UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PRÉDICTION DE LA TRAÎNÉE DES PROFILS AÉRODYNAMIQUES ET DES AILES OPÉRANT EN RÉGIME TRANSSONIQUE, BASÉE SUR LA SOLUTION DES ÉQUATIONS D'EULER

CHARLES VEILLEUX
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
DÉCEMBRE 1997

© Charles Veilleux, 1997

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions and Bibliographic Services
Acquisitions et services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-37467-X

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

PRÉDICTION DE LA TRAÎNÉE DES PROFILS AÉRODYNAMIQUES ET DES AILES OPÉRANT EN RÉGIME TRANSSONIQUE, BASÉE SUR LA SOLUTION DES ÉQUATIONS D'EULER

présenté par: VEILLEUX Charles

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

est soumis au jury d'examen constitué de :

M. VASSEUR Patrick, Ph.D., président

M. PARASCHIVOIU Ion, Ph.D., directeur de recherche

M. MASSON Christian, Ph.D., codirecteur de recherche

M. LAURENDEAU Éric, Ph.D., membre externe, Bombardier Groupe Aéronautique

À Pierre, Claire, Isabelle
et à Christine

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Je veux tout d'abord remercier le Dr. Ion Paraschivoiu, mon directeur de recherche, qui m'a donné l'occasion de travailler sur un projet très intéressant et qui m'a soutenu financièrement tout au long de ma maîtrise.

Un grand merci au Dr. Christian Masson, mon codirecteur de recherche, pour son dévouement et sa grande disponibilité. Ses connaissances et son expérience ont été un atout majeur dans la réalisation de ce travail de recherche. Il m'a très bien initié au monde de la recherche en m'inculquant rigueur et professionnalisme.

Je tiens absolument à souligner le soutien moral de mes proches. Christine, mes parents Pierre et Claire et ma soeur Isabelle.

Merci à la compagnie Bombardier Inc., Canadair pour son support financier et technique.

Un merci spécial à Alain Robidoux pour son aide précieuse avec mon outil de travail principal, l'informatique.

Finalement je veux exprimer ma gratitude envers mes collègues de la Chaire J.-A. Bombardier, Pascal, Dan, Stéphan, Philippe, Marc, Idriss, Christophe, Stéphane, François et Tayeb pour leur aide précieuse, le bon climat de travail et surtout pour les bons moments en dehors du travail.

RÉSUMÉ

L'objectif principal de la présente recherche est de réaliser une étude critique des méthodes de prédiction des composantes physiques de la traînée de pression en régime transsonique à partir de solutions discrétisées des équations d'Euler. Plus spécifiquement, les objectifs sont:

1. modifier un code d'Euler existant pour traiter des écoulements bi-dimensionnels et tri-dimensionnels afin d'améliorer la qualité des solutions, condition essentielle pour faire une analyse pertinente de la décomposition et de la prédiction de la traînée de pression;
2. identifier les méthodes de prédiction de la traînée de pression dans la littérature;
3. déterminer les avantages et désavantages de chaque méthode;
4. avancer les connaissances au niveau de la compréhension des phénomènes reliés à la décomposition et la bonne évaluation de la traînée de pression.

Étant donné que le calcul de la traînée dépend de la qualité de la solution de l'écoulement, un effort a été apporté à l'amélioration et à l'optimisation du code d'Euler mis à la disposition de l'auteur de ce mémoire au début du projet. Plusieurs aspects de la formulation ont été considérés tels que: les conditions aux frontières, la viscosité artificielle, le schéma numérique de résolution, et le schéma d'interpolation.

Les composantes de la traînée pour un écoulement réel autour d'une aile sont la traînée de pression et la traînée visqueuse. La traînée de pression peut être séparée en traînée induite et d'onde. Étant donné l'ampleur du problème, la présente étude se limite aux écoulements non visqueux représentés par les équations d'Euler. Ceci restreint l'étude à la traînée de pression et ses composantes, induite et d'onde.

Dans un premier temps, les écoulements bi-dimensionnels ont été étudiés puisque

la seule composante de la traînée de pression est la traînée d'onde. Les calculs concernent le profil NACA 0012 pour lequel il existe de nombreux résultats numériques et expérimentaux. Afin d'évaluer les méthodes de prédiction de la traînée d'onde, l'influence de nombreux paramètres influençant la solution comme le type de maillage, le nombre de points, le nombre de Mach, l'angle d'attaque et le niveau de viscosité artificielle a été examinée. La qualité de la solution discrétisée de l'écoulement a été également étudiée. Elle se mesure par la distribution de l'entropie dans l'écoulement puisqu'il existe une relation directe entre la traînée d'onde et la production d'entropie.

En se basant sur l'expérience acquise en écoulements bi-dimensionnels, l'étude s'est ensuite élargie aux écoulements tri-dimensionnels. Dans ce cas, la traînée induite s'ajoute à la traînée d'onde et il est souhaitable de distinguer l'une de l'autre. Les calculs tri-dimensionnels traitent de deux des cas trouvés dans la littérature pour lesquels il existe des résultats numériques et expérimentaux dans la littérature. L'aile ONERA M6 et une aile à distribution de corde elliptique ont été traitées. L'influence de la qualité de la solution au niveau de la distribution de l'entropie et des paramètres de l'écoulement sur la prédiction de la traînée a été également étudiée pour les cas tri-dimensionnels.

En ce qui a trait à la précision, cette étude démontre clairement qu'il n'y a aucun avantage à utiliser des méthodes de prédiction de la traînée dites de champ éloigné par rapport à la méthode basée sur la simple intégration de la pression sur la surface du corps. En effet, il n'y a pas de différence significative entre les résultats obtenus avec la relation d'Oswatitsch, une intégration de la quantité de mouvement et l'intégration de la pression sur la surface du corps en autant que les surfaces d'intégration sont choisies adéquatement et que le niveau de fausse entropie est faible. La méthode d'intégration de volume de Garabedian sous-estime systématiquement la traînée d'onde et de façon significative. La relation

d'Oswatitsch permet de distinguer la traînée induite de la traînée d'onde dans le cas des écoulements tri-dimensionnels. De plus, si elle est appliquée directement sur l'onde de choc, la prédiction de la traînée ainsi obtenue est beaucoup moins sensible à la production de fausse entropie généralement observée dans les solutions discrétisées des équations d'Euler .

De nouvelles méthodes de prédiction de la traînée sont proposées dans ce travail. La traînée de pression peut se calculer avec l'intégration de la pression de surface à laquelle on soustrait une correction qui tient compte des contributions en traînée de la viscosité artificielle et de la fausse entropie présente dans l'écoulement. Une nouvelle méthode de prédiction de la traînée induite est également proposée. Elle utilise l'intégration de la pression de surface et la relation d'Oswatitsch intégrée sur des surfaces appropriées. Elle a comme avantage d'être basée sur une formulation exacte, d'être facile à implanter et d'être insensible au niveau de raffinement du maillage.

ABSTRACT

The main objective of this work is to study and assess the prediction of the physical components of pressure drag based on discretised Euler solutions of transonic flows. More specifically, the objectives are:

1. modify an existing Euler code that will solve two-dimensional and three-dimensional flows in order to improve the quality of the solutions, essential requirement for a pertinent analysis of the decomposition and the prediction of pressure drag;
2. identify the pressure drag prediction methods in the literature;
3. determine the advantages and disadvantages of each method;
4. enlarge the knowledge in the understanding of the phenomena related to the decomposition and good evaluation of pressure drag.

Since drag calculations depend upon the quality of the flow solution, an effort was made on the optimization and improvement of the Euler code supplied to the author of this master's thesis at the beginning of the project. Many aspects of the code were revised: the boundary conditions, the artificial viscosity, the numerical scheme, and the interpolation scheme.

The physical components of drag for a real flow are the pressure drag and the viscous drag. The pressure drag can be separated into induced drag and wave drag. In view of the size of the problem, the present study will pertain to inviscid flows only, represented by the Euler equations. This restricts the study to the pressure drag with its components the induced and wave drags.

Firstly, two-dimensional flows were studied since the only component of the pressure drag is the wave drag. The results pertain to the NACA 0012 airfoil for

which exist a considerable quantity of numerical and experimental data in the literature. Many flow solution parameters that influence the drag-prediction methods are examined. For instance, the type of computational grid, the number of points, the Mach number, the angle of attack, and the level artificial viscosity. The influence of the quality of the flow solution was also assessed. It is measured by the distribution of entropy production in the flowfield since there is a direct relation between the wave drag and entropy production.

Using the experience acquired for two-dimensional flows, The study carries on with three-dimensional flows. The induced drag is added to the wave drag and it is desirable to distinguish one from another. Two of the cases found in the literature which have numerical and experimental data are analyzed. The ONERA M6 wing and an elliptic wing are studied as well as the flow parameters.

This study clearly demonstrate that there is no advantage in using far-field methods in terms of accuracy with respect to body-surface pressure integration. No significant differences are noted among the drag predictions based on Oswatitsch's expression, a momentum-flux integral, and a simple body-surface pressure integration, provided appropriate integration surfaces are selected and false entropy production near the body surface is negligible. The application of Garabedian's volume integration leads to significantly lower wave-drag estimates than the predictions based on the other expressions. Oswatitsch's expression allow the distinction of the wave drag and induced drag in three-dimensional flows. Furthermore, if it is applied on a surface containing only the shocks, it is less sensitive to high levels of spurious entropy production since the drag contribution associated with spurious entropy production is eliminated.

New drag prediction methods are finally proposed in this study. Pressure drag can be calculated using the body-surface pressure integration with a correction procedure which takes the contribution of the artificial viscosity and the false entropy

production into account. A new induced-drag prediction method is also proposed. It uses the body-surface pressure integration and Oswatitsch's expression integrated over a suitable surface. The advantages of this new method is that it uses no simplifying assumption, it is simpler to implement, and it is insensitive to grid refinement.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iv
REMERCIEMENTS v
RÉSUMÉ vi
ABSTRACT ix
TABLE DES MATIÈRES xii
LISTE DES FIGURES xv
LISTE DES TABLEAUX xvii
LISTE DES SYMBOLES xviii
LISTE DES ANNEXES xxi

CHAPITRE I: Introduction 1
1.1 Généralités 1
1.2 Objectifs du travail 2
1.3 Travaux antérieurs 3
1.4 Plan du mémoire 4

CHAPITRE II: Calcul de l'écoulement non visqueux 6
2.1 Code d'Euler original 7
2.2 Modifications au code d'Euler 7
2.2.1 Schéma numérique de résolution 8
2.2.2 Extrapolation de la pression à la paroi solide 8
2.2.3 Schéma d'interpolation 9
2.2.4 Conditions aux frontières à l'infini 11
2.2.5 Viscosité artificielle 11

CHAPITRE III: Calcul de la traînée des profils aérodynamiques 12
3.1 Méthodes de prédiction de la traînée d'onde 13
3.2 Application aux profils aérodynamiques 16
3.3 Nouvelle méthode de correction de la traînée de pression . . . 21

CHAPITRE IV: Calcul de la traînée des ailes 23
4.1 Méthodes de prédiction de la traînée d'ailes 24
4.1.1 Composantes de la traînée 24
4.1.2 Mécanisme de production d'entropie 25
4.1.3 Traînée d'onde à l'aide de la relation d'Oswatitsch . . . 25
4.1.4 Traînée induite par intégration de l'écoulement transversal 26
4.2 Nouvelle méthode de prédiction de la traînée induite 27
4.3 Application aux ailes 29
4.3.1 Comparaison entre les méthodes de champ rapproché et éloigné 30
4.3.2 Mécanisme de production d'entropie 31
4.3.3 Prédiction de la traînée induite et d'onde 34

CHAPITRE V: Conclusion 36
5.1 Résumé du mémoire 36
5.2 Contributions de ce mémoire 37
5.3 Recommandations 39

BIBLIOGRAPHIE 40

ANNEXES 43

LISTE DES FIGURES

2.1 Distances pour l'extrapolation de la pression à la paroi. 10

3.1 Définition de la surface d'intégration sur le choc. 14

3.2 Contours d'entropie – $M_\infty = 0.85$, $\alpha = 0.0$, maillage O 160×40. 17

3.3 Entropie à la surface – $M_\infty = 0.85$, $\alpha = 0.0$, maillage O 160×40. 18

3.4 Traînée en fonction de la distance d'intégration – $M_\infty = 0.85$, $\alpha = 0.0$, maillage O 160×40. 19

3.5 Traînée en fonction de la distance d'intégration – $M_\infty = 0.78$, $\alpha = 0.0$, maillage O 160×40. 20

3.6 Traînée en fonction de la distance d'intégration – $M_\infty = 0.85$, $\alpha = 0.0$, maillage O 160×40, avec fonction de poids. 21

3.7 Traînée en fonction de la distance d'intégration – $M_\infty = 0.78$, $\alpha = 0.0$, maillage O 160×40, avec fonction de poids. 22

4.1 Définition de la surface d'intégration pour l'évaluation de C_{Di}. . 27

4.2 Définition de la surface d'intégration pour l'évaluation de D_s. . 28

4.3 Variation de la prédiction de la traînée en fonction de la distance d'intégration à l'infini – aile $X_t = 1.0$ à $M_\infty = 0.2$ et $\alpha = 0.0$ 31

4.4 Variation de la prédiction de la traînée en fonction de la distance d'intégration à l'infini – aile $X_t = 1.0$ à $M_\infty = 0.85$ et $\alpha = 0.0$ 32

4.5 Variation de la prédiction de la traînée en fonction de la distance d'intégration derrière le bord de fuite – aile $X_t = 1.0$ à $M_\infty = 0.8$ et $\alpha = 4.0$, maillage raffiné 33

4.6 Variation de la prédiction de la traînée en fonction de la distance d'intégration derrière le bord de fuite – aile $X_t = 1.0$ à $M_\infty = 0.8$ et $\alpha = 4.0$, maillage grossier 33

LISTE DES TABLEAUX

3.1 Résumé des prédictions de traînée — maillage O 160×40. . . . 19

3.2 Influence du raffinement du maillage — $M_\infty = 0.85, \alpha = 0.00$. . 21

4.1 Coefficients de traînée pour l'aile $X_t = 1.0$ à $M_\infty = 0.8$ and $\alpha = 4.0°$ 34

LISTE DES SYMBOLES

$\mathcal{A}$	surface de l'aile servant au calcul des coefficients de traînée
C_D	coefficient de traînée totale
C_{Dgar}	coefficient de traînée d'intégration de volume de Garabedian
C_{Di}	coefficient de traînée induite basé sur l'intégration de l'écoulement transversal
C_{Di}^{new}	coefficient de traînée induite basé sur la nouvelle méthode de calcul
C_{Diw}	coefficient de traînée basé sur une intégration de l'écoulement transversal
C_{Dm}	coefficient de traînée basé sur un bilan de quantité de mouvement
C'_{Dm}	coefficient de traînée basé sur un bilan de quantité de mouvement avec contribution de la viscosité artificielle
C_{Dosw}	coefficient de traînée basé sur la relation d'Oswatitsch
$C_{Dosw}\|_{\text{shock}}$	coefficient de traînée basé sur la relation d'Oswatitsch intégrée sur l'onde de choc
C_{Dp}	coefficient de traînée par intégration de pression
C_{Dp}^{corr}	coefficient corrigé de traînée par intégration de pression
C_{Di}^{Pr}	traînée induite basée sur la théorie de la ligne portante de Prandtl
C_{Ds}	coefficient de traînée basé sur la relation d'Oswatitsch exacte
$C_{Ds}\|_{\text{shock}}$	coefficient de traînée basé sur la relation d'Oswatitsch exacte intégrée sur l'onde de choc
$C_{Ds+\mu}$	somme de C_{Ds} et $C_{D\mu}$
C_D^{sp}	coefficient de traînée relié à la fausse traînée
C_{Dw}	coefficient de traînée d'onde
$C_{D\mu}$	coefficient de traînée associée à la viscosité artificielle
C_{Lp}	coefficient de portance
c	corde du profil

cte	constante
c_v	chaleur spécifique à volume constant
D_i	traînée induite
D_s	traînée associée à la production d'entropie
D_s^{false}	fausse traînée associée à la fausse entropie
D_w	traînée d'onde
D_μ	traînée associée à la viscosité artificielle
d	distance entre le bord de fuite et la surface d'intégration
e	énergie interne
H	enthalpie d'arrêt
$\vec{\imath}$	vecteur unitaire dans la direction de l'écoulement
M_∞	nombre de Mach à l'infini
$\vec{n}$	vecteur unitaire normal à une surface d'intégration
p	pression
$\vec{q}$	vitesse
$\vec{q}_n$	vitesse dans la direction normale
$\vec{q}_t$	vitesse dans la direction tangentielle
R	constante des gaz parfaits
$\mathcal{S}$	surface d'intégration dans le champ éloigné
$\mathcal{S}'$	surface d'intégration pour l'évaluation de $C_{Ds+\mu}$
$\mathcal{S}_B$	surface du corps
$\mathcal{S}_T$	plan perpendiculaire normal non-perturbé à l'écoulement dans le sillage
$\mathcal{S}_{\text{shock}}$	surface d'intégration près de l'onde de choc
$\mathrm{d}\mathcal{S}$	élément de surface
s	entropie spécifique
Δs	saut d'entropie spécifique

T	température
U_∞	vitesse à l'infini
u	composante de la vitesse dans la direction de l'écoulement à l'infini (horizontale)
$\mathcal{V}$	volume d'intégration
$\mathrm{d}\mathcal{V}$	élément de volume
v	composante de la vitesse dans la direction de l'envergure
w	composante de la vitesse dans la direction verticale
α	angle d'attaque
γ	rapport des chaleurs spécifiques
ψ	fonction de courant
ρ	densité
τ	tenseur des contraintes reliées à la viscosité artificielle
ζ	vorticité
∞	indice indiquant une valeur à l'infini
$\| w \|^2_{WD}$	quantité positive reliée à l'entropie

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I

Airfoil Wave-Drag Prediction Using Euler Solution of Transonic Flows 43

ANNEXE II

A New Induced Drag Prediction Method Using Oswatitsch's Expression 60

CHAPITRE I

Introduction

1.1 Généralités

La portance et la traînée sont deux grandeurs aérodynamiques importantes influençant le design d'aéronefs. De nos jours, le domaine de la mécanique des fluides numérique prédit la portance avec une précision acceptable mais la prédiction de la traînée n'est pas encore tout à fait maîtrisée. Prédire la traînée avec précision s'avère être essentiel pour l'évaluation des performances ou la réduction de la consommation de carburant d'un avion. De plus, connaître la traînée totale d'un aéronef n'est pas suffisant pour le design, il faut également connaître les composantes physiques de la traînée afin de modifier les géométries de l'aéronef adéquatement. Une façon de séparer la traînée totale en ses composantes consiste à la séparer en traînée visqueuse et de pression, cette dernière pouvant être séparée en traînée induite et d'onde. Il existe d'autres façons [21] mais celle-ci est la plus populaire en aérodynamique.

Cette séparation de la traînée totale en traînée visqueuse, induite et d'onde se base sur les mécanismes physiques produisant la traînée d'un corps. La composante visqueuse est due à la friction du fluide sur la paroi du corps c'est-à-dire à la couche limite. On la nomme aussi traînée de couche limite ou de forme. Cette traînée visqueuse a aussi une composante de pression due à la modification du champ de pression par la couche limite. La composante induite est causée par les effets tridimensionnels d'une aile d'envergure finie. La différence de pression qui existe entre l'intrados et l'extrados d'une aile en condition de portance a pour effet d'induire une vitesse transversale qui cause des tourbillons se formant au bout de l'aile. Ils sont responsables de la traînée induite qui n'a qu'une composante de pression. La

composante dite d'onde est due à la présence des ondes de choc dans les écoulements transsoniques et supersoniques. La traînée d'onde se manifeste sous la forme d'une force de pression seulement.

Le choix de la modélisation de l'écoulement a une influence directe sur les possibilités de prédire la traînée et les méthodes appropriées pour la calculer. La traînée visqueuse ne se calcule qu'avec des modèles basés sur les équations de Navier-Stokes ou les modèles à interaction entre un écoulement non visqueux et une couche limite. Les méthodes de prédiction de la traînée varient selon le modèle mathématique choisi. Par exemple, avec les équations d'Euler (choc avec conservation de quantité de mouvement), la traînée d'onde est reliée à la production d'entropie à travers le choc tandis qu'avec les équations à potentiel (choc isentropique), elle est associée au saut de quantité de mouvement à travers le choc [17].

Étant donné l'ampleur du problème, la présente étude se limite aux écoulements non visqueux et compressibles représentés par les équations d'Euler. Il reste donc à étudier la traînée de pression et ses composantes, induite et d'onde.

1.2 Objectifs du travail

L'objectif principal de ce travail est de réaliser une étude critique des méthodes de prédiction des composantes physiques de la traînée de pression en régime transsonique à partir de solutions discrétisées des équations d'Euler . Plus spécifiquement, les objectifs sont:

1. modifier un code d'Euler existant pour traiter des écoulements bi-dimensionnels et tri-dimensionnels afin d'améliorer la qualité des solutions, condition essentielle pour faire une analyse pertinente de la décomposition et de la prédiction de la traînée de pression;

2. identifier les méthodes de prédiction de la traînée de pression dans la littérature;

3. déterminer les avantages et désavantages de chaque méthode;
4. avancer les connaissances au niveau de la compréhension des phénomènes reliés à la décomposition et la bonne évaluation de la traînée de pression.

1.3 Travaux antérieurs

L'évaluation expérimentale de la traînée est, en général, obtenue à l'aide de balances aérodynamiques. Cette technique étant difficile à maîtriser, les aérodynamiciens ont développé des techniques de mesure indirecte de la traînée basées sur l'analyse de sillage des corps. Citons par exemple, les travaux de Betz [1] et Maskell [10] reliés à la mesure indirecte de la traînée induite et de forme. Des améliorations ont aussi été apportées récemment à ces techniques par Wu et al [24] et Brune et Bogataj [2].

En mécanique des fluides numérique, la traînée est, en général, évaluée directement en intégrant les efforts de pression et de friction sur le corps à l'étude. Ceci est l'équivalent numérique de la balance aérodynamique et ne donne que la traînée totale. Les évaluations de traînée ainsi obtenues sont, en général, insatisfaisantes au niveau de la pression. En mécanique des fluides numérique, on a donc commencé à utiliser les méthodes d'analyse de sillage ou, dites de champ éloigné, développées par les expérimentalistes afin d'analyser la traînée plus efficacement.

En général, la traînée induite d'une aile d'envergure finie se calcule par l'analyse des vitesses transversales des tourbillons de bout d'aile. Cette méthode remonte aux travaux de Betz et Maskell. Les travaux de Lock [9], van der Vooren et Sloof [21], van Dam [20, 19], Cummings et al [3], Yu et al [25] et Janus et Chatterjee [8] l'utilisent avec succès. La théorie de la ligne portante de Prandtl a aussi été développée pour le calcul de la traînée induite. Elle est souvent utilisée comme référence pour évaluer la précision des résultats obtenus en mécanique des fluides numérique puisqu'elle est facile à appliquer et donne de bons résultats surtout dans le cas d'une aile elliptique. Une méthode numérique alternative de prédiction de la traînée utilise

cette théorie [12].

À l'heure actuelle, il n'existe pas de méthode analytique de prédiction de la traînée d'onde pour les écoulement transsoniques. De plus, il n'existe pas de technique expérimentale permettant de la mesurer directement. On doit donc avoir recours aux méthodes numériques pour l'évaluer. Les chocs présents dans les solutions des équations d'Euler ou de Navier-Stokes ne sont pas isentropiques de sorte que la relation d'Oswatitsch [14] peut être utilisée pour l'évaluation de la traînée d'onde. Elle relie la traînée d'onde à la production d'entropie à travers les ondes de choc. La plupart des méthodes d'évaluation de la traînée d'onde trouvées dans la littérature sont basées sur la relation d'Oswatitsch. Une autre méthode a été développée, suite à l'idée de Garabedian [4] de relier l'entropie à la viscosité artificielle présente dans les codes numériques.

Dans la littérature qui traite la prédiction de la traînée par la mécanique des fluides numérique, les méthodes de champ éloigné ou dites "farfield" sont considérées, de façon unanime, plus précises que les méthodes d'intégration de la pression ou dites de champ rapproché ("nearfield"). Lock [9] et van Dam et al. [19] attribuent cette imprécision à l'évaluation d'une petite quantité par la soustraction de deux beaucoup plus grandes quantités, la traînée et la poussée. Cummings et al. [3] l'associent à la nécessité d'approximer la surface incurvée d'une aile par des surfaces planes. Yu et al. [25] prétendent que les méthodes de champ rapproché ne donnent des résultats acceptables que pour des solutions suffisamment convergées et sur des maillages assez raffinés. Enfin, van Dam et ses collègues [19, 20] attribuent l'imprécision des méthodes de champ rapproché à la viscosité artificielle des codes numériques.

1.4 Plan du mémoire

Le Chapitre II présente la première partie du travail qui consiste à calculer l'écoulement non visqueux. Cette partie porte tout particulièrement sur le travail effectué

sur le code d'Euler mis à la disposition de l'auteur de ce mémoire au début du projet. Les Chapitres III et IV consistent en une synthèse de l'étude de la traînée dont les fruits du travail ont été soumis sous la forme de deux articles dans des journaux techniques. Ces articles sont reproduits en annexe. Finalement, le Chapitre V résume les conclusions du projet de recherche.

