

**Titre:** Convection naturelle thermosolutale au sein d'une couche poreuse  
Title: horizontale

**Auteur:** Ahmed Mahidjiba  
Author:

**Date:** 1998

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Mahidjiba, A. (1998). Convection naturelle thermosolutale au sein d'une couche poreuse horizontale [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal].  
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/6909/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/6909/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Patrick Vasseur  
Advisors:

**Programme:** Unspecified  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONVECTION NATURELLE THERMOSOLUTALE  
AU SEIN D'UNE COUCHE POREUSE HORIZONTALE

AHMED MAHIDJIBA  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
NOVEMBRE 1998



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

*Our file* *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-38693-7

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

CONVECTION NATURELLE THERMOSOLUTALE  
AU SEIN D'UNE COUCHE POREUSE HORIZONTALE

présenté par : MAHIDJIBA Ahmed

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. ROBILLARD Luc, D.Sc., président

M. VASSEUR Patrick, Ph.D, membre et directeur de recherche

M. PRUD'HOMME Michel, Ph.D., membre

## DÉDICACE

À mes parents

À ma femme

À mon adorable fille Asmaa

À mes frères et sœurs

À tous mes amis.

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé sous la supervision du professeur Patrick Vasseur, du département de génie mécanique, section aérothermique, de l'École Polytechnique de Montréal. Je désire tout d'abord exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus chaleureux à mon directeur de recherche, Monsieur **Patrick Vasseur** pour son aide appréciable, pour ses conseils précieux, pour ses idées originales qui ont enrichi cette thèse et pour sa disponibilité permanente. Je désire également remercier chaleureusement Monsieur **Mahmoud Mamou** qui m'a fait profiter de son expérience dans le domaine de la convection naturelle et m'a permis de me familiariser avec ce domaine.

Je tiens à remercier sincèrement les professeurs **Luc Robillard** et **Michel Prud'homme** pour avoir bien voulu participer à notre jury.

Je désire également remercier ma femme Sara pour son soutien permanent et son encouragement durant toute cette période.

Mes remerciements vont également à tous mes amis et en particulier Kamel, Lamine et Marwan pour leur soutien et leur encouragement.

## RÉSUMÉ

Depuis la découverte des ‘fontaines de sel’ comme curiosité océanographique, la convection de double diffusion a été reconnue comme un phénomène de grande importance dans de nombreux problèmes naturels et industriels comme par exemple, la métallurgie, les procédés de séchage, etc. La convection de double diffusion est, comme le nom l’indique, un phénomène d’écoulement induit par un gradient de densité résultant de l’effet combiné de gradients de température et de concentration.

La présente thèse porte sur la convection thermosolutale au sein d’une couche poreuse rectangulaire et horizontale. Le milieu poreux est modélisé à partir des équations classiques de Darcy sur la base des approximations de Boussinesq. On suppose que la couche poreuse est soumise à des conditions aux frontières thermiques et solutales de type Neumann et Dirichlet, respectivement. Des modèles analytiques et numériques ont été développés pour l’étude de la stabilité linéaire dans la première partie de cette thèse. Une telle étude permet de déterminer le nombre de Rayleigh thermique supercritique  $R_{TC}^{sup}$ , marquant la naissance de la convection. Dans le cas où les forces de poussée résultant des gradients de température et de concentration, s’exercent dans des directions opposées, l’existence d’un régime convectif oscillant est démontré. Les paramètres de contrôle délimitant l’existence de ce régime oscillant à savoir le rapport de forme de la cavité,  $A$ , le nombre de Rayleigh thermique,  $R_T$ , le rapport des forces thermiques et solutales,  $N$ , le nombre de Lewis,  $Le$  et la porosité normalisée de la matrice poreuse,  $\varepsilon$  sont déterminés. Dans la deuxième partie de cette thèse, un code numérique en différences finies, permettant de résoudre les équations de base gouvernant le présent problème, a été développé. Les résultats numériques obtenus illustrent l’influence des paramètres de base du problème sur les transferts de chaleur et de masse. Ces résultats sont validés par rapport à d’autres travaux antérieurs portant sur l’étude de la convection thermosolutale au sein d’une couche poreuse. L’existence d’un régime de convection

sous critique, à des nombres de Rayleigh inférieurs au nombre de Rayleigh supercritique, a été démontrée. Cette thèse nous a permis de mettre en évidence les effets de conditions aux frontières mixtes sur la convection thermosolutale en milieux poreux.



## ABSTRACT

Since the discovery of the 'salt fountains' as oceanographical curiosity, double-diffusive convection has been recognized as a phenomenon of great importance in many industrial and natural problems as for example in oceanography, geophysics, material science, metallurgy, drying processes, etc. Double-diffusive convection is a phenomenon in which flows are induced by a gradient of density resulting from the combined effect of gradients of temperature and concentration.

The present thesis considers thermohaline convection in a horizontal rectangular porous layer. The flow in the porous medium is modeled on the basis of Darcy's equation and the Boussinesq approximation. The thermal and solutal boundary conditions applied on the porous layer are mixed, i.e. that a combination of Dirichlet and Neumann boundary conditions are considered. In the first part of this thesis, numerical and analytic models have been developed in order to study the linear stability of the system. Such study allows to determine the supercritical Rayleigh number  $R_{TC}^{sup}$ , marking the onset of convection. In the particular case where the buoyancy forces induced by the temperature and concentration gradients are exerted in opposed directions, the existence of an oscillating convective mode is demonstrated. The governing parameters delimiting the existence of this oscillating regime are the aspect ratio of the cavity  $A$ , the thermal Rayleigh number  $R_T$ , the buoyancy ratio  $N$ , the Lewis number  $Le$  and the normalized porosity of the porous medium  $\varepsilon$ . In the second part of this thesis, a numerical code, based on a finite difference method, has been developed in order to solve the full equations governing the present problem. The numerical results illustrate the effect of the governing parameters on the flows and the heat and mass transfer. The existence of a regime of subcritical convection, has been demonstrated.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE .....	iv
REMERCIEMENTS.....	v
RÉSUMÉ .....	vi
ABSTRACT.....	viii
TABLE DES MATIÈRES .....	ix
LISTE DES FIGURES .....	xii
LISTE DES TABLEAUX.....	xvi
LISTE DES SIGLES ET ABREVIATIONS.....	xvii

### CHAPITRE I : INTRODUCTION

1.1 Généralités .....	1
1.2 Définition du problème .....	2
1.3 Revue bibliographique .....	2
1.4 Méthodes utilisées et contenu de la thèse .....	5

### CHAPITRE II : FORMULATION DU PROBLÈME

2.1 Définition du problème .....	6
2.2 Hypothèses simplificatrices .....	6
2.3 Formulation mathématique du problème.....	8
2.3.1 Équation de continuité (conservation de la masse).....	9
2.3.2 Équation de conservation de la quantité du mouvement (Loi de Darcy).....	9
2.3.3 Équation de l'énergie .....	10
2.3.4 Équation de la concentration.....	11
2.3.5 Conditions aux frontières hydrodynamiques .....	11
2.3.6 Conditions aux frontières thermiques et massiques.....	11
2.4 Formulation adimensionnelle du problème .....	12
2.5 Taux des transferts de chaleur et de masse .....	14

### CHAPITRE III : ANALYSE DE LA STABILITÉ LINÉAIRE DU SYSTÈME

3.1 Introduction.....	16
3.2 Théorie de la stabilité linéaire.....	16
3.2.1 Stabilité marginale $p = 0$ .....	17
3.2.1.1 Solution analytique .....	17
3.2.1.2 Solution numérique : éléments finis .....	21
3.2.2 Stabilité transitoire $p \neq 0$ .....	27
3.2.2.1 Solution analytique : Galerkin .....	27
3.2.2.2 Solution numérique : éléments finis .....	32

### CHAPITRE IV : SOLUTION NUMÉRIQUE

4.1 Méthode des différences finies .....	34
4.2 Discrétisation des équations.....	34
4.2.1 Équation de conservation de la quantité de mouvement.....	36
4.2.2 Équations de l'énergie et de la concentration .....	37
4.2.2.1 Équation de l'énergie .....	37
4.2.2.2 Équation de la concentration.....	38
4.2.3 Les conditions aux frontières .....	39
4.2.4 Le champ de vitesse .....	40
4.2.5 Nombres de Nusselt et de Sherwood .....	41
4.3 Critères de convergence.....	34
4.4 Algorithmes de calcul.....	42
4.5 Validation de la méthode numérique.....	43
4.6 Effet du maillage.....	44

### CHAPITRE V : RÉSULTATS ET DISCUSSION

5.1 Stabilité linéaire.....	46
5.1.1 Effet du rapport de forme, $A$ .....	46
5.1.2 Effet du paramètre, $NLe$ .....	50

5.1.3	Diagramme de stabilité .....	57
5.1.1	Conditions aux frontières thermiques de type Dirichlet et solutales de type Neumann.....	59
5.2	Convection à amplitude finie .....	65
5.2.1	Effet du nombre de Rayleigh thermique, $R_T$ .....	65
5.2.2	Courbe de bifurcation .....	71
 <b>CHAPITRE VI : CONCLUSION</b>		
6.1	Stabilité linéaire.....	74
6.2	Convection à amplitude finie.....	75
6.3	Perspectives.....	75
 <b>RÉFÉRENCES</b> .....		 77

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Modèle physique : Cavité rectangulaire soumise à des flux de chaleur constants et des concentrations constantes .....7
Figure 3.1	Élément quadrilatère de Lagrange à neuf nœuds dans le système référentiel .....24
Figure 4.1	Maillage uniforme du domaine physique .....35
Figure 5.1	Effet du rapport de forme $A$ , sur le paramètre $a$ : a) quand $NLe > 0$ et b) quand $NLe < 0$ .....47
Figure 5.2	Effet du rapport de forme $A$ , sur le paramètre $b$ : a) quand $NLe > 0$ et b) quand $NLe < 0$ .....48
Figure 2.3	Effet du rapport de forme $A$ , sur le paramètre $c$ : a) quand $NLe > 0$ et b) quand $NLe < 0$ .....49
Figure 5.4.	Effet du rapport de forme $A$ , sur le paramètre $R_T(NLe + 1)$ pour $NLe = 0$ et $NLe = \infty$ .....51
Figure 5.5	Effet du paramètre $NLe$ sur le nombre de Rayleigh thermique supercritique $R_{TC}^{sup}$ pour différentes valeurs du rapport de forme $A$ .....51
Figure 5.6	Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité carrée ( $A = 1$ ) : a) $NLe = 0$ , $a = 22.95$ , $b = 0.57$ , $c = 1.96$ et $R_{TC}^{sup} = 22.95$ et b) $NLe = 50$ , $a = 23.38$ , $b = 0.60$ , $c = 1.93$ et $R_{TC}^{sup} = 0.76$ .....52

- Figure 5.7 Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité rectangulaire ( $A=5$ ): a)  $NLe=0$ ,  $a=12.45$ ,  $b=0.05$ ,  $c=25.96$  et  $R_{TC}^{sup}=12.45$  et b)  $NLe=50$ ,  $a=23.38$ ,  $b=0.60$ ,  $c=1.93$  et  $R_{TC}^{sup}=0.76$  .....53
- Figure 5.8 Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité carrée ( $A=1$ ): a)  $NLe=-2$ ,  $a=72.47$ ,  $b=0.38$ ,  $c=2.18$  et  $R_{TC}^{sup}=307.35$ , b)  $NLe=-3$ ,  $a=260.11$ ,  $b=0.25$ ,  $c=2.93$  et  $R_{TC}^{sup}=982.93$  et c)  $NLe=-5$ ,  $a=1079.84$ ,  $b=0.15$ ,  $c=4.49$  et  $R_{TC}^{sup}=4157.09$  .....55
- Figure 5.9 Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité rectangulaire ( $A=5$ ): a)  $NLe=-25$ ,  $a=41.58$ ,  $b=0.03$ ,  $c=27.01$  et  $R_{TC}^{sup}=200$ , b)  $NLe=-40$ ,  $a=225.26$ ,  $b=0.02$ ,  $c=35.87$  et  $R_{TC}^{sup}=885.29$  et c)  $NLe=-50$ ,  $a=430.23$ ,  $b=0.01$ ,  $c=43.35$  et  $R_{TC}^{sup}=1715.58$  .....56
- Figure 5.10 Diagramme de stabilité pour  $A=1$ ,  $Le=10$ ,  $\varepsilon=1$  .....58
- Figure 5.11 Influence du paramètre  $NLe$  sur le nombre de Rayleigh thermique supercritique  $R_{TC}^{sup}$ , pour le cas d'une cavité rectangulaire ( $A=1$  et  $A=\infty$ ) soumise à des conditions aux frontières thermiques de type Dirichlet et solutales de type Neumann.....60
- Figure 5.12 Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité carrée ( $A=1$ ) soumise à des conditions aux frontières thermiques de type Dirichlet et solutales de type Neumann, : a)  $NLe=0$  et  $R_{TC}^{sup}=4\pi^2$  et b)  $NLe=50$ ,  $R_{TC}^{sup}=0.45$  et  $R_{SC}^{sup}=22.95$  .....61

- Figure 5.13 Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité rectangulaire ( $A = 5$ ) soumise à des conditions aux frontières thermiques de type de type Dirichlet et solutales de type Neumann : a)  $NLe = 0$  et  $R_{TC}^{sup} = 4\pi^2$  et b)  $NLe = 50$ ,  $R_{TC}^{sup} = 0.24$  et  $R_{SC}^{sup} = 12$  .....62
- Figure 5.14 Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité carrée ( $A = 1$ ) soumise à des conditions aux frontières thermiques de type Dirichlet et solutales de type Neumann : a)  $NLe = 0.2$ ,  $R_{TC}^{sup} = 59.47$  et  $R_{SC}^{sup} = -11.8$  b)  $NLe = -0.4$ ,  $R_{TC}^{sup} = 111.66$  et  $R_{SC}^{sup} = -44.66$  c)  $NLe = -0.9$ ,  $R_{TC}^{sup} = 1055.69$  et  $R_{SC}^{sup} = -950.121$  .....63
- Figure 5.15 Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité rectangulaire ( $A = 5$ ) soumise à des conditions aux frontières thermiques de type Dirichlet et solutales de type Neumann: a)  $NLe = -0.4$ ,  $R_{TC}^{sup} = 91.60$  et  $R_{SC}^{sup} = -36.64$  c)  $NLe = -0.9$ ,  $R_{TC}^{sup} = 1049.69$  et  $R_{SC}^{sup} = -941.12$  .....64
- Figure 5.16 Effet du nombre de Rayleigh thermique  $R_T$  sur les fonctions de courant maximale,  $\Psi_{max}$ , et minimale,  $\Psi_{min}$ , dans le cas  $A = 1$  et  $N = 1$  .....66
- Figure 5.17 Effet du nombre de Rayleigh thermique  $R_T$  sur le nombre de Nusselt moyen  $\bar{Nu}$ , dans le cas  $A = 1$  et  $N = 1$  .....67
- Figure 5.18 Effet du nombre de Rayleigh thermique,  $R_T$ , sur le nombre de Sherwood moyen  $\bar{Sh}$  dans le cas  $A = 1$  et  $N = 1$  .....68

Figure 5.19 Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas  $N = 1$ ,  $A = 1$  et  $R_T = 50$  : a)  $Le = 0.1$ ,  $\Psi_{\max} = 2.160$  et  $\Psi_{\min} = 0$ , b)  $Le = 1$ ,  $\Psi_{\max} = 4.080$  et  $\Psi_{\min} = 0$  et c)  $Le = 5$ ,  $\Psi_{\max} = 3.030$  et  $\Psi_{\min} = 0$ . .....69

Figure 5.20 Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas  $N = 1$ ,  $A = 1$  et  $Le = 2$  : a)  $R_T = 310$ ,  $\Psi_{\max} = 0.056$  et  $\Psi_{\min} = 0$ , b)  $R_T = 500$ ,  $\Psi_{\max} = 0.641$  et  $\Psi_{\min} = 0$  et c)  $R_T = 1000$ ,  $\Psi_{\max} = 1.356$  et  $\Psi_{\min} = -0.091$  .....70

Figure 5.21 Courbe de bifurcation : variation des fonctions de courant,  $\Psi_{\max}$ , et  $\Psi_{\min} = 0$ , en fonction du nombre de Rayleigh thermique  $R_T$  pour  $A = 1$ ,  $N = -0.1$  et  $Le = 10$  ( $R_{TC}^{sur} = 31$ ,  $R_{TC}^{osc} = 42$  et  $R_{TC}^{sup} = 52$ ) .....72



## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Effet du maillage sur la précision de la valeur de $R_{TC}^{sup}$ pour $NLe = 0$ .....	33
Tableau 4.1	Comparaison avec les résultats de Caltagirone [17] pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh $R_T$ .....	43
Tableau 4.2	Comparaison avec les résultats de Kimura et al. [18] pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh $R_T$ .....	43
Tableau 4.3	Effet du maillage sur la précision des valeurs du nombre de Nusselt moyen $\bar{Nu}$ et la fonction de courant maximale $\Psi_{max}$ pour $NLe = \hat{0}$ .....	45

## LISTE DES SIGLES ET ABBREVIATIONS

$A$	rapport de forme de la cavité, $L' / H'$
$D$	diffusivité solutale
$D_p$	diffusivité massique de la concentration dans la matrice poreuse saturée.
$Da$	nombre de Darcy, $K / H'^2$
$g$	accélération de la pesanteur
$H'$	hauteur du système
$K$	perméabilité du milieu poreux
$k_f$	conductivité thermique du fluide
$k_p$	conductivité thermique du milieu poreux saturé
$L'$	largeur de la cavité
$Le$	nombre de Lewis, $\alpha / D$
$N$	rapport des forces de volumes, $\beta_s \Delta S' / \beta_T \Delta T'$
$n$	nombre de cellules
$\bar{n}$	normale au domaine $\Omega$
$N_G$	nombre de point de Gauss
$Nu$	nombre de Nusselt, Eq (2.27)
$\bar{Nu}$	nombre de Nusselt moyen, Eq (2.28)
$Nu_c$	nombre de Nusselt au centre de la cavité ( $x = y = 0$ )
$q'$	flux de chaleur constant (par unité de surface)
$Re$	nombre de Reynolds, $V' \sqrt{K} / \nu$
$R_s$	nombre de Darcy - Rayleigh solutal, $g \beta_s K \Delta S' H' / D \nu$
$R_T$	nombre Darcy- Rayleigh thermique, $g \beta_T K \Delta T' H' / \alpha \nu$
$R_{TC}$	nombre de Darcy - Rayleigh thermique critique
$R_{TC}^{sup}$	nombre de Darcy - Rayleigh thermique supercritique

$R_{TC}^{sur}$	nombre de Darcy - Rayleigh thermique surcritique
$R_{TC}^{osc}$	nombre de Darcy - Rayleigh thermique oscillant
$R_{TC}^{sou}$	nombre de Darcy - Rayleigh thermique souscritique.
$S$	concentration adimensionnelle, $(S' - S'_r) / \Delta S'$
$S'_C$	concentration de la paroi chaude
$S'_F$	concentration de la paroi froide
$S'_r$	concentration de référence à $x' = y' = 0$ , $(S'_F + S'_C) / 2$
$\Delta S'$	écart de concentration, $(S'_C - S'_F)$
$Sh$	nombre de Sherwood, Eq. (2.27)
$\bar{Sh}$	nombre de Sherwood moyen, Eq. (2.28)
$T$	température adimensionnelle, $(T' - T'_r) / \Delta T'$
$T'_r$	température de référence à $x' = y' = 0$
$\Delta T'$	écart de température, $q'H' / k$
$t$	temps adimensionnel, $t'\alpha / \sigma H'^2$
$u$	vitesse adimensionnelle dans la direction $x$ , $u' H' / \alpha$
$v$	vitesse adimensionnelle dans la direction $y$ , $v' H' / \alpha$
$\vec{V}'$	vecteur vitesse dimensionnel, $(u', v')$
$x, y$	coordonnées cartésiennes adimensionnelles du système, $(x', y') / H'$

## SYMBOLES GRECS

$\alpha$	diffusivité thermique, $k_p / (\rho C)_f$
$\beta_s$	coefficient d'expansion solutale
$\beta_T$	coefficient d'expansion thermique
$\varepsilon$	porosité normalisée du milieu poreux, $\varepsilon = \bar{\varepsilon} / \sigma$

$\bar{\varepsilon}$	porosité du milieu poreux
$\kappa$	constante qui vaut 0 pour des conditions aux frontières de type Dirichlet et 1 pour des conditions aux frontières de type Neumann
$\lambda$	valeur propre
$\nu$	viscosité cinématique du fluide
$\rho$	densité du fluide
$(\rho C)_f$	capacité calorifique du fluide
$(\rho C)_p$	capacité calorifique du milieu poreux saturé
$(\rho C)_s$	capacité calorifique de la matrice solide
$\sigma$	rapport des capacités calorifique, $(\rho C)_p / (\rho C)_f$
$\Psi$	fonction de courant adimensionnelle, $\Psi' / \alpha$

## EXPOSANTS

<i>e</i>	élémentaire
<i>sous</i>	valeur souscritique
<i>sup</i>	valeur supercritique
<i>sur</i>	valeur surcritique
<i>osc</i>	valeur oscillante (transition du régime oscillant vers le régime direct)
'	variable dimensionnelle

## INDICES

<i>C</i>	chaud
<i>F</i>	froid
<i>f</i>	fluide

<i>im</i>	imaginaire
<i>max</i>	maximum
<i>min</i>	minimum
<i>p</i>	poreux
<i>re</i>	réelle
<i>S</i>	solutal
<i>s</i>	solide
<i>T</i>	thermique

### AUTRES

{ }	représentation vectorielle
[ ]	représentation matricielle
[ ]'	inverse d'une matrice

# CHAPITRE I

## INTRODUCTION

### 1.1 Généralités

Le phénomène de la convection naturelle d'origine thermique dans les milieux fluides et poreux a fait l'objet dans le passé de nombreuses publications à cause des applications potentielles possibles tant dans la nature que dans l'industrie. Une revue exhaustive des travaux disponibles sur ce sujet a été faite par Platten et Legros [1] pour les fluides et par Nield et Bejan [2] pour les milieux poreux.

Plus récemment, de nombreux auteurs se sont intéressés à un phénomène de même nature où les mouvements de convection sont générés par des gradients de densité induits par des champs de température et de concentration. Ce type d'écoulement, appelé mouvement de convection de double diffusion ou convection thermosolutale, peut apparaître dans un fluide, ou un milieu poreux saturé par un fluide, ayant deux (ou plusieurs) composants diffusants dans le mélange des taux différents. Ce phénomène existe dans des situations réelles diverses. Ainsi, par exemple, on peut citer les applications suivantes:

- ***Pour les milieux fluides:*** croissance de cristaux destinés à l'industrie des semi-conducteurs, processus de séchage, processus de fusion-solidification de mélanges binaires, stockage des gaz liquides ou oxydation des surfaces métalliques.
- ***Pour les milieux poreux:*** ce phénomène intervient dans divers problèmes d'ingénierie comme la migration de l'humidité dans les isolants thermiques fibreux, le transport des contaminants dans les sols saturés, la disposition souterraine de déchets nucléaires et les procédés de séchage.

