

**Titre:** Modélisation aérodynamique tridimensionnelle d'un parc  
Title: d'éoliennes à axe horizontal

**Auteur:** Idriss Olivier Ammara  
Author:

**Date:** 1998

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Ammara, I. O. (1998). Modélisation aérodynamique tridimensionnelle d'un parc d'éoliennes à axe horizontal [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/6874/>  
Citation:

## Document en libre accès dans PolyPublie Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/6874/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Ion Paraschivoiu, & Christian Masson  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

## **NOTE TO USERS**

**This reproduction is the best copy available**

**UMI**



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**MODÉLISATION AÉRODYNAMIQUE TRIDIMENSIONNELLE  
D'UN PARC D'ÉOLIENNES À AXE HORIZONTAL**

IDRISS AMMARA

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
AOÛT 1998



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-38655-4

Canadä

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

**MODÉLISATION AÉRODYNAMIQUE TRIDIMENSIONNELLE  
D'UN PARC D'ÉOLIENNES À AXE HORIZONTAL**

présenté par: AMMARA Idriss

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées  
est soumis au jury d'examen constitué de :

M. KAHAWITA René, Ph.D., président

M. PARASCHIVOIU Ion, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. MASSON Christian, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. REID Réal, M.Sc.A., membre

À mes parents

## REMERCIEMENTS

J'aimerais exprimer ma gratitude envers mon directeur de recherche, professeur Ion Paraschivoiu, titulaire de la Chaire en aéronautique J.-A. Bombardier pour l'opportunité qu'il m'a offerte de travailler sur un projet pertinent et d'un grand intérêt. Ses conseils et son attention furent grandement appréciés. Je voudrais remercier mon codirecteur de recherche, le professeur Christian Masson, avec qui j'ai eu le plaisir de coopérer pendant toute la durée du projet; en plus de son aide technique inestimable, son support et sa compréhension furent très précieux. J'aimerais également souligner le soutien apporté à ce projet par le Ministère des Ressources Naturelles du Québec et les Fonds pour la formation de chercheurs et l'aide à la recherche.

En second lieu, je tiens à témoigner ma gratitude au professeur Kahawita pour avoir accepté la présidence du jury. Je voudrais également remercier M. Reid d'avoir accepté d'être membre du jury.

Par ailleurs, je tiens à témoigner mes plus chaleureux remerciements à mes parents, ma famille et mes amis pour leur support inconditionnel depuis le début. J'aimerais également remercier Marc, Dan, Stéphane, Stéphan, Pascal, Charles, Tayeb, Jr, François, Valérie, Patrick, collègues et membres du groupe de recherche de la Chaire et tous les autres collègues étudiants aux cycles supérieurs pour la création d'une atmosphère de travail conviviale et stimulante. Un merci particulier à Christophe avec qui j'ai collaboré durant ce projet.

Enfin, je ne pourrais passer sous silence l'aide et la collaboration reçues des différents services de l'École et plus particulièrement le responsable du matériel informatique du département de génie mécanique, M. Alain Robidoux et la secrétaire du même département, Mme Chantal Beaucage.

## RÉSUMÉ

Le développement des parcs éoliens s'amorça au début des années 80 en Californie pour s'étendre par la suite au monde entier. Avec des connaissances limitées dans la conception de parcs éoliens, la production énergétique des premiers parcs fut plus faible que prévue. Ces performances décevantes furent souvent attribuées aux pertes par interférence de sillage. Ainsi, suite aux faibles rendements obtenus par des arrangements denses non optimisés, la stratégie actuelle dans la conception de parcs éoliens consiste à éloigner les éoliennes les unes des autres afin de réduire les effets négatifs d'interférences. Cette pratique a pour effet de produire des arrangements clairsemés dans lesquels le potentiel énergétique n'est pas efficacement utilisé. Un arrangement d'éoliennes décalées, dense et optimisé, pourrait avoir une production énergétique similaire à une disposition dispersée mais en occupant moins de terrain, ce qui pourrait représenter des économies substantielles en frais d'opération. Le principal objectif de ce travail consiste donc à développer une méthode numérique pour la simulation de l'écoulement autour d'un parc d'éoliennes à axe horizontal de façon à pouvoir prédire la puissance produite par un parc tout en simulant correctement les interactions aérodynamiques entre les éoliennes y prenant place.

Ainsi, il est proposé de simuler l'écoulement autour d'un parc éolien en solutionnant les équations incompressibles de Navier-Stokes en régime stationnaire dans lesquelles les rotors sont représentés par des distributions de forces externes. Cette formulation, très similaire à celle proposée par Rajagopalan et Fanucci(1985), est applicable, en principe, aux éoliennes à axe horizontal et vertical et permet de modéliser les effets de la tour, de la nacelle et de la topographie du sol. Le système d'équations obtenu est solutionné à l'aide des Méthodes aux Éléments Finis/Volumes de Contrôle (CVFEMs) à collocation d'ordre égal proposées par Saabas, Baliga et

Masson(1994). Deux modèles ont été successivement développés: (i) un modèle axi-symétrique à trois composantes de vitesse et (ii) un modèle cartésien tridimensionnel.

Des comparaisons entre les calculs de performances provenant des méthodes axi-symétrique et cartésienne et les performances obtenues par une méthode numérique basée sur la théorie du tube de courant ont permis de démontrer que dans le cas d'éoliennes isolées, les méthodes axisymétrique et cartésienne présentent un niveau de précision équivalent à celui de la théorie, bien reconnue, du tube de courant. De plus, en reproduisant les résultats expérimentaux de Doran et al.(1982), il fut établi que la méthode cartésienne proposée permet de calculer avec une bonne précision les vitesses dans le sillage en aval des éoliennes, qualité essentielle à l'analyse réussie de l'aérodynamique d'arrangement dense d'éoliennes. Puis, l'analyse aérodynamique d'un parc éolien périodique à deux rangées a permis de démontrer l'existence de phénomènes d'interférences bénéfiques (effets venturi) et de quantifier l'influence des interférences aérodynamiques mutuelles des sillages sur la production énergétique d'un arrangement dense d'éoliennes. Ces deux conclusions renforcent un des concepts principaux ayant motivé ce travail: un arrangement d'éoliennes décalées, dense et optimisé peut avoir une production énergétique similaire à celle d'une disposition dispersée mais en occupant moins de terrain. A partir des résultats obtenus, la méthode proposée peut être considérée comme un outil utile pour l'analyse aérodynamique d'un parc d'éoliennes à axe horizontal. Ce travail correspond à la première étape en vue d'appliquer une procédure d'optimisation des performances des parcs par un meilleur positionnement des éoliennes.

## ABSTRACT

Wind farm developments began in the early 1980's in California and has since spread around the world. With limited experience in wind farm design, the first wind farms in operation produced significantly less energy than expected. This energy shortfall has often been attributed to wake losses. Since these early attempts, knowledge of mutual turbine/wake interferences has grown and standards have been set for wind farm arrangement design. These standards result in sparse wind farms where the wind energy potential of a site is inefficiently used. It is justified by the performance losses associated to the wake effects, which are significant in dense arrangements. However, an appropriately designed dense and staggered arrangement of the turbines is expected to have a production similar to a sparse arrangement but would occupy less land. This can result in a significant economy in operating costs. The development of a numerical method that includes the essential ingredients for the successful aerodynamic analysis and performance predictions of horizontal axis wind turbines in a dense arrangement is the main objective of this work.

In the proposed method, the flow field of the wind farm is predicted by solving the time-averaged, steady-state, incompressible Navier-Stokes equations. The turbines are represented by distributions of external forces, a technique introduced by Rajagopalan and Fanucci(1985). This is a general formulation which can be applied, in principle, to horizontal-axis and vertical-axis wind turbines and can include the effects of hubs, towers and ground topography. The resulting governing equations are solved using Control-Volume Finite Element Methods (CVFEMs) of Saabas , Baliga and Masson(1994) based on a primitive-variables, co-located, equal order formulation. Two methods were successively developed: (i) a three-component axisymmetric method and (ii) three-dimensional cartesian method.

Comparisons between performance predictions obtained with the proposed axi-symmetric and cartesian methods and the momentum-strip theory have demonstrated that for isolated turbines, both formulations produce performance predictions with the same level of accuracy than the well-known momentum-strip theory. Furthermore, comparisons with the experimental measurements of Doran et al.(1982) have shown the good level of accuracy of the cartesian method in term of wake velocity predictions, an essential feature for the successful aerodynamic analysis of a wind farm. The analysis of a two-row periodic wind farm has demonstrated the existence of positive interference effects (venturi effects) and the dominant influence of mutual interference on the performance of dense wind turbine clusters, which reinforce the proposed concept that an appropriately designed wind farm arrangement can have an energy production similar to that of a sparse one. The proposed method can therefore be considered as a useful tool for the successful analysis of dense cluster arrangements of turbines. This research lays the groundwork for the optimization of a wind-farm energetic production through a better positioning of its turbines.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>DÉDICACE . . . . .</b>	<b>iv</b>
<b>REMERCIEMENTS . . . . .</b>	<b>v</b>
<b>RÉSUMÉ . . . . .</b>	<b>vi</b>
<b>ABSTRACT . . . . .</b>	<b>viii</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES . . . . .</b>	<b>x</b>
<b>LISTE DES FIGURES . . . . .</b>	<b>xv</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX . . . . .</b>	<b>xix</b>
<b>LISTE DES SYMBOLES . . . . .</b>	<b>xx</b>
<b>LISTE DES ANNEXES . . . . .</b>	<b>xxiv</b>
<b>CHAPITRE I: INTRODUCTION . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Historique . . . . .	1
1.2 Éoliennes modernes . . . . .	3
1.3 Objectifs et motivations . . . . .	5
1.4 Plan du mémoire . . . . .	8
<b>CHAPITRE II: INTERFÉRENCES DE SILLAGE DES ÉOLIEN-</b>	
<b>NES DANS LES PARCS . . . . .</b>	<b>9</b>
2.1 Problématique . . . . .	9
2.2 Revue bibliographique des méthodes d'analyse aérodynamique des parcs	
éoliens . . . . .	12
2.2.1 Essais expérimentaux pleine grandeur dans les parcs éoliens . . .	12
2.2.2 Essais expérimentaux en soufflerie . . . . .	13
2.2.3 Modèles mathématiques . . . . .	14
2.2.3.1 Théorie de couche limite . . . . .	14

2.2.3.2	Théorie de superposition des sillages . . . . .	14
2.2.3.3	Théorie du tube de courant . . . . .	15
2.2.3.4	Théorie du tourbillon libre (théorie de la ligne portante)	16
2.2.3.5	Équations de Navier Stokes . . . . .	16
<b>CHAPITRE III:</b>	<b>MÉTHODOLOGIE</b> . . . . .	19
<b>CHAPITRE IV: MODÈLE MATHÉMATIQUE</b> . . . . .		21
4.1	Équation du mouvement . . . . .	21
4.2	Représentation de l'éolienne . . . . .	23
4.2.1	Théorie de l'élément de pale . . . . .	23
4.2.2	Pertes de bout de pale . . . . .	27
4.2.3	Calcul de la puissance du rotor . . . . .	29
4.3	Modélisation de la turbulence . . . . .	29
4.4	Propriétés de la couche de surface terrestre en conditions thermiques neutres . . . . .	30
4.5	Spécialisations du modèle mathématique . . . . .	31
4.5.1	Système de coordonnées polaires . . . . .	32
4.5.1.1	Équations du mouvement . . . . .	32
4.5.1.2	Forces externes . . . . .	33
4.5.1.3	Puissance mécanique . . . . .	33
4.5.2	Système de coordonnées cartésien . . . . .	33
4.5.2.1	Équations du mouvement . . . . .	33
4.5.2.2	Forces externes . . . . .	34
4.5.2.3	Puissance mécanique . . . . .	35
<b>CHAPITRE V: MÉTHODE NUMÉRIQUE</b> . . . . .	36	
5.1	Équations générales de conservation . . . . .	37

5.2	Méthodes axisymétrique à trois composantes de vitesse . . . . .	38
5.2.1	Discrétisation du domaine de calcul . . . . .	38
5.2.2	Intégration des équations de conservation . . . . .	39
5.2.3	Fonctions d'interpolation pour les équations de quantité de mouvement . . . . .	40
5.2.3.1	Interpolation des propriétés thermophysiques . . . . .	41
5.2.3.2	Interpolation des termes de sources . . . . .	41
5.2.3.3	Interpolation de $\phi$ dans les termes de diffusion . . . . .	41
5.2.3.4	Interpolation de $\phi$ dans les termes de convection . . . . .	42
5.2.3.5	Interpolation de la pression . . . . .	43
5.2.4	Équations discrétisées de quantité de mouvement . . . . .	43
5.2.5	Équation discrétisée de continuité . . . . .	44
5.2.5.1	Interpolation du débit massique . . . . .	44
5.2.5.2	Équation discrétisée de pression . . . . .	44
5.2.6	Domaine de calcul et maillage . . . . .	45
5.2.7	Forces externes . . . . .	46
5.2.7.1	Linéarisation des forces externes . . . . .	46
5.2.7.2	Intégration des forces externes . . . . .	47
5.2.8	Conditions aux frontières . . . . .	48
5.2.8.1	Frontière d'entrée . . . . .	48
5.2.8.2	Frontière de sortie . . . . .	48
5.2.8.3	Frontière supérieure . . . . .	49
5.2.9	Algorithme de résolution . . . . .	49
5.3	Méthode cartésienne tridimensionnelle . . . . .	51
5.3.1	Discrétisation du domaine de calcul . . . . .	51
5.3.1.1	Discussion . . . . .	52
5.3.2	Intégration des équations de conservation . . . . .	53

5.3.3 Fonctions d'interpolation pour les équations de quantité de mouvement . . . . .	54
5.3.3.1 Interpolation des propriétés thermophysiques . . . . .	55
5.3.3.2 Interpolation des termes de sources . . . . .	55
5.3.3.3 Interpolation de $\phi$ dans les termes de diffusion . . . . .	56
5.3.3.4 Interpolation de $\phi$ dans les termes de convection . . . . .	56
5.3.3.5 Interpolation de la pression . . . . .	57
5.3.4 Équations discrétisées de quantité de mouvement . . . . .	57
5.3.5 Équation discrétisée de continuité . . . . .	57
5.3.5.1 Interpolation du débit massique . . . . .	57
5.3.5.2 Équation discrétisée de pression . . . . .	57
5.3.6 Domaines de calcul et maillages . . . . .	58
5.3.7 Forces externes . . . . .	61
5.3.7.1 Linéarisation des forces externes . . . . .	61
5.3.7.2 Intégration des forces externes . . . . .	61
5.3.7.3 Discussion . . . . .	66
5.3.8 Conditions aux frontières . . . . .	66
5.3.8.1 Frontière d'entrée . . . . .	66
5.3.8.2 Frontière de sortie . . . . .	66
5.3.8.3 Frontières supérieure et inférieure . . . . .	67
5.3.8.4 Frontières latérales . . . . .	67
5.3.9 Algorithme de résolution . . . . .	67
 <b>CHAPITRE VI: RÉSULTATS &amp; DISCUSSION . . . . .</b>	69
6.1 Méthode axisymétrique à trois composantes de vitesse . . . . .	69
6.1.1 Étendue du domaine de calcul . . . . .	70
6.1.2 Étude de l'indépendance de la solution par rapport à la finesse du maillage . . . . .	74

6.1.3	Performances d'une éolienne isolée . . . . .	76
6.1.4	Visualisation de l'écoulement . . . . .	78
6.1.5	Discussion . . . . .	80
6.2	Méthode tridimensionnelle cartésienne . . . . .	82
6.2.1	Performances d'une éolienne isolée . . . . .	82
6.2.2	Visualisation de l'écoulement . . . . .	85
6.2.3	Sillage d'une éolienne isolée . . . . .	87
6.2.4	Parc éolien périodique à deux rangées . . . . .	90
6.2.5	Optimisation de l'arrangement d'un parc éolien . . . . .	96
<b>CHAPITRE VII: CONCLUSIONS . . . . .</b>		99
7.1	Compte rendu du mémoire . . . . .	99
7.2	Contributions du travail . . . . .	103
7.3	Recommandations . . . . .	104
<b>BIBLIOGRAPHIE . . . . .</b>		106

## LISTE DES FIGURES

1.1	Évolution et prévisions du prix de l'énergie éolienne de 1980 à 2005 . . . . .	2
1.2	Croissance du nombre de megawatts éoliens installés dans le monde . . . . .	3
1.3	éoliennes modernes à axe horizontal et vertical . . . . .	4
1.4	Visualisation du sillage d'une éolienne par injection de fumée en bout de pale . . . . .	6
1.5	Exemple de parc éolien non optimisé . . . . .	7
2.1	Exemple de parc éolien clairsemé . . . . .	10
2.2	Optimisation de la localisation des éoliennes dans un parc . . .	11
2.3	Effet venturi entre deux éoliennes voisines . . . . .	12
4.1	Élément de pale du rotor . . . . .	23
4.2	Paramètres géométriques d'une l'éolienne . . . . .	26
4.3	Intégration des termes de force sur $A_{VC}$ . . . . .	27
5.1	Discrétisation du domaine de calcul axisymétrique: coupe longitudinale . . . . .	39
5.2	Élément triangulaire associé à la méthode axisymétrique . . . .	40
5.3	Discrétisation du domaine de calcul axisymétrique: coupe longitudinale . . . . .	45
5.4	Procédure d'intégration des forces externes sur un volume de contrôle . . . . .	47

5.5	Discrétisation du domaine de calcul cartésien tridimensionnel . . . . .	52
5.6	Création des élément tétraédriques . . . . .	53
5.7	Élément tétraédrique . . . . .	54
5.8	Création du volume de contrôle polyédrique autour du noeud i . . . . .	55
5.9	Élément tétraédrique associé à la méthode cartésienne tridimensionnelle . . . . .	56
5.10	Exemple d'un parc éolien périodique à deux rangées . . . . .	58
5.11	Maillage pour $\Psi$ égal à $90^\circ$ ou $-90^\circ$ . . . . .	59
5.12	Maillage pour $45^\circ < \Psi < 135^\circ$ et $-45^\circ < \Psi < -135^\circ$ . . . . .	60
5.13	Maillage pour $-45^\circ < \Psi < 45^\circ$ et pour $135^\circ < \Psi < -135^\circ$ . . . . .	61
5.14	Variation de la direction de la force externe sur élément situé près de l'axe de rotation . . . . .	62
5.15	Section transversale des volumes de contrôle balayés par les pales . . . . .	63
5.16	Maillage de surface sur la surface balayée par les pales . . . . .	63
5.17	Intégration des forces externes sur les mini-éléments . . . . .	64
6.1	Éolienne expérimentale 100-kW NASA/DOE Mod-0 . . . . .	70
6.2	Domaine de calcul et topologie du maillage . . . . .	71
6.3	Variation des prédictions de performance par rapport $\Delta x_{UP}$ . . . . .	72
6.4	Variation des prédictions de performance par rapport $\Delta x_{DN}$ . . . . .	73
6.5	Variation des prédictions de performance par rapport $R_{CD}$ . . . . .	74
6.6	Variation des prédictions de performance par rapport $\Delta x_{UP}$ . . . . .	75
6.7	Prédictions de puissance pour l'éolienne expérimentale NASA/DOE Mod-0 . . . . .	76
6.8	Prédictions de coefficient de puissance pour l'éolienne expérimentale NASA/DOE Mod-0 . . . . .	77
6.9	Prédictions de puissance pour l'éolienne expérimentale INTA . . . . .	79

6.10	Prédictions de coefficient de puissance pour l'éolienne expérimentale INTA . . . . .	80
6.11	Champ de pression calculé pour l'éolienne expérimentale NASA/DOE Mod-0 . . . . .	81
6.12	Champ de vitesse calculé pour l'éolienne expérimentale NASA/DOE Mod-0 . . . . .	81
6.13	Prédictions de puissance pour l'éolienne expérimentale NASA/DOE Mod-0 . . . . .	83
6.14	Prédictions de coefficient de puissance pour l'éolienne expérimentale NASA/DOE Mod-0 . . . . .	84
6.15	Coupe horizontale du champ de pression . . . . .	85
6.16	Coupe verticale du champ de vitesse . . . . .	86
6.17	Diagramme schématique de la position de l'éolienne et des anémomètres dans les mesures de Doran et al. . . . .	87
6.18	Distribution des vitesses dans le sillage de l'éolienne MOD-0A: $U_0 = 5.67 \text{ m/s}$ , angle du vent = $23^\circ$ . . . . .	88
6.19	Distribution des vitesses dans le sillage de l'éolienne MOD-0A: $U_0 = 8.17 \text{ m/s}$ , angle du vent = $193^\circ$ . . . . .	89
6.20	Contour de vitesse sur un plan de coupe à hauteur de moyeu, pour $U_0 = 8.05 \text{ m/s}$ , $\Psi = 90^\circ$ . . . . .	91
6.21	Contour de vitesse sur un plan de coupe à hauteur de moyeu, pour $U_0 = 8.05 \text{ m/s}$ , $\Psi = 75^\circ$ . . . . .	92
6.22	Contour de vitesse sur un plan de coupe à hauteur de moyeu, pour $U_0 = 8.05 \text{ m/s}$ , $\Psi = 15^\circ$ . . . . .	93
6.23	Production de puissance moyenne par éolienne pour $y_{step} = 4 \text{ RD}$ , $U_0 = 8.05 \text{ m/s}$ , $\Psi = 90^\circ$ . . . . .	97

I.1	Division des faces triangulaires en mini-éléments . . . . .	112
-----	---	-----

**LISTE DES TABLEAUX**

4.1	Hauteurs de rugosité typiques . . . . .	31
4.2	Nomenclature des équations (polaire/cartésien) . . . . .	32
5.1	Correspondance entre $\phi$ , $\Gamma_\phi, S_\phi$ et les variables primitives et les coefficients des équations du mouvement. . . . .	38
6.1	Données géométriques de l'éolienne NASA/DOE Mod-0 . . . . .	70
6.2	Données géométriques de l'éolienne INTA . . . . .	71
I.1	Table pour le découpage des mini-éléments de frontière . . . . .	113

## LISTE DES SYMBOLES

$a$	coefficient de l'équation discrétisée de quantité de mouvement, eq.(5.8)
$\mathcal{A}$	surface délimitant un volume de contrôle $\mathcal{V}$ , [ $m^2$ ]
$A_I$	intersection entre la surface $A_{Rotor}$ et le volume de contrôle $\mathcal{V}$ , [ $m^2$ ]
$A_{Rotor}$	surface balayée par les pales, [ $m^2$ ]
$A'_{Rotor}$	projection de la surface $A_{Rotor}$ , [ $m^2$ ]
$A_\phi$	constante d'interpolation du terme de diffusion, eqs.(5.7) et (5.21)
$b$	constante dans l'équation discrétisée de quantité de mouvement, eq.(5.8)
$B$	nombre de pales de l'éolienne
$B_\phi$	constante d'interpolation du terme de diffusion, eqs.(5.7) et (5.21)
$c$	corde de la pale à une station donnée [ $m$ ]
$C_D$	coefficient statique de traînée d'une section de pale
$C_L$	coefficient statique de portance d'une section de pale
$C_P$	coefficient de puissance d'une éolienne, eq.(6.1)
$C_\phi$	coefficient d'interpolation du terme de diffusion, eqs.(5.7) et (5.21)
$d$	coefficient de gradient de pression, eq.(5.11)
$D$	force de traînée d'une section de pale, [ $N$ ]
$D_\phi^{car}$	constante d'interpolation du terme de diffusion, eq.(5.21)
$DR$	diamètre du rotor
$f_i$	force surfacique dans la direction de $x_i$ , eq.(4.13), [ $N/m^2$ ]
$\overline{F}_i _{VC}$	force externe dans la direction $x_i$ , eq.(4.12), [ $N$ ]
$h$	hauteur du moyeu [ $m$ ]
$i$	vecteur unitaire dans la direction x- (cartésien)
$j$	vecteur unitaire dans la direction y- (cartésien)
$J$	flux total de $\phi$ (convection+diffusion), eq.(5.4)
$k$	vecteur unitaire dans la direction z- (cartésien)
$K$	constante de Von Karman, eq.(4.18)

$l_{\tilde{x}}$	force par unité de longueur de pale dans la direction $\tilde{x}$ , eq.(4.4), [ $N/m$ ]
$l_\theta$	force par unité de longueur de pale dans la direction $\theta$ , eq.(4.5), [ $N/m$ ]
$L$	force de portance d'une section de pale, [ $N$ ]
$N$	nombre de points du maillage
$n_i$	vecteur normal
$p$	pression [Pa]
$P_\phi$	propriété thermophysique
$r$	coordonnée dans le système polaire
$\tilde{r}$	coordonnée dans le système non-inertiel lié à la pale
$R$	rayon externe du rotor [m]
$R_H$	rayon interne du rotor [m]
$R_{CD}$	paramètre géométrique de dimensionnement domaine de calcul [m]
$Re_c$	nombre de Reynolds local, $Re_c = \frac{\rho V_{rel} c}{\mu}$
$S_c$	partie constante dans l'expression du terme de source linéarisé, eq.(5.6)
$S_p$	coefficient de $\phi$ dans l'expression du terme de source linéarisé, eq.(5.6)
$S_\phi$	terme de source
$t_{corr}$	facteur de correction de bout de pale combinée, eq.(4.14)
$t_H$	facteur de correction du moyeu, eq.(4.16)
$t_T$	facteur de correction du bout de pale, eq.(4.16)
$u$	composante de vitesse dans la direction $x-$
$u_i$	vecteur vitesse
$u_r$	composante de vitesse dans la direction $r-$ (polaire)
$u_\theta$	composante de vitesse dans la direction $\theta-$ (polaire)
$u^m$	composante de vitesse massique dans la direction $x-$ (polaire/cartésien), eqs.(5.13) et (5.22)
$u_r^m$	composante de vitesse massique dans la direction $r-$ (polaire), eq.(5.13)
$\hat{u}$	pseudo-vitesse dans la direction $x-$ (polaire/cartésien), eq.(5.10)

$\hat{u}_r$	pseudo-vitesse dans la direction $r-$ (polaire)
$u_*$	vitesse turbulente de friction, eq.(4.19)
$U_n, U_t$	composantes normale et tangentielle de la vitesse relative $V_{rel}$ , eqs.(4.8) et (4.7)
$U_0$	vitesse de l'écoulement incident à l'infini [m/s]
$v$	composante de vitesse dans la direction $y-$ (cartésien)
$v^m$	composante de vitesse massique dans la direction $y-$ (cartésien), eq.(5.22)
$\hat{v}$	pseudo-vitesse dans la direction $y-$ (cartésien)
$V_{rel}$	vitesse relative de l'écoulement par rapport au système de coordonnées lié à la pale, eq.(4.6)
$\mathcal{V}$	volume de contrôle
$w$	composante de vitesse dans la direction $z-$ (cartésien)
$w''^m$	composante de vitesse massique dans la direction $z-$ (cartésien), eq.(5.22)
$\hat{w}$	pseudo-vitesse dans la direction $z-$ (cartésien)
$\dot{W}_{méca}$	puissance mécanique de l'éolienne, eq.(4.17), [kW]
$\dot{W}_{méca}^*$	puissance mécanique de l'éolienne obtenue à l'itération précédente [kW]
$\dot{W}(\infty)$	puissance de l'éolienne pour un domaine de calcul quasi-infini [kW]
$x$	coordonnée dans le système cartésien
$\tilde{x}$	coordonnée dans le système non-inertiel lié à la pale
$x_i$	vecteur unitaire dans la direction $x$
$\tilde{x}_i$	vecteur unitaire dans la direction $\tilde{x}$
$X$	vitesse spécifique, $R\Omega \cos \gamma / U_0$
$X_{step}$	distance entre deux rangées d'éoliennes dans un parc [m]
$y$	coordonnée dans le système cartésien
$z$	coordonnée dans le système cartésien
$z_0$	hauteur de rugosité [m]
$\alpha$	angle d'attaque du profil d'une section de pale
$\beta$	angle de vrillage d'une section de pale [deg.]

$\gamma$	angle de conicité du rotor [deg.]
$\theta$	coordonnée dans le système polaire
$\theta_i$	vecteur unitaire dans la direction $\theta$
$\mathcal{V}$	volume d'un volume de contrôle
$\mu$	viscosité dynamique de l'air [N · s/m <sup>2</sup> ]
$\mu_e$	viscosité effective ( $\mu_e = \mu + \mu_t$ ) [N · s/m <sup>2</sup> ]
$\mu_t$	viscosité turbulente [N · s/m <sup>2</sup> ]
$\rho$	densité de l'air [kg/m <sup>3</sup> ]
$\tau_0$	contrainte de cisaillement exercée par la surface, eq.(4.19)
$\sigma$	solidité du rotor $\frac{Bc}{\pi R}$
$\phi$	variable dépendante générale
$\psi$	angle du vent par rapport à la direction de l'arrangement du parc [deg.]
$\Gamma_\phi$	coefficient de diffusion de $\phi$
$\Delta x_{UP}$	paramètre géométrique de dimensionnement domaine de calcul [m]
$\Delta x_{DN}$	paramètre géométrique de dimensionnement domaine de calcul [m]
$\Omega$	vitesse angulaire de rotation du rotor [rad/s]

## Indices

0	propriétés moyennes de l'écoulement incident
<i>max</i>	valeur maximale sur un volume de contrôle
<i>min</i>	valeur minimale sur un volume de contrôle

**LISTE DES ANNEXES**

I	Procédure de génération du maillage de surface . . . . .	112
II	Algorithmes de résolution des équations algébriques linéaires . . . . .	115

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION

#### 1.1 Historique

Depuis le début des civilisations antiques, l'homme a su exploiter l'énergie du vent. Ainsi, 5000 ans avant J-C, des bateaux à voile naviguaient déjà sur le Nil en Egypte. Dès 200 ans avant J-C, de simples moulins à vent étaient utilisés en Chine pour le pompage de l'eau tandis qu'en Perse et au Moyen-Orient des moulins à vent à axe vertical faits de voiles en feuilles de roseau tissées étaient employés pour concasser le grain. Peu à peu, de nouvelles façons d'utiliser l'énergie éolienne se propagèrent dans le monde. A partir du 11ième siècle, l'usage du moulin à vent pour la production agricole se répandit au Moyen-Orient; c'est durant cette période que voyageurs et commerçants implantèrent l'idée en Europe. Les hollandais raffinèrent le moulin et l'adaptèrent à l'assèchement de lacs et de marécages dans le delta du Rhin. Lorsque les colons introduisirent la technologie en Amérique du nord à la fin du 19ième siècle, les moulins à vent étaient alors principalement utilisés pour le pompage de l'eau dans les fermes et les ranchs. L'industrialisation, en Europe puis en Amérique, entraîna le déclin progressif de l'utilisation des moulins à vent. Dans les campagnes, la machine à vapeur remplaça graduellement les moulins de pompage. Dans les années 30, l'électrification des milieux ruraux procura de l'énergie à faible coût dans la plupart des foyers des États-Unis, rendant le moulin à vent désuet. Toutefois, l'industrialisation a aussi déclenché le développement de plus gros moulins destinés à la production d'électricité. Communément appelées éoliennes ou aérogénérateurs, ces machines apparurent au Danemark dès 1890.

La popularité des éoliennes a toujours été intimement liée au prix des carburants

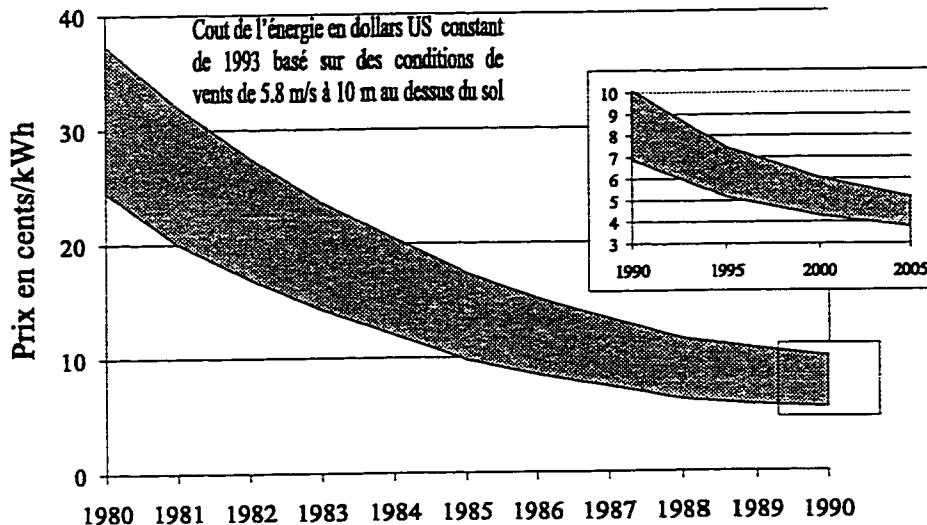


Figure 1.1 Évolution et prévisions du prix de l'énergie éolienne de 1980 à 2005

fossiles. Lorsque le prix du brut chuta après la Seconde guerre mondiale, l'intérêt pour les éoliennes disparut. Par contre, suite à la crise pétrolière des années 70, la filière éolienne connut un essor considérable. C'est durant cette période que furent raffinées les idées anciennes et que la technologie et les concepts modernes d'éolienne virent le jour. Ainsi, le concept de parc éolien, ensemble d'éoliennes regroupées et reliées au réseau électrique, se développa en Amérique et en Europe. Aujourd'hui, les leçons tirées de plus de deux décennies d'exploitation de parcs éoliens conjuguées à un effort de recherche et développement constant ont permis d'abaisser le coût de l'énergie du vent (voir figure 1.1) et d'en faire un sérieux compétiteur aux sources conventionnelles de production énergétique.

La demande en électricité pour des raisons de développement économique et de bienfaits sociaux ne cesse d'augmenter dans le monde et les éoliennes ont le potentiel pour y répondre tout en présentant des avantages substantiels :

- Le vent est une source d'énergie inépuisable, gratuite et présente presque partout.
- L'exploitation de l'énergie du vent ne produit aucune pollution de l'air, du sol

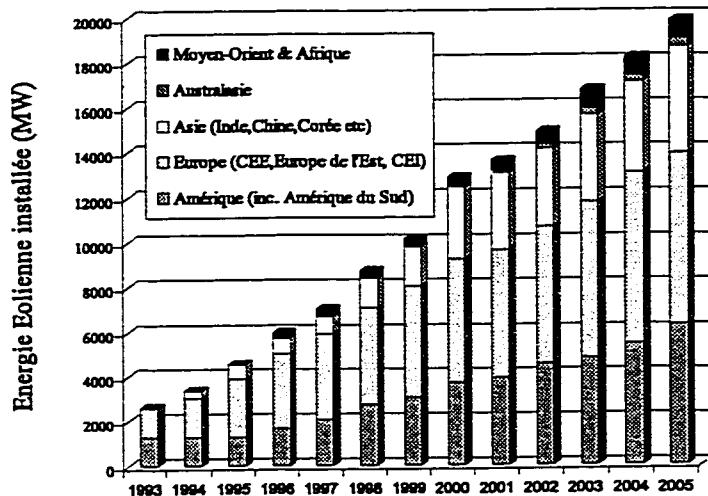


Figure 1.2 Croissance du nombre de megawatts éoliens installés dans le monde

ou de l'eau.

- L'énergie éolienne est sans danger et populaire.
- La technologie éolienne est en constante évolution.
- C'est une technologie qui est compétitive économiquement.

Ainsi, chaque année, les éoliennes deviennent une source d'électricité de plus en plus attrayante telle qu'en témoigne la croissance du nombre de mégawatts éoliens installés dans le monde présentée à la figure 1.2 et les prévisions laissent entrevoir un avenir encore plus prospère.