CHAPITRE II

Calcul de l'écoulement non visqueux

En mécanique des fluides numérique, l'étude des forces aérodynamiques d'un corps immergé dans un fluide nécessite, a priori, que l'on modélise l'écoulement autour de ce corps. Étant donné que la présente étude sur la prédiction de la traînée se limite aux écoulements compressibles non visqueux, les équations d'Euler ont été choisies pour les modéliser. Plusieurs facteurs ont orienté ce choix. La vorticité, qui est très importante dans l'analyse de la traînée, est mieux modélisée par les équations d'Euler que par les équations à potentiel [20]. De plus, l'éventail des cas possibles à étudier ne se limite pas aux cas avec ondes de choc faibles, une contrainte des modèles utilisant les équations à potentiel.

Afin de réaliser une étude pertinente sur la prédiction de la traînée, il est d'autant nécessaire d'obtenir des solutions d'écoulement de qualité. Un effort considérable a donc été apporté à l'amélioration du code d'Euler fourni au début du projet. Ce chapitre présente sommairement le travail qui a été accompli sur cet aspect. On y présente tout d'abord le code d'Euler original et ensuite les modifications:

- au schéma numérique de résolution,
- à l'extrapolation de la pression à la paroi solide,
- au schéma d'interpolation,
- aux conditions aux frontières à l'infini, et
- à la viscosité artificielle.

2.1 Code d'Euler original

Le code d'Euler original fourni au début du projet [15] résout les équations d'Euler tri-dimensionnelles compressibles autour d'ailes d'envergure finie. L'hypothèse d'homoénergicité ($H = cte$) est utilisée pour accélérer les calculs puisqu'il n'est ainsi pas nécessaire de solutionner l'équation d'énergie. Le domaine de calcul est discrétisé par un maillage structuré de type O-H.

Le schéma de calcul numérique est de type centré, ou "cell-centered", par volumes finis avec viscosité artificielle du deuxième et du quatrième ordre [6]. Les équations sont résolues explicitement dans le temps avec un intégrateur Runge-Kutta qui utilise un pas de temps calculé localement au lieu d'un pas de temps global. Un accélérateur multi-grille [5] est aussi utilisé pour améliorer la vitesse de convergence.

2.2 Modifications au code d'Euler

La version du code d'Euler utilisée dans ce travail pour obtenir les prédictions de traînée est bien différente de la version originale [15]. Le code tri-dimensionnel a tout d'abord été transformé en code bi-dimensionnel pour réaliser efficacement l'analyse de la traînée sur les profils aérodynamiques. Afin d'obtenir des solutions cohérentes, la version bi-dimensionnelle a été optimisée en se basant surtout sur les publications de Jameson [5, 6, 7]. Les modifications étant terminées, la nouvelle formulation a été implantée en trois dimensions remplaçant ainsi la version originale. C'est cette nouvelle version tri-dimensionnelle qui a servie à analyser la traînée des ailes. Cette section présente les plus importantes modifications apportées à la version originale.

2.2.1 Schéma numérique de résolution

Le schéma numérique du code original est du type hybride [18]: (i) les équations d'Euler sont résolues dans le temps à l'aide d'un intégrateur Runge-Kutta du cinquième ordre au départ, l'accélérateur multi-grille étant en fonction; (ii) lorsque l'accélérateur multi-grille devient inefficace, le schéma numérique passe en mode simple grille avec un intégrateur Runge-Kutta d'ordre trois. La construction des équations discrétisées du code original est réalisée volume de contrôle par volume de contrôle: l'opérateur spatial [18], incluant les flux de convection et de diffusion artificielle, est calculé successivement pour chaque volume de contrôle du domaine de calcul. Cette stratégie nécessite peu d'espace mémoire, mais elle est très inefficace.

La construction des équations discrétisées du nouveau code est de type surface de contrôle par surface de contrôle: les flux de convection et de diffusion artificielle sont calculés de surface de contrôle en surface de contrôle et les opérateurs spatiaux sont ensuite assemblés pour tout le domaine. Ce type de construction est très rapide. Étant donné que la présente étude ne s'intéresse qu'aux solutions convergées et jugeant l'accélérateur multi-grille du code original pas très efficace, il est donc complètement absent de la version actuelle. De plus, des tests chronométrés ont indiqué que l'intégrateur Runge-Kutta du cinquième ordre donne une solution convergée plus rapidement que ceux du troisième ou quatrième ordre. Il implique plus d'étapes intermédiaires que les autres intégrateurs mais la solution converge beaucoup plus rapidement. L'intégrateur du cinquième ordre est donc toujours utilisé.

2.2.2 Extrapolation de la pression à la paroi solide

Le flux de convection à la paroi solide n'est composé que de la pression de surface. La pression associée à une cellule adjacente à la paroi est calculée en son centre, il faut donc extrapoler la pression pour en obtenir à la surface du corps. Il existe

diverses façons trouvées dans la littérature mais la plus simple consiste à effectuer une extrapolation linéaire

Dans le code original, la pression à la surface du corps est évaluée par extrapolation linéaire de la façon suivante:

$$p|_{paroi} = cte * p_1 \ + \ (1 - cte) * p_2 \tag{2.1}$$

où la constante a été fixée à 1,455 pour toute la surface du corps. Les variables p_1 et p_2 sont les pressions au centre des volumes de contrôle, adjacents à la paroi. Comme la distance entre le premier et le deuxième point de maillage n'est pas constante le long du corps, cette procédure conduit à des imprécisions. Dans certains cas, surtout près du bord d'attaque, la pression de surface devient négative.

Pour remédier à ce problème, la valeur de la constante est calculée à chaque station de la surface du corps à la première itération de la résolution pour tenir compte de la variation de la géométrie du maillage le long du corps. Une simple extrapolation linéaire est effectuée en tenant compte des distances entre le centre des deux cellules adjacentes et la paroi:

$$cte = 1 + \frac{d_2}{d_1} \tag{2.2}$$

où d_2 est la distance entre le centroïde du volume de contrôle adjacent à la paroi et la paroi même; d_1 est la distance entre le centroïde du volume de contrôle adjacent à la paroi et le volume de contrôle voisin (voir Fig.2.1).

Cette simple modification de l'extrapolation de la pression à la paroi n'a pas modifié les valeurs de portance et de traînée de façon significative. Par contre, aucun cas de pression négative près de la paroi n'a été observé par la suite.

2.2.3 Schéma d'interpolation

Dans le calcul des flux aux surfaces des volumes de contrôle, les valeurs des vitesses, de pression et de flux de masse sur ces surfaces sont nécessaires. Ces propriétés

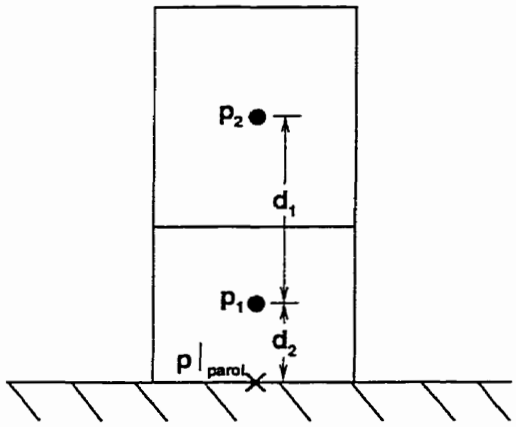


Figure 2.1 Distances pour l'extrapolation de la pression à la paroi.

aux surfaces des volumes de contrôle doivent être calculées à partir des valeurs au centroïde des volumes de contrôle [6]. Dans le code original, ceci est fait de la façon suivante:

$$\rho_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2} \tag{2.3}$$

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\rho u_i + \rho u_{i+1}}{2\rho_{i+\frac{1}{2}}} \tag{2.4}$$

$$p_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\rho_{i+\frac{1}{2}}\left(H - \frac{1}{2}(u^2_{i+\frac{1}{2}} + w^2_{i+\frac{1}{2}})\right) \tag{2.5}$$

D'après une analyse en séries de Taylor, ceci nous conduit à une précision du deuxième ordre sur la densité mais d'ordre 0 sur les autres propriétés. Afin d'avoir une précision du deuxième ordre sur toutes les évaluations des propriétés aux surfaces des volumes de contrôle, on doit utiliser la technique proposée par Jameson [6]. Par exemple, les composantes en u de la vitesse, du flux de masse et la pression sont:

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\rho u_i}{\rho_i} + \frac{\rho u_{i+1}}{\rho_{i+1}}}{2} \tag{2.6}$$

$$\rho u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\rho u_i + \rho u_{i+1}}{2} \tag{2.7}$$

$$p_{i+\frac{1}{2}} = \frac{p_i + p_{i+1}}{2} \tag{2.8}$$

En plus d'obtenir une précision du deuxième ordre, cette approche a un effet notoire: l'accélération de la convergence.

2.2.4 Conditions aux frontières à l'infini

Les conditions aux frontières à l'infini dans le code original sont sous une forme qui réfléchit les ondes sortantes du domaine. Ceci nuit à la convergence de la solution [5]. Elles sont donc remplacées par des conditions aux frontières basées sur la théorie des caractéristiques qui atténuent grandement l'effet négatif de la proximité des frontières [7].

2.2.5 Viscosité artificielle

Dans la version originale, le terme de viscosité artificielle n'est pas sous forme conservative et la solution converge seulement lorsque l'on ajoute des flux de dissipation artificielle dans la direction normale à la paroi et dans la direction de l'envergure dans tout le domaine de calcul. De plus, un flux de dissipation artificielle non nul était appliqué à la surface du corps, ce qui engendrait des solutions non conservatives.

Tous ces facteurs ont motivé l'implantation d'une nouvelle procédure pour le terme de viscosité artificielle, selon la formulation de Jameson [6].

Avec cette nouvelle forme de viscosité artificielle, la solution converge très bien. De plus, les flux de dissipation à la surface sont imposés à zéro rendant la solution produite par la nouvelle version du code d'Euler conservative. Les autres flux de dissipation sont calculés normalement.

CHAPITRE III

Calcul de la traînée des profils aérodynamiques

Les résultats sur la prédiction de la traînée des profils aérodynamiques utilisant la nouvelle version du code d'Euler en deux dimensions ont été présentés dans un article de journal technique, intitulé "Airfoil Wave-Drag Prediction Using Euler Solutions of Transonic Flows". Il est reproduit à l'Annexe I. Il a été soumit au AIAA Journal of Aircraft et est essentiellement une version revue et corrigée d'un article [23] de conférence qui a été présenté, au sixième Colloque Aérodynamique tenu conjointement avec la 44e conférence de l'IASC (CASI). Dans cet article, on y compare diverses méthodes de prédiction de la traînée d'onde appliquée aux profil aérodynamique NACA 0012.

Ce chapitre ne présente qu'une synthèse du développement des méthodes de prédiction de la traînée, des résultats et de leur discussion. Pour obtenir plus de détails sur ce travail, il est fortement suggéré de se référer à l'article reproduit en annexe.

La traînée totale des profils aérodynamiques a comme seule composante physique la traînée d'onde. L'analyse de la traînée d'onde présentée dans ce chapitre porte sur quatre méthodes. La première consiste à intégrer la pression sur la surface du corps et cette méthode est dite de champ rapproché. Les trois autres méthodes sont de champ éloigné. Une consiste à réaliser un bilan de quantité de mouvement, une autre à intégrer la production d'entropie dans l'écoulement et la dernière est la méthode de Garabedian.

3.1 Méthodes de prédiction de la traînée d'onde

La traînée totale d'un corps dans un écoulement non visqueux, qui est égale à la traînée d'onde pour un écoulement bi-dimensionnel, est produite par la distribution de pression sur la surface $\mathcal{S}_B$ du corps:

$$D = \int_{\mathcal{S}_B} -p\vec{n} \cdot \hat{\imath} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3.1}$$

où p est la pression, $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface, pointant vers l'extérieur et $\vec{\imath}$ est le vecteur unitaire dans la direction de l'écoulement. Dans ce travail, le coefficient de traînée obtenu à partir de l'Éq.(3.1) sera représenté par C_{Dp} et sera désigné **coefficient de traînée par intégration de pression.**

Une méthode de champ éloigné peut être développée à partir des équations de quantité de mouvement intégrées sur une surface fermée $\mathcal{S}$ qui contient le corps:

$$D = \int_{\mathcal{S}} (-p\vec{n} \cdot \hat{\imath} - \rho u \vec{q} \cdot \vec{n}) \, \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3.2}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire vers l'extérieur et normal à l'élément de surface $\mathrm{d}\mathcal{S}$, ρ est la densité du fluide, $\vec{q}$ est le vecteur vitesse et u en est la composante de la vitesse dans la direction de l'écoulement. Le coefficient de traînée obtenu à l'aide de l'Éq.(3.2) sera représenté par C_{Dm} et désigné **coefficient de traînée par intégration de quantité de mouvement.**

Étant donné qu'un terme de viscosité artificielle est ajouté aux équations d'Euler pour les résoudre numériquement, il est intéressant de considérer un coefficient de traînée C'_{Dm} comprenant la contribution de la quantité de mouvement et la contribution de la viscosité artificielle:

$$C'_{Dm} = C_{Dm} + \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} \int_{\mathcal{S}} (\tau \cdot \vec{n}) \cdot \hat{\imath} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3.3}$$

où τ est le tenseur des contraintes reliées à la viscosité artificielle.

La relation d'Oswatitsch est une expression qui relie la traînée d'onde d'un corps à la production d'entropie dans l'écoulement stationnaire, adiabatique et non

visqueux d'un gaz parfait [14]:

$$D = \int_{\mathcal{S}} U_\infty \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2}\left\{1 - \exp\left[\left(\frac{s-s_\infty}{R}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right]\right\}}\right] \rho\vec{q}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3.4}$$

Cette équation exprime la traînée d'onde en fonction de la production d'entropie $(s - s_\infty)$ et sera désignée **relation d'Oswatitsch exacte**. Le coefficient de traînée basé sur cette relation sera représenté par C_{Ds}. Étant donné que cette expression n'est une fonction que de l'entropie, la surface d'intégration $\mathcal{S}$ peut être réduite à une surface qui englobe les ondes de choc seulement puisqu'elles sont la seule source physique d'entropie dans l'écoulement et que $\vec{q}\cdot\vec{n} = 0$ sur la surface du corps $\mathcal{S}_B$. Le coefficient de traînée qui exprime cette façon d'intégrer la relation exacte d'Oswatitsch sera représenté par $C_{Ds}|_{\text{shock}}$. Un exemple de surface d'intégration sur le choc est montré à la Fig.3.1.

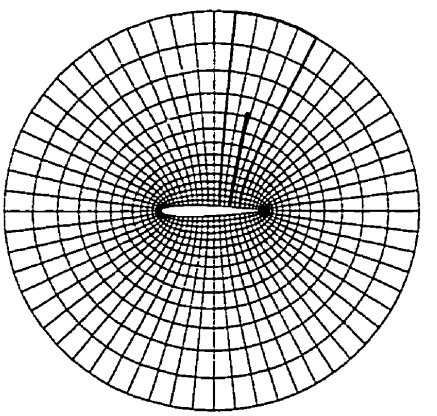


Figure 3.1 Définition de la surface d'intégration sur le choc.

La **relation d'Oswatitsch** *approximative* telle que retrouvée dans la littérature [14] se dérive en développant l'Éq.(3.4) en série et en retenant que les termes

de premier ordre

$$D = \frac{U_\infty}{\gamma R M_\infty^2} \int_{\mathcal{S}} (s - s_\infty) \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3.5}$$

Le coefficient de traînée basé sur l'Éq.(3.5) sera représenté par C_{Dosw}. Lorsque la surface d'intégration est située près du choc, le coefficient de traînée sera représenté par $C_{Dosw}|_{\text{shock}}$.

L'idée de calculer la traînée d'onde à l'aide de la viscosité artificielle vient de Garabedian [4]. La production d'entropie dans un écoulement est reliée à la viscosité artificielle ajoutée aux codes non visqueux. La relation d'Oswatitsch est donc transformée d'une intégration de surface de l'entropie à une intégration de volume d'une quantité positive reliée à la viscosité artificielle:

$$D = \frac{U_\infty}{\gamma R M_\infty^2} \int_{\mathcal{V}} \frac{c_v \rho}{e} \mid\mid w \mid\mid_{WD}^2 \mathrm{d}\mathcal{V} \tag{3.6}$$

Le terme $\mid\mid w \mid\mid_{WD}^2$ est la quantité positive qui relie l'entropie à la viscosité artificielle. Les détails de la dérivation se trouvent à la Réf. [13]. Le coefficient de traînée sera représenté par C_{Dgar} et cette intégration sera désignée **intégration de volume de Garabedian.**

Donc les huit expressions de prédiction de la traînée suivantes, représentées par leur coefficient respectif, seront évaluées selon leur capacité de prédire la traînée d'onde:

$$C_{Dp} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} \int_{\mathcal{S}_B} -p\vec{n} \cdot \hat{\imath} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3.7}$$

$$C_{Dm} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} \int_{\mathcal{S}} (-p\vec{n} \cdot \hat{\imath} - \rho u \vec{q} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3.8}$$

$$C'_{Dm} = C_{Dm} + \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} \int_{\mathcal{S}} (\tau \cdot \vec{n}) \cdot \hat{\imath} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3.9}$$

$$C_{Ds} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} U_\infty \int_{\mathcal{S}} [\mathcal{F}(\gamma, R, M_\infty, s - s_\infty)] \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3.10}$$

$$C_{Ds}|_{\text{shock}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} U_\infty \int_{\mathcal{S}_{\text{shock}}} [\mathcal{F}(\gamma, R, M_\infty, s - s_\infty)] \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3.11}$$

$$C_{Dosw} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} \frac{U_\infty}{\gamma R M_\infty^2} \int_{\mathcal{S}} (s - s_\infty) \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3.12}$$

$$C_{Dosw}|_{\text{shock}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c}\frac{U_\infty}{\gamma R M_\infty^2}\int_{\mathcal{S}_{\text{shock}}}(s - s_\infty)\rho\vec{q}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3.13}$$

$$C_{Dgar} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c}\frac{U_\infty}{\gamma R M_\infty^2}\int_{\mathcal{V}}\frac{c_v\rho}{e}\,||\,w\,||_{WD}^2\,\mathrm{d}\mathcal{V} \tag{3.14}$$

où $\mathcal{F}(\gamma, R, M_\infty, s - s_\infty) = \left[1 - \sqrt{1 + \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2}\left\{1 - \exp\left[\left(\frac{s-s_\infty}{R}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right]\right\}}\right]$.

3.2 Application aux profils aérodynamiques

L'application des méthodes de prédiction de la traînée pour les profils aéro-dynamiques porte sur l'écoulement non visqueux compressible autour du profil NACA 0012. L'intégration sur la surface $\mathcal{S}$ est effectuée sur les surfaces en O du maillage utilisé pour discrétiser le domaine de calcul. L'intégration sur le choc ($\mathcal{S}_{\text{shock}}$) est effectuée sur une surface telle qu'illustrées à la Fig.3.1. L'intégration sur le choc permet d'éliminer la contribution de la fausse entropie présente dans les solutions discrétisées des équations d'Euler. En effet, la plupart des code d'Euler produisent des solutions d'écoulement contenant de la fausse entropie dans une région près de la surface du corps à cause de l'imprécision du traitement de la condition à la frontière du corps appliquées aux flux de viscosité artificielle [25]. Cette fausse entropie a donc un effet négatif sur l'évaluation de la traînée d'onde et par conséquent sur la traînée totale.

La prédiction de la traînée basée sur la production d'entropie dépend beaucoup de la qualité de la solution de l'écoulement en ce qui concerne l'entropie. La Fig.3.2 présente la répartition de l'entropie produite par la nouvelle version du code d'Euler pour le cas d'un écoulement transsonique autour du profil aérodynamique NACA 0012 avec onde de choc. On peut y voir une production d'entropie près de la surface et surtout près du point de stagnation en plus de celle produite par l'onde de choc (Fig.3.3).

Dans les résultats suivants, la valeur de traînée d'onde donnée par intégration de pression (C_{Dp}) est exactement égale à la valeur donnée par intégration de quantité de mouvement avec contribution de la viscosité artificielle (C'_{Dm}). En effet, la forme

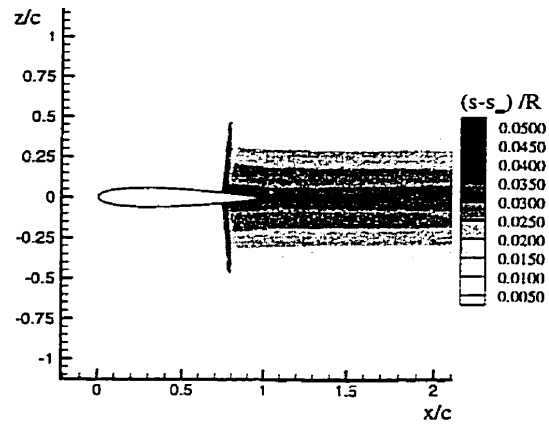


Figure 3.2 Contours d'entropie – $M_\infty = 0.85$, $\alpha = 0.0$, maillage O 160×40.

conservative des équations d'Euler étant utilisée, ces deux quantités doivent être égales. Leurs valeurs sont d'ailleurs confondues dans les figures des résultats. De plus, lorsque les flux de viscosité artificielle sont faibles, la valeur du coefficient de traînée par intégration de la quantité de mouvement (C_{Dm}) devrait tendre vers les deux autres coefficients.

La Fig.3.4 présente la traînée obtenue avec les différentes méthodes en fonction de $\frac{r}{c}$, la distance d'intégration de la surface $\mathcal{S}$ par rapport à la surface du corps $\mathcal{S}_B$. Les valeurs obtenues en intégrant sur le choc sont des valeurs constantes et non une fonction de $\frac{r}{c}$. Elles sont présentées pour fins de comparaison. La valeur de traînée obtenue par l'intégration de volume de Garabedian est montrée dans la légende car elle n'est pas comprise dans l'intervalle illustré. Il est observé, en premier lieu, qu'à mesure que le nombre de Mach augmente, l'intégration de volume de Garabedian sous-estime la traînée d'onde de plus en plus significativement.

Une autre observation remarquable ressort de la Fig.3.4. Lorsque la surface d'intégration est suffisamment loin du corps ($\frac{r}{c} > 4$), les coefficients C_{Dp}, C_{Dm}, C'_{Dm} et C_{Ds} tendent vers la même valeur. Lorsque la distance d'intégration est près du corps ($\frac{r}{c} < 4$), on remarque des oscillations pour les valeurs de C_{Dm} et C_{Ds} de même

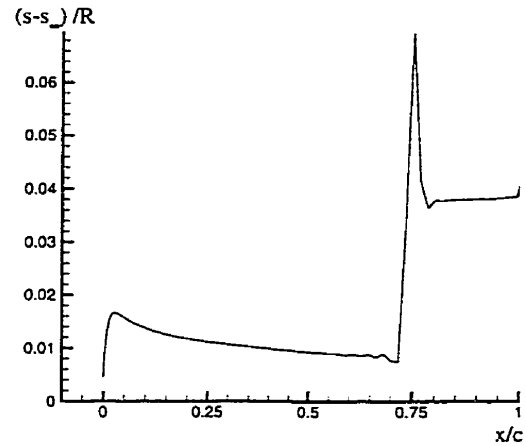


Figure 3.3 Entropie à la surface – $M_\infty = 0.85$, $\alpha = 0.0$, maillage O 160×40.

que pour C_{Dosw}. La différence entre C_{Dm} et C'_{Dm} est due à la contribution de la viscosité artificielle plus importante près du corps mais négligeable à mesure qu'on s'en éloigne. Les oscillations des deux autres coefficients sont causées par le choc et la fausse entropie qui ne sont pas complètement compris dans l'intégration.

La prédiction de la traînée d'onde à l'aide de la relation d'Oswatitsch *approximative* (C_{Dosw}) donne une valeur inférieure à la valeur constante observée précédemment. Ceci est attribué à l'approximation du premier ordre en $(s - s_\infty)$ introduite à l'Éq.(3.5). Cette approximation donne une erreur qui croît avec le nombre de Mach. À des nombres de Mach faibles, la valeur obtenue avec C_{Dosw} tend vers la valeur obtenue avec C_{Ds} comme observé à la Fig.3.5 et au Tableau 3.1 qui donne le résumé des valeurs de traînée pour les différents cas étudiés.

Le parfait accord entre les valeurs de traînée obtenues avec C_{Dp}, C_{Dm}, C'_{Dm} et C_{Ds} indique clairement que les méthodes de champ éloigné ne sont pas plus précises que la méthode basée sur la simple intégration de la pression sur la surface du corps en ce qui a trait à la précision. La croyance populaire veut que la discrétisation de la surface du corps en panneaux conduise à une imprécision dans le calcul du coefficient de traînée par intégration de pression surtout pour des maillages grossiers. En

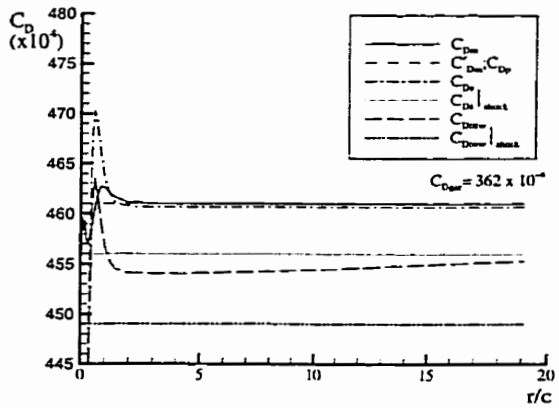


Figure 3.4 Traînée en fonction de la distance d'intégration – $M_\infty = 0.85$, $\alpha = 0.0$, maillage O 160×40.