La majorité des travaux antérieurs qui se sont intéressés aux phénomènes de convection thermosolutale concerne les couches horizontales infinies ou les cavités rectangulaires. Dans ces deux types de configurations les conditions aux frontières thermiques et solutales considérées étaient similaires (soit de type Dirichlet ou de type Neumann). L'absence d'études sur le cas de systèmes soumis à des conditions aux frontières thermiques et solutales mixtes nous a motivé à entreprendre cette investigation. La présente thèse porte sur le cas d'une cavité horizontale soumise à des gradients verticaux de température et de concentration résultants de l'imposition de conditions de Neumann pour la température et de Dirichlet pour la concentration. L'accent a été mis sur la stabilité d'un tel système ainsi sur les effets des paramètres de base sur les transferts de chaleur et de masse induit lorsque le fluide est en mouvement.

## **1.2 Définition du problème**

La présente investigation a pour but l'étude de la convection naturelle thermosolutale, dans un milieu poreux confiné dans une cavité horizontale rectangulaire, saturée par un fluide binaire. Les parois horizontales de la cavité sont soumises à des flux de température constants et des concentrations constantes. On suppose que les parois verticales sont imperméables et adiabatiques. La loi de Darcy est utilisée pour l'équation du mouvement. La forme géométrique simple de la cavité nous permet de bien analyser le problème et de comprendre les mécanismes physiques qui régissent les écoulements induits. Notre étude porte essentiellement sur la mise en évidence de l'influence des paramètres de contrôle du problème, sur l'évolution de la structure de l'écoulement et sur les transferts de masse et de chaleur dans le système.

## **1.3 Revues bibliographiques**

Dans cette section nous présentons une revue de la littérature portant sur le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle thermosolutale en milieux

poreux. Les études effectuées dans le passé sur ce sujet peuvent se classer en deux catégories. Dans la première, les écoulements sont induits par des gradients de température et de concentration appliqués perpendiculairement par rapport à la direction du champ de gravité. Dans la deuxième catégorie ces gradients sont appliqués dans la même direction que la gravité. Le problème considéré dans cette thèse appartient à la seconde catégorie sur laquelle la présente revue bibliographique est axée.

La première étude portant sur l'étude du seuil de la convection de double diffusion au sein d'une couche poreuse horizontale d'extension infinie a été effectuée par Nield [3]. Le nombre de Rayleigh supercritique, marquant le seuil de la naissance de la convection, a été prédit par cet auteur pour divers types de conditions aux limites. Lorsque le soluté joue le rôle d'un stabilisant (et la chaleur d'un déstabilisant), il a été montré que des écoulements convectifs oscillants peuvent se déclencher à un nombre de Rayleigh bien inférieur au nombre de Rayleigh supercritique. Les critères pour l'existence de la convection croissante et oscillante ont été également dérivés par cet auteur. Une extension de cette recherche ci-dessus a été menée par Taunton et al. [4] afin de caractériser plus complètement le seuil de la convection dans une couche poreuse horizontale infinie stratifiée par la température et la concentration. Une analyse linéaire de stabilité a été effectuée par Poulikakos [5] pour étudier la convection de double diffusion dans une couche poreuse horizontale. L'écoulement dans la matrice poreuse a été prédit en utilisant le modèle de Darcy Brinkman, qui tient compte du frottement dû au cisaillement macroscopique. Des résultats pour un fluide visqueux pur et un milieu poreux de Darcy ont été obtenus à partir de son analyse en tant que cas limites. L'influence de courants thermo-convectifs anisotropes en présence des effets de Soret et de Dufour, sur le nombre de Rayleigh critique marginal et surstable, a été étudiée par Malashetty [6]. Il a été constaté que, selon les conditions aux frontières thermiques et solutales considérées, les courants thermo-convectifs ont un effet stabilisant aussi bien qu'un effet déstabilisant par rapport au cas pour lequel ces courants sont absents.



Quelques études sur la convection à amplitude finie dans une couche poreuse saturée par un fluide binaire sont également disponibles dans la littérature. La stabilité non linéaire de la convection thermosolutale dans une couche poreuse horizontale, chauffée par le bas a été étudiée par Radraiah et al. [7]. Le nombre de Rayleigh critique, marquant le seuil de la convection à amplitude finie, a été dérivé en utilisant une représentation tronquée d'une série de Fourier. Les effets des nombres de Prandtl, de Lewis et de Darcy sur la convection ont été discutés par ces auteurs. Brand et Steinberg [8] ont étudié les effets non linéaires en instabilité convective d'un mélange binaire dans un milieu poreux au voisinage du seuil de la convection. Une équation d'amplitude a été dérivée pour les cas stationnaires et les instabilités oscillantes. Un comportement oscillant pour les nombres de Nusselt et de Sherwood ont été observés dans ce dernier cas. Trevisan et Bejan [9] ont effectué une étude théorique et numérique du transfert de masse effectué par la convection à grands nombres de Rayleigh dans une couche poreuse chauffée par le bas. Les prédictions d'une analyse d'échelle proposée par ces auteurs se sont avérées en bon accord avec leurs résultats numériques. Une étude expérimentale de la convection de double diffusion dans un milieu poreux a été effectuée par Murray et Chen [10]. Une bonne concordance pour le nombre de Rayleigh thermique critique a été obtenue entre les expériences et la théorie de la stabilité linéaire.

La convection thermosolutale au sein d'une cavité poreuse chauffée par le bas, a été étudiée par Rosenberg et Spera [11] pour une variété de conditions initiales et de conditions aux frontières. Il a été démontré numériquement que la dynamique des écoulements pour des nombres de Rayleigh et de Lewis fixes dépend fortement du rapport des forces de volume. La convection de double diffusion non linéaire dans un milieu poreux horizontal, dans lequel des conditions horizontales périodiques sont prescrites, a été considérée par Chen et Chen [12]. Les limites de stabilité divisant les régions de différents types d'écoulements ont été identifiées par ces auteurs en termes des nombres de Rayleigh thermique et solutal. La convection naturelle dans une couche poreuse horizontale, chauffée et salée par le bas par des flux uniformes de chaleur et de masse, a été considérée par Mamou et al. [13]. On a observé une bonne concordance

entre la solution analytique, dérivée sur la base de l'approximation de l'écoulement parallèle, et les solutions numériques des équations de base. Récemment, le seuil et le développement de la convection de double diffusion dans une couche poreuse dans laquelle l'agent déstabilisant est celui ayant une diffusivité plus élevée, a été étudié par Nguyen et al. [14]. On a démontré, en se basant sur les théories de la stabilité linéaire et non linéaire, que la convection peut exister à des nombres de Rayleigh au dessous de la valeur supercritique. Ce résultat, indiquant le développement possible d'écoulements stationnaires souscritiques, a été confirmé par les solutions numériques des équations de base.

#### **1.4 Méthodes utilisées et contenu de la thèse**

Dans le deuxième chapitre de cette thèse nous présentons la définition physique du problème ainsi que la formulation mathématique. Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la stabilité linéaire du système afin de déterminer le nombre de Rayleigh critique marquant la naissance de l'écoulement. Deux méthodes sont proposées pour résoudre les équations de la stabilité. La première est analytique, elle permet de déterminer le nombre de Rayleigh supercritique dans le cas où le rapport  $N$ , entre les forces de volume solutales et les forces de volume thermiques, est positif ( $N > 0$ ). La seconde méthode, purement numérique, est plus générale et donne lieu à une solution valide pour  $N > 0$  ou  $N < 0$ . Les résultats obtenus permettent de définir les nombres de Rayleigh surstables et oscillants marquant le passage de la convection vers les modes directs et surstables. Dans le quatrième chapitre de cette thèse on présente la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de base du système décrivant la convection à amplitude finie au sein de la cavité. Dans le cinquième chapitre on présente des résultats analytiques et numériques illustrant l'influence des paramètres de base sur les champs de vitesse, température et concentration ainsi que sur les transferts de chaleur et de masse. L'existence d'une convection souscritique est démontrée. Le sixième chapitre fait l'objet de la conclusion générale sur les résultats obtenus.

## CHAPITRE II

### FORMULATION DU PROBLEME:

#### **2-1 Définition du problème**

La configuration géométrique de l'écoulement à étudier est constituée d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Il s'agit d'une cavité bidimensionnelle horizontale, de hauteur  $H'$  et de largeur  $L'$  (voir la figure 2.1). Les parois horizontales supérieure et inférieure de la cavité sont soumises à des flux uniformes de chaleur  $q'$ , par unité de surface, qui refroidissent et chauffent le système respectivement à un même taux. Des concentrations constantes  $S'_C$  et  $S'_F$  ( $S'_C > S'_F$ ) sont également appliquées sur ces surfaces. Les parois verticales sont supposées imperméables et adiabatiques.

Dans la présente étude, les gradients de température et de concentration imposés au système sont parallèles à l'axe  $x'$ . La cavité est placée dans un champ de pesanteur uniforme et constant  $\bar{g}$ . L'interaction entre la gravité et les gradients de température et de soluté, donnent naissance à des mouvements convectifs naturels. Ces derniers sont dus essentiellement à la distribution non uniforme de la densité du fluide engendrée par les facteurs cités ci-dessus. Le problème est de déterminer le nombre de Rayleigh critique marquant le début de la convection. En régime de convection à amplitude finie, on veut également prédire les transferts de chaleur et de masse induits par les mouvements de convection naturelle. Dans cette étude quelques hypothèses simplificatrices sont adoptées afin d'alléger la complexité du problème.

#### **2-2 Hypothèses simplificatrices**

Pour simplifier la formulation du présent problème, on a introduit les hypothèses suivantes :

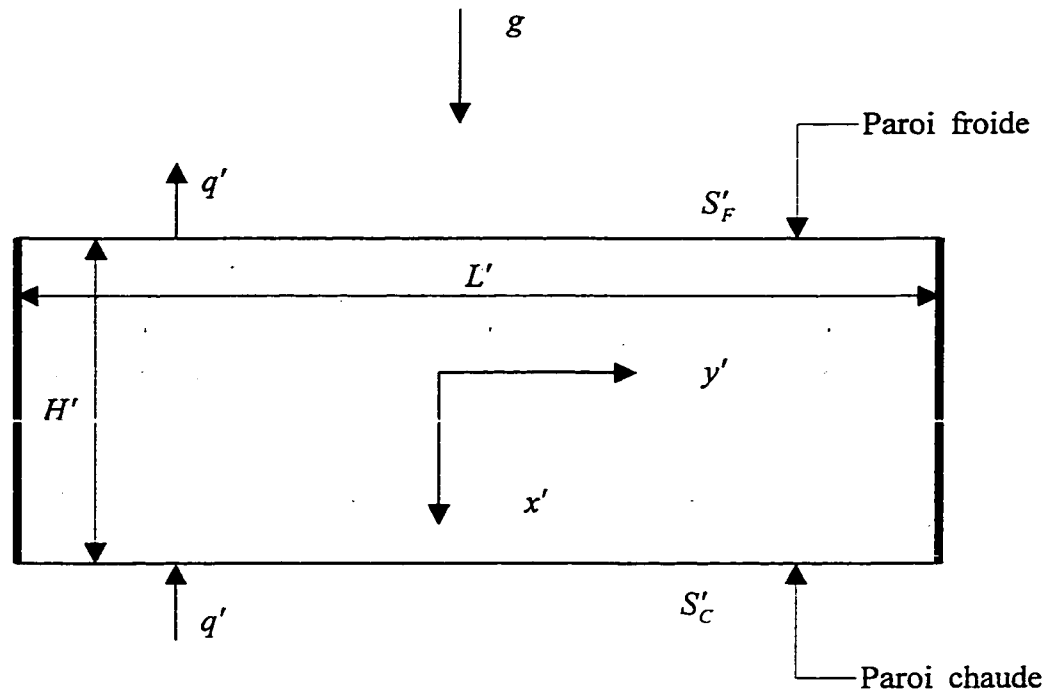


Figure 2.1 : Modèle physique : Cavité rectangulaire soumise à des flux de chaleur constants et à des concentrations constantes.

1. Le problème est supposé bidimensionnel (voir Figure 2.1).
2. Le fluide saturant le milieu poreux est newtonien et incompressible.
3. L'écoulement convectif dans le milieu poreux est laminaire. Le travail induit par les forces visqueuses et de pression est supposé négligeable.
4. Les interactions entre les transferts de chaleur et de masse, connues sous les noms des effets Soret et Dufour, sont considérées négligeables.
5. On suppose l'absence de réaction chimique et de source de chaleur ou de masse dans l'écoulement.
6. Les propriétés thermodynamiques du fluide, excepté la densité, sont constantes et sont évaluées à des températures et concentrations de référence. La densité du fluide, quand à elle est supposée varier linéairement avec la température  $T'$  et la concentration  $S'$  du fluide dans l'enceinte. Elle est donnée par la relation suivante

$$\rho = \rho_r [1 - \beta_T (T' - T'_r) - \beta_S (S' - S'_r)] \quad (2.1)$$

où  $\rho_r$  est la densité du fluide à la température  $T' = T'_r$  et à la concentration  $S' = S'_r$ . Les constantes  $\beta_T$  et  $\beta_S$  sont les coefficients d'expansion volumique du fluide dus respectivement aux effets thermiques et solutaux. La relation (2.1) est une bonne approximation tant que la condition  $\Delta\rho/\rho \leq 0.1$  est vérifiée [15].

### 2.3 Formulation mathématique du problème

Pour obtenir un modèle mathématique permettant d'étudier la convection naturelle dans les milieux poreux, nous avons supposé que la matrice poreuse est solide, perméable et isotrope. Pour des raisons de simplifications, nous avons utilisé le modèle de Darcy pour lequel l'influence des forces visqueuses et d'inertie n'est pas prise en considération. Ces dernières peuvent être négligées si les conditions suivantes sont satisfaites (Nield et Bejan [2]).

$$\varepsilon' < 0.8 \quad Da \leq 10^{-6} \quad Re < 1 \quad (2.2)$$

dans lequel  $\varepsilon'$  est la porosité du milieu poreux.  $Da$  et  $Re$  sont respectivement les nombres de Darcy et de Reynolds définis par :

$$\begin{cases} Da = \frac{K}{H'^2} \\ Re = \frac{V' \sqrt{K}}{\nu} \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $K$  est la perméabilité du milieu poreux,  $V'$  est la vitesse moyenne de filtration des particules fluides et  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide qui est définie par :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_r} \quad (2.4)$$

dans lequel  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide.

### 2.3.1 Équation de continuité (conservation de la masse)

L'équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible s'écrit :

$$\nabla \cdot \vec{v}' = 0 \quad (2.5)$$

### 2.3.2 Équation de conservation de la quantité du mouvement (Loi de Darcy)

$$\vec{v}' = -\frac{K}{\mu} [\nabla p' + \rho_r \vec{g} \{ \beta_T (T' - T_r') + \beta_S (S' - S_r') \}] \quad (2.6)$$

Comme notre problème est supposé bidimensionnel, il est pratique d'introduire la fonction de courant  $\Psi'$  définie comme

$$u' = \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} \quad v' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x'} \quad (2.7)$$

L'équation de continuité (2.5) est automatiquement satisfaite par la fonction de courant  $\Psi'$ .

Prenant le rotationnel de l'équation (2.6) et substituant l'équation (2.7), on obtient alors la loi de Darcy en terme de la fonction de courant

$$\nabla^2 \Psi' = -\frac{K g \beta_T}{\nu} \left( \frac{\partial T'}{\partial y'} + \frac{\beta_s}{\beta_T} \frac{\partial S'}{\partial y'} \right) \quad (2.8)$$

### 2.3.3 Équation de l'énergie

$$\sigma \frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \right) \quad (2.9)$$

où  $\sigma$  est le rapport de capacité thermique du fluide pour un milieu poreux et  $\alpha$  est la diffusivité thermique du fluide binaire. Ces derniers sont définis par :

$$\sigma = \frac{(\rho C)_p}{(\rho C)_f} \quad \alpha = \frac{k_p}{(\rho C)_f} \quad (2.10)$$

dans lequel

$$\begin{cases} (\rho C)_p = \bar{\varepsilon} (\rho C)_f + (1 - \bar{\varepsilon}) (\rho C)_s \\ k_p = \bar{\varepsilon} k_f + (1 - \bar{\varepsilon}) k_s \end{cases} \quad (2.11)$$

où  $(\rho C)_p$ ,  $(\rho C)_f$  et  $(\rho C)_s$  sont respectivement les chaleurs massiques de la matrice poreuse saturée, du fluide et de la matrice solide,  $k_p$ ,  $k_f$  et  $k_s$  sont respectivement les conductivités thermiques de la matrice poreuse saturée, du fluide et de la matrice solide et  $\bar{\varepsilon}$  est la porosité de la matrice poreuse.

### 2.3.4 Équation de concentration (soluté)

$$\bar{\varepsilon} \frac{\partial S'}{\partial t'} + u' \frac{\partial S'}{\partial x'} + v' \frac{\partial S'}{\partial y'} = D_p \nabla^2 S' \quad (2.12)$$

où  $D_p = \bar{\varepsilon} D$  est la diffusivité massique moyenne de la concentration dans la matrice poreuse saturée et  $D$  est la diffusivité solutale.

### 2.3.5 Conditions aux frontières hydrodynamiques

On impose des conditions d'imperméabilité sur les parois de la cavité. Les conditions aux frontières associées à la fonction de courant sont alors exprimées par :

$$\begin{cases} x' = \pm \frac{H'}{2} & \Rightarrow \Psi' = 0 \\ y' = \pm \frac{L'}{2} & \Rightarrow \Psi' = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

### 2.3.6 Conditions aux frontières thermiques et massiques

Les conditions aux frontières thermiques et massiques sur les deux parois verticales de la cavité sont données par l'expression suivante :

$$y' = \pm \frac{L'}{2} \Rightarrow \frac{\partial T'}{\partial y'} = \frac{\partial S'}{\partial y'} = 0 \quad (2.14)$$

Pour les parois horizontales (parois actives) de la cavité, les conditions aux frontières thermiques et massiques s'écrivent ainsi :

$$\begin{cases} x' = \pm \frac{H'}{2} & \Rightarrow \frac{\partial T'}{\partial x'} = \frac{q'}{k_p} \\ x' = \frac{H'}{2} & \Rightarrow S' = S'_c \\ x' = -\frac{H'}{2} & \Rightarrow S' = S'_f \end{cases} \quad (2.15)$$



## 2.4 Formulation adimensionnelle du problème

La hauteur  $H'$  entre les deux parois horizontales actives de la cavité a été choisie comme longueur de référence pour adimensionnaliser les équations gouvernantes (2.8), (2.9) et (2.12). La vitesse est adimensionnalisée par rapport à la diffusivité thermique. Par ailleurs la température et la concentration sont adimensionnalisées respectivement par rapport aux écarts de température et de concentration entre les deux parois horizontales de la cavité.

Les variables adimensionnelles sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (x, y) = (x', y') / H' & (u, v) = (u', v') H' / \alpha \\ t = t' \alpha / \sigma H'^2 & \Psi = \Psi' / \alpha \\ T = \frac{T' - T'_r}{\Delta T'} & S = \frac{S' - S'_r}{\Delta S'} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

dans lequel  $t$  est le temps adimensionnel et  $(u, v)$  sont les composantes adimensionnelles du vecteur vitesse  $\vec{V}$ .

Comme les parois supérieure et inférieure de la cavité sont soumises à un flux de chaleur constant  $q'$  et une concentration constante  $S'$  les valeurs  $S'_r$ ,  $\Delta S'$ ,  $T'_r$  et  $\Delta T'$  sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} S'_r = \frac{S'_C + S'_F}{2} & \Delta S' = (S'_C - S'_F) \\ T'_r = T'_{(0,0)} & \Delta T' = \frac{q' H'}{k_p} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

En introduisant ces variables dans les équations (2.8), (2.9) et (2.12), on obtient les équations gouvernantes adimensionnelles suivantes qui décrivent respectivement, la conservation du mouvement, de l'énergie et de la masse.

$$\nabla^2 \Psi = -R_T \frac{\partial}{\partial y} (T + NS) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (2.19)$$

$$\varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = Le^{-1} \nabla^2 S \quad (2.20)$$

dans lequel la fonction de courant  $\Psi$  est définie par :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.21)$$

Les conditions aux frontières hydrodynamiques adimensionnelles s'écrivent :

$$\begin{cases} x = \pm \frac{l}{2} & \Psi = 0 \\ y = \pm \frac{A}{2} & \Psi = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Les conditions aux frontières thermiques et massiques adimensionnelles sur les parois verticales, sont exprimées par :

$$y = \pm \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (2.23)$$

alors que sur les parois horizontales elles s'écrivent :

$$x = \pm \frac{l}{2} \Rightarrow \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} \pm (1 - \kappa) \varphi = \frac{\kappa + 1}{2} \quad (2.24)$$

dans lequel  $\varphi$  est une variable qui peut représenter la température  $T$  ou la concentration,  $S$  et  $\kappa$  un coefficient constant qui vaut 0 pour les conditions aux frontières solutales et 1 pour les conditions aux frontières thermiques.

Les équations (2.18)-(2.20) et les conditions aux frontières (2.22)-(2.24) indiquent que le système est caractérisé par cinq paramètres adimensionnels, à savoir le nombre thermique de Darcy-Rayleigh,  $R_T$ , le rapport entre les forces de volume solutale et thermique,  $N$ , le nombre de Lewis,  $Le$ , le rapport de forme de la cavité,  $A$  et la porosité normalisée,  $\varepsilon$ . Ces paramètres sont définis par :

$$\begin{cases} R_T = \frac{g \beta_T K H' \Delta T'}{\alpha \nu} \\ Le = \frac{\alpha}{D} \end{cases} \quad \varepsilon = \frac{\bar{\varepsilon}}{\sigma} \quad \begin{cases} N = \frac{\beta_s \Delta S'}{\beta_T \Delta T'} \\ A = \frac{L'}{H'} \end{cases} \quad (2.25)$$

Il est à noter que le coefficient d'expansion volumique  $\beta_T$  dû au changement de température est en général positif, alors que celui dû à la concentration  $\beta_s$  selon le fluide considéré, peut être positif ( $N > 0$ ) ou négatif ( $N < 0$ ). Avec les conditions aux frontières de température et de concentration considérées dans la figure 2.1, il est clair que le gradient thermique est un facteur déstabilisant tandis que le gradient de concentration est déstabilisant (stabilisant) quand  $\beta_s$  (i.e.  $N$ ) est positif (négatif).

La combinaison des expressions (2.10), (2.11) et (2.25) conduit à

$$\varepsilon = \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon} + (1 - \bar{\varepsilon}) \sigma_\theta} \quad \text{où} \quad \sigma_\theta = \frac{(\rho C)_s}{(\rho C)_f} \quad (2.26)$$

D'après cette relation, on peut déduire immédiatement que la valeur du paramètre  $\varepsilon$  est telle que :  $0 < \varepsilon \leq 1$

## 2.5 Taux des transferts de chaleur et de masse

Les nombres de Nusselt  $Nu$  et de Sherwood  $Sh$  caractérisent respectivement les taux de transferts de chaleur et de masse suivant la direction  $y$ . Les valeurs de ces nombres adimensionnels sont données par les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} Nu = \frac{q'}{k_p \frac{\Delta T'}{H'}} = \frac{I}{T_{(l/2,y)} - T_{(-l/2,y)}} \\ Sh = \frac{D_p \frac{\partial S'}{\partial x'}}{D_p \frac{\Delta S'}{H'}} \Bigg|_{x=\pm H'/2} = \frac{\partial \left( \frac{S'}{\Delta S'} \right)}{\partial \left( \frac{x'}{L'} \right)} = \frac{\partial S}{\partial x} \Bigg|_{x=\pm l/2} \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens  $\bar{Nu}$  et  $\bar{Sh}$  sur les parois horizontales de la cavité sont calculés à partir des intégrales suivantes :

$$\bar{Nu} = \frac{i}{A} \int_{-A/2}^{+A/2} Nu \, dy \qquad \bar{Sh} = \frac{i}{A} \int_{-A/2}^{+A/2} Sh \, dy \quad (2.28)$$

## CHAPITRE III

### ANALYSE DE LA STABILITE LINÉAIRE DU SYSTÈME

#### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier la stabilité linéaire du présent système. A cette fin, nous proposons deux approches différentes: une méthode purement analytique et une autre numérique. Pour l'approche numérique, nous allons utiliser la méthode des éléments finis. L'approche analytique est basée quant à elle sur la méthode de la stabilité linéaire classique. Dans cette investigation, on s'intéresse principalement à la prédiction des nombres de Rayleigh critiques correspondants au seuil de la convection et à la nature des mouvements convectifs résultants.

