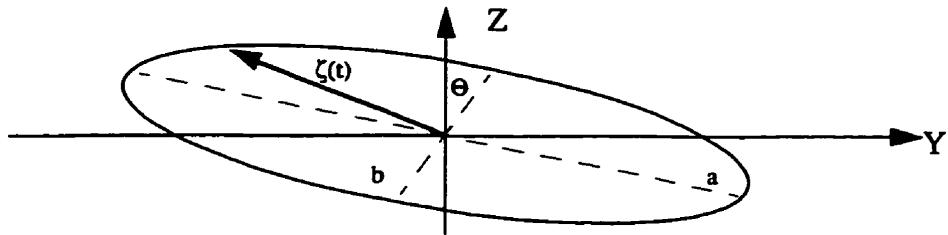


Figure 2.2 Ellipse de polarisation

où

$$\tan 2\Theta = \frac{2 \cdot Y \cdot Z \cdot \cos \Delta\phi}{Y^2 - Z^2}$$

et de taux d'ellipticité ξ défini comme le rapport des axes mineur sur majeur: $\xi = b/a$.

Les paramètres principaux Θ et ξ sont représentés à la figure 2.3 ci-après. En trait continu on représente l'évolution de ξ et en discontinu celle de Θ . Quant aux diverses quantités: Θ_{max} , ξ_{max} , $\Theta_{\Delta y}$ et $\xi_{\Delta y}$, que sont les amplitudes crête-à-crête et les écarts entre extrêmes de chacun des deux paramètres (Θ, ξ); ces dernières servent lors de l'identification-interprétation des signaux. Les grandeurs (Θ, ξ) sont calculées à la section 2.4.6., et s'expriment notamment en fonction des composantes complexes $H_{y'N}$ et $H_{z'N}$. Ces dernières, telles qu'obtenues dans nos équations (2.13) et (2.14) à la page 27, représentent le rapport des champs total sur primaire, des composantes magnétiques complexes horizontale et verticale. Sur la figure 2.3, en ordonnées on porte alors ce rapport qui s'exprime en (%) et sur l'axe des abscisses la quantité $y' = y/\delta$ sans unités.

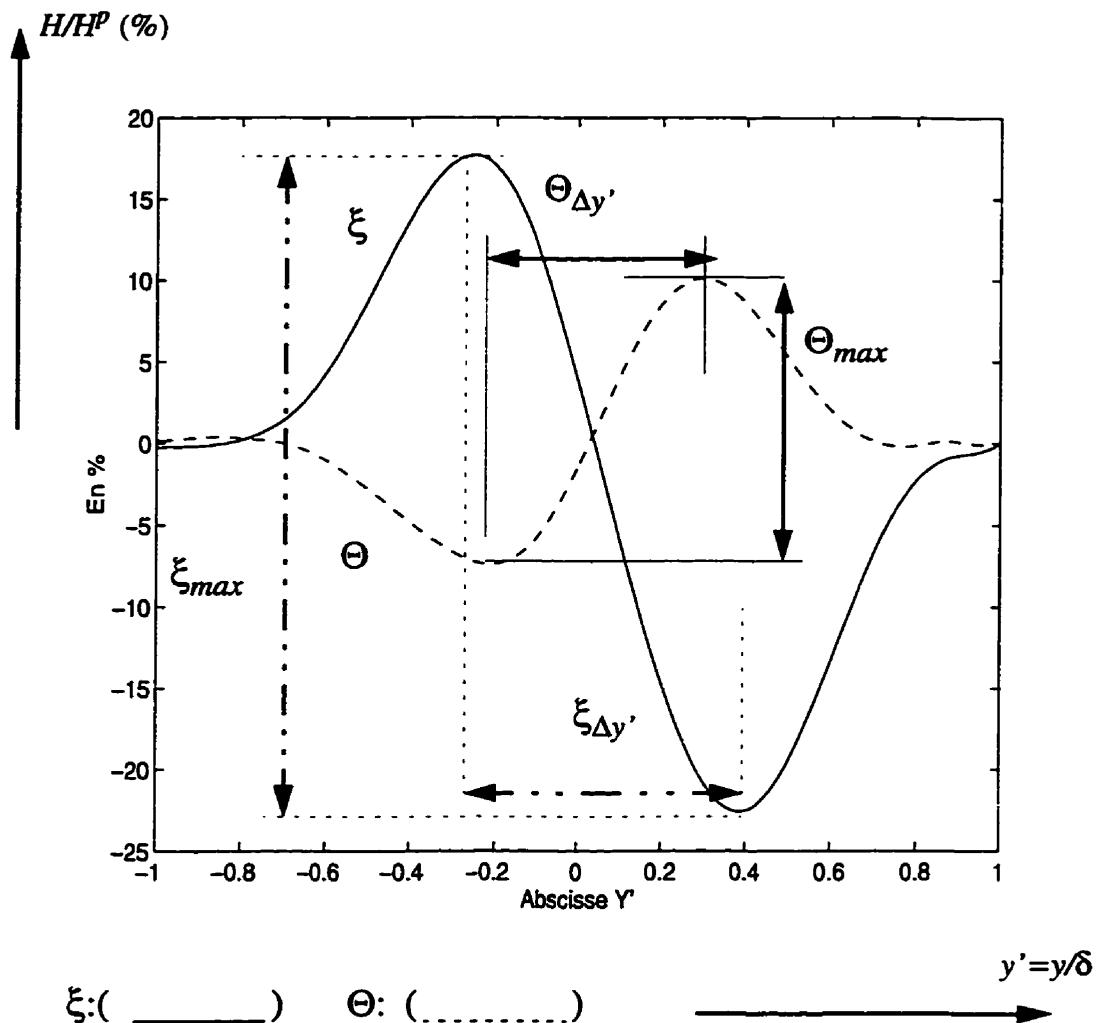


Figure 2.3 Paramètres secondaires

Dans le tableau ci-après, [5], sont reportés les symboles rencontrés dans les diverses expressions mathématiques du présent chapitre.

Tableau 2.1 Symboles utilisés dans la première partie

x, y, z	coordonnées	$\eta_j, j = 1, 2$	fonction des facteurs d'onde k_j
$k_j, j = 0, 1, 2$	facteurs d'onde	$\zeta_j, j = 1, 2$	fonction des paramètres η_j et de t la constante d'intégration
H_y	composante y du champ total	$\sigma_j, j = 0, 1, 2$	conductivités
H_y^p	composante y du champ primaire	μ_0	perméabilité du vide
$H_{y_0}^p$	comp. y du champ primaire à $z = 0$	d	l'épaisseur de la couche
H_z^p	composante z du champ primaire	h	pronfondeur d'enfouissement du conducteur
H_z	composante z du champ total	α	inclinaison du conducteur
H	champ total	λ, t	variables d'intégration
H^p	champ primaire	δ	épaisseur de peau
$\mu_j, j = 1, 2$	fonction des facteurs d'onde k_j et de λ la constante d'intégration	C	constante
m	rapport des conductivités σ_1/σ_2	β	phase
Θ, ξ	principaux paramètres	a, b	axes majeur et mineur de l'ellipse
h_y	fonction de la composante y du champ en phase et en quadrature	h_z	fonction de la composante z du champ en phase et en quadrature.
$v_j, j = 1, 2$	fonction des paramètres μ_j et de λ la constante d'intégration	M, Q, R, S, U $V, U_0, V_0, \Delta, \Delta'$	fonctions, voir sections 2.3.1 à 2.4.1

2.3 Présentation du modèle

Pour la synthèse des réponses V.L.F., le modèle choisi est celui dont l'étude détaillée se trouve dans [4] et [5]. Dans la prospection électromagnétique V.L.F., l'onde se propage dans le 'guide d'onde' que constitue l'ionosphère et la terre. A plusieurs longueurs d'onde de l'antenne de transmission, l'onde reçue peut être considérée comme plane.

Dans la figure 2.4, l'axe Z du système de coordonnées (X,Y,Z) est vertical au plan (X,Y). A $Z = 0$, c'est la surface de la terre, qui sépare les deux espaces ($Z > 0$) de conduc-

tance σ_0 et de perméabilité magnétique μ_0 de l'air, et ($Z < 0$) la terre considérée à deux couches de conductances σ_1 , σ_2 [5]. Le demi-plan conducteur se trouve à une profondeur h de la terre, incliné d'un angle α par rapport à l'axe vertical où d représente l'épaisseur de la première couche. Les facteurs k_0 , k_1 et k_2 représentent les facteurs d'onde, dans les espaces ($Z > 0$), ($-d \leq Z \leq 0$) et ($-\infty < Z < -d$), respectivement. Du champ primaire (incident) dans la terre ($Z < 0$) qui s'y propage et du champ secondaire (diffracté) résulte le champ total défini uniquement par ses trois composantes: E_x , H_y , H_z [4] et [5].

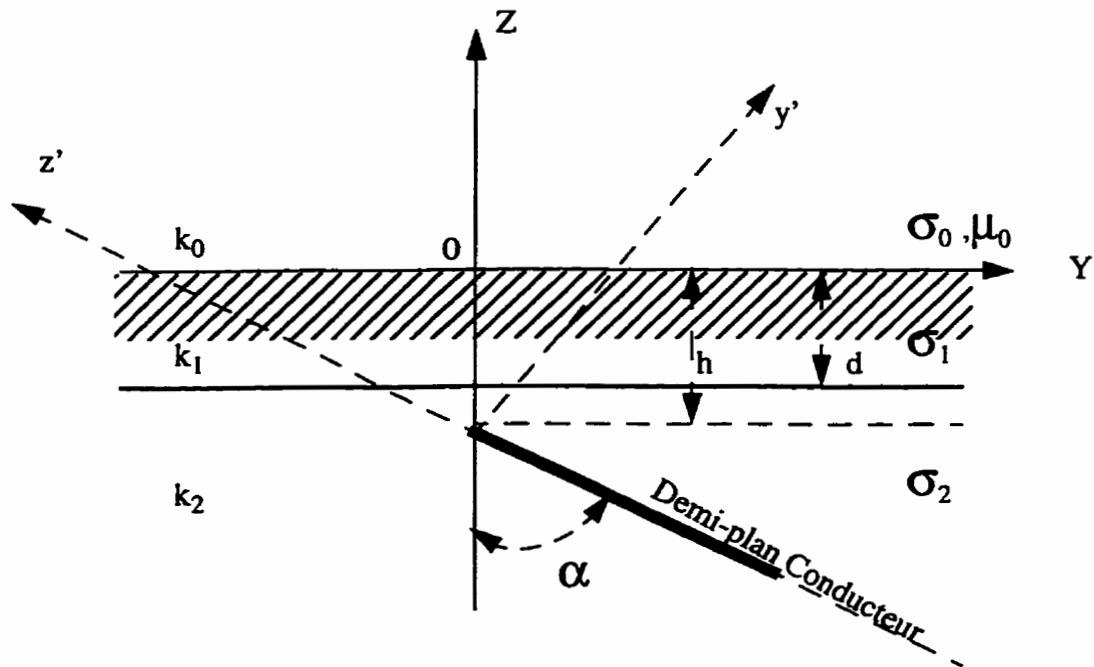


Figure 2.4 Géométrie du modèle

Pour résoudre le problème en terme de réponse électromagnétique (E.M.) du demi-plan conducteur dans la terre à deux couches et où l'onde se propage verticalement,

Poddar [5] donne une représentation sous forme d'équation intégrale du champ électrique fonction de courants diffractés dans le demi-plan et de la fonction de Green appropriée. Dans la section qui suit se trouve brièvement résumée la méthode qu'emploie Poddar pour parvenir aux expressions des composantes E_x , H_y et H_z des champs électrique et magnétique.

2.3.1 Expressions des champs

Comme le champ total ainsi que tous les paramètres du milieu (terre) inhomogène sont considérés indépendants de l'axe x d'un repère (x, y, z) [5], alors le champ total ne sera défini que par ses trois composantes (E_x , H_y et H_z) liées par les deux équations de Maxwell suivantes, en supposant la source d'excitation harmonique dépendante du temps de la forme $e^{j\omega t}$:

$$H_y = \frac{1}{j\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z} \text{ et } H_z = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad (2.1)$$

où le champ électrique $E_x(y, z)$ satisfait l'équation d'Helmholtz suivante:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_i^2 \right) E_x = 0, \text{ avec } k_i^2 = j\mu_0\omega\sigma_i; \quad i \in \{1, 2\}.$$

Finalement, en tenant compte des conditions aux limites du demi-plan et du nouveau système de coordonnées (y', z') , montré à la figure 2.4, $y = y' \cdot \cos\alpha - z' \cdot \sin\alpha$, et $z = y' \cdot \sin\alpha + z' \cdot \cos\alpha$, de [5] on réécrit l'expression du champ électrique:

$$E_x = -\frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^0 J_x(z') \cdot G(y'_0, z'_0; y', z') dz' + E_x^p(y'_0, z'_0),$$

où E_x , E_x^p sont les champs total et primaire, J_x la composante en x de la densité superficielle de courant dans le demi-plan et $G(y'_0, z'_0; y', z')$ fonction de Green appropriée. D'après [10] aux points $y' = y'_0$ et $z' = z'_0$, E_x présente une singularité logarithmique. L'expression de E_x mène alors à deux équations intégrales de Fredholm de première et deuxième espèce [5]. Cette dernière est utilisée pour la transformée de Laplace du courant diffracté par application de la technique de Wiener-Hopf [5]. Afin d'alléger le texte, on ne reproduit pas les calculs développés par l'auteur [5], mais plutôt l'expression finale du champ électrique soit:

$$(2.2) \quad E_x(y, z) = E_x^p(y, z) - E_{x_0}^p \cdot B \cdot \frac{\sqrt{2k_2}}{j\pi} \cdot \cos(\alpha/2) \cdot \exp(jk_2 h) \\ \int_0^{\infty} \{ (f_1 + f_2) \cdot \cos(ty) + j \cdot (f_1 - f_2) \cdot \sin(ty) \} \cdot f_3 dt$$

avec

$$B = \frac{2 \cdot \exp\left(j\left(1 - \sqrt{\sigma_2/\sigma_1}\right)k_1 d\right)}{\left(1 + \sqrt{\sigma_2/\sigma_1}\right) + \left(1 - \sqrt{\sigma_2/\sigma_1}\right) \cdot \exp(2jk_1 d)},$$

$$f_1 = \frac{\sqrt{k_2 + j\zeta_2}}{(\zeta_2 - jk_2 \cos\alpha)} \cdot N(\zeta_2), f_2 = \frac{\sqrt{k_2 + j\zeta_1}}{(\zeta_1 - jk_2 \cos\alpha)} \cdot N(\zeta_1) \text{ et}$$

$f_3 = \frac{2\eta_1}{\Delta'} \cdot \exp(-tz - \eta_2(h-d))$. Quand aux facteurs rencontrés dans les expressions de B, f_1, f_2 et de f_3 , ils s'expriment comme suit:

$$k_i^2 = j\mu_0\omega\sigma_i, \eta_i^2 = t^2 - k_i^2 \text{ et } \mu_i^2 = \lambda^2 - k_i^2; i \in \{1, 2\}.$$

$$(v_1 = \mu_2 \cos \alpha - j\lambda \sin \alpha), (v_2 = \mu_2 \cos \alpha + j\lambda \sin \alpha)$$

$$(\zeta_1 = \eta_2 \cos \alpha - jt \sin \alpha), (\zeta_2 = \eta_2 \cos \alpha + jt \sin \alpha) \text{ et}$$

$$\Delta' = (\eta_1 + t) \times (\eta_2 + \eta_1) \times \exp(\eta_1 d) + (\eta_1 - t) \times (\eta_2 - \eta_1) \times \exp(-\eta_1 d).$$

Des équations (2.1) et (2.2) sont tirées les expressions des composantes complexes magnétiques suivantes H_y, H_z grandeurs qui nous intéressent:

$$(2.3) \quad H_y(y, z) = H_y^p(y, z) + H_{y_0}^p(y, z) \cdot C \cdot \frac{\sqrt{2k_2}}{\pi \times k_2} \cdot \cos(\alpha/2) \cdot \exp(jk_2 h) \\ \int_0^{\infty} \{ (f_1 + f_2) \cdot \cos(ty) + j \cdot (f_1 - f_2) \cdot \sin(ty) \} \cdot f_3 \cdot t dt$$

$$(2.4) \quad H_z(y, z) = H_z^p(y, z) - H_{z_0}^p(y, z) \cdot C \cdot \frac{\sqrt{2k_2}}{\pi \times k_2} \cdot \cos(\alpha/2) \cdot \exp(jk_2 h) \\ \int_0^{\infty} \{ (f_1 + f_2) \cdot \sin(ty) - j \cdot (f_1 - f_2) \cdot \cos(ty) \} \cdot f_3 \cdot t dt$$

$$\text{et } C = \frac{\exp(-jk_2 d)}{\cos(k_1 d) - j \cdot \frac{k_1}{k_2} \cdot \sin(k_1 d)}.$$

2.4 Calcul des champs

On réécrit les équations (2.3) et (2.4) , où $N(\zeta_1), N(\zeta_2)$ dans f_1, f_2 sont remplacés par $N_1(t') = N(\zeta_1) \Big|_{\zeta_1=t'}, N_2(t') = N(\zeta_2) \Big|_{\zeta_2=t'}$ avec les différents paramètres $d = \frac{d}{\delta}, h' = \frac{h}{\delta}, y' = \frac{y}{\delta}, z' = \frac{z}{\delta}$ et les constantes d'intégration $\lambda' = \lambda \cdot \delta, t' = t \cdot \delta$ exprimés en fonction de $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma_2 \mu_0 \omega}}$ (l'épaisseur de peau) [5].

Alors, (2.3) et (2.4) vont s'écrire

(2.5)

$$H_{y'}(y', z') = H_{y'}^P(y', z') + H_{y'_0}^P(y', z') \cdot C \cdot \Lambda_1$$

$$\left\{ \int_0^{\infty} (UN_2(t') + VN_1(t')) \cdot \cos(t'y') dt' + j \int_0^{\infty} (UN_2(t') - VN_1(t')) \cdot \sin(t'y') dt' \right\}$$

(2.6)

$$H_{z'}(y', z') = H_{z'}^P(y', z') - H_{z'_0}^P(y', z') \cdot C \cdot \Lambda_1$$

$$\left\{ \int_0^{\infty} (UN_2(t') + VN_1(t')) \cdot \sin(t'y') dt' - j \int_0^{\infty} (UN_2(t') - VN_1(t')) \cdot \cos(t'y') dt' \right\}$$

où les différents paramètres rencontrés dans (2.5) et (2.6), s'exprimeront à leur tour

1.

$$C = \frac{\exp(-jd\sqrt{2j})}{\{\cos(d\sqrt{2jm}) - j\sqrt{m}\sin(d\sqrt{2jm})\}}$$

2.

$$\text{et } U = U_0 \cdot \Lambda_2, \quad V = V_0 \cdot \Lambda_2, \text{ avec}$$

$$\Lambda_1 = \frac{\sqrt{2\delta}}{\pi \times \left(\frac{4}{\sqrt{2j}} \right)} \cdot \cos(\alpha/2) \cdot \exp(j\sqrt{2j}h')$$

3.

$$U_0 = \frac{\delta \sqrt{1/\delta} \left(\sqrt{2j} + \sqrt{2j - t'^2} \cdot \cos \alpha - t' \cdot \sin \alpha \right)}{\cos \alpha \cdot \left(\sqrt{t'^2 - 2j} - j\sqrt{2j} \right) + jt' \cdot \sin \alpha}$$

4.

$$V_0 = \frac{\delta \sqrt{1/\delta} \left(\sqrt{2j} + \sqrt{2j - t'^2} \cdot \cos \alpha + t' \cdot \sin \alpha \right)}{\cos \alpha \cdot \left(\sqrt{t'^2 - 2j} - j\sqrt{2j} \right) - jt' \cdot \sin \alpha}$$

5.

$$\begin{aligned} \Lambda_2 = & 2 \cdot t' \cdot \sqrt{t'^2 - 2jm} \cdot \exp \left(-t'z' - (h' - d')\sqrt{t'^2 - 2j} \right) / \\ & \{ \left(\sqrt{t'^2 - 2jm} + t' \right) \cdot \left(\sqrt{t'^2 - 2j} + \sqrt{t'^2 - 2jm} \right) \cdot \exp \left(d'\sqrt{t'^2 - 2jm} \right) + \\ & \left(\sqrt{t'^2 - 2jm} - t' \right) \cdot \left(\sqrt{t'^2 - 2j} - \sqrt{t'^2 - 2jm} \right) \cdot \exp \left(-d'\sqrt{t'^2 - 2jm} \right) \} . \end{aligned}$$

2.4.1 Expressions de $N_1(t')$ et $N_2(t')$

Les fonctions $N_1(t')$, $N_2(t')$ qui se trouvent dans le membre de droite des équations (2.5) et (2.6) sont solutions du système d'équations intégrales suivantes et s'expriment, [5], comme suit:

(2.7)

$$\begin{aligned} N_1(t') = & 1 + \int_0^{\infty} [M(\lambda', t', \alpha, h', d', m) \cdot N_1(\lambda')] d\lambda' \\ & + \int_0^{\infty} [Q(\lambda', t', \alpha, h', d', m) \cdot N_2(\lambda')] d\lambda' \end{aligned}$$

(2.8)

$$N_2(t') = 1 + \int_0^{\infty} [R(\lambda', t', \alpha, h', d', m) \cdot N_1(\lambda')] d\lambda'$$

$$+ \int_0^{\infty} [S(\lambda', t', \alpha, h', d', m) \cdot N_2(\lambda')] d\lambda'$$

avec (α, h', d', m) les paramètres caractérisant le milieu géologique et le demi-plan conducteur infini modèle de l'anomalie géophysique ou source. Quand aux fonctions M, Q, R, S , leurs expressions de base données par [5] sont

$$M = -\frac{(\zeta_1 - jk_2 \cos \alpha) \cdot A(\lambda) \cdot \sqrt{(k_2 + jv_1) \cdot (k_2 + jv_2)}}{j\pi \cdot (v_1 - jk_2 \cos \alpha) \cdot (\zeta_1 + v_2)}$$

$$Q = -\frac{(\zeta_1 - jk_2 \cos \alpha) \cdot A(\lambda) \cdot \sqrt{(k_2 + jv_1) \cdot (k_2 + jv_2)}}{j\pi \cdot (v_2 - jk_2 \cos \alpha) \cdot (\zeta_1 + v_1)}$$

$$R = -\frac{(\zeta_2 - jk_2 \cos \alpha) \cdot A(\lambda) \cdot \sqrt{(k_2 + jv_1) \cdot (k_2 + jv_2)}}{j\pi \cdot (v_1 - jk_2 \cos \alpha) \cdot (\zeta_2 + v_2)}$$

$$S = -\frac{(\zeta_2 - jk_2 \cos \alpha) \cdot A(\lambda) \cdot \sqrt{(k_2 + jv_1) \cdot (k_2 + jv_2)}}{j\pi \cdot (v_2 - jk_2 \cos \alpha) \cdot (\zeta_2 + v_1)}$$

et en reprenant les expressions précédentes des facteurs

$$k_i^2 = j\mu_0\omega\sigma_i, \eta_i^2 = t^2 - k_i^2 \text{ et } \mu_i^2 = \lambda^2 - k_i^2; i \in \{1, 2\}$$

$$(v_1 = \mu_2 \cos \alpha - j\lambda \sin \alpha), (v_2 = \mu_2 \cos \alpha + j\lambda \sin \alpha)$$

$$(\zeta_1 = \eta_2 \cos \alpha - jt \sin \alpha), (\zeta_2 = \eta_2 \cos \alpha + jt \sin \alpha)$$

$$\Delta' = (\eta_1 + t) \times (\eta_2 + \eta_1) \times \exp(\eta_1 d) + (\eta_1 - t) \times (\eta_2 - \eta_1) \times \exp(-\eta_1 d),$$

nous obtenons pour les différentes fonctions rencontrées dans M, Q, R, S les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} (k_2 + jv_1) &= \frac{1}{\delta} \cdot \left(\sqrt{2j} + \lambda' \sin \alpha + j \cos \alpha \sqrt{\lambda'^2 - 2j} \right) \\ (k_2 + jv_2) &= \frac{1}{\delta} \cdot \left(\sqrt{2j} - \lambda' \sin \alpha + j \cos \alpha \sqrt{\lambda'^2 - 2j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\zeta_1 - jk_2 \cos \alpha) &= \frac{1}{\delta} \cdot \left(\cos \alpha \sqrt{t'^2 - 2j} - jt' \sin \alpha - j \sqrt{2j} \cos \alpha \right) \\ (\zeta_2 - jk_2 \cos \alpha) &= \frac{1}{\delta} \cdot \left(\cos \alpha \sqrt{t'^2 - 2j} + jt' \sin \alpha - j \sqrt{2j} \cos \alpha \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\zeta_1 + v_1) &= \frac{1}{\delta} \cdot \left(\cos \alpha \left(\sqrt{t'^2 - 2j} + \sqrt{\lambda'^2 - 2j} \right) - j \sin \alpha (t' + \lambda') \right) \\ (\zeta_1 + v_2) &= \frac{1}{\delta} \cdot \left(\cos \alpha \left(\sqrt{t'^2 - 2j} + \sqrt{\lambda'^2 - 2j} \right) + j \sin \alpha (\lambda' - t') \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\zeta_2 + v_1) &= \frac{1}{\delta} \cdot \left(\cos \alpha \left(\sqrt{t'^2 - 2j} + \sqrt{\lambda'^2 - 2j} \right) + j \sin \alpha (t' - \lambda') \right) \\ (\zeta_2 + v_2) &= \frac{1}{\delta} \cdot \left(\cos \alpha \left(\sqrt{t'^2 - 2j} + \sqrt{\lambda'^2 - 2j} \right) + j \sin \alpha (\lambda' + t') \right) \end{aligned}$$

$$(v_1 - jk_2 \cos \alpha) = \frac{1}{\delta} \cdot \left(\cos \alpha \left(\sqrt{\lambda'^2 - 2j} - j\sqrt{2j} \right) - j\lambda' \sin \alpha \right)$$

$$(v_2 - jk_2 \cos \alpha) = \frac{1}{\delta} \cdot \left(\cos \alpha \left(\sqrt{\lambda'^2 - 2j} - j\sqrt{2j} \right) + j\lambda' \sin \alpha \right)$$

$$\sqrt{(k_2 + jv_1) \cdot (k_2 + jv_2)} = \frac{1}{\delta} \sqrt{\left(\sqrt{2j} + \lambda' \sin \alpha + j \cos \alpha \sqrt{\lambda'^2 - 2j} \right)} \\ \times \sqrt{\left(\sqrt{2j} - \lambda' \sin \alpha + j \cos \alpha \sqrt{\lambda'^2 - 2j} \right)}.$$

Maintenant on effectue le changement de variables suivant, rendant l'écriture plus aisée de (2.7) et (2.8), soit:

$$V_1(t') = \left(\cos \alpha \sqrt{t'^2 - 2j} - jt' \sin \alpha - j\sqrt{2j} \cos \alpha \right)$$

$$V_2(t') = \left(\cos \alpha \sqrt{t'^2 - 2j} + jt' \sin \alpha - j\sqrt{2j} \cos \alpha \right)$$

$$V_1(\lambda') = \left(\sqrt{2j} + \lambda' \sin \alpha + j \cos \alpha \sqrt{\lambda'^2 - 2j} \right)$$

$$V_2(\lambda') = \left(\sqrt{2j} - \lambda' \sin \alpha + j \cos \alpha \sqrt{\lambda'^2 - 2j} \right)$$

$$V_3(\lambda') = \cos \alpha \left(\sqrt{\lambda'^2 - 2j} - j\sqrt{2j} \right) - j\lambda' \sin \alpha$$

$$V_4(\lambda') = \cos \alpha \left(\sqrt{\lambda'^2 - 2j} - j\sqrt{2j} \right) + j\lambda' \sin \alpha$$

$$V_1(t', \lambda') = \cos \alpha \left(\sqrt{t'^2 - 2j} + \sqrt{\lambda'^2 - 2j} \right) - j \sin \alpha (t' + \lambda')$$

$$V_2(t', \lambda') = \cos \alpha \left(\sqrt{t'^2 - 2j} + \sqrt{\lambda'^2 - 2j} \right) - j \sin \alpha (t' - \lambda')$$

$$V_3(t', \lambda') = \cos \alpha \left(\sqrt{t'^2 - 2j} + \sqrt{\lambda'^2 - 2j} \right) + j \sin \alpha (t' - \lambda')$$

$$V_4(t', \lambda') = \cos \alpha \left(\sqrt{t'^2 - 2j} + \sqrt{\lambda'^2 - 2j} \right) + j \sin \alpha (t' + \lambda')$$

on obtient en définitive pour les fonctions M, Q, R, S les expressions suivantes:

$$M(\lambda', t', \alpha, h', d', m) = -\frac{V_1(t') \sqrt{V_1(\lambda') V_2(\lambda')}}{j\pi V_3(\lambda') V_2(t', \lambda')} \cdot A(\lambda')$$

$$Q(\lambda', t', \alpha, h', d', m) = -\frac{V_1(t') \sqrt{V_1(\lambda') V_2(\lambda')}}{j\pi V_4(\lambda') V_1(t', \lambda')} \cdot A(\lambda')$$

$$R(\lambda', t', \alpha, h', d', m) = -\frac{V_2(t') \sqrt{V_1(\lambda') V_2(\lambda')}}{j\pi V_3(\lambda') V_4(t', \lambda')} \cdot A(\lambda')$$

$$S(\lambda', t', \alpha, h', d', m) = -\frac{V_2(t') \sqrt{V_1(\lambda') V_2(\lambda')}}{j\pi V_4(\lambda') V_3(t', \lambda')} \cdot A(\lambda')$$

et le système d'équations intégrales (2.7), (2.8), devient

$$\begin{aligned}
 N_1(t') &= 1 + \int_0^\infty \left[-\frac{V_1(t') \sqrt{V_1(\lambda') V_2(\lambda')}}{j\pi V_3(\lambda') V_2(t', \lambda')} \cdot A(\lambda') \cdot N_1(\lambda') \right] d\lambda' \\
 &\quad + \int_0^\infty \left[-\frac{V_1(t') \sqrt{V_1(\lambda') V_2(\lambda')}}{j\pi V_4(\lambda') V_1(t', \lambda')} \cdot A(\lambda') \cdot N_2(\lambda') \right] d\lambda'
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

(2.10)

$$N_2(t') = 1 + \int_0^{\infty} \left[\frac{V_2(t') \sqrt{V_1(\lambda') V_2(\lambda')}}{j\pi V_3(\lambda') V_4(t', \lambda')} \cdot A(\lambda') \cdot N_1(\lambda') \right] d\lambda' \\ + \int_0^{\infty} \left[\frac{V_2(t') \sqrt{V_1(\lambda') V_2(\lambda')}}{j\pi V_4(\lambda') V_3(t', \lambda')} \cdot A(\lambda') \cdot N_2(\lambda') \right] d\lambda'$$

où $A(\lambda')$ et Δ ont pour expressions les suivantes:

$$A(\lambda') = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2(\mu_1 + \mu_0) \exp(\mu_1 d')}{\Delta} + \right. \\ \left. \frac{2(\mu_1 - \mu_0) \exp(-\mu_1 d')}{\Delta} - \frac{1}{\mu_2} \right] \cdot \exp(-2\mu_2(h' - d'))$$

et

$$\Delta = (\mu_1 + \mu_0) \cdot (\mu_2 + \mu_1) \cdot \exp(\mu_1 d') + (\mu_1 - \mu_0) \cdot (\mu_2 - \mu_1) \cdot \exp(-\mu_1 d')$$

Une fois les expressions de $N_1(t')$, $N_2(t')$ bien établies, on peut passer maintenant à la résolution du système d'équations intégrales (2.9) et (2.10). Les solutions $N_1(t')$ et $N_2(t')$ du précédent système se substituent à $N_1(t')$, $N_2(t')$ dans les membres de droite des équations (2.5) et (2.6). Ces dernières rappelons-le, sont les expressions des composantes complexes magnétiques horizontale et verticale du champ électromagnétique total.

2.4.2 Résolution du système d'équations intégrales

Les équations (2.9) et (2.10) constituent un système d'équations intégrales, que l'on résoud par la méthode des approximations successives comme suggéré dans [5]. De plus, la méthode de résolution par approximations successives, [11], consiste d'abord à approximer à l'ordre zéro, en mettant les termes sous le signe intégral $N_1(\lambda') \equiv N_2(\lambda') \equiv 1$. Une fois fait, les intégrales obtenues ainsi dans (2.9) et (2.10), après approximation à l'ordre zéro, sont résolues numériquement selon la règle de Simpson et les solutions obtenues se substitueront à $N_1(\lambda')$, $N_2(\lambda')$ dans le système d'équations intégrales en question.

Le processus continue ainsi jusqu'à l'ordre cinq ce qui correspond à six itérations. En fait, le nombre d'itérations résulte du compromis à faire entre rapidité de convergence dans la résolution du système (2.9) (2.10) et la précision avec laquelle on désire obtenir ces solutions. Une erreur relative de l'ordre de 1% est raisonnablement acceptée dans le calcul de ces solutions. Les fonctions $N_1(t')$, $N_2(t')$ qui sont donc solutions du système d'équations intégrales (2.9) et (2.10), une fois déterminées servent au calcul des composantes complexes magnétiques H_y , H_z données par les équations (2.5) et (2.6). Leur résolution fait l'objet de la section 2.4.4 à la suite de la section ci-après où ces équations sont d'abord identifiées à des transformées de Hankel.

2.4.3 Transformée de Hankel

Les expressions des champs H_y, H_z , ne sont en fait que des transformées de Hankel, où d'après [12], $\sin(t'.y')$ et $\cos(t'.y')$ sont à un facteur près, des fonctions de Bessel d'argument $(t'.y')$.

De [13] soit la fonction suivante

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} x \cdot J_v(sx) \cdot f(x) dx \equiv \mathcal{N}\{f(x)\}$$

où $\varphi(s)$ est dite transformée de Hankel de $f(x)$ représentée par $\mathcal{N}\{f(x)\}$, et $J_v(\cdot)$ est la fonction de Bessel d'ordre v . Tout comme la transformation de Fourier, celle de Hankel, entre dans la classe des transformations définies par des noyaux de Fourier, autrement dit des transformations pour lesquelles la relation

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} K(x, s) \cdot f(x) dx \equiv T\{f(x)\}$$

entraîne d'après [13]

$$f(x) = \int_0^{\infty} K(x, s) \cdot \varphi(s) ds \equiv T^{-1}\{\varphi(s)\}.$$

Ainsi pour mettre en évidence ces transformées de Hankel, réécrivons les équations précédentes (2.5) et (2.6)

$$H_{y'}(y', z') = H_{y'}^P(y', z') + H_{y'_0}^P(y', z') \times C \times \Lambda_1$$

$$\left\{ \int_0^\infty (UN_2(t') + VN_1(t')) \cdot \cos(t'y') dt' + j \int_0^\infty (UN_2(t') - VN_1(t')) \cdot \sin(t'y') dt' \right\}$$

$$H_{z'}(y', z') = H_{z'}^P(y', z') - H_{z'_0}^P(y', z') \times C \times \Lambda_1$$

$$\left\{ \int_0^\infty (UN_2(t') + VN_1(t')) \cdot \sin(t'y') dt' - j \int_0^\infty (UN_2(t') - VN_1(t')) \cdot \cos(t'y') dt' \right\}$$

et en remplaçant les fonctions $\cos(\cdot)$ et $\sin(\cdot)$ par leurs expressions correspondantes tirées de [12], [13] en fonction de celles de Bessel, soit:

$$\sin(t' \cdot y') = \sqrt{\pi/2} \cdot \sqrt{t' \cdot y'} \cdot J_v(t' \cdot y') \Big|_{v=\frac{1}{2}}$$

$$\cos(t' \cdot y') = \sqrt{\pi/2} \cdot \sqrt{t' \cdot y'} \cdot J_v(t' \cdot y') \Big|_{v=-\frac{1}{2}}$$

alors, (2.5) et (2.6), deviennent

(2.11)

$$H_{y'}(y', z') = H_{y'}^P(y', z') + H_{y'_0}^P(y', z') \cdot C \cdot \Lambda_1$$

$$\left\{ \int_0^{\infty} (UN_2(t') + VN_1(t')) \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot \sqrt{t' \cdot y'} \cdot J_v(t' \cdot y') \Big|_{v=\frac{1}{2}} dt' + j \right.$$

$$\left. \int_0^{\infty} (UN_2(t') - VN_1(t')) \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot \sqrt{t' \cdot y'} \cdot J_v(t' \cdot y') \Big|_{v=\frac{1}{2}} dt' \right\}$$

(2.12)

$$H_{z'}(y', z') = H_{z'}^P(y', z') - H_{z'_0}^P(y', z') \cdot C \cdot \Lambda_1$$

$$\left\{ \int_0^{\infty} (UN_2(t') + VN_1(t')) \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot \sqrt{t' \cdot y'} \cdot J_v(t' \cdot y') \Big|_{v=\frac{1}{2}} dt' - j \right.$$

$$\left. \int_0^{\infty} (UN_2(t') - VN_1(t')) \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot \sqrt{t' \cdot y'} \cdot J_v(t' \cdot y') \Big|_{v=\frac{1}{2}} dt' \right\}.$$

Pour la mise en évidence de ces transformées de Hankel, définissons comme [13] les fonctions suivantes:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \sqrt{xy} \cdot J_v(xy) \cdot g(y) dy$$

$$g(y) = \int_0^{\infty} \sqrt{xy} \cdot J_v(xy) \cdot f(x) dx,$$

et par le changement de variable suivant

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \Phi(x) \text{ et } \frac{g(y)}{\sqrt{y}} = \Psi(y),$$

on aboutit alors à la définition de la transformée de Hankel où, dans ce qui suit, $\Phi(x)$ et $\Psi(y)$ sont dites transformées l'une de l'autre de Hankel [13].