		Prédictions C_D(x10^4)								
M_∞	α (deg.)	C_{Dp}	C_{Dm}	C'_{Dm}	C_{Ds}	$C_{Ds}\|_{\text{shock}}$	C_{Dosw}	$C_{Dosw}\|_{\text{shock}}$	C_{Dgar}	C_{Dp}^{corr}
0.74	0.00	6	6	6	6	0	6	0	3	0
0.76	0.00	9	9	9	9	4	9	4	5	4
0.78	0.00	30	30	30	30	25	30	25	22	25
0.80	0.00	89	89	89	89	84	89	84	69	84
0.82	0.00	197	197	197	197	192	196	190	155	192
0.85	0.00	461	461	461	461	456	455	449	362	456

Tableau 3.1 Résumé des prédictions de traînée — maillage O 160×40.

réalité, la sensibilité du coefficient C_{Dp} au maillage et les résultats jugés insatisfaisant sont plutôt dûs à la fausse entropie produite à la surface du corps.

Les intégrations de l'entropie sur le choc, $C_{Ds}|_{\text{shock}}$ et $C_{Dosw}|_{\text{shock}}$, donnent des valeurs de traînée d'onde qui sont inférieures à celle obtenues avec C_{Dp}, C_{Dm}, C'_{Dm} et C_{Ds}. En effet, intégrer l'entropie sur le choc permet d'éliminer la contribution de la fausse entropie car seule l'entropie produite à travers le choc est prise en considération tandis que l'intégration de l'entropie à l'infini donne la somme de la traînée d'onde et de celle causée par la fausse entropie. Cette capacité d'éliminer la contribution de la fausse entropie constitue l'avantage majeur d'utiliser les méthodes

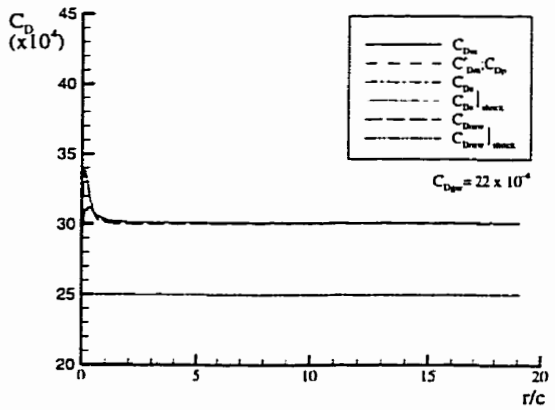


Figure 3.5 Traînée en fonction de la distance d'intégration – $M_\infty = 0.78$, $\alpha = 0.0$, maillage O 160×40.

de prédiction de la traînée basées sur la production d'entropie.

Yu et al. [25] ont proposé une façon de réduire la production de fausse entropie à la surface du corps en ajoutant une fonction de poids aux flux de diffusion artificielle dans la direction normale à la surface. De cette façon, les flux sont progressivement activés dans le champ de l'écoulement à partir de la paroi où ils sont nuls. La viscosité artificielle est donc plus faible près du corps. L'effet de cette fonction de poids est illustré aux Figs.3.6 et 3.7 pour les cas des deux figures précédentes.

On y remarque que la traînée associée à la fausse entropie qui est représentée essentiellement par $(C_{Ds} - C_{Ds}|_{\text{shock}})$ et $(C_{Dosw} - C_{Dosw}|_{\text{shock}})$, est visiblement réduite. Si toute la fausse entropie pouvait être éliminée, les méthodes C_{Dp}, C_{Dm}, C'_{Dm}, C_{Ds} et $C_{Ds}|_{\text{shock}}$ seraient toutes équivalentes.

L'influence du raffinement du maillage utilisé pour discrétiser le domaine de calcul est démontrée au Tableau 3.2. On peut facilement observer que la production de fausse entropie augmente avec les maillages plus grossiers ce qui conduit à des prédictions de traînée plus élevées pour les méthodes incluant la fausse entropie, c'est-à-dire les méthodes utilisant la surface d'intégration $\mathcal{S}$.

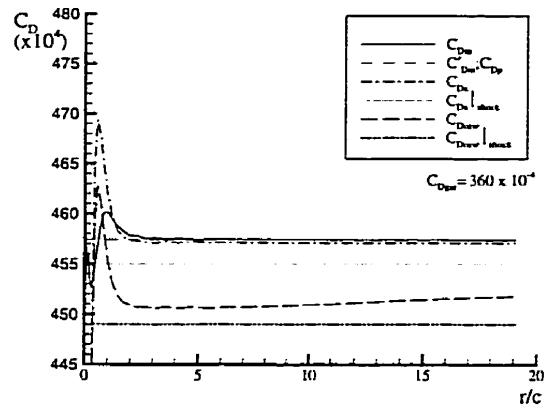


Figure 3.6 Traînée en fonction de la distance d'intégration – $M_\infty = 0.85$, $\alpha = 0.0$, maillage O 160×40, avec fonction de poids.

	Prédictions C_D(x10^4)								
maillage	C_{Dp}	C_{Dm}	C'_{Dm}	C_{Ds}	$C_{Ds}\|_{\text{shock}}$	C_{Dosw}	$C_{Dosw}\|_{\text{shock}}$	C_{Dgar}	C_{Dp}^{corr}
160 x 40	461	461	461	461	456	455	449	362	456
128 x 32	469	469	469	469	462	463	455	367	462
80 x 20	486	486	486	486	470	480	463	379	470

Tableau 3.2 Influence du raffinement du maillage — $M_\infty = 0.85, \alpha = 0.00$.

3.3 Nouvelle méthode de correction de la traînée de pression

Dans ce travail, une nouvelle méthode de correction du coefficient de traînée par intégration de pression est proposée. Elle est particulièrement efficace pour les solutions avec maillage grossier. Elle se base sur la différence $(C_{Ds} - C_{Ds}|_{\text{shock}})$ qui donne une bonne évaluation de la traînée associée à la fausse entropie. **L'intégration de pression corrigée** est donc

$$C_{Dp}^{corr} = C_{Dp} - (C_{Ds} - C_{Ds}|_{\text{shock}}) \simeq C_{Ds}|_{\text{shock}} \tag{3.15}$$

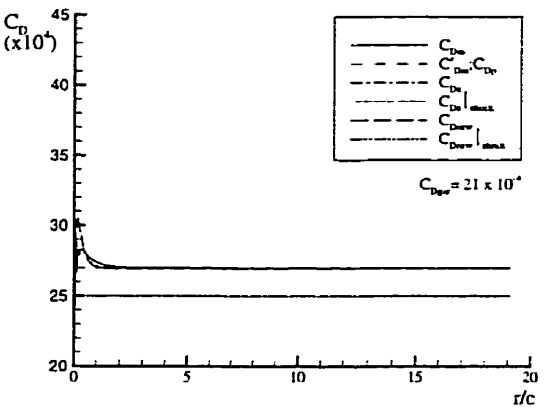


Figure 3.7 Traînée en fonction de la distance d'intégration – $M_\infty = 0.78$, $\alpha = 0.0$, maillage O 160×40, avec fonction de poids.

Les coefficients corrigés sont présentés à la dernière colonne des Tableaux 3.1 et 3.2. Ces prédictions sont beaucoup moins sensibles à la production de fausse entropie et sont en accord parfait avec $C_{Ds}|_{\text{shock}}$. Une analyse plus détaillée des résultats est présentée dans l'article reproduit à l'Annexe I.

CHAPITRE IV

Calcul de la traînée des ailes

Les résultats sur la prédiction de la traînée des ailes utilisant la nouvelle version du code d'Euler en trois dimensions sont le sujet d'un article de journal technique intitulé "New Induced-Drag Prediction Method Using Oswatitsch's Expression". Il se trouve à l'Annexe II. Il a été soumis au Aeronautical Journal. On y trouve une discussion des mécanismes de production d'entropie dans les solutions discrétisées des solutions des équations d'Euler qui a conduit au développement d'une nouvelle méthode de prédiction de la traînée induite. Ce chapitre ne présente qu'une synthèse de cet article. Il est fortement suggéré de se référer à l'article pour obtenir plus de détails.

Dans l'analyse de la traînée des ailes, on utilise les mêmes expressions de traînée que pour les profils aérodynamiques excepté la relation d'Oswatitsch *approximative* (C_{Dosw} et $C_{Dosw}|_{\text{shock}}$) qui n'est plus considérée puisqu'elle sous-estime la traînée d'onde à mesure que le nombre de Mach augmente. L'intégration de volume de Garabedian (C_{Dgar}) n'est également plus considérée puisqu'elle sous-estime systématiquement la traînée d'onde. Les surfaces d'intégration ne sont plus que des contours en deux dimensions mais deviennent des surfaces tri-dimensionnelles avec une dimension dans la direction de l'envergure de l'aile. Pour les ailes d'envergure finie, s'ajoute des méthodes de prédiction de la traînée induite comme celle basée sur l'intégration de l'écoulement transversal et une nouvelle méthode qui a été développée durant ce projet.

4.1 Méthodes de prédiction de la traînée d'ailes

La traînée totale d'un corps pour un écoulement tri-dimensionnel utilise les mêmes expressions que pour un écoulement bi-dimensionnel, c'est-à-dire l'intégration de la pression sur la surface de l'aile C_{Dp} (Éq.(3.1)) et l'intégration de quantité de mouvement avec ou sans contribution de la viscosité artificielle C'_{Dm} (Éq.(3.3)) et C_{Dm} (Éq.(3.2)).

4.1.1 Composantes de la traînée

Dans l'analyse des écoulements non visqueux tri-dimensionnels autour d'une aile portante, la traînée totale comporte deux composantes, la traînée induite et la traînée d'onde. Un développement de la traînée totale est donc nécessaire afin de pouvoir distinguer ses composantes. Une expression alternative mais équivalente de l'Éq.(3.3) est obtenue avec la conservation de la masse appliquée sur le même surface de contrôle $\mathcal{S}$ (voir Réf.[3] pour plus de détails)

$$\begin{aligned} D &= -\int_{\mathcal{S}} \left[(p - p_\infty)\vec{n} \cdot \vec{\imath} - U_\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \right] \mathrm{d}\mathcal{S} \\ &\quad + \int_{\mathcal{S}} (\tau \cdot \vec{n}) \cdot \hat{\imath} \mathrm{d}\mathcal{S} - U_\infty \int_{\mathcal{S}} \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{S} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Les deux premiers termes de cette équation représentent la somme de la traînée associée à la production d'entropie (D_s) et à la traînée associée à la vorticité dans le sillage (traînée induite D_i). La deuxième intégrale correspond à la contribution en traînée de la viscosité artificielle. La dernière intégrale exprime la conservation de la masse et devrait être nulle, toutefois l'ajout de viscosité artificielle à l'équation de conservation de la masse dans le code d'Euler lui donne des valeurs faibles mais non nulles. Ces deux derniers termes représentent la traînée due à la viscosité artificielle intrinsèque aux solutions discrétisées des équations d'Euler. Ces contributions à la traînée totale n'ont pas de signification physique réelle et leur somme sera désignée

par D_μ. On peut donc réécrire l'Éq.(4.1) sous une forme plus compacte

$$D = D_s + D_i + D_\mu \tag{4.2}$$

4.1.2 Mécanisme de production d'entropie

Dans un écoulement non visqueux, la seule source d'entropie d'une aile portante en régime transsonique provient des ondes de choc. Pour des solutions discrétisées des équations d'Euler, par contre, il existe d'autres sources d'entropie qui, elles, sont de nature non physique, on l'appelle fausse entropie. Comme en deux dimensions, de la fausse entropie est produite près de la surface du corps dans les régions à fort gradient de pression comme le bord d'attaque des ailes. Pour des ailes portantes, il s'ajoute une autre source de fausse entropie qui est produite dans les tourbillons de bout d'aile. La vorticité dans la direction de l'écoulement est transformée en entropie par le mécanisme exprimé par l'équation de Crocco-Vazsonyi [21]

$$\vec{q} \times (\nabla \times \vec{q}) = T\nabla s - \nabla H + \frac{\nabla \cdot \tau}{\rho} \tag{4.3}$$

Ce phénomène a aussi été observé par van Dam et al. [20]. Donc un mécanisme produit par la viscosité artificielle transforme la traînée reliée à la vorticité en traînée reliée à la production d'entropie.

Les deux sources de fausse entropie sont additionnées ensemble pour donner la fausse traînée D_s^{false}. La traînée associée à l'entropie D_s a donc deux contributions, D_s^{false} et la traînée associée à la production d'entropie à travers les ondes de choc, la traînée d'onde, que l'on désigne par D_w

$$D_s = D_w + D_s^{\text{false}} \tag{4.4}$$

4.1.3 Traînée d'onde à l'aide de la relation d'Oswatitsch

La traînée d'onde pour des ailes opérant en régime transsonique, se calcule de la même façon qu'à la Section 3.1, avec la relation d'Oswatitsch *exacte* appliquée en

trois dimensions. Dans ce chapitre, le coefficient de traînée d'onde obtenu avec cette relation sera désigné par C_{Dw}.

4.1.4 Traînée induite par intégration de l'écoulement transversal

La traînée induite est associée à la vorticité produite dans les tourbillons de bout d'aile en condition de portance. Dans la littérature, la plupart des techniques d'évaluation de la traînée induite impliquent certaines approximations. La surface d'intégration $\mathcal{S}$ est considérée très éloignée du corps. Les variations dans l'écoulement sont donc supposées n'être présentes que sur un plan loin dans le sillage qui est placé perpendiculaire à l'écoulement. On suppose sur ce plan d'intégration que la composante de la vitesse dans la direction de l'écoulement et la densité tendent vers leur valeur à l'infini ($u = U_\infty$ et $\rho = \rho_\infty$). La traînée induite s'exprime donc par

$$Di = \frac{1}{2}\rho_\infty \int_{\mathcal{S}_T} (v^2 + w^2)\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{4.5}$$

où $\mathcal{S}_T$ est un plan perpendiculaire à l'écoulement loin dans le sillage (voir Fig.4.1). La façon habituelle, considérée plus pratique, d'intégrer cette équation est d'exprimer l'écoulement transversal sous la forme de vorticité et de fonction de courant ($\zeta - \psi$) [10]

$$D_i = \frac{1}{2}\rho_\infty \int_{\mathcal{S}_T} \psi\zeta\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{4.6}$$

Cette méthode est la plus couramment utilisée dans la littérature et sera comparée à la nouvelle méthode de calcul de la traînée induite développée durant ce projet. Le coefficient de traînée calculé avec cette méthode sera représenté par C_{Di} et sera désigné **coefficient de traînée induite par intégration de l'écoulement transversal.**

Les prédictions obtenues avec cette méthode sont reconnues comme étant dépendantes de la position d du plan $\mathcal{S}_T$ derrière le bord de fuite [3] (voir Fig.4.1). À mesure que d augmente, la valeur de la traînée induite diminue au profit de la traînée

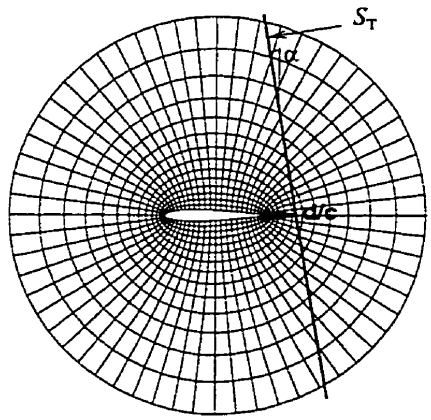


Figure 4.1 Définition de la surface d'intégration pour l'évaluation de C_{Di}.

associée à la production d'entropie D_s. Ceci est une manifestation du mécanisme de transformation discuté à la Section 4.1.2 pour les solutions discrétisées des équations d'Euler. Donc, en général, le plan S_T est placé près du bord de fuite où les suppositions utilisée pour obtenir l'Éq.(4.5) ne sont pas strictement valides. Cette méthode ne peut donc pas être appliquée systématiquement. La nouvelle méthode de prédiction de la traînée induite proposée à la section suivante n'introduit pas de simplifications et s'applique plus systématiquement.

4.2 Nouvelle méthode de prédiction de la traînée induite

Pour une solution discrétisée des équations d'Euler, l'Éq.(4.2) stipule qu'il y a trois contributions à la traînée totale d'une aile: la traînée induite, la traînée associée à la production d'entropie (celle produite par le choc et la fausse entropie de la surface du corps et du sillage) et la traînée associée à la viscosité artificielle. La nouvelle méthode proposée dans ce travail se base sur l'Éq.(4.2) qui peut s'écrire

$$D_i = D - (D_s + D_\mu) \tag{4.7}$$

La traînée totale D est évaluée avec l'intégration de pression (Éq.(3.1)) et D_s est la traînée associée à toutes les sources d'entropie excepté la fausse entropie produite dans le sillage.

L'évaluation de D_s est faite avec la relation d'Oswatitsch exacte sur une surface d'intégration qui doit être adéquate. Le choix de la surface d'intégration est très important pour l'évaluation de cette équation. Elle doit être choisie telle que seule l'entropie produite par l'onde de choc et la surface du corps soit comprise dans l'intégration de D_s.

La Fig.4.2 montre un exemple de surface d'intégration utilisé pour l'évaluation de D_s pour une section d'un maillage de type O-H. La distance approximative d représente la distance maximale entre le bord de fuite et la portion en aval de la surface d'intégration. Une petite valeur d doit être choisie afin d'exclure l'entropie produite dans le sillage.

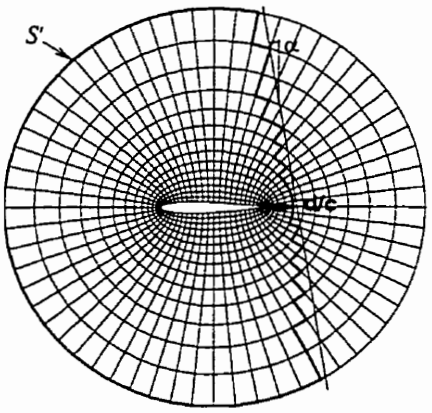


Figure 4.2 Définition de la surface d'intégration pour l'évaluation de D_s.

L'utilisation du maillage dans la définition de la surface d'intégration pour le calcul de $(D_s + D_\mu)$ a pour avantage de ne pas introduire d'erreur d'interpolation qui seraient présentes si la surface était quelconque. En effet, il y a parfaite cohérence

avec le schéma d'interpolation du code numérique. Le coefficient de traînée induite calculé avec cette nouvelle méthode sera désigné par C_{Di}^{new}.

4.3 Application aux ailes

L'application des méthodes tri-dimensionnelles de prédiction de la traînée porte sur divers cas trouvés dans la littérature. Des cas en régime transsonique ou subsonique, pour des ailes portantes ou non, permettent de vérifier la validité de la nouvelle méthode de prédiction de la traînée induite (Section 4.2). Les ailes $X_t = 1.0$ [19] et ONERA M6 [16] sont traitées avec des maillages de type O-H plutôt grossiers et certaines avec des maillages plus raffinés. Seuls quelques résultats importants sont présentés à la fin de ce chapitre. Une étude plus complète est présentée dans l'article reproduit à l'annexe II.

Les expressions pour le calcul de la traînée développées et appliquées en trois dimensions sont les suivantes

$$C_{Dp} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \mathcal{A}} \int_{S_B} -p\vec{n}\cdot\hat{\imath}\,\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{4.8}$$

$$C_{Dm} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \mathcal{A}} \int_{\mathcal{S}} \left(-p\vec{n}\cdot\hat{\imath} - \rho u\vec{q}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{4.9}$$

$$C'_{Dm} = C_{Dm} + \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \mathcal{A}} \int_{\mathcal{S}} (\tau\cdot\vec{n})\cdot\hat{\imath}\,\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{4.10}$$

$$C_{Ds} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty \mathcal{A}} \int_{\mathcal{S}} \mathcal{F}\left(\gamma, R, M_\infty, s - s_\infty\right)\rho\vec{q}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{4.11}$$

$$C_{Ds+\mu} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \mathcal{A}} \left[U_\infty \int_{\mathcal{S}'} \mathcal{F}\left(\gamma, R, M_\infty, s - s_\infty\right)\rho\vec{q}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{S}\right. \tag{4.12}$$

$$+ \left.\int_{\mathcal{S}'} (\tau\cdot\vec{n})\cdot\hat{\imath}\,\mathrm{d}\mathcal{S} - \int_{\mathcal{S}'} \rho\vec{q}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{S}\right] \tag{4.13}$$

$$C_{Dw} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty \mathcal{A}} \int_{\mathcal{S}_{\text{shock}}} \mathcal{F}\left(\gamma, R, M_\infty, s - s_\infty\right)\rho\vec{q}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{4.14}$$

$$C_{Di} = \frac{1}{U_\infty^2 \mathcal{A}} \int_{\mathcal{S}_T} \psi\zeta\,\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{4.15}$$

$$C_{Di}^{\text{new}} = C_{Dp} - C_{Ds+\mu} \tag{4.16}$$

$$C_D^{\mathrm{sp}} \;=\; C_{Ds+\mu} - C_{Dw} \tag{4.17}$$

où $\mathcal{F}(\gamma, R, M_\infty, s - s_\infty) = \left[1 - \sqrt{1 + \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2}\left\{1 - \exp\left[\left(\frac{s-s_\infty}{R}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right]\right\}}\right]$.

Dans les Éqs.(4.9), (4.10) et (4.11), $\mathcal{S}$, est une surface définie par les surfaces en O du maillage (comme pour les profils aérodynamiques) sur toute l'envergure de l'aile à partir de sa surface jusqu'à la frontière externe. La surface d'intégration $\mathcal{S}'$ de l'Éq.(4.12) est, quant à elle, définie de façon à exclure la fausse entropie produite dans le sillage (voir Fig.4.2). La surface $\mathcal{S}_{shock}$ de l'Éq.(4.14) est définie comme en deux dimensions (voir Fig.3.1) mais, ici, sur l'envergure de l'aile.

L'Éq.(4.17) exprime la traînée fortuite causée par la viscosité artificielle et la fausse entropie contenue dans les solutions numériques à l'exception de celle produite dans le sillage. En utilisant l'Éq.(4.16), on peut facilement remarquer que C_D^{sp} correspond à une correction à appliquer à l'intégration de pression C_{Dp} afin d'assurer une parfaite concordance entre la prédiction de traînée de champ rapproché et celle de champ éloigné:

$$C_{Dp} - C_D^{\mathrm{sp}} = C_{Di}^{\mathrm{new}} + C_{Dw} \tag{4.18}$$

Comme en deux dimensions, l'intégration de pression C_{Dp} doit être égale à C'_{Dm} car le code d'Euler utilise une formulation conservative. Dans les régions où la viscosité artificielle est faible, C_{Dm} sera très près de C_{Dp} également.

4.3.1 Comparaison entre les méthodes de champ rapproché et éloigné

En trois dimensions, la même conclusion qu'en deux dimensions peut être tirée concernant les méthodes de champ rapproché et éloigné: les méthodes de champ éloigné ne sont pas plus précises que la méthode basée sur la simple intégration de la pression sur la surface du corps en ce qui a trait à la précision. Deux cas test le démontrent, l'aile $X_t = 1.0$ en régime transsonique et subsonique (à $M_\infty = 0.85$ et $M_\infty = 0.20$). Les solution sont obtenues sur un maillage grossier de 65x25x35 cellules et présentées aux Figs.4.3 et 4.4

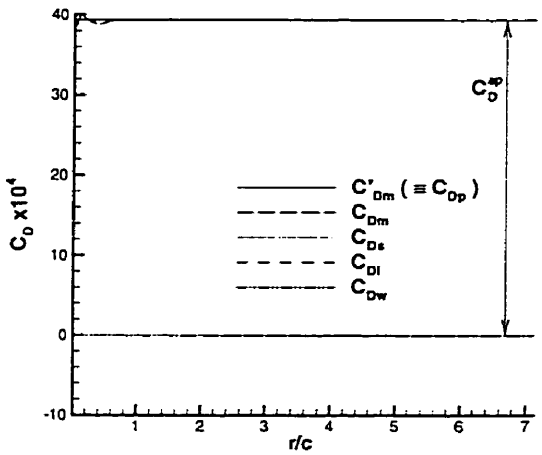


Figure 4.3 Variation de la prédiction de la traînée en fonction de la distance d'intégration à l'infini – aile $X_t = 1.0$ à $M_\infty = 0.2$ et $\alpha = 0.0$

Les valeurs de C_{Dp}, C_{Dm}, C'_{Dm} et C_{Ds} sont égales si la distance d'intégration est suffisamment éloignée ($r/c > 2.5$). Il est à remarquer ici que la valeur donnée par C_{Ds} est égale aux autres malgré l'utilisation de la surface d'intégration S (et non pas S'). Ceci est expliqué par les cas choisis qui sont non portants et donc qui ne produisent pas d'entropie dans le sillage. La traînée totale n'est due qu'à l'entropie produite à la surface de l'aile et par l'onde de choc le cas échéant.