#### 3.2 Théorie de la stabilité linéaire

Il est à remarquer que l'état de repos du fluide caractérisée par  $\Psi_c = 0$  et  $T_c = S_c = x$  est une solution possible au système d'équations (2.18)-(2.21) sujetten aux conditions aux frontières (2.22)-(2.24). Le nombre de Rayleigh critique, à partir duquel cet état de repos devient instable, est maintenant déterminé sur la base de la théorie de la stabilité linéaire. Puisque cette théorie a été discutée en détails dans la littérature [3,7] seulement les étapes mathématiques principales qui mènent à la solution du problème sont présentées ici.

En premier lieu, il est convenable d'introduire les transformations suivantes :

$$\begin{cases} \Psi(x, y) = \Psi_c + \psi e^{pt} F(x, y) \\ T(x, y) = T_c + \theta e^{pt} G(x, y) \\ S(x, y) = S_c + \phi e^{pt} H(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

dans lequel  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont des fonctions qui décrivent les profils de la fonction de courant, de la température et de la concentration juste au seuil de la convection,  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$  ( $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi \ll 1$ ) sont les amplitudes et  $p$  est un paramètre qui mesure le taux d'accroissement de l'amplitude de la perturbation.

Dans les sections suivantes les conditions pour les instabilités stationnaires et oscillantes sont discutées.

### 3.2.1 Stabilité marginale $p = 0$

Nous considérons dans cette section le cas  $p = 0$ , pour lequel l'échange de la stabilité est valide.

#### 3.2.1.1 Solution analytique

Pour cette situation, les fonctions  $F$ ,  $G$  et  $H$  dans l'équation (2.21)-(2.23), sont données par :

$$\begin{cases} F(x, y) = f(x) \cos \omega y \\ G(x, y) = g(x) \sin \omega y \\ H(x, y) = h(x) \sin \omega y \end{cases} \quad (3.2)$$

dans lequel  $\omega = r\pi$ ,  $r = n/A$ ,  $n$  est le nombre de cellules et  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$  sont des fonctions pour les champs de vitesse, de température et de concentration, satisfaisant les conditions suivantes :

$$x = \pm \frac{l}{2} \quad f = \frac{\partial g}{\partial x} = h = 0 \quad (3.3)$$

en accord avec les conditions aux frontières (2.21)-(2.23).

En substituant les équations (3.1) et (3.2) dans les équations (2.18)-(2.20), on obtient les équations suivantes :

$$\psi \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \omega^2 f \right] = -R_T \omega [\theta g + N \phi h] \quad (3.4a)$$

$$\theta \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \omega^2 g \right] = -\omega \psi f \quad (3.4b)$$

$$\phi \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \omega^2 h \right] = -\omega \psi Le f \quad (3.4c)$$

Éliminant  $g(x)$  et  $h(x)$  entre les équations (3.4a)-(3.4c), on peut montrer que

$$\frac{d^4 f}{dx^4} - 2\omega^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \omega^2 [\omega^2 - R_T(1 + NLe)] f = 0 \quad (3.5)$$

La solution de l'équations ci-dessus, sujette aux conditions aux frontières (3.3), est donnée par :

$$f(x) = B [\cosh(\zeta_1 x) - \gamma \cos(\zeta_2 x)] \quad (3.6)$$

dans lequel

$$\begin{cases} \zeta_1 = \sqrt{\omega(\sqrt{R_0} + \omega)} & R_0 = R_T(1 + NLe) \\ \zeta_2 = \sqrt{\omega(\sqrt{R_0} - \omega)} & \gamma = \frac{\cosh(\zeta_1 / 2)}{\cos(\zeta_2 / 2)} \end{cases}$$

et  $B$  est une constante arbitraire.

Substituant l'équation (3.6) dans les équations (3.4b) et (3.4c), on obtient les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - \omega^2 g = -\frac{\omega \psi B}{\theta} [\cosh(\zeta_1 x) - \gamma \cos(\zeta_2 x)] \quad (3.7)$$

$$\frac{d^2 h}{dx^2} - \omega^2 h = -\frac{\omega \psi B}{\phi} [\cosh(\zeta_1 x) - \gamma \cos(\zeta_2 x)] \quad (3.8)$$

Résolvant les équations (3.7) et (3.8), soumises aux conditions aux frontières (3.3), on trouve facilement que

$$g(x) = 2C_1 \cosh(\omega x) - \frac{\psi B}{\theta \sqrt{R_0}} [\cosh(\zeta_1 x) + \gamma \cos(\zeta_2 x)] \quad (3.9)$$

$$h(x) = 2C_2 \cosh(\omega x) - \frac{\psi L e B}{\phi \sqrt{R_0}} [\cosh(\zeta_1 x) + \gamma \cos(\zeta_2 x)] \quad (3.10)$$

avec

$$C_1 = -\ell NLe \frac{\psi B}{\theta \sqrt{R_0}} \quad C_2 = \ell Le \frac{\psi B}{\phi \sqrt{R_0}}$$

$$\ell = \frac{\cosh(\zeta_1 / 2)}{\cosh(\omega / 2)}$$

En substituant les équations (3.6), (3.9) et (3.10) dans l'équation (3.4a), et après simplification on obtient :

$$\zeta_1 \tanh\left(\frac{\zeta_1}{2}\right) - \zeta_2 \tan\left(\frac{\zeta_2}{2}\right) + 2 \omega NLe \tanh\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0 \quad (3.11)$$



L'équation (3.11) permet de déterminer la constante  $R_0$  pour un rapport de forme  $A$  donné. Cette constante représente la valeur supercritique qui caractérise le début de la convection. À partir de la constante  $R_0$ , on peut déterminer le nombre de Rayleigh thermique supercritique  $R_{TC}^{sup}$  qui est donné par la relation suivante :

$$R_{TC}^{sup} = \frac{R_0}{1 + NLe} \quad (3.12)$$

La validité de l'équation (3.11) peut être vérifiée pour les cas limites suivants :

**i) Effet thermique dominant** : dans ce cas l'écoulement convectif est dominé par les forces de volume d'origine thermique i.e.  $|N| \ll 1$ . Pour cette situation l'équation (3.11) se réduit à

$$\zeta_1 \tanh\left(\frac{\zeta_1}{2}\right) - \zeta_2 \tan\left(\frac{\zeta_2}{2}\right) = 0 \quad (3.13)$$

avec  $R_0 = R_T$

L'équation ci-dessus prédit le nombre de Rayleigh thermique critique  $R_{TC}$  pour le cas d'une cavité horizontale, de rapport de forme  $A$ , chauffée par le bas avec un flux de chaleur constant. Dans le cas limite d'une couche horizontale infinie ( $A \gg 1$ ) on peut démontrer aisément à partir de l'équation (3.13) que

$$R_{TC}^{sup} = 12 \quad (3.14)$$

en accord avec la prédiction de Nield [3]

**ii) Effet massique dominant** : dans ce cas l'écoulement convectif est dominé par les forces de volume induites principalement par des variations de concentrations, i.e.  $|N| \gg 1$ . Pour cette situation on peut montrer à partir de l'équation (3.11) que

$$R_{SC}^{\text{sup}} = 4\pi^2 \quad (3.15)$$

où  $R_s = R_T N Le$  est le nombre de Rayleigh solutal. Ce résultat est en accord avec la prédiction de Lapwood 1948.

### 3.2.1.2 Solution numérique : Éléments finis

Nous allons maintenant résoudre le problème de stabilité marginale numériquement avec la méthode des éléments finis. Le principe de cette méthode est de découper le domaine physique concerné  $\Omega$  en plusieurs sous-domaines  $\Omega^e$  appelés éléments, de formes géométriques simples. Avant de procéder à la discrétisation du domaine, il faut bien choisir le type d'éléments à utiliser. Le choix de ce dernier pour les problèmes bidimensionnels se limite à deux variantes à savoir les triangles et les quadrilatères. Sur chaque élément du domaine  $\Omega^e$  et de frontière  $\partial\Omega^e = \Gamma^e$ , on définit un nombre de nœuds géométriques, qui coïncident avec les sommets des éléments utilisés.

#### Formulation variationnelle

Le comportement de notre système est représenté par des équations aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites en espace et en temps. La discrétisation de équations (2.18)-(2.20) nécessite alors, l'utilisation de la formulation variationnelle de Galerkin, dite formulation faible.

Les équations régissantes sont d'abord linéarisées en introduisant les équations (3.1) dans les équations (2.18)-(2.20) et en négligeant les termes non linéaires. On obtient

$$\psi \nabla^2 F = -R_T \left( \theta \frac{\partial G}{\partial y} + N\phi \frac{\partial H}{\partial y} \right) \quad (3.16)$$

$$\theta \nabla^2 G = \theta pG + \psi \frac{\partial F}{\partial y} \quad (3.17)$$

$$Le^{-1}\phi \nabla^2 H = \varepsilon \phi pH + \psi \frac{\partial F}{\partial y} \quad (3.18)$$

En utilisant le théorème de Green, la formulation variationnelle des équations (3.16)-(3.18) donne les intégrales de Galerkin suivantes (voir par exemple réf. [16]).

$$\psi \int_{\Omega} \nabla F \cdot \nabla \bar{u} \, d\Omega - \psi \int_{\Gamma} \frac{\partial F}{\partial \bar{n}} \cdot \bar{u} \, d\Gamma = R_{\tau} \int_{\Omega} \left( \theta \frac{\partial G}{\partial y} + N\phi \frac{\partial H}{\partial y} \right) \cdot \bar{u} \, d\Omega \quad (3.19a)$$

$$\theta \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega - \theta \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \bar{n}} \cdot \bar{v} \, d\Gamma = - \int_{\Omega} \left( \theta pG + \psi \frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \bar{v} \, d\Omega \quad (3.19b)$$

$$Le^{-1}\phi \int_{\Omega} \nabla H \cdot \nabla \bar{w} \, d\Omega - Le^{-1}\phi \int_{\Gamma} \frac{\partial H}{\partial \bar{n}} \cdot \bar{w} \, d\Gamma = - \int_{\Omega} \left( \varepsilon \phi pH + \psi \frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \bar{w} \, d\Omega \quad (3.19c)$$

où  $\Gamma$  est la frontière du domaine  $\Omega$ ,  $\bar{n}$  est la normale au domaine  $\Omega$  et  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$  sont les fonctions tests. Ces dernières sont choisies arbitrairement mais elles doivent satisfaire les conditions aux frontières (2.22)-(2.24).

Tenant compte des conditions aux frontières (3.3), les intégrales sur la frontière  $\Gamma$  dans les équations (3.19a)-(3.19c) s'annulent et on obtient

$$\psi \int_{\Omega} \nabla F \cdot \nabla \bar{u} \, d\Omega = R_{\tau} \int_{\Omega} \left( \theta \frac{\partial G}{\partial y} + N\phi \frac{\partial H}{\partial y} \right) \cdot \bar{u} \, d\Omega \quad (3.20a)$$

$$\theta \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \left( \theta pG + \psi \frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \bar{v} \, d\Omega \quad (3.20b)$$

$$Le^{-1}\phi \int_{\Omega} \nabla H \cdot \nabla \bar{w} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \left( \varepsilon \phi pH + \psi \frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \bar{w} \, d\Omega \quad (3.20c)$$

### Approximation par éléments finis

Grâce aux fonctions d'interpolation  $N_i$ , nous pouvons décrire l'approximation par éléments finis et remplacer un système continu par un système discret équivalent. Si

le nombre de nœuds devient important ou si la forme du domaine  $\Omega$  se complique la détermination des fonctions  $N_i$  devient difficile. Le choix de l'élément est alors très important dans de telles situations. La géométrie rectangulaire de notre système nous amène à choisir l'élément quadrilatère de Lagrange à neuf nœuds. Les profils de la fonction de courant, de la température et de la concentration sont quadratiques et continus pour chaque élément. Au niveau élémentaire,  $F(x, y)$ ,  $G(x, y)$  et  $H(x, y)$  sont définis par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \\ H(x, y) \end{Bmatrix}_e = \sum_{j=1}^9 N_j(x, y) \begin{Bmatrix} F_j(x, y) \\ G_j(x, y) \\ H_j(x, y) \end{Bmatrix}_e \quad (3.21)$$

où  $F_j(x, y)$ ,  $G_j(x, y)$  et  $H_j(x, y)$  sont les vecteurs des inconnues nodales et  $N_j(x, y)$  sont les fonctions d'interpolation de Lagrange. Les expressions de ces fonctions dans le système de référence sont données par :

$$\begin{cases} N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \xi \xi_i (1 + \xi \xi_i) \eta \eta_i (1 + \eta \eta_i), & i = 1, 3, 5, 7 \\ N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \xi \xi_i (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2), & i = 4, 8 \\ N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) \eta \eta_i (1 + \eta \eta_i), & i = 2, 6 \\ N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta^2), & i = 9 \end{cases} \quad (3.22)$$

où  $(\xi, \eta)$ , sont les coordonnées des nœuds dans le système de référence. Ces dernières sont liées aux coordonnées  $(x, y)$  par la relation suivante:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^9 N_j(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

où  $(x_j, y_j)$  sont les coordonnées des nœuds dans le système physique.

En substituant l'équation (3.20) dans les intégrales (3.19a)-(3.19c), on remplace les fonctions test  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$  par  $N_i(\xi, \eta)$ , après intégration et assemblage des différents systèmes élémentaires, on obtient les systèmes globaux suivants .

$$\begin{cases} \psi [K_\psi] \{F\} = R_\tau [B] (\theta \{G\} + N_\phi \{H\}) \\ \theta [K_\theta] \{G\} + p\theta [M_\theta] \{G\} = \psi [L_\theta] \{F\} \\ Le^{-i} \phi [K_\phi] \{H\} + \varepsilon p\phi [M_\phi] \{H\} = +\psi [L_\phi] \{F\} \end{cases} \quad (3.24)$$

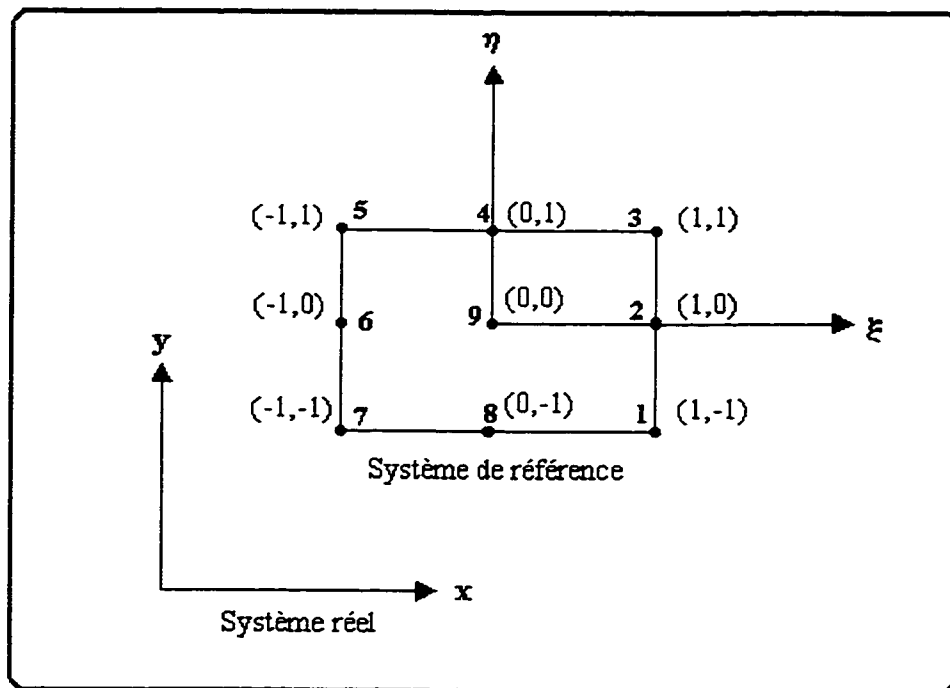


Figure 3.1 : Élément quadrilatère de Lagrange à neuf nœuds dans le système référentiel.

dans lequel les matrices élémentaires  $[K_\psi]_e$ ,  $[K_\theta]_e$ ,  $[K_\phi]_e$ ,  $[B]_e$ ,  $[L_\theta]_e$ ,  $[L_\phi]_e$ ,  $[M_\theta]_e$  et  $[M_\phi]_e$  correspondantes sont des matrices carrées qui sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} [K_\psi]_e = \int_{\Omega_e} \nabla[N^T] \nabla[N] d\Omega_e & [B]_e = \int_{\Omega_e} \nabla[N^T] \frac{\partial[N]}{\partial y} d\Omega_e \\ [K_\theta]_e = \int_{\Omega_e} \nabla[N^T] \nabla[N] d\Omega_e & [K_\phi]_e = \int_{\Omega_e} \nabla[N^T] \nabla[N] d\Omega_e \\ [L_\theta]_e = - \int_{\Omega_e} \nabla[N^T] \frac{\partial[N]}{\partial y} d\Omega_e & [L_\phi]_e = - \int_{\Omega_e} \nabla[N^T] \frac{\partial[N]}{\partial y} d\Omega_e \\ [M_\theta]_e = \int_{\Omega_e} [N^T][N] d\Omega_e & [M_\phi]_e = \int_{\Omega_e} [N^T][N] d\Omega_e \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Ces matrices sont calculées numériquement par la méthode d'intégration numérique de Gauss à deux dimensions. Cette méthode consiste à utiliser dans chaque direction  $\xi$  et  $\eta$  une intégration à une dimension. Si on utilise  $n_1$  points dans le sens  $\xi$  et  $n_2$  points dans le sens  $\eta$ , la méthode de Gauss intègre exactement le produit d'un polynôme en  $\xi$  d'ordre  $2n_1 - 1$  et d'un polynôme en  $\eta$  d'ordre  $2n_2 - 1$ . Ces intégrales sont calculées à l'aide de l'expression suivante

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{N_G} \sum_{j=1}^{N_G} W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (3.26)$$

où  $W_i$  et  $W_j$  sont les coefficients d'intégration de Gauss,  $\xi_i$  et  $\eta_i$  sont les coordonnées de points de Gauss et  $N_G$  est le nombre de points de Gauss ( dans notre cas  $N_G = 4$  ).

Puisqu'on s'intéresse au cas de la stabilité marginale ( $p = 0$ ), alors le système d'équations (3.24) se réduit à

$$\psi [K_\psi] \{F\} = R_T [B] (\theta \{G\} + N\phi \{H\}) \quad (3.27a)$$

$$\psi [L_\theta] \{F\} = \theta [K_\theta] \{G\} \quad (3.27b)$$

$$\psi [L_\phi] \{F\} = L e^{-l} \phi [K_\phi] \{H\} \quad (3.27c)$$

La combinaison entre les équations (3.27a)-(3.27c), nous conduit au problème de valeurs propres suivant :

$$([E] - \lambda [I]) \{F\} = 0 \quad (3.28)$$

où  $[I]$  est la matrice identité,  $\{F\}$  est le vecteur propre,  $\lambda$  sont les valeurs propres associées données par

$$\lambda = \frac{l}{R_T} \quad (3.29)$$

et  $[E]$  est une matrice carrée donnée par l'expression

$$[E] = [K_\psi]^{-1} [B] \left( [K_\theta]^{-1} [L_\theta] + N L e [K_\phi]^{-1} [L_\phi] \right) \quad (3.30)$$

On réarrange les valeurs propres  $\{\lambda_i\}$  avec  $i = 1, 2, \dots, M$  de la matrice  $[E]$  de la façon suivante

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{M-1} \leq \lambda_M \quad (3.31)$$

Le nombre de Rayleigh thermique supercritique  $R_{TC}^{\text{sup}}$  est obtenu à l'aide de l'expression

$$R_{TC}^{\sup} = \frac{R^{\sup}}{1 + NLe} \quad \text{où} \quad \begin{cases} R^{\sup} = \frac{1}{\lambda_I} & \text{si } (1 + NLe) < 0 \\ R^{\sup} = \frac{1}{\lambda_M} & \text{si } (1 + NLe) > 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Une fois que le vecteur  $\{F\}$  est calculé, on peut déterminer les profils des fonctions  $G(x, y)$  et  $H(x, y)$  à partir des expressions

$$\{G\} = \frac{\Psi}{\theta} [K_\theta]^{-1} [L_\theta] \{F\} \quad \{H\} = Le \frac{\Psi}{\phi} [K_\phi]^{-1} [L_\phi] \{F\} \quad (3.33)$$

### 3.2.2 Stabilité transitoire $p \neq 0$

Dans cette section, les différents nombres de Rayleigh critiques qui délimitent les régions dans lesquelles la convection décroissante, oscillante ou croissante sont possibles, sont déterminés.