Autrement dit:

$$\Phi(x) = \int_0^\infty y \cdot J_v(xy) \cdot \Psi(y) dy \equiv \mathcal{H}^{-1}\{\Psi(y)\}$$

est la transformée de Hankel inverse, quant à

$$\Psi(y) = \int_0^\infty x \cdot J_v(xy) \cdot \Phi(x) dx \equiv \mathcal{H}\{\Phi(x)\},$$

elle est la transformée de Hankel directe. La transformation de Hankel généralise celle de Fourier, satisfaisant les conditions suffisantes de validité:

$\Phi(x)$ à variation bornée, et $\int_0^\infty |\Phi(x)| dx$ qui existe [13].

Les équations (2.11) et (2.12) seront réécrites en utilisant la transformée de Hankel telle que définie, les noyaux de ces transformées sont $f_{u,v} = U \cdot N_2 + V \cdot N_1$ et $g_{u,v} = U \cdot N_2 - V \cdot N_1$, de plus on pose $\theta_{f_{u,v}} = \sqrt{t} \cdot f_{u,v}$ et $\theta_{g_{u,v}} = \sqrt{t} \cdot g_{u,v}$.

Dans ces conditions les équations (2.11) et (2.12), après normalisation des composantes complexes magnétiques H_y, H_z du champ total par rapport à celles du champ primaire H_y^p, H_z^p on obtient alors H_{yN}, H_{zN} qui s'écrivent

$$(2.13) \quad H_{yN} = 1 + C \times \Lambda_1 \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} y' \cdot \int_0^{\infty} \left\{ \theta_{f_{u,v}} \cdot J_v(t' \cdot y') \Big|_{v=-\frac{1}{2}} + j \theta_{g_{u,v}} \cdot J_v(t' \cdot y') \Big|_{v=\frac{1}{2}} \right\} dt'$$

$$(2.14) \quad H_{zN} = 1 - C \times \Lambda_1 \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} y' \cdot \int_0^{\infty} \left\{ \theta_{f_{u,v}} \cdot J_v(t' \cdot y') \Big|_{v=\frac{1}{2}} - j \theta_{g_{u,v}} \cdot J_v(t' \cdot y') \Big|_{v=-\frac{1}{2}} \right\} dt'.$$

Ainsi les grandeurs normalisées du champ total de composantes complexes horizontale H_{yN} et verticale H_{zN} , renferment des transformées de Hankel dont la résolution est vue en détail dans la section qui suit.

2.4.4 Résolution des transformées de Hankel

Pour résoudre ces transformées de Hankel, on peut procéder par la méthode quadratique gaussienne entre les zéros de $J_v(\cdot)$, et appliquer par la suite la transformation d'Euler pour accélérer la convergence des séries infinies (parfois très lentes!) [14]. Afin de réduire le temps de calcul qu'exige la méthode citée, on passe plutôt par la résolution d'un produit de convolution discrète, comme il est montré dans [9], [15] et [16].

Avec [9], [15] on constate, moyennant un changement de variables, que les transformées de Hankel dans les équations (2.13) et (2.14), peuvent s'écrire sous la forme d'un produit de convolution.

Sous forme symbolique et en reprenant les notations introduites dans la section précédente, nous aboutissons aux transformations suivantes:

$$\Psi_{y_{1,2}} = \left(\aleph_1 \{ \theta_{f_{u,v}} \} \Big|_{u=-\frac{1}{2}} + j \aleph_2 \{ \theta_{g_{u,v}} \} \Big|_{u=\frac{1}{2}} \right) \Rightarrow (\varphi_1 + j \varphi_2)$$

$$\Psi_{z_{2,3}} = \left(\aleph_3 \{ \theta_{f_{u,v}} \} \Big|_{u=\frac{1}{2}} - j \aleph_4 \{ \theta_{g_{u,v}} \} \Big|_{u=-\frac{1}{2}} \right) \Rightarrow (\varphi_3 - j \varphi_4)$$

avec les $\varphi_i, i \in \{1, \dots, 4\}$ produits de convolution discrète et $\aleph_i, i \in \{1, \dots, 4\}$ transformées de Hankel. Dans la section suivante est détaillé le passage d'une transformée de Hankel à un produit de convolution discrète.

2.4.4.1 De la transformée de Hankel au produit de convolution discrète

Ce qui suit dans cette section est tiré de [9] et de [15]. Soit la transformée de Hankel de la fonction $h(g)$ d'ordre u

$$H_v(b) = \int_0^{\infty} h(g) \cdot J_v(gb) dg.$$

Par le changement de variable suivant $x = \ln(b) \Rightarrow b = \exp(x)$ et $y = \ln\left(\frac{1}{g}\right) \Rightarrow g = \exp(-y)$, on aboutit à la nouvelle expression de la transformée de Hankel

$$(2.15) \quad H_v(e^x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(e^{-y}) \cdot [e^{-y} \cdot J_v(e^{x-y})] dy,$$

identifiable à un produit de convolution qui dans sa simple définition s'écrit

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) r(t-\tau) d\tau$$

où dans (2.15), on multipliera les deux membres par (e^x) pour plus d'analogie avec l'expression d'un produit de convolution. La fonction $h(\cdot)$ est appelée *fonction d'entrée*, $H_v(\cdot)$ *fonction de sortie* et le terme entre crochets est la réponse du *filtre linéaire* qui à son tour sera défini dans la section suivante. L'équation (2.15) s'écrit à nouveau après multiplication de ses deux membres par (e^x) :

(2.16)

$$H_v(e^x) \cdot e^x = \int_{-\infty}^{\infty} h(e^{-y}) \cdot [e^{x-y} \cdot J_v(e^{x-y})] dy.$$

Si l'on discrétise l'expression (2.15), cela revient à l'écrire comme suit

(2.17)

$$H_v(j) = \sum_i h(i) \cdot [L_v(j-i)] = \sum_i h(j-i) \cdot [L_v(i)],$$

où i, j sont des entiers, $L_v(i)$ désigne le *filtre linéaire* et les termes dans L_v sont les coefficients de ce filtre. Dans ce qui suit les coefficients L_v du *filtre linéaire*, ceux de pondération, seront désignés par $W_v|_{v=\pm 1/2}$ et la fonction d'entrée $h(.)$ est remplacée par $\theta_{f_{u,v}, g_{u,v}}[.]$ pour se ramener ainsi à notre cas d'étude. Les arguments des fonctions $\theta_{f_{u,v}, g_{u,v}}[.]$ sont remplacées par l'expression suivante: $[\exp(A_k - \ln(y'))]$, où les A_k sont les abscisses du *filtre linéaire* préalablement calculés.

En définitive la résolution de ces transformées de Hankel, qui conduisent à l'évaluation des composantes complexes horizontale et verticale $H_{y'N}, H_{z'N}$ normalisées du champ total, se ramène au calcul suivant du produit de convolution (2.16) discrétisé:

(2.18)

$$\Psi_{y', z'} = \left\{ \sum_{k=N_1}^{N_2} (W_{k,v} \cdot \theta_{f_{u,v}, g_{u,v}}) [\exp(A_k - \ln(y'))] \right\} / y',$$

où

$$\Psi_{y', z'} = \aleph_{y', z'} \{ \theta_{f_{u, v}, g_{u, v}} \} \Big|_{v = \pm \frac{1}{2}}$$

sont les transformées de Hankel de noyaux $\theta_{f_{u, v}, g_{u, v}} \Big|_{v = \pm 1/2}$.

Les composantes complexes magnétiques horizontale et verticale du champ total, en reprenant les notations précédentes, vont s'écrire alors

$$\Psi_{y'} = \left(\Psi_{1, v} \Big|_{v = -\frac{1}{2}} + j \Psi_{2, v} \Big|_{v = \frac{1}{2}} \right)$$

et

$$\Psi_{z'} = \left(\Psi_{3, v} \Big|_{v = \frac{1}{2}} + j \Psi_{4, v} \Big|_{v = -\frac{1}{2}} \right).$$

Pour la composante complexe magnétique horizontale $H_{y'N}$ du champ total on a

(2.19)

$$\begin{aligned} \Psi_{y'} = & \left\{ \sum_{k=N_1}^{N_2} W_{k, v} \cdot \theta_{f_{u, v}} [\exp(A_k - \ln(y'))] \Big|_{v = -\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + j \sum_{k=N_1}^{N_2} W_{k, v} \cdot \theta_{g_{u, v}} [\exp(A_k - \ln(y'))] \Big|_{v = \frac{1}{2}} \right\} / y' \end{aligned}$$

et pour la composante complexe magnétique verticale $H_{z'N}$ on obtient

(2.20)

$$\Psi_{z'} = \left\{ \sum_{k=N_1}^{N_2} W_{k,v} \cdot \theta_{f_{k,v}} [\exp(A_k - \ln(y'))] \Big|_{v=\frac{1}{2}} \right. \\ \left. - j \sum_{k=N_1}^{N_2} W_{k,v} \cdot \theta_{g_{k,v}} [\exp(A_k - \ln(y'))] \Big|_{v=-\frac{1}{2}} \right\} / y',$$

avec $W_{k,v}$ les coefficients du *filtre linéaire*, A_k leurs instants d'apparition et l'expression entre crochets dans les équations (2.19) et (2.20) représente l'argument des fonctions $\theta_{f_{k,v}}, \theta_{g_{k,v}}$.

Pour compléter la résolution de ces transformées de Hankel il reste à définir le *filtre linéaire*, en d'autres termes calculer ses coefficients $W_{k,v} \Big|_{v=\pm 1/2}$ pour $v = \pm 1/2$ et de longueur $k \in \{1, 2, \dots, 283\}$, telle que spécifiée par [9]. Pour clore la partie consacrée à la résolution des transformées de Hankel, dans la section suivante sera détaillé le calcul des coefficients de ces filtres.

2.4.5 Filtre linéaire d'Anderson

Dans cette section nous voyons l'approche d'Anderson [9], [15], pour la résolution de ces transformées de Hankel. Cette approche semble être assez répandue, comme en témoigne la riche bibliographie citée dans [9] et [15]. L'approche en question consiste en la réalisation de filtre linéaire qui conduit à la résolution du produit de convolution discrète et par là même à celle de la transformée de Hankel.

Dans la conception du *filtre linéaire*, **Anderson** [9] a remarqué de façon empirique, que la paire de fonctions d'entrée-sortie E_i, S_i dont les allures sont à rapide décroissance ne font qu'accroître la précision de ces filtres. De plus comme dans [9], [15], nous faisons observer que les fonctions d'entrée $h(\cdot)$ complexes et continues, font partie de la classe des signaux pouvant aller jusqu'à posséder plusieurs pôles et osciller, toutefois leur enveloppe doit être décroissante. Cette paire de fonctions d'entrée-sortie E_i, S_i avec $i \in \{1, 2\}$ judicieusement choisie par [9], s'écrit

$$E_1 = \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \cdot [\exp(-\exp(-2y)) - \exp(-2\exp(-2y))]$$

$$S_1 = \left(\frac{\exp(x)}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\exp\left(-\frac{\exp(2x)}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \exp\left(-\frac{\exp(2x)}{8}\right) \right],$$

à $v = -\frac{1}{2}$, et pour $v = \frac{1}{2}$ nous avons

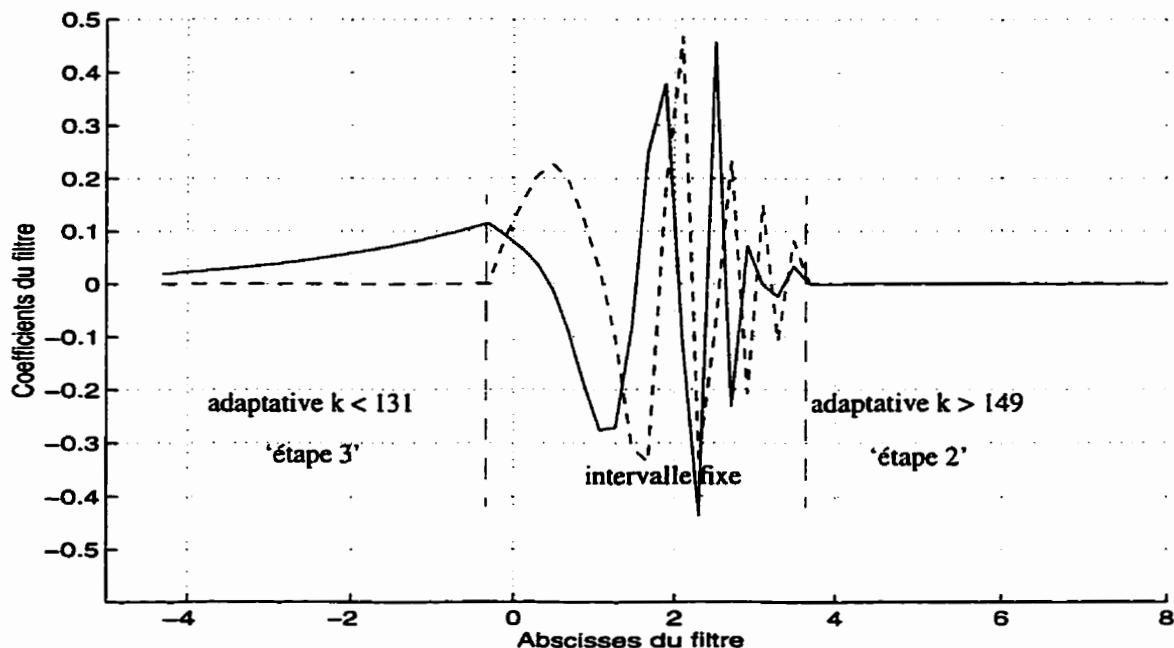
$$E_2 = \exp\left(-\frac{3y}{2}\right) \cdot [\exp(-\exp(-2y)) - \exp(-2\exp(-2y))]$$

$$S_2 = \left(\frac{\exp(x)}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left[\exp\left(-\frac{\exp(2x)}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \exp\left(-\frac{\exp(2x)}{8}\right) \right],$$

où $x \equiv y \equiv A_k$, et $k \in \{1, 2, \dots, 283\}$ détermine la longueur des filtres. Le reste de l'étape de mise en œuvre de ces deux filtres à $v = \mp 1/2$ est décrite en détail dans ([15] page 1289) et pour des raisons d'allègement du texte ne sera pas reproduite ici.

Finalement nous rappelons que les $W_{k,v}|_{v=\pm 1/2}$ sont les coefficients des deux filtres préalablement déterminés et sont stockés dans deux tables ou matrices $W_k^0|_{v=-1/2}$ et $W_k^1|_{v=1/2}$. A_k représente les instants d'apparition de ces coefficients sur un horizon de $A_k \in [-26, 30]$ avec un pas d'échantillonnage de 0.2 et [θ] les noyaux des intégrales dans les expressions (2.13) et (2.14) qui ont pour argument $[\exp(A_k - \ln(y'))]$.

Dans la figure 2.5, on représente les évolutions de ces coefficients des filtres: $W_k^0|_{v=-1/2}$ et $W_k^1|_{v=1/2}$ en fonction de leurs instants d'apparition A_k . En dehors de l'intervalle fixe que l'on défini pour $k \in \{131, 132, \dots, 149\}$, on remarque que les courbes décroissent et tendent rapidement vers zéro. Celà permet de rendre adaptatif ces produits de convolution discrète ce qui se traduit par un gain de temps dans le calcul. Pour cela on ne considère que les valeurs significatives du produit de convolution au moyen d'un critère de tolérance [9] et [15].



$$W_k^0 \Big|_{v = -\frac{1}{2}} : \dots \dots \dots \quad W_k^1 \Big|_{v = \frac{1}{2}} : \text{_____}$$

Figure 2.5 Coefficients du filtre a ($v = \pm 1/2$)

Ce produit de convolution discrète, comme précédemment énoncé, peut être rendu adaptatif. Pour cela on établit le critère de tolérance $ctol = \text{maximum}(|produit} \times tol|)$, où $produit$ est le produit de convolution et tol un facteur de tolérance de l'ordre de 10^{-6} pris dans notre cas. Le critère de tolérance $ctol$ est défini à l'intérieur de l'intervalle fixe où $k \in \{131, 132, \dots, 149\}$. En fait la valeur du facteur de tolérance peut être ajustée selon la précision avec laquelle nous voulons obtenir nos résultats dans le calcul des produits de convolution discrète.

A la fin de l'étape 1 qui correspond à l'intervalle fixe $k \in \{131, 132, \dots, 149\}$ où le critère de tolérance est déterminé $ctol = maximum(|produit \times tol|)$, on passe à l'étape 2 ($k > 149$). Le processus d'adaptativité consistera alors à y arrêter le calcul du produit de convolution si la valeur $maximum(|produit \times tol|) < ctol$, pour passer par la suite à l'étape 3 ($k < 131$) qu'on peut stopper si le critère $maximum(|produit \times tol|) < ctol$ est rencontré. Cette adaptativité contribue à un gain certain dans la rapidité de calcul des transformées de Hankel. Ces tests sont effectués sur les parties réelle et imaginaire indépendamment l'une de l'autre, dans les expressions de chaque produit de convolution discrète à calculer. Il est à noter qu'en présence de termes oscillatoires dans les fonctions $\theta_{f_{u,v}}$, $\theta_{g_{u,v}}$, le critère d'adaptativité tel qu'adopté ci-avant pourrait produire un arrêt pré-maturé des tests tel que remarqué par [9]. En effet dans ce critère on ne tient pas compte des plusieurs passages par zéro des fonctions $\theta_{f_{u,v}}$, $\theta_{g_{u,v}}$. Toutefois le choix de ce critère $ctol$ reste maintenu et ce maintien est motivé d'autant plus que ces fonctions sont à décroissance rapide. Ainsi on arrive à terme de la procédure de calcul des produits de convolution discrète et par conséquent de la résolution des différentes transformées de Hankel. On clôt ce chapitre par le calcul des composantes complexes magnétiques normalisées, horizontale et verticale $H_{y'N}$, $H_{z'N}$, du champ total et par celui des principaux paramètres (Θ , ξ).

2.4.6 Calcul des principaux paramètres

Des grandeurs en phase (réelle) et quadratique (imaginaire) de ces composantes complexes du champ, on tire de [5], les expressions des paramètres ou réponses V.L.F. $\xi(y')$ et $\tan 2\Theta(y')$.

$$h_{y'}^2 = \left(1 + \operatorname{Re} \{ H_{y'N} \} \right)^2 + \operatorname{Im}^2 \{ H_{y'N} \}$$

$$h_z^2 = \operatorname{Re}^2 \{ H_{zN} \} + \operatorname{Im}^2 \{ H_{zN} \}$$

$$\beta = \operatorname{atan} \left(\operatorname{Im} \{ H_{zN} \} / \operatorname{Re} \{ H_{zN} \} \right) - \operatorname{atan} \left(\operatorname{Im} \{ H_{y'N} \} / \left(1 + \operatorname{Re} \{ H_{y'N} \} \right) \right)$$

$$\xi = \frac{2 \cdot h_{y'} \cdot h_z \cdot \sin \beta}{h_{y'}^2 + h_z^2 + \sqrt{4h_{y'}^2 h_z^2 \cos^2 \beta + (h_z^2 - h_{y'}^2)^2}}$$

$$\tan 2\Theta = \frac{2 \cdot h_{y'} \cdot h_z \cdot \cos \beta}{h_{y'}^2 - h_z^2}.$$

Les paramètres $\xi(y')$ et $\tan 2\Theta(y')$, le dernier étant parfois remplacé par Θ , sont représentés dans trois abaques telles qu'illustrés aux figures 2.6, 2.7 et 2.8:

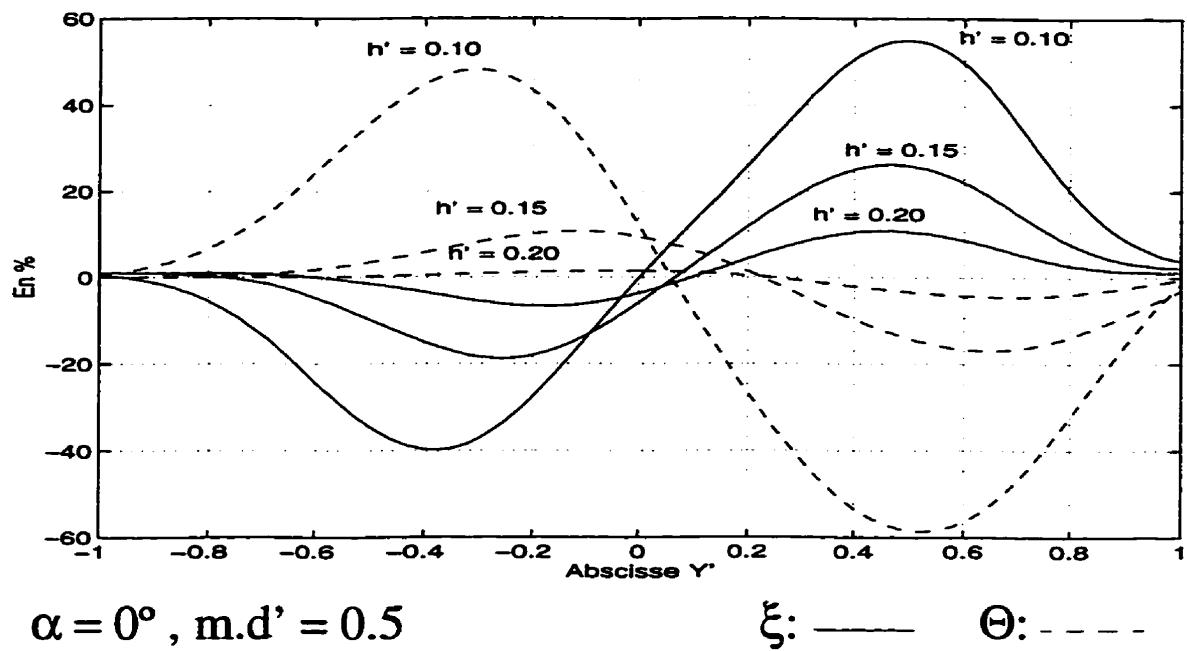


Figure 2.6 Abaque # 1

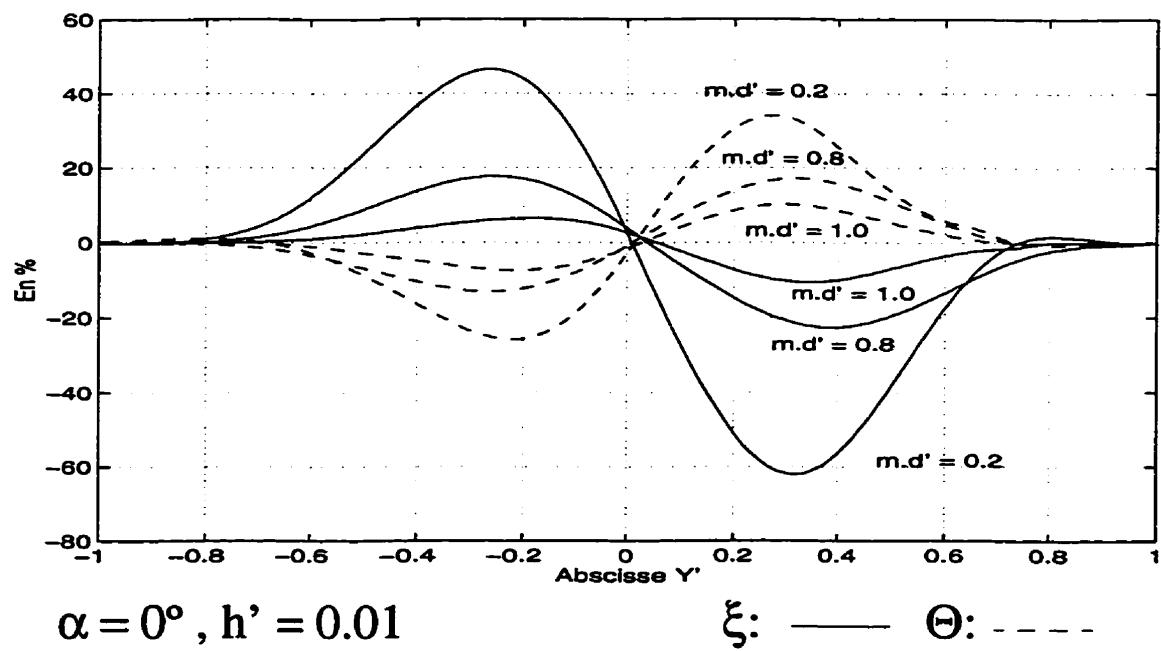
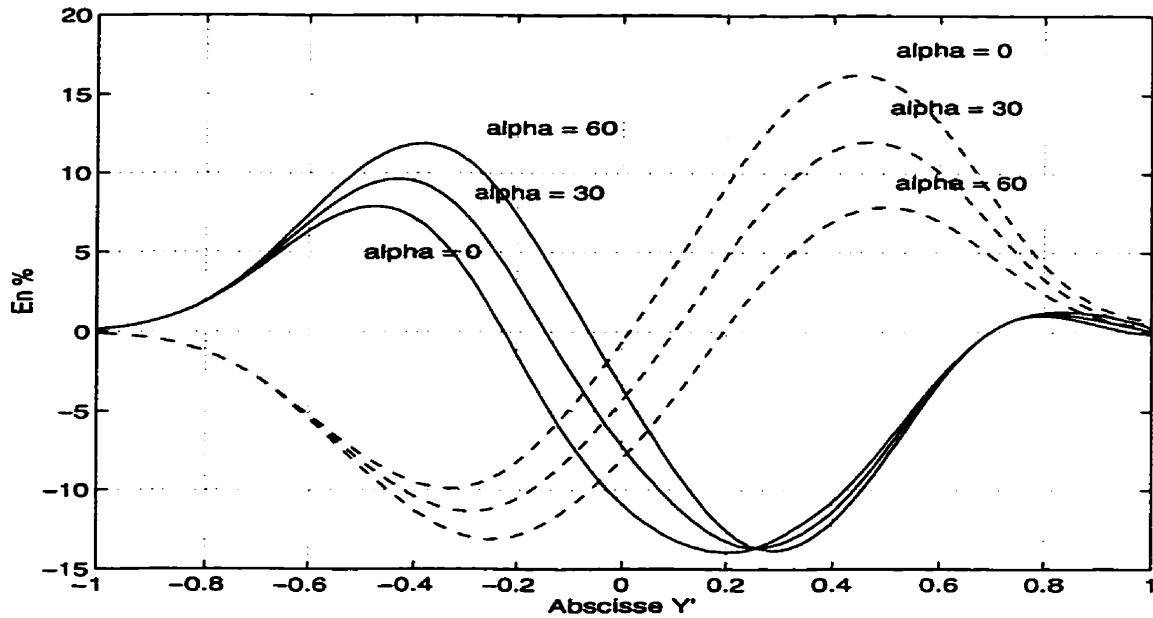


Figure 2.7 Abaque # 2



$$h' = 0.01, m \cdot d' = 0.5$$

$$\xi: \text{---} \quad \Theta: \text{---}$$

Figure 2.8 Abaque # 3

Le choix des valeurs des différents paramètres dans les abaques, s'est plus porté sur des valeurs usuelles, qu'il ne fût réellement motivé par des considérations de calcul ou autre. Pour plus de lisibilité dans ces abaques, on ne représente que 3 courbes pour chaque paramètre (soit 6 courbes) par abaque.

►►Abaque #1: $\alpha = 0^\circ$, $m \cdot d' = 0.5$ et $h' = [0.1, 0.15, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50]$.

►►Abaque #2: $\alpha = 0^\circ$, $h' = 0.2$ et $m \cdot d' = [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]$.

►►Abaque #3: $h' = 0.01$, $m \cdot d' = 0.5$ et $\alpha = [0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ]$.

De plus, durant toute l'étape de synthèse de ces réponses V.L.F. sont fixées les grandeurs, telles que la fréquence $f = 20kHz$, et les différentes conductivités $\sigma_1 = \frac{1}{300}$, $\sigma_2 = 10^{-4}$.

Dans la construction de ces abaques (figures 2.6, 2.7 et 2.8) le choix des valeurs pour les paramètres devient donc quasiment illimité si de plus on fait varier la fréquence et le rapport $m = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ des conductivités. La limite s'impose donc d'elle même par le fait que l'exécution du programme (codé en MATLAB version unix) peut prendre jusqu'à deux jours par un ordinateur SUN SPARC 20.

En résumé, il est rappelé et de façon succincte toutes les étapes concernant la synthèse des signaux réponses V.L.F. dans cette première partie:

- On part avec le modèle proposé par **Poddar** [5];
- des équations des composantes complexes du champ total, établies par **Poddar** [5];
- on développe ces équations pour leur réécriture en fonction de grandeurs sans unité;
- on résoud d'abord un système d'équations intégrales car les solutions font partie des équations du champ total, par la suite;
- Les transformées de Hankel mises en évidence dans ces équations des champs sont résolues, non pas par une méthode classique qui prend beaucoup de temps, mais plutôt par la résolution de produits de convolution discrète [9].

- Ces produits de convolution discrète nécessitent la mise en oeuvre de deux filtres [9], pour finalement calculer les composantes complexes horizontale et verticale $H_{y'N}$, $H_{z'N}$ du champ total dont les expressions rappelons-le sont données par [5].
- Les réponses V.L.F. caractérisées par les paramètres $\xi(y')$, $\tan 2\Theta(y')$ sont en fin de compte calculées et représentées sur abaques (figure 2.6 à figure 2.8).

Ces signaux synthétisés définissent physiquement les sources les ayant produit, en somme ils jouent le rôle de signatures de ces sources. Par simulation, les données observables par les capteurs au sol, sont les mixtures des signaux synthétisés qui sont dues à la promiscuité des sources et du milieu. Ces signaux synthétisés sont représentés dans trois abaques (figure 2.6 à figure 2.8) . Quand à leurs mixtures, ces dernières font l'objet de l'étude d'identification-interprétation que leur consacre la deuxième partie du présent mémoire. On rappelle les différentes valeurs considérées pour les trois abaques, soit:

►►Abaque #1: $\alpha = 0^\circ$, $m \cdot d' = 0.5$ et $h' = [0.1, 0.15, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50]$.

►►Abaque #2: $\alpha = 0^\circ$, $h' = 0.2$ et $m \cdot d' = [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]$.

►►Abaque #3: $h' = 0.01$, $m \cdot d' = 0.5$ et $\alpha = [0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ]$.

2.4.6.1 Organigramme de synthèse des réponses V.L.F.

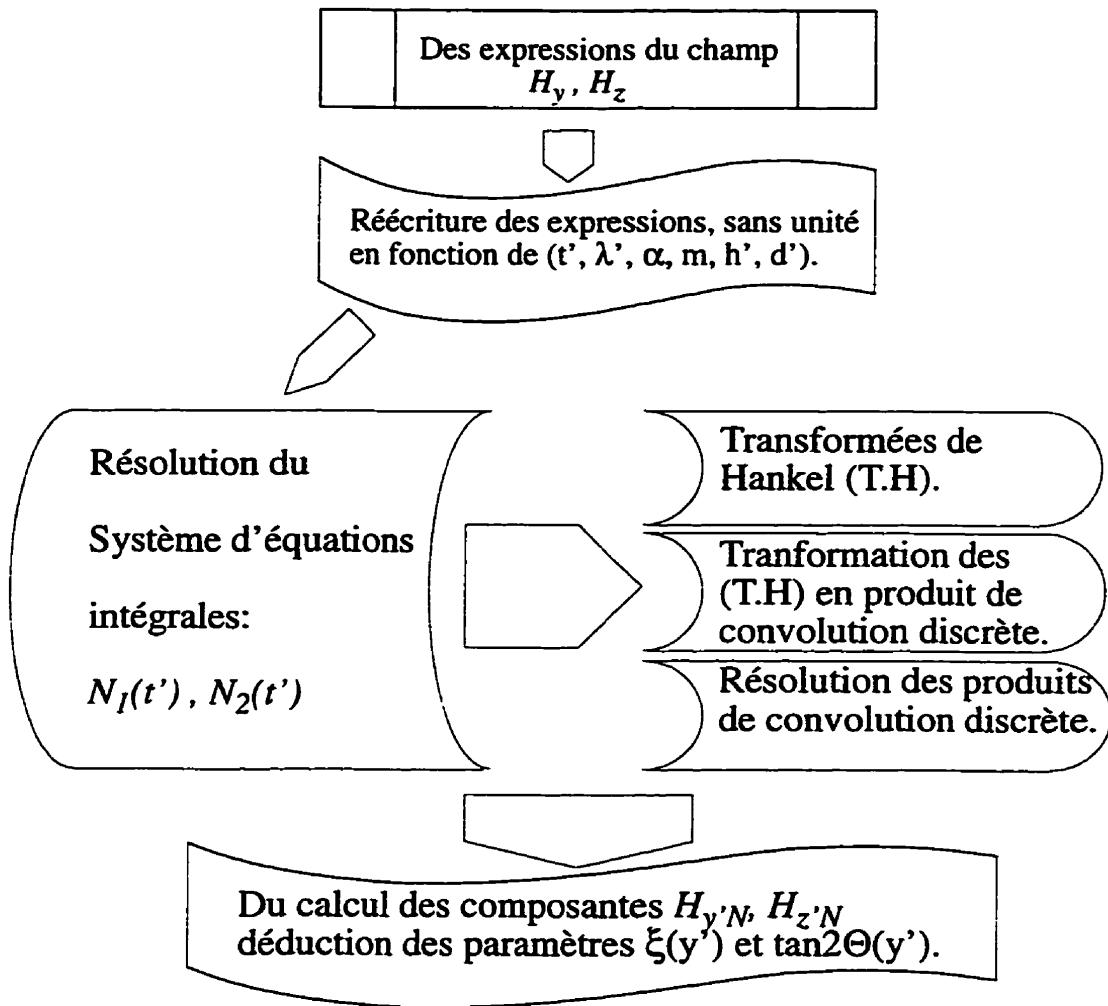


Figure 2.9 Organigramme de synthèse des réponses V.L.F.

La synthèse des signaux terminée, on passe à la construction de leurs histogrammes (figure 2.10 à figure 2.12) afin de mieux voir ce qui motive le recours à la statistique d'ordre supérieur et par là même, à la méthode d'identification-interprétation telle que proposée dans la partie 2.