4.3.2 Mécanisme de production d'entropie

Pour les ailes non portantes, comme pour les profils aérodynamiques, dans un écoulement subsonique, la traînée totale devrait être nulle car il n'y a pas d'onde de choc ni de tourbillons de bout d'aile. Par contre, la présence de fausse entropie dans les solutions discrétisées des équations d'Euler conduit à une traînée totale non nulle. Le coefficient de traînée calculé avec la relation d'Oswatitsch exacte résulte des sources de fausse entropie exclusivement pour ces cas. Donc, si la surface d'intégration est suffisamment loin du corps, on peut conclure que la valeur non nulle de la traînée totale n'est due qu'à la production de fausse entropie. On peut remarquer ce phénomène

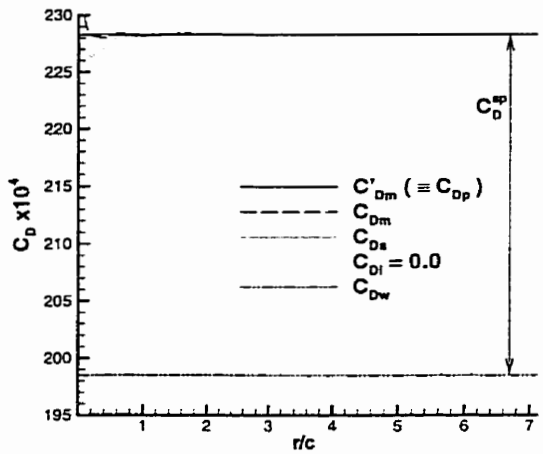


Figure 4.4 Variation de la prédiction de la traînée en fonction de la distance d'intégration à l'infini – aile $X_t = 1.0$ à $M_\infty = 0.85$ et $\alpha = 0.0$

aux Figs.4.3 et 4.4 où la traînée totale est la somme des contributions de l'entropie, la fausse et celle de l'onde de choc dans le cas transsonique.

Les cas portants en régime transsonique, plus généraux, sont examinés à l'aide de deux solutions de l'écoulement autour de l'aile $X_t = 1.0$ à $M_\infty = 0.8$ et $\alpha = 4.0^o$. Deux maillages sont utilisés: un maillage grossier (65×25×35) et un maillage raffiné (129×49×66).

Les prédictions de traînée sont présentées aux Figs.4.5 et 4.6 en fonction de d, la distance derrière le bord de fuite de la surface d'intégration. Les valeurs de C_{Dp}, C_{Dw} et C_D^{sp} sont constantes car leur surface d'intégration n'est pas une fonction de d. À mesure que d augmente, le mécanisme d'entropie du sillage est très bien mis en évidence. Le coefficient de traînée $C_{Ds+\mu}$ augmente et les coefficients de traînée induite (C_{Di}^{new} et C_{Di}) diminuent démontrant le transfert d'un type de traînée vers l'autre. À $d = 0$, la valeur de $C_{Ds+\mu}$ donne la somme de la traînée d'onde et de la fausse traînée car le sillage est exclu de l'intégration. Pour ne pas sous-estimer la traînée induite, il faut choisir une distance d le plus près possible du bord de fuite. Cette contrainte n'est pas compatible avec les suppositions de l'intégration

de l'écoulement transversal mais l'est avec la nouvelle méthode proposée car cette dernière utilise une formulation exacte.

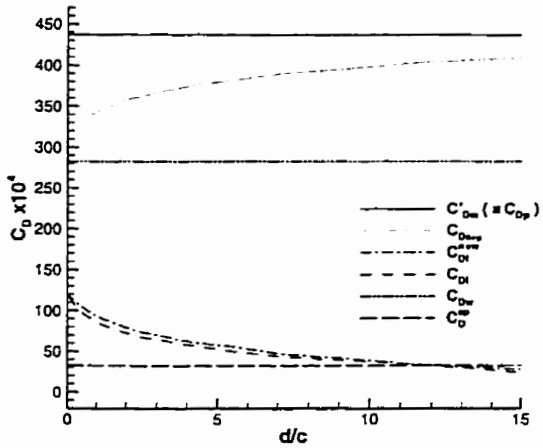


Figure 4.5 Variation de la prédiction de la traînée en fonction de la distance d'intégration derrière le bord de fuite – aile $X_t = 1.0$ à $M_\infty = 0.8$ et $\alpha = 4.0$, maillage raffiné

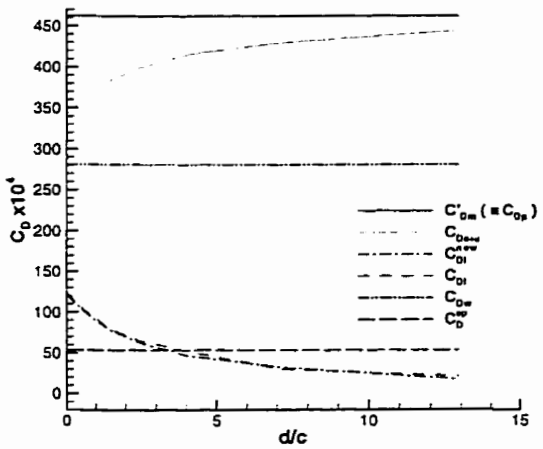


Figure 4.6 Variation de la prédiction de la traînée en fonction de la distance d'intégration derrière le bord de fuite – aile $X_t = 1.0$ à $M_\infty = 0.8$ et $\alpha = 4.0$, maillage grossier

Comme en deux dimensions, la production de fausse entropie augmente avec les maillages plus grossiers. Ceci est clairement démontré si l'on compare les valeurs de C_D^{sp} aux Figs.4.5 et 4.6. Il est intéressant de noter que les prédictions de traînée

induite et d'onde ne sont pas affectées par la densité du maillage parce que leur méthode de champ éloigné élimine la contribution de la fausse traînée. Le coefficient C_{Dp} augmente avec les maillages plus grossiers car la fausse traînée est incluse dans son évaluation.

4.3.3 Prédiction de la traînée induite et d'onde

Plusieurs cas trouvés dans la littérature ont été utilisés pour valider la nouvelle méthode de prédiction de la traînée induite. Les observations de cas en cas conduisent aux mêmes conclusions de sorte que le cas le plus général est présenté dans cette section. Il s'agit de l'écoulement autour de l'aile $X_t = 1.0$ à $M_\infty = 0.80$ et $\alpha = 4.0^o$ sur un maillage grossier ($65 \times 25 \times 35$) et un maillage raffiné ($129 \times 49 \times 66$) présentée au Tableau 4.1. Les résultats de la Réf. [20] y sont aussi présentés pour fin de comparaison.

		Coefficient de traînée $\times 10^4$							
solution	maillage	C_{Lp}	C_{Dp}	$C_{Ds+\mu}$	C_{Di}^{new}	C_{Di}	C_{Di}^{Pr}	C_{Dw}	C_D^{sp}
Réf. [20]	C-H $135 \times 41 \times 30$	0.5265	421.3	N/A	N/A	127.2	126.0	290.3	N/A
Travail actuel	O-H $129 \times 49 \times 66$	0.5342	437.0	315.2	121.8	122.3	129.7	282.8	32.4
Travail actuel	O-H $65 \times 25 \times 35$	0.5235	462.2	342.3	119.9	124.4	122.6	281.0	61.3

Tableau 4.1 Coefficients de traînée pour l'aile $X_t = 1.0$ à $M_\infty = 0.8$ and $\alpha = 4.0^o$

La portance calculée par intégration de pression est identifiée par C_{Lp} et la traînée induite basée sur la théorie de la ligne portante de Prandtl, C_{Di}^{Pr}. La traînée induite calculée avec la nouvelle méthode donne des résultats comparables à la méthode d'intégration de l'écoulement transversal. Leur précision est aussi comparable à la traînée induite prédite par la théorie de la ligne portante. Ce cas et d'autres démontrent la validité de la nouvelle de prédiction de la traînée induite.

Il a été observé par contre pour les cas de l'aile ONERA M6 que la traînée induite calculée avec la nouvelle méthode, même si elle se compare bien avec la la méthode d'intégration de l'écoulement transversal, donne des valeurs inférieures à

celles obtenues avec la théorie de la ligne portante. Cette dernière donne la traînée induite minimum pour une aile ayant un facteur d'Oswald de 1.0.

Pour les cas transsoniques précédents et les autres cas transsoniques, la traînée d'onde calculée diffère de celle des cas cités dans la littérature. Ce désaccord est attribué à la méthode de calcul. Pour les cas de la littérature, l'utilisation d'un plan d'intégration en aval des ondes de choc comprend sûrement une contribution de la fausse entropie car elle est surtout produite en amont des chocs. De plus, à des nombres de Mach élevés, la relation approximative d'Oswatitsch sous-estime la traînée d'onde. Donc la comparaison est difficile.

L'effet du raffinement du maillage est bien quantifié par la valeur de la fausse traînée C_D^{sp} (voir Tableau 4.1). En effet, cette valeur augmente pour le maillage plus grossier comme observé en deux dimensions. Les valeurs de traînée induite et d'onde ne sont pas affectées par la fausse entropie car elle est isolé de ces méthodes. Par contre, l'intégration de pression est affectée par la fausse entropie car son effet est inclus dans cette intégration.

CHAPITRE V

Conclusion

5.1 Résumé du mémoire

Une étude critique de la prédiction de la traînée en régime transsonique basée sur la solution des équations d'Euler fut présentée dans ce mémoire. L'application se limitait aux écoulements non visqueux ce qui conduisait au choix des équations d'Euler pour modéliser l'écoulement. La traînée des profils aérodynamiques et des ailes fut étudiée pour lesquels, la traînée de pression peut être décomposée en traînée induite et d'onde. Voici un résumé du travail complété.

Le travail d'amélioration et d'optimisation du code d'Euler qui a été fourni au début du projet fut présenté au Chapitre II. Après une discussion qui présentait le code initial, les modifications trouvées dans le code actuel furent présentées. Celles-ci comprenaient le schéma numérique de résolution, l'extrapolation de la pression à la paroi solide, le schéma d'interpolation, les conditions aux frontières à l'infini et la viscosité artificielle.

Le Chapitre III présentait, en premier lieu, l'étude de la prédiction de la traînée des profils aérodynamiques. La traînée totale a comme seule composante la traînée d'onde. Différentes méthodes de prédiction de la traînée d'onde furent présentées et comparées entre elles comme l'intégration de la pression de surface, de la quantité de mouvement, de l'entropie par la relation d'Oswatitsch et de la viscosité artificielle de l'idée originale de Garabedian. Les résultats furent calculés pour le profil NACA 0012.

L'étude de la traînée des ailes fut ensuite présentée au Chapitre IV. L'étude de la traînée induite fut alors ajoutée à la traînée d'onde. Une nouvelle méthode de

prédiction de la traînée induite fut alors développée. Elle utilise l'intégration de la pression de surface et la relation d'Oswatitsch intégrée sur des surfaces appropriées. Elle fut comparée à la méthode classique d'intégration de l'écoulement transversal. Les résultats furent calculés pour l'aile ONERA M6 et une aile à distribution de corde elliptique.

5.2 Contributions de ce mémoire

Les contributions de ce mémoire peuvent se diviser essentiellement en trois catégories:

1. avancement des connaissances au niveau de la compréhension des phénomènes reliés à la bonne évaluation et à la décomposition de la traînée de pression,
2. étude critique sur les différentes méthodes d'évaluation et de décomposition de la traînée de pression disponible dans la littérature technique, et
3. développement de nouvelles méthodes d'évaluation et de décomposition de la traînée de pression.

En ce qui concerne la première catégorie, les contributions sont les suivantes:

- Il a été démontré qu'il n'y a aucun avantage, au niveau de la précision de la traînée de pression, à utiliser des méthodes dites de champ éloigné par rapport aux méthodes d'intégration à la surface du corps. En effet, aucune différence significative a été notée entre les prédictions de la traînée basée sur la relation d'Oswatitsch, sur l'intégration de la pression sur la surface du corps, et sur un bilan de quantité de mouvement lorsque la solution d'Euler a été produite par un code conservatif. Cette conclusion est à l'opposé de la croyance générale exprimée dans la littérature technique.
- La source des erreurs présentes dans les prédictions de la traînée de pression basées sur une intégration à la surface du corps a été identifiée comme étant

essentiellement relié à la fausse production d'entropie présente dans toutes solutions discrétisées des équations d'Euler.

- La relation d'Oswatitsch permet de distinguer la contribution de la traînée d'onde de la traînée induite. De plus, elle permet de minimiser les effets négatifs de la fausse entropie sur la précision de la traînée d'onde lorsque cette relation est appliquée sur une surface d'intégration située près des chocs.

Les conclusions de l'étude critique concernant les différentes méthodes d'évaluation et de décomposition de la traînée de pression disponible dans la littérature technique sont les suivantes:

- La méthode de Garabedian, basée sur une intégration de volume d'un terme positif relié à la viscosité artificielle, sous-estime systématiquement la traînée d'onde.

- La relation d'Oswatitsch sous-estime également la traînée d'onde. Dans ce contexte, il a été démontré qu'il est préférable d'utiliser la relation exacte d'Oswatitsch.

Enfin, une nouvelle façon de décomposer la traînée de pression a été proposée. Elle a permis de développer:

- une méthode originale pour corriger les prédictions de traînée basées sur l'intégration de la pression à la surface du corps. La valeur de traînée de pression ainsi corrigée est en accord avec les évaluations obtenues à partir d'analyse de champ éloigné.

- une nouvelle méthode d'évaluation de la traînée induite. Elle a comme avantage d'être basée sur une formulation exacte, donc plus générale que les méthodes disponibles dans la littérature technique, et d'être essentiellement insensible au niveau de raffinement du maillage et à l'importance de la fausse entropie.

5.3 Recommandations

La difficulté majeure avec le calcul de la traînée à l'aide des équations d'Euler réside surtout dans le modèle de simulation de l'écoulement. La viscosité artificielle introduite dans les équations de base nécessaire pour la solution numérique constitue le principal obstacle à surmonter pour obtenir des prédictions de qualité. Si la viscosité artificielle était absente ou du moins négligeable, ce qui est plus envisageable, les solutions d'écoulements seraient davantage fidèles aux équations d'Euler de base donc plus fidèles à la physique des écoulements non visqueux. La prédiction de la traînée en serait améliorée. De plus, la prédiction de la traînée serait simplifiée. La seule source d'entropie de l'écoulement serait les ondes de choc et sa simple intégration à l'infini donnerait la traînée d'onde et, en concert avec l'intégration de pression, la traînée induite.

La viscosité artificielle s'avère nécessaire mais, il faudrait néanmoins en minimiser ses effets négatifs. Par exemple, le traitement aux parois solides appliqué à la viscosité artificielle devrait être amélioré dans le but de minimiser ou d'éliminer la fausse entropie crée à la surface. La fausse entropie étant éliminée, il ne resterait que celle produite à travers les onde de choc et dans le sillage. La prédiction de la traînée en serait simplifiée à intégrer l'entropie produite au choc, à l'aide d'une surface qui exclurait le sillage pour obtenir la traînée d'onde comme suggéré dans ce mémoire. La traînée induite serait simplement trouvée en soustrayant la traînée d'onde de la traînée totale sans avoir à isoler la fausse traînée.

La prochaine étape consiste à étudier les possibilités qu'offrent les méthodes proposées dans ce mémoire pour évaluer la traînée à partir de solutions des équations de Navier-Stokes. Ceci n'est pas une tâche facile et évidente puisqu'une source d'entropie supplémentaire serait présente dans l'écoulement: la viscosité du fluide.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BETZ, (1925). Ein verfahren zur direkten ermittlung des profilwiderstandes. *Zeitschrift fur Flugtechnik und Motorluftschiffahrt*, 16, 42–44.

[2] G. W. BRUNE et P. W. BOGATAJ, (oct. 1990). Induced drag at a simple wing from wake measurements. *SAE Technical Paper 901934*.

[3] R. M. CUMMINGS, M. B. GILES, et G. N. SHRINIVAS, (1996). Analysis of the Elements of Drag in Three-Dimensional Viscous and Inviscid Flows. *AIAA Paper AIAA-96-2482-CP*.

[4] P.R. GARABEDIAN, (1976). Computation of Wave Drag for Transonic Flow. *Journal d'analyse mathématique*, 30, 164–171.

[5] A. JAMESON, (1983). Solution of the Euler Equations for Two Dimensional Flow by a Multigrid Method. *Applied Math and Computation*, 13, 327–355.

[6] A. JAMESON, W. SCHMIDT, et E. TURKEL, (1981). Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes. *AIAA Paper 81-1259*.

[7] A. JAMESON et S. YOON, (1986). Multigrid Solution of the Euler Equations Using Implicit Schemes. *AIAA Journal*, 24(11), 1737–1743.

[8] J. M. JANUS et A. CHATTERJEE, (1995). Use of a wake-Integral Method for Computational Drag Analysis. *AIAA Journal*, 34(1), 188–190.

[9] R. C. LOCK, (juin/juil. 1986). The Prediction of the Drag of Aerofoils and Wings at High Subsonic Speeds. *Aeronautical Journal*, 207–226.

[10] E. C. MASKELL, (1972). *Progress Towards a Method for the Measurements of the Components of the Drag of a Wing of Finite Span.* Rapport technique 72232, Royal Aircraft Establishment.

[11] C. MASSON, C. VEILLEUX, et I. PARASCHIVOIU. Airfoil Wave-Drag Prediction Using Euler Solutions of Transonic Flows. *Soumis au Journal of Aircraft.*

[12] D. L. MATHIAS, J. C. ROSS, et R. M. CUMMINGS, (1995). Wake Integration to Predict Wing Span Loading from a Numerical Simulation. *Journal of Aircraft*, 32(5), 1165–1167.

[13] K. MCGRATTAN, (1992). Comparison of Transonic Flow Models. *AIAA Journal*, 30(9), 2340–2343.

[14] K. OSWATITSCH, (1956). *Gas Dynamics.* Academic Press Inc.

[15] S. SAHA, (1989). *Computation of Transonic Flow About Aerofoils and Wings.* Thèse de Doctorat, Dept. of Aerospace Engineering, Indian Institute of Technology, Kharagpur.

[16] V. SCHMITT et F. CHARPIN, (1979). Pressure Distribution on the ONERA M6 wing at Transonic Mach Numbers. *Dans Experimental Data Base for Computer Program Assessment*, AGARD AR-138.

[17] J. L. STEGER et B. S. BALDWIN, (1972). *Shock Waves and Drag in the Numerical Calculation of Isentropic Transonic Flow.* Rapport technique TN D-6997, NASA.

[18] B. TREMBLAIS et D. DUTERTRE, (août 1992). *Méthodes Multigrid pour la résolution des équations d'Euler en trois dimensions.* Rapport technique, École Polytechnique de Montréal.

[19] C. P. VAN DAM et K. NIKFETRAT, (1991). Accurate Prediction of Drag Using Euler Methods. *Journal of Aircraft*, 29(3), 516–519.

[20] C. P. VAN DAM, K. NIKFETRAT, P. M. H. W. VIJEN, et I. C. CHANG, (1992). Prediction of Drag at Subsonic and Transonic Speeds Using Euler Methods. *AIAA Paper 92-0169.*

[21] J. VAN DER VOOREN et J. W. SLOOF, (1990). *CFD-Based Drag Prediction; State-of-the-Art, Theory, Prospects.* Rapport technique NLR TP 90247 U, National Aerospace Lab.

[22] C. VEILLEUX, C. MASSON, et I. PARASCHIVOIU. New Induced-Drag Prediction Method Using Oswatitsch's Expression. *Soumis au Aeronautical Journal.*

[23] C. VEILLEUX, C. MASSON, et I. PARASCHIVOIU, (avril 1997). Wave-Drag Prediction Based on Euler Solutions of 2-D Transonic Flows. *Dans Sixth Aerodynamics Symposium*, Toronto. Canadian Aeronautics and Space Institute, 377–385.

[24] J. C. Wu, J. E. Hackett, et D. E. Lilley, (janv. 1979). A generalized wake-integral approach for drag determination in three-dimensional flows. *AIAA Paper AIAA-79-0279.*

[25] N. J. YU, H. C. CHEN, S. S. SAMANT, et P. E. RUPPERT, (juil. 1983). Inviscid Drag Calculations for Transonic Flows. *AIAA Paper 83-1928.*

ANNEXE I

AIRFOIL WAVE-DRAG PREDICTION USING EULER SOLUTION OF TRANSONIC FLOWS

Cette annexe présente l'article qui a été soumis au Journal of Aircraft [11]

AIRFOIL WAVE-DRAG PREDICTION USING EULER SOLUTIONS OF TRANSONIC FLOWS

Christian Masson[1]

Département de génie mécanique
École de technologie supérieure
Montréal (Québec), Canada

Charles Veilleux[2]

Ion Paraschivoiu[3]

Chaire en Aéronautique J.-A. Bombardier
École Polytechnique de Montréal
Montréal (Québec), Canada

abstract

The objective of the present work is the evaluation of four airfoil wave drag prediction methods based on solutions of the Euler equations: Oswatitsch's expression, Garabedian's volume integration, body-surface pressure integration and far-field momentum-flux integration. Results are presented for the inviscid compressible flow over a NACA 0012 airfoil. In the case of two-dimensional inviscid flows of interest here, it is shown that the expression of Garabedian systematically underestimates the wave drag. In contrast with the popular belief, it is demonstrated that no clear improvement, in terms of accuracy, results from the use of far-field methods with respect to body-surface pressure integration. However, drag predictions based on Oswatitsch's expression applied on a surface containing only the shocks are less sensitive to high levels of spurious entropy production (often noted at high angles of attack and/or for coarse grids) since the drag contribution associated with spurious entropy production is eliminated. Furthermore, in three-dimensional flows, they can distinguish the wave drag and the induced drag. A new method is proposed to

[1]Associate Professor, AIAA member

[2]M.A.Sc. Student

[3]Professor and Chair Holder, AIAA Associate Fellow

correct the body-surface pressure integration estimates which is less sensitive to the level of spurious entropy production.

1 INTRODUCTION

In the field of aircraft design, accurate prediction of drag is an essential requirement for performance predictions as well as fuel consumption reduction. During a drag reduction procedure, an evaluation of the total drag of a wing by body-surface integration of pressure and viscous shear is not sufficient. The total drag must be evaluated in terms of its components (boundary-layer, induced, and wave drags) to identify the source of abnormally high drag production.

In this work, various methods for the evaluation of the wave drag are presented and implemented for airfoils. The first method involves Oswatitsch's drag expression [1] relating wave drag to the rate of entropy production through the shock waves. An integration of the rate of entropy production on a closed surface enclosing the body yields the wave drag. Two types of surfaces are considered: surfaces enclosing the body and a suitable surface enclosing only the shocks. The second method involves Garabedian's volume integration [2, 3] developed from the entropy inequality that is fundamental to the method of artificial viscosity. This method relates the rate of entropy production to the explicit artificial viscosity terms typically introduced in inviscid flow solvers and thus transforms the far-field surface integration of the rate of entropy production to a volume integration of a positive definite quantity over the entire calculation domain. The wave drag is also evaluated from integration of the body-surface pressure and by a far-field momentum-flux integration.

2 INVISCID FLOW CALCULATIONS

The two-dimensional Euler solver used in this work is a finite-volume cell-centered scheme with second- and fourth-order artificial viscosity [4]. The governing equations are integrated in time using a fifth-order Runge-Kutta time-stepping scheme. A structured O-grid is used to discretise the calculation domain (see Fig. 1). This Euler solver is similar to a wide range of solvers used in the aircraft community. It is to be noted that the conclusions and recommendations of this work apply to any conservative Euler solver.

3 WAVE DRAG CALCULATIONS

In inviscid flow, the total drag D acting on a body results from the pressure distribution over the body surface $\mathcal{S}_B$, and is given by the following body-surface integral:

$$D = \int_{\mathcal{S}_B} -p\vec{n} \cdot \vec{\imath} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{1}$$

where p is the pressure, $\vec{n}$ is the body-surface unit normal, and $\vec{\imath}$ is the unit vector in the free-stream direction. For the two-dimensional inviscid flows of interest here, the total drag of Eq. (1) is the wave drag and the surface integral reduces to a contour integral. This is the expression most commonly used for the evaluation of the drag and it will be referred to as the **body-surface pressure integration** in this work. The drag coefficient computed using this expression will be denoted C_{D_p}.

A far-field expression for the drag can be derived using the momentum equations applied on any control volume enclosing the body of interest:

$$D = -\int_{\mathcal{S}} (p\vec{n} \cdot \vec{\imath} + \rho u \vec{q} \cdot \vec{n}) \, \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{2}$$

where $\mathcal{S}$ is the outer surface enclosing the control volume, $\vec{n}$ is the unit outward vector normal to the differential surface $\mathrm{d}\mathcal{S}$, ρ is the fluid density, $\vec{q}$ is the fluid velocity vector, and u is the component of velocity in the free-stream direction. Eq.(2) relates

the drag to a far-field **momentum-flux integral**. The drag coefficient calculated using this momentum-flux integral will be denoted C_{Dm}.

3.1 OSWATITSCH'S EXPRESSION

Oswatitsch has derived an *approximate* expression relating the wave drag to the rate of entropy production in a steady adiabatic inviscid flow of an ideal gas [1]. In such a flow, it is possible to relate the momentum deficit to the rate of entropy production using the following procedure.