#### 3.2.2.1 Solution analytique : Galerkin

En substituant  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$  par les fonctions  $F(x, y)$ ,  $G(x, y)$  et  $H(x, y)$ , dans les équations (3.20a)-(3.20c) on obtient

$$\psi K = R_T (\theta B_1 + N \phi B_2) \quad (3.34a)$$

$$\theta (K_1 + p M_1) = \psi L_1 \quad (3.34b)$$

$$\phi (Le^{-1} K_2 + \varepsilon p M_2) = \psi L_2 \quad (3.34c)$$

où  $K$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $K_1$ ,  $M_1$ ,  $L_1$ ,  $K_2$ ,  $M_2$  et  $L_2$  sont des constantes qui peuvent être calculées par les intégrales suivantes



$$\begin{aligned}
K &= \int_{\Omega} (\nabla F)^2 d\Omega & B_1 &= \int_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial y} \cdot F d\Omega & B_2 &= \int_{\Omega} \frac{\partial H}{\partial y} \cdot F d\Omega \\
K_1 &= \int_{\Omega} (\nabla G)^2 d\Omega & M_1 &= \int_{\Omega} G^2 d\Omega & L_1 &= - \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} \cdot G d\Omega \\
K_2 &= \int_{\Omega} (\nabla H)^2 d\Omega & M_2 &= \int_{\Omega} H^2 d\Omega & L_2 &= - \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} \cdot H d\Omega
\end{aligned} \quad (3.35)$$

En substituant les expressions (3.2) dans les équations (3.35) et en résolvant les intégrales résultantes on peut montrer, après considérablement d'algèbre que

$$\begin{aligned}
K &= \frac{l}{2} n\pi B^2 \sqrt{R_0} a_7 & B_1 = L_1 &= - \frac{n\pi \psi B^2}{2\theta \sqrt{R_0}} [2NLe \ell a_8 + a_7] \\
B_2 = L_2 &= \frac{n\pi \psi B^2 Le}{2\theta \sqrt{R_0}} [2NLe \ell a_8 - a_7] & K_1 &= \frac{n\pi (\psi B)^2}{2\theta^2 \sqrt{R_0}} [2NLe \ell a_8 + a_7] \\
K_2 &= - \frac{n\pi (\psi B Le)^2}{2\phi^2 \sqrt{R_0}} [2 \ell a_8 - a_7] & M_1 &= \frac{A \psi^2 B^2}{2\theta^2 R_0} [a_9 + 4NLe \ell (NLe \ell a_6 + a_{10})] \\
M_2 &= \frac{A (\psi B Le)^2}{2\phi^2 R_0} [a_9 + 4 \ell (\ell a_6 - a_{10})]
\end{aligned}$$

dans lequel

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{l}{2} \left[ l + \frac{\sinh(\zeta_1)}{\zeta_1} \right] & a_2 &= \frac{l}{2} \left[ l + \frac{\sin(\zeta_2)}{\zeta_2} \right] \\
a_3 &= - \frac{2}{\omega \sqrt{R_0}} \left[ \omega \sinh\left(\frac{\omega}{2}\right) \cosh\left(\frac{\zeta_1}{2}\right) - \zeta_1 \cosh\left(\frac{\omega}{2}\right) \sinh\left(\frac{\zeta_1}{2}\right) \right] \\
a_4 &= \frac{2}{\omega \sqrt{R_0}} \left[ \omega \sinh\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\zeta_2}{2}\right) + \zeta_2 \cosh\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin\left(\frac{\zeta_2}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$a_5 = \frac{I}{\omega \sqrt{R_0}} \left[ \zeta_1 \sinh\left(\frac{\zeta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\zeta_2}{2}\right) + \zeta_2 \cosh\left(\frac{\zeta_1}{2}\right) \sin\frac{\zeta_2}{2} \right]$$

$$a_6 = \frac{I}{2} \left[ 1 + \frac{\sinh(\omega)}{\omega} \right]$$

$$a_7 = a_1 - \gamma^2 a_2$$

$$a_8 = a_3 - \gamma a_4$$

$$a_9 = a_1 + \gamma^2 a_2 + a_1 + 2\gamma a_5$$

$$a_{10} = a_3 + \gamma a_4$$

À partir des équations (3.34b)-(3.34c), on peut déduire les expressions suivantes pour  $\theta$  et  $\phi$

$$\theta = \frac{\psi L_1}{K_1 + p M_1} \quad (3.36)$$

$$\phi = \frac{\psi Le L_2}{K_2 + Le \varepsilon p M_2} \quad (3.37)$$

En substituant  $\theta$  et  $\phi$  dans l'équation (3.34b), on obtient une équation polynomiale de second ordre d'inconnue  $p$  :

$$p^2 - p_1 p + \gamma_1 \gamma_2 p_2 = 0 \quad (3.38)$$

dans lequel

$$p_1 = -\frac{I}{Le \varepsilon} \left[ \gamma_1 Le \varepsilon (1 - a^{-1} R_T) + \gamma_2 (1 - b a^{-1} R_T N Le) \right] \quad (3.39)$$

$$p_2 = \frac{I}{Le \varepsilon} \left[ 1 - a^{-1} R_T (1 + b N Le) \right] \quad (3.40)$$

$$\gamma_1 = \frac{K_1}{M_1} \quad \gamma_2 = \frac{K_2}{M_2} \quad (3.41)$$

$$a = \frac{K K_1}{B_1 L_1} \quad b = \frac{K_1 B_2 L_2}{K_2 B_1 L_1} \quad (3.42)$$

De l'équation (3.38) on peut constater facilement que l'inconnue  $p$  est donnée par l'expression :

$$p = \frac{1}{2} \left( p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4 \gamma_1 \gamma_2 p_2} \right) \quad (3.43)$$

Le seuil de la convection, connu sous le nom de la stabilité marginale ( $p = 0$ ), se produit lorsque  $p_2 = 0$ . À partir de l'équation (3.40), le nombre de Rayleigh thermique  $R_{TC}^{sup}$  caractérisant le début de la convection supercritique est donné par :

$$R_{TC}^{sup} = \frac{\alpha}{1 + b N Le} \quad (3.44)$$

En général le paramètre  $p$  est un nombre complexe qui est défini comme :

$$p = p_{re} + i p_{im} \quad (3.45)$$

où  $p_{re}$  et  $p_{im}$  sont respectivement les parties réelles et imaginaires du paramètre  $p$  qui sont données par :

$$\left. \begin{array}{l} p_{re} = \frac{1}{2} \left( p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4 \gamma_1 \gamma_2 p_2} \right) \\ p_{im} = 0 \end{array} \right\} \text{ si } p_1^2 - 4 \gamma_1 \gamma_2 p_2 \geq 0 \quad (3.46)$$

$$\left. \begin{array}{l} p_{re} = \frac{p_1}{2} \\ p_{im} = \frac{1}{2} \sqrt{|p_1^2 - 4 \gamma_1 \gamma_2 p_2|} \end{array} \right\} \text{ si } p_1^2 - 4 \gamma_1 \gamma_2 p_2 < 0 \quad (3.47)$$

Le nombre de Rayleigh surstable  $R_{TC}^{sur}$  correspond à la condition  $p_{re} = 0$ , i.e.  $p_1 = 0$ . De l'équation (3.39) on peut montrer que

$$R_{TC}^{sur} = a \frac{(Le \varepsilon + c)}{Le(\varepsilon + b c N)} \quad \text{où} \quad c = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad (3.48)$$

Ce nombre de Rayleigh marque la transition du mode convectif oscillant au mode convectif monotone et croissant

Le régime oscillant ( $p_{im} \neq 0$ ) existe seulement quand la condition  $p_1^2 - 4\gamma_1 \gamma_2 p_2 < 0$  est satisfaite, i.e.  $R_{TC}^{sur} \leq R_T \leq R_{TC}^{osc}$ . La valeur de  $R_{TC}^{osc}$  est déduite de la condition  $p_1^2 - 4\gamma_1 \gamma_2 p_2 = 0$ . On obtient ainsi

$$R_{TC}^{osc} = a \frac{(Le \varepsilon - c) \left[ (\varepsilon - b c N) + 2\sqrt{-\varepsilon b c N} \right]}{Le(\varepsilon + b c N)^2} \quad (3.49)$$

Les conditions d'existence d'une façon plus précise du régime oscillant sont

$$\begin{cases} R_{TC}^{sur} < R_T < R_{TC}^{osc} \\ -\frac{\varepsilon}{bc} < N < 0 \\ Le > \frac{c}{\varepsilon} \end{cases} \quad (3.50)$$

Le cas  $b = c = 1$  correspond au problème d'une cavité rectangulaire soumise à des conditions aux frontières thermiques et solutales de type Neumann (flux de chaleur et de masse constants et uniformes) ou de type Dirichlet (température et concentration constantes), on peut montrer que :

$$R_{TC}^{sup} = \frac{a}{1 + NLe} \quad R_{TC}^{sur} = a \frac{(Le \varepsilon + 1)}{Le(\varepsilon + N)} \quad (3.51)$$

$$R_{TC}^{osc} = a \frac{(Le \varepsilon - 1) \left[ (\varepsilon - N) + 2\sqrt{-\varepsilon N} \right]}{Le(\varepsilon + N)^2} \quad (3.52)$$

en accord avec les résultats prédits par Mamou et al. [16]

### 3.2.2.2 Solution numérique : éléments finis

Pour résoudre le problème de la stabilité transitoire numériquement, nous avons utilisé la méthode des éléments finis. Une fois que les profils discrets  $\{F\}$ ,  $\{G\}$  et  $\{H\}$  sont calculés à l'aide du programme d'éléments finis de la stabilité marginale, nous pouvons facilement évaluer les intégrales (3.35). Ces dernières sont calculées numériquement en utilisant les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
 K &= \sum_{k=l}^{N^e} \left( \sum_{i=l}^9 \sum_{i=l}^9 F_j^e [K_\psi]_{ji}^e F_i^e \right)_k & K_l &= \sum_{k=l}^{N^e} \left( \sum_{i=l}^9 \sum_{i=l}^9 G_j^e [K_l]_{ji}^e G_i^e \right)_k \\
 K_2 &= \sum_{k=l}^{N^e} \left( \sum_{i=l}^9 \sum_{i=l}^9 H_j^e [K_2]_{ji}^e H_i^e \right)_k & B_l &= \sum_{k=l}^{N^e} \left( \sum_{i=l}^9 \sum_{i=l}^9 F_j^e [B_l]_{ji}^e G_i^e \right)_k \\
 \bar{B}_2 &= \sum_{k=l}^{N^e} \left( \sum_{i=l}^9 \sum_{i=l}^9 \bar{F}_j^e [\bar{B}_2]_{ji}^e H_i^e \right)_k & L_l &= \sum_{k=l}^{N^e} \left( \sum_{i=l}^9 \sum_{i=l}^9 G_j^e [L_l]_{ji}^e F_i^e \right)_k \\
 L_2 &= \sum_{k=l}^{N^e} \left( \sum_{i=l}^9 \sum_{i=l}^9 H_j^e [L_2]_{ji}^e F_i^e \right)_k & M_l &= \sum_{k=l}^{N^e} \left( \sum_{i=l}^9 \sum_{i=l}^9 G_j^e [M_l]_{ji}^e G_i^e \right)_k \\
 M_2 &= \sum_{k=l}^{N^e} \left( \sum_{i=l}^9 \sum_{i=l}^9 H_j^e [M_2]_{ji}^e H_i^e \right)_k & & (3.53)
 \end{aligned}$$

dans lequel  $N^e$  représente le nombre total des nœuds du domaine discret .

Pour la suite des calculs, nous suivons le même processus que celui de la solution analytique, déjà développé dans le paragraphe précédent. La précision des nombres de Rayleigh prédits par la présente méthode numérique dépend alors du nombre d'éléments dans les deux directions  $x$  et  $y$ . L'indépendance du maillage sur les solutions a été démontrée en comparant la valeur de  $R_{TC}^{sup}$ , prédit numériquement par l'équation (3.43), avec la solution analytique déjà discuté dans le paragraphe précédent. Des résultats typiques sont présentés dans le tableau (3.1) pour le cas  $NLe=0$  et pour différentes valeurs du rapport de forme  $A$ .  $N_x$  et  $N_y$  sont les nombres d'éléments selon les directions  $x$  et  $y$  respectivement.

Tableau 3.1 : Effet du maillage sur la précision de la valeur de  $R_{TC}^{\text{sup}}$  pour  $NLe=0$ .

$A = 1$				
$N_x \times N_y$	$5 \times 5$	$15 \times 15$	$20 \times 20$	Exacte
$R_{TC}^{\text{sup}}$	22.958296	22.946051	22.945940	22.945889
$A = 5$				
$N_x \times N_y$	$2 \times 5$	$5 \times 10$	$15 \times 30$	Exacte
$R_{TC}^{\text{sup}}$	12.456743	12.450760	12.450471	12.450467
$A = 10$				
$N_x \times N_y$	$2 \times 5$	$5 \times 10$	$15 \times 30$	Exacte
$R_{TC}^{\text{sup}}$	12.115283	12.112921	12.112753	12.112750

### Algorithme de calcul

- Lecture des données et initialisation des variables du programme.
  - Discrétisation du domaine de calcul (Maillage).
  - Calcul des matrices élémentaires par les expressions (3.25).
  - Assemblage des matrices élémentaires.
  - Introduction des conditions aux frontières, équations (2.22)-(2.24).
  - Résolution de l'équation (3.28) et détermination des valeurs propres.
  - Détermination des profils des fonctions  $\{F\}$ ,  $\{G\}$  et  $\{H\}$  (vecteurs propres).
  - Calcul des scalaires  $K_\psi$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M_1$  et  $M_2$ , équations (3.53).
  - Calcul de coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  par les équations (3.42) et (3.48).
  - Calcul du nombre de Rayleigh thermique supercritique, équation (3.44).
  - Calcul du nombre de Rayleigh thermique surcritique, équation (3.48).
  - Calcul du nombre de Rayleigh thermique critique oscillant, équation (3.49).
- Impression des résultats.
- Fin du programme.

## CHAPITRE IV

### SOLUTION NUMERIQUE

La méthode des différences finies est l'une des méthodes numériques les plus utilisées pour la résolution des problèmes de convection naturelle en milieux fluides ou poreux. Dans ce chapitre, nous commençons par décrire cette technique et nous procédons ensuite à sa validation à partir des résultats connus dans la littérature.

#### 4.1 Méthode des différences finies

Dans cette section, les équations gouvernantes (2.18)-(2.20) sont résolues numériquement par la méthode des différences finies. La simplicité géométrique de notre domaine physique, rend l'usage de cette méthode particulièrement facile. Le domaine de calcul est discrétisé par un ensemble de nœuds (voir figure 4.1). A chaque nœud, on calcule les valeurs de la fonction de courant, de la température et de la concentration.

#### 4.2 Discrétisation des équations

Pour la discrétisation des dérivées partielles des équations gouvernantes, on a utilisé des schémas centrés de premier et second ordre. Les relations suivantes donnent la forme générale discrétisée des dérivées partielles d'une fonction  $f$ , pour un nœud quelconque  $(i,j)$ , selon la direction  $x$ .

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (4.1)$$

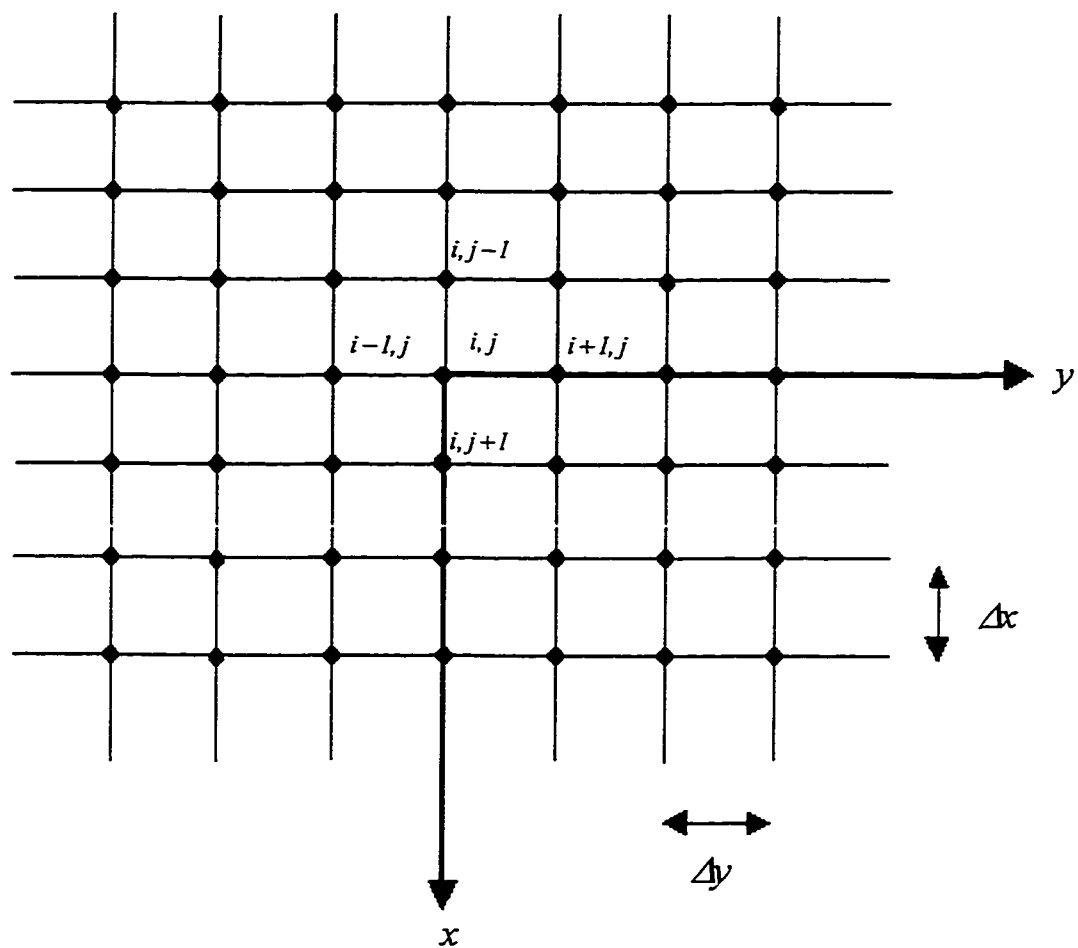


Figure 4.1 : Maillage uniforme du domaine physique.



$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (4.3)$$

avec  $\Delta x = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$ .

Les expressions (4.1) et (4.2) sont obtenues à l'aide d'un développement en série de Taylor de la fonction  $f$ .

#### 4.2.1 Équation de conservation de la quantité de mouvement

La solution de l'équation de Darcy (Eq. 2.18) est obtenue par la méthode de surrelaxation successive par point, une fois que cette dernière est discrétisée par un schéma aux différences finies centrées. Pour obtenir des résultats adéquats, il faut satisfaire le critère de convergence. Les valeurs discrètes du profil de la fonction de courant, sont données par la relation suivante:

$$\Psi_{i,j}^{k+1} = (I-w)\Psi_{i,j}^{k+1} + w \left\{ \begin{array}{l} [A_y(\Psi_{i+1,j}^k + \Psi_{i-1,j}^k) + A_x(\Psi_{i,j+1}^k + \Psi_{i,j-1}^k)] + \\ A_{xy} [(T_{i,j+1}^{t+\Delta t/2} - T_{i,j-1}^{t+\Delta t/2}) + N(S_{i,j+1}^{t+\Delta t/2} - S_{i,j-1}^{t+\Delta t/2})] \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

dans lequel  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_{xy}$  sont trois constantes qui sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_y = \frac{I}{2} \left( \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right) \\ A_x = \frac{I}{2} \left( \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right) \\ A_{xy} = \frac{R_T}{4} \left( \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

et  $w$  est le coefficient de surrelaxation. Sa valeur optimale est donnée par (Roche,1985):

$$w_{opt} = \frac{2}{\varpi^2} (I - \sqrt{I - \varpi}) \quad \text{où} \quad \varpi = \frac{\cos(\pi/m_x) + (\Delta x / \Delta y)^2 \cos(\pi/m_y)}{I + (\Delta x \Delta y)^2} \quad (4.5)$$

## 4.2.2 Équations de l'énergie et de concentration

Les équations de l'énergie (2.19) et de la concentration (2.20) sont résolues avec la méthode implicite aux directions alternées ADI (Alternating Direction Implicit), modifiée par Peaceman et Rachford (1955). Un schéma aux différences finies centrées de deuxième ordre, selon les deux directions de l'espace  $(x,y)$  est utilisé. La méthode ADI donne naissance à deux systèmes matriciels tridiagonaux pour chaque pas de temps, l'un étant obtenu par la discrétisation implicite selon  $x$  et l'autre par la discrétisation implicite selon  $y$ . Pour chaque pas de temps, la résolution des deux systèmes matriciels est réalisée en faisant un balayage du domaine dans la direction  $x$  et ensuite dans la direction  $y$  et ceci tout en se servant du dernier champ des résultats disponibles.

### 4.2.2.1 Équation de l'énergie

Pour le schéma implicite en  $x$  et explicite en  $y$ , les termes contenant les dérivées partielles de la température par rapport à  $x$  sont discrétisés au temps  $(t + \Delta t / 2)$ . Les valeurs des températures aux nœuds sont calculées par la relation suivante :

$$A_i T_{i-1,j}^{t+\Delta t/2} + B_i T_{i,j}^{t+\Delta t/2} + C_i T_{i+1,j}^{t+\Delta t/2} = D_i \quad (4.6)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i = -\left( \frac{u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{I}{(\Delta x)^2} \right) \quad B_i = \frac{I}{\Delta t} + \frac{2}{(\Delta x)^2} \quad C_i = \frac{u_{i+1,j}}{2\Delta x} - \frac{I}{(\Delta x)^2} \\ D_i = \left[ \left( \frac{v_{i,j-1}}{2\Delta y} + \frac{I}{(\Delta y)^2} \right) T_{i,j-1}^t + 2 \left( \frac{I}{2\Delta t} - \frac{I}{(\Delta y)^2} \right) T_{i,j}^t + \left( \frac{v_{i+1,j}}{2\Delta y} + \frac{I}{(\Delta y)^2} \right) T_{i,j+1}^t \right] \end{array} \right.$$

Par ailleurs, dans le cas d'un schéma implicite en  $y$  et explicite en  $x$ , les termes contenant les dérivées partielles par rapport à  $y$ , sont discrétisés au temps  $t + \Delta t$ . La forme de l'équation qui donne les températures aux nœuds est :

$$A'_j T'_{i,j-1} + B'_j T'_{i,j} + C'_j T'_{i,j+1} = D'_j \quad (4.7)$$

avec

$$\begin{cases} A'_j = \frac{v_{i,j-1}}{2\Delta y} + \frac{1}{(\Delta y)^2} & B'_j = 2\left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{(\Delta y)^2}\right) & C'_j = \frac{v_{i,j+1}}{2\Delta y} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \\ D'_j = \left[ -\left(\frac{u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{1}{(\Delta x)^2}\right) T'_{i-1,j} + 2\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{(\Delta x)^2}\right) T'_{i,j} + \left(\frac{u_{i+1,j}}{2\Delta x} - \frac{1}{(\Delta x)^2}\right) T'_{i+1,j} \right] \end{cases}$$

#### 4.2.2.2 Équation de la concentration

Les dérivées partielles de l'équation de la concentration sont discrétisées de la même façon que celles de l'équation de l'énergie. Pour le schéma implicite en  $x$  et explicite en  $y$ , la forme de l'équation donnant les concentrations aux nœuds est :

$$E_i S'_{i-1,j} + F_i S'_{i,j} + G_i S'_{i+1,j} = H_i \quad (4.8)$$

avec

$$\begin{cases} E_i = -\left(\frac{u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{1}{Le(\Delta x)^2}\right) & F_i = 2\left(\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{1}{Le(\Delta x)^2}\right) & G_i = \frac{u_{i+1,j}}{2\Delta x} - \frac{1}{Le(\Delta x)^2} \\ H_i = \left[ \left(\frac{v_{i,j-1}}{2\Delta y} + \frac{1}{Le(\Delta y)^2}\right) S'_{i,j-1} + 2\left(\frac{\varepsilon}{\Delta t} - \frac{1}{Le(\Delta y)^2}\right) S'_{i,j} - \left(\frac{v_{i,j+1}}{2\Delta y} - \frac{1}{Le(\Delta y)^2}\right) S'_{i,j+1} \right] \end{cases}$$

Pour le cas d'un schéma implicite en  $y$  et explicite en  $x$ , les dérivées partielles par rapport à  $y$  sont discrétisées au temps  $t + \Delta t$ . Les valeurs des concentrations aux nœuds sont obtenues par l'équation suivante :

$$E'_j S_{i,j-1}^{t+\Delta t} + F'_j S_{i,j}^{t+\Delta t} + G'_j S_{i,j+1}^{t+\Delta t} = H'_j \quad (4.9)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_j = \frac{v_{i,j-1}}{2\Delta y} + \frac{l}{Le(\Delta y)^2} \quad F'_j = 2\left(\frac{\varepsilon}{\Delta t} - \frac{l}{(\Delta y)^2}\right) \quad G'_j = \frac{v_{i,j+1}}{2\Delta y} + \frac{l}{Le(\Delta y)^2} \\ H'_j = \left[ -\left(\frac{u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{l}{Le(\Delta x)^2}\right) S_{i-1,j}^{t+\Delta t/2} + 2\left(\frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{l}{Le(\Delta x)^2}\right) S_{i,j}^{t+\Delta t/2} + \left(\frac{u_{i+1,j}}{2\Delta x} - \frac{l}{Le(\Delta x)^2}\right) S_{i+1,j}^{t+\Delta t/2} \right] \end{array} \right.$$

### 4.2.3 Les conditions aux frontières

Les dérivées des conditions aux frontières de type Neumann, sont discrétisées avec un schéma aux différences finies décentrés amont ou aval, selon la position de la paroi considérée.