## 1.2 Éoliennes modernes

Deux types d'éoliennes modernes existent, les éoliennes à axe horizontal et celles à axe vertical telles que présentées sous forme schématique à la figure 1.3. Toutefois, il semble clairement établi que l'éolienne à axe horizontal s'impose comme le design dominant dans l'industrie actuelle. C'est pour cette raison que le présent travail se restreindra à l'étude de ce type d'éolienne. L'éolienne à axe horizontal se compose de deux ou trois pales montées sur un arbre soutenu par une nacelle. La nacelle est

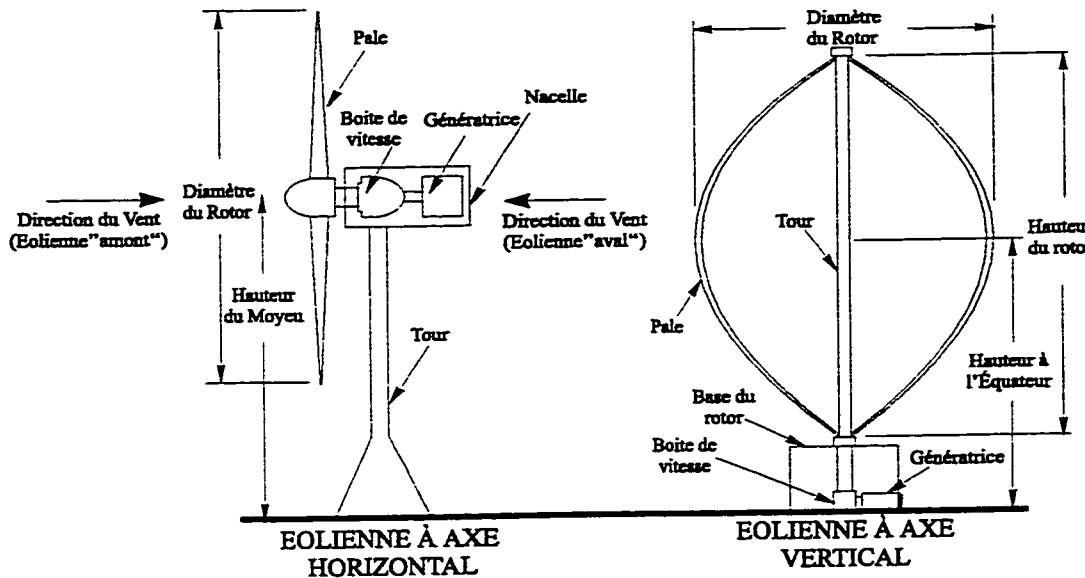


Figure 1.3 éoliennes modernes à axe horizontal et vertical

érigée sur une tour à une hauteur typiquement égale à un diamètre de rotor. L'arbre entraîne une génératrice électrique par l'intermédiaire d'une boîte de vitesse. Ces éoliennes opèrent dans une plage de vitesse de vent s'étendant de 4 m/s jusqu'à 25 m/s. En dessous de cette plage d'opération, l'éolienne ne produit pas d'électricité tandis qu'au dessus, des mécanismes la freinent pour éviter sa destruction. Les puissances produites varient de 1 kW à 1.5 MW selon les modèles. Actuellement, une éolienne typique a une puissance de 700 kW et un diamètre de 50 m. Les éoliennes peuvent adopter deux configurations par rapport au vent: aval lorsque la tour est au vent du rotor (presque pas utilisé) et amont dans le cas contraire. Les différences thermiques résultant du réchauffement inégal de la surface terrestre par le soleil conjuguées à la rotation de la terre entraînent le mouvement de masses d'air : le vent. L'énergie extraite du vent par les éoliennes est l'énergie cinétique de l'air se déplaçant dans l'atmosphère. Une éolienne convertit cette énergie cinétique en énergie mécanique et électrique. D'une façon générale, le processus d'extraction de l'énergie du vent commence par l'écoulement de l'air autour des pales de l'éolienne, ce qui génère une différence de pression entre l'intrados et l'extrados du profil des

pales. Une force résultant de cette différence de pression (portance) entraîne la pale dans un mouvement de rotation autour d'un arbre. Cette énergie de rotation peut par la suite être utilisée pour actionner un système mécanique telle une pompe à eau ou entraîner une génératrice pour produire de l'électricité.

### 1.3 Objectifs et motivations

Suite aux difficultés reliées à l'exploitation de super-éolienne isolée de très grande puissance, la tendance actuelle est d'installer des éoliennes de puissance moyenne (environ 700kW) en groupe communément appelé parc éolien. De tels arrangements d'éoliennes possèdent de nombreux avantages: la possibilité de produire plus d'énergie, l'excellente maîtrise de la technologie des éoliennes de puissance moyenne, enfin, le bris d'une machine n'entraîne pas l'arrêt complet de la production énergétique. Toutefois, cette pratique a l'inconvénient d'engendrer des phénomènes d'interférences de sillages entre les éoliennes. La vitesse du vent est le principal paramètre influençant la production énergétique d'une éolienne donnée. Ainsi, puisque la puissance disponible dans le vent est proportionnelle au cube de la vitesse de ce dernier, de faibles variations de vitesse de vent entraînent des variations relativement importantes de production énergétique. Par exemple, si le vent dans lequel opère une éolienne a une vitesse de 20% inférieure à celle prévue lors de sa conception, la puissance produite sera environ la moitié de celle anticipée. Étant donné qu'une éolienne extrait l'énergie cinétique du vent, la vitesse de ce dernier sera plus faible dans le sillage d'une machine. Ainsi une éolienne placée dans le sillage d'une autre produira moins d'énergie que dans des conditions isolées. De plus, la turbulence générée par la turbine dans son sillage entraîne un chargement variable des pales d'une éolienne située dans ce sillage et diminue par conséquent la durée de vie de ces dernières. Le sillage représente donc une zone dans laquelle l'écoulement possède une vitesse inférieure et un niveau de turbulence supérieure par rapport à

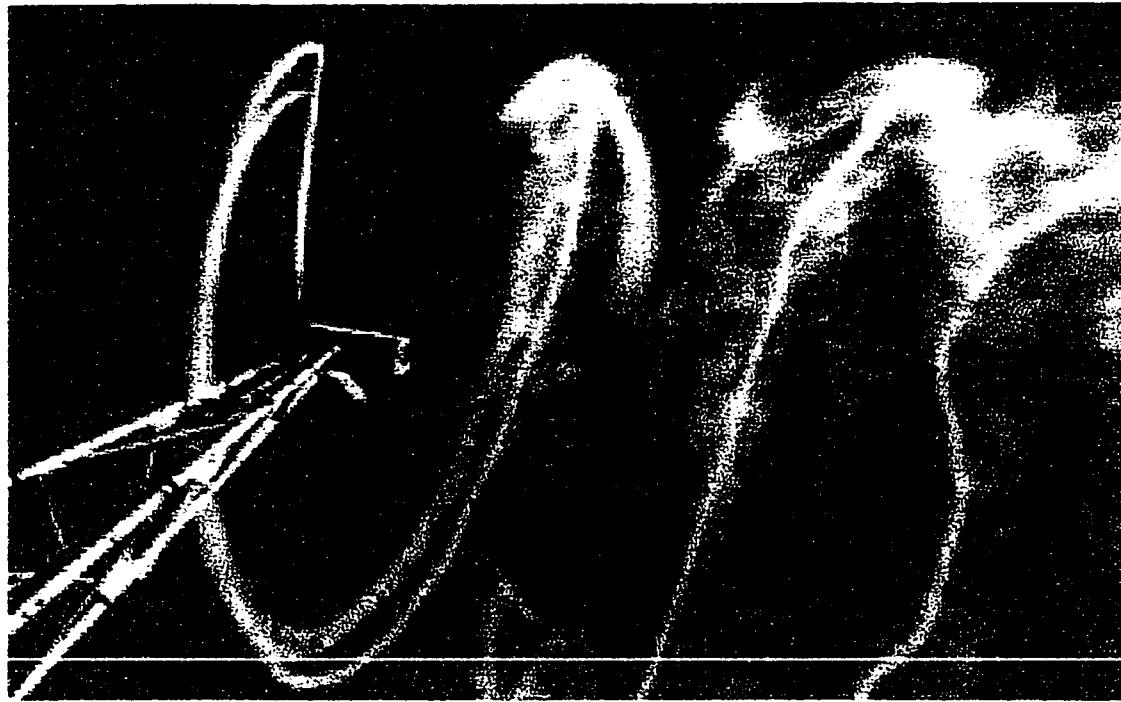


Figure 1.4 Visualisation du sillage d'une éolienne par injection de fumée en bout de pale

l'écoulement incident libre. La figure 1.4 présente la visualisation du sillage d'une éolienne par injection de fumée au bout de pale. Ainsi, la minimisation des effets d'interférences du sillage des éoliennes en amont sur celles en aval est une considération importante lors de la conception d'un parc.

Le développement des parcs éoliens s'amorça au début des années 80 en Californie pour se propager par la suite au reste du monde. Avec des connaissances limitées dans la conception de ferme à vent, la production énergétique de certains des premiers parcs fut beaucoup plus faible que prévue. Ces performances décevantes furent souvent attribuées aux pertes par interférence de sillage. Ainsi, suite aux faibles rendements obtenus par des arrangements denses non optimisés (voir figure 1.5), la stratégie actuelle dans la conception de parcs éoliens consiste à éloigner les éoliennes les unes des autres afin de réduire les effets d'interférences. Cette pratique a pour effet de produire des arrangements clairsemés dans lesquels le potentiel



Figure 1.5 Exemple de parc éolien non optimisé

énergétique n'est pas efficacement utilisé. De plus des coûts d'opération importants sont associés aux arrangements étalés. On peut citer entre autres les frais d'infrastructure liés à la construction et à l'entretien des éoliennes (routes, bases de béton), l'installation électrique et les coûts de location ou d'achat du terrain occupé par le parc qui peuvent représenter jusqu'à 25% des frais d'opération et d'entretien. Un arrangement d'éoliennes décalé, dense et optimisé pourrait avoir une production énergétique similaire à une disposition dispersée mais en occupant moins de terrain, ce qui pourrait représenter des économies substantielles en frais d'opération. De plus, les méthodes de design actuelles de parcs éoliens sont basées sur des relations semi-empiriques et nécessitent de longues et intensives campagnes de relevé de vitesse de vent sur le site pour être utilisé avec un certain niveau de confiance. Une méthode numérique permettant la prédiction précise des vitesses de vent sur un site en incluant les effets de la topologie permettrait de réduire grandement les efforts associés à la campagne de mesure de vent et raccourcirait la période de

conception des parcs. L'objectif du présent travail consiste à développer une méthode numérique permettant le calcul des performances et de l'écoulement autour d'un parc d'éoliennes à axe horizontal. Cette méthode pourra par la suite être employée à l'optimisation des performances des parcs par un meilleur positionnement de l'arrangement des éoliennes afin d'obtenir une production énergétique maximale sur une superficie minimale. La simulation d'un parc nécessite la connaissance de la géométrie des éoliennes installées ainsi que les conditions d'opérations rencontrées à l'emplacement du parc (vitesse du vent, direction, durée...). Il sera alors possible de calculer la puissance produite pour divers arrangements puis, par l'utilisation d'un processus d'optimisation automatique, il sera envisageable de déterminer le positionnement optimal des éoliennes dans le parc. La modélisation tridimensionnelle des éoliennes permettra de mieux comprendre la physique de leur sillage ainsi que les phénomènes d'interactions aérodynamiques qui y sont associés.

#### 1.4 Plan du mémoire

Le chapitre II présente un développement de la problématique de l'interférence de sillage dans les parcs éoliens ainsi qu'une revue bibliographique des diverses méthodes d'analyse aérodynamique des parcs éoliens. Puis, le chapitre III est consacré à la présentation d'une vue d'ensemble générale de la méthodologie employée dans ce travail pour la simulation numérique de l'écoulement autour d'un parc éolien. La présentation du modèle mathématique retenu [35, 34, 36] est faite au chapitre IV suivie par celle de la méthode numérique [24, 38] au chapitre V. Par la suite, les résultats obtenus sont présentés et discutés au chapitre VI. Le chapitre VII résume les conclusions et les contributions du présent travail ainsi que certaines recommandations. Finalement, les annexes I et II présentent respectivement les détails de la procédure de construction du maillage de mini-éléments et les algorithmes de résolution des systèmes d'équations discrétisées.

## CHAPITRE II

### INTERFÉRENCES DE SILLAGE DES ÉOLIENNES DANS LES PARCS

#### 2.1 Problématique

Lors des quinze dernières années, un effort soutenu de recherche et développement a permis à la technologie éolienne d'atteindre un certain niveau de maturité. Ainsi, tous les aspects constituants des éoliennes, l'aérodynamique, la structure, le système de contrôle, les systèmes mécaniques et électriques ont subi des améliorations significatives contribuant à accroître le rendement énergétique des aérogénérateurs. Toutefois des progrès modestes ont été réalisés dans le positionnement des éoliennes dans les parcs éoliens afin de réduire les effets d'interférences de sillage et d'obtenir la production électrique maximale. Les fabricants et les promoteurs de projets éoliens présentent néanmoins un intérêt croissant pour le sujet tel qu'en témoigne le succès remporté par la récente sortie du premier code commercial d'optimisation linéaire de l'arrangement de parc éolien "Windop" de la compagnie écossaise "Natural Power". À la suite d'études théoriques et expérimentales [31] sur les effets d'interférences de sillage sur la production des parcs éoliens, la pratique courante appliquée par l'industrie des constructeurs d'éoliennes consiste à espacer les éoliennes de 6 à 10 diamètres de rotor (DR) dans la direction la plus énergétique du vent et de 2 à 5 DR dans la direction transversale. L'objectif recherché par cette norme est de laisser une distance suffisante entre les éoliennes pour permettre au sillage provenant d'une machine amont de se ré-énergiser suffisamment pour retrouver une vitesse proche de celle du vent incident avant de rencontrer une autre machine en aval. Dans ce contexte, les éoliennes présentent des productions égales ou inférieures à celles d'une

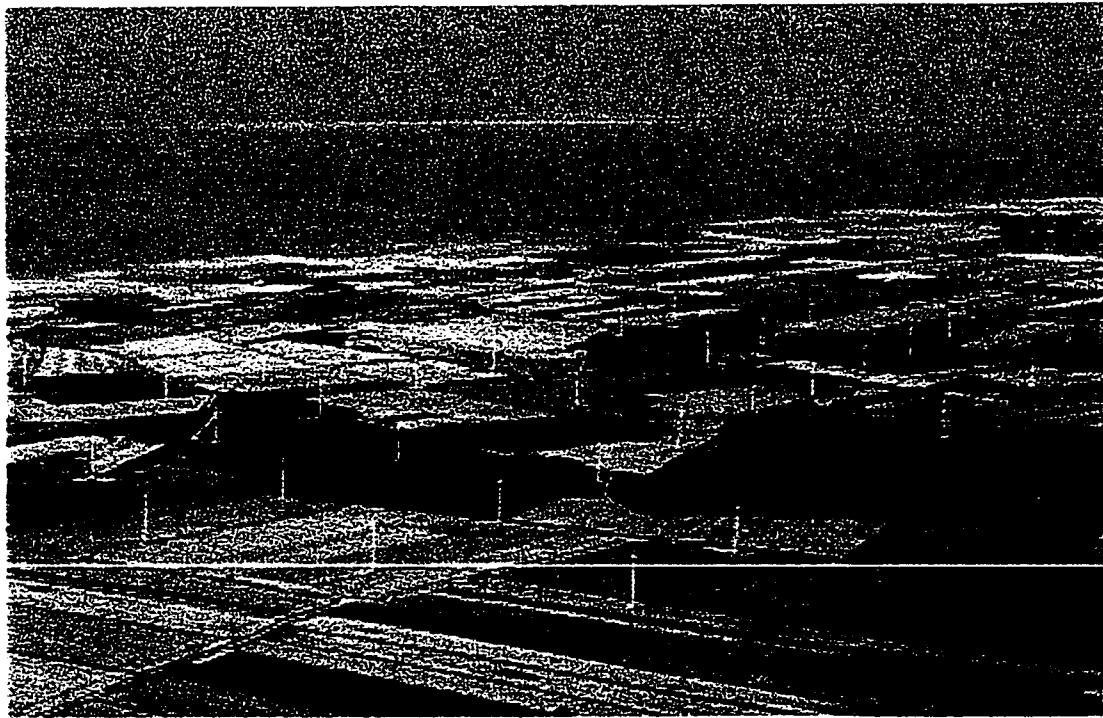


Figure 2.1 Exemple de parc éolien clairsemé

machine isolée et les pertes énergétiques du parc associées aux effets d'interférences de sillage sont d'environ 5%. Bien que cette pratique de positionnement permette de minimiser les effets d'interférences de sillages, elle présente toutefois l'inconvénient d'engendrer des parcs vastes et clairsemés aux coûts d'opérations élevés tel que présenté à la figure 2.1.

Ce travail propose une approche différente au problème d'interférences de sillage dans les parcs éoliens. Au lieu d'employer une norme de positionnement figée, il est envisageable de positionner les éoliennes de manière à minimiser leur fonctionnement dans le sillage de leurs voisines. Cette optimisation de la micro-localisation des éoliennes dans un parc consiste donc à déterminer les positions relatives des éoliennes dans les trois dimensions, tel que présenté à la figure 2.2 afin d'obtenir la production

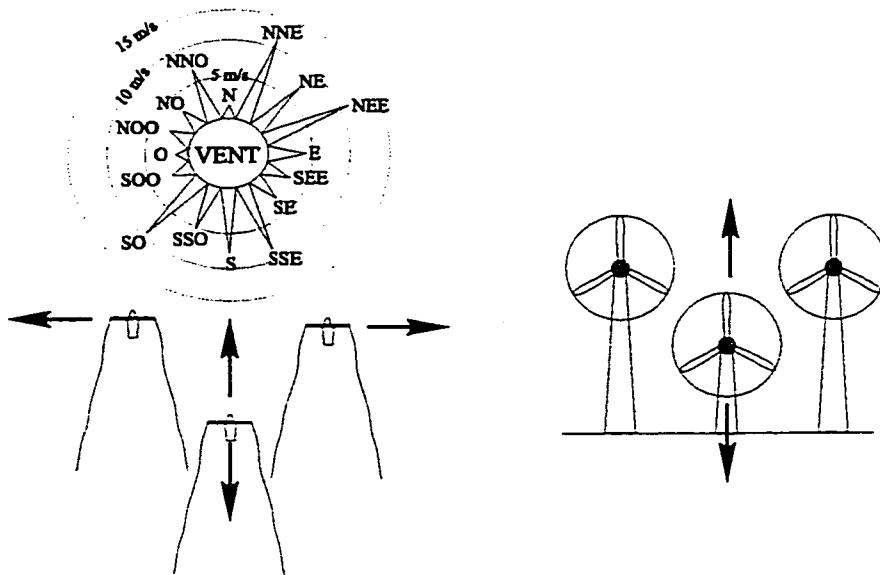


Figure 2.2 Optimisation de la localisation des éoliennes dans un parc

énergétique annuelle maximale(kWh) pour une surface occupée minimale.

L'arrangement optimal des éoliennes sera donc fonction des divers régimes de vent présents à l'emplacement du parc (vitesse du vent, direction, durée). La connaissance d'une rose des vents complète et précise est impérative au succès de l'optimisation. De plus, il est possible en positionnant les éoliennes de façon judicieuse de bénéficier de phénomènes d'interférences bénéfiques. Ainsi le vent incident canalisé entre les sillages de deux éoliennes voisines est accéléré, ce qui donne naissance à une sur-vitesse tel que présenté à la figure 2.3, phénomène bien connu sous le nom d'effet venturi. En rapprochant suffisamment les éoliennes, cet effet venturi peut provoquer des augmentations de vitesse significatives. Ainsi, une éolienne placée dans cette région de survitesse produira plus d'énergie que dans des conditions d'isolement.

L'un des objectifs principaux de ce projet est de démontrer qu'un arrangement d'éolienne dense et optimisé peut avoir une production énergétique similaire à celle d'un parc clairsemé.

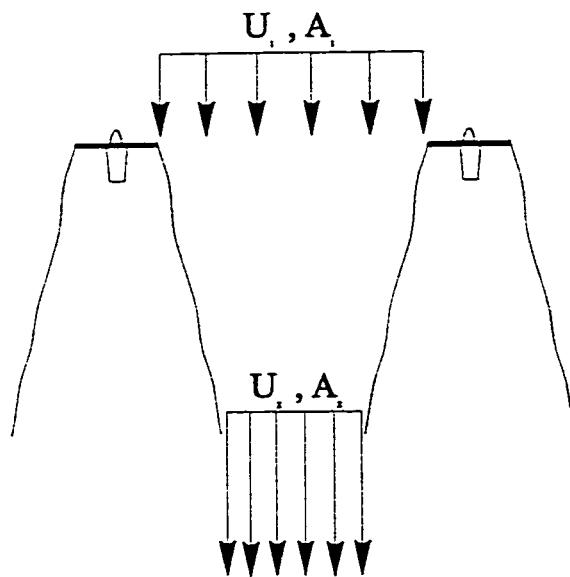


Figure 2.3 Effet venturi entre deux éoliennes voisines

## **2.2 Revue bibliographique des méthodes d'analyse aérodynamique des parcs éoliens**

Afin de déterminer la méthodologie la plus appropriée à la résolution du problème d'interférence de sillage dans les parcs éoliens, un recensement et une brève évaluation des diverses méthodes d'analyse de l'aérodynamique des parcs éoliens sont essentiels [35]. Ces méthodes peuvent être classées en trois groupes principaux:

- Essais expérimentaux pleine grandeur dans les parcs éoliens
- Essais expérimentaux en soufflerie
- Modèles mathématiques

Les prochaines sections recensent et critiquent les méthodes constituant ces trois grands groupes.

### **2.2.1 Essais expérimentaux pleine grandeur dans les parcs éoliens**

Ces essais ont permis d'accroître les connaissances générales et statistiques des performances des éoliennes dans les parcs. Toutefois, les résultats obtenus par diverses

méthodes de mesure se sont souvent révélés difficilement reproductible [17]. Ce conflit peut s'expliquer par le fait que les essais sont perturbés par la nature stochastique du vent, les effets dus à la topologie du terrain et les changements météorologiques qui rendent difficile voir impossible de répéter des observations. De plus, ces essais ne peuvent être effectués qu'après la construction du parc éolien et ne sont daucun intérêt pour la conception de ce dernier.

### 2.2.2 Essais expérimentaux en soufflerie

De nombreux essais en soufflerie ont été réalisés sur des éoliennes isolées [7, 10, 41], ainsi que sur des éoliennes faisant partie d'arrangements de petit [1, 12, 22, 27] et grand nombre d'éoliennes [25, 28, 37]. Ces études produisirent des résultats de bonne précision pour l'évaluation de la production énergétique des turbines mais la description des sillages ne fut pas concluante. Cette incapacité à reproduire avec précision le sillage peut être attribuée aux raisons suivantes:

- L'étendue spatiale des effets de blocage produits par une éolienne n'est pas clairement établie et peut dépasser les limites acceptables de la section de travail de la soufflerie.
- Les effets de la turbulence affectent grandement les résultats [1].
- Les vitesses de l'écoulement dans la soufflerie sont inférieures aux vitesses de vent réelles ce qui provoque des écarts entre les nombres de Reynolds des modèles et ceux des éoliennes grandeur nature. Ainsi les effets d'échelle deviennent encore plus problématiques.

Toutes ces raisons rendent l'analyse expérimentale en soufflerie peu applicable aux problèmes d'interférences de sillages dans les parcs jusqu'à ce qu'une soufflerie pouvant représenter les conditions observées dans la couche limite terrestre soit disponible.

### 2.2.3 Modèles mathématiques

De nombreux modèles mathématiques ont été développés et utilisées pour l'analyse des performances des éoliennes isolées. Une description et une comparaison de ces méthodes sont présentées dans la référence [35]. La discussion qui suit se limite aux cinq principaux modèles utilisés dans l'industrie pour l'analyse et le design des parcs éoliens.

#### 2.2.3.1 Théorie de couche limite

L'utilisation du concept de couche limite terrestre pour la modélisation de regroupement d'éoliennes fut initiée par Templin [43]. Par la suite, Best [5], Bragg et Schmidth [8], Crafoord [13], Newman [30] et Taylor [42] modifièrent cette approche avec divers niveaux d'approximation et obtinrent des prédictions raisonnables de la performance totale des parcs éoliens. L'approche de la couche limite s'effectue à l'échelle macroscopique, ainsi, les éoliennes sont considérées comme des éléments de rugosité faisant partie de la couche limite terrestre. Par conséquent, les caractéristiques géométriques et dynamiques ainsi que les interférences mutuelles entre les machines sont négligées. De plus, l'approximation de couche limite traite l'écoulement comme parabolique dans au moins une direction alors que l'écoulement autour d'un champ éolien est elliptique dans chacune des trois directions du système de coordonnées. Ainsi, cette méthode n'inclut pas les effets d'interaction des sillages entre les éoliennes essentiels à la modélisation précise d'un parc. De plus, elle n'offre pas la possibilité de prédire la production énergétique du parc.

#### 2.2.3.2 Théorie de superposition des sillages

Initialement proposée par Lissaman [21], cette approche dérive de la théorie des mélanges par jet. Ainsi des corrélations furent établies entre les évolutions continues de sillages de jets circulaires plongés dans un écoulement uniforme et celles

des sillages de turbines afin de modéliser les interactions des sillages des éoliennes. Cette méthode repose principalement sur les deux hypothèses suivantes: (i)les profils de vitesse dans le sillage sont similaires, et (ii)la vitesse de l'écoulement incident sur des rangées successives d'éoliennes décroît progressivement provoquant une diminution semblable de la puissance produite. Sforza [40] et Vermeulen [44] ont amélioré successivement la méthode en utilisant des modèles semi-empiriques du sillage d'éoliennes isolées à la place des données originales provenant de l'analyse des jets circulaires. La superposition linéaire des sillages ne permet pas de représenter les interactions réelles complexes entre les éoliennes. Cette technique néglige les effets de la diffusion visqueuse entre les sillages et ne peut être utilisée avec succès pour l'analyse des interactions de sillages d'éoliennes tel que le rapporte Alfredson [1].

#### 2.2.3.3 Théorie du tube de courant

Les modèles de tubes de courant ont été développés à partir de deux théories indépendantes utilisées pour la théorie des hélices soient: (i) la théorie du disque actuateur (quantité de mouvement) et (ii) la théorie de l'élément de pale. Basée sur le théorème de la quantité de mouvement, la théorie du disque actuateur a été développée par Rankine (1865) et Froude (1878). Le rotor, considéré comme un disque homogène, extrait une quantité d'énergie du vent équivalente au produit entre la perte de quantité de mouvement de ce dernier au travers du rotor et la vitesse moyenne du vent sur le rotor. Cette théorie permet d'obtenir une description générale de l'écoulement. La théorie de l'élément de pale consiste à diviser la pale en sections indépendantes puis à partir des conditions et des propriétés locales de l'écoulement ainsi que de la géométrie du profil sur chaque section, à déterminer une force aérodynamique s'y appliquant. Elle permet donc de représenter les effets de l'écoulement autour du profil(section de pale). La combinaison de ces deux théories permet d'obtenir une représentation limitée de l'écoulement autour d'une éolienne.

Cette théorie est largement utilisées pour l'analyse des performances [29] et le design des éoliennes isolées [39, 19]. Toutefois, les vitesses dans le sillage obtenues par cette approche sont très souvent physiquement irréaliste. Ainsi, cette théorie n'est donc pas applicable à l'analyse de parcs éoliens.

#### 2.2.3.4 Théorie du tourbillon libre (théorie de la ligne portante)

La théorie du tourbillon libre est le résultat des travaux de Fanucci et Walters [15] et fut par la suite améliorée par Strickland [41]. D'une complexité supérieure, le modèle tourbillonnaire est couramment utilisé pour sa meilleure capacité à représenter le sillage. Chaque pale du rotor est modélisée par une ligne de tourbillons (ligne portante) où l'écoulement induit à chaque station est déterminé par la loi de Biot-Savard [46]. Cette méthode très précise pour la prédition des sillages a démontré sa capacité à modéliser correctement les interactions entre plusieurs machines [41]. Toutefois, cette théorie n'offre pas la possibilité de tenir compte de la turbulence atmosphérique qui a pourtant un effet important sur l'évolution des sillages.

#### 2.2.3.5 Équations de Navier Stokes

Finalement le dernier type de modèle est basé sur la solution des équations de Navier-Stokes afin de déterminer le détail de l'écoulement autour des éoliennes. Deux approches existent pour la modélisation des éoliennes avec ce type de modèle. La première consiste en l'analyse exacte de l'aérodynamique des éoliennes ce qui représente une tâche extrêmement complexe et fastidieuse à réaliser puisqu'elle implique un écoulement tridimensionnel et instationnaire où les effets du décrochage dynamique et du sillage sont importants. Une simulation pratique d'un tel écoulement ne peut être réalisée qu'en posant certaines hypothèses simplificatrices énoncées dans le chapitre suivant. Toutefois, les caractéristiques fondamentales de l'écoulement, et en particulier celles qui permettent l'étude des interférences éolienne/éolienne et éolienne/sillage, sont conservées dans la seconde méthode simplifiée. Dans cette

méthode, l'écoulement autour des éoliennes est déterminé en résolvant les équations de Navier-Stokes stationnaires, incompressibles dans lesquels les éoliennes sont représentées par une distribution de forces externes évaluées par la théorie de l'élément de pale. Cette approche fut proposée par Rajagopalan et Fanucci [34] et Rajagopalan [36].

Cette formulation est très générale puisqu'elle est applicable, en principe, aux éoliennes à axe horizontal et vertical et permet d'inclure les effets des accidents topographiques tels que les montagnes et les forêts avoisinantes. Elle convient parfaitement à la résolution du problème d'interférence de sillage dans les parcs éoliens et c'est elle qui sera retenue pour la réalisation du présent travail.

La solution des équations de Navier-Stokes pour des problèmes complexes de mécanique des fluides tel que celui faisant l'objet de ce travail est en général impossible à trouver de façon analytique. L'utilisation de méthodes numériques est donc nécessaire à la résolution de tels problèmes. Trois grandes familles de méthodes de résolution des équations de Navier-Stokes existent:

- Méthode des différences finies.
- Méthode des éléments finis.
- Méthode des volumes finis.

Bien que différentes, le développement des méthodes de ces trois familles sont composées de trois étapes similaires: la discrétisation du domaine, la discrétisation des équations et la résolution du système d'équations. La distinction entre ces trois familles s'établit lors de la discrétisation des équations. On retiendra que les méthodes de différences finies s'appuient sur les développements en série de Taylor et que les méthodes de différences finies, d'éléments et de volumes finis sont basés sur la théorie des résidus pondérés. La méthode des différences finies nécessite l'usage de maillages orthogonaux, ce qui limite la complexité de la géométrie des problèmes

qu'elle peut résoudre. Quant aux méthodes de volumes et d'éléments finis, ce sont des méthodes similaires ne présentant pas d'avantages significatifs l'une par rapport à l'autre. Dans ce travail, les équations de Navier-Stokes seront solutionnées à l'aide de l'approche des volumes de contrôle finis. Plus particulièrement, une Méthode aux Éléments Finis/Volumes de Contrôle (CVFEM) à colocation d'ordre égal pour écoulements axisymétriques et tridimensionnels sera développée [4, 24, 38].

## CHAPITRE III

### MÉTHODOLOGIE

Le chapitre qui suit présente une vue d'ensemble de la méthodologie employée dans ce travail pour l'analyse numérique de l'écoulement autour d'un parc éolien. Les grandes lignes de la méthode ainsi que les principales hypothèses simplificatrices y sont présentées. Les deux chapitres suivants développeront en détails les aspects originaux et essentiels à la bonne compréhension de la méthode.

L'écoulement autour d'une éolienne est régi par les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles et instationnaires qui doivent être solutionnées sur un domaine de calcul aux frontières mobiles. L'analyse exacte de ce problème représente une tâche colossale sur les ordinateurs actuels. Il est donc nécessaire d'effectuer un certain nombre d'hypothèses simplificatrices afin de proposer une formulation pragmatique. L'instationnarité de l'écoulement autour d'une éolienne provient principalement des tourbillons se détachant des pales des aérogénérateurs. Il a cependant été démontré que cet effet est négligeable à des vitesses spécifiques élevées [26]. L'effet des pales sur l'écoulement peut ainsi être introduit d'une manière continue le long du parcours de celles-ci en considérant que le rotor est constitué d'un nombre élevé de pales tout en possédant une solidité finie. Cette hypothèse permet donc de considérer l'écoulement comme stationnaire. Le mouvement des pales d'un rotor introduit principalement une variation de quantité de mouvement locale du fluide provoquée par les forces aérodynamiques générées par les pales en rotation. En conséquence, en employant une technique de moyenne temporelle, l'action des pales sur l'écoulement est représenté par des termes de forces externes dans les équations de quantité de mouvement, distribués sur le parcours des pales et évalués par le biais de la théorie de l'élément de pale. Les effets de la turbulence sur l'écoulement

sont introduits à l'aide du concept de viscosité turbulente  $\mu_t$ . De plus, de part les faibles grandeurs des nombres de Mach impliqués, l'écoulement peut être considéré incompressible. En résumé, il est proposé de prédire l'écoulement incompressible et tridimensionnel d'un parc éolien en solutionnant les équations de Navier-Stokes en régime stationnaire dans lesquels les rotors sont représentés par des distributions de forces externes. Ce système d'équations sera solutionné à l'aide d'une Méthode aux éléments Finis/Volumes de Contrôle (CVFEM) à collocation d'ordre égal [24, 38]. Pour des terrains plats, sans obstruction, les parcs éoliens typiques sont constitués de rangées d'éoliennes orientées perpendiculairement à la direction de vent la plus énergétique. C'est ce type de parc qui est considéré dans ce travail. Si les rangées d'éoliennes sont suffisamment longues et l'arrangement géométrique des turbines est périodique, l'écoulement autour des turbines situées loin des extrémités des rangées peut être considéré périodique dans l'espace. Cette hypothèse est utilisée dans ce travail pour réduire l'étendue du domaine de calcul nécessaire à la modélisation complète d'un parc éolien. Un exemple simple d'optimisation de la production énergétique d'un parc éolien par un meilleur positionnement des éoliennes est effectué sur la base de l'optimisateur numérique CENTAURE [16].

D'un point de vue plus général, l'approche retenue pour la réalisation de ce projet se divise en deux parties. Dans un premier temps, un modèle axisymétrique à trois composantes de vitesse a été développé, suivi par la suite d'un modèle tridimensionnel cartésien. Bien que le phénomène d'interférence de sillage dans les parcs éoliens soit complètement tridimensionnel, le passage par une méthode axisymétrique est justifiable par sa plus grande simplicité et son volume de calcul plus faible. Le modèle axisymétrique est une méthode rapide et efficace pour la validation de nouveaux concepts ainsi que le développement et l'étude de divers éléments tels que les modèles de turbulence et les études d'indépendance de maillage. Il représente aussi un outil pratique pour le design et l'analyse des performances d'une éolienne isolée.

## CHAPITRE IV

### MODÈLE MATHÉMATIQUE

Sur la base des hypothèses présentées au chapitre précédent, le modèle mathématique utilisé dans ce travail pour modéliser l'écoulement autour d'un parc éolien est développé en détail dans ce chapitre. La première section du chapitre est consacrée aux équations de Navier-Stokes qui gouvernent la dynamique de l'écoulement, suivie par le développement mathématique menant aux expressions analytiques des termes de forces externes représentants l'action des pales sur le fluide. La troisième section du chapitre présente la modélisation de la turbulence employée et finalement la dernière section décrit les caractéristiques de l'écoulement incident considéré lors des simulations. Le modèle mathématique développé dans ce chapitre sert de base commune aux méthodes numériques axisymétrique et tridimensionnelle cartésienne développées dans ce travail. Ce modèle sera présenté en employant la notation indicelle de Einstein générale et indépendante du système de coordonnées. Cependant, à la fin de ce chapitre, les principales équations seront développées pour chacune des deux méthodes (axisymétrique et cartésienne tridimensionnelle).