First, using the conservation of mass principle over the control volume, the far-field expression for the drag of a body (Eq.(2)) can be expressed as:

$$D = -\int_{\mathcal{S}} \left[(p - p_\infty)\vec{n}\cdot\vec{\imath} - U_\infty\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right)\rho\vec{q}\cdot\vec{n}\right] \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3}$$

where p_∞ and U_∞ are the free-stream pressure and velocity, respectively. Assuming the fluid to be an ideal gas and the flow to be adiabatic, the expression of the conservation of the energy can be expressed as

$$\left(\frac{q}{U_\infty}\right)^2 = 1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2}\left\{1 - \left[\frac{p}{p_\infty}\exp\left(\frac{s - s_\infty}{R}\right)\right]^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}\right\} \tag{4}$$

where R is the ideal gas constant, γ is the specific heat ratio, and s is the specific entropy. Free-stream specific entropy and Mach number are represented by s_∞ and M_∞, respectively. When the surface of integration $\mathcal{S}$ is sufficiently far from the body, the only significant component of the velocity vector is u, $p \approx p_\infty$, and we can obtain the following expression:

$$\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) \approx \left(1 - \frac{q}{U_\infty}\right) = 1 - \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2}\left\{1 - \exp\left[\left(\frac{s - s_\infty}{R}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right]\right\}} \tag{5}$$

Finally, introducing Eq.(5) in Eq.(3) yields:

$$D = \int_{\mathcal{S}} U_\infty\left[1 - \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2}\left\{1 - \exp\left[\left(\frac{s - s_\infty}{R}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right]\right\}}\right]\rho\vec{q}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{6}$$

This equation is based on the exact relation between entropy production and wave drag in inviscid flows and will be referred to as the **exact Oswatitsch's expression.** The drag coefficient computed with this expression will be denoted C_{Ds}.

The surface of integration $\mathcal{S}$ used to derive this expression was assumed to enclose the body and to be far from it. However, any surface of integration that encloses only the immediate vicinity of the shock waves can be used since entropy changes occur only through the shocks and $\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$ on $\mathcal{S}_B$. When a surface of integration enclosing only the immediate vicinity of the shocks is used to compute the drag based on the exact Oswatitsch's expression, the drag coefficient will be denoted $C_{Ds}|_{\text{shock}}$.

Expansion of the integrand of Eq.(6) to the lowest order in $(s - s_\infty)$ leads to the so-called *approximate* **Oswatitsch's expression:**

$$D = \frac{U_\infty}{\gamma R M_\infty^2} \int_{\mathcal{S}} (s - s_\infty) \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{7}$$

The drag coefficient computed by applying Oswatitsch's expression [1] on an integration surface enclosing the body will be denoted C_{Dosw}. When $\mathcal{S}$ in Eq.(7) encloses only the shock waves, the drag coefficient will be denoted $C_{Dosw}|_{\text{shock}}$.

3.2 GARABEDIAN'S VOLUME INTEGRATION

Garabedian [2] has proposed an alternative way of calculating wave drag based on a volume integration over the entire flow-field. In this method, the rate of entropy production is related to the explicit artificial viscosity typically introduced in inviscid flow solvers and thus the far-field surface integration of the rate of entropy production, derived by Oswatitsch (see Eq.(7)), is transform into a volume integration of a positive definite quantity related to the artificial viscosity over the entire calculation domain.

Assuming steady-state flows and neglecting the fourth-order artificial viscosity terms introduced in the Euler equations, an expression relating entropy production

and artificial viscosity can be derived [2, 3]. This expression can be combined with Eqs.(7) to give:

$$D = \frac{U_\infty}{\gamma R M_\infty^2} \int_{\mathcal{V}} \frac{c_v \rho}{e} \mid\mid w \mid\mid_{WD}^2 \, \mathrm{d}\mathcal{V} \tag{8}$$

which is the expression between the wave drag and the volume integration of a positive definite quantity related to the artificial viscosity ($\mid\mid w \mid\mid_{WD}^2$). It will be referred to as **Garabedian's volume integration.** The drag coefficient calculated using Eq.(8) will be denoted C_{Dgar}. Details concerning the derivation of this expression can be found in Ref. [3].

4 RESULTS AND DISCUSSION

The results presented in this section pertain to the inviscid, compressible flow over a NACA 0012 airfoil. The drag expressions developed in the previous section have been implemented in the Euler solver described in Section 2. More specifically, the following eight expressions have been used:

$$C_{Dp} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} \int_{S_B} -p\vec{n} \cdot \hat{\imath} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{9}$$

$$C_{Dm} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} \int_{\mathcal{S}} (-p\vec{n} \cdot \hat{\imath} - \rho u \vec{q} \cdot \vec{n}) \, \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{10}$$

$$C'_{Dm} = C_{Dm} + \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} \int_{\mathcal{S}} (\tau \cdot \vec{n}) \cdot \hat{\imath} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{11}$$

$$C_{Ds} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} U_\infty \int_{\mathcal{S}} \tag{12}$$

$$\left[1 - \sqrt{1 + \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2}\left\{1 - \exp\left[\left(\frac{s - s_\infty}{R}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right]\right\}}\right] \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{13}$$

$$C_{Ds}|_{\text{shock}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} U_\infty \int_{\mathcal{S}_{\text{shock}}} \tag{14}$$

$$\left[1 - \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2}\left\{1 - \exp\left[\left(\frac{s - s_\infty}{R}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right]\right\}}\right] \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{15}$$

$$C_{Dosw} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} \frac{U_\infty}{\gamma R M_\infty^2} \int_{\mathcal{S}} (s - s_\infty) \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{16}$$

$$C_{Dosw}|_{\text{shock}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c}\frac{U_\infty}{\gamma R M_\infty^2}\int_{S_{\text{shock}}}(s - s_\infty)\rho\vec{q}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{17}$$

$$C_{Dgar} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c}\frac{U_\infty}{\gamma R M_\infty^2}\int_{\mathcal{V}}\frac{c_v\rho}{e}\,||\,w\,||_{WD}^2\,\mathrm{d}\mathcal{V} \tag{18}$$

where c is the airfoil chord, and τ is the artificial viscous stress tensor.

In these expressions, $\mathcal{S}$, the contour enclosing the body, is taken as the contour defined by a specific O-line of the grid used to produce the Euler solutions (see Fig. 1). Drag coefficient calculations have been performed for each O-line, from the body surface to the outer surface of the calculation domain. $\mathcal{S}_{shock}$ is a contour enclosing only the immediate vicinity of the shocks in order to eliminate the spurious-entropy drag contribution typically observed near the stagnation point. The drag coefficient that includes both the momentum and artificial viscous stress contributions, C'_{Dm}, has been implemented in order to quantify the relative importance of the artificial viscous stresses in the flow.

Since the flow solver is based on a conservative formulation, the drag coefficient based on the body-surface pressure integration (C_{Dp}) should be *exactly* equal to C'_{Dm}. This is indeed the case with the Euler solutions presented in this section. Therefore, the values of C_{Dp} and C'_{Dm} are indistinguishable in all the figures presented in this paper. In regions where the artificial viscous stresses are negligible, C_{Dm} should also be very close to C_{Dp}.

Drag predictions using Eqs.(13) to (18) highly rely on the quality of the solution with respect to the entropy distribution. Fig. 2(a) illustrate typical entropy distributions produced by the two-dimensional Euler solver used in this work. Spurious entropy production is noted in the vicinity of the body surface and more specifically near the stagnation point (see Fig. 2(b)).

Fig. 3(a) shows the variation of the eight drag estimates with respect to $\mathcal{S}$, the chosen surface of integration enclosing the airfoil, characterized by its radial distance r from the body surface. The values of $C_{Ds}|_{\text{shock}}$ and $C_{Dosw}|_{\text{shock}}$ are calculated on an integration surface that encloses only the immediate vicinity of the shocks.

Therefore, these drag estimates are not functions of $\frac{r}{c}$ so that they are presented as constant in Fig. 3(a). In this figure, the drag estimated using Garabedian's volume integration, C_{Dgar}, is given in the legend since its value lies outside of the illustrated scale. In fact, as the free-stream Mach number increases, it has been observed that Garabedian's volume integration leads to significantly lower wave-drag estimates than the predictions based on the other expressions (see Table 1).

A remarkable behavior illustrated in Fig. 3(a) is the fact that when the chosen integration surface is far enough from the body ($\frac{r}{c} > 4$), the values of C_{Dp}, C_{Dm}, C'_{Dm}, and C_{Ds} are essentially constant and in very good agreement with one another.

The values of C_{Ds} and C_{Dosw} vary for $\frac{r}{c} < 4$ since the integration surface does not enclose the shocks completely. The difference between C'_{Dm} and C_{Dm}, again noted for $\frac{r}{c} < 4$ is produced by the artificial viscous stress contribution.

The drag estimate based on Oswatitsch's expression, C_{Dosw} is lower than the previously noted unique value of C_{Dp}, C_{Dm}, and C'_{Dm}. This discrepancy is attributed to the first-order approximation in $(s - s_\infty)$ introduced to obtain Eq.(7). This approximation produces an error which grows with M_∞. At lower free-stream Mach numbers, the difference between the drag estimate based on the exact Oswatitsch's expression, C_{Ds}, and Oswatitsch's expression, C_{Dosw}, tends to zero (see Fig. 4(a)). At such low free-stream Mach numbers, the four drag estimates C_{Dm}, C'_{Dm}, C_{Ds}, and C_{Dosw} are essentially equal (see Table 1).

The very good agreement between the drag estimates C_{Dp}, C_{Dm}, C'_{Dm}, and C_{Ds} clearly indicates that no significant improvement, in terms of accuracy, results from the use of a far-field approach with respect to a simple body-surface pressure integration. To popular belief, the poor results obtained with body-surface pressure integration were attributed to the discretisation of the body surface into panels. The pressure integration was thought to be less accurate on this surface leading to unsatisfactory pressure coefficients, especially with coarser grids [5, 6, 7]. In fact, the discrepancies noted between the pressure coefficient and the far-field coefficients

are caused by the spurious entropy production near the stagnation point generally produced by Euler flow solvers.

Integration of the rate of entropy production on a surface enclosing only the immediate vicinity of the shocks, $C_{Ds}|_{\text{shock}}$ and $C_{Dosw}|_{\text{shock}}$, produces drag estimates that are lower than the essentially unique value of C_{Dp}, C_{Dm}, C'_{Dm}, and C_{Ds} since such surface of integration allows to remove the drag contribution associated with spurious entropy production near the stagnation point. In fact, it is this capacity to eliminate the spurious entropy production contribution that represents the main advantage of drag calculation methods based on the integration of the rate of entropy production. Furthermore, in three-dimensional inviscid flows (not considered here), such entropy-based drag predictions allow to distinguish the wave drag from the induced drag. In contrast, only the total drag is computed using body-surface pressure integration or far-field momentum-flux integration, when analyzing three-dimensional inviscid flows.

Yu et al. [8] have mentioned that the spurious entropy production is mainly caused by inaccurate calculation of the artificial dissipation terms at the body surface, and proposed to apply a weighting function to scale the viscous dissipation terms in the normal direction so that they are gradually turned on from the body surface to the far-field. The effects of this enhancement on drag prediction are illustrated on Figs. 3(b) and 4(b). It is seen that the drag contribution associated to spurious entropy production, represented by the differences $(C_{Ds} - C_{Ds}|_{\text{shock}})$ and $(C_{Dosw} - C_{Dosw}|_{\text{shock}})$, is reduced when such weighting is applied. In the present work, only the results presented in Figs. 3(b) and 4(b) have been obtained using this enhancement. Ultimately, if all spurious entropy production in the flow-field could be eliminated, the drag coefficients C_{Dp}, C_{Dm}, C'_{Dm}, C_{Ds}, and $C_{Ds}|_{\text{shock}}$ would be equal so that any of these methods would be equivalent.

The behavior of the various drag estimates with respect to grid refinement is presented in Table 2. It has been observed that the spurious entropy production in-

creases with coarser grids. This behavior leads to higher estimates of drag on coarse grids compared to fine ones. A correction procedure can be proposed for the body-surface pressure coefficient which could be useful especially on coarse grids. The difference $(C_{Ds} - C_{Ds}|_{\text{shock}})$ gives an indication of the contribution of the spurious entropy to the total drag C_{Dp}. A **corrected body-surface pressure integration** coefficient (denoted C_{Dp}^{corr}) is given by

$$C_{Dp}^{corr} = C_{Dp} - (C_{Ds} - C_{Ds}|_{\text{shock}}) \simeq C_{Ds}|_{\text{shock}} \tag{19}$$

The corrected pressure coefficients are given in the last column of Tables 1 and 2. These estimates are clearly less sensitive to the level of spurious entropy production and are in perfect agreement with the $C_{Ds}|_{\text{shock}}$ estimates.

5 CONCLUSION

In this work, eight different techniques for the evaluation of the wave drag have been presented and implemented for airfoils. These various techniques have been derived from the application of Oswatitsch's expression, Garabedian's volume integration, body-surface pressure integration and far-field momentum-flux integration. Results are presented for the inviscid compressible flow over a NACA 0012 airfoil. It has been shown that the application of Garabedian's volume integration leads to significantly lower wave-drag estimates than the predictions based on the other expressions. In contrast with the popular belief, it is demonstrated that, for two-dimensional inviscid flows considered in this paper, there is no advantage, in terms of accuracy, of using far-field methods. No significant differences are noted among the drag predictions based on Oswatitsch's expression, a momentum-flux integral, and a simple body-surface pressure integration, provided appropriate integration surfaces are selected and false entropy production near the body surface is negligible. However, drag prediction methods based on the integration of the rate of entropy production, such as Oswatitch's expression, allow the distinction of the wave drag and induced drag

in three-dimensional flows. In contrast, only the total drag is computed using body-surface pressure integration or far-field momentum-flux integration, when analyzing three-dimensional inviscid flows. Drag predictions based on Oswatitsch's expression applied on a surface containing only the shocks are less sensitive to high levels of spurious entropy production since the drag contribution associated with spurious entropy production is eliminated. A method was proposed to improve the accuracy of the body-surface pressure integration estimates which is less sensitive to the level of spurious entropy production.

ACKNOWLEDGMENT

This work is supported by a NSERC collaborative R&D Grant with Bombardier Inc./Canadair.

References

[1] Oswatitsch K., *Gas Dynamics.* Academic Press Inc., 1956.

[2] Garabedian P.R., "Computation of Wave Drag for Transonic Flow," *Journal d'analyse mathématique*, Vol. 30, 1976, pp. 164–171.

[3] McGrattan K., "Comparison of Transonic Flow Models," *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 9, 1992, pp. 2340–2343.

[4] Jameson A., Schmidt W., and Turkel E., "Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes," AIAA Paper 81-1259, June 1981.

[5] Janus J. M. and Chatterjee A., "Use of a wake-Integral Method for Computational Drag Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 1, 1995, pp. 188–190.

[6] Cummings R. M., Giles M. B., and Shrinivas G. N., "Analysis of the Elements of Drag in Three-Dimensional Viscous and Inviscid Flows," AIAA Paper AIAA-96-2482-CP, June 1996.

[7] Dam van C. P. and Nikfetrat K., "Accurate Prediction of Drag Using Euler Methods," *Journal of Aircraft*, Vol. 29, No. 3, 1991, pp. 516–519.

[8] Yu N. J., Chen H. C., Samant S. S., and Ruppert P. E., "Inviscid Drag Calculations for Transonic Flows," AIAA Paper 83-1928, July 1983.

		Present solution C_D(x10^4)								
M_∞	α (deg.)	C_{Dp}	C_{Dm}	C'_{Dm}	C_{Ds}	$C_{Ds}\|_{\text{shock}}$	C_{Dosw}	$C_{Dosw}\|_{\text{shock}}$	C_{Dgar}	C_{Dp}^{corr}
0.74	0.00	6	6	6	6	0	6	0	3	0
0.76	0.00	9	9	9	9	4	9	4	5	4
0.78	0.00	30	30	30	30	25	30	25	22	25
0.80	0.00	89	89	89	89	84	89	84	69	84
0.82	0.00	197	197	197	197	192	196	190	155	192
0.85	0.00	461	461	461	461	456	455	449	362	456

Table 1: Summary of drag predictions — 160 x 40 O-grid

	Present solution C_D(x10^4)								
O-grid	C_{Dp}	C_{Dm}	C'_{Dm}	C_{Ds}	$C_{Ds}\|_{\text{shock}}$	C_{Dosw}	$C_{Dosw}\|_{\text{shock}}$	C_{Dgar}	C_{Dp}^{corr}
160 x 40	461	461	461	461	456	455	449	362	456
128 x 32	469	469	469	469	462	463	455	367	462
80 x 20	486	486	486	486	470	480	463	379	470

Table 2: Effects of grid refinement on drag predictions — $M_\infty = 0.85, \alpha = 0.00$

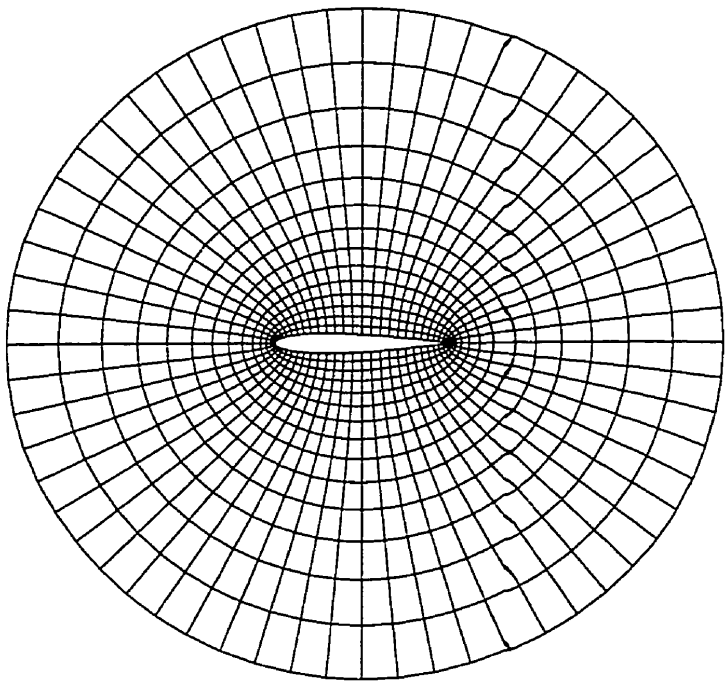


Figure 1: Typical O-grid used to discretise the calculation domain

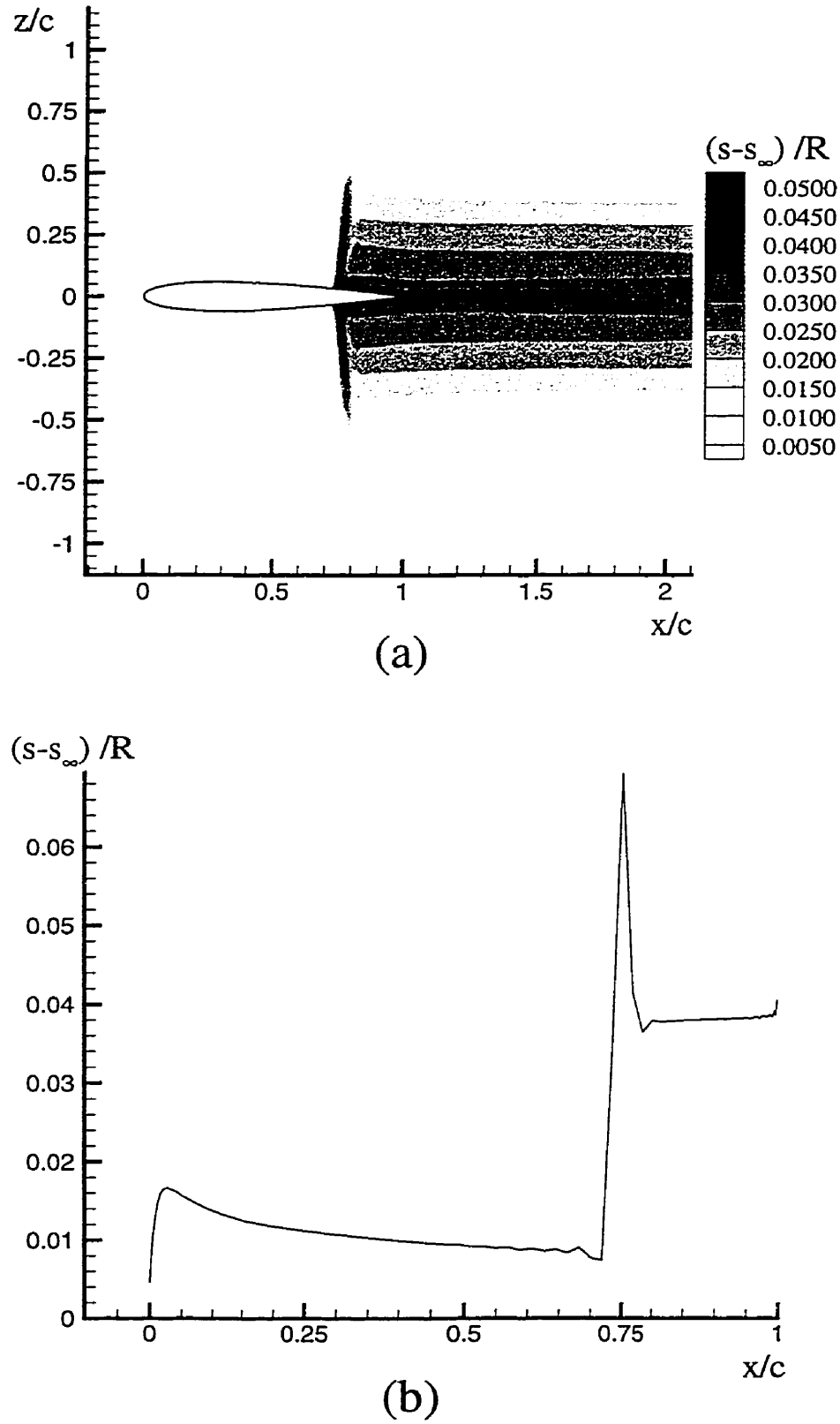
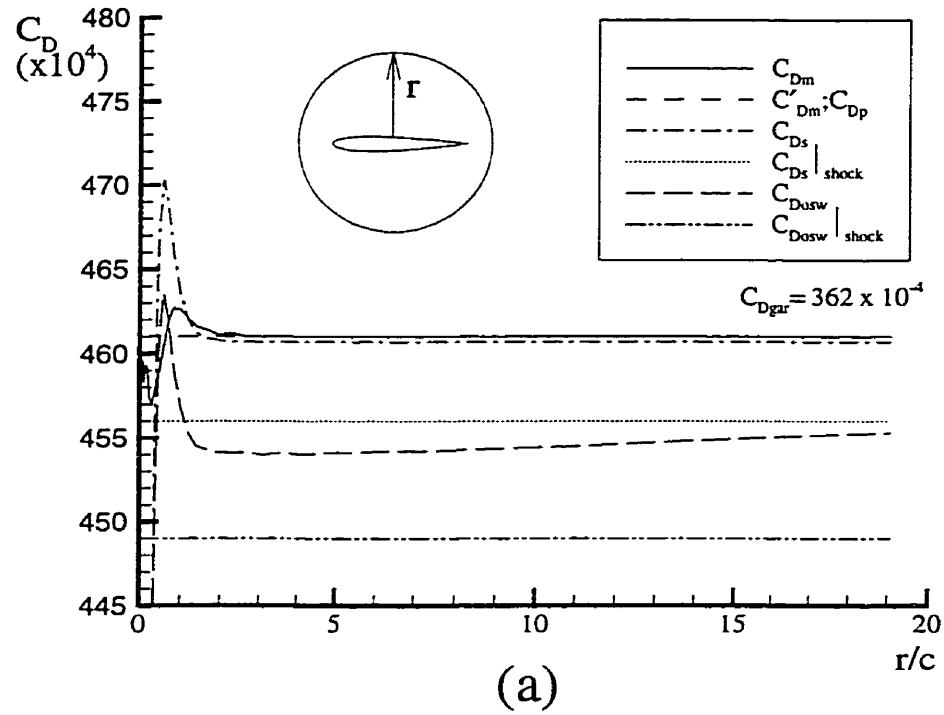
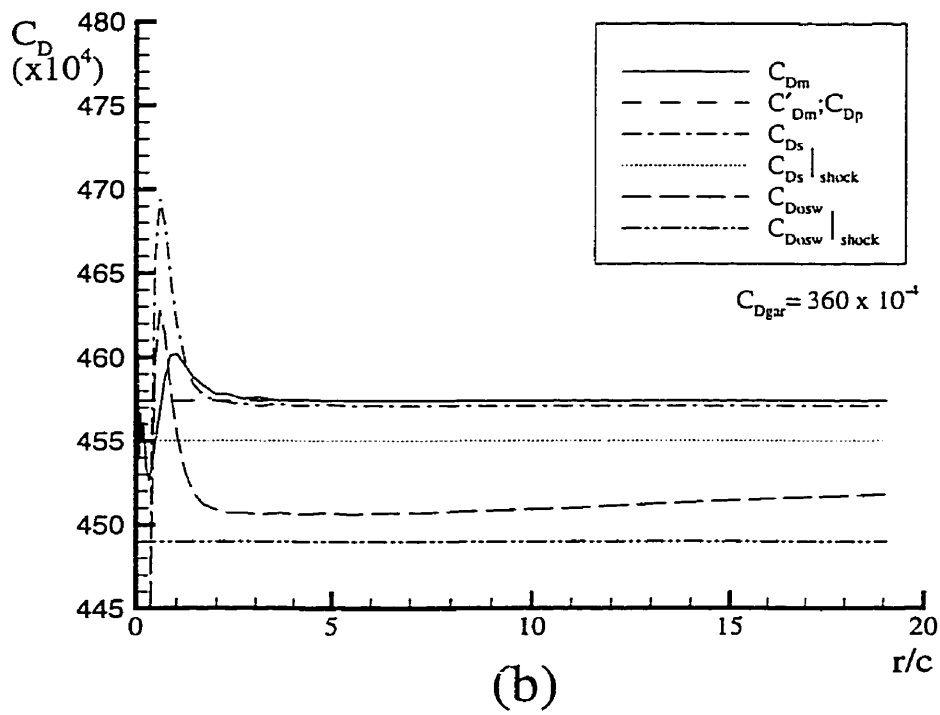