Si la cavité est soumise par exemple à un flux de chaleur  $q'$ , les équations qui donnent les valeurs des températures aux nœuds sur les parois horizontales supérieure et inférieure sont :

$$\left. \begin{array}{l} T_{1,j} = \frac{4 T_{2,j}^{t+\Delta t/2} - T_{3,j}^{t+\Delta t/2} - 2 \Delta x}{3} \quad \text{pour } x = -\frac{1}{2} \\ T_{m,j} = \frac{4 T_{m-1,j}^{t+\Delta t/2} - T_{m-2,j}^{t+\Delta t/2} + 2 \Delta x}{3} \quad \text{pour } x = +\frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

avec  $m$  le nombre de nœuds selon la direction  $x$ .

Les parois verticales étant isolées, on a donc également affaire à des conditions aux frontières thermiques de type Neumann. Les équations qui donnent les valeurs des températures aux nœuds sur ces parois sont :

$$\left. \begin{aligned} T_{i,1} &= \frac{4T_{i,2}^{t+\Delta t} - T_{i,3}^{t+\Delta t}}{3} \quad \text{pour } y = +\frac{A}{2} \\ T_{i,n} &= \frac{4T_{i,n-1}^{t+\Delta t} - T_{i,n-2}^{t+\Delta t}}{3} \quad \text{pour } y = -\frac{A}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

avec  $n$  le nombre de nœuds selon la direction  $y$ .

#### 4.2.4 Le champ de vitesse

Les composantes du champ de vitesse  $(u, v)$  sont évaluées à partir de la fonction de courant  $\Psi$ . Ces composantes sont discrétisées par des approximations de différences finies centrées du premier ordre.

$$\left. \begin{aligned} u_{i,j}^{t+\Delta t/2} &= \frac{\Psi_{i,j+1}^{t+\Delta t/2} - \Psi_{i,j-1}^{t+\Delta t/2}}{2\Delta y} \\ v_{i,j}^{t+\Delta t/2} &= -\frac{\Psi_{i+1,j}^{t+\Delta t/2} - \Psi_{i-1,j}^{t+\Delta t/2}}{2\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Le schéma numérique de la vitesse  $u$  à  $y = \pm A/2$  (parois verticales) s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} u_{i,2} &= \frac{4\Psi_{i,2}^{t+\Delta t/2} - \Psi_{i,3}^{t+\Delta t/2}}{2\Delta y} \\ u_{i,n+1} &= -\frac{4\Psi_{i,n}^{t+\Delta t/2} - \Psi_{i,n-1}^{t+\Delta t/2}}{2\Delta y} \end{aligned} \right\} \quad \text{avec } i = 2, m \quad (4.13)$$

à  $x = \pm l/2$  (parois horizontales) le schéma de la vitesse  $v$  s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} v_{1,j} &= -\frac{4\Psi_{2,j}^{t+\Delta t/2} - \Psi_{3,j}^{t+\Delta t/2}}{2\Delta x} \\ v_{n+1,j} &= \frac{4\Psi_{m,j}^{t+\Delta t/2} - \Psi_{m-1,j}^{t+\Delta t/2}}{2\Delta x} \end{aligned} \right\} \text{avec } j = 2, n \quad (4.14)$$

#### 4.2.5 Nombres de Nusselt et de Sherwood

Le nombre de Nusselt  $Nu$  sur chaque nœud des parois horizontales est donné par l'expression suivante :

$$Nu_{l,j} = \frac{l}{T_{m+1,j} - T_{l,j}} \quad \text{pour } x = \pm \frac{l}{2} \quad (4.13)$$

Pour calculer les nombres de Sherwood  $Sh$  sur chaque nœud des deux parois horizontales de la cavité, on a utilisé un schéma de discrétisation amont ou aval, selon la position de la paroi considérée. Les relations suivantes donnent le nombre de Sherwood  $Sh$  sur chaque nœud des parois horizontales :

$$\left. \begin{aligned} Sh_{1,j} &= \left[ \frac{4 S_{2,j}^{t+\Delta t/2} - S_{3,j}^{t+\Delta t/2} - 3 S_{1,j}^{t+\Delta t/2}}{2\Delta x} \right] & \text{pour } x = -\frac{1}{2} \\ Sh_{m,j} &= -\left[ \frac{4 S_{m-1,j}^{t+\Delta t/2} - S_{m-2,j}^{t+\Delta t/2} - 3 S_{m,j}^{t+\Delta t/2}}{2\Delta x} \right] & \text{pour } x = +\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens respectivement  $\bar{Nu}$  et  $\bar{Sh}$ , équation (2.28) sont calculés numériquement par la méthode d'intégration de Simpson.

### 4.3 Critère de convergence

On dit que la solution du problème est permanente ou que le régime permanent est atteint lorsque la condition sur le critère de convergence est satisfaite. Ce dernier est donné par la relation suivante:

$$\frac{\left| \sum_{i,j} \Psi_{i,j}^{t+\Delta t} - \sum_{i,j} \Psi_{i,j}^t \right|}{\left| \sum_{i,j} \Psi_{i,j}^{t+\Delta t} \right|} \leq \delta \quad (4.16)$$

dans lequel  $\delta = 10^{-10}$  .

### 4.4 Algorithme de calcul

- Lecture des données et initialisation des variables du programme.
- Estimation des champs de température et de concentration.
- Début de la boucle dans le temps.
  - Résolution de l'équation de la fonction de courant.
  - Détermination des vitesses ( $u, v$ ) à partir des relations (Eq. 4.14).
  - Résolution des équations de l'énergie et de la concentration (Eqs. 3.2 et 3.3) avec la méthode ADI.
- Fin de la boucle une fois que la condition (4.16) est satisfaite (régime permanent).
- Impression des résultats.
- Fin du programme.

#### 4.5 Validation de la méthode numérique

Le programme numérique développé ci-dessus a été validé en comparant les résultats obtenus dans le cas d'une cavité rectangulaire poreuse dont les parois horizontales sont soumises à des températures constantes ou à des flux de chaleur constants avec les résultats disponibles dans la littérature.

- **Parois horizontales soumises à des températures constantes**

Les résultats obtenus par le présent code dans le cas où les parois horizontales d'une cavité carrée sont maintenues à des concentrations constantes ( $R_T \rightarrow 0$  et  $N \rightarrow \infty$ ) sont comparables à ceux obtenus par Caltagirone [17] dans le cas d'une cavité carrée poreuse dont les parois horizontales sont maintenues à des températures constantes. Des différences maximales inférieures à 1% ont été observées, en terme du nombre de Nusselt moyen  $\bar{Nu}$  et de la fonction de courant maximale  $\Psi_{max}$  comme on peut le voir sur le tableau (4.1).

Tableau 4.1 : Comparaison avec les résultats de Caltagirone [17] pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh  $R_T$ .

	$R_T$			
	100		200	
	Présent travail	Caltagirone	Présent travail	Caltagirone
$\bar{Nu}$	2.625	2.651	3.792	3.813
$\Psi_{max}$	5.354	5.377	8.937	8.942
$Nx \times Ny$	32 × 32		48 × 48	

Dans le tableau ci-dessus  $Nx$  et  $Ny$  sont définis respectivement, comme le nombre de mailles suivant les directions  $x$  et  $y$ , respectivement.



- **Parois horizontales soumises à des flux de chaleur**

Les résultats obtenus par le présent code peuvent être aussi comparés avec ceux obtenus par Kimura et al. [18] dans le cas d'une cavité rectangulaire ( $A = 4$ ) dont les parois horizontales sont soumises à des flux de chaleur constants si  $N \rightarrow 0$ . Cette comparaison a montré une concordance satisfaisante avec des différences maximales inférieures à 3.5% pour le nombre de Nusselt au centre  $Nu_c$  et inférieures à 0.7% pour la fonction de courant maximale,  $\Psi_{max}$ , comme le montre le tableau (4.2).

Tableau 4.2 : Comparaison avec les résultats de KIMURA et al. [18] pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh  $R_T$ .

	$R_T$			
	100		200	
	Présent travail	Kimura	Présent travail	Kimura
$Nu_c$	3.661	3.544	4.521	4.366
$\Psi_{max}$	3.730	3.756	5.425	5.447
$N_x \times N_y$	18 × 100		20 × 100	

#### 4.6 Effet du Maillage

Le tableau 4.3 montre l'effet du maillage sur la précision des valeurs de la fonction de courant maximale  $\Psi_{max}$  et du nombre de Nusselt moyen  $\bar{Nu}$  pour le cas  $NLe = 0$ . Si on accepte une erreur de moins de 0.5%, on peut constater que l'influence du maillage sur les résultats devient négligeable à partir de  $50 \times 50$  pour une cavité carrée ( $A = 1$ ) et de  $100 \times 200$  pour une couche rectangulaire dont le rapport de forme est 5 ( $A = 5$ ).

Tableau 4.3 : Effet du maillage sur la précision des valeurs du nombre de Nusselt moyen  $\bar{Nu}$  et la fonctions de courant  $\Psi_{max}$  pour  $NLe=0$ .

$A = 1$ et $R_T = 50$				
$Nx \times Ny$	10×10	50×50	100×100	150×150
$\bar{Nu}$	1.645777	1.715287	1.718377	1.718997
$\Psi_{max}$	1.874332	1.912380	1.913879	1.914214
$A = 5$ et $R_T = 20$				
$Nx \times Ny$	10×20	100×200	100×250	150×300
$\bar{Nu}$	1.333657	1.389157	1.389155	1.389557
$\Psi_{max}$	1.069065	1.120436	1.120393	1.120729

## CHAPITRE V

### RÉSULTATS ET DISCUSSION

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats analytiques et numériques obtenus dans la présente étude. La première section est consacrée à la discussion des résultats prédits par l'analyse de la stabilité linéaire. Les résultats obtenus par la solution numérique des équations gouvernantes du système sont présentés dans la deuxième section.

#### 5.1 Stabilité Linéaire

##### 5.1.1 Effet du rapport de forme $A$

L'influence du rapport de forme de la cavité  $A$  sur les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ , Eqs. 3.44, 3.48 et 3.49 est illustrée dans les figures 5.1-5.3, pour différentes valeurs de  $NLe$ . Le cas  $NLe = 0$  correspond au problème de Rayleigh-Bénard avec un flux de chaleur comme conditions aux frontières. Pour cette situation, la configuration de l'écoulement consiste en une seule cellule occupant la cavité entière. En conséquence, les figures 5.1-5.3 indiquent une dépendance monotone des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  avec le rapport de forme de la cavité. D'autre part, pour le cas  $NLe \rightarrow \infty$ , correspondant au problème de Rayleigh-Bénard avec des conditions aux frontières de type Dirichlet, la structure de l'écoulement est multicellulaire pour une couche infinie. Le champ de l'écoulement est alors constitué par des cellules ayant un rapport de forme carré. Cependant, quand l'extension transversale de la couche est finie, le nombre résultant de cellules dépend essentiellement du rapport de forme de la cavité. En général, à chaque valeur de  $A = A_n = \sqrt{n(n+1)}$ , le nombre des cellules augmente de  $n$  à  $n+1$ . Cette transition dans le nombre des cellules est représentée sur les figures 5.1.a, 5.2.a et 5.3.a par des sauts dans les valeurs des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Les résultats obtenus pour  $NLe < 0$ , pour lequel le gradient de la température déstabilise et le gradient de concentration stabilise,

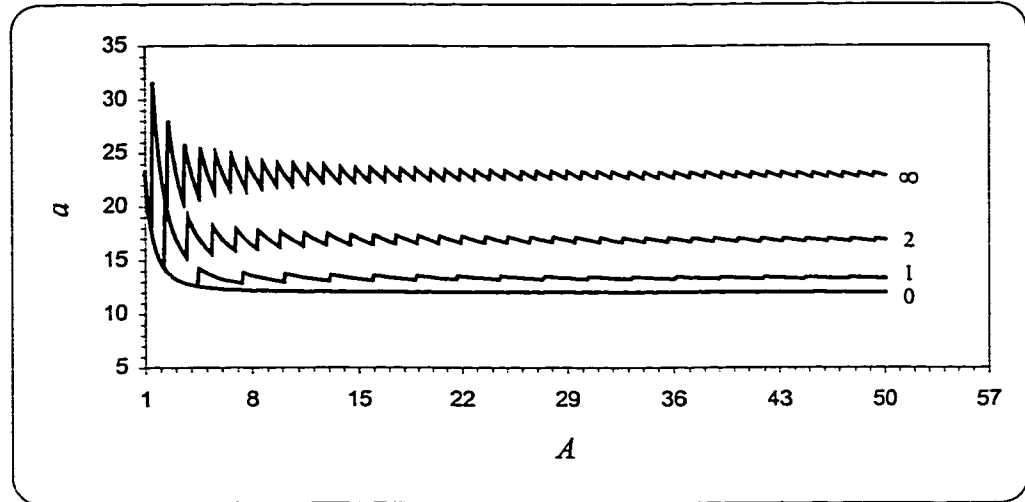


Figure 5.1.a

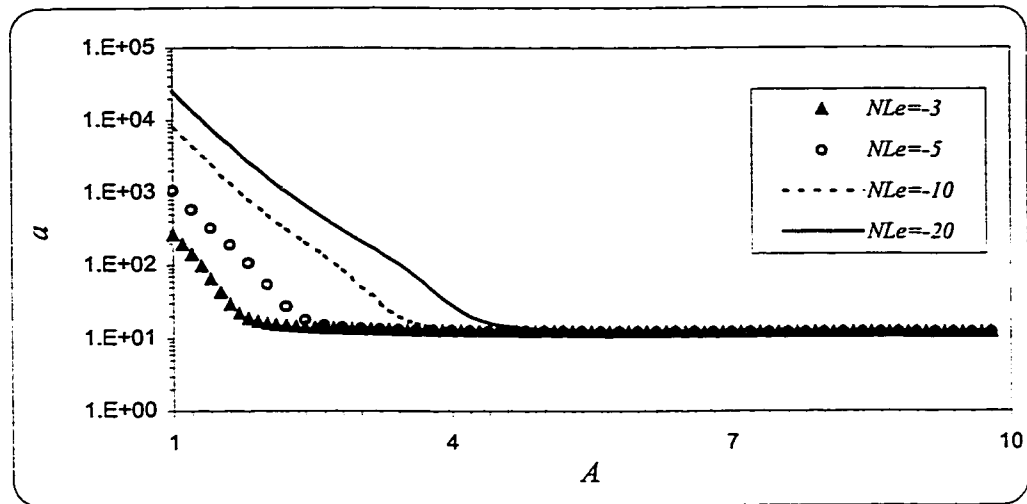


Figure 5.1.b

Figure 5.1 : Effet du rapport de forme  $A$ , sur le paramètre  $a$  : a) quand  $NLe > 0$  et b) quand  $NLe < 0$ .

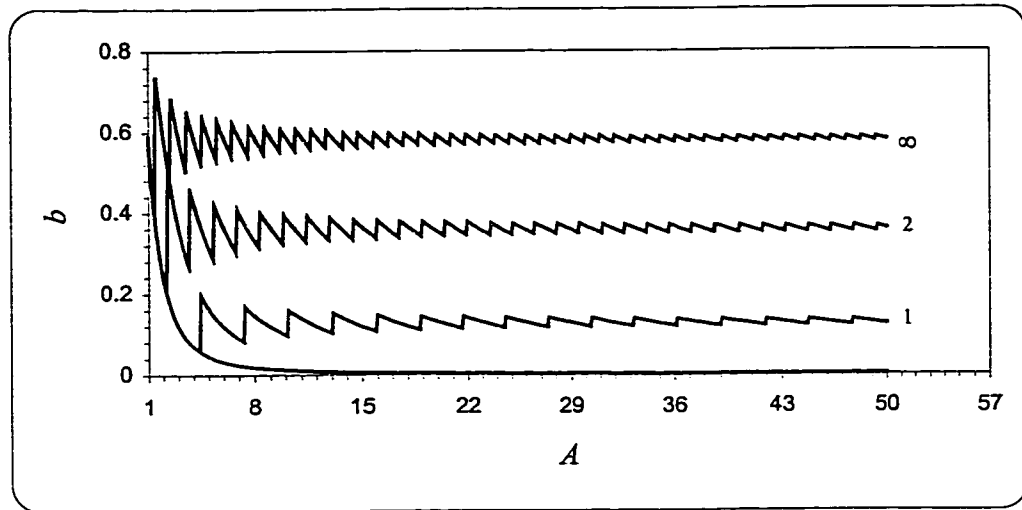


Figure 5.2.a

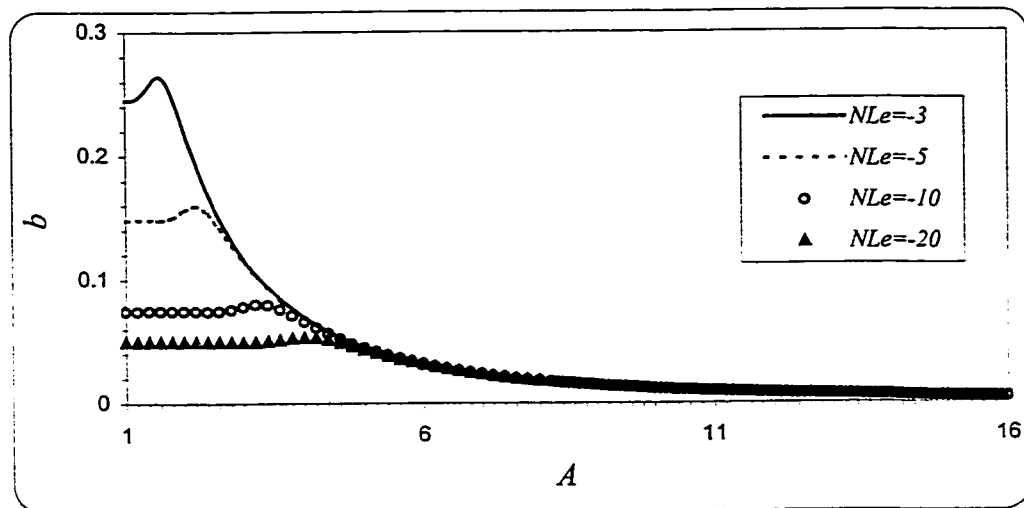


Figure 5.2.b

Figure 5.2 : Effet du rapport de forme  $A$ , sur le paramètre  $b$  : a) quand  $NLe > 0$  et b) quand  $NLe < 0$ .

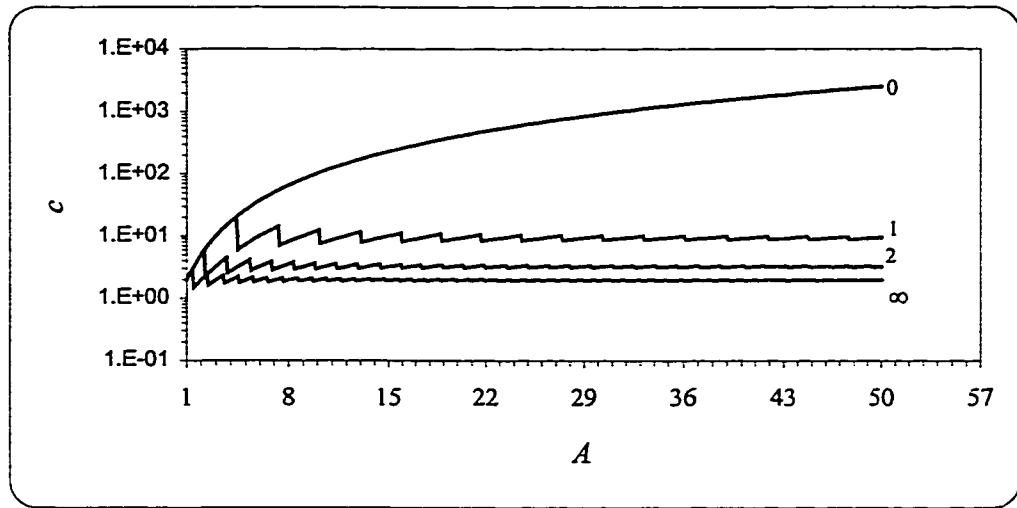


Figure 5.3.a

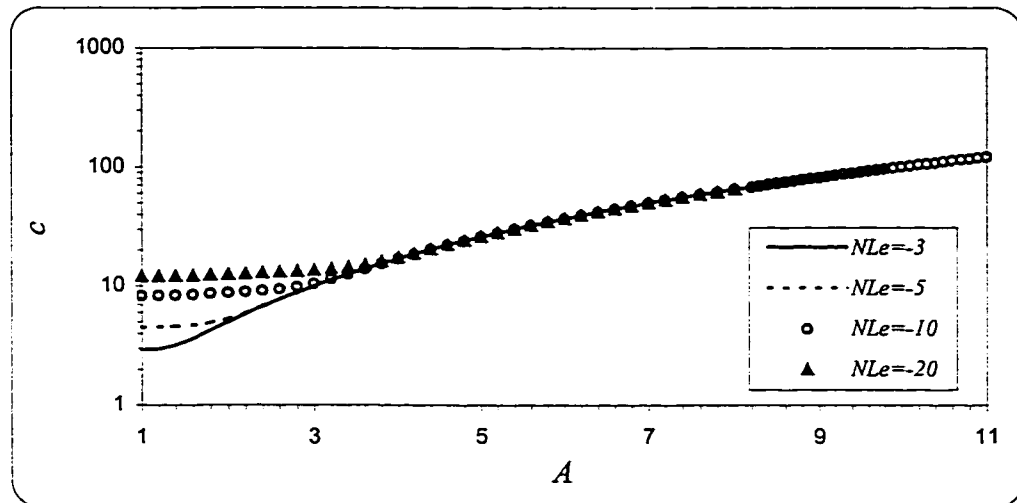


Figure 5.3.b

Figure 5.3 : Effet du rapport de forme  $A$ , sur le paramètre  $c$  : a) quand  $NLe > 0$  et b) quand  $NLe < 0$ .

sont présentés dans les figures 5.1.b, 5.2.b et 5.3.b. Indépendamment des valeurs de  $NLe$ , on observe une légère variation des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  en fonction du rapport de forme  $A$ . On constate de plus que même lorsque la valeur de  $NLe$  est grande l'écoulement reste unicellulaire indépendamment du rapport de forme  $A$ .

La figure 5.4 montre l'influence du rapport de forme  $A$  sur le paramètre  $R_{TC}^{sup}(NLe + 1)$ . Comme on a vu dans la section précédente, lorsque  $NLe = 0$  la structure de l'écoulement est monocellulaire (voir figure 5.6.a) quelque soit la valeur du rapport de forme  $A$ . La structure de l'écoulement devient multicellulaire pour  $NLe \geq 0.87$  et  $A \rightarrow \infty$ . Pour cette situation on peut observer une formation périodique de cellules de convection contrarotatives, le long de la cavité, tel qu'illustré sur la figure 5.7.b. Ainsi, la valeur du nombre de Rayleigh supercritique  $R_{TC}^{sup}$  est calculée, en faisant varier le rapport de forme  $A$  jusqu'à l'obtention de la valeur minimale de  $R_{TC}^{sup}$  qui donne le seuil de la convection supercritique.