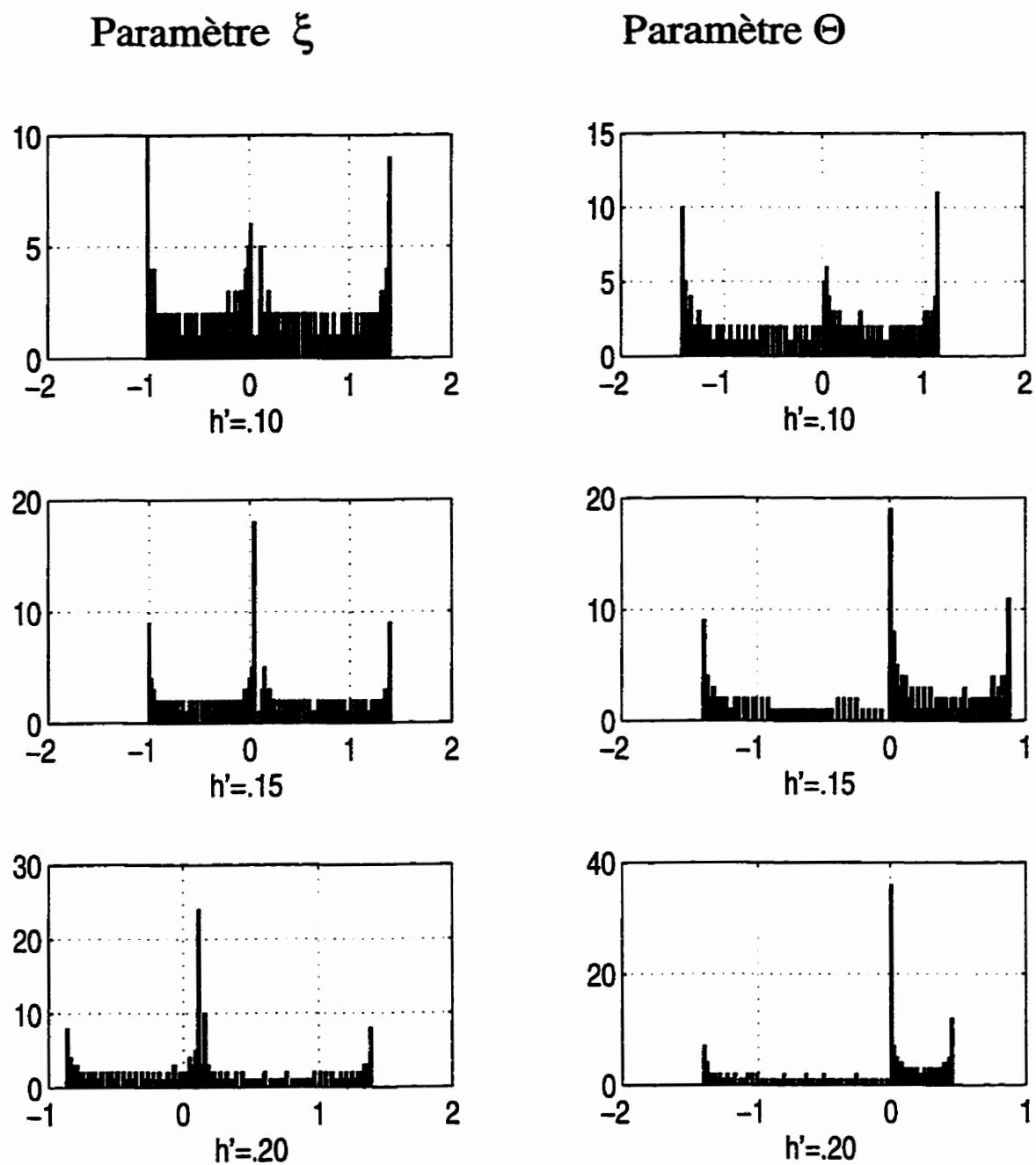


Figure 2.10 Histogramme des signaux de l'abaque # 1

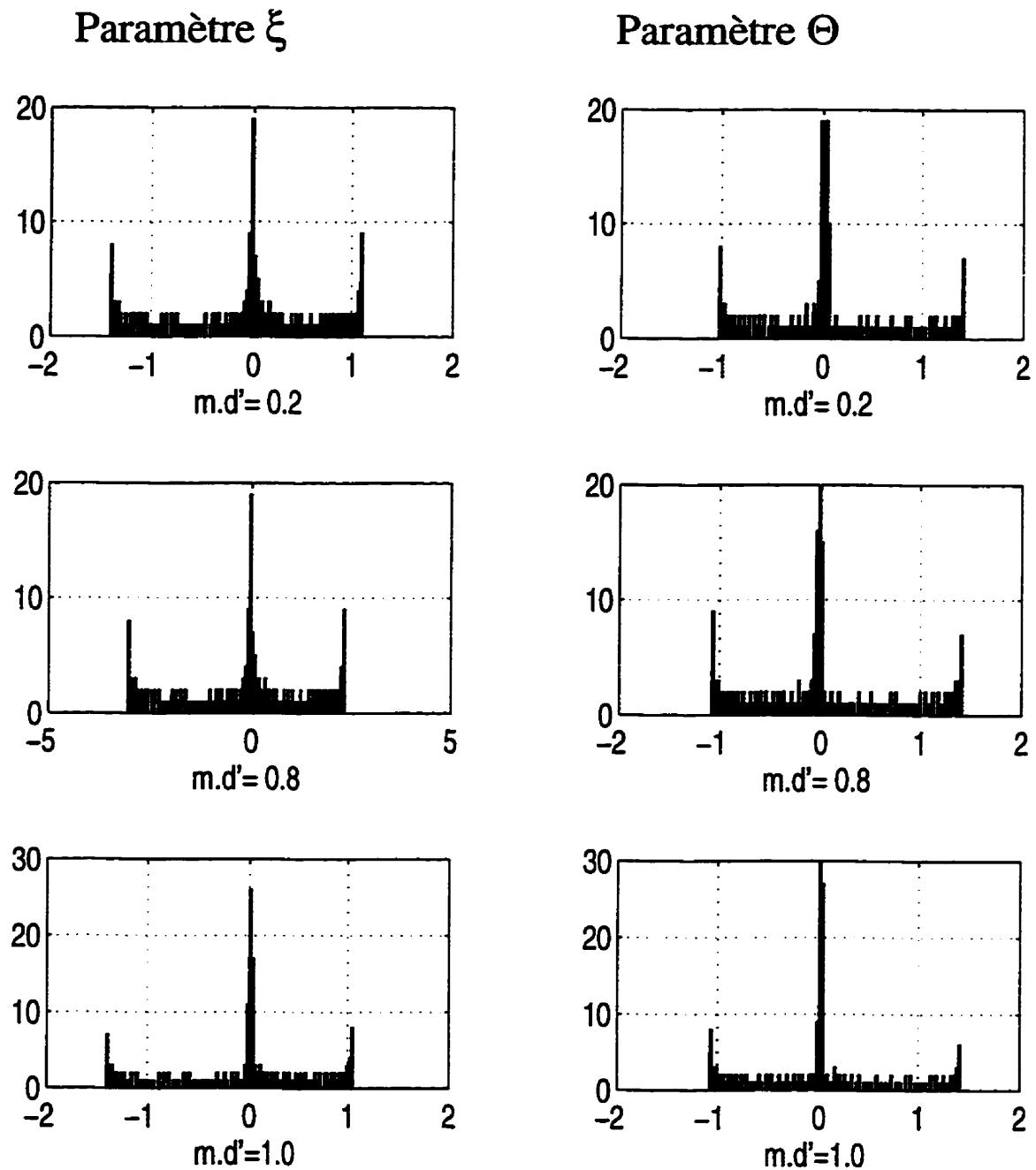
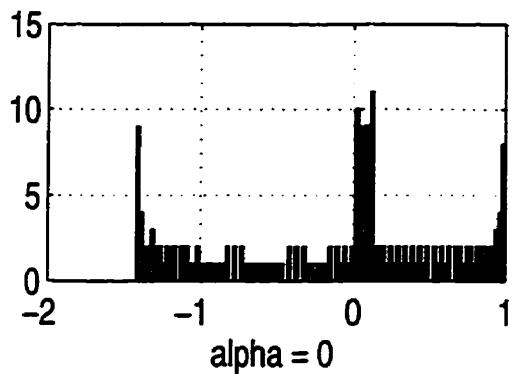
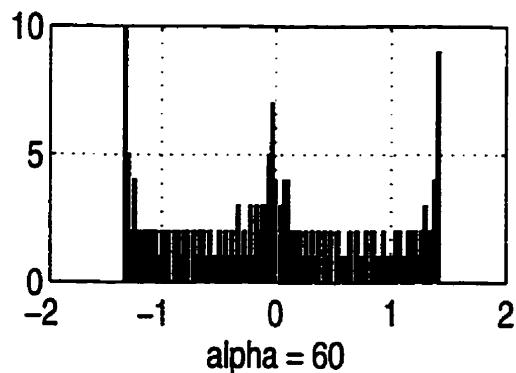
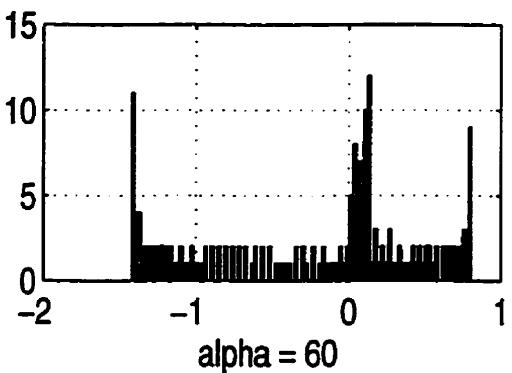
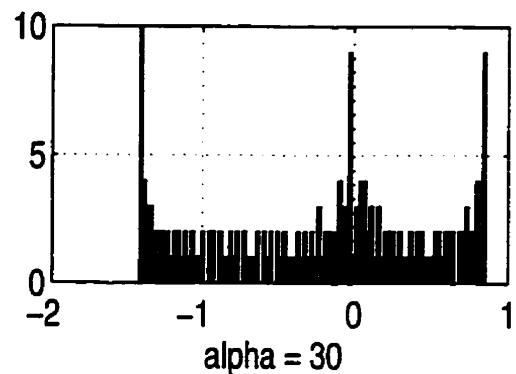
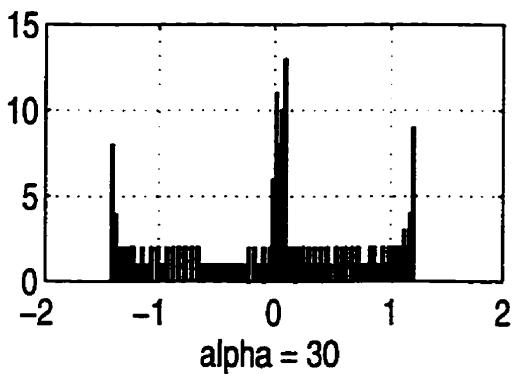
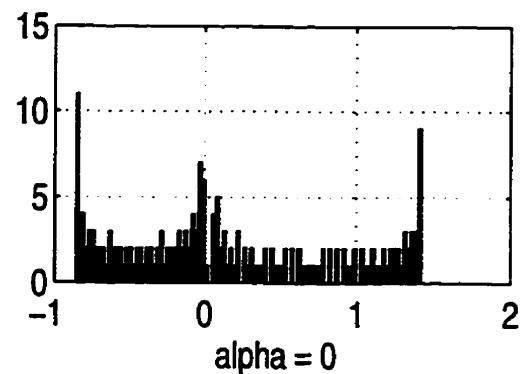


Figure 2.11 Histogramme des signaux de l'abaque # 2

Paramètre ξ Paramètre Θ **Figure 2.12** Histogramme des signaux de l'abaque # 3

Les histogrammes des signaux des abaques, sont tracés en distribuant chaque signal dans l'intervalle $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Le but ultime recherché par la construction de ces histogrammes, est celui de nous renseigner sur la "distribution" statistique de chacun de nos signaux synthétisés. De ces histogrammes, on fait observer qu'il est possible d'approximer chacune de ces distributions par une loi, dont l'expression de base est tirée de [7] et généralisée à nos histogrammes obtenus, elle est de la forme suivante:

$$(2.21) \quad p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_1 - (x + \eta_1)^2/2}} + \frac{1}{\sqrt{\tau_2 - (x - \eta_2)^2/2}} \right)$$

Avec τ_1 , τ_2 , η_1 , et η_2 , facteurs que l'on peut ajuster afin de mieux approcher chacune des distributions des signaux des abaques. Ainsi si nous posons:

$$\left(\tau_1 = \frac{1}{4} \right), (\tau_2 = \tau_1), (\eta_1 = 0.695) \text{ et } (\eta_2 = -\eta_1),$$

nous obtenons pour (2.21) distribué sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ l'allure générale des distributions statistiques des réponses V.L.F. synthétisées, tel que montré à la figure 2.13:

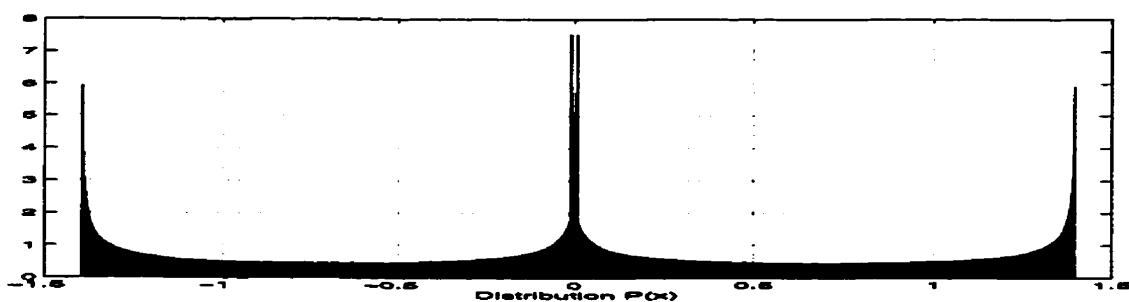


Figure 2.13 Fonction de répartition $p(x)$.

Des histogrammes et de l'expression générale pouvant les approximer, on remarque que les réponses V.L.F., sont non-gaussiennes. La non gaussianité des signaux (réponses V.L.F. entre autres) justifie pleinement le recours à la statistique d'ordre supérieur¹ par l'entremise de la méthode d'identification-interprétation appliquée à ces signaux.

L'identification-interprétation est vue en détail dans la deuxième partie de ce document. Après une courte introduction faite sur le formalisme tensoriel, l'analyse en composantes indépendantes suit et constitue le principe même de cette méthode d'identification-interprétation. Cette méthode est appliquée aux mixtures des signaux synthétisés et est élargie à d'autres signaux de "distribution" statistique différente de celle qui est approximée par la relation (2.21) et telle qu'illustrée à la figure 2.13 précédente.

1. Le lecteur intéressé consultera utilement l'article de P.A.Delaney, D.O.Walsh qui contient 258 références [17].

Chapitre 3

ANALYSE EN COMPOSANTES INDÉPENDANTES

Dans ce chapitre, on débute par une courte introduction sur le formalisme tensoriel où la notion de tenseurs et de leurs estimateurs appelés *k*-statistiques sont définis. Le tenseur est vu comme une table à plus de deux indices, contrairement à la matrice qui est à deux indices. Suivent la définition et les principales propriétés des *cumulants* (sections 3.2.1, 3.2.2). Deux de ces propriétés sont essentiellement utilisées dans l'analyse en composantes indépendantes, à savoir: la propriété de multilinéarité (propriété P2) et la propriété d'indépendance de processus aléatoires (propriété P4).

Les bases théoriques de l'analyse en composantes indépendantes (A.C.I.) une fois résumées (section 3.3), on énonce l'algorithme d'identification-interprétation (section 3.4). Les mixtures de réponses V.L.F. sont simulées, comme si elles étaient données par un réseau matriciel de capteurs disposés au sol; sont transformées par l'A.C.I. Cette transfor-

mation consiste à séparer les mixtures observées afin d'en extraire les signatures synthétisées dans la première partie (chapitre 2) de ce document. On termine le présent chapitre par l'application de l'A.C.I. sur des données réelles qui proviennent du site appelé **Marbridge**. L'A.C.I. fût également appliquée à des signaux de distribution statistique autre que celle des réponses V.L.F. synthétisées ou réelles.

3.1 Formalisme tensoriel

Soit $\{x_i\}$ un vecteur aléatoire à p composantes (indépendantes ou non), dans sa plus simple représentation à un seul indice: $\{x_i\} = (x_1, \dots, x_p)$. Si la notation vectorielle est généralisée avec plus d'un indice, on obtient alors des *tenseurs* [18]. En notation tensorielle l'espérance mathématique $E\{x_j^2 \cdot x_k\}$ peut-être représentée par μ_{jik} . Ainsi $\mu_{\underbrace{1 \dots 1}_{p, \text{fois}}} = E\{x_1^p \cdot x_2^q\}$. Rapidement on s'aperçoit que cette notation est évidemment lourde à manipuler, eu égard au nombre de variables qui risque d'être élevé. Dans [18], on lui préfère une notation tensorielle dite de 'puissance' où $E\{x_1^3 \cdot x_2^5\} = \mu_{[35]}$. Quant à [19], une approche de notation unifiée, incluant les moments et cumulants, parait plus avantageuse que celle rencontrée dans [18]. Des virgules dans les indices sont utilisées pour distinguer les moments des cumulants et l'ordre de ces indices n'a aucune importance. Ainsi, $k_{ijk} = E\{X_i X_j X_k\}$ est le moment d'ordre 3 à $i = j = k$ et $k_{i,j,k} = k_{ijk} - k_i k_{j,k} - k_j k_{i,k} - k_k k_{i,j} - k_i k_j k_k$ le *cumulant* d'ordre 3 des variables X_i, X_j, X_k qui donne pour $i = j = k$, $k_{i,i,i} = k_{iii} - 3k_i k_{i,i} - (k_i)^3$.

Dans ce qui suit, quelques propriétés des tenseurs sont brièvement résumées. Étant donné que les tenseurs cumulants sont symétriques, alors leurs estimateurs appelés *k-sta-*

tistiques le sont aussi [18], [19], [20]. Les tenseurs cumulants sont mutuellement orthogonaux, leurs estimateurs sont alors considérés comme des polynômes orthogonaux homogènes et symétriques. Cette symétrie des tenseurs cumulants se traduit par l'invariance s'il y a permutation dans les indices [21]. Les cumulants brièvement introduits dans cette section, seront détaillés dans les deux prochaines sections. En commençant d'abord par leur signification et mode d'obtention, puis viennent les principales propriétés dont ils jouissent.

3.2 Définition et principales propriétés des cumulants

A l'origine, les cumulants appelés autrefois semi-invariants, se sont vus disputés leur 'paternalité' par les statisticiens et les algébristes. Toutefois, il n'en demeure pas moins que leur introduction comme notion de *distance* dans la distribution statistique d'un signal de celle d'une gaussienne [22], revêt pour nous un caractère fondamental.

3.2.1 Définition des cumulants

De [23] et [24] la seconde fonction caractéristique (S.F.C.) du vecteur aléatoire \bar{x} est l'application de \mathbb{R}^p (ensemble des réels) dans \mathbb{C} (ensemble des complexes). Cette application est définie par: $u \in \mathbb{R}^p \rightarrow \Psi_{\bar{x}}(u) = \log \Phi_{\bar{x}}(u)$, où $\Phi_{\bar{x}}(u)$ est appelée première fonction caractéristique (P.F.C.) qui se développe et s'exprime en fonction des moments comme suit:

$$\Phi_{\bar{x}}(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \cdot u^n}{n!} \cdot m_n \text{ avec } m_n = E\{\bar{x}^n\} \text{ le moment d'ordre } n \text{ de } \bar{x}.$$

Au voisinage de $u = 0$ la S.F.C. $\Psi_{\bar{x}}(u) = \log \Phi_{\bar{x}}(u)$ est développable, et s'exprime, [24], ainsi:

$$\Psi_{\bar{x}}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k \cdot u^k}{k!} \cdot K_k \text{ avec } \frac{t^k}{k!} K_k = \Psi_k^{(k)}(0),$$

où la quantité K_k s'appelle le *cumulant* d'ordre k . On obtient alors les expressions liant K_k aux moments, [24]:

(3.1)

$$\begin{aligned} \Psi_{\bar{x}}(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \cdot u^n}{n!} \cdot m_n - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \cdot u^n}{n!} \cdot m_n \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \cdot u^n}{n!} \cdot m_n \right)^3 + \dots \\ &= i u m_1 + \frac{t^2 u^2}{2!} \left(m_2 - m_1^2 \right) + \frac{t^3 u^3}{3!} \left(m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 \right) + \dots \end{aligned}$$

et par identification à $\Psi_{\bar{x}}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k \cdot u^k}{k!} \cdot K_k$ on peut déduire:

- $K_1 = m_1$
- $K_2 = m_2 - m_1^2 = \mu_2$
- $K_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 = \mu_3$
- $K_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$

3.2.2 Principales propriétés des cumulants

Avec [23] nous établissons ces principales propriétés:

P1. De même que les moments, les cumulants sont des fonctions symétriques.

P2. De même que les moments, les cumulants sont multilinéaires ce qui se traduit par les deux relations suivantes:

- Si quelque soit i , $a_i \neq 0$, $\text{Cum}(a_1 x_1, \dots, a_p x_p) = a_1 \dots a_p \text{Cum}(x_1, \dots, x_p)$
- $\text{Cum}(x_{11} + x_{12}, x_2, \dots, x_p) = \text{Cum}(x_{11}, x_2, \dots, x_p) + \text{Cum}(x_{12}, x_2, \dots, x_p)$

P3. Comme la seconde fonction caractéristique (S.F.C.) d'une suite de variables aléatoires indépendantes (V.A.I.) est la somme des S.F.C., on déduit que si la suite $\{X_n\}$, $n \in \{1, 2, \dots, p\}$; peut être décomposée en deux suites disjointes indépendantes alors $\text{Cum}(x_1, \dots, x_p) = 0$.

P4. Pour la même raison, si les deux suites $\{X_n\}$ et $\{Y_n\}$, $n \in \{1, 2, \dots, p\}$ sont indépendantes alors $\text{Cum}(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = \text{Cum}(x_1, \dots, x_n) + \text{Cum}(y_1, \dots, y_n)$.

P5. Les cumulants d'ordre $n > 1$ sont invariants par translation. En effet si l'on pose $y = (x + a)$ où a est déterministe alors $\Psi_y(u) = iu^T a + \Psi_x(u)$.

P6. Pour une suite de V.A. gaussiennes dans leur ensemble, les cumulants d'ordre $n > 2$ sont nuls car la S.F.C. se limite à des termes quadratiques en u .

P7. Sous réserve d'ergodicité, l'estimation des moments d'un signal aléatoire stationnaire peut simplement se faire par moyenne temporelle. Par contre, il semble que l'estimation la plus simple des cumulants consiste à repasser par celle des moments et à appliquer ensuite les formules les reliant.

P8. Les cumulants et les moments sont en effet reliés, mais par des formules générales assez lourdes à manipuler. Toutefois si l'on se limite à des ordres peu élevés, on obtient des résultats relativement simples qu'il convient d'indiquer. Ainsi les quatre premiers cumulants (vus dans la section 3.2.1) s'expriment en fonction des quatre moments par les relations suivantes:

- $Cum(x_i) = E(x_i)$.
- $Cum(x_i, x_j) = E(x_i) \cdot E(x_j) = cov(x_i, x_j)$.

Si de plus les V.A. sont centrées (d'espérance mathématique nulle) on a:

- $Cum(x_i, x_j, x_k) = E(x_i \cdot x_j \cdot x_k)$.
- $Cum(x_i, x_j, x_k, x_l) = E(x_i \cdot x_j \cdot x_k \cdot x_l) - E(x_i x_j) \cdot E(x_k x_l) - E(x_i x_k) \cdot E(x_j x_l) - E(x_i x_l) \cdot E(x_j x_k)$. Ces formules sont tout à fait générales, et valables même si certaines des V.A. x_i sont égales entre elles. En particulier on retrouve la formule
- $Cum(x^4) = E(x^4) - 3(E(x^2))^2$, qui est nulle dans le cas gaussien. Ces formules prennent un grand intérêt dans le cas de variables aléatoires indépendantes (V.A.I.). En particulier l'application de la propriété P3 à $Cum(x_i, x_j, x_k, x_l) = E(x_i \cdot x_j \cdot x_k \cdot x_l) - E(x_i x_j) \cdot E(x_k x_l) - E(x_i x_k) \cdot E(x_j x_l) - E(x_i x_l) \cdot E(x_j x_k)$ nous donne:
- $Cum(x_i, x_j, x_k, x_l) = Cum(x_i^4) \cdot \delta_{[i, j, k, l]}$, où $\delta_{[.]}$ est l'extension du symbole de Kronecker qui ne prend que les valeurs 0 ou 1 et vaut 0 sauf si $i = j = k = l$, et

- $Cum(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = Cum(x_i^k) \cdot \delta_{[i_1, i_2, \dots, i_k, i]}$ propriété qui est très commode. La formule correspondante pour les moments serait beaucoup plus compliquée, ce qui montre l'intérêt de l'usage des cumulants.

De ces quelques notions de statistique d'ordre supérieur, nous retenons l'expression des cumulants en fonction des moments et les deux principales propriétés P2 et P4. Pour les applications, ces tenseurs cumulants sont évidemment estimés et leurs estimateurs sont appelés k -statistiques. Nous n'utiliserons que des estimateurs sans biais et tels que définis par [20]. Dans les prochaines sections, il est aussi question du choix opté pour des cumulants par rapport aux moments d'ordre supérieur, et de plus que de cumulants d'ordre quatre.

3.2.3 Estimation des cumulants d'ordre quatre

Il semble bien, que de façon très simple on peut estimer les cumulants d'ordre quatre, et ce en fonction des expressions de leurs moments. Dans tout ce qui suit, notamment lors de la validation de l'algorithme de l'analyse en composantes indépendantes, on ne considère que des estimateurs sans biais ¹ et pour le cas réel [20] (pour le cas complexe voir [25]). Les moments estimés sous réserve d'ergodicité, sont donnés par les relations temporelles suivantes:

1. Si $\hat{\mu}$ est l'estimée de $\mu = E\{x\}$, et si $\mu - E\{\hat{\mu}\} = 0 \Rightarrow \hat{\mu}$ est l'estimateur sans biais de μ .

$$\hat{\mu}_{abcd} = \frac{1}{T} \times \sum_{k=1}^T x_a(k) \cdot x_b(k) \cdot x_c(k) \cdot x_d(k)$$

$$\hat{\mu}_{ab} = \frac{1}{T} \times \sum_{k=1}^T x_a(k) \cdot x_b(k)$$

L'expression de l'estimateur du tenseur cumulant d'ordre quatre pour des variables aléatoires centrées et dans le cas réel:

$$\hat{\gamma}_{abcd} = \frac{T+2}{T-1} \times \hat{\mu}_{abcd} - \frac{T}{T-1} \times (\hat{\mu}_{ab} \cdot \hat{\mu}_{cd} + \hat{\mu}_{ac} \cdot \hat{\mu}_{bd} + \hat{\mu}_{ad} \cdot \hat{\mu}_{bc}) .$$

Dans tout ce qui a précédé, il n'a été question que de cumulants plutôt que de moments d'ordre supérieur et de plus qu'à ceux d'ordre quatre. Il est donc légitime de se poser la question: "qu'est ce qui justifie l'emploi des uns par rapport aux autres?".

Dans [23], [27] et [28], l'argumentation verse plus en faveur de l'utilisation de cumulants et non de moments d'ordre supérieur. Les deux raisons qui y sont notamment invoquées justifient amplement l'usage de l'un par rapport à l'autre (plutôt d'un point de vue d'ordre pratique plus que d'ordre mathématique):

1. Tout comme la fonction de corrélation d'un bruit blanc qui est une fonction impulsion et de spectre étendu, les cumulants d'un bruit blanc (d'ordre supérieur) sont des fonctions impulsion multidimensionnelles et de polyspectres aussi multidimensionnels et étendus [28]. Soit $x[k]$ un signal aléatoire réel et centré (de moyenne nulle) et

$C_p[\underline{k}] = C\{x[k_1], \dots, x[k_p]\}$ son cumulant d'ordre p . La transformée de Fourier multidimensionnelle $S_p(\underline{y}) = \sum_{\underline{k}} C_p[\underline{k}] \cdot \exp(-j2\pi \underline{k}^T \cdot \underline{y})$ définie le polyspectre d'ordre p de $x[k]$, où \underline{k} et \underline{y} sont des vecteurs à p composantes [23].

2. Le cumulant de deux processus aléatoires additifs, statistiquement indépendants, est égal à la somme des cumulants de chacun de ces deux processus. Ce qui n'est pas vérifiable pour les moments d'ordre supérieur [23]. Cette propriété, nous permet d'utiliser l'opérateur cumulant de façon très aisée .

Quand à l'ordre quatre utilisé pour les cumulants, ce choix semble être plus un compromis fait entre l'écriture qui est moins aisée pour le tenseur cumulant d'ordre cinq ou plus et la valeur du tenseur cumulant d'ordre trois souvent négligeable par rapport à celle d'ordre quatre. Néanmoins les cumulants d'ordre trois ou cinq demeurent d'une très grande utilité lorsque ceux d'ordre quatre sont minimes.

3.3 L'analyse en composantes indépendantes

Cette section est puisée en totalité de [6]. L'analyse en composantes indépendantes (A.C.I.), a été introduite par **Herault et Jutten** [30], [31]. L'A.C.I. fut appelée ainsi par similarité à l'analyse en composantes principales. On verra plus loin jusqu'où on peut aller dans cette comparaison. L'introduction des statistiques d'ordre supérieur (S.O.S.), ou pour reprendre la terminologie anglaise de 'higher order statistics' (H.O.S.), sont venus asseoir d'autres méthodologies dans le traitement statistique des signaux. Evidemment, l'*a priori* de caractère gaussien des signaux n'est plus considéré [29].

3.3.1 Présentation de l'A.C.I.

Soit le modèle linéaire suivant:

$$\bar{y} = M \cdot \bar{x} + \bar{v} \quad (3.2)$$

avec \bar{y} , \bar{x} , \bar{v} des vecteurs aléatoires, à valeurs dans \mathbb{R} (réel) ou \mathbb{C} (complexe), centrés $E\{\bar{y}\} \equiv E\{\bar{x}\} \equiv E\{\bar{v}\} \equiv 0$, et de covariance finie. M est une matrice rectangulaire et \bar{x} vecteur aléatoire de composantes statistiquement indépendantes.

Le problème abordé par l'A.C.I. est le suivant: on désire estimer M et \bar{x} , connaissant les T réalisations de \bar{y} . Toutefois, et à cause de \bar{v} , il est impossible de restaurer entièrement \bar{x} . l'A.C.I. ne peut être appliquée sur le modèle (3.2) tel quel, alors on considère plutôt le modèle suivant:

$$\bar{y} = F \cdot \bar{z}, \quad (3.3)$$

où \bar{z} est un vecteur aléatoire, ayant ses composantes maximisant une certaine fonction de *contraste*. Cette fonction de contraste, nous renseigne sur l'indépendance statistique des composantes de \bar{z} , lorsqu'elle est maximale. Ainsi le problème défini est celui d'un problème d'identification. Ces problèmes sont qualifiés parfois d'*aveugle* ou de *myope*, vu que l'on désire estimer M et \bar{x} en n'ayant accès qu'aux seules observations \bar{y} . De plus la matrice de mélange M de par sa structure déterminera s'il s'agit d'un problème d'identification ou de déconvolution. Dans ce dernier cas, la matrice M est dite de structure de Toeplitz.

3.3.2 Définition de l'A.C.I.

L'A.C.I. de $\bar{y} = F \cdot \bar{z}$, si le vecteur aléatoire \bar{y}_N est de matrice de covariance finie V_y , est définie par la paire de matrices $\{F, \Delta\}$ telle que:

- $V_y = F \cdot \Delta^2 \cdot F^*$, où Δ est une matrice diagonale réelle positive, et F une matrice de rang p .
- $\bar{y} = F \cdot \bar{z}$, où \bar{z}_p de covariance Δ^2 à ses composantes indépendantes au sens de la maximisation d'une fonction de contraste.

3.3.3 Fonctions de contraste

Le meilleur moyen de prouver l'indépendance des composantes du vecteur aléatoire \bar{x}_N est de mesurer la 'distance' des deux membres de l'égalité suivante:

$$p_{\bar{x}}(u) = \prod_i^N p_{x_i}(u_i),$$

où $p_{\bar{x}}(u)$ est la densité de probabilité du vecteur aléatoire \bar{x}_N , et $\delta\left(p_{\bar{x}}, \prod_{i=1}^N p_{x_i}\right)$ la 'distance' définie à son tour par Kullback comme:

$$\delta(p_{\bar{x}}, p_{\bar{z}}) = \int p_{\bar{x}}(u) \cdot \log(p_{\bar{x}}(u) / p_{\bar{z}}(u)) du.$$

En remplaçant $p_{\bar{z}}(u)$ par $\prod p_{x_i}(u_i)$, nous définissons l'information mutuelle qui s'exprime alors par:

$$I(p_{\bar{x}}) = \int p_{\bar{x}}(u) \cdot \log(p_{\bar{x}}(u) / \prod p_{x_i}(u_i)) du.$$

De la définition de $\delta(\cdot, \cdot)$, l'information mutuelle tend à s'annuler si et seulement si les variables x_i sont mutuellement indépendantes. Alors nous verrons, que cela peut constituer une bonne fonction de contraste.

3.3.4 Standardisation

Le but de la standardisation est de transformer un vecteur aléatoire \bar{z} en un vecteur \tilde{z} qui possède une covariance unité. Soit le vecteur aléatoire \bar{z} avec $E\{\bar{z}\} = 0$ et de matrice de covariance $V = E\{\bar{z}^* \cdot \bar{z}\}$. Par décomposition en vecteurs propres (E.V.D.) [32] de la matrice de covariance $V = U \cdot \Lambda^2 \cdot U^*$, on obtient pour la variable standardisée l'expression suivante: $\tilde{z} = \Lambda^{-1} \cdot U^* \cdot \bar{z}$. En d'autres termes la standardisation revient à 'blanchir' les observations et seulement par filtrage linéaire à l'ordre deux. Dans [23] il est d'ailleurs montré que de façon générale il est impossible de blanchir ces données à un ordre supérieur à deux. Dans la section suivante sont vus en détail, la fonction de contraste et le critère de contraste.

3.3.5 Fonction et critère de contraste

Le but de cette section est de définir le concept de maximisation de la fonction de contraste qui constitue le noyau central de l'algorithme utilisé dans l'identification-interprétation.

3.3.5.1 Définition de la fonction de contraste

Toute application Ψ de l'ensemble des densités de probabilité de \bar{x} tel que $\bar{x} \in \Xi^N \rightarrow \mathbb{R}$ et qui possède les propriétés suivantes:

- 1) $\Psi(p_{\bar{x}}) = \Psi(pP\bar{x})$, où P est une matrice de permutation quelconque.
- 2) $\Psi(p_{\bar{x}}) = \Psi(p\Lambda\bar{x})$, où Λ est une matrice diagonale inversible.
- 3) $\Psi(pA\bar{x}) = \Psi(p_{\bar{x}})$, où A est de la forme: $A = \Lambda \cdot P$ et si \bar{x} à ses composantes indépendantes, dans ces conditions

$$\Psi(p_z) = -I(p_{\bar{z}}) \quad (3.4)$$

constitue alors une fonction de contraste.

Des théorèmes qui suivent résulte une proposition de fonction de contraste et l'aboutissement de l'identification de la matrice M du modèle linéaire (3.2) par la matrice F . Pour toutes les démonstrations de ces théorèmes, voir [6].

Théorème 1

- 4) Si \bar{x}, \bar{z} deux vecteurs aléatoires tels que $\bar{z} = B \cdot \bar{x}$ avec B une matrice rectangulaire,

- 5) si \bar{x} a des composantes indépendantes et \bar{z} a des composantes indépendantes par paires, et
- 6) si B a deux termes non-nuls, dans la même colonne j , alors la composante x_j est soit gaussienne soit déterministe.

Théorème2

Soit le vecteur aléatoire \bar{x} , de composantes indépendantes et ayant au plus une composante gaussienne. Soit la matrice orthogonale $C_{[N \times N]}$ et le vecteur aléatoire \bar{z} avec $\bar{z} = C \cdot \bar{x}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes entre elles:

- 7) Les composantes z_i sont indépendantes par paires.
- 8) Les composantes z_i sont mutuellement indépendantes.
- 9) La matrice C se décompose comme $C = \Lambda \cdot P$, où Λ est une matrice diagonale et P une matrice de permutation.

Du théorème 2 on tire les implications suivantes:

- 10) Le contraste défini: $\Psi(p_{\bar{z}}) = -I(p_{\bar{z}})$ restera valable pour tout vecteur aléatoire \bar{z} , ayant au plus une composante gaussienne.
- 11) Si $\bar{y} = M \cdot \bar{x}$, $\bar{y} = F \cdot \bar{z}$ et \bar{x} qui satisfait le théorème 1.
- 12) Si la fonction de contraste Ψ satisfait le point (3), alors l'égalité $\Psi(P_{\bar{z}}) = \Psi(P_{\bar{x}})$ est vérifiée si et seulement si:

$F = M \cdot \Lambda \cdot P$, où Λ est une matrice diagonale inversible et P une matrice de permutation. Autrement dit on arrive à identifier M par F et \bar{x} par \bar{z} , mais sans toutefois pouvoir lever l'**indétermination sur la permutation et le signe**.

3.3.5.2 Critère du contraste

De l'étude détaillée du critère d'optimisation de la fonction de contraste [6] (page 295), où l'on cherche une matrice orthogonale Q qui maximise le contraste $\Psi(p_{\bar{z}}) = -I(p_{\bar{z}})$ tel que défini au point (10), on retient l'expression de la fonction de contraste suivante:

$$\Psi(Q) = \sum_{i=1}^N K_{i,i,\dots,i}^2. \quad (3.5)$$

Avec Q une transformation orthogonale reliant, \bar{y} et \bar{z} vecteurs aléatoires standardisés, par l'égalité suivante:

$$\bar{z} = Q \cdot \bar{y}, \quad (3.6)$$

où \bar{y} est le processus observé, \bar{z} l'estimation de \bar{x} dans le modèle (3.2) et $K_{i,i,\dots,i}$ les cumulants marginaux standardisés à l'ordre r . Pour $r \geq 3$ la fonction de contraste, de vecteurs ayant au plus un cumulant marginal nul (soit au plus une composante gaussienne), satisfait le point (3).

Soit $K_{i,j,\dots,q} = \text{Cum} \{ \tilde{z}_p, \tilde{z}_p, \dots, \tilde{z}_q \}$, où Cum signifie cumulant et par Γ notons la famille des cumulants standardisés de \tilde{y} et par K celle de $\tilde{z} = Q \cdot \tilde{y}$. D'après la propriété P2 de multilinéarité, le tenseur cumulant standardisé du vecteur \tilde{z} qui s'exprime en fonction de celui de \tilde{y} et à l'ordre 4, s'écrit alors:

$$K_{i,j,k,l} = \sum_{pqrs} Q_{ip} \cdot Q_{jq} \cdot Q_{kr} \cdot Q_{ls} \cdot \Gamma_{i,j,k,l}. \quad (3.7)$$

Théorème3

$\Psi(Q)$ est un polynôme de cumulants marginaux notés par $K_{i,j,k,l}$. Alors la dérivée de la fonction de contraste $d\Psi = 0$, impose des conditions seulement sur les composantes du tenseur cumulant standardisé à deux indices différents [6]. En d'autres termes ce théorème, stipule que l'indépendance par paire est suffisante. Afin de maximiser $\Psi(Q)$, il est donc nécessaire et suffisant de considérer seulement les cumulants par paire de \tilde{z} .

Ainsi, on peut dégager à la suite de ce qui a été établi, un algorithme [6], [25], facile à mettre en œuvre pour la séparation des signaux. Le problème d'identification-interprétation, revient en fait à la séparation des données observées que sont les mixtures des réponses V.L.F. Après analyse en détail des opérations effectuées par cet algorithme, suit évidemment l'étape de validation de l'algorithme tel que décrit ci-dessous. D'emblée il est à préciser que l'application de l'algorithme porte essentiellement sur des données simulées et pour deux cas:

- **Cas de deux sources:** Seulement deux capteurs au sol nous fournissent la mixture de deux réponses V.L.F., et l'opération d'identification-interprétation se fait par la séparation de ces signaux.
- **Cas de quatre sources:** Ce sont quatre capteurs qui nous délivrent la mixture de quatre réponses V.L.F., de même que dans le premier cas, l'identification-interprétation se fait par la séparation de ces signaux.

Le choix des réponses V.L.F. synthétisées, du nombre de sources ayant générées ces signaux, ainsi que la structure de la matrice de mélange est **totalement arbitraire**. On estime plus intéressant d'élargir l'étude par le rajout notamment de signaux de distribution statistique autre que celle des signaux synthétisés.

Pour la mise en œuvre de l'algorithme, la première tâche consiste à 'blanchir' ou à standardiser les observations Y . Au lieu de procéder comme suggéré à la section 3.3.4 par décomposition (E.V.D.), on préfère décomposer ces observations en valeurs singulières évitant ainsi le calcul de la matrice de covariance de Y . Les observations Y pour le genre de problème qu'on a à traiter sont représentées sous forme matricielle de la façon suivante: $Y = [\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n-1}, \bar{y}_n]$, avec les $\bar{y}_i = [y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m}]^T$ vecteurs colonnes.

Etape de calcul de la S.V.D. (décomposition en valeurs singulières):

Si la matrice des données est $Y_{[m \times n]}$, m représente le nombre d'échantillons (ou les T réalisations) de chacune des n composantes du vecteur d'observations Y .

La traditionnelle S.V.D. de Golub-Reinsh, où ($m \approx n$) de Y s'écrit comme $SVD(Y) = V \cdot S \cdot U^*$,

où $V_{[n \times p]}$, $S_{[p \times p]}$, $U^*_{[p \times m]}$ et $p = \text{rang}(Y)$.

Dans notre cas comme $m \gg n$ (c'est le cas le plus fréquent), alors nous adoptons la méthode de calcul de la S.V.D. proposée par [33]. Cette décomposition s'écrit comme suit:

(3.8)

$$SVD(Y) = \Sigma^* \cdot \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} \cdot S \cdot Y^*,$$

où les différents facteurs ont pour expressions: $\Sigma^* \cdot Y = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ obtenue par décomposition $QR(Y)$, R matrice triangulaire supérieure et $SVD(R) = X \cdot S \cdot Y^*$. Ainsi sont déterminés tous les facteurs dans l'équation (3.8). La première tâche de l'algorithme étant décrite, l'algorithme au complet et implanté tel quel, est alors reproduit dans la section qui suit immédiatement.

3.4 Algorithme

1. Décomposition en valeurs singulières des observations:

$$SVD(Y) = \Sigma \cdot X \cdot S \cdot Y^*$$

2. Initialiser

$$Z = \sqrt{m} \cdot (X \cdot Q)^* \text{ et } L = Y \cdot S / \sqrt{m}.$$

3. Initialiser

$$F = L$$

4. Début de la boucle “balayage”: $k = 1, \dots, k_{max}$, avec $k_{max} \leq 1 + \sqrt{\rho}$

5. Début de la boucle “paire {i,j} à traiter”: $prw = 1, \dots, \frac{\rho \cdot (\rho - 1)}{2}$

- (a) Estimation des cumulants de (Z_i, \dots, Z_j, \dots) .¹
- (b) Déterminer l’angle α qui maximise $\Psi(Q^{(i,j)})$, avec $Q^{(i,j)}$ matrice de rotation plane de Givens dans le plan {i,j}, $\alpha \in [-\pi/4, \pi/4]$.
- (c) Accumulation de $F = F \cdot Q^{(i,j)*}$.
- (d) Mise à jour de $Z = Q^{(i,j)} \cdot Z$.

6. Fin de la boucle “traitement de la paire {i,j}”.

7. Fin de la boucle “balayage” prématuée si $\theta_0 \ll 1/m$.

L’étape (5-b) est la tâche essentielle qu’exécute cet algorithme, soit la maximisation de la fonction de contraste. Tel qu’il a été vu dans la section 3.3.5.2, la fonction de contraste à maximiser ne dépend que des cumulants marginaux $K^2_{i, i, \dots, i}$. Maximiser cette fonction de contraste revient en d’autres termes, à minimiser les cumulants croisés. De plus, comme il est énoncé dans le théorème 3, pour maximiser $\Psi(Q)$ il est nécessaire et suffisant d’utiliser uniquement les cumulants par paires de \tilde{z} . autrement dit, cela revient à minimiser les cumulants croisés par paires et qui sont de la forme: $K_{a, b, c, d}(\tilde{z})$, avec $(a, b, c, d) \in \{i, j\}$. La minimisation des cumulants croisés se fait par application de la

1. $Z_{i, \dots}$, représente le vecteur ligne $Z_{i, \dots} = [z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,m}]$.

transformation orthogonale Q qui est la matrice de rotation plane de Givens. La matrice de rotation de Givens est de la forme suivante, avec $c = \cos\alpha$ et $s = \sin\alpha$:

$$Q^{(i,j, \alpha)} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & c & s & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -s & c & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow i \\ \longleftarrow j \\ \uparrow i \quad \uparrow j \end{array}$$

Sur la stratégie à employer pour le traitement des paires $\{i,j\}$, on peut procéder selon un ordre préétabli soit par les lignes ou soit par les colonnes, en décrivant toutes les paires une par une. Cette stratégie définit le balayage cyclique naturel tel qu'illustre à la figure 3.1. Soit une mixture de quatre signaux $z_k, k[1, \dots, 4]$, $p = 4$, alors le nombre de paires $\{i,j\}$ à traiter est donné par $p \cdot (p - 1)/2 = 6$.

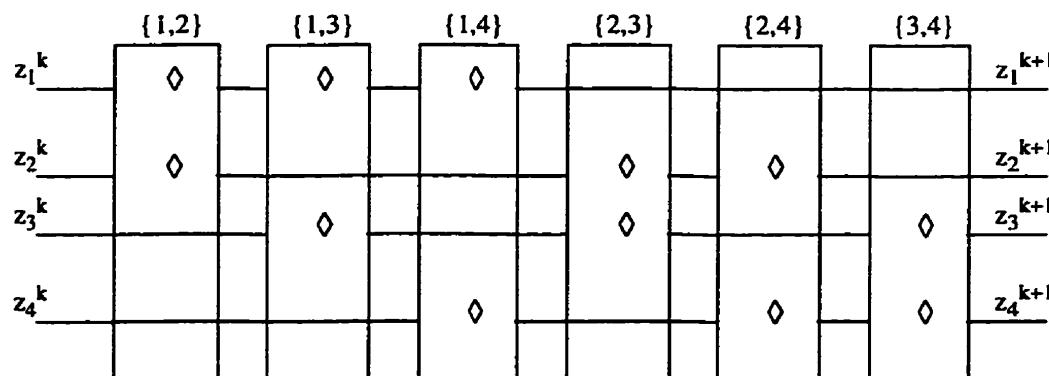


Figure 3.1 Balayage cyclique naturel

Lorsqu'on applique une rotation plane dans le plan $\{i,j\}$, on minimise les cumulants croisés de la forme: $K_{a, b, c, d}$, avec $a, b, c, d \in \{i,j\}$. En revanche ce ne sont pas les seuls cumulants qui sont affectés, par cette rotation de Givens. En effet, tous les cumulants, dont un indice au moins est dans $\{i,j\}$ sont modifiés: $K_{a, b, c, d}(\tilde{z})$, où $(a, b, c, d) \cap \{i, j\} = \emptyset$ [7].

Il sera donc indispensable, pour le traitement de la paire suivante de recalculer les cumulants nécessaires. Pour cela deux moyens s'offrent à nous, soit en utilisant la propriété de multilinéarité telle que formulée dans l'équation (3.7) ou soit à partir de la définition des cumulants appliquée aux observations, calculés explicitement après transformation par $Q^{(i,j)}$.

Le noyau central de l'algorithme (5-b), rappelons-le est la maximisation de la fonction de contraste. Le calcul qui mène à la détermination de l'angle α de rotation de la matrice de Givens maximisant cette fonction de contraste, est donné dans le cas réel par [6], [7] (voir [25] dans le cas complexe). Cette étape est détaillée comme suit¹:

- (1) Calcul des racines du polynôme $w(\xi)$ d'ordre 4:

$$w(\xi) = \sum_{k=0}^4 c_k \cdot \xi^k = 0 \quad (3.9)$$

- (2) Evaluation du polynôme $\Psi(\xi)$ ou fonction de contraste:

1. Au point (2) $\Psi(Q) \cong \Psi(\xi)$.

$$\Psi(\xi) = \left\{ \sum_{k=0}^4 b_k \cdot \xi^k \right\} / (\xi^2 + 4)^2 \quad (3.10)$$

- (3) Déterminer la valeur de ξ , qui maximise l'équation (3.10).

- (4) Calcul des racines de l'équation du polynôme suivant:

$$\theta^2 - \xi \cdot \theta - 1 = 0 \quad (3.11)$$

en ne retenant que la solution $\theta_0 \in [-1, 1] \Rightarrow \alpha \in [-\pi/4, \pi/4]$. Les démonstrations relatives aux différentes expressions des polynômes, notamment du point (2), et de leurs coefficients ne sont pas reproduites ici pour des raisons d'allègement du texte. Toutes ces démonstrations se trouvent dans [7], [34], [35]. Les coefficients des polynômes (3.9) et (3.10) s'expriment ainsi, [7]:

- $a_0 = \Gamma_{1111}$
- $a_1 = 4\Gamma_{1112}$
- $a_2 = 6\Gamma_{1122}$
- $a_3 = 4\Gamma_{1222}$
- $a_4 = \Gamma_{2222}$
- $b_4 = a_0^2 + a_4^2$
- $b_3 = 2(a_3a_4 - a_0a_1)$
- $b_2 = 4a_0^2 + 4a_4^2 + a_1^2 + a_3^2 + 2a_0a_2 + 2a_2a_4$

- $b_1 = 2(-3a_0a_1 + 3a_3a_4 + a_1a_4 - a_0a_3 + a_2a_3 - a_1a_2)$
- $b_0 = 2(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2a_0a_2 + 2a_0a_4 + 2a_1a_3 + 2a_2a_4)$
- $c_4 = \Gamma_{1111}\Gamma_{1112} - \Gamma_{2222}\Gamma_{1222}$
- $c_3 = \Lambda - 4(\Gamma_{1112}^2 + \Gamma_{1222}^2) - 3\Gamma_{1122}(\Gamma_{1111} + \Gamma_{2222})$
- $(c_2 = 3\chi)$
- $c_1 = 3\Lambda - 2\Gamma_{1111}\Gamma_{2222} - 32\Gamma_{1112}\Gamma_{1222} - 36\Gamma_{1122}^2$
- $c_0 = -4(\Lambda + 4c_4)$
- $\chi = (\Gamma_{1111} + \Gamma_{2222} - 6\Gamma_{1122})(\Gamma_{1222} - \Gamma_{1112})$
- $\Lambda = (\Gamma_{1111}^2 + \Gamma_{2222}^2)$

3.5 Validation de l'algorithme

La figure 3.2 représente le modèle linéaire d'équation $\bar{y} = M \cdot \bar{x} + \bar{w}$. Dans cette figure, \bar{x} représente le vecteur des signatures synthétisées (chapitre 2), M représente la matrice de mélange de ces signaux, et \bar{w} un bruit gaussien ou de tout autre nature. La sortie \bar{y} constitue la mixture observable par les capteurs.

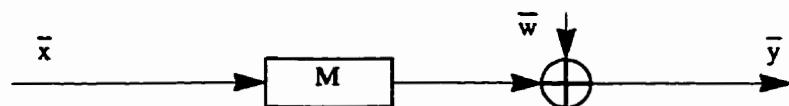


Figure 3.2 Modèle linéaire

Dans la section 3.3.1 on a vu que l'A.C.I. ne s'applique pas sur le modèle de la figure 3.2, mais plutôt sur celui d'équation $\tilde{y} = F \cdot \tilde{z}$. Par conséquent, le processus d'identification se ramène à celui qui est représenté par le schéma bloc de la figure 3.3, où chaque bloc désigne une étape ou plusieurs étapes de l'algorithme d'identification-interprétation. Dans la figure 3.3, L la matrice de standardisation est obtenue par la décomposition en valeurs singulières (S.V.D.) comme déjà vue à la section 3.4. $Q \equiv Q^{(i,j)}$ est la matrice de rotation de Givens dans le plan (i,j) .

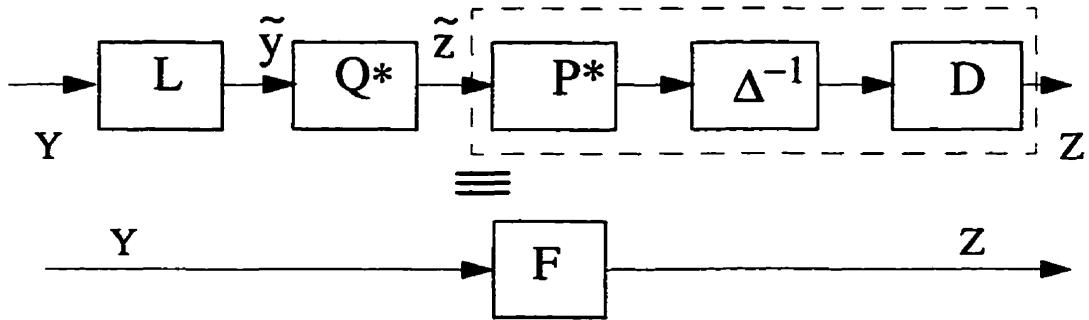


Figure 3.3 Schéma bloc d'identification

Quand au trio de matrices $\{D, \Delta, P\}$, non représenté dans l'algorithme, il a pour rôle en fin de traitement de définir la matrice F et ce de façon unique. Δ est la matrice diagonale dont les éléments rangés par ordre décroissant représentent les normes des colonnes de la matrice F . La matrice diagonale D est telle que la transformation $F \cdot D$ impose à la plus grande valeur de chaque colonne de F d'être positive. Quant à P , c'est une matrice de permutation.

On clôt cette section en parlant de la complexité de calcul de l'algorithme d'identification-interprétation. Si k représente le nombre de balayages et m celui des réalisations de

chacune des n composantes dans la donnée observée Y , alors l'algorithme à une complexité de l'ordre $O(6 \cdot k \cdot n^2 \cdot m)$ flop (opérations à point flottant), [6].

3.5.1 Identification-interprétation

L'algorithme de séparation ou d'identification-interprétation¹ tel que décrit dans la section 3.4 est codé en MATLAB version UNIX (voir programmes en annexe). L'A.C.I. est appliqué aux mixtures de signaux synthétisés de la première partie de ce document, ainsi qu'à d'autres signaux de distribution statistique, différente de celle des signatures synthétisées. Dans la dernière section 3.5.1.6, l'analyse en composantes indépendantes est appliquée à des données réelles qui proviennent du site appelé **Marbridge**. Ces données nous ont été fournies par le Professeur Chouteau du département de géophysique, à qui au passage, lui sont renouvelés nos remerciements.

3.5.1.1 Application à deux et à quatre paramètres

Le choix des réponses V.L.F. synthétisées, du nombre de sources ayant générées ces signaux, ainsi que de la matrice de mélange; est totalement arbitraire. Par réponses V.L.F. on désigne les paramètres ξ et Θ représentés sur les trois abaques (figure 2.6 à figure 2.8) construits dans la première partie de ce document (section 2.4.6.1).

L'A.C.I. fût appliquée dans le traitement des mixtures des réponses V.L.F., suivantes:

1. On utilise aussi parfois A.C.I. pour analyse en composantes indépendantes.

Réponses V.L.F. synthétisées, considérées

- 1-Deux paramètres ($\tan 2\Theta$, des abaques #1 et #2)

(α) cas sans bruit

(β) cas avec bruit de distribution uniforme

- 2-Quatre paramètres ($\tan 2\Theta$, des abaques #1 et #2)

(α) cas sans bruit

Les deux paramètres choisis dans les cas 1-(α) sans bruit et 1-(β) avec bruit, sont tirés des abaques #1 et #2 (figure 2.6 et figure 2.7):

$$\tan 2\Theta \{ \begin{bmatrix} (h' = 0.10), (\alpha = 0), (m \cdot Y' = 0.5) \\ (h' = 0.01), (\alpha = 0), (m \cdot Y' = 0.2) \end{bmatrix}$$

Les quatre paramètres choisis dans le cas 2 (α) sont tirés aussi des abaques #1 et #2 (figure 2.6 et figure 2.7):

$$\tan 2\Theta \{ \begin{bmatrix} (h' = 0.10), (\alpha = 0), (m \cdot Y' = 0.5) \\ (h' = 0.01), (\alpha = 0), (m \cdot Y' = 0.2) \\ (h' = 0.20), (\alpha = 0), (m \cdot Y' = 0.5) \\ (h' = 0.01), (\alpha = 0), (m \cdot Y' = 1.0) \end{bmatrix}$$

Ces paramètres sont au préalable normalisés avant de produire leur mixture. Les matrices de mélange considérées sont choisies de façon arbitraire. Dans les deux cas de mixture

à deux et à quatre paramètres, les matrices de mélange sont respectivement:

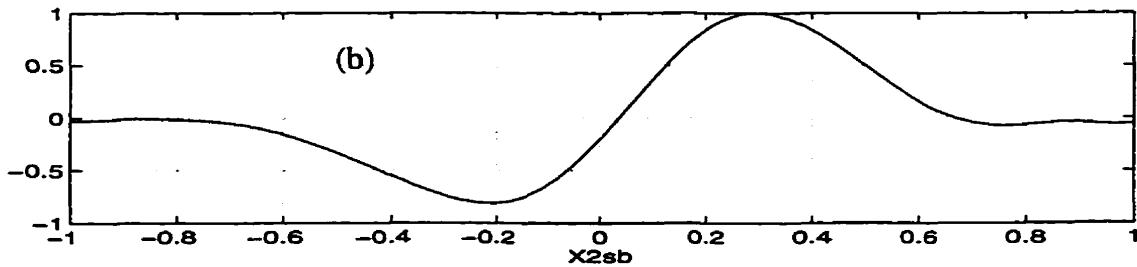
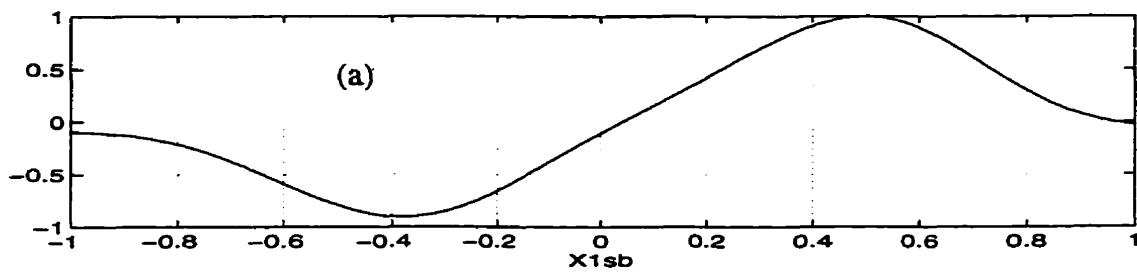
$M_{2(\alpha, \beta)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix}$ et $M_{4(\alpha)}$ de vecteur circulant à droite $[-1.0 \ 1.2 \ 1.0 \ -1.1]$, soit:

$$M_{4(\alpha)} = \begin{bmatrix} -1.0 & 1.2 & 1.0 & -1.1 \\ -1.1 & -1.0 & 1.2 & 1.0 \\ 1.0 & -1.1 & -1.0 & 1.2 \\ 1.2 & 1.0 & -1.1 & -1.0 \end{bmatrix}.$$

Les paramètres ξ et Θ considérés sont choisis aussi de façon arbitraire. Le traitement se fait de façon multidimensionnelle (2 ou 4 signaux).

- 1-Deux paramètres (figure 2.6 et figure 2.7)

(a) cas sans bruit



(a): $\tan 2\Theta, h' = 0.10, \alpha = 0, m.Y' = 0.5$.

(b): $\tan 2\Theta, h' = 0.01, \alpha = 0, m.Y' = 0.2$.

Figure 3.4 Paramètres $\tan 2\Theta$, des abaques #1 et #2 (a), (b)

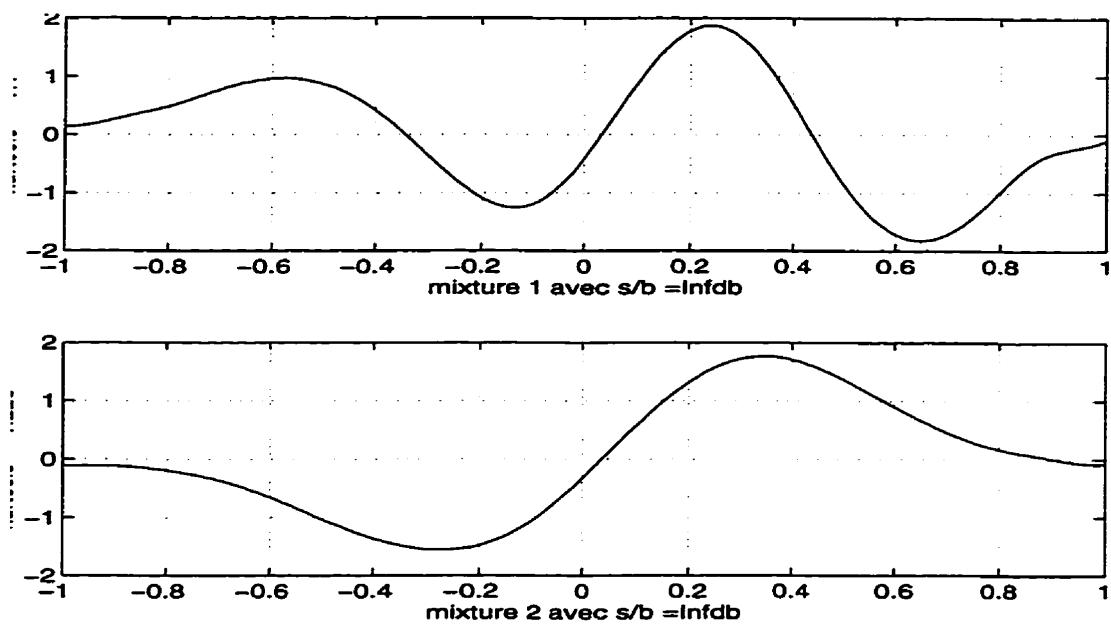


Figure 3.5 Mixture des 2 paramètres $\tan 2\Theta$, des abaques #1 et #2

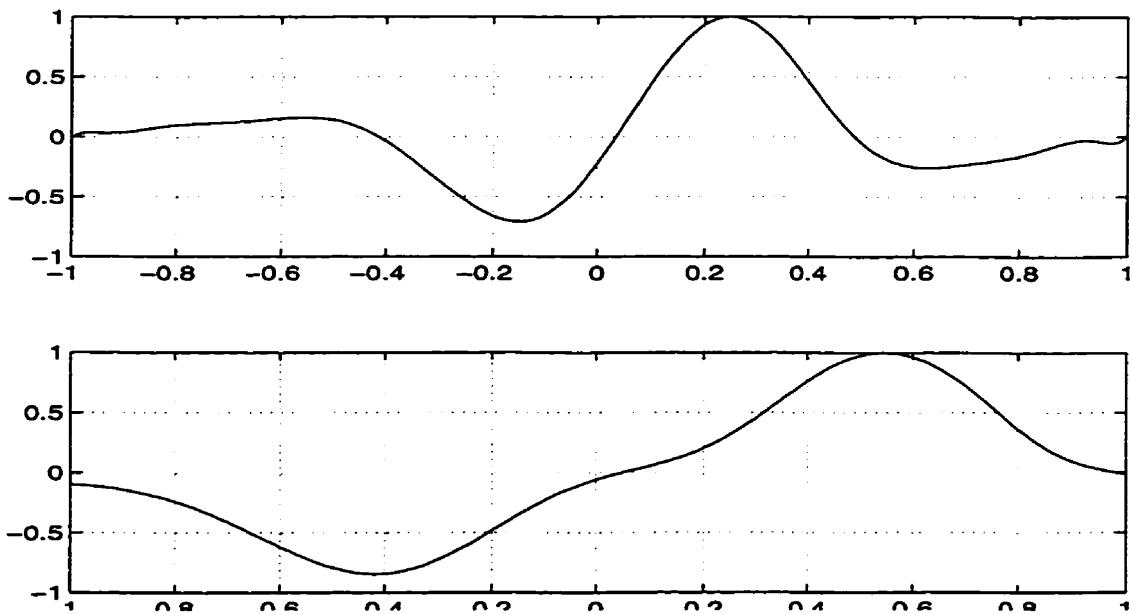
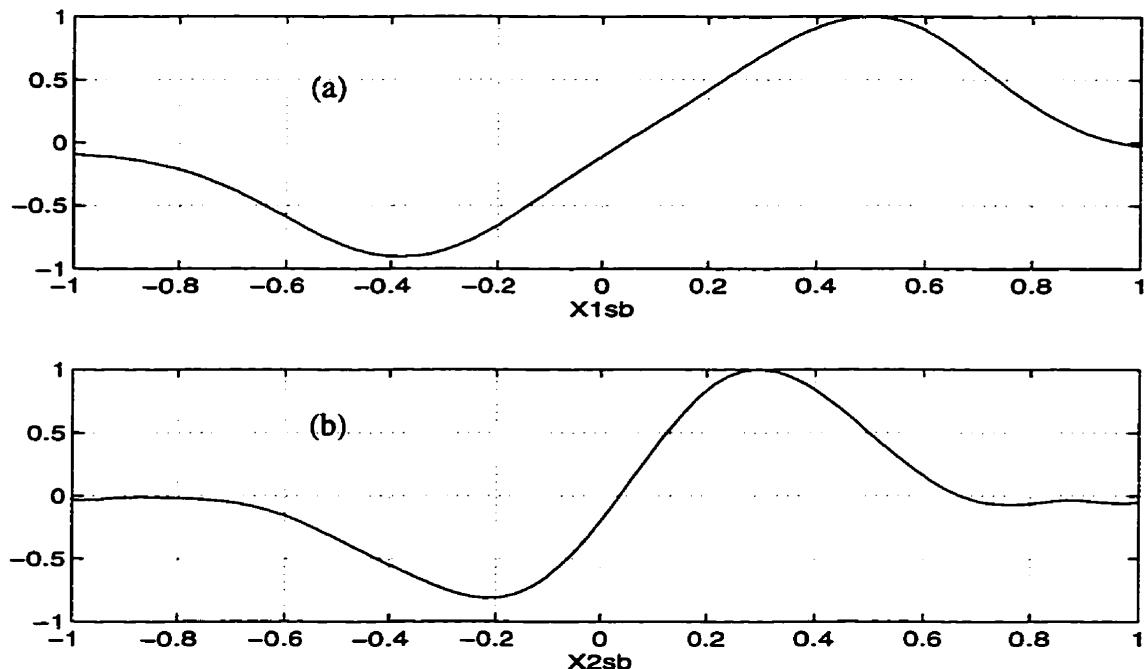


Figure 3.6 Signaux_1 (α) en sortie de l'A.C.I.

Il est aisé de voir la restitution des signaux sources de la figure 3.4. En effet, il suffit de comparer ces derniers à ceux de la figure 3.6, obtenus après transformation A.C.I. de la m xture non bruitée. Les paramètres secondaires comme $\Theta_{\Delta y'}$ et $\xi_{\Delta y'}$ définis dans le chapitre 2, constituent les éléments de cette comparaison.

- 1-Deux paramètres (figure 2.6 et figure 2.7)

(b) avec bruit



(a): $\tan 2\Theta, h'=0.10, \alpha=0, m.Y'=0.5$.

(b): $\tan 2\Theta, h'=0.01, \alpha=0, m.Y'=0.2$.

Figure 3.7 Paramètres $\tan 2\Theta$, des abaques #1 et #2 (a), (b)

On rajoute du bruit de distribution uniforme et de rapport $S/B = 0 \text{ dB}$. La m xture bruitée ainsi obtenue est représentée à la figure 3.8.

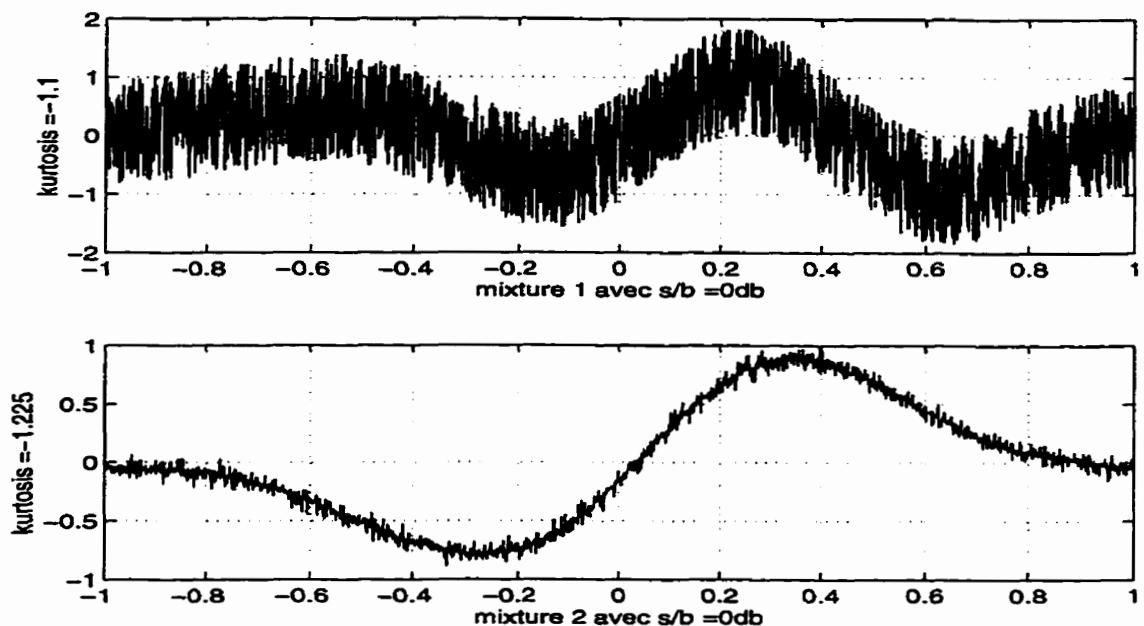


Figure 3.8 Mixture bruitée des 2 paramètres $\tan 2\Theta$, des abaques #1 et #2

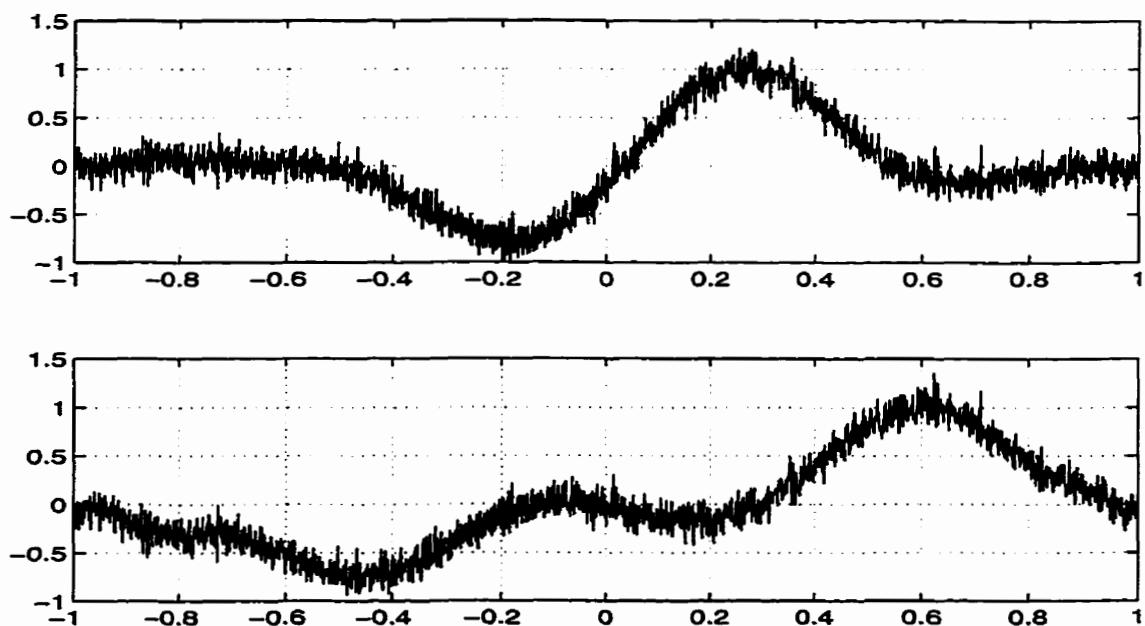
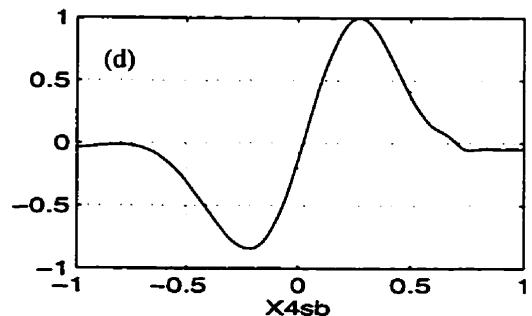
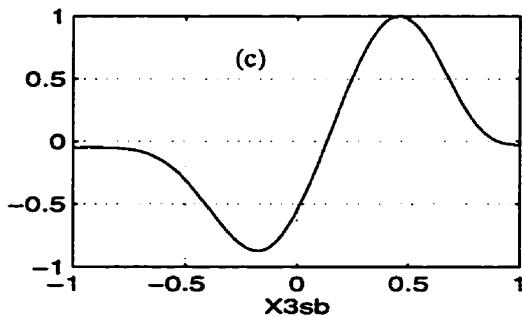
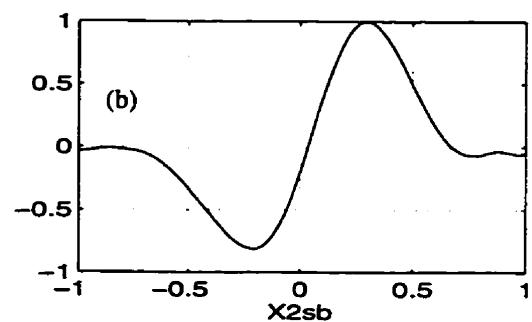
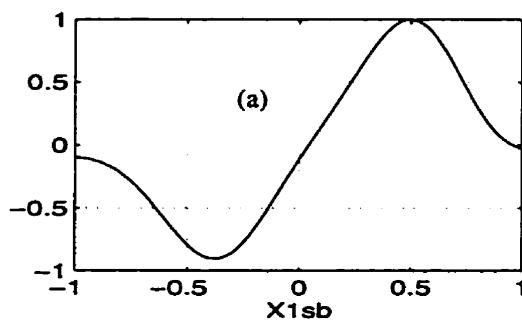


Figure 3.9 Signaux_1 (β) en sortie de l'A.C.I.

Alors, de même que dans le cas de la mixture non bruitée, nous remarquons que les signaux obtenus après transformation A.C.I. de la mixture bruitée, représentent bien les signaux sources. Toutefois les signaux restitués restent entachés de bruit résiduel, que par simple filtrage on peut soustraire. On constate aussi que la restitution des signaux sources dans le cas du traitement multidimensionnel à quatre signaux, se fait aussi bien que dans celui à deux signaux.

- 2-Quatre paramètres (figure 2.6 et figure 2.7)

(a) cas sans bruit



(a): $h'=0.10, \alpha=0, m.Y'=0.5$.

(b): $h'=0.01, \alpha=0, m.Y'=0.2$.

(c): $h'=0.20, \alpha=0, m.Y'=0.5$.

(d): $h'=0.01, \alpha=0, m.Y'=1.0$.