Figure 2: $M_\infty = 0.85$, $\alpha = 0.00$, 160 x 40 O-grid: (a) entropy contours; (b) surface distribution

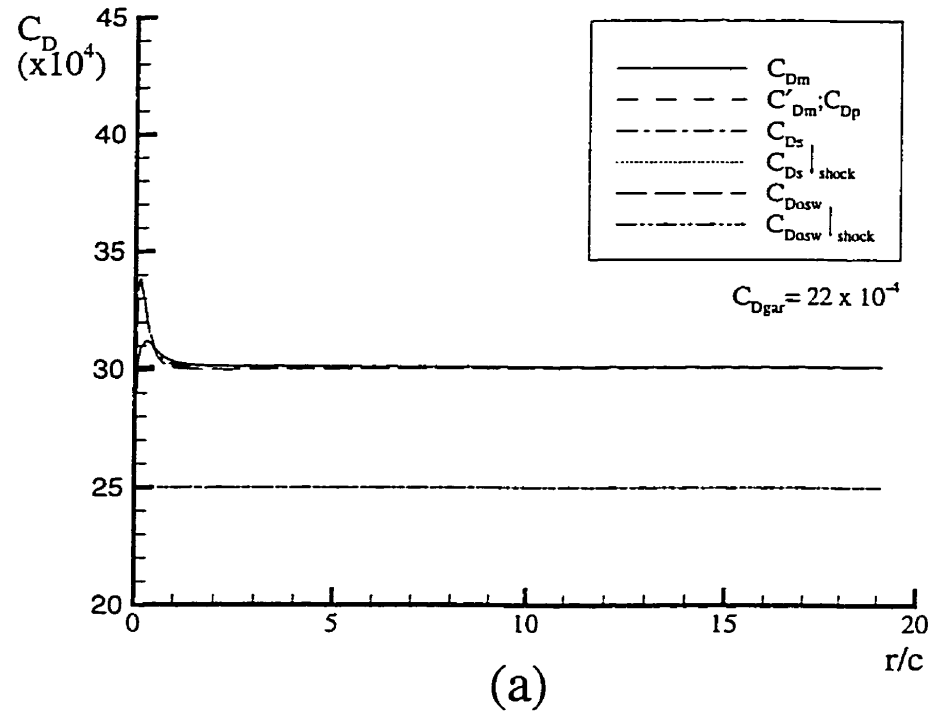


(a)

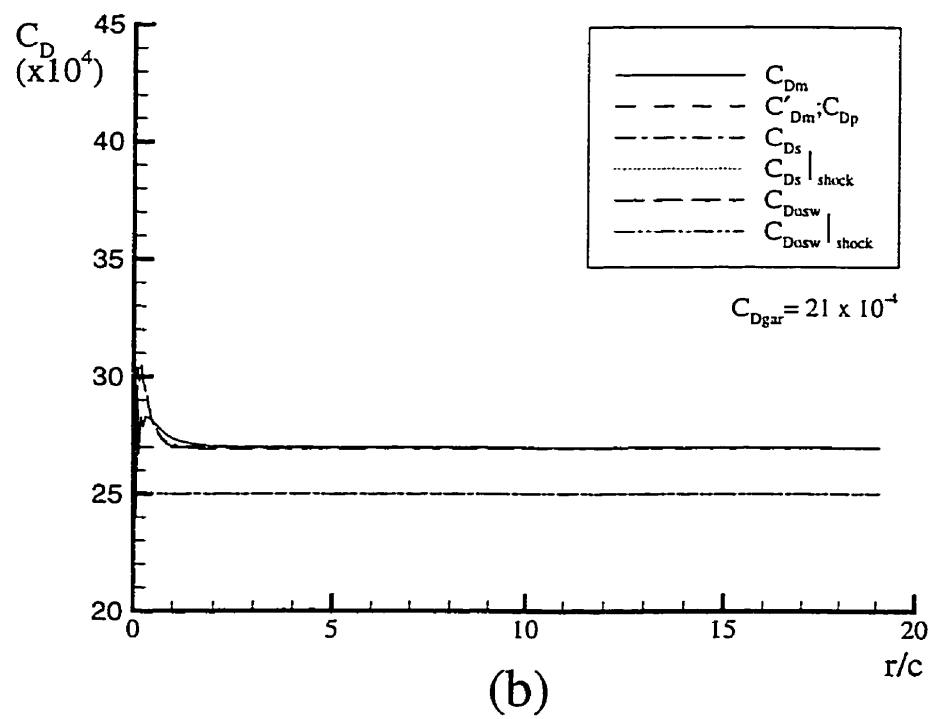


(b)

Figure 3: Drag predictions based on different integration contours — M_∞ = 0.85,α = 0.00, 160 x 40 O-grid: (a) without weighting function; (b) with weighting function



(a)



(b)

Figure 4: Drag predictions based on different integration contours — M_∞ = 0.78,α = 0.00, 160 x 40 O-grid: (a) without weighting function; (b) with weighting function

ANNEXE II

A NEW INDUCED DRAG PREDICTION METHOD USING OSWATITSCH'S EXPRESSION

Cette annexe présente l'article qui a été soumis au Aeronautical Journal [22]

A NEW INDUCED-DRAG PREDICTION METHOD USING OSWATITSCH'S EXPRESSION

Charles Veilleux[1]
Chaire en Aéronautique J.-A. Bombardier
Ecole Polytechnique de Montréal
Montréal (Québec), Canada

Christian Masson[2]
Département de génie mécanique
Ecole de technologie supérieure
Montréal (Québec), Canada

Ion Paraschivoiu[3]
Chaire en Aéronautique J.-A. Bombardier
Ecole Polytechnique de Montréal
Montréal (Québec), Canada

ABSTRACT

This paper presents a critical study related to the evaluation and breakdown of total wing drag based on solutions of the Euler equations for subsonic and transonic three-dimensional flows. This study clearly identifies the false entropy production present in all discretised Euler solutions as the main source of the discrepancies between the drag predictions produced by body-surface pressure integrations and far-field methods. A good understanding of the entropy production mechanisms present in discretised three-dimensional Euler solutions has lead to an original procedure for the total drag breakdown and a new method for the evaluation of the induced drag. This new technique is based on body-surface pressure integrations and Oswatitsch's expression integrated over suitable integration surfaces. In contrast with the various methods for the drag breakdown and the evaluation of the induced drag available in the literature, the proposed technique uses an exact formulation and is simple

[1]M.A.Sc. Student, currently at CAE Electronics Ltd.

[2]Associate Professor

[3]Professor and Chair Holder

to implement. Using detailed drag calculations on an elliptic wing (the $X_t = 1.0$ wing) and the ONERA M6 wing, it has been shown that this new technique is less sensitive to grid refinement and to the level of false entropy production in the calculation domain.

NOMENCLATURE

$\mathcal{A}$	wing area
c	wing root chord
C_D	total-drag coefficient
C_D^{Pr}	induced-drag coefficient based on Prandtl's lifting line theory
C_{Di}	induced-drag coefficient by cross-flow integration, Eq.(19)
C_{Di}^{new}	new induced-drag coefficient, Eq.(20)
C_{Dm}	momentum-flux drag coefficient, Eq.(13)
C'_{Dm}	C_{Dm} with artificial viscosity contributions, Eq.(14)
C_{Dp}	pressure drag coefficient, Eq.(12)
C_{Ds}	Oswatitsch wave-drag coefficient, Eq.(15)
$C_{Ds+\mu}$	sum of C_{Ds} and $C_{D\mu}$, Eq.(17)
C_D^{sp}	spurious-drag coefficient, Eq.(21)
C_{Dw}	wave-drag coefficient, Eq.(18)
$C_{D\mu}$	drag coefficient related to artificial viscosity
C_{Lp}	lift coefficient evaluated using body-surface pressure integration
d	downstream distance between the trailing edge and the integration surface, Figs. 2 and 3
$\mathrm{d}\mathcal{S}$	differential surface
D	total drag
D_i	induced drag
D_s	drag associated to entropy production
D_s^{false}	drag contribution attributed to false entropy production
D_w	wave drag
D_μ	drag contribution related to artificial viscosity
H	stagnation enthalpy
$\vec{i}$	unit vector in freestream direction
M_∞	freestream Mach number

$\vec{n}$	unit outward vector normal to $\mathrm{d}\mathcal{S}$
p	pressure
$\vec{q}$	velocity vector
r	distance between the body surface and the integration surface, Fig. 4
R	ideal gas constant
s	entropy
$\mathcal{S}$	integration surface in the far field enclosing the body, Fig. 4
$\mathcal{S}'$	integration surface for the evaluation of $C_{Ds+\mu}$, Fig. 3
$\mathcal{S}_B$	body surface
$\mathcal{S}_T$	downstream cross-flow plane, Fig. 2
$\mathcal{S}_{\text{shock}}$	integration surface enclosing the vicinity of the shocks, Fig. 1
T	temperature
u	velocity component in the freestream direction
U_∞	freestream velocity
v	velocity component in the spanwise direction
w	vertical velocity component
α	angle of attack
γ	specific heat ratio
ζ	vorticity
ρ	density
τ	artificial viscous stress tensor
ψ	stream function
∞	subscript, freestream value

1 INTRODUCTION

Lift and drag are two important aerodynamic quantities for aircraft design. The lift of a configuration can be predicted quite accurately nowadays but the drag prediction still need further investigation. Accurate drag predictions is an essential

requirement for performance analysis as well as for fuel consumption reduction. Furthermore, the accurate knowledge of the total drag of a configuration is not sufficient for designers, rather, drag needs to be separated in terms of its physical components: viscous, induced, and wave drags.

In the literature [1, 2, 3, 4], it is generally believed that drag calculations based on far-field methods are more accurate than those produced by the simple body-surface pressure and shear stress integrations, the so-called near-field method. Lock [2] and van Dam et al. [3], for instance, attribute the imprecision of the near-field method for the evaluation of the pressure drag, to the evaluation of a small quantity from the near cancelation of two much larger opposing thrust and drag. Cummings et al. [4] associate the inadequacy of the pressure integration for pressure drag predictions to the need to approximate the curved surface of a wing with flat panels. Yu et al. [1] explain that surface pressure integrations give good results only for well converged solutions on sufficiently fine grids. van Dam and his co-workers [3, 5] have related the discrepancy between near-field and far-field predictions to the inherent numerical viscosity in Euler methods.

However, for flow solvers based on conservative schemes, the near-field drag predictions should be strictly equal to the far-field predictions. Recent work on airfoils [6] has confirmed this fact and has shown that there is no gain in terms of accuracy in using far-field methods with respect to near-field methods for drag predictions. The discrepancies noted in the literature between far-field and near-field predictions were found to result from the false entropy production and artificial dissipation present in Euler flow solvers. This finding has resulted in a procedure to improve the accuracy of drag predictions produced by body-surface pressure integrations [6]. Nevertheless, it is important to note that far-field methods are still needed when one wants to express the total drag in terms of its physical components.

The main objective of this paper is to clarify the causes for the imprecision observed in drag predictions using body-surface pressure integrations for three-

dimensional transonic flows. The various entropy production mechanisms present in discretised Euler solutions are discussed in order to shed some light on the application of various induced drag prediction methods. Finally, an original technique for the physical breakdown of the total drag is proposed, leading to a new method for the evaluation of the induced drag. In contrast with the various methods for the drag breakdown and the evaluation of the induced drag available in the literature, the proposed technique uses an exact formulation and is simple to implement.

2 INVISCID FLOW CALCULATIONS

The three-dimensional Euler solver used in this work is a finite-volume cell-centered scheme with explicit second- and fourth-order artificial viscosity terms [7]. The governing equations are solved in time using a fifth-order Runge-Kutta time-stepping scheme. A structured O-H grid is used to discretise the calculation domain (see Fig. 1). The Euler solver is similar to many Euler solvers typically used in the aircraft community. However, it is important to note that the conclusions and techniques discussed in this work apply to any *conservative* Euler flow solver.

3 DRAG CALCULATIONS

In inviscid flow, the total drag D acting on a body results from the pressure distribution over the body surface S_B, and is given by the following body-surface integral:

$$D = \int_{S_B} -p\vec{n} \cdot \vec{\imath} \mathrm{d}S \tag{1}$$

where p is the pressure, $\vec{n}$ is the body-surface unit normal, and $\vec{\imath}$ is the unit vector in the freestream direction. For the three-dimensional inviscid flows of interest here, the total drag of Eq. (1) is the sum of the wave drag (D_w) and induced drag (D_i). This is the expression most commonly used for the evaluation of the pressure drag

and it will be referred to as the **body-surface pressure integration** in this work. The drag coefficient computed using this expression will be denoted C_{Dp}.

A far-field expression for the pressure drag can be derived using the *inviscid* momentum equations applied on any control volume enclosing the body of interest:

$$D = -\int_{\mathcal{S}} (p\vec{n} \cdot \vec{\imath} + \rho u \vec{q} \cdot \vec{n})\, \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{2}$$

where $\mathcal{S}$ is the outer surface enclosing the control volume, $\vec{n}$ is the unit outward normal to the differential surface $\mathrm{d}\mathcal{S}$, ρ is the fluid density, $\vec{q}$ is the fluid velocity vector, and u is the component of velocity in the freestream direction. Eq.(2) relates the drag to a far-field **momentum-flux integral**. The drag coefficient calculated using this momentum-flux integral will be denoted C_{Dm}.

Discretised solutions produced by any Euler flow solver always present some level of viscosity. This viscosity is introduced, for sake of stability and to ensure that the second law of thermodynamics is respected, explicitly, as it is the case with the Euler flow solver used in this work, or indirectly through the use of a specific scheme for the convection fluxes. Therefore, for such solutions, the application of the *modified* momentum equations over a control volume enclosing the body of interest results in the following expression for the total drag:

$$D = -\int_{\mathcal{S}} (p\vec{n} \cdot \vec{\imath} + \rho u \vec{q} \cdot \vec{n})\, \mathrm{d}\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} (\tau \cdot \vec{n}) \cdot \hat{\imath}\, \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3}$$

where τ is the artificial viscous stress tensor introduced into the Euler equations. The drag coefficient that includes both the momentum and artificial viscous stress contributions will be denoted C'_{Dm}. Masson et al. [6] have shown that the drag estimates based on Eq.(3) are strictly equal to the predictions based on body-surface pressure integration (Eq.(1)), i.e. $C'_{Dm} = C_{Dp}$.

3.1 BREAKDOWN OF THE TOTAL DRAG

In order to break the total drag into its physical components, an alternative but equivalent form of Eq.(3) is used. It is obtained by invoking the conservation of

mass over the same control volume (see Ref.[4] for details):

$$D = -\int_S \left[(p - p_\infty)\vec{n}\cdot\vec{\imath} - U_\infty\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right)\rho\vec{q}\cdot\vec{n}\right]\mathrm{d}\mathcal{S} + \int_S(\tau\cdot\vec{n})\cdot\vec{\imath}\mathrm{d}\mathcal{S} - U_\infty\int_S \rho\vec{q}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{S} \quad (4)$$

It has been shown [3, 4] that the first two terms of this equation represent the sum of the drag associated to entropy production (D_s) and the drag associated to the shedding of streamwise vorticity in the wake. The contribution associated to the streamwise vorticity is the induced drag (D_i). The second integral corresponds to the drag contribution of the artificial viscous stresses. The last term in this equation is the conservation of mass and should be zero. However, the addition of artificial viscosity terms in the continuity equation results in small, but non-zero values of this integral. These last two terms of Eq.(4) correspond to drag contributions produced by the inherent viscosity present in any discretised Euler solutions. These drag contributions, which have no physical meaning in a real inviscid flow, will be denoted D_μ. Eq.(4) can therefore be compactly written as:

$$D = D_s + D_i + D_\mu \quad (5)$$

3.2 ENTROPY-PRODUCTION MECHANISMS

In three-dimensional transonic lifting inviscid flows, the only sources of entropy production are the shock waves. However, additional sources of entropy production, physically irrelevant, are present in *discretised* three-dimensional Euler solutions. For example, Euler flow solvers are known to produce entropy ahead of the shocks near the body surface [1]. Entropy production is also typically observed in regions of steep pressure gradients like the leading edge of a wing [1]. Furthermore, the artificial viscosity transforms the streamwise vorticity in the wake of a lifting wing into entropy through the mechanism expressed by the Crocco-Vazsonyi relation [8]:

$$\vec{q}\times\nabla\times\vec{q} = T\nabla s - \nabla H + \frac{\nabla\cdot\tau}{\rho} \quad (6)$$

where T is the temperature, s is the entropy, and H is the stagnation enthalpy. This was also observed by van Dam et al. [9]. Thus, a counterbalancing mechanism is observed where the artificial viscosity transforms the drag contributions related to the streamwise vorticity in the wake into drag contributions associated to entropy production.

These sources of entropy are physically irrelevant and directly affect the drag predictions. The drag associated with false entropy production will be called **false entropy drag** and denoted D_s^{false}. The drag associated to entropy production, D_s, is therefore composed of two contributions: the first one is the drag produced by the shock waves, the wave drag D_w, and the second one is attributed to the various sources of false entropy production, D_s^{false}. This can be expressed as:

$$D_s = D_w + D_s^{\text{false}} \tag{7}$$

3.3 WAVE DRAG USING OSWATITSCH'S EXPRESSION

Oswatitsch has derived an *approximate* expression relating the wave drag, D_w, to the rate of entropy production in a steady adiabatic inviscid flow of an ideal gas [10]:

$$D_w = \int_{\mathcal{S}} U_\infty \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2}\left\{1 - \exp\left[\left(\frac{s-s_\infty}{R}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right]\right\}}\right] \rho\vec{q}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{8}$$

This equation is based on the exact relation between entropy production and wave drag in inviscid flows [11] and will be referred to as the **exact Oswatitsch's expression**. The drag coefficient computed with this expression will be denoted C_{Ds}. Expansion of the integrand of Eq. (8) to the lowest order in $(s-s_\infty)$ leads to the so-called *approximate* **Oswatitsch's expression** found in the literature [1, 2, 3, 4, 10]. The exact expression is preferred here since it has been observed that the approximate expression gives lower drag estimates with increasing Mach number [6].

The surface of integration $\mathcal{S}$ used to derive this expression was assumed to enclose the body and to be far from it. The application of Eq.(8) on such $\mathcal{S}$ will necessarily include the wave drag and the drag associated with false entropy production.

However, any surface of integration that encloses only the immediate vicinity of all entropy sources can be used since Oswatitsch's expression is a function of entropy only and $\vec{q}\cdot\vec{n} = 0$ on $\mathcal{S}_B$. When a surface of integration enclosing only the immediate vicinity of the shocks is used, the application of Eq.(8) will allow the removal of the drag contribution associated with false entropy production since only the physically relevant entropy production through shock waves is taken into account. In this work, this is the method used to evaluate the wave drag. The resulting drag coefficient will be denoted C_{Dw}. Fig. 1 shows a typical example of a surface of integration enclosing only the immediate vicinity of the shocks on an O-H grid section, where the computational grid is used to define the surface of integration.

3.4 INDUCED DRAG BY CROSS-FLOW INTEGRATION

The induced drag of a wing is associated to the streamwise vorticity shed in the wake. Most existing techniques for the evaluation of the induced drag introduce some simplifying assumptions. The integration surface $\mathcal{S}$ is assumed to be far from the body so that the only departure in the flow properties from the undisturbed flow occurs on a downstream plane perpendicular to the freestream. On this cross flow plane, the component of the velocity in the freestream direction and the fluid density are set equal to their freestream value ($u = U_\infty$ and $\rho = \rho_\infty$). The induced drag is then given by

$$D_i = \frac{1}{2}\rho_\infty \int_{\mathcal{S}_T} (v^2 + w^2)\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{9}$$

where $\mathcal{S}_T$ is a downstream plane perpendicular to the freestream velocity (see Fig. 2), and v and w are the cross-flow velocity components. This is the classical far-field induced drag expression [2, 3, 4, 12]. A more convenient way of evaluating this integral is to express the velocity components in terms of the stream function [12]

$$D_i = \frac{1}{2}\rho_\infty \int_{\mathcal{S}_T} \psi\zeta\mathrm{d}\mathcal{S} \tag{10}$$

where ψ is the stream function and ζ is the streamwise vorticity. The drag calculated with Eq. (10) will be referred to as the **induced drag by cross-flow integration**, and the corresponding drag coefficient will be denoted C_{Di}.

The procedure presented in Ref. [4] is used here for the evaluation of this last integral: *(i)* a flow visualization software is used to extract a cross-flow cutting plane $\mathcal{S}_T$ from the discretised calculation domain, *(ii)* the conservative properties of the flow are interpolated from the original grid onto $\mathcal{S}_T$, resulting in the knowledge of the flow properties at an unstructured set of nodes on $\mathcal{S}_T$, (*iii*) finally, the circulation in each triangular three-node cell is calculated as well as the stream function at each node.

The evaluation of the induced drag using this cross-flow integration is known to be sensitive to the location of the integration plane $\mathcal{S}_T$ [4]: as the distance d (see Fig. 2) between the trailing edge of the wing and $\mathcal{S}_T$ increases, it is observed (see Section 4) that the induced drag estimates based on Eq.(10) typically decrease [4] while the drag associated with entropy production grows. This is the manifestation of the previously mentioned counterbalancing mechanism observed in the wake of discretised Euler solutions (see Section 3.2). Thus the integration plane $\mathcal{S}_T$ is usually located near the trailing edge where the assumptions introduced to obtain Eq.(10) are not strictly valid. This sensitivity of the induced drag estimates by cross-flow integrations complicates the systematic application of Eq.(10). One of the objectives of this work is to propose a more systematic technique for the evaluation of D_i which does not involve any simplifying assumption. The induced-drag coefficient by cross-flow integration will be calculated for comparison with the new method developed in this work.

3.5 NEW INDUCED-DRAG PREDICTION METHOD

In the case of discretised three-dimensional Euler solutions, Eq.(5) stipulates that there are three contributions to the total drag of a wing: the induced drag, the drag

associated to entropy production, and the drag associated to the artificial viscosity. The induced drag is a consequence of the streamwise vorticity and the entropy production comes from two sources: the physically relevant entropy production across shock waves and the false entropy production observed near the body surface and in the wake. The new induced-drag prediction method proposed here is based on Eq. (5) which can be re-arranged as:

$$D_i = D - (D_s + D_\mu) \tag{11}$$

where the total drag D is evaluated using body-surface pressure integration (Eq.(1)) and D_s is the drag contribution associated to all sources of entropy production except those occuring in the wake. D_s is evaluated using Oswatitsch's expression (Eq.(8)) applied over a suitable integration surface $\mathcal{S}$. The appropriate choice of the integration surface is critical to ensure a successful application of Eq.(11). It should be chosen so that only the false entropy at the body surface and the entropy produced at the shocks is enclosed for the evaluation of D_s. An example of such an appropriate integration surface is shown in Fig. 3 for a section of an O-H grid. The symbol d represents the maximum distance between the wing trailing edge and the downstream portion of the integration surface. A relatively small value of d should be selected to exclude the entropy produced by the trailing vortices. The integration surface $\mathcal{S}'$ used to compute $D_s + D_\mu$ employs the surfaces of the computational grid directly. This has the advantage of being perfectly consistent with the numerical method since no error is introduced by additional interpolations. Induced drag coefficients predicted using Eq.(11) will be denoted C_{Di}^{new}.

4 RESULTS AND DISCUSSION

The results presented in this section pertain to the inviscid, compressible, three-dimensional flow over two specific wings: the $X_t = 1.0$ wing [3], and the ONERA M6 wing [13]. The $X_t = 1.0$ wing has been especially developed to study induced

drag prediction methods. It has an elliptic spanwise chord distribution with an unswept and straight trailing edge. The defining aerodynamic profile is a NACA 0012 with a root chord of 0.2 m. The semi-span of this wing is of 0.5498 m and its aspect ratio is 7.0. A more complete description of this wing can be found in Ref. [3]. The ONERA M6 wing has been constructed and tested to provide experimental data for code validations. The semi-span of this wing is of 1.476 m and its aspect ratio is 3.8. The defining aerodynamic profile is a ONERA D with a root chord of 1 m. A more complete description of this wing can be found in Ref. [13].