#### 4.1 Équation du mouvement

Tel que démontré au chapitre précédent, après avoir émis quelques hypothèses simplificatrices, l'écoulement autour d'une éolienne peut être représenté par les équations de Navier-Stokes, moyennées dans le temps, stationnaires et incompressibles. Pour un volume de contrôle  $\mathcal{V}$  fixe et indéformable dans lequel une pale du rotor peut être présente, ces équations s'expriment sous la forme intégrale suivante:

### Équation de continuité

$$\int_A \rho u_j n_j dA = 0 \quad (4.1)$$

### Équation de quantité de mouvement

$$\int_A \rho u_i u_j n_j dA = - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \int_A \mu_e \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j dA + \bar{F}_i|_{VC} \quad (4.2)$$

Avec  $\mathcal{A}$  la surface du volume de contrôle  $V$  et  $n_j$  le vecteur unitaire orienté vers l'extérieur du volume de contrôle et normal à la surface élémentaire de contrôle  $dA$ . Dans ces équations, les quatre variables dépendantes sont les trois composantes du vecteur vitesse ( $u$ ,  $v$ , et  $w$  en coordonnées cartésiennes et  $u$ ,  $u_r$  et  $u_\theta$  en coordonnées polaires) et la pression  $p$ . La densité du fluide est représentée par  $\rho$  et sa viscosité dynamique par  $\mu$ . Les effets de la turbulence sont introduits dans les équations de Navier-Stokes par l'utilisation du concept de viscosité turbulente  $\mu_T$ . La viscosité effective  $\mu_e$  est la somme de la viscosité dynamique  $\mu$  et de la viscosité turbulente  $\mu_T$ . Toutefois, dans ce travail, la viscosité dynamique  $\mu$  est négligée par rapport à sa contrepartie turbulente  $\mu_T$ . Afin de fermer ce système d'équations, un modèle de turbulence adéquat est introduit. Le choix et la description du modèle de turbulence sont exposés à la section 4.3. Le terme  $\bar{F}_i|_{VC}$  inclus dans les équations de quantité de mouvement représente les forces, moyennées dans le temps, exercées par les pales du rotor sur le fluide dans un volume de contrôle donné. Ces forces externes ne sont pas connues a priori et représentent un des principaux résultats recherchés puisque leurs intégrations le long des pales permet d'obtenir la puissance mécanique produite par l'éolienne. Ces forces externes font donc partie intégrante de la solution complète de l'écoulement. Le mouvement des pales de l'éolienne peut être assimilé à un mécanisme qui modifie la quantité de mouvement du fluide; les forces externes incluses dans les équations de conservation de quantité de mouvement représentent donc correctement l'action des pales sur le fluide. Le développement d'une expression analytique des forces externes est présenté à la section suivante.

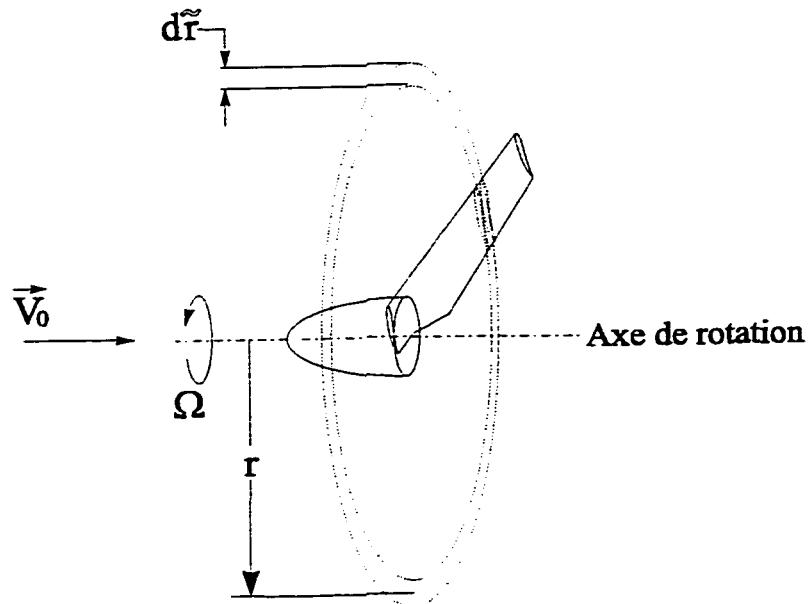


Figure 4.1 Élément de pale du rotor

## 4.2 Représentation de l'éolienne

### 4.2.1 Théorie de l'élément de pale

L'action des pales sur le fluide est représentée en introduisant des forces externes moyennées dans le temps dans les équations intégrales de quantité de mouvement. Cette modélisation repose sur les hypothèses développées au chapitre III. Ces forces externes moyennées dans le temps sont évaluées en utilisant la théorie de l'élément de pale. Dans cette théorie, la pale est divisée en éléments de pale de longueur  $d\tilde{r}$  telles que présentés à la figure 4.1.

L'hypothèse fondamentale de la théorie consiste à considérer que chacune de ces sections est indépendante et qu'il n'existe pas d'interaction entre des sections adjacentes le long de la pale. Ainsi, chacune de ces sections constituant la pale peut être analysée de façon indépendante. Le rotor considéré pour cette analyse est constitué d'un nombre  $B$  de pales de longueur  $R$  ayant un angle de conicité  $\gamma$  avec la verticale (figures 4.2a et 4.2b). La corde  $c$  de ces pales et leur angle de vrillage  $\beta$  varient

de façon radiale. L'éolienne tourne à une vitesse angulaire de rotation  $\Omega$ . La surface balayée par les pales  $A_{Rotor}$  forme un cône ayant une base circulaire de rayon  $R \cos \gamma$ , délimitée par le cercle en pointillés de la figure 4.2b. Il est important de noter que les forces externes sont non nulles uniquement sur la surface  $A_{Rotor}$  balayée par les pales du rotor, définie par  $\tilde{x} = 0, 0 \leq \tilde{r} \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . La figure 4.2c présente le diagramme des vitesses et les forces aérodynamiques sur une section de pale A-A' située à une distance radiale  $r$ . En décomposant les forces de portance et de traînée sur les axes  $\tilde{x}$  et  $\theta$ , l'expression de la force exercée par une longueur de pale infinitésimale  $d\tilde{r}$  sur le fluide est:

$$dF_i(\tilde{r}, \theta) = -[l_{\tilde{x}}\tilde{x}_i + l_{\theta}\theta_i] d\tilde{r} \quad (4.3)$$

où les forces par unité de longueur de pale sont données par:

$$l_{\tilde{x}} = \frac{\rho c V_{rel}}{2} [U_t C_L + U_n C_D] \quad (4.4)$$

$$l_{\theta} = \frac{\rho c V_{rel}}{2} [U_n C_L - U_t C_D], \quad (4.5)$$

avec

$$V_{rel} = \sqrt{U_n^2 + U_t^2}, \quad (4.6)$$

$$U_n = u \cos \gamma - [v \cos \theta + w \sin \theta] \sin \gamma, \quad (4.7)$$

$$U_t = r\Omega - [w \cos \theta - v \sin \theta], \quad (4.8)$$

et  $\theta_i$  et  $\tilde{x}_i$  sont les vecteurs unitaires suivant les directions des axes de coordonnées de la pale  $\tilde{x}$  et  $\theta$ , exprimés dans le repère choisi ( $x, r, \theta$  en polaire et  $x, y, z$  en cartésien) respectivement, alors que  $u$ ,  $v$ , et  $w$  sont les composantes de vitesse selon les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement.  $C_L$  et  $C_D$  sont les coefficients statiques de portance et traînée relatifs au profil de la section de pale considérée. Ces coefficients sont fonctions de l'angle d'attaque  $\alpha$  et du nombre de Reynolds local  $Re_c (= \frac{\rho V_{rel} c}{\mu})$ ; leurs valeurs peuvent être obtenues sur la base de données expérimentales ou numériques correspondantes au profil approprié.

Une des étapes fondamentales du développement du modèle mathématique consiste à évaluer la force externe moyenne exercée par le rotor sur le fluide se trouvant dans le volume de contrôle  $\mathcal{V}$ .

Pour ce faire, désignons par  $A_I$  la surface définie par l'intersection de  $\mathcal{V}$  et de la surface conique  $A_{Rotor}$  représentant le rotor (voir figure 4.2b). Le chemin suivi par l'élément de pale  $d\tilde{r}$  situé à la distance  $r$  de l'axe de rotation sur cette surface  $A_I$  est défini par  $\theta_{min}(\tilde{r}) \leq \theta \leq \theta_{max}(\tilde{r})$  (voir figure 4.3). La **force moyenne exercée par cet élément de pale le long de ce chemin** est donnée par:

$$d\bar{F}_i(\tilde{r}) = \frac{-1}{\Delta\theta(\tilde{r})} \int_{\theta_{min}(\tilde{r})}^{\theta_{max}(\tilde{r})} (l_x \tilde{x}_i + l_\theta \theta_i) d\theta d\tilde{r} \quad (4.9)$$

où

$$\Delta\theta(\tilde{r}) = \theta_{max}(\tilde{r}) - \theta_{min}(\tilde{r}) \quad (4.10)$$

La fraction de temps durant laquelle les pales sont présentes sur le chemin défini par  $\theta_{min}(r)$  et  $\theta_{max}(r)$  est  $\frac{B\Delta\theta(\tilde{r})}{2\pi}$ . Par conséquent, la **force moyennée dans le temps**  $\bar{F}_i|_{VC}$  exercée par les pales sur le fluide, dans le volume de contrôle d'intérêt s'exprime:

$$\bar{F}_i|_{VC} = - \int_{\tilde{r}_{min}}^{\tilde{r}_{max}} \frac{B}{2\pi} \int_{\theta_{min}(\tilde{r})}^{\theta_{max}(\tilde{r})} (l_x \tilde{x}_i + l_\theta \theta_i) d\theta d\tilde{r} \quad (4.11)$$

Cette dernière équation peut être exprimée sous la forme d'une intégrale de surface sur  $A_I$ :

$$\bar{F}_i|_{VC} = \int_{A_I} f_i(\tilde{r}, \theta) dA \quad (4.12)$$

où  $dA$  est un élément de surface pris sur  $A_I$  et  $f_i$  correspond à la force surfacique dans la direction de  $x_i$  exercée par le rotor sur le fluide dans le volume de contrôle  $\mathcal{V}$ , et est définie par:

$$f_i(\tilde{r}, \theta) = -\frac{B}{2\pi r} [l_x \tilde{x}_i + l_\theta \theta_i] \quad (4.13)$$

Il est important de noter que l'expression de  $\bar{F}_i|_{VC}$  ne dépend pas du terme géométrique

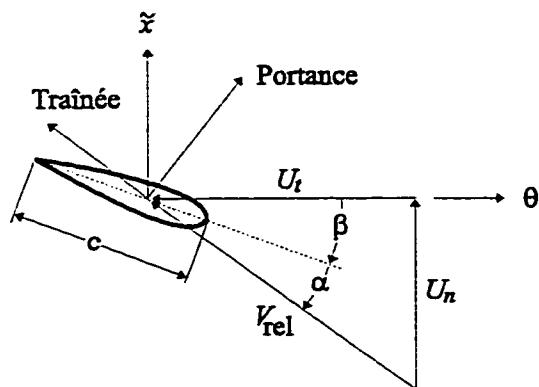
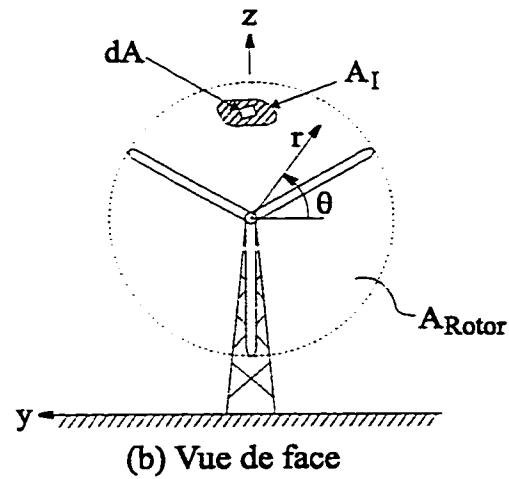
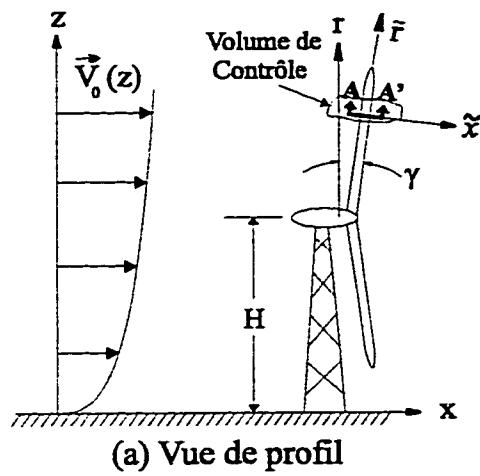


Figure 4.2 Paramètres géométriques d'une l'éolienne

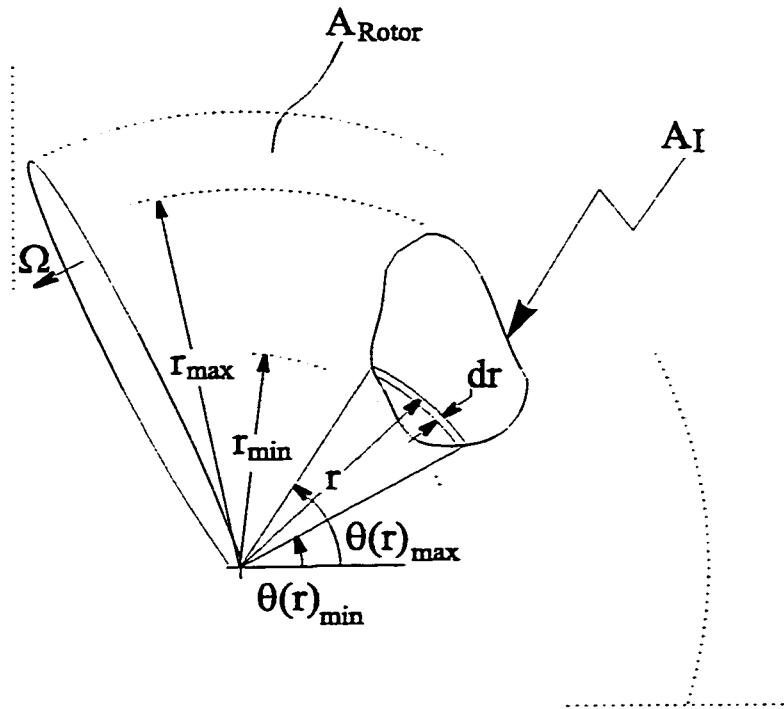


Figure 4.3 Intégration des termes de force sur  $A_{VC}$

$\Delta\theta(\tilde{r})$ . Ce résultat est hautement souhaitable puisqu'il aurait été ardu voire impossible de définir le terme  $\Delta\theta(\tilde{r})$  pour un volume de contrôle quelconque. Cette formulation originale donne une expression de  $\bar{F}_i|_{VC}$  générale et permet d'outrepasser les problèmes liés au système de coordonnées et à la forme des volumes de contrôle employés.

#### 4.2.2 Pertes de bout de pale

Une des hypothèses fondamentales de la théorie de l'élément de pale consiste à considérer chaque section de pale comme une aile d'envergure infinie. Ce modèle ne permet donc pas de tenir compte des pertes aérodynamiques associées à l'émission des tourbillons de bout de pale engendrés par la différence de pression présente entre l'extrados et l'intrados du profil aux extrémités de la pale. La présence de ces tourbillons hélicoïdaux modifie l'écoulement dans le voisinage du bout de pale, diminuant l'angle d'attaque auquel évolue le profil, ce qui se traduit par une chute

de la portance dans cette région. Cette chute de la portance se produisant en bout de pale, la diminution du moment résultant et donc de la puissance de l'éolienne est importante et ne peut être négligée. Pour comptabiliser les pertes de bout de pale, le modèle de Prandtl [6] est utilisé. Les forces calculées par la théorie de l'élément de pale sont corrigées par un facteur de perte de bout de pale  $t_T$  fonction de la position radiale le long de l'envergure et de la géométrie de l'éolienne. D'une façon similaire, si la pale se termine avant d'atteindre le moyeu, on appliquera un facteur de perte de moyeu  $t_H$  pour tenir compte du décollement des tourbillons à la racine de la pale. En combinant le facteur de perte de bout de pale  $t_T$  à celui de perte de moyeu  $t_H$ , le facteur  $t_{corr}$  peut être défini par l'expression analytique suivante:

$$t_{corr} = t_T t_H \quad (4.14)$$

$$t_T = \frac{2}{\pi} \arccos \left[ \exp \left( -B \frac{R \cos \gamma - r}{2r \sin(\alpha + \beta)} \right) \right] \quad (4.15)$$

$$t_H = \frac{2}{\pi} \arccos \left[ \exp \left( -B \frac{r - R_H \cos \gamma}{2R_H \cos \gamma \sin(\alpha + \beta)} \right) \right] \quad (4.16)$$

où  $R_H$  est la longueur mesurée le long de la pale entre l'axe de rotation et le début de la pale. Le facteur  $t_{corr}$  est introduit dans l'expression des termes de force (équation 4.11) en divisant  $C_L$  par  $t_{corr}$ . Ce facteur de correction ne s'applique que lors de l'évaluation des forces exercées par les pales sur le fluide dans le calcul du champ de vitesse mais n'intervient pas dans le calcul de la puissance mécanique transmise à l'éolienne. Ceci équivaut à dire que la puissance moyenne des forces externes qui s'appliquent sur le fluide est la somme des trois contributions [20]: (1) la puissance mécanique transmise au rotor, (2) le travail visqueux et (3) l'énergie transmise aux tourbillons.

#### 4.2.3 Calcul de la puissance du rotor

L'expression analytique de la puissance mécanique de l'éolienne est obtenue en intégrant le produit de la force circonférentielle ( $dF_i \theta_i$ ), du bras de levier  $r$  ( $r$  définie comme la distance entre l'axe de rotation du rotor et le point d'application de la force) et de la vitesse de rotation  $\Omega$  sur la surface  $A_{Rotor}$  balayée par les pales en suivant une procédure similaire à celle employée pour obtenir l'expression (4.12). L'expression de la puissance mécanique du rotor est donnée par:

$$\begin{aligned}\dot{W}_{Meca} &= -\frac{B}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R dF_i \cdot \theta_i \Omega \tilde{r} \cos \gamma d\tilde{r} d\theta \\ &= \frac{\rho c B \Omega}{4\pi} \int_{A_{Rotor}} V_{rel} [U_n C_L - U_t C_D] dA\end{aligned}\quad (4.17)$$

#### 4.3 Modélisation de la turbulence

Dans ce travail, les effets de la turbulence sur l'écoulement sont introduits à travers le concept de viscosité turbulente  $\mu_T$ . Le phénomène de la turbulence est considéré comme analogue au phénomène d'agitation moléculaire à l'origine de la viscosité. L'introduction d'une viscosité turbulente  $\mu_T$  a pour effet d'augmenter les échanges visqueux de quantité de mouvement ce qui représente l'effet de la turbulence sur l'écoulement moyen. La viscosité turbulente  $\mu_T$  sera considérée comme constante, égale à celle observée à hauteur du moyeu dans la couche limite atmosphérique en condition neutre non perturbée. Sans inclure la production de turbulence provenant des éoliennes, cette formulation est adéquate pour l'évaluation de la puissance des éoliennes isolées. Ceci s'explique par la faible influence du sillage sur la puissance dans le cas d'une éolienne isolée. Par contre, pour l'analyse d'un parc éolien où les effets d'interférences sillage/éolienne sont importants, une étude plus approfondie de la turbulence est nécessaire afin de déterminer le modèle de turbulence le mieux adapté à ce type d'écoulement. Toutefois, tel que démontré au chapitre VI, la

modélisation de la turbulence utilisée dans ce travail permet d'obtenir une bonne précision dans le calcul des vitesses dans le sillage, justifiant son utilisation dans le cadre de ce projet de modélisation de parc éolien. L'évaluation de la viscosité turbulente  $\mu_T$  est liée aux propriétés de l'écoulement incident présenté à la section suivante. Une modélisation plus approfondie de la turbulence dans l'écoulement autour des éoliennes fait l'objet d'un travail de recherche parallèle [20].

#### 4.4 Propriétés de la couche de surface terrestre en conditions thermiques neutres

Pour représenter l'écoulement incident dans lequel est placé une éolienne ou un parc d'éolienne, les propriétés observées dans les cent premiers mètres de la couche limite terrestre dans des conditions thermiques neutres et sur un terrain uniformément plat sont considérées. De telles conditions correspondent approximativement aux stratifications stables de l'atmosphère pendant la nuit ou au début de la journée, particulièrement quand les vitesses de vent sont élevées. Toutes les expressions développées dans cette section sont tirées de l'ouvrage "Atmospheric Turbulence" de Panofsky et Dutton [32].

La mécanique statistique appliquée au milieu moléculaire montre que la viscosité d'un fluide est égale au produit d'une vitesse et d'une longueur caractéristiques [45]. Par analogie, des mesures ont montré que dans l'écoulement considéré, la relation suivante peut être utilisée pour évaluer la viscosité turbulente.

$$\mu_{T0}(z) = \rho K u_* z \quad (4.18)$$

où  $K$  est la constante de Von Karman ( $K=0.4$ ) et  $u_*$  est la vitesse turbulente de friction donnée par:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (4.19)$$

où  $\tau_0$  représente la contrainte de cisaillement de surface. En considérant que cette contrainte de cisaillement est constante dans la région inférieure de la couche limite

Tableau 4.1 Hauteurs de rugosité typiques

nature du sol	hauteur de rugosité (m)
eau ou glace (lisse)	$10^{-4}$
herbe tondu	$10^{-2}$
herbe longue, sol rocailleux	0.05
terrain de pâturage	0.20
habitations de banlieue	0.6
forêts, villes	1 – 5

terrestre, un profil de vitesse logarithmique est obtenu:

$$u_0(z) = \frac{u_*}{K} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) \quad (4.20)$$

où  $z_0$  correspond à la hauteur de rugosité du site. Cette hauteur représente la taille des tourbillons à la surface du site, ou encore la hauteur pour laquelle le profil de vitesse moyenne s'annule. Elle dépend de plusieurs caractéristiques telles que les dimensions des obstacles au sol, leur espacement et leur forme. Le tableau 4.1 donne quelques valeurs typiques de hauteur de rugosité pour différents types de surfaces. Ainsi, connaissant les conditions d'opération des machines à hauteur  $h$  du moyeu et la nature du sol présent sur le site étudié,  $u_*$  peut être isolé de l'équation (4.20) puis inclus dans l'équation (4.18) pour obtenir la valeur de  $\mu_{T0}(h)$ , à la hauteur du moyeu, considérée comme constante dans tout l'écoulement:

$$\mu_t = \mu_{T0}(h) \quad (4.21)$$

#### 4.5 Spécialisations du modèle mathématique

Cette section présente les principaux résultats obtenus à l'aide de la théorie décrite dans ce chapitre, pour les méthodes axisymétrique à trois composantes de vitesse et tridimensionnelle cartésienne. Le tableau 4.2 présente la nomenclature utilisée pour décrire les deux systèmes de coordonnées.

Tableau 4.2 Nomenclature des équations (polaire/cartésien)

Coordonnées	Cartésien			Polaire		
	$x$	$y$	$z$	$r$	$\theta$	$x$
Vecteurs normés	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$	$\vec{r}$	$\vec{\theta}$	$\vec{i}$
Composantes de vitesse	$u$	$v$	$w$	$u_r$	$u_\theta$	$u$
Forces externes	$\bar{F}_x _{VC}$	$\bar{F}_y _{VC}$	$\bar{F}_z _{VC}$	$\bar{F}_r _{VC}$	$\bar{F}_\theta _{VC}$	$\bar{F}_z _{VC}$
Vecteurs vitesse $\vec{V}$	$u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$			$u_r \vec{r} + u_\theta \vec{\theta} + u \vec{i}$		

#### 4.5.1 Système de coordonnées polaires

##### 4.5.1.1 Équations du mouvement

En faisant l'hypothèse que l'écoulement autour d'une éolienne est axisymétrique, les expressions des équations de mouvement et des forces externes peuvent être simplifiées. Ainsi pour ce type d'écoulement,  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$  et sur un volume de contrôle:  $\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta = 2\pi$ .

Équation de continuité

$$\int_A \rho u_j u_j dA = 0 \quad (4.22)$$

Équation de quantité de mouvement en  $x$ -

$$\int_A \left[ \rho u_j u - \mu_T \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] n_j dA = \int_V -\frac{\partial p}{\partial x} 2\pi r dr dx + \bar{F}_x|_{VC} \quad (4.23)$$

Équation de quantité de mouvement en  $r$ -

$$\int_A \left[ \rho u_j u_r - \mu_T \frac{\partial u_r}{\partial x_j} \right] n_j dA = \int_V \left[ -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\rho u_\theta^2}{r} - \frac{\mu_T u_r}{r^2} \right] 2\pi r dr dx + \bar{F}_r|_{VC} \quad (4.24)$$

Équation de quantité de mouvement en  $\theta$ -

$$\int_A \left[ \rho u_j u_\theta - \mu_T \frac{\partial u_\theta}{\partial x_j} \right] n_j dA = \int_V \left[ -\frac{\rho u_r u_\theta}{r} - \frac{\mu_T u_\theta}{r^2} \right] 2\pi r dr dx + \bar{F}_\theta|_{VC} \quad (4.25)$$

#### 4.5.1.2 Forces externes

Force externe en  $x$ -

$$\overline{F}_x|_{VC} = -\frac{\rho c B}{2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} V_{rel} \left[ U_t \frac{C_L}{t_{corr}} + U_n C_D \right] dr \quad (4.26)$$

Force externe en  $r$ -

$$\overline{F}_r|_{VC} = \frac{\rho c B \tan \gamma}{2} \int_{r_{min}}^{r_{max}} V_{rel} \left[ U_t \frac{C_L}{t_{corr}} + U_n C_D \right] dr \quad (4.27)$$

Force externe en  $\theta$ -

$$\overline{F}_\theta|_{VC} = -\frac{\rho c B}{2 \cos \gamma} \int_{r_{min}}^{r_{max}} V_{rel} \left[ U_n \frac{C_L}{t_{corr}} - U_t C_D \right] dr \quad (4.28)$$

#### 4.5.1.3 Puissance mécanique

$$\dot{W}_{Meca} = \frac{\rho c B \Omega \cos \gamma}{2} \int_0^R V_{rel} [U_n C_L - U_t C_D] \tilde{r} d\tilde{r} \quad (4.29)$$

### 4.5.2 Système de coordonnées cartésien

#### 4.5.2.1 Équations du mouvement

Équation de continuité

$$\int_A \rho u_j u_j dA = 0 \quad (4.30)$$

Équation de quantité de mouvement en  $x$ -

$$\int_A \left[ \rho u_j u - \mu_T \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] n_j dA = \int_\vartheta -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \overline{F}_x|_{VC} \quad (4.31)$$

Équation de quantité de mouvement en  $y$ -

$$\int_A \left[ \rho u_j v - \mu_T \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] n_j dA = \int_\vartheta -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz + \overline{F}_y|_{VC} \quad (4.32)$$

Équation de quantité de mouvement en  $z$ -

$$\int_A \left[ \rho u_j w - \mu_T \frac{\partial w}{\partial x_j} \right] n_j dA = \int_\vartheta -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz + \overline{F}_z|_{VC} \quad (4.33)$$

#### 4.5.2.2 Forces externes

Soit  $\vec{A}$  le vecteur unitaire dans la direction de l'axe de rotation du rotor,  $0(x_0, y_0, z_0)$  le point situé au sommet de la surface conique balayée par les pales et  $P(x_P, y_P, z_P)$  un point situé sur  $A_{Rotor}$ ,  $\vec{\theta}$  et  $\vec{x}$  peuvent être définis comme:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_P - x_0 \\ y_P - y_0 \\ z_P - z_0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\vec{\theta} = \frac{\vec{A} \times \vec{r}}{\|\vec{A} \times \vec{r}\|} \quad (4.35)$$

$$\vec{x} = \frac{\vec{r} \times \vec{\theta}}{\|\vec{r} \times \vec{\theta}\|} \quad (4.36)$$

Ainsi, les forces externes en coordonnées cartésiennes peuvent être définies:

Force externe en  $x$ -

$$\overline{F_x}|_{VC} = -\frac{\rho c B}{4\pi} \int_{A_I} \frac{V_{rel}}{r} \left[ \left[ U_n \frac{C_L}{t_{corr}} - U_t C_D \right] \vec{\theta} \cdot \vec{i} + \left[ U_t \frac{C_L}{t_{corr}} + U_n C_D \right] \vec{x} \cdot \vec{i} \right] dA \quad (4.37)$$

Force externe en  $y$ -

$$\overline{F_y}|_{VC} = -\frac{\rho c B}{4\pi} \int_{A_I} \frac{V_{rel}}{r} \left[ \left[ U_n \frac{C_L}{t_{corr}} - U_t C_D \right] \vec{\theta} \cdot \vec{j} + \left[ U_t \frac{C_L}{t_{corr}} + U_n C_D \right] \vec{x} \cdot \vec{j} \right] dA \quad (4.38)$$

Force externe en  $z$ -

$$\overline{F_z}|_{VC} = -\frac{\rho c B}{4\pi} \int_{A_I} \frac{V_{rel}}{r} \left[ \left[ U_n \frac{C_L}{t_{corr}} - W C_D \right] \vec{\theta} \cdot \vec{k} + \left[ U_t \frac{C_L}{t_{corr}} + U_n C_D \right] \vec{x} \cdot \vec{k} \right] dA \quad (4.39)$$

#### 4.5.2.3 Puissance mécanique

$$\dot{W}_{Meca} = \frac{\rho c B \Omega}{4\pi} \int_{A_{Rotor}} V_{rel} [U_n C_L - U_t C_D] dA \quad (4.40)$$

## CHAPITRE V

### MÉTHODE NUMÉRIQUE

Les méthodes aux éléments finis/volumes de contrôle (CVFEMs) utilisées dans ce travail sont basées sur une formulation aux variables primitives, à collocation d'ordre égal. Cette méthode emploie directement les composantes de la vitesse et la pression; ces variables dépendantes sont calculées aux mêmes noeuds du maillage d'éléments finis et sont interpolées sur les mêmes éléments. Les méthodes des CVFEMs utilisées pour réaliser ce travail ont été développées par Saabas et Baliga [38] pour la formulation cartésienne tridimensionnelle et par Masson et al. [24] pour celle axisymétrique à trois composantes de vitesse.

La formulation des CVFEMs pour la mécanique des fluides se compose de cinq étapes principales : (i) la discrétisation du domaine de calcul en éléments , (ii) la construction de volumes de contrôle qui encadrent les noeuds du maillage d'éléments finis, (iii) la prescription de fonctions d'interpolation sur les éléments pour les variables dépendantes et les propriétés thermophysiques du fluide, (iv) la dérivation des approximations algébriques des équations de mécanique des fluides grâce à une procédure d'assemblage élément par élément, (v) la prescription d'une procédure pour résoudre ces équations algébriques. Ainsi, les méthodes de CVFEM combinent des concepts associés traditionnellement aux méthodes de volumes finis et aux méthodes d'élément finis. D'un point de vue général, les méthodes de volumes finis (FVM), d'éléments finis (FEM) et aux éléments finis/volumes de contrôle (CVFEM) peuvent toutes être considérées comme des cas particuliers de la méthode des résidus pondérés tel que le suggèrent Finlayson et Scriven [?] et Zienkiewicz [?].

Suite à la présentation des équations générales de conservation, les méthodes

numériques axisymétrique à trois composantes de vitesse et cartésienne tridimensionnelle sont présentées successivement dans ce chapitre. Toutefois, les aspects communs ou semblables aux deux méthodes ne sont présentés que dans la description axisymétrique. Toutefois, lorsque des différences ou des spécificités propres à chacune des méthodes sont présentes, leurs descriptions sont faites de façon indépendante. La description des méthodes numériques des CVFEMs n'est pas exhaustive, seuls les aspects essentiels à la compréhension de la procédure de modélisation des éoliennes sont développés en détail. Le lecteur intéressé est invité à consulter les références [?, 24] pour une description plus complète.

### 5.1 Équations générales de conservation

Les équations de conservation 4.23 à 4.33 présentées au chapitre précédent peuvent être réduites à une forme générale proposée par Patankar [?]. Si  $\phi$  est la variable dépendante, les équations du mouvement peuvent s'exprimer sous la forme générale suivante:

$$\int_A J_j n_j dA = \int_V -\frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \int_V S_\phi dV \quad (5.1)$$

Avec

$$J_j = \rho u_j \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (5.2)$$

Avec  $\Gamma_\phi$ , le coefficient de diffusion et  $S_\phi$  le terme de source.  $\Gamma_\phi$  et  $S_\phi$  sont spécifiques à une variable  $\phi$  donnée. Le tableau 5.1 résume la correspondance entre  $\phi$ ,  $\Gamma_\phi$ ,  $S_\phi$  et les variables primitives et les coefficients des équations du mouvement (équations (4.23) à (4.33)). Cette formulation générale en  $\phi$  ne se limite pas aux équations du mouvement et  $\phi$  peut correspondre à des quantités telles que la température (équation d'énergie), la concentration d'une espèce chimique (équation de conservation des espèces chimiques) ou l'énergie cinétique turbulente (équations d'énergie cinétique turbulente). La possibilité de traiter chacune des équations du

Tableau 5.1 Correspondance entre  $\phi$ ,  $\Gamma_\phi$ ,  $S_\phi$  et les variables primitives et les coefficients des équations du mouvement.

Méthode	Équations	$\phi$	$\Gamma_\phi$	$S_\phi$
axisymétrique	$x$ -mouv.	$u$	$\mu_T$	$\bar{F}_x _{VC}$
axisymétrique	$r$ -mouv.	$u_r$	$\mu_T$	$\int_V \left( \frac{\rho u_\theta^2}{r} - \frac{\mu_T u_r}{r^2} \right) 2\pi r dr dx + \bar{F}_r _{VC}$
axisymétrique	$\theta$ -mouv.	$u_\theta$	$\mu_T$	$\int_V \left( -\frac{\mu_T u_\theta}{r^2} - \frac{\rho u_r u_\theta}{r} \right) 2\pi r dr dx + \bar{F}_\theta _{VC}$
cartésienne	$x$ -mouv.	$u$	$\mu_T$	$\bar{F}_x _{VC}$
cartésienne	$y$ -mouv.	$v$	$\mu_T$	$\bar{F}_y _{VC}$
cartésienne	$z$ -mouv.	$w$	$\mu_T$	$\bar{F}_z _{VC}$

mouvement comme un cas particulier des équations générales en  $\phi$  (équations (5.1)) permet l'utilisation d'une méthode de résolution numérique générale et polyvalente.