Figure 3.10 Paramètres $\tan 2\Theta$, des abaques #1, #2 (a), (b), (c) et (d)

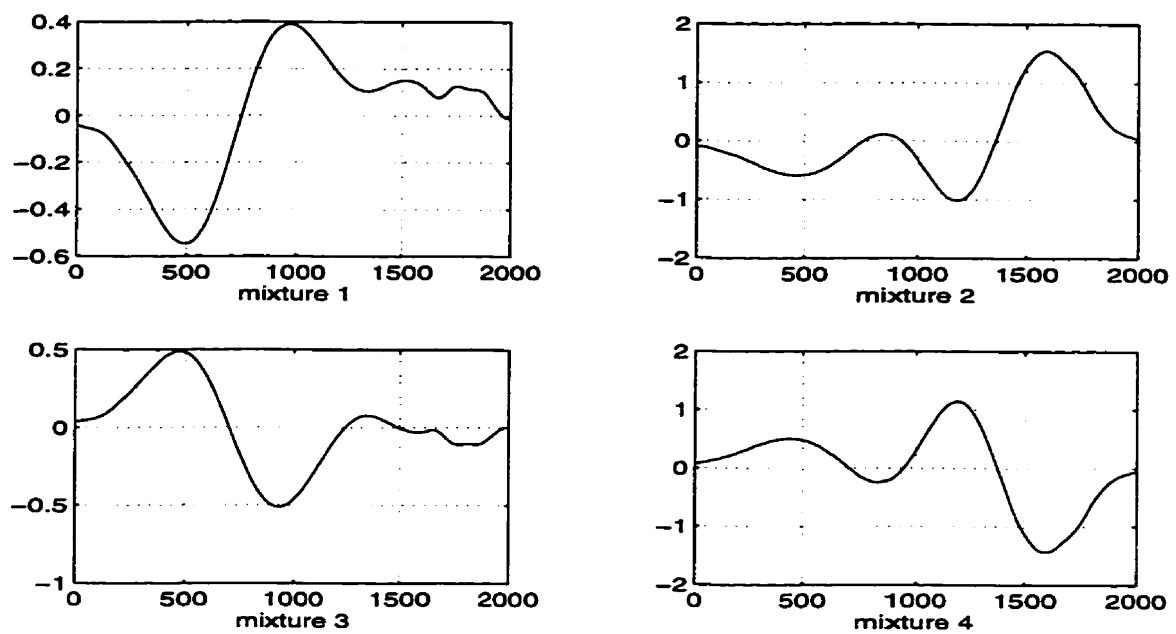


Figure 3.11 Mixture des 4 paramètres $\tan 2\Theta$, des abaques #1, #2

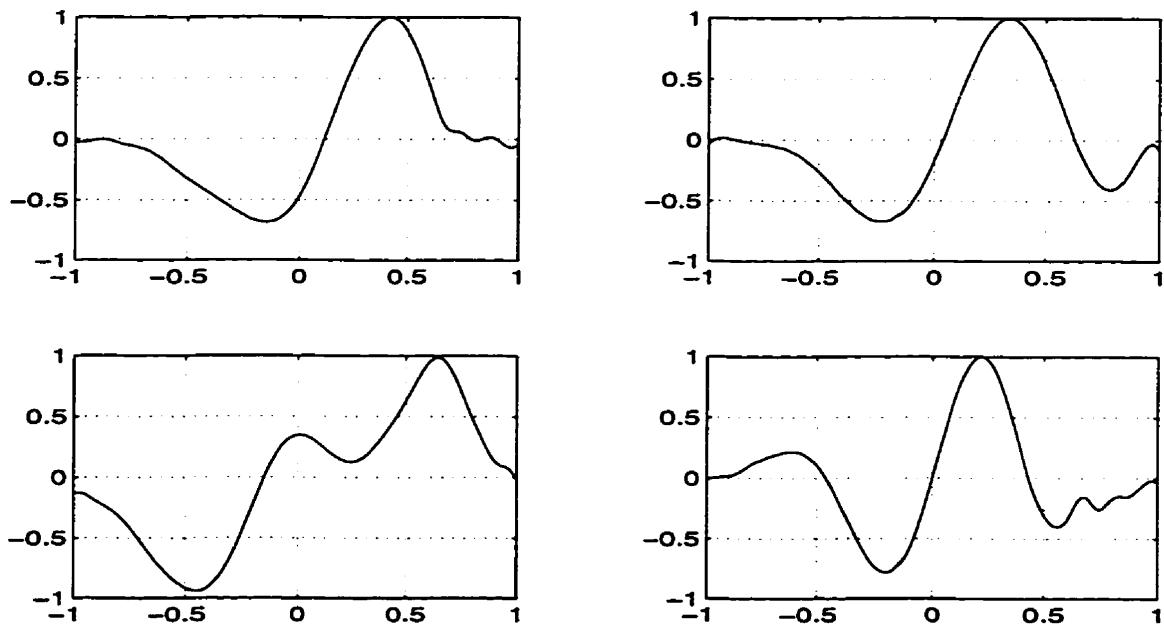


Figure 3.12 Signaux_2 (α) en sortie de l'A.C.I.

3.5.1.2 Interprétation des résultats

Les signaux restitués après chaque transformation ou séparation par l'A.C.I. sont à comparer à ceux des abaques (figure 2.6 à figure 2.8), nous nous limitons strictement à une analyse qualitative. Deux éléments de comparaison sont retenus soient:

- la valeur de l'abscisse $y' = y/\delta$ du passage par zéro;
- les abscisses y' correspondants aux extréums du signal.

Les figures 3.6 et 3.9, illustrent les mixtures (non bruitée et bruitée) transformées par l'A.C.I., respectivement. On les compare par la suite à ceux de la figure 3.4 (signatures), et l'on remarque aisément la restitution des signaux sources (réponses V.L.F.) que produisent les anomalies géophysiques. Dans les deux cas (non bruitée et bruitée) le traitement est optimal étant donné que l'algorithme de séparation opère sur les signaux par paires. La minimisation des cumulants croisés afin de maximiser les cumulants marginaux standardisés se fait évidemment qu'en une seule passe.

Dans la figure 3.12, après transformation par l'A.C.I. de la mixture non bruitée des 4 réponses V.L.F. de la figure 3.11, on remarque que les quatre signaux sources émergent et ce dès le premier balayage. Le traitement dans ce cas particulier s'est arrêté au premier balayage car la condition décrite au point (10) de l'algorithme, à savoir: $\theta_0 \ll 1/m$, est rencontrée. L'A.C.I. opère sur des paires de signaux $\{i, j\}$, elle consiste à minimiser les cumulants croisés standardisés afin de maximiser ceux marginaux et par conséquent la fonction de contraste. Dans ce cas particulier il se trouve que les cumulants croisés des

paires de signaux non traitées sont négligeables devant ceux des cumulants marginaux. En d'autres termes le traitement s'arrête et l'angle α de rotation plane de la transformation orthogonale de Givens est alors proche de zéro.

La restitution fût également vérifiée pour d'autres mixtures dans le cas de traitements multidimensionnels à quatre réponses V.L.F., choisies aussi de façon arbitraire. On évite la représentation redondante de ces différents cas pour étendre le champ d'application de l'A.C.I. à d'autres signaux. Ce choix s'avère plus profitable, notamment en illustrant les trois balayages mis en œuvre dans le processus de séparation de mixtures à quatre signaux.

Dans la section suivante, on considère des signaux de distribution différente de celle des signaux synthétisés mais qui demeure de distribution non gaussienne. Le but est de montrer d'abord la capacité de cet algorithme à séparer les signaux et ce même, si ces derniers sont de distribution statistique identique. Ensuite de pouvoir suivre la transformation A.C.I. par les trois balayages des six paires de signaux, dans le cas de traitement d'une mixture de quatre signaux.

3.5.1.3 Extension à d'autres signaux

Les signaux considérés dans cette section sont de distribution statistique différente de celle des réponses V.L.F. synthétisées. Le choix de ce type de signaux est d'un intérêt plus à caractère visuel qu'autre, aidant notamment dans l'analyse qualitative et la reconnaissance des signaux sources restitués par transformation A.C.I. de leurs mixtures. De même

que dans la section précédente, l'A.C.I. fût appliquée à des mixtures de deux et quatre signaux, et les matrices de mélange sont aussi choisies de façon arbitraire.

3.5.1.4 Cas d'une mixture bruitée de deux signaux binaires

La mixture des deux signaux binaires à laquelle on rajoute du bruit non-gaussien est obtenue à partir du modèle linéaire (3.12), suivant:

$$\bar{y}(t) = M \cdot \bar{x}(t) + \bar{w}(t), \quad (3.12)$$

avec $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T$ le vecteur transposé de données observées, $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ représente le vecteur sources de signaux binaire, $\bar{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}^T$ le bruit de distribution uniforme et $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de mélange.

Les signaux binaires $X_{1, sb}(t), X_{2, sb}(t)$ appliqués à l'entrée de l'A.C.I. sont distribués sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ et définis par 2000 échantillons, tels qu'illustrés à la figure 3.13. La mixture bruitée de $X_{1, sb}(t), X_{2, sb}(t)$ engendre deux signaux qui résultent de la transformation linéaire $M \cdot \bar{x} + \bar{w}$ notés respectivement mixture1 et mixture2 à la figure 3.14 et de rapport signal sur bruit: $S/B \approx 1 dB$.

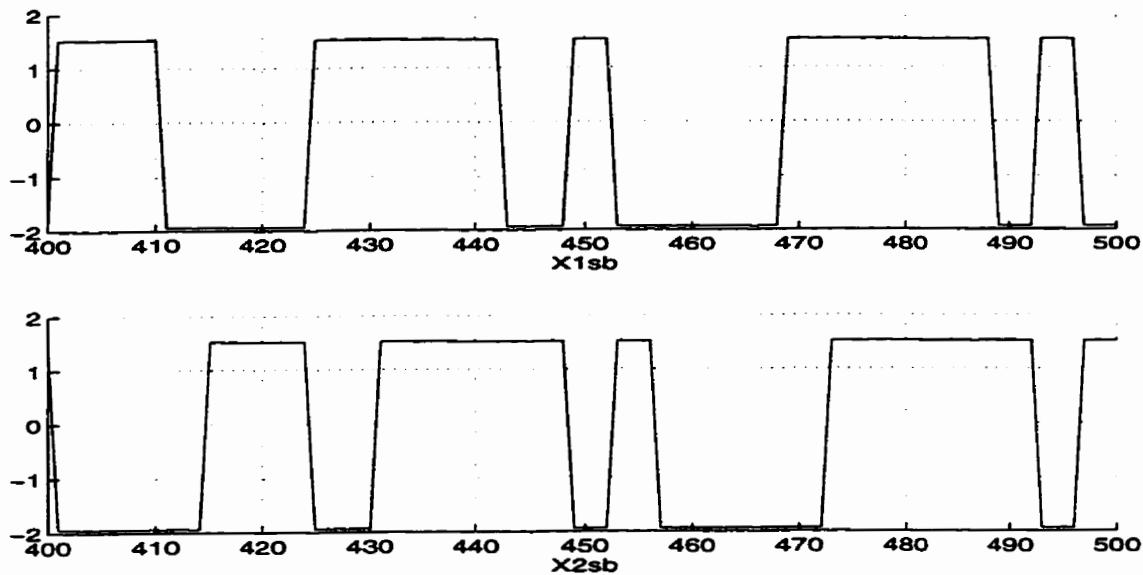


Figure 3.13 Signaux binaires $X_{1sb}(t)$, $X_{2sb}(t)$

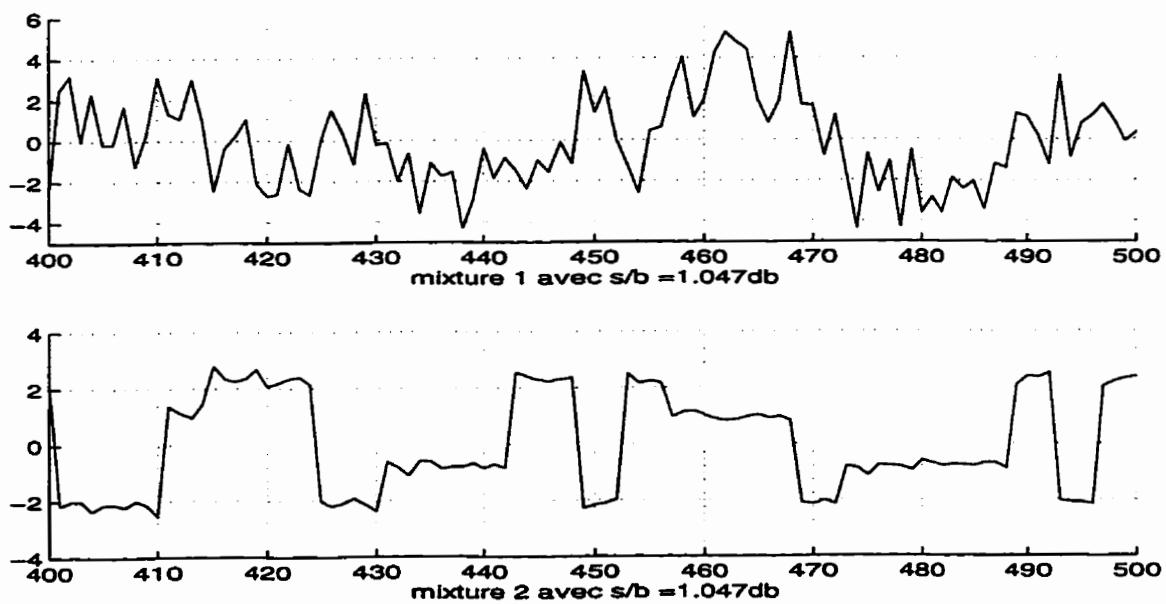


Figure 3.14 Mixture bruitée des 2 signaux binaires $X_{1sb}(t)$, $X_{2sb}(t)$

Comme le traitement se fait par paires de signaux $\{i, j\}$ et dans le cas de toute mixture de deux signaux, ce traitement se fait alors de façon optimale. Les signaux obtenus après transformation de la mixture par l'A.C.I., sont représentés à la figure 3.15.

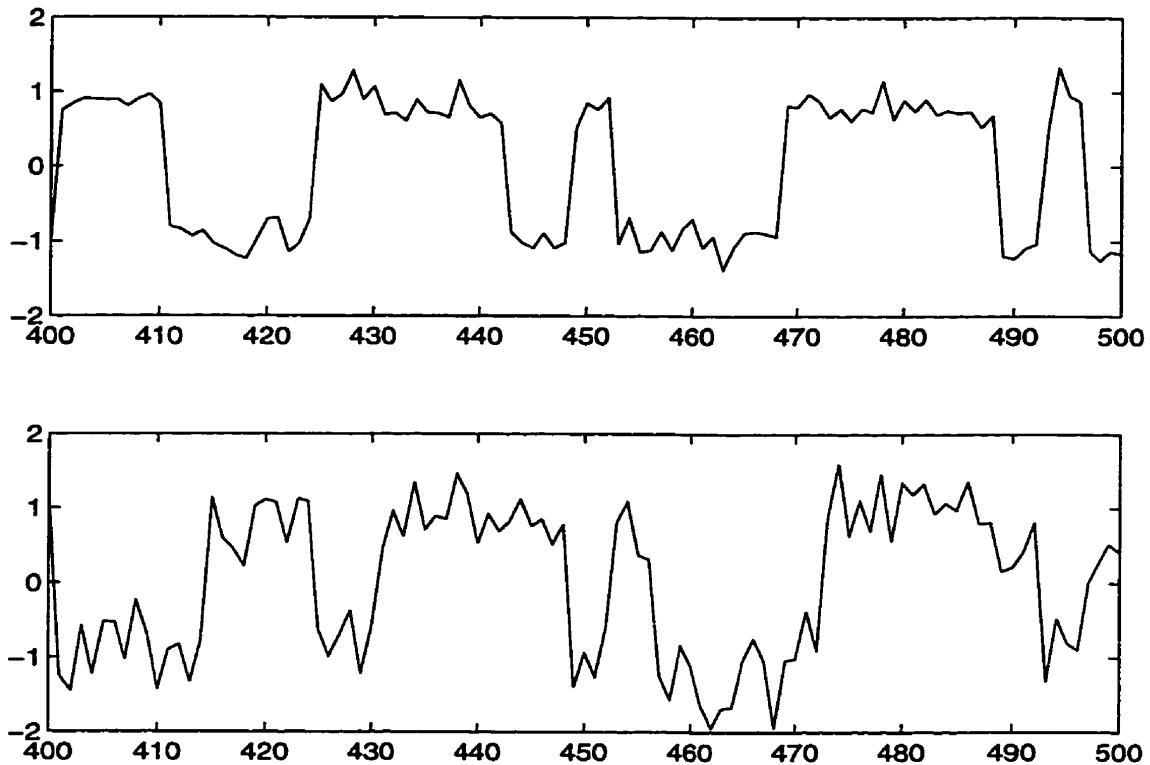


Figure 3.15 Signaux en sortie de l'A.C.I.

Nous remarquons que les signaux restitués après transformation par l'A.C.I., à la figure 3.15, constituent bien les deux signaux sources binaires, toutefois entachés de bruit résiduel. Le traitement de la mixture des deux signaux binaires ainsi que celle représentée à la figure 3.8, montre qu'il est possible d'extraire des signaux indépendants et ce même s'ils sont de distribution statistique identique.

3.5.1.5 Cas d'une mixture non bruitée de quatre signaux

Nous nous bornons à une analyse qualitative et les signaux choisis pour illustrer ce cas, rappelons-le, sont plutôt d'un intérêt à caractère visuel qu'autre chose. Ces signaux représentés à la figure 3.16, sont constitués de deux sinusoïdes de fréquences différentes $f_1 \neq f_2$, d'une rampe et d'un bruit uniforme. De plus, les signaux sont considérés de moyenne nulle, de variance unité et distribués sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, et la matrice de mélange est circulante de vecteur $[-1, 1, -1, 1]$.

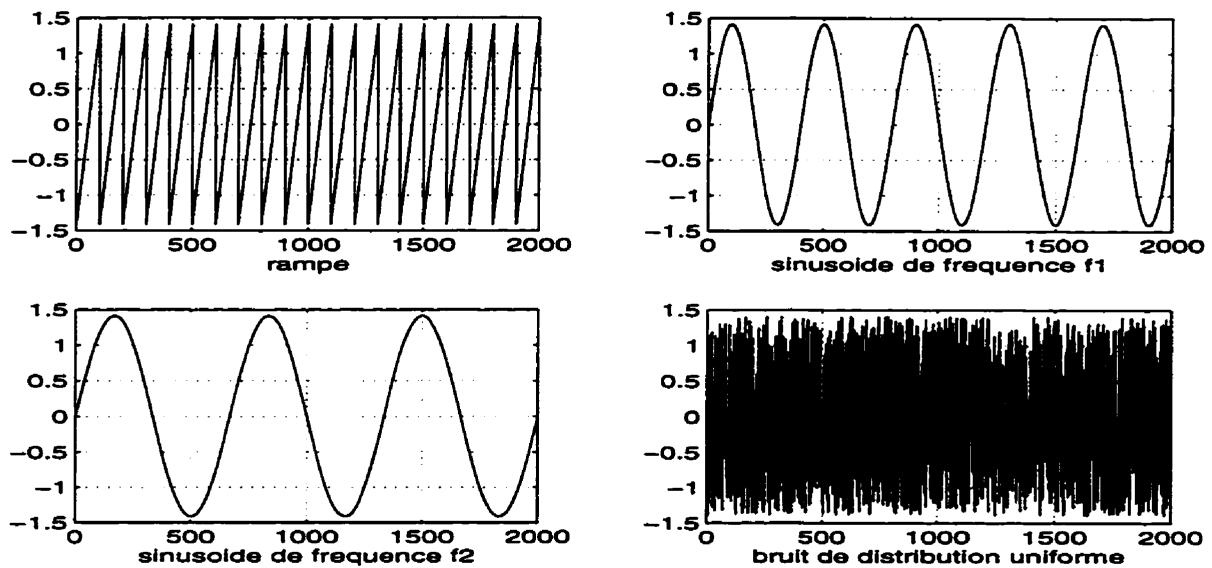


Figure 3.16 Les quatre signaux sources

La mixture non bruitée de ces quatre signaux est représentée à la figure 3.17, et engendre quatre signaux repérés par mixture 1 à mixture 4. Le traitement étant multidimensionnel, ces quatre signaux sont simultanément transformés par l'A.C.I.

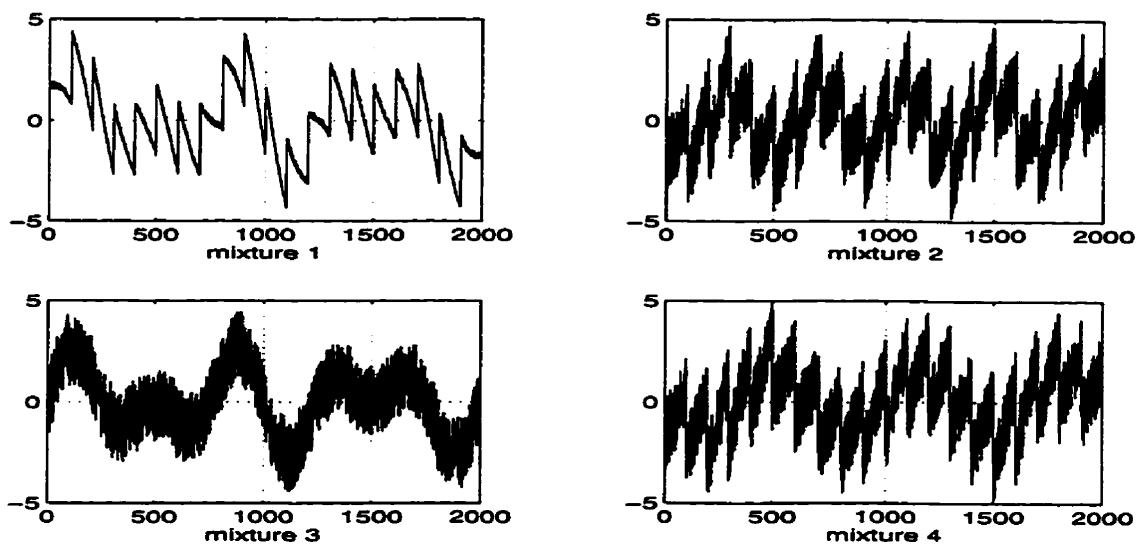


Figure 3.17 Mixture des quatre signaux

Les deux sinusoïdes sont de distribution statistique identique et de loi obéissant à

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2/2}}, \text{ représentée à la figure 3.18.}$$

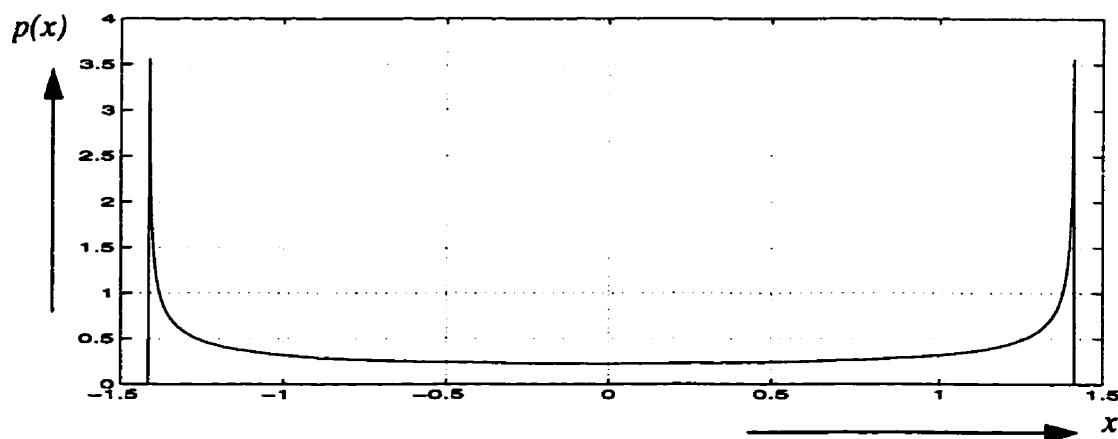
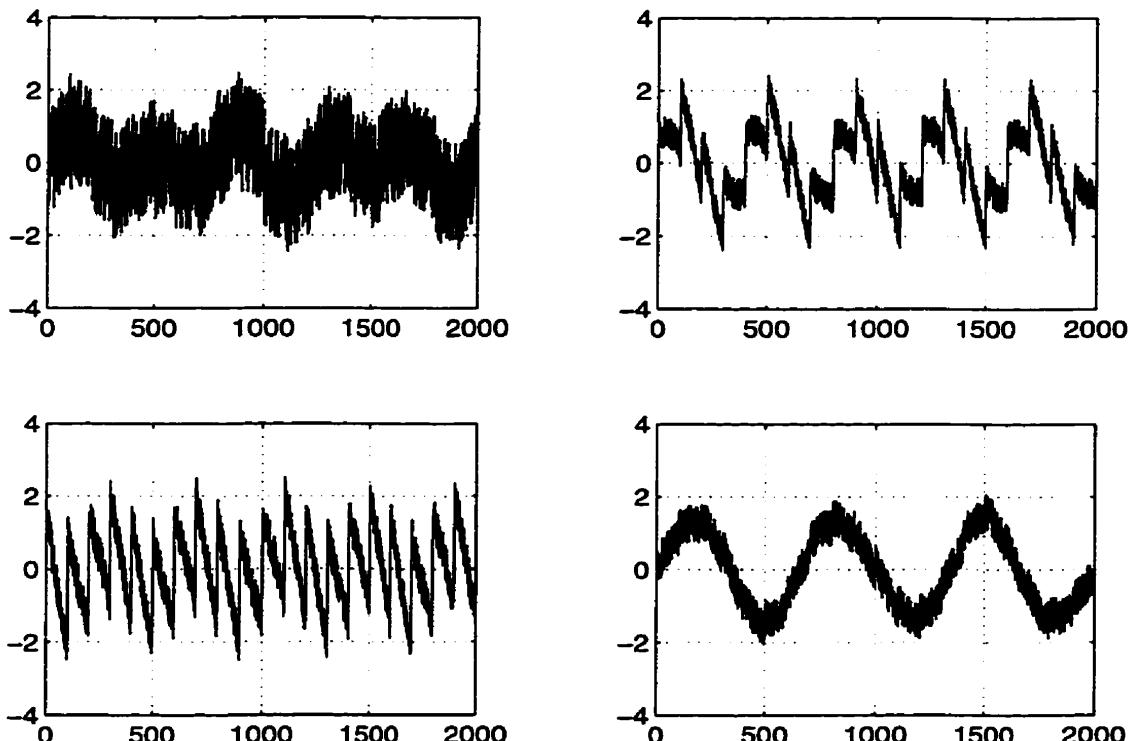


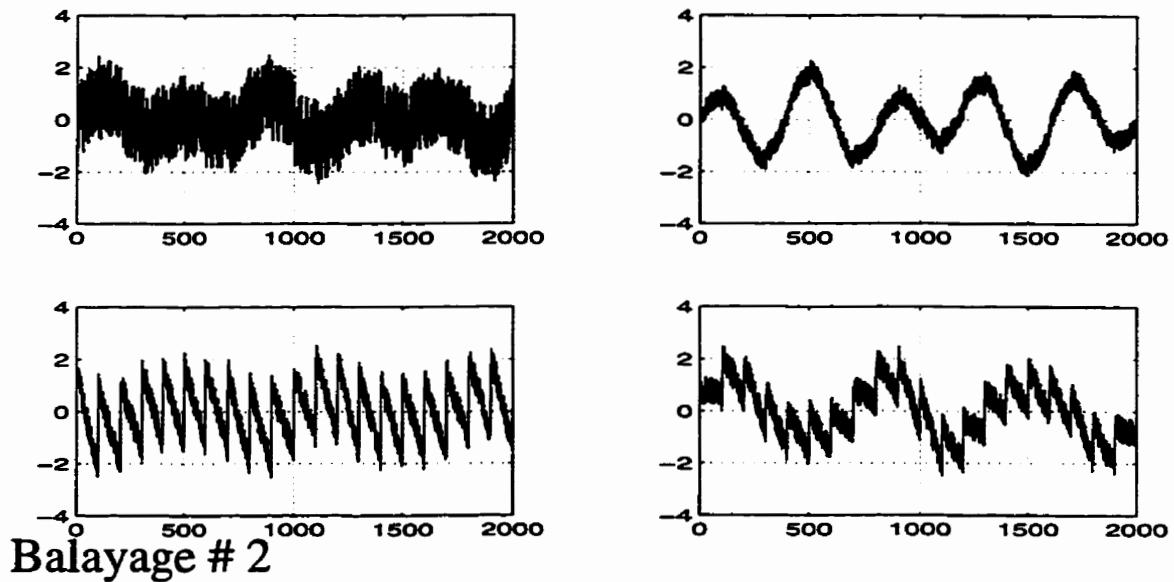
Figure 3.18 Distribution statistique des deux sinusoïdes

Le traitement multidimensionnel de ces quatre signaux s'effectue par paire. En employant la stratégie de balayage cyclique naturel telle que représentée à la figure 3.1, alors les six paires $\{i,j\}$ de signaux à traiter sont: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}$ et $\{3,4\}$. L'évolution dans la transformation A.C.I. des quatre signaux mixture1 à 4, est représentée par les trois balayages de la figure 3.19 à la figure 3.21 et volontairement aucune indication n'est portée sur l'axe des abscisses de chacune des figures citées. Rappelons que tout au plus nous sommes en présence d'une mixture de quatre signaux et que nous ignorons quant à la nature de chacun des signaux sources qui la composent. Le but de l'A.C.I. est justement de pouvoir les identifier.



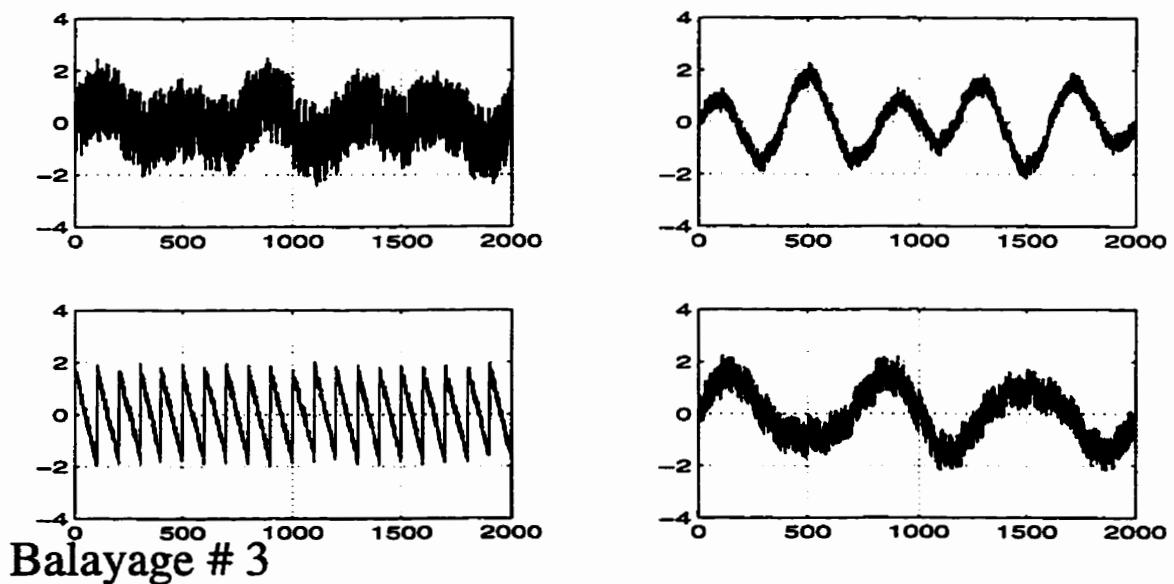
Balayage # 1

Figure 3.19 Signaux en sortie de l'A.C.I. 1^o balayage



Balayage # 2

Figure 3.20 Signaux en sortie de l'A.C.I. 2^o balayage



Balayage # 3

Figure 3.21 Signaux en sortie de l'A.C.I. 3^o balayage

Dès le premier balayage les signaux sources émergent. Le traitement s'arrête normalement après les trois balayages, ou de façon prématurée si l'angle de rotation dans les transformations orthogonales de Givens est proche de zéro ($\theta_0 \ll 1/m$). Ce dernier cas fut précédemment rencontré dans la section 3.5.1 lors de l'identification-interprétation de la mixture de quatre signaux (réponses V.L.F.). Dans le premier balayage toutes les paires sont traitées. On constate que le second balayage améliore deux des estimations et semble détruire les deux autres. C'est le troisième balayage qui conclue le traitement, en restituant les quatre signaux sources, à savoir: les deux sinusoïdes de fréquences différentes, la rampe et le bruit de distribution uniforme. Nous faisons remarquer que l'identification des deux sinusoïdes est réalisée et ce même si elles sont de distribution statistique identique.

Dans la prochaine section à la page suivante, l'analyse en composantes indépendantes (A.C.I.) est appliquée à des données V.L.F. réelles. Ces données réelles proviennent du site minier nommé **Marbridge**, certainement pour le nom de la localité.

3.5.1.6 Application de l'A.C.I. aux données réelles

Les parties réelles des données V.L.F. provenant du site appelé **Marbridge** sont représentées à la figure 3.22, ci-après

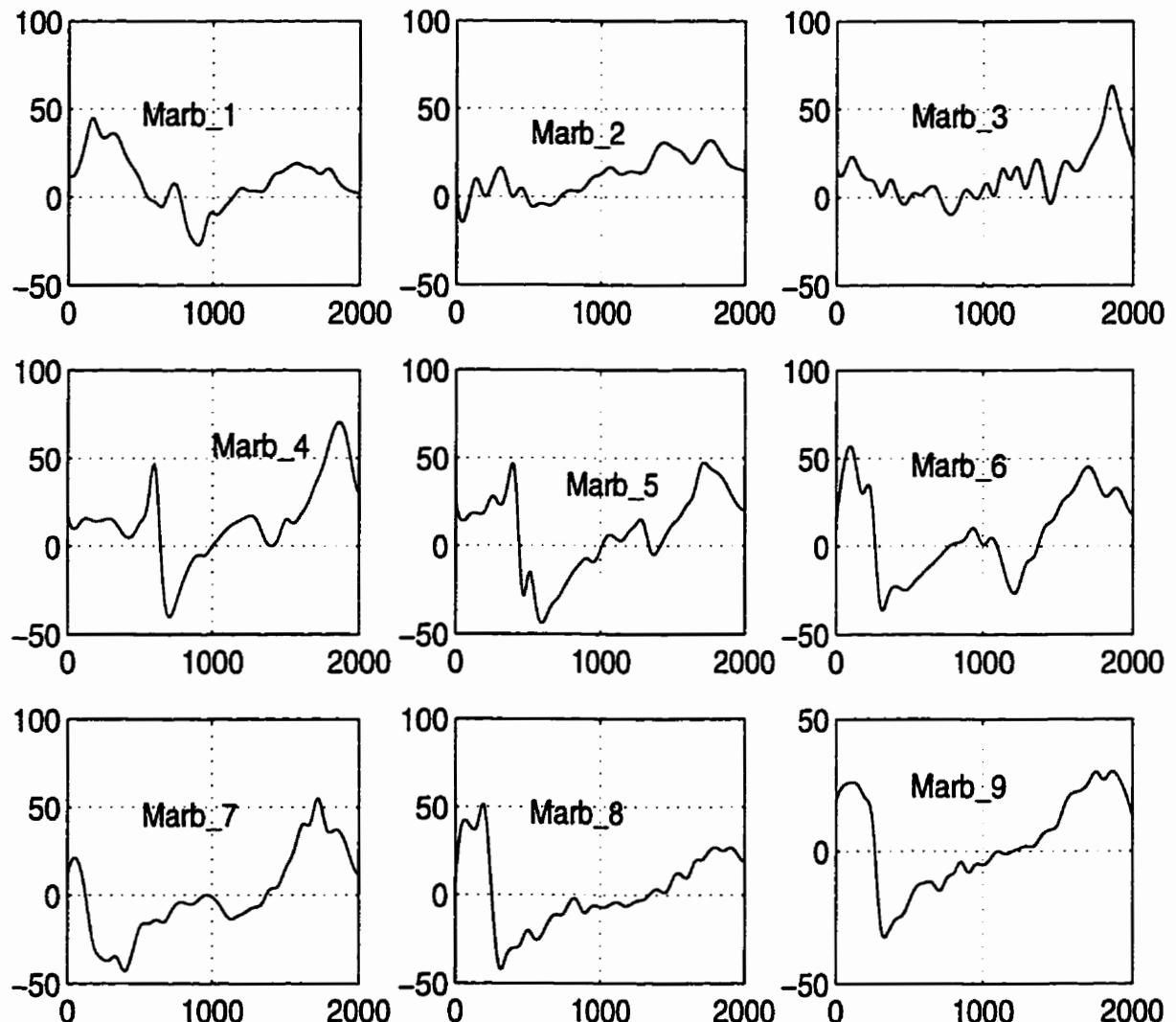


Figure 3.22 Données V.L.F. du site **Marbridge**

Les signaux de la figure 3.22 (Marb_1 à Marb_9), sont d'abord normalisés et représentés tels qu'illustrés à la figure 3.23

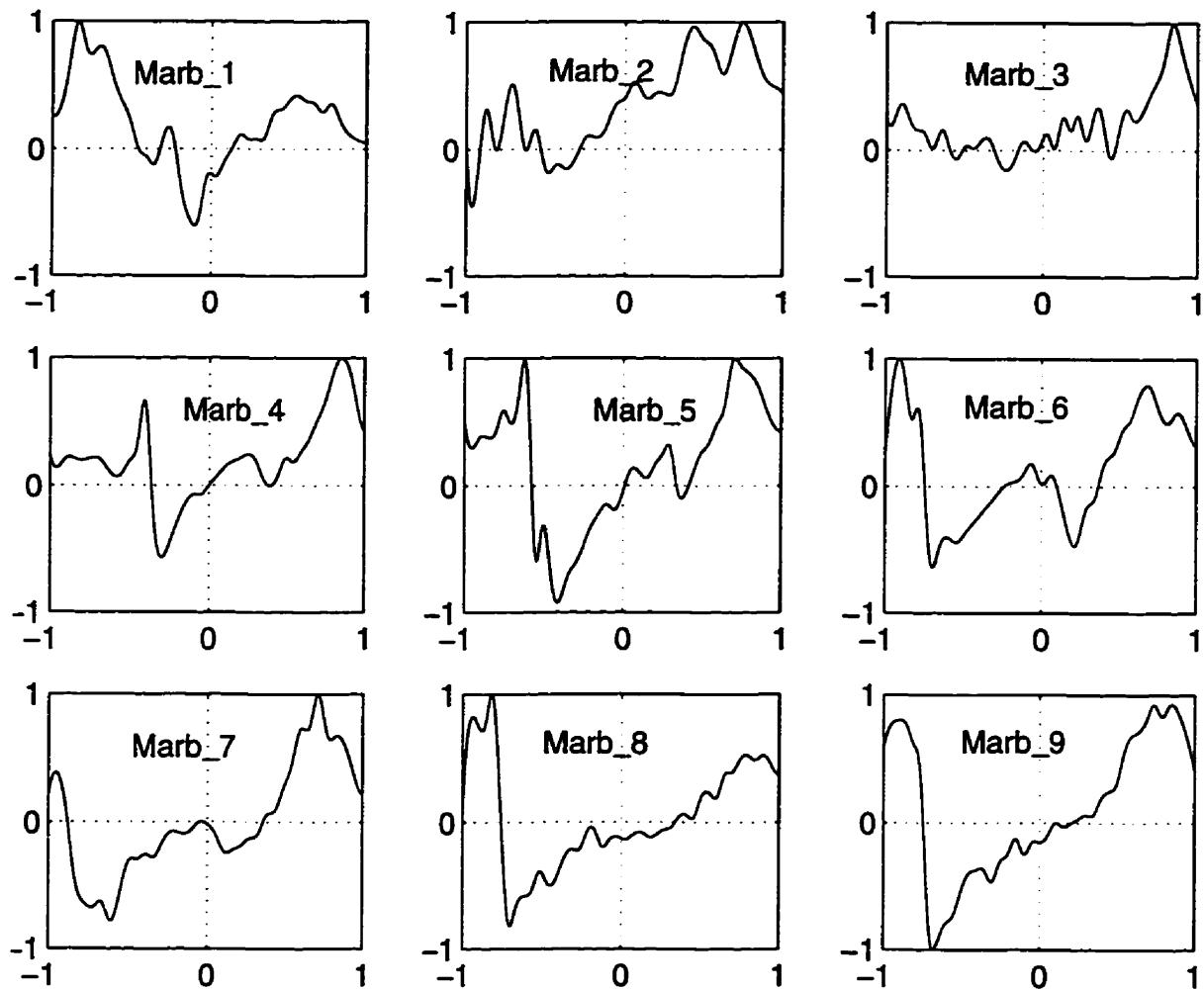


Figure 3.23 Données V.L.F. normalisées Marbridge

Le traitement étant multidimensionnel, l'analyse en composantes indépendantes est appliquée alors aux neufs signaux (Marb_1 à Marb_9). A l'entrée de l'A.C.I., on a donc la matrice de dimensions $[9 \times 2000]$ de données réelles et de rang $p = 9$. Le nombre de paires $\{i, j\}$ de signaux à traiter s'élève alors à $prw = \frac{p \cdot (p - 1)}{2} = 36$.

Quant au nombre maximal de balayages effectué par l'algorithme, il est donné par la relation suivante $k_{max} = 1 + \sqrt{\rho} = 4$. Ce nombre est atteint tant que le critère $\theta_0 \ll 1/m$ n'est pas rencontré. θ_0 est donné par l'équation (3.11) page 69, et m est la plus grande dimension de la matrice de données à traiter. La figure 3.24, représente les données réelles V.L.F. traitées par l'A.C.I., et notamment celles qui résultent du quatrième et dernier balayage.

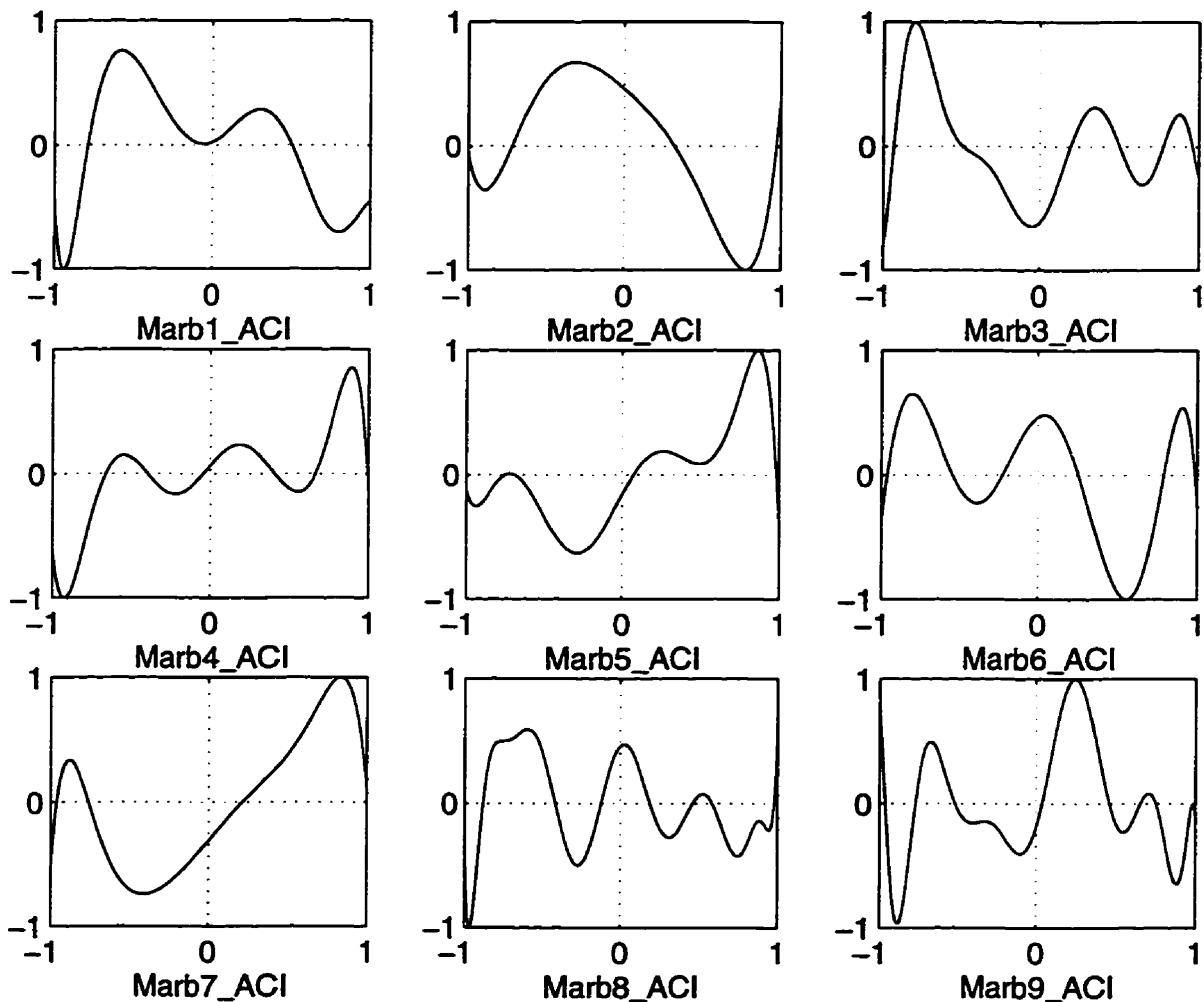


Figure 3.24 Données V.L.F. Marbridge en sortie de l'A.C.I.

Les signaux ainsi obtenus, sont à comparer à nos signaux synthétisés dans la première partie. Les signaux synthétiques sont représentés dans les abaques de la figure 2.6 à la figure 2.8 (page 38 à page 39). Les deux éléments de comparaison demeurent les mêmes, à savoir:

- la valeur de l'abscisse $y' = y/\delta$ du passage par zéro;
- les abscisses y' correspondants aux extréums du signal.

On se limite uniquement à la transformation par l'A.C.I. des parties réelles des données **V.L.F. Marbridge**. Cela implique que les signaux en sortie de cette transformation Marb1_ACI à Marb9_ACI (figure 3.24), ne seront comparés qu'aux paramètres ou signaux $\tan 2\Theta$ des abaques #1 à #3 (page 34 à 35). Le deuxième élément de comparaison signifie aussi que les écarts entre extréums $\Theta_{\Delta y'}$ ou $\tan 2\Theta_{\Delta y'}$ des abaques #1 à #3 sont à comparer à ceux de Marb1_ACI à Marb9_ACI.

Il en résulte, compte tenu des deux éléments de comparaison, que les signaux Marb1_ACI, Marb2_ACI et Marb6_ACI correspondent aux courbes $\tan 2\Theta$ de l'abaque #1. Quant aux signaux Marb4_ACI, Marb5_ACI et Marb7_ACI correspondent à celles de $\tan 2\Theta$ des abaques #2 et #3. Pour l'identification-interprétation de Marb1_ACI, Marb2_ACI et Marb6_ACI, on peut dire qu'on est en présence de trois sources ou anomalies géophysiques, dont l'angle d'inclinaison est $\alpha = 0^\circ$ et le produit $m \cdot d' = 1/2$. Avec le rapport $m = \sigma_1/\sigma_2$ des deux conductivités σ_1, σ_2 , d'épaisseur de la première couche de la terre $d' = d/\delta$ et d'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \cdot \pi \cdot f \cdot \sigma_0}}$ où la fréquence $f = 20kHz$.

Afin de compléter l'identification-interprétation, il reste à définir les profondeurs d'enfouissement de chacune de ces trois sources. Le passage par zéro de Marb1_ACI à $y' \approx 0$ permet de dire que la source correspondante à Marb1_ACI se trouve à une profondeur $h' = \frac{h}{\delta} \approx 0.1$. Pour les signaux Marb2_ACI et Marb6_ACI, on peut dire que les sources correspondantes à ces signaux sont à la profondeur d'enfouissement $h' > 0.1$.

Quant aux signaux Marb4_ACI, Marb5_ACI et Marb7_ACI, là aussi on est en présence de trois autres sources. La source ou anomalie géophysique qui correspond à Marb4_ACI, en se basant sur son passage par zéro à $y' \approx 0$, est celle d'inclinaison $\alpha = 0^\circ$, de profondeur d'enfouissement $h' = 0.01$ et de produit $m \cdot d' = 1.0$.

Les sources qui vont correspondre à Marb5_ACI et Marb7_ACI, selon toute vraisemblance, sont à une profondeur d'enfouissement $h' = 0.01$, d'inclinaison $\alpha > 0^\circ$ et de produit $m \cdot d' = 0.5$. En ce qui concerne les trois autres signaux Marb3_ACI, Marb8_ACI et Marb9_ACI, l'interprétation paraît non évidente.

Chapitre 4

ÉTUDE COMPARATIVE ENTRE L'A.C.I. ET L'A.C.P.

Dans ce chapitre on montre la capacité de l'algorithme de l'analyse en composantes indépendantes (A.C.I.), à extraire la base canonique constituée par les signaux indépendants et non uniquement de signaux non-corrélés [36]. Pour cela, l'analyse en composantes indépendantes (A.C.I.) est comparée à l'analyse en composantes principales (A.C.P.). On clôt ce chapitre par l'application de la transformation A.C.P. aux données réelles V.L.F. de Marbridge. Sans omettre de comparer les deux méthodes d'analyse (A.C.P.) (A.C.I.) appliquées sur ces mêmes données.

L'analyse en composantes principales d'un processus aléatoire de dimension N opère sur la matrice de covariance de ce vecteur. Cette analyse est réalisée en utilisant la transformée de Karhunen-Loève notée K-L, décrivant ce processus dans la nouvelle base constituée par les vecteurs propres de la matrice de covariance.

4.1 Définition

On peut dire sur la transformée de K-L, qu'en terme de classification des transformées, elle fait partie des transformées dites optimales [37]. Elle est toutefois difficilement traduisible dans des versions rapides, mais là n'est pas l'objet de notre comparaison.

La transformation de K-L, est un opérateur qui diagonalise la matrice de covariance d'un vecteur processus aléatoire X_N , soit:

$$K \cdot C_X \cdot K^{-1} = D$$

Où D est une matrice diagonale, constituée des valeurs propres de C_X , et K une matrice orthogonale constituée de vecteurs propres de C_X . La transformation de K-L opérant sur X , s'écrit donc:

$$Y = K \cdot X.$$

En terme d'application de l'analyse en composantes principales, brièvement on peut dire qu'elle est généralement utilisée pour la compression de données, à des fins de classification par exemple [8], [38].

En effet si l'on considère que les éléments de la diagonale de la matrice de covariance sont les variances des composantes du vecteur processus à l'entrée de l'A.C.P.. Ceux de la matrice diagonalisée sont les valeurs propres de la matrice de covariance, qui peuvent encore être interprétées comme variances des composantes de l'entrée de l'A.C.P. dans la nouvelle base formée par celle des vecteurs propres.

Ainsi, si une valeur propre est jugée négligeable par rapport aux autres, il s'en suit que la variance lui correspondant dans la nouvelle base est aussi négligeable. En éliminant cette valeur, on réduit donc l'espace de dimension N à la dimension $N - 1$. Le mécanisme de compression des données procédera de cette façon [8], [38].

4.2 Comparaison

Comparer l'analyse en composantes indépendantes à l'analyse en composantes principales, revient dans notre cas à comparer les signaux produits en sortie de chacune des transformations. Plus clairement, la même mixture de signaux est considérée une fois à l'entrée de l'A.C.P. puis à l'entrée de l'A.C.I., tel qu'illustré à la figure 4.1.

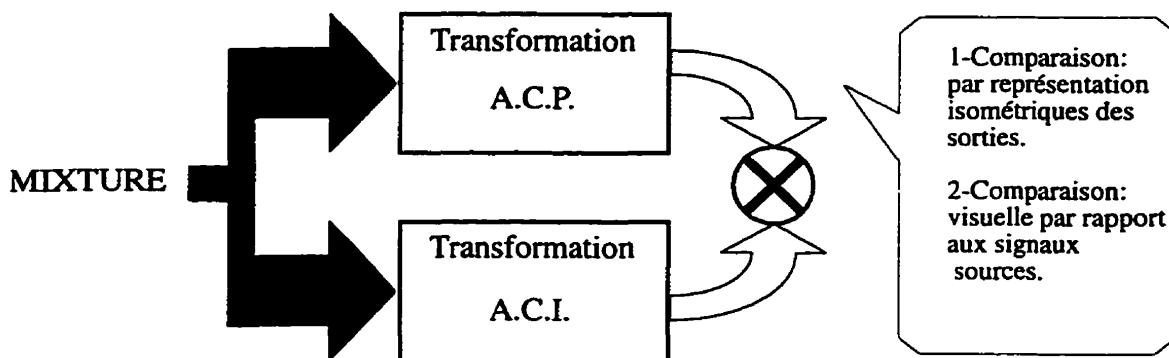


Figure 4.1 Transformations A.C.P. / A.C.I.

On reprend les deux signaux binaires de la figure 3.2 (page 70) et leur mixture à la figure 3.3 (page 71), dans section 3.5.1.4 du chapitre précédent.

Premier élément de comparaison: de visu, on compare les évolutions des signaux (figure 4.4) et (figure 4.5), résultats des transformations A.C.P. et A.C.I. de la mixture bruitée (figure 4.3), à celles des signaux sources de la figure 4.2. Nous remarquons qu'en sortie de l'A.C.P. les signaux demeurent mélangés, par contre ceux en sortie de l'A.C.I. sont entièrement séparés et que les signaux sources sont ainsi restitués.

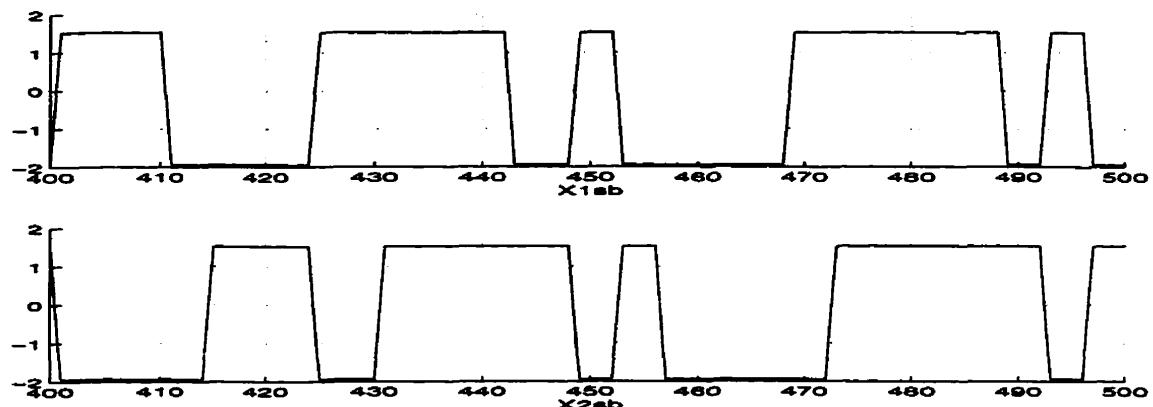


Figure 4.2 Signaux binaires $X_{1sb}(t)$, $X_{2sb}(t)$

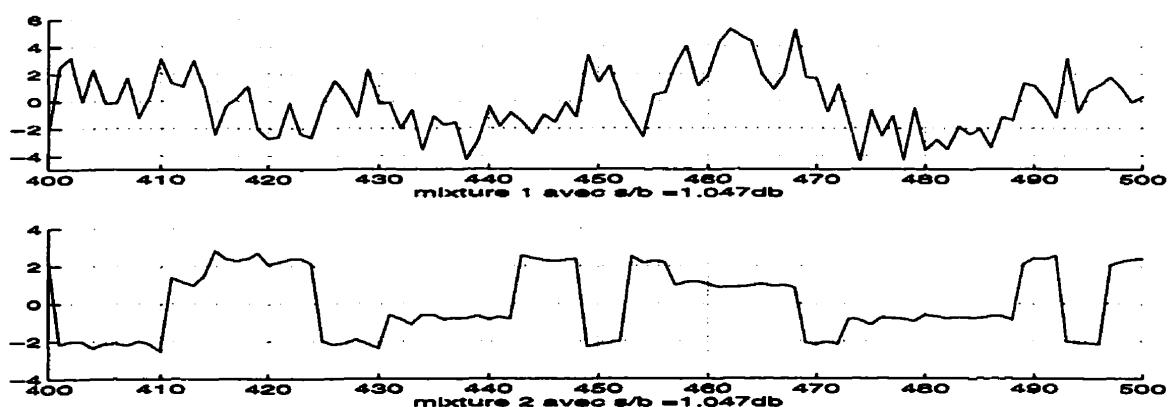


Figure 4.3 Mixture des 2 signaux binaires $X_{1sb}(t)$, $X_{2sb}(t)$

Après transformation de K-L (A.C.P.) de la mixture bruitée

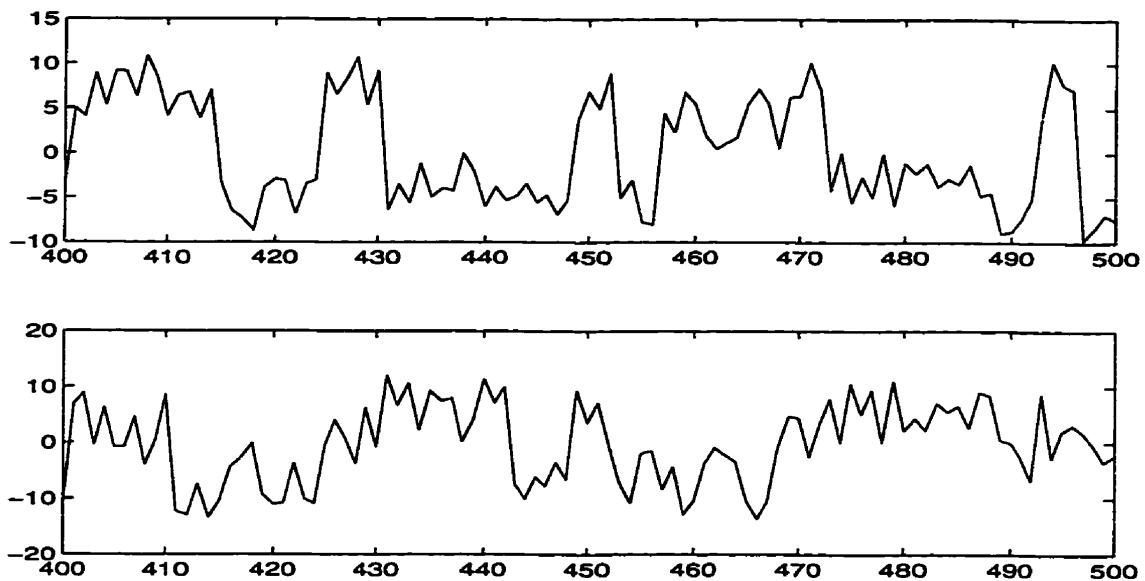


Figure 4.4 Signaux en sortie de l'A.C.P.

Après transformation de la mixture bruitée par l'A.C.I.

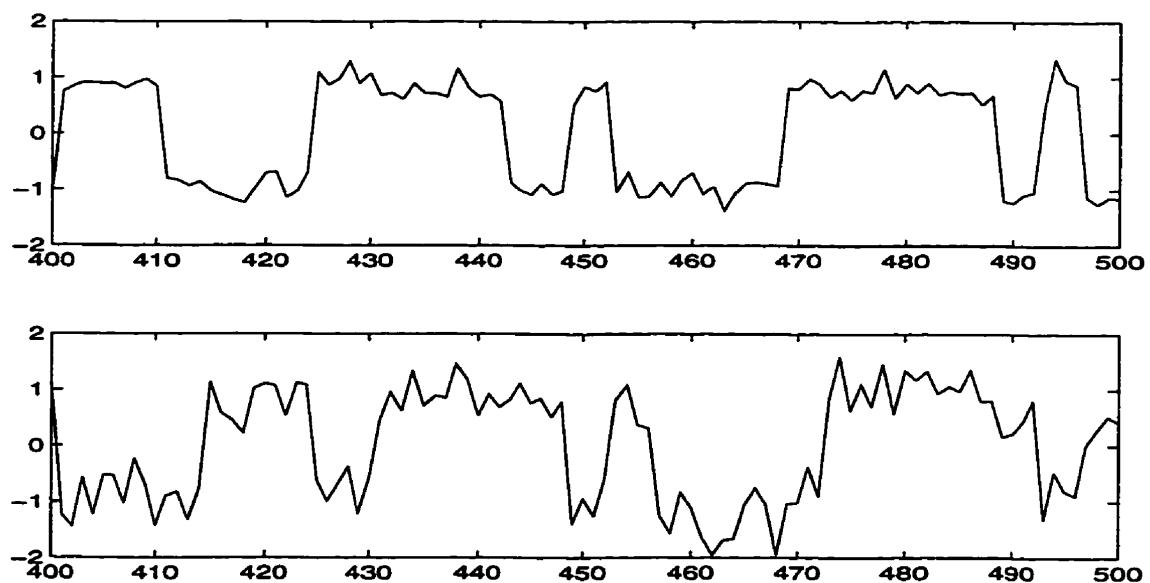


Figure 4.5 Signaux en sortie de l'A.C.I.

4.3 Représentations isométriques

Deuxième élément de comparaison: par les représentations isométriques des sorties des transformations A.C.P. et A.C.I. Dans la figure 4.6 à la figure 4.8, on représente dans le plan cartésien l'ensemble des points $Y(t) = [Y_1(t), Y_2(t)]^T$. $Y_1(t), Y_2(t)$ est la paire de signaux, résultat de la mixture bruitée des signaux $X_1(t), X_2(t)$ et de rapport signal à bruit $S/b \approx 1dB$. Cette mixture qui est traitée tour à tour par l'A.C.P. puis par l'A.C.I., s'écrit:

$$\begin{aligned} Y_1 &= m_{11} \cdot X_{1sb} + m_{12} \cdot X_{2sb} + w_1 \\ Y_2 &= m_{21} \cdot X_{1sb} + m_{22} \cdot X_{2sb} + w_2 \end{aligned}$$

où $\bar{w}(t) = [w_1(t), w_2(t)]^T$ est le bruit de distribution uniforme de rapport $S/B \approx 1db$, les $\{m_{ij}\}, ij \in \{1, 2\}$ sont les éléments de la matrice de mélange $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ et $X_{sb} = [X_{1sb}(t), X_{2sb}(t)]^T$ est la paire de signaux binaires. Ainsi dans le premier graphique (a), sont représentées les directions $Y_2(Y_1)$ avec $X_{1sb} = Cte^1$ puis $Y_1(Y_2)$ avec $X_{2sb} = Cte$

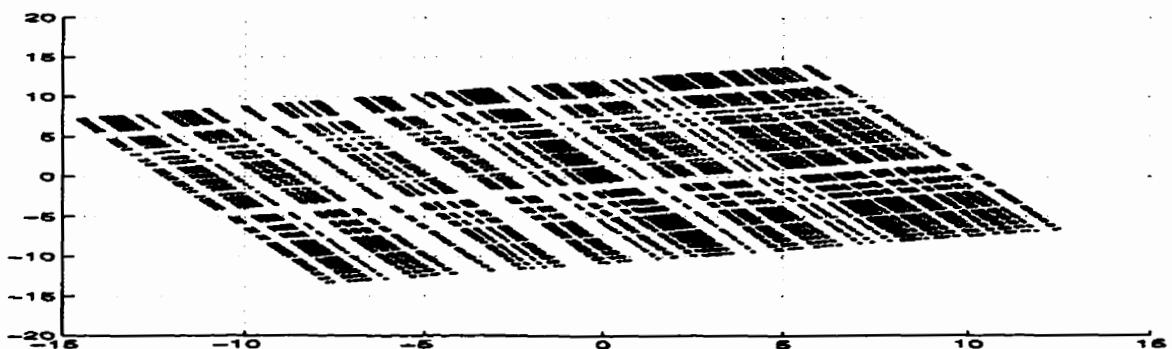


Figure 4.6 Représentation isométrique à l'entrée de l'A.C.P. et de l'A.C.I. (a)

1. Cte: constante.

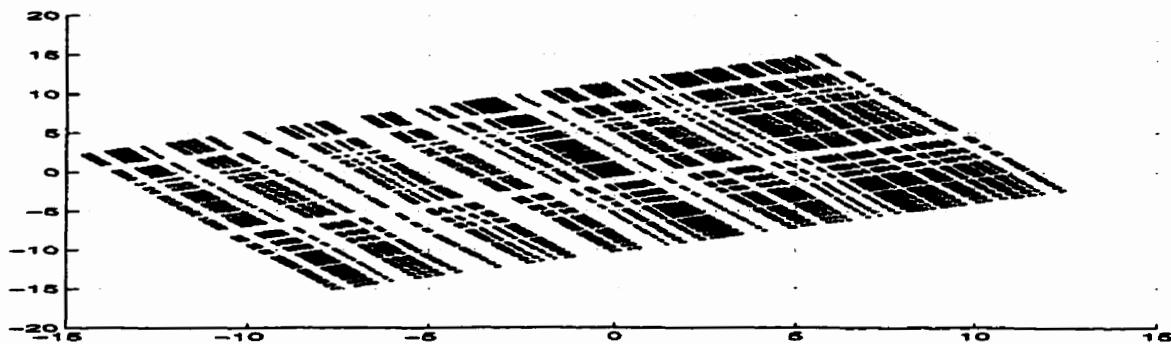


Figure 4.7 Représentation isométrique en sortie de l' A.C.P. (b)

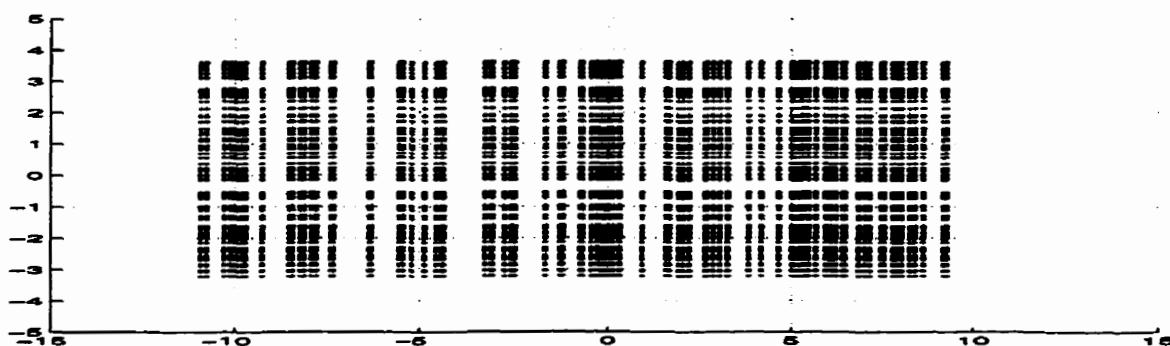


Figure 4.8 Représentation isométrique en sortie de l' A.C.I. (c)

Dans les deux autres graphiques (b) et (c), nous représentons les transformations A.C.P. et A.C.I. de ces **directions**. Il est aisé de voir l'orthogonalisation des directions par transformation A.C.I. dans (c), d'où l'on peut conclure qu'il y a séparation des signaux. Par contre, en sortie de l'A.C.P. graphique (b), l'angle des deux directions n'a pas changé. Les signaux sont seulement non-corrélés et leur distribution est déduite de la première (a) par rotation [38].

4.4 Application de l'A.C.P. aux données réelles

Les données V.L.F. **Marbridge** de la figure 3.22 (page 90), sont transformées par l'A.C.P. (algorithme K-L en annexe A, page 159). Les signaux en sortie de l'A.C.P. sont représentées à la figure 4.9 suivante

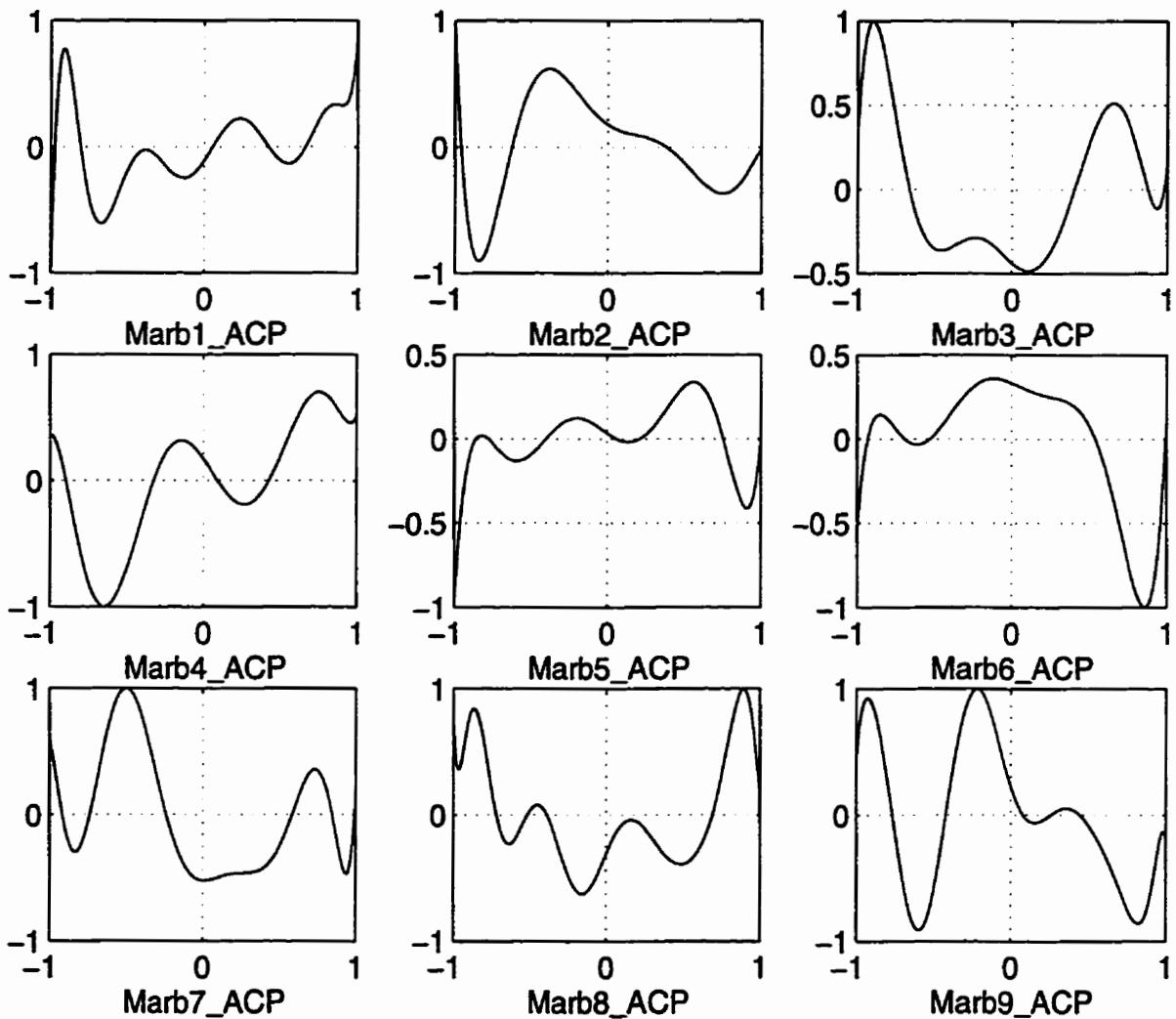


Figure 4.9 Données V.L.F. **Marbridge** en sortie de l'A.C.P.

Tenant compte des deux éléments de comparaison, soient:

- la valeur de l'abscisse $y' = y/\delta$ du passage par zéro;
- les abscisses y' correspondants aux extréums du signal,

on fait observer que pour les signaux en sortie de l'A.C.P. (figure 4.9), hormis ceux qui sont repérés par Marb2_ACP et Marb4_ACP, l'identification-interprétation en est moins évidente à faire. A la figure 4.10 qui suit, on représente les données réelles Marbridge transformées par l'A.C.P. (trait continu) et par l'A.C.I. (trait discontinu).

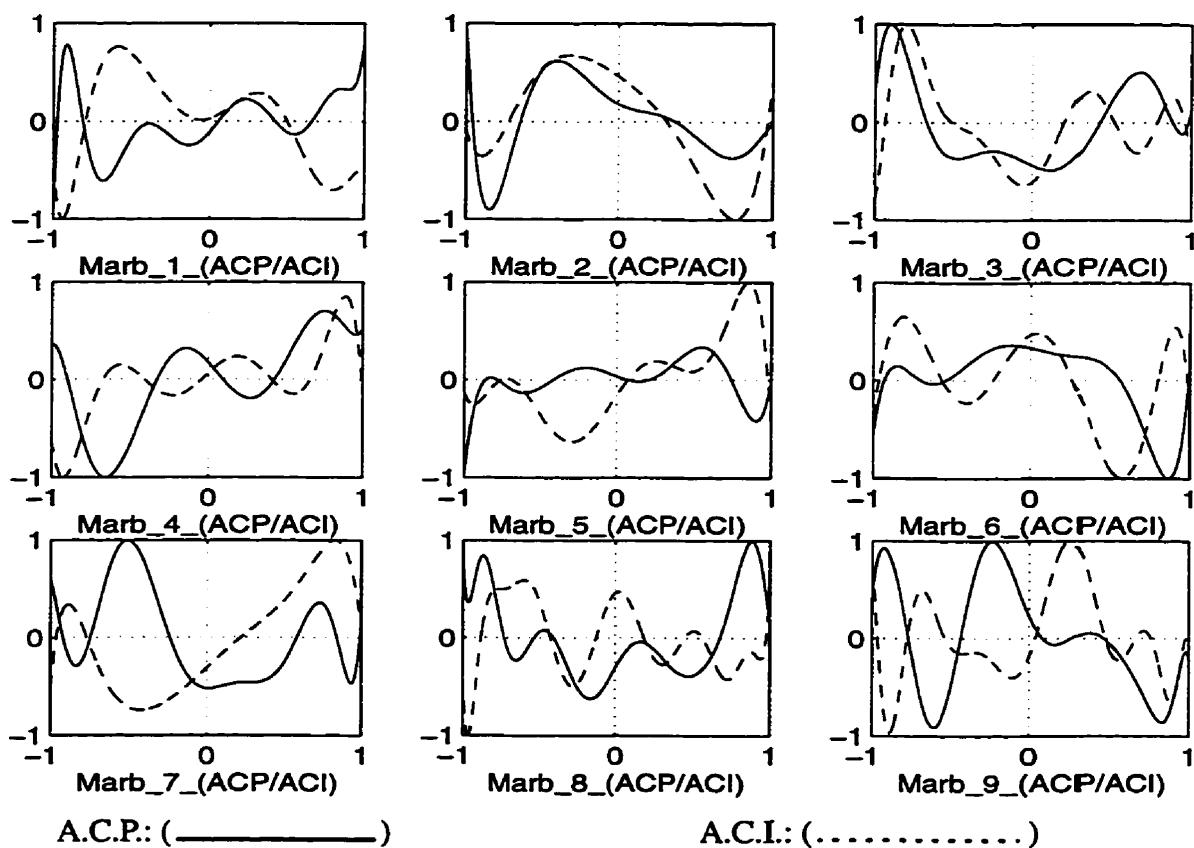


Figure 4.10 Données V.L.F. Marbridge en sortie de l'A.C.P. et de l'A.C.I.

L'analyse en composantes principales telle que définie à la section 4.1, est appliquée aussi bien aux données réelles qu'à celles synthétisées (annexe A, page 159). L'identification-interprétation des signaux transformés par l'A.C.I. et par l'A.C.P., utilise les deux éléments de comparaison pré-cités.

Compte tenu de ces deux éléments de comparaison, il en ressort que l'analyse en composantes indépendantes parait plus appropriée dans la séparation des signaux. De plus, elle peut fournir des résultats encore plus performants dans le cas de signaux à distribution statistique qui s'éloignerait de celle d'une gaussienne. Par cette étude comparative, on achève le présent travail.

Chapitre 5

CONCLUSION

La synthèse des signaux du type réponse-V.L.F. a été effectuée en utilisant un modèle d'anomalies géophysiques. Celles-ci, modélisées comme demi-plans infinis et parfaitement conducteurs, demeurent toutefois de géométrie simple. Dans ce projet, un réseau matriciel de capteurs simule l'acquisition d'observations. A ces observations, bruitées ou non, qui constituent les mixtures des signatures ou réponses-V.L.F., on applique l'algorithme d'identification-interprétation.

Selon la littérature, les réponses V.L.F. pourraient être de distribution statistique non gaussienne; d'où le recours à la statistique d'ordre supérieur. L'introduction de la statistique d'ordre supérieur est faite par le biais de l'analyse en composantes indépendantes appliquée à ces signaux. Les résultats de l'application de l'A.C.I. aux mixtures montrent l'efficacité de cette transformation à extraire de ces mixtures les signatures ou signaux sources. La restitution des signaux sources permet d'interpréter les observations.

Dans l'étude comparative entre les deux méthodes d'analyse en composantes indépendantes (A.C.I.) et principales (A.C.P.), on montre pour le cas considéré, l'efficacité de l'A.C.I. à reconstituer les signaux sources. En effet, avec l'A.C.P. on vient décorréliser les observations par diagonalisation de leur matrice de covariance. Quant à l'A.C.I. en diagonalisant le tenseur de cumulants des observations, on arrive à extraire la base canonique de signaux indépendants. On peut alors conclure que l'A.C.I. est le prolongement naturel de l'A.C.P., lorsque les processus observés sont non gaussiens. L'application de l'A.C.I. fut également étendue à des signaux de distribution statistique différente de celle des signaux synthétisés, mais qui demeure non gaussienne. Par cette extension de l'étude on met en évidence la capacité de l'A.C.I. à identifier des signaux de distribution statistique identique.

Dans les travaux futurs, l'algorithme d'identification-interprétation en plus de son rôle de séparateur des signaux est à compléter par celui de localisation des sources ou anomalies géophysiques. Quant à la synthèse des signaux, un modèle d'anomalies géophysiques proche de la réalité, doit tenir compte du milieu géologique multi-couches, anisotrope et de géométrie irrégulière.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] PATERSON N. R., et RONKA V. (1971) "A review of the VLF-EM method" *Geoexploration* 9, pp 7-26.
- [2] KAIKONEN P. (1979) "Numerical VLF modeling" *Geophysical prospecting* 27, pp 159-170.
- [3] SINHA A. K. (1990) "Interpretation of ground VLF-EM data in terms of inclined sheet-like conductor models" *PAGEOPH.*, vol. 132, 4, pp 733-756.
- [4] PODDAR M. (1981) "Electromagnetic scattering by a perfectly conducting half-plane in a conductive half-space" *PAGEOPH.*, vol. 119, pp 1024-1036.
- [5] PODDAR M. (July 1982) "Very Low Frequency electromagnetic response of a perfectly conducting half-plane in a layered half-plane" *Geophysics*, vol. 47, 7, pp 1059-1067.
- [6] COMON P. (1994) "Independent component analysis, a new concept?", *Signal Processing*, 36, pp 287-314. Elsevier.

- [7] **COMON P.** (1990) “*Analyse en composantes indépendantes et identification aveugle*”. *Traitements du signal*, vol.7, n° 5, pp 435- 450.
- [8] **JUTTEN Ch. et HERAULT J.** (1991) “*Blind séparation de sources, Part I: An adaptive algorithm based on neuromimetic architecture*”. *Signal Processing* 24 Elsevier., pp 1-10.
- [9] **ANDERSON W. L.** (Dec.1982) “*Fast Hankel transforms using related and lagged convolutions*” *ACM Trans.Math.Softw.* 8, 4, pp 345-370.
- [10] **DMITRIEV V. I.** (1960) “*A solution for a basic problem in the theory of the induction method of electromagnetic surveying*”. *Bull. Acad. Sci., Geophys. ser.*, no. 8, pp 748-753.
- [11] **MIKHLIN S. G.** (1957) “*Integral equations and their applications to certain problems in mechanics, mathematical physics, and technology*”, pp 7-15.
- [12] **WATSON G. N.** (1952) “*A treatise on the theory of Bessel functions*”. Cambridge University Press, London, 2^e Ed., pp199.
- [13] **COLOMBO S.** (1959) “*Les transformations de Mellin et de Hankel*”. Ed.,C.N.R.S .
- [14] **CORNILLE P.** (Avril 1972) “*Computation of Hankel transforms.*” *SIAM Rev.* 14, pp 278-285.
- [15] **ANDERSON W. L.** (July 1979) “*Numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering.*” *Geophysics* 44, pp 1287-1305.

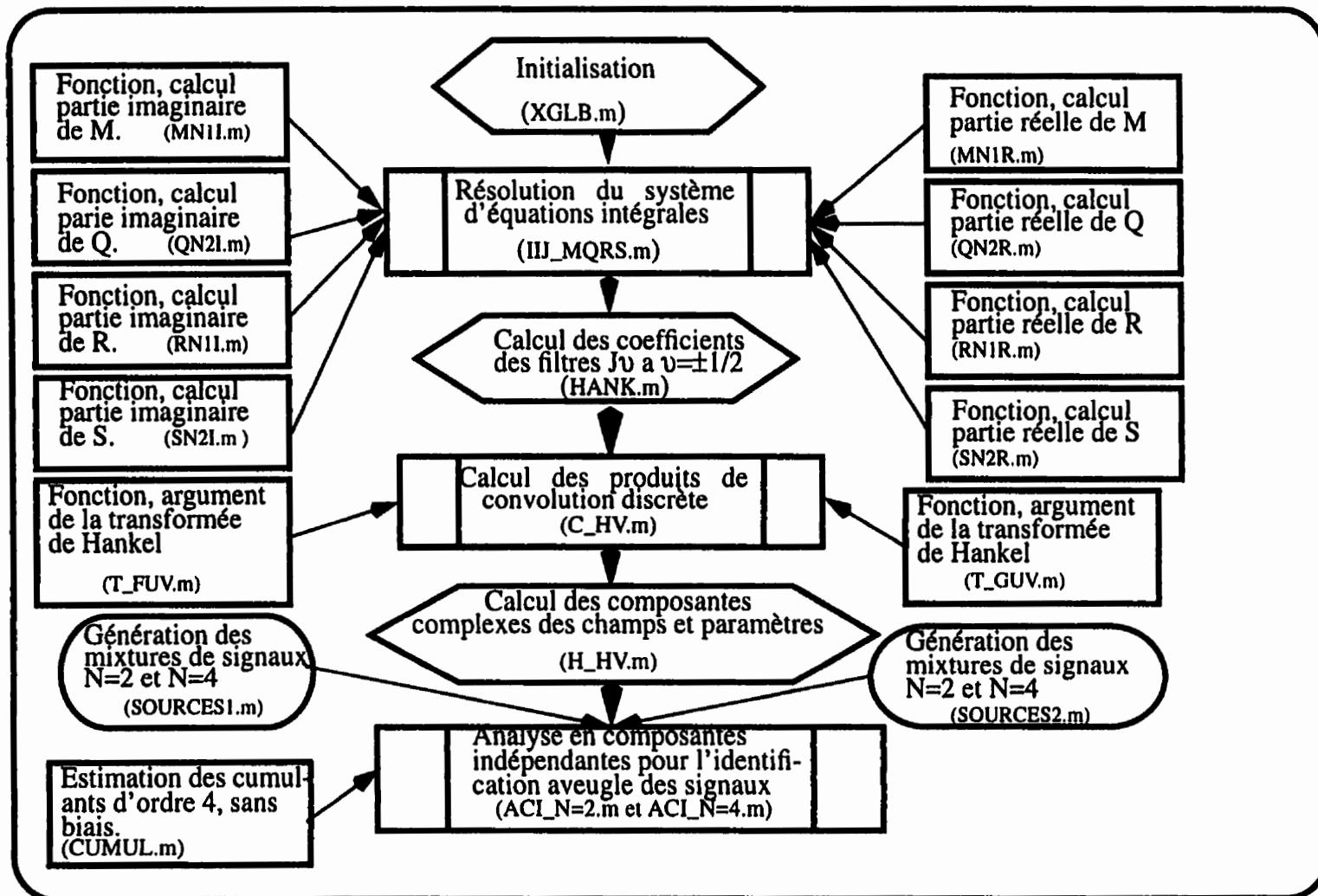
- [16] **KOEFOED O., GHOSH D. P., et POLMAN G. J.** (June 1972) "*Computation of type curves for electromagnetic depth sounding with a horizontal transmitting coil by means of a digital filter.*" *Geophysical Prospecting* 20, pp 406-420.
- [17] **DELANEY P. A. et WALSH D. O.** (1994) "*A bibliography of higher-order spectra and cumulants*" *I.E.E.E. Signal Processing Magazine*, pp 61-70.
- [18] **KAPLAN E. L.** (1952) "*Tensor notation and the sampling cumulants of K-Statistics*". *Biometrika*. Vol.32, pp 319-323.
- [19] **McCULLAGH P.** (1984) "*Tensor notation and cumulants of polynomials*". *Biometrika* , 71, 3, pp 461-476.
- [20] **STUART A.** (1987) "*Kendall's advanced theory of statistics*". 5^e Ed. Oxford Press .
- [21] **CARDOSO J. F.** (June 1988) "*Blind identification of independent components with Higher-Order Statistics*". *Proc.of the workshop on Higher-Order Statistics Analysis*, Vail., pp 157-162.
- [22] **DRESSEL P. L.** (Mars 1940) "*Statistical semivariants and their estimates with particular emphasis on their relation to algebraic invariants*". *Ann.of Math.Stat.*, vol.11, n^o1 , pp 33-57.
- [23] **BONDON P. et PICINBONO B.** (1990) "*De la blancheur et de ses transformations*". *Traitement du Signal*, vol.7, n^o5, pp 385-395.
- [24] **TASSI P. et LEGAIT S.** (1990) "*Théorie des probabilités en vue des applications statistiques*". Paris.Technip Pub.de l'I.F.P., pp 199-200.

- [25] **CHAUMETTE E. , COMON P. et MULLER D.** (December 1993) "*I.C.A.-based technique for radiating sources estimation: application to airport surveillance*". I.E.E. Proceedings-F, vol.140, n°6, pp 395-401.
- [26] **CARDOSO J. F.** (1989) "*Source separation using Higher-Order moments*". Proc.ICASSP, pp 2109-2112.
- [27] **MENDEL J. M.** (March 1991) "*Tutorial on Higher-Order Statistics (Spectra) in signal processing and system theory: Theoretical results and some applications*". Proc.of the IEEE, vol.79, n°3, pp 277-305.
- [28] **MENDEL J. M.** (1990) "*Higher-Order Statistics (Spectra) and their applications in signal processing*". SPIE, vol.1348, Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures and Implementations, pp 20-25.
- [29] **DUVAUT P.** (1990) "*Principes des méthodes de séparation fondées sur les moments d'ordre supérieur*". Traitement du signal, vol.7, n° 5, pp 407-418.
- [30] **HERAULT J., JUTTEN C. et ANS B.** (Mai 1985) "*Détection de grandeurs primitives dans un mélange composite par une architecture de calcul neuromimétique en apprentissage non supervisé*". GRETSI, 20-24, pp 1017-1022.
- [31] **JUTTEN C.** (Juin 1987) "*Calcul neuromimétique et traitement du signal: analyse en composantes indépendantes*". Thèse de Docteur ès Sciences, INP, Grenoble, .
- [32] **COMON P. et CARDOSO J. F.** (1990) "*Eigenvalue decomposition of a cumulant tensor with applications*". SPIE, vol.1348 Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures and Implementations, pp 361-372.

- [33] **CHAN T. F.** (March 1982) “*An improved algorithm for computing the singular value decomposition*”. ACM Trans.Math.Software, Vol.8, pp 72-83.
- [34] **COMON P.** (1991) “*Blind separation of sources, Part II : Problems statement*”. Signal processing 24 Elsevier., pp 11-20.
- [35] **COMON P.** (June 1988) “*Separation of stochastic processes*”. Proc.of the workshop on Higher-Order Statistics Analysis, Vail., pp 174-179.
- [36] **CARDOSO J. F.** (April 1990) “*Eigenstructure of the fourth-order cumulant tensor with applications to the Blind source separation problem*”. Proc.ICASSP, Albuquerque, pp 2655-2658.
- [37] **CORINTHIOS M. J.** (1985) “*3D cellular arrays for parallel/cascade image/signal processing.*” Spectral techniques and default detection. M.Karpovsky, editor. Academic Press., pp 217-298.
- [38] **JUTTEN Ch. et HERAULT J.** (1988) “*INdependent Components Analysis (IN.C.A.) versus Principal Components Analysis*”. Signal Processing IV : Theories and applications. J.L.Lacoume, A.Chehikian, N.Martin et J.Malbos (Editors) Elsevier science publishers B.V. (North-Holland) EURASIP, pp 643-646.

ANNEXE A

Listage des programmes



ORGANIGRAMME


```

%%%%%%%%%%%%%%%
-INTEGRATION NUMERIQUE, METHODE PAR APPROXIMATIONS
SUCCESSIVES.
%%%%%%%%%%%%%%%
% N1(t') = 1 + INTEGRALE DE 0 A L'INF.
(M(t',lbd',alp,h',d',m)*N1(lbd') + Q(t',lbd',alp,h',d',m)*N2(lbd'))d(lbd')
% N2(t') = 1 + INTEGRALE DE 0 A L'INF.
(R(t',lbd',alp,h',d',m)*N1(lbd') + S(t',lbd',alp,h',d',m)*N2(lbd'))d(lbd')
%-----
%***** Changement des bornes d'integration de lbd'=0,l'inf. -si lbd'=-l
lnx % x=exp(-lbd')- en x=0,1.
% Integrales definiennes sont au nombre de quatre, qui ont pour integrandes:
% (i) M(t',x,alp,h',d',m)*N1(x)
% (ii) Q(t',x,alp,h',d',m)*N2(x)
% (iii) R(t',x,alp,h',d',m)*N1(x)
% (iv) S(t',x,alp,h',d',m)*N2(x)
%-----
%Pour la resolution, en premiere approximation, on pose N1(x)=1, N2(x)=1
% (i) I11=INTEGRALE DE 0 A 1 {M(t',x,alp,h',d',m)}d(x)
% (ii) I12=INTEGRALE DE 0 A 1 {Q(t',x,alp,h',d',m)}d(x)
% (iii) I21=INTEGRALE DE 0 A 1 {R(t',x,alp,h',d',m)}d(x)
% (iv) I22=INTEGRALE DE 0 A 1 {S(t',x,alp,h',d',m)}d(x)
%-----
%-----Et les differents parametres:-----
%y'=y/delta; z'=z/delta; h'=h/delta; d'=d/delta;
%lbd'=lbd*delta; t'=t*delta; m=sigma1/sigma2;
%delta=sqrt(2/omega*mu*sigma2)
%-----
%
for grph = 1:3
fname = [vabaq(grph,:)];
eval(['load ',fname])
for abq=1:6
alp=alp(abq);dp=dpt(abq);hp=hpt(abq);
save param.mat alp dp hp

```

Fethi Malamane

III_MQRS.m 2 juillet 97

```

%
disp(['..ABAQUE_',num2str(grph),', alp= ',num2str(alp(abq)),', dp=
',num2str(dpt(abq)),', hp= ',num2str(hpt(abq))])
%.....Debut boucle_k
% En 1ere approximation N1_2r(x) = 1 N1_2i(x) = 0, pour k=1
for k=1:6
    save ind1.mat k
    fnom = [vstr1(k,:)];
    if k == 1
        N1rt = EINS; N2rt = EINS; N1it = SIFR; N2it = SIFR;
        eval(['save ',fnom,'.mat N1rt N1it N2rt N2it'])
    else
        eval(['save ',fnom,'.mat N1rt N1it N2rt N2it'])
    end
%Exécution des s/prog. MN1r, MN1i, QN2r, QN2i, RN1r, RN1i, SN2r, SN2i
%.....Debut boucle_m1
for m1 = 1:length(t)
    tim = t(m1);
    save ind2.mat m1 tim
%
    Qr11(m1) = quad8('MN1r',x1,x2,1e-03);
    Qi11(m1) = quad8('MN1i',x1,x2,1e-03);
    S11(m1) = Qr11(m1)+j*Qi11(m1);
    disp(['..fin de traitement_i11, m1= ',num2str(m1),', k= ',num2str(k)])
%
    Qr12(m1) = quad8('QN2r',x1,x2,1e-03);
    Qi12(m1) = quad8('QN2i',x1,x2,1e-03);
    S12(m1) = Qr12(m1)+j*Qi12(m1);
    disp(['..fin de traitement_i12, m1= ',num2str(m1),', k= ',num2str(k)])
%
    Qr21(m1) = quad8('RN1r',x1,x2,1e-03);
    Qi21(m1) = quad8('RN1i',x1,x2,1e-03);
    S21(m1) = Qr21(m1)+j*Qi21(m1);
    disp(['..fin de traitement_i21, m1= ',num2str(m1),', k= ',num2str(k)])
%
    Qr22(m1) = quad8('SN2r',x1,x2,1e-03);
    Qi22(m1) = quad8('SN2i',x1,x2,1e-03);

```

```

S22(m1) = Qr22(m1)+j*Qi22(m1);
disp(['..fin de traitement_j22, m1= ',num2str(m1),' ,k= ',num2str(k)])
%
end
%.....Fin boucle_m1
N1 = 1+(real(S11)'+j*imag(S11)')+(real(S12)'+j*imag(S12)');
%
N1rt= real(N1);
N1it= imag(N1);
%
N2 = 1+(real(S21)'+j*imag(S21)')+(real(S22)'+j*imag(S22)');
%
N2rt= real(N2);
N2it= imag(N2);
end
%.....Fin boucle_k
%
%%%%%%%
%--INTERPOLATION PAR LES FONCTIONS SPLINES CUBIQUES--
%%%%%%%
N1spl= spline(t,N1,ti);
N2spl= spline(t,N2,ti);
N1spl = real(N1spl)'+j*imag(N1spl)';
N2spl = real(N2spl)'+j*imag(N2spl)';
if grph == 1
  fasm = vsbq_1(abq,:);
  eval(['save ',fasm,'.mat N1spl N2spl']);
elseif grph == 2
  fasm = vsbq_2(abq,:);
  eval(['save ',fasm,'.mat N1spl N2spl']);
else
  fasm = vsbq_3(abq,:);
  eval(['save ',fasm,'.mat N1spl N2spl']);
end
end
%.....Fin boucle_abq

```



```
%  
M = -v1_ip*A.*sqrt(v1_lbdp.*v2_lbdp)./v3_lbdp.*v2_ip_lbdp*j*pi;  
y1ii = real(M)*N1ii1 + imag(M)*N1ri1;
```



```
%  
M = -v1_ip.*A.*sqrt(v1_bdp.*v2_bdp)/v3_bdp.*v2_ip_bdp*j*pi;  
y11r = real(M)*Nr11 - imag(M)*Nr11;
```

```

t =tim;
j =sqrt(-1);
frq =2e+04;
omega =2*pi*frq;
muo =4*pi*1e-07;
sigma1=1/300;
sigma2=1e-04;
delta =sqrt(2/(omega*muo*sigma2));
m =sigma1/sigma2;
uns =ones(size(x));
N2rl2 =N2rt(m1);
N2i12 =N2it(m1);
%
u0 = -log(x);
u1 = sqrt(log(x).^2-2*m*j);
u2 = sqrt(log(x).^2-2*j);
E1 = exp(+sqrt(log(x).^2-2*m*j)*dp);
E2 = exp(-sqrt(log(x).^2-2*m*j)*dp);
E3 = exp(-2*sqrt(log(x).^2-2*j)*(hp-dp));
dlt = (u1+u0).*(u2+u1).*E1+(u1-u0).*(u2-u1).*E2;
A = 1/2*(2*(u1+u0).*E1./dlt+2*(u1-u0).*E2./dlt-uns./u2).*E3;
%
v1_tp = cos(alp)*sqrt(t^2-2*j)-j*t*sin(alp)-j*sqrt(2*j)*cos(alp);
v2_tp = cos(alp)*sqrt(t^2-2*j)+j*t*sin(alp)-j*sqrt(2*j)*cos(alp);
%
v1_lbdp=sqrt(2*j)-log(x).*sin(alp)+j*cos(alp)*sqrt(log(x).^2-2*j);
v2_lbdp=sqrt(2*j)+log(x).*sin(alp)+j*cos(alp)*sqrt(log(x).^2-2*j);
v3_lbdp=cos(alp)*(sqrt(log(x).^2-2*j)-j*sqrt(2*j))-j*log(x).*sin(alp);
v4_lbdp=cos(alp)*(sqrt(log(x).^2-2*j)-j*sqrt(2*j))+j*log(x).*sin(alp);
%
v1_tp_lbdp=cos(alp)*(sqrt(t^2-2*j)+sqrt(log(x).^2-2*j))-j*sin(alp)*(t-log(x));
v2_tp_lbdp=cos(alp)*(sqrt(t^2-2*j)+sqrt(log(x).^2-2*j))-j*sin(alp)*(t+log(x));
v3_tp_lbdp=cos(alp)*(sqrt(t^2-2*j)+sqrt(log(x).^2-2*j))+j*sin(alp)*(t+log(x));
v4_tp_lbdp=cos(alp)*(sqrt(t^2-2*j)+sqrt(log(x).^2-2*j))+j*sin(alp)*(t-log(x));

```

```
%  
Q = -v1_ip_*A_*sqrt(v1_)bdp_*v2_)bdp./v4_)bdp_*v1_ip_bdp*j*pi;  
y12i = real(Q)*N2i12 + imag(Q)*N2r12;
```

```

t =tим;
j =sqrt(-1);
frq =2e+04;
omega =2*pi*frq;
muo =4*pi*1e-07;
sigma1=1/300;
sigma2=1e-04;
delta =sqrt(2/(omega*muo*sigma2));
m =sigma1/sigma2;
uns =ones(size(x));
N2r12 =N2r1(m1);
N2i12 =N2i1(m1);
%
u0 = -log(x);
u1 = sqrt(log(x).^2-2*m*j);
u2 = sqrt(log(x).^2-2*j);
E1 = exp(+sqrt(log(x).^2-2*m*j)*dp);
E2 = exp(-sqrt(log(x).^2-2*m*j)*dp);
E3 = exp(-2*sqrt(log(x).^2-2*j)*(hp-dp));
dlt = (u1+u0).*(u2+u1).*E1+(u1-u0).*(u2-u1).*E2;
A = 1/2*(2*(u1+u0).*E1./dlt+2*(u1-u0).*E2./dlt-uns./u2).*E3;
%
v1_tp = cos(alp)*sqrt(t^2-2*j)-j*t*sin(alp)-j*sqrt(2*j)*cos(alp);
v2_tp = cos(alp)*sqrt(t^2-2*j)+j*t*sin(alp)-j*sqrt(2*j)*cos(alp);
%
v1_lbdp=sqrt(2*j)-log(x).*sin(alp)+j*cos(alp)*sqrt(log(x).^2-2*j);
v2_lbdp=sqrt(2*j)+log(x).*sin(alp)+j*cos(alp)*sqrt(log(x).^2-2*j);
v3_lbdp=cos(alp)*(sqrt(log(x).^2-2*j)-j*sqrt(2*j))-j*log(x).*sin(alp);
v4_lbdp=cos(alp)*(sqrt(log(x).^2-2*j)-j*sqrt(2*j))+j*log(x).*sin(alp);
%
v1_tp_lbdp=cos(alp)*(sqrt(t^2-2*j)+sqrt(log(x).^2-2*j))-j*sin(alp)*(t-log(x));
v2_tp_lbdp=cos(alp)*(sqrt(t^2-2*j)+sqrt(log(x).^2-2*j))-j*sin(alp)*(t+log(x));
v3_tp_lbdp=cos(alp)*(sqrt(t^2-2*j)+sqrt(log(x).^2-2*j))+j*sin(alp)*(t+log(x));
v4_tp_lbdp=cos(alp)*(sqrt(t^2-2*j)+sqrt(log(x).^2-2*j))+j*sin(alp)*(t-log(x));

```

```
%  
Q = -v1_ip_*A_*sqrt(v1_lbdp_*v2_lbdp)/v4_lbdp_*v1_ip_lbdp*j*pi;  
y12r = real(Q)*N2r12 - imag(Q)*N2i12;
```


$y21i = \text{real}(R)*N1i21 + \text{imag}(R)*N1r21;$

y21r = real(R)*N1r21 - imag(R)*N1i21;

```

% frq =2e+04;
% omega =2*pi*frq;
% muo =4*pi*1e-07;
% signal=1/300;
% sigma2=1e-04;
% delta =sqrt(2/(omega*muo*sigma2));
% m =sigma1/sigma2;
% N2i22 =N2i1(m1);
% N2i22 =N2i1(m1);
% u0 = -log(x);
% u1 = sqrt(log(x).^2-2*m.^2);
% u2 = sqrt(log(x).^2-2.^2);
% E1 = exp(+sqrt(log(x).^2-2*m.^2)*dp);
% E2 = exp(-sqrt(log(x).^2-2*m.^2)*dp);
% E3 = exp(-2*sqrt(log(x).^2-2.^2))*hp-dp);
% dl = (u1+u0).* (u2+u1).*E1+(u1-u0).* (u2-u1).*E2;
% A = 1/2*(2*(u1+u0).*E1./dl+2*(u1-u0).*E2./dl-uns./u2).*E3;
% v1_ip = cos(alp)*sqrt((^2-2.^2)-j.*sin(alp)*j.*sqrt(2.^2)*cos(alp);
% v2_ip = cos(alp)*sqrt((^2-2.^2)+j.*sin(alp)*j.*sqrt(2.^2)*cos(alp);
% v1_ip =sqrt(2.^2).*log(x).*sin(alp)+j.*cos(alp).*sqrt(log(x).^2-2.^2);
% v2_ip =sqrt(2.^2)+log(x).*sin(alp)+j.*cos(alp).*sqrt(log(x).^2-2.^2);
% v3_ip =cos(alp).*sqrt(log(x).^2-2.^2)-j.*sqrt(2.^2).*j.*log(x).*sin(alp);
% v4_ip =cos(alp).*sqrt(log(x).^2-2.^2)-j.*sqrt(2.^2)+j.*log(x).*sin(alp);
% v1_ip_ip=cos(alp)*sqrt((^2-2.^2)+sqrt(log(x).^2-2.^2)*j.*sin(alp)*(i.*log(x));
% v2_ip_ip=cos(alp)*sqrt((^2-2.^2)+sqrt(log(x).^2-2.^2)*j.*sin(alp));
% v3_ip_ip=cos(alp)*sqrt((^2-2.^2)+sqrt(log(x).^2-2.^2)*j.*log(x));
% v4_ip_ip=cos(alp)*(sqrt((^2-2.^2)+sqrt(log(x).^2-2.^2)*j.*sin(alp)*(i.*log(x));
% S = - v2_ip.*A.*sqrt(v1_ip).bdp.*v2_ip).bdp./v4_ip_ip.*v3_ip_ip.*j.*pi;

```

SN21.m 2 juillet 97

Fethi Malamane

```
y22i = real(S)*N2i22 + imag(S)*N2i22;
```


y22r = real(S)*N2r22 - imag(S)*N2i22;

```

%%%%%%%%%%%%%%%
%-FILTRES J_-1/2 ET J_+1/2 POUR LA TRANSFORMEE DE HANKEL
RAPIDE-%
%%%%%%%%%%%%%%%
clear
clf
format long e
a =-26.;
b =+30.;
Absc=[a:2:b];
x =Absc;
y =x;
exr=log(1e+308);
W1 =[];
W2 =[];
%
%-Ei: Entrée; Si: Sortie; i={1,2} pour J_-1/2 , J_+1/2-%
%%%%%%%%%%%%%%%
S1=sqrt(exp(x)/2).*(exp(-exp(2*x)/4)-exp(-exp(2*x)/8)/sqrt(2));
S2=sqrt((exp(x)/2).^3).*(exp(-exp(2*x)/4)-exp(-exp(2*x)/8)/sqrt(2^3));
E1=exp(-y/2).*exp(-exp(-2*y))-exp(-2*exp(-2*y)));
E2=exp(-y*3/2).*exp(-exp(-2*y))-exp(-2*exp(-2*y));
%
%*****%
%-Transformées de fourier rapides de (Ei) et (Si)-%
%*****%
dftel = fft(E1);
dfts1 = fft(S1);
dfte2 = fft(E2);
dfts2 = fft(S2);
%
%*****%
%-Réponses fréquentielles et coefficients du filtre-%
%*****%

```

```

%
tfdr1 = dfts1./dftel;
tfdr2 = dfts2./dfte2;
sinc = sin(pi*x./2)./(pi*x./2);
tfdsc = fft(sinc);
tfdr11 = tfdr1.*tfdsc;
tfdr22 = tfdr2.*tfdsc;
W1t = ifft(tfdr11);
W2t = ifft(tfdr22);
%
c1 = fpfit(Absc(131:149),W1t(131:149),25);
cc1 = fpfit(Absc(1:130),W1t(1:130),25);
ccc1 = fpfit(Absc(150:283),W1t(150:283),25);
%
fit1= polyval(c1,Absc(131:149));
fit2= polyval(cc1,Absc(1:130));
fit3= polyval(ccc1,Absc(150:283));
%
W1tt=[W1t(1:130) fit11 W1t(150:283)];
ww1=[fit21 fit11 fit31];
W1t=real(W1tt)' +j*imag(W1tt)';
wW1=real(ww1)' +j*imag(ww1)';
%
c2=fpfit(Absc(131:149),W2t(131:149),25);
cc2=fpfit(Absc(1:130),W2t(1:130),25);
ccc2=fpfit(Absc(150:283),W2t(150:283),25);
fit12= polyval(c2,Absc(131:149));
fit22= polyval(cc2,Absc(1:130));
fit32= polyval(ccc2,Absc(150:283));
W2tt=[W2t(1:130) fit12 W2t(150:283)];
ww2=[fit22 fit12 fit32];
W2t=real(W2tt)' +j*imag(W2tt)';
wW2=real(ww2)' +j*imag(ww2)';
%
cc1 = fpfit(Absc(1:130)',W1(1:130),7);
fit21= polyval(cc1,Absc(1:130));
cc2 = fpfit(Absc(1:130)',W2(1:130),12);

```

```

fit22= polyval(cc2,Absc(1:130));
%
cc1 = fplot(Absc(150:283)',W1(150:283),25);
fit31 = polyval(cc1,Absc(150:283));
cc2 = fplot(Absc(150:283)',W2(150:283),25);
fit32 = polyval(cc2,Absc(150:283));
%
wp1=[fit21 fit11 fit31];
wp12=[fit22 fit12 fit32];
%
plot(Absc(110:175),wp1(110:175),'w',Absc(110:175),wp12(110:175),'w--')
 xlabel('Abscisses du filtre ')
 ylabel('Coefficients du filtre')
grid
%print -deps -epsi fitcof1
save HKL2.mat W2
save HKL1.mat W1

```



```

%-----.
% STEP_1 :
% =====
%.....Dans l'intervalle fixe:[M1=131,M2=149]
%.....Critere de tolerance : CTOL
%.....nu=-1/2 ==> W = W1
%....C1_H = {SOMME DE mm=M1 A M2 (Wmm,nu *
THETA_ft(EXP(Amm-log(y'))))/y'
%.....M1 = 131, M2 = 149
%
C1_H = [];C2_H = [];C1_V = [];C2_V = [];
M1 = 131; M2 = 149;
for I = 1:Nlag
    tp = exp(Amm-log(yp(I)));
    THETA_ft = feval('t_fuv1',tp);
    C1_H(I) = sum(W1(M1:M2).*THETA_ft(M1:M2))/yp(I);
end
CTOL = max(abs(C1_H))*TOL;
C1_H = real(C1_H)+j*imag(C1_H);
%
%disp(['fin traitement step_1. C1_H '])
%
% A verifier separement pour les parties: reelle et imaginaire de l'expr.
% (si peu de zero dans THETA, alors fin prematuree est toleree...)
%=====

% STEP_2 :
%=====
%.....Adaptativite de mm:[M1=150,M2>M1], si expression <= CTOL, fin.
%
k1 = 0;
k2 = 0;
mm = 150;
for I = 1:Nlag
    while (mm >= 150 & mm <= 283)
        tp = exp(Amm(mm)-log(yp(I)));
        THETA_ft = feval('t_fuv1',tp);
        if(abs(real(W1(mm)*THETA_ft(mm))/yp(I))) > CTOL
            C1_H(I) = C1_H(I) + real(W1(mm)*THETA_ft(mm))/yp(I);
        else
            C1_H(I) = C1_H(I);
            k1 = k1 + 1;
        end
        if(abs(imag(W1(mm)*THETA_ft(mm))/yp(I))) > CTOL
            C1_H(I) = C1_H(I) + j*imag(W1(mm)*THETA_ft(mm))/yp(I);
        else
            C1_H(I) = C1_H(I);
            k2 = k2 + 1;
        end
        if(k1*k2>0 & k1==k2),break,end
        mm = mm + 1; k1 = 0; k2 = 0;
    end
end
%
%disp(['fin traitement step_2. C1_H mm= ',num2str(mm),',adaptatif de
M1=150 a M2 > M1.'])
%=====

% STEP_3 :
%=====
%.....Adaptativite de mm=[M1=130,M2<M1], si expression <= CTOL, fin.
%
k1 = 0;
k2 = 0;
mm = 130;
for I = 1:Nlag
    while (mm >= 1 & mm <= 130)
        tp = exp(Amm(mm)-log(yp(I)));
        THETA_ft = feval('t_fuv1',tp);
        if(abs(real(W1(mm)*THETA_ft(mm))/yp(I))) > CTOL
            C1_H(I) = C1_H(I) + real(W1(mm)*THETA_ft(mm))/yp(I);
        else
            C1_H(I) = C1_H(I);
            k1 = k1 + 1;
        end
    end
end

```

```

end
ifabs(imag(W1(mm)*THETA_fi(mm)/yp(l)))>CTOL;
C1_H(l) = C1_H(l) + j*imag(W1(mm)*THETA_fi(mm)/yp(l));
else
C1_H(l) = C1_H(l);
k2 = k2 + 1;
end
if(k1*k2>0 & k1==k2),break,end
mm = mm - 1; k1 = 0; k2 = 0;
end
C1_H = C*expr1 * sqrt((real(yp)+j*imag(yp))*pi/2).*C1_H;
%
% disp([' fin traitement step_3. C1_H mm= ',num2str(mm),', adaptatif de
M1=130 a M2 < M1.'])
disp([' .....FIN TRAITEMENT.....C1_H.....'])
%
%-----C2_H (y').....C2_H (y)
%
%....C2_H = (SOMME DE mm=M1 A M2 (W/mm,nu*
THETA_g(EXP(Amm-log(y)))))/y'
%
M1 = 131; M2 = 149;
for l = 1:Nlag
    ip = exp(Amm*log(yp(l)));
    THETA_gt = feval('t_guv1',ip);
    C2_H(l) = sum(W(M1:M2).*THETA_g((M1:M2))/yp(l));
end
%
% disp([' fin traitement step_2. C2_H mm= ',num2str(mm),', adaptatif de

```

C_HV.m 2 juillet 97

Fethi Malamane

```

%-----%
% STEP_1 :
% -----
%.....Dans l'intervalle fixe:[M1=131,M2=149]
%.....Critere de tolerance : CTOL
%.....nu=+1/2 =====> W = W2
%....C1_V = (SOMME DE mm=M1 A M2 (Wmm,nu*
THETA_ft(EXP(Amm-logy'))))/y'
%
M1 = 131; M2 =149;
for l = 1:Nlag
    tp = exp(Amm - log(yp(l)));
    THETA_ft = feval('t_fuv1',tp);
    C1_V(l) = sum(W2(M1:M2).*THETA_ft(M1:M2))/yp(l);
end
CTOL = max(abs(C1_V))*TOL;
C1_V = real(C1_V)+j*imag(C1_V)';
%
%disp(['fin traitement step_1. C1_V '])
%
% A verifier separement pour les parties: reelle et imaginaire de l'expr.
% (si peu de zero dans THETA, alors fin prematuree est toleree...)
%=====

% STEP_2 :
%=====
%.....Adaptativite de mm=[M1=150,M2>M1], si expression <= CTOL, fin.
%
k1 = 0;
k2 = 0;
mm = 150;
for l = 1:Nlag
    while (mm >= 150 & mm <=283)
        tp = exp(Amm(mm)-log(yp(l)));
        THETA_ft = feval('t_fuv1',tp);
        if(abs(real(W2(mm)*THETA_ft(mm)/yp(l)))) > CTOL
            C1_V(l) = C1_V(l) + real(W2(mm)*THETA_ft(mm)/yp(l));
        end
    end
end

```

```

else
    C1_V(I) = C1_V(I);
    k1 = k1 + 1;
end
if(abs(imag(W2(mm)*THETA_ft(mm)/yp(I)))) > CTOL
    C1_V(I) = C1_V(I) + j*imag(W2(mm)*THETA_ft(mm)/yp(I));
else
    C1_V(I) = C1_V(I);
    k2 = k2 + 1;
end
if(k1*k2>0 & k1==k2),break,end
mm = mm - 1; k1 = 0; k2 = 0;
end
C1_V = C*expr1*sqrt((real(yp)'*j*imag(yp)')*pi/2)*C1_V;
%
% disp(['fin traitement step_3. C1_V mm= ',num2str(mm),' ,adaptatif de
M1=130 a M2 < M1.'])
disp(['.....FIN TRAITEMENT.....C1_V.....']);
%
% disp(['fin traitement step_2. C1_V mm= ',num2str(mm),' ,adaptatif de
M1=150 a M2 > M1.'])
%
% STEP_3:
%
% =====
% Adaptaitvite de mm=[M1=130,M2<M1], si expression <= CTOL, fin.
%
% =====
%
% STEP_1:
%
% =====
% Dans l'intervalle fixe:[M1=131,M2=149]
% ....Critere de tolerance : CTOL
% ....nu=-1/2 =====> W = W1
% ....C2_V = (SOMME DE mm=M1 A M2 (Wmm,nu*
THETA_g(EXP(Amm*logy))))/y'
%
% M1 = 131; M2 = 149;
for I = 1:Nlag
    ip = exp(Amm(mm)*log(yp(I)));
    THETA_ft = feval('t_suv1',ip);
    if(abs(real(W2(mm)*THETA_ft(mm)/yp(I))) > CTOL
        C1_V(I) = C1_V(I) + real(W2(mm)*THETA_ft(mm)/yp(I));
    else
        C1_V(I) = C1_V(I);
        k1 = k1 + 1;
    end
    if(abs(imag(W2(mm)*THETA_ft(mm)/yp(I))) > CTOL
        C1_V(I) = C1_V(I) + j*imag(W2(mm)*THETA_ft(mm)/yp(I));
    end
    C2_V = real(C2_V)' + j*imag(C2_V)';
    CTOL = max(abs(C2_V))*TOL;
    C2_V = sum(W1(M1:M2).*THETA_g(M1:M2))/yp(I);
end

```

```

%disp(['fin traitement step_1. C2_V '])
%
% A verifier separemement pour les parties: reelle et imaginaire de l'expr.
% (si peu de zero dans THETA, alors fin prematuree est toleree...)
%=====

% STEP_2 :
%=====
%
%.....Adaptativite de mm=[M1=130,M2<M1], si expression <= CTOL, fin.
%
%.....Adaptativite de mm=[M1=150,M2>M1], si expression <= CTOL, fin.
%
k1 = 0;
k2 = 0;
mm = 130;
for l = 1:Nlag
    while (mm >= 1 & mm <= 130)
        tp = exp(A_mm(mm)*log(yp(l)));
        THETA_gt = feval('t1_guv',tp);
        if(abs(real(W1(mm))*THETA_gt(mm)/yp(l))) > CTOL
            C2_V(l) = C2_V(l) + real(W1(mm)*THETA_gt(mm)/yp(l));
        else
            C2_V(l) = C2_V(l);
        end
        if(abs(imag(W1(mm))*THETA_gt(mm)/yp(l))) > CTOL
            C2_V(l) = C2_V(l) + j*imag(W1(mm)*THETA_gt(mm)/yp(l));
        else
            C2_V(l) = C2_V(l);
        end
        if(k1*k2>0 & k1==k2),break,end
        mm = mm - 1; k1 = 0; k2 = 0;
    end
    C2_V = C*expr1*sqrt((real(yp)+j*imag(yp))*pi/2).*C2_V;
%
%disp([' fin traitement step_3. C2_V mm= ',num2str(mm),', adaptatif de
M1=130 a M2 < M1.'])
disp(['.....FIN TRAITEMENT.....C2_V.....'])
%
%-----if grph == 1
fman = vspq_1(abq,);
eval(['save ',fman,'.mat C1_HC2_HC1_V C2_V']);
elseif grph == 2
fman = vspq_2(abq,);
%
%-----if disp(['fin traitement step_2. C2_V mm= ',num2str(mm),', adaptatif de
M1=150 a M2 > M1.'])
%
% STEP_3 :
%=====

%
```

```

eval(['save ',fman,'.mat C1_H C2_H C1_V C2_V'])
else
fman = vspq_3(abq,);
eval(['save ',fman,'.mat C1_H C2_H C1_V C2_V'])
end
end
%.....Fin boucle_abq
disp(['.....fin traitement.....GRAPH_ ',num2str(grph),'...C_HV.....'])
end
%Fin boucle_grph

```

```

%
% DESCRIPTION:
% =====
% CALCUL DE LA FONCTION THETA(j) = {j} * SQRT(t), AVEC {j} =
% {Fu,v},{Gu,v}
%
% sqrt(sqrt(2*j)+sqrt(2*j-ip^2)*cos(alp)-ip*sin(alp))
% Uo = .....cos(alp)*(sqrt(ip^2-2*j)-j*ip^2*sin(alp))
%
% sqrt(sqrt(2*j)+sqrt(2*j-ip^2)*cos(alp)+ip^2*sin(alp))
% Vo = .....cos(alp)*(sqrt(ip^2-2*j)+sqrt(2*j)+j*ip^2*sin(alp))
%
% 2*ip^2*sqrt(ip^2-2*m^2)*exp(-(hp-dp)*sqrt(ip^2-2*j))
% expr2 = .....(sqrt(ip^2-2*m^2)+sqrt(2*j)+j*ip^2*sin(alp))
%
% sqrt(ip^2-2*m^2)*ip*(sqrt(ip^2-2*j)+sqrt(ip^2-2*m^2))
% sqrt(ip^2-2*m^2)*exp(dp^2*sqrt(ip^2-2*m^2)+(sqrt(ip^2-2*m^2)-ip)*
% sqrt(ip^2-2*m^2)+sqrt(ip^2-2*m^2)*ip)*sqrt(ip^2-2*m^2)
%
% Fu,v) = (Uo*expr2*N2 + Vo*exp(i*2*N1)*sqrt(ip)
%
% ..... FONCTION : Fuv = T_Fu,v(t)
%
% function Fuv = t_fuv1(ip)
% vsbq_1 = ['Ghp_1'; 'Ghp_2'; 'Ghp_3'; 'Ghp_4'; 'Ghp_5'; 'Ghp_6'];
% vsbq_2 = ['Galp_1'; 'Galp_2'; 'Galp_3'; 'Galp_4'; 'Galp_5'; 'Galp_6'];
% vsbq_3 = ['Gdp_1'; 'Gdp_2'; 'Gdp_3'; 'Gdp_4'; 'Gdp_5'; 'Gdp_6'];
load theta %.....gph, abq, alp, dp, hp
if gph == 1
    fanka = vsbq_1(abq,:);
    eval(['load ',fanka])
elseif gph == 2
    fanka = vsbq_2(abq,:);
    eval(['load ',fanka])
end
%
% FUV.m 2 juillet 97

```

```
for IND=1:length(VecInd)
expr2i(VecInd(IND)) = 0;
end
%expr2 = real(expr2i)' + j*imag(expr2i)';
Fuv = (Uo.*expr2.*N2spl + Vo.*expr2.*N1spl).*sqrt(ip');
```



```
for IND=1:length(VecInd)
expr2t(VecInd(IND)) = 0;
end
expr2 = real(expr2t)+j*imag(expr2t)';
%
Guv = (Uo.*expr2.*N2spl - Vo.*expr2.*N1spl).*sqrt(p');
```

```

% DESCRIPTION:
% =====
%
% CCE FICHIER, DETERMINE LES CHAMPS HORIZONTAL, VERTICAL,
% NORMALISES PAR RAPPORT AU CHAMP PRIMAIRE : HhN, HvN.
% PUIS LES %COMPOSANTES EN PHASE ET EN QUADRATURE
% (REELLE ET
% IMAGINAIRE) DES %CHAMPS HORIZONTAL ET VERTICAL : HhNp,
% HvNp, %HhNq, HvNq.
%
% (voir resolution dans fichier C_HV.m)
%
% AFIN DE DETERMINER LES PARAMETRES QUI SONT :
%
% ELP:ELLIPTICITE QUI EST LE RAPPORT DES AXES MINEUR
% MAJEUR
%
% TG2:ANGLE FORME PAR L'AXE MAJEUR ET L'HORIZONTALE.
%
% TG2:ANGLE FORME PAR L'AXE MAJEUR ET L'AXE VERTICALE.
%
% L'EXPRESSION DES CHAMPS:
%
% HhN = 1+Cte*[Integral de 0 a
% l'inf. {Fu,v(t')cos(t')^2+Gu,v(t')sin(t')^2}dt']
%
% HvN = 1-Cte*[Integral de 0 a l'inf. {Fu,v(t')sin(t')^2
% -Gu,v(t')cos(t')^2}dt']
%
% HhN = 1+Cte*[Integral de 0 a l'inf. {Fu,v(t')cos(t')^2
% +Gu,v(t')sin(t')^2}dt']
%
% HvN = 1-Cte*[Integral de 0 a l'inf. {Fu,v(t')sin(t')^2
% -Gu,v(t')cos(t')^2}dt']
%
% HhN = 1+Cte*[TH1h + j*TH2h]
%
% TH1h=Int de 0 a l'inf. {Fu,v(t')cos(t')^2}dt'
%
% TH2h=Int de 0 a l'inf. {Gu,v(t')sin(t')^2}dt'
%
% TH1v=Int de 0 a l'inf. {Fu,v(t')sin(t')^2}dt'
%
% TH2v=Int de 0 a l'inf. {Gu,v(t')cos(t')^2}dt'
%
% HhN = 1-Cte*[TH1v - j*TH2v] /
%
% cos(t')=sqrt(pi/2*t')*Jnu(t')
%
% sin(t')=sqrt(pi/2*t')*Jnu(t')
%
% HvN=+1/2
%
% Expressions des champs, sous forme de Transformees de Hankel(TH):
%
% TH1h=Int de 0 a l'inf. {Fu,v(t')sqrt(pi/2*t')^2*Jnu(t')^2}dt' )....nu=-1/2
%
% TH2h=Int de 0 a l'inf. {Gu,v(t')sqrt(pi/2*t')^2*Jnu(t')^2}dt' )....nu=+1/2
%
% TH1v=Int de 0 a l'inf. {Fu,v(t')sqrt(pi/2*t')^2*Jnu(t')^2}dt' )....nu=+1/2
%
% TH2v=Int de 0 a l'inf. {Gu,v(t')sqrt(pi/2*t')^2*Jnu(t')^2}dt' )....nu=-1/2

```

```

if gph == 1
  fasm = vspq_1(abq,:);
  eval(['load ',fasm])
elseif gph ==2
  fasm = vspq_2(abq,:);
  eval(['load ',fasm])
else
  fasm = vspq_3(abq,:);
  eval(['load ',fasm])
end
HhNp = [ ]; HhNq = [ ]; HvNp = [ ]; HvNq = [ ];
%
HhN = 1 + (C1_H+j*C2_H);
HvN = 1 - (C1_V-j*C2_V);
%
HhNp = real(HhN);
HhNq = imag(HhN);
%
HvNp = real(HvN);
HvNq = imag(HvN);
%
Hh = sqrt((HhNp+1).^2 + HhNq.^2);
Hv = sqrt(HvNp.^2 + HvNq.^2);
beta = atan(HvNq./HvNp) - atan(HhNq./((HhNp-1)));
TG2T = 2*pi*Hh.*Hv.*cos(beta)./(Hh.^2 - Hv.^2); ELPS =
%2*Hh.*Hv.*sin(beta)/
(Hh.^2+Hv.^2+sqrt((2*pi*Hh.*Hv.*cos(beta)).^2+(Hv.^2-Hh.^2).^2));
%
fasm = vsGpq_2(abq,:);
eval(['load ',fasm]);
%
if gph == 1
  fman = vsGpq_1(abq,:);
  eval(['save ',fman,'mat HhNp HhNq HvNp HvNq ELPS TG2T']);
elseif gph ==2
  fman = vsGpq_2(abq,:);
  eval(['save ',fman,'mat HhNp HhNq HvNp HvNq ELPS TG2T']);
else
  fman = vsGpq_3(abq,:);
  eval(['save ',fman,'mat HhNp HhNq HvNp HvNq ELPS TG2T']);
%

```

Fethi Malamane

H_HV.m 2 juillet 97

```

fasm = vsGpq_3(abq,:);
eval(['load ',fasm]);
%
eval(['ELPSdp_ ' int2str(abq) ' = ELPS']);
eval(['TG2Tdp_ ' int2str(abq) ' = TG2T']);
eval(['yhrdp_ ' int2str(abq) ' = HhNp']);
eval(['yhidp_ ' int2str(abq) ' = HhNq']);
eval(['yvrdp_ ' int2str(abq) ' = HvNp']);
eval(['yvidp_ ' int2str(abq) ' = HvNq']);
end
end
%....Fin boucle_abq
if grph == 1
%
    save tg2thp.mat TG2Thp_1 TG2Thp_2 TG2Thp_3 TG2Thp_4
    TG2Thp_5 TG2Thp_6;
    save elpshp.mat ELPShp_1 ELPShp_2 ELPShp_3 ELPShp_4 ELPShp_5
    ELPShp_6;
    save yhrhp.mat yhrhp_1 yhrhp_2 yhrhp_3 yhrhp_4 yhrhp_5 yhrhp_6;
    ave yhihp.mat yhihp_1 yhihp_2 yhihp_3 yhihp_4 yhihp_5 yhihp_6;
    save yvrhp.mat yvrhp_1 yvrhp_2 yvrhp_3 yvrhp_4 yvrhp_5 yvrhp_6;
    save yvihp.mat yvihp_1 yvihp_2 yvihp_3 yvihp_4 yvihp_5 yvihp_6;
%
elseif grph ==2
    save tg2talp.mat TG2Talp_1 TG2Talp_2 TG2Talp_3 TG2Talp_4
    TG2Talp_5 TG2Talp_6;
    save elpsalp.mat ELPSalp_1 ELPSalp_2 ELPSalp_3 ELPSalp_4
    ELPSalp_5 ELPSalp_6;
    save yhralp.mat yhralp_1 yhralp_2 yhralp_3 yhralp_4 yhralp_5 yhralp_6;
    save yhialp.mat yhialp_1 yhialp_2 yhialp_3 yhialp_4 yhialp_5 yhialp_6;
    save yvralp.mat yvralp_1 yvralp_2 yvralp_3 yvralp_4 yvralp_5 yvralp_6;
    save yvialp.mat yvialp_1 yvialp_2 yvialp_3 yvialp_4 yvialp_5 yvialp_6;
%
else
    save tg2tdp.mat TG2Tdp_1 TG2Tdp_2 TG2Tdp_3 TG2Tdp_4
    TG2Tdp_5 TG2Tdp_6;
    save elpsdp.mat ELPSdp_1 ELPSdp_2 ELPSdp_3 ELPSdp_4 ELPSdp_5

```

```

%
% DESCRIPTION:
%
% POUR ESSENTIELLEMENT LA SEPARATION DES SIGNAUX, EN
UTILISANT %L'ANALYSE EN COMPOSANTES INDEPENDANTES. LA
STATISTIQUE %D'ORDRE SUPERIEUR ETANT UTILISEE ICI, CAR
LES SIGNAUX TRAITES %SONT DE DISTRIBUTION NON-GAUSSI-
ENNE, LEGITIMISANT L'USAGE DE %LA FONCTION DE CON-
TRASTE.
%.#...#...#...#%...#...#%...#...#%...#...#%...#...#%...#...
%
clear
load vlfsrc1_2 %....Ysrc [2x2000]
%
%-----1-Blanchissement spatial des variables
%
%TRANSFORMATION SVD DE LA MATRICE DES OBSERVATIONS
Y[N,T]
%UNE AUTRE VERSION DU CALCUL DE LA SVD EST PROPOSEE
SELON %CHAN, POUR LES MATRICES RECTANGULAIRES [mxn],
AVEC m >> n.
%
% Y = V.S.U' (V[Nxro], S[roxo], U'[roxT]) et ro=rank(Y), N=n<<T=m.
[Nsrc,Msrc] = size(Ysrc);
m=Msrc;
ro = rank(Ysrc);
%
%-----(i) decomposition QR : % Qt'*Ysrc' = R; R triang.sup.
%-----(ii) SVD (R): Rt = Xt.St.Yt';
%-----(iii) mod_svd[Ysrc']====>Qt.Xt.St.Yt'; IV := Yt
% Ysrc' = Qt*Xt*St*Yt';==> Ysrc = Yt*St*Xt'*Qt'====> IS := St
%
% [Qt,Rt]=qr(Ysrc',0);
[Xt,St,Yt]=svd(Rt);
%
% initialisation de Z := sqrt(Msrc).Xt'.Qt' (Z[roxT]) et L := Yt.St/sqrt(Msrc)

```

```

(L[Nxro])
%
Zt = sqrt(Msrc)*Xt'*Qt';
Lt = Yt*St/sqrt(Msrc);
Z = Zt;
%
%-----2-Initialisation de Ft := Lt
%
Ft = Lt;
%
%-----3-Debut boucle sur Bly=1,2,...,Blym<=l+sqrt(ro)
%
Bly = 1;
while (Bly <= l+sqrt(ro))
%
%-----4-Debut boucle sur paire=1,...,ro*(ro-1)/2 paires {Li,Lj} a
traiter
% selon un ordre cyclique, les lignes par ex.
%
Li = 1; Lj = Li;
for paire = 1:ro*(ro-1)/2
ident = eye(ro); Lj = Lj + 1;
save Ztsrc.mat Z
%
%-----4-(a)Estimation (sans biais) des cumulants de (zi,zj), d'ordre 4
% utilisation des k-statistiques.
%
m+2 m
% g_abcd = ---- mu_abcd - ----(mu_ab.mu_cd + mu_ac.mu_bd +
mu_ad.mu_bc)
% m-1 m-1
%
% i m
% avec mu_abcd = ---.SUM {(z_a(p).z_b(p).z_c(p).z_d(p))},
% m p=1
% 1 m
% et mu_ab = ---.SUM {(z_a(p).z_b(p))}

```

```

% m p=1
% les 5 cumulants sont : g_1111, g_1112, g_1122, g_1222, g_1222
%
% [G_1 G_2 G_3 G_4 G_5] = feval('cumulant',[L,i,j,m]);
% eval(['g_1 int2str(Li) int2str(Lj) int2str(Li) int2str(Lj) ' = G_1']);
% eval(['g_2 int2str(Li) int2str(Lj) int2str(Li) int2str(Lj) ' = G_2']);
% eval(['g_3 int2str(Li) int2str(Lj) int2str(Li) int2str(Lj) ' = G_3']);
% eval(['g_4 int2str(Li) int2str(Lj) int2str(Li) int2str(Lj) ' = G_4']);
% eval(['g_5 int2str(Li) int2str(Lj) int2str(Li) int2str(Lj) ' = G_5]);
%
% (b) Determination de l'angle alpha, maximisant la fonction de contraste
% psi(QG([i,j]), ou QG([i,Lj]) est la rotation de Givens.
%
% (b-1) Calcul des racines de W(izeta)=sum ((c_i.izeta^i)), --> report dans
% (b-2)
%
% i=0
%
% c_4 = g_1111*g_1112 - g_2222*g_1222;
% c_3 = g_1111^2+g_2222^2 - 4*(g_1112^2+g_1222^2) -
% 3*g_1122*(g_1111+g_2222);
% c_2 = 3*(g_1111+g_2222-6*g_1122)*(g_1222-g_1112);
% c_1 = 3*(g_1111^2+2*g_2222^2) - 2*g_1111*g_2222 - 32*g_1112*g_1222 -
% 36*g_1122^2;
% c_0 = -4*(c_2/3 + 4*c_4);
% v1_c = [c_4 c_3 c_2 c_1 c_0];
% vc_rt1 = np_4(v1_c);
% verif1 = roots(v1_c);
%
% (b-2) Calcul des valeurs de psi(izeta)=SUM[izeta^i]^4.
% 2.sum(b_i.izeta^i)
%
% a_0 = g_1111; a_1 = 4*g_1112; a_2 = 6*g_1122; a_3 = 4*g_1222; a_4 =
% g_2222;
% b_4 = a_0^2 + a_4^2;
% b_3 = 2*(a_3*a_4 - a_0*a_1);
% b_2 = 4*a_0^2 + 4*a_4^2 + a_1^2*a_3^2 + 2*a_0*a_2 + 2*a_2*a_3;
% b_1 = 2*(-3*a_0*a_1 + 3*a_3*a_4 + a_1*a_3 + a_0*a_4 - a_2*a_3 -
% a_1*a_2);
% b_0 = 2*(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2*a_0*a_2 + 2*a_0*a_4 +
% + 2*a_1*a_3 + 2*a_2*a_4);
% v1_b = [b_4 b_3 b_2 b_1 b_0];
% psi_izeta = polyval(v1_b,vc_rt1)/(vc_rt1.^2+4).^2;
%
% (b-3) Retenir la valeur maximale (izeta qui lui correspond)
%
% viNbr = find(imag(psi_izeta) == 0);
% psi_izeta = psi_izeta(viNbr);
% [vmax,ind] = max(psi_izeta); % marche cas au plus 1 max. si plus, le 1er
% indice sort.
% izeta = psi_izeta(ind);
%
% (b-4) Calcul de theta racine de: theta^2-izeta*theta-1=0, la solution
% retenue appartient a : [-1,1] ==> alpha = arctg(theta).
%
% v1_coef = [1 -izeta -1];
% vc_rt2 = np_2(v1_coef);
% verif2 = roots(v1_coef);
%
% if (-1 < vc_rt2(1) & vc_rt2(1) <= 1)
% theta = vc_rt2(1);
% else
%
% (b-2) Calcul des valeurs de psi(izeta)=SUM[izeta^i]^4.
% 2.sum(b_i.izeta^i)

```

```

theta = vc_n2(2);
end
theta;
alpha = atan(theta);
%
% (c)Accumulation de F:=F.QG([L_i,L_j]) . F_i[Nxro] et QG[roxo]= -----
|           1   1  theta
|           sqrt(1+theta^2) 1-
theta 11
%
QG = [1,theta,-theta,1]/sqrt(1+theta^2); % QG[2x2]
ident([L_i,L_j],[L_i,L_j]) = QG;
QG_i = ident;
R_i = R_i*QG_i;
%
% (d)Mise a jour de Z:=QG([L_i,L_j]).Z. (Z[roxoT] et QG[roxo])
Z = QG_i*Z_i;
%
if ( L_j == Nsrc )
    L_i = L_i + 1;
    L_j = L_i;
end
%-----5-Fin boucle sur paire a traiter
if (theta < 1/Msrc), break, end
Bly = Bly + 1;
%
%-----6-Fin boucle sur Bly (si Bly=Blym, ou alpha<<1/m ou eps)
end
%-----7-Calcul de la norme des colonnes de F; i
% Delta_i = ||F_i||
%
for col = 1:ro
    Delta(col) = norm(F(:,col));
end
%
%-----8-Arrangement par ordre decroissant de Delta
% Delta:=P.Delta.P* et F:=F.P*
%
Perm = zeros(ro);
Delta= diag(Delta);
%
%-----9-determination de la matrice de permutation
%
for i_d = 1:ro
    [vm,id] = max(Delta);
    Perm(i_d,id) = 1;
    Delta(id) = 0;
    Delta = Perm*Delta*Perm';
    F_i = F_i*Perm';
%
%-----9-Normalisation de F par la transf.de F:=F.Delta^-1
inv_Delta = diag(1./diag(Delta));
R_i = F_i*inv_Delta;
%
%-----10-Fixer la phase (signe) de chaque colonne de F selon la
definition 4(e).
% F := F.D , dans chaque col.de F, le plus grand module est positif reel (rem-
place par sa partie reelle ou module)
%
D = zeros(ro);
for col=1:ro
    [val_mod(col),ind_mod(col)] = max(abs(F(:,col)));
    signe_mod(col) = sign(real(F(ind_mod(col),col)));
    F_i(ind_mod(col),col)=real(F_i(ind_mod(col),col));
    val_mod(col)
    if (signe_mod(col) < 0)

```

ACI_N=2.m 2 juillet 97

Fethi Malamane

```
D(col,col)) = -1;  
else  
  D(col,col)) = +1;  
end  
F = Ft*D; % voir d'abord même si changement des autres éléments de F(:,i)  
%
```

```

%
% DESCRIPTION:
% =====
%
% POUR ESSENTIELLEMENT LA SEPARATION DES SIGNAUX, EN
% UTILISANT %L'ANALYSE EN COMPOSANTES INDEPENDANTES. LA
% STATISTIQUE %D'ORDRE %SUPERIEUR ETANT UTILISEE ICI, CAR
% LES SIGNAUX TRAITES %SONT DE DISTRIBUTION NON-GAUSSI-
% ENNE, LEGITIMISANT L'USAGE DE %LA FONCTION %DE CON-
% TRASTE.
%#...#...#...#%...#...#%...#...#%...#...#%...#...#%...#...#%...#.
%
clear
format long
load vifsrc2_1 %.....Ysrc [4x2000]
%
%%-----1-Blanchissement spatial des variables
%
% TRANSFORMATION SVD DE LA MATRICE DES OBSERVATIONS
Y[N,T]
%
% UNE AUTRE VERSION DU CALCUL DE LA SVD EST PROPOSEE
% POUR LES MATRICES RECTANGULAIRES (mxn), AVEC m>>n.
%
%
% Y = V.S.U' (V[Nxro], S[ro*ro], U'[ro*T]) et ro=rank(Y), N=n<<T=m.
%
[Nsrc,Msrc] = size(Ysrc);
m = Msrc;
ro = rank(Ysrc);
%
%-----(i) decomposition QR : % Qt'*Ysrc' = R; R triang.sup.
%-----(ii) SVD (R): Rt = Xt.St.Yt';
%-----(iii) mod_svd[Ysrc'] ==>Qt.Xt.St.Yt';    |V := Yt
% Ysrc' = Qt*Xt*St*Yt'; ==> Ysrc = Yt*St*Xt'*Qt' ==> |S := St
%                                         |U' := Xt'.Qt'
%
[Qt,Rt]=qr(Ysrc',0);
[Xt,St,Yt]=svd(Rt);
%

```

```

% initialisation de Z := sqrt(Msrc).Xt'.Qt' (Z[ro*T]) et L := Yt.St/sqrt(Msrc)
(L[Nxro])
%
Zt = sqrt(Msrc)*Xt'*Qt';
Lt = Yt*St/sqrt(Msrc);
Z = Zt;
%
%-----2-Initialisation de Ft := Lt
%
Ft = Lt;
%
%-----3-Debut boucle sur Bly=1,2,...,Blym<=1+sqrt(ro)
%
Bly = 1;
while (Bly <= 1+sqrt(ro))
%
%-----4-Debut boucle sur paire=1,...,ro(ro-1)/2 paires (Li,Lj) a
trakter
% selon un ordre cyclique, les lignes par ex.
%
Li = 1; Lj = Li;
for paire = 1:ro*(ro-1)/2
ident = eye(ro); Lj = Lj + 1;
save Zsrc.mat Z
%
% 4-(a)Estimation (sans biais) des cumulants de (zi,zj), d'ordre 4
% utilisation des k-statistiques.
%
m+2           m
% g_abcd = ---- mu_abcd - ----(mu_ab.mu_cd + mu_ac.mu_bd +
mu_ad.mu_bc)
%
m-1           m-1
%
l           m
% avec mu_abcd = ---.SUM ((z_a(p).z_b(p).z_c(p).z_d(p))),
m           p=1
%
l           m
% et mu_ab = ---.SUM ((z_a(p).z_b(p))

```

```

%
% m p=1
%
% les 5 cumulants sont : g_lli, g_llij, g_liji, g_lljj, g_liji.
%
% [G_1 G_2 G_3 G_4 G_5] = feval('cumulant',[L1,L2,m]);
%
eval(['g_1' int2str(L1) int2str(L1) int2str(L1) ' = G_1']);
eval(['g_2' int2str(L1) int2str(L1) int2str(L1) ' = G_2']);
eval(['g_3' int2str(L1) int2str(L1) int2str(L1) ' = G_3']);
eval(['g_4' int2str(L1) int2str(L1) int2str(L1) ' = G_4']);
eval(['g_5' int2str(L1) int2str(L1) int2str(L1) ' = G_5']);
%
% (b) Determination de l'angle alpha, maximisant la fonction de contraste
% psi(QGLi,Lij), ou QGLi,Lij est la rotation de Givens.
%
% (b-1) Calcul des racines de W(tzeta)=sum [(c_izeta)^i], ----> report dans
% (b-2)
%
% i=0
%
% c_4 = g_1111*g_1112 - g_22222*g_12222;
c_3 = g_1111^2+g_22222^2 - 4*(g_1112^2+g_12222^2) -
3*g_1122*(g_1111+g_22222-6*g_1122)*(g_1222-g_1112U
c_2 = 3*(g_1111^2+g_22222^2) - 2*g_1111*g_22222 - 32*g_1112*g_12222 -
36*g_1122^2;
c_0 = -4*(c_23 + 4*c_4);
%
v1_c = [c_4 c_3 c_2 c_1 c_0];
vc_r1 = r2_4(v1_c);
verif1 = roots(v1_c);
%
% (b-2) Calcul des valeurs de psi(tzeta)=SUM[i]tzeta^(2+4)^i
2.sum(b_izeta^i)

```

ACI_N=4.m 2 juillet 97

Fethi Malamane

```

%
% a_0 = g_1111; a_1 = 4*g_1112; a_2 = 6*g_1122; a_3 = 4*g_1222; a_4 =
g_2222;
b_4 = a_0^2 + a_4^2;
b_3 = 2*(a_3*a_4 - a_0*a_1);
b_2 = 4*a_0^2 + 4*a_4^2 + a_1^2 + a_3^2 + 2*a_0*a_2 + 2*a_2*a_4;
b_1 = 2*(-3*a_0*a_1 + 3*a_3*a_4 + a_1*a_4 - a_0*a_3 + a_2*a_3 -
a_1*a_2);
b_0 = 2*(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2*a_0*a_2 + 2*a_0*a_4 -
+ 2*a_1*a_3 + 2*a_2*a_4);
v1_b = [b_4 b_3 b_2 b_1 b_0];
psi_izeta = polyval(v1_b,vc_r1)/(vc_r1.^2+4).^2;
%
% (b-3) Retenir la valeur maximale (zeta qui lui correspond)
%
% v1Nbr = find(imag(psi_izeta) == 0);
psi_izeta = psi_izeta(v1Nbr);
[vmax,ind] = max(psi_izeta); % marche cas au plus 1 max. si plus, le 1er
indice sort.
izeta = psi_izeta(ind);
%
% (b-4) Calcul de theta racine de: theta^2-izeta, theta=1=0, la solution
% retenue appartient a : [1-1,1] ==> alpha = arcig(itheta).
%
v1_coef = [1 -izeta -1];
vc_r2 = r2_2(v1_coef);
verif2 = roots(v1_coef);
%
if (-1 < vc_r2(1) & vc_r2(1) <= 1)
    theta = vc_r2(1);
else
    theta = vc_r2(1);
end

```

```

theta = vc_r12(2);
end
theta;
alpha = atan(theta);
%
% (c)Accumulation de F:=FQQG([L1,Lj]) , F[Nxro] et QG[roxo]= .....
|
%           1   1  theta
%           sqrt(1+theta^2)-theta||

QG = [1,theta,-theta,1]/sqrt(1+theta^2); % QG[2x2]
ident([L1,Lj],[L1,Lj]) = QG;
QGt = ident;
Ft = Ft*QGt';
%
% (d)Mise a jour de Z:=QG([L1,Lj]).Z (Z[ro,T] et QG[roxo])
%
Z = QGt*Z;
%
if ( Lj == Nsrc )
    Lj = Lj + 1;
Lj = Lj;
%
if (theta < 1/Msrc), break, end
Bly = Bly + 1;
%
%-----5-Fin boucle sur paire a traiter
%
if (Bly < 1/Msrc), break, end
Bly = Bly + 1;
%
%-----6-Fin boucle sur Bly ( si Bly=Blym, ou alpha<<1/m ou eps)
%
%-----7-Calcul de la norme des colonnes de F,j
% Deltaii = ||F,j||

%
% for col = 1:r0
% Deltai(col) = norm(Ft(:,col));
% end
%
%-----8-Arrangement par ordre decroissant de Delta
% Delta:=P*Delta,P* et F:=F*P*
%
% zeros(ro);
% Delta= diag(Delta);
%
% zeros(ro);
% Delta= diag(Delta);
%
%-----9-Normalisation de F par la transf.de F:=F.Delta^-1
inv_Delta = diag(1./diag(Delta));
Ft = Ft*inv_Delta;
%
%-----10-Fixer la phase (signe) de chaque colonne de F selon la
% definition 4(e).
% F := F.D , dans chaque col.de F, le plus grand module est positif reel (rem-
% place par sa partie reelle ou module)
%
D = zeros(ro);
for col=1:r0
    [val_mod(col),ind_mod(col)] = max(abs(Ft(:,col)));
    signe_mod(col) = sign(real(Ft(ind_mod(col),col)));
    Ft(ind_mod(col),col)=real(Ft(ind_mod(col),col));
    val_mod(col)
    if (signe_mod(col) < 0)
        D(col,col) = -1;
    end
end
%
%-----11-Fin boucle sur Bly ( si Bly=Blym, ou alpha<<1/m ou eps)
%
% prendre 2e membre =

```

```
else
D(col,col) = +1;
end
end
F = F*D;% voir d'abord memo si changement des autres elements de F(:,i)
%
.
```

```

%-----fonction de calcul des cumulants-----
%
% 
$$E_{abcd} = \sum_{m=1}^{m+2} \sum_{m=1}^m \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m (Z_{a,p}(p)Z_{b,q}(q)Z_{c,m}(m)Z_{d,m}(m))$$

%
% et 
$$mu_{ab} = \sum_{m=1}^m (Z_{a,m}(m)Z_{b,m}(m))$$

%
% les 5 cumulants sont estimes sans biais :  $E_{1111}, E_{1112}, E_{1122}, E_{1222}$ 
%
function [CUM1,CUM2,CUM3,CUM4,CUM5] = cumulant(prw)
load Zsrc %....Z
Li = prw(1); Lj = prw(2); m = prw(3);
mu_1 = sum(Z(Li,:).*Z(Li,:).*Z(Li,:))/m;
mu_2 = sum(Z(Li,:).*Z(Li,:).*Z(Li,:).*Z(Li,:))/m;
mu_3 = sum(Z(Li,:).*Z(Li,:).*Z(Li,:).*Z(Li,:).*Z(Li,:))/m;
mu_4 = sum(Z(Li,:).*Z(Lj,:).*Z(Lj,:).*Z(Lj,:))/m;
mu_5 = sum(Z(Lj,:).*Z(Lj,:).*Z(Lj,:).*Z(Lj,:))/m;
mu_6 = sum(Z(Li,:).*Z(Li,:).*Z(Li,:))/m;
mu_7 = sum(Z(Li,:).*Z(Lj,:))/m;
mu_8 = sum(Z(Lj,:).*Z(Lj,:))/m;
%
CUM1= ((m+2)*mu_1 - m*(mu_6*mu_6 + mu_6*mu_6 + mu_6*mu_6))/(m-1);
CUM2= ((m+2)*mu_2 - m*(mu_6*mu_7 + mu_6*mu_7 + mu_6*mu_7))/(m-1);
CUM3= ((m+2)*mu_3 - m*(mu_6*mu_8 + mu_7*mu_8 + mu_7*mu_8))/(m-1);
CUM4= ((m+2)*mu_4 - m*(mu_7*mu_8 + mu_7*mu_8 + mu_7*mu_8))/(m-1);
CUM5= ((m+2)*mu_5 - m*(mu_8*mu_8 + mu_8*mu_8 + mu_8*mu_8))/(m-1);
%
```



```

%
E = [E1;E2];
Cx = cov(E');
[V,D] = eig(Cx);
Ss = V*E;
Ss1=Ss(1,:); Ss2=Ss(2,:);
ax=linspace(400,500,101);
subplot(2,1,1), plot(ax,Ss1,'r')
subplot(2,1,2), plot(ax,Ss2,'m')
%print -deps -epsi acpN_2
%
for i=1:101
E1_1t = a11*X1t(i) + a12*X2t;
E2_1t = a21*X1t(i) + a22*X2t;
E_1t = [E1_1t,E2_1t];
Cx_1 = cov(E_1t);
[V_1,D_1] = eig(Cx_1);
S_1t = V_1'*E_1t';
%
S11t = S_1t(1,:);
S12t = S_1t(2,:);
S11 = [S11;S11t];
S12 = [S12;S12t];
end
%
S11t = S_1t(1,:);
S12t = S_1t(2,:);
S11 = [S11;S11t];
S12 = [S12;S12t];
%
for i=1:101
E1_2t = a11*X1t(i) + a12*X2t(i);
E2_2t = a21*X1t(i) + a22*X2t(i);
E_2t = [E1_2t,E2_2t];
Cx_2 = cov(E_2t);
[V_2,D_2] = eig(Cx_2);
S_2t = V_2'*E_2t';
%
S21t = S_2t(1,:);
S22t = S_2t(2,:);
S21 = [S21t;S21t];
S22 = [S22t;S22t];
end
%
%//-%//-%//-%//-%//-%
% orthogonalisation
%
%% Call A.C.I.
ACI_N=2,m
load ortho
figure(2)
axis([-15 15 -20 20])
hold on
%subplot(3,1,1), plot(E11,E21,:,'E12,E22,:') grid
%title('representation isometrique a l'entree de l''A.C.I. et de l''A.C.P.')
hold off
%print -deps -epsi isomN_21
figure(3)
axis([-15 15 -20 20])
hold on
%subplot(3,1,2), plot(E12,S22,:') grid
%title('representation isometrique en sortie de l''A.C.P.')
hold off
% print -deps -epsi isomN_22
figure(4)
axis([-15 15 -5 5])
hold on
subplot(3,1,3), plot(E_11,E_21,:,'E_12,E_22,:') grid
%title('representation isometrique en sortie de l''A.C.I.')
hold off
%print -deps -epsi isomN_23
%
load MARBRIDGE, %... Ysrc_Marb; [9x2000]
Cx = cov(Ysrc_Marb');

```

K_L.m 2 juillet 9

Fethi Malamane

```

[V,D] = eig(Cx);
Ss = V*Ysrc_Marb;
%
Ss1=Ss(1,:); Ss2=Ss(2,:); Ss3=Ss(3,:);
Ss4=Ss(4,:); Ss5=Ss(5,:); Ss6=Ss(6,:);
Ss7=Ss(7,:); Ss8=Ss(8,:); Ss9=Ss(9,:);
%
%save ACP_MARB9.mat Ss1 Ss2 Ss3 Ss4 Ss5 Ss6 Ss7 Ss8 Ss9
%print -deps -epsi KL_Marb9

```

ANNEXE B

**Principales références utilisées de la
bibliographie [5], [6] et [8].**

NOTE TO USERS

**Copyrighted materials in this document have not been filmed at
the request of the author. They are available for consultation in
the author's university library.**

163-209

UMI

© 1993, Applied Image, Inc. All Rights Reserved
APPLIED IMAGE, INC.
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/288-5989
Fax: 716/288-0300