The drag expressions developed in the previous section have been implemented in the Euler solver described in Section 2. More specifically, the following nine expressions have been considered:

$$C_{Dp} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \mathcal{A}} \int_{S_B} -p\vec{n} \cdot \hat{\imath} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{12}$$

$$C_{Dm} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \mathcal{A}} \int_{\mathcal{S}} \left(-p\vec{n} \cdot \hat{\imath} - \rho u \vec{q} \cdot \vec{n}\right) \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{13}$$

$$C'_{Dm} = C_{Dm} + \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \mathcal{A}} \int_{\mathcal{S}} (\tau \cdot \vec{n}) \cdot \hat{\imath} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{14}$$

$$C_{Ds} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty \mathcal{A}} \int_{\mathcal{S}} \mathcal{F}\left(\gamma, R, M_\infty, s - s_\infty\right) \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{15}$$

$$C_{Ds+\mu} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 \mathcal{A}} \left[U_\infty \int_{\mathcal{S}'} \mathcal{F}\left(\gamma, R, M_\infty, s - s_\infty\right) \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}'} (\tau \cdot \vec{n}) \cdot \hat{\imath} \mathrm{d}\mathcal{S} \right. \tag{16}$$

$$\left. - \int_{\mathcal{S}'} \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{S} \right] \tag{17}$$

$$C_{Dw} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty \mathcal{A}} \int_{\mathcal{S}_{\text{shock}}} \mathcal{F}\left(\gamma, R, M_\infty, s - s_\infty\right) \rho \vec{q} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{18}$$

$$C_{Di} = \frac{1}{U_\infty^2 \mathcal{A}} \int_{\mathcal{S}_T} \psi \zeta \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{19}$$

$$C_{Di}^{\text{new}} = C_{Dp} - C_{Ds+\mu} \tag{20}$$

$$C_D^{\text{sp}} = C_{Ds+\mu} - C_{Dw} \tag{21}$$

where $\mathcal{F}\left(\gamma, R, M_\infty, s - s_\infty\right) = \left[1 - \sqrt{1 + \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2}\left\{1 - \exp\left[\left(\frac{s-s_\infty}{R}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right]\right\}}\right]$, $\mathcal{A}$ is the wing area, and τ is the artificial viscous stress tensor.

In Eqs.(13), (14) and (15), $\mathcal{S}$, the surface enclosing the body, is taken as the

surface defined by a set of specific O-lines of the grid used to produce the Euler solutions (see Fig. 4). Drag coefficient calculations have been performed for each set of O-lines, from the body surface to the outer surface of the calculation domain. The integration surface $\mathcal{S}'$ in Eq.(17) has been defined (see Fig. 3) in order to exclude the false entropy produced by the vortices in the wake. The integration surface $\mathcal{S}_{shock}$ in Eq.(18) is a surface enclosing only the immediate vicinity of the shocks in order to eliminate the false-entropy drag contribution typically observed in discretised Euler solutions.

The drag coefficient that includes both the momentum and artificial viscous stress contributions, C'_{Dm}, has been implemented in order to quantify the relative importance of the artificial viscous stresses in the flow. Eq.(21) is the expression for the spurious drag coefficient C_D^{sp}. This spurious drag includes contributions from both the artificial viscosity (D_μ) and the contribution from all the sources of false entropy production with the exception of the entropy production by the wake vortices. It is calculated applying the exact Oswatitsch's expression on a specifically chosen integration surface, namely $\mathcal{S}'$. Using Eqs.(20), it is easy to see that C_D^{sp} corresponds to a correction to apply to the drag coefficient estimates based on the body-surface pressure integration (C_{Dp}) to ensure perfect agreement between near-field and far-field estimates:

$$C_{Dp} - C_D^{\mathrm{sp}} = C_{Di}^{\mathrm{new}} + C_{Dw} \tag{22}$$

Since the flow solver is based on a conservative formulation, the drag coefficient based on the body-surface pressure integration (C_{Dp}) should be *exactly* equal to C'_{Dm}. This is indeed the case with the Euler solutions presented in this section. Therefore, the values of C_{Dp} and C'_{Dm} are indistinguishable in all the figures presented in this paper. In regions where the artificial viscous stresses are negligible, C_{Dm} should also be very close to C_{Dp}.

4.1 FAR-FIELD VERSUS NEAR-FIELD METHODS

A comparison between the near-field and the far-field approaches for three-dimensional inviscid flows is presented in this section. The test cases chosen for this comparison concern non-lifting flows over the $X_t = 1.0$ wing operating in the transonic and subsonic regimes (at $M_\infty = 0.85$ and $M_\infty = 0.20$). The solutions have been obtained on a 65x25x35 O-H grid. Figs. 5 and 6 show the variation of C'_{Dm}, C_{Dm}, and C_{Ds} with respect to $\mathcal{S}$, the chosen surface of integration enclosing the wing, characterized by its radial distance r from the body surface (see Fig. 4). This integration surface is a large cylinder composed of an O-surface parallel to the body surface and of end surfaces taken at the symmetry plane (wing root) and the end of the computational domain. The values of C_{Dp}, C_w and C_{Di} are calculated on the integration surfaces $\mathcal{S}_B$, $\mathcal{S}_{\text{shock}}$ and $\mathcal{S}'$, respectively. Therefore, these drag estimates are not functions of $\frac{r}{c}$ and are thus presented as constants in Figs. 5 and 6. In Fig. 6, the induced drag estimated using cross-flow integration, C_{Di}, is given in the legend since its value lies outside of the illustrated scale.

A remarkable behaviour illustrated in Figs. 5 and 6 is the fact that when the chosen integration surface is far enough from the body ($\frac{r}{c} > 2.5$), the values of C_{Dp}, C_{Dm}, C'_{Dm}, and C_{Ds} are essentially constant and in very good agreement with one another. The values of C_{Dp} and C'_{Dm} are indistinguishable in Figs. 5 and 6. In fact, they are exactly equal since the flow solver is based on a conservative formulation. The oscillations of C_{Dm} near the body surface are produced by the artificial viscous stress contribution. Away from the body, the artificial viscosity tends to zero so that C_{Dm} is essentially equal to C'_{Dm}. Oscillations of C_{Ds} for integration surfaces located near the body surface are noticeable since the integration surfaces do not enclose all sources of entropy, namely the shocks and the false entropy at the body surface. When the integration surface encloses all the entropy production in the flow field (i.e. when $r/c > 2.5$), C_{Ds} is equal to the other values because the total pressure drag in non-lifting flows is equal to the drag associated with entropy production.

Thus, it can be concluded that there is no advantage, in terms of accuracy, of using far-field methods over the near-field method (body-surface pressure integration) for drag prediction since they give the same result. However, far-field methods allow the physical breakdown of the total drag and offer the possibility of removing the contribution of the false entropy production from drag predictions.

4.2 ENTROPY-PRODUCTION MECHANISMS

For subsonic non-lifting flows, the total pressure drag should be zero since there is no shock and no streamwise vorticity is shed by the wing. However, since sources of false entropy production are present in discretised Euler solutions, the total pressure drag calculated using body-surface pressure integration is non-zero (see Fig. 5). Furthermore, the drag computed using the exact Oswatitsch's expression is solely due to sources of false entropy production. Since $C_{Dp} = C_{Ds}$ when $r/c > 2.5$, it can be concluded that the non-zero pressure drag value is induced by the false entropy production. Figs. 5 and 6 clearly show that the total pressure drag for non-lifting flows is the sum of the wave drag and the spurious drag which are both related to entropy production. Similar conclusions were drawn for 2-D transonic flows in Ref. [6]. It should be noted that for lifting cases, C_{Ds} would not be equal to the total pressure drag given by C_{Dp}, C_{Dm}, or C'_{Dm} since the induced drag would be one component of the total pressure drag.

Two discretised solutions for the flow over the $X_t = 1.0$ wing operating at $M_\infty = 0.8$ and $\alpha = 4.0^o$ are used here to study the entropy-production mechanisms present in the more complex case of transonic lifting flows. Two O-H grids are used for the present solutions, that is a coarse ($65 \times 25 \times 35$) and a fine ($129 \times 49 \times 66$) one.

The variations of the drag estimates are plotted in Figs. 7 and 8 as a function of the distance d/c between the integration surface and the trailing edge of the $X_t = 1.0$ wing for the fine and coarse O-H grids, respectively. C_{Dp}, C_{Dw}, and C_D^{sp} are shown here as a constant since their integration surfaces are not functions of d/c.

The evolution of $C_{Ds+\mu}$ as d/c increases clearly illustrates the entropy production mechanism occuring in the wake of discretised Euler solutions. The drag coefficient $C_{Ds+\mu}$ increases whereas the induced-drag coefficient (C_{Di} and C_{Di}^{new}) diminishes. This corresponds to the transformation of the induced drag into drag associated with entropy production. At $d/c = 0$, the estimate of $C_{Ds+\mu}$ corresponds to the sum of the wave-drag coefficient and the spurious-drag coefficient since the entire wake is excluded from the integration. To obtain a consistent induced-drag value, the integration surface has to be as near the trailing edge as possible to avoid underprediction of the induced drag. This constraint is not compatible with the assumptions introduced to obtain the expression for the induced drag by cross-flow integration. On the other hand, no such problem should arise when using Eq.(20) since no simplifying assumption has been invoked during the development of the new induced drag expression.

It has been observed that false entropy production increases with coarser grids [6]. This effect can be clearly seen by comparing the values of C_D^{sp} for coarse- and fine-grid solutions (see Figs. 7 and 8). It is interesting to note that the induced- and wave-drag predictions are not affected by the grid density since the far-field method used for their evaluation intrinsically removes the spurious drag contribution. However, C_{Dp} increases with coarser grids since it includes the spurious drag. The drag balance for transonic lifting discretised Euler solutions is therefore expressed as

$$C_{Dp} = C_{Di}^{\text{new}} + C_{Dw} + C_D^{\text{sp}} \tag{23}$$

4.3 INDUCED AND WAVE DRAG PREDICTIONS

In this section, a wide range of test cases found in the literature are used to demonstrate the validity and accuracy of the new method of predicting the induced drag. Cases for four flow conditions over the two wings described earlier are studied: subsonic non-lifting flows, subsonic lifting flows, transonic non-lifting flows, and transonic lifting flows. The coarse O-H grid (65x25x35) has been used to produce

solutions for all cases while some selected cases have been analyzed using a fine O-H grid (129x49x66). It is important to note that the conclusions of this work are valid for any type of grid. Values for the induced drag calculated by cross-flow integration are given as constants. As mentioned earlier, this method gives induced drag values that vary with the distance of integration. The induced drag values obtained by cross-flow integration and presented in this section are those given for the location of the integration plane $\mathcal{S}_T$ that is the closest to the trailing edge.

4.3.1 SUBSONIC NON-LIFTING CASE

Solutions for the subsonic non-lifting flows analyzed in this section can be found in Ref. [14]. The results pertain to the $X_t = 1.0$ wing operating at zero angle of attack and $M_\infty = 0.2$. The results of Ref. [14] are presented in Table 1 and are compared with the present calculations for the coarse O-H grid.

A non-zero lift was obtained in Ref. [14]. A probable cause is that the solution was not fully converged. For lifting flows, such an error is negligible but for the non-lifting flow of interest here, the error is noticeable. This is probably responsible for the non-zero induced drag calculated by cross-flow integration.

The drag balance for subsonic non-lifting discretised Euler solutions is then

$$C_{Dp} = C_D^{\mathrm{sp}} \tag{24}$$

4.3.2 SUBSONIC LIFTING CASES

The subsonic lifting flows considered in this section all pertain to the $X_t = 1.0$ wing. Tables 2 to 4 present comparisons between solutions presented in Refs. [5], [9], and [14] and those of the present work for various flow conditions. The lift coefficient calculated by body-surface pressure integration is denoted C_{Lp} and the induced drag coefficient based on Prandtl's lifting line theory, C_{Di}^{Pr}.

We can observe from the present results that the new induced-drag prediction method gives results that compare well with the results obtained with the cross-flow

integration. Their accuracy is similar to that of the predictions based on Prandtl's lifting-line theory, showing the validity of the new induced-drag prediction method. All the results compare well with the lifting-line theory predictions except for the fine-grid solution for which they are lower.

The effect of grid refinement is shown in Table 4. The false entropy production, hence the spurious drag, increases with coarser grids. It is clear that the far-field methods allow to remove from the drag estimates the drag contribution of the false entropy. Far-field results are essentially independent of the level of grid refinement. The drag balance for subsonic lifting discretised Euler solutions is

$$C_{Dp} = C_{Di}^{\text{new}} + C_D^{\text{sp}} \tag{25}$$

4.3.3 TRANSONIC NON-LIFTING CASES

Transonic non-lifting flows over the $X_t = 1.0$ wing and the ONERA M6 wing have been analyzed and compared to the solutions presented in Ref. [9]. The transonic non-lifting flow over the $X_t = 1.0$ is at $M_\infty = 0.85$ and the corresponding results are shown in Table 5. The ONERA M6 is operating at $M_\infty = 0.92$ with the corresponding results in Table 6. It is important to note that the present solutions have been obtained on coarser grids than those used in Ref. [9]. As for the subsonic non-lifting cases, the wake of the wing produces no entropy so that the value of $C_{Ds+\mu}$ is exactly equal to the total pressure drag coefficient C_{Dp}, leading to a correct zero induced drag when using Eq.(20). On the other hand, non-zero induced-drag coefficients are obtained when using the cross-flow integration method with a solution obtained on a coarse grid. In this respect, the new method for the evaluation of the induced drag is much less sensitive than the cross-flow integration to the level of grid refinement.

The wave drag obtained in the present work differs from those presented in Ref. [9]. This is attributed to the different methods used to compute it. In Ref. [9], the wave drag coefficient is calculated with the approximate Oswatitsch's expression on a plane just downstream of the trailing edge. In this work, the wave drag is

calculated using Eq. (18) with an integration surface enclosing only the immediate vicinity of the shocks. Therefore, it is to be expected that the estimates of Ref. [9] include drag contribution from false entropy. Furthermore, at these high transonic Mach numbers, the first-order approximation introduced by Oswatitsch tends to underestimate the wave drag. Thus, if Oswatitsch's expression had been used in its exact form, the wave drag coefficient would have been very close to the total drag calculated with the body-surface pressure integration which is the sum of the spurious and wave drags.

The drag balance for transonic non-lifting discretised Euler solutions is

$$C_{Dp} = C_{Dw} + C_D^{sp} \tag{26}$$

4.3.4 TRANSONIC LIFTING CASES

Table 7 presents the results of the analysis for the flow over the $X_t = 1.0$ wing operating at $M_\infty = 0.80$ and $\alpha = 4.0^o$). The second lifting transonic flow is over the ONERA M6 wing operating at $M_\infty = 0.84$ and $\alpha = 3.06^o$. In each case, a coarse and fine O-H grids were used. The corresponding results are presented in Tables 7 and 8.

As for the subsonic lifting flows, we can observe from the present results that the new induced-drag prediction method give results that agree well with the results obtained with the cross-flow integration. For the $X_t = 1.0$ wing (see Table 7), their accuracy is comparable to that of the estimates based on Prandtl's lifting-line theory. For the ONERA M6 wing (see Table 8), even though the new induced-drag prediction method compares well with the cross-flow integration, the induced drag is still lower than the prediction of the lifting-line theory that gives the minimum amount of drag, i.e. for an Oswald factor of 1.0.

For both cases, wave drags calculated on the coarse and fine grids are in good agreement. This was achieved by isolating the false entropy from the entropy production using an integration surface inclosing only the immediate vicinity of the

shocks. However, the present predictions are lower than the predictions of Ref. [9]. The use of an integration plane downstream of the shocks in Ref. [9] is probably the cause of this discrepancy.

5 CONCLUSION

A new induced drag method has been developed. It uses the body-surface pressure integration and Oswatitsch's expression integrated over a suitable surface. The advantages of this new method is that it uses no simplifying assumption, is simpler to implement, and is insensitive to the level of grid refinement. It has been demonstrated that this method is valid for a wide range of flow conditions (subsonic, transonic, lifting or non-lifting) and is in very good agreement with Prandtl's lifting-line theory and the widely used cross-flow integration technique.

ACKNOWLEDGEMENT

This work is supported by a NSERC collaborative R&D Grant with Bombardier Inc./Canadair.

References

[1] Yu N. J., Chen H. C., Samant S. S., and Ruppert P. E. Inviscid Drag Calculations for Transonic Flows. AIAA Paper 83-1928, July 1983.

[2] Lock R. C. The Prediction of the Drag of Aerofoils and Wings at High Subsonic Speeds. Aeronautical Journal, pages 207–226, June/July 1986.

[3] Dam van C. P., Nikfetrat K., Wong K., and Vijgen P.M.H.W. Drag Prediction at Subsonic and Transonic Speeds Using Euler Methods. Journal of Aircraft, 32(4):839–845, 1995.

[4] Cummings R. M., Giles M. B., and Shrinivas G. N. Analysis of the Elements of Drag in Three-Dimensional Viscous and Inviscid Flows. AIAA Paper 96-2482-CP, June 1996.

[5] Dam van C. P. and Nikfetrat K. Accurate Prediction of Drag Using Euler Methods. Journal of Aircraft, 29(3):516–519, 1991.

[6] Masson C., Veilleux C., and Paraschivoiu I. Airfoil Wave-Drag Prediction Using Euler Solutions of Transonic Flows. Submitted to the Journal of Aircraft.

[7] Jameson A., Schmidt W., and Turkel E. Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes. AIAA Paper 81-1259, June 1981.

[8] Vooren van der J. and Sloof J. W. CFD-Based Drag Prediction; State-of-the-Art, Theory, Prospects. Technical Report NLR TP 90247 U, National Aerospace Lab., 1990.

[9] Dam van C. P., Nikfetrat K., Vijen P. M. H. W., and Chang I. C. Prediction of Drag at Subsonic and Transonic Speeds Using Euler Methods. AIAA Paper 92-0169, 1992.

[10] Oswatitsch K. Gas Dynamics. Academic Press Inc., 1956.

[11] Steger J. L. and Barrett S. B. Shock Waves and Drag in the Numerical Calculation of Isentropic Transonic Flow. Technical Report TN D-6997, NASA, 1972.

[12] Maskell E. C. Progress Towards a Method for the Measurements of the Components of the Drag of a Wing of Finite Span. Technical Report 72232, Royal Aircraft Establishment, 1972.

[13] Schmitt V. and Charpin F. Pressure Distribution on the ONERA M6 Wing at Transonic Mach Numbers. In Experimental Data Base for Computer Program Assessment, pages B1.1–B1.44. AGARD AR-138, 1979.

[14] Janus J. M. and Chatterjee A. Use of a Wake-Integral Method for Computational Drag Analysis. AIAA Journal, 34(1):188–190, 1995.

		Drag coefficient $\times 10^4$							
Solution	Grid	C_{Lp}	C_{Dp}	$C_{Ds+\mu}$	C_{Di}^{new}	C_{Di}	C_{Di}^{Pr}	C_{Dw}	C_D^{sp}
Ref. [14]	C-H $121\times51\times40$	0.0001	22.0	N/A	N/A	2.0	0.0	0.0	N/A
Present work	O-H $65\times25\times35$	0.0000	39.4	39.4	0.0	0.0	0.0	0.0	39.4

Table 1: Coefficients for the subsonic non-lifting case of the $X_t = 1.0$ wing at $M_\infty = 0.2$

		Drag coefficient $\times 10^4$							
Solution	Grid	C_{Lp}	C_{Dp}	$C_{Ds+\mu}$	C_{Di}^{new}	C_{Di}	C_{Di}^{Pr}	C_{Dw}	C_D^{sp}
Ref. [14]	C-H $121\times51\times40$	0.3470	100.0	N/A	N/A	57.0	54.0	0.0	N/A
Ref. [5]	C-H $121\times71\times50$	0.3482	80.0	N/A	N/A	56.0	55.1	0.0	N/A
Ref. [5]	C-H $121\times51\times40$	0.3496	81.0	N/A	N/A	57.0	55.6	0.0	N/A
Ref. [5]	C-H $121\times41\times25$	0.3496	86.0	N/A	N/A	56.0	55.6	0.0	N/A
Present work	O-H $65\times25\times35$	0.3477	111.6	60.9	50.7	52.0	54.1	0.0	60.9

Table 2: Coefficients for the subsonic lifting case of the $X_t = 1.0$ wing at $M_\infty = 0.2$ and $\alpha = 4.0^o$

		Drag coefficient $\times 10^4$							
Solution	Grid	C_{Lp}	C_{Dp}	$C_{Ds+\mu}$	C_{Di}^{new}	C_{Di}	C_{Di}^{Pr}	C_{Dw}	C_D^{sp}
Ref. [5]	C-H $121\times51\times40$	0.1751	32.0	N/A	N/A	14.0	13.9	0.0	N/A
Present work	O-H $65\times25\times35$	0.1744	57.2	44.5	12.7	13.1	13.6	0.0	44.5

Table 3: Coefficients for the subsonic lifting case of the $X_t = 1.0$ wing at $M_\infty = 0.2$ and $\alpha = 2.0^o$

		Drag coefficient $\times 10^4$							
Solution	Grid	C_{Lp}	C_{Dp}	$C_{Ds+\mu}$	C_{Di}^{new}	C_{Di}	C_{Di}^{Pr}	C_{Dw}	C_D^{sp}
Ref. [9]	C-H $121\times51\times40$	0.3914	92.4	N/A	N/A	70.4	69.6	0.0	N/A
Present work	O-H $129\times49\times66$	0.3955	86.1	22.2	63.9	64.3	71.1	0.0	22.2
Present work	O-H $65\times25\times35$	0.3842	123.3	59.1	64.2	65.9	66.0	0.0	59.1

Table 4: Coefficients for the subsonic lifting case of the $X_t = 1.0$ wing at $M_\infty = 0.55$ and $\alpha = 4.0^o$

		Drag coefficient $\times 10^4$							
Solution	Grid	C_{Lp}	C_{Dp}	$C_{Ds+\mu}$	C_{Di}^{new}	C_{Di}	C_{Di}^{Pr}	C_{Dw}	C_D^{sp}
Ref. [9]	C-H $161\times46\times37$	0.0000	198.8	N/A	N/A	0.0	0.0	191.7	N/A
Present work	O-H $65\times25\times35$	0.0000	228.3	228.3	0.0	0.8	0.0	198.5	29.8

Table 5: Coefficients for the transonic non-lifting case of the $X_t = 1.0$ wing at $M_\infty = 0.85$

		Drag coefficient $\times 10^4$							
Solution	Grid	C_{Lp}	C_{Dp}	$C_{Ds+\mu}$	C_{Di}^{new}	C_{Di}	C_{Di}^{Pr}	C_{Dw}	C_D^{sp}
Ref. [9]	C-H $161\times41\times41$	0.0000	254.1	N/A	N/A	0.0	0.0	251.4	N/A
Present work	O-H $65\times25\times35$	0.0000	260.6	260.6	0.0	0.3	0.0	240.0	20.6

Table 6: Coefficients for the transonic non-lifting case of the ONERA M6 wing at $M_\infty = 0.92$

		Drag coefficient $\times 10^4$							
Solution	Grid	C_{Lp}	C_{Dp}	$C_{Ds+\mu}$	C_{Di}^{new}	C_{Di}	C_{Di}^{Pr}	C_{Dw}	C_D^{sp}
Ref. [9]	C-H $135\times41\times30$	0.5265	421.3	N/A	N/A	127.2	126.0	290.3	N/A
Present work	O-H $129\times49\times66$	0.5342	437.0	315.2	121.8	122.3	129.7	282.8	32.4
Present work	O-H $65\times25\times35$	0.5235	462.2	342.3	119.9	124.4	122.6	281.0	61.3

Table 7: Coefficients for the transonic lifting case of the $X_t = 1.0$ wing at $M_\infty = 0.8$ and $\alpha = 4.0^o$

		Drag coefficient $\times 10^4$							
Solution	Grid	C_{Lp}	C_{Dp}	$C_{Ds+\mu}$	C_{Di}^{new}	C_{Di}	C_{Di}^{Pr}	C_{Dw}	C_D^{sp}
Ref. [9]	C-H $161\times41\times41$	0.2988	110.9	N/A	N/A	70.4	>74.2	63.8	N/A
Present work	O-H $129\times49\times66$	0.2921	129.7	63.2	66.5	66.6	>71.2	54.8	8.4
Present work	O-H $65\times25\times35$	0.2864	162.8	100.8	62.0	62.4	>68.0	58.7	42.1

Table 8: Coefficients for the transonic lifting case of the ONERA M6 wing at $M_\infty = 0.84$ and $\alpha = 3.06^o$