## 5.2 Méthodes axisymétrique à trois composantes de vitesse

### 5.2.1 Discréétisation du domaine de calcul

Dans les méthodes des CVFEMs, la discréétisation du domaine de calcul consiste à diviser ce dernier en éléments. Puis, ces éléments sont subdivisés de manière à former des volumes de contrôle autour de chaque noeud du domaine de calcul suite à l'assemblage de tous les éléments. C'est sur ces volumes de contrôle que seront discréétisées les équations de conservation. Afin de rendre plus aisée la compréhension de la procédure de discréétisation du domaine axisymétrique, cette dernière sera présentée sur une section longitudinale du domaine axisymétrique. Cette section est divisée en éléments triangulaires à trois noeuds, aux sommets desquels sont calculées et conservées toutes les variables dépendantes reliées au problème. Puis chaque élément est subdivisé en joignant le centroïde aux points milieu des trois côtés du triangle. Des volumes de contrôle polygonaux sont alors formés autour de chaque noeud du maillage d'éléments finis. La figure 5.1, présente la section longitudinale d'un domaine de calcul discréétisé. Les lignes continues délimitent le domaine de calcul et les éléments le constituant, alors que les lignes pointillées représentent

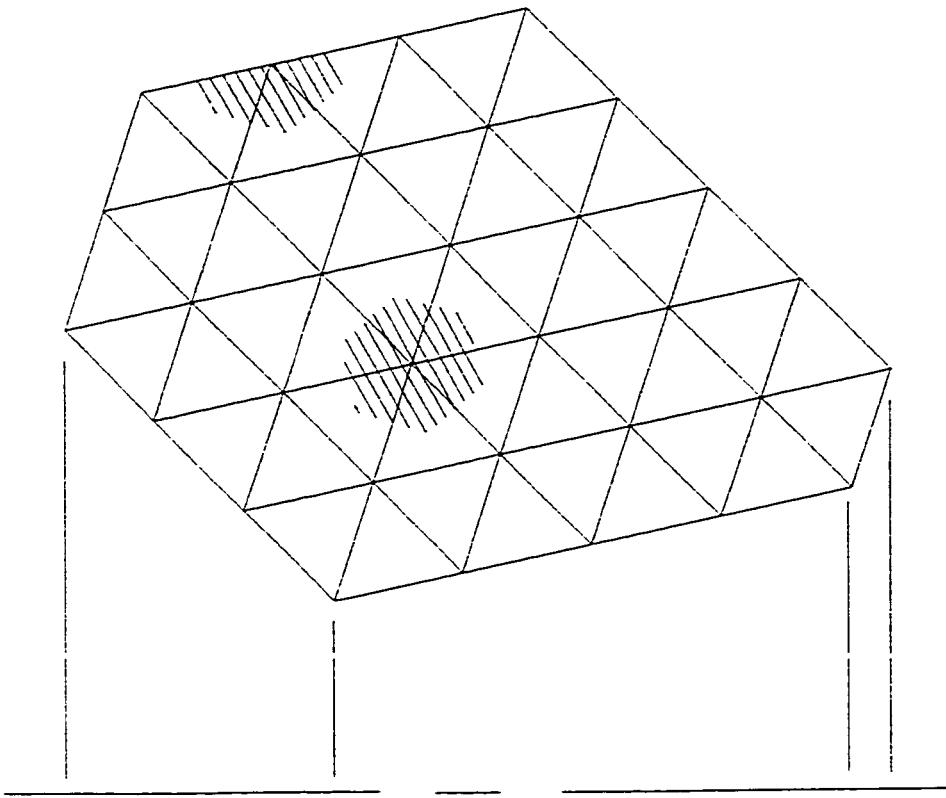


Figure 5.1 Discrétisation du domaine de calcul axisymétrique: coupe longitudinale

les faces des volumes de contrôle; les surfaces hachurées représentent des sections transversales de volumes de contrôle associées à un noeud interne du domaine et à un noeud sur sa frontière. Le résultat de cette discrétisation sur la section longitudinale subit une révolution de  $2\pi$  radians autour de l'axe de symétrie pour constituer le domaine de calcul axisymétrique complet. Les volumes de contrôle ainsi constitués forment des volumes toriques de section polygonale.

### 5.2.2 Intégration des équations de conservation

L'équation intégrale généralisée de conservation de quantité de mouvement est donnée par l'équation (5.1). Lorsque cette équation est appliquée aux volumes de contrôle associés à la méthode axisymétrique, décrits à la section précédente, elle peut être présentée sous une forme faisant ressortir la possibilité de construire cette

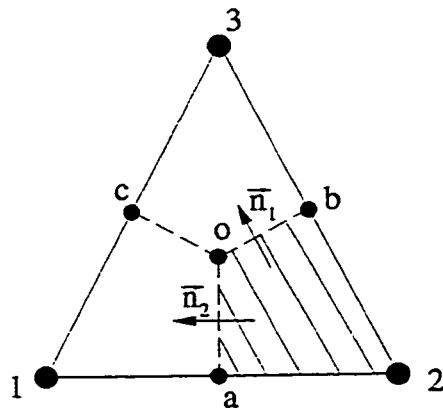


Figure 5.2 Élément triangulaire associé à la méthode axisymétrique

dernière en utilisant une procédure d'assemblage élément par élément. Lorsque l'équation (5.1) est appliquée au volume de contrôle torique de section polygonale entourant le noeud 2 de l'élément triangulaire présenté à la figure 5.2, elle peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \int_a^o J_j(n_2)_j 2\pi r ds + \int_o^b J_j(n_1)_j 2\pi r ds - \int_{2ao} S_\phi dV + \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV \right] \\
 & + [\text{contribution similaire des éléments entourant le noeud 2}] \\
 & + [\text{contributions des frontières, si applicables}] = 0
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

où  $\vec{J}$  représente le flux de convection et de diffusion de  $\phi$  et est défini par:

$$J_j = \rho u_j \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \tag{5.4}$$

### 5.2.3 Fonctions d'interpolation pour les équations de quantité de mouvement

La prescription de fonctions d'interpolation sur les éléments du domaine discréteisé pour les variables dépendantes et les propriétés thermophysiques du fluide est nécessaire afin d'évaluer les équations de conservation. Pour tous les éléments, des fonctions d'interpolation sont établies pour la variable dépendante  $\phi$ , le coefficient de diffusion  $\Gamma_\phi$ , le terme de source  $S_\phi$  et la densité  $\rho$ .

### 5.2.3.1 Interpolation des propriétés thermophysiques

Les propriétés thermophysiques du fluide telles que la densité  $\rho$ , la viscosité turbulente  $\mu_T$  ou tout autre coefficient de diffusion  $\Gamma_\phi$  sont considérées constantes dans chaque élément. La valeur de ces propriétés est conservée sur chacun des sommets des éléments. Ainsi, la valeur d'une propriété thermophysique  $(P_\phi)_{ele}$  qui prévaut dans tout l'élément  $e$  est égale à la moyenne des valeurs aux sommets:

$$(P_\phi)_{ele} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{\phi i} \quad (5.5)$$

où  $P_{\phi i}$  représente la valeur de la propriété thermophysique au sommet  $i$ . Le nombre de sommets  $n$  est égal à 3 pour l'élément triangulaire axisymétrique.

### 5.2.3.2 Interpolation des termes de sources

Les termes de source  $S_\phi$  inclus dans l'équation (5.1) peuvent être linéarisés si nécessaire sous la forme suivante:

$$S_\phi = S_C + S_P \phi \quad (5.6)$$

Les valeurs des termes de source autres que les termes de force externes  $\bar{F}_i|_{CV}$ , représentant l'action des pales sur le fluide, sont conservées aux sommets des éléments. La valeur d'un terme source conservé au sommet d'un élément prévaut sur la fraction du volume de contrôle correspondant à ce sommet. Pour les forces externes de l'éolienne, une procédure d'intégration plus complexe faisant intervenir divers types d'interpolations fait l'objet de la section 5.3.7.

### 5.2.3.3 Interpolation de $\phi$ dans les termes de diffusion

Les formes intégrales des équations de conservation nécessitent le calcul du flux de diffusion de la variable dépendante  $\phi$ . Conservées aux sommets des éléments, les valeurs de  $\phi$  sont interpolées linéairement dans chaque élément. Ainsi pour la

méthode axisymétrique, sur un élément,  $\phi$  prend la forme suivante:

$$\phi(x, r) = A_\phi^{axi}x + B_\phi^{axi}r + C_\phi^{axi} \quad (5.7)$$

où  $A_\phi^{axi}, B_\phi^{axi}, C_\phi^{axi}$  sont des constantes déterminées sur chaque élément par la résolution d'un système d'équations linéaires.

#### 5.2.3.4 Interpolation de $\phi$ dans les termes de convection

Pour l'évaluation du flux de  $\phi$  par convection dans les équations intégrales, deux méthodes peuvent être utilisées: le *Flow-Oriented upwind scheme (FLO)* et le *Mass-Weighted upwind scheme (MAW)*. Le schéma FLO est basé sur les travaux de Baliga [4] et Patankar [?]. La fonction d'interpolation employée dans ce schéma est dépendante du nombre de Peclet de l'élément ainsi que de la direction du vecteur vitesse moyen sur l'élément. La précision de ce schéma, dans le cas de problèmes impliquant de relativement faibles nombres de Peclet basés sur l'élément ainsi que des éléments aux angles aigus, a été démontrée par Saabas et Baliga [38].

Le schéma de MAW est basé sur le schéma de coefficient positif proposé par Schneider et Raw [?]. Le schéma de MAW définit une moyenne massique pondérée de  $\phi$  sur chacune des surfaces de contrôle de l'élément. Ce schéma assure, au niveau de l'élément, pour une variable dépendante conservée sur un noeud externe au volume de contrôle, que sa contribution au flux sortant par convection soit plus petite ou égale à sa contribution sur le flux entrant par convection. Cette condition est suffisante pour garantir que l'apport des approximations algébriques des termes de convection aux équations discrétisées soit positif. La nature positive des approximations algébriques des termes de convection contribue à l'obtention d'une méthode numérique donnant des résultats physiquement réalistes [?]. Les détails de la formulation du schéma de MAW sont présentés dans le travail de Masson, Saabas et Baliga [24].

Pour les problèmes au nombre de Peclet relativement faibles solutionnés sur des

éléments aux angles aigus, le schéma FLO est plus précis que le schéma de MAW. Toutefois, pour la modélisation des éoliennes, dans un souci de conserver un nombre réaliste de points dans le maillage, la taille des éléments du maillage augmente avec la distance à l'éolienne. L'usage d'un maillage grossier dans les régions éloignées de l'éolienne du domaine de calcul entraîne des nombres de Peclet relativement élevés dans ces régions. Des problèmes de convergences furent éprouvés lors des simulations utilisant le schéma FLO. Par conséquent, le schéma de MAW fut employé avec succès pour produire tous les résultats présentés dans ce mémoire.

#### 5.2.3.5 Interpolation de la pression

L'interpolation de la pression s'effectue d'une façon similaire à celle employée pour l'interpolation de  $\phi$  dans les termes de diffusion. Ainsi, la pression est conservée en chaque noeud de l'élément et est interpolée linéairement dans ce dernier selon une relation similaire à l'équation (5.7).

#### 5.2.4 Équations discrétisées de quantité de mouvement

Une fois que les fonctions d'interpolation ont été établies pour les variables dépendantes, elles sont utilisées pour obtenir des approximations des équations de conservation (équation (5.1)). Lorsque toutes les contributions provenant des sous volumes de contrôle sont assemblées pour le volume de contrôle entourant le noeud  $c$ , on obtient l'équation discrétisée suivante pour l'équation de conservation de quantité de mouvement dans la direction  $x_i$ :

$$a_c^i(u_i)_c = \sum_{nb} a_{nb}^i(u_i)_{nb} + \vartheta_{CV} \left( -\frac{\overline{\partial p}}{\partial x_i} \right)_{CV} + b^i \quad (5.8)$$

Dans cette expression,  $u_i$  peut être n'importe laquelle des composantes de vitesse ( $u, u_r, u_\theta$ ).

### 5.2.5 Équation discrétisée de continuité

#### 5.2.5.1 Interpolation du débit massique

Le débit massique est calculé en utilisant un traitement spécial emprunté aux travaux de Prakash et Patankar [?] et Saabas et Baliga [38]. Ce traitement, nécessaire pour éviter l'apparition de champs de pression en damier, consiste à exprimer les vitesses du débit massique  $u^m$ ,  $u_\theta^m$ , comme des fonctions d'une pseudo-vitesse et d'un terme de gradient de pression; l'équation 5.8 peut être présentée sous la forme suivante:

$$(u_i)_c = \frac{\sum_{nb} a_{nb}^i (u_i)_{nb} + b^i}{a_c^i} - \frac{\vartheta_{CV} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_{CV}}{a_c^i} \quad (5.9)$$

Ainsi, en définissant  $\hat{u}_i$  et  $d^i$  comme:

$$\hat{u}_i = \frac{\sum_{nb} a_{nb}^i (u_i)_{nb} + b^i}{a_c^i} \quad (5.10)$$

$$d^i = \frac{\vartheta_{CV}}{a_c^i} \quad (5.11)$$

L'équation (5.9) peut s'exprimer sous la forme suivante:

$$u_i = \hat{u}_i - d^i \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_{CV} \quad (5.12)$$

Lorsque cette procédure est appliquée dans le cas axisymétrique, les expressions des vitesses du débit massique deviennent:

$$u^m = \hat{u}_x + d^u \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{ele} \quad u_r^m = \hat{u}_r + d^{u_r} \left( -\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{ele} \quad (5.13)$$

où  $\hat{u}$  et  $\hat{u}_r$  sont les pseudo-vitesses, et  $d^u$  et  $d^{u_r}$  sont les coefficients du gradient de pression. Conservées aux sommets des éléments, ces pseudo-vitesses et ces coefficients de gradient de pression sont interpolées linéairement sur les éléments selon des expressions similaires à l'équation (5.7).

#### 5.2.5.2 Équation discrétisée de pression

L'expression de l'équation discrétisée de continuité est obtenue en introduisant l'expression de la vitesse massique  $\vec{V}^m$  (équations (5.13)) dans l'équation intégrale

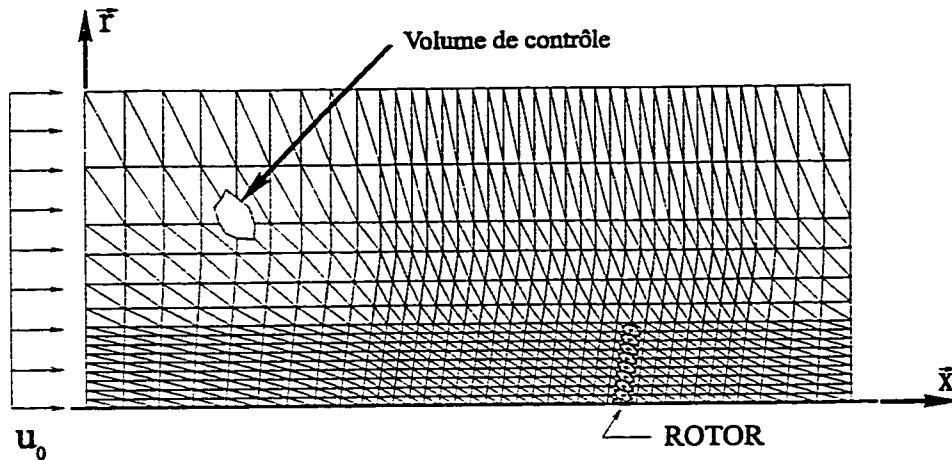


Figure 5.3 Discrétisation du domaine de calcul axisymétrique: coupe longitudinale

de conservation (5.3). Suite à cette transformation, une équation de la pression est obtenue pour le volume de contrôle entourant le noeud  $c$  et s'exprime sous la forme suivante:

$$a_c^p p_c = \sum_{nb} a_{nb}^p p_{nb} + b^p \quad (5.14)$$

où  $b^p$  est fonction du champ de pseudo-vitesse. Les détails de la dérivation de cette expression sont présentés aux références [24, 38].

#### 5.2.6 Domaine de calcul et maillage

La section 5.2.1 fut consacrée à la discrétisation d'un domaine de calcul quelconque pour la méthode axisymétrique. La présente section décrit les domaines de calcul et les maillages construits spécifiquement pour modéliser les champs d'éoliennes pour la méthode axisymétrique.

La méthode axisymétrique à trois composantes de vitesse constitue une étape préliminaire dans le projet de modélisation de parc éolien. Ainsi, par cette méthode, seules des éoliennes isolées ou placées sur le même axe de rotation peuvent être modélisées. Le domaine de calcul choisi pour cette méthode est un cylindre plein dont l'axe central correspond à l'axe de rotation de l'éolienne; la figure 5.3 présente

la coupe longitudinale du maillage employé dans ce domaine. La section 6.1.1 du chapitre des résultats, présente une étude déterminant les dimensions minimales du domaine de calcul pour obtenir des solutions indépendantes de la taille du domaine. Dans la région du rotor, le maillage est incliné par rapport à l'axe  $\tilde{r}$  d'un angle  $\gamma$  correspondant à l'angle de conicité des pales du rotor. Le maillage respecte donc parfaitement la géométrie de l'éolienne. À la figure 5.3, les volumes de contrôle balayés par les pales sont mis en évidence par une couleur grise. C'est sur ces derniers que sont introduites les contributions des forces externes aux équations de quantité de mouvement. Le maillage n'est pas uniforme et sa finesse augmente dans le voisinage du rotor et dans son sillage. Une étude d'indépendance de maillage présentée à la section 6.1.2 a permis de déterminer le nombre minimal de points et leurs concentrations dans le domaine de calcul pour obtenir efficacement des solutions indépendantes du nombre de points du maillage.

### 5.2.7 Forces externes

Cette section décrit les détails essentiels aux succès de l'intégration des forces externes pour la méthode numérique axisymétrique.

#### 5.2.7.1 Linéarisation des forces externes

Tels que présentés à la section 5.2.3.2 les termes de source  $S_\phi$  peuvent être linéarisés sous la forme générale suivante:

$$S_\phi = S_C + S_P\phi \quad (5.15)$$

La linéarisation adéquate des forces externes  $\bar{F}_i|_{VC}$  (équation (4.26) à (4.39)) est cruciale pour assurer la convergence de l'algorithme de solution, surtout dans le contexte d'une méthode itérative séquentielle de résolution des équations couplées telle que la méthode SIMPLER [?] employée dans ce travail et présentée à la section

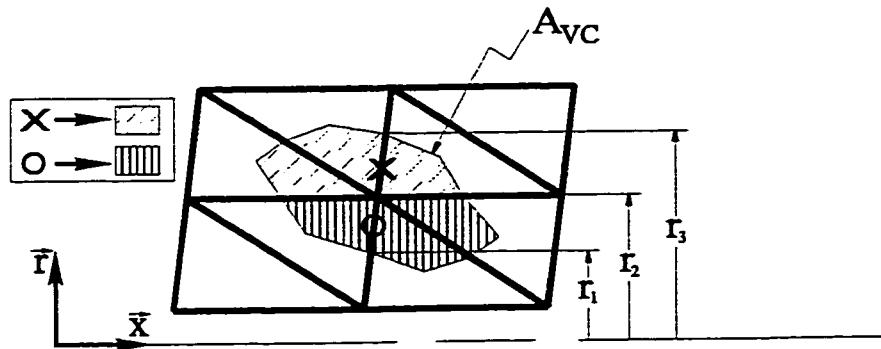


Figure 5.4 Procédure d'intégration des forces externes sur un volume de contrôle

5.2.9. Ainsi, les forces externes peuvent être linéarisés de façon explicite:

$$S_C = \overline{F_i}^*|_{VC} \quad S_P = 0 \quad (5.16)$$

où l'exposant \* indique que les forces externes  $\overline{F_i}|_{VC}^*$  ont été évalués en utilisant les propriétés de l'écoulement obtenues à l'itération précédente. L'application de cette linéarisation dans l'algorithme de résolution itératif des équations conduit à de sévères problèmes de convergence. Ainsi, les valeurs importantes des termes de sources dominent les équations de quantité de mouvement. Les matrices résultantes de ce système d'équations ne sont pas diagonalement dominantes ce qui se traduit par un faible taux de convergence et parfois même la divergence de l'algorithme de résolution [?]. Afin de rendre la méthode de résolution plus robuste et d'augmenter la vitesse de convergence, la linéarisation suivante des forces externes est proposée:

$$S_C = 0 \quad S_P = \frac{\overline{F_i}|_{VC}^*}{\phi^*} \quad (5.17)$$

Cette linéarisation a prouvé sa robustesse à converger par rapport à la linéarisation explicite (5.16) et c'est cette dernière qui est employée dans l'implémentation des deux méthodes numériques.

#### 5.2.7.2 Intégration des forces externes

L'usage du système de coordonnées cylindrique conjugué aux simplifications

liées à la formulation axisymétrique rend la procédure d'intégration des forces externes relativement simple. Sur la figure 5.3 présentant le maillage pour la méthode axisymétrique, les volumes de contrôle balayés par les pales sont mis en évidence. La figure 5.4 présente le détail de l'un de ces volumes de contrôle. Pour le volume de contrôle considéré, les forces sont évaluées, à l'aide d'interpolations linéaires, sur la surface balayée par les pales au  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{3}{4}$  des éléments selon la direction  $r$ . Ces points de calcul sont symbolisés par les symboles X et O sur la figure 5.4. Les valeurs des forces évaluées sur ces points prévalent sur la fraction de volume de contrôle correspondant à l'élément tel qu'indiqué par la légende de la figure 5.4.

### 5.2.8 Conditions aux frontières

Afin de compléter le système d'équations algébriques discrétisées présenté à la section 5.2.4, des conditions aux frontières appropriées doivent être incorporées à ces dernières. Trois types de conditions aux frontières existent: (i) conditions de Dirichlet ou de valeur spécifiée; (ii) conditions de Neumann ou de flux spécifié; (iii) condition de sortie où ni la valeur de la variable dépendante ni son flux ne sont connus.

Des conditions aux frontières doivent être spécifiées pour  $u$ ,  $u_r$ ,  $u_\theta$  et  $p$  sur les trois faces du domaine de calcul décrit à la section 5.2.6.

#### 5.2.8.1 Frontière d'entrée

La frontière d'entrée est un plan  $r-\theta$  situé en amont du rotor tel que présenté à la figure 5.3. Sur ce plan, les trois composantes de vitesse sont prescrites égales aux valeurs trouvées dans la couche limite atmosphérique en condition neutre à hauteur de moyeu (voir section 4.4). La pression  $p$  est calculée.

#### 5.2.8.2 Frontière de sortie

La frontière de sortie est un plan  $r-\theta$  situé en aval du rotor tel que présenté à 5.3. En un point sur ce plan, la pression est considérée connue et égale à une

valeur de référence. Les trois composantes de vitesses sont calculées en résolvant les équations de quantité de mouvement obtenues en utilisant le traitement de sortie de Patankar [?].

#### 5.2.8.3 Frontière supérieure

La frontière supérieure est la surface courbe du cylindre telle que présentée à la figure 5.3. Sur cette surface, les trois composantes de vitesses sont prescrites égales aux valeurs trouvées dans la couche limite atmosphérique en condition neutre à hauteur de moyeu (voir section 4.4). La pression  $p$  est calculée.

#### 5.2.9 Algorithme de résolution

Les équations discrétisées forment un système d'équations algébriques couplées. Dans ce travail, une procédure itérative d'ajustement des variables proposée par Saabas et Baliga [38] est utilisée pour solutionner ce système d'équations de façon dé-couplée. Cette procédure est similaire à SIMPLER [?] mais n'inclut pas d'équation de correction de pression. Le maillage étant structuré, un algorithme ligne par ligne de Gauss-Seidel basé sur un algorithme de résolution de matrices tridiagonales(TDMA) [?] est utilisé pour résoudre les équation pour  $p$ ,  $u$ ,  $u_r$  et  $u_\theta$ . L'algorithme général de résolution peut être résumé par la séquence d'opérations suivante:

1. Spécifier des champs de pression et de vitesse initiaux;
2. Calculer les forces externes des turbines;
3. Calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement (équation (5.8)) sans tenir compte des contributions liées au gradient de pression;
4. Calculer les pseudo-vitesses  $\hat{u}_i$  et les coefficients de gradient de pression  $d^i$  (équations (5.10) et (5.11));

5. Calculer les coefficients de l'équation de pression (équation (5.14));
6. Résoudre l'équation de la pression;
7. Compléter les équations de quantité de mouvement en ajoutant les contributions liées au gradient de pression;
8. Résoudre les équations pour  $u$ ;
9. Résoudre les équations pour  $u_r$ ;
10. Résoudre les équations pour  $u_\theta$ ;
11. Retourner à l'étape 2 et répéter les étapes subséquentes jusqu'à convergence.

A l'itération initiale, l'écoulement est considéré uniforme sur tout le domaine de calcul, les forces externes n'ont donc qu'une valeur nominale. Les équations de Navier-Stokes étant de nature elliptique, les équations discrétisées associées à chaque volume de contrôle sont par conséquent complètement couplées à celles des volumes de contrôle voisins. De plus, les équations discrétisées sont toutes solutionnées sur l'ensemble du domaine de calcul après chaque itération. Ainsi, la perturbation introduite dans l'écoulement uniforme par l'addition des forces externes dans les équations de quantité de mouvement discrétisées des volumes de contrôle balayés par les pales du rotor se propage progressivement dans l'ensemble du domaine de calcul, d'itération en itération. L'addition des forces externes sur des volumes de contrôle spécifiques perturbe donc initialement l'équilibre local et global des équations de Navier-Stokes. Toutefois avec la progression de la convergence, les valeurs des forces externes convergent et lorsque l'équilibre des équations du mouvement est atteint, ces valeurs correspondent aux forces aérodynamiques interagissant entre le fluide et les pales en rotation.

La linéarisation des forces externes proposé dans ce travail à la section 5.2.7.1 peut conduire à de grandes différences dans les valeurs des coefficients de gradient de

pression. Par exemple, dans le cas axisymétrique,  $d^u$  est typiquement beaucoup plus petit que  $d^{u_r}$  et  $d^{u_\theta}$ . Cette grande différence entre les valeurs des coefficients de gradient de pression entraîne des difficultés à assurer la conservation de la masse puisque le gradient de pression dans la direction  $x$  de l'écoulement a un effet négligeable sur l'équation discrétisée de pression (équation (5.14)). Cette difficulté est contournée en appliquant un nombre relativement élevé d'itérations dans l'algorithme de résolution ligne par ligne pour solutionner l'équation de pression discrétisée.

La puissance produite par le parc éolien étant le résultat recherché dans ce travail, le critère de convergence de la méthode numérique est établi sur la différence normalisée de puissance mécanique du parc (ou de l'éolienne isolée) calculée entre deux itérations successives; ce critère s'exprime:

$$\epsilon_{conv} = \frac{|\dot{W}_{Meca} - \dot{W}_{Meca}^*|}{\dot{W}_{Meca}} \quad (5.18)$$

où l'exposant \* réfère à l'itération précédente. La valeur seuil du critère de convergence  $\epsilon_{conv}$  en dessous de laquelle la convergence est obtenue est fixée à  $1.10^{-6}$ .

### 5.3 Méthode cartésienne tridimensionnelle

#### 5.3.1 Discrétisation du domaine de calcul

Tel qu'illustré à la figure 5.5, la discrétisation d'un domaine de calcul cartésien tridimensionnel se déroule en deux étapes. Le domaine est d'abord divisé en briques de huit noeuds (figure 5.5a). Puis six éléments tétraédriques sont formés dans chaque brique tel que présenté aux figures 5.5b et 5.6. Chaque tétraèdre est défini par quatre noeuds sur lesquels sont calculées toutes les variables dépendantes liées au problème (noeuds 1, 2, 3 et 4 de la figure 5.7). Puis les faces des volumes de contrôle sont définies sur chaque élément afin de former les volumes de contrôle. Ainsi, les points milieu des arêtes des éléments tétraédriques sont définis (points  $a$  à  $f$  de la figure 5.7). Ces points-milieu sont joints ensemble par des segments de manière à former

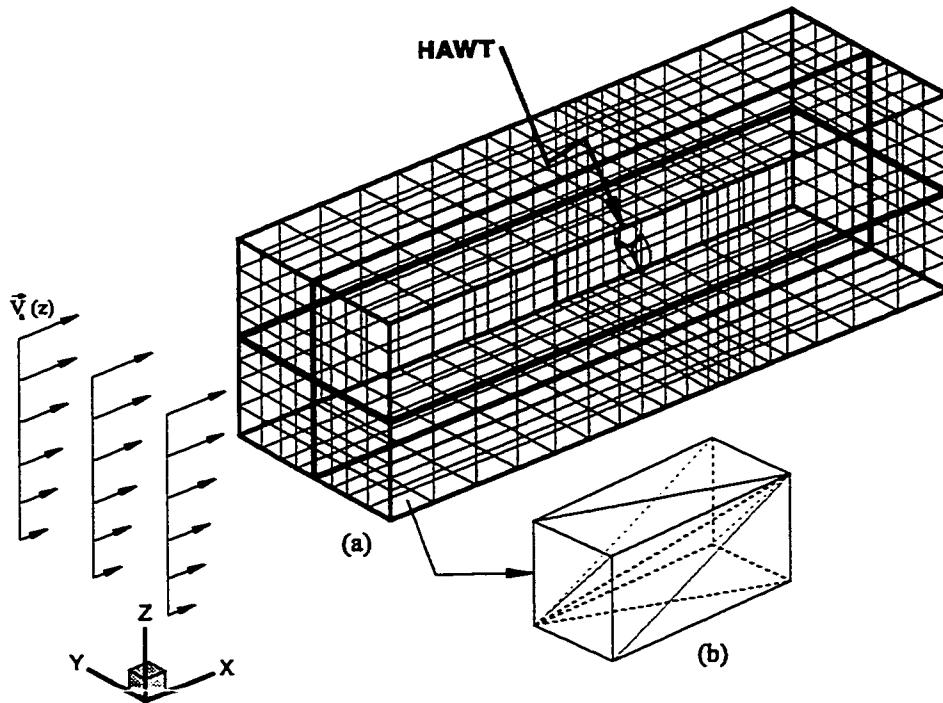


Figure 5.5 Discretisation du domaine de calcul cartésien tridimensionnel

trois surfaces de volume de contrôle dans chaque élément. Telles que présentées à la figure 5.6, deux surfaces triangulaires et une surface à quatre noeuds sont formées. La surface quadrilatérale est divisée en deux surfaces triangulaires en joignant deux sommets opposés de cette surface. Ces quatre surfaces subdivisent chaque élément en quatre sous volumes. Parmi eux, deux forment chacun un huitième du volume total de l'élément et les deux autres forment chacun trois huitièmes du volume total de l'élément. Lorsque les éléments sont assemblés, des volumes de contrôle polyédriques sont formés autour des noeuds, tels que présentés pour le noeud  $i$  à la figure 5.8.

#### 5.3.1.1 Discussion

Le choix d'une discréétisation par élément triangulaire et tétraédrique est motivé par le fait qu'elle facilite la formulation et la mise en oeuvre d'un schème de maillage non-structuré adaptatif. De plus, les volumes de contrôle obtenus par les procédures

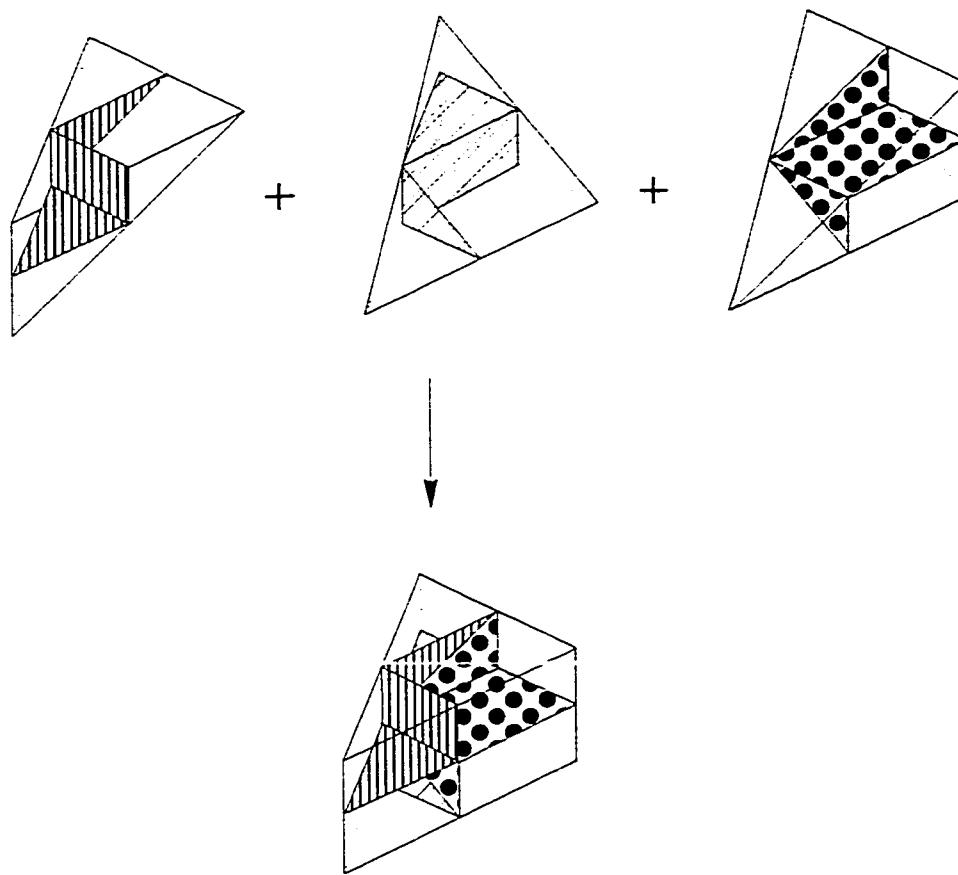


Figure 5.6 Création des éléments tétraédriques

décrites précédemment possèdent les propriétés suivantes: (i) ils n'imposent pas de restriction de taille ou de forme sur les éléments; (ii) ils ne se chevauchent pas; (iii) collectivement, ils couvrent le domaine complètement et exactement. Ces propriétés sont hautement souhaitables pour la formulation d'une méthode numérique conservative.

### 5.3.2 Intégration des équations de conservation

L'équation intégrale généralisée de conservation de quantité de mouvement, de la masse (continuité) et d'un scalaire transporté  $\phi$  est donnée par l'équation (5.1) pour la méthode cartésienne tridimensionnelle. Lorsque cette équation est appliquée aux volumes de contrôle associés à la méthode cartésienne, décrits à la section précédente,

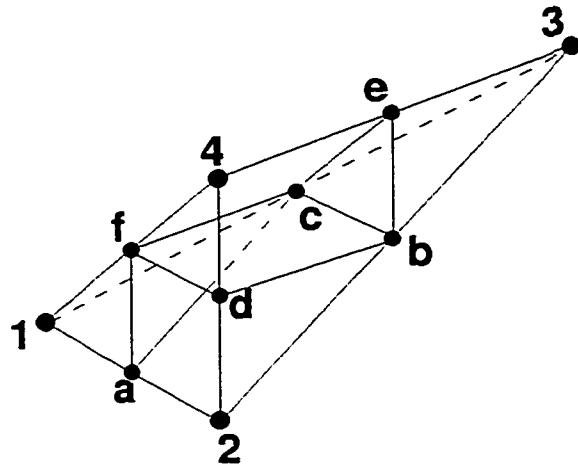


Figure 5.7 Élément tétraédrique

elle peut être présentée sous une forme faisant ressortir la possibilité d'assembler cette dernière en utilisant une procédure d'assemblage élément par élément. Ainsi, lorsque l'équation généralisée de conservation (5.1) est appliquée au volume de contrôle polyédrique entourant le noeud 2 de l'élément tétraédrique présenté à la figure 5.9, elle peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \int_{cfdb} J_j(n_2)_j ds + \int_{afc} J_j(n_1)_j ds - \int_{2afdbc} S_\phi dV + \int_{2afdbc} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV \right] \\
 & + [\text{contribution similaire des éléments entourant le noeud 2}] \quad (5.19) \\
 & + [\text{contributions des frontières, si applicables}] = 0
 \end{aligned}$$

où le flux  $J_j$  est défini à l'équation (5.4).

### 5.3.3 Fonctions d'interpolation pour les équations de quantité de mouvement

La prescription de fonctions d'interpolation sur les éléments du domaine discréteisé pour les variables dépendantes et les propriétés thermophysiques du fluide est nécessaire afin d'évaluer les équations de conservation. Pour tous les éléments, des fonctions d'interpolation sont établies pour la variable dépendante  $\phi$ , le coefficient de diffusion  $\Gamma_\phi$ , le terme de source  $S_\phi$  et la densité  $\rho$ .

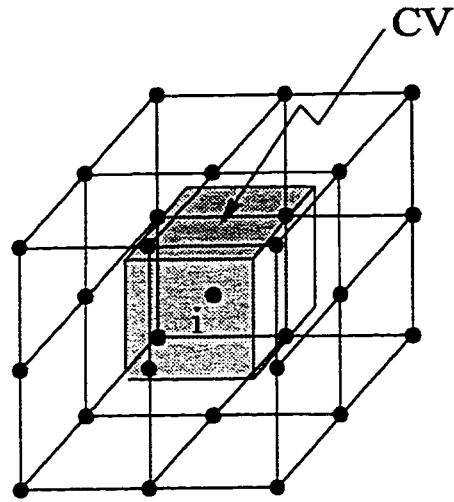


Figure 5.8 Création du volume de contrôle polyédrique autour du noeud i

#### 5.3.3.1 Interpolation des propriétés thermophysiques

Les propriétés thermophysiques du fluide telles que la densité  $\rho$ , la viscosité turbulente  $\mu_T$  ou tout autre coefficient de diffusion  $\Gamma_\phi$  sont considérées constantes dans chaque élément. La valeur de ces propriétés est conservée sur chacun des sommets des éléments. Ainsi, la valeur d'une propriété thermophysique  $(P_\phi)_{ele}$  qui prévaut dans tout l'élément  $e$  est égale à la moyenne des valeurs aux sommets:

$$(P_\phi)_{ele} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{\phi i} \quad (5.20)$$

où  $P_{\phi i}$  représente la valeur de la propriété thermophysique au sommet  $i$ . Le nombre de sommets  $n$  est égal à 4 pour l'élément tétraédrique cartésien.

#### 5.3.3.2 Interpolation des termes de sources

Dans la méthode cartésienne, la procédure d'interpolation des termes de sources est semblable à celle employée dans la méthode axisymétrique décrite à la section 5.2.3.2.

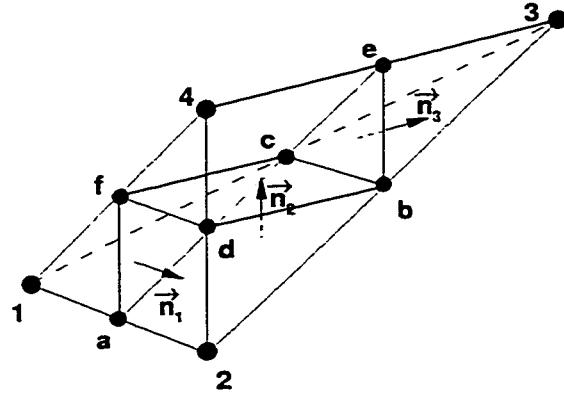


Figure 5.9 Élément tétraédrique associé à la méthode cartésienne tridimensionnelle

### 5.3.3.3 Interpolation de $\phi$ dans les termes de diffusion

Les formes intégrales des équations de conservation nécessitent le calcul du flux de diffusion de la variable dépendante  $\phi$ . Conservées aux sommets des éléments, les valeurs de  $\phi$  sont interpolées linéairement dans chaque élément. Ainsi pour la méthode tridimensionnelle cartésienne, sur un élément,  $\phi$  prend la forme:

$$\phi(x, y, z) = A_{\phi}^{car}x + B_{\phi}^{car}y + C_{\phi}^{car}z + D_{\phi}^{car} \quad (5.21)$$

où  $A_{\phi}^{car}, B_{\phi}^{car}, C_{\phi}^{car}, D_{\phi}^{car}$  sont des constantes déterminées sur chaque élément par la résolution d'un système d'équations linéaires.

### 5.3.3.4 Interpolation de $\phi$ dans les termes de convection

Dans la méthode cartésienne, la procédure d'évaluation du flux de  $\phi$  par convection dans les équations intégrales de conservation de quantité de mouvement est similaire à celle employée dans la méthode axisymétrique décrite à la section 5.2.3.4.

### 5.3.3.5 Interpolation de la pression

L'interpolation de la pression s'effectue d'une façon similaire à celle employée pour l'interpolation de  $\phi$  dans les termes de diffusion. Ainsi, la pression est conservée en chaque noeud de l'élément et est interpolée linéairement dans ce dernier selon une relation similaire à l'équation (5.21).

### 5.3.4 Équations discrétisées de quantité de mouvement

L'expression des équations discrétisées de quantité de mouvement (5.8) présentée à la section 5.2.4 de la méthode axisymétrique est valable pour la méthode cartésienne. Dans cette expression  $u_i$  peut être n'importe laquelle des composantes de la vitesse ( $u, v, w$ ).

### 5.3.5 Équation discrétisée de continuité

#### 5.3.5.1 Interpolation du débit massique

Afin d'obtenir les expressions des vitesses du débit massique pour la méthode cartésienne, un traitement semblable à celui appliqué dans le cas axisymétrique (voir section 5.2.5.1) permet d'obtenir les expressions suivantes:

$$u^m = \hat{u} + d^u \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{ele} \quad v^m = \hat{v} + d^v \left( -\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{ele} \quad w^m = \hat{w} + d^w \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{ele} \quad (5.22)$$

où  $\hat{u}, \hat{v}$  et  $\hat{w}$  sont les pseudo-vitesses et  $d^u, d^v$  et  $d^w$  sont les coefficients de gradient de pression. Conservées aux sommets des éléments, ces pseudo-vitesses et ces coefficients de gradient de pression sont interpolées linéairement sur les éléments selon des expressions similaires à l'équation (5.21).

#### 5.3.5.2 Équation discrétisée de pression

L'expression de l'équation discrétisée de pression (5.14) développée à la section 5.2.5.2 pour la méthode axisymétrique est aussi valable dans le cas cartésien.

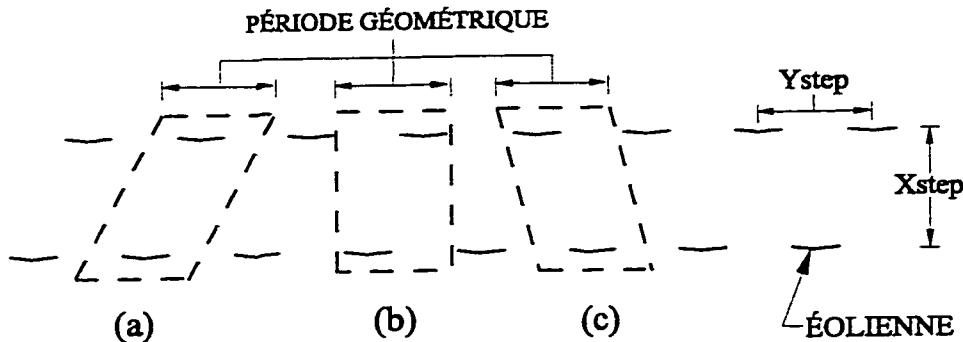


Figure 5.10 Exemple d'un parc éolien périodique à deux rangées

### 5.3.6 Domaines de calcul et maillages

Après avoir décrit la discréttisation d'un domaine de calcul cartésien quelconque à la section 5.3.1, la présente section décrit les domaines de calcul et les maillages construits spécifiquement pour modéliser les champs d'éoliennes pour la méthode cartésienne.

La topographie et les conditions de vent (intensité, orientation, fréquence) présentes sur un site sont les principaux paramètres à considérer pour déterminer la disposition des éoliennes dans un parc. Pour des terrains plats non-obstrués, l'arrangement typique d'un parc éolien se compose de rangées linéaires de turbines placées perpendiculairement à la direction de vent la plus énergique. Si les rangées sont suffisamment longues et que la disposition des éoliennes est géométriquement périodique, l'écoulement autour des turbines situées loin des extrémités des rangées peut être considéré comme périodique dans l'espace. Cette hypothèse est employée dans ce travail pour réduire l'étendue du domaine de calcul requis pour modéliser l'écoulement complet autour d'un parc éolien. Deux plans parallèles quelconques séparés par la distance d'une période géométrique mesurée dans la direction des rangées d'éoliennes constituent des limites périodiques du domaine de calcul (voir les trois exemples a, b, c à la figure 5.10). Cependant, pour permettre l'application de l'algorithme de résolution périodique présenté à la section 5.2.9 et pour assurer la précision des résultats, le maillage doit respecter les exigences suivantes:

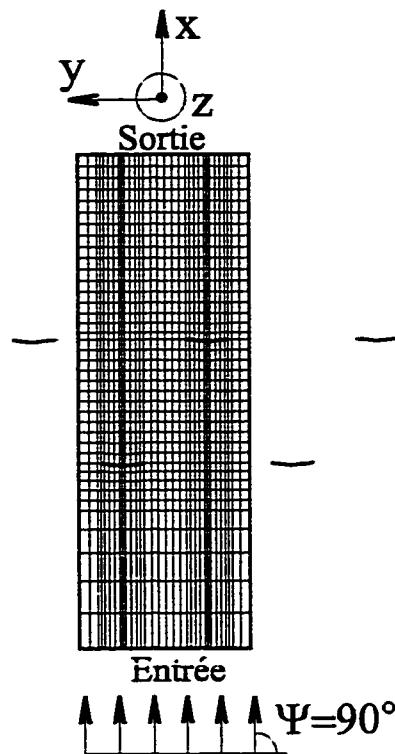


Figure 5.11 Maillage pour  $\Psi$  égal à  $90^\circ$  ou  $-90^\circ$

- Les lignes créées en reliant les points du maillage situés sur une des frontières périodiques aux points correspondants de la frontière opposée doivent être parallèles aux rangées formées par les turbines. Toutefois, les points situés entre les frontières périodiques n'ont pas à être placés sur ces lignes.
- Pour modéliser la turbine et son sillage, les points du maillage doivent former des plans normaux à la direction du vent à l'emplacement de la turbine et dans son sillage.
- Un ensemble de lignes du maillage devrait être parallèle à la direction de l'écoulement libre afin de minimiser les effets de fausse diffusion.

Afin de répondre à ces exigences, trois types de maillage correspondants à trois gammes de direction du vent ont été développés.

L'angle  $\Psi$  est défini comme l'angle entre les rangées de turbines et la direction de

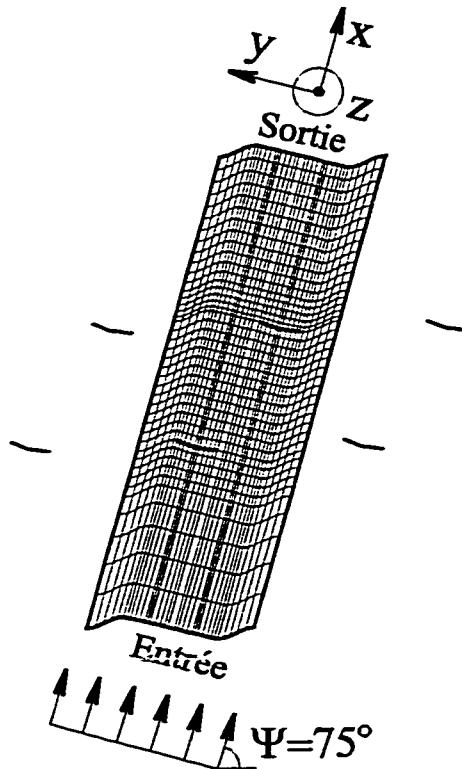


Figure 5.12 Maillage pour  $45^\circ < \Psi < 135^\circ$  et  $-45^\circ < \Psi < -135^\circ$  vent. Pour  $\Psi$  égal à  $90^\circ$  (ou  $-90^\circ$ ), le domaine de calcul est une boîte rectangulaire (voir Fig. 5.11) qui inclut les turbines présentes dans une période géométrique du parc éolien. Ce type de domaine de calcul est aussi employé pour la modélisation d'éoliennes isolées. Pour  $45^\circ < \Psi < 135^\circ$  et  $-45^\circ < \Psi < -135^\circ$ , le domaine de calcul est une boîte quadrilatérale dont deux des côtés sont formés par deux surfaces courbes reliées par un plan (voir Fig. 5.12). Pour  $-45^\circ < \Psi < 45^\circ$  et pour  $135^\circ < \Psi < -135^\circ$ , le domaine de calcul forme une boîte trapézoïdale (voir Fig. 5.13). Dans ce cas, il faut noter qu'aucun des ensembles de lignes du maillage n'est exactement parallèle à la direction de l'écoulement libre. Par conséquent, les solutions obtenues en utilisant ce maillage sont prédisposées à la fausse diffusion, surtout pour des valeurs de  $|\Psi|$  élevées.

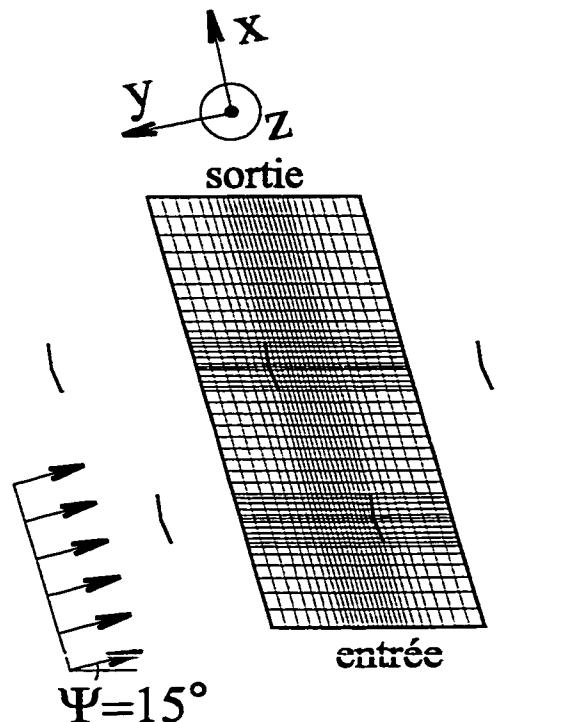


Figure 5.13 Maillage pour  $-45^\circ < \Psi < 45^\circ$  et pour  $135^\circ < \Psi < -135^\circ$

### 5.3.7 Forces externes

Cette section décrit les détails essentiels au succès de l'intégration des forces externes pour la méthode numérique cartésienne.

#### 5.3.7.1 Linéarisation des forces externes

La linéarisation des forces externes pour la méthode cartésienne est identique à celle employée pour la méthode axisymétrique et présentée à la section 5.2.7.1.

#### 5.3.7.2 Intégration des forces externes

Pour une finesse de maillage donnée, le passage de la méthode axisymétrique à la méthode cartésienne tridimensionnelle augmente significativement le nombre de points du maillage. Ainsi, afin d'obtenir une méthode tridimensionnelle efficace ayant un temps de calcul raisonnable, la finesse du maillage doit être limitée.

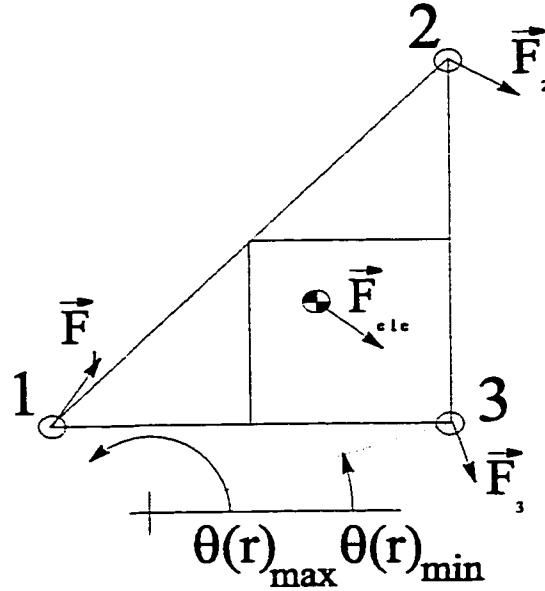


Figure 5.14 Variation de la direction de la force externe sur élément situé près de l'axe de rotation

Toutefois, certaines caractéristiques des forces externes cartésiennes tridimensionnelles nécessitent l'usage d'un maillage très raffiné pour représenter de façon précise l'action des pales sur le fluide. Dans un élément du maillage situé près de l'axe de rotation du rotor tel que présenté à la figure 5.14, de grandes variations en  $\theta$  conduisent à des variations similaires de direction des forces aérodynamiques interagissant entre le fluide et les pales (désignées  $F$  sur la figure 5.14). Ainsi, une intégration basée sur l'hypothèse que la force aérodynamique agissant au centreïde d'un élément prévaut sur la totalité de ce dernier résulte en une mauvaise évaluation des forces externes. De plus, la figure 5.15 présente la section transversale des volumes de contrôle balayés par les pales. Cette figure fait ressortir la mauvaise adéquation entre la limite de la surface  $A_{Rotor}$  balayée par les pales (représentée par le cercle de rayon  $R \cos \gamma$  à la figure 5.15) et les noeuds du maillage. Inévitablement, sur un maillage réaliste relativement grossier, la procédure d'intégration numérique additionnerait ou soustrairait faussement des quantités significatives aux valeurs exactes des contributions des forces externes aux équations discrétisées des volumes de contrôle situés à proximité de la frontière de la surface balayée par les pales. Ces

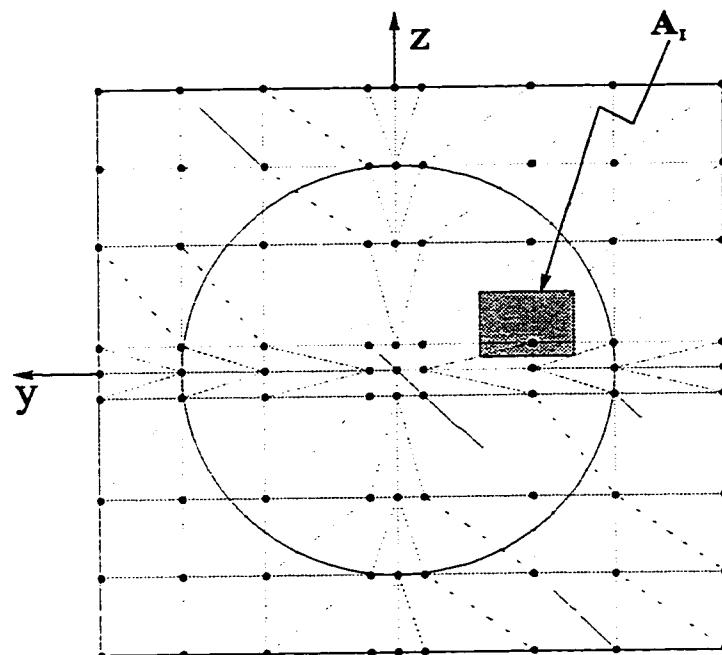


Figure 5.15 Section transversale des volumes de contrôle balayés par les pales

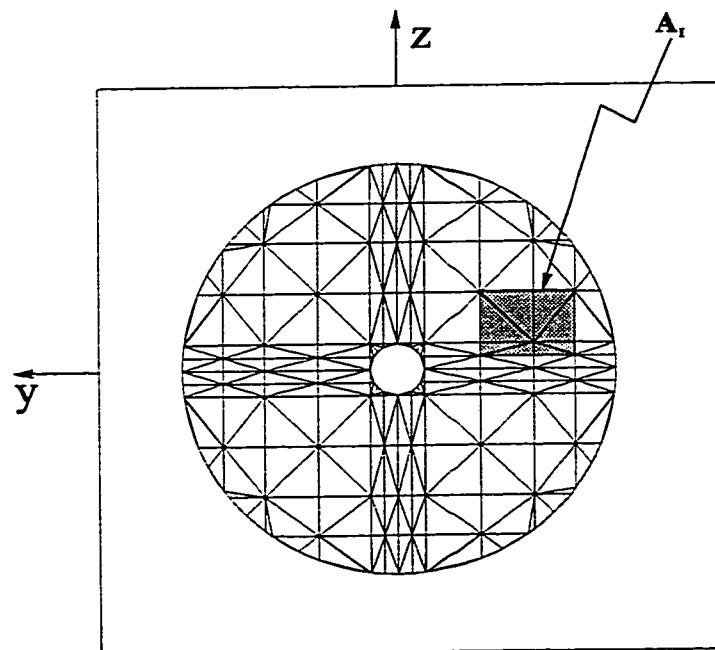


Figure 5.16 Maillage de surface sur la surface balayée par les pales

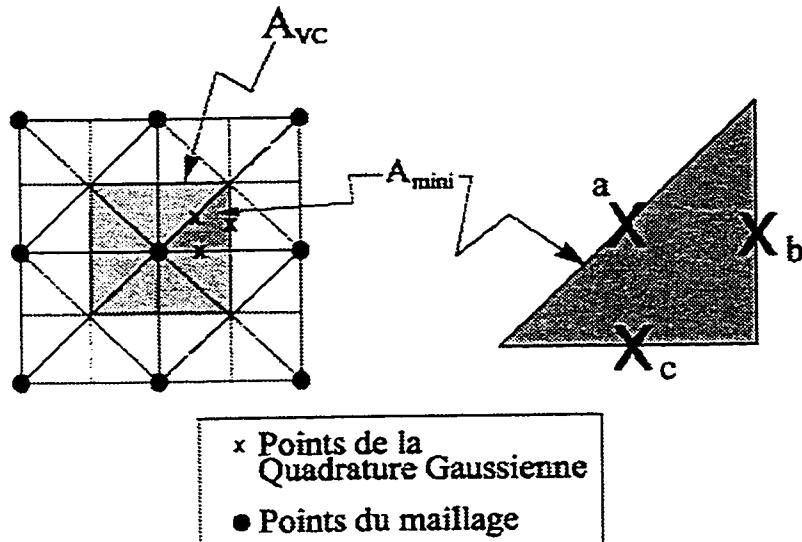


Figure 5.17 Intégration des forces externes sur les mini-éléments

deux sources d'erreurs liées à la formulation cartésienne peuvent être minimisées par l'utilisation d'un maillage très raffiné. Toutefois, l'usage d'un tel maillage nécessiterait des ressources informatiques irréalistes. Dans ce travail, une méthode originale plus efficace a été développée afin de pallier à ces difficultés. La stratégie employée consiste à définir un maillage *de surface* très fin sur la surface où l'intégration numérique des forces externes est accomplie. Ce maillage de surface est composé de mini-éléments qui sont des subdivisions des faces triangulaires des éléments tétraédriques, comprises sur la surface  $A_{Rotor}$  balayée par les pales telle que présentée à la figure 5.16. Les mini-éléments situés au voisinage de la frontière de la surface balayée par les pales sont formés par une procédure de découpage du maillage original. Ce découpage permet au maillage de surface de suivre avec précision cette frontière tel qu'en témoigne la figure 5.16. Les détails de la procédure de génération du maillage de surface sont présentés à l'annexe I. Les variations de l'écoulement (vitesse, pression) sur un élément balayé par les pales sont proportionnellement beaucoup plus faibles que celles des forces aérodynamiques sur la même surface. Ainsi, les équations de Navier-Stokes ne sont pas solutionnées sur le nouveau maillage plus

raffiné. L'objectif motivant l'usage du maillage de surface est de permettre une intégration précise des forces externes à un faible coût informatique. Dans le but d'accroître d'avantage la précision de l'intégration numérique des forces externes, cette dernière s'effectue en utilisant une quadrature Gaussienne à trois points sur chaque mini-élément triangulaire. Les expressions des forces externes  $\bar{F}_i|_{VC}$  (équations 4.37 à 4.39) peuvent s'exprimer sous la forme générale suivante faisant ressortir une procédure d'intégration par assemblage mini-élément par mini-élément:

$$\bar{F}_i|_{VC} = \int_{A_i} f_i dA = \sum_{j=1}^m \int_{A_{mini_j}} f_i dA \quad (5.23)$$

où  $m$  représente le nombre de mini-élément constituant le volume de contrôle. L'intégration numérique par quadrature Gaussienne à trois points consiste à évaluer la force surfacique  $f_i$  aux trois points milieu des arêtes des mini-éléments tels que présentés à la figure 5.17. L'expression de l'intégration numérique des forces externes par quadrature Gaussienne devient:

$$\bar{F}_i|_{VC} = \sum_{j=1}^m \frac{A_{mini_j}}{3} [f_i|_a + f_i|_b + f_i|_c] \quad (5.24)$$

Cette procédure d'intégration permet d'accroître la précision de l'intégration numérique des forces externes. Afin, d'augmenter l'efficacité du calcul des forces, une procédure de prétraitement est effectuée avant le début des calculs de l'écoulement. Durant cette procédure, le maillage de surface est construit et tous les paramètres géométriques constants (corde, rayon, surface...) de l'intégration numérique sont conservés sur chacun des points milieu des arêtes des mini-éléments. Ainsi, lors de la procédure d'intégration des forces externes, seules les vitesses sont interpolées linéairement sur les mini-éléments.

L'emploi d'un maillage de surface plus fin superposé au maillage du domaine de calcul initial pour l'intégration des forces externes représente une contribution originale et importante de ce travail puisqu'il permet d'accroître la précision des calculs de façon significative sans augmenter significativement les besoins informatiques.

### 5.3.7.3 Discussion

L'évaluation des forces externes s'effectue uniquement sur les volumes de contrôle balayés par les pales. Ainsi, le temps de calcul associé à cette opération est faible lorsque comparé au temps de calcul global de la méthode. Cette caractéristique est particulièrement avantageuse dans le cas de simulation de parc éolien puisque l'effort numérique associé à la modélisation de machines multiples n'est pas beaucoup plus important que celui nécessaire au calcul d'une éolienne isolée. L'usage de cette méthode permet donc l'analyse de parc éolien avec des ressources informatiques raisonnables, puisque le temps de calcul est principalement dépendant du nombre de points dans le domaine de calcul et n'est que très faiblement influencé par le nombre d'éoliennes modélisées.

## 5.3.8 Conditions aux frontières

Afin de compléter le système d'équations algébriques discrétisées (5.8), des conditions aux frontières doivent être spécifiées pour  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $p$  sur les six faces du domaine de calcul décrit à la section 5.3.6.

### 5.3.8.1 Frontière d'entrée

Les frontières d'entrée sont des surfaces situées en amont des rotors telles que présentées aux figures 5.11, 5.12 et 5.13. Sur ces surfaces, les trois composantes de vitesses sont prescrites égales aux valeurs trouvées dans la couche limite atmosphérique en condition neutre à hauteur de moyeu (voir section 4.4). La pression  $p$  est calculée.

### 5.3.8.2 Frontière de sortie

Les frontières de sortie sont des surfaces situées en aval des rotors telles que présentées aux figures 5.11, 5.12 et 5.13. Sur ces surfaces, les trois composantes de vitesses sont calculées en résolvant les équations de quantité de mouvement obtenues en

utilisant le traitement de sortie de Patankar [?]. La pression  $p$  est spécifiée sur l'ensemble des points formant le périmètre de la surface de sortie. La valeur imposée de la pression est une valeur de référence.

#### 5.3.8.3 Frontières supérieure et inférieure

Les frontières supérieures et inférieures sont des plans  $x-y$  (voir figures 5.11, 5.12 et 5.13). Sur ces plans, la composante de vitesse  $w$  selon l'axe  $z$  est imposée égale à 0 alors les composantes de vitesse  $u$  et  $v$  et la pression  $p$  sont calculées.

#### 5.3.8.4 Frontières latérales

Les frontières latérales sont des plans  $x-z$  (voir figures 5.11, 5.12 et 5.13). Sur ces plans, l'écoulement est considéré périodique dans l'espace. Ainsi, les volumes de contrôles associés à ces plans sont traités comme des volumes de contrôle internes et ne nécessitent pas de traitement particulier autre que l'application d'une procédure de calcul appropriée (voir section 5.3.9). Dans le cas d'éoliennes isolées, les frontières latérales sont traitées de la même façon que les frontières supérieures et inférieures.

#### 5.3.9 Algorithme de résolution

Pour la méthode cartésienne tridimensionnelle, l'algorithme général est très similaire à celui employé pour la méthode axisymétrique, résumé à la section 5.2.9 en une séquence d'opérations comportant 11 étapes. Toutefois, quelques différences apparaissent dans l'algorithme de résolution du système d'équations discrétisées. Ainsi, dans la méthode axisymétrique, le système matriciel correspondant aux équations du mouvement discrétisées est solutionné par l'algorithme de Thomas pour matrices tridiagonales(TDMA)[?] basé sur une procédure de résolution ligne par ligne. Pour la méthode tridimensionnelle, cet algorithme de résolution est combiné à un algorithme cyclique de résolution de matrices tridiagonales(CTDMA) [?]. Cette procédure de résolution ligne par ligne est répétée plan par plan jusqu'à ce que

l'ensemble du domaine de calcul ait été balayé. L'algorithme de TDMA est utilisé par alternance avec l'algorithme de CTDMA, en fonction de la direction balayée. Ainsi, l'algorithme de CTDMA permet d'introduire implicitement les conditions de périodicité du problème et est utilisé dans le cas de balayage sur des lignes de maillage joignant les deux frontières périodiques (voir figures 5.11, 5.12 et 5.13). L'algorithme de TDMA est appliqué dans les autres cas. La description des algorithmes de TDMA et de CTDMA est présentée en détail à l'annexe II.

## CHAPITRE VI

### RÉSULTATS & DISCUSSION

Les résultats présentés dans ce chapitre ont pour objectif de démontrer la capacité de la méthode proposée à prédire les performances d'un parc éolien. Pour ce faire, des comparaisons entre les prédictions obtenues par la méthodologie proposée, la théorie du tube de courant et des résultats expérimentaux lorsque ceux-ci étaient disponibles sont présentés. Dans ce travail, deux méthodes numériques ont été développées: une méthode axisymétrique à trois composantes de vitesse puis une méthode tridimensionnelle cartésienne. L'organisation de ce chapitre respecte cette structure.

#### 6.1 Méthode axisymétrique à trois composantes de vitesse

Les raisons ayant motivé le développement d'une méthode axisymétrique avant celui d'une méthode cartésienne tridimensionnelle dépassent l'intérêt pédagogique évident que représente cette étape. En plus de permettre la validation de la modélisation de l'éolienne basée sur l'introduction de forces externes dans les équations intégrales de quantité de mouvement, cette méthode a permis de faire l'étude exhaustive des aspects importants permettant d'assurer le succès de la solution numérique du modèle mathématique proposé. Cette étude aurait été ardue et lourde à effectuer sur la base de la méthode cartésienne tridimensionnelle de par l'importance des besoins informatiques associés à cette dernière. De plus, les aspects suivant associés à la qualité et à la précision des solutions ont pu être étudiés efficacement: (i) la détermination de la position des frontières du domaine de calcul pour obtenir des solutions indépendantes de l'étendue du domaine de calcul, et (ii) la sensibilité des solutions par rapport à la finesse du maillage. Après avoir complété ces études, la précision de

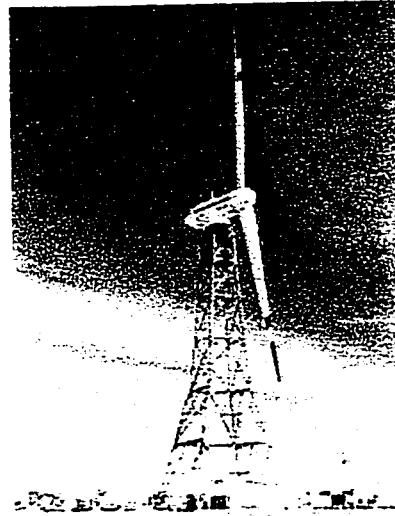


Figure 6.1 Éolienne expérimentale 100-kW NASA/DOE Mod-0

la méthode axisymétrique en terme de prédition des performances d'une éolienne isolée a été analysée.

Les simulations présentées dans cette section ont été réalisées pour deux modèles d'éoliennes à axe horizontal: (i) l'éolienne expérimentale 100-kW NASA/DOE Mod-0 [33] (figure 6.1), et (ii) l'éolienne expérimentale INTA [18]. Les données relatives au fonctionnement et à la géométrie des deux éoliennes sont présentées aux tableaux 6.1 et 6.2 pour les éoliennes Mod-0 et la INTA respectivement.

Tableau 6.1 Données géométriques de l'éolienne NASA/DOE Mod-0

Nombre de pales	2
Diamètre extérieur	38.1 m
Diamètre intérieur	4.762 m
Angle de calage	3 deg.
Angle de conicité	7 deg.
Vitesse de rotation	40 rpm

### 6.1.1 Étendue du domaine de calcul

Une étude détaillée du comportement de la prédition de la puissance en fonction de la taille du domaine de calcul a été entreprise pour l'éolienne NASA/DOE Mod-0 afin

Tableau 6.2 Données géométriques de l'éolienne INTA

Nombre de pales	2
Diamètre extérieur	1.6 m
Diamètre intérieur	0.32 m
Angle de conicité	0 deg.
Angle de calage	0 deg.
Vitesse de rotation	1500 rpm

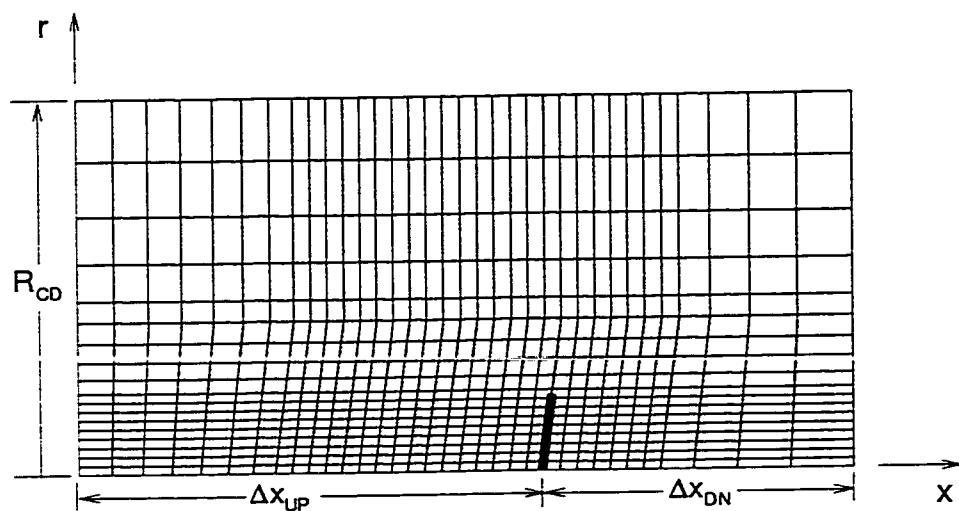


Figure 6.2 Domaine de calcul et topologie du maillage

de déterminer l'étendue minimale du domaine de calcul nécessaire à l'obtention de prédictions de performances indépendantes de la dimension du domaine de calcul. Dans le contexte axisymétrique, les dimensions du domaine de calcul sont caractérisées par trois paramètres de longueur:  $\Delta x_{UP}$ ,  $\Delta x_{DN}$ , et  $R_{CD}$  (voir figure 6.2). Ces paramètres sont présentés à la figure 6.2 qui illustre la topologie du maillage. Le maillage présenté à la figure 6.2 n'a qu'une fonction d'illustration et les mailles utilisés pour cette étude étaient beaucoup plus fins que ce dernier. Les figures 6.3 à 6.5 illustrent le comportement des prédictions des performances en fonction de l'étendue du domaine de calcul. Ces courbes présentent la différence normalisée entre la puissance calculée pour une valeur finie d'un paramètre de longueur (soit

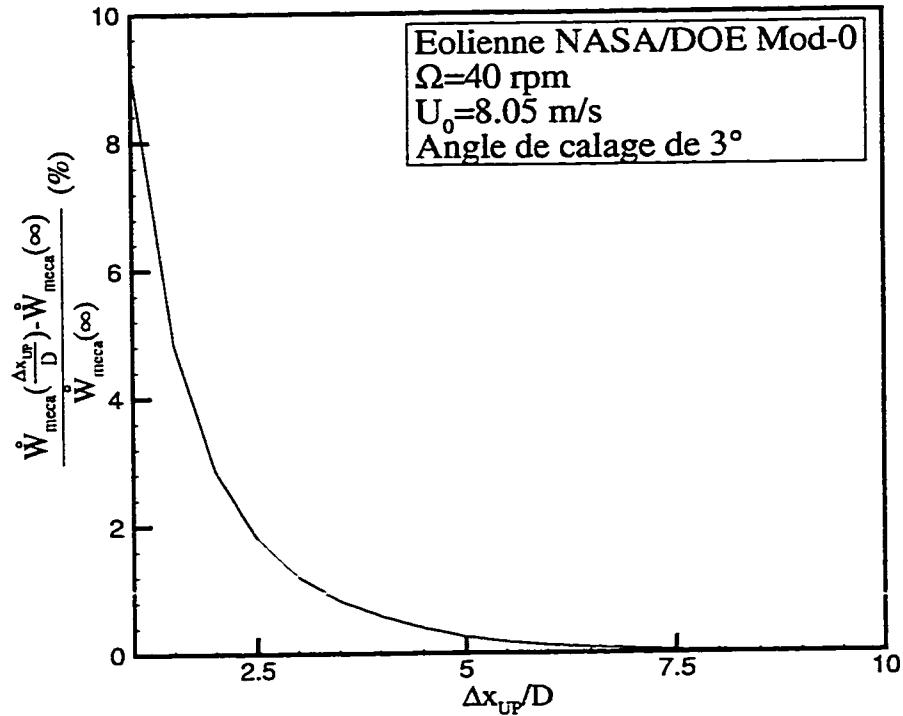


Figure 6.3 Variation des prédictions de performance par rapport  $\Delta x_{UP}$

un des paramètres suivants:  $\Delta x_{UP}$ ,  $\Delta x_{DN}$ , et  $R_{CD}$ ) et la puissance  $\dot{W}(\infty)$  calculée pour une très grande valeur de ce paramètre, en fonction du paramètre étudié. Les paramètres de longueur ont été adimensionnalisés par rapport au diamètre  $D$  du rotor. Les maillages utilisés étaient uniformes et de finesse égale dans les directions  $x$  et  $r$ . Cette étude fut conduite pour la valeur la plus critique de la vitesse spécifique  $X$  qui correspond au coefficient de puissance,  $C_P$ , maximale. Le coefficient de puissance est défini par:

$$C_P = \frac{\dot{W}_{meca}}{\frac{1}{2}\rho_0 U_0^3 R^2} \quad (6.1)$$

où  $\dot{W}_{meca}$  est la puissance mécanique,  $U_0$  est la vitesse de l'écoulement libre et  $R$  est le rayon externe du rotor. Les conditions d'opération pour lesquelles le coefficient de puissance maximale est obtenu représentent la situation la plus critique puisqu'elles

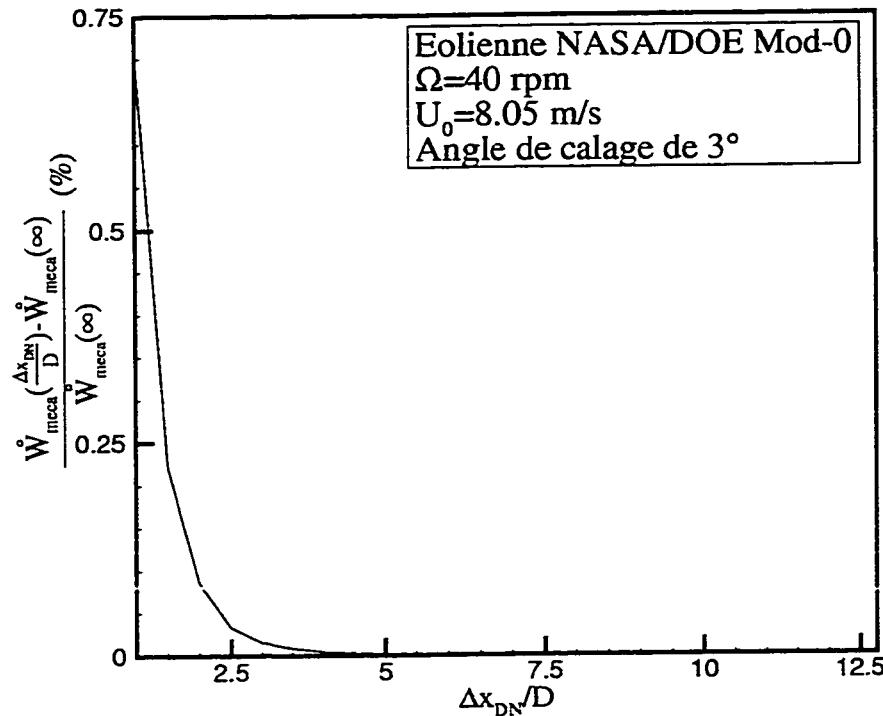


Figure 6.4 Variation des prédictions de performance par rapport  $\Delta x_{\text{DN}}$

correspondent au régime où le rotor extrait la fraction la plus importante de l'énergie disponible dans l'écoulement libre. Pour un angle de calage de  $3^\circ$  et une vitesse de rotation de 40 rpm, la vitesse de l'écoulement libre pour laquelle le coefficient  $C_P$  maximum est atteint dans le cas de l'éolienne NASA/DOE Mod-0 est égale 8.04 m/s.

Cette étude a révélé que les calculs de puissance étaient fortement influencés par la grandeur du domaine de calcul en amont de l'éolienne (i.e.  $\Delta x_{\text{UP}}$ ) ainsi que par la position de la frontière supérieure (i.e.  $R_{\text{CD}}$ ). A partir des résultats présentés sur les figures 6.3 et 6.5,  $\Delta x_{\text{UP}}/D = 7.5$  et  $R_{\text{CD}}/D = 4.0$  semble être des distances suffisantes pour assurer que les puissances prédites soient indépendantes de l'étendue du domaine de calcul. L'erreur relative ainsi commise en limitant l'étendue du

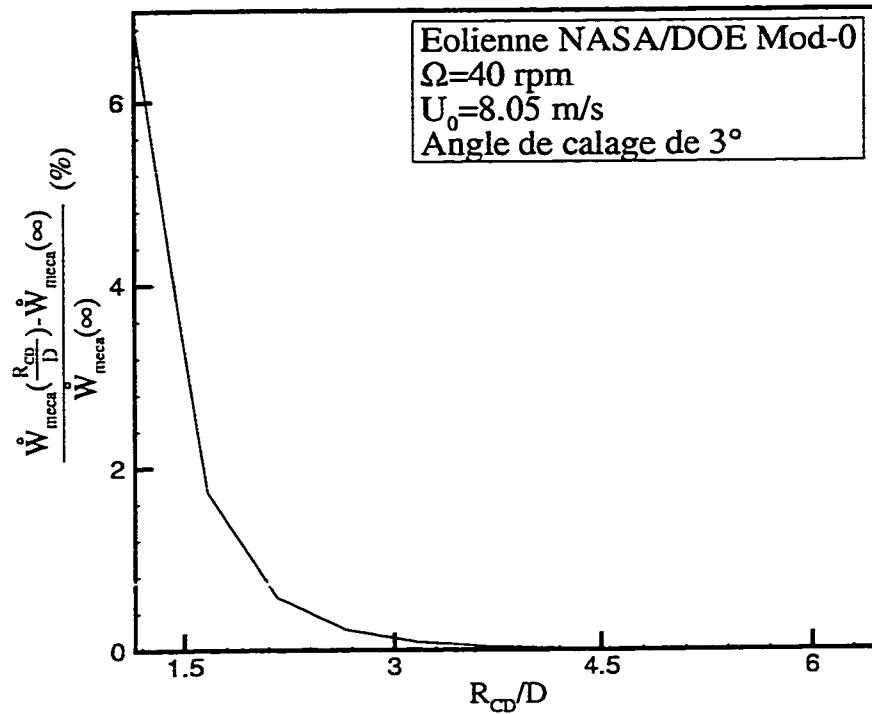


Figure 6.5 Variation des prédictions de performance par rapport  $R_{CD}$

domaine de calcul par ces deux valeurs est inférieure à 0.1 % par rapport à la solution provenant d'un calcul sur un domaine quasi-infini. Pour la distance du domaine en aval de l'éolienne, une valeur beaucoup plus petite peut être prescrite. Les résultats de la figure 6.4, suggèrent que  $\Delta x_{DN}/D = 4.5$  est une valeur raisonnable assurant une erreur relative inférieure à 0.1 %. Ces valeurs des paramètres qui déterminent la taille du domaine de calcul ont été utilisées pour produire les résultats liés à l'éolienne NASA/DOE Mod-0 dans la suite de ce travail.

#### 6.1.2 Étude de l'indépendance de la solution par rapport à la finesse du maillage

Après avoir établi les dimensions du domaine de calcul, la présente section décrit l'étude de l'indépendance de la solution par rapport à la finesse du maillage menée afin de déterminer le nombre minimum de points de maillage nécessaire à l'obtention

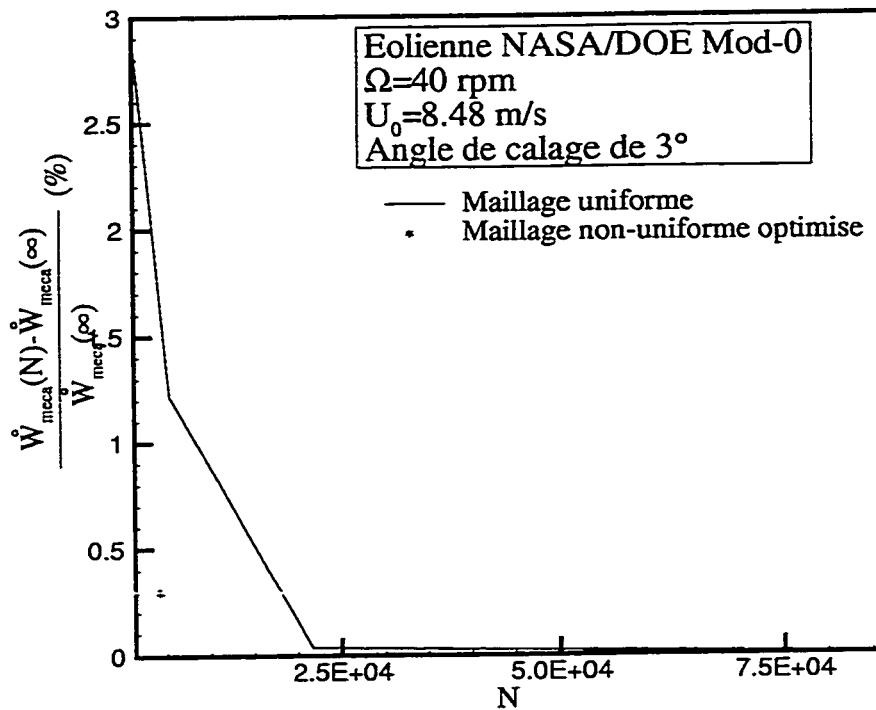


Figure 6.6 Variation des prédictions de performance par rapport  $\Delta x_{UP}$

de solutions pertinentes. La figure 6.6 présente la différence normalisée entre les prédictions de puissance pour l'éolienne NASA/DOE Mod-0 obtenues pour un nombre donné de points de maillage  $N$ ,  $\dot{W}(N)$ , et la prédiction de puissance indépendante du maillage,  $\dot{W}(\infty)$ . Cette étude d'indépendance de maillage a été réalisée sur des maillages uniformes et de finesse égale dans les directions  $x$  et  $r$  afin de faciliter la détermination de la prédiction de puissance indépendante du maillage. A partir de la figure 6.6, on constate que la solution indépendante du maillage en puissance est obtenue pour un maillage d'environ 25000 points ( $N = 25000$ ). Ce nombre très élevé de points nécessaire à l'obtention d'une solution indépendante du maillage est attribuable à l'utilisation de maillages uniformes. Toutefois, pour l'utilisation pratique de la méthode, des maillages non-uniformes devraient être utilisés pour minimiser

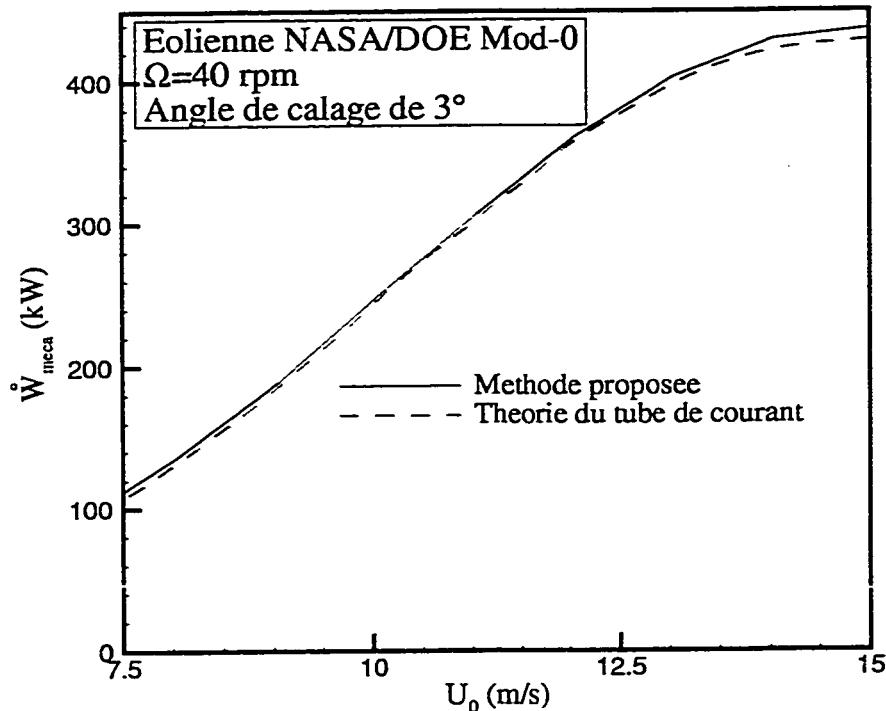


Figure 6.7 Prédiction de puissance pour l'éolienne expérimentale NASA/DOE Mod-0

le nombre de points requis. Ainsi, en combinant un maillage uniforme et très raffiné dans le voisinage de l'éolienne à un maillage en expansion dans le reste du domaine de calcul, le nombre total de points du maillage a pu être réduit à 3000 tout en conservant une solution proche de la solution indépendante (environ 0.3% d'erreur relative par rapport la solution indépendante voir figure 6.6). C'est ce maillage non-uniforme optimisé qui est utilisé pour effectuer les simulations axisymétriques présentées dans les sections suivantes.

#### 6.1.3 Performances d'une éolienne isolée

Suite aux deux études précédentes, la validation du modèle axisymétrique peut être entreprise hors des incertitudes liées au maillage et aux dimensions du domaine de

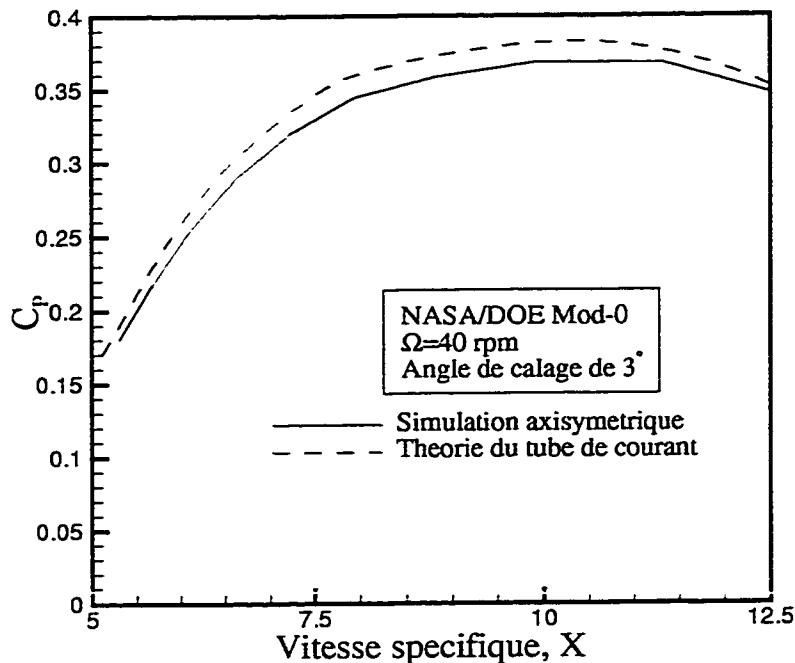


Figure 6.8 Prédictions de coefficient de puissance pour l'éolienne expérimentale NASA/DOE Mod-0

calcul. Afin de valider le modèle axisymétrique proposé, les prédictions de performances obtenues par ce dernier pour une éolienne isolée sont comparées à celles provenant d'une méthode basé sur la théorie du tube de courant [11] et des résultats expérimentaux [18]. Les figures 6.7 et 6.8 présentent respectivement les distributions de puissance et du coefficient de puissance pour l'éolienne expérimentale NASA/DOE Mod-0 100-kW sur une bande de vitesse de vent s'étendant de 7.5 m/s à 15 m/s ce qui correspond à des vitesses spécifiques de 5 à 12. La densité  $\rho$  et la viscosité  $\mu$  de l'air ont été prescrites à  $1.25 \text{ kg/m}^3$  et  $1.8 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$  respectivement. Les calculs ont été effectués sur le maillage optimisé comportant environ 3000 points et une centaine d'itérations furent nécessaire à l'obtention de la convergence en puissance(voir section 5.2.9). Un bon accord entre les prédictions de performances des deux méthodes est constaté. Ce résultat était prévisible, puisque le facteur limitant

la précision des résultats est l'utilisation de données aérodynamiques bidimensionnelles statiques (i.e. coefficients de portance et de traînée) qui dans ce cas sont les mêmes pour les deux méthodes.

Afin de comparer les prédictions de performances obtenues par le modèle proposé à des résultats expérimentaux, l'éolienne expérimentale INTA a été étudiée. Les figures 6.9 et 6.10 présentent des comparaisons similaires aux précédentes pour le cas de l'éolienne expérimentale INTA. Dans ce cas, les résultats produits par les deux méthodes sont en très bon accord. La figure 6.10 présente également des résultats expérimentaux recueillis en soufflerie. Les coefficients de puissance calculés par la méthode proposée se comparent bien aux mesures expérimentales.

A la vue de ces résultats, la méthode proposée et celle du tube de courant semblent présenter une précision équivalente dans la prédiction des performances d'une éolienne isolée. Toutefois, la motivation principale du développement de la méthode proposée réside dans sa capacité inhérente à modéliser les interactions éolienne/éoliennes, éoliennes/sol, et éoliennes/tour et sa capacité de produire les détails de l'écoulement autour des turbines. Ces qualités de la méthode proposée essentielles à l'analyse de parcs éoliens sont illustrées à la section suivante.

#### 6.1.4 Visualisation de l'écoulement

En utilisant le maillage non-uniforme optimisé, l'écoulement autour de l'éolienne expérimentale 100-kW NASA/DOE Mod-0 a été calculé. Les champs de pression et de vitesse obtenus dans le voisinage du rotor sont présentés aux figures 6.11 et 6.12, pour une vitesse de vent de 8.05 m/s et une densité et une viscosité de l'air de 1.25 kg/m<sup>3</sup> et  $1.8 \cdot 10^{-5}$  N · s/m<sup>2</sup> respectivement. Le champ de pression présenté à la figure 6.11 est caractéristique de l'écoulement autour d'une éolienne. Ainsi, la pression augmente progressivement dans l'écoulement amont de l'éolienne pour former une zone de surpression devant le rotor. Puis, un saut de pression brusque apparaît

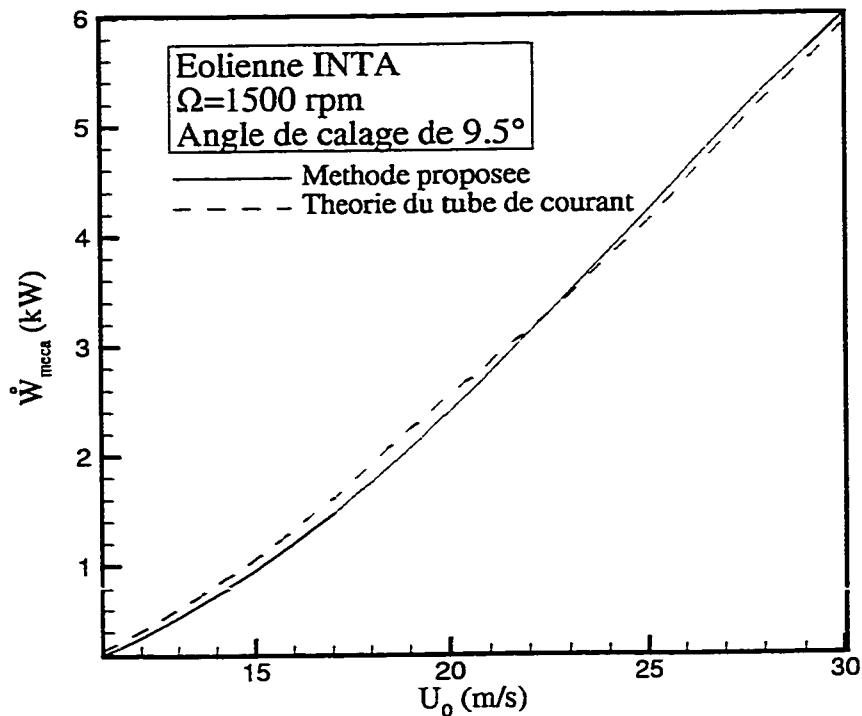


Figure 6.9 Prédiction de puissance pour l'éolienne expérimentale INTA

dans l'écoulement au passage de l'éolienne donnant naissance à une zone de dépression derrière le rotor. La pression croît de nouveau progressivement dans le sillage de l'éolienne pour atteindre la pression atmosphérique. L'action de l'éolienne sur l'écoulement peut être assimilée à celle d'un filtre. Toutefois, l'éolienne extrait aussi de l'énergie cinétique de l'écoulement libre pour la transformer en énergie mécanique. Ainsi, la vitesse de l'écoulement diminue au passage du rotor tel qu'observé dans le champ de vitesse présenté à la figure 6.12; les vitesses dans le sillage de l'écoulement sont plus faibles que dans l'écoulement libre incident. La fraction la plus importante de l'énergie de l'écoulement étant extraite principalement sur l'extérieur du rotor, il est par conséquent naturel d'observer que c'est dans cette zone du sillage que le déficit de vitesse maximum est observé. De plus, l'écoulement est dévié radialement

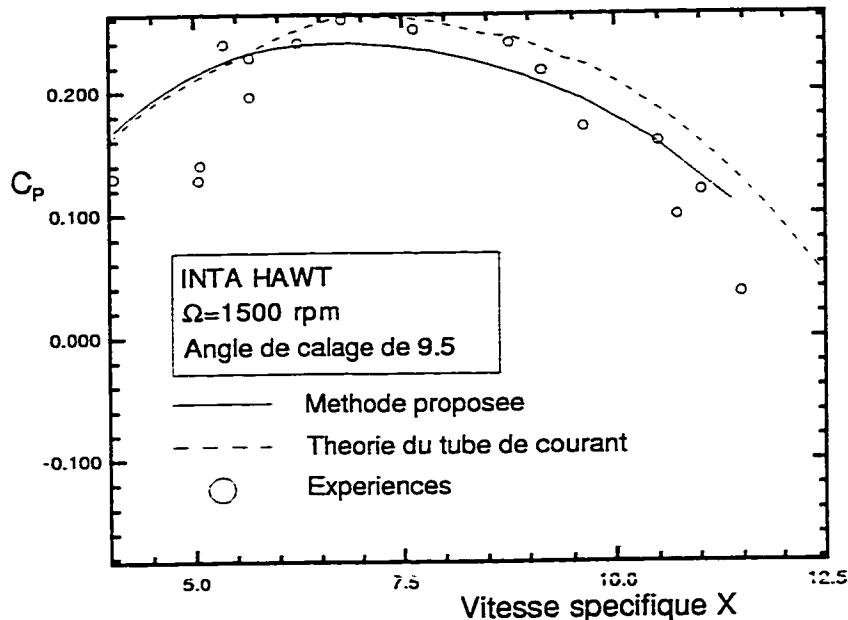


Figure 6.10 Prédiction de coefficient de puissance pour l'éolienne expérimentale INTA

vers l'extérieur au passage de l'éolienne pour palier au ralentissement des vitesses dans le sillage en accord avec le principe de conservation de la masse.

Ces visualisations illustrent la capacité de la méthode proposée de produire les détails de l'écoulement dans le sillage d'une éolienne ce qui constitue un des critères essentiels à l'analyse réussie d'un parc éolien.

#### 6.1.5 Discussion

Le développement de la méthode axisymétrique correspond à la première étape dans l'étude de l'arrangement des éoliennes dans les parcs éoliens. Cette méthode renferme beaucoup des caractéristiques nécessaires à l'analyse d'arrangements denses d'éoliennes. Cette méthode axisymétrique a permis de démontrer de manière efficace l'applicabilité et la viabilité de la méthodologie proposée avec un minimum de ressources informatiques. Cette méthode n'est toutefois pas applicable

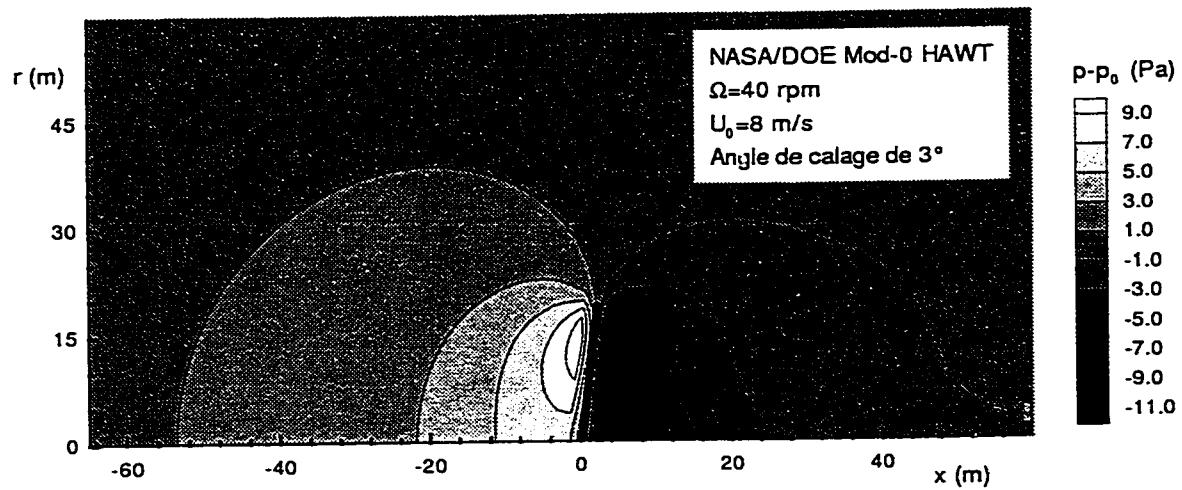


Figure 6.11 Champ de pression calculé pour l'éolienne expérimentale NASA/DOE Mod-0

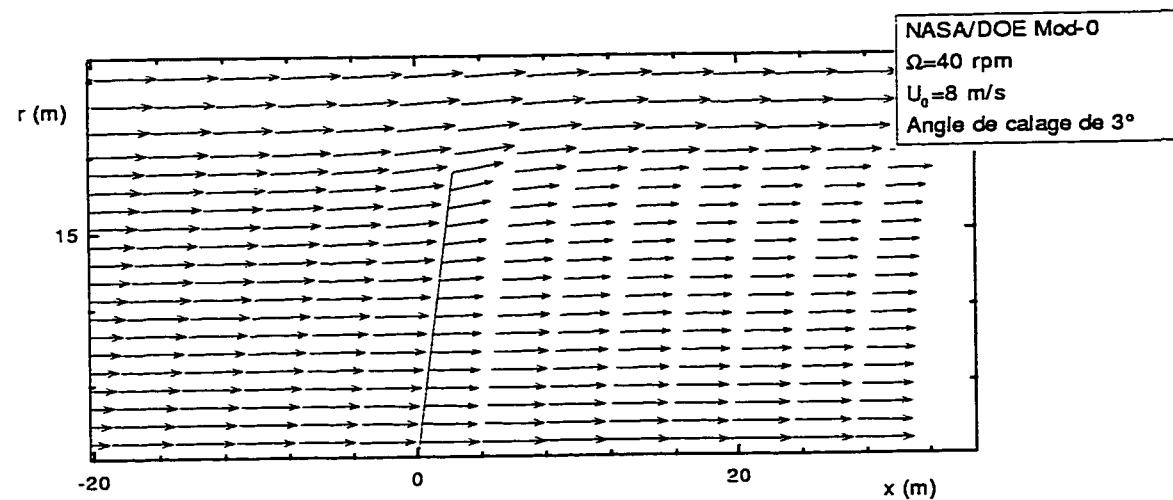


Figure 6.12 Champ de vitesse calculé pour l'éolienne expérimentale NASA/DOE Mod-0

à l'analyse de parcs éoliens puisque elle ne peut modéliser des arrangements quelconques d'éoliennes et les effets du sol. Néanmoins, la formulation axisymétrique produit des prédictions de performances dans le cas d'éoliennes isolées avec le même niveau de précision que la théorie bien reconnue du tube de courant. Elle peut être considérée comme un outil utile pour la conception d'éoliennes à axe horizontal.

## 6.2 Méthode tridimensionnelle cartésienne

Bien que basée essentiellement sur les mêmes concepts et la même méthodologie que la méthode axisymétrique, la méthode tridimensionnelle cartésienne ne peut être considérée autrement qu'une simple extension de la méthode axisymétrique de part ses spécificités (voir section 5.3.7.2) liées à la gestion des ressources informatiques limitées et à la non-conformité entre le système de coordonnée de la méthode proposée (cartésien) et la géométrie du rotor (cylindrique). Par conséquent, la première étape de validation de la méthode tridimensionnelle consiste à comparer les résultats obtenus par cette dernière à ceux provenant des simulations axisymétriques pour le cas des performances d'une éolienne isolée. Par la suite, le sillage de l'éolienne, aspect essentiel à la modélisation des interactions aérodynamiques dans un parc éolien, sera étudié et comparé à des mesures expérimentales. Puis quelques cas typiques d'arrangements périodiques de parcs sont présentés et analysés. Finalement, une démonstration des capacités de la méthode à l'optimisation de l'arrangement des éoliennes dans un parc suivie d'une courte discussion sur le processus d'optimisation viendront compléter ce chapitre.

### 6.2.1 Performances d'une éolienne isolée

La première étape de validation de la méthode tridimensionnelle consiste en l'évaluation de ses prédictions de performances pour le cas d'une éolienne isolée. Ainsi,

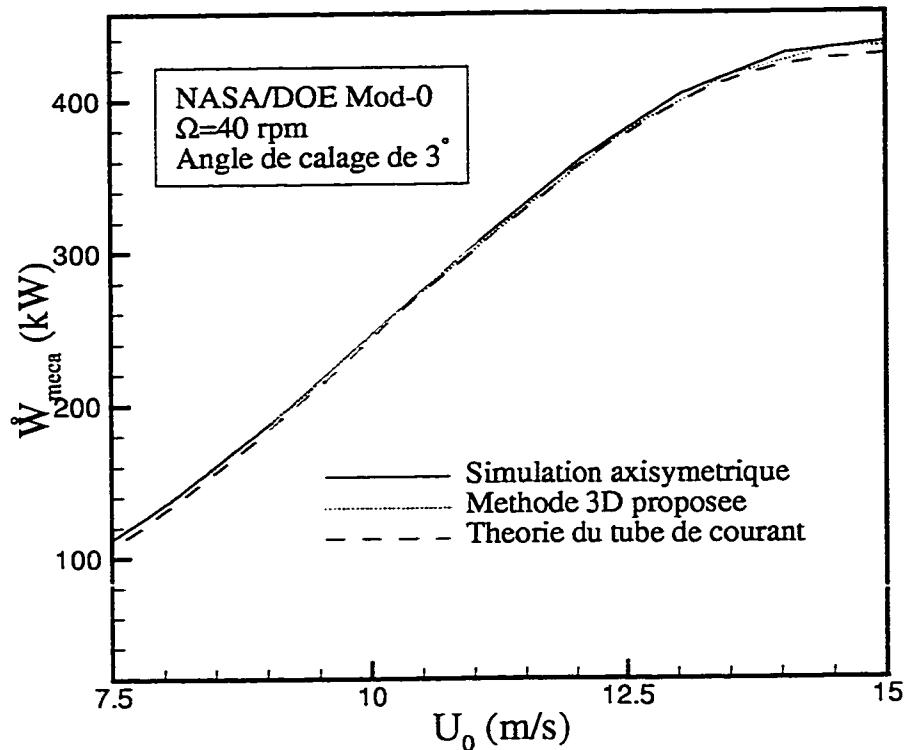


Figure 6.13 Prédiction de puissance pour l'éolienne expérimentale NASA/DOE Mod-0

les prédictions de performances obtenues par la méthode tridimensionnelle proposée sont comparées à celles provenant de la méthode axisymétrique précédemment présentées ainsi qu'à des résultats produits par une méthode basé sur la théorie du tube de courant [11]. Les calculs de performances présentés dans cette section ont été réalisés pour l'éolienne expérimentale 100-kW NASA/DOE Mod-0 sur la base des études axisymétriques d'indépendance de maillage et d'étendue du domaine de calcul présentées aux sections 6.1.2 et 6.1.1. Les simulations ont donc été exécutées sur un maillage non-uniforme optimisé de 40x38x38 points dans lequel un raffinement local est appliqué autour de l'éolienne afin de saisir les variations brusques de l'écoulement dans cette zone. Environ 200 itérations sont nécessaires à l'obtention de la convergence en puissance (voir section 5.2.9) ce qui correspond à peu près

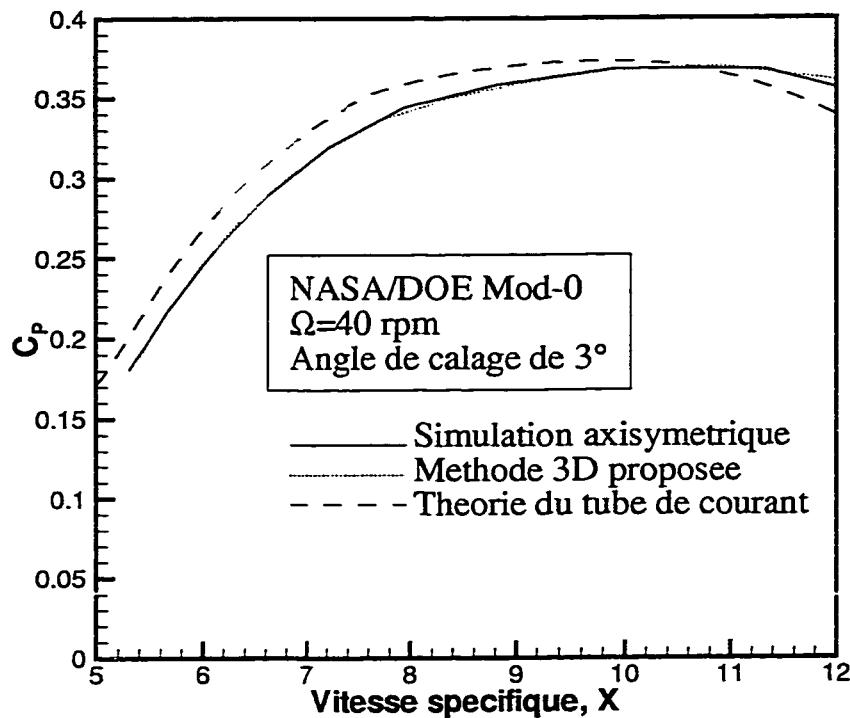


Figure 6.14 Prédiction de coefficient de puissance pour l'éolienne expérimentale NASA/DOE Mod-0

à 3 heures CPU sur une station de travail de type IBM SP2. Les figures 6.13 et 6.14 présentent respectivement les distributions de puissance et du coefficient de puissance pour l'éolienne expérimentale 100-kW NASA/DOE Mod-0 sur une bande de vitesse de vent s'étendant de 7.5 m/s à 15 m/s ce qui correspond à des vitesses spécifiques de 5 à 12. La densité  $\rho$  et la viscosité  $\mu$  de l'air ont été prescrites à  $1.25 \text{ kg/m}^3$  et  $1.8 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$  respectivement. De part les difficultés inhérentes à l'utilisation d'une formulation cartésienne tridimensionnelle cartésienne, un des soucis principaux lors du passage de la méthode axisymétrique à la méthode tridimensionnelle consistait à conserver un niveau de précision semblable sans augmenter la finesse du maillage(voir section 5.3.7.2). Les résultats présentés aux figures 6.13 et 6.14 révèlent que pour une finesse de maillage similaire, les méthodes axisymétrique

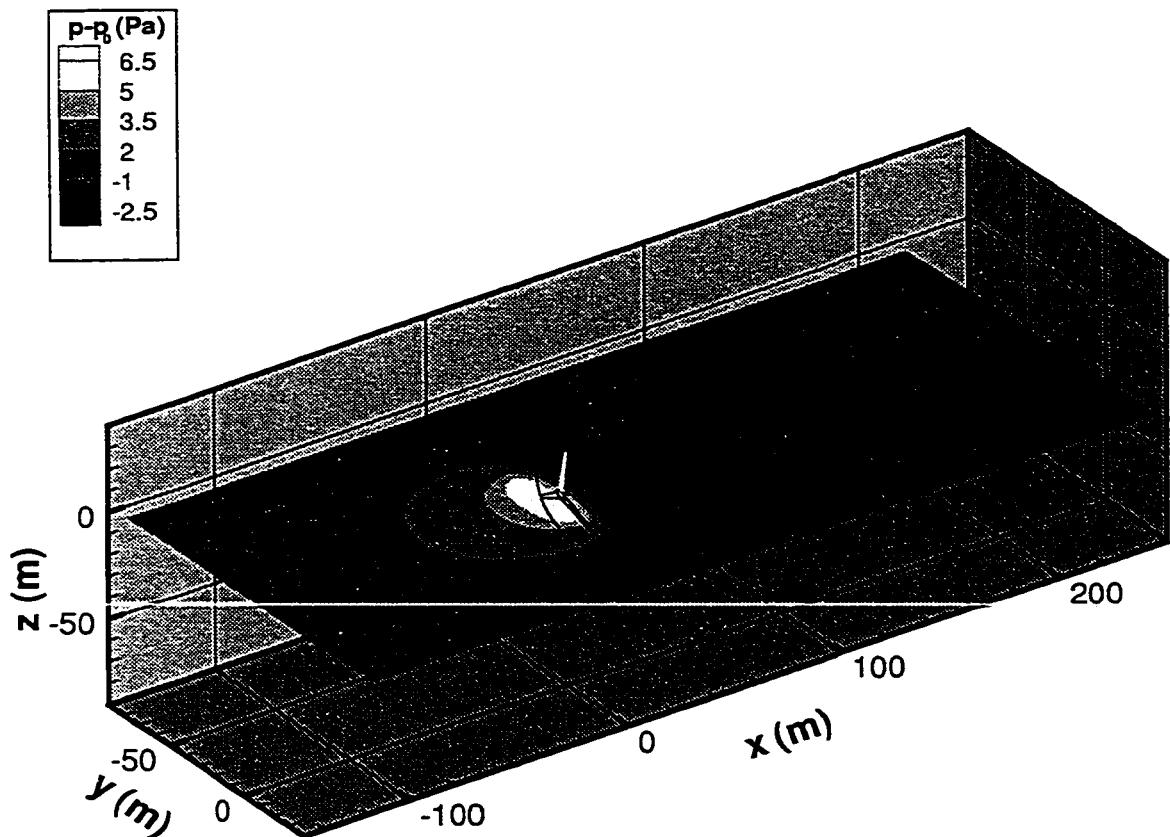


Figure 6.15 Coupe horizontale du champ de pression

et cartésienne tridimensionnelle présentent un niveau de précision équivalent, ce qui prouve la validité et l'efficacité de la méthode cartésienne tridimensionnelle proposée. De plus, les résultats produits par les méthodes axisymétrique et cartésienne sont aussi en bon accord avec ceux provenant de la théorie du tube de courant, ce qui démontre la précision de la méthode cartésienne tridimensionnelle à prédire les performances d'une éolienne isolée.

#### 6.2.2 Visualisation de l'écoulement

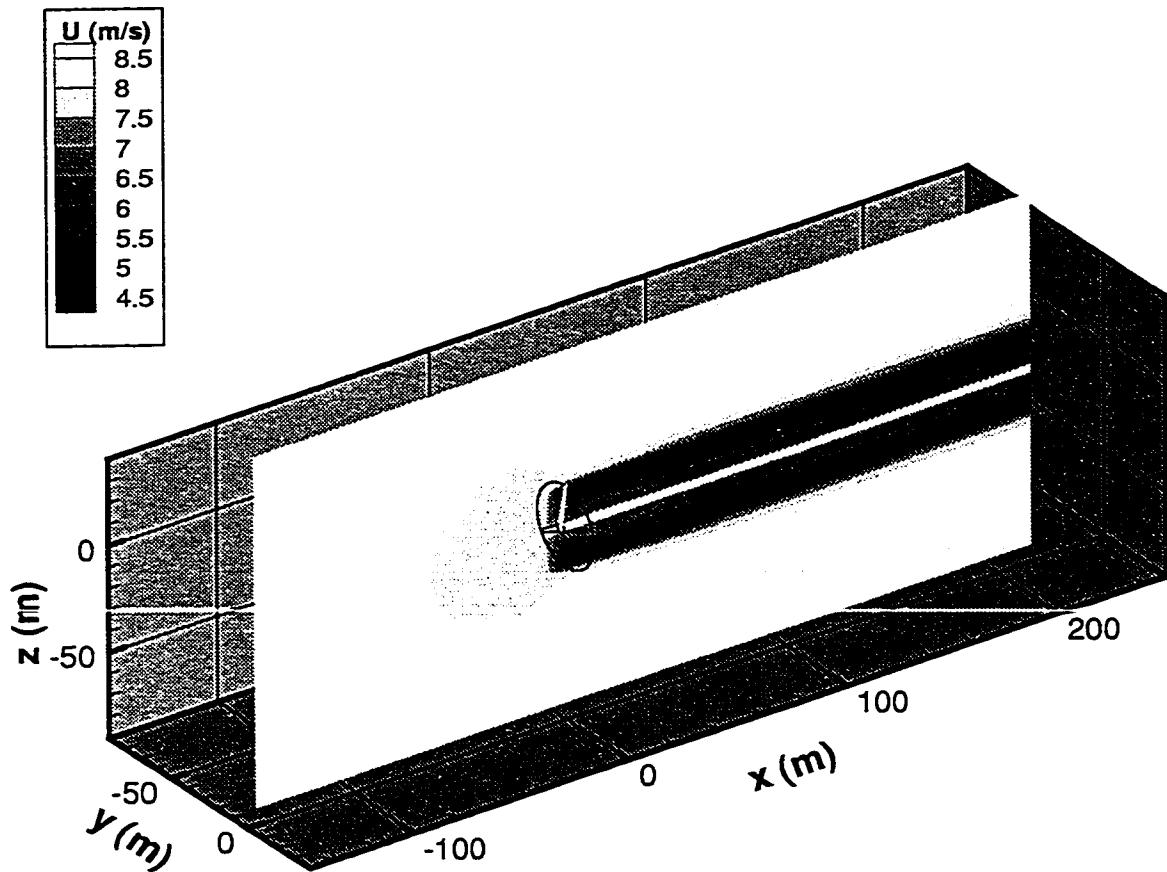
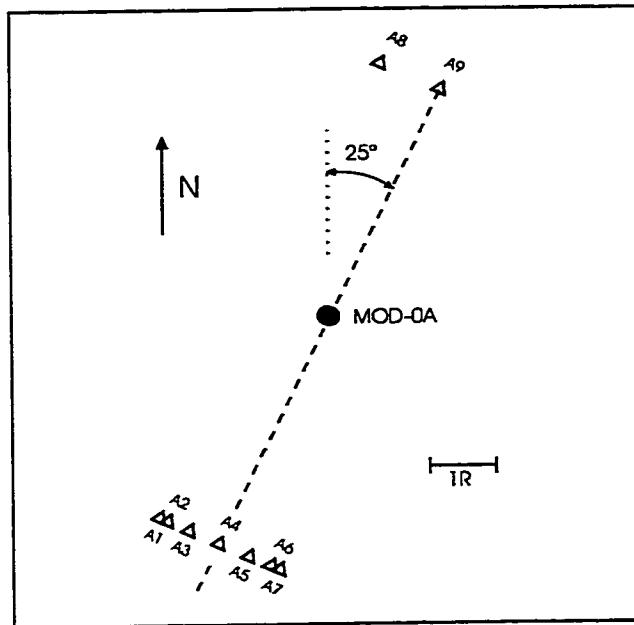


Figure 6.16 Coupe verticale du champ de vitesse

Tout comme la méthode axisymétrique, la méthode tridimensionnelle cartésienne possède la capacité de calculer l'écoulement autour de l'éolienne et permet par conséquent sa visualisation. Les détails de l'écoulement autour d'une éolienne expérimentale 100-kW NASA/DOE Mod-0 sont illustrés à l'aide des figures 6.15 et 6.16 qui présentent des plans de coupe des champs de pression et de vitesse de l'écoulement. Lors des simulations, la vitesse de l'écoulement a été fixée à 8.05 m/s alors que la densité  $\rho$  et la viscosité  $\mu$  de l'air ont été prescrites à  $1.25 \text{ kg/m}^3$  et  $1.8 \cdot 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$  respectivement. La description de la physique de l'écoulement ainsi



**Figure 6.17** Diagramme schématique de la position de l'éolienne et des anémomètres dans les mesures de Doran et al.

que les remarques faites à la section 6.1.4 s'appliquent tout autant à l'écoulement présenté aux figures 6.15 et 6.16.

Ces visualisations illustrent la capacité de la méthode proposée de produire les détails de l'écoulement dans le sillage d'une éolienne ce qui constitue une des propriétés essentielles à l'analyse réussie d'un parc éolien.

### 6.2.3 Sillage d'une éolienne isolée

Avant d'entreprendre les simulations complètes d'interactions aérodynamiques entre des éoliennes dans un parc, il est essentiel de s'assurer de la bonne représentation du sillage en aval des éoliennes par la méthode numérique proposée. Pour ce faire, le sillage d'une éolienne isolée est étudié et comparé aux résultats expérimentaux de Doran et al. [14]. Le montage expérimental de Doran et al. réalisé afin d'obtenir des mesures des vitesses dans le sillage d'une éolienne 100-kW NASA/DOE Mod-0 est présenté sous forme schématique à la figure 6.17. Cette installation est constituée d'une rangée de 7 tours situées à une distance de 4 rayons au sud-ouest

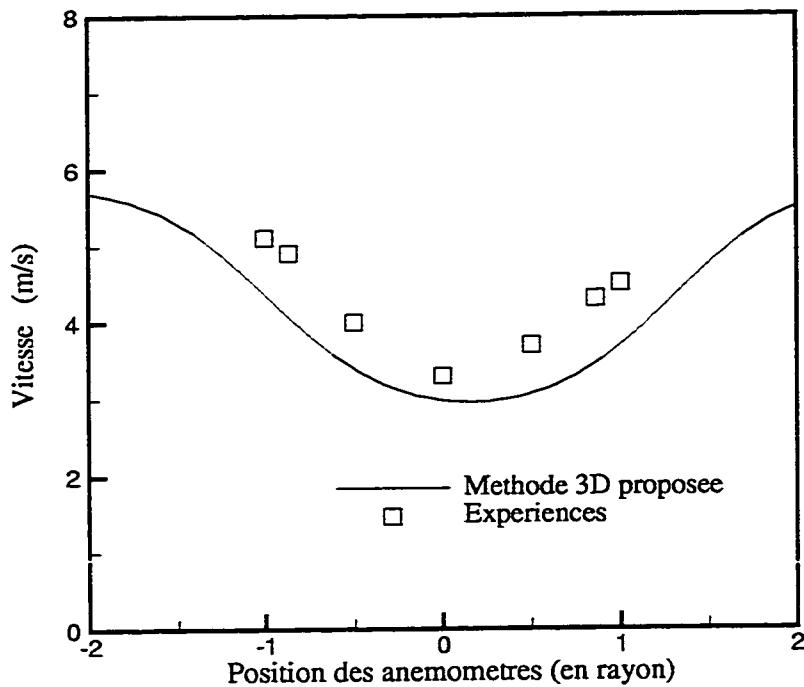


Figure 6.18 Distribution des vitesses dans le sillage de l'éolienne MOD-0A:  $U_0 = 5.67 \text{ m/s}$ , angle du vent =  $23^\circ$

de l'éolienne (i.e. 1 diamètre = 38.1 m) et deux autres tours sont également placées à 4 diamètres au nord-est de l'éolienne. Au sommet de chaque tour, à hauteur du moyeu, se trouve un anémomètre permettant de mesurer la vitesse de l'écoulement. Les comparaisons entre les simulations et les résultats expérimentaux sont présentées aux figure 6.18 et 6.19. Ces deux cas choisis parmi les mesures de Doran et al. sont ceux pour lesquels l'hypothèse de couche limite atmosphérique neutre est la plus applicable. Ainsi, lors des simulations, la couche limite atmosphérique est considérée comme neutre et la valeur moyenne de la hauteur de rugosité (voir section 4.4) a été fixé à 0.05 m, ce qui correspond à un sol constitué d'herbes hautes. Un maillage optimisé non-uniforme constitué de 86x51x43 points a été utilisé pour les simulations qui nécessitent de 400 à 500 itérations pour converger (voir section

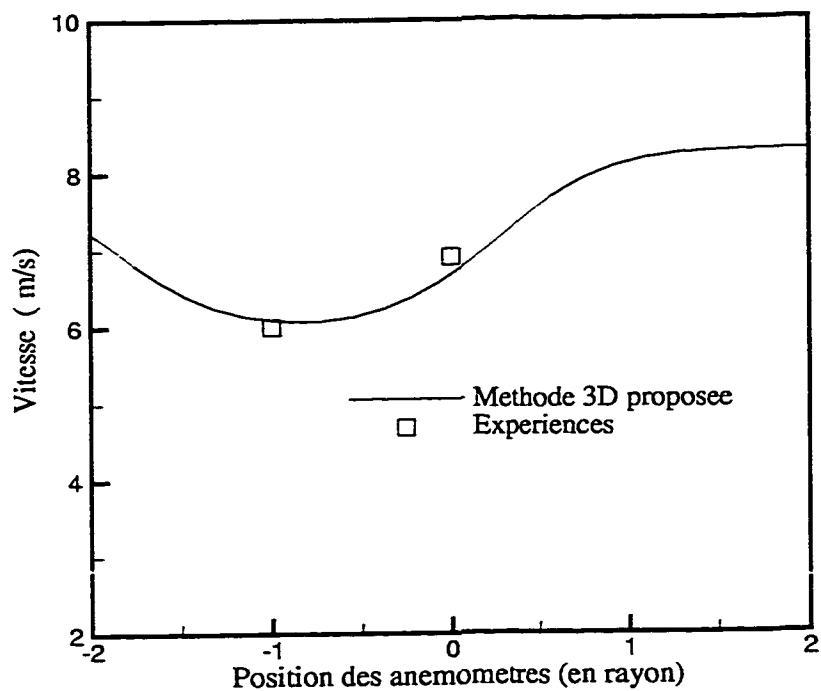


Figure 6.19 Distribution des vitesses dans le sillage de l'éolienne MOD-0A:  $U_0 = 8.17 \text{ m/s}$ , angle du vent =  $193^\circ$

5.2.9) ce qui représente environ 8 heures CPU sur une station de travail de type IBM SP2. La figure 6.18 présente des comparaisons entre les vitesses dans le sillage prédites par la méthode proposée et des résultats expérimentaux pour un vent incident de 5.67 m/s à hauteur de moyeu et faisant un angle de  $23^\circ$  par rapport à la direction nord. Des comparaisons similaires sont présentées à la figure 6.19 pour un vent de 8.17 m/s faisant un angle de  $193^\circ$  avec la direction nord. L'abscisse de ces courbes représente la distance normale (normalisée par rapport au rayon du rotor) par rapport à l'orientation  $25^\circ$  (représentée par une ligne pointillée à la figure 6.17), permettant de repérer la position des anémomètres par rapport à l'axe de rotation de l'éolienne. Les lignes pleines indiquent les vitesses prédites par la méthode proposée alors que les symboles carrés représentent les vitesses relevées expérimentalement.

par les anémomètres. Dans les deux cas, les prédictions de vitesse dans le sillage sont proches de celles obtenues expérimentalement. Une légère sous-estimation des vitesses est observable et peut être attribuée à la simplicité de la modélisation de la turbulence utilisée dans ce travail (voir section 4.3). À partir de ces résultats, il semble que la méthode proposée soit précise dans la prédiction du sillage en aval d'une éolienne. Des comparaisons et des études supplémentaires seraient toutefois nécessaires afin de confirmer plus fermement cette affirmation. Ce travail de validation fait partie d'une recherche parallèle portant sur la turbulence et la représentation du sillage [20] et dépasse par conséquent les objectifs de ce travail. Néanmoins, de par la précision des résultats obtenus, des simulations préliminaires de parcs éoliens peuvent être entreprises avec confiance.

#### 6.2.4 Parc éolien périodique à deux rangées

Après avoir validé les divers aspects relatifs à la modélisation d'une éolienne isolée, la simulation de parcs éoliens peut être entreprise. Les parcs éoliens étudiés dans ce travail sont composés de rangées linéaires d'éoliennes disposées perpendiculairement à la direction de vent la plus énergétique. Ce type d'arrangement est typiquement utilisé pour l'aménagement éolien de terrains plats non-obstrués tels qu'une plaine, un champ ou un désert. Tels que présentés en détail à la section 5.3.6, ces arrangements ont la propriété d'être géométriquement périodiques ce qui permet de limiter le volume de calcul nécessaire à la simulation complète d'un parc éolien. Une des principales difficultés dans la simulation de tels parcs, réside dans la modélisation des diverses orientations de vent agissant sur le parc. Pour ce faire, trois types de maillages correspondant à trois gammes de directions de vent ont été développés (voir section 5.3.6). Les résultats présentés dans cette section ont pour objectif de démontrer la capacité de la méthode proposée à simuler les interactions aérodynamiques dans un parc éolien périodique et à en prédire les performances pour

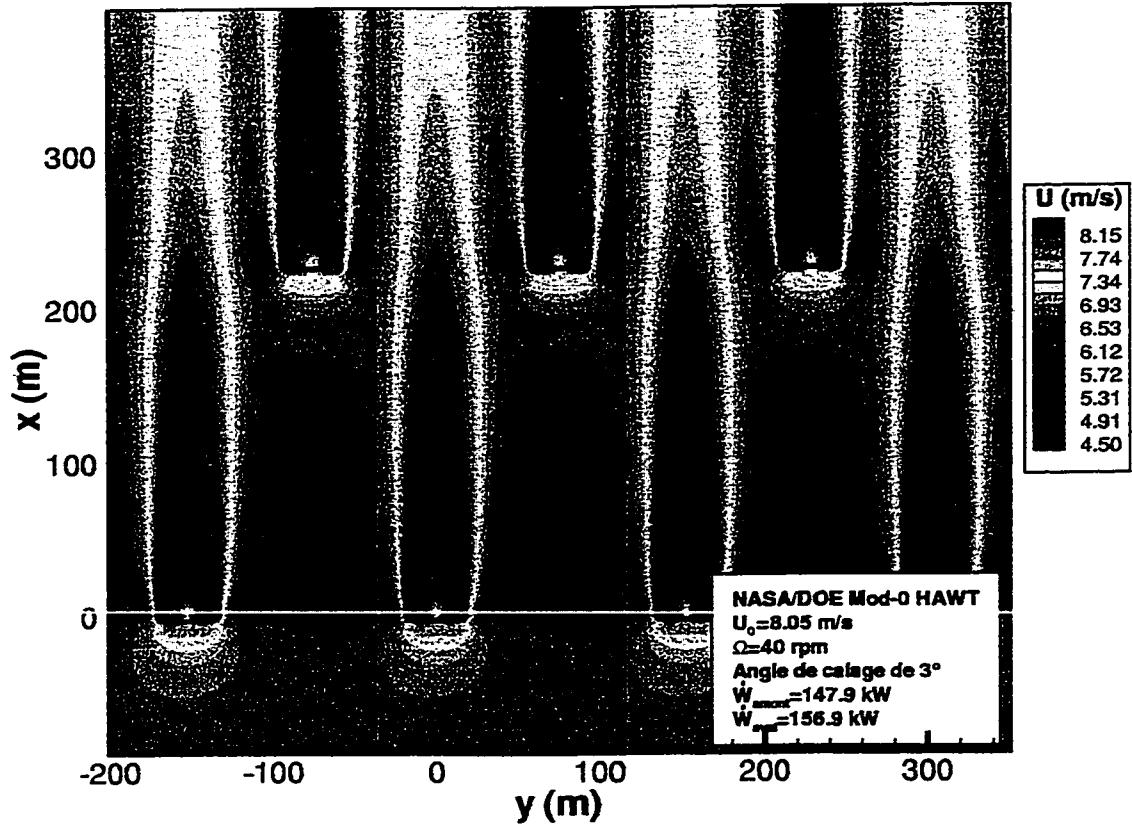


Figure 6.20 Contour de vitesse sur un plan de coupe à hauteur de moyeu, pour  $U_0 = 8.05 \text{ m/s}$ ,  $\Psi = 90^\circ$

toutes les conditions de vent correspondant à une rose des vents complète.

La pratique actuellement acceptée dans l'industrie éolienne consiste à espacer les éoliennes de 2 à 5 diamètres de rotor (DR) dans la direction de l'arrangement et de 6 à 10 DR dans la direction normale à l'arrangement. Le parc éolien considéré dans les simulations de cette section est constitué de deux rangées d'éoliennes expérimentales 100-kW NASA/DOE Mod-0 espacées de 4 DR dans la direction de l'arrangement alors qu'une distance de 6 DR séparent les deux rangées. Les éoliennes constituant la première et la seconde rangée sont décalées dans la direction de l'arrangement les unes par rapport aux autres à la façon d'un échiquier. Les simulations furent entreprises pour une vitesse de vent incident de 8.05 m/s alors que la densité  $\rho$  et la viscosité  $\mu_t$  de l'air ont été prescrites à  $1.25 \text{ kg/m}^3$  et  $5.4 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$  respectivement

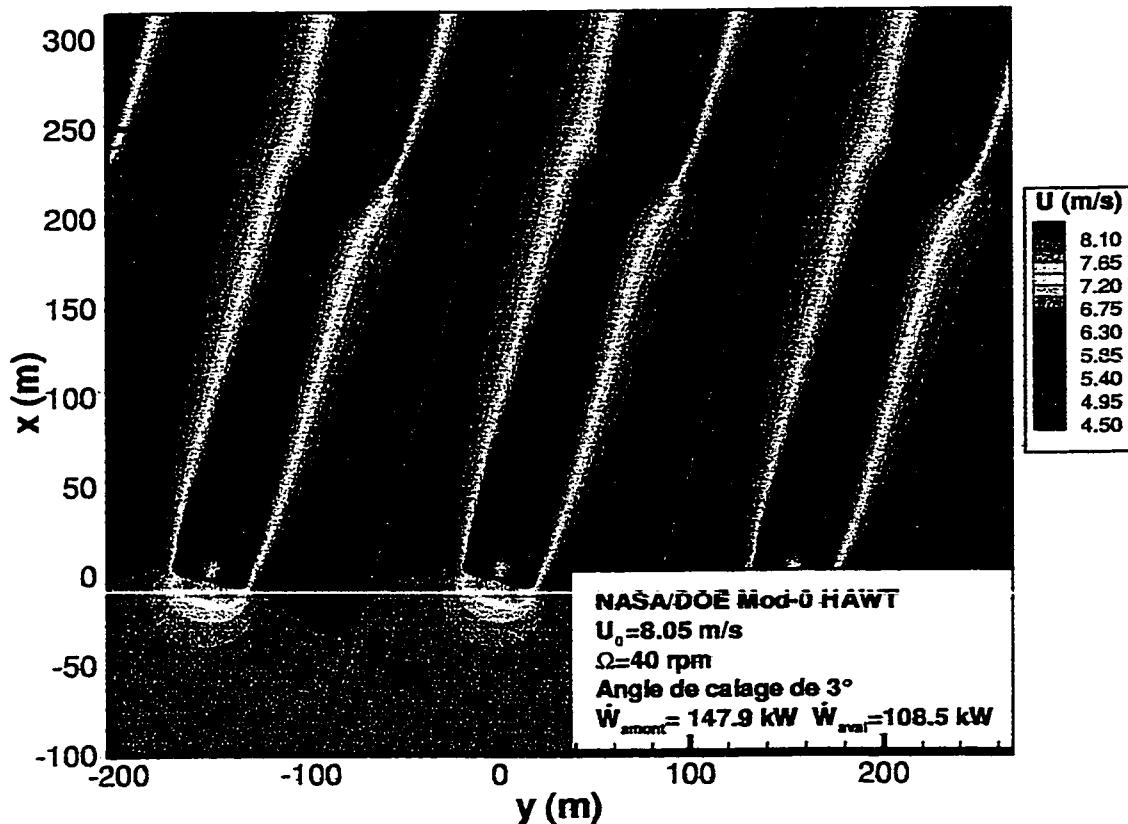


Figure 6.21 Contour de vitesse sur un plan de coupe à hauteur de moyeu, pour  $U_0 = 8.05 \text{ m/s}$ ,  $\Psi = 75^\circ$

afin de reproduire les conditions de turbulences retrouvées à hauteur du moyeu dans une couche limite atmosphérique neutre. Pour ces conditions d'opérations, trois directions de vent nécessitant l'utilisation des trois types de maillages développés ont été étudiées. Les figures 6.20, 6.21 et 6.22 présentent les graphiques des iso-contours de vitesse sur un plan de coupe horizontal à la hauteur du moyeu pour des directions de vent de  $\Psi = 90^\circ, 75^\circ, 15^\circ$  respectivement (définition de  $\Psi$  à la section 5.3.6). Les simulations ont été réalisées sur des maillages comprenant  $74 \times 51 \times 43$ ,  $76 \times 50 \times 43$  et  $74 \times 56 \times 43$  points pour les cas  $\Psi = 90^\circ, 75^\circ, 15^\circ$  respectivement. Environ, 400 itérations furent nécessaires à l'obtention de la convergence en puissance (voir section 5.2.9) pour les cas  $\Psi = 90^\circ, 75^\circ$  alors que le cas  $\Psi = 15^\circ$  nécessita plus

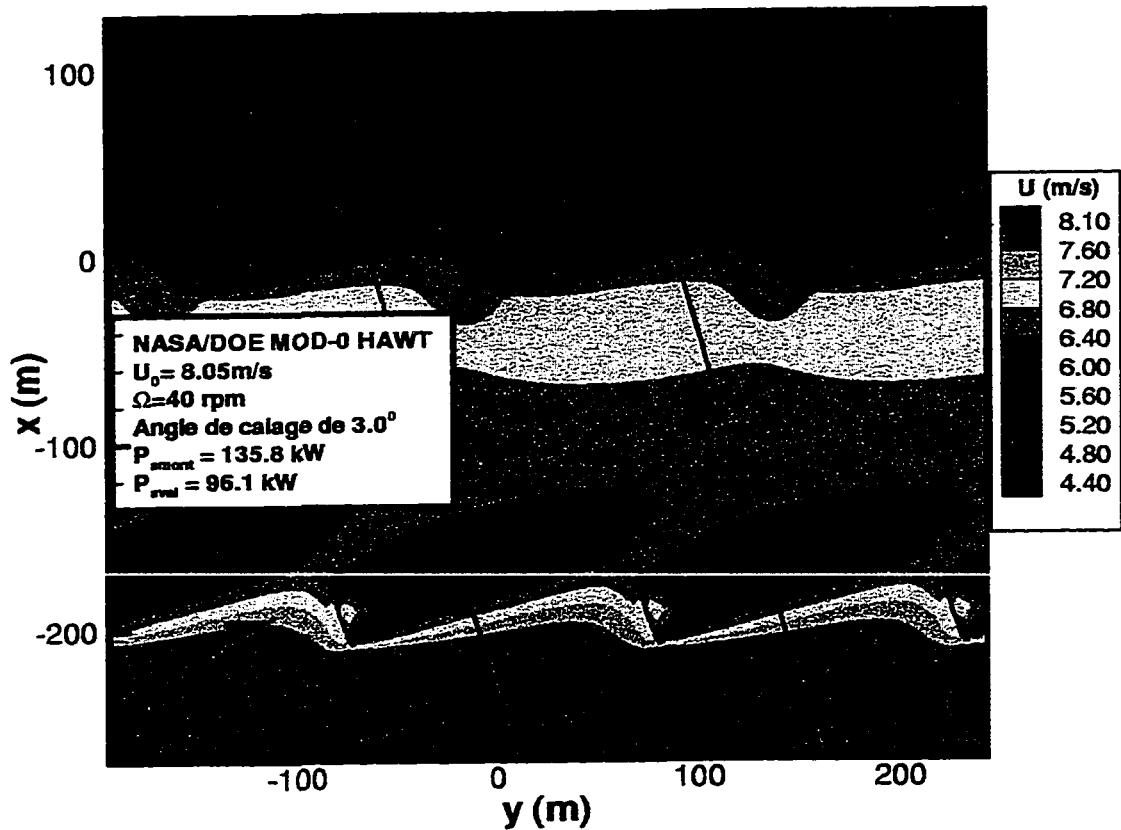


Figure 6.22 Contour de vitesse sur un plan de coupe à hauteur de moyeu, pour  $U_0 = 8.05 \text{ m/s}$ ,  $\Psi = 15^\circ$

de 500 itérations pour converger. Sur une station de travail de type IBM SP2, la convergence des cas  $\Psi = 90^\circ, 75^\circ$  est atteinte en près de 8 heures alors que pour  $\Psi = 15^\circ$  environ 10 heures sont nécessaires. Cette différence de temps de calcul s'explique par le fait que pour  $\Psi = 15^\circ$  l'écoulement est presque perpendiculaire aux frontières périodiques. Ainsi, de par la nature itérative de la méthode de résolution des équations discrétisées (voir section 5.2.9 et annexe I), les informations provenant de l'amont de l'écoulement sont transmises très lentement vers l'aval. Dans les trois cas présentés aux figures 6.20, 6.21 et 6.22 le domaine de calcul est délimité par des traits gras alors que les contours adjacents ne sont que de simples translations de la solution calculée. La périodicité de la solution est confirmée par l'ajustement exact

des solutions translatées les unes par rapport aux autres. Les échelles de couleurs représentent la grandeur de la vitesse de l'écoulement permettant ainsi de repérer les zones de sur-vitesse et de ralentissement dans l'écoulement. Dans ces conditions d'opérations, la puissance mécanique fournie par une éolienne NASA/DOE Mod-0 isolée est de 145,9 kW. La figure 6.20 présente le cas où  $\Psi = 90^\circ$ . Dans cette configuration, les éoliennes de la rangée amont produisent 147.9 kW et celles de la rangée aval donnent 156.9 kW. D'une façon globale, par rapport à une éolienne isolée, en moyenne, chaque éolienne produit 4.3 % plus de puissance. Cet accroissement de la puissance produite est principalement attribuable aux performances des éoliennes situées sur la rangée aval. Ainsi, tel qu'observable à la figure 6.20, l'écoulement est accéléré entre les éoliennes amont et leurs sillages pour atteindre les éoliennes aval avec une vitesse supérieure à celle de l'écoulement libre. Cet effet venturi bénéfique était l'un des principaux concepts qui ont motivé ce travail et la démonstration de son existence constitue une réalisation importante. La figure 6.21 présente les iso-contours de vitesse pour le cas où  $\Psi = 75^\circ$ . Dans cette configuration, les éoliennes de la rangée amont produisent 147.9 kW alors que celles de la rangée aval donnent 108.47 kW. Ainsi, une diminution globale moyenne de puissance de 12.1% est observée par rapport au cas isolé. Même si les éoliennes de la rangée amont profitent encore d'un léger effet venturi bénéfique, cet effet est négligeable par rapport à la perte de puissance des éoliennes aval causée par le sillage des éoliennes de la rangée amont. Ainsi, ces dernières produisent 25.7 % moins d'énergie que dans le cas isolé. Tel qu'on peut le visualiser à la figure 6.21, les éoliennes de la rangée aval se trouvent presque directement dans le sillage des éoliennes amont qui conserve un déficit de vitesse relativement important même après avoir parcouru les 6 RD qui séparent les deux rangées. La figure 6.22 présente le cas  $\Psi = 15^\circ$  pour lequel les effets d'interférence de sillage sont encore plus critiques. Dans cette configuration, les éoliennes de la rangée amont produisent 135.8 kW alors que celles de la rangée aval

donnent 96.1 kW. Ainsi, une diminution globale moyenne de puissance de 20.5% est observée. Les éoliennes de la rangée amont sont perturbées par le sillage de leurs voisines et subissent par conséquent une baisse de puissance de 6.9% par rapport au cas d'une éolienne isolée. Quant à elles, les éoliennes aval reçoivent la combinaison des sillages des éoliennes amont et ceux de leurs voisines ce qui entraîne en une baisse très importante de la puissance produite, plus de 34.1% par rapport au cas isolé. Pour ce dernier cas, la qualité de la solution peut être remise en question pour cause de fausse diffusion associée à l'utilisation du schéma de MAW (voir section 5.2.3.4). Ainsi, pour  $\Psi = 15^\circ$ , la direction de l'écoulement n'est pas parallèle aux lignes de maillage et un gradient de vitesse est présent dans la direction normale à l'écoulement. Ces deux conditions réunies sont promotrices de fausse diffusion. De plus, le schéma de MAW bien que très robuste à converger n'est pas reconnue comme le schéma le plus performant pour enrayer les problèmes de fausse diffusion. Les sillages des éoliennes présentés à la figure 6.22 pour  $\Psi = 15^\circ$  sont plus évasé qu'aux figures 6.20( $\Psi = 90^\circ$ ) et 6.21( $\Psi = 75^\circ$ ) ce qui est un indice de la présence de fausse diffusion. Afin de remédier à ce problème, la mise en oeuvre d'un schéma d'interpolation convectif plus précis combiné à l'utilisation d'un maillage plus adapté (maillage non-structuré, par bloc...) devront être entreprises. Au travers des trois exemples de calcul de l'écoulement dans un parc éolien présentés dans cette section, la capacité de la méthode proposée à simuler les interactions aérodynamiques dans un parc éolien et à en prédire les performances pour une rose des vents complète a été démontrée. De plus, à partir des résultats obtenus dans cette étude, les conclusions physiques suivantes peuvent être tirées sur les parcs éoliens:

- Les interférences aérodynamiques mutuelles entre éoliennes jouent un rôle important dans la production énergétique des parcs éoliens.
- Une éolienne faisant partie d'un parc et étant située dans le sillage de ses voisines subit une baisse importante de sa puissance pouvant atteindre jusqu'au

tier de sa puissance en conditions isolées.

- Une éolienne faisant partie d'un parc et bénéficiant d'interférences favorables (effet venturi) peut produire substantiellement plus d'énergie qu'une éolienne isolée, jusqu'à 5% de plus que sa puissance en conditions isolées.

La méthode proposée renferme donc tous les ingrédients nécessaires pour être utilisée pour l'optimisation de l'arrangement des éoliennes dans les parcs éoliens. La section suivante présentera un exemple simple d'optimisation de l'arrangement d'un parc éolien suivi d'une discussion sur l'intégration de la méthode proposée dans un processus d'optimisation systématique.

#### 6.2.5 Optimisation de l'arrangement d'un parc éolien

Les résultats de la section précédente ont permis de démontrer la capacité de la méthode proposée à prédire les interactions aérodynamiques et les performances d'un parc éolien périodique pour une rose des vents complète. Cette méthode peut donc être employée pour optimiser la production énergétique d'un parc éolien par un meilleur positionnement des éoliennes. Ainsi, pour un site donné et sa rose des vents, en limitant au maximum les interférences négatives de sillage et en capitalisant sur les effets venturi bénéfiques, la production énergétique d'un parc éolien peut être améliorée par rapport à celle d'un parc classique standard. Afin d'illustrer de façon simple cette procédure d'optimisation, l'arrangement périodique à deux rangées considéré à la section précédente est optimisé pour une seule direction de vent et un seul paramètre géométrique. Ainsi, pour fin d'exemple, seule la direction  $\Psi = 90^\circ$  sera considérée alors que la distance entre les deux rangées ( $X_{step}$ ) sera l'unique paramètre à optimiser. Pour ce cas test, la vitesse du vent incident a été fixée à 8.05 m/s alors que la densité  $\rho$  et la viscosité  $\mu_t$  de l'air ont été prescrites à 1.25 kg/m<sup>3</sup> et 5.4 N · s/m<sup>2</sup> respectivement afin de reproduire les conditions de turbulences retrouvées à hauteur du moyeu dans une couche limite atmosphérique

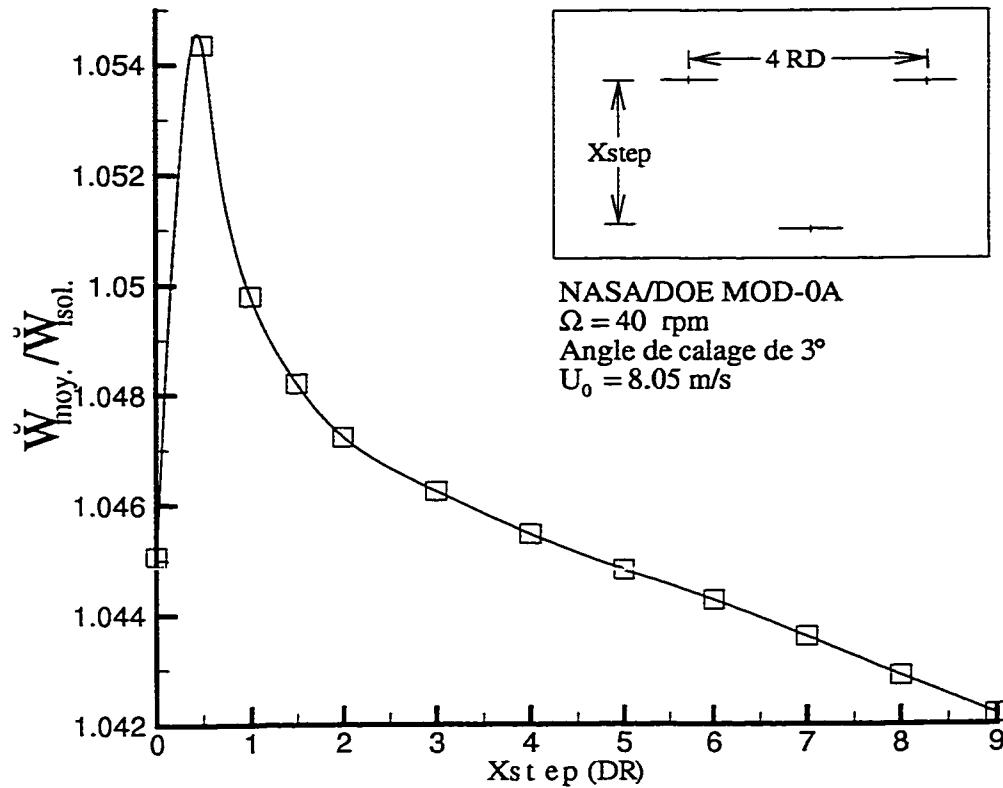


Figure 6.23 Production de puissance moyenne par éolienne pour  $y_{step} = 4 \text{ RD}$ ,  $U_0 = 8.05 \text{ m/s}$ ,  $\Psi = 90^\circ$

neutre. La figure 6.23 présente la variation de la puissance moyenne (normalisée par rapport à la puissance d'une éolienne isolée) d'une éolienne NASA/DOE Mod-0 de l'arrangement en fonction de la distance Xstep séparant les deux rangées. Ainsi, en diminuant la distance Xstep entre les deux rangées d'éoliennes par rapport à la pratique standard (i.e.  $6 \text{ DR} < Xstep < 10 \text{ DR}$ ), l'intensité de l'effet venturi augmente et par conséquent, la production énergétique croît. La puissance produite maximale est obtenue pour une distance Xstep = 0.48 DR pour laquelle un accroissement moyen de puissance de 5.4% est observé par rapport au cas isolé. Même si ce cas reste théorique, il met néanmoins en évidence l'existence d'un positionnement optimal des éoliennes pour lequel la production énergétique est maximale. D'après

ces résultats, il est donc concevable d'obtenir un positionnement optimal semblable pour un cas réel ce qui permettrait d'augmenter la production énergétique des parcs éoliens ou d'en réduire les dimensions tout en conservant la production d'un parc classique actuel. Cette augmentation de production ou cette diminution de superficie se traduiront toutes deux par une baisse du coût de l'énergie éolienne. Afin de permettre une possible application pratique, le processus d'optimisation doit être étendu à la rose des vents complète et à l'ensemble des paramètres géométriques définissant l'arrangement des éoliennes. De plus, l'optimisation doit être réalisé de façon systématique à l'aide d'un optimisateur numérique. Lorsqu'appliqué à l'exemple précédent, l'optimisateur CENTAURE [16] basé sur la méthode des faisceaux requerra 5 itérations pour trouver la valeur de Xstep correspondant à la puissance produite maximale. Pour chaque itération, les valeurs d'entrée de Centaure sont la puissance et ses dérivées par rapport aux paramètres à optimiser. En étendant l'optimisation à 8 directions de vent et 4 paramètres géométriques et en supposant le nombre conservateur de 15 itérations d'optimisation pour trouver l'arrangement optimum, environ 250 jours CPU de calcul sont nécessaire sur une station de travail de type IBM SP2. Une optimisation complète d'un parc ne peut donc pas être envisagée avec les capacités informatiques actuelles. Alternativement, la méthode proposée peut être utilisée pour développer un modèle empirique précis de sillage à partir duquel un premier arrangement pourrait être établi. Puis pour les directions de vent les plus énergétiques, sur la base de l'arrangement préliminaire, une optimisation fine pourrait être entreprise à l'aide de la méthode proposée. En combinant, un modèle de sillage empirique à la méthode proposée, il est envisageable de diminuer les coûts de l'énergie éolienne à travers une meilleur conception de l'arrangement des éoliennes dans les parcs.

## CHAPITRE VII

### CONCLUSIONS

#### 7.1 Compte rendu du mémoire

Dans ce travail, une méthode numérique permettant la simulation de l'écoulement autour de parcs d'éoliennes à axe horizontal a été développée. Basée sur l'introduction des forces externes dans les équations de Navier-Stokes [34, 35, 36] et les CVFEMs [4, 24, 38], la méthode proposée possède la capacité de prédire les performances d'un parc éolien pour une rose des vents complète tout en modélisant correctement les interactions aérodynamiques qui s'y déroulent. Les principales réalisations effectuées dans ce travail sont résumées ci-dessous:

- Au chapitre I, suite à un bref historique sur les éoliennes ainsi qu'une description de leurs formes modernes et de leurs fonctionnements, les objectifs et les motivations de ce travail furent présentés. Ainsi, le principal objectif de ce travail consistait à développer une méthode d'analyse de l'écoulement autour d'un parc d'éoliennes à axe horizontal. Plus précisément, cette méthode devait permettre de prédire la puissance produite par un parc tout en simulant correctement les interactions aérodynamiques entre éoliennes y prenant place et souvent responsables de pertes énergétiques. La méthode développée pourra par la suite être employée pour augmenter la production énergétique en optimisant le positionnement des éoliennes dans les parcs.
- Le chapitre II comportait deux sujets principaux. Le premier était le développement en détail de la problématique de l'interférence de sillage dans les parcs éoliens précédemment abordée au chapitre I. Puis, une revue bibliographique

des diverses méthodes d'analyse aérodynamique des parcs éoliens fut présentée. Ainsi, un recensement et une brève évaluation de ces méthodes a permis d'établir qu'un modèle basé sur les équations de Navier-Stokes comportait toutes les qualités nécessaires à l'étude de l'aérodynamique des parcs éoliens et était par conséquent le plus approprié pour ce travail. Cette approche fut proposée par Rajagopalan et Fanucci [34] et Rajagopalan [36, 35].

- Le chapitre III fut consacré à la présentation d'une vue d'ensemble de la méthodologie employée dans ce travail pour la simulation numérique de l'écoulement autour d'un parc éolien. Les grandes lignes de la méthode ainsi que les principales hypothèses simplificatrices y furent présentées. Ainsi, il fut proposé de prédire l'écoulement incompressible tridimensionnel autour d'un parc éolien en solutionnant les équations de Navier-Stokes en régime stationnaire dans lesquels les rotors sont représentés par des distributions de forces externes. Ce modèle mathématique fut solutionné à l'aide d'une Méthode aux Éléments Finis/Volumes de Contrôle (CVFEM) à collocation d'ordre égal. Deux méthodes seront successivement développées: (i) un modèle axisymétrique à trois composantes de vitesse et (ii) un modèle cartésien tridimensionnel.
- La présentation du modèle mathématique retenu est faite au chapitre IV. Les équations de Navier-Stokes qui gouvernent la dynamique de l'écoulement y furent présentées, suivies par le développement mathématique menant aux expressions analytiques des forces externes représentants l'action des pales sur le fluide. Puis la modélisation de la turbulence et la caractérisation de l'écoulement incident furent successivement exposées. À la fin du chapitre, les principaux résultats sont repris et présentés en notation développée pour chacune des deux formulations axisymétrique et cartésienne tridimensionnelle.

- Le chapitre V avait pour objet la présentation de la méthode numérique. Une vue d'ensemble de la méthode et des divers aspects essentiels à sa compréhension fut donnée avec une emphase particulière sur les éléments concernant la modélisation des éoliennes. Les méthodes des CVFEMs à partir desquelles a été réalisé ce travail ont été développées par Masson et al. [24] et Saabas et Baliga [38].
- Le chapitre VI fut divisé en deux parties; la première portant sur les résultats obtenus par la méthode axisymétrique tandis que la seconde présenta les résultats cartésiens tridimensionnels. Ainsi, après avoir déterminé, par des études successives, l'étendue minimale du domaine de calcul ainsi que la finesse du maillage nécessaire à l'obtention de solutions pertinentes, la précision de la méthode axisymétrique en terme de prédition de performance d'une éolienne isolée fut analysée. Il fut établi que dans le cas d'éoliennes isolées, la méthode axisymétrique proposée produit des prédictions de performance avec le même niveau de précision que la théorie bien reconnue du tube de courant, ce qui fait d'elle un outil utile pour la conception d'éoliennes à axe horizontal. D'une façon analogue, en analysant les prédictions de performances provenant de la méthode cartésienne, il a été démontré que pour une finesse de maillage similaire, les méthodes axisymétrique et cartésienne présentent un niveau de précision équivalent à celui de la théorie du tube de courant. Ensuite, en reproduisant les résultats expérimentaux de Doran et al., il fut établi que la méthode cartésienne proposée permet de prédire avec une bonne précision les vitesses dans le sillage en aval des éoliennes, qualité essentielle à l'analyse réussie de l'aérodynamique d'un parc éolien. Puis, à travers trois exemples de calcul de l'écoulement dans un parc éolien périodique à deux rangées, la capacité de la méthode proposée à simuler les interactions aérodynamiques dans un parc éolien et à en prédire les performances pour une rose des vents complète fut démontrée. Cette étude

permit aussi de tirer les conclusions physiques suivantes sur les parcs éoliens:

- Quantifier les effets importants des interférences aérodynamiques mutuelles entre éoliennes sur la production énergétique des parcs éoliens:
  - \* Une éolienne faisant partie d'un parc et étant située dans le sillage de ses voisines subit une baisse importante de sa puissance pouvant atteindre jusqu'au tiers de sa puissance en conditions isolées.
  - \* Une éolienne faisant partie d'un parc et bénéficiant d'interférences favorables (effet venturi) peut produire substantiellement plus d'énergie qu'une éolienne isolée, jusqu'à 5% de plus que sa puissance en conditions isolées.
- Il est possible d'augmenter la production énergétique des parcs éoliens actuels ou d'en diminuer la superficie (en conservant la même production énergétique) en optimisant le positionnement des éoliennes.

De plus, il fut établi que de par les besoins informatiques trop importants, une optimisation systématique complète de l'arrangement d'un parc éolien ne peut pas être envisagée sur les bases de la méthode proposée. Alternativement, en combinant, un modèle de sillage empirique à la méthode proposée, il est envisageable de diminuer les coûts de l'énergie éolienne à travers une meilleure conception de l'arrangement des éoliennes dans les parcs.

En résumé, à travers les divers résultats produits, les capacités de la méthode proposée à analyser l'aérodynamique d'un parc éolien ont été démontrées. La méthode proposée a donc le potentiel pour devenir un outil utile pour les concepteurs de parcs éoliens.

## 7.2 Contributions du travail

Les principales contributions réalisées dans ce travail sont les développements successifs d'une méthode axisymétrique à trois composantes de vitesse [23] et d'une méthode cartésienne tridimensionnelle [2] pour la simulation de l'écoulement autour de parcs d'éoliennes à axe horizontal. Ce travail constitue une première application des CVFEMs à la modélisation de parcs éoliens et les résultats obtenus sont très encourageants. À travers les développements de ces deux méthodes numériques, on peut identifier plusieurs contributions relatives à la formulation du modèle mathématique, la méthode numérique et les résultats obtenus. Ces contributions sont résumées ci-dessous:

- Le développement et l'implémentation d'une formulation générale de l'expression analytique des forces externes produites par le rotor indépendante du système de coordonnées et de la forme des volumes de contrôle employés [3].
- Le développement et l'implémentation d'une procédure originale d'intégration des forces externes dans le cadre de la méthode cartésienne tridimensionnelle faisant intervenir un maillage de surface permettant d'accroître la précision des calculs sans augmenter de façon significative les besoins en ressource informatiques [3].
- L'utilisation des propriétés de périodicité géométrique des parcs permettant de réduire l'étendue du domaine de calcul requis pour modéliser l'écoulement complet autour d'un parc éolien. Cette tâche nécessite la modification de l'algorithme générale de résolution de la méthode et plus précisément l'implantation d'un algorithme cyclique de résolution de matrice tridiagonale (CT-DMA) [2].
- L'implémentation de trois types de maillage correspondant à trois gammes de direction de vent, ce qui permet la modélisation de parcs pour une rose des

vents complète [2].

- Établissement de conclusions sur la physique des parcs éoliens, telle que la démonstration de la présence d'effets venturi bénéfiques dans le cas de parcs éoliens denses et la quantification des effets des interférences de sillages sur la puissance produite par un parc éolien.

### 7.3 Recommandations

Les recommandations quant aux efforts futurs à investir dans la continuité de ce travail concernent deux domaines principaux: (i) l'amélioration de l'efficacité de la méthode numérique et (ii) l'amélioration de la précision du modèle mathématique. Ainsi, pour réaliser ces deux objectifs, les travaux suivants pourraient être réalisés:

- La méthode numérique proposée était basée sur un maillage structuré. La flexibilité géométrique supplémentaire associée à un maillage non-structuré permettrait un meilleur contrôle de la concentration des points dans le domaine de calcul d'où l'obtention d'une méthode numérique plus efficace.
- L'ensemble de l'algorithme de la méthode numérique devrait être revu et optimisé. Ainsi, des algorithmes de solution séquentiel plus performants et des techniques de multigrille [9] pourront être incorporés pour améliorer la vitesse de convergence de la méthode.
- Un modèle de turbulence plus sophistiqué, tenant compte de la création de turbulence provenant des rotors, devrait être utilisé. Ainsi, les résultats et les conclusions du travail de Leclerc [20] portant sur la modélisation de la turbulence des éoliennes devrait être fusionnés au présent travail.
- La modélisation des éoliennes pourrait intégrer divers aspects ignorés dans ce travail tels que la présence de la tour ou l'instationnarité de l'écoulement; aspects intéressants pour l'étude de la fatigue des pales par chargement cyclique.

- Après avoir effectué quelques unes des améliorations précédemment citées, un modèle empirique de sillage pourra être développé et utilisé conjointement à la méthode proposée pour une possible application pratique à la conception de parc éolien.

En conclusion, ce travail étant un premier effort dans la modélisation de l'aérodynamique des parcs éoliens par les équations de Navier-Stokes et les CVFEMs, l'auteur espère que ce travail et les résultats obtenus faciliteront et encourageront d'autres recherches dans le même domaine.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.H. Alfredsson, J.A. Dahlberg, et P.E.J. Vermeulen, (1982). A Comparison between Predicted and Measured Data from Wind Turbine Wakes. Wind Engineering, 6(3):149–155.
- [2] I. Ammara, C. Masson, C. Leclerc, et I. Paraschivoiu, (1998). A Fully Three-Dimensional Turbulent Method for the Analysis of Windturbines in Wind Farms. Dans ISROMAC-8, Honolulu, USA.
- [3] I. Ammara, C. Masson, et I. Paraschivoiu, (1997). A 3-D Aerodynamic Method for the Analysis of Isolated-Horizontal Axis Wind Turbines. Dans WINDPOWER'97, Austin, Texas.
- [4] B.R. Baliga et S.V. Patankar, (1988). Hand Book of Numerical Heat Transfer, chapter 11, pages 421–461. Wiley, New York.
- [5] R.V.B. Best, (1981). The Capacity Factor of a Wind Turbine Cluster. Wind Engineering, 5(4):235–241.
- [6] A. Betz et L. Prandtl, (1919). Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. Goettinger Nachrichten, mathematisch-physikalische Klasse, pages 193–217.
- [7] B.F. Blackwell, R.E. Sheldahl, et L.V. Feltz, (1976). Wind Tunnel Performance Data for the Darrieus Turbine with NACA 0012 Blades. Rapport technique SAND 76-0130, Sandia National Laboratories.
- [8] G.M. Bragg et W.L. Schmidt, (1978). Determination of Optimum Arrays Theory of Wind Energy Conversion Devices. Journal of Energy, 2(3):155–159.

- [9] W. L. Briggs, (1987). A Multigrid Tutorial. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [10] P.J.H. Builtjes et J. Smith, (1978). Calculation of Wake Effects in Wind Turbine Parks. Wind Engineering, 2(3):135–145.
- [11] D. Chocron, (1997). ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA FORMATION DE GLACE SUR LES ÉOLIENNES À AXE HORIZONTAL. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.
- [12] B.R. Clayton et P. Filby, (1981). Wind Turbine Wake Studies. Dans Proceedings of the Third BWEA Wind Energy Conference, pages 172–184, Cranfield. BHRA Fluid Engineering.
- [13] C. Crafoord, (1975). An Estimate of the Interaction of a Limited Array Theory of Windmills. Rapport technique DM-16, Dept. of Meteorological Institute, Stockholm, Sweden.
- [14] J.C. Doran et K.R. Packard, (1982). Comparison of Model and Observations of the Wake of a MOD-0A Wind Turbine. Rapport technique PNL-4433, Pacific Northwest Laboratory, Richland, WA.
- [15] J.B. Fanucci et R.E. Walters, (1976). Innovative Wind Machines: The Theoretical Performance of a Vertical Axis Wind Turbine. Dans Proceedings of the Vertical Axis Wind Turbine Technology Workshop, number SAND 76-5586, Albuquerque, NM. Sandia National Lab.
- [16] F. Fourcade, T. Eve, et T. Socroun, (1996). Optimiser les chargements des réacteurs nucléaires français. Rapport technique 96-12, CETAI, Montréal.
- [17] L.H. Gordon, (1984). Mod-2 Wind Turbine Field Operations Experiences. Dans Proceedings of the 19th IECEC, pages 2363–2368, San Francisco.

- [18] J. Hernandez et A. Crespo, (1987). Aerodynamic Calculation of the Performance of Horizontal Axis Wind Turbines and Comparison with Experimental Results. Wind Engineering, 11:177–187.
- [19] B. Hibbs et R.L. Radkey, (1983). Calculting Rotor Performance with Revised 'PROP' Computer Code. Rapport technique, Aerovironnement Inc., 145 Vista Avenue Pasadena, CA 91107.
- [20] C. Leclerc, C. Masson, et I. Paraschivoiu, (1997). Performance and Wake Predictions of HAWTs in Wind Farms. Dans WINDPOWER'97, Austin, Texas.
- [21] P.B.S. Lissaman, (1979). Energy Effectiveness of Arbitrary Arrays of Wind Turbines. Journal of Energy, 3:323–328.
- [22] O. Ljungstrom, (1977). Large Scale Wind Energy Conversion System(WECS) Design and Installation as Affected by site Wind Energy Characteristics, Grouping arrangement and Social Acceptance. Wind Engineering, 1(1):36–57.
- [23] C. Masson, I Ammara, et I. Paraschivoiu, (1997). An Aerodynamic Method for the Analysis of Isolated Horizontal-Axis Wind Turbines. International Journal of Rotating Machinery, 3:21–32.
- [24] C. Masson, H.J. Saabas, et B.R. Baliga, (1994). Co-Located Equal-Order Control Volume Finite Element Method for Two-Dimensional Axisymmetric Incompressible Fluid Flow. International Journal for Numerical Method in Fluids, 18:1–26.
- [25] A.J.F. Metherell, A. Sawer, D.M.A. Wilson, D.J. Milborrow, et J.N. Ross, (1982). Wind Tunnel Studies of interacting Wind Turbines. Dans Proceedings of the 4th BWEA Wind Energy Conference, pages 237–247, Cranfield. BHRA Fluid Engineering.

- [26] P.G. Migliore et W.P. Wolfe, (1979). Some Effects on Flow Curvature on the Aerodynamics of Darrieus Wind Turbines. Rapport technique, West Virginia University.
- [27] D.J. Milborrow, (1980). The performance of Arrays of Wind Turbines. Journal of Industrial Aerodynamics, 5:403–430.
- [28] D.J. Milborrow, (1981). Measurement and Interpretation of Wind Turbine Wake Data. Dans Proceedings of the Third BWEA Wind Energy Conference, pages 153–164, Cranfield. BHRA Fluid Engineering.
- [29] Auteurs Multiples, (1994). Wind Turbine Technology:Fundamental Concepts of Wind Turbine Engineering. ASME Press, NY.
- [30] B.G. Newman, (1977). The spacing of Wind Turbines in Large Arrays. Energy Conversion, 16(169-171).
- [31] R. Nierenburg, (1990). Wake Deficit Measurements on the Jess and Souza Ranches, Altamont Pass. Rapport technique SERI/TP-257-3455, SERI, San Rafael, Californie.
- [32] H. Panofsky et J. Dutton, (1984). Atmospheric Turbulence. John Wiley&Sons.
- [33] R.L. Puthoff et P.J. Siroky, (1974). Preliminary Design of a 100-kW Wind Turbine Generator. Rapport technique NASA TMX-71585, NASA.
- [34] R.G. Rajagopalan et J.B. Fanucci, (1985). Finite Difference Model of Vertical Axis Wind Turbines. Journal of Propulsion and Power, 1(6):432–436.
- [35] R.G. Rajagopalan et T.L. Rickerl, (1990). Aerodynamic Interference of Vertical Axis Wind Turbines. Journal of Propulsion and Power, 6(5):645–653.
- [36] Rajagopalan R.G., (1984). Inviscid Upwind Finite Difference Model for Two-Dimensional Vertical Axis Wind Turbines. Thèse de Doctorat, West Virginia University, Morgatown.

- [37] J.N. Ross et J.F. Ainslie, (1982). Wake Measurements in Clusters of Model Wind Turbines Using Laser Doppler Anemometry. Dans Proceedings of the 4th BWEA Wind Energy Conference, pages 272–282, Cranfield. BHRA Fluid Engineering.
- [38] H.J. Saabas et Baliga B.R., (1994). Co-Located Equal-Order Control-Volume Finite Element Method for Multidimensional, Incompressible, Fluid Flow-Part I. Numerical Heat Transfer, 26B:21–32.
- [39] M.S. Selig et J.L. Tangler, (1995). Development and Application of a Multipoint Inverse Design Method for Horizontal Axis Wind Turbines. Wind Engineering, 10(2).
- [40] P.M. Sforza, (1979). Wind Turbine Generator Wakes. AIAA Paper 79-0113.
- [41] J.H. Strickland, B.T. Webster, et T. Nguyen, (1979). A Vortex Model of the Darrieus Turbine: An Analytical and Experimental Study. Journal of Fluids Engineering, 101:500–505.
- [42] P.A. Taylor, (1980). Power Reduction in Wind Farms Arrays-An Application to the array proposed for the Kahuku Hills. Wind Engineering, 4(2).
- [43] J. Templin, (1974). An estimate of the Interaction of Windmills in Widespread Theory arrays. Rapport technique LTR-LA-171, National Research Council, Ottawa, Canada.
- [44] P.E.J. Vermeulen, (1980). An Experimental Analysis of Wind Turbine Wakes. Dans Proceedings of the 3rd International Symposium on Wind Energy Systems, Cranfield. BHRA.
- [45] D.C. Wilcox, (1993). Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries Inc., La Cañada, California.

[46] R.E. Wilson et P.B.S. Lissaman, (1974). Applied Aerodynamics of Wind Power Machines. Rapport technique, Oregon State University.

## ANNEXE I

### PROCÉDURE DE GÉNÉRATION DU MAILLAGE DE SURFACE

La procédure de génération du maillage de surface se divise en deux étapes. Tout d'abord, les faces triangulaires des éléments tétraédriques , comprises sur la surface  $A_{Rotor}$  balayée par chaque éolienne et formant un carré de coté  $2 \cdot R \cos \gamma$  centré sur l'axe de rotation du rotor (voir figure 5.15), sont subdivisées en 4 mini-éléments triangulaires. Ainsi, chaque face triangulaire est subdivisé en 2 mini-éléments triangulaires et une surface quadrilatérale ayant comme frontières les faces des volumes de contrôle (voir 5.3.1). Puis la surface quadrilatéral est elle même divisée en deux mini-éléments triangulaires en joignant le point sommet au milieu de la face opposée. Cette séquence d'opération conduisant à la subdivision des l'éléments triangulaires en 4 mini-éléments est illustré à la figure I.1.

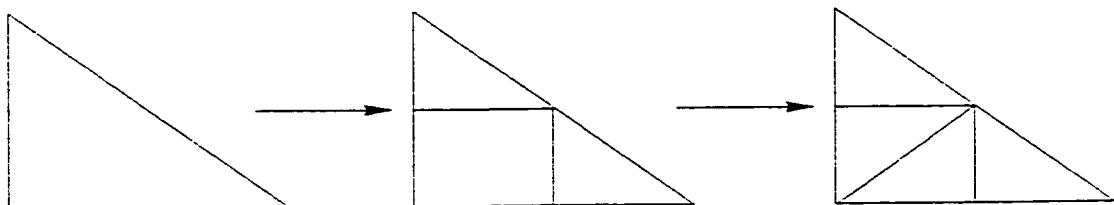


Figure I.1 Division des faces triangulaires en mini-éléments

La seconde étape de la procédure de génération du maillage de surface consiste à découper les mini-éléments sur la frontière de la surface balayée par les pales afin que le maillage de surface représente fidèlement et précisément la géométrie du rotor. Ainsi chaque mini-élément triangulaire précédemment créé peut être répertorié dans six groupes différents correspondant à la position relative de ses 3 sommets par rapport à la surface balayé par les pales.

Tableau I.1 Table pour le découpage des mini-éléments de frontière

Classification des mini-éléments	Traitements
	3 points à l'extérieur de la surface balayée Mini-élément rejeté
	3 points à l'intérieur de la surface balayée Mini-élément accepté
	1 point à l'extérieur de la surface balayée Découpage en 2 mini-éléments
	2 points à l'extérieur de la surface balayée Découpage en 1 nouveau mini-élément
	1 point sur la frontière et 2 points à l'intérieur de la surface balayée Mini-élément rejeté
	1 point sur la frontière et 2 points à l'intérieur de la surface balayée Mini-élément accepté

En fonctions de ce classement, le mini-élément sera:

- Accepté comme tel dans le maillage de mini-élément
- Rejeté du maillage de mini-élément
- Subira des modifications

Le tableau à la figure I résume les 6 configurations possibles des mini-éléments et le traitement correspondant. Finalement, une fois le maillage de mini-éléments terminé, l'ensemble des données géométriques relative aux mini-éléments est conservé en mémoire afin de rentre la procédure d'intégration des forces externes plus efficace.

## ANNEXE II

### ALGORITHMES DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES LINÉAIRES

**Algorithme de résolution de matrices tridiagonales(TDMA)** La tâche consiste à résoudre le système d'équation suivant:

$$A_i \phi_i = B_i \phi_{i+1} + C_i \phi_{i-1} + D_i \quad (\text{II.1})$$

pour  $i = 1, 2, 3\dots, N$ . Pour tenir compte de la forme spéciale des équations aux frontières, on pose:

$$C_1 = 0, \quad B_N = 0 \quad (\text{II.2})$$

On recherche la transformation suivante:

$$\phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i \quad (\text{II.3})$$

après avoir obtenu

$$\phi_{i-1} = P_{i-1} \phi_i + Q_{i-1} \quad (\text{II.4})$$

En substituant l'équation II.4 dans l'équation II.1, on obtient

$$A_i \Phi_i = B_i \phi_{i+1} + C_i (P_{i-1} \phi_i + Q_{i-1}) + D_i \quad (\text{II.5})$$

Cette équation peut être transformée sous la forme suivante:

$$P_i = \frac{B_i}{A_i - C_i P_{i-1}}, \quad (\text{II.6})$$

$$Q_i = \frac{D_i + C_i Q_{i-1}}{A_i - C_i P_{i-1}}. \quad (\text{II.7})$$

Ces relations sont récurrentes puisque  $P_i$  et  $Q_i$  sont fonctions de  $P_{i-1}$  et  $Q_{i-1}$ . Pour commencer le processus de récurrence, on a:

$$P_1 = \frac{B_1}{A_1}, \quad Q_1 = \frac{D_1}{A_1}, \quad \phi_N = Q_N \quad (\text{II.8})$$

On peut donc commencer le processus de substitution arrière.

**Résumé:**

1. (i) Calculer  $P_1$  et  $Q_1$  par l'équation II.8;
2. (ii) Utiliser la relation de récurrence II.6, II.7 pour obtenir  $P_i$ , et  $Q_i$  pour  $i = 2, 3, \dots, N$ ;
3. (iii) Poser  $\phi_N = Q_N$ ;
4. (iv) Utiliser l'équation II.3 pour  $i = N - 1, N - 2, \dots, 3, 2, 1$ , pour obtenir  $\phi_{N-1}, \phi_{N-2}, \dots, \phi_3, \phi_2, \phi_1$ .

**Algorithme cyclique de résolution de matrices tridiagonales(CTDMA)**

La tâche consiste à résoudre le système d'équation suivant:

$$A_i \phi_i = B_i \phi_{i+1} + C_i \phi_{i-1} + D_i \quad (\text{II.9})$$

pour  $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ . Avec les hypothèses suivantes provenant de la périodicité de la solution:

$$\text{Pour } i = 1: \quad \phi_{i-1} = \phi_{N-1} \quad (\text{II.10})$$

$$\text{Pour } i = N - 1: \quad \phi_{i+1} = \phi_1 \quad (\text{II.11})$$

On recherche la transformation suivante:

$$\phi_i = E_i \phi_{i+1} + F_i \phi_{N-1} + G_i \quad (\text{II.12})$$

avec  $E_1 = B_1/A_1$ ,  $F_1 = C_1/A_1$ ,  $G_1 = D_1/A_1$ , et pour  $i = 1, 2, \dots, N - 2$ :

$$E_i = \frac{B_i}{A_i - C_i E_{i-1}}, \quad F_i = \frac{C_i F_{i-1}}{A_i - C_i E_{i-1}}, \quad G_i = \frac{D_i + C_i G_{i-1}}{A_i - C_i E_{i-1}} \quad (\text{II.13})$$

L'étape suivante consiste à trouver la valeur de  $\phi_{N-1}$ . Ainsi, en écrivant l'équation II.9 pour  $i = N - 1$  et en substituant  $\phi_1$  par  $\phi_2$  et  $\phi_{N-1}$  (à partir de l'équation II.12), puis de la même façon pour  $\phi_2$  en fonction de  $\phi_3$  et  $\phi_{N-1}$ , et ainsi de suite jusqu'à ce que  $\phi_{N-1}$  soit la seule inconnue restante dans l'équation. Cette séquence d'opérations peut être exprimée de la façon suivante:

$$p_1 = A_{N-1}, \quad q_1 = B_{N-1}, \quad r_1 = D_{N-1} \quad (\text{II.14})$$

et pour  $i = 2, 3, \dots, N - 2$ ,

$$p_i = p_{i-1} - q_{i-1} F_{i-1}, \quad q_i = q_{i-1} E_{i-1}, \quad r_i = r_{i-1} + q_{i-1} G_{i-1} \quad (\text{II.15})$$

$$\phi_{N-1} = \frac{(q_{N-2} + C_{N-1})G_{N-2} + r_{N-2}}{p_{N-2} - (q_{N-2} + C_{N-1})(E_{N-2} + F_{N-2})} \quad (\text{II.16})$$

Finalement, l'équation II.12 est utilisée pour obtenir les valeurs de  $\phi_i$  pour  $i = N - 2, N - 3, \dots, 3, 2, 1$  par substitution arrière successive.

### Résumé:

1. (i) Utiliser les équations II.13 et II.15 pour obtenir  $E_i, F_i, G_i, p_i, q_i, r_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, N - 2$ ;
2. (ii) Évaluer  $\phi_{N-1}$  avec l'équation II.16;
3. (iii) Par substitution arrière dans l'équation II.12 obtenir  $\phi_i$  pour  $i = N - 2, N - 3, \dots, 3, 2, 1$ .