### 5.1.2 Effet du paramètre $NLe$

Les résultats présentés dans la figure 5.5 sont obtenus analytiquement quand  $NLe \geq 0$  et numériquement (méthode des éléments finis) quand  $NLe < 0$ . Cette figure montre la variation du nombre de Rayleigh supercritique  $R_{TC}^{sup}$ , en fonction du paramètre  $NLe$ , pour différentes valeurs du rapport de forme  $A$ . Des représentations typiques de lignes de courant, isothermes et isoconcentrations sont illustrées dans les figures 5.6 et 5.8 pour  $A = 1$  et figures 5.7 et 5.9 pour  $A = 5$ . Comme déjà mentionné précédemment, pour le problème de Rayleigh-Bénard avec des conditions aux frontières de type Neumann ( $NLe = 0$ ), les effets des forces de volume d'origine solutale sont négligeables et l'écoulement convectif résultant est unicellulaire quelque soit la valeur de  $A$ , (voir les figures 5.6.a et 5.7.a). Pour cette situation  $R_{TC}^{sup} = 22.94$  quand  $A = 1$  et 12 quand  $A \rightarrow \infty$ . Ces résultats sont en accord avec ceux de Kimura et al. [17] et Nield [4],

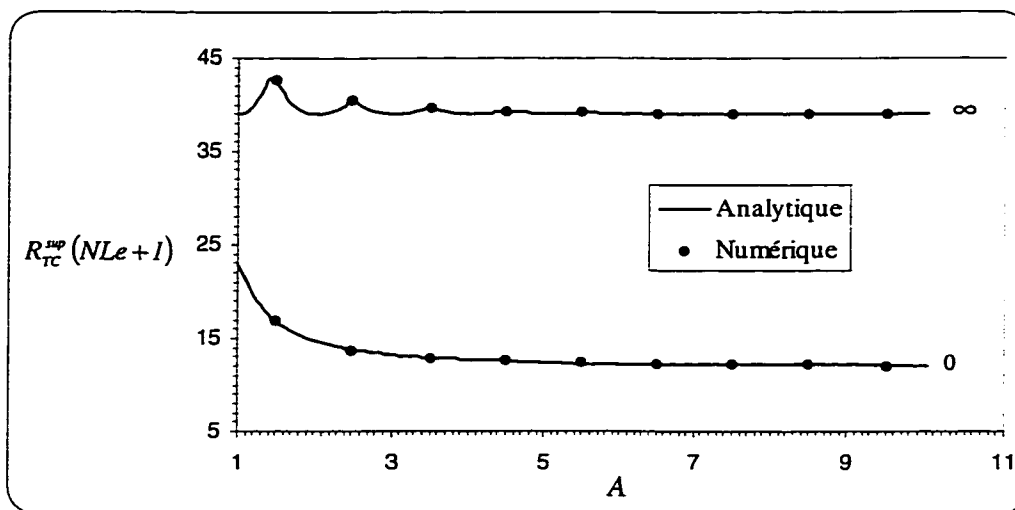


Figure 5.4 : Effet du rapport de forme  $A$ , sur le paramètre  $R_T(NLe+1)$  pour  $NLe=0$  et  $NLe=\infty$

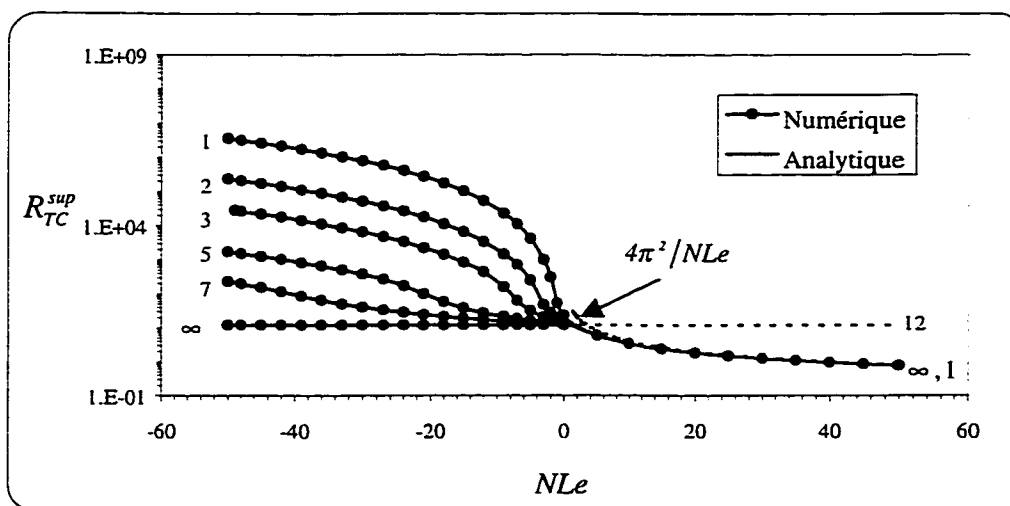


Figure 5.4 : Effet du paramètre  $NLe$  sur le nombre de Rayleigh thermique supercritique  $R_{TC}^{sup}$  pour différentes valeurs du rapport de forme  $A$ .



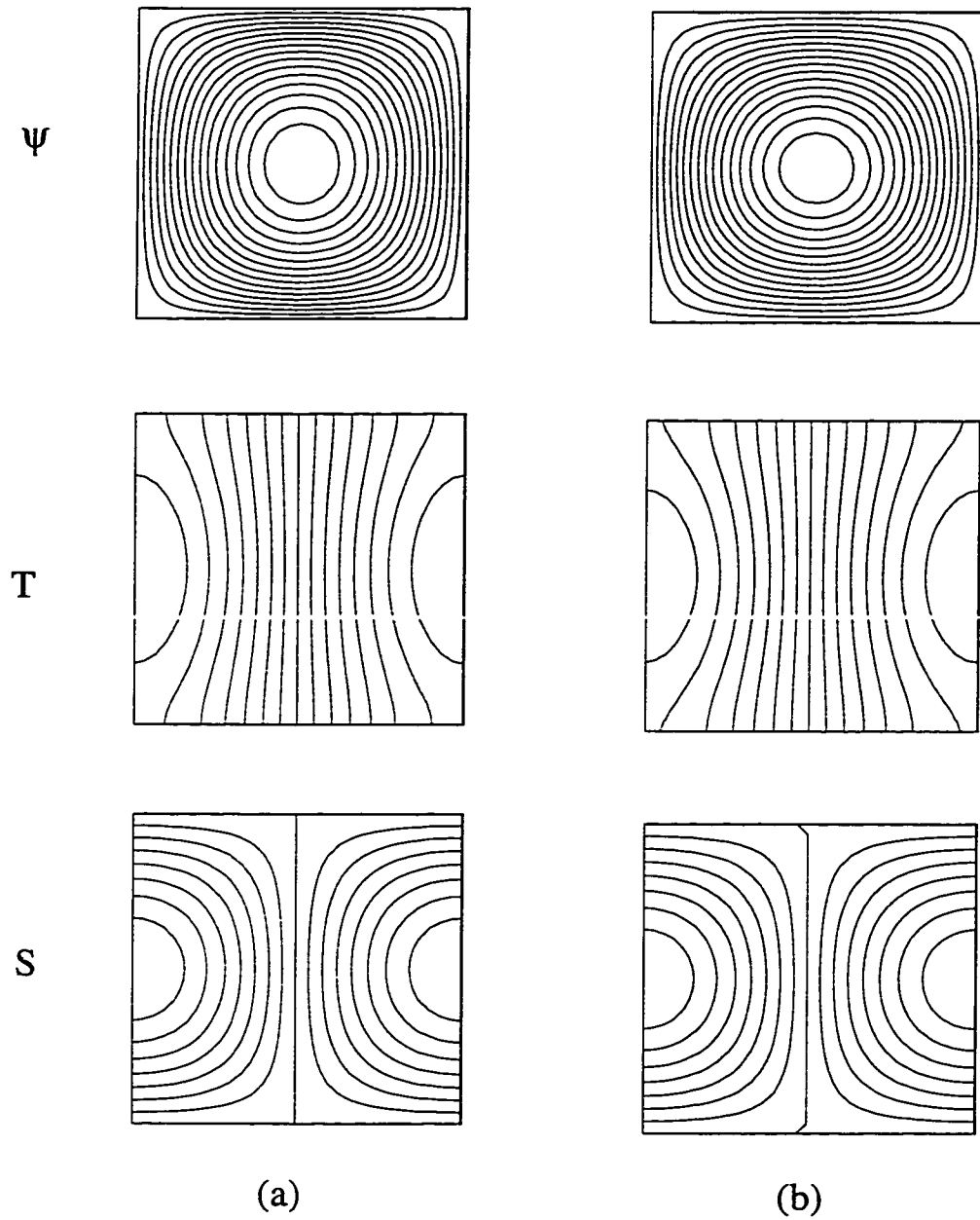


Figure 5.6 : Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité carrée ( $A=1$ ) : a)  $NLe=0$ ,  $a=22.95$ ,  $b=0.57$ ,  $c=1.96$  et  $R_{TC}^{sup}=22.95$  et b)  $NLe=50$ ,  $a=23.28$ ,  $b=0.60$ ,  $c=1.93$  et  $R_{TC}^{sup}=0.76$ .

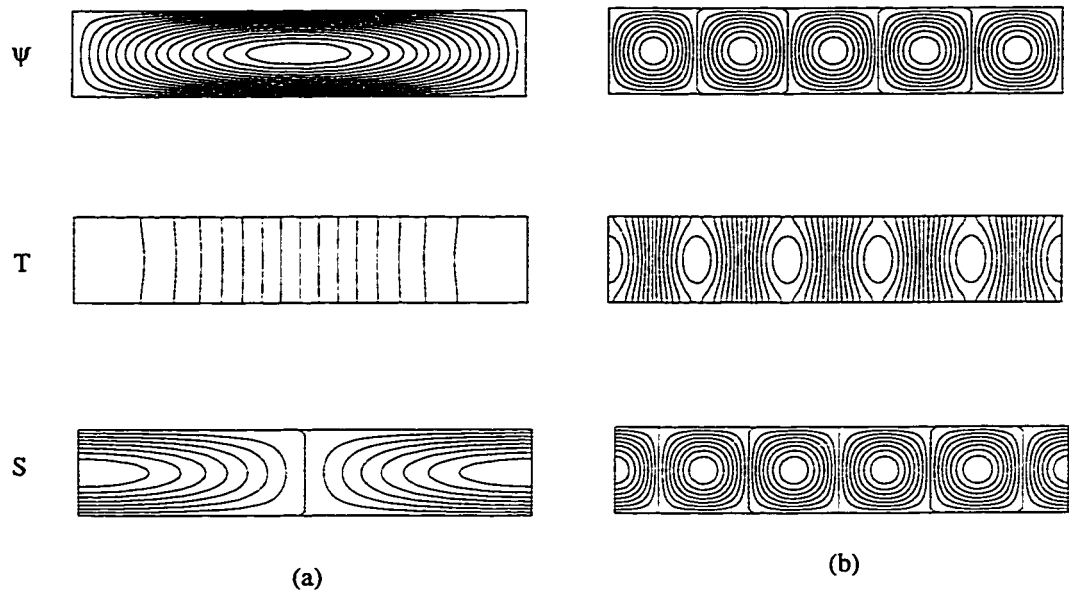


Figure 5.7 : Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité rectangulaire ( $A=5$ ): a)  $NLe=0$ ,  $a=12.45$ ,  $b=0.05$ ,  $c=25.96$  et  $R_{TC}^{sup}=12.45$  et b)  $NLe=50$ ,  $a=23.28$ ,  $b=0.60$ ,  $c=1.93$  et  $R_{TC}^{sup}=0.76$ .

respectivement. On peut constater que lorsque les gradients de la température et de la concentration sont tous deux déstabilisants ( $NLe > 0$ ), les résultats obtenus sont presque indépendants du rapport de forme  $A$ . Pour une valeur de  $NLe$  suffisamment grande, les effets des forces de volume d'origine thermique sont négligeables, la naissance de la convection est alors régi par les effets de la concentration (soluté) et  $R_{SC}^{sup} = 4\pi^2$  (i.e.  $R_{TC}^{sup} = 4\pi^2 / NLe$ ), ce résultats étant en accord avec la prédiction de Lapwood [19]. Cette limite est représentée sur la figure 5.5 par une ligne en pointillée (indiquée par une flèche). Comme on peut le voir, cette limite est atteinte pour une valeur de  $NLe \geq 20$ . Les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations qui correspondent au début de la convection sont illustrées dans la figure 5.6.b pour  $A = 1$  et la figure 5.7.b pour  $A = 5$ . Pour ce dernier cas, on constate la présence de cinq cellules dans la cavité. Cette situation correspond au problème classique de Bénard.

Le cas  $NLe < 0$  est maintenant discuté. Pour cette situation le flux (température) déstabilise tandis que la concentration stabilise. Ainsi, quand  $Le > 1$  le problème correspond au régime diffusif de la convection thermosolutale où la composante rapide de diffusion (chaleur) est déstabilisante et la composante lente de diffusion (soluté) est stabilisante. Pour une valeur donnée de  $A$ , la figure 5.5 indique que  $R_{TC}^{sup}$ , augmente d'une façon monotone en fonction des valeurs du paramètre  $NLe$ . Ceci est dû au fait que les forces de volume solutales qui agissent comme un agent stabilisant augmente avec  $NLe$ . Les effets de  $NLe$  sur la structure de l'écoulement, au début de la convection, sont illustrés dans la figure 5.8 pour  $A = 1$  et la figure 5.9 pour  $A = 5$ . Pour  $NLe = -25$  et  $NLe = -2$ , les figures 5.8.a et 5.9.a, respectivement, indiquent l'existence de deux cellules remplissant la cavité entière. Au fur et à mesure que la valeur de  $NLe$  augmente, ces deux cellules se déplacent progressivement pour se concentrer au voisinage des parois supérieure et inférieure de la cavité. Ainsi, pour  $NLe = -5$  ( $A = 1$ ) et pour  $NLe = -50$  ( $A = 5$ ), les figures 5.8.c et 5.9.c montrent l'existence de cellules très minces à proximité des deux parois horizontales de la cavité.

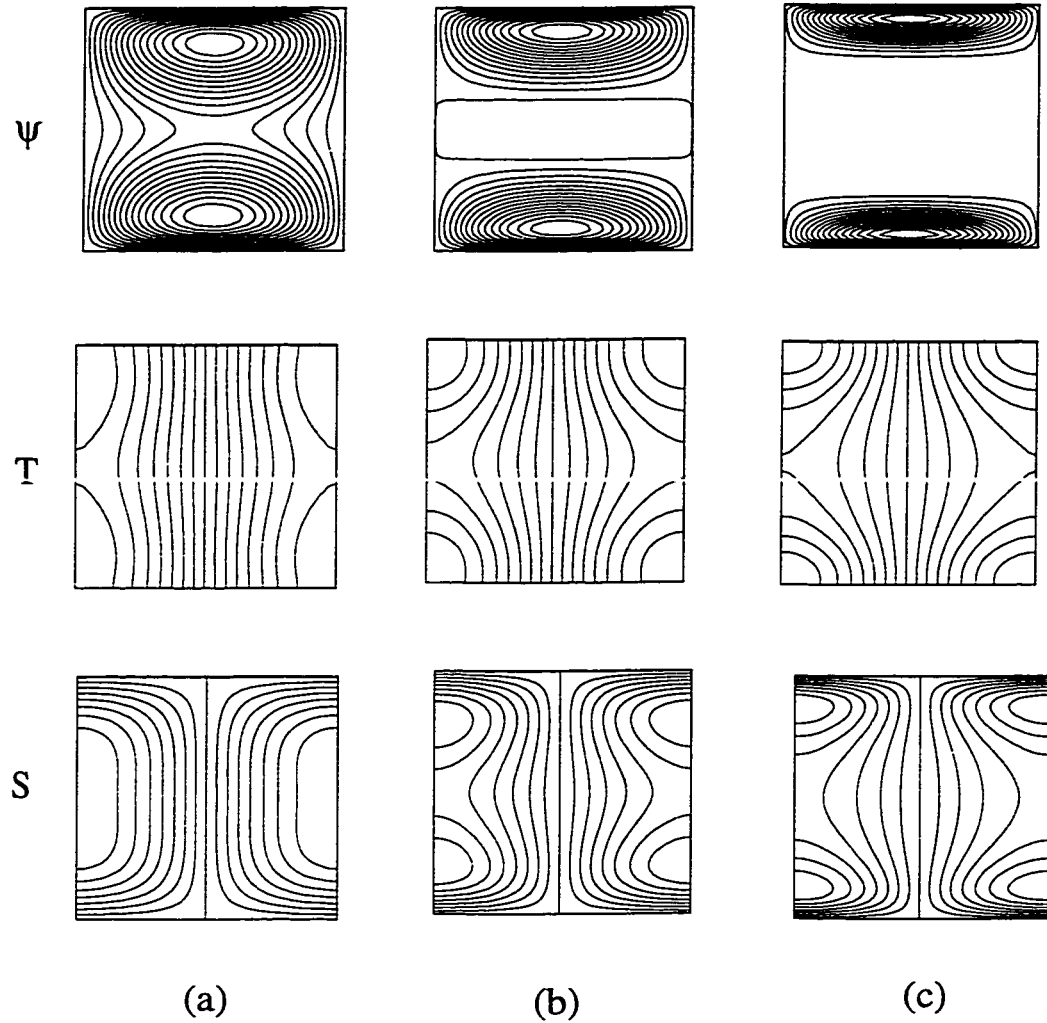


Figure 5.8 : Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité carrée ( $A=1$ ) : a)  $NLe = -2$ ,  $a = 72.47$ ,  $b = 0.38$ ,  $c = 2.18$  et  $R_{TC}^{sup} = 307.35$ , b)  $NLe = -3$ ,  $a = 260.11$ ,  $b = 0.25$ ,  $c = 2.93$  et  $R_{TC}^{sup} = 982.93$  et c)  $NLe = -5$ ,  $a = 1079.84$ ,  $b = 0.15$ ,  $c = 4.49$  et  $R_{TC}^{sup} = 4157.09$ .

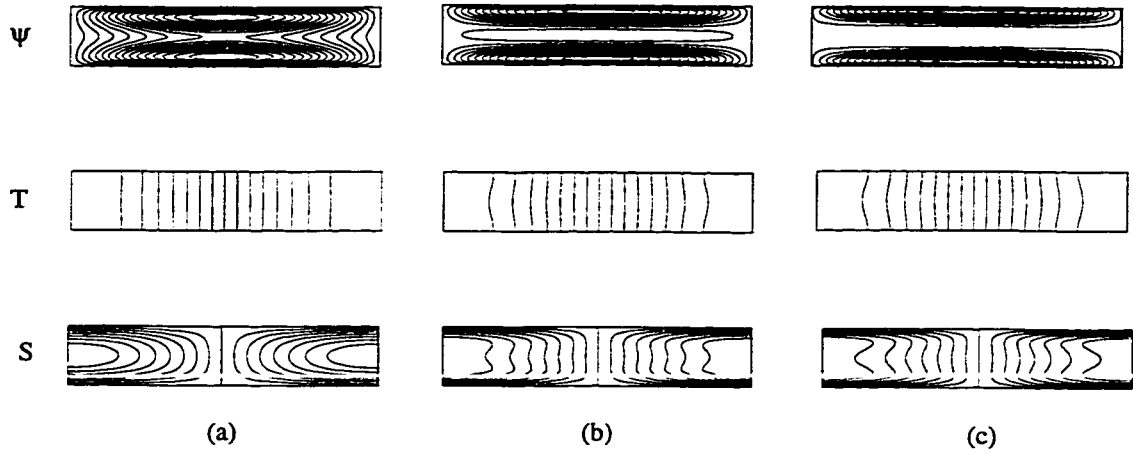


Figure 5.9 : Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité rectangulaire ( $A = 5$ ) : a)  $NLe = -25$ ,  $a = 41.58$ ,  $b = 0.03$ ,  $c = 27.01$  et  $R_{TC}^{sup} = 200$ , b)  $NLe = -40$ ,  $a = 225.26$ ,  $b = 0.02$ ,  $c = 35.87$  et  $R_{TC}^{sup} = 885.29$  et c)  $NLe = -50$ ,  $a = 430.23$ ,  $b = 0.01$ ,  $c = 43.35$  et  $R_{TC}^{sup} = 1715.58$ .

On peut également constater à partir de la figure 5.5 que pour une valeur donnée de  $NLe$  le nombre de Rayleigh thermique supercritique  $R_{TC}^{sup}$  diminue considérablement, au fur et à mesure que le rapport de forme  $A$  augmente. Ainsi, pour une couche infinie horizontale ( $A \rightarrow \infty$ ), le nombre de Rayleigh thermique supercritique  $R_{TC}^{sup}$  tend vers la valeur 12, indépendamment de l'intensité du gradient solutal stabilisant ( $NLe$ ). Une tendance similaire a été observée dans le passé par Nield [20] et Tsitverblit [21], dans le cadre d'une étude de la stabilité d'une couche horizontale de fluide, lorsque le gradient stabilisant dû à la température est gouverné par la différence de sa valeur aux frontières horizontales alors que le gradient déstabilisant dû à la concentration est maintenu par des conditions de flux à ces frontières. Il est à noter que dans le modèle considéré par Tsitverblit [21], les gradients stabilisants et déstabilisants résultent également de l'imposition de conditions de Dirichlet et de Neumann, respectivement. Cependant, le problème considéré par Tsitverblit n'est pas analogue au régime "diffusif" de la convection thermosolutale comme dans notre cas, mais plutôt au régime "digital" (dans lequel l'agent rapide de diffusion est stabilisant).

### 5.1.3 Diagramme de stabilité

La figure 5.10 illustre le diagramme de stabilité, prédit par la théorie de la stabilité linéaire. Ce dernier est présenté dans le plan,  $R_T - R_S$ , pour  $A = 1$ ,  $Le = 10$ ,  $\varepsilon = 1$  et  $N$  varie. On peut distinguer trois régions différentes, délimitées par des courbes correspondant aux équations (3.44), (3.48) et (3.49). Pour  $R_T < R_{TC}^{sur}$  (région (I)), la solution de base correspondant à l'état de repos du système est stable, selon la théorie de la stabilité linéaire. Ce point est confirmé par les résultats obtenus par la simulation numérique des équations gouvernantes, qui seront discutés ultérieurement. Ainsi, nous avons constaté que lorsqu'on démarre la simulation numérique en prenant la conduction pure comme solution initiale, le fluide reste au repos. Lorsque  $R_{TC}^{sur} < R_T < R_{TC}^{osc}$  (région (II)), l'analyse de la stabilité linéaire montre que les parties réelles et imaginaires du

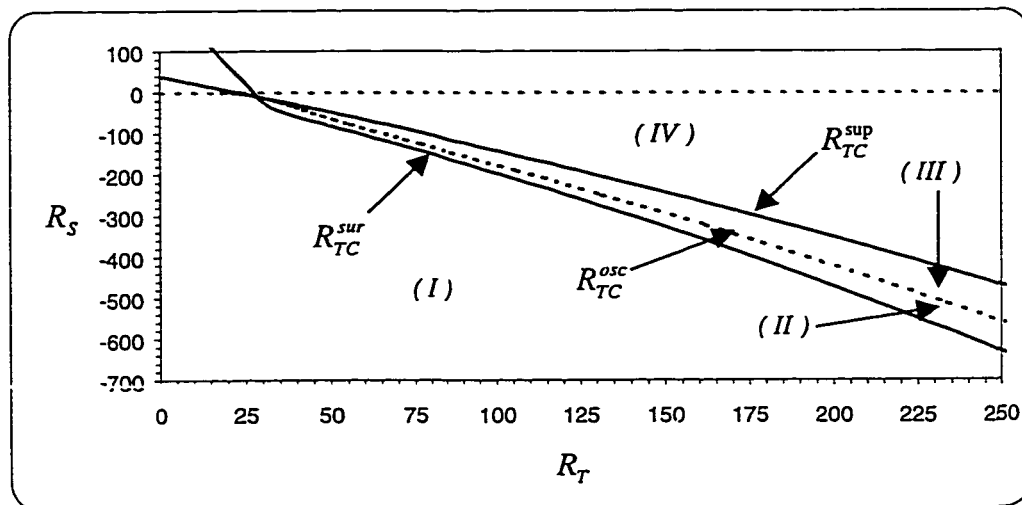


Figure 5.10 : Diagramme de stabilité pour  $A = 1$ ,  $Le = 10$ ,  $\varepsilon = 1$ .

paramètre  $p$ , équation (3.45), sont positives. Dans cette région les résultats numériques obtenus indiquent qu'en utilisant la conduction pure comme condition initiale, les amplitudes de la température et de la concentration croissent avec le temps d'une façon oscillante. Dans la région (III), ( $R_T > R_{TC}^{sup}$ ), au dessus de la ligne neutre de la stabilité, le système est instable et tous les résultats numériques obtenus dans cette région démontrent l'existence d'une amplitude finie de convection, indépendamment des conditions initiales.

#### 5.1.4 Conditions aux frontières thermiques de type Dirichlet et solutales de type Neumann

La stabilité d'une couche poreuse horizontale a été considérée pour le cas où les parois horizontales de la cavité sont soumises à des gradients de température et de concentration verticaux résultant de l'imposition des conditions thermiques et solutales de type Dirichlet et de type Neumann, respectivement. Les figures 5.11-5.15 montrent les résultats obtenus par la technique analytique décrite au début de cette section. La procédure pour obtenir cette solution étant similaire à celle décrite précédemment, les détails ne sont pas présentés dans la présente étude.

La figure 5.11 montre la variation du nombre de Rayleigh thermique supercritique  $R_{TC}^{sup}$ , en fonction du paramètre  $NLe$ , pour le cas  $A = 1$  et  $A = \infty$ , respectivement. Quand les forces de volume d'origine solutale sont négligeables ( $NLe = 0$ ), la convection est gouvernée par les forces de volumes thermique et on retrouve le problème classique de Bénard, pour lequel  $R_{TC}^{sup} = 4\pi^2$  quand le rapport de forme  $A$  vaut 1,2,3,... $\infty$ . La configuration résultante de l'écoulement est illustrée dans les figures 5.12 et 5.14 pour  $A = 1$  et les figures 5.13 et 5.15 pour  $A = 5$ . Lorsque la valeur de  $NLe$  augmente, l'écoulement est gouverné par les conditions frontières associées aux flux (soluté). Pour cette situation, la structure de l'écoulement est unicellulaire (voir par exemple les figures 5.12.a et 5.14.a) et  $R_{TC}^{sup} = 22.94$  (12) quand  $A = 1$  ( $\infty$ ). Lorsque  $NLe \rightarrow \infty$  le nombre



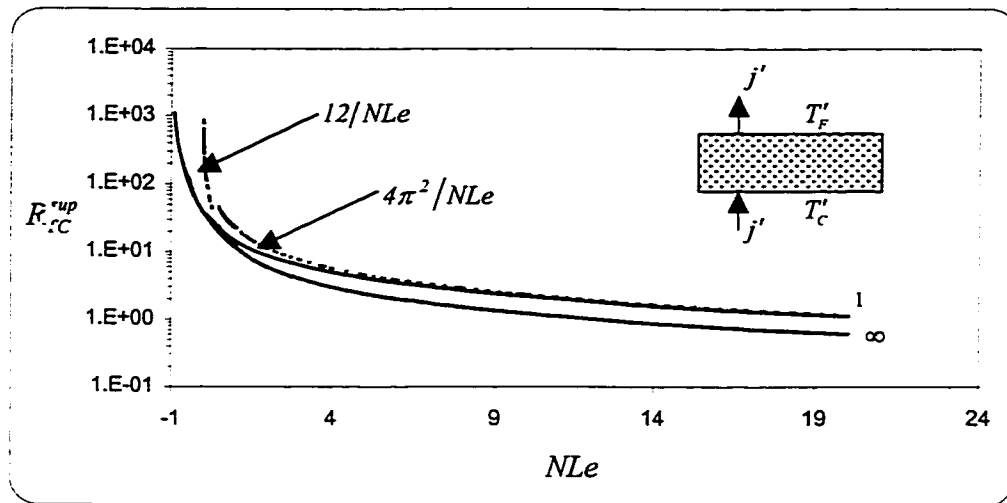


Figure 5.11 : Influence du paramètre  $NLe$  sur le nombre de Rayleigh thermique supercritique  $R_{TC}^{sup}$ , pour le cas d'une cavité rectangulaire ( $A=1$  et  $A=\infty$ ) soumise à des conditions aux frontières thermiques de type Dirichlet et solutales de type Neumann.

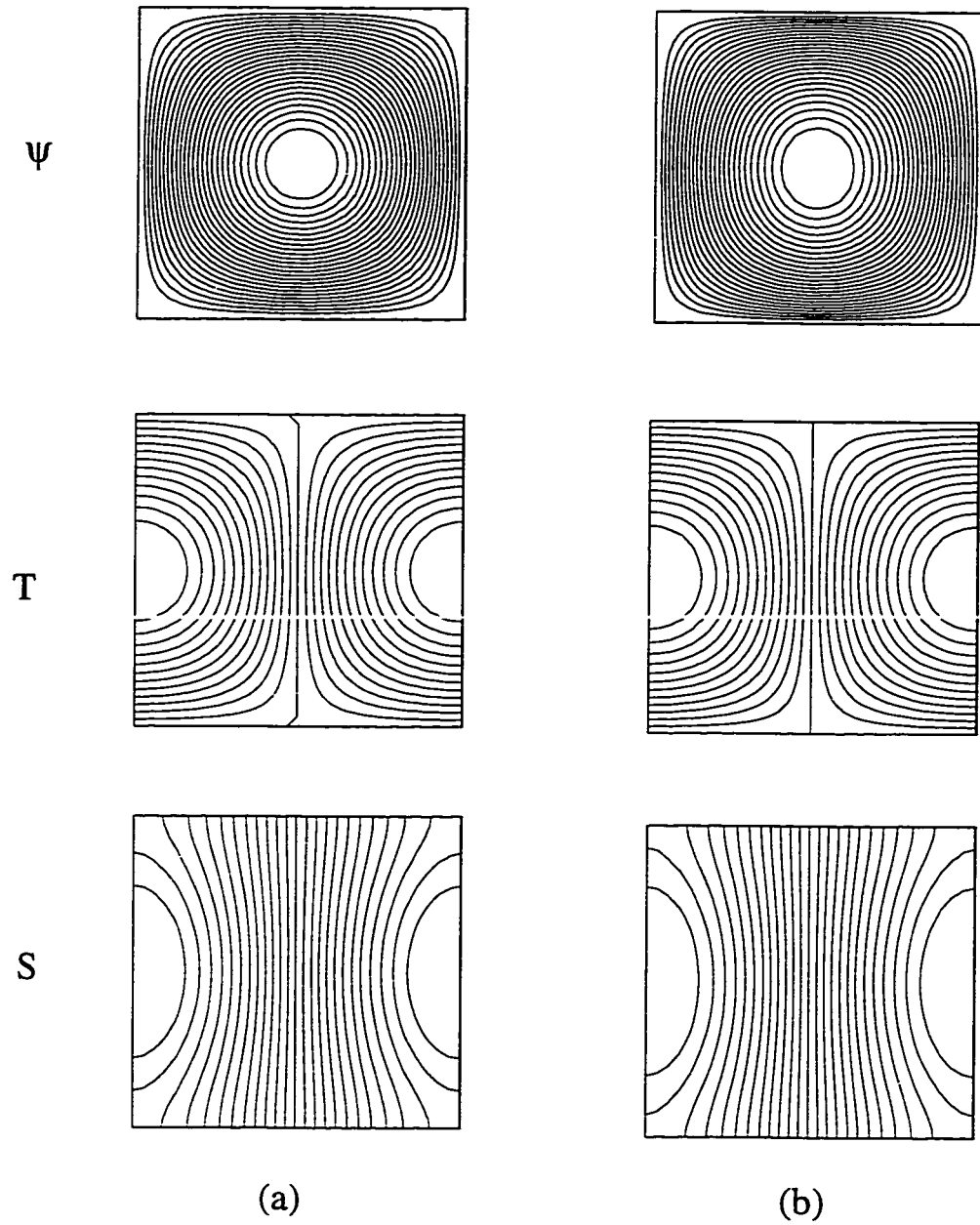


Figure 5.12 : Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité carrée ( $A=1$ ) soumise à des conditions aux frontières thermiques de type Dirichlet et solutales de type Neumann : a)  $NLe = 0$  et  $R_{TC}^{sup} = 4\pi^2$  et b)  $NLe = 50$ ,  $R_{TC}^{sup} = 0.45$  et  $R_{SC}^{sup} = 22.95$ .

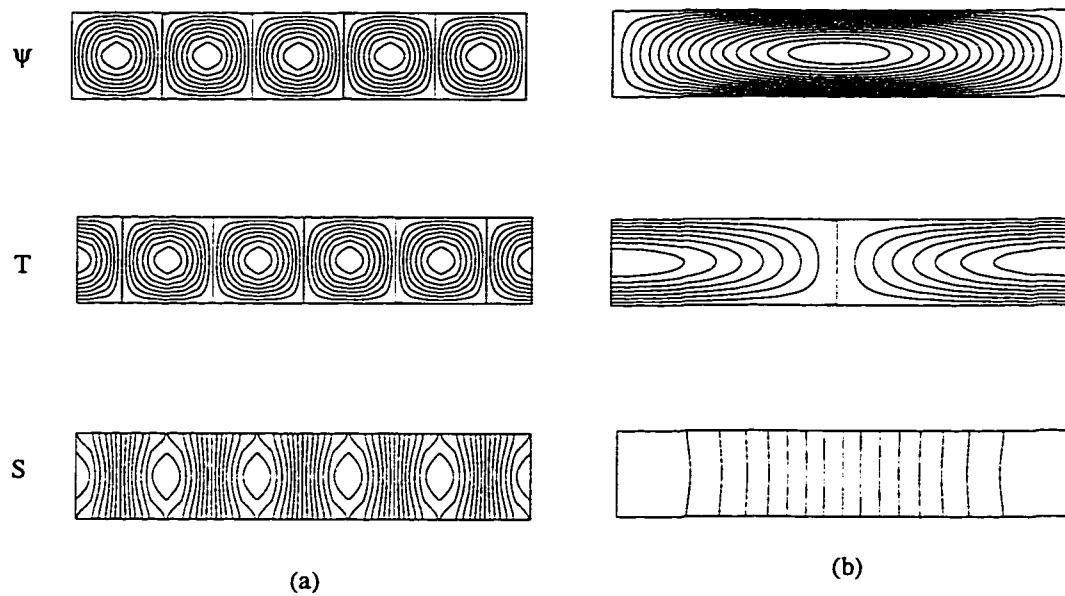


Figure 5.13 : Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité rectangulaire ( $A = 5$ ) soumise à des conditions aux frontières thermiques de type Dirichlet et solutales de type Neumann a)  $NLe = 0$  et  $R_{TC}^{sup} = 4\pi^2$  et b)  $NLe = 50$ ,  $R_{TC}^{sup} = 0.24$  et  $R_{SC}^{sup} = 12$ .

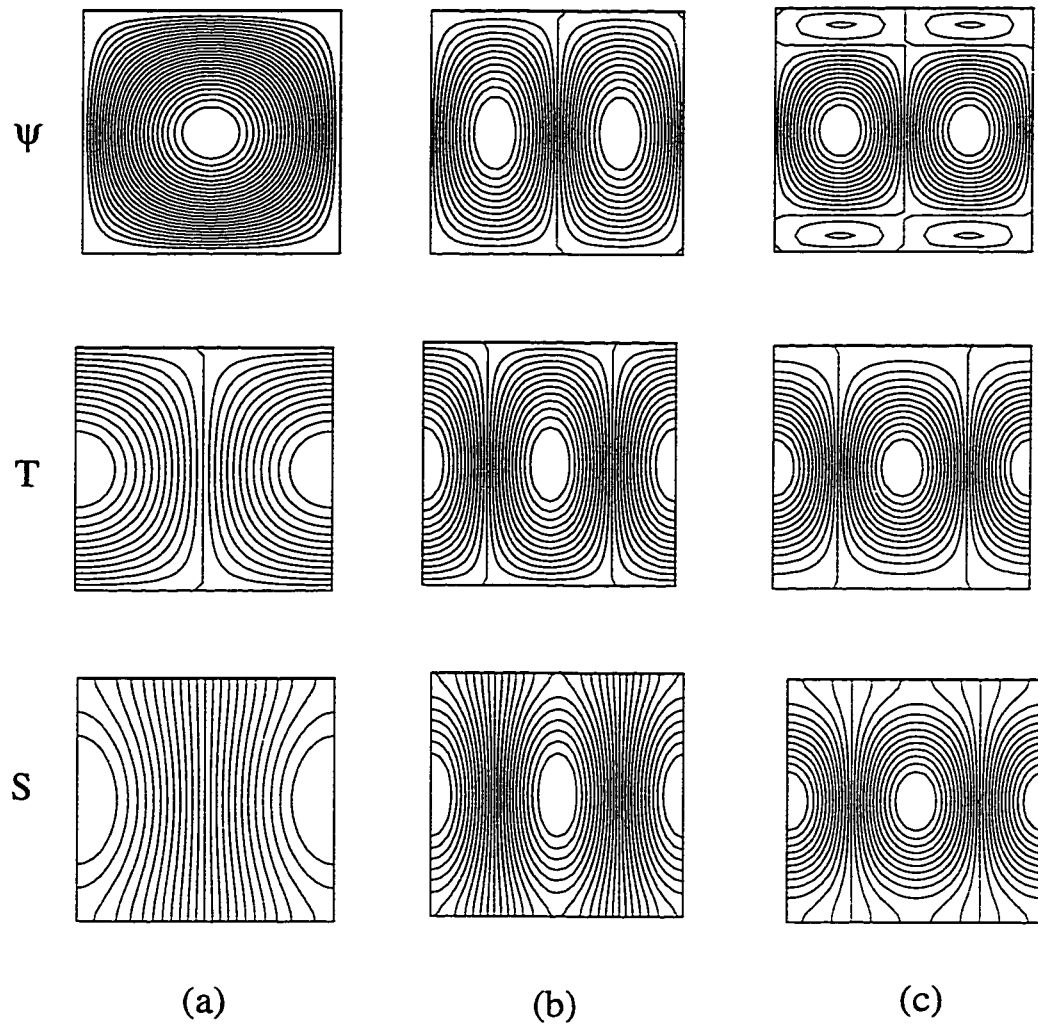


Figure 5.14 : Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité carrée ( $A=1$ ) soumise à des conditions aux frontières thermiques de type Dirichlet et solutales de type Neumann: a)  $NLe = -0.2$ ,  $R_{TC}^{sup} = 59.47$  et  $R_{SC}^{sup} = -11.89$ , b)  $NLe = -0.4$ ,  $R_{TC}^{sup} = 111.66$  et  $R_{SC}^{sup} = -44.66$  et c)  $NLe = -0.9$ ,  $R_{TC}^{sup} = 1055.69$  et  $R_{SC}^{sup} = -950.121$ .

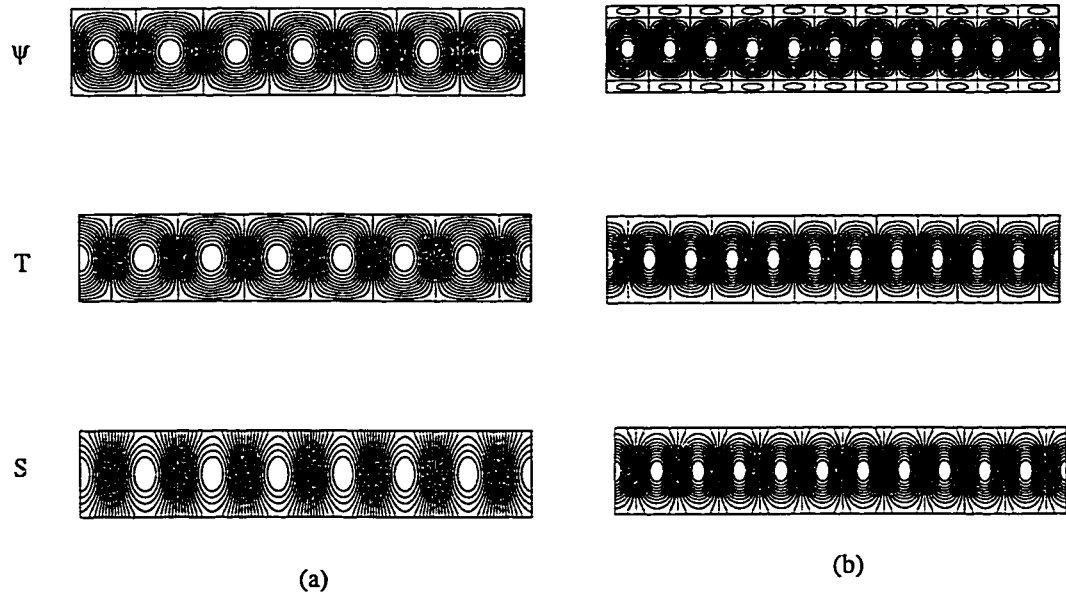


Figure 5.15 : Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas d'une cavité carrée ( $A=5$ ) soumise à des conditions aux frontières thermiques de type Dirichlet et solutales de type Neumann: a)  $NLe = -0.4$ ,  $R_{TC}^{sup} = 91.60$  et  $R_{SC}^{sup} = -36.64$  et c)  $NLe = -0.9$ ,  $R_{TC}^{sup} = 1049.69$  et  $R_{SC}^{sup} = -941.12$ .

de Rayleigh supercritique tend asymptotiquement vers  $R_{TC}^{sup} \rightarrow 22.94 / NLe$  ( $12/NLe$ ). Ces deux limites sont représentées par des lignes en tirées dans la figure 5.11. On peut constater aussi que les gradients de soluté sont prédominants pour  $NLe \geq 10$  quand  $A = 1$  et  $NLe \geq 1$  quand  $A \rightarrow \infty$ . Avec les conditions aux frontières considérées ici, quand  $NLe < 0$  la composante du flux (soluté) est stabilisante et la composante constante (température) est déstabilisante. Pour cette situation, la figure 5.11 indique que  $R_{TC}^{sup}$  augmente asymptotiquement vers l'infini quand  $NLe \rightarrow -1$ . Au dessus de  $NLe = -1$ , selon la stabilité linéaire, le système reste inconditionnellement stable. Les figures 5.14.c et 5.15.c pour les cas  $A = 1$  et  $A = 5$ , respectivement, montrent un exemple des lignes de courant, d'isothermes et de concentrations obtenues pour  $NLe = -0.9$ . Pour cette situation, on peut constater que la structure de l'écoulement est multicellulaire quelque soit la valeur du rapport de forme de la cavité  $A$ .

## 5.2 Convection à amplitude finie

### 5.2.1 Effet du nombre de Rayleigh thermique $R_T$

Les figures (5.16-5.18) illustrent l'influence du nombre de Rayleigh thermique  $R_T$  sur les fonctions de courant maximale  $\Psi_{max}$  et minimale  $\Psi_{min}$ , le nombre de Nusselt  $Nu$  et le nombre de Sherwood  $Sh$  pour  $N = 1$ ,  $A = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  et différentes valeurs du nombre de Lewis ( $Le = 0.1, 1$  et  $5$ ). Le nombre de Rayleigh thermique est normalisé par rapport au nombre de Rayleigh supercritique  $R_{TC}^{sup}$ . Les figures 5.17 et 5.18 montrent qu'une augmentation du taux du transfert de masse (diminution du transfert de chaleur) est observée au fur et à mesure que le nombre de Lewis  $Le$  augmente. Ceci est dû au fait que les forces de volumes d'origine solutale augmentent avec  $Le$ . La figure 5.19 montre une représentation typique des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour un nombre de Rayleigh thermique  $R_T = 50$ . On peut constater que pour  $A = 1$  la structure de l'écoulement reste unicellulaire quelque soit la valeur de  $Le$ .

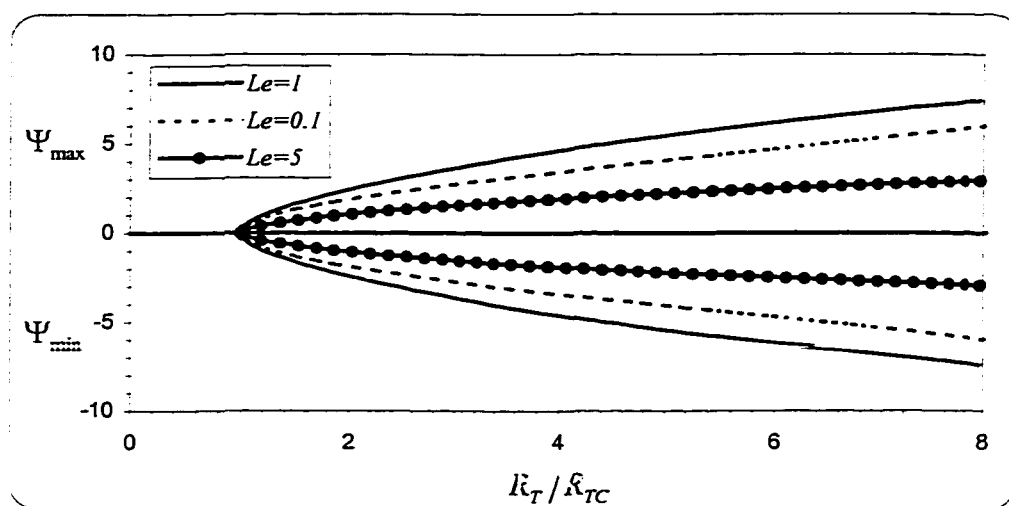


Figure 5.16 : Effet du nombre du Rayleigh thermique  $R_T$  sur les fonctions de courant maximale,  $\Psi_{\max}$ , et minimale,  $\Psi_{\min}$ , pour  $A=1$  et  $N=1$ .

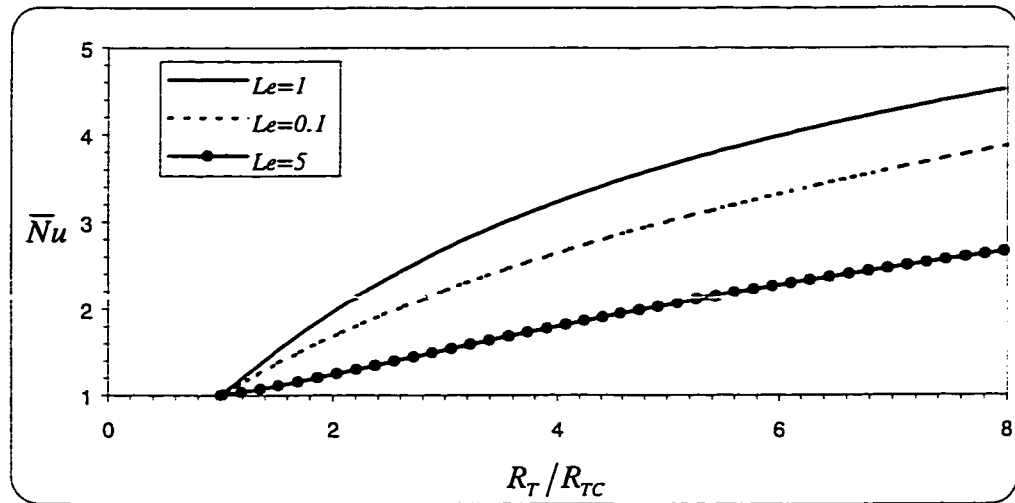


Figure 5.17 : Effet du nombre du Rayleigh thermique  $R_T$  sur le nombre de Nusselt moyen  $\bar{Nu}$ , pour  $A=1$  et  $N=1$ .



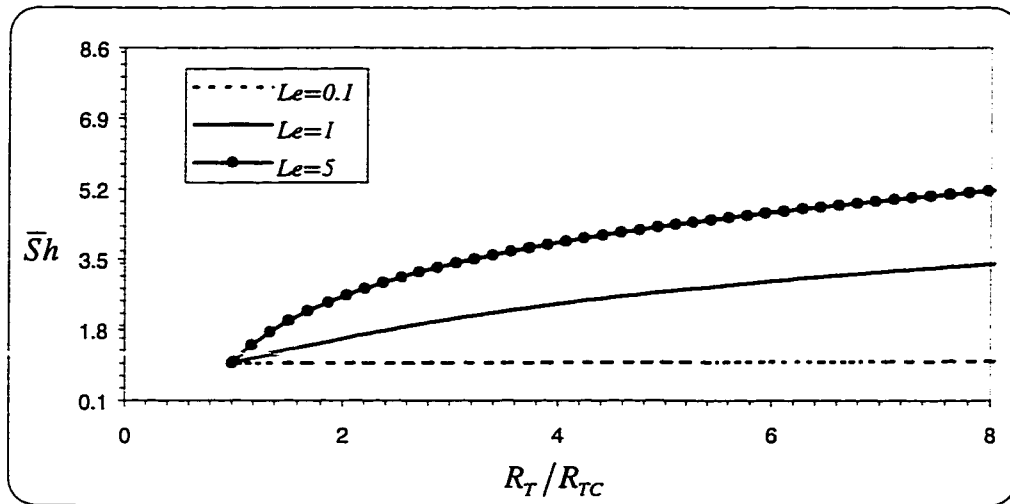


Figure 5.18 : Effet du nombre du Rayleigh thermique  $R_T$  sur le nombre de Sherwood moyen  $\bar{Sh}$ , pour  $A=1$  et  $N=1$ .

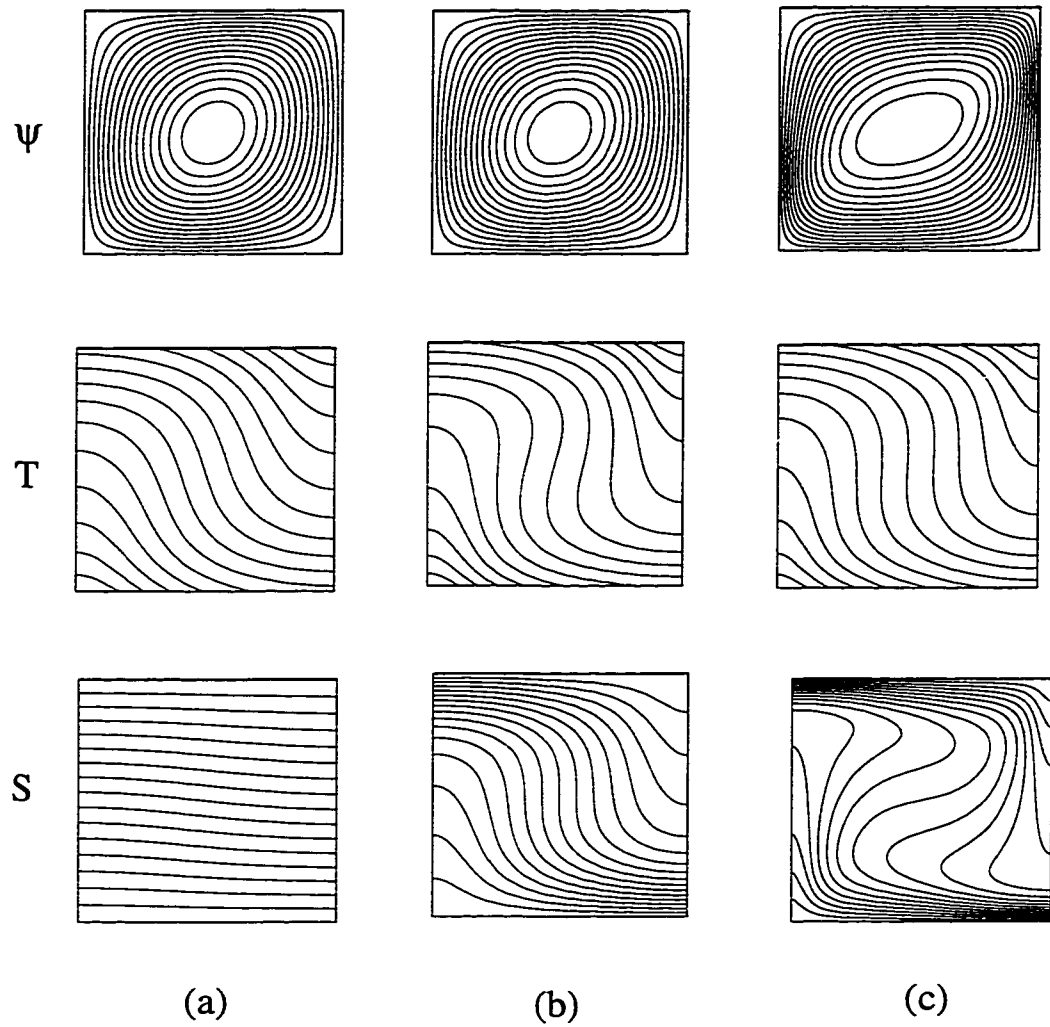


Figure 5.19 : Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas  $N=1$ ,  $A=1$  et  $R_T=50$  : a)  $Le=0.1$ ,  $\Psi_{\max}=2.160$  et  $\Psi_{\min}=0$ , b)  $Le=1$ ,  $\Psi_{\max}=4.080$  et  $\Psi_{\min}=0$  et c)  $Le=5$ ,  $\Psi_{\max}=3.030$  et  $\Psi_{\min}=0$ .

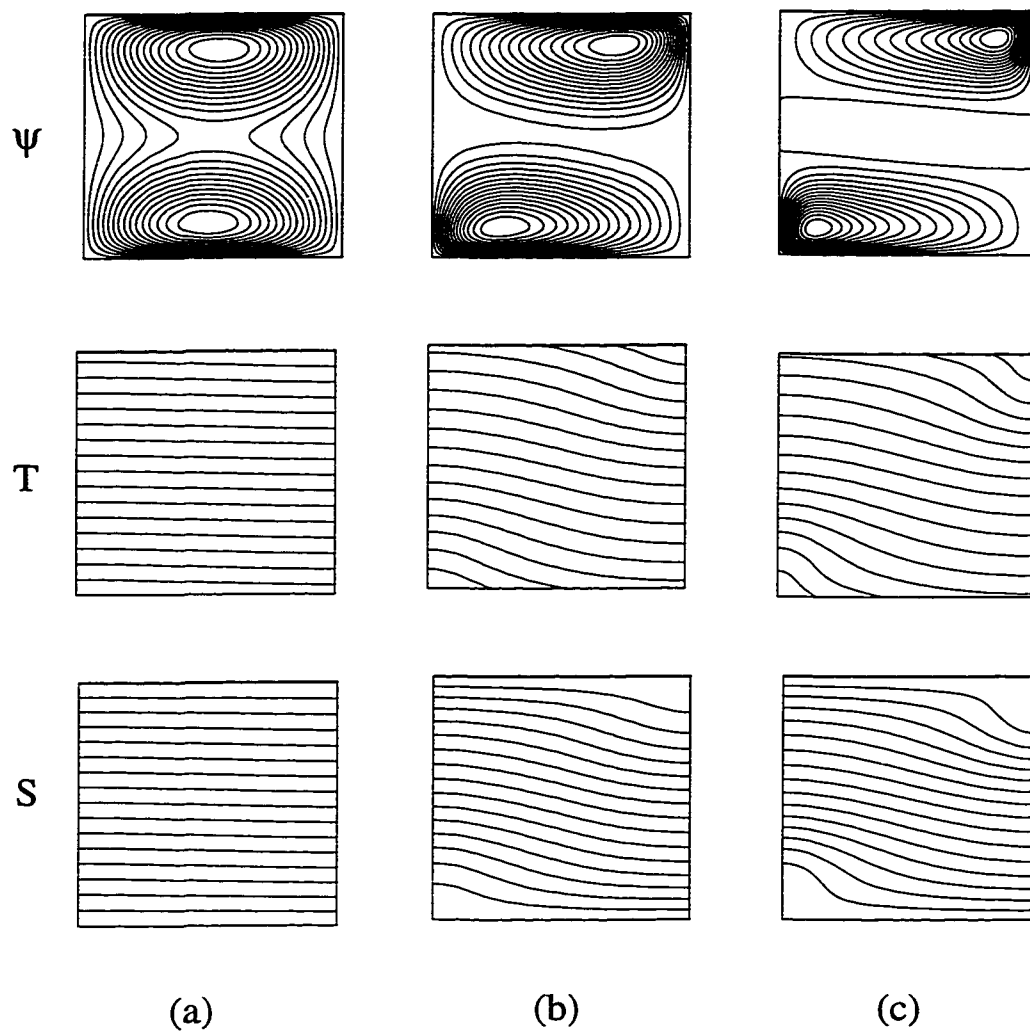


Figure 5.20 : Tracés des lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas  $N = -1$ ,  $A = 1$  et  $Le = 2$  : a)  $R_T = 310$ ,  $\Psi_{\max} = 0.056$  et  $\Psi_{\min} = 0$ , b)  $R_T = 500$ ,  $\Psi_{\max} = 0.641$  et  $\Psi_{\min} = 0$  et c)  $R_T = 1000$ ,  $\Psi_{\max} = 1.356$  et  $\Psi_{\min} = -0.091$ .

Pour le cas où les forces de volume thermique et solutale sont opposées ( $N = -1$ ), la figure 5.20 présente les lignes de courant, isothermes et isoconcentrations pour le cas  $A = 1$ ,  $Le = 2$  et pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh thermique, ( $R_T = 310, 500$  et  $1000$ ). La figure 5.20.a montre la présence de deux cellules remplissant toute la cavité. Ces deux cellules se séparent progressivement au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh thermique  $R_T$  augmente jusqu'à ce qu'elles se concentrent au voisinage des deux parois supérieure et inférieure de la cavité tel qu'illustré sur la figure 5.20.b. Cette configuration de l'écoulement est semblable à celle obtenue par la stabilité linéaire (voir figure 5.8).

### 5.2.2 Courbe de bifurcation :

L'effet du nombre de Rayleigh thermique,  $R_T$ , sur les valeurs des fonctions de courant maximale,  $\Psi_{max}$ , et minimale,  $\Psi_{min}$  est illustré dans la Figure 5.13 pour le cas  $A = 1$ ,  $N = -0.1$ ,  $Le = 10$  et  $\varepsilon = 1$ . Pour ce cas, les valeurs des trois nombres de Rayleigh thermiques prédits par la théorie de la stabilité linéaire sont  $R_{TC}^{sup} = 52$ ,  $R_{TC}^{osc} = 42$  et  $R_{TC}^{sur} = 31$ . Selon Mamou et al. [22], le diagramme de bifurcation est divisé en cinq régions différentes. En plus des trois nombres de Rayleigh critiques cités précédemment on ajoute le nombre de Rayleigh sous-critique  $R_{TC}^{sous}$ , dont la valeur doit être déterminée par une analyse non linéaire de la stabilité. Le nombre de Rayleigh sous-critique  $R_{TC}^{sous}$  est représenté dans la figure 5.21 par une ligne en pointillée, puisque sa valeur exacte est inconnue. Quand  $R_T < R_{TC}^{sous}$  (région (I)), le fluide est inconditionnellement stable et la convection est impossible. Pour cette situation la bifurcation est dite souscritique. Dans la région (II), quand  $R_{TC}^{sous} < R_T < R_{TC}^{sur}$ , l'état de la conduction pure (état de repos du fluide) est une solution stable du problème. Ceci est vérifié par la stabilité linéaire déjà discutée précédemment. Pour  $R_{TC}^{sur} < R_T < R_{TC}^{osc}$  (région III), l'état de repos du fluide est instable, les amplitudes de la température et de la concentration augmentent avec le temps d'une façon oscillante quand en utilisant la

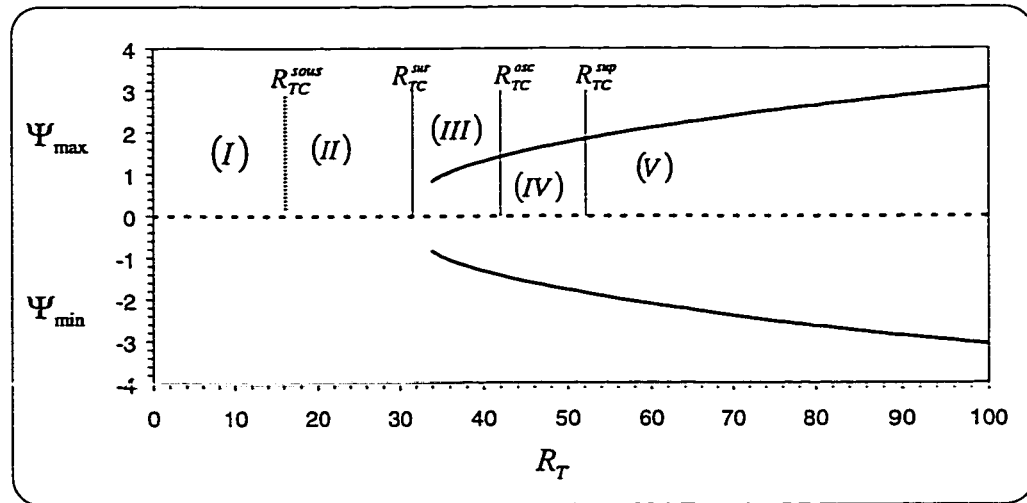


Figure 5.21 : Courbe de bifurcation : variation des fonctions de courant,  $\Psi_{\max}$  et  $\Psi_{\min}$ , en fonction du nombre de Rayleigh thermique  $R_T$  pour  $A = 1$ ,  $N = -0.1$  et  $Le = 10$  ( $R_{TC}^{sur} = 31$ ,  $R_{TC}^{osc} = 42$  et  $R_{TC}^{sup} = 52$ ).

conduction pure comme condition initiale. Pour  $R_T > R_{TC}^{sup}$  (régions (IV) et (V)), l'état de repos du fluide devient inconditionnellement instable.

## CHAPITRE VI

### CONCLUSION

Le travail que nous avons présenté dans cette thèse concerne l'étude de la convection naturelle thermosolutale, dans un milieu poreux confiné dans une cavité horizontale rectangulaire, saturée par un fluide binaire. Des conditions aux frontières thermiques de type Neumann (flux de chaleur constant) et solutales de type Dirichlet (concentration constante) ont été considérées. Ces conditions aux frontières sont appliquées aux parois supérieure et inférieure de la cavité. Les parois verticales sont supposées imperméables et adiabatiques.

Le modèle mathématique décrivant le présent problème, a été développé en se basant sur les équations de Darcy et sur l'approximation de Boussinesq. L'étude de la stabilité linéaire était l'objet principal de la première partie de cette étude. Une solution analytique et une autre numérique (méthode des éléments finis) ont été développées à cette fin. Les équations gouvernantes ont été résolues numériquement par la méthode des différences finies dans la deuxième partie de cette étude.

#### 6.1 Stabilité linéaire

L'étude de la stabilité linéaire nous a permis de déterminer trois nombres de Rayleigh critiques à savoir le nombre de Rayleigh thermique  $R_{TC}^{sup}$ , marquant le début de la convection supercritique, le nombre de Rayleigh thermique surcritique  $R_{TC}^{sur}$ , marquant la transition du mode convectif oscillant au mode convectif monotone et croissant et le nombre de Rayleigh thermique  $R_{TC}^{osc}$  marquant le régime oscillant. Cette étude nous a aussi permis de mettre en évidence l'influence du paramètre  $NLe$  indiquant le rapport des forces solutales et thermiques, sur l'évolution de la structure des écoulements. Il est clair que les forces de volumes thermiques et solutales donnent naissance à une

convection coopérante lorsque  $NLe > 0$  et opposée lorsque  $NLe < 0$ . Pour chaque cas, nous avons distingué trois types de régimes différents à savoir le régime où les forces de volume thermiques sont dominantes, le régime intermédiaire où la convection est gouvernée par les forces de volume d'origine thermique et solutale et le régime où les forces solutales sont dominantes. Ces résultats ont été obtenus par des méthodes analytique et numérique. La méthode analytique est valide seulement pour des valeurs  $NLe \geq 0$  à cause de la complexité de la solution quand  $NLe < 0$ . Par contre la méthode numérique est plus générale et permet d'obtenir des solutions pour des valeurs quelconques de  $NLe$ .

Des conditions aux frontières thermiques de type Dirichlet et solutales de type Neumann ont été également considérées dans l'étude de la stabilité linéaire. Pour cette situation la solution analytique n'est pas présentée dans cette étude. Le problème a été résolu numériquement par la méthode des éléments finis. Les résultats obtenus ont montrés que pour  $NLe < -1$ , l'écoulement est convectif et sa structure est multicellulaire indépendamment de la valeur du rapport de forme  $A$ . Pour  $NLe \geq -1$ , l'écoulement est inconditionnellement stable selon la stabilité linéaire.

Les résultats obtenus dans cette première partie ont été validés par rapport à des études antérieures, comme par exemple celles de Nield [3], pour le cas d'une cavité horizontale rectangulaire soumise à des conditions aux frontières thermiques de type Neumann ou à celles de Mamou et al. [16] dans le cadre de l'étude de la stabilité linéaire par la méthode de Galerkin pour une cavité rectangulaire soumise à des conditions aux frontières thermiques et solutales de type Neumann.

## **6.2 Convection à amplitude finie**

Les équations gouvernantes décrivant le système ont été résolues numériquement par la méthode des différences finies. Les résultats obtenus nous ont permis d'étudier



l'influence du nombre de Rayleigh thermique  $R_T$  sur les transferts de chaleur et de masse. Les résultats obtenus dans cette partie ont été aussi validés par rapport à d'autres travaux antérieurs disponibles dans la littérature.

La présente étude numérique nous a aussi permis de comparer et vérifier quelques uns des résultats obtenus par la stabilité linéaire comme par exemple le cas où les forces de volumes d'origine thermique sont opposées aux forces de volumes d'origine solutale. La courbe de bifurcation, prédit par la théorie de la stabilité linéaire a également été validée par les résultats numériques.

### **6.3 Perspectives**

Dans la plupart des études sur la double diffusion en milieux poreux, y compris la présente investigation, les équations de Darcy ont été utilisées pour caractériser ces milieux. Le modèle de Darcy, relativement simple, est valide pour des situations où la porosité est faible et les effets d'inertie sont négligeables, ce qui est le cas pour bon nombre de situations. L'emploi de modèles plus sophistiqués pour les milieux poreux, prenant en compte les effets visqueux (termes de Brinkman) ainsi que les effets d'inertie (termes de Forchheimer) devrait être envisagé dans des études futures.

Il serait également intéressant d'étudier la stabilité non linéaire pour déterminer le nombre de Rayleigh thermique  $R_{TC}^{sous}$ , marquant la naissance de la convection sous-critique. Des modèles de perturbation non linéaires tels qu'utilisés par Mamou [23] pourraient être utilisés à cette fin.

## RÉFÉRENCES

1. PLATTEN, J. K and LEGROS, J. C. (1984). Convection in Liquids. Springer-Verlag.
2. NIELD, D. A. and BEJAN, A. (1992). Convection in Porous media. Springer-Verlag.
3. NIELD., D. A. (1968). Onset of Thermohaline Convection in Porous Medium. Water Resources Research, 4, 553-560.
4. TAUNTON, J. W. and LIGHTFOOT, E. N. (1972). Thermohaline Instability and Salt Fingers in a Porous Medium. Phys. Fluids, 15, 748-753.
5. POULIKAKOS, D. (1986). Double Diffusive Convection in a Horizontal Sparceiy Packed Porous Layer. Int. Comm. Heat Mass Transfer, 13, 587-598.
6. MALASHETTY, M. S. (1993). Anisotropic Thermoconvective Effects on the Onset of Double Diffusive Convection in a Porous Medium. Int. J. Heat and Mass Transfer, 39, 2397-2401.
7. RUDRALAH, N., SHRIMANI, P.K. and FRIEDRICH, R. (1982). Finite Amplitude Convection in a Two-Component Fluid Saturated Porous Layer. Int. J. Heat and Mass Transfer, 25, 715-722.
8. BRAND, H. and STEINBERG, V. (1983). Nonlinear Effect in the Convective Instability of a Binary Mixture in a Porous Medium Near Threshold. Physics letters, 93A, 333-336.
9. TREVISAN, O. V. and BEJAN, A. (1987). Mass and Heat Transfer by High Rayleigh Number Convection in a Porous Medium Heated from Below. Int. J. Heat and Mass Transfer, 30, 2341-2356.

10. MURRAY, B. T. and CHEN, C. F. (1989). Double-Diffusive Convection in a Porous Medium. J. Fluid Mech., 201, 147-166.
11. ROSENBERG, N. D. and SPERA, F. J. (1992). Thermohaline Convection in a Porous Medium Heated from Below. Int. J. Heat and Mass Transfer, 35, 1261-1273.
12. CHEN, F. and CHEN, C. F. (1993). Double-Diffusive Fingering Convection in a Porous Medium. Int. J. Heat Mass Transfer, 36, 798-807.
13. MAMOU, M., VASSEUR, P., BILGEN, E. and GOBIN, D. (1995). Double-Diffusive Convection in an Inclined Slot Filled with Porous Medium. Eur. J. Mechanics, B/Fluids, 14, 629-652.
14. NGUEN, T. H., TRAN, T. H. and VASSEUR, P. (1997). Double-Diffusive Convection in a Porous Layer: Fluid Flow and Contaminant Transport in Groundwater, Proceeding of the Int. Conference Engineering. Mechanics Today EMT 97 Hanoi, Vietnam, 102-111.
15. GRAY, D. D. and GIORGINI, A. (1976). The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquids and Gases. Int. J. Heat Transfer, 19, 545-551.
16. MAMOU, M., VASSEUR, P. and BILGEN, E. (1998). A Galerkin Finite Element Study of the Onset of Double-Diffusive Convection in an Inclined Porous Enclosure. Int. J. Heat Mass Transfer, 41, 1513-1529.
17. CALTAGIRONE, J. P. (1975). Thermoconvective Instability in a Horizontal porous Layer. J. Fluid Mech., 72, 269-287.
18. KIMURA, S. , VYNNYCKY, M. and ALAVYOON, F. (1995). Unicellular Natural Circulation in a Shallow Horizontal Porous Layer Heated From Below By a Constant Flux. J. Fluid Mech., 294, 231-257.

19. LAPWOOD, E. R. (1948). Convection of a Fluid in a Porous Medium. Proc. Camb. Phil. Soc., 44, 508-521.
20. NIELD, D.A. (1967). The Thermohaline Rayleigh Jeffreys Problem. J. Fluid Mech., 29, 545-558.
21. TSITVERBLIT, N. A. (1997). On the Nature of Direct Instability in Double-Component Convection with Different Boundary Conditions. Phys. Fluids, 9, 1-4.
22. MAMOU, M., VASSEUR, P., BILGEN, E. and GOBIN, D. (1998). Double-Diffusive Convection Instability in an Vertical Porous Enclosure. J. Fluid Mech., 368, 263-289.
23. MAMOU, M. (1998). Convection Thermosolutale dans les Milieux Poreux et Fluides Confinés. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.