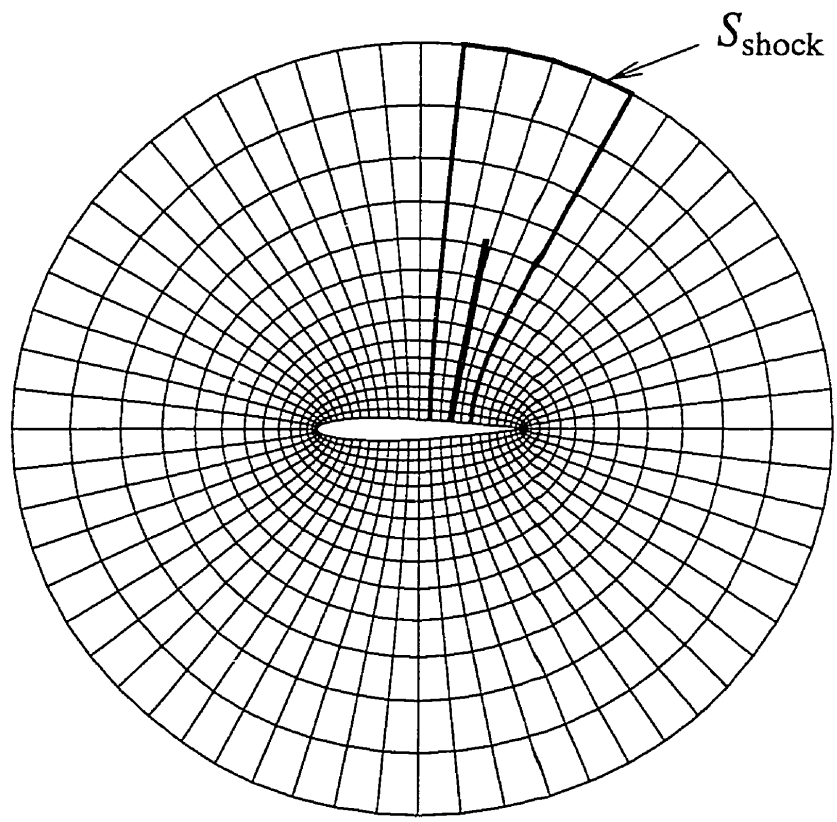


Figure 1: Shock-integration surface $\mathcal{S}_{\text{shock}}$ for the evaluation of C_{Dw}

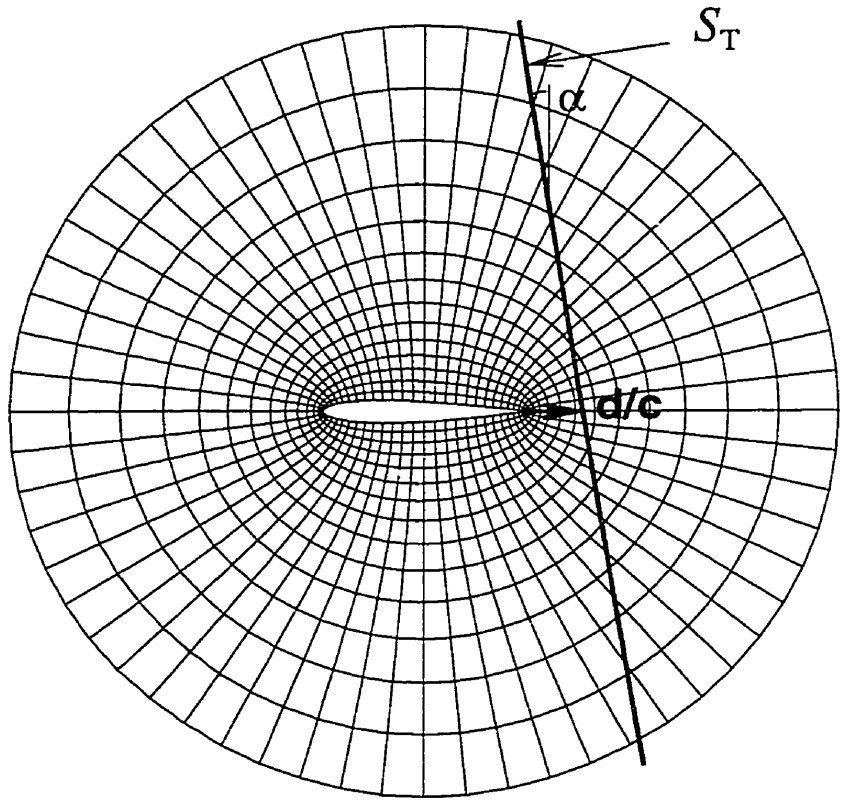


Figure 2: Integration surface S_T for the evaluation of C_{Di}

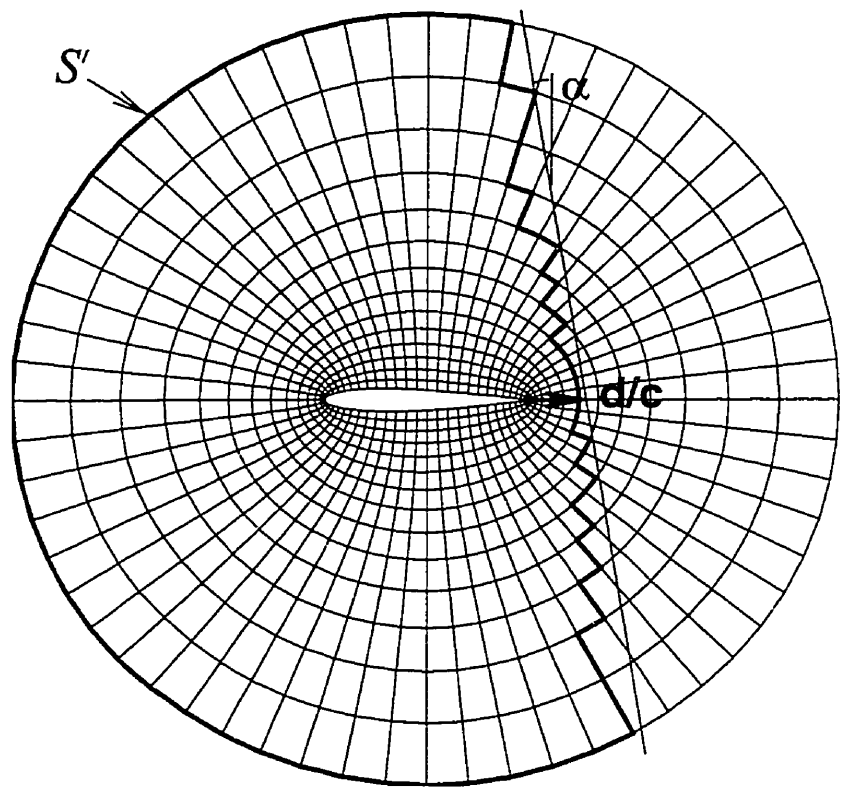


Figure 3: Integration surface S' for the evaluation of $C_{Ds+\mu}$

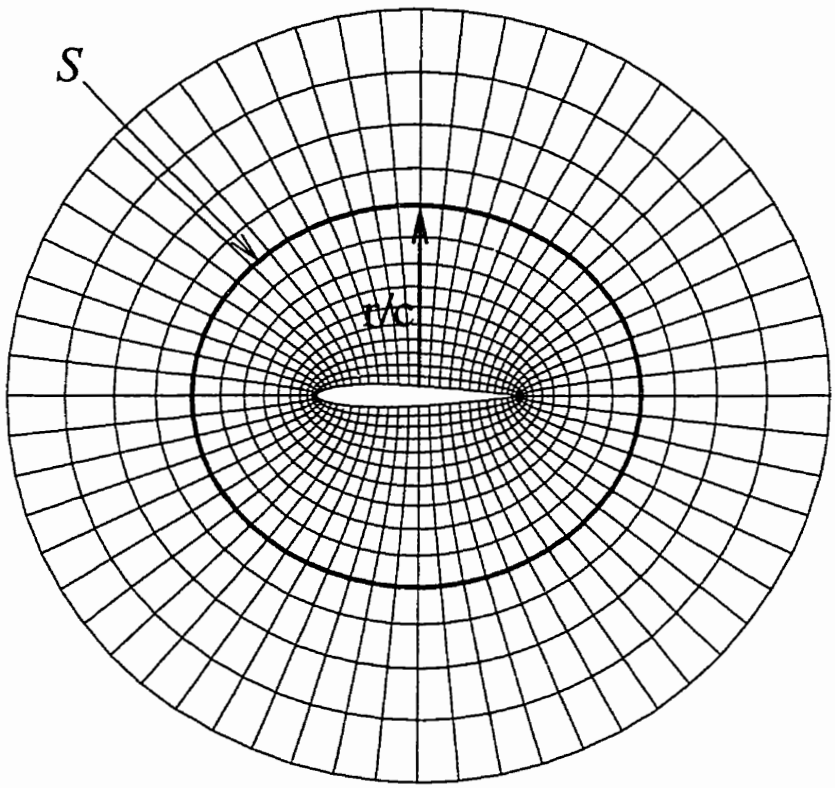


Figure 4: Integration surface $\mathcal{S}$ for the evaluation of C_{Dm}, C'_{Dm}, and C_{Ds}

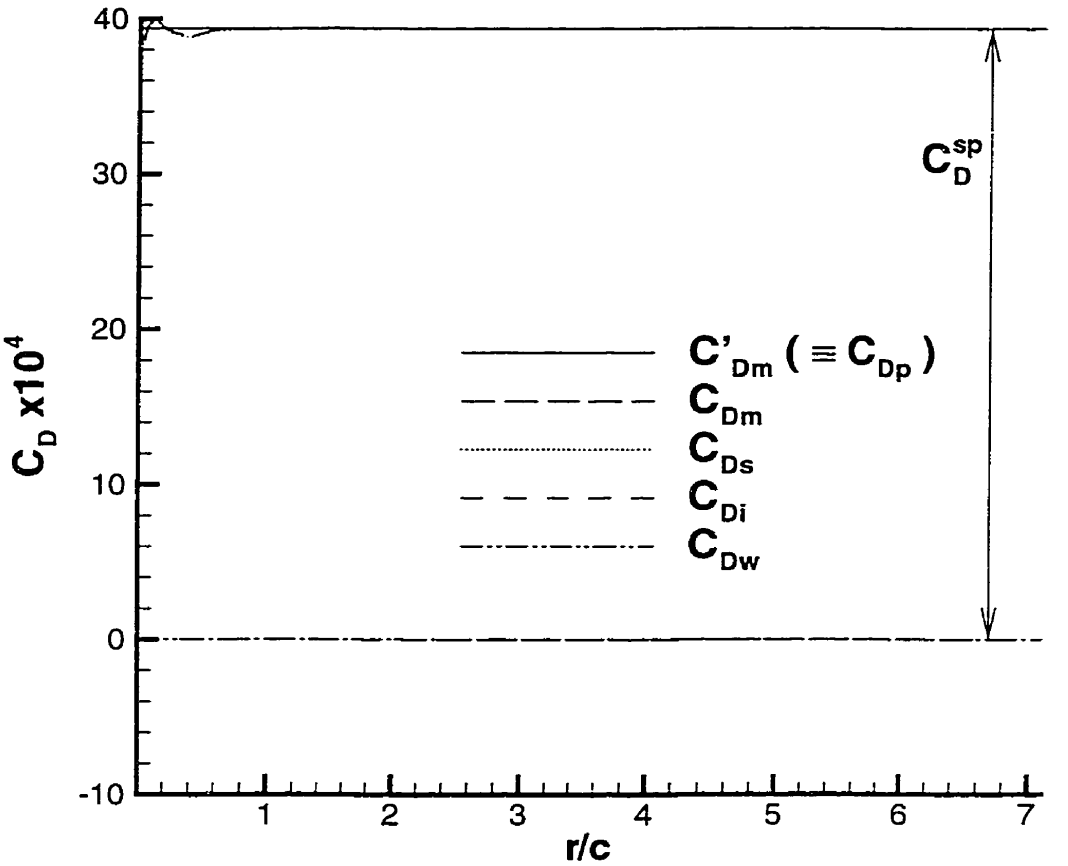


Figure 5: Drag prediction variation with distance of integration surface normal to the wing — $X_t = 1.0$ wing at $M_\infty = 0.2$ and $\alpha = 0.0^o$

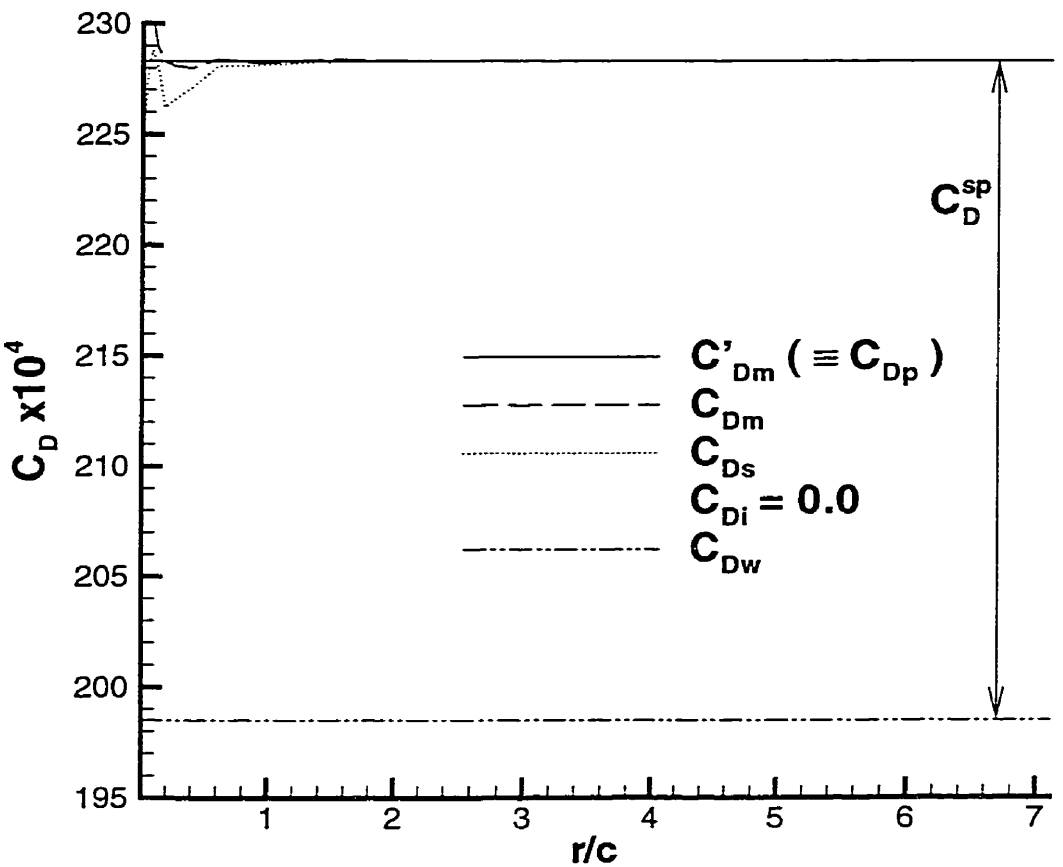


Figure 6: Drag prediction variation with distance of integration surface normal to the wing — $X_t = 1.0$ wing at $M_\infty = 0.85$ and $\alpha = 0.0^o$

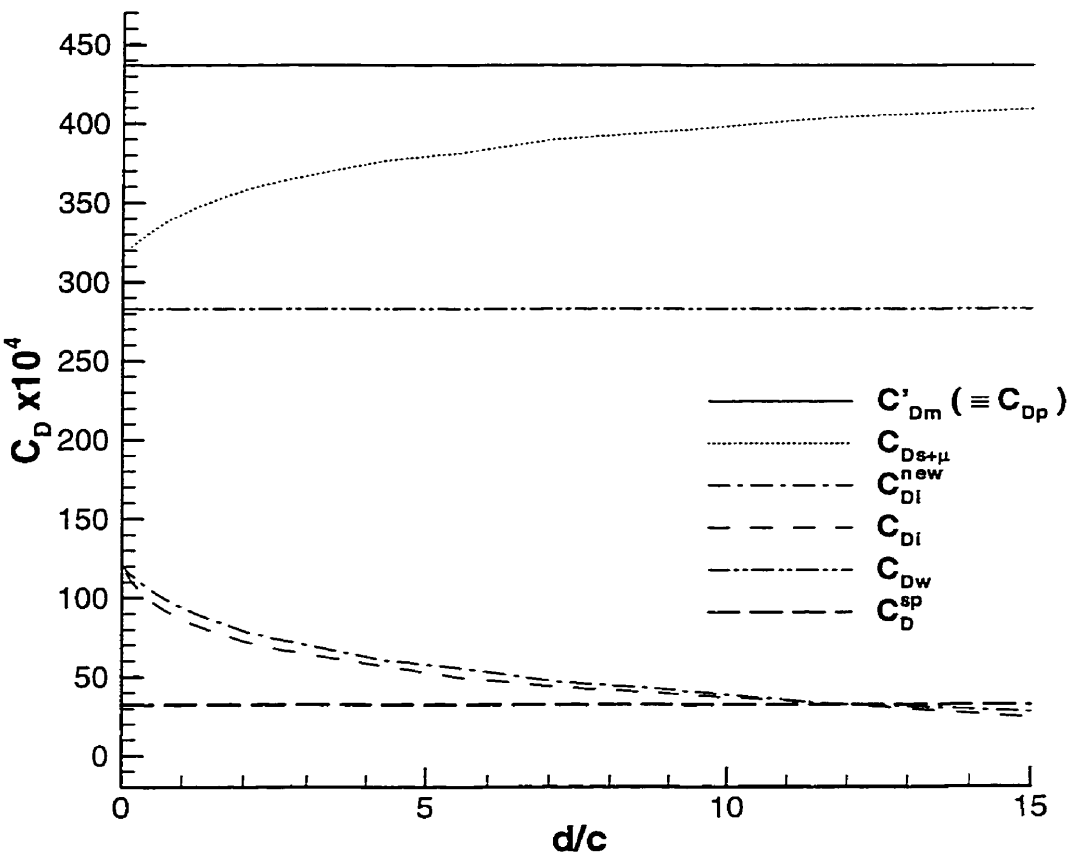


Figure 7: Drag prediction variation with distance of integration surface behind trailing edge — $X_t = 1.0$ wing at $M_\infty = 0.8$ and $\alpha = 4.0^o$, fine grid

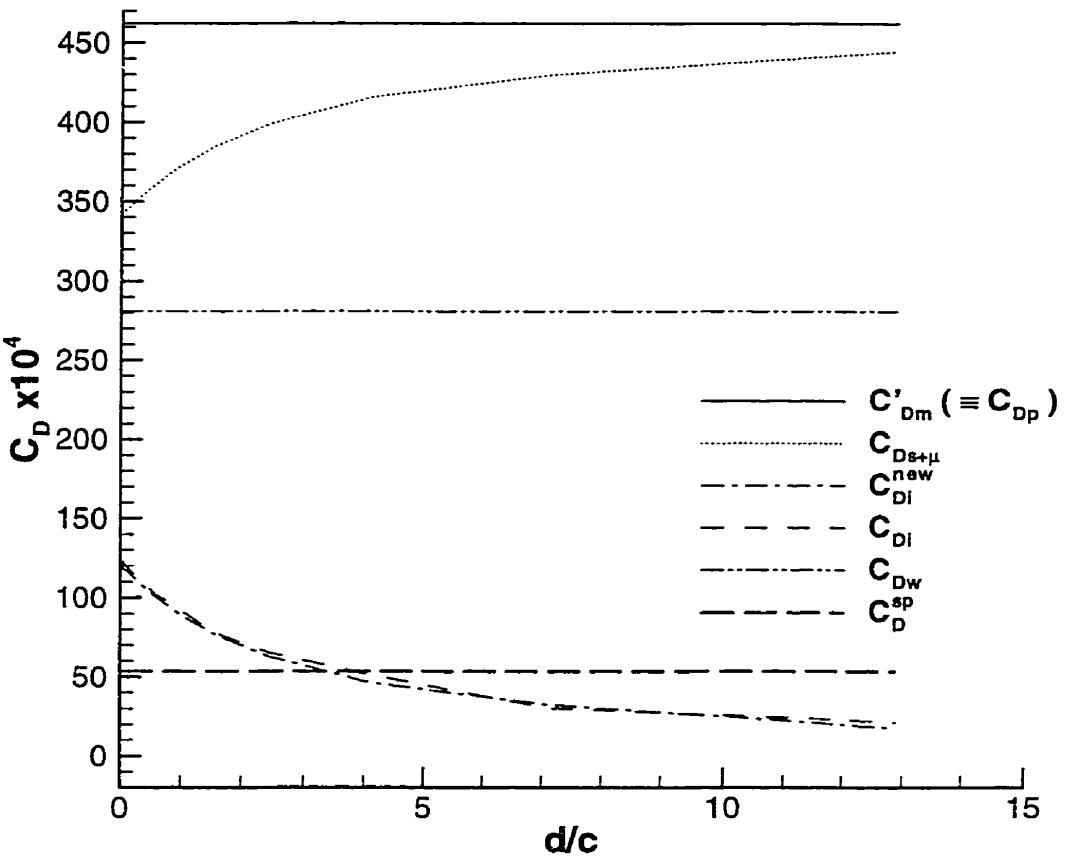
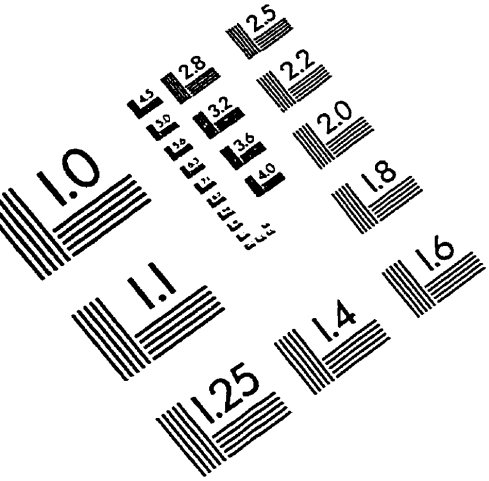
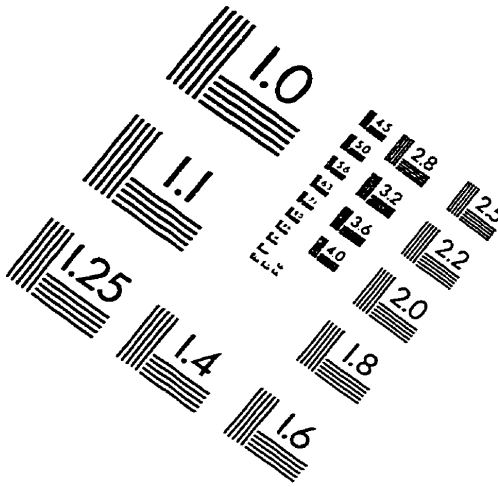
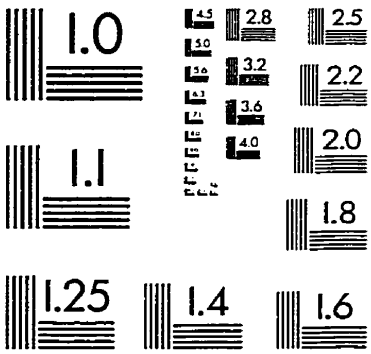


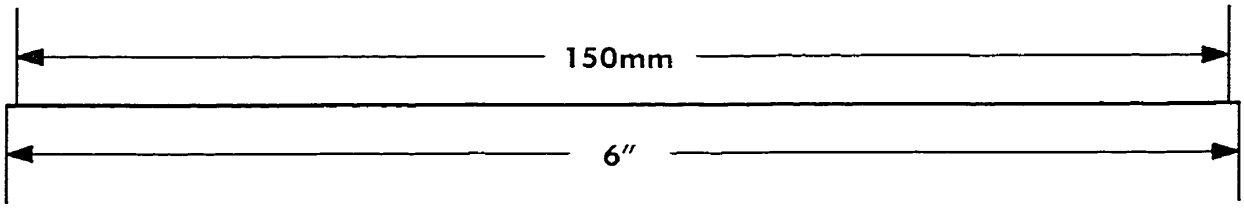
Figure 8: Drag prediction variation with distance of integration surface behind trailing edge — $X_t = 1.0$ wing at $M_\infty = 0.8$ and $\alpha = 4.0°$, coarse grid

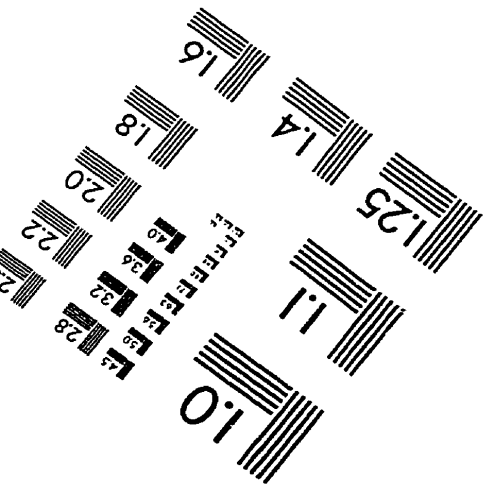
IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)

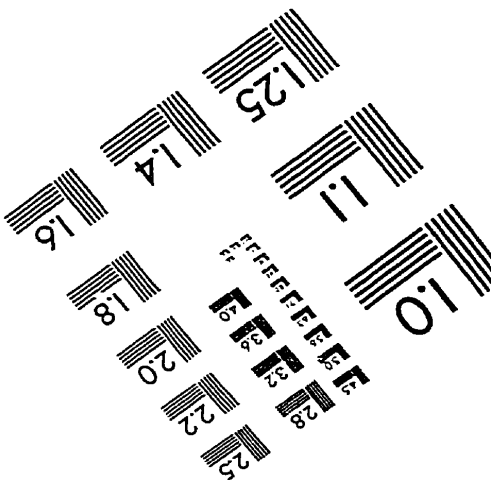












APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved